Julius Plücker – Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. paed)
im Fach Didaktik und Geschichte der Mathematik

Eingereicht an der
Bergischen Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Arbeitsgruppe Didaktik und Geschichte der Mathematik

von
Mechthild Ulrike Plump (geb. Köhler)

Wuppertal, im November 2014

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20160108-145525-6
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20160108-145525-6]

Vorwort

„Wir sehen jetzt durch einen Spiegel in einem dunkeln Wort, dann aber von Angesicht zu Angesicht. Jetzt erkenne ich es stückweise dann aber werde ich es erkennen gleichwie ich erkannt bin.

1. Cor. 13, 12“

Inschrift auf Plückers Grabmal

Mein Interesse an der projektiven Geometrie und ihrer Geschichte entstand eher beiläufig während einer Vorlesung von Prof. Dr. Erhard Scholz. Fasziniert von der Idee der Einführung von Fernelementen beschäftigte ich mich mit dem „Baryzentrischen Kalkül“ von A. F. Möbius. Den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich dann durch Prof. Dr. Klaus Volkert, der mich auf den „Elberfelder“ Julius Plücker aufmerksam machte. Beiden möchte ich für diese Anregungen danken.

Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. Klaus Volkert für die wissenschaftliche Betreuung meiner Arbeit, sein Vertrauen, die wertvollen Anregungen und Hilfestellungen und insbesondere die Übersetzung französischer Texte. Herrn Dr. Erhard Scholz danke ich für die vielen guten Ratschläge und die Erstellung des Zweitgutachtens.

Steven Leclair danke ich stellvertretend für das Archiv des National Research Council of Canada (NRC) für die freundliche und unkomplizierte Bereitstellung des gescannten Briefnachlasses Plückers.

Weiterhin bedanke ich mich bei allen denen, die mich während meiner Arbeit unterstützt und motiviert haben. Dazu zählen insbesondere die Mitarbeiter der Arbeitsgruppe „Didaktik und Geschichte der Mathematik“ an der Bergischen Universität Wuppertal, denen ich für ihr Interesse an meiner Arbeit die praktischen und inhaltlichen Ratschläge sowie jede Unterstützung danke.

Dr. Stefan Drüeke danke ich für das sorgfältige Korrekturlesen, ebenso Mareike Edelmann. Bei meiner Familie und meinen Freunden möchte ich mich besonders für jedes Gebet, die kontinuierliche Ermutigung und ihre Rücksicht bedanken.

Augsburg, im November 2014 Mechthild U. Plump

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1. Einleitung

Julius Plücker (1801 - 1868) war nicht nur Mathematiker, sondern auch Physiker. Seine wissenschaftliche Forschung lässt sich relativ klar in drei Phasen einteilen. In der ersten und letzten Phase – Mitte der 1820er bis Mitte der 1840er Jahre sowie von etwa 1863 bis zu seinem Lebensende – beschäftigte Plücker sich mit Fragen der analytischen Geometrie. Diese beiden Phasen wurden von einer Zeit nahezu ausschließlicher Beschäftigung mit der experimentellen Physik unterbrochen. Seine physikalische Tätigkeit scheint von der jüngeren wissenschaftsgeschichtlichen Forschung stärker berücksichtigt worden zu sein, als seine mathematische Forschung. Plücker gilt in der breiteren Wissenschaftsgeschichte hauptsächlich als Experimentalphysiker. Dabei steht er paradigmatisch für einen Aspekt der Entwicklung der Geometrie im 19. Jahrhundert – der „analytischen“ Methode.
Zu Beginn des 19. Jahrhunderts lässt sich eine rasche Entwicklung mehrerer Zweige der Mathematik – darunter insbesondere die Geometrie – beobachten. Dies führte zu methodischen Spannungen (u.a. standen sich die „synthetische“ und die „analytische“ Methode gegenüber) und Umbrüchen wie beispielsweise das Aufkommen der projektiven Geometrie. Methodische Differenzen, Auseinandersetzungen um angemessene Methoden oder sogar „die richtige“ Methode der Geometrie zeigen sich schon früh im 19. Jahrhundert. Besonders in Frankreich nahmen diese Auseinandersetzungen im Streit um Rolle und Verständnis der neu entdeckten Dualität eine bemerkenswerte Schärfe an. Dagegen verliefen die Differenzen im deutschsprachigen Raum eher ruhig. Hier manifestierte sich diese Auseinandersetzung besonders in den Personen von Julius Plücker und Jakob Steiner (1796 - 1863).

Fragestellung

Ziel dieser Arbeit ist es, Werk und Wirkung des Mathematikers Julius Plücker aus historischer Sicht zu untersuchen. Dabei sollen seine geometrischen Auffassungen und Innovationen herausgearbeitet werden. Insbesondere gilt es dabei auch, Plückers Rolle als Vermittler zwischen der französischen und der deutschen Mathematikergemeinschaft in den Fokus zu nehmen.
Auch wenn der Vergleich mit Steiners Methodenprofil und Auffassung von wichtigen Fragen und Vorgehensweisen in der Geometrie nicht Thema dieser Arbeit sein kann, sollen die Differenzen zwischen analytischer und synthetischer Geometrie doch berücksichtigt werden. Plücker hat sich in außergewöhnlich ausschließlicher Weise einem bestimmten Teilbereich der Mathematik zugewandt und dadurch eine Etikettierung als „der Analytiker“ bekommen. In wie weit diese Etikettierung wirklich angebracht ist, wie Plücker selbst sich zu den beiden einander entgegenstehenden Methoden äußert, soll untersucht und vorgestellt werden.
Neben Poncelet, Hesse und Steiner setzte sich auch Plücker mit dem großen Thema der „Allgemeinheit“ innerhalb der Geometrie auseinander. Dies zeigt sich schon in den

Titeln von Plückers Veröffentlichungen, die wiederholt den Begriff „System“ enthalten. Außerdem zeigen sie eine starke Fokussierung auf „die (analytische) Methode“, mit der Plücker eine solche Systematisierung erreichen wollte. Es stellt sich also die Frage, was genau Plücker unter „der (analytischen) Methode“ verstand, in wie weit sie sein Werk prägte und ob oder in wie weit Plücker das von ihm gesteckte Ziel der „Allgemeinheit“ wirklich erreichte.
Ein weiterer bemerkenswerter und nur wenig untersuchter Aspekt ist das breite Interesse an materiellen Modellen geometrischer Objekte, das in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts einsetzte. In Deutschland wurde Plücker einer der Pioniere des Modellbaus und gab seine Vorliebe an seinen Schüler F. Klein weiter.
Neben der Darstellung von Plückers Werk, soll diese Arbeit auch eine Biographie Plückers enthalten. Zwar gibt es bereits einige ältere Biographien Plückers, aber sie entsprechen in vielem nicht den aktuellen historiographischen Standards. Der Fokus der Biographie soll auf den äußeren Bedingungen mathematisch-wissenschaflichen Arbeitens in Deutschland im 19. Jahrhundert liegen. Der Beginn des 19. Jahrhunderts gilt als das sogenannte „goldene Zeitalter“, der Beginn einer Instituionalisierung in der Mathematik ist zu beobachten. Neben dem Aufkommen von wissenschaftlichen Journalen, sind in Plückers Biographie besonders die verbesserten Möglichkeiten auch internationaler Kontakte von Bedeutung.
Außerdem soll die Frage geklärt werden, in wie weit der Konflikt zwischen Plücker und Steiner – dem in der älteren Literatur eine sehr große Rolle beigemessen wird – wirklich von Bedeutung für Plückers Forschung war.

Forschungsstand

Bereits wenige Jahre nach Plückers Tod wurden erste Aufsätze über sein Leben und Werk veröffentlicht. Es handelt sich hierbei um die Abhandlungen von Adolf Dronke [Dronke 1871] und Alfred Clebsch [Clebsch 1872]. 1933 folgte die Dissertation von Wilhelm Ernst, welche bis heute die umfangreichste und detaillierteste Biographie Plückers darstellt.

Direktor Dr. Adolf Dronke

Adolf F. A. W. Dronke (7. März 1837 - 10. Juni 1898) studierte von 1856 - 1860 in Bonn, hauptsächlich Mathematik und Physik. Ab dem Wintersemester 1857/58 besuchte er jedes Semester mindestens eine private oder öffentliche Vorlesung Plückers. Er war $1\frac{1}{2}$ Jahre physikalischer Assistent und promovierte 1860 in der philosophischen Fakultät. Dronke ging in den Schuldienst, den er auch für Rufe an die Universität Prag und die Hochschule in Zürich nicht verließ; ab Herbst 1864 war er Direktor der Prov.-Gewerbeschule in Koblenz und ab Oktober 1875 Direktor des Realgymnasiums in Trier (vgl. [Borck 2000, S. 89], [Kössler 2008], [UABo Matr, A. Dronke]).
Dronke bemerkt, dass er Plücker „[...] in seinem Leben [...] lange Zeit hindurch nahe stand [...]“ und dass es ihm vergönnt gewesen sei, „an dessen wissenschaftlichen Arbeiten häufig theilzunehmen [...]“ [Dronke 1871, S.III]. Diese Teilnahme lässt sich z.B. an zwei von Dronke verfassten Artikeln festmachen, [SP Koblenz 1866] und [Dronke 1866], die sich mit Plückers „Neuer Geometrie des Raumes“ beschäftigen. Dronke verfasste sein „Lebensbild des von so vielen Gebildeten und Gelehrten als Lehrer oder Freund

geschätzten Mannes“ auf der Grundlage von Papieren, die ihm von der Familie Plückers zur Verfügung gestellt worden waren (vgl. [Dronke 1871, S.III]). Auch wenn Dronke keine näheren Angaben zu diesen Papieren macht, ist davon auszugehen, dass es sich im Wesentlichen um die Briefe und Urkunden handelt, die heute in Plückers Briefnachlass zu finden sind ([NRC PC]).
Dronkes Biographie ist stark durch seine Freundschaft mit und Wertschätzung für Plücker gekennzeichnet. So schreibt er beispielsweise:

> „Als Lehrer war Plücker äußerst anregend; der Vortrag enthielt eine große Menge zum Nachdenken zwingender Gedanken.“
>
> [Dronke 1871, S. 21]

> „Liebenswürdig im Umgang, ein treuer Freund, der zu allen Zeiten seinen Freunden mit Rath und Tat zur Hand ging, [...] wird er bei allen die ihm näher standen, treu im Gedächtnis bewahrt bleiben als das Beispiel eines rechtlich denkenden Mannes und eines der größten Gelehrten.“
>
> [Dronke 1871, S. 25]

Dadurch müssen einige bei Dronke positiv erwähnte Leistungen Plückers kritisch hinterfragt werden. Beispielsweise misst Dronke Plücker ein Engagement bei der Gründung des mathematischen Seminars an der Universität Bonn zu, während Plücker der Gründung eher Steine in den Weg legte (vgl. [Dronke 1871, S. 25])[1].
Besonders problematisch sind zwei Punkte der Dronkeschen Biographie, die sich so durch keine anderen Quellen direkt belegen lassen, aber in der Folge von vielen Autoren übernommen wurden. Zum einen handelt es sich hierbei um die Rolle die Dronke Plücker bei der geplanten Gründung eines Polytechnischen Instituts in Berlin zumisst:

> „Es lag hierbei [d. i. bei Plückers Versetzung nach Berlin] die Absicht vor, durch ihn ein dem bekannten französischen Polytechnicum in Paris entsprechendes Institut in Berlin zu gründen. Als jedoch dieser Plan sich zerschlug, erhielt Plücker eine ordentliche Professur der Mathematik an der Universität Halle.“
>
> [Dronke 1871, S. 7]

Zum anderen ist der von Dronke beschriebene Zusammenhang zwischen Plückers Konflikt mit Steiner und der Zeit in der dieser nicht in dem Crelle'schen Journal veröffentlichte zu nennen:

> „Steiner erklärte, nicht mehr in Crelle's Journal schreiben zu wollen, falls noch Arbeiten Plücker's fernerhin Aufnahme fänden. Dadurch war ihm Berlin vollständig verleidet und ist es wol begreiflich, wie er seine wissenschaftlichen Arbeiten meist in ausländlischen Journalen niederlegte, wo er wusste, dass seine Leistungen wenigstens nicht verachtet wurden. Daher kam es auch, dass sein Name überall im fremden Lande ehrenvoll genannt wurde,

[1] Zur Gründung des Seminars siehe [Schubring 1985].

während man ihn in Deutschland nur wenig kannte.“

[Dronke 1871, S. 11f]

Besonders in Bezug auf die erste Aussage fallen einige Unstimmigkeiten mit den belegbaren Fakten auf. Die zweite Aussage wirkt vor allem wegen des fraglichen Zeitraums sehr unplausibel. Aber selbst wenn Steiner tatsächlich durch den genannten Grund bewogen wurde nicht weiter zu veröffentlichen, so richtete sich diese Entscheidung wohl eher gegen den Herausgeber des Journals, als dass sie Plücker selbst betroffen hätte (vgl. dazu [Eccarius 1980]). Daher ist auch fraglich, in wie weit überhaupt von einem Konflikt zwischen Plücker und Steiner gesprochen werden kann sowie ob und in welchem Ausmaß Plücker dadurch in seiner wissenschaftlichen Arbeit beinflusst wurde.[2]

Alfred Clebsch

Bei [Clebsch 1872] handelt es sich um eine Gedächtnisrede, die Alfred Clebsch[3] am 2. Dezember 1871 bei einer Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen vorlegte und die im 15. Band der Göttinger Abhandlungen, später dann auch in Plückers „Gesammelten Werken“ veröffentlicht wurde.
Clebsch verfolgte dabei das Ziel,

> „die Thätigkeit [Plückers] [...] darzulegen, und im Vergleich mit den Leistungen Mitstrebender zu erläutern wie zu begrenzen.“

[Clebsch 1872, S. X]

Felix Klein – den Clebsch um Unterstützung gebeten hatte – schreibt darüber in einem Brief vom 10.11.1871 an Plückers Witwe:

> *„Es würde darauf ankommen, nicht sowohl eine detaillierte Lebensgeschichte zu geben, als vielmehr in allgemeinen Zügen darzustellen, wie Plücker in den Entwicklungsgang der Wissenschaft eingegriffen hat; es würde also ein Stück Geschichte der Wissenschaft sein, mit Plücker als Hauptfigur im Vordergrunde. – Dabei können leider die physikalischen Forschungen nur ganz im Allgemeinen berührt werden, da sie Clebsch und mir gleichmäßig fremd sind, um wenigstens in ihrer Erwähnung correct zu sein, habe ich mich an Hittorf um Auskunft gewandt. Darf ich Sie vielleicht auch um Unterstützung bitten? Einmal möchte ich wünschen, die Briefe, namentlich die von Faraday, noch einmal durchsehen zu dürfen. [...] Auch für jede andere Auskunft wäre ich selbstverständlich sehr dankbar; ist z.B. nichts Genaueres bekannt über die Umstände, die Plücker von der physicalischen Thätigkeit wieder zur mathematischen zurückführten?“*

[NRC PC, Vol. 3B, Item 69]

[2] Vgl. hierzu besonders 4.4.

[3] (1833 - 1872).

Tatsächlich ist dieses „Stück Geschichte der Wissenschaft“ in der Darstellung von Plückers mathematischem Werk und der Einordnung seiner Leistung in den Kontext des wissenschafltichen Geschehens seiner Zeit wohl bis heute unübertroffen. Clebsch gelingt es dabei auch eine Brücke zwischen Plückers mathematischer und physikalischer Forschung zu schlagen.
Clebsch beschreibt in der Einleitung seiner Rede sein Verständnis der Geschichte der Mathematik, und damit auch seine Motivation für die Gedächtnisrede wie folgt:

> „Die Geschichte der Wissenschaft hat [...] die Aufgabe, den Gedanken nachzuspüren, welche gemeinschaftlich in Generationen sich entwickeln, und die allgemeinen Processe darzulegen, für welche die Entdeckungen des Einzelnen mehr die Symptome als die treibenden Ursachen darstellen. Bei einer solchen Auffassung wird man weniger oft Gelegenheit haben, davon zu sprechen, dass eine Entdeckung ihrer Zeit vorausgeeilt sei, oder dass eine Persönlichkeit einer Zeit ausschließlich das Gepräge ihres Geistes aufgedrückt habe; aber dafür nimmt das Ganze der Wissenschaft einen organischen Charakter an. Im Einzelnen freilich bleibt immerhin zu untersuchen, in wie weit nahezu gleichzeitige Erscheinungen ursächlich auf einander gewirkt haben; nur darf man die Zeitfolge mit der ursächlichen Entwicklung nicht schlechthin verwechseln.“

[Clebsch 1872, S.Xf]

Der biographische Teil in Clebsch's Rede ist nur sehr kurz und leider auch nicht ganz korrekt. So wird zum Beispiel das Geburtsdatum Plückers nicht richtig angegeben, die Reihenfolge der besuchten Universitäten vertauscht und die Tätigkeit in Berlin ganz auf die Stelle am Gymnasium beschränkt.[4]

Wilhelm Ernst

Ernst schrieb seine Biographie Plückers als Abschluss seiner akademischen Studien, die er zur Vorbereitung auf die Postassesorprüfung für den höheren Telegraphendienst begonnen hatte (vgl. [Ernst 1933, S. 91]). Als „Berichterstatter“ nennt er die Professoren Konen, Toeplitz[5] und Dannemann.
Die Dissertation trägt den Titel: „Julius Plücker. Eine zusammenfassende Darstellung seines Lebens und Wirkens als Mathematiker und Physiker auf Grund unveröffentlichter Briefe und Urkunden.“ Leider macht Ernst keine Angaben, aus welchen Akten und Archiven die von ihm ausgewerteten Briefe und Urkunden stammen. Ein Vergleich der von ihm gegebenen Zitate aus den Akten mit den Original-Quellen[6] zeigt außerdem, dass Ernst von ihm vorgenommene Auslassungen und kleine Veränderungen des Wortlauts nicht kenntlich gemacht hat. Des Weiteren finden sich z.T. Fehler bei den Daten

[4] siehe [Clebsch 1872, S.XI].
[5] Otto Toeplitz war als Schüler Kleins, sozusagen ein „Enkel“ Plückers.
[6] Leider war es mir nicht möglich, alle von Ernst benutzten Quellen aufzufinden. Er zitiert u.a. aus Plückers Personalakte der Universität Bonn, seinem wissenschaftlichen Nachlass ([NSuUB CodMsP]) und Akten welche heute in Handschriftensammlungen der Staatsbibliothek Berlin archiviert sind; auf die Dokumente aus Plückers Briefnachlass ([NRC PC]) hatte Ernst offenbar keinen Zugriff.

sowie in der Transkription handschriftlicher Quellen.[7] In mindestens einem Fall wurde ein Zitat derartig aus dem Zusammenhang genommen, dass falsche Rückschlüsse auf die Urheberschaft gezogen werden mussten[8]. Eine intendierte Veränderung des Inhalts durch diese Auslassungen und Ungenauigkeiten liegt aber (wohl) nicht vor.
Insgesamt zeichnet sich die Arbeit von Ernst zwar durch detaillierte Angaben und weithin auch durch korrekte Wiedergabe der Fakten aus[9], aber umfassende Perspektiven wie zum Beispiel die Einordnung in nationale und internationale Kontexte fehlen. Es handelt sich daher bei Ernsts Biographie Plückers eher um eine Chronologie als um eine historische Auswertung.

Während also die vorhandene ältere Literatur in vielem nicht den aktuellen historiographischen Standards entspricht, ist Plückers Leben und Werk in der jüngeren mathematikhistorischen Literatur kaum untersucht und in diesem Sinn „vernachlässigt“ worden. Fritz Krafft untersuchte die Umstände von Plückers Promotion in Marburg auf der Grundlage der *„Acta über die Verhandlungen bey der Philosophischen Facultät im Jahre 1823“* [Krafft 2004, S. 416], Gerhard Warnecke beschäftigte sich in zwei Aufsätzen mit Plückers Bildungsweg sowie seiner Zeit als ordentlicher Professor in Halle ([Warnecke 2004] und [Warnecke 2008]). Dabei fokussiert er sich vor allem auf Plückers Lehrer und Professoren, deren didaktische und fachliche Grundsätzen und den möglichen Einfluss, den diese auf Plückers Berufswahl und Tätigkeit ausgeübt haben könnten.

Quellenlage

> „Schoenflies will Plücker's Abhandlungen herausgeben, wozu, weiss ich freilich nicht. In Plücker's wissenschaftlichen Nachlass ist, soweit ich hier für ihn auskundschaften konnte, seinerzeit Käse eingewickelt worden. Ein Schüler und Freund von Plücker hatte allerdings vorher seinen Segen dazu gegeben.“ (Minkowski an Hilbert, 29. November 1893)
>
> [Minkowski 1973, S. 56]

Ganz so schlecht wie Minkowki es 1893 vermutete, steht es um Plückers wissenschaftlichen Nachlass nicht. 1903, nach dem Tod von Plückers einzigem Sohn Albert (1838 - 1901) wurde der Nachlass der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen geschenkt

[7] Vgl. dazu beispielsweise das in Kapitel 3.2 auf Seite 38 wiedergegebene Aktenstück mit einem Zitat aus dem gleichen Aktenstück bei Ernst ([Ernst 1933, S. 16]) sowie eine Bemerkung in [Schubring 1985, S. 143, Fußnote 15].
[8] Vgl. dazu Kapitel 2.4, besonders Fußnote 70.
[9] Als weitere Ausnahme ist hier beispielsweise zu nennen, dass Ernst – wohl der oben bereits angesprochenen Angabe bei Dronke folgend – angibt, Plücker sei als Direktor des Polytechnischen Instituts in Berlin vorgesehen gewesen (vgl. [Ernst 1933, S. 21]).

([NSuUB CodMsP]):

> „Das Ableben von *Julius Plückers* einzigem Sohn [...] hat zu der Entdeckung geführt, daß ein Plückerscher Nachlaß mathematisch-physikalischen Inhalts exisitirt. Anfragen, die bei Gelegenheit der Herausgabe der Plückerschen Abhandlungen an die zuständige Stelle gerichtet wurden, hatten ein negatives Ergebniß gehabt. Um so erfreulicher ist es, daß ein Nachlaß noch vorhanden ist [...]“

[Schoenflies 1903, S. 279]

Von größerer Bedeutung für die Beantwortung der oben gestellten Forschungsfragen ist aber der Briefnachlass Plückers. Dieser befindet sich im Archiv des „National Research Council of Cananda (NRC)“ in Ottawa. Ein Großneffe Plückers, Otto Maass (1890 - 1961) schenkte den Nachlass 1959 dem Präsidenten des NRC. Otto Maass war Professor der physikalischen Chemie an der McGill Universität in Montreal und ab 1940 Assistent des Präsidenten des NRC ([NRC PC, Vol. 1A, Item 2]). Dieser Briefnachlass enthält Briefe an Plücker unter anderen von englischen, französischen und deutschen Wissenschaflern. Außerdem Briefentwürfe von Plücker sowie zahlreiche Briefe Plückers an seine Frau. Die Briefe geben Aufschluss über biographische Details, sowie über die wisenschaftlichen Kontakte, die Plücker im In- und Ausland pflegte.
Als weitere biographisch wichtige Quelle ist Plückers Personalakte sowie weitere Universitätsakten im Archiv der Universität Bonn zu nennen. Allerdings wurde dieses im zweiten Weltkrieg stark beschädigt, so dass einige Universitätsakten verloren gegangen sind.
Für weitere biographische Details wurden außerdem einzelne Aktenstücke aus den Archiven der London Mathematical Society, der Staatsbibliothek zu Berlin – Preußischer Kulturbesitz, des Universitätsarchivs der Humboldt-Universität zu Berlin sowie des Universitätsarchivs Heidelberg herangezogen.

Gliederung

Die vorliegende Arbeit über Julius Plückers Leben und Werk teilt sich – wie bereits im Titel angedeutet – in zwei große Abschnitte. In Teil I (Kapitel 2 bis 7) wird Plückers Leben dargestellt, in Teil II (Kapitel 8 bis 14) sein mathematisch-geometrisches Werk behandelt.
Die Biographie ist chronologisch angelegt und anhand der verschiedenen Orte von Plückers Ausbildung und Tätigkeit in Abschnitte eingeteilt.
Kapitel 2, das an diese Einleitung anschließt, behandelt Plückers wissenschaftliche Qualifikation. Den einzelnen Abschnitten seiner Schul- und Studienzeit geht ein Unterkapitel voraus, das dazu dient, kurz Plückers familiäre Herkunft zu beschreiben (2.1). Das nächste Unterkapitel behandelt die besondere Bildungssituation im 19. Jahrhundert, die stark vom Aufkommen der sogenannten „realistischen“ Schulen gekennzeichnet war, am Beispiel der von Plücker besuchten Schulen (2.2). Weiter wird anhand der wenigen vorhandenen Quellen versucht, Plückers Studium im Blick auf die Lerninhalte der von ihm besuchten Vorlesungen nachzuzeichnen (2.3). Das Kapitel schließt mit Plückers Promotion (2.4).

Kapitel 3 befasst sich mit dem ersten Abschnitt von Plückers wissenschaftlicher Karriere. Dabei liegt der Fokus der einzelnen Unterabschnitte besonders auf den Möglichkeiten und Schwierigkeiten einer solchen wissenschaftlichen Laufbahn zu Beginn des 19. Jahrhunderts.
In Kap. 4 wird Plückers kurzer Aufenthalt in Berlin thematisiert. Hierbei nimmt besonders August Leopold Crelle in seiner Rolle als „Förderer junger Mathematiker" (4.1) sowie Plückers Konflikt mit Steiner (4.4) größeren Raum ein.
Plückers ebenfalls nur kurze Zeit in Halle wird in Kap. 5 behandelt. Durch die besondere Quellenlage begünstigt, wird hier exemplarisch die Drucklegung eines von Plückers Werken vorgestellt (5.2). Der letzte Unterabschnitt befasst sich mit den Auslandsreisen die Plücker von Halle aus unternahm (5.3).
In Kap. 6 wird die letzte und größte Phase von Plückers Leben, seine Zeit als ordentlicher Professor an der Universität Bonn, vorgestellt. Plücker war in dieser Zeit nicht nur mathematisch, sondern auch physikalisch tätig. Da dieser Bereich seines Werkes im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt werden konnte, wird diese Phase hier ausführlicher behandelt (6.2). Dabei liegt der Fokus weiterhin auf Plückers wissenschaftlichen Kontakten ins Ausland – da diese auch für sein mathematisches Arbeiten von Bedeutung sind –, sowie auf den Elementen, die seine physikalische und mathematische Forschung verbinden. Diese Elemente sind nicht inhaltlicher Natur, sondern liegen in Plückers Forscherpersönlichkeit (6.2.4). Außerdem wird der Versuch unternommen anhand der wenigen vorhandenen Quellen die Frage zu klären, warum Plücker jeweils das Forschungsfeld gewechselt hat (6.2.1; 6.2.5). Plückers zweite mathematische Phase wird ebenfalls ausführlicher behandelt, da sie im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit nur kurz vorgestellt werden kann. Hiebei liegt ein besonderer Fokus auf Plückers Modellen (6.3.2) mit denen Plücker ein Pionier des Modellbaus in Deutschland wurde.
Der erste, biographische Teil der vorliegenden Arbeit schließt in Kap. 7 mit einem Zwischenfazit.
Kap. 8 bildet eine Einleitung zum zweiten Teil dieser Arbeit, der sich mit Plückers mathematischem Werk beschäfigt. Im ersten Unterkapitel wird ein Überblick darüber gegeben (8.1). Dabei wird deutlich gemacht, dass Plückers starke Fokussierung auf einen Bereich – die analytische Geometrie – eine Besonderheit darstellt. Um Plückers Verständnis der „analytischen" Geometrie herauszuarbeiten, wird deren Geschichte kurz, überblickhaft, vorgestellt (8.2.1). Im Anschluss daran werden Plückers Äußerungen zu dem Verhältnis von analytischer und synthetischer Geometrie analysiert (8.2.2). Außerdem werden besondere Charakteristika für Plückers mathematische Arbeitsweise herausgearbeitet (8.3).
Kap. 9 stellt die einzelnen Werke Plückers, die er in seiner ersten Phase mathematischer Forschung schrieb, vor (9.1 - 9.4). Plücker bezeichnete diese Werke als einen Zyklus. In wie weit diese Aussage stichhaltig ist, wird im Abschnitt (9.5) analysiert. Dabei wird die besondere Bedeutung „der (analytischen) Methode" für Plücker herausgearbeitet.
Was genau Plücker darunter verstand, welche Eigenschaften diese Methode hat und wie Plücker das Verhältnis von Analysis und Geometrie auffasste, wird in Kap. 10 behandelt.
Die Kapitel 11 bis 13 greifen exemplarisch besondere Themen von Plückers Forschung heraus, die jeweils chronologisch anhand seiner Werke und Aufsätze (sowie – wenn möglich – weiterer Quellen) seinen Erkenntnisfortschritt nachverfolgen. Da es im Rah-

men dieser Arbeit nicht möglich ist, Plückers Werk wirklich umfassend darzustellen musste hier eine Auswahl getroffen werden. Zum einen ging es dabei darum, die Punkte herauszugreifen anhand derer die von Plücker verwendete Methode besonders gut dargestellt werden kann. Zum anderen schien es sinnvoll solche Punkte auzuwählen die bisher eher unbeachtet geblieben sind. Aus den genannten Gründen sowie der Komplexität des Themas werden die sogenannten Plücker Formeln ud die weiteren Leistungen Plückers in der Behandlug der algebraischen Kurven nicht thematisiert.
In Kapitel 11 stehen unterschiedliche Koordinatensysteme im Fokus, da diese für Plückers analytische Methode eine herausragende Rolle spielen. Um Plückers Entdeckung der homogenen Koordinaten (1829) besser einordnen zu können, wird vergleichend Möbius Entdeckung und Behandlung der baryzentrischen Koordinaten herangezogen (11.1). Mit der Einführung von Linien- und Ebenenkoordinaten erbrachte Plücker eine große Leistung im Blick auf die Verallgemeinerung des Koordinatenbegriffs (11.2). Im gleichen Kontext stehen Plückers „allgemeine Koordinaten", mit deren Hilfe Plücker eine „Allgemeinheit" in der Geometrie, ein umfassendes System, erreichen wollte (11.3).
In Kapitel 12 wird die Dualität oder Reziprozität behandelt. Da diese von Gergonne und Poncelet bereits behandelt wurde, werden deren Ansätze in Abschnitt (12.1) kurz vorgestellt. Im nächsten Abschnitt wird herausgearbeitet, wie Plücker unabhängig davon zu seiner eigenen Auffassung der Reziprozität kam (12.2). Hierbei wird Plückers Begriff der Reziprozität im Gegensatz zu dem heute üblichen Begriff der Dualität verwendet, um Begriffsunterschiede deutlicher zu machen. Eine Begriffsdefinition, die auch eine gewisse Begriffsentwicklung im Lauf der Zeit berücksichtigt, wird in Abschnitt (12.2.1) gegeben.
Kapitel 13 beschäftigt sich schließlich mit der Inversion am Kreis, die Plücker unter dem Titel „ein neues Übertragungsprincip" hauptsächlich in einem Artikel von 1833 behandelt (13.2). Dieser Artikel steht interessanterweise im Kontext von Jakob Steiners Lösung der Malfattischen Aufgabe, die er 1826 veröffentlichte und bei der er möglicherweise ebenfalls Inversion am Kreis benutzte. Dieser Kontext wird in Abschnitt 13.1 ebenfalls vorgestellt.
In Kapitel 14 wird zur Abrundung von Plückers mathematischem Werk auch seine zweite Phase geometrischer Arbeiten angerissen.
Kapitel 15 bildet den Schluss der vorliegenden Arbeit. Darin werden die Resultate in Blick auf die Beantwortung der aufgeworfenen Forschungsfragen zusammengefasst.
Im Anhang finden sich einige Bemerkungen zur Liniengeometrie, die dem Leser einen Einblick in diesen heute eher unbekannten Forschungsbereich des 19. Jahrhunderts geben sollen. Außerdem finden sich dort von mir transkribierte Briefe, deren Inhalt mir besonders interessant erschien, die aber für den Fließtext zu lang waren.
An dieser Stelle seien noch einige weitere formale Punkte angemerkt:
Von mir transkribierte, handschriftliche Quellen sind kursiv gestellt. Sowohl bei diesen, als auch bei allen anderen Zitaten habe ich die Orthografie und Hervorhebungen beibehalten[10]. Dadurch stimmt die Orthografie häufig nicht mit der heutigen Schreibweise überein[11]. Englische Zitate habe ich ohne Übersetzung verwendet. Bei französischen

[10]Dadurch finden sich z.T. kursive Formatierungen in Zitaten, die in diesen Fällen nicht auf ein Transkript einer handschriftlichen Quelle hinweisen. Dies wird aber jeweils aus dem Zusammenhang deutlich.
[11]Dies gilt gleichermaßen für deutsche, lateinische, englische und französische Quellen.

und lateinischen Zitaten gebe ich neben den Originalzitaten jeweils auch eine Übersetzung an.
Alle Quellen- und Literaturangaben finden sich im Fließtext in der Form „[Autor Jahr, Seitenzahl]". Falls es sich um Internetquellen handelt wird das letzte Abrufdatum im Literaturverzeichnis in eckigen Klammern der URL nachgestellt.
Bildquellen werden direkt in der Bildunterschrift angegeben; falls es sich um eine Internetquelle handelt in der Form „URL: Internetadresse [letztes Abrufdatum]". Findet sich in der Bildunterschrift keine Quellenangabe handelt es sich um von mir angefertigte Fotos oder Grafiken.
Personen werden in der Regel nur bei der ersten Erwähnung mit vollem Namen sowie Lebensdaten genannt. Dort wo diese Angaben fehlen, war es mir leider nicht möglich sie zu beschaffen.
Im 19. Jahrhundert war es nicht üblich, Sonderfälle in mathematischen Sätzen explizit zu erwähnen und auszuschließen. Diesem Brauch schließe ich mich hier aus Gründen der historischen Treue an.

Teil I.

Biographie

Abb. 1.1.: Julius Plücker. URL: http://bit.ly/pluecker1JPG [8.11.14]

2. Schule und Studium

„Plücker's biography tells us something about reputation and influence in the first half of the 19th century.“

[Gray 2007, S. 160]

2.1. Familie Plücker in Elberfeld

„Curriculum vitae
Geboren wurde ich am 16. Juli 1801 in Elberfeld, meine Eltern sind die Kaufleute Johannes Peter und Johanna Maria Plücker, geborene Lüttringhausen.“

Curriculum Vitae[12]

Die erste Erwähnung der Familie Plücker in Elberfeld findet sich im Aufnahme-Verzeichnis der Garnnahrung[13] vom 21. Juni 1589 (vgl. [Ernst 1933, S. 5]). Die ursprünglich wohl aus Aachen stammende Familie hatte sich in der Zeit der Reformation in Elberfeld niedergelassen (vgl. [Dronke 1871, S. 5]; [Ernst 1933, S. 5]). In der Folgezeit wurde sie zu „einer der einflußreichsten Familien im Wuppertal, die dort über drei Jahrhunderte die soziale und wirtschaftliche Entwicklung maßgebend prägte“ [Giermann 2004, S. 3]. Zahlreiche Elberfelder Bürgermeister sowie Schöffen und Richter kamen aus dieser Familie (vgl. [Giermann 2004, S. 4]).
Johannes Plücker, der Großvater von Julius Plücker

> [...] gehörte damals zweifellos zu den tatkräftigsten Kaufleuten der Stadt, hatte es zu großem Wohlstand gebracht, der es ihm unter anderem erlaubte, nach 1784 von den Freiherrn von dem Bottlenberg genannt Schirp deren vor den Toren der Stadt Elberfeld gelegenes Rittergut Lüntenbeck käuflich zu erwerben [...]“

[Strutz 1963, S. 173]

[12] Eingereicht bei der Marburger Dissertation 1823. Hier wie im Folgenden zitiert aus [Krafft 2004, S. 423ff], der die Übersetzung aus dem Lateinischen vorgenommen hat; die in eckigen Klammern eingefügten Ergänzungen stammen - bis auf zwei gesondert ausgewiesene Ausnahmen - ebenfalls alle von Fritz Krafft.

[13] Dabei handelte es sich um eine Art gewerblichen Verband der Kaufleute in Elberfeld und Barmen, welche Garnbleicherei betrieben.

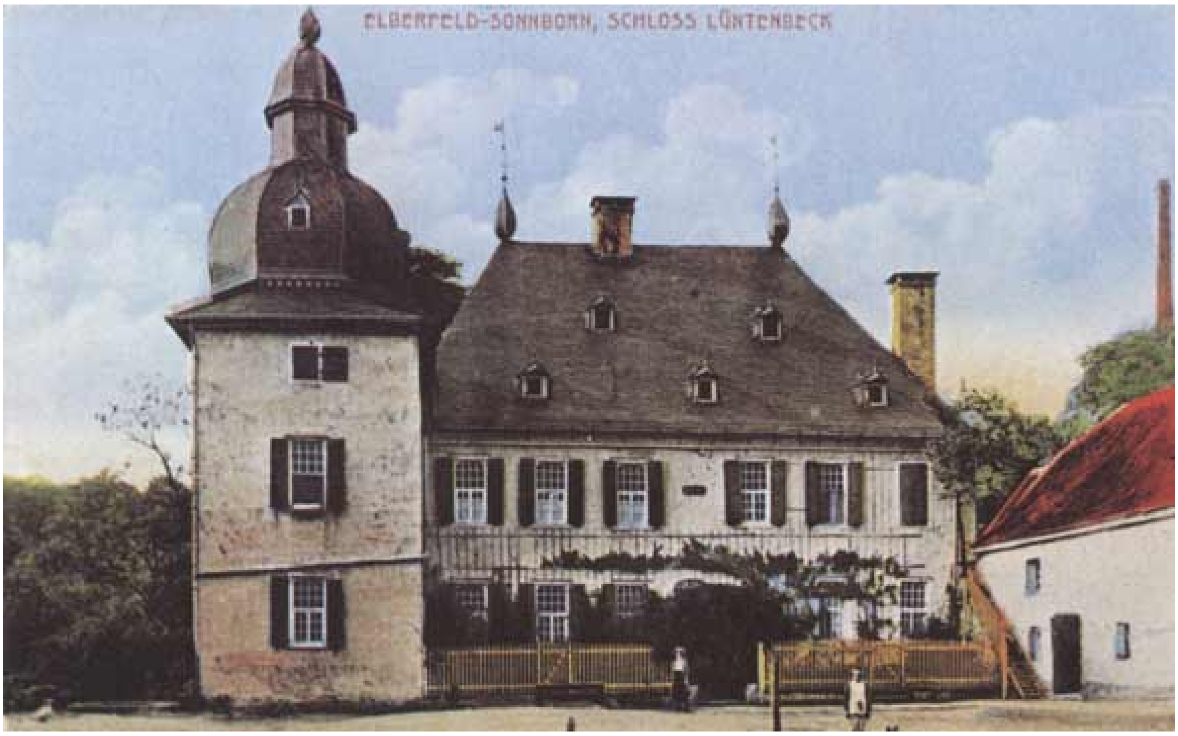


Abb. 2.1.: Schloss Lüntenbeck auf einer Postkarte (ca. 1900).
URL: http://bit.ly/luentenbeckJPG [8.11.14]

Dieses Rittergut fiel später an den Onkel Plückers, den königlich-preußischen Konsistorial- und Regierungsrat Carl Ludwig Pithan; dessen Enkel das – heute als Schloß Lüntenbeck bekannte – Gut 1889 verkaufte. Später erwarb die Stadt Elberfeld (heute Wuppertal) das Schloss; es wird heute städtisch genutzt und ist der Allgemeinheit zugänglich (vgl. [Giermann 2004]).

2.2. Schulbildung

> *„Nachdem ich zunächst ab Beginn des Sommers des Jahres 1806 in Elberfeld in die Wilbergsche Schule gegangen war, die ich nach dem Namen des Lehrers benenne, der meinen Geist zur Mathematik hinlenkte und mich vor allem davon abhielt, mich dem Kaufmannsgeschäft zu widmen, besuchte ich gleich zu Beginn des Jahres 1816 das Düsseldorfer Gymnasium, das durch das Verdienst des Direktors und der übrigen Lehrer hoch angesehen war, und habe als regulär eingeschriebenes Akademiemitglied, da ich unter der Leitung von Schäfer den Zeichenunterricht innehatte, die Anfangsgründe der Architektur abgelegt."*
>
> Curriculum Vitae[12]

2.2.1. Wilbergs Bürgerinstitut

Seit Beginn des 19. Jahrhunderts kam es durch die Erfordernisse der Industrialisierung zu deutlichen Veränderungen im Schulwesen Preußens. Neben die Gymnasien – als Träger der klassischen Bildung – traten Real- und höhere Bürgerschulen, „d.h. Schulen, die einerseits eine über den Kreis der gewöhnlichen Elementarschule hinausgehende Bildung vermitteln, auf der anderen Seite sich aber dadurch von den Zielen des Gymnasiums unterscheiden sollten, daß sie *neuere Sprachen* und *neuere Wissenschaften* in besonderer Weise zu pflegen hatten." [Jorde 1903, S. 372] In Elberfeld wurde 1804 auf Initiative einiger Bürger ein „Bürgerinstitut für die höheren Stände", das dem speziellen Bedürfnis nach kaufmännischer und beruflicher Vorbildung gerecht werden sollte, gegründet. Die einzige vorhandene höhere Lehranstalt, eine Lateinschule, hatte keinen besonders guten Ruf. Sie wies nur noch eine Klasse mit 12 Schülern auf und konnte mit ihrer wissenschaftlichen Ausrichtung keine Ausbildung in den sogenannten realistischen Fächern bieten (vgl. [Jorde 1903, S. 369]). Bis 1813 sank die Zahl der Schüler dieses Gymnasiums auf 6 herab, sodass die Anstalt der Auflösung nahe kam, während „die der realistischen Richtung der Zeit folgenden Privatschulen [...] immer mehr Schüler gewannen" (vgl. [Wiese 1864, S. 355]). Unter diesen Privatschulen war besonders das „Bürgerinstitut" – später unter dem Namen des Leiters als „Wilberg'sches Institut" bekannt – wichtig und erfolgreich. Schüler aus ganz Europa, Russland und sogar der USA wurden von ihm angezogen (vgl. [Warnecke 2008, S. 3]). Die Schule trug in ihrem Schulsiegel die Inschrift „Der Mensch erzieht im Kinde den Menschen".
Johann Friedrich Wilberg[14] war 1802 nach Elberfeld gekommen, um an der neu gegründeten Armenanstalt als Inspektor und Lehrer zu arbeiten. Wilberg hatte nach seinem Aufenthalt an der Musterschule des Freiherrn von Rochow[15] und seinem Studium am Lehrerseminar in Berlin 1790 sein Lehrerexamen abgelegt. Von 1790 bis 1802 war er Lehrer in Hamme bei Bochum in der Grafschaft Mark, wo Freiherr Philip von Recke auf seinem Gut Overdyck eine Schule eingerichtet hatte. Nach anfänglichen Schwierigkeiten erwarb sich Wilbergs Schule einen sehr guten Ruf und wurde von dem Freiherrn von Recke zum Vorbild einer Schulreform gemacht. Ein Lehrerseminar unter Wilbergs Leitung sollte für eine bessere Ausbildung der Lehrer sorgen. In Elberfeld führte Wilberg diesen Gedanken später in seinen samstäglichen „Unterhaltungen" weiter, zu denen er die Elementarlehrer Elberfelds und seiner Umgebung einlud.

> „Die „Unterhaltungen", von Wilberg 28 Jahre lang veranstaltet, geleitet und häufig auch bestritten, gaben den Lehrern die Möglichkeit zur Selbstverständigung über berufliche und politische Fragen und zur Ausbildung eines eigenen Standesbewußtseins."
>
> [Wittmütz 1990, S. 172]

1839 verließ Wilberg Elberfeld und zog nach Bonn. Der Leiter des Elberfelder Gymnasiums prägte daraufhin den Ehrentitel „Meister an dem Rhein" für Wilberg (vgl. [Wittmütz 1990, S. 175]). Nach Plückers eigenen Angaben[16] war Wilberg derjenige, der bei ihm zuerst das Interesse für die Mathematik weckte und dafür sorgte, dass

[14](1766 - 1846) Vgl. zu Wilberg besonders [Wittmütz 1990] sowie [Diesterweg 1847].
[15](1734 - 1805).
[16]s. oben; Curriculum Vitae.

Plücker nicht in der Familientradition blieb und Kaufmann wurde. Aus Wilbergs Autobiographie – in der er über sich selbst in der dritten Person spricht – erfahren wir, dass Wilberg besonders in der Geometrie ein Mittel sah, das eigenständige Denken bei seinen Schülern zu fördern:

> „Er gewann Liebe zur Geometrie, erkannte in ihr ein treffliches Mittel zur Bildung des Verstandes, und bediente sich der Elemente des Euklid, um mit den Gründen der Wahrheit dieser Wissenschaft bekannt zu werden. (Später kam W[ilberg] durch Hülfe seines Freundes Diesterweg, den Bruder des Seminardirektors in Berlin[17], so weit, daß er im Stande war, durch die Geometrie die Schüler zum eigenen Denken zu wecken, sie darin zu üben, und sie anzuleiten, ihre Gedanken bestimmt, deutlich und kurz auszudrücken. Von jedem Lehrsatze, der aus vorhergegangenen Sätzen gefunden und bewiesen worden war, ließ er die Schüler sogleich Gebrauch machen zur Auflösung von Aufgaben, und nöthigte sie dadurch, ihr Kennen und Wissen auszuüben. Und nur das versteht man recht, was man machen kann; nur durch das Anwenden der Kenntnisse werden die Schüler deß inne, ob sie wirklich und ganz im Besitze des Wissens sind, lernen sie sich dessen freuen, und die rechte Stelle und den Nutzen des Wissens für das thätige Leben suchen. [...])“.

[Wilberg 1838, S. 75]

F. A. W. Diesterweg[18] kennzeichnet Wilbergs Unterrichtsstil als Hervorrufen von Anlagen, keineswegs aber Vorsagen oder gar Beibringen (vgl. [Diesterweg 1847, S. 215]). Welche Fächer an Wilberg's Institut unterrichtet wurden, lässt sich ebenfalls Wilbergs Autobiographie entnehmen:

> „Religions- und Sittenlehre, Geschichte, Naturkunde und Geographie, Geometrie und einige andere Theile der Mathematik, deutsche und französische Sprache waren die Lehrgegenstände, an welchen die gemüthigen und geistigen Kräfte der Kinder geweckt, geübt und erhöht, und Lesen, Schreiben, Rechnen, Singen und Zeichnen die Fertigkeiten, welche eingeübt werden sollten.“

[Wilberg 1838, S. 94f]

Der Fächerkanon war an die speziellen Bedürfnisse der Schüler angepasst, die häufig eine kaufmännische Ausbildung anstrebten. Wilberg lehnte strikt eine breite, traditionelle Ausbildung ab. F. A. W. Diesterweg berichtet, dass Wilberg sich gegen das Lateinlernen in Bürgerschulen ausgesprochen und häufig gesagt habe: „Der Knabe soll lernen, was er in der Folge brauchen kann“ [Diesterweg 1847, S. 208].
Besonders der Unterricht in der französischen Sprache war für Plücker später wichtig.

[17] Ersterer ist Wilhelm Adolph Diesterweg (1782 - 1835), später Mathematik-Professor Plückers in Bonn (vgl. Unterabschnitt 2.3.2), letzterer ist Friedrich Adolph Wilhelm Diesterweg (1790 - 1866), der von 1832 - 1847 Seminardirektor in Berlin war.

[18] Siehe Fußnote 17.

Dagegen fehlte ihm der Unterricht im Lateinischen für seine wissenschaftliche Ausbildung[19]. Außerdem lernte Plücker bei Wilberg was einen guten Lehrer ausmacht; Plücker selbst war später für seinen ansprechenden Lehrvortrag bekannt.

2.2.2. Gymnasium Düsseldorf

Weil die Lateinschule in Elberfeld den Ansprüchen einer guten Ausbildung nicht gerecht werden konnte, setzte Plücker seine Schulbildung in Düsseldorf fort. Ernst gibt an, Plücker sei Anfang des Jahres 1816 nach Düsseldorf gezogen, um das dortige Gymnasium zu besuchen (vgl. [Ernst 1933, S. 6]). Warnecke vermutet, dass Plücker Ostern 1816 in die Tertia eintrat und die Zwischenzeit dazu nutzte, sich die erforderlichen Anfangskenntnisse in Latein und Griechisch zu erwerben (vgl. [Warnecke 2008, S. 90]). Das Düsseldorfer Gymnaium war 1545 gegründet worden und stand zwischen 1620 und 1773 unter jesuitischer Leitung (vgl. [Warnecke 2008, S. 55]). Zwischen 1805 und 1813, der Zeit der französischen Besetzung unter Napoleon, war es als Lyceum weitergeführt worden. Allerdings war die Schulsituation in diesem Zeitraum desolat; beispielsweise gab es eine hohe Lehrerfluktuation (vgl. [Warnecke 2008, S. 59]). Karl Wilhelm Kortüm[20] wurde am 6. Mai 1813 zum Direktor des Lyceums ernannt (vgl. [Kössler 2008]), um die Anstalt von Grund auf zu erneuern und neue Lehrer zu suchen (vgl. [Warnecke 2008, S. 3]). Als Plücker das Düsseldorfer Gymnasium besuchte, befand es sich daher in seiner „innovativen Entwicklungsphase“ (vgl. [Warnecke 2008, S. 3], [Ernst 1933, S. 6], [Dronke 1871, S. 5]). Plücker, der auch nach seiner Schulzeit noch in Kontakt zu Kortüm stand[21], versah seine „Theorie der algebraischen Curven“ von 1839 mit der Widmung:

> „Dem Geheimen Ober-Regierungs-Rathe Herrn Dr. Kortüm unter dessen Leitung das Düsseldorfer Gymnasium seinen Aufschwung nahm und dem es seine Blüthe verdankt, mit der Pietät eines ehemaligen Schülers und der Verehrung eines Freundes.“
>
> [Plücker 1839, S. iii]

Aus den Schulprogrammen[22] des Düsseldorfer Gymnasiums, welche jährlich angefertigt werden mussten, lässt sich das Lehrangebot entnehmen[23]. Es gliederte sich in: A.

[19] So wurde zum Beispiel Plückers lateinischer Antrag an die philosophische Fakultät der Universität Bonn für die Habilitation mit dem Kommentar: „recht schlecht verfasst“ versehen. Vgl. Kapitel 3.1.

[20] Auch Carl W. Kortüm, Kortum oder Kortuem (1789 - 1859)
Kortüm hatte Theologie, später Philologie studiert. Ab 1809 war er als Lehrer zuerst am Pädagogium in Halle, später als Hauslehrer in Pempelfort tätig. 1811 wurde Kortüm vom Ministerium des Inneren in die Schuldeputation berufen „um an der Hebung der in Verfall geratenen Unterrichtsanstalten im Großherzogtum Berg mitzuarbeiten“ [Kössler 2008].

[21] Vgl. Kapitel 4.

[22] Hierbei handelt es sich um eine Literaturgattung, welche auch als „Programmschrift“, „Schulschrift“ oder „Schulprogrammschrift“ bezeichnet wurde. Die Bezeichnung geht darauf zurück, dass es sich ursprünglich um die Einladung zu den öffentlichen Prüfungen und Mitteilung des „Programms“ dieser Prüfungen handelte. Später wurde häufig, ab 1824 für Preußen verpflichtend, eine wissenschaftliche Abhandlung beigefügt. Vgl. [Kalok 2010] und [Schubring 1986] sowie die dort zu findenden Quellen und Literaturangaben.

[23] Es sind dies für die Jahre, in denen Plücker die Schule besuchte: [SP D.dorf 1816], [SP D.dorf 1817], [SP D.dorf 1818] und [SP D.dorf 1819]. Vgl. außerdem [Warnecke 2008, S. 10; 87 - 101].

Sprachen, B. Wissenschaften, C. Religionslehre und D. Fertigkeiten. Zu den Sprachen zählten Griechisch, Lateinisch, Deutsch und Französisch. Allerdings wurde ab dem Schuljahr 1817/1818 mit dem Abgang des Professors für Französisch, Daulnoy, der Unterricht im Französischen durch Hebräischunterricht ersetzt (vgl. [SP D.dorf 1818, S. 31]). Zu den Wissenschaften zählten unter anderem Mathematik und Naturwissenschaften[24]. Den Unterricht in diesen Fächern erhielt Plücker durchgängig von Prof. Johann Paul Brewer[25]. Dieser verfasste unter anderem mehrere Lehrbücher der Mathematik und Physik[26] sowie eine experimentalphysikalische Arbeit: „Versuch einer neuen Theorie der Lichtfarben“ (1815). Letztere ist im Blick auf die Themenwahl von Plückers Habilitationsvortrag („Über den Regenbogen“ vgl. Kapitel 3.1), sowie seine späteren experimentalphysikalischen Untersuchungen zu Lichtspektren (vgl. Kapitel 6.2) interessant.

Warnecke stellt heraus, dass Brewer in seinen Werken Originalliteratur in französischer, griechischer und lateinischer Sprache zitiert. Plücker habe dadurch „Sprachen in ihrer Bedeutung als wichtiges Werkzeug im mathematisch-naturwissenschaftlichen Diskurs schätzen“ gelernt [Warnecke 2008, S. 9]. Außerdem zieht Warnecke aus dem Stil von Brewers Lehrbüchern den Schluss, dass dieser auch im Unterricht den Stoff „fasslich und geschickt“ darstellte und – wie Wilberg – seine Schüler zu eigenständig denkenden Menschen erziehen wollte (vgl. [Warnecke 2008, S. 9]).

1825 verfasste Brewer eine Schulprogrammschrift mit dem Titel „Über den Nutzen der Mathematik als allgemeines Bildungsmittel“ ([SP D.dorf 1825]). Darin heißt es abschließend:

> „[...] kurz, seit dieser Erfindung [der Rechnung des Unendlichen], vielleicht der größten, welche dem menschlichen Geiste gelang, dürfen wir uns rühmen in der Mathematik die Alten eben so weit übertroffen zu haben, als wir in der Dichtkunst und Beredsamkeit so wie in allen Künsten des Schönen hinter denselben zurückgeblieben sind. [...] Ungerecht und thöricht wäre es daher, wenn man in unserm Zeitalter bei der allgemeinen Bildung des Geistes diejenige Wissenschaft nicht als das vorzüglichste Hülfsmittel gebrauchen wollte, welche die schönste Zierde und der vorzüglichste Ruhm dieses Zeitalters geworden ist.“

[SP D.dorf 1825, S. 7]

Die Schulprogramme weisen für die Schulklassen, die Plücker besuchte, folgende Themen für den Mathematik- und Physikunterricht aus:

- 1816 in der Tertia: „Geometrie bis zur Stereometrie“

[24] Die Fächer aus dem Bereich der Wissenschaften wechselten. Unterricht in Naturwissenschaften erhielt Plücker nur in seinem letzten Schuljahr 1818/1819.

[25] Zum Teil auch als Johann Friedrich Brewer angegeben (? - 1840).

[26] „Über die Natur der festen und flüssigen Körper“ (1805); „Anfangsgründe der Arithmetik für Schulen“ (ca. 1810); „Anfangsgründe der sphärischen Trigonometrie zum Gebrauch der Schüler des Düsseldorfer Lyceums“ (1813); „Lehrbuch der Geometrie und ebenen Trigonometrie“ (1822); „Lehrbuch der Buchstaben-Rechenkunst für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht“ (1825); „Anfangsgründe der mathematischen Geographie für mittlere und obere Klassen des Gymnasium“ (1828); „Lehrbuch der Mechanik“ (1829); „Die Lehre von der Bewegung fester Körper“ (1830);
Das Lehrer eigene Lehrbücher veröffentlichten, war damals nicht unüblich.

- 1817 in der Secunda: „Geometrie. Auflösung der Gleichung des ersten Grades. – Die Lehre von den Logarithmen. – Anfangsgründe der Trigonometrie.“

- 1818 in Prima: „Trigonometrie – Statik, Hydrostatik, Aerostatik und die Anfangsgründe der Mechanik“

- 1819 in Prima: „Rein[e] Math[ematik:] analytische Trigonometrie. Kegelschnitte. Auflösung der unreinen quadrat. Gleichungen. Binomischer Lehrsatz. Angew[andte] Mathem[atik:] Statik, Hydrostatik, Aerostatik und Mechanik“
  „Physik. Lehre von der Wärme von dem Druck der Luft und von der Electricität.“

Dieses letzte Schuljahr verließ Plücker bereits zu Ostern:

> „Verzeichnis der im Schuljahr 1819 abgegangenen und jetzt abgehenden Gymnasiasten aus den beiden oberen Klassen. [...]
> II. Aus Prima: [...]
> 2. Julius Plücker aus Elberfeld, 18 J[ahre] a[lt], 3 J[ahre] auf d[em] G[ymnasium], $1\frac{1}{2}$ J[ahre] in Prima. Er wurde um Ostern mit dem Zeugniß Nr. 2 entlassen, und studirt jetzt Mathematik zu Heidelberg.“

[SP D.dorf 1819, S. 59]

Von insgesamt 17 Abgängern wird bei dreien kein Zeugnis erwähnt, die anderen 14 bekommen ein Zeugnis Nr. 2. In zwei Fällen ist dies mit dem Vermerk „sehr ehrenvoll“, in drei Fällen mit dem Vermerk „ehrenvoll“ versehen. Die Abstufungen der Entlassungszeugnisse waren am 25. Juni 1812 (königliche Bestätigung vom 12. Oktober 1812) für Preußen festgelegt worden. Insgesamt gab es drei Abstufungen: unbedingte Tüchtigkeit (I), bedingte Tüchtigkeit (II) und Untüchtigkeit (III). Dabei war für ein Zeugnis der unbedingten Tüchtigkeit in den alten Sprachen, der Geschichte und der Mathematik jeweils ein befriedigendes Maß von Kenntnissen nötig. Mangelhafte Kenntnisse in Französisch und Naturwissenschaften waren hingegen nicht relevant. Wurde nur in zwei oder einem der drei genannten Bereiche ein befriedigendes Maß erreicht, gab es ein Zeugnis der bedingten Tüchtigkeit (vgl. [Wiese 1864, S. 484f]). Vermutlich waren es in Plückers Fall die alten Sprachen – Latein und Griechisch –, die das Prädikat der unbedingten Tüchtigkeit ganz ausschlossen, da er darin nur drei und nicht wie üblich sieben Jahre lang unterrichtet worden war[27].

[27] Warnecke gibt an, dass es ihm nicht möglich war zu ermitteln, ob Plückers Abgangszeugnis im Archiv des Gymnasiums noch vorliegt (vgl. [Warnecke 2008, S. 63]).

2.3. Studium

„[...] während in Frankreich zahlreiche bedeutende Mathematiker wirkten, war in Deutschland nur in einsamer Größe C. F. Gauß in Göttingen, der princeps mathematicorum, neben dem als Mathematiker von einiger Bedeutung höchstens noch J. F. Pfaff in Halle zu nennen ist. Erst in der Mitte der zwanziger Jahre [des 19. Jahrhunderts] sehen wir diesen Zustand sich plötzlich ändern und auch in Deutschland Mathematiker von größter Bedeutung auftreten: Jacobi, Abel, Dirichlet als Analytiker; Möbius, Steiner, Plücker als Geometer.“

[Toeplitz 1933, S. 324f]

Wie Toeplitz betrachtet auch Clebsch das Jahr 1826 als den Beginn einer neuen Epoche in der Entwicklung der deutschen Mathematik[28]. In den ab diesem Jahr zu beobachtenden Fortschritten sieht er eine der „bemerkenswerthesten Erscheinungen, welche die Geschichte der Wissenschaften zeigt“ [Clebsch 1872, S. IX]. Als Plücker im Jahr 1819 mit seinem Studium begann, war von dieser Entwicklung also noch nichts zu sehen. Mit den beiden Mathematikern Carl Friedrich Gauß[29] und Johann Friedrich Pfaff[30] kam Plücker während seines Studiums nicht in Berührung. Stattdessen besuchte er die Universitäten Heidelberg, Bonn und Berlin. Über Plückers finanzielle Verhältnisse während seines Studiums ist nichts näheres bekannt. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass seine Familie finanziell in der Lage war, seine Kosten für das Studium relativ problemlos zu decken. Dadurch war es Plücker sogar möglich, für einige Semester nach Paris zu gehen, um dort in Kontakt zu einigen bedeutenden französischen Mathematikern zu treten.
Die jeweiligen Universitätsakten geben leider kaum noch Informationen über Plückers Studienzeit her, so dass als Informationsquelle über die von ihm besuchten Vorlesungen hauptsächlich sein Curriculum Vitae dient.

[28]Besondere Bedeutung kommt hierbei der Gründung des *Journals für die reine und angewandte Mathematik* durch A. L. Crelle zu (vgl. 4.1). „The Golden Age in analytic geometry during the nineteenth century undoubtedly was due in no small measure to the buoyant spirit of the contributors to newly organized periodicals.“ [Boyer 1956, S. 225].
[29](1777 - 1855).
[30](1765 - 1825).

2.3.1. Heidelberg

> *„Als im Jahre 1819 das Sommersemester schon nahe bevorstand, habe ich mich, ausgestattet mit einem regulären Reifezeugnis, nach Heidelberg begeben und [Vorlesungen] von berühmten Männern gehört, von [Georg Friedrich] Creuzer über Philologie, Mythologie, Archäologie und Altertümer, von [Karl Cäsar von] Leonhard über verschiedene mineralogische Lehrgebiete, von [Christoph Wilhelm Jakob] Gatterer über Technologie, Wagemann über Volkswirtschaft und nicht weniger hatte ich in der Philosophie [Joseph] Hildebrand und [Hermann Friedrich Wilhelm] Hinrichs, in der Mathematik [Franz Ferdinand] Schweins und [Georg Wilhelm] Muncke, in der Architektur Leger zu Lehrern.“*
>
> Curriculum Vitae[12]

Wie im Schulprogramm des Düsseldorfer Gymnasiums angegeben, studierte Plücker zuerst in Heidelberg. Er immatrikulierte sich dort am 26. April 1819 (vgl. [Toepke 1904, S. 169]). Allerdings studierte er dort nicht nur Mathematik, sondern war für das Studienfach Kameralistik eingeschrieben (vgl. [Toepke 1904, S. 169]). Über die Vorlesungen, die Plücker in Heidelberg im Rahmen seines Studiums besuchte, ist leider wenig bekannt[31]. Lediglich die oben wiedergegebene Aufzählung in Plückers Curriculum Vitae liegt vor. Sie zeigt, dass Plücker tatsächlich neben mathematischen und naturwissenschaftlichen Vorlesungen auch solche zu anderen Themenfeldern der Kameralistik besuchte. Dies scheint darauf hinzudeuten, dass Plücker zu Beginn seines Studiums tatsächlich eine Laufbahn in der Kameralistik anstrebte. Ein reines Studium der Mathematik – wenn auch vielleicht unter der offiziellen Studienbezeichnung der Kameralistik – plante Plücker zu diesem Zeitpunkt wohl nicht. Möglicherweise ist die Angabe im Schulprogramm einfach fehlerhaft. Wie eine andere Immatrikulation vom 26. April 1819 in Heidelberg zeigt, hätte Plücker sich auch offiziell für das Studienfach Mathematik einschreiben können (vgl. [Toepke 1904, S. 170][32]).
Mit Kameralistik oder Kameralwissenschaften wurde im 18. und frühen 19. Jahrhundert eine Universalwissenschaft bezeichnet, die zur Ausbildung von Verwaltungsbeamten diente. Sie umfasste wirtschaftliche, wirtschafts- und finanzpolitische und technologische sowie Sicherheit und Wohlstand betreffende Kenntnisse (vgl. [Schminnes 1982, S. 99]). Im Sinne des absolutistischen Staatsgedankens des 18. Jahrhunderts bedeutete staatliche Verwaltung eine „umfassende staatliche Fürsorge für das wirtschaftliche und soziale Gedeihen des Staates und die Wohlfahrt seiner Untertanen“ [Schminnes 1982, S. 102]. Um die wachsenden Anforderungen bewältigen zu können, war eine Vergrößerung

[31] Das Universitätsarchiv Heidelberg besitzt nur Studentenakten ab dem Jahr 1880.
[32] Es handelte sich hierbei um Gustav Wilhelm Langsdorf, Sohn des dortigen Professors Karl Christian von Langsdorf.

der inneren Verwaltung und vor allem eine entsprechende Ausbildung der Beamten notwendig (vgl. [Schminnes 1982, S. 102]). Daher ist die Entwicklung der Universitäten im 18. Jahrhundert eng mit der Entwicklung der Kameralwissenschaften verbunden (vgl. [Schminnes 1982, S. 99f]). Außerdem spielt die Entwicklung der deutschen Aufklärung eine große Rolle für die Kameralwissenschaften (vgl. [Schminnes 1982, S. 103]).
Am Ausgang des 18. Jahrhunderts kam es allerdings zu einer Krise in den Kameralwissenschaften (vgl. [Schminnes 1982, S. 107]). Diese wird sowohl mit der Rezeption der Nationalökonomie von Adam Smith, als auch mit der Aufspaltung der Kameralwissenschaften in einzelne Disziplinen in Verbindung gebracht (vgl. [Schminnes 1982, S. 107], [Warnecke 2004, S. 4]). Von besonderer Bedeutung ist hierbei die Abspaltung der Polizeiwissenschaften aus dem Kanon der Kameralwissenschaften.

> „Diese Trennung von Ökononie und Polizei in den wissenschaftlichen Systemen nach 1800 wird in der Literatur als der eigentliche Kern des Verfalls der Kameralwissenschaften bezeichnet. Daß es sich dabei aber bloß um einen Prozeß der Trennung zweier Wissensgebiete handelte, muß bezweifelt werden. [...] [Es herrschte] ein neues Verständnis von Wissenschaft im 19. Jahrhundert vor [...].“

[Schminnes 1982, S. 108]

Die Bezeichnung Kameralwissenschaften existierte aber weiter, hatte allerdings einen Bedeutungswandel erlebt. Für eine gewisse Zeit bezeichnete er noch die Kombination von Ökonomie und Finanzwissenschaft. Als sich aber die Ökonomie im Zuge der Industrialisierung als eigenständige Wissenschaft durchsetzte, verschwand der Name Kameralwissenschaften ganz (vgl. [Schminnes 1982, S. 109]).
Als Plücker 1819 mit seinem Studium der Kameralwissenschaften begann, befand sich diese also gerade in der Krise und stand kurz vor ihrem Scheitern als Universalwissenschaft. Warnecke, der sich besonders mit Plückers Studium der Kameralwissenschaften beschäftigte, stellt aber fest:

> „[...] Plückers Schwerpunkt, den er bei seinem Studium des Kameralfaches setzte, [eröffnete] ihm trotz Niedergang der Kameralwissenschaften eine aussichtsreiche berufliche Neuorientierung.“

[Warnecke 2004, S. 4]

Diese berufliche Neuorientierung, von der Warnecke spricht, meint den Beruf eines Baubeamten[33]. Warnecke beschreibt die Anforderungen, die an einen solchen Baubeamten gestellt wurden, und stellt abschließend fest:

> „Plückers Studienfächer aus seinem abgeschlossenen Kameralistikstudium von 1819 - 1823 in Heidelberg, Bonn und Berlin waren wie aus diesem Fächerkanon ausgewählt. Entsprechend seinen mathematischen und naturwissenschaftlichen Neigungen hätte Plücker eine Karriere als höherer preu-

[33] A. L. Crelle war Baurat (vgl. 4.1).

ßischer Beamter in der Funktion eines Baudirektors oder Rats in Aussicht gehabt.“

[Warnecke 2004, S. 5]

In seinem Curriculum Vitae aus dem Jahr 1823 spricht Plücker von „vorgeschriebenen Fachprüfungen“ in Berlin und einem „einträglichen Amt“, das ihm angeboten wurde[34]. Da den Quellen aber leider keine weiteren Informationen zu entnehmen sind, lässt sich weder klären, ob Plücker tatsächlich eine kameralistische Fachprüfung ablegte[35], noch um welches Amt es sich bei dem Angebot handelte. Jedenfalls lässt sich schon bevor Plücker dieses Angebot zugunsten einer weiteren wissenschaftlichen Ausbildung ausschlug, eine zunehmende Spezialisierung seines Studiums auf mathematische und physikalische Inhalte festmachen.
Plücker blieb nur drei Semester in Heidelberg. Die dortige kameralistische Ausbildung geht auf eine Schulgründung des Jahres 1774 in Kaiserslautern zurück, die anfänglich in Konkurrenz zur Heidelberger Universität stand (vgl. [Lessing 1985, S. 108]). Diese Einrichtung diente zur Ausbildung von Kameralbeamten und schloss von Beginn an reine und angewandte Mathematik in den Fächerkanon ein (vgl. [Lessing 1985, S. 108]). 1803 wurde die Schule dann in eine staatswirtschaftliche Sektion der philosophischen Fakultät der Universität Heidelberg umgewandelt (vgl. [Lessing 1985, S. 119]). Gleichzeitig entstand ein neuer Lehrstuhl für angewandte Mathematik, den ab 1806 Karl Christian von Langsdorf[36] besetzte (vgl. [Lessing 1985, S. 124]). Allerdings wurde er „vom reinen Mathematiker immer mehr zum Maschineningenieur“ [Lessing 1985, S. 129]. Die von Langsdorf angebotenen Vorlesungen zur „Analysis des Endlichen und Unendlichen“ im Sommer- und Wintersemester 1819[37] hat Plücker aber offenbar nicht besucht. In seinem Lebenslauf nennt er nur mathematische Vorlesungen von Georg Wilhelm Muncke[38] und Franz Ferdinand Schweins[39]. Muncke hielt – wie Langsdorf – Vorlesungen zur Analysis des Endlichen und Unendlichen; außerdem Vorlesungen zur höheren Geometrie[40] und zur ebenen und sphärischen Trigonometrie. Außerdem bot Muncke in allen drei Semestern Vorlesungen zur Experimentalphysik an, die Plücker aber in seinem Curriculum Vitae nicht erwähnt. Schweins hielt Vorlesungen über Größenlehre und Geometrie, Trigonometrie, Analysis des Endlichen und Unendlichen sowie praktische Geometrie und höhere Mechanik. Diese Vorlesungen waren zwar nicht alle für die Kameralisten gedacht, aber es ist anzunehmen, dass Plücker sich nicht streng an

[34] Die entsprechenden Textstellen sind auf S. 29 sowie S. 30 wiedergegeben.
[35] Im Konzept des Abgangszeugnisses der Universität Berlin, das Plücker nachträglich ausgestellt wurde, werden keine Prüfungen erwähnt. Vgl. dazu Abschnitt 3.1 S. 36.
[36] (1757 - 1834).
[37] Diese und alle folgenden Angaben zum Vorlesungsangebot der Universität Heidelberg von Sommersemester 1819 bis Sommersemester 1820 stammen aus [UAH VV, 1819SS, S. 25f; 1819WS, S. 29; 1820SS, S. 20]. Welche mathematischen Vorlesungen Langsdorf im Sommersemester 1820 anbot, lässt sich dem Vorlesungsverzeichnis nicht entnehmen, da diese erst später angezeigt werden sollten (vgl. [UAH VV, 1820SS, S. 22]).
[38] (1772 - 1847).
[39] (1780 - 1856).
[40] Nach den Anfangsgründen der Mathematik von G. G. Schmidt.

diese Zuweisungen hielt.[41] Schweins hatte ab 1802 in Göttingen studiert und dort 1808 auch promoviert. Seit 1810 war er als Privatdozent, ab 1816 als ordentlicher Professor in Heidelberg. Cantor beschreibt seine wissenschaftliche Tätigkeit dort wie folgt:

> „Seine 46jährige Lehrthätigkeit an der Heidelberger Universität beschränkte sich fortwährend auf die elementarsten Theile der Mathematik. Seine ziemlich zahlreichen Schriften sind, soweit sie Neues enthalten, combinatorischen Gegenständen gewidmet. Leider bewegt er sich dabei in dem ungenießbarsten Formelkrame der combinatorischen Schule, so daß nur wenige Leser sich durchzuwinden vermochten [...].“

[ADB, Bd. 33, S. 364]

In Plückers Heidelberger Zeit wird er auch Jakob Steiner[42] kennengelernt haben, der dort seit 1818 ebenfalls studierte. Steiner immatrikulierte sich am 2. November 1818 – interessanterweise für das Studienfach Medicin (vgl. [Toepke 1904, S. 164]). Allerdings wird hierbei wohl ein Transkriptionsfehler vorliegen, da Medizin in den Matrikeln mit „Me“, Mathematik mit „Ma“ abgekürzt wurde (vgl. [Toepke 1904, S. IV]). In seinem Lebenslauf von 1821 gibt Steiner an, er habe folgende Vorlesungen in Heidelberg gehört:

> „Über die verschiedenen Zweige der reinen und angewandten Mathematik (reine Mathematik, Analysis, Differenzial- und Integralrechnung, praktische Geometrie und Mechanik) bei Professor Schweins; – Experimentalphysik und Astronomie bei Hofrat Munke; – theoretische Chemie bei Hofrat Gmelin; Oryktognosie, Geognosie und Naturgeschichte der Vulkane bei Geheimrat von Leonhard; – Zoologie bei Hofrat Tiedemann; – alte und mittlere Geschichte bei Hofrat Schlosser und Logik bei Professor Hillebrand“

zitiert nach [Lange 1899, S. 4]

Es ist also davon auszugehen, dass Plücker und Steiner sich in der gemeinsamen Zeit in Heidelberg kennenlernten, da sie vermutlich gleiche Vorlesungen besuchten. Möglicherweise liegen in dieser Zeit – und den stark verschiedenen finanziellen Möglichkeiten der beiden Studenten – bereits erste Ansätze für die später auch wissenschaftlichen Differenzen (vgl. dazu Abschnitt 4.4).

[41] Kern nennt als Veranstaltungen für die Kameralisten: Algebra, praktische Geometrie, elementare Statik und Mechanik sowie „Rechnungen für das Geschäftsleben“. Dagegen für „Mathematiker vom Fach“: Analysis, Differential- und Integralrechnung, analytische Geometrie oder höhere Mechanik (vgl. [Kern 1992, S. 6]). Diese Angaben beziehen sich auf die Vorlesungsverzeichnisse WS 1833/34 bis SS 1856. Vorlesungen zur analytischen Geometrie wurden zu Plückers Zeit in Heidelberg noch nicht angeboten.

[42] (1796 - 1863).

2.3.2. Bonn

„Nach drei Semestern ging ich an die Rheinische Universität und wohnte den physikalischen, chemischen und mathematischen Vorlesungen der gelehrten Professoren [Wilhelm Gottlob] Kastner, [Karl Dietrich] von Münchow, [Wilhelm Adolph] Diesterweg [bei][43]*, nebenbei widmete ich mich eifrig der Geschichte und den neueren südlichen [gemeint sind sicherlich: romanischen] Sprachen.“*

Curriculum Vitae[12]

Die Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität wurde am 18. Oktober 1818 gegründet. Ein seit 1777 bestehendes Institut in Bonn, die „Maxische Akademie“, war bereits 1786 zur Universität aufgestiegen. Allerdings musste diese 1798 als Folge des französischen Einmarschs wieder geschlossen werden. Wie bereits die Universitäten in Berlin und Breslau wurde auch die in Bonn vom preußischen König gemäß der Humboldtschen Universitätsidee gegründet. Neben den beiden theologischen Fakultäten gab es eine juristische und eine philosophische Fakultät. In der philosophischen Fakultät waren zwei ordentliche Professuren für Mathematik vorgesehen; von denen allerdings eine gleichzeitig für die Astronomie bestimmt war (vgl. [Toeplitz 1933, S. 324]). Auf das Ordinariat für reine und angewandte Mathematik wurde 1819 Wilhelm Adolph Diesterweg [44] berufen, die Professur der Astronomie wurde ebenfalls ab 1819 durch Karl Dietrich von Münchow[45] bekleidet. Münchow studierte in Halle und Rostock und kam nach seiner Promotion 1810 als außerordentlicher Professor der Philosophie nach Jena (vgl. [ADB, Bd. 23, S. 8]). Dort wurde er später mit der Leitung der neuen Sternwarte beauftragt. Laut Cantor verdankt Münchow „die Bekanntschaft seines Namens“ seinem Werk „Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometie“ von 1826, einem „Buch von bleibendem Werthe“ [ADB, Bd. 23, S. 8]. Diesterweg hatte sich 1808 in Heidelberg habilitiert und war zwischen 1809 und 1819 Professor für Mathematik und Physik am Lyzeum in Mannheim (vgl. [Toeplitz 1933, S. 325]). „[...] in der Schulgeschichte der Anstalt wurde Diesterweg als einer der besten Lehrer der Schule und überhaupt als idealer Lehrer gerühmt.“ (zitiert nach [Warnecke 2004, S. 12]). Von Plücker selbst sind keine Bemerkungen über den Lehrstil Diesterwegs bekannt. In einem Brief von L. I. Magnus[46] an Plücker findet sich aber ein interessantes Postskriptum bezüglich Diesterweg. Der Brief datiert vom 25.12.1834:

„PS. Von Diesterweg ist ein neues Opus erschienen betitelt: Zur geometrischen Analytik, und etwa neun Bogen stark. Wieder einzelne Aufgaben mit ihrer Analytik, Determination, – etc. nach Art der

[43] Bis auf diese und eine weitere Stelle sind alle Hinzufügungen von Fritz Krafft vorgenommen. Vgl. Fußnote 12.

[44] (1782 - 1835).

[45] (1778 - 1836) Ab 1822 war Münchow auch Professor der Physik und Direktor des physikalischen Kabinets (vgl. [Toeplitz 1933, S. 325], [UABo PSV]).

[46] (1790 - 1861) Siehe Abschnitt 4.3.

> *Alten und auch nach seiner alten Art, d.h. langweilig.*

[NRC PC, Vol. 3A, Item 7]

Eine zweite interessante Bemerkung über Diesterweg findet sich in einem Brief von Wehmayer[47] an Plücker vom 25. April 1831. Dieser hatte in Bonn unter anderen bei Plücker und Diesterweg studiert und war dann nach Göttingen gewechselt.

> *„Die französische Schule der Mathematik scheint hier in Göttingen noch wenig Wurzel gefunden zu haben, und schon daraus werden sie ermessen, daß die meisten mathematischen Vorträge mit der gewohnten deutschen Ungenauigkeit, nach diesterwegscher Manier gehalten werden, und daß die meisten (es giebt hier wenigstens acht welche über Mathematik lesen) mit gewaltiger Vorliebe über Mathematik philosophieren, wie Diesterweg über seinen positiven und negativen Größen, statt zur Sache selbst zu schreiben."*

[NRC PC, Vol. 4, Item 7]

Toeplitz[48] bezeichnet die von Diesterwegs und Münchows Professuren geprägte Phase der Mathematik in Bonn als „erste Periode" und charakterisiert sie wie folgt:

> „Die Vorlesungen in dieser *ersten Periode* erstreckten sich vorwiegend auf elementare Gegenstände der Algebra, Geometrie und Triogonometrie, daneben Kegelschnittlehre, sowie auf Interpretation von Schriften des Apollonius von Seiten Diesterwegs. Von höherer Mathematik wurde nur analytische Geometrie, Differential- und Integral-Rechnung, bisweilen analytische Mechanik vorgetragen; die Zuhörerzahlen gingen für elementare Mathematik bis auf 50, für höhere Mathematik bis gegen 20 Studierende."

[Toeplitz 1933, S. 325]

Plücker immatrikulierte sich am 26. Oktober in Bonn für den Studienbereich Kameralia [UABo Matr, Sig. AB-01 - 1820, Nr. 66]. Eine Exmatrikel ist in den Unterlagen des Universitätsarchivs Bonn leider nicht vorhanden, so dass sich nicht mehr herausfinden lässt, welche Vorlesungen Plücker in Bonn besuchte. Angeboten wurden im WS 1820/21 von Diesterweg Vorlesungen zur Elementarmathematik, zu Anwendungen der Algebra auf Geometrie sowie eine Vorlesung mit dem Titel „Erklärungen des Buchs des Apollonius von Perga über die Berührungen". Im gleichen Semester las Münchow über mechanische Wissenschaften sowie über Astronomie. Im SS 1821 las Diesterweg unter anderem über Elementargeometrie nach Euklids Elementen und über Arithmetik nach Hauffs Lehrbuch. Münchow kündigte eine Vorlesungen über Trigonometrie und über Astronomie sowie zusätzlich eine Vorlesung über „analytische Geometrie oder höhere Algebra" an. Welcher dieser beiden Schwerpunkte gewählt wurde, ist leider unklar. Trotzdem ist es bemerkenswert, dass Münchow überhaupt den Titel „analytische

[47] Möglicherweise handelt es sich bei diesem Studenten Plückers um Hermann Johann Wehmeyer (1806 - 1838) (vgl. [Kössler 2008]).

[48] Der Artikel von Toeplitz fußt auf einem Manuskript von F. London (vgl. [Toeplitz 1933, S. 324]).

Geometrie“ benutzte. Plücker gibt später in seiner Vorrede zum zweiten Band der „Entwicklungen“ an, er sei durch Jean Baptiste Biots[49] „Essai de Géométrie analytique“[50] „in jene Behandlungsweisen der Geometrie, denen man in neuerer Zeit alle die großartigen Resultate verdankt, eingeführt worden“ [Plücker 1831, S. III]. Aus dieser Aussage wird leider nicht deutlich, wann und wo diese Einführung stattfand. Möglicherweise bezieht sich die Aussage auf Plückers Zeit in Paris, wo er Biot selbst kennenlernte. Es ist aber nicht ganz auszuschließen, dass Münchow dieses Buch als Grundlage seiner Vorlesung über analytische Geometrie benutzte[51].

2.3.3. Berlin

„Im Herbst des Jahres 1821 ging ich nach Berlin, wo ich auch meine schon begonnenen mathematischen und physikalischen Studien bei den Professoren [Johann Georg] Tralles, [Paul] Ermann [und] anderen Fachgelehrten fortsetzte, und habe bei ihnen auch eifrig zusätzlich praktische Übungen zur Architektur und Hydraulik besucht.
Nach Ablegung der vorgeschriebenen Fachprüfungen verließ ich Berlin und verweilte dann die Herbstmonate in Dresden und widmete mich dem Studium der freien [gemeint ist sicherlich: schönen] Künste; während des übrigen Teils des Winters unternahm ich entweder Reisen oder setzte meine wissenschaftlichen Studien zu Hause fort.“

Curriculum Vitae[12]

Am 24.10.1821 wurde Plücker unter der Nummer 79 des 12. Rektorats in die Matrikel der Friedrich-Wilhelms-Universiät zu Berlin[52] eingetragen und studierte dort, laut den Akten bis zum 03.11.1824[53]. Entgegen dieser Aussage verließ Plücker die Universität aber schon nach zwei Semestern. Welche Vorlesungen er in dieser Zeit besuchte, lässt sich Plückers Abgangszeugnis[54] entnehmen. Dieses datiert ebenfalls auf den 03.11.1824 und wurde von Plücker im Zusammenhang mit seiner Habilitation in Bonn beantragt (vgl. 3.1). Das Zeugnis bescheinigt Plücker, dass er

[49] (1774 - 1862).
[50] Die erste Ausgabe ist von 1802. 1817 fertigte Dr. Johann Thomas Ahrens (1786 - 1841) eine deutsche Übersetzung an. Näheres siehe 8.2.1.
[51] Dass Münchow französische Literatur zu einem gewissen Grad wahrnahm, lässt sich daran festmachen, dass er Plücker 1828 auf einen Artikel aus dem Bulletin des Sciences von Férussac aufmerksam machte (vgl. [Plücker 1831, S. VIf] und 12.2). Außerdem ist Biots Werk das erste, das den Ausdruck „analytische Geometrie“ im Titel trägt (vgl. 8.2.1).
[52] Seit 1949 Humboldt-Universität zu Berlin.
[53] Schriftliche Auskunft von Herrn Dr. W. Schulze vom 25.05.2011 (Universitätsarchiv Berlin).
[54] Von diesem liegt allerdings nur ein sehr schlecht lesbares Konzept vor [UABe RS A, 3.11.1824].

„I im Winter Semester
1821/22
1 allgemeine Physik bei dem
H[errn] *Pr*[ofessor] *Erman*
2 Mechanik bei dem H[errn]
Professor Tralles
II im Sommer Semester
1822
1 über Calderons el Magico
prodigioso u[nd] *Geschichte des*
... Dramas bei
dem H[errn] *Pr*[ofessor] *Schmidt regelmäßig besucht hat"*

[UABe RS A, 3.11.1824]

Die Vorlesung von Prof. Schmidt ist im Vorlesungsverzeichnis der Philologie zugeordnet und wurde dort wie folgt angekündigt:

> „Calderons Schauspiel el magico prodigioso erklärt derselbe [=Prof. Schmidt] Montags, Mittwochs, Donnerstags und Sonnabends um 12 Uhr (nach der kleinen Zwickauer Ausgabe) und verbindet damit eine Einleitung in die sämmtlichen Werke des Calderon"

[UABe VV, SH 1822]

Ob Plücker in Berlin mathematische Vorlesungen besuchte, lässt sich nicht mehr nachweisen.

2.3.4. Paris

> *„Schließlich habe ich mich, obgleich mir ein einträgliches Amt angeboten wurde Anfang März des Jahres 1823 auf den Weg nach Paris gemacht, da ich dem Studium der höheren Mathematik, der Astronomie und Physik den Vorzug gab. Ich habe die berühmtesten Vertreter dieser Wissenschaften aufgesucht, neben anderen nenne ich [Jean Baptiste] Biot, [Sylvestre François] Lacroix, [Louis] Thénard, [Siméon Denis] Poisson und [Augustin Louis] Cauchy, [Charles Louis][55] Dinet, von denen ich sowohl den öffentlichen [das heißt: offiziellen, für Studierende offenen] als auch den für eine größere Öffentlichkeit gedachten Vorlesungen beiwohne und deren speziellen Rat ich genieße.*
> *Paris, im Monat Juli 1823. Julius Plücker"*

Curriculum Vitae[12]

[55] Bis auf diese und eine weitere Stelle sind alle Hinzufügungen von Fritz Krafft vorgenommen. Vgl. Fußnote 12.

Plücker blieb – mit einer Unterbrechung – von März 1823 bis Anfang April 1825 in Paris. In den Monaten September bis November 1824 war Plücker in Bonn, um sich dort zu habilitieren. Auf Grund von Schwierigkeiten in der Beschaffung nötiger Dokumente, kehrte er dann aber für einige Monate wieder nach Paris zurück (vgl. 3.1).
In dem Lebenslauf, den Plücker mit seinem Habilitationsgesuch in Bonn einreichte, nannte er zusätzlich Dulong, Pouillet und Clement als Wissenschaftler mit denen er in Paris Kontakt aufgenommen habe (vgl. [UABo PF-PA416])[56]. Pierre Louis Dulong[57], ein Physiker und Chemiker, war ab 1820 Professor an der École Polytechnique und seit 1823 Mitglied der Académie des sciences. Nicolas Clément[58] war ebenfalls Physiker und Chemiker, Claude Pouillet[59] Physiker.
Für die Mathematik-Vorlesungen, die Plücker in Paris besuchte, kommen im wesentlichen drei Institutionen in Frage: die École polytechnique, die Pariser Universität Sorbonne und das Collège de France. Während die letzten beiden öffentlich waren, dürfte es Plücker kaum möglich gewesen sein, die École Polytechnique zu besuchen. Peter Gustav Lejeune Dirichlet[60], der etwa zur gleichen Zeit wie Plücker in Paris studierte, versuchte vergeblich die dafür nötige Erlaubnis zu erhalten.

> „He also asked for permission to attend lectures as a guest student at the famous *École Polytechnique*. But the Prussian *chargé d'affairs* in Paris refused to ask for such a permission without the special authorization from the Prussian minister of religious, educational, and medical affairs, Karl Freiherr von Stein zum Altenstein (1770 - 1840). The 17-year-old student Dirichlet from a little provincial Rheinisch town had no chance to procure such an authorization.“
>
> [Elstrodt 2007, S. 4]

Es ist anzunehmen, dass die Situation im Fall Plückers ähnlich war. Dennoch waren die Möglichkeiten des Studiums für Plücker in Paris weit besser als in Deutschland (vgl. [Toeplitz 1933, S. 324f], [Clebsch 1872, S. 9], [Elstrodt 2007, S. 4]). So standen ihm beispielsweise die Vorlesungen offen, die Biot und Lacroix[61] an der Sorbonne und am Collége de France hielten. Damit kam Plücker in direkten Kontakt zu Mathematikern, die sich mit analytischer Geometrie befassten. Lacroix's Lehrbücher zur „Application de l'algébre à la géométrie“ gehören zu den ersten Werken, die systematisch eine rein analytische Methode verwendeten (vgl. [Paul 1980, S. 234] und 8.2.1). Die Bedeutung die Plücker Biots „Essai de Géométrie analytique“ für sein Studium und später auch für seine Lehre und Forschung beimaß, wurde schon angesprochen (vgl. 2.3.2 und 9.1). Indirekt – nämlich durch dessen Schüler – kam Plücker in Paris auch mit der Schule Monges in Berührung, in deren Tradition er sich später ganz bewusst sah (vgl. [Plücker 1831, S. III u. 4], [Boyer 1956, S. 244f]). Unter anderen durch Plücker wurden

[56] *„[...] Parisiis deniqu per XVI menses vivorum celeberrimorum: Lacroix, Biot, Thenard, Dulong, Cauchy, Pouillet, Clement, scholar publicas adii, fingulorumque particulari fructus sum us[que] Mense Julio in patriam redii.“* [UABo PF-PA416].
[57] (1785 - 1835).
[58] (1779 - 1841), auch Nicolas Clément-Désormes.
[59] Claude Servais Mathias Marie Roland Pouillet (1790 - 1868).
[60] (1805 - 1859).
[61] Sylvestre François Lacroix (1765 - 1843).

die französischen Einflüsse später nach Deutschland gebracht. So schreibt beispielsweise ein ehemaliger Student[62] Plückers bedauernd aus Göttingen:

> *„Die französische Schule der Mathematik scheint hier in Göttingen noch wenig Wurzel gefunden zu haben* [...].
> [...]
> *Von analytischer Geometrie ist hier wenig die Rede, was mir um so unangenehmer ist, da mir dieser Theil der Mathematik durch Ihre Vorlesungen der liebste geworden ist."*

[NRC PC, Vol. 4, Item 7]

2.4. Marburger Promotion 'in absentia'

Noch von Paris aus ließ Plücker sich 1823 in Marburg promovieren.
Felix Krafft hat – aus Anlass einer Anfrage aus den USA – die Unterlagen zu Plückers Promotion in Marburger Archiven untersucht ([Krafft 2004])[63]. Er gibt den Ablauf, der zu Plückers Promotion führte, wie folgt wieder:
Dr. Ferdinand Wurzer[64], ordentlicher Professor der Chemie und Pharmazie an der Universität Marburg, wandte sich am 2. August 1823 schriftlich an die dortige philosophische Fakultät, mit dem Wunsch, Plücker die Doktorwürde zu erteilen. Er tat dies auf Anfrage von Carl Wilhelm Nose[65], einem Arzt und Mineralogen. Die Verbindung Nose – Wurzer führt Krafft auf die „gemeinsamen chemisch-mineralogische[n] Interessen" zurück, die

> „während seiner [Wurzers] Bonner Zeit sicherlich zu engen Kontakten zu dem dortigen Privatgelehrten Nose geführt haben."

[Krafft 2004, S. 418]

Nose hatte nach seiner Eheschließung mit Wilhelmina Reinhold geb. Honsberg eine Zeit lang in Elberfeld gelebt, „so daß", wie Krafft schließt,

> „enge Kontakte zwischen den Familien Nose/Hornberg und Plücker geherrscht haben werden, die Nose veranlaßt haben können, über seinen befreundeten langjährigen Weggefährten Wurzer in Marburg die Promotion

[62] Wehmayer an Plücker vom 25. April 1831. Vgl. Fußnote 47.
[63] Zu den Unterlagen siehe dort Fußnote 3, S. 416.
Die Dissertation wurde in den [P. Ges. math. Abh.] wieder abgedruckt. Schoenflies merkt zu dieser Edition an, dass die Schrift „von Clebsch in seiner Gedächtnisrede auf Plücker irrthümlich als Habilitationsschrift bezeichnet worden [sei]" [Schoenflies 1895, S. 591]. Krafft greift diese „Richtigstellung" wieder auf ([Krafft 2004, S. 415]), offensichtlich ohne sie zu überprüfen. Clebsch erwähnt in seiner Gedächtnisrede zwar tatsächlich keine Promotion, spricht aber auch von keiner „Habilitationsschrift"! Ihm wird mit dieser „Richtigstellung" also unrecht getan.
Schoenflies gibt weiter das Datum der Promotion an (31. August 1832), und erwähnt, das Plücker sich zu diesem Zeitpunkt in Paris befand [Schoenflies 1895, S. 591].
[64] (1765 - 1844).
[65] (1753 - 1835).

des jüngeren Julius Plücker [...] zu betreiben."

[Krafft 2004, S. 418]

Die Verbindung Plücker – Nose wird wohl bereits 1823 noch enger gewesen sein als Krafft vermutet, da Nose nur wenige Monate später, am 25.2.1824, die verwitwete Tante Plückers, Johanna Maria Stuttberg geb. Plücker, heiratete (vgl. [Giermann 2004, S. 68]).
Krafft führt weiter an, dass Wurzer nur kurze Zeit vorher als 'Prorektor' der „höchste Representant akademischer Selbstverwaltung" [Krafft 2004, S. 418] der Marburger Philipps-Universität gewesen sei; ein Umstand, der sicher auch für eine Promotion Plückers in Marburg sprach.
Wurzers Brief lagen Plückers Abhandlung (*„Generalem analyseos applicationem ad ea quae geometrieae altioris et mechanicae basis et fundamenta sunt e serie Tayloria deducit Julius Pluecker"*[66]) und ein *Curriculum vitae*[67] bei. Bereits am nächsten Tag (3. August 1823) stellte der amtierende Dekan Dr. Karl Franz Christian Wagner[68] den Antrag, Plücker zu promovieren, an die Fakultät. In den darauffolgenden Tagen wurden die Voten der Fakultätsmitglieder abgegeben; am 7. August entschied der Dekan Wagner:

> *„Es ist dem Gesuche des Candidaten zu willfahren."*

[Krafft 2004, S. 420]

Über die an der Entscheidung über die Promotion beteiligten Personen bemerkt Krafft:

> „Erstaunlich ist, daß nicht nur [...] Ferdinand Wurzer und Carl Wilhelm Nose keine Mathematiker waren, die die eingereichte Abhandlung hätten beurteilen können, sondern daß sich auch unter den votierenden Mitgliedern der Fakultät [...] kein Mathematiker befand.
> [...]
> Die sehr anspruchsvolle, im Mai 1823 fertiggestellte Abhandlung, in der der Versuch unternommen wird, Geometrie und Mechanik durch die allgemeine Anwendung der Analysis auf eine gemeinsame Basis zu stellen – schon damit leitete Plücker die Ablösung der in Deutschland dominierenden synthetischen Geometrie durch die analytische ein –, wird keiner von ihnen gelesen, geschweige denn begutachtet haben. Möglicherweise wären Flüchtigkeitsfehler und ein mathematisches Versehen von Fachleuten schon damals bemerkt worden.[69] Das einzige Urteil über die Arbeit im gesamten Verfahren, soweit es durch die Fakultätsakten dokumentiert wird, war Wurzers Hinweis, daß die „schöne Abhandlung" seinem Gesuch beiliege. Wilhelm Ernst sagt leider nicht, woher er den Hinweis erhielt, daß „ein Begutachter der Arbeit" damals gesagt hätte,

[66] Druckausgabe: *„Generalem...* Cum tabula aenea. Bonnae MDCCCXXIV. Ex Officina Bueschleriana apud Antonium Hackerum. II und 44 Seiten (UB Marburg, Signatur XIII b B) vgl. [Krafft 2004, S. 421, Fußnote].
[67] Dessen Übersetzung von Krafft ist zu Beginn der Kapitel 2.1 bis 2.3.4 wiedergegeben.
[68] ordentlicher Professor der griechischen und römischen Literatur und Professor der Eloquenz (vgl. [Krafft 2004, S. 419]).
[69] Krafft bezieht sich hier auf die Bemerkungen von A. Schoenflies zu den [P. Ges. math. Abh.] vgl. [Krafft 2004, S. 421, Fußnote].

> „daß die Abhandlung Plücker's von Nachdenken und recht guter Kenntnis der höheren Mathematik Zeugnis ablege, obgleich sich in derselben einige Behauptungen fänden, denen sich mancherlei würde entgegensetzen lassen.“ [Ernst 1933, S. 7] “[70]
>
> [Krafft 2004, S. 420f]

Neben einigen anderen Professoren der philosophischen Fakultät war erstaunlicherweise auch der ordentliche Professor der Mathematik, Physik und Astronomie Christian Ludwig Gerling[71] nicht an der schriftlichen Abstimmung beteiligt.[72]
Durch den Vizekanzler Georg Friedrich Carl Robert wurde die Promotion am 28. August 1823 vollzogen. Die Promotionsurkunde ist auf den 30. August ausgestellt. Entgegen der Ankündigung von Wurzer, dass der Druck der Abhandlung unverzüglich in Paris erfolgen würde, wurde sie erst 1824 in Bonn gedruckt.

[70] Diese Aussage findet sich in einem Schreiben des damaligen Dekans der philosophischen Fakultät in Bonn, v. Münchow, an die Fakultät, im Zusammenhang mit der Habilitation Plückers. Dieses Schreiben datiert vom 11. Februar 1825 und befindet sich in der Personalakte Plückers [UABo PF-PA416]. Folglich steht diese Bemerkung in keinem Zusammenhang mit dem Promotionsverfahren, auch wenn dies bei Wilhelm Ernst so scheint.

[71] (1788 - 1864).

[72] Krafft gibt Rivalitäten zwischen Wurzer und Gerling als möglichen Grund hierfür an [Krafft 2004, S. 422]. Fälschlicherweise wird Gerling bisweilen als Doktorvater Plückers angegeben (vgl. z.B. das „Mathematics Genealogy Project“, http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/ 03.09.2014).

3. Bonn 1825 - 1832

3.1. Habilitation in Bonn

Als Plücker 1824 sein Habilitationsgesuch in Bonn einreichte, befand er sich noch immer in Paris. Sein Schreiben datiert vom 15. August 1824.[73] Der damalige Dekan der philosophischen Fakultät, Heinrichs,[74] legte das Gesuch bereits am 18. August 1824 der philosophischen Fakultät vor:

> „*Philosoph. Fac.*   *Habilitationsgesuch*
> *Dr. Plücker*
>
> *Ein neues Habilitationsgesuch lege ich der verehrten Fakultät vor, vom Doctor Plücker, aus Elberfeld, der mathemat*[ische] *u*[nd] *physikal*[ische] *Vorlesungen zu halten wünscht. Er reicht ein 1) Bittschrift (recht schlecht verfasst,) 2) curric. vitae, 3) gedruckte Dissertation, u*[nd] *4) Diplom von Marburg.* [...][Es kann] *vorerst nichts weiter geschehen, als daß das Gesuch dem Herrn Regierungsbevollmächtigten per Decanum vorgelegt u*[nd] *dessen Erklärung über das Leben u*[nd] *die Verhältnisse des Dr. Plücker erwartet werde.*
>
> *Bonn, 18 August 24*
>
> *Heinrichs“*

[UABo PF-PA416]

Unter dem Schreiben befinden sich die undatierten Voten der Fakultätsmitglieder. Von Münchow erbat sich *„nach eingeholter Erklärung des H*[errn] *Reg*[ierungs] *Bevollm*[ächtigten]*“*, die Dissertation, welche er bisher *„um die Sache nicht aufzuhalten, nur flüchtig gelesen* [hatte]*, zur genaueren Durchsicht“* [UABo PF-PA416]. Diesterweg schloss sich dieser Bitte an.
Am 24. August wurde das Gesuch von Heinrichs an den Regierungsbevollmächtigten *„expediert“*, am 30. August bekommt von Münchow die Dissertation mit der Bitte zugesandt, sie später an Diesterweg weiterzuleiten.
Als nächstes Aktenstück findet sich ein Brief Plückers, den er, wieder nach Deutschland zurückgekehrt an den Dekan der philosophischen Fakultät, von Münchow[75], richtet:

[73]*„d. XVIII ante Cal. Sept. MDCCCXXIV“* [UABo PF-PA416]. Wilhelm Ernst gibt fälschlicherweise September 1824 an [Ernst 1933, S. 7], diese Angabe wurde von anderen übernommen (vgl. z.B. [Krafft 2004, S. 422]).
[74]Dekan der philosophischen Fakultät im WS 1823/24 und SS 1824.
[75]Dekan im WS 1824/25 und SS 1825.

„Hochzuverehrender Herr Dekan!

„Durch das besondere Wohlwollen der hochansehnlichen philosophischen Fakultät glaubte ich meinen Wunsch, Vorlesungen auf der König. Rhein-Universität halten zu dürfen, schon erfüllt. Weil ich aber für den Augenblick das Berliner Universitäts-Zeugnis nicht aufweisen konnte, und der Zufall in der Beschaffung desselben eine Zögerung verursachte, so mußte ich meinen Lieblingsplan für den Winter aufgeben und faßte dafür den Entschl[uss] noch einige Monate für die Wissenschaft in Paris zuzubringen. Bei meiner Rückkehr wird sich Alles in Ordnung finden und ich bitte nur, daß jene Fakultät mir fernerhin ihre Gewogenheit beweise.
Mit der vollkommensten Achtung,

Ew. Hochwohlgeboren
gehorsamer
Dr. Julius Plücker

Endenich b[ei] *Bonn d*[en] *7. Nov. 1824“* [UABo PF-PA416]

Das Konzept des Berliner Abgangszeugnisses[76], datiert vom 3. November 1824[77], bescheinigt den Besuch von Vorlesungen bei den Professoren Ermann, Schmidt und Tralles im Wintersemester 1821/1822 und dem darauffolgenden Sommersemester. Die von Plücker abgelegten „vorgeschriebenen Fachprüfungen“[78] werden in dem Zeugnis nicht erwähnt; ihm wird neben dem regelmäßigen Besuch der Vorlesungen lediglich noch „gesittetes Betragen“ bezeugt und dass er von der Teilnahme an unerlaubten Verbindungen frei geblieben sei.
Der königliche außerordentliche Regierungs-Bevollmächtigte teilte der philosophischen Fakultät der Univesität Bonn in seinem Schreiben vom 3. Februar 1825 mit, dass er aus seinem *„Standpunkte nun weiter keine Bedenken mehr finde, daß der Dr. Plücker zur Habilitations-Leistung als Privat-Docent zugelassen werde“* [UABo PF-PA416]. Der Dekan von Münchow wandte sich daraufhin mit folgendem Schreiben an die Fakultät:

„Die Habilitationsangelegenheit des H[errn] *D. Plücker ist, wie meine verehrten H*[erren] *Fac*[ultäts]*-Genossen aus dem in der Anlage befindlichen Schreiben des H*[errn] *Reg*[ierungs] *Bevollm*[ächtigten] *ersehen werden, nun so weit gediehen, daß die Facultät in derselben einen Beschluß faßen kann. Ich frage daher ergebenst an: ob die hochlöbliche Facultät es genehmige, daß der D. Plücker zum Behuf seiner Habilitation über den Regenbogen eine Vorlesung in deutscher Sprache vor derselben halte?*

Ohne den verehrlichen Votis vorgreifen zu wollen bemerke ich als Sachkundiger, daß die uns vorgelegte Abhandlung des p[79] *Plücker von Nachdenken und recht guter Kenntniß der höheren Mathematik zeugt, obgleich*

[76] [UABe RS A].
[77] In den Matrikeln der Universität Berlin wird Plücker ebenfalls bis zum 03.11.1824 als Student geführt.
[78] vgl. Curriculum Vitae Marburger Dissertation (s.o.).
[79] Abkürzung für „Petent“ (= jemand, der eine Eingabe macht).

sich in derselben einige Behauptungen finden, deren sich mancherlei würde entgegensetzen lassen. Was aber den zur Vorlesung in Vorschlag gebrachten Gegenstand betrifft, so scheint mir derselbe in Beziehung auf diejenigen Lehrfächer, auf welche sich der p Plücker auszudehnen beabsichtigt, allerdings sehr passend, da er zu tieferen Prüfungen sowohl in der Physik als Mathematik einen guten Anlass bietet.

Bonn, d. 11ten *Februar 1825*
v. Münchow"

[UABo PF-PA416]

Die darunter abgegebenen Voten sprechen sich alle für die Genehmigung aus; Prof. Welcker mit der Bemerkung, *„daß H*[err] *Dr. Plücker anzuhalt*[en] *wäre, seine Disputation der Bibl*[iothek] *zu geb*[en]*."*
Anfang April 1825 kehrte Plücker aus Paris zurück, mit dem Wunsch sobald wie möglich habilitiert zu werden.
Von Münchow schlug der Facultät zuerst den 27. April als Datum der Habilitationsvorlesung vor. Da auf diesen Tag aber der Buß- und Bettag fiel, wurde die Vorlesung auf den 28. April verschoben.
Prof. Heinrich fügte seinem zustimmenden Votum die Bemerkung bei, dass er voraussetze, *„daß der Habilitant die statutenmäßige Gebühr von 5 Friedrichsd'or an die Facultätskasse erlegen wird, deren altes Deficit durch diese Einnahme endlich in Richtigkeit gebracht werden kann."* [UABo PF-PA416]
Der Bericht über Plückers Vortrag lautet wie folgt:

„Verhandelt Bonn d. 28ten April
Zu der mit heute morgens um 10 Uhr angesetzten Habilitationsvorlesung des H[errn] *Dr. Plücker, deren Inhalt die Theorie des Regenbogens ausmachen sollte, fanden sich von den Mitgliedern der Facultät ein, außer dem Dekan:*

1. *d. H. Prof. Windischmann.*
2. *——— Diesterweg.*

Als bei längerem Warten ferner kein Mitglied erschien, wurde der H[err] *Dr. Plücker aufgefordert seine Vorlesung anzufangen.*

Nach geschehener Vorlesung wurden zuerst Einwürfe und Fragen physikalischer Art und darauf dergleichen mathematischer Art von dem Decan gemacht. Nächstdem schloss der H[err] *Professor Diesterweg hieran noch einige mathematische Fragen. Während denselben kam der H*[err] *Prof*[essor] *Delbrück zur Versammlung.*

Das Resultat der Berathung fiel, nach dem der H[err] *Dr. Plücker abgetreten war, dahin aus, daß derselbe sich vollkommen dazu qualificiere nun als Privatdocent in den mathematisch physikalischen Wissenschaften antreten zu können."*

[UABo PF-PA416]

3.2. Außerplanmäßige Professur in Bonn

Nachdem Plücker fünf Semester lang in Bonn als Privatdozent gelehrt hatte, wandte er sich in einem Gesuch um Ernennung zum außerordentlichen Professor an das vorgeordnete königliche Ministerium der Geistlichen- Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten. Von diesem Gesuch berichtet der außerordentliche Regierungs-Bevollmächtigte Hüllmann der philosophischen Fakultät in seinem Schreiben vom 10. Oktober 1827 und bittet um ihr Gutachten[80].
Von Münchow, der damalige Prodekan[81], setze die Aufforderung mit folgendem Votum in Umlauf:

> *„Indem ich beikommende Aufforderung zu einer gutachtlichen Aeußerung über das Beförderungsgesuch des Dr Plücker in Umlauf setze, erlaube ich mir zugleich mein Votum zur Unterstützung des gedachten Gesuches abzugeben. Der Doctor Plücker hat seit Ostern 25 (in unsern Lectionskatalogen erscheint er wegen des Zeitpunktes seiner Habilitation erst ein Semester später), also eben so lange als die Professoren Pugge' und Müller, auf unserer Universität Vorlesungen gehalten, die niemals unbesucht geblieben sind, welches bei Vorlesungen über Gegenstände der höhern Mathematik schon etwas mehr sagen will, als bei manchen anderen Vorlesungen; er hat ferner in diesen Vorlesungen, so weit ich in den letzten beiden Semestern mich darüber habe unterrichten können, seine auch schon urtheilsfähigen Zuhörer befriedigt; er hat endlich, wie die Beilage ausweist[82] (die übrigens nur die erste Abtheilung eines analytisch-geometrischen Werkes enthält, dessen Abdruck im Laufe des nächsten Vierteljahres beendigt seyn wird)[83] auch durch eine sinnreiche und eigenthümliche Behandlungsweise der Ableitung analytisch-geometrischer Formen zur Erweiterung seiner Wissenschaft einen schätzbaren Beitrag geliefert; er scheint mir demnach derjenigen Beförderung vollkommen würdig, um welche er gebeten hat, und durch welche er im Grunde doch weiter nichts, als die öffentliche Erklärung erhält, daß man ihn für einen brauchbaren Universitätslehrer ansehe.*
> *den 13. Obr. 27 vMünchow“*

Diesterweg gab als Nächster sein Votum ab:

> *„Ich bin mit Vorstehendem in so weit es die glückliche wissenschaftliche Thätigkeit des Dr. Plücker betrifft, ganz einverstanden. In Beziehung auf den Besuch seiner Vorlesungen und den Grad seiner Lehrgeschicklichkeit hat die Facultät keinen anderen Maasstab der Beurtheilung, als den, welchen das Verhältnis der angekündigten Vorlesungen zu den gehaltenen und die Zahl der Höhrer an die Hand giebt, einen Maasstab, wie er dem hohen*

[80] Dieser Brief, sowie die im Weiteren zitierten Akten befinden sich - wenn nicht anders angegeben - alle in Plückers Personalakte [UABo PF-PA416].

[81] Im WS 1827/1828 war Freytag Dekan der philosophischen Fakultät.

[82] Da das Schreiben des Regierungsbevollmächtigten auf keine solche Beilage hinweist, ist anzunehmen, das von Münchow sie seinem Votum beigefügt hat.

[83] Es handelt sich bei diesem Werk um den ersten Band der „Analytisch geometrische Entwicklungen“, von 1828. Bei der Beilage handelte es sich möglicherweise um eines der Exemplare, die „von den beiden ersten, einleitenden Abschnitten des ersten Bandes, bereits vor einiger Zeit schon [...] abgesondert worden sind.“ [Plücker 1828, S. VII].

Ministerium genau vorliegt. Ich halte deshalb dafür, daß darauf simplicitera verwiesen werde. Uebrigens hat meynes Erachtens die Facultät große Ursache sich auf die Empfehlung neuer Docenten, auch der geschicktesten, zu einer festen Anstellung an der hiesigen Universität, welche deren nicht dringend bedarf, nicht eher einzulassen, als bis die großen, mannichfaltigen und längst anerkannten Bedürfnisse, welche sich unter ihren eigenen Mitgliedern befinden, ihre Befriedigung haben finden können.
Diesterweg"

Von den übrigen Fakultätsmitgliedern erklärten sich die Herren Noeggerath, Schlegel und Nees v. Esenbeck d.J. für das Votum des Prodekans Münchow; Heinrich, Windischmann, Freytag und Calker stimmten für die ausdrückliche Aufnahme der Schlussbemerkung Diesterwegs in den Bericht an das Ministerium.
Von Münchow verfasste daraufhin diesen Bericht und nahm - im Sinn der Mehrheit - Diesterwegs Bemerkung darin auf. Gleichzeitig setzte er sich aber bei seinen Kollegen für eine Unterstützung des Plückerschen Gesuchs ohne einschränkende Bemerkung ein:

„[...] *Ich* [...] *bemerke in dieser Hinsicht folgendes:*

I das Ministerium wird den Grundsatz nicht anerkennen, daß ein Privatdocent solange keine Beförderung zum Extraordinarius erhalten solle, bis er dieselbe zur Ausfüllung einer Lücke im Unterricht erhalten könne. Eine solche Lücke muss stets durch einen Ordinarius gedeckt werden. Die Beförderung zum Extraordinarius bedeutet, wie ich auch schon früher bemerkte, weiter nichts, als die Anerkennung der Brauchbarkeit zum Lehrer eines bestimmten Fachs, und gibt dem Beförderten blos die Aussicht bei etwa künftig entstehenden Lücken im Unterricht berücksichtigt zu werden. Auch hat ja das Ministerium durch viele Beförderungen dieser Art schon gezeigt, daß es mit derselben nicht gerade die Abhaltung eines Bedürfnisses beabsichtige.

II Glaube ich auch, daß wir bei dem eingeschlagenem Verfahren für den Zweck desselben, nämlich der ferneren Vertheilung der Universitätseinkünfte zuvor zu kommen, um dieselbe zur Abhaltung der Bedürfnisse älterer Lehrer aufzusparen, nicht viel gewinnen dürften, wenn nicht die anderen Facultäten ein ähnliches Verfahren adoptiren, und wenn nicht zugleich das Ministerium sich auch geneigt findet, die etwaigen Ersparniss bei unserer Universität in der von uns gewünschten Weise zu verwenden.

Unter diesen Umständen scheint mir hart, ja in Beziehung auf den früher von mir angeführten Fall der Proff. Pugge´ und Müller sogar einigermaßen ungerecht zu seyn, wenn wir durch die in meinem Entwurf ausgeführten Schlussbemerkung der Beförderung des Dr. Plückers ein Hinderniss entgegenstellen.

Ich nehme mir daher die Freiheit zur Anbringung unserer Wünsche eine abgesonderte Vorstellung an das Ministerium in Vorschlag zu bringen, und in derselben darauf anzutragen, daß bei dem allerdings vorhandenen Andrange zum Lehramt für die künftigen Privatdocenten ausdrücklich eine gewisse Zeit als Regel aufgestellt werden möge, und zwar sowohl für die *erste Beförderung zum Prof*[essor] *extr*[aordinarius] *als auch für die zweite zum ersten Gehalte, innerhalb welcher sie keine Anspüche zu machen hätten. Als Veranlassung zu dieser Vorstellung können wir dann auch die von dem H[errn] Diesterweg angeführten Umstände ausführlich darstellen.*

Schließlich erlaube ich mir auch noch, um Missverständnissen vorzubeugen in Beziehung auf die von dem Dr. Plücker gehaltenen Vorlesungen die Bemerkung, daß mein geehrte H[err] *College darüber gewiss mit mir einig seyn werde, daß Vorlesungen über höhere Mathematik im Allgemeinen nur von wenigen Studierenden gehört werden, und daß man es daher schon als ein gutes Zeichen ansehen dürfte, wenn ein Privatdocent an einer Universität, wo jene Vorlesungen insgesammt und in steter Abwechslung von zwei angestellten Lehrern gehalten werden, für seine Vorträge noch Zuhörer findet.*

B[onn] *d*[en] *16t*[en] *Oktober 27* *v Münchow als z*[eitiger][84] *Prodecan"*

Nach den erneuten Voten der Fakultät fasste von Münchow am 17. Oktober den Beschluss, den entworfenen Bericht unverändert abzugeben, da sein Vorschlag keine Mehrheit gefunden hatte. Am 23. Oktober wurde der Bericht dem Geheimen Regierungsrat von Rehfues abgegeben:

„Ew. Hochwohlgeboren beehren wir uns auf die, unter dem 10ten d[es Monats] an uns ergangene Aufforderung zu einer gutachtlichen Aeußerung über ein Beförderungsgesuch des Dr. Plücker ganz ergebenst zu erwiedern:

daß wir zwar den Dr. Plücker der erbetenen Beförderung für vollkommen würdig erachten, daß wir inzwischen wünschen müssen, die hohe vorgeordnete Ministerialbehörde möge ihm dieselbe lieber auf einer anderen Universität gewähren, indem auf der hiesigen einestheils durch die vorhandenen angestellten Lehrer der Mathematik allen Forderungen des mathematischen Unterrichts schon hinlänglich Genüge geleistet wird, anderentheils aber es auch nicht rathsam scheint, zu neuen Ansprüchen an den Fond unserer Universität zu einer Zeit Veranlaßung zu geben, in welcher die dringenden Bedürfnisse mehrerer älterer Lehrer unserer Anstalt bisher noch keine Berücksichtigung erhalten konnten."

Welche Wirkung dieses Schreiben, das nicht einmal mehr einen Hinweis auf Plückers „Lehrgeschicklichkeit" und den Besuch seiner Vorlesungen enthielt, auf das Ministerium hatte, lässt sich nur daran ablesen, dass bis zu Plückers Ernennung zum außerordentlichen Professor in der philosophischen Fakultät der Universität Bonn noch ein ganzes Jahr verstrich.

In der Zwischenzeit erschien der erste Band der „Analytisch-geometrischen Entwicklungen", und der Kultusminister Karl von Altenstein[85] holte sich von August Leopold Crelle[86] ein Gutachten über den wissenschaftlichen Wert dieser Arbeit ein. Crelles Gutachten fiel sehr positiv aus,[87] es enthält sogar einen direkten Hinweis auf Plückers Eignung zum Universitätslehrer:

[84] das heißt „derzeitiger".

[85] Eigentlich Karl Freiherr vom Stein zum Altenstein, meist Altenstein genannt (1770 - 1840). Seit 1817 preußischer Kultusminister.

[86] (1780 - 1855).

[87] vgl. dazu [Eccarius 1980, S. 204 und 208ff], wo das Gutachten abgedruckt ist.

> *„Auch lässt die Schrift vermuthen, daß ihr Verfasser über seinen Gegenstand an einer Universtät nicht anders als mit wesentlichem Nutzen lehren dürfte.“*
>
> [Eccarius 1980, S. 211]

Es ist davon auszugehen, dass dieses Gutachten letztlich den entscheidenden Anstoß zu Plückers Beförderung lieferte. Der Bericht des Ministeriums der Geistlichen-, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten an die Fakultät, in dem die Ernennung mitgeteilt wurde, datiert vom 20. Oktober 1828.

3.3. Das Problem der Besoldung

Plückers Schwierigkeiten bei der Beförderung zum Extraordinarius in Bonn sind typisch für die Situation junger Wissenschaftler im 19. Jahrhundert. Privatdozenten waren unbesoldet und die von den Studenten entrichten Hörergelder reichten in der Regel nicht aus, um den Lebensunterhalt zu finanzieren. Wie auch aus den oben wiedergegebenen Akten hervorgeht, wurden gerade die Vorlesungen zur höheren Mathematik nur von einzelnen Studenten besucht[88]. Auch die Extraordinate waren in der Regel unbesoldet[89], boten aber immerhin bessere Chancen auf eine Anstellung als (bezahlter) Ordinarius. Dem Bestreben der jüngeren Mathematiker, eine Beförderung zu einer möglichst bezahlten Stelle zu erhalten, stand aber – wie im obigen Fall bei Plücker – oft der Widerstand der Fakultät entgegen. Durch eine Erhöhung der Anzahl der Lehrenden an einer Universität verringerte sich der Anteil jedes Einzelnen an den Hörergeldern der Studenten. Auch die Einnahmen aus Prüfungsgebühren wurden auf alle ordentlich angestellten Professoren verteilt, so dass die Beförderung eines Extraordinarius mit direkten finanziellen Einbußen der Fakultätsmitglieder einherging. Biermann berichtet für den Fall der philosophischen Fakultät in Berlin von der Tendenz, Stellen, welche durch den Tod frei geworden waren, unbesetzt zu lassen und zitiert Alexander von Humboldt[90], der diese Neigung treffend als „Lebens- und Nahrungsprinzip“ gekennzeichnet habe (vgl. [Biermann 1973, S. 39]).

> „Dieser Egoismus, der die wissenschaftlichen Erfordernisse ignorierte, ist durch die geringe Höhe der Gehälter verursacht respektive begünstigt worden.“
>
> [Biermann 1973, S. 39]

Ähnlich wie die Fakultätsmitglieder der philosophischen Fakultät der Universität zu Bonn dies recht offen in der oben wiedergegebenen Stellungsnahme ausdrückten – in der sie zwar Plückers Leistungen uneingeschränkt anerkannten, aber „neue Ansprüche an den Fond der Universität“ während „die dringenden Bedürfnisse mehrerer älterer Lehrer“ noch nicht berücksichtigt seien, nicht für rathsam hielten – scheute sich auch die philosophische Fakultät in Berlin nicht, diesen Sachverhalt offen anzusprechen. Biermann zitiert ein Aktenstück vom März 1833, in dem die Fakultät erklärte,

[88] So schreibt Felix Klein beispielsweise: „Ich habe 10 - 12 ständige Zuhörer, kann also sehr zufrieden sein. [...] es sind noch nie so viele Zuhörer gewesen.“ [NRC PC, Vol. 3B, Item 69].

[89] Hierbei gab es allerdings Ausnahmen; so war z.B. Plückers Extraordinariat an der Universität Berlin besoldet (vgl. Kapitel 4.2), später ebenso das von Steiner (vgl. [Biermann 1973, S. 39]).

[90] Friedrich Wilhelm Heinrich Alexander von Humboldt (1769 - 1859).

> „[...] die „Verteilung der Fakultätsgebühren“ ließe die Beschränkung der Zahl der Lehrstühle „noch immer höchst wünschenswert“ erscheinen.“
>
> [Biermann 1973, S. 39f]

4. Berlin 1832 - 1833

> Plücker erhielt „eine ausserordentliche Professur der Mathematik an der rheinischen Universität, die er bald darauf (1833) mit einer gleichen Stellung in Berlin vertauschte, wo er gleichzeitig am Kg. Friedr. Wilhelms-Gymnasium beschäftigt war. Es lag hierbei die Absicht vor, durch ihn ein dem bekannten französischen Polytechnicum in Paris entsprechendes Institut in Berlin zu gründen. Als jedoch dieser Plan sich zerschlug, erhielt Plücker eine ordentliche Professur der Mathematik an der Universität Halle (1834) [...]“[91]
>
> [Dronke 1871, S. 7]

Bereits 1829 lassen sich erste Bemühungen um eine Versetzung Plückers nach Berlin festmachen. Im Vergleich dazu hat Plücker dann nur eine sehr kurze Zeit in Berlin verbracht, nachdem er 1832 auf eine außerplanmäßige Professur an der Berliner Universität berufen worden war. Da Crelle bei dieser Berufung und auch zu anderen Zeitpunkten – wie bereits im Zusammenhang mit Plückers Ernennung zum außerplanmäßigen Professor in Bonn erwähnt – eine gewisse Rolle spielte, wird Crelles Rolle als Förderer junger Mathematiker im Folgenden kurz beleuchtet. Im Anschluss daran werden die Bemühungen vorgestellt, welche letzlich zu Plückers Versetzung nach Berlin führten. Außerdem wird das geplante Polytechnische Institut und Plückers Rolle in diesen Planungen diskutiert, sowie die damit in Verbindung stehende Frage nach dem Konflikt zwischen Plücker und Steiner.

4.1. August Leopold Crelle

> Crelle an Plücker (18. August 1834):
> *„Mein Leben war stets nur mit einem stürmischen, unfreundlichen Herbsttage zu vergleichen, der dann auch glücklicher Weise nur kurz ist.“*
>
> [NRC PC, Vol. 3A, Item 38]

[91] Plücker kam schon 1832 nach Berlin. Eine genauere Diskussion dieses Zitats findet sich im Abschnitt 4.4.2.

August Leopold Crelle (1780 - 1855)[92] gründete 1826[93] das *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, eine der ersten deutschsprachigen mathematischen Zeitschriften[94]. Eccarius stellt in einem Aufsatz[95] über Crelle als Herausgeber dieses Journals Funktionen vor, die eine wissenschaftliche Fachzeitschrift zu Beginn des 19. Jahrhunderts zu erfüllen hatte. In diesem Kontext sind besonders zwei dieser Funktionen wichtig:

1. „Förderung der Fachwissenschaft durch Veröffentlichung von Forschungsergebnissen, [...]

4. Organisation der Zusammenarbeit der Mathematiker auf nationaler und internationaler Ebene [...]“

[Eccarius 1976, S. 5]

Eccarius urteilt, dass Crelle den Anforderungen, die ein Herausgeber einer mathematischen Fachzeitschrift – besonders in deren Anfangsphase – erfüllen musste, in besonderem Maße gerecht geworden sei. Er verweist dafür unter anderem darauf, dass Crelles mathematische Interessen breit gefächert gewesen seien, er einen Überblick über viele mathematische Disziplinen und persönliche Beziehungen zu bedeutenden Vertretern der zeitgenössischen Mathematik gehabt habe und darüber hinaus auch gute Beziehungen zu staatlichen Stellen (u.a. Alexander von Humboldt) sowie zu der Berliner Verlagsbuchhandlung Reimer (vgl. [Eccarius 1976, S. 6ff]). Crelle war geheimer Oberbaurat im Ministerium des Inneren, später auch Mitglied der Oberbaudirektion. Nach seinem Entwurf wurde die Berlin-Potsdamer Eisenbahn gebaut. Sein Interesse für die Mathematik ist an seinen zahlreichen mathematischen Publikationen ablesbar. Darunter finden sich Lehrbücher der elementaren Mathematik und eine Übersetzung von *Legendres* Geometrie (vgl. [Lorey 1927, S. 5]). Allerdings behauptet Lorey, dass viele von Crelles Abhandlungen und selbständigen Schriften 100 Jahre später bereits vergessen gewesen seien. Crelles Hauptbedeutung habe „in dem, was er [...] organisatorisch für die Pflege der mathematischen Wissenschaft geschaffen habe“, gelegen [Lorey 1927, S. 5]. 1828 wurde Crelle ins preußische Kultusministerium versetzt, um dort in mathematischen Fragen zu beraten (vgl. [Lorey 1927, S. 7f]).
Laut Eccarius gelang es „Crelles Bemühungen vollauf [...], das Journal für die reine und angewandte Mathematik zur führenden Zeitschrift für die Weiterentwicklung der Mathematik [...] zu machen.“ [Eccarius 1976, S. 15]
Neben der Herausgabe des Journals, mit der Crelle jungen Mathematikern eine Möglichkeit bot, ihre Arbeiten zu veröffentlichen, setzte er sich auch direkt für diese Wissenschaftler ein, deren finanzielle Situation zu Beginn ihrer Karriere oft sehr prekär war

[92] Zu Crelle vgl. [ADB, Bd. 4, S. 589f], [Eccarius 1974] und [Lorey 1927].

[93] Das erste Heft erschien im Januar 1826. Eccarius gibt 1825 als Jahr der Gründung an (vgl. [Eccarius 1980, S. 197]).

[94] Es gab vorher schon – wenn auch kurzlebige – Zeitschriften dieser Art von Karl Friedrich Hindenburg (1741 - 1808). Diese können als die ersten deutschprachigen Fachzeitschriften zur reinen Mathematik angesehen werden (vgl. [ADB, Bd. 12, S. 456 - 457]). Zum einen war dies das „Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik“, das Hindenburg mit Johann Bernoulli III (174 - 1807) in den Jahren 1786 - 1789 herausgab. Zum anderen das „Archiv der reinen und angewandten Mathematik“, das in den Jahren 1795 - 1800 erschien.

[95] Dieser Aufsatz wurde anlässlich des 150jährigen Bestehens im Crelle Journal veröffentlicht und ist ein Auszug aus Eccarius Dissertation [Eccarius 1974].

(vgl. Kapitel 3.3). Zum Teil geschah dies über Gutachen, welche das Ministerium von Crelle zu veröffentlichten Werken einforderte (wie z.B. bei Plückers Beförderung zum Extraordinarius in Bonn), zum Teil aber auch durch direkte Eingaben und Gesuche beim Ministerium.

> „*Crelle* war kein führender Geist, aber ein begeisterter Jünger seiner Wissenschaft, und er besaß im höchsten Maße die Gabe, fremdes wissenschaftliches Verdienst zu sehen und richtig zu bewerten. So erkannte er, daß die seiner Umgebung angehörigen jungen Mathematiker *N. H. Abel, C. G. J. Jacobi* und *J. Steiner*, denen sich sehr bald noch *P. G. Lejeune-Dirichlet, J. Plücker* und *A. F. Möbius* zugesellten, neues frisches Leben in der Mathematik erwecken würden, und er schuf mit seinem Journal im richtigen Augenblick den erwünschten Sammelplatz für die zu erwartenden neuen Entdeckungen.“
> Crelle besaß „[...] die Kunst der Menschenbeurteilung und die Divinationsgabe für werdende große Talente [...]“

[Hensel 1926, S. 1f]

4.2. Versetzung nach Berlin

1828 wurde erstmals ein Artikel Plückers im neu gegründeten Crelle'schen Journal veröffentlicht. Vorher hatte Plücker zur Veröffentlichung seiner Aufsätze auf das von Gergonne herausgegebene französische Journal „Annales de Mathématiques Pures et Appliquées“ zurückgegriffen. Wie oben bereits dargestellt wurde, bot Crelle jungen Mathematikern nicht nur eine Möglichkeit, ihre Arbeiten durch sein Journal bekannt zu machen, sondern setzte sich auch darüber hinaus für ihre Belange ein. Dass auch Plücker sich bezüglich seiner schlechten finanziellen Situation bei Crelle um Unterstützung bemühte, lässt sich einem Brief Crelles an Plücker entnehmen. Dieses sehr kurze Begleitschreiben zu einem Heft des Journals, welches Crelle Plücker schickte, datiert vom 22. Dezember 1829. Weitere Briefe, die Crelle in dieser Zeit mit Sicherheit an Plücker gerichtet haben wird, sind leider nicht erhalten geblieben.

> *„Ew. Hochwohlgeboren*
>
> *bitte ergebenst das beikommende 2te Heft 5ten Bandes des Journals der Mathematik gütig an- und aufnehmen zu wollen.*
> *Ihre schöne Abhandlung über ein neues Prinzip der Geometrie wird so eben gedruckt und mit den anderen Abhandlungen wird schnell fortgefahren werden. Ich bitte ergebenst, nur mit der Zusendung fortzufahren. Ich werde mit dem Abdruck Ihrer schönen Arbeiten immer möglichst eilen, denn sie sind eine besondere Zierde des Journals.*
> *Ihre Wünsche behalte ich beständig im Auge und thue dafür alles was in meinen geringen Kräften ist. Von dem besten Willen allerdings können Sie*

überzeugt sein.
Mit ausgezeichneter Hochachtung habe die Ehre zu beharren

Ew. Hochwohlgeboren

ergebenster
Crelle"

[NRC PC, Vol. 3A, Item 37]

Die erwähnten Wünsche Plückers, für deren Erfüllung Crelle sich einsetzen wollte, betreffen wahrscheinlich eine besoldete Anstellung an einer Universität - wenn irgend möglich in Bonn.
Die erste Aussicht auf eine solche Beförderung bot sich Plücker aber weder in Bonn, noch in Preußen, sondern in den Niederlanden.
Im Mai 1829 wandte sich der Generalsekretär des Ministers des Inneren in den Niederlanden, Caspar Johann Wenckebach[96], über Plückers Onkel Carl Ludwig Pithan[97] mit dem Angebot einer Anstellung an einer niederländischen Universität an Plücker. Wenckebach, ein ehemaliger Studienkollege Pithans, hatte Plücker 1826 in dessen Elternhaus in Elberfeld kennengelernt. Wenckebach schreibt:

> „[...] *meine Aufmerksamkeit* [...] *ist ohnlängst aufs neue rege gemacht worden durch die, von ihm* [= Plücker] *herausgegebene Analytisch-Geometrische Entwicklungen worüber sowohl auswärtige Zeitschriften*[98]*, als namentlich zwei ausgezeichnete niederländische Gelehrte im Fache der Mathematik sich auf die entschiedenste Art als über ein Werk von hohem wissenschaftlichem Werthe erklärt haben. Und so ist der Gedanke in mir aufgekommen ob etwa dieser junge Gelehrte für mein Vaterland zu gewinnen sein möchte, zumahl da er, dem Vernehmen nach eine bisher unbesoldete Lehrerstelle an der Universität zu Bonn bekleidet. Bevor ich aber diesem Gedanken den Geringsten Erfolg gebe, und auch den Minister des Innern, bei welchem ich, wie du weißt, als General Secretär seit dem Jahre 1799 in Diensten stehe, auf diesen jungen Mann aufmerksam mache, habe ich nothwendig geachtet, erst nachzufragen, ob ihm ein Ruf ins Ausland angenehm sein und er demselben folgen würde.* [...]"

[NRC PC, Vol 4, Item 5]

Durch die besondere Förderung des mathematischen Studiums durch den König, so Wenckebach, sei zwar für die Zukunft ein Aufschwung in dieser Wissenschaft in den Niederlanden zu erwarten, vorerst sei es aber nötig, auswärtige Gelehrte zu berufen. Erst kürzlich habe der König einen Italiener berufen.

[96] (ca. 1764 - 1850).
[97] (1765 - 1832); allerdings ging Wenckebach davon aus, Plücker sei Pithans Vetter.
[98] Eine Besprechung findet sich z.B. in dem Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd.3, 1828, S. 422f.

> *„Infolge dieser Ansicht wende ich mich jetzt an dich mit der Bitte, mich über die vorstehende Frage deine oder vielmehr deines Vetters Antwort mitzutheilen, damit ich erfahre, ob ich meiner Idee die Aufmerksamkeit des Ministers auf ihn zu lenken nachgeben, oder dieselbe aufgeben muss. In dieser Bitte, wirst du auf jeden Fall nicht verkennen die Gesinnugen deines alten, aber noch immer mit jugendlicher Lebhaftigkeit an dich verbundenen Freundes*
>
> *J. Wenckebach“*

[NRC PC, Vol 4, Item 5]

Leider ist nicht bekannt, wie Plücker auf dieses Angebot reagierte; aber offensichtlich nahm er es nicht an. Es ist nicht auszuschließen, dass er sich diese Möglichkeit offenhalten wollte, aber er zog es vor, in Preußen zu bleiben. Indirekt lässt sich Plückers Antwort nur aus einem Brief[99] Crelles an von Altenstein entnehmen, da Crelle dieses Angebot einer ausländischen Behörde als Argument für die Notwendigkeit einer besoldeten Anstellung Plückers in Preußen benutzte. Er schrieb von Altenstein, dass Plücker ihm 1829 in einem Brief mitgeteilt habe,

> „[...] daß ihm jetzt vortheilhafte [An]erbietungen zur Anstellung an einer Niederländischen Universität gemacht worden wären, daß er es aber bei weitem vorziehen würde im Vaterlande und in Bonn zu bleiben, wenn ihm nur eine mäßige Besoldung daselbst zu Theil würde; [...]“

[Eccarius 1980, S. 211]

Eine solche Möglichkeit schien sich dann auch gegen Ende des Jahres 1829 abzuzeichnen: Plücker wurde von *„einem hohen Ministerium[100] [aufgefordert, sich] [...] um eine Stelle an dem Real-Gymnasium zu Berlin, bei dem Magistrate daselbst“* [SBPK Slg.D, Bl. 10] zu bewerben. Gleichzeitig wurde ihm zugesagt, dass er als außerordentlicher Professor an der Universität Berlin Vorlesungen halten dürfe. Daraufhin bewarb Plücker sich um diese Stelle und war offensichtlich von einer positiven Beantwortung seiner Bewerbung ausgegangen, denn er schreibt später an den außerordentlichen Regierungs-Bevollmächtigten zu Bonn, von Rehfues:

> *„Die darauf eingegangene Antwort war mir ganz unerwartet und bleibt mir noch jetzt unerklärlich. Ew. Hochwohlgeboren haben dieselbe vor ungefähr drei Monaten an ein hohes Ministerium auf hochderselben Verlangen eingesandt. Ein Weiteres ist darauf, soviel ich weiß, nicht erfolgt.“*

[SBPK Slg.D, Bl. 10][101]

Als am 1. Februar 1830 [Kössler 2008] durch den Tod des Professors Kannegiesser eine Lehrerstelle am Joachimsthaler Gymnasium in Berlin frei wurde, ergriff Crelle die Initiative:

[99] Dieser datiert vom 24. Februar 1830 und ist abgedruckt in [Eccarius 1980, S. 211ff].

[100] Es kann sich hierbei wohl nur um das Ministerium der Geistlichen-, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten handeln.

[101] Brief vom 15. Februar 1830.

„[...] Da mir [...] zu fürchten schien daß Herr Plücker am Ende doch nothgedrungen die Stelle im Auslande annehmen möchte, wodurch dann dem diesseitigen Dienste ein ausgezeichneter wissenschaftlicher Mann entgehen würde, so nahm ich, bei Gelegenheit der Erledigung der von dem verstorbenen Professor Kannegießer bekleideten Lehrstelle für die Mathematik am hiesigen Königl[ichen] Joachimsthalschen Gymnasio, Veranlassung, dem Geheimen Ober Regierungs Rath Schulze[102] gehorsamst anheim zu geben, ob nicht vielleicht Herr p. Plücker durch Übertragung dieser erledigten Stelle in eine passende Lage zu versetzen sein möchte. Da es hierbei darauf ankam, ob Herr Plücker sich zur evangelischen Kirche bekenne und sich auch berufen und geeignet fühle an einem Gymnasio mit stark besetzten Classen zu lehren, so legte ich, nach erhaltener Anweisung, dem Herrn p. Plücker diese beiden Fragen privatim vor. Derselbe antwortete hierauf so eben, daß er allerdings evangelischer Confession sei, daß er die Stelle an dem Joachimsthalschen Gymnasio zu Berlin, in der Voraussetzung daß sie in öconomischer Hinsicht für ihn vorteilhaft sein werde, obgleich für stark besetzte Classen seine Constitution, namentlich seine Brust schwach sei, zwar mit Dank annehmen würde, weil er glaube auf diesem Wege vielleicht eher zu dem ersehnten Ziele, zu einer festen Stellung als academischer Lehrer zu gelangen, daß es ihm aber viel lieber [sein] würde, wenn er in Bonn nur eine m[äßige] Besoldung erhalten und auf solche Wei[se in] seinem Wirkungskreise bleiben könnte, um weniger in seinen literarischen Arbeiten unterbrochen zu werden. Er habe bereits eine Eingabe an Ew. Excellenz durch den Herrn außerordentlichen Regierungs-Bevollmächtigten zu Bonn gemacht[103] und um die benannte Stelle hierselbst gebeten, in so fern ihm dort, selbst eine mäßige Besoldung nicht zu Teil werden könne.“

[Eccarius 1980, S. 211f]

Crelle betont im Weiteren wie wichtig es sei, Plücker für den preußischen Dienst zu erhalten und erwähnt den - bereits gedruckten - ersten Band der „Analytischen Entwicklungen“, Plückers Beiträge im Journal der Mathematik sowie ein im Druck befindliches Werk, den zweiten Band der „Entwicklungen“. Plücker habe „sich als einen denkenden Mathematiker, der fähig ist die Wissenschaft zu erweitern, gezeigt.“ Crelle plädiert dafür, Plücker in Bonn ein „wenn auch vor der Hand nur sehr mäßiges Gehalt, etwa mindestens von Dreihundert Thalern, zu bewilligen und ihn in seiner bisherigen Wirksamkeit [...] ferner zu lassen.“ Für die Wissenschaft könnte es leicht ein wesentlicher Verlust sein, wenn Plücker durch die Lehrertätigkeit, seine wissenschaftliche Arbeit unterbrechen müsse.

„Auch finden sich am Ende der tüchtigen Lehrer noch mehr als der Mathematiker, die nicht allein der Jugend sondern [auch] der Wissenschaft selbst nützlich werden können. Sollte es indessen nicht möglich sein, den Herrn p. Plücker jetzt in Bonn zu fixiren, so scheint es mir wünschenswerth,

[102] Johannes Schulze (1786 - 1869). Seit 1818 im preußischen Ministerium der Geistlichen-, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten. Dort war Schulze zuerst nur für die Gymnasien, später auch die Universitäten zuständig (vgl. [ADB, Bd. 33, S. 5-18]).

[103] [SBPK Slg.D, Bl. 10]; Brief vom 15. Februar 1830.

daß ihm die erledigte Stelle am hiesigen Joachimsthalschen Gymnasio zu Theil werde, von welcher er dann vielleicht gelegentlich zu einer academischen Lehrerstelle übergehen könnte, jedenfalls daß wo möglich auf irgend eine Weise Herr p. Plücker in Stand gesetzt werden möge, seine Dienste ferner im Vaterlande der Wissenschaft zu widmen.

Mit unbegrenzter Hochachtung und Ehrfurcht habe ich die Ehre zu beharren.

Ew. Excellenz
ganz gehorsamster
Diener
Crelle

Berlin
den 24.ten Februar
1830"

[Eccarius 1980, S. 212f]

Plücker bat in seinem Schreiben an von Rehfues ([SBPK Slg.D, Bl. 10]) - wie Crelle richtig berichtet - um die Stelle am Joachimstaler Gymnaiums

„[...] in dem Falle, daß dieselbe in ökonomischer Hinsicht vortheilhaft ist [...]. Ich setze hierbei voraus, daß ein hohes Ministerium mir auch hier, wie in dem frühern ähnlichen Falle „gestatte, daß ich zugleich als außerordentlicher Professor an der dortigen Universität Vorlesungen halte und mir dereinst auch in der Eigenschaft als Professor der Universität eine angemessene Besoldung neben meinem Lehrergehalte bewillige, wenn eine der für Mathematik bestimmten Professuren erledigt werden sollte"

Schließlich wiederhole ich den Wunsch hier bleiben zu können. Wenn ich mich um die in dem Vorstehenden bezeichnete Stelle bewerbe, so thue ich es nur weil ich allmählig alle Aussicht verloren habe, daß ein hohes Ministerium sich bewogen fühlen möchte, mir hier eine mäßige Besoldung zu verleihen wo ich alsdann meine litterarischen Arbeiten nicht zu unterbrechen brauchte und es mir möglich würde in einem Wirkungskreise zu bleiben, wo ich nützlich und in mancher Beziehung nothwendig zu sein glaube.

Ew. Hochwohlgeboren

Ganz gehorsamster Diener
Plücker, Prof[essor] extr[aordinarius]

Bonn am 15 Februar
1830"

[SBPK Slg.D, Bl. 10]

Ernst berichtet, dass Plücker am 17. März 1830 eine feste Besoldung bei einer inländischen Universität zugesichert wurde (vgl. [Ernst 1933, S. 21][104]). Weiter geschah aber vorerst nichts.
1831 erschien der zweite Band von Plückers „Analytisch-Geometrischen Entwicklungen“ und Plücker nutzte diese Gelegenheit, sich erneut um eine besoldete Anstellung zu bemühen. Ein Exemplar schickte er an Kortüm, den ehemaligen Rektor des Düsseldorfer Gymnasiums[105], der 1830 als Ministerialrat nach Berlin berufen wurde (vgl. [Kössler 2008]). Mit diesem Geschenk verband Plücker die Bitte, Kortüm möge sich in Berlin für ihn verwenden. Am 7. März 1831 antwortet Kortüm:

> *„Mein verehrter Herr Professor:*
>
> *Ihr verehrtes Geschenk habe ich* [...] *mit dem herzlichsten Danke empfangen. Ich bin überzeugt, das Buch wird Ihren wohlbegründeten gelehrten Ruf noch erhöhen und die Theilnahme für Sie, die ich hier wahrgenommen habe, gewiß noch vermehren. Es war mir eine sehr angenehme Pflicht, sogleich* [...] *mich zu erkundigen ob es nicht möglich sei, Ihre gerechten Wünsche zu berücksichtigen. Ich musste mich freilich überzeigen, daß es dazu in diesem Augenblicke an Mitteln und Gelegenheit fehlte, freute mich jedoch der Anerkennung, die man Ihren Leistungen wiederfahren ließ. In Folge Ihres Schreibens habe ich wiederholt mit H[errn] G[e]h[eimr]ath Schulze gesprochen – er hatte Ihnen schon geantwortet – ich darf seinen Versicherungen vollen Glauben schenken, daß er die erste sich darbietende Gelegenheit wahrnehmen wird, Ihnen hier einen Wirkungskreis zu eröffnen. Vielleicht, fügte er hinzu, fände sich dazu die Gelegenheit bald.* [...] *Ich bitte Sie, sich versichert zu halten, daß ich stets seyn werde*
>
> *Ihr*
> *ergebener Freund*
> *Kortüm“*

[NRC PC, Vol 4, Item 8]

Es dauerte dann allerdings noch etwas über ein Jahr, bis Plücker nach Berlin versetzt wurde. Die Schreiben, mit denen das Ministerium der Geistl., Unterrichts- und Med.-Angelegenheiten die philosophischen Facultäten der königlichen Universitäten Berlin und Bonn, von der Versetzungs Plückers in Kenntnis setzte, datieren vom 11. Mai 1832 ([UABe PF, Bl. 121], [UABo PF-PA416]). Plücker hatte möglicherweise schon vorher davon erfahren, denn als er am 24. Mai den Erhalt seines Versetzungs-Bescheids bestätigte, befand er sich schon in Berlin (vgl. [UABe UK, Bl. 73]).
Von den „vorschriftsmäßigen Habilitationsleistungen“ wurde Plücker auf seinen Wunsch hin entbunden, wie das Ministerium der Fakultät in Berlin am 30. Juni mitteilte [UABe PF, Bl. 123]. Neben der Stelle als außerordentlicher Professor an der Universität in Berlin wurde Plücker als Lehrer der Prima und Sekunda am Friedrich-Wilhelm-Gymnasium beschäftigt.

[104] Leider lies sich hierzu kein anderer Beleg finden.
[105] Vgl. Kapitel 2.2.2.

> „Ueber seine Anstellung an dieser Schule schrieb das Ministerium noch am 11. Mai 1832 an das Provincial-Schulkollegium in Berlin u.a.: „Wäre es möglich, zum Nachfolger des Prof. Pohl einen gleich tüchtigen Mathematiker, als der Prof. Plücker anerkannt ist, zu erhalten, welcher auch den Unterricht in der **dritten** Klasse übernehmen könnte und wollte, so würde das Ministerium im Einverständnis mit dem Provinzial-Schulkollegium einem solchen Mann den Vorzug vor Plücker geben. Allein das Ministerium hält es für sehr schwierig, einen solchen Mann zu ermitteln, da Professor Plücker nach dem Urteil aller Sachverständigen ein ausgezeichnetes mathematisches Talent besitzt, und da bei seiner Gewissenhaftigkeit zu erwarten ist, daß er auch als Gymnasiallehrer etwas Vorzügliches leisten werde, wenn er sich einmal entschlossen hat, auch in dieser untergeordneten Sphäre tätig zu sein. Das Ministerium will daher nach dem Vorschlage des Directors Spillecke[106] die Anstellung des Prof. Plücker mit einem Jahresgehalte von 600 Thlr. als Lehrer der Mathematik in den beiden oberen Klassen des Friedrich-Wilhelm-Gymnasiums hierdurch genehmigen. Prof. Plücker ist zugleich als a.o. Professor bei der Philosophischen Fakultät der hiesigen Universität, jedoch vorläufig ohne fixierte Besoldung, angestellt.“
> Auf Plücker's Vorstellung wurde ihm nachträglich doch [...] eine feste Renumeration von 200 Thlr. bewilligt.“

[Ernst 1933, S. 20f]

Wie bereits im Kapitel 3.3 dargestellt wurde, waren Plückers Schwierigkeiten, eine besoldete Anstellung zu bekommen, nicht ungewöhnlich. Obwohl seine wissenschaftlichen Leistungen durchaus anerkannt wurden, dauerte es einige Jahre, bis seine Versetzung nach Berlin tatsächlich zustande kam. Aber auch diese Anstellung konnte eigentlich nur als eine Übergangslösung[107] betrachtet werden. Eine dauerhafte oder alleinige Tätigkeit als Lehrer hat Plücker wohl nie in Erwägung gezogen.

4.3. Zeit in Berlin

In dem oben wiedergegebenen Brief des Ministeriums an das Provincial-Schulkollegium in Berlin wird erwähnt, dass Direktor Spilleke die Anstellung Plückers am Friedrich-Wilhelm-Gymnasium mit einem Jahresgehalt von 600 Talern vorgeschlagen hatte. In den Schulnachrichten über das Schuljahr 1932-33 spricht sich Direktor Spilleke sehr lobend über Plücker aus:

> „Gleich bei dem Anfange des neuen Schuljahrs schied aus unserem Kreise Herr Professor Pohl, um einem ehrenvollen Rufe an die Universität Breslau zu folgen. [...] – An seine Stelle trat Professor Dr. Plücker, bis dahin außerordentlicher Professor der Mathematik an der Universität zu Bonn, indem ihm zugleich dieselbige Auszeichnung an der hiesigen Universität zuteil wurde.

[106] August Gottlieb Spilleke (1778 - 1841).

[107] Allerdings war es durchaus üblich, dass Mathematiker zeitweise Lehrer waren. Der Abstand zwischen einem Lehrer an der Schule (diese trugen häufig auch den Titel „Professor“) und einem Professor an der Universität war nicht so groß.

> Er ist der gelehrten Welt durch seine „Analytisch-geometrischen Entwicklungen“ 2 Bände, 4.[108] so wie durch seine Beiträge zu Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik[109], von der rühmlichsten Seite bekannt. Bei der Gründlichkeit seines Unterrichts, so wie bei der Humanität und Milde, mit der er seinen Schülern begegnet, kann seine Wirksamkeit an der Anstalt nicht anders als mit sehr glücklichem Erfolge begleitet seyn.“

[SP Berlin 1833, S. 43f]

Plücker unterrichtete – anders als in dem Schreiben des Ministeriums angegeben – neben Mathematik auch Physik in den oberen beiden Klassen. Während die Schulnachrichten bezüglich des Unterrichts in Physik sehr vage bleiben (Plücker lehrte in der Prima über den „allgemeinen Theil der Physik“ und in der Secunda gab er einen „allgemeinen Überblick der ganzen Physik“), werden für seinen Unterricht der Mathematik einzelne behandelte Themen aufgezählt. Hier fällt neben der ebenen sowie sphärischen Trigonometrie und Algebra – Themen die auch von anderen behandelt wurden – besonders auf, dass Plücker in der Prima „die ersten Elemente der analytischen Geometrie und ihre Anwendung auf Parabel, Ellipse und Hyperbel“ behandelte (vgl. [SP Berlin 1833] und [SP Berlin 1834]).
Ob Plücker an der Universität bereits im Sommersemester 1832 Vorlesungen hielt, ist nicht bekannt, da das Semester schon begonnen hatte, als Plücker nach Berlin kam (vgl. [Biermann 1973, S. 47]). Im Wintersemester 1832/33 las er öffentlich über ebene und sphärische Trigonometrie, sowie privat über analytische Geometrie und Mechanik nach Poisson. Im Sommersemester 1833 hielt er eine viermal wöchentlich stattfindende private Vorlesung über Algebra und einmal wöchentlich las er über Elemente der Variationsrechnung und ihre Anwendung auf geometrische und mechanische Aufgaben ([UABe VV, SoSe 1833 - SoSe 1834], vgl. auch [Biermann 1973, S. 47]). Für das Wintersemester 1833-34 kündigte Plücker zwar noch eine Vorlesung über Elemente der analytischen Geometrie und ihre Anwendung auf die Kurven und Flächen der zweiten Ordnung an, verließ die Universität aber bereits im November, nachdem er einen Ruf nach Halle erhalten hatte (vgl. [Biermann 1973, S. 47]).
Zwischen Mai 1832 und November 1833 befand sich Plücker somit im Zentrum des wissenschaftlichen Geschehens und konnte direkte Kontakte zu anderen Mathematikern pflegen. Allerdings lässt sich aus den wenigen vorhanden Quellen aus dieser Zeit entnehmen, dass Plücker mit seiner Situation in Berlin nicht zufrieden war. Offenbar dachte Plücker wiederholt darüber nach, Berlin zu verlassen, auch wenn dies im Einzelnen nicht mehr nachzuweisen war. So ging in Bonn beispielsweise das Gerücht um, Plücker habe einen Ruf nach Kiel angenommen. Ludwig Schopen[110] schrieb Plücker am 8. Mai 1833:

> „[...] *Ich bin sehr begierig, einmal etwas von dir zu hören. Schreibe mir doch, wie es dir geht und ob es dir noch immer in Berlin gefällt. Hier ging*

[108] Quartformat.
[109] Dieses wurde in der Lehrerbibliothek der Schule gehalten [SP Berlin 1833, S. 48].
[110] (1799 - 1867). Schopen hatte bis 1817 das Gymnasium in Düsseldorf besucht (vgl. [SP D.dorf 1817]) und Plücker dort möglicherweise bereits kennengelernt. Schopen studierte Geschichte und Philologie; war als Lehrer am Gymnasium in Bonn und ab 1840 auch an der Universität Bonn tätig.

einmal das Gerede, du habest den Ruf nach Kiel angenommen. Ich kann es unmöglich glauben. [...]*"*

[NRC PC, Vol. 4, Item 9]

Leider gibt es – außer den Unterlagen zur Berufung Heinrich Ferdinand Scherks[111] – keine Akten mehr zu dem Berufungsverfahren in Kiel 1833[112]. Daher lässt sich nicht feststellen, ob Plücker dort überhaupt im Gespräch war. Es ist aber sehr unwahrscheinlich, dass Plücker einen Ruf nach Kiel abgelehnt hätte. Nur sehr kurze Zeit später nahm Plücker den Ruf nach Halle an, um dort die durch Scherks Abgang freigewordene Stelle zu übernehmen. Außerdem lässt sich dem im Folgenden zitierten Brief entnehmen, dass Plücker tatsächlich an dieser Stelle interessiert war. Dieser Brief, den von Münchow im Juli 1833 an Plücker schrieb, enthält auch weitere Hinweise auf Plückers Situation in Berlin:

Mein theurer Freund!

Endlich eine Nachricht von Ihnen, aber freilich eine minder angenehme als ich nächstens wenigstens zu erhalten hoffte. Ich hatte mir nämlich Ihr bisheriges Stillschweigen auf eine vergleichungsweise angenehmere Lage als Ihre hiesige war, gedeutet; ich war in dieser Deutung durch Heinen[113]*, den ich auf meiner Rückreise in Coblenz traf und der sich für gut unterrichtet von ihren dortigen Verhältnissen glaubte, befördert worden, und ersehe nun zu meinem Leidwesen aus Ihrem Briefe das Gegentheil. Aber kann denn Kortüm nicht wenigstens soviel bewirken, daß man beim Gymnasium mehr Gerechtigkeit gegen Sie beobachtet? Ich fürchte, mein Freund Sie scheuen sich zu sehr am rechten Orte häufiger von Ihren Angelegenheiten zu sprechen. Ins besondere dürfen Sie S.*[114] *nicht schonen. Hat er Ihnen Versprechungen gemacht, so müßen Sie fleißig daran erinnnern, damit sie wenigstens nicht in eine ihm stets willkommene Vergessenheit kommen. Schade, daß ich nicht einige Zeit in Berlin seyn kann, um Ihre Sache, wo möglich in den rechten Gang zu bringen. Sie scheinen sich vom Verkehr der Menschen zu sehr zurückzuhalten. Wer vorwärts will, muß sich an vielen Orten umsehen. Wie stehen Sie denn mit (A.) Humboldt?*

Wenn freilich Gauß einen anderen protegiert, so haben Sie nach Göttingen keine Aussicht. Mir fällt jedoch gerade jetzt Niemand ein, dessen er sich aus persönlichen Rücksichten besonders annehmen sollte. Die Vorschläge zur Besetzung der Ordinarstellen gehen in Göttingen von der Facultät aus, und da Gauß gegenwärtig der einzige Mathematiker in der Facultät seyn wird, so müssen Sie selbst durch ihn in Vorstellung gebracht worden seyn, wenn es anders mit diesem Vorschlag seine Richtigkeit hat. Wie wäre es,

[111] Scherk (1798 - 1885) war von 1831 bis 1833 ordentlicher Professor der Mathematik in Halle, von 1833 - 1852 in Kiel.

[112] Auskunft vom 31.01.2013 von Frau Dr. Dagmar Bickelmann, Landesarchiv Schleswig-Holstein.

[113] Franz Heinen (1807 - ca. 1870) studierte in Bonn bei Plücker, veröffentlichte bereits während seiner Studienzeit eine Arbeit in Crelle's Journal (Bd. 3), promovierte 1835 bei Plücker in Halle und war später als Oberlehrer bzw. Schuldirektor in Trier, Cleve und Düsseldort tätig (vgl. [Kössler 2008], [Dronke 1871, S. 7], [Warnecke 2004, S. 29] und [Ernst 1933, S. 11]).

[114] Sicher ist hier der Geheime Oberregierungsrat Schulze gemeint. Vgl. Fußnote 102.

wenn Sie an Gauß schreiben, ihm die unangenehmen Verhältnisse in denen Sie in Berlin stehen, offen darstellten, ihm dabei zu gleicher Zeit bemerklich machten, daß Sie mit nur geringem Zutrauen der nächsten Zukunft entgegensehen könnten, weil man Sie bisher schon mit guten Zusagen getröstet, die man unerfüllt gelaßen; und ihn bitten sich für Ihre Anstellung in Göttingen zu verwenden? Warum wollten Sie denn nicht dies einemal einen durchaus unschädlichen Schuß ins Blaue wagen? Entschließen Sie sich nur aber schnell!! – Sollte übrigens Scherk, wie Sie schreiben, nicht nach Kiel gehen[115]*, so schreiben Sie mir ja sogleich, wenn Sie dieß gewiß erfahren. Dann läßt sich durch Brandis*[116] *und Schumacher etwas thun. Ja ich glaube, nach allem was ich von Brandis gehört habe, Ihnen dann eine ziemlich sichere Aussicht zur Kieler Professur versprechen zu können.*

[...]

Ich hatte indessen auf eine gewisse jugendliche Freundlichkeit, die ich bei ihm [d. i. Dirichlet[117]] *wahrzunehmen glaubte einige Hoffnung für Sie gebaut. Es schien mir, daß er sich freuen müßte, einen jüngeren Mann, wie Sie sind, zum Gefährten zu bekommen. Um so mehr bekümmert mich nun zu erfahren, daß ich falsch gerechnet hatte. Von C[relle] wissen Sie, daß ich nicht viel für Sie erwartete. Er ist wissenschaftlich befangen durch französische und andere Autoritäten. Traut sich in vielen Dingen ein Urtheil zu, in denen ihm zur vollständigen Befähigung doch noch etwas mangelt, und urtheilt dagegen in manchen andern rein*[?] *nach einem Vorgange von Ansehen*[?]*.*

[...]

Ich meinestheils wünsche zur Verbesserung Ihrer Verhältnisse etwas beitragen zu könnne. Um so lieber würde mir es seyn wenn mir Ihr nächster Brief Nachrichten von einigen seitdem wirklich schon eingetretenen Verbesserungen bringen könnte. Leben Sie wohl und vergessen Sie nicht

Ihren Freund
Münchow

Bonn d. 3. Juli 1833"

[NRC PC, Vol. 4, Item 10]

Worin die Ungerechtigkeit gegen Plücker an seinem Gymnasium bestand, lässt sich nicht mehr feststellen. Genauso können über die Versprechungen des Geheimen Oberregierungsrats Schulze nur Vermutungen angestellt werden. Möglicherweise handelt es sich dabei um die „zugesicherte feste Besoldung bei einer inländischen Universität", welche Plücker laut Ernst bereits am 17. März 1830 versprochen worden war (vgl.

[115]Scherk führte in Halle Bleibeverhandlungen um ein höheres Gehalt, in denen er aber keinen Erfolg hatte (vgl. [Warnecke 2004, S. 43]).

[116]Christian August Brandis (1790 - 1867) war ordentlicher Professor der Philosophie in Bonn (vgl. [ADB, Bd. 3, S. 245].

[117]Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859). Möglicherweise hatten sich Plücker und Dirichlet bereits in Paris kennengelernt, da Dirichlet dort ebenfalls (1822 - 1826) studierte (vgl. [Elstrodt 2007, S. 4, 8]).

[Ernst 1933, S. 21]). Es ist aber auch nicht ganz auszuschließen, dass diese Versprechungen im Zusammenhang mit dem geplanten Institut standen (vgl. Kapitel 4.4.1).
Plückers wissenschaftliche Beziehungen – wie beispielsweise zu Dirichlet – gestalteten sich also nicht so gut wie zuerst erhofft. Auch seine Erwartungen bezüglich einer weiteren Beförderung in Berlin wurden nicht erfüllt. Aber mit Ludwig Immanuel Magnus[118], knüpfte Plücker in Berlin Kontakte, die zu einer langen Freundschaft führten. Diese hatte auch für Plückers wissenschaftliche Arbeit Bedeutung.
Magnus arbeitete im Bankiergeschäft seines Onkels Johann Matthias Magnus[119]. Cantor berichtet, dass Magnus während dieser Zeit nebenher ein Selbststudium der Mathematik betrieb und nachts Euklid gelesen habe (vgl. [ADB, Bd. 20, S. 91-92]). In den Jahren 1816 - 1826 unterrichtete Magnus an der „Cauerschen Erziehungsanstalt" Mathematik. Diese war von Jakob Ludwig Cauer[120] gegründet worden und wurde als privates Internat geführt. Von 1826 bis zur Schließung der Anstalt 1834 arbeitete Magnus dort vollzeitig. Danach wechselte er zurück ins Bankwesen und arbeitete als oberster Kassenbeamte im neuentstandenen Berliner Kassenverein (vgl. [ADB, Bd. 20, S. 91-92]). Diese Tätigkeit ließ Magnus allerdings keine Zeit mehr für wissenschafliche Tätigkeit. Darüber schreibt er im Juni 1834 an Plücker:

> *„Das Wiederaufleben der Charlottenburger Anstalt hat auf mich keinen Einfluß. Ich bleibe in meinem Joche, das mir nur so viel Zeit übrig läßt als etwa nöthig ist die gewöhnlichen Lebensbedürfnisse zu befriedigen. An Mathematik denke ich fast gar nicht mehr."*
>
> [NRC PC, Vol. 3A, Item 3]

1843 konnte Magnus seine Stellung aufgeben und in den Ruhestand gehen. Leider war er zu dieser Zeit bereits gesundheitlich angeschlagen.
Magnus hat verschiedene Aufsätze in Gergonne's Annalen sowie in Crelle's Journal veröffentlicht. Zu letzteren zählt beispielsweise ein Artikel mit dem Titel „Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie." Dort erwähnt Magnus, dass er von einer Arbeit Plückers[121] angeregt worden sei, und nennt ihn einen unserer bedeutendsten Geometer[122] (vgl. [Magnus 1832]). 1833 veröffentlichte Magnus ein größeres Werk, seine „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen" ([Magnus 1833]). Darin berücksichtigt er unter anderem die Arbeiten von Möbius[123] und Plücker. Laut Cantor war dieses Werk auch die Grundlage für Magnus' Ehrenpromotion an der Universität Bonn[124] (vgl. [ADB, Bd. 20, S. 91-92]). Bei der Drucklegung von Plückers „System der analytischen Geometrie" übernahm Magnus eine wichtige Rolle bei den Verhandlungen mit dem Verleger. In diesem Zusammenhang machte Magnus Plücker verschiedentlich auf Details aus Möbius' „Barycentrischem Calcul" aufmerksam (vgl. Kapitel 5.2). Aus den späteren Jahren sind nur zwei Briefe von Magnus an Plücker erhalten. Der eine

[118] (1790 - 1861).
[119] Einer von dessen Söhnen war der Physiker Heinrich Gustav Magnus (1802 - 1870).
[120] (1792 - 1834).
[121] Hierbei handelt es sich um [Plücker 1830b].
[122] „[...] *M. Plücker*, un de nos géomètres les plus distingués, [...]".
[123] August Ferdinand Möbius (1790 - 1868).
[124] Ob eine Beteiligung Plückers an dieser Ehrenpromotion vorlag, konnte leider aus den Akten nicht ermittelt werden.

enthält eine Ausarbeitung von Magnus, die im weitesten Sinn der Liniengeometrie zugeordnet werden kann (17.2), der andere beschäftigt sich mit der Anfertigung eines Modells der Lichtwellenfläche (17.1) (vgl. auch 6.3).

4.3.1. Versetzung nach Halle

Im Schulprogramm des Friedrich-Wilhelm-Gymnasiums von 1833 hatte Direktor Spilleke noch seine Hoffnung ausgedrückt, dass Plückers „Wirksamkeit an der Anstalt nicht anders als mit sehr glücklichem Erfolge begleitet seyn“ würde [SP Berlin 1833, S. 43f]. Allerdings verließ Plücker die Schule bereits kurz darauf. Im Schulprogramm von 1834 findet sich dazu folgende Bemerkung:

> „Michaelis v[origen] J[ahres] verließ uns Herr Professor Dr. Plücker, um einen ehrenvollem Rufe als ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität zu Halle zu folgen. Nur kurze Zeit hatten wir die Freude, mit diesem, sowohl wegen seiner gelehrten Kenntnisse als seiner liebenswürdigen Persönlichkeit sehr ausgezeichneten Manne in näherem Verhältnisse zu stehen. Indes wird uns auch diese Zeit in freundlicher Erinnerung bleiben.“
>
> [SP Berlin 1834, S. 53]

Nach Plückers eigenen Angaben hatte ihm das Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, als die Möglichkeit seines Abgangs bekannt wurde, eine Gehaltserhöhung von 150 Talern zugesagt, die Plücker aber ausschlug (vgl. [Ernst 1933, S. 23]).
Am 30. August 1833 war Plücker durch Altenstein die durch den Abgang von Scherk nach Kiel vakant gewordene ordentliche Professur der Mathematik in Halle angeboten worden. Diese war mit einem festen Gehalt von 700 Thalern ausgestattet (vgl. [SBPK Slg.D, Bl. 4][125]. Plücker antwortete von Altenstein mit Schreiben vom 13. September 1833. Er bedankte sich für den Beweis des Wohlwollens, machte aber darauf aufmerksam, dass sein Einkommen in Berlin höher sei als das Angebot in Halle. Zusätzlich zu den 800 Thalern, welche er an der Universität und dem Gymnasium verdiente, bekam er 300 bis 400 Thaler *„durch ein Privat-Verhältniß[126], in welches ich für mehrere Jahre mich eingelassen“* (vgl. [SBPK Slg.D, Bl. 4]). Außerdem betont Plücker *„die unschätzbaren wissenschaftlichen Vortheile“* seines Aufenthalts in Berlin (vgl. [SBPK Slg.D, Bl. 4]).

> *„Auf der anderen Seite aber tritt mir die ungestörte wissenschaftliche Thätigkeit, wie sie die Stelle in Halle in Vergleich mit meiner hiesigen verspricht, als so wichtig und wünschenswerth entgegen, daß ich, um dieses großen Gewinnes balbmöglich theilhaftig zu werden, gern ein nicht unbedeutendes pecuniares Opfer zu bringen bereit wäre, wenn mir nur die Aussicht bliebe bei einer sich darbietenden günstigen Gelegenheit in eine ähnliche wissenschaftliche Stellung hierher zurückgerufen zu werden.*
>
> *Ich erlaube mir daher, den Entschluß, dem Rufe nach Halle zu folgen von Ew. Excellent Geneigtheit, mir diese Aussicht für den Fall zu eröffnen,*

[125] Brief vom 13.09.1833.

[126] Wahrscheinlich handelte es sich hierbei um Privatunterricht. Z.B. erhielt Carl Wilhelm Borchardt (1817 - 1880) unter anderem von Plücker in Berlin Privatunterricht (vgl. [ADB, Bd. 47, S. 112]).

daß ich durch neue Entdeckungen in dem Gebiete der Mathematik und meine Leistungen überhaupt des hohen Vertrauens mich würdig zeigen sollte, abhängig zu machen, und wenn es unmöglich sein sollte, mich mit der Hoffnung für die Zukunft zu vertrösten, unterthänigst zu bitten, Ew. Excellenz wollen einstweilen mich in meiner jetzigen Stellung belassen und mich in derselben und für die Zukunft derjenigen Berücksichtigung würdigen zu der mein Bestreben und meine wissenschaftlichen Leistungen mich etwa empfehlen mögen.

In tiefster Ehrfurcht

Berlin den 13. September
1833

Ew. Excellenz
unterthänigster
Prof. Dr. Plücker"

[SBPK Slg.D, Bl. 4-5]

Plückers Wunsch, bei geeigneter Gelegenheit nach Berlin zurückberufen zu werden, wurde ihm vom Ministerium zugesagt. Außerdem wurde die Besoldung der Stelle in Halle erhöht (vgl. [Ernst 1933, S. 22]). Daraufhin nahm Plücker die Stelle an und wurde am 7. November 1833 zum ordentlichen Professor der reinen Mathematik in Halle ernannt (vgl. [Ernst 1933, S. 22]).
Biermann bemerkt dazu:

„So war Plücker nur ganz kurz in Berlin. Es entbehrt nicht eines gewissen Reizes, daß sein De-facto-Nachfolger nach Jahresfrist Steiner geworden ist, so daß also dem Exponenten der „analytischen Geometrie" der erklärteste Vertreter der „synthetischen Geometrie" gefolgt ist. Steiner haßte Plücker gründlich, und wenn die beiden Geometer zu gleicher Zeit an derselben Universität tätig gewesen wären, so hätten sich daraus vermutlich sehr unerfreuliche Verhältnisse entwickelt."

[Biermann 1973, S. 47]

Dieser Konflikt mit Steiner spielt in der älteren Plücker-Literatur eine große Rolle. Eccarius stellt einen Zusammenhang zwischen diesen Spannungen und der geplanten Gründung des Polytechnischen Instituts in Berlin her. Beide Punkte werden im nächsten Abschnitt näher beleuchtet.

Abb. 4.1.: Jakob Steiner. URL: http://bit.ly/SteinerJPG [8.11.14]

4.4. Konflikt mit Steiner

> „Leider aber brachte der Umstand, dass Plücker und Steiner, wenn auch auf verschiedenen Methoden gestützt, dasselbe wissenschaftliche Feld bebauten und dieselben Probleme zu lösen suchten, grosse Misshelligkeiten. [...] Steiner erklärte, nicht mehr in Crelle's Journal schreiben zu wollen, falls noch Arbeiten Plücker's fernerhin Aufnahme fänden. Dadurch war ihm Berlin vollständig verleidet [...].
>
> [Dronke 1871, S. 11f]

Die „Anfeindungen“ durch Steiner und Jacobi[127] führten – laut Dronke – auch dazu, dass Plücker seine „wissenschaftlichen Arbeiten meist in ausländischen Journalen niederlegte“ [Dronke 1871, S. 12]. Auch Plückers Wechsel von der mathematischen zur physikalischen Forschung wird in Zusammenhang mit der mangelnden Würdigung seiner „wissenschaflichen Leistungen in seinem engern Heimatlande“ gebracht [Dronke 1871, S. 12f]. Klein vermutet: „Aus Plückers Berliner Zeit her schreibt sich wohl die Verschärfung des Konflikts mit dem Jacobi-Steinerschen Kreis.“ [Klein 1926, S. 120]. Selbst bezüglich Plückers Anerkennung als Physiker schreibt Klein diesem

[127]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851).

Konflikt eine Bedeutung zu:

> „Aber auch diese Dinge [d. s. Plückers Ergebnisse in der Spektralforschung] fanden in Deutschland, gehemmt durch den Berliner Einfluß, keine Anerkennung.“
>
> [Klein 1926, S. 121]

Außerdem bemerkt Klein, dass „der Wiederbeginn von Plückers geometrischen Arbeiten mit Steiners Todesjahr 1863 zusammenfällt.“ Auch wenn er gleich nachschiebt, dass „natürlich nicht entschieden“ werden könne, „ob hier ein Zusammenhang vorliegt“ [Klein 1926, S. 121]. Ernst weist darauf hin, dass sich Plückers „Verhältnis zu Berlin von Anfang an unfreundlich gestaltete“ [Ernst 1933, S. 90] und er wegen des „parteiliche[n] Einfluß[es] [...] insbesondere des *Jacobi-Steiner*'schen Kreises [...] nicht die verdiente Anerkennung“ gefunden habe [Ernst 1933, S. 90 u. S. 85]. Außerdem urteilt Ernst, dass es sich bei dem Konflikt zwischen Plücker und Steiner um „einen persönlichen und sachlichen Gegensatz“ gehandelt habe [Ernst 1933, S. 11]. Biermanns Urteil („Steiner haßte Plücker gründlich“) wurde bereits zitiert. Er bezieht sich dabei auf eine Äußerung Aronholds in einem Brief (vom 18.12.1849) an Hesse:

> „Den kleinen Krieg mit ihm [d. i. Steiner] dürften Sie weniger ernst nehmen. Er ist zu sehr Hypochonder, als dass er von dem abgehen sollte, was er sich einmal in den Kopf gesetzt hat. Er scheint sich schon durch Ihre früheren Arbeiten verletzt zu fühlen, wie überhaupt durch die der Analytiker, und es ist besonders *Plücker*, den er gründlich hasst, und welcher wohl seine geringe Zärtlichkeit für die Analysis hervorgerufen hat.“
>
> [Grundelfinger 1902, S. 64]

Eccarius bemerkt dazu:

> „Die persönliche Gegnerschaft zwischen Plücker und Steiner ist in der biographischen Literatur über diese beiden Mathematiker eine so feststehende Größe, daß man bei der Durchsicht ihrer eigenen Publikationen überrascht ist, an dieser Stelle jedenfalls kaum Anzeichen für ein[e] persönliche Polemik zu finden[128]. So sind es denn auch fast ausschließlich Berichte von Augen- oder besser Ohrenzeugen, die uns über ihre gegenseitige Abneigung unterrichten.“
>
> [Eccarius 1980, S. 191f]

Eccarius „stellt sich“, mit seinem Aufsatz ([Eccarius 1980]), „die Aufgabe, für ein recht bekanntes Beispiel eines wissenschaftlichen Meinungsstreites [...] die sozialen und ökonomischen Hintergründe aufzuhellen“ [Eccarius 1980, S. 191]. Er vertritt dabei die These, dass wissenschaftliche Polemik in erster Linie auf ökonomische Bedingungen und nicht auf bestimmte Charaktereigenschaften wie persönlichen Hass oder Schrullen aller Art zurückzuführen sei (vgl. [Eccarius 1980, S. 190]). Er weist darauf hin, dass sich die Beschäftigung mit der Mathematik im 19. Jahrhundert aus einer Liebhaberei in einen Beruf verwandelte und schließt daraus:

[128] Eccarius weist auf zwei Ausnahmen hin: eine Bemerkung Plückers in der Vorrede zum ersten Band seiner Entwicklungen, die er aber in der Vorrede zum zweiten Band praktisch zurücknimmt; sowie eine Fußnote in Plückers „Analytisch geometrischen Aphorismen“. (Vgl. zu letzterem Kapitel 13).

> „Wird aber die wissenschaftliche Tätigkeit zur Existenzgrundlage einer gewissen sozialen Gruppe, so kann die Art und Weise, in der Konflikte innerhalb der Gruppe und mit Außenstehenden ausgetragen werden, davon nicht unbeeinflußt bleiben, weil die Bewertung der Ergebnisse der wissenschaftlichen Arbeit jetzt eine schwerwiegende ökonomische Bedeutung gewinnt.“
>
> [Eccarius 1980, S. 191]

Eccarius Ziel ist es, – da über die Ursachen der Kontroverse weder von Plücker noch von Steiner selbst irgendwelche Zeugnisse vorliegen – eine „alle belegbaren Fakten berücksichtigende Hypothese“ zur Deutung der Hintergründe ihres Zerwürfnisses zu finden [Eccarius 1980, S. 192]. Dabei lehnt Eccarius – auch vor dem Hintergrund der oben zitierten Aussagen zur ökonomischen Bedeutung wissenschaftlicher Arbeit – eine Deutung über persönliche Charaktereigenschaften ab.

> „Dadurch wird aber das Zerwürfnis zwischen Plücker und Steiner in einer Weise in den Bereich des Zufälligen verschoben, die bei intellektuell so hochstehenden Persönlichkeiten mit einem hohen Maß an bewußter und rationaler Kontrolle unterworfener Handlungsweise ganz unglaubhaft erscheint.“
>
> [Eccarius 1980, S. 192]

Die von Eccarius vorgeschlagene Hypothese besteht im Wesentlichen darin, dass Crelle Plücker für die Professur für Geometrie am geplanten Polytechnischen Institut in Berlin vorgesehen habe. Damit hätte er Steiner zu einem Zeitpunkt übergangen, als dessen finanzielle Situation äußerst prekär war.
Im Folgenden wird die Geschichte des geplanten Polytechnischen Instituts – soweit sie in diesem Kontext relevant ist – vorgestellt[129]. Daraufhin wird Eccarius' Hypothese näher diskutiert.

4.4.1. Das geplante Polytechnische Institut

Insgesamt lassen sich bei der Planung des Instituts drei Phasen unterscheiden, von denen in diesem Kontext nur die zweite von Bedeutung ist. Die erste Phase (1823 - 1824) steht in Zusammenhang mit der geplanten Berufung von Gauß nach Berlin; die dritte Phase (1844 - 1850) war eher auf ein mathematisches Institut ausgerichtet.
Die hier relevanten Planungen erstrecken sich auf den Zeitraum von 1828 bis 1835 und stehen mit den Namen Crelle, Alexander v. Humboldt und Eilhard Mitscherlich[130] in Verbindung. Die durch die Bezeichnung „polytechnisches Institut“ oder gar „École Polytechnique“ hervorgerufenen Assoziationen zu der gleichnamigen französischen Einrichtung sind wohl irreführend. Eccarius belegt aus den vorhandenen Akten, dass die Planungen eher auf eine eigenständige Lehrerbildung abzielten. Wäre das Institut realisiert worden, wäre es eher zum Vorläufer der Pädagogischen als der Technischen Hochschulen geworden (vgl. [Eccarius 1980, S. 196]).
Laut Eccarius stand bereits Crelles Versetzung ins preußische Kultusministerium, 1828, in Verbindung mit dem geplanten Institut. Altenstein schrieb über Crelles neue Aufgaben, er solle neben seiner gutachterlichen Tätigkeit auch:

[129] Ich folge dabei Eccarius' Darstellung, die er in [Eccarius 1980, S. 194 - 208] gibt.
[130] (1794 - 1863) Chemiker.

> „[...] durch eine noch näher zu bestimmende Theilnahme an der Leitung eines Instituts, welches ich zur Ausbildung von Lehrern der Mathematik hier errichten zu können hoffe, auf eine sehr ersprießliche Weise für mannigfache Dienstleistungen in Anspruch zu nehmen sein.“
>
> [Eccarius 1980, S. 197]

Sogar noch vor seiner erst im November 1828 erfolgten Versetzung wurde Crelle mit der Ausarbeitung von detaillierten Plänen für das Institut beauftragt. Diese wurden dem Ministerium bereits im Dezember 1828 vorgelegt (vgl. [Eccarius 1980, S. 198]). Sie sahen drei Abteilungen vor, je eine für Mathematik, Physik und Chemie. Crelle war als Direktor der mathematischen Abteilung, Mitscherlich als Direktor der chemischen Abteilung vorgesehen. Für den mathematischen Zweig hatte Crelle drei Lehrstühle vorgesehen: je einen für Analysis, Geometrie und Mechanik. Relevant ist in diesem Kontext der Lehrstuhl für Geometrie, für den grundsätzlich Plücker und Steiner beide in Betracht kamen. Die Planungen zur Gründung des Instituts verliefen allerdings 1835 im Sande, so dass die Berufungsabsichten der realen Grundlage entbehren. Allerdings schien das Gelingen der Institutsgründung – zumindest zu Anfang der Planungen – sicher (vgl. [Eccarius 1980, S. 200]). Im Falle Steiners kam es 1834 sogar zu einem offiziellen Berufungsantrag an das noch nicht gegründete Institut. „[...] Ein sicherlich in den Annalen der preußischen Wissenschaftspolitik einmaliger Vorgang“ [Eccarius 1980, S. 201].

4.4.2. Eccarius’ Hypothese zu den Ursachen des Konflikts

Eccarius zieht nun den Schluss, dass Crelle bei der Entscheidung zwischen Steiner und Plücker „[...] durch sein Votum für Plücker [...] die nun folgenden Auseinandersetzungen zwischen beiden ausgelöst“ habe [Eccarius 1980, S. 199]. Eine wichtige Rolle spielt bei dieser Hypothese die – bereits zitierte – Aussage Dronkes, dass „Steiner erklärte, nicht mehr in Crelle’s Journal schreiben zu wollen, falls noch Arbeiten Plücker’s fernerhin Aufnahme fänden“ [Dronke 1871, S. 11f]. Diese bezieht sich auf den Zeitraum von 1828 bis 1834[131], in dem keine Arbeiten Steiners in Crelles Journal erschienen. In diese Zeit fällt die Abfassung der „Systematischen Entwicklungen“ durch Steiner; allerdings veröffentlichte er tatsächlich in den Jahren 1828 bis 1829 noch vier Abhandlungen in den Annalen von Gergonne (vgl. [Lange 1899, S. 49]). Dass es einen ursächlichen Zusammenhang zwischen dem Beginn von Plückers Tätigkeit für das Journal und dem vorläufigen Ende von Steiners gab, ist außer durch Dronke nicht belegt. Als Hinweis darauf könnte Crelles Aussage gedeutet werden, dass Steiner ihn,

> „[...] durch seine Entfernung von aller Mitwirkung am mathematischen Journal (obgleich er ursprünglich zu denen gehörte, die dessen Entstehung veranlaßten) aus Vorwänden, die Niemand gebilligt hat, keineswegs eben zur Parteilichkeit für ihn verleitet haben kann.“
>
> zitiert nach [Lange 1899, S. 49]

[131] Band 3 bis Band 11 des Journals.

Allerdings werden die „Vorwände, die Niemand gebilligt hat“ hier nicht näher präzisiert, so dass die Aussage Dronkes zumindest etwas kritisch betrachtet werden sollte. Eccarius argumentiert nun, dass durch Steiners „ungewöhnliche und ganz kurzsichtige Maßregel“ wohl weniger Plücker selbst, als vielmehr Crelle getroffen werden sollte [Eccarius 1980, S. 193f]. Damit wird es dann sehr plausibel, die Ursache für Steiners Verhaltensweise in „irgendeiner seiner [d. i. Crelles] wissenschaftsorganisatorischen Maßnahmen aus dem Jahre 1828“ zu suchen (vgl. [Eccarius 1980, S. 194]). Als diese identifiziert Eccarius die geplante Berufung Plückers an das – zu keinem Zeitpunkt realisierte – Institut. Dass Crelle bei der Besetzung des Lehrstuhls eher an Plücker als an Steiner gedacht hat, ist durchaus plausibel. Für die Funktion, die das Institut erfüllen sollte, waren Spezialisten als Lehrstuhlinhaber eher ungeeignet. Crelle suchte nach Wissenschaftlern, die ihr Fachgebiet möglichst umfassend beherrschten. Solche Überlegungen mussten Plücker geeigneter erscheinen lassen, denn Steiner vertrat einen deutlich einseitigeren Standpunkt. Bei Steiners Staatsexamensprüfung des Jahres 1821 hatten sich neben den fehlenden Kenntnissen der alten Sprachen, der historischen Fächer und der Philosophie auch deutliche Lücken in einigen Teilen der Mathematik gezeigt. Darunter die ebene und sphärische Geometrie, die im Bereich der Geometrie in der Lehrerausbildung nicht fehlen durfte (vgl. [Eccarius 1980, S. 203]).
Allerdings:

> „Für Plücker werden die Berufungsabsichten an das Berliner Institut nur durch Sekundärquellen belegt. Die wichtigste, auf der wahrscheinlich alle anderen fußen, scheint A. Dronke ([Dronke 1871, S. 7]) zu sein. W. Ernst ([Ernst 1933, S. 21]) läßt Plücker sogar zum designierten Direktor des Berliner Institutes aufrücken, eine Angabe, die sonst an keiner anderen Stelle erwähnt wird und, wenigstens nach den in Merseburg vorhandenen Akten, wenig glaubhaft ist.“

[Eccarius 1980, S. 201, Fußnote 64]

Aber auch Dronkes Aussage weist einige Unstimmigkeiten auf. Er gibt an, dass „durch ihn [d. i. Plücker] ein dem bekannten französischen Polytechnicum in Paris entsprechendes Institut in Berlin“ gegründet werden sollte [Dronke 1871, S. 7]. Dadurch wird Plücker zum einen eine zu wichtige Rolle beigemessen – er sollte, wenn überhaupt, lediglich eine von drei Lehrstellen in einem von drei Bereichen bekleiden –, zum anderen wird die Zielsetzung des Institutes nicht korrekt wiedergegeben. Auch Dronkes Aussage, Plücker habe die ordentliche Professur der Mathematik in Halle erhalten als „dieser Plan sich zerschlug“, entspricht nicht den Tatsachen. Nach Plückers Weggang nach Halle gab es sogar noch einen offiziellen Berufungsantrag an das Institut. Die Pläne zerschlugen sich erst 1835, etwa zwei Jahre später.
Unklar ist auch, warum Crelle – dem kaum daran gelegen sein konnte, Unstimmigkeiten zwischen den Autoren seines Journals zu schüren[132] – eine solche Entscheidung direkt gegenüber Steiner und Plücker kommuniziert haben sollte. Interessanterweise ist auch in Plückers Briefnachlass ([NRC PC]), der Dronke bei der Abfassung von Plückers Biographie vorlag, kein Hinweis auf die Institutsgründung oder eine geplante Berufung

[132] Eccarius weist sogar ausdrücklich darauf hin, dass „die von Crelle bei der Herausgabe seiner Zeitschrift mit Konsequenz befolgten Redaktionsgrundsätze [...] jegliche Aufnahme persönlicher Polemik [verboten]“ [Eccarius 1980, S. 193].

Plückers zu finden. Die Aussage von Eccarius, es dürften „[...] an der historischen Gewißheit der von Crelle für sie [d. i. Steiner und Plücker] unternommenen Vorstöße [...] nach dem Vorstehenden wohl kaum Zweifel offenbleiben.“ [Eccarius 1980, S. 202] lässt sich daher so nicht halten.

Möglicherweise sind die Gründe für den Konflikt zwischen Steiner und Plücker doch stärker im Bereich der persönlichen Charaktereigenschaften zu suchen, als es „bei intellektuell so hochstehenden Persönlichkeiten mit einem hohen Maß an bewußter und rationaler Kontrolle unterworfener Handlungsweise“[133] eigentlich zu vermuten wäre. Steiner war der Sohn eines Schweizer Kleinbauern und hatte – nach einer Zeit bei Pestalozzi – in Heidelberg studiert (vgl. [Biermann 1973, S. 39]). Dort könnte er auch die Bekanntschaft mit Plücker gemacht haben, der zeitgleich ebenfalls in Heidelberg studierte (vgl. Kapitel 2.3.1). Steiner musste sich durch Privatunterricht seinen Lebensunterhalt verdienen, so dass er nur wenige Vorlesungen besuchen konnte. 1821 verließ Steiner die Universität Heidelberg ohne Abschluss und ging nach Berlin (vgl. [Lange 1899, S. 4]). Hier erhielt er eine aushilfsweise Beschäftigung als Hilfslehrer. Erst 1829 wurde er fest als Oberlehrer angestellt [Biermann 1973, S. 38f]. Steiners Charakter wird im Allgemeinen als eher schwierig beschrieben:

> „Wegen seiner Derbheit und Grobheit bekannt, ja berühmt, und anfangs belacht, stand er schließlich ganz allein, nachdem er sich mit allen, die ihm wohlwollten überworfen hatte.“
>
> [Biermann 1973, S. 38]

Plücker dagegen war durch seine Herkunft finanziell in der Lage gewesen, in Heidelberg, Bonn, Berlin[134] und Paris zu studieren und hatte 1828 immerhin bereits eine außerordentliche Professur in Bonn, während Steiners Situation in Berlin äußerst schwierig war. In dieser Situation erscheint 1828 der erste Artikel des „Analytikers“ Plücker in Crelles Journal, dessen Entstehung Steiner mit veranlasst hatte (vgl. [Lange 1899, S. 49]). Die Berücksichtigung dieser Aspekte lässt eine Kurzschlussreaktion Steiners nicht ganz unplausibel erscheinen.

Aber unabhängig davon, ob man Dronke in einem oder in beiden genannten Punkten folgt – dass Plücker Berlin 1833 verließ, weil es ihm durch Steiner verleidet worden sei, lässt sich so nicht halten. Steiner hatte sich mit Crelle überworfen und unterrichtete als Oberlehrer an der Gewerbeschule. Dahingegen hatte Plücker eine außerordentliche Professur an der Universität und – wenn man Dronke Glauben schenkt – die Aussicht auf eine feste Anstellung am Institut. In dieser Konstellation hatte Steiner wohl kaum die Möglichkeit, Plücker Berlin zu verleiden. Wie oben dargestellt wurde, nahm Plücker die Versetzung nach Halle auch nur unter der Bedingung an, „bei einer sich darbietenden günstigen Gelegenheit in eine ähnliche wissenschaftliche Stellung“ nach Berlin zurückberufen zu werden.

Der Konflikt zwischen den beiden Geometern dürfte also – zumindest von Plückers Seite aus – erst zu einem späteren Zeitpunkt wichtig geworden sein. Möglicherweise spielte hierbei auch Plückers Persönlichkeit eine Rolle[135]. Diese beschrieb der Bonner Kurator in einem Schreiben vom März 1865 an das Ministerium folgendermaßen:

[133] Vgl. das oben wiedergegebene Zitat aus [Eccarius 1980, S. 192].

[134] Möglicherweise hatten sich hier die Wege von Plücker und Steiner wieder gekreuzt.

[135] Klein nennt neben dem Gegensatz zwischen analytischer und synthetischer Geometrie ausdrücklich auch einen zweiten Gegegensatz von „weniger sachlicher Natur“ zwischen Plücker und Steiner. „Ich

> „Wie weit die obige Tatsache mit einem sehr reizbaren Temperament und nervöser Erregbarkeit des bedeutenden Gelehrten zusammenhängt, kann ich dahin gestellt lassen. Jedenfalls mache ich häufig die Erfahrung, daß die geringste Veranlassung ihn in tiefe Verstimmung setzt und in ihm den Gedanken wieder aufkommen läßt, daß seine Leistungen bei dem Königlichen Ministerium wenig geschätzt würden."

zitiert nach [Ernst 1933, S. 79]

Die bisher noch nicht berücksichtigte Frage, welche Position Plücker bezüglich des Gegensatzes zwischen analytischer und synthetischer Geometrie einnahm wird im Kapitel 8.2.2 behandelt.

meine den Gegensatz der Schulmeinungen, der Cliquen, das ganze große Gebiet der wissenschaftlichen Polemik, die dann oft ins Persönliche entgleitend zum Austausch stark subjektiv gefärbter Meinungen wird, die sich auf die folgenden Generationen weiter vererbt. In diesem Fall handelt es sich um den Streit des [...] Synthetikers Steiner gegen Plücker." [Klein 1926, S. 116].

5. Halle 1833 - 1835

Plücker wurde am 7. November 1833 zum ordentlichen Professor an der Friedrichs-Universität Halle ernannt (vgl. [Ernst 1933, S. 22]). Dort blieb er knapp zwei Jahre, bis er am 25. September 1835[136] in gleicher Funktion nach Bonn berufen wurde (vgl. [UABo PF-PA416]).
Für die ordentliche Professur in Halle, hatte sich auch der dortige außerordentliche Professor Johann Christian Gartz[137] ins Gespräch gebracht. Dieser war aber auf Grund mangelnder Leistungen, besonders wegen des fehlenden Lehrerfolgs, nicht auf die Stelle berufen worden (vgl. [Warnecke 2004, S. 43]).
In der relativ kurzen Zeit, die Plücker in Halle verbrachte, promovierten drei seiner ehemaligen Studenten bei ihm[138]. Außerdem fallen zwei wissenschaftliche Auslandsreisen Plückers in diesen Zeitraum; sowie die Veröffentlichung seines „Systems der analytischen Geometrie". Diese Punkte werden im Folgenden näher beleuchtet. Ähnlich wie im letzten Kapitel für Berlin dargestellt, war Plücker auch mit seiner Situation in Halle nicht zufrieden – auch wenn die Gründe hier andere sein mochten.

> „Da Plücker gehaltsmäßig nicht schlechter gestellt werden wollte als in Berlin, verhandelte er zäh mit der Behörde, er war schließlich auch gelernter Kameralist - dokumentiert in den Akten sind ein finanzieller Ausgleich für seine Tätigkeit in Berlin am Gymnasium, ferner Gehaltsversprechen und eine Zulage. Ferner betrieb Plücker seine Rückversetzung nach Berlin an die Universität und bat um Genehmigung einer Parisreise, die ihm gewährt wurde."

[Warnecke 2004, S. 43]

5.1. Plücker an der Friedrichs-Universität Halle

Das Sommersemester 1834 ist das erste Semester in dem sich Vorlesungen Plückers in Halle nachweisen lassen, da das Wintersemester bereits begonnen hatte, als er im November 1833 nach Halle kam. In diesem Semester las Plücker neben zwei mathematischen Vorlesungen („Die Elemente der analytischen Geometrie" und „Die Integralrechnung") auch eine physikalische Vorlesung mit dem Titel: „Über die neueren Entdeckungen in der Optik, durch Versuche erläutert" (vgl. [Warnecke 2004, S. 54]). Für die weiteren Semester finden sich keine physikalischen Vorlesungen mehr. Dies war möglicherweise darin begründet, dass 1834 der Physiker Ludwig Friedrich Kämtz[139]

[136] Dronke und Clebsch geben fälschlicherweise an, Plücker sei von 1834 bis 1836 ordentlicher Professor in Halle gewesen (vgl. [Dronke 1871, S. 7] und [Clebsch 1872, S. XI]).
[137] (1792 - 1864).
[138] Vgl. dazu besonders [Warnecke 2004]; die drei Promotionen bilden den Schwerpunkt seiner Darstellung von Plückers Zeit in Halle.
[139] (1801 - 1867).

eine ordentliche Physikprofessur in Halle erhielt (vgl. [Warnecke 2004, S. 37]).
Im Wintersemester 1834/35 hielt Plücker eine Vorlesung zur analytischen Mechanik und bot praktische mathematische Übungen an (vgl. [Warnecke 2004, S. 54]). Im Sommersemester las er noch einmal über analytische Mechanik und verband diese Vorlesung mit praktischen Übungen. Zusätzlich bot er eine Vorlesung zur Algebra und eine zur Anwendung der Differentialrechnung auf Algebra an (vgl. [Warnecke 2004, S. 55]).
Auch für das Wintersemester 1835/36 bot Plücker noch zwei Vorlesungen an: „Mechanik nach Poisson“ und „Analytische Geometrie“, letztere zusammen mit Gartz (vgl. [Warnecke 2004, S. 55]). Aufgrund der sechsmonatigen wissenschaftlichen Reise nach England und Frankreich, die Plücker im Sommer 1835 antrat, sowie seiner Berufung nach Bonn im September 1835 können diese Vorlesungen aber nicht mehr stattgefunden haben.
Bei den drei Doktoranden, die bei Plücker in Halle promovierten, handelt es sich um Johannes Michael Fischer[140], Wilhelm Brennecke[141] und Franz Heinen[142] (vgl. [Warnecke 2004]). Fischer und Heinen hatten in Bonn, Brennecke in Berlin bei Plücker Vorlesungen besucht (vgl. [Warnecke 2004, S. 17;23;29]). Im Falle von Fischer waren dies mehrere Vorlesungen über „analytische Geometrie“ sowie die „Differentialrechnung nach Lacroix“; er studierte von Oktober 1827 bis August 1830 in Bonn (vgl. [Warnecke 2004, S. 17]). Dass Fischer zu Plücker nach Halle ging, um dort promoviert zu werden, begründet Warnecke damit, dass die beiden in Bonn angestellten Ordinarien Diesterweg und v. Münchow keine Promotionen durchführten. Lediglich zwei Ehrenpromotionen fänden sich in ihrer ganzen Amtszeit – u.a. die von Dirichlet (vgl. [Warnecke 2004, S. 21]). Der Titel von Fischers Dissertation lautete: „Ampli generis aequationum differentialium partialium integrandi methodus“ (Eine Methode, eine große Klasse von partiellen Differentialgleichungen zu integrieren) [Warnecke 2004, S. 22]. Das Datum seiner Promotion ist der 8. Juli 1834.
Während über Fischers weiteren Werdegang nur bekannt ist, dass er in der Astronomie tätig werden wollte (vgl. [Warnecke 2004, S. 21]), lässt sich Brenneckes Werdegang als Lehrer durch verschiedene Schulprogramme verfolgen (vgl. [Kössler 2008]). Brennecke hatte in Berlin von 1828 bis 1833 Philologie, Mathematik und Physik studiert (vgl. [Warnecke 2004, S. 23]). Nach einer Reise zur Verbesserung seiner Sprachkenntnisse (vgl. [Kössler 2008]) promovierte er am 9. Mai 1835 bei Plücker in Halle. Dieser musste ihm als Doktorvater besonders geeignet erscheinen, da er nicht nur in Berlin sein Dozent gewesen war, sondern dort gleichzeitig auch am Gymnasium als Lehrer tätig war (vgl. [Warnecke 2004, S. 26]). Der Titel seiner Arbeit lautete: „Solutio nova problematis e theoria caloris analytica“ (Eine neue Lösung eines Problems aus der analytischen Wärmetheorie) [Warnecke 2004, S. 27].
Franz Heinen – einer von Plückers „ersten Hörern, die alle bis zu seinem Tode die treueste Anhänglichkeit und tiefste Verehrung für ihren [...] Lehrer bewahrten“ [Ernst 1933, S. 11] – promovierte kurz vor Plückers Weggang aus Halle, am 17.06.1835, bei diesem. Er war schon vor der Promotion als Lehrer tätig (vgl. [Kössler 2008]). Seine Promotionsschrift trägt den Titel: „De catenaria vulgaris“ (Von der gewöhnlichen Kettenlinie) [Warnecke 2004, S. 31].
Im Zusammenhang mit der Promotion von Heinen und Brenneke bei Plücker bemerkt

[140] (1806 - ?).
[141] (1813 - 1872).
[142] Vgl. Fußnote 113 auf S. 53.

Warnecke, man müsse Plückers

> „[...] sicheres Gespür bei der Förderung von Lehrern für höhere Bildungsanstalten bewundern. Dazu gehörte auch, dass einzelne so geförderte Lehrer, die nicht selten Direktoren ihrer Anstalten waren, in schulischen Belangen verlässliche Gewährsmänner Plückers blieben. U.a. gehörte Heinen dazu und aus der übernächsten Generation sei u.a. Adolf Dronke (1837 - 1898) hervorgehoben [...]“.

[Warnecke 2004, S. 34]

5.2. Drucklegung des „Systems der analytischen Geometrie“

Das „System der analytischen Geometrie“ wurde 1835 in Berlin im Verlag von Duncker und Humblot herausgeben. Offenbar hatte Plücker persönlich die ersten Kontakte zu dem Verleger Carl Friedrich Wilhelm Duncker[143] geknüpft. Nachdem eine Reaktion des Verlegers ausblieb – wie lange lässt sich nicht sagen – übernahm L. I. Magnus die Vermittlung zwischen Plücker und dem Verleger. Die Briefe – oder zumindest ein Teil der Briefe –, die Magnus in diesem Zusammenhang an Plücker richtete, sind in Plückers Briefnachlass ([NRC PC, Vol. 3A]) erhalten geblieben. Außerdem ein Brief Dunckers an Plücker, in dem er ihm die Bedingungen vorlegt, unter denen er bereit ist, die Herausgabe zu übernehmen [NRC PC, Vol. 4].
Da den Briefen einige interessante Details über die Vorgänge einer solchen Herausgabe, sowie über – gerade auch finanzielle – Probleme speziell bei der Herausgabe mathematischer Werke, entnommen werden können, soll die Drucklegung dieses Werkes hier exemplarisch vorgestellt werden. Interessante Bemerkungen von Magnus zu Plückers Werk, die sich auf den (mathematischen) Inhalt beziehen, werden ebenfalls kurz erwähnt.
Die Verlagsbuchhandlung wurde 1798 durch Heinrich Fölich[144], der das Privileg von Friedrich Vieweg[145] übernahm, gegründet (vgl. [Simon 1998, S. 11]). Nach Frölichs Tod 1805, führte sein Gehilfe Duncker das Geschäft fort (vgl. [Simon 1998, S. 13]). 1809 konnte Duncker es zusammen mit Peter Humblot[146] übernehmen (vgl. [Simon 1998, S. 15]). Ein wichtiger Schwerpunkt des Verlags waren die Geschichtswissenschaften, was sich beispielsweise in der Herausgabe von „Becker's Weltgeschichte“ zeigte (vgl. [Simon 1998, S. 16]). Ab 1869 übernahm der Verlag auch die Publikation der „Allgemeinen Deutschen Biographie“[147] (vgl. [Simon 1998, S. 25]). Daneben verlegte Duncker & Humblot einiges zur Geographie und „schönen Literatur“ (vgl. [Simon 1998, S. 17]). Mathematische Werke sind dagegen in der Verlagsbibliographie kaum vertreten. Einige der wenigen Ausnahmen bilden die Übersetzungen von Lacroix's Werken, wie z.B. die „Anleitung zur ebenen und sphärischen Trigonometrie und zur Anwendung der

[143] (1781 - 1869).
[144] (1768 - 1805).
[145] (1761 - 1835).
[146] (1779 - 1828).
[147] Zu diesem Zeitpunkt war der Sitz des Verlags bereits nach Leipzig verlegt worden.

Algebra auf die Geometrie“ (1822; 2. Ausgabe 1837) (vgl. [Simon 1998, S. 126]). Der erste Band von Crelles Journal erschien ebenfalls im Verlag von Duncker & Humblot; ab dem zweiten Band wechselte Crelle allerdings zum Verlag von Georg Reimer (vgl. [Remmert 2010, S. 17]). Auch als in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts „in der deutschen Verlagsbranche der Prozeß der Konzentration von Verlagsprogrammen auf inhaltliche Schwerpunkte“ einsetzte (vgl. [Remmert 2010, S. 21]), bemühte sich Duncker & Humblot nicht darum, stärker im mathematischen Bereich tätig zu werden. In Berlin waren es eher die Verlage von Georg Reimer und Meyer & Müller, die sich schwerpunktsmäßig in dieser Disziplin engagierten (vgl. [Remmert 2010, S. 24]). Es ist daher nicht ganz klar, wie es dazu kam, dass Plücker gerade zu diesem Verlag Kontakte geknüpft hatte.

Nach einer offenbar mündlich erfolgten ersten Absprache, und einem gewissen Zeitraum, in dem nichts geschah, wandte Plücker sich am 18. März 1834 schriftlich an Duncker. Am 22. Februar besuchte Magnus den Verleger, um sich für Plückers Anliegen einzusetzen. Er berichtet darüber am 28. Februar 1834:

> „[...] *Am Mittwoch habe ich Duncker besucht um eine Antwort für Sie einzufordern. Er stellte mir von neuem die Abneigung dar, die er gegen mathematische Verlagsartikel empfindet; daß es ihn in Verlegenheit setze ein Honorar zu bestimmen; daß es ihm weit lieber gewesen wäre wenn Sie eine bestimmte Forderung gethan hätten, die er bloß hätte annehmen oder zurückweisen können; daß er, bei dem geringen Absatze mathematischer Werke, ohne seinen Schaden eigentlich gar kein Honorar geben könne, wie denn auch seine Collegen dergleichen für mathematische Werke in der Regel nicht geben; daß er aber einem achtbaren Autor ein solches Anerbieten gar nicht machen wollte und lieber den Verlagsantrag gänzlich zurückweisen würde. Ich brachte nun vor was sich nur immer gegen seine Rede einwenden läßt, sprach von dem wissenschaftlichen Werthe des Buches, welches in keiner mathematischen Bibliothek wird fehlen dürfen, und bat ihn ins besondere, die Sache von der ich angenommen hätte, daß sie im Allgemeinen schon abgemacht sey, nicht wieder ganz von vorn anzufangen. Er entschied sich endlich zu* <u>*einem*</u> *Fr*[iedrich] *d'or für den Bogen, was er – da dies für ein Werk von dem Werthe, den ich ihm beisetze, das Minimum des möglichen Honorars sey – nur anbiete um seinen guten Willen zu besthätigen. Er versprach Ihnen diesen seinen Entschluß schriftlich anzuzeigen, und mir seinen Brief morgen zustellen zu lassen; ich hoffe daher diesen hier beilegen zu können.*
>
> *Es steht nun bei Ihnen, ob Sie das angebotene Honorar annehmen wollen; mir thut es leid, daß es nicht größer ausgefallen ist. D. versichert, daß er 500 Exemplare wird absetzen müssen um nur wieder zu den Kosten zu kommen. – Was ihn noch am meisten bewog die Sache nicht wieder zurück zu weisen, mag meine Versicherung gewesen seyn, daß die Druckkosten nicht größer seyn werden als die von nicht-mathematischen Werken, weil nur wenige und für den Setzer leichte Formeln in Ihrem Werke vorkommen, ich redete als hätte ich Ihr Manuscript von Anfang bis zu Ende gelesen, was Sie mir verzeihen mögen. Von den Kupfertafeln habe ich allerdings und zwar absichtlich geschwiegen; D. dachte aber nicht daran.*“

[NRC PC, Vol 3A, Item 4]

Dunckers „Abneigung gegen mathematische Verlagsartikel“ war wohl zum einen in der eher geringen Nachfrage begründet, die – gerade bei einer Forschungsmonographie – zu erwarten war, zum anderen in den besonders hohen Herstellungskosten eines mathematischen Drucks. Noch für die Zeit nach dem ersten Weltkrieg konstatieren Remmert und Schneider als „Spezialproblem“ im Fall der Mathematik: „[...] der schwierige mathematische Formelsatz, für den nur wenige deutsche Druckereien das erforderliche Typenmaterial besaßen, war besonders teuer und trieb so die Herstellungskosten nochmals in die Höhe.“ [Remmert 2010, S. 142f]. Ebenfalls problematisch und kostspielig war der Druck der Tafeln, welche die Zeichnungen enthielten, der in speziellen Kupferdruckereien vorgenommen werden musste.
Die oben bereits angesprochenen Tendenzen zur Spezialisierung in der deutschen Verlagsbranche und die damit einhergehende Konkurrenzsituation im mathematischen Sektor, werfen verstärkt die Frage nach den inhaltlichen und ökonomischen Auswahlkriterien der Verleger bei der Publikationsentscheidung auf (vgl. [Remmert 2010, S. 179]). Remmert und Schneider verweisen in diesem Zusammenhang auf die Rolle der mathematischen Verlagsberater[148] als einer „Institution zwischen geistigen und ökonomischen Werten“ (vgl. [Remmert 2010, Kap. 7]). Aber auch wenn Magnus hier in gewisser Weise eine ähnliche Rolle als Vermittler zwischen Plücker und dem Verlag spielte, hatte er dabei lediglich Plückers Interessen vor Augen. Auf der einen Seite betont er den wissenschaftlichen Wert des Werkes, zum anderen spielt er die zu erwartenden Kosten herunter. Während Magnus dabei gegenüber Duncker den Eindruck erweckte, er habe das „Manuscript von Anfang bis zu Ende gelesen“, hatte er in Wirklichkeit noch keine Seite davon zu Gesicht bekommen. Es ist sicher davon auszugehen, dass er in groben Zügen über den geplanten Inhalt des Werkes informiert war, aber auch die Aussage über die „wenigen und für den Setzer leichten Formeln“ entbehrte damit der eigentlichen Grundlage.
Die Kupfertafeln, die Magnus absichtlich verschwiegen hatte, fielen Duncker selbst noch ein, als Magnus am nächsten Tag den versprochenen Antwortbrief bei ihm abholte:

> *„Berlin am 1 März*
> [...] *Als ich schon aus der Thür war, kam mir D. nach und sagte daß ihm so eben eingefallen wäre, es möchten vielleicht Zeichnungen bei dem Werke seyn; er wünsche zu wissen wie viel Tafeln sie einnehmen würden und ich möchte Sie in seinem Namen ersuchen ihm darüber Auskunft zu geben. Ich ließ mich, vor der Thür, auf keine nähere Erörterung ein, versprach ihm seinen Auftrag auszurichten, was ich hiermit thue.“*

[NRC PC, Vol 3A, Item 4]

Letzendlich wurden dem Werk 6 Kupfertafeln beigefügt; Plücker hatte zuerst mit 4 Tafeln gerechnet (vgl. [NRC PC, Vol 3A, Item 6]).
Duncker griff in seinem Brief[149] an Plücker nach einigen einleitenden Worten noch einmal das Thema des Honorars auf. Außerdem formulierte er die Bedingungen, unter denen er bereit war, das „System ...“ herauszugeben.

[148] „Auffallend ist, daß die mathematisch bedeutendsten und ökonomisch erfolgreichsten Fachverlage sich in ihrer Planung von Fachvertretern beraten ließen“ [Remmert 2010, S. 181]. Clebsch nahm eine solche Rolle für den Verlag B.G.Teubner ein.

[149] Dieser ist stellenweise beschädigt und damit unleserlich. Mit „[..]“ sind einzelne, nicht lesbare Worte gekennzeichnet.

„Ew. Wohlgeboren sehr werthe Zuschrift vom 18ten d[es letzten Monats] *giebt mir vor allem die angenehme Beruhigung, daß Sie mir wegen meines bisherigen Stillschweigens nicht grollen, vielmehr das Vertrauen vorwalten ließen, ich sey der Sache nicht abhold.* [...] *Vor allem setzte mich damals wie heute die Aufgabe, Ihnen ein Honorar vorzuschlagen, in* [..] *Verlegenheit. Ein hohes konnte ich Ihnen bei dem Gegenstande* [..] *der höheren Mathematik nicht offeriren, ja die Erfahrung sprach, d*[aß] *selbst bei einem mäßigen Honorar an Aufbringung der Kosten zu zweifeln, an Gewinn nicht zu denken sei. Unter diesen Beden*[k]*lichkeiten verlief die Zeit und schon glaubte ich, Sie hätten ande*[r]*weitig über das Manuskript verfügt.*
[...]
Was den Honorarpunkt anbetrifft, so scheint mir es müsse f[ür] *die Resultate desselben bei dem Autor zwei Zielpunkte geben; der eine:*
indirecter Ertrag durch Gewinn von Namen, Amt, Gehalt und Ruf
der andere:
directer Ertrag durch Verleger und Publicum.
Dieser findet sich fast nur bei Büchern der Praxis, als da sind: Compendien, Grammatiken Schul- und Lehrbücher u.s.w. Es findet sich fast gar nicht bei Werken der Theorie. Da ich nun Ew. Wohlgeboren neuestes Werk dahin gehörig classifizieren muß, bliebe mir kaum etwas anderes übrig, als Sie auf jene indirecten Vortheile zu verweisen. Das Beste werden Sie sicherlich auch davon zu erwarten haben, wiewohl ich mich nicht überwinden kann, Sie aller directen Vortheile null und nichtig zu erklären. Ungeachtet aller fehlgeschlagenen Hoffnungen also, bei meinen Unternehmungen in der höheren Mathematik, ungeachtet daß die neueste Zeit uns in der Erscheinung von „Steiners Entwicklungen ..“[150] *(dessen Verlag ich ablehnte) wovon nicht Hundert Exemplare abgesetzt sein sollen, keine Ermuthigung gewährt, will ich mich dadurch zu dem Verlage Ihres Werkes entschlossen erklären, indem ich folgendes zu einer Uebereinkunft darüber vorschlage:*

1) *das Werk erhält den Titel: „System der analytischen Geometrie, auf neue Principien gegründet.“*
2) *dasselbe soll 30 Druckbogen in gr. 8*[151] *nicht übersteigen.*
3) *die Verlagshandlung zahlt für den gedruckten Bogen in gr. 8 Fünf Thaler Preu*[ßisch] *Cour*[an]*t nach beendigtem Drucke.*
4) *Der Druck beginnt sobald der Herr Verfasser der Verlagshandl[ung] das vollständige Manuscript in lesbarer Handschrift überliefe*[rt] *haben wird.*
5) *Der Herr Verfasser übernimmt eine Korrektur, deren Zurückse*[n]*dung auf seine Kosten geschieht.*
6) *Sollte das Werk über die in §. 2 bestimmten 30 Druckbogen hinau*[sgehen] *so erhält der Herr Verfasser, für die überzähligen Bogen nicht*

[150] Steiners „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander [...]“ erschien 1832 im Verlag von G. Fincke, Berlin. 1896 sowie 1920 wurde es in Leipzig (Verlag Engelmann) erneut aufgelegt.

[151] Dies entspricht einem Quart-Format, bei dem 4 Seiten auf einen Druckbogen gedruckt wurden, und jeder Druckbogen somit 8 Seiten des Buchs ergab (vgl. [Hiller 1991, 247]).

nur kein Honorar, sonde[rn ist] *auch gehalten, Druck und Papier auf eigene Rechnung zu überne*[hmen]

7) *Der Herr Verfasser erhält 12 Freiexemplare.*

Wenn Ew. Wohlgeboren sich mit diesen Feststellungen einverstanden er-[klärt] *so würde der Druck nach Eingang des Manuscriptes bald beginnen könne*[n]. *Lassen Sie sich von dem Punkte Kosten der Correcturen nicht erschreck*[en.] *Werden solche ohne Manuscript direct unter Kreuzband nach und v*[on] *Halle gesandt, so kostet jeder Bogen etwa 6 Sch. Müßte das Manusc*[ript] *beigelegt werden, so würden wir die Correcturen unseren wöchentlichen* [..] *Postpacketen beischließen, und von Leipzig Ihnen mit Fahrpost zusenden lassen.* [...]

Ew. Wohlgeboren

achtungsvoll ergebener
Duncker

Berlin d[en] *1. März*
1834“

[NRC PC, Vol 4, Item 11]

Das Honorar von fünf Taler Courant entsprach dem mündlich versprochenen Honorar von einem Friedrich d'or[152]. Magnus, der den Brief in Dunckers Gegenwart lesen sollte erhob gegen diese Änderung daher auch keinen Einspruch. Allerdings äußerte er gegen den 6. Paragraphen der Bedingungen seine „unmaßgeblichen Bedenken“:

> „[...] *ich sagte ihm, daß ein Autor unmöglich wissen könne ob sein Manuscript 28 oder 39 Bogen im Drucke liefern werde, u[nd] daß er sich nicht gefallen lassen könne, für diese Unwissenheit bestraft zu werden, – Ich erfuhr dann, daß dieser 6te Artikel seine Entstehung einem Streite zu verdanken hat, in welchem D*[uncker] *mit jemandem wegen des Ausdruckes „das Werk wird etwa 180 Druckbögen betragen“ geraten ist. – Lassen Sie sich den Artikel in dieser Fassung wirklich nicht gefallen; aber machen Sie ihn nicht zu einem Stein des Anstoßes, an dem die ganze Verhandlung zerschellt.“*

[NRC PC, Vol 3A, Item 4]

Plücker hielt die Bedingungen Dunckers für „unerhörte Zumuthungen“ [NRC PC, Vol. 3A Item 5] und hätte mit seinem Antwortbrief möglicherweise die ganze Sache beendet, oder zumindest verzögert, wenn Magnus nicht eigenmächtig entschieden hätte, Plückers Brief nicht an Duncker weiterzuleiten. Durch Magnus Vermittlung wurde schließlich ein Maximum von 33 Bogen festgesetzt. Allerdings stellte sich im Verlauf des Druckes heraus, dass Plücker auch diese höhere Grenze überschreiten würde. Wieder war es Magnus, der hier die Wogen glätten konnte und Duncker dazu überredete, weitere *„5 bis 6 Bogen auf Kosten der Handlung“* zu drucken *„für welche* [...] *aber dem Autor kein Honorar gezahlt werden kann, was,* [...] *sich wohl von selbst*

[152] Bei den Courant Talern handelte es sich um Silber-, bei den Friedrichs d'or um Goldmünzen.

versteht.“ [NRC PC, Vol. 3A, Item 6].
Magnus übernahm auch die Correctur der Bögen für Plücker, um „den Druck zu beschleunigen und [Pücker] Kosten [zu] ersparen“ [NRC PC, Vol. 3A Item 5].
Am 5. Juni 1834 erhielt Magnus das Manuscript von Plücker und hatte nur einen kurzen Abend Zeit, es zu lesen, bevor er es zu Duncker brachte:

> *„Ihren Brief mit dem Manuscripte habe ich vorgestern erhalten* [...]. *Abends 10 Uhr - früher konnte ich nicht dazu kommen, - fing ich an Ihr Manuscr*[ipt] *zu studieren. Sehr gründlich bin ich bei diesem Studium nicht verfahren weil es mir dazu an Zeit gebrach; ich habe nur von dem ersten Abschnitte eine ungefähre Uebersicht gewonnen. Einiges ist mir darin unverständlich geblieben,* [...]*“*
>
> [NRC PC, Vol 3A, Item 3]

Einen Grund für die Verständnisschwierigkeiten sah Magnus darin, dass Plücker „den Begriff der Collineation weiter ausdehne, als es Möbius gethan hat“. Weiter betonte Magnus, dass Affinität und Projectivität nicht identisch seien und erläuterte die Unterschiede zwischen diesen geometrischen Verwandtschaften näher. Eine Stelle in Plückers Manuskript, die sich mit der Reciprocität beschäftigte, schien ihm „ganz falsch“ zu sein. Außerdem machte er Plücker darauf aufmerksam, dass Möbius bereits 1827 in seinem „Barycentrischen Calcul“ ([Möbius 1827]) über die Verwandtschaft der (Flächen-)„Gleichheit“ geschrieben hatte, wohingegen Plücker annahm, dass diese noch nicht behandelt worden sei (vgl. [NRC PC, Vol 3A, Item 3]). Während Plücker den Hinweis auf Möbius in sein Werk aufnahm (vgl. [Plücker 1835, S. 63]), blieb er im Fall der Reciprocität offenbar bei seinem ursprünglichen Text (vgl. [Plücker 1835, S. 78ff]).[153]
Setzen, Druck und Correctur der Bögen zog sich über mehrere Monate hin. Am 28. November schreibt Magnus unter anderem an Plücker:

> *„Von dem Inhalt Ihres Buches, weiß ich wenig mehr als nichts. Das Durchbuchstabiren, und besonders die bogenweise Lection läßt kein eigentliches Verständnis zu. An stehen gebliebenen Druckfehlern wird es auch nicht fehlen. So habe ich ganz zufällig gefunden, das S. 216 Z*[eile] *1 v*[on] *u*[nten] *statt $(p+\sigma)+q$ stehen sollte $(p+\sigma)x+q$.*
> *Wollen Sie die Güte haben dieses in dem Druckfehlerverzeichniße aufzunehmen*
>
> *Ein solches Verzeichnis erwartet D. sobald als möglich. Wo sonst noch Schreibfehler in den Formeln aus dem Ma*[nu]*script in den Druck übergegangen sind, kann ich nicht wissen da ich nur selten, oder vielmehr nur da nachgerechnet habe wo ich einen solchen Schreibfehler vermuthete.*
>
> *Heute früh als der Druckerjunge die Correctur des 32ten Bogens abholen wollte mit dem ich aber noch nicht zu Ende war, schien mir die Gleichung in der 14ten u 15ten Zeile auf der 255. Seite nicht richtig.* [...] *Ich hatte nicht Zeit mehrere Male u*[nd] *weiter zu rechnen; daher blieb die Sache*

[153] Genaueres zu Magnus’ Anmerkungen bezüglich der Reziprozität findet sich in Kapitel 12.2.

> *wie im Manuscipt. Wenn Ihnen der Aushängebogen*[154] *zukommt, was wohl innerhalb 8 Tagen geschehen wird, haben Sie wohl die Zeit diese Stelle, u. die Aenderungen, die sich eventualiter in dem später Folgenden ergeben, zu prüfen.*
> [...]
>
> *Der Ihrige*
> *Magnus"*

[NRC PC, Vol 3A, Item 6]

Der letzte Brief von Magnus an Plücker über die Herausgabe des „Systems" datiert vom 25. Dezember 1834. Die letzten Seiten (Titelseite und Inhaltsverzeichnis) müssen zu diesem Zeitpunkt noch gedruckt werden, „der Kupferdrucker [lässt] auf sich warten" und „es wird wohl noch die erste Woche des neuen Jahres verfließen, ehe Buch- u. Kupferdrucker und Buchbinder fertig sind" [NRC PC, Vol. 3A Item7]. Kortüm[155] bedankt sich am 22. Januar 1835 für den Erhalt des Werkes (vgl. [NRC PC, Vol. 4, Item 12]). Insgesamt verging also fast ein Jahr über der Herausgabe.

5.3. Auslandsreisen 1834 und 1835

Kortüm fährt in dem gerade erwähnten Schreiben vom 22. Januar 1835, nachdem er den Erhalt von Plückers „System ..." bestätigt hat, fort:

> „[...] *Ich habe ihn* [d.i. den Quartant] *doch erst begrüßen und, was ich freilich vorher wußte von der darin enthaltenen großen Gelehrsamkeit meines humoristischen Freundes durch eigene, aber für mich nicht mit Leichtigkeit zu gewinnende Anschauung mich überzeugen wollen, ehe ich Ihr gefälliges Schreiben vom 22 u 24. v. M. beantwortete. Wie das Buch hier aufgenommen, namentlich welchen Eindruck es da gemacht hat, wo es nach Ihrer Wünschen zunächst Eindruck machen sollte; kann ich hier jetzt nicht sagen, da noch nichts darüber vorgekommen, wahrscheinlich weil es dorthin nicht früher als zu mir gelangt ist. Ich werde ja den günstigen Moment, wo Friedrichs II ehrenwerthe Ansicht geltend gemacht werden kann, nicht wieder verfehlen und meinerseits gern alles thun, Sie an den Sprüngen zu verhindern, die nach Ihrer Äußerung von Ihnen bereits vorbereitet sind. – Aber was machen Sie für Dinge? Sie gehen in die weite Welt, thun einen frischen Trank aus dem Becher alter Erinnerung, sammeln Weihrauch ein, der Ihnen in der Fremde dargebracht wird und kehren nun gestärkt zurück, man sollte denken, entschlossen von dieser Erquickung in dem trüben Halle mit Sparsamkeit zu zehren – nein Sie werfen das alles sogleich von sich und*

[154] Bezeichnung für die ersten Bogen, die noch während des Fortdrucks aus der Maschine genommen und dem Verleger übersandt wurden. Dieser konnte sie wiederum an den Autor weiterleiten, wie es in diesem Fall für die Erstellung des Druckfehlerverzeichnisses geschah. Die Bezeichnung geht darauf zurück, dass diese Bögen in der Anfangszeit des Buchdrucks zu Werbezwecken ausgehängt wurden (vgl. [Hiller 1991, S. 33]).

[155] Vgl. Kapitel 2.2.2 und 4.

siedeln sich, wie ein Karthäuser unter Beingerippen[156] *an. Auch die Zulage, lieber Freund, kann das Unheimliche eines solchen Aufenthaltes nicht beseitigen. Sie sagen, Sie seien nur durch Vernunft zu regieren, nun dann folgen Sie ihr und machen Sie sich den Ort, wo Sie ihr Licht sollen leuchten lassen vor den Leuten, nicht noch unangenehmer durch eigene Schuld.*
[...]
Genehmigen Sie meinen besten Dank für die Aufmerksamkeit, die Sie mir durch die Mittheilung Ihrer Schrift, die Ihnen neue Ehre bringen wird, bezeugt haben.

Der Ihrige
Kortüm

[...]*“*

[NRC PC, Vol. 4, Item 12]

Wie aus dem Schreiben deutlich wird, verfolgte Plücker weiterhin den Wunsch, nach Berlin zurückversetzt zu werden. Schon am 3. Juni 1834, hatte er sich deswegen an den Minister Altenstein gewandt (vgl. [Ernst 1933, S. 22]). Mit Bezug auf die Zusage, die ihm bei seiner Versetzung nach Halle gemacht worden war, bat Plücker darum, für die Neubesetzung des Ordinariats, des verstorbenen Professor Oltmanns[157], berücksichtigt zu werden. Allerdings teilt ihm der Minister in seinem Antwortschreiben vom 7. Juli 1834 mit, dass „die Verhältnisse der Berliner Universität es nicht gestatten, die erledigte Stelle wieder mit einem Ordinarius zu besetzen“ [Ernst 1933, S. 23]. Außerdem erinnert ihn der Minister an die von Plücker selbst gestellte Bedingung für eine solche Berücksichtigung – nämlich sich „durch neue Entdeckungen in dem Gebiete der Mathematik“ dafür würdig zu zeigen (vgl. [Ernst 1933, S. 22f]). Mit der Veröffentlichung des „Systems ...“ sah Plücker diese Bedingung nun als erfüllt und wendet sich im Dezember 1834 erneut an den Minister von Altenstein:

„Ew. Excellenz beehre ich mich, beikommend eine literarische Arbeit, welche dem Inhalte nach größtenteils und der Form nach durchgehend nur Neues enthält, untertänigst, als einen Beweis meiner persönlichen Verehrung zu überreichen.

Wenn ich meine frühere Stellung in Berlin und damit die Hälfte meiner Einkünfte neben den literarischen Vorzügen der Hauptstadt aufgab, so war dies ein Schritt des Vertrauens auf die wohlwollenden Absichten Ew. Excellenz; und wenn ich damals die mir gnädigst gemachten Zusicherungen von meinen fernen literarischen Leistungen selbst abhängig machte, so geschah das in der Zuversicht, diese Bedingung bald erfüllen zu können. Ich schmeichle mir in der Hoffnung, Ew. Excellenz entscheiden, daß diese Bedingung nun wirklich erfüllt sei.

In der letzten Zuschrift vom 7. Juli d. J. versicherte mich ein hohes Ministerium zum zweiten Male und aus eigener Veranlassung, meine hiesige Lage,

[156] Möglicherweise handelt es sich hier um eine heute unbekannte Redewendung. Die Kartäuser sind ein römisch-katholischer Orden, der eine eremitische Lebensweise pflegt.
[157] Jabbo Oltmann (1783 - 27.11.1833).

> sobald es die Fonds der hiesigen Universität irgend zulassen, verbessern zu wollen. Ich bitte darum ganz gehorsamst, damit es mir möglich werde, meine wissenschaftlichen Zwecke, namentlich auch in Beziehung zum Auslande, zu verfolgen. Diese Bitte scheint mir gerade jetzt um so weniger unbillig, als ich einerseits erfahre, daß vor kurzem Besoldungen hiesiger Professoren erhöht worden sind und andererseits meine Arbeit, wie jede mathematische Arbeit ähnlicher Art, Zeugnis ablegt, daß ihr Verfasser pekuniäre Vorteile wissenschaftlichen Zwecken hintangesetzt hat.
>
> Ich hoffe, daß die in den letzten Ferien von mir unternommene wissenschaftliche Reise nach Paris für mich nicht fruchtlos bleiben werde."

zitiert nach [Ernst 1933, S. 24]

Auf Grund des positiven Gutachten Crelles zu Plückers System, bekam Plücker am 20. Mai 1835 tatsächlich eine Gehaltserhöhung von 100 Talern.
Über Plückers wissenschaftliche Reise nach Paris, bei der er – wie Kortüm schreibt – einen „frischen Trunk aus dem Becher alter Erinnerung" tat und „Weihrauch" einsammelte, der ihm „in der Fremde dargebracht" wurde, ist leider kaum etwas bekannt. Im Briefnachlass Plückers fand sich lediglich ein Schreiben Crelles, in dem er Plücker Grüße an verschiedene Wissenschaftler in Paris auftrug:

> *„An den königl Professor*
> *Herrn Plücker Hochwohlgeboren*
> *zu Halle*
>
> *Ew. Hochwohlgeboren*
>
> *danke ich für das in jeder Beziehung so gütige und freundliche Schreiben vom 23 v[origen] M[onats], verbindlichst und bitte, mir ferner Ihre Gewogenheit zu erhalten. Alles, was Sie mir für das Journal der Mathematik senden werden, soll darin sorgfältigst und förderlichst gedruckt werden, und ich werde mich Ihnen, nicht minder als die Leser, für Ihre trefflichen Beiträge verpflichtet erachten.*
>
> *Das 3" und 4" Heft 12" Bandes des Journals, hier beiliegend, bitte ich, gleich den vorigen, gütig und geneigt an- und aufnehmen zu wollen.*
>
> *Zu Ihrer Ferien-Reise wünsche ich Ihnen von Herzen Glück, und besonders, daß Sie Ihrer Gesundheit wohl thuen möge. An der meinigen ist, scheint es, fast eben so wenig etwas mehr zu verderben, als zu bessern. Im 55" Jahre nähert sich der Abend, und mein Leben war stets nur mit einem stürmischen, unfreundlichen Herbsttage zu vergleichen, der dann auch glücklicher Weise nur kurz ist.*
>
> *Für den Fall daß Sie nach Brüssel und Paris gelangen, möchte ich Sie, da Sie mir erlaubt haben, Sie zu beschweren, ergebenst bitten, folgenden Herren mich bestens zum geneigten Andenken zu empfehlen:*
>
> *Herrn Quetelet zu Brüssel*
> *Herrn Pagani zu Lüttich, wo Sie vielleicht passiren,*
> *und zu Paris:*

Herrn Poncelet (rue de la planche No:9, Fauxbourg St. Germain)
Herrn Arago (à l'observatoire)
Herrn L. de Poisson (rue de Condé No: 10)
Herrn Libri (rue des fossés St Germain des près No: 18)
Herrn Liouville (rue de l'Est No: 9)
Herrn L. de Pronij (rue Hillerin-Bertin No: 10)
Herrn Ampère (rue des fossés St Victor No: 19) und
Herrn Lacroix, (rue Paranne (die Nummer habe ich vergessen)
Herrn Vauvilliers, inspectuer divisonnaire des ponts et chaussées (rue Duphot No: 23)

Außerdem bitte ich noch besonders, meinem verehrten Freund, Herrn Poncelet, zu sagen, daß ich mit großem Verlangen und großer Freude einem Briefe von ihm entgegen sehe; Herrn Poisson, daß ich durch einen neuen Beitrag zum Journale sehr würde erfreut werden; Herrn Libri, daß ich angelegentlich bitte, gefälligst recht bald das Druckfehler- Verzeichniß nebst Titel und Vorrede zum ersten Bande seiner Abhandlungen, und dann auch neue Beiträge senden zu wollen; Herrn v:Pronij, daß ich sehr erfreut sein würde, die neuerern Hefte der annales des ponts et chaussées zu erhalten; Herrn Vauvilliers, daß ich mich ihm für einen Brief, mit Nachrichten von seinem Ergehen, sehr verpflichtet finden würde; den Herren Liouville und Pagani die Bitte, sich bald wieder meiner und des Journals durch neue Beiträge erinnern zu wollen. Und, bin ich nicht zu kühn, so bitte ich auch noch, Sie wollen die Güte haben, mich die Antworten der Herren schon von Paris aus direct wissen zu lassen.

Ich schreibe Ew. Hochwohlgeboren meine Bitten, die Sie mir gestatten, schon jetzt, da der Anfang des Septembers, den Sie zur Abreise bestimmt haben, nicht fern ist. In dem Falle, daß Sie etwa nicht reisen oder nicht nach Paris und Brüssel gelangen sollten, bitte ich nur noch ergebenst, es mir gefälligst in Ihrem nächsten Brief und vor Ihrer Abreise sagen zu wollen, damit ich dann meine einzelnen kleinen Anliegen an die Herrn Betheiligten auf anderem Wege gelangen lasse.

Einem solchen gütigen, nahen Briefe entgegen sehend, im Voraus Ihnen für Ihre Gefälligkeiten den verbindlichsten Dank sagen und mich Ihnen bestens empfehlend, beehre mit der vollkommensten Hochachtung

Ew. Hochwohlgeboren

ergebenster
Crelle

Berlin, den 18. August
1834"

[NRC PC, Vol. 3A, Item 38]

Am 18. Juni 1835 bat Plücker von Altenstein

> „[...] um Bewilligung eines sechsmonatigen Urlaubs zu einer wissenschaftlichen Reise durch England und Schottland in den Herbstmonaten und zu einem nachfolgenden Aufenthalt in Paris [...]. Die Absicht des Aufenthalts in Paris ist, die allgemeinen Resultate, zu denen ich in dem Kreise meiner bisherigen Studien und zum Abschluß derselben, seit meiner letzten Arbeit gekommen bin, daselbst in französischer Sprache dem Drucke zu übergeben. Der wissenschaftliche Zweck meiner Reise durch England und Schottland ist, einerseits durch die Anschauung der großartigen Anwendungen der Mechanik neue Gesichtspunkte zu gewinnen und andrerseits eine klare Uebersicht von dem zu erlangen, was dort in Physik, namentlich in Optik von *Brewster* geleistet worden ist. Ich habe darauf verzichtet, der Versammlung der Naturforscher in Dublin[158] beizuwohnen und, einer hohen Verfügung nachkommend, suche ich lieber untertänigst um einen sechsmonatlichen Urlaub nach, als daß ich um die Erlaubnis bitte, vor dem Schluß der Sommer-Vorlesungen schließen zu dürfen.“
>
> zitiert nach [Ernst 1933, S. 25f]

Dieser Urlaub wurde Plücker bewilligt, wann genau er die Reise antrat ist nicht bekannt, jedenfalls kehrte er nicht wieder nach Halle zurück (vgl. [Ernst 1933, S. 26]). Am 25.09.35 wurde Plücker als ordentlicher Professor der Mathematik nach Bonn berufen (vgl. [UABo PF-PA416]).

Die Zeit, welche Plücker als ordentlicher Professor in Halle verbrachte, kann in gewisser Weise als exemplarisch für seine wissenschaftliche Position in nationalen und internationalen Kontexten angesehen werden.
Auf der einen Seite stehen Plückers Bemühungen um gute wissenschaftliche Kontakte ins Ausland, wobei die Kontakte nach England besonders mit seinen physikalischen Forschungen – zu diesem Zeitpunkt war dies hauptsächlich die Optik – und die Kontakte nach Frankreich (Paris) besonders mit seinen geometrisch-analytischen Forschungen in Verbindung standen. Und dort bekommt Plücker auch in besonderem Maß Anerkennung seiner wissenschaftlichen Leistungen, wie es sich beispielhaft an Kortüms Aussage festmachen lässt. Auf der anderen Seite zeichnet sich bereits die Tendenz ab, dass Plücker im nationalen Kontext eher eine Außenseiterrolle einnimmt, da es ihm nicht gelingt, in das Zentrum der Forschung (Berlin) zurückzukehren.

[158] Wahrscheinlich ist das fünfte Treffen der BAAS (British Association for the Advancement of Science) gemeint, welches vom 10. bis 15. August 1835 in Dublin abgehalten wurde (vgl. [BAAS 1835]).

6. Bonn 1835 - 1868

„[...] die mathematische Entwicklung in den ersten 50 Jahren des Bestehens der Bonner Universität [wurde] vor allem durch PLÜCKERS überragende Persönlichkeit bestimmt [...], dadurch [wurde] für die Geometrie in Bonn ein starker Schwerpunkt gebildet [...], gleichzeitig [trat] aber auch infolge der eigenartigen Doppelstellung PLÜCKERS als Mathematiker und Physiker die Mathematik während der physikalischen Schaffensperiode PLÜCKERS stark in den Hintergrund [...].“

[Peschl 1970, S. 18]

Im September 1835 wurde Plücker als ordentlicher Professor der Mathematik nach Bonn zurückversetzt und blieb dort bis zu seinem Tod am 22. Mai 1868. Hier heiratete er am 2. September 1837 Antonie von Altstaedten[159]. Im Haus seines späteren Schwiegervaters – des Landgerichtssekretärs Altstaedten – hatte Plücker während seiner Zeit als Privatdozent in Bonn gewohnt (vgl. [Ernst 1933, S. 89]). Am 1. August 1838 wurde Plückers einziger Sohn, Albert, geboren. Dieser starb unverheiratet und kinderlos am 24. Juli 1901. Wegen seines Gesundheitszustandes – hervorgerufen durch einen Unfall in seiner Kindheit – konnte Albert Plücker nie einen Beruf ausüben (vgl. [NRC PC, Vol. 1, Item 5]).
Viermal war Plücker Dekan der philosophischen Fakultät der Universität Bonn[160] und zweimal Rektor der Universität (1844/45; 1855/56).
In Plückers Bonner Zeit fällt auch eine Phase von ca. 20 Jahren, in der seine Forschungsgebiete in der Physik lagen. Dabei ist auffällig, dass er sich nicht der mathematischen Physik, sondern der Experimentalphysik zuwandte. Auch wenn Plückers physikalische Tätigkeit nicht Gegenstand dieser Arbeit sein kann, darf diese Periode doch nicht ganz unbeachtet bleiben. Besonders im Hinblick auf Plückers Forscherpersönlichkeit und seine Kontakte im Ausland ist diese auch für ein umfassendes Bild von dem Geometer Plücker relevant. Außerdem ist die Frage nach Plückers Motiven für den Wechsel zwischen zwei Forschungsfeldern interessant.
Mit dem gleichen Fokus hatte auch Clebsch Plückers physikalische Tätigkeit in seiner Gedächtnisrede vorgestellt:

„Ehe ich zur genaueren Besprechung von *Plücker*'s geometrischen Leistungen übergehe, mag es mir vergönnt sein, auch seine physikalische Thätig-

[159] Marie Louise Antonie (Antoinette) Friederike Altstaedten (Altstätten) geb. 9. Juli 1813; gest. 2. September 1880.
[160] WS 1839/40 - SS 1840; WS 1848/49 - SS 1849; WS 1853/54 - SS 1854; WS 1860/61 - SS 1861.

keit mit wenigen Worten zu berühren. Ein Blick auf diese scheinbar heterogene Seite seines Wirkens führt auch manche Klärung in der Auffassung seiner geometrischen Richtung herbei, und bietet Gelegenheit zu interessanten Vergleichen.“

[Clebsch 1872, S. XI]

Unter anderem wegen der Motive für den Wechsel zwischen physikalischer und mathematischer Forschung wandte sich Felix Klein – der Clebsch bei der Abfassung dieser Rede unterstützte – an Plückers Witwe:

„Dabei können leider die physikalischen Forschungen nur ganz im Allgemeinen berührt werden, da sie Clebsch und mir gleichmäßig fremd sind, um wenigstens in ihrer Erwähnung correct zu sein, habe ich mich an Hittorf um Auskunft gewandt. Darf ich Sie vielleicht auch um Unterstützung bitten? Einmal möchte ich wünschen, die Briefe, namentlich die von Faraday, noch einmal durchsehen zu dürfen. [...] *Auch für jede andere Auskunft wäre ich selbstverständlich sehr dankbar; ist z.B. nichts Genaueres bekannt über die Umstände, die Plücker von der physicalischen Thätigkeit wieder zur mathematischen zurückführten?“*

[NRC PC, Vol. 3B, Item 69]

Allerdings konnte – oder wollte – Antonie Plücker keine Auskunft darüber geben. Dieser Punkt bleibt daher in Clebschs Rede unberührt. Trotzdem soll auch hier der Versuch unternommen werden, die wenigen bekannten Motive, die Plücker vermutlich bewogen haben, zusammenzutragen.
Die letzten Jahre seines Lebens wandte Plücker sich erneut der Mathematik zu und begründete die sogenannte Liniengeometrie. Für die Untersuchung bestimmter Flächen der Liniengeometrie ließ Plücker Modelle anfertigen. Damit markiert er den Beginn einer Periode, in der verstärkt mathematische Modelle für Forschung und Lehre benutzt wurden.
Außerdem wird die Rolle, die Plücker bei der Gründung des mathematischen Seminars an der Universität Bonn spielte, untersucht.

6.1. Berufung nach Bonn

Bis 1835 wurde die Mathematik in Bonn immer noch – wie bereits zur Zeit von Plückers Studium in Bonn – durch von Münchow und W. A. Diesterweg vertreten. Dabei bekleidete von Münchow die Professur der Astronomie, hielt aber auch physikalische und mathematische Vorlesungen[161]. Diesterweg war bis zu seinem Tod am 13. Juni 1835 ordentlicher Professor der Mathematik (vgl. [ADB, Bd. 5, S. 153]). Durch den schlechten Gesundheitszustand des Professors von Münchow war nach dem Tod Diesterwegs die Wiederbesetzung der ordentlichen Professur der Mathematik besonders dringlich. Mit Schreiben vom 19. Juli 1835 schlug die philosophische Fakultät dem königlichen

[161] Vgl. 2.3.2.

stellvertretenden außerordentlichen Regierungs-Bevollmächtigten Hüllmann dazu drei Kandidaten vor. Dabei legte sie ihr „Hauptaugenmerk auf einen entschieden guten Lehrvortag“ (vgl. [UABo PF-PA105]):

> *„[...] so wird von der Wirksamkeit des neuen Professors der Mathematik die mathematische Bildung derjenigen, welche solche hier suchen,* [ausgestrichen: *hauptsächlich abhängen*] *u welche hier fast allein nur die künftigen* [eingefügt: *Lehramts-*] *Candidaten für Mathematik an den Gymnasien, höheren Bürgerschulen pp.* [eingefügt: *in den westlichen Theilen der Monarchie*] *sind, hauptsächlich abhängen. Sollte in Zukunft zu den Schwierigkeiten des Studiums der Mathematik in den höheren Theilen noch die Schwierigkeit kommen, sich durch einen dunklen Vortrag hindurch(zu)finden* [ausgestrichen: *zu müssen*]: *so würde für diese Studierende der unangenehme Umstand eintreten, entferntere Universitäten der ganz nahe gelegenen vorziehen zu müssen. Unter diesen Umständen u. wenn die philosophische Facultät zugleich nur solche Männer in Vorschlag bringen will, die zu gewinnen man hoffen kann, ist der Creis der Wahl sehr beschränkt. Unter den Mathematikern, die sich Zutrauen u[nd] Namen erworben haben, nennen wir*
> *1) den Professor ord. Plücker zu Halle*
> *2) den Professor ord. Scherk in Kiel*
> *3) den Hofrath u. Prof. ord. Schweins in Heidelberg,*
> *als solche, über deren guten Vortrag uns glaubhafte Versicherungen zugekommen sind. [...]“*

[UABo PF-PA105]

Neben Plücker – der hier an erster Stelle aufgeführt ist – wurde also auch sein Vorgänger in Halle, Professor Scherk, sowie sein eigener Lehrer, Professor Schweins, in die engere Wahl gezogen. Bereits einen Monat später wandte Plücker sich an das Ministerium mit der Bitte, ihm die Professur zu übertragen, da er erfahren habe, dass man ihn an erster Stelle vorgeschlagen hatte (vgl. [Ernst 1933, S. 28]). Mit Schreibem vom 25. September 1835 teilte das Ministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegeneheiten der philosophischen Fakultät mit, dass es die ordentliche Professur der Mathematik auf Plücker übertragen habe (vgl. [UABo PF-PA416]). Plückers Jahresgehalt in Bonn betrug anfänglich 1100 Taler (vgl. [Ernst 1933, S. 28]).
Wie bereits bei seiner Versetzung nach Berlin beantragte Plücker bei der Versetzung nach Bonn „von der Erfüllung der Habilitationsleistungen frei gesprochen“ zu werden (vgl. [UABo PF-PA416]). Im Schreiben vom 24. August 1836 bewilligte der königliche außerordentliche Regierungsbevollmächtigte von Rehfues diesen Antrag (vgl. [UABo PF-PA416]). Plücker hatte in seinem Antrag vom 30. April unter anderem darauf verwiesen, dass sich der entsprechende Paragraph der Statuten der philosophischen Fakultät nur *„auf die zuerst in ein Lehramt eintretenden, nicht aber auf die von einer Universität zur andern versetzten Professoren“* bezöge (vgl. [UABo PF-PA416]). Die von dem Regierungsbevollmächtigten zur gutachterlichen Äußerung dieser Behauptung gebetene philosophische Fakultät hatte Plücker darin zwar *„entschieden und einmütig“* zugestimmt, aber das Ministerium hielt die Behauptung für unbegründet.

> *„Der angeführte § der Facultäts-Statuten gründet sich auf die Bestimmung in 3 17. der allgemeinen Universitäts-Statuten, welcher vorschreibt, daß jeder, welcher als ordentlicher Professor berufen sei, sich der vorschriftsmäßigen Antrittsleistungen unterziehen müßte.*
> *Das Gesetz stutuirt nirgends einen Unterschied in dem von dem Herrn p Plücker angenommenen Sinne. Und in der That kann nach der hier bei zum grunde liegenden Absicht von einem solchen Unterschiede nicht die Rede seyn, indem die verlangten Habilitationsleistungen nicht als Erweisungen der wissenschaftlichen Qualification, sondern vielmehr nur als eine Höflichkeitsbezeugung anzusehen sind, womit das neue Mitglied die Anstalt, in deren Mitte dasselbe tritt, begrüßt.*
> *Ew. Magnificenz und den hochlöblichen academischen Senat beehre ich mich von dieser Entscheidung des hohen Ministerii mit dem ergebensten Ersuche in Kenntnis zu setzen, gemäß derselben die Ansichten der philosophischen Facultät gefälligst zu berichtigen."*

[UABo PF-PA416]

Neben diesem Grund hatte Plücker aber auch einen weiteren Grund angeführt, den das Ministerium anerkannte:

> *„Außer dem oben angegebenen Grunde hatte der Herr Professor Plücker für sein Gesuch auch noch den Umstang geltend gemacht, daß ihn die Erfüllung der fraglichen Leistungen in einer größeren wissenschaftlichen Arbeit, welche er unter Händen habe, gar zu unangenehm unterbrechen werde. Das hohe Ministerium hat dieses Moment erheblich genug gefunden, die Wünsche des Bittstellers zu berücksichtigen [...]."*

[UABo PF-PA416]

Bei der größeren mathematischen Arbeit Plückers handelt es sich möglicherweise um die „Algebraischen Curven" von 1839. Ernst zitiert außerdem eine ungenannte Quelle, in der Plücker angibt, er sei neben dieser größeren Arbeit auch „mit einer physikalischen Arbeit, zu welcher seine Reise ihm die Idee und die Möglichkeit der Ausführung gegeben habe" beschäftigt [Ernst 1933, S. 28]. Vermutlich handelte es sich dabei um Plückers Aufsatz zur Fresnelschen Wellenfläche ([Plücker 1839a]), die 1839 im Crelle-Journal veröffentlicht wurde und als seine erste physikalische Arbeit gewertet werden kann[162] (vgl. [Jaeckel 1970, S. 91]).
Bereits in der Vorrede seiner „Algebraischen Curven" hatte Plücker erklärt, mit diesem Werk seinen „Cyclus" analytisch-geometrischer Arbeiten abgeschlossen zu haben (vgl. [Plücker 1839, Vorrede S. V] sowie Kapitel 9). Allerdings veröffentlichte Plücker 1846 – nach einer vergleichsweise langen Pause von 6 Jahren – ein weiteres analytisch-geometrisches Werk. Mit diesem, dem „System der Geometrie des Raumes...", legte er dann „die Feder nach mehr als zwanzig Jahren nieder, um sie für diese Art von Forschung nicht mehr zu ergreifen" [Plücker 1846, Vorrede]. Nach einer Reihe von mathematischen Aufsätzen, die Plücker 1847 noch in Crelles Journal veröffentlichte, wandte er sich dann für fast zwei Jahrzente ganz der physikalischen Forschung zu.

[162] Auch wenn Schoenflies und Pockels sie bei der Veröffentlichung von Plückers gesammelten Werken den mathematischen Schriften zugeordnet haben.

6.2. Plücker als Experimentalphysiker

> „Das mathematische Organ besteht in einer abnormen Bildung der Stirnecke, die auf Vergrößerung des von der Stirnecke umschlossenen Raumes hinausläuft. [...]
> Geht man aus der mathematischen Sektion bei einer Naturforscherversammlung in die Section der Physiker, so fällt der Unterschied der Köpfe ohne Weiteres auf, [...].“
>
> P. J. Moebius „Über die Anlage zur Mathematik“ (Leipzig 1900)
> zitiert nach [Ahrens 1904, S. 242]

6.2.1. Von der provisorischen Vertretung zum Forschungsschwerpunkt

> „Erst mit *Julius Plücker* beginnen 1836 eigentlich der systematische Unterricht in Physik und die physikalische Forschung in Bonn. Erstaunlicherweise erreicht sie sehr bald hohes Niveau. Wesentliche Beiträge zur Optik, zum Magnetismus und den Erscheinungen der elektrischen Gasentladungen wurden von *Plücker* und einer Reihe von Mitarbeitern geleistet.“
>
> [Jaeckel 1970, S. 91]

Da Plücker sich zum Zeitpunkt seiner Berufung nach Bonn noch auf seiner von Halle aus angetretenen Auslandsreise befand, hielt er erst ab dem Sommersemester 1836 Vorlesungen (vgl. [Ernst 1933, S. 28]). Noch vor dem Beginn des Sommersemesters, am 30. April 1836, starb von Münchow [163]. Damit wurde die ordentliche Professur der Astronomie frei. Auf diese wurde am 23. August 1836 Friedrich Wilhelm August Argelander[164] berufen (vgl. [Becker 1970, S. 73f]). Daneben hatte von Münchow aber seit 1826 auch die Pflicht einer physikalischen Vorlesung und die Aufsicht über das physikalische Kabinett übernommen (vgl. [Jaeckel 1970, S. 91])[165]. Diese letzteren Aufgaben wurden vorläufig Plücker übertragen:

[163] Ernst gibt fälschlicherweise den 30. Juni 1836 als von Münchows Todesdatum an (vgl. [Ernst 1933, S. 28]). Von Münchows Personalakte ist im Universitätsarchiv Bonn nicht mehr vorhanden. Aber es befindet sich dort eine beglaubigte Kopie der Sterbeurkunde. In dieser beurkunden Plücker als „Freund des Verstorbenen“ sowie ein Mechaniker Etter als Nachbar den Tod von Münchows.

[164] (1799 - 1875).

[165] Im amtlichen Personalverzeichnis der Universität Bonn wurde von Münchow als „ordentl. Prof. der Astronomie, Lehrer der Physik, Director des physikalischen Cabinets und Vorsteher des Seminariums für die gesammten Naturwissenschaften“ geführt [UABo PSV, Winter-Halbjahr 1835-36].

Abb. 6.1.: Julius Plücker. Aus: [P. Ges. math. Abh., S. I]

„Das vorgeordnete königliche Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten hat sich durch die Erwägung, daß das physikalische Kabinet der hiesigen Universität, bis zu nähern Bestimmung über die Wiederbesetzung der durch den Tod des Professors von Münchow erledigten Professur der Physik, nicht ohne spezielle Beaufsichtigung am Orte seiner Aufstellung selbst bleiben dürfe, bewogen gefunden, die Direction des gedachten Kabinets mittelst Rescripts vom 27ten July d. J. provisorisch dem Herrn Professor Dr. Plücker zu übertragen und demselben zu gestatten, Vorlesungen über Physik zu halten.

Die Wohllöbliche philosophische Fakultät beehre ich mich hiervon mit dem Bemerken in Kenntniß zu setzen, daß ich wegen Vollziehung der Anordnung des hohen Ministerii das Nöthige verfügt und dem Herrn p Plücker unmittelbar die nähere Mittheilung gemacht habe.

Bonn, den 10ten August 1836

Der königliche außerordentliche Regierungs-Bevollmächtigte“

[UABo PF-PA416]

Im Wintersemester 1836/1837 hielt Plücker dann zum ersten Mal neben seinen mathematischen Vorlesungen eine Vorlesung zur Experimentalphysik[166] und beteiligte sich an der Leitung der Übungen im naturwissenschaftlichen Seminar (vgl. [Ernst 1933, S. 29]). Bis zu seinem Lebensende bot Plücker sowohl mathematische als auch physikalische Vorlesungen an. Die provisorische Bestimmung über das physikalische Kabinett wurde erst nach zwanzig Jahren endgültig geregelt. Mit einer Verordnung vom 11. August 1856 wurde Plücker die Direktion definitiv übertragen. Gleichzeitig wurde er zum ordentlichen Professor der Physik ernannt (vgl. [Ernst 1933, S. 64]). Damit war die in den Statuten der Universität Bonn seit der Gründung 1818 vorgesehene Professur der Physik erstmalig besetzt (vgl. [Jaeckel 1970, S. 91]).
Seit 1836 nahm Plücker also – erst provisorisch, später definitiv – eine Doppelstellung als Mathematiker und Physiker ein. Seine Forschungstätigkeit und damit auch seine Veröffentlichungen beschränkte er aber jeweils auf eines der beiden Felder. Bis 1846 war dies weiterhin die analytische Geometrie. Erst nach der Veröffentlichung seines „Systems ...“ 1846 wandte Plücker sich der experimentellen physikalischen Forschung zu. Dieser Wechsel der Forschungsfelder wurde wohl durch eine Reihe von Gründen motiviert, die sich – mehr oder weniger – nur zwischen den Zeilen finden. Zum einen hatte Plücker bereits 1835 bei der Veröffentlichung seines „Systems ...“ angekündigt, sich von der analytischen Geometrie abzuwenden (vgl. [Plücker 1835, S. VIII]). Er wolle vorher nur noch eine seperate Schrift über die algebraischen Kurven veröffentlichen. In der Vorrede der „Algebraischen Curven“ von 1839 erklärte Plücker dann:

„Indem ich dieser Verpflichtung hiermit nachkomme, liegt der Cyclus meiner Arbeiten im Gebiete der analytischen Geometrie vollständig vor.“

[Plücker 1839, S. V]

166 Prüfen ob Plücker nicht doch schon als Privatdozent phyikalische Vorlesugen hielt.

Nachdem er mit dem „System ...“ von 1846 doch noch eine Ausdehnung seiner Arbeiten auf die räumliche Geometrie vorgenommen hatte, beendete er diesen Zyklus endgültig. Das erklärte Ziel von Plückers Arbeiten in der analytischen Geometrie war die Ausbildung neuer analytischer Methoden – oder sogar der analytischen Methode. Diese sollten letztlich ermöglichen, ein „systematisches Ganzes“ der analytischen Geometrie aufzustellen (vgl. Kapitel 9 und 10). Spätestens mit dem „System der Geometrie des Raumes ...“ von 1846 hielt Plücker dieses Ziel für erreicht.
Allerdings war sich Plücker natürlich darüber bewusst, dass das Feld der analytischen Geometrie bei weitem noch nicht erschöpfend behandelt war. So findet sich „der Keim der Liniengeometrie“ [Clebsch 1872, S. XXX] im „System ...“ (1846) angedeutet. Und Plücker sprach dort die Absicht aus,

> „[...] auf diesen Gegenstand, der [...] ein weites Gebiet für analytisch-geometrische Entwicklungen zu eröffnen scheint, an einem andern Orte wieder zurückzukommen.“

[Plücker 1846, S. 322f]

Der „wirkliche und vermeintliche Mangel an Werthschätzung“ [Schoenflies 1895, S. 611], den Plücker stark empfand, dürfte daher auch eine Rolle bei der Entscheidung, seine Forschung in der analytischen Geometrie zu beenden, gespielt haben[167]. Krull, der allerdings bereits das Jahr 1840 als eigentliches Ende von Plückers erster mathematischer Phase ansieht, schreibt:

> „Tatsächlich bedeutet das Jahr 1840 für *Plücker* nicht nur einen äußeren Einschnitt.[168] Seine zwischen 1826 und 1840 überreiche mathematische Produktion stockte plötzlich, und sein Hauptinteresse wandte sich von da ab physikalischen Problemen zu. Anscheinend hatte er den Eindruck, seine Veröffentlichungen hätten nicht die Resonanz gefunden, die sie – wir dürfen sagen: mit Recht! – verdienten. Allerdings veröffentlichte er 1846 noch ein zusammenfassendes Werk, die *Geometrie des Raumes* [...]. Und bei einigen mathematischen Arbeiten aus dem Jahr 1847 hat man den Eindruck, daß *Plücker* alles das loswerden wollte, was er noch an ausgeführten Einzeluntersuchungen im Manuskript liegen hatte. Von 1847 ab war er dann 17 Jahre lang ausschließlich Physiker.“

[Krull 1970, S. 25]

Auch Clebsch gibt an, dass sich „die Thätigkeit *Plücker's* während seines Lebens [...] nicht immer, wenigstens nicht überall, der vollen Anerkennung erfreute, die seinen Leistungen gebührte.“ [Clebsch 1872, S. XXXV]. Und auch Ernst und Dronke führen

[167] Ziegler kommt hier zu einem ähnlichen Urteil: „Er selbst konnte sich aber vermutlich gegenüber seinen widerstreitenden Neigungen – einerseits es bei der Darstellung der methodischen Prinzipien bewenden zu lassen und seine Aufmerksamkeit einem neuen Gebiete zuzuwenden, andererseits seiner unerschöpflichen Phantasie freien Lauf zu lassen und die analytische Geometrie weiterzuverfolgen – zu keinem eindeutigen Entschluß durchringen. Den Ausschlag zur Hinwendung Plückers zu einem ganz neuen Gebiet, der Experimentalphysik, gaben äußere Lebensumstände“ [Ziegler 1985, S. 55].

[168] Krull geht fälschlicherweise davon aus, dass Plücker die Professur der Physik bereits 1840 übertragen worden sei (vgl. [Krull 1970, S. 25]).

die mangelnde Wertschätzung seiner Arbeiten als einen Grund Plückers an, sich von der mathematischen Forschung abzuwenden (vgl. [Ernst 1933, S. 37], [Dronke 1871, S. 13][169]).
Neben diesen Gründen, die Plückers Abkehr von der analytischen Geometrie und vielleicht auch von der mathematischen Forschung überhaupt motiviert haben könnten, gab es auch Gründe, die eine Fokussierung auf physikalische Forschung motivierten. Wie bereits in den Abschnitten 2.3 und 3.1 ausgeführt, hatte Plücker während seines Studiums auch physikalische Vorlesungen besucht und sich für Mathematik und Physik habilitiert. Durch die physikalischen Vorlesungen, die Plücker seit 1836 hielt, war sein Bezug zu diesem Foschungsgebiet bereits wieder enger geworden. Hinzu kam, dass Plückers Eignung für die Vertretung der physikalischen Professur angezweifelt wurde und Plücker diese Vorwürfe durch Veröffentlichungen in der Physik zurückweisen wollte. Dies wird aus dem Entwurf eines Briefes deutlich, der sich in Plückers wissenschaftlichem Nachlass in Göttingen findet und mit dem Plücker seine ersten Arbeiten als Experimentalphysiker[170] einreichte:

> *„Ew. Hochwohlgeboren beehre ich mich in der Anlage zwei vorläufig kleine Abhandlungen zu überreichen, welche über die ersten Entdeckungen von Bedeutung die in dem hiesigen phys[ikalischen] Kabinete gemacht worden sind, Bericht erstatten. [...] Mir ist es eine große Befriedigung, diese kleinen Proben einsenden zu können, denn seit 1841 war es Ehrensache für mich aus einer Verdächtigung die meine Wirksamkeit als experimentierender Physiker getroffen, und die auch bis zu Ew. Hochw[ohlgeboren] gekommen war, von mir in eclatanter Weise abzuweisen[171]. Wenn daß so spät geschieht, so war der Grund davon in meiner Stellung; es war mir bedenklich es erzwingen zu wollen, und ich rechne es mir als Selbstüberwindung an, daß ich zuvor den Cyclus meiner math[ematischen] Arbeiten zu Ende brachte und der Zukunft das Weitere überließ.“*

[NSuUB CodMsP5, Conv. D, 7][172]

Leider lässt sich nicht genau feststellen, von welcher Seite und in welcher Form diese „Verdächtigungen“ vorgebracht wurden. Bekannt ist aber, dass Plückers Fähigkeiten im praktischen Experimentieren nicht besonders gut ausgebildet waren.

> „Aus einem späteren Berichte des Kurators geht hervor, daß man in der ersten Zeit über Plücker's Experimentierkunst nicht günstig urteilte; man behauptete damals, daß es ihm an der nötigen Fertigkeit in Versuchen fehlte, und daß diese ihm häufig mißlängen. Falls dies zutreffen sollte, so wäre es

[169] Dronke spricht hier von „Anfeindungen“ von Seiten Steiners und eines „Ober-Regierungsrathes Sch.“. Zu ersterem vgl. Abschnitt 4.4. Möglicherweise handelt es sich bei dem genannten Ober-Regierungsrath, „der, ein früherer Freund und Förderer Plücker's, viel zu den bis in die letzten Lebensjahre dauernden Nergeleien und Unannehmlichkeiten beitrug“, [Dronke 1871, S. 13] um Johannes Schulze (vgl. Fußnote 102). Inwiefern dieser allerdings Plücker „anfeindete“ ist mir nicht bekannt.

[170] Hierbei handelte es sich um seine ersten beiden physikalischen Artikel, die in Poggendorfs Annalen veröffentlicht wurden: [Plücker 1847g], [Plücker 1847h].

[171] Es folgt der Satz: „Diese Verdächtigung hat mich mehrere Jahre sehr gedrückt“, der aber ausgestrichen ist.

[172] vgl. [Ernst 1933, S. 45].

leicht aus dem bisherigen Werdegang Plücker's zu erklären. Denn Plücker hatte sich bis zu seinem 35. Lebensjahr kaum mit Experimentaluntersuchungen befaßt, da sein ganzes Wirken und Schaffen bis dahin der mathematischen Wissenschaft gehörte."

[Ernst 1933, S. 41]

Als Privatdozent war Plücker auch für Physik habilitiert gewesen. Allerdings wurde ihm der Zugang zu den Instrumenten des physikalischen Kabinetts nicht gestattet, wie er später in einem Brief an den Regierungsbevollmächtigten von Rehfues berichtet:

„Als ich selbst vor 17 Jahren als Privat-Dozent hier auftrat, erklärte mir der seel[ige] von Münchow, ich dürfe durchaus kein Instrument von ihm begehren, weder für eigene Untersuchungen geschweige für Vorlesungen. Ersteres traf mich um so stärker, als ich in den beiden vorhergehenden Jahren in Paris mich ausschließlich mit Experimental-Physik beschäftigt hatte; was letzteres betrifft so achtete ich, als junger Mann, die Stellung, welche ein älterer Lehrer sich erworben und beschränkte mich, neben mathematischen, auf theoretisch physikalische Vorlesungen. Erst nach dem Tode meines seel[igen] Freundes erhielt ich durch die Gunst eines hohen Ministeriums Gelegenheit Experimental-Physik zu lehren und dieselbe zu meiner Hauptbeschäftigung zu machen."

[SBPK Slg.D, Bl. 11][173]

Wie bereits angegeben wurde, hatte Plücker tatsächlich bereits 1836 mit Vorlesungen zur Experimental-Physik begonnen. Dass er seine eigenen Experimental-Untersuchungen aber erst gut 10 Jahre später begann, könnte neben den bereits genannten Gründen noch einen weiteren Grund haben. Johann Wilhelm Hittorf,[174] ein Schüler Plückers, berichtet, wie es Plücker gelang seine fehlenden Qualifikationen auszugleichen:

„Dadurch dass *Plücker* früher dem Experimente nicht obgelegen hatte, war ihm die Möglichkeit versagt gewesen, sich die Fertigkeit und Sicherheit, welche die Uebung dem Körper allein in der Jugend verleiht, zu erwerben. Er wusste dieses Hinderniss für seine experimentelle Thätigkeit dadurch wegzuräumen, dass er diejenigen in seiner Umgebung, an welchen er jene Eigenschaften erkannte, für seine Ideen interessirte und in den Dienst der Wissenschaft zog."

[Clebsch/Hittorf 1872, S. 33][175]

Eine solche Unterstützung erhielt Plücker aber erstmalig ab Sommer 1846, durch die bereits 1841 beantragte Einstellung eines Mechanikers für das physikalische Kabinett

[173]Brief vom 24. Januar 1841.
[174](1824 - 1914).
[175]Die von Clebsch (bzw. Klein) für die Gedächtnisrede über Plücker von Hittorf angeforderten Auskünfte, hat Clebsch als eine Note zu seiner Rede veröffentlicht (vgl. das Zitat auf S. 80).

(vgl. [Ernst 1933, S. 42f]). Damit wurde Plücker in die Lage versetzt, Faradays[176] Versuche zu Magnetismus und Diamagnetismus aus dem Jahr 1845 zu wiederholen und so seine eigene physikalische Forschung zu beginnen.
Als Mitarbeiter und Unterstützer von Plückers experimenteller Forschung sind die Mechaniker Friedrich Fessel[177] und dessen Schüler Johannes Epkens[178], der Glasbläser Heinrich Geissler[179], die Schüler Plückers und späteren Professoren August Beer[180] und Johann Wilhelm Hittorf, der Assistent Theodor Meyer[181] und zuletzt Felix Klein[182] zu nennen (vgl. [Ernst 1933, S. 55-58;79], [Müller 2004, S. 14f], [Dörfel 2006, S. 28]). Wie sich die Zusammenarbeit Plückers mit seinen Mitarbeitern konkret gestaltete, wird im Unterabschnitt 6.2.5 exemplarisch an der Gasentladungsforschung die Plücker und Hittorf mit den von Geissler hergestellten Röhren betrieben, dargestellt.

6.2.2. Wissenschaftliche Kontakte nach England und Frankreich

Plücker an seine Frau (6. April 1858)
„Das Vorstehende hatte ich geschrieben gleich den anderen Morgen nach meiner Ankunft, aber ich mußte aufhören, weil in Folge der Anstengungen meiner Augen, die Bewegungen des Schiffes in meinem Kopfe allmählig so stark wurden, daß ich ganz schwindlig wurde. – von Brüssel ging es um 8 Uhr weiter und vor 4 Uhr war ich in Calais, wo es sogleich zu Schiffe ging. Die Überfahrt war höchst stürmisch und es regnete fortwährend. Ich trotzte aber Regen und Wind, außer mit meinem Mantel noch mit einem Waterproof Überzieher, wie ihn die Matrosen haben, versehen. Das Wasser der Wellen schlug fortwährend auf das Vordeck und mir ins Gesicht. Ich hielt mich unbeweglich und zu meiner Überraschung hielt ich mich gut, kam mit bloßem Schwindel davon – der sich auch in diesem Augenblick noch beim Schreiben wiederholt – Nach zwei Stunden kamen wir nach Dover.“

[NRC PC, Volume 5, Item 14]

[176] Michael Faraday (1791 - 1867), war ein bedeutender englischer Naturforscher und Experimentalphysiker, mit dem Plücker später in brieflichen und persönlichen Kontakt trat. Der Briefwechsel zwischen Plücker und Faraday findet sich in [Frank 1991].
[177] (1825 - ?).
[178] Epkens fertigte später Plückers Modelle zur Liniengeometrie an (vgl. 6.3.2). Leider ließen sich keine Lebensdaten Epkens finden.
[179] (1814 - 1879).
[180] (1825 - 1863). Beer studierte ab 1845 in Bonn, promovierte 1848 dort, habilitierte sich 1850 als Privatdozent und wurde 1855 zum außerordentlichen, so wie 1857 zum ordentlichen Professor der Mathematik in Bonn beufen. Mit Plücker verband ihn eine enge Freudschaft. Nach seinem frühen Tod verwaltete Plücker seinen wissenschaftlichen Nachlass.
[181] (1825 - ?).
[182] (1849 - 1925).

Neben den Mechanikern und Wissenschaftlern mit denen Plücker direkt zusammenarbeitete, suchte er auch verstärkt den Kontakt zu anderen Forschern im In- und Ausland. Allerdings wurden Plückers physikalische Arbeiten, die er in verschiedenen Zeitschriften veröffentlichte, in Deutschland weitgehend ignoriert (vgl. [Müller 2004, S. 20]).[183] Daher waren die Kontakte zu englischen und französischen Wissenschaftlern wichtiger für Plücker, auch weil er dort als ein „angesehener Geometer und experimenteller Physiker" galt [Müller 2004, S. 20]. Diese Anerkennung manifestierte sich besonders deutlich in der 1866 an Plücker verliehenen Copley-Medaille.

> „Dem eigenen Erfolgsgradienten folgend war er entsprechend häufig im Ausland, um seine Forschungen nach der Devise: „But all such phenomena are very difficult to describe: I wished I could show them to you" vorzustellen und sich mit Kollegen zu treffen."

[Müller 2004, S. 20]

Durch die Briefe, die Plücker von seinen Auslandsreisen an seine Frau schrieb – und von denen einige in seinem Briefnachlass ([NRC PC]) erhalten sind – lassen sich diese Kontakte zum Teil nachvollziehen. Neben Faraday und Wheatstone gehörten Rayleigh, Grove, Sabine, Stokes, Brewster, Tyndall, Bence Jones, Becquerel, Hofmann und Gassiot zu Plückers Bekanntenkreis (vgl. [Müller 2004, S. 20f]). Treffpunkte dieser Wissenschaftler waren in der Regel die Werkstätten der ortsansässigen Instrumentenmacher. In Paris bevorzugte Plücker neben Otto Hempel besonders Heinrich Daniel Ruhmkorff[184] als Instrumentenhersteller. Oft suchte er diese direkt nach seiner Ankunft auf, erfuhr dort, welche Wissenschaftler sich zur Zeit in Paris aufhielten oder traf sich dort mit diesen.

> *„Ich ging zuerst gestern Morgen zu Ruhmkorff, wo ich erfuhr daß Moigno mit Jacobi aus Petersburg nach England zur Versammlung gegangen ist* [...]*. Dann ging ich zu Hempel wegen der zu machenden Bestellungen aber auch er war verreist* [...]*."*

[NRC PC, Vol. 5, Item 15][185]

> *„Als ich dann wieder in meiner Stube saß, läßt sich ganz unerwartet der jüngere Becquerel melden und mehr als zwei Stunden lang wurden physikalische Fragen besprochen.* [...] *Auf den andern Morgen um 11 Uhr lud er mich in sein Laboratorium im Jardin des plantes ein um mir seine Versuche zu zeigen. Ich ging dann auch zur bestimmten Stunde hin. Um 1 Uhr gingen wir zusammen nach Ruhmkorff, wohin ich auch Matteuci ein rendez vous gegeben hatte und zeigte einige von meinen Sachen.* [...] *Freitag Morgen ging ich zuerst zu Hempel da erfuhr ich das Prof. Landolt nebst junger*

[183] Falk Müller gibt an, der „langjährige Disput" zwischen Plücker und Steiner scheine sich „allgemein auf sein Verhältnis zu den Berliner Forschern ausgewirkt zu haben". Vgl. dazu auch [Klein 1926, S. 121]. Jaeckel spricht von „Plückers starker Abneigung gegen Preußen" und dass Plücker sich „von den Berliner Physikern mißachtet fühlte". [Jaeckel 1970, S. 92].

[184] (1803 - 1877) Eigentlich Rühmkorff; Ruhmkorff ist die französische Schreibweise (vgl. [ADB, Bd. 29, S. 615]).

[185] Brief Plückers vom 04.10.1859 an seine Frau.

Frau hier gewesen aber bereits wieder abgereiset seien.“

[NRC PC, Vol. 5, Item 6][186]

„Mein erster Gang war zu Ruhmkorff [...]*“*

[NRC PC, Vol. 5, Item 17][186]

Als Gründe für die Beliebtheit der Werkstätten der Instrumentenmacher als Treffpunkte für die Forscher gibt Müller an:

> „Zum einen kam es dort zu einem wichtigen Austausch zwischen Instrumentenmachern und Forschern, zum anderen waren die Instrumentenmacher oftmals selbst aktiv an den Forschungen beteiligt und besaßen als einzige vor Ort ein funktionierendes, ausreichend ausgestattetes und öffentlich zugängliches Labor.“

[Müller 2004, S. 21]

Trotz dieser – zum Teil engen – Kontakte zu anderen Wissenschaftlern beachtete Plücker die Veröffentlichungen seiner Kollegen eher wenig.

> „Bei seinen geometrischen Arbeiten war er so ganz auf sich angewiesen gewesen, so ungehindert seinem Ideengange gefolgt, dass er sich des Studiums der Literatur fast entwöhnt hatte. Bei der Selbständigkeit seines Denkens war ihm später ein Eindringen in die Auffassung Anderer schwer, und oft hat er geäussert, wie unangenehm ihm diese Thätigkeit sei und wie wenig er sich dazu eigne.“

[Clebsch/Hittorf 1872, S. 34]

Obwohl Plücker also durch seine Reisen und seine Briefwechsel – wie z.B. mit Faraday – einen regen wissenschaftlichen Austausch mit seinen Kollegen pflegte, lassen sich nur schwer Rückschlüsse auf die von ihm wahrgenommenen Forschungsergebnisse anderer ziehen. Beispielhaft könnte man hier anführen, dass Plücker 1847 bei seinen Versuchen über Magnetismus und Diamagnetismus der Kristalle Poissons Theorie zuerst völlig unberücksichtigt ließ (vgl. [Ernst 1933, S. 43f]). Einerseits lieferte Plücker den experimentellen Nachweis von einigen Aspekten des magnetischen Verhaltens von Kristallen, die Poisson bereits vorhergesagt hatte. Andererseits stellte er falsche emprirische Gesetze auf, die er erst „nach langjährigen Bemühungen [...] durch theoretische Überlegungen im Sinne der Poisson'schen Theorie“ [Ernst 1933, S. 44] richtigstellen konnte.[187]

[186] Undatierter Brief Plückers an seine Frau.

[187] Durch Faradays und Plückers Untersuchungen zum Kristallmagnetismus, die „damals die ganze wissenschaftliche Welt [erfüllten]“ [Ernst 1933, S. 56], wurden auch Knobloch und Tyndall zu solchen Untersuchungen angeregt. Sie wandten sich in ihren Veröffentlichungen gegen die von Plücker aufgestellten empirischen Gesetze über das Verhalten der Kristalle im Magnetfeld. Fast gleichzeitig mit ihren Aufsätzen erschien eine neue Arbeit Plückers und Beers über Experimental-Untersuchungen zum Kristallmagnetismus, in der er seine bisherigen Ansichten modifizierte (vgl. [Ernst 1933, S. 56ff]).

> „Offen widerrief er [d.i. Plücker] die zuerst gegebene Auffassung, sobald er sie als irrig erkannte, und ersetzte sie durch diejenige, welche ihm die richtigere schien. So schloss er die Theorie über das magnetische Verhalten der Krystalle erst endgültig in dem Aufsatze ab, welcher 1858 in den Philos. Transactions unter dem Titel: „On the magnetic induction of Crystals“ erschien.“

[Clebsch/Hittorf 1872, S. 34]

6.2.3. Finanzielle Situation des physikalischen Kabinetts in Bonn

Während die Labore der Instrumentenbauer ausreichend ausgestattet waren und funktionierten (vgl. [Müller 2004, S. 21]), war der Fonds des physikalischen Kabinetts der Universität Bonn zu gering, um die notwendigen Anschaffungen machen zu können. 1841 beklagte Plücker in einem Bericht, dass „die Elberfelder Realschule [...] (freilich nicht aus Staatsfonds) bisher jährlich eine größere Summe verwendet“ habe als dem Kabinett jährlich zur Verfügung stand (vgl. [Ernst 1933, S. 43]). Ernst führt eine Reihe von Bitten und Gesuchen Plückers auf, diese Geldmittel zu verbessern oder die Dotierung seiner Professur zu erhöhen, um ihm Auslandsreisen zu ermöglichen. In der Regel waren diese Gesuche nur zum Teil oder nach einiger Verzögerung erfolgreich (vgl. [Ernst 1933, S. 44-50; 54f]).

> „Als Ergänzung [...] seien noch die folgenden, den Akten entnommenen Berichte Plückers an das Ministerium mitgeteil, in denen er in seiner sachlichen und doch energischen Art immer wieder für die Vermehrung der zugebilligten Mittel und Hilfskräfte sowie für die Verbesserung der kläglichen Austattung seines „Physikalischen Kabinetts“ eintrat, mit deren Dürftigkeit er zeitlebens zu kämpfen hatte.“

[Ernst 1933, S. 68]

Da die Geldmittel für die notwendigen Anschaffungen nicht ausreichten, musste Plücker einige der für seine Versuche erforderlichen Apparate aus der eigenen Tasche bezahlen ([Ernst 1933, S. 87]). Da es an festangestellten Assistenten und Mechanikern fehlte, musste Plücker sich „damit begnügen [...] die ausgezeichnetesten seiner Studenten zur Assistenz heranzuziehen“ [Ernst 1933, S. 71]. Weil diese aber in der Regel nur wenige Semester in Bonn studierten, war er darauf angewiesen, sich immer wieder „neue Kräfte anzuwerben“ [Ernst 1933, S. 71]. Da es bis 1866 an geeigneten Räumlichkeiten im Kabinett fehlte, mussten die Experimental-Untersuchungen im Vorlesungssaal stattfinden. Dementsprechend mussten sie häufig „gerade in den wichtigsten Momenten unterbrochen werden, um Platz für die Versuche der Experimentalvorlesung zu schaffen“ [Ernst 1933, S. 87].
Exemplarisch sei hier noch erwähnt, dass Plücker den Plan verfolgte, ein physikalisches Praktikum in Bonn einzurichten. Er war dazu durch einen Besuch bei dem Physiker und Mathematiker Andreas von Ettingshausen[188] motiviert worden. Dieser war Direktor des physikalischen Instituts in Wien ([Ernst 1933, S. 69]). Durch die Einrichtung eines

[188]Freiherr Johannes Andreas Jakob von Ettingshausen (1796 - 1866).

solchen Praktikums wollte Plücker einen breiteren Zugang zu einer praktischen Ausbildung und zu Experimentaluntersuchungen ermöglichen. Eine derartige praktische Erfahrung war bisher den einzelnen Studenten vorbehalten, die Plücker assistierten. Konkret bat Plücker um die Einstellung eines Mechanikers für das Kabinett mit einem Jahresgehalt von 300 Thalern. Die Materialbeschaffungen und die Bezahlung der „5 - 6 vollständig qualifizierten Studierenden“ die als Assistenten beschäftigt werden sollten, sollten vom bisherigen Fond, der 450 Thaler betrug, gedeckt werden ([Ernst 1933, S. 69f]). Allerdings dauerte es einige Jahre, bis Plückers Gesuche Erfolg hatten. In dem Bericht über das physikalische Kabinett für das Jahr 1863 kam Plücker noch einmal auf sein Gesuch zurück:

> „Wenn ich bereits vor vielen Jahren in so dringender Weise, als es meine Stellung gestattete, den Wunsch aussprach, das Physikalische Laboratorium zu einer Pflanzschule für junge Physiker umgestalten zu können, so geschah es, weil ich von dem Bedürfnis durchdrungen war, und mich berufen fühlte, meine Kräfte dieser Tätigkeit zu widmen. Das Bedürfnis wird immer dringender; die Dringlichkeit meines Gesuches wird immer geringer, in demselben Maße, als ich die Zeit, in der ich die Früchte meiner Tätigkeit hätte sehen können, immer mehr verstreichen sehe.“
>
> zitiert nach [Ernst 1933, S. 77]

6.2.4. Plückers Forscherpersönlichkeit

> „Wenn man tiefer in das Wesen von *Plücker's* Thätigkeit eindringt, so ersieht man, dass das Besondere seines physikalischen Strebens mit den Eigenthümlichkeiten seines mathematischen Schaffens auf eine gemeinsame Quelle zurückführt. *Plücker* war eine wesentlich und eminent productive Natur. Seine ganze Denkweise, mehr producirend als analysirend, gewährte ihm die volle Freude an dem Reichtum neuer Gestalten und Gebilde, welche die Fruchtbarkeit seiner Phantasie unerschöpflich ihm zuführte. Und wie die Freude an der Gestalt im höheren Sinne es ist, welche den Geometer macht, so war sie auch die Quelle seiner physikalischen Untersuchungen.“
>
> [Clebsch 1872, S. XIIf]

Wegen Plückers Doppelstellung als Mathematiker und Physiker wäre eine Verbindung beider Fächer und eine Konzentration auf mathematische Physik eigentlich naheliegend gewesen. Felix Klein, der während seiner Studienzeit in Bonn als Assistent Plückers an dessen physikalischen und mathematischen Vorlesungen und Forschungen beteiligt war (vgl. [Müller 2004, S. 38]), schreibt dazu:

> „Obwohl von der Mathematik ausgehend, war Plücker nichts weniger als ein mathematischer Physiker. Ihn reizte vielmehr die rein experimentelle Forschung, mit der er dem Beispiel Faradays folgend, am liebsten in ganz unbekanntes Gebiet eindrang.“
>
> [Klein 1926, S. 120]

Beispielsweise hätte eine mathematische Formulierung der von Plücker und anderen beobachteten Erscheinungen bei der Spectralanalyse der Gase nahegelegen. Müller schreibt, dass „von Plücker [...] schon in den späten 1850er oder 1860er Jahren erste Impulse für eine mathematische Formulierung der Erscheinungen zu erwarten gewesen [wären]“ [Müller 2004, S. 38]. Aber auch hier bleibt Plücker bei einer rein experimentellen Forschung und unternimmt keine Versuche der mathematischen Deutung.
Von Faradays Arbeiten wurde Plücker nicht nur in der Wahl seiner ersten Forschungsgebiete und der Art der experimentellen Vorgehensweise inspiriert, sondern auch in Bezug auf die Organistation und Präsentation seiner Forschungsarbeit (vgl. [Ernst 1933, S. 86], [Müller 2004, S. 38]).

> „*Plücker* steht den Entdeckungen *Faraday's* unbefangener gegenüber [als Weber[189]] schon deshalb, weil er eben erst der Physik sich zuwendet; ihn interessirt die stoffliche Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, ihn reizt es, mit dem Muthe des Entdeckers in das neue Gebiet einzudringen, seine Grenzen zu erweitern, seinen Inhalt zu vermehren. Er ist, so wenig er ihn an Tiefe der physikalischen Anschauungen und an Fülle der Entdeckungen erreicht, doch eine mit Faraday congeniale Natur; schon die äussere Form seiner Veröffentlichungen erinnert an die experimental researches; er liebt es, in der Weise *Faraday's*, seine Beobachtungen tagebuchartig in zahlreichen Paragraphen an einander zu reihen, seine Versuche unter immer verändertern Bedingungen, mit immer neuen Stoffen zu wiederholen.“
>
> [Riecke 1895, S. XII]

In diesem „Entdeckermut“, mit dem Plücker ein unbekanntes Gebiet erschloss, findet sich eine Parallele zu Plückers mathematischer Tätigkeit.

> „Sobald aber *Plücker* dem neuen Gebiete sich zuwendet, erweist er sich auf ihm nicht minder fruchtbar als auf dem der Mathematik; er ist unermüdlich neue Versuche zu ersinnen, neue Stoffe dem Versuche zu unterwerfen, er entdeckt eine Reihe merkwürdiger und wichtiger Thatsachen und eröffnet der physikalischen Foschung neue Wege.“
>
> [Riecke 1895, S. XI]

> „*Plücker* wusste bald eine Erscheinung von verschiedenen Seiten zu erfassen und Versuche zu ersinnen, in denen dieselben hervortreten mussten. Das Princip der Verallgemeinerung, an welches er in seinen geometrischen

[189] Wilhelm Eduard Weber, deutscher Physiker (1804 - 1891). Im Gegensatz zu Plücker untersuchte Weber eher die quantitative Seite der Erscheinungen und beherrschte die „Kunst der exakten Messung“ [Riecke 1895, S. XII].

> Arbeiten so gewöhnt war, leistete hierbei vortreffliche Dienste und erleichterte ihm die Orientierung. Hatte er den thatsächlichen Inhalt einer Entdeckung so vollständig, als er zunächst vermochte, erforscht, so übergab er sie der Oeffentlichkeit, wenn er über die Theorie derselben auch nicht zum Abschluss gekommen war.

[Clebsch/Hittorf 1872, S. 34]

Es gibt also keinen inhaltlichen Zusammenhang zwischen Plückers mathematischer und physikalischer Forschung, sondern eher einen methodischen. Bei allen seinen geometrischen Arbeiten hatte die Ausbildung einer Methode im Vordergrund gestanden, die eine konsequente Anwendung der Analysis auf die Geometrie ermöglichen sollte (vgl. 10). Dabei wollte er „mathematische Entwicklungsweisen[, die] sich als Kunstgriff darstellte[n]“ zu einer „Methode“ ausbilden (vgl. [Plücker 1831, S. V]). Er führte neue Behandlungsweisen ein, deren Neuheit darin bestand, dass ihr „generischer Zusammenhang mit dem Ganzen“ aufgezeigt und sie vom „analytischen Kunstgriff“ zur „allgemeinen Methode“ umgestaltet wurden (vgl. [Plücker 1828, S. III]).

> „Für Plücker stand die Suche nach wissenschaftlichen Objekten im Vordergrung, die eine vermittelnde Position zwischen allgemeinen Strukturen und spezifischen Erscheinungen einnehmen konnte. [...] Die Beziehung zwischen den verschiedenen Bereichen musste hergestellt werden; das Allgemeine musste mit den speziellen Fällen, den einzelnen Figuren und Körpern, verschiedene Allgemeinheiten mussten untereinander in einen gemeinsamen Zusammenhang gebracht werden.“

[Müller 2004, S. 39f]

Im Zusammenhang mit seiner Charakterisierung von Plückers Forschertätigkeit unterscheidet Clebsch zwei Typen von Forscherpersönlichkeiten. Auf der einen Seite ist dies ein Forschertyp, der „von bestimmten Problemen“ ausgeht, deren Wichtigkeit er erkannt hat und „deren Lösung mit allen Kräften mehr oder weniger direct angestrebt wird“ [Clebsch 1872, S. XII]. Dem gegenüber steht der Forschertyp der „sich nur das Gebiet seiner Thätigkeit wählt, in diesem aber frei Umschau hält, und [...] nach Problemen späht, deren Lösung sich ermögliche“ [Clebsch 1872, S. XII]. Diesem zweiten Forschertyp entspricht Plückers Tätigkeit als Experimentalphysiker und Geometer.

> „Über den relativen Werth dieser Forschungsmethoden werden verschiedene Individualitäten immer verschiedener Ansicht sein. Wenn die erstere zu grösserer Vertiefung führen kann, so ist sie auch der Unfruchtbarkeit nur zu leicht ausgesetzt. Der anderen schuldet man Dank für die Erwerbung grosser und neuer Gebiete; wobei denn im Einzelnen Vieles der erstern Methode zu ergründen und zu begrenzen verbleiben mag.“

[Clebsch 1872, S. XII]

Müller kommentiert dazu:

> „Plücker hat sich als Experimentator in den meisten seiner Forschungen auf die Erzeugung und Bereitsstellung von Forschungsgegenständen konzentriert, die als Verkörperungen spezifischer Problemstellungen dienen konnten oder aus denen sich solche Problemstellungen entwickeln ließen; die weitere Bearbeitung hat er dann anderen Forschern überlassen. Wir werden aber noch sehen, dass die „explorativ“ vorgehenden Experimentatoren auf ihre Weise eine „Ergründung“ und „Begrenzung“ der neuen Gebiete vorangetrieben haben und damit das Feld für die zweite Gruppe von Forschern auf spezifische Weise bereitet und geprägt haben.“

[Müller 2004, S. 46f]

Dadurch, dass Plücker sich einer solchen Experimentaltradition anschloss, stand er in Deutschland als Außenseiter einer „sich immer stärker durchsetzende[n] „neue[n] Experimentalauffassung, die Präzisionsmessungen als Ziel ansah“ gegenüber [Müller 2004, S. 46f][190]. Hierin könnte auch ein Grund dafür liegen, dass seine Leistungen nicht in Deutschland, dafür aber um so mehr im Ausland geschätzt wurden. Wie oben bereits erwähnt wurde, lag es Plücker nicht, die Literatur seiner Fachkollegen wahrzunehmen und zu studieren. Dies verstärkte seine Außenseiterrolle gegenüber der neuen Tendenz sicherlich noch.

> „In seinen physikalischen Arbeiten erscheint *Plücker* als Autodidakt, geleitet höchstens durch das Vorbild *Faraday's* . Die insbesondere durch *Gauß* und *Weber* entwickelten Methoden genauer Maassbestimmung bleiben ihm fremd und die Resultate seiner Arbeiten entbehren daher in vielen Fällen der Vergleichbarkeit und allgemeinen Gültigkeit.“

[Riecke 1895, S. XI]

Im Zusammenhang mit Plückers „explorativer“ Forschungsweise weist Müller noch auf eine „gewisse Nähe zu den naturphilosophischen Grundgedanken“ hin [Müller 2004, S. 51].

> „Seine Suche nach gemeinsamen Zusammenhängen verschiedener Kräfte und Forschungsgebiete und die für seine experimentelle Vorgehensweise typische Variation von Parametern waren, wenn nicht für naturphilosophische, so doch für die Goethischen Vorstellungen über das Experimentieren charakteristisch. Nicht unterschätzt werden darf hier jedoch der Einfluss Michael Faradays, dessen Vorgehensweise ebenfalls einige dieser Eigenschaften aufweist, dessen Verhältnis zum naturphilosophischen Gedankengut jedoch umstritten ist.“

[Müller 2004, S. 51]

[190] Müller bezieht sich hierbei auf eine Einschätzung von Rudolf Stichweh.

6.2.5. Von der Gasentladungsforschung zurück zur Mathematik

> „Der Beginn einer systematischen und bald auch sehr breiten Erforschung [der Gasentladung] ist eng mit den Namen Julius Plücker (1801 - 1868) und Heinrich Geißler (1814 - 1879) und deren Wirken in Bonn verbunden.
> [...]
> Während heute in allen von Plücker langjährig und systematisch bearbeiteten Feldern überwiegend die Fortsetzer zitiert werden, gilt er mit und [...] auch wegen Geißler als Initiator eines sowohl wissenschaftlich als auch technologisch fruchtbaren Zeitalters.“
>
> [Dörfel 2006, S. 26;38]

Gasentladungen, also elektrische Entladungen in weitgehend evakuierten Räumen, waren bis weit ins 19. Jahrhundert ein eher exotischer Forschungsgegenstand. Das lag zum einen an der Komplexität der Prozesse, die sich einer einfachen Erklärung entziehen, zum anderen an den technischen Problemen die mit diesen Untersuchungen verbunden waren (vgl. [Dörfel 2006, S. 26]). 1847 begann Plücker mit der Erforschung dieser Prozesse. Dabei spielte der Glasbläser Geissler eine bedeutende Rolle. Die ersten Plücker-Biographien weisen Plücker bei dieser Zusammenarbeit die Rolle des Wissenschaftlers zu, der von dem Instrumentenbauer Geissler unterstützt wurde (vgl. [Dronke 1871, S. 14], [Clebsch/Hittorf 1872, S. 34], [Riecke 1895, S. XIVf], [Ernst 1933, S. 65]). Exemplarisch sei hier die Charakterisierung dieses Verhältnisses durch Rieke zitiert:

> „Wir wenden uns nun zu einer Gruppe von Arbeiten, in denen *Plücker*, unbeeinflusst und ungestört durch andere, ein neues Gebiet von hohem Interesse erschlossen hat, mit dessen Erforschung wir noch lange nicht am Ende sind: es ist das *Gebiet der elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen.* Die hierher gehörenden Arbeiten *Plücker's* dürfen um so mehr hervorgehoben werden, als sie nicht immer die ihnen gebührende Anerkennung gefunden haben.
>
> Vor allem hat er in die Untersuchung ein Hülfsmittel eingeführt, das seither von jedem Experimentator benutzt wird und das einen der gewöhnlichsten Bestandtheile unseres Vorlesungs- und Laboratoriumsapparates bildet: die *Geissler'sche Röhre.* Denn von *Plücker* rührt die Idee her, den elektrischen Strom durch Röhren, die mit verdünnten Gasen gefüllt sind, mittelst eingeschmolzener Platinelektroden zu führen; er gab zuerst dem mittleren Theil der Röhre die kapillare Form, um so das schwache elektrische Licht zu concentriren und zur spectralen Untersuchung geeignet zu machen. *Plücker* selbst nannte die Röhren *Geissler'sche*, um dadurch dem bewunderswerthen Geschick des erfindungsreichen Künstlers zu huldigen, dessen Mitarbeit für den Erfolg von unschätzbarer Bedeutung war.“
>
> [Riecke 1895, S. XIVf]

Dörfel und Müller fassen diese Darstellungen der Konstellation Plücker/Geissler wie folgt treffend zusammen: „hier der systematisch vorgehende und weit blickende Wissenschaftler als Auftraggeber, dort der über alle Maßen geschickte und genau arbeitende Instrumentenbauer als Auftragnehmer“ [Dörfel 2006, S. 37]. Das Ziel ihres Aufsatzes ist, zu zeigen, dass ein solches Schema zu eng gefasst ist. Tatsächlich war es so, dass die Initiative sich der Gasentladungsforschung zuzuwenden, nicht von Plücker ausging, sondern von Geissler. Und er war auch derjenige, der die technischen Voraussetzungen dafür schuf (vgl. [Dörfel 2006, S. 37]). In seinem Nachruf auf Geissler sagt Hofmann:

> „Dass diejenigen, welche Geissler für die Verwirklichung eines von ihnen erdachten Instrumentes gewonnen hatten, ihren eigenen Gedanken kaum wieder erkannten, als sie sich im Besitze der aus seiner Meisterhand hervorgegangenen Apparates sahen. [...]
> Geissler habe die Kunst, das Glas vor der Lampe zu formen, zu einer Vollendung ausgebildet, welche keiner seiner Vorgänger erreicht habe, und in welcher er, obwohl er treffliche Schüler erzogen hat, sobald nicht übertroffen werden dürfte. Aber wenn auch seine Kunstfertigkeit in der Behandlung des Gases eine geradezu staunenerregende gewesen sei; so würde er doch mit ihr allein nicht die Fülle seiner wissenschaftlichen Apparate habe schaffen können, wenn ihn nicht ein hervorragendes constructives Talent, aber auch gründliche physikalische Kenntnisse zur Seite gestanden hätten.“

zitiert nach [Dörfel 2006, S. 28]

Die Erfindung der kapillaren Verengung des Mittelteils der Geislerschen Röhren, die für die Spektralanalyse von großer Bedeutung war, wird ebenfalls zu Unrecht Plücker zugerechnet. Unklar bleibt nur, ob Geissler damit bewusst eine Erhöhung der Leuchtdichte anstrebte, oder ob es lediglich um eine Minimierung des zu evakuierenden Volumens ging (vgl. [Dörfel 2006, S. 33ff]). In einem Brief Geisslers an Justus von Liebig beklagt er sich über die mangelnde Wahrnehmung seiner Mitarbeit als wirklich wissenschaftliche Leistung:

> „Ich habe hier [in] Bonn schon verschiedene Male mit Herrn Professor Plücker wissenschaftliche Arbeiten unternommen und diesen viele Zeit geopfert, aber ich habe nie etwas anderes davon gehabt, als daß Plücker in seinen Mittheilungen später sagte ich hätte ihm hülfreiche Hand dabei geleistet, währende ich doch alles was Experimentiren anging, gethan habe.“

zitiert nach [Dörfel 2006, S. 37]

Dörfel und Müller ziehen aber den Schluss, dass „die gegenseitige Wertschätzung die geschilderten Irritationen überstand und sich festigte“ und dass die Ehrenpromotion Geisslers durch die Universität Bonn 1868 „ohne oder gegen ein Zutun Plückers undenkbar“ gewesen sei [Dörfel 2006, S. 38][191].
In engem Zusammenhang mit Plückers Untersuchungen zu den Gasentladungen in den Geissler'schen Röhren, stehen seine Beobachtungen zu den Entladungsspektren (vgl. [Ernst 1933, S. 66]). Bereits in seiner zweiten Schrift zu seinen Gasentladungs-Forschungen spricht Plücker den Grundgedanken „Ein Gas - ein Spektrum“ aus:

[191] Leider lässt sich die genaue Rolle Plückers bei dieser durch die philosophische Fakultät durchgeführten Ehrenpromotion nicht mehr feststellen, da keine Unterlagen darüber erhalten geblieben sind.

> „*Jedes Gas hat dabei sein charakteristisches Spektrum.* [...] Aber in allen angeführten Fällen bleibt, was immerhin auch der Farbeneindruck fürs Auge sein mag, für eine dasselbe Gas enthaltende Röhre die Vertheilung der Farben in dem Spectrum *ganz von derselben Art,* und nur die Intensität derselben in den verschiedenen Theilen des Spectrums ändert sich in verschiedenem Maasse. Während also das Auge, dessen Urtheil überdies von der äusseren Beleuchtung wesentlich beeinflusst wird, keinen Aufschluss mehr giebt, *ist durch das Spectrum die Art des in der Röhre befindlichen Gases oder Dampfes unzweifelhaft bestimmt.*“

[Plücker 1858, S. 502f]

Ab Herbst 1861 tritt dann Hittorf als dritte Figur neben Plücker und Geissler. Hittorf hatte 1846 bei Plücker über Kegelschnitte promoviert[192] (vgl. [Müller 2004, S. 50]) und war seit 1852 Professor der Chemie und Physik in Münster/Westfalen (vgl. [Ernst 1933, S. 67], [Müller 2004, S. 52]). Plücker rief Hittorf zu Hilfe, da er auf dessen chemische und experimentelle Kenntnisse und Fertigkeiten angewiesen war, die ihm für die Weiterführung seiner spektralen Untersuchungen notwendig erschienen (vgl. [Müller 2004, S. 68]). Möglicherweise stand diese Maßnahme bereits im Zusammenhang mit den Veröffentlichungen von Gustav Robert Kirchhoff[193] und Robert Wilhelm Bunsen[194] zur Flammenspektroskopie[195].

> „Hatten Plückers Forschungen allgemein nicht viel Aufsehen erregt, so wurden sie durch die Veröffentlichungen von Kirchhoff und Bunsens spektroskopischen Arbeiten 1860 und 1861 weiter ins Abseits gedrängt. Deren Veröffentlichungen gaben der Spektroskopie einen methodischen Rahmen und führten sie zu einer neuen Popularität.“

[Müller 2004, S. 44f]

Müller führt weiter aus, dass die Spektroskopie durch die Erfolge von „B&K“[196] einen vergleichbaren Status wie die Elektrolyse bekam. Von dieser Entwicklung war Plücker weitgehend ausgeschlossen (vgl. [Müller 2004, S. 45]).

> „Es gab keinen richtigen Prioritätenstreit, aber Plücker war verbittert über die Ignoranz seinen Arbeiten gegenüber.“

[Müller 2004, S. 45]

[192] Der Titel seiner Arbeit lautet: „Proprietas sectionum conicarum ex aequatione polari deductae“.

[193] (1824 - 1887).

[194] (1811 - 1899).

[195] In seinem Jahresbericht über das physikalische Kabinett für das Jahr 1862 berichtet Plücker am 7. März 1863: „[...] ich [lud] Prof. Hittorf in Münster [...] ein, mit mir gemeinschaftlich meine früheren Untersuchungen über Spektralanalyse der Gase und Dämpfe unter neuen Gesichtspunkten und mit den neuen Hilfsmitteln wieder aufzunehmen. [...] Gleich die ersten Versuche führten zu Resultaten von großer Tragweite. Meine *früheren* Untersuchungen werden dadurch, wie ich hoffe, ihre sachgemäße Geltung besser erhalten, als durch Prioritäts-Ansprüche persönlicher Art.“, zitiert nach [Ernst 1933, S. 75].

[196] Die von Plücker benutzte Abkürzung für Bunsen und Kirchhoff in den Briefen an seine Frau.

Dies muss für ihn besonders schwer zu verschmerzen gewesen sein, weil er davon ausging, dass er selbst Bunsen auf die spektrale Analyse mit Hilfe von Prismen aufmerksam gemacht habe. So berichtet Hittorf in einem Brief vom 14.11.1899 an Kayser:

> „[Plücker] erzählte mir damals, wie er wahrscheinlich Bunsen zu jener Arbeit veranlasst habe. Bei einem Besuch nämlich, den er in Heidelberg in den Ferien machte, traf er Bunsen im Laboratorium beschäftigt, mittelst absorbierender farbiger Gläser in der Flammenfärbung neben Na andere Metalle wie K deutlicher zu erkennen. Plücker machte ihn aufmerksam, daß dieser Zweck besser durch Zerlegung des Lichtes im Prisma erreicht werde, indem dann die charakteristischen Linien getrennt neben einander erscheinen“[197]

zitiert nach [Müller 2004, S. 45]

Allerdings beurteilen Dörfel und Müller diese Sicht als „subjektiv“ und „wegen des historischen Abstandes auch ungenau“ und stellen fest, dass „Kirchhoff [...] zu der in Frage stehenden Zeit nicht auf die Verwendung eines Prismas aufmerksam gemacht werden [musste]“ [Dörfel 2006, S. 38].

> „Plücker und Hittorf arbeiteten unter großem Zeitdruck, da nach den Veröffentlichungen der Arbeiten von Bunsen und Kirchhoff und nach den Erfolgen, die sich mit den Entdeckungen neuer Elemente einstellten, viele Forscher auf einen schnellen Ruhm hofften. Plücker beteiligte sich nicht direkt an einem Prioritätsstreit, ging aber auf „Werbetour“, um einige Kollegen vom Wert seiner Arbeiten und seiner Position zu überzeugen.“[198]

[Müller 2004, S. 75]

Details über diese „Werbetour“ finden sich in den Briefen Plückers an seine Frau. Seine Frustration über die Situation und der Zeitdruck unter dem er und Hittorf arbeiteten, zeigt sich ebenfalls in diesen Briefen. Im April 1862 war Plücker in München und traf sich dort unter anderem mit Steinheil[199], der mit Kirchhoff und Bunsen kooperierte (vgl. [Müller 2004, S. 75]):

> *„Hier habe ich das Feld vollkommen frei gefunden, B & K haben Prof. Kapp blos bis Stuttgart begleitet* [...]. *Ich bereue nicht hierher gekommen zu sein.*
>
> *Gleich Mittwoch Morgen ging ich nach Steinheil heraus (eine halbe Stunde vor der Stadt) und bestellte einen Apparat. Er kannte von meinen Spectra*

[197] Vergleiche auch den Begleitbrief des Bonner Kurators zu Plückers Jahresbericht von 1862: „[...] Nach mündlichen Mitteilungen Plücker's hält er sich zu der Behauptung berechtigt, daß er die Bahn gelegt, auf der die Heidelberger Gelehrten weiter gebaut, um zu ihren berühmten Veröffentlichungen über Spectralanalyse der Gase zu gelangen.

Es ist nicht die Absicht desselben, einen Prioritätsstreit mit *Kirchhoff* und *Bunsen* zu eröffnen, er hält sich aber, und gewiß mit Recht, berufen, seinen *früheren* Untersuchungen, wie er sich in dem Bericht ausdrückt, ihre sachgemäße Geltung in der Welt zu verschaffen.“, zitiert nach [Ernst 1933, S. 75].

[198] Vgl. Fußnote 195.

[199] Carl August von Steinheil (1801 - 1870).

durchaus nichts, begriff aber sogleich was dahinter steckte und auf seinen Wunsch hatte ich noch an dem Nachmittage desselben Tages eine dreistündige Besprechung über meine Sachen. [...]
Gestern früh holte mich Prof. Jolly, den ich ebenfalls am Tage vorher besucht hatte, zum physikalischen Kabinette ab, wo er mir zuerst von seinen neuen Untersuchungen sprach und dann auf die meinigen zu sprechen kam. Er kannte sie im Allgemeinen, hatte aber nichts gesehen. Er lud mich auf den Abend ein und wir kamen überein, daß ich ihm vorher auf dem Kabinette die drei Spectralröhren zeigte, die ich mitgebracht hatte und er erkannte erst jetzt von der Erscheinung eine Idee zu haben. Mein Verhältnis zu B und K sieht er unter dem richtigen Gesichtspuncte an.“

[NRC PC, Vol. 5, Item 21][200]

„Jolly hatte Liebig und Wöhler auf das physikalische Kabinet eingeladen um die Spectra zu zeigen, die ich ihm Tags vorher gezeigt hatte. Ich ging wieder mit und so war der ganze Tag verwendet.“

[NRC PC, Vol. 5, Item 22][201]

Im gleichen Jahr reiste Plücker nach London und berichtet in einem Brief vom 19. Juni an seine Frau:

„Es wurden am Samstag Versuche mit den Röhren gemacht im Hörsale von Royal Institution [...]*. Zugegen waren General Sabine, der jetzt Präsident von der Roy. Society ist, Gassiot, Tyndall, Bence Jones, Becquerel und einige Andere Es fiel Alles befriedigend aus.* [...] *Dienstag Morgen besuchte ich Wheatstone*[202] [...] *Er fing sogleich von der Spectralgeschichte an, die hier die allgemeinste Aufmerksamkeit erregt und hat ganz den richtigen Gesichtspunct.“*

[NRC PC, Vol. 5, Item 24]

1863 nahm Hittorf – fälschlicherweise – an, er hätte ein neues Element gefunden (vgl. [Müller 2004, S. 77]). Er hatte bei der Untersuchung einer Arsenprobe einige Linien im Spektrum entdeckt, die er nicht zuordnen konnte. Während Plücker sich durch diese vagen Hinweise zu einer Veröffentlichung ermutigt sah, versuchte Hittorf ihn zu bremsen und eine solche Mitteilung zu verhinden (vgl. [Müller 2004, S. 77]).

„Die sehr aufwändige Untersuchung dauerte über mehrere Monate – und ruinierte beinahe Plückers Nerven.“

[Müller 2004, S. 77]

[200] Brief vom 12. April 1862.
[201] 15. April 1862.
[202] Charles Wheatstone (1802 - 1875).

Wie sehr, lässt sich auch aus den nächsten beiden Briefausschnitten entnehmen. Den ersten Brief schrieb Plücker anlässlich der Tagung der „British Association for the Advancement of Science“ (BAAS) in Newcastle im September 1863. Der zweite Brief ist undatiert.

> *„Mit einer Elite von Chemikern bin ich zu den großen chemischen Fabriken von Bell Brothery & Co, wo außer der Darstellung von Schwefelsäure, Soda, Bittersalz etc. etc. allein in England Aluminium dargestellt wird.* [...] *ein Stück von Thallium das ebenfalls daselbst dargestellt worden, war so schwer, daß ich es mit einer Hand kaum aufheben konnte. Da wäre der Ort gewesen um für Hittorf Material zu erhalten. Aber ich fürchtete etwas zu thun, was bei ihm Anstand gefunden hätte* [...].“

[NRC PC, Vol. 5, Item 29]

> *„Nach Tische zeigte mir W*[heatstone] *eine kurze Nota in der wöchentlich erscheinenden Chemical News, wo die Entdeckung des neuen Metals, das den Arsenik begleitet, von anderer Seite (von zwei jungen Deutschen) angekündigt wird. Somit wäre auch das, wie so Vieles Andere schief gegangen und ich hatte also Hittorf gegenüber das größte Recht. Ich habe ihn heute, ohne irgend eine spitze Bemerkung gesprochen und ihn nur gefragt ob er mir nun die Mittheilung unserer Spectralbeobachtungen freistelle und ihn gebeten mir diese mit nächster Post nach Paris zu schicken.“*

[NRC PC, Vol. 5, Item 30]

Obwohl Hittorf am 8.6.1863 in einem Brief mit der Überschrift „Entdeckung eines neuen Elements durch die electr. Spektralanalyse“ Plücker berichtet hatte, wie er die Existenz des neuen „Körpers“ nachweisen konnte, musste er bereits wenig später seine Behauptung widerrufen (vgl. [Müller 2004, S. 78]).
Neben diese Schwierigkeiten traten im Jahr 1863 noch besondere Geldprobleme. Plücker hatte 1860 sein Gesuch um eine Aufbesserung der finanziellen Mittel des physikalischen Kabninetts erneuert. Er verwies dabei zum einen auf die Notwendigkeit einen Assistenten und Mechaniker anstellen zu können. Zum anderen auf die bestehenden Lücken in der Ausstattung des Kabinetts mit Apparaten und Instrumenten (vgl. [Ernst 1933, S. 70 - 72]).

> „Das Kabinett ist nicht mehr auf der Höhe, um mit anderen, denen es sich in seinen Ansprüchen mit Recht gleichstellen darf, konkurrieren zu können.“

zitiert nach [Ernst 1933, S. 72]

Das Ministerium antwortete positiv auf Plückers erneuten Antrag. Allerdings war der Termin für die Anmeldung neuer Ausgaben für den Staatshaushalts-Etat von 1861 bereits abgelaufen. Plücker wurden aber Aussichten auf das kommende Jahr gemacht (vgl. [Ernst 1933, S. 72f]). 1861 erhielt Plücker dann eine Zusage über eine Erhöhung des Etats des physikalischen Instituts von 350 auf 800 Taler für das Jahr 1862. Allerdings kam es dann doch nicht zu dieser Etats-Erhöhung, wodurch Plückers finanzielle Situation erneut stark verschlechtert wurde.

„Am 10. Dezember 1862 berichtete der Kurator *v. Beseler*:
„In der Hoffnung, die in Aussicht gestellte angemessene Erhöhung verwenden zu können, und gedrängt von unabweisbaren Bedürfnissen des Kabinetts, hat Prof. Plücker Anschaffungen gemacht, welche den bisherigen Etat von 450 Thalerns überschreiten. Dies ist allerdings nicht vollkommen ordnungsmäßig und vorsichtig gehandelt; er darf aber hoffen, daß Ew. Excellenz geneigen werde, unter den obwaltenden Verhältnissen den Prof. Plücker wegen der Etats-Ueberschreitungen zu entschuldigen und ihn vor peinlichen Verlegenheiten, die ihm daraus zu erwachsen drohen, zu schätzen. Prof. Plücker bittet daher um einen Vorschuß von 400 Thalern. Der Motivierung des Antrages füge ich hinzu, daß ich den Petenten in der größten Aufregung fand, die noch in persönlichen Verhältnissen ihren besonderen Grund haben. Derselbe ist nämlich mit Untersuchungen und deren Veröffentlichung beschäftigt, welche der Welt den Beweis liefern sollen, und wie ich glauben möchte, werden, daß er der Vater von Entdeckungen ist, die neuerdings die Physiker und Chemiker Europas in Atem erhalten. Es handelt sich mithin um sehr viel, und ein Nervenmann, wie viele Gelehrte, glaubt er sich, ich lasse ununtersucht, ob mit Recht oder Unrecht, in die Unmöglichkeit versetzt, in der angedeuteten Richtung weiter zu arbeiten, wenn ihm nicht die beantragten 400 Thaler flüssig gemacht werden. [...]“ Der Minister hatte ein Einsehen und genehmigte, daß ein Vorschuß von 400 Thalern gezahlt wurde.“

[Ernst 1933, S. 74]

Der Antrag wurde bewilligt und ein Vorschuss von 400 Talern genehmgt, wie Plücker im Schreiben vom 24. Dezember 1862 mitgeteilt wurde (vgl. [NRC PC, Vol. 6, Item 31]). Für das Jahr 1863 erhielt das physikalische Institut dann tatsächlich die Etats-Erhöhung auf 800 Taler. Durch den Vorschuss von 400 Talern der darauf verrechnet wurde, war Plücker allerdings wieder nicht in der Lage, einen Assistenten einzustellen. Er wandte sich daher wieder an den Kurator, um darum zu bitten, dass dieser Vorschuss nicht auf den neuen Etat angerechnet würde.

„In meinem letzten Jahresbericht sprach ich die Hoffnung aus, bei der zu erwartenden definitiven Erhöhung des Etats über die spezielle Verwendung desselben nähere Vorschläge machen zu können, wobei die Anstellung eines Mechanikers als Gehilfen bei meinen Arbeiten vor allem ins Auge zu fassen sei. Wenn dazu der Gesamtetat von 800 Thalern nicht hinreicht und wenigstens die von mir ursprünglich beantragten 100 Thaler erforderlich sind, so werden Ew. Hochwohlgeb. das Unhaltbare meiner jetzigen Stellung nicht verkennen, wo der Fonds praktisch längst erschöpft ist und ich augenblicklich ohne *alle* Assistenz bin. Dadurch befinde ich mich in der Unmöglichkeit, meine wissenschaftlichen Arbeiten fortzusetzen, zu einer Zeit, wo diese dahin gelangt sind, daß nach der Maßgabe der angewandten Arbeitskraft neue Resultate sich ergeben. Auch bei großer Zähigkeit des Willens läßt dieser doch zuletzt nach, wenn man sich unter dem Einflusse ungünstiger Verhältnisse fortwährend aufgehalten sieht.“

zitiert nach [Ernst 1933, S. 76]

Erst 1864 wurde eine außerordentliche Summe von 400 Thalern bewilligt, um das Defizit zu decken (vgl. [Ernst 1933, S. 78]).
Die Ergebisse der gemeinsamen Arbeit mit Hittorf wurden schließlich 1865 in den „Transactions“ der Royal Society veröffentlicht. Der Titel der Abhandlung lautete „On the Spectra of Ignites Gases and Vapours with especial Regard to the Different Spectra of the Same Elementary Gaseous Substance“. Schon 1864 war die Abhandlung vorgelesen worden, aber wegen der etwas mühsamen Korrespondenz zwischen Plücker und Hittorf und der besonders aufwendigen Erstellung der Spektren verzögerte sich der Druck immer wieder (vgl. [Müller 2004, S. 68]). Plückers und Hittorfs Untersuchungen widersprachen der zuvor aufgestellten Ein-Gas-Ein-Spektum These (vgl. [Müller 2004, S. 70]). Dies wurde allerdings erst nach Plückers Tod (etwas ab 1868) beachtet und diskutiert (vgl. [Müller 2004, S. 73]).

> „In den 1860er Jahren war die Spektralanalyse als Methode in erster Linie für Chemiker und Astronomen von Interesse [...], so dass es nicht verwundert, wenn die von Plücker und Hittorf gefundenen, eher physikalischen Implikationen der spektralen Untersuchungen der Materie kein großes Interesse, eher Ablehnung seitens der Chemiker finden, die ihre Untersuchungen auf die eindeutige Identifizierbarkeit einzelner Stoffe durch charakteristische Spektren aufbauten. Das Interesse der Physiker an der Spektroskopie entwickelte sich erst langsam. [...] Erst als sich auch die Physiker in zunehmendem Maße für die Erscheinungen zu interessieren begannen und das Feld nicht mehr allein den Chemikern überließen, wurden die Untersuchungen von Plücker und Hittorf wieder interessant. In einem zusammenfassenden Bericht der Forschungen in diesem Gebiet von 1871 heißt es beispielsweise: „But amongst all the additions made to our knowledge of spectrum analysis within these ten years [seit Kirchhoff und Bunsens entscheidender Veröffentlichung], none is so startling as the discovery, which we owe to Plücker, that a substance may give two totally different spectra which have no line or band in common“ (Watts 1871: 6)[203].“
>
> [Müller 2004, S. 73f]

Mit der Arbeit von 1865 zog Plücker einen Schlussstrich unter seine experimentelle physikalische Forschung. Ebenfalls 1865 in den „Philosophical Transactions“ der Royal Society erschien auch sein Artikel „On a new Geometry of Space“. Mit dieser Abhandlung die nach den Worten Plückers „nur dem geringeren Teile nach in den Bereich der Physik gehört“ eröffnete er „ein ganz neues Feld geometrischer Forschung“[204] [Ernst 1933, S. 78].
In seinem Jahresbericht für 1866 schreibt Plücker:

> „Meine Experimental-Untersuchungen haben ihren regelmäßigen Fortgang genommen und bezogen sich auf elektrisch-magnetische Erscheinungen im absoluten Vakuum (in Verbindung mit Prof. Hittorf in Münster) und auf Photometrie. Mitteilungen über solche Experimental-Untersuchungen werden für den Augenblick durch mathematische Arbeiten – Geometrie,

[203] Watts, W. Marshall. On double Spectra. Quarterly Journal of Science 8, 1 (1871).
[204] Ernst zitiert hier aus dem Jahresbericht des physikalischen Kabinetts für das Jahr 1864.

> Mechanik, Physik betreffend – zurückgedrängt, die mich gleichzeitig in Anspruch nehmen und denen ich eine große Tragweite beilege.“

zitiert nach [Ernst 1933, S. 81]

Bereits vorher, am 5. März 1866 hatte Plücker anlässlich seiner Ernennung zum Geheimen Regierungsrath an den Minister geschrieben:

> „Der ungewöhnliche Gang, den meine wissenschaftliche Tätigkeit genommen hat, macht es mir in bereits vorgerücktem Lebensalter zur Pflicht und zur Lust, meine Arbeitskraft mehr als je zu konzentrieren.“

zitiert nach [Ernst 1933, S. 80f]

Durch die mangelnde Beachtung seiner Arbeiten, die Plücker zu Recht als wichtige Vorläufer der Arbeiten von Kirchhoff und Bunsen empfand, und die Frustration über die Schwierigkeiten bei der gemeinsamen Arbeit mit Hittorf, war Plücker motiviert, wieder sein Forschungsgebiet zu wechseln.

> „Er hätte sich einem völlig neuen Gebiet zuwenden müssen, um wieder in Ruhe ungestört arbeiten zu können. Unterdessen fanden seine früheren mathematischen Arbeiten, vor allem in England und dann auch in Frankreich wachsende Anerkennung“

[Ziegler 1985, S. 57]

Gerade diese Anerkennung wird ein ausschlaggebender Grund für Plücker gewesen sein, sich wieder der Mathematik zuzuwenden. Außerdem entsprach es seiner Forscherpersönlichkeit, sich wieder einem ganz neuen und weiten Gebiet zuzuwenden. Und dieses fand er in seiner „neuen Geometrie des Raumes“ – der Liniengeometrie.[205]

[205] Wie bereits angedeutet verfolgte Plücker die physikalischen Interessen vereinzelt noch weiter (analog dazu hatten sich sehr vereinzelt auch während der physikalischen Phase Beschäftigungen mit mathematischen Fragestellungen gefunden); vgl. dazu z.B. einen Brief vom 30.12.1866: *„Die electrisch-magnetischen Erscheinungen werde ich nächsten Mittwoch in der Ecole polytechnique zeigen* [...]*.“* [NRC PC, Vol. 5, Item 42]. Außerdem fasste Plücker die Arbeiten zur Liniengeometrie zumindest anfänglich auch als teilweise physikalische auf (vgl. [Ernst 1933, S. 81]) und plante, sich dem physikalischen Aspekt später wieder zuzuwenden. Dies wird aus einem Brief deutlich, den Plücker am 17.10.1866 an Hirst schrieb: „It would not be wise to overcrowd myself with heterogeneous work at present. When I have finished a geometrical volume I intend to concentrate my attention to the contents of the two first xx [eher: „the two first §§“ (vgl. auch [Murray, S. 25])] of my last Paper and its application to molecular Physics.“ [LMSA P-HL, S. 5].

6.3. Plückers zweite mathematische Phase

> „Und so wird dem wissenschaftlichen Publicum hiermit das gegenwärtige Werk [Neue Geometrie des Raumes] als das Vermächtniss des grossen Geometers übergeben, welcher, nachdem er in jüngeren Jahren bahnbrechend in seiner Wissenschaft gewirkt, am Ende seines Lebens sich der Geometrie wieder zugewandt, und neue Ideen mit jugendlicher Frische entwickelnd, noch im Alter mit einem neuen und grossen Gebiete die Disciplin beschenkte, welcher seiner frühern Thätigkeit so viel verdankt.“
>
> Clebsch in [Plücker 1868/69, Bd. 1, S. IV]

Wie bereits angegeben, wird Plückers Rückkehr zur mathematischen Forschung durch die Veröffentlichung seines Artikels „On a new Geometry of Space“ in den „Philosophical Transactions“ der Royal Society 1865 markiert.
In seinem letzten mathematischen Werk der ersten Phase, dem „System ...“ von 1846, hatte Plücker bereits die Idee der Liniengeometrie angedeutet. Da er seine Veröffentlichungen immer auf ein Forschungsgebiet beschränkte, gibt es in den Jahren zwischen 1847 und 1865 keine mathematischen Arbeiten von ihm. Allerdings finden sich in seinem wissenschaftlichen Nachlass Bögen, auf denen Plücker sich mit mathematischen Fragestellungen beschäftigt. Einer dieser Bögen befasst sich mit der „Theorie der Curven“ ([NSuUB CodMsP1, Conv. D_3]). Die Einträge darauf datieren auf Januar 1850 und November/Dezember 1859. Auch wenn es hier keinen inhaltlichen Zusammenhang zur Liniengeometrie gibt, zeigen diese Ausarbeitungen, dass Plücker die von anderen veröffentlichten mathematischen Abhandlungen[206] bis zu einem gewissen Grad beachtete[207].
Sehr interessant im Zusammenhang mit Plückers Liniengeometrie ist ein Brief, den Magnus am 10. Mai 1849 an Plücker schrieb ([NRC PC, Vol. 3A, Item 10]) und dessen Transkript sich im Anhang befindet (17.2). Magnus nimmt dabei Bezug auf seinen letzten Besuch bei Plücker in Bonn und die dabei besprochenen mathematischen Themen.

> *„Uebrigens behandelt Lacroix die Herleitung der L*[igne] *de str*[iction][208] *keineswegs einfacher als wir es, kurz vor meiner Abreise aus Bonn, versucht hatten.“*
>
> [NRC PC, Vol. 3A, Item 10]

Besonders interessesant ist die Anlage, die Magnus seinem Brief beilegte.

[206] Darunter eine Abhandlung Jakobis im 14. Bd. des Crelle Journals und verschiedene Abhandlungen aus Liouvilles Journal.
[207] Allerdings insgesamt verhältnismäßig wenig (vgl. [Clebsch 1872, S. XIV]).
[208] Rückkehrkante einer Regelfläche.

> *„Was ich aber Ihnen mitzuteilen nicht länger aufschieben will, ist in der Anlage enthalten, die Sie, wenn Sie einmal Muße haben, durchzusehen so gut sein wollen. Die Sache gehört gänzlich vor Ihr Forum. Anfänglich glaubte ich, sie könnte von einigem Nutzen seyn, und ich hätte zu den Liniencoordinaten der ebenen Curven und den Plan-coordinaten der Flächen noch ein drittes Coordinatensystem, das der Liniencoordinaten der Flächen gefunden. Bald aber schien mit die Sache nicht mehr practisch. Doch vielleicht können Sie etwas daraus machen.“*

[NRC PC, Vol. 3A, Item 10]

Die geometrischen Konstruktionen und Überlegungen die Magnus Plücker in der Anlage mitteilte, lassen sich in gewisser Weise als Liniengeometrie bezeichnen. Allerdings lässt sich nicht feststellen, ob Plücker sich zu diesem Zeitpunkt näher damit befasste. Bei seiner eigenen Beschäftigung mit der Liniengeometrie ab Mitte der 60er Jahre scheint sich Plücker jedenfalls nicht mehr an diese Ausarbeitung zu erinnern, zumal er eine ganz andere Darstellung wählte als Magnus (vgl. 14.1).
Wann genau Plücker mit der Arbeit an seiner „neuen Geometrie“ begann, lässt sich nicht nachweisen. Klein spricht von dem Jahr 1863 als dem Wiederbeginn von Plückers geometrischen Arbeiten (vgl. [Klein 1926, S. 121]). Bei der Tagung der BAAS 1863 wurde Plücker durch ein Lob Sylvesters motiviert seine mathematische Arbeit wieder aufzunehmen, bereits 1864 hielt er einen Vortrag zu diesem Thema (6.3.1).
Wie im Abschnitt 6.2 gezeigt wurde, legte Plücker auf einen mündlichen Austausch mit seinen Fachkollegen über seine experimentalphysikalischen Forschungen Wert. Diese Form des wissenschaftlichen Austausches behielt er auch bezüglich seiner neuen geometrischen Forschungen bei. Daher werden auch seine weiteren Auslandsreisen und seine Vorträge bei der BAAS anhand seiner Briefe und der Tagungsberichte vorgestellt. Plücker benutzte bei seinem Vortrag bei der Jahrestagung der BAAS von 1866 Modelle zur Veranschaulichung einiger Komplexflächen. Damit ist Plücker einer der Vorläufer der Periode des mathematischen Modellbaus in Deutschland, an der unter anderem sein Schüler Felix Klein beteiligt war (6.3.2). Abschließend wird die Veröffentlichung von Plückers zweibändigem Werk „Neue Geometrie des Raumes“, die posthum von Klein ausgeführt wurde, thematisiert (6.3.3).

6.3.1. Vorträge und Artikel zur Liniengeometrie

„Being encouraged by the friendly interest expressed by English geometricians, I have resumed my former researches, which have been entirely abandoned by me since 1846.“

[Plücker 1866, S. 546]

„Sollte in den Augen Ew. Excellenz eine Rechtfertigung nötig sein, daß meine neueren Arbeiten in fremder Sprache erschienen sind, so bitte ich einstweilen meine bloße Erklärung entgegenzunehmen, daß dies nur aus dem Gefühl der Dankbarkeit für seltenes Wohlwollen, daß ich von ausländischen Fachgenossen erfahren habe, hervorgegangen ist.“

zitiert nach [Ernst 1933, S. 38]

Wie in Abschnitt 6.2 gezeigt wurde, knüpfte Plücker in den Jahren seiner physikalischen Tätigkeit zahlreiche wissenschaftliche Kontakte in England und Frankreich. Neben Physikern und anderen Gelehrten lernte Plücker dabei auch Mathematiker kennen, die ihm die Anerkennung gaben, die er verdient zu haben meinte und von Seiten der deutschen Kollegen – vor allem der Berliner Schule um Steiner und Jacobi – vermisste. Bei der bereits erwähnten Tagung der BAAS in Newcastle-Upon-Tyne im September 1863, hielt Plücker einen Vortrag. Der Titel lautete „On Spectral Analysis“ und der Vortrag war in der Sektion „Mathematics and Physics“ dem Bereich „Light and Heat“ zugeordnet [BAAS 1863, S. vi]. In der gleichen Sektion, im Bereich „Mathematics“ hielt James Joseph Sylvester[209] einen Vortrag „On the Quantity and Centre of Gravity of Figures given in Perspective, or Homography“ [BAAS 1863, S. vi]. In einem undatierten Brief aus Newcastle, berichtete Plücker seiner Frau:

„Es waren nur wenige Ausländer hier. Ich habe einen Vortrag am Montage gehalten, der gut aufgenommen wurde. Nach mir sprach Sylvester, der mich als den master der englischen Geometer herausstrich.“

[NRC PC, Vol 5, Item 27]

Diese Anerkennung war offenbar für Plücker von großer Bedeutung. Im undatierten Entwurf eines Briefes, der vermutlich an Sir George Gabriel Stokes[210] gerichtet war, schrieb Plücker:

„[...] *at Newcastle I met Mr. Silvester, whose commendation let me to resume my geometrical researches absolutely abandoned for the last 17 Years. At first I intended writing only a small paper, suitable for a Periodical, but*

[209](1814 - 1897).

[210](1819 - 1902) Stokes war von 1854 an dreißig Jahre lang Sekretär der Royal Society.

it having become extended to a general theory, I sent a Table of its contents to Mr. Silvester [...].*“*

[NRC PC, Vol. 1B, Item 102]

Bereits ein Jahr später hielt Plücker einen ersten Vortrag über seine neu aufgenommene geometrische Forschung bei der Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Diese fand 1864 vom 17. bis 23. September in Gießen statt. Laut dem amtlichen Bericht der Versammlung sprach Plücker am 21. September „über eine neue Auffassung des Raums vermöge der Geraden als Raumelement“ [GDNÄ 1864, S. 67]. Er schrieb darüber an seine Frau:

„Ich habe mich nur in soweit an den Vorträgen betheiligt, als ich in der mathematischen Section einen langen Vortrag gehalten habe, der gut aufgenommen worden ist. Mit Clebsch, der mir sehr gefällt habe ich viel verkehrt.“

[NRC PC, Vol. 5, Item 19][211]

Leider finden sich keine weiteren Angaben zu dem Inhalt des Vortrags, da Plücker offensichtlich vor der Veröffentlichung des amtlichen Berichts keine ausführliche Bearbeitung eingereicht hatte (vgl. [GDNÄ 1864, S. v]).[212] Etwa zeitgleich mit der Versammlung der Naturforscher und Ärzte fand die Jahrestagung der BAAS vom 14. bis 21. September 1864 in Bath statt ([BAAS 1864, S. lix]). Wenn Plücker an dieser auch nicht teilnehmen konnte, plante er offenbar doch eine Reise nach England.

„Als mein Mann gerade alle Vorkehrungen zu seiner Reise nach England getroffen hatte erkrankte er nicht unbedeutend. Er mußte seinen Plan ~~ganz~~ aufgeben. Er ist ~~eben~~ da die harte Arbeit für ihn Ende des Monats wieder anfängt, vorher noch zu seiner vollständigen Erholung auf 14 Tage nach Paris gegangen.“

[NRC PC, Vol. 5, Item 34][213]

Im nächsten Jahr trug Plücker auf der Tagung der BAAS in Birmingham über seine Liniengeometrie vor. Sein Vortrag in der Sektion „Mathematics and Physics“ hatte den Titel „On a New Method in Geometry“ [BAAS 1865, S. vi]. Sein Artikel „On a new Geometry of Space“ in den „Proceedings of the Royal Society of London“ bildete das Abstract zu diesem Vortrag. Den einzelnen Vortägen der mathematischen und physikalischen Sektion geht im Tagungsband die Ansprache des Sektions-Präsidenten William Spottiswoode[214] voraus, in der er sowohl auf Plückers frühere geometrische Forschung als auch auf seine neuere Bezug nahm:

[211] Der Brief ist nur mit *„Donnerstag früh“* datiert, lässt sich aber durch den Inhalt auf den 22.09.1864 datieren.

[212] In einem undatierten Brief aus Paris (vermutlich von September/Oktober 1864) schrieb Plücker an seine Frau: *„Moigno wird über die Giessener Versammlung in seiner nächsten Nummer berichten, der Hauptheil davon wird ein Auszug über meinen math[ematischen] Vortrag, den ich ihm hier gemacht habe, bilden.“* [NRC PC, Vol. 5, Item 31]. Leider war es mir nicht möglich festzustellen, ob und in welcher von dem Abbé Moigno (François-Marie-Napoléon Moigno (1804 - 1884)) herausgegebenen Zeitschrift dieser Artikel erschienen ist.

[213] Brief vom 04.10.1864.

[214] (1825 - 1883).

„[...] In each of the main branches of pure mathematics, geometry and analysis, a modern school has arisen. The former, originating with Carnot, Dupin, Poncelet, and others, dates from the early part of the present century; the latter, due in the first instance to Cayley, Boole, and Sylvester, belongs whooly to the present generation. Both schools have this in common, that figures in the one case, and forms in the other, are considered not merely as isolated individuals, but as associated with other concomitant forms which characterize their various properties.

In pure geometry we have the principle of projection, whereby any plane figure is considered in connexion with all or any other plane figure lying on the same cone, in such a way that a theorem relating to one figure frequently establishes a corresponding theorem relating to the other.

[...]

Passing to analysis, we habe in the first place the analogues of the geometrical theories above mentioned. To the method of projection corresponds (in one of its interpretations at least) the method of linear transformation; [...] The principle of duality, however, as treated by Plücker, may claim an analytical with as good a right as a geometrical basis.

Before quitting this part of the subject, mention should be made of two important and original contributions to analytical geometry in space. One, by Professor Cayley, [...]; of the other, by Professor Plücker, we have at present only the abstract in the proceedings of the Royal Society; it promises, however, to abound in processes of great power and originality."

[BAAS 1865, S. 3f]

Plücker war mit der Resonanz seines Vortrags zufrieden, wie er in einem Brief an seine Frau berichtete:

„Ich habe die Dienstags-Sitzung mit meinem Vortrage über die neue Geometrie der sehr gut aufgenommen wurde eröffnet. Für Birmingham habe ich meinen Zweck erreicht, ob ich noch nach Cambridge kommen werde, weiß ich einstweilen nicht."

[NRC PC, Vol 5, Item 32][215]

Auf dem Rückweg nach Bonn machte Plücker unter anderem noch in London und Paris Station, um sich auch dort mit den Wissenschaftlern über seine „neue Methode" oder „neue Geometrie" auszutauschen. Er berichtete darüber an seine Frau:

„Paris 1. Oct. 65
(Hotel du Louvre n. 505)

Liebe Frau!

Meinen letzten Brief aus Dorsetshire wirst du richtig erhalten haben. [...]

[215]Der Brief ist undatiert.

In London wurde ich dadurch noch zurückgehalten daß Wheatstone den Prof. Sylvester zum Diner einlud. Ich verständigte mich mit ihm vollständig über meine neue Arbeit und so bin ich vollständig befriedigt, was den eigentlichen Zweck meiner Reise betrifft. Einzelnes darüber mündlich. Meine wissenschaftliche Stellung in England läßt nicht mehr zu wünschen übrig.

[...]

Ich habe hier [in Paris] *noch Niemand gesehen und weiß nicht ~~ob~~ wer hier ist. Ich habe ein großes Interesse mich auch hier mit den Mathematikern zu verständigen.* [...]

Dein
Plücker"

[NRC PC, Vol 5, Item 35]

Noch im Jahr 1865 veröffentlichte Plücker einen zweiten Artikel zur Liniengeometrie, der ebenfalls den Titel „On a new Geometry of Space" trug und in den „Philosophical Transactions of the Royal Society of London" erschien. In diesem arbeitete er nachträglich seinen Vortrag aus, Teile des Artikels sind daher identisch zu dem ersten Artikel (vgl. [Plücker 1865a], [Plücker 1865b]). Ein Jahr später, 1866, fand die Tagung der BAAS in Nottingham statt. Dort hielt Plücker ebenfalls einen Vortrag über seine „neue Geometrie des Raumes":

„On Complexes of the Second Order. By Dr. Plücker, F.R.S.[216], of Bonn.

Dr. Plücker showed a series of models executed with great accuracy by Mr. Epkens of Bonn, calculated to illustrate his theory of comlexes of the second degree. Such comlexes are determined analytically by equations of the second degree between the coordinates of right lines in space. In any plane whatever the lines of such a comlex envelope a curve of the second class, and every point in space is the centre of a cone of the second order generated by lines of the complex. If a plane revolves round any line within it regarded as an axis, the variable conic therein generates a surface. The same surface is enveloped by a variable cone of the second order, the centre of which moves along the same axis. Surfaces of this description are of the fourth order and the fourth class. The axis is a double line of the surface. The four circumscribed cones whose centres are the four intersections of the double line with the surface, degenerate into systems of two planes, each of which touches the surface along a curve of the secon order. In each of four planes passing through the double line, the conic degenerates into two points; these points (singular points of the surface) are the centres of cones formed by tangents to the surface. The poles of the double line, with regard to all conics in planes passing through it, are situated on a right line, through which pass the polar planes of the double line with regard to all circumscribed cones.

The surfaces even of the more general description are easily constructed;

[216]Fellow of the Royal Society.

> the models exibited belong to the special case where the double line is at an infinite distance. In this case the surfaces are formed by curves of the second class in parallel planes, having their centres on a right line. The circumscribed cones become circumscribed cylinders.“

[BAAS 1866, S. 6][217]

Im „Report of the Papers, Discussions, and General Proceedings“[218] findet sich ebenfalls ein Bericht über Plückers Vortrag:

> „The subject was illustrated by models of a very beautiful character. At the conclusion of the paper, Professor Hirst[219] proposed a vote of thanks to Professor Plucker, for his able treatment of the subject, and his kindness in illustrating various points by models. He had much pleasure in stating that Professor Plucker had offered to allow his models to remain with them, so that copies might be made and preserved in the Mathematical and other societies.
>
> The vote of thanks was heartily passed.“

zitiert nach [Murray, S. 7]

6.3.2. Plückers Modelle

Die Zeit von etwa 1870 bis zum ersten Weltkrieg ist die Hochphase im Bau mathematischer Modelle in Deutschland. Die Modelle, die Plücker 1866 in Nottingham zeigte, haben somit eine Sonderstellung. Zum einen liegen sie zeitlich vor dieser Phase, zum anderen sind sie aus Holz gefertigt, was sehr unüblich ist. So sind die meisten Modelle, die Gerd Fischer aufführt, aus Gips gefertigt, einige auch aus Pappkarton, oder Fäden (vgl. [Fischer 1986], [Murray, S. 3]). Die Modelle, die – wie die von Plücker – angefertigt wurden, bevor mathematische Modelle ihre große Beliebtheit erlangten, wurden in der Regel von einzelnen Mathematikern in Auftrag gegeben, die damit Aspekte ihrer Arbeit veranschaulichen wollten. Allerdings ging es dabei nicht in erster Linie um einen didaktischen Aspekt sondern um eine Verwendung für die Forschung[220]. David Rowe weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass für Plücker, Klein und seine Zeitgenossen geometrische Objekte Idealisierungen der umgebenden Welt und keine abstrakten Konzepte waren.

> „Seen from this vantage point, it should come as no surpise that Klein and his teachers were intend on gaining a visual image of these new-fangled mathematical objects, an interest that promted several contemporary geometers to build various types of models in order to study their properties in greater detail.“

[217] Wieder abgedruckt in [P. Ges. math. Abh., S. 569].

[218] Tindal Robertson, William [Hrsg.] British Association for the Advancement of Science. Nottingham Meeting, August, 1866. Report of the Papers, Discussions, and General Proceedings.

[219] Thomas Archer Hirst (1830 - 1892).

[220] Vgl. dazu David Rowes Artikel „Mathematical models as artefacts for research: Felix Klein and the case of Kummer surfaces“ [Rowe 2013].

[Rowe 2013, S. 5]

Neben Plücker ist hier zum Beispiel Ernst Eduard Kummer[221] zu nennen, der ein Modell aus Metaldrähten sowie sieben Gipsmodelle seiner Flächen anfertigen ließ. Letztere präsentierte er am 20. Juni 1872 bei einer Sitzung der preussischen Akademie (vgl. [Rowe 2013, S. 10f]).
Plücker selbst wurde wohl durch Faraday angeregt, Modelle seiner Komplexflächen anfertigen zu lassen, wie Klein später berichtet:

> „Bekanntlich hat *Plücker* in den letzten Jahren seines Lebens bei seinem Studium der Linienkomplexe zweiten Grades zahlreiche auf deren Theorie bezügliche Modelle anfertigen lassen. Das allgemeine Interesse an den wirklichen Gestalten auch kompizierter Flächen war ihm aus seiner physikalischen Beschäftigung erwachsen ([Fußnote:] *Plücker* selbst erzählte mir einmal, daß er namentlich durch den Verkehr mit *Faraday* dazu angeregt worden sei; dieser selbst habe die Modellkonstruktion als Mittel benutzt, um sich als Nichtfachmann die ihm jeweils notwendigen mathematischen Formeln verständlich zu machen.);“

[Klein 1922, S. 7]

Den Zusammenhang zwischen Plückers mathematischen Modellen und seiner früheren physikalischen Arbeit (hierbei ist vielleicht besonders an die Gasentladungsforschung zu denken), stellt auch Clebsch her.

> „Und wie die Freude an der Gestalt im höheren Sinne es ist, welche den Geometer macht, so war sie auch die Quelle seiner physikalischen Untersuchungen.“

[Clebsch 1872, S. XIII][222]

Damit wird auch ein wichtiger Unterschied zwischen Plückers erster und zweiter mathematischen Phase deutlich. Den Zyklus seiner mathematischen Arbeiten zwischen 1828 und 1846 widmete Plücker erklärtermaßen der Ausbildung „der“ analytischen Methode (9.5). Dagegen sind seine Arbeiten zur Liniengeometrie weniger analytisch; im Fokus stehen die geometrischen Objekte und ihre Form (siehe 14).

> „Durch Einführung der sogenannten Complexflächen, von welchen er zahlreiche Modelle herstellen liess, vermochte er den schwierigen Gegenstand auch gestaltlich zu erläutern; wie denn überhaupt gegenüber den mehr analytischen Interessen seiner früheren Arbeiten in spätern Jahren das rein geometrische Interesse an der Gestalt mehr und mehr hervortrat.“

[Clebsch 1872, S. XXXIV]

[221] (1810 - 1893).
[222] Vgl. auch Rowe: „In both of these research fields, Plücker was drawn to describe complex, never-before-seen spatial phenomena“ [Rowe 2013, S. 13].

Neben den genannten Motiven und Anregungen, die Plücker zur Anfertigung seiner Modelle führten, ergibt sich aus Plückers Briefnachlass ein weiteres interessantes Puzzlestück. Zusammen mit einem Begleitbrief schickte Magnus Plücker am 16. Dezember 1847 ein hölzernes Modell einer Lichtwellenfläche (vgl. [NRC PC, Vol. 3A, Item 8][223]). Dabei sind die einzelnen Teile des Modells wieder aus mehreren Lagen zusammengesetzt. Dies scheint besonders deswegen bedeutsam zu sein, weil Plücker seine Modelle später auch aus Holz anfertigen ließ und sie ebenfalls mehrere Schichten aufweisen. Magnus berichtet in seinem Brief einige interessante Details über die Schwierigkeiten bei der Herstellung und auch über den Aufbau des Modells. Die *„mühevolle Arbeit“* dauerte *„mehr als zehn Wochen“* und das Modell fand, als es *„von mehreren hiesigen Physikern in Augenschein genommen“* wurde, *„ungetheilten Beifall“*.

> *„Der ganze Körper ist durch 5 Ebenen in 16 Theile getheilt. Von diesen 5 Ebenen sind 3 die auf einander senkrechten Hauptschnitte und die zwei anderen gehen durch die Achse der y und resp[ective] durch die singulairen Punkte. Die 16 Theile lassen sich von einander trennen und auf 5 verschiedene Weise zu zwei Hälften des Körpers zusammen setzen, wodurch die innere Fläche und 5 verschiedene Durchschnitte sichtbar gemacht werden.*
>
> *Behufs des Auseinandernehmens, daß mit einiger Vorsicht geschehen muss, liegt in dem Kistchen, welches das Modell enthält, ein kleines Instrument, vermittelst dessen die Theile von einander gelockert und getrennt werden können. Der Verfertiger räth, bei dem Auflockern und Auseinandernehmen, das Modell auf eine weiche Unterlage (ein auf einen hinläglich großen Tisch ausgebreitetes Tuch, oder, wie ich glaube, noch besser, auf ein nicht zu schmales Sopha) zu legen; denn es ist besonders dafür zu sorgen, daß keins der Stücke, wenn auch nur einen Zoll hoch auf etwas Hartes herunter fällt, weil sonst die zum Theil in sehr feinen Spitzen auslaufenden Ecken abbrechen können.*
>
> *Die Hälften der 4 durch die Achse der y gehenden Ebenen sind auf den Seitenflächen der einzelnen Theile mit den Nummern 1 bis 8 bezeichnet, so daß man beim Zusammensetzen eine Norm hat, wie diese Theile zusammen gehören. Auch ist auf einer Stelle der die Achsen der x und z enthaltenden Ebene eine Nummer angebracht, um anzudeuten wie die Hälften der positiven y und der negativen y zusammen gesetzt werden müssen, damit die positiven Seiten der Achse der x und nicht die positiven und die negativen zusammen fallen.*
>
> *Jedes der einzelnen 16 Theile ist aus 5 Stücken, von welchen 4 gerade dieselbe Dicke haben, und deren Fasern nach verschiedenen Richtungen laufen, zusammen geleimt, damit weder durch den Einfluß der Temperatur, noch der Feuchtigkeit ein Verziehen oder eine Formveränderung statt finde. Das Ganze ist aufs sorgfältigste poliert um das Eindringen von Feuchtigkeit möglichst zu verhindern.*
>
> *Ich hoffe, daß das Modell, da es sorgfältig eingepackt ist, unversehrt ankommen wird, und es wäre wirklich Schade wenn es verdorben würde, da es mit ausgezeichneter Genauigkeit gearbeitet ist und so viel Mühe und Zeit gekostet hat.“*

[223] Ein Transkript des Briefs ist im Anhang abgedruckt (17.1).

[NRC PC, Vol. 3A, Item 8]

Das Modell fand zwar Anklang bei den Physikern in Berlin, denen es gezeigt wurde, aber eine Vervielfältigung war dem Hersteller des Modells nicht möglich, und eine erneute Anfertigung sehr kostspielig. Der Versuch, einen Gips-Abguss herzustellen, war erfolglos, ein Abguß aus Metall hätte das Modell zu schwer gemacht und wäre ebenfalls kostspielig gewesen.

> *„Ein dritter Vorschlag das Modell auf galvano-plastischem Wege zu vervielfältigen, ist ebenfalls nicht zur Ausführung gekommen, weil der Verfertiger die technischen Fertigkeiten zu solchen Verfahren noch nicht besitzt und sein mühsam erzeugtes Modell keinem Anderen anvertrauen wollte.“*

[NRC PC, Vol. 3A, Item 8]

Die Modelle, die Plücker 1866 bei seinem Vortrag in Nottingham zeigte, hatte er bei Johannes Epkens in Bonn anfertigen lassen. Wie oben bereits zitiert, sollten die Modelle ursprünglich in England verbleiben, damit Kopien von ihnen angefertigt werden könnten (vgl. [Murray, S. 7]). Stattdessen ließ Plücker bei Epkens in Bonn neue Modelle anfertigen, die dann nach London verschickt wurden (vgl. [LMSA P-HL]). Er korrespondierte darüber mit Hirst[224] der die Ausstellung der Modelle organisierte. Die entsprechenden Briefe Plückers an Hirst sind transkribiert und online zugänglich (siehe [LMSA P-HL]); die Briefe von Hirst an Plücker finden sich in Plückers Briefnachlass ([NRC PC, Vol. 1B, Items 71 - 74]). Der erste Brief von Plücker an Hirst ist auf September 1866 datiert ([LMSA P-HL, S. 1]). Plücker gibt darin an, dass ein Teil der Originale durch die Reise beschädigt wurden, und er daher ein neues Set der Modelle bei Epkens in Auftrag gegeben habe. Diese seien jetzt fertiggestellt und in Ordnung und er habe Epkens daher beauftragt sie abzuschicken[225]. Weiter wiederholt er einige liniengeometrische Fakten bzgl. der Äquatorialflächen[226], die er bereits in Nottingham vorgetragen hatte. Er schließt mit der Bemerkung:

> „The surfaces I send, all equatorial ones, have no relation one to another.
>
> I shall be happy if the models contribute to give an idea of that marvellous relation that I have called a complex of the second degree.“

[LMSA P-HL, S. 1]

In seinem Antwortschreiben vom 3. Oktober 1866 bestätigt Hirst die Ankunft der Modelle. Weiter gibt er an, dass er Epkens den entsprechenden Betrag überweisen wolle, sobald geklärt sei, ob die Modelle in den Besitz der Royal Society oder der Mathematical Society übergehen sollen.

[224] Siehe Fußnote 219. Hirst war General Treasurer der BAAS und 1866 einer der Vize-Präsidenten. Außerdem „member of the council of the Royal Society“. Er hat unter anderem bei Jakob Steiner in Berlin studiert (vgl. [Rowe 2013, S. 6]).

[225] Plücker gibt zuerst an, dass die Modelle an den Sekretär (oder Geschäftsführer) der Royal Society verschickt werden sollen und nennt dann einen Mr. White. Diese beiden Angaben passen allerdings nicht zusammen, so dass die Identität dieses Mr. White nicht geklärt werden kann (vgl. [Murray, S. 7f]).

[226] Zu diesen Flächen und weiteren liniengeometrrischen Begriffen siehe 16 und besonders 16.3.4.

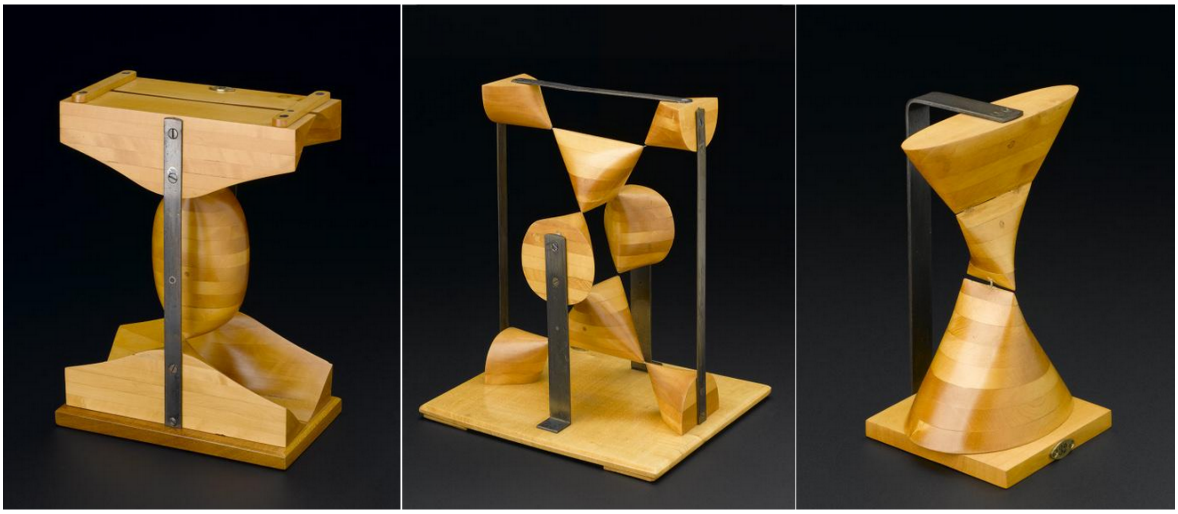


Abb. 6.2.: Drei Äquatorialflächen-Modelle Plückers (Science Museum London)
URL: http://www.lms.ac.uk/content/plucker-collection [8.11.14]

> *„In order to render the models as interesting and instructive as possible I will take the liberty of asking you to weite for us a short descriptive account of them. Perhaps a copy of the paper you read at Nottingham would suffice and if you could add references to the numbers affixed to the models the desciption would be still more complete.*
> *I should hesitate to make this request if I did not feel sure that you will take pleasure in securing for your own creations the intelligent interest which they so highly merit.*
> *We should gladly print your description and keep it with the models to assist the student in understanding their meaning.“*

[NRC PC, Vol 1b, item 72]

Die Entscheidung fiel zu Gunsten der London Mathematical Society, der die vierzehn Holzmodelle übergeben wurden.

> „[...] at the December 13th, 1866 meeting of the London Mathematical Society Hirst presented to the Society „some Models and Surfaces of the fourth order and class, illustrative of Prof. Plücker's new Theory of Complexes“. The report continues by saying that the thanks for the Meeting were returned to Prof. Hirst for his present. This is the first mention of mathematical models in the *Proceedings of the London Mathematical Society.*“

[Murray, S. 8]

Die Modelle waren 1876 Teil der „Special Loan Collection of Scientific Apparatus“ einer Ausstellung im South Kensigton Museum, das später Teil des Science Museums wurde, wo die Modelle immer noch ausgestellt werden[227] (vgl. [Murray, S. 1]). Heather Murray vermutet, dass die Modelle von der London Mathematical Society und nicht

[227]Siehe Abb. 6.2. Fotos von 9 weiteren Modellen finden sich ebenfalls unter der angegebenen URL.

der Royal Society erworben wurden, da erstere eine speziellere Ausrichtung hatte und daher eher als Aufbewahrungsort geometrischer Modelle geeignet war (vgl. [Murray, S. 8]). Die Modelle tragen heute die etwas seltsam anmutenden Bezeichnungen 2, 3, 4, 9, 13, 32, 34, 40, A, B, C, D, E und F (vgl. [Murray, S. 9]). Die Nummerierung der ersten acht Modelle basiert auf Plückers Klassifizierung der Äquatorialflächen, die er in seiner „Neuen Geometrie“ angibt (vgl. [Plücker 1868/69, S. 346 - 362]). Die mit A bis F gekennzeichneten Flächen sind nicht in der Klassifizierug der 78 Typen enthalten und (mit Ausnahme von C) sogenannte gedrehte oder tordierte Äquatorialflächen (vgl. [Plücker 1868/69, S. 363], [Murray, S. 19f]). Die jetzige Kennzeichnung kann also erst nachträglich angebracht worden sein. Die ursprüngliche Nummerierung der Modelle, auf die sich Hirst in dem oben zitierten Brief bezieht, hatte laut Plückers Antwortbrief lediglich für die Rechnung Bedeutung (vgl. [LMSA P-HL, S. 3]). Interessanterweise spricht Plücker in diesem Brief ([LMSA P-HL, S. 2-5]), datiert auf den 17. Oktober 1866, nur von 77 verschiedenen Fällen in seiner Klassifizierung ([LMSA P-HL, S. 3]). Plücker gibt die gewünschten Erklärungen zu den einzelnen Modellen, geht aber nicht auf den Vorschlag einer Veröffentlichung ein.

> „Having now, after long preparatory attempt, a full geometrical oversight of complexes of the second degree and having met with an analytical method, surpassing by far, with regard to simplicity and symmetry whatever I before expected. I intend to publish a fist volume next year, containing a complete classification and discussion of complexes, which involve the discussion of equatorial and meridional surfaces.
> [...]
> I shall be most happy to give any information whatever you request, but after all I think it desirable not to publish details now.“

[LMSA P-HL, S. 4f]

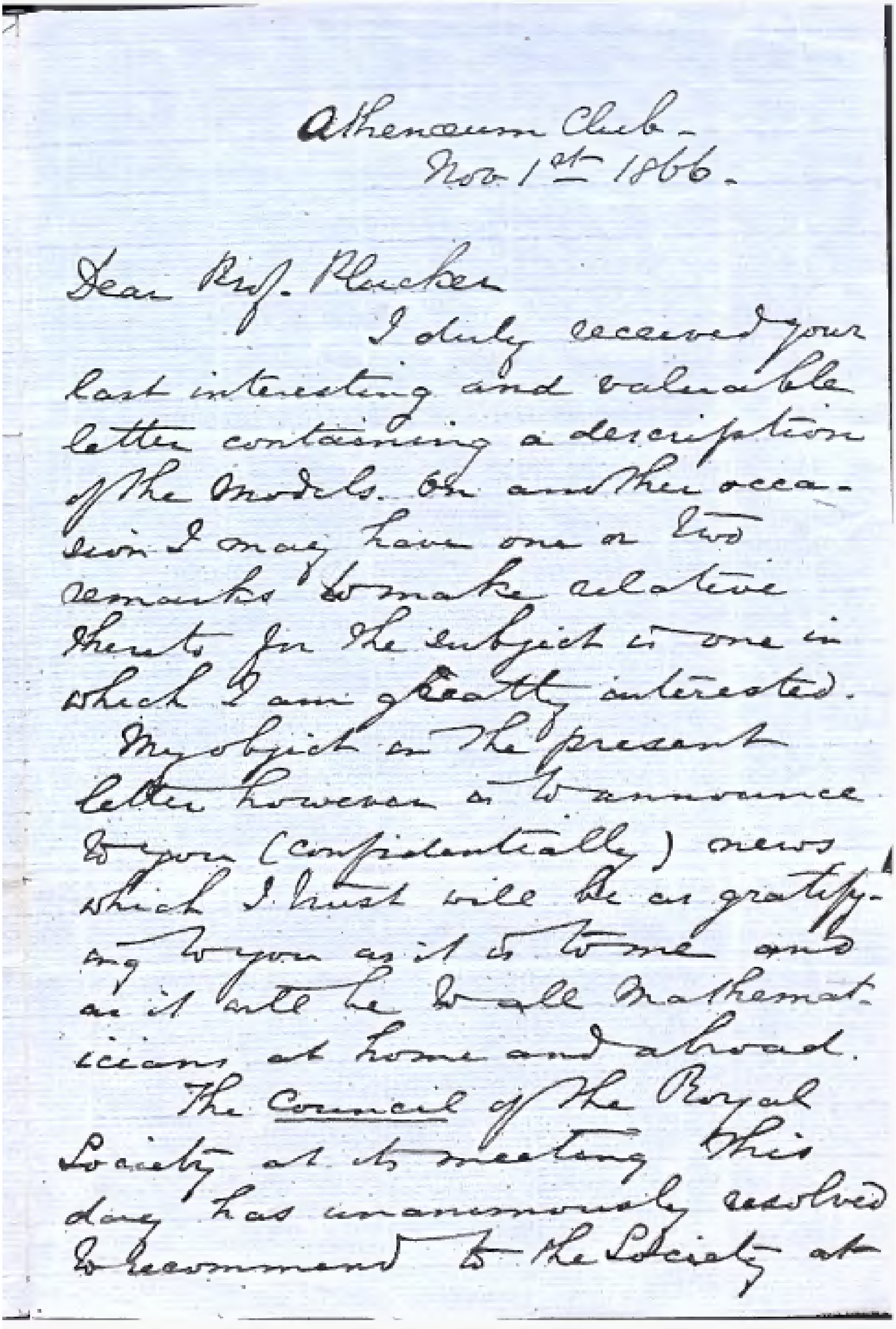
Die nächsten beiden Briefe in der Plücker-Hirst-Korrespondenz betreffen die Verleihung der Copley-Medaille an Plücker. Hirst berichtete Plücker davon am 1.11.1866, bevor dieser die offizielle Mitteilung erhielt (Abb. 6.3):

> *„My object in the present letter however is to announce to you (confidentially) news which I trust will be as gratifying to xou as it is to me and as it will be to all mathematicians at home and abroad.*
> *The Council of the Royal Society at is meeting this day has unanimously resolved to recommend to the Society at the ensuing General Meeting that the Copley Medal (the highest scientific honour they have to bestow) shall this year be awarded to you.*
> *In a few days you will receive official intimation of the fact; it gives me pleasure to be able to congratulate you in anticipation.“*

[NRC PC, Vol. 1B, Item 74]

Bereits ein Jahr vorher, war Plücker als Kandidat für die Medaille nominiert, aber nicht gewählt worden (vgl. [NRC PC, Vol 1b, Item 52][228]). Die Copley-Medaille ist

[228] Brief von Wheatstone an Plücker vom 14. Febr. 1866: „I do not know wheather you are aware that you were last Nov[ember] put forward at the Council of the Royal Society as a candidate for the



Athenaeum Club -
Nov 1st 1866.

Dear Prof. Plücker
I duly received your last interesting and valuable letter containing a description of the Models. On another occasion I may have one or two remarks to make relative thereto for the subject is one in which I am greatly interested.
My object in the present letter however is to announce to you (confidentially) news which I trust will be as gratifying to you as it is to me and as it will be to all Mathematicians at home and abroad.
The Council of the Royal Society at its meeting this day has unanimously resolved to recommend to the Society at

Abb. 6.3.: Brief von T. A. Hirst an Plücker (1.11.1866). Aus: [NRC PC, Vol. 1B, Item 74]

the ensuing General Meeting
that the Copley Medal (the
highest scientific honour
they have to bestow) shall
this year be awarded to you.
In a few days you will
receive official intimation
of this fact; it gives me
pleasure to be able to
congratulate you in
anticipation ~~[illegible]~~ -

Believe me to be
Dear Prof. Plücker
Very sincerely yours
T. Archer Hirst

die höchste Auszeichnung der Royal Society und wurde erstmalig 1731 an Stephan Gray verliehen. Im Schreiben vom 11. November 1866 bedankt Plücker sich für die Glückwünsche und das ihm von Hirst entgegengebrachte persönliche Interesse (vgl. [LMSA P-HL, S. 5]). Das nächste Schreiben Hirst, datiert auf den 26.09.1867 betrifft die Modalitäten der Bezahlung an Epkens – die letzlich über Plücker vermittelt wurde – und Hirst Glückwünsche für Plückers Ernennung zum korrespondierenden Mitglied der Académie des sciences in Paris (vgl. [NRC PC, Vol. 1B, Item 71]).

> *„It was an Honour which you had well merited 20 years ago and I rejoice that the French have at length recognized your claims there to."*

[NRC PC, Vol. 1B, Item 71]

Plücker bedankt sich am 21. Oktober 1867 für diese Glückwünsche und berichtet Hirst unter anderem über eine weitere Serie von Modellen, die er anfertigen ließ:

> „A new series of Models of complex surfaces of the general description – the locus of complex curves situated within a plane revolving round any fixed line – were sent by Mr Epkens to the Paris Exhibition, but were lost by fault of the Prussian Commisioners."

[LMSA P-HL, S. 6]

Plücker kündigt außerdem an, dass der Druck des ersten Bandes seines Werks über Liniengeometrie sofort beginnen würde und er plane, diesen selbst nach England zu bringen – einen Plan, den er nicht mehr in die Tat umsetzen konnte.
Plückers Modelle blieben nach der ersten Ausstellung im Kensington Museum, dessen wissenschaftliche Sammlungen ab 1885 als „Science Museum" bezeichnet wurden, und seit 1909 eine eigenständige Verwaltungseinheit bilden (vgl. [Murray, S. 10]).

> „Since this initial exhihbition there is only sketchy information on the models, they appear to have been on pretty much continuos dislay in the South Kensington Museum, and then the Science Museum. Accordning to Science Museum records after the Second World War a number were found to have warped and seperate parts had become unglued, but apart from that they have survived well and only needed periodic dusting."

[Murray, S. 10]

Offenbar verkaufte Epkens Plückers Modelle weiter auf Anfrage. So bemerkt Clebsch im Vorwort zu Plückers „Neuer Geometrie":

> „Eine große Anzahl eleganter Modelle dieser Art verfertigt nach Plücker's Anweisung der Mechanicus *Epkens* in Bonn."

[Plücker 1868/69, Bd.1, S. 3]

Copley medal; the other candidates were Chasles and Regnault. At the first ballot you had an equal number of votes with Chasles, but after Regnault was withdrawn your competitor had the predomination".

Und die Redaktion der Zeitschrift „Les Mondes“ fügte Plückers Artikel „Géometrie nouvelle de l'espace“ ([Plücker 1867]) die Bemerkung an, das Holzmodelle von Plückers Modellen von Herrn Epkens in Bonn hergestellt würden und über Herrn Hempel in Paris zu beziehen seien[229] (vgl. [P. Ges. math. Abh., S. 575]).
Klein entwarf später vier weitere Modelle, die zusammen mit Plückers Modellen von der Firma Johann Eigel Sohn in Köln hergestellt und verkauft wurden [Rowe 2013, S. 6].

> „Die so auf *Plücker* selbst zurückgehenden Modelle bildeten indes keine vollständige Serie, waren auch im einzelnen ungleichwertig, und es lag gewiß nicht im Sinne ihres Urhebers, wenn dieselben später trotzdem verschiedentlich als zusammengehörige Kollektion verbreitet worden sind. Ich habe deshalb im Herbst 1871, um das Wesentliche der Sache herauszuheben, von mir aus vier neue Modelle der hauptsächlich in Betracht kommenden Flächentypen veröffentlicht, wobei ich die Verhältnisse so wählte, daß die jeweils auftretenden singulären Punkte und Ebenen sämtlich reell ausfielen.“

[Klein 1922, S. 7]

Klein war zusammen mit Alexander von Brill[230] maßgeblich daran beteiligt, dass mathematische Modelle in Maßenproduktion hergestellt und vertrieben wurden. Damit einher ging ein Wechsel der Zweckbestimmung dieser Modelle von Hilfsmitteln für die Forschung hin zu didaktischen Mitteln (vgl. [Rowe 2013]).

6.3.3. Die „Neue Geometrie des Raumes“

> „Das Studium der Complexe, vorzugsweise der Complexe zweiter Ordnung, bildete nunmehr den Hauptgegenstand von *Plücker's* Beschäftigung. [...] In alter Weise unermüdlich schaffend, verbreitete er seine Gedanken durch eine Zahl von Abhandlungen, während er sein grösseres Werk vorbereitete. Aber der Tod riss ihn mitten aus dieser Thätigkeit heraus.“

[Clebsch 1872, S. XXXIV]

Im oben bereits zitierten Brief Plückers an Hirst vom 17.10.1866 drückte Plücker seine Intention aus, im nächsten Jahr einen ersten Band zur Liniengeometrie zu veröffentlichen (vgl. [LMSA P-HL, S. 4]). Offenbar hatte er einzelne Kapitel schon geschrieben und weitere vorgesehen:

[229] „Sous la direction de *M. Plucker* beaucoup des surfaces mentionées dans cette note ont été modelées en bois par *M. Epkens* de Bonn. *M. Hempel* (Quai des Grands-Augustins No.55) a bien voulu se charger de fournir ces modèles construits avec précision et élégance, sans augmentation de prix.“ [P. Ges. math. Abh., S. 575].

[230] (1842 - 1935).

„There is another Chapter treated by me with full success [...] Other Chapters has been reserved"

[LMSA P-HL, S. 5]

Über den Fortschritt seiner Arbeit geben mehrere Briefe an seine Frau Zeugnis, da Plücker bevorzugt Bonn verließ, um ungestört von universitären Aufgaben arbeiten zu können. Außerdem suchte er weiterhin den Austausch mit Kollegen im In- und Ausland. Ernst gibt einen Text Plückers von März 1867 wieder – leider ohne Angaben zur Quelle – in dem dieser die Notwendigkeit eines solchen Austauschs betont:

„Mitteilungen über Experimental-Untersuchungen werden für den Augenblick durch mathematische Arbeiten [...] zurückgedrängt, [...] denen ich große Tragweite beilege. Die Ausführung der Prinzipien, welche in den bereits veröffentlichten Abhandlungen niedergelegt sind, wird die Hauptaufgabe meines Lebens bilden. Dieselbe würde meine Kräfte, bei der Ausdehnung, welche sie annimmt, übersteigen, wenn ich nicht die Aussicht hätte, von wissenschaftlichen Freunden in England und Frankreich unterstützt zu werden."

[Ernst 1933, S. 38]

Im Folgenden sollen chronologisch einige kurze Zitate aus Plückers Briefen wiedergegeben werden, die Plückers Arbeit an der Liniengeometrie sowie seinen Austausch darüber mit Fachkollegen zeigen.
Nachdem Plücker die Feier zum fünfhndertjährigen Bestehen der Wiener Universität besucht hatte, schrieb er am 16. August 1865 aus Altaussee in der Steiermark:

„Ich habe mich bestimmen lassen nach Alt-Aussee zu gehen, wo die Familie Ettinghausen[231] wohnt, um dort eine Arbeit zu machen."

[NRC PC, Vol. 5, Item 37]

„Ich befinde mich hier sehr wohl und glücklich weil ich mir Alles aus dem Kopf geschlagen was mich in Unruge setzte und meine Arbeit ist um ein schönes Stück gefördert. [...] *Ich würde viel lieber noch einige Zeit hier bleiben als nach England gehen[232], aber die Reise dahin scheint mir immer mehr durch die Verhältnisse gefordert. Vielleicht ist es die letzte die ich für solche Zwecke mache und ich suche mir nächsten Herbste eine ruhigere Art zum Arbeiten."*

[NRC PC, Vol. 5, Item 38][233]

[231] Andreas von Ettingshausen, siehe Fußnote 188.
[232] Plücker spricht hier von der Reise zur Tagung der BAAS in Birmingham.
[233] Der Brief ist undatiert. Er wurde vermutlich Ende August oder Anfang September 1865 geschrieben.

„Meine Absicht ist hier [in Bad Homburg] *ungefähr acht Tage zuzubringen, den Tag hindurch solange es hell ist arbeite ich und den Abend finde ich hier passende Zerstreuung."*

[NRC PC, Vol. 5, Item 44][234]

„Ich kann hier ganz gut arbeiten, der Erfolg ist wechselnd mit dem wechselnden Wetter. Ich bin zufrieden."

[NRC PC, Vol. 5, Item 45][235]

„Ich bin mit meiner Reise [nach Paris] *sehr zufrieden. Eine Abhandlung, die ich hier niedergeschrieben habe, wird vor meiner Abreise noch gedruckt*[236]*."*

[NRC PC, Vol. 5, Item 49][237]

„Ich habe hier [in Paris] *vielen Verkehr gehabt und ich habe, über Erwarten, meinen Zweck die neue Geometrie geltend zu machen, erreicht. Mit vielen Mathematikern, die ich bisher nicht kannte, bin ich in Berührung gekommen."*

[NRC PC, Vol. 5, Item 48][238]

„Zu Bellagio hab ich meinen Zweck erreicht und meine Arbeit gut gefördert [...]. *Hier habe ich gleich gestern Morgen Cremona*[239] *aufgesucht, der erst Abends zuvor nach Mailand zurückgekehrt war. Er hat meine 5 Quartband und erklärte ich hätte ihn in die Geometrie eingeführt. Er war sehr freundlich und versteht meine Sachen besser als irgend ein Anderer. Wir haben uns gestern drei Stunden gesprochen, heute wieder und werden es morgen wieder thun. Dann bin ich hier in Mailand fertig."*

[NRC PC, Vol. 5, Item 47][240]

Plücker wurde bei der Herausgabe seines Werks von seinem Schüler Felix Klein unterstützt, der seit Ostern 1866 Assistent bei Plücker war. Von seiner Reise nach Italien zurückgekehrt schrieb Plücker an Klein:

[234] Brief vom 18. September 1866. Siehe Abb. 6.4.
[235] Brief vom 24. September 1866.
[236] Es handelt sich hierbei um [Plücker 1867].
[237] Der Brief ist undatiert. Er wurde zwischen Weihnachten und Neujahr 1866 geschrieben.
[238] Brief vom 5. Januar 1867.
[239] Luigi Cremona (1830 - 1903).
[240] Brief vom 29. September 1867.

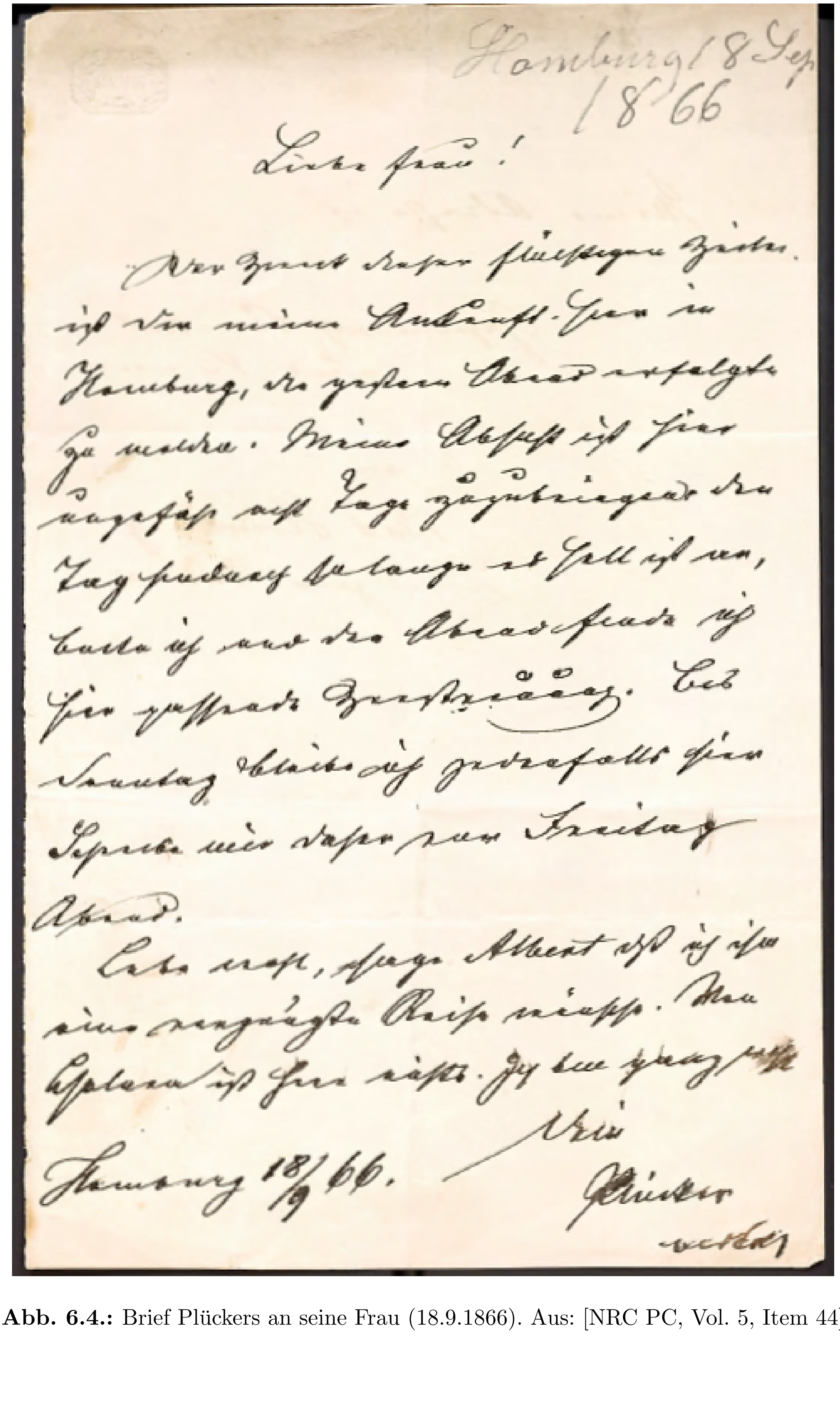


Abb. 6.4.: Brief Plückers an seine Frau (18.9.1866). Aus: [NRC PC, Vol. 5, Item 44]

Abb. 6.5.: Felix Klein. URL: http://bit.ly/KleinJPG [8.11.14]

Lieber Herr Klein!

Durch die früh eingetretene Kälte sind meine Reise-Pläne durchkreuzt worden. Ich war 12 Tage in Bellagio am Comer See und ebenso lange in Lugana, in der Zwischenzeit in Mailand, wo ich mit Cremona Freundschaft geschlossen habe. Meine Arbeit ist nicht ganz so gefördert worden als ich wünschte. Doch sind die Hauptschwierigkeiten beseitigt.

Der Druck wird Anfang November beginnen. Vorher ist aber noch Vieles in Ordnung zu bringen. Je früher Sie herüberkommen, desto lieber wird es mir sein. Alles über Complexe des ersten Grads möchte ich Ende des Monates einschicken.

Der Druck wird so schnell als möglich vorangehen und die Ausstattung wird die schönste.

[...]

In der Hoffnung baldigen vergnügten Wiedersehens

Ihr ergebenster
Plücker

Bonn 10/10 67

[NSuUB FK3C, Bl. 58-59]

In einem nächsten Brief vom 25. Dezember 1867 bittet Plücker Klein einige Korrekturbögen durchzusehen und sie dann direkt unter Kreuzband abzuschicken (vgl. [NSuUB FK3C, Bl. 60]). Das nächste Schreiben Plückers ist undatiert. Darin berichtet er Klein von einer geplanten Reise an den Como-See und seiner Absicht dort an den Linienkomplexen zweiten Grades zu arbeiten. Außerdem berichtet er Klein, dass er es „als ausgemacht betrachten [könne], dass Teubner von Marburg übernimmt“ [NSuUB FK3C, Bl. 63-64]. Dem letzten Brief Plückers ist von Klein ein Vermerk beigelegt: „Letzter Brief von Plücker, bekommen den 25ten April 1868 (Samstag).“ [NSuUB FK3C, Bl. 69]. Darin schreibt Plücker:

> *„Lieber Herr Klein!*
> *Seit ihrer Abreise ist es mir schlecht, sehr schlecht ergangen. Seit ungefähr drei Wochen überfiel mich eine schmerzliche Krankheit, die mich unfähig machte an irgend etwas Antheil zu nehmen. Es wird mich freuen Sie, Ihrer in einem Briefe an Albert ausgesprochenen Absicht gemäß in den ersten Tagen der kommenden Woche wieder hier zu sehen. Es ist Manches zu besprechen.*
>
> *Unsere besten Grüße*
>
> *Plücker“*

[NSuUB FK3C, Bl. 68]

Nur wenige Wochen später, am 22. Mai 1868, starb Plücker „nach schweren, mit stiller Ergebung ertragenen Leiden“ [SBPK Slg.D, Bl. 16][241]. Die Herausgabe seiner Liniengeometrie wurde vom Verleger Teubner an Clebsch und Klein übergeben. Der bereits gedruckte Teil des Werkes wurde in einem ersten Band – mit einem Vorwort von Clebsch – noch 1868 veröffentlicht. Der restliche Teil des Werkes wurde von Felix Klein auf Grundlage der vorhandenen Manuskripte erstellt und 1869 als zweiter Band veröffentlicht. Die Vorworte zu den beiden Bänden sind im Folgenden auszugsweise wiedergegeben.

> „Schon seit längerer Zeit war es Plücker's Absicht, die Gesammtheit seiner Forschungen über die von ihm in die Geometrie eingeführten Liniengebilde, in einem grösseren Werk vereinigt, der Oeffentlichkeit zu übergeben [...]. Es war ihm nicht vergönnt, sein Vorhaben vollständig auszuführen; aber der grösste Theil des beabsichtigten Werkes war bei seinem Tode fertig gedruckt und von ihm selbst durchgesehen. Der Herr Verleger wollte dem wissenschaftlichen Publicum Untersuchungen von so grosser Tragweite nicht länger als unumgänglich nöthig vorenthalten sehen; und es erscheint also, während die Fortsetzung des Werkes möglichst beschleunigt werden soll, hier derjenige Theil, dessen Druck noch unter Plücker's eigener Aufsicht vollendet worden ist. [...]
> Für die Fortsetzung des Werkes liegt allerdings nur ein kleiner Theil des Manuscriptes vollständig vor; aber glücklicherweise ist Herr *Klein*, bisher Assistent Plücker's in seinen physikalischen Vorlesungen, welcher sich bereits an der Ausarbeitung des Werkes in mannigfacher Weise betheiligt hat, und sich Geist und Methode der Untersuchung zu eigen zu machen wusste, durch mündliche Mittheilungen des Verstorbenen in den Stand gesetzt, die Lücken des Manuscriptes in Plücker's Sinn zu ergänzen. Man darf daher hoffen, das Ganze bald so nahe wie möglich in einer Weise vollendet zu

[241] Todesanzeige Plückers.

sehen, wie sie Plücker selbst wohl gewünscht und vorausgesehen hat, wenn, wie dies seit längerer Zeit öfters geschah, ein Vorgefühl des Todes ihm die Befürchtung aufdrängte, dass es ihm nicht möglich sein werde, das Werk selbst zu vollenden. [...] „

[Plücker 1868/69, S. IIIf]

„Indem ich hiermit die zweite Abtheilung von Plücker's „Neuer Geometrie“ der Oeffentlichkeit übergebe, erfülle ich eine Pflicht der Pietät gegen meinen unvergesslichen Lehrer. Ich habe versucht, Alles, was sich in dem mir von der Familie übergebenen Manuscripte Plücker's vorfand, so wie dasjenige, was mir aus mündlichen Mittheilungen des Verewigten in Erinnerung war, im Zusammenhange darzustellen. Zu diesem Zwecke musste ich auch bei ausgearbeiteten Theilen des Manuscripts, für welche Plücker selbst im Laufe der Arbeit neue Gesichtspuncte gewonnen hatte, vielfache Umstellungen und Änderungen vornehmen. Indess ist das gegebene Material dabei vollständig zur Verwerthung gekommen. Eine Erweiterung desselben durch eigene Untersuchungen schien mir möglichst vermieden werden zu müssen und hat sich auch nur an äusserst wenigen unten angeführten Stellen nöthig gezeigt.

[...]

Zum Schlusse bleibt mir die angenehme Pflicht, Herrn Professor Clebsch für die freundliche Aufmunterung und thätige Unterstützung, die er mir bei meiner Arbeit hat zu Theil werden lassen, meinen Dank auszusprechen.

Göttingen, den 25. Mai 1869

Dr. Felix Klein

[Plücker 1868/69, Bd. 2, S. IV]

7. Plückers Wesen und Charakter

„*Plücker* kam mir zuerst etwas vornehm vor, wie es die Bonner Professoren meistens sein sollen, nachher aber wurde er ganz gemüthlich, als er auf den Einfall kam, meine Anwesenheit durch eine ganz besonders gute Flasche Wein zu verherrlichen.“

Helmholtz über seine erste Begegnung mit Plücker, in Bonn 1853

Leo Königsberger,
„Hermann von Helmhotz“, Bd. 1 (1903)
zitiert nach [Ahrens 1904, S. 407]

In Dronkes Biograhie über Plücker, der nach eigenen Angaben Plücker „[...] in seinem Leben [...] lange Zeit hindurch nahe stand [...]“ [Dronke 1871, S. III][242], finden sich einige Angaben zu Plückers Persönlichkeit[243]. Auch wenn bei Dronkes Angaben berücksichtigt werden muss, dass sie stark durch seine Freundschaft mit und Wertschätzung für Plücker geprägt wurden, sind sie doch aufschlussreich. Laut Dronkes Auflistung war Plücker korrespondierendes Mitglied der British Assoziation (seit 1849), der Cambridge Philosophical Society, der Royal Society (seit 1855), des l'Institut de France und der société des sciences naturelles des Liège. Außerdem Mitglied in zahlreichen gelehrten Gesellschaften, darunter die Hollandische Maatschapij der Wetenschappen te Haarlem (1850), die Genotschap der Proefondervindelyke Wysbegeerte te Rotterdam (1861), der Kaiserlichen Akademie in Wien (1859), der Königlichen Akademien in München (1859), Upsala und Göttingen (1864) und der Physiographica Saellskopet in Lund (1861). Plücker wurde zum Geheimen Regierungs-Rat ernannt und erhielt den Adler-Orden 3. Klasse mit der Schleife (vgl. [Dronke 1871, S. 18f, 25]). Die Verleihung der Copley-Medaille 1866 wurde oben schon erwähnt. Plücker war erst der achte Deutsche, dem diese Auszeichnung verliehen wurde[244].
Plückers guter Lehrvortrag wurde schon bei seiner Berufung nach Bonn lobend erwähnt (vgl. 6.1). Dronke beschreibt ihn als äußerst anregenden Lehrer, dessen Vortrag eine große Menge „zum Nachdenken zwingender Gedanken“ enthielt [Dronke 1871, s. 21]. Bei den Studenten der Mathematik und Physik, sowie bei den Pharmazeuten stand

[242] Vgl. dazu auch Kapitel 1.

[243] Der Absatz in Ernsts Biographie mit dem Titel „Plückers Persönlichkeit“ ([Ernst 1933, S. 84 - 90]) fußt offensichtlich ebenfalls auf Dronkes Angaben.

[244] Die Medaille wurde 1838 an Carl Friedrich Gauß (1777-1855), 1840 an Justus von Liebig (1803 - 1873), 1850 an Peter Andreas Hansen (1795 - 1874), 1852 an Alexander von Humboldt (1769 - 1859), 1854 an Johannes Peter Müller (1801 - 1859), 1859 an Wilhelm Eduard Weber (1804 - 1891) und 1860 an Robert Wilhelm Bunsen (1811 - 1899) verliehen, so dass diese Auszeichnung „damals nur fünf deutsche Gelehrte [mit Plücker] teilten“ [Ernst 1933, S. 87].

Plücker „in höchster Achtung und grosser Beliebtheit, so dass letztere ihm den sicher ehrenden Beinamen „Vater Plücker“ gaben“ [Dronke 1871, S. 22]. Auch bedingt durch die äußeren Umstände – Plückers fehlende Erfahrug im Experimentieren sowie die fehlenden Gelder für die Anstellung von Assistenten und Mechanikern (vgl. 6.2) – suchte Plücker immer engen Kontakt zu einzelnen, guten Studenten. Diese betreute er besonders intensiv, zog sie als Assistenten für seine Forschung und Vorlesungen heran und weihte sie in seine Forschungen ein. Der zeitlich letzte in dieser Reihe von Studenten war Felix Klein, der dadurch in die Lage gesetzt war, die Herausgabe der „Neuen Geometrie“ in Plückers Sinn weiterzuführen.
Über Plückers Tagesablauf berichtet Dronke:

> „Einfach in seiner Lebensweise begann er jeden Tag schon füh seine Arbeit; waren es solche für die Universität oder die schriftliche Abfassung der Resultate seiner geistigen Anstrengungen, so schrieb er den ganzen ihm zu Gebote stehenden Vormittag [...]. Seine Mahlzeit war meist sehr einfach, doch sah er gern, wenn Gäste daran Theil nahmen. Nach Tisch zog er sich in seine Arbeitsstube wieder sehr bald zurück und durchlätterte er hier zunächst die Zeitschriften und ihm zur Ansicht zugesandte Bücher. Nur diejenigen Aufsätze und Werke, die direct mit seinen Arbeiten zusammenhingen, las er genau durch, von den übrigen verschaffte er sich nur eine allgemeine Uebersicht. Um 4 Uhr pflegte er in einem Kreise, der sich täglich um diese Zeit bei seiner Gattin versammelte [...] eine Tasse leichten Thee zu nehmen. Die interessanten Gespräche, die sich hier über die neuesten Entdeckungen in allen Zweigen der Wissenschaften, über Universitäts-Angelegenheiten u.s.f. entwickelten, werden noch allen, die je daran Theil zu nehmen Gelegenheit hatten, in schönster Erinnerung sein. Plücker hörte dabei meist nur zu, sobald er aber eingriff, konnte man immer sicher sein, dass sein klarer Kopf gerade das Richtige erfasst hatte und er nun in präciser Form den Schwerpunkt hervorhob. Unter diesen täglich sich einfindenden Gästen waren es namentlich lange Zeit die Professoren Schopen[245], Lassen[246], v. Feilitzsch[247], Römer[248], Landolt[249], Frantz, Hittorf[250] sowie die beiden leider so früh verstorbenen Beer[251] und Baumert[252], welche immer neuen Stoff zu anregender Unterhaltung mitbrachten. Gegen 5 Uhr begann Plücker immer wieder seine angestrengte Arbeit bis zum Abendbrod, bei welchem er wieder gern Freunde sah, mit denen er über seine Arbeit sprechen konnte.“
>
> [Dronke 1871, S. 22f]

[245] Siehe Fußnote 110.

[246] Christian Lassen (1800 - 1876), 1827 in Bonn habilitiert, ab 1840 ordentlicher Professor für altindische Sprache und Literatur in Bonn (vgl. [ADB, Bd. 17, S. 784 - 788]).

[247] Fabian Carl Ottokar Freiherr von Feilitzsch (1817 - 1885), Physiker.

[248] Ferdinand von Roemer (1818 - 1891), Geologe, Paläantologe und Mineraloge; zwischen 1848 und 1855 als Privatdozent in Bonn (vgl. [ADB, Bd. 53, S. 451 - 458]).

[249] Hans Landolt (1831 - 1910), ab 1858 als außerordentlicher Professor der Chemie in Bonn (vgl. [NDB, Bd. 13, S. 508f]).

[250] Siehe 6.2.

[251] Siehe Fußnote 180.

[252] Moritz Baumert (1818 - 1865), ab 1855 außerordentlicher Professor der Chemie in Bonn (vgl. [ADB, Bd. 2, S. 157]).

Plückers enge Kontakte ins Ausland, besonders nach Frankreich und England, sind bereits verschiedentlich erwähnt worden (vgl. besonders 6.2.2). Obwohl Plücker diesen Kontakt von Beginn seiner Karriere an suchte – er studierte in Paris und machte bereits von Halle aus wissenschaftliche Reisen nach Frankreich und England – intensivierte sich dieser Kontakt besonders während Plückers experimentalphysikalischen Forschungen. Daher ist Plückers erste mathematische Phase von einer sehr selbständigen Arbeitsweise gekennzeichnet, während Plücker in seiner zweiten mathematischen Phase den wissenschaftlichen Austausch mit Fachkollegen stärker suchte (vgl. 6.3). Neben diesem Austausch nutzte Plücker seine Reisen auch zur Erholung und ungestörten Arbeit an seinen Veröffentlichungen.

> „Einen Ausflug nach Paris muß ich nach meiner Rückkehr durch eine Überbürdung von Arbeit büßen. Vor Mitte October werde ich hier frei und werde mich dann an einen ruhigen Ort zurückziehen um zu arbeiten. Dann hoffe ich es möglich zu machen Sie zu sehen.“

[SBPK NL141, Bl. 3]

> „[...] überall sah man den im Auftreten bescheidenen in der Wissenschaft so hoch stehenden Mann gern kommen und öffnete ihm als Freund das Haus.“

[Dronke 1871, S. 23f]

Neben den bereits erwähnten Namen, nennt Dronke noch folgenden Wissenschaftler mit denen Plücker in näherem Kontakt stand: in England Arthur Caylay[253], in Paris Ernest Jonquières[254], Michel Chasles[255], und Charles Hermite[256], sowie die deutschen bzw. österreichischen Gelehrten Eilhard Mitscherlich[257], Wilhelm Josef Grailich[258] und Anton Schrötter[259] (vgl. [Dronke 1871, S. 24]). Dronke schließ seine Biographie über Plücker mit den Worten:

> „Liebenswürdig im Umgang, ein treuer Freund, der zu allen Zeiten seinen Freunden mit Rath und That zur Hand ging, ein grosser Denker und ein angestrengt im Dienste der Wissenschaft Arbeitender, streng gegen sich selbst, mild im Urtheile über Andere, Gentleman in jeder Beziehung wird er bei allen, die ihm näher standen, treu im Gedächtnis bewahrt bleiben als das Beispiel eines rechtlich denkenden Mannes und eines der grössten Gelehrten. Der grosse Zug, der seine Leiche am 25. Mai zur letzten Ruhestätte begleitete, und zu dem aus Nah und Fern Hunderte von dankbaren Schülern aus allen Theilen Rheinlands bei der Trauerkunde vom Tode des geliebten Lehrers herbeigeeilt waren, gab Zeugniss von der Achtung und der Liebe,

[253](1821 - 1895).
[254](1820 - 1901).
[255](1793 - 1880).
[256](1822 - 1901).
[257](1794 - 1863) Chemiker.
[258](1829 - 1859) Mineraloge.
[259](1802 - 1875).

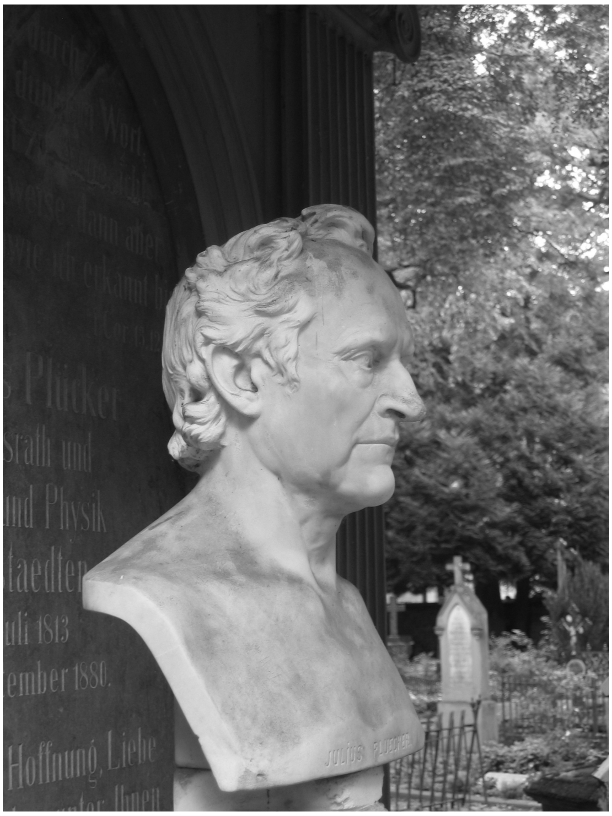


Abb. 7.1.: Büste Plückers

die er bei allen in reichstem Maasse verdienter Weise gefunden."

[Dronke 1871, S. 25]

Für ein etwas ausgewogenes Bild Plückers müssen beispielweise die Bemerkungen mit berücksichtigt werden, die der Kurator Beseler verschiedentlich in seinen Schreiben gegenüber dem Ministerium machte.

> „Wie weit die obige Tatsache mit einem sehr reizbaren Temperament und nervöser Erregbarkeit des bedeutenden Gelehrten zusammenhängt, kann ich dahin gestellt lassen. Jedenfalls aber mache ich häufig die Erfahrung, daß die geringste Veranlassung ihn in tiefe Verstimmung setzt und in ihm den Gedanken wieder aufkommen läßt, daß seine Leistungen bei dem Königlichen Ministerium wenig geschätzt würden. [...]"

zitiert nach [Ernst 1933, S. 79][260]

Die Errichtung eines mathematischen Seminars in Bonn verzögerte Plücker stark, da nach dem Tod seines Freundes Beer Rudolf Lipschitz[261] – und nicht wie von Plücker gewünscht Clebsch – nach Bonn berufen worden war. Dies wird aus einem Schreiben Beselers an den Minister deutlich:

[260]Begleitbrief Beselers zu Plückers Jahresbericht über das phyikalische Kabinett für das Jahr 1864.
[261](1832 - 1903).

„Nach dem Tode des p. Beer forderte ich den p. Plücker auf, sich näher darüber zu äußern, wie er über die Errichtung eines Seminars denke; er erwiderte mir, daß er dazu bereit sein werde, wenn der Professor Clebsch in Gießen zum Nachfolger des p. Beer werde ernannt werden. Nach Berufung des Dr. Lipschitz zur Übernahme der Beer'schen Professur suchte er längere Zeit die Sache in den Hintergrund zu drängen, bis ich ihm erklärte, ich werde eventuell Ew. Excellenz vorschlagen, das Seminar vorläufig unter alleiniger Leitung des p. Lipschitz zu gründen.“

zitiert nach [Schubring 1985, S. 143][262]

Plücker wurde auf dem Alten Friedhof in Bonn beigesetzt. Dieser wurde als Soldatenfriedhof gegründet und erst 1787 zur allgemeinen Begräbnistätte bestimmt (vgl. [Zander 2001, S. 8]). Durch die Gründung der Bonner Universität „entwickelte sich der Alte Friedhof als zu dieser Zeit einzige innerstädtische Begräbnisplatz kontinuierlich zu einer Ruhestätte bekannter Persönlichkeiten des 19. Jahrhunderts“ [Zander 2001, S. 10]. Die 1869 errichtete Grabanlage der Familie Plücker – seine Frau und sein Sohn wurden hier später ebenfalls bestattet – bildet heute den zentralen Blickfang des Rondells IIIb[263] (vgl. [Zander 2001, S. 15]). Die Grabanlage besteht aus einer tempelartigen Grabarchitektur und einer nahezu lebensgroßen Büste Plückers (siehe Abb. 7.1; 7.2); gestaltet von Albert Hermann Küppers (vgl. [Zander 2001, S. 61f]).

„Über eine merkwürdige Erscheinung, welche die Beisetzung begleitete, berichtet der Chronist: „Indem man die Leiche des berühmten Physikers in ihre letzte Ruhestätte einsenkte, wurden die Umstehenden von einer jener erhabenen Kundgebungen der Natur überrascht, welche stets einen so gewaltigen Eindruck auf das menschliche Gemüt üben. Ein Blitz und rollender Donnerschlag fuhr vom Himmel. So gab die Natur, deren Geheimnisse er erforscht, dem Geschiedenen gewissermaßen eine Salve“ (Vgl. Bonner Zeitung, Nr. 140 vom 25. Mai 1868)“

[Ernst 1933, S. 90]

[262] Seminargründungsantrag Beselers an den Minister vom 14.9.1864.

[263] Dieser Friedhosbereich wurde 1841 erworben und ab 1860 angelegt. Ein Lageplan des Friedhofs findet sich unter der URL:
http://www.alter-friedhof-bonn.de/Plan_files/Alter_Friedhof_Bornheimer_Straße.pdf [14.11.14]

Abb. 7.2.: Grabstätte der Familie Plücker

Teil II.

Mathematisches Werk

8. Einleitung

8.1. Plückers mathematisches Werk

„No single person has contributed more to analytic geometry, both as to volume and power, than did Plücker. No previous mathematician – not even Descartes, Fermat, Newton, Euler, or Monge – had been primarily an algebraic geometer. [...] Plücker [...] was in a real sense the first specialist in analytic geometry. [...] Plücker published half a dozen large quarto volumes, averaging over three hundret pages per volume, each one devoted entirely to analytic geometry. Devoting the greater part of his life singlemindedly to coordinate methods, he contributed also scores of important papers (well over six hundred pages in all) to the learned periodicals of his time in Germany, France, England, and Italy. In spite of the bulk of his work, Plücker's aim was not to amass results through an exploitation of existing principles; he sought instead to *rebuild* analytic geometry anew.“

[Boyer 1956, S. 244]

Plücker war nicht nur Mathematiker sondern auch Physiker. Seit 1836 war er (wenn auch bis 1856 nur provisorisch) Direktor des physikalischen Kabinetts der Universität Bonn (vgl. Kapitel 6). Obwohl er also, über einen langen Zeitraum hinweg, zumindest was die Lehre betrifft, gleichzeitig in der Mathematik und der Physik tätig war, beschränkte sich Plücker in seinen Veröffentlichungen immer auf eines der beiden Felder. Sein mathematisches Werk unterteilt sich damit in zwei Phasen, zwischen denen eine Zeitperiode von fast 20 Jahren liegt, in der Plücker ausschließlich zu physikalischen Themen publizierte. Die erste Phase der mathematischen Arbeiten beginnt mit Plückers Dissertation 1823 (vgl. 2.4) und endet mit einigen Artikeln, welche Plücker 1847 in Crelles Journal veröffentlichte. Die zweite mathematische Phase beginnt 1863/64 (vgl. 6.3) und endet mit Plückers Tod 1868. In dieser zweiten Phase beschäftigte Plücker sich ausschließlich mit der sogenannten „Neuen Geometrie des Raumes“, der Liniengeometrie. Das große Werk, welches Plücker zur Darstellung dieser Theorie veröffentlichen wollte, befand sich bereits zum Teil im Druck, als Plücker starb und wurde in zwei Bänden herausgegeben (vgl. 6.3.3). In Kapitel 14 wird ein kurzer Überblick über Plückers liniengeometrische Forschung gegeben.

In die erste mathematische Phase fallen fünf größere Werke Plückers zur analytischen Geometrie, welche jeweils ca. 300 Seiten umfassen. Wie Boyer in dem oben wiedergegebenen Zitat sehr schön herausstreicht, ist es sehr außergewöhnlich, dass ein Mathematiker sich einem speziellen Teilbereich der Geometrie so ausschließlich zuwendet. Plücker, „the first specialist in analytic geometry“ (siehe oben) hat sich damit den Titel „des Analytikers“ verdient; oft im direkten Gegensatz zu „dem Synthetiker“ Steiner. Inwieweit eine solche „Etikettierung“ angebracht ist und wie Plücker selbst sich zu den Unterschieden zwischen der analytischen und der synthetischen Methode äußert, soll in Kapitel 8.2.2 untersucht werden. Vorher wird in den Kapiteln 8.2 und 8.2.1 der Begriff „analytische Geometrie“ definiert und ein knapper Überblick über die Geschichte der analytischen Geometrie von Descartes und Fermat bis Plücker gegeben. Im Kapitel 9 sollen die einzelnen Werke der ersten mathematischen Phase vorgestellt werden. Der Fokus liegt dabei darauf aufzuzeigen, dass diese Werke einen Zyklus bilden und die von Plücker verwendete Methode dabei das verbindende Element bildet (9). Was genau unter „der Methode“ zu verstehen ist und wie Plücker sie charakterisiert wird in Kapitel 10 behandelt. Im Anschluss daran, werden in den Kapiteln 11 bis 13 verschiedene Themen vorgestellt, welche Plücker in seinen Schriften behandelt. Dabei können die vielen von Plücker veröffentlichten Zeitschriftenartikel nur zum Teil berücksichtigt werden[264].

> „*Plücker* war eine wesentlich und eminent productive Natur. Seine ganze Denkweise, mehr producirend als analysirend, gewährte ihm die volle Freude an dem Reichthum neuer Gestalten und Gebilde, welche die Fruchtbarkeit seiner Phantasie unerschöpflich ihm zuführte. [...]
> Man kann nicht verkennen, dass diese Art seiner geistigen Anlage und Richtung zugleich die Grösse wie die Begrenzung auch seiner geometrischen Thätigkeit begründet. Keiner, selbst der ihm in vieler Beziehung verwandte *Steiner*, ist reicher an Anregungen, an neuen Gesichtspuncten, an bisher unbekannten Gegenständen und Hülfsmitteln der geometrischen Speculation. Die Fülle seiner neuen Anschauungen drängte ihn sofort zu ausführlichen Darlegungen, wovon sechs grössere geometrische Werke Zeugniss ablegen. Aber nicht immer vermochte er die sich ihm aufdrängende Fluth von Erscheinungen völlig zu beherrschen; [...]. So verführte ihn die Leichtigkeit seiner Production bisweilen zu Irrthümern, welche nur der ungeschehen wünschen kann, der nicht die ihnen mit den grössten Vorzügen gemeinsame Quelle erkennt.; [...] Wer, wie ich selbst, die Gelegenheit hatte, *Plücker* während reger geometrischer Production zu kennen und an der Entwicklung seiner Ideen Theil nehmen zu dürfen, erstaunte über den Reichthum und die Mannigfaltigkeit derselben. Man wird sich nicht wundern dürfen, wenn sie auch ihm bisweilen zu mächtig wurden, und die gleichsam durch Intuition schnell erworbenen Resultate in einigen einzelnen Fällen die Probe der ruhigen Untersuchung nicht bestanden.“

[Clebsch 1872, S. XIIff]

[264] Die nicht in Deutsch oder Englisch geschriebenen Artikel müssen – mit wenigen Ausnahmen – ganz unberücksichtigt bleiben.

8.2. Der Begriff „analytische Geometrie“

> „[...] Man unterwarf die geometrischen Objecte als *Grössen* einer algebraischen Behandlung, und dem grossen Philosophen des XVII. Jahrhunderts *Descartes* gelang es, nach Einführung des Begriffes der veränderlichen Grösse auch die Natur *krummer* Linien in Formeln zu fassen und dem Calcul zu unterwerfen. Man nannte diese von Descartes im Jahre 1637 bekannt gemachte Methode die *analytische* Geometrie, theils weil sie in der That im Gegensatze zu der synthetischen Geometrie der Alten den analytischen Weg (im Sinne der Logik) einschlägt, theils weil man sich damals schon daran gewöhnt hatte, die Rechnung mit allgemeinen Grössen überhaupt als Analysis zu bezeichnen.“
>
> [Hankel 1875, S. 3]

Der synthetische Weg im Sinn der Logik geht von dem aus, was gegeben ist und versucht von dort aus den Satz zu beweisen. Dahingegen geht der analytische Weg von dem aus, was bewiesen werden soll, um es durch Umformungen auf bereits Bekanntes zurückzuführen. Man könnte sagen, dass die Beweisrichtung eines synthetischen Beweises vorwärts gerichtet ist, wohingegen ein analytischer Beweis rückwärts vorgeht. In diesem Sinn, also bezogen auf die Reihenfolge der Schritte in einem Beweis, wird der Begriff „analytisch“ bei Plato und Pappus gebraucht (vgl. [Boyer 1956, S. 65]). Mit François Viéte[265] beginnt eine Verschiebung im Gebrauch des Begriffs „analytisch“; er wandte diesen Begriff explizit auf seine algebraische Geometrie an, die er als eine neue Form mathematischer Analyse verstand. Der neue Gebrauch des Begriffs überschnitt sich zum Teil mit dem alten, da die neue algebraische Vorgehensweise – wie Viéte selbst herausstrich – in der Regel ebenfalls von dem ausging, was bewiesen werden soll. Die unbekannten Größen wurden so behandelt, als wären sie bekannt.

> „That ist, algebra seemed to be the instrument appropriate to the analytic path in geometry. But his [d. i. Viétes] emphasis is more upon the use of *logistica speciosa*[266] than upon the order of demonstration. Following his lead, his successors lost sight more and more of the Platonic meaning and came to look upon analysis as synonymous with the use of symbolic techniques, or even with algebra itself.“
>
> [Boyer 1956, S. 65]

Eine solche synonyme Verwendung der Begriffe Analysis und Algebra bzw. analytisch und algebraisch, findet sich bis weit ins 19. Jahrhundert hinein (vgl. auch [Paul 1980,

[265] Latinisierte Form: Franciscus Vieta (1540 - 1603).

[266] Diese verwendet im Gegensatz zur *Logistica numerosa* keine Zahlen sondern „species“, also z.B. Buchstaben (vgl. [Boyer 1956, S. 60]).

S. 200]).
Plücker bezeichnet seine Behandlungsweise der Geometrie als

> „[...] rein analytisch [...] in demjenigen Sinne des Wortes, in welchem man dasselbe seit *Monge* nimmt.“
>
> [Plücker 1828, S. III]

Die platonische Bedeutung von „analytisch“ ist bei Plücker gar nicht mehr vorhanden, obwohl er den Begriff „synthetisch“ in dieser Bedeutung verwendet[267]. Wie Hankel im obigen Zitat angibt, wurde der Begriff „Analysis“ für „die Rechnunge mit allgemeinen Grössen“ benutzt. Die Anwendung der Analysis auf die Geometrie beinhaltet bei Plücker in den seltensten Fällen Differential- und Integralrechnung und somit ist bei ihm hauptsächlich „algebraische Analysis“ und nicht „infenitisimale Analysis“ gemeint. Eine indirekte Definition seiner Verwendung des Begriffs der „analytischen Geometrie“ gibt Plücker direkt im Anschluss an das obige Zitat, wenn er erläutert:

> „In jeder Gleichung zwischen Coordinaten seh’ ich einen geometrischen Ort, in dem Systeme zweier solchen Gleichungen die Durchschnitte zweier Oerter, und endlich und hauptsächlich in jeder dritten Gleichung, die eine algebraische Folge zweier gegebenen ist, einen neuen geometrischen Ort [...] dessen Natur von der Form der resultirenden Gleichung abhängt.“
>
> [Plücker 1828, S. 3]

In dieser Aussage kommt zum einen das Kernstück analytischer Geometrie, die Benutzung von Koordinaten, zum anderen die – in Fermatscher Tradition[268] stehende – Ansicht, einen geometrischen Ort als durch eine algebraische Gleichung gegeben zu betrachten, zum Ausdruck. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Plücker den Begriff „analytische Geometrie“ dort verwendet, wo Koordinatenmethoden zur Behandlung der Geometrie benutzt werden. Um aber noch genauer herauszuarbeiten, in welchem Sinn Plücker den Begriff der „analytischen Geometrie“ in Anlehnung an Gaspard Monge[269] benutzt, soll im Folgenden eine kurze Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der analytischen Geometrie von Descartes und Fermat über Monge bis Plücker gegeben werden. Dabei stütze ich mich vor allem auf [Boyer 1956] und [Paul 1980].

---

[267] „Nach unserer Methode greifen wir diesen Satz ganz direkt, oder, wie man sich hier auch ausdrücken kann, *rein synthetisch* an.“ [Plücker 1830b, S. 162]; das, was Plücker hier mit „unsere Methode“ bezeichnet, nennt er auch „die allgemeine analytische Methode“ (vgl. z.B. [Plücker 1830b, S. 159]). Die synthetische Geometrie, als Gegenstück der analytischen Geometrie, bezeichnet Plücker in der Regel als „rein geometrische Behandlungsweise“ (vgl. z.B. [Plücker 1830b, S. 160]) oder als „rein constructive Methode“ (vgl. [Plücker 1828, S. IV]).
In einem Fall benutzt Plücker allerdings den Begriff „Analyse“ in der platonischen Bedeutung (vgl. [Plücker 1834b, S. 268]). Hierbei handelt es sich um Plückers Versuch Steiners Konstruktion der Malfatti’schen Aufgabe „rein geometrisch“ (=synthetisch) zu beweisen (vgl. Kapitel 13).

[268] Boyer schlägt vor, von einer analytischen Geometrie „in the sense of Descartes“ bzw. „in the sense of Fermat“ zu sprechen, abhängig davon, ob die Erzeugung einer Kurve durch eine Bewegung den Hauptgedanken bildet, oder ob eine Kurve als durch ihre Gleichung gegeben angesehen wird (vgl. [Boyer 1956, S. 102]).

[269] (1746 - 1818).

8.2.1. Geschichte der analytischen Geometrie

> „*Analytic* geometry was the independent invention of two men, neither one of whom was a professional mathematician. Pierre de Fermat (ca. 1608 - 1665) was a lawyer with a deep interest in the geometrical works of classical antiquitiy. René Descartes (1596 - 1650) was a philosopher who found in mathematics a basis for rational thought. Both men began where Viéte had left off, but they continued in somewhat different directions.“
>
> [Boyer 1956, S. 74]

Wie gerade dargestellt wurde, geht die Benutzung des Begriffs „analytische Geometrie“, für eine Geometrie, welche Koordinaten benutzt, letztlich auf Viéte zurück. Dieser hatte allerdings zwar die Algebra auf Geometrie angewandt, nicht aber Koordinatengeometrie betrieben. Boyer stellt heraus, das Viétes Form der Anwendung von Algebra auf Geometrie den Gedanken eines Koordinatensystems sogar erschwerte, da Viéte die Homogenität von Gleichungen forderte[270] (vgl. [Boyer 1956, S. 61]). Der bedeutende Beitrag Viétes in der Geschichte der Mathematik und besonders der der analytischen Geometrie ist die Einführung seiner *logistica speciosa*[271], die als unbekannte, aber feste Größen letztlich zu der Erfindung der Variablen führten[272].

> „The vowel-vs.-consonant notation, as applied to determinate equations, was not so much a distinction between *varaiable* and *fixed* magnitudes as it was between those constants which are taken to be *unknown* and those assumed to be *known*. [...] But the transition from the one point of view to the other was a natural outgrowth of Viéte's literal notation, and it was this transition which marked the beginning of analytic gemetry in the strict sense of the word.“
>
> [Boyer 1956, S. 60]

Dieser Beginn der analytischen Geometrie „im strengen Sinn dieses Wortes“, also als Koordinatengeometrie, steht in Verbindung mit den Namen Descartes und Fermat – auch wenn keiner von beiden den Begriff Koordinatensystem verwandte und sie im Grunde eher Ordinatengeometrie mit (bis auf wenige Ausnahmen bei Descartes) positiven Werten betrieben (vgl. [Paul 1980, S. 225] und [Boyer 1956, S. 76]).

[270] Die einzelnen Größen in einer Gleichung mussten die gleiche Dimension aufweisen. Größen in der Form x^3 konnten nur als Würfel, nicht aber als eine Länge geometrisch gedeutet werden.

[271] Vgl. Fußnote 266.

[272] Boyer spricht von der Idee der algebraischen Variablen, als „one of the most important in the evolution of mathematics in general and of analytic geometry in particular“ [Boyer 1956, S. 60] und bezeichnet den Satz, in dem Fermat die „immensely useful idea of an algebraic variable“ einführt als „one of the most significant statements in the history of mathematics.“ [Boyer 1956, S. 75].

Descartes und Fermat entwickelten ihre analytische Geometrie nahezu zeitgleich – Fermat 1629 und Descartes 1631/32 – aber die cartesische wurde eher publiziert und rezipiert (vgl. [Paul 1980, S. 226]). Beide Konzeptionen schließen an Viétes Arbeiten an, verzichten aber auf die Homogenitätsforderung an Gleichungen[273], die Viéte noch gestellt hatte. Allerdings streicht Paul heraus, dass die beiden Autoren „unterschiedlich akzentuierte Programme“ hatten, die nicht einfach „umstandslos in eins gesetzt“ werden sollten (vgl. [Paul 1980, S. 224f u. 242]).

> „To a large extend one may say, that where Descartes had begun with a locus problem and from this *derived an equation* of the locus, Fermat conversely was inclined to *begin with an equation* from which he derived the properties of the curve.“

[Boyer 1956, S. 101]

Paul betrachtet diese beiden Konzeptionen vom methodologischen Standpunkt aus, zeigt unterschiedliche Ausgangspunkte und Vorgehensweisen beider Autoren auf und identifiziert die Konzeptionen „als Ausgangspunkte unterschiedlicher Entwicklungstendenzen, die Monge und Lacroix in neuer Weise aufeinander beziehen“ (vgl. [Paul 1980, S. 224]). Während es Descartes darum ging den Bereich der Klassischen Geometrie unter Zuhilfenahme der gerade entwickelten Algebra auszudehnen, lag Fermats Ausgangspunkt in dem Studium geometrischer Örter, welches durch die Beschäftigung und Wiederherstellung antiker Texte motiviert wurde (vgl. [Paul 1980, S. 226 u. 228]). Descartes behandelte klassische Konstruktionsprobleme (wie z.B. die Winkeldreiteilung), die nicht mit Zirkel und Lineal lösbar waren, indem er die entsprechende algebraische Gleichung suchte, die zugehörige Kurve konstruierte und geometrisch die Nullstellen bestimmte (vgl. [Paul 1980, S. 226]). Er schließt sich darin insofern an Viéte an, als das er das gleiche Ziel verfolgte – die geometrische Konstruktion der Lösungen algebraischer Gleichungen – aber er arbeitete daran mit modernem algebraischem Symbolismus (vgl. [Boyer 1956, S. 74]). Auch wenn dies nur ein „technischer“ Fortschritt in der Notation war, bezeichnet es doch eine wichtige Voraussetzung für die Entwicklung der Analyis, die Descartes Fermat voraus hatte (vgl. [Paul 1980, S. 226]). Fermat dagegen behielt die Notation Viétes bei, aber wandte sie auf das algebraische Studium geometrischer Örter (loci) an (vgl. [Boyer 1956, S. 74]).

> „Fermat proposed more clearly than Descartes the basic principle that an equation in two unknowns is an algebraic expression of the properties of a curve; and his work is devoted to the elaboration of this idea.“

[Boyer 1956, S. 101]

Boyer stellte außerdem heraus, dass bei Descartes eine Kurve in der Regel durch eine Bewegung erzeugt gedacht wird, während sie bei Fermat durch ihre Gleichung gegeben ist (vgl. [Boyer 1956, S. 101]). Damit kehrte Fermat die Verfahrensweise der Antike um ([Boyer 1956, S. 75]). Da Fermats Arbeit erst 1679 posthum veröffentlicht wurde – zu

[273] Mit Bezug auf [Boyer 1956, S. 84] bemerkt Paul, dass „die alte Forderung bei Descartes in eine der „Homogenität in Gedanken“ umgewandelt wurde, derzufolge Größen in einer Gleichung mit geeigneten Vielfachen der Einheit multipliziert werden mußten, wenn eine Wurzel gezogen werden sollte.“ [Paul 1980, S. 225f].

einem Zeitpunkt als die cartesische Konzeption bereits einen beherrschenden Einfluss gewonnen hatte – wurde es nur unter dem cartesischen Blickwinkel aufgenommen, was soweit ging, dass Fermats Notation in der Veröffentlichung der cartesischen angepasst wurde (vgl. [Boyer 1956, S. 82] und [Paul 1980, S. 228]). Für fast 200 Jahre nach 1637 (der Veröffentlichung von Descartes „La Géométrie“) wurde analytische Geometrie als die Erfindung eines Mannes (Descartes) angesehen und die Beschäftigung mit analytischer Geometrie im 17. Jahrhundert stand – soweit es sie neben der gerade aufgekommenen Infinitesimalrechnung überhaupt noch gab – in der cartesischen Traditionslinie (vgl. [Boyer 1956, S. 101] und [Paul 1980, S. 228]). Paul untersucht die Gründe für diese Entwicklungstendenzen und kommt zu dem Schluss, dass die günstigen Verbreitungsbedingungen des cartesischen Ansatzes – die „Géométrie“ war durch van Schootens lateinische Übersetzung der gebildeten Welt zugänglich gemacht worden – nicht allein für dessen Vorherrschaft verantwortlich sein können. Als weiteren Grund führt er an, dass eine Weiterentwicklung des Fermatschen Ansatzes mathematische Mittel erforderte, die erst später innerhalb der Analysis entwickelt wurden (vgl. [Paul 1980, S. 229]). Innerhalb dieser nahm die analytische Geometrie für gut ein Jahrhundert eine Hilfsfunktion ein, indem sie der Entwicklung der Differentialrechnung, durch Problemformulierung und als Mittel der Veranschaulichung, diente (vgl. [Paul 1980, S. 230]).

> „Wiewohl analytische Geometrie während des betrachteten Zeitraums kaum als Geometrie betrieben wurde und als solche auch nur wenig relevante Ergebnisse vorzuzeigen hatte, kann man sagen, daß – seit Newton und mit Euler zum Abschluß kommend – der Fermatsche Standpunkt den cartesischen langsam verdrängt hatte und sich somit eine „modernere“ Auffassung durchsetzte, ohne daß es zu einer wesentlichen Neuorientierung und einen Neuanfang der Geometrie gekommen wäre.“

[Paul 1980, S. 230]

Der Gedanke, dass einer der größten Vorteile der analytischen Geometrie im Gegensatz zu der früheren synthetischen Vorgehensweise in der möglichen Allgemeinheit liegt, da viele Spezialfälle in einem Ausdruck zusammengefasst werden können, war nach Fermat und Descartes für etwa ein Jahrhundert kaum mehr beachtet worden (vgl. [Boyer 1956, S. 181] und [Paul 1980, S. 231]). Erst Euler nimmt diesen Gedanken wieder auf. Der zweite Band seiner „Introductio“ die in gewissem Sinn als die erste lehrbuchmäßige Darstellung der analytischen Geometrie betrachtet werden kann[274], behandelt allerdings keine Sätze und Probleme der Elementargeometrie. Diese wurden erst von Monge, Lagrange[275] und Lacroix behandelt (vgl. [Paul 1980, S. 232]).

> „Eine Neuorientierung, die [...] mit der rein analytischen Methode ernst zu machen sucht, wird mit Arbeiten von Monge und Lagrange zu Fragen der räumlichen Elementargeometrie eingeleitet und findet ihren ersten systematischen Niederschlag in Lehrbüchern von Monge und Lacroix zur „Application de l'algèbra à la géométrie“ [...]“

[Paul 1980, S. 243]

[274] Vgl. dazu [Paul 1980, S. 231] und die dort angegebene Literatur.
[275] Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813).

Paul untersucht die Schwierigkeiten und Zeitverzögerungen bei der Herausbildung der analytischen Geometrie und gibt eine hauptsächlich epistemologisch orientierte Erklärung (vgl.[Paul 1980, S. 246ff]). Demnach war Descartes an einer allgemeinen, nicht gegenstandsspezifischen Methode interessiert, mit deren Hilfe Fallunterscheidungen vermieden und der Bereich der Geometrie ausgedehnt werden konnte (vgl. [Paul 1980, S. 247]). An Stelle der statischen, an die Betrachtung von Figuren gebundene Beweisführung in der synthetischen Geometrie der Antike, die zudem auf die strenge Unterscheidung der Grundformen hin ausgerichtet war, tritt bei Descartes ein eher dynamischer Aspekt[276] sowie die Einheit der Grundformen.

> „Wir haben es hier also mit der Einführung des operativen Moments, das die neuzeitliche Wissenschaft insgesamt charakterisiert und innerhalb der Mathematik mit dem Kalkül der Algebra Ausdruck gefunden hatte, in die Geometrie zu tun.“

[Paul 1980, S. 255]

Im Unterschied zu späteren, algebraischen Theorien, war für Descartes allerdings eine Verbindung mit direkter Anschauung unumgänglich („Geometrisierung des Denkens“). Die Algebra hatte nur die Aufgabe, die Linien, durch welche die „Ideen“ dargestellt werden „’aufzuzählen’ und ihre Beziehungen in der Form von Gleichungen abzubilden und speicherungsfähig zu machen“ [Paul 1980, S. 251]. Voraussetzung dafür war die Quantifizierbarkeit, die Auffassung der Gegenstände der Geometrie als Größen durch die Koordinaten- (bzw. Ordinaten-) Bestimmung (mathesis universalis).

> „Die Algebra gab Descartes also einerseits die Möglichkeit, die Geometrie neu zu fassen, auszudehnen und [...] in seinen Augen auch die Möglichkeiten, sie zu vereinfachen und zu vereinheitlichen, andrerseits setzte sie auch seinem Aktionsradius Schranken. Um diese zu überwinden, bedurfte es der nach Descartes einsetzenden Entwicklung der Analysis (und insbesondere des Funktionenbegriffs), d.h. also der zunächst mehr kalkül- und symbolmäßigen Seite der Mathematik. Der erste Schritt in eine neue Entwicklungsrichtung war aber getan. Gleichzeitig ist es auch nicht verwunderlich, daß zunächst in der Geometrie im engeren Sinne bis zum Ende des 18. Jahrhunderts keine bedeutenden Ergebnisse erzielt wurden.“

[Paul 1980, S. 256]

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der cartesische Ansatz zwar auf die Erneuerung der Geometrie ausgerichtet war, aber weitgehend nur auf algebraischem Gebiet rezipiert wurde, wo Descartes Notation übernommen wurde und seine Gleichungslehre wichtige Impulse lieferte. Auch die Festigung der Kenntnis über den Zusammenhang von algebraischer Gleichung und ebener Kurve war von großer Bedeutung für die Entwicklung der Analysis. Und erst letztere machte eine erneute Weiterentwicklung der Geometrie möglich (vgl. [Paul 1980, S. 247]). Paul führt hier insbesondere die Bedeutung des formal-symbolischen Appartes und des Funktionenbegriffs an (vgl. [Paul 1980, S. 266]).

[276] Paul spricht in diesem Zusammenhang von einem Zeitalter „dessen geistiges Leben von der mit der Dynamisierung des gesellschaftlichen Lebens einhergehenden Dynnamisierung des Wissens“ geprägt gewesen sei und somit den Mangel an der alten philosophischen Grundlegung besonders deutlich gemacht habe (vgl. [Paul 1980, S. 249]).

> „Im Buch II der „Introductio“ [von Euler] findet sich die Anwendung dieses Begriffs [d. i. der Funktionenbegriff] auf die analytische Geometrie, die man als Auftakt zu den Umwälzungen am[277] Ende des [18.] Jahrhunderts interpretieren kann.“

[Paul 1980, S. 258]

Mit Euler in Verbindung steht das Streben nach Methodenreinheit in der Mathematik, das allgemeinen Tendenzen zur Entwicklung bereichsspezifischer Epistemologien in der Mitte des 18. Jahrhunderts entspricht (vgl. [Paul 1980, S. 258]). Paul weist hier besonders auf die Rolle von Condillacs[278] Erkenntnistheorie[279] hin:

> „Condillacs Philosophie wird geprägt von dem Bemühen, den beiden auch die zeitgenössischen Wissenschaftler prägenden Hauptanliegen, die Anwendungsorientierung und das Bemühen um Kommunizierbarkeit des Wissens, philosophische Konzepte zu liefern, die gleichzeitig auch der Spezifität der einzelnen Wissenschaften Rechnung tragen. In Condillacs Erkenntnistheorie besitzt die Verwendung von Zeichen, insbesondere die Sprache, eine zentrale Funktion für den Wissenserwerb. Mit der Konzeption von Wissenschaft als eine Sprache verfolgt er diesen Weg weiter und kann seinen Problemen in erster Näherung gerecht werden.“

[Paul 1980, S. 261]

Eine Beeinflussung durch Condillacs Konzeption von „Wissenschaft als Sprache“ macht Paul auch an Äußerungen von Lacroix und Monge fest, indem er z.B. auf die folgende Aussage von Lacroix zum Verhältnis von Geometrie und Analysis hinweist:

> „[...] indem sie gleichsam wie Original und Übersetzung einander correspondieren.“[280]

[Paul 1980, S. 245]

Im Vorwort des gleichen Werkes bemerkt Lacroix:

> „Sorgfältig habe ich alle geometrischen Constructionen entfernt, um den Leser zu überzeugen, daß sich die Geometrie auf eine Art betrachten lasse, die man analytische Geometrie nennen könnte, und welche darin bestehen würde, aus einer möglichst geringen Anzahl Prinzipien, alle Eigenschaften der Ausdehnung durch rein analytische Methoden herzuleiten, [...].“

zitiert nach [Paul 1980, S. 244]

[277] Bei Paul steht hier „ans“.

[278] Étienne Bonnot de Condillac (1714 - 1780), französischer Geistlicher, Philosoph und Logiker.

[279] Er bezieht sich dabei insbesondere auf die 1780 veröffentlichte „Logik“.

[280] Dieses Zitat stammt aus dem „Lehrbegriff des Differential- und Integralcalculs“ (Berlin 1799) von S. Lacroix, der deutschen Übersetzung des „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral“ (1797) von Johann Philipp Grüson.

Dieses Programm – in dem sich ebenfalls ein Streben nach Methodenreinheit erkennen lässt – schreibt Lacroix für die Geometrie Monge zu. Auch Plücker schreibt Monge das Verdienst zu, „den Grund zur Verbannung aller Constructionen“ aus der analytischen Geometrie gelegt und ihr „jene neue Form, durch welche ihre weitere Ausbildung möglich wurde“ gegeben zu haben (vgl. [Plücker 1831, S. 4]).

> „Im Gefolge der [...] Tendenz nach Methodenreinheit erscheint es dann auch nur als folgerichtig, daß gegen Ende des 18. Jahrhunderts auch die Elementargeometrie einer analytischen Behandlung unterzogen wurde [...].“
>
> [Paul 1980, S. 266]

Allerdings geschah dies zuerst nur für die Raumgeometrie, z.B. in Monges Mémoire des Jahres 1771[281] („Sur les developpées, les rayons de courbure et les differens genres d'inflexions des courbes à double courbure“) und in Lagranges Abhandlung von 1773[282] („Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires“) (vgl. [Paul 1980, S. 233]). Das Ziel von Monges Mémoire (von 1771) war es, die Gleichung der Polar- oder Evolutenfläche einer Raumkurve – also der Fläche, die durch die Normalebenen der Kurve umschrieben wird – aufzustellen (vgl. [Paul 1980, 234f]). Um die Gleichung der Normalebene in einem Punkt zu erhalten, löste Monge die beiden folgenden analytisch-geometrischen Aufgaben, die vorher noch nicht bearbeitet worden waren:

„1. Finde die Gleichung der Ebene, die durch einen gegebenen Punkt geht und senkrecht auf einer Geraden steht, die durch zwei Gleichungen gegeben ist.

2. Finde die Gleichungen einer Geraden, die senkrecht auf einer anderen steht, und durch einen gegebenen Punkt geht.“ [Paul 1980, S. 234f]

Monge geht dabei konsequent analytisch vor.

> „Auch in anderen Memoires der Jahre 71/72 zeigt sich der gleiche, reflektierte methodische Zugriff, der konsequent analytische Standpunkt und der arbeitsökonomische Symbolapparat [...].“
>
> [Paul 1980, S. 235]

Boyer urteilt, dass die cartesische Geometrie des Raumes mit diesen Arbeiten und weiteren von Monge Schülern ihre moderne Form angenommen habe, wohingegen die ebene Geometrie seit 1748 keine Weiterentwicklung erfahren habe; was er damit stützt, dass Laplace sich in seinen Vorlesungen an der Ecole Normale auf Eulers und Cramers Werke bezieht, in denen man „all the details one can desire in this respect“ finden könne (vgl. [Boyer 1956, S. 208] und [Paul 1980, S. 236]). Diese wie Paul urteilt „aus didaktischen Gründen notwendige [...] und auch mathematisch-technisch sehr vorteilhafte“ „systematisch durchgeführte Algebraisierung der Elementargeometrie“ [Paul 1980, S. 233f] wird beginnend mit den Kursen, welche Monge an der Ecole Polytechnique seit 1795 hielt, gegen Ende des Jahrhunderts vollzogen (vgl. [Paul 1980, S. 236]). Von Bedeutung sind hierbei auch die beiden Ausgaben der „Feuilles d'analyse appliquée à la Géométrie“ (1795 und 1801) von Monge.

[281] Dieses Memoire wurde allerdings erst 1785 veröffentlicht.

[282] Dieses wurde 1775 – also zehn Jahre früher als Monges Mémoire – veröffentlicht (vgl. [Paul 1980, S. 233]).

„Einen ungefähren Eindruck von dem mit Monge einsetzenden Aufschwung der analytischen Geometrie und der Aufmerksamkeit, die diese erfuhr, kann man dann gewinnen, wenn man hinzufügt, daß außer den genannten mehrfachen Auflagen des Mongeschen Werks und denen seines Hochschullehrerkollegen Lacroix („Traité élémentaire de Trigonometrie rectiligue et sphérique et d'application de l'algébre à la géométrie“ (1798, 9 Auflagen bis 1837)) ab 1801 zahlreiche direkte und mittelbare Schüler der beiden Lehrbücher publizierten, die ganz in deren Stil gehalten sind (z.B. Biot (1802), Lefrançois (1801), Puissant (1801), Garnier (1809) u.a.m.).“

[Paul 1980, S. 236f]

In Bezug auf die Lehrbroschüre „Application de l'algèbre à la géométrie“ (1801 - 1802) von Monge und Hachette urteilt Boyer:

„The definite form of analytic geometry finally had been achieved, more than a century and a half after Descartes and Fermat had laid the foundation.“

[Boyer 1956, S. 220]

In dieser behandeln Monge und Hachette Punkte, Linien, Ebenen und Winkel sowie Koordinatentransformationen (vgl. [Boyer 1956, 219] und [Paul 1980, S. 238ff]).
Zu dem Begriff der analytischen Geometrie bemerkt Boyer:

„Monge and Lacroix gave analytic geometry its final form, but not its traditional name. Lacroix at one time had used the phrase „analytic geometry“ to characterize the subject, but did not adopt it officially. The first of the new textbooks to carry this name in the title seems to be the *Essai de géométrie analytique* (1802) of Biot, a work with rivalled that of Lacroix in popularity.“

[Boyer 1956, S. 220]

Dieses Werk von Biot wurde allein bis 1823 sechsmal aufgelegt, dabei mehrfach überarbeitet und in mehrere andere Sprachen übersetzt. Eine deutsche Übersetzung wurde 1817 von Dr. Johann Thomas Ahrens[283] auf der Grundlage der fünften Auflage angefertigt.
Biot empfiehlt sein Werk für Schüler, die sich für die Aufnahmeprüfung an der Ecole Polytechnique vorbereiten wollen. Die von ihm benutze Bezeichnung „analytische Geometrie“ charakterisiert er in der Vorrede wie folgt:

„Unter dieser Benennung [analytische Geometrie] verstehe ich nicht jene Anwendung der Algebra auf Geometrie, wozu besondere Constructionen nöthig sind, welche für jeden Fall besonders abgeändert werden müssen, sondern die Anwendung jener allgemeinen Methoden, welche die Herren *Lagrange* und *Monge* zuerst in ihren Schriften bekannt gemacht haben; nähmlich die, welche seitdem von Hrn. *Monge* an der polytechnischen Schule vorgetragen, und durch Hrn. *Lacroix*, mit so viel Glück, in seine Elemen-

[283] (1786 - 1841).

> tarschriften eingeführt worden sind: dieß ist einer der wichtigsten Dienste den man je dem Unterricht geleistet hat.“

[Biot 1817, S. V]

Und im einleitenden Abschnitt des Werkes, in dem er die Anwendung der Algebra auf Geometrie behandelt, gibt er an:

> „Der Zweck *der Anwendung der Algebra auf Geometrie* ist: zu zeigen, wie man eine geometrische Aufgabe analytisch ausdrücken, und umgekehrt, die Resultate der Analysis in Geometrie übersetzen könne.“

[Biot 1817, S. 1]

Auch wenn Biot also mit dem Titel seines Buchs den Begiff der analytischen Geometrie prägt, führt er die Bedeutung dieses Begriffs auf Monge zurück. Genauso wie bei Monge, lässt sich auch hier bei Biot, durch den Gebrauch des Wortes „übersetzen“, der Einfluss von Condillacs Konzeption von „Wissenschaft als Sprache“ feststellen. Über Biot lernt schließlich auch Plücker die analytische Geometrie kennen. Zum einen ist Biot einer der Mathematiker, mit dem Plücker während seines Studiums in Paris in direkten Kontakt getreten ist (vgl. Kapitel 2.3.4), zum anderen gibt Plücker an er sei durch Biots „Essai de géométrie analytique ...“ „in jene Behandlungsweisen der Geometrie, denen man in neuerer Zeit alle die großartigen Resultate verdankt, eingeführt worden“ ([Plücker 1831, S. IIIf]; vgl. 9.1.). Biot bildet also in gewisser Weise die Brücke zwischen Plücker und Monge, in dessen Tradition Plücker sich später sieht.

> „Der Erfolg von Monge bestand [...] zu einem wesentlichen Teil darin, daß es ihm gelang, unter den wissenschaftlich interessierten Polytechnicien ein großes Interesse für sein „Forschungsprogramm“ zu wecken; ohne die Existenz einer Ausbildungsstätte, wie der EP [Ecole Polytechnique] hätte es sicherlich sehr viel länger gedauert, bis das goldene Zeitalter der Geometrie angebrochen wäre. Der eigentliche Beitrag Monges zur Entwicklung der Geometrie, [...] bestand also in seinen Beiträgen zur geometrischen Methodologie.“

[Paul 1980, S. 270]

Neben seinen Beiträgen zur analytischen Geometrie hat Monges Werk aber auch Bedeutung für den Wiederaufschwung der „reinen“ (also synthetischen) Geometrie (vgl. [Paul 1980, S. 266]).

8.2.2. Der Gegensatz zwischen analytischer und synthetischer Geometrie

> „Mit den Namen *Plücker* und *Steiner* ist für die deutsche Geometrie die Trennung in sogenannte analytische und synthetische Geometrie gegeben, welche bis in die allerneueste Zeit die Geometer in zwei getheilte Lager gespalten hat.“
>
> [Brill u.a. 1873, S. 12]

> „Plücker's guiding star was the firm conviction that what synthetic geometry has accomplished can be done as well – or better – by means of coordinates. He was determined to win back the territory which Poncelet had won for synthesis through the principles of continuity and duality; [...]“
>
> [Boyer 1956, S. 248]

Wie bereits dargestellt wurde, wird Plücker häufig als „der Analytiker“ gekennzeichnet. Boyer verleiht ihm beispielsweise den Titel des „greatest of all champions of analytic geometry“ [Boyer 1956, S. 245], Ziegler bezeichnet ihn als den „eigentlichen Schöpfer der analytischen Geometrie“ [Ziegler 1985, S. 55]. In diesem Abschnitt wird untersucht, inwieweit eine solche „Etikettierung“ angebracht ist und wie Plücker selbst sich zu den Unterschieden zwischen der analytischen und der synthetischen Methode äußert. Diese Äußerungen sind zum Teil den Vorreden aus Plückers Werken entnommen, da Plücker sich hier verschiedentlich über die Zielsetzung seiner Schriften sowie über die Eigenschaften der analytisch-geometrischen Methode äußert (vgl. Kap. 9 und 10). Weitere Details, die einer Beantwortung der oben aufgeworfenen Fragen dienen können, finden sich im Zusammenhang mit der neu entdeckten Dualität. Jean-Victor Poncelet[284] und Joseph Diaz Gergonne[285] setzten sich mit bemerkenswerter Schärfe über Rolle und Verständnis sowie Prioritätsfragen bezüglich der Entdeckung der Dualität auseinander. In diesen Konflikt wurde Plücker mit hineingezogen (vgl. Kap. 12). Außerdem soll untersucht werden, ob und wie Plücker selbst sich synthetischer Methoden bediente. Hierbei kommen besonders seine „analytisch-geometrischen Aphorismen“ ([Plücker 1833b], [Plücker 1833c] und [Plücker 1834a] bis [Plücker 1834d]) sowie seine Arbeiten zur Liniengeometrie in Betracht (vgl. Kap. 13 und 14). Daher lassen sich gewisse Redundanzen zu diesen Abschnitten leider nicht vermeiden.

Zuerst ist festzuhalten, dass alle mathematischen Werke und Artikel Plückers die Benutzung von Koordinaten aufweisen, also in diesem Sinn als „analytisch“ zu bezeichnen sind. Dies gilt bereits für Plückers Dissertation, in der er forderte, dass die mathema-

[284] (1788 - 1867).
[285] (1771 - 1859).

tischen Disziplinen lediglich aus analytischen Grundlagen abgeleitet werden sollten[286]. Auch der nächste von Plücker veröffentlichte Artikel ([Plücker 1826a]) war ursprünglich analytisch und nicht synthetisch verfasst worden. Erst durch die von Gergonne als Herausgeber vorgenommenen Änderungen, erhielt er seine synthetische Form[287]. Dabei war es Plückers erklärtes Ziel gewesen, die behandelten Probleme mit analytischen Methoden zu lösen:

> „Dans le 8° vol. des *Annales*, que j'avais sous les yeux lorsque je rédigeais le mémoire en question, *M. Poncelet*, pour faire prévaloir ses méthodes sur celle de la géométrie analytique, indique entre autres constructions celle de l'un des problèmes traités dans mon mémoire. C'est cette construction que, moi, j'avais citée, en ajoutant les mots suivants: „Voyons si ce problème se prête si difficilement aux méthodes de la géométrie analytique." Ces mots expliquent parfaitement le but de mon mémoire."[288]

[Schoenflies 1895, S. 595][289]

In der Vorrede zum zweiten Band seiner „Entwicklungen" geht Plücker noch einmal auf eine solche Vorgehensweise ein und bemerkt dazu:

> „Wohl nichts begünstigt mehr das Auffinden neuer Methoden, als der Versuch, geometrische [=synthetische][290] Sätze, die in der Aussage einfach und symmetrisch sind, analytisch zu beweisen. In dieser Hinsicht habe ich viel dadurch entbehrt, dass der *Traité des propriétés projectives* des *H. Poncelet* mir bei der Ausarbeitung des ersten Bandes fremd blieb und die originellen Leistungen des *H. Steiner* in demselben Gebiete erst erschienen, als jener Band unter der Presse war."

[Plücker 1831, S. IVf]

Auch im ersten Band seiner „Entwicklungen" äußert Plücker sich wertschätzend über die synthetische Methode in der Geometrie.

> „Die Eleganz der rein analytischen Constructionen [...] ist nie in Abrede gestellt worden; wohl aber die Fruchtbarkeit derselben in Vergleich mit gemischten Methoden und einer rein constructiven, als deren Repräsentant [...] ich Herrn *Poncelet* nennen darf. [...] Jene rein constructive Methode sucht die Raumverhältnisse und die Beziehung der Figuren zu einander unter verschiedenen Gesichtspuncten in Verbindung zu bringen; sie

[286] „Disciplinas mathematicas e principiis tantummodo analyticis deducendas esse." [Plücker 1823, S. 2].

[287] Vgl. hierzu Kapitel 12.

[288] „In dem 8. Band der *Annalen*, der mir vorlag, als ich die fragliche Abhandlung verfasste, weist Herr *Poncelet*, um die Überlegenheit seiner Methoden über diejenigen der analytischen Geometrie [zu zeigen] unter anderem auf die Konstruktionen [gemeint: Lösungen] vieler Probleme hin, die in meiner Abhandlung behandelt werden. Diese Konstruktionen habe ich unter Hinzufügung der folgenden Worte zitiert: „Schauen wir, ob sich dieses schwierige Problem mit den Methoden der analytischen Geometrie lösen lässt." Diese Worte erklären bestens das Ziel meiner Abhandlung."

[289] Aus Plückers Richtigstellung, die im Band 10 des Bulletin des Sciences von Férussac zuerst abgedruckt wurde. Vgl. Kapitel 12.

[290] Zu Plückers Gebrauch der Begriffe „analytisch", „synthetisch", „(rein) geometrisch", „rein constructiv" vgl. Fußnote 267.

geht abwechselnd vom Besonderen zum Allgemeinen und vom Allgemeinen zum Besonderen. Eben hier liegt die Hauptquelle ihrer Fruchtbarkeit [...]. Aber denselben unschätzbaren Vortheil, der aus dem Bestreben hervorgeht, die Resultate unter allgemeinen Gesichtspuncten zusammenzustellen, kann auch die analytische Geometrie sich aneignen, wenn sie aus ihrem Bereiche jede überflüssige Entwicklung und jede Vermischung von Construction und Rechnung verbannt.“

[Plücker 1828, S. IV]

Plücker erkennt also hier Vorzüge der synthetischen Methode an. Mit den Arbeiten in seiner ersten mathematischen Phase wollte er nachweisen, dass die analytische Geometrie dieselben Ergebnisse erzielen könne wie die synthetische. Neben der gerade genannten Allgemeinheit in der synthetischen Geometrie, honoriert Plücker auch die Vorteile, die die Anschaulichkeit der synthetischen Methode bietet. Auch diese Anschaulichkeit wollte er mit Hilfe seiner Methoden in die analytische Geometrie einführen:

„[...] daß wir durch das Zusammenrücken, das Zusammenwachsen gleichsam, von Construction und analytischer Darstellung, dahin gelangen, über die großartigen Betrachtungsweisen der Analysis gebieten zu können, ohne irgend einen der unersetzlichen Vortheile, welche die unmittelbare Anschauung gewährt, aufzugeben.“

[Plücker 1835, S. IV]

Plücker wollte die analytische Methode so flexibel gestalten, „daß sie ebenso gegenstands-spezifisch wird wie die synthetische Methode – und doch dabei ihre Allgemeinheit nicht verliert“ [Ziegler 1985, S. 54]. In den oben wiedergegebenen Zitaten lässt sich durchaus eine gewisse Wertschätzung der synthetischen Richtung sowie der ihr anhängenden Mathematiker erkennen. Ziegler stellt dies ebenfalls fest und schließt an:

„So findet sich bei Plücker nirgends ein Hinweis auf die Überlegenheit seiner Methode oder gar eine polemische Äußerung gegenüber irgendwelchen Synthetikern. Plücker wollte von diesen lernen und deren Errungenschaften auch seiner analytischen Geometrie zugute kommen lassen.“

[Ziegler 1985, S. 54]

Eine direkte Polemik gegen Synthetiker findet sich bei Plücker tatsächlich nicht. Allerdings führt Eccarius zwei Ausnahmen an (vgl. [Eccarius 1980, S. 191f], Kap. 4.4), die eine gewisse Polemik gegen den Synthetiker Steiner beinhalten. Die erste Stelle findet sich in der Vorrede zum ersten Band von Plückers „Entwicklungen“:

„Noch auffallender musste mir die Beziehung der beiden Methoden[291] zu einander werden, als ich mehrere neue, unter sich sehr verschiedene Resultate, zu denen ich auf meinem Wege gekommen war, später in dem ersten und zweiten Hefte des, von Herrn *Crelle* herausgegebenen, Journals für Mathematik wiederfand. Ich meine nemlich die hauptsächlichsten Sätze, deren

[291] Gemeint sind die analytische und die „Ponceletsche“ (= synthetische) Methode.

> bloße Aussage Herr *Steiner*, der in die Fußstapfen des Herrn *Poncelet* zu treten scheint, an dem eben angeführten Orte gibt. [...] Die Sätze aus denen Herr *Steiner* diese Construction herleitet, sind ohne Beweis mitgetheilt (der Beweis ergibt sich auf analytischem Wege unmittelbar), und hier ist es rücksichtlich der Methode, nicht ohne Interesse zu vergleichen, wie er durch Zusammenstellung von Flächen zweiter Ordnung, die sich in ebenen Curven schneiden, auf einem Umwege zu demjenigen Systeme zweier gerader Linien hingeführt wird, das ich „Chordal-System zweier Linien zweiter Ordnung" genannt habe."

[Plücker 1828, S. V]

Hier klingt der leichte Vorwurf mit, Steiner habe die angegebenen Sätze gar nicht selbst gefunden, da er keine Beweise dafür anführen könne. Außerdem streicht Plücker heraus, dass seine analytische Methode „unmittelbar" einen Beweis gibt, während Steiner „auf einem Umwege" zu seinen Resultaten gekommen sei. Die zweite von Eccarius angegebene Passage findet sich in einem Artikel Plückers in Crelles Journal ([Plücker 1834b]). Auch hier handelt es sich nicht um eine deutliche Polemik. Andernfalls hätte Crelle diese sicher unterbunden (vgl. [Eccarius 1980, S. 192][292]). Der Artikel befasst sich mit Steiners geometrischen Konstruktion der Lösung des Malfattischen Problems. Allerdings gibt Steiner diese Konstruktion ohne einen Beweis. Plücker bemerkt dazu, dass dies „[...] demjenigen, der wie ich von mir bekennen muss keine Idee davon hat, wie die Construction jener Aufgabe dem Wesentlichen nach auf den [...] angeführten [...] bekannten Sätzen [...] beruhen möge, den Gedanken aufdrängen [könne], dass die gegebene Construction nicht bewiesen sei" [Plücker 1834b, S. 269] (vgl. 13).
Es lässt sich sicher darüber streiten, ob die beiden angeführten Äußerungen Plückers als Polemik gegen Steiner angesehen werden können oder nicht. Jedenfalls wurde die zweite Aussage durchaus als Affront wahrgenommen (vgl. [Bützberger 1913, S. 58]).
Zieglers zweite Aussage, es finde sich bei Plücker kein Hinweis auf die Überlegenheit seiner Methode, lässt sich dagegen leicht widerlegen. Hier ist vor allem die Behandlung des Imaginären zu nennen, die Plücker verschiedentlich als einen Vorteil der analytischen Methode gegenüber der synthetischen nennt. Einige dieser Zitate werden im Folgenden wiedergegeben.

> „Zugleich ergibt sich hier ein wesentlicher, sehr bedeutender Vorzug [der analytischen Methode]: der Gebrauch imaginärer Größen. Denn sehr häufig stehen die Resultate der Geometrie in einer solchen Verbindung, die, in der analytischen Bezeichnung, durch imaginäre Ausdrücke vermittelt wird und diese Art der Verbindung kann in der constructiven [=synthetischen] Methode nur auf Umwegen erkannt werden. Ich wage hier nicht zu entscheiden, ob dieses überall geschehen kann; aber so viel scheint gewiß, daß dadurch nothwendig ein fremdartiges Element in diese Art der Behandlung hineinkommt."

[Plücker 1828, S. IVf]

[292] Siehe Fußnote 132 auf S. 62.

„Und endlich die Theorie der idealen Chorden, die Hauptgrundlage des fruchtbaren *principe de continuité*, ist nach meiner Ansicht nichts anderes als eine geometrische Umschreibung der algebraischen Theorie der imaginären Wurzeln solcher Gleichungen, zu denen man gelangt, wenn man die Coordinaten zwischen den Gleichungen zweier Curven eliminirt; das Princip ist also schon von selbst in der allgemeinen analytischen Behandlung enthalten, und hat hier nichts Gewagtes, wie in der rein geometrischen Behandlung, für welche mir dasselbe ungeachtet die schönste und eine nothwendige Erweiterung däucht.
Das, was die beiden in Rede stehenden Methoden mit einander gemein haben, und wovon bei den alten Geometern, die mit ängstlicher Gewissenhaftigkeit alles Einzelne zusammenreihen, fast keine Spur vorkommt, sind jene allgemeinen Gesichtspuncte oder Principien, unter denen sie die Sätze zusammenfassen, und dadurch aus einzelnen bewiesenen Sätzen sogleich viele ableiten.“

[Plücker 1830b, S. 159f]

„Die Curven der dritten Ordnung haben im Allgemeinen neun Wendungspuncte, und unter diesen *immer* drei reelle und sechs imaginäre. Die Discussion hierüber knüpft sich an Gleichungen, deren Gad zu hoch ansteigt, als daß wir auf dem Wege der bloßen Elimination zu einem Resultate kommen könnten; die unmittelbare Anschauung muß wenigstens einen neuen, noch verwegnern Flug nehmen, als bisher, um das zu ergreifen, was in allen Fällen imaginär ist und imaginär bleibt.“

[Plücker 1835, S. VI]

„Und man wird doch nicht behaupten, daß der Begriff *paralleler imaginärer Asymptoten* ein geometrischer sei, und daß man, durch unmittelbare Anschauung unter imaginären, daß heißt nicht existirenden, geraden Linien, parallele unterscheiden könne. [...] Vor allem müssen wir die analytische Consequenz festhalten; bei den Curven der höheren Ordnung kann von keiner geometrischen die Rede sein: *schon der allgemeine Begriff solcher Curven*[293] *ist der Geometrie fremd.*

[Plücker 1835, S. 165f]

Auch in einem seiner letzten Artikel der ersten mathematischen Phase äußert Plücker sich noch einmal ausführlich zu diesem Punkt:

„Wollten wir aber unmittelbar das Imaginäre in die geometrische Discussion aufnehmen, so hiesse das algebraisch verfahren. Andererseits weiß ich recht wohl, dass auch an das Imaginäre sich eine *nähere* oder *entferntere* geometrische Bedeutung anschliesst.“

[Plücker 1847a, S. 411]

[293]Kurven der dritten oder einer höheren Ordnung.

Als Beispiel nennt Plücker hier die Chordale zweier Kreise, die analytisch als die Verbindungsgerade der zwei Schnittpunkte zweier Kreise definiert ist. Diese Schnittpunkte können imaginär werden. Allerdings könne man die Chordale „auch geometrisch [=synthetisch], etwa als die Linie der gleichen Tangenten, definiren und so das Imaginäre gewissermaßen umgehen“ [Plücker 1847a, S. 411][294]. Als weiteren Vorteil seiner Methode gegenüber der synthetischen Methode nennt Plücker die Behandlung der Geometrie des Raums:

> „Hier erscheint die Leichtigkeit der Behandlungsweise um so größer, als, bei der Auffassung der Constructionen im Raume, die Einbildungskraft in höherm Maaße in Anspruch genommen wird.“
>
> [Plücker 1828, S. VI]

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Plücker einerseits bestrebt war die Vorteile der synthetischen Geometrie – wie die Flexibilität und die Anschaulichkeit – auch der analytischen Geometrie zuzuführen, andererseits auch Vorteile der analytischen Geometrie gegenüber der synthetischen Geometrie herausstrich. Letztlich bleibt die Etikettierung als „der Analytiker“ aber trotzdem irreführend. So schreibt Ziegler, dass seine Betrachtung der wissenschaftlichen Methoden Plückers zu einem Resultat komme, das einiges Interesse banspruchen dürfe (vgl. [Ziegler 1985, S. 3]):

> „Dabei wird sich zeigen, daß Plücker gar nicht primär Analytiker, wie er oft genannt wurde, war, sondern zuerst und vor allem Geometer, der sich der analytischen Ausdrücke nur zur bequemeren Darstellung seiner geometrischen Erkenntnisse bediente, und den Kalkül nie zum Selbstzweck erhob (Abs. IV 2).“
>
> [Ziegler 1985, S. 3]

Im angegebenen Abschnitt seiner „Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert“ führt Ziegler dann aus:

> Hatte sich Plücker auch zu der Ansicht bekannt, „daß die Analysis eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, so wie von einer anderen Seite die Mechanik, bloß [als] die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem großen erhabenen Ganzen erscheint“ (1831 b, IX)[295], so hatte er sich doch nie mit Analysis oder Algebra *allein* beschäftigt: die tatsächliche *Verbindung* mit der Geometrie war ihm wesentlich; rein analytisch-algebraische

[294]„Für die Zeit, in welcher *Plücker* mit seinen Arbeiten hervortrat, war es ausserdem ein wesentliches Moment, dass gewisse Begriffe, deren die synthetische Geometrie sich noch nicht vollständig hatte bemächtigen können, in analytischem Gewande zuerst völlig deutlich zu machen waren. [...] Dahin rechne ich ferner das Imaginäre, welches in einer gewissen mysteriösen Weise in der Geometrie sich uaufhörlich bemerken liess, und erst in der Identität der synthetischen Grundoperationen mit gewissen einfachen algebraischen Verfahrungsweisen auf eine einfache und nothwendige Art Erklärung seines Auftretens und seiner Stelle fand. Auch dieses wurde erst viel später, durch *v. Staudt*, der rein synthetischen Methode in strenger Weise zugänglich gemacht.“ [Clebsch 1872, S. XV].

[295]Gemeint ist [Plücker 1831, S. IX].

> Rechnungen lagen ihm fern. [...] Plücker stellte keineswegs ein algebraisch-analytisches Lehrgebäude auf, das er nacher geometrisch interpretierte, – wie man nach obigem Zitat meinen könnte. Plücker geometrisierte vielmehr in algebraischem Gewande.“

[Ziegler 1985, S. 54]

Hier ist kritisch anzumerken, dass der Titel „der Analytiker“ immer im Gegensatz zu „dem Synthetiker“ Steiner gebraucht wird und daher immer „analytische Geometrie“, nicht aber Analysis oder Algebra meint. Trotzdem unterstreicht Ziegler hier einen sehr wichtigen Punkt. Tatsächlich stand für Plücker nicht die Algebra selbst im Vordergrund. Es ging ihm immer um die Verbindung von Algebra und Geometrie (vgl. 8.3 und 10.2).
Dass Ziegler hier so viel Wert darauf legt Plücker als Geometer und nicht als Analytiker zu kennzeichnen[296], mag auch mit daran liegen, dass er sich hauptsächlich mit Plückers zweiter mathematischer Phase, der Liniengeometrie, beschäftigt hat. Diese liegt außerhalb des Zyklus der Arbeiten der ersten Phase und ist daher nicht der Ausbildung der analytischen Methode gewidmet, sondern einem bestimmten Gebiet geometrischer Forschung. In auffälligem Unterschied zu den Werken[297] seiner ersten mathematischen Phase nutzt Plücker hier beide Methoden, die analytische und die synthetische.

> „Charakteristisch für diese Arbeit[298] ist, daß Plücker abwechslungsweise die synthetische und analytische Methode heranzog. Der Schwerpunkt lag dabei auf der Darlegung der *geometrischen* Eigenschaften des Linienraumes und dessen linearen Gebilden.“

[Ziegler 1985, S. 60]

Allerdings muss noch ein wichtiger Punkt hinzugefügt werden. Obwohl Plücker hier beide Methoden benutzt, sind doch deutlich unterschiedliche Zielrichtungen oder Gewichtungen der beiden Methoden zu sehen. Die synthetische Methode dient hauptsächlich dazu einen ersten Einblick in die Strukturen und eine Vorstellung oder Anschauung der Gebilde des Linienraums zu gewinnen. In diese Kategorie lassen sich auch die Modelle der Äquatorialflächen zählen, die Plücker anfertigen ließ und zur Veranschaulichung seiner Theorien nutzte (vgl. 6.3.2)[299]. Degegen zieht Plücker die analytische Methode für Beweise heran; auch dort, wo er einen Satz synthetisch bereits bewiesen

[296] Ziegler geht sogar so weit für Plücker die Bezeichnung „der synthetische Geometer in analytisch-algebraischem Gewande“ zu bezeichnen [Ziegler 1985, S. 207].

[297] Als einzige Ausnahme sind hier die fünf Paragraphen der „analytisch-geometrischen Aphorismen“ zu nennen, die sich durch einen für Plücker sehr untypisch geringen Anteil an analytischen Entwicklungen auszeichnen (13).

[298] Gemeint ist [Plücker 1865b]. Eine ähnliche Aussage trifft Ziegler aber auch in Bezug auf die „Neue Geometrie“ ([Plücker 1868/69]; vgl. [Ziegler 1985, S. 72f]).

[299] Die Nutzung von materiellen Modellen, ist sehr untypisch für einen „Analytiker“. Vgl. dazu [Tobies 1998, S. 90], besonders das dort wiedergegebene Zitat von Brill.
„Durch Einführung der sogenannten Complexflächen, von welchen er zahlreiche Modelle herstellen liess, vermochte er den schwierigen Gegenstand auch gestaltlich zu erläutern; wie den überhaupt gegenüber den mehr analytischen Interessen seiner früheren Arbeiten in spätern Jahren das rein geometrische Interesse an der Gestalt mehr und mehr hervortrat.“ [Clebsch 1872, S. XXXIV].

hat. Exemplarisch sei hier ein Beispiel angeführt. In Nr. 28 seiner „Neuen Geometrie“ ([Plücker 1868/69, S. 28f]), leitet Plücker mit einer synthetischen Argumentation den Satz her, dass jede Gerade des Raums eine ihr konjugierte Polare besitzt[300]. Ab Nr. 30 kehrt Plücker „zu dem rein analytischen Gang der Untersuchung zurück“ [Plücker 1868/69, S. 31]. In Nr. 32 kommt Plücker schließlich zu der Aussage, dass „in dem Vorstehenden der allgemeine Satz über conjugirte Polaren bewiesen [sei] (siehe Nr. 28)“ [Plücker 1868/69, S. 34][301]. Daraus wird deutlich, dass die synthetische Argumentation für Plücker keinen Beweischarakter hat. Zumindest gibt sie ihm nicht die gleiche Beweissicherheit wie der analytische Beweis. Damit nimmt Plücker einen Trend vorweg, den man später „Arithmetisierung“ (vor allem in der Analysis) nannte, nach Vorschlag von F. Klein.

8.3. Charakteristika für Plückers mathematische Arbeitsweise

In diesem Abschnitt sollen einige charakteristische Merkmale von Plückers mathematischer Arbeitsweise vorgestellt werden.
Wie oben bereits angesprochen bezeichnete Plücker die Analysis zwar als eigenständige Wissenschaft von der die Geometrie nur eine mögliche bildliche Deutung sei (vgl. [Plücker 1831, S. IX], [Plücker 1846, S. 322]) – beschäftigte sich aber nie mit Analysis oder Algebra allein. Clebsch schreibt dazu in seiner Rede über Plücker:

> „Die analytische Gestalt, in welcher seine Untersuchungen auftreten, besitzt oft noch nicht jene der Natur der algebraischen Probleme angepasste elegante Form, an welche wir, insbesondere seit *Hesse* gewöhnt sind. *Plücker's* Rechnungen tragen zum Theil auffallend den Stempel des blossen Hülfsmittels[302] für die Darlegung geometrischer Verhältnisse. Dass die algebraischen Zusammenhänge für sich ein inneres Interesse haben, und eine adäquate Darstellung erfordern, konnte erst einer Generation zum Bewusstsein gelangen, welche sich der grossentheils von *Plücker* selbst neu erworbenen Gebilde und Methoden gewohnheitsmässig bediente.“

[Clebsch 1872, S. XIV]

Ein weiteres charakteristisches Merkmal für Plückers mathematische Arbeitsweise findet sich sehr treffend beschrieben in dem folgenden Zitat von Felix Klein:

> „Plücker war bei all seinen Leistungen zum Ausbau der projektiven Geometrie kein Projektiviker im eigentlichen Sinne. Im Stile der alten Geometer des 18. Jahrhunderts haftete er am Konkreten, richtete sein Augenmerk

[300] Eine Erklärung des Begriffs der konjugierten Polaren findet sich in 16.3.1; der dort angegebene Beweis des angeführten Satzes stimmt in den Grundzügen mit dem Beweis Plückers überein.

[301] Die gleiche Vorgehensweise findet sich auch in dem Artikel „On a new Geometry“: „After this geometrical digression, immediately indicated by analysis, we resume the analytical way“ [Plücker 1865b, S. 482].

[302] Krull spricht ebenfalls davon, dass die Algebra für Plücker nur ein Hilfsmittel gewesen sei (vgl. [Krull 1970, S. 27]). Diese Aussage ist für Plückers Arbeitsweise im Allgemeinen sicher zutreffend. Plücker selbst bezeichnet die Analysis aber nirgends als Hilfsmittel sondern betont im Gegensatz dazu, dass es sich um eine eigenständige Wissenschaft handle (vgl. 10.2).

> auf das Verhalten der Kurve im Unendlichen, widmete z.B. ausführliche Untersuchungen der Frage nach den Asymptoten usw., alles Dinge, deren Bedeutung vom rein projektiven Standpunkt aus verschwindet. Die konsequente Durchbildung des projektiven Denkens und damit die Ausgestaltung der Invariantentheorie blieb einer späteren Generation vorbehalten.“
>
> [Klein 1926, S. 126]

Plücker führte selbst homogene Koordinaten ein und ermöglichte damit die analytische Behandlung der projektiven Geometrie, da mit ihnen auch Fernpunkte beschrieben werden können (vgl. 11.1). Aber diese Fernpunkte bleiben bei Plücker immer deutlich von den „eigentlichen“ Punkten unterschieden. In der projektiven Geometrie wird dieser Unterschied dagegen aufgehoben. In gewisser Weise sind bei Plücker die Fernpunkte oft nur eine andere Beschreibung für Parallelität. Es lässt sich daher festhalten, dass Plücker im Grunde komplexe affine Geometrie betrieb.
Als Beispiel für die im obigen Zitat von Klein genannten Punkte kann Plückers Einteilung der Kurven dritter Ordnung in 219 Arten angeführt werden. Diese Einteilung beruht hauptsächlich auf der Lage der drei Asymptoten zu der Kurve (vgl. [Plücker 1835, S. IV]). Beispielsweise wird der Fall unterschieden, in dem zwei der drei Asymptoten parallel zueinander sind ([Plücker 1835, S. 156]). Die Asymptoten einer Kurve sind die Tangenten in ihren Fernpunkten. Vom projektiven Standpunkt unterscheiden sie sich nicht von anderen Tangenten der Kurve. Insbesondere kann eine parallele Lage der Asymptoten projektiv nicht von anderen Lagen unterschieden werden. Weitere konkrete Beispiele finden sich in den Kapiteln 11 und 12. Außerdem ist es auffallend, dass Plücker nicht konsequent homogene Koordinaten benutzt, selbst dort, wo er eigentlich einen projektiven Standpunkt einnimmt. Dies zeigt sich beispielsweise in seiner Liniengeometrie. Hier hatte Plücker durch seinen Artikel von 1865 ([Plücker 1865b]) fünf Koordinaten einer Geraden im Raum eingeführt. Sechs homogene Koordinaten benutzte er erst in seiner „Neuen Geometrie“ von 1868 ([Plücker 1868/69]). Dabei kann die Liniengeometrie nur projektiv – dass heißt unter Hinzunahme der Fernpunkte – behandelt werden. Bereits in seinen Argumentationen in dem früheren Artikel setzt Plücker deren Existenz auch indirekt voraus. Beispielsweise dann, wenn er annimmt, dass sich zwei Ebenen immer in einer Geraden schneiden (vgl. [Plücker 1865b, S. 481]). Ähnliche Beispiele finden sich aber auch häufiger in den Werken aus Plückers erster mathematischer Phase. Offensichtlich war es für ihn hinreichend in den homogenen Koordinaten ein Werkzeug zu besitzen, mit dem die Fernelemente analytisch handhabbar wurden. Plücker setzte die Existenz dieser Fernelemente daher immer voraus, auch dann, wenn er keine homogenen Koordinaten verwendete.
Weiterhin ist auffallend, dass Plücker bei der Verwendung homogener Koordinaten meistens den besonderen Fall wählte, in dem eine der Koordinaten gleich eins gesetzt ist (vgl. [Clebsch 1872, S. XXII]). Klein sprach später von den „mehr elementaren Methoden der Plücker'schen Darstellung“ im Gegensatz zu dem „konsequenten Verfahren der projektiven Koordinaten“ [Klein 1921, S. 3].
Wie im vorigen Abschnitt herausgestrichen wurde, betrachtete Plücker die Behandlung des Imaginären als einen besonderen Vorteil der analytischen Methode. Die imaginären Elemente waren für Plücker tatsächlich immer mitgedacht, wie an vielen Stellen seiner Werke deutlich wird. So wird beispielsweise immer vorausgesetzt, dass sich zwei beliebige Kegelschnitte schneiden oder das Schnittpunkte zwischen einer Geraden und

einem beliebigen Kegelschnitt existieren. Allerdings stellte es für Plücker durchaus noch einen Unterschied dar, ob geometrische Objekte imaginär („daß heißt nicht existierend“ [Plücker 1835, S. 166]) oder reell waren. Beispielsweise stützt sich seine Einteilung der Äquatorialflächen von Komplexen zweiten Grades besonders darauf ob bestimmte, ausgezeichnete Geraden imaginär sind oder nicht ([Plücker 1868/69, S. 347ff]).
Zu den beiden letzten Punkten – der Vorausetzung von Fernelementen sowie von imaginären Elementen – muss allerdings noch eine Bemerkung gemacht werden: Im 19. Jahrhundert war es nicht üblich, Sonderfälle in mathematischen Sätzen explizit zu erwähnen und auszuschließen. Die Tatsache, dass Plücker verschiedentlich nicht über die Existenz oder Nichtexistenz von bestimmten geometrischen Objekten spricht, muss daher auch in diesem Kontext gesehen werden.

9. Die erste Phase analytisch-geometrischer Arbeiten

„As Descartes seems to have realized that he was blazing a new trail, so too Plücker had a clear conception of the transformation which he was working in analytic geometry. And yet in all his work Plücker modestly felt that he was but building along the lines which Monge had suggested.“

[Boyer 1956, S. 244f]

Die analytisch-geometrischen Werke Plückers aus den Jahren 1828 bis 1846 bilden eine Einheit, „einen Cyclus“[303]. Dabei ging es Plücker vornehmlich darum, neue Methoden in die analytische Geometrie einzuführen, die einen allgemeinen Charakter haben und zu einer gewissen Systematisierung führen sollten.

Diese Intention wird schon aus den verschiedenen Titeln und Untertiteln von Plückers Werken deutlich[304]; zwei von ihnen tragen das Wort „System“ in ihrem Titel ([Plücker 1835] und [Plücker 1846]) und in drei Titeln wird eine neue Behandlungs- oder Betrachtungsweise erwähnt ([Plücker 1835], [Plücker 1839] und [Plücker 1846]). Unter den in diesem Zeitraum in verschiedenen Zeitschriften veröffentlichten Aufsätzen Plückers finden sich solche, in deren Titeln ein „neues Coordinatensystem“, „neue Principien der Geometrie“ oder eine „neue Art der Darstellung“ erwähnt werden ([Plücker 1830a], [Plücker 1830b] und [Plücker 1830c]). Allen Hauptwerken dieser Zeit hat Plücker ein mehr oder weniger langes Vorwort vorangestellt. In diesen Vorreden legt Plücker ebenfalls ein größeres Gewicht auf die verwendeten „neuen“ Methoden, als auf die Inhalte der einzelnen Schriften, also die mathematischen Sätze und Beweise, die durch die Methode gewonnen oder mit Hilfe der Methode durchgeführt werden. Außerdem finden sich in diesen einleitenden Bemerkungen oft Hinweise über die Entstehung der einzelnen Schriften, die ebenfalls von Interesse sind.

„Wenn ich meiner Arbeit einige Worte voransetze, so geschieht dieß bloß in der Absicht, darzulegen, wie dieselbe entstanden ist. Während überhaupt in ähnlichen Fällen eine solche Darlegung mir wünschenswerth scheint, finde ich insbesondere für mich eine Art von Wohlbehagen in dem Gedanken, daß

[303] So spricht Plücker z.B. in [Plücker 1839, Vorrede S. V] von dem „Cyclus“ seiner Arbeiten in der analytischen Geometrie.

[304] Vgl. auch [Boyer 1956, S. 244] und [Ziegler 1985, S. 53f].

> hernach Alles, was die Persönlichkeit des Verfassers betrifft, abgemacht ist, oder wenigstens vom Verfasser als abgemacht angesehen werden kann."
>
> [Plücker 1835, Vorrede S. III]

Auch wenn die Zeitschriftenbeiträge dieses Zeitraums in der Regel nicht mit einer ausgewiesenen Einleitung oder Vorrede beginnen, hat Plücker ihnen doch meistens einige einleitende Worte vorangestellt, die ähnlich wie bei den Werken oft eher auf die verwendete Methode, als auf die dargestellten Inhalte verweisen.
Natürlich gibt es auch in den Werken und Aufsätzen selbst einige Passagen, die besonders Bemerkungen zu den verwendeten Methoden, deren Bedeutung sowie zu Absichten und Zielen der Werke enthalten oder beispielsweise Unterschiede zwischen einzelnen mathematischen Bereichen wie der Analysis und der Geometrie oder den einzelnen geometrischen „Richtungen" aufzeigen.

Das Ziel des folgenden Abschnittes ist es, die Vorreden der Werke, die einleitenden Bemerkungen der Aufsätze, sowie Passagen mit „methodischen" Bemerkungen zu analysieren. Zum einen sollen dabei die von Plücker geschilderten Momente der Entstehung der einzelnen Werke untersucht werden; insbesondere auch um den Zusammenhang zwischen den einzelnen Werken dieser Periode aufzuzeigen. Zum anderen soll näher untersucht werden, was Plücker im einzelnen zu den verwendeten Methoden in den Vorreden bemerkt. Die angesprochenen Methoden oder Themenbereiche werden dann in den weiteren Kapiteln einzeln genauer behandelt.
Die Aufsätze und Werke zur Liniengeometrie werden in einem eigenen Kapitel behandelt, da sie – schon alleine zeitlich – einen gesonderten Bereich bilden. Außerdem gibt es leider zu den beiden Hauptwerken zur Liniengeometrie kein Vorwort von Plücker, da er bereits während der Drucklegung des ersten Bandes verstarb.

9.1. „Analytisch-geometrische Entwicklungen"

Der erste Band der „Entwicklungen" erschien 1828 im Verlag G. D. Baedekers in Essen und enthält acht Kupfertafeln. Die Vorrede datiert vom September 1827. Plücker behandelt darin die „Theorie der geraden Linie", die „Theorie des Kreises" und besonders ausführlich die „Theorie der Linien zweiter Ordnung". Die „Entwicklungen" hatte Plücker von Anfang an auf mehrere Bände ausgelegt, er wollte darin eine „neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie" vorstellen (vgl. [Plücker 1828, Vorrede S.III]). Bei der Benutzung des Begriffs „analytische Geometrie" bezieht Plücker sich auf Monge[305]; außerdem nennt er Gergonne als einen Vertreter der analytischen Richtung. Ebenfalls interessant sind Plückers Bemerkungen zu Poncelet und Steiner, „der in die Fußstapfen des Herrn Poncelet zu treten scheint" [Plücker 1828, Vorrede S. V]. Dabei gibt Plücker an, er sei mehrmals von der engen Beziehung zwischen der poncelet'schen und seiner Methode überrascht worden, da die Art der Beweisführung zwar eine unterschiedliche sei, aber mit beiden Methoden ähnliche Resultate gefunden würden. Beispielhaft führt Plücker Sätze an, die Steiner in Crelles Journal veröffentlicht

[305] Vgl. dazu Kapitel 8.2. Zusammenfassen lässt sich mit Boyer sagen: „[...] and by this he means that there is an exact correspondance between analytic expressions and geometric constructions" [Boyer 1956, S. 248].

hatte, und zu denen Plücker selbst auf anderem Weg gekommen sei (vgl.[Plücker 1828, Vorrede S. V]).
In der Vorrede zu dem ersten Band der „Entwicklungen“ gibt Plücker nur sehr allgemein an, dass ihn seine Vorlesungstätigkeit in Bonn zur Abfassung des Werkes veranlasst habe [Plücker 1828, Vorrede S. VIf]; etwas ausführlicher äußert er sich dann in dem zweiten Band der „Entwicklungen“:

> „Der Keim von allen Entwicklungen, die ich bisher im Gebiete der analytischen Geometrie geliefert habe, ist in den Vorträgen über die sechste Auflage von Biot, *Essai de Géométrie analytique*, zu suchen, mit welchen ich im Sommer-Semester 1825 meine akademische Laufbahn begann, in den Vorträgen über dasselbe Buch, durch welches ich selbst, einige Jahre früher, in jene Behandlungsweisen der Geometrie, denen man in neuerer Zeit alle die großartigen Resultate verdankt, eingeführt worden bin.[306]
> Als ich damals absichtslos einige Kreise auf das Papier hinzeichnete, kam mir aus dem Anblick der Figur die Vermutung, dass die drei gemeinschaftlichen Chordalen je zweier von drei gegebenen Kreisen in demselben Puncte sich schneiden. Bei der Verification dieses Satzes auf analytischem Wege erwartete ich auf Eliminationen[307] zu stoßen, ich suchte Weitläufigkeiten auf und fand keine: ich kam zum Beweis dieses Satzes durch die einfachste Verbindung dreier Symbole. In dieser Beweisführung lag sogleich die allgemeine Theorie der gemeinschaftlichen Chordalen je zweier beliebiger Kreise, weil die Bedingung, dass solche Kreise sich wirklich schneiden, auf keine Weise in jener symbolischen Bezeichnung ausgedrückt ist. [...] und vor allem Uebrigen nahm [ein] Satz [...] meine Aufmerksamkeit in Anspruch, und war sehr geneigt, mir fühlbar zu machen, wie Symmetrie und Einfachheit der Darstellung nur in der Allgemeinheit zu suchen ist.
> Aus diesen Ideen ist der erste Band der „Entwicklungen“ hervorgegangen: bei der Ausarbeitung desselben war mein Grundsatz, alle Eliminationen zu verbannen, wenigstens da, wo es sich nicht um absolute Grössen-Bestimmungen handle.“

[Plücker 1831, Vorrede S.IIIf]

Da Plücker selbst den Beweis des oben genannten Satzes als Anfangspunkt seiner Arbeiten in der analytischen Geometrie bezeichnet, und ihm daher eine besondere Bedeutung zukommt, soll dieser Beweis hier angeführt werden.

[306] Die sechste Auflage von Biot's „Essai ...“ erschien 1823 ([Biot 1823]). Siehe dazu auch Kapitel 8.2.1. Die erwähnte Vorlesung ist im Vorlesungsverzeichnis nicht aufgeführt, da Plücker erst nach Semesterbeginn nach Bonn kam.

[307] Als Elimination (lat. *eliminare* = entfernen) bezeichnet man das Entfernen von einer Unbekannten, aus einer Gleichung mit mehreren Unbekannten. Diese Eliminationen waren bei Plücker häufig mit unübersichtlichen Rechnungen und Umformungen verbunden (vgl. z.B. [Plücker 1834d, S. 287] sowie [Clebsch 1872, S. XIV]).

„92. Seyen

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2, \tag{9.1}$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2, \tag{9.2}$$

die Gleichungen zweier sich schneidender Kreise. Verbinden wir diese Gleichungen auf irgend eine beliebige Weise, so kommen wir zu der Gleichung eines geometrischen Ortes, der durch die Durchschnitts-Puncte der beiden Kreise geht. Wenn wir z.B. abziehen, kommt:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x=\rho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2). \tag{9.3}$$

[...] Wir müssen indeß hierbei aufmerksam seyn auf den Grad der verschiedenen Gleichungen; hier haben wir den Fall, daß dieser sich reducirt, wir kommen zu einer Gleichung vom ersten Grade, mithin zu der Gleichung einer geraden Linie. Diese gerade Linie geht also durch die Durchschnitte der beiden Kreise, sie ist die gemeinschaftliche Chordale derselben. [...]

93. Wir werden in dem Folgenden die durch die Gleichung (3) dargestellte gerade Linie, die beiden Kreise (1) und (2) mögen sich schneiden, berühren oder keinen Punct gemein haben[308], (was von der Bestimmung der Constanten abhängt), allgemein mit dem Namen: „Chordale der beiden Kreise“ bezeichnen. [...]“

[Plücker 1828, S. 47ff]

Anstatt direkt die beiden Schnittpunkte zwischen den Kreisen (1) und (2) zu bestimmen – was „Eliminationen“ erfordert hätte und nur dann reelle Ergebnisse liefern würde, wenn die beiden Kreise sich schneiden oder berühren – verbindet Plücker die beiden Gleichungen zu einer dritten.

„Weil diese Gleichung nun eine Folge der beiden erstern Gleichungen ist, so bekommen wir dieselben Werthe für y und x, gleichviel ob wir diese Werthe zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2), oder zwischen einer beliebigen derselben und der dritten Gleichung eliminieren.“

[Plücker 1828, S. 48]

Diese dritte Gleichung stellt also ein geometrisches Objekt dar, das die Schnittpunkte der beiden Kreise enthält. In diesem Fall ist die Gleichung bezüglich der beiden Variablen x und y vom ersten Grad und stellt also eine Gerade dar.
Diese Gerade existiert und ist reell, unabhängig davon, ob sich die beiden Kreise in zwei reellen Punkten schneiden, in einem Punkt berühren (in diesem Fall ist die Chordale die gemeinsame Tangente in dem doppelt zu zählenden Berührpunkt der beiden Kreise) oder gar nicht in reellen Punkten schneiden.[309]
Das hier angewandte Prinzip – nicht die Schnittpunkte selbst zu betrachten, sondern ein neues geometrisches Objekt auf dem diese Schnittpunkte liegen – beschreibt Plücker in der Vorrede zu dem ersten Band der „Entwicklungen“ wie folgt:

[308] Ganz ähnliche Überlegungen führen bei Poncelet dazu, neue Punkte („imaginäre“) einzuführen. Vgl. dazu auch 11.1.1, S. 184f.

[309] Für den Fall, dass die beiden Kreise den gleichen Mittelpunkt haben – also konzentrisch sind – wird die Gleichung der Geraden unbestimmt; das erwähnt Plücker aber nicht.

„In jeder Gleichung zwischen Coordinaten seh' ich einen geometrischen Ort, in dem Systeme zweier solchen Gleichungen die Durchschnitte zweier Oerter, und endlich und hauptsächlich in jeder dritten Gleichung, die eine algebraische Folge zweier gegebenen ist, einen neuen geometrischen Ort, der die Durchschnitte der, durch die beiden gegebenen Gleichungen dargestellten, Oerter enthält, und dessen Natur von der Form der resultirenden Gleichung abhängt. Fast überall genügt es, die Verbindung durch einen unbestimmten Coefficienten bloß anzudeuten; ja sogar, wenn man die Form der Gleichungen einmal kennt, auch diese durch ein bloßes Symbol zu bezeichnen.“

[Plücker 1828, Vorrede S. III]

Dieses Prinzip der „abgekürzten Bezeichnungsweise“ – ein einzelnes Symbol für eine Gleichung zu verwenden, deren Form bekannt ist – wendet Plücker im Folgenden an, wenn es darum geht zu beweisen, dass sich die drei Chordalen je zweier von drei Kreisen, in einem Punkt schneiden:

„94. Wir wollen nun gleich schon die Gleichungen dreier gegebenen Kreise zusammenstellen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2=R^2,$$

und diese der Kürze halber durch:

$$A=0, \qquad B=0, \qquad C=0, \tag{9.4}$$

bezeichnen. Ziehen wir diese Gleichungen, paarweise genommen, von einander ab, so kommt:

$$A-B=0, \qquad A-C=0, \qquad B-C=0, \tag{9.5}$$

für die Gleichungen der Chordalen je zweier dieser Kreise. Zwei dieser Gleichungen bedingen die dritte, was uns eine bloße Subtraction zeigt. **Es schneiden sich also die drei Chordalen in demselben Puncte.**“

[Plücker 1828, S. 49]

Diese Argumentation zeichnet sich in der Tat durch extreme Kürze aus[310]. Die Gleichungen der Kreise werden durch ein „bloßes Symbol“ bezeichnet; behalten dabei aber die Form einer Gleichung, so dass mit diesen Gleichungen weiterhin operiert werden kann.

Wie oben bereits gezeigt, ergibt sich die Gleichung der Chordalen zweier Kreise, wenn die Gleichungen dieser beiden Kreise von einander abgezogen werden. Analog werden hier die abgeküzten Gleichungen von einander abgezogen, so dass sich die Gleichungen

[310]Boyer urteilt: „This is the ingeniously simple proof which is now found in most elementary analytic geometry textbooks.“ [Boyer 1956, S. 246].

$A - B = 0$, $A - C = 0$ und $B - C = 0$ für die drei Chordalen ergeben. Natürlich kann man den Gleichungen in dieser abgekürzten Form nicht mehr direkt ansehen, von welchem Grad sie sind. Während die Gleichungen der Kreise ($A = 0$ etc.) vom zweiten Grad sind, sind die Gleichungen der Chordalen ($A - B = 0$ etc.) bekanntermaßen vom ersten Grad.

Wenn man zwei der drei Chordalen-Gleichungen voneinander abzieht, ergibt sich die dritte. Folglich liegt der Schnittpunkt der ersten beiden Chordalen auf der dritten Chordale, was nichts anderes heißt, als das sich alle drei Chordalen in demselben Punkt schneiden.

Plücker hatte in der Vorrede zu dem ersten Band der „Entwicklungen“ angeben, er wolle sie „zunächst auf Flächen zweiter Ordnung, und dann bis auf die allgemeinsten geometrischen Untersuchungen, mit Benutzung derjenigen Vortheile, welche hier die sogenannte höhere Rechnung gewährt“ fortführen [Plücker 1828, Vorrede S. VIII]. Tatsächlich erschien 1831 – ebenfalls im Verlag Baedekers in Essen – der zweite Band der „Entwicklungen“. Allerdings mit einem anderen Inhalt als Plücker drei Jahre vorher geplant hatte.

Er schildert in der Vorrede zum zweiten Band, dass ihn bereits im Sommer 1825 einige Sätze und Beweisführungen in Biot's „Essai ...“ ([Biot 1823]), die erst in der 6. Auflage von 1823 eingefügt worden waren, beschäftigten.

> „[...] sie überraschten mich damals durch ihre Neuheit und kamen mir am Ende doch immer nur in **Biot's** vortrefflichem Handbuche als ein Gewächs auf fremdem Boden vor. Ich fasste den allgemeinen Gedanken, dass überhaupt, wo eine mathematische Entwicklungsweise sich als Kunstgriff darstelle, diess nur deshalb geschehe, weil man dieselbe noch nicht zur Methode erhoben und als solche eingeführt habe. Aber ich war in der Ausführung dieses Gedankens anfangs weniger glücklich [...].“
>
> [Plücker 1831, Vorrede S. V]

Durch die erneute Beschäftigung mit einer Aufgabe, die er bereits im ersten Band der „Entwicklungen“ veröffentlicht hatte ([Plücker 1828, S. 159f]), fand Plücker schließlich das „Princip der Reciprocität“[311], dessen Darstellung die zweite Abteilung des zweiten Bandes bildet.

Ende August 1829 kam Plücker bei der Ausarbeitung einer öffentlichen Rede[312], für die er „die neusten geometrischen Forschungen übersichtlich zusammenstellte“ [Plücker 1831, Vorrede S. VII] zur Idee der Linienkoordinaten[313].

> „Dieser Gedanke lag für mich um so näher, da ich mir bereits schon allgemeinere Begriffe über Coordinaten-Systeme gebildet und auch bereits schon im 5. Bande des Journals für Mathematik einen Aufsatz[314] über ein neues Coordinaten-System geliefert hatte.“
>
> [Plücker 1831, Vorrede S. VII]

[311] Vgl. dazu und zu den Beweisführungen in Biot's „Essai ...“ Kapitel 12.

[312] Die lateinische Rede hielt Plücker anlässlich des Antritts seiner außerordentlichen Professur in Bonn. Sie findet sich in [NSuUB 4CodMsP] und ist zum Teil abgedruckt in [Schoenflies 1895, S. 619].

[313] Gemeint sind hier die Koordinaten der Geraden in der Ebene (und nicht im Raum).

[314] Es handelt sich hier um [Plücker 1830a].

Auch die Idee der Linienkoordinaten veröffentlichte Plücker zuerst in Crelles Journal[315]. Erst nach Abgang des Manuskriptes fasste Plücker den Entschluss, die Untersuchungen zu den Linienkoordinaten und der Reziprozität in einem zweiten Band der „Entwicklungen“ zu veröffentlichen.

> „Jene früher erschienene Abhandlung ist nur als eine unvollkommene Vorarbeit hierzu zu betrachten, aber auch als solche wollte der nachsichtsvolle Herausgeber dieselbe erscheinen lassen, obgleich ich meinerseits den Wunsch äusserte, sie zu unterdrücken.“

[Plücker 1831, Vorrede S. VIII]

Die erste Abteilung des zweiten Bandes der Entwicklungen ist mit dem Titel überschrieben: „Ueber eine neue Art, Curven durch Gleichungen darzustellen“; gemeint sind eben Gleichungen in Linienkoordinaten. Plücker beschäftigt sich in diesem Abschnitt zum einen mit dem Punkt als dem „geometrischen Ort erster Classe“[316], zum anderen mit den „Oertern zweiter Classe“, den Kegelschnitten[317]. In der zweiten Abteilung behandelt Plücker – wie bereits erwähnt – das „Princip der Reciprocität“. Dabei geht er unter anderem auch auf das Cramersche Paradoxon ein.
Mit diesem zweiten Band schließt Plücker die „Entwicklungen“ ab:

> „Die zweite Abtheilung des zweiten Bandes enthält das Princip der Reciprocität, welches die beiden ersten Theile meiner Arbeit[318] zu einem Ganzen vereinigt; und somit sei es mir erlaubt, diese Arbeit als geschlossen anzusehen. Ein eigentlich systematisches Ganzes aufzustellen, ist vielleicht noch zu früh, weil die Neuheit der Methoden noch zu gross, die Menge der Resultate, die uns entgegentreten, unübersehbar ist.“

[Plücker 1831, Vorrede S. VIII]

9.2. „System der analytischen Geometrie“

1835, von Halle aus, veröffentlichte Plücker sein „System der analytischen Geometrie“ in dem Verlag von Duncker und Humblot in Berlin.[319] Laut Untertitel ist es auf eine „neue Behandlungsweise gegründet, und [enthält] insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung.“ Dem Werk sind 6 Kupfertafeln beigefügt; die Vorrede datiert vom November 1834.[320]

[315] In dem Aufsatz: [Plücker 1830c].

[316] Eine Gleichung vom ersten Grad in Linienkoordinaten beschreibt einen Ort erster Klasse, während eine Gleichung vom ersten Grad in Punktkoordinaten einen „geometrischen Ort erster Ordnung“ beschreibt. Den Begriff „Klasse“ in diesem Sinn führte Gergonne ein. Vgl. hierzu Kapitel 11.2, dort besonders Fußnote 431.

[317] Örter zweiter Klasse sind gleichzeitig Örter zweiter Ordnung.

[318] Hiermit sind Band 1 der „Entwicklungen“, sowie die erste Abteilung des zweiten Bandes gemeint.

[319] Von diesem Werk gibt es auch ein Reprint: Saarbrücken: Oekonomie-Verl., 2006 ISBN 3-939962-04-X.

[320] Die Geschichte der Drucklegung dieses Werkes lässt sich aus Briefen von Magnus an Plücker rekonstruieren. Vgl. dazu Kapitel 5.2.

> „So wie für meine „Entwicklungen“, so liegt auch für meine neue Schrift, zu der jene gewissermaßen die Vorstudien sind, die Veranlassung darin, daß ich zufällig mir entgegentretende, particulaire Resultate auf eigene Art auffaßte, und diese Auffassungsart zu allgemeinen Methoden mir ausbildete.“

[Plücker 1835, Vorrede S. III]

> „An die Spitze meiner Arbeit habe ich die Worte „**System** der analytischen Geometrie“ gestellt, und mich hiernach zu dem erhoben, was mir, als ich die Vorrede zum zweiten Bande meiner Entwicklungen schrieb, vorerst noch unerreichbar dünkte.“

[Plücker 1835, Vorrede S. VI]

Plücker beabsichtigt also, mit seinem „System ...“ (1835) „ein eigentlich systematisches Ganzes aufzustellen“ [Plücker 1831, Vorrede S. VIII]. Ob, oder besser gesagt in wie weit er dieses Ziel erreichen konnte, muss geprüft werden.
Der erste Abschnitt trägt die Überschrift: „Ueber allgemeine Coordinaten-Bestimmung“. Hier bestimmt Plücker – nach eigener Aussage – **alle** möglichen Punkt- und Linien-Koordinaten-Systeme, in denen die Gerade bzw. der Punkt weiterhin durch eine Gleichung vom ersten Grad dargestellt werden kann. Im letzten Paragraphen dieses Abschnitts stellt Plücker die geometrischen Untersuchungen verschiedener Autoren dar, um zu zeigen, dass seine „allgemeine Koordinatenbestimmung“ diese Ansätze umschließt.

> „Die Betrachtungsweisen, auf welche ich in der vorliegenden Schrift eine systematische Darstellung der analytischen Geometrie zu gründen den Versuch gemacht habe, umschließen alle in der neueren Zeit, von den verschiedenartigen Standpuncten aus unternommenen geometrischen Untersuchungen. Es ist nicht schwer nachzuweisen, wo jede einzelne dieser Untersuchungen ihre Stelle oder wenigstens ihre Anknüpfungspuncte findet. Einigen bloßen Andeutungen hierüber ist dieser Paragraph bestimmt.“

[Plücker 1835, S. 42f]

In diesem Paragraphen, der immerhin 40 Seiten umfasst, stellte Plücker zum einen „Carnot's schöne Theorie der Transversalen“ als „ein Corolarium unserer allgemeinen Punct-Coordinaten-Bestimmung“ [Plücker 1835, S. 43ff] zum anderen die „Verwandtschaft zwischen geometrischen Sätzen“ unter Bezug auf Möbius und Magnus vor (vgl. [Plücker 1835, S. 48f]). Außerdem erwähnte Plücker jeweils einmal die Namen von Poncelet und Steiner.
Im zweiten Abschnitt behandelte Plücker „Die Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe“ und im dritten Abschnitt „Die Curven dritter Ordnung“, die er in 219 Arten einteilt.
Den dritten Abschnitt über die Theorie der Curven dritter Ordnung hatte Plücker schon im Sommer 1833 ausgearbeitet, um ihn separat zu veröffentlichen; die ersten beiden Abschnitte fügte er erst später hinzu (vgl. [Plücker 1835, Vorrede S. VIII]).
Bereits bei der Veröffentlichung dieses Werkes plante Plücker, die analytische Geometrie über kurz oder lang zur Seite zu legen. Er beendete die Vorrede mit dem Satz:

> „Eh ich mich ganz von der analytischen Geometrie abwende, gedenke ich noch, der Betrachtung der allgemeinen Gesetze, welchen die algebraischen Curven überhaupt unterworfen sind, eine besondere Schrift zu widmen.“
>
> [Plücker 1835, Vorrede S. VIII]

9.3. „Theorie der algebraischen Curven“

Diese Schrift mit dem Untertitel: „gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie“ erschien 1839 bei Adolph Marcus in Bonn.[321] Plücker war zum Zeitpunkt der Abfassung bereits ordentlicher Professor an der Universität Bonn. Das Werk enthält eine Kupfertafel und die Vorrede datiert vom 4. September 1839. Plücker hatte es dem „Geheimen Ober-Regierungs-Rathe Herrn Dr. Kortüm [...] mit der Pietät eines ehemaligen Schülers und der Verehrung eines Freundes gewidmet.“[322].
In der Vorrede erklärt Plücker, mit dieser Arbeit den „Cyclus“ seiner Arbeiten im Gebiet der analytischen Geometrie vollendet zu haben; ähnlich wie er es auch in der Vorrede zum „System ...“ (1835) schon angedeutet hatte:

> Ich habe „[...] die Verpflichtung übernommen, der Darstellung der allgemeinen Gesetze, welchen die algebraischen Curven überhaupt unterworfen sind, eine besondere Schrift zu widmen. Indem ich dieser Verpflichtung hiermit nachkomme, liegt der Cyclus meiner Arbeiten im Gebiete der analytischen Geometrie vollständig vor.“
>
> [Plücker 1839, Vorrede S. V]

In den „Einleitenden Betrachtungen“ spricht Plücker unter anderem das „Princip des Konstantenzählens“ an, ein „höheres Princip, welches diejenigen [Principien], von denen [er] bisher ausgegangen [war], beherrscht“ [Plücker 1839, Vorrede S. VIII]. Der erste Abschnitt des Werkes handelt „Ueber die unendlichen Zweige der algebraischen Curven und ihre geradlinigen und krummlinigen Asymptoten“; der zweite Abschnitt „Ueber die Singularitäten in dem Laufe der Curven“.

9.4. „System der Geometrie des Raumes“

Entgegen der früheren Äußerungen – und nach einer vergleichsweise langen Pause von fast 6 Jahren – schrieb Plücker das letzte Werk seiner ersten mathematischen Schaffensperiode. Es trägt den Titel: „System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise insbesondere die Theorie der Flächen der zweiten Ordnung und Classe enthaltend.“ Es wurde 1846 bei Schaub in Düsseldorf veröffentlicht und 1852 bei W. H. Scheller in Düsseldorf neu aufgelegt.[323] Es enthält eine Tafel. Die Vorrede ist so kurz, dass ich sie hier ganz wiedergeben möchte:

[321] Es existiert ein Reprint: Reprinted on demand, authorized facs. d. Ausg. Bonn, Marcus, 1839. - Ann Arbor, Michigan ; London: University Microfilms internat., 1980/81.

[322] Vgl. zu Kortüm besonders die Kapitel 2.2.2 und 4 der Biographie.

[323] Es ist damit das einzige von Plückers Werken, das eine zweite Auflage erlebte; abgesehen von Reprints lange nach Plückers Tod.

> „Es lag ursprünglich nicht in meiner Absicht, auch auf die drei Dimensionen des Raumes, meine Untersuchungen auszudehnen. Diejenigen Ideen, welche, im Anfange meiner akademischen Laufbahn, zuerst mir die Feder in die Hand gaben und mich damals schon eine Umgestaltung der analytisch geometrischen Methode durchblicken liessen, finden ihre unmittelbare Anwendung auch in dem weiteren Gebiete der räumlichen Geometrie, so dass hier der Weg durch meine frühern Arbeiten schon vorgezeichnet ist. Aber die Ausführung wirkt zurück auf den Gedanken, der sie hervorgerufen hat, vervollständigend, läuternd, verallgemeinernd; sie gibt ihm erst seine Bedeutung. In dieser Beziehung durfte auch die vorliegende Arbeit nicht fehlen. Wenn sie, selbst in denjenigen Theilen, die von Geometern ersten Ranges wiederholt mit Vorliebe behandelt worden sind, noch eine reiche Ausbeute neuer Resultate gegeben hat, so lege ich darauf nur in so fern Gewicht, als die Methode es ist, die, wohinaus wir sie verfolgen mögen, nothwendig Neues aufdecken muss. Und diese **Methode**[324] – in solchem Glauben lege ich die Feder nach mehr als zwanzig Jahren nieder, um sie für diese Art von Forschung nicht mehr zu ergreifen – wird der Wissenschaft bleibend angehören.
>
> Bonn, im Juli 1846.
>
> *Der Verfasser*

[Plücker 1846, Vorrede]

Neben der „Discussion der Flächen zweiter Ordnung und der Flächen zweiter Classe“, behandelt Plücker in den „Einleitenden Betrachtungen“ unter anderem Ebenenkoordinaten, die Reziprozität und das Zählen der Konstanten.

> „Unter der grössern Werken *Plücker's* ist es die „Geometrie des Raumes“(1846), welche am durchgebildetsten erscheint. Ihrer Entstehung und Tendenz nach ist sie mehr eine Darstellung bekannter, als, wie es sonst bei *Plücker* zu sein pflegt, der Entwicklung neuer Resultate gewidmet. So ist es natürlich, dass sie bei grösserer Formvollendung zugleich weniger originale [...] Gesichtspunkte darbietet.“

[Clebsch 1872, S. XXIX]

9.5. Die Bedeutung der Methode

Plückers erste mathematische Schaffensperiode begann – abgesehen von seiner Dissertation und einigen Zeitschriftenartikeln – mit den beiden Bänden der „Analytisch-geometrischen Entwicklungen“, die er später als die Vorarbeiten seines „Systems der analytischen Geometrie“ bezeichnete ([Plücker 1835, Vorrede S. III]). In beiden Bänden der Entwicklungen wollte Plücker „mathematische Entwicklungsweisen[, die] sich als Kunstgriff darstellte[n]“ zu einer „Methode“ ausbilden (vgl. [Plücker 1831, Vorrede S.

[324] Zur Charakterisierung von Plückers Methode vgl. Kapitel 10.

V]). Im Fall des ersten Bandes leisteten dies die „abgekürzte Bezeichnungsweise“ sowie der „Gebrauch von unbestimmten Koeffizienten“ (vgl. [Plücker 1828, Vorrede S. III]); im Fall des zweiten Bandes die Linienkoordinaten sowie das Prinzip der Reziprozität. Das Ziel, welches Plücker 1831 noch für „vorerst unerreichbar“ hielt, nämlich ein „systematisches Ganzes“ (vgl. [Plücker 1835, Vorrede S. VI], [Plücker 1831, Vorrede S. VIII]) der analytischen Geometrie aufzustellen, setzte er 1835 durch das „System der analytischen Geometrie“ in die Tat um. Auch hier lag, wie Plücker schreibt: „die Veranlassung darin, daß ich zufällig mir entgegentretende, particuläre Resultate auf eigene Art auffaßte, und diese Auffassungsart zu allgemeinen Methoden mir ausbildete.“ [Plücker 1835, Vorrede S. III].

In der „Theorie der algebraischen Curven“ von 1839 wendet Plücker vor allem die Methode der „Konstantenabzählung“ an. „Die neue Art der Behandlungsweise gestattet uns diesen Gegenstand weit über diejenigen Gränzen, welche den bisherigen Methoden zugänglich waren, auszudehnen und ihn, in gewissem Sinne, zu erschöpfen.“ [Plücker 1839, Vorrede S. V]

Die letzte Arbeit dieser ersten mathematischen Phase, das „System der Geometrie des Raumes“, schließt den Kreis dieses „Zyklus“. Bereits im ersten Band der „Entwicklungen“ hatte Plücker die Möglichkeit angedeutet, seine Methode auch auf räumliche Probleme anzuwenden: „Hier erscheint die Leichtigkeit der Behandlungsweise um so größer, als, bei der Auffassung der Constructionen im Raume, die Einbildungskraft in höherm Maaße in Anspruch genommen wird.“ [Plücker 1828, Vorrede S. VI]. Diesen Gedanken führte Plücker nach einer etwas längeren Pause, und nachdem er vorher seine Arbeiten im Gebiet der analytischen Geometrie schon mit der „Algebraischen Curven“ für abgeschlossen erklärt hatte, schließlich 1846 aus.

Den roten Faden dieser fünf Arbeiten bildet „die Methode“. Der erste Satz der Vorrede des ersten Werkes erklärt bereits das Ziel, „eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie niederzulegen“ [Plücker 1828, Vorrede S. III], der letzte Satz der Vorrede des letzten Werkes bringt den „Glauben“ zum Ausdruck, dass „diese Methode [...] der Wissenschaft bleibend angehören“ wird [Plücker 1846, Vorrede S. IV].

Das Plücker tatsächlich von *einer* Methode spricht, wird noch durch eine Aussage unterstrichen, die Plücker in einem der Aufsätze[325] machte, die er 1847 im 34. Band des Crelle Journals veröffentlichte:

> „Ich hab hier keine andere Absicht, als auf diejenige Methode, die zur systematischen Grundlage der analytischen Geometrie auszubilden, bisher das Ziel meiner mathematischen Bestrebungen war, aufmerksam zu machen [...].“
>
> [Plücker 1847a, S. 404]

Plücker beendet diesen Aufsatz, indem er auf eine Aussage aus der Vorrede zum zweiten Band der „Entwicklungen“ Bezug nehmend sagt:

> „Zu dieser Ansicht, die der leitende Gedanke aller meiner Arbeiten in dem Gebiete der analytischen Geometrie war, bekenne ich mich auch jetzt noch;

[325] Es handelt sich hierbei um [Plücker 1847a] bis [Plücker 1847f]. Plücker hat 1847 – wie es scheint – alles das veröffentlicht, was er bis dahin bereits ausgearbeitet, aber noch nicht publiziert hatte (vgl. z.B. [Schoenflies 1895, S. 611]).

> und zwar mit klarerem Bewusstsein als damals, wo Manches für mich noch unbestimmte Anschauung war. Und jetzt kann ich auch [...] klarer und bestimmter mich aussprechen und also auch hoffen, vollständiger verstanden zu werden.“
>
> [Plücker 1847a, S. 411f]

Plücker betont hier einerseits – wie auch an anderen Stellen –, dass sich alle seine Arbeiten zur analytischen Geometrie auf diesen einen Gedanken, diese eine Methode, stützen, andererseits wird deutlich, dass diese Methode einem gewissen Wandel unterworfen war; zumindest was das Bewusstsein von dieser Methode und die Möglichkeiten der Darstellung dieser Methode betraf. Im folgenden Kapitel soll dieser Gedanke bei der Untersuchung der Vorreden Plückers berücksichtigt werden.

Die im obigen Zitat mitschwingende Resignation Plückers über den Mangel an Wertschätzung bzw. Kenntnis seiner Methode, war mit dafür verantwortlich, dass Plücker die Forschung in der analytischen Geometrie 1847 beendete – bzw. für etwa 20 Jahre beiseite legte (vgl. 6.2.1).

10. Die analytisch geometrische Methode

Im letzten Kapitel wurde bereits immer wieder von Plückers „neuen Methode“, der „neuen Behandlungsweise“ etc. gesprochen. Dabei sind andeutungsweise schon einige Einzelheiten dieser Methode genannt worden, z.B. die sogenannte „abgekürzte Bezeichnungsweise“. Außerdem wurde deutlich, dass Plücker zwar tatsächlich von *einer* Methode spricht, diese Methode aber zumindest einige Umwandlungen erfahren hat. In diesem Abschnitt soll jetzt untersucht werden, wie Plücker seine „neue Methode“ in den einzelnen Vorreden vorstellt.
Dabei sollen die folgenden Fragen berücksichtigt werden:

- Inwiefern sind die Methoden „neu“, von denen Plücker spricht?
- Was ist für Plücker eine Methode?
- Wie beschreibt Plücker „die Methode“ konkret? Was nennt er für Vorteile, die sie hat?
- Inwiefern ist es zulässig, von „einer“ Methode zu sprechen? Was sind die verbindenen Elemente?

10.1. Eigenschaften der „neuen“ Methode(n)

Wie bereits mehrfach erwähnt, nennt Plücker seine Methoden oder Betrachtungsweisen immer „neu“ (z.B. in den Titeln von [Plücker 1835], [Plücker 1839] und [Plücker 1846]).

> „Ich nenne dieselbe[, die neue Behandlungsweise,] neu, ohngeachtet die Principien, auf welche sie beruht, in einzelnen Fällen schon zur Beweisführung mögen angewandt worden seyn. Aber solche Beweisführungen stehen nicht in generischem Zusammenhange mit dem Ganzen, und erscheinen deshalb als analytische Kunstgriffe, während sie im Grunde doch anders nichts sind, als Einzelheiten einer allgemeinen Methode.“
>
> [Plücker 1828, Vorrede S. III]

Hier wird zum ersten Mal der Unterschied deutlich, den Plücker zwischen seinen Methoden und einzeln für sich stehenden Beweisführungen, er spricht hier von „Kunstgriffen“, sieht. Der Unterschied zwischen einem solchen Kunstgriff und einer Methode besteht darin, dass ersterer sich immer speziell auf eine Aufgabe, ein Problem, eine Beweisführung bezieht, während letztere einen allgemeinen Charakter hat. Plücker schildert häufiger, dass er Beweisführungen zu einzelnen Aufgaben, häufig auch aus Werken anderer Autoren und nicht selten von Autoren der „synthetischen Richtung“

benutzt, um daraus eine allgemeine Methode abzuleiten. Z.B. schreibt er, indem er sich auf eine Arbeit von Gergonne in seinen Annalen über die Behandlung des Apollonischen Problems bezieht:

> „Diese Art zusammengesetztere lineare Gleichungen zu construiren, schloss sich genau an meine Ansichten an [...] Aber es steht dieselbe vereinzelt da, sie setzt Vorbereitungen und Eliminationen voraus, die künstlich angelegt werden müssen und ihre Anwendbarkeit beschränkt sich auch dann noch auf wenige Fälle. Die Aufgabe war, eine allgemeine Methode auf das zu Grunde liegende Princip aufzubauen [...]"

[Plücker 1831, Vorrede S. IV]

Im zweiten Band seiner „Entwicklungen" bedauert Plücker, dass ihm der „Traité des propriétés projectives" von Poncelet und „die originellen Leistungen" von Steiner beim Abfassen des ersten Bandes der Entwicklungen als Quelle solcher Sätze noch nicht zur Verfügung standen (vgl. [Plücker 1831, Vorrede S. V]).

> „Wohl nichts begünstigt mehr das Auffinden neuer Methoden, als der Versuch, geometrische Sätze, die in der Aussage einfach und symmetrisch sind, analytisch zu beweisen."

[Plücker 1831, Vorrede S. IVf]

Wenn man einmal untersucht, wie Plücker die „neue" Methode charakterisiert, welche Vorteile er z.B. nennt, die sie hervorbringt, dann sind es zum einen Eigenschaften, welche den Nutzen der Methode unterstreichen, zum anderen solche, die auf eine besondere Schönheit hindeuten.
Wie gerade schon vorgestellt, muss eine Methode einen allgemeinen Charakter haben und darf in ihrer Anwendung nicht auf einige wenige Aufgaben beschränkt bleiben. Folgendes Zitat, aus den „Entwicklungen", in dem Plücker die analytische und die synthetische Richtung gegenüberstellt, betont noch einmal die Wichtigkeit einer solchen Allgemeinheit:

> „Aber denselben unschätzbaren Vortheil [der synthetischen Richtung], der aus dem Bestreben hervorgeht, die Resultate unter allgemeinen Gesichtspuncten zusammenzustellen, kann auch die analytische Geometrie sich aneignen, wenn sie aus ihrem Bereiche jede überflüssige Entwicklung und jede Vermischung von Construction und Rechnung verbannt."

[Plücker 1828, Vorrede S. IV]

Dass Plücker bereits in den Entwicklungen das Ziel formulierte „das Ganze der Geometrie systematisch zusammenzufassen" [Plücker 1831, Vorrede S. IX] und dieses Ziel durch das „System ..." (1835) gewissermaßen als erreicht betrachtete, wurde oben ebenfalls schon dargestellt.
Dass die „neue" Methode gerade was eine solche Systematisierung betrifft Hervorragendes leistet, wird durch die folgenden Zitate unterstrichen:

> Aus „[...] der Art, wie die verschiedenen Sätze der Geometrie unter einander verknüpft sind, [...] schöpfen, was nicht oft genug wiederholt werden kann, die neueren Behandlungsweisen der Geometrie ihre glänzendsten Resultate [...] .“

[Plücker 1834a, S. 260]

> „Das neue Princip [d. i. das „Konstantenzählen“] rückt die, dem Anscheine nach, verschiedenartigsten Resultate einander näher und, indem es sie in gegenseitige Abhängigkeit bringt, brauchen wir uns nicht mehr damit zu begnügen, uns von der Richtigkeit derselben überzeugt zu haben, sondern, wir können auch nach der *Nothwendigkeit* eines geometrischen Resultats und nach der Stellung fragen, die dasselbe im grossen Ganzen der Geometrie einnimmt.“

[Plücker 1839, Vorrede S. VIII]

Außerdem betont Plücker die „Natürlichkeit“ seiner Methode im Gegensatz zu dem „Willkürlichen“ oder „Unbeholfenen“ (vgl. z.B. [Plücker 1835, Vorrede S. IVf] und [Plücker 1833a, S. 290]).
Ein weiterer Punkt, den Plücker mehrmals erwähnt, ist die Leichtigkeit, mit der die Methode zum Beweis von Sätzen angewandt werden kann, und dass sie dazu geeignet ist, neue Resultate zu finden. Diese letzten beiden Punkte nennt Plücker geradezu als Prüfkriterien einer guten Methode:

> „Bei der Prüfung einer neuen Entwicklungsweise ist eine doppelte Frage zu berücksichtigen, einmal, ob dieselbe zum Beweise gegebener Sätze sich geschmeidig zeigt, und dann, ob sie neue Resultate finden lehrt.“

[Plücker 1831, S. 12]

Das „seine“ Methoden diese beiden Punkte erfüllen, unterstreicht Plücker verschiedentlich. So sagt er zum Beispiel in [Plücker 1835, Vorrede S. VI] „Unsere Methode führt hier leicht zum Ziele“, oder in [Plücker 1828, Vorrede S. IV] „Es begreift sich leicht, daß wir sicher sind, auf diesem Wege die einfachsten und zierlichsten Constructionen zu erhalten.“ und spricht von der „Leichtigkeit der Behandlungsweise“ [Plücker 1828, VI]. Verschiedentlich beweist Plücker bereits bekannte Sätze, um damit zu zeigen, wie leicht sich diese Beweise mit seiner neuen Methode gestalten. Der Aufsatz „Über ein neues Coordinatensystem“ ist ganz dem Zweck gewidmet zu zeigen,

> „[...] dass die neue Methode [hier: Dreieckskoordinaten] einerseits zum Beweise vorgelegter einzelner Sätze und zur Darstellung allgemeiner Theorieen sich sehr geschmeidig zeigt, und dass sie andrerseits Resultate *finden* lehrt, wenn man sie aus allgemeinen analytischen Gesichtspunkten betrachtet.“

[Plücker 1830a, S. 125]

Neben diesen Aspekten nennt Plücker – wie oben schon erwähnt – ästhetische Merkmale seiner Methoden. Er spricht von „Symmetrie und Einfachheit der Darstellung“ [Plücker 1831, Vorrede S. IV] sowie der „Zierlichkeit der rein analytischen Constructionen“ [Plücker 1828, Vorrede S. IV] (vgl. z.B. auch [Plücker 1833b, S. 235]).

> „Das Kriterium für den Werth oder Unwerth eines neuen Resultates, wie einer neuen Methode, liegt keineswegs in ihrer möglichen Nutzanwendung, sondern unmittelbar in ihnen selbst: sie müssen, ich glaube mich nicht bezeichnender ausdrücken zu können, ein rein ästhetisches Interesse für sich in Anspruch nehmen. Keine der verschiedenen mathematischen Disziplinen ist einer solchen Eleganz mehr fähig, als die analytische Geometrie [...].“
>
> [Plücker 1839, Vorrede S. VIII]

10.2. Verhältnis von Analysis und Geometrie

Wenn Plücker von seiner neuen Methode oder Behandlungsweise spricht, dann meint er, je nachdem um welchen Aufsatz oder welches Werk es sich handelt, die „Methode der abgekürzten Bezeichnung“ und den „Gebrauch unbestimmter Koeffizienten“ (besonders [Plücker 1828]), die Verwendung von Dreieckskoordinaten ([Plücker 1830a]) oder Linienkoordinaten (z.B. [Plücker 1830c]), das Prinzip der Reziprozität oder das Prinzip der Konstantenabzählung ([Plücker 1839]) – um zumindest die wesentlichsten Methoden zu nennen.
Und selbst diese einzelnen Methoden erscheinen „unter verschiedenen Nuancen“, wie Plücker für den ersten Band der Entwicklungen anhand von fünf verschiedenen Beweisen für den Satz von Pascal deutlich macht (vgl. [Plücker 1828, Vorrede S. VI]).
Stellt man sich die Frage, inwieweit es trotzdem gerechtfertigt ist, von „einer“ Methode zu sprechen – wie Plücker es z.B. in [Plücker 1846, Vorrede] tut –, dann scheint das verbindende Element aller dieser Methoden die Ansicht Plückers, über das Verhältnis der Geometrie zur Analysis[326]zu sein.
Bereits in der Vorrede zum ersten Band der Entwicklungen äußert sich Plücker hierzu:

> „Man kann das Verhältniss der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspuncten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, dass die Analysis eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbstständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, so wie von einer andern Seite die Mechanik, bloss als die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen erscheint.“
>
> [Plücker 1831, Vorrede S. IX]

Noch in einer seiner letzten Arbeiten dieser ersten mathematischen Phase bekennt Plücker sich ganz klar zu dieser Ansicht, indem er den gerade wiedergegebenen Satz

[326]Im Sprachgebrauch jener Zeit wurden die Begriffe Analysis und Algebra synonym gebraucht (vgl. dazu [Paul 1980, S. 200]). Analysis meint hier also „algebraische Analysis“ im Unterschied zur „infinitesimalen Analysis“.

anführt (vgl. [Plücker 1847a, S. 411f]). Analog zu dieser Ansicht, die Geometrie als bildliche Deutung gewisser analytischer Beziehungen[327] aufzufassen, spricht Plücker davon, dass analytische Gleichungen in die „Sprache der Geometrie“[328] übersetzt werden (z.B. [Plücker 1846, S. 243]). Umgekehrt aber auch von der „Sprache der Analysis“ in welche geometrische Sachverhalte „übertragen“ werden [Plücker 1835, Vorrede S. III]. Die analytische „Sprache“ erlaubt es dann „neue Formen zu bilden“ und diese wiederum „geometrisch zu deuten“ [Plücker 1835, Vorrede S. III]. Verschiedene algebraische[329] Umformungen einer Ursprungsgleichung können – oder müssen – verschiedene geometrische Deutungen ergeben:

> „Es ist klar, dass solche verschiedene analytische Ausdrücke, wenn sie geometrisch gedeutet werden, zu neuen Sätzen führen [...]“

[Plücker 1846, S. 27]

Aber auch ein einzelner analytischer Ausdruck kann zu mehreren neuen Sätzen führen, indem er auf unterschiedliche Weisen gedeutet wird. Plücker spricht in diesem Zusammenhang von „den verschiedenen Uebertragungs-Principen“, die der „allgemeine Begriff der Coordinaten“ in sich einschließe [Plücker 1835, Vorrede S. VII]. Wenn in einem analytischen Ausdruck beispielsweise die Variablen einmal als Punktkoordinaten geometrisch gedeutet werden, ein anderes Mal als Linienkoordinaten, dann ergeben sich (in der Regel) zwei unterschiedliche Sätze. Diese sind durch das Prinzip der Reziprozität miteinander verbunden.[330]
Hier zeigt sich also der Zusammenhang der einzelnen Methoden, die Plücker benutzt und vorstellt: sie dienen entweder dazu, geometrische Beziehungen in geeigneter Weise in die Sprache der Analysis zu übersetzen oder aber analytische Ausdrücke in verschiedener Weise geometrisch zu deuten.
Mit der Ansicht, dass eine wechselseitige Übersetzung zwischen geometrischen und analytisch-algebraischen Sätzen immer möglich ist – vorausgesetzt, dass letztere die „Dimensionen des Raumes nicht übersteigen“ –, befindet sich Plücker ganz in der Tradition Monges. Dieser schreibt in seiner „Géométrie descriptives“ (Nr. 10; Teil I, S. 18):

> „Es gibt keine Konstruktion der darstellenden Geometrie, die nicht in die Analyse übersetzt werden kann; und wenn die Fragen nicht mehr als drei Unbekannte umfassen, kann jede analytische Operation als Beschreibung eines Schauspiels (spectacle) in der Geometrie betrachtet werden.“

zitiert nach [Paul 1980, S. 201]

[327] Für Plücker war die Geometrie nur in drei Dimensionen denkbar, die Analysis hingegen „nicht an die Dimensionen des Raumes gebunden“ [Plücker 1846, S. 322].

[328] Wie z.B. auch bei Biot und Monge im Kapitel 8.2.1 gesehen, benutzt auch Plücker hier Formulierungen, welche an Condillacs Konzeption von „Wissenschaft als Sprache“ erinnern.

[329] Plücker würde in diesem Zusammenhang eher von analytischen Umformungen sprechen. Er benutzte aber, dem zeitgenössischen Sprachgebrauch entsprechend, die Begriffe analytisch und algebraisch synonym, wobei der Begriff algebraisch insgesamt recht selten auftaucht (siehe Fußnote 326).

[330] Anders ausgedrückt: die beiden Sätze sind „reciprok“ (dual) zueinander. Die spezielle Reziprozität (Dualität) hängt jeweils von dem verwendeten Punkt- und Linienkoordinatensystem ab (Vgl. Kapitel 12).

Plücker selbst sah sich ganz bewusst in der Tradition Monges und der „französischen Schule“[331], auch wenn er zum Teil über dessen Ansichten hinausging. Monge sprach sich dafür aus, den Schüler frühzeitig daran zu gewöhnen, die Entsprechung zwischen den Operationen der Analysis und denen der Geometrie zu erkennen (vgl. [Paul 1980, S. 202]); möglicherweise hatte Plücker diese Gedanken also während seines Studienaufenthaltes in Paris (1823 - 1825) bei den Schülern Monges kennengelernt. Monge betont die Vorteile, die sowohl die Analysis als auch die Geometrie aus der Verbindung beider Disziplinen ziehen kann[332]:

> „[...] die darstellende Geometrie trägt in die kompliziertesten analytischen Operationen die Evidenz, die ihr hervorstechendster Wesenszug ist, während die Analyse im Gegenzug in die Geometrie die Allgemeinheit einführt, die ihr eigen ist.“

zitiert nach [Paul 1980, S. 202]

Im Gegenteil zu Monge, benutzte Plücker die Geometrie nicht, um „analytischen Operationen Evidenz“ zu geben; überhaupt scheint das, was bei Monge ganz im Gleichgewicht steht, bei Plücker etwas in Richtung der Analysis verschoben zu sein. So spricht Plücker zum Beispiel von „der Sprache der Geometrie“ und der „Ursprache“ der Analysis und betont mehrfach, dass durch die Geometrie nur ein Teil der Analysis bildlich gedeutet werden kann. Aber auch Plücker zeigt – ähnlich wie Monge – sehr schön die Vorteile auf, welche aus der engen Beziehung zwischen Analysis und Geometrie für die analytische Geometrie entstehen:

> die „[...] neue Gestaltung der analytischen Geometrie, deren Eigenthümlichkeit und Stärke in dem vollständigen Parallelismus zwischen geometrischen und analytischen Formen, oder um mich bestimmter auszudrücken, in dem Umstande beruht, daß wir, durch das Zusammenrücken, das Zusammenwachsen gleichsam, von Construction und analytischer Darstellung, dahin gelangen, über die großartigen Betrachtungsweisen der Analysis gebieten zu können, ohne irgend einen der unersetzlichen Vortheile, welche die unmittelbare Anschauung gewährt, aufzugeben.“

[Plücker 1835, Vorrede S. IIIf]

So wie hier, betont Plücker immer wieder, dass es umbedingt nötig sei, dass die analytische Geometrie sich der Vorteile *beider* Felder bediene. Und das ist eben nur möglich, wenn die analytische Darstellung wirklich der geometrischen Konstruktion entspricht, das heißt, wenn jeder Schritt der analytischen Darstellung auch eine Übersetzung in die „Sprache der Geometrie“ besitzt.
Bereits in der Vorrede zum ersten Band der Entwicklungen – hier konkret auf die Methode der „abgekürzten Bezeichnungsweise“ und auf den „Gebrauch unbestimmter Koeffizienten“ bezogen – beschreibt Plücker die Vorteile, die aus diesem „engen Zusammenwachsen“ entstehen:

[331] Vgl. z.B. [Plücker 1831, S. III u. 4] und Kapitel 8. „And yet in all his work Plücker modestly felt that he was but building along the lines which Monge had suggested.“ [Boyer 1956, S, 244f].

[332] Gaspard Monges „géométrie descriptives“ Nr. 10; Teil I, S. 19; Paul betont aber, dass man dies „nicht so verstehen [dürfe], daß Monge für eine Vermischung von geometrischen und analytischen Beweismethoden eintreten würd; [... es] handelt sich darum, beide Disziplinen in voller Strenge aus sich selbst heraus zu begründen.“ [Paul 1980, S. 202].

> „Es begreift sich leicht, daß wir sicher sind, auf diesem Wege die einfachsten und zierlichsten Constructionen zu erhalten. Man braucht nur zu erwägen, daß wir die gegebenen Figuren, und zwar zunächst die, sie vertretenden Symbole, nie aus dem Auge verlieren, und, bei der Einfachheit der Verbindung, in jeder Gleichung bis zur Endgleichung hin, die Beziehung zu den gegebenen Gleichungen wiedererkennen – während, von der einen Seite, in der alten Geometrie, wie sie z.B. *Apollonius* handhabt, das Hauptthema in den Schatten von Umschreibungen zurücktritt, eben so wie die Hauptconstruction von Hülfslinien maskirt werden, und, von der andern Seite, die bloße Anwendung der Algebra auf Geometrie in Eliminationen sich verliert."

[Plücker 1828, Vorrede S. IV]

Und auch am Ende dieses „Zyklus" mathematischer Arbeiten findet sich erneut eine sehr schöne Bemerkung Plückers hierzu:

> „Schliesslich erlaube ich mir nur noch eine allgemeine Bemerkung über die von mir angewandte Methode analytischer Beweisführung [...]. **Meine Gleichungsformen sind vollständige Darstellungen graphischer Constructionen, in denen nichts Fremdartiges sich findet; es sind ideale, mit analytischen Symbolen hingezeichnete Figuren.**[333]"

[Plücker 1847a, S. 407f]

In diesen zuletzt angeführten Zitaten war die „Übersetzungsrichtung" immer von geometrischen Problemen ausgehend in die Sprache der Analysis und die beiden Bereiche der Analysis und der Geometrie standen sich gleichberechtigt gegenüber. Aber wie oben schon mehrfach angedeutet wurde, hat Plücker durchaus auch die andere „Übersetzungsrichtung" gesehen und genutzt, sowie die Eigenständigkeit der Analysis herausgestrichen.

> „Jede geometrische Beziehung ist als die bildliche Darstellung einer analytischen Beziehung anzusehen, die, abgesehen von jeder Deutung, ihre selbstständige Geltung hat. So gehört auch das Princip der Reciprocität ganz eigentlich der Analysis an, und nur weil wir, sogar wenn wir es analytisch begründen, gewohnt sind, es in der Sprache der Geometrie auszudrücken, wird uns die Ansicht gewissermaassen aufgedrängt, dass es ein ausschließlich geometrisches sei. Es besteht aber, auch ohne dass wir uns irgendwie um die Bedeutung der zwei oder drei Veränderlichen und Constanten kümmern, ganz unabhängig von der Betrachtung von Puncten, geraden Linien und Ebenen; wir können es aus der Sprache der Geometrie wieder rückwärts in die Ursprache der Analysis übersetzen. [...]"

[Plücker 1846, S. 322]

[333] Hervorhebung im Original. Mit „ideal" ist hier wohl gemeint, dass die Gleichungen (als „Figuren") nicht den Mängeln unterliegen, die gezeichnete geometrische Figuren aufweisen (wie beispielsweise Ungenauigkeiten, oder fehlende Allgemeinheit.).

Dieser Abschnitt stammt aus der – wegen des Bezugs zur Liniengeometrie – wohl bekanntesten Stelle des „Systems ...“ (1846)[334]. Hier, wie auch schon in der oben wiedergegebenen Stelle aus dem ersten Band der Entwicklungen ([Plücker 1828, Vorrede S. IX]), betont Plücker, dass die Analysis ein eigenständiges Gebiet darstelle, unabhängig von der geometrischen Deutung. Diese Sichtweise erlaubt es Plücker, mit den analytischen Ausdrücken zu operieren und erst nachträglich nach geometrischen Deutungen zu fragen (siehe oben, [Plücker 1835, Vorrede S. III]). Indem die Analysis nicht nur als Hilfsmittel der Geometrie betrachtet wird, sondern umgekehrt die Geometrie als „die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen“ der Analysis [Plücker 1828, Vorrede S. IX], ergibt sich nun die Möglichkeit, von analytischen Ausdrücken auszugehen und nach der oder den Möglichkeiten geometrischer Deutungen zu fragen. So ist es in der Analysis „die nicht an die Dimensionen des Raumes gebunden“ ist [Plücker 1846, S. 322], natürlich absolut zulässig, eine Gleichung zwischen vier Variablen aufzustellen. Hingegen war die Geometrie für Plücker durchaus an die (drei) Dimensionen des Raumes gebunden und die geometrische Deutung einer solchen Gleichung zwischen vier Variablen lag folglich nicht auf der Hand. Plücker nennt die Möglichkeit, diese vier Variablen als die vier Coordinaten einer Geraden im Raum zu betrachten – und spricht damit die Idee der Liniengeometrie aus!

Entgegen der Aussage in der Vorrede, dass Plücker „die Feder nach mehr als zwanzig Jahren nieder[lege], um sie für diese Art von Forschung nicht mehr zu ergreifen“ [Plücker 1846, Vorrede] spricht er hier die Absicht aus, „auf diesen Gegenstand, der [...] ein weites Gebiet für analytisch-geometrische Entwicklungen zu eröffnen scheint, an einem andern Orte wieder zurückzukommen“ [Plücker 1846, S. 322f]. Dieses Vorhaben hat Plücker tatsächlich fast 20 Jahre später mit seinen Werken zur Liniengeometrie[335] umgesetzt. Obwohl die Ausführung dieses Gedankens also – zumindest zeitlich[336] – nicht in diese Phase gehört, passt die Idee der Liniengeometrie exakt in den „Zyklus“ von Plückers ersten mathematischen Arbeiten.

Plückers spezielle Auffassung zu dem Verhältnis von Analysis und Geometrie und die Nutzbarmachung dieses Gedankens für die analytische Geometrie umspannen also nicht nur die erste Periode seiner mathematischen Tätigkeit, sondern bilden letztlich auch den roten Faden durch sein gesamtes mathematisches Werk.[337]

[334] Clebsch spricht in seiner Gedächtnisrede – abgesehen von einer kurzen allgemeinen Bemerkung, die eher die Form als den Inhalt des Werkes betrifft – nur diese Stelle an, „welche der Keim der Liniengeometrie wurde“ [Clebsch 1872, S. XXX].

[335] [Plücker 1868/69]. Vergleiche dazu Kapitel 14.

[336] Neben dem zeitlichen Abstand zwischen den beiden mathematischen Phasen gibt es weitere abgrenzende Merkmale – wie eine gewisse Mitberücksichtigung physikalischer Gedanken, eine weniger analytische Vorgehensweise und stärkeren Austausch mit Fachkollegen (vgl. 6.3, 14).

[337] Vgl. hierzu auch [Clebsch 1872, S. XIV].

11. Koordinaten

Wie wir in Kapitel 10 gesehen haben, ist der Gebrauch verschiedener Koordinatensysteme eine wichtige Methode der analytischen Geometrie für Plücker. Plücker sah die Analysis[338] als durchaus eigenständigen Bereich an, der aber geometrische Deutungen erlaubt. Dabei kann eine analytische Gleichung, oder auch eine analytische Beweisführung ganz unterschiedlich gedeutet werden. Eine Möglichkeit, solche unterschiedlichen Deutungen zu finden, sind verschiedene Koordinatensysteme. Dieser Gedanke bildet – wie gezeigt wurde – einen roten Faden durch Plückers ganzes mathematisches Werk.
Plücker führte in seinen verschiedenen Aufsätzen und Werken verschiedene Koordinatensysteme ein, zum Teil als erster. Selbst in den Fällen, in denen schon andere vor ihm solche oder ähnliche Koordinatensysteme verwendet hatten, kam Plücker selbständig und zum Teil ohne die Werke der anderen Autoren zu kennen, zu seinen Ergebnissen. Insgesamt führt Plücker in seinen Werken folgende Koordinatensysteme ein (die Jahreszahl in den Klammer bezieht sich jeweils auf die erste explizite Nennung des entsprechenden Koordinatensystems):

- homogene Dreieckskoordinaten (1829)
- Linienkoordinaten in der Ebene (1831)
- Ebenenkoordinaten (1831)
- allgemeine (lineare) Koordinaten (1835)
- Linienkoordinaten im Raum (1846)

In den folgenden Abschnitten sollen die einzelnen Koordinatensysteme genauer untersucht werden. Dabei stehen die homogenen Dreieckskoordinaten besonders im Fokus, da sie neben den baryzentrischen Koordinaten von Möbius[339] eines der ersten Beispiele[340] homogener Koordinaten darstellen (vgl. z.B. [Müller 1910, S. 617].). Möbius hatte bereits 1827 in seinem ersten großen Werk zur Geometrie, dem „Barycentrischen Calcül“, seine (homogenen) baryzentrischen Koordinaten eingeführt. Dieses Werk war Plücker zwar 1829 tatsächlich schon bekannt, hatte aber vorerst keinen Einfluss auf seine eigene Arbeit. Den engen Zusammenhang von Möbius baryzentrischen Koordinaten zu seinen eigenen Dreieckskoordinaten erkannte Plücker erst später (vgl. dazu [Plücker 1835, S. 7, Fußnote]). Diese beiden unterschiedlichen Ansätze zur Einführung homogener Koordinaten sollen unter anderem in Bezug auf ihre Wurzeln und ihre Wirkung sowie auf die Vorgehensweise und die Intentionen ihrer Autoren miteinander verglichen werden.

[338]Gemeint ist hier (mit moderner Terminologie) Algebra, vgl. Fußnote 326.
[339]Eine kurze Biographie findet sich im Kapitel 11.1.2.
[340]Neben Möbius und Plücker nennt Boyer auch Feuerbach und Bobillier, als Erfinder homogener Koordinaten vor Plücker (vgl. [Boyer 1956, S. 249] sowie [Müller 1910, S. 634]).

Die Analyse der einzelnen Koordinatensysteme folgt der Chronologie und umspannt jeweils die Zeit der ersten mathematischen Phase[341]. Dabei sollen die folgenden Fragen für die Analyse leitend sein:

- Wie werden die Koordinaten eingeführt?
- Woher kommen die Ideen dazu? Bezieht sich Plücker auf andere Autoren (möglicherweise auch nachträglich)?
- Welche Ziele verfolgt Plücker mit seinen Koordinaten?
- Benutzt Plücker die Koordinaten auch in nachfolgenden Werken noch? Was fällt bei dem Gebrauch der Koordinatensysteme auf?

Die Linienkoordinaten im Raum werden in diesem Kapitel nur in so weit berücksichtigt, wie ihre Idee im „System ...“ (1846) angesprochen wird. Die Liniengeometrie wird in Kapitel 14 behandelt.
Außerdem soll der Koordinatenbegriff Plückers herausgearbeitet und seine Entwicklung im Laufe der Zeit untersucht werden. Dabei wird auch die Frage angesprochen, in wie fern Plückers Koordinatenbegriff eine Erweiterung des vor ihm verwendeten darstellt und wie Plückers Begriff wiederum von nachfolgenden Mathematikergenerationen erweitert wurde.

11.1. Homogene Koordinaten

Als *homogen* werden die Koordinaten $x_1, x_2, ...x_n$ eines geometrischen Objektes bezeichnet, wenn die n-Tupel $(x_1, x_2, ...x_n)$ und $(\lambda x_1, \lambda x_2, ...\lambda x_n)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ und $\lambda \neq \infty$ äquivalent sind. *Homogene Koordinaten* nehmen nur endliche Werte an; das n-Tupel $(0, 0, ...0)$ beschreibt kein geometrisches Objekt (vgl. z.B. [Müller 1910, S. 602]).
Homogene Koordinaten ermöglichen die analytische Behandlung der Projektiven Geometrie, da mit ihnen auch Fernpunkte beschrieben werden können. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass die Gleichungen zwischen diesen Koordinaten ebenfalls homogen werden, und daher die Sätze über homogene Funktionen angewandt werden können (vgl. [Plücker 1830a, S. 154f], [Müller 1910, S. 616] und [Klein 1926, S. 123]).

11.1.1. Plückers Dreieckskoordinaten

Plücker veröffentlichte seine Dreieckskoordinaten[342] zuerst 1829 in einem Artikel im 5. Band des Crelleschen Journals. Der Artikel trägt den Titel „Über ein neues Coordinatensystem“ ([Plücker 1830a][343]).

> „1. Es seien (Fig. 15)[344] $OO', OO'', O'O''$ drei gerade Linien, die irgend ein beliebiges Dreieck bilden, und p, q und r die Abstände irgend eines

[341] Gemeint ist die Zeit von 1828 - 1846. Vergleiche Kapitel 9.
[342] Plücker selbst spricht hier immer nur von seinen „neuen Coordinaten“; allerdings ist der – in der Literatur häufig verwendetete – Ausdruck „Dreieckskoordinaten“ sehr passend, so dass ich ihn hier auch benutzen werde.
[343] Schoenflies hat hier kleinere Flüchtigkeitsfehler verbessert.
[344] Siehe Abbildung 11.1.

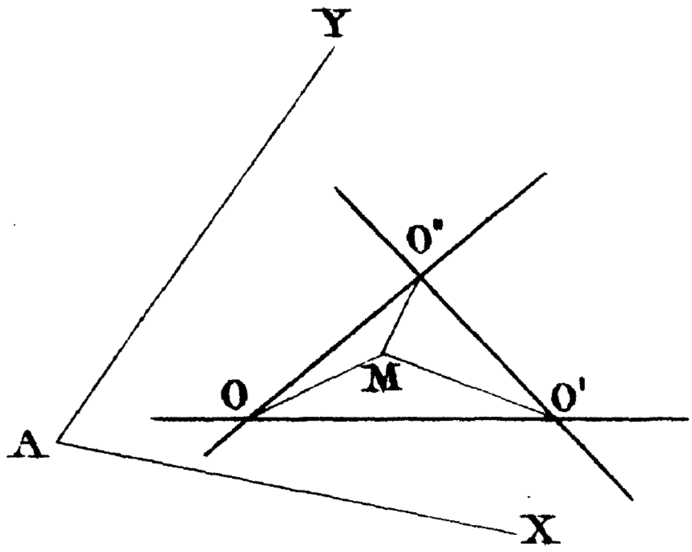


Abb. 11.1.: *Ueber ein neues Coordinatensystem* (1830), Fig. 15. Aus: [Plücker 1830a, S. 126]

beliebigen Punktes M von diesen geraden Linien. [...] Wir nehmen [...] für einen innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks $OO'O''$ liegenden Punkt M:

p positiv, q negativ, r negativ.

[...]
2. Wenn wir

$$\frac{q}{p} = \varphi, \qquad \frac{r}{p} = \psi$$

setzen, [...] [erhalten wir] für einen beliebig angenommenen Punct M [...] für φ und ψ bestimmte und einzige Werthe. [...]
Statt φ und ψ können wir auch

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{p}{q} = \mu, \qquad \frac{1}{\psi} = \frac{p}{r} = \nu$$

als die beiden veränderlichen Grössen betrachten. [...]
4. Wir können also φ und ψ oder auch μ und ν als *Coordinaten* ansehen, und demnach wollen wir O, O' und O'' den ersten, zweiten und dritten *Coordinatenpunct*, OO', OO'' und $O'O''$ die erste, zweite und dritte *Coordinatenlinie*, und endlich die Winkel $O''OO', OO'O''$ und $OO''O'$ oder α, α' und α'' den ersten, zweiten und dritten *Coordinatenwinkel* nennen.“

[Plücker 1830a, S. 126f]

Plücker führt hier also anstelle von zwei Koordinatenachsen drei solcher Achsen ein und betrachtet die Abstände von einem Punkt zu diesen Achsen. Einem Punkt M wird also ein Tripel (p, q, r) zugeordnet: die Abstände dieses Punktes von den drei Koordinatenachsen. Dabei sind die Abstände als gerichtete Größen zu betrachten und daher mit einem Vorzeichen versehen. „[...] Diese Zeichen ändern sich, wenn der Punkt M von einer Seite der bezüglichen Linien [...] auf die andere Seite hinüberrückt“ [Plücker 1830a,

S. 126]. Dieses Vorzeichen kann für jeden der drei Abstände p, q und r beliebig festgelegt werden.
Plücker argumentiert, dass diese Abstände p, q und r in Bezug auf ein „gewöhnliches System geradliniger Coordinaten" [Plücker 1830a, S. 126] linear sind und daher eine Gleichung vom m-ten Grad auch eine Kurve der m-ten Ordnung darstellt.

> „Wir werden uns in dem Folgenden nur auf solche Gleichungen beschränken, die in Beziehung auf p, q und r *homogen* sind, also auf Gleichungen von folgender Form:
>
> $$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-1}r + Dp^{m-2}q^2 + Ep^{m-2}qr + ... + Yqr^{m-1} + Zr^m = 0\text{“}$$
>
> [Plücker 1830a, S. 126]

Plücker sagt hier nicht, dass p, q und r selbst homogen sind; er spricht nur von den Gleichungen zwischen p, q und r. Tatsächlich kann man p, q und r als homogene Koordinaten betrachten – in sofern ist es korrekt zu sagen, dass Plücker in diesem Aufsatz homogene Koordinaten eingeführt habe. Allerdings muss dafür geklärt werden, wie das (Koordinaten-)Tripel $[\lambda p, \lambda q, \lambda r]$ für einen Punkt mit den Abständen p, q und r zu den Koordinatenachsen geometrisch gedeutet werden kann. Es wäre beispielsweise möglich, die Multiplikation mit λ als eine Veränderung der Einheit zu deuten. Allerdings muss festgehalten werden, dass Plücker selbst diese Deutung nicht vorstellt und p, q und r hier auch nicht als Koordinaten auffasst. Stattdessen führt er die Quotienten $\varphi = \frac{q}{p}$ und $\psi = \frac{r}{p}$ als Koordinaten ein. In diesem Zusammenhang ist es beachtenswert, wie Plücker die Konstruktion eines Punktes mit gegebenen Koordinaten φ und ψ beschreibt:

> 5. Der Werth von φ und μ ist derselbe für alle Punkte einer und derselben durch O gehenden geraden Linie, und ebenso ist ψ und ν constant für alle Punkte einer durch O' gehenden geraden Linie. Es sind demnach
>
> $$\varphi = \text{const.}, \ \mu = \text{const.},$$
>
> Gleichungen einer durch O, und
>
> $$\psi = \text{const.}, \ \nu = \text{const.},$$
>
> Gleichungen einer durch O' gehenden geraden Linie. *Während wir also in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme geometrische Oerter durch den Durchschnitt zweier, den Coordinatenaxen paralleler gerader Linien construiren, construiren wir in dem neuen Coordinatensysteme geometrische Oerter durch den Durchschnitt zweier, durch zwei feste Punkte O und O' gehenden geraden Linien.*"[345]
>
> [Plücker 1830a, S. 127f]

Bei dieser Konstruktion wäre es möglich, statt p, q und r als exakte Abstände einzuführen, direkt zu den Abständen proportionale Werte p', q' und r' zu definieren (also $p' : q' : r' = p : q : r$) und dann aus ihnen die Quotienten zu bilden. Obwohl Plücker

[345]Hervorhebung im Original.

diese Vorgehensweise nie explizit wählt, scheint sie doch durch die oben angegebene Konstruktion und die Tatsache, dass er p, q und r selbst nicht als Koordinaten bezeichnet, implizit gedacht zu sein. Zumindest liegt eine solche Deutung sehr nahe.
Leider lässt sich nicht mehr feststellen, wie Plücker zur Idee seiner Dreieckskoordinaten kam. Er bemerkt später lediglich, dass ihm der Gedanke die

> „Constanten in der Gleichung einer geraden Linie als die Coordinaten dieser Linie zu betrachten, [...] um so näher [lag], da [er sich][...] bereits schon allgemeinere Begriffe über Coordinaten-Systeme gebildet und auch [...] einen Aufsatz über ein neues Coordinaten-System geliefert hatte."

[Plücker 1831, S. VII]

Außerdem nennt er die Dreieckskoordinaten im „System ..." (1835) als Spezialfall seiner allgemeinen Koordinaten-Bestimmung und gibt an, dass sie der erste Versuch gewesen seien, „den Begriff der gewöhnlichen Coordinaten-Bestimmung zu erweitern" [Plücker 1835, S. 7, Fußnote]. Dort erwähnt Plücker auch, dass er Möbius' „Barycentrischen Calcul" zwar bereits kannte, aber – zu diesem Zeitpunkt – keinen Zusammenhang zu seinen Dreieckskoordinaten sah.
Möglicherweise kannte Plücker eine Arbeit Étienne Bobilliers[346] in der dieser für die Betrachtung von Kegelschnitten die Gleichungen dreier beliebiger Geraden eines Dreiecks verwendete (vgl. [Schoenflies 1895, S. 599]).

> „Zeitlich liegt also das Erscheinen des *Bobillier*'schen Aufsatzes ungefähr ein Jahr vor dem Erscheinen der *Plücker*'schen Abhandlung; jedoch kann nach der ganzen Anlage von *Plücker*'s Abhandlung kaum ein Zweifel sein, dass *Plücker* zu seinen Ideen selbständig gekommen ist. Aber wie dem auch sei, so ist trotz der vorhergehenden *Bobillier*'schen Publication doch *Plücker* als der eigentliche Begründer der Methode der homogenen Coordinaten hinzustellen. Denn es fehlt in der *Bobillier*'schen Arbeit vollständig die Erkenntniss, dass man es hier mit einer weittragenden Methode *allgemeiner* Coordinatenbestimmung zu thun hat, was bei *Plücker* den eigentlichen Ausgangspunkt bildet; gerade das Bewusstsein von der Allgemeinheit seiner Methoden, sowie die umfassende Anwendung, die er von ihnen macht, geben seiner Arbeit ihren hervorragenden Werth und rechtfertigen es, die wissenschaftliche Entwicklung der modernen analytischen Geometrie an seinen Namen zu knüpfen."

[Schoenflies 1895, S. 599]

Während es sich also einerseits nicht mehr nachvollziehen lässt, wie Plücker konkret zur Idee der Dreieckskoordinaten kam, liegt es andererseits auf der Hand, dass er bestrebt war „den Begriff der gewöhnlichen Coordinaten-Bestimmung zu erweitern" [Plücker 1835, S. 7, Fußnote]. Dieses Bestreben passt – wie oben bereits dargestellt wurde – genau zu Plückers Vorstellung einer allgemeinen analytischen Methode. Daher ist es auch nicht verwunderlich, dass ihm schon zu diesem Zeitpunkt klar war, dass

[346] (1798 - 1840) Es handelt sich hier um einen Aufsatz in Gergonne's Annales de Mathématiques, Bd. 18, S. 320ff (1828).

> „jeder besonderen Art die Lage eines Punktes in Beziehung auf Punkte oder Linien, die als der Lage nach bekannt angesehen werden, zu bestimmen, [...] ein Coordinatensystem [entspricht].“

[Plücker 1830a, S. 124]

Damit ist schon eine Intention Plückers, die er mit der Behandlung dieses Koordinatensystems verfolgte, angesprochen. In der Verwendung verschiedener Koordinatensysteme liegt die Möglichkeit gegebene analytische Ausdrücke verschieden zu deuten. In diesem Sinn ist der Gebrauch der Dreieckskoordinaten für Plücker eine „neue Methode“. In den einleitenden Bemerkungen zu diesem Aufsatz gibt Plücker an, er habe

> „[...] nur die Absicht gehabt, an Beispielen zu zeigen, dass die neue Methode einerseits zum Beweise vorgelegter Sätze und zur Darstellung allgemeiner Theorieen sich sehr geschmeidig zeigt, und dass sie andrerseits Resultate finden lehrt, wenn man sie aus allgemeinen analytischen Gesichtspunkten betrachtet. [Des Autors] Hauptaugenmerk war nur auf die Methode, aber keineswegs darauf gerichtet, neue Sätze zu geben.“

[Plücker 1830a, S. 125]

Plückers Fokus bei der Einführung der neuen Koordinaten lag auf ihrer Anwendung zur Darstellung von Kurven verschiedenen Grades. Bereits im zweiten Satz der einleitenden Bemerkungen wird dies deutlich:

> „Die Gleichung einer Curve, bezogen auf irgendein Coordinatensystem, ist als die algebraische Aussage einer dieselbe charakterisirenden Eigenschaft, aus der sich alle übrigen Eigenschaften derselben herleiten lassen, anzusehen. Was die Leichtigkeit der Herleitung betrifft, so kommt offenbar sehr viel auf die Wahl derjenigen Eigenschaft, welche an die Spitze der Untersuchungen gestellt wird, und mithin auf die Wahl des Coordinatensystems an.“

[Plücker 1830a, S. 124]

Auch bei der Einführung der Koordinaten wird direkt die Gleichung einer Kurve m-ten Grades aufgestellt, noch bevor die Koordinaten φ und ψ zum ersten Mal erwähnt werden. Auch wenn Plücker sagt, dass sich für einen Punkt M „bestimmte und einzige Werte“ φ und ψ ergeben (vgl. [Plücker 1830a, S. 127]), scheint dies nicht der eigentliche Grund zu sein, warum er sie als Koordinaten ansieht. Vielmehr betont er, dass sich zwischen φ und ψ eine Gleichung des m-ten Grades aufstellen lässt, welche „*alle möglichen Linien der* m^{ten} *Ordnung darstellen*“[347] kann (vgl. [Plücker 1830a, S. 127]). Aus diesem Motiv ergibt sich sofort der Grund, warum Plücker nur in Bezug auf die Gleichungen von Homogenität spricht, aber nicht thematisiert, wie diese Homogenität in Bezug auf p, q und r zu deuten ist.
Ebenfalls schon in den einleitenden Bemerkungen geht Plücker auf verschiedene Vorzüge ein, welche die Dreieckskoordinaten im Vergleich zu „gewöhnlichen“ Koordinaten

[347] Hervorhebung im Original.

haben. Als ersten Vorteil nennt Plücker, dass durch geeignete Annahme der Koordinatenpunkte mehr Konstanten in der Gleichung einer Kurve entfallen können, als das bei den gewöhnlichen Koordinaten möglich ist. In letzterem kann lediglich das konstante Glied aus der Gleichung einer Kurve entfallen. Legt man aber die drei Koordinatenpunkte des Koordinatendreiecks in eine Kurve beliebiger Ordnung, so entfallen drei Konstanten aus der Gleichung dieser Kurve (vgl. [Plücker 1830a, S. 124]). Exemplarisch verdeutlicht Plücker dies an den Kegelschnitten[348]:

> „Die allgemeine Gleichung der Linien dieser Ordnung [d.i. der zweiten] sei folgende:
>
> $$Ap^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0 \tag{1}$$
>
> mit der nach unserer Bezeichnung folgende identisch sind:
>
> $$A + 2B\varphi + 2C\psi + D\psi^2 + 2E\varphi\psi + F\psi^2 = 0, \tag{2}$$
> $$A\mu^2\nu^2 + 2B\mu\nu^2 + 2C\mu^2\nu + D\nu^2 + 2E\mu\nu + F\mu^2 = 0 \tag{3}$$
>
> Wenn wir die Voraussetzung machen, dass die Curve durch den Punkt O gehe, so muss die Gleichung (1) befriedigt werden, wenn man zugleich $p = 0$ und $q = 0$ setzt, woraus ersichtlich ist, dass alsdann $F = 0$. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass $D = 0$, wenn die Curve durch den Punkt O', und dass $A = 0$, wenn sie durch den Punkt O'' geht. In dem Falle also, dass die Curve durch alle drei Punkte O, O' und O'' zugleich geht, erhalten wir statt (1), (2) und (3) nun folgende Gleichungen:
>
> $$Bpq + Cpr + Eqr = 0, \tag{4}$$
> $$B\varphi + C\psi + E\varphi\psi = 0, \tag{5}$$
> $$B\nu + C\mu + E = 0. \tag{6}$$
>
> [...] Wir können also jede Linie zweiter Ordnung durch eine Gleichung vom ersten Grade ausdrücken, wenn wir die drei Coordinatenpunkte auf dem Umfange derselben annehmen. Hiernach ergiebt sich auf die leichteste Weise die Discussion der Eigenschaften solcher Linien zweiter Ordnung, die durch dieselben drei Punkte gehen. Zwei solche Linien können sich, was die lineare Form ihrer Gleichungen zeigt, nur noch in einem einzigen Punkte schneiden.
> Da die Gleichung (6) dieselbe Form hat als die Gleichung der geraden Linie in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, so ist offenbar, dass jedem Satze über die Durchschnitte von geraden Linien ein Satz über die vierten Durchschnitte von Linien zweiter Ordnung, die sich in denselben drei Punkten schneiden, entspricht, und aus jeder analytischen Beweisführung eines jener Sätze ergiebt sich unmittelbar der Beweis des analogen Satzes, wenn

[348] „Zur Theorie der Linien zweiter Ordnung“ [Plücker 1830a, S. 131f]. Bobillier hatte 1828 bereits die Geraden eines Dreiecks für die Betrachtung von Kegelschnitten verwendet (vgl. [Schoenflies 1895, S. 599] sowie Fußnote 346).

> wir den Constanten in der linearen Gleichung diejenige Bedeutung geben, welche sie in der Gleichung (6) haben.“
>
> [Plücker 1830a, S. 131f]

Wie in Kapitel 10.2 dargestellt wurde, spricht Plücker in einer späteren Veröffentlichung von „den verschiedenen Uebertragungs-Principen“, die der „allgemeine Begriff der Coordinaten“ in sich einschließt [Plücker 1835, S. VII]. Hier liefert er ein erstes Beispiel für ein Übertragungsprinzip, bei dem ein analytischer Ausdruck unterschiedliche geometrische Sätze ergibt, je nachdem, wie die darin enthaltenen Variablen und Konstanten jeweils gedeutet werden. Allerdings gibt Plücker an dieser Stelle kein Beispiel für eine solche Übertragung eines Satzes „über die Durchschnitte von geraden Linien“ auf Kegelschnitte an. Der hier vorgestellte Gedanke steht aber in engem Zusammenhang zu der Reziprozität zwischen Geraden und Kegelschnitten[349], die Plücker ebenfalls in diesem Artikel behandelt ([Plücker 1830a, S. 149ff]).
Ein mögliches Beispiel für einen Satz über Durchschnitte von Geraden ist der Satz von Pappos-Pascal, den Plücker 1831 im zweiten Band seiner „Entwicklungen“ unter Verwendung von Linienkoordinaten beweist[350]:

> *„Wenn irgend zwei gerade Linien und auf jeder derselben drei Puncte, auf der einen die Puncte A, B, C auf der andern A', B', C' gegeben sind, so schneiden sich die drei Linien-Paare AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' $B'C$ in solchen drei Puncten S, S', S'', die in gerader Linie liegen.“*
>
> [Plücker 1831, S. 18]

Dieser Satz lautet übertragen auf Kegelschnitte, die sich in drei festen Punkten schneiden:
Es seien zwei beliebige Kegelschnitte gegeben, die sich in vier Punkten schneiden, von denen drei, O, O' und O'', als Koordinatenpunkte gewählt werden. Außerdem sind auf den beiden Kegelschnitten je drei Punkte, A, B, C bzw. A', B', C' gegeben. Legt man je einen weiteren Kegelschnitt durch die drei Koordinatenpunkte und die Punkte A, B' sowie B, A'; A, C' sowie C, A', B, C' sowie C, B', so schneiden sie sich paarweise in den vierten Punkten S, S' und S'', welche mit den Koordinatenpunkten auf einer Linie zweiter Ordnung liegen.
Der zu dem Satz von Pappos-Pascal duale Satz, kann ebenfalls auf Kegelschnitte übertragen werden. Plücker hatte diesen Satz 1828 unter Benutzung von Punktkoordinaten im ersten Band seiner „Entwicklungen“ bewiesen:

> „Wenn zwei Puncte Q und P gegeben sind, und wir legen durch jeden dieser Puncte drei beliebige, unbestimmt verlängerte, gerade Linien, die wir durch I, II, III und $1, 2, 3$ bezeichnen wollen, so schneiden sich I und 2, II und 1 in zweien Puncten M'' und $M_{''}$; ferner schneiden sich I und 3, III

[349] Vgl. dazu Kapitel 12.
[350] Vgl. dazu Kapitel 11.2.

> und 1 in M' und $M_\prime$ und endlich II und 3 und III und 2 in M° und $M_\circ$. Ziehen wir nun die geraden Linien $M''M_{\prime\prime}$, $M'M_\prime$ und $M^\circ M_\circ$, *so vereinigen alle drei sich in demselben Puncte*, in R.“
>
> [Plücker 1828, S. 33]

Daraus ergibt sich folgender Satz für Kegelschnitte, die sich in drei festen Punkten scheiden:
Nimmt man je drei Kegelschnitte durch die Punkte O, O', O'' und Q sowie O, O', O'' und P, welche durch I, II, III und $1, 2, 3$ bezeichnet sein sollen, so schneiden sich I und 2, II und 1 zusätzlich in je einem vierten Punkt M'' und $M_{\prime\prime}$; die Kegelschnitte I und 3, III und 1 schneiden sich in vierten Punkten M' und $M_\prime$ und II und 3 und III und 2 in M° und $M_\circ$. Legt man drei weitere Kegelschnitte jeweils durch die Punkte O, O', O'' und $M''M_{\prime\prime}$, $M'M_\prime$ sowie $M^\circ M_\circ$, so haben alle drei Kegelschnitte auch einen vierten Punkt, R, gemeinsam.
Allerdings lässt sich die jeweils von Plücker angegebene „analytische Beweisführung“ dieser Sätze nicht direkt auf den Beweis der analogen Sätze übertragen, da Plücker den ersten Beweis mit Linienkoordinaten führt und im zweiten Beweis eine Koordinatenannahme trifft, die sich nicht übertragen lässt. Dadurch, dass er die Koordinatenachsen durch die beiden Punkte Q und P legt und R als Koordinatenursprung wählt, fällt aus den Gleichungen der Geraden $M''M_{\prime\prime}$, $M'M_\prime$ und $M^\circ M_\circ$ das konstante Glied heraus; aus den Gleichungen der Kegelschnitte kann aber kein Glied mehr entfernt werden, da bereits alle drei Koordinatenpunkte auf der Kurve liegen[351]. Unter der Voraussetzung, dass ein Beweis keine speziellen Annahmen über die Lage des Koordinatensystems trifft, ist es aber möglich, die Beweisführung direkt zu übertragen, indem die Bedeutung der Konstanten und Variablen geändert wird. Allerdings wird es in der Regel leichter sein die Möglichkeit eines solchen Beweises zu erkennen, als ihn durchzuführen[352].
Als zweiten Vorteil seiner Methode gibt Plücker an,

> „[...] dass für die Curven aller Ordnungen sich Gleichungen ergeben, die in Beziehung auf drei Veränderliche (p, q, r) *homogen* sind, wonach die geometrische Interpretation des Theorems *über die homogenen Funktionen* unmittelbar die Gleichung der Tangente und osculirender Curven für jeden Punkt der Curve liefert, u. s. w.“
>
> [Plücker 1830a, S. 124f]

In seiner Gedächtnisrede über Plücker nennt Clebsch genau diesen Punkt im Zusammenhang mit Plückers Dreieckskoordinaten:

[351] Vgl. dazu Kapitel 11.2; dort werden beide Beweise wiedergegeben und ebenfalls die Frage einer direkten Übertragung eines analytischen Beweises thematisiert. Dort in Bezug auf Beweise in Punkt- bzw. Linienkoordinaten bei zueinander dualen Sätzen.

[352] Vgl. dazu auch [Plücker 1830b, S. 172ff]. Dort übertragt Plücker Beweise für Sätze über gerade Linien, welche er mit abgekürzten Ausdrücken führt, auf Sätze von Kurven beliebiger Ordnung, indem er die abgekürzten Ausdrücken nicht mehr als lineare Ausdrücke, sondern als Ausdrücke eines höheren Grads auffasst. „Wenn ein solches Beweisschema vorliegt, so können wir dasselbe auf Linien jeder beliebigen Ordnung beziehen. Wir können hiernach, *die Möglichkeit eines solchen Schemas vorausgesetzt,* auch ohne dass ein solches vorliegt, aber allerdings mit einiger Vorsicht, jeden Satz der linearen Situationsgeometrie auf Linien jedes beliebigen Grades übertragen.“ [Plücker 1830b, S. 173].

> „Mit Hülfe dieser Coordinaten [d. s. die Dreieckskoordinaten] konnte Plücker unter Benutzung des Fundamentaltheorems der homogenen Functionen insbesondere den Gleichungen der Tangente und des Berührpunktes ihre endgültige Form geben [...].“

[Clebsch 1872, S. XXI]

Einen Zusammenhang zwischen der Einführung der homogenen Koordinaten und der projektiven Geometrie erwähnt Clebsch in der Gedächtnisrede nicht. Aus moderner Sicht, und auch im Vergleich zu Möbius, ist die Frage, ob und inwieweit Plücker einen Zusammenhang gesehen hat aber sehr interessant. Wie oben dargestellt wurde, ermöglichen homogene Koordinaten die Darstellung der Fernpunkte, so dass eine analytische Behandlung der projektiven Geometrie aus moderner Sicht gar nicht ohne homogene Koordinaten möglich ist. Tatsächlich war Plücker sich darüber im klaren, dass seine Dreieckskoordinaten die Darstellung „unendlich ferner“ geometrischer Objekte, durch „endliche Größen“ ermöglichten. Plücker äußert sich dazu wie folgt:

> „Die allgemeine analytische Methode, und die Methode, die Herr Poncelet in seinem *„Traite des proprietes projectives“* entwickelt hat, beruhen auf der einen Seite auf ganz wesentlich verschiedenen Ideen, und stimmen doch auf der andern Seite so sehr in den Resultaten überein, dass man, freilich sonderbar genug, die erste Methode als eine Periphrase, als ein Plagiat der zweiten hie und da betrachtet zu haben scheint, statt dass man sich ruhig die Frage beantworten sollte, ob nicht ein nothwendiger Grund dieser Uebereinstimmung vorhanden und wo derselbe zu suchen sei. Auch ich bin von dieser Uebereinstimmung mehrmals überrascht worden: einige Beispiele hiervon bietet auch das Folgende dar. So erscheint es mir z.B. bemerkenswerth, dass wir in dem neuen Coordinatensystem ebenfalls auf jenen Satz hingeleitet werden, der in der Poncelet'schen Methode eine grosse Rolle spielt, „dass nämlich alle Puncte einer Ebene, die unendlich weit entfernt sind, in gerader Linie liegen“, und wir überdies diese unendlich weit entfernte gerade Linie durch eine Gleichung zwischen endlichen Größen darstellen können.“

[Plücker 1830a, S. 125]

Wenn Plücker hier davon spricht, dass „die allgemeine analytische Methode“ hier und da als eine Umschreibung oder gar ein „Plagiat“ der Poncelet'schen Methode betrachtet worden sei, dann bezieht er sich möglicherweise auf den Konflikt mit Poncelet bezüglich der Artikel Plückers, die in Gergonne's Journal veröffentlicht wurden[353].

Poncelet wollte die Geometrie möglichst allgemein behandeln. Spezialfälle, wie parallele Geraden, wurden durch die Einführung von „Fernpunkten“ aufgehoben; ebenso wurden durch die Einführung von „imaginären Punkten“ die Spezialfälle aufgehoben, bei denen geometrische Objekte keine Schnittpunkte haben (z.B. „schneiden“ sich zwei Kreise, die keine reellen Punkte gemeinsam haben in solchen „imaginären Punkten“)[354]. Poncelet ging dabei rein synthetisch (oder rein „construktiv“) vor, er benutzte also keine

[353] Vgl. Kapitel 12.2.

[354] Zu Poncelets „Prinzip der Kontinuität oder Permanenz der mathematischen Beziehungen der figurierten Größe“ vgl. [Paul 1980, S. 272 u. Kap. IV.2.2].

Koordinaten. Die „imaginären Punkte“ sind daher auch nicht als Punkte im $\mathbb{C}^2$, also als Punkte mit imaginären Koordinatenwerten, zu verstehen. Die Verwendung von Zahlen in der Geometrie lehnte Poncelet ab.
Plücker verfolgte ein ähnliches Ziel wie Poncelet, aber nicht auf synthetischem, sondern auf analytischem Weg. Es ist daher sicher nicht so verwunderlich, dass tatsächlich viele Parallelen zwischen Poncelets und Plückers Arbeiten bestehen, obwohl Plücker wohl nicht direkt von Poncelet beeinflusst wurde.
Obwohl Plücker hier also diese sinnvolle und interessante Frage nach dem Zusammenhang oder verbindenden Element dieser verschiedenen Methoden stellt, hat es den Anschein, dass er die Antwort zu dieser Frage noch nicht gefunden hatte. Das zeigt sich nicht nur darin, dass er keine solche Erklärungsmöglichkeit angibt, sondern auch in seiner Formulierung, dass er von „diesen Übereinstimmungen mehrmals überrascht worden“ sei.
Wie Plücker den erwähnten Satz über die Fernpunkte mit seinen Dreieckskoordinaten herleitet, soll im Folgenden gezeigt werden (vgl. [Plücker 1830a, S. 130f]).
Plücker betrachtet zwei parallele Geraden, welche er durch die Koordinatenpunkte O und O' legt, und durch den Winkel ω, den sie mit der ersten Koordinatenlinien OO' bilden, beschreibt. Für diese beiden Geraden ergeben sich die Gleichungen:

$$p\,\sin(\alpha-\omega)+q\,\sin\omega=0$$
$$p\,\sin(\alpha'+\omega)-r\,\sin\omega=0.$$

Dabei bezeichnen α und α' den ersten und zweiten Coordinatenwinkel. Gemäß seiner schon in [Plücker 1828] angewandten Methode sieht Plücker „in jeder dritten Gleichung, die eine algebraische Folge zweier gegebenen ist, einen neuen geometrischen Ort, der die Durchschnitte der, durch die beiden gegebenen Gleichungen dargestellten, Oerter enthält, und dessen Natur von der Form der resultierenden Gleichung abhängt.“ [Plücker 1828, Vorrede, S. III] In diesem Fall erhält Plücker durch verschiedene Umformungen und Verwendung von trigonometrischen Sätzen die lineare Gleichung:

$$p\,\sin\alpha''-q\,\sin\alpha'-r\,\sin\alpha=0$$

bzw.

$$\varphi\,\sin\alpha'+\psi\,\sin\alpha=\sin\alpha'';$$

α'' bezeichnet dabei den dritten Koordinatenwinkel. Da aus dieser Gleichung der Winkel ω herausfällt, ergibt sich dieselbe Gleichung für jedes Paar paralleler Geraden durch O und O'.

> „Es stellen also die beiden letzen Gleichungen nur solche Punkte dar, die unendlich weit entfernt sind. Die lineare Form dieser Gleichung zeigt, *dass alle unendlich weit entfernten Punkte einer und derselben Ebene als in gerader Linie liegend zu betrachten sind.*“
>
> [Plücker 1830a, S. 130f]

In einer Fußnote weist Plücker noch einmal darauf hin, dass Poncelet diesen Satz in seinem *„Traité des propriétés projectives* aus der Theorie der Projektion herleitet und kommentiert:

> „Mir scheint es sehr bemerkenswerth, dass dieser Satz sich in unserm neuen Coordinatensysteme direct ergiebt und wir zugleich durch eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen und bestimmten Constanten jene (ideale) gerade Linie, die alle unendlich weit entfernten Punkte der Ebene enthält, darstellen können. *Hr. Ponclet* zieht aus diesem Satze wichtige Folgerungen: wir kommen unmittelbar zu denselben Folgerungen auf einem Wege, der gegen jeden Einwurf gesichert ist, indem wir auf die lineare Form der letzten Gleichung des Textes Rücksicht nehmen."

[Plücker 1830a, S. 131]

In dieser Aussage Plückers wird deutlich, dass er die analytische Methode der synthetischen oder rein konstruktiven, überlegen sah[355]. Zumindest sah er die analytischen Beweise als „sicherer" an.
Es ist auffällig, dass Plücker die Dreieckskoordinaten in seinen nachfolgenden Werken kaum noch erwähnt. Im zweiten Band der „Entwicklungen" von 1831 werden sie – abgesehen von der oben zitierten Bemerkung aus der Vorrede – gar nicht berührt. Im „System ..." (1835) behandelt Plücker die Dreieckskoordinaten noch einmal im Rahmen seiner „allgemeinen Koordinatenbestimmung". Auch wenn diese „allgemeine Koordinatenbestimmung" im Abschnitt 11.3 genauer betrachtet werden soll, möchte ich die Bemerkungen, die Plücker dort zu den Dreieckskoordinaten macht, schon an dieser Stelle thematisieren. Dabei soll besonders beleuchtet werden, wie Plücker in diesem Kontext die Multiplikation der drei Koordinaten[356] p, q und r mit einem unbestimmten Koeffizienten μ behandelt und welche Schlüsse sich daraus für die oben aufgeworfene Frage der Homogenität dieser drei Koordinaten ziehen lassen. Die Erwähnung der Dreieckskoordinaten beschränkt sich aber im Wesentlichen darauf, zu zeigen, dass sie einen Spezialfall der „allgemeinen Koordinaten" darstellen.
Im „System ..." (1846) erweitert Plücker die Dreieckskoordinaten auf den Raum. Diese Möglichkeit hatte er schon 1829 erwähnt, aber weil der „Aufsatz ohnedies schon einen so grossen Umfang gewonnen hatte" [Plücker 1830a, S. 126], dort nicht näher ausgeführt. Plücker wählt dort die vier Abstände eines Punktes zu vier Ebenen[357], multipliziert mit vier beliebigen Konstanten als Koordinaten. Neben dieser Möglichkeit, einem Punkt im Raum vier (homogene) Koordinaten zuzuordnen, erwähnt er auch die Möglichkeit, zu den drei Koordinaten eines Punktes überzugehen, indem die Quotienten dreier Abstände mit dem vierten Abstand gebildet werden (vgl. [Plücker 1846, S. 5]).
Dreieckskoordinaten als Spezialfall der allgemeinen Koordinatenbestimmung:

> „Ein besonderer Fall der allgemeinen Koordinaten-Bestimmung, dem wir eine besondere Aufmerksamkeit schenken müssen, ist derjenige, daß die gegebenen Winkel alle drei rechte sind.

[355] Zu Plückers Haltung zur analytischen und synthetischen Geometrie vgl. 8.2.2.

[356] Im Gegensatz zu [Plücker 1830a] spricht Plücker hier tatsächlich von den drei Koordinaten und nennt nicht mehr nur die Verhältnisse zwischen den drei Werten Koordinaten. Vgl. dazu auch die Abschnitte 11.2 und 11.3.

[357] Plücker wählt diese Ebenen beliebig: „Vier Ebenen werden von Vorn herein beliebig angenommen" [Plücker 1846, S. 5], ohne eine Ausnahme anzugeben. Allerdings muss – um eine Eindeutigkeit der Koordinatenbestimmung zu erreichen – ausgeschlossen werden, dass die Ebenen alle durch eine Gerade (oder einen Punkt) gehen, insbesondere also auch, dass die Ebenen zueinander parallel sind.

> „Wenn drei gerade Linien gegeben sind, so erhält man die drei Coordinaten eines gegebenen Punktes, wenn man, von diesem Punct aus, auf die drei gegebenen geraden Linien drei Perpendikel fällt.““

[Plücker 1835, S. 7]

Im Unterschied zu [Plücker 1830a] wählt Plücker die Vorzeichen der Koordinaten hier so, dass sie für einen Punkt im Inneren des Koordinatendreiecks alle drei positiv sind[358]. Im Folgenden untersucht Plücker die Relationen zwischen den Koordinaten (als exakten Abständen) und den Seitenlängen und Winkeln des Koordinatendreiecks. Dabei führt er die Konstante k als Produkt aus einer Seitenlänge und den Sinussen der beiden angrenzenden Winkeln ein.

> „10. Wenn wir die Länge der drei Seiten des von den drei Coordinaten-Axen gebildeten Dreiecks R, Q und P und den Inhalt desselben Δ nennen, so erhalten wir [...] zwischen den drei Coordinaten-Werthen r, q und p irgend eines beliebigen Punctes die nachstehende Relation:
>
> $$Rr + Qq + Pp = 2\Delta \tag{8}$$
>
> Nennen wir ferner die den drei Seiten R, Q und P gegenüberliegenden Winkel des fraglichen Dreiecks $(\rho), (\kappa)$ und (π), so ist offenbar
>
> $$Rsin(\pi)sin(\kappa) = Qsin(\pi)sin(\rho) = Psin(\kappa)sin(\rho)$$
>
> und wenn wir diese einander gleichen Ausdrücke der Kürze halber, gleich k setzen,
>
> $$2\Delta sin(\rho)sin(\kappa)sin(\pi) = k^2.$$
>
> Hiernach geht die Gleichung (8), wenn wir alle Glieder derselben zuvörderst mit $sin(\rho)sin(\kappa)sin(\pi)$ multipliciren und dann durch k dividieren, in die folgende über:
>
> $$rsin(\rho) + qsin(\kappa) + psin(\pi) = k.“ \tag{9}$$

[Plücker 1835, S. 7f]

Diese Gleichung ermöglicht es jetzt, für jedes Koordinaten-Tripel $[\mu p, \mu q, \mu r]$, bei dem $p, q,\ r$ die exakten Abstände bezeichnen, die geometrische Konstruktion des Punktes vorzunehmen.

> „[...] So zum Beispiel ändert sich offenbar, wenn wir die von einem Puncte auf die drei Axen gefällten, und mit ein und demselben constanten Coefficienten μ multiplicirten Perpendikel, statt der bloßen Perpendikel, durch r, q und p bezeichnen, in der Gleichung (9) offenbar nur der zweite Theil,

[358] Hier ist es bzgl. der Frage von Plückers Auffassung der „Homogenität“ dieser Koordinaten interessant zu bemerken, dass er nicht sagt, dass für einen Punkt im Inneren alle drei Koordinaten mit dem gleichen Vorzeichen behaftet würden, sondern sogar im Gegenteil dazu bemerkt, dass „[...] für keinen Punct [..] die drei Coordinaten zugleich negativ“ seien [Plücker 1835, S. 7].

und wir erhalten statt derselben, inden wir $k' = \frac{k}{\mu}$ setzen,[359] folgende Gleichung:

$$rsin(\rho) + qsin(\kappa) + psin(\pi) = k'.$$

So lange $k' < k$ und demnach $\mu > 1$,[360] können wir die drei durch diese neue Gleichung bezeichneten Coordinaten als gerade Linie construiren, welche, von dem bezüglichen Puncte aus, nach jeder der drei, unverändert gebliebenen Axen, unter demjenigen constanten Winkel δ gelegt werden, der durch die Gleichung $sin\ \delta = \frac{1}{\mu}$ gegeben ist."

[Plücker 1835, S. 9]

Im weiteren gibt Plücker eine zweite, daraus abgeleitete Möglichkeit der Konstruktion an. Dafür bildet er die Gleichung

$$\frac{r}{r'} + \frac{q}{q'} + \frac{p}{p'} = 1$$

her, in der r', q' und p' die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Achsen bezogen auf die dritte Achse bedeuten.

„In dieser Gleichung [...] sind r', q' und p' gegebene Größen. Wenn wir also von dem Durchschnitte der beiden Axen $q = 0$ und $p = 0$ eine, der gegebenen Größe r' gleiche, gerade Linie nach der dritten Axe $r = 0$ legen, so ist diese gerade Linie die Coordinate jenes Durchschnittes, und für irgend einen andern gegebenen Punct erhalten wir hiernach die entsprechende Coordinate, wenn wir, parallel mit der eben construirten geraden Linie, von dem gegebenen Puncte aus, nach der bezüglichen Axe: $r = 0$, eine neue gerade Linie legen. Und ganz auf gleiche Weise können wir vermittelst der beiden andern gegebenen Größen q' und p' diejenigen Richtungen bestimmen, nach denen wir, von dem gegebenen Puncte aus, gerade Linien nach den bezüglichen Axen legen müssen, damit diese geraden Linien die Coordinaten q und p jenes Punctes darstellen."

[Plücker 1835, S. 9]

In beiden Fällen ist der durch das Tripel $[\mu q, \mu q, \mu r]$ gegebene Punkt offensichtlich nur dann konstruierbar, wenn $\mu > 1$ ist. Da p, q und r bereits als die Abstände des Punktes zu den Achsen definiert sind, kann ein Kreis mit einem kleineren Radius folglich keinen (reellen) Schnittpunkt mit der Koordinatenachse haben.

[359] Plücker gibt hier an, dass er die drei Koordinaten r, q und p durch $\mu r, \mu q$, und μp ersetzt. Er multipliziert also den linken Teil der Gleichung (9) mit μ. Daher müsste der rechte Teil der Gleichung ebenfalls mit μ multipliziert werden. Demzufolge ist die Setzung $k' = \frac{k}{\mu}$ falsch. Es müsste stattdessen $k' = k \cdot \mu$ heißen.

[360] Mit der in Fußnote 359 angegebenen, richtigen Setzung $k' = k \cdot \mu$ muss hier für $\mu > 1$ auch $k' > k$ sein.

Plückers Dreieckskoordinaten – Fazit

In [Plücker 1830a] führt Plücker die Dreieckskoordinaten als exakte Abstände eines Punktes zu den Seiten eines Dreiecks ein. In diesem Zusammenhang benutzt Plücker den Begriff „Koordinaten“ aber nur für die Quotienten zwischen diesen Werten. Im Kontext der „allgemeinen Koordinaten“ spricht Plücker dann auch von drei Koordinaten eines Punktes in der Ebene. Außerdem erläutert er, in welcher Weise man diese Koordinaten als homogene Koordinaten auffassen kann – ohne aber explizit den Begriff „homogen“ zu benutzen[361]. Diesen Begriff verwendet Plücker nur in Bezug auf die Gleichungen zwischen diesen Koordinaten. Den Zusammenhang zwischen homogenen Koordinaten und projektiver Geometrie spricht Plücker (implizit) über den Vergleich mit der „Poncelet'schen Methode“ an. Explizit wird dieser Zusammenhang aber nicht genannt. Die Möglichkeit, die unendlich ferne Gerade analytisch zu beschreiben, wird auch nicht als einer der Vorteile der Methode aufgeführt. Das Konzept einer „projektiven Geometrie“ (vor allem in Abgrenzung zur affinen oder euklidischen Geometrie) hatte Plücker nicht.
Die Dreieckskoordinaten passen genau in Plücker „allgemeine analytische Methode“ und liefern eine Möglichkeit, analytische Ausdrücke auf verschiedene Weisen zu deuten. Damit kann man sie als ein „Übertragungsprinzip“ verstehen.

11.1.2. Möbius' baryzentrische Koordinaten

Neben Plücker wird A. F. Möbius das Verdienst zugeschrieben, homogene Koordinaten in die analytische Geometrie eingeführt zu haben. Da die beiden unterschiedlichen Ansätze zur Einführung homogener Koordinaten, die Plücker und Möbius gewählt haben, auch in Bezug auf ihre Wurzeln und Wirkungen verglichen werden sollen, wird im Folgenden zuerst ein kurzer Überblick über Möbius' Biographie gegeben. Dabei soll der Fokus auf Möbius' mathematischer Ausbildung, den Besonderheiten seiner wissenschaftlichen Arbeitsweise und seiner Position im wissenschaftlichen Geschehen seiner Zeit liegen.

Biographisches zu August Ferdinand Möbius

August Ferdinand Möbius wurde am 17. November 1790 als Sohn von Johann Heinrich Möbius und Johanna Katharina Christiane Möbius geborene Keil, in Schulpforta geboren. Nach dem frühen Tod seines Vaters[362] wurde Möbius zuerst durch den Bruder seines Vaters, Daniel Friedrich Möbius, erzogen. Nach dessen Tod im Jahr 1804 ging die Vormundschaft an einen Schwager seiner Mutter, Christian August Nobbe, über. Bis 1803 erhielt Möbius Privatunterricht von Schülern der Fürstenschule in Schulpforta. In Sachsen gab es drei sogenannte Fürstenschulen, von denen die in Schulpforta um 1800 wohl als die bedeutendste galt; sie übernahmen die vor-universitäre Ausbildung ihrer Schüler (vgl. [Loh 1995, S. 7]). Einer der Privatlehrer von Möbius war Friedrich Wilhelm Thiersch (1784 - 1860). Aus einem Brief, den Möbius 1827 an Thiersch schrieb,

[361] Während „homogene Gleichungen“ eine übliche Sprechweise war, wäre der Ausdruck „homogene Koordinaten“ eine bewusste Neuerung gewesen.

[362] Häufig wird, der Angabe von [Baltzer 1885, S. III] folgend, 1793 als Todesjahr angegeben, was aber nach [Loh 1995, S. 9] nicht korrekt ist. Er gibt den 2. Januar 1792 als Todesdatum an und bezieht sich dabei auf *Clasen, Martin (ed.): Das neue Luther-Nachkommenbuch 1525 - 1960. Limburg an der Lahn 1960.*

Abb. 11.2.: August Ferdinand Möbius. URL: http://bit.ly/MoebiusJPG [12.11.14]

wird deutlich, dass Möbius schon damals besonderes Interesse an der Mathematik zeigte:

> „Der Gegenstand desselben [d. i. „Der barycentrische Calcul“] ist die Wissenschaft, zu der ich von den frühesten Jahren eine besondere Neigung hatte [...] Noch besitze ich das Heft, wo ich nach jedesmaliger Lehrstunde, – sie wurde blos Sonntags gehalten, die Wochentage waren für die alten Sprachen bestimmt, – das Vorgetragene sorgfältig einschrieb. Ich verheimlichte Ihnen aber das Heft, weil Sie nicht selten unwillig waren, daß ich über der Mathematik das Lateinische u. Griechische zu sehr vernachlässigte.“

[Loh 1995, S. 9]

Von 1803 - 1809 besuchte Möbius dann selbst die Fürstenschule in Schulpforta. Dort wurde der Mathematikunterricht, der „in sehr engen Grenzen gehalten“ wurde, von Johann Gottlieb Schmidt erteilt, „der seinen Schülern Liebe zum Gegenstand einzuflößen wußte.“ [ADB, Bd. 22, S. 38] Allerdings betrieb Möbius nebenher Selbststudien, die über das Schulpensum hinausgingen. Die ursprünglich in seinem Nachlass[363] vorhandenen Tagebücher (Diarien) und Schulhefte aus dieser Zeit zeigten, dass sich Möbius

[363] Möbius’ Nachlass wurde im Möbius-Archiv der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig gesammelt und archiviert. Leider verbrannte dieses Archiv beim Bombenangriff auf Leipzig 1943.

besonders mit Aufgaben zur analytischen Geometrie der Kegelschnitte beschäftigte [Reinhardt 1887, S. 701].
1809 begann Möbius – auf den Rat seines Vormunds Nobbe hin – ein Studium der Jurisprudenz an der Universität Leipzig. Bereits im nächsten Sommer folgte er aber seiner Vorliebe für die Mathematik und wechselte an die philosophische Fakultät. Dort studierte er bei Moritz von Prasse[364] Mathematik, ab 1811 Physik bei Ludwig Wilhelm Gilbert[365] sowie Astronomie bei Karl Brandan Mollweide[366]. Dieser war ab 1811 Observator der Sternwarte in Leipzig.
1811 wurde Möbius ein Stipendium zugespochen, welches ihm 1813/14 eine Studienreise zu Carl Friedrich Gauß[367] nach Göttingen ermöglichte. Dort beschäftigte er sich mit theoretischer und praktischer Astronomie. Möbius schätzte den Einfluss, den Gauß auf seine mathematische Bildung hatte, hoch ein, wie sich einem Brief, den er 1849 an Gauß richtete, entnehmen lässt:

> „Denn nicht allein, daß das Studium Ihrer Schriften und der mündliche Unterricht, der mir in meinen Jünglingsjahren von Ihnen zu Theil ward, meine mathematische Bildung mehr als alles Andere förderten, so sind es auch Ihre gütigen Beurtheilungen meiner etwaigen Leistungen und Ihre Empfehlungen gewesen, denen ich meine frühe Versorgung und nachherige Verbesserung meiner Verhältnisse hauptsächlich schuldig bin.“

[Loh 1995, S. 16]

Die Bemerkung über die „frühe Versorgung“ bezieht sich auf die Stelle als Observator an der Sternwarte in Leipzig, die Möbius 1816 antreten konnte. Gleichzeitig hatte er ab diesem Zeitpunkt auch eine außerordentliche Professur der Astronomie inne. In der Zwischenzeit hatte er in Halle eine – möglicherweise von Gauß vermittelte (vgl. [Loh 1995, S. 17]) – Lehrstelle am Pädagogium bekleidet. Dabei nutzte er auch die Gelegenheit, bei dem Mathematiker Pfaff Privatunterricht in höherer Mathematik zu nehmen. So konnte Möbius die Lücken seiner bisherigen mathematischen Ausbildung schließen, da von Prasse wohl z.B. Integralrechnung nicht gelesen hatte (vgl. [Loh 1995, S. 17]). Am 11. Dezember erfolgte Möbius' Promotion in Leipzig – allerdings ohne dass er dazu eine Dissertation eingereicht hätte – und am 19. April 1815 habilitierte er sich mit einer Schrift zur analytischen Behandlung von trigonometrischen Gleichungen. Bis zum Antritt der Stelle an der Sternwarte lehrte Möbius als Privatdozent in Leipzig (vgl. [Loh 1995, S. 21]). Mit der Berufung war eine Dienstantrittsreise zu den bedeutendsten Sternwarten Mitteleuropas in Gotha, Coburg, Nürnberg, Stuttgart, Tübingen, München, Wien, Ofen und Prag verbunden. Zurück in Leipzig bezog Möbius seine Dienstwohnung unterhalb der Sternwarte in der Pleißenburg, „die er während seines Lebens nicht wieder verlassen sollte“ [Baltzer 1885, S. VI].
Im Mai 1816 wurde Möbius das Ordinariat der Astronomie in Greifswald und im Dezember 1819 das der theoretischen und angewandten Mathematik in Dorpat angeboten.

Da nur von vereinzelten Dokumenten Abschriften an anderem Ort gelagert wurden, ist der Inhalt des größten Teils verloren. In [Reinhardt 1887] und in [Möbius 1885-87] gibt es Anmerkungen über den Nachlass und vereinzelte inhaltliche Angaben (vgl. [Loh 1995, S. 4]).
[364](1769 - 1814).
[365](1769 - 1824).
[366](1774 - 1825).
[367](1777 - 1855).

Beide Rufe lehnte Möbius ab, obwohl sie finanziell attraktiv waren und gerade das erste, sehr frühe Angebot, eine hohe Auszeichnung bedeutete. Dass Möbius in Leipzig blieb – und zwar ohne den Versuch, seine Einkünfte in Leipzig zu steigern (vgl. [ADB, Bd. 22, S. 40]) – spricht für seine Verbundenheit mit der Universität Leipzig und dem Land Sachsen. Als weitere Gründe werden im ersten Fall die Verpflichtung, die er gegenüber der sächsischen Regierung, die seine Ausbildung ermöglicht hatte, empfand und im zweiten seine Hochzeit (6. April 1820) vermutet (vgl. [Loh 1995, S. 27f]).
Da die Leipziger Sternwarte in einem sehr schlechten baulichen Zustand war, konnte Möbius die Zeit des Umbaus (1818 - 1821) für seine mathematischen Studien nutzen. Er führte wissenschaftliche Tagebücher, in denen sich die Vorarbeiten zu allen seinen großen und wichtigen Werken finden.

> „Möbius pflegte [...] bei seinen wissenschaftlichen Arbeiten zur vorläufigen Fixirung seiner Ideen und Rechnungen zunächst jedes leere Blatt, das ihm gerade zur Hand war, zu benutzen, dann aber die Resultate in erster zusammenhängender Bearbeitung alltäglich in ein Diarium einzutragen.“
>
> [Reinhardt 1887, S. 709]

Reinhardt gibt den Inhalt von zwei losen Blättern[368] wieder, welche sich in Möbius' Nachlass fanden, und die wohl Möbius' erste Ideen der Verwendung des Schwerpunkts in der Geometrie zeigen. Reinhardt vermutet, dass sie aus der Zeit vor 1818 stammen (vgl. [Reinhardt 1887, S. 707]). In Möbius' Nachlass fanden sich insgesamt elf Tagebücher, von denen das erste den Zeitraum von 1818 - 1821 umfasste. Dieses enthielt wohl bereits alle Ideen welche den Inhalt des baryzentrischen Kalküls ausmachen[369]. 1823 veröffentliche Möbius erste Ausschnitte seiner Arbeit als *„Zwei geometrische Aufgaben“* im Anhang zu seiner Schrift *„Beobachtungen auf der Königlichen Sternwarte zu Leipzig“*. Mit diesem etwas ungewöhnlichen Vorgehen – rein geometrische Aufgaben im Anhang einer astronomischen Schrift zu veröffentlichen – wollte Möbius zeigen, dass er die Zeit während des Umbaus der Sternwarte wissenschaftlich genutzt hatte (vgl. [Reinhardt 1887, S. 707]). Dieser Anhang enthält eine Darstellung der geometrischen Verwandtschaften sowie je eine Aufgabe zur „blossen Gleichheit“ und zur „Verwandtschaft bloss nach der geraden Linie“[370] (vgl. [Möbius 1823]). Zwei Lösungen zu der ersten Aufgabe, von Gauß und dem Astronom Thomas Clausen[371], wurden in Nummer 42 der, von dem Astronomen Heinrich Christian Schumacher[372] herausgegebenen, Astronomischen Nachrichten veröffentlicht (vgl. [Möbius 1827, XI]).

[368] Zu dem Inhalt dieser Blätter vgl. Abschnitt Einführung der baryzentrischen Koordinaten durch Möbius 1827.

[369] Baryzentrische Koordinaten und ihre Anwendung auf Geraden und Kegelschnitte; Grundlagen für die Lehre der Verwandtschaften; Doppelschnittverhältnisse; geometrische Netze. Reinhardt erwähnt die Dualität zwar nicht explizit, aber er schreibt: „Man kann daher mit Recht behaupten, dass die neuen Ideen, welche *Möbius'* barycentrischem Calcul sein specifisches Gepräge aufdrücken, bereits im Jahre 1821 vollkommen ausgebildet gewesen sind, und wird dieses Jahr für das eigentliche Geburtsjahr jenes Werkes zu halten haben.“ [Reinhardt 1887, S. 710].

[370] Im „Barycentrischen Calcul“ bezeichnet Möbius die „blosse Gleichheit“ oder „nur Gleichheit“ einfach als „Gleichheit“ und die „Verwandtschaft bloss nach der geraden Linie“ als „Kollineationsverwandtschaft“.

[371] (1801 - 1885).

[372] (1780 - 1850).

Mit dem Tod des Physikers Gilbert, 1824, und des Mathematikers Mollweide im folgenden Jahr wurden gleich zwei Ordinariate an der Universität Leipzig frei. Möbius bemühte sich um das Ordinariat der Mathematik, weil er, wie er Gauß später schreibt, „mehr Neigung zu den rein theoretischen Studien, als zu den praktischen Geschäften eines Astronomen habe.“ [Loh 1995, S. 33] Auch von Seiten der philosophischen Fakultät gab es Bemühungen, Möbius dieses Ordinariat zu verschaffen, wobei er die Anstellung als Observator behalten sollte. Man fürchtete nämlich, dass ihn ein Übergehen sehr kränken müsste, „da er diese Belohnung seiner Geschicklichkeit und seines Fleißes wohl verdient“ habe [Loh 1995, S. 32]. Möbius übernahm einen Teil der mathematischen Lehre und bemühte sich außerdem, seine mathematischen Arbeiten der letzten Jahre möglichst rasch zu veröffentlichen. Allerdings blieben seine Bemühungen ohne Erfolg. Anfang 1827 wurde das Ordinariat mit seinem ehemaligen Schüler Moritz Wilhelm Drobisch[373] besetzt.
1837 veröffentlichte Möbius das *„Lehrbuch der Statik“*, das als sein zweites großes Werk anzusehen ist und die geometrische Mechanik begründete (vgl. [Ziegler 1985, S. 39] und [Loh 1995, S. 144]). Möbius' astronomisches Hauptwerk erschien 1843 unter dem Titel *„Die Elemente der Mechanik des Himmels“*.
Möbius' finanzielle Situation in Leipzig war unverändert schlecht. Zeit seines Lebens musste er zur Ernährung seiner Familie Nebenverdienste hinzuziehen (vgl. [Loh 1995, S. 143]). 1844 nutzte Möbius einen Ruf nach Jena für Verhandlungen in Leipzig[374] und bat dort um die Ernennung zum ordentlichen Professor. Ein solches Ordninariat wurde dann auch eingerichtet, Möbius trat es im Oktober 1844 an. Es erhielt ein Jahr später auf Möbius Vorschlag hin die Bezeichnung „Höhere Mechanik und Astromomie“ (vgl. [Loh 1995, S. 49f]). Möbius starb am 26. September 1868 und wurde von der Universität Leipzig als „eines ihrer ältesten und berühmtesten Mitglieder“ geehrt; das Sächsische Ministerium drückte sein „Bedauern über den schweren Verlust“ aus [Loh 1995, S. 75].
Möbius' Bedeutung wurde von den Zeitgenossen oft nicht erkannt. Seine Hauptwerke und sonstigen Veröffentlichungen fanden zunächst nur eine schlechte Aufnahme (vgl. [Loh 1995, S. 145], [Wußing 1989, S. 339], [Klein 1926, S. 118f], [Schoenflies 1895, S. 599]). Clebsch schreibt diesen Umstand vor allem der Form zu, in der Möbius veröffentlichte:

> „Vielleicht darf man es der anspruchslosen Form zuschreiben, in welcher *Möbius* seine tiefen und neuen Gedanken veröffentlichte, dass ihr Inhalt und ihre Bedeutung gewöhnlich erst erfasst wurde, wenn andre Geometer der Reihe nach auf die von *Möbius* behandelten Momente durch die zwingende Nothwendigkeit des natürlichen Fortschritts der Wissenschaft geführt wurden.“

[Clebsch 1872, S. XX]

So berichtet Gauß beispielsweise in einem Brief an Schumacher, dass er:

> „[...] das Buch[375] von Möbius [...] mit einer Art Vorurtheil in die Hand genommen, nemlich mit dem Zweifel, ob es der Mühe werth sei, eine recht

[373](1802 - 1896).
[374]Loh spricht von einem inszenierten Ruf.
[375]Gemeint ist der „Barycentrische Calcul“.

> artig ausgesonnene Rechnungsweise, sich anzueignen, wenn man durch dieselbe nichts leisten könne, was sich nicht eben so leicht ohne sie leisten lasse. Ich hatte deshalb das Buch [...] zunächst auf die Seite gelegt, und später völlig vergessen.“

[Peters 1861, S. 147f]

Gauß hatte Möbius eigentlich eine Rezension in den „Göttinger gelehrten Anzeigen“ versprochen, zu der es aber dann nicht kam (vgl. [Loh 1995, S. 34]). Als Gauß das Buch einige Jahre später wieder in die Hand nahm – der zitierte Brief datiert vom 15. Mai 1843 – erkannte er, dass er es bisher „weniger beachtet“ hatte „als es verdient“:

> „[...] ich fand dann bald mit großem Vergnügen, dass darin die Quintessenz der Lehre von den Kegelschnitten in nucem gebracht ist, und das gerade sein barycentrischer Calcul auf dem leichtesten Wege zur Auflösung aller dahin gehörigen Aufgaben führt.“

[Peters 1861, S. 147f]

Dennoch fanden Möbius’ Leistungen Anerkennung, die sich unter anderem in der Aufnahme in verschiedene wissenschafliche Gesellschaften und Akademien zeigte[376]. So wurde Möbius schon 1829 zum korrespondierenden Mitglied der königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin gewählt (vgl. auch für weitere Akademien [Loh 1995, S. 145]. Vom Jahr 1828 bis 1846 gehörte Möbius zu den Autoren des Crelle’schen Journals. Wie aus den Eingaben hervorgeht, die Crelle regelmäßig an die Behörden machte, um Unterstützung seines Journals zu erhalten, zählte er Möbius zu den wichtigsten Autoren des Journals. Das folgende Zitat stammt aus einer solchen Eingabe. Sie datiert vom 3. 12. 1841.

> „... Ungeachtet der Concurrenz sind [dem Journal] die Meister der Wissenschaft, selbst deren mehrere im Auslande, nicht ungetreu geworden. [...] mancher berühmter Name des Auslandes, wie z.B. Gauß in Göttingen, Möbius in Leipzig, Plana in Turin, Hill in Lund und vieler Anderen dasselbe ebenfalls unter denen der Mit-Arbeiter schmückt. ...“

[Biermann 1960, S. 217]

Seit der Gründung der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft in Leipzig, an der Möbius persönlich beteiligt war, veröffentlichte er in deren Sitzungsberichten seine Aufsätze. Außerdem hielt er regelmäßig Vorträge bei den öffentlichen Versammlungen dieser Gesellschaft. Bei den überregionalen Vereinigungen, wie der „Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte“, nutzte Möbius die Gelegenheit einer Mitarbeit aber nicht (vgl. [Loh 1995, S. 145]).
Insgesamt gibt Möbius das Bild eines Gelehrten, der abseits der großen Schulen in der Abgeschiedenheit der Provinz forschte. Dabei sind seine Veröffentlichungen sehr

[376] Außerdem berichtet Baltzer, dass Jacobi und Dirichlet bereits 1829 nach Leipzig kamen um Möbius persönlich kennen zu lernen. Steiner zitiert Möbius in seinen Systematischen Entwicklungen und bemerkt mehrfach, dass er durch den „Barycentrischen Calcul“ in seinen eigenen Untersuchungen gefördert worden sei (vgl. [Baltzer 1885, S. XII]).

sorgfältig ausgearbeitet – was aber gerade den negativen Effekt hatte, dass sie von den Zeitgenossen oft nicht, oder erst spät wahrgenommen worden sind. Loh bezeichnet Möbius als „einen der letzten Naturwissenschaftler des 18. Jahrhunderts", der seine „Forschungsgegenstände noch in der Einheit von Mathematik, Mechanik und Astronomie verstand und der raschen Spezialisierung und Differenzierung in den einzelnen Disziplinen nicht folgen konnte" [Loh 1995, S. 146].

> „Bescheiden im persönlichen Auftreten und im Stile seiner Publikationen, zu den führenden Zentren mathematischer Forschung nur im indirekten Kontakt stehend, hat [er] zu seinen Lebzeiten nicht die volle Anerkennung erfahren können, die seiner Bedeutung angemessen gewesen wäre [...]."

[Wußing 1989, S. 344]

Einführung der baryzentrischen Koordinaten durch Möbius 1827

Während Plücker nichts darüber schreibt, wie er zur Idee seiner Dreieckskoordinaten kam, lässt es sich bei Möbius recht genau nachvollziehen, auf welchem Weg er zu seinen baryzentrischen Koordinaten gelangte.
Möbius verweist in der Vorrede zu seinem „Barycentrischem Calcul" auf die lange Tradition, den Begriff des mechanischen Schwerpunktes in der Geometrie zu nutzen. Als frühesten Versuch dieser Art nennt er die mechanische Quadratur der Parabel von *Archimedes* und einen unter dem Namen *„centrobarysche"* oder *„Guldins* Regel" bekannten Satz von *Pappus*[377]. Außerdem erwähnt er die Mathematiker *Carnot* und *L'Huilier*, die sich in der jüngeren Vergangenheit damit beschäftigt hatten. An diese beiden zuletzt genannten Mathematiker[378] schließen sich Möbius' Untersuchungen direkt an. Möbius fasst ihre Beschäftigung mit dem Schwerpunkt wie folgt zusammen:

> „Beide (*Carnot* in seiner *Géométrie de position*, *L'Huilier* in seinen *Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique*) suchen den Schwerpunkt in das Gebiet der niedern Geometrie zu ziehen, indem sie nicht sowohl von Körpern, Flächen und Linien, als vielmehr bloss von einem Systeme gewichtiger Punkte den Schwerpunkt betrachten, ihn selbst aber, um alle Vorstellungen des Mechanischen zu beseitigen, den Punkt der mittlern Entfernungen nennen, weil nämlich sein Abstand von irgend einer Ebene gleich der mittleren Entfernung aller Punkte des Systems von derselben Ebene ist. Die Bereicherungen, welche sie dadurch der Geometrie verschafft haben, sind allgemein anerkannt."

[Möbius 1827, Vorrede S. IIIf]

[377] Dieser Satz ist nach Paulus (oder Paul) Guldin (1577 - 1643), einem Jesuiten und Schüler von Christophoros Clavius (1537 - 1612), benannt. Nach Ivor Bulmer-Thomas wird der Satz heute in der Regel folgendermaßen wiedergegeben: „If any plane figur revolve about an external axis in its plane, the volume of the solid figure so generated is equal to the product of the area of the figure and the distance travelled by the centre of gravity of the figure." [Thomas 1984, S. 348]. Guldin gab diesen Satz im zweiten Buch seines Werkes „De centro gravitatis" (1640) an. Allerdings findet er sich auch schon bei Pappus (ca. 320 v. Chr.) (vgl. dazu [Thomas 1984]). Für eine zeitgenössische Behandlung des Satzes von Guldin vgl. [Kästner 1799, S. 751f].

[378] Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 - 1823) und Simon Antoine Jean L'Huilier (1750 - 1840).

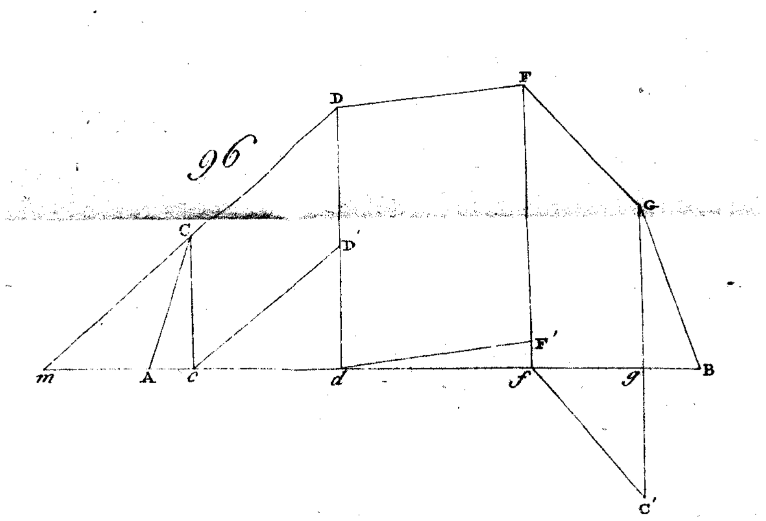


Abb. 11.3.: *Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie* (1810), Figur 96. Aus: [Carnot 1810]

Von dem genannten Werk Carnot's, das 1803 erschien, fertigte Schumacher eine deutsche Übersetzung an, die 1810 in zwei Bänden erschien. Während Möbius möglicherweise das französische Original benutzte, liegt der folgenden Darstellung die deutsche Übersetzung zugrunde. Das Werk von L'Huilier erschien 1809.
Carnot beschäftigte sich in dem betreffenden Abschnitt seines Werkes mit „Trigonometrischen Untersuchungen über Figuren [...], verschiedenen Eigenschaften der Vielecke und der Polyeder“ [Carnot 1810, S. 1].
Ausgehend von trigonometrischen Beziehungen leitet Carnot einen Satz über die Verhältnisse der Seitenlängen im Dreieck her ([Carnot 1810, S. 53]), den er dann auch auf Vielecke überträgt:

> „254. 1) In jedem Vieleck, mag es in einer Ebene liegen, oder nicht, ist jede Seite gleich der Summe aller andern Seiten, wenn man jede von diesen mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten bildet;“
>
> [Carnot 1810, S. 55]

Um diesen Satz zu beweisen, betrachtet Carnot das Vieleck $ACDFGB$ (Abb. 11.3), ein sogenanntes Ursystem, bei dem alle Perpendikel aus den Punkten C, D, F und G auf die Seite AB, zwischen die Punkte A und B fallen. Für dieses Ursystem beweist Carnot den Satz[379]. Um den Satz auf jedes Vieleck anwenden zu können, wird dieses Ursystem „durch unmerkliche Grade verändert“ (Abb. 11.4) [Carnot 1810, S. 56][380]. Für die Einführung des „Punktes der mittleren Entfernung“ (centre de moyenne distance) ist besonders die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes wichtig:

[379] Indem er zeigt, dass das Produkt aus einer Vielecksseite und dem Cosinus des zugehörigen Winkels immer dem Segment der Strecke AB entspricht, welches durch die beiden Perpendikel-Fußpunkte (oder A oder B) gebildet wird. Die Summe aller dieser Segmente ergibt die Strecke AB [Carnot 1810, S. 55f].

[380] Durch diese Methode ist Carnot in der Lage, Sätze nicht mehr nur für spezielle räumliche Anordnungen zu beweisen, sondern direkt für ganze Gruppen von solchen räumlichen Konfigurationen, welche durch „unmerkliche“ Veränderungen auseinander erzeugt werden können. Dazu ist die Verwendung des negativen Vorzeichens nötig (vgl. Fußnote 392).

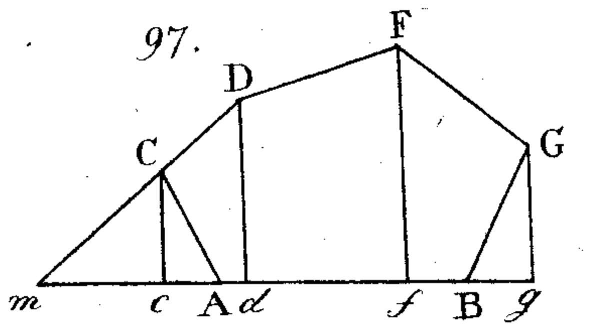


Abb. 11.4.: *Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie* (1810), Figur 97. Aus: [Carnot 1810]

> „255. Man kann offenbar den Punkt, der den Scheitel eines jeden Winkel des Vielecks bildet, als eine unendlich kleine Seite betrachten. Man kann auch dieser unendlich kleinen Seite jede beliebige Richtung beylegen; und da [...] die Winkel, welche diese Richtung mit allen andern Seiten des Vielecks bildet, dieselben sind, welche jede andere der ersten parallele Linie, mit eben den Seiten bilden würde, so kann man folgenden Satz daraus schließen: [...] *Die Summe der Seiten irgend eines Vielecks, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, von denen jede mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt ist, den ihre Richtung im Sinne des Umfangs genommen, mit einer beliebigen im Raume, in gegebenem Sinne, gezogenen graden Linie macht, ist = 0.*“

[Carnot 1810, S. 58]

Diesen Satz überträgt Carnot auf ein System aus Strecken, die alle einen gemeinsamen Anfangspunkt haben. Dafür zieht er aus einem Punkt F im Raum Strecken, die den Seiten eines Vielecks gleich und parallel sind. Eine beliebige Transversale (LK) wird ebenfalls durch diesen Punkt gezogen (Abb. 11.5, vgl. [Carnot 1810, S. 65f]). Carnot betrachtet jetzt das Vieleck, das aus den Endpunkten dieser „Linien“ gebildet wird, die Linien werden somit zu „Radien“ des Vielecks. Das Produkt eines dieser „Radien“ mit dem Cosinus des Winkels mit der Transversalen entspricht der Länge des Lots auf eine Ebene MN, welche senkrecht zur Transversalen LK durch den Punkt F verläuft. Allerdings sind einige dieser Längen mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen und zwar dann, wenn der mit der Transversalen gebildete Winkel größer als 90° ist. Diese Strecken fallen aber in den gleichen Halbraum bezüglich der Ebene MN.

> „[...] also ist die Totalsumme der Perpendikel, die von den Winkelpunkten des Vielecks auf die Ebene MN gesenkt sind, = 0, wenn man die, die an der einen Seite der Ebene fallen, positiv, und diejenigen, die an die andere Seite fallen, negativ nimmt.“

[Carnot 1810, S. 66]

Im Folgenden untersucht Carnot die Abstände der Eckpunkte des oben konstruierten Vielecks zu einer weiteren Ebene hKc, die parallel zu MN gezogen wird. Offensichtlich ist die Summe aller dieser Abstände n-mal so groß wie der Abstand von F zu dieser

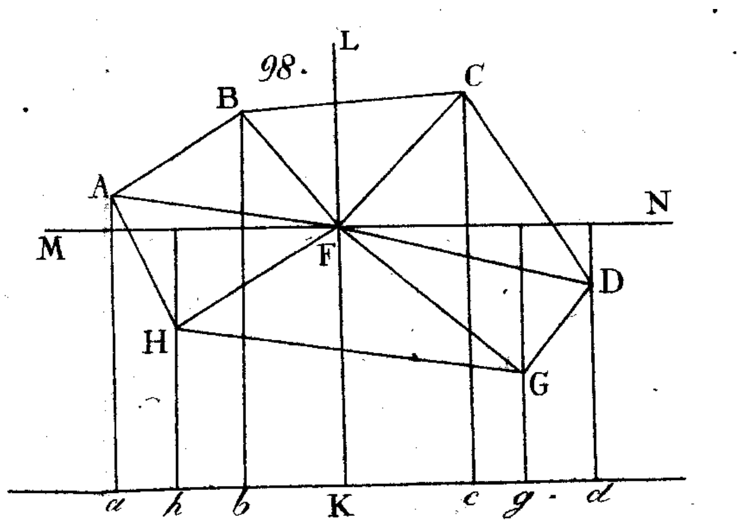


Abb. 11.5.: *Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie* (1810), Figur 98. Aus: [Carnot 1810]

Ebene, wenn n die Anzahl der Punkte des Vielecks ist. Denn die Abstände aller Punkte zur Ebene MN sind – wie oben gezeigt wurde – gleich Null, und dazu kommt n-mal der Abstand der Ebenen MN und hKc, der gleich dem Abstand von F zu dieser Ebene ist.

> „[...] und da wir LK willkührlich angenommen haben, so folgt, daß die Entfernung des Punktes F[381] von irgend einer Ebene, gleich *der mittleren Entfernung* aller Punkte des Vielecks von derselben Ebene ist. Wir wollen also diesen Punkt *Punkt der mittleren Entfernung* nennen [...].“
>
> [Carnot 1810, S. 67]

Carnot stellt daraus den Satz auf, dass es

> „in jedem Vieleck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, [...] einen Punkt der mittlern Entfernungen [gibt].“
>
> [Carnot 1810, S. 68]

Unbewiesen verwendet Carnot hier den Satz, dass es zu jedem beliebigen Vieleck (unabhängig davon, ob es in einer Ebene liegt) einen Punkt gibt, der die Bedingung erfüllt, dass alle Radien, welche von den Eckpunkten des Vielecks zu diesem Punkt gezogen werden „gleich und parallel“ zu den Seiten eines anderen Vielecks und „auch zu demselben Sinus gezogen“ sind.
Während Carnot also eigentlich keine Begründung dafür angibt, dass es in jedem System von Punkten immer (mindestens) einen Punkt der mittleren Entfernung geben muss, zeigt er, dass es nie mehr als einen Punkt der mittleren Entfernung geben kann:

[381] im Original steht hier fälschlicherweise K.

> „Da die Lage eines Punktes im Raume durch seine Entfernungen von 3 Ebenen schon bestimmt wird, so sieht man leicht, daß in jedem Vieleck nur ein Punkt der mittleren Entfernungen seyn kann.“
>
> [Carnot 1810, S. 68]

In den folgenden Nummern stellt Carnot verschiedene Sätze über Vielecke, Polygone und ihre Punkte der mittleren Entfernung auf.[382] Schließlich zeigt Carnot den Zusammenhang seines Punktes der mittleren Entfernung zum Schwerpunkt in der Mechanik auf:

> „Man erkennt leicht in dem, was wir über den Punkt der mittleren Entfernungen gesagt haben, die Eigenschaften des Schwerpunktes in der Mechanik, und in der That sind sie identisch. Man sieht daraus, daß dieser Punkt der Geometrie angehört, und daß seine mechanischen Eigenschaften blos aus denjenigen hergeleitet werden könnten, die die Geometrie lehrt. Uebrigens kennt man schon lange (z.B. durch Guldins Satz)[383] den Vortheil, den die Geometrie aus der Betrachtung des Schwerpunktes ziehen kann, Vortheile, die man aber nicht auf dem natürlichen Wege erhielt. Es scheint also diese Weglassung der Lehre vom Punkte der mittleren Entfernungen in den Anfangsgründen der Geometrie eine wahre Lücke zu seyn.“
>
> [Carnot 1810, S. 91f]

Wie oben bereits angeführt wurde, bezieht sich Möbius in der Vorrede seines „Barycentrischen Calculs“ auf Carnots „Punkt der mittleren Entfernung“, dem Schwerpunkt „von einem Systeme gewichtiger Punkte“ [Möbius 1827, S. III]. Von „gewichtigen Punkten“ spricht Carnot selbst allerdings nicht. Gerade dieser Schritt wird erst von Möbius selbst vorgenommen.

> „Von demselben [d. i. Carnots und L'Huiliers] elementaren und rein geometrischen Begriff des Schwerpunkts gehen auch die vorliegenden Untersuchungen aus. Die erste Veranlassung hierzu war die Erwägung der Fruchtbarkeit des Satzes, dass jedes System gewichtiger Punkte nur *einen* Schwerpunkt hat, und dass daher, in welcher Folge man auch die Punkte nach und nach in Verbindung bringt, zuletzt doch immer ein und derselbe Punkt gefunden werden muss. Die einfache Art, womit ich dadurch, mehrere geometrische Sätze zu beweisen, mich im Stande sah, bewog mich, zu noch grösserer Vereinfachung solcher Untersuchungen einen dafür passenden Algorithmus auszumitteln.“
>
> [Möbius 1827, S. IV]

Wie bereits erwähnt wurde, gibt Reinhardt in [Reinhardt 1887] den Inhalt von zwei losen Blättern wieder, welche sich in Möbius' Nachlass fanden und wahrscheinlich Möbius' erste Beschäftigung mit dem Schwerpunkt zeigen. Ein Indiz dafür, dass diese Blätter tatsächlich zeitlich vor den ersten beiden wissenschaftlichen Tagebüchern Möbius' liegen, ist die Tatsache, dass Möbius noch keine gerichteten Größen verwendet[384]. Die

[382] Z.B. zeigt er, dass der Punkt der mittleren Entfernung eines Dreiecks der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist.

[383] Siehe Fußnote 377.

[384] Vgl. [Reinhardt 1887, S. 707] und Fußnoten 387 und 389.

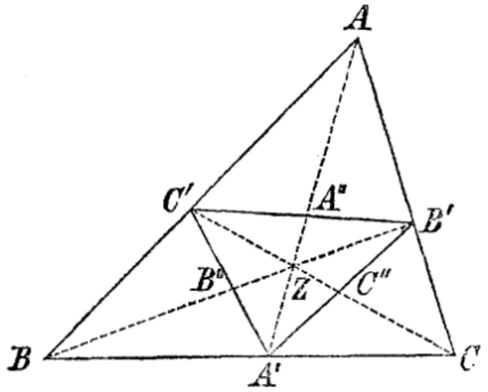


Abb. 11.6.: *Über die Entstehungszeit und den Zusammenhang der wichtigsten Schriften und Abhandlungen von Möbius* (1887), Figur 1. Aus: [Reinhardt 1887, S. 707]

Aussage über „die einfache Art“ mit der Möbius „mehrere geometrische Sätze zu beweisen“ im Stande war, könnte sich daher auf diese Blätter beziehen.

> „Durch den Punkt Z (Fig. 1)[385] im Dreieck ABC seien nach den Spitzen desselben gerade Linien gezogen, welche die Seiten in A', B', C' treffen. Es verhalte sich
>
> $$BA' : A'C = c : b. \tag{1}$$
>
> B sei der Schwerpunkt eines Systems von b Punkten, C der Schwerpunkt eines Systems von c Punkten; so ist A' der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Systeme, in welchem man sich $b+c$ Punkte vereinigt vorstellen kann. Es verhalte sich ferner
>
> $$AB' : B'C = c : a, \tag{2}$$
>
> A sei ein a-facher Punkt, also B', der Schwerpunkt von A und C, ein $(c+a)$ -facher. Der Schwerpunkt von A, B und C muss daher sowohl in AA' als BB' liegen und ist demnach kein anderer als Z. [...]“

[Reinhardt 1887, S. 707f]

Möbius geht hier direkt über Carnots „Punkt der mittleren Entfernung“ hinaus, indem er mehrere Systeme von Punkten und ihren Schwerpunkten kombiniert. Dabei ist auffällig, wie sich bereits in diesem kurzen Auszug eine Veränderung der Sprache feststellen lässt. Möbius spricht zuerst von den Punkten B und C als den Schwerpunkten „eines Systems von b bzw. c Punkten“ und von A', als dem „gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider Systeme, in welchem man sich $b+c$ Punkte vereinigt vorstellen kann“. A' ist also – ganz im Carnot'schen Sinn – der „Punkt der mittleren Entfernung“ von diesen $b+c$ Punkten.
Aber direkt im Anschluss geht Möbius dazu über von A als einem „a-fachen Punkt“

[385] Abb. 11.6.

zu sprechen; eine Formulierung die bereits große Ähnlichkeiten mit der im „Barycentrischen Calcul“ verwandten aufweist. Dort spricht Möbius von Punkten und „ihren Coëfficienten“. Außerdem wird B' als der „Schwerpunkt von A und C“ und Z als der „Schwerpunkt von A, B und C“ bezeichnet. Dabei sind B' und Z nicht die „Punkte der mittleren Entfernung“ von A und C bzw. A, B und C, sondern von den Systemen von $b{+}c$ bzw. $a{+}b{+}c$ Punkten. Dass Möbius sich hier in seiner Formulierung nicht mehr auf diese Systeme bezieht, sondern Z als Schwerpunkt von A, B und C selbst betrachtet, zeigt, dass er über Carnots Konzept des „Punktes der mittleren Entfernung“ bereits hinausgegangen ist. Implizit werden die Punkte A, B und C hier bereits als „gewichtige Punkte“ betrachtet. Im „Barycentrischen Calcul“ spricht Möbius dann auch explizit von „gewichtigen Punkten“, also Punkten, denen Gewichte zugeordnet werden:

> „Denkt man sich in A und B Gewichte angebracht, welche den Zahlen a und b proportional sind, so ist P der Schwerpunkt dieses Systems. Heisse daher auch gegenwärtig P der *Schwerpunkt* der Punkte A und B mit den resp. Coëfficienten a und b.“

[Möbius 1827, S. 6]

Wie Möbius in dem bereits zitierten Abschnitt der Vorrede zu seinem „Barycentrischen Calcul“ angibt, war es besonders der Satz, „dass jedes System gewichtiger Punkte nur *einen* Schwerpunkt hat“ und es daher nicht relevant ist, in welcher Reihenfolge „die Punkte nach und nach in Verbindung“ gebracht werden, die ihn zu neuen Sätzen führten (vgl. [Möbius 1827, S. IV]). Genau diese Vorgehensweise findet sich auch auf dem bereits zitierten losen Blatt aus dem Nachlass[386]. Dort hatte Möbius den Schwerpunkt von A, B und C gefunden, indem er zuerst die Schwerpunkte von B und C bzw. A und C bestimmt hatte (vgl. den oben zitierten Auszug). Da aber das System der drei gewichtigen Punkte A, B und C nur einen Schwerpunkt haben kann, muss dieser sich auch ergeben, wenn zuerst der Schwerpunkt von A und B gebildet wird:

> „[...] Der Schwerpunkt von A, B, C muss aber auch in der Linie liegen, welche den Schwerpunkt von A und B mit C verbindet. Diese Linie muss durch Z gehen, ist daher CC', also C' der Schwerpunkt von A und B. Mithin
>
> $$BC' : AC' = a : b, \tag{5}$$
> $$CZ : C'Z = a + b : c. \tag{6}$$
>
> [...][387]“

[Reinhardt 1887, S. 708]

Möbius stellt weitere Verhältnisgleichungen auf, indem er die Strecken $B'C'$, $C'A'$ und $A'B'$ zieht und die Schwerpunkt in den entstehenden Dreiecken betrachtet.

[386] Ein weiteres Indiz dafür, dass sich die Aussage aus der Vorrede tatsächlich konkret auf diese beiden losen Blätter bezieht.

[387] Aus den beiden letzten Gleichungen lässt sich ablesen, dass Möbius hier noch keine gerichteten Größen verwendet. Bei Verwendung gerichteter Größen müssten die Verhältnis-Gleichungen $BC' : C'A = a : b$ und $CZ : ZC' = (a + b) : c$ lauten.

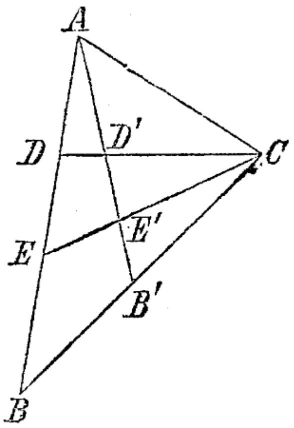


Abb. 11.7.: *Über die Entstehungszeit und den Zusammenhang der wichtigsten Schriften und Abhandlungen von Möbius* (1887), Figur 2. Aus: [Reinhardt 1887, S. 707]

> „[...] Durch Elimination von a, b, c aus diesen Verhältnissen ergeben sich eine Menge [von Beziehungen] zwischen den Linien der Figur allein. Unter anderen ist die Linie AA' in harmonischer Proportion geschnitten. [...]"
>
> [Reinhardt 1887, S. 708]

Auf dem zweiten losen Blatt betrachtet Möbius ebenfalls harmonische Teilungen:

> „Zieht man von C (Fig. 2)[388] nach den Punkten einer harmonisch getheilten Linie $ADEB$ die Geraden CA, CD, CE, CB, so wird die Gerade AB' in D' und E' auch harmonisch getheilt. Man setze
>
> $$AE : EB = b : a,$$
>
> nehme A als a-fachen, B als b-fachen Punkt, so ist E der Schwerpunkt von A und B und daher $(a+b)$-fach. Nun verhält sich
>
> $$AD : DE = AB : BE = a + b : a,$$
>
> folglich ist D der $(2a+b)$-fache Schwerpunkt zwischen dem a-fachen A und dem $(a+b)$-fachen E. Es verhalte sich ferner
>
> $$CB' : BB' = b : c,$$
>
> C sei ein c-facher Punkt; so ist B' der Schwerpunkt von B und C, E' der Schwerpunkt von A, B, C, also
>
> $$AE' : B'E' = b + c : a.$$
>
> Ferner zeigt sich leicht, dass D' der Schwerpunkt von A, E, C ist, also

[388] Abb. 11.7.

$$AD' : E'D' = a + b + c : a = AB' : B'E',$$

q. e. d.“[389]

[Reinhardt 1887, S. 708f]

„Die einfache Art“ durch die Möbius mit Hilfe des Schwerpunktes diese Sätze beweisen konnte, brachte ihn dazu „zu noch grösserer Vereinfachung solcher Untersuchungen einen dafür passenden Algorithmus auszumitteln“ [Möbius 1827, S. IV]. Dabei ging Möbius offenbar früh dazu über, gerichtete Größen zu verwenden[390]. In der Vorrede zu seinem „Barycentrischen Calcul“ bemerkt Möbius, dass er

> „[...] das schon von Mehrern gebrauchte Verfahren, nach welchem der positive oder negative Werth einer Linie durch die verschiedene Nebeneinanderstellung der die Endpunkte der Linie bezeichnenden Buchstaben ausgedrückt wird, hier durchgehend angewandt und auch auf die Bezeichnung des Inhalts von Dreiecken, (Vielecken, [...]) und dreiseitigen Pyramiden erweitert habe.“

[Möbius 1827, S. XIV]

Obwohl Möbius hier explizit auf andere verweist, die gerichtete Größen (in Bezug auf Strecken) verwandt haben, kommt ihm doch das Verdienst der konsequenten Umsetzung dieses Prinzips und der Übertragung auf Dreiecke und Tetraeder zu (vgl. z.B. [Loh 1995, S. 133] und [Gray 2007, S. 144]).

> „Möbius benutzt als erster ganz konsequent das Prinzip der Vorzeichen in der Geometrie, und zwar nicht nur beim Messen von Strecken, sondern auch von Flächen- und Rauminhalten, bei deren Ausmessung er einen „Umlaufungssinn“ unterscheidet.“

[Klein 1926, S. 118]

Carnot benutzte ebenfalls das negative Vorzeichen[391] in der Geometrie und auch das Prinzip durch die unterschiedliche Anordnung von zwei Buchstaben die Richtung einer Strecke anzuzeigen:

> „So, wenn man annimmt, daß der Punkt m [...] durch seine Bewegung eine gerade Linie beschrieben habe, indem er von m nach n ging, zeigt $\overline{mn}$ das an, was ich die Richtung dieser geraden Linie nenne [...]. Im Gegentheil

[389] Bei Verwendung gerichteter Größen müsste die zweite Gleichung $AD : DE = AB : EB = (a+b) : a$ lauten, die dritte Gleichung $CB' : B'B = b : c$, die vierte Gleichung $AE' : E'B' = (b + c) : a$ und die letzte Gleichung $AD' : D'E' = (a + b + c) : a = AB' : E'B'$.

[390] Da die Tagebücher aus Möbius’ Nachlass nicht mehr vorhanden sind und Reinhardt keine explizite Angabe dazu macht, ist ein genauer Zeitpunkt, ab dem Möbius die gerichteten Größen verwandte, nicht mehr zu bestimmen. Es lässt sich aber indirekt aus der Tatsache, dass Reinhardt die losen Blätter auf die Zeit vor 1818 datiert, weil auf ihnen keine gerichteten Größen vorkommen, schließen, dass Möbius bereits in dem ersten Band seiner Tagebücher gerichtete Größen benutzte (vgl. [Reinhardt 1887, S. 707]).

[391] Allerdings lehnte Carnot negative Größen ab; die Benutzung negativer Vorzeichen diente nur dazu, Formeln für verschiedene räumliche Anordnungen anwendbar zu machen (vgl. Fußnote 392).

bezeichnet $\overline{nm}$ die diametral entgegengesetzte Richtung.“

[Carnot 1810, S. 168]

Er bezeichnet diese beiden Richtungen aber nicht als positive und negative Richtung und stellt auch keine Beziehung zwischen der Richtung einer Strecke und ihrem Wert her, wie Möbius es tut[392]. Möbius bezeichnet durch AB den Wert der Strecke mit den Endpunkten A und B, wobei dieser positiv oder negativ ist, je nachdem ein Punkt, wenn er diese Strecke von A nach B durchläuft sich mit oder gegen die positive Richtung dieser Geraden bewegt. Die Gleichung

$$AB + BA = 0$$

gilt folglich immer, ebenso wie die Gleichungen

$$\begin{aligned} BC + CA + AB &= 0 \\ CB - CA &= AB \end{aligned}$$

unabhängig von der Lage der drei Punkte A, B und C auf der Geraden gelten (vgl. [Möbius 1827, S. 3f]).
Abraham Gotthelf Kästner[393] benutzte bereits die Gleichung $AB + BA = 0$ aber lediglich als Gleichung zwischen Streckenlängen nicht als Gleichung zwischen geometrischen Objekten (vgl. [Loh 1995, S. 133]). Möbius fügte also den Gedanken einer Orientierung hinzu und benutzte das Vorzeichen nicht nur in seiner algebraischen Bedeutung (zur Beschreibung von geometrischen Verhältnissen durch Gleichungen) sondern zusätzlich in einer kombinatorischen Bedeutung (vgl. [Loh 1995, S. 133]). Diese Ergänzung wird besonders durch seine Erweiterung des Konzepts auf Dreiecke und Pyramiden deutlich. Der Umfang eines Dreiecks kann, ebenso wie eine Gerade, in zwei verschiedene Richtungen durchlaufen werden. Welche dieser Richtungen als die positive festgelegt wird, ist beliebig; Möbius wählt die Bewegung mit dem Uhrzeigersinn als die positive[394]. Der Ausdruck ABC bezeichnet den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

[392] Carnot widerspricht sogar der Möglichkeit die negativen Quantitäten als solche aufzufassen, die „von derselben Natur wie die positiven, nur im entgegengesetzten Sinn genommen seyen“ [Carnot 1810, S. 7]. „[...] den Unterschied der negativen von den positiven Quantitäten nur darin denken [zu] müssen, daß sie in entgegengesetzter Richtung von einander genommen werden [...] ist sinnreich, aber eben so wenig richtig, wie die vorige [Vorstellung]. [...] Aber ich gehe noch weiter, ich beweise, daß der Begriff vollkommen falsch ist, und daß, wenn man ihn zuließe, die größten Ungereimtheiten daraus entstehen würden.“ [Carnot 1810, S. 10f]. Carnot benutzt das negative Vorzeichen um Formeln die er für ein (Ur-)Systeme gefunden hat, auch auf ein anderes System (eine andere räumliche Anordnungen einer Figur) anwenden zu können, das „mit dem ersten in einer gewissen Verbindung steht“, für das aber um die „für das erste System gefundenen Formeln anwendbar zu machen, man das Zeichen, was vorhergeht, von + in − verändern muss“ [Carnot 1810, S. 21]. Diese Vorgehensweise ist aber unsystematischer und uneinsichtiger als die von Möbius konsequent eingesetzte Vorgehensweise gerichteter Größen.

[393] (1719 - 1800).

[394] Möbius charakterisiert diese Bewegungsrichtung folgendermaßen: „Heiße die eine Bewegung, z.B. die von der Linken nach der Rechten, wenn man sich innerhalb der Fläche des Dreiecks, und das Auge auf sie herabsehend denkt, die positive; die andere von der Rechten nach der Linken, die negative.“ [Möbius 1827, S. 20f].
Im Gegensatz zu Möbius’ Festsetzung ist es heute gebräuchlich, die Bewegung gegen den Uhrzeigersinn als die positive anzusehen.

A, B und C und ist positiv oder negativ, je nachdem ein Punkt, der den Umfang des Dreiecks in dieser Reihenfolge beschreibt, sich mit oder gegen die positive Richtung bewegt. Die Ausdrücke ABC, BCA und CAB haben also den gleichen Wert, die Ausdrücke CBA, BAC und ACB den entgegengesetzten (vgl. [Möbius 1827, S. 21]). Durch Ausdrücke der Form $ABCD$ wird das Volumen eines Tetraeders angegeben. Dabei bezeichnet der erste Buchstabe die Spitze der Pyramide und der Wert $ABCD$ ist positiv oder negativ, je nachdem das Dreieck BCD im eben angegebenen Sinn einen positiven oder negativen Flächeninhalt hat[395]. Möbius benutzte die gerichteten Größen, um allgemeingültige Gleichungen aufstellen zu können, die nicht mehr von einer bestimmten Lage der einzelnen Teile abhängig waren.

> „Es wird hierdurch, so wie auch zum Theil durch den barycentrischen Calcul selbst, die Anschaulichkeit der synthetischen Methode mit der Allgemeinheit der analytischen Methode in möglichst nahe Verbindung gebracht, indem man mit Anwendung rein geomtrischer Zeichen, dergleichen die für die Punkte einer Figur gewählten Buchstaben sind, die arithmetischen Beziehungen zwischen den Theilen der Figur durch Formeln darstellt, welche für alle möglichen Lagen der Theile Gültigkeit haben.“

[Möbius 1827, S. XIV]

Es ist sicher bemerkenswert, dass Wilhelm August Förstemann[396] in seiner Dissertation „Theoria punctorum centralium primae lineae“ (Halle, 1817) ebenfalls gerichtete Größen benutzt. Er behandelt in dieser – eher unbekannt gebliebenen – Arbeit, die 28 Seiten und eine Tafel umfasst, ebenfalls den Schwerpunkt in der Geometrie[397]. Die gerichteten Größen haben bei ihm, so wie bei Möbius, auch einen kombinatorischen Aspekt[398]. Eine Erweiterung auf Dreiecke nimmt Förstemann aber nicht vor. Er betrachtet den Schwerpunkt – den er Zentralpunkt (punctorum centralium) nennt – in der Geraden und der Ebene, nicht aber im Raum; bemerkt aber, dass letzteres ohne Schwierigkeiten möglich sei (vgl. [Förstemann 1817, S. 28]). Interessanterweise bezieht sich auch Förstemann auf andere Mathematiker, die sich bereits mit der „geometrischen Theorie der Zentralpunkte“ auseinandergesetzt hatten, und nennt dabei konkret L'Huilier, der in seinen „Élémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique“ so wie andere Franzosen auch die Zentralpunkte als „centres des moyennes distances“ bezeichne (vgl. [Förstemann 1817, S. 28]).
Ob und in wie weit Möbius von Förstemanns Arbeit beeinflusst wurde, lässt sich nicht mehr nachvollziehen. Loh gibt an, dass ein Exemplar dieser Dissertation in Möbius' Privatbibliothek enthalten war (vgl. [Loh 1995, S. 31]), dies lässt aber keinen Rückschluss darauf zu, ab welchem Zeitpunkt Möbius sie kannte. Reinhardt vermutet, dass

[395] Man denke „sich das Auge an die durch den ersten Buchstaben [...] bezeichnete Spitze gestellt, und nach dem durch die drei übrigen Buchstaben bezeichneten Dreieck [...] als Grundfläche hinsehend. Je nachdem nun der Folge dieser Buchstaben [...] der positive oder negative Werth der Dreiecksfläche entspricht, stelle auch der Ausdruck der Pyramide den positiven oder negativen Werth ihres körperlichen Inhalts vor.“ [Möbius 1827, S. 22].

[396] (1791 - 1836).

[397] Förstemann verwendet den Schwerpunktsbegriff ähnlich wie Möbius, geht dabei aber nicht so weit wie dieser (vgl. [Müller 1910, S. 634, Fußnote 128]). Reinhardt gibt einen Teil des Inhalts (allerdings in der Schreibweise des baryzentrischen Kalküls) wieder (vgl. [Reinhardt 1887, S. 711, Fußnote]).

[398] „Linea AB opposita est lineae BA, quae contrarion puncti motu oritur; sive est $AB = -BA$.“ [Förstemann 1817, S. 3].

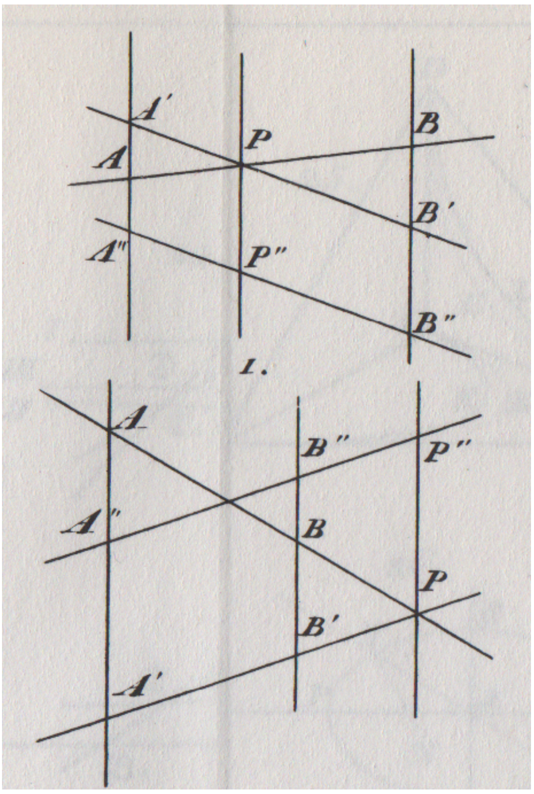


Abb. 11.8.: *Der barycentrische Calcul ...* (1827), Figur 1. Aus: [Möbius 1827, Tafel 1]

sie Möbius erst durch eine Rezension von Karl Heribert Ignatius Buzengeiger[399], die am 22. Mai 1822 in der „Leipziger Literaturzeitung“ erschien, bekannt wurde (vgl. [Reinhardt 1887, S. 711]). Zu diesem Zeitpunkt waren Möbius’ Ideen, wie sich seinen Tagebüchern – laut Reinhardt – entnehmen ließ, bereits ausgearbeitet. Für diese Annahme spricht, dass Möbius Förstemanns Arbeit in seinem „Barycentrischen Calcul“ nicht erwähnt.

Nach den einleitenden „Vorerinnerungen“ zu dem Gebrauch gerichteter Größen, beginnt Möbius die „Erklärung des Schwerpunkts in rein geometrischem Sine“ [Möbius 1827, S. XV] mit folgender Aufgabe:

> „Durch zwei gegebene Punkte A und B (Fig. 1)[400] sind zwei Parallellinien AA' und BB' gezogen. Bezeichnen ferner a und b zwei Zahlen, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, deren Summe aber nicht Null ist. Es wird verlangt, die zwei Parallelen durch eine dritte Gerade so zu schneiden, dass, wenn A' und B' die resp. Durchschnittspunkte sind,
>
> $$a.AA' + b.BB' = 0$$
>
> ist.“

[Möbius 1827, S. 4]

[399] (1771 - 1835).
[400] Siehe Abbildung 11.8.

Möbius bezieht sich hier – wie bereits erwähnt – nicht mehr auf Carnot's „Punkt der mittleren Entfernung“ und spricht auch nicht mehr von a-fachen und b-fachen Punkten, trotzdem lässt sich der direkte Zusammenhang zu beidem leicht feststellen. Allerdings benutzt Möbius zur Auflösung dieser Aufgabe, anders als Carnot, ähnliche Dreiecke. Er teilt die durch A und B gezogene Gerade so durch einen Punkt P, dass

$$AP : PB = b : a$$

gilt. Jede Gerade durch P erfüllt dann die Bedingung der Aufgabe. Um dies zu zeigen, betrachtet Möbius das Verhältnis $AA' : BB'$. Da die Dreiecke $AA'P$ und $BB'P$ ähnlich sind, gilt:

$$AA' : BB' = AP : BP = AP : -PB = b : -a.$$

In dieser Verhältnisgleichung benutzt Möbius also die Beziehung $BP = -PB$. Die Bedingung $a.AA' + b.BB' = 0$ ist folglich für jede Gerade – oder Ebene – durch P erfüllt. Für alle anderen Geraden (Ebenen) gilt die Beziehung

$$a.AA' + b.BB' = (a + b).PP'$$

wobei PP' parallel zu AA' und BB' gezogen wird, und die Gerade (Ebene) diese drei Parallelen in den Punkten A', B' und C' schneidet. In einer Zusatzbemerkung zu dieser Aufgabe, erklärt Möbius den Zusammenhang dieser Aufgabe zum Schwerpunkt:

> „Denkt man sich in A und B Gewichte angebracht, welche den Zahlen a und b proportional sind, so ist P der Schwerpunkt dieses Systems. Heiße daher auch gegenwärtig P der *Schwerpunkt* der Punkte A und B mit den resp. Coëfficienten a und b.“
>
> [Möbius 1827, S. 6]

In den nächsten Aufgaben beschäftigt er sich mit der Konstruktion des Schwerpunktes von drei oder mehr Punkten und kommt schließlich zu dem allgemeinen Satz:

> *„Ist eine beliebige Anzahl = ν von Punkten $A, B, C...N$ mit resp. Coëfficienten $a, b, c...n$ gegeben, deren Summe nicht = 0 ist, so kann immer ein Punkt S, und nur einer, – der Schwerpunkt – von der Beschaffenheit gefunden werden, dass wenn man durch die gegebenen Punkte und den Punkt S nach einer beliebigen Richtung Parallelen zieht, und diese mit einer willkührlich gelegten Ebene schneidet, welches resp. in $A', B', C', ...N', S'$ geschehe, dass dann immer*
>
> $$a.AA' + b.BB' + c.CC' + ... + n.NN' = (a + b + c + ... + n)SS',$$
>
> *und folglich wenn die Ebene durch S selbst geht,*
>
> $$a.AA' + b.BB' + c.CC' + ... + n.NN' = 0$$
>
> *ist.“*
>
> [Möbius 1827, S. 9f]

In den bisherigen Betrachtungen war der Fall, dass die Koeffizientensumme gleich Null ist, immer ausgeschlossen. Diesen Fall behandelt Möbius gesondert (vgl. [Möbius 1827, S. 11f]). Dabei stellt er zuerst heraus, dass ein solches System von Punkten und Koeffizienten keinen konstruierbaren Schwerpunkt haben kann, da sonst wegen

$$a.AA' + b.BB' + ... = (a + b + ...).SS' = 0$$

auch jede nicht durch diesen Schwerpunkt gehende Ebene die Bedingung der Aufgabe $a.AA' + b.BB' + ... = 0$ erfüllen würde, was offenbar nicht der Fall sein kann[401]. Möbius betrachtet nun ein System von n Punkten $A, B, ..., N$, deren Koeffizientensumme gleich Null ist. Da jeder einzelne Koeffizient ungleich Null ist, muss die Koeffizientensumme $b + c + ...n$ ebenfalls ungleich Null sein, für die Punkte $B, ..., N$ lässt sich also der Schwerpunkt auf die gewöhnliche Weise konstruieren. Angenommen T sei dieser Schwerpunkt, dann gilt:

$$b.BB' + ... + n.NN' = (b + ... + n).TT' = -a.TT'.$$

Dadurch ergibt sich aus der ursprünglichen Aufgabe:

$$a.AA' + b.BB' + ... + n.NN' = a.AA' - a.TT' = 0;$$

d.h. die Ebene muss so gelegt werden, dass $AA' = TT'$ ist. Da die beiden Geraden durch A und A', sowie durch B und B' parallel sind, wird diese Bedingung durch jede Ebene erfüllt, welche parallel zur Geraden durch A und T ist.

> „Der Definition des Schwerpunktes gemäss, als eines solchen, in welchem sich alle, unserer Aufgabe Genüge leistende Ebenen schneiden, und weil Parallelen als Linien anzusehen sind, die sich erst in unendlicher Entfernung schneiden, können wir daher auch sagen: *der Schwerpunkt liegt in dem Falle, wenn die Summe der Coëfficienten = 0 ist, unendlich entfernt,* nach einer Richtung, die durch die letzt gefundenen Parallelen bestimmt ist.“
>
> [Möbius 1827, S. 12]

Im zweiten Abschnitt seines Werkes führt Möbius dann den „barycentrischen Calcul“ ein, um das „Rechnen“ mit den Gleichungen zu erleichtern. Dazu verkürzt er die Ausdrücke für die Abschnitte auf den Parallelen (AA', BB' etc.) auf die Ausdrücke der Punkte. Die Gleichung

$$aA + bB + cC + ... \equiv S$$

gibt dann an, dass S der Schwerpunkt der Punkte $A, B, C, ...$ ist. Durch die Gleichung

$$aA + bB + cC + ... = (a + b + c + ...)S$$

wird zusätzlich ausgedrückt, dass sich in dem Schwerpunkt S die Gewichte $(a+b+c+...)$ vereinigen. Wenn zwei Systeme von Punkten den gleichen Schwerpunkt haben, so wird dies durch die Gleichung

$$aA + bB + cC + ... \equiv fF + gG + ...$$

[401] Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man zwei beliebige Punkte A und B und die Koeffizienten $a = 1$ und $b = -1$ wählt.

ausgedrückt. Die Gleichung

$$aA + bB + cC + ... = fF + gG + ...$$

gibt zusätzlich an, dass die Koeffizientensummen beider Systeme gleich sind.
Im dritten Kapitel kommt Möbius dann zu der „neuen Methode, die Lage von Punkten zu bestimmen", seinen baryzentrischen Koordinaten.

> „Zu der Bestimmung der Lage von Punkten, sey es in einer gegebenen Geraden, oder in einer gegebenen Ebene oder im Raume überhaupt, werden Stücke von zweierlei Art erfordert. Die einen bleiben für alle Punkte dieselben, wie z.B. die Axen eines gewöhnlichen Coordinatensystems. Die andern, welche Coordinaten im allgemeinsten Sinne heissen, hängen von der verschiedenen Lage der Punkte gegen die erstern ab, und sind daher von einem Punkte zum andern veränderlich.
> Die jetzt zu erörternde Methode, Punkte zu bestimmen, besteht nun im Wesentlichen darin, dass, als unveränderliche Stücke, gewisse Punkte genommen werden, die ich *Fundamentalpunkte* nennen will, und der zu bestimmende Punkt als Schwerpunkt derselben gedacht wird. Die veränderlichen Stücke oder die Coordinaten sind demnach hier die Verhältnisse, welche zwischen den Coëfficienten der Fundamentalpunkte statt finden müssen, damit der zu bestimmende Punkt dieser Punkte Schwerpunkt sey."

[Möbius 1827, S. 32]

Dadurch, dass Möbius die Bestimmung der Lage von Punkten hier von *beliebigen* gegebenen Stücken und *beliebigen* veränderlichen Stücken abhängig macht, erweitert er den Koordinatenbegriff. Bisher waren die festen, gegebenen Stücke immer Geraden (die Koordinatenachsen) und die beliebigen Stücke Strecken. Im Fall der baryzentrischen Koordinaten wählt Möbius als feste, gegebene Stücke (Fundamental-)Punkte. Die veränderlichen Stücke sind hier Verhältnisse zwischen den Koeffizienten oder Gewichten, die den Fundamentalpunkten zugeordnet werden. Allerdings geht Möbius nicht so weit, anderen geometrischen Objekten als den Punkten Koordinaten zuzuordnen.
Für die baryzentrische Koordinatenbestimmung in einer Ebene, sind drei (nicht kollineare) *Fundamentalpunkte* notwendig. Ihre Verbindungsgeraden nennt Möbius *Fundamentallinien*, das von ihnen gebildete Dreieck *Fundamentaldreieck*. Analog braucht man im Raum vier Fundamentalpunkte (welche nicht in einer Ebene liegen) und die sechs Fundamentallinien bilden dort eine Fundamentalpyramide (vgl. [Möbius 1827, S. V]).

> „Die Verhältnisse aber, die für den zu bestimmenden Punkt zwischen den Gewichten der F.punkte oder ihren *Coëfficienten*, wie ich die Gewichte von jetzt an hiess, statt finden müssen, waren die Coordinaten dieses Punktes."

[Möbius 1827, S. V]

Bereits bei der Behandlung der ersten Aufgabe hatte Möbius herausgestrichen, dass es bei der Bestimmung des Schwerpunktes lediglich auf die Verhältnisse zwischen den Gewichten (oder Koeffizienten) ankommt, nicht auf deren absolute Werte (vgl.

[Möbius 1827, S. 6]). Die baryzentrischen Koordinaten sind folglich homogen, denn die drei Koeffizienten a, b, c bezogen auf drei Fundamentalpunkte A, B, C bezeichnen den gleichen (Schwer-)Punkt, wie die drei Koeffizienten $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ $(\lambda \neq 0)$[402]. Möbius führt keine neuen Variablen ein, um die Verhältnisse zwischen diesen Koordinaten zu benennen, sondern gibt sie immer als Verhältnis (oder Verhältnissgleichung) an.

> „Man nehme zu *Fundamentalpunkten* beliebige drei Punkte A, B, C der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen. [...] Setzt man nun $pA+qB+rC \equiv P$, so entspricht beliebig gegebenen Werthen der zwei in $p : q : r$ liegenden Verhältnisse ein gewisser Punkt P der Ebene. Und umgekehrt, ist irgend ein Punkt P der Ebene gegeben, so sind auch die Werthe der Verhältnisse $p : q : r$ immmer und ohne Zweideutigkeit bestimmbar[403]."
>
> [Möbius 1827, S. 34]

Die Koordinaten eines Punktes werden aber in der Regel nicht in der Form $p : q : r$ wiedergegeben, sondern durch ihren „Ausdruck", den Möbius folgendermaßen definiert:

> „Heisse wiederum $pA + qB + rC$ der *Ausdruck* des Punktes P."
>
> [Möbius 1827, S. 34]

Neben dem baryzentrischen Kalkül führt Möbius in seinem „Barycentrischen Calcul" auch den sogenannten „abgekürzten barycentrischen Calcul" ein. Hierfür definiert er „geometrische Netze", welche durch die wechselseitige Verbindung von Punkten und Schnittpunkten entstehen. Ausgehend von vier beliebigen Punkten in einer Ebene – von denen allerdings keine drei in einer Geraden liegen dürfen – entsteht dieses „Netz", indem die sechs Verbindungsgeraden zwischen den Punkten gezogen werden[404] und die dadurch neu entstehenden drei Schnittpunkte, ebenfalls durch Geraden untereinander verbunden werden. Diese Geraden erzeugen sechs neue Schnittpunkte, welche ebenfalls untereinander und mit den ersten sieben Schnittpunkten verbunden werden (vgl. [Möbius 1827, S. 273]).

> „Und so lässt sich das Verbinden der durch vorhergegangene Verbindungen entstandenen Durchschnittspunkte ohne Ende fortsetzen.

[402] Eine oder zwei der Koordinaten dürfen gleich Null werden. In diesem Fall liegt der Punkt in einer der Fundamentallinien oder ist sogar mit einem Fundamentalpunkt identisch (vgl. [Möbius 1827, S. 36]). Interessanterweise geht Möbius nicht darauf ein, dass durch das Tripel $(0, 0, 0)$ kein Punkt beschrieben wird, obwohl er sehr detailliert die verschiedenen Möglichkeiten behandelt, die sich aus den Koordinatenwerten für die Lage der Punkte bezüglich des Fundamentaldreiecks ergeben (vgl. [Möbius 1827, S. 33 - 41]). Diese Auslassung lässt sich nur dadurch erklären, dass Möbius es grundsätzlich ausschließt, dass einer der Koeffizienten Null wird und diese Möglichkeit nur zulässt, um Punkte in den Fundamentallinien beschreiben zu können (vgl. dazu z.B. [Möbius 1827, S. 11]).

[403] In diesem Satz sind beide Seiten der Bedingungen enthalten, die Möbius für die „Vollkommenheit einer Bestimmungsmethode" fordert: eine ein-eindeutige Entsprechung von Punkten und ihren Koordinaten (vgl. [Möbius 1827, S. 32f]). Das seine baryzentrischen Koordinaten diese Bedingung erfüllen, weist Möbius sorgfältig nach (vgl. [Möbius 1827, S. 33] und die dort angegebenen Paragraphen).

[404] Die Konstruktion des Möbius-Netzes beginnt also mit einem vollständigen Viereck. Allerdings verwendet Möbius diesen Begriff nicht.

> Das auf solche Weise aus den vier in einer Ebene beliebig genommenen Punkten A, B, C, D sich nach und nach bildende System von Linien wollen wir *ein Netz in einer Ebene*, die Linien selbst und ihre gegenseitigen Durchschnittspunkte *die Linien und Punkte des Netzes,* und die vier Punkte $A, ..D$ von denen die Construction ausgeht, *die vier Hauptpunkte des Netzes* heißen.

[Möbius 1827, S. 274]

Analog definiert Möbius das Netz im Raum, welches ausgehend von fünf Punkten gebildet wird, von denen keine vier in einer Ebene liegen dürfen (vgl. [Möbius 1827, S. 282f]). Durch je drei dieser Punkte wird eine Ebene gelegt, so dass insgesamt 10 Ebenen entstehen. Durch diese Ebenen werden insgesamt zehn neue Schnittpunkte erzeugt (vgl. [Möbius 1827, S. 283]). Diese und die ersten fünf Punkte werden wieder zu je dreien durch Ebenen verbunden u.s.w.
Wenn A, B, C und D die vier Hauptpunkte eines ebenen Netzes sind, dann kann man A, B und C als die Fundamentalpunkte der baryzentrischen Koordinatenbestimmung annehmen. D hat dann einen Ausdruck der Form $D \equiv aA + bB + cC$ bezogen auf das Fundamentaldreieck. Jeder andere Punkt P in der Ebene kann in der Form

$$P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC$$

dargestellt werden. Wie Möbius beweist, sind die Verhältnisse zwischen den Koeffizienten φ, χ, ψ genau dann rational, wenn P ein Punkt des Netzes mit den Hauptpunkten A, B, C und D ist (vgl. [Möbius 1827, S. 274f und 277f]). Außerdem beweist Möbius: sind A, B, C, D beliebige Punkte einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen und ist P ein beliebiger fünfter Punkt der Ebene, so fällt P entweder mit einem Punkt des Netzes mit den Hauptpunkten A, B, C, D zusammen, oder aber kommt einem solchen Netzpunkt beliebig nahe (vgl. [Möbius 1827, S. 280f]).
Die Verhältnisse zwischen den Koeffizienten φ, χ, ψ des Ausdruckes eines Punktes P, bezogen auf ein geometrisches Netz, können auch als ein spezielles Doppelverhältnis, das aus den Hauptpunkten des Netzes und P gebildet wird, aufgefasst werden.
Möbius definiert ein Doppelverhältnis (er benutzt dabei den Begriff „Doppelschnittsverhältniss“) als

> *„[...] das Verhältniss zwischen den zwei Verhältnissen, nach welchen eine gerade Linie, in Bezug auf zwei in ihr liegende Punkte, als Grenzpunkte, in zwei anderen Punkten geschnitten wird.“*

[Möbius 1827, S. 244]

Dabei benutzt Möbius folgende Schreibweise für das Doppelverhältnis, das durch A und B als Grenzpunkte und C und D als „Schneidepunkte“ gebildet wird (vgl. [Möbius 1827, S. 246]):

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Wenn C der Schnittpunkt zwischen der Geraden durch A und B und einer Geraden durch E und F ist sowie D der Schnittpunkt zwischen den Geraden durch A und B sowie G und H, dann gilt (vgl. [Möbius 1827, S. 254]):

$$(A, B, C, D) = (A, B, EF, GH) = \frac{AEF}{EFB} : \frac{AGH}{GHB}$$

wobei die Ausdrücke AEF, EFB etc. den positiven oder negativen Flächeninhalt der entsprechenden Dreiecke bedeuten. Sind A, B, C und $D \equiv aA + bB + cC$ die vier Hauptpunkte eines Netzes und P ein anderer Punkt der Ebene mit dem Ausdruck $P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC$, dann gilt (vgl. [Möbius 1827, S. 310]):

$$\varphi : \chi = (B, A, CP, CD), \qquad \chi : \psi = (B, C, AD, AP).$$

Doppelverhältnisse sind unter projektiven Abbildungen invariant[405], folglich gelten die letzten Ausdrücke unabhängig von der ursprünglichen Wahl der vier Hauptpunkte des Netzes. In dem Ausdruck $P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC$ sind die Koeffizienten a, b und c dagegen abhängig von der Wahl der vier Hauptpunkte. Bei seinem „abgekürzten baryzentrischen Kalkül" lässt Möbius diese Koeffizienten entfallen. Wenn die Ausdrücke für die Punkte $D, E, F, ...$ bezogen auf die Fundamentalpunkte A, B, C im baryzentrischen Kalkül

$$\begin{aligned} aA + bB + cC &= dD \\ \epsilon aA + \epsilon' bB + \epsilon'' cC &= eE \\ \zeta aA + \zeta' bB + \zeta'' cC &= fF \\ &... \end{aligned}$$

sind, dann lauten sie im abgekürzten Kalkül:

$$\begin{aligned} A + B + C &= D \\ \epsilon A + \epsilon' B + \epsilon'' C &= E \\ \zeta A + \zeta' B + \zeta'' C &= F \\ &... \end{aligned}$$

Zusätzlich kann jeweils einer der Koeffizienten $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ und $\zeta, ...$ gleich eins gesetzt werden (vgl. [Möbius 1827, S. 340]).

> „Der Zweck dieses abgekürzten Calculs ist demnach die Entwicklung aller derjenigen Eigenschaften einer Figur, welche sie mit jeder ihr collinear verwandten[406] Figur, als solchen, gemein hat. Bei den durch diesen Calcul zu lösenden Aufgaben und zu erweisenden Lehrsätzen kann daher von keinen andern Grössenverhältnissen, als D[oppel]- und V[ie]l[eckschnitts]verhältnissen[407] [...] die Rede seyn [...]; da hingegen die einfachen Verhältnisse

[405] Möbius führt im „Barycentrischen Calcul" den Begriff der „Collineations-Verwandtschaft" ein (zur Wahl dieser Bezeichnung vgl. [Möbius 1827, S. XII]). Zwei collinear verwandte Figuren können – modern ausgedrückt – durch eine projektive Abbildung aufeinander abgebildet werden. Die Invarianz des Doppelverhältnisses unter projektiven Abbildungen lautet in Möbius' Ausdrucksweise: „[...] D[oppel]verhältnisse zwischen sich entsprechenden Punkten collinearer Figuren [haben] gleiche Werthe." [Möbius 1827, S. 308]. „Man kann folglich die Verwandtschaft der Collineation auch geradezu durch die Gleichheit der D[oppel]verhältnisse definiren [...]" [Möbius 1827, S. 310].

[406] Zwei Figuren sind collinear verwandt, wenn die eine durch eine projektive Abbildung auf die andere abgebildet werden kann. Vgl. Fußnote 405.

[407] Die „Vieleckschnittsverhältnisse" sind eine Verallgemeinerung des Doppelverhältnisses, wobei letzteres als „Zweiecksschnittsverhältniss" aufgefasst werden kann. Werden die Seiten eines Vielecks $IKLM...O$ in den Punkten $P, Q, R, S, ...U$ geschnitten, wobei die Schnittpunkte auch in die Verlängerungen der Seiten fallen können, dann wird durch $\frac{IP}{PK} \cdot \frac{KQ}{QL} \cdot \frac{LR}{RM} \cdot ... \cdot \frac{OZ}{ZI}$ das entsprechende „Vieleckschnittsverhältniss" gebildet. Wird das „Zweieck" AB in den Punkten C und D geschnitten, so ergibt sich das „Zweiecksschnittsverhältniss" $\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}$ das gleich dem Doppelverhältnis $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ ist (vgl. [Möbius 1827, S. 297 - 301]).

zwischen Abschnitten einer Geraden [...] mittelst des abgekürzten Calculs eben so wenig berücksichtigt werden können, als er die Fälle, wo der Durchschnittspunkt von Geraden [...] im Unendlichen liegt, und daher jene Geraden [...] einander parallel laufen, besonders anzuzeigen vermag."

[Möbius 1827, S. 334]

Auch wenn Möbius selbst im Zusammenhang mit dem abgekürzten baryzentrischen Kalkül nicht von Koordinaten spricht, kann man die Koeffizienten als Koordinaten auffassen. Wenn P bezogen auf die vier Hauptpunkte A, B, C und $D \equiv aA + bB + cC$ eines Netzes den Ausdruck $P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC$ hat, kann man sagen, P hat die Koordinaten $[\varphi a, \chi b, \psi c]$. Im abgekürzten Kalkül würde P dann die Koordinaten $[\varphi, \chi, \psi]$ haben. Diese letzteren lassen sich – wie oben dargestellt – als Doppelverhältnisse auffassen, sind also projektiv invariant. Somit liefert der abgekürzte baryzentrische Kalkül eine Möglichkeit, projektive Koordinaten zu definieren (vgl. [Gray 2007, S. 152]). Wie Möbius im obigen Zitat sagt, lässt sich dem Ausdruck eines Punktes im abgekürzten baryzentrischen Kalkül nicht mehr ansehen, ob ein Punkt „im Unendlichen" liegt, oder nicht. P wäre dann ein Fernpunkt, wenn $\varphi a + \chi b + \psi c = 0$ wäre; das lässt sich aber der Koeffizientensumme $\varphi + \chi + \psi$ nicht ansehen. Folglich spielen die Fernpunkte im abgekürzten baryzentrischen Kalkül keine besondere Rolle mehr[408]. Nur durch die spezielle Wahl der vier Hauptpunkte A, B, C und $D \equiv aA + bB + cC$ wird eine Gerade als Ferngerade ausgezeichnet.

Neben der Collineation behandelt Möbius im „Barycentrischen Calcul" noch weitere „geometrische Verwandtschaften", wie Affinität, Ähnlichkeit und Kongruenz[409]. Die Behandlung der geometrischen Verwandtschaften und den damit in Verbindung stehenden Aufgaben bezeichnete Möbius selbst als den Hauptgegenstand seines Werkes (vgl. [Möbius 1827, S. XIf]); mit der genauen Ausarbeitung dieses Teils beschäftigte er sich besonders (wie Reinhardt dem 2. Band von Möbius' Tagebüchern entnehmen konnte; vgl. [Reinhardt 1887, S. 710]). Auch in seiner ersten Veröffentlichung ([Möbius 1823]) hatte Möbius sich hauptsächlich mit den verschiedenen Verwandtschaften beschäftigt (vgl. auch [Loh 1995, S. 31]). Möbius wurde auf deren Behandlung geführt, indem er feststellte, dass zwei Figuren, deren Punkte jeweils die gleichen Koordinaten haben, aber auf zwei unterschiedliche Fundamentaldreiecke bezogen sind, affin zueinander sind:

„Zugleich aber wurde ich dadurch bewogen, noch mehrere dergleichen Beziehungen zwischen Figuren auszumitteln, und somit entstand der zweite Abschnitt meines Buchs, welcher von den *geometrischen Verwandtschaften* handelt, einer Lehre, welche in dem hier gebrauchten Sinne die Grundlage der ganzen Geometrie in sich fasst, die aber auch eine der schwierigsten seyn möchte, wenn sie in völliger Allgemeinheit und erschöpfend vorgetragen werden soll."

[Möbius 1827, S. X]

---

408 Dies ist begriffsgeschichtlich wichtig, weil damit alle Punkte der projektiven Ebene gleichberechtigt werden. Diese Ebene wird jetzt gewissermaßen homogen, was sie vorher wegen der Unterscheidung zwischen Punkten und Fernpunkten nicht war.

409 Für letzteres benutzt Möbius den Begriff „Ähnlichkeit und Gleichheit".

Möbius leitet aus den insgesamt fünf von ihm betrachteten Verwandtschaften[410] drei Klassen von Eigenschaften her. Dabei sind die Eigenschaften der dritten Klasse diejenigen, welche zwei kollinear verwandte Figuren gemeinsam haben müssen, also Doppel- und Vielecks-Schnittverhältnisse. Eigenschaften der zweiten Klasse sind solche, die in allen affinen Figuren gleich sind und nicht zur dritten Klasse gehören, also z.B. Streckenverhältnisse. Alle übrigen Eigenschaften zählen zur ersten Klasse. Dazu gehören also beispielsweise Streckenlängen und Winkel (vgl. [Möbius 1827, S. 363 - 368]). Diese Klassifizierung lässt sich auch allein mit dem baryzentrischen Kalkül begründen:

> „Jede Eigenschaft, welche sich mittelst des abgekürzten barycentrischen Calculs finden lässt, gehört zur dritten Classe. Die Eigenschaften, welche mit Hilfe des barycentrischen Calculs selbst und nicht zugleich mittelst des abgekürzten gefunden werden können, begründen die zweite Classe. Die Eigenschaften endlich, welche nicht durch den barycentrischen Calcul selbst und folglich auch nicht durch den abgekürzten erweislich sind, sondern wozu die Lehre von Winkeln (der pythagorische Lehrsatz, trigonometrische Formeln, u.s.w.) unumgänglich erfordert wird, machen die erste Classe aus.“

[Möbius 1827, S. 366]

Mit dieser Klassifizierung geht Möbius einen ersten Schritt in Richtung einer klaren Unterscheidung zwischen affiner und projektiver Geometrie – auch wenn er diese Begriffe nicht benutzt. Obwohl Klein von Möbius’ Klassifizierung bei der Ausarbeitung seines „Erlanger Programms“ von 1872 nicht beeinflusst war, nennt er es rückblickend einen Vorläufer davon:

> „Wenn auch Möbius noch nicht den modern formulierten Gruppenbegriff besitzt, so bietet doch der Begriff der „Verwandtschaft“ ein Äquivalent.“

[Klein 1926, S. 118]

Neben den bereits genannten Themen, benutzt Möbius seine baryzentrischen Koordinaten im „Barycentrischen Calcul“ auch zur Behandlung der Kegelschnitte. In diesem Zusammenhang behandelt er auch das „gegenseitige Entsprechen zwischen Punkten und geraden Linien in Bezug auf einen Kegelschnitt“ [Möbius 1827, S. 413f] – die Dualität. Wie aus der Vorrede deutlich wird, war Möbius selbständig zu seiner Auffassung der Dualität gekommen und erfuhr erst im Februar 1826 durch eine Anzeige in Férussac’s „Bulletin des sciences mathem. ...“, dass die Dualität bereits von französischen Mathematikern behandelt worden war; ohne aber nähere Informationen darüber bekommen zu können (vgl. [Möbius 1827, S. XIII]). Neben dieser, auf einen Kegelschnitt bezogenen Dualität, stellt Möbius im letzten Abschnitt seines Werks auch eine allgemeine Dualität auf[411].

[410] Gleichheit und Ähnlichkeit (=Kongruenz), Ähnlichkeit, Gleichheit (= Flächengleichheit), Affinität sowie Collineation.

[411] Vgl. Fußnote 481 auf Seite 257.

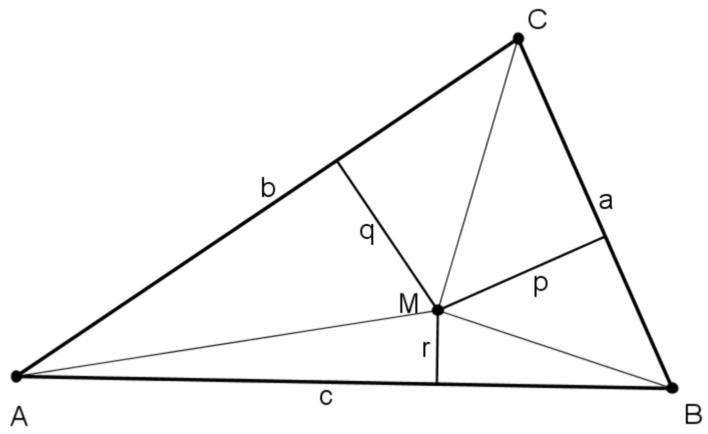


Abb. 11.9.: Dreieckskoordinaten und baryzentrische Koordinaten

11.1.3. Vergleich von Möbius' und Plückers Ansätzen

> „Im Grunde ist es ein und dasselbe Ziel, nach welchem alle neuern Bestrebungen, selbst diejenigen der reinen Geometrie gerichtet sind. Nur bildet sich jeder, der Eigenthümliches zu Tage fördert, einen Algorithmus, der seiner Aufassungsart des Gegenstandes angepaßt ist; jeder denkt, spricht und schreibt in seiner eigenen Sprache. [...] Ja in manchen Fällen ist es schon schwer wahrzunehmen, daß Aufsätze, in welchen der weniger Unterrichtete die verschiedenartigsten Gegenstände sieht, im Grunde doch ein und dasselbe enthalten, nur unter eigenthümlichen Gesichtspuncten aufgefaßt und unter den verschiedenartigsten Algorithmen dargestellt."
>
> [Plücker 1833d, S. 722f]

Aus gegebenen Dreieckskoordinaten eines Punktes, lassen sich unmittelbar die baryzentrischen Koordinaten des Punktes bestimmen. Seien A, B und C die drei Koordinatenpunkte (vgl. Abb. 11.9) und p, q und r die Abstände eines Punktes M von den drei Koordinatenlinien, dann hat M die Dreieckskoordinaten $[p, q, r]$. Bezeichnet man die Längen der Dreiecksseiten mit a, b und c, dann hat M die baryzentrischen Koordinaten $[ap, bq, cr]$. Ist $a'A + b'B + c'C \equiv M$ der Ausdruck des Punktes M bezogen auf das Fundamentaldreieck ABC, dann gilt nämlich (vgl. [Möbius 1827, S. 26]):

$$a' : b' : c' = MCB : MAC : MBA,$$

wobei durch MCB, MAC, MBA die orientierten Dreiecksflächen bezeichnet sind. Für diese gilt aber:

$$MCB = \pm\frac{a \cdot p}{2},$$
$$MAC = \pm\frac{b \cdot q}{2},$$
$$MCB = \pm\frac{c \cdot r}{2}.$$

Daraus ergibt sich die Verhältnisgleichung

$$a' : b' : c' = \frac{ap}{2} : \frac{bq}{2} : \frac{cr}{2} = ap : bq : cr.$$

Wie bereits erwähnt wurde, kannte Plücker Möbius' „Barycentrischen Calcul" schon, als er seinen Artikel über die Dreieckskoordinaten ([Plücker 1830a]) in Crelles Journal veröffentlichte:

> „Dieses Coordinaten-System macht den Gegenstand einer frühern Abhandlung vom Jahre 1828 aus, die den ersten Versuch enthält, den Begriff der gewöhnlichen Coordinaten zu erweitern, und was ich damals, der großen Verschiedenheit der Algorithmen wegen, nicht sogleich erkannte: es ist mit dem *barycentrischen Calcul* des Herrn *Möbius*, dem Wesen nach ganz dasselbe."

[Plücker 1835, S. 7, Fußnote]

Trotz des engen Zusammenhangs zwischen beiden Koordinatensystemen ist es absolut plausibel, dass Plücker diesen Zusammenhang nicht direkt erkannte. Dadurch, dass Möbius die mechanische Terminologie verwandte, z.B. vom Schwerpunkt und von Gewichten sprach, scheint sein Ansatz auf den ersten Blick sehr verschieden von Plückers Dreieckskoordinaten zu sein, die als Verhältnisse von Strecken gebildet werden. Auch Möbius' Darstellungweise in der ein Punkt durch seinen „Ausdruck" also durch eine Gleichung dargestellt wurde, hat es Plücker sicher erschwert die Gemeinsamkeit beider Ansätze – nämlich die Einführung homogener Koordinaten bezogen auf ein Koordinatendreieck – zu erkennen.

> „Auch hier kann man wieder *Möbius* als denjenigen bezeichnen, welcher den neuen Begriff zuerst, und zwar vor *Plücker* gehabt hat. Denn *Möbius'* barycentrische Coordinaten (deren später *Grassmann, Hamilton* und Andere sich bedient haben) sind im Grunde keine andern; nur wird durch die aus der Mechanik geschöpfte Art der Entstehung der Begriff etwas verdeckt [...]."

[Clebsch 1872, S. XXI]

Möglicherweise kam Plücker auch erst durch seine Kontakte zu Magnus dazu, sich genauer mit dem „Barycentrischen Calcul" zu beschäftigen[412]. Jedenfalls besaß Magnus

[412] Plücker lernte Magnus während seiner Zeit in Berlin (1832 - 33) kennen. Vgl. dazu Kapitel 4.3.

eine gute Kenntnis sowohl von Plückers als auch von Möbius' Arbeiten – für seine „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie" benutzte er sowohl Plückers „Entwicklungen", als auch Möbius' „Barycentrischen Calcul" [Magnus 1833, S. IX] – und er machte Plücker verschiedentlich auf Details aus dem „Barycentrischen Calcul" aufmerksam (vgl. Kapitel 5.2). Es lässt sich also festhalten, dass Plücker, obwohl er Möbius' „Barycentrischen Calcul" bereits kannte, unabhängig von dessen baryzentrischen Koordinaten zu seinen homogenen Dreieckskoordinaten gekommen ist.
Ein weiterer Berührungspunkt zwischen Möbius' baryzentrischen Koordinaten und Plückers Arbeiten soll hier ebenfalls nicht unerwähnt bleiben. Im zweiten Band seiner „Entwicklungen" betont Plücker die Bedeutung von „barycentrischen Betrachtungen" in der „Situationsgeometrie" (vgl. [Plücker 1831, S. 23]). Dort betrachtet Plücker Gleichungen der Form

$$\mu U + \mu' U' + \mu'' U'' = 0, \tag{3}$$

in denen U, U' und U' abgekürzte Bezeichungen von Punktgleichungen in Linienkoordinaten ($au + bv + w = 0$) darstellen[413]. Die Gleichung (3) bezeichnet also ebenfalls einen Punkt. Um diesen zu konstruiren, zerlegt Plücker die Gleichung (3) in folgender Weise (vgl. [Plücker 1831, S. 22]):

$$\begin{aligned} \mu U + \mu' U' &= 0, \quad \text{und} \quad U'' = 0; \\ \mu U + \mu'' U'' &= 0, \quad \text{und} \quad U' = 0; \\ \mu' U' + \mu'' U'' &= 0, \quad \text{und} \quad U = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen drei Punktepaare dar, deren Verbindungsgeraden durch den Punkt gehen, der durch die Gleichung (3) dargestellt wird. Während die Gleichung $U + U' = 0$ den Mittelpunkt der Strecke UU' bezeichnet, (vgl. [Plücker 1831, S. 8]), wird durch die Gleichung $\mu U + \mu' U' = 0$ ein Punkt dargestellt, welcher die Strecke UU' im Verhältnis $\mu' : \mu$ teilt (vgl. [Plücker 1831, S. 22]). Die drei Verbindungsgeraden gehen also jeweils durch einen der Eckpunkte U, U', U'' des Dreiecks und durch einen Punkt, der die jeweils gegenüberliegende Dreiecksseite in einem gegebenen Verhältnis teilt.

> „Diese drei geraden Linien schneiden sich also in demselben Puncte und dieser Punct ist bekanntlich kein anderer, als der Schwerpunkt dreier Gewichte, die sich wie $\mu : \mu' : \mu''$ verhalten und die wir in den Winkelpunkten des Dreiecks in U, U' und U'' angebracht denken.
> Wie die vorstehende Gleichung können wir auch folgende Gleichung
>
> $$\mu U + \mu' U' + \mu'' U'' + \mu''' U''' + ... = 0, \tag{4}$$
>
> [...] durch allmählige Zerlegung construiren [...]. Es ist dieser [durch die Gleichung (4) dargestellte] Punct der Schwerpunkt von Gewichten, die sich verhalten wie $\mu : \mu' : \mu'' : \mu''' : ...$ und respective in den Puncten $U, U', U'', U'''...$ angebracht sind [...]. Für solche barycentrischen Betrachtungsweisen, die

[413] Alle Linien, deren Koordinaten u, v und w die Gleichung erfüllen, schneiden sich in dem Punkt, der durch die Gleichung dargestellt werden. Vgl. zu Plückers Linienkoordinaten Kapitel 11.2.

> auf eine ungemein leichte Weise zu vielen Sätzen der Situations-Geometrie führen, erhalten wir also durch die Einführung der neuen Gleichungen einen Algorithmus, der zugleich überflüssig macht, dass, der Geometrie fremde Begriffe in dieselbe eingeführt werden.“

[Plücker 1831, S. 22f]

Allerdings nennt Plücker Möbius und seinen „Barycentrischen Calcul“ hier nicht, so dass nicht klar wird, ob er sich der starken Ähnlichkeit der beiden Ansätze bewusst war und ob mit der Kritik an der „Einführung von, der Geometrie fremden, Begriffen“ möglicherweise sogar Möbius selbst gemeint war.
Die abgekürzten Ausdrücke $U, U', ...$ die für Gleichungen der Form $au + bv + w = 0$ stehen, entsprechen im Wesentlichen den linearen Linienkoordinaten, wie Plücker sie im „System ...“ (1835) einführt[414]. Allerdings legt Plücker dort Geradengleichungen der Form $m + an + b$ zu Grunde und führt zusätzliche Koeffizienten ein[415]. Wenn diese drei Koeffizienten alle gleich eins gesetzt werden, gibt es eine direkte Analogie zwischen diesen speziellen linearen Linienkoordinaten und Möbius’ baryzentrischen Koordinaten:

> „Wenn die drei Coordinaten t, u und v insbesondere diejenigen geraden Linien bedeuten, welche von den drei gegebenen festen Puncten [T, U und V] aus nach gegebener Richtung, unter sich parallel, nach der bezüglichen geraden Linie gezogen werden können, ein Fall[416], den wir durch Umklammerung jener Coordinaten unterscheiden wollen, so erhalten wir für jenen Schwerpunkt, nach einer allbekannten Eigenschaft desselben, die Gleichung:
>
> $$(t) + (u) + (v) = 0.\text{“} \tag{5}$$

[Plücker 1835, S. 34f]

In der Sprache des baryzentrischen Kalküls ausgedrückt, lautet die letzte Gleichung

$$T + U + V = 0 \tag{6}$$

bzw.

$$T + U + V = (1 + 1 + 1)S \tag{7}$$

wenn T, U und V jeweils als Fundamentalpunkte angenommen werden und S der Schwerpunkt des Dreiecks TUV ist. Durch die Abkürzungen T, U, V werden in Möbius’ baryzentrischem Kalkül drei Strecken TT', UU', VV' bezeichnet. Diese liegen auf drei, zueinander parallelen Geraden. Die Endpunkte T', U' und V' sind die Schnittpunkte zwischen diesen parallelen Geraden und einer beliebigen sie schneidenden Transversalen. In dem durch die Gleichung (6) dargestellten Fall geht diese Transversale durch den Schwerpunkt S, im Fall der Gleichung (7) nicht. Die drei durch T, U und V bezeichneten Strecken der Gleichung (6) entsprechen den drei Strecken $(t), (u)$ und (v)

[414] Vgl. Kapitel 11.3.2.

[415] Die drei Koordinaten einer Linie, t, u und v sind durch $\tau(m + a''n + b'') = t,\ \upsilon(m + a'n + b') = u,\ \varphi(m + an + b) = v$ gegeben (vgl. [Plücker 1835, S. 32] und Kapitel 11.3.2).

[416] Dieser Fall ergibt sich aus der Setzung $\tau = \upsilon = \varphi = 1$, vgl. Kapitel 11.3.2.

der Gleichung (5)[417]. Der baryzentrische „Ausdruck“ eines Punktes stimmt also in gewisser Weise mit der Gleichung dieses Punktes in Linienkoordinaten überein.
Die Bedingungsgleichung $a + b + c = 0$, die ausdrückt, dass der Punkt mit dem baryzentrischen Ausdruck $aT + bU + cV$ ein Fernpunkt ist, ließe sich entsprechend als Gleichung der Ferngeraden auffassen. Dieser würden so die Linienkoordinaten [1,1,1] zugeordnet[418].
Allerdings hat Möbius keine solchen Vorstellungen. Bei ihm werden nur Punkten und keinen anderen geometrischen Objekten Koordinaten zugeordnet. Die Abschnitte T, U und V auf den parallelen Geraden werden nicht als Koordinaten aufgefasst, vielmehr hat der Punkt S der Gleichung (7) die beiden Koordinaten, welche sich aus den Verhältnissen der drei Koeffizienten $1 : 1 : 1$ ergeben. Auch die Gleichung $a + b + c = 0$ deutet Möbius nicht als eine Geradengleichung sondern lediglich als eine Bedingungsgleichung dafür, dass der Punkt dessen Koordinaten sich wie $a : b : c$ verhalten, unendlich weit entfernt liegt. Die Gleichung $a + b + c = 0$ tritt bei Möbius folglich nicht als Gleichung zwischen variablen, sondern lediglich als Gleichung zwischen unbekannten Größen auf. Geradengleichungen gibt Möbius in der Form (vgl. [Möbius 1827, S. 44])

$$eE + ve'E' = (a + a'v)A + (b + b'v)B + (c + c'v)C$$

an, wobei A, B und C die Fundamentalpunkte sind, v variabel und die beiden Punkte E und E', welche auf der dargestellten Geraden liegen, die Ausdrücke $eE = aA + bB + cC$ bzw. $e'E' = a'A + b'B + c'C$ bezüglich des Fundamentaldreiecks haben.

> „Bezeichnen E und E' zwei Punkte, so ist $E + w'E'$ der Ausdruck eines Punktes in der durch E und E' bestimmten geraden Linie, und zwar jedes beliebigen Punktes dieser Linie, wenn es frei steht, dem Verhältnisse $1 : w$ jeden beliebigen Werth beizulegen [...][419]. Man kann daher den Ausdruck $E + wE'$, sobald darin w als eine veränderliche Grösse genommen wird, *den Ausdruck der geraden Linie EE'* selbst nennen, indem die Construction desselben alle in dieser Linie begriffenen Punkte giebt.“
>
> [Möbius 1827, S. 44]

Während bei Plücker, besonders in seinem Aufsatz „Über ein neues Coordinatensystem“ ([Plücker 1830a]), die Darstellung von Kurven beliebiger Ordnungen durch homogene Gleichungen im Mittelpunkt steht, liegt in Möbius’ „Barycentrischem Calcul“ der Fokus eher auf der Darstellung der Koordinaten selbst. Homogene Gleichungen benutzt Möbius nicht (vgl. [Müller 1910, S. 617]).

> „[...] Anwendungen im Sinne der Theorie homogener Functionen treten bei *Möbius* wesentlich deswegen nicht ein, weil bei ihm nicht die Gleichung

[417] Vorausgesetzt, T, U und V werden als feste Strecken angesehen, die durch eine „nach gegebener Richtung“ gezogenen Transversale bestimmt werden. Die Wahl dieser „gegebenen Richtung“ ist in Plückers allgemeiner Koordinatenbestimmung von der Wahl der drei Koeffizienten, die hier alle drei gleich eins gesetzt wurden, abhängig (vgl. Kapitel 11.3).

[418] Die Ferngerade ist die Polare des Schwerpunktes bezüglich des Dreiecks (vgl. [Plücker 1835, S. 34]).

[419] Obwohl Plücker – wie bereits erwähnt – ebenfalls die Gleichung $\mu U + \mu' U' = 0$ für einen Punkt verwendet, welcher die Strecke UU' im Verhältnis $\mu' : \mu$ teilt (vgl. [Plücker 1831, S. 22]), gebraucht er μ nicht als Variable, um die Gerade durch U und U' darzustellen.

> der Curve, sondern die Darstellung der Coordinaten durch einen Parameter die Grundvorstellung bildet.“
>
> [Clebsch 1872, S. XXII]

Dieser Unterschied zwischen Möbius’ und Plückers Einführung und Behandlung homogener Koordinaten liegt in den unterschiedlichen Intentionen begründet, die sie mit den jeweiligen Schriften verfolgten. Plückers Intention lag darin, die analytische Methode zu verallgemeinern und „den Begriff der gewöhnlichen Coordinaten-Bestimmung zu erweitern“ [Plücker 1835, S. 7]. Im Sinn der Übertragungsprinzipien liefert ein neues Koordinatensystem die Möglichkeit, analytische Ausdrücke auf verschiedene Weise zu deuten, indem den Variablen in der Gleichung unterschiedliche Bedeutungen beigelegt werden. Folglich stehen in Plücker Ansatz die Gleichungen zwischen den Koordinaten besonders im Fokus. Zwar hält Plücker es für bemerkenswert, dass er mit seinen Dreieckskoordianten leicht nachweisen kann, dass alle Fernpunkte einer Ebene in einer Geraden liegen, aber die Bedeutung der homogenen Koordinaten für eine analytische Behandlung der projektiven Geometrie ist ihm – wenn überhaupt – eher entfernt bewusst. Möbius hingegen verfolgt das Ziel einen „passenden Algorithmus“ für die Verwendung des Schwerpunktes in der Geometrie zu erfinden (vgl. [Möbius 1827, S. IV]). Dieser Algorithmus, der baryzentrische Kalkül, beschreibt durch Gleichungen das Gleichgewicht zwischen den Punkten eines Systems und ihrem Schwerpunkt. Folglich steht bei Möbius der „Ausdruck“ eines Punktes ($aA + bB + cC \equiv P$) im Mittelpunkt der Betrachtungen und nicht homogene Gleichungen zwischen den Koordinaten. Um Kurven verschiedener Ordnungen zu betrachten, nimmt Möbius nicht die Koordinaten selbst als Variablen einer Gleichung, sondern führt eine neue Variable ein und betrachtet die Koordinaten als Funktionen dieser veränderlichen Größe (vgl. [Möbius 1827, S. VI]). Im Mittelpunkt von Möbius’ Untersuchungen stehen die verschiedenen geometrischen Verwandtschaften und die Klassifizierung geometrischer Eigenschaften durch seinen baryzentrischen Kalkül. Auch wenn Möbius nicht explizit projektive Koordinaten einführt, liefert sein „abgekürzter Kalkül“ ein Hilfsmittel zur Behandlung der projektiven Geometrie. Während Plücker – wie wohl die meisten seiner Zeitgenossen – kein Konzept einer projektiven Geometrie besaß und die Fernpunkte häufig lediglich als eine Beschreibung von Parallelität in der (komplexen) affinen Geometrie benutzte, hatte Möbius eine sehr klare Sicht auf die Unterschiede zwischen affiner und projektiver Geometrie. In seinem abgekürzten Kalkül ist sogar bereits die Vorstellung vorhanden, dass die Fernpunkte in der projektiven Geometrie keine besondere Rolle mehr spielen und das erst durch den Übergang zur affinen Geometrie eine Gerade als Ferngerade ausgezeichnet wird.

> „(Wenn auch Möbius noch nicht den modern formulierten Gruppenbegriff besitzt, so bietet doch der Begriff der „Verwandtschaft“ ein Äquivalent [...]) Mit dieser Klassifizierung verbindet er nun sogleich die Idee nach den Ausdrücken oder Gebilden zu fragen, die bei einer dieser Verwandtschaften ungeändert bleiben. [...]
> Plücker war bei all seinen Leistungen zum Ausbau der projektiven Geometrie kein Projektiviker im eigentlichen Sinne. Im Stile der alten Geometer des 18. Jahrhunderts haftete er am Konkreten, richtete sein Augenmerk auf das Verhalten der Kurve im Unendlichen, widmete z.B. ausführliche

> Untersuchungen der Frage nach den Asymptoten usw., alles Dinge, deren Bedeutung vom rein projektiven Standpunkt aus verschwindet. Die konsequente Durchbildung des projektiven Denkens und damit die Ausgestaltung der Invariantentheorie blieb einer späteren Generation vorbehalten.“

[Klein 1926, S. 118 u. 126]

Die unterschiedlichen Intentionen, die Möbius und Plücker bei der Einführung der homogenen Koordinaten verfolgten, hängen auch mit den Traditionen zusammen, auf die sie sich berufen. Auch wenn Plücker bei der Einführung der Dreieckskoordinaten keine Angaben darüber macht, wie er zu seiner Idee gekommen ist und sich auch nicht direkt auf andere Mathematiker bezieht, sieht er sich doch grundsätzlich in der Tradition Monges[420]. Möbius dagegen schließt sich einer langen Tradition an, den mechanischen Schwerpunkt für geometrische Untersuchungen zu nutzen und bezieht sich dabei besonders auf Carnot und L'Huilier. Während Plücker in Paris studiert und dort Verbindungen geknüpft hatte, auch in französischen Zeitschriften veröffentlichte, stand Möbius eher außerhalb des wissenschaftlichen Geschehens und französischer Einflüsse.

> „Moebius war in der Tat während des größten Abschnittes seines stillen Lebens astronomischer Direktor auf der Pleißenburg in Leipzig. Hier hat er ruhig seine Gedanken reifen lassen, um sie dann in vollendeter Klarheit vorzutragen [...]. [...]
> Plücker war eine viel weitläufigere Erscheinung als Moebius; er pflegte besonders lebhafte Beziehungen zu Frankreich und England [...].“

[Klein 1926, S. 116 u. 120]

Trotz der „vollendeten Klarheit“ mit der Möbius seine Gedanken veröffentlichte und die in deutlichem Gegensatz zu Plückers Schreibstil steht[421], ist der „Barycentrische Calcul“ nicht direkt so gewürdigt und beachtet worden, wie er es verdient hätte[422]. Klein führt dies auf Möbius' bescheidene Art, aber auch auf die neuen, „besonders gearteten Termini“ zurück, die Möbius verwandte [Klein 1926, S. 118].
Sowohl Möbius als auch Plücker haben mit der Einführung homogener Koordinaten einen bedeutenden Beitrag zur Verallgemeinerung des Koordinatenbegriffs geleistet. Allerdings ging Möbius nicht so weit, auch anderen geometrischen Objekten als den Punkten Koordinaten zuzuordnen; auch wenn – wie oben dargestellt wurde – seine baryzentrischen Ausdrücke dem Konzept von Linienkoordinaten implizit sehr nahe kommen.

> „Homogeneous coordinates, especially those of Möbius, had done much to arithmetize geometry; but in 1829 Plücker introduced a still more revolutionary point in view which broke completely from the idea of coordinates

[420] Vgl. Kapitel 8 und 10.2.
[421] „Die Fülle seiner [d. i. Plückers] neuen Anschauungen und Erfahrungen drängte ihn sofort zu ausführlichen Darlegungen [...]. Aber nicht immer vermochte er die sich ihm aufdrängende Fluth von Erscheinungen völlig zu beherrschen [...]. So verführte ihn die Leichtigkeit seiner Production bisweilen zu Irrthümern [...].“ [Clebsch 1872, S. XIII].
[422] Vgl. S. 197.

> as line segments. [...] Gradually, however, the coefficients came to have more and more the status of pure numbers.“
>
> [Boyer 1956, S. 250]

Dieser bedeutende Schritt, die Einführung der Linien- und Ebenenkoordinaten durch Plücker, wird im nächsten Abschnitt behandelt.

11.2. Linien- und Ebenenkoordinaten

> „Der allgemeinen Koordinatendefinition [...] gemäß nennt man Zahlen, die eine Fläche gegenüber irgendwelchen festen Gebilden bestimmen, *Koordinaten dieser Fläche*. Dieser für die Weiterentwicklung der Koordinatenmethoden ausschlaggebende Gedanke geht auf *J. Plücker* zurück. Nach seinem Vorgange können wir die $N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Koeffizieten f_k in der Gleichung $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung als deren *homogene* Koordinaten [...] bezeichnen.“
>
> [Müller 1910, S. 691]

Julius Plücker ist der erste Geometer, der explizit Linien- und Ebenenkoordinaten verwendet[423]. In der Vorrede zum zweiten Band der „Entwicklungen“ gibt Plücker an, wie er dazu kam:

> „Erst Ende August 1829 that ich einen neuen Schritt, bei der Gelegenheit, dass ich eine öffentliche Rede ausarbeiten musste und zu diesem Ende die neuesten geometrischen Forschungen übersichtlich zusammenstellte. Ich hatte den Gedanken, die Constanten in der Gleichung einer geraden Linie als die Coordinaten dieser Linie zu betrachten, und demnach durch eine Gleichung zwischen solchen Coordinaten eine Curve darzustellen, welche von geraden Linien, die nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen, umhüllt wird. Dieser Gedanke lag für mich um so näher, da ich mir bereits schon allgemeinere Begriffe über Coordinaten-Systeme gebildet und

[423] E. Müller gibt an, dass Michel Chasles (1793 - 1880) unabhängig von Plücker und fast gleichzeitig mit ihm diese Koordinaten aufgestellt habe und J. Booth 1843 ebenfalls unabhängig zu diesen Koordinaten kam (vgl. [Müller 1910, S. 692, Fußnote 369]). Zu Chasles vgl. auch [Schoenflies 1895, S. 600f], wo Schoenflies angibt, dass sich Chasles Idee „auf Vorstellungen [gründet], die in der dort ausgesprochenen Form eine analytische Verwendung nicht gestattet hätten.“ Eine implizite Verwendung von (Linien- und) Ebenenkoordinaten findet sich bei A.F.Möbius im „Barycentrischen Calcul“ (vgl. [Müller 1910, S. 692, Fußnote 369] und Kapitel 11.1.3).

> auch bereits schon im 5. Bande des Journals für Mathematik einen Aufsatz[424] über ein neues Coordinaten-System geliefert hatte.“

[Plücker 1831, S. VII]

Bereits Anfang September schickte Plücker den ersten Teil eines Aufsatzes mit dem Titel „Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen“ an Crelle (vgl. [Plücker 1831, S. VII]). Dieser Aufsatz wurde 1830 im 6. Band des Journals veröffentlicht. Plücker hatte, nachdem er Crelle auch den zweiten Teil des Aufsatzes zugeschickt hatte, beschlossen, den zweiten Band der „Entwicklungen“ zu schreiben und das Thema darin zu behandeln. Er bat Crelle daher, den Artikel nicht zu veröffentlichen, da er nur als eine „unvollkommene Vorarbeit“ zu dem zweiten Band der Entwicklungen zu betrachten sei, „aber auch als solche wollte der nachsichtsvolle Herausgeber dieselbe erscheinen lassen“ [Plücker 1831, S. VII][425]. In diesem Artikel benutzt Plücker den Begriff „Linienkoordinaten“ oder „Koordinaten der geraden Linie“ noch nicht explizit. Er spricht aber z.B. von „[...] Gleichungen zwischen veränderlichen Grössen, durch welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, eine bestimmte *gerade Linie* gegeben ist [...]“ [Plücker 1830c, S. 178]. Wie aus dem obigen Zitat aus der Vorrede zum zweiten Band der Entwicklungen hervorgeht, lag Plücker der Gedanke einer Geraden Koordinaten zuzuordnen deshalb besonders nahe, weil er durch die Dreieckskoordinaten den gewöhnlichen Koordinatenbegriff bereits erweitert hatte. Er war sich aber darüber bewusst – wie er in den einleitenden Bemerkungen zu dem Aufsatz [Plücker 1830c] schreibt –, dass ein grundsätzlicher Unterschied zwischen diesen beiden Erweiterungen des Koordinatenbegriffs besteht:

> „In einem Aufsatze [...] habe ich mich mit einem neuen Coordinatensysteme beschäftigt. Die Absicht des vorliegenden Aufsatzes geht weiter. Wir haben es jetzt nicht mehr zu thun bloss mit einer neuen Bestimmungsweise der Lage eines Punktes, wodurch man eben ein neues Coordinatensystem erhält, sondern mit einer gänzlich verschiedenen Art, eine Curve durch eine Gleichung auszudrücken. Man denkt sich nämlich, indem man eine Curve wie gewöhnlich durch eine Gleichung zwischen veränderlichen Grössen darstellt, welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, die Coordinaten eines bestimmten *Punktes* bedeuten, diese Curve als aus einer unendlichen Menge stetig auf einander folgender Punkte bestehend, oder, wenn man lieber will, als durch die Bewegung eines Punktes beschrieben. Man kann aber auch durch nicht minder einfache und bequeme Gleichungen zwischen veränderlichen Grössen, durch welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, eine bstimmte *gerade Linie* gegeben ist, unendlich viele gerade Linien darstellen, die nach einem Gesetze stetig auf einander folgen, und also eine bestimmte Curve *umhüllen.*“

[Plücker 1830c, S. 178]

[424] Bei diesem Aufsatz handelt es sich um [Plücker 1830a].

[425] Vgl. auch Crelles Anmerkung zu Plückers Artikel in seinem Journal (Bd. 6, S. 146), in dem er auf den „unter der Presse befindlichen“ zweiten Band von Plückers Entwicklungen hinwies. Dieser zweite Band erschien 1831. Schoenflies weist darauf hin, dass in den „Entwicklungen“ „die bezüglichen Probleme grösstentheils in reiferer Form dargestellt“ und einige Versehen korrigiert worden seien. Diese führt er einzeln auf (vgl. [Schoenflies 1895, S. 601]).

Der für die Weiterentwicklung des Koordinatenbegriffs so wichtige Gedanke Plückers, bestand also darin, andere geometrische Objekte als den Punkt als grundlegendes Element geometrischer Betrachtungen zu wählen und ihm Koordinaten zuzuordnen[426]. Plücker betrachtete

> „[...] von vorn herein *Punkt und Gerade als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie der Ebene, Punkt und Ebene als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie des Raumes* [...]; ein fundamentaler und weittragender Gedanke, bei welchem zum ersten Male von der gewohnheitsmässigen Vorstellung des Puntes als einzig denkbaren Grundelements räumlicher Gebilde Umgang genommen wurde.“

[Clebsch 1872, S. XIX]

Plücker geht für die Einführung der Linienkoordinaten von „der allgemeinen Form der Gleichung einer geraden Linie“ [Plücker 1830c, S. 179],

$$Ay + Bx + C = 0,$$

aus, in der x und y Variabeln und A, B und C Konstanten bedeuten. Plücker stellt heraus, dass diese Gleichung alle möglichen Geraden in einer Ebene darstellen kann, wenn den Konstanten A, B und C verschiedene Werte beigelegt werden. Wenn aber eine Gleichung der Form

$$aA + bB + cC = 0$$

zwischen diesen Konstanten angenommen wird, bei der a, b und c beliebige neue Konstanten bedeuten, stellt diese Gleichung „[...] auch dann noch unendlich viele geraden Linien dar, die aber, wie bekannt, alle durch denselben Punkt gehen [...].“ [Plücker 1830c, S. 179]. Plücker setzt im Folgenden anstelle der Konstanten A, B und C die Variablen u, v und w ein. Die Gleichung

$$au + bv + cw = 0$$

stellt dann einen Punkt der Ebene dar.

> „Wir betrachten also hier einen Punkt *als einen geometrischen Ort, in dem unendlich viele gerade Linien sich schneiden,* während man, indem man von der gewöhnlichen Gleichung einer geraden Linie ausgeht, diese *als einen geometrischen Ort von unendlich vielen Punkten* betrachtet.“

[Plücker 1830c, S. 179]

Es ist beachtenswert, dass Plücker hier implizit sowohl homogene Linienkoordinaten, als auch homogene Punktkoordinaten verwendet. Allerdings benutzt er – wie bereits erwähnt – den Begriff „Koordinaten“ gar nicht in Bezug auf die drei Variablen u, v und w. Daher wird nicht klar, ob Plücker hier bereits diese drei Werte als die drei Koordinaten einer Geraden auffasst, oder doch auf die Quotienten zurückgehen würde. Ebenso spricht er nur von x und y als den Koordinaten eines Punktes, nicht aber von a, b

[426] Vgl. dazu auch das zu Beginn des Abschnitts wiedergegebene Zitat aus [Müller 1910].

und c[427]. Diesen expliziten Schritt, hin zu einem Begriff homogener Linienkoordinaten bzw. homogener Punktkoordinaten bezogen auf ein Achsenkreuz, vollzieht Plücker erst 1831 im zweiten Band seiner „Entwicklungen" bzw. 1835 im „System ..."[428].
Der hier von Plücker eingeführte Begriff der „Gleichung eines Punktes"[429] wurde im Folgenden auch von anderen verwendet (vgl. [Müller 1910, S. 693]). Plücker stellte in seinem Aufsatz auch den Bezug seiner Linienkoordinaten zu dem von Gergonne eingeführten Begriff der „Klasse" einer Kurve her. Plücker betrachtet „eine beliebige in Bezug auf u, v und w homogene Gleichung"

$$F(u, v, w) = 0.$$

Diese Gleichung stellt unendlich viele Geraden dar,

> „die unmittelbar aufeinander folgen und also eine stetige Curve umhüllen. Wir sagen *diese Curve werde dargestellt durch die Gleichung*. Wir sagen ferner, die Curve sei von der *zweiten, dritten* etc. *Classe*, wenn ihre Gleichung vom zweiten dritten etc. Grade ist [...] Der Analogie nach nennen wir den Punkt: *geometrischen Ort erster Classe*."

[Plücker 1830c, S. 180]

In einer Fußnote bemerkt Plücker, dass Gergonne einer Kurve

> „[...] an die sich im Allgemeinen von einem gegebenen Punkte aus m Tangenten legen lassen, den Namen einer Curve m^{ter} *Classe* giebt, dem analog, wie man eine Curve, die von einer geraden Linie in m Punkten geschnitten wird, eine Curve m^{ter} *Ordnung* nennt. (Mir scheint es passender, hier das Wort *Ordnung* statt des Wortes *Grad* zu gebrauchen, weil auch eine Curve m^{ter} Classe durch eine Gleichung m^{ten} Grades dargestellt wird.)"

[Plücker 1830c, S. 180, Fußnote][430]

[427] In der von Plücker gebrauchten Formulierung „die gewöhnlichen Coordinaten des durch die Gleichung [...] dargestellten Punktes [sind] $x = OP = \frac{b}{c}$, $y = OQ = \frac{a}{c}$." liegt bereits die Grundlage der Idee, das eben auch a, b und c als Koordinaten aufgefasst werden können. Es wird aber hier noch nicht explizit so gesagt.

[428] Vgl. dazu auch [Schoenflies 1895, S. 599].

[429] Im zweiten Band der „Entwicklungen" betont Plücker die Wichtigkeit der Einführung der Geraden-Gleichung durch Monge in die analytische Geometrie – und analog die Wichtigkeit der „Gleichung des Punktes". Monge habe durch die Einführung der Geraden-Gleichung „den Grund zur Verbannnung aller Construction" aus der analytischen Geometrie gelegt und ihr „jene neue Form, durch welche ihre weitere Ausbildung möglich wurde [gegeben]. Die Rolle, welche in den bisherigen Entwicklungen die Gleichung der geraden Linie spielte, spielt in den neuen Entwicklungen die *Gleichung des Punctes*." [Plücker 1831, S. 4].
Allerdings hat Monge wohl nur die Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung in der Ebene eingeführt (so gibt es Boyer an; andere schreiben diese Lacroix zu; vgl. [Boyer 1956, S. 205] und die dort angegebene Literatur), während die Form $y = ax + b$ bereits „in numerous works as far back as Fermat" [Boyer 1956, S. 205] auftaucht. Boyer führt aus, dass die Bedeutung der Einführung der Punkt-Steigungs-Form durch Monge nicht so sehr im mathematischen Gehalt zu sehen ist, sondern „in the tendency to formalize the straight line in analytic symbols" [Boyer 1956, S. 206].
Vgl. zu Monges Bedeutung in der Entwicklung der analytischen Geometrie auch Kapitel 8.2.1.

[430] Vgl. zu dem bisherigen auch [Plücker 1831, S. 1-3], wo Plücker diese Entwicklungen fast im Wortlaut identisch wiedergibt.

Gergonne hatte den Klassenbegriff für Kurven aber ohne das analytische Mittel der Linienkoordinaten eingeführt.[431]
Im zweiten Band der „Entwicklungen“ von 1831 verwendet Plücker dann zum ersten Mal explizit den Begriff „Koordinaten der geraden Linie“ [Plücker 1831, S. 10] und zwar tatsächlich direkt bezogen auf die drei (homogenen) Koordinaten u, v und w. Plücker betrachtet hier die Gleichung des Punktes nicht mehr in der Form

$$au + bv + cw = 0,$$

sondern stattdessen in der Form

$$uy + vx + wz = 0$$

und bemerkt, dass der dargestellte Punkt die Koordinaten $\frac{y}{z}$ und $\frac{x}{z}$ habe. Erst 1835 (hier bezogen auf die „allgemeinen Koordinaten“[432]) spricht Plücker von den „drei Koordinaten eines Punktes“ (in der Ebene). In Bezug auf die Linienkoordinaten geht er diesen Schritt aber schon hier, im zweiten Band der Entwicklungen:

> „Betrachten wir aber u, v und w als constant, so stellt dieselbe Gleichung eine gerade Linie dar, aber unter einer Form, wie wir sie nicht zu behandeln gewohnt sind. Diese gerade Linie ist folgende: $\left(\frac{w}{u}, \frac{v}{u}\right)$ oder (w, v, u).“
>
> [Plücker 1831, S. 11]

Plücker bemerkt, dass diese Gleichung, da sie in Bezug auf x, y und z homogen ist, überall dort, wo keine Eliminationen gebraucht werden „in Beziehung auf Eleganz und Symmetrie den Vorrang“ habe [Plücker 1831, S. 11]. Er geht aber direkt wieder „von der allgemeinen“ zu der „gewöhnlichen Form“[433] über, indem er $z = 1$ setzt. Ebenso könnte auch jede der anderen beiden Koordinaten gleich eins gesetzt werden. Für den Fall $x = 1$ gibt Plücker die geometrische Deutung der beiden resultirenden Koordinaten $\frac{y}{x}$ und $\frac{z}{x}$ an.

> „Übrigens bedient sich auch *Hesse* noch vielfach, wie *Plücker* meistens, nur des besonderen Falles homogener Coordinaten, in welchem zwei der Veränderlichen die gewöhnlichen Coordinaten bedeuten, die dritte aber den Werth 1 darstellt.“
>
> [Clebsch 1872, S. XXII]

Die erste Erwähnung von Ebenenkoordinaten bei Plücker, findet sich ebenfalls in einem Artikel in Crelles Journal. Der französisch verfasste Artikel trägt den Titel: „Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes.“ ([Plücker 1832a]). Darin stellt Plücker

$$tz + uy + vx + w = 0$$

[431] Vgl. [Müller 1910, S. 694]. Müller erwähnt außerdem, dass De Beaune wohl der erste war, der Kurven durch die Eigenschaften ihrer Tangenten definierte. Außerdem bemerkt er, dass Huygens und Tschirnhaus Kurven als Enveloppen von Geraden betrachtet hätten, dass aber Plücker zuerst Gleichungen von Kurven in Linien- (und Ebenen-)Koordinaten verwendet habe.
[432] Vgl. Abschnitt 11.3.
[433] Diese Form, die Plücker als die „gewöhnliche“ bezeichnete, ist eigentlich ein Spezialfall.

als die Gleichung einer Ebene auf drei Koordinatenachsen bezogen auf, und bezeichnet t, u, v und w als die Koordinaten der Ebene[434]. t, u, v und w sind die homogenen Koordinaten der Ebene. Den Begriff „homogene Koordinaten" benutzt Plücker auch an dieser Stelle nicht, aber er verweist auf den Vorteil den die Nutzung aller vier Koordinaten bei der Behandlung von Flächen aufweist. Die Gleichungen dieser Flächen sind dann homogen in Bezug auf die vier Koordinaten[435].
Aber auch hier geht Plücker direkt dazu über, eine der Koordinaten gleich der Einheit[436] zu setzen. Indem er zuerst $w = 1$ setzt, ergibt sich die Gleichung

$$tz + uy + vx + 1 = 0,$$

die Müller als die „Plückersche Normalform" bezeichnet (vgl. [Müller 1910, S. 692]). Wie man leicht nachvollziehen kann, entsprechen die drei Koordinaten t, u und v, den negativen reziproken Achsenabschnitten der Ebene; diese Koordinaten werden als „Plückersche Koordinaten" bezeichnet[437] In seinen Arbeiten zur Liniengeometrie benutzt Plücker diese Koordinaten und gibt die Gleichung der Ebene (oder des Punktes) in der Form $tx + uy + vz = 1$ bzw. $tx + uy + vz + 1 = 0$ an (vgl. [Plücker 1865a, S. 462] und [Plücker 1865b, S. 469]). Die unendlich ferne Ebene hat die Koordinaten $u = 0$, $v = 0$ und $w = 0$; Ebenen durch den Ursprung haben im allgemeinen unendlich große Koordinatenwerte, liegt aber eine der Koordinatenachsen in der Ebene, ist der entsprechende Koordinatenwert unbestimmt (vgl. [Müller 1910, S. 692f]).
In [Plücker 1832a] bevorzugt Plücker es aber, stattdessen $t = 1$ zu setzen, da die geometrische Deutung der drei verbleibenden Koordinaten nicht weniger einfach sei[438]. Die entsprechende Gleichung

$$z + uy + vx + w = 0$$

benutzt Plücker auch in [Plücker 1846, S. 2]. Die Koordinate w bedeutet den negativen Abschnitt der Ebene auf der Z-Achse. Für die geometrische Deutung der Koordinaten u und v, werden die Projektionen eines auf die Ebene (u, v, w) gefällten Lots (Perpendikels) in die Ebenen ZY und ZX betrachtet. Dem Tangens[439] des Winkels, der jeweils durch eine dieser Projektionen und die Z-Achse gebildetet wird, entsprechen die Koordinatenwerte u und v.
Bei der Einführung der Linien- bzw. Ebenenkoordinaten in den genannten Aufsätzen und Werken[440] geht Plücker jeweils von Gleichungen in Punktkoordinaten aus, wählt

[434] „Coordonnées de ce plan (coordonnées planaires)" [Plücker 1832a, S. 224]. Später benutzt Plücker den Begriff „Plankoordinaten" für die Koordinaten einer Ebene (vgl. [Plücker 1846, S. 1]).

[435] Vgl. die entsprechenden Bemerkungen bezüglich der Dreieckskoordinaten in Kapitel 11.1.1.

[436] „Le nombre de ces coordonées peut se réduire à trois, si l'on pose l'une d'elles, choisie arbitrairement, égale à l'unité." [Plücker 1832a, S. 224].

[437] Vgl. [Müller 1910, S. 692]. Als negative reziproke Achsenabschnitte charakterisiert Plücker diese Koordinaten in [Plücker 1832a, S. 224] sowie [Plücker 1846, S. 1]. Analog entsprechen die Linien-Koordinaten $\frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ der durch $uy + vx + w = 0$ dargestellten Geraden den negativen reziproken Achsenabschnitten dieser Geraden (vgl. dazu [Plücker 1831, S. 4]).
Die Begriffe „Plückersche Koordinaten" und „Plückersche (Normal-)Form" werden heute vorwiegend für die Linienkoordinaten im Raum benutzt.

[438] „[...] alors l'interprétation géométrique des trois coordonnées restantes n'en deviendra pas moins simple que dans le cas précédent." [Plücker 1832a, S. 224].

[439] Plücker benutzt statt Tanges den Begriff: „trigonometrische Tangente".

[440] [Plücker 1830c], [Plücker 1831], [Plücker 1832a] und [Plücker 1846].

also gewissermaßen den Punkt als das eigentliche Grundelement. Aber er betont, dass eine andere Vorgehensweise, bei der, ausgehend von Linien- oder Ebenenkoordinaten die Gleichung des Punktes (und damit auch die Punktkoordinaten) hergeleitet würde, ebenso denkbar wäre.

> „Alles verhält sich aber, in Beziehung auf die zwiefache Coordinaten-Bestimmung, *ganz symmetrisch*, und es ist kein Grund vorhanden, vorzugsweise eine der beiden Bestimmungen als die erste und ursprüngliche anzusehen. Denn auf gleiche Weise hätten wir auch aus der Bestimmung der Plan-Coordinaten die Bestimmung der gewöhnlichen Punct-Coordinaten ableiten [...] können."
>
> [Plücker 1846, S. 2f]

Plücker sah also tatsächlich Punkt und Ebene im Raum, sowie Punkt und Gerade in der Ebene als völlig gleichberechtigte Elemente an, denen nicht nur jeweils Koordinaten zugeordnet werden können, sondern die auch als Grundelement[441] für den Aufbau der ganzen Geometrie in gleicher Weise gewählt werden können[442]. Aus der Wahl des Grundelementes folgt dann die Definition aller anderen geometrischen Örter entweder als Örter bestimmter Ordnung (bei dem Punkt als Grundelement) oder als Örter bestimmter Klasse (bei der Gerade oder Ebene als Grundelement). In dem einen Fall wird der geometrische Ort aus unendlich vielen Punkten gebildet gedacht, oder aber aus einem sich bewegenden Punkt, der den entsprechenden Ort beschreibt. Analytisch wird dieser Ort durch eine Gleichung in Punktkoordinaten dargestellt. Jedes n-Tupel von Koordinaten-Werten, welches die Gleichung erfüllt, entspricht einem Punkt des geometrischen Ortes, oder einer bestimmten Position des beweglichen Punktes, der diesen Ort beschreibt. In dem anderen Fall wird der geometrische Ort durch unendlich viele Tangenten oder Tangentialebenen beschrieben oder als von einer sich bewegenden Linie oder Ebene umhüllt, gedacht. Analytisch wird dieser Ort durch eine Gleichung in Linien- oder Ebenenkoordinaten dargestellt. Jedem n-Tupel von Koordinaten-Werten, welches die Gleichung erfüllt, entspricht hier also eine Tangente oder Tangentialebene des entsprechenden geometrischen Ortes. Ist die Gleichung in Ebenenkoordinaten vom n^{ten} Grad, so stellt sie eine Fläche n^{ter} Klasse dar – analog dazu, dass eine Gleichung vom n^{ten} Grad in Linienkoordinaten eine Kurve n^{ter} Klasse darstellt. Der Punkt wird als Fläche erster Klasse und somit als Ebenenbündel aufgefasst. Allgemein lassen sich an eine Fläche n^{ter} Klasse durch jede Gerade im Raum n Tangentialebenen legen[443].
Die beiden angesprochenen Deutungs- oder Konstruktionsweisen benutzt Plücker später auch bei der Einführung seiner Linienkoordinaten (im Raum) im Rahmen seiner

[441] In seiner Liniengeometrie wählt Plücker die Gerade als Grundelement aus der der Raum aufgebaut wird. Im direkten Zusammenhang mit der Gleichberechtigung der verschiedenen Grundelemente steht die Frage nach den Dimensionen des Raumes. Beispielsweise ist die Liniengeometrie gewissemaßen die Geometrie eines Raumes von vier Dimensionen (vgl. [Clebsch 1872, S. XXXIIIf]). „Und dieses ist in der Tat die Bedeutung, die Plücker der Vorstellung eines n-dimensionalen Raumes beilegt, daß man die Geometrie des gewöhnlichen Raumes auf der Wahl eines von n Parametern bestimmten Grundelements aufbaut. Die Auffassung, die einen Punktraum von n Parametern fingiert, lehnte er im allgemeinen Gespräch als „zu methaphysisch" ab." [Klein 1926, S. 171].

[442] Vgl. auch das oben bereits angeführte Zitat [Clebsch 1872, S. XIX].

[443] Vgl. zu diesem Abschnitt z.B. [Plücker 1846, S. 2].

Liniengeometrie[444]. Dort betont er noch einmal nachdrücklich den Unterschied, der durch die verschiedene Wahl des Grundelements entsteht:

> „A point given by its coordinates and a point determined by its equation, or geometrically speaking by an infinite number of planes intersecting each other in that point, are quite different ideas, not to be confounded with one another. [...] The passage from one of the two conceptions to the other is a discontinuous one."

[Plücker 1865b, S. 469f]

Durch die völlige Symmetrie der Punkt- und Linien- (bzw. Ebenen-)Koordinaten in der Gleichung, welche die Inzidenz beider Objekte ausdrückt, gelang Plücker die analytische Begründung des Prinzips der Dualität[445]. Wenn ein analytischer Satz einmal in Punkt- und einmal in Linien- oder Ebenenkoordinaten geometrisch gedeutet wird, ergeben sich zwei zueinander duale (reziproke) Sätze (vgl. auch [Müller 1910, S. 695]).

> „Jedem Beweise, der sich durch die Verbindung allgemeiner Symbole ausführen lässt, entsprechen, wenn wir diese Symbole einmal auf Punct-Coordinaten, das andere Mal auf Linien-Coordinaten beziehen, zwei solche Sätze, die durch das Princip der Reciprocität mit einander verbunden sind. Wir können hier also entweder dieses Princip oder die Betrachtung eines von jenen beiden Coordinaten-Systemen entbehren. Wo aber ein Satz durch eine specielle Anwendung von Punct-Coordinaten bewiesen wird, da nimmt dieser Beweis einen ganz anderen Weg, als der Beweis des zugehörigen Satzes, wenn wir denselben durch Anwendung von Linien-Coordinaten führen (70, 424). Und überdiess kann jeder der beiden Sätze in jedem der beiden Coordinaten-Systeme bewiesen werden. Das System der Linien-Coordinaten behält also seine ganze Bedeutung neben dem Principe der Reciprocität; es werden durch dasselbe die Beweismittel verdoppelt."

[Plücker 1831, S. VIIIf]

Die beiden von Plücker angeführten Nummern 70 und 424 enthalten zwei zueinander duale (reziproke) Sätze, von denen ersterer in Punktkoordinaten, letzterer in Linienkoordinaten bewiesen wurde ([Plücker 1828, S. 33f] bzw. [Plücker 1831, S. 18f]). Der Satz in der 424. Nummer ist der folgende:

> „*Wenn irgend zwei gerade Linien und auf jeder derselben drei Puncte, auf der einen die Puncte A, B, C, auf der andern A', B', C' gegeben sind, so schneiden sich die drei Linien-Paare AB' und A'B, AC' und A'C, BC' uns B'C in solchen drei Puncten S, S', S", die in gerader Linie liegen.*"[446]

[Plücker 1831, S. 18]

[444]Siehe Kapitel 14.

[445]Plücker benutzt den Begriff „Reziprozität" anstelle von „Dualität", wobei der von ihm benutzte Begriff weiter gefasst ist. Vgl. Kapitel 12.

[446]Satz von Pappos-Pascal.

Plücker beweist diesen Satz, indem er geschickt die beiden gegebenen Geraden als Koordinatenachsen nimmt. So ist es möglich direkt die Koordinaten der Linien AB', $A'B$ etc. zu bestimmen. Denn da die Gerade AB' zum Beispiel durch die – auf den Koordinatenachsen liegenden – Punkte A und B' verläuft, sind die Achsenabschnitte bekannt. Wie oben gezeigt, können die reziproken Achsenabschnitte als Koordinaten gewählt werden, wenn die dritte Koordinate, w, konstant angenommen wird[447]. Sei O der Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden, und damit der Koordinatenursprung; die reziproken Werte von OA, OB und OC seien v', v'' und v''', die von OA', OB' und OC' seien u', u'' und u'''. Dann ergeben sich folgende Koordinaten für die drei Geradenpaare:

$$\begin{aligned} AB' &= (u'',\ v'); \qquad & A'B &= (u',\ v'') \\ AC' &= (u''',\ v'); \qquad & A'C &= (u',\ v''') \\ BC' &= (u''',\ v''); \qquad & B'C &= (u'',\ v''') \end{aligned}$$

Aus diesen Koordinaten kann Plücker jetzt die Gleichungen der ersten beiden Schnittpunkte S und S' herleiten. Er gibt sie in der folgenden Form an (vgl. [Plücker 1831, S. 18]):

$$u - u'' = -\frac{u'' - u'}{v'' - v'}(v - v')$$
$$u - u''' = -\frac{u''' - u'}{v''' - v'}(v - v')$$

Alle Geraden, deren Koordinaten u und v die erste der beiden Gleichungen erfüllen, schneiden sich in dem Punkt S, dem Schnittpunkt von den Geraden AB' und $A'B$. Alle Geraden deren Koordinaten die zweite Gleichung erfüllen, schneiden sich entsprechend im Punkt S', dem Schnittpunkt von AC' und $A'C$.
Um die Verbindungsgerade zwischen den beiden Punkten S und S' zu erhalten, zieht Plücker beide Gleichungen von einander ab. Durch verschiedene Umformungen erhält er die Gleichung

$$Mv = N$$

in der durch M und N zwei Terme bezeichnet sind, die jeweils nur noch die Konstanten u', u'', u''' und v', v'', v''' enthalten[448]. Wie man leicht nachvollziehen kann, muss in all diesen Ausdrücken lediglich u' durch u'' und v' durch v'' ersetzt werden, um die Verbindungsgerade von S und S'' zu erhalten. Denn bei dieser Substitution bleibt der Punkt S derselbe, indem lediglich die beiden Geraden AB' und $A'B$ vertauscht werden, der Punkt S' geht aber in den Punkt S'' über. Durch diese Vertauschung werden die Terme M und N aber nicht verändert, sie wechseln nur beide ihr Vorzeichen. Die Gleichung $Mv = N$ bleibt also identisch die gleiche; die Koordinate v ändert ihren Wert nicht. Folglich liegen alle drei Punkte auf derselben geraden Linie.
Der zu dem gerade bewiesenen Satz dualen (reziproke) Satz lautet bei Plücker :

[447] Meistens nimmt Plücker $w = 1$, so dass sich die Koordinaten u und v als negative, reziproke Achsenabschnitte ergeben. In diesem Fall nimmt er die positiven reziproken Achsenabschnitte; w wird also gleich -1 gesetzt.

[448] Plücker unterläuft hier ein kleiner Vorzeichenfehler: die Subtraktion der linken Seiten der Gleichungen von S und S' ergibt $(u''' - u'')$ und nicht wie Plücker angibt $(u'' - u''')$. Dadurch kehrt sich auch das Vorzeichen von N um; es müsste also bei Plückers Setzung $Mv = -N$ heißen, was aber für den weiteren Verlauf des Beweises keinen Unterschied bedeutet.

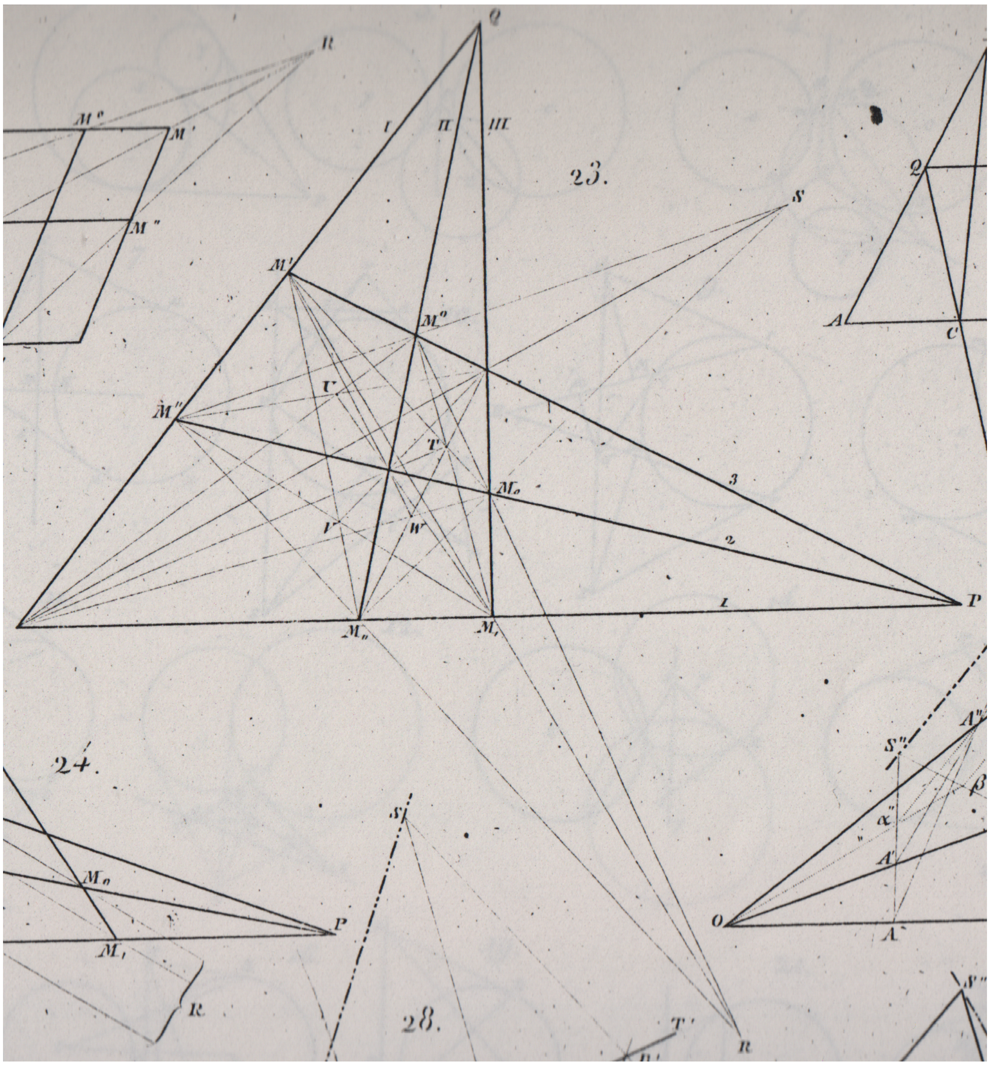


Abb. 11.10.: *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (1828), Figur 23.
Aus [Plücker 1828, Tafel 2]

„Wenn zwei Puncte Q und P gegeben sind, und wir legen durch jeden dieser Puncte drei beliebige, unbestimmt verlängerte, gerade Linien, die wir durch I, II, III und $1, 2, 3$ bezeichnen wollen, so schneiden sich I und 2, II und 1 in zweien Puncten M'' und $M_{\prime\prime}$; ferner schneiden sich I und 3, III und 1 in M' und $M_{\prime}$ und endlich II und 3 und III und 2 in M° und $M_{\circ}$. Ziehen wir nun die geraden Linien $M''M_{\prime\prime}$, $M'M_{\prime}$ und $M^{\circ}M_{\circ}$, *so vereinigen alle drei sich in demselben Puncte*, in R.“

[Plücker 1828, S. 33][449]

Nimmt man in der obigen Beweisführung statt der Linienkoordinaten u', u'', u''' und v', v'', v''' Punktkoordinaten, dann hätte man analog zu dem obigen drei Paare von

[449]Siehe Abbildung 11.10.

Punkten, durch ihre Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned} M'' &= (x'',\ y'); & M_{\prime\prime} &= (x',\ y'') \\ M' &= (x''',\ y'); & M_{\prime} &= (x',\ y''') \\ M^{\circ} &= (x''',\ y''); & M_{\circ} &= (x'',\ y''') \end{aligned}$$

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - x'' &= -\frac{x'' - x'}{y'' - y'}(y - y') \\ x - x''' &= -\frac{x''' - x'}{y''' - y'}(y - y') \end{aligned}$$

würden die Verbindungsgeraden der ersten beiden Punktepaare, also $M''M_{\prime\prime}$ und $M'M_{\prime}$ darstellen. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden würde ebenfalls den durch die Gleichung

$$My = N$$

gegebenen Koordinatenwert haben. Mit der gleichen Argumentation wie oben, ließe sich also begründen, dass sich alle drei Geraden in einem Punkt schneiden.
Allerdings wird durch die Koordinatenwerte

$$\begin{aligned} M'' &= (x'',\ y'); & M_{\prime\prime} &= (x',\ y'') \\ M' &= (x''',\ y'); & M_{\prime} &= (x',\ y''') \\ M^{\circ} &= (x''',\ y''); & M_{\circ} &= (x'',\ y''') \end{aligned}$$

ausgesagt, dass die Punkte zu je zwei und zwei auf Parallelen zu den Koordinaten-Achsen liegen. Zum Beispiel liegen die beiden Punkte M'' und M' auf einer Parallelen zur X-Achse. Da diese beiden Punkte auf der Geraden I liegen, ist diese parallel zur X-Achse. Genauso liegen die Geraden II und III parallel zur X-Achse; die Geraden 1, 2 und 3 sind bei obigen Annahmen parallel zur Y-Achse. Diese Bedingung kann bei beliebiger Annahme der Punkte Q und P und der sechs Geraden durch diese Punkte nur erfüllt werden, wenn die unendlichferne Gerade durch Q und P gelegt wird. Bei Verwendung von projektiven Linien- und Punktkoordinaten, bei denen kein Unterschied mehr zwischen „eigentlichen“ und „uneigentlichen“ (Fern-) Punkten besteht müsste es also möglich sein, die Beweise beider Sätze ganz analog zu führen. Wie oben bereits angeführt wurde, „nehmen“ die beiden Beweise die Plücker angibt „einen ganz anderen Weg“, da hier eine spezielle Anwendung der Koordinaten gemacht wird, und keine allgemeinen Symbole verwendet werden.
Für den Beweis des zuletzt angeführten Satzes in Punktkoordinaten geht Plücker letztlich ähnlich vor wie in dem oben wiedergegebenen Beweis. Allerdings sind einige Eliminationen nötig und der Beweis ist insgesamt etwas länger und unübersichtlicher.
Die beiden Koordinatenachsen werden durch je einen der beiden Punkte P und Q gelegt, ohne aber eine Bestimmung über den Anfangspunkt der Koordinaten zu treffen. Allerdings können so die Koordinaten der Punkte $M'', M', \ldots$ nicht direkt angegeben werden. Plücker bestimmt zuerst die Gleichungen der Geraden I, II, III und $1, 2, 3$ durch

$$\begin{aligned} y - y' + ax &= 0 \quad \text{etc. und} \\ y + \alpha(x - x') &= 0 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

wobei x' bzw. y' die Koordinaten der Punkte Q und P sind. Aus diesen Gleichungen bestimmt Plücker durch Elimination von y und x die Koordinaten des Punktes M''. Durch Substitution der entsprechenden Konstanten erhält er die Koordinaten des Punktes $M_{''}$ und damit die Gleichung der Geraden durch diese beiden Schnittpunkte. Insgesamt erhält Plücker für die drei Linien $M''M_{''}$, $M'M_{'}$ und $M^\circ M_\circ$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} A''y + B''x + C'' &= 0 \\ A'y + B'x + C' &= 0 \\ Ay + Bx + C &= 0 \end{aligned}$$

in denen A, A'... wieder abgekürzte Bezeichnungen von Termen, die ausschließlich Konstante enthalten, sind. Den Koordinatenursprung[450], über den anfänglich keine Bestimmung gemacht worden war, legt Plücker jetzt in den Durchschnitt der beiden Linien $M''M_{''}$ und $M'M_{'}$. Dadurch wird $C'' = C' = 0$. Daraus lässt sich zwischen den Konstanten der sechs Geraden eine Bedingungs-Gleichung herleiten, aus der letztlich folgt, dass auch $C = 0$ ist. Somit schneiden sich alle drei Geraden in einem Punkt.

11.3. Allgemeine (lineare) Koordinaten

> „Der Begriff *krummliniger* Koordinaten in der Ebene befindet sich schon bei *G. W. Leibniz* [(1692)]. [...] Die für die Entwicklung der [allgemeinen, oder krummlinigen] Koordinatensysteme maßgegebenden Begriffsbildungen stammen jedoch von *G. Lamé* und *J. Plücker*. [...] *J. Plücker* gelangte zu diesen Koordinaten in dem Bestreben, den Koordinatenbegriff möglichst allgemein zu fassen, und hat dadurch auf die Ausbildung der *algebraischen* analytischen Geometrie den wichtigeren Einfluß ausgeübt.“
>
> [Müller 1910, S. 629ff]

Bereits in der Vorrede zum zweiten Band seiner „Entwicklungen“ hatte Plücker den Vorteil erwähnt, der durch einen möglichst allgemeinen Koordinatenbegriff erreicht werden könne. Er hatte dort die Linienkoordinaten eingeführt und gezeigt, dass die Deutung einer Gleichung oder Beweisführung, einmal in Punkt- und einmal in Linienkoordinaten, zwei durch das Prinzip der Reziprozität miteinander verbundene Sätze ergibt[451].

> „Vielleicht sollte man die Systeme der Punct- und Linien-Coordinaten noch vervielfältigen. Alsdann liesse sich ein Princip aufstellen, das mit dem Princip der Reciprocität Ähnlichkeit hat, und nach welchem, wenn die ana-

[450]Plücker spricht vom „Anfangs-Punct der Coordinaten“.
[451]Vgl. Kapitel 11.2 und 12.

> lytische Beweisführung irgend eines Satzes vorliegt, zugleich so viele Sätze bewiesen sind, als es verschiedene Coordinaten-Systeme gibt."

[Plücker 1831, S. IX]

Die angesprochene Vervielfältigung der Punkt- und Linienkoordinaten nahm Plücker dann 1835 in seinem „System ..." vor. Dabei betrachtete er Funktionen zwischen den gewöhnlichen Parallelkoordinaten und führte diese als neue Koordinaten ein.

> „Jede derselben [d. i. der linearen Functionen] erhält für einen gegebenen Punct einen bestimmten Werth, der sich geometrisch [...] leicht construiren lässt. Durch irgend zwei derselben ist die Lage des Punctes bestimmt. Diese Bemerkung legt uns nah, den Begriff der Coordinaten zu erweitern, und, statt der beiden gewöhnlichen Parallelkoordinaten, beliebige Functionen derselben als Coordinaten zu betrachten und selbstständig für sich zu construiren; hiernach aber insbesondere und vorzugsweise diejenigen Coordinaten-Systeme zu bestimmen, in welchen die Gleichung der geraden Linie vom ersten Grade bleibt. Durch Hülfe von acht unbestimmten Constanten gelangen wir dahin, diese Systeme nicht bloß zu vervielfältigen, sondern *alle* zu umfassen. Eine und dieselbe Gleichung zwischen zwei so bestimmten Coordinaten enthält hiernach nicht bloß einen einzigen Satz, sondern alle möglichen Sätze, die aus einem derselben durch lineare Umformungen sich ergeben [...]."

[Plücker 1835, S. VIf]

Plücker geht hier also sogar noch weiter, als er es 1831 als Ziel formuliert hatte. Er gibt nicht nur weitere verschiedene Koordinatensysteme an, sonder kann mit seinen „allgemeinen Koordinaten" tatsächlich *alle* möglichen Punkt- und Linien-Koordinatensysteme umfassen[452].

11.3.1. Allgemeine Koordinaten

Einführung der „allgemeinen Koordinaten"

Die ersten beiden Nummern des „Systems..." (1835) tragen in der Inhaltsübersicht die Überschriften „Gewöhnliche Coordinaten" bzw. „Verallgemeinerung dieses Begriffes [...]". Plücker charakterisiert die „gewöhnlichen Coordinaten" eines Punktes als die „beiden begränzten geraden Linien" (= Strecken), die von einem Punkt zu den beiden Koordinatenachsen, parallel zu der jedesmal anderen Achse gelegt werden können[453]. Dabei sind die Koordinatenachsen zwei „feste, als gegeben betrachtete gerade Linien"

[452] Vgl. hierzu auch [Müller 1910, S. 633]. Hier werden allerdings allgemeine Punktkoordinaten im Raum, und nicht wie bei Plücker ebene allgemeine Punktkoordinaten behandelt.

[453] Die (gewöhnlichen, also kartesischen) Koordinaten waren für Plücker folglich keine Zahlen, sondern geometrische Objekte (Strecken). Bei der Einführung der allgemeinen Koordinaten geht Plücker insofern etwas weiter, als er dort bestimmte Funktionenwerte als Koordinaten einführt, welche auf unterschiedliche Weisen geometrisch gedeutet werden können.

[Plücker 1835, S. 1]. In der zweiten Nummer betrachtet Plücker dann Funktionen[454] zwischen diesen gewöhnlichen Koordinaten,

$$q = \varphi(y, x), \qquad p = \psi(y, x),$$

und streicht heraus, dass q und p vollständig bestimmt sind, sobald x und y es sind. Folglich sind jedem Punkt bestimmte Werte von q und p zugeordnet[455]. Um diese Werte „auf die einfachste Weise" geometrisch zu konstruieren, betrachtet Plücker die beiden Kurven, die durch die Gleichungen

$$\varphi(y, x) = 0, \qquad \psi(y, x) = 0,$$

gegeben sind. Diese beiden Kurven, werden als gegeben betrachtet – analog zu den Koordinatenachsen der gewöhnlichen Koordiantenbestimmung. Alle Punkte, die auf der ersten dieser beiden Kurven liegen, haben den Wert $q = 0$, genauso ist für alle Punkte der zweiten Kurve der Wert $p = 0$. Für alle anderen Punkte, lassen sich die beiden Werte q und p als „ein, mit einer constanten Größe multiplicirtes Product von Segmenten geometrisch deuten" [Plücker 1835, S. 2]. Diese Segmente liegen jeweils auf einer Geraden durch den fraglichen Punkt, zwischen diesem Punkt und den Schnittpunkten der Geraden mit der Kurve.
Dafür benutzt Plücker den Satz[456], dass

$$q = \kappa(y - y_1)(y - y_2)...(y - y_n)$$

ist, wenn $y_1, y_2, ...y_n$ die n Lösungen der Gleichung $\varphi(y, x) = 0$ sind und κ der Koeffizient der höchsten Potenz von y. Außerdem ist vorausgesetzt, dass die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ in Bezug auf y algebraisch und vom n. Grad ist.
Die Lösungen $y_1, y_2, ...y_n$ sind Funktionen der Variablen x. Für einen gegebenen Punkt, dem also auch ein fester Wert x entspricht, bedeuten sie diejenigen Werte y, welche den n Durchschnittspunkten der Kurve mit einer durch den Punkt gelegten, zur Y-Achse parallelen Geraden[457], entsprechen. Plücker bezeichnet diese Durchschnittspunkte mit $Q_1, Q_2, ...Q_n$ und den gegebenen Punkt mit M und erhält so die folgende Gleichung:

$$q = \kappa \cdot Q_1M \cdot Q_2M \cdot ... \cdot Q_mM.$$

Analog ergibt sich die Gleichung

$$p = \pi \cdot P_1M \cdot P_2M \cdot ... \cdot P_mM,$$

[454] Diese Funktionen sind ganze, in Beziehung auf y oder x algebraische Funktionen beliebigen Grades ([Plücker 1835, S. 2]); im Folgenden geht Plücker dazu über, nur noch algebraische Funktionen zu betrachten ([Plücker 1835, S. 3]).

[455] Allerdings ist diese Zuordnung insofern nicht eindeutig, als nicht vorausgesetzt ist, dass die Funktionen injektiv sind. Vgl. dazu [Müller 1910, S. 630]: „Dann nehmen die Funktionen f_i in jedem Punkt (x, y, z) bestimmte Zahlwerte x_1, x_2, x_3 an; und wenn man umgekehrt drei Zahlwerte x_i beliebig wählt, so bestimmen sie [...] Wertetripel von x, y, z, d.h. einen oder mehrere (auch unendlich viele diskrete) Punkte des Raumes.".

[456] Dieser Satz stammt von Isaac Newton (1643 - 1727) („Enumeratio linearum tertii ordinis", London 1706), vgl. [Müller 1910, S. 632, Fußnote 122] sowie die dort angegebene Literatur. Interessanterweise gibt Plücker diesen Ursprung des von ihm verwendeten Satzes nicht an, obwohl er sich kurz darauf auf einen Satz Newtons aus eben diesem Werk bezieht (vgl. [Plücker 1835, S. 3, Fußnote]).

[457] Plücker spricht hier von einer Geraden, welche der „Coordinaten-Axe x = 0" parallel ist [Plücker 1835, S. 2].

in der die Punkte $P_1, P_2, ...P_m$ Schnittpunkte der Kurve $\psi(x, y) = 0$ mit einer durch M gelegten Geraden bedeuten; wobei letztere parallel zur X- oder Y-Achse ist, je nachdem welche der beiden Variablen in der Gleichung $\psi(x, y) = 0$ nur algebraisch vorkommt. κ bezeichnet den Koeffizienten der höchsten Potenz dieser Variablen; die Gleichung ist vom m-ten Grad.

> „Wir können also die irgend einem gegebenen Puncte entsprechenden Werthe der beiden veränderlichen Größen p und q, durch die Vermittlung zweier gegebenen Curven und zweier gegebenen Richtungen construiren. Diese Richtungen sind durch die Richtungen der ursprünglichen Coordinaten-Axen angezeigt; von diesen Axen selbst aber ist in der fraglichen Construction jede Spur verschwunden. An ihre Stelle sind die beiden gegebenen Curven getreten. Es kommen auch bei der ursprünglichen Bestimmung von y und x, außer den beiden Axen, eigentlich auch noch zwei gegebene Richtungen in Betracht. Diese sind aber, nach hergebrachter Weise, sogleich dadurch ein für alle Mal bestimmt, daß die zu der einen Coordinaten-Axe gehörige Richtung durch die andere Coordinaten-Axe angezeigt wird. Hiernach ist es natürlich, auch p und q als Coordinaten zu betrachten: als solche veränderlichen Größen, welche für einen gegebenen Punct bestimmte Werthe erhalten und durch Hülfe zweier gegebenen geometrischen Oerter (geraden Linien oder Curven)[458] und zweier gegebenen Richtungen für alle Puncte auf gleichmäßige Art construirt werden.“

[Plücker 1835, S. 2]

Es gibt also eine genaue Anologie zwischen der „gewöhnlichen Koordinatenbestimmung“ über zwei Koordinatenachsen und zwei Richtungen (welche durch die Achsen selbst gegeben sind) und der Bestimmung der Werte q und p durch zwei gegebene Kurven und zwei Richtungen. Dadurch wird Plücker motiviert auch im zweiten Fall von Koordinaten zu sprechen. Indem er nicht nur von „Curven“ sondern von „geometrischen Oertern“ und somit auch von „geraden Linien“ spricht, macht er bereits hier deutlich, dass die „gewöhnliche Koordinatenbestimmung“ als Spezialfall der „allgemeinen“ angesehen werden kann. In der vierten Nummer ([Plücker 1835, S. 3]) zeigt Plücker dann, dass die beiden Richtungen auch beliebig gewählt werden können, wenn die Konstanten κ und π entsprechend angenommen werden. Denn bei einer beliebigen Drehung der ursprünglichen Koordinaten-Achsen bleibt die Gleichung der Kurve vom selben Grad und nur die einzelnen Koeffizienten – also insbesondere κ und π – ändern sich. Das ist „ohne alle Entwicklung klar“, da die Veränderung der Koordinaten „durch lineare und ganze Functionen [...] geschieht“ [Plücker 1835, S. 3]. Als weitere Begründung nennt Plücker einen Satz Newtons[459], aus dem diese Tatsache ebenfalls folgt:

> „[...] daß nemlich, wenn eine algebraische Curve irgend eines n. Grades gegeben ist, die von den beiden Schenkeln eines Winkels oder deren Verlängerungen geschnitten wird: das Product der n Segmente, die auf dem einen

[458] Diese Schnittpunkte existieren also (reell) nicht immer, da $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ z.B. zwei Kreise sein können. Auf der einen Seite sind bei Plücker komplexe Lösungen immer zugelassen, auf der anderen Seite war es im 19. Jahrhundert nicht üblich Sonderfälle explizit zu erwähnen. Vgl. 8.3.

[459] Vgl. Fußnote 456.

> Schenkel zwischen dem Scheitel des Winkels und den n Durchschnittspuncten mit der Curve liegen, zu dem entsprechenden Producte der n Segmente auf dem andern Schenkel in einem Verhältnisse stehen, das, wie man auch den Winkel parallel mit sich selbst verrücken mag; unverändert dasselbe bleibt.“

[Plücker 1835, S. 3, Fußnote]

Einer beliebigen Wahl der Richtung entspricht also ein bestimmter Koeffizient. Umgekehrt kann der Koeffizient beliebig[460] gewählt werden, wodurch die Richtung dann bestimmt ist.
Während Plücker bisher nur solche Funktionen φ und ψ betrachtet hatte, die ganze Funktionen von y und x sind, geht er ab der 5. Nummer auf gebrochen rationale Funktionen über. Dafür setzt er

$$q = \frac{\varphi'(y,x)}{\varphi''(y,x)}, \qquad p = \frac{\psi'(y,x)}{\psi''(y,x)},$$

wobei mit $\varphi', \psi', \varphi''$ und ψ'' ganze und rationale Funktionen bezeichnet werden. Für die geometrische Konstruktion der Koordinaten q und p betrachtet Plücker auch hier die Kurven, welche durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi'(y,x) &= 0, \qquad & \psi'(y,x) &= 0, \\ \varphi''(y,x) &= 0, \qquad & \psi''(y,x) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben sind. Die Konstruktion der Koordinaten ist also in diesem allgemeinen Fall von vier Kurven abhängig. Für die Punkte, die auf einer der ersten beiden Kurven liegen, ist q bzw. p gleich Null, für Punkte die auf einer der letzten beiden Kurven liegen, wird der entsprechende Koordinatenwert unendlich. Sollen die Koordinaten eines beliebigen Punktes M bestimmt werden, müssen – ganz analog zu dem obigen – vier Geraden, parallel zu vier gegebenen Richtungen[461] durch diesen Punkt M gelegt werden. Plücker benennt die Schnittpunkte je einer dieser Geraden mit je einer der vier Kurven durch $Q_1, Q_2, ...Q_n$; $P_1, P_2, ...P_m$; $S_1, S_2, ...S_g$ und $R_1, R_2, ...R_h$ und erhält die Gleichungen

$$q = \kappa \frac{Q_1M \cdot Q_2M \cdot ... \cdot Q_nM}{S_1M \cdot S_2M \cdot ... \cdot S_gM}, \qquad p = \pi \frac{P_1M \cdot P_2M \cdot ... \cdot P_mM}{R_1M \cdot R_2M \cdot ... \cdot R_hM},$$

in denen κ und π zwei, von der Wahl der vier Richtungen abhängige, Konstante bedeuten.

> „Das allgemeine Resultat, zu dem wir auf diesen Wege gelangt sind, ist folgendes. Die Lage eines Punktes [in der Ebene] ist überhaupt durch zwei Bestimmungsstücke gegeben. Sind diese Bestimmungsstücke von der Art, daß sie für einen gegebenen Punct auf eine einzige und rationale Weise construirt werden können, so wissen wir, daß dieselben, wie auch ihre Construction ursprünglich sich darstellen mag, sich immer durch Hülfe von

[460] Plücker gibt an, dass es „im Allgemeinen Maxima und Minima der Werthe von κ und π“ gebe [Plücker 1835, S. 3].
[461] Diese Richtungen können auch gleich sein.

> vier Curven (geometrischen Oertern) construiren lassen. Dasselbe Resultat können wir auch auf folgende Weise ausdrücken. Durch vier gegebene Curven erhalten wir die allgemeinste Coordinaten-Bestimmung, in der jedem Puncte zwei einzige Coordinaten entsprechen."

[Plücker 1835, S. 4]

Plücker erwähnt, dass eine Gleichung zwischen den Koordinaten p und q eine Kurve darstellt und erläutert auch, wie man von einer gegebenen Kurvengleichung in x und y die entsprechende Gleichung in p und q erhält und umgekehrt. Aber abgesehen von diesen kurzen Bemerkungen in der 6. Nummer geht er nicht weiter auf die allgemeinen Punktkoordinaten ein, sondern befasst sich mit dem besonderen Fall der allgemeinen *linearen* Koordinaten.
Wie bereits angesprochen wurde, beschäftigte sich Plücker in seinem „System ..." von 1835 auch mit allgemeinen Linienkoordinaten. Die Einführung dieser Koordinaten erfolgt ganz entsprechend der gerade beschriebenen Vorgehensweise bei der Einführung der allgemeinen Punktkoordinaten:

> „So wie die Lage eines Punctes in Beziehung auf gegebene geometrische Oerter durch zwei gegebene Stücke bestimmt ist, so sind auch zur Bestimmung der Lage einer geraden Linie zwei Stücke nothwendig und hinreichend. [...] Der eigentliche Gegenstand dieses Paragraphen [d. i. Paragraph 2] ist, alle möglichen linearen Systeme von Linien-Coordinaten zu discutiren. Zuvor aber müssen wir den Begriff der Coordinaten-Bestimmung gerader Linien in seiner ganzen Allgemeinheit auffassen; die Entwicklungen des vorigen Paragraphen erlauben uns, der Analogie wegen, hier ganz kurz zu sein."

[Plücker 1835, S. 29f]

Die beiden, „zur Bestimmung der Lage einer Geraden nötigen Stücke", können entweder zwei Achsenabschnitte, oder aber ein solcher Achsenabschnitt sowie die Richtung der Geraden sein. Plücker geht hier von folgender Form der Gleichung einer Linie in Punktkoordinaten aus:

$$y + vx + w = 0$$

bei der also gegenüber der homogenen Gleichung

$$uy + vx + wz = 0$$

sowohl $u = 1$ als auch $z = 1$ gesetzt sind[462]. w und v sind also bei dieser Bestimmung die Koordinaten einer Geraden. Somit ist diese durch einen Achsenabschnitt und ihre Richtung gegeben, denn – unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems – ist w der negativ genommene Y-Achsen-Abschnitt; v ist der Kotangens des Winkels, den die Gerade mit der Y-Achse bildet[463].
Analog zu der Einführung der allgemeinen Punktkoordinaten geht Plücker dann dazu

[462] Vgl. dazu die in Kapitel 11.2 gemachten Bemerkungen.
[463] Die von Plücker hier verwendete Gleichung $y + vx + w = 0$ entspricht der heute gängigen Geradengleichung $y = mx + b$, in der m die „Steigung" und b den X-Achsenabschnitt bezeichnet.

über, Funktionen zwischen diesen Koordinaten zu betrachten und dann diese Funktionen selbst als Koordinaten aufzufassen. Unter der Voraussetzung, dass es sich bei diesen Funktionen um algebraische und rationale handelt, setzt Plücker

$$\delta = \frac{\varphi'(w,v)}{\varphi''(w,v)},$$

wobei φ' und φ'' also ganzrationale Funktionen der Linien-Coordinaten w und v sind. Die beiden Gleichungen

$$\varphi'(w,v) = 0, \qquad \varphi''(w,v) = 0$$

stellen zwei algebraische Kurven dar, die als gegeben betrachtet werden. Für jede gerade Linie, welche die erste der beiden Kurven berührt, ist $\delta = 0$, für jede Tangente der zweiten Kurve wird dieser Koordinatenwert unendlich groß (vgl. [Plücker 1835, S. 30f]). Um den Wert von δ für eine beliebige Gerade zu bestimmen betrachtet Plücker – analog zu der Vorgehensweise bei den Punktkoordinaten – die Gleichung

$$\delta = \mu \frac{(w-w^1)(w-w^2)...(w-w^n)}{(w-w_1)(w-w_2)...(w-w_m)},$$

in welcher μ eine Konstante bedeutet, $w^1, w^1, ...w^n$ die n Lösungen der nach w aufgelösten ersten Gleichung und $w_1, w_1, ...w_m$ die Lösungen der zweiten Gleichung. Dabei sind letzere Ausdrücke von v abhängig. Wird also eine bestimmte Gerade, mit einer bestimmten Richtung und somit einem bestimmten Koordinaten-Wert v, betrachtet, dann liefern die Ausdrücke $w^1, w^1, ...w^n$ bzw. $w_1, w_1, ...w_m$ jeweils den Wert der Koordinate w derjenigen Tangenten an jeweils eine der Kurven, welche parallel zu der gegebenen Geraden sind. Die Ausdrücke $(w - w^i)$ bzw. $(w - w_i)$ entsprechen also Segmenten auf der Y-Achse, die durch die gegebene Gerade selbst und alle Tangenten an die Kurve, die zu ihr parallel sind, gebildet werden. Auch hier werden die allgemeinen Koordinaten also durch Produkte von Segmenten und Koeffizienten bestimmt. Ganz analog kann die zweite Koordinate, ζ, bestimmt werden.

> „Wir sehen, wie auf diesem Wege sich immer durch die Vermittlung von vier gegebenen Curven die beiden Coordinaten, von denen die Lage einer geraden Linie überhaupt abhängt, construiren lassen; vorausgesetzt nur, daß für eine gegebene gerade Linie diese beiden Constanten algebraisch und auf einzige Weise bestimmt sind. Jede andere Construction, durch welche gegebene Oerter sie auch ermittelt werden mag, läßt sich auf die vorerwähnte zurückführen."

[Plücker 1835, S. 31]

Wie bereits erwähnt, ist Plücker nicht der erste, der allgemeine Punktkoordinaten benutzt. Bereits bei Gottfried Wilhelm Leibniz[464] findet sich der Begriff krummliniger Koordinaten in einem Aufsatz aus dem Jahr 1692 (vgl. [Müller 1910, S. 629]). Leibniz wählte eine beliebige Kurve als x-Achse. Die Parallelen zur y-Achse wurden durch ein System von Kurven ersetzt, welche den Punkten der x-Achse auf bestimmte Weise

[464] (1646 - 1716).

zugeordnet wurden (vgl. [Müller 1910, S. 629]). Müller erwähnt außerdem Lagrange, Gauß, Jakob Bernoulli[465] und Gabriel Lamé[466], welche ebenfalls krummlinige Punktkoordinaten verwendeten. Lamé kam durch mathematisch-physikalische Untersuchungen zu den allgemeinen Koordinaten, die er – genauso wie Plücker – als Funktionen der Parallelkoordinaten definierte. Da er von Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen aus der Optik Wärme- und Elastizitätstheorie zu seinen „krummlinigen (curvilignes)“ Koordinaten kam, gehören seine geometrischen Anwendungen vor allem in das Gebiet der Differentialgeometrie (vgl. [Müller 1910, S. 230]).
Bei den allgemeinen Ebenenkoordinaten war Plücker dagegen der erste, der sich mit ihnen befasste:

> „Diese allgemeinen Ebnenkoordinaten haben bisher keine eingehendere Untersuchung erfahren. *J. Plücker* hat für den Fall [...] rationale[r] Funktionen [...] eine geometrische Deutung der Koordinaten [...] gegeben.“
>
> [Müller 1910, S. 695]

11.3.2. Allgemeine lineare Koordinaten

> „Solche Coordinaten, durch welche eine gerade Linie durch eine Gleichung des ersten Grades dargestellt wird, wollen wir lineare Punct-Coordinaten nennen. [...]
> Es gibt unendlich viele Coordinaten, welche alle die Eigenschaft haben, daß eine lineare Gleichung zwischen denselben einen Punct darstellt: wir wollen dieselben *lineare* Linien-Coordinaten nennen.“
>
> [Plücker 1835, S. 5/30]

Entsprechend dieser Definition kann man auch von linearen Punktkoordinaten im Raum sprechen – wenn die Ebene durch eine lineare Gleichung dargestellt wird –, sowie von linearen Ebenenkoordinaten – wenn durch eine lineare Gleichung ein Punkt dargestellt wird. Zu diesen Koordinatensystemen zählt also insbesondere das kartesische Koordinatensystem; außerdem Plückers Dreieeckskoordinaten, Möbius' baryzentrische Koordinaten, sowie die in Kapitel 11.2 vorgestellten Linien- und Ebenenkoordinaten. Müller nennt außerdem weitere, von Karl Wilhelm Feuerbach[467], Bobillier[468] und Chasles[469] um 1830 aufgestellte derartige Punkt-Koordinatensysteme (vgl. [Müller 1910, S. 634]). Die Bezeichnung „lineare“ Koordinaten stammt aber von Plücker, und Müller betont, dass der Begriff bei ihm am klarsten und mit dem Bewusstsein seiner Tragweite

[465] (1655 - 1705).
[466] (1795 - 1870).
[467] (1800 - 1834).
[468] Vgl. 11.1.1, besonders Fußnote 346. Müller merkt an, Bobillier rechne „mit den linearen Funktionen von x, y (oder x, y, z) wie mit Koordinaten, obgleich eine geometrische Deutung für sie noch fehlt“ [Müller 1910, S. 634, Fußnote 130].
[469] Vgl. Fußnote 423.

verbunden auftrete (vgl. [Müller 1910, S. 634]).
Im „System ...“ von 1835 war es Plückers Ziel, *alle* linearen Punkt- und Linienkoordinatensysteme anzugeben. Im Fall der linearen Punktkoordinaten geht Plücker dabei von einem beliebigen System solcher Koordinaten aus, da es klar sei, „[...] daß, wenn wir irgend ein solches Coordinaten-System kennen, wir sogleich alle möglichen erhalten“ [Plücker 1835, S. 4]. In diesem einen Koordinatensystem bezeichnet er die Koordinaten mit η und ξ. Die Gleichung

$$A\eta + B\xi + C = 0,$$

wobei A, B und C Konstanten sind, stellt nach der obigen Annahme eine Gerade dar. Wenn jetzt durch y und x beliebige andere lineare Punktkoordinaten bezeichnet werden, und die ursprünglichen Koordinaten η und ξ durch diese auf möglichst allgemeine Art dargestellt werden sollen, dann führt die Bedingung, dass obige Geradengleichung auch für die Koordinaten y und x linear bleiben soll, zu folgenden Gleichungen:

$$\eta = \frac{\kappa(y + a'x + b')}{\rho(y + a''x + b'')}, \qquad \xi = \frac{\pi(y + ax + b)}{\rho(y + a''x + b'')}.$$

Dabei kann der Einfachheit halber angenommen werden, dass y und x die gewöhnlichen Parallelkoordinaten darstellen. η und ξ drücken dann bei entsprechender Annahme der acht Konstanten $a, a', a'', b, b', b'', \frac{\kappa}{\rho}, \frac{\pi}{\rho}$ „alle möglichen linearen Punct-Coordinaten aus“ [Plücker 1835, S. 5].
Die Ausdrücke für die Koordinaten können auch in der Form

$$\eta = \frac{q}{r}, \qquad \xi = \frac{p}{r}$$

geschrieben werden, indem

$$\rho(y + a''x + b'') = r, \quad \kappa(y + a'x + b') = q, \quad \pi(y + ax + b) = p$$

gesetzt wird. Die Gleichung der Geraden geht dann in folgende über:

$$Aq + Bp + Cr = 0,$$

wird also homogen. p, q und r können als homogene, lineare Punktkoordinaten aufgefasst werden, was Plücker auch tut[470]:

> „Die drei linearen Functionen p, q und r stehen in ganz ähnlicher Beziehung zu dem Puncte, dessen Lage durch sie bestimmt wird; sie kommen ganz auf gleiche Weise in der Gleichung der geraden Linie vor. Nur in der Bestimmung der Coordinaten η und ξ verschwindet diese Symmetrie; der Grund davon liegt offenbar darin, daß wir statt dieser Coordinaten auf ganz entsprechende Art auch $\frac{r}{q}$ und $\frac{p}{q}$ oder $\frac{r}{p}$ und $\frac{q}{p}$ als Coordinaten nehmen können. Das Ganze dieser dreifachen Coordinaten-Bestimmung ist in Bezug auf r, q und p symmetrisch. Hiernach werden wir aufgefordert, diese drei Functionen ganz aus demselben Gesichtspuncte zu betrachten. Wir können dieselben gleichfalls Coordinaten nennen, wonach dann ein Punct drei Coordinaten hat, und derselbe durch die Quotienten einer beliebigen

[470] Dies ist damit die erste Stelle, in der Plücker explizit von drei Koordinaten eines Punktes in der Ebene spricht. Vgl. dazu die Kapitel 11.1 und 11.2.

> dieser drei Coordinaten in die beiden übrigen geometrisch bestimmt wird.“

[Plücker 1835, S. 5]

Zur Bestimmung aller möglichen Systeme von linearen Linienkoordinaten geht Plücker ganz analog vor. Er wählt beliebige lineare Linienkoordinaten δ und ζ; die Gleichung

$$A\delta + B\zeta + C = 0$$

stellt folglich, wenn A, B und C Konstanten sind, einen Punkt dar. Wenn diese beiden Koordinaten durch beliebige andere lineare Linienkoordinaten m und n auf die allgemeinste Weise ausgedrückt werden sollen, ergeben sich folgende Gleichungen

$$\delta = \frac{\upsilon(m + a'n + b')}{\tau(m + a''n + b'')}, \qquad \zeta = \frac{\varphi(m + an + b)}{\tau(m + a''n + b'')}.$$

Aus jeder besonderen linearen Linienkoordinatenbestimmung erhält man folglich durch die Vermittlung der acht Konstanten $a, a', a'', b, b', b'', \frac{\upsilon}{\tau}, \frac{\varphi}{\tau}$ die allgemeine Koordinatenbestimmung. Auch hier schreibt Plücker die Ausdrücke der Koordinaten wieder in der Form

$$\delta = \frac{u}{t}, \qquad \zeta = \frac{v}{t},$$

indem er

$$\tau(m + a''n + b'') = t, \quad \upsilon(m + a'n + b') = u, \quad \varphi(m + an + b) = v$$

setzt. Auch hier tritt die allgemeine homogene Gleichung ersten Grades

$$Au + Bv + Ct = 0$$

an die Stelle der oben angegebenen Punkt-Gleichung.

> „Wir können auch die drei neuen linearen und überdieß ganzen Functionen als Coordinaten betrachten. Sie erhalten für eine gegebene gerade Linie vollkommen bestimmte, aber nicht mehr von einander unabhängige Werthe, und die bezügliche gerade Linie wird durch die Quotienten je zweier derselben geometrisch bestimmt.“

[Plücker 1835, S. 32]

Die geometrische Konstruktion der ersten sechs der acht Konstanten, lässt sich immer von drei festen geraden Linien (im Fall linearer Punktkoordinaten) bzw. von drei festen Punkten (im Fall linearer Linienkoordinaten) abhängig machen. Im Fall linearer Punktkoordinaten sind dies die drei Geraden mit den Gleichungen

$$y + a''x + b'' = 0, \quad y + a'x + b' = 0, \quad y + ax + b = 0,$$

oder, anders ausgedrückt die drei Geraden

$$r = 0, \quad q = 0, \quad p = 0.$$

Handelt es sich bei den Koordinaten x und y um gewöhnliche Parallelkoordinaten (kartesische Koordinaten), dann ergeben sich die Koordinaten eines Punktes M – ganz analog zur allgemeinen Koordinatenbestimmung – als mit bestimmten Koeffizienten multiplizierte Segmente, auf einer parallel zur Y-Achse gelegten Geraden durch M. Seien die Schnittpunkte zwischen dieser Geraden und den drei Geraden $r = 0$, $q = 0$ und $p = 0$ durch R, Q und P bezeichnet, dann erhält man die drei Koordinaten von M durch

$$r = \rho \cdot RM, \quad q = \kappa \cdot QM, \quad p = \pi \cdot PM.$$

Wird die Richtung der Geraden durch M geändert, so ändern sich die drei Koeffizienten ρ, κ und π. Plücker gibt an, wie sich die Veränderung der ursprünglichen Richtung um einen Winkel δ auf die Koeffizienten auswirkt und wie statt dieser Koeffizienten drei Winkel eingeführt werden können. Die Koordinaten eines Punktes M sind dann die drei Segmente auf drei Geraden durch M, die mit den drei gegebenen Gleichungen diese drei bestimmten Winkel bilden[471] (vgl. [Plücker 1835, S. 6]). Ein besonderer Fall der linearen Punktkoordinatenbestimmung, den Plücker hier behandelt, sind die Dreieckskoordinaten; hier werden die drei Abstände eines Punktes von den drei gegebenen Geraden als Koordinaten genommen[472]. Plücker macht die Bestimmung der Vorzeichen der Koordinaten von der ursprünglichen Koordinatenbestimmung unabhängig, indem er für einen beliebigen Punkt die Vorzeichen festlegt[473]. Dadurch sind dann für jeden Punkt die Vorzeichen eindeutig bestimmt[474].
Da die allgemeine lineare Koordinatenbestimmung insgesamt von acht Konstanten abhängig ist, kann ihre geometrische Konstruktion auch von vier Geraden abhängig gemacht werden. Plücker führt dazu die Gerade $s = 0$ durch die Funktion

$$s = \sigma(y + a'''x + b''')$$

ein und setzt

$$r' = \frac{r}{s}, \quad q' = \frac{q}{s}, \quad p' = \frac{p}{s}.$$

Dadurch ergibt sich die Koordinatenbestimmung

$$\eta = \frac{q'}{r'}, \quad \xi = \frac{p'}{r'}.$$

> „Die allgemeine Coordinaten-Bestimmung wird auf diese Weise auch noch von einer vierten geraden Linie abhängig. Diese tritt an die Stelle der, außer den ersten drei geraden Linien, zu jener Construction noch erforderlichen, beiden Constanten, so daß diese Construction nun bloß von vier gegebenen geraden Linien abhängt [...]. Der veränderten Annahme von $\frac{\kappa}{\rho}$ und $\frac{\pi}{\rho}$, von

[471] Diese Winkel ergeben sich aus den drei Gleichungen $\rho = \pm\frac{sin\gamma}{sin\gamma'}$, $\kappa = \pm\frac{sin\beta}{sin\beta'}$, $\pi = \pm\frac{sin\alpha}{sin\alpha'}$, in denen durch γ, β und α die Winkel zwischen den drei Geraden $r = 0$, $q = 0$ und $p = 0$ und der ursprünglichen Richtung $x = 0$ bezeichnet werden.

[472] Vgl. 11.1.1.

[473] Im „System ...“ (1835) wählt er die Vorzeichen so, dass ein Punkt im Inneren des Koordinatendreiecks positive Koordiantenwerte hat.

[474] Auf Grund der Homogenität können sich die Vorzeichen auch umkehren, was Plücker hier aber nicht anmerkt. Vgl. dazu auch Fußnote 358.

> der die bisherige Bestimmung abhängig war, entspricht nun eine andere Lage der geraden Linie: $s = 0$.“
>
> [Plücker 1835, S. 12]

Die drei festen Punkte, von denen die ersten sechs der acht Konstanten im Fall linearer Linienkoordinaten abhängen, sind durch die Gleichungen

$$m + a''n + b'' = 0, \quad m + a'n + b' = 0, \quad m + an + b = 0$$

oder durch

$$t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0$$

gegeben. Auch hier muss nach dem, was Plücker bereits für die allgemeinen Koordinaten bewiesen hat, die geometrische Konstruktion der Koordinaten über Produkte aus bestimmten Segmenten und Koeffizienten erfolgen können. Interessanterweise nimmt Plücker hier aber keinen Bezug auf die vorigen Nummern seines Werkes. Er argumentiert folgendermaßen (vgl. [Plücker 1835, S. 32]):
Um die Koordinatenwerte einer beliebigen Geraden zu bestimmen, legt man Parallelen zu dieser Geraden durch die drei Koordinatenpunkte. Seien die Koordinaten der Geraden durch m' und n' bezeichnet[475], dann hat eine Parallele durch den Punkt $v = 0$ die Koordinatenwerte $m'' = -(an' + b)$ und $n'' = n'$. Durch die Funktion $(m' + an' + b)$ wird also die Differenz zwischen dem Koordinatenwert m der Geraden und ihrer Parallele durch den Punkt $v = 0$ bezeichnet. Diese Differenz entspricht dem Segment auf der Y-Achse, das von den beiden Geraden abgeschnitten wird. Genauso könnte man $(m' + an' + b)$ auch als ein Segment zwischen den beiden Geraden, auf einer parallel zur Y-Achse durch den Punkt $v = 0$ gelegten Geraden auffassen. Das Produkt aus diesem Segment und dem Koeffizienten φ ergibt den gesuchten Wert der Funktion v. Analog lassen sich die Werte der Funktionen u und t als Segmente zwischen der Geraden selbst und einer durch den jeweiligen Punkt gelegten Tangenten, gemessen nach der durch die Y-Achse gegebenen Richtung, auffassen. Wie im Fall der linearen Punkt-Koordinaten gezeigt, steht die Änderung der Richtung mit der Bestimmung der drei Koeffizienten in Beziehung.

> „Wenn irgend drei Puncte gegeben sind, so sind die drei allgemeinen Coordinaten einer beliebigen geraden Linie diejenigen geraden Linien, die von den drei gegebenen Puncten aus nach einer willkührlichen Richtung, unter einander parallel, nach der beliebigen geraden Linie gezogen werden können, multiplicirt mit drei unbestimmten Coefficienten.“
>
> [Plücker 1835, S. 33]

Ganz analog zu der Einführung einer vierten Geraden in die Bestimmung der linearen Punktkoordinaten, kann die Linienkoordinatenbestimmung auch von vier Punkten abhängig gemacht werden. Dieser vierte Punkt hat die Gleichung

$$w \equiv \chi(m + a'''n + b''') = 0.$$

[475] Die Koordinate m nimmt Plücker hier wieder als Y-Achsenabschnitt, die Koordinate n gibt die Richtung der Geraden an.

Und es wird
$$\delta = \frac{u}{w} : \frac{t}{w}, \qquad \zeta = \frac{v}{w} : \frac{t}{w}$$
gesetzt (vgl. [Plücker 1835, S. 37]). Die acht Konstanten, von denen die lineare Koordinatenbestimmung abhängt, lassen sich also im Fall von Punkt- bzw. Linienkoordinaten einerseits als durch drei Geraden bzw. Punkte und drei Koeffizienten, andererseits als durch vier Geraden bzw. Punkte bestimmt, auffassen. Dabei ist zu beachten, dass einer der drei Koeffizienten jeweils frei gewählt werden kann. Die Koeffizienten sind linear voneinander abhängig; die Koordinatenbestimmung hängt nur von den Verhältnissen zwischen diesen Konstanten ab. Eine bestimmte Wahl dieser Geraden bzw. Punkte und Koeffizienten, entspricht einem bestimmten System linearer Koordinaten.
Plücker behandelt im Folgenden für beide Fälle linearer Koordinatensysteme auch *imaginäre Koordinaten* (vgl. [Plücker 1835, S. 19ff und S. 38ff]), da

> „der allgemeine [...] Begriff linearer Coordinaten [...] unvollständig sein [würde], wenn wir nicht auch *imaginäre Coordinaten* betrachteten, das heißt diejenigen Werthe, welche, auf gegebene Puncte bezogen, gegebenen imaginäre und lineare Functionen erhalten."
>
> [Plücker 1835, S. 19]

Während Plücker bei der Behandlung der linearen Punkt- und Linienkoordinatensysteme analog vorgeht, weist er doch auf einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden hin:

> „Obgleich zwar zwischen linearen *Linien*- und *Punct*-Coordinaten, so lange wir die Bestimmung derselben in ihrer ganzen Allgemeinheit festhalten, eine vollständige Analogie stattfindet, so erzeugt doch der Umstand, „daß eine gerade Linie, die unendlich weit gerückt ist, keine bestimmte Richtung mehr hat, und alle solche Linien für eine und dieselbe zu achten sind, während bei unendlich weit entfernten Puncten die Richtung, nach welcher sie unendlich weit liegen, zu unterscheiden bleibt," einen wesentlichen Unterschied, sobald unendlich weite Entfernungen in particulären Bestimmungsweisen auf ausgezeichnete Weise hervortreten."
>
> [Plücker 1835, S. 37]

In der projektiven Geometrie wird dieser Unterschied aufgehoben, da dort die Fernpunkte nicht mehr von den „eigentlichen" Punkten unterschieden werden. In dieser Aussage wird also deutlich, dass Plücker trotz Verwendung der Fernpunkte und Nutzung homogener Koordinaten nicht konsequent projektive Geometrie betreibt[476]. Vielmehr sind bei Plücker die Fernpunkte oft nur eine andere Beschreibung für Parallelität; Plücker betreibt also im Grunde komplexe affine Geometrie (vgl. Kapitel 8.3).
Noch im ersten Abschnitt seines Werkes, beschäftigt sich Plücker in Bezug auf beide Systeme allgemeiner linearer Koordinaten mit Polen und Polaren in Beziehung auf das von den drei Achsen bzw. drei Punkten gebildete Koordinatendreieck (vgl.

[476]Der Begriff „projektive Geometrie" wurde zu diesem Zeitpunkt noch nicht verwendet. Eine Unterscheidung zwischen affiner und projektiver Geometrie, wie sie heute vollzogen wird gab es ebenfalls noch nicht. Bei Möbius sind diese Unterschiede wohl am ehesten zu finden (vgl. Kapitel 11.1.2).

[Plücker 1835, S. 10f und 34f]). In diesem Zusammenhang wird ebenfalls die Theorie der Harmonicalen bzw. harmonischen Punkte und der Involution von Geraden-Paaren bzw. Punktepaaren behandelt (vgl. [Plücker 1835, S. 22f und 39f]). Wie in Kapitel 9.2 bereits erwähnt wurde, zeigt Plücker außerdem Zusammenhänge zwischen seiner allgemeinen Koordinatenbestimmung und Carnot's Theorie der Transversalen bzw. der geometrischen Verwandtschaften, wie z.B. Möbius sie bereits behandelt hatte, auf (vgl. [Plücker 1835, S. 42 - 83]). Wie bereits im Titel des „Systems ...“ (1835) gesagt wird, wollte Plücker, „auf neue Betrachtungsweisen gegründet“, also unter Nutzung allgemeiner linearer Koordinaten, “insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung“ geben. Dies tut er im dritten – und längsten – Abschnitt des „Systems ...“ (1835). Vorher beschäftigt er sich im zweiten Kapitel noch mit den „Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe“, den Kegelschnitten.
Wie bereits dargestellt wurde, betrachtet Plücker seine allgemeinen Koordinaten als ein Übertragungsprinzip, welches die Vervielfältigung von Sätzen, durch verschiedene Deutungen eines analytischen Ausdrucks, erlaubt.

> „Eine und dieselbe Gleichung zwischen zwei [...] Coordinaten enthält hiernach nicht bloß einen einzigen Satz, sondern alle möglichen Sätze, die aus einem derselben durch lineare Umformungen sich ergeben [...].“

[Plücker 1835, S. VIf]

Diese Vorgehensweise benutzt Plücker im zweiten und dritten Abschnitt des „Systems ...“ (1835) bei der Behandlung der Kurven. Dazu sollen im Folgenden noch einzelne Beispiele vorgestellt werden.

> „Es sei
>
> $$\varphi^2 + 2\alpha\varphi\psi + \beta\psi^2 + 2\gamma\varphi + 2\delta\psi + \epsilon = 0 \tag{1}$$
>
> die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen den beiden veränderlichen Größen φ und ψ [...].
> An die Stelle der vorstehenden Gleichung kann man, im Allgemeinen, jede andere setzen, welche ebenfalls vom zweiten Grade ist und *fünf* unbestimmte, von einander unabhängige Constante enthält“

[Plücker 1835, S. 84]

Wenn die fünf Konstanten als unbestimmt angesehen werden, so stellt die Gleichung (1) falls φ und ψ lineare Punktkoordinaten bedeuten „alle möglichen Oerter zweiter Ordnung“ und falls φ und ψ lineare Linienkoordinaten bedeuten „alle möglichen Oerter zweiter Classe“ dar (vgl. [Plücker 1835, S. 87]).

> „Die allgemeine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen φ und ψ können wir nach den vorhergehenden Entwicklungen, im Allgemeinen, auf die nachstehende Form bringen:
>
> $$\eta\xi + \mu = 0, \tag{2}$$
>
> indem wir
>
> $$\varphi + a\psi + b \equiv \eta, \qquad \varphi + a'\psi + b' \equiv \xi,$$

setzen. [...]
Jede *neue* Coordinaten-Annahme, die wir alsdann über η und ξ machen, gibt der Gleichung (2) eine neue, durch die jedesmalige Coordinaten-Bestimmung vermittelte, geometrische Bedeutung, so daß dieselbe jedesmal die Aussage einer *neuen* characteristischen und allgemeinen Eigenschaft der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe enthält. Die ganze Discussion dieser Curven liegt darin, *daß wir einer einzigen einfachen Gleichung eine verschiedenfache Deutung geben,* während man, nach der gewöhnlichen Art zu verfahren, die Form der Gleichung ändert, indem man entweder dieselben Coordinaten beibehält, oder dieselben nach ganz speciellen Voraussetzungen in andere verwandelt, und dann jede neue Form zu welcher man auf dem Wege der Rechung gelangt ist, geometrisch interpretiert.“

[Plücker 1835, S. 87f]

Die beiden Punkt-Koordinaten η und ξ können beispielsweise ganze und lineare Funktionen der gewöhnlichen Punkt-Koordinaten bedeuten. Wie im ersten Kapitel, bei der Einführung der allgemeinen Koordinaten setzt Plücker für diesen Fall die beiden Gleichungen:

$$q = 0, \qquad p = 0$$

an die Stelle der ursprünglichen Gleichungen

$$\eta = 0, \qquad \xi = 0.$$

Diese beiden neuen Gleichungen stellen also zwei Geraden dar, die – wie Plücker zeigt – die Asymptoten der Kurve sind. Dabei heißt die Kurve Hyperbel, wenn die Asymptoten reel sind und Ellipse, wenn sie imaginär sind (vgl. [Plücker 1835, S. 90]).

„Die Gleichung

$$pq + \mu = 0 \tag{8}$$

hat ganz dieselbe Allgemeinheit, als die Gleichung (1), obgleich in ihr nur *eine einzige* Constante vorkommt, während die eben bezeichnete Gleichung *fünf* Constante enthält. Die vier auf diese Weise aus der Gleichung der Curve verschwundenen Constanten finden sich indeß in der neuen Coordinaten-Bestimmung wieder. Denn, wenn wir die ursprünglichen Constanten als unbestimmt ansehen, müssen wir die beiden geraden Linien: $q = 0$ und $p = 0$, ebenfalls als zwei beliebige betrachten, und die geometrische Bestimmung jeder geraden Linie fordert zwei gegebene Constanten. Indem wir also die Curve durch die Gleichung (8) darstellen, bestimmen wir dieselbe, statt durch *fünf Constante,* durch *zwei gerade Linien* und eine *einzige Constante.* [...]
Die beiden Funktionen q und p sind dadurch, daß die beiden geraden Linien $q = 0$, $p = 0$ gegeben sind, noch nicht vollkommen bestimmt. Wenn wir wie früher, indem wir gewöhnliche Parallel-Coordinaten eines beliebigen Systems zur Vermittlung gebrauchen,

$$q = \kappa(y + a'x + b'), \qquad p = \pi(y + ax + b)$$

> setzen, so bleiben alsdann noch die beiden Coefficienten κ und π unbestimmt. Je nach den verschiedenen Voraussetzungen über dese Coefficienten ist die Gleichung:
>
> $$pq + \mu = 0, \tag{8}$$
>
> der analytische Ausdruck verschiedener Modificationen desselben geometrischen Satzes.“

[Plücker 1835, S. 90f]

Wie Plücker bei der Einführung seiner allgemeinen Koordinaten gezeigt hatte, hängt die geometrische Konstruktion der Koordinaten von den beiden Koeffizienten κ und π ab. In dem Plücker hier diesen beiden Koeffizienten unterschiedliche Bedeutungen gibt, erhält er unterschiedliche Sätze aus der einen Gleichung für die Kurve zweiter Ordnung:

> „Wenn κ und π insbesondere so angenommen werden, daß q und p kürzeste Abstände bedeuten, so sagt die vorstehende Gleichung aus, „daß das Product der beiden Abstände irgend eines beliebigen Punctes einer gegebenen Hyperbel von ihren beiden Asymptoten eine constante Größe ist.“

[Plücker 1835, S. 91]

Wie oben gezeigt wurde, sind die beiden Geraden, die durch

$$p = 0, \quad \text{und} \quad q = 0$$

dargestellt werden, unter der Voraussetzung, dass sie reell sind, die Asymptoten einer Hyperbel. Durch die spezielle Annahme der Koeffizienten κ und π sind die Koordinaten p und q eines Punktes die Abstände dieses Punktes von den beiden Hyperbeln. Da aber alle Punkte der Hyperbel die Gleichung

$$pq + \mu = 0$$

erfüllen müssen, ist das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes einer Hyperbel von ihren beiden Asymptoten konstant (und zwar gleich $-\mu$).
Um einen weiteren Satz zu erhalten, wählt Plücker $\kappa = 1$ und $\pi = 1$. Bei dieser speziellen Wahl der Koeffizienten sind die Koordinaten p und q eines Punktes M die Segmente selbst, die auf einer Geraden parallel zur Y-Achse durch M, zwischen M und den Schnittpunkten mit den beiden Geraden $p = 0$ und $q = 0$ liegen. Denn diese Segmente müssen gemäß der allgemeinen Koordinatenbestimmung mit den Koeffizienten κ und π multipliziert werden, die hier beide $= 1$ gesetzt werden. Für einen Punkt der Hyperbel liegen diese Segmente auf der Geraden parallel zur Y-Achse zwischen der Curve und den beiden Durchschnittspunkten mit den Asymptoten. Auch hier muss also, da für jeden Punkt der Kurve die Gleichung

$$pq + \mu = 0$$

erfüllt sein muss, das jeweilige Produkt der beiden Segmente konstant sein. Weiterhin kann die Y-Achse ganz beliebig angenommen werden, so dass dieser Satz sogar für eine beliebige, die Hyperbel schneidende Gerade gilt:

> „Nehmen wir jeden der beiden Coefficienten κ und π der Einheit gleich, und berücksichtigen zugleich, daß jede beliebige gerade Linie als die Axe $x = 0$ ursprünglich angenommen werden kann, so ergibt sich, „daß, wenn eine Hyperbel und eine dieselbe schneidende gerade Linie gegeben ist, das Product derjenigen beiden Segmente, die zwischen einem der Durchschnittspuncte der geraden Linie mit der Curve und den beiden Durchschnittspuncten mit den beiden Asymptoten liegen, constant ist, wie man auch die schneidende gerade Linie parallel mit sich selbst fortrücken mag.“

[Plücker 1835, S. 91]

Plücker gibt noch weitere Sätze an sowie unterschiedliche Möglichkeiten der Konstruktion einer Hyperbel, die sich aus diesen Sätzen folgern lassen. Abschließend macht er noch eine interessante Bemerkung bezüglich der von ihm hier benutzten Methode:

> „Der letzte Satz läßt sich offenbar leicht aus einem beliebigen der [vorigen] Sätze [...] geometrisch herleiten. Dieselbe geometrische Umwandlung liegt bei uns in der Coordinaten-Bestimmung und ist hier ein für alle Mal gemacht. Wir vermeiden auf diese Weise einen, in Beziehung auf Methode, großen Uebelstand; wir knüpfen nemlich nicht unmittelbar an die Curve Constructionen, die mit der Curve selbst durchaus in keiner Verbindung stehen.“

[Plücker 1835, S. 91f]

12. Reziprozität

> „Es gelang *Plücker*, dieses Princip [d.i. das der Reziprozität] in einer Weise zu begründen, bei welcher nur nothwendige Elemente benutzt werden, und eine wirkliche Einsicht in das Wesen der Sache erreicht war. Dies geschah, indem er von vorn herein *Punkt und Gerade als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie der Ebene, Punkt und Ebene als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie des Raumes* betrachtete; ein fundamentaler und weittragender Gedanke, bei welchem zum ersten Male von der gewohnheitsmässigen Vorstellung des Punktes als einzig denkbaren Grundelements räumlicher Gebilde Umgang genommen wurde."
>
> [Clebsch 1872, S. XIX]

Wie in Abschnitt 10 gezeigt wurde, bildet „die allgemeine analytisch-geometrische Methode" einen roten Faden durch Plückers mathematisches Werk. Diese Methode, die eigentlich eine Sammlung einzelner Methoden und Prinzipien darstellt, dient der wechselseitigen Übersetzung zwischen geometrischen und analytisch-algebraischen Sätzen[477]. Plücker spricht daher auch von „verschiedenen Übertragungs-Principen" (vgl. z.B. [Plücker 1835, Vorrede S. VII]). Im Zusammenhang mit Plückers Linien- und Ebenenkoordinaten[478] wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Reziprozität ein solches Übertragungsprinzip darstellt. Wenn in einem analytischen Ausdruck die Variablen einmal als Punktkoordinaten geometrisch gedeutet werden, ein anderes Mal als Linien- bzw. Ebenenkoordinaten, dann ergeben sich (in der Regel) zwei unterschiedliche Sätze. Diese sind zueinander reziprok. Daher bildet die Einführung der Linien- und Ebenenkoordinaten durch Plücker die analytische Begründung des Prinzips der Reziprozität – der Dualität. Allerdings kam Plücker nicht erst nach der Einführung seiner Linienkoordinaten zur Reziprozität, sondern über die „Variation der Konstanten".

Im Folgenden wird zuerst ein knapper Überblick über die Behandlung der Dualität vor Plücker – hauptsächlich bei Gergonne und Poncelet – gegeben (12.1). Danach wird dargestellt, wie Plücker selbst zu seinem Verständnis des Prinzips der Reziprozität kam (12.2). Abschließend wird geklärt, ob und inwiefern sich der von Plücker verwendete

[477] Die Verbindung zwischen Plückers Ansichten und denen Monges, sowie die darin zu erkennende Konzeption von Wissenschaft als Sprache, in Anlehnung an Condillac, wurde in Kapitel 10.2 behandelt.

[478] Unterabschnitt 11.2.

Begriff „Reziprozität“ in seiner Bedeutung von dem Begriff der Dualität unterscheidet (12.2.1).

12.1. Dualität bei Gergonne und Poncelet

Bereits bei Apollonius finden sich Andeutungen der Idee von Pol und Polare bezogen auf einen Kreis (vgl. [Boyer 1956, S. 238] und [Tropfke 1903, S. 97]). Aber erst im 19. Jahrhundert wurde die allgemeine Theorie der Wechselbeziehung von Pol und Polare am Kreis bzw. allgemein an einem Kegelschnitt durch Poncelet ausgebildet (vgl. [Boyer 1956, S. 238]). Die Begriffe Pol und Polare im Kontext der - modern gesprochen - projektiven Geometrie stammen von François-Joseph Servois[479] bzw. Gergonne und wurden erst 1810 bzw. 1813 eingeführt (vgl. [Servois 1810, S. 337], [Gergonne 1813, S. 298]; [Tropfke 1903, S. 96]). Erste Aspekte von Poncelets Theorie der Dualität – er bezeichnete sie als „théorie des polaires réciproques“ – finden sich bereits in einem Artikel aus dem Jahr 1818 ([Poncelet 1818]). 1824 präsentierte Poncelet seine allgemeine Theorie der Dualität vor der Pariser Akademie, veröffentlicht wurde diese Arbeit 1828 ([Poncelet 1828a][480]). Auch in Poncelets „Traité...“ von 1822 findet sich andeutungsweise seine Theorie der reziproken Polaren für beliebige Kegelschnitte (vgl. [Tropfke 1903, S. 97]). Wichtig zu beachten ist, dass Poncelets Theorie der Dualität immer von einem Kegelschnitt abhängt. Durch diesen wird eine Entsprechung von Punkten und Geraden vermittelt: jedem Punkt ist seine Polare bezüglich des Kegelschnitts zugeordnet und umgekehrt jeder Geraden ihr Pol.
Damit ist Poncelets Dualität ein besonderer Fall von dem durch Gergonne formulierten Dualitätsprinzip (principe de dualité) (vgl. [Tropfke 1903, S. 97]). Bereits 1813 hatte Gergonne bemerkt, das bei bestimmten Sätzen der ebenen Elementargeometrie durch die Vertauschung der Begriffe Punkt und Gerade neue Sätze erhalten werden konnten (vgl. [Boyer 1956, S. 239]). Gergonne führte den Begriff der Dualität ein (vgl. [Gergonne 1826, S. 210]), um die Beziehung zwischen solchen Sätzen zu kennzeichnen.

> „Whereas previously theorems in a dual pair had each been proved independently, Gergonne became convinced by 1825 - 1826 that duality was a universal principle which could be invoked as a justification of the two theorems whenever one or the other had been proved.“
>
> [Boyer 1956, S. 239]

Gergonnes Dualität kam also ohne die Vermittlung eines Kegelschnitts aus. Er wies sogar zurück, dass sie auf der Entsprechung von Pol und Polare beruhen würde (vgl. [Boyer 1956, S. 239]). Letzteres versuchte Poncelet geltend zu machen, der die Analogie zwischen Gergonnes Dualität und seiner eigenen Reziprozität erkannt hatte und Gergonne nun den Vorwurf machte, ein Plagiat begangen zu haben (vgl. [Boyer 1956, S. 239]). Gergonne beschrieb sein Prinzip der Dualität als ein Gesetz der Symmetrie und versuchte in den Jahren 1827 - 1828 vergeblich, es zu beweisen (vgl. [Boyer 1956, S.

[479] (1767 - 1847).
[480] Vgl. auch [Poncelet 1828b]. Hier weist Poncelet darauf hin, dass sein Dualitätsprinzip nicht allgemein bekannt sei, weil das Gutachten der Pariser Akademie erst 1828 vorgelegt wurde.

239]). Eine solche analytische Begründung gelang Plücker 1829 durch die Einführung seiner Linienkoordinaten[481].

12.2. Das Prinzip der Reziprozität bei Plücker

> „Ein zweiter Gegenstand fesselte ebenfalls meine Aufmerksamkeit schon im Sommer 1825. Es waren die im Detail behandelten Beweisführungen der 120. - 121., 160., 211. und 237. Nummer der oben genannten Schrift[482]. Sie waren mir bisher unbekannt geblieben, weil sie sich in den frühern Ausgaben noch nicht finden; sie überraschten mich damals durch ihre Neuheit und kamen mir am Ende doch immer nur in Biot's vortrefflichem Handbuche als ein Gewächs auf fremdem Boden vor. Ich fasste den allgemeinen Gedanken, dass überhaupt, wo eine mathematische Entwicklungsweise sich als Kunstgriff darstelle, diess nur deshalb geschehe, weil man dieselbe noch nicht zur Methode erhoben uns als solche eingeführt habe. Aber ich war in der Ausführung dieses Gedankens anfangs weniger glücklich [...].“
>
> [Plücker 1831, S. V]

Wie Plücker in der Vorrede zu dem zweiten Band seiner „Entwicklungen“ berichtet, hatte er im Sommersemester 1825 in Bonn Vorlesungen über Biots „Essai ...“ gehalten[483]. Durch die Beschäftigung mit diesem Werk, welches Plücker aus seinem eigenen Studium bekannt war (vgl. [Plücker 1831, S. III]), kam er zu seiner abgekürzten Bezeichnungsweise (vgl. Kapitel 9.1). Wie sich dem oben wiedergegebenen Zitat entnehmen lässt, versuchte Plücker auch im Zusammenhang mit den bei Biot in der 6. Auflage neu eingefügten Nummern eine Methode einzuführen – was ihm aber nicht direkt gelang.

In diesen Nummern behandelt Biot zuerst Pol und Polare am Kreis (Nr. 120 - 121) und erweitert dann seine Ergebnisse auf Kurven zweiter Ordnung, also auf Kegelschnitte. Dabei behandelt er die Ellipse (Nr. 160), die Parabel (Nr. 211) sowie die Hyperbel (Nr.

[481] Möbius hatte sich 1827 in seinem „Barycentrischen Calcul“ bereits ebenfalls mit der Dualität beschäftigt, ohne genauere Kenntnis von Poncelets und Gergonnes Arbeiten zu haben (vgl. [Möbius 1827, S. XIII]). Dabei behandelte er sowohl den Fall, bei dem die Dualität von einem Kegelschnitt vermittelt wird, als auch eine allgemeine Dualität im Sinn Gergonnes, bei der durch Vertauschung der Begriffe Punkt und Gerade neue Sätze entstehen (vgl. [Möbius 1827, S. 435]). Diese Dualität begründete Möbius zum einen durch seine kollineare Verwandtschaft zum anderen analytisch über die Gleichungen von Punkt und Geraden. Dabei kam er bereits sehr nahe an die Idee von Linienkoordinaten heran (vgl. dazu auch Kapitel 11.1).

[482] 6. Auflage von Biots *Essai de Géométrie analytique* [Biot 1823].

[483] Da Plücker erst am 28. April – nach Beginn des Semesters – habilitiert wurde, findet sich diese Vorlesung nicht im Vorlesungsverzeichnis.

237). Im Folgenden wird nur der Inhalt der Nummern 120 bis 121 dargestellt:
Biot untersucht hier zuerst folgendes Problem: Ein Kreis und ein Punkt außerhalb des Kreises sind gegeben. Von diesem Punkt aus werden die beiden Tangenten an den Kreis gelegt. Gesucht ist die Gleichung der Sehne, welche die beiden Berührpunkte verbindet. Für diese Sehne leitet Biot die Gleichung

$$yy' + xx' = R^2$$

her, in der mit x', y' die Koordinaten des gegebenen Punktes und mit R der Radius des Kreises bezeichnet sind (vgl. [Biot 1823, S. 193f]). In dieser Gleichung sind x, y variabel, x', y' konstant. Biot betrachtet daraufhin einen beliebigen Punkt dieser Sehne mit den Koordinaten a und b. Für diesen Punkt muss die Gleichung

$$by' + ax' = R^2$$

offenbar erfüllt sein (vgl. [Biot 1823, S. 196]). Biot stellt fest, dass es zu diesem Punkt außerhalb des Kreises unendlich viele Punkte gibt, welche die Eigenschaft haben, dass die Sehne durch die beiden Berührpunkte der Tangenten von diesem Punkt an den Kreis durch den ausgewählten Punkt gehen. Als Ort all dieser Punkte findet er eine Gerade:

> „Or, en regardent y' et x' comme variables, et a et b comme constantes, cette équation représente une ligne droite [...]“[484]
>
> [Biot 1823, S. 196]

In der darauffolgenden Nummer behandelt Biot die Konstruktion dieser Geraden, die er Polare zu dem Pol[485] mit den Koordinaten a, b nennt (vgl. [Biot 1823, S. 211]). Außerdem gibt er an, wie zu einer gegebenen Polaren der Pol im Inneren des Kreises konstruiert werden kann (vgl. [Biot 1823, S. 211]). Da die sogenannte Variation der Konstanten[486] für Plückers erste Beschäftigung mit der Reziprozität von besonderer Bedeutung ist, soll hier noch näher untersucht werden, wie Biot dabei vorgeht.
Er beginnt mit der Gleichung

$$yy' + xx' = R^2,$$

die er für die Polare des Punktes x', y' außerhalb des Kreises aufgestellt hat. In dieser sind y uns x variable Punktkoordinaten und y', x' Konstanten. Letztere könnten – anachronistisch – als die Linienkoordinaten der Polaren aufgefasst werden[487]. Gleichzeitig sind y', x' aber die Punktkoordinaten des entsprechenden Pols. Die von Plücker gesuchte „Methode“, welche diesem „Kunstgriff“ Biots zugrunde liegt, ist also eine Dualität (oder Reziprozität) welche – vermittelt durch einen Kegelschnitt – dem Punkt mit den

[484] „Betrachtet man jedoch y' und x' als Variable und a und b als Konstante, so stellt diese Gleichung eine gerade Linie dar [...]“.

[485] „Le point O [...] s'appelle le *pôle* de la droite LL [...]; et réciproquement, cette droite se nomme la *ligne polaire* du point O.“ [Biot 1823, S. 211].

[486] „Variation der Konstanten“ ist ein Terminus technicus bei Plücker. Gemeint ist, dass die ursprünglichen Konstanten einer Gleichung als variabel betrachtet werden, während zugleich die ursprünglichen Variablen als Konstanten festgehalten werden.

[487] Setzt man $R = 1$, so hätte diese Gerade die homogenen Linienkoordinaten $[y', x', -1]$. Folglich müssten die nicht homogenen Linienkoordinaten $(-y', -x')$ sein, was aber hier für die Überlegungen keine Rolle spielt.

Punktkoordinaten x', y' die Polare mit den Linienkoordinaten x', y' zuordnet.
Wenn Biot im Folgenden die Konstanten variiert, indem er in der Gleichung

$$by' + ax' = R^2$$

a und b als Kostanten und y', x' als Variablen betrachtet, stellt er die Gleichung der Geraden auf, der man die Linienkoordinaten a, b zuordnen könnte. Diese ist die Polare des Punktes a, b. Die letzte Gleichung zeigt außerdem, dass, wenn der Punkt a, b in der Polaren des Punktes y', x' liegt, umgekehrt der Punkt y', x' auch in der Polaren des Punktes a, b liegt. Während Biot diese letztgenannte Beziehung klar ist, kann er nicht zur Idee der Linienkoordinaten vordringen, obwohl dies im Rückblick in seiner Behandlung des Problems sehr naheliegend zu sein scheint. Hierdurch wird erneut deutlich, dass das Konzept, anderen geometrischen Objekten als Punkten Koordinaten zuzuordnen, eine hohe gedankliche Hürde darstellte.
Plücker gelang es zunächst nicht, das Prinzip der Reziprozität aus Biots Sätzen abzuleiten. Er versuchte, die Idee der Variation der Konstanten zu übertragen und beschäftigte sich dabei mit der „Bedingungs-Gleichung [...], welche ausdrückt, dass eine gegebenen gerade Linie von einem Kegelschnitte berührt wird“ [Plücker 1831, S. V]. Die Behandlung dieser Aufgabe findet sich im ersten Band von Plückers „Entwicklungen“ (vgl. [Plücker 1828, S. 159f]):
Gegeben sind eine Kurve zweiter Ordnung (ein Kegelschnitt)

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \epsilon = 0, \tag{1}$$

sowie eine Gerade

$$y = ax + b. \tag{2}$$

Die Bedingungsgleichung dafür, dass die Gerade eine Tangente des Kegelschnitts ist, leitet Plücker her, indem er zuerst den Schnitt zwischen Kegelschnitt und Geraden bestimmt. Dafür setzt er die Gleichung (2) in (1) ein und erhält daraus die Gleichung:

$$(a^2 + 2\alpha a + \beta)x^2 + 2(ab + \alpha b + a\gamma + \delta)x + b^2 + 2\gamma b + \epsilon = 0.$$

Eine Berührung zwischen Kurve und Gerade liegt dann vor, wenn die beiden Lösungen dieser Gleichung zusammenfallen. Daraus ergibt sich die folgende Bedingungsgleichung:

$$(\alpha^2 - \beta)b^2 + 2(\delta - \alpha\gamma)ab + 2(\alpha\delta - \beta\gamma)b + (\gamma^2 - \epsilon)a^2 + 2(\gamma\delta - \alpha\epsilon)a + (\delta^2 - \beta\epsilon) = 0. \tag{3}$$

a und b sind die Konstanten der Gleichung (2) und könnten somit als *Linien*koordinaten aufgefasst werden. Betrachtet man sie zusätzlich als variabel, dann stellt die Gleichung (3) alle Geraden dar, die Tangenten des durch (1) gegebenen Kegelschnitts sind. Folglich stellen die Gleichungen (1) und (3) den gleichen Kegelschnitt dar, im Fall von Gleichung (3) als Kurve zweiter Klasse in Linienkoordinaten. Einen solchen Gedankengang verfolgte Plücker aber zu diesem Zeitpunkt nicht. Stattdessen betrachtete er a und b in der Gleichung (3) als variable *Punkt*koordinaten. Unter dieser Voraussetzung stellt die Gleichung (3) die zu (1) reziproke (oder duale) Kurve zweiter Ordnung dar. Zwischen den Koeffizienten in dieser Bedingungsgleichung (3) und den Koeffizienten der Gleichung (1) besteht eine „vollständig reciproke Beziehung“ [Plücker 1831, S. V]. Diese entdeckte Plücker allerdings erst nach der Veröffentlichung des ersten Bandes der „Entwicklungen“.

„[...] nur hatte ich statt der Constanten b und a zuvor die Constanten q und p eingeführt (I., 272 - 274). Ich tat diess, wie man sogleich einsieht, weil die beiden Constanten b und a nicht homogen sind; aber weil ich dieses tat, wurde ich damals von jenem Principe abwärts geführt und ein zufälliger Umstand musste mich erst wieder auf dasselbe zurück bringen.“

[Plücker 1831, S. VI]

Die etwas kryptisch anmutende Bemerkung Plückers, er habe diesen Zusammenhang nicht gleich entdecken können, da er „statt der Constanten b und a zuvor die Constanten q und p eingeführt“ habe, erklärt sich durch einen Blick in die angegebenen Nummern des ersten Bandes der „Entwicklungen“:
Direkt im Anschluss an die Herleitung der Bedingungsgleichung (3) setzt er die Geradengleichung

$$py + qx = pq$$

anstelle der vorher verwendeten Gleichung (2). Dadurch stellt aber die resultierende Bedingungsgleichung „im Allgemeinen eine Linie der vierten Ordnung dar“ [Plücker 1828, S. 160]. Aus diesem Grund konnte Plücker die „reziproke Beziehung“ zwischen den Koeffiezienten der beiden Kurven hier noch nicht entdecken.

„Nachdem dieser Band[488] bereits erschienen war, veranlasste mich eine geometrische Aufgabe, von den Coeffizienten in dieser Bedingungs-Gleichung zu den Coefficienten in der Gleichung des Kegelschnittes zurückzugehen. Ich fand eine vollständige reciproke Beziehung dieser Coefficienten zu einander (II, 552)[489], und das Princip der Reciprocität, in so weit sich dasselbe auf Curven zweiter Ordnung bezieht, stand in seiner ganzen Wichtigkeit vor mir, sobald ich nur die beiden Constanten der gegebenen geraden Linie als Punct-Coordinaten und veränderlich betrachtete.“

[Plücker 1831, S. Vf]

Plücker gibt nicht näher an, wann diese erneute Beschäftigung mit dieser Aufgabe stattfand. Aus seinen Angaben zu der „Zwistigkeit zwischen den H[erren] *Poncelet* und *Gergonne*“ lässt sich aber schließen, dass Plücker schon vor Juli 1828 das Prinzip der Reziprozität entdeckte (vgl. [Plücker 1831, S. VIf])[490].

[488] Der erste Band der „Entwicklungen“.

[489] In der hier angegebenen Nummer des zweiten Bandes der „Entwicklungen“ behandelt Plücker das reziproke Problem in Linienkoordinaten: Er sucht die Bedingungsgleichung, die angibt, dass ein Punkt auf einer Kurve zweiter Klasse liegt. Die Konstanten in der Gleichung des Punktes betrachtet Plücker in der Bedingungsgleichung wieder als variable Linienkoordinaten. Folglich stellt diese Gleichung eine Kurve zweiter Klasse dar, welche zu der gegebenen Kurve dual (reziprok) ist. Diese Entsprechung zeigt Plücker auf, indem er die Koeffizienten beider Kurven als Ausdrücke voneinander darstellt und dadurch nachweist, dass diese „vollständig reciprok“ sind. „Die Coefficienten der beiden Gleichungen [...] werden also gegenseitig gerade auf dieselbe Weise durch einander ausgedrückt“ [Plücker 1831, S. 121].

[490] „[...] Ich antwortete, um einige Thatsachen zu berichtigen, im Juli 1828 und zeigte bei dieser Gelegenheit an, dass ich mich bewogen fände, einen Aufsatz an den Redacteur der Annalen einzuschicken, aus welchem vielleicht hervorgehen würde, dass auch ich, nachdem schon die *H. Poncelet* und *Gergonne* ihre Theorie der Reciprocität aufgestellt hatten, auf rein analytischem Wege, unabhängig hiervon, zu einem solchen Principe gelangt sei. [...]“ [Plücker 1831, S. VII].

Außer einem Abschnitt in [Plücker 1830a] veröffentlichte Plücker nichts zu seinem Prinzip der Reziprozität, bevor er 1831 im zweiten Band seiner „Entwicklungen“ einen ganzen Abschnitt diesem Thema widmete. An einer Bemerkung der Vorrede (vgl. [Plücker 1831, S. VI]) lässt sich aber festmachen, dass die im zweiten Paragraphen dieses Abschnitts [Plücker 1831, S. 251ff] behandelten Sätze in etwa dem entsprechen, was Plücker vor Juli 1828 entwickelt hatte. Er betrachtet dort algebraische oder transcendente Gleichungen der Punktkoordinaten x und y, die er in der Form

$$F(y, x, b, a) = 0$$

angibt, wobei a und b zwei Konstanten sind (vgl. [Plücker 1831, S. 251]). Plücker betrachtet hier keine konkreten Gleichungen, aber für den Fall einer linearen Gleichung ergibt sich beispielsweise die Gerade:

$$y + ax + b = 0.$$

Plücker wählt jetzt zwei Paare „zusammengehöriger Werthe“ (x', y' bzw. x'', y'') für y und x, welche die gegebene Gleichung erfüllen:

$$F(y', x', b, a) = 0,$$
$$F(y'', x'', b, a) = 0$$

Wenn in diesen Gleichungen a und b als variable Punktkoordinaten betrachtet werden, stellen sie zwei Kurven dar, die beide durch den Punkt mit den Koordinaten (b, a) gehen. Da die Punkte (y', x') und (y'', x'') beliebig gewählt sind, ergibt sich der folgende Satz:

> „Wenn man irgend einen Punct, der durch die Gleichung
>
> $$F(y, x, b, a) = 0 \qquad (1)$$
>
> dargestellten Curven durch (y', x') bezeichnet, so gehen alle Curven, welche durch folgende Gleichung:
>
> $$F(y', x', b, a) = 0, \qquad (2)$$
>
> wenn wir in derselben nach einander für y' und x' alle möglichen Werthe, welche den verschiedenen Lagen des Punctes (y', x') auf der Curve (1) entsprechen, substituiren, dargestellt werden, durch den festen Punct (b, a).“

[Plücker 1831, S. 252]

Im Fall einer linearen Gleichung entspricht dieser Satz der Aussage, dass die Polaren aller Punkte einer gegebenen geraden Linie durch den Pol derselben gehen. Allerdings benutzt Plücker die Begriffe Pol und Polare hier nicht.

> „Nachdem ich zu dem Principe der Reciprocität, in Beziehung auf Kegelschnitte, gekommen war, war es natürlich, dieselbe Verfahrensweise auch auf Curven einer beliebigen Ordnung auszudehnen und dann insbesondere auch von Linien der zweiten zu Linien der ersten Ordnung zurückzugehen.

> Hier ergab sich die Definition des Poles einer geraden Linie, als derjenige Punct, dessen Coordinaten zwei auf lineare Weise in der Gleichung derselben vorkommende Constante sind, woraus wiederum eine anders sich gestaltende Theorie des Princips der Reciprocität hervorging. Dann war es endlich natürlich, der Gleichung der geraden Linie irgend eine beliebige Gleichung zwischen zwei veränderlichen und beliebigen constanten Grössen, von welchen letztern zwei auf lineare Weise vorkommen, zu substituiren [...]“
>
> [Plücker 1831, S. VI]

Bis zu diesem Zeitpunkt hatte Plücker noch keine Kenntnis der bereits durch Poncelet und Gergonne entwickelten Dualität. Allerdings war er bereits seit 1826 in

> „[...] eine Zwistigkeit zwischen den H[erren] *Poncelet* und *Gergonne* über die erste Entdeckung des Principes der Reciprocität zufällig verflochten worden.
> Die Veranlassung dazu war, dass ein von mir eingesandter Aufsatz in den Annalen (1826 *Août et Septembre*) abgedruckt wurde, nachdem er zuvor getheilt und in eine so ganz verschiedene Form gegossen worden war, dass ich den ersten Theil desselben später nur wiedererkannte, weil mein Name an der Spitze desselben stand.“
>
> [Plücker 1831, S. VI]

Die erwähnten Aufsätze sind unter den Titeln „Théorèmes et problèmes sur les contacts des sections coniques“ und „Recherche graphique du cercle osculateur pour les lignes du second ordre“ im 17. Band der Gergonne'schen Annalen abgedruckt worden. In der gleichen Form finden sie sich auch in Plückers gesammelten Werken ([Plücker 1826a] und [Plücker 1826b]). 1904 veröffentlichte Schoenflies das ursprüngliche Manuskript der Arbeit, das sich in Plückers wissenschaftlichem Nachlass befindet ([NSuUB CodMsP1, Conv. A_1], [Schoenflies 1904])[491]. Gergonne hatte Plückers Artikel nicht nur in zwei Teile geteilt, sondern auch weitere, deutliche Änderungen vorgenommen. Zum einen hatte er dem ersten Teil eine dualistische Form gegeben, bei der in zwei Spalten jedem Satz der zu ihm duale Satz gegenübergestellt wird, zum anderen hatte er Hinweise auf andere Autoren eingefügt, bzw. verändert (vgl. [Schoenflies 1904, S. 385]). Beispielsweise findet sich der Verweis auf Brianchon – der laut einleitender Bemerkung des ersten Artikels das Problem, einen Kegelschnitt durch fünf Punkte zu finden, schon gelöst hatte – nicht in Plückers Manuskript (vgl. [Schoenflies 1904] und [Plücker 1826a, S. 43]). Folgenreicher war der von Gergonne eingefügte Hinweis, „daß die von *Plücker* behandelten Aufgaben bereits von *Poncelet* in seinem Traité des propriétés projectives eine Lösung gefunden hatten“ [Schoenflies 1904, S. 385]. Das erste Lemma in Plückers Arbeit ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes aus dem „Traité...“, die meisten von Plückers

[491] Neben dem historischen Interesse wegen der Auseinandersetzung zwischen Poncelet, Gergonne und Plücker, verweist Schoenflies ausdrücklich auch auf den mathematikhistorischen Wert des Artikels: „Ist es doch die erste Arbeit, in der die algebraischen Eigenschaften der Gleichungen, mit denen die analytische Geometrie operirt, und die geometrische Bedeutung vielfacher Wurzeln für die gegenseitige Lage der ebenen Gebilde in methodischer Weise zur Geltung kommt. In dieser Hinsicht kann Plücker als der ächte Weiterführer von *Descartes* betrachtet werden; [...]“ [Schoenflies 1903, S. 280].

Konstruktionen sind sogar mit denen Poncelets identisch (vgl. [Schoenflies 1895, S. 592]). Dadurch entstand bei Poncelet der Eindruck, Plücker habe seinen „Traité ...“ plagiiert, während Plücker diesen zu diesem Zeitpunkt noch gar nicht gelesen hatte[492] (vgl. [Plücker 1831, S. V]). Einige Hinweise Plückers auf einen Artikel Poncelets aus dem achten Band der Gergonne'schen Annalen fehlen dagegen in der von Gergonne redigierten Veröffentlichung (vgl. [Schoenflies 1904, S. 392ff]). Im zweiten Artikel wird der von Poncelet eingeführte Begriff „corde idéale“ verwendet ([Plücker 1826b, S. 61]), aber auch dieser findet sich im ursprünglichen Manuskript nicht. Dort spricht Plücker lediglich von einer „corde commune“ (vgl. z.B. [Schoenflies 1904, S. 388]).

> „Da *Gergonne* der Umänderung des *Plücker*'schen Manuscripts, die er in seiner Eigenschaft als Redacteur vorgenommen hatte, keinerlei Erwähnung that, so entstand bei *Poncelet* die Meinung, *Plücker* habe am Traité ein Plagiat begangen [...]. Dies gab die Veranlassung zu einer Polemik, deren Ton durch den gerade damals heftigen Zwist zwischen *Gergonne* und *Poncelet* verschärft wurde [...].“
>
> [Schoenflies 1895, S. 592]

Die erste Reklamation Poncelets wurde im 18. Band von Gergonne's Annalen veröffentlicht. Schoenflies gibt sie, soweit sie sich auf Plücker bezieht, wieder. Darin heißt es:

> „M. le docteur *Plücker* à donné (tom. XVII, pag. 37 et 69) divers problèmes et théorèmes sur les contacts des sections coniques, fort intéressants en euxmêmes, mais dont, ce me semble, il aurait dû citer plus scrupuleusement les auteurs. [...]“[493]
>
> zitiert nach [Schoenflies 1895, S. 592]

Gergonne setzte sich daraufhin „in entschiedener Weise für *Plücker* und seine Unkenntniss des Traité“ ein [Schoenflies 1895, S. 593]. Als Reaktion hierauf schrieb Poncelet eine zweite Reklamation, die im Bulletin des Sciences von Férussac veröffentlicht wurde[494]. Auf diese wurde Plücker durch v. Münchow aufmerksam gemacht:

> „Aus einer Reclamation des *H. Poncelet*, die mir durch die Güte des *H. v. Münchow*, eben weil sie auch mich betraf, mitgetheilt wurde, erfuhr ich zuerst, worin jenes Princip [d. i. das der Reziprozität], wie es bisher aufgestellt worden war, bestehe. Ich antwortete, um einige Thatsachen zu berichtigen, im Juli 1828 und zeigte bei dieser Gelegenheit an, dass ich mich bewogen fände, einen Aufsatz an den Redacteur der Annalen einzuschicken, aus welchem vielleicht hervorgehen würde, dass auch ich nachdem schon die *H. Poncelet* und *Gergonne* ihre Theorie der Reciprocität aufgestellt hatten, auf rein analytischem Wege unabhängig hiervon, zu einem solchen Principe gelangt sei. Dieser Aufsatz [...] wurde wenige Tage nachher abgesandt, ist

[492] In [Plücker 1830a] zitiert Plücker Poncelets „Traité...“, er muss ihn also zwischen Juli 1828 und Sommer 1829 gelesen haben (vgl. auch [Schoenflies 1895, S. 595]).

[493] „Herr Doktor Plücker gibt (Bd. XVII, S. 37 und 69) verschiedene in sich sehr interessante Probleme und Sätze über Berührungen von Kegelschnitten wieder. Er hätte aber, so scheint mir, deren Autoren mit mehr Sorgfalt zitieren müssen. [...]“.

[494] Band 9, S. 298. Auszugsweise abgedruckt in [Schoenflies 1895, S. 593f].

aber, so viel ich weiss, unabgedruckt und unerwähnt geblieben."

[Plücker 1831, S. VIf]

Plückers Aufsatz wurde tatsächlich nicht veröffentlicht, aber seine Erklärung wurde im Band 10 des Bulletin des Sciences von Férussac abgedruckt[495]. In seiner Erklärung weist Plücker darauf hin, dass Gergonne und nicht er, das zweispaltige Schema eingefügt habe.

> „[...] J'ai accordé volontiers à *M. Gergonne* la liberté de changer la rédaction de mon mémoire; s'il y a trouvé des développements favorables à ses idées sur la dualité (moi, j'ignorais absolument le sens de ce mot, avant la lecture du n° cité de votre *Bulletin*[496]), je ne puis qu'approuver qu'il l'ait fait ressortir par „l'échafaudage des doubles colonnes." Il n'y a donc ni prosélyte, ni esprit de prosélisme."[497]

[Schoenflies 1895, S. 594]

Außerdem weist Plücker darauf hin, dass in seinem ursprünglichen Manuskript ein Verweis auf Poncelets Arbeit aus dem achten Band der Gergonneschen Annalen enthalten gewesen war:

> „Dans le 8° vol. des *Annales*, que j'avais sous les yeux lorsque je rédigeais le mémoire en question, *M. Poncelet*, pour faire prévaloir ses méthodes sur celle de la géométrie analytique, indique entre autres constructions celle de l'un des problèmes traités dans mon mémoire. C'est cette construction que, moi, j'avais citée, en ajoutant les mots suivants: „Voyons si ce problème se prête si difficilement aux méthodes de la géométrie analytique." Ces mots expliquent parfaitement le but de mon mémoire."[498]

[Schoenflies 1895, S. 595]

Den zitierten Satz – und andere Bezüge auf diesen Aufsatz von Poncelet – die sich in Plückers ursprünglichem Manuskript finden (vgl. [Schoenflies 1904, S. 392]) hatte Gergonne entfernt. Plücker bemerkt außerdem, das er immer noch keine Möglichkeit gefunden habe, den „Traité ..." zu lesen und auch bisher seine Abhandlungen sowie die darauf folgende Reklamation Poncelets noch nicht gesehen hatte (vgl. [Schoenflies 1895, S. 595]). Poncelet nimmt in seiner Antwort, die im 11. Band des Bulletin von Férussac

[495] Schoenflies gibt sie in [Schoenflies 1895, S. 594f] ebenfalls wieder.

[496] Gemeint ist hier Poncelets zweite Reklamation.

[497] „Ich habe Herrn *Gergonne* bereitwillig zugestanden, den Text meiner Abhandlung zu redigieren. Wenn er darin positive Entwicklungen und Ideen zur Dualität gefunden hat (vor der Lektüre der angegebenen Nummer ihres *Bulletin* war mir die Bedeutung dieses Begriffes vollkommen unbekannt), so kann ich nicht umhin anzuerkennen, dass er diese mit Hilfe „des Schemas der zwei Spalten" gefunden hat. Es gibt darin keine Bekehrung und keinen Bekehrungseifer.".

[498] „In dem 8. Band der *Annalen*, der mir vorlag, als ich die fragliche Abhandlung verfasste, weist Herr *Poncelet*, um die Überlegenheit seiner Methoden über diejenigen der analytischen Geometrie [zu zeigen] unter anderem auf die Konstruktionen [gemeint: Lösungen] vieler Probleme hin, die in meiner Abhandlung behandelt werden. Diese Konstruktionen habe ich unter Hinzufügung der folgenden Worte zitiert: „Schauen wir, ob sich dieses schwierige Problem mit den Methoden der analytischen Geometrie lösen lässt." Diese Worte erklären bestens das Ziel meiner Abhandlung.".

abgedruckt wurde, von Plückers Erklärungen Notiz und richtet daraufhin seine weitere Polemik gegen Gergonne (vgl. [Schoenflies 1895, S. 595]).
Boyer vermutet in Poncelets scharfen Angriffen gegen Plücker einen Grund dafür, dass dieser sich später so ausschließlich der analytischen Geometrie zuwandte:

> „Although the brunt of the attack was then turned against Gergonne, Plücker seems to have been deeply hurt; and it may be largely the ruthlessness of Poncelet's attack which drove into the enemy camp the greatest of all champions of analytic geometry [...].“
>
> [Boyer 1956, S. 245]

Boyer argumentiert, Plücker sei kein geborener Analytiker gewesen, sondern habe in seinem ersten Artikel (gemeint ist [Plücker 1826a]) die Theorie der Tangeten an Kegelschnitten rein synthetisch behandelt (vgl. [Boyer 1956, S. 245]). Aber wie gerade dargestellt wurde, hatte Plücker in seinem ursprünglichen Manuskript das Ziel, zu zeigen, wie sich die von Poncelet synthetisch behandelten Probleme mit den Methoden der analytischen Geometrie lösen lassen. Bereits in seiner Dissertation hatte Plücker gefordert, dass die mathematischen Disziplinen lediglich aus analytischen Grundlagen abgeleitet werden sollten[499]. Im geometrischen Teil der Dissertation hatte er – unter anderem mit Bezug auf Biots Arbeiten in der analytischen Geometrie – Koordinaten benutzt (vgl. [Plücker 1823, S. 2, 9f]). Boyers Vermutung über den starken Einfluss von Poncelets Polemik auf Plückers Forschungsgebiet lässt sich also in dieser Form nicht bestätigen. Allerdings ist sicher nicht auszuschließen, dass Plücker durch diese heftigen Angriffe von Seiten eines Synthetikers in seiner Zuwendung zur analytischen Geometrie bestärkt wurde.
Nachdem Plücker Poncelets und Gergonnes Auffassung der Dualität kennengelernt hatte – er nennt sie im Gegensatz zu seiner analytischen Theorie der Reziprozität die geometrische Theorie – verallgemeinerte er seinen Ansatz noch weiter (vgl. [Plücker 1831, S. VII]):

> „Nachdem ich die geometrische Theorie kennen gelernt hatte, gab ich, dadurch veranlasst, der meinigen eine noch allgemeinere Form, indem ich den Pol nicht durch die Constaten der Hülfs-Gleichung selbst, sondern durch lineare Funktionen dieser Constanten bestimmte. So entwickelt findet sie sich in dem 3. Paragraphen der 2. Abtheilung des II. Bandes.“
>
> [Plücker 1831, S. VII]

In dem angegebenen Paragraphen des zweiten Bandes der „Entwicklungen“ setzt Plücker an die Stelle der Geraden-Gleichung

$$Ay + Bx + C = 0 \tag{1}$$

die Gleichung

$$[\eta b + \delta a + \xi]y + [\kappa b + \lambda a + \mu]x + [\nu b + \rho a + \sigma] = 0. \tag{2}$$

[499] „Disciplinas mathematicas e principiis tantummodo analyticis deducendas esse.“ [Plücker 1823, S. 2].

Zwar handelt es sich hierbei zunächst nur um Funktionen von Konstanten, aber im Folgenden betrachtet Plücker – gemäß der Variation der Konstanten – a und b als variabel, während er gleichzeitig einen festen Punkt (y', x') der geraden Linie an Stelle der Variablen x und y setzt. Hier zeigt sich also ein deutlicher Zusammenhang, zu den später von Plücker eingeführten allgemeinen Koordinaten, bei denen an die Stelle gewöhnlicher Koordinaten Funktionen dieser Koordinaten treten (vgl. Kapitel 11.3). Durch die genannte Variation der Konstanten ergibt sich, wenn die jetzt veränderlichen Größen a und b wieder durch x und y bezeichet werden, die Geradengleichung:

$$[\eta y' + \kappa x' + \nu]y + [\delta y' + \lambda x' + \rho]x + [\xi y' + \mu x' + \sigma] = 0. \tag{4}$$

> „Wir nennen den Punct (b, a) *den Pol der geraden Linie* (1) *in Beziehung auf die Gleichung (2),* und die gerade Linie (4) *die Polare des Punctes* (y', x'), *in Beziehung auf die Gleichung* (2). Diese Gleichung können wir füglich *aequatio directrix* nennen [...].“
>
> [Plücker 1831, S. 259]

Wie auch hier hatte Plücker bisher die Reziprozität immer rein analytisch und ohne Hinzunahme eines Kegelschnitts erklärt. Im Folgenden zeigt er aber auf, wie ein Kegelschnitt zur Vermittlung der Reziprozität gebraucht werden kann. Indem er

$$\delta = \kappa, \qquad \xi = \nu, \qquad \mu = \rho \tag{7}$$

setzt, und zudem b, a wieder variabel nimmt, erhält Plücker aus der Gleichung (2) die Gleichung eines Kegelschnitts:

> „In dem Falle, dass die Gleichungen (7) bestehen, können wir auch den Pol einer gegebenen geraden Linie und die Polare eines gegebenen Punctes, in Beziehung auf die Gleichung (2) konstruiren, indem wir einen *Kegelschnitt* zu Hülfe nehmen, denjenigen nemlich, dessen Gleichung folgende ist:
>
> $$\eta y^2 + 2\delta xy + \lambda x^2 + 2\xi y + 2\mu x + \sigma = 0. \tag{11}$$
>
> [...] Es ist also der Pol einer gegebenen geraden Linie, *in Beziehung auf diese Gleichung* [(2)], identisch dasselbe mit dem Pole derselben geraden Linie, *in Beziehung auf den Kegelschnitt* (11), der *conica diretrix.* Dasselbe gilt von der Polaren eines gegebenen Punctes.“
>
> [Plücker 1831, S. 261]

Der oben erwähnte, von Plücker 1828 verfasste und an Gergonne geschickte Artikel, mit dem er zeigen wollte wie er unabhängig von Gergonne und Poncelet – auf rein analytischem Weg – zur Theorie der Reziprozität gelangt war, wurde – wie bereits erwähnt – nicht veröffentlicht. Daher bildet der Abschnitt „Theorie der Reciprocität“ in [Plücker 1830a, S. 149 - 152] Plückers erste Veröffentlichung zu diesem Thema.

„Die Theorie der Reciprocität ist unstreitig eine der schönsten und bedeutendsten Erweiterungen der Geometrie in neuester Zeit. In die Ehre ihrer ersten Erfindung theilen sich die Herren *Gergonne* und *Poncelet*. Ich meinerseits bin später auf einem sehr verschiedenen, rein analytischen Wege und ohne eine *conique directrice* zu Hülfe zu nehmen, zu demselben Ziele gekommen und habe, was immer der unschätzbare Vortheil der analytischen Methode ist, gleich von Anfang an der Sache eine viel allgemeinere Seite abgewonnen.“

[Plücker 1830a, S. 149]

Plücker ging zum Zeitpunkt der Abfassung dieses Artikel (Sommer 1829) noch davon aus, sein früherer Artikel sei in Gergonnes Annalen gedruckt worden. Daher beschränkte er sich hier darauf, ein paar Andeutungen zur Reziprozität in Verbindung mit seinen Dreieckskoordinaten zu geben (vgl. [Plücker 1831, S. 149]). Zuerst bewies Plücker den Satz:

„Der geometrische Ort für die Pole aller Linien, die durch einen gegebenen Punkt gehen, ist eine gerade Linie, deren Pol jener Punkt ist.“

[Plücker 1830a, S. 150]

Dabei definiert er, dass der Punkt mit den Coordinaten $(\psi = b, \varphi = a)$ der Pol der Geraden mit der Gleichung $b\psi + a\varphi = 1$ ist (vgl. [Plücker 1830a, S. 149]). Plücker bemerkt noch, dass sich auf diesen Satz die ganze Theorie der Reziprozität gründen ließe und sich abgesehen von der „Definition und Construction des Poles“ kein Unterschied zwischen der Verwendung von Dreiecks- und gewöhnlichen Koordinaten ergibt. Danach gibt er eine Verallgemeinerung der Theorie der Reziprozität an:

„Es sei:

$$\frac{\psi}{b} + \frac{\varphi}{a} = 1 \tag{1}$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie.
Wir wollen den Punkt $(\psi = b, \varphi = a)$ den Pol der geraden Linie nennen. Es sei ferner:

$$\frac{B}{\psi} + \frac{A}{\varphi} = 1$$

die Gleichung irgend einer durch die drei Coordinatenpunkte gehenden Linie zweiter Ordnung. Wir wollen den Punkt $(\psi = B, \varphi = A)$ den Pol dieser Linie zweiter Ordnung nennen. Bezeichnet nun (ψ', φ') irgend einen Punkt der geraden Linie (1), so stellt

$$\frac{\psi'}{\psi} + \frac{\varphi'}{\varphi} = 1 \tag{2}$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, die durch den Punkt (b, a) d.h. durch den Pol von (1) geht, und deren Pol gegenseitig der auf (1) liegende Punkt (ψ', φ') ist.“

[Plücker 1830a, S. 150]

Plücker hatte in dem Artikel nachgewiesen, dass eine Linie zweiter Ordnung durch eine lineare Gleichung in Dreieckskoordinaten dargestellt werden kann, wenn die drei Koordinatenpunkt auf die Kurve gelegt werden (vgl. [Plücker 1830a, S. 132] und 11.1). Außerdem muss beachtet werden, dass Plücker den Pol einer Geraden hier nicht wie oben definiert, da er eine andere Form der Geradengleichung verwendet. Hier ergibt sich jetzt folgender Zusammenhang zwischen Pol und Polaren:

> „Der geometrische Ort für die Pole aller Linien zweiter Ordnung, die ausser durch die drei Coordinatenpunkte noch durch einen vierten festen Punkt gehen, ist eine gerade Linie, deren Pol dieser vierte feste Punkt ist, und gegenseitig, der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, die durch denselben festen Punkt gehen, ist eine Linie zweiter Ordnung, deren Pol dieser feste Punkt ist.“

[Plücker 1830a, S. 150]

Durch diese Dualität wird eine gegenseitige Entsprechung zwischen Punkten und Geraden hergestellt, so dass Sätze über Inzidenzen von Punkten und Geraden auf Sätze über Inzidenzen von Geraden und Punkten übertragen werden können. Analog könnte mit der Definition eines Pols zu einem Kegelschnitt eine Entsprechung zwischen Punkten und Kegelschnitten erzeugt werden. Allerdings bringt Plücker hier mit seiner Verallgemeinerung der Reziprozität gleichzeitig auch Punkte und Geraden ins Spiel, so dass hier Sätze zwischen Punkten und Geraden auf Sätze zwischen Kegelschnitten und Punkten übertragen werden.[500] Als Beispiele für solche (verallgemeinert) reziproken Sätze wählt Plücker die Sätze von Pascal und Brianchon und ihre Übertragungen[501]:

> „Die Pole der Seiten eines gegebenen Sechsecks z.B. bestimmen ein neues Sechseck, dessen Seiten Bogen von Linien zweiter Ordnung sind und die Winkelpunkte des gegebenen Sechsecks zu Polen haben. Wenn sich eine Linie zweiter Ordnung in das gegebene Sechseck beschreiben lässt, so schneiden sich diejenigen Linien zweiter Ordnung, deren Bogen die gegenüberlie-

[500] Im Unterabschnitt 11.1 wurde bereits ein Übertragungsprinzip vorgestellt, welches Plücker auch in [Plücker 1830a] eingeführt hat. Dort nutzte er ebenfalls die Tatsache aus, dass ein Kegelschnitt mit Hilfe von Dreieckskoordinaten durch eine lineare Gleichung dargestellt werden kann. Mit diesem Übertragungsprinzip lassen sich Sätze über Inzidenzen zwischen Punkten und Geraden auf solche zwischen Punkten und bestimmten Kegelschnitten übertragen; während hier Sätze zwischen Punkten und Geraden auf Sätze zwischen Kegelschnitten und Punkten übertragen werden. Im Fall des ersten Übertragungsprinzips werden den Variablen einer algebraischen Gleichung unterschiedliche geometrische Deutungen beigelegt, während bei dem zweiten Übertragungsprinzip – der verallgemeinerten Reziprozität – eine „Variation der Konstanten“ vorliegt. Zwei Sätze, welche einmal durch das erste Übertragungsprinzip, einmal durch die verallgemeinerte Reziprozität aus einem Satz über Inzidenzen von Geraden und Punkten gewonnen werden, sind zueinander dual, in dem Sinn, dass der eine Satz sich aus dem anderen durch Vertauschung der geometrischen Objekte Punkt und Kegelschnitt ergibt. Dies zeigt sich auch bei der im Folgenden beispielhaft angeführten Übertragung der Sätze von Pascal und Brianchon.

[501] Er nennt die Sätze allerdings ohne auf Pascal und Brianchon zu verweisen.

> genden Seiten des zweiten Sechsecks sind, in solchen drei Punkten, die mit den drei Coordinatenpunkten auf derselben Linie zweiter Ordnung liegen.“
>
> [Plücker 1830a, S. 150]

Den sechs Seiten des gegebenen Sechsecks entsprechen sechs Pole. Da sich je zwei der ursprünglichen Sechseckseiten in einem Punkt schneiden, liegen die Pole zu je zweien auf einem Kegelschnitt. Es wird also durch die Pole ein zweites Sechseck gebildet, dessen Seiten Bogen von Kegelschnitten sind. Wenn das gegebene Sechseck einem Kegelschnitt umschrieben ist, so schneiden sich dessen Diagonalen in einem Punkt (Satz von Brianchon). Die Pole dieser Diagonalen sind die Schnittpunkte zweier gegenüberliegender Seiten des zweiten Sechsecks; der gemeinsame Schnittpunkt der Diagonalen ist der Pol eines Kegelschnitts, der die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des aus Kegelschnitten gebildeten Sechsecks enthält.
Im Fall des Satzes von Pascal, ergibt sich die folgende Übertragung:

> „Wenn sich um das gegebenen Sechseck eine Linie zweiter Ordnung beschreiben lässt, so schneiden sich diejenigen drei Linien zweiter Ordnung, welche durch die drei Coordinatenpunkte und die drei Paare von gegenüberliegenden Winkelpunkten des zweiten Sechsecks gehen, in demselben Punkte u.s.w.“
>
> [Plücker 1830a, S. 150f]

Plücker führt „aus Mangel an Raum“ [Plücker 1830a, S. 152] lediglich ein weiteres Beispiel an. In einer Fußnote bemerkt er aber noch, dass sich jeder Satz der „géométrie de situation“[502] unendlich vervielfältigen lasse und zwar „auf alle solche algebraische oder transcendente Curven, deren Gleichungen, bezogen auf irgend ein Coordinatensystem, in Beziehung auf zwei ihrer Constanten *linear*“ seien [Plücker 1830a, S. 149].
Wie gerade dargestellt wurde, war Plücker vor Juli 1828 – unabhängig von den früheren Arbeiten von Gergonne und Poncelet – über die Variation der Konstanten – die entsprechenden Anregungen stammten aus Biots „Essai...“ – zu seiner Theorie der Reziprozität gekommen. Erst danach, Ende August 1828, kam Plücker zur Idee der Linienkoordinaten (vgl. [Plücker 1831, S. VII] und Kapitel 11.2). Die erste Veröffentlichung dazu findet sich im 6. Band des Crelle-Journals unter dem Titel: „Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen“ ([Plücker 1830c]). Den Begriff „Koordinaten der geraden Linie“ benutzt Plücker zum ersten Mal explizit im zweiten Band seiner „Entwicklungen“ (vgl. [Plücker 1831, S. 10]) – dessen zweite Abteilung eine Darstellung des Prinzips der Reziprozität bildet. Mit der Erfindung der Linienkoordinaten hatte Plücker endgültig die analytische Grundlage für das Prinzip der Reziprozität gefunden.

> „Nachdem dieser Begriff [d. i. der Begriff der Linienkoordinaten] festgestellt war, zeigte sich das *Poncelet-Gergonne*’sche Princip als selbstverständlich in dem einen Umstande enthalten, dass die Bedingungen der vereinigten Lage von Punkt und Gerade in der Ebene, sowie für Punkt und

[502] Also jeder Satz über Inzidenzen zwischen Punkten und Geraden.

> Ebene im Raume eine für die Coordinaten der jedesmal auftretenden beiden Gebilde symmetrische Gestalt hat."

[Clebsch 1872, S. XIX]

In der Vorrede zum zweiten Band der „Entwicklungen" bemerkt Plücker:

> „[...] jenes Princip der Reciprocität, welches die scheinbar fremdartigsten Sätze nach allen Seiten hin verknüpft, und uns aus der Art dieser Verknüpfung, indem wir von bekannten Sätzen ausgehen, nach Lust und Liebe gleichsam, neue finden lehrt [...]. Hierbei treten uns indess mehrere Bemerkungen entgegen. Jedem Beweise, der sich durch die Verbindung allgemeiner Symbole ausführen lässt, entsprechen, wenn wir die Symbole einmal auf Punct-Coordinaten, das andere Mal auf Linien-Coordinaten beziehen, zwei solche Sätze, die durch das Princip der Reciprocität mit einander verbunden sind. Wir können hier also entweder dieses Princip oder die Betrachtung eines von jenen beiden Coordinaten-Systemen entbehren. [...] Das System der Linien-Coordinaten behält also seine ganze Bedeutung neben dem Principe der Reciprocität [denn] es werden durch dasselbe die Beweismittel verdoppelt."

[Plücker 1831, S. VIIIf]

Neben den bereits genannten Punkten behandelt Plücker im Zusammenhang mit der Reziprozität auch das Cramersche Paradoxon (vgl. [Plücker 1831, S. 242]) und führt den Begriff der singulären Geraden ein.
Wie in Kapitel 11.3 vorgestellt wurde, führte Plücker später, in seinem „System ..." (1835), die sogenannten „allgemeinen Koordinaten" ein. Da er mit diesen *alle* möglichen Punkt- und Linienkoordinatensysteme umfassen konnte, ermöglichten sie es, ein Prinzip aufzustellen, bei dem „wenn die analytische Beweisführung irgend eines Satzes vorliegt, zugleich so viele Sätze bewiesen sind, als es verschiedene Coordinaten-Systeme gibt" [Plücker 1831, S. IX]. Plücker formuliert es so, dass „der allgemeine Begriff der Coordinaten [...] die verschiedenen Uebertragungs-Principe in sich" einschließe [Plücker 1831, S. VII]. Diese Übertragungs-Prinzipe untersucht er ebenfalls in seinem „System ..." (1835). Dabei verfolgt er die Absicht:

> „[...] die allgemeine Basis, auf welcher alle Uebertragungs-Principien beruhen, hinzustellen, und dann zweien dieser Principien, der *Collineation* und der *Reciprocität*, eine besondere Aufmerksamkeit [zu] schenken."

[Plücker 1835, S. 48]

Bei der Darstellung der Kollineation und anderer geometrischer Verwandtschaften[503] verweist Plücker auf Möbius' Arbeiten zu diesem Thema:

[503] Plücker behandelt neben der Kollineation auch Affinität, Ähnlichkeit, Kongruenz, „Verwandtschaft der Gleichheit der Flächenräume" und Projektivität (vgl. [Plücker 1835, S. 42 - 73]).

> „Ich nehme in der Darstellung derselben die Idee auf, welche Herrn *Möbius* angehört, und nach welcher man sich denkt, daß zwei (wenn wir wollen zusammenfallende) Ebenen aus Puncten bestehen, und die Puncte der beiden Ebenen auf bestimmte Weise sich entsprechen, wonach denn auch jede Figur, die man aus Puncten der einen Ebene *bilden kann*, in der anderen eine entsprechende findet. Das Entsprechen der Puncte (ein Begriff, der von allem philosophisch Vagen frei erhalten werden muß) drücken wir dadurch aus, daß wir zwei sich entsprechenden Puncten gleiche Coordinaten-Werthe in zwei verschiedenen Systemen zuschreiben."

[Plücker 1835, S. VII]

Insgesamt unterscheidet Plücker drei verschiedene „Haupt-Classen von Uebertraguns-Principien" [Plücker 1835, S. 49]. Die gerade angesprochenen geometrischen Verwandtschaften, bei denen jeweils ein Punkt der einen Ebene einem Punkt der anderen Ebene entspricht, bilden dabei die erste Klasse. Definiert wird ein solches Übertragungsprinzip durch die Annahme zweier Punktkoordinatensysteme[504]. Die zweite Klasse wird von solchen Übertragungsprinzipien gebildet, bei denen eine Entsprechung zwischen zwei Geraden definiert wird. Solche Übertragungsprinzipe benötigen also zwei Linienkoordinatensysteme. Die geometrische Verwandtschaft der Collineation nimmt bei dieser Unterteilung in Classen von Übertragungsprinzipen in gewisser Weise eine Sonderrolle ein. Hier „vereinigen sich die beiden [...] Uebertragungs-Principien in ein einziges" [Plücker 1831, S. 50], da sowohl eine Entsprechung zwischen Punkt und Punkt, als auch eine Entsprechung zwischen Gerade und Gerade vorliegt[505].
Die dritte Hauptklasse von Übertragungsprinzipien – die Reziprozität – beruht auf dem Entsprechen „zwischen *Punct* und *gerader Linie* und zwischen zwei Curven, von welchen wir uns die eine durch einen Punct beschrieben und die andere von einer geraden Linie umhüllt vorstellen" [Plücker 1835, S. 49]. Plücker behandelt hier nicht mehr die von ihm in früheren Veröffentlichungen eingeführten Verallgemeinerungen der Reziprozität, bei denen eine Entsprechung zwischen Punkten und Kurven , deren Ordnung höher ist als eins, definiert wurde. Dennoch handelt es sich hierbei um eine Erweiterung der von Poncelet eingeführten Dualität:

> „Die besondere Art, in welcher *Poncelet* jeden Punkt einer Ebene einer gewissen Geraden mittelst eines Kegelschnitts zugeordnet hatte, konnte *Plücker* durch eine allgemeinere ersetzen, welche wir heute als reciproke lineare Verwandtschaft bezeichnen. Auch diese freilich erschien ihm, wie er im zweiten Bande der „Entwicklungen" erwähnt, als sehr besonderer Fall einer höchst allgemeinen Verwandtschaft mit sehr willkürlichem Wechsel des Raumelements."

[Clebsch 1872, S. XIXf]

[504] Genauer gesagt durch die Gleichungen $\eta = \varphi(y, x)$ und $\xi = \psi(y, x)$. Dem Punkt mit den Koordinaten $y = b, x = a$ entspricht dann der Punkt mit den Koordinaten $\eta = b, \xi = a$ (vgl. [Plücker 1835, S. 48f]).

[505] Dieses doppelte Übertragungsprinzip liegt dann vor, wenn lineare Punkt- oder Linienkoordinatensysteme verwendet werden. „[...] Schon der Begriff solcher [linearen] Coordinaten schließt also den Begriff der Collineations-Verwandtschaft ein." [Plücker 1835, S. 51].

Inwiefern sich die reziproke lineare Verwandtschaft[506] von der Dualität (wie bei Poncelet) unterscheidet, wird im Folgenden gezeigt.
Durch die beiden Gleichungen

$$\eta = \delta', \qquad \xi = \zeta',$$

in denen η und ξ Punktkoordinaten, sowie δ' und ζ' beliebige Linienkoordinaten bezeichnen, wird die Reziprozität ausgedrückt (vgl. [Plücker 1835, S. 73]). Durch die jeweilige Wahl des Punkt- und des Linienkoordinatensystems werden zwei verschiedene ebene Systeme definiert. In dem ersten (ungestrichenen) System sind Punkte durch ihre Koordinaten gegeben, in dem zweiten (gestrichenen) System sind die Geraden durch ihre Koordinaten gegeben. Somit sind die Pole in dem ersten und die ihnen zugeordneten Polaren in dem zweiten System direkt durch ihre Koordinaten bestimmt. Der Punkt mit den Koordinaten $\eta = a, \ \ \xi = b$ im ersten System ist der Pol der Polaren mit den Koordinaten $\delta' = a, \ \ \zeta' = b$ im zweiten System. Dagegen werden die Geraden im ersten und die Punkte im zweiten System jeweils durch eine Gleichung festgelegt.
Sei beispielsweise im ersten System eine Gerade durch die Gleichung

$$\eta + A\xi + B = 0$$

gegeben. Dann wird der zu dieser Polaren gehörende Pol des zweiten Systems analog durch die Gleichung

$$\delta' + A\zeta' + B = 0$$

dargestellt (vgl. [Plücker 1835, S. 73]). Aus den letzten beiden Gleichungen lässt sich direkt ablesen, dass, wenn mehrere Punkte im ersten System auf einer Geraden liegen, sich alle ihnen zugeordneten Polaren im zweiten System in einem Punkt schneiden. Die umgekehrte Beziehung ergibt sich, wenn in der ersten Gleichung η und ξ als fest betrachtet werden und nach und nach alle Geraden durch diesen Punkt betrachtet werden. Die diesen Geraden zugeordneten Pole des zweiten Systems liegen dann offensichtlich in einer Geraden (vgl. [Plücker 1835, S. 73f]).

> „Wir sehen hieraus, wie die Beziehung der beiden Systeme zu einander eine durchaus gegenseitige ist. Wir nennen dieselben zwei *reciprok verwandte*, oder *reciproke*, und das aus dieser Art der Verwandtschaft fließende Princip, nach welchem die Relationen des einen zweier reciproken Systeme sich auf das andere übertragen lassen: *Princip der Reciprocität.*"

[Plücker 1835, S. 74]

Die Unterscheidung zweier Systeme bildet den Hauptunterschied zwischen dem, was Plücker hier vorstellt – und was später als reziproke lineare Verwandtschaft bezeichnet wurde – und der Dualität, wie sie beispielsweise von Poncelet behandelt wurde. Bei letzterer ist jedem Punkt eindeutig *eine* Gerade zugeordnet und umgekehrt jeder Geraden *ein* Punkt. Anders ausgedrückt: bei Poncelet gehören Punkt und Gerade ein und demselben System an – einer projektiven Ebene. Bei der reziproken linearen Verwandtschaft gibt es dagegen zwei Systeme und die Zuordnung ist abhängig von dem

[506] Vgl. zum Gebrauch dieses Begriffs beispielsweise auch [Salmon-Fiedler 1918, S. 324f].

jeweiligen System, dem das geometrische Objekt zugeordnet ist.[507] Ein Punkt der Ebene kann nacheinander jedem der beiden Systeme zugehörig betrachtet werden. In der Regel sind diesem einen Punkt dann *zwei voneinander verschiedene* Polaren zugeordnet. Genauso kann eine Gerade nacheinander als jedem der beiden Systeme zugehörig betrachtet werden. Die beiden – im jeweils anderen System – dieser Polaren zugeordnete Pole sind ebenfalls in der Regel voneinander verschieden. Für jedes einzelne System ist die Zuordnung aber eindeutig.
Im Folgenden thematisiert Plücker den Zusammenhang zwischen der Verwandtschaft der Kollineation und der Reziprozität. Beide hängen von acht Konstanten ab. Während die Kollineation zweier Systeme durch vier Paare sich entsprechender Punkte oder sich entsprechender Geraden gegeben ist[508], wird die Reziprozität durch vier Pole des einen Systems und ihre vier Polaren im anderen System bestimmt (vgl. [Plücker 1835, S. 74]).

> „Wenn irgend drei Systeme vorliegen, von denen das erste (η, ξ) mit jedem der beiden anderen (δ', ζ') und (δ'', ζ'') in der Verwandtschaft der Reciprocität steht, so sind diese letztern Systeme collinear verwandt.“

[Plücker 1835, S. 74]

In seinem „System ...“ (1835) behandelt Plücker auch die verschiedenen Lagen, welche zwei reziproke Systeme zueinander haben können. Wenn ein gegebener Punkt nach einander beiden reziproken Systemen zugeordnet wird, dann sind die beiden Polaren im jeweils anderen System – wie bereits erwähnt – im Allgemeinen nicht identisch (vgl. [Plücker 1835, S. 75]). Es gibt aber bei jeder beliebigen Lage der beiden Systeme im Allgemeinen drei Punkte, deren Polaren in beiden Sytemen zusammenfallen, sowie drei Geraden deren Pole identisch sind (vgl. [Plücker 1835, S. 75]).
Plücker erwähnt auch metrische Relationen, die bei zwei reziproken Systemen gleich sind, und gibt dabei auch Doppelverhältnisse an, ohne diesen Begriff zu benutzen. Unter anderem erwähnt er, dass an die Stelle von vier harmonischen Punkten vier Harmonikale treten und eine Involution von Punkten einer Involution von Geraden entspricht (vgl. [Plücker 1835, S. 76]).
In Anlehnung an Magnus, definiert Plücker die beiden *Mittelpunkte* zweier reziproker Systeme als die jeweiligen Pole der Ferngerade (vgl. [Plücker 1835, S. 76]). Um einen solchen Mittelpunkt eines Systems zu konstruieren, werden in dem jeweils anderen System Parallelen nach beliebiger Richtung gezogen. Die Pole dieser Parallelen – die sich alle in einem Fernpunkt schneiden – müssen also im ersten System auf einer Geraden liegen. Diese Gerade ist ein *Durchmesser* des Systems. Zwei Durchmesser schneiden sich in dem Mittelpunkt des Systems. Jedem Durchmesser des einen Systems ist ein

[507] Die geometrischen Objekte – wie hier z.B. die Punkte der Ebene – existieren bei Plücker unabhängig von dem jeweils verwendeten Koordinatensystem. Dieser Gedanke wird von Plücker nirgends explizit ausgesprochen, findet sich aber durchgängig in seinen Werken. Beispielsweise ist ein Kegelschnitt nicht dadurch definiert, dass er durch eine Gleichung vom zweiten Grad dargestellt werden kann, sondern existiert als geometrisches Objekt unabhängig von jeder Koordinatenbestimmung. Diesem geometrische Objekt kann aber mit Hilfe von Koordinatensystemen eine Gleichung zugeordnet werden. Je nach Wahl des Koordinatensystems kann diese Gleichung auch linear sein (vgl. 11.1).

[508] Also entweder durch ein vollständiges Viereck oder ein vollständiges Vierseit. Vgl. dazu die Möbius-Netze (11.1).

Durchmesser des zweiten Systems *zugeordnet* und zwar so, dass jeder die Polare des Fernpunktes des zugeordneten Durchmessers ist (vgl. [Plücker 1835, S. 76]). Wenn die beiden Mittelpunkte zweier reziproker Systeme zusammenfallen, so ist es möglich, eines der beiden Systeme so um diesen Mittelpunkt zu drehen, dass alle Pole und Polaren beider Systeme zusammenfallen (vgl. [Plücker 1835, S. 76ff]). In diesem Fall ist es nicht mehr sinnvoll, zwei in derselben Ebene liegende Systeme zu unterscheiden, da jedem Punkt nur noch eine Gerade und umgekehrt jeder Geraden genau ein Punkt zugeordnet ist. Plücker hat diese Lage in Anlehnung an Magnus „eine *reciproke*“ Lage genannt (vgl. [Plücker 1846, S. 318f]). Fiedler benutzt den Begriff „Polarreziprozität“ für diese Zuordnung und faßt die beiden reziproken Systeme in diesem Fall zu einem sogenannten „Polarsystem“ zusammen (vgl. [Salmon-Fiedler 1918, S. 330]).
Neben der bisher geschilderten Behandlungsweise der Reziprozität, kommt Plücker auch in seinem „System ...“ (1835) noch einmal auf die Variation der Konstanten zurück. Interessant ist diese Behandlungsweise besonders deswegen, weil er auch hier wieder – wie bereits in [Plücker 1831, S. 261] – zeigt, wie zur Vermittlung der Reziprozität Kegelschnitte verwendet werden können (vgl. [Plücker 1835, S. 78f]).
Hier geht Plücker von zwei verschiedenen Punktkoordinatensystemen aus, durch welche die Reziprozität bestimmt wird. Die Gleichung

$$\eta\eta' + \xi\xi' = 1 \tag{1}$$

bezeichnet eine Gerade im ersten System, wenn η und ξ als variabel aufgefasst werden. Der Pol dieser Geraden ist der Punkt, der im zweiten System die Koordinaten (η', ξ') hat. Umgekehrt stellt die Gleichung eine Gerade des zweiten Systems dar, wenn η' und ξ' als variabel (und η, ξ als konstant) angesehen werden. Der Pol dieser Geraden ist dann der Punkt, der im ersten System die Koordinaten (η, ξ) besitzt.
Wenn angenommen wird, dass sowohl (η, ξ) im ersten System, als auch (η', ξ') im zweiten System den gleichen Punkt darstellen,[509] dann beschreibt die Gleichung (1) die Bedingung dafür, dass dieser Punkt in seine Polare fällt – und zwar in beiden Systemen (vgl. [Plücker 1835, S. 78]). Da es sich bei beiden Punktkoordinaten-Systemen um allgemeine lineare Koordinaten handelt, lässt sich das eine Koordinatensystem durch acht unbestimmte Konstanten aus dem anderen ableiten (vgl. [Plücker 1835, S. 78] sowie Kapitel 11.3).

> „Denken wir uns die beiden Coordinaten η' und ξ', vermittelst acht unbestimmter Constanten, durch η und ξ oder, umgekehrt, diese Coordinaten durch jene ausgedrückt, so erkennen wir sogleich, daß der geometrische Ort für solche Puncte, die in ihre Polaren fallen, ein *Kegelschnitt* ist. Diese Polaren selbst umhüllen ihrerseits einen *zweiten Kegelschnitt*, was unmittelbar sich ergibt, wenn wir die Reciprocität der beiden Systeme, statt durch Punct-Coordinaten wie in der Gleichung (1), durch *Linien*-Coordinaten ausdrücken.“

[Plücker 1835, S. 78f]

Plücker spricht hier von zwei verschiedenen Kegelschnitten. Im Gegensatz zur hier geäußerten Meinung hatte Poncelet die Dualität von einem Kegelschnitt abhängig gemacht. Der Ort für solche Punkte, die in ihre Polaren fallen, ist dort dieser vorgegebene

509 Vgl. Fußnote 507.

Kegelschnitt, der gleichzeitig von den Polaren umhüllt wird. Magnus – der wie in Kapitel 5.2 dargestellt wurde – die Bogenkorrekturen für Plückers „System ...“ (1835) übernommen hatte, hielt Plückers Angaben daher für falsch. In einem Brief vom 5. Juni 1834 schreibt er an Plücker:

> *„Was Sie aber in den Nummern, welche die Reciprocität enthalten, von zwei Kegelschnitten sagen, scheint mir ganz falsch zu seyn. Wenn t, u die Coordinaten eines Punktes und x, y die laufenden Coordinaten seiner Polare sind, so ist*
>
> $$(au + bt + c)y + (a'u + b't + c')x + a''u + b''t + 1 = 0 \qquad (1)$$
>
> *die Gleichung dieser Polarlinie, welche acht Constanten enthält, und dieselbe Gleichung drückt die Beziehung der beiden zu einander reciproken Systeme aus, so daß die Gleichung der Polarlinie eines Punktes xy genau dieselbe ist und nur um die laufenden Coordinaten tu von den unveränderlichen xy besser zu unterscheiden,*
>
> $$(ay + ax' + a'')u + (by + b'x + b'')t + cy + c'x + 1 = 0 \qquad (2)$$
>
> *geschrieben zu werden pflegt. Wird nun gefragt: welche Punkte der Ebene liegen in ihren eigenen Polarlinien? So ergiebt sich die Antwort unmittelbar daraus, daß eines solchen Punktes Coordinaten t, u an die Stelle von x, y in die Gleichung (1) gesetzt, diese Gleichung befriedigen müssen, oder daß eines solchen Punktes Coordinaten x, y an die Stelle von t, u gesetzt der Gleichung (2) genügen werden, wobei allerdings vorausgesetzt ist, daß beide Coordinatensysteme xy u*[nd] *tu dieselben sind, was aber immer angenommen werden kann, weil durch Transformation der Coordinaten die aequatio directrix (1) oder (2) ihre Form nicht ändert. Die erste Substitution giebt*
>
> $$au^2 + (b + a')tu + b't^2 + (c + a'')u + (c' + b'')t + 1 = 0$$
>
> *und die zweite*
>
> $$ay^2 + (a' + b)xy + b'x^2 + (a'' + c)y + (b'' + c')x + 1 = 0$$
>
> *also, da die Coordinatenachsen dieselben sind, einen und denselben Kegelschnitt, und nicht zwei verschiedene* [...]*.“*

[NRC PC, Vol 3A, Item 3]

Magnus setzt hier voraus, *„daß beide Coordinatensysteme* [...] *dieselben sind“*, eine Voraussetzung, die Plücker in der Annahme zweier verschiedener Koordinatensystem aber nicht macht. Magnus begründet diese Voraussetzung mit dem Hinweis, dass eine *„Transformation der Coordinaten die [Form der] aequatio directrix* [...] *nicht ändert“*. Diese Transformation der Koordinaten entspricht der Lagenänderung der beiden Systeme zueinander, durch welche die beiden Systeme in eines übergehen. Wird diese Lagenänderung vorgenommen, so fallen die beiden Kegelschnitte zusammen und die lineare Reziprozität geht in eine gewöhnliche Reziprozität (Dualität) über.

„Wir haben schon in der vorigen Nummer bemerkt, daß wir zweien concentrischen reciproken Systemen, indem der Mittelpunct derselbe bleibt, immer eine solche Lage geben können, daß in den beiden Systemen die beiden Pole jeder gegebenen geraden Linie, so wie die beiden Polaren jedes gegebenen Punctes, zusammenfallen. Dieß setzt voraus, daß alsdann an die Stelle der beiden zur Vermittelung der Construction dienenden Kegelschnitte ein *einziger* tritt, damit die Pole der Tangenten dieses einzigen Kegelschnittes beide in den Berührungspuncten auf denselben zusammenfallen.“

[Plücker 1835, S. 81]

Dabei unterscheidet Plücker zwei verschiedene Fälle:

„[...] es können zwei reciproke Systeme entweder eine solche Lage haben, daß eine bloße *Verrückung* eines der beiden Systeme hinreicht, damit die zweifache Polar-Bestimmung identisch dieselbe werde; oder die Lage derselben kann von der Art sein, daß überdies auch noch eine *Umwendung* eines der beiden Systeme hierzu erforderlich ist.“

[Plücker 1835, S. 83]

Plücker erwähnt auch, dass der Fall, in dem die Reziprozität nur von einem Kegelschnitt abhängt und somit die Bestimmung der Polaren in beiden Systemen identisch ist, mit dem übereinstimmt, worauf „die Herren *Poncelet* und *Gergonne* zuerst das *Princip der Reciprocität* gegründet haben“ [Plücker 1835, S. 83].
Wenn aber keine reziproke Lage der beiden Systeme vorliegt – also voneinander verschiedene Koordinatensysteme verwendet werden – dann liegen in der Tat auch zwei voneinander verschiedene Kegelschnitte vor. Diese beiden Kegelschnitte nennt man die Ordnungskurven der reziproken Systeme. Der erste Kegelschnitt, der aus den Punkten gebildet wird, die in ihre Polaren fallen, wird Polkegelschnitt, und der zweite, der von den entsprechenden Polaren umhüllt wird, Polarkegelschnitt genannt (vgl. [Salmon-Fiedler 1918, S. 326]). Allerdings benutzt Plücker diese Bezeichnungen nicht; er spricht lediglich von dem ersten und dem zweiten Kegelschnitt. Wird ein Punkt auf dem Polkegelschnitt angenommen, so sind die beiden ihm zugeordneten Polaren Tangenten des Polarkegelschnitts.

„Wenn dieser Punct den Umfang des *ersten* Kegelschnittes durchläuft, so berühren die beiden Polaren dieses Punctes fortwährend den zweiten Kegelschnitt, in der Art, daß dieser auf doppelte Weise von einer geraden Linie, die in zwiefachem Sinne sich fortbewegt, umhüllt wird.“

[Plücker 1835, S. 79]

Umgekehrt liegen die beiden Pole einer Geraden genau dann auf dem Polkegelschnitt, wenn die Gerade Tangente des Polarkegelschnitts ist.

„Während also die gerade Linie, den zweiten Kegelschnitt umhüllend, sich fortbewegt, beschreiben ihre Pole *beide*, jedoch nach entgegengesetzter

> Richtung fortrückend, den *ersten* Kegelschitt.“
>
> [Plücker 1835, S. 79]

Da die Reziprozität nur von acht Konstanten abhängt, ein einzelner Kegelschnitt aber von fünf Konstanten, können die beiden Kegelschnitte offensichtlich nicht beliebig angenommen werden (vgl. [Plücker 1835, S. 79]).

> „Es ist leicht, auch ohne auf analytische Entwicklungen uns zu stützen, die Beziehung der beiden Kegelschnitte zu einander aufzufinden.“
>
> [Plücker 1835, S. 79]

Plücker betrachtet dafür die Situation, die sich in einem gemeinsamen Punkt M beider Kegelschnitte ergibt: die beiden Polaren dieses Punktes fallen in die Tangente des Polarkegelschnitts in M zusammen. Umgekehrt fallen dann notwendigerweise auch die beiden Pole dieser Tangente zusammen in den Punkt M. Die Tangente des Polarkegelschnitts ist folglich auch eine Tangente des Polkegelschnitts.

> „Die vier, reellen oder imaginären Puncte, welche überhaupt zwei Kegelschnitte miteinander gemein haben, fallen hier also paarweise zusammen: die beiden Kegelschnitte haben einen *doppelten Contact.* Das System zweier solcher Kelgeschnitte hängt, wie die Verwandtschaft der Reciprocität, nur von *acht* Constanten ab.
> [...] Zwei ähnliche ähnlich liegende und concentrische Kegelschnitte sind als zwei, auf einer unendlich weit entfernten geraden Linie sich doppelt berührende anzusehen, und der doppelte Contact ist, je nachdem die beiden Kegelschnitte Hyperbeln oder Ellipsen sind, ein reeller oder imaginärer.“
>
> [Plücker 1835, S. 79]

Neben den genannten Beispielen – zu denen auch der Fall zweier konzentrischer Kreise zählt – nennt Plücker auch einen Kreis und eine Ellipse. Hier fällt der doppelte (reelle) Kontakt auf einen gemeinsamen Durchmesser beider Kegelschnitte (vgl. [Plücker 1835, S. 82]).
In seinem „System der Geometrie des Raumes ...“ (1846) behandelt Plücker auch den räumlichen Fall der Reziprozität. Diese stellt eine Zuordnung zwischen Punkten und Ebenen her und kann daher mit Hilfe von Punkt- und Ebenenkoordinaten analytisch begründet werden.[510] An die Stelle des Kegelschnitts tritt hier eine Fläche zweiter Ordnung und Klasse.
Die verschiedenen in diesem Kapitel behandelten Aspekte werden durch Plücker in einer Äußerung in seinem „System ...“ (1846) knapp zusammengefasst, weshalb dieses Zitat hier abschließend wiedergegeben wird:

[510] Bereits in einem Artikel vom Februar 1831, der 1832 in Crelles Journal veröffentlicht wurde, hatte Plücker diese Zuordnung behandelt und in diesem Zusammenhang auch die Ebenenkoordinaten eingeführt (vgl. [Plücker 1832a]).

> „Das Princip der Reciprocität ist das Band, welches die beiden Darstellungsweisen [d. i. mit Punkt- und mit Ebenenkoordinaten] verknüpft und in Folge dessen die Beziehung der in beiden erhaltenen Resultate, sowohl der analytischen als der geometrischen, als eine nothwendige erscheint. Aus diesem Princip fliesst das allgemeine Uebertragungs-Princip, der allgemeinsten linearen Punct- und Plan-Coordinaten-Bestimmung entsprechend, das in eben so viele besondere Uebertragungs-Weisen sich auflöset, als wir eine besondere Punct-Coordinaten-Bestimmung mit einer besondern Plan-Coordinaten-Bestimmung zusammenstellen können. Im Allgemeinen lassen sich zwei reciproke System in eine solche gegenseitige Lage bringen, die Herr Magnus eine *reciproke* genannt hat, bei welcher die Polar-Bestimmung durch die Vermittelung einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und Classe ausgeführt werden kann. Hierauf gründeten die Herren Gergonne und Poncelet zuerst das Princip der Reciprocität, bevor ich meinerseits, unabhängig hiervon und bald nachher, dasselbe aus der Variation der Constanten ableitete und die doppelte Coordinaten-Bestimmung aufstellte."

[Plücker 1846, S. 318f]

12.2.1. Plückers Begriff der „Reziprozität" im Unterschied zur Dualität

Die von Plücker eingeführte Bezeichnung „Prinzip der Reziprozität" ist eine „freie Uebersetzung der *Poncelet*-schen *„théorie des polaires réciproques"* [Plücker 1831, S. V]. Plücker schließt sich damit in der Wahl seiner Bezeichnung bewusst (dem Synthetiker) Poncelet an und nicht (dem Analytiker) Gergonne, der seinerseits die Bezeichnung *„principe de dualité"* verwendete. Auf letztere Bezeichnung geht die heute übliche Bezeichnung (Dualität) zurück. Plücker kritisiert mit seiner Anlehnung an Poncelets Bezeichnung vor allem die Tatsache, dass die Dualität, wie sie von Gergonne eingeführt und benutzt wurde, ein eher vages Gesetz darstellte, dessen eigentliche Grundlage unbekannt blieb. Plücker sagt, er könne sich – im Gegensatz zu Gergonne – „nicht zu der Ansicht einer absoluten Dualität bekennen" [Plücker 1831, S. V].

> „Jeder Gedanke überhaupt, der nicht aus der Natur der Sache unmittelbar entspringt, sondern aus einer metaphysischen Abstraction übertragen wird, übt so leicht eine dictatorische Herrschaft über uns aus und führt dann seine Strafe immer mit sich, indem er dem unbefangenen Gedankengange Fesseln anlegt."

[Plücker 1831, S. VI]

Plückers Begriff des Prinzips der Reziprozität umfasst dennoch mehr, als die auf analytische Grundlage gestellte Reziprozität Poncelets. Zum einen behandelt er verschiedene Erweiterungen der Reziprozität wie beispielsweise die Entsprechung von Punkten und Kegelschnitten in [Plücker 1830a]. Zum anderen umfasst Plückers Begriff der Reziprozität auch die sogenannte lineare Reziprozität, die ebenfalls allgemeiner ist als die Dualität. Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass Plückers Begriff der Reziprozität die Dualität zwar einschließt, aber allgemeiner ist als diese. Während die Dualität

eine eindeutige Entsprechung von Punkten und Geraden in der Ebene, sowie Punkten und Ebenen im Raum darstellt, wird durch die Reziprozität eine „höchst allgemeine Verwandtschaft mit sehr willkürlichem Wechsel des Raumelements“ beschrieben (vgl. [Clebsch 1872, S. XIXf]). Dabei ist es auch möglich, dass jedem Punkt der Ebene zwei Geraden und umgekehrt jeder Geraden zwei Punkte entsprechen.
Plückers Gebrauch des Begriffs „Reziprozität“ ist daher auch nicht ganz eindeutig, da er ihn sowohl für die lineare Reziprozität als auch für die Dualität[511] verwendet. Auch die Zuordnung von Punkten zu Kurven der Ordnung größer oder gleich zwei wird begrifflich höchstens durch den Zusatz der verallgemeinerten Reziprozität von der Dualität unterschieden. In den späteren Veröffentlichungen („System ...“ (1835) und „System ...“ (1846)) behandelt Plücker unter dem Begriff „Reziprozität“ allerdings nur noch die lineare Reziprozität und den Spezialfall der Polarreziprozität (= Dualität), so dass hier auch eine gewisse Entwicklung (nämlich eine Verengung) bezüglich des Begriffumfangs beobachtet werden kann.

[511] Hier z.T. mit dem Zusatz der *reziproken* Lage der beiden Systeme zueinander.

13. Inversion am Kreis

> „The idea of inversion stems from ancient times. Over the centuries, geometers occasionally used it to solve problems about specific figures. Jakob Steiner's work in the 1820s, largely unpublished, showed extensive knowledge of and facility with inversion, but included no coherent theory of this transformation. The first specific description of inversion as a transformation of the set of points distinct from O [Kreismittelpunkt] was evidently given by Julius Plücker in 1831. [...] According to the geometer Julian L. Coolidge, the first comprehensive geometrical theory of inversion was the 1855 work of August F. Möbius."
>
> [Marchisotto 2007, S. 139]

Die im obigen Zitat erwähnte Arbeit Plückers zur Inversion bildet den fünften Paragraphen seiner „analytisch-geometrischen Aphorismen", die in den Jahren 1833 und 1834 im 10. und 11. Band des Crelleschen Journals veröffentlicht wurden. Laut Plückers eigenen Angaben verfasste er die sechs Paragraphen zwischen Anfang August und Ende Oktober 1831 ([Plücker 1833b], [Plücker 1833c] und [Plücker 1834a] bis [Plücker 1834d]). Auch wenn die einzelnen Paragraphen der genannten Arbeit im Wesentlichen in sich geschlossene Abhandlungen bilden, bauen sie doch aufeinander auf. In den Paragraphen I und III ([Plücker 1833b] und [Plücker 1834a]) behandelt Plücker die „Anwendung allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten" und in Paragraph V ([Plücker 1834c]) wird die Inversion als Übertragungsprinzip eingeführt. Die in diesen Paragraphen aufgestellten Sätze benutzt Plücker dann in den Paragraphen II, IV und VI, in denen er u.a. eine neue Konstruktion des „Apollonischen Problems der Tactionen"[512], die Malfatti'sche Aufgabe sowie Steiners Verallgemeinerung dieser Aufgabe behandelt ([Plücker 1833c], [Plücker 1834b] und [Plücker 1834d]).

13.1. Die Malfatti'sche Aufgabe – Inversion bei Steiner

Plücker gibt die Malfatti'sche Aufgabe wie folgt wieder:

[512] Heute „Apollonisches Berührproblem" genannt. Hierbei handelt es sich darum, „einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt" [Plücker 1833c, S. 251].

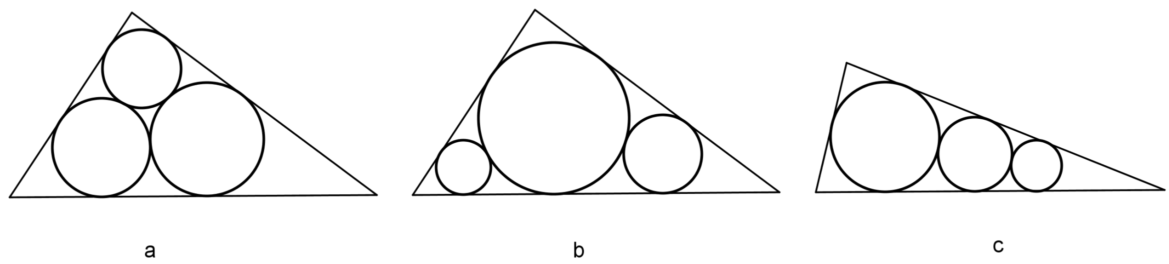


Abb. 13.1.: Malfatti'sche Kreise (a) und Lösungen des ursprünglichen Malfatti'schen Problems (b, c)

> „In ein gegebenes Dreieck drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und zwei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt."
>
> [Plücker 1834b, S. 266]

Allerdings hatte Gianfrancesco Malfatti[513] 1803 im 10. Band der „Memoire di matematica e di fisica della Societa Italiana delle Scienze" ursprünglich die Aufgabe gestellt, drei Kreise so in ein Dreieck einzuschreiben, dass sie einen möglichst großen Flächenraum überdecken, ohne sich gegenseitig zu überlappen. Fälschlicherweise ging Malfatti davon aus, dass dies durch die – seither als Malfatti'sche Kreise bezeichneten – Kreise geleistet würde, welche sich gegenseitig und je zwei Dreiecksseiten berühren. Dass dies tatsächlich nie der Fall ist, wurde erst deutlich später entdeckt[514]. Auch wenn die drei Malfatti'schen Kreise keine Lösung des ursprünglichen Malfatti'schen Problems sind, sollen sie auch im Folgenden als Malfatti'sche Kreise und ihre Konstruktion weiterhin als Malfatti'sche Aufgabe bezeichnet werden[515]. Malfatti selbst führt eine einfache Konstruktion dieser Kreise an, welche auf trigonometrischen Rechnungen beruhte [Loeber 1914, S. 1]. Jakob Steiner gab 1826 in seinen „geometrischen Betrachtungen", die im ersten Band des Crelle'schen Journals veröffentlicht wurden, als erster eine rein geometrische Konstruktion der Malfatti'schen Kreise an (Abb. 13.2); allerdings ohne Beweis[516] ([Steiner 1826b, S. 178f]). Durch Steiners Arbeit wurden zahlreiche Mathe-

---

513 Auch Gian Francesco oder Giovanni Francesco Malfatti; (1731 - 1807).

514 1929 konnten Lob und Richmond dies für den Fall des gleichseitigen Dreiecks zeigen; 1967 gelang es Michael Goldberg nachzuweisen, dass die Malfatti'sche Lösung niemals korrekt ist. Ein vollständiger Beweis erfolgte 1992 (englische Übersetzung 1994) durch Zalgaller und Los' (vgl. [Goldberg 1967], [Zalgaller/Los' 1994] und [Guy 2007] sowie die dort angegebene Literatur). Richard Guy bemerkt: „Malfatti misconstrued his own problem. This is lucky, because his interpretation is a much more interesting problem." [Guy 2007, S. 124].
Abb. 13.1 zeigt die Malfatti'schen Kreise (a), sowie richtige Lösungen des ursprünglichen Malfatti'schen Problems (b) und (c).

515 In der Regel wird heute in der Literatur zwischen dem „Malfatti'schen Problem" und dem „eigentlichen" oder „ursprünglichen Malfatti'schen Problem" unterschieden (vgl. z.B. [Zalgaller/Los' 1994]). Guy betont, dass das Malfatti'sche Problem eigentlich nicht auf Malfatti zurückzuführen ist, sondern bereits im 14. Jahrhundert in Italien, sowie in japanischer Tempel-Geometrie auftaucht (vgl. [Guy 2007, 124] und die dort angegebene Literatur). Gergonne und Lavernède stellten die Malfatti'sche Aufgabe unabhängig von Malfattis Arbeit 1810 im ersten Band der „Annales de mathématiques" (vgl. [Loeber 1914, S. 1f]).

516 Im Gegensatz dazu sagt Guy, Steiner habe „scattered over several sections of two seperate articles" (nämlich [Steiner 1826a] und [Steiner 1826b]) doch einen Beweis gegeben (vgl. [Guy 2007]).

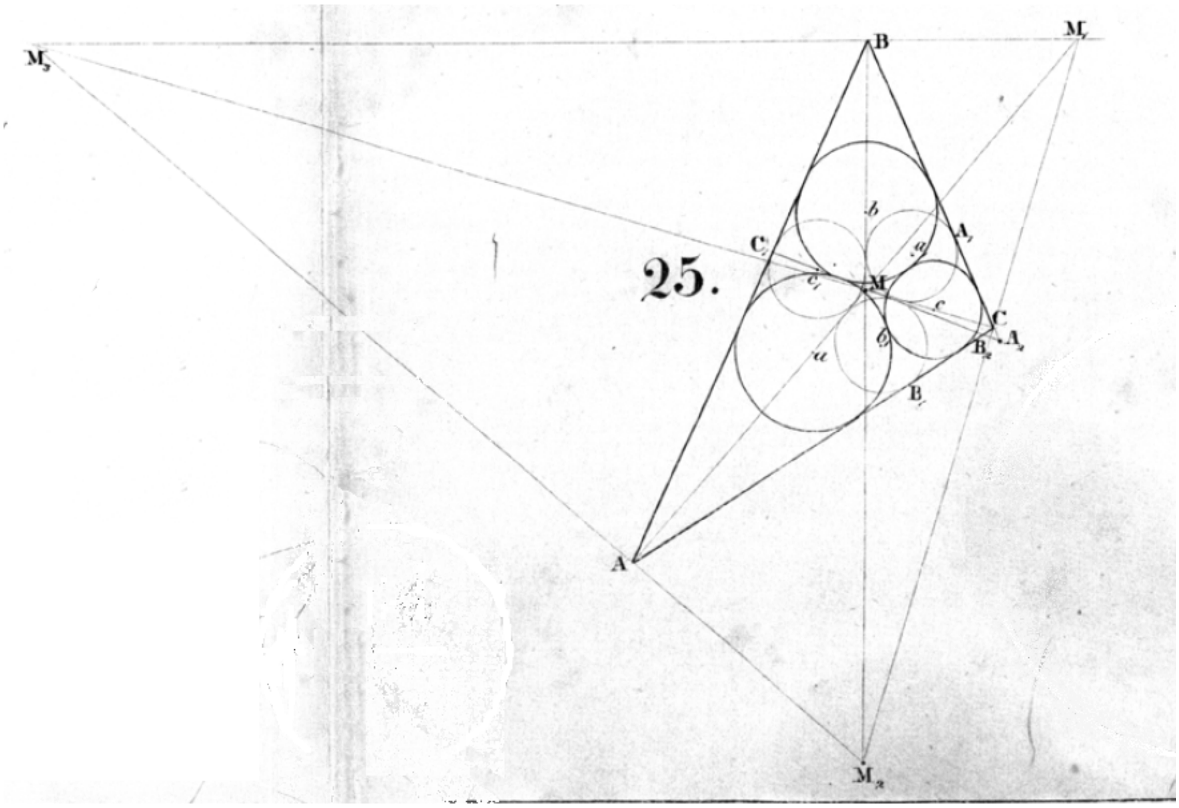


Abb. 13.2.: *Einige geometrische Betrachtungen* (1826), Figur 25. Aus: [Steiner 1826b]

matiker dazu angeregt, einen Beweis für die Steiner'sche Lösung der Malfatti'schen Aufgabe zu erbringen (vgl. [Bützberger 1913, S. 58] und besonders [Loeber 1914][517]). Auch Plückers „Aphorismen", insbesondere der IV. und VI. Paragraph, lassen sich in die Reihe der Arbeiten einordnen, die als Reaktionen auf Steiners „geometrische Betrachtungen" entstanden sind.

Obwohl Plücker seine Aphorismen mit dem Titel „analytisch-geometrisch" überschrieben hat, versucht er einen „elementaren" oder „geometrischen" (also synthetischen) Beweis der Steinerschen Konstruktion anzugeben[518]. Dazu stellt er einige geometrische Sätze auf, welche er elementar (durch das Vergleichen von und Rechnen mit Streckenlängen) bewies ([Plücker 1834b, S. 261 - 266]; vgl. auch [Loeber 1914, S. 24f]). Diese Sätze benutzt Plücker dann für seine Analyse der Steinerschen Konstruktion, kommt damit aber nicht ans Ziel. Im zweiten Teil verwendet er daher einen algebraisch-analytischen Beweis ([Plücker 1834b, S. 272 - 276]), den er selbst als „eine etwas ermüdende Eliminationsrechnung" bezeichnet [Plücker 1834d, S. 287]. Loeber gibt eine Aussage von Talbot wieder, der über diesen Beweis sagt: „Through which I doubt wether any of his readers have had the courage to follow him." [Loeber 1914, S. 25].

Plücker gibt diesen Beweis, um, wie er sagt „[...] meinerseits den Schein zu vermeiden, irgend eine Behauptung unbewiesen gewagt zu haben [...]" [Plücker 1834b, S. 276]; ei-

[517] Loeber gibt in seiner Dissertation von 1914 unter anderem einen historischen Überblick über die geometrischen Begründungen der Steinerschen Konstruktion und stellt auch die verschiedenen maßgeometrischen Lösungen vor. (Zu jüngeren Überblicken über die Geschichte der Bearbeitung der Malfattischen Aufgabe vgl. die bei Goldberg angegebene Literatur [Goldberg 1967, S. 241]).

[518] Insgesamt zeichnen sich die fünf Paragraphen der „analytisch-geometrischen Aphorismen" durch einen für Plücker sehr untypisch geringen Anteil an analytischen Entwicklungen aus.

ne Aussage, die als Kritik an Steiner gedeutet werden kann. Plücker betont, dass es wünschenswert wäre, einen einfachen, rein geometrischen (synthetischen) Beweis zu finden und vermutet, dass es eine „allgemeine analytische Schlussweise“ geben könne, welche „alle algebraischen Entwicklungen“ unnötig machen würde.
In Bezug auf Steiners Arbeit von 1826 bemerkt Plücker:

> „Diese Construction ist im Wesentlichen keine andere als die von Herrn *Steiner* im ersten Bande des *Crelle*'schen Journals aufgestellte. Es findet sich daselbst keine Andeutung eines Beweises. Die einleitenden Worte des Verfassers: „Um die Fruchtbarkeit der in den Paragraphen (I, II, III) aufgestellten Sätze an einem dazu geeigneten Beispiele zu zeigen, fügen wir die geometrische Lösung und zugleich die Verallgemeinerung der *Malfatti*'schen Aufgabe, jedoch ohne Beweis, hinzu“, könnten demjenigen, der wie ich von mir bekennen muss, keine Idee davon hat, wie die Construction jener Aufgabe dem Wesentlichen nach auf den in dem angeführten Paragraphen entwickelten bekannten Sätzen über Chordalen, zugeordnete Pole und Aehnlichkeitspunkte[519] beruhen möge, den Gedanken aufdrängen, dass die gegebene Construction nicht bewiesen sei. Das Verdienst der Erfindung bleibt [...].“

[Plücker 1834b, S. 269]

Auf diese deutliche Kritik an Steiner – Plücker unterstellt ihm indirekt, er könne seine Konstuktion selbst nicht beweisen – erwidert Bützberger:

> „Gerechter und Steiners Leistungen angemessener wäre freilich die sehr naheliegende Vermutung gewesen, daß Steiner das *„neue Übertragungsprinzip“* längst gekannt habe, das Plücker 1834 veröffentlichte und das nichts anderes war, als der analytische Ausdruck von Steiners Zuordnung der potenzhaltenden Punkte oder das Prinzip der reziproken Radien.“

[Bützberger 1913, S. 58]

Die Inversion – Plückers „neues Übertragungsprinzip“ – taucht bei Steiner unter dem Namen „Wiedergeburt und Auferstehung“ auf, allerdings hauptsächlich in nicht veröffentlichten Papieren aus seinem Nachlass (vgl. [Bützberger 1913, S. 49f] sowie das oben wiedergegebene Zitat aus [Marchisotto 2007, S. 139]).

> „*Steiner* [...] hat die *Inversion* [...] zu einer Abbildungsmethode ausgebildet, mit der er mannigfaltige, höchst merkwürdige Resultate gewonnen hat. Die Quelle derselben suchte er zu verheimlichen, doch hatte er in seiner Abhandlung „Einige geometrische Betrachtungen“ im Kapitel „Von der

[519] In Steiners Terminologie handelt es sich hierbei um Potenzlinien, potenzhaltende Punkte und Ähnlichkeitspunkte. Für eine Erläuterung dieser Begriffe vgl. S. 294f.
Die Chordalen oder Potenzlinien werden auch als Potenzgeraden oder Radikalachsen bezeichnet. Die zugeordneten Pole oder potenzhaltenden Punkte sind zueinander inverse Punkte. (Die unterschiedliche Benennung dieser Punkte durch Plücker und Steiner hat hierbei durchaus Bedeutung: Plücker sieht sie in einem Zusammenhang mit der Zuordnung von Pol und Polaren; Steiners potenzhaltende Punkte zeigen einen eher metrischen Zugang zur Inversion.) Die Ähnlichkeitspunkte werden heute in der Regel als Ähnlichkeitszentren bezeichnet.

> gemeinschaftlichen Potenz" schon zuviel verraten [...].
> [...]
> Erinnert man sich, wie sich *Galilei* und seine Zeitgenossen durch ihre Anagramme die Priorität ihrer Entdeckungen und Erfindungen gesichert haben, ohne sie vorzeitig jedermann preizugeben, so wird man zugestehen müssen, daß sich Steiner durch die Veröffentlichung seiner Lehre von den potenzhaltenden Punkten, seiner Gesetze über die Kreis- und Kugelreihen, seiner Lösung und Verallgemeinerung des Malfattischen Problems u.a. als erster Erfinder der Inversion[520] hinreichend ausgewiesen hat."

[Bützberger 1913, S. 49 und 58]

Auf der Grundlage von Plückers Sätzen gab es weitere Versuche, die Steinersche Konstruktion mit rein geometrischen Mitteln – d. h. synthetisch – zu beweisen, was zuerst Quidde 1849 gelang (vgl. [Loeber 1914, S. 25]). Allerdings wurden bei dieser und bei weiteren Arbeiten „nicht diejenigen Begriffe, mit deren Hilfe Steiner seine Lösung des M[alfattischen] Pr[oblems] begründet wissen wollte" [Loeber 1914, S. 27], benutzt. Dieser Bedingung wurde zuerst Schroeter, mit einem 1874 in Crelles Journal veröffentlichtem Artikel, gerecht. In Bezug auf Plückers Aussage, er habe „keine Idee davon", wie die von Steiner gegebene Konstruction der Malfattischen Aufgabe auf Grundlage der, „in den angeführten Paragraphen entwickelten bekannten Sätzen über Chordalen, zugeordnete Pole und Ähnlichkeitspunkte", hergeleitet werden könne, urteilt Schroeter:

> „[...] so liegt hierin nicht blos eine Entschuldigung seiner schwerfälligen algebraischen Entwickelung, sondern auch ein Zweifel, ob wirklich die *Steiner*sche Construction aus dessen vorausgeschickter Kreistheorie entspringe.
>
> Die folgende Mittheilung ist bestimmt, diesen Zweifel zu beseitigen und darzuthun, wie allein aus jenen elementaren Betrachtungen der *Steiner*schen Abhandlung und ohne alle weiteren Hülfsmittel naturgemäss und einfach die *Steiner*sche Construction der *Malfatti*schen Aufgabe, sowie die Verallgemeinerung derselben ohne jede Rechnung hervorgeht."

[Schroeter 1874, S. 232]

Schroeter benutzt für seinen Beweis unter anderem auch die Inversion[521]:

[520] Dagegen geben Marchisotto und Smith an, dass die Idee der Inversion aus dem Altertum (ancient times) stamme und sie über die Jahrhunderte hinweg zur Lösung verschiedener Probleme von Geometern benutzt worden sei. Konkret führen Sie unter Verweis auf Hilda Hudson eine Verwendung der Inversion bei Apollonius von Perga an (vgl. [Marchisotto 2007, S. 139]). Hudson bezieht sich dabei auf ein verlorenes Werk von Apollonius („de locis planis") dessen Hauptsätze durch Pappus überliefert wurden. „[...] the statement includes the linear and quadratic transformations: translation, rotation, similarity, inversion and combinations of these" [Hudson 1927, S. 388]. Damit liest sie aber mehr in Apollonius Satz hinein, als er eigentlich aussagt.

[521] 1901 gab R. Sturm einen Beweis der Steinerschen Konstruktion an, der ohne Benutzung der Inversion auskam. Loeber bemerkt dazu, dass diese Arbeit „am meisten im Geiste der Steinerschen Entwicklung gehalten [sei], da die Theorie der reziproken Radien sich wohl leicht aus den von Steiner seiner Konstruktion vorausgeschickten Sätzen entwickeln läßt, aber dort nicht ausgesprochen wird." [Loeber 1914, S. 27f].

> „Den soeben erhaltenen Satz verallgemeinern wir vermittelst des Princips der Transformation durch reciproke Radien [= Inversion]. Dieses bekannte in neuerer Zeit so vielfach und mit so grossem Erfolge angewendete Princip wurzelt in den elementaren Eigenschaften der „potenzhaltenden Punkte", der „gemeinschaftlichen Potenz zweier Kreise" u.s.w., welche *Steiner* in der oben citirten Abhandlung [d. i. [Steiner 1826b]] auseinandergesetzt hat, und ist durchaus nichts anderes, als die erweiterte Auffassung jener Kreiseigenschaften. Wir überschreiten daher durch Anwendung dieses Princips keineswegs das Gebiet der Betrachtungen, aus welchen *Steiner* seine Auflösung der *Malfatti*schen Aufgabe abgeleitet wissen wollte."

[Schroeter 1874, S. 234f]

Plücker selbst leitet die Inversion – sein „neues Übertragungsprinzip" – aus den „zugeordneten Polen" ab (in Steiners Terminologie „potenzhaltende Punkte"[522]); es gelang ihm aber nicht, mit Hilfe dieses Prinzips die Steinersche Konstruktion der Malfattischen Aufgabe zu beweisen. Daher ist sein indirekter Vorwurf gegen Steiner zumindest verständlich, wenn auch sicher nicht gerechtfertigt[523].

13.2. Plückers „neues Übertragungsprincip"

Bereits im zweiten Paragraphen seiner Aphorismen hatte Plücker Analogien zwischen Sätzen über Kreisen und Sätzen über Geraden behandelt[524] und abschließend bemerkt:

> „Ich beschränke mich hier auf die vorstehenden Analogien. Nach Analogien zu schliessen ist eines der ersten Hilfsmittel, um neue Sätze aufzufinden; und überdiess, wo wie in dem Vorstehenden Analogien zwischen zwei Reihen von Sätzen sich finden, da besteht nothwendig ein Uebertragungsprincip. Ich komme später noch hierauf zurück."

[Plücker 1833c, S. 252]

Dies tut Plücker dann im V. Paragraphen seiner Aphorismen. Einleitend charakterisiert er dieses „neue Übertragungsprinzip" folgendermaßen:

> „Alle Sätze, welche auf eine beliebige Zusammenstellung von beliebigen Kreisen mit geraden Linien oder von geraden Linien unter sich Bezug haben, und blosse Situations- und Winkelbeziehungen enthalten, lassen sich unmittelbar auf eine Zusammenstellung von beliebigen Kreisen mit solchen

[522] Vgl. Fußnote 519.
[523] Vgl. Fußnote 516.
[524] Beispielsweise zeigt Plücker die Analogie zwischen dem Satz, dass sich die drei Höhen im Dreieck schneiden, zu dem folgenden Satz auf: Wenn drei Kreise gegeben sind, und drei weitere Kreise jeweils durch die Durchschnittspunkte zweier Kreise, senkrecht zu dem jeweils dritten gelegt werden, so schneiden sich diese drei Kreise in denselben beiden Punkten (vgl. [Plücker 1833c, S. 246]). Diese Analogie lässt sich folglich nicht über die Inversion begründen, da durch Inversion nur der Spezialfall gegeben ist, bei dem sich die drei gegebenen Kreise in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt ist dann der Mittelpunkt des Inversionskreises.

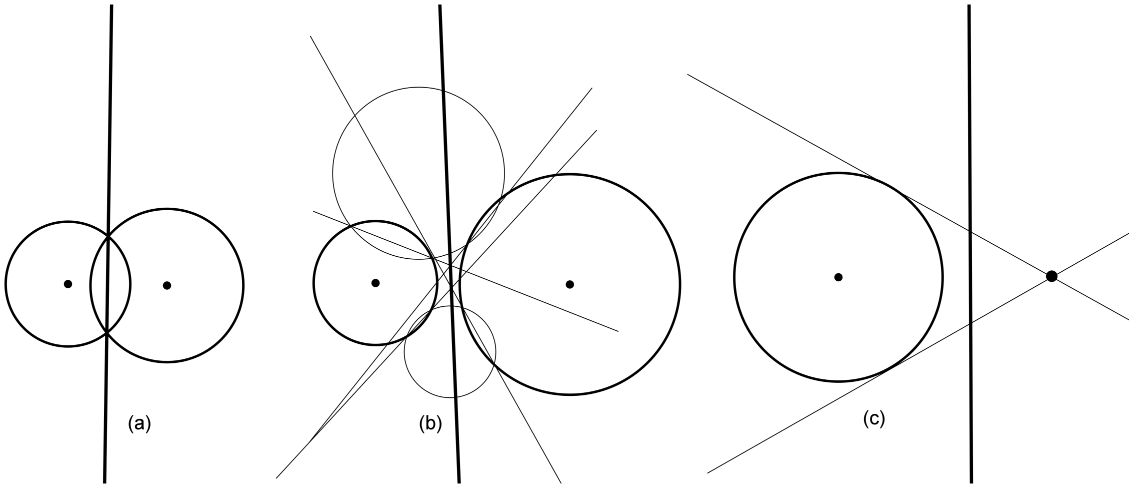


Abb. 13.3.: Chordale zweier Kreise (a, b), Chordale von Punkt und Kreis (c)

> Kreisen, die alle durch einen festen Punkt gehen, oder von letztbezeichneten Kreisen unter sich übertragen.“
>
> [Plücker 1834c, S. 277]

Das Prinzip auf dem diese Übertragung beruht, ist die Inversion – auch wenn Plücker diesen Begriff nicht benutzt[525].
Plücker bezieht sich in seinem Artikel auf den ersten Band seiner „Entwicklungen“, in dem er sich bereits mit zugeordneten Polen und zugeordneten Kreisen (oder „Polarkreisen“) beschäftigt hatte; dort allerdings ohne von einem Übertragungsprinzip zu sprechen.
Dort definiert Plücker:

> „Zwei Punkte R und ρ, welche mit einem gegebenen Kreise dieselbe gerade Linie zur Chordalen haben, werden wir nach dem Vorgange französischer Mathematiker: *zugeordnete Pole in Beziehung auf diesen Kreis* nennen.“
>
> [Plücker 1828, S. 62]

Als Chordale zweier Kreise hatte Plücker im ersten Band seiner Entwicklungen diejenige Gerade bezeichnet, deren Gleichung sich ergibt, wenn die beiden Kreisgleichungen

[525] Plücker gab der von ihm behandelten Abbildung – der Inversion – keine Bezeichnung, sondern sprach nur von einem „neuen Übertragungsprinzip“. Zwei Punkte, welche durch Inversion an einem Kreis aufeinander abgebildet werden, bezeichnet er als „zugeordnete Pole in Beziehung auf den gegebenen Kreis“ [Plücker 1834c, S. 277]. Wie oben bereits erwähnt, sprach Steiner von „potenzhaltenden Punkten“ und bezeichnete die Abbildung als „Wiedergeburt und Auferstehung“. Die Bezeichnung „Prinzip der reziproken Radien“ geht auf die Bennennung zuück, die Liouville einem von William Thomson untersuchten Prinzip der elektrischen Bilder gab (vgl. [Bützberger 1913, S. 59] und [Liouville 1847, S. 276]). Die heute übliche Bezeichnung „Inversion“ geht auf Artikel von J. W. Stubbs und J. R. Ingram zurück, die – unabhängig voneinander – 1842-43 im ersten Band der „Transactions of the Dublin Philosophical Society“ erschienen (vgl. [Bützberger 1913, S. 59]). Stubbs veröffentliche außerdem einen zweiten Artikel über die Inversion mit der Bemerkung: „[...] a new Geometrical principle, which as far as I am aware has hitherto escaped the notice of mathematicians.“ [Stubbs 1843, S. 338].

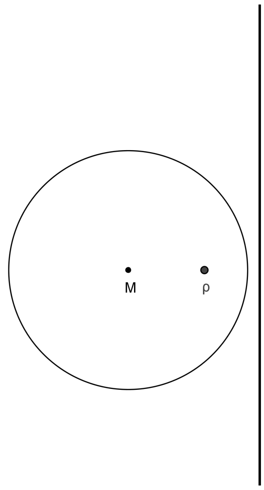


Abb. 13.4.: Zugeordnete Pole in Beziehung auf einen Kreis

voneinander abgezogen werden (vgl. Kapitel 9.1). Diese Gerade enthält also die Schnittpunkte der beiden Kreise. Wenn sich die beiden Kreise (reell) schneiden, ist die Chordale die Verlängerung der gemeinsamen Sehne beider Kreise (Abb. 13.3 (a)); berühren sich die beiden Kreise, so ist die Chordale die gemeinsame Tangente der Kreise. Auch für zwei Kreise, die sich weder schneiden noch berühren, ist die Chordale eindeutig konstruierbar (Abb. 13.3 (b));[526] in diesem Fall schneidet sie keinen der beiden Kreise (vgl. [Plücker 1828, S. 47ff]). Analog dazu definiert Plücker auch die Chordale eines Kreises und eines Punktes (Abb. 13.3 (c)). Ihre Gleichung ergibt sich wieder aus der Zusammenstellung der Gleichung des Kreises und des Punktes – dabei wird der Punkt als ein Kreis mit Radius 0 angesehen (vgl. [Plücker 1828, S. 52f]). Liegt der Punkt auf dem Kreis, so ist die Tangente durch diesen Punkt an den Kreis die Chordale. Liegt der Punkt außerhalb des Kreises, so halbiert die Chordale die beiden Tangentenabschnitte festgelegt durch den Punkt und den Kreis (vgl. [Plücker 1828, S. 53]). Für die Konstruktion der Chordalen eines Punktes im Inneren des Kreises kann der Satz benutzt werden, dass die Chordalen je zweier von drei geometrischen Objekten (Punkten und Kreisen) sich immer in einem Punkt schneiden. Es gibt also im Allgemeinen zwei Punkte, die mit einem gegebenen Kreis die gleiche Gerade zur Chordalen haben; sie liegen auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Chordalen mit dem Kreis und haben den gleichen Abstand zu ihr (Abb. 13.4, vgl. [Plücker 1828, S. 62]). Ist die Chordale eine Tangente des Kreises, fallen die beiden Punkte in dem Berührpunkt der Tangente zusammen. Diese beiden Punkte bezeichnet Plücker als einander zugeordnet bezüglich des Kreises.

Neben dieser Definition der zugeordneten Pole, leitet Plücker – durch analytische Umformungen – eine zweite Definition her:

> „[...] woraus wir dann den Schluß zu ziehen berechtigt sind, daß zwischen den beiden Punkten [...], welche mit einem gegebenen Kreise eine gemeinschaftliche Chordale haben, dieselbe Beziehung Statt findet, als zwischen demjenigen Puncte, in welchem zwei an jenen Kreis gezogene Tangenten sich

[526] Für diese Konstruktion kann der Satz ausgenutzt werden, dass sich die drei Chordalen je zweier von drei Kreisen in einem Punkt schneiden. Zwei geeignete Hilfskreise liefern so zwei Punkte der gesuchten Chordalen.

schneiden und der Mitte der Berührungs-Chorde[527] (corde de contact)“

[Plücker 1828, S. 62]

Da die Berührsehne die Polare des Punktes bezüglich des Kreises bildet, ist auch die folgende Definition möglich, die Plücker in seinem Artikel im Crelle Journal wählt:

> „Man weiss, dass wenn ein Kreis gegeben ist, irgend zwei Punkte, welche beide auf derselben durch den Mittelpunkt dieses Kreises gehenden geraden Linie liegen und die Eigenschaft haben, dass einer derselben auf der Polare des anderen liegt, *zugeordnete Pole in Beziehung auf den gegebenen Kreis genannt werden.*“

[Plücker 1834c, S. 277]

Im ersten Band der Entwicklungen hatte Plücker bereits gezeigt, dass zwei Kreise, die sich senkrecht schneiden, in einer reziproken Beziehung zueinander stehen, da der zugeordnete Pol eines Punktes des ersten Kreises in Beziehung auf den zweiten Kreis immer auf dem ersten Kreis liegt und umgekehrt[528] (vgl. [Plücker 1828, S. 63f]). Außerdem hatte er gezeigt, dass „der geometrische Ort für die zugeordneten Pole“ aller Punkte eines Kreises bzgl. eines vorgegebenen (Inversions-)Kreises im Allgemeinen[529] wieder ein Kreis ist.

> „Diese beiden Kreise können wir ganz füglich, rücksichtlich des ersten Kreises, *zugeordnete Kreise*[530] nennen.

[Plücker 1828, S. 94]

Diese drei Kreise – der Inversionskreis und die beiden Kreise, die durch Inversion aufeinander abgebildet werden – haben eine gemeinschaftliche Chordale[531]. Wenn ein Kreis durch den Mittelpunkt des Inversionskreises geht, dann ist der geometrische Ort für die zugeordneten Poles dieses Kreises eine Gerade – die Chordale von Kreis und Inversionskreis (vgl. [Plücker 1828, S. 94f]). Zu zwei gegebenen Kreisen gibt es – im Allgemeinen – zwei Kreise, in Beziehung auf welche die gegebenen Kreise einander zugeordnete Kreise sind. Die Mittelpunkte dieser beiden Kreise sind die Ähnlichkeitspunkte (Symmetral-Punkte)[532] der gegebenen Kreise; außerdem haben sie die gleiche Chordale mit den

[527] Berührsehne, d.h. Verbindung der beiden Berührpunkte.

[528] Ein Kreis wird durch Inversion an einem ihn senkrecht schneidenden Kreis auf sich selbst abgebildet.

[529] D. h. wenn der Kreis nicht durch den Mittelpunkt des Inversionskreises geht.

[530] Dieser Begriff bezeichnet also – ganz analog zu den *zugeordneten Punkten* – zwei Kreise, die durch Inversion aufeinander abgebildet werden. Das Bild eines Kreises durch Inversion bezeichnet Plücker als *Polarkreis* (vgl. [Plücker 1834c, S. 277]).

[531] Man könnte auch sagen: die drei Chordalen von jeweils zweien dieser drei Kreise, fallen in einer Geraden zusammen. Siehe Abbildung 13.5.

[532] Für den Fall, dass die beiden Kreise sich nicht schneiden und einander nicht einschließen, schneiden sich die beiden gemeinsamen äußeren Tangenten im äußeren Ähnlichkeitspunkt und die beiden gemeinsamen inneren Tangenten im inneren Ähnlichkeitspunkt. Plücker führt diese Bezeichnungen auf Monge zurück („point de similitude de deux cercles externe et interne“) [Plücker 1828, S. 84]. Allerdings bemerkt Tropfke hierzu: „Die Theorie der Ähnlichkeitspunkte für sphärische Figuren ist von Euler begründet worden. (Theoria motus corporum solidorum seu Rigidorum, 2. Aufl. Greifswald 1790, §978ff, S. 436ff)“ [Tropfke 1903, S. 271].

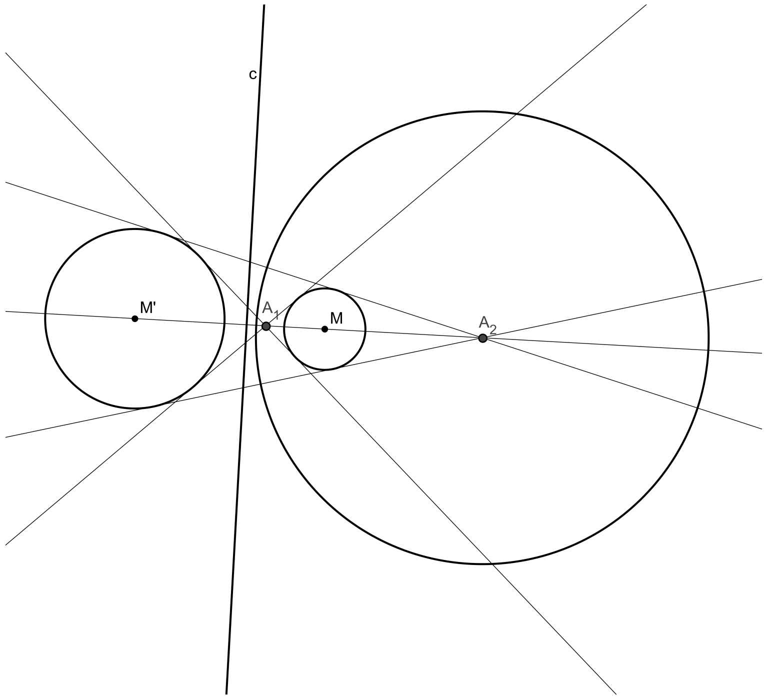


Abb. 13.5.: Die gemeinschaftliche Chordale dreier Kreise

gegebenen Kreisen. Einer der beiden Kreise kann imaginär werden (vgl. [Plücker 1828, S. 95])[533].
Ganz analog zu den zugeordenten Polen in Beziehung auf einen Kreis definiert Plücker auch zugeordnete Pole in Beziehung auf Ellipsen und Hyperbeln (vgl. [Plücker 1828, S. 171]). Seine Aussage in dem Aufsatz in Crelles Journal, er werde dort „nur diesen besonderen Fall eines allgemeinen Uebertragungsprincipes discutiren“ [Plücker 1834c, S. 277] scheint sich daher auf eine Inversion an Kegelschnitten zu beziehen.
In der Literatur wird nur auf Plückers Artikel „Über ein neues Übertragungsprinzip“ Bezug genommen(vgl. z.B. [Marchisotto 2007, S. 139] und [Bützberger 1913, S. 58]), obwohl Plücker die meisten Inhalte dieses Artikels bereits im ersten Band seiner „Entwicklungen“ eingeführt hatte. Es stellt sich daher die Frage, inwiefern dieser Artikel von 1834 über das hinausgeht, was er 1828 veröffentlicht hatte. Der Unterschied ist, dass Plücker die Inversion in seinem späteren Artikel ganz explizit als ein „Übertragungsprinzip“ kennzeichnet, welches „aus bekannten Sätzen und Constructionen neue finden lehrt“ [Plücker 1834c, S. 277]. Dagegen stehen die angeführten Sätze über zugeordnete Punkte und zugeordnete Kreise in den „Entwicklungen“ vereinzelt und unverbunden da und der Gedanke eines allgemeinen Prinzips ist noch nicht vorhanden[534]. Marchisotto und Smith gehen sogar so weit, Plückers Übertragungsprinzip als „specific description of inversion as a transformation“ zu bezeichnen (vgl. [Marchisotto 2007, S. 139]). Zwar verwendet Plücker den Begriff der Abbildung nicht, aber seine Übertragungsprinzipien lassen sich in gewisser Weise tatsächlich als Vorläufer des Abbildungsbegriffs auffassen, weil in ihnen die Idee einer „Punkt-zu-Punkt-Zuordnung“ enthalten ist. Wie in Kapi-

[533] Vgl. Abbildung 13.5. A_1 ist der innere, A_2 der äußere Ähnlichkeitspunkt. Der zweite Inversionskreis mit Mittelpunkt A_1 ist imaginär.

[534] Vgl. dazu Kapitel 10.1 und den dort dargestellten Unterschied zwischen „Kunstgriffen“ und allgemeinen Methoden sowie Plückers Bestrebungen letztere zu finden.

tel 12.2 dargestellt wurde, hat Plücker später, in seinem „System ...“ von 1835, drei Hauptklassen von Übertragungsprinzipien aufgestellt (vgl. [Plücker 1835, S. 49]). Dabei bilden solche Übertragungsprinzipien, bei denen einem Punkt ein Punkt zugeordnet wird, die erste Klasse[535]. Eine solche Zuordnung bildet auch die Basis von Plückers Behandlung der Inversion als Übertragungsprinzip: zwei Punkte – die zugeordneten Pole – werden einander zugeordnet (vgl. [Plücker 1834c, S. 277]).
Daneben beinhaltet Plückers Begriff des Übertragungsprinzips immer auch den Gedanken aus bekannten Sätzen neue Sätze zu erzeugen[536]. Dieser Gedanke wird besonders auch bei der Dualität deutlich, die ein Übertragungsprinzip der dritten Hauptklasse bildet (vgl. Kapitel 12.2). Bemerkenswerter Weise behandelt Plücker in seinem Artikel über die Inversion aber nicht nur die Erzeugung neuer Sätze aus bekannten Sätzen, sondern auch die Übertragung von speziellen Konstruktionen auf allgemeinere Konstruktionsprobleme (vgl. z.B. [Plücker 1834c, S. 282f][537]). In diesem Sinn ist es durchaus gerechtfertigt, zu sagen, dass Plücker die Inversion in seinem Artikel „Über ein neues Übertragungsprinzip“ als eine Abbildung einführt – womit ein deutlicher Unterschied zu seiner Behandlung der Inversion in den „Entwicklungen“ vorliegt.
In seinem Artikel wiederholt Plücker zuerst einige der oben angeführten Sätze mit Verweis auf seine „Entwicklungen“ und geht dann auf verschiedene Situationsbeziehungen ein. Schneiden oder berühren sich mehrere Kreise, so schneiden oder berühren sich auch ihre Polarkreise[538].

> „Wir sehen ferner, dass wenn überhaupt irgend eine Construction vorliegt, die sich auf Kreise bezieht und von Grössenbestimmungen unabhängig ist, wir sogleich eine entsprechende Construction in der Polarfigur erhalten. Die nähere Discussion dieser Bemerkung giebt das in Rede stehende Princip.“

[Plücker 1834c, S. 278]

Daraus, dass einem Kreis, der durch den Mittelpunkt des Hilfskreises (= Inversionskreis) geht, eine Gerade zugeordet ist, folgert Plücker,

> „[...] dass jedem Satz über gerade Linien, der bloss Situationsbeziehungen enthält, ein zweiter entspricht, der sich unmittelbar aus dem ersten ergiebt, wenn man statt der geraden Linie solche Kreise nimmt, die durch irgend einen festen Punkt gehen. Es ist zugleich ersichtlich, dass der erste Satz sich zugleich auf gerade Linien und beliebige Kreise beziehen kann. Alsdann

[535] Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang auch, dass Plücker die verschiedenen geometrischen Verwandtschaften, wie sie Möbius in seinem „Barycentrischen Calcul“ behandelt hatte, als Übertragungsprinzipien bezeichnet (vgl. [Plücker 1835, S. 49ff]). Möbius' Begriff der Verwandtschaft wird von Klein als ein Äquivalent des Gruppenbegriffs bezeichnet (vgl. [Klein 1926, S. 118]).

[536] Vgl. auch die bereits angeführte Zielsetzung Plückers für seinen Artikel „Über ein neues Uebertragungsprincip“: „Ich werde hier [...] nur diesen besonderen Fall eines allgemeinen Uebertragungsprincipes discutiren und andeuten, wie er aus bekannten Sätzen und Constructionen neue finden lehrt“ [Plücker 1834c, S. 277].

[537] Hier überträgt Plücker eine spezielle Lösung des Apollonischen Berührproblems (für drei Kreise mit gleichem Radius) durch Inversion auf den allgemeinen Fall.

[538] Vgl. Fußnote 530.

bezieht sich der zweite entsprechende Satz auf solche Kreise, welche alle durch einen festen Punkt gehen und auf beliebige Kreise.“

[Plücker 1834c, S. 278f]

Der feste Punkt ist dabei der Mittelpunkt des Hilfs- oder Inversionskreises; letzterer spielt aber bei der allgemeinen Übertragung der Sätze keine Rolle.
Plücker gibt verschiedene Beispiele für solche Übertragungen an. Unter anderem überträgt er den Satz, dass sich die Chordalen je zweier von drei Kreisen in einem Punkt schneiden, auf den dazu inversen Satz:

„Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, so schneiden sich diejenigen drei neuen Kreise, welche durch die beiden (reellen oder imaginären) Durchschnittspunkte je zweier der drei gegebenen und überdies noch durch irgend einen gegebenen Punkt gehen, ausserdem noch in einem zweiten festen Punkt.“

[Plücker 1834c, S. 279]

Plücker behandelt ebenfalls die Winkeltreue der Inversion.

„Diejenigen beiden Kreise, welche zu irgend zwei gegebenen geraden Linien als Polarkreise gehören und also durch den Mittelpunkt des Hilfskreises gehen, berühren in diesem Punkte offenbar[539] zwei solche gerade Linien, welche den beiden gegebenen parallel sind. Es schneiden sich die beiden Kreise also unter denselben Winkeln als die beiden gegebenen geraden Linien. [...] Wir ziehen hieraus den Schluss, dass auch diejenigen Sätze, die auf Kreise und gerade Linien Bezug haben und *Winkel*beziehungen enthalten, sich übertragen lassen.“

[Plücker 1834c, S. 279]

Unter anderen Übertragungsbeispielen führt Plücker hierzu einen Satz an, der sich aus der Innenwinkelsumme eines Dreiecks ergibt:

„Wenn ein Dreieck aus den Bogen solcher drei Kreise, welche in demselben Punkte sich schneiden, gebildet wird, so beträgt die Summe der Winkel dieses Dreiecks zwei Rechte.“[540]

[Plücker 1834c, S. 279f]

[539]Die geraden Linien sind jewils die Chordalen des entsprechenden Polarkreises und des Hilfskreises. Da die Chordale zweier Kreise immer senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte der Kreise steht, gilt die Behauptung.

[540]Siehe Abbildung 13.6. Dabei darf keiner der Eckpunkte des Kreisbogen-Dreiecks mit dem gemeinsamen Schnittpunkt S aller drei Kreise zusammenfallen. Diese Einschränkung erwähnt Plücker hier nicht, sie ergibt sich aber unmittelbar daraus, dass dieser gemeinsame Schnittpunkt der drei Kreise der Mittelpunkt des Inversionskreises ist.

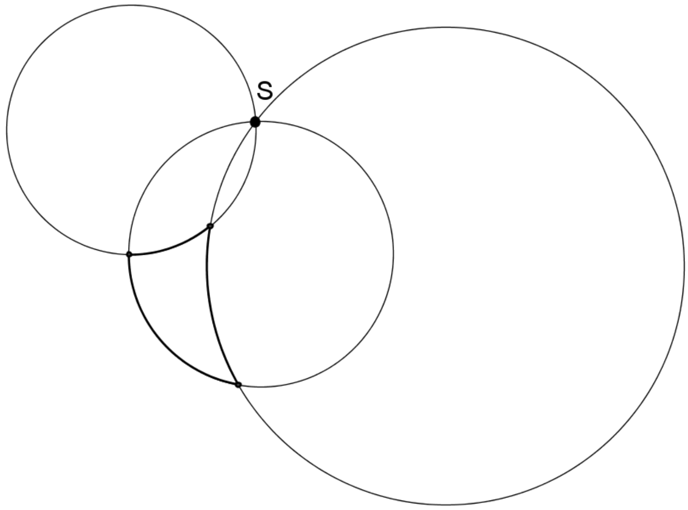


Abb. 13.6.: Kreisbogen-Dreieck

Zuletzt beschäftigt Plücker sich mit dem Problem, zu zwei oder drei gegebenen Kreisen einen Hilfskreis zu konstruieren, der diesen zwei oder drei Kreisen solche Polarkreise zuordnet, die den gleichen Radius haben. Für die Konstruktion der passenden Inversionskreise gibt es jeweils unendlich viele Möglichkeiten. Im Fall von zwei gegebenen Kreisen muss lediglich der Mittelpunkt des Hilfskreises auf einem der Kreise liegen, deren Mittelpunkt ein Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist und der mit diesen beiden Kreisen dieselbe gemeinschaftliche Chordale hat[541]. Im Fall von drei Kreisen gibt es nur zwei Möglichkeiten für den Mittelpunkt des Hilfskreises (vgl. [Plücker 1834c, S. 282]).

> „Alle Sätze also über zwei und drei beliebige Kreise von *gleichen Radien*, welche nur Lagen- und Winkelbeziehungen enthalten, lassen sich unmittelbar übertragen auf beliebige Kreise mit beliebigen Radien. Und überhaupt alle möglichen Constructionen, welche sich auf drei gleiche gegebene Kreise beziehen, in welchen, was das Endresultat betrifft, nur Kreise und gerade Linien in Betracht kommen, lassen sich auch dann ausführen, wenn statt der drei gleichen Kreise irgend drei beliebige gegeben sind.“

[Plücker 1834c, S. 282f]

Als Beispiel für eine solche Konstruktion führt Plücker das Apollonische Problem an. Für den Fall von drei Kreisen mit gleichem Radius lassen sich leicht zwei Lösungen finden. Vermöge der Inversion an einem geeigneten Hilfskreis können diese beiden Lösungen dann auf den allgemeinen Fall übertragen werden.

Eine weitere Anwendung für dieses letzte Beispiel seines Übertragungsprinzips gibt Plücker im VI. Paragraphen seiner „Aphorismen“, in dem er Steiners Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe behandelt. Diese Verallgemeinerung ersetzt die Seiten des gegebenen Dreiecks durch Kreisbögen und lautet dementsprechend:

[541] Dieser letzte Kreis ist also der Inversionskreis bezüglich dessen die beiden gegebenen Kreise Polarkreise voneinander sind.

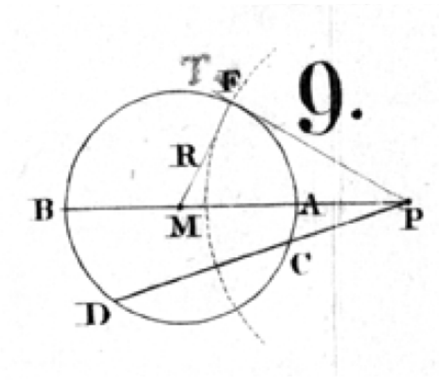


Abb. 13.7.: *Einige geometrische Betrachtungen* (1826), Figur 9. Aus: [Steiner 1826b]

> „Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, drei neue solche Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden übrigen und zwei der drei gegebenen berührt.“
>
> [Plücker 1834d, S. 284]

Plücker löst diese Aufgabe für den Spezialfall von drei gegebenen Kreisen mit gleichem Radius und kann diese Lösung durch Inversion auf den allgemeinen Fall beliebiger Kreise übertragen.
Plücker leitet die Inversion über die zugeordneten Pole, letztlich also aus der Theorie der Pole und Polaren am Kreis her. Dabei spielen metrische Beziehungen kaum eine Rolle. Die Gleichung

$$|\overline{PM}| \cdot |\overline{P'M}| = r^2,$$

welche die metrischen Relationen zwischen einem Punkt P, seinem Bildpunkt P', dem Mittelpunkt M und dem Radius r des Inversionskreises beschreibt, betrachtet Plücker gar nicht. Dagegen spielen bei Steiners Behandlung der Inversion die metrischen Beziehungen eine deutlich größere Rolle. Dies wird schon aus den von ihm benutzten Begriffen deutlich: Steiner führte in seinem Artikel von 1826 den Begriff der „Potenz des Puncts in Bezug auf den Kreis“ ein (vgl. [Steiner 1826b, S. 164]). Damit bezeichnete er das konstante Produkt der beiden Abschnitte auf einer beliebigen Sekante zwischen dem gegebenen Punkt und den beiden Schnittpunkten mit dem Kreis[542] (vgl. auch [Tropfke 1903, S. 85]). Berührt die Tangente eines außerhalb des Kreises liegenden Punktes P den Kreis im Punkt T so ist die Potenz des Punktes $= |\overline{PT}|^2$ (vgl. [Steiner 1826b, S. 164]). Steiner zeigt weiter, dass der geometrische Ort der Punkte, deren Potenz bezüglich zweier verschiedener Kreise gleich ist, eine Gerade ist. Diese nennt er entsprechend die „Linie der gleichen Potenzen der Kreise“[543] (vgl. [Steiner 1826b, S. 165]). Aus der Definition der Potenz folgt direkt, dass diese Gerade mit der Verlängerung der gemeinsamen Sehne zweier sich schneidender Kreise zusammenfällt und bei Berührung der Kreise in die gemeinsame Tangente im Berührpunkt übergeht (vgl. [Steiner 1826b, S. 165]). Weiter definiert Steiner die „gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise in Bezug auf ihren Ähnlichkeitspunkt“ (vgl. [Steiner 1826b, S. 175]). Darunter

[542] Siehe Abbildung 13.7. Die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis ist hier $PA \cdot PB = PC \cdot PD = \ldots$.

[543] Wie bereits erwähnt hatte Plücker diese Gerade *Chordale* genannt [Plücker 1828, S. 49].

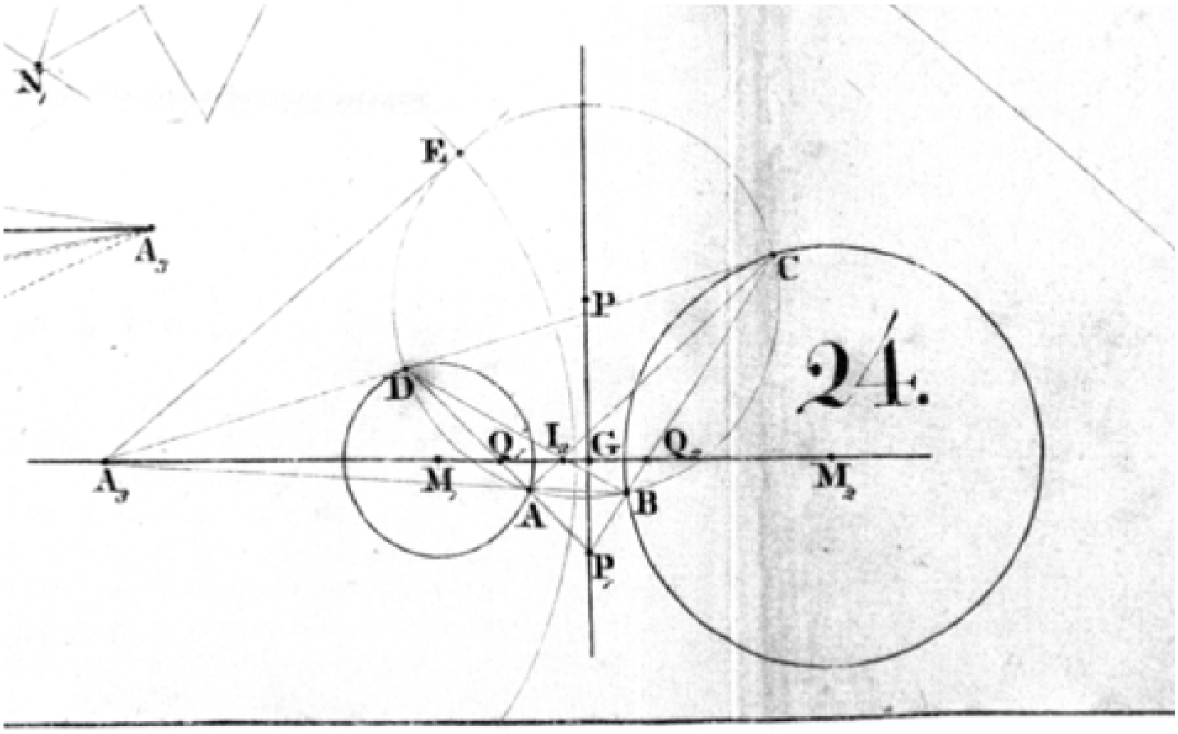


Abb. 13.8.: *Einige geometrische Betrachtungen* (1826), Figur 24. Aus: [Steiner 1826b]

versteht er das konstante Produkt aus den Abständen auf einer beliebigen Gerade zwischen dem Ähnlichkeitspunkt und zwei Schnittpunkten mit den Kreisen.[544] Die beiden Schnittpunkte selbst, bezeichnet Steiner als „potenzhaltend“ (vgl. [Steiner 1826b, S. 176]). Einen Kreis, dessen Mittelpunkt Ähnlichkeitspunkt zweier gegebener Kreise ist und dessen Radius die Wurzel der gemeinschaflichen Potenz beider Kreise ist, nennt Steiner den „Potenzkreis der beiden gegebenen Kreise“ (vgl. [Steiner 1826b, S. 175])[545]. Aus diesen Andeutungen lässt sich – wie oben bereits erwähnt – die Theorie der Inversion ableiten, etwas was Steiner allerdings nicht tut. Insbesondere erwähnt er keinen Zusammenhang zwischen dem Potenzkreis und den potenzhaltenden Punkten; ersterer ist der Inversionskreis an dem die potenzhaltenden Punkte durch Inversion aufeinander abgebildet werden. Gerade die metrische Relation der Inversion ergibt sich direkt aus den oben wiedergegebenen Inhalten von Steiners Artikel. In Steiners nicht veröffentlichten Papieren über die Inversion findet sich auch explizit die Gleichung

$$Mp \cdot MP = R^2$$

in der p der Bildpunkt – die Wiedergeburt – des Punktes P ist, M der Kreismittelpunkt und R der Radius (vgl. [Bützberger 1913, S. 51]).
Diese metrische Relation lässt sich auch aus Plückers Definition der Inversion über Pol und Polare am Kreis direkt herleiten. Der Inversionskreis sei durch die Gleichung

$$y^2 + x^2 = R^2$$

[544]Siehe Abbildung 13.8. Die gemeinschaftliche Potenz der beiden Kreise um M_1 und M_2 in Bezug auf ihren Ähnlichkeitspunkt A_3 ist $A_3A \cdot A_3B = A_3D \cdot A_3C = \dots$.

[545]Der Potenzkreis der beiden gegebenen Kreise mit dem Mittelpunkt A_3 und dem Radius $A_3E = \sqrt{A_3A \cdot A_3B}$ ist in Abbildung 13.8 schwach angedeutet.

gegeben – der Mittelpunkt liegt also o.b.d.A. im Ursprung des Koordinatensystems. Dann ergibt sich für die Gleichung der Polaren des Punktes (y', x') bezüglich des Kreises

$$yy' + xx' = R^2$$

(vgl. [Plücker 1828, S. 993]). Der zugeordnete Pol des Punktes (y', x')[546] liegt auf dieser Polaren und gleichzeitig auf der Geraden, die den Mittelpunkt des Inversionskreises mit dem gegebenen Punkt verbindet. Diese Gerade hat die Gleichung

$$yx' - y'x = 0.$$

Aus diesen beiden Geradengleichungen leitet Plücker die beiden folgenden Gleichungen ab

$$y' = \frac{R^2 y}{y^2 + x^2}, \qquad x' = \frac{R^2 x}{y^2 + x^2},$$

in denen die Koordinaten des gegebenen Punktes durch die Koordinaten seines Bildpunktes (y, x) ausgedrückt werden (vgl. [Plücker 1828, S. 93]). Bezeichnen wir den gegebenen Punkt (y', x') mit P', seinen Bildpunkt (y, x) mit P sowie den Kreismittelpunkt $(0, 0)$ mit M, dann ergibt sich direkt die gesuchte metrische Relation[547]:

$$\begin{aligned} |\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| &= \sqrt{y^2 + x^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{R^2 y}{y^2 + x^2}\right)^2 + \left(\frac{R^2 x}{y^2 + x^2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{y^2 + x^2} \cdot \sqrt{R^4(y^2 + x^2)}}{y^2 + x^2} \\ &= R^2. \end{aligned}$$

Da Plücker die Eigenschaften der Inversion analytisch aus den oben für y' und x' angegebenen Gleichungen herleitet, benutzt er letzlich auch die metrischen Relationen, auch wenn er diese nicht explizit erwähnt. Beispielsweise beweist Plücker, dass ein Kreis durch Inversion in einen Kreis oder eine Gerade übergeht, indem er in die Kreisgleichung

$$(y' - \beta)^2 + (x' - \alpha)^2 = \rho^2$$

die inversen Werte von y' und x' einsetzt. So erhält er die Gleichung

$$(\frac{R^2 y}{y^2 + x^2} - \beta)^2 + (\frac{R^2 x}{y^2 + x^2} - \alpha)^2 = \rho^2$$

und indem er umformt und $(\beta^2 + \alpha^2) - \rho^2 = \gamma$ setzt, die Gleichung

$$(y - \frac{R^2 \beta}{\gamma})^2 + (x - \frac{R^2 \alpha}{\gamma})^2 = \frac{R^4}{\gamma^2} \rho^2.$$

Der ursprüngliche Kreis wird also durch Inversion wieder auf einen Kreis abgebildet (vgl. [Plücker 1828, S. 93f]). Diese letzte Gleichung wird aber linear, wenn der gegebene

[546] Im Sinn Plückers; also modern der Bildpunkt von dem Punkt (y', x') bei Inversion am Kreis.

[547] Eine synthetische Ableitung der metrischen Relation aus der Definition über Pol und Polare ist durch die Verwendung des Kathetensatzes ebenfalls sehr leicht möglich.

Kreis durch den Mittelpunkt des Inversionskreises – den Koordinatenursprung – geht, und somit

$$\gamma = (\beta^2 + \alpha^2) - \rho^2 = 0$$

ist (vgl. [Plücker 1828, S. 94f]). Den Fall einer Geraden durch den Mittelpunkt des Inversionskreises behandelt Plücker interessanterweise in [Plücker 1828] nicht. In seinem 1831 verfassten Artikel erwähnt Plücker auch diesen Fall, allerdings ohne Beweis:

> „Wenn die gegebene gerade Linie ein Durchmesser des letzgenannten [Inversion-]Kreises ist, so ist sie ihr eigener zugeordneter Ort.“
>
> [Plücker 1834c, S. 278]

Bemerkenswert ist schließlich, dass Plücker nirgends eine Analogie zwischen seinem „neuen Übertragungsprinzip“ und der Geradenspiegelung erwähnt. Dass er diese Analogie offenbar nicht erkennt, könnte mit darin begründet sein, dass für Plücker der Inversionskreis eine eher untergeordnete Rolle spielt. Das zeigt sich auch darin, dass er für den Inversionskreis im Gegensatz zu Steiner – dieser nennt ihn Potenzkreis – keine gesonderte Bezeichnung einführt. Im ersten Band der „Entwicklungen“ nimmt er auf den Inversionskreis nur mit Verweis auf dessen Gleichung Bezug; er nennt ihn den „ersten Kreis“ (vgl. [Plücker 1828, S. 93f]). In seinem Artikel bezeichnet er ihn als „gegebenen Kreis“ oder „Hilfskreis“ (vgl. [Plücker 1834c, S. 277f]). Bei den konkreten Beispielen zur Anwendung des Übertragungsprinzips – Ausnahmen bilden hier die Übertragungen von Konstruktionen – wird der Inversionskreis als solcher nicht mehr erwähnt (vgl. [Plücker 1834c, S. 279f]). Obwohl Plücker eine Zuordnung von Punkten zu Punkten in seinem Übertragungsprinzip sieht, steht also letztlich doch die Übertragung von bekannten oder einfachen Sätzen und Konstruktionen auf neue oder kompliziertere im Vordergrund. Der Gedanke dass die Punkte außerhalb des Kreises auf die Punkte im Inneren des Kreises abgebildet werden und umgekehrt – und damit die Analogie zur Geradenspiegelung – wird daher zumindest nicht direkt ausgesprochen.

14. Die zweite Phase geometrischer Arbeiten: Liniengeometrie

> „Die Entdeckung der Linienkoordinaten war für Plücker eigentlich nichts außergewöhnliches. Einem Menschen, dem der Begriff der Koordinaten so im Blute lag war klar, daß jeder Figur von unveränderlicher Form Koordinaten zugeordnet werden konnten.“
>
> [Ziegler 1985, S. 50f]

In seiner zweiten Phase mathematischer Forschungstätigkeit widmete sich Plücker seiner „Neuen Geometrie des Raumes“ – der sogenannten Liniengeometrie. Hier leistete Plücker Pionierarbeit in der Erschließung eines neuen Gebiets und warf durch seine Arbeiten eine Reihe von Fragestellungen auf, zum Beispiel auch in Richtung auf die Dimensionen des Raumes[548]. Heute ist die Liniengeometrie weitestgehend in Vergessenheit geraten. Im Anhang findet sich daher eine Erläuterung einiger liniengeometrischen Begriffe (16). Wie bereits dargestellt, stehen Plückers Arbeiten zur Liniengeometrie nicht nur zeitlich in großem Abstand zu seinen Arbeiten der ersten mathematischen Phase. Letztere bilden einen Zyklus, in dem Plücker die analytische Methode ausgestalten wollte. Dagegen stehen in den liniengeometrischen Arbeiten die geometrischen Objekte im Fokus, die abwechselnd mit analytischen und synthetischen Methoden bearbeitet werden. Trotzdem geht die Idee der Liniengeometrie auf das letzte Werk der ersten Phase zurück und steht auch im Zusammenhang mit dem methodischen Gedanken dieser ersten Arbeiten (vgl. 10.2). Im Folgenden soll zuerst diese 1846 ausgesprochene Idee der Liniengeometrie dargestellt werden (14.1). Dabei wird auch der in Abschnitt 6.3 bereits angesprochene Brief von Magnus sowie Arbeiten anderer Autoren, die im Rückblick als Vorläufer der Liniengeometrie angesehen werden können, genannt. Danach wird in Abschnitt 14.2 ein kurzer Überblick über Plückers Arbeiten zur Liniengeometrie gegeben.

[548] Siehe Fußnote 441 auf Seite 232.

14.1. „Keime“ der Liniengeometrie vor 1865

> „Unter den grössern Werken *Plücker's* ist es die „Geometrie des Raumes“ (1846), welche am durchgebildetsten erscheint. [...] sie enthält eine Bemerkung (vgl. Nr. 258), welche der Keim der Liniengeometrie wurde und damit den Ausgangspunkt für *Plücker's* letzte grosse geometrische Leistung bildete.“
>
> [Clebsch 1872, S. XXIX]

Die im obigen Zitat genannte Bemerkung ist die Schlussbemerkung zu einem Paragraphen in dem Plücker „die Reciprocität der Flächen zweiter Ordnung und Classe“ behandelt. In diesem Paragraphen macht Plücker einige Aussagen über die Reziprozität (oder Dualität) zwischen den Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, die er in den vorherigen Paragraphen behandelt hatte (vgl. [Plücker 1846, S. 318 - 322]). In den allgemeinen Schlussbemerkungen zu diesem Paragraphen geht Plücker dann noch einmal auf das Verhältnis zwischen Geometrie und Analysis ein. Er betont, dass die Analysis ihre selbstständige Geltung hat und die Geometrie eine mögliche bildliche Darstellung der analytischen Resulate sei (vgl. 10.2). Insbesondere betont Plücker, dass das Prinzip der Reziprozität unabhängig von seiner geometrischen Bedeutung besteht:

> „So gehört auch das Princip der Reciprocität ganz eigentlich der Analyis an, und nur weil wir, sogar wenn wir es analytisch begründen, gewohnt sind, es in der Sprache der Geometrie auszudrücken, wird uns die Ansicht gewissermaassen aufgedrängt, dass es ein ausschließlich geometrisches sei. Es besteht aber, auch ohne dass wir uns irgendwie um die Bedeutung der zwei oder drei Veränderlichen und Constanten kümmern, ganz unabhängig von der Betrachtung von Puncten, geraden Linien und Ebenen; wir können es aus der Sprache der Geometrie wieder rückwärts in die Ursprache der Analysis übersetzen.“
>
> [Plücker 1846, S. 322]

Indem Plücker die Reziprozität als eine Gleichung zwischen Variablen und einer Konstantengruppe auffasst, wird die Anzahl der Variablen und Konstanten beliebig:

> „Rein analytisch aufgefasst, ist das Princip der Reciprocität natürlich auch nicht an die Dimensionen des Raumes gebunden und auf diese beschränkt. So wie wir, dem Uebergange von der Ebene zum Raume entsprechend, eine Veränderliche mehr einführen, können wir die analytischen Erörterungen auch auf eine grössere Anzahl von Veränderlichen ausdehnen. Bei *vier* Veränderlichen insbesondere erweitert die Grund-Gleichung der Reciprocität (3) sich, bei analoger Bezeichnung, in die folgende:
>
> $$p\mathrm{p} + q\mathrm{q} + r\mathrm{r} + s\mathrm{s} + t\mathrm{t} = 0.$$
>
> Während wir die Auffassungsweise der Herren *Gergonne* und *Poncelet* als die geometrische Deutung des allgemeinen Princips der Reciprocität für den

Fall *zweier* und *dreier* Veränderlichen ansehen, liegt die Frage nach einer geometrischen Deutung für den Fall mehrerer und namentlich für den Fall von *vier* Veränderlichen nahe. Die Beantwortung dieser Frage setzt die der andern nach der geometrischen Deutung, die wir einer Gleichung zwischen vier Veränderlichen geben können, voraus. [...]
Eine gerade Linie hängt von *vier linearen Constanten* ab, für die wir zum Beispiel, indem wir eine solche Linie durch die Gleichungen-Paare:

$$x = \kappa z + \lambda, \qquad t = \kappa v + \lambda w,$$
$$y = \mu z + \nu, \qquad u = \mu v + \nu w,$$

darstellen, $\kappa, \mu, \lambda, \nu$ in der zwiefachen Bedeutung nehmen können. Diese vier Grössen, die wir als Veränderliche betrachten, welche für eine gegebene gerade Linie leicht zu construierende constante Werthe erhalten, *sind die vier Coordinaten der geraden Linie.* Eine Gleichung zwischen diesen vier Coordinaten bestimmt noch keinen geometrischen Ort für die gerade Linie, sondern nur ein Gesetz, *nach welchem der unendliche Raum aus geraden Linien besteht.* Ich gedenke auf diesen Gegenstand, der mir ein weites Gebiet für analytisch-geometrische Entwicklungen zu eröffnen scheint, an einem andern Orte wieder zurückzukommen, da ich überdies nicht im Stande sein würde, hier, bei beengtem Raume, den ganzen Gedanken zur Anschauung zu bringen.“

[Plücker 1846, S. 322]

Plücker hatte durch die Einführung der Linienkoordinaten in der Ebene und der Ebenenkoordinaten im Raum bereits eine Verallgemeinerung des Koordinatenbegriffs vorgenommen (vgl. 11). Daher lag es relativ nahe, auch den Geraden im Raum Koordinaten zuzuordnen. Diese Idee stammt auch nicht zuerst von Plücker, sondern wurde bereits von Monge 1771 ausgesprochen (vgl. [Ziegler 1985]). Das besondere an Plückers oben wiedergegebenen Bemerkung ist daher auch nicht nur die Idee der Lienienkoordinaten im Raum, sondern die Betrachtung einer Gleichung zwischen diesen Koordinaten. Die Fragestellung nach dem geometrischen Ort, der durch eine Gleichung in bestimmten Koordinaten dargestellt wird, ist in gewisser Weise typisch für Plücker. Wie in Kapitel 11 dargestellt, spielen für Plückers Ausbildung der analytischen Methode besonders die sogenannten Übertragungsprinzipien eine Rolle. Dadurch bedingt stehen bei ihm immer die Gleichungen zwischen den Koordinaten und weniger die Koordinatensysteme selbst im Fokus. Insofern gehört die Liniengeometrie von ihrer Idee her in Plückers erste mathematische Phase. Und diese besondere, für Plücker charakteristische Vorgehensweise machte ihn zum Entdecker der Liniengeometrie. Zwar waren Linienkoordinaten schon von anderen benutzt worden und auch Linienkongruenzen, Nullsysteme etc. bereits untersucht, doch Plückers Pionierleistung besteht in der Untersuchung der Liniengebilde, die durch Gleichungen zwischen Linienkoordinaten bestimmt werden.
Auch wenn die Annahme naheliegend ist, dass Plücker 1863/64 bewusst auf diese erste Idee der Liniengeometrie zurückgriff, war dies nicht der Fall:

On this occasion I may state that the principles upon which my paper[549] is based were advanced by me, nearly twenty years ago (Geometry of Space,

[549]Gemeint ist [Plücker 1865b], der erste ausführlichere Artikel zur Liniengeometrie.

> No 258), but this had entirely escaped from my memory when I recurred to Geometry some time since."

[Plücker 1865b, S. 537]

Wie bereits erwähnt hatte Plücker die mathematische Entwicklung während dieser zwanzig Jahre kaum verfolgt und daher auch die Arbeiten, die in einem gewissen Zusammenhang zur Liniengeometrie standen, nicht gelesen. Beispielsweise hatte Plücker die beiden Artikel Cayleys von 1860[550] nicht vor der Abfassung seiner eigenen Artikel von 1865[551] gelesen (vgl. [Plücker 1865b, S. 537]). In diesen beiden Artikeln hatte Cayley die sechs homogenen Koordinaten einer Geraden im Raum, basierend auf zwei Punkten dieser Geraden, gelegentlich benutzt. Allerdings bildete dies nicht den Hauptgegenstand seiner Abhandlung (vgl. [Ziegler 1985, S. 44]).
Vermutlich machte Cayley Plücker anlässlich der Tagung der BAAS in Birmingham 1865[552] und Plückers Vortrag über seine neue Geometrie auf seine eigenen Artikel aufmerksam. Dies ergibt sich aus einem Brief (vgl. 17.3), in dem Cayley sich offenbar auf ein Gespräch mit Plücker zur Liniengeometrie bezieht:

> *„I forget whether I mentioned to you the form assumed by the equations for the equilibrium of a system of forces acting on a rigid body,* [...]*."*

[NRC PC, Vol. 1B, Item 55B]

Clebsch nennt in seiner Gedächtnisrede über Plücker drei Kreise von Untersuchungen, die sich rückblickend als Vorläufer der Liniengeometrie auffassen lassen ([Clebsch 1872, S. XXXf]). Dies sind geometrische, mechanische und physikalische Untersuchungen. Zu den ersteren zählt Clebsch neben den gerade genannten Arbeiten Cayleys auch Möbius' Arbeiten zu Nullsystemen[553]:

> „Dieser untersuchte im zehnten Band von *Crelle's* Journal (1833) solche reciproke räumliche Verwandtschaften, bei welchen jeder Punkt mit der ihm zugeordneten Ebene vereinigt liegt; [...]. Diese nach Inhalt und Form gleich vollendete Arbeit von *Möbius* enthält im Wesentlichen die Eigenschaften des später als Complex erster Ordnung bezeichneten Gebildes, und zwar so, dass die geometrische Natur desselben sich sogleich voll und rein erkennen lässt, zugleich aber so, dass der Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung eben kein liniengeometrischer, sondern die Betrachtung der Verwandtschaften ist."

[Clebsch 1872, S. XXX]

Magnus griff diese Verwandtschaft im zweiten Band seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen" ([Magnus 1837]) wieder auf. Wegen Plückers engem Kontakt zu

[550] „On a new analytical representation of curves in space." Quarterly Journal of Pure and Applied Math. Bd. 3 bzw. 5 (1860) S. 225 - 236 bzw. 81-86.
[551] [Plücker 1865a], [Plücker 1865b].
[552] Oder während Plückers kurzem Aufenthalt in Cambridge nach der Tagung (vgl. [NRC PC, Vol. 5, Item 33]).
[553] Vgl. hierzu besonders [Ziegler 1985, S. 32-38].

Magnus ist es sehr wahrscheinlich, dass er Möbius’ und Magnus’ Arbeiten zu dieser Verwandtschaft bereits kannte. Spätestens bei seiner eigenen Ausarbeitung der von einem Komplex vermittelten Reziprozität von Punkten und Ebenen wurde ihm der Zusammenhang zu dieser Verwandtschaft klar. Dies wird aus den Fußnoten deutlich, in denen Plücker jeweils auf die Arbeiten von Möbius und Magnus hinweist (vgl. [Plücker 1865b, S. 482], [Plücker 1868/69, S. 30f]).
Weiter nennt Clebsch eine Arbeit von Chasles, die er 1839 in Liouville’s Journal veröffentlichte. Chasles konstruierte hier faktisch den Komplex ersten Grades über die Treffgeraden von einander paarweise zugeordneten Erzeugenden eines Hyperboloids (vgl. [Clebsch 1872, S. XXX]). Außerdem nennt Clebsch Arbeiten von Binet und Chasles, die im Zusammenhang mit einem besonderen Komplex zweiter Ordnung stehen (vgl. [Clebsch 1872, S. XXXf]).
Für den zweiten Kreis liniengeometrischer Untersuchungen, zu dem er mechanische Arbeiten zählt, nennt Clebsch Poinsot[554], Chasles, Möbius, Sylvester und Cayley (vgl. [Clebsch 1872, S. XXXII]). Hierbei handelt es sich um Untersuchungen über Kräfte, die auf starre Körper wirken[555].
Der dritte Kreis von vorbereitenden Untersuchungen, den Clebsch einen physikalischen nennt, behandelt die Theorie der Strahlensysteme. Hier nennt Clebsch die Namen Monge, Malus[556], Sturm[557], Hamilton[558] und Kummer (vgl. [Clebsch 1872, S. XXXIIf]). In diesem Bereich ging es besonders um die Untersuchung sogenannter unendlich dünner Strahlenbündel[559]. Felix Klein wies auf die Bedeutung der Liniengeometrie zur mathematischen Fundierung der Untersuchug dieser Strahlensysteme hin, auch wenn dies eher ohne Wirkung blieb, wie Atzema herausstreicht:

> „Part of the vagueness surrounding what Hermann, Matthiessen, Böklen, Leroy and Gullstrand were doing seems to be related to their unwillingness (and probably inability) to use advanced geometrical techniques.
> [...]
> How line geometry could play a role in this sense had in fact already been pointed out by Felix Klein (1848 - 1925) in the early 1970s, long before Matthiessen began his work on the infinitely thin pencil. As the principal advocate of Plücker’s line geometry, Felix Klein had no difficulty in recognizing that the process of describing a pencil amounted to the approximation of systems of lines by other systems of lines. By transferring this process to the Plücker manifold representing all straight lines in $\mathbb{R}^3$, he could reduce this process to classical approximations of sets of points by other sets of points.“

[Atzema 1993, S. 156ff]

Wie diese verschiedenen Arbeiten, die im Rückblick als Vorläufer der Liniengeometrie betrachtet werden können, zeigen, geht auf Plücker weder die Erfindung der Linienko-

[554] Louis Poinsot (1777 - 1859).
[555] Vgl. hierzu besonders Zieglers „Geschichte der geometrishcen Mechanik im 19. Jahrhundet“ [Ziegler 1985].
[556] Étienne Louis Malus (1775 - 1812).
[557] Jaques Charles François Sturm (1803 - 1855).
[558] William Rowan Hamilton (1805 - 1865).
[559] Vgl. hierzu Atzemas Dissertation: „The structure of systems of lines in 19th century geometrical optics: Malus’ theorem and the description of the infinitely thin pencil“ [Atzema 1993].

ordinaten noch die erste Behandlung von Liniengebilden zurück. Die Besonderheit von Plückers Ansatz ist aber, dass er systematisch die geometrischen Objekte, die durch Gleichungen in Linienkoordinaten dargestellt werden, untersuchte. Dadurch wurde der Zusammenhang der verschiedenen beschriebenen Untersuchungszweige erst deutlich.
An diesem Punkt sollen interessante, unveröffentlichte Überlegungen von Magnus' nicht unerwähnt bleiben. Diese teilte er Plücker in einem Brief vom 10. Mai 1849 mit ([NRC PC, Vol. 3, Item 10][560]). Magnus' bittet Plücker um einen Kommentar zu seinen Ansätzen, die er ihm in der Anlage mitteilt.

> *„Anfänglich glaubte ich* [...]*, ich hätte zu den Liniencoordinaten der ebenen Curven und den Plancoordinaten der Flächen noch ein drittes Coordinatensystem, das der Liniencoordinaten der Flächen gefunden. Bald aber schien mir die Sache nicht mehr practisch. Doch vielleicht können Sie etwas daraus machen."*

[NRC PC, Vol. 3A, Item 10]

Was genau Magnus hier mit „Liniencoordinaten der Flächen" meint, wird erst durch Hinzunahme des Inhalts der Anlage klar. Magnus' erwähnt Linienkoordinaten ebener Kurven sowie Plankoordinaten der Flächen. Der Gedanke dabei ist offenbar jeweils, dass die genannten geometrischen Objekte durch Tangenten bzw. Tangentialebenen umhüllt werden. Alle Geraden, deren Koordinaten die Gleichung der ebenen Kurve (in ebenen Linienkoordinaten) erfüllen, sind Tangenten an diese Kurve. Genauso wird eine Fläche in Ebenenkoordinaten durch alle ihre Tangentialebenen bestimmt. Bei den neuen Koordinaten, den Linienkoordinaten der Flächen, sollen Flächen durch ihre (Doppel-)Tangenten bestimmt werden, die hier in räumlichen Linienkoordinaten gegeben sind:

> *„Ich habe das System gerader Linien im Raum untersucht welche durch zwei Gleichungen zwischen den vier Coefficienten dieser Geraden bestimmt ist; dabei bin ich zu folgendem allgemeinen Satz gelangt,* [...]
>
> > *„Wenn zwischen den veränderlichen Größen a, b, α, β welche in den Gleichungen*
> >
> > $$x = \alpha z + a \qquad (a) \qquad\qquad y = \beta z + b \qquad (b)$$
> >
> > *einer Geraden im Raume vorkommen zwei Gleichungen*
> >
> > $$\varphi(a, b, \alpha, \beta) = 0 \qquad (\varphi) \qquad\qquad \psi(a, b, \alpha, \beta) = 0 \qquad (\psi)$$
> >
> > *existieren, so berührt die veränderliche Gerade in allen ihren Lagen im Allgemeinen eine Oberfläche (F) und zwar doppelt, d.h. in zwei Punkten.""*

[NRC PC, Vol. 3A, Item 10]

[560]Ein Transkript des Briefs befindet sich im Anhang (17.2).

Magnus verwendet hier vier Koordinaten der Geraden im Raum, so wie Plücker es in seinem „System ...“ von 1846 getan hat und betrachtet dann Gleichungen zwischen diesen Koordinaten. Interessanterweise beginnt er nicht mit dem Fall einer Gleichung zwischen diesen Koordinaten, sondern untersucht direkt das System zweier solcher Gleichungen. Damit behandelt er das, was Plücker später eine Kongruenz[561] nennt. Allerdings betrachtet Magnus diese Kongruenz hier nicht statisch als ein aus Geraden gebildetes geometrisches Objekt sondern dynamisch durch eine sich bewegende Gerade erzeugt. Der hier von Magnus aufgestellte Satz ist eine der Haupteigenschaften einer Kongruenz:

> „The chief property of a congruence is that each of its lines is bitangent to a surface, (including as a special case *two surfaces, a surface and a curve,* etc.).“

[Jessop 1903, S. vii]

Magnus bezeichete diese Fläche als Grenzfläche und leitete ihre Gleichung in Punktkoordinaten her. Er behandelte auch die oben genannten Spezialfälle:

> *„In besonderen Fällen, d.h. für bestimmte Formen der Gleichungen* (φ, ψ) *wird die Gleichung* (F) *complex, die Grenzfläche spaltet sich dann in zwei Flächen; in anderen solchen Fällen degradiert sie in zwei Curven oder auch nur in eine einzige Curve, und diese Curven werden dann im eigentlichen Sinne nicht berührt, sondern geschnitten. Mehrere dieser speciellen Fälle lassen sich schon aus der Form der Gleichung* (f) *erkennen.“*

[NRC PC, Vol. 3A, Item 10]

In gewisser Weise betreibt Magnus Liniengeometrie in dem Sinn wie Plücker es in seiner Neuen Geometrie tat – er untersucht Liniengebilde die durch Gleichungen in Linienkoordinaten gegeben sind. Allerdings steht nicht das Liniengebilde selbst, die Kongruenz, im Fokus, sondern die durch sie bestimmte „Grenzfläche“. Dies zeigt sich schon dadurch, dass Magnus zwar diese Fläche mit „Grenzfläche“ benennt, aber keine Bezeichnung für das „System gerader Linien im Raum“ einführt.
Leider ist kein Antwortbrief Plückers bekannt. Es findet sich auch in seinen Arbeiten zur Liniengeometrie kein Hinweis auf diesen Brief. Es ist daher anzunehmen, dass er – mehr als 15 Jahre später – bei der Behandlung der Kongruenzen in seinen eigenen Arbeiten nicht mehr an diese Ansätze von Magnus dachte.

[561] Zu den verwendeten liniengeometrischen Begriffen vergleiche Kapitel 16.

14.2. Plückers „Neue Geometrie des Raumes“

> „Man wird deshalb, obgleich *Malus* (1808), *Hamilton* (1828) und *Kummer* (1860) schon vorher wichtige Untersuchungen über Strahlenkongruenzen veröffentlicht haben, 1865 als das *Geburtsjahr der Liniengeometrie* zu betrachten haben, weil doch erst mit dem Gebrauch der Linienzeiger [=Linienkoordinaten] ihre systematische Entwicklung anhebt.“
>
> [Zindler 1902, S. 124]

Die ersten Artikel Plückers zur Liniengeometrie waren in englischer Sprache abgefasst und erschienen jeweils mit dem Titel „On a new Geometry of Space“ in den Proceedings bzw. den Philosophical Transactions der Royal Society ([Plücker 1865a], [Plücker 1865b]). Der erste Artikel bildete den Abstract zu Plückers Vortrag bei der Tagung der BAAS in Birmingham (vgl. 6.3.1). Der zweite Artikel ist eine ausführliche Ausarbeitung dieses Vortrags und ist zudem durch eine „Additional Note“ vom 11. Dezember 1865 ergänzt. Plücker beginnt seine Ausführungen mit der (homogenen)[562] Gleichung eines Punktes bzw. einer Ebene im Raum (vgl. [Plücker 1865b, S. 469]):

$$tx + uy + vz + 1 = 0.$$

Je nachdem ob x, y, z als variabel oder konstant und umgekehrt t, u, v als konstant oder variabel angesehen werden, beschreibt diese Gleichung eine Ebene oder einen Punkt im Raum. Darin sieht Plücker die beiden verschiedenen Möglichkeiten den Raum aufzufassen:

> „Infinite space may be considered either as consisting of points or transversed by planes. [...] A point given by its coordinates and a point determined by its equation, or geometrically speaking by an infinite number of planes intersecting each other in that point, are quite different ideas, not to be confounded with one another. That is the case also with regard to a plane given by its coordinates and a plane represented by its equation, or considered as containing an infinte number of points.“
>
> [Plücker 1865b, S. 469]

Ausgehend von diesen verschiedenen Auffassungsweisen unterscheidet Plücker auch zwei Konstruktionen von Geraden. Einerseits kann die Gerade als Punktreihe (= Strahl; ray) andererseits als Ebenenbüschel (= Achse; axis) aufgefasst werden. Plücker misst dieser Unterscheidung offensichtlich auch wegen der verschiedenen mechanischen Deutungen die sich daraus ergeben eine Bedeutung zu (vgl. [Plücker 1865b, S. 470]). Er definiert zwei verschiedene Systeme von Linienkoordinaten und unterscheidet auch die Liniengebilde in solche, die aus Strahlen, und solche die aus Achsen gebildet sind. Allerdings beschränkt er sich in der tatsächlichen Behandlung der Liniengeometrie in der

[562] Wie es bei Plücker meistens der Fall ist, ist hier jeweils eine der Koordinaten gleich eins gesetzt.

Regel auf das System der Strahlenkoordinaten. Diese definiert er über die Projektionen der Gerade in die Koordinatenebenen XZ und YZ:

$$x = rz + \rho$$
$$y = sz + \sigma.$$

> „[...] the four constants r, s, ρ, σ are the *coordinates of the ray:* two of them, r, s, indicating its direction, the remaining two, ρ, σ, after its direction is determined, giving its position in space.“
>
> [Plücker 1865b, S. 471]

Eine explizite Einführung einer fünften Koordinate $\eta := r\sigma - s\rho$ als Projektion der Geraden in die dritte Koordinatenebene findet sich erst in der „Neuen Geometrie“ (vgl. [Plücker 1868/69, S. 2]). Ohne diesen Term direkt als Koordinate zu benennen, führt Plücker ihn aber bereits im Laufe des Artikels „On a new Geometry“ ein (vgl. [Plücker 1865b, S. 479]). Schönflies sieht in der Einführung der fünften Koordinate „die Hauptleistung von Plücker, die ihn über den Standpunkt des Jahres 1846 hinausführte.“ [Schoenflies 1895, S. 620]. Sechs homogene Linienkoordinaten führt Plücker in der „Additional Note“ mit Hilfe von homogenen Punkt- oder Linienkoordinaten ein (vgl. [Plücker 1865b, S. 525ff]). Interessanterweise benutzt er hierfür den allgemeinen Fall homogener Koordinaten, während er in seiner „Neuen Geometrie“ wieder zu dem speziellen Fall homogener Koordinaten, bei dem eine Koordinate gleich eins gesetzt wird, übergeht.
Mit Hilfe der oben genannten vier Koordinaten einer Geraden im Raum definiert Plücker dann die grundlegenden Gebilde der Liniengeometrie: Komplex, Kongruenz und Konfiguration. Diese werden durch eine, zwei bzw. drei Gleichungen in Linienkoordinaten bestimmt (vgl. 16.3). Für den Fall linearer Gleichungen führt Plücker die Begriffe des linearen Komplexes, der linearen Kongruenz etc. ein. Diese untersucht er – auf etwas umständliche Weise – erstmalig in seinem Artikel „On a new Geometry of Space“ ([Plücker 1865b]). Dabei führt er unter anderem die allgemeinste Gleichung linearer Komplexe ein, definiert konjugierte Geraden und diskutiert die durch den Komplex gegebene Reziprozität (vgl. [Plücker 1865b, S. 479ff]; [Ziegler 1985, S. 59]). Er weist nach, dass jeder Komplex eine Hauptachse besitzt und – modern gesprochen – invariant bezüglich einer Schraubung um diese ist (vgl. [Plücker 1865b, S. 485][563]). Er bemerkt, dass vier der fünf Konstanten von denen die Gleichung des Komplexes abhängt diese Hauptachse festlegen und führt den Parameter k eines Komplexes ein (vgl. [Plücker 1865b, S. 484f]).
Plücker definiert die lineare Kongruenz als Schnitt zweier linearer Komplexe $\Omega = 0$ und $\Omega' = 0$ bzw. als Schnitt der durch sie gebildeten zweigliedrigen Gruppe (=Komplexbüschel) $\Omega + \mu\Omega' = 0$ (vgl. [Plücker 1865b, S. 495], siehe 16.3.2). Ausgehend davon leitet er verschiedene Eigenschaften der Kongruenz ab. Beispielsweise führt er die Achse sowie die Leitgeraden („directrices“) der Kongruenz ein und weist nach, dass alle Geraden der Kongruenz die beiden Leitgeraden schneiden (vgl. [Plücker 1865b, S. 497ff]). Außerdem beweist Plücker auf sehr geschickte Weise, dass eine lineare Konfiguration, also der Schnitt dreier Komplexe, immer ein einschaliges Hyperboloid ist

[563] Plücker drückt dies so aus: „A linear complex of rays invariably remains the same if it be moved parallel to itself along a fixed right line or turned round it.“ [Plücker 1865b, S. 485].

([Plücker 1865b, S. 505], siehe 16.3.3).
Der Anhang des Artikels enthält neben der Einführung der homogenen Koordinaten noch einen weiteren sehr interessanten Aspekt. Plücker versucht hier eine von den Punkt- und Ebenenkoordinaten unabhängige Einführung der Linienkoordinaten. Der entsprechende Abschnitt ist „On a new System of Coordinates“ betitelt (vgl. [Plücker 1865b, 537ff]).

> „We have hitherto determined the position of a right line in space in making use of the ordinary system of three axes OX, OY, OZ intersecting each other. The new question is whether we may substitute for this system another, by means of which we are enabled to fix immediately the position of a right line without recurring to points and planes
>
> In the ordinary system of coordinates, (1) the position of a point is determined by means of three planes parallel to the planes of coordinates and meeting in that point, (2) the position of a plane by a linear equation between the three coordinates of a point, regarded as variable; both point and plane depending upon three constants.
>
> In an analogous way a right line is determined by the intersection of four linear complexes.
>
> [...]
>
> Having thus established a system of coordinates which, independently of points and planes, fixes the position of a right line in space, we are enabled, by regading right lines as elements of space, to reconstruct the whole geometry without recurring to the ordinary system.“

[Plücker 1865b, S. 537ff]

So bedeutsam die Idee einer unabhängigen Einführung der Linienkoordinaten war, auf dem hier von Plücker eingeschlagenem Weg war sie nicht möglich. Vier Komplexe schneiden sich im Allgemeinen *nicht* – wie hier von Plücker angenommen – in einer Geraden. Wie Plücker in seiner „Neuen Geometrie“ selbst nachweist, schneiden sich vier Komplexe in $2mngh$ Geraden, wenn die vier Komplexe vom Grad $mngh$ sind (vgl. [Plücker 1868/69, S. 21]). Folglich schneiden sich vier lineare Komplexe in zwei Geraden. Damit widerlegt Plücker selbst seinen Ansatz, ohne aber explizit darauf einzugehen. Einige Jahre später (1869) werden diese grundlegenden Überlegungen Plückers von Hieronymus Georg Zeuthen[564] wieder aufgegriffen und weitergeführt (vgl. [Schoenflies 1895, S. 614f], [Ziegler 1985, S. 60][565]).
In seinem nächsten Artikel, „Fundamental Views regarding Mechanics“ ([Plücker 1866]), geht Plücker näher auf die bereits in [Plücker 1865b] angesprochenen Bezüge der Liniengeometrie zur Mechanik ein (vgl. dazu [Ziegler 1985, S. 61ff]). Die erste deutschsprachige Darstellung seiner Liniengeometrie von Plücker selbst[566], bilden die beiden Bände seiner „Neuen Geometrie“ von 1868/69 (vgl. 6.3.3). Die ersten Kapitel dieses Werks sind im Wesentlichen eine Reproduktion der bereits

[564] (1839 - 1920).

[565] Eine Darstellung von Zeuthens Einführung metrischer Tetraederkoordinaten findet sich in [Ziegler 1985, S. 74 - 78].

[566] Sein Schüler Dronke hat bereits vorher zwei Artikel veröffentlicht, in denen er eine Darstellung von Plückers Liniengeometrie in deutscher Sprache versuchte (vgl. [Dronke 1866], [SP Koblenz 1866]).

veröffentlichten Artikel und behandeln Linienkoordinaten sowie „die Linien-Complexe des ersten Grades und ihre Congruenzen[567]“ ([Plücker 1868/69, S. 375]). Ungenauigkeiten die sich in den Artikeln fanden, wurden beseitigt (vgl. [Schoenflies 1895, S. 614]). Die elegante formale Darstellung Cayleys hatte auf die Abfassung der „Neuen Geometrie“ keinen Einfluss. Plücker benutzte weiterhin die in [Plücker 1865b] eingeführten homogenen kartesischen Linienkoordinaten (vgl. [Ziegler 1985, S. 61]). Erst sein Schüler Klein vollzog im Anschluss an die Arbeiten von Cayley und Battaglini den Schritt zu homogenen projektiven Linienkoordinaten[568] (vgl. [Ziegler 1985, S. 61]).

Auf etwa 120 Seiten seines Werks gibt Plücker eine umfassende Darstellung der linearen Komplexe, Kongruenzen und Konfigurationen. Dabei kommt er zu dem Schluss:

> „Es gibt, um in einem Worte Alles zusammenzufassen, wie es *eine Geometrie der Ebene* gibt, auch *eine Geometrie der Complexe ersten Grades.*
>
> [Plücker 1868/69, S. 61]

Für die durch lineare Konfigurationen gegebenen Linienflächen stellt Plücker fest:

> „Wir haben [...] indem wir die gerade Linie als *Raumelement* eingeführt haben, durch drei lineare Gleichungen zwischen Strahlen- oder Axen-Coordinaten eine Fläche der zweiten Ordnung und der zweiten Classe bestimmt, in der Art, dass jede einzelne ihrer beiden Erzeugungen durch drei solche Gleichungen dargestellt wird. [...] Unter dem so erweiterten Gesichtspunct können wir alle Flächen zweiter Ordnung und Classe als Linienfläche ansehen. Die gesammten Eigenschaften solcher Flächen lassen sich, wozu der Weg in dem Vorstehenden angebahnt ist, in gleicher Weise aus der Discussion der drei linearen Gleichungen zwischen Strahlen- und Axen-Coordinaten ableiten, wie diese bisher aus der Discussion einer quadratischen Gleichung in Punct- oder Ebenen-Coordinaten geschehen ist.“
>
> [Plücker 1868/69, S. 148]

Auf den restlichen etwa 220 Seiten seiner „Neuen Geometrie“, von denen etwa 150 den zweiten, posthum von Klein herausgegebenen Teil bilden, wendet Plücker sich den Komplexen 2. Grades zu. Diese werden durch eine quadratische Gleichung in den Linienkoordinaten bestimmt (vgl. 16.3.4). Hier steht, wie bereits erwähnt, für Plücker mehr die geometrische Gestalt im Vordergrund als die analytische Darstellung (vgl. [Clebsch 1872, S. XXXIV]). Zum besseren Verständnis dieser Gestalt und zur Erleichterung der Anschauung führt Plücker die sogenannten Komplexflächen ein:

> „Bei der grossen Complication eines Complexes des zweiten Grades müssen wir darauf bedacht nehmen, dass wir die Uebersicht erleichtern

[567] Anstelle der Begriff Kongruenz und Konfiguration benutzt Plücker hier die Begriffe Kongruenz zweier bzw. dreier linearer Komplexe.

[568] „Es wurde mir nicht ganz leicht, von den mehr elementaren Methoden der Plücker'schen Darstellung zu dem konsequenten Verfahren der projektiven Koordinaten überzugehen, wie es von Battaglini[569] gehandhabt wurde.“ [Klein 1921, S. 3]. Zu den projektiven Linienkoordinaten vgl. [Ziegler 1985, S. 84ff].

> und dadurch der Anschauung zu Hülfe kommen.“
>
> [Plücker 1868/69, S. 158]

In einem quadratischen Komplex umhüllen alle in einer Ebene liegenden Komplex-Geraden einen Kegelschnitt. Ebenso bilden alle Komplex-Geraden die sich in einem Punkt schneiden einen Kegel. Zur Vereinfachung der Anschauung, geht Plücker von der Betrachtung der Komplex-Geraden auf die Betrachtung der durch sie umhüllten bzw. gebildeten Kegelschnitte und Kegel über:

> „So treten an die Stelle von unendlich vielen (∞^3) Complex-Linien, unendlich viele (∞^2) Complex-Curven, bezüglich [= bzw.] uendlich viele (∞^2) Complex-Kegel.“
>
> [Plücker 1868/69, S. 158]

Ein weiterer Schritt der Vereinfachung besteht darin, nicht die Kegelschnitte und Kegel selbst, sondern von ihnen gebildete, bzw. umhüllte Komplexflächen zu betrachten. Plücker definiert diese Komplexflächen durch die Bewegung von Ebenen oder Punkten. In dem einen Fall wird die Komplexfläche durch alle Lagen des Kegelschnitts bestimmt, der in der sich bewegenden Ebene durch den Komplex bestimmt wird. In dem anderen Fall umhüllt der einem sich bewegenden Punkt durch den Komplex zugeordnete Kegel in seinen verschiedenen Lagen eine Komplexfläche (vgl. [Plücker 1868/69, S. 159]).

> „Indem wir diese Complex-Flächen einführen, können wir die unendlich vielen (∞^3) Complex-Linien durch unendlich viele (∞) solcher Complex-Flächen ersetzten, deren feste Axen in einer gegebenen Ebene liegen und in einem gegebenen Puncte dieser Ebene sich schneiden.“
>
> [Plücker 1868/69, S. 159]

Unter allen Komplexflächen untersucht Plücker besonders die sogenannten Äquatorial- und Meridianflächen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die sie erzeugende Bewegung der Ebene oder des Punktes um oder entlang einer (Fern-)Gerade vollzogen wird (vgl. 16.3.4). Der genaueren Analyse dieser Äquatorial- und Meridianflächen, ihrer Einteilung in verschiedene Arten etc. widmet Plücker den Rest seiner Abhandlung.
Clebsch weist darauf hin, dass Plücker wohl geplant hatte seinem Werk bezüglich der mechanischen Anwendungen noch einiges hinzuzufügen, man sich aber bei der Herausgabe ausschliesslich auf das beschränkte, was „durch schriftliche oder mündliche Mittheilungen von *Plücker* unmittelbar veranlasst war“ [Clebsch 1872, S. XXXIV].
Plückers Leistung war die Entdeckung der Liniengeometrie als Feld geometrischer Forschung sowie die Einführung ihrer Grundbegriffe. Die Art seiner Darstellung und die von ihm verwandten Methoden waren dagegen bereits überholt.

> „Was noch heute überzeugend wirkt, sind die mit Sorgfalt und Leichtigkeit durchgeführten geometrischen Überlegungen und nicht deren formale Darstellung. Kannte man Cayleys erste Erwähnung der Linienkoordinaten (1860a,b), so konnte der Plückersche Formalismus nur als sehr schwerfällig erscheinen. Von daher ist es auch verständlich, daß in *dieser* Hinsicht sich

kaum jemand an Plücker orientierte und man später vor allem an die Untersuchungen von Cayley, G. Battaglini (1826 - 1894) und Klein anknüpfte. Die neuen Grundbegriffe der Liniengeometrie, sowie ihre erste eingehende geometrische Analyse verdankte man aber fast ausschließlich Plücker.“

[Ziegler 1985, S. 61]

15. Schluss

Julius Plücker war der Sohn einer wohlhabenden Kaufmannsfamilie. Dadurch war ihm nicht nur das Studium an verschiedenen deutschen Universitäten möglich sondern auch ein längerer Studienaufenthalt in Paris. Dort war zur Zeit von Plückers Studium das Zentrum mathematischer Forschung und Lehre. Dieser direkte Kontakt zu den französischen Wissenschaftlern und ihrer Forschung hatte einen deutlichen Einfluss auf Plückers eigene wissenschaftliche Tätigkeit. Seine ersten Veröffentlichungen stehen in direktem Zusammenhang mit seinem Aufenthalt in Paris. Zum Teil sind sie dort entstanden, zum Teil in französischer Sprache verfasst und in dem Journal von Gergonne veröffentlicht. Dabei sah Plücker sich in der Tradition von Monge (mit dessen Methoden er allerdings nur indirekt in Berührung gekommen war) und schloss sich seinen Ansichten bezüglich der Verknüpfung von Geometrie und Analysis (=Algebra) an. Diese starke Anbindung an die „französische Schule“ und die von Monge und seinen Nachfolgern entwickelte analytische Geometrie zeigte sich auch in Plückers Lehre. Aus Paris zurückgekehrt hielt Plücker in Bonn analytisch-geometrische Vorlesungen für deren Ausarbeitung er auf französische Lehrbücher (insbesondere Biots „Essai ...“) zurückgriff. Plücker brachte die Anregungen, die er in Frankreich erhalten hatte, also zuerst in die universitäre Lehre ein, wie sich Plückers Einfluss und Wirkung überhaupt stärker bei seinen Studenten (in der Regel angehende Lehrer), als bei anderen Wissenschaftlern zeigte.
Plücker verfolgte die französischen Publikationen auch weiterhin und fand darin Impulse für seine eigene Forschung. Dies lässt sich beispielhaft an Plückers Behandlung der Reziprozität (=Dualität) festmachen. Zwar war er selbständig zu der Entdeckung dieses Prinzips gekommen, aber er nahm die Arbeiten von Gergonne und Poncelet als Anregungen für eine Erweiterung seiner Theorie.
Besonders in der Zeit seiner physikalischen Forschung (1847 - 1863/64) suchte Plücker auch den direkten, mündlichen Austausch mit französischen (und englischen) Fachkollegen. Dies setzte sich in seiner zweiten mathematischen Phase (1863/64 - 1868) fort. Aber auch während seiner ersten Phase mathematischer Forschung (1823 - 1847) unternahm Plücker einige Reisen zu wissenschaftlichen Zwecken nach Frankreich und England. Außerdem ist zu beobachten, dass Plücker immer wieder französische Artikel veröffentlichte, sowohl in französischen Journalen (wie dem von Liouville) als auch in Crelles Journal. Damit war ein Hindernis beseitigt, das einen beidseitigen wissenschaftlichen Austausch zwischen der französischen und deutschen Mathematikergemeinschaft häufig verhinderte: die deutsche Sprache. Auch durch die direkte Verständigung mit französischen Mathematikern während seiner Aufenthalte in Paris – beispielsweise über seine Liniengeometrie – vermittelte Plücker einen solchen Austausch. Einschränkend muss aber berücksichtigt werden, dass Plückers Kontakte auf internationaler Ebene durch eine gewisse Isolierung auf nationaler Ebene bedingt waren. Durch wirklich oder vermeintlich fehlende Wertschätzung seiner analytisch-geometrischen Forschung in Deutschland – besonders durch den Jakobi-Steinerschen Kreis in Berlin – suchte Plücker diese Wertschätzung zunehmend im Ausland. Daher ist es fraglich, inwiefern

Plücker wirklich die Rolle eines Vermittlers zwischen der französischen und deutschen Mathematikergemeinschaft zugemessen werden kann. Dazu kommt, dass Plücker die Werke anderer eher wenig berücksichtigte und sehr eigenständig in seiner Foschung war. Daher war es häufiger der Fall, dass Plücker etwa zeitgleich und unabhängig zu seinen Entdeckungen kam wie andere deutsche und französische Wissenschaftler. Eine direkte Zusammenarbeit beispielsweise mit Gergonne oder Poncelet ist ebenfalls nicht zu beobachten. Dies kann mit darin begründet sein, dass Plücker ohne sein Zutun oder Wissen in die Auseinandersetzung zwischen Poncelet und Gergonne – als den Vertretern der synthetischen bzw. analytischen Richtung in Frankreich – hineingezogen wurde.
Plückers Position im internationalen Kontext ist hauptsächlich durch zwei Momente gekennzeichnet. Zum einen ist dies seine oben beschriebene Rolle in dem eher einseitig stattfindenden Austausch zwischen französischen und deutschen Mathematikern. Zum anderen ist seine zunehmende internationale Ausrichtung, die sich in seinen wissenschaftlichen Reisen sowie der Veröffentlichung in französischen, englischen und italienischen Journalen zeigt, zu nennen. Besonders in der letzten Phase seines Lebens bekam Plücker in England und Frankreich die Anerkennung, die er Zeit seines Lebens gesucht hatte.
Zu den äußeren Bedingungen, die Plücker einen solchen internationalen Kontakt überhaupt ermöglichten, seien hier noch einige Bemerkungen angefügt. Die gute finanzielle Stellung seiner Familie, die ihm einen Studienaufenthalt in Paris ermöglichte, wurde bereits erwähnt. Durch den Besuch einer Bürgerschule mit einer Ausrichtung auf die sogenannten realistischen Fächer, hatte Plücker zudem gute Französischkenntnisse erworben. Besonders bedeutsam für Plückers Biographie war aber das Aufkommen von wissenschaftlichen Journalen. Hierbei ist besonders das Crelle Journal zu nennen. Es ermöglichte und organisierte die Zusammenarbeit von Mathematikern auf nationaler und internationaler Ebene. Außerdem war Plücker – und anderen jungen Mathematikern – so eine Möglichkeit geboten, seine Arbeiten zu veröffentlichen. In Bezug auf die ganz praktischen Aspekte von Plückers Auslands-Reisen sind außerdem die mit der Industrialisierung einhergehenden verbesserten Reisemöglichkeiten zu nennen.
Die Frage nach der Bedeutung des Konflikts mit Steiner für Plückers Forschung ist bereits oben angeschnitten worden. Diesem Konflikt wird vor allem in der älteren Literatur eine sehr große Rolle beigemessen. Dabei muss festgehalten werden, dass es neben den Berichten von Augen- und Ohrenzeugen keine (oder kaum) direkte persönliche Polemik gibt. Plückers Weggang aus Berlin steht mit Sicherheit in keinem direkten Zusammenhang mit einem Konflikt zwischen ihm und Steiner. Zum einen fußen dahingehende Annahmen auf einer Aussage Dronkes, die so nicht zu halten ist. Zum anderen wird Steiner dadurch weit mehr Bedeutung zugewiesen, als er im wissenschaftlichen Geschehen Berlins zu diesem Zeitpunkt hatte. Damit ist Eccarius' Hypothese zu den Ursachen dieses Konflikts ebenfalls nicht ganz schlüssig. Persönliche Eigenschaften, wie Steiners leicht cholerischer Charakter, sowie Plückers „reizbares Temperament" scheinen doch eine größere Rolle zu spielen, als von Eccarius angenommen.
Trotzdem ist eine Bedeutung dieses Konflikts für Plückers Forschung festzustellen. Diese liegt in der von Plücker empfundenen Missachtung und fehlenden Wertschätzung seiner Arbeiten, die er auf den Einfluss des Jakobi-Steinerschen Kreises und damit letzlich auf Steiners Missgunst zurückführte. Unter anderem dadurch bestimmt, wechselte Plücker nach fast 20 Jahren analytisch-geometrischer Forschung sein Arbeitsfeld und begann seine experimentalphysikalischen Untersuchungen. Möglicherweise hat der Kon-

flikt auch Plückers ausschließliche Fokussierung auf analytische Geometrie verstärkt.
Hieran schließt sich direkt die Frage an, in wie weit die häufig für Plücker gebrauchte Bezeichnung „der Analytiker“ tatsächlich treffend ist. Plückers Leistung in der Ausbildung der analytischen Geometrie ist unbestritten. Außerdem gibt es wohl keinen anderen Mathematiker, der seine Werke so ausschließlich der analytischen Geometrie gewidmet hat. Allerdings liegt die Ursache dafür nicht etwa darin, dass Plücker von einer absoluten Überlegenheit der analytischen Methode über die synthetische Methode überzeugt war. Viel mehr erkannte er gewisse Vorteile der synthetischen Methode, wie beispielsweise ihre Anschaulichkeit, an. Sein erklärtes Ziel war es, diese Vorteile auch für die analytische Geometrie nutzbar zu machen. Daher widmete er die Werke seiner ersten mathematischen Phase der Ausbildung „der“ analytischen Methode. Sein Ziel war es, die analytische Darstellung so eng an die geometrischen Konstruktionen anzupassen, dass sowohl die Anschaulichkeit als auch die Vorteile der Analysis bestmöglich genutzt werden können. Als einen dieser Vorteilte der Analysis bezeichnete Plücker wiederholt die Möglichkeit der Behandlung des Imaginären.
Für die Ausbildung der Methode griff Plücker häufig auf synthetische Sätze zurück, die er analytisch bewies. Dabei suchte er jeweils nach der „Methode“ die sich hinter einem speziellen Lösungsweg, einem „Kunstgriff“ verbarg. Er suchte nach den Zusammenhängen zwischen allgemeinen Strukturen und spezifischen Erscheinungen, sowie nach übergeordneten Prinzipien die einzelne Aspekte seiner Methode miteinander verbanden. Dadurch gelang es Plücker ein vorher spezifisch synthetisches Gebiet der Geometrie – die projektive Geometrie – konsequent analytisch zu bearbeiten. Dabei klärte er erstmalig einige Begriffe, die für die synthetische Geometrie zu diesem Zeitpunkt noch nicht zu bewältigen waren.
In seinen lininengeometrischen Arbeiten der zweiten mathematischen Phase benutzte Plücker dagegen abwechselnd die analytische und synthetische Methode. Dabei lässt sich eine gewisse Abstufung in der Art der Nutzung dieser Methoden erkennen. Während Plücker die synthetische Methode hauptsächlich verwendet um eine gewisse Anschaulichkeit der komplizierten Liniengebilde und Einsichten in ihre Strukturen zu gewinnen, zog er die analytische Methode für die Beweise seiner Sätze heran. Trotzdem lässt sich für diese zweite mathematische Phase insgesamt eine Ausgewogenheit in der Nutzung der Methoden feststellen. Die Etikettierung Plückers als „der Analytiker“ in einem bewussten Gegensatz zu einem „Synthetiker“ ist daher nicht passend. Treffend wäre eher die Bezeichnung als ein analytischer Geometer mit einer starken Gewichtung der Anschaulichkeit.
Diese Bezeichnung ist auch deswegen passender für Plücker, weil sie die Geometrie stärker ins Zentrum rückt als die Analysis (oder Algebra). Zwar wies Plücker wiederholt darauf hin, dass die Analysis eine von jeder Anwendung unabhängige, eigenständige Wissenschaft sei und die Geometrie nur eine mögliche Deutung. Aber er beschäftigte sich in seinen Werken nie mit der Analysis oder Algebra allein. Wichtig war ihm die Verbindung von Analysis und Geometrie.
In diesem Zusammenhang sind Plückers „Übertragungsprinzipien“ zu nennen, die von großer Bedeutung für seine allgemeine analytisch-geometrische Methode waren. Die Verbindung zwischen Analysis und Geometie, von Kalkül und Anschauung, sollte durch eine wechselseitige Übersetzung zwischen geometrischen und analytisch-algebraischen Sätzen realisiert werden. Die Übertragungsprinzipe zeigen dabei unterschiedliche Möglichkeiten der geometrischen Deutung eines analytischen Ausdrucks auf.

Dies geschieht, indem den Variablen der analytischen Gleichung, unterschiedliche geometrische Bedeutungen gegeben werden. Das Ziel dieser Vorgehensweise besteht einerseits darin, aus einem Satz mehrere Sätze abzuleiten. Andererseits geht es darum, die einzelnen Sätze unter einem allgemeinen Prinzip zusammenzufassen. Unter dem Begriff der Übertragungsprinzipien sind sowohl die verschiedenen Koordinatensysteme die Plücker behandelte zusammengefasst als auch das Prinzip der Reziprozität eingeschlossen. Auch im Zusammenhang mit der (unter anderen) von ihm entdeckten Inversion benutzt Plücker den Begriff des Übertragungsprinzips. Allerdings steht hierbei weniger die Übertragung analytischer Sätze in verschiedene geometrische Deutungen im Fokus, als mehr die Erzeugung mehrerer geometrischer Sätze aus einem gegebenen.
Wenn es im Vorstehenden mehr um Plückers geometrische Auffassungen und die Intention seiner Werke ging, sollen im Folgenden seine tatsächlichen Innovationen vorgestellt werden. Dabei werden nur die in dieser Arbeit behandelten Bereiche berücksichtigt. Daneben wären beispielsweise auch die sogenannten Plückerformeln sowie weitere Entdeckungen bei den Untersuchungen zu den algebraischen Kurven zu nennen.
Die möglicherweise wichtigste Neuerung die Plücker in die analytische Geometrie einführte, war die Erweiterung des Koordinatenbegriffs. Diese zeigte sich zuerst in Plückers Entdeckung der homogenen (Dreiecks-)Koordinaten (1829). Tatsächlich verfolgte Plücker hierbei bewusst das Ziel, die gewöhnliche Koordinatenbestimmung zu erweitern. Neu ist zum einen die Homogenität der Koordinaten – ein Punkt in der Ebene wird durch drei und nicht mehr durch zwei Koordinatenwerte bestimmt –. Zum anderen und damit einhergehend die Tatsache, dass die Lage des Punktes durch die Verhältnisse zwischen bestimmten Strecken und nicht mehr durch die Strecken selbst bestimmt wird. Ganz im Sinn seiner „Übertragungsprinzipe“ und der geometrischen Deutung von algebraischen Gleichungen, lag Plückers Fokus bei der Behandlung der Dreieckskoordinaten auf ihrer Anwendung zur Darstellung von Kurven verschiedenen Grades. Da Kegelschnitte durch eine lineare Gleichung in Dreieckskoordinaten dargestellt werden können, konnte Plücker so – modern gesprochen – Sätze über Inzidenzen von Geraden und Punkten auf Sätze über Inzidenzen von Kegelschnitten und Punkten übertragen. Besonders in Bezug auf diesen Fokus und seine Intention unterscheidet sich Plückers Ansatz von dem von A. F. Möbius. Dieser hatte bereits 1827 mit seinen baryzentrischen Koordinaten ein homogenes Koordinatensystem geliefert. Allerdings lag Möbius' Schwerpunkt gerade nicht auf der Betrachtung homogener Gleichungen zwischen den Koordinaten. Im Mittelpunkt stand bei ihm die Untersuchung der verschiedenen geometrischen Verwandtschaften und die Klassifizierung geometrischer Eigenschaften. Daher trat die Bedeutung homogener Koordinaten für die projektive Geometrie bei Möbius deutlicher hervor als bei Plücker.
Eine weitere Verallgemeinerung des Koordinatenbegriffs besteht darin, anderen Objekten als Punkten Koordinaten zuzuordnen. Auch wenn Möbius' baryzentrische Koordinaten dem Konzept von Linienkoordinaten (in der Ebene) implizit sehr nahe kommen, vollzog er diesen Schritt nicht. Plücker war der erste Geometer, der explizit Linien- und Ebenenkoordinaten benutzte (1831). Das Bedeutende an dieser Erweiterung war die Tatsache, dass Plücker ein anderes geometrisches Objekt als den Punkt als Grundelement der Ebene oder des Raums wählte. In einer Geometrie, in der die Gerade oder die Ebene als Grundelement gewählt ist, werden die anderen geometrischen Objekte nicht mehr als aus Punkten gebildet gedacht. Eine ebene Kurve wird beispielsweise durch die an sie gelegten Tangenten bestimmt. Damit hatte Plücker die analytische Bedeutung

des schon durch Gergonne eingeführten Begriffs der Klasse einer Kurve geklärt.
In direkter Verbindung mit dem von Plücker aufgebrachtem Gedanken der Gleichberechtigung verschiedener Grundelemente der Geometrie steht die Frage nach der Dimension des Raumes. Dies wird besonders in der Plückerschen Liniengeometrie deutlich. Hier wählte Plücker die Gerade als das Grundelement der Geometrie des Raumes und untersuchte damit gewissermaßen eine vierdimensionale Geometrie. Plückers Ansichten über eine mehrdimensionale Geometrie und die Auswirkung, die seine liniengeometrischen Arbeiten auf den Dimensionenbegriff hatten, müssen durch weitere Forschungen untersucht werden.
1835 unternahm Plücker dann mit der Einführung seiner allgemeinen Koordinaten den Versuch den Koordinatenbegriff möglichst allgemein zu fassen. Auch dieser Versuch steht in direktem Zusammenhang mit den verschiedenen Übertragungsprinzipien. Plücker wollte nicht nur eine Vervielfältigung der verschiedenen Koordinatensysteme erreichen, sondern mit seinen allgemeinen Koordianten alle möglichen Koordinatensysteme umfassen. Dadurch könnten aus einem Satz direkt alle möglichen Sätze die sich durch Umformungen ergeben können, abgeleitet werden. Zu diesem Zweck betrachtete Plücker nicht mehr die Koordinaten eines Punktes selbst, sondern Funktionen dieser Koordinaten. Die Koordinatenbestimmung wurde so von bestimmten Kurven und gegebenen Richtungen abhängig. Hierdurch leistete Plücker einen wichtigen Beitrag für die Entwicklung des Begriffs der krummlinigen Koordinaten.
Mit der Entdeckung der Linien- und Ebenenkoordinaten war Plücker zudem in der Lage den Begriff der Reziprozität (= Dualität) zu klären. Diese war unabhängig voneinander von Gergonne, Poncelet, Möbius und Plücker gefunden worden. Aber erst durch die Zusammenstellung von Punkt- und Linienkoordinaten in der Ebene bzw. Punkt- und Ebenenkoordinaten im Raum wurde die Grundlage dieses Prinzips wirklich deutlich. Wenn in einem analytischen Ausdruck die Variablen einmal als Punktkoordinaten und einmal als Linienkoordinaten gedeutet werden, dann ergeben sich (in der Regel) zwei zueinander reziproke (= duale) Sätze. Außerdem erweitere Plücker den Begriff der Dualität durch die Einführung der sogenannten reziproken linearen Verwandtschaft sowie durch die Betrachtung von Entsprechungen beispielsweise zwischen Punkten und Kegelschnitten.
Wie bereits bei den homogenen Koordinaten und der Reziprozität (oder Dualität) erwähnt, kam Plücker häufiger eigenständig und etwa parallel zu Entdeckungen die andere schon vor ihm gemacht hatten. Zum Teil lag dies daran, dass Plücker die entsprechenden Werke nicht gelesen hatte, zum Teil auch daran, dass durch unterschiedliche Darstellungsweisen die Übereinstimmungen nicht direkt deutlich wurden. Im Fall der Inversion am Kreis war es dagegen so, dass Steiner seine Arbeiten dazu nicht veröffentlich hatte. Daher war Plücker der erste, der eine Beschreibung der Inversion veröffentlichte (1834).
Zuletzt ist Plückers bedeutender Beitrag bei der Erschließung des Gebiets der Liniengeometrie zu nennen. Hier führte er die wichtigsten Grundbegriffe ein und unterzog die Liniengebilde einer ersten eingehenden Analyse.
Es entspricht Plückers explorativem Forschertyp, dass es hauptsächlich die Grundideen sowie die von ihm neu erschlossenen Forschungsgebiete waren, die auf die nächste Generation von Forschern wirkten. Dagegen war seine algebraische Darstellung eher schwerfällig und wurde wenig rezipiert.

Abb. 15.1.: Julius Plücker. Aus: [Faraday 2008, S. 71]

Teil III.

Anhang

16. Liniengeometrie

16.1. Einleitung

Dieser Anhang gibt eine knappe Einführung in einige grundlegende Begriffe der Liniengeometie. Dies ist aus mindestens zwei Gründen sicher nötig: zum einen ist die Liniengeometrie heute in Vergessenheit geraten so dass nur die wenigsten über eine Kenntnis ihrer Begriffe und Inhalte verfügen. Zum anderen sind die liniengeometrischen Objekte (z.B. Linienkomplexe) unserer Vorstellung nur schwer zugänglich. Dabei soll es nicht um eine umfassende und mathematisch exakt fundierte Darstellung gehen. Der Zweck dieses Anhangs besteht lediglich darin, einen gewissen Einblick in das Themenfeld der Liniengeometrie zu geben. Konkret werden die plückerschen Linienkoordinaten (16.2) sowie die Liniengebilde (Komplexe, Kongruenzen und Konfigurationen) (16.3) thematisiert. Dabei werden die linearen Liniengebilde etwas ausführlicher behandelt. Daneben werden lediglich die Komplexe zweiten Grades und ihre Äquatorialflächen erwähnt, da diese in Bezug auf Plückers Modelle für die vorliegende Arbeit von Relevanz sind.
Die verwendete Fachsprache sowie die mathematische Darstellung hält sich relativ nahe an Plückers Texten zur Liniengeometrie. Für ein besseres Verständnis ist dieser Darstellung aber zum zum Teil eine moderne Notation in Vektorschreibweise gegenübergestellt. Dabei habe ich die sehr hilfreiche Arbeit von Renatus Ziegler genutzt ([Ziegler 1985]). Daneben sei auch auf die Arbeiten von Jessop ([Jessop 1903]), und Zindler ([Zindler 1902]) besonders hingewiesen.

16.2. Plückersche Linienkoordinaten

In der Liniengeometrie ist die Gerade das Grundelement, aus dem der Raum aufgebaut ist. Daher sind hier nicht den Punkten oder Ebenen, sondern den Geraden Koordinaten zugeordnet. Diese Idee findet sich zuerst bei Monge, später auch bei Cayley (vgl. [Ziegler 1985, S. 43f]). Benannt wurden sie später nach Plücker, der zuerst eine Liniengeometrie – also Gleichungen zwischen diesen Koordinaten – behandelte.
Plücker leitete seine Koordinaten von den Punkt- und Ebenenkoordinaten ab und unterschied daher zwei Fälle. Zum einen kann eine Gerade im Raum als ein geometrischer Ort von Punkten (eine Punktreihe) gedacht werden – in diesem Fall bezeichnete Plücker die Gerade als „Strahl“. Zum anderen kann eine Gerade im Raum auch als Schnitt von Ebenen (ein Ebenenbüschel), oder als von einer sich drehenden Ebene umhüllt gedacht werden – Plücker benutzte in diesem Fall die Bezeichnung „Achse“ (vgl. [Plücker 1868/69, S. 1f] und [Ziegler 1985, S. 59]). Die sechs Koordinaten eines Strahls leitete Plücker aus den Punkt-Koordinaten zweier beliebiger Punkte dieses Strahls ab. Analog ergeben sich die Koordinaten der Achse aus den Ebenen-Koordinaten zweier beliebiger durch die Achse gehenden Ebenen. Im Folgenden wird – wenn nicht anders angegeben – die Gerade immer als Strahl aufgefasst.

Sei eine beliebige Gerade im Raum gegeben und seien (x, y, z), (x', y', z') zwei beliebig auf ihr angenommene Punkte. Dann sind die sechs Koordinaten dieser Geraden durch die Verhältnisse:

$$(x - x') : (y - y') : (z - z') : (yz' - y'z) : (x'z - xz') : (xy' - x'y)$$

gegeben (vgl. [Plücker 1868/69, S. 5]). Plücker leitet diese Koordinaten aus den Projektionen der Geraden in die Koordinatenebenen XZ und YZ ab. Für diese Projektionen ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= rz + \rho \\ y &= sz + \sigma. \end{aligned}$$

Von den vier Konstanten r, s, ρ, σ hängen die Geraden im Raum ab; die Plückerkoordinaten sind also überzählig und nicht unabhängig voneinander. Als fünfte Koordinate führte Plücker die Koordinate $\eta := r\sigma - s\rho$ ein, die sich aus der Projektion der Geraden in die dritte Koordinatenebene ergibt. Wenn zwei Punkte (x, y, z) und (x', y', z') der Geraden gegeben sind, ergeben sich die fünf Koordinaten der Geraden als (vgl. [Plücker 1868/69, S. 2]):

$$\begin{aligned} r &= \frac{x - x'}{z - z'}, & s &= \frac{y - y'}{z - z'}, \\ \rho &= \frac{x'z - xz'}{z - z'}, & \sigma &= \frac{yz' - y'z}{z - z'}, \\ & & \eta = \frac{xy' - x'y}{z - z'}. & \end{aligned}$$

Indem Plücker die oben angegebenen sechs Terme als Koordinaten nimmt, werden die Koordinaten der Geraden im Raum also homogen und symmetrisch. Zwischen den Koordinaten besteht die Bedingungsgleichung (vgl. [Plücker 1868/69, S. 2]):

$$(x - x')(yz' - y'z) + (y - y')(x'z - xz') + (z - z')(xy' - x'y) = 0.$$

In moderner Schreibweise lassen sich die Koordinaten der Geraden durch das Vektorpaar $(\vec{a_1} - \vec{a_2}; \vec{a_1} \times \vec{a_2})$ beschreiben, wenn für zwei Punkte der Geraden die Ortsvektoren $\vec{a_1} = (x, y, z)$ und $\vec{a_2} = (x', y', z')$ eingeführt werden (vgl. [Ziegler 1985, S. 64f]). Die Bedingungsgleichung lautet dann

$$(\vec{a_1} - \vec{a_2}) \cdot (\vec{a_1} \times \vec{a_2}) = 0.$$

16.3. Komplexe, Kongruenzen, Konfigurationen

Im Raum gibt es ∞^4 viele Geraden. Eine beliebige Gleichung in den sechs Plücker-Koordinaten der Geraden im Raum wird folglich durch ∞^3 viele Geraden erfüllt. Diese Geraden bilden einen Komplex[570]. Die Schnittmenge aller Geraden zweier Komplexe bezeichnet man als Kongruenz[570]. Die ∞^2 Geraden einer Kongruenz erfüllen also

[570] Die Begriffe „Komplex“ und „Kongruenz“ wurden 1865 von Plücker eingeführt (vgl. [Plücker 1865a, S. 463] sowie [Zindler 1902, S. 123]).

gleichzeitig zwei Gleichungen zwischen ihren Koordinaten. Werden gleichzeitig drei Gleichungen zwischen den Koordinaten angenommen, spricht man von einer Konfiguration. Diese enthält einfach-unendlich viele Geraden und kann als Schnittmenge dreier Komplexe angesehen werden[571].

Wenn die Gleichung eines Komplexes von n^{ter} Ordnung ist, dann bilden alle Komplex-Geraden die durch einen gegebenen Punkt im Raum gehen im Allgemeinen eine Kegelfläche n^{ter} Ordnung. Gleichzeitig umhüllen alle Komplex-Geraden die in die gleiche Ebene fallen im Allgemeinen[572] eine Kurve n^{ter} Klasse in dieser Ebene . Man spricht dann von einem Linienkomplex n^{ten} Grades (vgl. z.B. [Plücker 1868/69, S. 18] und [Zindler 1902, S. 116]). Wird eine Kongruenz aus dem Schnitt zweier Komplexe m^{ten} und n^{ten} Grades gebildet, dann gehen durch jeden Punkt des Raumes $m \cdot n$ viele Geraden. Diese Geraden sind die Schnittmenge der beiden Kegelflächen m^{ter} bzw. n^{ter} Ordnung. In eine Ebene fallen ebenfalls $m \cdot n$ viele Geraden[573], die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kurven m^{ter} bzw. n^{ter} Klasse (vgl. z.B. [Plücker 1868/69, 19] und [Zindler 1902, S. 117]). Eine Konfiguration, die durch drei Komplexe gegeben ist, deren Ordnungen n, n' und n'' sind, ist eine Regelfläche[574] (eindimensionale Mannigfaltigkeit) deren Grad $2nn'n''$ ist. Dabei ist es egal, ob diese Fläche als Strahlen- oder Achsenfläche betrachtet wird, da Ordnung und Klasse dieser Fläche i.A. gleich sind (vgl. [Plücker 1868/69, S. 20f] und [Zindler 1902, S. 117f]).

Der Schnitt dreier Flächen besteht zwar i.A. aus einer endlichen Anzahl von Punkten, kann aber auch eine Kurve sein. Analog können sich in der Liniengeometrie natürlich auch drei Komplexe in einer Kongruenz schneiden (vgl. [Zindler 1902, S. 117]). Tatsächlich gibt es zu jeder Kongruenz unendlich viele Komplexe, die alle Geraden der Kongruenz enthalten. Zu jeder Kongruenz lassen sich diese Komplexe direkt bestimmen. Sei nämlich die Kongruenz durch zwei Komplexe $\Omega_m = 0$ und $\Omega_n = 0$ gegeben. Dann enthält jeder Komplex, der sich durch die Gleichung

$$\Omega_m + \mu\Omega_n = 0$$

darstellen lässt, in der μ ein unbestimmter Koeffizient ist, diese Kongruenz (vgl. [Plücker 1868/69, S. 19]). Analog schneiden sich alle Komplexe welche durch die Gleichung

$$\Omega_n + \mu\Omega_{n'} + \mu'\Omega_{n''}$$

bestimmt sind[575] in einer Konfiguration (vgl. [Plücker 1868/69, S. 20]). Plücker sprach in diesem Zusammenhang von zwei- bzw. dreigliedrigen Gruppen von Komplexen. Im Fall der zweigliedrigen Gruppe spricht man auch von einem Büschel von linearen Komplexen (vgl. [Ziegler 1985, S. 71]). Der Schnitt von vier Komplexen enthält i.A. nur endlich viele Geraden. Sind die vier Komplexe vom Grad n, n', n'', n''' so sind es $nn'n''n'''$

[571] Die Mannigfaltigkeit aller Geraden im Raum ist vierdimensional. Analog wie es in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Punkte im Raum zwei- und eindimensionale Untermannigfaltigkeiten gibt (Flächen und Kurven), gibt es auch in der Liniengeometrie drei-, zwei- und eindimensionale Untermannigfaltigkeiten (vgl. [Zindler 1902, S. 1]).

[572] Siehe [Zindler 1902, S. 116].

[573] Diese sind nicht notwendig alle reel (vgl. [Zindler 1902, S. 117]).

[574] Siehe Abschnitt 16.3.3.

[575] Hierbei muss natürlich vorausgesetzt werden, dass sich die drei Komplexe $\Omega_n, \Omega_{n'}$ und $\Omega_{n''}$ nicht alle in einer Kongruenz schneiden.

viele Geraden.
Wenn die Gleichung eines Komplexes linear ist, spricht man von einem linearen (Strahlen-)Komplex. Die gemeinsamen Geraden zweier linearer Komplexe bilden eine lineare (Strahlen-)Kongruenz; drei lineare Gleichungen bestimmen eine lineare (Strahlen-) Konfiguration.

16.3.1. Lineare Komplexe

Eine homogene lineare Gleichung in den sechs Plücker-Koordinaten bestimmt einen linearen Komplex (vgl. [Plücker 1868/69, S. 26] und [Ziegler 1985, S. 68]):

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D(yz'-y'z)+E(xz'-x'z)+F(xy'-x'y)=0.$$

Wenn (x',y',z') einen gegebenen, festen Punkt bezeichnet und entsprechend x',y' und z' in der Gleichung als konstant angenommen werden, stellt die Gleichung nach x,y und z aufgelöst eine Ebene dar:

$$(A+Fy'-Ez')x+(B-Fx'+Dz')y+(C+Ex'-Dy')z-(Ax'+By'+Cz')=0$$

Das bedeutet, dass die Gesamtheit der Punkte derjenigen Komplex-Strahlen, die durch den Punkt (x',y',z') gehen, eine Ebene bildet. Somit kann man auch sagen, dass die Komplex-Strahlen selbst, alle in einer Ebene liegen und somit ein Strahlenbüschel bilden (eine Kegelfäche erster Ordnung). Da der Punkt (x',y',z') selbst auch diese Ebenengleichung erfüllt, geht die Ebene durch diesen Punkt.
Wird die Gleichung des Komplexes nicht in Strahl-, sondern in Achsenkoordinaten angegeben und dann analog eine der beiden Ebenen, welche die Achse bestimmen, als fest angenommen, so ergibt sich der Satz, dass sich alle Achsen des Komplexes die in einer Ebene liegen, in einem Punkt schneiden. Die Geraden des Komplexes die in die gleiche Ebene fallen, umhüllen in ihr eine Kurve erster Klasse – einen Punkt. Durch einen beliebigen Komplex ist eine eindeutige Zuordnung von Punkten und Ebenen gegeben. Diese Beziehung zwischen dem Punkt und der Ebene ist eine duale (vgl. z.B. auch [Jessop 1903, S. 15] und [Zindler 1902, S. 13f]). Plücker bringt sie ebenfalls in Beziehung zum Prinzip der Reziprozität. Daher bezeichnet er die Ebene als Polarebene des Punktes und den Punkt als Pol der Ebene (vgl. [Plücker 1865a, S. 481]). Möbius spricht im gleichen Zusammenhang von einer Zuordnung von „Nullebene“ und „Nullpunkt“ (vgl. [Möbius 1885-87, Bd. 3, S. 118]). Da diese Bezeichnungen unmissverständlicher sind, sollen sie hier im Folgenden auch verwendet werden.
Die Zuordnung von Nullpunkt und Nullebene ergibt sich sehr leicht auch vektoriell (vgl. [Ziegler 1985, S. 68f]): Setzt man $\vec{k_1}=(A,B,C)$ und $\vec{k_2}=(D,E,F)$ außerdem wie gehabt $\vec{a_1}=(x,y,z);\vec{a_2}=(x',y',z')$, dann lautet die Gleichung des Komplexes in vektorieller Schreibweise:

$$\vec{k_1}\cdot(\vec{a_1}-\vec{a_2})+\vec{k_2}\cdot(\vec{a_1}\times\vec{a_2})=0.$$

Wird jetzt wieder der Punkt (x',y',z') mit dem Ortsvektor $\vec{a_2}$ als fest angenommen, dann ergibt sich wegen $\vec{k_2}\cdot(\vec{a_1}\times\vec{a_2})=\vec{a_1}\cdot(\vec{a_2}\times\vec{k_2})$ eine Ebenengleichung der Form $n\cdot\vec{a_1}-\delta=0$, nämlich:

$$(\vec{k_1}+\vec{a_2}\times\vec{k_2})\cdot\vec{a_1}-\vec{k_1}\cdot\vec{a_2}=0.$$

Somit liegen alle Strahlen die durch den Punkt (x', y', z') gehen in einer Ebene und bilden folglich ein Strahlenbüschel.
Um umgekehrt zu zeigen, dass der Komplex auch jeder Ebene einen in ihr liegenden (Null-)Punkt zuordnet, geht Ziegler von der Ebenengleichung

$$n \cdot \vec{a_1} - \delta = 0$$

aus und setzt $n = \lambda(\vec{k_1} + \vec{a_2} \times \vec{k_2})$ und $\delta = \lambda(\vec{k_1} \cdot \vec{a_2})$. Zu zeigen bleibt, dass es zu jedem n und δ genau einen Punkt $\vec{a_2} = (x', y', z')$ gibt. Dazu berechnet Ziegler:

$$\begin{aligned}
n \cdot \vec{k_2} &= \lambda(\vec{k_1} \cdot \vec{k_2} + (\vec{a_2} \times \vec{k_2}) \cdot \vec{k_2}) = \lambda(\vec{k_2} \cdot \vec{k_1}) \\
n \times \vec{k_1} &= \lambda(\vec{k_1} \times \vec{k_1} + (\vec{a_2} \times \vec{k_2}) \times \vec{k_1}) \\
&= -\lambda(\vec{k_1} \times (\vec{a-2} \times \vec{k_2})) \\
&= -\lambda((\vec{k_1} \cdot \vec{k_2})\vec{a_2} - (\vec{k_1} \cdot \vec{a_2})\vec{k_2}) \\
&= -\lambda(\vec{k_1} \cdot \vec{k_2})\vec{a_2} + \delta\vec{k_2} \\
&= -(n \cdot \vec{k_2})\vec{a_2} + \delta\vec{k_2} \\
\Rightarrow \qquad (n \cdot \vec{k_2})\vec{a_2} &= \delta\vec{k_2} - n \times \vec{k_1} \\
\Leftrightarrow \qquad \vec{a_2} &= \frac{\delta\vec{k_2} - n \times \vec{k_1}}{n \cdot \vec{k_2}}
\end{aligned}$$

Aus der Zuordnung von (Null-)Punkten zu ihren (Null-)Ebenen ergibt sich auch eine Zuordnung der Geraden zu Geraden. Dabei ist jede Komplex-Gerade sich selbst zugeordnet und jeder anderen Geraden ist durch den Komplex eine zweite Gerade zugeordnet. Zwei solche Geraden nennt Plücker „conjugate lines“ (vgl. [Plücker 1865b, S. 481]) oder „conjugirte Polaren“ (vgl. [Plücker 1868/69, S. 28]); man spricht auch von „polar lines“ (vgl. [Hudson 1905, S. 37][576]).
Betrachtet man eine der beiden konjugierten Geraden als Strahl (also als Punktreihe), dann schneiden sich die Nullebenen dieser Punkte alle in einer Geraden. Diese Gerade ist konjugiert zu der ersten. Betrachtet man die erste Gerade umgekehrt als Achse (also als Schnitt eines Ebenenbüschel), dann bilden alle Nullpunkte, welche diesen Ebenen zugeordnet sind die konjugierte Gerade. Auch hier ergibt sich eine völlig duale Beziehung. Eine Komplex-Gerade ist konjugiert zu sich selbst. Betrachtet man einen Punkt, der sich auf dieser Geraden bewegt, so dreht sich die entsprechende Nullebene gleichzeitig um diese Gerade.
Die Eigenschaften von konjugierten Geraden kann man sich leicht deutlich machen. Seien ϵ_1 und ϵ_2 zwei beliebige Ebenen die sich in der Geraden g schneiden (siehe Abb. 16.1). Die Nullpunkte der beiden Ebenen seien P_1 und P_2 und die Verbindungsgerade $\overline{P_1P_2}$ heiße h. Außerdem sei auf der Geraden g ein beliebiger Punkt Q gegeben. Da P_1 der Nullpunkt der Ebene ϵ_1 ist, gehört jede Gerade in dieser Ebene, die mit dem Punkt P_1 inzidiert, zum Komplex. Folglich ist auch $\overline{P_1Q}$ eine Komplex-Gerade. Analog muss auch $\overline{P_2Q}$ eine Komplex-Gerade sein. Damit kennen wir zwei Komplex-Geraden, die sich in Q schneiden. Die Nullebene zu dem Punkt Q ist folglich durch die beiden Geraden $\overline{P_1Q}$ und $\overline{P_2Q}$ bestimmt. Somit liegt auch die Gerade h in der Nullebene von Q.

[576] Hudson weist außerdem darauf hin, dass in Arbeiten über Statik die Begriffe „conjugate lines“ und „reciprocal lines“ verwendet würden (vgl. [Hudson 1905, S. 37]).

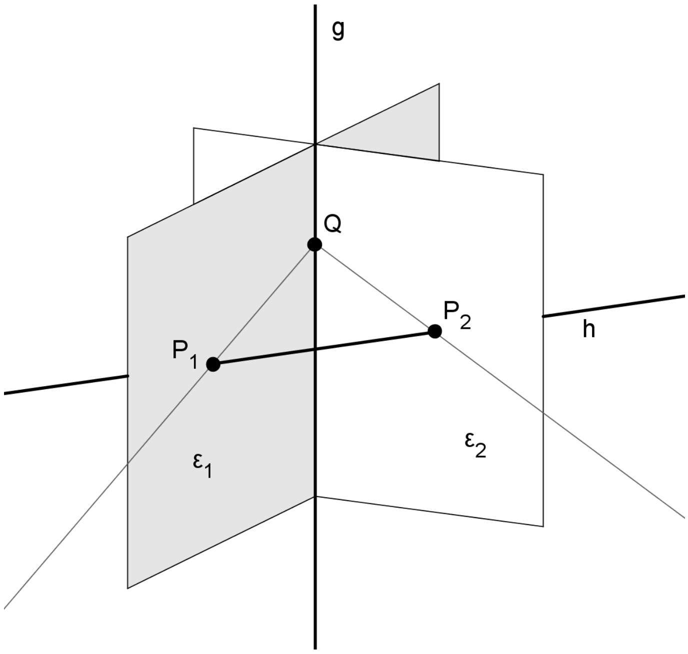


Abb. 16.1.: Konjugierte Geraden

Wird jetzt ein zweiter von Q verschiedener Punkt Q' auf g gewählt, ergibt sich mit der gleichen Argumentation, dass auch die Nullebene von Q' die Gerade h enthält. Es ist also nachgewiesen, dass sich die Nullebenen aller Punkt von g in h schneiden. Genauso leicht kann man sich klarmachen, dass sich die Nullebenen aller Punkte von h in g schneiden und dass die Komplexstrahlen (z.B. $\overline{P_1Q}$) zu sich selbst konjugiert sind (vgl. [Plücker 1865b, S. 481]). Aus den gerade hergeleiteten Eigenschaften der konjugierten Geraden ergibt sich auch direkt der Satz, dass jede Gerade, welche mit zwei zueinander konjugierten Geraden inzidiert, eine Komplex-Gerade ist. Wenn andererseits eine Komplex-Gerade eine beliebige andere Gerade g schneidet, dann schneidet sie auch die zu g konjugierte Gerade h. Die Komplex-Gerade muss nämlich in der Nullebene ihres Schnittpunktes mit g liegen und folglich auch in einer Ebene mit der konjugierten Geraden h. Insgesamt gilt daher der Satz:

> „Wenn zwei Raumelemente incident sind, so sind die in einem Nullsystem entsprechenden auch incident.“

[Zindler 1902, S. 14]

Folglich ist es sinnvoll diese durch den Komplex vermittelte Beziehung – das Nullsystem – als eine reziproke Verwandtschaft oder Dualität zu betrachten.
Ein Komplex ist durch fünf seiner Komplex-Geraden – von denen sich keine zwei schneiden dürfen – vollständig bestimmt (vgl. [Plücker 1868/69, S. 29]). Vier dieser Komplex-Geraden können durch ein Paar konjugierter Geraden ersetzt werden. Seien also zwei konjugierte Geraden und eine zu ihnen windschiefe Komplex-Gerade gegeben. Jede Gerade, welche die beiden konjugierten Geraden schneidet, ist eine Komplexgerade. Außerdem ist zu jedem Punkt der auf einer der beiden konjugierten Geraden liegt, die Nullebene bekannt. Umgekehrt ist zu jeder Ebene, welche eine der beiden konjugierten Geraden enthält, der entsprechende Nullpunkt konstruierbar. Einige der neu gefundenen Komplex-Geraden werden offensichtlich die gegebene Komplex-Gerade schneiden.

Die Ebene, in der diese beiden Komplex-Geraden liegen, bildet also die Nullebene des gemeinsamen Schnittpunktes dieser Geraden. Durch die so gefundenen Nullpunkte und Nullebenen sind weitere Paare von konjugierten Geraden bestimmt, so dass die Konstruktion in gleicher Weise fortgesetzt werden kann[577].
In einem Komplex gibt es unendlich viele Durchmesser, von denen einer als sogenannte Hauptachse eine besondere Rolle spielt. Dabei sind die Durchmesser solche Geraden, die zu einer Ferngeraden konjugiert sind. Da alle Ferngeraden in einer Ebene (der Fernebene) liegen, schneiden sich alle zu ihnen konjugierten Geraden im Nullpunkt dieser Ebene. Somit sind alle Durchmesser eines Komplexes zueinander parallel (vgl. [Plücker 1868/69, S. 31], [Jessop 1903, S. 30]). Wählt man zwei beliebige Punkte auf einem Durchmesser, dann müssen die beiden Nullebenen dieser Punkte parallel zueinander sein. Denn die beiden Nullebenen schneiden sich in der konjugierten Geraden des Durchmessers – folglich in einer Ferngeraden. Genau ein Durchmesser des linearen Komplexes hat die Eigenschaft, dass er auf allen seinen Nullebenen senkrecht steht. Diesen Durchmesser nennt man Achse, oder Hauptachse des Komplexes (vgl [Plücker 1868/69, S. 32] [Ziegler 1985, S. 69]). Wird das Koordinatensystem so angenommen, dass die z-Achse in die Hauptachse des Komplexes fällt, vereinfacht sich die Gleichung des Komplexes zu

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0$$

(vgl. [Plücker 1868/69, S. 37])[578]. Plücker bezeichnete die Konstante k als den Parameter des Komplexes (vgl. [Plücker 1868/69, S. 38], [Ziegler 1985, S. 69]).

> „Der Complex ist, wenn wir von seiner Lage im Raume absehen, durch seinen Parameter vollkommen bestimmt.“
>
> [Plücker 1868/69, S. 38]

Wird der Nullpunkt auf der z-Achse verschoben dann verändert sich die Gleichung

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0$$

offensichtlich nicht; der Komplex ist also invariant bezüglich Verschiebungen parallel zu seiner Achse. Weiter lässt sich zeigen, dass der Komplex auch invariant bezüglich Drehungen um seine Achse ist. Bei einer solchen Drehung verändern sich z und z' nicht. Der Term $(xy' - x'y)$ stellt die doppelte Fläche des Dreiecks dar, dass durch den Koordinatenursprung und die Projektionen der beiden Punkte (x, y, z) und (x', y', z') in die Koordinaten-Ebene XY gebildet wird. Diese Fläche ändert sich bei Drehung um die z-Achse ebenfalls nicht. Also ist ein linearer Komplex invariant bezüglich einer Schraubung um seine Achse (vgl. [Plücker 1868/69, S. 38], [Ziegler 1985, S. 70f]).
Mit Hilfe der zuletzt gefundenen Sätze lässt sich die räumliche Struktur eines Komplexes in etwa erfassbar machen (vgl. dazu [Plücker 1868/69, S. 44 - 59], [Zindler 1902, S. 5-22; 116], [Ziegler 1985, S. 71]):

[577] Zu einer Konstruktion des Komplexes aus fünf gegebenen Komplex-Geraden vgl. [Plücker 1868/69, S. 29f]; zu weiteren Möglichkeiten einen Komplex eindeutig zu bestimmen vgl. [Zindler 1902, S. 20f] (dort für das Gewinde oder Nullsystem angegeben; aber der lineare Komplex ist mit dem Gewinde (oder Strahlengebüsch) identisch vgl. [Zindler 1902, S. 116]).

[578] Vgl. hierzu und zu dem Folgenden auch die vektorielle Herleitung in [Ziegler 1985, S. 69 - 71].

Alle Geraden, welche die Hauptachse senkrecht schneiden, sind Komplex-Geraden. Wählt man eine beliebige andere Komplex-Gerade, die windschief zur Hauptachse ist und verschiebt und dreht sie längs bzw. um die Hauptachse, so erhält man in jeder neuen Lage eine weitere Komplex-Gerade. Alle so gefundenen Geraden sind Tangenten an einen Rotations-Zylinder und an bestimmte Schraubenlinien auf diesem Zylinder. Die Achse selbst kann als ein Zylinder mit unendlich kleinem Radius aufgefasst werden. Die Ganghöhe der Schraubenlinie wächst mit steigendem Durchmesser der Zylinder. Alle Nullebenen der Punkte eines solchen Zylinders sind untereinander parallel. Die Nullebene eines Punktes ist die Tangentialebene an die Schraubenlinie in diesem Punkt.

> „Wir können einen Complex ersten Grades auffassen, als die Gesammtheit der Tangenten von Schraubenlinien, welche Rotationscylindern aufgeschrieben sind, deren Axen mit der Axe des Complexes zusammenfallen und deren Kreisschnitte Radien haben, welche von 0 bis ∞ wachsen. Für denselben Complex sind alle Schraubenlinien gleich gewunden.“
>
> [Plücker 1868/69, S. 57]

Die Schraubenlinien sind für $k > 0$ rechtsgewunden und für $k < 0$ linksgewunden. In dem Fall, dass $k = 0$ ist ergibt sich ein spezieller linearer Komplex, der mit einem sogenannten Strahlengebüsch[579] identisch ist. Hier schneiden alle Komplex-Geraden die Achse des Komplexes. Diese kann auch eine Ferngerade sein. Bei einem solchen Komplex ist die eindeutige Zuordnung von Nullpunkten und Nullebenen nicht mehr gegeben (vgl. [Zindler 1902, S. 19]). Zwar ist weiterhin allen Punkten des Raumes, mit Ausnahme der Punkte der Hauptachse, eindeutig eine Nullebene zugeordnet, nämlich jeweils die Ebene, die durch den Punkt und die Hauptachse gelegt werden kann. Aber nur den Ebenen, die senkrecht auf der Achse stehen, ist eindeutig ein Nullpunkt zugeordnet. Außerdem ist die Zuordnung von Nullpunkt und Nullebene in keinem Fall mehr umkehrbar.

16.3.2. Lineare (Strahlen-)Kongruenzen

Sind die beiden Komplexe, durch die eine Kongruenz bestimmt wird vom m-ten und n-ten Grad, dann gehen durch jeden Punkt des Raumes i.A. $m \cdot n$ viele Kongruenz-Geraden. Auch in jeder Ebene des Raumes liegen i.A. $m \cdot n$ viele Geraden. Da die lineare Kongruenz aus dem Schnitt zweier Komplexe des ersten Grades gebildet wird, liegt also i.A. in jeder Ebene eine Gerade und durch jeden Punkt des Raumes verläuft eine Gerade. Seien die beiden Komplexe $\Omega' = 0$ und $\Omega'' = 0$. Dann wird einer beliebigen Ebene des Raumes, ϵ, durch jeden der beiden Komplexe jeweils eindeutig ein Nullpunkt zugeordnet. Seien diese beiden Nullpunkte P' und P''. Alle Geraden die in der Ebene ϵ liegen und mit dem Punkt P' inzidieren sind Komplexgeraden des ersten Komplexes; ebenso gehören alle Geraden in ϵ die den Punkt P'' schneiden zu dem zweiten Komplex. Beiden Komplexen gemeinsam ist nur eine einzige Gerade, die Verbindungsgerade der beiden Nullpunkte P' und P''. Wählt man umgekehrt einen beliebigen Punkt P des Raumes, dann sind ihm durch jeden der beiden Komplexe eindeutig Nullebenen ϵ' und ϵ'' zugeordnet. In jeder dieser Ebenen liegt ein Strahlenbüschel durch den Punkt P das jeweils alle Geraden des jeweiligen Komplexes enthält. Nur der Schnitt der beiden

[579] Vgl. [Zindler 1902, S. 19f; 129].

Ebenen ϵ' und ϵ'' gehört beiden Komplexen an (vgl. [Plücker 1868/69, S. 62]). Wie bereits erwähnt schneiden sich alle Komplexe, die sich in der Form

$$\Omega' + \mu\Omega'' = 0$$

darstellen lassen, in der durch $\Omega' = 0$ und $\Omega'' = 0$ gebildeten Kongruenz. Sie bilden also eine zweigliedrige Gruppe bzw. ein Büschel von Komplexen. Unter all diesen Komplexen gibt es genau zwei (reelle oder imaginäre) Strahlengebüsche. Also spezielle Komplexe bei denen alle Komplex-Geraden die Hauptachse schneiden. Folglich schneiden alle Geraden der gemeinsamen Kongruenz dieser zweigliedrigen Gruppe, diese beiden Hauptachsen. Sie werden daher Directricen oder Leitgeraden der linearen Kongruenz genannt (vgl. [Plücker 1868/69, S. 69], [Jessop 1903, S. 60], [Ziegler 1985, S. 72]). Für alle anderen Komplexe der zweigliedrigen Gruppe müssen die beiden Leitgeraden also zueinander konjugiert sein. Daraus folgt auch, dass zwei Komplexe i.A. genau ein Paar konjugierter Geraden gemeinsam haben (vgl. [Jessop 1903, S. 32]). Jedes Paar konjugierter Geraden einer Kongruenz bildet die beiden Leitgeraden einer in dem Komplex enthaltenen Kongruenz (vgl. [Plücker 1868/69, S. 78]). Während i.A. jedem Punkt und jeder Ebene eine Kongruenzgerade zugeordnet ist, gehen durch jeden Punkt der Leitgeraden unendlich viele Kongruenz-Geraden. Genauso liegen in jeder Ebene, die eine der beiden Leitgeraden enthält, unendlich viele Kongruenz-Geraden (vgl. [Plücker 1868/69, S. 78]).

Ist eine der beiden Leitgeraden eine Ferngerade, oder fallen sogar beide Leitgeraden in einer Ferngeraden zusammen, dann spricht man von einer parabolischen Kongruenz (vgl. [Plücker 1868/69, S. 84]).

Es lässt sich nachweisen, dass alle Achsen eines Komplexbüschels eine Linienfläche (ein Zylindroid) bilden (vgl. [Plücker 1868/69, S. 90-97], [Ziegler 1985, S. 72]). Eine solche Linienfläche gehört gleichzeitig unendlich vielen verschiedenen Kongruenzen an (vgl. [Plücker 1868/69, S. 98]). Dies wird sofort dadurch deutlich, dass es zu einer gegebenen Hauptachse unendlich viele Komplexe gibt, da ein Komplex erst durch seine Hauptachse und seinen Parameter vollständig bestimmt ist. Durch jede Kongruenz ist aber auf der Linienfläche eine Kurve eindeutig bestimmt. Zur Konstruktion dieser Kurve wird zuerst die Achse OZ bestimmt, die die beiden Leitgeraden der Kongruenz rechtwinklig schneidet. Alle Hauptachsen des Komplexbüschels schneiden diese Achse OZ[580]. Auf jeder dieser Hauptachsen wird ausgehend von dem Schnittpunkt mit der Achse OZ der Parameter abgetragen. Dabei muss das jeweilige Vorzeichen des Parameters beachtet werden. Der geometrische Ort aller so gefundenen Punkte ist eine Kurve auf der Linienfläche (vgl. [Plücker 1868/69, S. 98]).

16.3.3. Lineare (Strahlen-)Konfigurationen

Eine Konfiguration ergibt sich dann, wenn gleichzeitig drei Gleichungen zwischen den Linienkoordinaten angenommen werden. Wenn die drei Komplexe, deren Schnitt die betrachtete Konfiguration ist, die Ordnungen n, n' und n'' haben, dann ist die Konfiguration eine Regelfläche vom Grad $2nn'n''$. Eine lineare Konfiguration ist daher eine (Linien-)Fläche der zweiten Ordnung und Klasse. Der (deutsche) Begriff der Regelfläche

[580] Die Leitgeraden der Kongruenz sind zueinander konjugierte Geraden in jedem Komplex des Komplexbüschels, der die Kongruenz enthält. Die kürzeste Verbindung zweier zueinander konjugierter Geraden schneidet immer die Hauptachse (vgl.[Plücker 1868/69, S. 49]).

Abb. 16.2.: Einschaliges Hyperboloid. URL: http://bit.ly/HyperBMP [13.11.14]

(englisch: ruled surface; französisch: surface réglée) ist etwas unglücklich gewählt. Das englische Verb „to rule“ bedeutet neben „regeln“ oder „bestimmen“ auch „linieren“ – letztere Bedeutung ist hier gemeint. Daher ist der Begriff der Linienfläche passender. Es handelt sich um eine Fläche, die auf eine bestimmte Weise aus Geraden zusammengesetzt ist.
Eine lineare Konfiguration ist immer ein einschaliges Hyperboloid, das auch in ein hyperbolisches Paraboloid ausarten kann (vgl. [Plücker 1868/69, S. 112]). Eine sehr elegante Ableitung für diese Tatsache findet sich schon in [Plücker 1865b]:

> „By combining the three complexes $\Omega, \Omega', \Omega''$ we get three congruencies, and accordingly three couples of directrices [=Leitgeraden]. Each ray of the configuration, belonging simultaneously to the three congruencies, meets both directrices of each couple. Hence in the general case the configuration is a *hyperboloid; its rays consitute one of its generations, while the directrices of all congruencies passing through it are right lines of its other generation.*“

[Plücker 1865b, S. 505]

16.3.4. Quadratische Komplexe und ihre Äquatorialflächen

Eine homogene quadratische Gleichung in den sechs Plücker-Koordinaten bestimmt einen quadratischen Komplex, oder – in der von Plücker in der Regel benutzten Terminologie – einen Komplex zweiten Grades (vgl. [Plücker 1868/69, S. 149f]). Im Allgemeinen bilden alle Geraden des quadratischen Komplexes die durch einen gegebenen Punkt im Raum gehen, eine Kegelflächer zweiter Ordnung. Gleichzeitig umhüllen alle Komplex-Geraden, die in einer gegebenen Ebene liegen, in dieser eine Kurve zweiter Klasse – einen Kegelschnitt (vgl. [Plücker 1868/69, S. 150f]). Es wird also jedem Punkt des Raumes durch den quadratischen Komplex ein bestimmter Kegel zugeordnet, sowie jeder Ebene ein bestimmter in ihr liegender Kegelschnitt. Betrachtet man einen sich – zum Beispiel entlang einer Geraden – fortbewegenden Punkt, so umhüllen alle Kegelschnitte, die diesem Punkt in den verschiedenen Lagen zugeordnet sind, eine Fläche. Ebenso beschreibt der in einer Ebene liegende Kegelschnitt bei Bewegung dieser Ebene eine Fläche. Solche Flächen werden Komplexflächen genannt. In dem besonderen Fall, dass die Ebene sich um eine feste Achse dreht oder der Punkt entlang einer Geraden bewegt wird, spricht man von einer Meridianfläche (vgl. [Plücker 1868/69, S. 163; 169]. Wird eine Ebene um die feste Gerade g gedreht, so ergibt sich dieselbe Meridianfläche, wie in dem Fall, in dem ein Punkt entlang der Geraden g bewegt wird. Die Gerade g ist die Doppellinie der Meridianfläche (vgl. [Plücker 1868/69, S. 172]). Ist g eine Ferngerade, so wird die Meridianfläche durch die Kegelschnitte in zueinander parallelen Ebenen gebildet bzw. durch Cylinderflächen, die alle parallel zu einer bestimmten Ebene liegen, umhüllt. In diesem Fall spricht man von einer Äquatorialfläche (vgl. [Plücker 1868/69, S. 161; 174]). In Kapitel 6 findet sich eine Abbildung von drei Modellen solcher Äquatorialflächen (Abb. 6.2).

17. Transkribierte Quellen

17.1. Brief von Magnus an Plücker, 16.12.1847

„Sehr geehrter Freund,

daß ich Ihnen seit langer Zeit nicht geschrieben, rührt daher, daß ich / Ihnen durchaus nichts zu melden hatte, was Sie hätte interessieren können.

Zu Anfang des vorigen Jahres habe ich (blos zu meinem Divertisse-/ment) mich etwas genauer mit der ..[?][581] dulationstheorie bekannt gemacht, / zu dem Ende die ...[?]schen Abhandlungen gelesen und auch einiges / darauf bezügliches von Cauchy und Bruck[?] angesehen. Wie ich nun dabei / mehrere male auf die Lichtwellenfläche kam, erinnerte ich mich Ihrer / frühern Aeußerung: es wäre nicht übel, wenn der Mann, der mir ein / Paraboloid gemacht hat, auch eine Wellenfläche aus Holz darstellen könnte. / Ich versuchte es nun Jenen zur Anfertigung eines solchen Körpers zu / besimmen. Er war damals und auch noch später mit anderen Dingen / sehr beschäftigt (er muss Frau und Kinder durch seine Thätigkeit ernähren) / und ich konnte ihn, dem die Sache übrigens etwas zu schwierig schien, lange / Zeit nicht zu dem Unternehmen bewegen. Vor etwa vier Monaten hat / endlich die Arbeit begonnen, und sie, nachdem er mehr als zehn Wochen / unausgesetzt damit beschäftigt gewesen, vor einigen Wochen beendet. Er / hat mir das Product seiner in der That sehr mühevollen Arbeit überlassen, / nachdem es von mehreren hiesigen Physikern in Augenschein genommen / worden und ungetheilten Beifall erhalten hatte. Ich werde Ihnen dieses / kleine Modell mit der morgen abgehenden Post zusenden, und bitte / Sie, es gütigst an- und aufzunehmen.

Was die Dimensionen betrifft, so verhalten sich die Achsen, die Sie in Ihrer // Abhandlung: Discussion s. l. forme gén. des ondes lum. (Crelle XIX)[582] mit a, b, c bezeichnet haben

$$a : b : c = \sqrt{12} : \sqrt{21} : \sqrt{28}$$

da nun die gerade Linie, welche vom Mittelpunkte nach einer der vier singulairen Puncte gezogen / wird, einen Winkel bildet, dessen trig. Tangente $= \frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{b^2-a^2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, *so ist dieser Winkel / in dem Modell = 30°. – . Der Radius des Berührungskreises ist* $= \frac{1}{4}c$.

Der ganze Körper ist durch 5 Ebenen in 16 Theile getheilt. Von diesen 5 Ebenen sind 3 / die auf einander senkrechten Hauptschnitte und die zwei anderen gehen durch die Achse der y und / resp[ective] durch die singulairen Punkte. Die 16 Theile lassen sich von einander trennen und auf / 5 verschiedene Weise zu zwei Hälften des Körpers zusammen setzen, wodurch die innere / Fläche und 5 verschiedene Durchschnitte sichtbar gemacht werden.

[581] Leider ist die Quelle sehr schlecht zu lesen. Wörter, oder Silben die nicht entziffert werden konnten, sind mit Auslassungspunkten sowie einem ? in eckigen Klammern gekennzeichnet. Unsichere Transkriptionen sind ebenfalls mit einem „[?]“ markiert.

[582] [Plücker 1839a].

Behufs des Auseinandernehmens, daß mit einiger Vorsicht geschehen muss, liegt in dem / Kistchen, welches das Modell enthält, ein kleines Instrument, vermittelst dessen die Theile / von einander gelockert und getrennt werden können. Der Verfertiger räth, bei dem / Auflockern und Auseinandernehmen, das Modell auf eine weiche Unterlage (ein auf einen / hinläglich großen Tisch ausgebreitetes Tuch, oder, wie ich glaube, noch besser, auf ein / nicht zu schmales Sopha) zu legen; denn es ist besonders dafür zu sorgen, daß / keins der Stücke, wenn auch nur einen Zoll hoch auf etwas Hartes herunter fällt, weil / sonst die zum Theil in sehr feinen Spitzen auslaufenden Ecken abbrechen können.

Die Hälften der 4 durch die Achse der y gehenden Ebenen sind auf den Seitenflächen der / einzelnen Theile mit den Nummern 1 bis 8 bezeichnet, so daß man beim Zusammensetzen / eine Norm hat, wie diese Theile zusammen gehören. Auch ist auf einer Stelle der die Achsen / der x und z enthaltenden Ebene eine Nummer angebracht, um anzudeuten wie die Hälften / der positiven y und der negativen y zusammen gesetzt werden müssen, damit die positiven / Seiten der Achse der x und nicht die positiven und die negativen zusammen fallen.

Jedes der einzelnen 16 Theile ist aus 5 Stücken, von welchen 4 gerade dieselbe Dicke haben, und deren / Fasern nach verschiedenen Richtungen laufen, zusammen geleimt, damit weder durch den Einfluß der / Temperatur, noch der Feuchtigkeit ein Verziehen oder eine Formveränderung statt finde. Das / Ganze ist aufs sorgfältigste poliert um das Eindringen von Feuchtigkeit möglichst zu verhin-/dern.

Ich hoffe, daß das Modell, da es sorgfältig eingepackt ist, unversehrt ankommen / wird, und es wäre wirklich Schade wenn es verdorben würde, da es mit ausgezeichne-/ter Genauigkeit gearbeitet ist und so viel Mühe und Zeit gekostet hat. Ein / hiesiger Physiker, der dieses Modell sah und ein ähnliches zu haben wünschte, fragte // den Verfertiger ob er ihm ein solches herstellen wolle; da dieser aber, indem er versicherte / daß er, obgleich jetzt auf eine solche Arbeit durch die erste besser vorbereitet, fast vielleicht / acht Wochen ununterbrochen dazu verwenden müsste, für die Anfertigung 50 Thl.[?] *forderte / stand jener von der Realisierung seines Wunsches ab. Und so wird dann wohl / Ihr Modell das Einzige bleiben, denn von den ihm vorgeschlagenen Versuchen, den / Körper auf andere Weise zu vervielfältigen, hat der Verfertiger nur den gemacht ihn / in Ghyps abzugießen, hat ihn aber auch sehr bald aufgegeben, weil, was wohl / vorauszusehen war, es sich zeigte, daß die Kantenlinien und die Spitzen der einzelnen / Theile sich nicht scharf genug abformen und auch weil der Abguß zu zerbrechlicher / Natur war. Ein anderer Vorschlag einen Abguß aus einem (leichtflüßigen) / Metall zu machen, ist nicht ausgeführt worden, weil dieses Metall dem / Körper ein unbequem schweres Gewicht geben und ihn auch ziemlich kostbar / machen würde. Ein dritter Vorschlag das Modell auf galvano-plastischem / Wege zu vervielfältigen, ist ebenfalls nicht zur Ausführung gekommen, weil der / Verfertiger die technische Fertigkeit zu solchen Verfahren noch nicht besitzt und / sein mühsam erzeugtes Modell keinem Anderen anvertrauen wollte.*

Haben Sie doch die Güte mich gelegentlich wissen zu lassen, ob diese / hölzerne Lichtwellenfläche unversehrt angekommen ist, und unterlassen Sie / alsdann nicht mir zu sagen wie es Ihnen geht. Ihre Abhandlungen / in Poggendorfs Annalen[583] *habe ich gesehen und auch – aber in der That nur / wie ein Laie – gelesen.*

[583][Plücker 1847g], [Plücker 1847h].

Werden Sie denn nicht wieder einmal nach Berlin kommen; es ist / nun schon über sieben Jahre her, daß Sie nicht hier gewesen sind. / An Ihre damalige Anwesenheit werde ich seit einigen Jahren sehr oft / erinnert, denn wenn ich zum Fenster hinaussehe erblicke ich das Haus / in dem Sie zu jener Zeit logirten; ich wohne nämlich seit 1 3/4 Jahren / in der Französischen Straße N. 58, jenem Hause schräg gegenüber.

Leben Sie wohl und behalten Sie in geneigtem Andenken

Ihren ergebenen
Magnus

Berlin den 16 December 1847"

[NRC PC, Vol. 3A, Item 8]

17.2. Brief von Magnus an Plücker, 10.5.1849

„Sehr geehrter Freund

Sie sind ohne Zweifel glücklich von Paris zurückgekehrt. Ich erlaube mir jetzt einige / Zeilen an Sie zu richten, obgleich es rings umher politisch stürmt, und ich warlich / nicht weiß, ob Sie eben jetzt zum Briefschreiben geneigt sind. Sollte ich warten, bis diese / Stürme sich gelegt haben, würden wohl noch Jahre vergehen können, ehe ich Ihnen schreibe.

Zunächst eine Berichtigung. Ich hatte Ihnen gesagt – Sie erinnern sich dessen wahrscheinlich – / Lacroix nenne Newton als denjenigen, der zuerst die Ligne de striction behandelt habe. Dies / ist aber eine Verwechslung. L. führt als Beispiel einer Ligne de str. den ...[?] de gorge / des Hyperboloids an, indem er bemerkt, daß diese Fläche durch Rotation einer geraden / Linie erzeugt werden könne, und für diese Erzeugungsweise zitiert die arithm. universelle / de Newton probl. XXXIII. Monge soll nach Lacroix, die Bennenung L. de sriction eingeführt / haben. Uebrigens behandelt Lacroix die Herleitung der Gleichung der L. de str. keineswegs / einfacher als wir es, kurz vor meiner Abreise aus Bonn, versucht hatten. Nachdem / er aber die richtige Gleichung erhalten, aus welcher für jede Fläche deren L. de st. / hervorgeht, macht er einen argen Fehler: er giebt den Ausdruck für die kürzeste / Entfernung der consecutiven Gerade, und sagt dabei: qui est évidemment l'expression / de l'arc de la ligne de striction. Das ist aber nur richtig, wenn die L. d. str. die consecutive / Gerade rechtwinklig schneidet, im Allgemeinen ist es évidemment falsch. Das Auffallendste / dabei ist, daß er gleich darauf selbst bemerkt, wie die L. de str. einer developpablen / Fläche in deren arête de rebroussement übergeht, ohne zu sehen, daß wenn das δs der L. de str. / wie er angiebt, richtig wäre, für die arête de rebr. $\delta s = 0$, diese arête also für alle / developpablen Flächen, wie für die Kugelflächen, ein Punkt seyn würde.

Ich habe mich noch etwas mit der L. de str. beschäftigt und einige, allerdings nicht sehr bedeutende, / Sätze in Beziehung auf diese Linie gefunden, die ich Ihnen gelegentlich mitteilen will. Was ich // aber Ihnen mitzuteilen nicht länger aufschieben will, ist in der Anlage enthalten, / die Sie, wenn Sie einmal Muße haben, durchzusehen so gut sein wollen. Die / Sache gehört gänzlich vor Ihr Forum. Anfänglich glaubte ich, sie könnte von einigem / Nutzen seyn, und ich hätte zu den Liniencoordinaten der ebenen Curven und den / Plan-coordinaten der Flächen noch ein drittes Coordinatensystem, *das der / Liniencoordinaten der Flächen gefunden. Bald aber schien mir die Sache nicht mehr / practisch. Doch vielleicht können Sie etwas daraus machen. Schon vor / zwölf Jahren hat mich diese Sache einmal, zwar nur sehr vorübergehend, beschäftigt, / ich konnte schon damals den Satz, auf den es dabei eigentlich ankommt, nicht / finden.*

Ich bitte Sie, wenn es Ihre Zeit erlaubt, mir gelegentlich ein Wort über diesen / Gegenstand zu schreiben.

Ihrer Frau Gemahlin bitte ich mich angelegentlichst zu empfehlen und auch den / kleinen Albert von mir zu grüßen.

Leben Sie wohl und behalten Sie in geneigtem Andenken

Ihren ergebenen
Magnus

Berlin am 10. May 1849

[Anlage:]

Ich habe das System gerader Linien im Raum untersucht welche durch zwei Gleichungen / zwischen den vier Coefficienten dieser Geraden bestimmt ist; dabei bin ich zu folgendem allge-/meinen Satz gelangt, der sich gehörig modificiert, auf jede veränderliche Curve im Raum / anwenden läßt, wenn in deren Gleichungen zwei und nur zwei veränderliche Größen außer den Co…[?]*-/ten*[584] *vorkommen.*

> *„Wenn zwischen den veränderlichen Größen a, b, α, β welche in den / „Gleichungen*
>
> $$x = \alpha z + a \qquad (a) \qquad\qquad y = \beta z + b \qquad (b)$$
>
> *„einer Geraden im Raume vorkommen zwei Gleichungen*
>
> $$\varphi(a,b,\alpha,\beta) = 0 \qquad (\varphi) \qquad\qquad \psi(a,b,\alpha,\beta) = 0 \qquad (\psi)$$
>
> *„existieren, so berührt die veränderliche Gerade in allen ihren Lagen im Allgemeinen / „eine Oberfläche (F) und zwar doppelt, d.h. in zwei Punkten."*

Unter der Voraussetzung, daß x, y, z Punktcoordinaten bedeuten, besteht das Verfahren / der Herleitung der Gleichung der Fläche (F), die ich die Grenzfläche nennen will, darin, daß / ich aus den Gleichungen (φ, ψ) die Gleichung:

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta b} - \frac{\delta\varphi}{\delta b}\frac{\delta\psi}{\delta a}\right)z^2 + \left[\frac{\delta\varphi}{\delta\beta}\frac{\delta\psi}{\delta a} - \frac{\delta\varphi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta\beta} + \frac{\delta\varphi}{\delta b}\frac{\delta\psi}{\delta\alpha} - \frac{\delta\varphi}{\delta\alpha}\frac{\delta\psi}{\delta b}\right]z + \frac{\delta\varphi}{\delta\alpha}\frac{\delta\psi}{\delta\beta} - \frac{\delta\varphi}{\delta\beta}\frac{\delta\psi}{\delta\alpha} = 0 \tag{f}$$

bilde, (worin sämmtliche Differentialquotienten partielle sind) und sodann zwischen den fünf Gleichungen / (a, b, φ, ψ, f) die vier veränderlichen α, β, a, b eliminiere; die Finalgleichung:

$$F(x,y,z) = 0 \tag{F}$$

[584] möglicherweise „*Coord*[ina]*ten*".

ist die Gleichung der Grenzfläche in Punktcoordinaten.
Aus der Allgemeinheit dieses Verfahrens folgt die Allgemeinheit des vorstehenden Satzes. In / besonderen Fällen, d.h. für bestimmte Formen der Gleichungen (φ, ψ) *wird die Gleichung* (F) *complex, / die Grenzfläche spaltet sich dann in zwei Flächen; in anderen solchen Fällen degradiert sie in zwei / Curven oder auch nur in eine einzige Curve, und diese Curven werden dann im eigentlichen Sinne / nicht berührt, sondern geschnitten. / Mehrere dieser speciellen Fälle lassen sich schon aus der Form der Gleichung* (f) *erkennen.*

a, *Ist die Gleichung* (f) *complex, so ist es auch die Gleichung* (F)*. Dies ist z.B. der Fall, wenn*
$\frac{\delta\psi}{\delta b}\frac{\delta\psi}{\delta\alpha} - \frac{\delta\psi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta\beta} = 0$ *ist, wo dann die Gleichung* (f) *wie folgt*

$$\left[\frac{\delta\psi}{\delta a}z - \frac{\delta\psi}{\delta\alpha}\right]\left[\left(\frac{\delta\varphi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta\beta} - \frac{\delta\varphi}{\delta b}\frac{\delta\psi}{\delta\alpha}\right)z + \frac{\delta\varphi}{\delta\beta}\frac{\delta\psi}{\delta\alpha} - \frac{\delta\varphi}{\delta\alpha}\frac{\delta\psi}{\delta\beta}\right] = 0$$

geschrieben werden kann. Namentlich findet dies statt, wenn eine der beiden Gleichungen z.B. ψ */ nicht* b *und* β*, sondern nur* a *und* α *enthält, dann ist nämlich* $\frac{\delta\varphi}{\delta b} = \frac{\delta\psi}{\delta\beta} = 0$ *u die Gleichung* (f)

$$\left(\frac{\delta\psi}{\delta a}z - \frac{\delta\psi}{\delta\alpha}\right)\left(\frac{\delta\varphi}{\delta b}z - \frac{\delta\varphi}{\delta\beta}\right) = 0$$

Von den beiden Flächen, in welche sich die Grenzfläche spaltet, ist dann eine wenigstens cylindrisch. //

b, *Wenn* $\frac{\delta\varphi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta b} - \frac{\delta\varphi}{\delta b}\frac{\delta\psi}{\delta a} = 0$*, was der Fall ist, wenn eine der beiden Gleichungen nicht* a *und* b*, sondern nur* α *und* β */ enthält, so reducirt sich die Gleichung* (f) *auf den ersten Grad und es findet dann nur eine einfache Berührung statt, die zweite fällt ins Unendliche. /*

c, *Hat die Gleichung* (f) *zwei gleiche Wurzeln, so fallen beide Berührpunkte zusammen, die Berührung ist dann / drei oder mehrpunktig.*

Was bei diesen Berührungen sehr zu beachten, ist folgender Umstand. Wenn man aus den gegebenen / Gleichungen (φ, ψ) *zwei von den 4 veränderlichen, z.b.* a *u.* b *entwickelt, kann man den Gleichungen* (a, b)
die Form

$$x = \alpha z + \mu(\alpha, \beta); \qquad y = \beta z + \pi(\alpha, \beta)$$

geben. Sind nun μ *und* π *solche Functionen, welche für alle Werthe von* α *und* β *selbst reell sind, so sind / alle Geraden des Systems für alle reellen Werthe von* α *und* β *offenbar reell; dabei können aber möglicher-/weise die Werthe von* z *aus der Gleichung* (f) *nur für <u>einen</u> Theil sämmtlicher reellen Werthe von* α *und* β */ reell, für den <u>anderen</u> aber imaginair seyn; alsdann berührt <u>ein</u> Theil sämmtlicher reellen Geraden / des Systems die Grenzfläche* (F) *in reellen, ein <u>anderer</u> in imaginairen Punkten. Ja es kann, obgleich* μ */ u.* π *reell sind, die Grenzfläche* (F) *ganz und gar imaginair seyn.*
Hier einige Beispiele

1. *Es seyen*[585]

$$a - \beta = 0 \qquad (\varphi_1) \qquad\qquad 2b - \alpha^2 = \qquad (\psi_1)$$

dann ist $\frac{\delta\varphi}{\delta a} = 1$; $\frac{\delta\varphi}{\delta b} = 0$; $\frac{\delta\varphi}{\delta\alpha} = 0$; $\frac{\delta\psi}{\delta\beta} = -1$; $\frac{\delta\psi}{\delta a} = 0$; $\frac{\delta\psi}{\delta b} = 0$; $\frac{\delta\psi}{\delta\alpha} = -2\alpha$; $\frac{\delta\psi}{\delta\beta} = 0$

folglich $z^2 - \alpha = 0 \qquad (f_1)$

Die Elimination von a, b, α, β *zwischen den Gleichungen* (a, b, φ, ψ, f) *giebt*

$$z^4 - 2xz + 2y = 0 \qquad (F_1)$$

und diese Fläche wird in der That von den Geraden, deren Gleichungen

$$x = az + \beta \qquad (a_1); \qquad\qquad y = \beta z + \frac{1}{2}\alpha^2 \qquad (b_1)$$

sind, in den beiden Punkten $[x = \beta + \alpha^{\frac{3}{2}};\ y = (\beta + \frac{1}{2}\alpha^{\frac{3}{2}})\alpha^{\frac{1}{2}};\ z = \alpha^{\frac{1}{2}}]$ *und* $[x = \beta - \alpha^{\frac{3}{2}};\ y = \alpha(\beta - \frac{1}{2}\alpha^{\frac{3}{2}})\alpha;\ z = -\alpha^{\frac{1}{2}}]$ / *berührt. Während aber die Gerade* (a_1, b_1) *für alle Werthe von* α *u.* β *von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *reell sind, sind / die Berührungspunkte nur für die positiven Werthe von* α *reell, für die negativen aber imanginair.*

2. *Es seyen*

$$(\alpha^2 - \beta^2)^3 - 27(a^2 + b^2) = 0 \qquad (\varphi_2) \qquad\qquad (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 6(a\alpha + b\beta) = 0 \qquad (\psi_2)$$

Aus diesen ergiebt sich

$$9z^2 - 6(\alpha^2 + \beta^2)z + (\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0 \qquad (f_2)$$

Diese Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln, und nach dem angedeuteten Verfahren ergiebt sich

$$z^3 = y^2 + x^2 \qquad (F_2)$$

als Gleichung der Grenzfläche, welche eine von einer Neilischen Parabel erzeugte Rotationsfläche ist, und von den
Geraden

$$x = \alpha z - \frac{\alpha \pm \beta\sqrt{\frac{1}{3}}}{6}(\alpha^2 + \beta^2) \quad (a_2); \qquad\qquad y = \beta z - \frac{\beta \mp \alpha\sqrt{\frac{1}{3}}}{6}(\alpha^2 + \beta^2) \qquad (b_2)$$

nicht in zwei verschiedenen Punkten, sondern, weil die Gleichung (f_2) *gleiche Wurzeln hat, in* *<u>einem</u>* *Punte und / zwar dreipunktig berührt wird, wovon man sich auch dadurch überzeugen kann, daß man ...* [?] *zwischen den letzen / beiden Gleichungen und der Gleichung* (F_2) *eliminiert, woraus sich*

$$z^3 - (\alpha^2 + \beta^2)z^2 + \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2)^2 z - \frac{1}{27}(\alpha^2 + \beta^2)^3 = 0$$

ergiebt, eine Gleichung, die drei gleiche Wurzeln hat.

[585] In der Gleichung (ψ_1) fehlt der zweite Term.

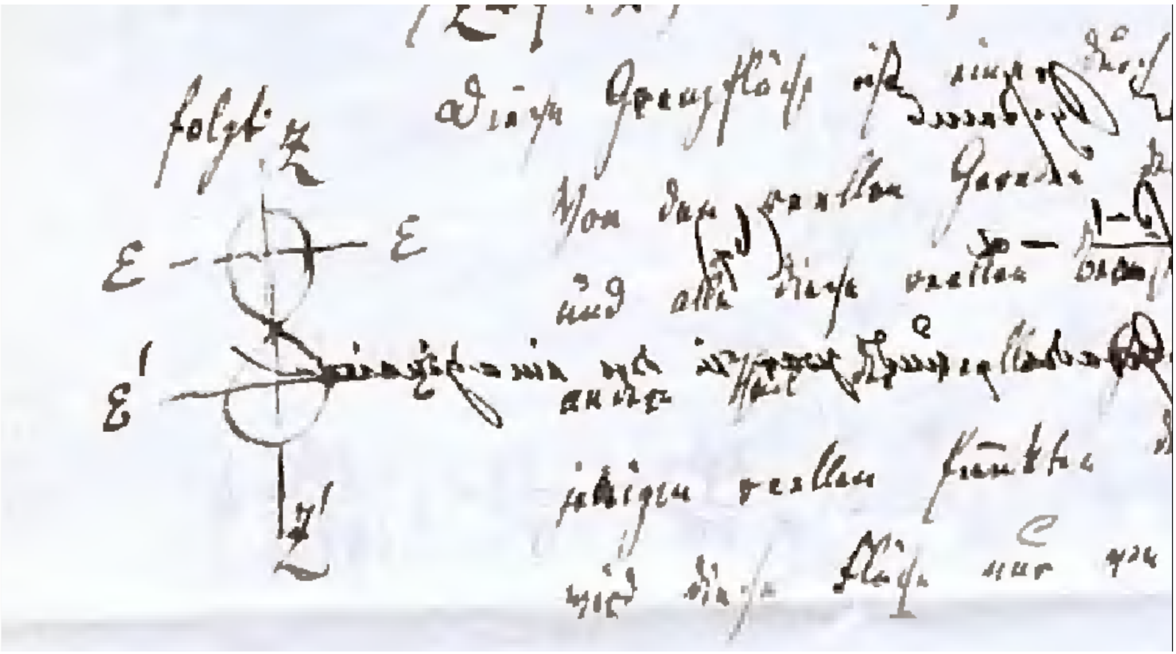


Abb. 17.1.: Lemniskate – Skizze von Magnus. Aus: [NRC PC, Vol. 3B, Item 10]

3. *Es seyen*

$$8(1+\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)-A^2(1-\alpha^2-\beta^2)^2=0 \quad (\varphi_3) \qquad\qquad a\alpha^2+b\beta=0 \qquad (\psi_3)$$

aus welchen

$$8(1+\alpha^2+\beta^2)z^2 = A^2(3+\alpha^2+\beta^2)(1-\alpha^2-\beta^2) \qquad (f_3)$$

und sodann als Gleichung der Grenzfläche

$$(z^2+y^2+x^2)^2 + A^2(y^2+x^2-z^2) = 0 \qquad (F_3)$$

folgt. Diese Grenzfläche ist eine durch Rotation einer Lemniscate um deren Achse ZZ erzeugte Fläche. / Von den reellen Geraden des Systems berührt nur ein Theil die Fläche in reellen Punkten / und alle diese reellen Berührungspunkte liegen zwischen den beiden Ebenen EE, $E'E'$. Der / andere Theil der reellen Geraden berührt die Fläche nur in imaginairen Punkten. In den-/jenigen reellen Punkten der Fläche welche nicht zwischen den Ebenen $EE, E'E'$ liegen / wird diese Fläche nur in imaginairen Geraden des Systems berührt.

4. *Es seyen [...]*[586] *//*

6. *Es seyen*

$$2a\alpha + 2b\beta - 1 = 0 \quad (\varphi_6) \qquad\qquad a\beta - b\alpha = 0 \qquad (\psi_6)$$

[586] Beispiele 4 und 5 sind nicht zu entziffern.

woraus

$$(\alpha^2+\beta^2)z^2-(a^2+b^2)=0 \qquad (f_6)$$

und sodann

$$(x^2+y^2-2z)(x^2+y^2)=0 \qquad (F_6)$$

als Gleichung der Grenzfläche folgt, welche also ein Paraboloid und dessen Achse ist.

7. *Es seyen*

$$\alpha-\beta=0 \qquad (\varphi_7); \qquad\qquad b-\frac{\beta-1}{\alpha}+\alpha=0 \qquad (\psi_7)$$

woraus

$$z^2+\frac{2(\beta-1)}{\alpha}z+\frac{(\beta-1)}{\alpha^2}+1=0 \qquad (f_7)$$

folgt, eine Gleichung welche für alle reellen Werthe von α und β nur imaginaire Werthe für z giebt. Sodann folgt

$$(y+xz-2z)^2+4(x-1)^2=0 \qquad (F_7)$$

als Gleichung der Grenzfläche, welche imaginär ist und sich auf die Gerade

$$\{y=z; \quad x=1\}$$

reducirt. Aber diese Gerade wird keineswegs von allen Geraden des Systems

$$x=\alpha z+\beta \qquad (a_7) \qquad\qquad y=\beta z+\frac{\beta-1}{\alpha}-\alpha \qquad (b_7)$$

getroffen; wohl aber wird die imaginaire Fläche (F_7) von dieser Geraden und zwar in dem imaginairen Punkten

$$x=\alpha i+1; \qquad y=\beta i+\frac{1-\beta}{\alpha}-\alpha; \qquad z=i+\frac{1-\beta}{\alpha}$$

($i=\pm\sqrt{-1}$) berührt

Doch genug der Beispiele.

Wenn eine Fläche auf die in Rede stehende Weise durch zwei Gleichungn (φ,ψ), die resp. vom m. / und nten Grade seyn mögen, gegeben ist, so ist zugleich die Anzahl der Doppeltangenten gegeben, welche / durch irgend einen bestimmten Punkt an diese Fläche gelegt werden können. Denn sind $x'y'z'$ die / Punktcoordinaten dieses Punktes, welche die Gleichungen (a,b) befriedigen müssen, so hat man zur Bestimmung / von a,b,α,β die Gleichungen $(\varphi),(\psi),x'=z'\alpha+a; y'=z'\beta+b$, von welchen die beiden letzten vom / ersten Grade, die beiden ersten von dem Grade m und n sind, woraus dann folgt, daß die Anzahl der Doppel-/tangenten aufs Höchste $m\cdot n$ beträgt. Daß man aber die Oberflächen nach dieser Anzahl der / Doppeltangenten classificiren sollte, scheint mir weder von practischem Nutzen, noch auch überhaupt / thunlich, und zwar eben so *wenig als man die Curven doppelter Krümmung nach dem Grade ihrer / Gleichungen in Classen oder Ordnungen zu theilen pflegt.*

Sind die beiden oft genannten Gleichungen (φ, ψ) *vom ersten Grad, so lassen sich / a und b in* α, β *linear ausdrücken, die Gleichungen der Geraden des Systems sind dann*

$$x = \alpha z + m\alpha + n\beta + p; \qquad y = \beta z + m'\alpha + n'\beta + p'$$

// wo m und m′, n pp gegebene Constanten bedeuten. Nach dem angegebenen Verfahren findet sich, daß die / Grenzfläche in zwei geraden Linien besteht[?] *deren Gleichungen*[587]

$$2z = -(m+n') \pm \sqrt{(m-n')^2 + 4nm'}; \quad 2m''(x-p) = [m - n'' \pm \sqrt{(m-n')^2 + 4nm'}](...)$$

sind, und die also der Ebene der xy parallel laufen.

Was nun die umgekehrte Aufgabe betrifft, die Gleichungen (φ, ψ) *zu finden, wenn die Gleichung /* (F) *der Grenzfläche in Punktkoordinaten gegeben ist, so hat diese weiter keine Schwierigkeit als die große / Beschwerde einer zuweilen sehr beschwerlichen Rechnung; Diese Aufgabe ist eine bestimmte; sie lässt aber / zuweilen keine Lösung zu, weil es Flächen giebt, die weder reelle noch imaginaire Doppeltangenten / haben, oder vielmehr deren Doppeltangenten ins Unendliche fallen. Die Fläche deren Gleichung* $z = (y^2 + x^2)^2$ */ ist, gehört zu dieser Art; ich vermuthe, daß alle Flächen ...*[?] *die gänzlich ...* [?] *sind, dieselbe / Eigenschaft haben. Auch giebt es viele Flächen, die so beschaffen sind, daß die Doppeltangenten nur einen Theil / der Fläche berühren, so lange sie reell sind.*

Wenn nun aber feststeht, daß nur eine einfache Berührung statt finden soll während die zweite Berührung / ins Unendliche fällt; so ist die Aufgabe eine unbestimmte. Man kann alsdann (nach der Oben unter 6 / gemachten Bemerkung) eine der beiden Gleichungen (φ) *und* (ψ), *bloß zwischen* α *und* β *beliebig annehmen / und jedesmal die andere zwischen* a, b, α, β *finden. Man kann so z.B. für die eine Gleichung* $\varphi \equiv \alpha^2 + \beta^2 - c^2 = 0$ */ annehmen, was darauf hinausläuft festzusetzen, daß sämmtliche Geraden mit der Achse der z einen constanten / Winkel bilden sollen. Man kann aber eben so wohl* $\psi \equiv \beta = 0$ *nehmen oder, mit anderen Worten / alle Geraden des Systems der Ebene der z parallel laufen lassen; in diesem Falle hat man bloß / die andere Gleichung* $\varphi(a, b, \alpha) = 0$ *oder, da man offenbar jetzt y für b schreiben kann* $\varphi(y, a, \alpha) = 0$ */ zu betrachten. Voilà une équation aux coordonnées môlées* [?] *d.h. zwischen Punkt- und Liniencoordinaten. So / drückt z.B. die Gleichung*

$$a^2 + (y^2 - r^2)(\alpha^2 + 1) = 0$$

eine Kugelfläche aus. Es lassen sich noch mehr solcher Combinationen machen; doch ich breche hier ab, / denn ich glaube in der That genug, vielleicht schon zu viel, gesagt zu haben.

Das Vorstehende hatte ich vor mehreren Wochen niedergeschrieben. Jetzt finde ich in einer / Abhandlung von Monge „Sur la théorie des déblais et des reblais“ (1781) in

[587] Der letzte Klammerausdruck ist unleserlich.

der ich – aber vergebens – / nach der Ligne de strichon suchte, folgenden Satz, der mit dem eben aufgestellten innig zusammen / hängt. „Si par tous les points d'un plan, l'on conçoit des droites menées dans l'espace / suivant une loi quelconque, et qu'on considère unes de ces droites, je dis, que de toutes cettes / qui l'environment et qui eu sont infiniment proches, il n'y en a généralement que deux / qui la coupent, et qui soient par conséquent dans un même plan avec elle.“ Nachdem / Monge diesen Satz analytisch begründet hat, zeigt er daß sämmtliche Geraden zwei Systeme / developpabler Flächen bilden. Ohne diese Betrachtung weiter im Allgemeinen fortzusetzen // und ohne von den arêtes de rebroussements dieser developpablen Flächen (deren geometrisches / nichts anderes als diejenige Fläche ist, die ich oben Grenzfläche genannt habe) geht Monge folglich / zu den speciellen Fällen über, in welchen sämmtliche Geraden Normalen irgend einer Fläche / sind, und zeigt an diesem Orte wie es scheint zum ersten Mal, daß sich die developpablen / Flächen rechtwinklig schneiden und wie daraus die Krümmungslinien entstehen u.s.w.

Monge geht von dem angeführten allgemeinen Satze so schnell zu den Normalen einer / Fläche über, daß er nicht einmal die Bedingungsgleichung für diesen besonderen Satz / aufstellt. Ich fand daß:

> *Wenn die Geraden (a, b) Normalen eines und derselben Fläche seyn sollen, die / Gleichungen (φ, ψ) der folgenden Gleichung*

$$(1+\alpha^2)\left[\frac{\delta\varphi}{\delta\alpha}\frac{\delta\psi}{\delta a}-\frac{\delta\varphi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta\alpha}\right]+\alpha\beta\left[\frac{\delta\varphi}{\delta\alpha}\frac{\delta\psi}{\delta b}-\frac{\delta\varphi}{\delta b}\frac{\delta\psi}{\delta\alpha}+\frac{\delta\varphi}{\delta\beta}\frac{\delta\psi}{\delta a}-\frac{\delta\varphi}{\delta a}\frac{\delta\psi}{\delta\beta}\right]+(1+\beta^2)\left[\frac{\delta\varphi}{\delta\beta}\frac{\delta\psi}{\delta b}-\frac{\delta\varphi}{\delta b}\frac{\delta\psi}{\delta\beta}\right]=0$$

> *genügen müssen.*

Berlin am 10. May 1849“

[NRC PC, Vol. 3A, Item 10]

17.3. Brief von Cayley an Plücker, 26.2.18–

Der Brief datiert vermutlich auf den 26.2.1866, die Jahreszahl ist aber nicht angegeben.

Dear Sir,

I ought to have written / a long time ago to thank you / for myself and my wife for / the photograph which we both / liked very much, and which / is a most valuable addition / to our collection. I was / very much obliged also for / the memoir from the Philosophical / Transactions: I do not know / whether it is worth remarking / (as to the footnote where you / refer to my papers[588]) that the // very point to which I attach some importance is the / employment of the homogeneous six coordinates instead / of the heterogeneous four coordinates spoken of in the / Geometry of Space. I forget whether I mentioned to / you the form assumed by the equations for the equilibrium / of a system of forces acting on a rigid body, ...[?] if we / have a force P acting along

[588] Bei der von Cayley angeprochenen Schrift handelt es sich um [Plücker 1865b]. In der genannten Fußnote bezieht Plücker sich wiederum auf die beiden Artikel Cayleys „On a new analytical representation of curves in space.“ Quarterly Journal of Pure and Applied Math. Bd. 3 bzw. 5 (1860) S. 225 - 236 bzw. 81-86 (vgl. [Plücker 1865b, S. 537]).

the line the coordinates / of which are (a,b,c,f,g,h), a[nd][589] *similarly the forces P' & .. then / the conditions of equlibrium are* Σ *Pa = 0,* Σ *Pb = 0,* Σ *Pc = 0, /* Σ *Pf = 0,* Σ *Pg = 0,* Σ*Ph = 0. And of course if instead of a force / P we have an infinitesimal rotaion* ω*, then there is / the like system of equations for the equilibrium of the / rotations* ω*. I am very much interested altho' somewhat / perplexed by the concluding sentence of the memoir. / „then a last generalisation will occur to us, the equation / of condition, hitherto admitted between the six coordinates /* x, y, z, L, M, N*, being removed"- this equation / of condition seems to me so bound up with the thory // that the removal of it might / be expected to give rise to an / entirely new theory, rather than / to a developement of the old / one. I hope you will fulfil / the promise held out of / resuming this part of the / subject.*

I have to beg your acceptance / of the enclosed photograph, a[nd] */ also of a memoir which / I have sent by Post with / united kind remembrances /* a[nd] *we both hope very much / you will again pay us a / visit at Cambridge. I / remain dear Sir*

yours very sincerely

Cambridge *A. Cayley*

26th Febr.

[NRC PC, Vol. 1B, Item 55B]

[589] Hier und an den folgenden Stellen ist der Text nicht eindeutig zu entziffern. Es scheint sich aber um ein Kürzel für „and" zu handeln.

Personenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[ADB] Allgemeine Deutsche Biographie. Historische Kommission der Bayrischen Akademie der Wissenschaften. Leipzig 1875 - 1912
URL http://www.deutsche-biographie.de/index.html [14.11.14]

[Ahrens 1904] Ahrens, Wilhelm. Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Leipzig 1904

[Atzema 1993] Atzema, Eisso J. The structure of systems of lines in 19th century geometrtical optics: Malus' theorem and the description of the infinitely thin pencil. Utrecht 1193

[BAAS 1835] Report of the Fifth Meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Dublin in August 1835. London 1835

[BAAS 1863] Report of the Thirty-third Meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Newcastle-Upon-Tyne in August and September 1863. London 1864

[BAAS 1864] Report of the Thirty-fourth Meeting of the British Association for the Advancemant of Science held at Bath in September 1864. London 1865

[BAAS 1865] Report of the Thirty-fifth Meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Birmingham in September 1865. London 1866

[BAAS 1866] Report of the Thirty-sixth Meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Nottingham in August 1866. London 1867

[Baltzer 1885] Baltzer, Richard. Vorrede über Möbius. In: [Möbius 1885-87], Bd. 1, S. V - XX. Leipzig 1885

[Becker 1970] Becker, Friedrich. Friedrich Wilhelm August Argelander 1799 - 1875. In: [RFWU 1970] S. 73 - 78

[Bekemeier 1982] Bekemeier, Bernd; Jahnke, Hans Niels; et.al. [Hrsg.]. Wissenschaft und Bildung im frühen 19. Jahrhundert II. Bielefeld 1982

[Biermann 1960] Biermann, Kurt-R. Urteile A. L. Crelles über seine Autoren. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 203. S. 216 - 220. Berlin 1960

[Biermann 1973] Biermann, Kurt-R. Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810 - 1920. Stationen auf dem Weg eines mathematischen Zentrums mit Weltgeltung. Berlin 1973

[Biot 1817] Biot, Jean-Baptiste. Versuch einer analytischen Geometrie, angewandt auf die Curven und Flächen zweiter Ordnung. Übersetzt mit Zusätzen von Dr. J. T. Ahrens, öffentlicher Lehrer in Nürnberg. Nürnberg 1817

[Biot 1823] Biot, Jean-Baptiste. Essai de Géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre. Paris 1823 (6. Auflage)

[Borck 2000] Borck, Heinz-Günther [Hrsg.]. Trierer Biographisches Lexikon. Veröffentlichung der Landesarchivverwaltung Rheinland-Pfalz. Band 87. Koblenz 2000

[Boyer 1956] Boyer, Carl B. History of Analytic Geometry. New York 1956

[Brill u.a. 1873] Brill, Alexander; Klein, Felix u.a. Rudolf Friedrich Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde. In: Mathematische Annalen, Volume 7, Issue 1, S. 1 - 55. Berlin, Heidelber 1873

[Bützberger 1913] Bützberger, Fritz. Über bizentrische Polygone und Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. Leipzig und Berlin 1913.

[Carnot 1810] Carnot, Lazare Nicolas Marguerite. Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie. Übersetzt von H. C. Schumacher. 2Bde. Altona 1810

[Clebsch 1872] Clebsch, Alfred. Zum Gedächtnis an Julius Plücker. 1872. In: [P. Ges. math. Abh.] S. IX - XXXV. Ursprünglich veröffentlicht im 16. Bd. der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1872)

[Clebsch/Hittorf 1872] Clebsch, Alfred. Note 1, betreffend die physikalischen Arbeiten Plücker's. (Nach Mittheilungen von Hrn. Prof. Hittorf) Anhang zu [Clebsch 1872] In: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. 16. 1872. S. 33 - 35

[Diesterweg 1847] Diesterweg, Friedrich Adolph Wilhelm. Johann Friedrich Wilberg, als „Meister an dem Rhein". 1847 In: Diesterweg. Sämtliche Werke. Abteilung 1. Band VII. S. 189 - 240. Berlin 1964

[Dörfel 2006] Dörfel, Günter; Müller, Falk. 1857 – Julius Plücker, Heinrich Geißler und der Beginn systematischer Gasentladungsforschung in Deutschland. In: NTM International Journal of Histoy & Ethics of Natural Sciences, Technology & Medicine, Volume 14, S. 26 - 45. Basel 2006

[Dronke 1866] Dronke, Adolf. Plücker's neue Raumgeometrie. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik, 11. Jahrgang. S. 46 - 52. Leipzig 1866.

[Dronke 1871] Dronke, Adolf. Julius Plücker, Professor der Mathematik und Physik an der Rhein. Friedrich Wilhelms-Universität in Bonn. Bonn 1871

[Eccarius 1974] Eccarius, Wolfgang. Der Techniker und Mathematiker August Leopold Crelle (1780 - 1855) und sein Beitrag zur Förderung und Entwicklung der Mathematik im Deutschland des 19. Jahrhunderts. Inauguraldissertation. Eisenach 1974

[Eccarius 1976] Eccarius, Wolfgang. August Leopold Crelle als Herausgeber des Crelleschen Journals. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 286/287. S. 5 - 25 Berlin 1976

[Eccarius 1980] Eccarius, Wolfgang. Der Gegensatz zwischen Julius Plücker und Jakob Steiner im Lichte ihrer Beziehungen zu August Leopold Crelle. Hintergründe eines wissenschaftlichen Meinungsstreites. In: Annals of Science. London 1980. Heft 37. S. 189 - 213

[Elstrodt 2007] Elstrodt, Jürgen. The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) In: Clay Mathematics Proceedings Volume 7, 2007

[Ernst 1933] Ernst, Wilhelm. Julius Plücker. Bonn 1933

[Faraday 2008] Faraday, Michael; James, Frank A. J. L. [Hrsg.]. The correspondence of Michael Faraday. Edited by Frank A. J. L. James. Vol 5. London 2008

[Fischer 1986] Fischer, Gerd. Mathematische Modelle aus den Sammlungen von Universitäten und Modellen. 2 Bde. Braunschweig 1986

[Frank 1991] Frank A. J. L. James [Hrsg.]: The Correspondence of Michael Faraday. 6 Bände. London 1991 - 2010

[Förstemann 1817] Förstemann, Wilhelm August. Theoria punctorum centralium primae lineae. Halle 1817

[GDNÄ 1864] Wernher und Leuckart [Hrsg.]. Amtlicher Bericht über die neun und dreißigste Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Gießen im September 1864. Gießen 1865 URL http://www.mdz-nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn:nbn:de:bvb:12-bsb10479305-7 [14.11.14]

[Gergonne 1813] Gergonne, Joseph-Diaz. Géométrie analitique. Théorie analitique des pôles des lignes et des surfaces de second degré. In: Annales de mathématiques pures et appliquées 3. S. 293 - 302. 1812 - 1813

[Gergonne 1826] Gergonne, Joseph-Diaz. Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue. In: Annales mathématiques pures et aplliquées 16. S. 209 - 231. 1825-26

[Giermann 2004] Giermann, Heiko. Stammfolgen der Familien Giermann und Plücker. In: Deutsches Geschlechterbuch, Bd. 217, Limburg 2004. URL http://www.giermann.de/docs/Pluecker-Vorfahren-DGB217-051004.pdf [14.11.14]

[Goldberg 1967] Goldberg, Michael. On the original Malfatti problem. In: Mathematics magazine. Bd. 40. S. 241 - 247. Washington 1967

[Gray 2007] Gray, Jeremy. Worlds out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19^{th} Century. London 2007

[GRFWU 1933] Geschichte der rheinischen Friedrich-Wilhelm-Universität zu Bonn am Rhein. 2. Bd. Institute und Seminare 1818 - 1933. Bonn 1933

[Grundelfinger 1902] Grundelfinger, S. Drei Briefe *Aronholds* an *Hesse*. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 124. S. 59 -79. Berlin 1902

[Guy 2007] Guy, Richard K. The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti – A Budget of Paradoxes. In: American Mathematical Monthly. Bd. 114/2. S. 97 - 114. Washington 2007

[Hankel 1875] Hankel, Hermann. Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung. Vorlesungen. Leipzig 1875

[Hensel 1926] Hensel, Kurt. Vorwort. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 157. S. 1 - 2 Berlin 1927

[Hiller 1991] Hiller, Helmut. Wörterbuch des Buches. Frankfurt am Main 1991 (5. vollst. neu bearb. Aufl.)

[Hudson 1927] Hudson, Hilda. Cremona Transformations in Plane and Space. Cambridge 1927

[Hudson 1905] Hudson, Ronald William Henry Turnbull. Kummer's Quartic Surface. Cambridge 1905

[Jessop 1903] Jessop, C. M. A Treatise on the Line Complex. Cambridge 1903

[Jorde 1903] Jorde, Fritz. Geschichte der Schulen von Elberfeld mit besonderer Berücksichtigung des ältesten Schulwesens. Elberfeld 1903

[Jaeckel 1970] Jaeckel, Barbara; Paul, Wolfgang. Die Entwicklung der Physik in Bonn 1818 - 1968. In: [RFWU 1970] S. 91 - 100

[Kalok 2010] Kalok, Lothar. Schulprogramme: Eine fast vergessene Literaturgattung. In: Hort, Irmgard. Reuter, Peter [Hrsg.] Aus mageren und aus ertragreichen Jahren: Streifzug durch die Universitätsbibliothek Gießen und ihre Bestände. S. 174 - 199. Gießen 2007 URL http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2010/7372/pdf/UB_Festschrift_2007.pdf [14.11.14]

[Kästner 1799] Kästner, Abraham Gotthelf. Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. Der mathematischen Anfangsgründe IIIter Theil; zweyte Abtheilung. Dritte, stark vermehrte Auflage. Göttingen 1799

[Kern 1992] Kern, Günter. Die Entwicklung des Faches Mathematik an der Universität Heidelberg 1835 - 1914. Heidelberg 1992. Elektronische Ausgabe von Gabriele Dörflingen. Heidelberg 2011
URL: http://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/14583/1/kern.pdf [14.11.14]

[Klein 1921] Klein, Felix. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. 1. Berlin 1921

[Klein 1922] Klein, Felix. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. 2. Berlin 1922

[Klein 1926] Klein, Felix. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil 1. Berlin 1926

[Kössler 2008] Kössler, Franz. Personenlexikon von Lehrern des 19. Jahrhunderts: Berufsbiographien aus Schul-Jahresberichten und Schulprogrammen 1825 - 1918 mit Veröffentlichungsverzeichnissen. Preprint 2008: URL http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2008/6106/ [14.11.14]

[Krafft 2004] Krafft, Fritz. Dokumente zu Julius Plückers Marburger Promotion 'in absentia'. In: [Seising u.a. 2004] S. 415 - 425

[Krull 1970] Krull, Wolfgang. Eduard Study 1862 - 1930. In: [RFWU 1970] S. 25 - 48

[Lange 1899] Lange, Julius. Jakob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821 - 1863. Nach seinen Personalakten dargestellt. Berlin 1899

[Lessing 1985] Lessing, Hans-Erhard. Technologen an der Universität Heidelberg. In: Doerr, W. et. al. [Hrsg.]. Semper Apertus. Sechshundert Jahre Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1386 - 1986. S. 105 - 131. Berlin/Heidelberg 1985

[Liouville 1847] Liouville, Joseph. Note au sujet de l'article précédent. In: Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12, p. 265 - 290. 1847

[Loeber 1914] Loeber, Kurt. Beiträge zur Lösung und Geschichte des Malfattischen Problems und seiner Erweiterungen. Dissertation. Halle 1914

[Loh 1995] Loh, André. August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) – Leben und Werk. Dissertation. Leipzig 1995

[Lorey 1927] Lorey, Wilhelm. August Leopold Crelle zum Gedächtnis. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 157. S. 3 - 11 Berlin 1927

[Magnus 1832] Magnus, Ludwig Immanuel. Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie. In: Crelles Journal, Band 8, S. 51 - 63. Berlin 1832

[Magnus 1833] Magnus, Ludwig Immanuel. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. 3. Theil von Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben. Berlin 1833

[Magnus 1837] Magnus, Ludwig Immanuel. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes. 4. Theil von Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben. Berlin 1837

[Marchisotto 2007] Marchisotto, Elena Anne; Smith, James T. The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic. Boston/Basel/Berlin 2007

[Minkowski 1973] Minkowski, Hermann. Rüdenberg, Lily [Hrsg.]. Briefe an David Hilbert. Berlin [u.a.] 1973

[Möbius 1823] Möbius, August Ferdinant. Beobachtungen auf der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Leipzig, mit vorausgeschickter Beschreibung der jetzigen Einrichtung dieser Sternwarte und einem Anhange geometrischen Inhalts. Leipzig 1823

[Möbius 1827] Möbius, August Ferdinand. Der barycentrische Calcul ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet. Leipzig 1827

[Möbius 1885-87] August Ferdinand Möbius gesammelte Werke. Bd. I - IV. Leipzig 1885 - 1887. Neudruck Wiesbaden 1967

[Müller 1910] Müller, E. Die verschiedenen Koordinatensysteme. 1910 In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Leipzig 1898 - 1934

[Müller 2004] Müller, Falk. Gasentladungsforschung im 19. Jahrhundert. Berlin 2004

[Murray] Murray, Heather. Plücker's Geometrical Models. Preprint

[NDB] Neue Deutsche Biographie. Historische Kommission der Bayrischen Akademie der Wissenschaften. Berlin ab 1953
URL http://www.ndb.badw-muenchen.de/ [14.11.14]

[Paul 1980] Paul, Matthias. Gaspard Monges „Geometrie descriptive“ und die Ecole Polytechnique – Eine Fallstudie über den Zusammenhang von Wissenschafts- und Bildungsprozess. Bielefeld 1980

[Peschl 1970] Peschl, Ernst. Rudolf Lipschitz 1832 - 1903. In: [RFWU 1970] S. 17 - 24

[Peters 1861] Peters, Christian August Friedrich. Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Bd. 3. Altona 1861. Nachdruck Hildesheim - New York 1975.

[Plücker 1823] Plücker, Julius. Generalem analyseos applicationem ad ea quae geometriae altioris et mechanicae basis et fundamenta sunt e serie Tayloria deducit. Dissertation Marburg 1823. Bonn 1824. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 1 - 42

[Plücker 1826a] Plücker, Julius. Théorèmes et problèmes sur les contacts des sections coniques. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 43 - 59. Ursprünglich veröffentlicht in Gergonne's Annales de Mathématiques, Bd. 17, S. 37 - 59. 1826

[Plücker 1826b] Plücker, Julius. Recherche graphique du cercle osculateur pour les lignes du second ordre. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 60 - 62. Ursprünglich veröffentlicht in Gergonne's Annales de Mathématiques, Bd. 17, S. 69 - 72. 1826

[Plücker 1828] Plücker, Julius. Analytisch-geometrische Entwicklungen (Bd. 1). Essen 1828

[Plücker 1830a] Plücker, Julius. Über ein neues Coordinatensystem. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 124 - 158. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 5, S. 1 - 36. Berlin 1830 (1829)

[Plücker 1830b] Plücker, Julius. Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 159 - 177. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 5, S. 268 - 286. Berlin 1830 (6. August 1829)

[Plücker 1830c] Plücker, Julius. Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 178 - 219. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 6, S. 107 - 146. Berlin 1830 (October 1829)

[Plücker 1831] Plücker, Julius. Analytisch-geometrische Entwicklungen (Bd. 2). Essen 1831

[Plücker 1832a] Plücker, Julius. Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 224 - 234. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 9, S. 124 - 134. Berlin 1832 (18. Février 1831)

[Plücker 1833a] Plücker, Julius. Über solche Punkte, die bei Curven einer höheren Ordnung als der zweiten den Brennpunkten der Kegelschnitte entsprechen. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 290 - 297. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 10, S. 84 - 91. Berlin 1833 (März 32)

[Plücker 1833b] Plücker, Julius. Analytisch-geometrische Aphorismen I. Einige Beispiele von der Anwendung allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 235 - 245. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 10, S. 217 - 226. Berlin 1833 (1. August 1831)

[Plücker 1833c] Plücker, Julius. Analytisch-geometrische Aphorismen II. Einige Sätze über Kreise und eine neue Construction des Apollonischen Problems der Tactionen. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 246 - 252. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 10, S. 293 - 299. Berlin 1833 (1. August 1831)

[Plücker 1833d] Plücker, Julius. Rezension zur „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie“ von Ludwig Immanuel Magnus. In: Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik Bd. 2 S. 721 - 732. Berlin 1833

[Plücker 1834a] Plücker, Julius. Analytisch-geometrische Aphorismen III. Uber die Anwendung allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten zum Beweise geometrischer Sätze. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 253 - 260. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 11, S. 26 - 32. Berlin 1834 (im August 1831)

[Plücker 1834b] Plücker, Julius. Analytisch-geometrische Aphorismen IV. Das Malfatti'sche Problem. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 261 - 276. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 11, S. 117 - 129. Berlin 1834 (October 1831)

[Plücker 1834c] Plücker, Julius. Analytisch-geometrische Aphorismen V. Ueber ein neues Uebertragungsprincip. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 277 - 283. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 11, S. 219 - 225. Berlin 1834 (Ende October 1831)

[Plücker 1834d] Plücker, Julius. Analytisch-geometrische Aphorismen VI. Ueber die Steiner'sche Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 284 - 289. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 11, S. 356 - 360. Berlin 1834 (Ende October 1831)

[Plücker 1835] Plücker, Julius. System der analytischen Geometrie auf neue Betrachtungsweisen gegründet und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend. Berlin 1835

[Plücker 1839] Plücker, Julius. Theorie der algebraischen Curven, gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie. Bonn 1839

[Plücker 1839a] Plücker, Julius. Discussion de la forme générale des ondes lumineuses. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 339 - 386. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 19, S. 1 - 44 und S. 91 - 92. Berlin 1839 (April et Mai 1838)

[Plücker 1846] Plücker, Julius. System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe enthaltend. Düsseldorf 1846 (2. Auflage 1852)

[Plücker 1847a] Plücker, Julius. Über Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 404 - 412. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 34, S. 329 - 336. Berlin 1847 (März 1847)

[Plücker 1847b] Plücker, Julius. Note sur le théoréme de Pascal. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 413 - 416. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 34, S. 337 - 340. Berlin 1847 (Mars 1847)

[Plücker 1847c] Plücker, Julius. Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 417 - 433. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 34, S. 341 - 356. Berlin 1847

[Plücker 1847d] Plücker, Julius. Über eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 434 - 436. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 34, S. 357 - 359. Berlin 1847

[Plücker 1847e] Plücker, Julius. Bemerkung zu der Abhandlung: „Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung". In: [P. Ges. math. Abh.] S. 437 - 455. Ursprünglich veröffentlicht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 34, S. 360 - 376. Berlin 1847 (April 1847)

[Plücker 1847f] Plücker, Julius. Sur la réflexion de la lumiére, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 456 - 461. Ursprünglich veröffentlicht in Crelles Journal, Band 35, S. 100 - 105. Berlin 1847 (au mois de Mars 1847)

[Plücker 1847g] Plücker, Julius. Ueber die Abstossung der optischen Axen der Krystalle durch die Pole der Magnete. In: [P. Ges. phys. Abh.] S. 6 - 27. Ursprünglich veröffentlicht in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 72, S. 315 - 343, 1847

[Plücker 1847h] Plücker, Julius. Ueber das Verhältniss zwischen Magnetismus und Diamagnetismus. In: [P. Ges. phys. Abh.] S. 28 - 34. Ursprünglich veröffentlicht in den Annalen der Physik und Chemie. Bd. 72, S. 343 - 350. 1847

[Plücker 1858] Plücker, Julius. Fortgesetzte Beobachtungen über die elektrische Entladung durch gasverdünnte Räume. In: [P. Ges. phys. Abh.] S. 495 - 507. Ursprünglich veröffentlicht in den Annalen der Physik und Chemie, Bd. 104, S. 113 - 128, 1858

[Plücker 1865a] Plücker, Julius. On a new Geometry of Space. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 462 - 468. Ursprünglich veröffentlicht in den „Proceedings of the Royal Society of London, Band 14, S. 53 - 58. London 1865

[Plücker 1865b] Plücker, Julius. On a new Geometry of Space. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 469 - 545. Ursprünglich veröffentlicht in den „Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Band 155, S. 725 - 791. London 1865

[Plücker 1866] Plücker, Julius. Fundamental Views regarding Mechanics. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 546 - 568. Ursprünglich veröffentlicht in den „Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Bd. 156, S. 361 - 380. London 1866

[Plücker 1867] Plücker, Julius. Géometrie nouvelle de l'espace. In: [P. Ges. math. Abh., S. 570 - 575]. Ursprünglich veröffentlicht in Les Mondes, Revue hebdomaire des sciences, Bd. 13, S. 79 - 84. Paris 1867

[Plücker 1868/69] Plücker, Julius. Neue Geometrie des Raumes. Leipzig 1868, Bd. 1; 1869, Bd.2 (herausgegeben von Felix Klein)

[P. Ges. wiss. Abh.] Julius Plückers gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. 2 Bd. Leipzig 1895

[P. Ges. math. Abh.] Julius Plückers gesammelte mathematische Abhandlungen. In: [P. Ges. wiss. Abh.] Bd. 1

[P. Ges. phys. Abh.] Julius Plückers gesammelte physikalische Abhandlungen. In: [P. Ges. wiss. Abh.] Bd. 2

[Poncelet 1818] Poncelet, Jean - Victor. Questions résolues. In: Annales de mathématiques pures et appliquées 8. S. 201 - 232. 1817 - 1818

[Poncelet 1828a] Poncelet, Jean - Victor. Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 3. S. 213 - 272. Berlin 1828

[Poncelet 1828b] Poncelet, Jean - Victor. Note sur divers articles du Bulletin des Sciences relatifs à la théorie des polaires réciproques, à la dualité des propriétés de situation de l'étendue etc. In: Annales de mathématiques pures et appliquées 18. S. 126 - 142. 1827 - 1828

[Reinhardt 1887] Reinhardt, Curt. Über die Entstehungszeit und den Zusammenhang der wichtigsten Schriften und Abhandlungen von Möbius. In: [Möbius 1885-87], Bd. IV, S. 699 - 728. Leipzig 1887

[Remmert 2010] Remmert, Volker R., Schneider, Ute. Eine Disziplin und ihre Verleger. Disziplinenkultur und Publikationswesen der Mathematik in Deutschland, 1871 - 1949. Bielefeld 2010

[RFWU 1970] Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität zu Bonn. Bonner Gelehrte. Beiträge zur Geschichte der Wissenschaften in Bonn. Bd.9 Mathematik und Naturwissenschaften. Bonn 1970

[Riecke 1895] Riecke, Eduard. Plücker's Physikalische Arbeiten. In: [P. Ges. phys. Abh.] S. XI - XVIII

[Rowe 2013] Rowe, Davis E. Mathematical models as artefacts for research: Felix Klein and the case of Kummer surfaces. In: Mathematische Semesterberichte, Volume 60, Issue 1, S. 1 - 24. Berlin - Heidelberg 2013

[Salmon-Fiedler 1918] Salmon, George. Fiedler, Wilhelm. Dingeldey, Friedrich [Hrsg.]. Analytische Geometrie der Kegelschnitte von George Salmon nach der freien Bearbeitung von Wilhelm Fiedler. 2. Teil. Leipzig, Berlin 1918 (7. Auflage)

[Schminnes 1982] Schminnes, Bernd. Kameralwissenschaften – Bildung – Verwaltungstätikeit. Soziale und kognitive Aspekte des Struktur- und Funktionswandels der preussischen Zentralverwaltung an der Wende zum 19. Jahrhundert. In: [Bekemeier 1982] S. 99-319

[Schoenflies 1895] Schoenflies, Arthur Moritz. Anmerkungen. In: [P. Ges. math. Abh.] S. 591 - 620. Leipzig 1895

[Schoenflies 1903] Schoenflies, Arthur Moritz. Pockels, Friedrich. Bericht über Plückers wissenschaftlichen Nachlass. In: Nachrichten von der (königlichen) Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse. S. 279 - 281. Göttingen 1903

[Schoenflies 1904] Schoenflies, Arthur Moritz. Über Plückers wissenschaftlichen Nachlaß. In: Mathematische Annalen Bd. 58, Heft 3, S. 385 - 403. Leipzig 1904

[Schroeter 1874] Schroeter, H. Die *Steiner*sche Auflösung der *Malfatti*schen Aufgabe. In: Crelles Journal Bd. 77, S. 230 - 244. Berlin 1874

[Schubring 1985] Schubring, Gert. Die Entwicklung des Mathematischen Seminars der Universität Bonn 1864 - 1929. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) 87. Band, Heft 4, S. 139 - 163. Stuttgart 1985

[Schubring 1986] Schubring, Gert. Bibliographie der Schulprogramme in Mathematik und Naturwissenschaften (wiss. Abh.) 1800 - 1875. Bad Salzdetfurth 1986

[Schüler 1990] Schüler, Henning [Hrsg.] Adolph Diesterweg: Wissen im Aufbruch; Siegen 1790 - Berlin 1866. Katalog zur Ausstellung zum 200. Geburtstag. Weinheim 1990

[Seising u.a. 2004] Seising u.a. [Hrsg.]. Form, Zahl, Ordnung. Studien zur Wissenschafts- und Technikgeschichte. Stuttgart 2004

[Servois 1810] Servois, François-Joseph. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume et du problème proposé à la page 126 du même volume. In: Annales de mathématiquea pures et appliquées 1. S. 337 - 341; 1810 - 1811

[Simon 1998] Simon, Norbert [Hrsg.]. Duncker & Humblot. Verlagsbiographie 1798 - 1945. Berlin 1998

[Steiner 1826a] Steiner, Jakob. Einige geometrische Sätze. In: Crelles Journal, Bd. 1, S. 38 - 52. Berlin 1826

[Steiner 1826b] Steiner, Jakob. Einige geometrische Betrachtungen/Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen. In: Crelles Journal, Bd. 1, S. 161 - 184 und 252 - 288. Berlin 1826

[Strutz 1963] Strutz, Edmund. Die Ahnentafeln der Elberfelder Bürgermeister und Stadtrichter von 1708-1808. Neustadt 1963 (2. Auflage)

[Stubbs 1843] Stubbs, John William. On the application of a new Method to the Geometry of Curves and Curve Surfaces. In: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science, 3. Serie, Vol. 23, S. 338 - 347. London 1843

[Thomas 1984] Bulmer-Thomas, Ivor. Guldin's Theorem – Or Pappus's? In: Isis, Vol. 75, No. 2 (Jun. 1984) S. 348 - 352. Chicago 1984

[Tobies 1998] Tobies, Renate; Volkert, Klaus. Mathematik auf den Versamlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte 1843 - 1890. Stuttgart 1998

[Toepke 1904] Toepke, Gustav. Die Matrikel der Universität Heidelberg. Bd. V. Von 1807 - 1846. Heidelberg 1904
URL: http://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/matrikel1807 [14.11.14]

[Toeplitz 1933] London, Franz; Toeplitz, Otto. Das mathematische Seminar an der Universität Bonn. In: [GRFWU 1933] S. 324 - 334

[Tropfke 1903] Tropfke, Johannes. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Bd.2. Leipzig 1903

[Warnecke 2004] Warnecke, Gerhard. Julius Plücker (1801 - 1868) in der philosophischen Fakultät der Universität Halle (07.11.1833 - 25.09.1835). In: Reports on Didactics and History of Mathematics. No. 03 (2004)

[Warnecke 2008] Warnecke, Gerhard. Schulen und Schulverläufe bei Julius Plücker (1801-1868) und seinem Studenten August Beer (1825 - 1863) in einer Gesellschaft im Prozess grundlegender Änderungen, Teile I und II. In: Reports on History of Mathematics. No. 02 und 03 (2008)

[Wiese 1864] Wiese, L. Das höhere Schulwesen in Preußen. Historisch-statistische Darstellung, im Auftrage des Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal- Angelegenheiten. Bd.1 Berlin 1864

[Wilberg 1838] Wilberg, Johann Friedrich. Erinnerungen aus meinem Leben, nebst Bemerkungen über Erziehung und Unterricht und verwandte Gegenstände. Elberfeld 1838

[Wittmütz 1990] Wittmütz, Volkmar. Johann Friedrich Wilberg, der „Meister an dem Rhein“. In: [Schüler 1990] S. 168 - 175

[Wußing 1989] Wußing, Hans; Arnold, Wolfgang. Biographien bedeutender Mathematiker. Köln 1989

[Zander 2001] Zander, Erika; Bätz, Jörg. Der Alte Friedhof in Bonn: Kunst und Geschichte(n). Bonn 2001

[Zalgaller/Los' 1994] Zalgaller, V.A. Los', G.A. The solution of Malfatti's Problem. In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 72, No.4, New York 1994, S. 3163 - 3177

[Ziegler 1985] Ziegler, Renatus. Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert. Eine historisch-systematische Untersuchtung von Möbius und Plücker bis zu Klein und Lindemann. Stuttgart 1985

[Zindler 1902] Zindler, Konrad. Liniengeometrie mt Anwendungen. Erster Teil. 1902 Neudruck: Berlin und Leipzig 1928

Quellen

London Mathematical Society arcive

[LMSA P-HL] Plücker-Hirst Letters. Vier Briefe von Plücker an Thomas Archer Hirst, datiert auf September 1866, 17th of October 1866, 11th of November 1866 und 21st of October 1867 in folder Plücker, Julius in archive of Hirst Letters im London Mathematical Society archive. Tanskripte unter: URL: http://www.lms.ac.uk/sites/lms.ac.uk/files/library/Plucker letters to Hirst.pdf S. 1 - 6 [14.11.14]

Archive of the National Research Council of Canada, Ottawa

[NRC PC] Plücker Collection, 6 Volums

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Abteilung für Handschriften und seltene Drucke

[NSuUB CodMsP] Cod. Ms. Plücker 1-5. Nachlass von Julius Plücker in 5 Mappen

[NSuUB CodMsP1] Cod. Ms. Plücker 1. Der geometrische Nachlass Plückers, Convolute A - K. In: [NSuUB CodMsP]

[NSuUB CodMsP5] Cod. Ms. Plücker 5. Varia aus dem Plücker'schen Nachlass, Convolute A - D. In: [NSuUB CodMsP]

[NSuUB FK3C] F. Klein 3C. Briefe von Plücker an Felix Klein. Bl. 58 - 70

[NSuUB 4CodMsP] 4 Cod. Ms. Philos. 27 n. Lateinische Rede von Plücker 1829

Staatsbibliothek zu Berlin – Preußischer Kulturbesitz, Handschriftenabteilung

[SBPK NL141] NL 141 (Slg. Adam), Kps. 29: Plücker, Julius. Bl. 1 - 5

[SBPK Slg.D] Slg. Darmst. F 1e 1860: Plücker, Julius. Bl. 1 - 17

Universitätsarchiv der Humboldt-Universität zu Berlin

[UABe PF] Bestand Philosphische Fakultät Nr. 1455, Bl. 121, 123, 134

[UABe RS A] Bestand Rektoren und Senat, Abgangszeugnisse.

[UABe UK] Bestand Universitätskurator Nr. 321, Bl. 72, 73, 106

[UABe VV] Verzeichnis der Vorlesungen. Signatur: PA 6466-1 (URL: http://digi-alt.ub.hu-berlin.de/viewer/resolver?urn=urn:nbn:de:kobv:11-D-991215 [14.11.14])

Universitätsarchiv Bonn

[UABo Matr] Matrikel der Universität Bonn

[UABo PF-PA105] PF-PA 105. Personalakte der philosophischen Fakultät betreffend Prof. Dr. Diesterweg.

[UABo PF-PA416] PF-PA 416. Personalakte der philosophischen Fakultät betreffend Prof. Dr. Plücker.

[UABo PSV] Amtliches Verzeichnis des Personals und der Studierenden auf der Königlichen Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

[UABo VV] Verzeichnis der Vorlesungen.

Universitätsarchiv Heidelberg

[UAH VV] Anzeige der Vorlesungen, welche im Winterhalbenjahre 1815/1816 bis Sommerhalbenjahre 1820 auf der Großherzoglich Badischen Ruprecht-Karolinischen Universität zu Heidelberg gehalten werden sollen. Heidelberg URL: http://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/VV1815WSbis1820SS [14.11.14]

Schulprogramme

Da sich die Schulprogramme am leichtesten über die darin veröffentlichten Abhandlungen wiederfinden lassen, werden diese jeweils mit angegeben, auch dort, wo lediglich die eigentlichen Schulnachrichten verwendet wurden.

[SP Berlin 1832] Schulprogramm des Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums Berlin 1832. S. 20 - 38 (Abhandlung: Walter. De Romanensibus Helvetiae et Teriolis gentibus)

[SP Berlin 1833] Schulprogramm des Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums Berlin 1833. S. 34 - 50 (Abhandlung: Trahndorff. Über den Orestes der alten Tragödie und den Hamlet des Shakespeare)

[SP Berlin 1834] Schulprogramm des Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums Berlin 1834. S. 43 - 56 (Abhandlung: Heydemann. Die Kategorieen des Aristoteles, übersetzt und erläutert)

[SP D.dorf 1816] Schulprogramm des Königl. Gymnasiums zu Düsseldorf 1816. S. 27 - 38 (Abhandlung: Kortüm. Demosthenes über die Freiheit der Rhodier. Versuch einer Übersetzung der Reden des Demosthenes.)

[SP D.dorf 1817] Schulprogramm des Königl. Gymnasiums zu Düsseldorf 1817. S. 25ff (Abhandlung: Kortüm. Die öffentliche Schule als Erziehungsanstalt und ihr Verhältnis zur Familie.)

[SP D.dorf 1818] Schulprogramm des Königl. Gymnasiums zu Düsseldorf 1818. S. 31 - 44 (Abhandlung: Kortüm. Anordnungen und Wünsche der öffentlichen Schulen für die Beförderung des Fleisses ihrer Zöglinge.)

[SP D.dorf 1819] Schulprogramm des Königl. Gymnasiums zu Düsseldorf 1819. S. 57 - 68 (Abhandlung: Kortüm. Nachricht über das Gymnasium in Düsseldorf im sechzehnten Jahrhundert)

[SP D.dorf 1825] Schulprogramm des Königl. Gymnasiums zu Düsseldorf 1825. Abhandlung: Brewer. Über den Nutzen der Mathematik als allgemeines Bildungsmittel.

[SP Koblenz 1866] Schulprogramm der Gewerbeschule Koblenz 1866. Abhandlung: Dronke. Über die Koordinaten einer Geraden im Raume.