

**Formfaktorzugang
zu thermischen Korrelationsfunktionen
der Heisenbergkette**

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
(Fachgruppe Physik)
der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

Maxime Dugave

November 2015

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20160107-153109-8

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3A468-20160107-153109-8>]

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Berechnung von Korrelationsfunktionen	7
2.1	Quantentransfermatrix und algebraischer Bethe-Ansatz	7
2.2	Formfaktorentwicklung von thermischen Korrelationsfunktionen	11
2.3	Grundzustandskorrelationsfunktionen der endlichen Kette	13
3	Formfaktoren der Quantentransfermatrix	15
3.1	Erzeugende Funktion	15
3.2	Transversale Korrelatoren	18
3.3	Allgemeine Struktur	21
4	Tiefemperaturanalyse in der masselosen Phase	23
4.1	Glätten der Konturen	24
4.2	Tiefemperaturanalyse der nichtlinearen Integralgleichungen	26
4.3	Tiefemperaturanalyse der Eigenwerte und des universellen Anteils	34
4.4	Tiefemperaturanalyse der Determinanten und des faktorisierten Anteils	36
4.5	Summation	39
4.6	Zusammenfassung des longitudinalen Falls	40
4.7	Numerische Berechnung der Amplituden	42
4.8	Übertragung der Ergebnisse auf den Bereich $\Delta > 1$ und $h_\ell < h < h_u$	47
5	Grundzustandskorrelationsfunktionen in der massiven Phase	51
5.1	Anregungen des Hamiltonoperators	52
5.2	Formfaktoren der gewöhnlichen Transfermatrix	58
5.3	Die Formfaktorreihe	61
5.4	Vergleich mit dem Vertex-Operator-Zugang	64
5.5	Bestimmung der Abstandasymptotik	67
5.6	Dynamische Korrelationsfunktionen	69
6	Tiefemperaturanalyse in der massiven Phase	79
6.1	Die nichtlineare Integralgleichung in der massiven Phase	79
6.2	Tiefemperaturanalyse der nichtlinearen Integralgleichung	84
6.3	Higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen für endliche Magnetfelder	89
6.4	Higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen für verschwindendes Magnetfeld	94
6.5	Tiefemperaturanalyse der Eigenwerte	96
6.6	Tiefemperaturanalyse der Amplituden	100
6.7	Die Formfaktorreihe	108
6.8	Diskussion und numerische Auswertung	109

6.9	Der isotrope Limes	114
7	Zusammenfassung und Ausblick	119
	Anhang	123
A	Amplituden der erzeugenden Funktion	125
A.1	Herleitung der Amplituden	125
A.2	Alternative Darstellung der Determinanten	127
A.3	Details zur Durchführung des Trotterlimes	130
A.4	Die „bekleidete Ladung“	131
B	Amplituden der transversalen Korrelatoren	135
B.1	Der Formfaktor $F_+(\xi)$	135
B.2	Der Formfaktor $F_-(\xi)$	137
B.3	Eigenschaften linearer Integralgleichungen	144
B.4	Der Formfaktor $F_{++}(\xi_1, \xi_2)$	146
C	Ergänzungen zur Tieftemperaturanalyse in der masselosen Phase	151
C.1	Glätten der Kontur im universellen Anteil	151
C.2	Sommerfeld-Lemma	152
C.3	Abschätzung der singulären Integrale	153
C.4	Beziehung zwischen Fermi-Kante und Magnetfeld	158
D	Spezielle Funktionen	161
D.1	Elliptische Funktionen	161
D.2	Der bekleidete Impuls	161
D.3	Die bekleidete Energie	162
D.4	Die bekleidete Phase	163
D.5	Die Resolvente	163
E	Ergänzungen zur Tieftemperaturanalyse in der massiven Phase	165
	Literaturverzeichnis	167

1 Einleitung

Ziel der theoretischen Physik ist, aus mikroskopischen Zusammenhängen experimentell überprüf-
bare Aussagen abzuleiten. So berechnet man beispielsweise in der Quantenfeldtheorie, ausgehend
von den fundamentalen Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen, Wirkungsquerschnit-
te, welche in Streuexperimenten gemessen werden können. Ein Beispiel aus der Festkörperphysik
ist die Berechnung des elektrischen Widerstands oder ähnlicher Transportgrößen eines gegebenen
Materials auf Grundlage seiner Zusammensetzung. Im Rahmen der Theorie der linearen Antwort
sind derartige Messgrößen durch die Korrelationsfunktionen des Modells gegeben. In der Praxis ist
die Berechnung von Korrelationsfunktionen selbst in den einfachsten wechselwirkenden Systemen
enorm aufwändig, da der Hilbertraum eines N -Teilchen-Problems exponentiell mit der Anzahl N
der Teilchen anwächst. Eine naheliegende Strategie ist, die Modelle soweit zu vereinfachen, dass sie
eine exakte Lösung gestatten. Zu den einfachsten Näherungen zählen effektive Einteilchenmodelle
wie das Bändermodell der Festkörperphysik, mit welchem viele grundlegende Eigenschaften eines
Festkörpers verstanden werden können. Derartige Näherungen sind jedoch limitiert und können
viele kollektive Phänomene in stark korrelierten Systemen nicht erklären.

In der heutigen Forschung werden hauptsächlich zwei Ansätze (oder eine Kombination beider)
bei der Untersuchung von Vielteilchenproblemen verfolgt. Dies sind zum einen die Berechnung
mittels Störungstheorie und zum anderen der Einsatz von Großrechnern und ausgefeilten Algo-
rithmen. Beide Methoden haben jedoch einen begrenzten Gültigkeitsbereich und versagen typi-
scherweise in eindimensionalen Modellen [54].

Eine weitere Möglichkeit ist, nach Vielteilchensystemen zu suchen, deren Eigenschaften exakt
berechenbar sind. Auf den ersten Blick mag dies eine starke Einschränkung sein, allerdings ist zu
erwarten, dass das Studium exakt lösbarer („integrabler“) Modelle ein besseres Verständnis generi-
scher wechselwirkender Vielteilchensysteme ermöglicht. Diese Annahme wird gestützt durch den
Befund, dass sich Systeme der statistischen Mechanik in Universalitätsklassen einteilen lassen (vgl.
z.B. [136]). Modelle der gleichen Klasse können mikroskopisch sehr unterschiedlich sein, aber ähn-
liches makroskopisches Verhalten in der Nähe eines kritischen Punktes zeigen.

Von besonderem Interesse sind integrable Modelle, die mit Lösungen der Yang-Baxter-Gleichung
zusammenhängen. Zu dieser Klasse gehört auch das eindimensionale anisotrope Spin-1/2 Heisen-
bergmodell (XXZ-Kette), welches in dieser Arbeit untersucht wird. Es beschreibt die Physik ma-
gnetischer Isolatoren, in denen eindimensionale Unterstrukturen existieren. Die magnetischen Mo-
mente haben Spin 1/2, sind lokalisiert und wechselwirken über eine Austauschwechselwirkung mit
ihren nächsten Nachbarn. Eine Übersicht über das Heisenberg-Modell und verwandte Modelle wie
das Hubbard-Modell sowie ihre Anwendungen in der Festkörperphysik findet sich in den Büchern
[46] und [34]. Der Hamiltonoperator der XXZ-Kette ist gegeben durch

$$H_{xxz} = J \sum_{j=1}^L (\sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y + \Delta (\sigma_{j-1}^z \sigma_j^z - 1)), \quad (1.1)$$

wobei periodische Randbedingungen vorausgesetzt werden. Hierbei ist σ_j^α ($\alpha = x, y, z$) eine auf den
Gitterplatz j wirkende Paulimatrix, L die Anzahl der Gitterplätze, $J > 0$ fixiert die Energieskala und

Δ ist der (reelle) Anisotropieparameter. Es ist möglich, ein in z -Richtung zeigendes Magnetfeld h einzuführen ohne die Integrabilität zu brechen. Der Hamiltonoperator ist dann um einen Zeeman-Term zu ergänzen,

$$H = H_{xxz} - \frac{h}{2} \sum_{j=1}^L \sigma_j^z. \quad (1.2)$$

Die XXZ-Kette ist ein Prototyp eines integrablen Modells und wird seit langer Zeit intensiv studiert. Zuerst gelang es Hans Bethe mit dem Koordinaten-Bethe-Ansatz das Spektrum und die Eigenvektoren des isotropen Heisenberg-Modells ($\Delta = 1$) exakt zu bestimmen [10]. Weitere wichtige Schritte zum besseren Verständnis des Modells waren die Entdeckung der Verbindung zu Vertexmodellen der statistischen Physik (vgl. z.B. [8]) und die Abstraktion der Methode des Bethe-Ansatzes („algebraischer“ Bethe-Ansatz, vgl. z.B. [89]).

Erste Ergebnisse zu Grundzustandskorrelationsfunktionen wurden mit Hilfe des Vertexoperator-Zugangs erzielt [63, 64]. Diese Methode benutzt die Quantengruppensymmetrie des XXZ-Modells und ist gültig für den Fall $h = 0$ und $\Delta > 1$. Sie lieferte erstmals explizite Darstellungen von Korrelationsfunktionen und Matrixelementen lokaler Operatoren durch Vielfachintegrale. Diese Resultate wurden anschließend genutzt, um den Zwei- und Vier-Spinon-Beitrag (im isotropen Fall) zum dynamischen Strukturfaktor zu bestimmen [23, 29]. Kürzlich konnten diese theoretischen Vorhersagen in Neutronenstreuexperimenten experimentell nachgewiesen werden [103]. Durch die aus dem Vertex-Operator-Zugang gewonnene Erkenntnis, dass die Korrelationsfunktionen bestimmte Differenzgleichungen („qKZ-Gleichungen“) erfüllen, konnte schließlich auch eine Vielfachintegraldarstellung für die Korrelatoren im Fall $h = 0$ und $|\Delta| \leq 1$ gefunden werden [65].

Ein weiterer Zugang beruht auf der oben erwähnten Methode des algebraischen Bethe-Ansatzes. In diesem werden die lokalen Operatoren durch die (nicht-lokalen) Operatoren der Monodromiematrix ausgedrückt [78], welche den Vertauschungsrelationen der Yang-Baxter-Algebra genügen und deren Wirkung auf den Grundzustand bekannt ist. Die resultierenden Skalarprodukte können mit der Formel von Slavnov [119] berechnet werden. Nach Aufsummation aller Beiträge erhält man Vielfachintegraldarstellungen für die Grundzustandskorrelationsfunktionen für beliebigen Anisotropieparameter und Magnetfeld [79].

Die Methode konnte schließlich auf den Fall endlicher Temperatur $T > 0$ erweitert werden [56]. Zentrales Objekt in dieser Arbeit ist die Quantentransfermatrix, die schon zur effizienten Berechnung thermodynamischer Größen benutzt wurde [81].

In beiden Fällen sind die Korrelationsfunktionen eines Operators, der auf n Plätzen nicht-trivial wirkt, durch ein n -faches Vielfachintegral gegeben. Die Berechnung der Abstandsasymptotik aus dieser Darstellung ist folglich ein schwieriges Problem, welches bisher nur für $T = 0$ mit eigens dafür entwickelten Methoden der asymptotischen Analyse gelöst werden konnte [72].

Die Beobachtung, dass sich die Vielfachintegrale zu Produkten aus einfachen Integralen reduzieren lassen [21, 19, 20], führte schließlich zur Entdeckung der in den Arbeiten [17, 66] bewiesenen Eigenschaft der „Faktorierbarkeit“ der Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette. Demnach lassen sich alle Korrelationsfunktionen als Polynome in zwei transzendenten Funktionen (und ihren Ableitungen) ausdrücken. Diese beiden Funktionen werden „physikalischer Anteil“ genannt, da sie die Abhängigkeit von den physikalischen Parametern wie Temperatur und Magnetfeld beinhalten. Für sie konnte in [13] eine effiziente Beschreibung durch nichtlineare Integralgleichungen gefunden werden. Dies erlaubt es beispielsweise Zweipunktfunktionen wie $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$ für kleine Abstände ($m \lesssim 6$) mit hoher Genauigkeit zu berechnen [113, 18, 131]. In diesem Sinne sind alle kurzreichweitigen statischen Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette bekannt, wodurch sich viele interessante

Anwendungen ergeben, wie etwa die Berechnung von Linienbreite und Verschiebung von Resonanzpeaks in ESR-Experimenten [25].

Die Methode ist allerdings bislang auf kleine Abstände beschränkt, da die Komplexität des Polynoms („algebraischer Anteil“) sehr schnell mit dem Abstand anwächst. Die Frage, ob sich aus dem Zugang der Faktorisierung die Asymptotik bestimmen lässt, ist bislang ein offenes Problem.

Eine weiterer Zugang ist die Formfaktorentwicklung, in der man die Korrelationsfunktionen in ihrer Spektral- bzw. Lehmann-Darstellung betrachtet. Dieser Zugang hat sich in der Vergangenheit vor allem im Zusammenhang mit massiven integrablen Quantenfeldtheorien wie dem Sine-Gordon-Modell als fruchtbar erwiesen [68, 71, 120]. In massiven Theorien genügen im Allgemeinen einige Terme dieser Reihe, um eine gute Näherung für die Korrelationsfunktionen bei großen Abständen zu erhalten. In masselosen Theorien scheint dieser Zugang zunächst ungeeignet, da unendlich viele Terme berücksichtigt werden müssen. Nichtsdestotrotz ist es kürzlich gelungen, für die XXZ-Kette im kritischen Bereich die Asymptotik aus der Formfaktorentwicklung zu berechnen [75]. Grundlegend für diese Arbeit war die Kenntnis der Formfaktoren [73, 76] sowie eine aus der Darstellungstheorie der unendlichen symmetrischen Gruppe stammende Summenformel [111], um die unendliche Formfaktorreihe aufzusummieren.

In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der Formfaktorentwicklung in der Hinsicht abgewandelt, dass die Spektraldarstellung der thermischen Korrelationsfunktionen bezüglich der Eigenzustände der Quantentransfermatrix betrachtet wird. In dieser Darstellung nehmen die Zweipunktfunktionen die Gestalt

$$\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_{m+1} \rangle = \sum_n A_n e^{-m/\xi_n} \quad (1.3)$$

an. Die Größen ξ_n werden Korrelationslängen genannt und sind durch das Verhältnis des führenden und eines nächst-führenden Eigenwertes der Quantentransfermatrix gegeben. Für Temperaturen $T > 0$ ist der führende Eigenwert durch eine Lücke vom restlichen Spektrum getrennt, wodurch die Korrelationen exponentiell zerfallen. Die Amplituden A_n sind durch Produkte von zwei Matrixelementen („Formfaktoren“) von Operatoren der Monodromiematrix gegeben. Man erkennt unmittelbar, dass die Terme mit der betragsgrößten Korrelationslänge das führende Verhalten für $m \rightarrow \infty$ liefern; die Formfaktorentwicklung (1.3) bestimmt also in natürlicher Weise die Asymptotik für große Abstände¹. Der Formfaktorzugang ist somit komplementär zur Methode der Faktorisierung. Für das XX-Modell ($\Delta = 0$), welches äquivalent zu freien Fermionen ist, sind die Amplituden und Korrelationslängen für die longitudinalen Korrelatoren bekannt [58]. Ein Vergleich mit dem exakten Resultat [94, 6] zeigt, dass die führenden Terme der Formfaktorreihe für mittlere Temperaturen ($T \approx J$) bereits für kleine Abstände ($m \gtrsim 5$) eine sehr gute Näherung darstellen (vgl. Kapitel 1 in [39]).

Dies legt nahe, dass eine Kombination der Formfaktormethode und des Faktorisierungszugangs die Berechnung der Korrelationsfunktionen für beliebige Abstände m ermöglicht.

Aus Gleichung (1.3) ist ersichtlich, dass jeder Term der Formfaktorentwicklung durch eine Amplitude und eine Korrelationslänge charakterisiert ist. Während die Korrelationslängen bereits ausführlich numerisch und analytisch untersucht wurden [49, 80, 85, 112], ist wenig über die Amplituden bekannt. Bislang wurde lediglich eine numerische Studie für kleine Trotterzahlen durchgeführt [49] sowie die Amplituden für die longitudinalen Korrelatoren im wechselwirkungsfreien Fall $\Delta = 0$ berechnet [58].

¹Zu beachten ist, dass die obige Argumentation nicht mehr im Limes $T \rightarrow 0$ gilt, da dann in (1.3) sowohl im masselosen als auch im massiven Bereich unendlich viele Terme berücksichtigt werden müssen.

Die Hauptschwierigkeit bei der exakten Berechnung der Amplituden ist technischer Art. So gibt es seit längerem kompakte Ausdrücke für die Formfaktoren durch Determinanten [119]; diese sind jedoch zunächst ungeeignet, um den Trotterlimes (vergleichbar mit dem Kontinuumsimes bei einem Pfadintegral) durchzuführen.

Erstes Ziel der Arbeit ist somit, Ausdrücke für die Amplituden der longitudinalen und transversalen thermischen Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette zu finden, welche es erlauben, den Trotterlimes durchzuführen². Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit ist das Tieftemperaturverhalten der Formfaktoren. Dieses ist von besonderem Interesse, da das XXZ-Modell bei $T = 0$ für geeignete Werte von Δ und h ein quantenkritisches Modell darstellt. Dies bedeutet, dass bei $T = 0$ durch Quantenfluktuationen induzierte Phasenübergänge auftreten³. Der Teil des Phasendiagramms, dessen Grundzustand nichttriviale Korrelationen zeigt, ist in einen masselosen und einen massiven Bereich unterteilt. Im masselosen Bereich gibt es Vorhersagen der konformen Feldtheorie und der Luttinger-Tomonaga-Flüssigkeitstheorie, welche in dieser Arbeit mit exakten Methoden überprüft werden können. Im massiven Bereich sind die Korrelatoren hingegen nicht durch konforme Invarianz eingeschränkt. Allerdings besteht in diesem Fall die Möglichkeit, mit den Ergebnissen des Vertex-Operator-Zugangs zu vergleichen. Die andere Möglichkeit Korrelationsfunktionen bei $T = 0$ zu studieren, welche in dieser Arbeit verfolgt wird, ist der Zugang über die gewöhnliche Transfermatrix. Bei dieser Methode wird direkt die Formfaktorentwicklung für die Grundzustandskorrelatoren (bei endlicher Kettenlänge) berechnet, in welcher anschließend der thermodynamische Limes durchgeführt werden muss. Eine interessante Frage ist, ob die verschiedenen Zugänge identische Ergebnisse für die Grundzustandskorrelationsfunktionen ergeben, oder ob eine bestimmte Methode eine besonders nützliche Darstellung liefert.

Weiterhin erlaubt die Verwendung der gewöhnlichen Transfermatrix den Zugang zu dynamischen Korrelationsfunktionen, da diese dieselben Eigenvektoren wie der Hamiltonoperator besitzt. Diese sind von besonderem Interesse, da sie seit Kurzem in Experimenten mit kalten Gasen in optischen Fallen gemessen werden können [5, 118, 53, 59].

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 wird zunächst die Berechnung von thermischen Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette mit Hilfe der Quantentransfermatrix und des algebraischen Bethe-Ansatzes erläutert. Weiterhin wird die Methode der Formfaktorentwicklung eingeführt.

Anschließend werden in Kapitel 3 Ausdrücke für die Formfaktoren der Quantentransfermatrix vorgestellt, welche die Asymptotik der longitudinalen und transversalen Korrelatoren bei endlicher Temperatur bestimmen. Darüber hinaus werden Vermutungen zur allgemeinen Struktur der Amplituden präsentiert.

In Kapitel 4 werden die im vorhergehenden Kapitel 3 erhaltenen Ergebnisse für die Amplituden im Tieftemperaturimes untersucht. Anschließend wird mit den daraus folgenden Ausdrücken die Formfaktorreihe aufsummiert und die Korrelatoren mit den Vorhersagen der konformen Feldtheorie verglichen. Weiterhin wird erläutert, wie sich die Amplituden numerisch berechnen lassen.

²Dieses Ziel wurde teilweise schon in [39] erreicht, sodass es in Kapitel 3 Überlappungen mit [39] gibt. In dieser Arbeit neu sind symmetrische Ausdrücke für die transversalen Amplituden (sodass die allgemeine Struktur der Formfaktoren transparent wird) sowie sämtliche Ergebnisse der restlichen Kapitel.

³Phasenübergänge bei endlicher Temperatur sind für die XXZ-Kette mit Hamiltonoperator (1.2) bekanntlich nach dem Mermin-Wagner-Theorem [102] ausgeschlossen.

Als Einschub werden in Kapitel 5 die Grundzustandskorrelationsfunktionen in der massiven Phase mit Hilfe der gewöhnlichen Transfermatrix studiert und die Formfaktorreihe mit den Ergebnissen des Vertex-Operator-Zugangs verglichen. Darüber hinaus wird die Asymptotik der dynamischen Korrelationsfunktionen für große Abstände und Zeiten berechnet.

Schließlich wird in Kapitel 6 die Tieftemperaturanalyse in der massiven Phase durchgeführt. Zunächst wird das Spektrum der Quantentransfermatrix für tiefe Temperaturen in den Fällen $h > 0$ und $h = 0$ analysiert. Anschließend werden die Amplituden explizit berechnet. Die Formfaktorreihe ergibt schließlich eine Darstellung der Korrelatoren, welche numerisch ausgewertet werden kann. Außerdem wird die Beziehung zum Vertex-Operator-Zugang bzw. den Ergebnissen aus Kapitel 5 diskutiert.

Abschließend werden in Kapitel 7 die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein Überblick über offene Fragen gegeben.

Zugunsten einer besseren Lesbarkeit der Arbeit sind in den einzelnen Kapiteln im Wesentlichen Ergebnisse präsentiert und die teils langen und technischen Rechnungen in den Anhang verlagert.

Publikationen im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit wurden in den Artikeln [40, 41, 42] (Kapitel 3 und 4), [43, 45] (Kapitel 5) sowie [44] (Kapitel 6) veröffentlicht. Die Ergebnisse der Abschnitte 6.6-6.9 sind bislang unveröffentlicht.

2 Berechnung von Korrelationsfunktionen

In diesem Kapitel wird erläutert, wie thermische Korrelationsfunktionen mit Hilfe der Quantentransfermatrix und dem algebraischen Bethe-Ansatz berechnet werden können. Außerdem wird die Formfaktorentwicklung als Zugang zur Abstandasymptotik von Korrelationsfunktionen eingeführt.

2.1 Quantentransfermatrix und algebraischer Bethe-Ansatz

Das Ziel ist die Berechnung von thermischen Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette im thermodynamischen Limes, womit im Folgenden Erwartungswerte lokaler Operatoren $\mathcal{O}_m^{(n)}$ im kanonischen Ensemble gemeint sind,

$$\langle \mathcal{O}_j^{(1)} \dots \mathcal{O}_k^{(k-j+1)} \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr}\{e^{-H/T} \mathcal{O}_j^{(1)} \dots \mathcal{O}_k^{(k-j+1)}\}}{\text{Tr}\{e^{-H/T}\}}. \quad (2.1)$$

Hierbei ist T die Temperatur und der Hamiltonoperator H durch Gleichung (1.2) gegeben. Grundlage der Integrität der XXZ-Kette ist die R-Matrix

$$R(\lambda, \mu) = R(\lambda - \mu) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & b(\lambda, \mu) & c(\lambda, \mu) & & \\ & c(\lambda, \mu) & b(\lambda, \mu) & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Dabei ist

$$b(\lambda, \mu) = \frac{\text{sh}(\lambda - \mu)}{\text{sh}(\lambda - \mu + \eta)}, \quad c(\lambda, \mu) = \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\lambda - \mu + \eta)} \quad (2.3)$$

und $\Delta = \text{ch}(\eta)$. Im weiteren Verlauf wird noch die Parametrisierung durch $q = e^\eta$ benötigt.

Die R-Matrix kann auf natürliche Weise als ein auf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ wirkender linearer Operator aufgefasst werden. Hat man mehrere zu \mathbb{C}^2 isomorphe Räume vorliegen, so kennzeichnen zwei Indizes, auf welchen Räumen die R-Matrix nichttrivial wirkt. Die R-Matrix (2.2) erfüllt die Yang-Baxter-Gleichung

$$R_{12}(\lambda - \mu)R_{13}(\lambda)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda - \mu). \quad (2.4)$$

Um die Korrelationsfunktionen (2.1) exakt zu berechnen, muss der statistische Operator $e^{-H/T}$ durch die R-Matrix (2.2) ausgedrückt werden. Hierzu führt man ein Vertexmodell mit Monodromiematrix

$$T_j(\lambda) = q^{\kappa \sigma_j^z} R_{j\bar{N}}(\lambda, \frac{\beta}{N}) R_{\bar{N}-1j}^{t_1}(-\frac{\beta}{N}, \lambda) \dots R_{j\bar{2}}(\lambda, \frac{\beta}{N}) R_{\bar{1}j}^{t_1}(-\frac{\beta}{N}, \lambda) \quad (2.5)$$

ein. Die Parameter β und κ sind definiert durch $\beta = 2J \text{sh}(\eta)/T$ und $\kappa = h/(2\eta T)$. Die Monodromiematrix (2.5) ist eine 2x2-Matrix im Hilfsraum $j \in \{1, \dots, L\}$, deren Einträge Operatoren sind, die auf ein Tensorprodukt aus $N \in 2\mathbb{N}$ (zweidimensionalen) Quantenräumen $\bar{1}, \dots, \bar{N}$ wirken.

Da die R-Matrix (2.2) eine Lösung der Yang-Baxter-Gleichung (2.4) ist, erfüllen die Einträge der Monodromiematrix die Relationen der Yang-Baxter-Algebra,

$$R_{jk}(\lambda, \mu)T_j(\lambda)T_k(\mu) = T_k(\mu)T_j(\lambda)R_{jk}(\lambda, \mu) . \quad (2.6)$$

Mit Hilfe der Monodromiematrix (2.5) kann der statistische Operator als Grenzwert geschrieben werden,

$$e^{-\beta H} = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{N,L} , \quad \rho_{N,L} = \text{Tr}_{\bar{1} \dots \bar{N}} T_1(0) \dots T_L(0) . \quad (2.7)$$

Dieser Grenzwert wird Trotterlimes und N die Trotterzahl genannt. Der Operator $\rho_{N,L}$ kann benutzt werden, um eine Approximation für die Korrelationsfunktionen im thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ zu finden,

$$\langle \mathcal{O}_j^{(1)} \dots \mathcal{O}_k^{(k-j+1)} \rangle_N = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr}_{\bar{1} \dots \bar{N}} \left[t(0)^{j-1} \text{Tr}\{T(0)\mathcal{O}^{(1)}\} \dots \text{Tr}\{T(0)\mathcal{O}^{(k-j+1)}\} t(0)^{L-k} \right]}{\text{Tr}_{\bar{1} \dots \bar{N}} [t(0)^L]} . \quad (2.8)$$

Hierbei wurde die Quantentransfermatrix $t(\lambda) = \text{Tr}\{T(\lambda)\}$ eingeführt. Die Spur ist dabei bezüglich des Hilfsraums zu bilden. Führt man für die Monodromiematrix die Notation

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

ein, so folgt für die Quantentransfermatrix

$$t(\lambda) = \text{Tr}\{T(\lambda)\} = A(\lambda) + D(\lambda) . \quad (2.10)$$

Dieser Operator hat die besondere Eigenschaft, dass das Spektrum (für Spektralparameter $\lambda = 0$) einen einzigen reellen, betragsgrößten Eigenwert $\Lambda_0(0)$ besitzt, welcher auch im Trotterlimes $N \rightarrow \infty$ durch eine Lücke vom restlichen Spektrum getrennt ist [123, 124, 125].

Daraus folgt, dass der Operator $t(0)^L$ in (2.8) für $L \rightarrow \infty$ wie ein Projektor auf den zu $\Lambda_0(0)$ gehörigen („dominanten“) Eigenzustand $|\Psi_0\rangle$ wirkt¹. Damit vereinfacht sich (2.8) zu

$$\langle \mathcal{O}_j^{(1)} \dots \mathcal{O}_k^{(k-j+1)} \rangle_N = \frac{\langle \Psi_0 | \text{Tr}\{T(0)\mathcal{O}^{(1)}\} \dots \text{Tr}\{T(0)\mathcal{O}^{(k-j+1)}\} | \Psi_0 \rangle}{\Lambda_0^{k-j+1}(0) \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} . \quad (2.11)$$

Die thermischen Korrelationsfunktionen sind also im thermodynamischen Limes allein durch den dominanten Zustand charakterisiert. Für die Bestimmung der freien Energiedichte f genügt sogar die Kenntnis des zugehörigen Eigenwertes,

$$f_N = -T \ln \Lambda_0(0) . \quad (2.12)$$

Für die entsprechenden physikalischen Größen muss in (2.11) bzw. (2.12) noch der Trotterlimes $N \rightarrow \infty$ durchgeführt werden.

Die Eigenvektoren der Quantentransfermatrix, und damit insbesondere der dominante Zustand, können mit Hilfe des algebraischen Bethe-Ansatzes konstruiert werden. Dies ist möglich aufgrund

¹Aufgrund der Kommutativität der Quantentransfermatrizen $[t(\lambda), t(\mu)] = 0$ sind die Eigenvektoren unabhängig vom Spektralparameter.

der Existenz eines Pseudovakuums $|0\rangle = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{\otimes N/2}$, auf welches die Operatoren der Monodromiematrix die Wirkung

$$C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad (2.13)$$

$$A(\lambda)|0\rangle = q^\kappa b^{\frac{N}{2}}(-\beta/N, \lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad (2.14)$$

$$D(\lambda)|0\rangle = q^{-\kappa} b^{\frac{N}{2}}(\lambda, \beta/N)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, \quad (2.15)$$

haben. Eigenvektoren der Quantentransfermatrix haben die Form

$$|\Psi_n\rangle = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_M)|0\rangle, \quad (2.16)$$

falls die Bethe-Wurzeln $\{\lambda_j\}_{j=1}^M$ die Bethe-Ansatz-Gleichungen

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \frac{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k - \eta)} \quad (2.17)$$

erfüllen. Das Gleichungssystem (2.17) hat viele Lösungen, die mit dem Index n nummeriert werden. Im generischen Fall ist der Bethe-Ansatz vollständig [129], d.h. alle Eigenzustände sind vom obigen Typ (2.16). Es sei bemerkt, dass der Aspekt der Vollständigkeit nicht wesentlich in dieser Arbeit ist, da die Abstandsasymptotik i.d.R. nur durch eine kleine Teilmenge des Spektrums bestimmt ist.

Der zum Eigenvektor $|\Psi_n\rangle$ gehörige Eigenwert ist gegeben durch

$$\Lambda_n(\lambda) = a(\lambda) \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_j - \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_j)} + d(\lambda) \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_j + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_j)}. \quad (2.18)$$

Ein linker Eigenvektor zu demselben Eigenwert ist gegeben durch

$$\langle \Psi_n | = \langle 0 | C(\lambda_1) \dots C(\lambda_M), \quad (2.19)$$

wobei $\langle 0 | = |0\rangle^\dagger$ der linke Pseudovakuumvektor ist, d.h. $\langle 0 | B(\lambda) = 0$. Die Eigenwerte seien derart geordnet, dass

$$\Lambda_0(0) > |\Lambda_1(0)| \geq |\Lambda_2(0)| \geq \dots \quad (2.20)$$

gilt.

Im weiteren Verlauf wird eine „getwistete“ Quantentransfermatrix $t(\lambda|\alpha)$ auftreten, welche sich aus $t(\lambda)$ durch die Ersetzung $\kappa \rightarrow \kappa + \alpha$ ergibt. Folglich hat man $a(\lambda) \rightarrow q^\alpha a(\lambda)$ und $d(\lambda) \rightarrow q^{-\alpha} d(\lambda)$ sowie andere Bethe-Wurzeln. Für die zugehörigen Eigenvektoren und Eigenwerte wird die Notation $|\Psi_n^\alpha\rangle$ und $\Lambda_n(\lambda|\alpha)$ verwendet.

Um den Trotterlimes in (2.11) bzw. (2.12) durchzuführen, ist es notwendig, eine Formulierung zu finden, welche die Bethe-Wurzeln nicht explizit enthält. Eine Methode, die sich in der Beschreibung der Thermodynamik [81] und der Korrelationsfunktionen [55, 13] als nützlich erwiesen hat, ist die Methode der nichtlinearen Integralgleichungen.

Definiere für jede Lösung $\{\lambda_j\}_{j=1}^M$ der Bethe-Ansatz-Gleichungen (2.17) die Hilfsfunktion

$$\alpha_n(\lambda) = \alpha_n(\lambda|\{\lambda_j\}) = \frac{d(\lambda)}{a(\lambda)} \prod_{k=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \lambda_k + \eta)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_k - \eta)}, \quad (2.21)$$

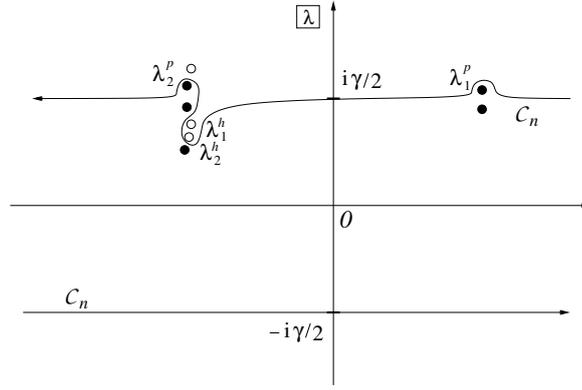


Abbildung 2.1: Skizze einer Kontur C_n für $0 < \Delta < 1$. Die Lochparameter λ_j^h befinden sich außerhalb, die Teilchenparameter λ_k^p innerhalb der Kontur C_n .

bzw. $a_n(\lambda|\alpha)$ im getwisteten Fall. Definiere weiterhin die Funktion

$$\rho_n(\lambda|\alpha) = \frac{\Lambda_n(\lambda|\alpha)}{\Lambda_0(\lambda)}. \quad (2.22)$$

Im Trotterlimes ist die Hilfsfunktion durch die nichtlineare Integralgleichung

$$\ln a_n(\lambda) = -(2\kappa + N - 2M)\eta - \beta e(\lambda) - \int_{C_n} \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu) \ln(1 + a_n(\mu)) \quad (2.23)$$

gegeben [81]. Hierbei wurde der Kern

$$K(\lambda) = K_0(\lambda), \quad K_\alpha(\lambda) = q^{-\alpha} \operatorname{cth}(\lambda - \eta) - q^\alpha \operatorname{cth}(\lambda + \eta) \quad (2.24)$$

eingeführt, welcher die Ableitung der Zweiteilchen-Streuphase ist. Die Funktion

$$e(\lambda) = \operatorname{cth}(\lambda) - \operatorname{cth}(\lambda + \eta) \quad (2.25)$$

wird, aus Gründen die im Verlauf der Arbeit klarer werden, als „nackte Energie“ bezeichnet. Die Information über den Eigenzustand („Anregung“) ist in (2.23) in der Integrationskontur C_n enthalten. Für den dominanten Zustand hängt die Form von C_0 von der Anisotropie η ab. Im Fall $\Delta > 1$ (d.h. $\eta \in \mathbb{R}$) ist die Kontur C_0 ein endliches Rechteck, das die reelle und imaginäre Achse bei $\pm\eta/2$ bzw. $\pm i\pi/2$ schneidet. Im Fall $|\Delta| < 1$ ist $\eta = -i\gamma$ mit $\gamma \in (0, \pi)$ und die Kontur besteht aus zwei Geraden parallel zur reellen Achse, welche die imaginäre Achse bei $\pm i \min\{\gamma/2, \pi/2 - \gamma/2\}$ schneiden. Für eine graphische Darstellung der Kontur C_0 in den verschiedenen Fällen sei auf die Arbeit [55] verwiesen.

Im Folgenden beschränkt sich die Diskussion auf Anregungen, die endlich viele Bethewurzeln („Teilchen“) außerhalb und endlich viele Nullstellen der Funktion $\Lambda_0(\lambda)$ („Löcher“) innerhalb der Kontur C_0 besitzen. Die zum angeregten Zustand gehörige Kontur C_n ist dann eine Deformation von C_0 derart, dass alle Teilchen innerhalb und alle Löcher außerhalb von C_n liegen (vgl. Abbildung 2.1).

Es sei bemerkt, dass die Möglichkeit besteht, in der Integralgleichung (2.23) die Kontur C_n durch die Kontur C_0 zu ersetzen („Glätten der Kontur“). Dabei entstehen Zusatzterme, welche von den

Teilchen- und Lochparametern abhängen. Diese müssen zusammen mit der Hilfsfunktion selbstkonsistent bestimmt werden. Diese Formulierung ist nützlich für numerische Studien [85] sowie für die Tieftemperaturanalyse in Kapitel 4 und 6, während die Verwendung der Kontur C_n für die Berechnung von Formfaktoren der Quantentransfermatrix geeigneter scheint (vgl. Kapitel 3).

Die Funktion $\rho_n(\lambda|\alpha)$ kann als Integral über die Hilfsfunktion dargestellt werden,

$$\rho_n(\lambda|\alpha) = q^{\alpha + \frac{N}{2} - M} \exp \left\{ \int_{C_n} \frac{d\mu}{2\pi i} e^{(\mu - \lambda)} \ln \left(\frac{1 + a_n(\mu|\alpha)}{1 + a_0(\mu)} \right) \right\}, \quad (2.26)$$

wobei λ innerhalb der Kontur C_n liegt [13]. Die Zahl $s = N/2 - M$ ist der Eigenwert des Zustands $|\Psi_n^\alpha\rangle$ der z-Komponente des Pseudospinoperators $\eta^z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (-1)^j \sigma_j^z$. Der Pseudospin eines Operators ist dabei durch den Eigenwert unter der adjungierten Wirkung $[\eta^z, \cdot]$ definiert. In den hier diskutierten Fällen hat man $s = 0$ (longitudinale Korrelatoren) und $s = 1$ (transversale Korrelatoren). Die Darstellung (2.26) liefert somit die Funktion $\rho_n(\lambda|\alpha)$ im Trotterlimes.

Da für den Eigenwert $\Lambda_0(\lambda)$ ein ähnlicher Integralausdruck angegeben werden kann (vgl. z.B. [55]), liefert die Lösung der Integralgleichung (2.23) für $n = 0$ nach Gleichung (2.12) eine exakte Beschreibung der Thermodynamik im Trotterlimes. Wie sich in Kapitel 3 zeigen wird, sind für die Beschreibung von Formfaktoren der Quantentransfermatrix im Trotterlimes ebenfalls nur die Funktionen $a_n(\lambda|\alpha)$ und $\rho_n(\lambda|\alpha)$ (in diesem Fall $n > 0$) erforderlich.

2.2 Formfaktorentwicklung von thermischen Korrelationsfunktionen

In diesem Abschnitt soll der Ausdruck (2.11) für die Korrelationsfunktionen am Beispiel der longitudinalen und transversalen Zweipunktfunktionen $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$ und $\langle \sigma_1^- \sigma_{m+1}^+ \rangle$ mit einer Formfaktorentwicklung untersucht werden. Für die longitudinalen Korrelatoren existiert eine erzeugende Funktion [61], für welche sich die Formfaktorentwicklung vereinfacht. Definiert man den Operator

$$S(m) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sigma_j^z, \quad (2.27)$$

so ist die erzeugende Funktion durch $\langle q^{2\alpha S(m)} \rangle$ gegeben, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Parameter ist. Diese erzeugt mittels

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = \frac{1}{2} D_m^2 \partial_{\eta\alpha}^2 \langle q^{2\alpha S(m+1)} \rangle \Big|_{\alpha=0} \quad (2.28)$$

die longitudinalen Korrelatoren, wobei D_m der Differenzenoperator ist, definiert durch die Wirkung $D_m f(m) = f(m) - f(m-1)$ auf eine Funktion f . Die erzeugende Funktion generiert auch die Einpunktfunktionen,

$$\langle \sigma_1^z \rangle = D_m \partial_{\eta\alpha} \langle q^{2\alpha S(m+1)} \rangle \Big|_{\alpha=0}, \quad (2.29)$$

sowie die „emptiness formation probability“

$$\langle e_{1+}^+ \dots e_{m+}^+ \rangle = \lim_{\text{Re}(\eta\alpha) \rightarrow +\infty} q^{-m\alpha} \langle q^{2\alpha S(m)} \rangle. \quad (2.30)$$

Hierbei ist e_{j+}^+ der Projektor auf den lokalen $S^z = +1/2$ Zustand.

Aus Gleichung (2.11) folgt, dass

$$\langle q^{2\alpha S(m)} \rangle_N = \frac{\langle \Psi_0 | t^m(0|\alpha) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \Lambda_0^m(0)} \quad (2.31)$$

eine Approximation der erzeugenden Funktion für endliche Trotterzahl ist. Schiebt man einen vollständigen Satz von Eigenfunktionen

$$\text{id} = \sum_{n=0}^{2^N-1} \frac{|\Psi_n^\alpha\rangle\langle\Psi_n^\alpha|}{\langle\Psi_n^\alpha|\Psi_n^\alpha\rangle} \quad (2.32)$$

der getwisteten Transfermatrix $t(\lambda|\alpha)$ in Gleichung (2.31) ein, so erhält man die Formfaktorentwicklung

$$\langle q^{2\alpha S(m)} \rangle_N = \sum_{n \geq 0} A_n(\alpha) \rho_n^m(0|\alpha), \quad A_n(\alpha) = \frac{\langle \Psi_0 | \Psi_n^\alpha \rangle \langle \Psi_n^\alpha | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \langle \Psi_n^\alpha | \Psi_n^\alpha \rangle}. \quad (2.33)$$

Die Summe erstreckt sich dabei über alle Eigenzustände mit $M = N/2$, da für alle anderen Eigenzustände die Amplitude $A_n(\alpha)$ verschwindet.

Setzt man nun (2.33) in (2.28) ein, so folgt die Formfaktorentwicklung der verbundenen longitudinalen Korrelationsfunktionen,

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_N - \langle \sigma_1^z \rangle_N \langle \sigma_{m+1}^z \rangle_N = \sum_{n \geq 1} A_n^{zz} \rho_n^m, \quad (2.34)$$

wobei

$$\rho_n = \rho_n(0|0), \quad A_n^{zz} = \frac{1}{2} (\rho_n^{1/2} - \rho_n^{-1/2})^2 \partial_{\eta\alpha}^2 A_n(\alpha) \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.35)$$

Da per Konstruktion $1 > |\rho_1| \geq |\rho_2| \geq \dots$ gilt, ist Gleichung (2.34) eine asymptotische Entwicklung der thermischen Korrelationsfunktionen für große Abstände und das führende Verhalten ist durch den ersten Term $n = 1$ gegeben². Ein Vergleich mit Gleichung (1.3) zeigt, dass die Korrelationslängen durch

$$\xi_n = -\frac{1}{\ln(\rho_n)} \quad (2.36)$$

gegeben sind. Nach Gleichung (2.26) sind die Korrelationslängen also im Trotterlimes exakt berechenbar. Die Amplituden sind nach den Gleichungen (2.35) und (2.33) durch das Produkt zweier Formfaktoren der Quantentransfermatrix gegeben. Für diese werden in Kapitel 3.1 erstmals exakte, im Trotterlimes gültige Ausdrücke angegeben.

Analog erhält man für die transversalen Korrelatoren die Formfaktorentwicklung

$$\langle \sigma_1^- \sigma_{m+1}^+ \rangle_N = \sum_{n \geq 1} A_n^{-+} \rho_n^m, \quad (2.37)$$

wobei

$$A_n^{-+} = \frac{\langle \Psi_0 | B(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | C(0) | \Psi_0 \rangle}{\Lambda_n(0) \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \Lambda_0(0) \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle}. \quad (2.38)$$

Die Summe in (2.37) erstreckt sich in diesem Fall über alle Eigenzustände mit $M = N/2 - 1$, die dort auftretenden Korrelationslängen sind dementsprechend andere als in Gleichung (2.34), werden allerdings mit demselben Buchstaben bezeichnet³. Für die Amplituden (2.38) wird in Kapitel 3.2 ein im Trotterlimes gültige Formel angegeben.

²Falls eine Entartung des ersten Eigenwertes $\Lambda_1(0)$ vorliegt, müssen entsprechend mehrere Terme berücksichtigt werden.

³Man beachte, dass in (2.34) und (2.37) gegenüber (2.20) die Nummerierung angepasst wurde: Die Eigenzustände im Sektor $M = N/2$ werden durch \mathbb{N}_0 indiziert, die im Sektor $M = N/2 - 1$ mit \mathbb{N} .

2.3 Grundzustandskorrelationsfunktionen der endlichen Kette

Die in den beiden letzten Abschnitten vorgestellten Methoden lassen sich auf den Fall der XXZ-Kette der Länge L (es sei $L \in 2\mathbb{N}$) bei Temperatur $T = 0$ und Magnetfeld $h = 0$ übertragen (vgl. dazu auch [13, 35]). Im Prinzip lässt sich auch der Fall $h \neq 0$ behandeln, allerdings liegt der Grundzustand dann nicht mehr im Sektor mit $L/2$ Bethe-Wurzeln, wodurch die Kontur C_0 kompliziert sein kann.

Für den Zugang zu Grundzustandskorrelationen benötigt man die Monodromiematrix

$$T_a(\lambda) = q^{\kappa\sigma_a^z} R_{a,L}(\lambda, \eta/2) \dots R_{a,1}(\lambda, \eta/2), \quad (2.39)$$

welche auf ein Tensorprodukt aus einem Hilfsraum mit Index a und L Quantenräumen wirkt. Die zugehörige „gewöhnliche“ Transfermatrix $t(\lambda) = \text{Tr}_a\{T_a(\lambda)\}$ erzeugt den Hamiltonoperator der XXZ-Kette

$$H = 2J \text{sh}(\eta) t^{-1}(\eta/2) t'(\eta/2) = J \sum_{j=1}^L \left(\sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y + \Delta(\sigma_{j-1}^z \sigma_j^z - 1) \right) \quad (2.40)$$

mit getwisteten Randbedingungen,

$$\sigma_0^b = q^{-\kappa\sigma_L^z} \sigma_L^b q^{\kappa\sigma_L^z}, \quad b = x, y, z. \quad (2.41)$$

Da die Monodromiematrix (2.39) die Relationen (2.6) der Yang-Baxter-Algebra erfüllt, kann die gewöhnliche Transfermatrix mit dem algebraischen Bethe-Ansatz diagonalisiert werden⁴. Der einzige Unterschied besteht in der Form des Pseudovakuums, welches hier durch $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\otimes L}$ gegeben ist. Dementsprechend ändern sich die Vakuumerwartungswerte $a(\lambda)$ und $d(\lambda)$ der Operatoren $A(\lambda)$ und $D(\lambda)$,

$$a(\lambda) = q^\kappa, \quad d(\lambda) = q^{-\kappa} b^L(\lambda, \eta/2), \quad (2.42)$$

und folglich auch die nichtlineare Integralgleichung (2.23) für die Hilfsfunktion,

$$\ln(a_n(\lambda)) = -2(\kappa - M)\eta + iLp(\lambda) - \int_{C_n} \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu) \ln(1 + a_n(\mu)). \quad (2.43)$$

Hierbei ist

$$p(\lambda) = i \ln \left(\frac{\text{sh}(\lambda + \eta/2)}{\text{sh}(\lambda - \eta/2)} \right) \quad (2.44)$$

der „nackte Impuls“. Aufgrund der Konvention (2.39) für die Monodromiematrix müssen außerdem die Gleichungen (2.11), (2.28) und (2.37) bei Spektralparameter $\eta/2$ anstelle von 0 ausgewertet werden.

Von diesen Änderungen abgesehen sind alle in Kapitel 3 vorgestellten Ergebnisse auch für den Fall der gewöhnlichen Transfermatrix gültig.

⁴Man beachte, dass aufgrund der Kommutativität der Transfermatrizen der Hamiltonoperator (2.40) und die gewöhnliche Transfermatrix dieselben Eigenvektoren besitzen.

3 Formfaktoren der Quantentransfermatrix

In diesem Kapitel werden zunächst Formfaktoren für die erzeugende Funktion für endliche Trotterzahl N berechnet und anschließend der Trotterlimes durchgeführt. Für die Formfaktoren, welche für die transversalen Korrelatoren relevant sind, ergeben sich ähnliche Ausdrücke, was Vermutungen über die allgemeine Struktur der Formfaktoren der Quantentransfermatrix nahelegt.

3.1 Erzeugende Funktion

Ausgangspunkt aller Berechnungen von Korrelationsfunktionen im algebraischen Bethe-Ansatz ist die Skalarproduktformel von Slavnov [119],

$$\begin{aligned} \langle 0|C(\mu_1) \dots C(\mu_M)B(\lambda_M) \dots B(\lambda_1)|0\rangle &= \langle 0|C(\lambda_1) \dots C(\lambda_M)B(\mu_M) \dots B(\mu_1)|0\rangle \\ &= \left[\prod_{j=1}^M a(\mu_j)d(\lambda_j) \prod_{k=1}^M \frac{1}{b(\lambda_j, \mu_k)} \right] \frac{\det_M \left(e(\lambda_j - \mu_k) - e(\mu_k - \lambda_j)a_n(\mu_k) \right)}{\det_M \left(\frac{1}{\text{sh}(\lambda_j - \mu_k)} \right)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Hierbei ist $\{\lambda_j\}_{j=1}^M$ eine Lösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen (2.17) und a_n die zugehörige Hilfsfunktion. Die μ_j sind hier beliebige komplexe Parameter.

Insbesondere kann man in (3.1) den Limes $\mu_j \rightarrow \lambda_j$ ($j = 1, \dots, M$) durchführen und erhält die Formel für die Norm eines Bethevektors [88],

$$\langle \Psi_n | \Psi_n \rangle = \left[\prod_{j=1}^M d(\lambda_j) \Lambda_n(\lambda_j) \right] \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{K(\lambda_j - \lambda_k)}{a_n'(\lambda_j)} \right\}. \quad (3.2)$$

Die Gleichungen (3.2) und (3.1) können benutzt werden, um die Amplituden als Funktion der Bethe-Wurzeln zu bestimmen (vgl. [78]). Diese Formeln können verwendet werden, um Formfaktoren bestimmter Klassen von Anregungen für ein endliches System (bzw. für endliche Trotterzahl) numerisch zu berechnen (vgl. z.B. [32, 30]). Sie sind allerdings nicht geeignet, um den Trotterlimes analytisch durchzuführen. Zu diesem Zweck muss zunächst Gleichung (3.1) umgeformt werden.

Für die Berechnung der Amplituden $A_n(\alpha)$ aus Gleichung (2.33) benötigt man das Skalarprodukt $\langle \Psi_n^\alpha | \Psi_0 \rangle$, welches mit Hilfe von (3.1) berechnet werden kann. Bezeichnet man die Bethe-Wurzeln des dominanten Zustands mit λ_j und die des angeregten Zustands (mit Twist α) mit μ_j so folgt nach einer Reihe von Manipulationen (vgl. Anhang A.1) das Resultat

$$\langle \Psi_n^\alpha | \Psi_0 \rangle = \left[\prod_{j=1}^M q^\alpha d(\lambda_j) \Lambda_0(\mu_j) e^{\mu_j - \lambda_j} \right] \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\mathcal{K}_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k)}{a_n'(\mu_j | \alpha) \rho_n^{-1}(\mu_j | \alpha)} \right\}, \quad (3.3)$$

wobei

$$\mathcal{K}_\alpha(\lambda) = \frac{e^{(\alpha-1)(\lambda-\eta)}}{\text{sh}(\lambda-\eta)} - \frac{e^{(\alpha-1)(\lambda+\eta)}}{\text{sh}(\lambda+\eta)}, \quad \mathcal{K}(\lambda) = \mathcal{K}_0(\lambda). \quad (3.4)$$

Gleichung (3.3) kann als Verallgemeinerung von (3.2) angesehen werden. In der Tat ergibt sich für den Fall $n = 0$ und $\alpha \rightarrow 0$ wieder die Normformel, während das Skalarprodukt für $n \neq 0$ und $\alpha \rightarrow 0$ aufgrund der Identität

$$\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{K(\mu_j - \mu_k)}{a'_n(\mu_j|0)\rho_n^{-1}(\mu_j|0)} \right\} = 0 \quad (3.5)$$

wie erwartet verschwindet (vgl. Anhang A.2).

Vertauscht man die Rollen von λ_j und μ_j in (3.3), so erhält man für das zweite Skalarprodukt in (2.33)

$$\langle \Psi_0 | \Psi_n^\alpha \rangle = \left[\prod_{j=1}^M q^{-\alpha} d(\mu_j) \Lambda_n(\lambda_j|\alpha) e^{\lambda_j - \mu_j} \right] \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\mathcal{K}_\alpha(\lambda_j - \lambda_k)}{a'_0(\lambda_j|\alpha)\rho_n(\lambda_j|\alpha)} \right\}. \quad (3.6)$$

Kombiniert man (3.3) und (3.6) mit der Normformel (3.2) so erhält man für die Amplituden

$$A_n(\alpha) = \left[\prod_{j=1}^M \frac{\rho_n(\lambda_j|\alpha)}{\rho_n(\mu_j|\alpha)} \right] \frac{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{a'_n(\mu_j|\alpha)} \mathcal{K}_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\}}{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{a'_n(\mu_j|\alpha)} \mathcal{K}(\mu_j - \mu_k) \right\}} \times \frac{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)}{a'_0(\lambda_j)} \mathcal{K}_\alpha(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{a'_0(\lambda_j)} \mathcal{K}(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}. \quad (3.7)$$

Es ist zu beachten, dass bei der Herleitung die Slavnov-Formel (3.1) in symmetrischer Weise verwendet wurde, d.h. es wurde benutzt, dass sowohl die λ_j als auch die μ_j die Bethe-Ansatz-Gleichungen erfüllen. Es ist ebenfalls möglich, die Slavnovformel zu verwenden unter der Annahme, dass nur die λ_j bzw. μ_j die Bethe-Ansatz-Gleichungen erfüllen, und erhält statt (3.7) asymmetrische Darstellungen, welche nicht-triviale Identitäten zwischen Determinanten implizieren [40].

Die Darstellung (3.7) ist geeignet, den Trotterlimes durchzuführen. Um dies einzusehen, drückt man das Produkt auf der rechten Seite als Integral aus (vgl. Anhang A.3),

$$\prod_{j=1}^M \frac{\rho_n(\lambda_j|\alpha)}{\rho_n(\mu_j|\alpha)} = \exp \left\{ - \int_{C_n} \frac{d\lambda}{2\pi i} \ln \left(\rho_n(\lambda|\alpha) \right) \partial_\lambda \ln \left(\frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{1 + a_0(\lambda)} \right) \right\}. \quad (3.8)$$

Zu beachten ist, dass im obigen Integral noch partiell integriert werden kann. Da die entstehenden Randterme jedoch von den Parametern des Modells und dem genauen Verlauf der Kontur abhängen, soll hier der allgemeine Ausdruck (3.8) stehen bleiben.

Für die Analyse der Determinanten betrachtet man z.B. die erste Determinante des Zählers, für welche man die Entwicklung

$$\begin{aligned} \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{a'_n(\mu_j|\alpha)} \mathcal{K}_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\} &= 1 - \sum_{j=1}^M \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{a'_n(\mu_j|\alpha)} \mathcal{K}_{-\alpha}(0) \\ &+ \sum_{1 \leq j < k \leq M} \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{a'_n(\mu_j|\alpha)} \frac{\rho_n(\mu_k|\alpha)}{a'_n(\mu_k|\alpha)} \det \begin{vmatrix} \mathcal{K}_{-\alpha}(0) & \mathcal{K}_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \\ \mathcal{K}_{-\alpha}(\mu_k - \mu_j) & \mathcal{K}_{-\alpha}(0) \end{vmatrix} - \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^M \frac{(-1)^k}{k!} \left[\prod_{j=1}^k \int_{C_n} dm_+^\alpha(v_j) \right] \det_k \left\{ \mathcal{K}_{-\alpha}(v_l - v_m) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

hat (vgl. z.B. [135]). Hierbei wurde das „Integrationsmaß“

$$dm_+^\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda \rho_n(\lambda|\alpha)}{2\pi i(1 + a_n(\lambda|\alpha))} \quad (3.10)$$

eingeführt. Im Trotterlimes $N = 2M \rightarrow \infty$ liefert die rechte Seite von (3.9) die Fredholm-Determinante des Operators $\widehat{\mathcal{K}}_{-\alpha}$, definiert durch den Kern $\mathcal{K}_{-\alpha}$, das Maß dm_+^α und die Kontur C_n ,

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{a_n'(\mu_j|\alpha)} \mathcal{K}_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\prod_{j=1}^k \int_{C_n} dm_+^\alpha(v_j) \right] \det_k \left\{ \mathcal{K}_{-\alpha}(v_l - v_m) \right\} = \det_{dm_+^\alpha, C_n} \left\{ 1 - \widehat{\mathcal{K}}_{-\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Konvergenz der Reihe kann hier nicht streng bewiesen werden, allerdings konvergiert der Ausdruck für hohe und tiefe Temperaturen bei $h \neq 0$.

Die anderen Determinanten in (3.7) können vollkommen analog behandelt werden. Führt man die Integrationsmaße

$$dm(\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi i(1 + a_0(\lambda))}, \quad (3.12a)$$

$$dm_0^\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi i(1 + a_n(\lambda|\alpha))}, \quad (3.12b)$$

$$dm_-^\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda \rho_n^{-1}(\lambda|\alpha)}{2\pi i(1 + a_0(\lambda))} \quad (3.12c)$$

ein, so ist der Trotterlimes der Amplituden (3.7) durch

$$\begin{aligned} A_n(\alpha) = \exp \left\{ - \int_{C_n} \frac{d\lambda}{2\pi i} \ln(\rho_n(\lambda|\alpha)) \partial_\lambda \ln \left(\frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{1 + a_0(\lambda)} \right) \right\} \\ \times \frac{\det_{dm_+^\alpha, C_n} \left\{ 1 - \widehat{\mathcal{K}}_{-\alpha} \right\} \det_{dm_-^\alpha, C_n} \left\{ 1 - \widehat{\mathcal{K}}_\alpha \right\}}{\det_{dm_0^\alpha, C_n} \left\{ 1 - \widehat{\mathcal{K}} \right\} \det_{dm, C_n} \left\{ 1 - \widehat{\mathcal{K}} \right\}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

gegeben. Bemerkenswert ist, dass diese Darstellung ausschließlich Funktionen enthält, die bereits bei der Beschreibung der Thermodynamik und der Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette auftauchen. Diese sind die Hilfsfunktionen a_n [81], die Verhältnisse der Eigenwerte ρ_n [13, 16] sowie der deformierte Kern \mathcal{K}_α [16, 12]. Letzterer hängt mit dem deformierten Kern K_α (vgl. Gleichung (2.24)) zusammen, welcher eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette im Faktorisierungszugang spielt [13, 20]. Da die beiden Kerne durch

$$\mathcal{K}_\alpha(\lambda) = e^{\alpha\lambda} \{ K_\alpha(\lambda) - (q^{-\alpha} - q^\alpha) \} \quad (3.14)$$

verbunden sind, unterscheiden sich die Integraloperatoren in den Determinanten in (3.13) nur durch einen eindimensionalen Projektor. Dies erlaubt es, in (3.13) vom Kern \mathcal{K}_α zum Kern K_α überzugehen (vgl. Anhang A.4),

$$\begin{aligned} A_n(\alpha) = \bar{\sigma}_+^- \sigma_-^- \exp \left\{ - \int_{C_n} \frac{d\lambda}{2\pi i} \ln(\rho_n(\lambda|\alpha)) \partial_\lambda \ln \left(\frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{1 + a_0(\lambda)} \right) \right\} \\ \times \frac{\det_{dm_+^\alpha, C_n} \left\{ 1 - \widehat{K}_{-\alpha} \right\} \det_{dm_-^\alpha, C_n} \left\{ 1 - \widehat{K}_\alpha \right\}}{\det_{dm_0^\alpha, C_n} \left\{ 1 - \widehat{K} \right\} \det_{dm, C_n} \left\{ 1 - \widehat{K} \right\}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Hierbei sind

$$\bar{\sigma}_+^- = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty} \bar{\sigma}_+(\lambda), \quad \sigma_-^- = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty} \sigma_-(\lambda) \quad (3.16)$$

die asymptotischen Werte zweier Funktionen $\bar{\sigma}_+(\lambda)$ und $\sigma_-(\lambda)$, welche als Verallgemeinerungen der in [14] eingeführten verallgemeinerten „bekleideten Ladung“ angesehen werden können. Diese Funktionen erfüllen die linearen Integralgleichungen

$$\bar{\sigma}_+(\lambda) = 1 + \int_{C_n} dm_+^\alpha(\mu) K_\alpha(\lambda - \mu) \bar{\sigma}_+(\mu), \quad (3.17a)$$

$$\sigma_-(\lambda) = 1 + \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) \sigma_-(\mu) K_\alpha(\mu - \lambda). \quad (3.17b)$$

Mit der in [14] entwickelten Methode kann man zeigen, dass

$$\bar{\sigma}_+^- \sigma_-^- = \text{ch}^{-2} \left\{ \int_{C_n} \frac{d\lambda}{2\pi i} \ln \left(\frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{1 + a_0(\lambda)} \right) \right\} \quad (3.18)$$

gilt (vgl. Anhang A.4). Es sei erwähnt, dass das Vorzeichen von α im Kern K_α in den Determinanten in (3.15) aufgrund der Symmetrie

$$K_\alpha(-\lambda) = K_{-\alpha}(\lambda) \quad (3.19)$$

frei gewählt werden kann. Eine weitere Darstellung, in welcher die Ableitung der Determinanten nach α einfach durchgeführt werden können, wird in Kapitel A.2 angegeben.

Die Gleichungen (3.13) und (3.15) sind die ersten wichtigen Ergebnisse dieser Arbeit. Es ist nicht zu erwarten, dass sich diese im generischen Fall noch weiter vereinfachen lassen. Somit bieten sich an dieser Stelle zwei Möglichkeiten an. Zunächst könnte man die nichtlineare Integralgleichung für die Hilfsfunktion numerisch lösen und danach versuchen, die Formel für die Amplituden (3.13) bzw. (3.15) auszuwerten. Dies stellt ein eigenes interessantes Projekt für zukünftige Forschung dar. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Ergebnisse analytisch in verschiedenen Spezialfällen zu untersuchen.

In [39] konnte gezeigt werden, dass (3.13) bzw. (3.15) im XX-Limes das bekannte Resultat [58] liefern. Weiterhin ergibt sich in der führenden Ordnung der Hochtemperaturentwicklung das korrekte Verhalten der erzeugenden Funktion (vgl. [39, 40] mit [115]). In dieser Arbeit wird schwerpunktmäßig das Tieftemperaturverhalten der Ausdrücke (3.13) bzw. (3.15) untersucht, vgl. Kapitel 4 und 6. Zuvor sollen jedoch die in diesem Abschnitt erzielten Ergebnissen auf den transversalen Fall übertragen werden.

3.2 Transversale Korrelatoren

In diesem Abschnitt sollen die in der Formfaktorentwicklung (2.37) der transversalen Korrelatoren auftretenden Amplituden berechnet werden. Anstelle der Amplituden A_n^{+-} in Gleichung (2.38) werden verallgemeinerte Amplituden betrachtet, welche von einem Spektralparameter ξ und einem Twistparameter α abhängen,

$$A_n^{+-}(\xi) = F_-(\xi) F_+(\xi), \quad (3.20)$$

mit

$$F_-(\xi) = \frac{\langle \Psi_0 | B(\xi) | \Psi_n^\alpha \rangle}{\Lambda_n(\xi|\alpha) \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}, \quad F_+(\xi) = \frac{\langle \Psi_n^\alpha | C(\xi) | \Psi_0 \rangle}{\Lambda_0(\xi) \langle \Psi_n^\alpha | \Psi_n^\alpha \rangle}. \quad (3.21)$$

Die Einführung eines Twistparameters mag in diesem Kontext überraschend sein, allerdings wird dieser entscheidend sein für das Verständnis der Struktur der Formfaktoren.

Der Formfaktor F_+ kann mit der Slavnov-Formel berechnet werden, indem man die Parameter $\{\mu_j\}_{j=1}^{M-1} \cup \{\xi\}$ als freie Parameter auffasst. Mit einer ähnlichen Rechnung wie in Anhang A.1 folgt dann für den Formfaktor F_+ der Ausdruck (vgl. B.1)

$$F_+(\xi) = \frac{G_+^-(\xi)e^{-\xi} \prod_{j=1}^M d(\lambda_j)e^{\lambda_j}}{\prod_{j=1}^{M-1} \rho_n(\mu_j|\alpha)q^{-\alpha}d(\mu_j)e^{\mu_j}} \frac{\det_{M-1}\left\{\delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{a'_n(\mu_j|\alpha)}K_{1-\alpha}(\mu_j - \mu_k)\right\}}{\det_{M-1}\left\{\delta_k^j - \frac{1}{a'_n(\mu_j|\alpha)}K(\mu_j - \mu_k)\right\}}. \quad (3.22)$$

Hierbei ist

$$G_+^-(\xi) = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty} G_+(\lambda, \xi) \quad (3.23)$$

und $G_+(\lambda, \xi)$ die Lösung der linearen Integralgleichung

$$G_+(\lambda, \xi) = -\text{cth}(\lambda - \xi) + q^{\alpha-1}\rho_n(\xi|\alpha)\text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{C_n} dm_+^\alpha(\mu)K_{1-\alpha}(\lambda - \mu)G_+(\mu, \xi). \quad (3.24)$$

Diese Funktion kann als Verallgemeinerung der in den Arbeiten [20, 13] eingeführten Funktion angesehen werden.

Die einfachste Möglichkeit, einen Ausdruck für die Amplituden zu gewinnen, besteht darin, Gleichung (3.22) mit den Gleichungen (3.22), (3.1) und (3.2) zu kombinieren,

$$A_n^{+}(\xi) = \frac{F_+^2(\xi)\langle\Psi_n^\alpha|\Psi_n^\alpha\rangle}{\rho_n(\xi|\alpha)\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle}. \quad (3.25)$$

Diese Formel führt zu einem Ausdruck, in dem man zwar den Trotterlimes durchführen kann, welcher aber nicht dieselbe Symmetrie wie das Ergebnis (3.15) für die Amplituden der erzeugenden Funktion aufweist. Dies ist dadurch bedingt, dass in (3.25) für beide Formfaktoren benutzt wurde, dass die λ_j die Bethe-Ansatz-Gleichungen erfüllen.

Eine symmetrische Formel (analog zu (3.15)) für die Formfaktoren der transversalen Korrelatoren könnte erreicht werden, indem man ausnutzt, dass die μ_j die Bethe-Ansatz-Gleichungen erfüllen. Die direkte Anwendung der Slavnov-Formel ist in diesem Fall jedoch nicht möglich, da die Menge $\{\mu_j\}_{j=1}^{M-1} \cup \{\xi\}$ keine Lösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen ist. Die Lösung des Problems besteht darin, in dem in $F_-(\xi)$ auftretenden Skalarprodukt

$$\langle\Psi_0|B(\xi)|\Psi_n^\alpha\rangle = \langle 0|C(\lambda_1)\dots C(\lambda_M)B(\xi)B(\mu_{M-1})\dots B(\mu_1)|0\rangle \quad (3.26)$$

den Operator $B(\xi)$ mit Hilfe der Vertauschungsrelationen der Yang-Baxter-Algebra durch die Operatoren $C(\lambda_j)$ ($j = 1, \dots, M$) nach links durchzutauschen. Dies erzeugt eine Doppelsumme, in der jeder Term mit der Slavnov-Formel für die μ_j ausgewertet werden kann. Die Summe lässt sich als Doppelintegral schreiben (vgl. Anhang B.2),

$$F_-(\xi) = \frac{e^{-\xi} \prod_{j=1}^{M-1} q^{-\alpha}d(\mu_j)e^{\mu_j}}{\prod_{j=1}^M d(\lambda_j)e^{\lambda_j}\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)} \frac{\det_M\left\{\delta_k^j - \frac{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)}{a'_0(\lambda_j)}K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k)\right\}}{\det_M\left\{\delta_k^j - \frac{1}{a'_0(\lambda_j)}K(\lambda_j - \lambda_k)\right\}} \\ \times \int_{C_n} dm_-^\alpha(\lambda)e^\lambda \int_{C_n} d\bar{m}_-^\alpha(\mu)e^\mu \frac{G_-(\lambda, \xi)\sigma(\mu) - G_-(\mu, \xi)\sigma(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \mu - \eta)}, \quad (3.27)$$

wobei

$$\overline{dm}_-^\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi i \rho_n(\lambda|\alpha)} - dm_-^\alpha(\lambda) \quad (3.28)$$

und die Funktion G_- durch die lineare Integralgleichung

$$G_-(\lambda, \xi) = -\text{cth}(\lambda - \xi) + q^{-\alpha-1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{\mathcal{C}_n} dm_-^\alpha(\mu) K_{1+\alpha}(\lambda - \mu) G_-(\mu, \xi) \quad (3.29)$$

definiert ist. Die Funktion σ ähnelt den in Kapitel 3.1 eingeführten Funktionen und ist definiert durch

$$\sigma(\lambda) = 1 + \int_{\mathcal{C}_n} dm_-^\alpha(\mu) K_{1+\alpha}(\lambda - \mu) \sigma(\mu). \quad (3.30)$$

Man beachte, dass sich der Ausdruck (3.27) bereits mit (3.22) zu einer symmetrischen Formel für die Amplitude kombiniert. Das obige Doppelintegral erinnert an die Doppelintegrale, welche die Zwei-Platz-Dichtematrix charakterisieren [13]. Da letztere sich als Produkt von Einfachintegralen schreiben lassen, liegt die Vermutung nahe, dass das obige Doppelintegral (3.27) ebenfalls faktorisiert. In der Tat ist dies der Fall und man erhält nach einer ähnlichen Rechnung wie in [13, 19] den faktorisierten Ausdruck (vgl. Anhang B.2)

$$F_-(\xi) = \frac{\overline{G}_-(\xi)}{(q^{1+\alpha} - q^{-1-\alpha})(q^\alpha - q^{-\alpha})} \times \frac{e^\xi \prod_{j=1}^{M-1} q^{-\alpha} d(\mu_j) e^{\mu_j} \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)}{a_0'(\lambda_j)} K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}{\prod_{j=1}^M \rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha) d(\lambda_j) e^{\lambda_j} \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{a_0'(\lambda_j)} K(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}. \quad (3.31)$$

Hierbei ist

$$\overline{G}_-(\xi) = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow +\infty} \overline{G}_-(\lambda, \xi), \quad (3.32)$$

und die Funktion $\overline{G}_-(\lambda, \xi)$ ist die Lösung der linearen Integralgleichung

$$\overline{G}_-(\lambda, \xi) = -\text{cth}(\lambda - \xi) + q^{\alpha+1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{\mathcal{C}_n} dm_-^\alpha(\mu) \overline{G}_-(\mu, \xi) K_{1+\alpha}(\mu - \lambda). \quad (3.33)$$

Kombiniert man nun die Formfaktoren F_+ und F_- (vgl. Gleichungen (3.22) und (3.31)) so folgt der gesuchte symmetrische Ausdruck für die Amplituden A_n^{-+} ,

$$A_n^{-+}(\xi) = \frac{G_+^-(\xi) \overline{G}_-^+(\xi)}{(q^{1+\alpha} - q^{-1-\alpha})(q^\alpha - q^{-\alpha})} \frac{\prod_{j=1}^M \rho_n(\lambda_j|\alpha)}{\prod_{j=1}^{M-1} \rho_n(\mu_j|\alpha)} \times \frac{\det_{M-1} \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{a_n'(\mu_j|\alpha)} K_{1-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\} \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)}{a_0'(\lambda_j)} K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}{\det_{M-1} \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{a_n'(\mu_j|\alpha)} K(\mu_j - \mu_k) \right\} \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{a_0'(\lambda_j)} K(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}. \quad (3.34)$$

Der Trotterlimes kann analog zu Abschnitt (3.1) durchgeführt werden,

$$A_n^{-+}(\xi) = \frac{G_+^-(\xi) \overline{G}_-^+(\xi)}{(q^{1+\alpha} - q^{-1-\alpha})(q^\alpha - q^{-\alpha})} \exp \left\{ - \int_{\mathcal{C}_n} \frac{d\lambda}{2\pi i} \ln(\rho_n(\lambda|\alpha)) \partial_\lambda \ln \left(\frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{1 + a_0(\lambda)} \right) \right\} \times \frac{\det_{\text{dm}_+^\alpha, \mathcal{C}_n} \{1 - \widehat{K}_{1-\alpha}\} \det_{\text{dm}_-^\alpha, \mathcal{C}_n} \{1 - \widehat{K}_{1+\alpha}\}}{\det_{\text{dm}_0^\alpha, \mathcal{C}_n} \{1 - \widehat{K}\} \det_{\text{dm}, \mathcal{C}_n} \{1 - \widehat{K}\}}. \quad (3.35)$$

Erstaunlicherweise besitzt dieser Ausdruck dieselbe Struktur wie Gleichung (3.15) für die erzeugende Funktion. In dieser Darstellung sind die Amplituden vollständig charakterisiert durch die beiden Funktionen α_n und ρ_n . Der Exponentialfaktor („universelle Anteil“) hat in beiden Fällen dieselbe Form und erzeugt im Tieftemperaturlimit in der masselosen Phase das kritische Verhalten der Formfaktoren (vgl. Kapitel 4). Weiterhin tauchen Lösungen linearer Integralgleichungen bzw. deren asymptotische Werte („faktorisierter Anteil“) auf. Im Gegensatz zum Fall der erzeugenden Funktion, vgl. Gleichung (3.18), konnten diese bislang jedoch nicht explizit berechnet werden¹. Die Produkte der vier Fredholm-Determinanten bilden den „Determinanten-Anteil“. In diesen taucht der Kern $\widehat{K}_{1\pm\alpha}$ auf, während bei der erzeugenden Funktion $\widehat{K}_{\pm\alpha}$ auftritt. Diese unterschiedliche Parametrisierung der Kerne kann dadurch erklärt werden, dass die Operatoren $B(\xi)$ bzw. $C(\xi)$ den Pseudospin (vgl. S. 11) $s = \mp 1$ besitzen. In diesem Sinne kann man die Kerne in den Fredholm-Determinanten in (3.15) und (3.35) als $\widehat{K}_{\alpha-s}$ bzw. $\widehat{K}_{s-\alpha}$ interpretieren.

Diese Beobachtungen legen nahe, dass die oben genannte Struktur universell ist, d.h. dass beliebige Formfaktoren der Quantentransfermatrix von der Form (3.35) sind. Diese Vermutung wird gestützt durch die Berechnung des Formfaktors des Operators $C(\xi_1)C(\xi_2)$ im nächsten Abschnitt.

Zuletzt sei bemerkt, dass sich die physikalischen Amplituden A_n^{-+} aus (3.35) im Limes $\xi \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow 0$ ergeben. Während der Limes $\xi \rightarrow 0$ trivial ist, scheint der Limes $\alpha \rightarrow 0$ singular zu sein. Es gilt allerdings (vgl. Anhang B.3)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \overline{G}_-^+(\xi) = 0, \quad (3.36)$$

sodass der Grenzwert $\alpha \rightarrow 0$ in (3.35) existiert. Dies zeigt, dass die Einführung eines Twistparameters α auch im transversalen Fall eine wichtige Regularisierung darstellt. Insbesondere ist ähnlich wie in [13] die Faktorisierung des Doppelintegrals in Gleichung (3.27) nur für endliches α möglich.

Da die Faktorisierung der Doppelintegrale für die Zweiplatz-Dichtematrix als Konsequenz der versteckten fermionischen Struktur des XXZ-Modells [17, 66] angesehen werden kann, liegt die Vermutung nahe, dass diese auch von Bedeutung ist für die Formfaktoren der Quantentransfermatrix. Es wäre eine interessante Aufgabe, diese Verbindung zur fermionischen Struktur genauer zu untersuchen.

3.3 Allgemeine Struktur

Wie im letzten Abschnitt begründet, legt der Vergleich der Amplituden (3.15) und (3.35) für die erzeugende Funktion bzw. die transversalen Korrelatoren die Vermutung nahe, dass die Formfaktoren der Quantentransfermatrix eine allgemeine Struktur besitzen. Um diese Aussage weiter zu untermauern, soll in diesem Abschnitt eine zu (3.22) analoge Formel für den Formfaktor

$$F_{++}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\langle \Psi_n^\alpha | C(\xi_1)C(\xi_2) | \Psi_0 \rangle}{\Lambda_0(\xi_1)\Lambda_0(\xi_2)\langle \Psi_n^\alpha | \Psi_n^\alpha \rangle} \quad (3.37)$$

angegeben werden. Der Zustand $|\Psi_n^\alpha\rangle$ ist nun durch $M-2$ ($M = N/2$) Bethe-Wurzeln charakterisiert, die mit μ_j bezeichnet werden.

¹Ein ähnliches Problem wird in der Arbeit [15] diskutiert.

In Anhang B.4 wird gezeigt, dass der Formfaktor (3.37) die Darstellung

$$F_{++}(\xi_1, \xi_2) = \frac{e^{-2\xi_1 - 2\xi_2}}{2 \operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_2)} \frac{\prod_{j=1}^M d(\lambda_j) e^{\lambda_j}}{\prod_{j=1}^{M-2} \rho_n(\mu_j | \alpha) q^{-\alpha} d(\mu_j) e^{\mu_j}} \times \frac{\det_{M-2} \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j | \alpha)}{a_n(\mu_j | \alpha)} K_{2-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\}}{\det_{M-2} \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{a_n(\mu_j | \alpha)} K(\mu_j - \mu_k) \right\}} \det \begin{pmatrix} G_{++}(\xi_1) & G_+(\xi_1) \\ G_{++}(\xi_2) & G_+(\xi_2) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

besitzt. Im Einklang mit der Behauptung aus Abschnitt 3.2 taucht im Determinanten-Anteil an dieser Stelle der Kern $K_{2-\alpha}$ auf, da der Operator $C(\xi_1)C(\xi_2)$ Pseudospin $s = 2$ besitzt. Ebenfalls vorhanden ist der Vorfaktor, von dem man erwartet, dass er in Kombination mit dem „konjugierten“ Formfaktor den universellen Anteil liefert. Besonders interessant ist in (3.38) der faktorisierte Anteil, der hier durch eine 2×2 -Determinante gegeben ist. Die Einträge sind dabei durch die asymptotische Entwicklung einer Funktion $G_+(\lambda, \xi)$ gegeben,

$$G_+(\lambda, \xi) \sim G_+(\xi) + 2e^{-2\lambda} G_{++}(\xi) + \mathcal{O}(e^{-4\lambda}), \quad \operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.39)$$

welche durch eine zu (3.24) analoge lineare Integralgleichung definiert ist,

$$G_+(\lambda, \xi) = -\operatorname{cth}(\lambda - \xi) + q^{\alpha-2} \rho_n(\xi | \alpha) \operatorname{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{C_n} dm_+^\alpha(\mu) K_{2-\alpha}(\lambda - \mu) G_+(\mu, \xi). \quad (3.40)$$

Der erste Faktor in (3.38) hat die Form einer inversen Vandermonde-Determinante und ist nötig, um den homogenen Limes $\xi_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow 0$ durchführen zu können. Die Verallgemeinerung des faktorisierten Anteil auf den Formfaktor des Operators $C(\xi_1) \dots C(\xi_n)$ könnte somit aus dem Quotienten einer $n \times n$ -Determinanten und einer Vandermonde-Determinanten in den Variablen ξ_1, \dots, ξ_n bestehen. Die Einträge der $n \times n$ -Determinanten könnten die ersten n Terme der asymptotischen Entwicklung einer Funktion $G_+(\lambda, \xi)$ für $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty$ enthalten, wobei letztere eine Integralgleichung ähnlich zu (3.40) erfüllt. Die Überprüfung dieser Vermutung ist eine interessante offene Frage.

Es ist zu erwarten, dass sich eine zu (3.31) analoge Formel für den Formfaktor

$$F_{--}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\langle \Psi_0 | B(\xi_1) B(\xi_2) | \Psi_n^\alpha \rangle}{\Lambda_n(\xi_1 | \alpha) \Lambda_n(\xi_2 | \alpha) \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \quad (3.41)$$

herleiten lässt. In Analogie zur Rechnung in Anhang B.2 tritt dabei eine vierfache Summe bzw. ein Vierfachintegral auf, welches sich vermutlich (wenn auch mit großem technischen Aufwand) faktorisieren lässt.

4 Tieftemperaturanalyse in der masselosen Phase

In diesem Kapitel soll das führende Tieftemperaturverhalten der Amplituden aus Kapitel 3 berechnet werden. Dieses ist von besonderem Interesse, da die XXZ-Kette ein quantenkritisches Modell darstellt, in dem sich bei $T = 0$ durch Variation des Anisotropie-Parameters Δ und des Magnetfeldes h die Grundzustandseigenschaften drastisch ändern können. Das Phasendiagramm des XXZ-Modells (vgl. Abbildung 4.1) unterteilt sich in drei verschiedene Phasen, welche durch Phasenübergangslinien zweiter Ordnung getrennt sind [140]. Der Grundzustand im ferromagnetischen Regime ist der vollpolarisierte Zustand, wodurch die Korrelatoren trivial sind. Der antiferromagnetische Bereich unterteilt sich in zwei Phasen, in denen man nicht-triviale Korrelationen findet. Im massiven Regime ist der Grundzustand zweifach entartet und das Spektrum des Hamiltonoperators besitzt eine Anregungslücke, weshalb man exponentiell zerfallende Korrelationen erwartet. In der kritischen Phase hingegen ist das Spektrum lückenlos und man erwartet aufgrund von Vorhersagen der konformen Feldtheorie [9, 108] und der Tomonaga-Luttinger-Flüssigkeitstheorie [57, 130, 99, 100] algebraisch zerfallende Korrelationsfunktionen. Diese Charakteristik des Spektrums des Hamiltonoperators überträgt sich auf das Spektrum der Quantentransfermatrix im Limes $T \rightarrow 0$, weshalb in der Tieftemperaturanalyse die oben genannten Phasen getrennt behandelt werden müssen. In diesem Kapitel soll die Analyse für den masselosen Bereich bei endlichem Magnetfeld $h > 0$ durchgeführt werden, in Kapitel 6 findet sich die Betrachtung der massiven Phase. Die Beschränkung auf endliche Magnetfelder wird sich als wichtige Regularisierung erweisen, insbesondere können die in der Formfaktorreihe relevanten Terme als unabhängige Teilchen-Loch-Anregungen interpretiert werden.

Da das Spektrum der Quantentransfermatrix lückenlos wird für $T \rightarrow 0$, tragen unendlich viele Terme zur Formfaktorentwicklung bei. Da die Korrelationsfunktionen jedoch endlich sind, bedeutet dies, dass die Formfaktoren im Tieftemperaturlimit verschwinden müssen. Wie sich zeigen wird geschieht dies nach einem Potenzgesetz, wobei der nicht ganzzahlige Exponent derselbe ist, der den algebraischen Zerfall der Korrelationen beschreibt. Dieser Befund ist ähnlich zum Fall der Formfaktoren der gewöhnlichen Transfermatrix, welche mit Potenzen der inversen Systemgröße zu Null skalieren [73, 76].

Die Formfaktorreihe ist folglich für $T \rightarrow 0$ eine unendliche Summe verschwindender Terme. Die Strategie zur Berechnung der Korrelationsfunktionen wird sein, das asymptotisch führende Verhalten der Formfaktoren für kleine aber endliche Temperaturen zu berechnen und die Formfaktorreihe *exakt* aufzusummieren. Die Tieftemperaturanalyse erfolgt beispielhaft für die transversalen Korrelationsfunktionen¹ und nach dem folgenden Schema.

- (i) Glätten der Konturen C_n in der nichtlinearen Integralgleichung für die Hilfsfunktion (2.23) und den Ausdrücken für die Amplituden (3.35) und das Verhältnis der Eigenwerte (2.26).

¹Die Berechnung der longitudinalen Korrelatoren ist sehr ähnlich und wurde in der Arbeit [40] durchgeführt. Die Zusammenfassung der Ergebnisse für den longitudinalen Fall findet sich in Abschnitt 4.6.

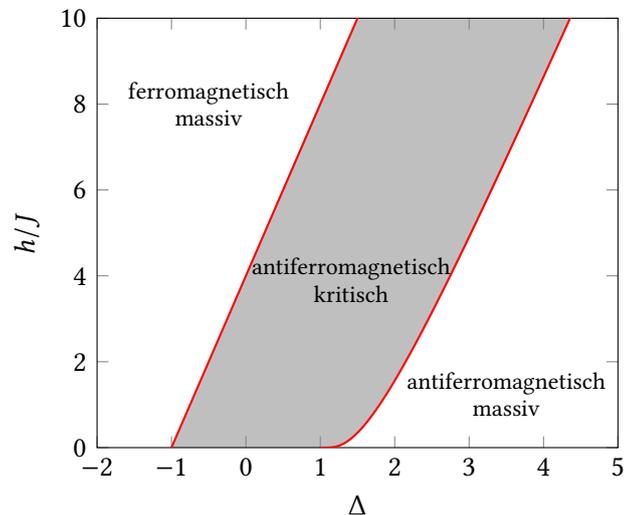


Abbildung 4.1: Phasendiagramm des Grundzustandes der XXZ-Kette. Die antiferromagnetische kritische Phase wird durch ein unteres und oberes kritisches Feld h_ℓ bzw. h_u begrenzt. Die Fortsetzung des Diagramms für $h/J < 0$ ergibt sich durch Spiegelung an der Δ -Achse. Das untere kritische Feld h_ℓ ist durch Gleichung (C.38) und das obere kritische Feld durch $h_u = 4J(1 + \Delta)$ gegeben.

- (ii) Tieftemperaturanalyse der nichtlinearen Integralgleichungen und Identifikation der relevanten Anregungen
- (iii) Tieftemperaturanalyse des Verhältnisses der Eigenwerte
- (iv) Tieftemperaturanalyse der Amplituden
- (v) Summation der führenden Beiträge

Glücklicherweise kann das schwierigste Problem (v) mit Hilfe einer in den Arbeiten [75, 111] entwickelten Summenformel gelöst werden. Dieselbe Summenformel wurde in [90] benutzt, um die Abstandsasymptotik der thermischen Dichte-Dichte-Korrelationsfunktionen des eindimensionalen Bose-Gases zu berechnen. Die in der oben genannten Arbeit berechnete Asymptotik hat dabei dieselbe Form wie die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse (4.66) und (4.75).

4.1 Glätten der Konturen

Im Folgenden sei $\eta = -i\gamma$ mit $\gamma \in (0, \pi/2)$. Dies bedeutet, dass der Anisotropieparameter im Bereich $0 < \Delta < 1$ liegt, wodurch sich Vereinfachungen technischer Art ergeben. Diese Wahl ist jedoch keine Einschränkung, da die Bereiche $-1 < \Delta < 0$ ($J > 0$) und $0 < \Delta < 1$ ($J < 0$) äquivalent sind.

Definiere zunächst die Funktionen

$$E(\lambda) = \ln\left(\frac{\text{sh}(\lambda)}{\text{sh}(\eta + \lambda)}\right), \quad \theta(\lambda) = \ln\left(\frac{\text{sh}(\eta - \lambda)}{\text{sh}(\eta + \lambda)}\right), \quad (4.1)$$

welche Stammfunktionen der nackten Energie $e(\lambda)$ und des Kerns $K(\lambda)$ sind. Die Funktion $E(\lambda)$ hat Schnitte parallel zur reellen Achse von 0 nach $-\infty$ und von $i\gamma$ nach $i\gamma - \infty$, während die Schnitte der Funktion $\theta(\lambda)$ parallel zur reellen Achse von $\pm i\gamma$ nach $\pm i\gamma \pm \infty$ verlaufen.

Definiere für den weiteren Verlauf die Funktion

$$z(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \ln\left(\frac{1 + \alpha_n(\lambda|\alpha)}{1 + \alpha_0(\lambda)}\right). \quad (4.2)$$

Im Folgenden sei s der Pseudospin des Operators, dessen Formfaktoren betrachtet werden (hier also $s = 1$). Führe nun eine zum betragsgrößten Eigenwert im Pseudospin- s Sektor gehörige Referenzkontur $\mathcal{C}_{0,s}$ ein, sodass die Beziehung

$$n_h - n_p = s \quad (4.3)$$

erfüllt ist. Hierbei sind n_h und n_p die Anzahl der Löcher und Teilchen in Bezug auf die Kontur $\mathcal{C}_{0,s}$. Man beachte, dass diese Definition der Begriffe „Löcher“ und „Teilchen“ leicht von der in Kapitel 2 getroffenen Konvention abweicht. Wie sich zeigen wird, gilt im Tieftemperaturlimit $\mathcal{C}_{0,0} = \mathcal{C}_0$, wobei \mathcal{C}_0 aus zwei durch die Punkte $i\gamma/2$ und $-i\gamma/2 + i0$ verlaufende Geraden parallel zur reellen Achse besteht (vgl. Kapitel 2). Weiterhin wird im Verlauf des Kapitels gezeigt, dass die Kontur $\mathcal{C}_{0,1}$ eine infinitesimale Deformation von \mathcal{C}_0 ist.

Glättet man nun die Kontur in der nichtlinearen Integralgleichung (2.23) für die Hilfsfunktion, so erhält man

$$\begin{aligned} \ln(\alpha_n(\lambda|\alpha)) &= i\pi s - 2(\kappa + \alpha)\eta - \beta e(\lambda) \\ &+ \sum_{j=1}^{n_h} \theta(\lambda - \lambda_j^h) - \sum_{j=1}^{n_p} \theta(\lambda - \lambda_j^p) - \int_{\mathcal{C}_{0,s}} \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu) \ln(1 + \alpha_n(\mu|\alpha)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Teilchen- und Lochparameter genügen dabei den Nebenbedingungen

$$\alpha_n(\lambda_j^h|\alpha) = \alpha_n(\lambda_k^p|\alpha) = -1, \quad j = 1, \dots, n_h, \quad k = 1, \dots, n_p. \quad (4.5)$$

Glättet man die Konturen in der Darstellung (2.26) für die Funktion ρ , so erhält man

$$\rho_n(\lambda|\alpha) = q^\alpha \exp\left\{\sum_{j=1}^{n_h} E(\lambda_j^h - \lambda) - \sum_{j=1}^{n_p} E(\lambda_j^p - \lambda) - \int_{\mathcal{C}_{0,s}} d\mu e(\mu - \lambda) z(\mu)\right\}, \quad (4.6)$$

wobei sich λ innerhalb von $\mathcal{C}_{0,s}$ befindet.

Für die Amplituden (3.35) führt man zunächst im universellen Anteil die Kontur $\mathcal{C}_{0,s}$ ein. Nach

einer längeren Rechnung erhält man (vgl. Anhang C.1)

$$\begin{aligned}
A_n^{(0)}(\alpha) &:= \exp \left\{ - \int_{C_n} \frac{d\lambda}{2\pi i} \ln(\rho_n(\lambda|\alpha)) \partial_\lambda \ln \left(\frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{1 + a_0(\lambda)} \right) \right\} \\
&= (-1)^s q^{s\alpha} \frac{\prod_{j=1}^{n_h} \prod_{k=1}^{n_p} \operatorname{sh}(\lambda_j^h - \lambda_k^p + \eta) \operatorname{sh}(\lambda_j^h - \lambda_k^p - \eta)}{\left[\prod_{j,k=1}^{n_h} \operatorname{sh}(\lambda_j^h - \lambda_k^h - \eta) \right] \left[\prod_{j,k=1}^{n_p} \operatorname{sh}(\lambda_j^p - \lambda_k^p + \eta) \right]} \\
&\quad \times \frac{\left[\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n_h} \operatorname{sh}(\lambda_j^h - \lambda_k^h) \right] \left[\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n_p} \operatorname{sh}(\lambda_j^p - \lambda_k^p) \right]}{\left[\prod_{j=1}^{n_h} \prod_{k=1}^{n_p} \operatorname{sh}(\lambda_j^h - \lambda_k^p) \right]^2} \\
&\quad \times \left[\prod_{j=1}^{n_p} \left(\partial_\lambda e^{-2\pi i z(\lambda)} \right)_{\lambda=\lambda_j^p}^{-1} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_h} \left(\partial_\lambda e^{-2\pi i z(\lambda)} \right)_{\lambda=\lambda_j^h}^{-1} \right] \\
&\quad \times \exp \left\{ \sum_{j=1}^{n_p} \int_{C_{0,s}} d\lambda z(\lambda) (e(\lambda - \lambda_j^p) - e(\lambda_j^p - \lambda)) \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \sum_{j=1}^{n_h} \int_{C_{0,s}} d\lambda z(\lambda) (e(\lambda_j^h - \lambda) - e(\lambda - \lambda_j^h)) \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ - \int_{C_{0,s}} d\lambda \int_{C'_{0,s}} d\mu z(\lambda) e'(\lambda - \mu) z(\mu) \right\}. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Hierbei ist $C'_{0,s}$ eine Kontur, welche sich infinitesimal nahe $C_{0,s}$ und innerhalb von $C_{0,s}$ befindet. Der Determinantenanteil und der faktorisierte Anteil \bar{G}_\pm der Amplituden (3.35) werden in Abschnitt 4.4 behandelt.

4.2 Tieftemperaturanalyse der nichtlinearen Integralgleichungen

Im Folgenden soll die nichtlineare Integralgleichung (4.4) im Limes $T \rightarrow 0$ untersucht sowie die relevanten Anregungen der Quantentransformmatrix identifiziert werden.

Definiere zunächst die Funktionen

$$\varepsilon_0(\lambda) = h + 2J \operatorname{sh}(\eta) e(\lambda + i\gamma/2) = h - \frac{4J(1 - \Delta^2)}{\operatorname{ch}(2\lambda) - \Delta}, \tag{4.8}$$

sowie

$$u_0(\lambda) = -T \ln(a_0(\lambda + i\gamma/2)), \quad u(\lambda) = -T \ln(a_n(\lambda + i\gamma/2|\alpha)). \tag{4.9}$$

Wie sich zeigen wird, sind diese Funktionen im Limes $T \rightarrow 0$ wohldefiniert. Mit den obigen Kon-

²Nehme für eine einheitlichere Notation gegenüber Kapitel 3.2 die Ersetzung $G_+ \rightarrow \bar{G}_+$ vor.

ventionen wird Gleichung (4.4) zu

$$u(\lambda) = \varepsilon_0(\lambda) + T \left[2\pi i(\alpha' - s/2) + \sum_{j=1}^{n_p} \theta(\lambda - \lambda_j^p + iy/2) - \sum_{j=1}^{n_h} \theta(\lambda - \lambda_j^h + iy/2) \right] + T \int_{C_{0,s-iy/2}} \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu) \ln \left(1 + e^{-\frac{u(\mu)}{T}} \right), \quad (4.10)$$

wobei $\alpha' = \eta\alpha/i\pi$. Eine ähnliche Gleichung gilt für u_0 ,

$$u_0(\lambda) = \varepsilon_0(\lambda) + T \int_{C_{0-iy/2}} \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu) \ln \left(1 + e^{-\frac{u_0(\mu)}{T}} \right). \quad (4.11)$$

Da θ auf der Kontur $C_{0,s-iy/2}$ beschränkt ist, können die Terme in den eckigen Klammern von (4.10) gegenüber $\varepsilon_0(\lambda)$ für $T \rightarrow 0$ vernachlässigt werden. Folglich haben u und u_0 denselben Tieftemperaturlimites ε .

Anschaulich ist der Tieftemperaturlimites von (4.10) und (4.11) klar: Die Integranden verschwinden auf den Teilen der Kontur, auf denen $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$ gilt und ergeben einen endlichen Beitrag auf dem Komplement. Das Verhalten der Funktion ε_0 legt nahe, dass dieses Komplement ein Intervall $[-Q, Q]$ auf der reellen Achse ist.

Im Folgenden soll dies rigoros begründet werden. Definiere dazu für $0 < h < h_u$ die bekleidete Energie ε als Lösung³ der linearen Integralgleichung

$$\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_0(\lambda) + \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu) \varepsilon(\mu). \quad (4.12)$$

Hierbei ist $Q > 0$ eindeutig als Funktion von h definiert durch die Forderung $\varepsilon(Q) = 0$ (vgl. [41]). Die bekleidete Ladung ist reell und gerade auf \mathbb{R} sowie monoton wachsend auf \mathbb{R}_+ . Des Weiteren kann man zeigen [41], dass für alle $\gamma \in (0, \pi/2)$ und $\lambda \in \mathbb{R} - iy + i0$ (dies entspricht dem unteren Teil der Kontur in (4.10) und (4.11)) die Ungleichung

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\lambda) > \frac{h}{4} > 0 \quad (4.13)$$

erfüllt ist. Nimmt man an, dass die Lösung von (4.10) und (4.11) eindeutig ist, so folgt $\lim_{T \rightarrow 0} u(\lambda) = \lim_{T \rightarrow 0} u_0(\lambda) = \varepsilon(\lambda)$. Der Beweis hiervon erfolgt mit dem folgenden „Sommerfeld Lemma“, welches auch mögliche Phasen $2\pi ip$ des Logarithmus sowie die Korrekturen in T erfasst.

Lemma 4.2.1. *Es seien $T > 0$ und u, f holomorph in einer offenen Umgebung einer Kontur C_u . f sei beschränkt auf C_u . Die Funktion $\ln(1 + e^{-u(\lambda)/T})$ sei stetig auf C_u (d.h. man fasst C_u als Kontur auf der Riemannfläche von $\ln(1 + e^{-u(\lambda)/T})$ auf). Definiere $v = \operatorname{Re} u$, $w = \operatorname{Im} u$, und nehme an, dass v genau zwei Nullstellen Q_\pm auf C_u besitzt, welche die Kontur C_u in zwei Teile C_u^\pm teilt. Auf C_u^- sei v negativ und auf C_u^+ positiv. Die Orientierung von C_u sei derart, dass Q_- vor Q_+ durchlaufen wird. Gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$*

³Genauer gesagt definiert dies die Funktion $\varepsilon(\lambda)$ im Streifen $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \gamma$. Außerhalb dieses Streifens ergibt sich die Funktion durch analytische Fortsetzung. Da in diesem Kapitel nur das Verhalten innerhalb des Streifens relevant ist, wird dieser Punkt nicht mehr explizit erwähnt.

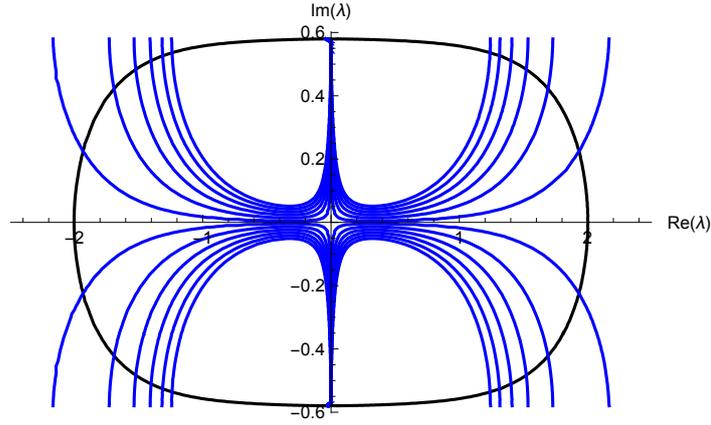


Abbildung 4.2: Graphische Lösung der Gleichung (4.16) in der komplexen Ebene. Lösungen dieser Gleichung sind Schnittpunkte der durch $\text{Re } \varepsilon(\lambda) = 0$ gegebene Kurve Γ (schwarz) mit den Kurven $\text{Im } \varepsilon(\lambda) = -(2n-1)\pi T$ (blau). In diesem Beispiel ist $J = 1$, $T = 0.01$, $\Delta = 0.4$, $h = 0.051$ und $n = -5, -4, \dots, 6$. Die Lösungen bilden eine unendliche Folge von Punkten auf der Linie Γ mit zwei Häufungspunkten bei $\pm i\gamma/2$ (hier $\gamma/2 = 0.580$). Man beachte, dass die Kurve Γ die reelle Achse bei $\pm Q$ schneidet (hier $Q = 2$).

sodass $w(Q_{\pm}) = 2\pi pT$, dann gibt es eine Wahl von Schnitten der Funktion $\ln(1 + e^{-u(\lambda)/T})$ sodass

$$T \int_{C_u} d\lambda f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda)}{T}}\right) = - \int_{Q_-}^{Q_+} d\lambda f(\lambda) (u(\lambda) - 2\pi i p T) + \frac{T^2 \pi^2}{6} \left(\frac{f(Q_+)}{u'(Q_+)} - \frac{f(Q_-)}{u'(Q_-)} \right) + \mathcal{O}(T^4). \quad (4.14)$$

gilt.

Der Beweis findet sich in Anhang C.2. Man beachte, dass obiges Lemma große Ähnlichkeit mit der aus der Festkörperphysik bekannten Sommerfeld-Entwicklung besitzt [122]. Das Lemma kann direkt auf die in (4.12) definierte Funktion ε angewendet werden, welche die Annahmen erfüllt mit $C_{\varepsilon} = C_0 - i\gamma/2$, $Q_{\pm} = \pm Q$ und $p = 0$. Mit (4.2.1) folgt

$$\varepsilon(\lambda) - \varepsilon_0(\lambda) - T \int_{C_0 - i\gamma/2} \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu) \ln\left(1 + e^{-\frac{\varepsilon(\mu)}{T}}\right) = \mathcal{O}(T^2). \quad (4.15)$$

Der Vergleich mit (4.10), (4.11) zeigt, dass diese Gleichungen für kleine T in der Tat durch ε erfüllt werden, d.h. $a_n(\lambda|\alpha) \sim a_0(\lambda) \sim e^{-\varepsilon(\lambda - i\gamma/2)/T}$. Da die Korrektur zur Funktion u_0 von der Ordnung T^2 ist, lauten die Bethe-Ansatz-Gleichungen für die Hilfsfunktion a_0 bis zur Ordnung T^2

$$\varepsilon(\lambda) = -(2n-1)\pi iT, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.16)$$

Für $T \rightarrow 0$ liegen die Lösungen dieser Gleichung dicht auf der durch $\text{Re } \varepsilon(\lambda) = 0$ definierten Kurve Γ (vgl. Abbildung 4.2). Für die Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen für den angeregten Zustand trifft dies auch zu, allerdings muss hier der $\mathcal{O}(T)$ -Term auf der rechten Seite modifiziert werden.

Zur Berechnung dieses Terms setzt man voraus, dass die Funktion u für feste Teilchen- und Lochpositionen eine Tieftemperaturentwicklung der Form

$$u(\lambda) = \varepsilon(\lambda) + Tu_1(\lambda) + T^2u_2(\lambda) + \mathcal{O}(T^3) \quad (4.17)$$

besitzt. Nehme weiterhin an, dass ein $p \in \mathbb{Z}$ und $Q_{\pm} = \pm Q + TQ_{\pm}^{(1)} + \mathcal{O}(T^2)$ existieren, sodass $u(Q_{\pm}) = 2\pi ipT$ gilt. Es folgt

$$Q_{\pm} = \pm Q \mp \frac{\bar{u}_1(\pm Q)}{\varepsilon'(Q)}T + \mathcal{O}(T^2), \quad (4.18)$$

wobei per Definition

$$\bar{u}_1(\lambda) = u_1(\lambda) - 2\pi ip \quad (4.19)$$

gilt. Analog sei $\bar{u}(\lambda) = u(\lambda) - 2\pi ipT$. Wählt man für \mathcal{C}_u eine Deformation der Kontur $\mathcal{C}_{0,s} - i\gamma/2$, sodass \mathcal{C}_u durch die Punkte Q_{\pm} läuft, so folgt nach Anwendung des Lemmas (4.2.1) und Gleichung (4.18) die lineare Integralgleichung

$$\bar{u}(\lambda) = \varepsilon_0(\lambda) + Tr_1(\lambda) + T^2r_2(\lambda) + \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu)\bar{u}(\mu) + \mathcal{O}(T^3), \quad (4.20)$$

wobei

$$r_1(\lambda) = 2\pi i(\alpha' - s/2 - p) + \sum_{j=1}^{n_p} \theta(\lambda - x_j^p) - \sum_{j=1}^{n_h} \theta(\lambda - x_j^h), \quad (4.21)$$

$$r_2(\lambda) = \frac{i\pi}{4\varepsilon'(Q)} \left[K(\lambda - Q) \left(\frac{1}{3} + \frac{\bar{u}_1^2(Q)}{\pi^2} \right) + K(\lambda + Q) \left(\frac{1}{3} + \frac{\bar{u}_1^2(-Q)}{\pi^2} \right) \right], \quad (4.22)$$

und $x_j^{p,h} = \lambda_j^{p,h} - i\gamma/2$. Aufgrund der Linearität der Gleichung (4.20) kann die Funktion \bar{u} durch Funktionen ausgedrückt werden, welche bei der Beschreibung der Grundzustandseigenschaften der XXZ-Kette eine wichtige Rolle spielen. Im Einzelnen⁴ sind dies die bekleidete Ladung Z , die bekleidete Phase ϕ , die Dichte ρ und die Resolvente R , definiert durch die linearen Integralgleichungen

$$Z(\lambda) = 1 + \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu)Z(\mu), \quad (4.23a)$$

$$\phi(\lambda, \nu) = -\frac{\theta(\lambda - \nu)}{2\pi i} + \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu)\phi(\mu, \nu), \quad (4.23b)$$

$$R(\lambda, \nu) = K(\lambda - \nu) + \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu)R(\mu, \nu) \quad (4.23c)$$

$$\rho(\lambda) = -\frac{e(\lambda + i\gamma/2)}{2\pi i} + \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} K(\lambda - \mu)\rho(\mu). \quad (4.23d)$$

Mit diesen Definitionen folgt

$$\bar{u}_1(\lambda) = 2\pi i \left[(\alpha' - s/2 - p)Z(\lambda) + \sum_{j=1}^{n_h} \phi(\lambda, x_j^h) - \sum_{j=1}^{n_p} \phi(\lambda, x_j^p) \right], \quad (4.24a)$$

$$u_2(\lambda) = \frac{i\pi}{4\varepsilon'(Q)} \left[R(\lambda, Q) \left(\frac{1}{3} + \frac{\bar{u}_1^2(Q)}{\pi^2} \right) + R(\lambda, -Q) \left(\frac{1}{3} + \frac{\bar{u}_1^2(-Q)}{\pi^2} \right) \right]. \quad (4.24b)$$

⁴Man beachte hierzu auch die Fußnote 3 auf Seite 27.

Setzt man dies in Gleichung (4.5) ein, so erhält man die Bethe-Ansatz-Gleichungen für den angeregten Zustand in linearer Ordnung in T ,

$$\varepsilon(x_j^{p,h}) + Tu_1(x_j^{p,h}) = -(2n_j^{p,h} - 1)i\pi T, \quad n_j^{p,h} \in \mathbb{Z}. \quad (4.25)$$

Der genaue Wertebereich der „Quantenzahlen“ $n_j^{p,h} \in \mathbb{Z}$ wird weiter unten festgelegt. Mit Hilfe des expliziten Ausdrucks (4.24a) für \bar{u}_1 kann dies umgeschrieben werden zu

$$\frac{\varepsilon(x_j^{p,h})}{2\pi iT} = -n_j^{p,h} + 1/2 - p - (\alpha' - s/2 - p)Z(x_j^{p,h}) + \sum_{k=1}^{n_p} \phi(x_j^{p,h}, x_k^p) - \sum_{k=1}^{n_h} \phi(x_j^{p,h}, x_k^h). \quad (4.26)$$

Dies ist ein gekoppeltes System nichtlinearer algebraischer Gleichungen, welches Ähnlichkeit mit den ursprünglichen Bethe-Ansatz-Gleichungen in logarithmischer Form besitzt, allerdings gehen hier nur noch die Teilchen- und Lochparameter ein. Für den Fall, dass die ϕ -abhängigen Terme auf der rechten Seite von (4.26) endlich bleiben⁵ für $T \rightarrow 0$, folgt, dass die möglichen Teilchen- und Lochpositionen die Kurve $\text{Re } \varepsilon = 0$ dicht füllen.

Im weiteren Verlauf soll lediglich die Klasse von Anregungen betrachtet werden, deren Teilchen- und Lochparameter in der Nähe der „Fermi-Punkte“ $\pm Q$ liegen,

$$x_j^{p,h} = \pm Q + \mathcal{O}(T). \quad (4.27)$$

Wie sich zeigt, liefert diese Klasse die führende Abstandsasymptotik der Korrelationsfunktionen.

Bezeichnet man die Anzahl der Teilchen bzw. Löcher an den Fermi-Punkten $\pm Q$ mit n_p^\pm bzw. n_h^\pm so zählt die ganze Zahl

$$\ell = n_h^- - n_p^- \quad (4.28)$$

die Differenz zwischen Löchern und Teilchen am linken Fermi-Punkt $-Q$ (Anzahl der „Umklappstreuungsprozesse“). Setzt man $x_j^{p,h} = \pm Q$ in Gleichung (4.24a) ein, so erhält man das führende Tieftemperaturverhalten von $\bar{u}_1(\lambda)$ welches mit $\bar{u}_1^{(\ell)}(\lambda)$ bezeichnet wird. Explizit erhält man

$$\bar{u}_1^{(\ell)}(\lambda) = 2\pi i \left(w(\lambda) + \alpha' - p - s/2 \right), \quad (4.29)$$

wobei

$$w(\lambda) = (\alpha' - p - \ell) \left(Z(\lambda) - 1 \right) + \frac{s}{2} \left(\phi(\lambda, Q) + \phi(\lambda, -Q) \right). \quad (4.30)$$

Damit folgt das führende Tieftemperaturverhalten der Fermi-Punkte Q_\pm ,

$$Q_\pm = \pm Q \mp \frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(\pm Q)}{\varepsilon'(\pm Q)} T + \mathcal{O}(T^2). \quad (4.31)$$

Setzt man (4.29) in (4.25) ein, so *entkoppeln* die Bestimmungsgleichungen der Teilchen- und Lochparameter,

$$\frac{\varepsilon(x_j^{p,h})}{2\pi iT} = -n_j^{p,h} + \frac{1+s}{2} - \alpha' - w(x_j^{p,h}). \quad (4.32)$$

⁵Dies geschieht falls zwei Parameter um $\pm i\gamma$ getrennt sind für $T \rightarrow 0$ („Strings“). Da derartige Anregungen jedoch eine endliche Korrelationslänge besitzen, werden Strings im weiteren Verlauf des Kapitels nicht berücksichtigt.

Diese Entkopplung der Freiheitsgrade ist bemerkenswert, da man diese ansonsten typischerweise bei freien Fermionen findet. In der Tat hat man für $\gamma = \pi/2$ (XX-Modell) die Vereinfachung $w(\lambda) = 0$ und $\varepsilon = \varepsilon_0$ sodass sich die Gleichung

$$\varepsilon_0(x_j^{p,h}) = -(2n_j^{p,h} - 1 - s + \alpha')\pi iT \quad (4.33)$$

ergibt. Das Besondere für das XX-Modell ist, dass (4.33) für beliebige Temperaturen T gilt. Für den allgemeinen wechselwirkenden Fall findet man also im Tieftemperaturlimit für Anregungen an der Fermi-Kante eine starke Analogie zu freien Fermionen vor.

Die Teilchen-Loch-Anregungen können in Klassen eingeteilt werden, welche durch die ganzen Zahlen $p + \ell$ und s parametrisiert werden. Bis hierhin ist der Parameter p nicht festgelegt worden. Der Parameter tauchte durch die Anwendung des Lemmas 4.2.1 bei der Bestimmung des Tieftemperaturverhaltens von $\ln a_n(\cdot|\alpha)$ auf. Aus dem Lemma folgt, dass $-2\pi p$ die Phase von $a_n(Q_\pm|\alpha)$ ist. Damit ist p mit der Wahl der Referenzkontur $\mathcal{C}_{0,s}$ verbunden. Im Prinzip würde man gerne die reelle Achse als Referenzkontur wählen (diese entspricht dem oberen Teil der Kontur $\mathcal{C}_0 - i\gamma/2$). Dann ist p durch die Bedingung fixiert, dass sowohl Q_- als auch Q_+ möglichst nahe an den Punkten $\pm Q$ liegen. Im weiteren Verlauf wird klar, dass dies nur für $s = 0$ möglich ist. Im allgemeinen Fall kann die Referenzkontur nur entweder durch $-Q$ oder Q laufen. Hier soll die Konvention $-Q$ getroffen werden, wodurch die Punkte Q_\pm durch (4.31) bestimmt sind.

Zum besseren Verständnis ist es hilfreich, ein Beispiel zu betrachten. In Abbildung 4.3 ist der Realteil (geschlossene Kurve) und der Imaginärteil (offene Kurven) der Differenz zwischen linker und rechter Seite von Gleichung (4.32) graphisch dargestellt. Lösungen der Gleichung (4.32), d.h. mögliche Teilchen- und Lochpositionen, sind demnach Schnittpunkte zwischen der geschlossenen und den offenen Kurven. Für dieselben physikalischen Parameter wie in Abbildung 4.2 durchläuft in Abbildung 4.3 die Zahl $p + \ell$ die Werte 2 bis 5 (dies bei festem $s = 0$). Man erkennt, dass in diesem Fall die reelle Achse (entspricht dem oberen Abschnitt der Kontur $\mathcal{C}_0 - i\gamma/2$ in negativer Richtung durchlaufen) eine mögliche Referenzkontur ist, da sich der linke und rechte Schnittpunkt der Kurve $\text{Re } u = 0$ mit der reellen Achse auf demselben Riemannblatt der Riemannfläche von $\ln a_n(\cdot|\alpha)$ befinden (die Schnitte entsprechen gerade den offenen Kurven in Abbildung 4.3). Sobald der Wert $p + \ell$ den Wert 5 erreicht in Abbildung 4.3, kreuzt die reelle Achse einen Schnitt von $\ln a_n(\cdot|\alpha)$ bevor sie die Kurve $\text{Re } \varepsilon = 0$ schneidet. Dadurch ändert sich die Phase von $\ln a_n(\cdot|\alpha)$ (gemessen in Einheiten von -2π) um 1, d.h. man hat $p = 1$. Folglich hat man in den ersten 3 Bildern von Abbildung 4.3 $p = 0$ und $\ell = 2, 3, 4$, aber im letzten $p = 1$ und $\ell = 4$. Im linken Teil von Abbildung 4.4 ist ein Beispiel mit $p = 2$ gezeigt.

Für $s \neq 0$ ändert sich das Bild. Ein Beispiel mit $p + \ell = 0$ und $s = 1$ ist in Abbildung 4.4 gezeigt. Hier kreuzt die reelle Achse lediglich eine Linie mit konstantem Imaginärteil. Sind Q_\pm die Lösungen der Gleichung $1 - a_n(\cdot|\alpha)$, welche sich am nächsten zur reellen Achse befinden, so folgt, dass $\ln a_n(Q_+|\alpha) - \ln a_n(Q_-|\alpha) = -2\pi i$. Somit erfüllt diese Kontur nicht die Voraussetzungen von Lemma 4.2.1. Eine Kontur $\mathcal{C}_{0,1}$, welche sich so nah wie möglich an der reellen Achse befindet und die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, muss einen von zwei Schnittpunkten der Linie mit negativem Imaginärteil von oben und den anderen Schnittpunkt von unten passieren.

Die $\mathcal{O}(T)$ -Korrekturen der Teilchen- und Lochparameter können mit Hilfe von (4.32) bestimmt werden,

$$x_j^{p,h} = \pm Q - \left(n_j^{p,h} - \frac{1+s}{2} + \alpha' + w(\pm Q) \right) \frac{2\pi iT}{\varepsilon'(\pm Q)}. \quad (4.34)$$

Bezeichne nun die zum rechten bzw. linken Fermi-Punkt gehörigen Teilchen- und Lochparameter

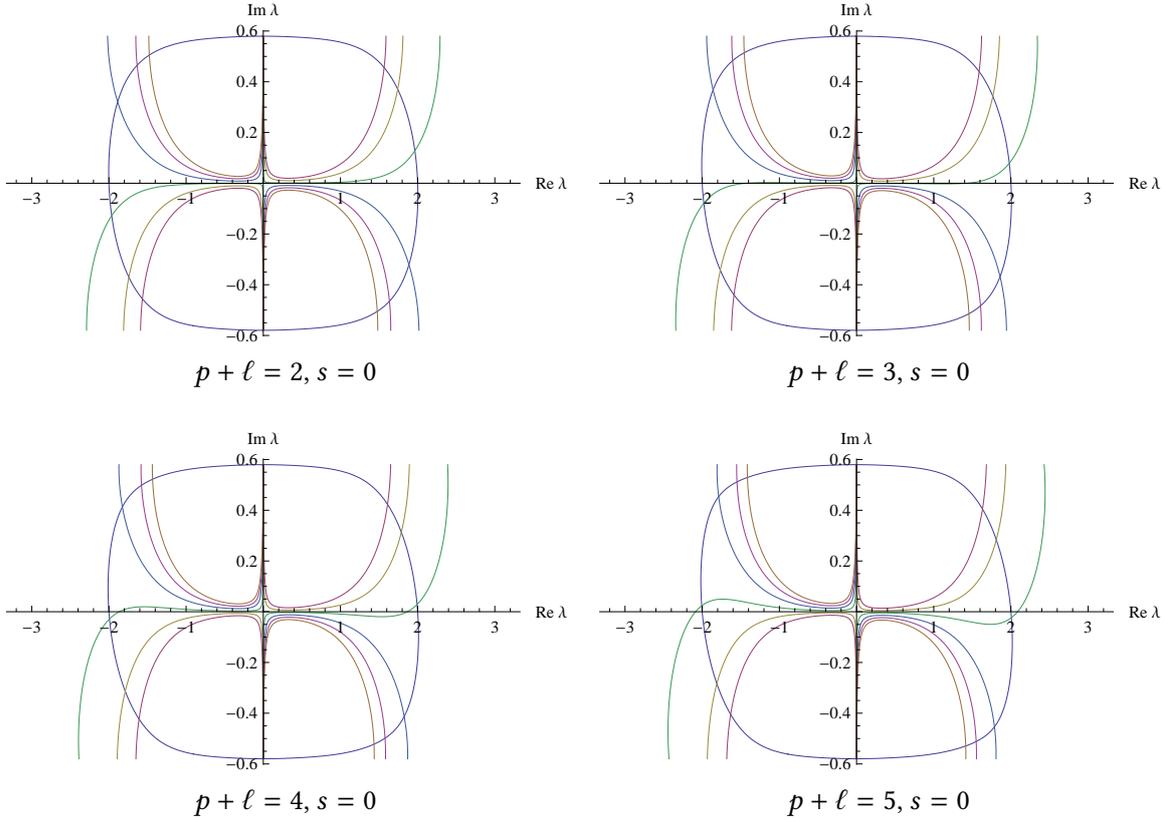


Abbildung 4.3: Graphische Lösung der Gleichung (4.32) in der komplexen Ebene für verschiedene Werte von $p + \ell$ bei festem $s = 0$. Die physikalischen Parameter sind wie in Abbildung 4.2: $J = 1$, $T = 0.01$, $\Delta = 0.4$, $h = 0.051$. Abgebildet sind nur die Lösungen welche sich am nächsten zur reellen Achse befinden.

mit $x_j^{h\pm}$ und $x_j^{p\pm}$, sowie die zugehörigen Quantenzahlen mit $n_j^{p\pm}$ und $n_j^{h\pm}$. Nehme nun die Umparametrisierung

$$n_j^{p\pm} = -p_j^\pm - p + 1, \quad n_j^{h\pm} = h_j^\pm - p \quad (4.35)$$

vor, wobei die ganzen Zahlen p_j^\pm, h_j^\pm positiv sind. Damit diese in konsistenter Weise als Quantenzahlen von Teilchen und Löchern interpretiert werden können, muss p derart fixiert werden, dass $\text{Im } x_j^{p^-} > 0 > \text{Im } x_j^{h^-}$ gilt für $p_j^- = h_j^- = 1$ (vgl. dazu die Diskussion des letzten Abschnitts). Mit (4.29) und (4.34) folgt, dass diese Forderung äquivalent ist zu

$$|\text{Im } \bar{u}_1^{(\ell)}(-Q)| < \pi. \quad (4.36)$$

Setzt man nun (4.31) und (4.35) in Gleichung (4.34) ein, so folgt für die Teilchen- und Lochparameter

$$x_j^{p\pm} = Q_\pm + \left(p_j^\pm - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi i T}{\varepsilon'(Q)} + \mathcal{O}(T^2), \quad (4.37a)$$

$$x_j^{h\pm} = Q_\pm - \left(h_j^\pm - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi i T}{\varepsilon'(Q)} + \mathcal{O}(T^2), \quad (4.37b)$$

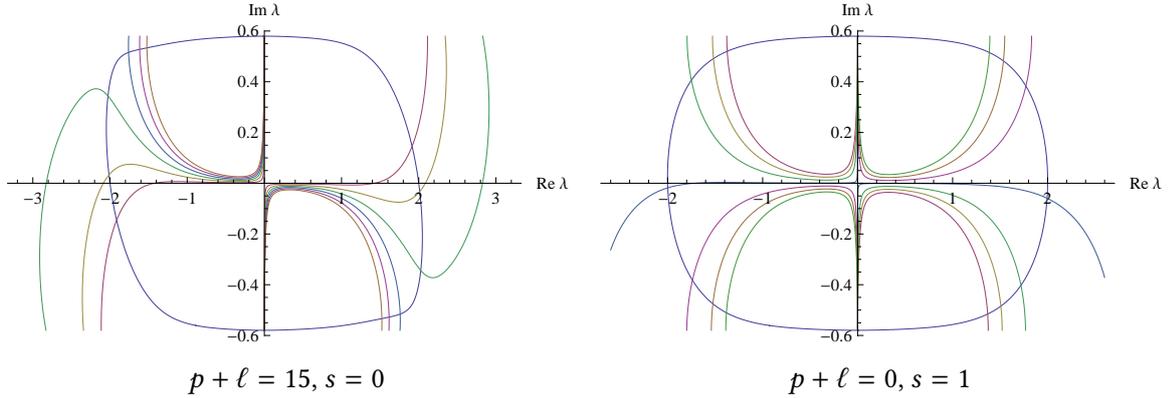


Abbildung 4.4: Graphische Lösung der Gleichung (4.32) in der komplexen Ebene für verschiedene Werte von $p + \ell$ und s . Im rechten Bild ist $J = 1$, $T = 0.0125$, $\Delta = 0.4$, $h = 0.051$ und $\alpha = 0.3$. Im linken Bild ist $T = 0.005$ und $\alpha = 0$.

wobei $p_j^\pm, h_j^\pm \in \mathbb{Z}_+$. Die Ungleichung (4.36) garantiert, dass Q_- so nahe wie möglich an der reellen Achse ist, d.h. dass alle Teilchen bzw. Löcher ober- bzw. unterhalb der reellen Achse liegen. Für $s = 0$ folgt dann $\bar{u}_1^{(\ell)}(Q) = \bar{u}_1^{(\ell)}(-Q)$ und (4.36) ist automatisch für den rechten Fermipunkt erfüllt. Für $s \neq 0$ trifft dies nicht mehr zu. In diesem Fall kann man unter Verwendung der bekannten Identitäten [87]

$$\mathcal{Z} = 1 + \phi(Q, Q) - \phi(Q, -Q), \quad \frac{1}{\mathcal{Z}} = 1 + \phi(Q, Q) + \phi(Q, -Q) \quad (4.38)$$

lediglich schließen, dass

$$0 < \text{Im} \bar{u}_1^{(\ell)}(Q) - \text{Im} \bar{u}_1^{(\ell)}(-Q) = 2s\pi \left(\frac{1}{\mathcal{Z}} - 1 \right) < s\pi \quad (4.39)$$

gilt. Die ganz rechte Seite der Ungleichung folgt aufgrund der Abschätzung $1/\sqrt{2} < \mathcal{Z} < 1$ für $\gamma \in (0, \pi/2)$ (vgl. z.B. [41]). Folglich kann es für $s = 1$ passieren, dass $\pi < \text{Im} \bar{u}_1^{(\ell)}(Q) < 2\pi$. Für $p_j^+ = 1$ bedeutet dies, dass $\text{Im} x_j^{p^+} = (\pi - \text{Im} \bar{u}_1^{(\ell)}(Q))T/\varepsilon'(Q) < 0$, d.h. in der hier getroffenen Konvention entspricht die niedrigste Teilchenanregung an der rechten Fermi-Kante einem Teilchenparameter $x_j^{p^+}$ unterhalb der reellen Achse. Dies ist in Übereinstimmung mit dem obigen Beispiel (vgl. rechte Seite von Abbildung 4.4) sowie mit den Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts, dass die Kontur $\mathcal{C}_{0,1}$ passend gewählt werden muss. Des Weiteren deckt sich dies mit der Beobachtung, dass der führende Eigenwert der Quantentransformmatrix im $s = 1$ -Sektor durch zwei zusätzliche Nullstellen der Funktion $1 + a_n(\cdot|\alpha)$ innerhalb der Kontur \mathcal{C}_0 charakterisiert ist [112].

Abschließend sei betont, dass p den Charakter eines Hilfsparameters hat, welcher mit der Wahl der Integrationskontur verbunden ist und somit eine gewisse Willkür beinhaltet. Der physikalische Parameter, der die Anregungen klassifiziert, ist die Summe $p + \ell$ (vgl. Gleichungen (4.32) und (4.30)), welche alle ganzen Zahlen durchläuft.

Für die Tieftemperaturanalyse des Verhältnisses der Eigenwerte im nächsten Abschnitt wird die Entwicklung der Funktion \bar{u}_1 bis zur ersten Ordnung in T benötigt. Diese erhält man, indem man

(4.29) und (4.37) in (4.24a) einsetzt sowie die Beziehung $\partial_\nu \phi(\lambda, \nu) = R(\lambda, \nu)/2\pi i$ benutzt,

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\lambda) = \bar{u}_1^{(\ell)}(\lambda) + \frac{2\pi i T}{\varepsilon'(Q)} \left\{ R(\lambda, Q) \left[\frac{(\ell - s)\bar{u}_1^{(\ell)}(Q)}{2\pi i} - \sum_{j=1}^{n_h^+} \left(h_j^+ - \frac{1}{2} \right) - \sum_{j=1}^{n_p^+} \left(p_j^+ - \frac{1}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + R(\lambda, -Q) \left[\frac{\ell \bar{u}_1^{(\ell)}(-Q)}{2\pi i} - \sum_{j=1}^{n_h^-} \left(h_j^- - \frac{1}{2} \right) - \sum_{j=1}^{n_p^-} \left(p_j^- - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(T^2). \quad (4.40) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4.24b) und (4.40) mit den zugehörigen linearen Integralgleichungen bestimmen somit $\ln(a_n(\lambda|\alpha))$ bis zur Ordnung T (bzw. u bis zur Ordnung T^2).

4.3 Tieftemperaturanalyse der Eigenwerte und des universellen Anteils

Mit Hilfe der Ergebnisse des vorgehenden Abschnitts kann man ausgehend von Gleichung (4.6) die Tieftemperaturentwicklung des Verhältnisses der Eigenwerte einfach bestimmen. Mit $s = 1$ und der Definition $\alpha'' = \alpha - p - \ell$ erhält man

$$\begin{aligned} \rho_n(0|\alpha) = q^\alpha \exp \left\{ i\pi - 2i\alpha'' k_F \right. \\ \left. - \frac{2\pi T}{v_0} \left[\alpha''^2 \mathcal{Z}^2 + \frac{1}{4\mathcal{Z}^2} - \ell^2 + \ell - 1 + \sum_{j=1}^{n_h} h_j + \sum_{j=1}^{n_p} (p_j - 1) \right] \right\} + \mathcal{O}(T^2). \quad (4.41) \end{aligned}$$

Hierbei wurde der Fermi-Impuls k_F und die Schallgeschwindigkeit v_0 eingeführt,

$$k_F = 2\pi \int_0^Q d\lambda \rho(\lambda), \quad v_0 = \frac{\varepsilon'(Q)}{2\pi\rho(Q)}. \quad (4.42)$$

Man erkennt anhand von Gleichung (4.41), dass man für $T = 0$ in der Tat divergierende Korrelationslängen hat (d.h. $|\rho(0|0)| = 1$), während für endliche Temperatur $|\rho(0|0)| < 1$ gilt. Die obige Formel verallgemeinert das in [86] gefundene Resultat auf beliebige Teilchen-Loch-Anregungen in der Nähe der Fermi-Kante.

Die Tieftemperaturanalyse der Amplituden ist deutlich komplizierter. Anschaulich ist die Problematik klar: Die in (4.7) auftretenden Integranden besitzen einfache Polstellen, welche für $T \rightarrow 0$ in die Nähe der Integrationskonturen wandern, wodurch die entsprechenden Integrale mit einem Vielfachen von $\log(T)$ divergieren. Ziel der folgenden asymptotischen Analyse ist, die entsprechenden Vorfaktoren und den führenden regulären Anteil der Integrale zu bestimmen. Dies gelingt mit Hilfe der beiden folgenden Lemmas.

Lemma 4.3.1. *Es seien u und C_u wie in Lemma 4.2.1 gegeben. Der Punkt λ_+ sei oberhalb von C_u und λ_- unterhalb. Dann besitzt das Cauchy-Integral*

$$I_u(\lambda_\pm) = \int_{C_u} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_\pm) \ln \left(1 + e^{-\frac{u(\lambda)}{T}} \right) \quad (4.43)$$

eine Tieftemperaturentwicklung, deren Form vom Abstand zwischen λ_\pm und den Nullstellen Q_\pm des Realteils von u abhängt.

Falls sich λ_{\pm} in endlicher Entfernung von Q_{\pm} befindet, so folgt mit Lemma 4.2.1

$$I_u(\lambda_{\pm}) = - \int_{Q_-}^{Q_+} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \frac{\bar{u}(\lambda)}{T} + \mathcal{O}(T). \quad (4.44)$$

Für $\delta > 0$ definiere die Umgebung $V_{\pm} = \{z \in \mathbb{C} \mid |u(z)| < \delta/2, z \text{ nahe bei } Q_{\pm}\}$. Für $\lambda_{\pm} \in V_+$ gilt

$$I_u(\lambda_{\pm}) = - \int_{Q_-}^{Q_+} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \frac{\bar{u}(\lambda) - \bar{u}(\lambda_{\pm})}{T} \mp 2\pi i \ln \left\{ \Gamma \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\bar{u}(\lambda_{\pm})}{2\pi i T} \right) \right\} \\ \pm \pi i \ln(2\pi) + \frac{\bar{u}(\lambda_{\pm})}{T} \left\{ \ln \left(\frac{\bar{u}(\lambda_{\pm})}{\pm 2\pi i T} \right) - 1 - \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(Q_+ - \lambda_{\pm})}{\operatorname{sh}(Q_- - \lambda_{\pm})} \right) \right\} + \mathcal{O}(T). \quad (4.45)$$

Für $\lambda_{\pm} \in V_-$ gilt

$$I_u(\lambda_{\pm}) = - \int_{Q_-}^{Q_+} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \frac{\bar{u}(\lambda) - \bar{u}(\lambda_{\pm})}{T} \mp 2\pi i \ln \left\{ \Gamma \left(\frac{1}{2} \mp \frac{\bar{u}(\lambda_{\pm})}{2\pi i T} \right) \right\} \\ \pm \pi i \ln(2\pi) - \frac{\bar{u}(\lambda_{\pm})}{T} \left\{ \ln \left(\frac{\bar{u}(\lambda_{\pm})}{\mp 2\pi i T} \right) - 1 + \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(Q_+ - \lambda_{\pm})}{\operatorname{sh}(Q_- - \lambda_{\pm})} \right) \right\} + \mathcal{O}(T). \quad (4.46)$$

Lemma 4.3.2. Für das in (4.7) auftretende Doppelintegral hat man die asymptotische Entwicklung

$$- \int_{C_{0,s}} d\lambda \int_{C'_{0,s}} d\mu z(\lambda) \operatorname{cth}'(\lambda - \mu) z(\mu) = \\ + \ln \left\{ G \left(1 + \frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(Q)}{2\pi i} \right) G \left(1 - \frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(Q)}{2\pi i} \right) G \left(1 + \frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(-Q)}{2\pi i} \right) G \left(1 - \frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(-Q)}{2\pi i} \right) \right\} \\ + C_1 \left[\frac{\bar{u}_1^{(\ell)}}{2\pi i} \right] - \left(\left(\frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(Q)}{2\pi i} \right)^2 + \left(\frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(-Q)}{2\pi i} \right)^2 \right) \ln \left(\frac{\varepsilon'(Q) \operatorname{sh}(2Q)}{2\pi T} \right) + o(1), \quad (4.47)$$

wobei $o(1)$ Terme bezeichnet, die für $T \rightarrow 0^+$ verschwinden. Weiterhin ist

$$C_1[v] = \frac{1}{2} \int_{-Q}^Q d\lambda \int_{-Q}^Q d\mu \frac{v'(\lambda)v(\mu) - v(\lambda)v'(\mu)}{\operatorname{th}(\lambda - \mu)} \\ + v(Q) \int_{-Q}^Q d\lambda \frac{v(\lambda) - v(Q)}{\operatorname{th}(\lambda - Q)} - v(-Q) \int_{-Q}^Q d\lambda \frac{v(\lambda) - v(-Q)}{\operatorname{th}(\lambda + Q)}. \quad (4.48)$$

Beweise von Lemma 4.3.1 und Lemma 4.3.2 befinden sich in Anhang C.3.

Mit Hilfe der obigen Lemmas erhält man schließlich für den universellen Anteil (vgl. (4.7))

$$A_n^{(0)}(\alpha) = -iq^\alpha e^{E(-2Q)} A_-(\alpha) A_+(\alpha), \quad (4.49)$$

wobei

$$\begin{aligned}
 A_{\pm}(\alpha) = & \exp \left\{ C_{\pm}[w] + \frac{1}{4} \theta(2Q) \left[2\alpha''^2 \mathcal{Z}^2 + \frac{1}{2\mathcal{Z}^2} + 1 - \alpha'' \left(\mathcal{Z} - \frac{1}{\mathcal{Z}} \right) \right] \right\} \\
 & \times \left(\frac{2\pi T e^{-E(2Q)}}{\varepsilon'(Q) \operatorname{sh}(\eta)} \right)^{\alpha''^2 \mathcal{Z}^2 + \frac{1}{4\mathcal{Z}^2}} \frac{G\left(3/2 \pm (w(\pm Q) + \alpha'')\right)}{G\left(1/2 \mp (w(\pm Q) + \alpha'')\right)} \\
 & \times G^2 \left(1 \mp \frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(\pm Q)}{2\pi i} \right) \left(\frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(\pm Q)}{2i} \right) \right)^{2n_{\pm}^{\pm}} \mathcal{R}_{n_{\pm}^{\pm}, n_{\pm}^{\pm}} \left(\{h_j^{\pm}\}, \{p_j^{\pm}\} \middle| \pm \frac{\bar{u}_1^{(\ell)}(\pm Q)}{2\pi i} \right). \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

Hierbei sind G die Barnesche G -Funktion und C_{\pm} die Funktionale

$$\begin{aligned}
 C_{\pm}[v] = & \frac{1}{4} \int_{-Q}^Q d\lambda \int_{-Q}^Q d\mu \left(v'(\lambda)v(\mu) - v(\lambda)v'(\mu) \right) e(\lambda - \mu) \\
 & \pm \left(v(\pm Q) \pm 1 + \alpha'' \right) \int_{-Q}^Q d\lambda \left(v(\lambda) - v(\pm Q) \right) e(\lambda \mp Q). \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Die Funktionen \mathcal{R} hängen explizit von den Quantenzahlen der Teilchen und Löcher ab,

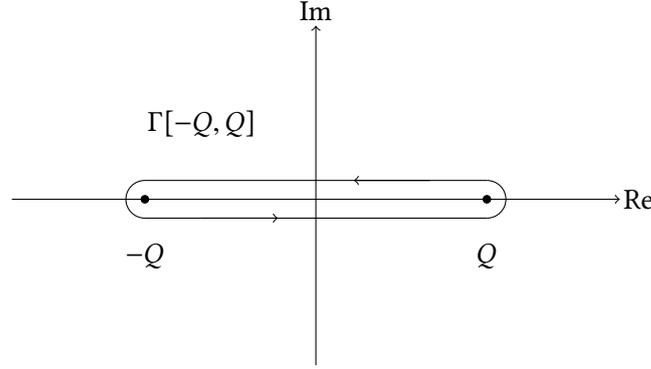
$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{n_1, n_2}(\{h_j\}, \{p_j\} | v) = & \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq n_1} (h_j - h_k)^2 \prod_{1 \leq j < k \leq n_2} (p_j - p_k)^2}{\prod_{j=1}^{n_1} \prod_{k=1}^{n_2} (h_j + p_k - 1)^2} \\
 & \times \left[\prod_{j=1}^{n_1} \frac{\Gamma^2(h_j + v)}{\Gamma^2(h_j)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_2} \frac{\Gamma^2(p_j - v)}{\Gamma^2(p_j)} \right]. \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

Man erkennt anhand von (4.50), dass die Amplituden für $T \rightarrow 0$ mit einem Potenzgesetz verschwinden. Der auftretende Exponent $\alpha''^2 \mathcal{Z}^2 + \frac{1}{4\mathcal{Z}^2}$ ist dabei identisch mit dem kritischen Exponenten, welcher den algebraischen Abfall der Korrelationsfunktionen beschreibt (vgl. [98, 11]). Des Weiteren wird das Skalenverhalten der Formfaktoren der gewöhnlichen Transfermatrix als Funktion der inversen Systemgröße durch dieselben Exponenten beschrieben [73, 76].

Eine weitere Eigenschaft der Amplituden ist, dass sie in führender Ordnung explizit von den Quantenzahlen h_j und p_j abhängen. Da diese die $\mathcal{O}(T)$ -Korrekturen der Teilchen- und Lochparameter bestimmen, bedeutet dies, dass die Amplituden in der Nähe der Fermi-Kante nicht stetig von den Teilchen- und Lochparameter abhängen. Da außerdem der Exponent im Allgemeinen nicht ganzzahlig ist, ist es nicht möglich, die Summe über die Anregungen als Integral zu schreiben. Stattdessen wird in Abschnitt 4.5 die Formfaktorreihe mit Hilfe einer bereits bekannten diskreten Summenformel aufsummiert. Entscheidend dafür wird sein, dass der universelle Anteil der Amplituden in (4.49) in zwei Teile faktorisiert, die jeweils ausschließlich von der rechten oder linken Fermi-Kante abhängen.

4.4 Tieftemperaturanalyse der Determinanten und des faktorisierten Anteils

Für die Analyse der Fredholm-Determinanten und des faktorisierten Anteils wird die alternative Darstellung der Determinanten aus Anhang A.2 verwendet. Wie sich zeigt, sind die Determinanten


 Abbildung 4.5: Skizze der Kontur $\Gamma[-Q, Q]$

Funktionale der Funktion w (vgl. Gleichung (4.30)) und damit nur von $p + \ell$ abhängig. Definiere deshalb

$$\mathcal{D}(p + \ell) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\det_{dm_{\pm}^{\alpha}, C_n} \{1 - \widehat{K}_{1-\alpha}\} \det_{dm^{\alpha}, C_n} \{1 - \widehat{K}_{1+\alpha}\}}{\det_{dm_0^{\alpha}, C_n} \{1 - \widehat{K}\} \det_{dm, C_n} \{1 - \widehat{K}\}}. \quad (4.53)$$

Die Integrationsmaße der Determinanten im Nenner enthalten nicht die Funktion $\rho_n(\cdot|\alpha)$, sondern lediglich die Funktionen $1/(1 + \bar{a}_0)$ und $1/(1 + \bar{a}_n(\cdot|\alpha))$ welche im Tieftemperaturlimites auf die Teilkontur $iy/2 + [-Q, Q]$ von C_0 projizieren. Damit folgt

$$\lim_{T \rightarrow 0} \det_{dm_0^{\alpha}, C_n} \{1 - \widehat{K}\} = \lim_{T \rightarrow 0} \det_{dm, C_n} \{1 - \widehat{K}\} = \det_{d\lambda/2\pi i, [-Q, Q]} \{1 - \widehat{K}\}. \quad (4.54)$$

Die rechte Seite ist dabei unabhängig von der betrachteten Anregung und nur von Magnetfeld und Anisotropie abhängig.

Für die Determinanten im Zähler von (4.53) ist die Verwendung des Maßes dm_{\pm}^{α} und der Kontur C_n problematisch, da sich Löcher und Teilchen beliebig nahe kommen. Aus diesem Grund geht man wie in Anhang A.2 vor und geht vom Maß dm_{\pm}^{α} zum Maß

$$dM_{\pm}^{\alpha}(\lambda) = \mp \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{q^{-\alpha} e^{\mp L_{C_n}[z](\lambda)}}{e^{\mp L_{C_n}[z](\lambda \pm \eta)} - q^{-2\alpha} e^{\mp L_{C_n}[z](\lambda \mp \eta)}} \quad (4.55)$$

über, welches keine Polstellen mehr an den Lochpositionen besitzt. Die Kontur C_n wird dabei ersetzt durch eine Kontur $\Gamma_n^{(\pm)}$, welche außerhalb von C_n liegt (aber immer noch im Streifen $|\text{Im}(\lambda)| < \gamma$). Voraussetzung hierfür ist, dass die Funktion

$$1 - a_0(\lambda)/a_n(\lambda|\alpha) = 1 - e^{2\pi i(w(\tilde{\lambda}) + \alpha'' - 1/2)} + \mathcal{O}(T), \quad \tilde{\lambda} = \lambda - iy/2, \quad (4.56)$$

keine Nullstellen innerhalb der Kontur C_n besitzt (vgl. S. 128). Man kann numerisch zeigen, dass diese Voraussetzung für nicht zu große $|p + \ell|$ immer erfüllt ist.

Da die Kontur $\Gamma_n^{(\pm)}$ außerhalb von C_n liegt und damit entfernt ist von den Fermipunkten $\pm Q$, kann man das in (4.55) auftretende Cauchy-Integral

$$L_C[z](v) = \int_C d\mu z(\mu) \text{cth}(\mu - v) \quad (4.57)$$

einfach berechnen (vgl. Lemma 4.2.1). Man erhält

$$\begin{aligned} d\hat{M}_{\pm}^{\alpha}(\lambda) &= \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{q^{\pm\alpha} e^{\pm \int_{-Q}^Q d\mu e^{(\mu-\lambda)(w(\mu)-w(\lambda))}}}{1 - e^{\pm 2\pi i (w(\lambda) + \alpha'' - s/2)}} \\ &\quad \times \exp\left(\pm \{(w(\lambda) + \alpha'' + s/2)E(Q - \lambda) - (w(\lambda) + \alpha'' - s/2)E(-Q - \lambda)\}\right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Abschließend kann man die Kontur $\Gamma_n^{(\pm)}$ zusammenziehen zu einer positiv orientierten Kontur $\Gamma[-Q, Q]$, welche das Intervall $[-Q, Q]$ eng umschließt (vgl. Abbildung 4.5). Man beachte, dass das Intervall $[-Q, Q]$ gerade dem Verzweigungsschnitt der Gewichtsfunktion des Maßes entspricht (vgl. zweite Zeile von (4.58)).

Zusammenfassend erhält man für den Determinantenanteil der Amplituden

$$\mathcal{D}(p + \ell) = \frac{\det_{d\hat{M}_{+}^{\alpha}, \Gamma[-Q, Q]} \{1 - \widehat{K}_{1-\alpha}\} \det_{d\hat{M}_{-}^{\alpha}, \Gamma[-Q, Q]} \{1 - \widehat{K}_{1+\alpha}\}}{\det_{d\lambda/2\pi i, [-Q, Q]}^2 \{1 - \widehat{K}\}}. \quad (4.59)$$

Im Abschnitt 4.7 wird erläutert, wie sich die Fredholm-Determinanten numerisch berechnen lassen.

Mit ähnlichen Überlegungen kann man die Tieftemperaturanalyse des faktorisierten Anteils durchführen, der durch die Lösungen $\overline{G}_{\pm}(\cdot, \xi)$ der linearen Integralgleichungen

$$\overline{G}_{\pm}(\lambda, \xi) = -\text{cth}(\lambda - \xi) + q^{\alpha \mp 1} \rho_n^{\pm 1}(\xi|\alpha) \text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{C_n} dm_{\pm}^{\alpha}(\mu) \overline{G}_{\pm}(\mu, \xi) K_{\alpha \mp 1}(\mu - \lambda) \quad (4.60)$$

gegeben ist (man beachte für die Notation Fußnote 2 auf S. 26). In dieser Gleichung kann in ähnlicher Weise das Maß dM_{\pm}^{α} und die Kontur $\Gamma_n^{(\pm)}$ eingeführt werden, wobei in diesem Fall durch die einfache Polstelle von $\overline{G}_{\pm}(\lambda, \xi)$ bei $\lambda = \xi$ ein Zusatzterm entsteht (vgl. ersten Term in Gleichung (A.50)). Weiterhin wird beim Zusammenziehen der Kontur $\Gamma_n^{(\pm)} \rightarrow \Gamma[-Q, Q] + i\gamma/2$ ein Term generiert. Schließlich erhält man

$$\begin{aligned} \overline{G}_{\pm}(\lambda, \xi) &= -\text{cth}(\lambda - \xi) \\ &\quad + q^{-\alpha \pm 1} \text{cth}(\lambda - \xi + \eta) q^{\pm\alpha} e^{\pm \{E(Q - \xi + i\gamma/2) + \int_{-Q}^Q d\mu e^{(\mu - \xi + i\gamma/2)(w(\mu) + \alpha'' - 1/2)}\}} \\ &\quad + \int_{\Gamma[-Q, Q]} d\hat{M}_{\pm}^{\alpha}(\mu) \overline{G}_{\pm}(\mu + i\gamma/2, \xi) K_{\alpha \mp 1}(\mu + i\gamma/2 - \lambda) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Offenbar hängen die Lösungen nur von $p + \ell$ ab. Für die physikalischen Amplituden wird der Fall $\xi = 0$ benötigt. In diesem Fall vereinfacht sich der „driving term“ der Integralgleichung (4.61) aufgrund der Identität

$$e^{\pm \{E(Q + i\gamma/2) + \int_{-Q}^Q d\mu e^{(\mu + i\gamma/2)(w(\mu) + \alpha'' - 1/2)}\}} = -e^{\mp 2i\alpha'' k_F}. \quad (4.62)$$

Somit ist das führende Tieftemperaturverhalten der zu Teilchen-Loch-Anregungen an der Fermi-Kante gehörigen Amplituden vollständig bestimmt.

4.5 Summation

Im folgenden Abschnitt soll der Beitrag der Teilchen-Loch-Anregungen an der Fermi-Kante zur Formfaktorreihe aufsummiert werden. Dies soll in jedem Sektor $\ell + p$ separat geschehen. Wie in den vorhergehenden Abschnitten erläutert, geht lediglich die Summe $p + \ell$ ein, es ist also zweckmäßig, den Index zu verschieben $p + \ell \rightarrow \ell$. Für festes ℓ muss nun über alle möglichen Konfigurationen von Quantenzahlen summiert werden. Bemerkenswerterweise ist es möglich, diese Summe exakt zu berechnen. Dazu kann die folgende Summenformel verwendet werden, welche erstmalig im Zusammenhang mit den kritischen Formfaktoren der gewöhnlichen Transfermatrix [75] und den thermischen Korrelationsfunktionen des Bose-Gases [90] gefunden wurde,

$$\sum_{\substack{n_p, n_h \geq 0 \\ n_p - n_h = \ell}} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_{n_p} \\ p_j \in \mathbb{Z}_+}} \sum_{\substack{h_1 < \dots < h_{n_h} \\ h_j \in \mathbb{Z}_+}} e^{-\frac{2\pi m T}{v_0} \left[\sum_{j=1}^{n_p} (p_j - 1) + \sum_{j=1}^{n_h} h_j \right]} \left(\frac{\sin(\pi v)}{\pi} \right)^{2n_h} \mathcal{R}_{n_h, n_p}(\{h_j\}, \{p_j\} | v) \\ = \frac{G^2(1 + \ell - v)}{G^2(1 - v)} \frac{e^{-\frac{\pi m T \ell (\ell - 1)}{v_0}}}{\left(1 - e^{-\frac{2\pi m T}{v_0}}\right)^{(\ell - v)^2}}. \quad (4.63)$$

Es sei bemerkt, dass obige Formel für $\ell = 0$ in der Darstellungstheorie der unendlichen symmetrischen Gruppe von Bedeutung ist [111]. Eine alternative Formel, in der über alle Zustände mit konstantem $n = \sum_{j=1}^{n_p} (p_j - 1) + \sum_{j=1}^{n_h} h_j$ summiert wird (und anschließend über n) findet sich (ohne Beweis) in den Arbeiten [117, 116].

Benutzt man die obige Gleichung (4.63) und setzt $\alpha = \xi = 0$, so folgt das Ergebnis

$$\langle \sigma_1^- \sigma_{m+1}^+ \rangle_{\text{osc}} = (-1)^m \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} A_{0, \ell}^- e^{2im\ell k_F} \left(\frac{\pi T / v_0}{\text{sh}(\pi m T / v_0)} \right)^{2\ell^2 \mathcal{Z}^2 + \frac{1}{2\mathcal{Z}^2}}, \quad (4.64)$$

wobei

$$A_{0, \ell}^- = \frac{e^{\frac{1}{2}\theta(2Q) + E(-2Q) + C_-[w] + C_+[w]}}{4\gamma \text{sh}(\eta)} \mathcal{D}(\ell) \overline{G}_+(0) \partial_\alpha \overline{G}_-(0) \Big|_{\alpha=0} e^{\ell\theta(2Q) \left(\frac{\mathcal{Z}}{2} - \frac{1}{2\mathcal{Z}} \right)} \\ \times \left[\prod_{\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1} G \left(1 + \epsilon_1 \ell \mathcal{Z} + \frac{\epsilon_2}{2\mathcal{Z}} \right) \right] \left(\frac{e^{\frac{1}{2}\theta(2Q) - E(2Q)}}{2\pi \rho(Q) \text{sh}(\eta)} \right)^{2\ell^2 \mathcal{Z}^2 + \frac{1}{2\mathcal{Z}^2}}, \quad (4.65)$$

und wobei $\alpha = p = 0$ in den Termen, die implizit von α und p abhängen.

Für jede endliche Temperatur $T > 0$ ist die Reihe (4.64) eine Summe exponentiell zerfallender Terme. Für $T \rightarrow 0$ ändert sich die Natur der Asymptotik von exponentiellem zu algebraischem Zerfall, d.h. $(\pi T / v_0) / \text{sh}(\pi m T / v_0) \rightarrow 1/m$. In diesem Fall stimmt die Reihe mit dem Resultat aus [75] überein, insbesondere erhält man unter Berücksichtigung der Arbeiten [73, 76] eine ähnliche (aber nicht identische) Beschreibung der Amplituden.

Aus der umgekehrten Perspektive betrachtet entspricht die Einführung einer endlichen Temperatur einer Deformation $1/m \rightarrow (\pi T / v_0) / \text{sh}(\pi m T / v_0)$. In der konformen Feldtheorie erwartet man genau dieses Verhalten aufgrund der konformen Abbildung der komplexen Ebene auf einen Zylinder mit endlichem Umfang [27].

In diesem Kapitel konnten somit die Vorhersagen der konformen Feldtheorie und der Tomonaga-Luttinger-Flüssigkeitstheorie bezüglich der Abstandsasymptotik von Korrelatoren mit exakten Methoden bestätigt werden. Darüber hinaus konnten in dem hier gewählten Zugang die Amplituden

exakt berechnet werden, vgl. Gleichung (4.65), welche nicht durch die konforme Symmetrie festgelegt sind. In Abschnitt 4.7 wird erläutert, wie sich die Amplituden (4.65) numerisch auswerten lassen.

Abschließend sei betont, dass die Reihe (4.64) keine systematische asymptotische Entwicklung darstellt⁶, weder im Abstand m noch in der Temperatur T . In [90] wurde die Reihe charakterisiert als eine Summe, welche das führende Verhalten jeder mit Impuls $2\ell k_F$ oszillierenden „Harmonischen“ beschreibt. Dies bedeutet, dass im ℓ -ten Term in (4.64) Korrekturen in m und T auftreten, die unter Umständen größer als der führende Term der $(\ell + 1)$ -ten Harmonischen sein können. Diese Korrekturen haben ihren Ursprung darin, dass nur das führende Tieftemperaturverhalten der Amplituden berücksichtigt wurde. Weiterhin wurden Korrekturen höherer Ordnung zu den Korrelationslängen vernachlässigt. Man erkennt jedoch, dass der Term $\ell = 0$ in (4.64) in jedem Fall das führende Verhalten der transversalen Korrelatoren bestimmt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1^- \sigma_{m+1}^+ \rangle &\sim \frac{e^{\frac{1}{2}\theta(2Q)+E(-2Q)+C_-[w]+C_+[w]}}{4\gamma \operatorname{sh}(\eta)} \mathcal{D}(0) \overline{G}_+(0) \partial_\alpha \overline{G}_-(0) \Big|_{\alpha=0} \\ &\times G^2 \left(1 + \frac{1}{2\mathcal{Z}}\right) G^2 \left(1 - \frac{1}{2\mathcal{Z}}\right) \left(\frac{e^{\frac{1}{2}\theta(2Q)-E(2Q)}}{2\pi\rho(Q) \operatorname{sh}(\eta)} \right)^{\frac{1}{2\mathcal{Z}^2}} (-1)^m \left(\frac{\pi T/\nu_0}{\operatorname{sh}(\pi m T/\nu_0)} \right)^{\frac{1}{2\mathcal{Z}^2}}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Wie sich in Abschnitt 4.7 zeigen wird, liefert dieser Term bereits eine sehr gute Näherung der Korrelatoren bei kurzen Abständen, welche aufgrund der Arbeit [18] exakt bekannt sind. Es ist folglich zu erwarten, dass die höheren Harmonischen sowie weitere Korrekturen i.A. sehr klein sind. Da die Darstellungen der Amplituden in Kapitel 3 exakt sind für beliebige Temperaturen T , können die erwähnten höheren Korrekturen (wenn auch mit hohem technischen Aufwand) im Prinzip berechnet werden. Allerdings ist zu beachten, dass in diesem Fall eine Kopplung von linker und rechter Fermi-Kante zu erwarten ist, was die Aufsummation erheblich erschweren dürfte⁷. Trotz dieser Schwierigkeiten wäre es eine interessante Aufgabe, die Korrekturen zur Summe (4.64) zu berechnen, da diese die Abweichungen von der feldtheoretischen Beschreibung charakterisieren.

4.6 Zusammenfassung des longitudinalen Falls

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse für die longitudinale Korrelatoren in der masselosen Phase diskutiert werden. Die Herleitung findet sich in der Arbeit [40] und ist vollkommen analog zu den Rechnungen des vorherigen Abschnitts.

Für die erzeugende Funktion (vgl. Kapitel 2) erhält man analog zu (4.64) die oszillierende Reihe

$$\langle e^{2\pi i \alpha S(m)} \rangle_{\text{osc}} = (-1)^{m\alpha} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} A_{0,\ell} e^{2im(\ell-\alpha)k_F} \left(\frac{\pi T/\nu_0}{\operatorname{sh}(\pi m T/\nu_0)} \right)^{2(\ell-\alpha)^2 \mathcal{Z}^2}. \quad (4.67)$$

Die Amplituden bestehen aus zwei Faktoren,

$$A_{0,\ell} = \mathcal{D}_z(\ell) \mathcal{A}(\ell - \alpha), \quad (4.68)$$

wobei

$$\mathcal{A}(x) = e^{C_z[x\mathcal{Z}]} G^2(1 + x\mathcal{Z}) G^2(1 - x\mathcal{Z}) \left(\frac{e^{\frac{1}{2}\theta(2Q)-E(2Q)}}{2\pi\rho(Q) \operatorname{sh}(\eta)} \right)^{2x^2 \mathcal{Z}^2} \quad (4.69)$$

⁶Aus diesem Grund wurde der Index „osc“ auf der linken Seite von (4.64) eingefügt.

⁷Man beachte jedoch, dass eine derartige Summation in der Arbeit [77] exakt durchgeführt werden konnte.

und

$$C_z[v] = \frac{1}{2} \int_{-Q}^Q d\lambda \int_{-Q}^Q d\mu \left(v'(\lambda)v(\mu) - v(\lambda)v'(\mu) \right) e(\lambda - \mu) + 2v(Q) \int_{-Q}^Q d\lambda (v(\lambda) - v(Q)) e(\lambda - Q). \quad (4.70)$$

Der andere Faktor ist durch die Fredholm-Determinanten gegeben,

$$\mathcal{D}_z(\ell) = \frac{\det_{\text{d}\hat{M}_+^\alpha, \Gamma[-Q, Q]} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_{-\alpha}\} \det_{\text{d}\hat{M}_-^\alpha, \Gamma[-Q, Q]} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_\alpha\}}{\det_{\frac{\text{d}\lambda}{2\pi i}, [-Q, Q]} \{1 - \widehat{K}\}}. \quad (4.71)$$

Hierbei sind die Integrationsmaße im Zähler durch Gleichung (4.58) mit $s = 0$ gegeben.

Für die analytische Durchführung der α -Ableitung ist es zweckmäßig, zur in Anhang A.2 diskutierten Darstellung der Determinanten überzugehen,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z(\ell) &= \frac{\det_{\text{d}\lambda, \Gamma[-Q, Q]} \{1 + \widehat{U}_{-Q}^{(-)}\} \det_{\text{d}\lambda, \Gamma[-Q, Q]} \{1 - \widehat{U}_Q^{(+)}\}}{\det_{\frac{\text{d}\lambda}{2\pi i}, [-Q, Q]} \{1 - \widehat{K}\}} (1 - q^{-2\alpha})^2 (1 + \mathcal{O}(\alpha)) \\ &\quad \times \frac{1}{e^{-\ell} \int_{-Q}^Q d\lambda Z(\lambda) \text{cth}(\lambda - Q + i\gamma)} \frac{1}{e^{-\ell} \int_{-Q}^Q d\lambda Z(\lambda) \text{cth}(\lambda - Q - i\gamma)} \\ &\quad \times \frac{1}{e^{\ell} \int_{-Q}^Q d\lambda Z(\lambda) \text{cth}(\lambda + Q - i\gamma)} \frac{1}{e^{\ell} \int_{-Q}^Q d\lambda Z(\lambda) \text{cth}(\lambda + Q + i\gamma)}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

mit

$$U_{\mp Q}^{(\mp)}(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\exp \left\{ \pm \ell \int_{-Q}^Q d\omega e(\omega - \lambda) Z(\omega) \right\}}{1 - e^{\pm 2\pi i \ell Z(\lambda)}} \left(K(\lambda - \mu) - K(\mp Q - \mu) \right). \quad (4.73)$$

Hierbei ist $\ell \neq 0$. Für den Fall $\ell = 0$ schließt man aus $\mathcal{D}(0) = 1 + \mathcal{O}(\alpha^2)$ und $\mathcal{A}(0) = 1$ und Gleichung (2.29)

$$\langle \sigma_1^z \rangle = 1 - \frac{2k_F}{\pi}. \quad (4.74)$$

Dies ist die bekannte Beziehung zwischen Fermi-Impuls und Magnetisierung. Berücksichtigt man nur die Terme $\ell = -1, 0, 1$ in (4.67), so folgt schließlich mit Gleichung (2.35) für die Abstandasymptotik der longitudinalen Korrelatoren

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle - \langle \sigma_1^z \rangle \langle \sigma_{m+1}^z \rangle \sim A_{0,0}^{zz} \left(\frac{\pi T / v_0}{\text{sh}(m\pi T / v_0)} \right)^2 + A_{0,1}^{zz} \cos(2mk_F) \left(\frac{\pi T / v_0}{\text{sh}(m\pi T / v_0)} \right)^{2\mathcal{Z}^2}, \quad (4.75)$$

mit den Amplituden

$$A_{0,0}^{zz} = -\frac{2\mathcal{Z}^2}{\pi^2}, \quad A_{0,1}^{zz} = \frac{4 \sin^2(k_F)}{\pi^2} \mathcal{A}(1) \partial_\alpha^2 \mathcal{D}_z(1)|_{\alpha=0}. \quad (4.76)$$

Abhängig davon, ob $\mathcal{Z} > 1$ oder $\mathcal{Z} < 1$ stellt entweder der erste oder der zweite Term in (4.75) die führende Asymptotik dar. Man sieht leicht ein (vgl. z.B. [41]), dass $\mathcal{Z} > 1$ für $-1 < \Delta < 0$ und $\mathcal{Z} < 1$ für $0 < \Delta < 1$. Wie bereits bekannt [11, 98], sind die longitudinalen Korrelationen somit für tiefe Temperaturen im Bereich $-1 < \Delta < 0$ immer negativ, während sie im Bereich $0 < \Delta < 1$ $2k_F$ -Oszillationen aufweisen. Am Punkt freier Fermionen $\Delta = 0$ gilt $\mathcal{Z} = 1$ und beide Terme sind zu berücksichtigen. Der erste Term in (4.67) wurde bereits durch eine Entwicklung um den Punkt freier Fermionen berechnet [11], während der zweite Term erst seit kurzem bekannt ist [72].

4.7 Numerische Berechnung der Amplituden

In diesem Abschnitt soll erläutert werden, wie sich die in den Gleichungen (4.66) und (4.76) auftretenden Amplituden $A_{0,1}^{zz}$ und $A_{0,0}^{-+}$ numerisch berechnen lassen. Es sei erwähnt, dass eine ähnliche numerische Untersuchung bereits in der Arbeit [117] durchgeführt wurde, allerdings auf Grundlage von deutlich komplizierteren und singulären analytischen Ausdrücken für die Amplituden.

Alle Größen, die mit Lösungen linearer Integralgleichungen zusammenhängen, lassen sich einfach berechnen, indem man mit einer Quadratur-Regel das Intervall $[-Q, Q]$ diskretisiert. Bei dieser Methode wird die lineare Integralgleichung

$$f(x) = g(x) + \int_{-Q}^Q dy F(x, y) f(y) \quad (4.77)$$

zu einem linearen Gleichungssystem,

$$f(x_i) = g(x_i) + \sum_{j=1}^n w_j F(x_i, x_j) f(x_j), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.78)$$

Hierbei sind n die Anzahl der Stützstellen x_i und w_i die zugehörigen Gewichte. Das obige lineare Gleichungssystem kann numerisch schnell gelöst werden. Für glatte Funktionen F und g bietet sich die Gauß-Legendre-Quadratur an, bei der die Stützstellen x_i (für das Intervall $[-1, 1]$) durch die i -te Nullstelle des Legendre-Polynoms $P_n(x)$ und die Gewichte durch die Formel

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) [P'_n(x_i)]^2} \quad (4.79)$$

gegeben sind [36]. Diese Regel hat die Eigenschaft, dass Polynome vom Grad $\leq 2n - 1$ exakt integriert werden [36].

Wie in der Literatur gezeigt wurde [22], ist die Diskretisierung gleichzeitig die genaueste Methode zur Berechnung von Fredholm-Determinanten, welche in diesem Fall zu gewöhnlichen Determinanten werden. Beispielsweise kann die Fredholm-Determinante $\det_{\frac{d\lambda}{2\pi i}, [-Q, Q]} \{1 - \widehat{K}\}$ mit einer Gauß-Legendre-Quadratur mit $n = 20$ Stützstellen bis auf eine relative Genauigkeit von ca. 10^{-6} berechnet werden.

Die verbleibende Aufgabe besteht in der Berechnung der Fredholm-Determinanten der Operatoren, welche auf die Kontur $\Gamma[-Q, Q]$ (vgl. Abbildung 4.5) wirken. Diese Darstellung ist offenbar wenig geeignet für eine numerische Auswertung. Um eine besser geeignete Darstellung zu finden, berechnet man den Sprung der in den Determinanten auftretenden Gewichtsfunktion,

$$\begin{aligned} d\Delta_{\pm}^{\alpha}(\lambda) &:= d\hat{M}_{\pm}^{\alpha}(\lambda_{-}) - d\hat{M}_{\pm}^{\alpha}(\lambda_{+}) \\ &= \frac{d\lambda}{2\pi i} q^{\pm\alpha} e^{\pm \int_{-Q}^Q d\mu \epsilon(\mu - \lambda)(w(\mu) - w(\lambda))} \\ &\quad \times \exp\left(\pm \{(w(\lambda) + \alpha'' + s/2)E(Q - \lambda) - (w(\lambda) + \alpha'' - s/2)E(-Q - \lambda_{-})\}\right). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Hierbei wurde der Verzweigungsschnitt von $E(-Q - \lambda)$ entlang der reellen Achse von $-Q$ nach $+\infty$ berücksichtigt.

Folglich kann man die Integrale über $\Gamma[-Q, Q]$ mit Maß dM_{\pm}^{α} aufteilen in ein Integral über $[-Q + \epsilon, Q - \epsilon]$ (für ein kleines $\epsilon > 0$) mit Maß $d\Delta_{\pm}^{\alpha}$ sowie zwei Integrale über Kreisbögen vom

Radius ϵ um die Punkte $\pm Q$ mit Maß dM_{\pm}^{α} (vgl. Abbildung 4.5). Im Allgemeinen existieren die einzelnen Integrale nicht im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ aufgrund der auftretenden algebraischen Singularitäten bei $\pm Q$. Für $s = 1$ und $\ell = 0$ sind die Singularitäten durch den Exponenten

$$w(\pm Q) + \alpha'' \pm 1/2 = \pm \frac{1}{2\mathcal{Z}} \in (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \quad (4.81)$$

bestimmt, sie sind folglich integrabel. Dies bedeutet, dass die Integrale über die infinitesimalen Kreisbögen keinen Beitrag liefern für $\epsilon \rightarrow 0$, und dass das Maß dM_{\pm}^{α} durch $d\Delta_{\pm}^{\alpha}$ sowie die Kontur $\Gamma[-Q, Q]$ durch das Intervall $[-Q, Q]$ ersetzt werden können. Dieselbe Methode kann für die Berechnung des durch Gleichung (4.61) bestimmten faktorisierten Anteils $\overline{G}_+(0) \partial_{\alpha} \overline{G}_-(0)|_{\alpha=0}$ der transversalen Amplituden angewendet werden. Die Ableitung nach dem α -Parameter wird hierbei numerisch durchgeführt.

Bei der Amplitude $A_{0,1}^{zz}$ der longitudinalen Korrelatoren treten im Kern U_{-Q}^- (vgl. Gleichung (4.73)) die Exponenten \mathcal{Z} (bei $+Q$) bzw. $1 - \mathcal{Z}$ (bei $-Q$) auf⁸, man hat also ebenfalls integrable Singularitäten⁹.

Für die numerische Behandlung dieser schwachen Singularitäten an den Punkten $\pm Q$ empfiehlt sich die Verwendung der Gauß-Jacobi-Quadratur. Hierbei wird das Integral

$$\int_{-1}^1 dx f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j), \quad \alpha, \beta > -1, \quad (4.82)$$

exakt integriert, falls f ein Polynom vom Grad $\leq 2n - 1$ ist. Die Stützstelle x_i ist hierbei die i -te Nullstelle des Jacobi-Polynoms $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ und die Gewichte w_i sind durch die Formel

$$w_i = -\frac{2n + \alpha + \beta + 2}{n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)(n + 1)!} \frac{2^{\alpha + \beta}}{[\partial_x P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|_{x=x_i}] P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x_i)} \quad (4.83)$$

gegeben [36].

Mit den soeben skizzierten Methoden können die Amplituden innerhalb weniger Sekunden auf einem gewöhnlichen Laptop mit Mathematica [60] berechnet werden. In Abbildung 4.6 sind die Amplituden $A_{0,1}^{zz}$ und $A_{0,0}^{-+}$ als Funktion des Anisotropieparameters Δ für verschiedene Magnetfelder h dargestellt. Man beachte, dass in der Herleitung ein endliches Magnetfeld $h > 0$ vorausgesetzt wurde. In diesem Sinne sind die hier erzielten Ergebnisse komplementär zu den Resultaten bei $h = 0$ von Lukyanov [96],

$$A_{0,1}^{zz} = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\pi}{2\gamma} - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\pi}{2\gamma}\right)} \right]^{\frac{\pi}{\pi-\gamma}} \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \left[\frac{\text{sh}\left((1 - \frac{2\gamma}{\pi})k\right)}{\text{sh}\left((1 - \frac{\gamma}{\pi})k\right) \text{ch}\left(\frac{\gamma k}{\pi}\right)} - \left(1 - \frac{\gamma}{\pi - \gamma}\right) e^{-2k} \right] \right\}, \quad (4.84a)$$

$$A_{0,0}^{-+} = \frac{\pi^2}{4\gamma^2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\pi}{2\gamma} - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\pi}{2\gamma}\right)} \right]^{1 - \frac{\gamma}{\pi}} \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) e^{-2k} - \frac{\text{sh}\left((1 - \frac{\gamma}{\pi})k\right)}{\text{sh}(k) \text{ch}\left(\frac{\gamma k}{\pi}\right)} \right] \right\}, \quad (4.84b)$$

⁸Die Determinante des Operators $1 + U_Q^+$ ist das komplex konjugierte der Determinante von $1 + U_{-Q}^-$ und muss daher nicht gesondert berechnet werden.

⁹Genauer gesagt ist dies nur der Fall für $\mathcal{Z} < 2$. Dies schließt für $h = 0$ die Werte $\Delta \lesssim -0.92$ aus, für größere Werte von h verschiebt sich diese Grenze in Richtung von -1 . Die Numerik liefert dennoch für Werte in der Nähe von $\Delta = -1$ sinnvolle Resultate, und ohnehin ist diese Amplitude für $-1 < \Delta < 0$ nächstführend.

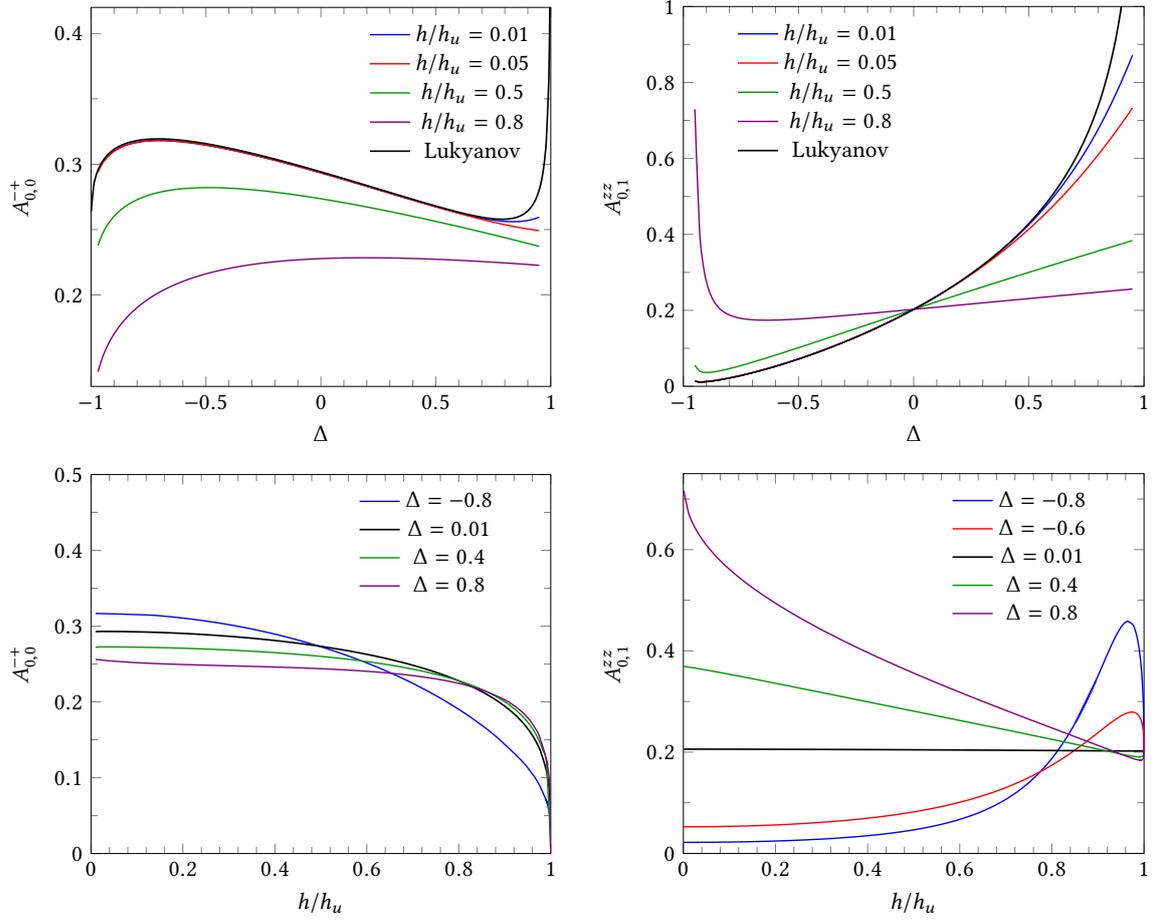


Abbildung 4.6: Amplituden der führenden Asymptotik als Funktionen des Anisotropieparameters für verschiedene Magnetfelder (obere Zeile) und als Funktionen des (normierten) Magnetfelds ($h_u = 4J(1 + \Delta)$) für verschiedene Anisotropieparameter (untere Zeile). Der transversale Fall ist in der linken Spalte dargestellt, der longitudinale in der rechten. Im longitudinalen Fall ist die abgebildete Amplitude nur führend für $\Delta > 0$. Für kleine Magnetfelder beobachtet man numerische Konvergenz zum Resultat (4.84) für $h = 0$ von Lukyanov [95, 96].

welche in einem feldtheoretischen Zugang [98, 28, 95, 97] ausgehend vom Gaußschen Modell gefunden wurden. Die Amplituden (4.84) sind die schwarzen Kurven in Abbildung 4.6. Offenbar stimmen die feldabhängigen Amplituden $A_{0,1}^{zz}$ und $A_{0,0}^{-+}$ im Limes $h \rightarrow 0$ mit den Amplituden (4.84) überein. Die Abweichungen in der Nähe von $\Delta = 1$ sind dabei keine numerischen Ungenauigkeiten, sondern spiegeln das singuläre Verhalten der Amplituden am isotropen Punkt wider. In der Tat scheint die Magnetfeldabhängigkeit der Amplituden in der Nähe des Punktes $\Delta = 1$ und $h = 0$ von logarithmischer Natur zu sein, ähnlich wie bei der Suszeptibilität und spezifischen Wärme [82].

Es ist bislang nicht gelungen, die Amplituden (4.84) ausgehend von den feldabhängigen Amplituden (4.76) und (4.66) analytisch zu berechnen. Grund hierfür ist, dass verschiedene Faktoren in den Amplituden im Limes $h \rightarrow 0$ bzw. $Q \rightarrow \infty$ divergieren bzw. verschwinden. Eine weitere

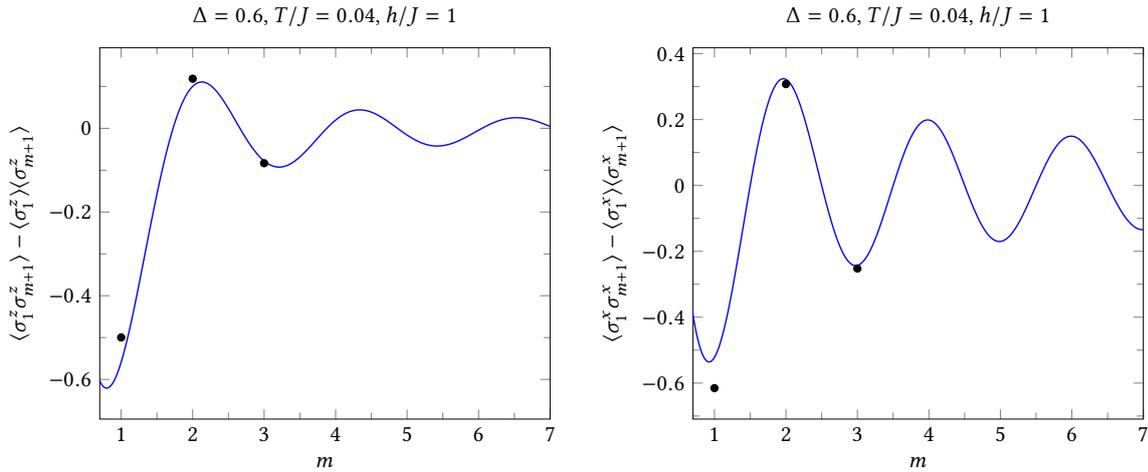


Abbildung 4.7: Longitudinale (linkes Bild) und transversale¹⁰ (rechtes Bild) Korrelationsfunktionen gemäß der Gleichungen (4.75) und (4.66). Die schwarzen Punkte entsprechen den in [18] berechneten exakten Resultaten bei kurzen Abständen.

Schwierigkeit besteht in der Berechnung der Fredholm-Determinanten von Operatoren, die nicht vom Differenztyp sind. Die Lösung dieses Problems ist eine interessante mathematische Aufgabe. Es sei erwähnt, dass im Prinzip ebenfalls die Möglichkeit besteht, die Amplituden aus Kapitel 3 direkt für $h = 0$ und tiefe Temperaturen zu analysieren. In diesem Fall sind die Anregungen allerdings nicht mehr vom Teilchen-Loch-Typ, sodass dieser Fall separat zu behandeln wäre.

In der unteren Zeile von Abbildung (4.6) ist die Magnetfeldabhängigkeit der Amplituden dargestellt. In der Nähe des kritischen Feldes h_u (d.h. $Q \rightarrow 0$) beobachtet man, dass sich die Amplituden als Funktion von h mit unendlicher Steigung dem Wert $2/\pi^2$ (longitudinaler Fall) bzw. 0 (transversaler Fall) annähern. Mit $k_F \rightarrow 0$ und $Z \rightarrow 1$ sowie den Gleichungen (4.75), (4.74) und (4.66) folgt damit

$$\langle \sigma_1^- \sigma_{m+1}^+ \rangle \underset{Q \rightarrow 0}{\sim} 0, \quad \langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle \underset{Q \rightarrow 0}{\sim} 1, \quad (4.85)$$

wie man es beim Übergang in die voll polarisierte Phase erwarten würde.

Ein weiterer Spezialfall ist der Punkt freier Fermionen $\Delta = 0$. Hier prüft man leicht nach, dass sich das Ergebnis

$$A_{0,1}^{zz} = \frac{2}{\pi^2} \quad (4.86)$$

ergibt. Für den transversalen Fall ist der Limes $\Delta \rightarrow 0$ nichttrivial. Dennoch findet man numerische Übereinstimmung mit dem bekannten Resultat [105]

$$A_{0,0}^{-+} = \sqrt{\frac{\sin(k_F)}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-4t} - \frac{1}{\text{ch}^2(t)}\right)\right), \quad (4.87)$$

welches ausgehend von der Töplitz-Determinanten-Darstellung der Korrelationsfunktionen der XX-Kette berechnet wurde.

¹⁰Der Term $\langle \sigma_1^x \rangle = \langle \sigma_{m+1}^x \rangle$ verschwindet aus Symmetriegründen und ist nur für eine einheitliche Schreibweise aufgeführt.

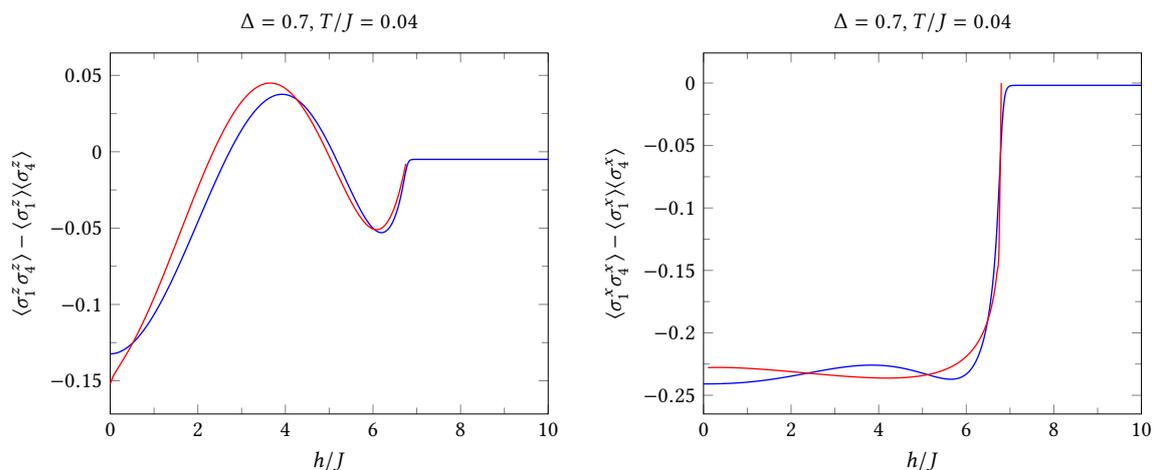


Abbildung 4.8: Vergleich der Magnetfeldabhängigkeit der exakten Korrelatoren nach [18] (blaue Kurve) mit der asymptotischen Formel (4.75) (rote Kurve). In der linken Spalte sind die longitudinalen Korrelatoren dargestellt, in der rechten die transversalen.

Auf Grundlage der numerischen Berechnung der Amplituden kann man nun mittels der Gleichungen (4.75) und (4.66) die Korrelationsfunktionen als Funktion des Abstandes bestimmen. Dies und ein Vergleich mit den aus der Arbeit [18] exakt bekannten Korrelatoren bei kurzen Abständen ist in Abbildung 4.7 dargestellt¹¹. Wie man erkennen kann, liefern die asymptotischen Formeln sehr gute Näherungen bis zum kleinstmöglichen Abstand $m = 1$. Dies ist weniger erstaunlich wenn man berücksichtigt, dass die asymptotische Formel und die exakten Ergebnisse bei kurzen Abständen auch am isotropen Punkt gut übereinstimmen [113], obwohl hier logarithmische Korrekturen wichtig sind.

Diese Beobachtungen stützen die in der Einleitung formulierte Erwartung, dass die Abstandsymptotik in dem Bereich, in dem die exakte Berechnung mit Hilfe der fermionischen Struktur zu komplex wird, eine sinnvolle Näherung der Korrelationsfunktionen darstellt. In Abbildung 4.9 ist der Vergleich der Magnetfeldabhängigkeit der exakten Korrelatoren $\langle \sigma_1^z \sigma_4^z \rangle$ mit der der asymptotischen Formel dargestellt. Erneut findet man eine gute Übereinstimmung.

Die Temperaturabhängigkeit derselben Korrelationsfunktion ist in Abbildung 4.9 für zwei verschiedenen Werte des Anisotropieparameters Δ dargestellt. Für positives Δ (vgl. rechtes Bild in Abbildung 4.9) liefert die Formel (4.75) offenbar eine recht gute Beschreibung der Korrelatoren für beliebige Temperaturen. Für negative Δ (vgl. linkes Bild in Abbildung 4.9) zeigen die longitudinalen Korrelatoren ein „quanten-klassisches Crossover“ [49, 51, 18], sodass die asymptotische Formel (4.75) oberhalb der Crossover-Temperatur keine sinnvolle Näherung der Korrelationen darstellt.

¹¹ Aufgrund der Invarianz des Hamiltonoperators (1.2) unter Translations- und Paritätstransformationen gilt die Beziehung $\langle \sigma_1^x \sigma_{m+1}^x \rangle = 2 \langle \sigma_1^- \sigma_{m+1}^+ \rangle$.

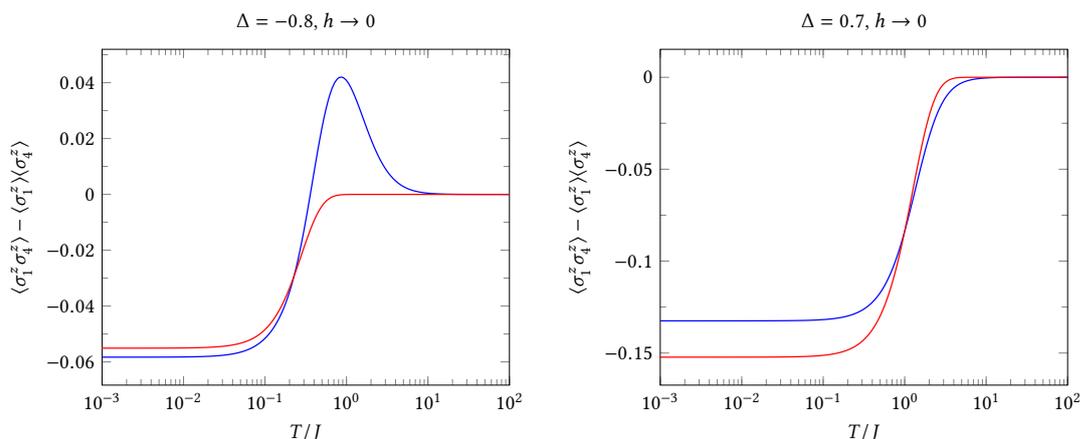


Abbildung 4.9: Vergleich der Temperaturabhängigkeit der exakten Korrelatoren nach [18] (blaue Kurve) mit der asymptotischen Formel (4.75) (rote Kurve). Der Vorzeichenwechsel der Korrelatoren für negative Δ (blaue Kurve im linken Bild) wurde in [49, 51, 18] als „quanten-klassisches Crossover“ interpretiert. Demnach ist es nicht verwunderlich, dass sich dieser nicht in der Tieftemperaturanalyse wiederfindet, da diese nur den durch Quantenfluktuationen bestimmten Bereich beschreibt.

4.8 Übertragung der Ergebnisse auf den Bereich $\Delta > 1$ und $h_\ell < h < h_u$

Die im letzten Abschnitt erzielten Ergebnisse lassen sich problemlos auf den Bereich $\Delta > 1$ und $h_\ell < h < h_u$ der kritischen Phase (vgl. Abbildung 4.1) übertragen. Dazu erinnert man sich daran, dass der Bereich $0 < \Delta < 1$ durch $\eta = -i\gamma$ mit $\gamma \in (0, \pi/2)$ parametrisiert ist. Damit wird die Funktion a_n für $T \rightarrow 0$ betragsmäßig groß auf dem Intervall $[-Q, Q] + i\gamma/2$, welches von Q nach $-Q$ durchlaufen wird. Ein ähnliches Verhalten hat man im Bereich $\Delta > 1$ und $h_\ell < h < h_u$, welcher durch $\eta \in \mathbb{R}_-$ parametrisiert werden kann. In diesem Fall wird a_n für $T \rightarrow 0$ betragsmäßig groß auf einer Kontur $[-iQ, iQ] - \eta/2$ ($Q > 0$), welche von $-iQ$ nach iQ durchlaufen wird. Demnach sind gegenüber dem Fall $|\Delta| < 1$ und $0 < h < h_u$ in Ergebnissen (4.75) und (4.66) lediglich die Ersetzungen

$$Q \leftrightarrow -iQ, \quad \frac{i\gamma}{2} \leftrightarrow -\frac{\eta}{2}, \quad (4.88)$$

vorzunehmen. Außerdem müssen nach der obigen Regel die linearen Integralgleichungen (4.23) modifiziert werden.

In Abbildung 4.10 ist der Vergleich der Magnetfeldabhängigkeit der exakten Korrelatoren mit der asymptotischen Formel dargestellt. Wie man erkennen kann, ergibt sich wie in Abschnitt 4.7 (vgl. Abbildung 4.8) eine gute Übereinstimmung, falls man entfernt ist von der kritischen Linie $h = h_\ell$, welche den Übergang zur antiferromagnetischen massiven Phase markiert (vgl. Abbildung 4.1). Bei Annäherung an die kritische Linie divergiert die Amplitude $A_{0,1}^{zz}$, während die Amplitude $A_{0,0}^{-+}$ verschwindet. Dadurch stellt die asymptotische Formel in der Nähe der Linie $h \searrow h_\ell$ keine sinnvolle Näherung dar. Dies war zu erwarten, da die Limites $h \searrow h_\ell, T \rightarrow 0$ und $m \rightarrow \infty$ nicht vertauschen. Dennoch hat das Verhalten der Amplituden eine physikalische Bedeutung: Die longitudinalen Kor-

relatoren weisen auf der anderen Seite der kritischen Linie $h \nearrow h_\ell$ langreichweitige Ordnung auf,

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle - \langle \sigma_1^z \rangle \langle \sigma_{m+1}^z \rangle \sim (-1)^m \prod_{n=1}^{\infty} \text{th}^4(\eta n), \quad (4.89)$$

während die transversalen Korrelatoren exponentiell zerfallen (vgl. Kapitel 5). Demnach zeigen die Divergenz bzw. das Verschwinden der Amplituden $A_{0,1}^{zz}$ bzw. $A_{0,0}^-$ die fundamentale Änderung der Abstandsasymptotik an.

Es ist interessant, das divergente Verhalten der Amplitude $A_{0,1}^{zz}$ in der Nähe der kritischen Linie $h \searrow h_\ell$ analytisch zu untersuchen. In diesem Fall ist $Q \nearrow \pi/2$, sodass sich die linearen Integralgleichungen (4.23) mittels Fourier-Transformation explizit lösen lassen. Man erhält

$$Z(\lambda) = \frac{1}{2}, \quad (4.90a)$$

$$\rho(Q) = \frac{h_\ell}{8\pi i J \text{sh}(\eta)}, \quad (4.90b)$$

$$k_F = \frac{\pi}{2}, \quad (4.90c)$$

sodass sich (vgl. Gleichungen (4.69) und (4.76))

$$\mathcal{A}(1) \underset{Q \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{G^2(\frac{3}{2})G^2(\frac{1}{2})}{\left(\frac{h_\ell}{2J \text{sh}(\eta)}(Q - \frac{\pi}{2})\right)^{1/2}} \quad (4.91)$$

ergibt. Für die Determinanten erhält man mit $q = e^\eta < 1$ die expliziten Formeln

$$\begin{aligned} \det_{d\lambda, \Gamma[-Q, Q]} \{1 + \widehat{U}_{\pm Q}^{(\pm)}\} &= \det_{d\lambda, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \left\{1 - \frac{1}{2\pi} [K(i(\lambda - \mu)) - K(i(-\pi/2 - \mu))]\right\} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2, \end{aligned} \quad (4.92)$$

sowie

$$\begin{aligned} \det_{d\lambda, \Gamma[-Q, Q]} \{1 - \widehat{K}\} &= \det_{d\lambda, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \left\{1 + \frac{1}{2\pi} K(i(\lambda - \mu))\right\} \\ &= 2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n})^2. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Die Berechnung der Determinanten in den zweiten Zeilen von (4.92) bzw. (4.93) wird in Kapitel 6 erläutert. Damit folgt schließlich für die Amplitude $A_{0,1}^{zz}$ in der Nähe der kritischen Linie

$$A_{0,1}^{zz} \underset{Q \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} 2 \left[\prod_{n=1}^{\infty} \text{th}^4(\eta n) \right] \left(\frac{2J \text{sh}(|\eta|)}{h_\ell} \right)^{1/2} G^2(\frac{3}{2})G^2(\frac{1}{2}) \left(\frac{\pi}{2} - Q \right)^{-1/2} + \mathcal{O}\left(\frac{\pi}{2} - Q\right). \quad (4.94)$$

Da der physikalische Parameter das Magnetfeld h ist, soll die Differenz $\pi/2 - Q$ durch $h - h_\ell$ ausgedrückt werden. Dies gelingt mit Hilfe des Zusammenhangs (vgl. Anhang C.4)

$$\frac{\pi}{2} - Q = \frac{\pi}{K} \left(\frac{h - h_\ell}{2h_\ell k} \right)^{1/2} + \mathcal{O}(h - h_\ell). \quad (4.95)$$

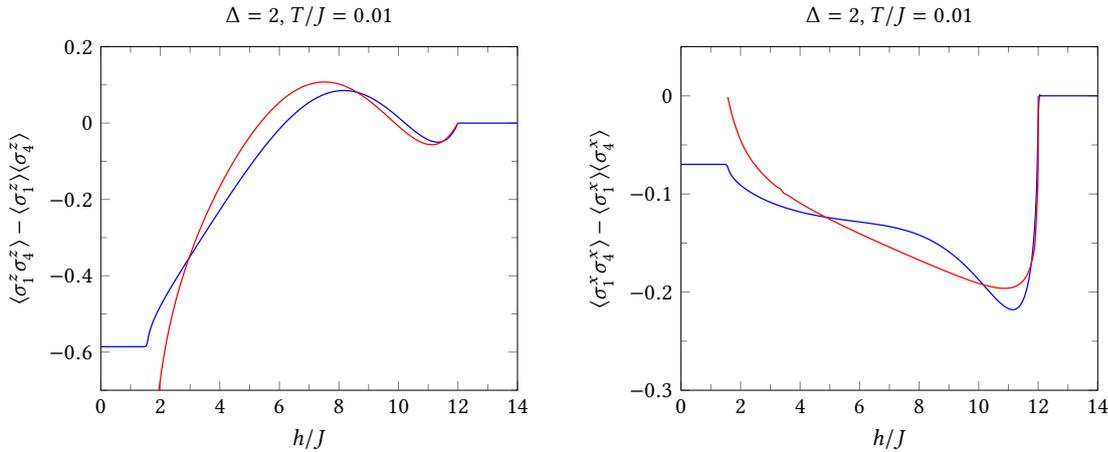


Abbildung 4.10: Vergleich der Magnetfeldabhängigkeit der exakten Korrelatoren nach [131] (blaue Kurve) mit der asymptotischen Formel (4.75) (rote Kurve). In der linken Spalte sind die longitudinalen Korrelatoren dargestellt, in der rechten die transversalen. Für $\Delta = 2$ sind die kritischen Magnetfelder durch $h_\ell/J \approx 1.5592$ und $h_u/J = 12$ gegeben.

Hierbei ist $K = K(k)$ das vollständige elliptische Integral 1. Art zum Modul $k = k(q)$ (vgl. Anhang D.1). Das Produkt der Barnes-Funktionen in (4.94) kann noch durch die Konstante A von Glaisher-Kinkelin ausgedrückt werden (vgl. [104], Gleichung 5.17.6),

$$G^2\left(\frac{3}{2}\right) G^2\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} \frac{2^{1/6}}{A^6} \quad (4.96)$$

Mit (4.95) folgt somit schließlich für die longitudinalen Korrelatoren in der Nähe der kritischen Linie das explizite Skalenverhalten

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle \sim \frac{\sqrt{e} 2^{1/6}}{A^6} \left(\frac{2k}{1-k^2} \right)^{1/4} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \text{th}^4(\eta n) \right) \left(\frac{h}{h_\ell} - 1 \right)^{-1/4} \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}. \quad (4.97)$$

Bemerkenswert an dieser Formel ist, dass man durch Einführung der Skalenfunktion

$$g(m, h) = \frac{\sqrt{e} 2^{1/6}}{A^6} \left(\frac{2k}{1-k^2} \right)^{1/4} \left(\frac{h}{h_\ell} - 1 \right)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (4.98)$$

und der Forderung $g(m, h) = 1$ das Verhalten der Korrelatoren für $h \nearrow h_\ell$ (vgl. Gleichung (4.89)) reproduzieren kann. Eine weitere interessante Beobachtung ist, dass der Faktor $\frac{\sqrt{e} 2^{1/6}}{A^6}$ auch bei der Abstandsasymptotik der Spin-Spin-Korrelationsfunktionen des 2d-Ising-Modells am kritischen Punkt auftaucht [138, 101, 139].

Eine interessante offene Frage ist, ob ähnliche Zusammenhänge auch für die transversalen Korrelatoren gelten. In diesem Fall besteht das Problem in der expliziten Berechnung der Fredholm-Determinanten.

5 Grundzustandskorrelationsfunktionen in der massiven Phase

Das nächste Ziel ist, die Tieftemperaturanalyse des vorhergehenden Kapitels für die massive antiferromagnetische Phase ($\Delta > 1$ und $0 < h < h_c$) zu wiederholen. Da das Spektrum des Hamiltonoperators in diesem Bereich eine Lücke aufweist, ist die Form der Korrelationsfunktionen für große Abstände nicht durch die konforme Gruppe festgelegt; man erwartet folglich eine völlig andere Abstandsasymptotik der Korrelationsfunktionen.

Der Großteil der bisherigen Ergebnisse im massiven Bereich wurde im Rahmen des Vertex-Operator-Zugangs [64, 63] erzielt. Diese Methode beruht auf der Quantengruppensymmetrie der (unendlich langen) XXZ-Kette und ist für den feldfreien Fall $h = 0$ gültig. In diesem Zugang wird der Hilbertraum aufgespannt durch $2n$ -Spinon-Zustände $|\nu_1, \dots, \nu_{2n}\rangle_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2n}}^{(j)}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Der Index $j = 0, 1$ trägt der Tatsache Rechnung, dass der Grundzustand der unendlichen Kette zweifach entartet ist. Der Index $\epsilon = \pm$ kann als „Spinindex“ interpretiert werden. Die Formfaktoren von lokalen Operatoren sind bekannt (vgl. [64, 63] für die XXZ-Kette und [92] für das XYZ-Modell) und im allgemeinen Fall durch komplizierte Vielfachintegrale gegeben. Lediglich im einfachsten Fall $n = 1$, d.h. für zwei Spinonen, konnten die Formfaktoren als explizite Funktionen der Rapiditäten ν_1, ν_2 bestimmt werden (vgl. [64] für den Fall σ^\pm und [92] für den Fall σ^z).

Es ist eine interessante Frage, ob sich mit Hilfe der Quantentransfermatrix und der Amplituden aus Kapitel 3 eine andere oder dieselbe Beschreibung der Korrelationsfunktionen ergibt. Möchte man nun aber das Schema aus Kapitel 4 (vgl. Seite 23) anwenden, stößt man bereits im zweiten Punkt auf das Problem, dass die Anregungen der Quantentransfermatrix für tiefe Temperaturen im massiven Bereich nicht bekannt sind. Wie sich in Kapitel 6 zeigen wird, ist diese Analyse nicht-trivial und die Form der Anregungen unterscheidet sich von den Teilchen-Loch-Anregungen im masselosen Fall.

Eine naheliegende Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, ist die Berechnung der Grundzustandskorrelationsfunktionen (d.h. T ist exakt gleich 0) der endlichen Kette mit Hilfe der gewöhnlichen Transfermatrix. Nach Durchführung des thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ hat man dieselbe physikalische Situation vorliegen wie im Limes $T \rightarrow 0$ in der Tieftemperaturanalyse der Quantentransfermatrix, man erwartet folglich dasselbe Ergebnis für die Korrelationsfunktionen. Der entscheidende Vorteil der oben genannten Methode ist, dass die Anregungen der gewöhnlichen Transfermatrix¹ seit langem bekannt sind [4, 132]. Das Resultat der oben genannten Arbeiten ist, dass die Anregungen durch eine gerade Anzahl an (reellen) Lochparametern und eine Menge komplexer Wurzeln parametrisiert werden. Letztere lassen sich klassifizieren als „strings“, „quartets“ und „wide pairs“, und sind durch einen Satz algebraischer Gleichungen („higher-level“ Bethe-Ansatz-Gleichungen) als (implizite) Funktionen der Lochparameter festgelegt.

In Abschnitt 5.1 wird diese Klassifikation der Anregungen durch die Analyse der nichtlinearen Integralgleichung der Hilfsfunktion bestätigt und ein in den higher-level Gleichungen der Arbeit

¹Da die gewöhnliche Transfermatrix mit dem Hamiltonoperator vertauscht, sind dies die physikalischen Anregungen des Modells.

[4] auftretender Fehler korrigiert werden. Im darauffolgenden Abschnitt 5.2 werden die zu den oben erwähnten Anregungen gehörigen Formfaktoren im thermodynamischen Limes berechnet². Man beachte, dass die dort vorgestellten Ergebnisse, im Gegensatz zu den Formfaktoren der Teilchen-Loch-Anregungen der masselosen Phase [73, 76], bislang unbekannt waren. Lediglich ein spezieller Formfaktor der gewöhnlichen Transfermatrix konnte bislang im Bereich $\Delta > 1$ berechnet werden [62].

Mit den Amplituden kann die Formfaktorreihe der longitudinalen Korrelationsfunktionen bestimmt und mit den Ergebnissen des Vertex-Operator-Zugangs verglichen werden. Die Bestimmung der Abstandsasymptotik der Korrelatoren erfolgt schließlich mit einer Sattelpunktanalyse. Abschließend wird in Abschnitt 5.6 erläutert, wie sich diese auf den Fall der dynamischen Korrelationsfunktionen übertragen lässt.

5.1 Anregungen des Hamiltonoperators

Im Folgenden soll das Anregungsspektrum des Hamiltonoperators (1.2) für $\Delta = \text{ch}(\eta) > 1$ ($\eta > 0$) und $0 \leq h < h_\ell$ analysiert werden. Nehme an, dass die Länge L der Kette durch 4 teilbar ist. Dies vereinfacht die Diskussion dahingehend, dass der Grundzustand $|\Psi_0\rangle$ der endlichen Kette eindeutig ist, für $h = 0$ im Sektor mit $S^z = 0$ liegt und Impuls 0 besitzt [94].

Die Eigenzustände $|\Psi_n\rangle$ des Hamiltonoperators sind parametrisiert durch Bethe-Wurzeln $\{\mu_j\}_{j=1}^N$, welche die Bethe-Ansatz-Gleichungen erfüllen,

$$-e^{2\pi i \alpha} = \left(\frac{\sin(\mu_j - i\eta/2)}{\sin(\mu_j + i\eta/2)} \right)^L \prod_{k=1}^N \frac{\sin(\mu_j - \mu_k + i\eta)}{\sin(\mu_j - \mu_k - i\eta)}, \quad (5.1)$$

wobei $\alpha = 0$ ist. Es ist dennoch sinnvoll, das obige Gleichungssystem (5.1) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Da der Grundzustand $|\Psi_0\rangle$ für $h = 0$ im Sektor mit verschwindender Magnetisierung liegt und da lediglich die longitudinalen Korrelatoren betrachtet werden, kann man sich auf den Sektor $N = L/2$ beschränken³. Die Bethewurzeln können offenbar so gewählt werden, dass ihre Realteile in einem Intervall der Länge π liegen. Der Grundzustand hat darüber hinaus die besondere Eigenschaft, dass alle Wurzeln reell sind. In der Arbeit [133] wurde gezeigt, dass jede Lösung der Gleichung (5.1) invariant unter komplexer Konjugation ist, d.h. $\{\bar{\mu}_j\}_{j=1}^N = \{\mu_j\}_{j=1}^N$. Nehme weiterhin an, dass die μ_j paarweise verschieden sind.

Man führt nun für jede Lösung $\{\mu_j\}_{j=1}^N$ der Bethe-Ansatz-Gleichungen (5.1) eine Hilfsfunktion bzw. Zählfunktion ein,

$$\widehat{\xi}_\mu(\omega) = \frac{p_0(\omega)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi i L} \sum_{k=1}^N \theta(\omega - \mu_k) + \frac{1 - 2\alpha}{2L}. \quad (5.2)$$

Hierbei wurden der „nackte Impuls“ p_0 und die „nackte Phase“ θ eingeführt,

$$\theta(\lambda) = 2\pi i \int_{-\pi/2}^{\lambda} d\mu K(\mu), \quad p_0(\lambda) = \int_{-\pi/2}^{\lambda} d\mu p'_0(\mu). \quad (5.3)$$

²Dies erfolgt beispielhaft für den Fall der zu den longitudinalen Korrelatoren gehörigen Formfaktoren.

³Die Fixierung der Magnetisierung entspricht einer mikrokanonischen Beschreibung. Da die Magnetisierung als Funktion des Magnetfeldes für $0 \leq h < h_\ell$ jedoch exponentiell klein ist in der Systemgröße L [140], stellt die Beschränkung auf den Sektor $N = L/2$ keine Einschränkung dar.

Die Integration wird dabei entlang des orientierten Weges

$$\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + i \operatorname{Im}(\lambda)\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2} + i \operatorname{Im}(\lambda), \lambda\right] \quad (5.4)$$

durchgeführt. Die Integranden sind gegeben durch

$$K(\mu) = \frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{2\pi \sin(\mu + i\eta) \sin(\mu - i\eta)} = \frac{\cot(\mu - i\eta) - \cot(\mu + i\eta)}{2\pi i}, \quad (5.5a)$$

$$p'_0(\mu) = \frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\sin(\mu + i\eta/2) \sin(\mu - i\eta/2)} = \frac{\cot(\mu - i\eta/2) - \cot(\mu + i\eta/2)}{i}. \quad (5.5b)$$

Mit der obigen Definition für den Integrationsweg folgt, dass die Funktion θ (bzw. p_0) im Streifen $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \eta$ (bzw. $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \eta/2$) quasi-periodisch, d.h. $\theta(\lambda + \pi) = \theta(\lambda) + 2\pi i$, und quasi-ungerade ist, d.h. $\theta(-\lambda) = 2\pi i - \theta(\lambda)$ (bzw. $p_0(\lambda + \pi) = p_0(\lambda) + 2\pi$ und $p_0(-\lambda) = 2\pi - p_0(\lambda)$). Im Bereich $|\operatorname{Im}(\lambda)| > \eta$ bzw. $|\operatorname{Im}(\lambda)| > \eta/2$ sind die Funktionen θ bzw. p_0 hingegen π -periodisch und ungerade. Mit diesen Eigenschaften folgt für die Zählfunktion

$$\widehat{\xi}_\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \widehat{\xi}_\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{N + n_w}{L}, \quad (5.6)$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ ist. Die Anzahl der Bethe-Wurzeln, die außerhalb des Streifens $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \eta$ liegen, wurde mit n_w bezeichnet.

Mit Hilfe der Zählfunktion können die Bethe-Ansatz-Gleichungen (5.1) in die Form

$$e^{2\pi i L \widehat{\xi}_\mu(\mu_j)} = 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (5.7)$$

gebracht werden. Ähnlich wie im Falle der Hilfsfunktion der Quantentransformmatrix kann man für die Zählfunktion eine nichtlineare Integralgleichung herleiten⁴ [83, 38, 37, 84]. Wie sich zeigen wird, werden die nichtlinearen zu linearen Integralgleichungen im thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ (analog zum Tieftemperaturlimit aus Kapitel 4).

Die Analyse der Zählfunktion $\widehat{\xi}_\mu$ für $L \rightarrow \infty$ wird unter den folgenden Annahmen durchgeführt.

- Die Menge $\{\mu_j\}_{j=1}^N$ enthält genau n (n fest und unabhängig von L) komplexe Wurzeln $\{z_j\}_{j=1}^n$, die einen nicht-verschwindenden Imaginärteil besitzen.
- Die in (5.2) definierte Zählfunktion $\widehat{\xi}_\mu$ ist streng monoton wachsend auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und ihre Ableitung $\widehat{\xi}'_\mu$ ist nach unten beschränkt durch eine L -unabhängige Konstante κ , d.h. es gilt $\widehat{\xi}'_\mu(\lambda) > \kappa > 0$ für alle $\lambda \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Die zweite Annahme stellt sicher, dass die reellen Wurzeln eindeutig durch ganze Zahlen parametrisiert werden können. Weiterhin garantiert sie, dass die komplexen Wurzeln für $L \rightarrow \infty$ in einem endlichen Abstand von der reellen Achse bleiben. Die beiden Annahmen bedeuten nicht, dass alle Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen diese Eigenschaften besitzen, sondern dass lediglich eine spezielle Klasse von Anregungen untersucht wird. Wie sich zeigen wird, liefert diese Klasse die korrekte Formfaktorentwicklung.

⁴In der Tat ist die Methode der nichtlinearen Integralgleichungen das erste Mal auf die Bethe-Ansatz-Gleichungen des Hamiltonoperators angewendet worden, und nicht auf die der Quantentransformmatrix.

Aufgrund der Quasiperiodizität und Monotonie auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Zählfunktion $\widehat{\xi}_\mu$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R} . Folglich existiert für jedes $\iota \in \mathbb{Z}$ ein x_μ , sodass

$$\widehat{\xi}_\mu(x_\mu - \frac{\pi}{2}) = \frac{1 - 2\iota}{2L}. \quad (5.8)$$

Weiterhin folgt, dass die Gleichung $e^{2\pi i L \widehat{\xi}_\mu(\omega)} = 1$ genau $N + n_w$ Lösungen $\{v_j\}_{j=1}^{N+n_w}$ im Intervall $[x_\mu - \frac{\pi}{2}, x_\mu + \frac{\pi}{2}]$ der Länge π besitzt, wobei v_j die eindeutige reelle Lösung der Gleichung

$$\widehat{\xi}_\mu(v_j) = \frac{j - \iota}{L} \quad (5.9)$$

ist. Fixiere nun ι durch die Forderung $\{n_j\}_{j=1}^{N+n_w} \subset [x_\mu - \frac{\pi}{2}, x_\mu + \frac{\pi}{2}] \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die Bethe-Ansatz-Gleichungen (5.1) legen die Bethe-Wurzeln μ_j nur modulo π fest, man kann also annehmen dass $\text{Re}(\mu_j) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Da die μ_j paarweise verschieden sind, folgt, dass $N - n$ der Wurzeln $\{v_j\}_{j=1}^{N+n_w}$ mit den reellen Wurzeln der Menge $\{\mu_j\}_{j=1}^N$ übereinstimmen müssen. Dies bedeutet, dass es ganze Zahlen $h_1 < \dots < h_{n_h}$ gibt (mit $h_j \in \{1, \dots, N + n_w\}$ und $n_h = n + n_w$), sodass

$$\{\mu_j\}_{j=1}^N = \{z_j\}_{j=1}^n \cup (\{v_j\}_{j=1}^{N+n_w} \setminus \{v_{h_j}\}_{j=1}^{n_h}). \quad (5.10)$$

Die v_{h_j} können folglich als Lochparameter interpretiert werden. Für den weiteren Verlauf werden die komplexen Wurzeln in zwei Teilmengen aufgeteilt,

$$\{z_j\}_{j=1}^n = \{z_j^c\}_{j=1}^{n_c} \cup \{z_j^w\}_{j=1}^{n_w}, \quad (5.11)$$

wobei $|\text{Im}(z_j^c)| < \eta$ („nahe Wurzeln“) bzw. $|\text{Im}(z_j^w)| > \eta$ („ferne Wurzeln“) ist.

Um den thermodynamischen Limes der Zählfunktion zu bestimmen, müssen noch die bekleidete Phase und der bekleidete Impuls eingeführt werden. Diese sind auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definiert durch die linearen Integralgleichungen

$$p(\omega) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\lambda K(\omega - \lambda) p(\lambda) = \frac{p_0(\omega)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi i} \left(p(-\frac{\pi}{2}) \theta(\omega + \frac{\pi}{2}) - p(\frac{\pi}{2}) \theta(\omega - \frac{\pi}{2}) \right), \quad (5.12a)$$

$$\varphi(\omega, z) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\lambda K(\omega - \lambda) \varphi(\lambda, z) = \theta(\omega - z) - \frac{1}{2} \theta(\omega - \frac{\pi}{2}) \cdot \mathbf{1}_{|\text{Im}(z)| < \eta}, \quad (5.12b)$$

wobei die Notation

$$\mathbf{1}_{\text{Aussage}} = \begin{cases} 1, & \text{falls Aussage wahr} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.13)$$

eingeführt wurde. Die analytische Fortsetzung der Ausdrücke (5.12) definiert die Funktionen p und φ in der komplexen Ebene. Man beachte, dass die Funktionen p und φ durch Fourier-Reihen gegeben sind bzw. durch q -Gamma-Funktionen und Jacobische elliptische Funktionen (vgl. Anhang D).

Schließlich sei noch an die Definition der bekleideten Energie erinnert,

$$\varepsilon(\omega) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\lambda K(\omega - \lambda) \varepsilon(\lambda) = \varepsilon_0(\omega), \quad (5.14)$$

mit

$$\varepsilon_0(\omega) = h - 2J \text{sh}(\eta) p'_0(\omega). \quad (5.15)$$

Dadurch ergibt sich die Beziehung

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\hbar}{2} - 4\pi J \operatorname{sh}(\eta) p'(\omega) . \quad (5.16)$$

Der thermodynamische Limes der Hilfsfunktion $\widehat{\xi}_\mu(\lambda)$ ist außerhalb der Linien $\operatorname{Im}(\lambda) = \pm\eta$ gegeben durch

Proposition 5.1.1. *Definiere die Funktion*

$$\xi_\mu^{(\infty)}(\omega) = p(\omega) + \frac{1}{2\pi i L} \left(\sum_{j=1}^{n_h} \varphi(\omega, v_{h_j}) - \sum_{j=1}^n \varphi(\omega, z_j) \right) + \frac{1 - \alpha - \iota}{2L} . \quad (5.17)$$

Dann ist die asymptotische Entwicklung der Zählfunktion $\widehat{\xi}_\mu$ gegeben durch

$$\widehat{\xi}_\mu(\omega) = \begin{cases} \xi_\mu^{(\infty)}(\omega) + \mathcal{O}(L^{-\infty}) , & |\operatorname{Im}(\omega)| < \eta \\ \xi_\mu^{(\infty)}(\omega) + \xi_\mu^{(\infty)}(\omega - i\eta) - \frac{1-2\iota}{2L} + \mathcal{O}(L^{-\infty}) , & \operatorname{Im}(\omega) > \eta \\ \xi_\mu^{(\infty)}(\omega) + \xi_\mu^{(\infty)}(\omega + i\eta) - \frac{1-2\iota}{2L} + \mathcal{O}(L^{-\infty}) , & \operatorname{Im}(\omega) < -\eta \end{cases} . \quad (5.18)$$

In allen drei Fällen ist der exponentiell kleine Rest stetig in ω , falls man sich nicht in der Nähe der Linien $\operatorname{Im}(\omega) = \pm\eta$ befindet.

Für den Beweis der obigen Proposition sei auf die Veröffentlichung [45] verwiesen. Mit dem Ergebnis (5.18) können nun die Bethe-Ansatz-Gleichungen in der Form (5.7) analysiert werden. Für die Lochparameter erhält man

$$\xi_\mu^{(\infty)}(v_{h_j}) = \frac{h_j - \iota}{L} + \mathcal{O}(L^{-\infty}) . \quad (5.19)$$

Zusammen mit Gleichung (5.17) erkennt man, dass die Löcher für $L \rightarrow \infty$ zu freien Parameter im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ werden.

Für die nahen Wurzeln z_j^c erhält man mit Proposition 5.1.1 die Gleichung

$$1 = e^{2\pi i L \widehat{\xi}_\mu(z_j^c)} = -e^{-i\pi(\alpha+\iota)} e^{2\pi i L p(z_j^c)} \prod_{k=1}^n \frac{\sin(z_j^c - z_k + i\eta)}{\sin(z_j^c - z_k - i\eta)} \prod_{k=1}^{n_h} \frac{\sin(z_j^c - v_{h_k} - i\eta)}{\sin(z_j^c - v_{h_k} + i\eta)} e^{\psi(z_j^c)} \times \left(1 + \mathcal{O}(L^{-\infty})\right) , \quad (5.20)$$

wobei $\psi(\omega)$ eine reguläre Funktion im Streifen $|\operatorname{Im}(\omega)| < \eta$ ist. Sei nun $0 < \operatorname{Im}(z_j^c) < \eta$. Damit folgt $|e^{2\pi i p(z_j^c)}| < 1$ (vgl. Anhang D.7), sodass obige Gleichung für $L \rightarrow \infty$ nur erfüllt werden kann, falls $z_j^c = z_\ell^c + i\eta - \delta_\ell$ mit $\delta_\ell = \mathcal{O}(L^{-\infty})$ für ein $\ell \in \{1, \dots, n\}$ ist. Die nahen Wurzeln bilden folglich Strings und die komplexen Wurzeln können durch

$$\{z_j\}_{j=1}^n = \{y_j, \bar{y}_j\}_{j=1}^{n_w/2} \cup \{w_j, w_j - i\eta + \delta_j\}_{j=1}^{n_c/2} \quad (5.21)$$

parametrisiert werden, wobei $\operatorname{Im}(y_j) > \eta$ und $\operatorname{Im}(w_j) > 0$ ist. Falls $\operatorname{Im}(w_j) \neq \eta/2$ ist, so bildet die Wurzel w_j mit den Wurzeln $\bar{w}_j, w_j - i\eta + \delta_j$ und $\bar{w}_j + i\eta - \delta_j$ ein „quartet“, da die komplexen Wurzeln in komplex konjugierten Paaren auftreten. Falls $\operatorname{Im}(w_j) = \eta/2$ gilt, so bilden w_j und \bar{w}_j einen Zweier-String. Dies ist gerade die in [4] gefundene Klassifikation der komplexen Wurzeln.

Um eine nicht-singuläre Gleichung für die w_j zu erhalten, multipliziert man die Gleichungen für w_j und $w_j - i\eta + \delta_j$. Mit den Funktionalgleichungen (D.6) und (D.20) sowie Gleichung (D.22) aus dem Anhang ergibt sich schließlich

$$1 = -e^{-2\pi i\alpha} \prod_{k=1}^{n_h} \frac{\sin(w_j - v_{h_k} - i\eta)}{\sin(w_j - v_{h_k})} \prod_{k=1}^{n_c/2} \frac{\sin(w_j - w_k + i\eta)}{\sin(w_j - w_k - i\eta)} \prod_{k=1}^{n_w/2} \frac{\sin(w_j - y_k + i\eta) \sin(w_j - \bar{y}_k)}{\sin(w_j - y_k - i\eta) \sin(w_j - \bar{y}_k - 2i\eta)}. \quad (5.22)$$

Die Gleichung für die Parameter y_j und \bar{y}_j der „wide pairs“ folgt direkt aus Proposition 5.1.1 und den Gleichungen (D.6), (D.20) und (D.22),

$$1 = -e^{-2\pi i\alpha} \prod_{k=1}^{n_h} \frac{\sin(y_j - v_{h_k} - i\eta)}{\sin(y_j - v_{h_k})} \prod_{k=1}^{n_c/2} \frac{\sin(y_j - w_k + i\eta)}{\sin(y_j - w_k - i\eta)} \prod_{k=1}^{n_w/2} \frac{\sin(y_j - y_k + i\eta) \sin(y_j - \bar{y}_k)}{\sin(y_j - y_k - i\eta) \sin(y_j - \bar{y}_k - 2i\eta)}. \quad (5.23)$$

Die Gleichung für \bar{y}_j ergibt sich durch komplexe Konjugation.

Durch die Umparametrisierung (vgl. [4])

$$\{\chi_j\}_{j=1}^{n_\chi} = \{y_j - i\eta/2\}_{j=1}^{n_w/2} \cup \{\bar{y}_j + i\eta/2\}_{j=1}^{n_w/2} \cup \{w_j - i\eta/2\}_{j=1}^{n_c/2}, \quad n_\chi = \frac{n_c}{2} + n_w = \frac{n_h}{2}, \quad (5.24)$$

können die Gleichungen (5.22) und (5.23) in eine einheitliche und symmetrische Form gebracht werden,

$$e^{2\pi i\alpha} = - \prod_{k=1}^{2n_\chi} \frac{\sin(\chi_j - v_{h_k} - i\eta/2)}{\sin(\chi_j - v_{h_k} + i\eta/2)} \prod_{k=1}^{n_\chi} \frac{\sin(\chi_j - \chi_k + i\eta)}{\sin(\chi_j - \chi_k - i\eta)}. \quad (5.25)$$

Zusammen mit (5.19) bilden diese Gleichungen ein gekoppeltes Gleichungssystem für die komplexen Wurzeln und die Lochparameter. Im Limes $L \rightarrow \infty$ sind letztere freie Parameter aus dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, welche die komplexen Wurzeln durch (5.25) festlegen. Erstaunlicherweise haben die Gleichungen (5.25) („higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen“) wieder dieselbe Form wie die ursprünglichen Bethe-Ansatz-Gleichungen und enthalten insbesondere ausschließlich elementare Funktionen.

Man beachte, dass die Gleichungen (5.25) nicht mit den higher-level Gleichungen aus [4] übereinstimmen, da letztere einen zusätzlichen Faktor e^δ enthalten. Dieser Faktor ist in der hier verwendeten Notation gegeben durch

$$e^\delta = e^{-2i \sum_{j=1}^{2n_\chi} v_{h_j}} \prod_{j=1}^{n_\chi} \frac{\cos^2(\bar{\chi}_j - i\eta/2)}{\cos^2(\chi_j + i\eta/2)} \prod_{j=1}^{2n_\chi} \prod_{r=0}^{\infty} \frac{\cos^2(v_{h_j} + i\eta(2r+1)) \cos^2(v_{h_j} - 2i\eta(r+1))}{\cos^2(v_{h_j} - i\eta(2r+1)) \cos^2(v_{h_j} + 2i\eta(r+1))}. \quad (5.26)$$

Mit der aus Proposition 5.1.1 folgenden Gleichung

$$x_\mu = \frac{1}{2\pi i L p'(-\frac{\pi}{2})} \left(i\pi(\alpha - \iota) + \sum_{j=1}^n \varphi(-\frac{\pi}{2}, z_j) - \sum_{j=1}^{n_h} \varphi(-\frac{\pi}{2}, v_{h_j}) \right) + \mathcal{O}(L^{-2}) \quad (5.27)$$

identifiziert man δ mit

$$\delta = 4\pi i L \left(\widehat{\xi}_\mu(-\frac{\pi}{2}) - \widehat{\xi}_\mu(x_\mu - \frac{\pi}{2}) \right) + \mathcal{O}(L^{-\infty}). \quad (5.28)$$

Das Auftreten des zusätzlichen Faktors δ in [4] ist folglich auf die inkorrekte Behandlung der Integrationsgrenzen zurückzuführen. Dies deckt sich mit der Beobachtung, dass die Autoren für den

Fall $|\Delta| < 1$, bei dem die Integrationsgrenzen im Unendlichen liegen, die korrekten higher-level Gleichungen berechnen. Dieser Fehler der Ordnung $1/L$ wird in den Bethe-Ansatz-Gleichungen mit einem Faktor L multipliziert und führt zu einer $\mathcal{O}(1)$ -Änderung der higher-level Gleichungen.

Man beachte, dass die Form (5.25) der higher-level Gleichungen bereits in [132] hergeleitet wurde. Die Autoren behaupteten jedoch, dass $e^\delta = 1$ gilt und beide Resultate somit äquivalent seien. Dass diese Behauptung nicht zutrifft, erkennt man, indem man das Beispiel $n_\chi = 1$ und $\alpha = 0$ betrachtet. In diesem Fall gibt es lediglich eine higher-level Gleichung, welche genau zwei Lösungen $\chi_{1,2}$ besitzt,

$$\chi_1 = \frac{v_{h_1} + v_{h_2}}{2} \bmod \pi, \quad \chi_2 = \frac{v_{h_1} + v_{h_2} + \pi}{2} \bmod \pi. \quad (5.29)$$

Diese Anregungen bestehen aus zwei (freien) Löchern und einem Zweier-String, dessen Zentrum auf der reellen Achse liegt. Setzt man nun z.B. χ_1 in (5.26) ein, so folgt $e^\delta \neq 1$ für $v_{h_1} \neq -v_{h_2}$.

Für die Formfaktorentwicklung im nächsten Abschnitt werden noch Impuls \mathcal{P}_{ex} und Energie \mathcal{E}_{ex} eines angeregten Zustands (parametrisiert durch Bethe-Wurzeln μ_j) benötigt,

$$\mathcal{P}_{ex} = \sum_{j=1}^N (p_0(\mu_j) - p_0(\lambda_j)), \quad \mathcal{E}_{ex} = \sum_{j=1}^N (\varepsilon_0(\mu_j) - \varepsilon_0(\lambda_j)). \quad (5.30)$$

Hierbei sind die λ_j die Bethe-Wurzeln des Grundzustands. Man sieht schnell ein (vgl. [67, 4, 45]), dass der thermodynamische Limes von (5.30) für eine Anregung von der oben diskutierten Form durch

$$\mathcal{P}_{ex} = (\alpha + \iota)\pi - 2\pi \sum_{j=1}^{2n_\chi} p(v_{h_j}) + \mathcal{O}(L^{-\infty}), \quad \mathcal{E}_{ex} = - \sum_{j=1}^{2n_\chi} \varepsilon^{(0)}(v_{h_j}) + \mathcal{O}(L^{-\infty}), \quad (5.31)$$

gegeben ist. Hierbei ist $\varepsilon^{(0)}$ die bekleidete Energie bei $h = 0$,

$$\varepsilon^{(0)}(\lambda) = -4\pi J \operatorname{sh}(\eta) p'(\lambda). \quad (5.32)$$

Man beachte, dass in Gleichung (5.31) ausschließlich die Lochparameter auftauchen.

Das Ergebnis dieses Abschnitts ist, dass man jeder Lösung $\{\mu_j\}_{j=1}^N$ der Bethe-Ansatz-Gleichungen (5.1) eine Zählfunktion $\xi_\mu^{(\infty)}$ zuordnen kann, welche durch $\iota \in \mathbb{Z}$, $n_\chi \in \mathbb{N}$ und $\{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}$ sowie $\{\chi_j\}_{j=1}^{n_\chi}$ parametrisiert ist.

Im Folgenden soll eine leicht veränderte Beschreibung der angeregten Zustände verwendet werden. Ursprünglich ist $\iota \in \mathbb{Z}$ durch die Forderung $\{v_j\}_{j=1}^{N+n_w} \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ fixiert worden. Man erkennt allerdings an den Gleichungen (5.17) und (5.18), dass sich $e^{2\pi i L \tilde{\xi}_\mu}$ nicht ändert, wenn sich ι um eine gerade Zahl ändert, während sich Bethe-Wurzeln und Löcher um Vielfache von π ändern können. In einer solchen Situation liegen sie i.A. nicht mehr im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Eine solche Transformation ändert allerdings nicht die Ausdrücke für die Formfaktoren, sodass man sich auf die Fälle $\iota \in \{0, 1\}$ beschränken kann und dabei in Kauf nimmt, dass einige der Parameter $\{v_j\}_{j=1}^{N+n_w}$ außerhalb von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ liegen. Dadurch wandert i.A. auch der Realteil einiger Bethe-Wurzeln außerhalb von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. In diesem Fall sind die Bethe-Wurzeln nun durch (5.10) definiert.

Man kann sich davon überzeugen [45], dass der Fall $\iota = 0$ und $n_\chi = 0$ den Grundzustand beschreibt, während der Fall $\iota = 1$ und $n_\chi = 0$ zu einem Zustand gehört, dessen Anregungsenergie

exponentiell klein ist und der Impuls π besitzt (vgl. (5.31)). Aus diesem Grund wird der letztgenannte Zustand im Folgenden Pseudo-Grundzustand genannt. Diese Situation ist ähnlich zur Ising-Kette, welche zwei entartete Grundzustände (Néel-Zustände) mit Impuls 0 und π besitzt. Im allgemeinen Fall beschreiben die Fälle $\iota = 0$ und $\iota = 1$ also verschiedene Zustände. Es kann allerdings die Situation eintreten, dass zwei verschiedene Mengen $\{v_{h_j}^{(\iota)}\}_{j=1}^{n_h}$ (mit $\iota = 0, 1$) von Lochparametern kongruent modulo π sind. Da $x_\mu^{(0)} - x_\mu^{(1)} = \mathcal{O}(1/L)$ gilt, ist die Erwartung, dass Löcher nahe $\pm \frac{\pi}{2}$ durch eine Verschiebung um $\pm \pi$ verbunden sein könnten. Betrachte ein Loch $v_{h_j}^{(1)}$ in der Nähe des linken Randes. Entwickelt man Gleichung (5.9) mit $v_j = v_{h_j}^{(1)}$ um $x_\mu^{(1)} - \frac{\pi}{2}$ und benutzt (5.8) und (5.17), so folgt

$$v_{h_j}^{(1)} + \pi < x_\mu^{(1)} + \frac{\pi}{2} + \frac{h_j^{(1)} - 1/2}{Lp'(-\frac{\pi}{2})} + \mathcal{O}(1/L^2). \quad (5.33)$$

Damit dies gleich einem Loch $v_{h_k}^{(0)}$ sein kann, muss die rechte Seite kleiner als $x_\mu^{(0)} + \frac{\pi}{2}$ sein. Nimmt man an, dass nur ein solches Loch existiert, so folgt mit (5.27)

$$\frac{h_j^{(1)} - 1/2}{Lp'(-\frac{\pi}{2})} = x_\mu^{(0)} - x_\mu^{(1)} = \frac{1}{Lp'(-\frac{\pi}{2})} + \mathcal{O}(1/L^2). \quad (5.34)$$

Diese Ungleichung kann nur erfüllt werden falls $h_j^{(1)} = 1$ ist. Mit einer ähnlichen Argumentation folgt, dass in den beiden Mengen $\{v_{h_j}^{(0)}\}_{j=1}^{n_h}$ und $\{v_{h_j}^{(1)}\}_{j=1}^{n_h}$ nicht zwei oder mehr Löcher durch Verschiebungen um π verbunden sein können. Mit Gleichung (5.17) erkennt man, dass die Menge $\{v_1, v_{h_2}, \dots, v_{h_{n_h}}\}$ mit $\iota = 1$ und die Menge $\{v_{h_2}, \dots, v_{h_{n_h}}, v_1 + \pi\}$ mit $\iota = 0$ in der Tat dieselbe Zählfunktion $\xi_\mu^{(\infty)}$ liefern.

Dies bedeutet, dass wenn man in der Formfaktorentwicklung über alle Lösungen von (5.19) und (5.25) mit $\iota = 0, 1$ summiert, eine gewisse Anzahl an Lösungen doppelt zählt. Für eine feste Anzahl $n + n_w$ an Löchern gibt es $\binom{N+n_w-1}{n+n_w-1}$ mögliche Mengen von Löchern mit $h_1 = 1$. Die relative Anzahl der doppelt gezählten Zustände ist somit

$$\frac{\binom{N+n_w-1}{n+n_w-1}}{\binom{N+n_w}{n+n_w}} = \frac{n + n_w}{N + n_w} = \mathcal{O}(1/L), \quad (5.35)$$

und damit im thermodynamischen Limes vernachlässigbar. Diese Doppelzählung der Zustände wurde bereits in [132] entdeckt, allerdings mit anderen Methoden als den hier verwendeten.

5.2 Formfaktoren der gewöhnlichen Transfermatrix

In diesem Abschnitt sollen nun die zu den longitudinalen Korrelatoren gehörenden Formfaktoren der gewöhnlichen Transfermatrix bzw. des Hamiltonoperators berechnet werden. Dabei werden lediglich Anregungen von der in Abschnitt 5.1 diskutierten Form betrachtet. Bezeichne aus diesem Grund einen solchen Zustand mit $|\Psi(\{\chi_j\}, \{v_{h_j}\}, \iota)\rangle$ und den Grundzustand (der Kette der Länge $L \in 4\mathbb{N}$) mit $|\Psi_0\rangle$. Betrachte die Amplitude

$$F_m^{(z)}(\{\chi_j\}_{j=1}^{n_\chi}, \{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi} | \iota) = \frac{\langle \Psi_0 | \sigma_1^z | \Psi(\{\chi_j\}, \{v_{h_j}\}, \iota) \rangle \langle \Psi(\{\chi_j\}, \{v_{h_j}\}, \iota) | \sigma_{m+1}^z | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \langle \Psi(\{\chi_j\}, \{v_{h_j}\}, \iota) | \Psi(\{\chi_j\}, \{v_{h_j}\}, \iota) \rangle}. \quad (5.36)$$

Ausgehend von der Darstellung der Amplitude für endliches L kann der thermodynamische Limes $L \rightarrow \infty$ ähnlich wie der Tieftemperaturlimites in Kapitel 4 durchgeführt werden. Da die Rechnungen lang und technisch sind, sei für die Herleitung der folgenden Formel auf die Arbeit [45] verwiesen.

Im thermodynamischen Limes gilt für die Amplituden (5.36) die Entwicklung

$$F_m^{(z)}(\{\chi_j\}_{j=1}^{n_\chi}, \{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi} | \iota) = e^{i\pi m \iota} \left[\prod_{j=1}^{2n_\chi} \frac{e^{-2\pi i m p(v_{h_j})}}{2\pi L p'(v_{h_j})} \right] \frac{\left(\mathcal{F}_\iota^{(z)}(\{\chi_j\}_{j=1}^{n_\chi}, \{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}) \right)^2}{\det_{n_\chi} [\partial_{u_j} \mathcal{Y}_0(u_k | \{u_\ell\}_{\ell=1}^{n_\chi}, \{v_{h_\ell}\}_{\ell=1}^{2n_\chi})]_{\{u_\ell\} = \{\chi_\ell\}}} \times (1 + \mathcal{O}(L^{-1})) . \quad (5.37)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{F}_\iota^{(z)}(\{\chi_j\}_{j=1}^{n_\chi}, \{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}) \right)^2 &= -16 \sin^2 \left(\frac{i\pi}{2} + \sum_{j=1}^{2n_\chi} \pi p(v_{h_j}) \right) \mathcal{W}_{\text{reg}}(\{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}; \{z_j\}_{j=1}^{2n_\chi - n_w}) \\ &\times \tilde{\mathcal{D}}(\{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}; \{z_j\}_{j=1}^{2n_\chi - n_w}) \exp \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ds dw \frac{F_{i;\text{per}}(s) F'_i(w) - F_{i;\text{per}}(w) F'_i(s)}{2 \tan(w-s)} \right\} e^{i\pi \sum_{\ell=1}^{n_3} F_i(\delta_\ell)} \\ &\times \exp \left\{ - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ds dw \frac{F_{i;\text{per}}(s) F'_{i;\text{per}}(w)}{\tan(w-s-i\eta)} - \text{p. v.} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ds F_{i;\text{per}}(s) \ln' [e^{-2\pi i F_i(s)} - 1] \right\} \\ &\times \left[\prod_{j=1}^{2n_\chi} 4 \sin^2(\pi F_i(v_{h_j})) e^{\mathcal{L}[F_{i;\text{per}}](v_{h_j})} \right] \left[\prod_{j=1}^{2n_\chi - n_w} e^{-\mathcal{L}[F_{i;\text{per}}](z_j)} \right] \exp \left\{ - \frac{n_w}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ds G_i(s) \right\} \\ &\times \frac{(-1)^{n_\chi} 2^{n_w n_3}}{\det^2[1+K]} e^{4\eta n_w n_\chi} \left[\prod_{p=1}^2 \frac{\det_\Gamma [1 + U_{\theta_p}]}{1 - e^{2\pi i F_i(\theta_p)}} \frac{e^{-2\pi i \mathcal{C}[F_i](\theta_p + i\eta)}}{\cos^{n_w}(\theta_p + i\eta)} \frac{\prod_{j=1}^{2n_\chi} \sin(\theta_p - v_{h_j} + i\eta)}{\prod_{j=1}^{2n_\chi - n_w} \sin(\theta_p - z_j + i\eta)} \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

mit

$$\mathcal{W}_{\text{reg}}(\{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}; \{z_j\}_{j=1}^{2n_\chi - n_w}) = \frac{\prod_{j=1}^{2n_\chi} \prod_{k=1}^{2n_\chi - n_w} \sin(v_{h_j} - z_k - i\eta) \sin(z_k - v_{h_j} - i\eta)}{\prod_{j,k=1}^{2n_\chi} \sin(v_{h_j} - v_{h_k} - i\eta) \prod_{j,k=1}^{2n_\chi - n_w} \sin(z_j - z_k - i\eta)} \prod_{j=1}^{n_\chi - n_w} \sin(-\delta_j) , \quad (5.39a)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(\{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}; \{z_j\}_{j=1}^{2n_\chi - n_w}) = \frac{\prod_{j \neq k}^{2n_\chi} \sin(v_{h_j} - v_{h_k}) \prod_{j \neq k}^{2n_\chi - n_w} \sin(z_j - z_k)}{\prod_{j=1}^{2n_\chi} \prod_{k=1}^{2n_\chi - n_w} \sin(v_{h_j} - z_k) \sin(z_k - v_{h_j})} . \quad (5.39b)$$

Man beachte, dass die Faktoren $\sin(-\delta_j)$ in Gleichung (5.39a) die aufgrund der Bildung von Strings vorhandenen Nullstellen des Nenners des ersten Faktors kompensieren. Die in (5.38) auftauchende „shift-Funktion“ F_i ist gegeben durch

$$F_i(s) = \frac{\iota}{2} + \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{j=1}^{2n_\chi - n_w} \varphi(s, z_j) - \sum_{j=1}^{2n_\chi} \varphi(s, v_{h_j}) \right) . \quad (5.40)$$

Die Funktion $F_{i;\text{per}}$ ist die „periodisierte“ Version von F_i und gegeben durch

$$F_{i;\text{per}}(s) = F_i(s) + \frac{n_w}{\pi} \left(s + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{F_i(-\frac{\pi}{2}) - \iota}{2\pi p'(-\frac{\pi}{2})} - \iota . \quad (5.41)$$

Die Menge der Nullstellen der Funktion $e^{-2\pi i F_i} - 1$ wurde mit $\{\beta_\ell\}_{\ell=1}^{n_3}$ bezeichnet. Weiterhin wurde

$$G_i(s) = \ln \left[\frac{e^{-2\pi i F_i(s)} - 1}{\prod_{j=1}^{n_3} \sin(s - \beta_j)} \right]. \quad (5.42)$$

eingeführt. Die Funktionale \mathcal{C} und \mathcal{L} sind gegeben durch

$$\mathcal{C}[f](\omega) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ds}{2\pi i} \frac{f(s)}{\tan(s - \omega)}, \quad (5.43a)$$

$$\mathcal{L}[f](\omega) = 2\pi i \left(\mathcal{C}[f](\omega + i\eta) + \mathcal{C}[f](\omega - i\eta) - \mathcal{C}[f](\omega + i0) - \mathcal{C}[f](\omega - i0) \right). \quad (5.43b)$$

Die Verschiebungen um $\pm i0$ sind nur relevant falls $\omega \in \mathbb{R}$. Der Ausdruck $\det[1+K]$ ist die Fredholm-Determinante des durch Gleichung (5.5a) definierten Integraloperators, welcher auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ agiert. Dementsprechend ist $\det_{\Gamma}[1+U_{\theta_p}]$ die Determinante des durch

$$U_{\theta}(\omega, \omega') = \exp \left\{ 2\pi i \left(\mathcal{C}[F_i](\omega) - \mathcal{C}[F_i](\omega + i\eta) \right) \right\} \left(\frac{\cos(\omega)}{\cos(\omega + i\eta)} \right)^{n_w} \\ \times \left[\prod_{j=1}^{2n_x} \frac{\sin(\omega - v_{h_j} + i\eta)}{\sin(\omega - v_{h_j})} \right] \left[\prod_{j=1}^{2n_x - n_w} \frac{\sin(\omega - z_j)}{\sin(\omega - z_j + i\eta)} \right] \frac{K(\omega - \omega') - K(\theta - \omega')}{1 - e^{2\pi i F_i(\omega)}} \quad (5.44)$$

definierten Operators, welcher auf der Kontur

$$\Gamma = \left[-\frac{\pi}{2} - i\epsilon, \frac{\pi}{2} - i\epsilon \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + i\epsilon, -\frac{\pi}{2} + i\epsilon \right] \quad (5.45)$$

wirkt⁵. Hierbei ist $\epsilon > 0$ eine kleine Zahl. Die in den Determinanten auftretenden Parameter θ_p ($p = 1, 2$) können beliebig gewählt werden (vgl. Anhang A.2). Damit sind alle in (5.38) auftretenden Größen eingeführt worden.

Im Resultat (5.37) taucht im Nenner die Jacobi-Determinante der Funktion

$$\mathcal{Y}_0 \left(u_k | \{u_\ell\}_{\ell=1}^{n_x}; \{v_{h_\ell}\}_{\ell=1}^{2n_x} \right) = 1 + \left[\prod_{j=1}^{2n_x} e^{ip_0(u_k - v_{h_j})} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_x} e^{-\theta(u_k - u_j)} \right] \quad (5.46)$$

auf. Diese kann als erzeugende Funktion der higher-level Gleichungen (5.25) angesehen werden, da letztere in die Form

$$\mathcal{Y}_0 \left(\chi_k | \{\chi_\ell\}_{\ell=1}^{n_x}; \{v_{h_\ell}\}_{\ell=1}^{2n_x} \right) = 0 \quad (5.47)$$

gebracht werden können. Ein ähnlicher Zusammenhang gilt für die Norm eines Bethe-Vektors und die zugehörigen Bethe-Ansatz-Gleichungen [88]. Es liegt folglich nahe, die Determinante im Nenner von (5.37) als „higher-level Norm“ zu interpretieren. In der Tat stammt dieser Faktor aus der Normformel des angeregten Zustands. Diese Formel entwickelt Singularitäten, falls sich die Bethe-Wurzeln zu Strings anordnen (vgl. Gleichung (3.2)). Das Extrahieren dieser Singularitäten mit den in [70] entwickelten Methoden stellt den schwierigsten Teil der in [45] durchgeführten Berechnungen dar. Der verbleibende reguläre Anteil liefert schließlich den Nenner von der rechten Seite von

⁵Bei dieser Wahl der Kontur wurde vorausgesetzt, dass die Funktion $1 - e^{2\pi i F_i(\omega)}$ keine Nullstellen innerhalb von Γ besitzt. Dies kann immer erreicht werden, falls für den α -Parameter $\text{Im}(\alpha) > 0$ gilt. Die hier angegebenen Ausdrücke sind also als analytische Fortsetzungen vom Bereich $\text{Im}(\alpha) > 0$ nach $\text{Im}(\alpha) = 0$ zu verstehen.

(5.37). Der Grund dafür, dass die higher-level Norm nicht Gleichung (5.38) zugeschlagen wurde, ist, dass sich damit die Summation über alle Lösungen der higher-level Gleichungen als höherdimensionales komplexes Konturintegral schreiben lässt (vgl. Abschnitt 5.3).

Die Gleichungen (5.37) und (5.38) sind die Hauptergebnisse dieses Kapitels. Im thermodynamischen Limes bestimmen sie die Amplituden einer beliebigen Anregung der in Abschnitt 5.1 diskutierten Form. Für die Bestimmung der Grundzustandskorrelationsfunktionen in der massiven Phase muss nun noch im folgenden Abschnitt die Formfaktorreihe aufsummiert werden.

5.3 Die Formfaktorreihe

Im Folgenden soll mit Hilfe der Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte die Formfaktorentwicklung der longitudinalen Korrelatoren berechnet werden. Da die in der Reihe auftretenden Anregungen Eigenzustände des Hamiltonoperators sind, können hier im Gegensatz zum Quantentransfermatrix-Fall auch dynamische Korrelationsfunktionen betrachtet werden. In diesem Fall hat man die Zeitentwicklung

$$\sigma_k^z(t) = e^{iHt} \sigma_k^z e^{-iHt} . \quad (5.48)$$

Nun muss in Gleichung (5.37) über alle möglichen Anregungen summiert werden. Da die Löcher im thermodynamischen Limes zu unabhängigen Variablen werden, soll zunächst für feste Lochpositionen über alle Lösungen der higher-level Gleichungen (5.25) summiert werden,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_i^{(z)}(\{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}) &:= \sum_{\{\chi_j\}} \frac{\left(\mathcal{F}_i^{(z)}(\{\chi_j\}_{j=1}^{n_\chi}, \{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}) \right)^2}{\det_{n_\chi} \left[\partial_{u_j} \mathcal{Y}_0(u_k | \{u_\ell\}_{\ell=1}^{n_\chi}; \{v_{h_\ell}\}_{\ell=1}^{2n_\chi}) \right]_{\{u_\ell\}=\{\chi_\ell\}}} \\ &= \frac{1}{n_\chi!} \int_{\Gamma_\epsilon(\{v_{h_j}\})} \frac{d^{n_\chi} \psi}{(2\pi i)^{n_\chi}} \frac{\left(\mathcal{F}_i^{(z)}(\{\psi_j\}_{j=1}^{n_\chi}, \{v_{h_j}\}_{j=1}^{2n_\chi}) \right)^2}{\prod_{k=1}^{n_\chi} \mathcal{Y}_0(\psi_k | \{\psi_\ell\}_{\ell=1}^{n_\chi}; \{v_{h_\ell}\}_{\ell=1}^{2n_\chi})} . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Das n_χ -dimensionale Integral läuft über das „Skelett“

$$\Gamma_\epsilon(\{v_{h_j}\}) = \left\{ \psi \in \mathbb{C}^{n_\chi} : \left| \mathcal{Y}_0(\psi_k | \{\psi_\ell\}_{\ell=1}^{n_\chi}; \{v_{h_\ell}\}_{\ell=1}^{2n_\chi}) \right| = \epsilon, k = 1, \dots, n_\chi \right\} , \quad (5.50)$$

und liefert nach den Sätzen der komplexen Analysis in mehreren Variablen (vgl. z.B. [3]) in der Tat die Summe in der ersten Zeile von (5.49).

Im nächsten Schritt muss über alle möglichen Lochpositionen (für eine gegebene Anzahl $2n_\chi$ von Löchern), d.h. über alle möglichen ganzen Zahlen $1 \leq h_1 < \dots < h_{2n_\chi} \leq N + n_w$ summiert werden. Wie bereits erwähnt, erkennt man an Gleichung (5.19) und Gleichung (5.17), dass

$$p(v_{h_j}) = \frac{h_j}{L} + \mathcal{O}(L^{-1}) \quad (5.51)$$

gilt. Folglich füllen die möglichen Lochpositionen das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dicht. Anhand der obigen Gleichung sieht man, dass die Dichte der Lochpositionen bei $\lambda \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durch $1/(Lp'(\lambda))$ gegeben ist. Da genau dieser Faktor in den Amplituden (5.37) auftaucht, lässt sich der Ausdruck

(5.38) als *Formfaktordichte* interpretieren. Die Summe über die Löcher wird folglich zu einem $2n_\chi$ -dimensionalen Riemann-Integral⁶. Dieses Verhalten ist in starkem Gegensatz zum kritischen Bereich des Phasendiagramms (vgl. Kapitel 4). In diesem Regime skalieren die Amplituden mit einem nicht-ganzzahligen Exponenten zu Null und für die Summation muss eine nicht-triviale diskrete Summenformel verwendet werden.

Summiert man schließlich noch über den Parameter $\iota \in \{0, 1\}$, welcher Anregungen über dem Grundzustand und Pseudo-Grundzustand indiziert, so erhält man die Formfaktorreihe

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1^z(0) \sigma_{m+1}^z(t) \rangle &= (-1)^m \left(\mathcal{F}_1^{(z)}(\emptyset, \emptyset) \right)^2 \\ &+ \sum_{\iota \in \{0, 1\}} \sum_{n_\chi=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\iota m}}{(2n_\chi)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d^{2n_\chi} v}{(2\pi)^{2n_\chi}} \left[\prod_{j=1}^{2n_\chi} e^{-it\varepsilon^{(0)}(v_j) - 2\pi i m p(v_j)} \right] \mathfrak{F}_\iota^{(z)}(\{v_j\}_{j=1}^{2n_\chi}). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Man beachte, dass die v_j hier Integrationsvariablen sind und nicht mit den Wurzeln aus Abschnitt 5.1 verwechselt werden sollten. Die obige Formfaktorreihe ist strukturell ähnlich zum Ergebnis des Vertex-Operator-Zugangs, da über eine gerade Anzahl von Rapiditäten aus dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ integriert wird und da die Formfaktordichte $\mathfrak{F}_\iota^{(z)}$ durch ein i.A. nicht explizit berechenbares Vielfachintegral gegeben ist. Es liegt folglich nahe, den n_χ -ten Term der Reihe (5.52) mit dem $2n_\chi$ -Spinon-Beitrag des Vertex-Operator-Zugangs zu identifizieren. Diese Vermutung wird im nächsten Abschnitt 5.4 für den Fall $n_\chi = 1$ verifiziert.

Eine Sonderrolle nimmt der Term auf der rechten Seite von (5.52) ein. Dieser entspricht dem Fall $n_\chi = 0$ und $\iota = 1$ der Formfaktorreihe, d.h. er beschreibt das Matricelement zwischen Grundzustand und Pseudo-Grundzustand. Bislang war dieser Formfaktor des Hamiltonoperators der einzig bekannte in der massiven Phase [62]. Hier ergibt er sich in einfacher Weise aus dem allgemeinen Resultat (5.38). Für $n_\chi = 0$ und $\iota = 1$ vereinfachen sich (5.37) und (5.38) zu

$$\left(\mathcal{F}_1^{(z)}(\emptyset, \emptyset) \right)^2 = 4 \frac{\det_\Gamma^2 [1 + U_\theta]}{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}^2 [1 + K]} \left(1 + \mathcal{O}(L^{-\infty}) \right). \quad (5.53)$$

Der Integrationskern U_θ hat die einfache Form

$$U_\theta(\omega, \omega') = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}(\text{sign}(\text{Im}(\omega)) - 1)}}{2} \left(K(\omega - \omega') - K(\theta - \omega') \right), \quad (5.54)$$

sodass sich

$$\det_\Gamma [1 + U_\theta] = \det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} [1 + V] \quad , \quad V(\omega, \omega') = - \left(K(\omega - \omega') - K(\theta - \omega') \right), \quad (5.55)$$

ergibt. Die Determinanten von $1 + K$ und $1 + V$ können wie in [62] durch Übergang zur Fourierdarstellung explizit berechnet werden. In der Tat haben diese Operatoren die folgende Wirkung auf die Funktionen $f_n(\omega) = e^{2in\omega} / \pi$ (mit $n \in \mathbb{Z}$),

$$\begin{aligned} (1 + V)[f_n](\omega) &= f_n(\omega) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\omega' V(\omega, \omega') f_n(\omega') \\ &= f_n(\omega) \left(1 - e^{-2\eta|n|} \right) + e^{2i\theta n - 2\eta|n|} f_0(\omega). \end{aligned} \quad (5.56)$$

⁶Die Einschränkung $1 \leq h_1 < \dots < h_{2n_\chi} \leq N + n_w$ kann aufgegeben werden, wenn man im Gegenzug die Mehrfachzählung von Zuständen mit einem kombinatorischen Faktor $\frac{1}{(2n_\chi)!}$ berücksichtigt.

Da die Determinante einer Dreiecksmatrix das Produkt aller Diagonalelemente ist, folgt

$$\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} [1 + V] = \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 - q^{2|n|}), \quad (5.57)$$

wobei $q = e^{-\eta}$ ist. Für $1 + K$ ergibt sich analog

$$\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} [1 + K] = \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + q^{2|n|}). \quad (5.58)$$

Damit ergibt sich

$$\left(\mathcal{F}_1^{(z)}(\emptyset, \emptyset) \right)^2 = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^4, \quad (5.59)$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat aus [62].

Damit wird die Formfaktorreihe (5.52) zu

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1^z(0) \sigma_{m+1}^z(t) \rangle &= (-1)^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^4 \\ &+ \sum_{\iota \in \{0,1\}} \sum_{n_\chi=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\iota m}}{(2n_\chi)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d^{2n_\chi} v}{(2\pi)^{2n_\chi}} \left[\prod_{j=1}^{2n_\chi} e^{-it\varepsilon^{(0)}(v_j) - 2\pi i \iota p(v_j)} \right] \mathfrak{F}_\iota^{(z)}(\{v_j\}_{j=1}^{2n_\chi}). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Mit Hilfe dieser Darstellung kann nun die Abstandsasymptotik der statischen Korrelatoren bestimmt werden. Dazu beobachtet man, dass für die Formfaktordichte die Identität

$$\mathfrak{F}_\iota^{(z)}(\{v_j + \delta_{j,k} \pi\}_{j=1}^{2n_\chi}) = \mathfrak{F}_{\iota+1}^{(z)}(\{v_j\}_{j=1}^{2n_\chi}) \quad (5.61)$$

für $k \in \{1, \dots, 2n_\chi\}$ gilt. Dies sieht man leicht ein, indem man die Ausdrücke (5.38) und (5.37) untersucht und berücksichtigt, dass die higher-level Gleichungen (5.25) invariant unter Verschiebungen eines Lochparameters um π und unabhängig von ι sind. Aufgrund der Quasi-Periodizität von p , d.h. $p(v + \pi) = p(v) + \frac{1}{2}$, folgt, dass der Integrand in Gleichung (5.60) (in jedem Argument) π -periodisch ist. Da der Integrand zusätzlich holomorph ist in einer offenen Umgebung von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, können die Integrationskonturen nach dem Satz von Cauchy in die untere Halbebene verschoben werden,

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - i\epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (5.62)$$

In diesem Bereich gilt $\text{Re}(-2\pi i p) < 0$, sodass die Integrale in der zweiten Zeile von (5.60) exponentiell klein im Abstand m sind. Damit folgt für große Abstände m

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = (-1)^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^4 + \mathcal{O}(e^{-cm}), \quad c > 0. \quad (5.63)$$

Die longitudinalen Korrelatoren zeigen somit eine langreichweitige antiferromagnetische Ordnung $\sim (-1)^m$. Der Vorfaktor, welcher „spontane gestaggerte Magnetisierung“ genannt wird (vgl. z.B. [126]), ist im Ising-Limes gleich 1 und wird für endliche Anisotropien abgeschwächt. Das Verhalten (5.63) wurde erstmalig von Baxter auf Grundlage von Berechnungen der Polarisation im sogenannten F-Modell vorhergesagt⁷ [7]. Hier ergibt sich dasselbe Resultat ausgehend von der Formfaktorentwicklung von Korrelationsfunktionen. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, die in (5.63)

⁷Man beachte, dass diese Größe im Vertexmodell einer Einpunktfunktion entspricht, während sie bei der Spinkette mit einer Zweipunktfunktion zusammenhängt.

auftretenden exponentiellen Korrekturen mit einer Sattelpunktsanalyse explizit zu bestimmen. Bevor diese Analyse in Abschnitt 5.5 durchgeführt wird, soll das Resultat (5.60) mit den Vorhersagen des Vertex-Operator-Zugangs verglichen werden.

5.4 Vergleich mit dem Vertex-Operator-Zugang

In diesem Abschnitt soll die Formfaktorreihe (5.38) mit den Ergebnissen des Vertex-Operator-Zugangs verglichen werden. Bislang ist es nicht gelungen, eine direkte Beziehung zwischen den beiden Resultaten herzustellen. Im Folgenden wird jedoch gezeigt, dass die Formfaktordichte $\mathfrak{F}_l^{(z)}$ für $n_\chi = 1$ mit der 2-Spinon-Amplitude des Vertex-Operator-Zugangs identifiziert werden kann. Dies legt die Vermutung nahe, dass dieser Zusammenhang im allgemeinen Fall besteht, d.h. dass die Formfaktordichte für alle $n_\chi \in \mathbb{N}$ gleich der $2n_\chi$ -Spinon-Amplitude ist.

Wie in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, wurden die Formfaktoren des Vertex-Operator-Zugangs erstmalig in [64, 63] berechnet. In diesen Arbeiten ist jedoch nur der 2-Spinon-Formfaktor der Operatoren σ^\pm eine elementare Funktion der Rapiditäten, während für den 2-Spinon-Formfaktor von σ^z bereits ein Vielfachintegral gelöst werden muss. Obwohl auch dieser Ausdruck für Berechnungen des longitudinalen dynamischen Strukturfaktors genutzt werden konnte [134], erscheint es an dieser Stelle günstiger, die Ergebnisse von Lashkevich [92] für den XYZ-Fall zu verwenden. Der Vorteil der letztgenannten Formeln ist, dass für den Operator σ^z keine Integration ausgeführt werden muss. Man beachte, dass die Arbeit [92] bereits benutzt wurde, um Formfaktoren lokaler Felder im Sine-Gordon-Modell [97] sowie den longitudinalen dynamischen Strukturfaktor im masselosen Bereich im feldfreien Fall [31] zu berechnen. Um die Formeln aus [92] hier zur Anwendung zu bringen, muss der Limes zur massiven XXZ-Kette durchgeführt werden. Weiterhin muss man beachten, dass die Formfaktorentwicklung in Eigenzuständen des Translationsoperators (d.h. (anti-)symmetrische Linearkombinationen der 2-Spinon-Zustände) erfolgt, während die Amplituden in [92] für die 2-Spinon-Zustände angegeben sind. Außerdem ist bei der Berechnung des Grundzustandserwartungswertes die zweifache Entartung zu berücksichtigen.

Man erhält schließlich für den 2-Spinon-Beitrag zu den statischen Korrelationsfunktionen den Ausdruck

$$I_2(m) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dv_1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dv_2}{2\pi} e^{-2\pi i m(p(v_1)+p(v_2))} \sum_{\epsilon \in \{+, -\}} \left((-1)^m |f_-(v_1, v_2)|^2 + |f_+(v_1, v_2)|^2 \right). \quad (5.64)$$

Hierbei stehen die Funktionen f_\pm mit den Amplituden der 2-Spinon-Zustände $|v_1, v_2\rangle_{\epsilon, -\epsilon}^{(j)}$ über die Beziehung

$$\frac{1}{4} \left| {}^{(0)}\langle \text{vac} | \sigma^z | v_1, v_2 \rangle_{\epsilon, -\epsilon}^{(0)} \pm {}^{(1)}\langle \text{vac} | \sigma^z | v_1, v_2 \rangle_{\epsilon, -\epsilon}^{(1)} \right|^2 = |f_\pm(v_1, v_2)|^2 \quad (5.65)$$

in Verbindung. Die (nicht translationsinvarianten) Grundzustände wurden mit $|\text{vac}\rangle^{(j)}$ ($j = 0, 1$) bezeichnet. Man beachte, dass aus Symmetriegründen lediglich die Kombination $(\epsilon, -\epsilon)$ von Spinindizes zu nicht-verschwindenden Formfaktoren führt. Weiterhin hängen die Funktionen f_\pm nicht vom Spinindex ϵ ab, weshalb die Summe über ϵ in (5.64) lediglich einen Faktor 2 liefert. Die explizite Form der Funktionen f_\pm ergibt sich aus (5.65) und den Ergebnissen von [92],

$$f_-(v_1, v_2) = f_+(v_1 + \pi, v_2) = \frac{\pi}{\eta} \frac{G(v_1 - v_2) \vartheta_1\left(\frac{\pi(v_1+v_2)}{2i\eta} \mid e^{-\pi^2/\eta}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi v_1}{2i\eta} - \frac{\pi}{4} \mid e^{-\pi^2/2\eta}\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi v_2}{2i\eta} - \frac{\pi}{4} \mid e^{-\pi^2/2\eta}\right)} \frac{i \vartheta_1'(0 \mid e^{-\pi^2/\eta})}{\sin\left(\frac{v_1-v_2}{2} + \frac{i\eta}{2}\right)} \quad (5.66)$$

mit

$$G(x) = e^{\frac{\eta}{4}(\frac{x}{\eta}+i)^2} \left(\frac{(q^4, q^4, q^4)}{(q^2, q^4, q^4)} \right)^2 \frac{(e^{-2ix}, q^4, q^4)(q^4 e^{2ix}, q^4, q^4)}{(q^2 e^{-2ix}, q^4, q^4)(q^6 e^{2ix}, q^4, q^4)}. \quad (5.67)$$

Hierbei wurde die Notation

$$(x, p_1, p_2) = \prod_{k, \ell=0}^{\infty} (1 - x p_1^k p_2^\ell) \quad (5.68)$$

eingeführt. Für den weiteren Verlauf definiere

$$(x, p) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - x p^k). \quad (5.69)$$

Betrachte nun den Term $n_\chi = 1$ der Formfaktorentwicklung (5.60) aus Abschnitt 5.3. In diesem Fall gibt es nur eine higher-level Gleichung, deren Lösungen $\chi_{1,2}$ in Gleichung (5.29) angegeben sind. An dieser Stelle liegt eine scheinbare Diskrepanz vor: Die Lösungen $\chi_{1,2}$ unterteilen sich in die Fälle $\iota = 0, 1$, wodurch sich vier Terme ergeben, während im Vertex-Operator-Zugang lediglich zwei Terme auftreten (vgl. Gleichung (5.64)). Dieser scheinbare Widerspruch wird im weiteren Verlauf des Abschnitts dadurch aufgelöst, dass zwei der vier Terme verschwinden.

Da die Terme ($\chi_1, \iota = 0$) und ($\chi_1, \iota = 1$) durch Verschiebungen eines Lochparameters um π in die Terme ($\chi_2, \iota = 1$) und ($\chi_2, \iota = 0$) übergehen (vgl. (5.29) und Abschnitt 5.3), genügt es, zunächst den Fall $\chi = \chi_1$ zu betrachten. Setzt man $\chi_1 = \frac{v_1+v_2}{2}$ in Gleichung (5.38) ein, so ergibt sich nach einer längeren Rechnung⁸

$$\begin{aligned} F_m^{(z)}(\{\chi_1\}, \{v_1, v_2\} | \iota) &= \sin^2(\iota\pi/2 + \pi p(v_1) + \pi p(v_2)) \left(\frac{e^{-2\pi i m(p(v_1)+p(v_2))}}{(2\pi L)^2 p'(v_1) p'(v_2)} \right) (-1)^{\iota m} \\ &\times 128 \frac{\sin(\pi F_\iota(v_1)) \sin(\pi F_\iota(v_2))}{\text{sh}^2(\eta)} \sin^2(v_{12}) \frac{\mathcal{D}}{\prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + q^{2|n|})^2} \\ &\times (q^2, q^4)^4 \left(\frac{(q^4, q^4, q^4)}{(q^2, q^4, q^4)} \right)^8 \prod_{\sigma=\pm} (q^2 e^{2i\sigma v_{12}}, q^4)^2 \left(\frac{(q^4 e^{2i\sigma v_{12}}, q^4, q^4)}{(q^2 e^{2i\sigma v_{12}}, q^4, q^4)} \right)^4, \end{aligned} \quad (5.70)$$

wobei $\iota \in \{0, 1\}$ und $v_{12} = v_1 - v_2$. Der Faktor \mathcal{D} ist durch Fredholm-Determinanten gegeben,

$$\mathcal{D} = \det_{[-\frac{\pi}{2}-i\epsilon, \frac{\pi}{2}-i\epsilon]} \{I + \bar{U}_{v_1}\} \cdot \mathcal{R}_{v_1} \cdot \det_{[-\frac{\pi}{2}-i\epsilon, \frac{\pi}{2}-i\epsilon]} \{I + \bar{U}_{v_2}\} \cdot \mathcal{R}_{v_2}. \quad (5.71)$$

Die Integraloperatoren in den Determinanten agieren auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, welches um $0 < \epsilon < \eta$ in die untere Halbebene verschoben wurde. Der zugehörige Integrationskern ist durch

$$\bar{U}_\theta(x, y) = e^{-i\pi\iota} \frac{\vartheta_4(x - v_1 | q^2) \vartheta_4(x - v_2 | q^2)}{\vartheta_1(x - v_1 | q^2) \vartheta_1(x - v_2 | q^2)} [K(x - y) - K(\theta - y)] \quad (5.72)$$

gegeben. Der Faktor \mathcal{R}_{v_1} ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{v_1} &= 1 + \frac{2\pi i e^{-i\pi\iota}}{e^{-2\pi i F_\iota(v_1)} - 1} \frac{\vartheta_4(0 | q^2) \vartheta_4(v_1 - v_2 | q^2)}{\vartheta_1'(0 | q^2) \vartheta_1(v_1 - v_2 | q^2)} \\ &\times \left(K(0) - K(v_2 - v_1) - \int_{-\pi/2-i\epsilon}^{\pi/2-i\epsilon} dz R_{v_2}(v_1, z) [K(v_1 - z) - K(v_2 - z)] \right). \end{aligned} \quad (5.73)$$

⁸Eine sehr ähnliche Rechnung wird in Kapitel 6 durchgeführt, weshalb hier lediglich das Ergebnis genannt wird.

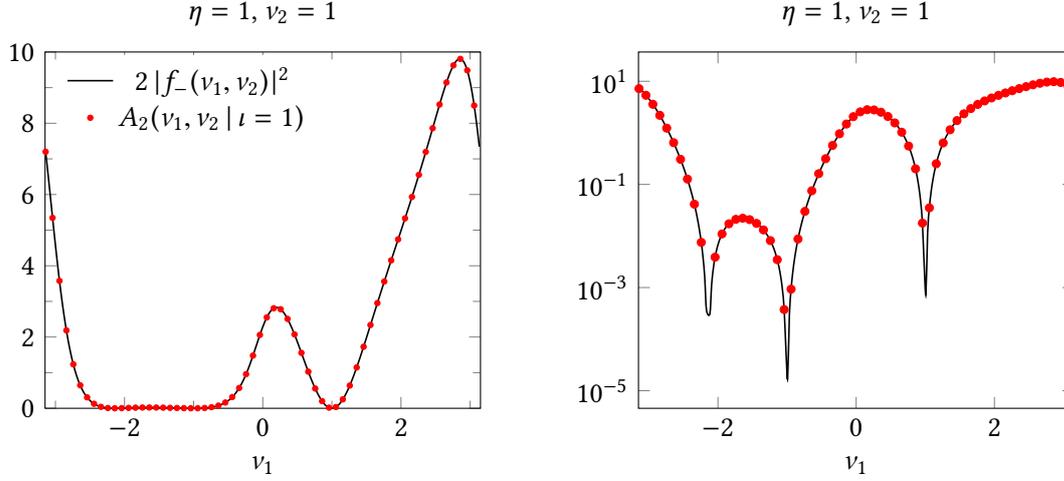


Abbildung 5.1: Vergleich der Amplitude $A_2(v_1, v_2 | \iota = 1)$ (rote Datenpunkte) mit der 2-Spinon-Amplitude $2|f_-(v_1, v_2)|^2$ aus dem Vertex-Operator-Zugang (schwarze Linie) als Funktion von v_1 für einen festen Wert von v_2 (linke Abbildung). Die rechte Abbildung zeigt den gleichen Graphen mit logarithmisch skaliertem Ordinate.

Den entsprechenden Ausdruck für \mathcal{R}_{v_2} erhält man durch Vertauschen von v_1 und v_2 in der obigen Gleichung. Die Funktion $R_\theta(x, y)$ ist die Resolvente des Operators \bar{U}_θ und durch die lineare Integralgleichung

$$R_\theta(x, y) = \bar{U}_\theta(y, x) - \int_{-\pi/2-i\epsilon}^{\pi/2-i\epsilon} dz R_\theta(z, y) \bar{U}_\theta(z, x) \quad (5.74)$$

festgelegt. Der Vergleich von (5.64) und (5.38) zeigt, dass die Formfaktordichte

$$A_2(v_1, v_2 | \iota) = F_{m=0}^{(z)}(\{\chi_1\}, \{v_1, v_2\} | \iota) \cdot \left((2\pi L)^2 p'(v_1) p'(v_2) \right) \quad (5.75)$$

mit den 2-Spinon-Amplituden (5.65) in Verbindung stehen sollte. Bislang ist es nicht gelungen, den Determinanten-Anteil \mathcal{D} analytisch zu berechnen, weshalb der direkte Vergleich nicht möglich ist. Er kann allerdings einfach numerisch berechnet werden. Bemerkenswerterweise zeigt die Numerik, dass $\mathcal{R}_{v_{1,2}} = 0$ ist für $\iota = 0$. Somit verschwindet die Amplitude für den Fall $\chi = \chi_1$, $\iota = 0$ (und demnach auch für den Fall $\chi = \chi_2$, $\iota = 1$). Dadurch verbleiben lediglich die Terme $\chi = \chi_1$, $\iota = 1$ und $\chi = \chi_2$, $\iota = 0$, was den eingangs erwähnten Widerspruch auflöst. Man beachte, dass sich eine derartige Auswahlregel auch im Vertex-Operator-Zugang findet: Dort liefern lediglich zwei von vier Kombinationen von Spinindizes (ϵ_1, ϵ_2) nicht-verschwindende Amplituden. Da die beiden verbliebenen Amplituden durch die Verschiebung von genau einer Rapidität um π verbunden sind, erhält man folglich eine Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Vertex-Operator-Zugangs, falls

$$A_2(v_1, v_2 | \iota = 1) = 2|f_-(v_1, v_2)|^2 \quad (5.76)$$

gilt. Die numerische Berechnung der Amplituden zeigt, dass die Vermutung (5.76) in der Tat korrekt ist (vgl. Abbildung 5.1). Man beachte, dass Gleichung (5.76) impliziert, dass der Fredholm-Determinanten-Anteil \mathcal{D} explizit berechnet werden kann. Es ist eine interessante offene Frage, ob diese Rechnung analytisch durchgeführt werden kann. Dieses Problem ähnelt der in Kapitel 4 auf-

geworfenen Frage, wie sich die Amplituden von Lukyanov für $|\Delta| < 1$ und $h = 0$ aus den Amplituden für $h > 0$ berechnen lassen. Das ungelöste Problem war dort, die Fredholm-Determinanten im Limes $Q \rightarrow \infty$ zu berechnen. Hier ist die Situation in der Hinsicht einfacher, als dass kein derartiger Grenzwert zu bilden ist. Dennoch war es bislang nicht möglich, den Faktor \mathcal{D} analytisch zu berechnen.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass die Resultate aus Abschnitt 5.2 und 5.3 für den Fall von zwei Löchern äquivalent sind zu denen der Vertex-Operator-Methode für zwei Spinonen. Es ist zu erwarten, dass diese Gleichheit in jedem Sektor mit $2n_\chi$ Löchern gilt. Strukturell sind die in diesem Kapitel erzielten Resultate allerdings von gleicher Komplexität wie die des Vertex-Operator-Zugangs. Dennoch sind die Ergebnisse nützlich, da sie ein Verständnis der Vertex-Operator-Methode aus der Perspektive des Bethe-Ansatzes ermöglichen.

Es sei bereits bemerkt, dass sich in Kapitel 6 mit den Formfaktoren der Quantentransfermatrix für $h > 0$ eine strukturell deutlich einfachere Formfaktorreihe ergeben wird.

5.5 Bestimmung der Abstandsasymptotik

In diesem Abschnitt soll ausgehend von der Formfaktorreihe (5.38) die Abstandsasymptotik der longitudinalen Korrelatoren bestimmt werden. In Gleichung (5.63) wurde argumentiert, dass diese durch die gestaggerte Magnetisierung und exponentiell kleine Korrekturen in m gegeben ist. Letztere sollen nun mit einer asymptotischen Analyse berechnet werden. Dazu nimmt man an, dass der Term $n_\chi = 1$ äquivalent zum Zwei-Spinon-Beitrag ist, d.h. dass Gleichung (5.76) korrekt ist. Nehme weiterhin an, dass die Beiträge mit 4 und mehr Spinonen nicht die führende Ordnung der Asymptotik beeinflussen. Damit folgt

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle \sim \langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_2 := (-1)^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^4 + I_2(m), \quad (5.77)$$

wobei $I_2(m)$ durch Gleichung (5.64) gegeben ist. Für den weiteren Verlauf ist es zweckmäßig, wenn die 2-Spinon-Amplitude als analytische Funktion der Rapiditäten v_1 und v_2 vorliegt. Setze dafür

$$A(v_1, v_2) = 2 |f_-(v_1, v_2)|^2 \quad (5.78)$$

und werte das Betragsquadrat auf der rechten Seite für reelle Argumente aus. Man erhält

$$A(v_1, v_2) = 32q (q^2, q^2)_\infty^6 \cos^2 \left(\pi(p(v_1) + p(v_2)) \right) \frac{\sin^2(v_{12})}{\vartheta_3^2 \left(\frac{v_{12}}{2} \mid q \right) \sin \left(\frac{v_{12} + i\eta}{2} \right) \sin \left(\frac{v_{12} - i\eta}{2} \right)} \times \left(\frac{(q^4, q^4, q^4)}{(q^2, q^4, q^4)} \right)^4 \prod_{\sigma=\pm} \frac{(q^4 e^{2i\sigma v_{12}}, q^4, q^4)^2}{(q^2 e^{2i\sigma v_{12}}, q^4, q^4)^2} (q^2 e^{2i\sigma v_{12}}, q^4) (q^4 e^{2i\sigma v_{12}}, q^4). \quad (5.79)$$

Hierbei wurde die Identität

$$\cos^2 \left(\pi(p(v_1) + p(v_2)) \right) = -\frac{1}{4} \frac{e^{i(v_1+v_2)+\eta/2} \vartheta_3^2 \left(\frac{v_{12}}{2} \mid q \right) \vartheta_1^2 \left(\frac{v_1+v_2}{2} \mid q \right)}{\prod_{j=1,2} \vartheta_1 \left(v_j - \frac{i\eta}{2} \mid q^2 \right) \vartheta_4 \left(v_j - \frac{i\eta}{2} \mid q^2 \right)} \quad (5.80)$$

benutzt, durch welche die 2-Spinon-Amplitude (5.79) ausschließlich von der Differenz v_{12} der Rapiditäten sowie von $p(v_1)$ und $p(v_2)$ abhängt. Diese besondere Struktur wird sich in Abschnitt 5.6 als wichtig erweisen.

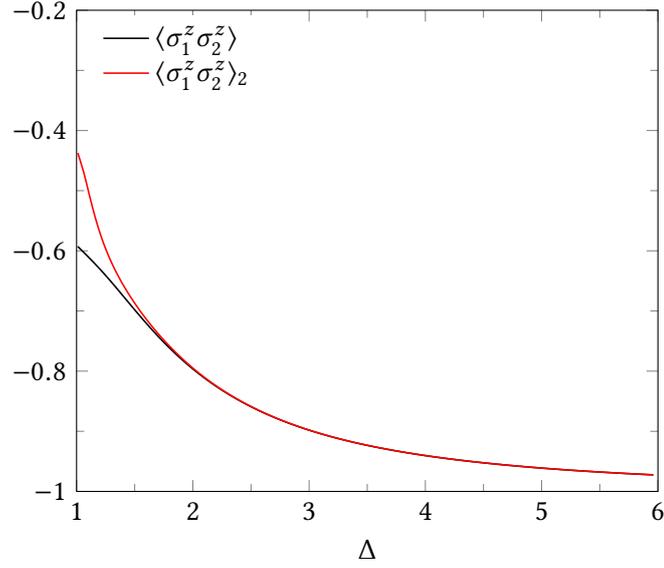


Abbildung 5.2: Vergleich der exakten Nachbarkorrelatoren [128] (schwarze Linie) mit der 2-Spinon-Näherung (rote Linie). Die relative Differenz beider Kurven ist kleiner als 10^{-3} für $\Delta > 2$. Man beachte, dass beiden Kurven endlich bleiben im isotropen Limes $\Delta \rightarrow 1$, mit einem Verhältnis von ca. 73%. Der restliche Anteil wird folglich von 4 und mehr Spinonen getragen (vgl. dazu auch [23]).

Mit der 2-Spinon-Amplitude (5.79) ist das Integral $I_2(m)$ (vgl. Gleichung (5.64)) durch

$$I_2(m) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dv_1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dv_2}{2\pi} e^{2\pi i m(p(v_1)+p(v_2))} \left((-1)^m A(v_1, v_2) + A(v_1 + \pi, v_2) \right) \quad (5.81)$$

gegeben⁹. An Gleichung (5.79) erkennt man, dass der Integrand holomorph ist im Streifen $0 \leq \text{Im}(v_j) < \eta/2$. Da außerdem die einfache Polstelle von A bei $v_j = i\eta/2$ durch eine m -fache Nullstelle von $e^{2\pi i m p}$ kompensiert wird, kann man durch Ausnutzen der π -Periodizität die Integrationswege $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ um $i\eta/2$ in die obere Halbebene verschieben. Auf dieser Kontur ist die Funktion $2\pi i p$ reell und negativ, sodass sich das Integral leicht numerisch auswerten lässt. Mit Hilfe von Gleichung (5.77) kann man so beispielsweise die Nächste-Nachbar-Korrelatoren

$$\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_2 = - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^4 + I_2(1) \quad (5.82)$$

numerisch berechnen und mit dem exakten Resultat $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle$ aus [128] vergleichen. Dies ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Man erkennt, dass bereits die Nachbarkorrelatoren durch die 2-Spinon-Näherung sehr genau beschrieben werden, solange man sich nicht zu nahe am isotropen Punkt befindet.

Die Asymptotik von $I_2(m)$ für große Abstände m kann mit Hilfe einer Sattelpunktsanalyse berechnet werden. Geht man von der Kontur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + i\eta/2$ zur Kontur $[-\pi, 0] + i\eta/2$ über, so ist

⁹Hierbei wurde die Invarianz der Korrelationsfunktionen unter $m \leftrightarrow -m$ benutzt.

die Funktion $2\pi i p$ reell und negativ mit einem einzigen Maximum bei $-\frac{\pi}{2} + \frac{i\eta}{2}$. Die Asymptotik des Doppelintegrals $I_2(m)$ für $m \rightarrow \infty$ ist somit durch eine kleine Umgebung des Punktes $(v_1, v_2) = (-\frac{\pi}{2} + \frac{i\eta}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{i\eta}{2})$ bestimmt. Man beachte, dass in der Nähe dieses Punktes die Funktion $A(v_1, v_2)$ bis zur zweiten Ordnung entwickelt werden muss, da $A(v_1, v_2)$ eine doppelte Nullstelle für $v_1 \rightarrow v_2$ besitzt. Nach einer kurzen Rechnung folgt somit

$$I_2(m) = \frac{1}{8\pi} \frac{[\nabla^2 f](-\frac{\pi}{2} + \frac{i\eta}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{i\eta}{2})}{(m p''(-\frac{\pi}{2} + \frac{i\eta}{2}))^2} e^{4\pi i m p(-\frac{\pi}{2} + \frac{i\eta}{2})} \cdot (1 + \mathcal{O}(m^{-1})) . \quad (5.83)$$

Hierbei ist ∇^2 der Laplace-Operator und

$$f(v_1, v_2) = (-1)^m A(v_1, v_2) + A(v_1 + \pi, v_2) . \quad (5.84)$$

Mit Hilfe von Gleichung (5.79) und dem Ausdruck für p erhält man das explizite Ergebnis

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = (-1)^m \frac{(q^2, q^2)^4}{(-q^2, q^2)^4} + B \frac{k(q^2)^m}{m^2} \left((-1)^m - \text{th}^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) \frac{(q, q^2)^4}{(-q, q^2)^4} \right) \cdot (1 + \mathcal{O}(m^{-1})) \quad (5.85)$$

mit

$$k(q^2) = \frac{\vartheta_2^2(0|q^2)}{\vartheta_3^2(0|q^2)}, \quad B = \frac{1}{\pi \text{sh}^2(\frac{\eta}{2})} \frac{(-q, q^2)^4}{(q^2, q^2)^2} \left(\frac{(q^4, q^4, q^4)}{(q^2, q^4, q^4)} \right)^8 . \quad (5.86)$$

Wie erwartet zerfallen die Korrelatoren aufgrund des Faktors $k(q^2)^m$ exponentiell mit dem Abstand m . Dieser Faktor wurde in [67] mit einer ähnlichen Analyse berechnet. Da die Amplituden $A(v_1, v_2)$ zum damaligen Zeitpunkt jedoch unbekannt waren, konnten weder die Vorfaktoren noch der algebraische Korrekturterm m^{-2} , welcher von der doppelten Nullstelle von $A(v, v)$ verursacht wird, vorhergesagt werden. In dieser Hinsicht stellt der Ausdruck (5.85) ein neues Resultat dar. Eine letzte Bemerkung betrifft den Beitrag von 4 oder mehr Spinonen. Nimmt man an, dass die entsprechenden Amplituden ebenfalls holomorph sind im Streifen $|\text{Im}(v_j)| \leq \eta/2$, so ist das n -Spinon-Integral von der Ordnung $k(q^2)^{n \cdot m/2}$, folglich exponentiell klein im Vergleich zum führenden 2-Spinon-Beitrag.

Im letzten Abschnitt 5.6 dieses Kapitels soll nun erläutert werden, wie sich die Sattelpunktsanalyse auf den dynamischen Fall übertragen lässt.

5.6 Dynamische Korrelationsfunktionen

Die Sattelpunktsanalyse aus dem vorhergehenden Abschnitt lässt sich auf den Fall der dynamischen Korrelationsfunktionen verallgemeinern. Gehe zunächst wie im letzten Abschnitt davon aus, dass die führende Asymptotik wie im statischen Fall durch den 2-Spinon-Beitrag gegeben ist,

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z(t) \rangle_2 = \frac{(q^2, q^2)^4}{(-q^2, q^2)^4} (-1)^m + I_2(m, t) \quad (5.87)$$

mit

$$I_2(m, t) = \frac{1}{2} \left[\prod_{j=1}^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dv_j}{2\pi} e^{i[p(v_j)m - \varepsilon(v_j)t]} \right] f(v_1, v_2) \quad (5.88)$$

und

$$f(v_1, v_2) = (-1)^m A(v_1, v_2) + A(v_1 + \pi, v_2) . \quad (5.89)$$

Hierbei wurde in (5.88) gegenüber den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels die Ersetzungen $2\pi p \rightarrow p$ und $\varepsilon^{(0)} \rightarrow \varepsilon$ vorgenommen. Weiterhin wird in diesem Abschnitt der Parameter $\gamma = \eta > 0$ verwendet. Die 2-Spinon-Amplitude $A(v_1, v_2)$ ist unverändert durch Gleichung (5.79) gegeben.

Im Folgenden soll die asymptotische Analyse des Integrals $I_2(m, t)$ für $m, t \rightarrow \infty$ bei festem $v = m/t$ nach dem Schema der Sattelpunktsintegration (vgl. z.B [1]) durchgeführt werden. Der erste Schritt besteht darin, die Sattelpunkte der Phase

$$g(\lambda) = i[v p(\lambda) - \varepsilon(\lambda)] \quad (5.90)$$

zu bestimmen. Führt man die Größen

$$v_{c_1} = \frac{4JKk^2 \operatorname{sh}(\gamma)}{\pi(1+k')}, \quad v_{c_2} = \frac{4JKk^2 \operatorname{sh}(\gamma)}{\pi(1-k')} \quad (5.91)$$

ein, so kann die Sattelpunktgleichung $g'(\lambda) = 0$ mit einer Landen-Transformation¹⁰ in die Form

$$\operatorname{sn}\left(\frac{4K_1}{\pi}\lambda \mid k_1\right) = \frac{v}{v_{c_1}} \quad (5.92)$$

gebracht werden. Hierbei ist

$$k_1 = \frac{v_{c_1}}{v_{c_2}} = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad K_1 = K(k_1). \quad (5.93)$$

In der in diesem Abschnitt verwendeten Notation hat man somit die Beziehung

$$p'(v) = -\frac{\varepsilon(v)}{2J \operatorname{sh}(\gamma)} \quad (5.94)$$

und die Dispersionsrelation (vgl. Gleichung (D.14))

$$\varepsilon(p) = -\sqrt{v_{c_1} v_{c_2}} \cdot \sqrt{1/k^2 - \cos^2(p)}. \quad (5.95)$$

Die Lage der Lösungen von (5.92) in der komplexen Ebene hängen von $v = m/t$ ab und unterteilen die m - t -Ebene in drei verschiedene Regime R1, R2 und R3.

- R1. Der „zeitartige Bereich“ $0 < v < v_{c_1}$: In diesem Fall hat (5.92) genau zwei reelle Lösungen $\lambda_1^- < \lambda_1^+$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die Lösungen befinden sich in $[0, \frac{\pi}{2}]$ und seien so geordnet, dass $\lambda_1^+ = \frac{\pi}{2} - \lambda_1^-$ gilt.
- R2. Der „Vorläufer-Bereich“ $v_{c_1} < v < v_{c_2}$: In diesem Fall hat (5.92) keine reellen Lösungen. Setzt man $\lambda_2 = \pi/4 + iy$, so wird (5.92) zu

$$\operatorname{dn}\left(\frac{2K'_1 y}{\gamma} \mid k'_1\right) = \frac{v_{c_1}}{v}, \quad (5.96)$$

wobei $k'_1 = \sqrt{1-k_1^2}$ und $K'_1 = K(k'_1)$. Die Gleichung (5.96) besitzt genau eine reelle Lösung $y \in [0, \gamma/2]$ falls $v_{c_1} < v < v_{c_2}$ ist.

¹⁰Diese Transformation verbindet Jacobische elliptische Funktionen mit Modul k (bzw. Theta-Funktionen mit Parameter q) mit denen mit Modul k_1 (bzw. mit Parameter q^2), siehe z.B. [135].

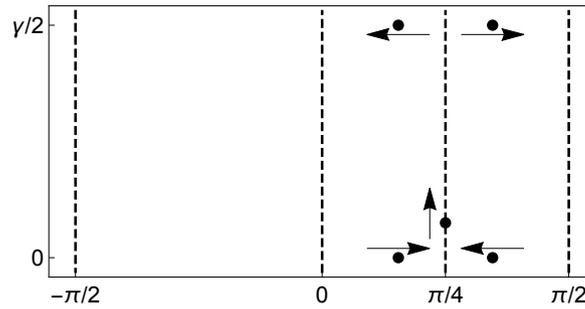


Abbildung 5.3: Fluss der Sattelpunkte als Funktion von v in der komplexen Ebene. Für $v < v_{c_1}$ liegen die Sattelpunkte auf der reellen Achse und treffen sich für $v = v_{c_1}$ bei $\pi/4$. Für $v \rightarrow v_{c_2}$ wandert der Sattelpunkt in Richtung von $\pi/4 + iy/2$. Für $v > v_{c_2}$ hat man erneut zwei Sattelpunkte, welche in Richtung von 0 und $\pi/2$ wandern. Das gesamte Bild ist π - und iy -periodisch.

R3. Der „raumartige Bereich“ $v_{c_2} < v$: In diesem Fall führt man $\lambda_3 = iy/2 + x$ ein. Damit wird (5.92) zu

$$\operatorname{sn}\left(\frac{4K_1x}{\pi} \mid k_1\right) = \frac{v_{c_2}}{v}. \quad (5.97)$$

Analog zum Fall R1 gibt es genau zwei Lösungen $x_- < x_+$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, wobei beide sich in $[0, \frac{\pi}{2}]$ befinden, sodass $x_+ = \frac{\pi}{2} - x_-$ gilt.

Die Gleichungen (5.92), (5.96) und (5.97) können mit Hilfe von unvollständigen elliptischen Integralen invertiert werden und liefern λ_1^\pm , x_\pm und y als Funktionen von v . Der Fluss der Sattelpunkte in der komplexen Ebene als Funktion von v ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Für $v \neq v_{c_1}, v_{c_2}$ sind die Sattelpunkte von einfacher Ordnung.

Im zweiten Schritt muss die Kontur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ derart deformiert werden, dass sie entlang der Linien konstanten Imaginärteils durch die Sattelpunkte läuft. Die Linien in den einzelnen Bereichen sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Im weißen Bereich ist der Realteil der Phase $\operatorname{Re}(g)$ kleiner als $\operatorname{Re}(g)$ am Sattelpunkt. In diesem Bereich bewirkt folglich eine Deformation des Weges eine Änderung des Integrals, welche im Vergleich zum Beitrag des Sattelpunkts exponentiell klein ist. Zunächst wird unter Ausnutzung der π -Periodizität des Integranden die Kontur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ so in die obere Halbebene verschoben, dass der Anfangspunkt der Kontur (und somit auch der Endpunkt) im weißen Bereich liegt. Nun ist es offenbar in allen drei Fällen möglich, die Kontur so zu deformieren, dass sie ausschließlich durch den weißen Bereich und in der Nähe der Sattelpunkte durch deren Linien konstanten Imaginärteils verläuft. Damit ist die führende Asymptotik des Integrals $I_2(m, t)$ durch eine Umgebung des Sattelpunkts bestimmt.

Die Anzahl der relevanten Sattelpunkte unterscheidet sich in den drei Fällen. In R1 hat man zwei relevante Sattelpunkte λ_1^\pm , für die $\operatorname{Re}(g(\lambda_1^\pm)) = 0$ gilt. In R2 gibt es einen einzigen Sattelpunkt auf der Linie $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{\pi}{4}$, während in R3 zwei Sattelpunkte x_\pm auf der Linie $\operatorname{Im}(\lambda) = y/2$ existieren. Man kann jedoch analytisch zeigen, dass $\operatorname{Re}(g(x_+)) > \operatorname{Re}(g(x_-))$ gilt, sodass nur der Sattelpunkt $x_+ \equiv x$ die führende Asymptotik bestimmt (vgl. auch Abbildung 5.4).

Mit diesen Informationen kann man die führende Asymptotik des Integrals $I_2(m, t)$ in den ver-

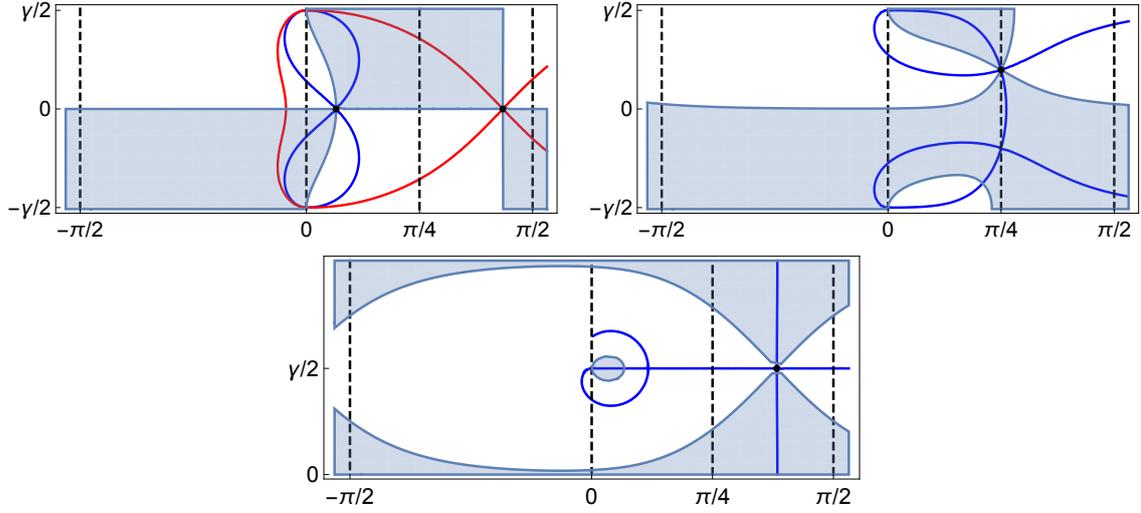


Abbildung 5.4: Verhalten der Phase g in der komplexen Ebene in den Bereichen R1 (oben links), R2 (oben rechts) und R3 (unten). Die schwarzen Punkte kennzeichnen die relevanten Sattelpunkte und die blauen bzw. roten Linien die Kurven mit konstantem Imaginärteil. In den weißen Bereichen ist $\text{Re}(g)$ kleiner als an den Sattelpunkten und in den blauen Bereichen größer. Die Konturen müssen so deformiert werden, dass sie durch den weißen Bereich und entlang der blauen (bzw. roten) Kurven durch den relevanten Sattelpunkt verlaufen.

schiedenen Bereichen berechnen. In R1 erhält man

$$I_2(m, t) \sim \frac{f(\lambda_1^+, \lambda_1^-)}{2\pi t} \prod_{\sigma=\pm} \frac{e^{tg(\lambda_1^\sigma)}}{\sqrt{g''(\lambda_1^\sigma)}}. \quad (5.98)$$

Da $g(\lambda_1^\pm)$ rein imaginär ist, zeigt $I_2(m, t)$ Oszillationen und algebraischen Zerfall in R1. Man beachte, dass jede Integration einen Faktor $1/\sqrt{t}$ liefert. Nimmt man an, dass die 4-Spinon-Amplitude stetig ist, so liefert das 4-Spinon-Integral einen Beitrag, der höchstens von der Ordnung $1/t^2$ ist, und somit nächstführend in R1. In der Tat würde man aufgrund der Struktur der Amplituden sogar einen Faktor $1/t^4$ erwarten. Die Begründung dieser Vermutung ist, dass man aufgrund der Struktur der Amplituden (5.38) (genauer gesagt aufgrund des Faktors $\mathcal{D}(\{v_h\}; \{z_j\})$) einen Vandermonde-Faktor

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 4} \sin^2(v_i - v_j) \quad (5.99)$$

erwartet. Der führende Beitrag des Integrals entsteht dadurch, dass sich eine Hälfte der Lochparameter in der Nähe von λ_1^+ und die andere bei λ_1^- befindet,

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1^+ + \epsilon_1, & v_2 &= \lambda_1^+ + \epsilon_2 \\ v_3 &= \lambda_1^- + \epsilon_3, & v_4 &= \lambda_1^- + \epsilon_4. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Damit folgt

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 4} \sin^2(v_i - v_j) \sim \text{const.} \times (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 (\epsilon_3 - \epsilon_4)^2. \quad (5.101)$$

Durch die Sattelpunktsintegration dieses Faktors entsteht somit ein Faktor $1/t^4$. Diese Argumentation lässt sich auf den $2n$ -Spinon-Fall übertragen. Der führende Beitrag ist wieder dadurch gegeben, dass n Lochparameter in der Nähe von λ_1^+ und n Lochparameter in der Nähe von λ_1^- liegen. Damit gibt es jeweils $n(n-1)/2$ Faktoren der Form $(\epsilon_i - \epsilon_j)^2$ in der Nähe von λ_1^\pm , welche nach der Sattelpunktsintegration einen Faktor $1/t^{n^2}$ liefern.

Für $v \rightarrow 0$ erhält man den dynamischen Anteil der Asymptotik der Autokorrelationsfunktionen. In diesem Limes hat man $\lambda_1^+ = \frac{\pi}{2}$ und $\lambda_1^- = 0$, sodass sich Gleichung (5.98) zu dem expliziten Resultat

$$I_2(0, t) \sim \frac{e^{iv_{c_2}t}}{J\pi t} \frac{4(q^2, q^2)^4 (-q^4, q^4)^2 (q^8, q^8, q^8)^4}{(q^{-2} - q^2)(q^4, q^4)^6 (q^4, q^8, q^8)^4} \quad (5.102)$$

vereinfacht. Ein feldtheoretischer Zugang zur Asymptotik der Autokorrelationsfunktionen in der kritischen Phase findet sich in der Arbeit [107]. Eine allgemeine Theorie, welche das Verhalten der Autokorrelationsfunktionen für große Zeiten beschreibt, ist die Theorie der Spin-Diffusion (vgl. [50] und Zitate darin), welche einen Zerfall $\sim 1/\sqrt{t}$ vorhersagt. Dies scheint zunächst im Widerspruch zum Ergebnis (5.102) zu stehen. Es ist allerdings zu beachten, dass durch die Sattelpunktsintegration pro Integral (d.h. pro Spinon) ein Faktor $1/\sqrt{t}$ erzeugt wurde. Somit kann das Ergebnis (5.102) als Diffusion von Spinonen interpretiert werden, und der Faktor $1/t$ spiegelt die Tatsache wider, dass Spinonen nur in Paaren erzeugt werden können.

Die Sattelpunktsanalyse in den Bereichen R2 und R3 ist in der Hinsicht einfacher, als dass nur ein Sattelpunkt zu berücksichtigen ist. Aufgrund der Tatsache, dass $A(v_1, v_2)$ eine doppelte Nullstelle für $v_1 \rightarrow v_2$ besitzt, ändert sich analog zu Abschnitt 5.5 der algebraische Beitrag zur Asymptotik von $I_2(m, t)$,

$$I_2(m, t) \sim \frac{[\nabla^2 f](\lambda_j, \lambda_j)}{8\pi t^2} \cdot \frac{e^{2tg(\lambda_j)}}{g''(\lambda_j)^2}, \quad (5.103)$$

wobei $j = 2, 3$ ist. Im Fall R2 hat man $\lambda_2 = \pi/4 + iy$ mit $y \in [0, \gamma/2]$; im Fall R3 $\lambda_3 = iy/2 + x$ mit $x \in [\pi/4, \pi/2]$ (vgl. auch Abbildung 5.4). Im Bereich R2 besitzt die Phase $g(\lambda_2)$ einen negativen Realteil und einen nicht-verschwindenden Imaginärteil, sodass die Asymptotik oszillierend und exponentiell zerfallend ist. Im Bereich R3 hingegen ist $g(\lambda_3)$ reell und negativ, sodass sich reiner exponentieller Zerfall ergibt. In diesem raumartigen Bereich ist die Asymptotik somit ähnlich zu der der statischen Korrelatoren (vgl. Gleichung (5.85)). Man kann leicht nachprüfen, dass sich im Limes $v \rightarrow \infty$ wieder das Resultat (5.85) ergibt. Die 4-Spinon-Beiträge sind in R2 und R3 nächstführend, da diese proportional zu $e^{4tg(\lambda_j)}$ und somit gegenüber dem 2-Spinon-Beitrag exponentiell unterdrückt sind.

Obwohl die obigen Resultate bereits explizit sind, können sie noch weiter vereinfacht werden. Dies ist möglich, da die Größen $g(\lambda)$ und $g''(\lambda)$ für $\lambda = \lambda_1^\pm, \lambda_2, \lambda_3$ sowie $[\nabla^2 f](\lambda_j, \lambda_j)$, $j = 2, 3$ in elementarer Weise durch v ausgedrückt werden können. Der Grund hierfür ist, dass mit (5.94) und (5.95) die Sattelpunktgleichung (5.92) in die Form

$$v\varepsilon(p) - v_{c_1}v_{c_2} \cos(p) \sin(p) = 0 \quad (5.104)$$

gebracht werden kann. Diese Gleichung kann (unter Beachtung der richtigen Wahl der Zweige der Quadratwurzel) nach $z = \cos^2(p)$ aufgelöst werden. Führt man den Parameter $r = v/\sqrt{v_{c_1}v_{c_2}}$ ein, so erhält man zwei Lösungen

$$2z_\pm = 1 + r^2 \pm \begin{cases} \sqrt{(r_1^2 - r^2)(r_2^2 - r^2)} & \text{in R1, R3,} \\ i\sqrt{(r^2 - r_1^2)(r_2^2 - r^2)} & \text{in R2.} \end{cases} \quad (5.105)$$

Hierbei wurden $r_1^2 = v_{c_1}/v_{c_2}$ und $r_2^2 = v_{c_2}/v_{c_1}$ eingeführt, sodass $0 < r < r_1$ in R1, $r_1 < r < r_2$ in R2 und $r_2 < r$ in R3. Man kann sich davon überzeugen, dass die Lösung z_+ in R2 zu λ_2 , die Lösung z_- in R3 zu λ_3 und die Lösungen z_{\pm} in R1 zu λ_1^{\pm} gehören. Mit Gleichung (5.105) erhält man $\cos(p)$ und folglich auch $\sin(p)$ und e^{ip} an den Sattelpunkten. Damit folgt $\varepsilon(p)$ aus Gleichung (5.104).

Man erhält

$$e^{tg(\lambda_1^{\pm})} = (-1)^m \exp\left\{-im\left(\arctan\sqrt{1/z_{\pm}-1} - r^{-2}\sqrt{z_{\pm}(1-z_{\pm})}\right)\right\} \quad (5.106)$$

im Bereich R1. In R2 findet man

$$e^{2tg(\lambda_2)} = (r/k)^m \left(e^{i\varphi_0/2} - i\sqrt{k'}e^{-i\varphi_1/2}\right)^{2m} \exp\left\{\frac{2im\sqrt{k'}}{rk}e^{i(\varphi_0-\varphi_1)/2}\right\}, \quad (5.107a)$$

$$\varphi_s = \operatorname{arccot}\left(\frac{1 + (-1)^s r^2}{\sqrt{(r^2 - r_1^2)(r_2^2 - r^2)}}\right), \quad s = 0, 1. \quad (5.107b)$$

Hierbei ist die Funktion arccot stetig und nimmt Werte aus dem Intervall $(0, \pi)$ an. Im Bereich R3 erhält man schließlich

$$e^{2tg(\lambda_3)} = \exp\left\{2m\left(\ln(\sqrt{z_-} - \sqrt{z_- - 1}) + r^{-2}\sqrt{z_-(z_- - 1)}\right)\right\}. \quad (5.108)$$

Für $g''(\lambda)$ erhält man die Ausdrücke

$$\frac{\pi^2 g''(\lambda)}{v(2kK)^2} = \frac{z_+ - z_-}{r^2} \times \begin{cases} \pm i\sqrt{z_{\pm}(1-z_{\pm})} & \lambda = \lambda_1^{\pm} \\ \frac{ir\sqrt{k'}}{k}e^{i(\varphi_0-\varphi_1)/2} & \lambda = \lambda_2 \\ -\sqrt{z_-(z_- - 1)} & \lambda = \lambda_3 \end{cases}. \quad (5.109)$$

Man erkennt, dass diese Ausdrücke nur verschwinden, falls $v = v_{c_1}$ oder $v = v_{c_2}$ ist, sodass die Sattelpunkte von erster Ordnung sind. Die Linien $v = v_{c_1}$ und $v = v_{c_2}$ in der m - t -Ebene markieren die Übergänge zwischen den verschiedenen asymptotischen Bereichen. Die asymptotische Analyse des Integrals $I_2(m, t)$ muss für diese Spezialfälle gesondert erfolgen (s. unten). Da die 2-Spinon-Amplituden $A(v_1, v_2)$ (vgl. (5.79)) nur von der Differenz $v_1 - v_2$ und von $\cos^2(p(v_{1,2}))$ abhängt, kann in den Bereichen R2 und R3 der Ausdruck $[\nabla^2 f](\lambda, \lambda)$ explizit angegeben werden,

$$[\nabla^2 f](\lambda, \lambda) = \frac{512(q^2, q^4)^4 (q^4, q^4)^2 (q^4, q^4, q^4)^8 \left[\frac{z(-1)^m (q, q^2)^4}{(1-q^{-1})^2} + \frac{(1-z)(-q, q^2)^4}{(1+q^{-1})^2} \right]}{(q^2, q^4)^2 (q^2, q^4, q^4)^8}, \quad (5.110)$$

wobei $z = z_+$ für $\lambda = \lambda_2$ in R2 und $z = z_-$ für $\lambda = \lambda_3$ in R3. Somit muss die Sattelpunktgleichung (5.92) lediglich für die Berechnung von $f(\lambda_1^+, \lambda_1^-)$ in R1 (numerisch) gelöst werden. Die Charakteristika der unterschiedlichen asymptotischen Bereiche sind in Abbildung 5.5 zusammengefasst.

Mit Hilfe der expliziten Ausdrücke (5.79), (5.92), (5.98), (5.103) und (5.106)-(5.110) können die Ergebnisse graphisch dargestellt werden. Abbildung 5.6 zeigt die Asymptotik von $I_2(m, t)$, welche den führenden dynamischen Anteil der Korrelationsfunktionen $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z(t) \rangle$ nach Gleichung (5.87) bestimmt, für eine feste Zeit t als Funktion des Abstandes m . Man erkennt die typischen Merkmale von Wellenausbreitung in einem dispergierendem Medium, vollkommen analog zur Elektrodynamik [121, 24]. Die Wellenfront breitet sich mit der maximal möglichen Gruppengeschwindigkeit von v_{c_1} aus. In der Tat erkennt man an (5.95), dass

$$\max_{p \in [-\pi/2, \pi/2]} |\varepsilon'(p)| = v_{c_1}. \quad (5.111)$$

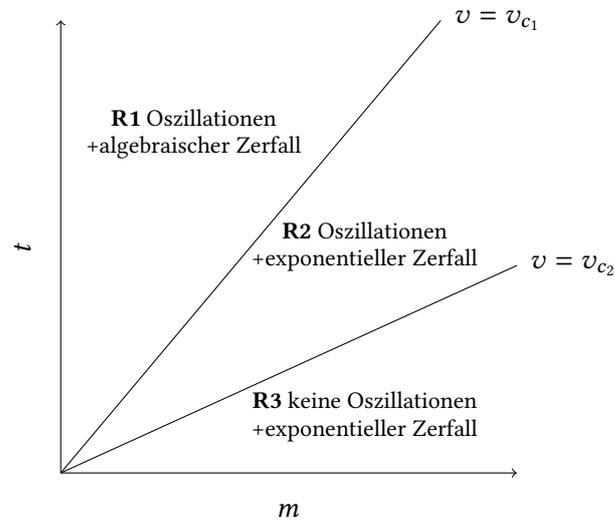


Abbildung 5.5: Übersicht über das asymptotische Verhalten von $I_2(m, t)$ in den Bereichen R1, R2 und R3 der m - t -Ebene.

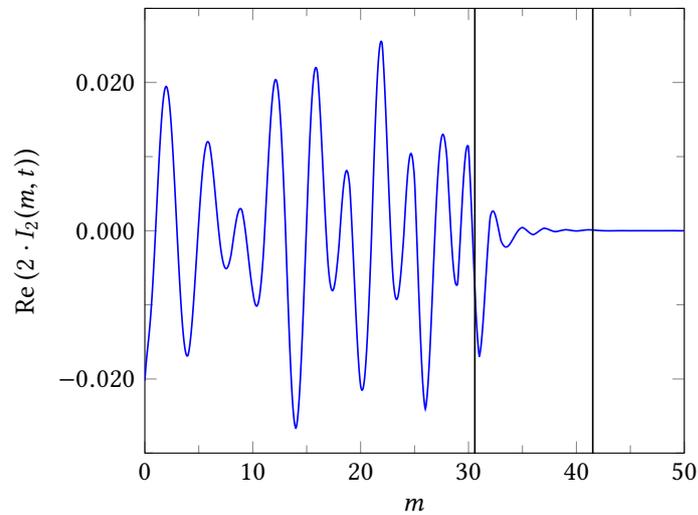


Abbildung 5.6: Realteil von $I_2(m, t)$ als Funktion von m für festes $t = 4$ und $\Delta = 2.375$. Die Datenpunkte wurden für $m \in \mathbb{Z}$ berechnet und durch Splines verbunden. Die vertikalen Linien trennen die asymptotischen Bereiche: Die erste Linie entspricht $m = v_{c_1} t$, die zweite Linie $m = v_{c_2} t$.

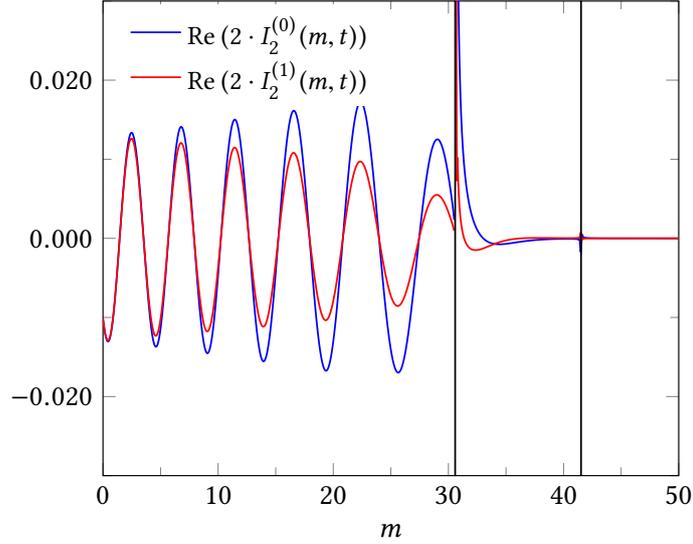


Abbildung 5.7: Realteil der beiden Komponenten von $I_2(m, t)$ (vgl. (5.113)) als Funktion von m für festes $t = 4$ und $\Delta = 2.375$ ($I_2^{(0)}$ in blau, $I_2^{(1)}$ in rot). Die vertikalen Linien trennen die asymptotischen Bereiche: Die erste Linie entspricht $m = v_{c_1}t$, die zweite Linie $m = v_{c_2}t$.

Gleichzeitig ist v_{c_1} gleich der Bandbreite $\varepsilon(0) - \varepsilon(\pi/2)$. Außerhalb des Bereichs $m < v_{c_1}t$ ist das Signal exponentiell klein. Dies steht in Übereinstimmung mit allgemeinen Überlegungen, dass in nicht-relativistischen Spin-Systemen mit lokaler Wechselwirkung eine solche maximale Gruppengeschwindigkeit („Lieb-Robinson-Schranke“) immer existieren muss [93]. Wie bei der Signalausbreitung in einem dispergierenden Medium geht der Wellenfront bei $v_{c_1}t$ ein Vorläufer voran, der sich von $m = v_{c_1}t$ bis $m = v_{c_2}t$ erstreckt. Die zweite kritische Geschwindigkeit v_{c_2} kann ebenfalls mit der Dispersion in Beziehung gebracht werden,

$$v_{c_2} = -\left(\varepsilon(0) + \varepsilon(\pi/2)\right). \quad (5.112)$$

Der unregelmäßige Wellenzug in Abbildung 5.6 ist eine Überlagerung zweier Komponenten. Teilt man I_2 in zwei Komponenten auf,

$$I_2(m, t) = I_2^{(0)}(m, t)(-1)^m + I_2^{(1)}(m, t), \quad (5.113)$$

so sind die einzelnen Beiträge $I_2^{(0)}$ und $I_2^{(1)}$ glatte Funktionen von m und weisen eine regelmäßige Form auf (vgl. Abbildung 5.6). Abbildung 5.8 zeigt denselben Wellenzug für eine feste Position m als Funktion der Zeit t . Man erkennt, dass die asymptotischen Formeln (5.98) und (5.103) an den Übergängen $v = v_{c_1}$ und $v = v_{c_2}$ zwischen den asymptotischen Bereichen divergieren. Ursächlich hierfür ist, dass die Sattelpunkte an diesen Stellen von zweiter Ordnung sind (vgl. Abbildung 5.9), sodass die asymptotische Analyse in der Nähe dieser Punkte ihre Gültigkeit verliert. Führt man die Sattelpunktsintegration an den Punkten $v = v_{c_1}$ und $v = v_{c_2}$ durch, so erhält man

$$I_2(m, t) \sim e^{i\varphi} 6^{1/3} \Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right) \frac{[\nabla^2 f](\lambda, \lambda)}{8\pi^2 t^{4/3}} \cdot \frac{e^{2tg(\lambda)}}{|g'''(\lambda)|^{4/3}}, \quad (5.114)$$

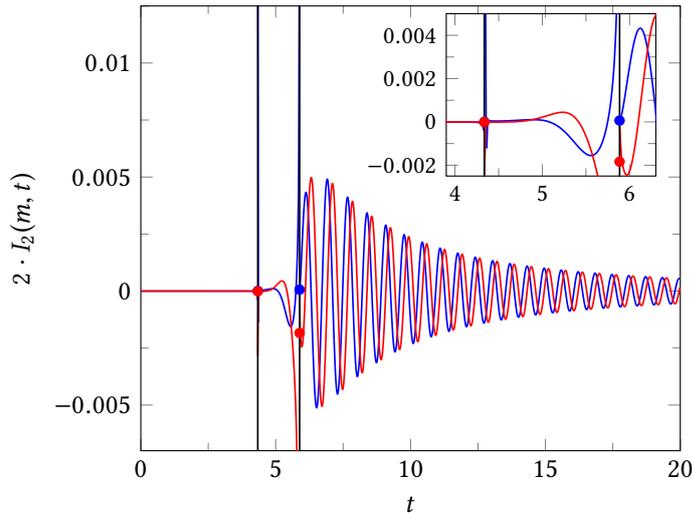


Abbildung 5.8: $I_2(m, t)$ als Funktion von t für festes $m = 45$ und $\Delta = 2.375$ (Realteil in blau, Imaginärteil in rot). Die vertikalen Linien trennen die asymptotischen Bereiche: Die erste Linie entspricht $t = m/v_{c_2}$, die zweite Linie $t = m/v_{c_1}$. Die Punkte entsprechen den asymptotischen Werten an den Phasengrenzen gemäß Gleichung (5.114).

wobei $\lambda = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = 0$ für $v = v_{c_1}$ sowie $\lambda = \frac{\pi}{4} + i\gamma/2$ und $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ für $v = v_{c_2}$ gilt. Genau auf den kritischen Linien ist die Asymptotik somit durch den Exponenten $4/3$ bestimmt.

Die in diesem Abschnitt durchgeführte Analyse zeigt, dass sich das analytische Verhalten der Korrelationsfunktionen entlang der Stokes-Linien $v = v_{c_1}$ und $v = v_{c_2}$ qualitativ ändert. Eine naive analytische Fortsetzung einer effektiven Feldtheorie, welche die Korrelatoren bei großen Abständen beschreibt, hin zu endlichen Zeiten würde folglich falsche Vorhersagen liefern. Stattdessen sind drei verschiedene Theorien für R1, R2 und R3 vonnöten. Das Auftreten eines zeitartigen (R1) und raumartigen Bereichs (R3) ist die direkte Konsequenz der Lieb-Robinson-Schranke. Die Existenz des

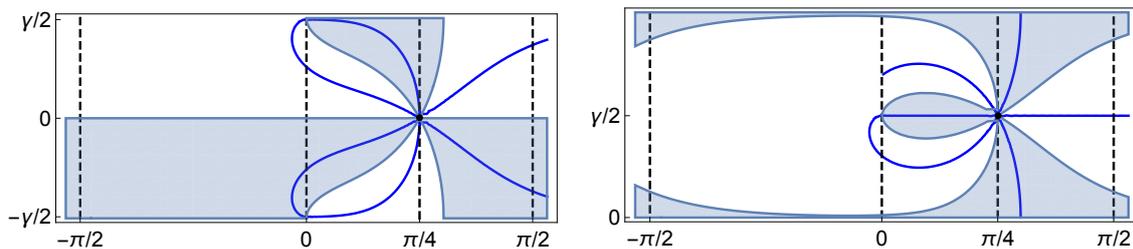


Abbildung 5.9: Verhalten der Phase g in der komplexen Ebene für $v = v_{c_1}$ (links) und $v = v_{c_2}$ (rechts). Die schwarzen Punkte kennzeichnen die relevanten Sattelpunkte und die blauen Linien die Kurven mit konstantem Imaginärteil. In den weißen Bereichen ist $\text{Re}(g)$ kleiner als an den Sattelpunkten und in den blauen Bereichen größer. Da die Sattelpunkte von zweiter Ordnung sind, ergeben sich drei Richtungen des steilsten Abstiegs.

Vorläufer-Bereichs ist jedoch zunächst unerwartet und widerspricht dem einfachen Lichtkegel-Bild aus der relativistischen Quantenfeldtheorie. Es ist daher eine interessante Frage, inwieweit sich die in diesem Abschnitt erzielten Ergebnisse ausgehend vom Sine-Gordon-Modell, welches häufig für die Beschreibung der XXZ-Kette im massiven antiferromagnetischen Bereich benutzt wurde (vgl. z.B. [47]), herleiten lassen.

Eine weitere interessante Frage betrifft die experimentelle Beobachtbarkeit der Ergebnisse. Dynamische Korrelationsfunktionen beschreiben den Response eines Systems auf eine lokale Störung („Pump-Probe-Experiment“). Ein solches Szenario lässt sich für die XXZ-Kette mit Hilfe von kalten Atomen in optische Fallen realisieren [53, 59]. Die Manipulation derartiger Anordnungen ist mittlerweile auf atomarer Skala möglich [5, 118]. Da außerdem bereits Lieb-Robinson-Schranken mit den oben genannten Methoden experimentell beobachtet wurden [33], könnten die hier beschriebenen Phänomene im Prinzip gemessen werden.

Abschließend sei betont, dass die expliziten Ausdrücke (5.98) und (5.103) die führende Asymptotik der dynamischen Korrelationsfunktionen bestimmen. Obwohl hierfür nur die Kenntnis der 2-Spinon-Amplitude und eine technisch einfache Sattelpunktsanalyse nötig waren, scheinen die hier angegebenen Resultate bislang unbekannt gewesen zu sein.

6 Tieftemperaturanalyse in der massiven Phase

In diesem Kapitel soll die Tieftemperaturanalyse aus Kapitel 4 für die massive antiferromagnetische Phase ($\Delta > 1$ und $0 < h < h_\ell$) wiederholt werden. Wie bereits zu Anfang von Kapitel 5 bemerkt, ist die Identifizierung der relevanten Anregungen der Quantentransfermatrix ein nicht-triviales Problem. Aus diesem Grund wurden in Kapitel 5 zunächst die Grundzustandskorrelationsfunktionen der endlichen Kette betrachtet. Im thermodynamischen Limes ergab sich zwar eine zum Vertex-Operator-Zugang äquivalente, jedoch genauso komplexe Beschreibung der Korrelatoren. Dies ist Motivation genug, die Korrelationsfunktionen in der massiven Phase nun mit Hilfe der Quantentransfermatrix zu studieren. Wie sich in Abschnitt 6.3 zeigen wird, lässt sich das Spektrum der Quantentransfermatrix für endliche Magnetfelder $h > 0$ vollständig durch Teilchen und Löcher interpretieren. Für verschwindendes Magnetfeld hingegen ergibt sich ein ähnliches Bild wie in Kapitel 5 mit nicht-trivialen higher-level Gleichungen. Durch Einführen eines endlichen Magnetfeldes ergibt sich somit analog zur masselosen Phase eine bemerkenswerte Vereinfachung des Spektrums. In Abschnitt 6.5 werden die zugehörigen Korrelationslängen für $h > 0$ berechnet und in Abschnitt 6.6 die Tieftemperaturanalyse der Amplituden durchgeführt. Gegenüber Kapitel 4 ist hier mit weiteren Vereinfachungen zu rechnen, da die auftretenden Integrale regulär sind für $T \rightarrow 0$. Darüber hinaus sind alle relevanten Funktionen per Fouriertransformation berechenbar, sodass man ein explizites Resultat erwarten kann. Die Korrelationsfunktionen ergeben sich ähnlich wie in Kapitel 5 durch Aufsummation aller Beiträge.

6.1 Die nichtlineare Integralgleichung in der massiven Phase

In diesem Abschnitt soll die nichtlineare Integralgleichung für die Hilfsfunktion α_n in der massiven Phase hergeleitet werden. Zwar ist bereits in Kapitel 2 eine Integralgleichung für α_n angegeben worden, allerdings enthält diese die Kontur \mathcal{C}_n , welche per Definition alle Bethe-Wurzeln und den Punkt $-\beta/N$, aber keine weiteren Singularitäten der logarithmischen Ableitung von $1 + \alpha_n$ enthält. Für die konkrete Durchführung des Tieftemperaturlimes benötigt man jedoch eine feste Kontur. Folglich muss die Lage aller Singularitäten bezüglich dieser festen Kontur genau analysiert werden. Weiterhin ist es wichtig, die Phasen von $\ln \alpha_n$ und $\ln(1 + \alpha_n)$ sorgfältig zu berücksichtigen. In der masselosen Phase (vgl. Kapitel 4) stellte sich ein ähnliches Problem, allerdings konnte in diesem Fall die Phase durch infinitesimale Deformationen der Referenzkontur modifiziert werden. Wie sich zeigt, ist dieses Vorgehen in der massiven Phase nicht möglich.

Für den weiteren Verlauf erscheint es günstig, die R-Matrix

$$R(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(x, y) & c(x, y) & 0 \\ 0 & c(x, y) & b(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} b(x, y) &= \frac{\sin(y-x)}{\sin(y-x+i\gamma)} \\ c(x, y) &= \frac{\sin(i\gamma)}{\sin(y-x+i\gamma)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

mit $\Delta = \text{ch}(\gamma)$, $\gamma > 0$, zu verwenden. Im Folgenden sei $q = e^{-\gamma}$. In dieser Notation sind die Eigenwerte der Quantentransfermatrix durch

$$\Lambda(x) = e^{\frac{h}{2T}} \left(\frac{\sin(x + i\beta/N)}{\sin(x + i\beta/N + i\gamma)} \right)^{\frac{N}{2}} \left[\prod_{j=1}^M \frac{\sin(x - x_j^r + i\gamma/2)}{\sin(x - x_j^r - i\gamma/2)} \right] (1 + a(x - i\gamma/2)) \quad (6.2)$$

gegeben, wobei die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} a(x) &= a(x | \{x_k^r\}_{k=1}^M) \\ &= e^{-\frac{h}{T}} \left(\frac{\sin(x + i\gamma/2 - i\beta/N) \sin(x + 3i\gamma/2 + i\beta/N)}{\sin(x + i\gamma/2 + i\beta/N) \sin(x - i\gamma/2 - i\beta/N)} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^M \frac{\sin(x - x_k^r - i\gamma)}{\sin(x - x_k^r + i\gamma)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

eingeführt wurde. Die $\{x_k^r\}_{k=1}^M$ sind eine Lösung der Bethe-Ansatz-Gleichungen,

$$a(x_j^r | \{x_k^r\}_{k=1}^M) = -1, \quad j = 1, \dots, M. \quad (6.4)$$

Für den dominanten Zustand gilt $M = N/2$. Für einen angeregten Zustand definiere den (Pseudo-) Spin

$$s = N/2 - M. \quad (6.5)$$

Im Folgenden soll eine nichtlineare Integralgleichung für a hergeleitet werden. Dafür definiert man für $\delta > 0$ die Funktionen

$$K(x|\delta) = \frac{1}{2\pi i} (\cot(x - i\delta) - \cot(x + i\delta)), \quad (6.6a)$$

$$\theta(x|\delta) = 2\pi i \int_{\Gamma_x} dy K(y|\delta). \quad (6.6b)$$

Hierbei ist Γ_x eine stückweise gerade Kontur, welche von $-\pi/2$ parallel zur imaginären Achse nach $-\pi/2 + i \text{Im}(x)$ läuft und anschließend parallel zur reellen Achse nach x . Diese Wahl der Integrationskontur bedingt Schnitte der Funktion $\theta(x|\delta)$ entlang der Linien $(-\infty \pm i\delta, -\pi \pm i\delta) \cup [\pm i\delta, \pm i\delta + \infty)$ (dies entspricht der in Kapitel 5 getroffenen Konvention). Für den Fall $\delta = \gamma$ schreibe der Einfachheit halber $K(x) = K(x|\gamma)$ und $\theta(x) = \theta(x|\gamma)$.

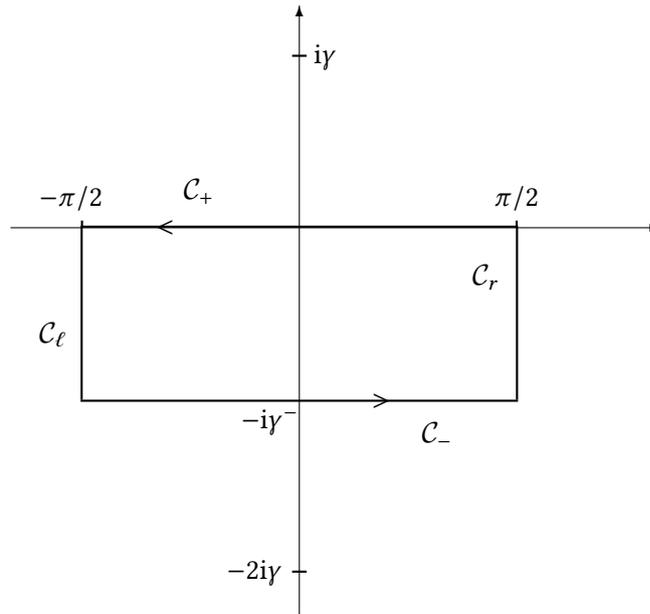
Für den weiteren Verlauf werden die folgenden Eigenschaften der Funktionen K und θ benötigt:

$$K(x|\delta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sh}(2\delta)}{\text{sh}^2(\delta) + \sin^2(x)} > 0, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad (6.7a)$$

$$K(x + \pi|\delta) = K(x|\delta), \quad K(-x|\delta) = K(x|\delta), \quad (6.7b)$$

$$\theta(x + \pi|\delta) = \theta(x|\delta) + \begin{cases} 2\pi i & |\text{Im } x| < \delta \\ 0 & |\text{Im } x| > \delta, \end{cases} \quad (6.7c)$$

$$\theta(-x|\delta) = -\theta(x|\delta) + \begin{cases} 2\pi i & |\text{Im } x| < \delta \\ 0 & |\text{Im } x| > \delta. \end{cases} \quad (6.7d)$$


 Abbildung 6.1: Die Integrationskontur $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\ell \cup \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_+$.

Es folgt aus (6.7c) und (6.7d), dass $\theta(\pi/2|\delta) = 2\pi i$ und $\theta(0|\delta) = \pi i$. Setzt man $x = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, so folgt das asymptotische Verhalten

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} \theta(u + iv) = \mp 2\gamma. \quad (6.8)$$

Man beachte, dass $\theta(x|\delta)$ eine Festlegung des Logarithmus von $\sin(x - iy)/\sin(x + iy)$ ist, welche mit dem Hauptzweig $\text{Ln}(\sin(x - iy)/\sin(x + iy))$ im Streifen $-\pi < \text{Re}(x) < 0$ übereinstimmt. Hier und im Folgenden ist der Hauptzweig durch $-\pi < \text{Im Ln}(x) \leq \pi$ festgelegt.

Mit der Definition von θ kann die Funktion $\ln a$ definiert werden durch

$$\ln a(x) = -\frac{\varepsilon_0^{(N)}(x)}{T} - \frac{N}{2}\theta(x + iy/2 + i\beta/N) + \sum_{k=1}^M \theta(x - x_k^r) \quad (6.9)$$

mit

$$\varepsilon_0^{(N)}(x) = h - \frac{NT}{2} \left[\theta(x + i\beta/N|\gamma/2) - \theta(x - i\beta/N|\gamma/2) \right]. \quad (6.10)$$

Ausgehend hiervon kann eine Integralgleichung hergeleitet werden, welche von der Wahl der Integrationskontur abhängt. Hier soll eine rechteckige, positiv orientierte Kontur \mathcal{C} gewählt werden, welche bei $-\pi/2$ beginnt und endet (vgl. Abbildung 6.1). Das obere Teilstück \mathcal{C}_+ verbindet $-\pi/2$ und $\pi/2$, während das untere Teilstück $-\pi/2 - iy^-$ mit $\pi/2 - iy^-$ verbindet. Hierbei ist $\gamma^- = \gamma - 0_+$, sodass keine Polstellen auf der Kontur liegen. Das linke bzw. rechte Teilstück sei mit \mathcal{C}_ℓ bzw. \mathcal{C}_r bezeichnet.

Die Bezeichnung der Lösungen der Gleichung

$$1 + a(x) = 0 \quad (6.11)$$

erfolgt bezüglich der Kontur \mathcal{C} . Eine Lösung x von (6.11) ist eine Bethe-Wurzel falls $x \in \{x_k^r\}_{k=1}^M$ ist. Bethewurzeln außerhalb von \mathcal{C} werden Teilchen genannt. Ein Teilchen x ist „nah“, falls $x - iy$ innerhalb von \mathcal{C} liegt und andernfalls „fern“. Die Anzahl der nahen bzw. fernen Wurzeln ist n_c bzw. n_f . Nahe und ferne Wurzeln werden mit x_j^c bzw. x_k^f bezeichnet. Lösungen von Gleichung (6.11), welche innerhalb von \mathcal{C} liegen aber keine Bethe-Wurzeln sind, werden Löcher genannt. Sie werden mit x_j^h bezeichnet und ihre Anzahl entsprechend mit n_h .

Aus den Gleichungen (6.7c) und (6.9) folgt für $x \in \mathbb{R}$ und $|\beta/N| < \gamma/2$ die Quasiperiodizität

$$\ln a(x + \pi) = \ln a(x) - 2\pi i(s + n_f) . \quad (6.12)$$

In ähnlicher Weise folgt mit (6.8) und (6.9) die Asymptotik

$$\lim_{\operatorname{Im} x \rightarrow \pm\infty} \ln a(x) = -\frac{h}{T} \pm 2\gamma s . \quad (6.13)$$

Mit Gleichung (6.3) und der soeben eingeführten Terminologie folgt, dass die einzigen Singularitäten der logarithmischen Ableitung $\partial_x \ln(1 + a(x)) = a'(x)/(1 + a(x))$ innerhalb von \mathcal{C} einfache Pole sind, deren Lage und Residuen in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind.

Lage	Residuum
$x \in \{x_k^r\}_{k=1}^M \setminus \{\{x_k^c\}_{k=1}^{n_c} \cup \{x_k^f\}_{k=1}^{n_f}\}$	1
$x \in \{x_k^h\}_{k=1}^{n_h}$	1
$x \in \{x_k^c - iy\}_{k=1}^{n_c}$	-1
$x = -i(\gamma/2 + \beta/N)$	$-N/2$

Für $x, y \in \mathcal{C}$ oder innerhalb ist $\theta(x - y)$ holomorph als Funktion von y . Damit erhält man für $-\gamma < \operatorname{Im}(x) < 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \ln a(x) = & -\frac{\varepsilon_0^{(N)}(x)}{T} - \sum_{j=1}^{n_h} \theta(x - x_j^h) + \sum_{j=1}^{n_c} (\theta(x - x_j^c) + \theta(x - x_j^c + iy)) + \sum_{j=1}^{n_f} \theta(x - x_j^f) \\ & + \int_{\mathcal{C}} \frac{dy}{2\pi i} \theta(x - y) \partial_y \ln(1 + a(y)) . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Diese Gleichung kann mittels partieller Integration in eine nichtlineare Integralgleichung umgewandelt werden, wobei eine Definition der Logarithmen gewählt werden muss. Zunächst ist klar, dass die logarithmischen Ableitungen von a bzw. $1 + a$ eindeutig sind. Definiere nun für einen Punkt x auf der Kontur \mathcal{C} und für $f = a, 1 + a, 1 + a^{-1}$

$$\ln_{\mathcal{C}} f(x) = \int_{\mathcal{C}_x} dy \partial_y \ln f(y) . \quad (6.15)$$

Hierbei ist \mathcal{C}_x eine Kontur, welche bei $-\pi/2 - i0$ beginnt und entlang der Kontur \mathcal{C} zum Punkt $x \in \mathcal{C}$ läuft. Per Konstruktion ist $\ln_{\mathcal{C}} f$ stetig entlang \mathcal{C} und kann folglich in der partiellen Integration in (6.14) benutzt werden. Die Monodromie von $\ln_{\mathcal{C}}(1 + a)(x)$ entlang \mathcal{C} ist i.A. nicht Null. Mit Hilfe der obigen Tabelle und dem Argumentprinzip folgt

$$d = \int_{\mathcal{C}} \frac{dy}{2\pi i} \partial_y \ln(1 + a(y)) = \frac{\ln_{\mathcal{C}}(1 + a)(-\pi/2)}{2\pi i} = n_h - 2n_c - n_f - s . \quad (6.16)$$

Führt man nun die partielle Integration in (6.14) durch, so folgt

Lemma 6.1.1. Die in Gleichung (6.3) definierte Hilfsfunktion α erfüllt die nichtlineare Integralgleichung

$$\begin{aligned} \ln \alpha(x) = & -\frac{\varepsilon_0^{(N)}(x)}{T} - \sum_{j=1}^{n_h} \theta(x - x_j^h) + \sum_{j=1}^{n_c} (\theta(x - x_j^c) + \theta(x - x_j^c + i\gamma)) + \sum_{j=1}^{n_f} \theta(x - x_j^f) \\ & + d\theta(x + \pi/2) + \int_C dy K(x - y) \ln_C(1 + \alpha)(y) . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die Gleichung bestimmt α innerhalb des Streifens $-\gamma < \text{Im } x < 0$ und durch analytische Fortsetzung in der gesamten komplexen Ebene. Insbesondere ist das Integral auf der rechten Seite für $x \in C_{\pm}$ als entsprechender Grenzwert aufzufassen.

Die Teilchen und Löcher müssen so bestimmt werden, dass die Nebenbedingung

$$1 + \alpha(x_j^{h,p,f}) = 0 \quad (6.18)$$

erfüllt ist, wobei $x_j^{h,p,f}$ in den jeweiligen Definitionsbereichen liegen müssen.

Der Trotterlimes kann in Gleichung (6.17) trivial durchgeführt werden, indem man $\varepsilon_0^{(N)}(x)$ durch

$$\varepsilon_0(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_0^{(N)}(x) = h - \frac{4J(\Delta^2 - 1)}{\Delta - \cos(2x)} \quad (6.19)$$

ersetzt. Gleichung (6.17) ist der Ausgangspunkt für die Tieftemperaturanalyse im nächsten Abschnitt.

Eine abschließende Bemerkung betrifft die Verbindung zu der nichtlinearen Integralgleichung aus Kapitel 4. Die Gleichungen (6.16) und (6.17) hängen von der Definition der Kontur und der betrachteten Klasse von Anregungen ab. Betrachte nun den Fall $n_f = 0$ und deformiere die Kontur $C \rightarrow C_s$ derart, dass die Punkte $x_j^c - i\gamma$ außerhalb von C_s liegen. Nimmt man an, dass $d = 0$ entlang C_s ist, so wird Gleichung (6.17) zu

$$\ln \alpha(x) = -\frac{\varepsilon_0^{(N)}(x)}{T} - \sum_{j=1}^{n_h} \theta(x - x_j^h) + \sum_{j=1}^{n_c} \theta(x - x_j^c) + \int_{C_s} dy K(x - y) \ln_{C_s}(1 + \alpha)(y) . \quad (6.20)$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die Integralgleichung, die in der Tieftemperaturanalyse der masselosen Phase ($|\Delta| < 1$ und $0 < h < h_u$) benutzt wurde¹ (vgl. (4.4) in Kapitel 4). In der masselosen Phase sind die relevanten Anregungen charakterisiert durch Teilchen und Löcher, welche sich in der Nähe der Fermi-Punkte $\pm Q$ befinden für $T \rightarrow 0$. Die Bedingung $d = 0$ kann in diesem Fall durch eine kleine Deformation der Kontur in der Nähe der Fermi-Punkte und durch Anheben des unteren Teilstücks der Kontur erreicht werden. Dies bedeutet, dass die Kontur C_s selbstkonsistent im Laufe der Rechnung bestimmt werden muss (vgl. Kapitel 4). In der hier betrachteten massiven Phase sind solche Vereinfachungen nicht möglich, sodass sich i.A. die Punkte $x_j^c - i\gamma$ innerhalb der Kontur befinden und $d \neq 0$ gilt.

¹In diesem Fall gibt es einen zusätzlichen Term $-i\pi s$, welcher in der abweichenden Definition der Funktion θ absorbiert wurde.

6.2 Tieftemperaturanalyse der nichtlinearen Integralgleichung

Die Erwartung ist, dass die Hilfsfunktion analog zu Kapitel 4 groß wird auf \mathcal{C}_+ und klein auf \mathcal{C}_- , sodass die nichtlineare Integralgleichung (6.17) linearisiert. Aus diesem Grund soll das Integral über \mathcal{C} aufgeteilt werden in Integrale über \mathcal{C}_\pm und \mathcal{C}_ℓ und \mathcal{C}_r (vgl. Abbildung 6.1),

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} dy K(x-y) \ln_{\mathcal{C}}(1+a)(y) &= \int_{\mathcal{C}_+} dy K(x-y) \ln_{\mathcal{C}} a(y) \\ &+ \left(\theta(x + \pi/2 + iy^-) - \theta(x + \pi/2) \right) \int_{\mathcal{C}_-} \frac{dy}{2\pi i} \partial_y \ln(1+a(y)) \\ &+ \int_{\mathcal{C}_+} dy K(x-y) \ln_{\mathcal{C}}(1+a^{-1})(y) + \int_{\mathcal{C}_-} dy K(x-y) \ln_{\mathcal{C}}(1+a)(y) . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Hierbei wurde die in Gleichung (6.15) eingeführte Notation für $\ln_{\mathcal{C}}$ verwendet. Die zweite Zeile von (6.21) ist der Beitrag der linken und rechten Teilstücke der Kontur \mathcal{C} . Um dies einzusehen, definiert man eine Kontur $\mathcal{C}_{y,y+\pi}$, welche entlang \mathcal{C} von einem Punkt y auf \mathcal{C}_ℓ zu einem Punkt $y + \pi$ auf \mathcal{C}_r läuft. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_\ell + \mathcal{C}_r} dy K(x-y) \ln_{\mathcal{C}}(1+a(y)) &= \int_{\mathcal{C}_\ell} dy K(x-y) \left(\ln_{\mathcal{C}}(1+a(y)) - \ln_{\mathcal{C}}(1+a(y+\pi)) \right) \\ &= - \int_{\mathcal{C}_\ell} dy K(x-y) \int_{\mathcal{C}_{y,y+\pi}} dz \partial_z \ln(1+a(z)) \\ &= - \int_{\mathcal{C}_\ell} dy K(x-y) \int_{\mathcal{C}_-} dz \partial_z \ln(1+a(z)) \\ &= \left(\theta(x + \pi/2 + iy^-) - \theta(x + \pi/2) \right) \int_{\mathcal{C}_-} \frac{dy}{2\pi i} \partial_y \ln(1+a(y)) . \end{aligned} \quad (6.22)$$

Man beachte, dass aufgrund der π -Periodizität von a das letzte Integral auf der rechten Seite eine ganze Zahl sein muss.

Für das Aufteilen des Integrals über \mathcal{C}_+ in (6.21) wurde

$$\partial_x \ln(1+a(x)) = \partial_x \ln a(x) + \partial_x \ln(1+a^{-1}(x)) \quad (6.23)$$

benutzt.

Mit einer ähnlichen Argumentation wie in Kapitel 4 erwartet man, dass $a^{-1}(x) = \mathcal{O}(T^\infty)$ für $x \in \mathcal{C}_+$ und $a(x) = \mathcal{O}(T^\infty)$ für $x \in \mathcal{C}_-$. Die Strategie ist, ein solches Verhalten vorauszusetzen und damit a in selbstkonsistenter Weise zu bestimmen.

Wegen $a(x) = \mathcal{O}(T^\infty)$ für $x \in \mathcal{C}_-$ ist $\ln(1+a(x))$ holomorph auf \mathcal{C}_- und

$$\int_{\mathcal{C}_-} dy \partial_y \ln(1+a(y)) = \int_{\mathcal{C}_-} dy \partial_y \text{Ln}(1+a(y)) = 0 . \quad (6.24)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} dy K(x-y) \ln_{\mathcal{C}}(1+\alpha(y)) &= \int_{\mathcal{C}_+} dy K(x-y) \ln \alpha(y) \\
 &+ \int_{\mathcal{C}_+} dy K(x-y) \operatorname{Ln}(1+\alpha^{-1}(y)) + \int_{\mathcal{C}_-} dy K(x-y) \operatorname{Ln}(1+\alpha(y)) - 2\pi id \\
 &+ \ln \alpha(-\pi/2) + \operatorname{Ln}(1+\alpha^{-1}(-\pi/2)) - \operatorname{Ln}(1+\alpha(-\pi/2-iy^-)) \\
 &+ \int_{\mathcal{C}_\ell} dy \partial_y \ln(1+\alpha(y)) . \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

Die letzten beiden Zeilen sind eine reine Phase,

$$\ln \alpha(-\pi/2) + \operatorname{Ln}(1+\alpha^{-1}(-\pi/2)) - \operatorname{Ln}(1+\alpha(-\pi/2-iy^-)) + \int_{\mathcal{C}_\ell} dy \partial_y \ln(1+\alpha(y)) = -2\pi ik , \quad (6.26)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$.

Führe nun analog zu Kapitel 4 die Funktion

$$u(x) = -T \ln \alpha(x) \quad (6.27)$$

ein.

Definiert man weiterhin²

$$r[u](x) = \int_{\mathcal{C}_+} dy K(x-y) \operatorname{Ln}(1+e^{\frac{u(y)}{T}}) + \int_{\mathcal{C}_-} dy K(x-y) \operatorname{Ln}(1+e^{-\frac{u(y)}{T}}) \quad (6.28)$$

und setzt die Gleichungen (6.27), (6.28), (6.25) und (6.26) in (6.17) ein, so erhält man die folgende Form der nichtlinearen Integralgleichung im Trotterlimes:

$$u(x) = \varepsilon_0(x) + T\Theta(x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y)u(y) - T \cdot r[u](x) \quad (6.29)$$

mit

$$\Theta(x) = 2\pi ik + \sum_{j=1}^{n_h} \theta(x-x_j^h) - \sum_{j=1}^{n_c} (\theta(x-x_j^c) + \theta(x-x_j^c + iy)) - \sum_{j=1}^{n_f} \theta(x-x_j^f) - d\theta(x-\pi/2) . \quad (6.30)$$

Man beachte, dass (6.29) immer noch eine nichtlineare Gleichung ist, die die volle Temperaturabhängigkeit beinhaltet. Sie ist per Konstruktion gültig falls $|\alpha(x)| = e^{-\operatorname{Re} u(x)/T} < 1$ auf \mathcal{C}_- und $|\alpha^{-1}(x)| = e^{\operatorname{Re} u(x)/T} < 1$ auf \mathcal{C}_+ . In diesem Fall ist $|r[u]|$ beschränkt, und $T \cdot \Theta(x)$ sowie $T \cdot r[u](x)$ können für kleine T vernachlässigt werden, falls Θ keine Singularitäten in der Nähe von \mathcal{C}_+ oder \mathcal{C}_- besitzt.

Somit folgt, dass der Tieftemperaturlimes von u durch die bekleidete Energie ε gegeben ist, wobei letztere durch

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0(x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y)\varepsilon(y) \quad (6.31)$$

² Für $x \in \mathcal{C}_+$ muss das Integral über \mathcal{C}_- regularisiert werden, indem die untere Kontur \mathcal{C}_- um ein kleines endliches $\delta > 0$ nach oben geschoben wird. Dies zieht möglicherweise zusätzliche Beiträge nach sich, falls Lösungen von $1+\alpha(x) = 0$ zwischen \mathcal{C}_- und $\mathcal{C}_- + i\delta$ liegen. Um die Diskussion zu vereinfachen, nehme im Folgenden an, dass in einem schmalen endlichen Bereich um \mathcal{C}_\pm keine Nullstellen von $1+\alpha$ liegen. Somit ist $r[u](x)$ glatt für $x \in \mathcal{C}_\pm$.

definiert ist. Diese Gleichung kann explizit durch elliptische Funktionen gelöst werden (vgl. Anhang D.3),

$$\varepsilon(x) = \frac{h}{2} - \frac{4JK \operatorname{sh}(\gamma)}{\pi} \operatorname{dn}\left(\frac{2Kx}{\pi} \middle| k\right). \quad (6.32)$$

Hierbei ist $\gamma = \pi K'(k)/K(k)$, wobei $K(k)$ und $K'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$ vollständige elliptische Integrale sind und k der elliptische Modul (vgl. Anhang D.1). Mit dieser expliziten Lösung folgt, dass $\varepsilon(x) < 0$ auf \mathcal{C}_+ und $\varepsilon(x) > 0$ auf \mathcal{C}_- falls

$$0 < h < h_\ell = \frac{1}{\pi} 8JK \operatorname{sh}(\gamma) \operatorname{dn}(K|k) \quad (6.33)$$

gilt. Der hier durchgeführte Tieftemperaturlimites ist also in der Tat konsistent.

Für die Bestimmung der ersten Ordnung in T sei zunächst an die Definitionen der bekleideten Phase $\varphi(*, z)$ und Ladung Z erinnert (vgl. Kapitel 4 und 5),

$$Z(x) = 1 - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y) Z(y), \quad (6.34a)$$

$$\varphi(x, z) = \theta(x-z) - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{|\operatorname{Im} z| < \gamma} \theta(x - \pi/2) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y) \varphi(y, z). \quad (6.34b)$$

Dies definiert die Funktionen $\varphi(*, z)$ und Z auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und per analytischer Fortsetzung in der komplexen Ebene. Die Integralgleichungen sind per Fouriertransformation lösbar, insbesondere ergibt sich $Z(x) = 1/2$. Eine Beschreibung der bekleideten Phase findet sich in Anhang D.4.

Setzt man (6.31) und (6.34) in (6.29) ein, so erhält man

$$u(x) = u_1(x) + \mathcal{O}(T^\infty) \quad \text{für } -\gamma < \operatorname{Im}(x) \leq 0 \quad (6.35)$$

mit

$$u_1(x) = \varepsilon(x) + T \left\{ i\pi k + \sum_{j=1}^{n_h} \varphi(x, x_j^h) - \sum_{j=1}^{n_c} (\varphi(x, x_j^c) + \varphi(x, x_j^c - i\gamma)) - \sum_{j=1}^{n_f} \varphi(x, x_j^f) - 2(d - n_h/2 + n_c) \varphi(x, \pi/2) \right\}. \quad (6.36)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite verschwindet aufgrund einer linearen Beziehung zwischen der Anzahl der Teilchen und Löcher sowie dem Spin s . Dies sieht man ein, indem man beachtet, dass im Tieftemperaturlimites $|\alpha(x)| = e^{-\operatorname{Re} u(x)/T} < 1$ auf \mathcal{C}_- und $|\alpha^{-1}(x)| = e^{\operatorname{Re} u(x)/T} < 1$ auf \mathcal{C}_+ gilt, sodass

$$\begin{aligned} d &= \int_{\mathcal{C}} \frac{dy}{2\pi i} \partial_y \ln(1 + \alpha(y)) = \int_{\mathcal{C}_+ + \mathcal{C}_-} \frac{dy}{2\pi i} \partial_y \ln(1 + \alpha(y)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \ln \alpha(-\pi/2) - \ln \alpha(\pi/2) + \operatorname{Ln}(1 + \alpha^{-1}(-\pi/2)) - \operatorname{Ln}(1 + \alpha^{-1}(\pi/2)) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Ln}(1 + \alpha(\pi/2 - iy^-)) - \operatorname{Ln}(1 + \alpha(-\pi/2 - iy^-)) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \ln \alpha(-\pi/2) - \ln \alpha(\pi/2) \right\} \quad (6.37) \end{aligned}$$

folgt. Setzt man (6.35) und (6.36) in die obige Gleichung ein und benutzt die π -Periodizität von ε sowie die π -(Quasi-)Periodizität von $\varphi(*, z)$, so erhält man

$$d = n_h/2 - n_c . \quad (6.38)$$

Insbesondere muss die Anzahl der Löcher n_h gerade sein.

Zusammenfassend erhält man somit

Lemma 6.2.1. *Im Streifen $-\gamma < \text{Im}(x) \leq 0$ besitzt die nichtlineare Integralgleichung (6.29) selbst-konsistente Tieftemperaturlösungen von der Form*

$$u(x) = u_1(x) + \mathcal{O}(T^\infty) \quad (6.39)$$

mit

$$u_1(x) = \varepsilon(x) + T \left\{ i\pi k + \sum_{j=1}^{n_h} \varphi(x, x_j^h) - \sum_{j=1}^{n_c} (\varphi(x, x_j^c) + \varphi(x, x_j^c - i\gamma)) - \sum_{j=1}^{n_f} \varphi(x, x_j^f) \right\} . \quad (6.40)$$

Die Anzahl der Teilchen und Löcher ist durch die Relation

$$n_h - 2n_c - 2n_f = 2s \quad (6.41)$$

mit dem Spin s verbunden.

Man beachte, dass im Gegensatz zur masselosen Phase (vgl. Gleichung (4.40)) die Korrekturen zu u_1 exponentiell klein in der Temperatur T sind.

Um die Bethe-Ansatz-Gleichungen analysieren zu können, muss die Funktion u in der gesamten komplexen Ebene bestimmt werden. Dies erfolgt durch analytische Fortsetzung der nichtlinearen Integralgleichung (6.29). Hierbei ist zu beachten, dass Tieftemperaturlimites und analytische Fortsetzung nicht vertauschen, wodurch die Beiträge des Restes $r[u]$ sorgfältig behandelt werden müssen. Die analytische Fortsetzung der in (6.29) auftretende Integrale ist bestimmt durch das folgende

Lemma 6.2.2. *Es seien g_\pm analytisch in einem Streifen \mathcal{S}_\pm um \mathcal{C}_\pm und es sei*

$$f_\pm(x) = \int_{\mathcal{C}_\pm} dy K(x-y)g_\pm(y) . \quad (6.42)$$

Dann ist f_+ analytisch für $-\gamma < \text{Im } x < \gamma$, während f_- analytisch ist für $-2\gamma < \text{Im } x < 0_+$. Bezeichne die analytischen Fortsetzungen von f_\pm mit denselben Buchstaben. Dann gilt

$$f_+(x) = \int_{\mathcal{C}_+} dy K(x-y)g_+(y) - \begin{cases} g_+(x-i\gamma) & \text{Im } x > \gamma, x \in \mathcal{S}_+ + i\gamma \\ 0 & |\text{Im } x| < \gamma \\ g_+(x+i\gamma) & \text{Im } x < -\gamma, x \in \mathcal{S}_+ - i\gamma \end{cases} , \quad (6.43a)$$

$$f_-(x) = \int_{\mathcal{C}_-} dy K(x-y)g_-(y) + \begin{cases} g_-(x-i\gamma) & \text{Im } x > 0, x \in \mathcal{S}_- + i\gamma \\ 0 & -2\gamma < \text{Im } x \leq 0 \\ g_-(x+i\gamma) & \text{Im } x < -2\gamma, x \in \mathcal{S}_- - i\gamma \end{cases} . \quad (6.43b)$$

Wendet man dieses Lemma auf Gleichung (6.29) an, so erhält man

$$u(x) = \varepsilon_0(x) + T\Theta(x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y)u(y) - Tr[u](x) + \begin{cases} 2\pi ik'T & \text{Im } x > \gamma \\ -T \text{Ln}\left(1 + e^{-\frac{u(x-iy)}{T}}\right) & 0 < \text{Im } x < \gamma \\ 0 & -\gamma < \text{Im } x < 0 \\ -u(x+iy) + T \text{Ln}\left(1 + e^{\frac{u(x+iy)}{T}}\right) & -2\gamma < \text{Im } x < -\gamma \\ 2\pi ik''T & \text{Im } x < -2\gamma, \end{cases} \quad (6.44)$$

wobei $k', k'' \in \mathbb{Z}$ ist. Die Funktion $r[u]$ in (6.44) ist für alle x in den jeweiligen Streifen durch (6.28) gegeben. Damit ist $r[u](x) = \mathcal{O}(T^\infty)$ in Gleichung (6.44). Mit Hilfe von Lemma 6.2.1 kann auf der rechten Seite von Gleichung (6.44) u durch u_1 ersetzt werden, sodass sich

$$u(x) = \varepsilon_0(x) + T\Theta(x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y)u_1(y) + \mathcal{O}(T^\infty) + \begin{cases} 2\pi ik'T & \text{Im } x > \gamma \\ -T \text{Ln}\left(1 + e^{-\frac{u_1(x-iy)}{T}}(1 + \mathcal{O}(T^\infty))\right) & 0 < \text{Im } x < \gamma \\ 0 & -\gamma < \text{Im } x < 0 \\ -u_1(x+iy) + T \text{Ln}\left(1 + e^{\frac{u_1(x+iy)}{T}}(1 + \mathcal{O}(T^\infty))\right) & -2\gamma < \text{Im } x < -\gamma \\ 2\pi ik''T & \text{Im } x < -2\gamma \end{cases} \quad (6.45)$$

ergibt. Jeder Term $\mathcal{O}(T^\infty)$ ist eine glatte Funktion ohne Singularitäten. Die erste Zeile von (6.45) kann weiter vereinfacht werden. Dafür beachtet man, dass die Funktion u_1 im Streifen $|\text{Im } x| < \gamma$ die lineare Integralgleichung

$$\varepsilon_0(x) + T\Theta(x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y)u_1(y) = u_1(x) \quad (6.46)$$

erfüllt. Außerhalb dieses Streifens ergibt sich u_1 durch analytische Fortsetzung mit Hilfe von Lemma 6.2.2. Man erhält

$$\varepsilon_0(x) + T\Theta(x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y)u_1(y) = \begin{cases} u_1(x) + u_1(x-iy) & \text{Im } x > \gamma \\ u_1(x) & |\text{Im } x| < \gamma \\ u_1(x) + u_1(x+iy) & \text{Im } x < -\gamma. \end{cases} \quad (6.47)$$

Setzt man dies in Gleichung (6.45) ein und benutzt (6.27), so folgt

Lemma 6.2.3. *Der Tieftemperaturlimites der Hilfsfunktion α in der komplexen Ebene ist gegeben durch*

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{T}(u_1(x)+u_1(x-iy))} & \text{Im } x > \gamma \\ e^{-\frac{1}{T}u_1(x)} + e^{-\frac{1}{T}(u_1(x)+u_1(x-iy))} & 0 < \text{Im } x < \gamma \\ e^{-\frac{1}{T}u_1(x)} & -\gamma < \text{Im } x < 0 \\ \left[e^{\frac{1}{T}u_1(x)} + e^{\frac{1}{T}(u_1(x)+u_1(x+iy))} \right]^{-1} & -2\gamma < \text{Im } x < -\gamma \\ e^{-\frac{1}{T}(u_1(x)+u_1(x+iy))} & \text{Im } x < -2\gamma \end{cases}, \quad (6.48)$$

wobei multiplikative Korrekturen der Form $1 + \mathcal{O}(T^\infty)$ (vor jedem Exponenten, vgl. (6.45)) unterdrückt wurden.

Interessanterweise tauchen auf der rechten Seite von (6.48) lediglich zwei unabhängige Funktionen auf. Mit Hilfe von Lemma 6.2.1 und den Formeln aus Anhang D können diese explizit bestimmt werden. Zu diesem Zweck unterteilt man die fernen Teilchen in zwei Teilmengen, $\{x_j^f\}_{j=1}^{n_f} = \{x_j^+\}_{j=1}^{n_+} \cup \{x_j^-\}_{j=1}^{n_-}$, sodass $\text{Im}(x_j^+) > \gamma$ und $\text{Im}(x_j^-) < -\gamma$ gilt. Führt man die Funktionen

$$\begin{aligned} \alpha^{(+)}(x) = e^{-\frac{1}{T}(u_1(x)+u_1(x-i\gamma))} = e^{-\frac{h}{T}} & \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x-x_j^h)}{\sin(x-x_j^h-i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x-x_j^c-i\gamma)}{\sin(x-x_j^c+i\gamma)} \right] \\ & \times \left[\prod_{j=1}^{n_+} \frac{\sin(x-x_j^+-i\gamma)}{\sin(x-x_j^++i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x-x_j^- - 2i\gamma)}{\sin(x-x_j^-)} \right] \end{aligned} \quad (6.49)$$

sowie

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)}(x) = e^{-\frac{1}{T}u_1(x)} = (-1)^k e^{-\frac{\varepsilon(x)}{T} - \sum_{j=1}^{n_h} \varphi(x, x_j^h)} & \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x-x_j^c)}{\sin(x-x_j^c+i\gamma)} \right] \\ & \times \left[\prod_{j=1}^{n_+} \frac{\sin(x-x_j^+)}{\sin(x-x_j^++i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x-x_j^- - i\gamma)}{\sin(x-x_j^-)} \right] \end{aligned} \quad (6.50)$$

und $\alpha^{(-)}(x) = \alpha^{(+)}(x+i\gamma)$ ein, so wird Gleichung (6.48) zu

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^{(+)}(x) & \text{Im } x > \gamma \\ \alpha^{(0)}(x) + \alpha^{(+)}(x) & 0 < \text{Im } x < \gamma \\ \alpha^{(0)}(x) & -\gamma < \text{Im } x < 0 \\ \left[\frac{1}{\alpha^{(0)}(x)} + \frac{1}{\alpha^{(-)}(x)} \right]^{-1} & -2\gamma < \text{Im } x < -\gamma \\ \alpha^{(-)}(x) & \text{Im } x < -2\gamma \end{cases} . \quad (6.51)$$

Diese explizite Darstellung wird im folgenden Abschnitt benutzt, um ausgehend von Gleichung (4.5) die Anregungen der Quantentransfermatrix zu klassifizieren und die „higher-level“ Bethe-Ansatz-Gleichungen herzuleiten.

6.3 Higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen für endliche Magnetfelder

In diesem Abschnitt soll Gleichung (4.5) für $h > 0$ und $T \rightarrow 0_+$ diskutiert werden. Die Gleichungen für die verschiedenen Arten von Wurzeln (Löcher sowie nahe und ferne Wurzeln) müssen gemäß Gleichung (6.51) analysiert werden.

Ferne Wurzeln x_j^+ befinden sich im Bereich $\text{Im } x > \gamma$. Gemäß Gleichung (6.51) sind sie für $T \rightarrow 0_+$ Nullstellen der Funktion $1 + \alpha^{(+)}$. Aufgrund des Vorfaktors $e^{-h/T}$ verschwindet die Funktion $\alpha^{(+)}$ punktweise für $T \rightarrow 0_+$. Sei $x_\ell^+ \in \{x_j^+\}_{j=1}^{n_+}$ die ferne Wurzel mit dem größten Imaginärteil,

$$\text{Im } x_\ell^+ \geq \text{Im } x_j^+, \quad j = 1, \dots, n_+. \quad (6.52)$$

Damit x_ℓ^+ eine Wurzel von $1 + \alpha^{(+)}$ sein kann, muss sie nahe an einem Pol von $\alpha^{(+)}(x)$ liegen. Die einzigen möglichen Pole von $\alpha^{(+)}(x)$ in der Region $\text{Im } x > \gamma$ sind bei $x_j^+ - iy$. Diese können jedoch wegen (6.52) nicht nahe bei x_ℓ^+ liegen. Folglich kann x_ℓ^+ nicht existieren, d.h.

$$n_+ = 0. \quad (6.53)$$

Nahe Wurzeln x_j^c befinden sich im Streifen $0 < \text{Im } x < \gamma$. Mit den Formeln aus Anhang D.4 folgt

$$e^{-\varphi(x, x^h)} = e^{-i(\pi/2 + x - x^h)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2[(2k-1)\gamma - i(x - x^h)]})(1 - e^{-2[2k\gamma + i(x - x^h)]})}{(1 - e^{-2[(2k-1)\gamma + i(x - x^h)]})(1 - e^{-2[2k\gamma - i(x - x^h)]})}. \quad (6.54)$$

Man erkennt, dass diese Funktion eine Nullstelle bei $x - x^h = -iy$ und eine Polstelle bei $x - x^h = iy$ besitzt. Da dies die einzigen Null- und Polstellen im Bereich $-2\gamma < \text{Im } x < \gamma$ sind, folgt dass

$$A(x) = e^{-\sum_{j=1}^{n_h} \varphi(x, x_j^h)} \prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h - iy)}{\sin(x - x_j^h + iy)} \quad (6.55)$$

analytisch und ungleich Null in diesem Streifen ist. Damit nimmt die Bestimmungsgleichung der nahen Wurzeln $\alpha^{(0)}(x) + \alpha^{(+)}(x) = -1$ die Form

$$\begin{aligned} & (-1)^k A(x) e^{-\frac{\varepsilon(x)}{T}} \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h + iy)}{\sin(x - x_j^h - iy)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c)}{\sin(x - x_j^c + iy)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x - x_j^- - iy)}{\sin(x - x_j^-)} \right] \\ & + e^{-\frac{h}{T}} \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h)}{\sin(x - x_j^h - iy)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c - iy)}{\sin(x - x_j^c + iy)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x - x_j^- - 2iy)}{\sin(x - x_j^-)} \right] = -1 \end{aligned} \quad (6.56)$$

an, wobei bereits $n_+ = 0$ eingesetzt wurde.

Nehme zunächst an, dass keiner der Faktoren $\sin(x - x_j^c)$ im Zähler des ersten Terms auf der linken Seite von (6.56) durch einen Faktor $\sin(x - x_j^h - iy)$ im Nenner gekürzt wird (keine „exakten Teilchen-Loch-Strings“). Dann verschwindet der erste Term auf der linken Seite für $x \in \{x_j^c\}_{j=1}^{n_c}$, während der zweite Term punktweise verschwindet für $T \rightarrow 0_+$. Schließt man also die Existenz exakter Strings aus, so können nahe Wurzeln nur in der Nähe der Punkte $x_j^h + iy$ existieren³. Dies bedeutet, dass für jedes x_j^c ein $k \in \{1, \dots, n_h\}$ existiert, sodass

$$x_j^c = x_k^h + iy + i\delta_k \quad (6.57)$$

gilt, wobei $\delta_k \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0_+$. Man kann zeigen [44], dass die Annahme, dass keine zwei Teilchen oder Löcher exponentiell nahe beieinander sind („Pauli-Prinzip“), die Existenz exakter Strings ausschließt. Nehme an, dass dieses „Pauli-Prinzip“ erfüllt ist, sodass keine exakten Strings auftreten.

³Man beachte, dass die Annahme gemacht wurde (vgl. Fußnote 2 auf S. 85), dass die x_j^c von der Integrationskontur entfernt sind, sodass $\sin(x_m^c - x_j^c + iy)$ nicht klein werden kann.

Ferne Wurzeln x_j^- befinden sich in der Region $\text{Im } x < -\gamma$. Im Streifen $-2\gamma < \text{Im } x < -\gamma$ lautet die Bestimmungsgleichung nach Gleichung (6.51)

$$\begin{aligned} 1/a(x) &= 1/a^{(0)}(x) + 1/a^{(-)}(x) \\ &= \frac{(-1)^k}{A(x)} e^{\frac{\varepsilon(x)}{T}} \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h - i\gamma)}{\sin(x - x_j^h + i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c + i\gamma)}{\sin(x - x_j^c)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x - x_j^-)}{\sin(x - x_j^- - i\gamma)} \right] \\ &\quad + e^{\frac{h}{T}} \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h)}{\sin(x - x_j^h + i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c + 2i\gamma)}{\sin(x - x_j^c)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x - x_j^- + i\gamma)}{\sin(x - x_j^- - i\gamma)} \right] = -1. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Da exakte Strings ausgeschlossen wurden, verschwindet der erste Term für $x = x_j^-$, $j = 1, \dots, n_-$, sodass die fernen Wurzeln x_j^- durch die Gleichung

$$e^{-\frac{h}{T}} \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h + i\gamma)}{\sin(x - x_j^h)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c)}{\sin(x - x_j^c + 2i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x - x_j^- - i\gamma)}{\sin(x - x_j^- + i\gamma)} \right] = -1 \quad (6.59)$$

bestimmt sind. Dieselbe Gleichung ergibt sich für die fernen Wurzeln x_j^- im Bereich $\text{Im } x_j^- < -2\gamma$. Die linke Seite der Gleichung verschwindet punktweise $T \rightarrow 0_+$, sodass sich die fernen Wurzeln x_j^- den Polen bei $x_k^- - i\gamma$ oder $x_m^c - 2i\gamma$ annähern müssen. Wähle nun die ferne Wurzel x_ℓ^- mit dem größten Imaginärteil, d.h. $\text{Im } x_\ell^- \geq \text{Im } x_j^-$ für $j \in \{1, \dots, n_-\}$. Dann kann sich x_ℓ^- nicht in der Nähe von $x_j^- - i\gamma$ befinden. Folglich muss x_ℓ^- in der Nähe von $x_m^c - 2i\gamma$ sein für ein $m \in \{1, \dots, n_c\}$. Damit folgt, dass der Faktor $\sin(x_m^c - x_\ell^- - 2i\gamma)$ im Zähler von $a^{(+)}(x_m^c)$ klein ist und aufgrund der Bestimmungsgleichung $a^{(+)}(x_m^c) = -1$ durch einen kleinen Faktor $\sin(x_m^c - x_n^h - i\gamma)$ für ein $n \in \{1, \dots, n_h\}$ kompensiert werden muss⁴. Damit bilden x_ℓ^- , x_m^c und x_n^h einen Dreier-String, sodass der Faktor $\sin(x_\ell^- - x_n^h + i\gamma)$ in $a^{(-)}(x_\ell^-)$ ebenfalls klein wird. Damit x_ℓ^- , x_m^c und x_n^h ihre jeweiligen Bestimmungsgleichungen erfüllen können, müssen die beiden Gleichungen

$$\frac{x_\ell^- - x_m^c + 2i\gamma}{x_\ell^- - x_n^h + i\gamma} = 1 + \frac{x_n^h - x_m^c + i\gamma}{x_\ell^- - x_n^h + i\gamma} = \mathcal{O}(e^{-h/T}) \quad (6.60a)$$

$$\frac{x_m^c - x_\ell^- - 2i\gamma}{x_m^c - x_n^h - i\gamma} = 1 - \frac{x_\ell^- - x_n^h + i\gamma}{x_n^h - x_m^c + i\gamma} = \mathcal{O}(e^{h/T}) \quad (6.60b)$$

erfüllt sein. Dies stellt einen Widerspruch dar, sodass x_ℓ^- nicht existieren kann. Es folgt, dass keine fernen Wurzeln x_j^- existieren können, d.h.

$$n_- = 0. \quad (6.61)$$

Schließlich müssen noch die möglichen Lochpositionen bestimmt werden. Per Definition liegt ein Loch x_j^h im Streifen $-\gamma < \text{Im } x < 0$, und muss gemäß (6.51) für tiefe Temperaturen die Gleichung $1 + a^{(0)}(x) = 0$ erfüllen. Explizit lautet die Gleichung

$$(-1)^k A(x) e^{-\frac{\varepsilon(x)}{T}} \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h + i\gamma)}{\sin(x - x_j^h - i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c)}{\sin(x - x_j^c + i\gamma)} \right] = -1, \quad (6.62)$$

⁴Da die x_j^c von der Integrationskontur entfernt sind, kann $\sin(x_m^c - x_j^c + i\gamma)$ nicht klein werden (vgl. Fußnote 3 auf S. 90).

wobei bereits $n_- = n_+ = 0$ gesetzt wurde. Folglich kann ein Loch nur in der Nähe der Kurve $\text{Re } \varepsilon(x) = 0$ oder in der Nähe des Punktes $x_j^c - iy$ existieren, falls dieser Punkt in einem Bereich liegt, in dem $\text{Re } \varepsilon > 0$ gilt (in diesem Fall ist $e^{-\varepsilon(x)/T}$ klein). Man beachte, dass der letzte Fall mit Gleichung (6.57) konsistent ist.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass keine fernen Wurzeln existieren und dass jede nahe Wurzel Teil eines Teilchen-Loch-Strings ist. Damit folgen die beiden Gleichungen

$$e^{-\frac{h}{T}} \left[\prod_{k=1}^{n_h} \frac{\sin(x_j^c - x_k^h)}{\sin(x_j^c - x_k^h - iy)} \right] \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{\sin(x_j^c - x_k^c - iy)}{\sin(x_j^c - x_k^c + iy)} \right] = -1, \quad (6.63)$$

$j = 1, \dots, n_c,$

$$(-1)^k e^{-\frac{\varepsilon(x_j^h)}{T} - \sum_{k=1}^{n_h} \varphi(x_j^h, x_k^h)} \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{\sin(x_j^h - x_k^c)}{\sin(x_j^h - x_k^c + iy)} \right] = -1, \quad (6.64)$$

$j = 1, \dots, n_h,$ mit $n_h = 2n_c + 2s$ (vgl. (6.41)) und

$$x_j^c = x_j^h + iy + i\delta_j, \quad j = 1, \dots, n_c. \quad (6.65)$$

Hierbei wurde die Nummerierung der Löcher angepasst.

Wie sich zeigt, sind die δ_j exponentiell klein, sodass die in Teilchen-Loch-Strings gebundenen Löcher $x_j^h, j = 1, \dots, n_c$ eliminiert werden können⁵. Führe nun die Notation

$$\begin{aligned} y_j &= x_j^c, \quad j = 1, \dots, n_c, \\ x_j &= x_{j+n_c}^h, \quad j = 1, \dots, n_c + 2s \end{aligned} \quad (6.66)$$

für die verbleibenden Freiheitsgrade ein. Setzt man (6.65) und (6.66) in (6.63) ein, so folgt

$$\delta_j \sim \text{sh}(\gamma) e^{-\frac{h}{T}} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_c} \frac{\sin(y_j - y_k - iy)}{\sin(y_j - y_k)} \right] \left[\prod_{k=1}^{n_c+2s} \frac{\sin(y_j - x_k)}{\sin(y_j - x_k - iy)} \right]. \quad (6.67)$$

Dies ist in konsistenter Weise $\mathcal{O}(e^{-h/T})$ falls keine zwei y_j oder x_j exponentiell nahe beieinander sind.

Setzt man (6.65) und (6.66) in (6.64) ein und benutzt (6.67) sowie die Funktionalgleichungen (D.11) und (D.20), so erhält man

$$e^{-\frac{\varepsilon(x_j)}{T} + \sum_{k=1}^{n_c} \varphi(x_j, y_k) - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \varphi(x_j, x_k)} = (-1)^{k+1} + \mathcal{O}(T^\infty), \quad (6.68a)$$

$$e^{-\frac{\varepsilon(y_\ell)}{T} + \sum_{k=1}^{n_c} \varphi(y_\ell, y_k) - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \varphi(y_\ell, x_k)} = (-1)^{k+1} + \mathcal{O}(T^\infty), \quad (6.68b)$$

wobei $j = 1, \dots, n_c + 2s$ und $\ell = 1, \dots, n_c$. Nimmt man den Logarithmus der obigen Gleichungen, so folgt

Lemma 6.3.1. *Higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen für $h > 0$. Bis auf Korrekturen der Ordnung T^∞ sind die unabhängigen Löcher $x_j, j = 1, \dots, n_c + 2s$ und die in Teilchen-Loch-Strings gebundenen*

⁵Alternativ könnten natürlich auch die Teilchen $x_j^c, j = 1, \dots, n_c$ zugunsten aller $2n_c + 2s$ Löcher eliminiert werden.

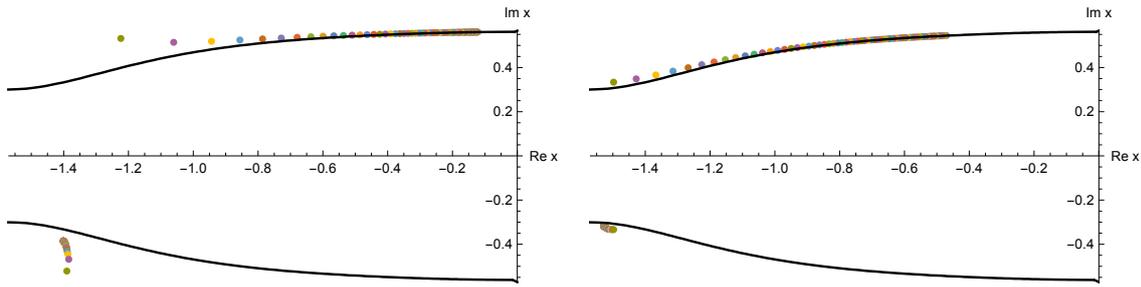


Abbildung 6.2: Einfache Teilchen-Loch-Anregung ($s = 0$, $n_c = 1$) gemäß Gleichung (6.69). Links $T/J = 0.1$, rechts $T/J = 0.02$. $h/h_\ell = 2/3$, $\Delta = 1.7$ (d.h. $\gamma/2 = 0.562$), $h_\ell/J = 0.76$. Abgebildet sind Teilchen-Loch-Paare mit festem $n = 1$ und variablem m zwischen -1 und -70 . Die Wechselwirkung mit dem Teilchen beeinflusst leicht die Lochposition. Die schwarzen Linien kennzeichnen die Kurven $\text{Re } \varepsilon(x) = 0$.

Teilchen y_ℓ , $\ell = 1, \dots, n_c$ durch die higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen

$$\frac{\varepsilon(x_j)}{T} = \pi i n + \sum_{k=1}^{n_c} \varphi(x_j, y_k) - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \varphi(x_j, x_k), \quad (6.69a)$$

$$\frac{\varepsilon(y_\ell)}{T} = \pi i m + \sum_{k=1}^{n_c} \varphi(y_\ell, y_k) - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \varphi(y_\ell, x_k) \quad (6.69b)$$

bestimmt, wobei n, m gerade bzw. ungerade sind falls k ungerade bzw. gerade ist. Außerdem gilt per Definition $-\gamma < \text{Im } x_j < 0$ und $0 < \text{Im } y_\ell < \gamma$.

Die higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen (6.69) können einfach numerisch gelöst werden. Ein einfaches Beispiel ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Es zeigt 70 verschiedene Teilchen-Loch-Paare ($s = 0$, $n_c = 1$). Die Quantenzahl n des Lochs ist immer gleich 1 und die Quantenzahl m des Teilchens variiert von -1 bis -70 . Teilchen und Löcher desselben Paares sind durch Punkte derselben Farbe gekennzeichnet.

Im Limes $T \rightarrow 0_+$ entkoppeln die higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen (6.69), und $i\pi n T$ sowie $i\pi m T$ werden zu unabhängigen kontinuierlichen Variablen, sodass Teilchen und Löcher zu *freien Parametern* auf den Kurven

$$\text{Re } \varepsilon(y) = 0, \quad 0 < \text{Im } y < \gamma, \quad (6.70a)$$

$$\text{Re } \varepsilon(x) = 0, \quad -\gamma < \text{Im } x < 0 \quad (6.70b)$$

werden (vgl. auch Abbildung 6.2). Diese Kurven sind in Abbildung 6.3 dargestellt.

Eine numerische Untersuchung des Spektrums für endliche Trotterzahlen (vgl. Anhang B in [44]) stützt die Vermutung, dass alle Anregungen der Quantentransfermatrix, für die das Verhältnis der Eigenwerte im Limes $T \rightarrow 0_+$ nicht verschwindet, von der hier diskutierten Form sind. Dies bedeutet, dass sich alle relevanten Anregungen der Quantentransfermatrix für $T \rightarrow 0_+$ in der massiven Phase bei $h > 0$ als Teilchen-Loch-Anregungen interpretieren lassen. Dies stellt eine bemerkenswerte Vereinfachung gegenüber den Anregungen des Hamiltonoperators (vgl. Kapitel 5) dar.

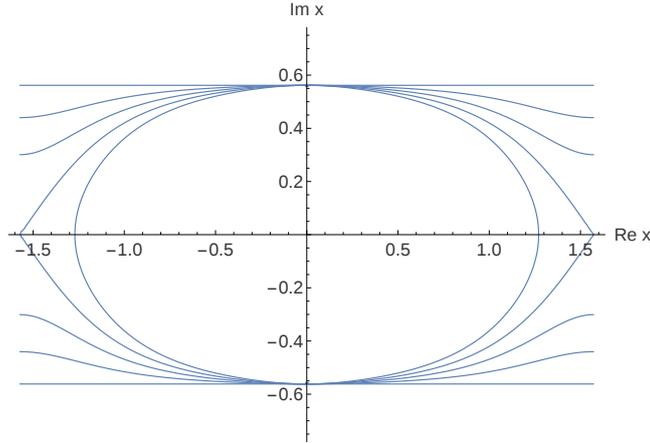


Abbildung 6.3: Die Kurven $\text{Re } \varepsilon(x) = 0$ für verschiedene Werte des Magnetfelds h . Im hier gezeigten Beispiel ist $\Delta = 1.7$, $h_\ell/J = 0.76$. Das Magnetfeld nimmt ausgehend von der inneren zur äußeren Kurve ab: $h/h_\ell = 1.34, 1, 2/3, 1/3, 0$. Im masselosen Bereich $h_\ell < h < h_u$ sind die Kurven geschlossen und schneiden die reelle Achse bei den Fermi-Punkten $\pm Q$ (vgl. Abschnitt 4.8). Bei Erreichen des unteren kritischen Feldes $h = h_\ell$ bilden sich zwei Spitzen. Im massiven Bereich $0 < h < h_\ell$, welcher in diesem Kapitel untersucht wird, öffnet sich eine Lücke.

6.4 Higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen für verschwindendes Magnetfeld

In diesem Abschnitt soll die Analyse des vorhergehenden Abschnitts für den Fall $h = 0$ wiederholt werden. Nehme erneut an, dass keine exakten Strings auftreten. Für $h = 0$ erhält man für die Funktion $\alpha^{(+)}$ den Ausdruck

$$\alpha^{(+)}(x) = \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h)}{\sin(x - x_j^h - iy)} \right] \times \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c - iy)}{\sin(x - x_j^c + iy)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_+} \frac{\sin(x - x_j^+ - iy)}{\sin(x - x_j^+ + iy)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x - x_j^- - 2iy)}{\sin(x - x_j^-)} \right]. \quad (6.71)$$

Da keine exakten Strings auftreten, gilt $\alpha^{(0)}(x_j^c) = 0$, sodass nahe Wurzeln und ferne Wurzeln x_j^+ durch die Gleichungen

$$\alpha^{(+)}(x_j^c) = -1, \quad \alpha^{(+)}(x_j^+) = -1 \quad (6.72)$$

bestimmt sind. Dies bedeutet, dass in diesem Fall die Existenz ferner Wurzeln x_j^+ nicht ausgeschlossen werden kann. Außerdem kann man nicht schließen, dass die nahen Wurzeln wie bei $h > 0$ Bestandteil eines Teilchen-Loch-Strings sind. In ähnlicher Weise folgt, dass ferne Wurzeln x_j^- existieren können und durch die Gleichung

$$\alpha^{(-)}(x_j^-) = -1 \quad (6.73)$$

festgelegt sind, wobei $\alpha^{(-)}(x) = \alpha^{(+)}(x + iy)$ ist.

Die Lochparameter müssen der Gleichung

$$\alpha^{(0)}(x_j^h) = -1 \quad (6.74)$$

genügen, wobei

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)}(x) = & (-1)^k A(x) e^{-\frac{\varepsilon(x)}{T}} \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h + iy)}{\sin(x - x_j^h - iy)} \right] \\ & \times \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c)}{\sin(x - x_j^c + iy)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_-} \frac{\sin(x - x_j^- - iy)}{\sin(x - x_j^-)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_+} \frac{\sin(x - x_j^+)}{\sin(x - x_j^+ + iy)} \right]. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Offenbar können Löcher in der Nähe der Linie $\text{Im } x = -\gamma/2$ existieren, da dort $\text{Re } \varepsilon(x) = 0$ gilt. Betrachte nun die Situation entfernt von dieser Linie. Nehme an, dass $\text{Re } \varepsilon(x_j^h) < 0$. Damit (6.74) gilt, muss es ein x_k^- geben, sodass $x_j^h - x_k^- - iy \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0_+$. Dies bedeutet aber, dass $\alpha^{(-)}(x_k^-) \rightarrow 0$, was im Widerspruch zu (6.73) steht. Nehme nun an, dass $\text{Re } \varepsilon(x_j^h) > 0$. Dann kann (6.74) nur erfüllt sein, falls es ein x_k^c gibt, sodass $x_j^h - x_k^c + iy \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0_+$. Dies bedeutet aber, dass $1/\alpha^{(+)}(x_k^c) \rightarrow 0$, was im Widerspruch zu (6.72) steht.

Folglich können Löcher nur in der Nähe der Linie $\text{Im } x = -\gamma/2$ existieren. Im Limes $T \rightarrow 0_+$ füllen die möglichen Lochpositionen das Intervall $-iy/2 + [-\pi/2, \pi/2]$ dicht. Dies bedeutet, dass die Löcher zu freien Parametern werden für $T \rightarrow 0_+$, während die nahen und fernen Wurzeln durch die (im Limes $T \rightarrow 0_+$ endlichen) higher-level Gleichungen (6.72) und (6.73) festgelegt sind. Dies steht im starken Gegensatz zu dem Fall $h > 0$, in dem sowohl Teilchen- als auch Lochparameter zu freien Parametern werden für $T \rightarrow 0_+$.

Auf der anderen Seite besteht eine große Ähnlichkeit mit der Klassifizierung der Anregungen des Hamiltonoperators (vgl. Kapitel 5 bzw. [4, 132]). Nimmt man analog zu Kapitel 5 die Umparametrisierung

$$\{\chi_j\}_{j=1}^{n_\chi} = \{x_j^c - iy/2\}_{j=1}^{n_c} \cup \{x_j^+ - iy/2\}_{j=1}^{n_+} \cup \{x_j^- + iy/2\}_{j=1}^{n_-} \quad (6.76)$$

vor, so können die higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen (6.72) und (6.73) in die Form

$$-1 = \left[\prod_{k=1}^{n_h} \frac{\sin(\chi_j - x_k^h + iy/2)}{\sin(\chi_j - x_k^h - iy/2)} \right] \left[\prod_{k=1}^{n_\chi} \frac{\sin(\chi_j - \chi_k - iy)}{\sin(\chi_j - \chi_k + iy)} \right], \quad j = 1, \dots, n_\chi, \quad (6.77)$$

gebracht werden, wobei

$$n_\chi = n_c + n_f = \frac{n_h}{2} - s. \quad (6.78)$$

Bemerkenswerterweise stimmt Gleichung (6.77) mit den higher-level Gleichungen der gewöhnlichen Transfermatrix überein (vgl. (5.25) in Kapitel 5).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sich das Spektrum der Quantentransfermatrix in den Fällen $h = 0$ und $h > 0$ drastisch unterscheidet. Für $h = 0$ sind die $2n_c + 2s$ Lochparameter frei und die Teilchenparameter Lösungen nicht-trivialer higher-level Gleichungen. Im Fall $h > 0$ ergibt sich eine Reorganisation der Freiheitsgrade: $n_c + 2s$ Löcher und n_c Teilchen werden zu freien Parametern auf zwei Kurven in der komplexen Ebene. Für die Formfaktorentwicklung bedeutet dies, dass für den Fall $h = 0$ eine ähnliche Komplexität wie im Falle der gewöhnlichen Transfermatrix zu erwarten ist. Für $h > 0$ hingegen besteht die Möglichkeit, eine strukturell einfachere Formfaktorreihe herzuleiten.

6.5 Tieftemperaturanalyse der Eigenwerte

Betrachte nun wieder den Fall $h > 0$. Ausgehend von Gleichung (6.2), welche den Eigenwert als Funktion der Bethe-Wurzeln beschreibt, kann der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \left(\frac{\cos(i\gamma/2 + x)}{\cos(i\gamma/2 - x)} \right)^d \left[\prod_{j=1}^{n_h} \frac{\sin(x - x_j^h - i\gamma/2)}{\sin(x - x_j^h + i\gamma/2)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - x_j^c + 3i\gamma/2)}{\sin(x - x_j^c - i\gamma/2)} \right] \\ &\times \exp \left\{ \frac{h}{2T} - \int_{\mathcal{C}} dy K(x - y|\gamma/2) \ln_{\mathcal{C}}(1 + a(y)) \right\} \cdot \begin{cases} 1, & -\gamma^-/2 < \text{Im}(x) < \gamma/2 \\ 1 + a(x - i\gamma/2), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.79)$$

hergeleitet werden. Dies ist noch der allgemeine Ausdruck für Λ , welcher für beliebige Temperaturen und Magnetfelder $h \geq 0$ gültig ist, falls keine fernen Wurzeln vorhanden sind. Falls letztere auftreten, ist die rechte Seite von (6.79) um einen Faktor

$$\prod_{j=1}^{n_f} \frac{\sin(x - x_j^f + i\gamma/2)}{\sin(x - x_j^f - i\gamma/2)} \quad (6.80)$$

zu ergänzen.

Im Tieftemperaturlimit bei $h > 0$ gibt es keine fernen Wurzeln und die nahen Wurzeln bilden Strings mit einer Teilmenge der Löcher. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 6.2 erhält man die Hilfsfunktion auf der Kontur \mathcal{C} ,

$$a(x) = (-1)^k e^{-\frac{\varepsilon(x)}{T} + \sum_{k=1}^{n_c} \varphi(x, y_k) - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \varphi(x, x_k)} \left(1 + \mathcal{O}(T^\infty) \right), \quad x \in \mathcal{C}. \quad (6.81)$$

Benutzt man nun (6.65) und (6.66) sowie die Tatsache, dass $a^{-1}(x) = \mathcal{O}(T^\infty)$ für $x \in \mathcal{C}_+$ und $a(x) = \mathcal{O}(T^\infty)$ für $x \in \mathcal{C}_-$, so folgt mit Gleichung (6.79)

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \left(\frac{\cos(i\gamma/2 + x)}{\cos(i\gamma/2 - x)} \right)^s \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{\sin(x - x_j - i\gamma/2)}{\sin(x - x_j + i\gamma/2)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - y_j + i\gamma/2)}{\sin(x - y_j - i\gamma/2)} \right] \\ &\times \exp \left\{ \frac{h}{2T} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x - y|\gamma/2) \ln a(y) \right\} \cdot \begin{cases} 1, & -\gamma^-/2 < \text{Im}(x) < \gamma/2 \\ 1 + a(x - i\gamma/2), & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Hierbei wurden exponentiell kleine Korrekturen in T vernachlässigt.

Wie sich zeigen wird, entspricht der Fall $n_c = s = k = 0$ dem dominanten Zustand, dessen Eigenwert mit $\Lambda_0(x)$ bezeichnet wird. In Vorbereitung auf die Berechnung von Formfaktoren wird die Funktion ρ definiert durch

$$\rho_n(x|\alpha) = \frac{\Lambda_n(x + i\gamma/2|\alpha)}{\Lambda_0(x + i\gamma/2)}. \quad (6.83)$$

Hierbei ist der Twistparameter α definiert durch $h' - h = -2\alpha\gamma T$, wobei h' das Magnetfeld des

angeregten Zustands ist. Mit Gleichung (6.81) erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned} \rho_n(x|\alpha) &= \left(\frac{\cos(i\gamma + x)}{\cos(x)} \right)^s \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{\sin(x - x_j)}{\sin(x - x_j + i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x - y_j + i\gamma)}{\sin(x - y_j)} \right] (-1)^k \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x - y + i\gamma/2|\gamma/2) \left[\sum_{j=1}^{n_c} \varphi(y, y_j) - \sum_{j=1}^{n_c+2s} \varphi(y, x_j) \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ (-\gamma\alpha + i\pi k) \mathbf{1}_{\text{Im}(x) \notin (-\gamma, 0)} \right\} \cdot \begin{cases} 1, & -\gamma^- < \text{Im}(x) < 0 \\ \frac{1+a_n(x|\alpha)}{1+a(x)}, & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Das in der zweiten Zeile auftretende Integral ist vom Fouriertyp und kann im Prinzip mit den Formeln aus Anhang D.4 berechnet werden. Für die Korrelationslängen ist jedoch der Fall $x = -i\gamma/2$ relevant. In diesem Fall vereinfacht sich (6.84) zu

$$\begin{aligned} \rho_n(-i\gamma/2|\alpha) &= (-1)^k \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{\sin(x_j + i\gamma/2)}{\sin(x_j - i\gamma/2)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(y_j - i\gamma/2)}{\sin(y_j + i\gamma/2)} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx K(x|\gamma/2) \left[\sum_{k=1}^{n_c} \varphi(x, y_k) - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \varphi(x, x_k) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Das hier auftretende Integral kann mit Hilfe des „dressed function trick“ berechnet werden (vgl. Fußnote 4 auf S. 143). Dafür sei an die Definition des bekleideten Impulses p erinnert (vgl. Anhang D.2),

$$p(x) = \frac{p_0(x)}{2\pi} - \frac{\theta(x - \pi/2)}{4\pi i} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x - y)p(y) \quad (6.86)$$

mit $p_0(x) = -i\theta(x|\gamma/2)$. Kombiniert man (6.86) mit (6.34b), so folgt

$$p(x) + \frac{\varphi(x, \pi/2)}{2\pi i} = \frac{p_0(x)}{2\pi} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x - y) \left(p(y) + \frac{\varphi(y, \pi/2)}{2\pi i} \right). \quad (6.87)$$

Integriert man nun in Gleichung (6.85) partiell und wendet den dressed function trick an, so erhält man

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx K(x|\gamma/2)\varphi(x, z) = i\pi + 2\pi i p(z) - i p_0(z). \quad (6.88)$$

Setzt man die letzte Gleichung in (6.85) ein, so erhält man das Verhältnis der Eigenwerte als explizite Funktion der Teilchen- und Lochparameter y_j und x_k , welche durch die higher-level Bethe-Ansatz-Gleichungen (6.69) bestimmt sind:

$$\begin{aligned} \rho_n(-i\gamma/2|\alpha) &= (-1)^k \exp \left\{ 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n_c} p(y_j) - \sum_{j=1}^{n_c+2s} p(x_j) \right] \right\} \\ &= (-1)^k \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\vartheta_1(y_j - i\gamma/2 | q^2)}{\vartheta_4(y_j - i\gamma/2 | q^2)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{\vartheta_4(x_j - i\gamma/2 | q^2)}{\vartheta_1(x_j - i\gamma/2 | q^2)} \right]. \end{aligned} \quad (6.89)$$

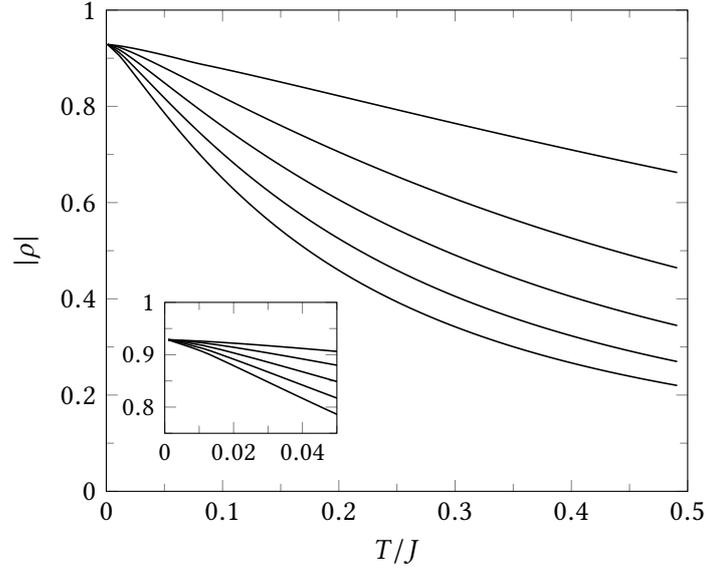


Abbildung 6.4: Verhalten der Funktion $|\rho|$ als Funktion der Temperatur für eine einfache Teilchen-Loch-Anregung. Die Teilchen- und Lochparameter ergeben sich durch Lösen der higher-level Gleichungen (6.69) für $n = 1, m = -1, -3, -5, -7, -9$ (von oben nach unten) und werden anschließend in Gleichung (6.89) eingesetzt. Für $T \rightarrow 0_+$ tritt Entartung auf und das Spektrum wird dicht. Die Parameter in diesem Beispiel sind $h/h_\ell = 2/3, \Delta = 1.7, h_\ell/J = 0.76, \alpha = 0$.

Diese Gleichung ist das Hauptergebnis dieses Abschnitts. Man beachte, dass die Abhängigkeit vom Twistparameter α vollständig in den Teilchen- und Lochparametern absorbiert wurde. Mit Gleichung (2.29) folgt somit, dass die Magnetisierung wie erwartet verschwindet, $\langle \sigma_1^z \rangle = 0$.

Setzt man $s = n_c = 0$, so erhält man $\rho_n(-i\gamma/2|\alpha) = (-1)^k$. Für alle anderen Zustände können nicht sowohl s als auch n_c verschwinden. Unter Berücksichtigung von (D.7) und (6.89) folgt, dass $|\rho_n(-i\gamma/2|\alpha)| < 1$ gilt für alle anderen Zustände. Folglich muss einer der Zustände mit $s = n_c = 0$ der dominante Zustand sein. Durch numerische Studien bei endlicher Trotterzahl (vgl. z.B. Anhang B von [44]) findet man, dass der dominante Zustand zum Sektor $k = 0$ gehört.

Man erkennt an der Tieftemperaturentwicklung der Funktion u_1 (vgl. Gleichung (6.40)), dass nur die Parität von $k \in \mathbb{Z}$ relevant ist. Folglich liefern analog zu Kapitel 5 die Fälle $k \in \{0, 1\}$ bereits alle inäquivalenten Zustände. Aufgrund von Gleichung (6.89) und der Tatsache, dass nur der $\mathcal{O}(T)$ -Term der higher-level Gleichungen von k abhängt, bewirkt der Parameter $k \in \{0, 1\}$ (analog zum Parameter $\iota \in \{0, 1\}$ aus Kapitel 5) eine zweifache Entartung des Spektrums. Insbesondere gibt es einen Zustand („fast entarteter Zustand“), der vom dominanten Zustand durch eine Lücke der Ordnung T^∞ getrennt ist.

Für endliche Temperaturen bestimmt

$$\rho = \rho_n(-i\gamma/2|\alpha = 0) \quad (6.90)$$

durch die Relation $\xi = -1/\ln(\rho)$ die Korrelationslängen ξ (vgl. Gleichung (1.3)). Durch Lösen der higher-level Gleichungen (6.69) und Einsetzen in (6.89) können die Korrelationslängen berechnet werden. In Abbildung 6.4 ist die Temperaturabhängigkeit des Verhältnisses der Eigenwerte $|\rho|$ für

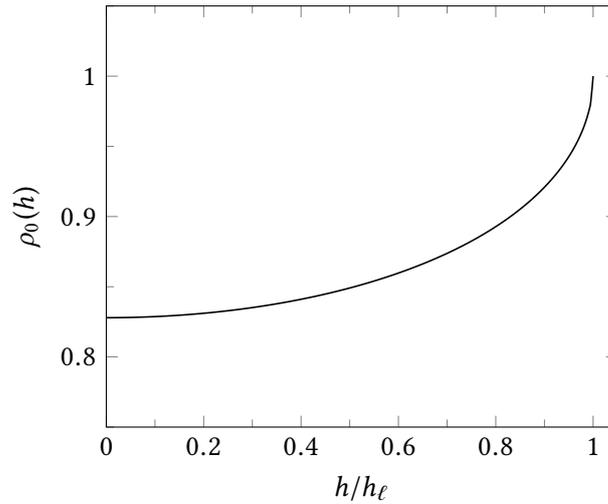


Abbildung 6.5: Magnetfeldabhängigkeit der führenden Korrelationslänge $\rho_0(h)$ für $\Delta = 2$. Die Korrelationslänge ist als Funktion von h monoton wachsend, wobei das Minimum durch (6.92) gegeben ist und das Maximum $\rho_0 = 1$ bei $h = h_\ell$ den Übergang in die masselose Phase markiert.

$s = 0$ und $n_c = 1$ dargestellt. Die zugehörigen Anregungen besitzen die Quantenzahlen (vgl. (6.69)) $n = 1$ und $m = -1, -3, -5, -7, -9$ (von oben nach unten). Der Fall $m = -1$ entspricht der führenden Korrelationslänge. Wie erwartet nimmt $|\rho|$ (und damit $\text{Re } \xi$) ab, wenn die Temperatur zunimmt. Für $T \rightarrow 0_+$ laufen die Kurven zusammen und das Spektrum wird dicht, sodass in der Formfaktorentwicklung unendlich viele Beiträge zu berücksichtigen sind. Die Massenslücke des Modells äußert sich darin, dass der Grenzwert von $|\rho|$ für $T \rightarrow 0_+$ von 1 verschieden ist. Letzterer kann mit der Energie-Impuls-Beziehung (D.14) explizit berechnet werden. Bezeichnet man mit x und y die Positionen von Loch und Teilchen, so gilt nach (6.89) $|\rho| = |e^{2\pi i p(y)}| |e^{-2\pi i p(x)}|$, wobei x und y durch die higher-level Gleichungen (6.69) bestimmt sind. Für $T \rightarrow 0_+$ vereinfachen sich diese (für die führende Korrelationslänge) zu $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0$. Damit kann Gleichung (D.14) nach $e^{2\pi i p}$ aufgelöst werden. Gleichung (D.7) legt dabei fest, welches Vorzeichen der quadratischen Gleichung zum Teilchen- bzw. Lochparameter gehört. Man erhält schließlich

$$\rho_0(h) = \lim_{T \rightarrow 0_+} |\rho| = \left[\sqrt{\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) \left(\frac{h}{h_\ell}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{k^2} - 1\right) \left(1 - \left(\frac{h}{h_\ell}\right)^2\right)} \right]^2, \quad (6.91)$$

wobei $k = k(q)$ der elliptische Modul ist. Die Magnetfeldabhängigkeit von $\rho_0(h)$ ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Für $h = 0$ vereinfacht sich (6.91) zu

$$\rho_0(h = 0) = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = k(q^2). \quad (6.92)$$

Der Vergleich mit (5.85) zeigt, dass der exponentielle Zerfall der Korrelatoren in der antiferromagnetischen massiven Phase bei $T = 0$ und $h = 0$ in der Tat durch den Tieftemperaturlimites der Korrelationslängen (d.h. des Verhältnisses der Eigenwerte) beschrieben wird.

Die kurzreichweitigen Korrelationsfunktionen im massiven Bereich hängen für tiefe Temperaturen nur sehr schwach vom Magnetfeld h ab (vgl. [131]). Es ist davon auszugehen, dass dies auch

asymptotisch für $m \rightarrow \infty$ gilt, sodass (5.85) im gesamten Bereich $0 \leq h < h_\ell$ gelten sollte. Dies steht jedoch im Widerspruch zur expliziten Magnetfeldabhängigkeit der Korrelationslängen (6.91). Wie sich in Abschnitt 6.6 zeigt, sind darüber hinaus auch die Formfaktoren durch die Teilchen- und Lochparameter, welche auf den feldabhängigen Kurven $\text{Re } \varepsilon = 0$ liegen, vom Magnetfeld h abhängig. Dieser scheinbare Widerspruch wird in Abschnitt 6.7 dadurch aufgelöst, dass die Magnetfeldabhängigkeit durch die Summation (bzw. Integration) über das Kontinuum von Zuständen über der Massenkluft herausfällt. Anschaulich finden in der Formfaktorreihe bei $h > 0$ Auslöschungen statt, sodass der exponentielle Zerfall nicht durch $\rho_0(h)$, sondern durch $\rho_0(h = 0) < \rho_0(h)$ beschrieben wird. Das Verhältnis der Eigenwerte der Quantentransformmatrix liefert somit in diesem Fall *nicht* die physikalische Korrelationslänge⁶.

6.6 Tieftemperaturanalyse der Amplituden

In diesem Abschnitt soll die Tieftemperaturanalyse der Amplituden für $h > 0$ durchgeführt werden. Wie in Abschnitt 6.3 begründet, sind die Anregungen der Quantentransformmatrix in diesem Fall charakterisiert durch n_c nahe Wurzeln x_j^c und $2n_c + 2s$ Löcher x_j^h .

Betrachte zunächst den universellen Anteil A der Amplituden (d.h. den ersten bzw. zweiten Faktor in (3.13) bzw. (3.35)),

$$A = \exp \left\{ \int_{\tilde{C}} \frac{dy}{2\pi i} \ln(\rho_n(y|\alpha)) \partial_y \ln \left(\frac{1 + a(y)}{1 + a_n(y|\alpha)} \right) - \sum_{j=1}^{n_c} \left[\ln(\rho_n(x_j^c|\alpha)) + \ln(\rho_n(x_j^c - iy|\alpha)) \right] \right\}, \quad (6.93)$$

wobei $\ln \rho_n$ eine zunächst beliebige Festlegung des Logarithmus ist. In der obigen Gleichung wurde bereits vorausgesetzt, dass keine fernen Wurzeln auftreten. Die Kontur \tilde{C} befindet sich innerhalb der Kontur C (vgl. Abbildung 6.1), sodass die Lochparameter x_j^h außerhalb liegen. Im Folgenden sei $\ln(\rho_n(x|\alpha))$ so gewählt, dass die Verzweigungsschnitte von x_j^h ($j = 1, \dots, n_h$) beginnend durch den Punkt $-\pi/2 - i0$ verlaufen. Damit findet man

$$A = \frac{\prod_{j=1}^{n_h} \rho'_n(x_j^h|\alpha)(1 + a(x_j^h)) / a'_n(x_j^h|\alpha)}{\prod_{j=1}^{n_c} \rho_n(x_j^c|\alpha) \rho_n(x_j^c - iy|\alpha)} \rho_n(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha)^{-s} \times \left(\frac{1 + a_n(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha)}{1 + a(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon)} \right)^{n_h} \exp \left\{ - \int_{C'} \frac{dy}{2\pi i} \frac{\rho'_n(y|\alpha)}{\rho_n(y|\alpha)} \ln_C \left(\frac{1 + a(y)}{1 + a_n(y|\alpha)} \right) \right\}. \quad (6.94)$$

Hierbei ist C' eine Kontur innerhalb von C , sodass das obere Teilstück bei $-\pi/2 - i\epsilon$ (mit einem kleinen $\epsilon > 0$) beginnt.

Gleichung (6.94) ist der Ausgangspunkt für die Tieftemperaturanalyse. Für $T \rightarrow 0$ bilden die Teilchen Strings mit einer Teilmenge der Löcher. Analog zum letzten Abschnitt wird für die verbleibenden Freiheitsgrade die Notation

$$\begin{aligned} y_j &= x_j^c, \quad j = 1, \dots, n_c, \\ x_j &= x_{j+n_c}^h, \quad j = 1, \dots, n_c + 2s, \end{aligned} \quad (6.95)$$

verwendet. Damit ist

$$x_j^h = y_j - iy - i\delta_j, \quad j = 1, \dots, n_c \quad (6.96)$$

⁶Ein ähnliches Phänomen findet sich im 8-Vertex-Modell, vgl. [67].

mit $\delta_j = \mathcal{O}(T^\infty)$. Setzt man dies in Gleichung (6.94) ein, so folgt

$$A = \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{\rho'_n(x_j|\alpha)(1+a(x_j))}{a'_n(x_j|\alpha)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{1}{\rho_n(y_j|\alpha)} \right] (-1)^{n_c} \rho_n(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha)^{-s} \\ \times \left(\frac{1+a_n(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha)}{1+a(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon)} \right)^{2n_c+2s} \exp \left\{ - \int_{\mathcal{C}'} \frac{dy}{2\pi i} \frac{\rho'_n(y|\alpha)}{\rho_n(y|\alpha)} \ln_{\mathcal{C}} \left(\frac{1+a(y)}{1+a_n(y|\alpha)} \right) \right\}. \quad (6.97)$$

Führe nun (für beliebiges x) die Funktion

$$\rho_n^{(0)}(x|\alpha) = \left(\frac{\cos(i\gamma + x)}{\cos(x)} \right)^s \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{\sin(x-x_j)}{\sin(x-x_j+i\gamma)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{\sin(x-y_j+i\gamma)}{\sin(x-y_j)} \right] \\ \times (-1)^k \exp \left\{ (-\gamma\alpha + i\pi k) \mathbf{1}_{\text{Im}(x) \notin (-\gamma, 0)} \right\} \\ \times \exp \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y+i\gamma/2|\gamma/2) \left[\sum_{j=1}^{n_c} \varphi(y, y_j) - \sum_{j=1}^{n_c+2s} \varphi(y, x_j) \right] \right\} \quad (6.98)$$

ein. Dann folgt mit Gleichung (6.84)

$$\rho_n(x|\alpha) = \rho_n^{(0)}(x|\alpha) \cdot \begin{cases} 1, & -\gamma^- < \text{Im}(x) < 0, \\ \frac{1+a_n(x|\alpha)}{1+a(x)}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.99)$$

Somit erhält man

$$\rho_n(y_j|\alpha) = \frac{a'_n(y_j|\alpha)}{1+a(y_j)} \text{res } \rho_n^{(0)}(y_j|\alpha), \quad (6.100)$$

und Gleichung (6.97) wird zu

$$A = \frac{\prod_{j=1}^{n_c+2s} \rho_n^{(0)'}(x_j|\alpha)}{\prod_{j=1}^{n_c} \text{res } \rho_n^{(0)}(y_j|\alpha)} \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{1-a(x_j)/a_n(x_j|\alpha)}{a'_n(x_j|\alpha)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{1-a(y_j)/a_n(y_j|\alpha)}{a'_n(y_j|\alpha)} \right] (-1)^{n_c} \\ \times \rho_n(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha)^{-s} \left(\frac{1+a_n(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha)}{1+a(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon)} \right)^{2n_c+2s} \exp \left\{ - \int_{\mathcal{C}'} \frac{dy}{2\pi i} \frac{\rho'_n(y|\alpha)}{\rho_n(y|\alpha)} \ln_{\mathcal{C}} \left(\frac{1+a(y)}{1+a_n(y|\alpha)} \right) \right\}. \quad (6.101)$$

Im nächsten Schritt muss der Tieftemperaturlimites im obigen Integral durchgeführt werden. Da sich die Kontur \mathcal{C}' innerhalb von \mathcal{C} befindet, kann ρ_n gemäß Gleichung (6.99) durch $\rho_n^{(0)}$ ersetzt werden. Mit einer zu Abschnitt 6.2 analogen Behandlung der Logarithmen folgt schließlich

$$\left(\frac{1+a_n(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha)}{1+a(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon)} \right)^{2n_c+2s} \exp \left\{ - \int_{\mathcal{C}'} \frac{dy}{2\pi i} \frac{\rho'_n(y|\alpha)}{\rho_n(y|\alpha)} \ln_{\mathcal{C}} \left(\frac{1+a(y)}{1+a_n(y|\alpha)} \right) \right\} \\ = \exp \left\{ \int_{-\pi/2-i\epsilon}^{\pi/2-i\epsilon} \frac{dy}{2\pi i} \left(\partial_y \ln \rho_n^{(0)}(y|\alpha) \right) \left(\ln a(y) - \ln a_n(y|\alpha) \right) \right\}. \quad (6.102)$$

Im letzten Schritt soll der in (6.101) auftretende Faktor $\rho_n(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha)^{-s}$ in das Integral (6.102) absorbiert werden. Zu diesem Zweck benutzt man die Identität

$$-s \ln \rho_n^{(0)}(-\frac{\pi}{2} - i\epsilon|\alpha) = -i\pi s(n_c + s) - s \int_{-\pi/2-i\epsilon}^{\pi/2-i\epsilon} \frac{dy}{\pi} \ln \rho_n^{(0)}(y|\alpha) - \int_{-\pi/2-i\epsilon}^{\pi/2-i\epsilon} \frac{dy}{2\pi i} (\partial_y \ln \rho_n^{(0)}(y|\alpha)) 2iys. \quad (6.103)$$

Kombiniert man die Gleichungen (6.101), (6.102) und (6.103), so folgt für den universellen Anteil

$$A = \frac{\prod_{j=1}^{n_c+2s} \rho_n^{(0)'}(x_j|\alpha)}{\prod_{j=1}^{n_c} \text{res} \rho_n^{(0)}(y_j|\alpha)} \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{1 - \alpha(x_j)/\alpha_n(x_j|\alpha)}{\alpha_n'(x_j|\alpha)} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{1 - \alpha(y_j)/\alpha_n(y_j|\alpha)}{\alpha_n'(y_j|\alpha)} \right] \times (-1)^{n_c+s n_c+s} \exp \left\{ -s \int_{-\pi/2-i0}^{\pi/2-i0} \frac{dy}{\pi} \ln \rho_n^{(0)}(y|\alpha) \right\} \times \exp \left\{ \int_{-\pi/2-i0}^{\pi/2-i0} \frac{dy}{2\pi i} (\partial_y \ln \rho_n^{(0)}(y|\alpha)) (\ln \alpha(y) - \ln \alpha_n(y|\alpha) - 2iys) \right\}. \quad (6.104)$$

Hierbei wurde der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ bereits durchgeführt. Die entsprechenden Integrale sind dabei wohldefiniert⁷, die Verschiebung der Kontur um $i0$ ist nur wegen der Eindeutigkeit (und nicht wegen der Existenz) der Integrale wichtig. Dies steht in starkem Gegensatz zu den Amplituden der masselosen Phase, bei denen Integrale auftreten, die mit Vielfachen von $\ln T$ divergieren.

Der Tieftemperaturlimes des universellen Anteils kann folglich in Gleichung (6.104) in einfacher Weise durchgeführt werden. Dazu ersetzt man den Term $\ln \alpha(y) - \ln \alpha_n(y|\alpha) - 2iys$ gemäß Gleichung (6.81) durch seinen Tieftemperaturlimes,

$$\ln \alpha(y) - \ln \alpha_n(y|\alpha) - 2iys = i\pi(k+s) - \gamma\alpha + \sum_{k=1}^{n_c} iy_k - \sum_{k=1}^{n_c+2s} ix_k - \sum_{k=1}^{n_c} \varphi_p(y, y_k) + \sum_{k=1}^{n_c+2s} \varphi_p(y, x_k). \quad (6.105)$$

Hierbei wurde die „periodisierte“ bekleidete Phase φ_p eingeführt,

$$\varphi_p(x, z) = \varphi(x, z) - i \left(\frac{\pi}{2} + x - z \right). \quad (6.106)$$

Weiterhin führt man die Ersetzung

$$\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{1 - \alpha(x_j)/\alpha_n(x_j|\alpha)}{\alpha_n'(x_j|\alpha)} = \prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{1 - e^{-2\pi i F(x_j)}}{\varepsilon'(x_j)/T} \quad (6.107)$$

durch (für y_j gilt eine analoge Formel). Die Funktion F ist gegeben durch

$$2\pi i F(y) = \gamma\alpha - i\pi k - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \varphi(y, x_k) + \sum_{k=1}^{n_c} \varphi(y, y_k). \quad (6.108)$$

Vorausgesetzt, dass der Determinantenanteil und der faktorisierte Anteil der Amplituden endlich bleiben für $T \rightarrow 0$, folgt, dass die Amplituden wie T^{2n_c+2s} verschwinden. An dieser Stelle zeigt sich

⁷Der Nachweis dieser Behauptung erfolgt durch explizite Berechnung der Integrale im weiteren Verlauf dieses Abschnitts.

erneut die Vereinfachung gegenüber der masselosen Phase, in der das Verschwinden der Amplituden durch einen nicht-ganzzahligen Exponenten bestimmt ist. Analog zu Kapitel 5 lassen sich die Amplituden in der massiven Phase somit als „Formfaktordichte“ interpretieren.

Der Ausdruck (6.104) ergibt somit den gesuchten Tieftemperaturlimites der Amplituden, vergleichbar mit den Gleichungen (4.49) und (4.50) in der masselosen Phase. In diesem Fall können jedoch alle auftretenden Integrale *explizit* berechnet werden. Ursächlich hierfür ist die Tatsache, dass ausschließlich Funktionen mit bekannten Fourierreihen über das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ integriert werden. Nach einer längeren Rechnung (vgl. Anhang E) erhält man für den universellen Anteil das Resultat

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{1 - e^{-2\pi i F(y_j)}}{\varepsilon'(y_j)/T} \right] \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \frac{1 - e^{-2\pi i F(x_j)}}{\varepsilon'(x_j)/T} \right] q^{-\alpha(2n_c+s)+s^2} 2^{4s^2} (-1)^{n_c+s(n_c+1)} \\
 &\times \exp \left\{ 2in_c \sum_{k=1}^{n_c+2s} x_k - 2i(n_c + 2s) \sum_{k=1}^{n_c} y_k \right\} \frac{\prod_{j \neq k} \sin(x_{jk}) \prod_{j \neq k} \sin(y_{jk})}{\prod_{j=1}^{n_c+2s} \prod_{k=1}^{n_c} \sin(x_j - y_k) \sin(y_k - x_j)} \\
 &\times \left[\prod_{j=1}^{n_c+2s} \prod_{k=1}^{n_c} \frac{(q^2 e^{2i(y_k-x_j)}, q^4)(q^4 e^{-2i(y_k-x_j)}, q^4)}{(q^2 e^{-2i(y_k-x_j)}, q^4)^3 (q^4 e^{2i(y_k-x_j)}, q^4)^3} \prod_{\sigma=\pm} \frac{(q^2 e^{2i\sigma(y_k-x_j)}, q^4, q^4)^4}{(q^4 e^{2i\sigma(y_k-x_j)}, q^4, q^4)^4} \right] \\
 &\times \left[\prod_{j,k=1}^{n_c} \frac{(q^2 e^{2iy_{jk}}, q^4)(q^4 e^{2iy_{jk}}, q^4)}{(q^2 e^{2iy_{jk}}, q^4, q^4)^4} \right] \\
 &\times \left[\prod_{j,k=1}^{n_c+2s} \frac{(q^2 e^{2ix_{jk}}, q^4)(q^4 e^{2ix_{jk}}, q^4)}{(q^2 e^{2ix_{jk}}, q^4, q^4)^4} \right] \cdot (1 + \mathcal{O}(T)), \quad (6.109)
 \end{aligned}$$

wobei $x_{jk} = x_j - x_k$ und $y_{jk} = y_j - y_k$. Für die Definition der q -Produkte sei an die Gleichungen (5.68) und (5.69) erinnert.

Betrachte im Folgenden den für die longitudinalen Korrelatoren relevanten Fall⁸ $s = 0$. In der Darstellung (3.13) ist somit nur noch der Determinantenanteil D zu berechnen,

$$D = \frac{\det_{dm_+^\alpha, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_{-\alpha}\} \det_{dm_-^\alpha, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_\alpha\}}{\det_{dm_0^\alpha, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}\} \det_{dm, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}\}} \quad (6.110)$$

Die Determinanten des Nenners können analog zu Kapitel 4 behandelt werden,

$$\begin{aligned}
 \det_{dm_0^\alpha, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}\} \det_{dm, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}\} &= \det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}^2 [1 + K] \cdot (1 + \mathcal{O}(T)) \\
 &= \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + q^{2|n|})^2 \cdot (1 + \mathcal{O}(T)) \quad (6.111)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurden in der zweiten Zeile die Ergebnisse aus Kapitel 5 benutzt.

Wähle nun für die Determinanten des Zählers

$$\mathcal{D} := \det_{dm_+^\alpha, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_{-\alpha}\} \det_{dm_-^\alpha, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_\alpha\} \quad (6.112)$$

⁸Falls s dennoch vorkommt, bedeutet dies, dass der entsprechende Ausdruck auch für $s \neq 0$ gültig ist.

analog zu Kapitel 4 die Darstellung (A.32). In der in diesem Abschnitt verwendeten Notation erhält man im Tieftemperaturlimit

$$\mathcal{D} = (1 - q^{-2\alpha})^2 \frac{e^{L_{C_n}[z](\theta_2 - i\gamma)}}{1 - e^{2\pi i F(\theta_2)}} \frac{e^{-L_{C_n}[z](\theta_1 + i\gamma)}}{1 - e^{2\pi i F(\theta_1)}} \det_{d\lambda, \Gamma^{(+)}} \{1 + \widehat{U}_{\theta_2}^{(+)}\} \det_{d\lambda, \Gamma^{(-)}} \{1 + \widehat{U}_{\theta_1}^{(-)}\} \cdot (1 + \mathcal{O}(\alpha)) \quad (6.113)$$

mit

$$L_{C_n}[z](x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy F(y) \cot(y - x) + \sum_{k=1}^{n_c} \ln \sin(x - y_k) - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \ln \sin(x - x_k). \quad (6.114)$$

Die Integrationskerne sind gegeben durch (vgl. (A.27))

$$U_{\theta_1}^{(-)}(x, y) = \frac{\rho_n^{-1}(x|\alpha) \frac{1 + \alpha_n(x|\alpha)}{1 + \alpha(x)}}{1 - e^{2\pi i F(x)}} (K(x - y) - K(\theta_1 - y)), \quad (6.115a)$$

$$U_{\theta_2}^{(+)}(x, y) = \frac{\rho_n(y|\alpha) \frac{1 + \alpha(y)}{1 + \alpha_n(y|\alpha)}}{1 - e^{-2\pi i F(y)}} (K(x - y) - K(\theta_2 - x)). \quad (6.115b)$$

Hierbei ist $\Gamma^{(-)}$ eine Kontur, welche \mathcal{C} einschließt⁹. Die Kontur $\Gamma^{(+)}$ muss zusätzlich alle Teilchen y_j einschließen. Das untere Teilstück $\Gamma_{\downarrow}^{(\pm)}$ der Kontur $\Gamma^{(\pm)}$ soll zwischen der Linie $-\gamma$ und $-\gamma^-$ verlaufen, während das obere Teilstück $\Gamma_{\uparrow}^{(\pm)}$ oberhalb der Linie $\text{Re } \varepsilon = 0$ (Linie der möglichen Teilchenpositionen) in der oberen Halbebene verläuft. Da $\Gamma^{(\pm)}$ außerhalb von \mathcal{C} liegt, folgt mit Gleichung (6.99)

$$\left(\rho_n(y|\alpha) \frac{1 + \alpha(y)}{1 + \alpha_n(y|\alpha)} \right)^{\pm 1} = \left(\rho_n^{(0)}(y|\alpha) \right)^{\pm 1}. \quad (6.116)$$

Da alle auftretenden Funktionen π -periodisch sind, liefern der rechte und linke Rand der Kontur $\Gamma^{(\pm)}$ keinen Beitrag. Mit den Gleichungen aus Anhang E ergibt sich

$$\left(\rho_n^{(0)}(x|\alpha) \right)^{\pm 1} = \begin{cases} w_{\uparrow}^{(\pm)}(x), & x \in \Gamma_{\uparrow}^{(\pm)}, \\ w_{\downarrow}^{(\pm)}(x), & x \in \Gamma_{\downarrow}^{(\pm)} \end{cases} \quad (6.117)$$

mit

$$w_{\uparrow}^{(-)}(x) = \frac{q^{-s}}{4^s} (-1)^s e^{-2ixs} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{n_c+2s} x_k - i \sum_{k=1}^{n_c} y_k \right\} \\ \times \left[\prod_{k=1}^{n_c+2s} \frac{1}{\sin(x - x_k)} \frac{(q^2 e^{2i(x-x_k)}, q^4)^2}{(q^4 e^{2i(x-x_k)}, q^4)^2} \right] \left[\prod_{k=1}^{n_c} \sin(x - y_k) \frac{(q^4 e^{2i(x-y_k)}, q^4)^2}{(q^2 e^{2i(x-y_k)}, q^4)^2} \right], \quad (6.118a)$$

$$w_{\downarrow}^{(-)}(x) = \frac{q^{-s}}{4^s} (-1)^k \left[\prod_{k=1}^{n_c+2s} \frac{1}{\sin(x - x_k)} \prod_{\sigma=\pm} \frac{(q^2 e^{2i\sigma(x-x_k)}, q^4)}{(q^4 e^{2i\sigma(x-x_k)}, q^4)} \right] \\ \times \left[\prod_{k=1}^{n_c} \sin(x - y_k) \prod_{\sigma=\pm} \frac{(q^4 e^{2i\sigma(x-y_k)}, q^4)}{(q^2 e^{2i\sigma(x-y_k)}, q^4)} \right]$$

⁹Analog zu Kapitel 4 wird angenommen, dass $1 - e^{2\pi i F(x)} \neq 0$ ist für x innerhalb von $\Gamma^{(\pm)}$.

$$= (-1)^k \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{\vartheta_1(x - y_k | q^2)}{\vartheta_4(x - y_k | q^2)} \right] \left[\prod_{k=1}^{n_c+2s} \frac{\vartheta_4(x - x_k | q^2)}{\vartheta_1(x - x_k | q^2)} \right], \quad (6.118b)$$

sowie $w_{\uparrow}^{(+)}(x) = 1/w_{\uparrow}^{(-)}(x)$ und $w_{\downarrow}^{(+)}(x) = 1/w_{\downarrow}^{(-)}(x)$. Man prüft leicht nach, dass diese Funktionen die „Sprungrelation“

$$\frac{w_{\uparrow}^{(-)}(x)}{w_{\downarrow}^{(-)}(x)} = e^{2\pi i F(x)} \quad (6.119)$$

erfüllen, sodass die Werte der Gewichtsfunktion $\rho_n^{(0)}$ (vgl. (6.117)) knapp ober- und unterhalb des Intervalls $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verschieden sind.

Mit Hilfe der Gleichungen (6.115) bis (6.118) erhält man bereits einen wohldefinierten Ausdruck für den Determinantenanteil. Da dieser jedoch ungünstig für die numerische Auswertung ist, soll nun eine geeignetere Darstellung hergeleitet werden, welche ausschließlich auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wirkende Operatoren enthält. Zu diesem Zweck betrachtet man die Wirkung des Operators $U_{\theta_1}^{(-)}$ auf eine Testfunktion f ,

$$\begin{aligned} (1 + U_{\theta_1}^{(-)})(f)(y) &= f(y) + \int_{\Gamma_{\uparrow}^{(-)}} dx \frac{K(x - y) - K(\theta_1 - y)}{1 - e^{2\pi i F(x)}} w_{\uparrow}^{(-)}(x) f(x) \\ &\quad + \int_{\Gamma_{\downarrow}^{(-)}} dx \frac{K(x - y) - K(\theta_1 - y)}{1 - e^{2\pi i F(x)}} w_{\downarrow}^{(-)}(x) f(x). \end{aligned} \quad (6.120)$$

Im ersten Integral auf der rechten Seite kann die Kontur problemlos verschoben werden zu $[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$. Im zweiten Integral kreuzt man einfache Pole bei $x = x_j$, $j = 1, \dots, n_c + 2s$, während man den Weg zu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ deformiert¹⁰. Man erhält

$$\begin{aligned} (1 + U_{\theta_1}^{(-)})(f)(y) &= f(y) + 2\pi i \sum_{j=1}^{n_c+2s} \frac{K(x_j - y) - K(\theta_1 - y)}{1 - e^{2\pi i F(x_j)}} (\text{res } w_{\downarrow}^{(-)}(x_j)) f(x_j) \\ &\quad + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx w_{\downarrow}^{(-)}(x) (K(x - y) - K(\theta_1 - y)) f(x) \end{aligned} \quad (6.121)$$

Dabei wurde die Sprungrelation (6.119) benutzt, um den Nenner $1 / (1 - e^{2\pi i F(x)})$ zu kürzen. Führt man die Notation

$$V_{\theta_1}^{-}(x, y) = w_{\downarrow}^{(-)}(x) (K(x - y) - K(\theta_1 - y)), \quad (6.122)$$

$$g(x_j, y) = 2\pi i \frac{K(x_j - y) - K(\theta_1 - y)}{1 - e^{2\pi i F(x_j)}} (\text{res } w_{\downarrow}^{(-)}(x_j)), \quad (6.123)$$

ein, so folgt

$$(1 + U_{\theta_1}^{(-)})(f)(y) = f(y) + \sum_{j=1}^{n_c+2s} g(x_j, y) f(x_j) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx V_{\theta_1}^{-}(x, y) f(x). \quad (6.124)$$

¹⁰Man beachte, dass die Polstellen von $w_{\downarrow}^{(-)}(x)$ bei $x = y_j - iy$ durch die Nullstellen des Faktors $1 / (1 - e^{2\pi i F(x)})$ kompensiert werden.

Folglich kann der Integraloperator $1 + U_{\theta_1}^{(-)}$, welcher auf Funktionen mit Träger $\Gamma^{(-)}$ wirkt, als ein anderer Integraloperator (missbräuchlich mit demselben Namen bezeichnet) aufgefasst werden, welcher auf Funktionen mit Träger $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup \{x_1, \dots, x_{n_c+2s}\}$ wirkt. Letztgenannter Operator hat bezüglich des Raumes $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup \{x_1, \dots, x_{n_c+2s}\}$ die Matrix-Darstellung

$$1 + U_{\theta_1}^{(-)} = \begin{pmatrix} \delta(x-y) + V_{\theta_1}^-(x, y) & g(x_1, y) & \dots & g(x_{n_c+2s}, y) \\ V_{\theta_1}^-(x, x_1) & 1 + g(x_1, x_1) & \dots & g(x_{n_c+2s}, x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{\theta_1}^-(x, x_{n_c+2s}) & g(x_1, x_{n_c+2s}) & \dots & 1 + g(x_{n_c+2s}, x_{n_c+2s}) \end{pmatrix}. \quad (6.125)$$

Führt man nun die Resolvente $R_{\theta_1}^-$ ein als Lösung der linearen Integralgleichung

$$R_{\theta_1}^-(y, z) = V_{\theta_1}^-(z, y) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx V_{\theta_1}^-(x, y) R_{\theta_1}^-(x, z), \quad (6.126)$$

so folgt mit der Formel

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) \quad (6.127)$$

für Blockmatrizen der Ausdruck

$$\det_{d\lambda, \Gamma^{(+)}} \{1 + \widehat{U}_{\theta_1}^{(-)}\} = \det_{[-\pi/2, \pi/2]} (1 + V_{\theta_1}^-) \cdot \mathcal{R}_{\theta_1}^-, \quad (6.128a)$$

$$\mathcal{R}_{\theta_1}^- = \det_{n_c+2s} \left\{ \delta_{ij} + \frac{2\pi i \operatorname{res} w_{\downarrow}^{(-)}(x_j)}{1 - e^{2\pi i F(x_j)}} \left(K(x_j - x_i) - K(\theta_1 - x_i) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy R_{\theta_1}^-(x_i, y) (K(x_j - y) - K(\theta_1 - y)) \right) \right\}. \quad (6.128b)$$

Diese Darstellung enthält als Integrationsweg ausschließlich das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die Fredholm-Determinante und der Resolventenanteil $\mathcal{R}_{\theta_1}^-$ können somit leicht mit den Methoden aus Kapitel 4.7 numerisch berechnet werden.

Die verbleibende Determinante in (6.113) kann vollkommen analog behandelt werden. Man erhält

$$\det_{d\lambda, \Gamma^{(+)}} \{1 + \widehat{U}_{\theta_2}^{(+)}\} = \det_{[-\pi/2, \pi/2]} (1 + V_{\theta_2}^+) \mathcal{R}_{\theta_2}^+, \quad (6.129a)$$

$$\mathcal{R}_{\theta_2}^+ = \det_{n_c} \left\{ \delta_{ij} - \frac{2\pi i \operatorname{res} w_{\downarrow}^{(+)}(y_j)}{1 - e^{2\pi i F(y_j)}} \left(K(y_j - y_i) - K(\theta_2 - y_i) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy R_{\theta_2}^+(y_i, y) (K(y_j - y) - K(\theta_2 - y)) \right) \right\}. \quad (6.129b)$$

Hierbei ist

$$V_{\theta_2}^+(x, y) = w_{\downarrow}^{(+)}(x) (K(x - y) - K(\theta_2 - y)). \quad (6.130)$$

Die Resolvente $R_{\theta_2}^+$ ist definiert durch

$$R_{\theta_2}^+(y, z) = V_{\theta_2}^+(z, y) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx V_{\theta_2}^+(x, y) R_{\theta_2}^+(x, z). \quad (6.131)$$

Die soeben verwendete Methode ist nicht auf den Tieftemperaturlimites beschränkt und könnte auch für die zukünftige numerische Berechnung der Fredholm-Determinanten für $T > 0$ nützlich sein.

Für die explizite Berechnung des Vorfaktors in (6.113) wird angenommen, dass sich die freien Parameter θ_j ($j = 1, 2$) im Streifen $|\text{Im}(\theta_j)| < \gamma$ befinden. Man erhält schließlich für den Fredholm-Determinantenteil D den Ausdruck

$$D = \frac{(1 - q^{-2\alpha})^2 (1 + \mathcal{O}(\alpha))}{\prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + q^{2|n|})^2} \frac{(-1)^k e^{-i \sum_{k=1}^{n_c} (y_k - x_k)}}{(1 - e^{2\pi i F(\theta_1)}) (1 - e^{2\pi i F(\theta_2)})} \\ \times \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{(q^4 e^{2i(\theta_1 - y_k)}, q^4)}{(q^2 e^{2i(\theta_1 - y_k)}, q^4)} \frac{(q^2 e^{-2i(\theta_2 - y_k)}, q^4)}{(q^4 e^{-2i(\theta_2 - y_k)}, q^4)} \right] \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{(q^2 e^{2i(\theta_1 - x_k)}, q^4)}{(q^4 e^{2i(\theta_1 - x_k)}, q^4)} \frac{(q^4 e^{-2i(\theta_2 - x_k)}, q^4)}{(q^2 e^{-2i(\theta_2 - x_k)}, q^4)} \right] \\ \times \det_{[-\pi/2, \pi/2]} (1 + V_{\theta_1}^-) \mathcal{R}_{\theta_1}^- \det_{[-\pi/2, \pi/2]} (1 + V_{\theta_2}^+) \mathcal{R}_{\theta_2}^+. \quad (6.132)$$

Mit den Gleichungen (6.109) und (6.132) ist der Tieftemperaturlimites der Amplituden $A_n(\alpha) = A \cdot D$ (vgl. (3.13)) der erzeugenden Funktion vollständig bestimmt. Um die Amplituden A_n^{zz} der longitudinalen Korrelatoren zu erhalten, müssen gemäß Gleichung (2.35) die Ableitungen nach α durchgeführt werden. Zusammen mit Gleichung (6.89) folgt

$$A_n^{zz} = \left[\prod_{j=1}^{n_c} \frac{T^2}{\varepsilon'(x_j) \varepsilon'(y_j)} \right] \mathcal{A}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | k) \cdot (1 + \mathcal{O}(T)), \quad (6.133)$$

wobei

$$\mathcal{A}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | k) = \left[\prod_{j=1}^{n_c} (1 - e^{-2\pi i F(y_j)}) (1 - e^{-2\pi i F(x_j)}) \right] \frac{\prod_{j \neq k} \sin(x_{jk}) \prod_{j \neq k} \sin(y_{jk})}{\prod_{j,k=1}^{n_c} \sin(x_j - y_k) \sin(y_k - x_j)} \\ \times \left[\prod_{j,k=1}^{n_c} \frac{(q^2 e^{2i(y_k - x_j)}, q^4) (q^4 e^{-2i(y_k - x_j)}, q^4)}{(q^2 e^{-2i(y_k - x_j)}, q^4)^3 (q^4 e^{2i(y_k - x_j)}, q^4)^3} \prod_{\sigma=\pm} \frac{(q^2 e^{2i\sigma(y_k - x_j)}, q^4, q^4)^4}{(q^4 e^{2i\sigma(y_k - x_j)}, q^4, q^4)^4} \right] \\ \times \left[\prod_{j,k=1}^{n_c} (q^2 e^{2iy_{jk}}, q^4) (q^4 e^{2iy_{jk}}, q^4) \frac{(q^4 e^{2iy_{jk}}, q^4, q^4)^4}{(q^2 e^{2iy_{jk}}, q^4, q^4)^4} \right] \\ \times \left[\prod_{j,k=1}^{n_c} (q^2 e^{2ix_{jk}}, q^4) (q^4 e^{2ix_{jk}}, q^4) \frac{(q^4 e^{2ix_{jk}}, q^4, q^4)^4}{(q^2 e^{2ix_{jk}}, q^4, q^4)^4} \right] \frac{(-1)^{n_c} e^{-2in_c \sum_{k=1}^{n_c} (y_k - x_k)}}{\prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + q^{2|n|})^2} \cdot \mathcal{D}^{zz} \quad (6.134)$$

die Interpretation einer Dichte besitzt. Der Faktor \mathcal{D}^{zz} ist gegeben durch

$$\mathcal{D}^{zz} = -16 \sin^2 \left(\frac{\pi k}{2} + \pi \sum_{j=1}^{n_c} (p(y_j) - p(x_j)) \right) \frac{(-1)^k e^{-i \sum_{k=1}^{n_c} (y_k - x_k)}}{(1 - e^{2\pi i F(\theta_1)}) (1 - e^{2\pi i F(\theta_2)})} \\ \times \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{(q^4 e^{2i(\theta_1 - y_k)}, q^4)}{(q^2 e^{2i(\theta_1 - y_k)}, q^4)} \frac{(q^2 e^{-2i(\theta_2 - y_k)}, q^4)}{(q^4 e^{-2i(\theta_2 - y_k)}, q^4)} \right] \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{(q^2 e^{2i(\theta_1 - x_k)}, q^4)}{(q^4 e^{2i(\theta_1 - x_k)}, q^4)} \frac{(q^4 e^{-2i(\theta_2 - x_k)}, q^4)}{(q^2 e^{-2i(\theta_2 - x_k)}, q^4)} \right] \\ \times \det_{[-\pi/2, \pi/2]} (1 + V_{\theta_1}^-) \mathcal{R}_{\theta_1}^- \det_{[-\pi/2, \pi/2]} (1 + V_{\theta_2}^+) \mathcal{R}_{\theta_2}^+. \quad (6.135)$$

In Gleichung (6.134) wurde erneut die Abkürzung $z_{jk} = z_j - z_k$ ($z = x, y$) verwendet. Für die Definition der Funktion F und die Beschreibung der in \mathcal{D}^{zz} auftretenden Fredholm-Determinanten sei an die Gleichungen (6.108) bzw. (6.118), (6.122), (6.126) und (6.128b) sowie (6.130), (6.131) und (6.129b) erinnert.

In diesem Abschnitt wurde somit der führende Term der Tieftemperaturentwicklung der Amplituden im Sektor $s = 0$ berechnet. Dieser ist eine *explizite* Funktion der Teilchen- und Lochparameter, welche für $T \rightarrow 0$ zu freien Parametern auf den Kurven $\text{Re } \varepsilon = 0$ werden. Mit Hilfe der hier erzielten Resultate ergibt sich im nächsten Abschnitt die Formfaktorreihe der longitudinalen Korrelationsfunktionen in der massiven Phase für tiefe Temperaturen.

6.7 Die Formfaktorreihe

Für die Bestimmung der Formfaktorreihe müssen alle Lösungen der higher-level Gleichungen (6.69) aufsummiert werden. Wie in Abschnitt 6.3 gezeigt, entkoppeln diese im Tieftemperaturlimites $T \rightarrow 0$ bei endlichem Magnetfeld $h > 0$. In diesem Fall liegen die unabhängigen Teilchen- und Lochparameter auf den Kurven

$$\mathcal{C}^+ = \left\{ x \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \varepsilon(x) = 0, 0 < \text{Im}(x) < \gamma/2 \right\}, \quad (6.136a)$$

$$\mathcal{C}^- = \left\{ x \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \varepsilon(x) = 0, -\gamma/2 < \text{Im}(x) < 0 \right\}. \quad (6.136b)$$

Für die spätere Verwendung in Wegintegralen seien beide Kurven von links nach rechts orientiert. Man erkennt an den higher-level Gleichungen (6.69), dass der Abstand zwischen zwei möglichen Lochpositionen in der Nähe von $x \in \mathcal{C}^-$ durch $2\pi i T / \varepsilon'(x)$ gegeben ist. Dementsprechend sind zwei mögliche Teilchenpositionen bei $y \in \mathcal{C}^+$ (unter Beachtung der Orientierung von \mathcal{C}^+) durch $-2\pi i T / \varepsilon'(y)$ getrennt. Mit diesen Überlegungen kann die Summation über alle Teilchen-Loch-Anregungen (für gegebenes n_c) als Wegintegral geschrieben werden. Berücksichtigt man noch die zweifache Entartung des Spektrums, welche durch $k \in \{0, 1\}$ parametrisiert wird, so erhält man mit den Gleichungen (6.89) und (6.133) die Formfaktorreihe

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle - \langle \sigma_1^z \rangle \langle \sigma_{m+1}^z \rangle &= (-1)^m \mathcal{A}(\emptyset, \emptyset | 1) \\ &+ \sum_{n_c=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}^-} \frac{d^{n_c} x}{n_c! (2\pi)^{n_c}} \int_{\mathcal{C}^+} \frac{d^{n_c} y}{n_c! (2\pi)^{n_c}} e^{2\pi i m \sum_{j=1}^{n_c} (p(y_j) - p(x_j))} \\ &\times \left[(-1)^m \mathcal{A}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | 1) + \mathcal{A}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | 0) \right]. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Hierbei berücksichtigt der kombinatorische Faktor $n_c!$ die Tatsache, dass Konfigurationen mit vertauschten Löchern bzw. Teilchen denselben Zustand beschreiben. Der erste Term in (6.137) wird durch den „fast entarteten Zustand“ ($n_c = 0$ und $k = 1$) verursacht. Man prüft leicht nach, dass sich in diesem Fall analog zu Abschnitt 5.3 die gestaggerte Magnetisierung ergibt,

$$\mathcal{A}(\emptyset, \emptyset | 1) = \frac{(q^2, q^2)^4}{(-q^2, q^2)^4}. \quad (6.138)$$

Man beachte, dass die Abhängigkeit der Formfaktorreihe (6.137) vom Magnetfeld h vollständig in den Konturen \mathcal{C}^\pm absorbiert wurde. Analog zu den Formfaktoren der gewöhnlichen Transfermatrix hat man für $k \in \{1, \dots, n_c\}$ die Identität

$$\mathcal{A}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | 0) = \mathcal{A}(\{x_j + \delta_{j,k} \pi\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | 1) = \mathcal{A}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j + \delta_{j,k} \pi\}_{j=1}^{n_c} | 1), \quad (6.139)$$

sodass der Integrand in (6.137) (unter Berücksichtigung der Quasi-Periodizität von p) in jeder Variablen π -periodisch ist. Weiterhin folgt aus (6.134), dass der Integrand in dem durch die Ungleichungen $0 < \text{Im } y_j < \gamma$ und $-\gamma < \text{Im } x_j < 0$ definierten Gebiet holomorph ist. Somit können die Konturen C^\pm nach dem Satz von Cauchy deformiert werden, wodurch die Formfaktorreihe und damit die Korrelationsfunktionen *unabhängig* vom Magnetfeld h werden. Durch diesen Mechanismus wird der am Ende des Abschnitts 6.5 festgestellte Widerspruch aufgelöst.

Wie sich zeigen wird, ist es zweckmäßig, die Konturen C^\pm zu den Geraden $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \pm i\gamma/2$ zu deformieren¹¹. Damit wird die Formfaktorreihe (6.137) zu

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle - \langle \sigma_1^z \rangle \langle \sigma_{m+1}^z \rangle &= (-1)^m \frac{(q^2, q^2)^4}{(-q^2, q^2)^4} \\ &+ \sum_{n_c=1}^{\infty} \int_{-\pi/2-i\gamma/2}^{\pi/2-i\gamma/2} \frac{d^{n_c} x}{n_c! (2\pi)^{n_c}} \int_{-\pi/2+i\gamma/2}^{\pi/2+i\gamma/2} \frac{d^{n_c} y}{n_c! (2\pi)^{n_c}} e^{2\pi i m \sum_{j=1}^{n_c} (p(y_j) - p(x_j))} \\ &\times \left[(-1)^m \mathcal{A}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | 1) + \mathcal{A}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | 0) \right]. \end{aligned} \quad (6.140)$$

Eine genauere Betrachtung zeigt, dass der n_c -te Term der Summe maximal von der Ordnung $q^{n_c \cdot m}$ sein kann. Man kann folglich davon ausgehen, dass die obige Formfaktorreihe konvergent ist.

Die Formfaktorentwicklung (6.140) ist das Hauptergebnis dieses Kapitels. Zusammen mit den Amplituden (6.134) liefert sie eine *explizite und exakte* Darstellung der Korrelationsfunktionen bei $T = 0$ in der massiven Phase, welche für beliebige Abstände m gültig ist. Wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, liefert die Berücksichtigung der Terme $n_c = 1$ und $n_c = 2$ bereits eine sehr gute Näherung der Korrelatoren für den kleinstmöglichen Abstand $m = 1$. Es sei betont, dass im Unterschied zu den Ergebnissen des Vertex-Operator-Zugangs bzw. der Formfaktorreihe der gewöhnlichen Transfermatrix (vgl. Kapitel 5) für die Berechnung der Amplituden \mathcal{A} keinerlei Konturintegrale zu lösen sind. Ursächlich hierfür ist die Verwendung der Quantentransfermatrix, deren Spektrum im Tieftemperaturlimit für $h > 0$ eine besonders einfache Struktur aufweist.

Im nächsten Abschnitt soll die Beziehung der hier erzielten Ergebnisse zum Vertex-Operator-Zugang näher untersucht werden. Weiterhin wird erläutert, wie sich die Korrelationsfunktionen mit Hilfe von (6.140) numerisch auswerten lassen.

6.8 Diskussion und numerische Auswertung

Es ist zu erwarten, dass der Vertex-Operator-Zugang bzw. die Formfaktorreihe der gewöhnlichen Transfermatrix und die aus dem Quantentransfermatrix-Zugang folgende Entwicklung (6.140) das selbe Ergebnis für die Korrelationsfunktionen liefern. Ein Vergleich der Gleichungen (6.140) und (5.60) legt daher die folgende Vermutung nahe.

Vermutung 6.8.1. *Der Beitrag des Sektors mit n Teilchen und n Löchern in (6.140) stimmt mit dem Beitrag des Sektors mit $2n$ Spinonen in (5.60) überein.*

Da lediglich die 2-Spinon-Amplituden explizit bekannt sind, kann die Vermutung nur für den Fall $n = 1$ überprüft werden. Da außerdem die Fredholm-Determinanten momentan nicht explizit berechnet werden können, muss der Vergleich auf numerischer Basis erfolgen. Die Amplituden 6.134 können mit den in Abschnitt 4.7 diskutierten Methoden numerisch ausgewertet werden. Im

¹¹Man beachte, dass diese Geraden den Konturen C^\pm im Limes $h \rightarrow 0$ entsprechen.

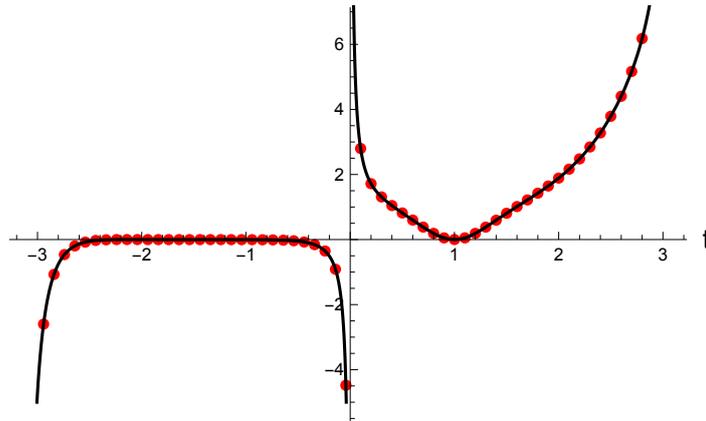


Abbildung 6.6: Linke Seite (schwarze Seite) und rechte Seite (rote Punkte) von Gleichung (6.142) als Funktion von $v_1 = t + iy/2$ für festes $v_2 = 1 + iy/2$ (für $t \in \mathbb{R}$ sind damit linke bzw. rechte Seite von (6.142) reell). In diesem Beispiel ist $\Delta = 1.25$.

hier vorliegenden Fall sind alle Funktionen stetig differenzierbar, sodass eine Gauß-Legendre Regel verwendet wird. Für die Berechnung des Doppelintegrals wird ebenfalls eine Gauß-Legendre Regel (nicht notwendigerweise mit derselben Stützstellenanzahl) verwendet. Die Numerik zeigt deutlich, dass die Vermutung 6.8.1 für $n = 1$ richtig ist. Eine wichtige Folgerung der obigen Vermutung ist, dass die Abstand asymptotik der Formfaktorreihe (6.140) durch Gleichung (5.85) gegeben ist.

Die Gleichheit zweier Integrale sagt zunächst nichts über die Beziehung zwischen den Integranden aus. Dennoch ist es hier möglich, eine Relation zwischen den Amplituden $\mathcal{A}(x, y|k = 1)$ (vgl. (6.134) mit $n_c = 1$) und den 2-Spinon-Amplituden $A(v_1, v_2)$ (vgl. (5.79)) zu etablieren. Die erste naheliegende Idee ist, in (6.134) den Parameter $\bar{y} = y - iy$ einzuführen und die Variablen $\{\bar{y}, x\}$ als Spinon-Rapiditäten aufzufassen. Man stellt jedoch fest, dass

$$A(v_1, v_2) \neq \mathcal{A}(v_1 - iy, v_2 | 1) \quad (6.141)$$

gilt. Dies folgt sofort aus den unterschiedlichen Eigenschaften der auf der linken und rechten Seite auftretenden Funktionen. Die linke Seite ist symmetrisch unter Austausch von v_1 und v_2 , die rechte Seite hingegen nicht. Weiterhin besitzt die linke Seite eine doppelte Nullstelle für $v_1 \rightarrow v_2$, die rechte Seite hingegen lediglich eine einfache. Die hier gefundenen Amplituden sind (im Gegensatz zu den Ergebnissen aus Kapitel 5) somit *nicht* identisch mit Spinon-Amplituden. Auf Grundlage dieser Beobachtungen erhält man die folgende

Vermutung 6.8.2. *Im Streifen $\text{Im}(v_1), \text{Im}(v_2) \in (0, \gamma)$ gilt*

$$A(v_1, v_2) = \mathcal{A}(v_1 - iy, v_2 | 1) + \mathcal{A}(v_2 - iy, v_1 | 1). \quad (6.142)$$

Ein numerischer Test dieser Vermutung ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Man beachte, dass aus obiger Gleichung durch Symmetrisieren des Integranden des Terms $n_c = 1$ in (6.140) die Vermutung 6.8.1 folgt. Die verschiedenen kombinatorischen Faktoren

$$\frac{1}{(2n)!} \text{ vs. } \frac{1}{(n!)^2} = \frac{1}{(2n)!} \binom{2n}{n} \quad (6.143)$$

legen nahe, dass sich ganz allgemein die $2n$ -Spinon-Amplitude durch Symmetrisieren der Amplitude aus dem Quantentransfermatrix-Zugang ergibt. Da erstere jedoch nur für den Fall $n = 1$ explizit bekannt sind, ist dies lediglich Spekulation.

Die 4-Spinon-Amplituden sind bislang nur für den isotropen Fall bekannt [29]. Unter Berücksichtigung von Vermutung 6.8.1 können mit den hier erzielten Ergebnissen nun erstmals die longitudinalen Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette in 4-Spinon-Näherung berechnet werden. Als Beispiel sollen wie in Kapitel 5.5 die nächste-Nachbar-Korrelatoren $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle$ betrachtet werden. Bezeichne analog zu Kapitel 5 den n_c -ten Term der in (6.140) auftretenden Summe mit $I_{2n_c}(m)$ und betrachte die Korrelatoren in der Näherung

$$\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_4 := - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^4 + I_2(1) + I_4(1). \quad (6.144)$$

Für den Term $I_4(1)$ muss ein Vierfachintegral numerisch berechnet werden. Für die numerische Effizienz ist hier entscheidend, dass die Integrationskonturen in (6.140) durch die Intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \pm iy/2$ gegeben sind, wodurch die Faktoren $e^{2\pi ip}$ reell sind. Die Realität des Integrals I_4 wird durch die Identität

$$\left(\mathcal{A}(\{x_j\}, \{y_j\} | k) \right)^* = \mathcal{A}(\{y_j^*\}, \{x_j^*\} | k) \quad (6.145)$$

garantiert. Umgekehrt kann diese Gleichung benutzt werden, um die Anzahl der zu berechnenden Terme zu reduzieren. Eine weitere Reduktion ergibt sich aus der Tatsache, dass die Amplituden invariant unter Austausch von Löchern bzw. Teilchen sind. Für die Berechnung des Vierfachintegrals wurde eine Gauß-Jacobi-Regel mit N Stützstellen verwendet. Die Zahl N wurde solange erhöht, bis die relative Differenz zwischen den Regeln mit N und $N - 2$ Stützstellen deutlich kleiner als 1% betrug. Mit diesen Rahmenbedingungen konnte das Integral $I_4(1)$ bislang für $\Delta \geq 1.03$ berechnet werden. Dies ist in Abbildung (6.7) dargestellt.

Mit diesem Ergebnis kann die Näherung (6.144) berechnet werden. Die Berechnung der Näherung

$$\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_2 := - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^4 + I_2(1) \quad (6.146)$$

wurde bereits in Abschnitt 5.5 durchgeführt (vgl. Abbildung 5.2). Die Gleichungen (6.144) und (6.146) können mit dem exakten Ergebnis (vgl. [128])

$$\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle = 1 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\text{sh}(\pi(x + i/2))} \left[\cot(\gamma(x + i/2)) \text{cth}(\gamma) - \frac{x + i/2}{\sin^2(\gamma(x + i/2))} \right] \quad (6.147)$$

verglichen werden. Dieser Vergleich ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Man erkennt, dass die Näherung $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_4$ eine deutliche Verbesserung gegenüber der 2-Spinon-Näherung darstellt. Der Unterschied zu den exakten Korrelatoren wird durch die Größe

$$\delta = \frac{\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle - \langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle_4}{\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle} \quad (6.148)$$

quantifiziert. Die Abhängigkeit dieser Größe von der Anisotropie Δ ist in Abbildung 6.9 dargestellt. Für $\Delta \gtrsim 1.25$ ist die 4-Spinon-Näherung im Rahmen der numerischen Genauigkeit praktisch nicht vom exakten Ergebnis zu unterscheiden. In der Nähe des isotropen Punktes scheint die Bedeutung

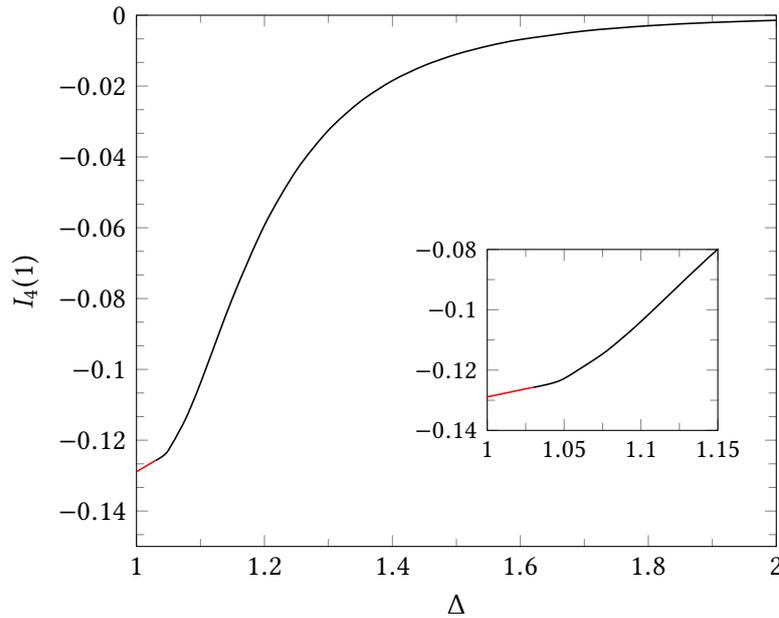


Abbildung 6.7: „4-Spinon-Beitrag“ $I_4(1)$ zu den nächste-Nachbarn-Korrelationsfunktionen $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle$ (vgl. (6.144)) als Funktion des Anisotropie-Parameters Δ . Der rot markierte Teil der Kurve entspricht dem Bereich $1 < \Delta < 1.03$ und kann bislang nicht mit der gewünschten Genauigkeit berechnet werden. Die rote Linie ergibt sich daher durch lineare Extrapolation aus dem schwarzen Teil der Kurve.

der Beiträge von 6 und mehr Spinonen, welche den Termen $n_c \geq 3$ in (6.140) entsprechen, zuzunehmen. Für $\Delta \rightarrow 1$ ergibt sich durch Extrapolation, dass die 4-Spinon-Näherung ca. 95% des exakten Wertes

$$\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \ln(2) \approx -0.590863 \dots \quad (6.149)$$

ausmacht. Dies deckt sich mit der in [29] festgestellten Tatsache, dass für den dynamischen Strukturfaktor in 4-Spinonen-Näherung eine Frequenz-Summenregel zu 97% saturiert ist.

Man beachte, dass die Umgebung $1 < \Delta < 1.03$ des isotropen Punktes durch Extrapolation erreicht wurde, wodurch die Schlussfolgerungen mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind. Es ist jedoch davon auszugehen, dass die Kurven in den Abbildungen 6.7, 6.8 und 6.9 in der Umgebung des isotropen Punktes stetig sind. Diese Annahme wird gestützt durch die Tatsache, dass der Limes $\Delta \rightarrow 1_+$ für die Spinon-Amplituden des Vertex-Operator-Zugangs sinnvoll durchgeführt werden kann¹² [64]. Weiterhin zeigt sich im nächsten Abschnitt, dass der isotrope Limes auch in den hier erzielten Resultaten (6.134), (6.135) und (6.140) analytisch durchgeführt werden kann.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass mit den Amplituden (6.134) und der zugehörigen Formfaktorentwicklung (6.140) eine neue und explizite Beschreibung der Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette bei $T = 0$ im massiven Bereich gefunden wurde. Dies kann dahingehend interpretiert werden, dass die n -Teilchen-Loch-Anregungen der Quantentransfermatrix in jedem

¹²Es kann allerdings bestimmte physikalische Größen geben, für die alle Spinon-Beiträge zu berücksichtigen sind (vgl. z.B. [26]), sodass die Spinon-Basis unter Umständen keine passende Beschreibung des Zustandsraums darstellt.

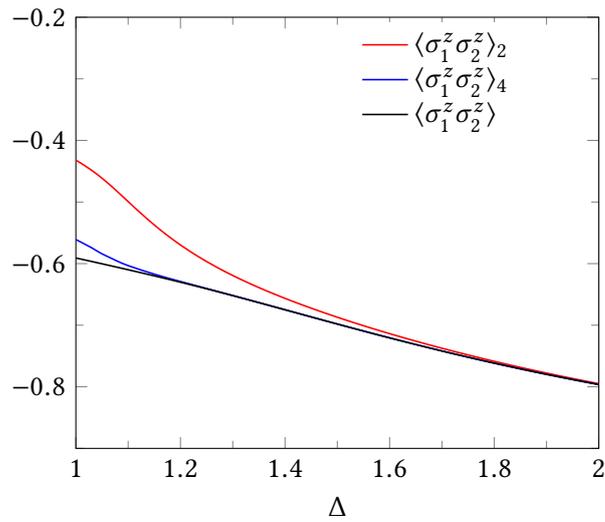


Abbildung 6.8: Vergleich der 2-Spinonen-Näherung (6.146) (rote Kurve) bzw. 4-Spinonen-Näherung (6.144) (blaue Kurve) der nächste-Nachbarn-Korrelatoren $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle$ mit dem exakten Resultat (6.147) (schwarze Kurve).

$2n$ -Spinonen-Sektor eine neue Basis definieren, welche eine zur Spinon-Basis äquivalente aber einfachere Beschreibung der Korrelatoren ermöglicht.

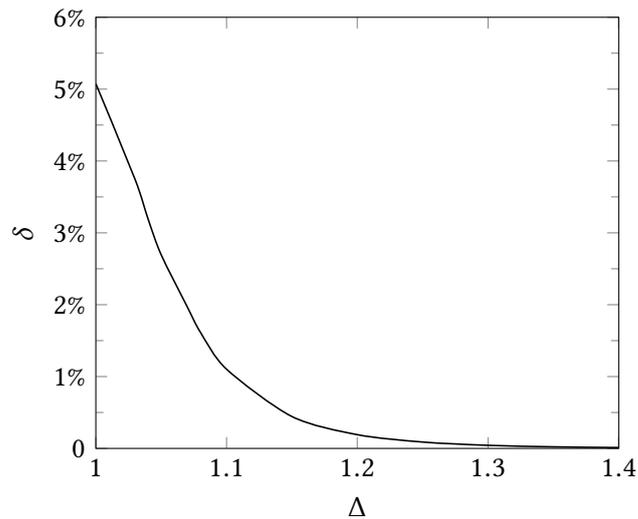


Abbildung 6.9: Abhängigkeit der relativen Differenz δ zwischen 4-Spinon-Näherung und exaktem Ergebnis vom Anisotropieparameter Δ .

6.9 Der isotrope Limes

Wie bereits im Verlauf des letzten Abschnitts erwähnt, haben die Amplituden des Vertex-Operator-Zugangs die Eigenschaft, dass der Limes $\Delta \rightarrow 1_+$ durchgeführt werden kann [64]. In diesem Abschnitt soll bewiesen werden, dass der isotrope Limes auch in der Darstellung (6.134) existiert.

Reskaliert man die Spektralparameter $x, y \rightarrow \gamma x, \gamma y$ in der R-Matrix (6.1) und führt anschließend den Limes $\gamma \rightarrow 0$ durch, so ergibt sich die R-Matrix der isotropen Heisenberg-Kette (vgl. z.B. [46]). Dementsprechend müssen in den Amplituden (6.134) die Loch- und Teilchenparameter mit γ reskaliert werden, bevor der Limes $\gamma \rightarrow 0$ (d.h. $q \rightarrow 1$) durchgeführt wird. Dieser Limes kann in den q -Produkten mit Hilfe der Formeln (vgl. S. 120 f. in [64])

$$(p^z, p) \sim (p, p) \frac{(1-p)^{1-z}}{\Gamma(z)}, \quad (6.150a)$$

$$\gamma_{-1}(z) \sim (q^4, q^4) \frac{(1-q^4)^{3/4}}{\Gamma(\frac{1}{4})} \frac{A_{-1}(\beta)}{A_{-1}(\frac{i\pi}{2})}, \quad z = q^{-2\beta/(i\pi)}, \quad (6.150b)$$

sofort durchgeführt werden. Hierbei ist

$$A_{-1}(\beta) = - \int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{\text{sh}^2(x [1 - \beta/(i\pi)])}{\text{sh}(2x) \text{ch}(x)} e^x, \quad (6.151a)$$

$$\gamma_{-1}(z) = \frac{(q^4 z, q^4, q^4)(z^{-1}, q^4, q^4)}{(q^6 z, q^4, q^4)(q^2 z^{-1}, q^4, q^4)}. \quad (6.151b)$$

Um den Limes $\gamma \rightarrow 0$ im Determinantenanteil \mathcal{D}^{zz} durchzuführen, muss dieser zunächst umgeschrieben werden. Dazu führt man wieder die Norm-Determinante

$$\prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 + q^{2|n|})^2 = \det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2} [1 + K] \quad (6.152)$$

ein und betrachtet die im isotropen Limes endliche Kombination

$$\begin{aligned} \frac{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + V_\theta^\pm)}{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + K)} &= \frac{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + V_\theta^\pm)}{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + K)} \frac{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 - R)}{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 - R)} \\ &= \frac{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + V_\theta^\pm - R - V_\theta^\pm R)}{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + W_\theta^\pm)} \\ &=: \det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + W_\theta^\pm). \end{aligned} \quad (6.153)$$

Hierbei wurde in der ersten Zeile die durch Gleichung (D.23) definierte Resolvente R eingeführt. Der Kern W_θ^\pm ist gegeben durch¹³

$$W_\theta^\pm(x, y) = w_\downarrow^{(\pm)}(x) (R(x, y) - R(\theta, y)) - R(x, y). \quad (6.154)$$

Im Limes $\gamma \rightarrow 0$ erhält man zusammen mit den Gleichungen (D.25) und (D.23)

$$\frac{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + V_\theta^\pm)}{\det_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(1 + K)} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \det_{\mathbb{R}}(1 + \widehat{W}_\theta^\pm), \quad (6.155)$$

¹³Man beachte, dass die freien Parameter θ_j ($j = 1, 2$) ebenfalls mit γ reskaliert wurden, sodass diese im Bereich $|\text{Im } \theta_j| < 1$ liegen.

wobei

$$\widehat{W}_\theta^\pm(x, y) = \widehat{w}_\downarrow^\pm(x) \left[-\theta'_F(x - y) + \theta'_F(\theta - y) \right] + \theta'_F(x - y). \quad (6.156)$$

Hierbei ist

$$\widehat{w}_\downarrow^{(-)}(x) = (-1)^k \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{\text{th}\left(\frac{\pi}{2}(x - y_j)\right)}{\text{th}\left(\frac{\pi}{2}(x - x_j)\right)} \right], \quad \widehat{w}_\downarrow^{(+)}(x) = 1/\widehat{w}_\downarrow^{(-)}(x) \quad (6.157)$$

und

$$\theta_F(x) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}x\right)\Gamma\left(1 - \frac{i}{2}x\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}x\right)\Gamma\left(1 + \frac{i}{2}x\right)} \right\} \quad (6.158)$$

ist die bekannte 2-Spinon-Streuphase [52].

Der Resolventenanteil bleibt endlich für $q \rightarrow 1$ und wird zu

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\theta_1}^- = \det_{n_c} \left\{ \delta_{ij} + \frac{2\pi i \text{res } \widehat{w}_\downarrow^{(-)}(x_j)}{1 - e^{2\pi i \widehat{F}(x_j)}} \left(\widehat{K}(x_j - x_i) - \widehat{K}(\theta_1 - x_i) \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\mathbb{R}} dy \widehat{R}_{\theta_1}^-(x_i, y) (\widehat{K}(x_j - y) - \widehat{K}(\theta_1 - y)) \right) \right\}, \quad (6.159a)$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\theta_2}^+ = \det_{n_c} \left\{ \delta_{ij} - \frac{2\pi i \text{res } \widehat{w}_\downarrow^{(+)}(y_j)}{1 - e^{2\pi i \widehat{F}(y_j)}} \left(\widehat{K}(y_j - y_i) - \widehat{K}(\theta_2 - y_i) \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\mathbb{R}} dy \widehat{R}_{\theta_2}^+(y_i, y) (\widehat{K}(y_j - y) - \widehat{K}(\theta_2 - y)) \right) \right\}. \quad (6.159b)$$

Der Kern \widehat{K} und die Funktion \widehat{F} sind durch

$$\widehat{K}(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}, \quad (6.160)$$

$$e^{2\pi i \widehat{F}(x)} = (-1)^k \left[\prod_{j=1}^{n_c} e^{2\pi i (\theta_F(x - x_j) - \theta_F(x - y_j))} \right] \quad (6.161)$$

definiert. Die Funktionen \widehat{R}_θ^\pm sind die Lösungen der linearen Integralgleichungen

$$\widehat{R}_\theta^\pm(y, z) = \widehat{V}_\theta^\pm(z, y) - \int_{-\infty}^{\infty} dx \widehat{V}_\theta^\pm(x, y) \widehat{R}_\theta^\pm(x, z), \quad (6.162)$$

wobei

$$\widehat{V}_\theta^\pm(x, y) = \widehat{w}_\downarrow^{\pm} \left(\widehat{K}(x - y) - \widehat{K}(\theta - y) \right). \quad (6.163)$$

Der bekleidete Impuls wird zu

$$\widehat{p}(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{\text{ch}\left(\frac{\pi}{2}\left(x + \frac{i}{2}\right)\right)}{\text{ch}\left(\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{i}{2}\right)\right)} \right). \quad (6.164)$$

Führt man noch die Größen

$$\Phi(x) = \frac{\text{sh}(\pi x)}{\pi^2 x} \mathcal{I}(x), \quad \mathcal{I}(x) = \exp \left\{ -4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{e^t (\sin^2(tx) + \text{sh}^2(t/2))}{\text{sh}(2t) \text{ch}(t)} \right\},$$

$$C = \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^{8n_c^2} \left(\frac{\mathcal{I}(0)}{\pi} \right)^{n_c}, \quad (6.165)$$

ein, so erhält man das Skalenverhalten

$$\mathcal{A}(\{\gamma x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{\gamma y_j\}_{j=1}^{n_c} | k) \underset{\gamma \rightarrow 0}{\sim} \gamma^{-2n_c} \hat{\mathcal{A}}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | k), \quad (6.166)$$

wobei die Amplitude $\hat{\mathcal{A}}$ gegeben ist durch

$$\hat{\mathcal{A}}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | k) = (-1)^{n_c} \left[\prod_{j=1}^{n_c} \left(1 - e^{-2\pi i \hat{F}(x_j)} \right) \left(1 - e^{-2\pi i \hat{F}(y_j)} \right) \right] \frac{\prod_{j \neq k} x_{jk} y_{jk}}{\prod_{j,k=1}^{n_c} (y_k - x_j)(x_j - y_k)}$$

$$\times C \mathcal{D}^{zz} \left[\prod_{1 \leq j < k \leq n_c} \Phi(x_{jk}) \Phi(y_{jk}) \right] \left[\prod_{j,k=1}^{n_c} \Phi(x_k - y_j + i) \frac{(i - y_j + x_k)(y_j - x_k)^3}{16} \right]. \quad (6.167)$$

Für den Determinantenanteil \mathcal{D}^{zz} gilt

$$\mathcal{D}^{zz} = -16 \sin^2 \left(\frac{\pi k}{2} + \pi \sum_{j=1}^{n_c} (\hat{p}(y_j) - \hat{p}(x_j)) \right) \frac{(-1)^k}{(1 - e^{2\pi i \hat{F}(\theta_1)}) (1 - e^{2\pi i \hat{F}(\theta_2)})}$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n_c} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}(\theta_1 - y_k)) \Gamma(1 + \frac{i}{2}(\theta_2 - y_k))}{\Gamma(1 - \frac{i}{2}(\theta_1 - y_k)) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}(\theta_2 - y_k))} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}(\theta_2 - x_k)) \Gamma(1 - \frac{i}{2}(\theta_1 - x_k))}{\Gamma(1 + \frac{i}{2}(\theta_2 - x_k)) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}(\theta_1 - x_k))} \right]$$

$$\times \det_{\mathbb{R}} \left(1 + \widehat{W}_{\theta_1}^- \right) \widehat{\mathcal{R}}_{\theta_1}^- \det_{\mathbb{R}} \left(1 + \widehat{W}_{\theta_2}^+ \right) \widehat{\mathcal{R}}_{\theta_2}^+. \quad (6.168)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass die in \mathcal{D}^{zz} auftretenden Fredholm-Determinanten (und damit auch die Amplituden $\hat{\mathcal{A}}$) für $k = 1$ verschwinden. Für $n_c = 0$ kann dies explizit überprüft werden. In den Fällen $n_c = 1$ und $n_c = 2$ erkennt man dies anhand der Numerik für $\Delta > 1$ (vgl. Abschnitt 6.8) in der Nähe des isotropen Punktes. Eine numerische Untersuchung der Determinanten für $k = 1$ direkt am isotropen Punkt ist nicht möglich, da die zugehörigen Operatoren \widehat{W}_θ^\pm nicht der Spurklasse angehören. Dies äußert sich darin, dass die Determinante numerisch divergiert, wenn die reelle Achse mit der Substitution

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) = \int_{-1}^{+1} dt f \left(\frac{t}{1-t^2} \right) \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} \quad (6.169)$$

auf das Intervall $[-1, 1]$ abgebildet wird und letzteres diskretisiert wird. Allerdings verschwinden die Determinanten für jede Trunkierung $\mathbb{R} \rightarrow [-R, R]$. Somit ist es nicht rigoros bewiesen aber dennoch plausibel, dass lediglich die Terme mit $k = 0$ beitragen.

Mit dem in (6.166) auftretenden Vorfaktor γ^{-2n_c} können die Integrationsvariablen in der Formfaktorreihe (6.140) reskaliert werden, sodass schließlich das Ergebnis

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle - \langle \sigma_1^z \rangle \langle \sigma_{m+1}^z \rangle = \sum_{n_c=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}-i/2} \frac{d^{n_c} x}{n_c! (2\pi)^{n_c}} \int_{\mathbb{R}+i/2} \frac{d^{n_c} y}{n_c! (2\pi)^{n_c}} e^{2\pi i m \sum_{j=1}^{n_c} (\hat{p}(y_j) - \hat{p}(x_j))}$$

$$\times \hat{\mathcal{A}}(\{x_j\}_{j=1}^{n_c}, \{y_j\}_{j=1}^{n_c} | 0) \quad (6.170)$$

m	$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$	$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_2$	$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle_2 / \langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$
1	-0.59086	-0.43198	73.1%
2	0.24272	0.18147	74.8%
3	-0.20099	-0.15080	75.0 %
4	0.13861	0.10468	75.5%
5	-0.12356	-0.09353	75.7%
6	0.09779	0.07426	75.9%
7	-0.08999	-0.06845	76.1%

Tabelle 6.1: Vergleich der exakten Korrelatoren (2. Spalte) der isotropen Kette mit der 2-Spinon-Näherung (3. Spalte). Die letzte Spalte gibt den Anteil des 2-Spinon-Beitrags am exakten Resultat an.

folgt. Bislang ist es lediglich gelungen, den Beitrag mit $n_c = 1$ mit der gewünschten numerischen Genauigkeit auszuwerten, sodass die Gültigkeit der linearen Extrapolation in Abbildung 6.7 nicht überprüft werden kann. Die mit dem Term $n_c = 1$ in (6.170) berechneten Korrelationsfunktionen $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$ der isotropen Heisenbergkette sind in Tabelle 6.9 zusammengefasst. Bekanntlich können die Korrelationsfunktionen durch $\ln 2$ und Zeta-Funktionen mit ungeradem Argument ausgedrückt werden [21]. Für kurze Abstände m kann daher mit diesen exakten Ergebnissen verglichen werden [114, 127]. Interessanterweise scheint der Anteil des 2-Spinon-Beitrags nur sehr langsam mit dem Abstand m zuzunehmen. Dies ist konsistent mit der Beobachtung, dass die Faktoren $e^{2\pi i p}$ in (6.170) alle Werte im Intervall $[-1, 1]$ annehmen können, sodass die Beiträge von 4 und mehr Spinonen nicht notwendigerweise klein gegenüber dem 2-Spinon-Beitrag sind. Dieses Verhalten unterscheidet sich deutlich vom Bereich $\Delta > 1$, in dem die Formfaktorreihe für große m durch den 2-Spinon-Beitrag dominiert wird (vgl. Kapitel 5). Demnach verliert die in Abschnitt 5.5 durchgeführte Sattelpunktsanalyse (vgl. (5.85)) bei Annäherung an den isotropen Punkt ihre Gültigkeit. Dies war zu erwarten, da die Asymptotik der Korrelatoren für große m bekanntlich durch die Formel

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle \sim (-1)^m \frac{4\sqrt{\ln m}}{(2\pi)^{3/2} m} \quad (6.171)$$

beschrieben wird [2]. Es wäre eine interessante Aufgabe, die obige Asymptotik aus der Formfaktorreihe (6.170) herzuleiten.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Berechnung von thermischen Korrelationsfunktionen der anisotropen Spin-1/2-Heisenberg-Kette mit Hilfe der Formfaktoren der Quantentransfermatrix untersucht.

In der Formfaktorentwicklung bestimmen diese zusammen mit den Korrelationslängen in natürlicher Weise die Abstandsasymptotik von Zweipunktfunktionen bei endlicher Temperatur. In Kapitel 3 wurde zunächst die in [39] begonnene Berechnung von Formfaktoren der Quantentransfermatrix fortgesetzt. Dabei wurden die longitudinalen und transversalen Zweipunktfunktionen betrachtet, da diese die beiden wichtigsten Beispiele darstellen. Es ergaben sich basierend auf der Slavnovschen Skalarproduktformel [119] nach einer Reihe von Manipulationen symmetrische Ausdrücke für die Amplituden, die die Durchführung des Trotterlimes erlaubten. Dabei zeigte sich, dass die Amplituden in beiden Fällen durch drei Bestandteile charakterisiert sind. Der universelle Anteil besitzt in beiden Fällen dieselbe Form und ist durch einen Integralausdruck gegeben. Der faktorisierte Anteil enthält die Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung von Lösungen linearer Integralgleichungen. Schließlich ist der Determinantenanteil durch Fredholm-Determinanten gegeben. Die zugehörigen Integralkerne sind parametrisiert durch die Summe aus dem α -Parameter und dem Pseudospin s des Operators, dessen Formfaktor betrachtet wird. Alle Bestandteile hängen von den fundamentalen Funktionen ρ_n (Verhältnis der Eigenwerte) und a_n (Hilfsfunktion) ab. Im Unterschied zu bisherigen Arbeiten zur Thermodynamik [80, 81] und zu Vielfachintegraldarstellungen von Korrelationsfunktionen [55] gehören diese Funktionen nun zu angeregten Zuständen der Quantentransfermatrix.

Die Betrachtung des Formfaktors des Operators $C(\xi_1)C(\xi_2)$ untermauert die Vermutung, dass die beschriebene Struktur der Amplituden universell ist. Insbesondere die bei der Berechnung des Formfaktors von $B(\xi)$ auftretende Faktorisierung, welche ähnlich wie die Faktorisierung der Vielfachintegrale [13] nur mit einem von Null verschiedenen α -Parameter funktioniert, lässt auf eine Verbindung zur versteckten fermionischen Struktur [17, 66] schließen. Es ist eine interessante Aufgabe, diese Verbindung näher zu untersuchen.

Eine weitere offene Frage ist, ob die gefundenen Darstellungen der Amplituden numerisch ausgewertet werden können. Dies ist von besonderem Interesse, da die Abhängigkeit der Korrelationsfunktionen von der Temperatur nicht-trivial ist. Dies wird deutlich in Crossover-Phänomenen, bei denen die Abstandsasymptotik der longitudinalen Korrelatoren als Funktion der Temperatur von kommensurablen zu inkommensurablen Oszillationen wechselt [85, 49, 51, 48]. Numerische Studien bei endlicher Trotterzahl deuten darauf hin, dass einige Amplituden bei der Crossover-Temperatur divergieren [49]. Dies passiert jedoch derart, dass die Korrelatoren endlich bleiben. Ein solches Verhalten sollte sich auch in der numerischen Auswertung der hier gefundenen Amplituden wiederfinden.

Im weiteren Verlauf wurden in Kapitel 4 die Amplituden im Tieftemperaturlimit in der masselosen Phase bei endlichem Magnetfeld analytisch untersucht. Als Vorarbeit mussten zunächst die relevanten Anregungen der Quantentransfermatrix bestimmt werden. Dazu wurde die nicht-lineare Integralgleichung der Hilfsfunktion im Tieftemperaturlimit analysiert. Die Tieftemperaturentwicklung enthält dabei in jeder Ordnung ausschließlich Funktionen, die durch lineare Inte-

gralgleichungen gegeben sind. Es zeigte sich, dass die relevanten Anregungen, ähnlich wie die des Hamiltonoperators in der masselosen Phase, durch unabhängige Teilchen-Loch-Anregungen in der Nähe von zwei Fermi-Punkten gegeben sind. In diesem Bereich besitzt das Spektrum Ähnlichkeit zu freien Fermionen. Weiterhin besitzt diese Klasse von Anregungen die Eigenschaft, dass die zugehörigen Korrelationslängen im Tieftemperaturlimit divergieren. Die Analyse der Formfaktorreihe wurde folglich für kleine aber endliche Temperaturen durchgeführt. Die Berechnung des führenden Tieftemperaturverhaltens der Amplituden war dabei aufgrund des Auftretens verschiedener divergenter Integrale technisch aufwändig. Wie erwartet, skalieren die Amplituden mit einer Potenz der Temperatur gegen Null. Der nicht-ganzzahlige kritische Exponent ist dabei derselbe, der den Zerfall der Korrelatoren beschreibt. Da das führende Verhalten der Amplituden zudem stark von den „Quantenzahlen“ der Anregung abhängt, mussten die „konformen Türme“ mit Hilfe einer diskreten Summenformel [111, 75] aufsummiert werden. Die Form der Korrelatoren war im Einklang mit den Vorhersagen der konformen Feldtheorie auf einem Zylinder mit endlichem Umfang. Im Limes $T \rightarrow 0$ ergab sich wie auch im Rahmen der Luttinger-Tomonaga-Flüssigkeitstheorie erwartet ein algebraischer Zerfall der Korrelatoren. Somit konnten die Vorhersagen der genannten Theorien für die XXZ-Kette im kritischen Bereich erstmals mit exakten Methoden bestätigt werden.

Darüber hinaus ergaben sich explizite Ausdrücke für die nicht-universellen Amplituden. Diese hängen vom Magnetfeld h ab und können leicht numerisch ausgewertet werden. Im Limes $h \rightarrow 0$ beobachtet man numerische Konvergenz zu den von Lukyanov gefundenen Amplituden im feldfreien Fall [96]. Die Frage, wie sich die letztgenannten Amplituden analytisch aus den hier gefundenen Resultaten ergeben, blieb unbeantwortet. Als weiteres Anwendungsbeispiel wurden mit Hilfe der Amplituden und der asymptotischen Formel die kurzreichweitigen Korrelatoren numerisch berechnet und mit den exakten Ergebnissen verglichen. Bemerkenswerterweise stellt die asymptotische Formel bereits für kleine Abstände ($m = 1, 2, 3$) eine sehr gute Näherung dar. Dies bestätigt die in der Einleitung formulierte Erwartung, dass die Kombination der Formfaktorentwicklung mit den bisherigen Methoden die Berechnung von Korrelationsfunktionen für beliebige Abstände ermöglicht.

Abschließend wurden die Ergebnisse auf den Teilbereich $\Delta > 1$ und $h_\ell < h < h_u$ der masselosen Phase übertragen. Obwohl dieser meistens in der Literatur vernachlässigt wird, findet man interessante Phänomene wie das Verhalten der Korrelatoren in der Nähe der kritischen Linie $h = h_\ell$.

Anschließend wurden die Grundzustandskorrelationsfunktionen in der massiven Phase mit Hilfe der gewöhnlichen Transfermatrix untersucht. Dies bietet den Vorteil, dass das Anregungsspektrum durch die Arbeiten [4, 132] bekannt ist. Die Analyse mittels der nichtlinearen Integralgleichung der Zählfunktion bestätigte die bekannte Klassifikation der Anregungen. Weiterhin konnte eine Kontroverse bezüglich eines Faktors in den higher-level Gleichungen, welche die komplexen Wurzeln als Funktion der Lochparameter festlegen, zugunsten der in [132] gefundenen Formel entschieden werden.

Für die Berechnung des führenden Terms der Amplituden der longitudinalen Korrelatoren im thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ wurde auf die Arbeit [45] verwiesen. Der führende Term verschwindet wie L^{-n} , wobei $n \in 2\mathbb{N}_0$ die Anzahl der Lochparameter ist. Spaltet man diesen Faktor ab, so kann der verbliebene Teil, der eine stetige Funktion der Lochparameter ist, als Formfaktordichte interpretiert werden. Dementsprechend lässt sich die Formfaktorreihe im thermodynamischen Limes als Riemann-Integral über die Lochparameter schreiben. In dieser Hinsicht ist die Analyse also deutlich einfacher als in der masselosen Phase. Die Summation über alle Lösungen der higher-level Gleichungen (für feste Lochparameter) konnte aufgrund der besonderen Struktur des Integranden als höherdimensionales Konturintegral geschrieben werden. Letzteres ist im Allgemeinen nicht ge-

geschlossen lösbar. Die Struktur der Formfaktorreihe ist somit ähnlich zu der des Vertex-Operator-Zugangs [64, 63], allerdings enthalten die Amplituden hier Fredholm-Determinanten.

Im Falle von zwei Löchern konnte numerisch gezeigt werden, dass die entsprechenden Amplituden mit den 2-Spinon-Amplituden des Vertex-Operator-Zugangs [92] übereinstimmen. Da letztere keine Determinanten enthalten, bedeutet dies, dass es möglich sein muss, die Fredholm-Determinanten explizit zu berechnen. Dieser Befund ähnelt dem Problem der Berechnung der Amplituden der masselosen Phase für verschwindendes Magnetfeld.

Ausgehend von der Äquivalenz zum Vertex-Operator-Zugang konnte die Abstandsasymptotik der statischen Korrelatoren mit einer Sattelpunktsanalyse berechnet werden. Die longitudinalen Korrelationsfunktionen zeigen eine langreichweitige antiferromagnetische Ordnung, die durch die spontane gestaggerte Magnetisierung [7] bestimmt ist. Die Korrekturen hierzu zerfallen exponentiell mit dem Abstand und werden durch die aus [67] bekannte Korrelationslänge beschrieben. Durch die Kenntnis der 2-Spinon-Amplituden war es zusätzlich möglich, die Amplituden sowie den algebraischen Korrekturterm m^{-2} zu berechnen.

Durch die Verwendung der gewöhnlichen Transfermatrix konnten darüber hinaus dynamische Korrelationsfunktionen betrachtet werden. Die Asymptotik für große Zeiten t und Abstände m (bei festem $v = m/t$) konnte ebenfalls mit einer Sattelpunktsanalyse bestimmt werden. Die Natur der Asymptotik hängt dabei vom Wert des Parameters v ab. Im zeitartigen Bereich $0 < v < v_{c_1}$ beobachtet man algebraischen Abfall und Oszillationen. Beim Übergang in das Vorläufer-Regime $v_{c_1} < v < v_{c_2}$ ändert sich die Asymptotik zu exponentiellem Zerfall mit Oszillationen. Im raumartigen Bereich $v > v_{c_2}$ liegt reiner exponentieller Zerfall ohne Oszillationen vor. Die Existenz des zeit- bzw. raumartigen Bereichs konnte durch das Auftreten einer Lieb-Robinson-Schranke erklärt werden [93]. Die Existenz des Vorläuferbereichs ist zunächst nicht-intuitiv, wenn man an Lichtkegelstrukturen in der relativistischen Feldtheorie denkt. Ähnliche Phänomene finden sich jedoch bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in dispergierenden Medien [121, 24]. Es wäre eine interessante Frage, ob solche Effekte in Systemen kalter Atome experimentell beobachtet werden können.

Im darauffolgenden Kapitel 6 wurden die Korrelationsfunktionen in der massiven Phase bei $T = 0$ von der Perspektive der Quantentransfermatrix betrachtet. Dazu mussten zunächst die Anregungen der Quantentransfermatrix für tiefe Temperaturen mit Hilfe der nichtlinearen Integralgleichung der Hilfsfunktion analysiert werden. Es zeigte sich, dass das Spektrum in den Fällen $h > 0$ und $h = 0$ fundamental verschieden ist. Für verschwindendes Magnetfeld ergibt sich eine ähnliche Situation wie im Transfermatrix-Fall. Die Teilchenparameter werden durch nicht-triviale higher-level Gleichungen bestimmt, in denen die auf der Linie $\text{Im } \lambda = -\gamma/2$ liegenden Löcher als freie Parameter eingehen. Für endliche Magnetfelder bilden die Teilchen mit einer Teilmenge (für Pseudospin $s = 0$ mit der Hälfte) der Löcher Teilchen-Loch-Strings der Länge γ . Die verbleibenden Lochparameter sind mit den Teilchenparametern für endliche Temperaturen durch gekoppelte higher-level Gleichungen bestimmt. Für $T \rightarrow 0$ entkoppeln diese jedoch, sodass die Teilchen und die freien Löcher zu unabhängigen Parametern auf zwei Kurven \mathcal{C}^\pm in der komplexen Ebene werden. In dieser Hinsicht ergibt sich wie in Kapitel 4 auch in der massiven Phase bei $h > 0$ ein Bild freier Fermionen.

Anschließend wurde die Tieftemperaturanalyse der Amplituden durchgeführt. Diese stellte sich technisch einfacher dar als die Analyse in der masselosen Phase, da keine divergenten Integrale auftraten. Analog zu Kapitel 5 verschwindet der für $T \rightarrow 0$ führende Term der Amplituden wie T^{2n} , wobei $n \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Teilchen bzw. Löcher ist. Dieser Faktor wird multipliziert mit einer Formfaktordichte, welche stetig von den Teilchen- und Lochparametern abhängt. Aufgrund der Tatsache, dass alle auftretenden Funktionen explizit bekannt und π -periodisch sind, konnte für

die Formfaktordichte ein vollkommen expliziter Ausdruck gefunden werden. Mit diesem Ergebnis konnte schließlich die Formfaktorreihe in Form einer Summe von Vielfachintegralen über die Kurven C^\pm geschrieben werden. Aufgrund der analytischen Eigenschaften des Integranden konnten diese Konturen deformiert werden, sodass sich die Korrelatoren wie erwartet als unabhängig vom Magnetfeld herausstellten. Es sei betont, dass die hier gefundene Formfaktorreihe einen wesentlichen Fortschritt im Vergleich zum Vertex-Operator-Zugang darstellt, da sämtliche Amplituden explizit bekannt sind.

Die ersten Terme der Formfaktorreihe, welche dem 2- und 4-Spinon-Beitrag im Vertex-Operator-Zugang entsprechen, wurden schließlich numerisch ausgewertet und für den Fall der Nachbarkorrelatoren mit dem exakten Resultat [128] verglichen. Es zeigte sich, dass bereits die „4-Spinon-Näherung“ im Rahmen der numerischen Genauigkeit das exakte Ergebnis für die Nachbarkorrelatoren liefert, sofern man sich nicht in der unmittelbaren Nähe des isotropen Punktes befindet.

Der isotrope Limes konnte in den Ergebnissen analytisch durchgeführt werden, allerdings ist es bislang nicht gelungen, das zum 4-Spinon-Beitrag gehörige Vierfachintegral mit der gewünschten numerischen Genauigkeit zu berechnen. Allgemein scheint sich das Konvergenzverhalten der Formfaktorreihe im isotropen Limes zu ändern, da der Impuls p in diesem Fall keine Sattelpunkte aufweist. Dies ist im Einklang mit der Tatsache, dass die Asymptotik der Korrelatoren multiplikative logarithmische Korrekturen aufweist [2]. Es wäre eine interessante Herausforderung, letztere mit Hilfe der Formfaktorentwicklung zu berechnen.

An diese Arbeit schließen sich weitere mögliche interessante Projekte an. Dazu zählt zunächst die Klärung von Fragen technischer Art, wie etwa die explizite Berechnung von Fredholm-Determinanten im Tieftemperaturlimites in der massiven und masselosen Phase. Wie bereits erwähnt, ist auch die numerische Berechnung der Amplituden bei endlicher Temperatur ein vielversprechendes Thema. In diesem Fall könnte man auf den numerischen Arbeiten zu den Korrelationslängen [85] aufbauen. Die wichtigste Frage ist sicherlich, ob die hier erzielten Ergebnisse für die Formfaktoren der Quantentransfermatrix auch für die Berechnung dynamischer Korrelationsfunktionen bei endlicher Temperatur nutzbar gemacht werden können. Dies ist zum einen von Bedeutung, um exakte Ergebnisse für Messgrößen wie den dynamischen Strukturfaktor bei endlicher Temperatur zu erhalten (vgl. [106] für eine aktuelle Studie im eindimensionalen Bose-Gas mit Kontaktwechselwirkung). Zum anderen ist die Zeitentwicklung isolierter integrierbarer Systeme momentan im Fokus des wissenschaftlichen Interesses, da sie aufgrund der Existenz unendlich vieler erhaltener Größen Besonderheiten aufweist [69]. Es ist bislang nicht eindeutig geklärt, ob und unter welchen Umständen abgeschlossene integrierbare Systeme thermalisieren und durch welches Ensemble sie gegebenenfalls beschrieben werden können [137, 110, 109].

Anhang

A Amplituden der erzeugenden Funktion

In diesem Anhang sollen Details zur Berechnung der Amplituden der erzeugenden Funktion in Kapitel 3.1 präsentiert werden. Dazu zählen die Herleitung der Amplituden (3.13) und einer alternativen Darstellung, in der die Ableitung nach dem Twistparameter α analytisch durchgeführt werden kann. Weiterhin wird die Durchführung des Trotterlimes erläutert sowie die Darstellung (3.15) begründet.

A.1 Herleitung der Amplituden

In diesem Abschnitt soll die Darstellung (3.7) (bzw. (3.3) und (3.6) für die Skalarprodukte) für die in (2.33) definierten Amplituden $A_n(\alpha)$ der erzeugenden Funktion hergeleitet werden.

In der Formfaktorentwicklung (2.33) sind nur die Eigenzustände der getwisteten Transfermatrix relevant, die durch $M = N/2$ Bethe-Wurzeln charakterisiert sind. Bezeichnet man die Bethe-Wurzeln eines solchen Zustands mit $\{\mu_j\}_{j=1}^M$ und die des dominanten Zustands mit $\{\lambda_j\}_{j=1}^M$, so folgt mit der Slavnov-Formel (3.1)

$$\left[\prod_{j=1}^M \frac{d(\mu_j)}{d(\lambda_j)} \right] \frac{\langle \Psi_n^\alpha | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_n^\alpha | \Psi_n^\alpha \rangle} = \left[\prod_{j=1}^M -\phi^{-1}(\mu_k - \eta) \right] \times \left[\prod_{1 \leq j < k \leq M} \frac{\text{sh}(\mu_j - \mu_k)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k)} \right] \frac{\det_M \{ e(\lambda_j - \mu_k) - e(\mu_k - \lambda_j) \alpha_0(\mu_k) \}}{\det_M \{ \delta_k^j \alpha_n'(\mu_j | \alpha) - K(\mu_j - \mu_k) \}}, \quad (\text{A.1})$$

wobei die Funktion

$$\phi(\lambda) = \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}(\lambda - \mu_j)}{\text{sh}(\lambda - \lambda_j)} \quad (\text{A.2})$$

eingeführt wurde. Im Folgenden wird eine Technik verwendet, welche schon im Anhang von [13] benutzt wurde und auf [62] zurückgeht.

Setzt man in (A.1) die Formel für die Cauchy-Determinante

$$\prod_{1 \leq j < k \leq M} \frac{\text{sh}(\mu_j - \mu_k)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k)} = \det_M \left\{ \frac{\text{res } \phi(\lambda_k)}{\text{sh}(\lambda_k - \mu_j)} \right\} \quad (\text{A.3})$$

ein (vgl. z.B. Anhang A von [39]) sowie die Identität

$$\phi(\mu_k - \eta) \phi^{-1}(\mu_k + \eta) = -q^{-2\alpha} \alpha_0(\mu_k), \quad (\text{A.4})$$

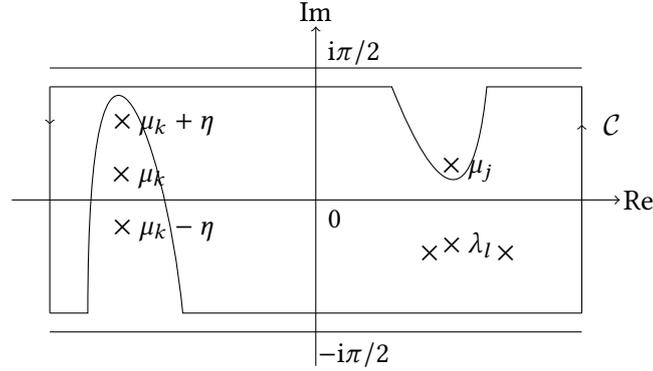


Abbildung A.1: Skizze der Kontur \mathcal{C} , welche alle Bethe-Wurzeln λ_l enthält, aber nicht μ_j , μ_k und $\mu_k \pm \eta \bmod i\pi$. Linker und rechter Rand der Kontur befinden sich im Unendlichen.

welche aus den Bethe-Ansatz-Gleichungen folgt, so erhält man

$$\begin{aligned}
& \left[\prod_{1 \leq j < k \leq M} \frac{\text{sh}(\mu_j - \mu_k)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k)} \right] \\
& \quad \times \left[\prod_{j=1}^M -e^{\lambda_j - \mu_j} q^{-\alpha} \phi^{-1}(\mu_k - \eta) \right] \det_M \left\{ e(\lambda_j - \mu_k) - e(\mu_k - \lambda_j) a_0(\mu_k) \right\} \\
& = \det_M \left\{ \frac{e^{\lambda_\ell - \mu_j} \text{res } \phi(\lambda_\ell)}{\text{sh}(\mu_j - \lambda_\ell)} \right\} \det_M \left\{ q^{-\alpha} \phi^{-1}(\mu_k - \eta) e(\lambda_\ell - \mu_k) + q^\alpha \phi^{-1}(\mu_k + \eta) e(\mu_k - \lambda_\ell) \right\} \\
& = \det_M \left\{ \int_{\mathcal{C}} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{e^{\lambda - \mu_j} \phi(\lambda)}{\text{sh}(\mu_j - \lambda)} \left(q^{-\alpha} \phi^{-1}(\mu_k - \eta) e(\lambda - \mu_k) + q^\alpha \phi^{-1}(\mu_k + \eta) e(\mu_k - \lambda) \right) \right\} \\
& = \det_M \left\{ \delta_k^j \rho_n^{-1}(\mu_j | \alpha) a'_n(\mu_j | \alpha) - \frac{q^{1+\alpha}}{\text{sh}(\mu_j - \mu_k - \eta)} + \frac{q^{-1-\alpha}}{\text{sh}(\mu_j - \mu_k + \eta)} \right\}. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Hierbei wurden in der zweiten Gleichung die Determinanten ausmultipliziert und die entstehende Summe als Konturintegral geschrieben. Die Kontur \mathcal{C} enthält dabei alle Bethe-Wurzeln λ_j ($j = 1, \dots, M$), aber nicht μ_j , μ_k und $\mu_k \pm \eta$ (vgl. Abbildung A.1). Das Integral kann berechnet werden, indem man die Kontur \mathcal{C} „umstülpt“. Dies ist möglich, da der Integrand $i\pi$ -periodisch ist und exponentiell abfällt für $\text{Re } \lambda \rightarrow \pm\infty$. Die Auswertung der Residuen und die aus der Baxter'schen TQ -Gleichung folgende Identität

$$\phi'(\mu_j) \left(q^{-\alpha} \phi^{-1}(\mu_j - \eta) - q^\alpha \phi^{-1}(\mu_j + \eta) \right) = \rho_n^{-1}(\mu_j | \alpha) a'_n(\mu_j | \alpha) \tag{A.6}$$

liefern schließlich die dritte Gleichung von (A.5).

Mit (A.1) und (A.5) und der Definition (3.4) des Kerns \mathcal{K}_α erhält man

$$\left[\prod_{j=1}^M \frac{q^{-\alpha} d(\mu_j) e^{\lambda_j}}{d(\lambda_j) e^{\mu_j}} \right] \frac{\langle \Psi_n^\alpha | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_n^\alpha | \Psi_n^\alpha \rangle} = \left[\prod_{j=1}^M \rho_n^{-1}(\mu_j | \alpha) \right] \frac{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j | \alpha)}{a'_n(\mu_j | \alpha)} \mathcal{K}_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\}}{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{a'_n(\mu_j | \alpha)} \mathcal{K}(\mu_j - \mu_k) \right\}}, \tag{A.7}$$

womit Gleichung (3.3) aus Kapitel 3.1 folgt.

Eine ähnliche Rechnung, bei der die Rollen von μ_j und λ_j vertauscht sind, ergibt

$$\left[\prod_{j=1}^M \frac{q^\alpha d(\lambda_j) e^{\mu_j}}{d(\mu_j) e^{\lambda_j}} \right] \frac{\langle \Psi_0 | \Psi_n^\alpha \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} = \left[\prod_{j=1}^M \rho_n(\lambda_j | \alpha) \right] \frac{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n^{-1}(\lambda_j | \alpha)}{\alpha'_0(\lambda_j)} \mathcal{K}_\alpha(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{\alpha'_0(\lambda_j)} \mathcal{K}(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}, \quad (\text{A.8})$$

womit Gleichung (3.6) gezeigt ist. Multipliziert man die beiden Gleichungen (A.7) und (A.8), so erkennt man, dass sich die unerwünschten Produkte auf den linken Seiten kürzen und sich schließlich Gleichung (3.7) aus Kapitel 3.1 ergibt.

A.2 Alternative Darstellung der Determinanten

In diesem Teil soll zunächst die Gleichung

$$\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{K(\mu_j - \mu_k)}{\alpha'_n(\mu_j | 0) \rho_n^{-1}(\mu_j | 0)} \right\} = \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{K(\lambda_j - \lambda_k)}{\alpha'_0(\lambda_j) \rho_n(\lambda_j | 0)} \right\} = 0, \quad n \neq 0, \quad (\text{A.9})$$

bewiesen werden (hier $M = N/2$).

Für den Beweis konstruiert man einen linken Eigenvektor der Matrix

$$M_{jk} = \delta_k^j - \frac{K(\lambda_j - \lambda_k)}{\alpha'_0(\lambda_k | 0) \rho_n(\lambda_k | 0)} \quad (\text{A.10})$$

zum Eigenwert Null. Setzt man

$$v_j = \text{res } \phi(\lambda_j) = \frac{1}{(\phi^{-1})'(\lambda_j)}, \quad (\text{A.11})$$

so folgt mit der aus der TQ-Gleichung folgenden Identität

$$\frac{\rho_n^{-1}(\lambda_k | 0)}{\alpha'_n(\lambda_k)} = \frac{1}{(\phi^{-1})'(\lambda_j) (\phi(\lambda_k - \eta) - \phi(\lambda_k + \eta))} \quad (\text{A.12})$$

dass

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M v_j M_{jk} &= \frac{1}{(\phi^{-1})'(\lambda_k)} - \frac{1}{(\phi^{-1})'(\lambda_k) (\phi(\lambda_k - \eta) - \phi(\lambda_k + \eta))} \sum_{j=1}^M \text{res } \phi(\lambda_j) K(\lambda_j - \lambda_k) \\ &= \frac{1}{(\phi^{-1})'(\lambda_k)} - \frac{1}{(\phi^{-1})'(\lambda_k) (\phi(\lambda_k - \eta) - \phi(\lambda_k + \eta))} \int_\gamma \frac{d\omega}{2\pi i} \phi(\omega) K(\omega - \lambda_k) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Hierbei umschließt der Weg γ alle λ_j ($j = 1, \dots, M$) aber nicht $\lambda_k \pm \eta$. Da der Integrand $i\pi$ -periodisch ist und exponentiell verschwindet¹ für $\text{Re}(\lambda) \rightarrow \pm\infty$, kann das Integral analog zu Anhang A.1 berechnet werden. Die Auswertung der Residuen liefert

$$\int_\gamma \frac{d\omega}{2\pi i} \phi(\omega) K(\omega - \lambda_k) = \phi(\lambda_k - \eta) - \phi(\lambda_k + \eta). \quad (\text{A.14})$$

¹Man beachte, dass dies nicht mehr für den Fall $\alpha \neq 0$ gilt, da der Kern \mathcal{K}_α konstante Asymptotik besitzt.

Damit folgt

$$\sum_{j=1}^M v_j M_{jk} = 0, \quad (\text{A.15})$$

der Vektor mit Komponenten v_j ist somit ein linker Eigenvektor der Matrix M_{jk} zum Eigenwert Null, womit die Determinante verschwindet. Eine analoge Rechnung, in der die Rollen von μ_j und λ_j vertauscht sind, liefert die zweite Gleichung von (A.9).

Somit müssen zur Durchführung der zweifachen Ableitung nach α (vgl. (2.33) und (2.35)) beide Determinanten des Zählers in (3.13) bzw. (3.15) nach α abgeleitet werden. Im Folgenden soll eine alternative Darstellung der Determinanten hergeleitet werden, welche es erlaubt, die α -Ableitungen *analytisch* durchzuführen. Diese Form erlaubt es weiterhin, eine Beziehung zu den Determinanten aus den Arbeiten [73, 76, 90, 91] herzustellen.

Definiere zunächst

$$z(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{1 + a_0(\lambda)} \right) \quad (\text{A.16})$$

sowie die „periodische Cauchy-Transformierte“

$$L_C[z](v) = \int_C d\mu z(\mu) \text{cth}(\mu - v). \quad (\text{A.17})$$

Aufgrund der TQ-Gleichung hat man die Identität (vgl. [14])

$$\frac{\rho_n^{-1}(\lambda|\alpha)}{1 + a_0(\lambda)} = -\frac{q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)}{\rho_n(\lambda|\alpha) (q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta))} + \frac{\phi(\lambda)}{q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)}. \quad (\text{A.18})$$

Die Funktion auf der linken Seite ist die Gewichtsfunktion des Integrationsmaßes dm_-^α . Die Funktion $\rho_n^{-1}(\lambda|\alpha)$ besitzt keine Polstellen innerhalb von C_n . Nimmt man weiterhin an, dass die Funktion

$$-\frac{q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)}{q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)} = \left(1 - \frac{a_0(\lambda)}{a_n(\lambda|\alpha)} \right)^{-1} \quad (\text{A.19})$$

keine Polstellen innerhalb von C_n besitzt, so kann das Maß dm_-^α durch das Maß

$$dM_-^\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{\phi(\lambda)}{q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)} \quad (\text{A.20})$$

ersetzt werden, sowie die Kontur C_n durch eine Kontur $\Gamma_n^{(-)}$, welche C_n einschließt. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass die neue Gewichtsfunktion keine Polstellen an den Lochparametern mehr besitzt, was insbesondere im Tieftemperaturlimit in der masselosen Phase von Bedeutung ist (vgl. Kapitel 4). Die Gewichtsfunktion des neuen Maßes kann wieder durch die Hilfsfunktion und die Funktion ρ ausgedrückt werden,

$$\frac{\phi(\lambda)}{q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)} = \frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{\rho_n(\lambda|\alpha)(1 + a_0(\lambda))} \frac{1}{1 - a_n(\lambda|\alpha)/a_0(\lambda)}. \quad (\text{A.21})$$

Die Faktoren auf der rechten Seite können unter Verwendung der nichtlinearen Integralgleichung (2.23) bzw. Gleichung (2.26) umgeschrieben werden,

$$\frac{a_n(\lambda|\alpha)}{a_0(\lambda)} = q^{-2\alpha} \exp \left\{ \int_{C_n} d\mu K(\mu - \lambda) z(\mu) \right\}, \quad (\text{A.22})$$

sowie

$$\frac{1 + a_n(\lambda|\alpha)}{\rho_n(\lambda|\alpha)(1 + a_0(\lambda))} = q^{-\alpha} \exp \left\{ \int_{C_n} d\mu e(\mu - \lambda)z(\mu) \right\}. \quad (\text{A.23})$$

Hierbei ist nun λ *außerhalb* von C_n .

Eine analoge Rechnung kann für die Determinante mit Maß dm_{\pm}^{α} durchgeführt werden. Damit folgt schließlich

$$\det_{dm_{\pm}^{\alpha}, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_{\mp\alpha}\} = \det_{dM_{\pm}^{\alpha}, \Gamma_n^{(\pm)}} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_{\mp\alpha}\}, \quad (\text{A.24})$$

wobei die neuen Integrationsmaße aufgrund der Definition der Cauchy-Transformierten (A.17) und den Gleichungen (A.20), (A.22) und (A.23) durch

$$dM_{\pm}^{\alpha}(\lambda) = \mp \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{q^{-\alpha} e^{\mp L_{C_n}[z](\lambda)}}{e^{\mp L_{C_n}[z](\lambda \pm \eta)} - q^{-2\alpha} e^{\mp L_{C_n}[z](\lambda \mp \eta)}} \quad (\text{A.25})$$

bestimmt sind. Definiert man nun $\beta = q^{-2\alpha}$ sowie

$$\widetilde{K}_{\beta}(\lambda) = \text{cth}(\lambda - \eta) - \beta \text{cth}(\lambda + \eta) \quad (\text{A.26})$$

und zwei neue Kerne

$$U_{\theta}^{(-)}(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{L_{C_n}[z](\lambda)} (\widetilde{K}_{\beta}(\lambda - \mu) - \widetilde{K}_{\beta}(\theta - \mu))}{e^{L_{C_n}[z](\lambda - \eta)} - \beta e^{L_{C_n}[z](\lambda + \eta)}}, \quad (\text{A.27a})$$

$$U_{\theta}^{(+)}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-L_{C_n}[z](\mu)} (\widetilde{K}_{\beta}(\lambda - \mu) - \widetilde{K}_{\beta}(\lambda - \theta))}{e^{-L_{C_n}[z](\mu + \eta)} - \beta e^{-L_{C_n}[z](\mu - \eta)}}, \quad (\text{A.27b})$$

so gilt offenbar

$$\det_{dm_{\pm}^{\alpha}, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_{\mp\alpha}\} = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \det_{d\lambda, \Gamma_n^{(\pm)}} \{1 + \widehat{U}_{\theta}^{(\pm)}\}. \quad (\text{A.28})$$

Benutzt man (vgl. auch Gleichung (A.52))

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} e^{L_{C_n}[z](\theta \pm \eta)} = e^{\int_{C_n} d\lambda z(\lambda)} = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty} \phi(\lambda) = b^{-1}, \quad (\text{A.29})$$

so folgt

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{b^{\pm 1}(1 - \beta)}{e^{\mp L_{C_n}[z](\theta \pm \eta)} - \beta e^{\mp L_{C_n}[z](\theta \mp \eta)}} = 1, \quad (\text{A.30})$$

und mit (A.28) schließlich

$$\det_{dm_{\pm}^{\alpha}, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_{\mp\alpha}\} = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \left[\frac{b^{\pm 1}(1 - \beta)}{e^{\mp L_{C_n}[z](\theta \pm \eta)} - \beta e^{\mp L_{C_n}[z](\theta \mp \eta)}} \det_{d\lambda, \Gamma_n^{(\pm)}} \{1 + \widehat{U}_{\theta}^{(\pm)}\} \right]. \quad (\text{A.31})$$

In Anhang A.3 der Arbeit [72] wird gezeigt, dass der Ausdruck in den eckigen Klammern auf der rechten Seite der obigen Gleichung unabhängig von θ ist. Damit ergibt sich

$$\det_{dm_{\pm}^{\alpha}, C_n} \{1 - \widehat{\mathcal{K}}_{\mp\alpha}\} = \frac{b^{\pm 1}(1 - \beta)}{e^{\mp L_{C_n}[z](\theta \pm \eta)} - \beta e^{\mp L_{C_n}[z](\theta \mp \eta)}} \det_{d\lambda, \Gamma_n^{(\pm)}} \{1 + \widehat{U}_{\theta}^{(\pm)}\}. \quad (\text{A.32})$$

Man beachte, dass auf der rechten Seite der Gleichung (A.32) die Ableitung nach α an der Stelle $\alpha = 0$ trivial durchgeführt werden kann.

Führt man für die beiden Fälle unabhängige Parameter θ_1 und θ_2 ein, so nehmen die Determinanten dieselbe Form wie in [90, 91] an. Im Limes $T \rightarrow 0$ (vgl. Kapitel 4) ergeben sich nach einer speziellen Wahl der Parameter $\theta_{1,2}$ dieselben Ausdrücke wie in [73, 76].

Es sei bemerkt, dass die Ableitung nach dem α -Parameter auch für die Determinanten mit Maß dm_{\pm}^{α} analytisch durchgeführt werden kann. Dies kann mit der Identität

$$\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{K_{\alpha}(\lambda_j - \lambda_k)}{\alpha'_0(\lambda_j|0)\rho_n(\lambda_j|0)} \right\} = (q^{-\alpha} - q^{\alpha}) \frac{b + b^{-1}}{\gamma(b - b^{-1})} \frac{1}{1 - \frac{b+b^{-1}}{\gamma(b-b^{-1})}(q^{\alpha} - q^{-\alpha})} \times \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{K_{\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) + \gamma}{\alpha'_0(\lambda_j)\rho_n(\lambda_j|\alpha)} \right\} \quad (\text{A.33})$$

bewerkstelligt werden (eine ähnliche Formel gilt für die andere Determinante im Zähler von (3.15)). Hierbei ist γ ein beliebiger Parameter und b durch Gleichung (A.29) gegeben. Der Beweis der obigen Formel (A.33) erfolgt analog zu Anhang A.4.

A.3 Details zur Durchführung des Trotterlimes

In diesem Abschnitt sollen Details zur Durchführung des Trotterlimes in der Formel (3.7) erläutert werden.

Aufgrund der Definition der Kontur C_n (vgl. Kapitel 2) und Gleichung (2.21) ist die Hilfsfunktion $1 + \alpha_n$ innerhalb von C_n meromorph, mit einer einzigen Polstelle der Vielfachheit $N/2$ bei $-\beta/N$ und $N/2$ einfachen Nullstellen bei den Bethe-Wurzeln $\{\mu_j\}_{j=1}^{N/2}$.

Damit gilt für jede in C_n holomorphe Funktion f die Gleichung

$$\int_{C_n} \frac{d\lambda}{2\pi i(1 + \alpha_n(\lambda))} f(\lambda) = \sum_{j=1}^{N/2} \frac{f(\lambda_j)}{\alpha'_n(\mu_j)}. \quad (\text{A.34})$$

Diese Gleichung kann direkt auf die Entwicklung (3.9) angewendet werden, sodass (3.11) folgt.

Für die Herleitung von Gleichung (3.8) verwendet man die Darstellung

$$\partial_{\lambda} \ln(1 + \alpha_n(\lambda)) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda - \mu_j} - \frac{N}{2} \frac{1}{\lambda + \beta/N} + g(\lambda) \quad (\text{A.35})$$

der logarithmischen Ableitung, welche aus den Eigenschaften der Hilfsfunktion folgt. Hierbei ist g eine innerhalb von C_n holomorphe Funktion. Mit dieser Identität folgt schließlich die Darstellung

$$\prod_{j=1}^M \frac{\rho_n(\lambda_j|\alpha)}{\rho_n(\mu_j|\alpha)} = \exp \left\{ - \int_{C'_n} \frac{d\lambda}{2\pi i} \ln(\rho_n(\lambda|\alpha)) \partial_{\lambda} \ln \left(\frac{1 + \alpha_n(\lambda|\alpha)}{1 + \alpha_0(\lambda)} \right) \right\}, \quad (\text{A.36})$$

wobei die Kontur C'_n innerhalb von C_n liegt. Damit ist Gleichung (3.8) bewiesen.

A.4 Die „bekleidete Ladung“

In diesem Anhang soll die Darstellung (3.15) ausgehend von (3.13) hergeleitet werden.

Betrachte als Vorüberlegung eine invertierbare $M \times M$ -Matrix K und einen eindimensionalen Projektor X ,

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_M) . \quad (\text{A.37})$$

Dann ist

$$\det_M[K + X] = \det_M[K] \det_M[I_M + K^{-1}X] = \det_M[K] \det_M[\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{v}, \dots, \mathbf{e}_M + x_M\mathbf{v}] . \quad (\text{A.38})$$

Hierbei ist $I_M = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M)$ die Einheitsmatrix vom Format M . Der Vektor \mathbf{v} (mit Komponenten v_j) ist durch die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$K\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

bestimmt. Die zweite Determinante in (A.38) kann nun einfach berechnet werden,

$$\det_M[K + X] = \left(1 + \sum_{j=1}^M v_j x_j\right) \det_M[K] . \quad (\text{A.40})$$

Wendet man dies an auf die erste Determinante im Zähler von (3.7) und benutzt (3.14), so folgt

$$\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{\alpha'_n(\mu_j|\alpha)} K_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\} = \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{\alpha'_n(\mu_j|\alpha)} K_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\} \times \left(1 + \sum_{j=1}^M \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{\alpha'_n(\mu_j|\alpha)} (q^\alpha - q^{-\alpha}) v_j \right) , \quad (\text{A.41})$$

wobei v_j Lösung des linearen Gleichungssystems

$$v_j - \sum_{k=1}^M \frac{\rho_n(\mu_k|\alpha)}{\alpha'_n(\mu_k|\alpha)} K_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) v_k = 1 , \quad j = 1, \dots, M , \quad (\text{A.42})$$

ist. Definiert man die Funktion $\bar{\sigma}_+$ durch

$$\bar{\sigma}_+(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^M \frac{\rho_n(\mu_k|\alpha)}{\alpha'_n(\mu_k|\alpha)} K_{-\alpha}(\lambda - \mu_k) v_k , \quad (\text{A.43})$$

so folgt, dass $\bar{\sigma}_+(\mu_j) = v_j$. Damit kann das Gleichungssystem (A.42) als lineare Integralgleichung geschrieben werden,

$$\bar{\sigma}_+(\lambda) = 1 + \int_{\mathcal{C}_n} dm_+^\alpha(\mu) K_\alpha(\lambda - \mu) \bar{\sigma}_+(\mu) . \quad (\text{A.44})$$

Hierbei ist dm_+^α das in (3.10) definierte Integrationsmaß.

Setzt man dies in (A.41) ein und beachtet die Asymptotik des Kerns K_α ,

$$\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow +\infty} K_\alpha(\lambda) = q^{-\alpha} - q^\alpha, \quad (\text{A.45})$$

so folgt

$$\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{\alpha'_n(\mu_j|\alpha)} \mathcal{K}_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\} = \left(\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow -\infty} \bar{\sigma}_+(\lambda) \right) \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n(\mu_j|\alpha)}{\alpha'_n(\mu_j|\alpha)} K_{-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \right\}. \quad (\text{A.46})$$

Führt man dieselben Schritte für die Determinante

$$\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)}{\alpha'_0(\lambda_j)} \mathcal{K}_\alpha(\lambda_j - \lambda_k) \right\} = \det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n^{-1}(\lambda_k|\alpha)}{\alpha'_0(\lambda_k)} (K_\alpha(\lambda_k - \lambda_j) + q^\alpha - q^{-\alpha}) \right\} \quad (\text{A.47})$$

durch, so folgt schließlich Gleichung (3.15) aus Kapitel 3.1.

Erstaunlicherweise können die linearen Integralgleichungen für die Funktionen $\bar{\sigma}_+$ und σ_- für endliche Trotterzahl analytisch gelöst werden. Das Vorgehen ist dabei eng an die Arbeit [14] angelehnt.

Die Behauptung ist, dass

$$\sigma_-(\lambda) = \frac{q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)}{\phi_0(q^\alpha - q^{-\alpha})}, \quad (\text{A.48})$$

wobei

$$\phi_0 = \operatorname{ch} \left(\sum_{j=1}^M (\lambda_j - \mu_j) \right). \quad (\text{A.49})$$

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen des Ansatzes (A.48) in die Integralgleichung (3.17b). Aufgrund der TQ-Gleichung gilt (vgl. Anhang A.2)

$$\frac{\rho_n^{-1}(\lambda|\alpha)}{1 + \alpha_0(\lambda)} = - \frac{q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)}{\rho_n(\lambda|\alpha) (q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta))} + \frac{\phi(\lambda)}{q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)}. \quad (\text{A.50})$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) \sigma_-(\mu) K_\alpha(\mu - \lambda) &= \int_{C_n} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K_\alpha(\mu - \lambda)}{\phi_0(q^\alpha - q^{-\alpha})} (-q^{-\alpha} \rho_n^{-1}(\mu|\alpha) \phi(\mu + \eta) + \phi(\mu)) \\ &= \int_{C_n} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K_\alpha(\mu - \lambda)}{\phi_0(q^\alpha - q^{-\alpha})} \phi(\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Hierbei wurde benutzt, dass der erste Term auf der rechten Seite der ersten Gleichung holomorph innerhalb der Kontur C_n ist. Das letzte Integral kann in ähnlicher Weise zu Anhang A.1 bzw. A.2 berechnet werden, dabei ist zu beachten, dass zusätzlich zu den Polstellen bei $\lambda \pm \eta$ Beiträge vom linken und rechten Rand der Kontur entstehen. Da diese sich im Unendlichen befinden, folgt mit der Definition

$$\lim_{\operatorname{Re}(\lambda) \rightarrow \pm\infty} \phi(\lambda) = b^{\pm 1}, \quad b = \exp \left(\sum_{j=1}^M (\lambda_j - \mu_j) \right) \quad (\text{A.52})$$

und der Asymptotik des Kerns (A.45)

$$\begin{aligned} \int_{C_n} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K_\alpha(\mu - \lambda)}{\phi_0(q^\alpha - q^{-\alpha})} \phi(\mu) &= -1 + \frac{q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta)}{\phi_0(q^\alpha - q^{-\alpha})} \\ &= -1 + \sigma_-(\lambda) . \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Der Vergleich mit (A.51) zeigt, dass die in (A.48) definierte Funktion tatsächlich die Lösung der Integralgleichung (3.17b) ist.

Damit folgt

$$\sigma_- = \lim_{\text{Re}(\lambda) \rightarrow -\infty} \sigma_-(\lambda) = \frac{b^{-1}}{\phi_0} . \quad (\text{A.54})$$

Eine analoge Rechnung liefert

$$\bar{\sigma}_+(\lambda) = \frac{q^{-\alpha} \phi^{-1}(\lambda - \eta) - q^\alpha \phi^{-1}(\lambda + \eta)}{\phi_0(q^{-\alpha} - q^\alpha)} , \quad (\text{A.55})$$

und somit

$$\bar{\sigma}_+ = \lim_{\text{Re}(\lambda) \rightarrow -\infty} \bar{\sigma}_+(\lambda) = \frac{b}{\phi_0} . \quad (\text{A.56})$$

Mit Gleichung (A.54) und (A.56) ergibt sich schließlich

$$\bar{\sigma}_+ \sigma_- = \frac{1}{\phi_0^2} = \text{ch}^{-2} \left(\sum_{j=1}^M (\lambda_j - \mu_j) \right) . \quad (\text{A.57})$$

Für die Durchführung des Trotterlimes benutzt man die Integraldarstellung

$$\sum_{j=1}^M (\lambda_j - \mu_j) = \int_{C_n} \frac{d\lambda}{2\pi i} \lambda \partial_\lambda \ln \left(\frac{1 + \alpha_n(\lambda|\alpha)}{1 + \alpha_0(\lambda)} \right) , \quad (\text{A.58})$$

vgl. dazu Kapitel A.3. Nimmt man an, dass bei einer partiellen Integration keine Randterme entstehen, so folgt Gleichung (3.18) aus Kapitel 3.1.

B Amplituden der transversalen Korrelatoren

In diesem Anhang wird die Herleitung der Amplituden der transversalen Korrelatoren durchgeführt.

B.1 Der Formfaktor $F_+(\xi)$

In diesem Fall wird der Zustand $|\Psi_n^\alpha\rangle$ durch $M-1$ ($M = N/2$) Bethe-Wurzeln parametrisiert, welche mit μ_j bezeichnet werden. Definiere analog zu A.1 die Funktion

$$\phi(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{M-1} \text{sh}(\lambda - \mu_j)}{\prod_{j=1}^M \text{sh}(\lambda - \lambda_j)}, \quad (\text{B.1})$$

welche nun $i\pi$ -antiperiodisch ist, $\phi(\lambda + i\pi) = -\phi(\lambda)$. Möchte man analog zu (A.1) vorgehen, so benötigt man eine Verallgemeinerung der Cauchy-Determinanten (A.3). Diese ist gegeben durch (vgl. z.B. Anhang A von [39])

$$\frac{\prod_{1 \leq j < k \leq M-1} \text{sh}(\mu_j - \mu_k)}{\prod_{1 \leq j < k \leq M} \text{sh}(\lambda_j - \lambda_k)} = \left[\prod_{j=1}^M \text{res } \phi(\lambda_j) \right] \det_M \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1 - \mu_1}}{\text{sh}(\lambda_1 - \mu_1)} & \cdots & \frac{e^{\lambda_M - \mu_1}}{\text{sh}(\lambda_M - \mu_1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{e^{\lambda_1 - \mu_{M-1}}}{\text{sh}(\lambda_1 - \mu_{M-1})} & \cdots & \frac{e^{\lambda_M - \mu_{M-1}}}{\text{sh}(\lambda_M - \mu_{M-1})} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Benutzt man die Slavnovformel (3.1), die Normformel (3.2) sowie die obige Gleichung im Ausdruck (3.21) für den Formfaktor $F_+(\xi)$, so folgt

$$F_+(\xi) = A \det_M \left(\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} \mathbf{u}_1, \dots, \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} \mathbf{u}_M \right), \quad (\text{B.3})$$

wobei

$$A = \frac{\prod_{j=1}^M d(\lambda_j) e^{\lambda_j}}{\prod_{j=1}^{M-1} q^{-\alpha} d(\mu_j) e^{\mu_j}} \frac{1}{\det_{M-1} \left\{ \delta_k^j \alpha_n'(\mu_j | \alpha) - K(\mu_j - \mu_k) \right\}} \quad (\text{B.4})$$

und die Einträge der $(M-1) \times M$ -Matrix C und des Zeilenvektors E durch

$$C_\ell^j = \frac{1}{\text{sh}(\lambda_\ell - \mu_j)}, \quad j = 1, \dots, M-1; \ell = 1, \dots, M, \quad (\text{B.5a})$$

$$E_\ell^1 = e^{-\lambda_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, M \quad (\text{B.5b})$$

gegeben sind. Die Einträge der Spaltenvektoren \mathbf{u}_k lauten

$$(\mathbf{u}_k)^\ell = -\text{res } \phi(\lambda_\ell) \left\{ q^{-\alpha} \phi^{-1}(\mu_k - \eta) e(\lambda_\ell - \mu_k) + q^\alpha \phi^{-1}(\mu_k + \eta) e(\mu_k - \lambda_\ell) \right\}, \quad (\text{B.6a})$$

$$k = 1, \dots, M-1; \ell = 1, \dots, M,$$

$$(\mathbf{u}_M)^\ell = -\frac{\phi^{-1}(\xi)}{1 + \alpha_0(\xi)} \text{res } \phi(\lambda_\ell) \left\{ e(\lambda_\ell - \xi) - e(\xi - \lambda_\ell) \alpha_0(\xi) \right\}, \quad \ell = 1, \dots, M. \quad (\text{B.6b})$$

Die Determinante auf der rechten Seite von (B.3) kann in ähnlicher Weise wie in (A.5) vereinfacht werden. Dabei müssen die Fälle \mathbf{Cu}_k , $k = 1, \dots, M-1$ (oberer linker $(M-1) \times (M-1)$ -Block), \mathbf{Cu}_M (letzte Spalte), \mathbf{Eu}_k , $k = 1, \dots, M-1$ (letzte Zeile), und \mathbf{Eu}_M (1×1 -Block unten rechts) unterschieden werden. Man erhält

$$(\mathbf{Cu}_k)^j = \delta_k^j a_n'(\mu_j|\alpha) \rho_n^{-1}(\mu_j|\alpha) - \frac{q^\alpha}{\text{sh}(\mu_j - \mu_k - \eta)} + \frac{q^{-\alpha}}{\text{sh}(\mu_j - \mu_k + \eta)}, \quad (\text{B.7a})$$

$$\mathbf{Eu}_k = (q^{\alpha-1} - q^{1-\alpha}) e^{-\mu_k}, \quad (\text{B.7b})$$

$$(\mathbf{Cu}_M)^j = \frac{1}{\text{sh}(\xi - \mu_j)} - \frac{q^{-\alpha} \rho_n(\xi|\alpha)}{1 + a_n(\xi|\alpha)} \frac{1}{\text{sh}(\xi - \mu_j - \eta)} - \frac{q^\alpha \rho_n(\xi|\alpha)}{1 + \bar{a}_n(\xi|\alpha)} \frac{1}{\text{sh}(\xi - \mu_j + \eta)}, \quad (\text{B.7c})$$

$$\mathbf{Eu}_M = e^{-\xi} \left(1 - \frac{q^{1-\alpha} \rho_n(\xi|\alpha)}{1 + a_n(\xi|\alpha)} - \frac{q^{\alpha-1} \rho_n(\xi|\alpha)}{1 + \bar{a}_n(\xi|\alpha)} \right), \quad (\text{B.7d})$$

wobei $\bar{a}_n = 1/a_n$ gesetzt wurde.

Führt man die folgenden Rechnungen mit dieser Matrix durch, so erhält man am Ende Fredholm-Determinanten mit Kern \mathcal{K} . Da dieser Kern problematisch ist für den Fall $F_-(\xi)$ (siehe Anhang B.2), soll an dieser Stelle der Kern K eingeführt werden. Dies gelingt, indem man das e^{μ_j} -fache von (B.7b) von (B.7a) abzieht und das e^{μ_j} von (B.7d) von (B.7c) subtrahiert. Offenbar ändert dies nicht die Determinante in (B.3). Benutzt man die Identität

$$\frac{1}{\text{sh}(x)} = e^x (\text{cth}(x) - 1), \quad (\text{B.8})$$

so folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{Cu}_k)^j - e^{\mu_j} \mathbf{Eu}_k &= \delta_k^j a_n'(\mu_j|\alpha) \rho_n^{-1}(\mu_j|\alpha) - e^{\mu_j - \mu_k} K_{1-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \\ &=: e^{\mu_j - \mu_k} (\mathbf{v}_k)^j, \end{aligned} \quad (\text{B.9a})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Cu}_M)^j - e^{\mu_j} \mathbf{Eu}_M &= e^{\mu_j - \xi} \left[\text{cth}(\xi - \mu_j) - \frac{q^{1-\alpha} \rho_n(\xi|\alpha)}{1 + a_n(\xi|\alpha)} \text{cth}(\xi - \mu_j - \eta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^{\alpha-1} \rho_n(\xi|\alpha)}{1 + \bar{a}_n(\xi|\alpha)} \text{cth}(\xi - \mu_j + \eta) \right] \\ &=: e^{\mu_j - \xi} (\mathbf{v}_M)^j, \end{aligned} \quad (\text{B.9b})$$

wobei $j = 1, \dots, M-1$. Diese Gleichungen definieren eine Matrix $(M-1) \times (M-1)$ \mathbf{V} mit Einträgen $V_k^j = (\mathbf{v}_k)^j$ und einen $M-1$ -komponentigen Zeilenvektor \mathbf{v}_M . Entwickelt man die Determinante der modifizierten Matrix nach der letzten Zeile, so folgt

$$\begin{aligned} F_+(\xi) &= A e^{-\xi} \det_{M-1}(V) \left(\mathbf{Eu}_M e^\xi + \sum_{k=1}^{M-1} \mathbf{Eu}_k e^{\mu_k} (-1)^{M+k} \frac{\det_{M-1}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_M)}{\det_{M-1}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{M-1})} \right) \\ &= A e^{-\xi} \det_{M-1}(V) \left(\mathbf{Eu}_M e^\xi - \sum_{k=1}^{M-1} \mathbf{Eu}_k e^{\mu_k} (V^{-1} \mathbf{v}_M)^k \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Hierbei wurde im ersten Schritt angenommen, dass die Matrix V invertierbar ist. In der Summe kann der Vektor \mathbf{v}_M durch $M-1-k$ Vertauschungen an Position k bewegt werden und anschließend

die Kramersche Regel benutzt werden, sodass die zweite Gleichung folgt. Setzt man $\mathbf{x} = V^{-1}\mathbf{v}_M$, so erfüllen die Komponenten x^j dieses Vektors das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a'_n(\mu_j|\alpha)\rho_n^{-1}(\mu_j|\alpha)x^j &= -\operatorname{cth}(\mu_j - \xi) + \frac{q^{1-\alpha}\rho_n(\xi|\alpha)}{1 + a_n(\xi|\alpha)} \operatorname{cth}(\mu_j - \xi + \eta) \\ &\quad + \frac{q^{\alpha-1}\rho_n(\xi|\alpha)}{1 + \bar{a}_n(\xi|\alpha)} \operatorname{cth}(\mu_j - \xi - \eta) + \sum_{k=1}^{M-1} K_{1-\alpha}(\mu_j - \mu_k)x^k, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

welches nach dem Vorbild von Anhang A.4 in eine lineare Integralgleichung umgewandelt werden kann. Definiert man die Funktion

$$\begin{aligned} G_+(\lambda, \xi) &= -\operatorname{cth}(\lambda - \xi) + \frac{q^{1-\alpha}\rho_n(\xi|\alpha)}{1 + a_n(\xi|\alpha)} \operatorname{cth}(\lambda - \xi + \eta) \\ &\quad + \frac{q^{\alpha-1}\rho_n(\xi|\alpha)}{1 + \bar{a}_n(\xi|\alpha)} \operatorname{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \sum_{k=1}^{M-1} K_{1-\alpha}(\lambda - \mu_k)x^k, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

so gilt

$$G_+(\mu_k, \xi) = a'_n(\mu_k|\alpha)\rho_n^{-1}(\mu_k|\alpha)x^k, \quad (\text{B.13})$$

und $G_+(\lambda, \xi)$ ist als Funktion von λ meromorph innerhalb der Kontur \mathcal{C}_n mit einem einzigen einfachen Pol¹ bei $\lambda = \xi$ mit Residuum -1 . Damit folgt, dass G_+ die Lösung der linearen Integralgleichung

$$G_+(\lambda, \xi) = -\operatorname{cth}(\lambda - \xi) + q^{\alpha-1}\rho_n(\xi|\alpha) \operatorname{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{\mathcal{C}_n} dm_+^\alpha(\mu)K_{1-\alpha}(\lambda - \mu)G_+(\mu, \xi) \quad (\text{B.14})$$

ist. Damit kann die rechte Seite von (B.10) vereinfacht werden,

$$\begin{aligned} E\mathbf{u}_M e^\xi - \sum_{k=1}^{M-1} E\mathbf{u}_k e^{\mu_k} (V^{-1}\mathbf{v}_M)^k &= E\mathbf{u}_M e^\xi - \sum_{j=1}^{M-1} E\mathbf{u}_j e^{\mu_j} x^j \\ &= 1 - q^{\alpha-1}\rho_n(\xi|\alpha) - (q^{\alpha-1} - q^{1-\alpha}) \int_{\mathcal{C}_n} dm_+^\alpha(\lambda)G_+(\lambda, \xi) \\ &= \lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow -\infty} G_+(\lambda, \xi) = G_+^-(\xi). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Hierbei wurde in der zweiten Gleichung (B.13) benutzt. Setzt man (B.4) und (B.15) in (B.10) ein, so erhält man Gleichung (3.22) aus Kapitel 3.2.

B.2 Der Formfaktor $F_-(\xi)$

Wie in Kapitel 3.2 motiviert, soll in dem Ausdruck

$$\langle \Psi_0 | B(\xi) | \Psi_n^\alpha \rangle = \langle 0 | C(\lambda_1) \dots C(\lambda_M) B(\xi) B(\mu_{M-1}) \dots B(\mu_1) | 0 \rangle, \quad (\text{B.16})$$

¹Es wird angenommen, dass ξ innerhalb der Kontur \mathcal{C}_n liegt.

welcher in dem Formfaktor $F_-(\xi)$ auftritt, der Operator $B(\xi)$ unter Benutzung der Relationen der Yang-Baxter-Algebra (vgl. z.B. [89, 56]) nach links durchgetauscht werden, wo er auf das Pseudovakuum trifft. Dies erzeugt eine Doppelsumme,

$$F_-(\xi) = \sum_{\substack{\ell, m=1 \\ \ell \neq m}}^{M+1} t_{\ell, m}, \quad (\text{B.17})$$

wobei

$$t_{\ell, m} = d(\lambda_\ell) a(\lambda_m) c(\lambda_\ell, \xi) c(\xi, \lambda_m) \times \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{M+1} \frac{1}{b(\lambda_\ell, \lambda_k)} \right] \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell, m}}^{M+1} \frac{1}{b(\lambda_k, \lambda_m)} \right] \frac{\langle 0 | \prod_{k=1; k \neq \ell, m}^{M+1} C(\lambda_k) | \Psi_n^\alpha \rangle}{\Lambda_n(\xi | \alpha) \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \quad (\text{B.18})$$

und per Definition $\lambda_{M+1} = \xi$. Die Skalarprodukte auf der rechten Seite können mit der Slavnov-Formel für die μ_j ausgewertet werden und man erhält

$$t_{\ell, m} = \frac{B\rho_n^{-1}(\xi | \alpha)}{1 + \alpha_0(\xi)} \det_M(D) \det_{M-1} \left\{ \phi(\lambda_{\ell_k} - \eta) [e(\mu_j - \lambda_{\ell_k}) - e(\lambda_{\ell_k} - \mu_j) a_n(\lambda_{\ell_k} | \alpha)] \right\} \times \frac{(-\alpha_0(\lambda_\ell)) \text{sign}(m - \ell) (-1)^{\ell - m}}{\text{sh}(\lambda_\ell - \lambda_m + \eta)}, \quad (\text{B.19})$$

wobei $\ell_k \in \{1, \dots, M+1\} \setminus \{\ell, m\}$, $k = 1, \dots, M-1$, $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{M-1}$ und

$$B = \frac{\prod_{j=1}^{M-1} q^{-\alpha} d(\mu_j) e^{\mu_j}}{\prod_{j=1}^M d(\lambda_j) e^{\lambda_j}} \frac{1}{\det_M \left\{ \delta_k^j a'_0(\lambda_j) - K(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}, \quad (\text{B.20a})$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{q^\alpha \text{res } \phi^{-1}(\mu_1)}{\text{sh}(\lambda_1 - \mu_1)} & \dots & \frac{q^\alpha \text{res } \phi^{-1}(\mu_{M-1})}{\text{sh}(\lambda_1 - \mu_{M-1})} & e^{\lambda_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{q^\alpha \text{res } \phi^{-1}(\mu_1)}{\text{sh}(\lambda_M - \mu_1)} & \dots & \frac{q^\alpha \text{res } \phi^{-1}(\mu_{M-1})}{\text{sh}(\lambda_M - \mu_{M-1})} & e^{\lambda_M} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20b})$$

Die Funktion ϕ ist in Gleichung (B.1) definiert. Man erkennt, dass der Faktor B komplementär zu A aus Gleichung (B.4) ist, sodass eine symmetrische Darstellung der Amplituden möglich ist. Es verbleibt die Aufgabe, die $t_{\ell, m}$ in eine einzige Determinante aufzusummieren.

Definiere

$$(\mathbf{a}_k)^j = \phi(\lambda_k - \eta) \left(e(\mu_j - \lambda_k) - e(\lambda_k - \mu_j) a_n(\lambda_k | \alpha) \right), \quad (\text{B.21a})$$

$$j = 1, \dots, M-1, \quad k = 1, \dots, M+1,$$

$$s_{k, j} = \frac{1}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k + \eta)}, \quad j = 1, \dots, M+1, \quad k = 1, \dots, M+1, \quad (\text{B.21b})$$

und betrachte zunächst die Teilsumme

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^M t_{\ell, M+1} &= \frac{B\rho_n^{-1}(\xi | \alpha)}{1 + \alpha_0(\xi)} \det_M(D) \sum_{\ell=1}^M (-1)^{M+\ell-1} s_{M+1, \ell} \det_{M-1}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{\ell-1}, \mathbf{a}_{\ell+1}, \dots, \mathbf{a}_M) \\ &= -\frac{B\rho_n^{-1}(\xi | \alpha)}{1 + \alpha_0(\xi)} \det_M \left(D \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{M+1, 1} \end{pmatrix}, \dots, D \begin{pmatrix} \mathbf{a}_M \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{M+1, M} \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Hierbei wurde in der ersten Gleichung die Summe als Entwicklung einer Determinanten nach der letzten Zeile aufgefasst. Bezeichne mit X die Matrix, deren Determinante auf der rechten Seite der Gleichung (B.22) gebildet wird. Die Einträge dieser Matrix können analog zu Abschnitt B.1 vereinfacht werden und man erhält

$$X_k^j = \delta_k^j \rho_n(\lambda_j | \alpha) \alpha'_0(\lambda_j) - \frac{q^{-\alpha}}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k - \eta)} + \frac{q^\alpha}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k + \eta)} + e^{\lambda_j s_{M+1,k}}. \quad (\text{B.23})$$

Die Matrix X ist also die Summe aus einem Projektor und einer Matrix \tilde{X} ,

$$\tilde{X}_k^j = X_k^j - e^{\lambda_j s_{M+1,k}}. \quad (\text{B.24})$$

Der Versuch, den Projektor nach dem Vorbild von Anhang A.4 abzuspalten, scheitert jedoch da die Matrix \tilde{X} nicht invertierbar ist². Stattdessen führt man den Kern K ein und erhält

$$\det_M(X) = \det_M \left\{ \delta_k^j \rho_n(\lambda_j | \alpha) \alpha'_0(\lambda_j) - K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) + \tilde{s}_{M+1,k} \right\}, \quad (\text{B.25a})$$

$$\tilde{s}_{j,k} = e^{\lambda_k s_{j,k}} + q^{-1-\alpha} - q^{1+\alpha}. \quad (\text{B.25b})$$

Definiere

$$\widehat{K}_k^j = \frac{K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k)}{\rho_n(\lambda_j | \alpha) \alpha'_0(\lambda_j)}, \quad j, k = 1, \dots, M, \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{v}^j = \frac{1}{\rho_n(\lambda_j | \alpha) \alpha'_0(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (\text{B.27})$$

und nehme an, dass die Matrix $1 - \widehat{K}$ invertierbar ist³. Setzt man

$$\mathbf{w} = (1 - \widehat{K})^{-1} \mathbf{v}, \quad (\text{B.28})$$

so folgt analog zu Anhang A.4

$$\det_M(X) = \left[\prod_{j=1}^M \frac{\alpha'_0(\lambda_j)}{\rho_n^{-1}(\lambda_j | \alpha)} \right] \det_M(1 - \widehat{K}) \left[1 + \sum_{j=1}^M \tilde{s}_{M+1,j} \mathbf{w}^j \right]. \quad (\text{B.29})$$

Erneut kann (B.28) in eine lineare Integralgleichung umgewandelt werden. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\mathbf{w}^j \rho_n(\lambda_j | \alpha) \alpha'_0(\lambda_j) = 1 + \sum_{k=1}^M K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) \mathbf{w}^k, \quad j = 1, \dots, M. \quad (\text{B.30})$$

Definiert man die Funktion

$$\sigma(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^M K_{1+\alpha}(\lambda - \lambda_k) \mathbf{w}^k, \quad (\text{B.31})$$

²Dies sieht man ein, indem man analog zu Anhang A.2 nachweist, dass der Vektor mit Komponenten $\text{res } \phi(\lambda_j)$ ein linker Eigenvektor der Matrix \tilde{X} ist.

³Diese Annahme ist offensichtlich richtig für $M = 1$ und kann für größere M exemplarisch überprüft werden.

so gilt

$$\mathbf{w}^j = \frac{\sigma(\lambda_j)}{\rho_n(\lambda_j|\alpha)\alpha'_0(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (\text{B.32})$$

und damit

$$\sigma(\lambda) = 1 + \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) K_{1+\alpha}(\lambda - \mu) \sigma(\mu). \quad (\text{B.33})$$

Damit kann die Summe in (B.29) als Integral geschrieben werden,

$$1 + \sum_{j=1}^M \tilde{s}_{M+1,j} \mathbf{w}^j = \sigma_\infty - \int_{C_n} d\bar{m}_-^\alpha(\lambda) \frac{e^\lambda \sigma(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \xi + \eta)}, \quad (\text{B.34})$$

wobei

$$d\bar{m}_-^\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda \rho_n^{-1}(\lambda|\alpha)}{2\pi i(1 + \bar{\alpha}_0(\lambda))}, \quad \sigma_\infty = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow +\infty} \sigma(\lambda). \quad (\text{B.35})$$

In Anhang B.3 wird gezeigt, dass

$$\sigma_\infty = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow +\infty} \sigma(\lambda) = 0 \quad (\text{B.36})$$

gilt, wodurch sich (B.34) vereinfacht. Zusammen mit (B.29) und (B.22) erhält man

$$\sum_{\ell=1}^M t_{\ell, M+1} = \frac{B\rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + \alpha_0(\xi)} \left[\prod_{j=1}^M \frac{\alpha'_0(\lambda_j)}{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)} \right] \det(1 - \widehat{K}) \int_{C_n} d\bar{m}_-^\alpha(\lambda) \frac{e^\lambda \sigma(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \xi + \eta)}. \quad (\text{B.37})$$

Da der Ausdruck $t_{M+1, m}$ dieselbe Struktur wie $t_{\ell, M+1}$ hat, folgt analog

$$\sum_{m=1}^M t_{M+1, m} = -\frac{B\rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + \bar{\alpha}_0(\xi)} \left[\prod_{j=1}^M \frac{\alpha'_0(\lambda_j)}{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)} \right] \det(1 - \widehat{K}) \int_{C_n} dm_-^\alpha(\lambda) \frac{e^\lambda \sigma(\lambda)}{\text{sh}(\xi - \lambda + \eta)}. \quad (\text{B.38})$$

Zur Behandlung der Doppelsumme $\ell, m < M + 1$ ($\ell \neq m$) führt man die $M \times M$ Matrix

$$U_m = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_{m-1} & \mathbf{a}_{M+1} & \mathbf{a}_{m+1} & \dots & \mathbf{a}_M \\ s_{m,1} & \dots & s_{m,m-1} & s_{m,m} & s_{m,m+1} & \dots & s_{m,M} \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

ein. Mit (B.19) und dem Laplaceschen Entwicklungssatz folgt der Ausdruck

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq m}}^M t_{\ell, m} = \frac{B\rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + \alpha_0(\xi)} \det(D) \left\{ \det(U_m) - (-1)^{M-m} s_{m,m} \det_{M-1}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_M) \right\}, \quad (\text{B.40})$$

in dem noch über m summiert werden muss.

Der zweite Term in der geschweiften Klammer kann genauso wie oben behandelt werden und es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{B\rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + \alpha_0(\xi)} \det(D) \sum_{m=1}^M (-1)^{M-m+1} s_{m,m} \det_{M-1}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_M) \\ &= -\frac{B\rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + \alpha_0(\xi)} \left[\prod_{j=1}^M \frac{\alpha'_0(\lambda_j)}{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)} \right] \det(1 - \widehat{K}) \int_{C_n} dm_-^\alpha(\lambda) \frac{e^\lambda \sigma(\lambda)}{\text{sh}(\eta)}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Für den ersten Term vereinfacht man zunächst das Matrixprodukt DU_m und führt die Summation über m anschließend durch. Analog zu Anhang A.1 erhält man

$$(DU_m)_k^j = \delta_k^j \rho_n(\lambda_j|\alpha) \alpha'_0(\lambda_j) - e^{\lambda_j - \lambda_k} (K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) - \widetilde{s}_{m,k}), \quad \text{für } k \neq m, \quad (\text{B.42a})$$

$$(DU_m)_m^j = e^{\lambda_j - \xi} (\rho_n(\lambda_j|\alpha) \alpha'_0(\lambda_j) \mathbf{y}^j + \widetilde{s}), \quad (\text{B.42b})$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho_n(\lambda_j|\alpha) \alpha'_0(\lambda_j) \mathbf{y}^j &= -\rho_n(\xi|\alpha) (1 + \alpha_0(\xi)) \text{cth}(\lambda_j - \xi) + q^{\alpha+1} \text{cth}(\lambda_j - \xi + \eta) \\ &\quad + \alpha_0(\xi) q^{-\alpha-1} \text{cth}(\lambda_j - \xi - \eta), \end{aligned} \quad (\text{B.43a})$$

$$\widetilde{s} = \rho_n(\xi|\alpha) (1 + \alpha_0(\xi)) - q^{\alpha+1} - \alpha_0(\xi) q^{-\alpha-1} + e^\xi s_{m,m}. \quad (\text{B.43b})$$

Damit ist die Matrix DU_m die Summe aus der Matrix $1 + \widehat{K}$, deren m -ten Spalte durch den Vektor \mathbf{y} ersetzt wurde, und einem Projektor,

$$\begin{aligned} \det_M(DU_m) &= e^{\lambda_m - \xi} \left[\prod_{j=1}^M \frac{\alpha'_0(\lambda_j)}{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)} \right] \\ &\quad \times \det_M \left\{ \left((1 - \widehat{K}) \mathbf{e}_1, \dots, (1 - \widehat{K}) \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{y}, (1 - \widehat{K}) \mathbf{e}_{m+1}, \dots, (1 - \widehat{K}) \mathbf{e}_M \right) + \mathbf{v} \mathbf{s}^t \right\} \\ &= e^{\lambda_m - \xi} \left[\prod_{j=1}^M \frac{\alpha'_0(\lambda_j)}{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)} \right] \det_M (1 - \widehat{K}) \\ &\quad \times \det_M \left\{ \left(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-1}, (1 - \widehat{K})^{-1} \mathbf{y}, \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_M \right) + (1 - \widehat{K})^{-1} \mathbf{v} \mathbf{s}^t \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Hierbei wurde in der ersten Gleichung die Notation

$$\mathbf{s}^k = \widetilde{s}_{m,k}, \quad k \neq m, \quad (\text{B.45a})$$

$$\mathbf{s}^m = \widetilde{s} \quad (\text{B.45b})$$

eingeführt. In der zweiten Gleichung von (B.44) taucht wieder der Spaltenvektor

$$\mathbf{w} = (1 - \widehat{K})^{-1} \mathbf{v} \quad (\text{B.46})$$

aus Gleichung (B.28) auf. Definiert man analog

$$\mathbf{z} = (1 - \widehat{K})^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{B.47})$$

so folgt nach einer elementaren Rechnung

$$\det_M(DU_m) = e^{\lambda_m - \xi} \left[\prod_{j=1}^M \frac{\alpha'_0(\lambda_j)}{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)} \right] \det_M (1 - \widehat{K}) \left[\mathbf{z}^m + \widetilde{s} \mathbf{w}^m + \sum_{\ell=1}^M \widetilde{s}_{m,\ell} \det \begin{pmatrix} \mathbf{w}^\ell & \mathbf{z}^\ell \\ \mathbf{w}^m & \mathbf{z}^m \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{B.48})$$

In diesem Ausdruck kann nun einfach über m summiert werden. Zunächst soll die Gleichung (B.47) analog zu Anhang B.1 in eine lineare Integralgleichung umgewandelt werden. Dazu definiert man

$$\begin{aligned} G_-(\lambda, \xi) &= -\text{cth}(\lambda - \xi) + \frac{q^{\alpha+1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + \alpha_0(\xi)} \text{cth}(\lambda - \xi + \eta) \\ &\quad + \frac{q^{-\alpha-1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + \bar{\alpha}_0(\xi)} \text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \sum_{k=1}^M K_{1+\alpha}(\lambda - \lambda_k) \frac{\rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \mathbf{z}^k}{1 + \alpha_0(\xi)}, \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

woraus

$$\mathbf{z}^j = \frac{\rho_n(\xi|\alpha)(1 + a_0(\xi))G_-(\lambda_j, \xi)}{\rho_n(\lambda_j|\alpha)a'_0(\lambda_j)} \quad (\text{B.50})$$

folgt. Die Funktion G_- ist somit die Lösung der linearen Integralgleichung

$$G_-(\lambda, \xi) = -\text{cth}(\lambda - \xi) + q^{-\alpha-1}\rho_n^{-1}(\xi|\alpha)\text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{\mathcal{C}_n} dm_-^\alpha(\mu)K_{1+\alpha}(\lambda - \mu)G_-(\mu, \xi). \quad (\text{B.51})$$

Unter Benutzung von (B.32) und (B.50) und Beachtung der Polstelle von G_- kann die Summe auf der rechten Seite von (B.48) als Integral geschrieben werden,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + a_0(\xi)} \sum_{m=1}^M e^{\lambda m} \left[\mathbf{z}^m + \tilde{s}\mathbf{w}^m + \sum_{\ell=1}^M \tilde{s}_{m,\ell} \det \begin{pmatrix} \mathbf{w}^\ell & \mathbf{z}^\ell \\ \mathbf{w}^m & \mathbf{z}^m \end{pmatrix} \right] \\ &= \int_{\mathcal{C}_n} dm_-^\alpha(\lambda) e^\lambda \int_{\mathcal{C}_n} d\bar{m}_-^\alpha(\mu) e^\mu \frac{G_-(\lambda, \xi)\sigma(\mu) - G_-(\mu, \xi)\sigma(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \mu - \eta)} \\ &+ \frac{e^\xi \rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + a_0(\xi)} \int_{\mathcal{C}_n} dm_-^\alpha(\lambda) \frac{e^\lambda \sigma(\lambda)}{\text{sh}(\eta)} + \frac{e^\xi \rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + \bar{a}_0(\xi)} \int_{\mathcal{C}_n} dm_-^\alpha(\lambda) \frac{e^\lambda \sigma(\lambda)}{\text{sh}(\xi - \lambda + \eta)} \\ &- \frac{e^\xi \rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{1 + a_0(\xi)} \int_{\mathcal{C}_n} d\bar{m}_-^\alpha(\lambda) \frac{e^\lambda \sigma(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \xi + \eta)} - G_-^+(\xi) \int_{\mathcal{C}_n} d\bar{m}_-^\alpha(\lambda) e^\lambda \sigma(\lambda), \quad (\text{B.52}) \end{aligned}$$

wobei

$$G_-^+(\xi) = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow +\infty} G_-(\lambda, \xi) \quad (\text{B.53})$$

eingeführt wurde. Man beachte, dass für die Herleitung von (B.52) Gleichung (B.36) benutzt wurde. In Anhang B.3 wird gezeigt, dass zusätzlich

$$G_-^+(\xi) = 0 \quad (\text{B.54})$$

gilt. Kombiniert man die Gleichungen (B.37), (B.38), (B.40), (B.41), (B.48), (B.52) und (B.54), so kürzen sich alle Einfachintegrale und es verbleibt

$$\begin{aligned} F_-(\xi) &= \frac{e^{-\xi} \prod_{j=1}^{M-1} q^{-\alpha} d(\mu_j) e^{\mu_j}}{\prod_{j=1}^M d(\lambda_j) e^{\lambda_j} \rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)} \frac{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{\rho_n^{-1}(\lambda_j|\alpha)}{a'_0(\lambda_j)} K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) \right\}}{\det_M \left\{ \delta_k^j - \frac{1}{a'_0(\lambda_j)} K(\lambda_j - \lambda_k) \right\}} \\ &\times \int_{\mathcal{C}_n} dm_-^\alpha(\lambda) e^\lambda \int_{\mathcal{C}_n} d\bar{m}_-^\alpha(\mu) e^\mu \frac{G_-(\lambda, \xi)\sigma(\mu) - G_-(\mu, \xi)\sigma(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \mu - \eta)}. \quad (\text{B.55}) \end{aligned}$$

Dies ist Gleichung (3.27) aus Kapitel 3.2.

Im verbleibenden Teil soll die Faktorisierung des in (B.55) auftretenden Doppelintegrals erläutert werden. Dazu geht man in obiger Gleichung zum Maß

$$d\bar{m}_-^\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi i \rho_n(\lambda|\alpha)} - dm_-^\alpha(\lambda) \quad (\text{B.56})$$

über und erhält für das Doppelintegral

$$\begin{aligned}
 I &:= \int_{C_n} dm_-^\alpha(\lambda) e^\lambda \int_{C_n} d\bar{m}_-^\alpha(\mu) e^\mu \frac{G_-(\lambda, \xi)\sigma(\mu) - G_-(\mu, \xi)\sigma(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \mu - \eta)} \\
 &= e^\xi \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \int_{C_n} dm_-^\alpha(\lambda) \frac{e^\lambda \sigma(\lambda)}{\text{sh}(\lambda - \xi - \eta)} \\
 &\quad - \int_{C_n} dm_-^\alpha(\lambda) \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) \frac{e^{\lambda+\mu}}{\text{sh}(\lambda - \mu - \eta)} \det \begin{pmatrix} G_-(\lambda, \xi) & G_-(\mu, \xi) \\ \sigma(\lambda) & \sigma(\mu) \end{pmatrix} \quad (\text{B.57})
 \end{aligned}$$

Analog zu [13] besteht der Grundgedanke darin, den Integranden

$$r(\lambda, \mu) = \frac{e^{\lambda+\mu}}{\text{sh}(\lambda - \mu - \eta)} \quad (\text{B.58})$$

durch den Kern $K_{1+\alpha}$ auszudrücken und dann die Integralgleichung für G_- zu verwenden. Zu diesem Zweck beobachtet man, dass

$$r(\lambda, \mu) - r(\mu, \lambda) = e^{2\lambda} s(\lambda, \mu) - e^{2\mu} s(\mu, \lambda), \quad s(\lambda, \mu) = -\frac{q^{1+\alpha} - q^{-1-\alpha} + K_{1+\alpha}(\lambda - \mu)}{q^\alpha - q^{-\alpha}} \quad (\text{B.59})$$

gilt. Somit ist $r(\lambda, \mu) - e^{2\lambda} s(\lambda, \mu)$ eine symmetrische Funktion, welche aufgrund der Antisymmetrie der Determinante unter Vertauschung von λ und μ nichts zum Doppelintegral in (B.57) beiträgt. Aus diesem Grund kann an obiger Stelle die Funktion $r(\lambda, \mu)$ durch $e^{2\lambda} s(\lambda, \mu)$ ersetzt werden. Benutzt man nun die Integralgleichungen (B.33) und (B.51) für σ und G_- sowie deren asymptotischen Werte (B.36) und (B.54) und die Identität

$$\frac{q^\alpha - q^{-\alpha}}{\text{sh}(\lambda - \xi - \eta)} = q^{\alpha+1} e^{-\lambda+\xi} (\text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + 1) - q^{-\alpha-1} e^{\lambda-\xi} (\text{cth}(\lambda - \xi - \eta) - 1), \quad (\text{B.60})$$

so erhält man

$$I = e^{2\xi} \int_{C_n} \frac{dm_-^\alpha(\lambda) \sigma(\lambda)}{q^\alpha - q^{-\alpha}} \left(-\text{cth}(\lambda - \xi) + q^{\alpha+1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \text{cth}(\lambda - \xi - \eta) - 1 + q^{\alpha+1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \right). \quad (\text{B.61})$$

Dies ist bereits eine faktorisierte Form. Die Struktur des Integranden legt nahe, eine zu G_- komplementäre Funktion \bar{G}_- einzuführen, welche durch die lineare Integralgleichung

$$\bar{G}_-(\lambda, \xi) = -\text{cth}(\lambda - \xi) + q^{\alpha+1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) \bar{G}_-(\mu, \xi) K_{1+\alpha}(\mu - \lambda) \quad (\text{B.62})$$

definiert ist. Mit dem „dressed function trick“⁴ erhält man schließlich

$$I = \frac{e^{2\xi} \bar{G}_-^+(\xi)}{(q^\alpha - q^{-\alpha})(q^{\alpha+1} - q^{-\alpha-1})}, \quad (\text{B.63})$$

wobei

$$\bar{G}_-^+(\xi) = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow +\infty} \bar{G}_-(\lambda, \xi). \quad (\text{B.64})$$

Mit (B.63) und (B.55) folgt schließlich das Ergebnis (3.31) aus Kapitel 3.2.

⁴Schematisch besagt dieser, dass für zwei gegebene lineare Integralgleichungen $f_1 = g_1 + \int K f_1$ und $f_2 = g_2 + \int K^t f_2$ die Aussage $\int f_1 g_2 = \int f_2 g_1$ gilt.

B.3 Eigenschaften linearer Integralgleichungen

Zunächst soll die Aussage (B.36) aus Anhang B.2 bewiesen werden,

$$\sigma_\infty = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow +\infty} \sigma(\lambda) = 0. \quad (\text{B.65})$$

Der Beweis erfolgt anhand der diskretisierten Gleichung (B.31), aus der

$$\sigma_\infty = 1 + (q^{-1-\alpha} - q^{1+\alpha}) \sum_{k=1}^M w_k \quad (\text{B.66})$$

folgt. Die w^k sind dabei durch das lineare Gleichungssystem (B.32) bestimmt,

$$w^j \rho_n(\lambda_j | \alpha) a'_0(\lambda_j) = 1 + \sum_{k=1}^M K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) w^k, \quad j = 1, \dots, M. \quad (\text{B.67})$$

Aufgrund der TQ -Gleichung kann der Faktor auf der linken Seite durch

$$\rho_n(\lambda_j | \alpha) a'_0(\lambda_j) = \frac{1}{\text{res } \phi(\lambda_j)} (q^\alpha \phi(\lambda_j - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda_j + \eta)) \quad (\text{B.68})$$

ausgedrückt werden. Multipliziert man nun Gleichung (B.67) mit $e^{\lambda_j} \text{res } \phi(\lambda_j)$ und summiert über j , so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M w^j (q^\alpha \phi(\lambda_j - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda_j + \eta)) e^{\lambda_j} &= \sum_{j=1}^M e^{\lambda_j} \text{res } \phi(\lambda_j) + \sum_{k=1}^M w^k \sum_{j=1}^M e^{\lambda_j} \text{res } \phi(\lambda_j) K_{1+\alpha}(\lambda_j - \lambda_k) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} e^{\omega} \phi(\omega) + \sum_{k=1}^M w^k \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} e^{\omega} \phi(\omega) K_{1+\alpha}(\omega - \lambda_k). \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Die Integrale können analog zu Anhang A.4 berechnet werden, man erhält

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M w^j (q^\alpha \phi(\lambda_j - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda_j + \eta)) e^{\lambda_j} &= b \left(1 + (q^{-1-\alpha} - q^{1+\alpha}) \sum_{k=1}^M w^k \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^M w^k (q^\alpha \phi(\lambda_k - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda_k + \eta)) e^{\lambda_k}, \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

wobei die Konstante b durch

$$b = \exp \left(\sum_{k=1}^M \lambda_k - \sum_{k=1}^{M-1} \mu_k \right) \quad (\text{B.71})$$

gegeben ist. Mit den Gleichungen (B.70) und (B.66) folgt schließlich die Aussage $\sigma_\infty = 0$.

Im Folgenden soll die Aussage (B.54) bewiesen werden,

$$G_-^+(\xi) = 0, \quad (\text{B.72})$$

wobei die Funktion G_- in Gleichung (B.51) definiert wurde. Analog zu [14] löst man zunächst die zugehörige Gleichung für die Funktion

$$\bar{\sigma}(\lambda) = 1 + \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) K_{1+\alpha}(\mu - \lambda) \sigma(\mu). \quad (\text{B.73})$$

Die Lösung lautet

$$\bar{\sigma}(\lambda) = \frac{e^\lambda (q^\alpha \phi(\lambda - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\lambda + \eta))}{b (q^{1+\alpha} - q^{-1-\alpha})}, \quad (\text{B.74})$$

der Beweis erfolgt vollkommen analog zu Anhang A.4. Berechne damit nun

$$G_-^+(\xi) = \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow \infty} G_-(\lambda, \xi) = -1 + q^{-1-\alpha} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) + (q^{-1-\alpha} - q^{1+\alpha}) \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) G_-(\mu, \xi). \quad (\text{B.75})$$

Das Integral auf der rechten Seite kann berechnet werden,

$$\begin{aligned} \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) G_-(\mu, \xi) &= \int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) \bar{\sigma}(\mu) \left(-\text{cth}(\mu - \xi) + q^{-\alpha-1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \text{cth}(\mu - \xi - \eta) \right) \\ &= \frac{1}{b (q^{1+\alpha} - q^{-1-\alpha})} \int_{C_n} \frac{d\mu}{2\pi i} e^\mu \left(q^\alpha \phi(\mu - \eta) - q^{-\alpha} \phi(\mu + \eta) \right) \\ &\quad \times \left(-\text{cth}(\mu - \xi) + q^{-\alpha-1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha) \text{cth}(\mu - \xi - \eta) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Hierbei wurde in der ersten Gleichung der „dressed function trick“ verwendet (vgl. Seite 143) und in der zweiten Gleichung die Darstellung (B.74) für die Funktion $\bar{\sigma}$ sowie die TQ-Gleichung (vgl. Gleichung (A.50)) benutzt. Die Auswertung des Integrals auf der rechten Seite von (B.76) erfolgt analog zu Anhang A.4. Man erhält

$$\int_{C_n} dm_-^\alpha(\mu) G_-(\mu, \xi) = \frac{-1 + q^{-\alpha-1} \rho_n^{-1}(\xi|\alpha)}{q^{1+\alpha} - q^{-1-\alpha}}. \quad (\text{B.77})$$

Mit (B.77) und (B.75) folgt schließlich die Behauptung (B.72).

Analog kann man Gleichung (3.36) zeigen,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{G}_-^+(\xi) = 0. \quad (\text{B.78})$$

Für $\alpha = 0$ wird die Integralgleichung (3.33) zu

$$\bar{G}_-(\lambda, \xi) = -\text{cth}(\lambda - \xi) + q \rho_n^{-1}(\xi|0) \text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{C_n} dm_-^0(\mu) \bar{G}_-(\mu, \xi) K_1(\mu - \lambda). \quad (\text{B.79})$$

Damit gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{G}_-^+(\xi) = -1 + q \rho_n^{-1}(\xi|0) + (q - q^{-1}) \int_{C_n} dm_-^0(\mu) \bar{G}_-(\mu, \xi). \quad (\text{B.80})$$

Die zugehörige „bekleidete Ladung“ ist gegeben durch die lineare Integralgleichung (vgl. Gleichung (B.33))

$$\sigma(\lambda) = 1 + \int_{C_n} dm_-^0(\mu) K_1(\lambda - \mu) \sigma(\mu), \quad (\text{B.81})$$

deren Lösung durch

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} (\phi(\lambda - \eta) - \phi(\lambda + \eta))}{b^{-1} (q - q^{-1})} \quad (\text{B.82})$$

gegeben ist. Der Beweis dieser Aussage verläuft vollkommen analog zum obigen Fall. Wie oben berechnet man mit dieser expliziten Lösung das Integral

$$\int_{C_n} dm_-^0(\mu) G_-(\mu, \xi) = \frac{1 - q \rho_n^{-1}(\xi|0)}{q - q^{-1}}. \quad (\text{B.83})$$

Mit den Gleichungen (B.83) und (B.80) folgt dann die Aussage (B.78).

Man beachte, dass die Gleichung (B.33) nur für $\alpha = 0$ nach der obigen Methode gelöst werden kann, da die Vorzeichen von α in der TQ -Gleichung und im Integrationskern von (B.33) nicht kompatibel sind.

B.4 Der Formfaktor $F_{++}(\xi_1, \xi_2)$

In diesem Abschnitt soll der Ausdruck (3.38) für den Formfaktor $F_{++}(\xi_1, \xi_2)$ hergeleitet werden. Die Herleitung erfolgt dabei nach dem Vorbild von Anhang B.1.

Der Zustand $|\Psi_n^\alpha\rangle$ wird durch $M - 2$ ($M = N/2$) Bethe-Wurzeln parametrisiert, welche mit μ_j bezeichnet werden. Definiere analog zu B.1 die Funktion

$$\phi(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{M-2} \text{sh}(\lambda - \mu_j)}{\prod_{j=1}^M \text{sh}(\lambda - \lambda_j)}, \quad (\text{B.84})$$

welche wie in Anhang A.1 $i\pi$ -periodisch ist. Möchte man analog zu (B.1) vorgehen, so benötigt man die verallgemeinerte Cauchy-Determinante

$$\frac{\prod_{1 \leq j < k \leq M-2} \text{sh}(\mu_k - \mu_j)}{\prod_{1 \leq j < k \leq M} \text{sh}(\lambda_k - \lambda_j)} = \frac{1}{2} e^{\sum_{j=1}^M \lambda_j - \sum_{j=1}^{M-2} \mu_j} \left[\prod_{j=1}^M \text{res } \phi(\lambda_j) \right] \times \det_M \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1 - \mu_1}}{\text{sh}(\lambda_1 - \mu_1)} & \cdots & \frac{e^{\lambda_M - \mu_1}}{\text{sh}(\lambda_M - \mu_1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{e^{\lambda_1 - \mu_{M-2}}}{\text{sh}(\lambda_1 - \mu_{M-2})} & \cdots & \frac{e^{\lambda_M - \mu_{M-2}}}{\text{sh}(\lambda_M - \mu_{M-2})} \\ 1 & \cdots & 1 \\ e^{-2\lambda_1} & \cdots & e^{-2\lambda_M} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.85})$$

Benutzt man nun die Slavnovformel (3.1), die Normformel (3.2) sowie die obige Gleichung im Ausdruck (3.37) für den Formfaktor $F_{++}(\xi)$, so folgt

$$F_{++}(\xi_1, \xi_2) = \frac{A}{2 \text{sh}(\xi_1 - \xi_2)} \det_M \left(\begin{pmatrix} C \\ E \\ F \end{pmatrix} \mathbf{u}_1, \dots, \begin{pmatrix} C \\ E \\ F \end{pmatrix} \mathbf{u}_M \right), \quad (\text{B.86})$$

wobei

$$A = \frac{\prod_{j=1}^M d(\lambda_j) e^{\lambda_j}}{\prod_{j=1}^{M-2} q^{-\alpha} d(\mu_j) e^{\mu_j}} \frac{1}{\det_{M-2} \left\{ \delta_k^j \alpha'_n(\mu_j | \alpha) - K(\mu_j - \mu_k) \right\}} \quad (\text{B.87})$$

und die Einträge der $(M-2) \times M$ -Matrix C und der Zeilenvektoren E und F durch

$$C_\ell^j = \frac{1}{\text{sh}(\lambda_\ell - \mu_j)}, \quad j = 1, \dots, M-2; \ell = 1, \dots, M, \quad (\text{B.88a})$$

$$E_\ell^1 = 1, \quad \ell = 1, \dots, M, \quad (\text{B.88b})$$

$$F_\ell^1 = e^{-\lambda_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, M \quad (\text{B.88c})$$

gegeben sind. Die Einträge der Spaltenvektoren \mathbf{u}_k lauten

$$(\mathbf{u}_k)^\ell = -\text{res } \phi(\lambda_\ell) \left\{ q^{-\alpha} \phi^{-1}(\mu_k - \eta) e(\lambda_\ell - \mu_k) + q^\alpha \phi^{-1}(\mu_k + \eta) e(\mu_k - \lambda_\ell) \right\}, \quad (\text{B.89a})$$

$$k = 1, \dots, M-2; \ell = 1, \dots, M,$$

$$(\mathbf{u}_{M-1})^\ell = -\frac{\phi^{-1}(\xi_1)}{1 + \alpha_0(\xi_1)} \text{res } \phi(\lambda_\ell) \left\{ e(\lambda_\ell - \xi_1) - e(\xi_1 - \lambda_\ell) \alpha_0(\xi_1) \right\}, \quad \ell = 1, \dots, M. \quad (\text{B.89b})$$

Der Spaltenvektor \mathbf{u}_M ergibt sich aus Gleichung (B.89b) durch die Ersetzung $\xi_1 \rightarrow \xi_2$. Bezeichnet man die in der Determinante in (B.86) auftretende Matrix mit \bar{D} , so können deren Einträge \bar{D}_k^j analog zu Anhang B.1 berechnet werden. In diesem Fall hat die Matrix D die folgende Blockstruktur,

$$\bar{D} = \left(\begin{array}{c|cc} \bar{D} & \bar{\mathbf{y}}_1 & \bar{\mathbf{y}}_2 \\ \hline \mathbf{a}_1^t & M_1^1 & M_2^1 \\ \mathbf{a}_2^t & M_1^2 & M_2^2 \end{array} \right), \quad (\text{B.90})$$

wobei

$$\bar{D}_k^j = \delta_k^j \alpha'_n(\mu_j | \alpha) \rho_n^{-1}(\mu_j | \alpha) - \left(e^{2(\mu_j - \mu_k)} K_{2-\alpha}(\mu_j - \mu_k) + e^{2(\mu_j - \mu_k)} (q^{2-\alpha} - q^{\alpha-2}) + 2(q^{-\alpha} - q^\alpha) \right), \quad j, k = 1, \dots, M-2, \quad (\text{B.91a})$$

$$(\mathbf{a}_1)^\ell = q^{-\alpha} - q^\alpha, \quad \ell = 1, \dots, M-2, \quad (\text{B.91b})$$

$$(\mathbf{a}_2)^\ell = e^{-2\mu_\ell} (q^{2-\alpha} - q^{\alpha-2}), \quad \ell = 1, \dots, M-2, \quad (\text{B.91c})$$

$$(\bar{\mathbf{y}}_1)^\ell = 1 - \text{cth}(\mu_\ell - \xi_1) + \rho_n(\xi_1 | \alpha) \left(\frac{q^{-\alpha} \text{cth}(\mu_\ell - \xi_1 + \eta)}{1 + \alpha_n(\xi_1 | \alpha)} + \frac{q^\alpha \text{cth}(\mu_\ell - \xi_1 - \eta)}{1 + \bar{\alpha}_n(\xi_1 | \alpha)} - \frac{q^{-\alpha}}{1 + \alpha_n(\xi_1 | \alpha)} - \frac{q^\alpha}{1 + \bar{\alpha}_n(\xi_1 | \alpha)} \right), \quad \ell = 1, \dots, M-2, \quad (\text{B.91d})$$

$$(\bar{\mathbf{y}}_2)^\ell = (\bar{\mathbf{y}}_1)^\ell \Big|_{\xi_1 \rightarrow \xi_2}, \quad \ell = 1, \dots, M-2, \quad (\text{B.91e})$$

$$M_1^1 = \rho_n(\xi_1 | \alpha) \left(\frac{q^{-\alpha}}{1 + \alpha_n(\xi_1 | \alpha)} + \frac{q^\alpha}{1 + \bar{\alpha}_n(\xi_1 | \alpha)} \right) - 1, \quad M_2^1 = M_1^1 \Big|_{\xi_1 \rightarrow \xi_2}, \quad (\text{B.91f})$$

$$M_1^2 = e^{-2\xi_1} \left(\rho_n(\xi_1 | \alpha) \left(\frac{q^{2-\alpha}}{1 + \alpha_n(\xi_1 | \alpha)} + \frac{q^{\alpha-2}}{1 + \bar{\alpha}_n(\xi_1 | \alpha)} \right) - 1 \right), \quad M_2^2 = M_1^2 \Big|_{\xi_1 \rightarrow \xi_2}. \quad (\text{B.91g})$$

Es bietet sich nun an, das 2-fache der Zeile $M - 1$ und das $e^{2\mu_\ell}$ -fache der Zeile M zu der Zeile ℓ zu addieren (dies für alle $\ell = 1, \dots, M - 2$). Zieht man anschließend die Faktoren $e^{2(\mu_j - \mu_k)}$ und $e^{-2\xi_1}$ bzw. $e^{-2\xi_2}$ aus der Determinanten, so erhält man

$$\det_M(\widetilde{D}) = e^{-2\xi_1 - 2\xi_2} \det_M(D), \quad (\text{B.92})$$

wobei die Matrix D aus \widetilde{D} entsteht, indem man die Ersetzung $\overline{D} \rightarrow \widehat{W}$, $\overline{y}_{1,2} \rightarrow y_{1,2}$, $(\mathbf{a}_{1,2})^\ell \rightarrow e^{2\mu_\ell} (\mathbf{a}_{1,2})^\ell$ und $M_1^{1,2} \rightarrow e^{2\xi_1} M_1^{1,2}$ bzw. $M_2^{1,2} \rightarrow e^{2\xi_2} M_1^{1,2}$ vornimmt. Hierbei ist

$$\widehat{W}_k^j = \delta_k^j \alpha'_n(\mu_j|\alpha) \rho_n^{-1}(\mu_j|\alpha) - K_{2-\alpha}(\mu_j - \mu_k) \quad (\text{B.93a})$$

$$(y_1)^\ell = -\text{cth}(\mu_\ell - \xi_1) + \rho_n(\xi_1|\alpha) \left(\frac{q^{2-\alpha} \text{cth}(\mu_\ell - \xi_1 + \eta)}{1 + \alpha_n(\xi_1|\alpha)} + \frac{q^{\alpha-2} \text{cth}(\mu_\ell - \xi_1 - \eta)}{1 + \overline{\alpha}_n(\xi_1|\alpha)} \right), \quad (\text{B.93b})$$

$$(y_2)^\ell = (y_1)^\ell \Big|_{\xi_1 \rightarrow \xi_2}. \quad (\text{B.93c})$$

In der Determinante von D kann nun nach den letzten beiden Spalten entwickelt werden, wobei die Koeffizienten vor den Minoren 2×2 -Determinanten sind. In der Summe treten drei Arten von Minoren auf, die sich dadurch unterscheiden, dass 0, 1 oder 2 Spalten der Matrix \widehat{W} durch die Vektoren $y_{1,2}$ ersetzt wurden. Der Term ohne ersetzte Spalten hat bereits die gewünschte Form, während die Terme mit einem Vektor y mit der gewöhnlichen Kramerschen Regel und den Methoden aus Anhang B.1 berechnet werden können. Der Fall mit zwei Vektoren y kann mit einer Verallgemeinerung der Kramerschen Regel behandelt werden. Führt man die Funktion G_+ ein als Lösung der linearen Integralgleichung

$$G_+(\lambda, \xi) = -\text{cth}(\lambda - \xi) + q^{\alpha-2} \rho_n(\xi|\alpha) \text{cth}(\lambda - \xi - \eta) + \int_{C_n} dm_+^\alpha(\mu) K_{2-\alpha}(\lambda - \mu) G_+(\mu, \xi), \quad (\text{B.94})$$

so folgt schließlich

$$\begin{aligned} \det_M(D) &= \det_{M-2}(\widehat{W}) \\ &\times \det \left(\begin{array}{cc} \sum_{k=1}^{M-2} \frac{G_+(\mu_k, \xi_1)}{\rho_n^{-1}(\mu_k|\alpha) \alpha'_n(\mu_k|\alpha)} e^{2\mu_k} (\mathbf{a}_1)^k - e^{2\xi_1} M_1^1 & \sum_{k=1}^{M-2} \frac{G_+(\mu_k, \xi_1)}{\rho_n^{-1}(\mu_k|\alpha) \alpha'_n(\mu_k|\alpha)} e^{2\mu_k} (\mathbf{a}_2)^k - e^{2\xi_1} M_1^2 \\ \sum_{k=1}^{M-2} \frac{G_+(\mu_k, \xi_2)}{\rho_n^{-1}(\mu_k|\alpha) \alpha'_n(\mu_k|\alpha)} e^{2\mu_k} (\mathbf{a}_1)^k - e^{2\xi_2} M_2^1 & \sum_{k=1}^{M-2} \frac{G_+(\mu_k, \xi_2)}{\rho_n^{-1}(\mu_k|\alpha) \alpha'_n(\mu_k|\alpha)} e^{2\mu_k} (\mathbf{a}_2)^k - e^{2\xi_2} M_2^2 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

Die in der 2×2 -Determinante auftretenden Summen können als Integrale geschrieben werden. Die dabei entstehenden Ausdrücke können mit den in der asymptotischen Entwicklung der Funktion G_+ auftretenden Koeffizienten identifiziert werden. Setzt man

$$G_+(\lambda, \xi) \sim G_+^+(\xi) + 2e^{-2\lambda} G_+^{++}(\xi) + \mathcal{O}(e^{-4\lambda}), \quad \text{Re } \lambda \rightarrow \infty, \quad (\text{B.96})$$

so folgt durch Einsetzen in die Integralgleichung (B.94)

$$G_+^+(\xi) = -1 + q^{\alpha-2} \rho_n(\xi|\alpha) + (q^{\alpha-2} - q^{2-\alpha}) \int_{C_n} dm_+^\alpha(\mu) G_+(\mu, \xi), \quad (\text{B.97a})$$

$$G_+^{++}(\xi) = -e^{2\xi} + e^{2\xi} q^\alpha \rho_n(\xi|\alpha) + (q^\alpha - q^{-\alpha}) \int_{C_n} dm_+^\alpha(\mu) e^{2\mu} G_+(\mu, \xi). \quad (\text{B.97b})$$

Damit folgt

$$\det_M(D) = \det_{M-2}(\widehat{W}) \det \begin{pmatrix} G_+^{++}(\xi_1) & G_+^+(\xi_1) \\ G_+^{++}(\xi_2) & G_+^+(\xi_2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.98})$$

Kombiniert man nun die Gleichungen (B.98), (B.92), (B.87) und (B.86), so erhält man schließlich das Ergebnis (3.38) aus Kapitel 3.3.

C Ergänzungen zur Tieftemperaturanalyse in der masselosen Phase

In diesem Anhang sollen einige technische Details der Tieftemperaturanalyse in der masselosen Phase (vgl. Kapitel 4) diskutiert werden.

C.1 Glätten der Kontur im universellen Anteil

In diesem Abschnitt soll die Herleitung von Gleichung (4.7) aus Kapitel 4.1 skizziert werden.

Zunächst gilt

$$A_n^{(0)}(\alpha) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{n_p} \ln \rho_n(\lambda_j^p | \alpha) + \int_{\tilde{\mathcal{C}}_{0,s}} d\lambda \ln(\rho_n(\lambda | \alpha)) z'(\lambda) \right\}, \quad (\text{C.1})$$

wobei z in Gleichung (4.2) definiert wurde. Die Kontur $\tilde{\mathcal{C}}_{0,s}$ enthält keine Lochparameter und befindet sich innerhalb von $\mathcal{C}_{0,s}$. Setzt man in obige Gleichung die Darstellung

$$\begin{aligned} \ln \rho_n(\lambda | \alpha) = \eta \alpha + \sum_{j=1}^{n_h} E(\lambda_j^h - \lambda) - \sum_{j=1}^{n_p} E(\lambda_j^p - \lambda) - \int_{\mathcal{C}_{0,s}} d\mu e(\mu - \lambda) z(\mu) \\ + \begin{cases} -2\pi i z(\lambda), & \lambda \text{ außerhalb von } \mathcal{C}_{0,s} \\ 0, & \lambda \text{ innerhalb von } \mathcal{C}_{0,s} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ein, so folgt

$$\begin{aligned} A_n^{(0)}(\alpha) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{k=1}^{n_p} (E(\lambda_j^h - \lambda_k^p) + E(\lambda_k^p - \lambda_j^h)) + \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_p} E(\lambda_j^p - \lambda_k^p) + \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_h} E(\lambda_j^h - \lambda_k^h) \right. \\ - n_p \ln \text{sh}(\eta) - i\pi n_p + \eta \alpha s - \sum_{j=1}^{n_p} \ln \left(\partial_\lambda e^{-2\pi i z(\lambda)} \Big|_{\lambda=\lambda_j^p} \right) - \int_{\mathcal{C}_{0,s}} d\mu z(\mu) e(\mu - \lambda_j^h) \\ + \sum_{j=1}^{n_p} \int_{\mathcal{C}_{0,s}} d\mu z(\mu) (e(\mu - \lambda_j^p) - e(\lambda_j^p - \mu)) - \int_{\mathcal{C}_{0,s}} d\mu z(\mu) \int_{\mathcal{C}'_{0,s}} d\lambda z(\lambda) e'(\mu - \lambda) \\ \left. + \sum_{j=1}^{n_h} \int_{\mathcal{C}_{0,s}^j} d\mu z'(\mu) E(\lambda_j^h - \mu) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Man beachte, dass hier die Beziehung $s = N/2 - M = n_h - n_p$ benutzt wurde, sodass die Monodromie der Funktion z entlang der Kontur $\mathcal{C}_{0,s}$ verschwindet. Die Kontur $\mathcal{C}_{0,s}^j$ ist eine Deformation der

Kontur $C_{0,s}$, sodass der j -te Lochparameter λ_j^h außerhalb liegt. Mit der Identität

$$\int_{C_{0,s}^j} d\mu z'(\mu) E(\lambda_j^h - \mu) = \int_{C_{0,s}} d\mu z(\mu) e(\lambda_j^h - \mu) - \ln\left(\partial_\lambda e^{-2\pi iz(\lambda)}\Big|_{\lambda=\lambda_j^h}\right) - i\pi - \ln \operatorname{sh}(-\eta) \quad (\text{C.4})$$

folgt schließlich die Behauptung (4.7).

C.2 Sommerfeld-Lemma

In diesem Abschnitt soll das Lemma 4.2.1 bewiesen werden.

Sei F eine Stammfunktion der Funktion f aus Lemma 4.2.1. Dann gilt

$$T \int_{C_u^-} d\lambda f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda)}{T}}\right) = \int_{C_u^-} d\lambda \left\{ T f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda)}{T}}\right) - f(\lambda) u(\lambda) + T \partial_\lambda (F(\lambda) g(\lambda)) \right\}, \quad (\text{C.5})$$

wobei

$$g(\lambda) = \frac{u(\lambda)}{T} + \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda)}{T}}\right) - \ln\left(1 + e^{\frac{u(\lambda)}{T}}\right). \quad (\text{C.6})$$

Diese Funktion ist stetig auf der Kontur C_u^- für beliebige Wahl der Zweige des Logarithmus, da die ersten beiden Terme nach Voraussetzung stetig sind und da $\operatorname{Re}\left(1 + e^{u(\lambda)/T}\right) \geq 0$ auf C_u^- . Andererseits gilt $\exp\{g(\lambda)\} = 1$, d.h. $\exists n \in \mathbb{Z}$ sodass $g(\lambda) = 2\pi in$. Folglich existiert für beliebige Wahl der Zweige ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass

$$T \int_{C_u^-} d\lambda f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda)}{T}}\right) = T \int_{C_u^-} d\lambda f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda)}{T}}\right) - \int_{C_u^-} d\lambda f(\lambda) (u(\lambda) - 2\pi in T) \quad (\text{C.7})$$

erfüllt ist. Im nächsten Schritt soll das Integral über C_u für kleines positives T abgeschätzt werden. Für $\lambda \in C_u^- \setminus \{Q_-, Q_+\}$ gilt $\operatorname{Re}(u(\lambda)) = v(\lambda) < 0$ und damit $e^{u(\lambda)/T} = \mathcal{O}(T^\infty)$. Fixiert man nun den Zweig von $\ln\left(1 + e^{u(Q_-)/T}\right)$ so, dass $|\arg\left(1 + e^{u(Q_-)/T}\right)| < \frac{\pi}{2}$ gilt, so folgt $|\arg\left(1 + e^{u(\lambda)/T}\right)| < \frac{\pi}{2}$ für alle $\lambda \in C_u^-$, und der erste Term auf der rechten Seite von (C.7) liefert keinen Beitrag der Ordnung T . Auf jedem Teilstück der Kontur C_u , das nicht mit Q_- verbunden ist, gilt ein ähnliches Argument. Da $v(\lambda)$ positiv ist auf einem solchen Teilstück, kann man annehmen, dass $|\arg\left(1 + e^{-u(\lambda)/T}\right)| < \pi/2$, sodass es keinen $\mathcal{O}(T)$ Beitrag gibt. Für den Teil C_u^+ , der mit Q_- verbunden ist, wählt man den Zweig so, dass $|\arg\left(1 + e^{-u(Q_-)/T}\right)| < \pi/2$. Somit gibt es auch hier keinen $\mathcal{O}(T)$ Beitrag. Gilt nun

$$u(Q_+) = u(Q_-) = 2\pi ip T \quad (\text{C.8})$$

für ein $p \in \mathbb{Z}$, dann impliziert (C.6) mit $\lambda = Q_-$ dass $g(Q_-) = 2\pi in = 2\pi ip$, da sich aufgrund der Wahl der Zweige beide Logarithmen aufheben. Benutzt man erneut (C.6), nun allerdings mit $\lambda = Q_+$, so folgt

$$\ln\left(1 + e^{-\frac{u(Q_+)}{T}}\right) = \ln\left(1 + e^{\frac{u(Q_+)}{T}}\right). \quad (\text{C.9})$$

Somit kann bei $\lambda = Q_+$ die Funktion $\ln\left(1 + \operatorname{Re}^{u(\lambda)/T}\right)$ von C_u^- stetig fortgesetzt werden zu $\ln\left(1 + e^{-u(\lambda)/T}\right)$ auf C_u^+ , und man hat $|\arg\left(1 + \operatorname{Re}^{-u(Q_+)/T}\right)| < \pi/2$. Dies bedeutet, dass es keinen $\mathcal{O}(T)$ Beitrag auf dem Teilstück C_u^+ gibt, welches mit Q_+ verbunden ist.

Somit folgt mit (C.7)

$$\begin{aligned} \Delta I &:= T \int_{\mathcal{C}_u} d\lambda f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda)}{T}}\right) + \int_{Q_-}^{Q_+} d\lambda f(\lambda) (u(\lambda) - 2\pi i p T) \\ &= T \int_{\mathcal{C}_u} d\lambda f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda) \operatorname{sign}(v(\lambda))}{T}}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

wobei der Logarithmus auf der rechten Seite stetig bei Q_{\pm} ist. Außerdem ist der Realteil des Exponenten auf der rechten Seite negativ außer bei Q_{\pm} . Dies bedeutet, dass der führende Beitrag des Integrals für $T \rightarrow 0$ von einer infinitesimal kleinen Umgebung dieser beiden Punkte kommt. Um diesen Beitrag zu berechnen, fixiert man ein kleines $\delta > 0$. Da u und f holomorph sind, kann die Kontur in einer kleinen Umgebung von Q_{\pm} zu Konturen J_{\pm}^{δ} deformiert werden, sodass $w(\lambda) = 2\pi p T$ für $\lambda \in J_{\pm}^{\delta}$ und $v(\lambda) = \pm\delta$ an den Rändern von J_{\pm}^{δ} . Man beachte, dass (für genügend kleines δ) v monoton ist auf J_{\pm}^{δ} , da v einfache Nullstellen bei Q_{\pm} besitzt.

Es folgt

$$\Delta I = T \int_{J_{-}^{\delta} \cup J_{+}^{\delta}} d\lambda f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{|v(\lambda)|}{T}}\right) + \mathcal{O}(T^{\infty}). \quad (\text{C.11})$$

Parametrisiert man die Konturen J_{\pm}^{δ} durch $x = v(\lambda) \Leftrightarrow \lambda = v^{-1}(x)$, so erhält man

$$\begin{aligned} T \int_{J_{-}^{\delta}} d\lambda f(\lambda) \ln\left(1 + e^{-\frac{|v(\lambda)|}{T}}\right) &= T \int_{\delta}^{-\delta} dx \frac{f(v^{-1}(x))}{v'(v^{-1}(x))} \ln\left(1 + e^{-\frac{|x|}{T}}\right) \\ &= -\frac{T^2 \pi^2}{6} \frac{f(Q_-)}{u'(Q_-)} + \mathcal{O}(T^4). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Hierbei wurde benutzt, dass $v^{-1}(0) = Q_-$ und dass $\ln(1 + e^{-|x|})$ eine gerade Funktion ist. Bei Q_+ kann eine analoge Rechnung durchgeführt werden. Der einzige Unterschied ist, dass $v(\lambda)$ wachsend ist in Richtung der Kontur, sodass sich ein positives Vorzeichen ergibt. Damit ist das Lemma 4.2.1 bewiesen.

C.3 Abschätzung der singulären Integrale

In diesem Anhang sollen die Lemmas 4.3.1 und 4.3.2 bewiesen werden, welche für die Abschätzung der singulären Integrale nötig sind.

Beweis von Lemma 4.3.1

Für den Beweis von Lemma 4.3.1 benutzt man, dass analog zum Beweis von Lemma 4.2.1

$$\begin{aligned} \Delta I_u(\lambda_{\pm}) &:= I_u(\lambda_{\pm}) + \int_{Q_-}^{Q_+} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \frac{\bar{u}(\lambda)}{T} \\ &= \int_{\mathcal{C}_u} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \ln\left(1 + e^{-\frac{u(\lambda) \operatorname{sign}(v(\lambda))}{T}}\right) \\ &= \int_{J_{-}^{\delta} \cup J_{+}^{\delta}} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \ln\left(1 + e^{-\frac{|v(\lambda)|}{T}}\right) + \mathcal{O}(T^{\infty}) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

gilt (falls λ_{\pm} nicht auf C_u liegt), wobei $v(\lambda) = \operatorname{Re} u(\lambda)$, $\delta > 0$ und J_{\pm}^{δ} wie im Beweis von Lemma 4.2.1 (vgl. Anhang C.2) gewählt sind.

Für $\lambda_{\pm} \in V_+$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \int_{J_{-}^{\delta} \cup J_{+}^{\delta}} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \ln\left(1 + e^{-\frac{|v(\lambda)|}{T}}\right) \\
 &= \int_{J_{+}^{\delta}} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \ln\left(1 + e^{-\frac{|v(\lambda)|}{T}}\right) + \mathcal{O}(T) \\
 &= \int_{J_{+}^{\delta}} d\lambda \left[\operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) - \frac{u'(\lambda)}{u(\lambda) - u(\lambda_{\pm})} \right] \ln\left(1 + e^{-\frac{|v(\lambda)|}{T}}\right) \\
 &\quad + \int_{J_{+}^{\delta}} d\lambda \frac{v'(\lambda)}{v(\lambda) + iw(\lambda) - u(\lambda_{\pm})} \ln\left(1 + e^{-\frac{|v(\lambda)|}{T}}\right) + \mathcal{O}(T) \\
 &= \int_{-\delta/T}^{\delta/T} dx \frac{\ln(1 + e^{-|x|})}{x - \bar{u}(\lambda_{\pm})/T} + \mathcal{O}(T). \tag{C.14}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde Gleichung (C.12) benutzt sowie die Tatsache, dass $w(\lambda) = 2\pi iT$ auf der Kontur J_{+}^{δ} . Wie im Beweis von Lemma 4.2.1 wurde die Substitution $x = v(\lambda)/T$ vorgenommen.

Falls λ_{\pm} in der Nähe von Q_+ liegt, kann man nicht mehr annehmen, dass $a_{\pm} := \bar{u}(\lambda_{\pm})/T$ groß wird für kleine T . Aus diesem Grund wird im Folgenden a_{\pm} als unabhängiger Parameter betrachtet. Dann folgt mit (C.13) und (C.14)

$$\Delta I_u(\lambda_{\pm}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(1 + e^{-|x|})}{x - a_{\pm}} + \mathcal{O}(T). \tag{C.15}$$

Man beachte, dass a_+ in der oberen und a_- in der unteren Halbebene liegt. Das Integral auf der rechten Seite kann mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden (für eine ähnliche Rechnung vgl. [90]),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(1 + e^{-|x|})}{x - a_{\pm}} = \mp 2\pi i \ln\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \frac{a_{\pm}}{2\pi i}\right)\right\} \pm \pi i \ln(2\pi) + a_{\pm} \ln\left(\frac{a_{\pm}}{\pm 2\pi i}\right) - a_{\pm}. \tag{C.16}$$

Im Integral auf der rechten Seite der ersten Gleichung von (C.13) kann noch der singuläre Anteil abgespalten werden,

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q_-}^{Q_+} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \frac{\bar{u}(\lambda)}{T} \\
 &= \int_{Q_-}^{Q_+} d\lambda \operatorname{cth}(\lambda - \lambda_{\pm}) \frac{\bar{u}(\lambda) - \bar{u}(\lambda_{\pm})}{T} + \frac{\bar{u}(\lambda_{\pm})}{T} \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(Q_+ - \lambda_{\pm})}{\operatorname{sh}(Q_- - \lambda_{\pm})}\right), \tag{C.17}
 \end{aligned}$$

sodass (4.45) aus den Gleichungen (C.13)-(C.17) folgt. Der Beweis von (4.46) erfolgt analog. Damit ist Lemma 4.3.1 gezeigt.

Beweis von Lemma 4.3.2

Zur Vorbereitung des Beweises wird das aus Lemma 4.2.1 und Lemma 4.3.1 folgende Korollar benötigt.

Korollar C.3.1. Es seien $\lambda \in V_{\pm}$ und $\sigma = \text{sign}(\text{Im } \lambda)$. Dann liegt λ oberhalb von $C_{0,s} - iy/2$ falls $\sigma > 0$, unterhalb von $C_{0,s} - iy/2$ falls $\sigma < 0$ (vorausgesetzt T ist klein genug), und es gilt

$$\begin{aligned} L_{C_{0,s-iy/2}}[z](\lambda) &= \int_{C_{0,s-iy/2}} d\mu \text{cth}(\mu - \lambda) z(\mu + iy/2) \\ &= - \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} \text{cth}(\mu - \lambda) (\bar{u}_1(\mu) - \bar{u}_1(\lambda)) + \frac{\bar{u}_1(\lambda)}{2\pi i} \ln \left(\frac{e^{\pm 1}(\lambda) \text{sh}(\lambda + Q)}{\text{sh}(\lambda - Q)} \right) \\ &\quad \mp \frac{\bar{u}_1(\lambda)}{2\pi i} \ln(\pm \sigma 2\pi iT) - \sigma \ln \left(\frac{\Gamma(1/2 \pm \sigma \bar{u}(\lambda)/2\pi iT)}{\Gamma(1/2 \pm \sigma \bar{u}_0(\lambda)/2\pi iT)} \right) + \mathcal{O}(T). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Falls λ entfernt ist von $\pm Q$ gilt

$$L_{C_{0,s-iy/2}}[z](\lambda) = - \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} \text{cth}(\mu - \lambda) \bar{u}_1(\mu) + \mathcal{O}(T). \quad (\text{C.19})$$

Das folgende nützliche Lemma wurde in Anhang B von [74] bewiesen.

Lemma C.3.1. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall welches 0 enthält. Es sei weiterhin eine Funktion $\mathcal{R} : I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben mit den folgenden Eigenschaften. Die Abbildung $u \rightarrow \mathcal{R}(u, t)$ sei $\mathcal{C}^1(I)$ für fast alle t und $t \rightarrow \mathcal{R}(u, t)$ sei Riemann-integrierbar in u , d.h. $\forall \epsilon > 0, \forall M > 0, \forall u_0 \in I \exists \delta > 0$ sodass $u \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \cap I \Rightarrow$

$$\left| \int_M^\infty dt (\partial_1^k \mathcal{R}(u, t) - \partial_1^k \mathcal{R}(u_0, t)) \right| < \epsilon \quad (\text{C.20})$$

für $k = 0, 1$.

Dann gilt für $g \in \mathcal{C}^1(I)$

$$\int_0^\delta dt xg(t) \mathcal{R}(t, xt) = g(0) \int_0^\infty dt \mathcal{R}(0, t) + o(1), \quad (\text{C.21})$$

wobei mit $o(1)$ Terme bezeichnet werden, welche im geordneten Limes $x\delta \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ verschwinden.

Für den Beweis von Lemma 4.3.2 schreibt man das Doppelintegral als

$$\begin{aligned} A &= - \int_{C_{0,s}} d\lambda \int_{C'_{0,s}} d\mu z(\lambda) \text{cth}'(\lambda - \mu) z(\mu) = \\ &= \int_{-(C_{0,s-iy/2})} \frac{d\lambda}{2\pi iT} \left[\frac{u'(\lambda)}{1 + e^{u(\lambda)/T}} - \frac{u'_0(\lambda)}{1 + e^{u_0(\lambda)/T}} \right] L_{C'_{0,s-iy/2}}[z](\lambda). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Anschließend deformiert man die Kontur $-(C_{0,s} - iy/2)$ und zerlegt sie in einzelne Teile (vgl. Abbildung C.1),

$$-(C_{0,s} - iy/2) \rightarrow C_+^\delta \cup C_-^\delta \cup J_+^\delta \cup J_-^\delta. \quad (\text{C.23})$$

Hierbei sind $\delta > 0$ und J_\pm^δ so gewählt wie im Beweis von Lemma 4.2.1. Sie beinhalten Q_\pm , und es gilt $\text{Im } u = 2\pi pT$ innerhalb von J_\pm^δ und $\text{Re } u$ ist monoton wachsend (fallend) zwischen $-\delta$ und δ in J_+^δ (J_-^δ). Außerdem gilt $\text{Re } u > 0$ auf C_+^δ und $\text{Re } u < 0$ auf C_-^δ . Falls T hinreichend klein ist, gilt letzteres auch für $\text{Re } u_0$. Es folgt, dass

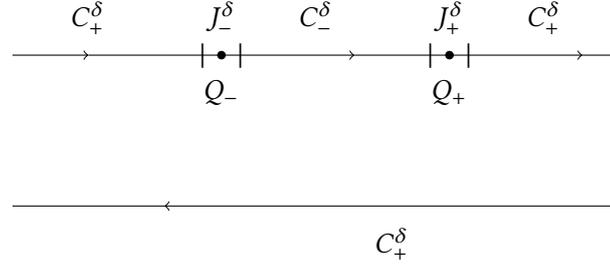


Abbildung C.1: Zerlegung der Kontur $-(C_{0,s} - iy/2)$.

$$A = I_{C_-^\delta} + I_{J_-^\delta} + I_{J_+^\delta} + \mathcal{O}(T^\infty), \quad (\text{C.24})$$

wobei per Definition

$$I_C = \int_C \frac{d\lambda}{2\pi iT} \left[\frac{u'(\lambda)}{1 + e^{u(\lambda)/T}} - \frac{u'_0(\lambda)}{1 + e^{u_0(\lambda)/T}} \right] L_{C_{0,s-iy/2}}[z](\lambda_+). \quad (\text{C.25})$$

Hierbei liegt λ_+ infinitesimal oberhalb der Kontur.

Das erste Integral auf der rechten Seite von (C.24) kann mit Hilfe von Korollar C.3.1 berechnet werden,

$$\begin{aligned} I_{C_-^\delta} &= \int_{C_-^\delta} \frac{d\lambda}{2\pi iT} (u'(\lambda) - u'_0(\lambda)) L_{C_{0,s-iy/2}}[z](\lambda_+) + \mathcal{O}(T^\infty) \\ &= - \int_{C_-^\delta} \frac{d\lambda}{2\pi i} u'_1(\lambda) \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} \text{cth}(\mu - \lambda_+) \bar{u}_1(\mu) + \mathcal{O}(T) \\ &= - \int_{-Q}^Q \frac{d\lambda}{2\pi i} u'_1(\lambda) \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} \text{cth}(\mu - \lambda_+) \bar{u}_1(\mu) + o(1) \\ &= \int_{-Q}^Q \frac{d\lambda}{2\pi i} \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{\bar{u}'_1(\lambda) \bar{u}_1(\mu) - \bar{u}'_1(\mu) \bar{u}_1(\lambda)}{2 \text{th}(\lambda - \mu)} \\ &\quad - \frac{1}{8\pi i} (\bar{u}_1^2(Q) - \bar{u}_1^2(-Q)) + o(1), \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

wobei mit $o(1)$ Terme gemeint sind, die im geordneten Limes $\delta/T \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ verschwinden.

Um die verbleibenden Integrale auszuwerten, müssen diese weiter unterteilt werden. Setzt man $\delta u = (\bar{u} - u_0)/T$, so hat man $I_{J_\pm^\delta} = I_{J_\pm^\delta}^{(1)} + I_{J_\pm^\delta}^{(2)}$, wobei

$$I_{J_\pm^\delta}^{(1)} = \int_{J_\pm^\delta} \frac{d\lambda}{2\pi iT} u'(\lambda) \left[\frac{1}{1 + e^{\bar{u}(\lambda)/T}} - \frac{1}{1 + e^{\bar{u}(\lambda)/T - \delta u(\lambda)}} \right] L_{C_{0,s-iy/2}}[z](\lambda_+), \quad (\text{C.27a})$$

$$I_{J_\pm^\delta}^{(2)} = \int_{J_\pm^\delta} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{\delta u'(\lambda)}{1 + e^{\bar{u}(\lambda)/T - \delta u(\lambda)}} L_{C_{0,s-iy/2}}[z](\lambda_+). \quad (\text{C.27b})$$

Substituiert man nun $t = \bar{u}(\lambda)$, so folgt mit Lemma C.3.1

$$\begin{aligned}
 I_{J_+^\delta}^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi i} \left[\frac{1}{1+e^t} - \frac{1}{1+e^{t-\bar{u}_1(Q)}} \right] \left\{ - \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} \operatorname{cth}(\mu - Q) (\bar{u}_1(\mu) - \bar{u}_1(Q)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\bar{u}_1(Q)}{2\pi i} \ln \left(\frac{2\pi i T}{\varepsilon'(Q) \operatorname{sh}(2Q)} \right) - \ln \left(\frac{\Gamma(1/2 + t/2\pi i)}{\Gamma(1/2 + t/2\pi i - \bar{u}_1(Q)/2\pi i)} \right) \right\} + o(1) \\
 &= \frac{\bar{u}_1(Q)}{2\pi i} \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} \operatorname{cth}(\mu - Q) (\bar{u}_1(\mu) - \bar{u}_1(Q)) + \left(\frac{\bar{u}_1(Q)}{2\pi i} \right)^2 \ln \left(\frac{2\pi i T}{\varepsilon'(Q) \operatorname{sh}(2Q)} \right) \\
 &\quad + \ln \left\{ G \left(1 - \frac{\bar{u}_1(Q)}{2\pi i} \right) G \left(1 + \frac{\bar{u}_1(Q)}{2\pi i} \right) \right\} + o(1). \tag{C.28}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde in der ersten Zeile Korollar C.3.1 benutzt sowie Korrekturen der Ordnung T vernachlässigt. Die verbleibenden Integrale wurden mit Hilfe des Residuensatzes ausgewertet (vgl. Anhang B von [90]). Eine ähnliche Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
 I_{J_-^\delta}^{(1)} &= -\frac{\bar{u}_1(-Q)}{2\pi i} \int_{-Q}^Q \frac{d\mu}{2\pi i} \operatorname{cth}(\mu + Q) (\bar{u}_1(\mu) - \bar{u}_1(-Q)) \\
 &\quad + \left(\frac{\bar{u}_1(-Q)}{2\pi i} \right)^2 \ln \left(\frac{-2\pi i T}{\varepsilon'(Q) \operatorname{sh}(2Q)} \right) \\
 &\quad + \ln \left\{ G \left(1 + \frac{\bar{u}_1(-Q)}{2\pi i} \right) G \left(1 - \frac{\bar{u}_1(-Q)}{2\pi i} \right) \right\} + o(1). \tag{C.29}
 \end{aligned}$$

Die verbleibenden Integrale $I_{J_\pm^\delta}^{(2)}$ werden sich als $o(1)$ herausstellen. Um dies zu zeigen, nimmt man die Aufteilung $I_{J_\pm^\delta}^{(2)} = I_{J_\pm^\delta}^{(3)} + I_{J_\pm^\delta}^{(4)}$ vor, wobei

$$I_{J_\pm^\delta}^{(3)} = \int_{J_\pm^\delta} \frac{d\lambda}{2\pi i} \delta u'(\lambda) \left[\frac{1}{1 + e^{\bar{u}(\lambda)/T - \delta u(\lambda)}} - \Theta \left(-\frac{\bar{u}(\lambda)}{T} \right) \right] L_{C_{0,s-iy/2}}[z](\lambda_+), \tag{C.30a}$$

$$I_{J_\pm^\delta}^{(4)} = \int_{J_\pm^\delta} \frac{d\lambda}{2\pi i} \delta u'(\lambda) \Theta \left(-\frac{\bar{u}(\lambda)}{T} \right) L_{C_{0,s-iy/2}}[z](\lambda_+). \tag{C.30b}$$

Hierbei ist Θ die Heaviside-Stufenfunktion. Die Integrale $I_{J_\pm^\delta}^{(3)}$ können wie $I_{J_\pm^\delta}^{(1)}$ behandelt werden und ergeben mit Lemma C.3.1 Terme der Ordnung $o(1)$.

Um das Integral $I_{J_+^\delta}^{(4)}$ abzuschätzen berechnet man

$$I_{J_+^\delta}^{(4)} = \int_{Q_-^-}^{Q_+^+} \frac{d\lambda}{2\pi i} \bar{u}'_1(\lambda) \left\{ -\frac{\bar{u}_1(\lambda)}{2\pi i} \ln(2\pi i T) - \ln \left(\frac{\Gamma(1/2 + \bar{u}(\lambda)/2\pi i T)}{\Gamma(1/2 + \bar{u}(\lambda)/2\pi i T - \bar{u}_1(\lambda)/2\pi i)} \right) \right\} + o(1). \tag{C.31}$$

Hierbei wurde der linke Endpunkt von J_+^δ , an dem $\bar{u} = -\delta$ gilt, mit Q_+^- bezeichnet. Außerdem wurde (C.18) eingesetzt und Terme der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ unterdrückt. Das Integral über den ersten Term in der geschweiften Klammer kann offenbar explizit berechnet werden. Um den zweiten Term abzuschätzen beachtet man, dass aufgrund der Stirlingschen Formel die Entwicklung

$$\ln \left(\frac{\Gamma(1/2 + x)}{\Gamma(1/2 + x - a)} \right) - a \ln(1 + x) + \frac{a + a^2/2}{1 + x} = \mathcal{O}(1/x^2) \tag{C.32}$$

gegeben. Der Parameter $Q > 0$ wird fixiert durch die Nebenbedingung $\varepsilon(Q|Q) = 0$. Für $Q = \pi/2$, d.h. $h = h_\ell$, kann die Integralgleichung per Fourier-Transformation gelöst werden,

$$\varepsilon\left(\lambda\left|\frac{\pi}{2}\right.\right) = \frac{h_\ell}{2} + \frac{4J \operatorname{sh}(\eta)K}{\pi} \operatorname{dn}\left(\frac{2K}{\pi}Q|k\right). \quad (\text{C.37})$$

Setzt man $\lambda = \pi/2$, so ergibt sich für das untere kritische Feld h_ℓ der Ausdruck

$$h_\ell = \frac{8J \operatorname{sh}(|\eta|)K}{\pi} \sqrt{1 - k^2}. \quad (\text{C.38})$$

Die erste Beobachtung ist, dass aufgrund von

$$\lim_{Q \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varepsilon'(Q|Q) = 0 \quad (\text{C.39})$$

der Fehler bei der Ersetzung $Q \rightarrow \pi/2$ in den Integrationsgrenzen in (C.36) von der Ordnung $(\pi/2 - Q)^3$ ist. Damit folgt

$$\varepsilon(\lambda|Q) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\mu}{2\pi} K(i(\lambda - \mu)) \varepsilon(\mu|Q) = \varepsilon_0(\lambda|h) + \mathcal{O}\left((\pi/2 - Q)^3\right). \quad (\text{C.40})$$

Wirkt man nun mit der Resolventen R , welche durch

$$R(\lambda, \mu) = K(i(\lambda - \mu)) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\omega}{2\pi} K(i(\lambda - \omega)) R(\omega, \mu) \quad (\text{C.41})$$

definiert ist, auf obige Gleichung, so folgt

$$\varepsilon_0(\omega|h) - \varepsilon(\omega|Q) + \mathcal{O}\left((\pi/2 - Q)^3\right) = \varepsilon_0(\omega|h_\ell) - \varepsilon(\omega|\frac{\pi}{2}) + (h - h_\ell) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\lambda}{2\pi} R(\lambda, \omega). \quad (\text{C.42})$$

Mit der Fourier-Darstellung der Resolventen (vgl. Gleichung (D.24)) und den Gleichungen (C.37) und (C.38) folgt

$$\varepsilon(\omega|Q) = \frac{h - h_c}{2} + \varepsilon(\omega|\frac{\pi}{2}) + \mathcal{O}\left((\pi/2 - Q)^3\right). \quad (\text{C.43})$$

Für den Spezialfall $\omega = Q$ erhält man

$$h - h_\ell = \frac{2h_\ell k K^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - Q\right)^2 + \mathcal{O}\left((\pi/2 - Q)^3\right), \quad (\text{C.44})$$

und damit die Behauptung (4.95).

D Spezielle Funktionen

In diesem Anhang sind die Eigenschaften verschiedener Funktionen, welche in Kapitel 5 und 6 eine Rolle spielen, aufgezählt. Die Beweise finden sich in den Anhängen der Arbeiten [45, 44].

D.1 Elliptische Funktionen

Zunächst sollen einige Konventionen für elliptische Funktionen fixiert werden. Diese entsprechen der in [135] verwendeten Notation. Insbesondere sind die Theta-Funktionen definiert durch

$$\vartheta_3(\lambda | q) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ (1 - q^{2n}) \left(1 + 2q^{2n-1} \cos(2\lambda) + q^{4n-2} \right) \right\}, \quad (\text{D.1a})$$

$$\vartheta_4(\lambda | q) = \vartheta_3\left(\lambda - \frac{\pi}{2} | q\right), \quad (\text{D.1b})$$

$$\vartheta_1(\lambda | q) = -ie^{i\lambda - \eta/4} \vartheta_4(\lambda + i\eta/2 | q), \quad (\text{D.1c})$$

$$\vartheta_2(\lambda | q) = \vartheta_1\left(\lambda + \frac{\pi}{2} | q\right), \quad (\text{D.1d})$$

wobei $q = e^{-\eta}$.

Durch Quotientenbildung erhält man die doppelt-periodischen Jacobischen elliptischen Funktionen. Die Beschreibung der Perioden erfolgt mit den vollständigen elliptischen Integralen

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\phi \left(1 - k^2 \sin^2(\phi) \right)^{-1/2}, \quad (\text{D.2a})$$

$$K'(k) = K(k'), \quad \text{mit } k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad (\text{D.2b})$$

welche vom elliptischen Modul k abhängen. Obige Größen können alternativ durch den Parameter $q = e^{-\eta} = e^{-\pi K'(k)/K(k)}$ ausgedrückt werden,

$$k(q) = \frac{\vartheta_2^2(0 | q)}{\vartheta_3^2(0 | q)}, \quad (\text{D.3a})$$

$$\frac{2K(q)}{\pi} = \vartheta_3^2(0 | q). \quad (\text{D.3b})$$

D.2 Der bekleidete Impuls

Die Funktion $p(x)$ sei im Streifen $|\text{Im}(x)| < \eta/2$ durch die lineare Integralgleichung (5.12a) gegeben. Diese Gleichung kann mittels Fourier-Transformation gelöst werden und man erhält

$$p(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \frac{\sin(2nx)}{q^n + q^{-n}}. \quad (\text{D.4})$$

Diese Fourier-Reihe kann dargestellt werden als

$$p(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{\vartheta_4(x + i\eta/2|q^2)}{\vartheta_4(x - i\eta/2|q^2)} \right). \quad (\text{D.5})$$

Diese Darstellung gilt in der gesamten komplexen Ebene. Man prüft leicht nach, dass p die Funktionalgleichung

$$e^{2\pi i(p(x+i\eta)+p(x))} = 1 \quad (\text{D.6})$$

erfüllt. Ober- und unterhalb der reellen Achse hat man das Verhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [2\pi i p(x)] &< 0 \quad \text{für } 0 < \operatorname{Im} x < \eta, \\ \operatorname{Re} [2\pi i p(x)] &> 0 \quad \text{für } -\eta < \operatorname{Im} x < 0. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Mit Gleichung (D.5) erhält man die Beziehung

$$\cos(2\pi p(x)) = -\operatorname{sn} \left(\frac{2Kx}{\pi} \middle| k \right), \quad (\text{D.8})$$

wobei $k = k(q)$ der elliptische Modul zum Parameter $q = e^{-\eta}$ ist. $K = K(k)$ ist das vollständige elliptische Integral erster Art. Die Funktion sn ist die Jacobische elliptische sn -Funktion.

D.3 Die bekleidete Energie

Die bekleidete Energie $\varepsilon(x)$ ist definiert als Lösung der linearen Integralgleichung (5.14). Im Streifen $|\operatorname{Im}(x)| < \eta/2$ gilt

$$\varepsilon(x) = \frac{h}{2} - 4J \operatorname{sh}(\eta) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2inx}}{q^n + q^{-n}}, \quad (\text{D.9})$$

welche in die in der ganzen komplexen Ebene gültige Form

$$\varepsilon(x) = \frac{h}{2} - \frac{4JK \operatorname{sh}(\eta)}{\pi} \operatorname{dn} \left(\frac{2Kx}{\pi} \middle| k \right) \quad (\text{D.10})$$

gebracht werden kann. Die bekleidete Energie erfüllt die Funktionalgleichung

$$\varepsilon(x) + \varepsilon(x + i\eta) = h \quad (\text{D.11})$$

und ist periodisch,

$$\varepsilon(x + \pi) = \varepsilon(x). \quad (\text{D.12})$$

Das untere kritische Feld h_ℓ ist dadurch gekennzeichnet, dass $\varepsilon(\pi/2) = 0$ gilt. Somit folgt

$$h_\ell = \frac{8JK \operatorname{sh}(\eta)}{\pi} \operatorname{dn}(K|k). \quad (\text{D.13})$$

Setzt man (D.13) in (D.10) ein und benutzt (D.8), so erhält man die Energie-Impuls-Beziehung

$$\varepsilon(p) = \frac{h}{2} - \frac{h_\ell}{2} \sqrt{\frac{1 - k^2 \cos^2(2\pi p)}{1 - k^2}}. \quad (\text{D.14})$$

D.4 Die bekleidete Phase

Die bekleidete Phase $\varphi(x, z)$ ist definiert als Lösung der linearen Integralgleichung (5.12b). Hier sind für die Berechnung der Fourier-Reihe aufgrund der Schnitte der Funktion θ die Fälle $|\operatorname{Im}(z)| < \eta$ und $|\operatorname{Im}(z)| > \eta$ zu unterscheiden. Im ersten Fall hat man die im Streifen $|\operatorname{Im}(x)| < \eta$ gültige Fourierdarstellung

$$\varphi(x, z) = i(\pi/2 + x - z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i}{n} \frac{\sin(2n(x - z))}{1 + q^{-2n}}. \quad (\text{D.15})$$

Diese Reihe kann resummiert werden und durch q - Γ -Funktionen ausgedrückt werden,

$$\varphi(x_1, x_2) = i\left(\frac{\pi}{2} + x_{12}\right) + \ln \left\{ \frac{\Gamma_{q^4}\left(1 + \frac{ix_{12}}{2\eta}\right) \Gamma_{q^4}\left(\frac{1}{2} - \frac{ix_{12}}{2\eta}\right)}{\Gamma_{q^4}\left(1 - \frac{ix_{12}}{2\eta}\right) \Gamma_{q^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{ix_{12}}{2\eta}\right)} \right\}, \quad (\text{D.16})$$

wobei $x_{12} = x_1 - x_2$, $|\operatorname{Im} x_2| < \eta$ und $x_1 \in \mathbb{C}$. Hierbei ist Γ_q definiert durch das unendliche Produkt

$$\Gamma_q(x) = (1 - q)^{1-x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q^{n+x-1}}. \quad (\text{D.17})$$

Mit der Definition der q -Zahl

$$[x]_q = \frac{1 - q^x}{1 - q} \quad (\text{D.18})$$

lautet die Funktionalgleichung der q - Γ -Funktion

$$\Gamma_q(x + 1) = [x]_q \Gamma_q(x), \quad \Gamma_q(1) = 1. \quad (\text{D.19})$$

Mit dieser Gleichung erhält man für $|\operatorname{Im}(x_2)| < \eta$ die Funktionalgleichung der bekleideten Phase

$$e^{\varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1 + i\eta, x_2)} = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin(x_1 - x_2 + i\eta)}. \quad (\text{D.20})$$

Außerdem ist $\varphi(x_1, x_2)$ für $|\operatorname{Im}(x_2)| < \eta$ quasiperiodisch,

$$\varphi(x + \pi, z) = \varphi(x, z) + i\pi. \quad (\text{D.21})$$

Für $|\operatorname{Im} z| > \eta$ lässt sich $\varphi(x, z)$ durch elementare Funktionen ausdrücken,

$$e^{\varphi(x, z)} = \begin{cases} \frac{\sin(x - z)}{\sin(x - z + i\eta)} & \text{für } \operatorname{Im} z > \eta, \\ \frac{\sin(x - z - i\eta)}{\sin(x - z)} & \text{für } \operatorname{Im} z < -\eta. \end{cases} \quad (\text{D.22})$$

D.5 Die Resolvente

Die Resolvente $R(\lambda, \mu)$ sei definiert durch die lineare Integralgleichung

$$R(\lambda, \mu) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\omega K(\lambda - \omega) R(\omega, \mu) = K(\lambda - \mu). \quad (\text{D.23})$$

Mittels Fouriertransformation erhält man für $R(\lambda, \mu) = R(\lambda - \mu)$ die Fourier-Reihe

$$R(\lambda) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} (e^{2in\lambda} + e^{-2in\lambda}), \quad (\text{D.24})$$

welche im Streifen $|\text{Im}(\lambda)| < \eta$ gilt. Für die analytische Fortsetzung resummiert man obige Reihe und erhält

$$R(\lambda) = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi i} \partial_{\lambda} \ln \left(\frac{\Gamma_{q^4} \left(1 + \frac{i\lambda}{2\eta} \right) \Gamma_{q^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{i\lambda}{2\eta} \right)}{\Gamma_{q^4} \left(1 - \frac{i\lambda}{2\eta} \right) \Gamma_{q^4} \left(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{2\eta} \right)} \right). \quad (\text{D.25})$$

E Ergänzungen zur Tieftemperaturanalyse in der massiven Phase

In diesem Anhang soll der Beweis der expliziten Darstellung (6.109) des universellen Anteils der Amplituden in der massiven Phase (vgl. Kapitel 6) skizziert werden. Dafür benötigt man die elementaren Integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy K(x-y|\delta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } -\delta < \text{Im}(x) < \delta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (\text{E.1a})$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dy}{2\pi i} (\ln(\sin(y-x-iy)) - \ln(\sin(y-x))) = -\frac{\pi}{2} - x - iy, \quad -\gamma < \text{Im}(x) < 0. \quad (\text{E.1b})$$

Mit den obigen Gleichungen und der Fourierreihe (D.15) folgt direkt

$$\exp \left\{ -s \int_{-\pi/2-i0}^{\pi/2-i0} \frac{dy}{\pi} \ln \rho_n^{(0)}(y|\alpha) \right\} = (-1)^{sk+sn_c+s} q^{-s^2} \exp \left\{ -is \left(\sum_{j=1}^{n_c+2s} x_j + \sum_{j=1}^{n_c} y_j \right) \right\}. \quad (\text{E.2})$$

Der erste Faktor in Gleichung (6.104) kann mit Hilfe der Darstellung (6.98) berechnet werden. Für die Auswertung der auftretenden Integrale benötigt man die Fourierreihen

$$\cot(z) = \begin{cases} i(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2ikz}), & \text{falls } \text{Im}(z) < 0 \\ -i(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{2ikz}), & \text{falls } \text{Im}(z) > 0 \end{cases}, \quad (\text{E.3a})$$

$$\varphi_p(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{2in(x-z)}}{n} \frac{1}{1 + q^{-2|n|}}. \quad (\text{E.3b})$$

Die resultierenden Summen können mit Hilfe der Identität

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{x^m}{1 + q^{2m}} = \ln \left[\frac{(q^2 x, q^4)}{(x, q^4)} \right], \quad |x| < 1, \quad (\text{E.4})$$

durch q -Produkte (vgl. (5.69)) ausgedrückt werden.

Für die explizite Berechnung des Integrals in der dritten Zeile von (6.104) benutzt man die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \partial_y \ln(\rho_n^{(0)}(y|\alpha)) &= -\frac{s}{\pi} + \sum_{k=1}^{n_c+2s} K(y-x_k + iy/2|\gamma/2) - \sum_{k=1}^{n_c} K(y-y_k + iy/2|\gamma/2) \\ &+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dz}{2\pi i} K(y-z + iy/2|\gamma/2) \left[\sum_{k=1}^{n_c} \partial_z \varphi_p(z, y_k) - \sum_{k=1}^{n_c+2s} \partial_z \varphi_p(z, x_k) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Hierbei ist $\text{Im}(y) = -\epsilon$ und $\epsilon > 0$ eine kleine Zahl. Das Integral in der zweiten Zeile kann leicht mit Gleichung (E.3) berechnet werden. Gleichung (E.5) wird mit der Funktion (6.105) multipliziert und über y integriert. Um die entstehenden Summen in q -Doppelprodukte (vgl. (5.68)) umzuformen, benutzt man die Identität

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{x^m}{(1+q^{2m})^2} = \ln \left[\frac{(q^2x, q^4, q^4)^2}{(x, q^4, q^4)(q^4x, q^4, q^4)} \right], \quad |x| < 1. \quad (\text{E.6})$$

Verwendet man für die q -Produkte die „Reduktionsformeln“

$$(q^4x, q^4) = \frac{(x, q^4)}{1-x}, \quad (\text{E.7a})$$

$$(q^4x, q^4, q^4) = \frac{(x, q^4, q^4)}{(x, q^4)}, \quad (\text{E.7b})$$

so folgt schließlich die Darstellung (6.109).

Literaturverzeichnis

- [1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex variables: Introduction and applications*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2003.
- [2] I. Affleck, *Exact correlation amplitude for the $S=1/2$ Heisenberg antiferromagnetic chain*, J. Phys. A **31** (1998), 4573–4581.
- [3] L. A. Ajzenberg and A.P. Yuzhakov, *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 1983.
- [4] O. Babelon, H. J. de Vega, and C. M. Viallet, *Analysis of the Bethe ansatz equations of the XXZ model*, Nucl. Phys. B **220** (1983), 13–34.
- [5] W. S. Bakr, J. I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, and M. Greiner, *A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice*, Nature **462** (2009), 74–77.
- [6] E. Barouch and B. M. McCoy, *Statistical Mechanics of the XY Model. II. Spin-Correlation Functions*, Phys. Rev. A **3** (1971), 786–804.
- [7] R. J. Baxter, *Spontaneous staggered polarization of the F-model*, J. Stat. Phys. **9** (1973), no. 2, 145–182.
- [8] ———, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, 1982.
- [9] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B **241** (1984), no. 2, 333 – 380.
- [10] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle*, Z. Phys. A **71** (1931), 205–226.
- [11] N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, and V.E. Korepin, *Critical exponents for integrable models*, Nucl. Phys. B **275** (1986), no. 4, 687 – 705.
- [12] H. Boos, *Fermionic Basis in Conformal Field Theory and Thermodynamic Bethe Ansatz for Excited States*, SIGMA **7** (2011), 7.
- [13] H. Boos and F. Göhmann, *On the physical part of the factorized correlation functions of the XXZ chain*, J. Phys. A **42** (2009), no. 31, 315001.
- [14] ———, *Properties of Linear Integral Equations Related to the Six-Vertex Model with Disorder Parameter*, New Trends in Quantum Integrable Systems (B. Feigin, M. Jimbo, and M. Okado, eds.), October 2011, pp. 1–10.
- [15] ———, *Properties of Linear Integral Equations Related to the Six-Vertex Model with Disorder Parameter II*, J. Phys. A **45** (2012), no. 14, 145202.

- [16] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model IV: CFT Limit*, *Comm. Math. Phys.* **299** (2010), 825–866.
- [17] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model II: Creation Operators*, *Comm. Math. Phys.* **286** (2009), 875–932.
- [18] H. E. Boos, J. Damerau, F. Göhmann, A. Klümper, J. Suzuki, and A. Weiße, *Short-distance thermal correlations in the XXZ chain*, *J. Stat. Mech.* **8** (2008), 10.
- [19] H. E. Boos, F. Göhmann, A. Klümper, and J. Suzuki, *Factorization of multiple integrals representing the density matrix of a finite segment of the Heisenberg spin chain*, *J. Stat. Mech.* **4** (2006), 1.
- [20] ———, *Factorization of the finite temperature correlation functions of the XXZ chain in a magnetic field*, *J. Phys. A* **40** (2007), 10699–10727.
- [21] H. E. Boos and V. E. Korepin, *Quantum spin chains and Riemann zeta function with odd arguments*, *J. Phys. A* **34** (2001), no. 26, 5311.
- [22] F. Bornemann, *On the numerical evaluation of Fredholm determinants*, *Math. Comp.* **79** (2010), 871–915.
- [23] A. H. Bougourzi, M. Karbach, and G. Müller, *Exact two-spinon dynamic structure factor of the one-dimensional $s=1/2$ Heisenberg-Ising antiferromagnet*, *Phys. Rev. B* **57** (1998), 11429–11438.
- [24] L. Brillouin, *Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien*, *Annalen der Physik* **349** (1914), no. 10, 203–240.
- [25] M. Brockmann, F. Göhmann, M. Karbach, A. Klümper, and A. Weiße, *Theory of Microwave Absorption by the Spin-1/2 Heisenberg-Ising Magnet*, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011), no. 1, 017202.
- [26] ———, *Absorption of microwaves by the one-dimensional spin-1/2 Heisenberg-Ising magnet*, *Phys. Rev. B* **85** (2012), no. 13, 134438.
- [27] J. L. Cardy, *Conformal invariance and universality in finite-size scaling*, *J. Phys. A* **17** (1984), no. 7, L385.
- [28] ———, *Operator content of two-dimensional conformally invariant theories*, *Nucl. Phys. B* **270** (1986), 186 – 204.
- [29] J.-S. Caux and R. Hagemans, *The four-spinon dynamical structure factor of the Heisenberg chain*, *J. Stat. Mech.* **12** (2006), 13.
- [30] J.-S. Caux, R. Hagemans, and J. M. Maillet, *Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains: the gapless anisotropic regime*, *J. Stat. Mech.* **9** (2005), 3.
- [31] J.-S. Caux, H. Konno, M. Sorrell, and R. Weston, *Exact form-factor results for the longitudinal structure factor of the massless XXZ model in zero field*, *J. Stat. Mech.* **1** (2012), 7.
- [32] J.-S. Caux and J. M. Maillet, *Computation of Dynamical Correlation Functions of Heisenberg Chains in a Magnetic Field*, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), no. 7, 077201.

-
- [33] M. Cheneau, P. Barmettler, D. Poletti, M. Endres, P. Schausz, T. Fukuhara, C. Gross, I. Bloch, C. Kollath, and S. Kuhr, *Light-cone-like spreading of correlations in a quantum many-body system*, Nature **481** (2012), no. 7382, 484–487.
- [34] G. Czycholl, *Theoretische Festkörperphysik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [35] J. Damerau, F. Göhmann, N. P. Hasenclever, and A. Klümper, *Density matrices for finite segments of Heisenberg chains of arbitrary length*, J. Phys. A **40** (2007), 4439–4453.
- [36] P. J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, 1984.
- [37] H.J. de Vega and F. Woynarovich, *Method for calculating finite size corrections in Bethe ansatz systems: Heisenberg chain and six-vertex model*, Nucl. Phys. B **251** (1985), 439 – 456.
- [38] C. Destri and H. J. de Vega, *New thermodynamic Bethe ansatz equations without strings*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 2313–2317.
- [39] M. Dugave, *Formfaktoren der Quantentransfermatrix und Asymptotik der Korrelationsfunktionen der anisotropen Heisenberg-Kette*, Master’s thesis, Bergische Universität Wuppertal, 2012.
- [40] M. Dugave, F. Göhmann, and K. K. Kozłowski, *Thermal form factors of the XXZ chain and the large-distance asymptotics of its temperature dependent correlation functions*, J. Stat. Mech. **2013** (2013), no. 07, P07010.
- [41] ———, *Functions characterizing the ground state of the XXZ spin-1/2 chain in the thermodynamic limit*, SIGMA **10** (2014), 043.
- [42] ———, *Low-temperature large-distance asymptotics of the transversal two-point functions of the XXZ chain*, J. Stat. Mech. **2014** (2014), no. 4, P04012.
- [43] M. Dugave, F. Göhmann, K. K. Kozłowski, and J. Suzuki, *Asymptotics of correlation functions of the Heisenberg-Ising chain in the easy-axis regime*, arxiv:1507.05279 (2015), 5.
- [44] ———, *Low-temperature spectrum of correlation lengths of the XXZ chain in the antiferromagnetic massive regime*, J. Phys. A **48** (2015), no. 33, 334001.
- [45] ———, *On form-factor expansions for the XXZ chain in the massive regime*, J. Stat. Mech. **2015** (2015), no. 5, P05037.
- [46] F. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, and V. E. Korepin, *The one-dimensional Hubbard model*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [47] F. H. L. Essler and R. M. Konik, *Applications of Massive Integrable Quantum Field Theories to Problems in Condensed Matter Physics*, From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics (M. Shifman, A. Vainshtein, and J. Wheeler, eds.), World Scientific, 2012, pp. 684–830.
- [48] K. Fabricius, A. Klümper, and B. M. McCoy, *Competition of Ferromagnetic and Antiferromagnetic Order in the Spin-1/2 XXZ Chain at Finite Temperature*, Statistical Physics on the Eve of the 21st Century (M. T. Batchelor and L. T. Wille, eds.), World Scientific, 1999, pp. 351–365.
- [49] K. Fabricius, A. Klümper, and B. M. McCoy, *Temperature-dependent spatial oscillations in the correlations of the XXZ spin chain*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 5365–5368.

- [50] K. Fabricius and B. M. McCoy, *Spin diffusion and the spin-1/2 XXZ chain at $T = \infty$ from exact diagonalization*, Phys. Rev. B **57** (1998), 8340–8347.
- [51] K. Fabricius and B. M. McCoy, *Quantum-classical crossover in the spin-1/2 XXZ chain*, Phys. Rev. B **59** (1999), 381–386.
- [52] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, *What is the spin of a spin wave?*, Phys. Lett. A **85** (1981), no. 6, 375 – 377.
- [53] T. Fukuhara, P. Schauß, M. Endres, S. Hild, M. Cheneau, I. Bloch, and C. Gross, *Microscopic observation of magnon bound states and their dynamics*, Nature **502** (2013), 76–79.
- [54] T. Giamarchi, *Quantum physics in one dimension*, Clarendon Oxford University Press, 2004.
- [55] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *Integral representations for the correlation functions of the XXZ chain at finite temperature*, J. Phys. A **37** (2004), 7625.
- [56] ———, *Integral representation of the density matrix of the XXZ chain at finite temperatures*, J. Phys. A **38** (2005), 1833.
- [57] F. D. M. Haldane, *Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids. I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1D interacting spinless Fermi gas*, J. Phys. C **14** (1981), no. 19, 2585.
- [58] N. P. Hasenclever, *Untersuchung statischer Korrelationen anisotroper Heisenberg-Spinketten*, Ph.D. thesis, Bergische Universität Wuppertal, 2008.
- [59] S. Hild, T. Fukuhara, P. Schauß, J. Zeiher, M. Knap, E. Demler, I. Bloch, and C. Gross, *Far-from-Equilibrium Spin Transport in Heisenberg Quantum Magnets*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014), no. 14, 147205.
- [60] Wolfram Research Inc., *Mathematica 7.0*, 2008.
- [61] A. G. Izergin and V. E. Korepin, *The quantum inverse scattering method approach to correlation functions*, Comm. Math. Phys. **94** (1984), 67–92.
- [62] A.G. Izergin, N. Kitanine, J.M. Maillet, and V. Terras, *Spontaneous magnetization of the XXZ Heisenberg spin- $\frac{1}{2}$ chain*, Nucl. Phys. B **554** (1999), no. 3, 679 – 696.
- [63] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, and A. Nakayashiki, *Correlation functions of the XXZ model for $\Delta < -1$* , Phys. Lett. A **168** (1992), 256–263.
- [64] M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, American Mathematical Society, 1995.
- [65] M. Jimbo and T. Miwa, *Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime*, J. Phys. A **29** (1996), 2923–2958.
- [66] M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model III: introducing the Matsubara direction*, J. Phys. A **42** (2009), D4018.

-
- [67] J. D. Johnson, S. Krinsky, and B. M. McCoy, *Vertical-Arrow Correlation Length in the Eight-Vertex Model and the Low-Lying Excitations of the XYZ Hamiltonian*, Phys. Rev. A **8** (1973), 2526–2547.
- [68] M. Karowski and P. Weisz, *Exact form factors in $(1 + 1)$ -dimensional field theoretic models with soliton behaviour*, Nucl. Phys. B **139** (1978), no. 4, 455 – 476.
- [69] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, *A quantum newton’s cradle*, Nature **440** (2006), no. 7086, 900–903.
- [70] A.N. Kirillov and V.E. Korepin, *Norms of bound states*, J. Soviet Math. **40** (1988), no. 1, 13–21.
- [71] A.N. Kirillov and F.A. Smirnov, *A representation of the current algebra connected with the $su(2)$ -invariant thirring model*, Phys. Lett. B **198** (1987), no. 4, 506 – 510.
- [72] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, *Algebraic Bethe ansatz approach to the asymptotic behavior of correlation functions*, J. Stat. Mech. **2009** (2009), no. 04, P04003.
- [73] ———, *On the thermodynamic limit of form factors in the massless XXZ Heisenberg chain*, J. Math. Phys. **50** (2009), no. 9, 095209.
- [74] ———, *Riemann-Hilbert Approach to a Generalised Sine Kernel and Applications*, Comm. Math. Phys. **291** (2009), 691–761.
- [75] ———, *A form factor approach to the asymptotic behavior of correlation functions in critical models*, J. Stat. Mech. **2011** (2011), no. 12, P12010.
- [76] ———, *The thermodynamic limit of particle-hole form factors in the massless XXZ Heisenberg chain*, J. Stat. Mech. **5** (2011), 28.
- [77] ———, *Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models*, J. Stat. Mech. **9** (2012), 1.
- [78] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, *Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain*, Nucl. Phys. B **554** (1999), 647–678.
- [79] ———, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **567** (2000), 554–582.
- [80] A. Klümper, *Free energy and correlation lengths of quantum chains related to restricted solid-on-solid lattice models*, Ann. Phys. **504** (1992), no. 7, 540–553.
- [81] ———, *Thermodynamics of the anisotropic spin-1/2 Heisenberg chain and related quantum chains*, Z. Phys. B **91** (1993), 507–519.
- [82] ———, *The spin-1/2 Heisenberg chain: thermodynamics, quantum criticality and spin-Peierls exponents*, Eur. Phys. J. B **5** (1998), 677–685.
- [83] A. Klümper and M. T. Batchelor, *An analytic treatment of finite-size corrections in the spin-1 antiferromagnetic XXZ chain*, J. Phys. A **23** (1990), no. 5, L189.

- [84] A. Klümper, M. T. Batchelor, and P. A. Pearce, *Central charges of the 6- and 19-vertex models with twisted boundary conditions*, J. Phys. A **24** (1991), no. 13, 3111.
- [85] A. Klümper, J. R. R. Martínez, C. Scheeren, and M. Shiroishi, *The Spin-1/2 XXZ Chain at Finite Magnetic Field: Crossover Phenomena Driven by Temperature*, J. Stat. Phys. **102** (2001), 937–951.
- [86] A. Klümper and C. Scheeren, *The thermodynamics of the spin-1/2 XXX chain: free energy and low-temperature singularities of correlation lengths*, Classical and Quantum Nonlinear Integrable Systems (Series in Mathematical and Computational Physics) (A. Kundu, ed.), IOP publishing, Bristol, 2003, pp. 234–255.
- [87] V. Korepin and N. Slavnov, *The new identity for the scattering matrix of exactly solvable models*, The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems **5** (1998), no. 3, 555–557.
- [88] V. E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
- [89] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge University Press, 1997.
- [90] K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, and N. A. Slavnov, *Correlation functions for one-dimensional bosons at low temperature*, J. Stat. Mech. **3** (2011), 19.
- [91] ———, *Long-distance behavior of temperature correlation functions in the one-dimensional Bose gas*, J. Stat. Mech. **3** (2011), 18.
- [92] M. Lashkevich, *Free field construction for the eight-vertex model: representation for form factors*, Nucl. Phys. B **621** (2002), 587–621.
- [93] E. H. Lieb and D. W. Robinson, *The finite group velocity of quantum spin systems*, Comm. Math. Phys. **28** (1972), no. 3, 251–257.
- [94] E. H. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Two soluble models of an antiferromagnetic chain*, Ann. Phys. (N.Y.) **16** (1961), 407.
- [95] S. Lukyanov, *Low energy effective Hamiltonian for the XXZ spin chain*, Nucl. Phys. B **522** (1998), 533–549.
- [96] ———, *Correlation amplitude for the XXZ spin chain in the disordered regime*, Phys. Rev. B **59** (1999), 11163–11164.
- [97] S. Lukyanov and V. Terras, *Long-distance asymptotics of spin-spin correlation functions for the XXZ spin chain*, Nucl. Phys. B **654** (2003), 323–356.
- [98] A. Luther and I. Peschel, *Calculation of critical exponents in two dimensions from quantum field theory in one dimension*, Phys. Rev. B **12** (1975), 3908–3917.
- [99] J. M. Luttinger, *An exactly soluble model of a many-fermion system*, J. Math. Phys. **4** (1963), no. 9, 1154–1162.

-
- [100] D. C. Mattis and E. H. Lieb, *Exact solution of a many-fermion system and its associated boson field*, J. Math. Phys. **6** (1965), no. 2, 304–312.
- [101] B. M. McCoy and T. T. Wu, *Theory of Toeplitz Determinants and the Spin Correlations of the Two-Dimensional Ising Model. IV*, Phys. Rev. **162** (1967), 436–475.
- [102] N. D. Mermin and H. Wagner, *Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models*, Phys. Rev. Lett. **17** (1966), 1133–1136.
- [103] M. Mourigal, M. Enderle, A. Klöpperpieper, J.-S. Caux, A. Stunault, and H. M. Rønnow, *Fractional spinon excitations in the quantum Heisenberg antiferromagnetic chain*, Nature Physics **9** (2013), 435–441.
- [104] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.
- [105] A. A. Ovchinnikov, *Fisher Hartwig conjecture and the correlators in XY spin chain*, Phys. Lett. A **366** (2007), 357–362.
- [106] M. Panfil and J.-S. Caux, *Finite-temperature correlations in the Lieb-Liniger one-dimensional Bose gas*, Phys. Rev. A **89** (2014), no. 3, 033605.
- [107] R. G. Pereira, S. R. White, and I. Affleck, *Exact Edge Singularities and Dynamical Correlations in Spin-1/2 Chains*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008), no. 2, 027206.
- [108] A. M. Polyakov, *Conformal symmetry of critical fluctuations*, JETP Lett. **12** (1970), 381–383.
- [109] B. Pozsgay, *The generalized Gibbs ensemble for Heisenberg spin chains*, J. Stat. Mech. **7** (2013), 3.
- [110] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, *Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems*, Nature **452** (2008), no. 7189, 854–858.
- [111] G. Olshanski S. Kerov and A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, Ser.I **316** (1993), 773.
- [112] K. Sakai, M. Shiroishi, J. Suzuki, and Y. Umeno, *Commuting quantum transfer-matrix approach to intrinsic fermion system: Correlation length of a spinless fermion model*, Phys. Rev. B **60** (1999), 5186–5201.
- [113] J. Sato, B. Aufgebauer, H. Boos, F. Göhmann, A. Klümper, M. Takahashi, and C. Trippe, *Computation of Static Heisenberg-Chain Correlators: Control over Length and Temperature Dependence*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011), 257201.
- [114] J. Sato, M. Shiroishi, and M. Takahashi, *Correlation functions of the spin-1/2 antiferromagnetic Heisenberg chain: Exact calculation via the generating function*, Nucl. Phys. B **729** (2005), 441–466.
- [115] A. Seel, *Die XXZ-Kette: Statische Korrelationen bei endlichen Temperaturen*, Ph.D. thesis, Bergische Universität Wuppertal, 2005.

- [116] A. Shashi, L. I. Glazman, J.-S. Caux, and A. Imambekov, *Nonuniversal prefactors in the correlation functions of one-dimensional quantum liquids*, Phys. Rev. B **84** (2011), 045408.
- [117] A. Shashi, M. Panfil, J.-S. Caux, and A. Imambekov, *Exact prefactors in static and dynamic correlation functions of one-dimensional quantum integrable models: Applications to the Calogero-Sutherland, Lieb-Liniger, and XXZ models*, Phys. Rev. B **85** (2012), 155136.
- [118] J. F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, and S. Kuhr, *Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator*, Nature **467** (2010), 68–72.
- [119] N. A. Slavnov, *Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe ansatz*, Theor. Math. Phys. **79** (1989), 502–508.
- [120] F.A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*, Advanced series in mathematical physics, World Scientific, 1992.
- [121] A. Sommerfeld, *Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien*, Annalen der Physik **349** (1914), no. 10, 177–202.
- [122] A. Sommerfeld, *Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik*, Zeitschrift für Physik **47** (1928), no. 1-2, 1–32.
- [123] J. Suzuki, Y. Akutsu, and M. Wadati, *A New Approach to Quantum Spin Chains at Finite Temperature*, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990), no. 8, 2667–2680.
- [124] M. Suzuki and M. Inoue, *The ST-Transformation Approach to Analytic Solutions of Quantum Systems. I*, Prog. Theor. Phys. **78** (1987), no. 4, 787–799.
- [125] Masuo Suzuki, *Transfer-matrix method and Monte Carlo simulation in quantum spin systems*, Phys. Rev. B **31** (1985), 2957–2965.
- [126] M. Takahashi, *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*, Cambridge University Press, 1999.
- [127] M. Takahashi, *Correlation Function and Simplified TBA Equations for XXZ Chain*, SIGMA **7** (2011), 4.
- [128] M. Takahashi, G. Kato, and M. Shiroishi, *Next Nearest-Neighbor Correlation Functions of the Spin-1/2 XXZ Chain at Massive Region*, J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004), 245.
- [129] V. Tarasov and A. Varchenko, *Bases of Bethe Vectors and Difference Equations with Regular Singular Points*, Int. Math. Res. Notices **13** (1995), 637–669.
- [130] S. Tomonaga, *Remarks on Bloch’s Method of Sound Waves applied to Many-Fermion Problems*, Prog. Theor. Phys. **5** (1950), no. 4, 544–569.
- [131] C. Trippé, F. Göhmann, and A. Klümper, *Short-distance thermal correlations in the massive XXZ chain*, European Physical Journal B **73** (2010), 253–264.
- [132] A. Viroztek and F. Woynarovich, *Degenerated ground states and excited states of the S=1/2 anisotropic antiferromagnetic Heisenberg chain in the easy axis region*, J. Phys. A **17** (1984), no. 15, 3029.

- [133] A.A. Vladimirov, *Proof of the invariance of the Bethe-ansatz solutions under complex conjugation*, Theor. Math. Phys. **66** (1986), no. 1, 102–105.
- [134] R. A. Weston and A. H. Bougourzi, *The Dynamical Correlation Function of the XXZ Model*, arxiv:9407062 (1994), 20.
- [135] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, 4. ed., repr. ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [136] K. G. Wilson, *Die Renormierungsgruppe*, Spektrum der Wissenschaft **10** (1979), 66.
- [137] B. Wouters, J. De Nardis, M. Brockmann, D. Fioretto, M. Rigol, and J.-S. Caux, *Quenching the Anisotropic Heisenberg Chain: Exact Solution and Generalized Gibbs Ensemble Predictions*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014), no. 11, 117202.
- [138] T. T. Wu, *Theory of Toeplitz Determinants and the Spin Correlations of the Two-Dimensional Ising Model. I*, Phys. Rev. **149** (1966), 380–401.
- [139] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, and E. Barouch, *Spin-spin correlation functions for the two-dimensional ising model: Exact theory in the scaling region*, Phys. Rev. B **13** (1976), 316–374.
- [140] C. N. Yang and C. P. Yang, *One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-Spin Interactions. III. Applications*, Phys. Rev. **151** (1966), 258–264.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Priv.-Doz. Dr. Frank Göhmann, der diese Arbeit initiiert und über mehrere Jahre hervorragend betreut hat.

Ebenso möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Andreas Klümper für viele hilfreiche Anregungen und Diskussionen bedanken.

Ich danke ebenfalls den Herren Prof. Dr. Karol Kozłowski und Prof. Dr. Junji Suzuki für die fruchtbare Zusammenarbeit und Unterstützung.

Herrn Dr. Michael Brockmann danke ich für die Bereitstellung der Daten zu den kurzreichweitigen Korrelationsfunktionen.

Den Herren M.Sc. Yahya Öz und M.Sc. Raphael Kleinemühl danke ich für das sorgfältige Korrekturlesen dieser Arbeit.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank Irina, meinen Eltern sowie Familie und Freunden für ihre Unterstützung.