

AKTIVE ZWEIDIMENSIONALE LÄRMKONTROLLE UNTER
VERWENDUNG ADAPTIVER VERFAHREN UND REFLEKTIERTER
FELDGRÖSSEN

Vom Fachbereich Elektrotechnik, Informationstechnik und
Medientechnik der Bergischen Universität Wuppertal genehmigte
Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs

VON

Christian Kleinhenrich

GEBOREN AM 09. OKTOBER 1977 IN WIEDENBRÜCK

REFERENT: PROF. DR.-ING. DETLEF KRAHÉ
KORREFERENT: PROF. DR.-ING. BERND TIBKEN

Tag der mündlichen Prüfung: 19.12.2014

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20151021-144928-6

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3A468-20151021-144928-6>]

Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit zweidimensionalen Active Noise Control Systemen (ANC) in kreis- und linienförmigen Anordnungen. Ein derartiges System dämpft Schall durch destruktive Interferenz bis zu einer systembedingten Grenzfrequenz unter Verwendung von Führungssensoren und Gegenquellen (Sekundärquellen).

Das Grundprinzip basiert auf der Prädiktion (Extrapolation) eines gegebenen Schallfeldes (Primärfeld) anhand von Druck- und Schnellesignalen an den sogenannten Analysepunkten. Diese befinden sich in dem Raumbereich, in dem das Primärfeld gedämpft werden soll. Aus dieser Vorhersage und den invertierten Sekundärpfaden zwischen den Sekundärquellen und den Analysepunkten lassen sich die Systemfilter ableiten.

Es werden verschiedene Extrapolationsverfahren auf Basis des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals, der Rayleigh-Integrale, der Zirkularen Harmonischen Extrapolation und einer modifizierten Plane Wave Decomposition vorgestellt und auf die Verwendung im ANC-System hin untersucht. Für den linienförmigen Aufbau des Systems wird zudem gezeigt, dass der Einsatz kardioider Referenzempfänger anstelle von Druck- und Schnellempfängern ausreichend ist.

Ein ANC-System kann als ein schallweicher Impedanzabschluss angesehen werden. Diese Betrachtung führt zu neuen Ansätzen der Filtersynthese, die für den kreisförmigen und den linienförmigen Aufbau präsentiert werden.

Des Weiteren wurde der Implementierung adaptiver Optimierungsverfahren in das Multiple-Input-Multiple-Output-System (MIMO) nachgegangen. Die resultierenden Ansätze verwenden im Gegensatz zu den klassischen Verfahren teils veränderte Führungs- und Fehlergrößen. Die Reflexionen des ANC-Systems fließen hier ebenfalls in ein neuartiges MIMO-Adaptionsverfahren ein, um das System auf einen schallweichen Impedanzabschluss zu adaptieren. Unter Verwendung der Finiten Differenzen im Zeitbereich (FDTD) werden zeitbasierte, zweidimensionale Schallfeldsimulationen in Verbindung mit den vorgestellten adaptiven Verfahren durchgeführt. Auf diese Weise kann gezeigt werden, dass die Anwendung dieser adaptiven Verfahren zu einer Dämpfung des Primärfeldes durch das zweidimensionale ANC-System führt.

Abschließend werden die überarbeitete DSP-basierte Hardware des zweidimensionalen ANC-Systems und Messergebnisse unter Verwendung adaptiver Verfahren präsentiert.

Abstract

This thesis deals with two-dimensional active noise control (ANC) systems in linear and circular setups. 2D ANC systems use reference sensors and secondary sources to attenuate sound by means of destructive interference. Due to the characteristics of the system the ANC application is limited to an upper cut-off frequency.

The ANC algorithm bases upon the prediction (extrapolation) of the soundfield (primary field) inside of the area where it is to be attenuated. The system filters can be derived by combining this prediction with the inverted transfer functions between the secondary sources and points inside of the area. Usually, both acoustic pressure and velocity have to be measured to accomplish this task.

Within this thesis several prediction methods of a given sound field are evaluated. These methods are based upon the Kirchhoff-Helmholtz integral, the Rayleigh integrals, circular harmonics and a modified plane wave decomposition. For the linear system setup it is shown that the application of cardioid reference sensors instead of velocity and pressure sensors is sufficient.

An ANC system can be regarded as a sound soft scatterer. From this point of view it is possible to synthesize the system filters in a new manner. This method will be presented for the linear and the circular system setup.

Furthermore, the implementation of adaptive algorithms into the two-dimensional ANC system is investigated. In contrast to classical methods different reference and error signals are engaged. The scattered or reflected fields of the ANC system are also used to introduce a new Multiple Input Multiple Output (MIMO) adaptation method to make the system behave like a sound soft scatterer. Finite differences in the time-domain (FDTD) have been utilized to simulate sound propagation and interference in combination with the adaptive ANC system. In this way it is shown that the adaptive algorithms presented within this work can be employed to attenuate primary fields with the two-dimensional ANC system.

Finally, the modification of a DSP-based MIMO ANC system is presented. This system is used to measure the attenuation effects using adaptive algorithms.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Professor Dr.-Ing. Detlef Krahe, der diese Arbeit ermöglicht hat. Bei ihm bedanke ich mich auch für Korrekturen und hilfreiche Anmerkungen, das richtige Gespür in vielerlei Hinsicht, die vielen Freiheiten und die vielseitige Unterstützung, die mir gewährt wurden und die angenehme Arbeitsatmosphäre an seinem Lehrstuhl.

Ich möchte mich weiterhin bei Professor Dr.-Ing. Bernd Tibken für seine Unterstützung in wissenschaftlichen und nicht-wissenschaftlichen Fragestellungen bedanken, die wichtigen Einfluss auf diese Arbeit hatten.

Darüber hinaus bedanke ich mich bei Professor Dr.-Ing. Anton Kummert für die zahlreichen guten Anregungen und die freundliche Hilfe bei dieser Arbeit und bei Fragestellungen aller Art.

Bei Herrn Dr.-Ing. Joachim Streckert bedanke ich mich vielmals für Diskussionen und Hilfestellungen in mathematischen Fragestellungen.

Tobias Weigler danke ich für unzählige Dinge, viel Unterstützung über Jahre und Korrekturen an dieser Arbeit. Ebenso möchte ich mich bei Robert Dehnert für die freundliche Mithilfe und für Korrekturen bedanken.

Ohne nette und hilfsbereite Kollegen wäre eine derartige Arbeit nicht möglich. Daher möchte ich mich bei all meinen derzeitigen und ehemaligen Arbeitskollegen für ihren vielfältigen Beistand bedanken: Heinz Kahl, Veronika Selleschy, Mu He, Karsten Konrad, Sebastian Sichelschmidt, Daniya Belkheir, Heike Brandt, Sarah-Lena Debus, Thomas Lepich, Kolja Thomas, Martin Kühn, Edmund Matz, Dr. Adnan Abou-Nabout, Jörg Beckmann, Jacqueline Kunstmann, Pascal Kurre, Robert Swiatlak, Horst Fuhrmann, Sebastian Vulcan, Bärbel Jark, Felicitas Richert, Tim Schwerdtfeger, Carsten Stahlschmidt, Anna Heinemann, Alexander Gavriilidis, Thomas Sablik und Ursula Grabotin.

Diese Arbeit wurde durch viele Beiträge aus den Abschlussarbeiten bereichert, die ich während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter betreuen durfte. Großer Dank gilt daher Sönke Schäfer, Simon Lohmann, Tilo Töns, Jens Herwig, Johannes Sperendiano, Rebekka Jacobi, Francois Tappert, Jens Wäling und Ulja van Hengel für ihr Mitwirken.

Arndt Niepenberg, Andre Gleisner und Michael Bade von WaveScape Technologies danke ich für die unkomplizierte Bereitstellung von Hardware und Messequipment sowie für technische Diskussionen und Hilfestellungen.

Katharina Göllner und meinen Kindern Helene und Ruben danke ich für ihre Geduld mit mir und die vielen schönen gemeinsamen Momente.

Meiner Familie danke ich für die jahrelange Unterstützung, ohne die ich das alles nie geschafft hätte.

Allen Freunden, Bekannten und Mitmusikern der letzten Jahren sei ebenso gedankt für die gute Zeit.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	A
Abstract	C
Danksagung	E
Inhaltsverzeichnis	V
1. Einleitung	1
1.1. Active Noise Control	1
1.1.1. Wellenfeldsynthese und Active Noise Control	2
1.1.2. Schallweicher und schallharter Impedanzabschluss	3
1.2. Zielformulierung	6
1.3. Aufbau der Arbeit	7
2. Wellenfeldtheorie	9
2.1. Die homogene Wellengleichung	9
2.2. Elementare Lösungen der homogenen Wellengleichung	10
2.2.1. Ebene Wellen	11
2.2.2. Lösungen der homogenen Wellengleichung in Zylinder- und Polarkoordinaten	12
2.2.2.1. Zylindrische Harmonische Zerlegung	14
2.2.2.2. Zirkulare Harmonische Zerlegung in Polarkoordinaten	16
2.3. Die inhomogene Wellengleichung	17
2.4. Elementare Lösungen der inhomogenen Wellengleichung	18
2.4.1. Monopolquellen	18
2.4.2. Dipolquellen	19
2.4.3. Linienquellen	19
2.5. Lösungen der Wellengleichung in begrenzten Gebieten	20
2.5.1. Lösungsmethode mit Green-Funktionen	20
2.5.1.1. Dirichlet-Randbedingung	22
2.5.1.2. Neumann-Randbedingungen	22
2.5.1.3. Robin-Randbedingungen	22
2.5.2. Wandimpedanz und Reflexionsfaktor	23

2.5.3.	Das allgemeine Kirchhoff-Integral	24
2.5.3.1.	Dreidimensionale Lösung des allgemeinen Kirchhoff-Integrals	24
2.5.3.2.	Zweidimensionale Lösung des allgemeinen Kirchhoff-Integrals	25
2.5.4.	Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral	26
2.5.4.1.	Dreidimensionale Lösung des Kirchhoff-Helmholtz Integrals	26
2.5.4.2.	Zweidimensionale Lösung des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals	26
2.5.4.3.	Bestimmung der Schnelle im Aufpunkt R	26
2.5.5.	Die Rayleigh-Integrale	27
2.5.5.1.	Das Rayleigh-I-Integral	28
2.5.5.2.	Das Rayleigh-II-Integral	29
2.6.	Simple Source Formulation	30
3.	Wellenfeldanalyse	33
3.1.	Zeitbezogene Fouriertransformation	33
3.2.	Räumliche Fouriertransformation	34
3.2.1.	Räumliche Fouriertransformation in kartesischen Koordinaten	34
3.2.1.1.	Eindimensionale Räumliche Fouriertransformation	34
3.2.1.2.	Zwei- und Dreidimensionale Räumliche Fouriertransformation in kartesischen Koordinaten	36
3.2.2.	Diskrete Räumliche Fouriertransformation in kartesischen Koordinaten	38
3.2.3.	Räumliche Fouriertransformation in Zylinder- und Polarkoordinaten	40
3.2.4.	Fourier-Reihendarstellung in Zylinder- und Polarkoordinaten	41
3.3.	Plane Wave Decomposition	42
3.3.1.	Kontinuierliche Plane Wave Decomposition in kartesischen Koordinaten	42
3.3.2.	Diskrete Plane Wave Decomposition in kartesischen Koordinaten	44
3.3.3.	Kontinuierliche Plane Wave Decomposition in Zylinder- und Polar-Koordinaten	46
3.3.4.	Plane Wave Decomposition in Polar-Koordinaten anhand des Kirchhoff-Helmholtz Integrals	47
3.3.5.	Expansions-Koeffizienten für linienförmige Mikrofon-Arrays	49
3.3.6.	Expansions-Koeffizienten für ein kreisförmiges Mikrofon-Array	51
3.4.	Zirkulare Harmonische Expansion	51
4.	Wellenfeldextrapolation: Neue Ansätze der Primärfeld-Prädiktion	55
4.1.	Grundlagen der Untersuchungen	56
4.1.1.	Diskretisierung der Kirchhoff-Helmholtz- und Rayleigh-Integrale	56
4.1.2.	Wellenausbreitung und Quellenmodelle in den Simulationen	57

4.2.	Extrapolation mit kreisförmigen Mikrofon-Arrays	59
4.2.1.	Extrapolation anhand des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals mit kreisförmigen Mikrofon-Arrays	59
4.2.1.1.	Verhalten bei einer äußeren dreidimensionalen Monopolquelle	61
4.2.2.	Zirkulare Harmonische Extrapolation mit kreisförmigen Mikrofon-Arrays	63
4.2.3.	Zirkulare Harmonische Extrapolation unter Berücksichtigung einer kreisförmigen Randbedingung	65
4.2.3.1.	Vergleich mit der analytischen Lösung	67
4.3.	Extrapolation mit linienförmigen Mikrofon-Arrays	69
4.3.1.	Extrapolation anhand des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals mit linienförmigen Mikrofon-Arrays	69
4.3.2.	Extrapolation anhand des Rayleigh-II-Integrals mit linienförmigen Mikrofon-Arrays	71
4.3.3.	Plane Wave Extrapolation mit linienförmigen Mikrofon-Arrays	72
4.3.4.	Extrapolation unter Berücksichtigung einer schallweichen Randbedingung mit linienförmigen Mikrofon-Arrays	75
4.3.5.	Tapering bei der Extrapolation mit linienförmigen Mikrofon-Arrays	79
5.	Gegenfeldsynthese im zweidimensionalen Active Noise Control	83
5.1.	Methode der Analysepunkte	83
5.1.1.	Feedforward Active Noise Control	83
5.1.2.	Eine alternative Herleitung der Methode der Analysepunkte anhand des allgemeinen Kirchhoff-Integrals	84
5.1.2.1.	Verallgemeinerung der Methode der Analysepunkte	85
5.1.2.2.	Diskrete Synthesegleichung	86
5.1.3.	Untersuchungen für den kreisförmigen Aufbau	87
5.1.3.1.	Extrapolation anhand des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals	88
5.1.3.2.	Extrapolation mit Zirkularen Harmonischen Extrapolationskoeffizienten	91
5.1.4.	Untersuchungen für den linienförmigen Aufbau	93
5.1.4.1.	Extrapolation mit dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral	94
5.1.4.2.	Extrapolation mit dem Rayleigh-II-Integral und Kardioid-Mikrofonen	96
5.1.4.3.	Extrapolation mit der modifizierten Plane Wave Decomposition	97
5.2.	Die Reflexionsäquivalenz: Eine neue Methode der Gegenfeldsynthese	100
5.2.1.	Kreisaufbau	100
5.2.2.	Linienaufbau	102
5.2.2.1.	Verwendung von Druck- und Schnellempfängern	103
5.2.2.2.	Verwendung von Kardioid-Empfängern	104
5.3.	Hybridmethode	106

5.4. Zusammenfassung	108
6. Implementierung adaptiver Optimierungsverfahren	109
6.1. Grundlagen	109
6.1.1. Das adaptive FIR-Filter	109
6.1.2. Das Wiener-Filter der Fehlerfunktion	110
6.1.3. Der LMS-Algorithmus	112
6.1.3.1. Konvergenzbetrachtungen	113
6.1.3.2. Der normierte LMS-Algorithmus	113
6.2. Feedforward Active Noise Control stochastischer Signale	114
6.2.1. Der FXLMS-Algorithmus	115
6.2.1.1. Einfluss der Feedback-Pfade im ANC-System	116
6.3. Reflektierte Feldgrößen als Basis einer neuartigen Fehlergröße: Reflexions-Prädiktion	117
6.4. Erweiterung zum adaptiven MIMO-System	119
6.4.1. Das MIMO Wiener Filter	119
6.4.2. Anpassung des MIMO FXLMS auf das zweidimensionale ANC- System	121
6.4.2.1. MIMO FXLMS bei Verwendung kardioider Referenz- empfänger	123
6.4.2.2. MIMO FXLMS unter Verwendung von Druck- und Schnellempfängern als Referenzmikrofone	126
6.4.2.3. MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenz- Empfänger und der Reflexions-Prädiktion	130
6.4.2.4. MIMO FXLMS unter Verwendung von Druck- und Schnelle-Referenz-Empfängern und der Reflexionsäqui- valenz	135
6.5. Die zeitbasierte Simulationen adaptiver Verfahren unter Verwendung der Finiten Differenzen im Zeitbereich zur akustischen Feldbeschreibung . .	138
6.5.1. Grundlagen	138
6.5.2. Randbedingungen	139
6.5.3. Akustische Quellen und Senken in der FDTD-Methode	140
6.5.4. Simulationsablauf	141
6.6. Zusammenfassung	141
7. Überarbeitung der Systemimplementierung und Messergebnisse	143
7.1. Aufbau der Hardware	144
7.1.1. Veränderte Mikrofon-Konfiguration	145
7.1.2. Austausch der Wandler und Preamps	147
7.2. Aufbau des zweidimensionalen ANC-Systems als aktive Schall-Barriere .	149
7.3. Anpassung der Software	151
7.3.1. Betriebsmodi	152
7.3.1.1. Audio Interface-Modus	152
7.3.1.2. Online ANC-Modus	152

7.3.1.3. Adaptiver Online ANC-Modus	153
7.3.2. Abschätzung der benötigten Rechenoperationen im Online-Betrieb	153
7.3.3. Abschätzung der benötigten Rechenoperationen im Online MI- MO FXLMS-Betrieb	155
7.3.4. Anmerkungen zur Festkomma-Arithmetik	156
7.4. Messungen am realen ANC-System	157
7.4.1. Rahmenbedingungen	157
7.4.1.1. Die Unterscheidung von Offline-Messung und Online- Messung	157
7.4.1.2. Prädizierte Offline-Dämpfung	157
7.4.1.3. System-Übertragungsfunktionen	158
7.4.1.4. Verwendete Primärsignale	158
7.4.2. Auswahl der zu untersuchenden ANC-Verfahren	159
7.4.3. MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und Fehlersensoren	159
7.4.3.1. Messungen im Offline-Betrieb	159
7.4.3.2. Messungen im Online-Betrieb	162
7.4.4. MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und der Reflexions-Prädiktion	166
7.4.5. SISO FXLMS unter Verwendung eines kardioiden Referenzemp- fängers und eines Fehlersensors	168
7.4.6. SISO FXLMS unter Verwendung eines kardioiden Referenzemp- fängers und der Reflexions-Prädiktion	173
7.5. Zusammenfassung und weiterführende Betrachtungen	175
8. Zusammenfassung und Ausblick	179
8.1. Zusammenfassung	179
8.2. Ausblick	180
A. Glossar	181
Akronyme	181
Notationen	182
Liste der verwendeten Symbole	183
B. Mathematische Ergänzungen	187
B.1. Grenzwertbildung des Zirkularen Harmonischen Reflexionsfaktors	187
Literaturverzeichnis	191
Abbildungsverzeichnis	200
Tabellenverzeichnis	201
Eidesstattliche Erklärung	203

1. Einleitung

Lärm ist eines der größten Umweltprobleme der heutigen Zeit. Durch zunehmende Industrialisierung, Automatisierung und moderne Fortbewegungsmethoden hat sich einerseits die Lebensqualität in vielen Bereichen des modernen Lebens stark verbessert, andererseits ging diese Entwicklung mit einer stetigen Erhöhung der Geräuschbelastung des Menschen einher. Die durch Lärm verursachten gesundheitlichen Risiken sind bekannt und viele Länder weltweit erließen in den vergangenen Jahrzehnten Normen zur Begrenzung des zunehmenden Lärms. Nicht zwangsläufig, aber oft stehen industrieller Fortschritt und Gesundheitsschutz auch beim Thema Lärm im Widerspruch.

Die Gegenmaßnahmen, um Lärm zu mindern, lassen sich grob in zwei Kategorien unterteilen: passive und aktive Maßnahmen. Der passive Teil erstreckt sich von Schallschutzmauern über schallisolierende Fenster bis hin zu porösen Absorbern oder begrünten Wallanlagen, um Straßenlärm von Wohngebieten fern zu halten. Aktive Maßnahmen greifen anhand elektrischer Einrichtungen entweder direkt an der Quelle ein und vermindern deren Schallabstrahlung, oder verringern Störgeräusche am Empfangsort, wenn auf die Quelle kein Einfluss genommen werden kann. Passive Verfahren sind über weite Frequenzbereiche sehr effektiv. Für die Verminderung tiefer Frequenzen hingegen, werden sie zunehmend aufwendig und nehmen große Raumbereiche ein, um noch Wirkung zu zeigen, was ebenfalls stark erhöhte Kosten bedeutet. Diese Eigenschaften führten in den letzten Jahren zu einem besonderen Phänomen: Durch die immer bessere passive Dämpfung im mittleren und hohen Frequenzbereich, fehlt häufig die Maskierung des tieffrequenten Lärms und dieser tritt stärker in das Bewusstsein der Menschen. Aktive Maßnahmen eignen sich insbesondere für die Verringerung tieffrequenten Lärms und stellen insofern gegenüber passiven Mitteln eine ergänzende Lösung zur Lärmbekämpfung dar.

1.1. Active Noise Control

Das zugrunde liegende Konzept von Active Noise Control (ANC) ist die destruktive Interferenz von Schallfeldern. Sie wurde erstmalig 1933 von Paul Lueg in einem Patent beschrieben [Lue37]. Zwar war das Interferenzphänomen für Schallwellen bereits seit dem späten 19. Jahrhundert durch Lord Rayleigh und Helmholtz bekannt, doch unternahm Lueg als erster den Versuch, Geräusche durch Gegenschall auszulöschen. Einem gegebenen Schallfeld (Primärsignal) muss demnach ein Sekundärfeld überlagert werden, das dem Primärfeld möglichst genau entspricht und um 180° in der Phase gedreht ist. Obwohl das Grundprinzip sehr einfach ist, waren der technischen Umsetzung

der Schallauslöschung durch Antischall über Jahrzehnte deutliche Grenzen gesetzt. Einer der ersten bekannten Artikel zu ANC wurde 1953 veröffentlicht und beschrieb den *electronic sound absorber*, der mit einem Mikrofon, einem Verstärker und einem Lautsprecher periodische Signale am Ort des Mikrofons zu dämpfen vermochte [Ols53]. Die mittlerweile sehr etablierten ANC-Kopfhörer wurden erstmalig 1955 vorgestellt [Sim55], doch brachten erst die 1980er und 1990er Jahre große Fortschritte für die Entwicklung von Antischallverfahren und -systemen, dank der rasanten Entwicklung günstiger digitaler Signalprozessoren (Digital Signal Processor (DSP)).

Es werden in der Regel drei Arten von ANC-Systemen unterschieden: Feedback-, Feedforward- und Hybridsysteme. Der in [Ols53] beschriebene elektronische Absorber ist ein Feedbacksystem, das keine Information über das Primärsignal *a priori* erhält und rein auf Basis der Fehlergröße arbeitet. Ein derartiges System ist geeignet, um periodische Signale wie das Brummen eines Transformators zu dämpfen. Feedforward-ANC greift auf mindestens eine Führungs- und mindestens eine Fehlergröße zurück, anhand derer das Fehlersignal am Fehlersensor minimiert wird und kann daher auch die Verringerung breitbandiger Signale erreichen. Hybridsysteme stellen eine Kombination der beiden erstgenannten Verfahren dar [Han01].

Neben der Verfügbarkeit kostengünstiger DSP-Systeme, brachte die Verwendung adaptiver Digitalfilter weiteren Fortschritt in der Entwicklung von ANC [Bur81]. Dies führte schließlich zur Formulierung des Filtered x Least Mean Square (FXLMS)-Algorithmus, der in Kapitel 6 dieser Arbeit beschrieben ist [Mor80; WS85]. Der FXLMS wird häufig in Umgebungen wie Lüftungsschächten eingesetzt, in denen die Wellenausbreitung als eindimensional klassifizierbar ist. Der Raum, an dem die destruktive Überlagerung von Primär- und Sekundärfeld stattfindet, ist dann klein gegenüber der Wellenlänge und vereinfacht die Anwendung von aktiver Lärmkontrolle deutlich, wie auch im Fall der ANC-Kopfhörer.

1.1.1. Wellenfeldsynthese und Active Noise Control

Ist die Lärminderung in einem größeren räumlichen Bereich erwünscht, bedarf es der möglichst exakten Reproduktion des Primärfeldes in diesem Bereich. Die Überlagerung des Primärfeldes mit dem phasengedrehten Sekundärfeld erzeugt dann eine sogenannte *Zone der Ruhe*. Das Prinzip der Reproduktion gegebener Schallfelder ist als *Wellenfeldsynthese* (Wave Field Synthesis (WFS)) bekannt geworden und wurde 1988 von Berkhout eingeführt [Ber88]. Das Verfahren beruht auf Anwendung des Fresnel-Huygensschen Prinzips: Jeder Punkt einer sich im Raum ausbreitenden Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle angesehen werden. Diese setzt sich aus den Feldern einer kugelförmigen Quelle und eines Dipolstrahlers zusammen. Somit ist es möglich, das Feld beliebiger Primärquellen durch eine geeignete Anordnung von Sekundärquellen zu reproduzieren. Für eine möglichst exakte Synthese bis hin zu hohen Frequenzen ist allerdings eine große Anzahl an Quellen in geringem Abstand zueinander notwendig.

Nach Einführung der WFS wurden viele Arbeiten auf diesem Gebiet veröffentlicht, von denen hier nur einige genannt werden sollen. In [Vog93] und in [Sta97] lag zum Beispiel der Fokus auf der Unterstützung der Wiedergabe bei Bühnendarbietung durch WFS, die im Gegensatz zu herkömmlichen Beschallungsanlagen die korrekte Ortung der Quellen ermöglicht. Später fiel das Augenmerk vornehmlich auf die Reproduktion aufgenommener Schallszenarien oder der Schallfeld-Synthese für virtuelle Umgebungen [Ver97; Son00; Hul04]. In [Spo05] richtete sich die Aufmerksamkeit auf die aktive Verringerung negativer Einflüsse des Wiedergaberaums auf die naturgetreue Reproduktion. Es folgte die Anwendung weiterer Konzepte wie des Einschichtenpotentials und der Versuch einer Generalisierung der der Wellenfeldsynthese zugrundeliegenden Theorie [Ahr10; Faz10]. Eine für diese Arbeit wichtige Veröffentlichung zeigt die Möglichkeit, die Sekundärquellverteilung als schallweichen Reflektor zu betrachten und aus dieser Betrachtung die Sekundärsignale abzuleiten [FN13].

WFS basierte in erster Linie auf der Anwendung des Kirchhoff-Helmholtz-Integral (KHI). In [Tri03] wurde die Synthese von Wellenfeldern mit Hilfe des KHI zur Auslöschung eines Primärfeldes durch einen Lautsprecherkreis oder andere geschlossenen Quellenanordnungen vorgestellt. Diese ANC-Anwendung ist daher sehr eng mit der WFS verknüpft. Ein entscheidender Unterschied ist, dass für die Synthese eines Gegenfeldes auf Basis von Mikrofonsignalen immer auch eine ausreichend schnelle Signalverarbeitung notwendig ist. Darüber hinaus müssen die synthetisierten Wellenfelder sehr exakt in Amplitude und Phase sein, um eine Dämpfung des Primärfeldes bewirken zu können. Für einen „guten“ Höreindruck in einem WFS-System sind diese Bedingungen nicht zwangsläufig zu erfüllen.

1.1.2. Schallweicher und schallharter Impedanzabschluss

Greift man erneut den Lüftungskanal als Beispiel für die Anwendung der aktiven Lärmkontrolle auf, so kann eine andere Sichtweise des physikalischen Vorgangs herangezogen werden: Breitet sich ein ungewolltes Primärfeld in dem Kanal aus und wird am Ort der Sekundärquelle durch ein exakt entgegengesetztes Schalldruckfeld überlagert, so verhindert die Gegenquelle, dass sich der Schalldruck an diesem Ort aufbauen kann. Die Moleküle des Mediums schwingen zwar weiterhin, aber ohne dass das Medium komprimiert wird, da die Lautsprechermembran einen Unterdruck erzeugt, sobald Druck aufgebaut werden soll und umgekehrt. Demnach wird an diesem Ort der Schalldruck zu Null und die momentane Geschwindigkeit der Teilchen (Schallschnelle) verdoppelt sich. Dieses Phänomen entspricht einem akustischen Kurzschluss und wird *schallweicher Impedanzabschluss* genannt. Im Gegensatz dazu steht ein *schallharter Impedanzabschluss*, bei dem die Schallschnelle zu Null wird und der Schalldruck sich verdoppelt. Dies würde man erreichen, indem das Rohr durch ein möglichst hartes Material wie Beton verschlossen würde, wodurch die eigentliche Funktion des Lüftungskanals sicherlich abhanden käme. Ein weiteres Merkmal, an dem der schallweiche und der schallharte Impedanzabschluss unterschieden werden können, ist die Art der Reflexionen, die sie erzeugen. Wird die Schnelle am Abschluss zu Null, entsteht eine Reflexion der Druck-

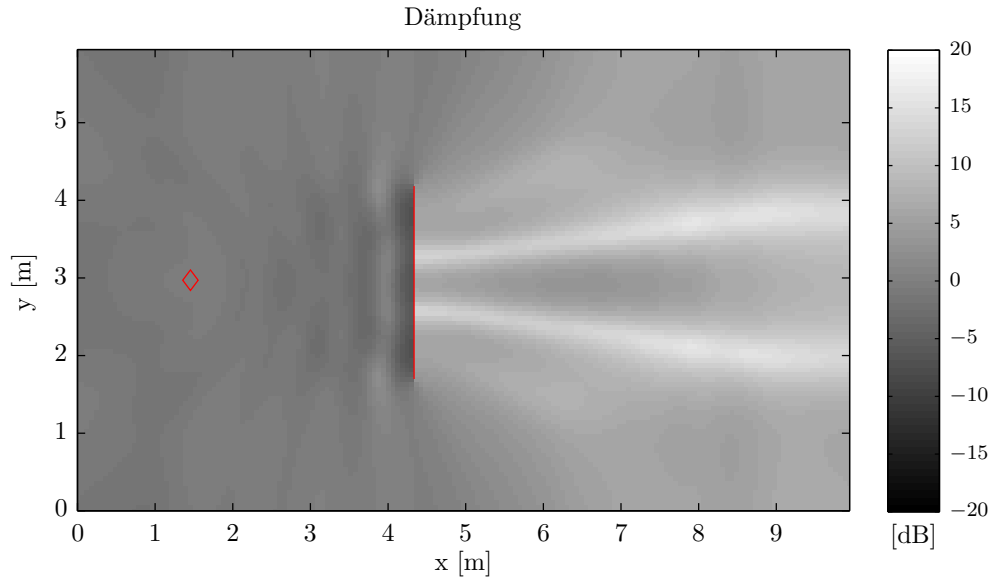


Abbildung 1.1.: Dämpfungsfeld einer schallharten Barriere (rote Linie) wie einer Schallschutz-Mauer. Die Primärquelle (rote Raute) erzeugt ein Rauschsignal mit Frequenzanteilen zwischen 50 Hz und 350 Hz.

welle mit dem Faktor 1. Liegt hingegen ein schallweicher Abschluss vor, läuft eine Welle zurück, die mit dem Faktor -1 gewichtet wurde. Die Unterscheidung der Reflexionen wird im Rahmen dieser Arbeit verwendet, um einen schallweichen Impedanzabschluss anhand der Erfassung der zurück laufenden Feldgrößen kontrolliert herzustellen.

Übertragen auf eine zwei- oder dreidimensionale Anwendung ergibt sich der Unterschied zwischen einer schallharten und einer schallweichen Barriere. Stellvertretend für die schallharte Barriere stünde eine massive Betonmauer, die als Schallschutzmauer dienen soll. In Abbildung 1.1 ist das Dämpfungsfeld einer schallharten Barriere der Länge 2,5 m aus einer Computer-Simulation dargestellt. Links im Bild befindet sich eine Quelle (rote Raute), die ein Rauschsignal mit Frequenzanteilen zwischen 50 Hz und 350 Hz erzeugt und deren Feld zur rechten Seite hin möglichst gut durch die als vertikale, rote Linie dargestellte Mauer abgeschirmt werden soll. Helle Bereiche stellen in der Abbildung Orte hoher Dämpfung dar. Das Dämpfungsmuster hinter der Mauer ergibt sich aufgrund von Beugungseffekten, da das Primärfeld tiefe Frequenzanteile besitzt, deren Wellenlängen in der Größenordnung der Barriere liegen. Das Feld direkt vor der Schallschutzmauer zeigt deutlich, dass dort der Schalldruck ansteigt, da es sich um eine schallharte Begrenzung handelt.

Das Dämpfungsfeld einer 2,5 m langen schallweichen Barriere ist für das gleiche Primärsignal in Abbildung 1.2 zu sehen. Es fällt unmittelbar auf, dass die Dämpfung rechts der

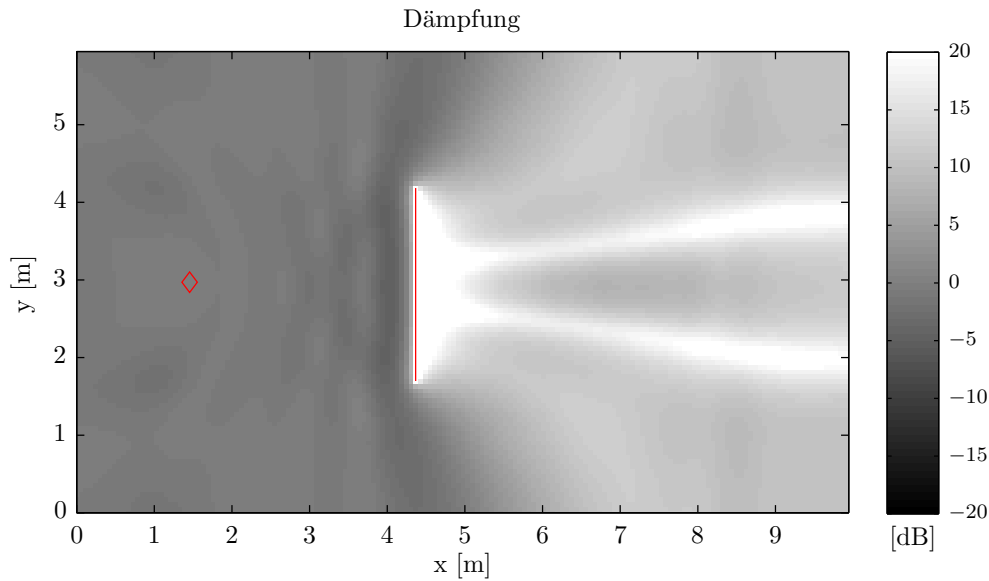


Abbildung 1.2.: Dämpfungsfeld einer schallweichen Barriere (rote Linie). Die Primärquelle (rote Raute) erzeugt ein Rauschsignal zwischen 50 Hz und 350 Hz. Die schallweiche Barriere erzeugt einen ausgeprägten Schallschatten.

Mauer hinsichtlich der Wirkung und der räumlichen Verteilung wesentlich ausgeprägter ist. Auf Seite der Primärquelle, unmittelbar vor der Barriere, ist der Schalldruck gleich Null und somit auch an den Enden der Barriere. Dadurch wird im Gegensatz zur schallharten Barriere der Effekt der Beugung gemindert. Ein derartiges, schallweiches Hindernis kann aus einer linienförmigen Anordnung von Lautsprechern hergestellt werden. Der Abstand der Lautsprecher untereinander richtet sich nach der maximalen Frequenz, für die das System anwendbar sein soll. In den vergangenen Jahren wurden auch Hybridlösungen vorgestellt, die schallweiche Aufsätze für Schallschutzmauern einsetzen, um ausgeprägtere Schallschatten zu erzeugen [Mös95; OUONT00; Koh04]. Diese werden in Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet.

Aus den hier vorgestellten Beobachtungen kann geschlossen werden, dass aktive Verfahren zur Anwendung als Schallschutzbarriere einen deutlichen Vorteil in der räumlichen Wirkung und der absoluten Dämpfungsleistung gegenüber passiven Maßnahmen erzielen können. Hinzu kommt, dass eine aktive Barriere aus Lautsprechern kein Sichthindernis darstellen muss, wenn der zu bedämpfende Frequenzbereich genügend Abstand zwischen den Lautsprechern zulässt, was bei tiefen Frequenzen in der Regel erfüllt ist.

1.2. Zielformulierung

Ein zweidimensionales ANC-System mit geschlossener Sekundärquellenanordnung auf Basis des KHI wurde ausführlich in [Tri03] diskutiert. Für den Einsatz in der Praxis sind geschlossene Anordnungen wie der ANC-Kreis oder der Aufbau als Quadrat nicht immer geeignet. In vielen Situationen ist daher der Einsatz einer aktiven Schallbarriere sinnvoller, ähnlich der Schallschutzmauer mit schallweicher Oberflächenimpedanz aus Abbildung 1.2. Vorteile der schallweichen Variante gegenüber einer schallharten Mauer sind offensichtlich: Eine Lautsprecherbarriere kann flexibel auf- und abgebaut werden, stellt im Regelfall kein Sichthindernis dar und ist passierbar, Beugungseffekte sind weniger ausgeprägt und Dämpfung bei tiefen Frequenzen ist möglich. Im Rahmen dieser Arbeit wird das in [Tri03] vorgestellte System daher auf den linienförmigen Aufbau erweitert.

Wie bereits erwähnt wurde, basiert das ANC-System aus [Tri03] auf der Anwendung des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals. Das Integral wird eingesetzt, um den Verlauf des Primärfeldes innerhalb der Zone der Ruhe an den sogenannten Analysepunkten vorherzubestimmen. Anschließend werden aus den prädizierten Signalen die Lautsprecher-signale für das Gegenfeld hergeleitet. Da insbesondere im Umfeld der Wellenfeldsynthese und der Ambisonics in den vergangenen Jahren weitere Methoden eingeführt wurden, um akustische Felder messtechnisch zu erfassen und zu extrapolieren, werden einige diese Methoden auf die Anwendbarkeit im zweidimensionalen ANC-System untersucht.

Das ursprüngliche ANC-System aus [Tri03] arbeitete mit einer reinen Prädiktion des Primärfeldes und führte keinerlei Fehlergröße zurück. Bei sich verändernden Parametern konnte dieses System daher nicht auf die Veränderung reagieren. Die Implementierung adaptiver Verfahren zur Nachführung und Optimierung des Systems ist daher ein wichtiger Aspekt, der im weiteren Verlauf besprochen wird.

Wie bereits gezeigt wurde, muss ein ANC-System einen schallweichen Abschluss herstellen, um den Schalldruck an der Gegenquelle zu Null werden zu lassen. Daraus ergeben sich bestimmte Reflexionsmuster, die messtechnisch erfasst werden können. Auch kann diese Anschauung zu einer neuen Formulierung der Wellenfeldsynthese verwendet werden [FN13]. Die Betrachtung eines ANC-Systems als schallweichen Reflektor stellt daher einen der Kernpunkte dieser Arbeit dar. Aus ihr ergeben sich zwei Verfahren zur Anwendung im zweidimensionalen ANC-System, die im weiteren Verlauf vorgestellt werden: Die Reflexionsäquivalenz und die Reflexionsprädiktion. Die Reflexionsäquivalenz ist, im Gegensatz zu dem in [Tri03] vorgestellten Verfahren der Analysepunkte, eine neue Möglichkeit, die Signale der Gegenquellen zu bestimmen. Die Reflexionsprädiktion ist ein neues Verfahren, in einem adaptiven ANC-System eine Fehlergröße aus der Messung reflektierter Feldanteile zu gewinnen.

1.3. Aufbau der Arbeit

Die Arbeit teilt sich in sieben Kapitel auf. In Kapitel 2 werden die Grundlagen der akustischen Wellenausbreitung und Lösungen der Wellengleichung vorgestellt.

Kapitel 3 behandelt mathematischen Methoden zur Beschreibung von Wellenfeldern im Raum-Frequenzbereich und stellt die Plane Wave Decomposition (PWD) und die Zirkulare Harmonische Extrapolation (ZHE) vor.

Im darauffolgenden Kapitel 4 werden neben dem KHI weitere Verfahren zur Prädiktion des Primärfeldes für die Methode der Analysepunkte aus [Tri03] dargestellt. Es wird dabei die Extrapolation mit linienförmigen und kreisförmigen Mikrofon-Arrays unterschieden. In diesem Abschnitt erfolgt auch die Betrachtung der Primärfeldextrapolation unter Berücksichtigung schallweicher Impedanzabschlüsse.

Kapitel 5 beschreibt auf Basis der vorangegangenen Abschnitte die Möglichkeiten der Wellenfeldsynthese zur Auslöschung von messtechnisch erfassten Primärfeldern durch das kreisförmige und das linienförmige ANC-System.

Das Kapitel 6 führt die Anwendung adaptiver Verfahren im zweidimensionalen ANC-System ein und untersucht diese anhand von Zeitbereichs-Simulationen. Dieser Abschnitt enthält ebenfalls eine kurze Einführung in die Methode der Finiten Differenzen im Zeitbereich (Finite Differences in the Time Domain (FDTD)), die für die Simulationen eingesetzt wurden und mit deren Hilfe auch Abbildung 1.1 und 1.2 erstellt wurden.

In Kapitel 7 erfolgt die Beschreibung der Hardware des zweidimensionalen ANC-Systems und deren Modifizierung. Dort werden auch erste Messergebnisse vorgestellt, anhand derer ein Teil der in dieser Arbeit vorgestellten Ansätze besprochen wird.

Kapitel 8 fasst diese Arbeit zusammen und zeigt Möglichkeiten und Fragestellungen für die weitere Erforschung des zweidimensionalen Systems zur Lärmbekämpfung auf.

2. Wellenfeldtheorie

Das folgende Kapitel führt die Grundlagen der Wellenausbreitung in isotropen und homogenen Medien ein. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden diese Grundlagen verwendet, um die Wellenfeldanalyse, -extrapolation und schließlich die Gegenfeldsynthese im ANC herzuleiten. Darüber hinaus beruhen auch die neuen Ansätze der adaptiven Optimierungsverfahren auf Annahmen aus diesem Kapitel. Grundsätzlich wird für das Medium, in dem sich die Schallfelder ausbreiten, die vereinfachende Annahme eines idealen Gases getroffen. Alle Ausgleichsvorgänge sind demnach adiabatisch. Auch sind die durch Schallwellen verursachten Druckschwankungen des Mediums klein gegenüber dem statischen Druck und wirbelfrei. Bei der Beschreibung der Inhalte dieses Kapitels stellten sich die Arbeiten von [Spo05], [Hul04], [Ver97] und [Sta97] als ergiebige Quellen heraus. Ebenso lieferte [Sch13] einen wichtigen Beitrag.

2.1. Die homogene Wellengleichung

In diesem Abschnitt werden die beiden fundamentalen Grundgleichungen der Akustik eingeführt, auf deren Basis die homogene Wellengleichung und die homogene Helmholtz-Gleichung hergeleitet werden.

Die erste Grundgleichung ist die Eulersche Bewegungsgleichung [ZZ93]

$$\nabla p(\mathbf{r}, t) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

Diese gibt den Zusammenhang zwischen der ortsbezogenen Änderung des skalaren Schalldrucks p und der zeitlichen Ableitung der vektoriellen Schallschnelle \mathbf{v} am Ort \mathbf{r} wieder. In Gleichung (2.1) beschreibt t die Zeit und ρ die Dichte des Mediums, in dem die Wellenausbreitung stattfindet. Die Eulersche Bewegungsgleichung leitet sich aus dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik $F = m \frac{dv}{dt}$ ab. Die zweite Grundgleichung stellt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, t) = -c^2 \rho \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

dar. Sie besagt, dass die Massenänderung in einem Volumenelement dem Fluss durch die Begrenzungsflächen des Volumens entspricht. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Schallwelle in einem Medium ist durch die Größe c in (2.2) gegeben.

Die Kombination dieser grundlegenden Beziehungen ergibt die homogene Wellengleichung für den Druck:

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.3)$$

Gleichung (2.3) beschreibt die Wellenausbreitung in einem quellfreien Medium.

Mit Hilfe der Fouriertransformation

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.4)$$

und der inversen Fouriertransformation

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega t} dt \quad (2.5)$$

können die akustischen Grundgrößen p und \mathbf{v} von einer zeitabhängigen in eine frequenzabhängige Darstellung überführt werden oder umgekehrt. Die Anwendung der Fouriertransformation auf die Eulersche Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$\nabla P(\mathbf{r}, \omega) = -j\rho\omega\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.6)$$

$$j\omega P(\mathbf{r}, \omega) = -c^2\rho\nabla\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.7)$$

Die Anwendung der Fouriertransformation auf die homogene Wellengleichung liefert die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\Delta P(\mathbf{r}, \omega) + k^2 P(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (2.8)$$

Darin ist k die Wellenzahl und ω die Kreisfrequenz, deren Zusammenhang mit der Schallgeschwindigkeit c , der Frequenz f und der Wellenlänge λ wie folgt ist:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.9)$$

2.2. Elementare Lösungen der homogenen Wellengleichung

Der folgende Abschnitt stellt die elementaren Lösungen der homogenen Wellengleichung in kartesischen Koordinaten, sowie in Zylinder- und Polarkoordinaten dar. Letztere sind insbesondere für Betrachtungen innerhalb des kreisförmigen ANC-Systems wichtig. Die Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

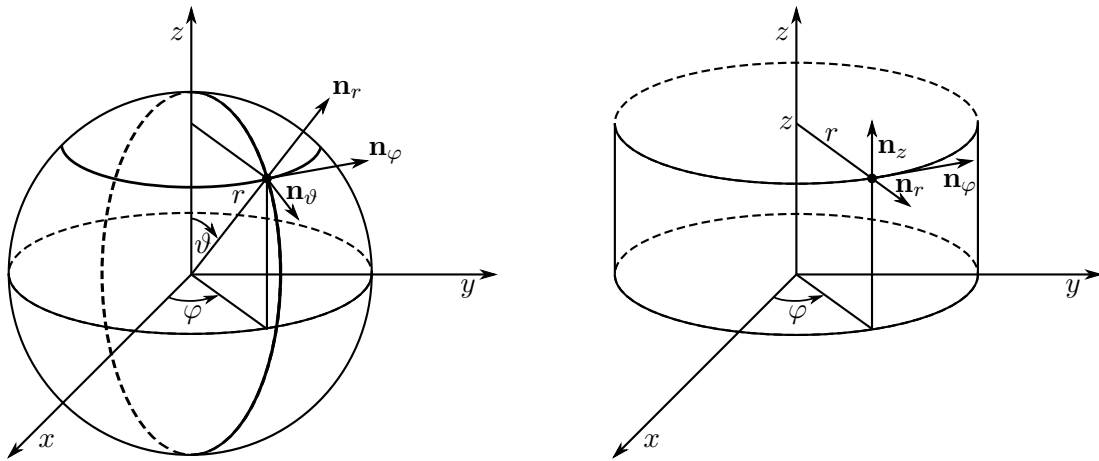


Abbildung 2.1.: Koordinatensysteme. Links: Kugelkoordinaten. Rechts: Zylinderkoordinaten

2.2.1. Ebene Wellen

Die ebene Welle ist eine elementare Lösung der homogenen Wellengleichung. Die Feldgrößen p und \mathbf{v} sind neben der Zeit nur von der Ortskoordinate in der Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} abhängig:

$$p(\mathbf{r}, t) = \hat{p}\left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}\right), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho c} p(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}. \quad (2.11)$$

Der Begriff der ebenen Welle leitet sich aus der Tatsache ab, dass die Punkte gleichen Drucks oder gleicher Schnelle in Ebenen liegen, auf denen der Ausbreitungsvektor \mathbf{n} senkrecht steht. In einer ebenen Welle sind zudem Druck und Schnelle in Phase, wie anhand von Gleichung (2.10) und (2.11) zu erkennen ist. Durch die beliebige, zeitabhängige Druckfunktion $\hat{p}(t)$ ist die Wellenform bestimmt. Erneutes Hinzuziehen der Fouriertransformation führt auf die Beschreibung der ebenen Welle für Druck und Schnelle im Frequenzbereich:

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \hat{P}(\omega) e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\rho c} P(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{n}. \quad (2.13)$$

Die Funktion $\hat{P}(\omega)$ ist die Fouriertransformierte der Funktion $\hat{p}(t)$. Gleichung (2.12) führt zudem den Wellenvektor $\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{n} = \frac{\omega}{c} \cdot \mathbf{n}$ ein. Eine ebene Welle kann als Beitrag einer Quelle im unendlichen verstanden werden, in der daher grundsätzlich die Fernfeldbedingung $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \gg 1$ gilt [Zöl05].

2.2.2. Lösungen der homogenen Wellengleichung in Zylinder- und Polarkoordinaten

Die im Folgenden hergeleiteten Lösungen der homogenen Wellengleichung in Zylinderkoordinaten basieren in erster Linie auf dem Vorgehen in [Ehl07] und [Wil99]. Die Kennzeichnung des Drucks P_Y als Größe in Zylinderkoordinaten durch ein tiefgestelltes Y folgt der Notation aus [Spo05].

Zu Beginn wird die homogene Helmholtz-Gleichung 2.8 in Zylinderkoordinaten ausgedrückt

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] P_Y(r, \varphi, z) + k^2 P_Y(r, \varphi, z) = 0. \quad (2.14)$$

Darin wurde der Laplace-Operator Δ in Zylinderkoordinaten verwendet [BS97]:

$$\Delta_Y = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.15)$$

Als nächstes muss ein geeigneter Separationsansatz gefunden werden. Es wird folgender Ansatz für $P_Y(r, \varphi, z)$ gewählt

$$P_Y(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z). \quad (2.16)$$

Bei den Funktionen $R(r)$, $\Phi(\varphi)$ und $Z(z)$ handelt es sich um allgemeine und unbekannte Ansatzfunktionen, die jeweils nur von einer der Variablen abhängen. Nach Einsetzen in (2.14) und Dividieren durch den gewählten Ansatz ergibt sich nach Separation der Variablen

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0. \quad (2.17)$$

Da r , φ und z unabhängig voneinander sind, müssen jene Terme in Gleichung (2.17) konstant sein, wenn diese Gleichung für beliebige r , φ und z gelten soll. Es werden willkürlich die Konstanten ν und k_z gewählt, welche die folgenden beiden Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z = 0. \quad (2.19)$$

Da (2.18) und (2.19) gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung darstellen, sind folgende Lösungen für $Z(z)$ und $\Phi(\varphi)$ gültig [Wil99]:

$$Z(z) = Z_1 e^{jk_z z} + Z_2 e^{-jk_z z} \quad (2.20)$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi_1 e^{j\nu\varphi} + \Phi_2 e^{-j\nu\varphi}. \quad (2.21)$$

Aufgrund der 2π -Wiederholung (periodische Randbedingung) der Funktion Φ gilt

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (2.22)$$

ν ist daher ganzzahlig und wird als Ordnung oder Kreisfrequenz bezeichnet [Wil99]. Für (2.17) kann nun geschrieben werden

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left[k^2 - k_z^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (2.23)$$

Mit

$$k_r^2 = k^2 - k_z^2, \quad (2.24)$$

erhält Gleichung (2.23) die Form einer Bessel'schen Differentialgleichung, die ausschließlich von r abhängt:

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[k_r^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right] R(r) = 0. \quad (2.25)$$

Die Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung ist durch die Bessel-Funktionen erster und zweiter Art, $J_\nu(k_r r)$ und $Y_\nu(k_r r)$, gegeben, die in den Abbildungen 2.2 und 2.3 für $\nu = 0, 1, 2$ und 3 dargestellt sind. $Y_\nu(k_r r)$ wird die Neumann-Funktion oder auch Webersche Funktion genannt [BS97]. Die allgemeine Lösung, oder nach [Wil99] die Lösung der stehenden Welle, kann unter Verwendung zweier willkürlicher Konstanten A_1 und B_1 angegeben werden:

$$R(r) = A_1 J_\nu(k_r r) + B_1 Y_\nu(k_r r). \quad (2.26)$$

Für sich fortbewegende Wellen werden die Hankel-Funktionen zur Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung herangezogen [Wil99]

$$R(r) = A_1 H_\nu^{(1)}(k_r r) + B_1 H_\nu^{(2)}(k_r r). \quad (2.27)$$

Die Hankel Funktionen sind wie folgt definiert [Wil99]

$$H_\nu^{(1)}(k_r r) = J_\nu(k_r r) + jY_\nu(k_r r), \quad (2.28)$$

$$H_\nu^{(2)}(k_r r) = J_\nu(k_r r) - jY_\nu(k_r r). \quad (2.29)$$

Dabei kann die Hankel-Funktion erster Art als Beschreibung einer einlaufenden, radialen Welle angesehen werden (konvergierend) und die Hankel-Funktion zweiter Art als Beschreibung einer auslaufenden, radialen Welle (divergierend). Die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung in Zylinderkoordinaten wird durch Einsetzen aller dargestellten Partikularlösungen in Gleichung (2.16) erzeugt. Werden vorerst alle Kon-

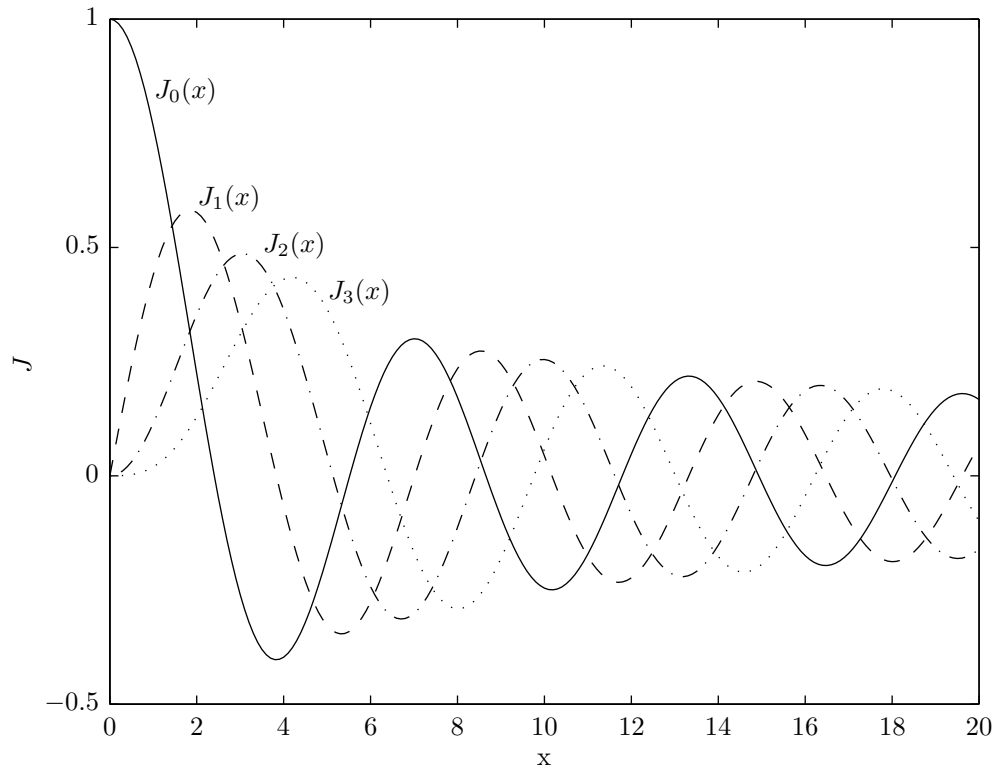


Abbildung 2.2.: Die Besselfunktionen erster Art für die Ordnungen $\nu = 0, 1, 2$ und 3 .

stanten vernachlässigt, ergibt sich die vorläufige Lösung der homogenen Wellengleichung in Zylinderkoordinaten [Wil99]:

$$P_Y(r, \varphi, z) \propto H_\nu^{(1),(2)}(k_r r) e^{\pm j\nu\varphi} e^{\pm jk_z z}. \quad (2.30)$$

2.2.2.1. Zylindrische Harmonische Zerlegung

Um alle Linearkombinationen von Gleichung (2.30) in einer allgemeinen Lösung zu berücksichtigen, wird die Summe über alle möglichen negativen und positiven Werte für ν und k_z gebildet [Wil99]. Die Konstanten $Z_1, Z_2, \Phi_1, \Phi_2, R_1$ und R_2 werden durch Koeffizienten-Funktionen ersetzt. Im Frequenzbereich kann die allgemeine Lösung dann

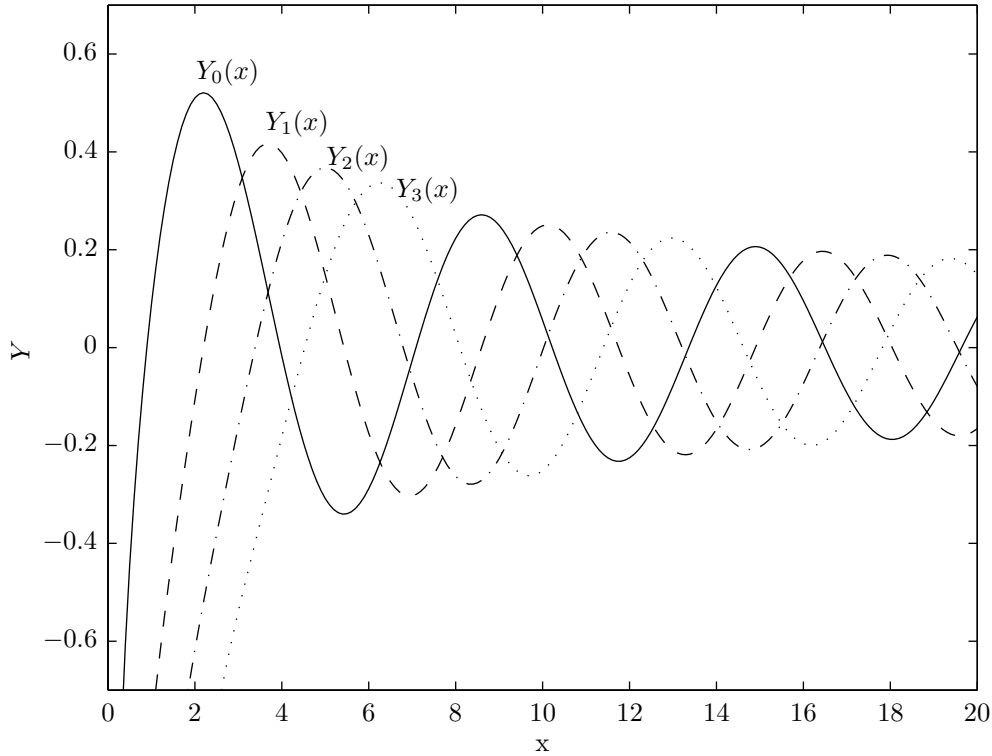


Abbildung 2.3.: Die Besselfunktionen zweiter Art (Neumannfunktionen) für die Ordnungen $\nu = 0, 1, 2$ und 3 .

angegeben werden durch

$$\begin{aligned}
 P_Y(r, \varphi, z, \omega) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} A_\nu(k_z, \omega) e^{jk_z z} H_\nu^{(1)}(k_r r) dk_z \\
 & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} B_\nu(k_z, \omega) e^{jk_z z} H_\nu^{(2)}(k_r r) dk_z.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Dies ist die Darstellung einer beliebigen Lösung der Wellengleichung durch elementare Lösungsterme, den Zylindrischen Harmonischen. Das Integral über k_z kann als räumliches Fourier-Integral interpretiert werden und die Summe über ν als räumliche Fourier-Reihe [Spo05][Wil99]. Dabei sind $A_\nu(\omega)$ und $B_\nu(\omega)$ zwei noch unbekannte Koeffizienten-Funktionen, die zur Darstellung eines Feldes als ein- und auslaufende Zirkulare Harmonische benötigt werden. Eine anschauliche Beschreibung wäre eine Quelle und eine Senke im Ursprung, die jeweils Zirkulare Harmonische beliebiger Ordnung emittieren bzw. absorbieren. In den Ursprung einlaufende Wellen würden demnach

durch die Senke erzeugt, während die Quelle alle Feldanteile hervorbringt, die vom Ursprung fortlaufen. Die bereits erwähnte periodische Randbedingung der φ -Komponente führt auf räumlich gerichtete Muster, die für $\nu = 0 \dots 5$ in Abbildung 2.4 dargestellt sind. Wie zu erkennen ist, liegt bei $\nu = 0$ eine omnidirektionale Richtfunktion vor. Dies entspräche einer Quelle, die in alle Richtungen gleich abstrahlt oder einer Senke, die aus allen Richtungen gleichmäßig empfängt. Mit steigender Ordnung ν nimmt die Anzahl der Keulen der Basisfunktionen zu und diese werden schmaler.

2.2.2.2. Zirkulare Harmonische Zerlegung in Polarkoordinaten

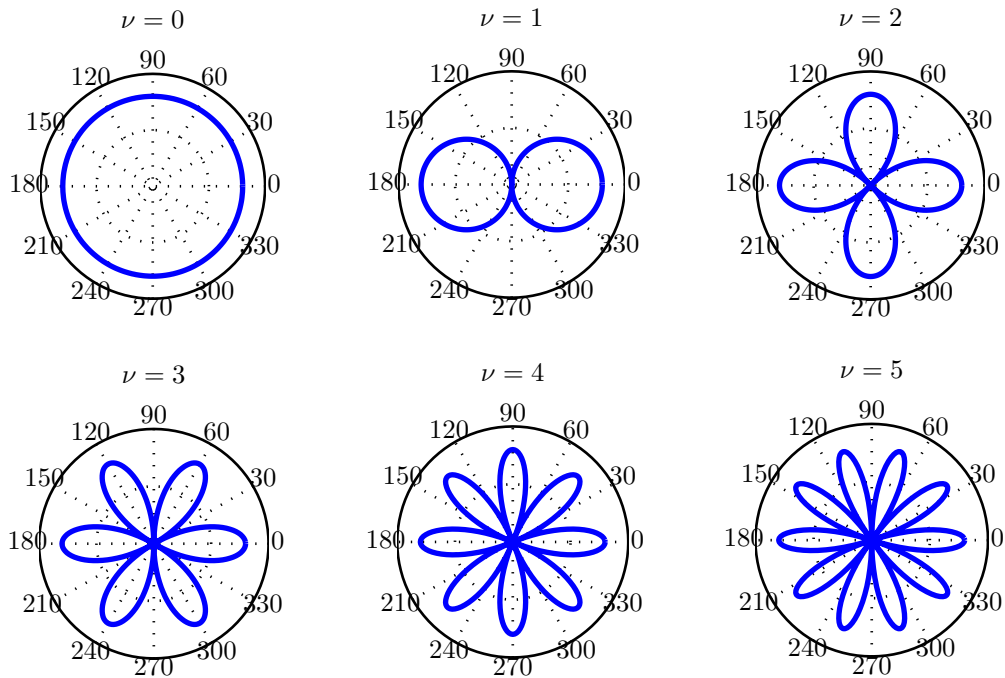


Abbildung 2.4.: Richtcharakteristika gegeben durch $|\Re\{e^{\pm j\nu\varphi}\}|$ für $\nu = 0 \dots 5$.

Im vorangegangenen Kapitel wurde mit Gleichung (2.31) die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung in Zylinderkoordinaten hergeleitet. Diese wird erneut aufgegriffen und keine Abhängigkeit von der z -Koordinate angenommen. Dann geht das Integral über z in den räumlichen Dirac-Stoß $2\pi\delta(z)$ über [Spo05]. Auf diesem Wege ergibt sich die zweidimensionale Lösung der homogenen Wellengleichung

$$P_P(r, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\varphi} \left[A_\nu(\omega) H_\nu^{(1)}(kr) + B_\nu(\omega) H_\nu^{(2)}(kr) \right]. \quad (2.32)$$

Diese Beziehung wird als Zirkulare Harmonische Zerlegung bezeichnet und ist das zwei-

dimensionale Pendant der Zylindrischen Harmonischen Zerlegung. Sie kann als räumliche Fourier-Reihe bezüglich des Winkels φ betrachtet werden. Mit ihrer Hilfe lassen sich Schallfelder in zirkulare Basisfunktionen zerlegen und als Überlagerung dieser darstellen. Der Notation in [Spo05] entsprechend werden Funktionen in Polarkoordinaten mit einem tiefgestellten P gekennzeichnet.

2.3. Die inhomogene Wellengleichung

Im vergangenen Abschnitt wurden bereits akustische Quellen erwähnt. Zur Behandlung von Lösungsgebieten, die Quellen enthalten, müssen die homogenen Wellengleichungen (2.3) und (2.8) erweitert werden. Zur Herleitung der inhomogenen Wellengleichungen werden erneut die Eulersche Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsgleichung herangezogen und um Inhomogenitäten beziehungsweise um Quellterme ergänzt.

Die Kontinuitätsgleichung erhält einen Quellterm in Form einer Volumenquelle, die für gewöhnlich mit einer kleinen, pulsierende Kugel verglichen wird:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, t) + \rho \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \rho q(\mathbf{r}, t). \quad (2.33)$$

In dieser Gleichung der inhomogenen Massenerhaltung ist die Quellstärke, Volumenschnelle oder auch Ergiebigkeit q gegeben als eine Funktion der Oberflächenschnelle \mathbf{v}_a der pulsierenden Kugel mit der Oberfläche S :

$$q = \int_S \mathbf{v}_a \, d\mathbf{S} \quad (2.34)$$

Der gesamte Quellterm auf der rechten Seite in Gleichung (2.33) stellt den Massenfluss pro Einheitsvolumen $\rho \cdot q$ dar und besitzt die Einheit $[\text{kg}/\text{m}^3\text{s}]$. Als Beispiel für eine derartige Volumenquelle wird in der Regel ein Lautsprecher in einem geschlossenen Gehäuse genannt, sofern die abgestrahlte Wellenlänge wesentlich größer als die Gehäusemaße ist. Für eine derartige Quelle gilt dann die Richtcharakteristik für $\nu = 0$ in Abbildung 2.4.

Die Eulersche Bewegungsgleichung (2.1) erhält folglich einen Quellterm, der eine Vektorgröße darstellt:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \nabla p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (2.35)$$

Diese Gleichung wird auch als inhomogene Impulserhaltung bezeichnet. Der Quellterm \mathbf{f} stellt die durch eine Quelle verursachte Kraft pro Einheitsvolumen mit der Einheit $[\text{N}/\text{m}^3 = \text{kg}/\text{s}^2\text{m}^2]$ dar und wird Dipolquelle genannt. Für Kraftquellen wird oft der Vergleich mit zwei nah beieinander liegenden, gegenphasigen Monopolquellen herangezogen oder ein Lautsprecher in einem offenen Gehäuse. Die Richtcharakteristik eines Dipols ist in Abbildung 2.4 für $\nu = 1$ zu sehen.

Die Kombination von Gleichung (2.33) und Gleichung (2.35) ergibt die inhomogene Wellengleichung

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\mathbf{r}, t) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \rho \frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) \quad (2.36)$$

Aus der Fouriertransformation von (2.36) resultiert die inhomogene Helmholtzgleichung:

$$\nabla^2 P(\mathbf{r}, \omega) - k^2 P(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega) - j\omega \rho Q(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.37)$$

2.4. Elementare Lösungen der inhomogenen Wellengleichung

2.4.1. Monopolquellen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Volumenquelle als eine kleine, pulsierende Kugel eingeführt, die in alle Richtungen eine gleichmäßige Abstrahlung erzeugt. Für die Betrachtung der Monopolquelle bieten sich daher die Kugelkoordinaten an. Der Radius der Kugelquelle kann als infinitesimal klein angenommen werden um eine sogenannte Punktquelle zu erzeugen, deren Feld, in Kugelkoordinaten ausgedrückt, nur vom Abstand r , nicht aber von dem azimutalen Winkel φ oder dem Elevationswinkel θ abhängt. Eine derartige Monopolquelle im Ursprung des Koordinatensystems erzeugt das Feld

$$P(r, \omega) = \hat{P}(\omega) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.38)$$

im Aufpunkt mit dem Abstand r . Nach Anwendung der inversen Fouriertransformation 2.5 ergibt sich das zeitabhängige Feld der Monopolquelle:

$$p(r, t) = \frac{\hat{p}(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c})}{r}. \quad (2.39)$$

Anhand der Gleichungen (2.38) und (2.39) sind deutlich die $1/r$ -Abhängigkeit der Amplitude und die Definitionslücke an der Stelle $r = 0$ der Monopolquelle zu erkennen.

Mit Hilfe der Eulerschen Bewegungsgleichung (2.1) kann ebenso das Schnellefeld einer Monopolquelle angegeben werden. Aufgrund der kugelsymmetrischen Abstrahlung zeigt der Schnellevektor grundsätzlich in Richtung \mathbf{n}_r .

$$\mathbf{V}(r, t) = \frac{\hat{P}(\omega)}{\rho c} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \mathbf{n}_r. \quad (2.40)$$

Wie in Gleichung (2.40) zu erkennen ist, sind im Gegensatz zur ebenen Welle beim Monopol Druck und Schnelle nicht in Phase. Der Term $\left[1 + \frac{1}{jkr} \right]$ konvergiert mit steigendem r jedoch gegen 1, weshalb im Fernfeld ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \gg 1$) die Phasengleichheit von Druck und Schnelle auch für den Monopol gilt.

2.4.2. Dipolquellen

Auch die Dipolquelle wurde bereits als Kraftquelle mit einer Abstrahlcharakteristik in Form einer Acht vorgestellt. Zur Herleitung des Dipol-Druckfeldes kann erneut das Bild der nah beieinander liegenden Monopole mit entgegengesetzter Phase im Ursprung eines Systems in Kugelkoordinaten herangezogen werden. Die beiden Monopole sind in z -Richtung mit dem Abstand d symmetrisch zum Ursprung angeordnet. Der von dem Dipol hervorgerufenen Druck im Aufpunkt \mathbf{r} ist dann [Hul04]:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}, \omega) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\hat{P}(\omega)}{d} \left[\frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \frac{1}{2}d\mathbf{n}_z|}}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}d\mathbf{n}_z|} - \frac{e^{-jk|\mathbf{r} + \frac{1}{2}d\mathbf{n}_z|}}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}d\mathbf{n}_z|} \right] \\ &= -\hat{P}(\omega) \cdot \mathbf{n}_z \cdot \nabla \left[\frac{e^{-jkr}}{r} \right] \\ &= \hat{P}(\omega) \frac{1 + jkr}{r} \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Entsprechend Abbildung 2.1 ist ϑ der Zenitwinkel. Das Schnellefeld des Dipols kann wiederum mit Hilfe der Eulerschen Bewegungsgleichung bestimmt werden [Hul04]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega) = \left[\mathbf{n}_r \frac{\hat{P}(\omega)}{\rho c} \left(\frac{2 + jkr}{r} + \frac{2}{jkr^2} \right) \cos \vartheta + \mathbf{n}_\vartheta \frac{\hat{P}(\omega)}{\rho c} \left(\frac{1 + jkr}{jkr^2} \right) \sin \vartheta \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad (2.42)$$

mit den Normalenvektoren \mathbf{n}_r und \mathbf{n}_ϑ nach Abbildung 2.1.

2.4.3. Linienquellen

Für die Herleitung des Feldes einer Linienquelle eignet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten. Kapitel 2.2.2 enthielt bereits Hinweise auf die Linienquelle und stellte die Hankel-Funktionen als Lösungen der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten vor. Wie dort bereits dargestellt wurde, beschreiben die Hankel-Funktionen zweiter Art die divergierenden Feldanteile und stellen demnach die verbindende Funktionen zwischen einer entlang der z -Achse ausgedehnten unendlichen Linienquelle und einem Aufpunkt in der Entfernung r dar [Spo05]:

$$P(r, \omega) = \frac{j}{4} \hat{P}(\omega) H_0^{(2)}(kr), \quad (2.43)$$

$$\mathbf{V}(r, \omega) = \frac{1}{4\rho c} \hat{P}(\omega) H_1^{(2)}(kr) \mathbf{n}_r. \quad (2.44)$$

Anhand der Fernfeldnäherung [AS65]

$$H_\nu^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{-j(kr - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} \quad (2.45)$$

der Hankel-Funktion zweiter Art, wird die $1/\sqrt{r}$ -Abhängigkeit der Amplitude im Feld der Linienquelle deutlich.

2.5. Lösungen der Wellengleichung in begrenzten Gebieten

Die homogenen und inhomogenen Wellengleichungen und Helmholtz-Gleichungen können in Bezug auf Anfangs- und Randbedingungen unterschieden werden. Für die Anfangsbedingungen soll angenommen werden, dass diese immer zu Null gesetzt werden können. Bezüglich der Randbedingungen existieren eindeutige Lösungen für die zeitbezogenen Wellengleichungen nur im Freifeld, also in unbegrenzten Gebieten. Die Helmholtz-Gleichungen hingegen sind Frequenzbereichsbeschreibungen der Wellenausbreitung und im Allgemeinen nur für begrenzte Gebiete definiert. Sie benötigen daher geeignete Randbedingungen. Diese können allerdings auch derart formuliert werden, dass eine frequenzabhängige Beschreibung für offenen Gebiete möglich ist [Ehl07]. Ein bekanntes Verfahren zur Lösung der Wellengleichung für begrenzte Gebiete ist die Lösungsmethode mit Green-Funktionen.

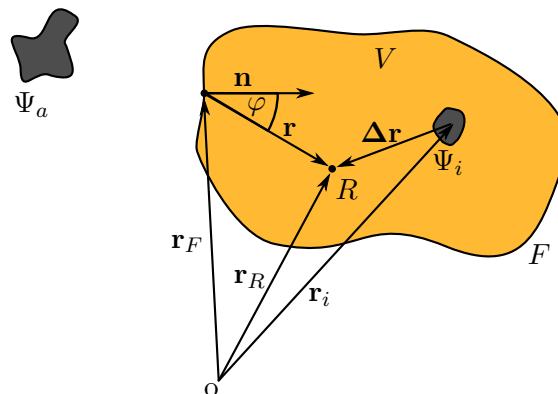


Abbildung 2.5.: Lösungsgebiet für das allgemeine Kirchhoff-Integral mit äußerer Quellenverteilung Ψ_a und innerer Quellenverteilung Ψ_i . Das Gebiet V stellt im Dreidimensionalen ein Volumen dar und im Zweidimensionalen eine Fläche. F ist dann entsprechend eine Hüllfläche oder eine Hüllkurve.

2.5.1. Lösungsmethode mit Green-Funktionen

In Abbildung 2.7 ist das Gebiet V dargestellt, welches in einer dreidimensionalen Betrachtung als Volumen angesehen werden kann oder als Fläche in einer zweidimensionalen Betrachtung. V wird durch F vollständig begrenzt. Demnach ist F im Dreidimensionalen eine Oberfläche und im Zweidimensionalen eine Kontur. Der Normalenvektor \mathbf{n} stehe senkrecht auf F und zeige in das Innere von V . Außerhalb von V befindet sich die Quellenverteilung Ψ_a und innerhalb die Quellenverteilung Ψ_i . Es werde vorerst nur

der Einfluss der inneren Quellen am Ort \mathbf{r}_i betrachtet und die Feldbeschreibung in V durch die inhomogene Helmholtzgleichung:

$$\Delta P(\mathbf{r}_i, \omega) + k^2 P(\mathbf{r}_i, \omega) = -\Psi_i(\mathbf{r}_i, \omega). \quad (2.46)$$

Die Green-Funktion dieses Problems kann ebenfalls durch eine Differentialgleichung definiert werden [Ehl07]:

$$\Delta G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i) + k^2 G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i) = -\delta(\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_i). \quad (2.47)$$

Darin ist \mathbf{r}_R der Aufpunkt, für den die Lösung des Randwertproblems gesucht wird und $G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i)$ die Green-Funktion, die zwischen der Quellverteilung und dem Aufpunkt vermittelt. δ ist die Diracsche δ -Funktion. Gleichung 2.46 wird nun mit der Greenschen Funktion $G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i)$ und Gleichung 2.47 mit $P(\mathbf{r}_i, \omega)$ multipliziert. Anschließend werden beide Gleichungen voneinander subtrahiert, sodass folgende Beziehung entsteht:

$$G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i) \Delta P(\mathbf{r}_i, \omega) - P(\mathbf{r}_i, \omega) \Delta G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i) = \delta(\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_i) P(\mathbf{r}_i, \omega) - \Psi_i(\mathbf{r}_i, \omega) G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i). \quad (2.48)$$

Der 2. Satz von Green mit $\partial V = F$ [Leh10]

$$\int_V (f \Delta g - g \Delta f) dV = - \oint_F (f \nabla g - g \nabla f) \mathbf{n} dF, \quad (2.49)$$

wird herangezogen, auf die linke Seite von Gleichung 2.48 angewendet und deren rechte Seite über V integriert. Dabei kann die Ausblendeigenschaft der δ -Funktion ausgenutzt werden es ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}_R, \omega) &= \int_V \Psi_i(\mathbf{r}_i, \omega) G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i) dV \\ &\quad - \oint_F (G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) \nabla_{\mathbf{n}} P(\mathbf{r}_F, \omega) - P(\mathbf{r}_F, \omega) \nabla_{\mathbf{n}} G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F)) dF, \end{aligned} \quad (2.50)$$

mit $\nabla g \mathbf{n} = \nabla_{\mathbf{n}} g$. Nach Gleichung (2.50) wird deutlich, dass das Feld in V eindeutig über die innere Quellenverteilung Ψ_i und die Randbedingungen auf F definiert ist. Die genaue Kenntnis der äußeren Quellenverteilung Ψ_a ist demnach unerheblich, solange die Feldgrößen $P(\mathbf{r}_F, \omega)$ und $\nabla P(\mathbf{r}_F, \omega)$ bekannt sind. Diese stellen die Randbedingung auf F dar und können drei verschiedene Formen annehmen: die Dirichlet-, die Neumann und die Robin-Randbedingung, die im Folgenden vorgestellt werden.

2.5.1.1. Dirichlet-Randbedingung

Liegt eine Dirichlet-Randbedingung vor, ist der Schalldruck P auf dem zu betrachtenden Rand F durch eine willkürliche Funktion f vorgegeben:

$$P(\mathbf{r}_F, \omega) = f(\mathbf{r}_F, \omega). \quad (2.51)$$

Über den Schalldruckgradienten $\nabla_{\mathbf{n}}P(\mathbf{r}_F, \omega)$ wird keine Aussage getroffen und die problemangepasste Greensche Funktion wird zu $G_D(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) = 0$ gesetzt [Ehl07]. Man beachte, dass die Dirichlet-Green-Funktion durch ein tiefgestelltes D gekennzeichnet wurde. Durch zu Null setzen von G_D verschwindet das Oberflächenintegral des entsprechenden Terms und die Lösung des Dirichlet-Problems ist gegeben durch

$$P(\mathbf{r}_R, \omega) = \int_V \Psi_i(\mathbf{r}_i, \omega) G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i) dV + \oint_F P(\mathbf{r}_F, \omega) \nabla_{\mathbf{n}} G_D(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) dF. \quad (2.52)$$

Diese Gleichung ist eindeutig bestimmt, wenn die Lösung von Gleichung 2.47 für $G_D(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) = 0$ gefunden wurde.

2.5.1.2. Neumann-Randbedingungen

Ist eine Neumann-Randbedingung gegeben, ist der Gradient des Drucks auf der Begrenzung F gleich einer willkürliche Funktion:

$$\nabla_{\mathbf{n}}P(\mathbf{r}_F, \omega) = f(\mathbf{r}_F, \omega). \quad (2.53)$$

In diesem Fall wird keine Aussage über den Schalldruck auf F getroffen und folglich wird der auf das Neumann-Problem angepasste Gradient der Greenschen Funktion $\nabla_{\mathbf{n}}G_N(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) = 0$ gesetzt. Damit wird Gleichung (2.50) zu

$$P(\mathbf{r}_R, \omega) = \int_V \Psi_i(\mathbf{r}_i, \omega) G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_i) dV - \oint_F G_N(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) \nabla_{\mathbf{n}}P(\mathbf{r}_F, \omega) dF. \quad (2.54)$$

Diese Gleichung ist eindeutig bestimmt, wenn die Lösung von Gleichung (2.47) für die homogene Randbedingung $\nabla_{\mathbf{n}}G_N(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) = 0$ gefunden wurde.

2.5.1.3. Robin-Randbedingungen

Die Robin-Randbedingung ist eine Linearkombination der erstgenannten Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen [Spo05]:

$$\nabla P(\mathbf{r}_F, \omega) + j\sigma(\mathbf{r}_F, \omega)P(\mathbf{r}_F, \omega) = f(\mathbf{r}_F, \omega). \quad (2.55)$$

$\sigma(\mathbf{r}_F, \omega)$ sei eine vorerst nicht näher beschriebene Funktion. Löst man Gleichung (2.55) nach $\nabla P(\mathbf{r}_F, \omega)$ auf und setzt das Ergebnis in Gleichung (2.50) ein, muss für die Eindeutigkeit der Lösung gelten:

$$\nabla_{\mathbf{n}} G(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_F) = -j\sigma(\mathbf{r}_F, \omega) G(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_F). \quad (2.56)$$

Diese Bedingung stellt erneut den homogenen Fall $f(\mathbf{r}_F, \omega) = 0$ dar. Gleichung (2.50) wird dann zu

$$P(\mathbf{r}_R, \omega) = \int_V \Psi_i(\mathbf{r}_i, \omega) G(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_i) dV - \oint_F G_R(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_F) f(\mathbf{r}_F, \omega) dF. \quad (2.57)$$

2.5.2. Wandimpedanz und Reflexionsfaktor

Mit Bezug auf den letzten Unterabschnitt sollen an dieser Stelle die Wandimpedanz und der Reflexionsfaktor vorgestellt werden, die im weiteren Verlauf eine wichtige Rollen spielen. Die Wandimpedanz, oder auch Oberflächenimpedanz, beschreibt das Verhältnis des Schalldrucks zur Schallschnelle in Normalenrichtung auf einer Oberfläche F :

$$Z_W(\mathbf{r}_F, \omega) = \frac{P(\mathbf{r}_F, \omega)}{V_n(\mathbf{r}_F, \omega)}. \quad (2.58)$$

Die in Kapitel 2.5.1.3 verwendete Funktion $\sigma(\mathbf{r}_F, \omega)$ kann für die homogene Robin-Randbedingung durch die Wandimpedanz ausgedrückt werden [Spo05]:

$$\sigma(\mathbf{r}_F, \omega) = \frac{\omega\rho}{Z_W(\mathbf{r}_F, \omega)}. \quad (2.59)$$

Damit wird Gleichung 2.55 zu

$$Z_W(\mathbf{r}_F, \omega) = -j\omega\rho \frac{P(\mathbf{r}_F, \omega)}{\nabla_{\mathbf{n}} P(\mathbf{r}_F, \omega)}, \quad (2.60)$$

und entspricht mit der Eulerschen Bewegungsgleichung (2.6) der Definition der Wandimpedanz. Der Reflexionsfaktor ergibt sich nun wie folgt aus der Schallkennimpedanz $Z = \rho c$ des Mediums und der Wandimpedanz Z_W [DEG06]:

$$\zeta = \frac{Z_W - Z}{Z_W + Z}. \quad (2.61)$$

Es ist zu beachten, dass es sich sowohl bei der Impedanz als auch bei dem Reflexionsfaktor um komplexe Größen handelt. Nimmt man erneut die Dirichlet-Randbedingungen hinzu und gibt $P(\mathbf{r}_F, \omega) = 0$ vor, so ergibt sich ein Reflexionsfaktor von $\zeta_D = -1$, da die Wandimpedanz für das Dirichlet-Problem $Z_{W,D} = 0$ ist. Es liegt eine sogenannte

schallweiche Randbedingung vor, an der Schalldruckwellen mit dem Faktor -1 reflektiert werden. Die schallweiche Randbedingung wird eine zentrale Rolle in dieser Arbeit spielen, da ein ANC-System genau diese Randbedingung herstellen soll, wie später noch gezeigt wird.

Ebenso kann die Neumann-Randbedingung mit $\nabla_{\mathbf{n}}P(\mathbf{r}_F, \omega) = 0$ betrachtet werden. In diesem Fall konvergiert $Z_{W,N}$ gegen Unendlich und der Reflexionsfaktor wird zu $\zeta_N = 1$. Ist der Schalldruckgradient oder die Schnelle auf einer Begrenzung gleich Null, liegt eine *schallharte* Randbedingung vor. Diese entsteht bei der Reflexion von Schallwellen an sehr harten Materialien.

2.5.3. Das allgemeine Kirchhoff-Integral

Die Lösungsmethode mit Green-Funktionen ermöglicht es, ein inhomogenes Randwertproblem mit Hilfe der Greenschen Funktion als ein homogenes Randwertproblem zu behandeln [Ehl07]. Das Auffinden einer geeigneten Green-Funktion für ein gegebenes Problem erweist sich allerdings oft als schwierig [Wil99]. Klassische Methoden zum Auffinden der Greenschen Funktion eines inhomogenen Randwertproblems stellen die Spiegelquellenmethode und die Methode der Eigenfunktionen dar. Im Folgenden werden konkrete Lösungen der Green-Funktion aus Gleichung (2.50) gegeben werden. Besagte Gleichung wird nachfolgend als das *allgemeine Kirchhoff-Integral* bezeichnet [Tri03].

2.5.3.1. Dreidimensionale Lösung des allgemeinen Kirchhoff-Integrals

Die dreidimensionale Lösung der Greenschen Funktion als Vermittlung zwischen der Ursache am Ort \mathbf{r}_F und des Aufpunkts \mathbf{r}_R innerhalb des Volumens V ist gegeben durch [Ehl07]

$$G_{3D}(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F, \omega) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_F|}}{4\pi|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_F|}. \quad (2.62)$$

Wie zuvor zu sehen war, wird die Ableitung der Greenschen Funktion ebenfalls benötigt. Mit den in Abbildung 2.7 dargestellten Vektoren

$$r = |\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_F|, \quad (2.63)$$

$$\Delta r = |\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_i| \quad (2.64)$$

und mit

$$\nabla f(|\mathbf{r}|) = f'(|\mathbf{r}|) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \quad (2.65)$$

folgt

$$\nabla_{\mathbf{n}}G_{3D}(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F, \omega) = \frac{1}{4\pi}e^{-jkr} \frac{-(1 + jkr)}{r^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.66)$$

Einsetzen von 2.62 und deren Ableitung in 2.50 ergibt:

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{r}_R) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \Psi_i(\mathbf{r}_i) \frac{e^{-jk\Delta r}}{\Delta r} dV \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \oint_F \left(\nabla_{\mathbf{n}} P(\mathbf{r}_F) + P(\mathbf{r}_F) \frac{1 + jkr}{r} \cos \varphi \right) \frac{e^{-jkr}}{r} dF.
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Darin ist φ der Winkel zwischen dem Normalenvektor \mathbf{n} und dem Vektor \mathbf{r} beziehungsweise \mathbf{e}_r nach Abbildung 2.7. Der Übersichtlichkeit halber werden die ω -Terme von nun an weggelassen. In der dreidimensionalen Lösung des allgemeinen Kirchhoff-Integrals kann ebenso die Schallschnelle anstatt des Schalldruckgradienten nach Gleichung (2.1) verwendet werden:

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{r}_R) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \Psi_i(\mathbf{r}_i) \frac{e^{-jk\Delta r}}{\Delta r} dV \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \oint_F \left(jk\rho c V_n(\mathbf{r}_F) + P(\mathbf{r}_F) \frac{1 + jkr}{r} \cos \varphi \right) \frac{e^{-jkr}}{r} dF.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

In Gleichung (2.68) bezeichnet V_n die Schnelle in Richtung des Normalenvektors \mathbf{n} nach Abbildung 2.7.

Das dreidimensionale Kirchhoff-Integral ermöglicht demnach die Beschreibung des Feldes im Volumen V anhand des Drucks und der Schnelle auf der einhüllenden Fläche F und der inneren Quellverteilung Ψ_i . Dabei ist es unerheblich, ob der Rand aus Quellen besteht oder dort die entsprechenden Signale messtechnisch erfasst werden.

2.5.3.2. Zweidimensionale Lösung des allgemeinen Kirchhoff-Integrals

Die zweidimensionale Lösung des allgemeinen Kirchhoff-Integrals wird in Kapitel 5 zur Herleitung des Analysepunkte-Verfahrens verwendet und stellt somit die ursprüngliche mathematische Grundlage des zweidimensionalen ANC-Systems nach [Tri03] dar. Im zweidimensionalen Fall besitzt Greens zweites Theorem ebenso Gültigkeit wie im dreidimensionalen Fall und die Greenschen Funktion ist gegeben durch

$$G_{2D}(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) = \frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_F|) = \frac{j}{4} H_0^{(2)}(kr). \tag{2.69}$$

Der Gradient $\nabla_{\mathbf{n}}$ der zweidimensionalen Green-Funktion ist demnach

$$\nabla_{\mathbf{n}} G_{2D}(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) = \frac{-jk}{4} \cos \varphi H_1^{(2)}(kr). \tag{2.70}$$

Damit wird das zweidimensionale allgemeine Kirchhoff-Integral zu

$$P(\mathbf{r}_R) = \frac{j}{4} \int_V \Psi_i(\mathbf{r}_i) H_0^{(2)}(k\Delta r) dV + \frac{jk}{4} \oint_F \left(j\rho c V_n(\mathbf{r}_F) H_0^{(2)}(kr) - P(\mathbf{r}_F) H_1^{(2)}(kr) \cos \varphi \right) dF. \quad (2.71)$$

2.5.4. Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral (KHI) ergibt sich aus dem allgemeinen Kirchhoff-Integral, wenn das Lösungsgebiet V keine innere Quellenverteilung Ψ_i besitzt [BVV93]. Demnach ist das Feld innerhalb von V vollständig durch die Kenntnis der Randbedingung auf F bestimmt.

2.5.4.1. Dreidimensionale Lösung des Kirchhoff-Helmholtz Integrals

Ohne die innere Quellenverteilung wird Gleichung (2.68) zum dreidimensionalen Kirchhoff-Helmholtz-Integral

$$P(\mathbf{r}_R) = -\frac{1}{4\pi} \oint_F \left(jk\rho c V_n(\mathbf{r}_F) + P(\mathbf{r}_F) \frac{1 + jkr}{r} \cos \varphi \right) \frac{e^{-jkr}}{r} dF. \quad (2.72)$$

2.5.4.2. Zweidimensionale Lösung des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals

Die zweidimensionale Lösung von Gleichung (2.72) lautet entsprechend:

$$P(\mathbf{r}_R) = \frac{jk}{4} \oint_F \left(j\rho c V_n(\mathbf{r}_F) H_0^{(2)}(kr) - P(\mathbf{r}_F) H_1^{(2)}(kr) \cos \varphi \right) dF. \quad (2.73)$$

Das zweidimensionale Kirchhoff-Helmholtz-Integral ist eine Grundlage der in Kapitel 4 vorgestellten Methoden zur Extrapolation von Schallfeldern, die durch Mikrofon-Arrays erfasst werden.

2.5.4.3. Bestimmung der Schnelle im Aufpunkt R

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die Bestimmung der Schnelle am Aufpunkt R notwendig sein. Da sich die Herleitung des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals zur Bestimmung der Schnelle als eher schwierig erweist, stellt die Approximation des Gradienten am Punkt \mathbf{r}_R eine wesentlich einfachere Variante dar. Die Schnelle kann dann mit der Euler-Gleichung (2.1) aus dem approximierten Gradienten gewonnen werden. Der Gradient in Richtung eines beliebigen Richtungs-Vektors \mathbf{e} an der Stelle \mathbf{r}_R kann wie folgt bestimmt werden:

$$\nabla_{\mathbf{e}} p(\mathbf{r}_R) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{p(\mathbf{r}_R + a \cdot \mathbf{e}) - p(\mathbf{r}_R)}{a}. \quad (2.74)$$

Der Druck an den Punkten $p(\mathbf{r}_R)$ und $p(\mathbf{r}_R + a \cdot \mathbf{e})$ wird durch das KHI nach den Gleichungen (2.72) oder (2.73) bestimmt.

2.5.5. Die Rayleigh-Integrale

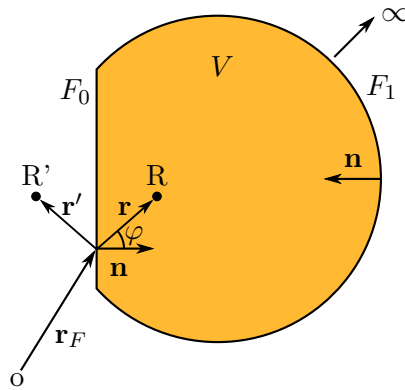


Abbildung 2.6.: Das Lösungsgebiet zur Herleitung der Rayleigh-Integrale

Ist auf dem Randgebiet F nur eine der beiden Größen Schalldruck oder Schallschnelle bekannt und befinden sich keine Quellen in V , geht das Kirchhoff-Helmholtz-Integral in ein Rayleigh-Integral über. Nach Abschnitt 2.5 liegt dann entweder eine Dirichlet- oder eine Neumann-Randbedingung auf F vor. Zum Auffinden der problemangepassten Green-Funktionen soll im Folgenden die Spiegelquellen-Methode eingesetzt werden. Um das Verfahren der Spiegelquellen zu vereinfachen, wird das Lösungsgebiet und dessen Berandung entsprechend Abbildung 2.6 modifiziert. Die Hüllkurve beziehungsweise Kontur wird in zwei Abschnitte F_0 und F_1 unterteilt. F_0 sei in seinem dreidimensionalen Verlauf eben und in seinem zweidimensionalen Verlauf gerade, um Symmetrien für die Spiegelquellen-Methode ausnutzen zu können. F_1 befinde sich im Unendlichen, sodass sein Beitrag im Lösungsgebiet zu Null wird und das Integral über F_1 verschwindet. Es gilt demnach die *Sommerfeldsche Austrahlungsbedingung* [Sta97].

Am Ort R in V wird nun ein Quelle angenommen und eine zu F_0 symmetrisch liegende Spiegelquelle am Ort R' außerhalb des Lösungsgebietes. Aufgrund der akustischen Reziprozität können Quellen und Senken jederzeit ausgetauscht werden, ohne eine Änderung der vermittelnden Funktion zu bewirken [KFCS00]. Es kann daher ein allgemeiner Ansatz für die aufzufindenden, problemangepassten Dirichlet- und Neumann-Green-Funktionen gewählt werden:

$$G_{D/N} = G + B. \quad (2.75)$$

Mit Gleichung 2.75 wird das Kirchhoff-Helmholtz-Integral zu

$$P(\mathbf{r}_R) = \frac{1}{4\pi} \int_{F_0} jk\rho c V_n(\mathbf{r}_F) [G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) + B(\mathbf{r}_{R'}|\mathbf{r}_F)] dF + \frac{1}{4\pi} \int_{F_0} P(\mathbf{r}_F) \nabla_{\mathbf{n}} [G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) + B(\mathbf{r}_{R'}|\mathbf{r}_F)] dF \quad (2.76)$$

2.5.5.1. Das Rayleigh-I-Integral

Liegt auf dem Rand F_0 eine Neumann-Randbedingung vor, entsteht das Rayleigh-I-Integral. In Gleichung (2.76) muss demnach das zweite Integral verschwinden und es muss gelten:

$$\nabla_{\mathbf{n}} B(\mathbf{r}_{R'}|\mathbf{r}_F) = -\nabla_{\mathbf{n}} G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F). \quad (2.77)$$

Das dreidimensionale Rayleigh-I-Integral

Wird im dreidimensionalen Fall

$$B(\mathbf{r}_{R'}|\mathbf{r}_F) = \frac{e^{-jkr'}}{r'}, \quad (2.78)$$

gewählt, ist die Richtungsableitung von B gleich

$$\nabla_{\mathbf{n}} \frac{e^{-jkr'}}{r'} = -\nabla_{\mathbf{n}} \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad (2.79)$$

mit $r = r'$ und $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{e}_{r'} \cdot \mathbf{n}$ (siehe Abbildung 2.6). Damit ist die problemangepasste Neumann-Greenfunktion gefunden

$$G_N = 2G \quad (2.80)$$

und das Rayleigh-I-Integral lautet:

$$P(\mathbf{r}_R) = \frac{1}{2\pi} \int_{F_0} jk\rho c V_n(\mathbf{r}_F) \frac{e^{-jkr}}{r} dF. \quad (2.81)$$

Nach Gleichung (2.81) reicht die Kenntnis der Schnelle in Normalenrichtung auf der geraden Berandung F_0 aus, um das Feld in V exakt zu bestimmen. Auch in diesem Fall ist es unerheblich, ob es sich um die Messung der Schnelle handelt oder um eine Reproduktion durch Quellen. Im Falle der Reproduktion handelt es sich um Monopolquellen mit Quellstärken proportional zu $V_n(\mathbf{r}_F)$.

Das zweidimensionale Rayleigh-I-Integral

Für den zweidimensionalen Fall kann mit (2.80) das Rayleigh-I-Integral ebenfalls direkt angegeben werden:

$$P(\mathbf{r}_R) = \frac{jk}{2} \int_{F_0} j\rho c V_n(\mathbf{r}_F) H_0^{(2)}(kr) dF. \quad (2.82)$$

2.5.5.2. Das Rayleigh-II-Integral

Für das Rayleigh-II-Integral ist das Dirichlet-Randproblem gegeben und der erste Term von Gleichung (2.76) muss zu Null werden. Die gespiegelte Punktquelle in R' muss demnach gegenphasig zu R sein:

$$B = -G. \quad (2.83)$$

Das dreidimensionale Rayleigh-II-Integral

Mit der dreidimensionalen Green-Funktion ergibt sich

$$B(\mathbf{r}_{R'}|\mathbf{r}_F) = -\frac{e^{-jkr'}}{r'} = -\frac{e^{-jkr}}{r}. \quad (2.84)$$

Einsetzen in Gleichung (2.76) und ableiten liefert das dreidimensionale Rayleigh-II-Integral:

$$P(\mathbf{r}_R) = \frac{1}{2\pi} \int_{F_0} P(\mathbf{r}_F) \frac{1 + jkr}{r} \cos \varphi \frac{e^{-jkr}}{r} dF \quad (2.85)$$

Mit Gleichung (2.85) kann das Feld in V anhand des Drucks auf F_0 bestimmt werden. Für eine exakte Reproduktion werden demnach Dipolquellen mit einer Quellstärke proportional zu $P(\mathbf{r}_F)$ benötigt.

Das zweidimensionale Rayleigh-II-Integral

Das zweidimensionale Rayleigh-II-Integral lautet:

$$P(\mathbf{r}_R) = \frac{jk}{2} \int_{F_0} P(\mathbf{r}_F) \cos \varphi H_1^{(2)}(kr) dF. \quad (2.86)$$

Es ist anzumerken, dass die Rayleigh-Integrale nur Gültigkeit besitzen, wenn der Teilbereich F_0 im Dreidimensionalen absolut eben und unendlich ausgedehnt ist. Ebenso gilt im Zweidimensionalen, dass F_0 eine unendliche Gerade darstellen muss. Die Rayleigh-Integrale werden im weiteren Verlauf der Arbeit zur Extrapolation von Mikrofonsignalen und zur Gegenfeldsynthese eingesetzt.

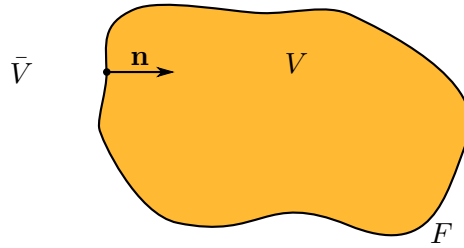


Abbildung 2.7.: Lösungsgebiet für die Simple Source Formulation.

2.6. Simple Source Formulation

Im folgenden wird die Herleitung der *Simple Source Formulation* nach [Wil99] beschrieben. Da das Kirchhoff-Helmholtz-Integral Druck und Schnelle beziehungsweise Druck und Druckgradient für die Vorhersage von Druckfeldern benötigt, soll eine Formulierung gefunden werden, die nur eine Quellart verwendet. Der Druck innerhalb oder außerhalb vom Lösungsgebiet V soll dann durch eine einzige Gleichung bestimmt werden:

$$P(\mathbf{r}_R) = \int_F G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) a(\mathbf{r}_F) dF \quad (2.87)$$

Die Funktion $a(\mathbf{r}_F)$ ist die kontinuierliche Quellstärkendichte auf dem Rand F , die im Folgenden hergeleitet wird und $G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F)$ sei die Freifeld-Green-Funktion.

Als erstes werde der Fall betrachtet, für den Quellen in V und keine Quellen außerhalb von V vorhanden sind. Der Außenraum von V werde mit \bar{V} bezeichnet. Die Einhüllende F trennt die Gebiete V und \bar{V} . Zudem gelte die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung für \bar{V} . Wird eine Ersatzquellverteilung auf der Einhüllenden F angenommen, kann das externe akustische Feld P_e am Aufpunkt R durch das Kirchhoff-Helmholtz-Integral bestimmt werden [Wil99]:

$$\int_F [G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) \nabla_{\mathbf{n}} P_e(\mathbf{r}_F) - P_e(\mathbf{r}_F) \nabla_{\mathbf{n}} G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F)] dF = \begin{cases} P_e(\mathbf{r}_R) & \mathbf{r}_R \in \bar{V} \\ \frac{1}{2} P_e(\mathbf{r}_R) & \mathbf{r}_R \in F \\ 0 & \mathbf{r}_R \in V \end{cases} \quad (2.88)$$

Als zweites wird der umgekehrte Fall betrachtet. Die Quellen sind nun außerhalb der Einhüllenden F und es sind keine Quellen in V vorhanden. Der Normalenvektor \mathbf{n} zeige nun nach außen. Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral zur Berechnung des Drucks P_i in V hat dann folgende Form

$$\int_F [G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F) \nabla_{\mathbf{n}} P_i(\mathbf{r}_F) - P_i(\mathbf{r}_F) \nabla_{\mathbf{n}} G(\mathbf{r}_R|\mathbf{r}_F)] dF = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}_R \in \bar{V} \\ -\frac{1}{2} P_i(\mathbf{r}_R) & \mathbf{r}_R \in F \\ -P_i(\mathbf{r}_R) & \mathbf{r}_R \in V \end{cases} \quad (2.89)$$

Für beide Situationen gelte auf auf der Einhüllenden F : $P_i = P_e$. Zudem seien die Gradienten von externem und internem Feld auf F ungleich: $\frac{\partial P_i}{\partial n} \neq \frac{\partial P_e}{\partial n}$. Wenn nun Gleichung (2.89) von Gleichung (2.88) subtrahiert wird, resultiert

$$\int_F [\nabla_{\mathbf{n}} P_e(\mathbf{r}_F) - \nabla_{\mathbf{n}} P_i(\mathbf{r}_F)] G(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_F) dF = \begin{cases} P_e(\mathbf{r}_R) & \mathbf{r}_R \in \bar{V} \\ P_e(\mathbf{r}_R) = P_i(\mathbf{r}_R) & \mathbf{r}_R \in F \\ P_i(\mathbf{r}_R) & \mathbf{r}_R \in V. \end{cases} \quad (2.90)$$

Die Differenz der Ableitungen in Normalenrichtung ist nun äquivalent der anfangs eingeführten kontinuierlichen Quellendichte:

$$a(\mathbf{r}_F) \equiv \nabla_{\mathbf{n}} P_e(\mathbf{r}_F) - \nabla_{\mathbf{n}} P_i(\mathbf{r}_F). \quad (2.91)$$

Damit wird Gleichung (2.90) zu

$$P(\mathbf{r}_R) = \int_F a(\mathbf{r}_F) G(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_F) dF, \quad \mathbf{r}_R \in \mathbb{R}^{2,3}. \quad (2.92)$$

Ausgehend von einer kontinuierlichen Monopolverteilung auf F , kann damit der Schalldruck an einem beliebigen Punkt im Raum bestimmt werden. Diese Lösung ist gleichbedeutend mit der Formulierung des Einschichtenpotentials (*Single Layer Potential*) und der Rand-Diskontinuität (*Jump Relation*) [FN13]. Die Simple Source Formulation wird im weiteren Verlauf für die Bestimmung der Gegenfeldsynthese eingesetzt.

3. Wellenfeldanalyse

Aus dem vorangegangenen Kapitel sind das KHI und die Rayleigh-Integrale bekannt, um Schallfelder auf einer Hüllfläche oder Berandung zu erfassen oder zu synthetisieren. Dieses Kapitel stellt weitere Methoden zur Analyse akustischer Felder vor. Basierend auf der räumlichen Fourieranalyse werden die *Plane Wave Decomposition* PWD und die Zirkulare Harmonische Expansion eingeführt, die unter anderem auch zur Extrapolation akustischer Felder eingesetzt werden können.

3.1. Zeitbezogene Fouriertransformation

Vor der Analyse akustischer Signale mit drei räumlichen Freiheitsgraden und einer zeitlichen Abhängigkeit, soll zuerst ein eindimensionales Schalldrucksignal der Form $p(x,t)$ betrachtet werden. Die zeitliche Fouriertransformierte wurde bereits in Kapitel 2 verwendet und beschreibt ein gegebenes Zeitsignal im Frequenzbereich als eine infinite Überlagerung von komplexwertigen Harmonischen:

$$P(x,\omega) = \mathcal{F}_t \{p(x,t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.1)$$

Der Operator \mathcal{F}_t zeigt die Fouriertransformation bezüglich der zeitlichen Variable t an. $\omega = 2\pi f$ ist die Kreisfrequenz. Die inverse Fouriertransformierte \mathcal{F}_t^{-1} bezüglich der Zeit ist dann

$$p(x,t) = \mathcal{F}_t^{-1} \{P(x,\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,\omega)e^{j\omega t} dt. \quad (3.2)$$

In der Praxis wird in der Regel mit zeit- und wertdiskreten Messsignalen gearbeitet. So sollen hier noch die diskrete Fouriertransformation Discrete Fourier Transform (DFT) und die inverse DFT genannt werden, die ein zeitdiskretes Signal in den frequenzdiskreten Spektralbereich transformieren und umgekehrt:

$$P(x,\omega[l]) = \sum_{n=0}^{N_{\text{DFT}}-1} p(x,t[n])e^{-jln^{2\pi}/N_{\text{DFT}}}, \quad (3.3)$$

$$p(x,t[n]) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N_{\text{DFT}}-1} P(x,\omega[l])e^{jln^{2\pi}/N_{\text{DFT}}}. \quad (3.4)$$

Wie zu erkennen ist, wird eine endliche Anzahl N_{DFT} von zeitdiskreten Abtastpunkten $t[n]$ in die gleiche Anzahl an frequenzdiskreten Spektral-Linien $\omega[l]$ transformiert. Zur Berechnung der DFT und der inversen DFT steht ein schneller Algorithmus zur Verfügung, die Fast Fourier Transform (FFT) [CT65]. Dieser Algorithmus kann ebenso für die diskrete, räumliche Fouriertransformation eingesetzt werden, die nachfolgend beschrieben ist [HSVB03].

3.2. Räumliche Fouriertransformation

3.2.1. Räumliche Fouriertransformation in kartesischen Koordinaten

3.2.1.1. Eindimensionale Räumliche Fouriertransformation

Die räumliche Fouriertransformation stellt ein nützliches Hilfsmittel in der akustischen Signalverarbeitung dar. Sie bildet zudem die Grundlage der Plane Wave Decomposition PWD und findet Anwendung in der Zirkularen Harmonischen Expansion. Allgemein ist die räumliche Fouriertransformierte \mathcal{F}_x einer eindimensionalen Funktion $f(x)$ gegeben durch [Wil99; Sta97]

$$\tilde{F}(k_x) = \mathcal{F}_x \{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jk_x x} dx \quad (3.5)$$

und wird im Folgenden durch eine Tilde gekennzeichnet. Dabei ist es unerheblich, ob die zu transformierende Funktion im Zeit- oder im Frequenzbereich vorliegt, da zeitliche und räumliche Fouriertransformation separierbar sind [Spo05]. Daher ergeben sich folgende Transformationen nach Anwendung der räumlichen Fouriertransformation auf die eindimensionalen Funktionen $p(x,t)$ und $P(x,\omega)$:

$$\tilde{p}(k_x, t) = \mathcal{F}_x \{p(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) e^{jk_x x} dx, \quad (3.6)$$

$$\tilde{P}(k_x, \omega) = \mathcal{F}_x \{P(x, \omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, \omega) e^{jk_x x} dx. \quad (3.7)$$

Ebenso können auch die inversen Transformationen angegeben werden:

$$p(x, t) = \mathcal{F}_x^{-1} \{\tilde{p}(k_x, t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(k_x, t) e^{-jk_x x} dk_x, \quad (3.8)$$

$$P(x, \omega) = \mathcal{F}_x^{-1} \{\tilde{P}(k_x, \omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(k_x, \omega) e^{-jk_x x} dk_x. \quad (3.9)$$

Mit Hilfe von (3.9) kann eine Funktion $p(x)$ oder $P(x)$ des Ortes x als Überlagerung unendlich vieler Funktionen $\tilde{p}(k_x, t) e^{-jk_x x}$ beziehungsweise $\tilde{P}(k_x, \omega) e^{-jk_x x}$ der Wellenzahl k_x dargestellt werden. Man beachte, dass im Vergleich zur zeitbezogenen Fouriertrans-

formation das Minuszeichen im Exponenten der e -Funktion in der Rücktransformation zu finden ist. Diese Festlegung ist rein willkürlich.

Zur Veranschaulichung der räumlichen Fouriertransformation sei im Folgenden eine monofrequente, ebene Welle der Frequenz ω_0 gegeben

$$P(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\omega - \omega_0) e^{-j\omega\left(\frac{x}{c_{x,0}} + \frac{y}{c_{y,0}} + \frac{z}{c_{z,0}}\right)} = \delta(\omega - \omega_0) e^{-j\mathbf{k}_0 \mathbf{x}}. \quad (3.10)$$

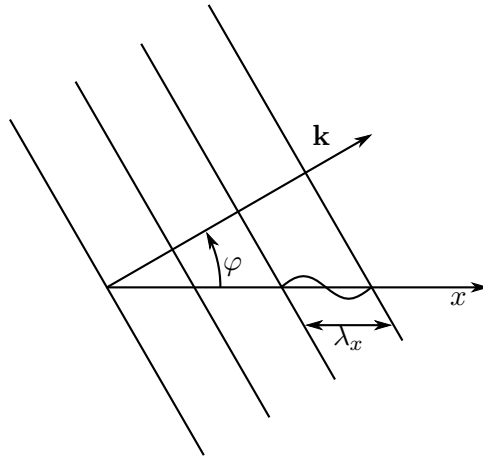


Abbildung 3.1.: Veranschaulichung der auf die x -Achse entfallenden Wellenlänge.

Diese Welle bewege sich mit der Phasengeschwindigkeit c durch ein isotropes Medium. Der Winkel φ liegt in der xy -Ebene und wird auf die x -Achse bezogen, der Winkel ϑ wird auf die z -Achse bezogen. Die auf die jeweiligen Achsen projizierten Phasengeschwindigkeiten haben dann die Werte:

$$c_x = \frac{c \cdot \sin \vartheta}{\cos \varphi}, \quad c_y = \frac{c \cdot \sin \vartheta}{\sin \varphi}, \quad c_z = \frac{c}{\cos \vartheta}. \quad (3.11)$$

Vergleiche hierzu auch Abbildung 3.1. Für die zu betrachtende ebene Welle gelte $f_0 = 300$ Hz, $\varphi_0 = 30^\circ$ und $\vartheta_0 = 90^\circ$. Daraus ergeben sich für eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von $c = 343$ ms $^{-1}$ die Wellenzahlen

$$k_{x,0} = k_0 \cos(\varphi_0) \approx 4,8 \text{ m}^{-1}, \quad k_{y,0} = k_0 \sin(\varphi_0) \approx 2,7 \text{ m}^{-1}, \quad k_{z,0} = k_0 \sin(\vartheta_0) = 0 \text{ m}^{-1}. \quad (3.12)$$

Anwenden der räumlichen Fouriertransformation nach (3.7) auf diese ebene, monochromatische Welle ergibt

$$\tilde{P}(k_x, \omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \delta(k_x - k_{x,0}) e^{jk_{y,0}y} e^{jk_{z,0}z}. \quad (3.13)$$

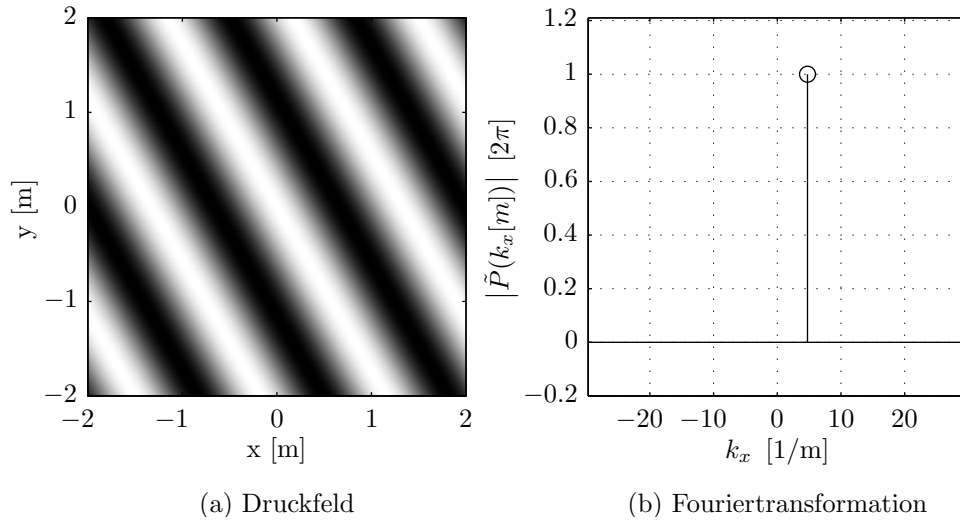


Abbildung 3.2.: a) Zweidimensionales Druckfeld einer ebenen Welle der Frequenz $f = 300$ Hz und dem Einfallswinkel $\varphi = 30^\circ$. b) Kontinuierliche räumliche Fouriertransformation der ebenen Welle.

Abbildung 3.2 zeigt die ebene Welle und deren räumliche Fouriertransformierte bezüglich der x -Achse. Da es sich um die Transformation einer monochromatischen Welle handelt, ist die Fouriertransformierte ein einzelner Dirac-Stoß an der Stelle $k_{x,0}$.

3.2.1.2. Zwei- und Dreidimensionale Räumliche Fouriertransformation in kartesischen Koordinaten

Die dreidimensionalen Fourier-Transformationspaare in kartesischen Koordinaten bezüglich der x -, y - und z -Komponenten eines Schallfeldes lauten

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}} \{p(\mathbf{x}, t)\} = \int_{\Omega \in \mathbb{R}^3} p(x, y, z, t) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} d\Omega, \quad (3.14)$$

$$\tilde{P}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}} \{P(\mathbf{x}, \omega)\} = \int_{\Omega \in \mathbb{R}^3} P(x, y, z, \omega) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} d\Omega, \quad (3.15)$$

mit $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$, $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ und $d\Omega = dx dy dz$. Entsprechend sind die inversen

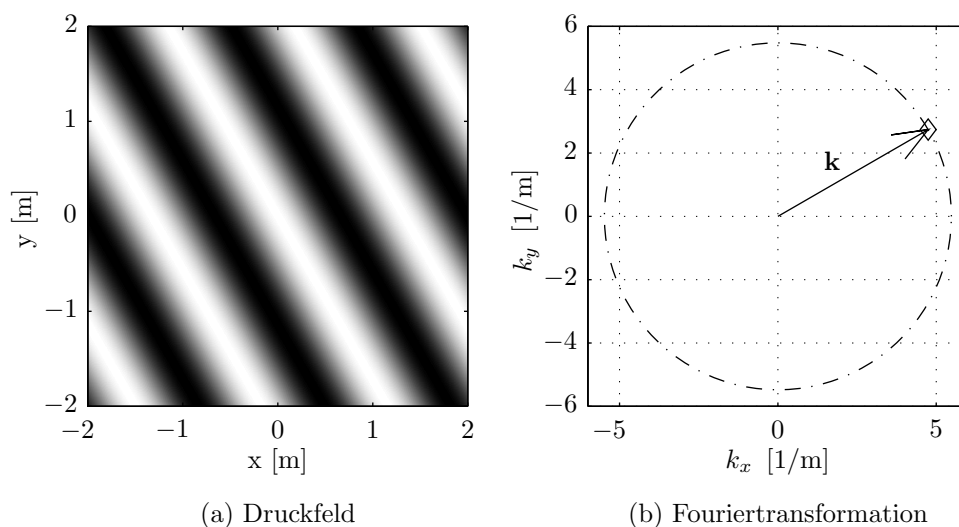


Abbildung 3.3.: a) Zweidimensionales Druckfeld einer ebenen Welle der Frequenz $f = 300$ Hz und dem Einfallswinkel $\varphi = 30^\circ$. b) Kontinuierliche räumliche Fouriertransformation der ebenen Welle (k -Space).

Transformationen gegeben durch

$$p(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}}^{-1} \{ \tilde{p}(\mathbf{k}, t) \} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{K \in \mathbb{R}^3} \tilde{p}(k_x, k_y, k_z, t) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dK, \quad (3.16)$$

$$P(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}}^{-1} \{ \tilde{P}(\mathbf{k}, \omega) \} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{K \in \mathbb{R}^3} \tilde{P}(k_x, k_y, k_z, \omega) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dK, \quad (3.17)$$

mit $dK = dk_x dk_y dk_z$.

Für die mehrdimensionale Fouriertransformation in kartesischen Koordinaten gelten Separierbarkeit sowie das Skalierungs- und das Faltungs-Theorem [Spo05]. Es kann also für jede Dimension separat transformiert werden. Daher resultiert die zweidimensionale Fouriertransformationen aus dem Fortlassen einer der räumlichen Abhängigkeiten in den Gleichungen (3.15) und (3.17).

Abbildung 3.3 (b) zeigt die dreidimensionale Fouriertransformierte

$$\tilde{P}(\mathbf{k}, \omega) = (2\pi)^3 \delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad (3.18)$$

der monofrequenten, ebenen Welle, die bereits im vorangegangenen Beispiel untersucht wurde. Da keine z -Abhängigkeit besteht, liegt \mathbf{k} vollständig in der k_x, k_y -Ebene. Der gestrichelte Kreis zeigt an, welche Werte der k -Vektor in Abhängigkeit der Ausbreitungsrichtung φ_0 der ebenen Welle annehmen kann. Käme zusätzlich eine z -abhängige

Ausbreitung hinzu, würde dieser Kreis in eine Kugel des Radius k übergehen. Die räumliche Fouriertransformation stellt eine Abbildung auf den Wellenzahl-Raum dar. Dieser wird folglich auch als k -Space bezeichnet [Wil99].

3.2.2. Diskrete Räumliche Fouriertransformation in kartesischen Koordinaten

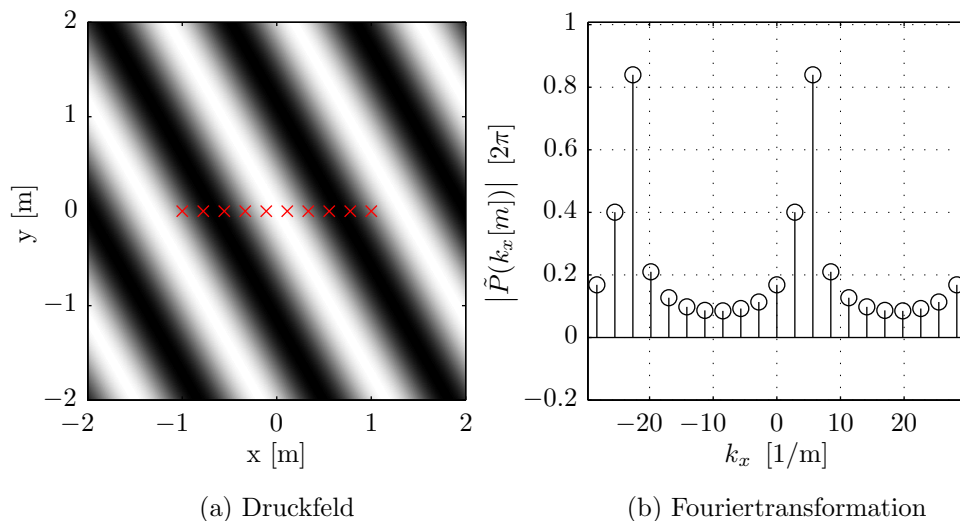


Abbildung 3.4.: a) Druckfeld einer ebenen Welle der Frequenz $f = 300$ Hz und dem Einfallswinkel $\varphi = 30^\circ$. Die räumlichen Abtastpunkte, die in die Fouriertransformation eingehen, sind rot markiert. b) Diskrete räumliche Fouriertransformation der ebenen Welle.

In der Praxis können die kontinuierlichen, räumlichen Fourierintegrale in der Regel nicht angewendet werden, da mit einer endlichen Anzahl von Messpunkten gearbeitet werden muss. Ausgehend von N_M Mikrofonen geht das eindimensionale, räumliche Fourierintegral in die Summenschreibweise

$$\tilde{P}(k_x[m], \omega) = \sum_{n=1}^{N_M} P(x[n], \omega) e^{jk_x[m]x[n]} \cdot \Delta x \quad (3.19)$$

über [Hul04]. Wie Gleichung (3.19) zudem zeigt, liegt gleichfalls eine Diskretisierung des k -Raumes in Form von $k_x[m]$ vor. Beträgt der Abstand der Mikrofone Δx , so kann der Abstand der Stützstellen des diskretisierten Wellenzahl-Vektors bestimmt werden mit

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{N_M \cdot \Delta x}. \quad (3.20)$$

Die inverse diskrete, räumliche Fouriertransformation in einer Dimension lautet für die gegebenen Parameter

$$P(x[n], \omega) = \sum_{m=1}^{N_M} \tilde{P}(k_x[m], \omega) e^{-jk_x[m]x[n]} \cdot \Delta k_x. \quad (3.21)$$

Übertragen auf den zweidimensionalen Fall ergeben sich somit folgende Transformationen

$$\tilde{P}(k_x[m_x], k_y[m_y], \omega) = \sum_{n_x=1}^{N_{M_x}} \sum_{n_y=1}^{N_{M_y}} P(x[n_x], y[n_y], \omega) e^{j[k_x[m_x]x[n_x] + k_y[m_y]y[n_y]]} \cdot \Delta x \Delta y, \quad (3.22)$$

$$P(x[n_x], y[n_y], \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m_x=1}^{N_{M_x}} \sum_{m_y=1}^{N_{M_y}} \tilde{P}(k_x[m_x], k_y[m_y], \omega) e^{-j[k_x[m_x]x[n_x] + k_y[m_y]y[n_y]]} \cdot \Delta k_x \Delta k_y. \quad (3.23)$$

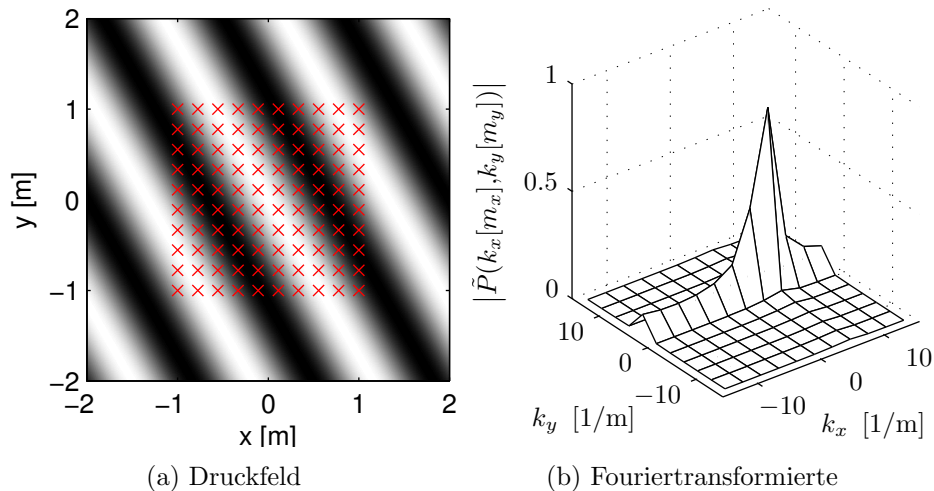


Abbildung 3.5.: a) Druckfeld einer ebenen Welle der Frequenz $f = 300$ Hz und dem Einfallswinkel $\varphi = 30^\circ$. Die räumlichen Abtastpunkte, die in die Fouriertransformation eingehen, sind rot markiert. b) Diskrete räumliche Fouriertransformation der ebenen Welle.

Auf die Darstellung der dreidimensionalen diskretisierten Form soll an dieser Stelle verzichtet werden. Die Erweiterung um eine z -Abhängigkeit erfolgt durch Ergänzen eines weiteren Summenterms in den beiden vorangegangenen Gleichungen.

3.2.3. Räumliche Fouriertransformation in Zylinder- und Polarkoordinaten

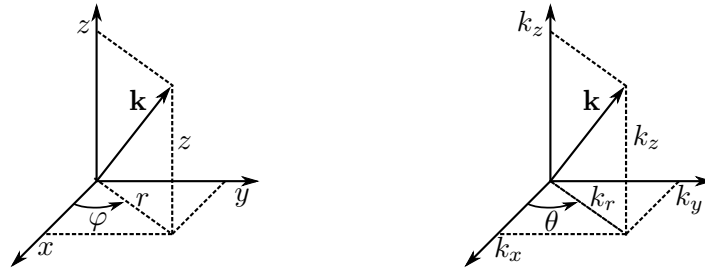


Abbildung 3.6.: Links: Ausbreitung einer ebenen Welle mit dem Wellenzahlvektor \mathbf{k} in kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten. Rechts: Die zugehörige Darstellung im Wellenzahl-Raum (k -Space).

Für zylindersymmetrische Problemstellungen bietet sich das Arbeiten in Zylinderkoordinaten an. Für dieses Koordinatensystem gilt

$$\mathbf{x}_Y = [r, \varphi, z]^T, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{k}_Y = [k_r, \theta, k_z]^T. \quad (3.25)$$

Man beachte, dass der Winkel θ im k -Bereich zwischen der k_x -Achse und der Projektion des Wellenzahlvektors k auf die k_x, k_y -Ebene liegt (Abb. 3.6). Der Bezug zum Ortsvektor in kartesischen Koordinaten ist

$$\mathbf{x}_Y = \left[\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), z \right]^T, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{x} = [r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z]^T, \quad (3.27)$$

sowie zum Wellenzahlvektor

$$\mathbf{k}_Y = \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \tan^{-1} \left(\frac{k_y}{k_x} \right), k_z \right]^T, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{k} = [k_r \cos(\theta), k_r \sin(\theta), k_z]^T. \quad (3.29)$$

Das Skalarprodukt $\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ kann nun wie folgt ausgedrückt werden

$$\mathbf{k}^T \mathbf{x} = k_r r [\cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi)] + k_z z = k_r r \cos(\theta - \varphi) + k_z z. \quad (3.30)$$

Das räumlichen Fourier-Transformationspaar in Zylinderkoordinaten für Drucksignale

im Frequenzbereich ist dann wie folgt definiert

$$\tilde{P}_Y(\mathbf{k}_Y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} P_Y(\mathbf{x}_Y, \omega) e^{j[k_r r \cos(\theta - \varphi) + k_z z]} r dr d\varphi dz, \quad (3.31)$$

$$P_Y(\mathbf{x}_Y, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{P}_Y(\mathbf{k}_Y, \omega) e^{-j[k_r r \cos(\theta - \varphi) + k_z z]} k_r dk_r d\theta dk_z. \quad (3.32)$$

In Zylinderkoordinaten gilt die Separierbarkeit nur für die z -Komponente. Die Skalierbarkeit gilt in Zylinderkoordinaten uneingeschränkt, ist jedoch aufgrund der Periodizität der φ -Komponente nur für die beiden übrigen Dimensionen sinnvoll.

Für kreissymmetrische Probleme entfällt die z -Abhängigkeit und anstelle der radialen Wellenzahl k_r kann die Wellenzahl k verwendet werden. Der Orts- und der k -Vektor werden reduziert zu

$$\mathbf{x}_P = [r, \varphi]^T, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{k}_P = [k, \theta]^T. \quad (3.34)$$

Das Fourier-Transformationspaar in Polarkoordinaten lautet dann abgeleitet von (3.31) und (3.32)

$$\tilde{P}_P(\mathbf{k}_P, \omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} P_P(\mathbf{x}_P, \omega) e^{jk r \cos(\theta - \varphi)} r dr d\varphi, \quad (3.35)$$

$$P_P(\mathbf{x}_P, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{P}_P(\mathbf{k}_P, \omega) e^{-jk r \cos(\theta - \varphi)} k dk d\theta. \quad (3.36)$$

3.2.4. Fourier-Reihendarstellung in Zylinder- und Polarkoordinaten

In Zylinder- und in Polarkoordinaten können die Funktion $P_Y(r, \varphi, z, \omega)$ und $P_P(r, \varphi, \omega)$ aufgrund ihrer 2π -Periodizität von φ für feste r als Fourier-Reihen dargestellt werden

$$P_Y(r, \varphi, z, \omega) = \text{FS}_{\varphi} \{P_{\nu}(r, z, \omega)\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} P_{\nu}(r, z, \omega) e^{j\nu\varphi}, \quad (3.37)$$

$$P_P(r, \varphi, \omega) = \text{FS}_{\varphi} \{P_{\nu}(r, \omega)\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} P_{\nu}(r, \omega) e^{j\nu\varphi}. \quad (3.38)$$

Darin bezeichnen FS_{φ} die Fourier-Reihenentwicklung bezüglich φ und ν die Kreisfrequenz oder auch die Ordnung und ist ein ganzzahliger Wert (siehe auch Kapitel 2.2.2). In Abbildung 2.4 sind die sich ergebenden Richtcharakteristika für den Term $e^{j\nu\varphi}$ in Abhängigkeit der Ordnung ν dargestellt. Mit steigender Ordnung, werden immer schmalere Bereiche ausselektiert, was die Beschreibung komplexer Wellenfelder erst ermöglicht. Die Schnelle in Normalenrichtung V_n ist gleichfalls als Reihenentwicklung in Zylinder-

und Polarkoordinaten darstellbar

$$V_{Y,n}(r,\varphi,z,\omega) = \text{FS}_\varphi \{V_{n,\nu}(r,z,\omega)\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V_{n,\nu}(r,z,\omega)e^{j\nu\varphi}, \quad (3.39)$$

$$V_{P,n}(r,\varphi,\omega) = \text{FS}_\varphi \{V_{n,\nu}(r,\omega)\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V_{n,\nu}(r,\omega)e^{j\nu\varphi}. \quad (3.40)$$

Die Expansions-Koeffizienten für die einzelnen Reihenelemente werden dabei wie folgt bezüglich φ bestimmt

$$P_\nu(r,z,\omega) = \text{FS}_\varphi^{-1} \{P_Y(r,\varphi,z,\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_Y(r,\varphi,z,\omega)e^{-j\nu\varphi} d\varphi, \quad (3.41)$$

$$P_\nu(r,\omega) = \text{FS}_\varphi^{-1} \{P_P(r,\varphi,\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_P(r,\varphi,\omega)e^{-j\nu\varphi} d\varphi, \quad (3.42)$$

$$V_{n,\nu}(r,z,\omega) = \text{FS}_\varphi^{-1} \{V_{Y,n}(r,\varphi,z,\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{Y,n}(r,\varphi,z,\omega)e^{-j\nu\varphi} d\varphi, \quad (3.43)$$

$$V_{n,\nu}(r,\omega) = \text{FS}_\varphi^{-1} \{V_{P,n}(r,\varphi,\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{P,n}(r,\varphi,\omega)e^{-j\nu\varphi} d\varphi. \quad (3.44)$$

Die Fourier-Reihenentwicklungen werden im Folgenden für die Plane Wave Decomposition PWD und für die Herleitung der Zirkularen Harmonischen Expansionskoeffizienten verwendet.

3.3. Plane Wave Decomposition

Die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellte räumliche Fouriertransformation bildet die Grundlage der *Plane Wave Decomposition* (PWD). Die PWD bietet die Möglichkeit, akustische Wellenfelder vollständig durch die richtungsabhängige Überlagerung ebener Wellen zu beschreiben und geht zurück auf [BVH01]. Anhand dieser Beschreibung kann ein gegebenes akustisches Feld unter bestimmten Umständen wiederum an einen beliebigen Ort im Raum extrapoliert werden. Zudem können Aussagen über die Orientierung und Richtungsabhängigkeit einzelner Komponenten eines gegebenen Feldes getroffen werden [Ver97]. Im Allgemeinen wird die PWD mit der PWD in Polarkoordinaten gleichgesetzt. Dennoch soll aufgrund der Anschaulichkeit zuerst die Dekomposition in kartesischen Koordinaten entlang der x -Achse vorgestellt werden.

3.3.1. Kontinuierliche Plane Wave Decomposition in kartesischen Koordinaten

Es sei eine eben Welle mit der spektralen Quellfunktion $\hat{P}(\omega)$ gegeben

$$P(x,\omega) = \hat{P}(\omega)e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (3.45)$$

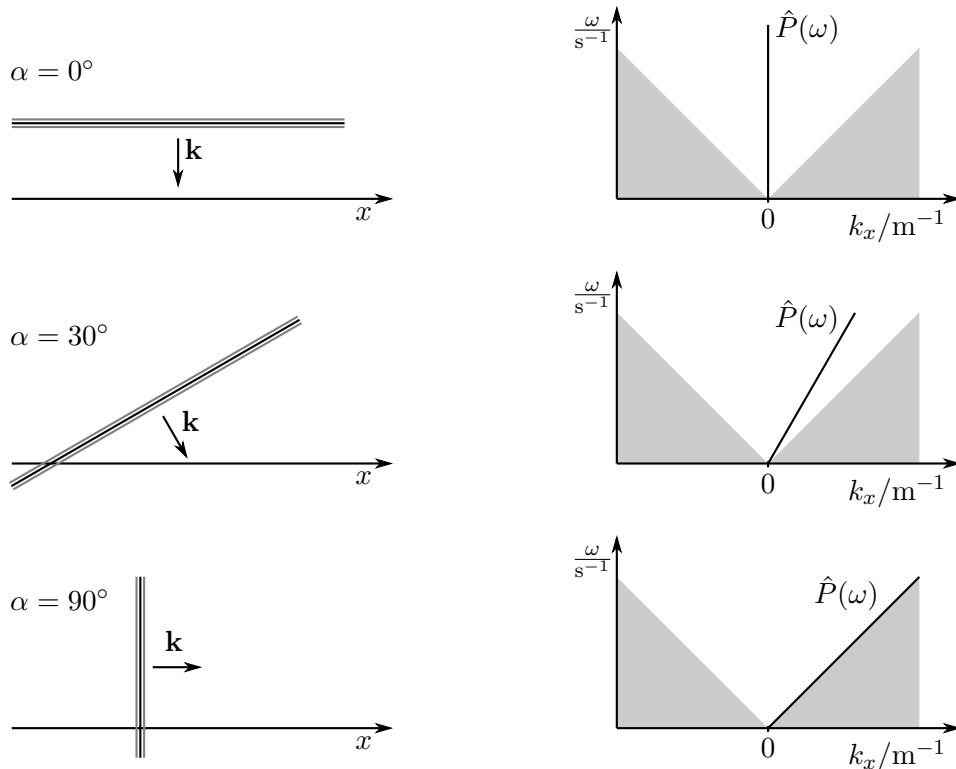


Abbildung 3.7.: Kontinuierliche Plane Wave Decomposition für verschiedene Einfallswinkel einer ebenen Welle mit dem Quellspektrum $\hat{P}(\omega)$. Die grauen Bereiche in der (k_x, ω) -Ebene sind die Bereiche der evaneszenten Wellenausbreitung.

Wird diese Welle entlang der x -Achse nach Gleichung (3.7) ausgewertet, ergibt dies

$$\tilde{P}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi \hat{P}(\omega) \delta(k_x - \omega/c_x) e^{-j(k_y y + k_z z)}. \quad (3.46)$$

Demnach wird aufgrund der Ausblendeigenschaft des Dirac-Stoßes das Spektrum $\hat{P}(\omega)$ der ebenen Welle auf eine Gerade in der (k_x, ω) -Ebene abgebildet [Hul04]. Der Winkel der Geraden in der (k_x, ω) -Ebene ist proportional zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Die räumliche Fouriertransformation zerlegt demnach das akustische Feld in seine ebenen Wellenanteile. Abbildung 3.7 stellt die PWD auf der x -Achse schematisch dar. Für den ersten Fall verläuft die Wellenfront parallel zur x -Achse und der gemeinsame Winkel α ist gleich 0° . Das Quellspektrum $\hat{P}(\omega)$ wird dann auf eine senkrechte Gerade in der (k_x, ω) -Ebene abgebildet. Für Ausbreitungsrichtungen der ebenen Welle mit $\alpha \neq 0^\circ$, verlagert sich auch die Gerade im Orts-Frequenz-Bereich bis maximal 45° . Dort beginnt der Bereich der evaneszenten (abklingenden) Wellenausbreitung, der in den Abbildungen als graue Dreiecke dargestellt ist. Evaneszente Wellen treten zum Beispiel bei Totalreflexion an Grenzflächen auf und werden in [Wil99] behandelt.

3.3.2. Diskrete Plane Wave Decomposition in kartesischen Koordinaten

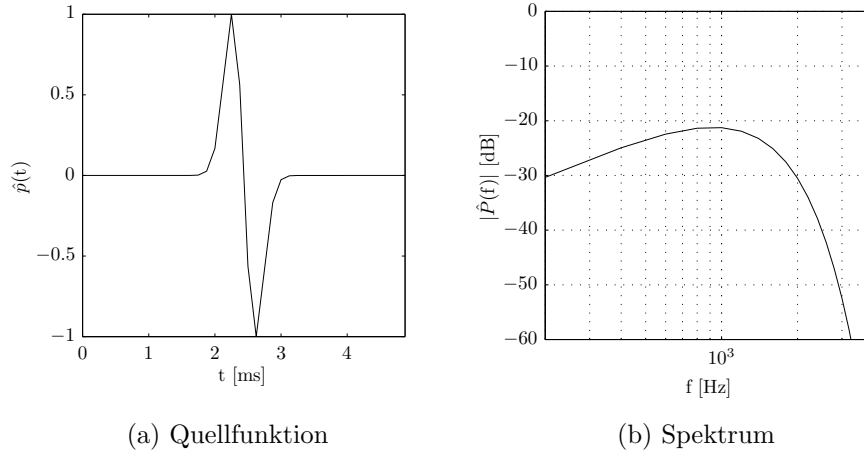


Abbildung 3.8.: Quellfunktion $\hat{p}(t)$ und das zugehörige Betragsspektrum $|\hat{P}(f)|$ der ebenen Welle.

Zur Veranschaulichung der diskreten PWD soll nun eine ebene Welle unter drei verschiedenen Einfallswinkeln durch ein diskretes Mikrofon-Array mit omnidirektionalen Empfängern abgetastet werden. Die Quellfunktion $\hat{p}(t)$ der ebenen Welle ist ein Gauß-Wavelet der Ordnung 1, entsprechend Abbildung 3.8 (a). Die von den Mikrofonen empfangenen Signale werden per FFT in den Frequenzbereich transformiert und anschließend mit Gleichung (3.19) in den Raum-Frequenzbereich überführt. Abbildung 3.9 zeigt wie schon in Abbildung 3.7 für die drei Winkel $\alpha = 0^\circ$, 30° und 90° diesen Vorgang. In der linken Spalte ist jeweils eine Momentaufnahme der ebenen Wellenausbreitung und die Lage des Mikrofon-Arrays zu sehen. Das Array ist 2 m lang und besteht aus 20 omnidirektionalen Empfängern. In der mittleren Spalte sind die zugehörigen Mikrofon-signale aufgetragen. Die x -Achse zeigt die Mikrofon-Position, die y -Achse die Zeit an. In der rechten Spalte ist das Ergebnis der diskreten Raum-Frequenz-Transformation zu sehen. Darin ist der Wert 0 der Farbe Weiß und der Wert 1 der Farbe Schwarz zugeordnet. Man beachte, dass sich das Spektrum $\hat{P}(f)$ aus Abbildung 3.8 (b) in der Stärke der Graufärbung wiederfindet.

Zu erkennen sind vor allem drei Phänomene: Aufgrund der örtlichen Diskretisierung ist die (k_x, f) -Funktion keine gerade Linie, sondern eher eine Art Treppenfunktion. In 3.9 (b) und (c) ist der Leakage-Effekt durch die endliche Mess-Apertur gut zu erkennen, da auch Bereiche seitlich der Spektrallinien eingefärbt sind. Durch die Periodizität der diskreten Fouriertransformation wiederholt sich das Spektrum. Dieser Effekt ist besonders ausgeprägt in Abbildung 3.9 (c). So würde die diskrete PWD ab 4 kHz fälschlicherweise Wellenanteile darstellen, die sich entgegengesetzt der eigentlichen Wellenausbreitung bewegen. Die Periode ist, wie aus der zeitbezogenen Fouriertransformation bekannt, durch die Anzahl der Abtastpunkte bestimmt.

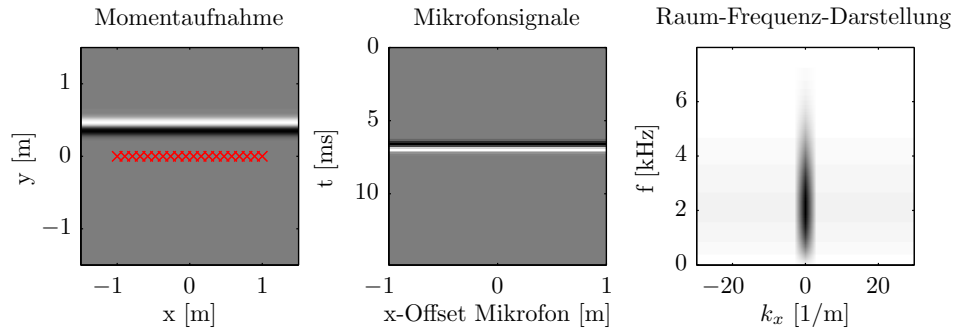
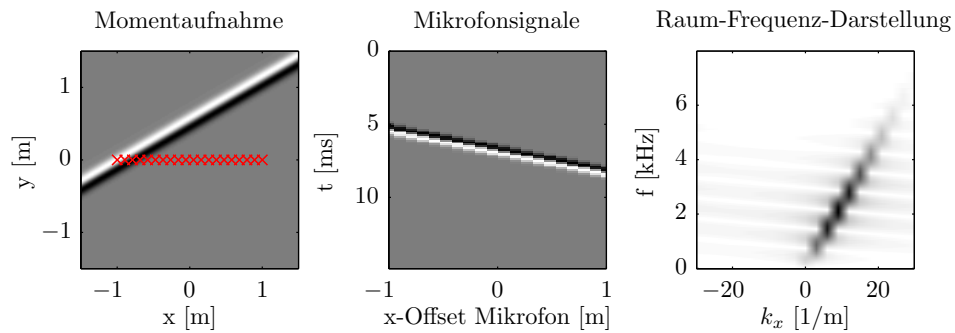
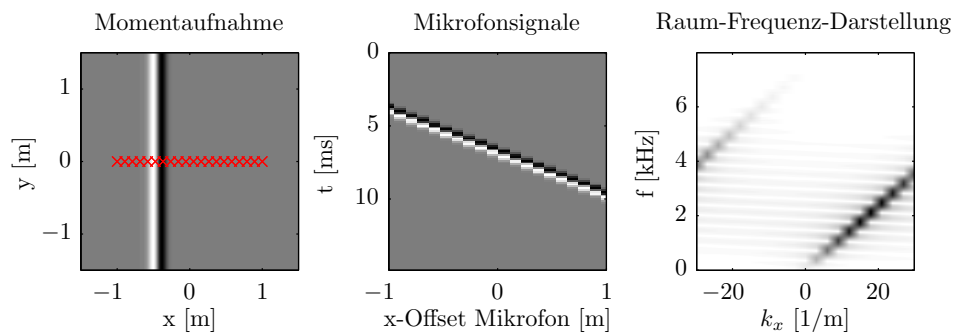
(a) $\alpha = 0^\circ$ (b) $\alpha = 30^\circ$ (c) $\alpha = 90^\circ$

Abbildung 3.9.: Diskrete, eindimensionale PWD mit einem Mikrofon-Array der Länge 2 m bestehend aus 20 Empfängern. Linke Spalte: Momentaufnahme der ebenen Welle. Die roten Kreuze stellen die Mikrofonpositionen dar. Mittlere Spalte: Die zugehörigen Mikrofonsignale. Rechte Spalte: Darstellung im (k_x, f) -Diagramm. In c), rechte Spalte sind die Wiederholungen im räumlichen Spektralbereich aufgrund der Periodizität der diskreten Fouriertransformation zu sehen.

Daher wiederholt sich die Wellenzahldarstellung mit der Anzahl der Mikrofone N_M , also der Periode

$$\Delta k_{Per} = N_M. \quad (3.47)$$

Die obere Grenzfrequenz für die diskrete Abtastung durch ein linienförmiges Mikrofon-Array mit dem Mikrofon-Abstand Δx beträgt analog zum Nyquist-Kriterium für zeitbezogene Signalverarbeitung [Sta97]

$$f_{max} \leq f_{al} = \frac{k_{max} \cdot c}{2\pi} = \frac{c}{2 \cdot \Delta x}. \quad (3.48)$$

Oberhalb der räumlichen Aliasing-Frequenz f_{al} treten Artefakte im abgetasteten Signal auf. Da jedoch die auf die x -Achse projizierte Wellenlänge λ_x größer als die Wellenlänge λ ist und diese vom Einfallswinkel der eintreffenden Welle abhängen, sollte die Aliasing-Grenze auch in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α der Wellenfront gegenüber der x -Achse angegeben werden. So gilt für die Abtastung auf der x -Achse

$$f_{max} \leq f_{al} = \frac{c}{2\Delta x \sin(\alpha)}. \quad (3.49)$$

Demnach handelt es sich bei (3.48) um eine Abschätzung für den ungünstigsten Fall, wenn die Welle genau in Richtung der Abtastung läuft. In Abbildung 3.9 entspräche dies dem Einfallswinkel $\alpha = 90^\circ$. Zur Unterdrückung des Aliasing-Effekts können neben entsprechender Aliasing-Filter, wie aus der Signalverarbeitung bekannt [Opp96], auch Mikrofone mit einer ausgeprägten Richtcharakteristik verwendet werden [Ver97].

3.3.3. Kontinuierliche Plane Wave Decomposition in Zylinder- und Polar-Koordinaten

In einem komplexen akustischen Feld überlagert sich eine Vielzahl ebener Wellen, die unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen besitzen und jeweils durch eine zugehörige Quellfunktion definiert sind. Es ist daher sinnvoll, die Expansions-Koeffizienten der PWD in Zylinder- oder Polarkoordinaten darzustellen. Nach [Spo05] ist die PWD in Zylinderkoordinaten wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \bar{P}(\theta, k_z, \omega) &= \mathcal{P}_3 \{ P_Y(\mathbf{x}_Y, \omega) \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} P_Y(\mathbf{x}_Y, \omega) e^{j[k_r r \cos(\theta - \varphi) + k_z z]} r dr d\varphi dz. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Der Operator \mathcal{P}_D bezeichnet die PWD für die Dimension D und das Ergebnis der Transformation sind die Expansions-Koeffizienten der $\bar{P}(\theta, k_z, \omega)$. Gleichung (3.50) entspricht im Grunde Gleichung (3.32), der räumlichen Fouriertransformation in Zylinderkoordinaten. Jedoch beschränkt sich die PWD in der azimutalen Ebene auf den Winkel θ .

Zum einen, weil k_r nach

$$k_r^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2 \quad (3.51)$$

bereits implizit enthalten ist und zum anderen, weil die Expansions-Koeffizienten der PWD gerade das Schallfeld winkelabhängig beschreiben sollen.

Die inverse PWD kann ebenso anhand der inversen Fouriertransformation in Zylinderkoordinaten hergeleitet werden, wobei das Integral über dk_r mit (3.51) vernachlässigt werden kann [Spo05]

$$P_Y(\mathbf{x}_Y, \omega) = \mathcal{P}_3^{-1} \left\{ \bar{P}(\theta, k_z, \omega) \right\} = \frac{k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \bar{P}(\theta, k_z, \omega) e^{-j[k_r r \cos(\theta-\varphi) + k_z z]} d\theta dk_z. \quad (3.52)$$

In Polarkoordinaten sind die Transformationspaare der PWD gegeben durch

$$\bar{P}(\theta, \omega) = \mathcal{P}_2 \{ P_P(\mathbf{x}_P, \omega) \} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} P_P(\mathbf{x}_P, \omega) e^{jkr \cos(\theta-\varphi)} r dr d\varphi, \quad (3.53)$$

$$P_P(\mathbf{x}_P, \omega) = \mathcal{P}_2^{-1} \left\{ \bar{P}(\theta, \omega) \right\} = \frac{k}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \bar{P}(\theta, \omega) e^{-jkr \cos(\theta-\varphi)} d\theta. \quad (3.54)$$

Da für die meisten Anwendungen in der Praxis die zweidimensionale Dekomposition ausreichend ist, wird in der Regel Gleichung (3.53) als PWD bezeichnet. Um von der räumlichen Fouriertransformierten in kartesischen Koordinaten zu den Expansions-Koeffizienten der PWD zu gelangen, muss die Transformierte zunächst mit (3.25) in Zylinder- oder Polarkoordinaten dargestellt werden. Liegt die Fouriertransformierte einmal in einem dieser Koordinatensysteme vor, können die Expansions-Koeffizienten der PWD mit

$$\bar{P}(\theta, k_z, \omega) = \tilde{P}_Y(\theta, k_r, k_z, \omega) \delta(k_r - \sqrt{(\omega/c)^2 - k_z^2}) \quad (3.55)$$

bestimmt werden [Spo05].

3.3.4. Plane Wave Decomposition in Polar-Koordinaten anhand des Kirchhoff-Helmholtz Integrals

In [BVH01] ist die Herleitung der PWD in Polarkoordinaten anhand des zweidimensionalen KHI beschrieben. Es wird dabei von einem Kreis des Radius R um den Koordinaten-Ursprung ausgegangen, auf dem Druck- und Schnellesignale empfangen werden (siehe Abbildung 3.10). Anwenden des KHI führt zum Druck $P(\mathbf{o}, \omega)$ im Ur-

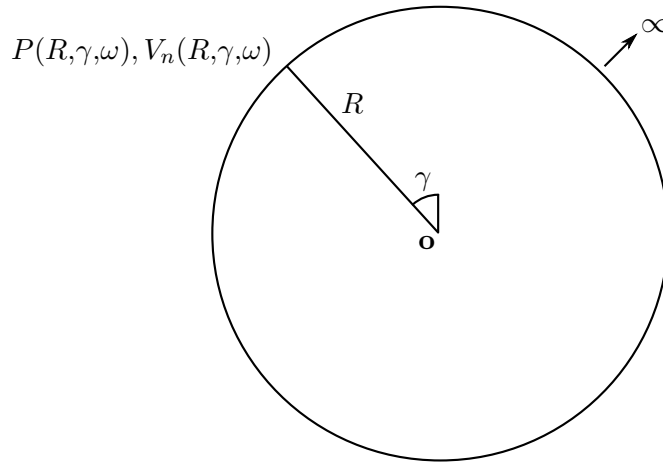


Abbildung 3.10.: Lösungsgebiet zur Herleitung der PWD in Polarkoordinaten mithilfe des KHI.

sprung

$$P(\mathbf{o}, \omega) = \frac{-jk}{4} \int_0^{2\pi} P(R, \gamma, \omega) H_1^{(2)}(kR) R d\gamma + \frac{-jk}{4} \int_0^{2\pi} j\rho c V_n(R, \gamma, \omega) H_0^{(2)}(kR) R d\gamma. \quad (3.56)$$

Als nächstes wird die Fernfeld-Approximation für $kr \gg 1$ der Hankelfunktion zweiter Art herangezogen

$$H_n^{(2)}(kr) \approx j^n \frac{1+j}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}} \quad (3.57)$$

und davon Gebrauch gemacht, dass im Fernfeld die Schnelle in Normalenrichtung näherungsweise aus dem Druck gewonnen werden kann

$$V_n \approx \frac{1}{\rho c} P. \quad (3.58)$$

Wird diese Vereinfachungen auf das zweidimensionale Kirchhoff-Helmholtz Integral (3.56) angewendet, ergibt sich

$$P(\mathbf{o}, \omega) = \frac{1+j}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{2\pi} P(R, \gamma, \omega) \sqrt{kR} e^{-jkR} d\gamma. \quad (3.59)$$

Um den Beitrag auf R in eine Überlagerung ebener Wellen zu überführen, muss gelten

$R \rightarrow \infty$. Daraus folgt die PWD in Polarkoordinaten

$$\bar{P}(\gamma, \omega) = \frac{1+j}{\sqrt{4\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} P(R, \gamma, \omega) \sqrt{kR} e^{-jkR}. \quad (3.60)$$

Anhand von Gleichung (3.60) ist gut zu erkennen, wie die PWD im Koordinatensprung das Schallfeld zirkular abtastet.

3.3.5. Expansions-Koeffizienten für linienförmige Mikrofon-Arrays

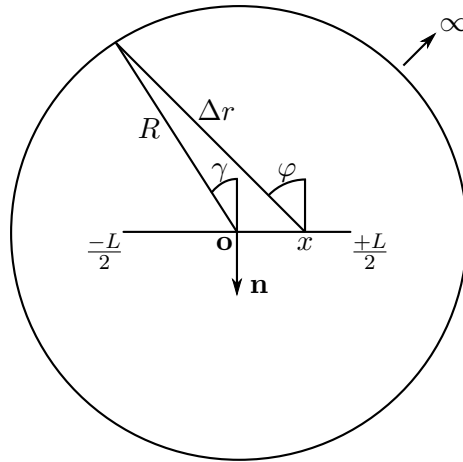


Abbildung 3.11.: Lösungsgebiet zur Bestimmung der Expansions-Koeffizienten der PWD anhand von Messsignalen auf der x -Achse.

In [Hul04] findet sich die Herleitung der PWD Expansions-Koeffizienten für die Abtastung eines Schallfeldes mit linearen Mikrofon-Arrays. Es wird dabei von einem Array der Länge L auf der x -Achse ausgegangen, auf dem Druck- und Schnellesignale erfasst werden. Das inverse KHI bietet dann die Möglichkeit, den Druck auf einen Kreis des Radius R um den Ursprung zu extrapolieren (Extrapolations-Kreis). Die Anordnung ist in Abbildung 3.11 dargestellt. Man beachte, dass die Winkel γ und φ sich auf den negativen Normalenvektor \mathbf{n} beziehen. Die Schnellempfänger sind demnach in Abbildung 3.11 nach oben gerichtet. Ist Δr der Verbindungsvektor von einem Punkt auf der x -Achse zu einem Aufpunkt auf dem Extrapolations-Kreis, ist das inverse KHI gleich [Hul04]

$$P(R, \gamma, \omega) = \frac{-jk}{4} \int_L j\rho c V_n(x, \omega) H_0^{(1)}(k\Delta r) dL + \frac{-jk}{4} \int_L P(x, \omega) \cos \varphi H_1^{(1)}(k\Delta r) dL. \quad (3.61)$$

Es werden folgende Fernfeld-Näherungen herangezogen

$$H_n^{(1)}(kr) \approx (-j)^n \frac{1-j}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{jkr}}{\sqrt{kr}}, \quad (3.62)$$

$$\cos \varphi \approx \cos \gamma, \quad (3.63)$$

$$\Delta r \approx R + x \sin \gamma. \quad (3.64)$$

Dadurch wird Gleichung (3.61) zu

$$P(R, \gamma, \omega) = \frac{k(1-j)}{4\sqrt{\pi}} \int_L (\rho c V_n(x, \omega) + \cos \gamma P(x, \omega)) \frac{e^{jkR} e^{jx \sin \gamma}}{\sqrt{kR + kx \sin \gamma}} dL. \quad (3.65)$$

Einsetzen in (3.60) ergibt die Extrapolationskoeffizienten der PWD für ein lineares Mikrofon-Array aus Druck- und Schnellempfängern:

$$\bar{P}(\gamma, \omega) = \frac{k}{4\pi} \int_L (\rho c V_n(x, \omega) + \cos \gamma P(x, \omega)) e^{jxk \sin \gamma} dL. \quad (3.66)$$

Es ist zu beachten, dass diese Gleichung geringe Abweichungen zu der entsprechenden Gleichung in [Hul04] oder [HSVB03] enthält.

In Abbildung 3.12 ist die PWD für eine ebene Welle unter dem Einfallswinkel $\gamma = 45^\circ$ dargestellt. Die Welle besitzt die Quellfunktion $\hat{P}(\omega)$ aus Abbildung 3.8. Die linke Abbildung zeigt die 100 Mikrofon-signale des 4 m langen Mikrofon-Arrays. In der Mitte ist die PWD im Zeitbereich dargestellt und die rechte Seite zeigt die spektrale PWD.

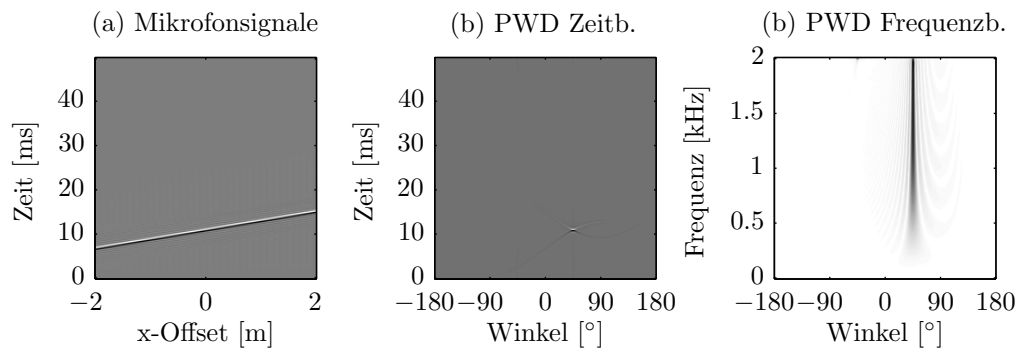


Abbildung 3.12.: PWD mit einem linienförmigen Mikrofon-Array. Die ebene Welle trifft unter einem Winkel von 45° auf das Array. (a) Die Mikrofon-signale. (b) Die Plane Wave Decomposition im Zeitbereich (Peak bei 45° und 10 ms). (c) Die Plane Wave Decomposition im Frequenzbereich.

3.3.6. Expansions-Koeffizienten für ein kreisförmiges Mikrofon-Array

In [BVH01], [HSVB03], [Hul04] und [Spo05] ist bereits beschrieben, dass mit einem kreisförmigen Mikrofon-Array und dem KHI die Expansions-Koeffizienten der PWD nicht bestimmt werden können. Der Grund dafür ist, dass das KHI das Feld nur für das Innere des Mikrofon-Arrays bestimmen kann, nicht aber für den Bereich außerhalb. Dies wäre jedoch für die PWD und Gleichung (3.60) notwendig. Für kreisförmige Mikrofon-Arrays bietet sich daher die Zirkulare Harmonische Expansion an, die im folgenden Abschnitt beschrieben ist.

3.4. Zirkulare Harmonische Expansion

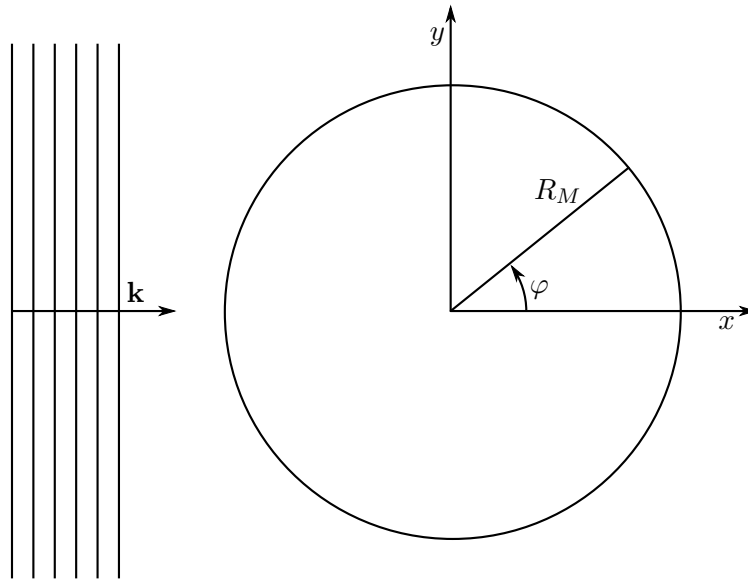


Abbildung 3.13.: Lösungsgebiet für die Zirkulare Harmonische Extrapolation mit einfallender ebener Welle in Polarkoordinaten. Die kreisförmige Messanordnung besitzt den Radius R_M .

Ein zweidimensionales Wellenfeld kann durch Zirkulare Harmonische beschrieben werden. Es folgt daher die Bestimmung der Zirkularen Harmonischen Expansions-Koeffizienten zur Analyse des Schallfeldes durch eine kreisförmige Messanordnung.

In Kapitel 2 wurde mit Gleichung (2.32) die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung in Polarkoordinaten als Zirkulare Harmonische Zerlegung dargestellt:

$$P_P(r, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\varphi} \left[A_\nu(\omega) H_\nu^{(1)}(kr) + B_\nu(\omega) H_\nu^{(2)}(kr) \right] \quad (3.67)$$

Die bisher nicht näher bestimmten Koeffizienten-Funktionen A_ν und B_ν beschreiben jeweils die konvergierenden und die divergierenden Wellenanteile der zirkularen Zerlegung. Diese Koeffizienten-Funktionen werden für die folgende Herleitung umbenannt beziehungsweise ersetzt. Dies geschieht aus folgendem Grund: Ein beliebiges zweidimensionales Schallfeld soll mit Hilfe einer kreisförmigen Messanordnung erfasst und durch Zirkulare Harmonische beschrieben werden. Den Zusammenhang zwischen den Zirkularen Harmonischen und den Messsignalen stellen die Koeffizienten-Funktionen her, die Zirkularen Harmonischen Expansionskoeffizienten $\mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega)$ und $\mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega)$ [Hul04]:

$$P_P(r, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\varphi} \left[\mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega) H_\nu^{(1)}(kr) + \mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega) H_\nu^{(2)}(kr) \right]. \quad (3.68)$$

Unter Verwendung der Bewegungsgleichung (2.1) kann ebenso die zweidimensionale Lösung der homogenen Wellengleichung für die Schnelle angegeben werden. Zuvor wird die Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten übertragen und eine Beschränkung der Schnelle auf ihre einwärts zeigende Komponente $V_{P,n}$ vorgenommen:

$$\frac{\partial P_P}{\partial r} = j\omega\rho V_{P,n}. \quad (3.69)$$

Einsetzen in (3.68) liefert

$$j\rho c V_{P,n}(r, \varphi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\varphi} \left[\mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega) H_\nu^{\prime(1)}(kr) + \mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega) H_\nu^{\prime(2)}(kr) \right]. \quad (3.70)$$

Darin sind die Ableitungen der Hankelfunktionen folgendermaßen definiert [AS65]

$$H_\nu^{\prime(1)} = \frac{1}{2} \left[H_{\nu-1}^{(1)} - H_{\nu+1}^{(1)} \right], \quad (3.71)$$

$$H_\nu^{\prime(2)} = \frac{1}{2} \left[H_{\nu-1}^{(2)} - H_{\nu+1}^{(2)} \right]. \quad (3.72)$$

Zur expliziten Formulierung von $\mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega)$ und $\mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega)$ werden die Fourier-Reihendarstellungen des Drucks (3.38) und der Schnelle (3.40) gegenüber φ auf der kreisförmigen Messanordnung mit dem Radius R_M herangezogen

$$P_P(R_M, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} P_\nu(R_M, \omega) e^{j\nu\varphi}, \quad (3.73)$$

$$V_{P,n}(R_M, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V_{n,\nu}(R_M, \omega) e^{j\nu\varphi}. \quad (3.74)$$

Werden die beiden zuletzt genannten Beziehungen in (3.68) und (3.70) eingesetzt, re-

sultiert daraus

$$P_\nu(R_M, \omega) e^{j\nu\varphi} = \mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega) H_\nu^{(1)}(kR_M) e^{j\nu\varphi} + \mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega) H_\nu^{(2)}(kR_M) e^{j\nu\varphi}, \quad (3.75)$$

$$j\rho c V_{n,\nu}(R_M, \omega) e^{j\nu\varphi} = \mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega) H_\nu^{\prime(1)}(kR_M) e^{j\nu\varphi} + \mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega) H_\nu^{\prime(2)}(kR_M) e^{j\nu\varphi}. \quad (3.76)$$

Weiteres Umformen nach $\mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega)$ und $\mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega)$ liefert nun die Zirkularen Harmonischen Expansionskoeffizienten

$$\mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega) = \frac{H_\nu^{\prime(2)}(kR_M) P_\nu(R_M, \omega) - H_\nu^{(2)}(kR_M) j\rho c V_{n,\nu}(R_M, \omega)}{H_\nu^{(1)}(kR_M) H_\nu^{\prime(2)}(kR_M) - H_\nu^{(2)}(kR_M) H_\nu^{\prime(1)}(kR_M)}, \quad (3.77)$$

$$\mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega) = \frac{H_\nu^{\prime(1)}(kR_M) P_\nu(R_M, \omega) - H_\nu^{(1)}(kR_M) j\rho c V_{n,\nu}(R_M, \omega)}{H_\nu^{(2)}(kR_M) H_\nu^{\prime(1)}(kR_M) - H_\nu^{(1)}(kR_M) H_\nu^{\prime(2)}(kR_M)}. \quad (3.78)$$

Diese Expansionskoeffizienten ermöglichen die Beschreibung des gesamten Schallfeldes als Zirkulare Harmonische und die Extrapolation an einen beliebigen Ort (siehe Kapitel 3.4).

In [Hul04] findet sich eine Vereinfachung der Zirkularen Harmonischen Expansionskoeffizienten für den Fall, dass sich Schallquellen ausschließlich außerhalb der Kreisförmigen Messanordnung befinden. In dieser Situation sind $\mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega)$ und $\mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega)$ gleich und es kann ein einziger Zirkularer Harmonischer Expansionskoeffizient definiert werden, für den gilt

$$\mathcal{M}_\nu(\omega) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{M}_\nu^{(1)}(\omega) + \mathcal{M}_\nu^{(2)}(\omega) \right) = \frac{1}{2} (P_\nu(R_M, \omega) + \rho c V_{n,\nu}(R_M, \omega)). \quad (3.79)$$

Mit den Gleichungen (3.77) und (3.78) folgt dann für eine rein externe Quellenverteilung der Zirkulare Harmonische Expansionskoeffizient [Hul04]

$$\mathcal{M}_\nu(\omega) = \frac{\frac{1}{2} (P_\nu(R_M, \omega) + \rho c V_{n,\nu}(R_M, \omega))}{H_\nu^{(1)}(kR_M) + H_\nu^{(2)}(kR_M) - jH_\nu^{\prime(1)}(kR_M) - jH_\nu^{\prime(2)}(kR_M)}. \quad (3.80)$$

4. Wellenfeldextrapolation: Neue Ansätze der Primärfeld-Prädiktion

Im vorangegangenen Kapitel wurden Methoden vorgestellt, akustische Wellenfelder zu analysieren. Auf Grundlage dieser Analyseverfahren wird in dem nun folgenden Kapitel gezeigt, wie anhand von Mikrofon-Messungen Schallfelder an beliebige Orte im Raum extrapoliert werden können. Dies ist wiederum die Voraussetzung für die Synthese von akustischen Sekundärfeldern, die der aktiven Unterdrückung von Lärm dienen können (ANC), oder die Reproduktion akustischer Darbietungen per WFS oder High Order Ambisonics (HOA) ermöglichen. Da die Extrapolation in den vorherigen Arbeiten zum zweidimensionalen ANC-System ausschließlich auf dem Kirchhoff-Helmholtz Integral beruhten [Tri03], sollen in diesem Kapitel zusätzliche Wege der Extrapolation aufgezeigt und auf ihre Tauglichkeit untersucht werden. Sämtliche Untersuchungen beschränken sich dabei auf zweidimensionale Schallfeld-Simulationen.

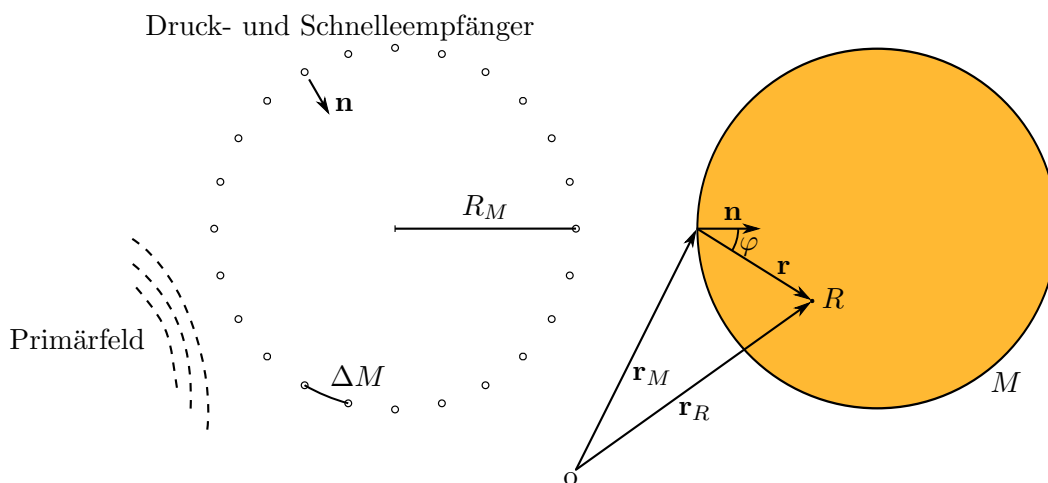


Abbildung 4.1.: Die in den Simulationen verwendete Array-Geometrie für den kreisförmigen Aufbau. Links: Das kreisförmige Mikrofon-Array des Radius R_M mit $N_M = 24$ Druck- und Schnelleempfängern. Rechts: Die kontinuierliche Anordnung mit den Orts- und Verbindungsvektoren. Die Ausrichtung der Schnellemikrofone ist $-\mathbf{n}$.

Im Fokus stehen zwei Messanordnungen: Das kreisförmige und das linienförmige Mikrofon-Array. Die zugrunde gelegten, simulierten Messdaten liegen dabei stets in diskreter Form vor. Das zweidimensionale KHI ist nur für geschlossene Kurven definiert.

Die zweidimensionalen Rayleigh Integrale hingegen sind ausschließlich für unendliche Linien definiert. Jedoch konnte bereits in [Sta97] gezeigt werden, dass unter Inkaufnahme von Artefakten auch finite Arrays für die Extrapolation oder Reproduktion anhand der Rayleigh Integrale verwendet werden können. Zur Verminderung von Artefakten durch finite Messaperturen kann zum Beispiel Tapering genutzt werden, dass für die linienförmige Messanordnung in Kapitel 4.3.5 untersucht wird.

4.1. Grundlagen der Untersuchungen

4.1.1. Diskretisierung der Kirchhoff-Helmholtz- und Rayleigh-Integrale

Da innerhalb der Simulationen zeitdiskrete und örtlich abgetastete Daten genutzt werden, müssen das KHI und die Rayleigh-Integrale in diskreter Form dargestellt werden. Das zweidimensionale KHI wurde in Kapitel 2 als Gleichung (2.73) vorgestellt. Für eine nicht-kontinuierliche Abtastung werden Integralterme durch Summenterme angenähert

$$\int F(x)dx \rightarrow \sum_n F(x[n])\Delta x. \quad (4.1)$$

Das zweidimensionale Kirchhoff-Helmholtz-Integral geht demnach in folgende Summenschreibweise über

$$\begin{aligned} P_{\Delta}(\mathbf{r}_R, \omega) = & \frac{jk}{4} \sum_{m=1}^{N_M} j\rho c V_n(\mathbf{r}_M[m], \omega) H_0^{(2)}(kr) \Delta M \\ & - \frac{jk}{4} \sum_{m=1}^{N_M} P(\mathbf{r}_M[m], \omega) H_1^{(2)}(kr) \cos \varphi \Delta M. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Darin ist N_M die Anzahl der Mikrofon-Paare auf der Berandung M und $\mathbf{r}_M[m]$ die Position des m -ten Mikrofon-Paares auf M . r ist der Betrag des Verbindungsvektors zwischen Mikrofon-Paar und Aufpunkt \mathbf{r}_R , für den der Schalldruck extrapoliert wird. ΔM entspricht der Strecke zwischen zwei Mikrofon-Paaren. Bei einer kreisförmigen Mikrofonanordnung des Radius R_M ist dies ein Kreisbogen der Länge

$$\Delta M = \frac{2\pi R_M}{N_M}. \quad (4.3)$$

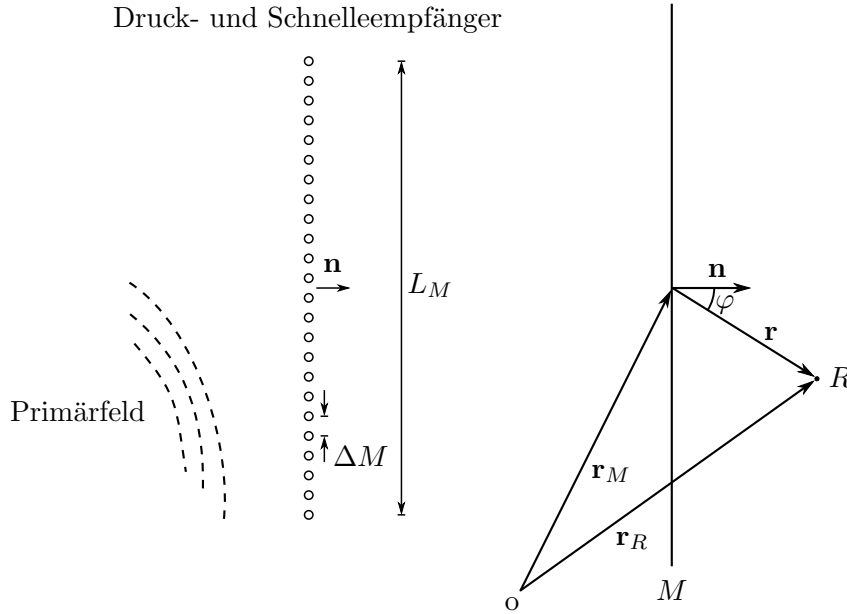


Abbildung 4.2.: Die in den Simulationen verwendete Array-Geometrie für den linienförmigen Aufbau. Links: Das diskrete Mikrofon-Array mit $N_M = 24$ Druck- und Schnellempfängern der Länge L_M . Rechts: Die kontinuierliche Anordnung mit den Orts- und Verbindungsvektoren. Die Ausrichtung der Schnellemikrofone ist $-\mathbf{n}$.

In gleicher Weise können die zweidimensionalen Rayleigh-Integrale diskretisiert werden

$$P_{\Delta}(\mathbf{r}_R, \omega) = \frac{jk}{2} \sum_{m=1}^{N_M} j\rho c V_n(\mathbf{r}_M[m], \omega) H_0^{(2)}(kr) \Delta M, \quad (4.4)$$

$$P_{\Delta}(\mathbf{r}_R, \omega) = \frac{jk}{2} \sum_{m=1}^{N_M} P(\mathbf{r}_M[m], \omega) \cos \varphi H_1^{(2)}(kr) \Delta M. \quad (4.5)$$

Für die Mikrofon-Linie gilt, dass ΔM gegeben ist durch

$$\Delta M = \frac{L_M}{N_M - 1}. \quad (4.6)$$

4.1.2. Wellenausbreitung und Quellenmodelle in den Simulationen

Aus Darstellungsgründen werden für die Simulation der Extrapolationen ausschließlich monofrequente Signale bei 300 Hz verwendet. Quantitative Untersuchungen für breitbandige Signale erfolgen in Kapitel 7. Für die Berechnung der Ausbreitung einer ebenen Welle des Quell-Spektrums $\hat{P}(\omega)$ können folgende Gleichungen für den Druck und die

Schnelle am Aufpunkt \mathbf{r}_R verwendet werden:

$$P(\mathbf{r}_R, \omega) = \hat{P}(\omega) e^{-jk r_R}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_R, \omega) = \frac{1}{\rho c} \hat{P}(\omega) e^{-jk r_R} \cdot \mathbf{n}_{r_R}. \quad (4.8)$$

Der Vektor \mathbf{n}_{r_R} ist der Normalenvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle. Zur Simulation zweidimensionaler Wellenausbreitung, die durch in z -Richtung unendlichen Linienquellen verursacht wird, werden nachstehende Übertragungsterme herangezogen:

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \frac{j}{4} \hat{P}(\omega) H_0^{(2)}(kr), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\rho c} \hat{P}(\omega) H_1^{(2)}(kr) \cdot \mathbf{n}_r. \quad (4.10)$$

Darin stellt r den Abstand zwischen Aufpunkt und Quelle dar. Sämtliche Untersuchungen werden für ein zweidimensionales, quadratisches Feld der Seitenlänge vier Meter durchgeführt. Der Radius R_M des kreisförmigen Mikrofon-Arrays beträgt ein Meter und dessen Mittelpunkt liegt im Ursprung. Das Line-Array hat eine Ausdehnung von zwei Metern entlang der y -Achse und dessen Mitte liegt ebenfalls im Ursprung. Zur Bestimmung der Übereinstimmung der Extrapolation (Fehlerabstand) werden zeitbasierte Simulationen verwendet und jeweils der quadratische Mittelwert des Schalldrucks über den simulierten Zeitraum bestimmt. Als Grundlage zur Beurteilung der Übereinstimmung werden Differenz und Summe von Primärfeld und Extrapolation gebildet. Die Differenz ist definiert als

$$d(x[n_x], y[n_y], t) = p_{\text{pri}}(x[n_x], y[n_y], t) - p_{\text{ext}}(x[n_x], y[n_y], t). \quad (4.11)$$

Darin ist $p_{\text{pri}}(x[n_x], y[n_y], t)$ das diskretisierte Primärfeld und $p_{\text{ext}}(x[n_x], y[n_y], t)$ die diskretisierte Extrapolation am Ort $x[n_x], y[n_y]$. Die Übereinstimmung von Primärfeld und Extrapolation an einem bestimmten Rasterpunkt $x[n_x], y[n_y]$ ergibt sich dann als Pegel ausgedrückt aus dem Verhältnis der quadratischen Mittelwerte des Primärsignals und des Differenzsignals:

$$L_d(x[n_x], y[n_y]) = 10 \log \left\{ \frac{\overline{p_{\text{pri}}(x[n_x], y[n_y])^2}}{\overline{d(x[n_x], y[n_y])^2}} \right\}. \quad (4.12)$$

Hohe Pegelwerte drücken daher aus, dass Extrapolation und Primärfeld gut übereinstimmen und der Fehlerabstand hoch ist. Als zweites Beurteilungsmaß wird die Summe der Felder definiert als

$$s(x[n_x], y[n_y], t) = p_{\text{pri}}(x[n_x], y[n_y], t) + p_{\text{ext}}(x[n_x], y[n_y], t). \quad (4.13)$$

Für die Übereinstimmung anhand des Summensignals kann ebenfalls der Pegel angege-

ben werden:

$$L_s(x[n_x], y[n_y]) = 10 \log \left\{ \frac{p_{\text{pri}}(x[n_x], y[n_y])^2}{s(x[n_x], y[n_y])^2} \right\}. \quad (4.14)$$

Hohe Pegelwerte für $L_s(x[n_x], y[n_y])$ zeigen, dass an dem betrachteten Punkt die um 180° in der Phase gedrehte Extrapolation mit dem Primärfeld gut übereinstimmt.

4.2. Extrapolation mit kreisförmigen Mikrofon-Arrays

Dieser Abschnitt erläutert die Möglichkeiten anhand von Mikrofon-Messungen in kreisförmiger Anordnung den Verlauf akustischer Wellenfelder zu extrapolieren.

4.2.1. Extrapolation anhand des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals mit kreisförmigen Mikrofon-Arrays

Das KHI benötigt grundsätzlich die Kombination von Druck- und Schnellesignalen oder Druck- und Druckgradientensignalen. Abbildung 4.3 zeigt die zweidimensionale Extrapolation verschiedener Primärfelder der Frequenz $f = 300$ Hz unter Anwendung des KHI für ein kreisförmiges Mikrofon-Array des Radius $R_M = 1$ m, bestehend aus $N_M = 24$ Mikrofonen. Die Mikrofonpositionen sind als rote Kreuze dargestellt. An jeder dieser Positionen wird ein Druck- und ein Schnellempfänger angenommen. Die Empfangsrichtung der Schnellemikrofone zeigt nach außen. In der linken Spalte ist das Primärfeld eine monochromatische, ebenen Welle, die sich unter dem Winkel $\varphi = 30^\circ$ ausbreitet. In der mittleren Spalte wird das Primärfeld von einer Linienquelle in der Nähe des Mikrofonkreises erzeugt. In der rechten Spalte liegt diese Linienquelle im Ursprung, demnach im Innern des Mikrofonkreises. In der Graustufendarstellung ist der normierte Schalldruck auf den Wertebereich -1 (schwarz) bis $+1$ (weiß) abgebildet. Zeile (a) von Abbildung 4.3 zeigt die Primärfelder und Zeile (b) stellt die Extrapolationen dar. In Zeile (c) ist die Differenz nach Gleichung (4.11) und in Zeile (d) die Summe nach Gleichung (4.13) dargestellt.

Wird zuerst die Extrapolation der ebenen Welle betrachtet, so kann festgestellt werden, dass die Nachbildung im Innern des Mikrofon-Kreises nahezu perfekt ist. Die Differenz der beiden Felder ist dort überall annähernd gleich Null. Die gleiche Situation ergibt sich für die mittlere Spalte, in der eine nahegelegene Linienquelle simuliert wurde. Die dritte Spalte ist insofern interessant, weil dort gezeigt wird, dass eine Quelle im Innern des Mikrofonkreises keinen Einfluss auf die Extrapolation im Innern hat. Es werden nur Feldanteile nach außen extrapoliert. Diese Erkenntnis ist eine grundlegende Voraussetzung für die im nächsten Kapitel vorgestellten ANC-Algorithmen.

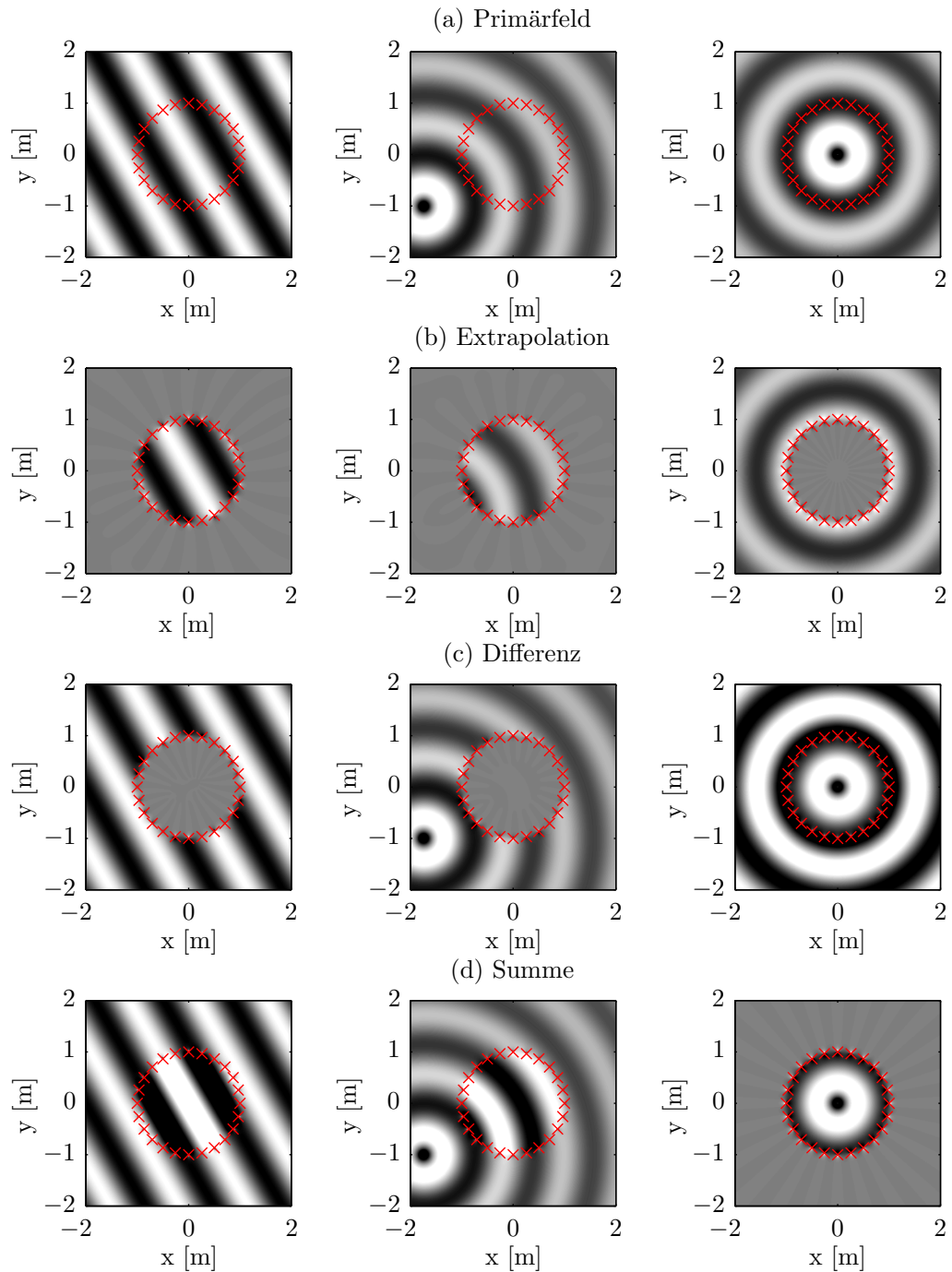


Abbildung 4.3.: Extrapolation mit dem KHI bei 300 Hz. Die roten Kreuze markieren die Mikrofonpositionen. Linke Spalte: Ebene Welle. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle im Ursprung. (c) und (d) stellen jeweils die Differenz und die Summe von Primärfeld und Extrapolation dar.

Abbildungen 4.4 (a)-(b) geben den Fehlerabstand nach Gleichung (4.12) an. Daraus ist die hervorragende Nachbildung für das Innere des Kreises ersichtlich, da der Fehlerabstand im gesamten Inneren weit über 60 dB liegt. Für den Kreismittelpunkt kann der Fehlerabstand mit ca. 290 dB angegeben werden, was für die sehr exakte Extrapolation innerhalb der Simulation spricht.

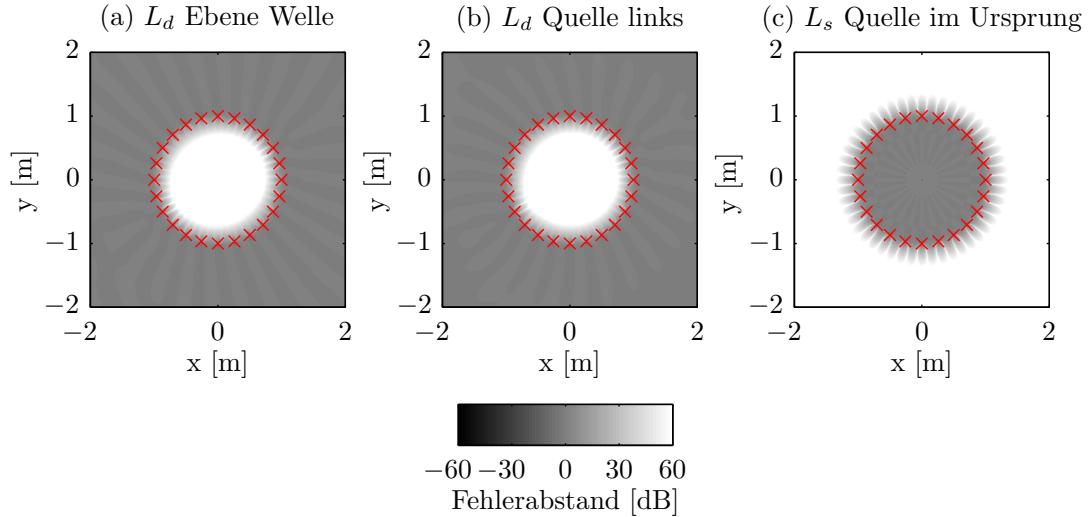


Abbildung 4.4.: Übereinstimmung der Extrapolation mit dem KHI als Fehlerabstand bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle in z -Richtung bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle in z -Richtung im Ursprung.

Abbildung 4.4 (c) zeigt den Fehlerabstand für die Summe der Felder nach Gleichung (4.14). Anhand dieser Darstellung ist die sehr gute Nachbildung für das Äußere des Kreises zu sehen. Zudem zeigt dies erneut, dass für das Innere des Kreises keine Auswirkungen durch eine innere Quelle bestehen.

4.2.1.1. Verhalten bei einer äußeren dreidimensionalen Monopolquelle

Für praktische Betrachtungen ist interessant, wie sich die Extrapolation verhalten wird, wenn die Primärquelle kein echtes zweidimensionales Feld erzeugt. Für die dreidimensionalen Übertragungsfunktionen des Monopols gilt

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \hat{P}(\omega) \frac{1}{r} e^{jkr}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\rho c} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] \hat{P}(\omega) \frac{1}{r} e^{jkr} \mathbf{n}_r. \quad (4.16)$$

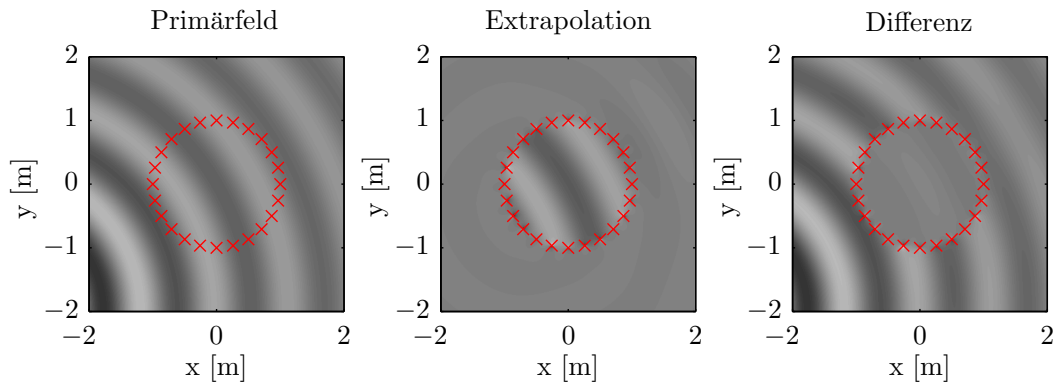


Abbildung 4.5.: Zweidimensionale Extrapolation mit dem KHI bei 300 Hz für eine dreidimensionale Monopolquelle. Wie in der mittleren Abbildung zu sehen ist, besitzt die Extrapolation auch Feldanteile außerhalb des Kreises. Die Differenz von Primärfeld und Extrapolation macht deutlich, dass die Nachbildung nicht ideal ist.

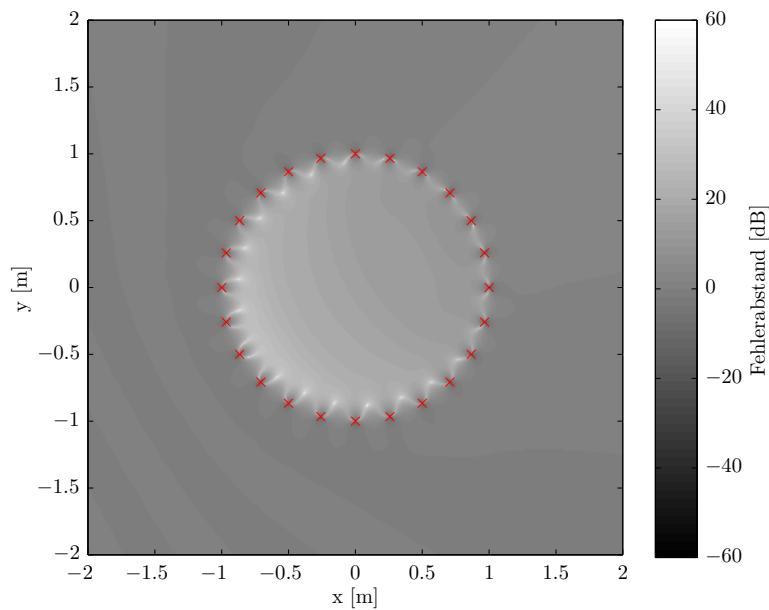


Abbildung 4.6.: Fehlerabstand als Maß der Übereinstimmung für die zweidimensionale Extrapolation mit dem KHI bei 300 Hz für eine dreidimensionale Monopolquelle. Da die Extrapolation nicht ideal ist, fällt der Fehlerabstand deutlich geringer aus als für eine zweidimensionale Linienquelle.

Wird erneut eine Simulation für eine Quelle am Ort $x = -1,7$ m und $y = -1$ m bei einer Frequenz von 300 Hz durchgeführt, entsteht das in Abbildung 4.5 und Abbildung 4.6 dargestellte Ergebnis. Es ist zu erkennen, dass die Extrapolation weniger gut als für den rein zweidimensionalen Fall verläuft. Dies ist darauf zurück zu führen, dass die Ausbreitung einer von einem dreidimensionalen Monopol erzeugten Welle proportional $1/r$ verläuft, wohingegen eine unendliche Zylinderquelle ein Feld erzeugt, dass mit $1/\sqrt{r}$ abfällt (siehe Kapitel 2). Dies führt insbesondere für Arrays mit großem Radius zu deutlicheren Abweichungen.

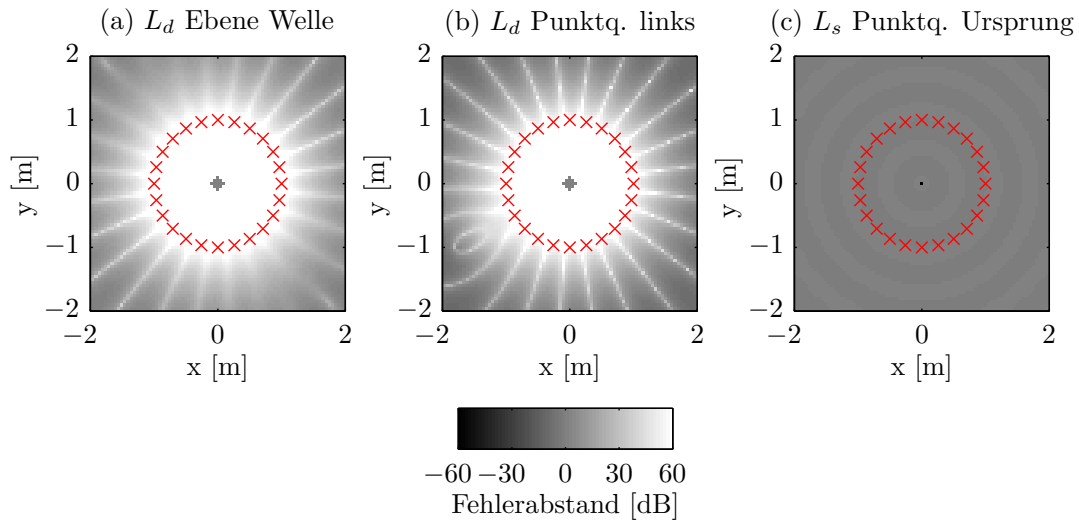


Abbildung 4.7.: Übereinstimmung als Fehlerabstand bei Verwendung der Zirkularen Harmonischen Extrapolation bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle im Ursprung.

4.2.2. Zirkulare Harmonische Extrapolation mit kreisförmigen Mikrofon-Arrays

In Kapitel 3.4 wurde die Beschreibung akustischer Felder mittels Zirkularer Harmonischer Expansionskoeffizienten beschrieben. Für die Extrapolation ist es nach Gleichung (3.80) ausreichend, einen Mikrofonkreis mit nach außen gerichtete Mikrofonen kardioider Richtcharakteristik zu verwenden [Hul04; Spo05]. Unter Verwendung der sich daraus ergebenden Zirkularen Harmonischen Extrapolations-Koeffizienten $\mathcal{M}_\nu(\omega)$ kann die Extrapolation des gesamten Schalldruckfeldes wie folgt bestimmt werden:

$$P(r, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_\nu(\omega) \left[H_\nu^{(1)}(kr) + H_\nu^{(2)}(kr) \right] e^{j\nu\varphi}. \quad (4.17)$$

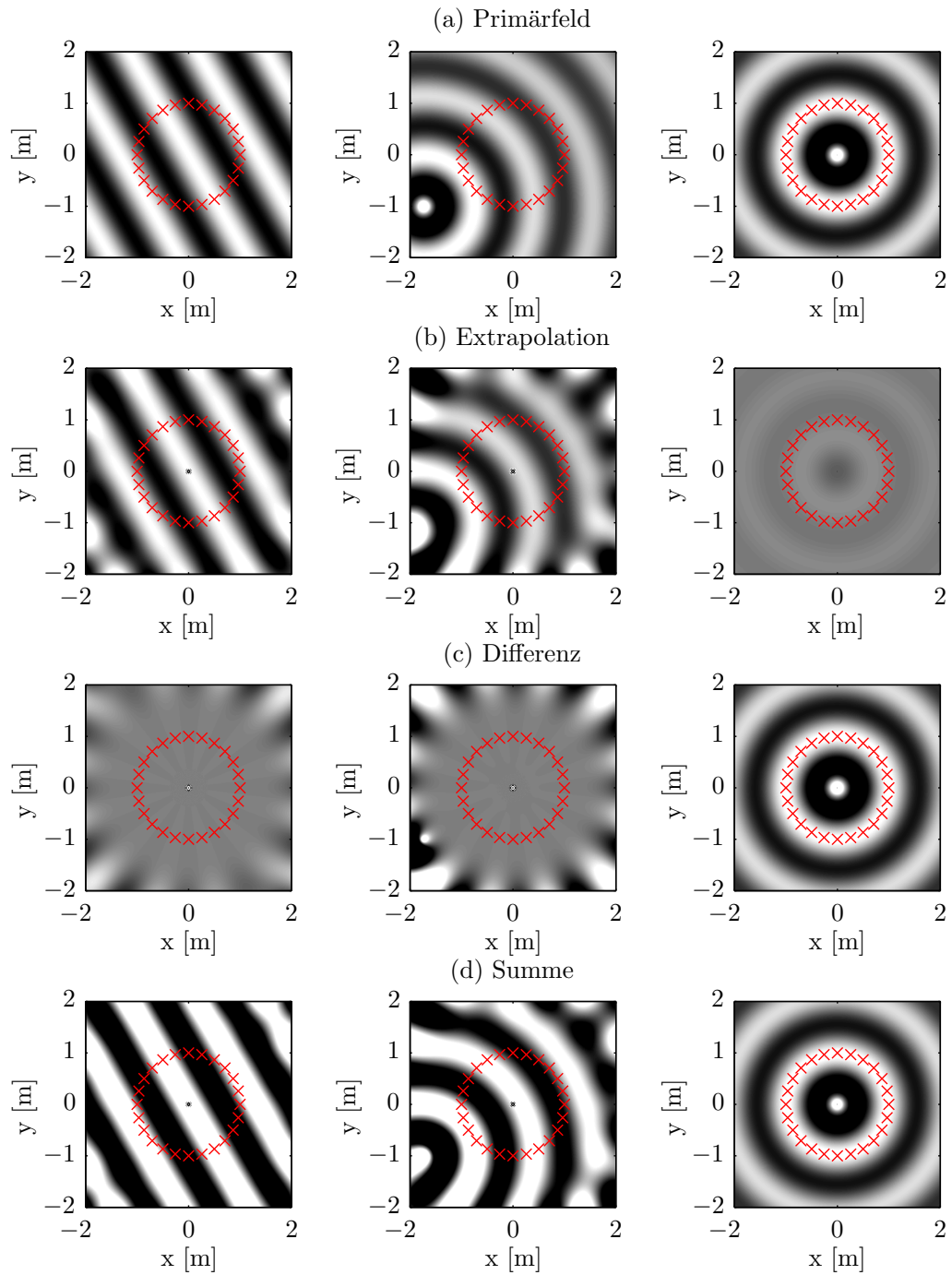


Abbildung 4.8.: Zirkulare Harmonische Extrapolation für verschiedenen Primärfelder der Frequenz 300 Hz. Die roten Kreuze markieren die Positionen der 24 nach außen gerichteten Kardioid-Empfänger. In (a) ist das Primärfeld und in (b) das extrapolierte Feld gezeigt. (c) und (d) stellen jeweils Differenz und Summe von Primärfeld und Extrapolation dar.

Die Abbildungen 4.7 und 4.8 stellen die Simulationsergebnisse für die gleichen drei Primärfelder dar, die auch schon für die vorangegangenen Simulationen in diesem Kapitel verwendet wurden. Die Zirkulare Harmonische Extrapolation zeigt demnach sehr gute Übereinstimmungen mit den vorgegebenen Primärfeldern. Auch ist die Wirkung der innen liegenden Quelle für das Innere des Mikrofonkreises sehr gering.

4.2.3. Zirkulare Harmonische Extrapolation unter Berücksichtigung einer kreisförmigen Randbedingung

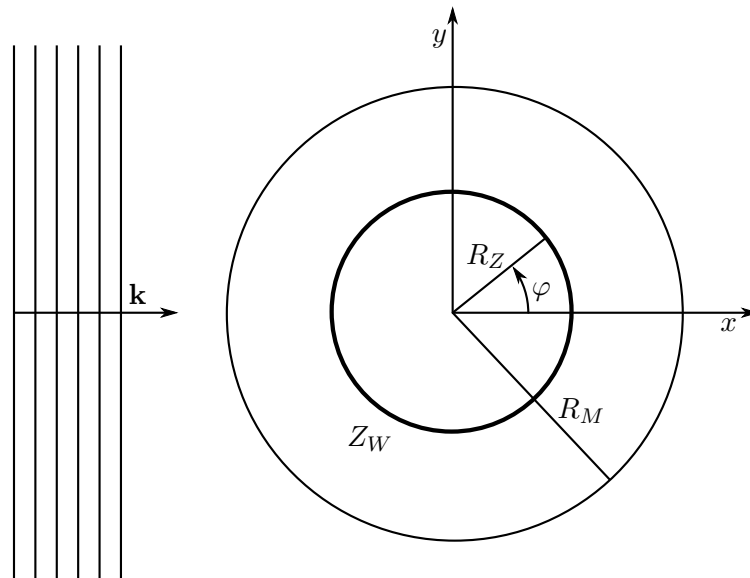


Abbildung 4.9.: Lösungsgebiet mit einfallender ebener Welle in Polarkoordinaten zur Herleitung der Zirkularen Harmonischen Extrapolation unter Berücksichtigung einer kreisförmigen Impedanz Z_W mit dem Radius R_Z . Die kreisförmige Messanordnung besitzt den Radius R_M und es gelte $R_M > R_Z$.

In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Bestimmung der Zirkularen Harmonischen Extrapolation unter der Annahme einer kreisförmigen Impedanz Z_W mit dem Radius R_Z innerhalb einer kreisförmigen Messanordnung des Radius R_M hergeleitet (siehe Abbildung 4.9). Die kreisförmige Impedanz kann ebenso als ein entlang der z -Achse unendlich ausgedehnter Zylinder der Oberflächenimpedanz Z_W angesehen werden. Es gelte $R_M > R_Z$. Das gesamte Feld, inklusive des durch die Impedanz gestreuten Anteils, kann dann mithilfe der Zirkularen Harmonischen Expansionskoeffizienten extrapoliert werden. Ebenso ist durch die Aufteilung in konvergierende und divergierende Feldanteile die alleinige Betrachtung der Streuung möglich.

Innerhalb der Messanordnung mit dem Radius R_M seien keine Quellen vorhanden. Für das Schalldruckfeld kann daher der bereits bekannte Ansatz der Zirkularen Harmoni-

schen Zerlegung aus Gleichung (2.32) gewählt werden

$$P_{\text{P}}(r, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[A_{\nu}(\omega) H_{\nu}^{(1)}(kr) + B_{\nu}(\omega) H_{\nu}^{(2)}(kr) \right] e^{j\nu\varphi}. \quad (4.18)$$

Die Koeffizienten-Funktionen $A_{\nu}(\omega)$ und $B_{\nu}(\omega)$, die das Verhalten des Feldes näher beschreiben sollen, müssen nun aus geeigneten Randbedingungen bestimmt werden. Dabei stellen die Expansionskoeffizienten wieder den Zusammenhang zwischen den Druck- und Schnellesignalen auf R_M und der Zirkularen Harmonischen Expansion her.

Als erste Randbedingung soll der Fall $r = R_Z$ untersucht werden. Auf der Zylinderoberfläche gilt

$$P_{\text{P}}(R_Z, \varphi, \omega) = \frac{-jZ_W}{k\rho c} \frac{\partial P_{\text{P}}(r, \varphi, \omega)}{\partial r} \Big|_{r=R_Z}. \quad (4.19)$$

Einsetzen von Gleichung (4.18) in (4.19) ergibt

$$A_{\nu}(\omega) H_{\nu}^{(1)}(kR_Z) + B_{\nu}(\omega) H_{\nu}^{(2)}(kR_Z) = \frac{-jZ_W}{\rho c} \left[A_{\nu}(\omega) H_{\nu}^{\prime(1)}(kR_Z) + B_{\nu}(\omega) H_{\nu}^{\prime(2)}(kR_Z) \right]. \quad (4.20)$$

Umstellen nach $B_{\nu}(\omega)$ ergibt

$$B_{\nu}(\omega) = -A_{\nu}(\omega) \cdot \frac{H_{\nu}^{(1)}(kR_Z) + j \frac{Z_W}{\rho c} H_{\nu}^{\prime(1)}(kR_Z)}{H_{\nu}^{(2)}(kR_Z) + j \frac{Z_W}{\rho c} H_{\nu}^{\prime(2)}(kR_Z)} \quad (4.21)$$

und es kann mit (siehe auch [Mös08])

$$R_{\nu}(\omega) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(kR_Z) + j \frac{Z_W}{\rho c} H_{\nu}^{\prime(1)}(kR_Z)}{H_{\nu}^{(2)}(kR_Z) + j \frac{Z_W}{\rho c} H_{\nu}^{\prime(2)}(kR_Z)} \quad (4.22)$$

für das Schallfeld

$$P_{\text{P}}(r, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}(\omega) \left[H_{\nu}^{(1)}(kr) - R_{\nu}(\omega) H_{\nu}^{(2)}(kr) \right] e^{j\nu\varphi} \quad (4.23)$$

geschrieben werden. Die Koeffizienten-Funktion $B_{\nu}(\omega)$ wurde somit in Gleichung (4.18) eliminiert und alle divergierenden Feldanteile können nun anhand der Impedanz Z_W auf der Zylinderoberfläche auf die konvergierenden Anteile $A_{\nu}(\omega)$ zurückgeführt werden.

Für die zweite Randbedingung wird angenommen, dass die Impedanz im Innern nicht vorhanden ist und somit $R_Z \rightarrow 0$ gilt. Die Untersuchung der Funktion $R_{\nu}(\omega)$ für diesen

Fall ergibt:

$$\lim_{R_Z \rightarrow 0} R_\nu(\omega) = \lim_{R_Z \rightarrow 0} \frac{H_\nu^{(1)}(kR_Z) + j \frac{Z_W}{\rho c} H_\nu'^{(1)}(kR_Z)}{H_\nu^{(2)}(kR_Z) + j \frac{Z_W}{\rho c} H_\nu'^{(2)}(kR_Z)} = -1. \quad (4.24)$$

Eine Ausführliche Begründung dieser Behauptung ist in B.1 beschrieben. Daher hat Gleichung (4.23) ohne reflektierenden Zylinder folgende Form

$$P_P(r, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu(\omega) \left[H_\nu^{(1)}(kr) + H_\nu^{(2)}(kr) \right] e^{j\nu\varphi}. \quad (4.25)$$

Bei direktem Vergleich mit (4.17) fällt auf, dass gelten muss

$$A_\nu(\omega) = \mathcal{M}_\nu(\omega). \quad (4.26)$$

Somit kann die endgültige Berechnungsvorschrift für die Zirkulare Harmonische Extrapolation bei Vorhandensein eines in z -Richtung unendlich ausgedehnten Zylinders mit der Oberflächenimpedanz Z_W innerhalb eines Mikrofonkreises wie folgt angegeben werden:

$$P_P(r, \varphi, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_\nu(\omega) \left[H_\nu^{(1)}(kr) - R_\nu(\omega) H_\nu^{(2)}(kr) \right] e^{j\nu\varphi}. \quad (4.27)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann anhand von Schnelle- und Drucksignalen auf einer kreisförmigen Messanordnung das gesamte Schalldruckfeld beschrieben werden. Soll anstelle des Drucks die Schnelle bestimmt werden, kann Gleichung (4.27) mit Hilfe der Euler-Gleichung (2.6) umgeformt werden. Daraus folgt für die Schnelle in Normalenrichtung

$$V_{P,n}(r, \varphi, \omega) = \frac{j}{\rho\omega} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_\nu(\omega) \left[H_\nu'^{(1)}(kr) - R_\nu(\omega) H_\nu'^{(2)}(kr) \right] e^{j\nu\varphi}. \quad (4.28)$$

4.2.3.1. Vergleich mit der analytischen Lösung

In der Literatur sind verschiedene zweidimensionale Lösungen für die akustische Streuung an einem unendlichen Zylinder zu finden [Far51; BAUA87; Zio94]. Eine gute Herleitung in deutscher Sprache findet sich in [Mös08]. Daraus können die analytischen Lösungen für den Zylinder mit der Randimpedanz Z bei einfallender ebener Welle direkt entnommen werden. Für eine ebene Welle der Amplitude \hat{p}_Q mit dem Einfallswinkel φ_Q gilt dann nach [Mös08]:

$$P_P(r, \varphi, \omega) = \hat{p}_Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-j)^\nu}{\epsilon_\nu} \cos(\nu[\varphi - \varphi_Q]) \left[H_\nu^{(1)}(kr) - R_\nu(\omega) H_\nu^{(2)}(kr) \right]. \quad (4.29)$$

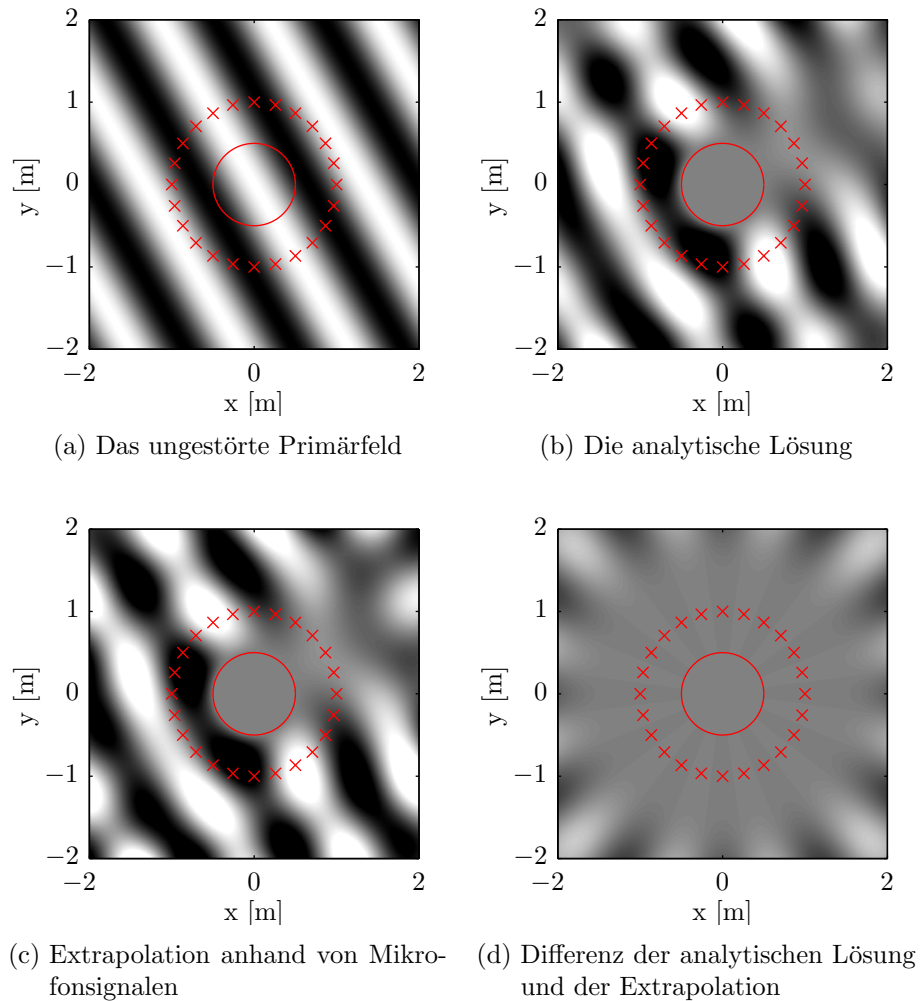


Abbildung 4.10.: Vergleich der Zirkularen Harmonischen Extrapolation eines Primärfeldes für eine ebene Welle der Frequenz 300 Hz mit einer schallweichen, kreisförmigen Impedanz im Innern. Der rote Kreis kennzeichnet die Impedanz mit dem Radius 0.5 m und die roten Kreuze markieren die Positionen der nach außen gerichteten 24 Kardioid-Empfänger mit dem Radius 1 m. a) Das ungestörte Primärfeld. b) Die Extrapolation nach (4.27). c) Die analytische Lösung nach (4.29). d) Die Differenz von b) und c).

Der Faktor R_ν wird ebenfalls nach Gleichung (4.22) bestimmt und für ϵ_ν gilt

$$\epsilon_\nu = \begin{cases} 1, & \nu \neq 0 \\ 2, & \nu = 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

In Abbildung 4.10 ist der Vergleich zwischen der analytischen Lösung nach [Mös08] und der Extrapolation nach Kapitel 4.2.3 dargestellt. Für die Berechnung der Extrapolation wurden 24 Mikrofonensignale von nach außen zeigenden Kardioid-Empfängern herangezogen. Wie die Abbildung zeigt, sind beide Verfahren in der näheren Umgebung der Mikrofone nahezu identisch. An den Rändern des Lösungsgebietes treten zunehmend Abweichungen auf, wie in der Differenz-Darstellung gut zu erkennen ist.

4.3. Extrapolation mit linienförmigen Mikrofon-Arrays

4.3.1. Extrapolation anhand des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals mit linienförmigen Mikrofon-Arrays

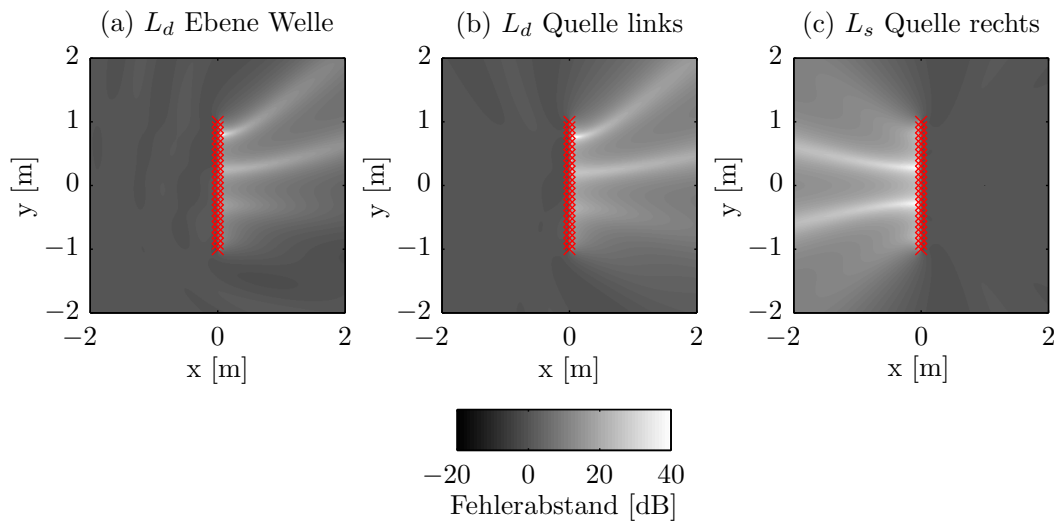


Abbildung 4.11.: Übereinstimmung der Extrapolation mit dem KHI als Fehlerabstand bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

Die in Kapitel 4.2 durchgeführten Simulationen werden nun für ein linienförmiges Mikrofon-Array wiederholt. Anstelle der Linienquelle im Ursprung, liegt diese nun rechtsseitig des Arrays bei $x = 1$ m und $y = 0$ m. Das Line-Array hat eine Länge von 2 Metern und besteht ebenfalls aus 24 Mikrofon-Paaren. Es ist in negativer x -Richtung ausgerichtet, sodass die Empfangsrichtung der Schnellemikrofone in diese Richtung zeigt (siehe Abbildung 4.2). Der für den ANC-Algorithmus interessante Bereich der Extrapolation liegt daher in der rechten Halbebene.

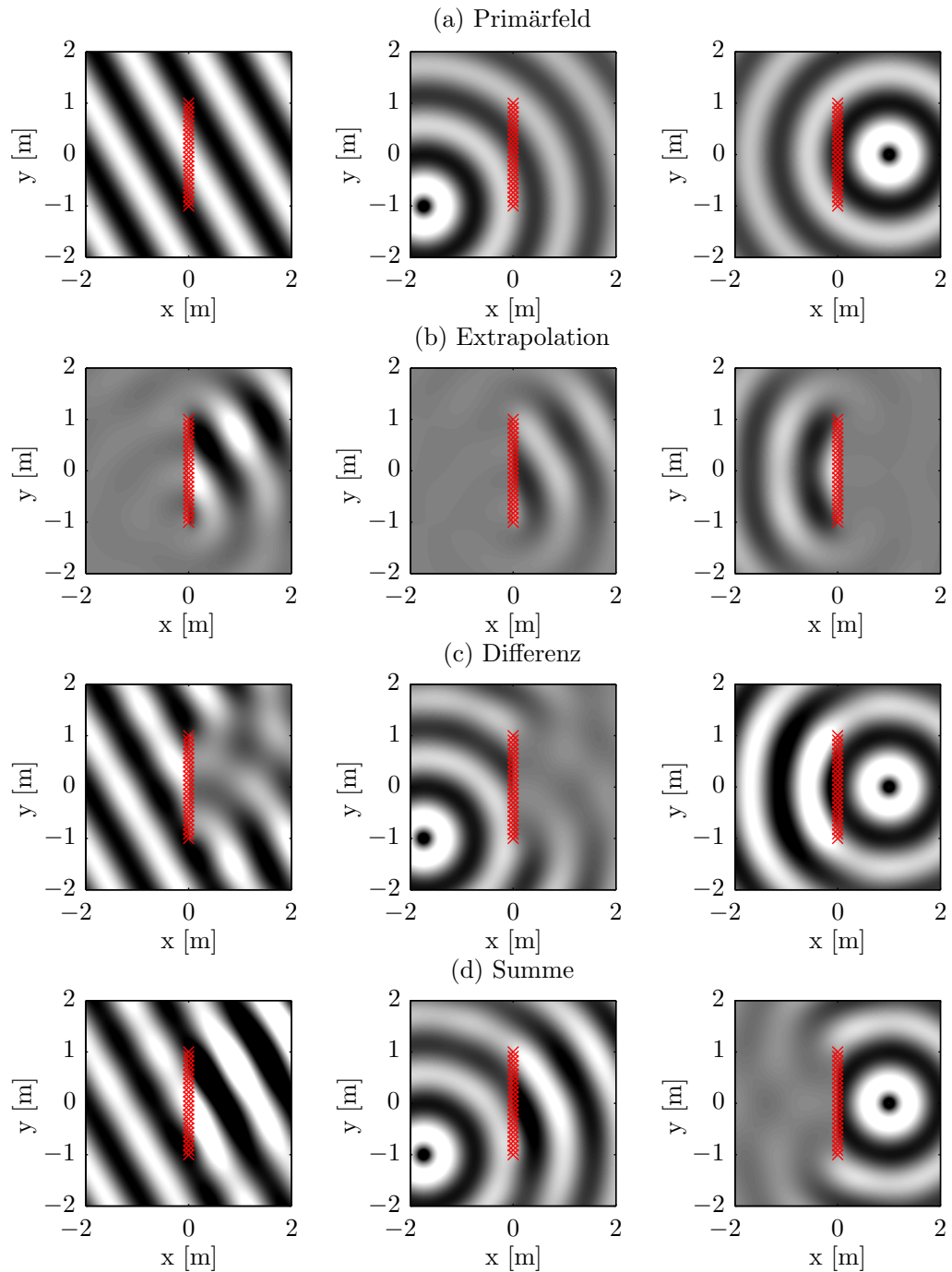


Abbildung 4.12.: Extrapolation mit dem KHI bei 300 Hz. Die roten Kreuze markieren die Mikrofonpositionen. Linke Spalte: Ebene Welle. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m. (c) und (d) stellen jeweils die Differenz und die Summe von Primärfeld und Extrapolation dar.

Die Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen die Simulationsergebnisse. Man beachte, dass der Pegel des Fehlerabstands in 4.11 nun auf den Wertebereich von -20 dB bis $+40$ dB skaliert wurde. Es ist sofort ersichtlich, dass die Übereinstimmung wesentlich ungleichmäßiger als für den Kreisbau ausfällt und dass der Fehlerabstand weniger hoch als für den Mikrofonkreis ist. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da das KHI für endliche Linien-Arrays nicht definiert ist. Grundsätzlich funktioniert die Extrapolation für den interessierenden Bereich rechts des Arrays. Auch kann in Abbildung 4.11 (c) und in 4.12 (c) erkannt werden, dass Quellen, die rechts der Mikrofone liegen, zu keiner Beeinflussung auf dieser Seite führen.

4.3.2. Extrapolation anhand des Rayleigh-II-Integrals mit linienförmigen Mikrofon-Arrays

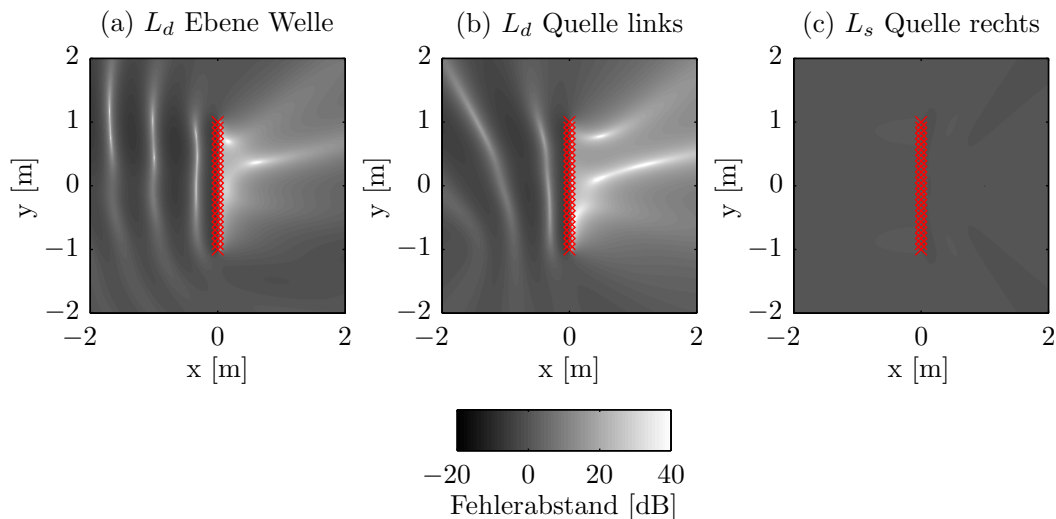


Abbildung 4.13.: Übereinstimmung der Extrapolation mit dem Primärfeld als Fehlerabstand unter Verwendung des Rayleigh II Integrals mit kardioiden Mikrofonen bei 300 Hz. Die Mikrofone sind in Richtung der negativen x -Achse ausgerichtet. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

Stehen anstelle von Druck- und Schnellempfängern ausschließlich kardioiden Mikrofone zur Verfügung, kann das Rayleigh-II-Integral für die Extrapolation herangezogen werden. Dieser Ansatz ist in der Praxis möglich. Die Abbildung 4.13 zeigt die Übereinstimmung der Extrapolation mit dem Primärfeld für die Linie aus Kardioid-Mikrofonen. Anders als bei der Extrapolation mit dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral, entstehen bei

der Extrapolation für die ebene Welle und Linienquelle von links auch Feldanteile auf der linken Seite. Die Vorhersage des Feldes auf der rechten Seite des Arrays ist allerdings ähnlich der Vorhersage durch das KHI. In einigen Bereichen ist der Fehlerabstand sogar größer als bei der KHI-Extrapolation, wie in 4.13 (a) und (b) zu erkennen ist. Für die Quelle rechts des Mikrofon-Arrays ist die Wirkung der kardioiden Empfänger deutlich zu erkennen. Für diesen Fall werden kaum Feldanteile extrapoliert. Somit hat eine Quelle auf der der Empfangsrichtung abgewandten Seite lediglich einen vernachlässigbaren Einfluss.

4.3.3. Plane Wave Extrapolation mit linienförmigen Mikrofon-Arrays

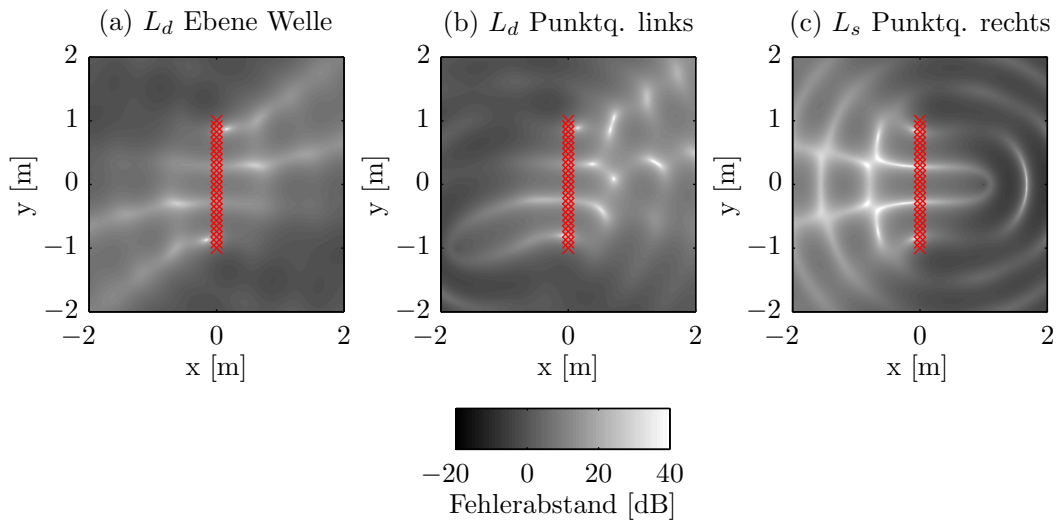


Abbildung 4.14.: Fehlerabstand der Extrapolation als Maß für die Übereinstimmung zwischen Primärfeld und Extrapolation durch die PWD bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

Die PWD ermöglicht die vollständige Beschreibung eines gegebenen Schallfeldes durch die in 3.3 hergeleiteten Expansions-Koeffizienten. Diese Koeffizienten können wiederum verwendet werden, das Schallfeld an einer beliebigen Position im Raum zu extrapolieren. In [Hul04] findet sich zu diesem Zweck die folgende Gleichung in Polarkoordinaten

$$P(r, \gamma, \omega) = \int_0^{2\pi} \bar{P}(\gamma', \omega) e^{-jkr \cos(\gamma - \gamma')} d\gamma'. \quad (4.31)$$

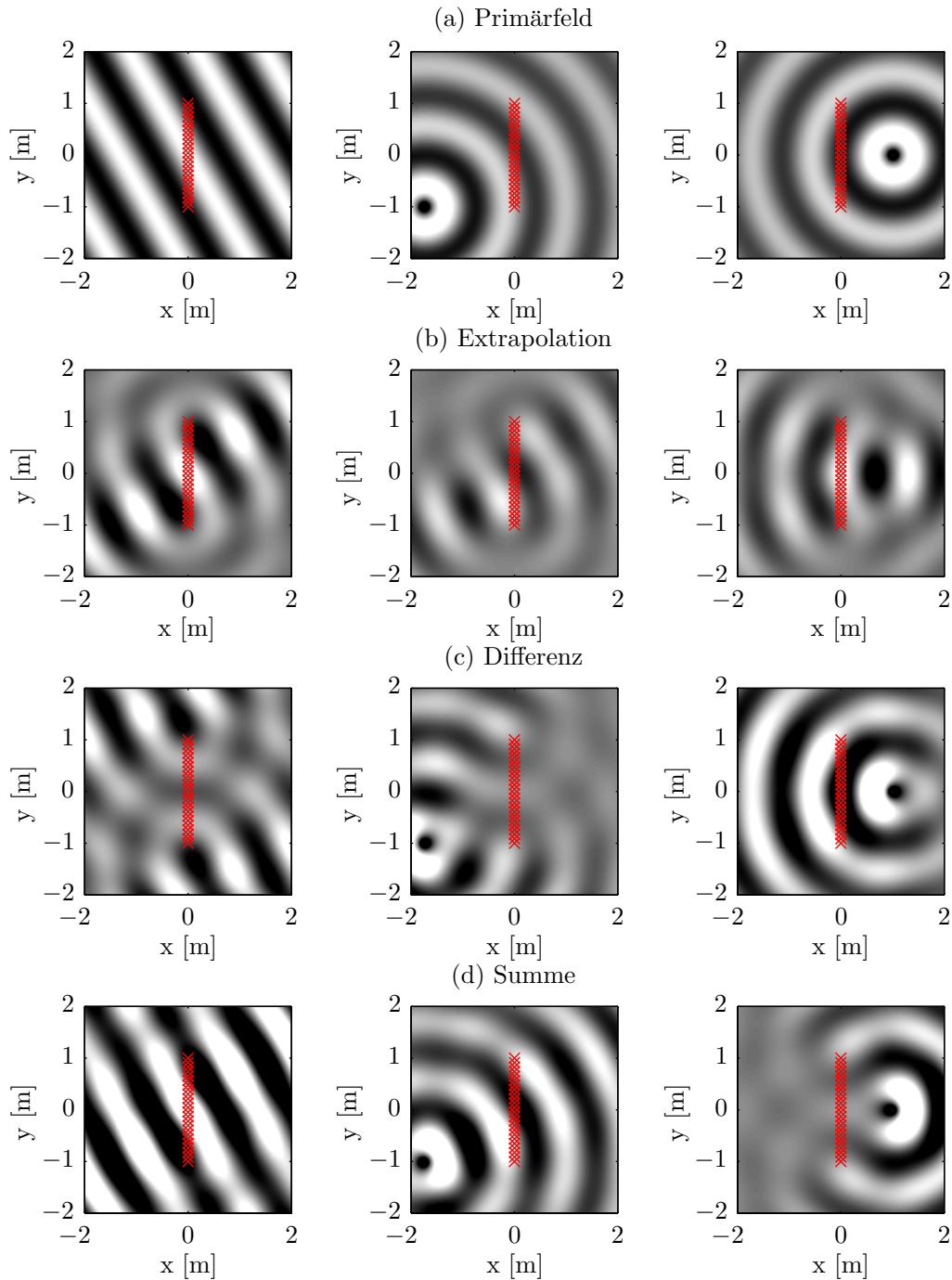


Abbildung 4.15.: Extrapolation per PWD bei $f = 300$ Hz. Linke Spalte: Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m. (c) und (d) stellen jeweils die Differenz und die Summe von Primärfeld und Extrapolation dar.

Anwenden von (4.31) in diskretisierter Form auf das gegebene Line-Array, ergibt für die drei Primärfeldsituationen bei 300 Hz die Extrapolationen aus Abbildung 4.15. Die Übereinstimmungen der Extrapolationen mit den jeweiligen Primärfeldern sind in 4.14 dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, dass Gleichung (4.31) ebenso gut in Verbindung mit Arrays anderer Geometrien verwendet werden kann.

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Extrapolation für den interessierenden Bereich rechts des Arrays gute Übereinstimmungen erzielt. Da es sich um die Zerlegung in ebene Wellenfelder handelt, resultieren daraus auch Feldanteile links des Arrays. Dies ist auch der Grund dafür, dass in Abbildung 4.15 (b), rechte Spalte, der Einfluss einer Quelle in der rechten Halbebene nicht ohne Einfluss auf dieser Seite bleibt.

Die PWD wird dahingehend modifiziert, dass nur eine Abtastung der linken Halbebene erfolgt, indem der Winkel γ in Gleichung (4.31) auf den Bereich $-\pi/2$ bis $\pi/2$ einschränkt wird. Dann ergibt sich die Pegelverteilung aus Abbildung 4.16. Hier ist zu erkennen, dass nun der Einfluss der Quelle rechts des Mikrofon-Arrays wesentlich geringer ausfällt.

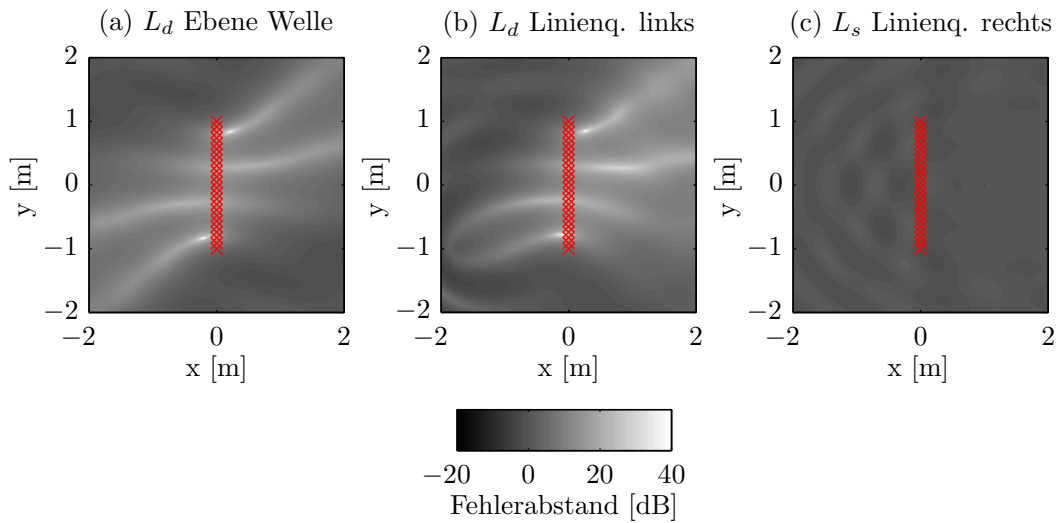


Abbildung 4.16.: Fehlerabstand der Extrapolation als Maß für die Übereinstimmung zwischen Primärfeld und Extrapolation durch die modifizierte PWD über die linke Halbebene bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

4.3.4. Extrapolation unter Berücksichtigung einer schallweichen Randbedingung mit linienförmigen Mikrofon-Arrays

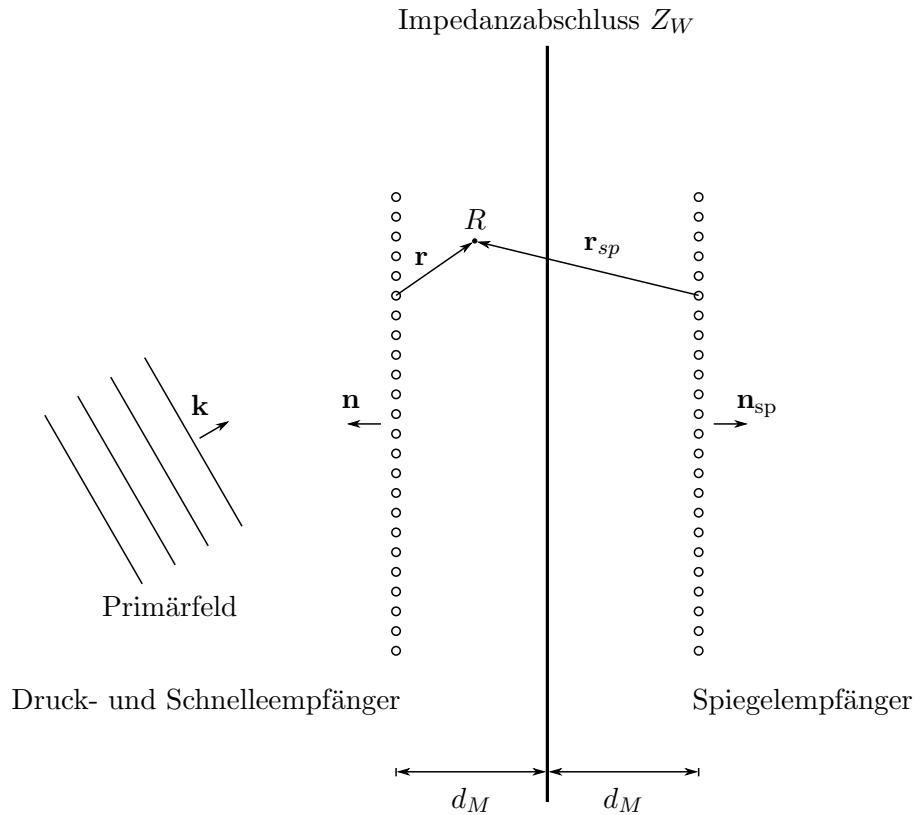


Abbildung 4.17.: Lösungsgebiet für die Extrapolation unter Berücksichtigung einer unendlich ausgedehnten Impedanz Z_W .

In Kapitel 2 wurde bereits die Spiegelquellenmethode zur Herleitung der Rayleigh Integrale verwendet. In diesem Kapitel wird diese Methode angewendet um mit einem linienförmigen Mikrofon-Array die Extrapolation eines gegebenen Primärfeldes an einer unendlichen, schallweichen Randbedingung zu bestimmen. Das Lösungsgebiet besitze einen Impedanzabschluss Z_W in Form einer unendlichen Geraden entlang der y -Achse des zweidimensionalen Koordinatensystems. In der linken Halbebene befinde sich im Abstand d_M ein Mikrofon-Array der Länge L_M parallel zur Randbedingung wie in Abbildung 4.17 dargestellt.

Ein gegebenes Primärfeld bewege sich in positiver x -Richtung aus der linken Halbebene kommend auf das Mikrofon-Array zu. Anhand der Mikrofon-signale soll nun die Extrapolation des Feldes bestimmt werden, unter der Voraussetzung, dass dieses an der unendlichen Impedanz Z_W reflektiert werde. Dazu werden in der Spiegelebene ebenfalls

Empfänger angenommen, deren Ausrichtung

$$\mathbf{n}_{\text{sp}} = -\mathbf{n} \quad (4.32)$$

ist. Die Spiegeempfänger müssen die gleichen Signale wie die wirklich vorhandenen Mikrofone erhalten, da die Reflexionen an der Wandimpedanz durch eine von rechts kommende Welle nachgebildet werden können. Für einen Aufpunkt R in der linken Halbene kann die Extrapolation unter Berücksichtigung des unendlichen Impedanzabschlusses Z_W mit dem Reflexionsfaktor

$$\zeta = \frac{Z_W/\rho c - 1}{Z_W/\rho c + 1} \quad (4.33)$$

dann als Superposition mit Hilfe des diskretisierten KHI angegeben werden:

$$\begin{aligned} P_{\Delta}(\mathbf{r}_R, \omega) = & \frac{-jk}{4} \sum_{m=1}^{N_M} P(\mathbf{r}_M[m], \omega) H_1^{(2)}(kr) \cos \varphi \Delta M + \\ & \frac{jk}{4} \sum_{m=1}^{N_M} j\rho c V_n(\mathbf{r}_M[m], \omega) H_0^{(2)}(kr) \Delta M + \\ & \zeta \cdot \frac{-jk}{4} \sum_{m=1}^{N_M} P(\mathbf{r}_{\text{sp},M}[m], \omega) H_1^{(2)}(kr_{\text{sp}}) \cos \varphi \Delta M + \\ & \zeta \cdot \frac{jk}{4} \sum_{m=1}^{N_M} j\rho c V_n(\mathbf{r}_{\text{sp},M}[m], \omega) H_0^{(2)}(kr_{\text{sp}}) \Delta M. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Schnelle im Aufpunkt muss durch den Gradienten bestimmt werden, der sich mit Gleichung (4.34) und der in Kapitel 2.5.4.3 vorgestellten Methode berechnen lässt.

Für einen schallweichen Impedanzabschluss, der sich für die Sekundärquellen eines idealen ANC-Systems entlang des unendlichen Impedanzabschlusses Z_W ergeben würde, muss ein schallweicher Abschluss mit $Z_W = 0$ angenommen werden. Daraus resultiert der Reflexionsfaktor $\zeta = -1$ nach Gleichung (4.33). Wird $\zeta = -1$ in Gleichung (4.34) verwendet, so ergibt sich für Aufpunkte entlang der y -Achse das zu erwartende Ergebnis: Der Schalldruck wird zu Null und die Schnelle verdoppelt sich an dem schallweichen Impedanzabschluss.

Die Simulationsergebnisse der Extrapolation unter der Annahme $Z_W = 0$ sind in den Abbildungen 4.19 und 4.18 dargestellt. Abbildung 4.19 zeigt in der ersten Zeile das unbeeinflusste Primärfeld. Spalte Zwei enthält das erwünschte Feld, das bei einer schallweichen Reflexion an der Geraden entlang der y -Achse bei $x = 0$ m entstehen würde. Die dritte Zeile stellt die Extrapolation Anhand von Gleichung (4.34) dar. In Zeile Vier ist die Differenz des erwünschten und des extrapolierten Feldes aufgetragen.

Für den Einfall der ebenen Welle ist deutlich die stehende Welle in x -Abhängigkeit zu erkennen, die sich im Fehlerabstandsplot als vertikale, schwarze Streifen in der linken

Halbebene darstellt. Auch für die beiden Linienquellen in den mittleren und rechten Plots sind derartige Ausprägungen zu sehen, die aber entsprechend der Quellcharakteristik gekrümmt sind. An diesen Punkten ist der Schalldruck das erwünschte Feldes gleich Null, weshalb dort kein höherer Pegel bei Differenzbildung mit der Extrapolation entstehen kann. Insgesamt verläuft die Prädiktion gut. Besonders für eine dem Mikrofon-Array frontal gegenüberliegende Linienquelle entsteht eine gute Übereinstimmung.

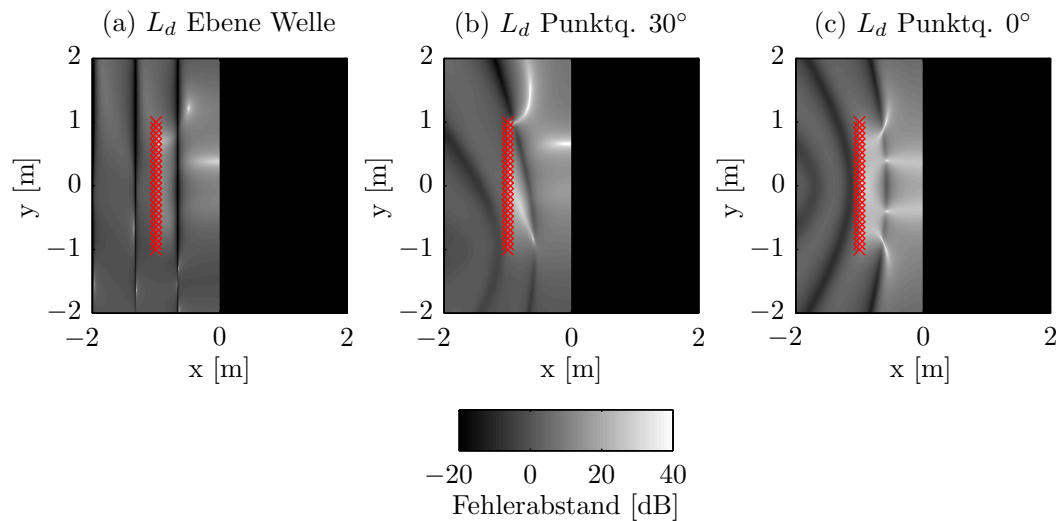


Abbildung 4.18.: Übereinstimmung der Extrapolation mit dem erwünschten Feld mit der Methode der Spiegelemphänger bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = -2$ m und $y = 0$ m. Die schwarzen Bereiche im jeweils rechten Teil der Abbildungen kennzeichnen die Spiegelebene, in der keine Wellenausbreitung stattfindet.

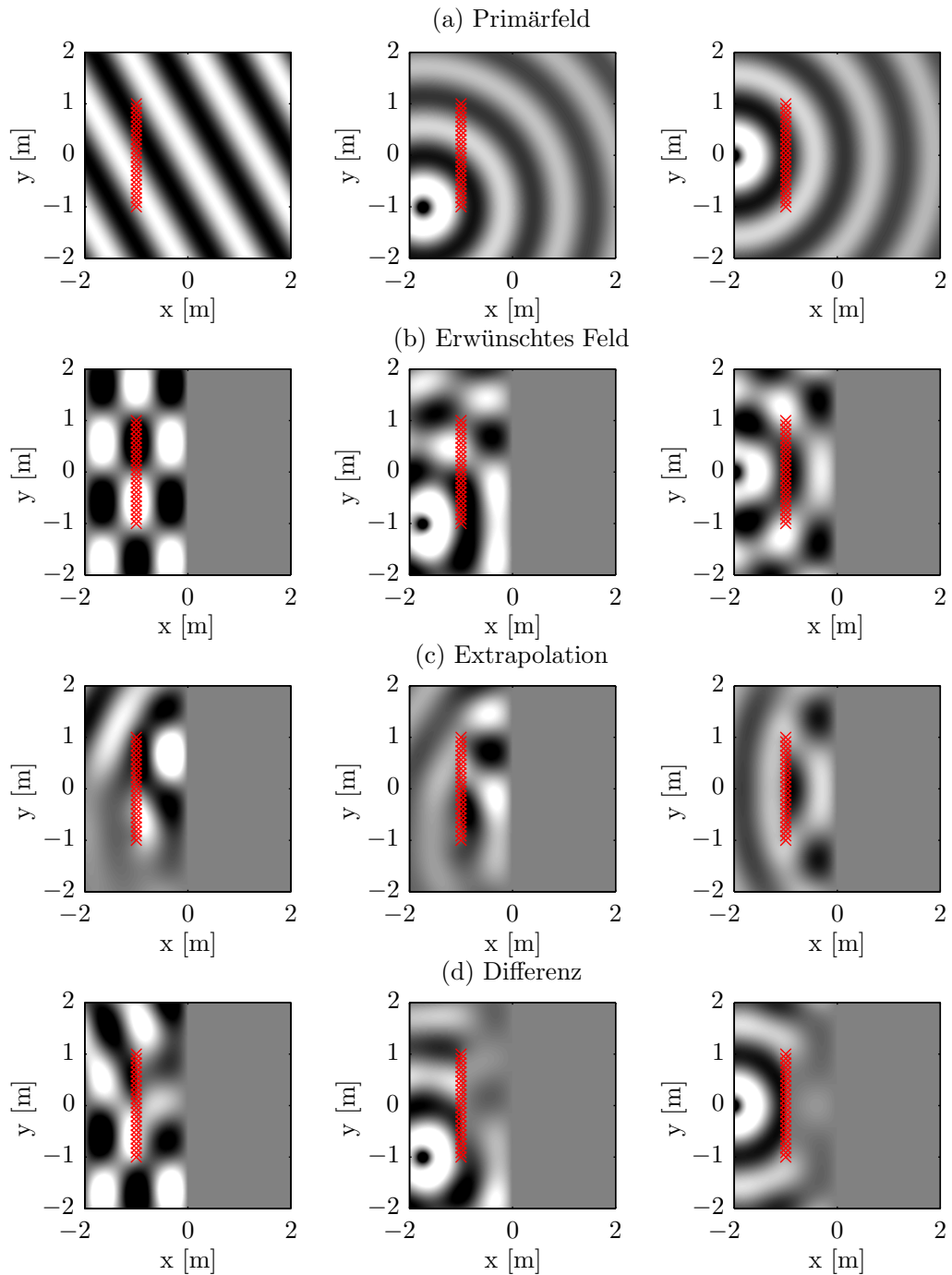


Abbildung 4.19.: Extrapolation mit der Methode der Spiegelempfänger. Linke Spalte: Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle bei $x = -2$ m und $y = 0$ m. (a) Das ungestörte Primärfeld. (b) Das erwünschte Feld. (c) Die Extrapolation. (d) Die Differenz von Primärfeld und Extrapolation. Die grauen Bereiche im jeweils rechten Teil der Abbildungen (b)-(d) kennzeichnen die Spiegelebene ohne Wellenausbreitung.

4.3.5. Tapering bei der Extrapolation mit linienförmigen Mikrofon-Arrays

Die Extrapolationen mit dem linienförmigen Mikrofon-Array sind weniger exakt als für den kreisförmigen Aufbau, da das KHI nur für eine geschlossene Berandung und die Rayleigh-Integrale nur für unendliche Gerade definiert sind. Zudem können durch die endliche Apertur Beugungserscheinungen am Anfang und am Ende des Arrays auftreten (*Truncation*). Da der Mikrofonkreis keinen Anfang und auch kein Ende besitzt, treten derartige Artefakte dort nicht auf. Das *Truncation*-Problem wurde zum Beispiel in [Vog93] und in [Sta97] für die Synthese mit endlichen Lautsprecher-Arrays untersucht. Als Gegenmaßnahme wird dort unter anderem *Tapering* als räumliche Fensterung der Lautsprecher-signale vorgeschlagen. In [Hul04] wird dieses Verfahren auch für die Aufnahme mit Mikrofon-Arrays für das Holophonie-Verfahren betrachtet. Dort wird auch darauf hingewiesen, dass *Tapering* besonders effektiv ist, wenn nur eine Primärquelle vorhanden ist, die idealerweise frontal zum Mikrofon-Array liegt. Beim Vorhandensein mehrerer Quellensignale aus unterschiedlichen Einfallsrichtungen, habe *Tapering* eher mehr Artefakte zur Folge.

In Abbildung 4.20 wird erneut die Extrapolation für ein zwei Meter langes Mikrofon-Array bei 300 Hz dargestellt. Diesmal jedoch sind insgesamt 200 Mikrofon-Paare vorhanden, um eine bessere Annäherung an eine kontinuierliche Linie zu erzielen. Das *Tapering* wird in Form einer Hanning-Flanke auf die Mikrofone am Rand angewendet. Die Länge der Flanke beträgt $1/8$ der Array-Länge. Abbildung 4.20 (a) zeigt das Simulationsergebnis ohne *Tapering* und 4.20 (b) mit *Tapering* bei 300 Hz. Zum Vergleich ist die gleiche Simulation bei einer Frequenz von 1500 Hz in Abbildung 4.21 dargestellt.

Wie in den Abbildungen zu erkennen ist, verbessert *Tapering* die Extrapolation nur geringfügig. Dies hängt damit zusammen, dass zur Berechnung der Extrapolation sowohl Druck- als auch Schnellempfänger verwendet werden. Wird die Fernfeld-Näherung

$$P(\mathbf{r}_R, \omega) = \frac{1+j}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \oint_M [P(\mathbf{r}_M, \omega) \cos \varphi + \rho c V_n(\mathbf{r}_M, \omega)] \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} dM \quad (4.35)$$

des KHI hinzugenommen, so kann die Kombination aus Druck und Schnelle auch als eine (hyper-)kardioide Empfangscharakteristik angesehen werden [Hul04]. Für eine derartige Richtfunktion sind Artefakte durch endliche Aperturen weniger ausgeprägt [Ver97] und *Tapering* ist eher unnötig. Eine weitere, anschauliche Erklärung ergibt sich, wenn Lautsprecher anstelle von Mikrofonen angenommen werden, die das gegebene Feld synthetisieren. Würde es sich dabei lediglich um Monopolquellen handeln, ergäben sich an den Rändern die bekannten, ringförmigen Beugungsmuster. Wird hingegen eine Kombination aus Omnipol- und Dipol-Strahler angenommen, ist sofort ersichtlich, dass die Beugung geringfügiger ausfällt.

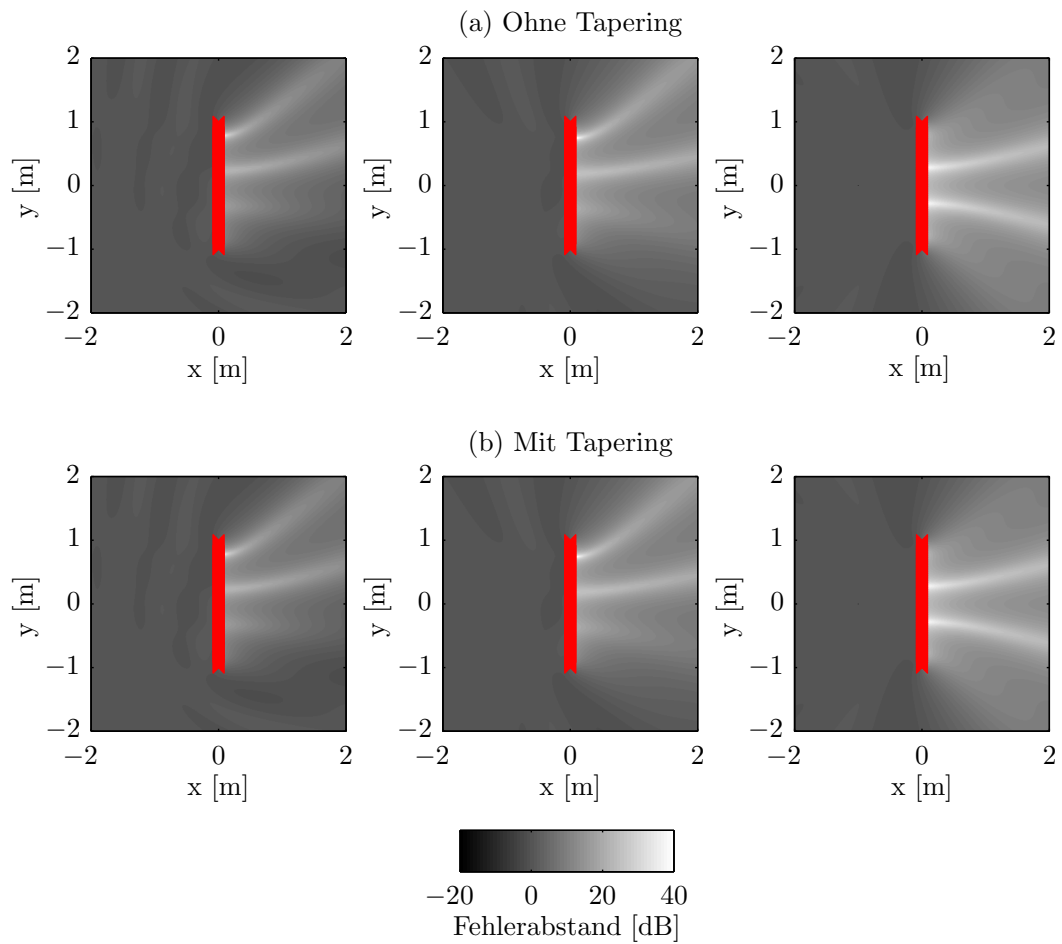


Abbildung 4.20.: Übereinstimmung von Extrapolation und Primärfeld als Fehlerabstand L_d bei 300 Hz. Linke Spalte: Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle bei $x = -1$ m und $y = 0$ m.

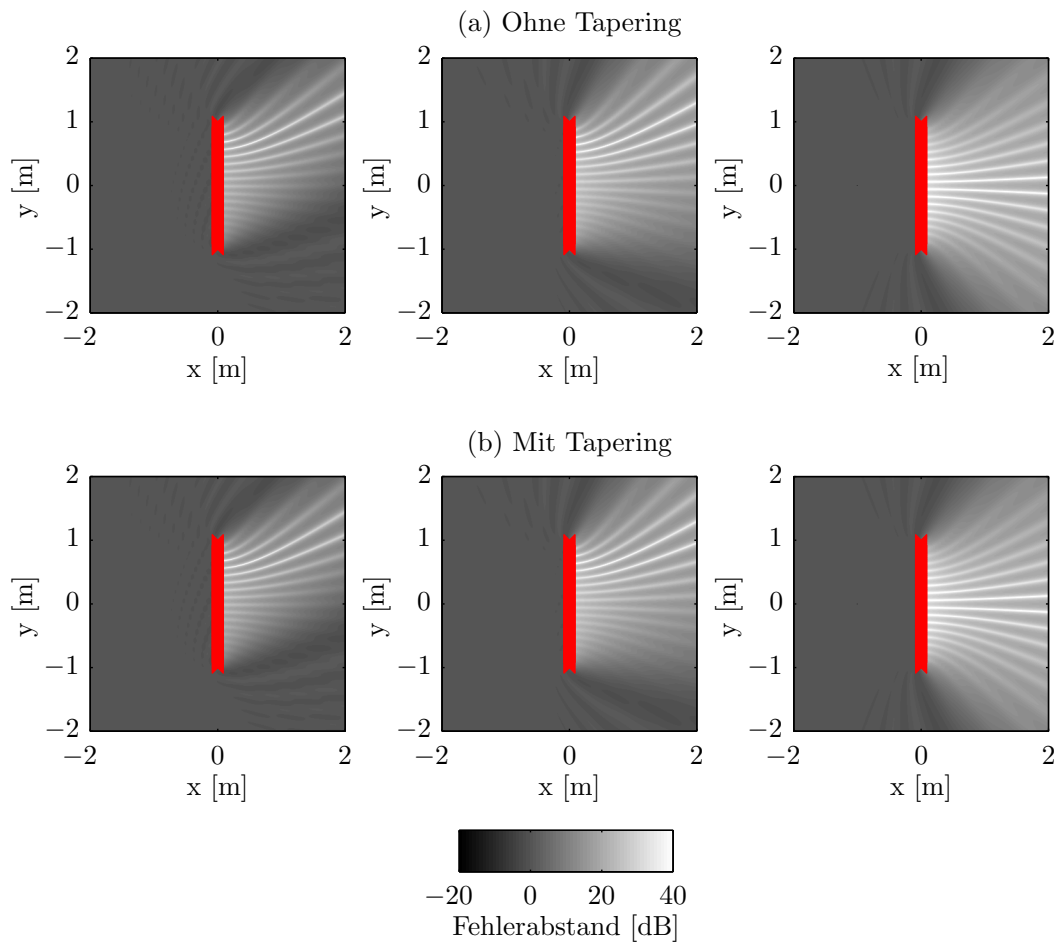


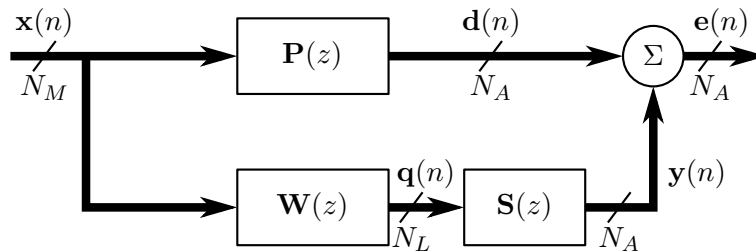
Abbildung 4.21.: Übereinstimmung von Extrapolation und Primärfeld als Fehlerabstand L_d bei 1500 Hz. Linke Spalte: Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle bei $x = -1$ m und $y = 0$ m.

5. Gegenfeldsynthese im zweidimensionalen Active Noise Control

Dieses Kapitel widmet sich der Synthese von Schallfeldern zur aktiven Auslöschung eines gegebenen Primärfeldes und kann in drei Abschnitte unterteilt werden: Im ersten Teil wird die in [Tri03] vorgestellte Methode der Analysepunkte in veränderter Weise hergeleitet und es werden Variationen aufgezeigt, die auf den bereits vorgestellten Extrapolationsverfahren beruhen. Der zweite Abschnitt behandelt das neue Verfahren der Synthese durch die Reflexionsäquivalenz, die ohne Analysepunkte auskommt. Im dritten Teil wird ein Hybridverfahren der beiden erstgenannten Methoden gezeigt, dass für das in Kapitel 7 vorgestellte System Relevanz besitzt.

5.1. Methode der Analysepunkte

5.1.1. Feedforward Active Noise Control



$$N_M = N_L = N_A$$

Abbildung 5.1.: Prinzipieller Aufbau eines MIMO Feedforward ANC-Systems.

Das Ziel eines Feedforward Active Noise Control Systems ist den Schalldruck an einem oder mehreren Überlagerungspunkten zu minimieren. Die Struktur für ein derartiges System mit mehreren Ein- und Ausgängen (Multiple Input Multiple Output (MIMO)-Feedforward-ANC-System) ist in Abbildung 5.1 dargestellt ([Nel92; KM96; Ell01]). Bei der Eingangsgröße $\mathbf{x}(n)$ kann es sich um eine Reihe von N_M Mikrofonsignalen handeln oder aber auch um andere Größen, wie die Drehzahl eines Motors, die Netzfrequenz, oder deren Kombination. Durch die Übertragungsfunktion $\mathbf{P}(z)$ entstehen die Signale $\mathbf{d}(n)$, deren Nachbildung verlangt wird (*desired*). Dabei handelt es sich streng genommen um Signale, die unerwünscht und zu minimieren sind, weshalb sie gelegentlich

auch als *undesired* bezeichnet werden. Zu diesem Zweck werden die Eingangsgrößen dem mehrdimensionalen Filter $\mathbf{W}(z)$ zugeführt. Dessen Ausgangssignale $\mathbf{q}(n)$ wirken über die Sekundärpfade $\mathbf{S}(z)$ in den Überlagerungspunkten und interferieren dort als $\mathbf{y}(n)$ mit $\mathbf{d}(n)$. Die Fehlersignale $\mathbf{e}(n)$ ergeben sich daher aus der Summe

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) + \mathbf{y}(n). \quad (5.1)$$

Man beachte, dass hier auch oftmals die Differenz verwendet wird. Für das weitere Vorgehen sollen alle Signalvektoren die gleiche Länge $N_M = N_L = N_A$ besitzen.

Aus dem Ersatzschaltbild in Abbildung 5.1 ist direkt ersichtlich, dass $\mathbf{W}(z)$ die folgende, optimale Übertragungsfunktion $\mathbf{W}^\circ(z)$ haben muss:

$$\mathbf{W}^\circ(z) = -\mathbf{P}(z) \cdot \mathbf{S}^{-1}(z). \quad (5.2)$$

Sind demnach die Primärpfade $\mathbf{P}(z)$ und die Sekundärpfade $\mathbf{S}(z)$ bekannt, kann die mehrdimensionale Übertragungsmatrix direkt bestimmt werden.

In dem vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, wie anhand der Wellenfeldextrapolation die Prädiktion akustischer Felder und somit eine Abschätzung der Primärpfade möglich ist. Des weiteren wurden in Kapitel 2 die Rayleigh Integrale und die Simple Source Formulation vorgestellt, anhand derer die Synthese von Schallfeldern vollzogen werden kann. Werden Extrapolation und Synthese zusammengeführt, kann das optimale mehrdimensionale Filter abgeschätzt werden:

$$\hat{\mathbf{W}}^\circ(z) = -\hat{\mathbf{P}}(z) \cdot \hat{\mathbf{S}}^{-1}(z). \quad (5.3)$$

Darin stellt $\hat{\mathbf{P}}(z)$ die Prädiktion der Primärpfade durch die Wellenfeldextrapolation dar und $\hat{\mathbf{S}}(z)$ eine Abschätzung der Synthese durch die Sekundärquellen. Die Herleitung und Beschreibung durch akustische Feldgrößen folgt im nächsten Abschnitt.

5.1.2. Eine alternative Herleitung der Methode der Analysepunkte anhand des allgemeinen Kirchhoff-Integrals

Die nachfolgende Herleitung der Methode der Analysepunkte stellt eine leichte Abwandlung der in [Tri03] dargelegten Ausführungen dar. Es wird das allgemeine Kirchhoff-Integral verwendet, wie zum Beispiel in [KK10] dargestellt.

Das allgemeine zweidimensionale Kirchhoff-Integral beschreibt den Druck am Ort \mathbf{r}_R als Superposition der Beiträge auf dem Rand F und der inneren Quellenverteilung Ψ_i :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}_R, \omega) &= \frac{j}{4} \int_F \Psi_i(\mathbf{r}_i) H_0^{(2)}(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_i) dF \\ &+ \frac{-jk}{4} \oint_F P(\mathbf{r}_F, \omega) H_1^{(2)}(kr) \cos \varphi dF + \frac{jk}{4} \oint_F j\rho c V_n(\mathbf{r}_F, \omega) H_0^{(2)}(kr) dF. \end{aligned} \quad (5.4)$$

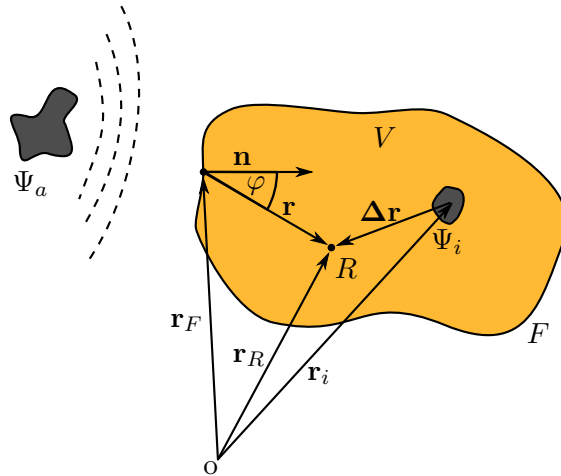


Abbildung 5.2.: Lösungsgebiet für das allgemeine Kirchhoff-Integral mit äußerer Quellenverteilung Ψ_a und innerer Quellenverteilung Ψ_i .

Im Vergleich mit Abbildung 5.1 stellt der Punkt \mathbf{r}_R in der Fläche F die Superpositions- und Analysepunkte dar, an denen die Fehler $\mathbf{e}(n)$ minimiert werden sollen. Diese Orte werden nach [Tri03] im Folgenden Analysepunkte genannt. Für eine Auslöschung des Primärfeldes $\mathbf{d}(n)$ muss an den Analysepunkten daher folgende Bedingung erfüllt sein:

$$P(\mathbf{r}_R, \omega) = P_{\text{Primär}}(\mathbf{r}_R, \omega) + P_{\text{Sekundär}}(\mathbf{r}_R, \omega) \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.5)$$

Angewendet auf Gleichung (5.4) ergibt dies

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{j}{4} \int_F \Psi_i(\mathbf{r}_i) H_0^{(2)}(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_i) dF + \frac{-jk}{4} \oint_F P(\mathbf{r}_F, \omega) H_1^{(2)}(kr) \cos \varphi dF + \frac{jk}{4} \oint_F j\rho c V_n(\mathbf{r}_F, \omega) H_0^{(2)}(kr) dF. \quad (5.6)$$

Für das durch die innere Quellenverteilung Ψ_i erzeugte Sekundärfeld muss daher gelten

$$-\frac{j}{4} \int_F \Psi_i(\mathbf{r}_i) H_0^{(2)}(\mathbf{r}_R | \mathbf{r}_i) dF = \frac{-jk}{4} \oint_F P(\mathbf{r}_F, \omega) H_1^{(2)}(kr) \cos \varphi dF + \frac{jk}{4} \oint_F j\rho c V_n(\mathbf{r}_F, \omega) H_0^{(2)}(kr) dF. \quad (5.7)$$

5.1.2.1. Verallgemeinerung der Methode der Analysepunkte

Das allgemeine Kirchhoff-Integral stellt die Überlagerung eines äußeren und eines inneren Schallfeldes in V dar. Demnach kann die Methode der Analysepunkte weiter verallgemeinert werden zur bereits erwähnten Superposition von Extrapolation und Gegenfeldsynthese am Analysepunkt. Die Extrapolation kann auf verschiedenen Wegen

erzielt werden, wie bereits in Kapitel 4 gezeigt wurde. Die Gegenfeldsynthese hängt von der Art der Sekundärquellen und deren Anordnung ab. In Kapitel 7.4 wird dargestellt, wie die Sekundärpfade ausgemessen werden können, sodass keinerlei Modellbildung notwendig ist.

Für die weiteren Untersuchungen in diesem Kapitel wird daher für die Synthese eines kreisförmigen Sekundärfeldes die Simple Source Formulation nach Kapitel 2.6 gewählt. Zur Bestimmung der linienförmigen Synthese, wird das Rayleigh-I-Integral verwendet.

5.1.2.2. Diskrete Synthesegleichung

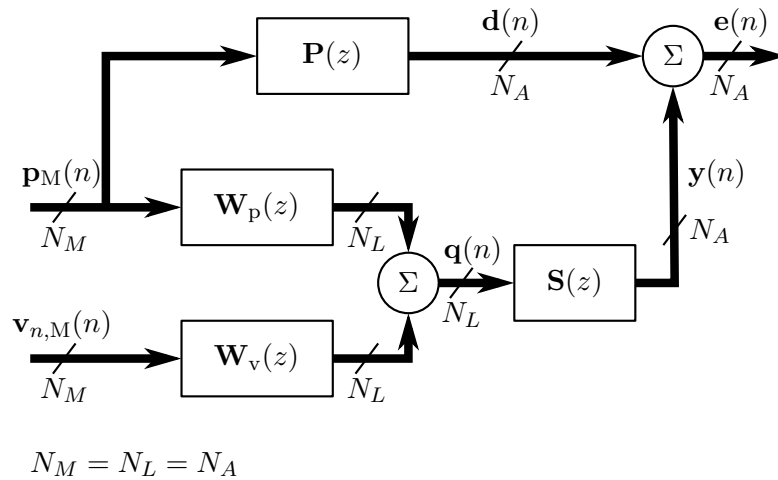


Abbildung 5.3.: Erweiterter Aufbau des MIMO Feedforward ANC-Systems unter Berücksichtigung von Druck- und Schnellesignalen.

Aufgrund endlicher Anzahl an Referenzempfängern und Sekundärquellen wird die Synthesegleichung auf Basis von Gleichung (5.7) in diskreter Form benötigt:

$$\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{S} = \mathbf{p}_M^T \cdot \mathbf{W}_p + \mathbf{v}_{n,M}^T \cdot \mathbf{W}_v. \quad (5.8)$$

Darin ist \mathbf{q} der Vektor der Sekundärsignale, \mathbf{S} sind die Sekundärpfade, \mathbf{p}_M sind die Signale der Druckempfänger, \mathbf{W}_p ist die Übertragungsmatrix zwischen Druck-Mikrofonen und Analysepunkten, $\mathbf{v}_{n,M}$ sind die Mikrofonensignale der Schnelleempfänger und \mathbf{W}_v ist die Übertragungsmatrix zwischen Schnelle-Mikrofonen und Analysepunkten. Das ANC-System inklusive der Aufspaltung der Eingangsgröße in Druck- und Schnellesignale ist im Ersatzschaltbild in Abbildung 5.3 dargestellt.

Umformen nach \mathbf{q} ergibt somit die gewünschte Synthesegleichung

$$\mathbf{q}^T = \mathbf{p}_M^T \cdot \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{v}_{n,M}^T \cdot \mathbf{W}_v \cdot \mathbf{S}^{-1}. \quad (5.9)$$

Damit können die Lautsprecher-signale direkt bestimmt werden, sofern die Sekundärpfade \mathbf{S} invertierbar sind. Es ergibt sich implizit, dass die Anzahl der Analysepunkte gleich der Anzahl der Sekundärquellen gewählt werden sollte: $N_A = N_L$.

5.1.3. Untersuchungen für den kreisförmigen Aufbau

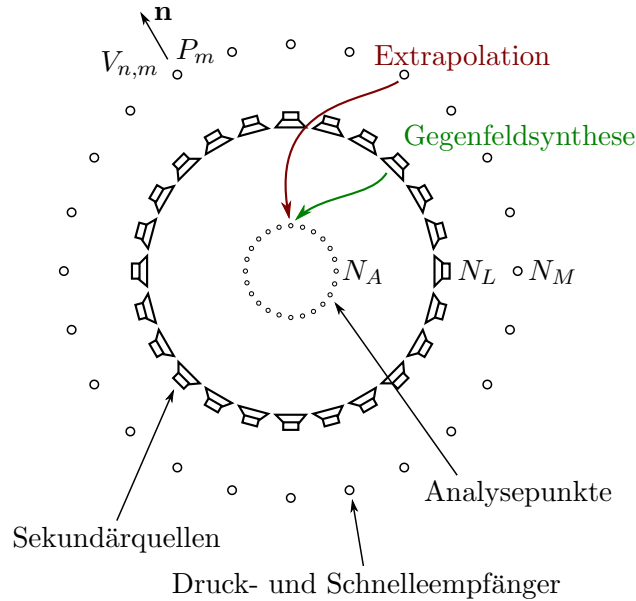


Abbildung 5.4.: Aufbau des ANC-Systems bestehend aus Referenzmikrofonen, Gegenlautsprechern und Analysepunkten nach [Tri03]. Der Radius des Mikrofonkreises beträgt $R_M = 1,2$ m, der Radius des Lautsprecherkreises $R_L = 1$ m und der Radius des Analysepunktekreis beträgt $R_A = 0,5$ m.

Abbildung 5.4 zeigt den Aufbau des ANC-Systems, bestehend aus dem äußeren Mikrofonkreis, dem Lautsprecherkreis und den kreisförmig angeordneten Analysepunkten. Der Normalenvektor \mathbf{n} zeigt die Empfangsrichtung der Schnellempfänger an. Zur Verdeutlichung des ANC-Verfahrens, sind die Extrapolation und die Gegenfeldsynthese an den Analysepunkten eingezeichnet. Für die Gegenfeldsynthese wird die Simple Source Formulation nach Kapitel 2.6 in diskretisierter Form herangezogen. Der Schalldruck des Gegenfeldes am Analysepunkt \mathbf{r}_A kann daher wie folgt bestimmt werden:

$$P_{\Delta}(\mathbf{r}_A[a], \omega) = \frac{j}{4} \sum_{l=0}^{N_L-1} q(\mathbf{r}_L[l], \omega) H_0^{(2)}(kr_{(l,a)}) \Delta L. \quad (5.10)$$

Darin ist $\mathbf{r}_A[a]$ der Ort des a -ten Analysepunkts und $\mathbf{r}_L[l]$ der Ort des l -ten Lautsprechers und ΔL die Länge des Kreisabschnitts zwischen den Lautsprechern. $r_{(l,a)}$ stellt

die Länge des Verbindungsvektors zwischen dem Lautsprecher l und dem Analysepunkt a dar.

Somit ergibt sich die Sekundärpfadmatrix \mathbf{S} zu:

$$\mathbf{S} = \frac{j\Delta L}{4} \begin{bmatrix} H_0^{(2)}(kr_{(0,0)}) & \dots & H_0^{(2)}(kr_{(0,N_A-1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0^{(2)}(kr_{(N_L-1,0)}) & \dots & H_0^{(2)}(kr_{(N_L-1,N_A-1)}) \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Darin ist $r_{l,a}$ der Betrag des Verbindungsvektors zwischen der Sekundärquelle l und dem Analysepunkt a . Mit $l = 0 \dots N_L - 1$ und $a = 0 \dots N_A - 1$.

5.1.3.1. Extrapolation anhand des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals

Erfolgt die Extrapolation mit dem KHI, können die Übertragungs-Matrizen \mathbf{W}_p und \mathbf{W}_v wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{W}_p = \frac{-jk\Delta M}{4} \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(kr_{(0,0)}) \cos \varphi_{(0,0)} & \dots & H_1^{(2)}(kr_{(0,N_A-1)}) \cos \varphi_{(0,N_A-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_1^{(2)}(kr_{(N_M-1,0)}) \cos \varphi_{(N_M-1,0)} & \dots & H_1^{(2)}(kr_{(N_M-1,N_A-1)}) \cos \varphi_{(N_M-1,N_A-1)} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{W}_v = \frac{-k\rho c\Delta M}{4} \begin{bmatrix} H_0^{(2)}(kr_{(0,0)}) & \dots & H_0^{(2)}(kr_{(0,N_A-1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0^{(2)}(kr_{(N_M-1,0)}) & \dots & H_0^{(2)}(kr_{(N_M-1,N_A-1)}) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

In Gleichung (5.13) ist $r_{(m,a)}$ der Betrag des Verbindungsvektors zwischen der Mikrofonposition m und dem Analysepunkt a mit $m = 0 \dots N_M - 1$. Dementsprechend ist $\varphi_{m,a}$ der Winkel zwischen dem nach Innen zeigenden Normalenvektor \mathbf{n} auf dem Mikrofonkreis und $r_{(m,a)}$.

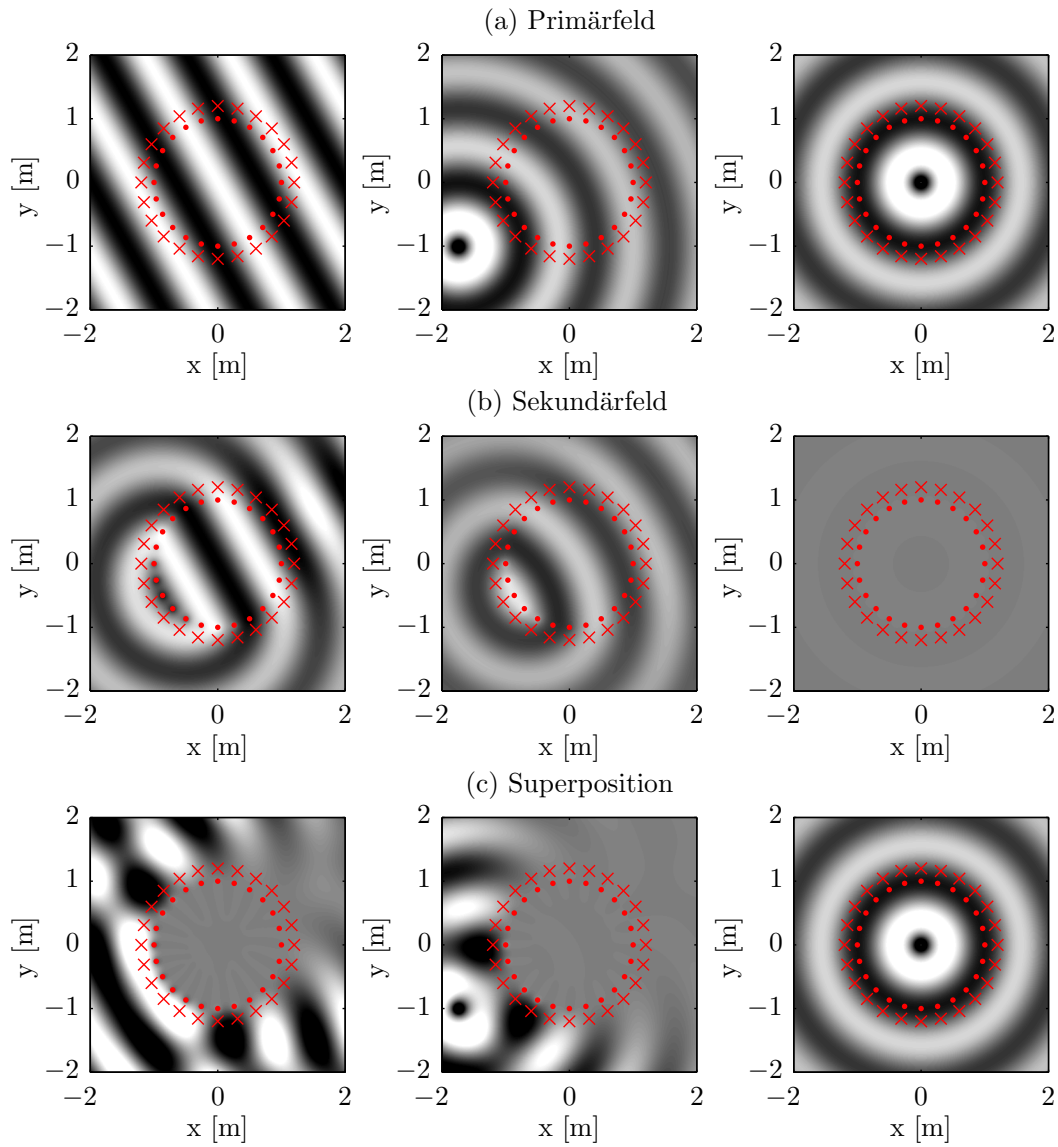


Abbildung 5.5.: Simulation des kreisförmigen 2D-ANC-Systems unter Verwendung der Methode der Analysepunkte bei 300 Hz. Linke Spalte: Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle im Ursprung. (a) Das ungestörte Primärfeld. (b) Das Sekundärfeld. (c) Die Superposition.

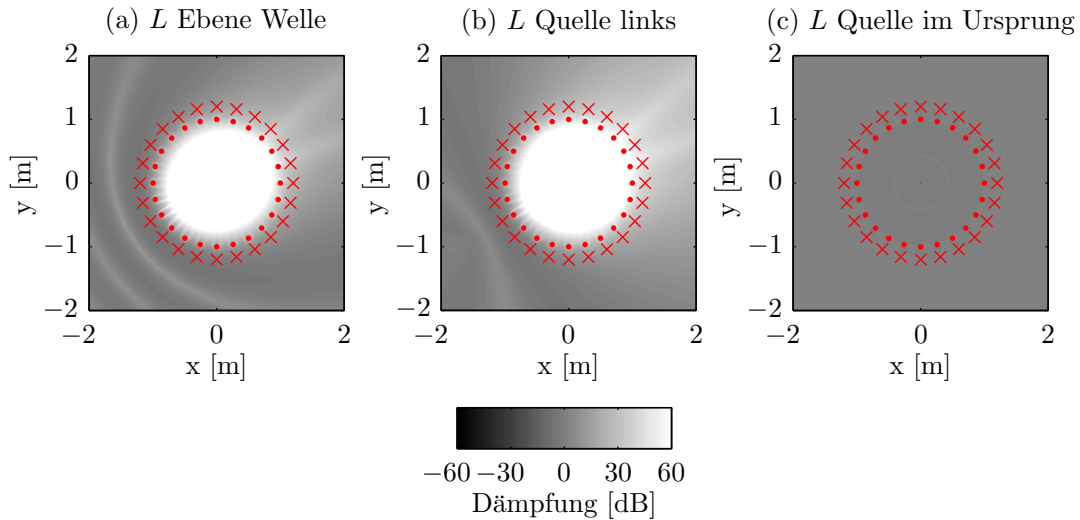


Abbildung 5.6.: Dämpfung des Primärfeldes durch das 2D-ANC-System unter Verwendung der Methode der Analysepunkte bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle im Ursprung.

Man beachte, dass in [Tri03] die Übertragungsfunktionen anders gebildet werden, da dort zwei nah beieinander liegende Druckempfänger anstelle der Kombination von Druck- und Schnelleempfänger angenommen werden. Der Schalldruck und dessen Gradient werden dann aus der Summe und der Differenz der beiden Druckempfänger angenähert.

Das Simulationsergebnis des vollständigen Systems ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Der Mikrofonkreis hat einen Radius von 1,2 m, der Lautsprecherradius beträgt 1 m und der Kreis der Analysepunkte hat einen Radius von 0,5 m. Die linke Spalte zeigt das Primärfeld, das durch die Sekundärquellen erzeugte Sekundärfeld und die Superposition der beiden Felder für die ebene Welle in 30° Ausbreitungsrichtung. Die mittlere Spalte zeigt die gleichen Felder für eine nahegelegene Linienquelle und die rechte Spalte für eine Linienquelle in der Mitte des Kreises.

Für die von außen in den Kreis eindringenden Felder ist die fast perfekte Auslöschung durch das Gegenfeld erkennbar. Für das Feld von innen gilt, dass dieses lediglich zu einer zu vernachlässigenden Reaktion durch das System führt. Die durch die destruktive Interferenz erzielten Dämpfungswerte sind in Abbildung 5.6 zu sehen. Auch diese bestätigen die ausgezeichnete Auslöschung im Innern und die kaum erkennbare Reaktion auf Quellen im Innern.

Darüber hinaus ist eine wichtige, positive Eigenschaft der Methode der Analysepunkte zu erkennen: Die Ansteuerung der Sekundärquellen ergibt sich aufgrund der Inver-

tierung der Sekundärpfade implizit. In vielen Beiträgen zur Wellenfeldsynthese wird die Problematik der korrekten Ansteuerung der Sekundärquellen in kreisförmigen oder konvexen Lautsprecher-Arrays genannt, wie zum Beispiel in [ARS08] beschrieben. Da bei der Verwendung eines herkömmlichen Holophonie- oder Wave Field Extrapolation (WFE)-Ansatzes die Lautsprecher signale direkt aus Mikrofon signalen bestimmt werden, kommt es in der Praxis zu unerwünschten Feld-Anteilen im Reproduktionsgebiet, da in der Regel nur Monopolquellen und nicht Monopol- und Dipolquellen verwendet werden können. Für die korrekte Wiedergabe einer ebenen Wellenfront werden bei diesen Verfahren die hinteren Sekundärquellen nicht angesteuert (siehe auch [FN13]). Das Verfahren der Analysepunkte bietet in dieser Hinsicht einen klaren Vorteil, der allerdings auf der Invertierung der Sekundärpfade beruht. Diese liefert in der Praxis nicht immer befriedigende Ergebnisse.

5.1.3.2. Extrapolation mit Zirkularen Harmonischen Extrapolationskoeffizienten

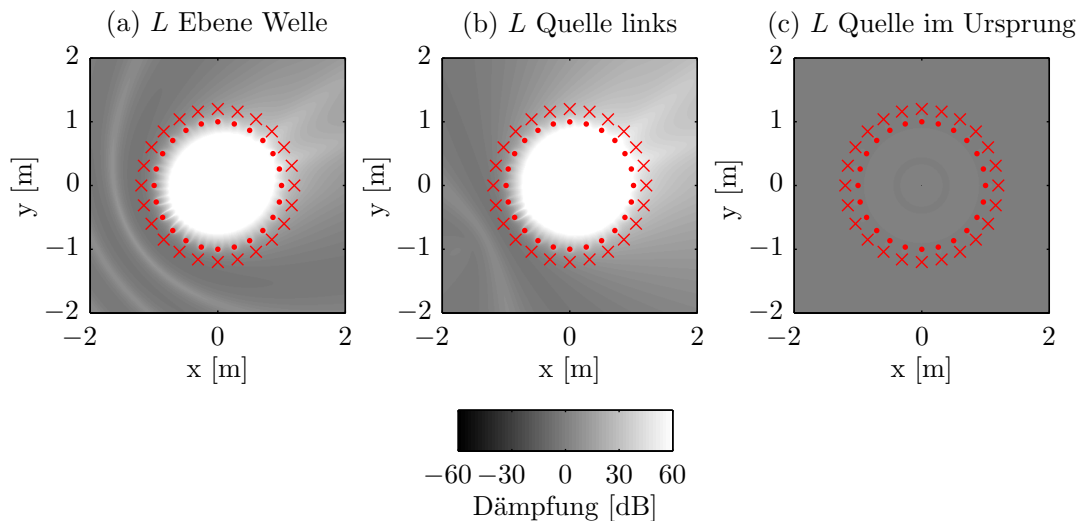


Abbildung 5.7.: Dämpfung des Primärfeldes durch das 2D-ANC-System unter Verwendung der Methode der Analysepunkte bei 300 Hz. Extrapolation mit Zirkularen Harmonischen und kardioiden Empfängern. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle im Ursprung.

In Kapitel 4 konnte gezeigt werden, dass die Extrapolation anhand Zirkularer Harmonischer Expansionskoeffizienten ebenfalls eine sehr gute Prädiktion eines Primärfeldes ermöglicht. Für das Analysepunkte-Verfahren wird die diskrete Grundgleichung abge-

wandelt und nimmt folgende Form an:

$$\mathbf{q}^T = \mathbf{p}_{\text{ZHE}}^T \cdot \mathbf{S}^{-1}. \quad (5.14)$$

Darin ist $\mathbf{p}_{\text{ZHE}}^T$ der Vektor der Drucksignale an den Analysepunkten, der wie folgt bestimmt wird mit

$$\mathbf{p}_{\text{ZHE}}^T = \left[P(r_{a=0}, \varphi_{a=0}, \omega) \quad P(r_{a=1}, \varphi_{a=1}, \omega) \quad \dots \quad P(r_{a=N_A-1}, \varphi_{a=N_A-1}, \omega) \right] \quad (5.15)$$

und

$$P(r_a, \varphi_a, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_{\nu}(\omega) \left[H_{\nu}^{(1)}(kr_a) + H_{\nu}^{(2)}(kr_a) \right] e^{j\nu\varphi_a}. \quad (5.16)$$

Für die ebene Welle, die externe Linienquelle und die interne Quelle sind die Simulationsergebnis für das ANC-System auf Basis der ZHE im Grunde identisch mit dem System auf Basis des KHI. Die Dämpfungsergebnisse zeigt Abbildung 5.7. Somit bietet die ZHE eine gute Variation der Methode der Analysepunkte, da diese fast identische Dämpfungsergebnisse liefert, keine Reaktion auf Quellen im Innern zeigt und mit kardioiden Mikrofonen anstelle von Mikrofonpaaren auskommt. Somit halbiert sich die Anzahl der zu verarbeitenden Eingangssignale.

5.1.4. Untersuchungen für den linienförmigen Aufbau

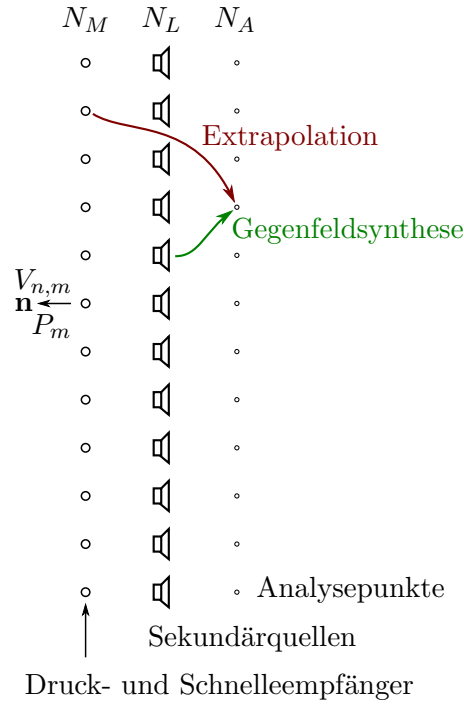


Abbildung 5.8.: Linienförmiger Aufbau des ANC-Systems bestehend aus Referenz-Mikrofonen, Gegenlautsprechern und Analysepunkten.

Das ANC-System auf Basis der Analysepunkte-Methode und des KHI wurde bereits ausführlich in [Tri03] diskutiert. Für den Einsatz in der Praxis sind geschlossene Anordnungen wie der ANC-Kreis oder der Aufbau als Quadrat nicht immer geeignet. In vielen Situationen ist daher der Einsatz einer aktiven Schallbarriere sinnvoller, ähnlich einer Schallschutzmauer mit schallweicher Oberflächenimpedanz. Für das linienförmige ANC-System sollen für Gleichung (5.9) zuerst die Sekundärpfade \mathbf{S} anhand des diskretisierten Rayleigh-I-Integrals bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 P_{\Delta}(\mathbf{r}_A, \omega) &= \frac{jk}{2} \sum_{l=0}^{N_L-1} j\rho c V_n(r_L[l], \omega) H_0^{(2)}(kr_{(l,a)}) \Delta L = \\
 & \frac{j}{2} \sum_{l=0}^{N_L-1} q(r_L[l], \omega) H_0^{(2)}(kr_{(l,a)}) \Delta L.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Darin sind $\mathbf{r}_A[a]$ der Ort des a -ten Analysepunkts, $\mathbf{r}_L[l]$ der Ort des l -ten Lautsprechers und ΔL der Abstand der Lautsprecher. $r_{(l,a)}$ stellt die Länge des Verbindungsvektors zwischen dem Lautsprecher l und dem Analysepunkt a dar. Die Übertragungsmatrix \mathbf{S} der Sekundärpfade lautet dann mit der Anzahl an Lautsprechern N_L und der Anzahl

an Analysepunkten N_A :

$$\mathbf{S} = \frac{j\Delta L}{2} \begin{bmatrix} H_0^{(2)}(kr_{(0,0)}) & \dots & H_0^{(2)}(kr_{(0,N_A-1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0^{(2)}(kr_{(N_L-1,0)}) & \dots & H_0^{(2)}(kr_{(N_L-1,N_A-1)}) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

5.1.4.1. Extrapolation mit dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral

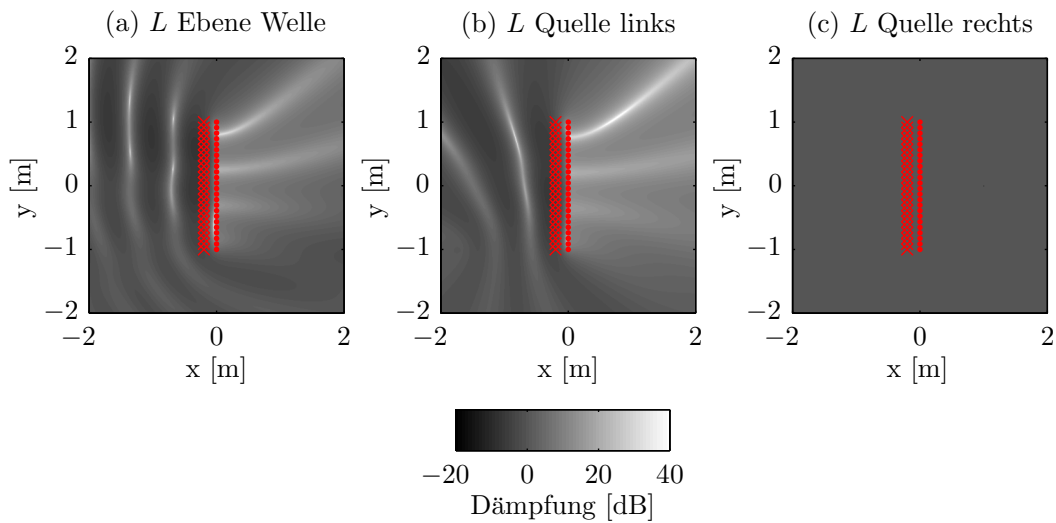


Abbildung 5.9.: Dämpfung des Primärfeldes durch das linienförmige 2D-ANC-System unter Verwendung der Methode der Analysepunkte bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

Im Vorfeld wurde bereits erwähnt, dass das zweidimensionale KHI nicht für eine endliche Linienanordnung definiert ist. Dennoch wird es im folgenden Abschnitt, wie auch schon in Kapitel 4, für die Prädiktion des Primärfeldes an den Analysepunkten herangezogen. Die Ergebnisse der Simulationen für die Frequenz 300 Hz zeigen die Abbildungen 5.9 und 5.10. Die Länge der Mikrofon- und Lautsprecherarrays beträgt jeweils zwei Meter und jedes Arrays besteht aus 24 Elementen. Ebenso viele Analysepunkte werden über die gleiche Länge angenommen. Die parallel zur y -Achse ausgerichteten Mikrofone, Lautsprecher und Analysepunkte befinden sich jeweils bei $x = -0,2$ m, $x = 0$ m und $x = 0,4$ m. In der linken Spalte von Abbildung 5.10 sind Primärfeld, Gegenfeld und Superposition für die ebene Welle mit dem Ausbreitungswinkel $\varphi = 30^\circ$ zu sehen.

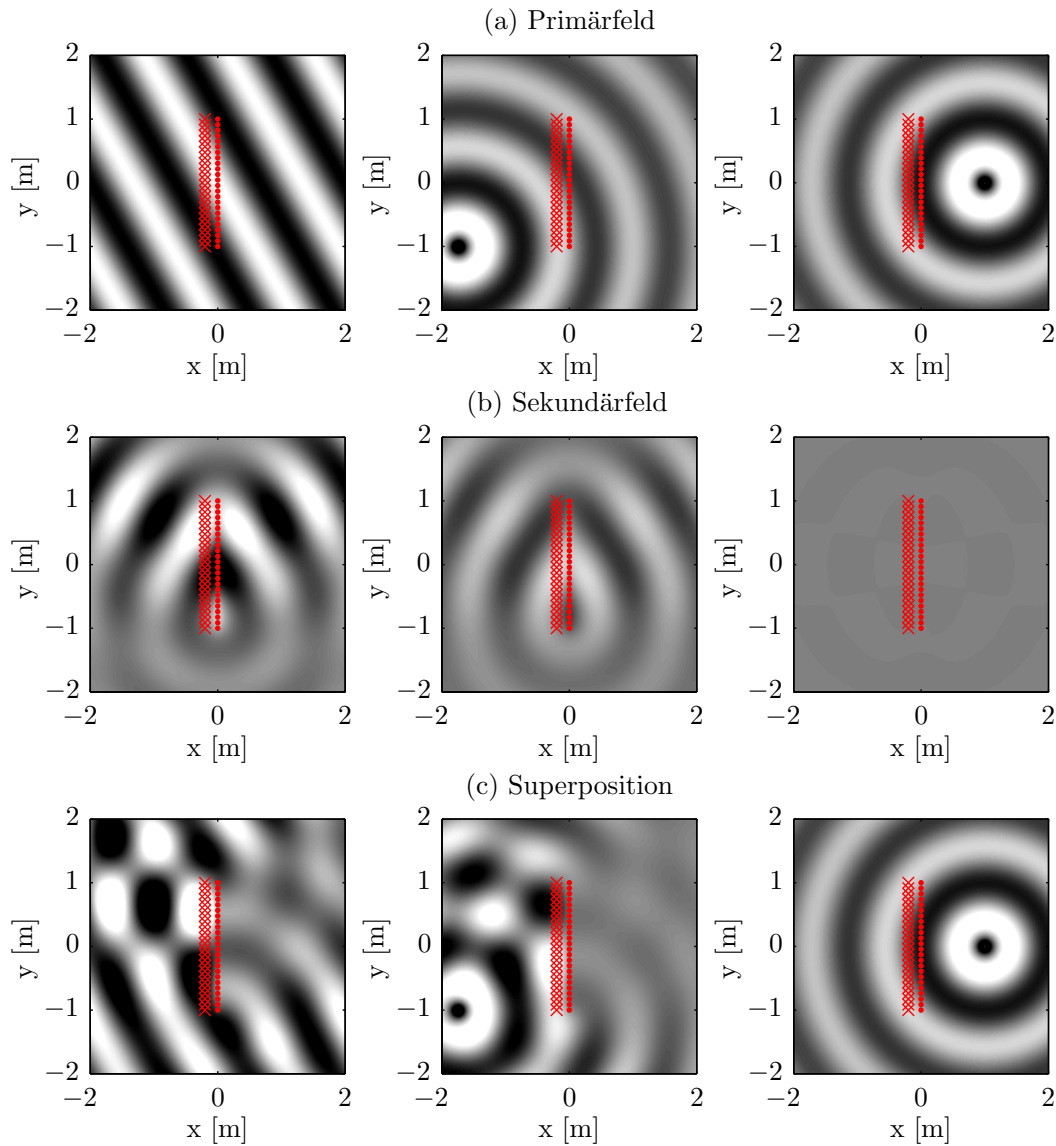


Abbildung 5.10.: Simulation des linienförmigen 2D-ANC-Systems unter Verwendung der Methode der Analysepunkte bei 300 Hz. Linke Spalte: Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m. (a) Das ungestörte Primärfeld. (b) Das Sekundärfeld. (c) Die Superposition.

Dem entsprechend zeigen die mittlere und rechte Spalte diese Felder für die Linienquelle links und die Linienquelle rechts. Die destruktive Interferenz durch das Gegenfeld fällt nicht so ausgeprägt aus wie bei dem kreisförmigen ANC-System. Dieses Ergebnis zeigt

große Ähnlichkeiten mit den in Kapitel 4 gezeigten Extrapolations-Simulationen. Der linienförmige Aufbau ist demnach in der Lage, eine aktive Dämpfung des Primärfeldes zu erzeugen. Wie in Abbildung 5.9 zu erkennen ist, entsteht rechts der Sekundärquellen ein Dämpfungsmuster, das keine gleichmäßig Ausprägung aufweist, sondern Zonen starker und weniger starker Auslöschung besitzt. Der Grund dafür liegt bei der endlichen Sekundärquellverteilung, die bei einem kreisförmigen Aufbau nicht gegeben ist. Den Abbildungen 5.9 und 5.10 kann zudem entnommen werden, dass das ANC-System nicht auf die Quelle im Dämpfungsbereich reagiert, wie es anhand der Voruntersuchungen aus Kapitel 4 zu erwarten war. Da für die Synthese des Gegenfeldes ausschließlich Monopolquellen verwendet werden, kann *Tapering* in diesem Fall zu einer Verbesserung führen [Sta97].

5.1.4.2. Extrapolation mit dem Rayleigh-II-Integral und Kardioid-Mikrofonen

Sollen keine Schnellempfänger verwendet werden, kann mit handelsüblichen Kardioid-Mikrofonen gearbeitet werden. Die Extrapolation wird dann anhand des Rayleigh-II-Integrals nach Kapitel 4.3.2 vollzogen und die diskrete Synthesegleichung erhält die Form

$$\mathbf{q}^T = \mathbf{p}_{M,\text{kard}}^T \cdot \mathbf{W}_{p,\text{kard}} \cdot \mathbf{S}^{-1}. \quad (5.19)$$

Die Matrix der Übertragungsfunktionen ist dann mit dem Abstand der ΔM der Mikrofone, dem Winkel $\varphi_{(m,a)}$ und dem Abstand $r_{(m,a)}$ zwischen dem m -ten Mikrofon und dem a -ten Analysepunkt:

$$\mathbf{W}_{p,\text{kard}} = \frac{jk\Delta M}{2} \cdot \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(kr_{(0,0)}) \cos \varphi_{(0,0)} & \dots & H_1^{(2)}(kr_{(0,N_A-1)}) \cos \varphi_{(0,N_A-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_1^{(2)}(kr_{(N_M-1,0)}) \cos \varphi_{(N_M-1,0)} & \dots & H_1^{(2)}(kr_{(N_M-1,N_A-1)}) \cos \varphi_{(N_M-1,N_A-1)} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Das Dämpfungsergebnis bei 300 Hz wird in Abbildung 5.11 gezeigt. Die Dämpfung ist ähnlich der Dämpfung, die anhand des KHI erzielt wurde. Auch reagiert das System nicht auf Quellen im Dämpfungsbereich. Daher bietet diese Methode der Verwendung kardioider Mikrofone und dem Rayleigh-II-Integral eine gute Alternative zum Einsatz von Druck- und Schnellempfängern und dem KHI. Dabei werden zwei Vorteile deutlich: Man benötigt nur die halbe Anzahl an Mikrofonen und der Abgleich der Druck- und Dipolkapseln entfällt. Ein Nachteil in der Praxis kann sein, dass die Richtcharakteristik der kardioiden Mikrofone über den gewünschten Frequenzbereich nicht ausreichend genau ist.

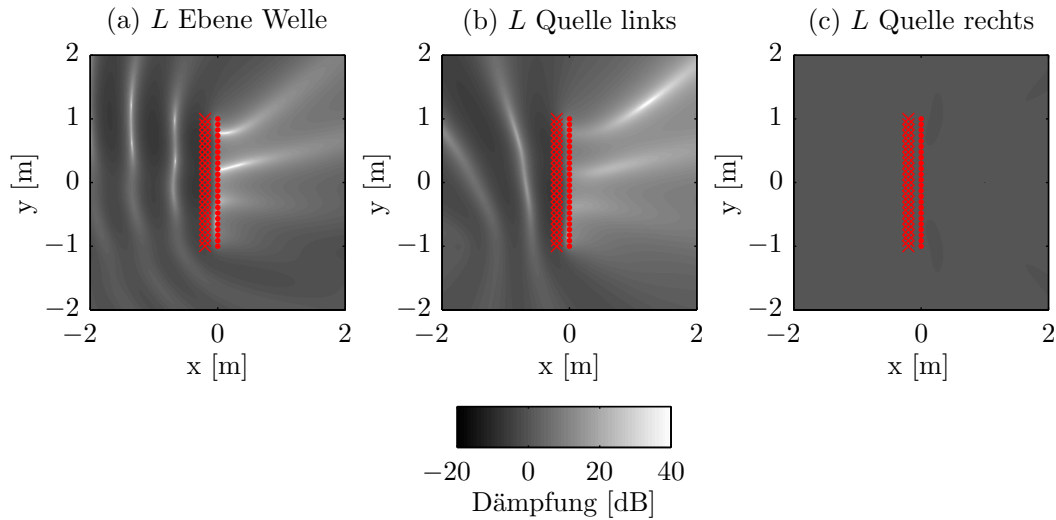


Abbildung 5.11.: Dämpfung des Primärfeldes durch das linienförmige 2D-ANC-System unter Verwendung der Methode der Analysepunkte bei 300 Hz. Extrapolation mit dem Rayleigh II Integral und kardioiden Mikrofonen. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

5.1.4.3. Extrapolation mit der modifizierten Plane Wave Decomposition

In Kapitel 4.3.3 wurde gezeigt, dass die Extrapolation eines mit Druck- und Schnellempfängern erfassten Primärfeldes anhand der PWD vollzogen werden kann. Es wurde ebenfalls gezeigt, dass für die Belange des zweidimensionalen ANC-Systems eine Abwandlung der Methode nach [Hul04] nötig ist, damit nur Wellen erfasst werden, die in den Dämpfungsbereich hineinlaufen.

Die diskrete Synthesegleichung lautet unter Verwendung der PWD wie folgt:

$$\mathbf{q}^T = \mathbf{p}_{\text{PWD}}^T \cdot \mathbf{S}^{-1}. \quad (5.21)$$

Der Vektor \mathbf{p}_{PWD} gibt den präziierten Druck anhand der auf eine Halbene beschränkten PWD den Analysepunkten an:

$$\mathbf{p}_{\text{PWD}}^T = \left[P(r_{a=0}, \gamma_{a=0}, \omega) \quad P(r_{a=1}, \gamma_{a=1}, \omega) \quad \dots \quad P(r_{a=N_A-1}, \gamma_{a=N_A-1}, \omega) \right]. \quad (5.22)$$

Die einzelnen Vektorkomponenten werden dann nach Gleichung (4.31) in einer diskre-

tisierten Abwandlung für eine Halbebene bestimmt:

$$P(r_a, \gamma_a, \omega) = \sum_{\gamma=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{P}(\gamma, \omega) e^{-jkr_a \cos(\gamma_a - \gamma)} \Delta\gamma. \quad (5.23)$$

$\Delta\gamma$ richtet sich nach der gewählten Winkelauflösung der PWD.

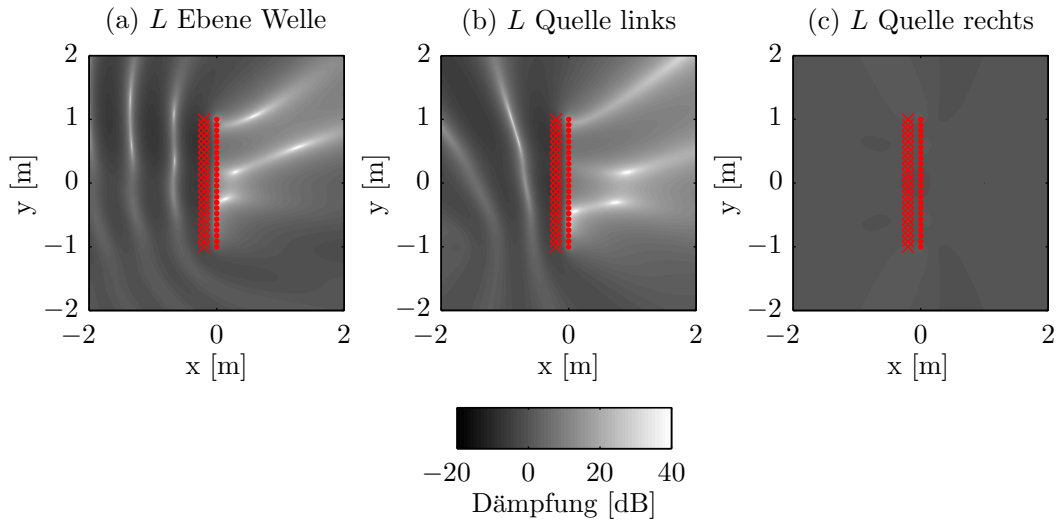


Abbildung 5.12.: Dämpfung des Primärfeldes durch das linienförmige 2D-ANC-System unter Verwendung der modifizierten PWD bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

Die Extrapolations-Koeffizienten der PWD werden mit Gleichung (3.66) in diskretisierter Form bestimmt:

$$\bar{P}(\gamma, \omega) = \frac{k}{4\pi} \sum_{m=0}^{N_m-1} (\rho c V_n(\mathbf{r}_M[m], \omega) + \cos \gamma P(\mathbf{r}_M[m], \omega)) e^{jkd_M[m] \sin \gamma \Delta M}. \quad (5.24)$$

In dieser Gleichung sind $V_n(\mathbf{r}_M[m], \omega)$ und $P(\mathbf{r}_M[m], \omega)$ jeweils das Schnellesignal in Normalenrichtung und das Drucksignal des m -ten Mikrofonpaares. $d_M[m]$ ist der Abstand des m -ten Mikrofonpaares vom Mittelpunkt des linienförmigen Mikrofon-Arrays und ΔM der Abstand der Mikrofonpaare zueinander. Es sei erneut darauf hingewiesen, dass $\gamma = -\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}$ gilt, um nur die Halbebene in Empfangsrichtung abzutasten.

Das Dämpfungsergebnis des gerade beschriebenen Verfahrens ist in Abbildung 5.12 abgebildet. Da ein ähnliches Ergebnis wie mit den beiden vorherigen Verfahren un-

ter Verwendung des KHI und des Rayleigh-II-Integrals erzielt wird und die Reaktion der modifizierten PWD auf die Quelle im Dämpfungsgebiet annähernd gleich Null ist, stellt die modifizierte PWD eine weitere Möglichkeit der Primärfeld-Prädiktion im zweidimensionalen ANC-System dar.

5.2. Die Reflexionsäquivalenz: Eine neue Methode der Gegenfeldsynthese

5.2.1. Kreis Aufbau

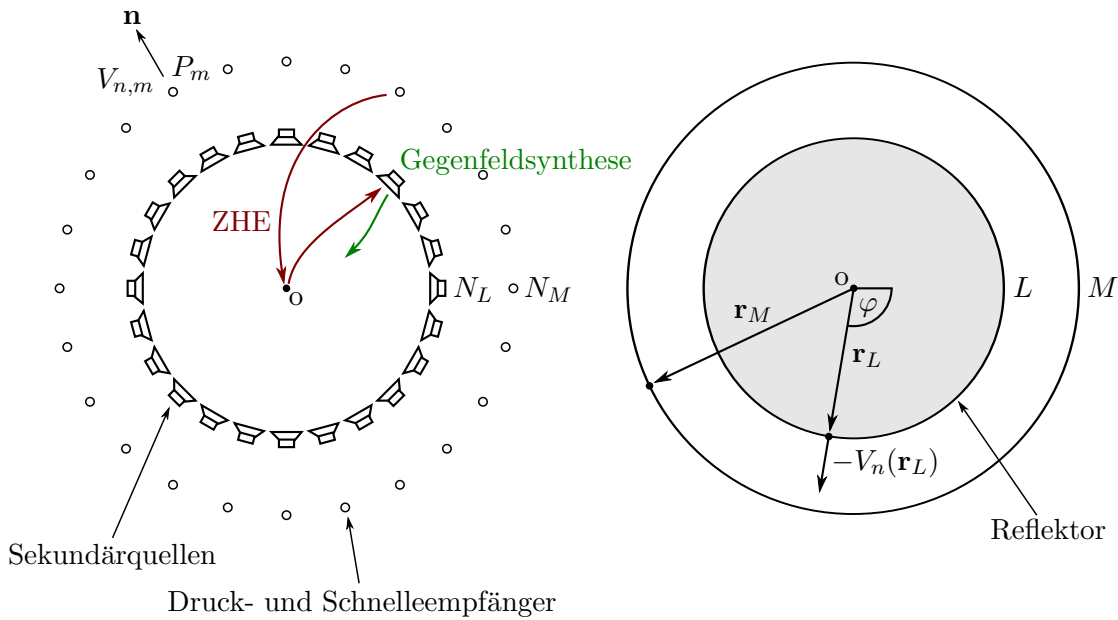


Abbildung 5.13.: Aufbau des ANC-Systems bestehend aus Referenzmikrofonen und Gegenlautsprechern. Links: Der diskrete Aufbau, bestehend aus N_L Gegenlautsprechern und N_M Referenzempfängern. Der Normalenvektor \mathbf{n} zeigt die Empfangsrichtung der Schnellempfänger an. Rechts: Veranschaulichung der Geometrie anhand des kontinuierlichen Modells. Der Lautsprecherkreis stellt hier den schallweichen Reflektor mit der Berandung L dar. Der Mikrofonkreis liegt demnach auf der Kontur M .

In Kapitel 2.6 wurde hergeleitet, dass für eine kontinuierliche Quellfunktion auf der Berandung L nach Abbildung 5.13 gilt, dass diese gleich der Differenz der Gradienten des internen und des externen Feldes ist:

$$a(\mathbf{r}_L) = \nabla_{\mathbf{n}} P_e(\mathbf{r}_L) - \nabla_{\mathbf{n}} P_i(\mathbf{r}_L). \quad (5.25)$$

Wie in [FN13] gezeigt wird, kann diese Eigenschaft genutzt werden, um eine geeignete Quellfunktion $a(\mathbf{r}_L)$ zur Nachbildung eines erwünschten Primärfeldes zu bestimmen. Angenommen wird dafür eine schallweiche Randbedingung (homogene Dirichlet-Randbedingung) auf L :

$$P_{\text{tot}}(\mathbf{r}_L) = P_{\text{pri}}(\mathbf{r}_L) + P_{\text{sca}}(\mathbf{r}_L) = 0. \quad (5.26)$$

Das Gesamt-Druckfeld $P_{\text{tot}}(\mathbf{r}_L)$ auf L ist die Überlagerung des Primärfeldes $P_{\text{pri}}(\mathbf{r}_L)$ und des gestreuten Feldes $P_{\text{sca}}(\mathbf{r}_L)$. Dieses muss der Randbedingung entsprechend gleich Null sein. Nach [FN13] kann dann die kontinuierliche Quellfunktion $a(\mathbf{r}_L)$ aus dem Gradienten des Gesamt-Feldes gewonnen werden:

$$a(\mathbf{r}_L) = \nabla_{\mathbf{n}} P_{\text{pri}}(\mathbf{r}_L) + \nabla_{\mathbf{n}} P_{\text{sca}}(\mathbf{r}_L) = \nabla_{\mathbf{n}} P_{\text{tot}}(\mathbf{r}_L). \quad (5.27)$$

Man beachte, dass der Normalenvektor \mathbf{n} in [FN13] nach außen zeigt. Ersetzen des Druckgradienten des Gesamt-Feldes mit der Bewegungsgleichung (2.1) durch die Schallschnelle, führt zu

$$P(\mathbf{r}_R, \omega) = \frac{j}{4} \int_L -j\omega\rho V_n(\mathbf{r}_L, \omega) H_0^{(2)}(kr) dL \quad (5.28)$$

für das gesamte Feld. Für die Synthese des Gegenfeldes ist daher die Kenntnis der Schnelle in Normalenrichtung $V_n(\mathbf{r}_L, \omega)$ auf der Reflektoroberfläche nötig. Wie bereits in Kapitel 4.2.3 gezeigt wurde, kann diese für den unendlich langen Zylinder wie folgt mit (4.28) bestimmt werden:

$$V_n(r_L, \varphi, \omega) = \frac{j}{\rho\omega} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_{\nu}(\omega) \left[H_{\nu}^{(1)}(kr_L) - R_{\nu}(\omega) H_{\nu}^{(2)}(kr_L) \right] e^{j\nu\varphi}. \quad (5.29)$$

Der Zirkulare Harmonische Reflexionskoeffizient $R_{\nu}(\omega)$ vereinfacht sich für eine schallweiche Impedanz nach Gleichung (4.22) zu:

$$R_{\nu}(\omega) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(kr_L)}{H_{\nu}^{(2)}(kr_L)}. \quad (5.30)$$

Die Zirkularen Harmonischen Expansionskoeffizienten $\mathcal{M}_{\nu}(\omega)$ werden nach Gleichung (3.80) mit den Fouriertransformierten kardioider Mikrofon-signale in Polarkoordinaten gewonnen. Daher kann die diskrete Quellsignalgleichung wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{q}^T = -j\omega\rho \left[V_n(r_L[0], \omega) \quad V_n(r_L[1], \omega) \quad \dots \quad V_n(r_L[N_L - 1], \omega) \right]. \quad (5.31)$$

In Abbildung 5.14 ist das Ergebnis des gerade gezeigten Vorgehens bei den bisher verwendeten Primärsignalen dargestellt. In der linken Spalte ist die Dämpfung für eine monochromatische, ebene Welle bei 300 Hz unter dem Ausbreitungswinkel $\varphi = 30^\circ$ dargestellt. Die Mikrofone sind durch rote Kreuze und die Sekundärquellen durch rote Punkte gekennzeichnet. Die hohe Genauigkeit der phasengedrehten Wiedergabe des Primärfeldes durch die Sekundärquellen wird anhand der hohen Dämpfungswerte bestätigt. Ein ebenso gutes Ergebnis erzielt die Methode der Reflexionsäquivalenz für das Primärfeld der Linienquelle mit den Koordinaten $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Auch erfolgt keine Reaktion des Systems auf eine innere Quelle. Mit Hinblick auf die Auswahl der Sekundärquellen bei der Wiedergabe des Gegenfeldes, kann der gleiche Schluss wie

bei der Methode der Analysepunkte gezogen werden: Die korrekte Ansteuerung der Sekundärquellen ist bei der Reflexionsäquivalenz implizit gegeben. Zudem kann aber auch ein wesentlicher Unterschied zum Analysepunkte-Verfahren genannt werden, nämlich die Tatsache, dass keinerlei Inversion der Sekundärpfade notwendig ist.

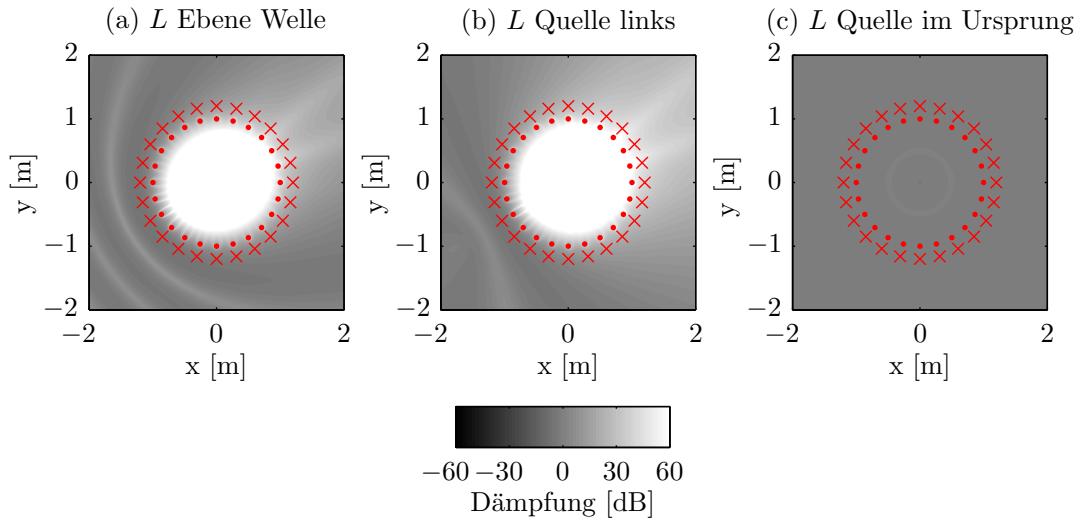


Abbildung 5.14.: Dämpfung des Primärfeldes durch das kreisförmige 2D-ANC-System unter Verwendung der Reflexionsäquivalenz bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle im Ursprung.

5.2.2. Linienaufbau

Das Verfahren der Reflexionsäquivalenz soll im Folgenden auf den linienförmigen System-Aufbau entsprechend Abbildung 5.15 übertragen werden. Wie in der Darstellung zu erkennen ist, befindet sich an den Orten der Sekundärquellen der gedachte Reflektor mit einer schallweichen Oberflächenimpedanz. An den vorgelagerten Mikrofonpositionen werden Druck P_m und Schnelle in Normalenrichtung $V_{n,m}$ gemessen. Der Druck $P(\mathbf{r}_R, \omega)$ in einem Aufpunkt \mathbf{r}_R innerhalb des gedachten Reflektors kann mit dem Rayleigh-I-Integral anhand der Schnelle auf L bestimmt werden:

$$P(\mathbf{r}_R, \omega) = \frac{jk}{2} \int_{-\infty}^{\infty} j\rho c V_n(r_L, \omega) H_0^{(2)}(kr) dL. \quad (5.32)$$

Wird angenommen, dass die Linie L einen schallweichen Reflektor oder Impedanzabschluss darstellt, kann dort die Schnelle in Normalenrichtung V_n bestimmt werden. Diese setzt sich auf dem gedachten Reflektor aus der Schnelle des Primärfeldes $V_{n,\text{pri}}$ und

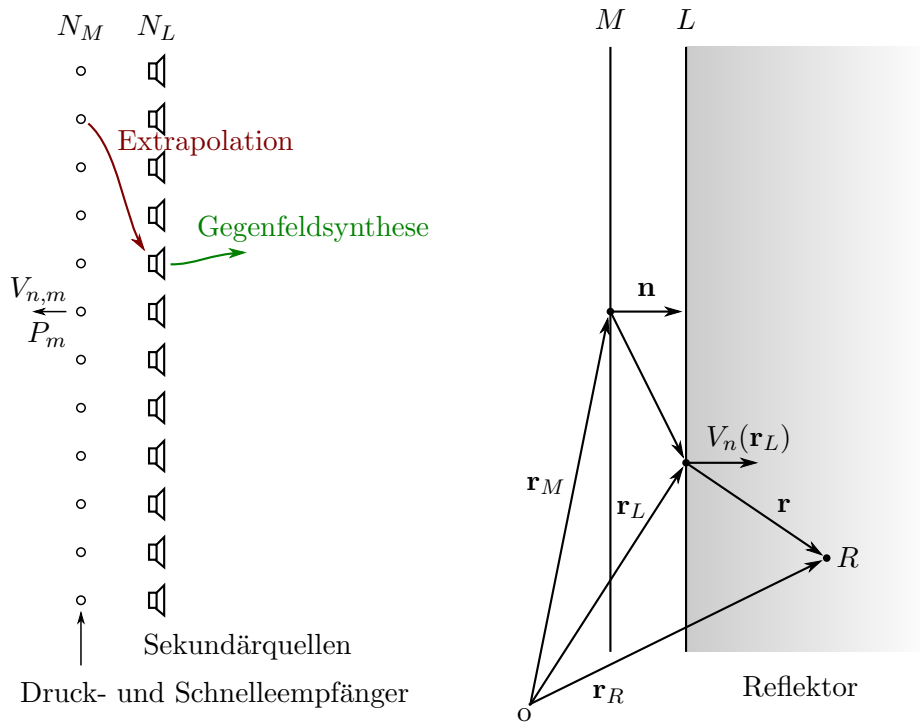


Abbildung 5.15.: Aufbau des ANC-Systems bestehend aus Referenzmikrofonen und Gegenlautsprechern. Links: Der diskrete Aufbau mit N_M Referenzmikrofonpaaren und N_L Gegenlautsprechern. Rechts: Verdeutlichung der Geometrie anhand des kontinuierlichen Modells. Die Linie L stellt die Kontur eines unendlich ausgedehnten, schallweichen Reflektors dar. Auf dieser Kontur befinden sich die Sekundärquellen. Auf M sind die Referenzempfänger platziert, aus deren Signalen die Schnellesignale $V_n(\mathbf{r}_L)$ für die Quellfunktionen der Sekundärquellen bestimmt werden.

der von der Gegenquelle verursachten Schnelle $V_{n,\text{sek}}$ zusammen und muss bei einem akustischem Kurzschluss der doppelten Schnelle des Primärfeldes entsprechen:

$$V_{n,\text{Reflektor}} = V_{n,\text{pri}} + V_{n,\text{sek}} = 2 \cdot V_{n,\text{pri}}. \quad (5.33)$$

5.2.2.1. Verwendung von Druck- und Schnellempfängern

Stehen Druck- und Schnellemikrofone auf M zur Verfügung, können die von den Sekundärquellen zu erzeugenden Schnellesignale mit Hilfe des zweidimensionalen KHI und dem in Kapitel 2.5.4.3 bestimmt werden. Dies entspricht der in Abbildung 5.15 angedeuteten direkten Extrapolation der Lautsprechersignale.

Abbildung 5.16 veranschaulicht die Simulationsergebnisse des linienförmigen 2D-ANC-

Systems auf Basis der Reflexionsäquivalenz als Dämpfungs-Plots. In der linken Darstellung ist wie bei den vorherigen Simulationen das Primärfeld durch eine ebene Welle, in der mittleren durch die Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m und in der rechten durch die Quelle innerhalb des Dämpfungsgebiets gegeben. Es werden demnach für 300 Hz ganz ähnliche Dämpfungsergebnisse erzielt wie beim Analysepunkte-Verfahren. Auch ist wiederum keine negative Beeinflussung durch Quellen innerhalb der Dämpfungszone (rechte Halbebene) zu erkennen, wie sich aus 5.16 (c) ablesen lässt. Daher ist die Reflexionsäquivalenz ebenfalls eine geeignete Methode für ein linienförmiges 2D-ANC-System.

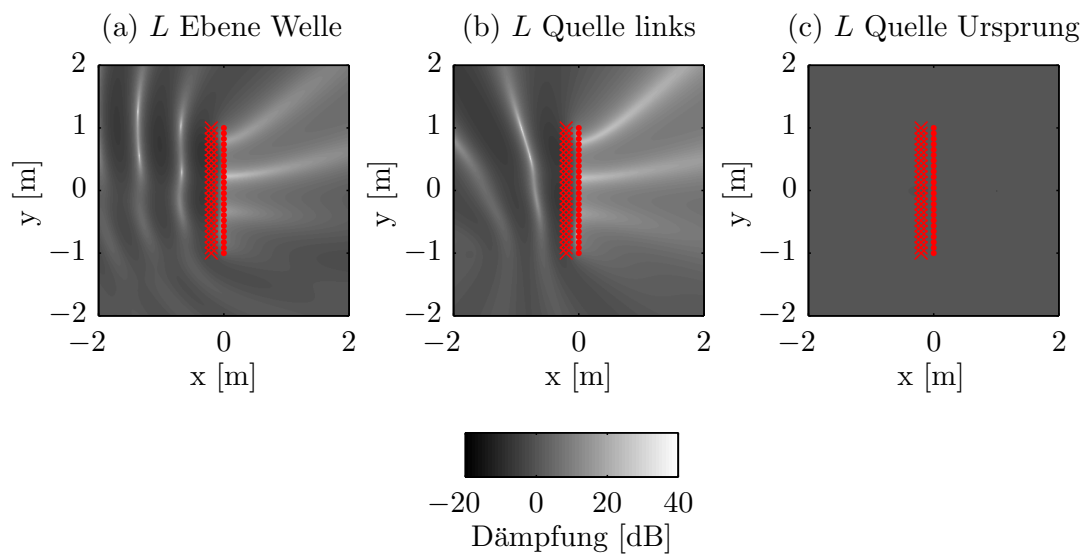


Abbildung 5.16.: Dämpfung des Primärfeldes durch das linienförmige 2D-ANC-System unter Verwendung der Reflexionsäquivalenz bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

5.2.2.2. Verwendung von Kardioid-Empfängern

Wie schon für die Analysepunkte-Methode gezeigt wurde, ist bei einem linienförmigen Aufbau des ANC-Systems auch die Verwendung von kardioiden Referenzmikrofonen anstelle von Druck- und Schnellemikrofonen möglich. Diese Variante ist ebenfalls für die Methode der Reflexionsäquivalenz gültig. In diesem Fall wird die Schnelle auf dem Reflektor erneut durch das in Kapitel 2.5.4.3 beschriebene Verfahren bestimmt. Die Prädiktion des Drucks an den nah beieinander liegenden Punkten geschieht nun anhand des Rayleigh-II-Integrals unter Verwendung der Signale der Kardioid-Mikrofone.

Die Dämpfungsergebnisse der hier beschriebenen Methode sind in Abbildung 5.18 dargestellt und zeigen ähnliche Ergebnisse wie für den zuvor besprochenen Fall unter Verwendung von Druck- und Schnellempfängern. Die Dämpfung bei Verwendung kardioider Referenzempfänger ist teilweise sogar etwas höher als für die Variante unter Verwendung des zweidimensionalen KHI für die Extrapolation der Schnelle.

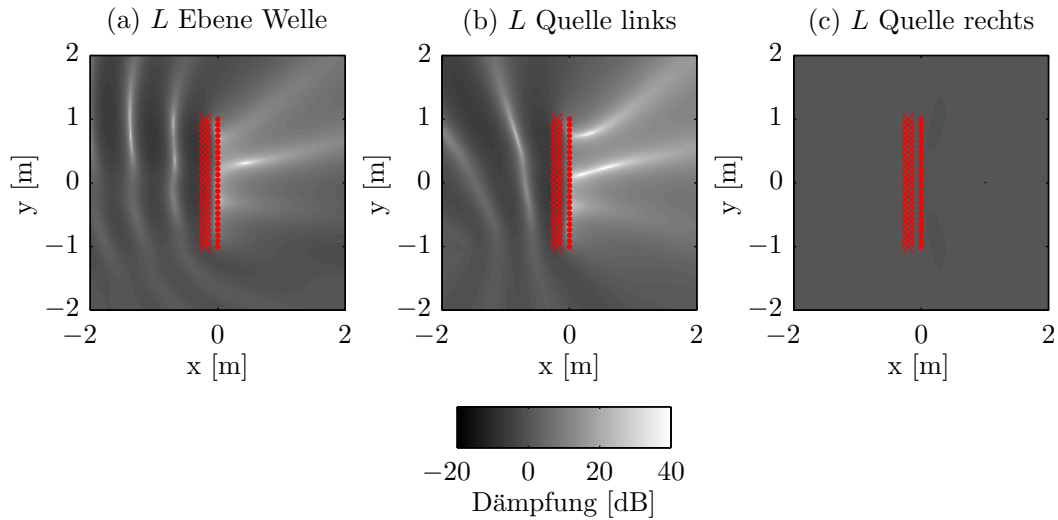


Abbildung 5.17.: Dämpfung des Primärfeldes durch das linienförmige 2D-ANC-System unter Verwendung der Reflexionsäquivalenz mit kardioiden Empfängern bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

5.3. Hybridmethode

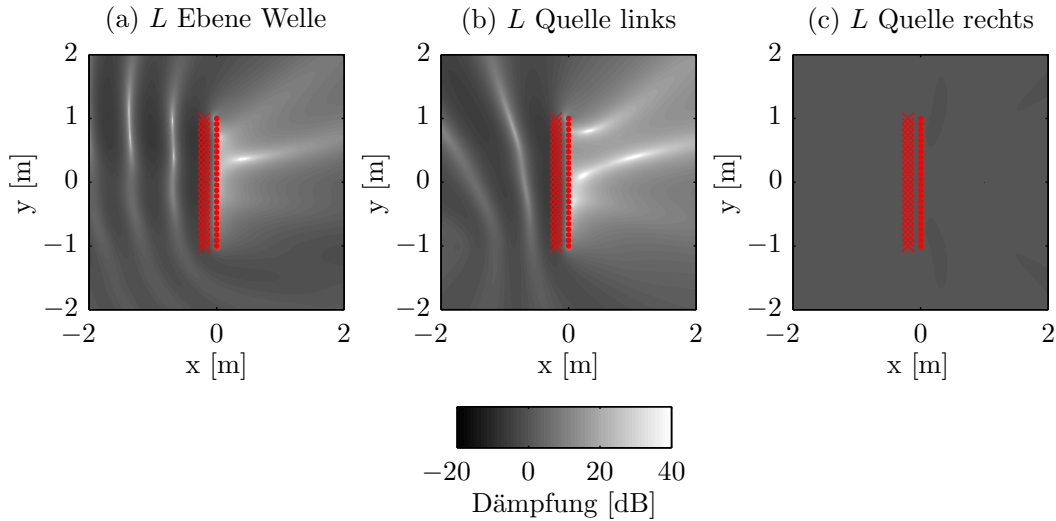


Abbildung 5.18.: Dämpfung des Primärfeldes durch das linienförmige 2D-ANC-System unter Verwendung der Reflexionsäquivalenz mit kardioiden Empfängern und inversen Feedbackpfaden bei 300 Hz. (a) Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. (b) Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. (c) Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m.

Es konnte gezeigt werden, dass für die Methode der Reflexionsäquivalenz keine Invertierung der Sekundärpfade \mathbf{S} notwendig ist. Dies ist zum einen ein Vorteil, da \mathbf{S}^{-1} nicht zwangsläufig existiert, zum anderen fehlt aber ein Teil zur Beschreibung des Gesamtsystems, da die Sekundärpfade in der Praxis ausgemessen werden können. In diesem Fall sollen aber nicht die Sekundärpfade \mathbf{S} verwendet werden, sondern die Feedbackpfade \mathbf{F} , also die Übertragungsstrecken zwischen Sekundärquellen und Referenzmikrofonen. Es ergibt sich eine Situation, in der die Orte der Analysepunkte mit denen der Referenzempfänger übereinstimmen. Die Prädiktion des Primärfeldes zu den Analysepunkten stellt dann die Prädiktion der Reflektion zu den Referenzempfängern dar nach Kapitel 4.3.4. Die diskrete Synthesgleichung erhält nun die Form

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}_{M,kard}^T \cdot \mathbf{W}_{p,rfx,kard} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (5.34)$$

Darin ist $\mathbf{W}_{p,rfx,kard}$ die Prädiktion anhand kardioider Referenzsignale der schallweich reflektierten Feldanteile, die zu den Referenzempfängern zurück gelangen. Die Matrix \mathbf{F} beschreibt demnach die Feedbackpfade, die nun invertiert werden müssen. Die Prädiktion kann anhand der kardioiden Referenzsignale auf Basis des Rayleigh-II-Integrals

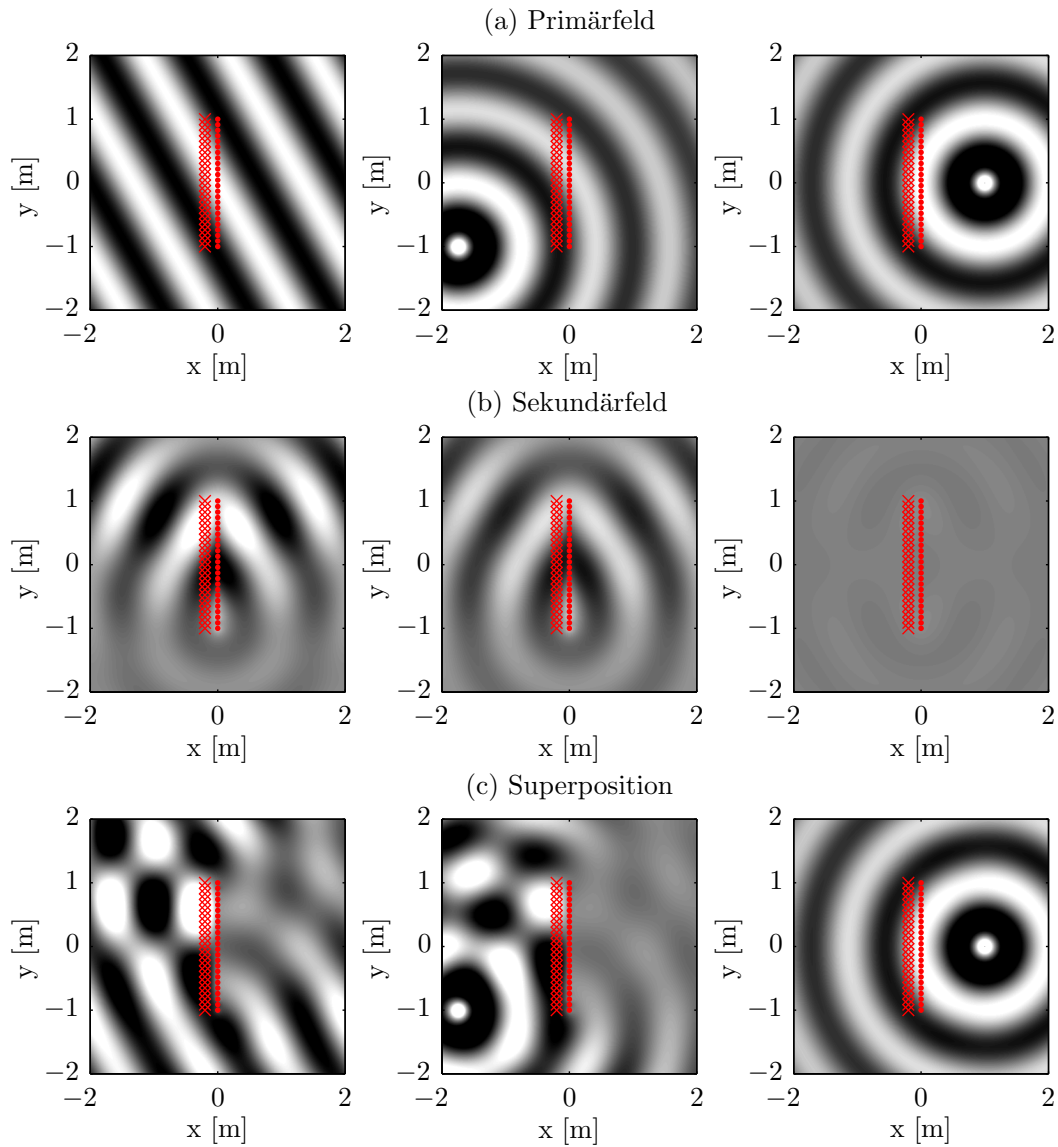


Abbildung 5.19.: Simulation des linienförmigen 2D-ANC-Systems unter Verwendung der Reflexionsäquivalenz mit kardioiden Empfängern und inversen Feedbackpfaden bei 300 Hz. Linke Spalte: Ebene Welle mit $\varphi = 30^\circ$. Mittlere Spalte: Linienquelle bei $x = -1,7$ m und $y = -1$ m. Rechte Spalte: Linienquelle bei $x = 1$ m und $y = 0$ m. (a) Das ungestörte Primärfeld. (b) Das Sekundärfeld. (c) Die Superposition.

wie folgt bestimmt werden:

$$\mathbf{W}_{\text{p,rfx,kard}} = -\frac{jk\Delta M}{2} \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(kr_{(0,0)}) \cos \varphi_{(0,0)} & \dots & H_1^{(2)}(kr_{(0,N_M-1)}) \cos \varphi_{(0,N_M-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0^{(2)}(kr_{(N_M-1,0)}) \cos \varphi_{(N_M-1,0)} & \dots & H_0^{(2)}(kr_{(N_M-1,N_M-1)}) \cos \varphi_{(N_M-1,N_M-1)} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

In Gleichung (5.35) stellt $r_{(m_{\text{sp}},m)}$ den Abstand zwischen dem Spiegelempfänger m_{sp} und dem Referenzempfänger m dar. Entsprechend ist $\varphi_{(m_{\text{sp}},m)}$ der Winkel zwischen dem Normalenvektor und dem Verbindungsvektor $\mathbf{r}_{(m_{\text{sp}},m)}$.

Die Simulationsergebnisse der hier beschriebenen Methode sind in den Abbildungen 5.18 und 5.19 dargestellt. Demnach ist es möglich, durch die Kombination der Prädiktion reflektierter Feldanteile mit der Invertierung der Feedbackpfade geeignete Übertragungsfunktionen für das zweidimensionale ANC-System zu bestimmen.

5.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden drei Verfahren vorgestellt, die zur Gegenfeldsynthese im zweidimensionalen ANC verwendet werden können: Die Methode der Analysepunkte, die Reflexionsäquivalenz und eine Hybridmethode, die beide Herangehensweisen vereint. Das Analysepunkte-Verfahren konnte sowohl für den Kreis- als auch für den Linienaufbau um die in Kapitel 4 aufgeführten Extrapolationsverfahren erweitert werden. Auch wurde gezeigt, dass die Verwendung von Kardioid-Mikrofonen als Referenzempfänger ausreichend ist.

Die Reflexionsäquivalenz kommt ohne Analysepunkte aus. Die Gegensignale können direkt aus dem gewählten Ansatz hergeleitet werden. Für das kreisförmige ANC-System wird dafür die Zirkulare Harmonische Expansion unter Berücksichtigung einer kreisförmigen Impedanz im Innern des Mikrofonkreises herangezogen. Für das linienförmige ANC-System werden das KHI oder das Rayleigh-II-Integral genutzt, um die Schnelle auf der gedachten Reflektoroberfläche zu bestimmen, an der sich die Gegenlautsprecher befinden.

Im Falle der Hybridmethode werden die Analysepunkte an den Orten der Referenzempfänger angenommen. Die Prädiktion beläuft sich auf die Vorhersage der schallweichen Reflexion. Dazu werden im Reflektor Spiegelempfänger angenommen, die jeweils die gleichen Referenzsignale wie die Referenzmikrofone empfangen. Dadurch kann das gewünschte und zurück laufende Feld an den Referenzempfängern bestimmt und anhand der inversen Feedbackpfade in die Lautsprecher zurück verlegt werden.

6. Implementierung adaptiver Optimierungsverfahren

Im vergangenen Kapitel wurden die Übertragungsfunktionen innerhalb des zweidimensionalen ANC-Systems anhand der Prädiktion von Wellenfeldern aus Mikrofonsignalen hergeleitet. Das Verfahren der Analysepunkte verwendet zudem die inversen Sekundärpfade, während die Methode der Reflexionsäquivalenz ohne Sekundärpfade auskommt. Demnach handelt es sich bei dem vorgestellten System um eine reine Steuerung, da keinerlei Regelgrößen zurückgeführt werden, um eine Anpassung des ANC-Systems zu erreichen. Eine Fehlabschätzung der Übertragungspfade und somit der Übertragungsfunktionen würde demnach unweigerlich zu Fehlverhalten und schlimmstenfalls nicht zu einer Dämpfung des Primärschalls, sondern zu einer ungewollten Verstärkung führen. Dieses Kapitel widmet sich daher der Implementierung zeitbasierter adaptiver Optimierungsverfahren in das vorgestellte zweidimensionale ANC-System. Der Fokus liegt mit Hinblick auf die Hardware-Implementierung auf der Verwendung des etablierten MIMO FXLMS-Algorithmus innerhalb des gegebenen Systems. Für das Auffinden geeigneter Fehlersignale wird in Kapitel 6.3 zudem eine neue Methode vorgestellt, die auf Messung der durch das System reflektierten Feldanteile beruht: Die Reflexionsprädiktion.

6.1. Grundlagen

6.1.1. Das adaptive FIR-Filter

Finite Impulse Response (FIR)-Filter werden im Bereich adaptiver Optimierung häufig eingesetzt, da sie inhärent stabil und einfach zu implementieren sind [KM96; MH00; Ell01]. Zudem sind Multiply Accumulate (MAC)-Einheiten nicht nur in DSP-, sondern auch in Central Processing Unit (CPU)- oder Microcontroller Unit (MCU)-Architekturen üblich. Dies erleichtert eine schnelle und effiziente Implementierungen. Als Nachteil von FIR-Filtern kann die begrenzte Fähigkeit der Nachbildung langer Impulsantworten angesehen werden. Für diesen Zweck sind Infinite Impulse Response (IIR)-Filter die geeignetere Wahl, da diese in der Regel mit wesentlich weniger Koeffizienten auskommen, woraus kürzere Rechenzeiten und geringerer Speicherbedarf resultieren. Da IIR-Filter nicht inhärent stabil sind, werden für adaptive Aufgaben meist FIR-Filter bevorzugt.

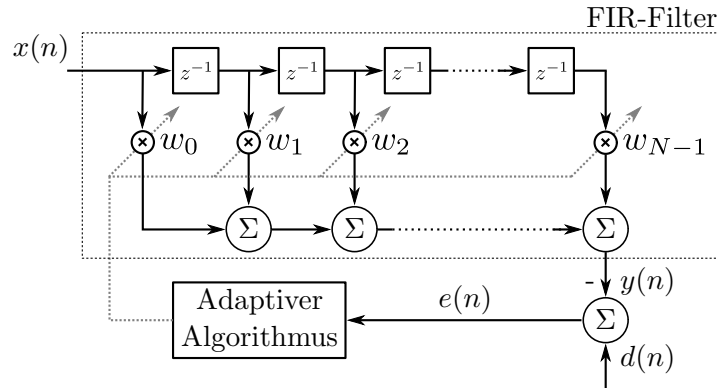


Abbildung 6.1.: Aufbau eines adaptiven FIR-Filters (Frei nach [MH00]).

Die Struktur eines adaptiven FIR-Filters der Länge N ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Der Ausgang des Filters berechnet sich für den Zeitpunkt n wie folgt:

$$y(n) = \mathbf{x}^T(n) \cdot \mathbf{w}(n). \quad (6.1)$$

Der Eingangs-Signalvektor $\mathbf{x}(n)$ enthält zum Zeitpunkt n das aktuelle Eingangssignal $x(n)$ und die $N-1$ vergangenen Eingangssignale $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N+1)$. Diese befinden sich in den Verzögerungselementen. Der Koeffizientenvektor $\mathbf{w}(n)$ besteht aus den Koeffizienten w_0, w_1, \dots, w_{N-1} . Das Fehlersignal $e(n)$ resultiert aus der Differenz des Filter-Ausgangs $y(n)$ zum gewünschten Signal $d(n)$. Ein adaptiver Algorithmus erhält als Eingangsgröße das Fehlersignal und gleicht daraus den Koeffizientenvektor \mathbf{w} ab.

6.1.2. Das Wiener-Filter der Fehlerfunktion

Der momentane Fehler der Adaption kann entsprechend Abbildung 6.1 wie folgt bestimmt werden

$$e(n) = d(n) - y(n). \quad (6.2)$$

Als Gütemaß der adaptiven Optimierung wird der Erwartungswert des quadratischen Fehlers (Mean Squared Error (MSE)) herangezogen. Dieser wird als Fehlerfunktion

$$J(\mathbf{w}) = E\{e^2(n)\} \quad (6.3)$$

definiert. Durch Einsetzen von (6.2) in (6.3) ergibt sich

$$J(\mathbf{w}) = E\{(d(n) - \mathbf{x}^T(n) \cdot \mathbf{w}(n))^2\} = E\{d^2(n)\} + \mathbf{w}^T(n) \cdot E\{\mathbf{x}(n) \cdot \mathbf{x}^T(n)\} \cdot \mathbf{w}(n) - 2E\{d(n) \cdot \mathbf{x}^T(n)\} \cdot \mathbf{w}(n). \quad (6.4)$$

Der Erwartungswert des dyadischen Produkts des Eingangsvektors mit sich selbst ist

die Autokorrelationsmatrix

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n) \cdot \mathbf{x}^T(n)\} \quad (6.5)$$

des Eingangssignals. Für reelle $\mathbf{x}(n)$ ist \mathbf{R} symmetrisch und für komplexe Eingangssignale hermitesch. Zudem ist \mathbf{R} Toeplitz, sofern $\mathbf{x}(n)$ schwach stationär ist, niemals negativ definit und fast immer positiv definit [MH00]. Letzte Eigenschaft ist insbesondere hinsichtlich ihrer Invertierbarkeit wichtig. Darüber hinaus wird der Kreuzkorrelationsvektor

$$\mathbf{p} = E\{d(n) \cdot \mathbf{x}(n)\} \quad (6.6)$$

definiert und $E\{d^2(n)\}$ gleich der Varianz σ_d^2 von $d(n)$ gesetzt, da $d(n)$ als reell, schwach stationär und mittelwertfrei angenommen werden kann. Damit vereinfacht sich (6.4) mit (6.5) und (6.6) zu

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 + \mathbf{w}^T(n) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{w}(n) - 2\mathbf{p}^T \mathbf{w}(n). \quad (6.7)$$

Das Wiener-Filter ist das Optimalfilter \mathbf{w}° , für das die Fehlerfunktion $J(\mathbf{w})$ ihr Minimum bei

$$J_{\min} = J(\mathbf{w}^\circ) = \sigma_d^2 + \mathbf{w}^{\circ T} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{w}^\circ - 2\mathbf{p}^T \mathbf{w}^\circ \quad (6.8)$$

hat. Unter der Annahme, dass die Fehlerfunktion eine Fläche im mehrdimensionalen Raum ist, muss

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^\circ} = \mathbf{0} \quad (6.9)$$

gelten. Der Gradient kann auf jeden der drei Terme in Gleichung (6.7) einzeln angewendet werden. Der Gradient des ersten Terms ist

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \sigma_d^2 = \mathbf{0}, \quad (6.10)$$

da dieser nicht von \mathbf{w} abhängt. Der Gradient des zweiten Terms wird zu [MH00]

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} = 2\mathbf{R} \mathbf{w} \quad (6.11)$$

und für den dritten Term gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} 2\mathbf{p}^T \mathbf{w} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}^T \mathbf{w}}{\partial w_0}, \frac{\partial \mathbf{p}^T \mathbf{w}}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{p}^T \mathbf{w}}{\partial w_{N-1}} \right] = 2\mathbf{p}. \quad (6.12)$$

Demnach kann für den Gradienten der Fehlerfunktion $J(\mathbf{w})$

$$\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = 2(\mathbf{R} \mathbf{w} - \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (6.13)$$

geschrieben werden. Umstellen der letzten Gleichung nach den Filter-Koeffizienten \mathbf{w} ergibt die Wiener-Hopf-Gleichung

$$\mathbf{w}^\circ = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (6.14)$$

zur Bestimmung der optimalen Filterkoeffizienten [WH31; Lev47]. Die Fehlerfunktion hat in diesem Fall den Wert [MH00; HBC06]:

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \quad (6.15)$$

Um die Wiener-Hopf-Gleichung (6.14) anwenden zu können, muss ausreichend Information über das Eingangssignal $x(n)$ und das gewünschte Signal $d(n)$ zur Verfügung stehen. Auch dürfen sich die Signalstatistiken im Beobachtungszeitraum nicht mehr ändern, um eine adäquate Abschätzung von \mathbf{R} und \mathbf{p} zu erhalten. Darüber hinaus wird für die Wiener-Hopf-Gleichung die Inverse von \mathbf{R} benötigt. Diese ist auf Grund der genannten Eigenschaften effizient berechenbar. Der Aufwand liegt jedoch in der Größenordnung $\mathcal{O}(N^2)$ [MH00]. In der Praxis haben sich daher Algorithmen wie der Least Mean Square (LMS)- oder Recursive Least Square (RLS)-Algorithmus etabliert.

6.1.3. Der LMS-Algorithmus

Der LMS-Algorithmus basiert auf einer momentanen Abschätzungen des Gradienten der Fehlerfunktion. Geht man von einem Koeffizientenvektor $\mathbf{w}(n)$ zum Zeitpunkt n aus, dann liegt das Minimum der Fehlerfunktion in Richtung der Steigung des Gradienten von $J(\mathbf{w})$. Die Rekursionvorschrift des Gradienten-Verfahrens lautet daher [MH00]:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - a \nabla_{\mathbf{w}} J|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}(n)}. \quad (6.16)$$

Darin ist a eine kleine, positive Konstante. Der LMS-Algorithmus basiert nun auf einer Abschätzung des Gradienten in jedem Zeitpunkt n . Dieser Momentangradient ist definiert als

$$\nabla_{\mathbf{w}} \{e^2(n)\} = -2\mathbf{x}(n)e(n). \quad (6.17)$$

Einsetzen von (6.17) in die Rekursionsvorschrift (6.16) ergibt die Vorschrift zum Aufdatieren des Koeffizientenvektors \mathbf{w} des LMS-Verfahrens:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{x}(n)e(n). \quad (6.18)$$

Die Größe $\mu = 2a$ ist die Schrittweite. Der LMS-Algorithmus ist in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Tabelle 6.1.: Der LMS-Algorithmus (Frei nach [MH00]).

Initialisierung:	$\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$
Für alle Zeitpunkte $n = 0, 1, 2, \dots$:	
1. Filterausgang berechnen:	$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \cdot \mathbf{x}(n)$
2. Fehler bestimmen:	$e(n) = d(n) - y(n)$
3. Koeffizienten aktualisieren:	$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{x}(n)e(n)$

6.1.3.1. Konvergenzbetrachtungen

Für den LMS-Algorithmus gilt, dass der Erwartungswert des Koeffizientenvektors für $n \rightarrow \infty$ im Mittel gegen den Erwartungswert der Wiener-Optimallösung \mathbf{w}° konvergiert, wenn

$$|1 - \mu\lambda_i| < 1 \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq N \quad (6.19)$$

erfüllt ist [Ell01; MH00]. Darin ist λ_i der i -te Eigenwert von der Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} . Daraus folgt für die Schrittweite μ , dass diese kleiner einem Maximalwert μ_{\max} sein muss. Dieser lässt sich aus dem größten Eigenwert λ_{\max} von \mathbf{R} bestimmen, so dass

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} = \mu_{\max} \quad (6.20)$$

gilt. In der Praxis wird für FIR-basierte Systeme eine Sicherheitsgrenze angegeben, die μ_{\max} aus der Eingangsleistung des FIR-Filters ableitet [MH00]:

$$0 < \mu < \frac{2}{N \cdot E\{|\mathbf{x}(n)|^2\}}. \quad (6.21)$$

Im Allgemeinen konvergiert der LMS-Algorithmus eher langsam und reagiert weniger schnell auf Systemänderungen [Ell01; KM96; MH00].

6.1.3.2. Der normierte LMS-Algorithmus

Im vergangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Konvergenzeigenschaften des LMS-Algorithmus von der Leistung des Eingangssignals abhängen. Zum einen ist es daher wichtig, die Stabilität des Algorithmus zu garantieren, indem die maximale Schrittweite μ_{\max} nicht überschritten wird, zum anderen kann die Konvergenzdauer reduziert werden. Der normierte LMS-Algorithmus (Normalized Least Mean Square (NLMS)) passt daher die Schrittweite μ der momentanen Eingangsleistung an. Die Schrittweite zum Zeitpunkt n wird beim NLMS-Algorithmus wie folgt bestimmt [MH00]:

$$\mu(n) = \frac{\beta}{\kappa + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \quad \text{mit} \quad 0 < \beta < 2. \quad (6.22)$$

Darin ist κ eine kleine, positive Konstante die sicherstellen soll, dass $\mu(n)$ nicht zu groß wird, wenn die Schätzung der Eingangsleistung zu gering ist [MH00]. Die Aktualisierung des Koeffizientenvektors wird für den NLMS-Algorithmus folgendermaßen durchgeführt:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu(n)e(n)\mathbf{x}(n). \quad (6.23)$$

6.2. Feedforward Active Noise Control stochastischer Signale

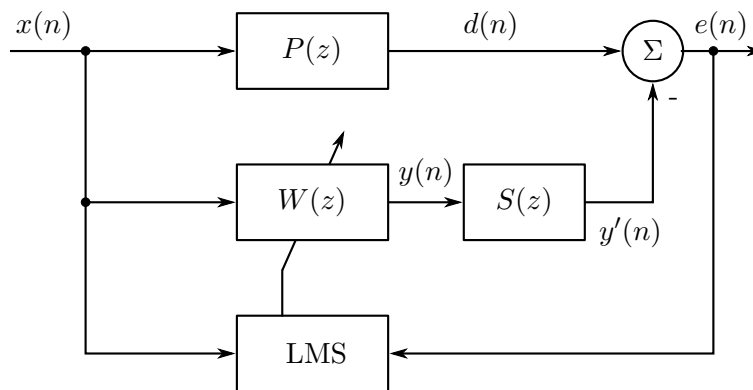


Abbildung 6.2.: Aufbau eines Feedforward ANC-Systems.

Abbildung 6.2 stellt den vereinfachten Aufbau eines einkanaligen ANC-Systems zur Minimierung breitbandiger Signale dar. Ein klassischer Anwendungsfall ist die Unterdrückung von Geräuschen in Lüftungskanälen. Dieser lässt sich als eindimensionales Problem auffassen, sofern Frequenzanteile betrachtet werden, für die sich keine Moden im Kanal bilden [KM96]. Wie bereits in Kapitel 5 gezeigt wurde, existiert die z -Transformierte des optimalen Filters als Quotient des Primär- und des Sekundärpfades:

$$W^\circ(z) = \frac{P(z)}{S(z)}. \quad (6.24)$$

Bei Verwendung des LMS- oder des NLMS-Algorithmus werden Primär- und Sekundärpfad als unbekannt angenommen. Der adaptive Algorithmus müsste sowohl den Primärpfad $P(z)$, als auch den inversen Sekundärpfad $S^{-1}(z)$ modellieren. Der Sekundärpfad enthält die Übertragungscharakteristika des Digital to Analog Converter (DAC), des Rekonstruktions-Filters, des Verstärkers, des Lautsprechers, der akustischen Übertragungstrecke zwischen Gegenlautsprecher und Fehlersensor, des Fehlersensors, des Vorverstärkers, des Aliasing-Filters und des Analog to Digital Converter (ADC) [KM96]. Es bedarf daher einer Modifikation des LMS-Algorithmus, sodass dem adaptiven Algorithmus Informationen über den Sekundärpfad zur Verfügung stehen.

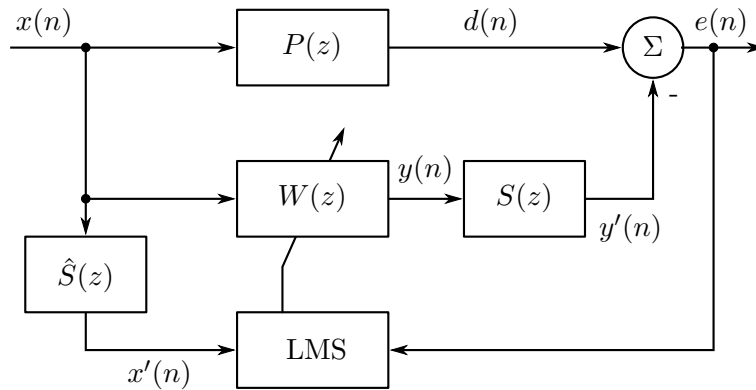


Abbildung 6.3.: Blockschaltbild des einkanaligen FXLMS.

6.2.1. Der FXLMS-Algorithmus

Betrachtet man die Zusammenstellung des Fehlersignals $e(n)$ in Abbildung 6.2, so kann der augenblickliche Fehlerwert wie folgt bestimmt werden:

$$e(n) = d(n) - y'(n) = d(n) - \mathbf{s}(n) * [\mathbf{w}^T(n) \cdot \mathbf{x}(n)]. \quad (6.25)$$

Darin ist $\mathbf{s}(n)$ die Impulsantwort des Sekundärpfades $S(z)$. Für den Gradienten der Fehlerfunktion $J(\mathbf{w})$ gilt dann:

$$\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}(n) = -(\mathbf{s}(n) * \mathbf{x}(n)) \cdot e(n). \quad (6.26)$$

Einsetzen von (6.26) in die Rekursionsvorschrift des Gradientenverfahrens (6.16), ergibt die Gleichung zur Aufdatierung des Koeffizientenvektors unter Berücksichtigung des Sekundärpfades:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu(\mathbf{s}(n) * \mathbf{x}(n)) \cdot e(n). \quad (6.27)$$

In der Praxis kann nur eine Abschätzung $\hat{\mathbf{s}}(n)$ der Impulsantwort des Sekundärpfades verwendet werden. Dafür wird

$$\mathbf{x}'(n) = \hat{\mathbf{s}}(n) * \mathbf{x}(n) \quad (6.28)$$

gesetzt, sodass

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{x}'(n) e(n) \quad (6.29)$$

gilt. Gleichung (6.29) ist die Aktualisierungsvorschrift für den Koeffizientenvektor des FXLMS-Algorithmus. Der Begriff leitet sich aus dem mit dem Sekundärpfad gefilterten Eingangssignal $\mathbf{x}'(n)$ ab. Der Sekundärpfad kann entweder im Vorfeld des System-Betriebs ausgemessen oder im Betrieb ermittelt beziehungsweise nachgeführt

werden [KM96; Han01; Ell01]. In Abbildung 6.3 ist das Blockschaltbild des einkanali- gen FXLMS-Algorithmus dargestellt. Hier passiert das Eingangssignal $x(n)$ zuerst die Abschätzung des Sekundärpfades, bevor es dem adaptiven Algorithmus zugeführt wird. Aus diesem Grund enthält $\hat{S}(z)$ auch die Übertragungseigenschaften des Referenzmikro- fons, des Vorverstärkers und des ADC, die in Abbildung 6.3 nicht gesondert aufgeführt sind.

6.2.1.1. Einfluss der Feedback-Pfade im ANC-System

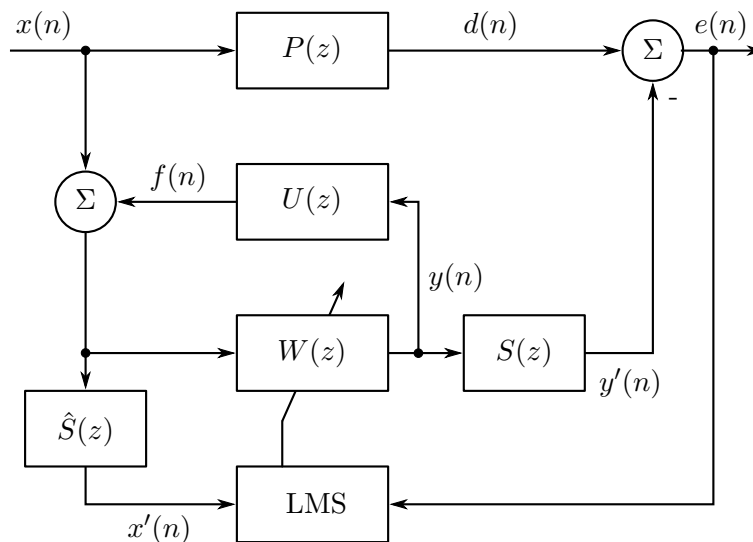


Abbildung 6.4.: Blockschaltbild des einkanali- gen FXLMS mit Feedback-Pfad.

Bei einem ANC-System nach Abbildung 6.3 muss berücksichtigt werden, dass das Se- kundärsignal der Gegenquelle ebenfalls Einfluss auf das Primärsignal $x(n)$ hat. In der Literatur wird die Abschätzung $\hat{U}(z)$ des Feedback-Pfades $U(z)$ zwischen Sekundär- quelle und Referenzmikrofon nach Abbildung 6.4 vorgeschlagen. Während der Adap- tion wird dann das Ausgangssignal $y(n)$ des ANC-Systems mit $\hat{u}(n)$ gefaltet und das Ergebnis vom Eingangssignal $x(n)$ abgezogen [KM96; Ell01; Han01].

Eine andere Möglichkeit ergibt sich aus der Verwendung von omnidirektionalen Mikrofo- nen in Kombination mit Dipol-Empfängern zur Erfassung des Referenzsignals $x(n)$, um den negativen Einfluss des Feedback-Pfades zu unterdrücken. Zur Veranschaulichung wird eindimensionale Schallausbreitung in x -Richtung angenommen. Der augenblickli- che Schalldruck am Referenzmikrofon ergibt sich im Betrieb des ANC-Systems aus der Überlagerung des hinlaufenden Primärfeldes $p_{\text{pri},+}(n)$ und des zurück laufenden Sekun- därfeldes $p_{\text{sek},-}(n)$. Ausgehend von einer ebenen Wellenausbreitung, können Primär-

und Sekundärfeld am Referenzempfänger getrennt werden:

$$p_{\text{pri},+}(n) = \frac{1}{2} [p_{\text{ref}}(n) + \rho c \cdot v_{\text{ref}}(n)], \quad (6.30)$$

$$p_{\text{sek},-}(n) = \frac{1}{2} [p_{\text{ref}}(n) - \rho c \cdot v_{\text{ref}}(n)]. \quad (6.31)$$

Damit ergibt sich die Möglichkeit, Primär- und Sekundärfeld separat zu betrachten und im einfachsten Fall dem adaptiven ANC-System nur das Primärfeld zu zuführen. Dadurch wird der Einfluss des Sekundärfeldes unterbunden. Man beachte, dass diese getrennte Betrachtung in dem in Kapitel 5 vorgestellten MIMO-ANC-System bereits inhärent vorhanden ist.

6.3. Reflektierte Feldgrößen als Basis einer neuartigen Fehlergröße: Reflexions-Prädiktion

Es konnte im letzten Abschnitt gezeigt werden, dass durch Einsatz geeigneter Referenz-Empfänger eine getrennte Betrachtung des Primär- und des Sekundärsignals möglich ist. Diese Separation bietet aber auch eine weitere Möglichkeit: aus der Beobachtung des Sekundärfeldes kann die schallweiche Bedingung am Überlagerungspunkt von Primär- und Gegenfeld überprüft werden. Wie in [FN13] und [CK13] gezeigt wird, ist die Reflexion an einem schallweichen Objekt eindeutig. Wird also ein gegebenes Primärfeld in der Umgebung eines derartigen Objekts vollständig erfasst und ist die Reflexion durch das Objekt ausreichend genau vorhersagbar, kann eine neue Fehlergröße für ein ANC-System definiert werden. Das Fehlersignal ergibt sich aus der Differenz der prädizierten schallweichen Reflexion und der gemessenen Reflexion:

$$e(n) = p_{\text{präd},-} - p_{\text{sek},-} = \hat{d}(n) - f(n). \quad (6.32)$$

In (6.32) wird die Prädiktion $p_{\text{präd},-}$ des reflektierten Schalldrucks zum Zeitpunkt n verwendet, die aus dem Primärsignal $p_{\text{pri},+}(n)$ gewonnen werden muss. Es wird ein Modell benötigt, das die Reflexion ausreichend genau beschreibt und die Vorhersage ermöglicht. Die im vergangenen Kapitel vorgestellte Reflexionsäquivalenz dient daher als Grundlage der Reflexions-Prädiktion. Abbildung 6.5 veranschaulicht das Prinzip der Adaption anhand des reflektierten Feldes. In 6.5 (a) ist ein Rohrmodell dargestellt, in dem sich das Primärfeld von links her als eindimensionale Schallwelle in positiver x -Richtung ausbreitet. Auf der rechten Seite trifft die Welle auf einen schallweichen Impedanzabschluss und wird reflektiert. Der Schalldruck ist an dieser Stelle und rechts davon gleich Null. Der reflektierte Anteil gelangt als $d(n)$ zurück zum Referenzempfänger und kann dort separat erfasst werden. Abbildung 6.5 (b) zeigt das zugehörige ANC-Modell des Aufbaus. Anstelle des schallweichen Impedanzabschlusses befindet sich an der gleichen Stelle der Sekundärlautsprecher, dessen Signal dem Primärfeld überlagert wird.

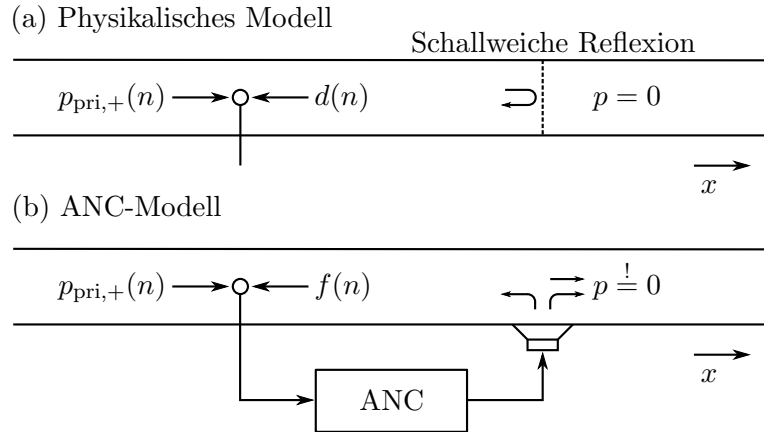


Abbildung 6.5.: Veranschaulichung des Reflexionsmodells für eindimensionale Schallausbreitung. (a) Das gewünschte Signal $d(n)$ tritt bei schallweicher Reflexion als zurück laufende Welle am Referenzempfänger auf. (b) Das ANC-System versucht die Differenz zwischen $d(n)$ und $f(n)$ zu minimieren, um die schallweiche Reflexion zu erzeugen.

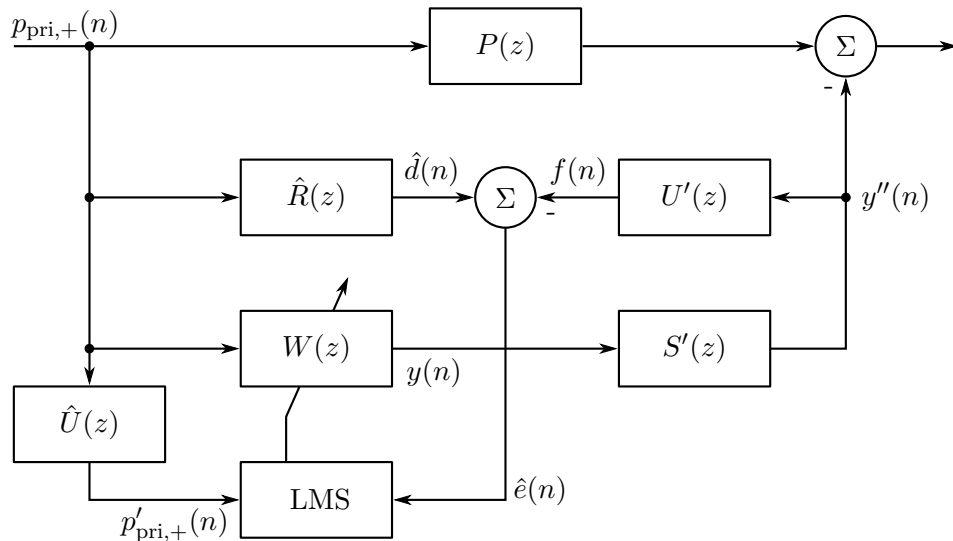


Abbildung 6.6.: Blockschaltbild des modifizierten FXLMS unter Verwendung der Reflexions-Prädiktion. Das Eingangssignal $p_{\text{pri},+}(n)$ wird mit der Abschätzung des Feedbackpfads $\hat{U}(z)$ gefaltet. Das Fehlersignal $\hat{e}(n)$ ergibt sich im Gegensatz zum herkömmlichen FXLMS als Differenz der Abschätzung der gewünschten Reflexion $\hat{d}(n)$ und dem zurück kommenden Signal $f(n)$.

Ziel des ANC-Systems ist den Gesamtschalldruck am Lautsprecher zu Null zu minimieren und somit am Lautsprecher einen schallweichen Impedanzabschluss zu erzeugen.

gen. Das Gegenfeld breitet sich sowohl in positiver x -Richtung als auch in negativer x -Richtung aus. Der zurück laufende Anteil gelangt als Feedbacksignal $f(n)$ zum Referenzempfänger und entspricht $d(n)$. Dies gilt, wenn sich am Gegenlautsprecher eine schallweiche Impedanz ergeben hat und der Schalldruck am Lautsprecher gleich Null ist. Diese Annahme kann nur getroffen werden, wenn die Abstrahlung des Lautsprechers in positiver und in negativer Richtung identisch ist.

Das Blockschaltbild des zugehörigen ANC-Systems ist in Abbildung 6.6 zu sehen. Als Eingangssignal dient das bereits separat erfasste Primärfeld $p_{\text{pri},+}(n)$ und wird dem ANC-Filter $W(z)$ zugeführt. Der Ausgang $y(n)$ des Filters gelangt über den Sekundärpfad $S'(z)$ zum physikalischen Überlagerungspunkt. $S'(z)$ entspricht also der Übertragungsfunktion, die alle Elemente vom DAC bis einschließlich dem Lautsprecher enthält. Vom physikalischen Überlagerungspunkt aus breitet sich das Gegenfeld entlang des Feedback-Pfades $U'(z)$ bis zum Referenzempfänger aus und wird dort als $f(n)$ erfasst. Das gewünschte Signal $\hat{d}(n)$ wird durch das Prädiktions-Filter $\hat{R}(z)$ aus dem Referenzsignal $p_{\text{pri},+}(n)$ gebildet. $\hat{R}(z)$ ist demnach eine Nachbildung des Reflexionsvorganges an der schallweichen Impedanz. Das geschätzte Fehlersignal $\hat{e}(n)$ wird nun aus der Differenz $\hat{d}(n) - f(n)$ gewonnen und dem LMS-Algorithmus zugeführt. Im Gegensatz zum herkömmlichen FXLMS muss das Referenzsignal nicht mit der abgeschätzten Impulsantwort des Sekundärpfades, sondern mit der des Feedback-Pfades $\hat{u}(n) = s'(n) * u'(n)$ gefaltet werden. Simulationsergebnisse zu dem eindimensionalen ANC-System unter Verwendung der Reflexionsäquivalenz wurden in [KWK10] und [Kle10] veröffentlicht. Die Erweiterung für den zweidimensionalen Fall und deren Simulation werden im Folgenden beschrieben.

6.4. Erweiterung zum adaptiven MIMO-System

Die in den Kapiteln 6.1.2 bis 6.3 vorgestellten Verfahren werden nun für MIMO-Systeme erläutert. Als Ausgangspunkt dient wiederum das Wiener Optimalfilter in der Erweiterung für mehrere Ein- und Ausgänge. Im Anschluss werden neue Varianten des MIMO FXLMS vorgestellt, die zur Adaption des in Kapitel 5 vorgestellten zweidimensionalen ANC-Systems verwendet werden können.

6.4.1. Das MIMO Wiener Filter

Die Wiener-Hopf-Gleichung kann ebenso für MIMO-Systeme angegeben werden, die N_M Eingänge und N_L Ausgänge besitzen [HBC06]. Der Eingangsvektor $\mathbf{x}(n)$ ist dann wie folgt definiert:

$$\mathbf{x}(n) = \left[\mathbf{x}_1^T(n) \quad \mathbf{x}_2^T(n) \quad \dots \quad \mathbf{x}_{N_M}^T(n) \right]^T \quad (6.33)$$

Der Vektor der Ausgangssignale $\mathbf{y}(n)$ und der Vektor der gewünschten Signale $\mathbf{d}(n)$

haben folgende Struktur:

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_{N_L}(n) \end{bmatrix}^T \quad (6.34)$$

$$\mathbf{d}(n) = \begin{bmatrix} d_1(n) & d_2(n) & \dots & d_{N_L}(n) \end{bmatrix}^T. \quad (6.35)$$

Da alle Ausgangssignale des Systems von allen Eingangssignalen abhängen, wird anstelle der Autokorrelationsmatrix der Single Input Single Output (SISO) Wiener-Hopf-Gleichung die Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{xx} verwendet. Diese ist eine Block-Matrix, die aus den Kovarianzmatrizen der N_M verschiedenen Eingangssignale zusammengesetzt ist:

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1} & \dots & \mathbf{R}_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{N_M}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}_{N_M}\mathbf{x}_1} & \dots & \mathbf{R}_{\mathbf{x}_{N_M}\mathbf{x}_{N_M}} \end{bmatrix}_{NN_M \times NN_M}. \quad (6.36)$$

Die Koeffizienten-Vektoren, die jeweils zwischen einem der N_M Eingänge und einem der N_L Ausgänge vermitteln, werden in der Matrix

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1,1}^T & \dots & \mathbf{w}_{1,N_M}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{w}_{N_L,1}^T & \dots & \mathbf{w}_{N_L,N_M}^T \end{bmatrix}_{N_L \times NN_M} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1,:}^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{N_L,:}^T \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

zusammengefasst [HBC06]. Im eindimensionalen Fall wird in der Wiener-Hopf-Gleichung der Kreuzkorrelationsvektor \mathbf{p} verwendet. Im MIMO-Fall wird dieser durch die Kreuzkorrelationsmatrix

$$\mathfrak{P} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{d}^T(n)\}_{NN_M \times N_L} \quad (6.38)$$

ersetzt. Mit diesen Größen kann die MIMO Wiener-Hopf-Gleichung

$$\mathbf{W}^{\circ,T} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \cdot \mathfrak{P} \quad (6.39)$$

angegeben werden. Darin ist $\mathbf{W}^{\circ,T}$ ein mehrdimensionales Wiener Optimalfilter. Diese Gleichung kann in N_L unabhängige Teilgleichungen zerlegt werden, sodass die MIMO-Optimierung in N_L Multiple Input Single Output (MISO)-Optimierungen aufgeteilt werden kann [HBC06]. Diese Eigenschaft hat für die Praxis große Relevanz, da die unabhängige Betrachtung die Komplexität der computerbasierten Implementierung stark reduziert.

Es ist anzumerken, dass bei schlechter Konditionierung der Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{xx} die MIMO Wiener-Hopf-Gleichung keine eindeutige Lösung besitzt und adaptive Algorithmen langsam konvergieren [HBC06]. Eine schlechte Konditionierung liegt dann vor, wenn die einzelnen Eingangssignale miteinander korreliert sind. Im Fall des zweidimen-

sionalen ANC-Systems ist diese Bedingung gegeben. So wurden in der Vergangenheit verschiedene andere Methoden vorgestellt, die vom mathematischen Standpunkt her gesehen, besser geeignet sind. Ein Beispiel dafür wird in [SB07] vorgestellt. Hinsichtlich der Implementierung des in Kapitel 7 vorgestellten DSP-Systems, wurde dennoch der MIMO FXLMS als bekannter und etablierter Algorithmus ausgewählt, für den zudem effiziente Varianten existieren [Dou99].

6.4.2. Anpassung des MIMO FXLMS auf das zweidimensionale ANC-System

Der MIMO FXLMS wird in diesem Abschnitt in vier verschiedenen Varianten dargestellt: Der Aufbau unter Verwendung von Druck- und Schnellemikrofonen als Referenzempfänger, die Modifikation unter Verwendung kardioider Referenz-Mikrofone und die Variante, die das Fehlersignal aus der Reflexions-Prädiktion bezieht. Letztere wird wiederum darin unterschieden, ob Druck- und Schnelleempfänger oder kardioide Referenzmikrofone zur Verfügung stehen. Da die Version aus Abbildung 6.7 dem aus der Literatur bekannten Aufbau am ehesten entspricht, wird diese zuerst behandelt.

Sämtliche System-Varianten werden innerhalb zeitbasierter Simulationen untersucht. Dabei kommt das in Kapitel 6.5 beschriebene FDTD-Verfahren zum Einsatz. Der Fokus der Untersuchungen liegt auf der Anwendung des zweidimensionalen ANC-Systems als aktive Schallbarriere. In Kapitel 6.4.2.2 wird zusätzlich das Simulationsergebnis für die Adaption innerhalb des Kreisbaus präsentiert, um das in [Tri03] vorgestellte kreisförmige System durch eine adaptive Optimierung zu erweitern.

Die Rahmenbedingungen der Simulationen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Abtastrate der FDTD und des adaptiven Systems: $f_s = 8 \text{ kHz}$
- Auflösung des räumlichen FDTD-Rasters: $d_x = 0,0606 \text{ m}$
- Seitenlänge des räumlichen FDTD-Rasters: $6 \text{ m} \times 6 \text{ m}$
- Anzahl der Perfectly Matched Layer (PML): 20 Grid-Punkte (siehe Kapitel 6.5)
- Primärsignal für den Linienaufbau: In der Amplitude ansteigendes Phasenrauschen mit
 - $f_{\text{stop,u}} = 50 \text{ Hz}$
 - $f_{\text{cut,u}} = 100 \text{ Hz}$
 - $f_{\text{cut,o}} = 300 \text{ Hz}$
 - $f_{\text{stop,o}} = 350 \text{ Hz}$
 - Einblenddauer: $t_{\text{fade-in}} = 0,1 \text{ s}$
- Primärsignal für den Kreisbau: In der Amplitude ansteigendes Phasenrauschen mit
 - $f_{\text{stop,u}} = 50 \text{ Hz}$

- $f_{\text{cut,u}} = 100$ Hz
- $f_{\text{cut,o}} = 250$ Hz
- $f_{\text{stop,o}} = 300$ Hz
- Einblenddauer: $t_{\text{fade-in}} = 0,1$ s
- Adaptionlänge: $t_{\text{adapt}} = 4$ s
- Länge der Simulation zur Überprüfung des Dämpfungserfolges: $t_{\text{sim}} = 1$ s
- Länge der FIR-Filter im System: 256

Der Ablauf einer jeden Simulation ist in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Für das Ausmessen der Sekundär- und Feedback-Pfade wird ein Single Input Multiple Output (SIMO) NLMS verwendet. Alle Quellen und Senken liegen auf Punkten des Rasters. Dabei wird der Abstand in y -Richtung mit 0,5 m vorgegeben und die Positionen jedes Empfängers und jeder Gegenquellen werden auf das Raster quantisiert.

Tabelle 6.2.: Ablauf der Simulationen zur adaptiven Optimierung.

-
1. Initialisierung, Erstellen des Primärsignals
 2. FDTD: Ausmessen der Sekundär- und Feedback-Pfade
 3. FDTD: Online-Adaption der ANC-Filterkoeffizienten
 4. Erstellen eines neuen Primärsignals (gleiche spektrale Verteilung)
 5. FDTD: Simulation des ungestörten Primärfeldes
 6. FDTD: Online-Simulation des ANC-System
 7. Berechnung und Darstellung von Dämpfung aus 5. und 6. und MSE aus 3.
-

6.4.2.1. MIMO FXLMS bei Verwendung kardioider Referenzempfänger

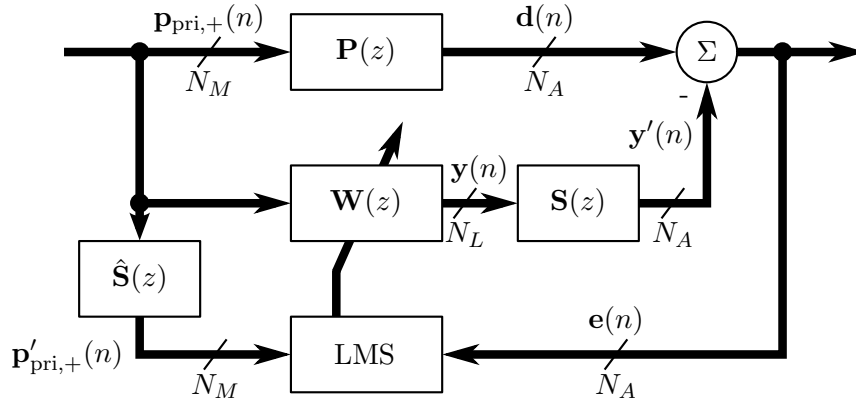


Abbildung 6.7.: MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger ($\mathbf{p}_{\text{pri},+}$) und unter Vernachlässigung der Feedback-Pfade. In der MIMO-Variante müssen alle Eingangssignale mit allen abgeschätzten Sekundärpfaden $\hat{\mathbf{S}}(z)$ gefaltet werden. Eine ausführliche Beschreibung dieser Faltung ist in [KM96] gegeben.

Wie in der Abbildung 6.7 zu erkennen ist, wurde der FXLMS aus Grafik 6.3 zu einem mehrdimensionalen Übertragungssystem erweitert. Die Eingangsgröße $\mathbf{p}_{\text{pri},+}(n)$ besteht aus N_M kardioiden Mikrofonsignalen, wodurch die Feedback-Pfade im System vernachlässigt werden können. Das Primärfeld breitet sich über die Primärpfade $\mathbf{P}(z)$ zu den N_A Analysepunkten aus, die als Summationsstelle dargestellt sind. Dort überlagert sich das Primärfeld $\mathbf{d}(n)$ mit den Gegensignalen $\mathbf{y}'(n)$ des ANC-Systems. An dieser Stelle werden die N_A Fehlermikrofone angenommen, die wiederum die N_A Fehlersignale $\mathbf{e}(n)$ für den mehrdimensionalen LMS-Algorithmus liefern. Zum Aufdatieren der Koeffizienten werden die mit einer Schätzung $\hat{\mathbf{S}}(n)$ der Sekundärpfade gefalteten Primärsignale $\mathbf{p}'_{\text{pri},+}(n)$ benötigt. Bei dieser Faltung ist zu beachten, dass jedes Eingangssignal mit jedem Sekundärpfad gefaltet wird, da auch alle Eingangssignale mit allen Gegenquellen über $\mathbf{W}(z)$ verknüpft sind. Eine ausführliche Beschreibung dieser Faltung und der Aufdatierung der Koeffizienten wird zum Beispiel in [KM96] gegeben.

Den MSE und die räumliche Dämpfung der Simulation des Verfahrens aus Abbildung 6.7 stellen jeweils die Abbildungen 6.8 und 6.9 dar. Die Erwartungswerte der quadratischen Fehlersignale steigen für jedes der sechs Fehlermikrofone zu Anfang stark an, da erst die Wellenfronten des Primärsignals die Empfänger erreichen müssen und das Primärsignal eingebildet wird. Anschließend adaptiert sich innerhalb von etwa einer Sekunde der MIMO FXLMS auf stabile, niedrige Fehler-Werte, die weiter minimiert werden. Die beste Übereinstimmung wird bei den äußeren Mikrofonen erreicht. Die räumliche Dämpfungswirkung nach Abbildung 6.9 zeigt zum einen eine sehr gute Dämpfung an den Fehlermikrofonen, zum anderen aber auch den akustischen Schatten, der durch die aktive Schallbarriere erzeugt wird.

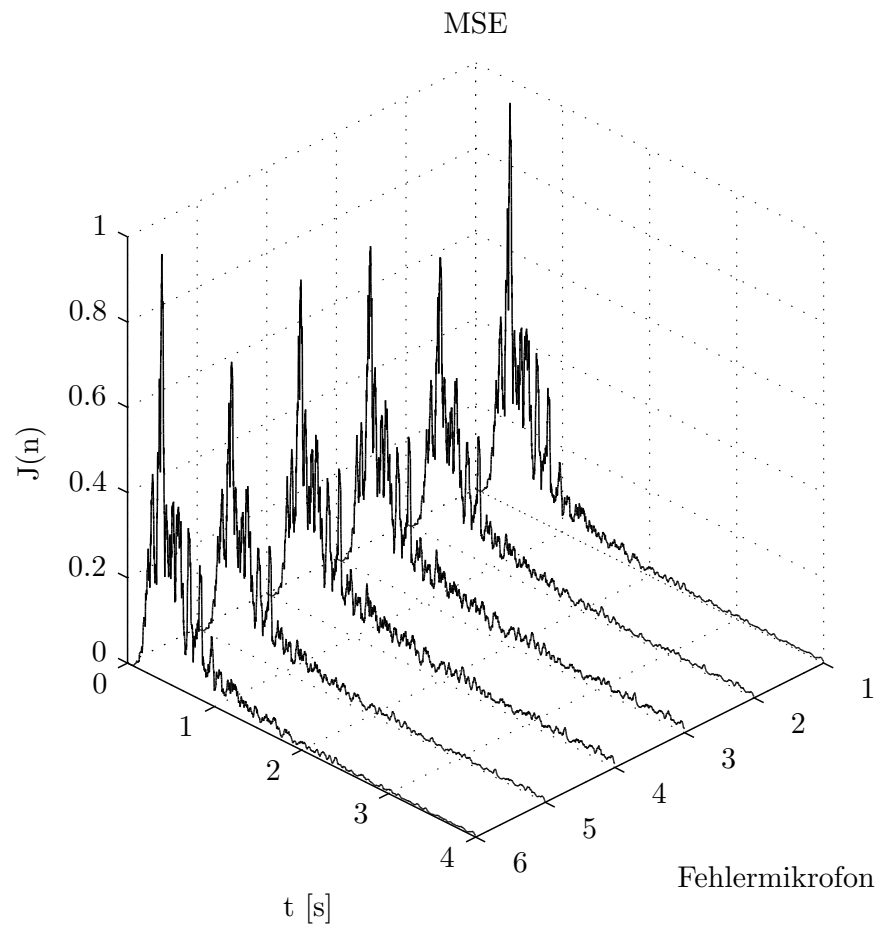


Abbildung 6.8.: MSE der Adaption mit dem MIMO FXLMS nach Abbildung 6.7 für das ANC-System mit sechs kardioiden Referenzmikrofonen, sechs Sekundärquellen und ebenso vielen Fehlermikrofonen. Die anfängliche Steigung des MSE hängt mit der Ausbreitung der Welle von der Primärquelle zu den Fehlermikrofonen zusammen und mit der Einblenddauer des Primärsignals von 0,1 s. Fehlermikrofon 1 ist jeweils das unterste Fehlermikrofon in Bild 6.9.

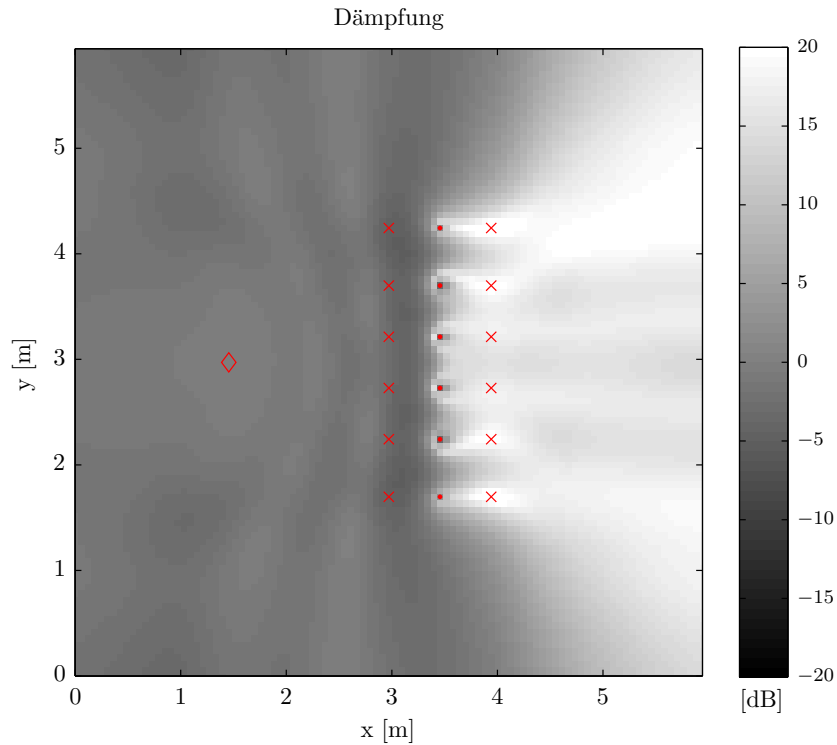


Abbildung 6.9.: Dämpfungsfeld nach der Adaption mit dem MIMO FXLMS nach Abbildung 6.7 für das ANC-System mit sechs kardioiden Referenzmikrofonen (rote Kreuze bei $x \approx 3$ m), sechs Sekundärquellen (rote Punkte bei $x \approx 3,5$ m) und sechs Fehlermikrofonen (rote Kreuze bei $x \approx 4$ m). Die Primärquelle (rote Raute bei $x \approx 1,5$ m) erzeugt Phasenrauschen zwischen 50 Hz und 350 Hz. Die Dämpfung ist erwartungsgemäß an den Orten der Fehlersensoren am höchsten und der Schallschatten rechts der Schallbarriere ist gut zu erkennen.

6.4.2.2. MIMO FXLMS unter Verwendung von Druck- und Schnellempfängern als Referenzmikrofone

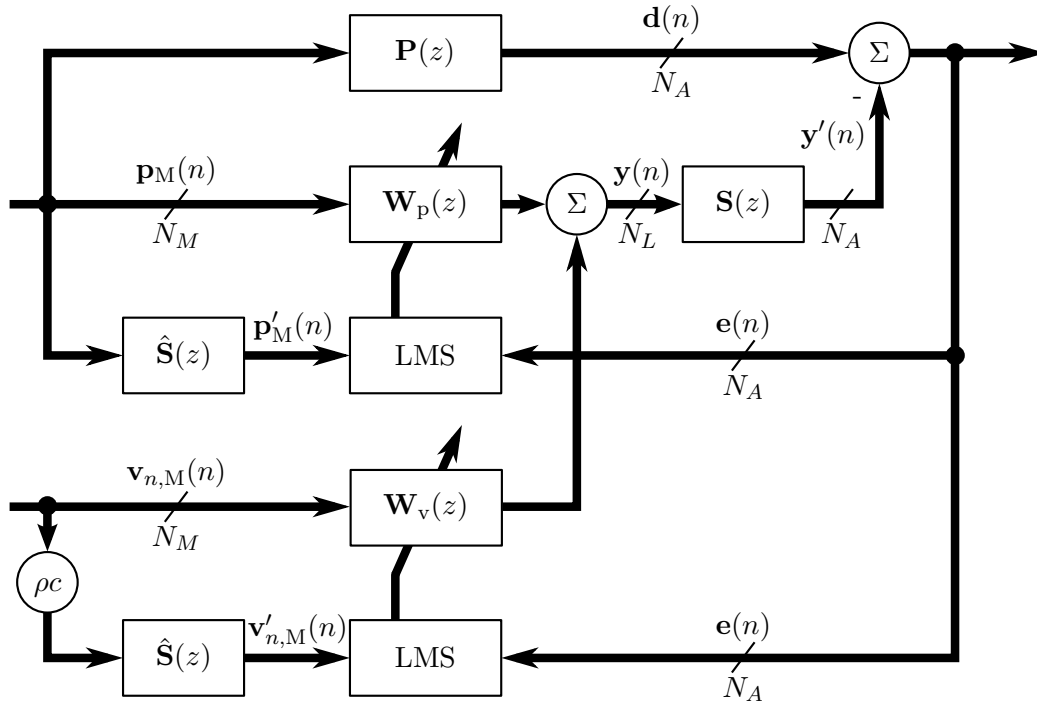


Abbildung 6.10.: MIMO FXLMS unter Verwendung von Druckmikrofonen (\mathbf{p}_M) und Schnellemikrofonen ($\mathbf{v}_{n,M}$).

Erweitert man den MIMO FXLMS-Algorithmus um die Kombination von Druck- und Schnellemikrofon als Referenzempfänger, ergibt sich das Blockschaltbild aus Abbildung 6.10. Zu erkennen sind die zwei Übertragungsfunktionen $\mathbf{W}_p(z)$ und $\mathbf{W}_v(z)$, die jeweils separat, aber mit den gleichen Fehlersignalen $\mathbf{e}(n)$ adaptiert werden. Zu beachten ist, dass die Schallkennimpedanz $Z = \rho c$ als Verstärkungsfaktor bei der Faltung der Schnellesignale mit den abgeschätzten Sekundärpfaden $\hat{\mathbf{S}}(z)$ einfließt. Ebenso muss die Schrittweite des LMS für das Aufdatieren von $\mathbf{W}_v(z)$ um diesen Faktor gegenüber der Schrittweite zur Aufdatierung von $\mathbf{W}_p(z)$ vergrößert werden. Bei Verwendung des NLMS hingegen ergibt sich diese Verstärkung durch die Abschätzung der Schrittweiten aus den Eingangsleistungen.

Der MSE und die Dämpfung des Systems als linienförmiger Aufbau und unter Verwendung der Kombination aus Druck- und Schnelle-Referenzempfängern sind jeweils in den Abbildungen 6.11 und 6.12 zu sehen. Demnach vermag das System unter den gleichen Rahmenbedingungen ein besseres Ergebnis zu erzielen. Die Adaption verläuft ein wenig schneller als für die Variante mit kardioiden Referenzmikrofonen. Auch ist die Dämpfung rechts der Sekundärquellen ausgeprägter. Die zusätzliche Information, die dem Algorithmus durch Trennung der Druck- und Schnelle-Übertragungspfade im

System zur Verfügung steht, wirkt sich demnach begünstigend auf die Leistung des Systems aus.

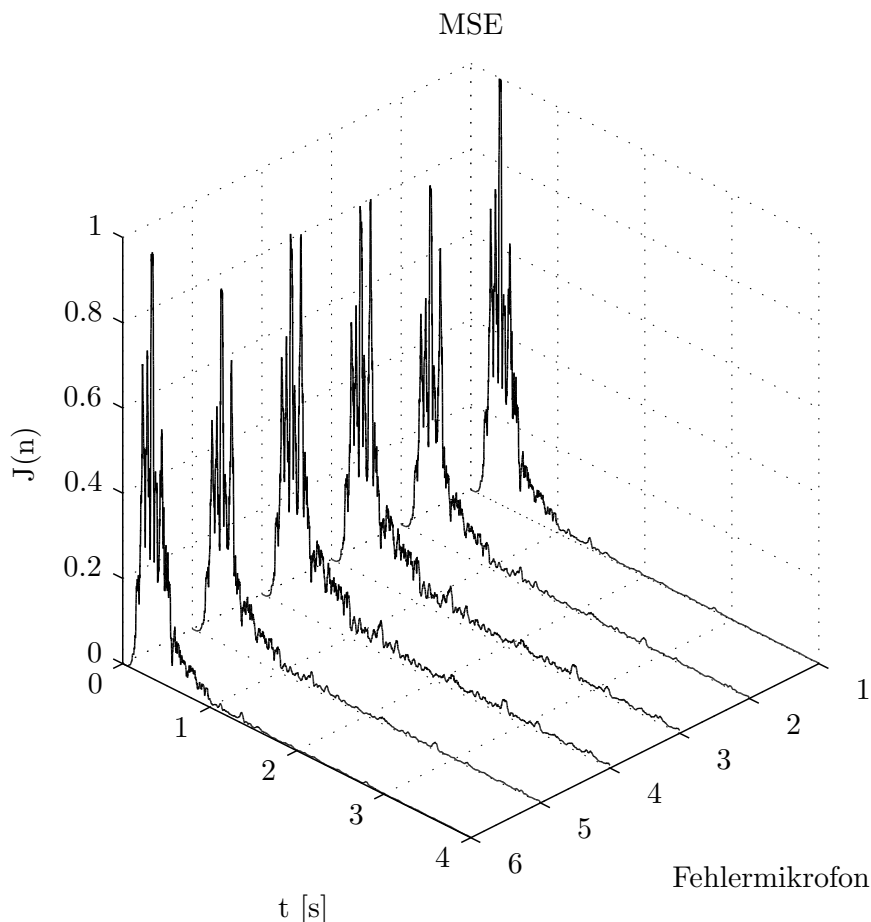


Abbildung 6.11.: MSE der Adaption mit dem MIMO FXLMS nach Abbildung 6.10 für das ANC-System mit sechs Sekundärquellen und sechs Referenz- und Fehlermikrofonen. Das Fehlermikrofon 1 ist das unterste Fehlermikrofon in Abbildung 6.12.

Wie eingangs erwähnt wurde, soll an dieser Stelle zusätzlich das Simulationsergebnis für die Adaption mit dem kreisförmigen ANC-System gezeigt werden. Der Mikrofonkreis, bestehend aus 24 Druck- und Schnellempfängern, hat einen Radius von 1,2 m, der Radius des Lautsprecherkreises beträgt 1 m und der des Fehlermikrofon-Kreises 0,5 m. Man beachte, dass aufgrund des relativ groben Rasters und der örtlichen Quantisierung der Mikrofon- und Lautsprecherpositionen, die Kreisform nicht ganz eingehalten wird. Die obere Grenz- und die obere Stopp-Frequenz des durch die Primärquelle erzeugten Phasenrauschens wurden etwas niedriger als für den Linienaufbau gewählt, da für den

Kreisaufbau der Abstand zwischen den Referenzempfängern größer ist. Das Resultat der Adaption ist als ortsabhängige Dämpfung in Abbildung 6.13 dargestellt. Demnach erzielt die Adaption durch den modifizierten MIMO FXLMS nach Abbildung 6.10 eine sehr gute Dämpfung innerhalb des Lautsprecherkreises und erzeugt einen ausgeprägten Schallschatten auf der der Primärquelle abgewandten Seite des ANC-Systems. Demnach kann das hier beschriebene adaptive Verfahren auch für den kreisförmigen Systemaufbau eingesetzt werden.

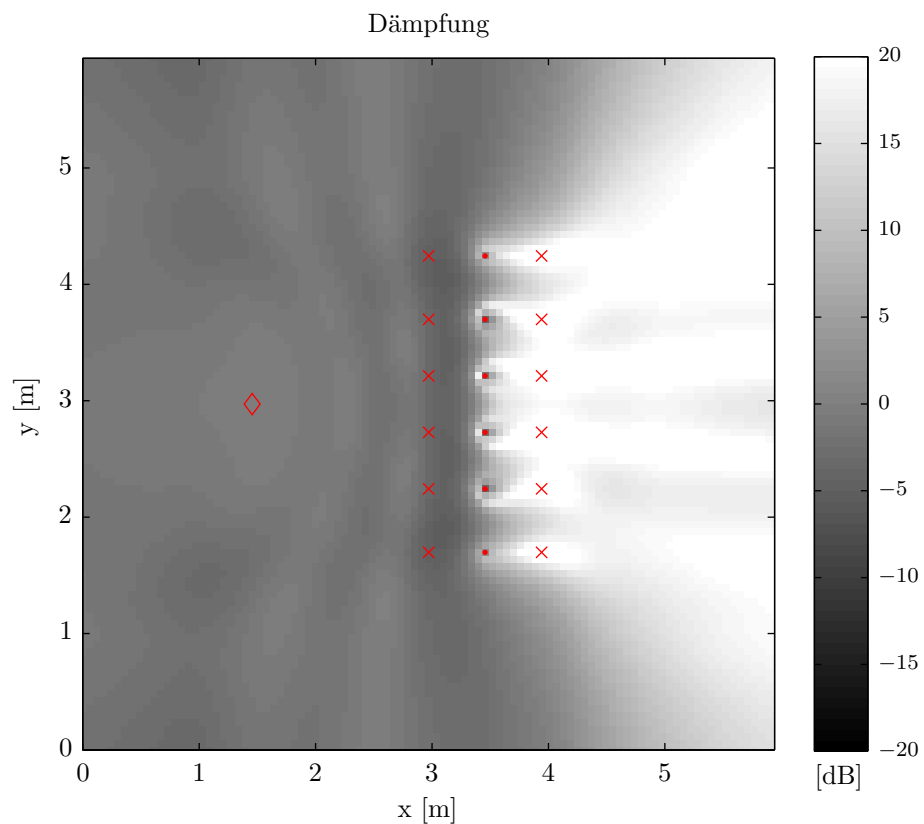


Abbildung 6.12.: Dämpfungsfeld nach der Adaption mit dem MIMO FXLMS nach Abbildung 6.10 für das ANC-System mit sechs Mikrofonpaaren bestehend aus Druck- und Schnellempfänger als Referenzmikrofone (rote Kreuze bei $x \approx 3$ m), sechs Sekundärquellen (rote Punkte bei $x \approx 3,5$ m) und sechs Fehlermikrofonen (rote Kreuze bei $x \approx 4$ m). Die Primärquelle (rote Raute bei $x \approx 1,5$ m) strahlt Phasenrauschen zwischen 50 Hz und 350 Hz ab. Das System erzeugt eine ausgeprägte Dämpfung an den Fehlersensoren und einen deutlichen Schallschatten rechts der Sekundärquellen.

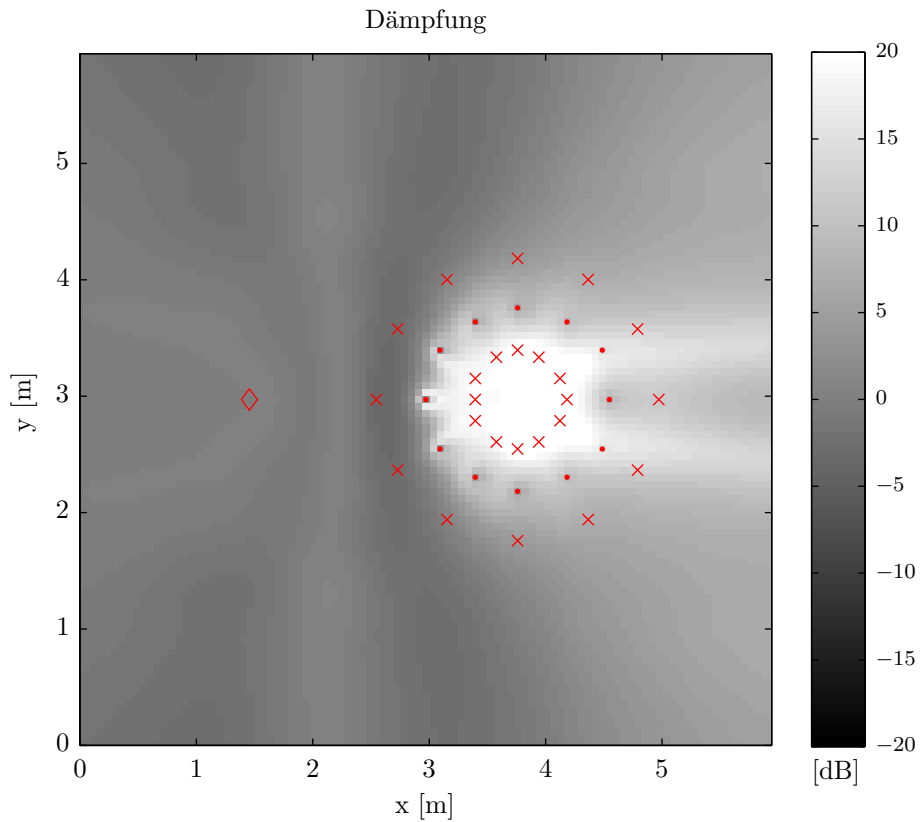


Abbildung 6.13.: Dämpfungsfeld nach der Adaption mit dem MIMO FXLMS nach Abbildung 6.10 für das kreisförmige ANC-System mit 24 Mikrofonpaaren bestehend aus Druck- und Schnellempfängern als Referenzmikrofone (rote Kreuze, Radius 1,2 m), 12 Sekundärquellen (rote Punkte) und 12 Fehlermikrofonen (rote Kreuze, Radius 0,5 m). Die Primärquelle (rote Raute bei $x \approx 1,5$ m) erzeugt Phasenrauschen zwischen 50 Hz und 300 Hz. Das System erzeugt eine ausgeprägte Dämpfung an den Fehlersensoren und einen deutlichen Schallschatten.

6.4.2.3. MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenz-Empfänger und der Reflexions-Prädiktion

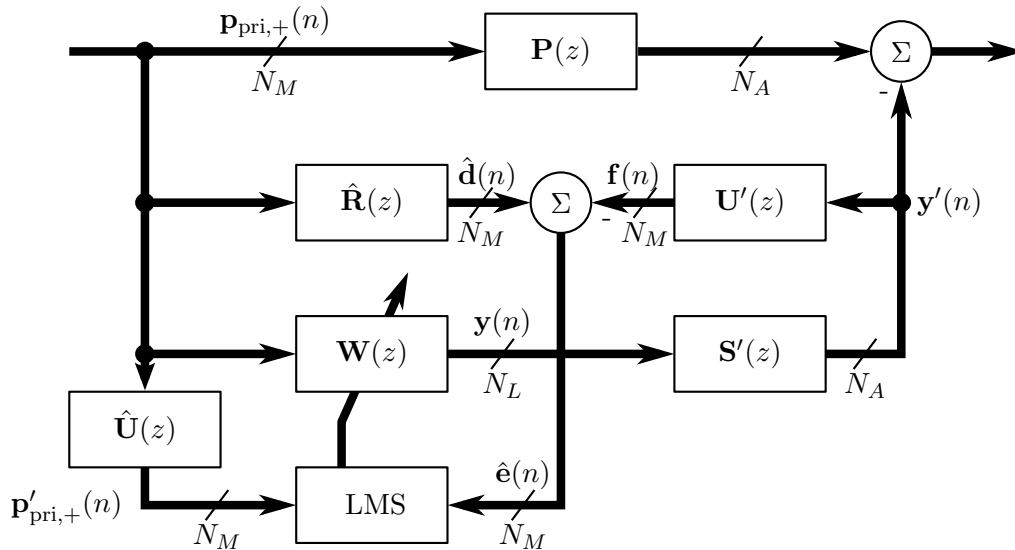


Abbildung 6.14.: MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Mikrofone ($\mathbf{p}_{\text{pri},+}$) und der Reflexions-Prädiktion.

Im Folgenden wird der Ansatz der Reflexions-Prädiktion auf das zweidimensionale ANC-System übertragen. Abbildung 6.14 zeigt das Blockschaltbild für das MIMO-System. Die Struktur gleicht der eindimensionalen Variante aus Abbildung 6.6 mit dem Unterschied, dass mehrdimensionale Ein- und Ausgangsgrößen, sowie die entsprechenden mehrdimensionalen Übertragungsfunktionen verwendet werden. Die für die Reflexions-Prädiktion der gewünschten Signale $\hat{\mathbf{d}}(n)$ dargestellte Übertragungsmatrix $\hat{\mathbf{R}}(z)$ muss aus einem Modell zur zweidimensionalen Reflexion an einem Objekt in Form der Sekundärquellenanordnung gewonnen werden. Dieser Sachverhalt stellte sich für den eindimensionalen Fall wesentlich einfacher dar (vergleiche [KWK10]). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden zwei Geometrien betrachtet und entsprechende Möglichkeiten zur Bestimmung der reflektierten Felder beschrieben: Der Kreis und die Linie. $\hat{\mathbf{R}}(z)$ beschreibt also die Extrapolation des Feldes bei Vorhandensein eines schallweichen, unendlichen Zylinders nach Kapitel 4.2.3, oder bei Vorhandensein einer unendlichen, linienförmigen und schallweichen Barriere nach Kapitel 4.3.4. Für andere Geometrien existieren mitunter keine analytischen Lösungen, weshalb dafür Verfahren wie die Finite Elemente Methode (FEM) oder die Finite Differenzen Methode (FDM) eingesetzt werden sollten [FN13].

Von den prädizierten Reflexionen $\hat{\mathbf{d}}(n)$ werden wiederum die zurück laufenden Sekundärsignale $\mathbf{f}(n)$ subtrahiert. An dieser Stelle wird erneut deutlich, dass für diese Aufgabe die Referenzempfänger so ausgelegt sein müssen, dass diese die hin- und rücklaufende Welle separieren können. Für die folgenden Simulationen wurde daher angenommen,

dass die Signale an den Referenzmikrofonen wie folgt erfasst werden:

$$\mathbf{p}_{\text{pri},+}(n) = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_{\text{ref}}(n) + \rho \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_{n,\text{ref}}(n)), \quad (6.40)$$

$$\mathbf{f}(n) = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_{\text{ref}}(n) - \rho \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_{n,\text{ref}}(n)). \quad (6.41)$$

Die Separation erfolgt also bereits im Empfänger, bevor die Signale dem System zugeführt werden. Dies entspräche der Verwendung zweier entgegengesetzt ausgerichteter Kardioid-Kapseln, deren Rückseiten beisammen liegen.

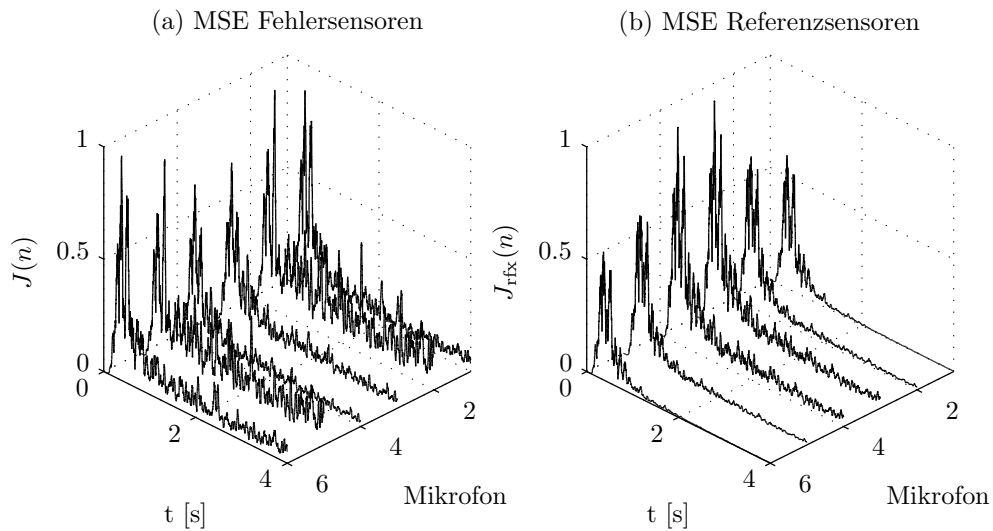


Abbildung 6.15.: (a) MSE an den Fehlersensoren im Dämpfungsbereich, die nicht für die Adaptation herangezogen wurden. (b) MSE der Differenz der Prädiktion $\hat{\mathbf{d}}(n)$ und dem zurück laufendem Sekundärfeld $\mathbf{f}(n)$. Wie zu erkennen ist, minimiert der MIMO FXLMS unter Verwendung der Reflektions-Prädiktion das Fehlersignal an den Referenzsensoren. Das Fehlersignal im Dämpfungsbereich wird auch verringert, bleibt im Vergleich aber stärker. Die Mikrofone mit der Nummer 1 sind jeweils die unteren Mikrofone in Abbildung 6.16

Die Simulationsergebnisse für das Verfahren nach Abbildung 6.14 sind in den Abbildungen 6.15 und 6.16 veranschaulicht. Das Fehlersignal wird demnach entsprechend Ab-

bildung 6.15 (b) zuverlässig durch den mehrdimensionalen LMS minimiert. Innerhalb des Dämpfungsbereichs wird der Fehler ebenfalls verringert, wie in 6.15 (a) zu erkennen ist. Doch fällt die Verringerung dort weniger stark aus. Das ANC-System vermag das Primärfeld zu dämpfen, die aktive Unterdrückung ist jedoch weniger ausgeprägt als für die Verfahren, die auf Fehlersensoren im Dämpfungsbereich zurückgreifen können. Der Grund dafür ist die nicht vollkommene Vorhersage des reflektierten Feldes. Eine Ursache sind die Abweichungen durch die örtliche Quantisierung der Quellen- und Senkenpositionen. Eine andere Begründung liegt in der richtungs- und frequenzabhängigen Wellenausbreitung im FDTD-Gitter [Kow08].

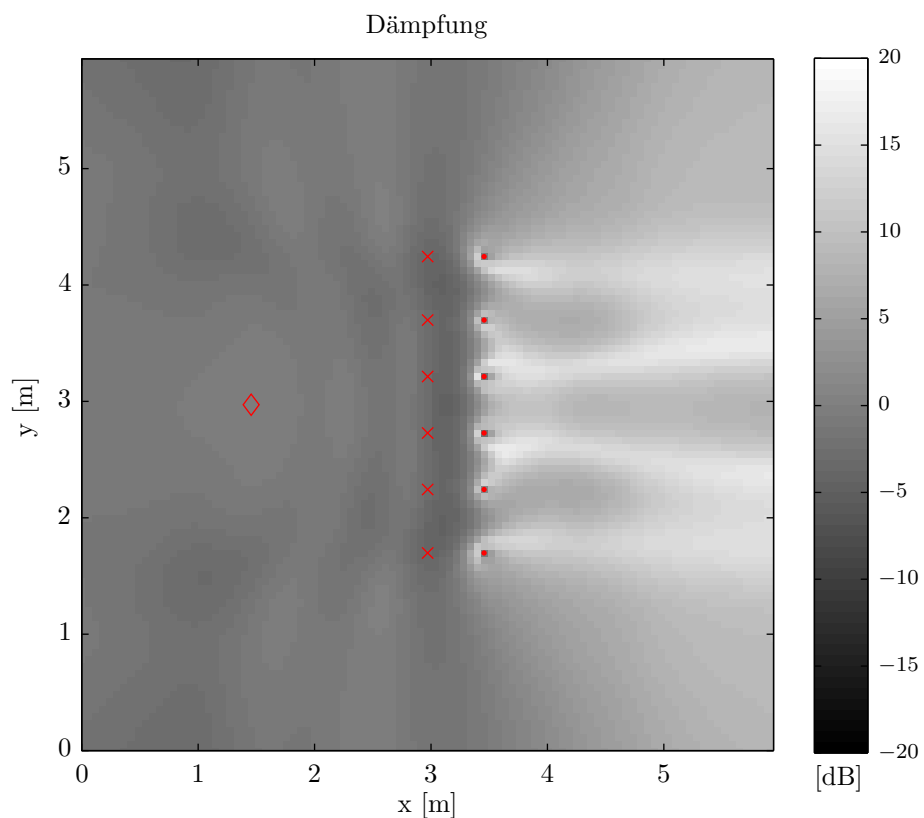


Abbildung 6.16.: Das Dämpfungsfeld nach der Adaption durch den modifizierten MI-MO FXLMS und unter Verwendung der Reflexions-Prädiktion und von kardioiden Referenzempfänger-Paaren zur getrennten Erfassung von Primär- und Sekundärfeld. Wie zu erkennen ist, fällt die Dämpfungsleistung geringer aus, als bei dem Verfahren unter Verwendung von Fehlersensoren im Dämpfungsbereich. Dies ist auf einen nicht ausreichend genaue Prädiktion der reflektierten Feldanteile zurück zu führen.

Um diese Behauptung zu überprüfen, wird nun von einer für diese Untersuchungen günstigen Eigenschaft der FDTD Gebrauch gemacht. Ist die Prädiktion der erwünschten Reflexionen innerhalb der FDTD nicht ausreichend genau, so können genauere Prädiktionsfilter ausgemessen werden. Zu diesem Zweck wird eine separate FDTD-Simulation durchlaufen, in der anstelle der Gegenquellen eine schallweiche Randbedingung am selben Ort geschaffen wird. Diese kann innerhalb der FDTD sehr einfach realisiert werden, wie in Kapitel 6.5 beschrieben wird. Die Primärquelle speist in der separaten Simulation wiederum das zuvor beschriebene Phasenrauschen ein und die gewünschten Übertragungsfunktionen können per MIMO LMS zwischen den Referenzempfängern ausgemessen werden. Es werden demnach die Übertragungsfunktionen zwischen den Signalen $\mathbf{p}_{\text{pri},+}$ und \mathbf{d} adaptiert. Diese Übertragungsfunktionen können dann in der Simulation des Systems aus Abbildung 6.14 zur Prädiktion der schallweichen Reflexion eingesetzt werden.

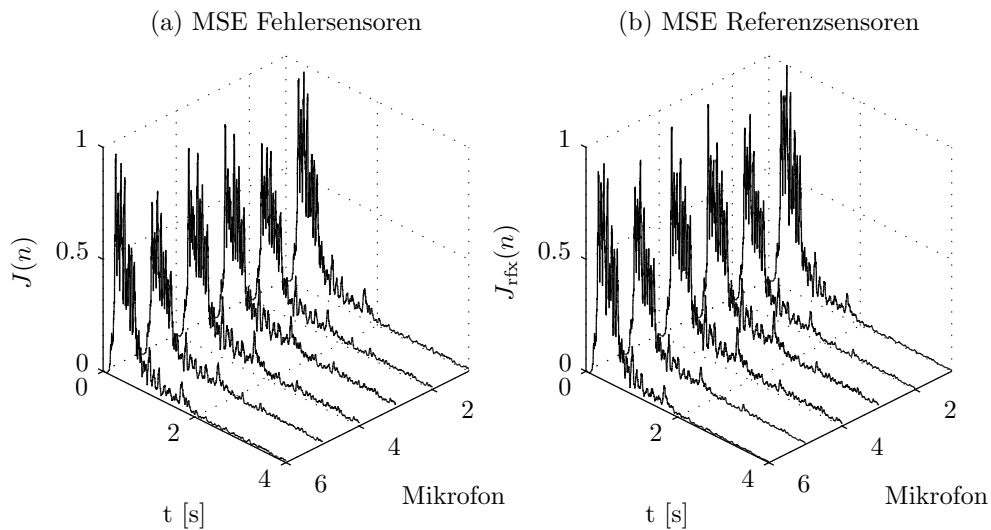


Abbildung 6.17.: MSE für die optimierte Reflexions-Prädiktion. (a) MSE $J(n)$ an den Fehlersensoren im Dämpfungsbereich, die nicht für die Adaption herangezogen wurden. (b) MSE $J_{\text{rfx}}(n)$ der Differenz der Prädiktion $\hat{\mathbf{d}}(n)$ und dem zurück laufendem Sekundärfeld $\mathbf{f}(n)$. Der Verlauf des Erwartungswertes der Fehlerquadrate ist bei dem optimierten Verfahren für die Fehlersensoren und für die Referenzempfänger nahezu identisch.

Das Resultat dieses Vorgehens ist einmal in Form des MSE in Abbildung 6.17 und als Dämpfungsfeld in 6.18 dargestellt. Anhand des MSE fällt direkt auf, dass nun die Minimierung des Fehlers für die Fehlersensoren und für die Referenzempfänger nahe-

zu identisch verläuft. Dies lässt auf eine bessere Unterdrückung des Primärfeldes im Dämpfungsbereich schließen, was durch Abbildung 6.18 bestätigt wird. Der örtliche Dämpfungsverlauf ist nun genauso ausgeprägt und intensiv wie bei der Adaption unter Verwendung von Fehlersensoren im Dämpfungsgebiet.

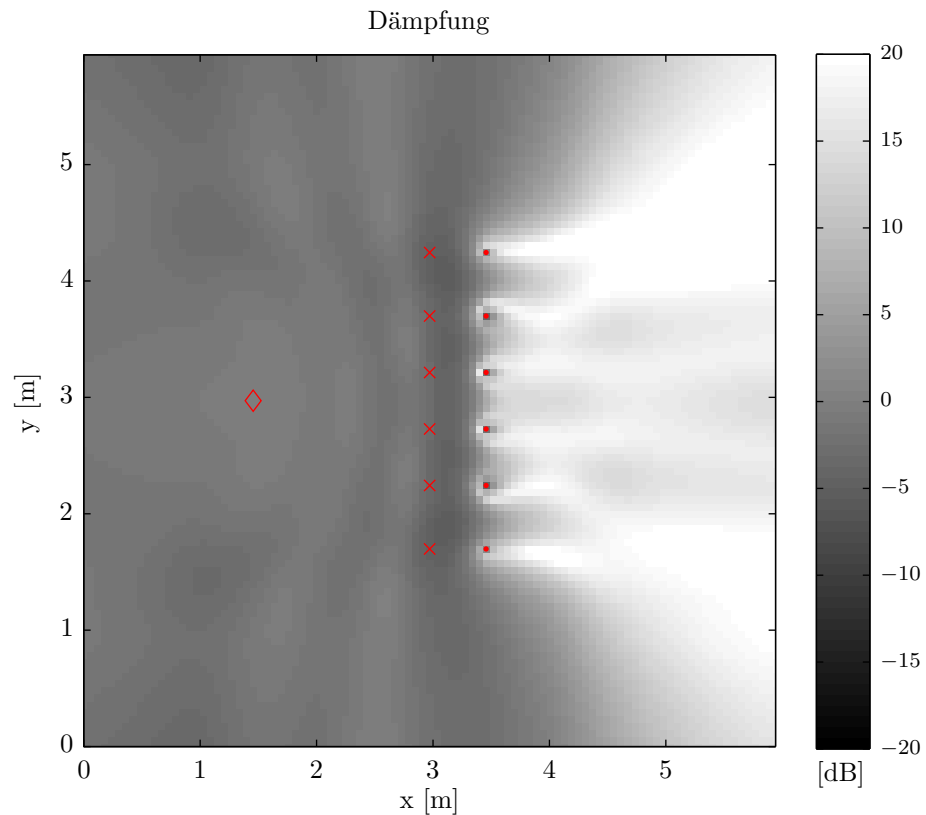


Abbildung 6.18.: Dämpfungsfeld nach der Adaption mit der optimierten Reflexions-Prädiktion und kardioiden Referenzempfängern.

Aus der zuletzt beschriebenen Untersuchung lassen sich zwei Erkenntnisse ziehen. Zum einen ist es mit dem modifizierten MIMO FXLMS und der Reflexions-Prädiktion theoretisch möglich, ähnliche Ergebnisse wie mit der klassischen Methode des MIMO FXLMS unter Verwendung von Fehlersensoren zu erreichen. Zum anderen bietet sich mit der gerade beschriebenen Methode eine Möglichkeit, die Prädiktionsfilter für die reflektierten Signale in einer FDTD-Simulation auszumessen und auf ein reales System zu übertragen. Die Genauigkeit der Simulationen entscheidet dann darüber, ob die ermittelten Übertragungsfunktionen wirklichkeitsnahe Prädiktionen ermöglichen und in einem realen ANC-System zur Dämpfung von unerwünschten Signalen führen. Zudem bietet das Ausmessen innerhalb der FDTD-Simulation die Möglichkeit, komplexe geometrische Formen von Sekundärquellverteilungen zu verwenden.

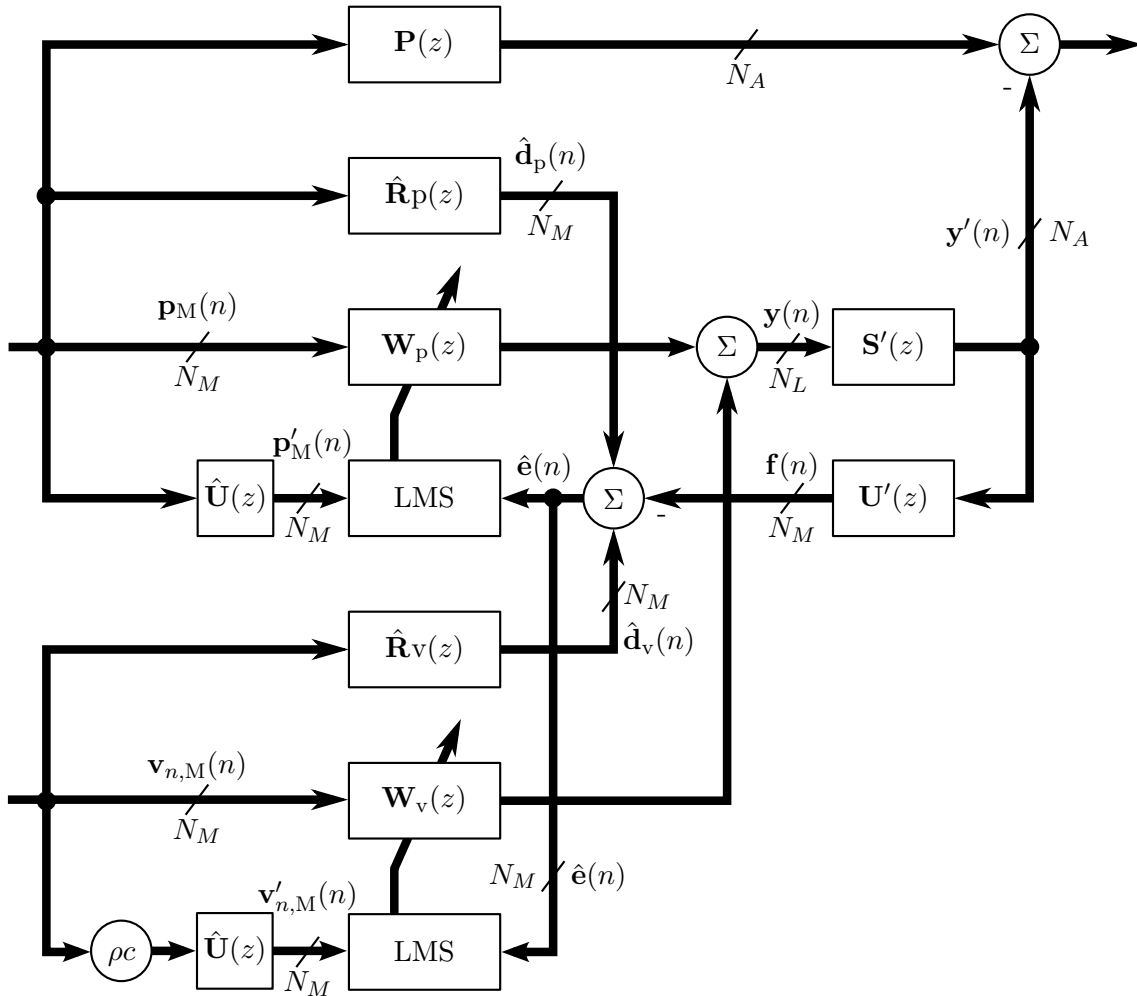


Abbildung 6.19.: MIMO FXLMS unter Verwendung von Druckmikrofonen (\mathbf{p}_M) und Schnellmikrofonen ($\mathbf{v}_{n,M}$) und der Reflexions-Prädiktion.

6.4.2.4. MIMO FXLMS unter Verwendung von Druck- und Schnelle-Referenz-Empfängern und der Reflexionsäquivalenz

Die Reflexionsäquivalenz kann ebenso im zweidimensionalen ANC-System eingesetzt werden, wenn die Übertragungsfunktionen zwischen Druck- und Schnellesensoren und den Sekundärquellen separat optimiert werden sollen. Der modifizierte MIMO FXLMS unter Verwendung von Druck- und Schnellmikrofonen als Referenzempfänger ist in Abbildung 6.19 dargestellt. Im Vergleich zum Systemaufbau aus Abbildung 6.14 wird nun auch die Berechnung der schallweichen Reflexionen getrennt nach Druck- und Schnelle durchgeführt. Die Abschätzung des erwünschten Signals $\hat{\mathbf{d}}$ ist:

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}_p + \hat{\mathbf{d}}_v = \mathbf{p}_M^T \hat{\mathbf{R}}_p + \mathbf{v}_{n,M}^T \hat{\mathbf{R}}_v. \quad (6.42)$$

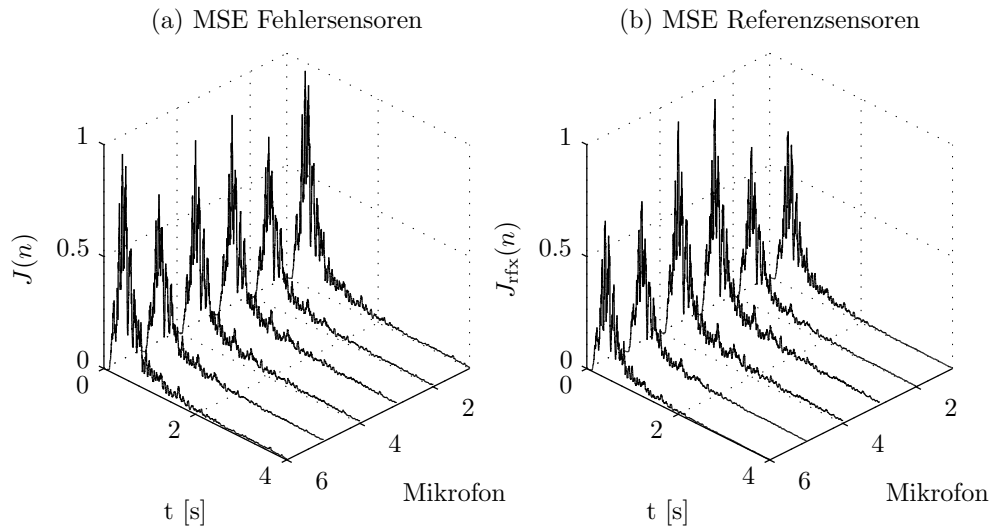


Abbildung 6.20.: MSE für die optimierte Reflexions-Prädiktion unter Verwendung von Druck- und Schnellempfängern. (a) MSE $J(n)$ an den Fehlersensoren im Dämpfungsbereich, die nicht für die Adaption herangezogen wurden. (b) MSE $J_{\text{rfx}}(n)$ der Differenz der Prädiktion $\hat{\mathbf{d}}(n)$ und dem zurück laufendem Sekundärfeld $\mathbf{f}(n)$. Der Verlauf des Erwartungswertes der Fehlerquadrate ist bei dem optimierten Verfahren für die Fehlersensoren und für die Referenzempfänger nahezu identisch. Die unteren Mikrofone in Abbildung 6.21 haben jeweils die Nummer 1.

Das abgeschätzte Fehlersignal ergibt sich wiederum aus der Differenz $\hat{\mathbf{e}}(n) = \hat{\mathbf{d}}(n) - \mathbf{f}(n)$ mit

$$\mathbf{f}(n) = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_M(n) - \rho \mathbf{c} \mathbf{v}_{n,M}(n)). \quad (6.43)$$

Die restlichen Komponenten des Systems sind gleich dem Aufbau des in Kapitel 6.4.2.3 beschriebenen Systems. Aufgrund der Erkenntnisse aus Kapitel 6.4.2.3, wurden für die Simulation des Systems die optimierten Übertragungsfunktionen $\hat{\mathbf{R}}(z)$ in einer separaten FDTD-Simulation ausgemessen.

Die Entwicklung des MSE für die Fehlersensoren im Dämpfungsgebiet und die Referenzsensoren während der Adaption zeigt Abbildung 6.20. Wie zu erkennen ist, wird der

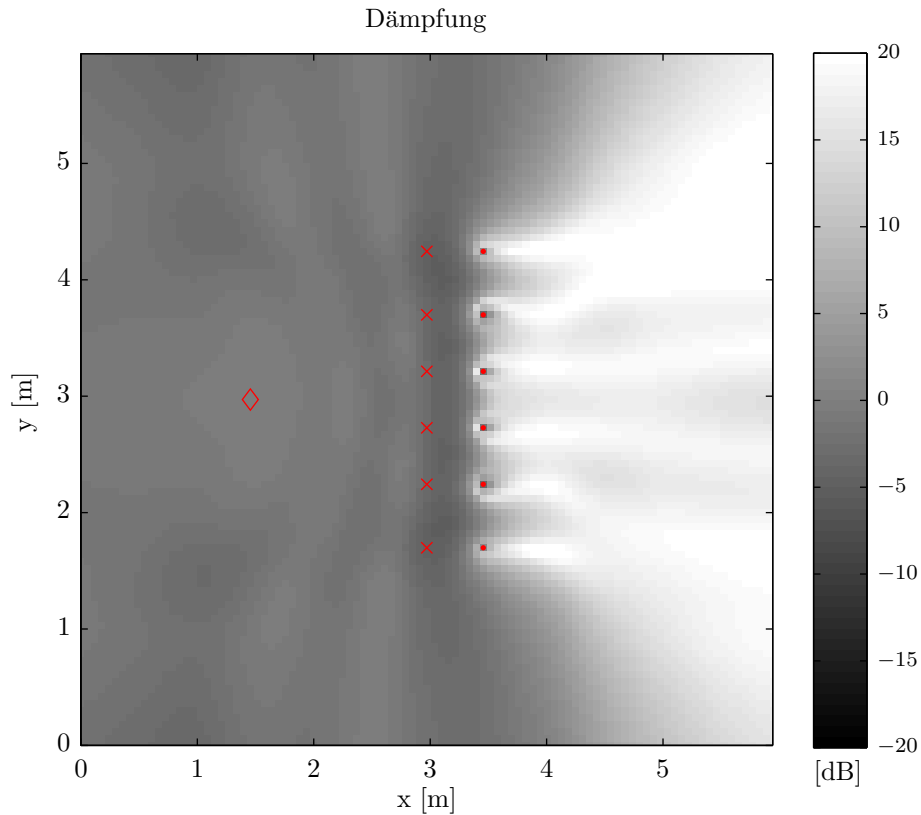


Abbildung 6.21.: Dämpfungsfeld nach der Adaption unter Verwendung von Druck- und Schnellemikrofonen und der optimierten Reflexions-Prädiktion. Es entsteht ein ausgeprägtes Dämpfungsfeld.

Erwartungswert der Fehlerquadrate kontinuierlich durch das adaptive Verfahren minimiert und der Verlauf des MSE ist innerhalb des Dämpfungsgebietes fast identisch mit dem Verlauf an den Referenzmikrofonen, wo das Fehlersignal für die Adaption gewonnen wird. Die zugehörige Dämpfung, die durch das System nach der Adaption mit den optimierten Prädiktionsfiltern erreicht wird, findet sich in Abbildung 6.21 wieder. Es zeigt sich, dass der Dämpfungserfolg des Systems aus Abbildung 6.19 ähnlich dem des Systems aus Darstellung 6.18 und der Schallschatten sogar etwas ausgeprägter ist. Demnach ist die getrennte Optimierung von Schnelle- und Druck-Übertragungsfunktionen auch für diese Variante des ANC-Systems von Vorteil.

6.5. Die zeitbasierte Simulationen adaptiver Verfahren unter Verwendung der Finiten Differenzen im Zeitbereich zur akustischen Feldbeschreibung

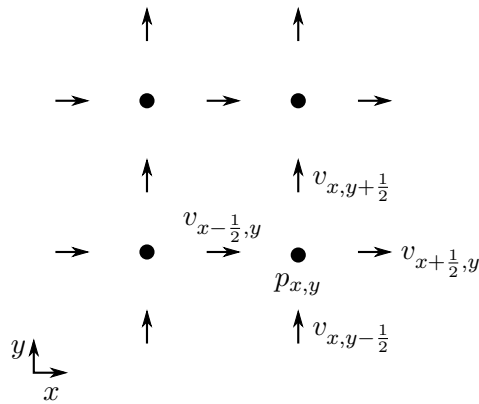


Abbildung 6.22.: *Staggered Grid.*

Dieses Kapitel gibt einen Überblick der akustischen Feldsimulation mit Finiten Differenzen im Zeitbereich, die zur zeitbasierten Feldberechnung in diesem Kapitel verwendet werden. Für tiefer gehende Einblicke in das Verfahren wird an die zitierten Quellen verwiesen. Einen umfassenden Überblick gibt zum Beispiel [Sch10].

6.5.1. Grundlagen

Die FDTD-Methode ist ein numerisches Verfahren, um Wellengleichungen zu lösen und ein nützliches Instrument, akustische Wellenausbreitung in räumlich begrenzten oder unbegrenzten Gebieten zu simulieren. Beugungs- und Interferenzeffekte sind in der FDTD-Methode inhärent enthalten. Dadurch ist diese Methode im Gegensatz zu geometrischen Verfahren wie Raytracing gut geeignet für die Simulation tieffrequenter Schallausbreitung. Die FDTD-Methode geht zurück auf [Yee66] und wird häufig zur Berechnung elektromagnetischer Felder eingesetzt. Die Adaption auf akustische Wellengleichungen wurde beispielsweise in [MC95] oder [Bot95] beschrieben.

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete akustische FDTD-Verfahren basiert auf der Diskretisierung durch Taylorreihenentwicklung. Diskretisiert werden die Eulerschen Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsgleichung. Für eindimensionale Wellenausbreitung ergeben sich dann die folgenden Differenzen-Gleichungen:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad v_{x+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_{x+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \{p_{x+1}^n - p_x^n\}, \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad p_x^{n+1} = p_x^n - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta x} \left\{ v_{x+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{x-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (6.45)$$

Die in (6.44) auf der rechten Seite dargestellten Beziehungen zeigen, dass ein neuer Schnellewert $v_{x+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ am Ort $x + \frac{1}{2}$ und zum Zeitpunkt $n + \frac{1}{2}$ aus dem vergangenen Schnellewert zur Zeit $n - \frac{1}{2}$ und den benachbarten Druckwerten errechnet wird. Ebenso wird ein neuer Druckwert p_x^{n+1} am Ort x aus dem vergangenen Druckwert und den benachbarten Schnellewerten entsprechend (6.45) gewonnen. Druck und Schnelle sind dabei immer einen halben Zeitschritt $\frac{\Delta t}{2}$ und einen halben Gitterschritt $\frac{\Delta x}{2}$ voneinander getrennt. Daraus ergibt sich das räumlich versetzte Gitter zwischen Druck und Schnelle, das sogenannte *Staggered Grid*, welches für ein zweidimensionales FDTD-Gitter in Abbildung 6.22 abgebildet ist [Yee66].

Das Stabilitätskriterium der FDTD ist mit der Courant-Zahl s und durch die Courant-Bedingung gegeben:

$$s = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{N_{\text{dim}}}}. \quad (6.46)$$

Darin ist $N_{\text{dim}} = 1, 2, 3$ die Anzahl der Dimensionen. Gleichung (6.46) stellt demnach den Zusammenhang zwischen der Auflösung des räumlichen und des zeitlichen Rasters her. Für die in dieser Arbeit verwendeten Simulationen gilt $s = 1/\sqrt{2}$. Neben dem vorgestellten FDTD-Gitter nach [Yee66] aus Abbildung 6.22 gibt es weitere FDTD-Verfahren, die meist auf der Lösung der Wellen-Gleichung (2.3) beruhen. Diese kommen mit der Aufdatierung der Druck-Werte aus und ziehen zudem weiter entfernte Gitterpunkte für die Berechnung eines Wertes heran. Einen guten Überblick hierzu bietet zum Beispiel [Kow08]. Einige dieser Verfahren weisen bezüglich der numerischen Dispersion und isotropischer Wellenausbreitung bessere Eigenschaften auf als das *Staggered Grid*. Aufgrund der relativ einfachen Implementierung und des unkomplizierten Zugriffs auf die Schnelle, wurde dennoch dieses Verfahren für die Simulationen ausgewählt. Zu beachten ist, dass die Abtastrate ausreichend hoch gewählt werden sollte, sodass nach Gleichung (6.46) etwa 10 bis 20 Gitterpunkte auf die kleinste zu betrachtende Wellenlänge entfallen.

6.5.2. Randbedingungen

Das Einbringen von Randbedingungen in der FDTD-Methode kann auf verschiedene Arten geschehen. Für die Simulation frequenzabhängiger oder frequenzunabhängiger Wandimpedanzen können lokal reagierende Oberflächen (*Lokally Reacting Surfaces*) implementiert werden, wie zum Beispiel in [Bot95], [Kow08] oder auch [CN08] beschrieben wird. Bei dem Verfahren wird zugrunde gelegt, dass sich eine Wandimpedanz nur lokal auf die umliegenden Gitterpunkte auswirkt und eine Wellenausbreitung in der Wand vernachlässigt werden kann. Dadurch wird die physikalische Beschreibung der Wandimpedanz erheblich vereinfacht. Für die FDTD-Simulationen innerhalb dieser Arbeit wurden an den Grenzen des Lösungsgebietes absorbierende Randbedingungen nach [Ber94] angenommen. Mit der Implementierung der PML werden Freifeldbedingungen angenähert. Bei dieser Methode wird dem Lösungsgebiet ein Randbereich hinzugefügt,

in dem die eintreffenden Wellen sukzessive absorbiert werden. Vorteil der PML ist, dass sehr geringe und kaum winkelabhängige Reflexionen entstehen, die in das Lösungsgebiet zurück gelangen.

Schallharte oder schallweiche Randbedingungen können in der FDTD-Methode auf sehr einfachem Wege realisiert werden. Die schallweiche Randbedingung wird durch zu Null setzen von Druck-Gitterpunkten erreicht. Eine schallharte Randbedingung entsteht dementsprechend durch zu Null setzen von Schnelle-Gitterpunkten.

6.5.3. Akustische Quellen und Senken in der FDTD-Methode

Für das Einbringen akustischer Quellsignale in das FDTD-Gitter sind ebenfalls unterschiedliche Methoden bekannt. Wird der Druck an einer Stelle im Gitter durch eine Quellfunktion $g(n)$ vorgegeben, stellt dies eine harte Quelle dar (*hard source*). Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass der vorgegebene Druck exakt in das Gitter übertragen wird. Nachteilig ist jedoch, dass diese Quelle eine schallweiche Reflexion verursacht. Wellen, die sich im Gitter ausbreiten, können die harte Quelle nicht passieren und werden totalreflektiert. Die Addition eines Quellsignals $g(n)$ mit dem aus den FDTD-Gleichungen bestimmten Druck erzeugt eine weiche Quelle (*soft source*). An einer weichen Quelle treten zwar keine Reflexionen auf, jedoch wird das Quellsignal beim Übertragen auf das Gitter stark verfälscht, da sich dieses mit der Impulsantwort des Gitters überlagert. Um diesen Effekt zu minimieren, wurde in [SWB98] die transparente Quelle eingeführt. Dabei wird $g(n)$ wie bei der weichen Quelle am Gitterpunkt dem Feld hinzu addiert, gleichzeitig wird aber die Faltung von $g(n)$ mit der Impulsantwort des Gitters davon subtrahiert. Diese Form der Quelle ist beim Übertrag der Quellfunktion auf das Gitter ausreichend exakt und ist für sich ausbreitende Wellen transparent. Nachteilig bei diesem Verfahren ist, dass im Vorfeld die Impulsantwort des Gitters ermittelt werden muss. Dies kann mitunter sehr zeitaufwendig sein [SWB98]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher die Quellenimplementierung aus [SWF12] verwendet. Diese basiert auf der Modellierung einer kleinen Kugelquelle und deren physikalisch korrekte Integration in das FDTD-Gitter. Das Quellsignal wird dabei wiederum dem Feld hinzu addiert. Artefakte wie bei der weichen Quellen werden aber durch ein zusätzliches digitales Filter vermieden, dass die Dynamik der Kugelquelle simuliert. Diese Methode verlangt kaum zusätzlichen Rechenaufwand.

Mikrofonsignale können im Falle von Drucksignalen direkt aus dem FDTD-Gitter entnommen werden, sofern sich das angenommene Mikrofon auf einem Gitterpunkt befindet. Schnellesignale hingegen müssen räumlich und zeitlich interpoliert werden, um Betrag und Richtung der Schnelle an einem Druck-Gitterpunkt zu erhalten. Für die korrekte Erfassung muss zudem die Ausrichtung des Schnellempfängers beachtet und der auf die Empfangsfläche entfallende Anteil der Schnelle bestimmt werden.

Tabelle 6.3.: Ablauf einer FDTD-Simulation.

Initialisierung:	Druck- und Schnelle-Felder mit Nullen belegen
Für alle Zeitschritte $n = 1, 2, 3, \dots, t_{\text{sim}}/\Delta t$	
1.	Druck zum Zeitpunkt n bestimmen
2.	Quellsignale hinzufügen
3.	Schnelle zum Zeitpunkt $n + \frac{1}{2}$ bestimmen
4.	Druck- und Schnellesignale für den Zeitpunkt n entnehmen
5.	Berechnung der Quellsignale für $n + 1$ (Adaptives Verfahren)

6.5.4. Simulationsablauf

Die Mikrofonssignale können in einem adaptiven Algorithmus verarbeitet werden und wie im Falle des ANC-Systems weitere Quellsignale erzeugen. Die Berechnungen der FIR-Filter und des LMS-Algorithmus müssen dabei nicht zwangsläufig mit der gleichen Abtastrate wie die der FDTD vollzogen werden. Der Ablauf einer FDTD-Simulation ist in Tabelle 6.3 zusammengefasst.

6.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie durch adaptive Verfahren die Übertragungsfunktionen innerhalb des zweidimensionalen ANC-Systems ausgemessen werden können. Ausgehend von einer SISO-Beschreibung, wurden die Grundlagen adaptiver FIR-Filter anhand der Wiener-Hopf-Gleichung und des LMS-Algorithmus vorgestellt. Der im ANC-Bereich etablierte FXLMS-Algorithmus wurde anschließend als Basis des Feedforward-ANC hergeleitet und für den MIMO-Fall erweitert.

Es wurden vier Varianten des MIMO FXLMS für den Einsatz im zweidimensionalen ANC-System vorgestellt. Die ersten beiden Modifikationen beruhen auf der Verwendung von Fehlersensoren im Dämpfungsgebiet und unterscheiden sich von dem aus der Literatur bekannten MIMO FXLMS darin, dass zur Unterdrückung der Feedback-Pfade Kardioid-Mikrofone oder Druck- und Schnelleempfänger verwendet werden. Bei der letzteren Variante werden zudem zwei mehrdimensionale Übertragungsfunktionen separat adaptiert, da zwei unterschiedliche Arten von Referenzsignalen verwendet werden. Die beiden anderen Modifikationen des MIMO FXLMS nutzen ebenso kardioider Empfänger oder die Kombination aus Druck- und Schnellmikrofonen, doch beruht die Fehlergewinnung dort auf der Reflexions-Prädiktion, die ebenfalls in diesem Kapitel vorgestellt wurde.

Anhand von Simulationen mit der FDTD-Methode konnten darüber hinaus in diesem Abschnitt die folgenden Erkenntnisse gewonnen werden:

- Alle gezeigten Varianten des MIMO FXLMS können zur Dämpfung eines breitbandigen Primärsignals mit dem zweidimensionalen ANC-System eingesetzt werden.
- Die Reflexions-Prädiktion liefert ein ebenso gutes Dämpfungsergebnis wie die Methode unter Verwendung von Fehlersensoren. Die Voraussetzung dafür ist, dass die Prädiktionsfilter ausreichend genau den Feldverlauf der Reflexionen vorherbestimmen.
- Mit Hilfe der FDTD-Methode können die gewünschten Prädiktionsfilter auch für komplexe geometrische Anordnungen der Sekundärquellen bestimmt werden. Die Güte der Filter hängt von der Genauigkeit der realisierten Simulation ab.

7. Überarbeitung der Systemimplementierung und Messergebnisse



Abbildung 7.1.: Der in [NK08] vorgestellte Aufbau des ANC-Systems in kreisförmiger Anordnung. An den Gegenlautsprechern sind Aluminium-Vierkanthrore angebracht, in denen sich jeweils zwei Elektret-Mikrofone mit Vorverstärkern befinden. Lautsprecher und Mikrofone waren über ein gemeinsames Kabel mit der Zentraleinheit verbunden.

Das erste im Labor für Elektroakustik der Bergischen Universität Wuppertal entwickelte zweidimensionale ANC-System ging aus [Tri03] hervor. Das System bestand aus 12 Mikrofonpaaren und 12 Gegenlautsprechern, die kreisförmig angeordnet waren. Die Radien des Mikrofonkreises und des Lautsprecherkreises betrugen jeweils ca. 1,1 m und 0,7 m. Es wurden omnidirektionale Elektretkapseln als Referenzmikrofone eingesetzt,

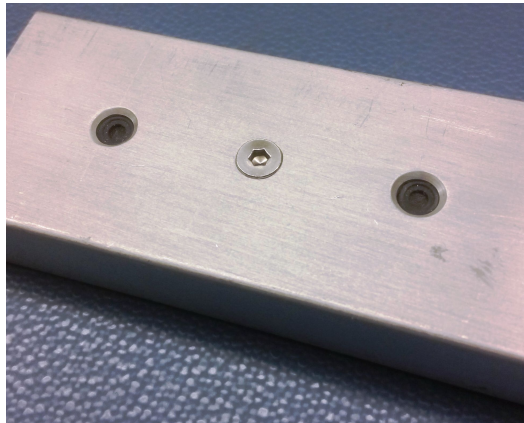


Abbildung 7.2.: Die ursprüngliche Anordnung der beiden Referenz-Empfänger. Verwendet wurden zwei Bujeon BOS-T1344SD Elektret-Kapseln, die in einem Abstand von 4 cm zusammen mit dem zweikanaligen Vorverstärker in einem Aluminium-Vierkantrohr montiert waren, das an der Rückseite der Gegenlautsprecher befestigt war.

die 7 mm voneinander entfernt angebracht waren und aus deren Messsignalen Schalldruck und Schalldruckgradient angenähert wurden. Zur Signalverarbeitung wurden vier vernetzte Texas Instruments C6713 *Floating Point* DSP mit Wandlerkarten aus eigener Entwicklung eingesetzt. Messergebnisse der Dämpfungsleistung, die im Offline-Betrieb ermittelt wurden, sind zum Beispiel in [Kra05] veröffentlicht worden. Später wurde ein weiteres System vollständig neu aufgebaut. Die Hardwarekomponenten und erste Offline-Messergebnisse wurden in [NK08] präsentiert. Im Folgenden wird der Aufbau dieses Systems beschrieben und welche Maßnahmen im Rahmen dieser Arbeit ergriffen wurden, um dieses zu überarbeiten. Messergebnisse, die mit diesem Systemaufbau ermittelt wurden, sind in Kapitel 7.4 dargestellt. Dort ist auch die Unterscheidung zwischen Offline- und Online-Messung dargelegt.

7.1. Aufbau der Hardware

Der ursprüngliche Aufbau des zweiten Systems bestand aus 12 Canton CD-300 Lautsprechern, an die Aluminium-Vierkantrohre angebracht wurden, in denen sich jeweils zwei Bujeon BOS-T1344SD Elektretmikrofone mit einer selbst entwickelten Vorverstärkerplatine befanden. Fotografien des Systems und der in die Aluminium-Ausleger montierten Elektretmikrofone sind in Abbildung 7.1 und 7.2 zu sehen. Über ein mehradriges Kabel wurden die Lautsprecher, die symmetrische Spannungsversorgung der Mikrofon-Vorverstärker und die Ausgangssignale der Mikrofonvorverstärker an eine zentrale Einheit angeschlossen. Diese bestand aus einer 12-kanaligen Sonance SONAMP 1230 Endstufe, der Spannungsversorgung und einem Spectrum Digital DSK6455 DSP-Entwicklungsboard mit aufgesteckter Wandlerkarte [Spe06]. Die Wandlerkarte mit 24

analogen Eingängen und 12 analogen Ausgängen wurde eigens für das ANC-System entwickelt und nutzte Texas Instruments ADS8364 ADCs und Burr-Brown DAC7744 DACs mit jeweils 16 Bit Auflösung. Das DSK6455 enthält einen mit 1 GHz getakteten Texas Instruments TMX320C6455+ Festkomma-DSP mit 2048 KB internem Speicher und einer maximalen Rechenleistung von 8000 Million Multiply Accumulate Cycles per Second (MMACS) für 8 Bit Multiplikationen [Tex12]. Der TMX320C6455+ ist eine Beta-Version des TMS320C6455+.

An dem bestehenden Aufbau wurden die Mikrofone ausgetauscht und deren Anbringung überarbeitet. Zudem kamen andere Mikrofon-Vorverstärker und Wandler zum Einsatz, wie im Folgenden beschrieben ist. Der DSP, die Endstufe und die Lautsprecher blieben unverändert.

7.1.1. Veränderte Mikrofon-Konfiguration

Der eingangs beschriebene Aufbau verwendete jeweils zwei Elektret-Mikrofonkapseln, die sich in einem Abstand von 4 cm zueinander in einem Aluminiumrohr auf 0,90 m Höhe befanden, das an die Sekundärlautsprecher montiert wurde (siehe Abbildung 7.2). Der Abstand des Mittelpunktes der beiden Mikrofon-Kapseln von der Rückseite des Lautsprechers betrug 68 cm und zum Kreismittelpunkt 1,53 m. Im Kreisbau des ANC-Systems ergaben sich so ein äußerer und ein innerer Mikrofonkreis mit den Radien 1,51 m und 1,55 m. Die aus dem KHI abgeleiteten Übertragungsfunktionen des Systems wurden für diese Konstellation aus den Näherungen für den Schalldruck und den Schalldruckgradienten aus einem Mikrofonpaar gewonnen [Tri03]. Die messtechnisch ermittelten Frequenzgänge dieser Kapseln in Kombination mit den eigens entwickelten Vorverstärkern waren im interessierenden Frequenzbereich zwischen 20 Hz und 800 Hz sehr linear [NK08], doch konnten letztendlich keine zufriedenstellenden Ergebnisse mit dieser Anordnung erzielt werden. Ein entscheidender Grund dafür war der nur begrenzt genaue Abgleich der Mikrofonpaare im aufgebauten System. Ein Amplitudenunterschied zwischen den Kapseln, der durch einen fehlerhaften Abgleich entsteht, kann sich insbesondere bei niedrigen Frequenzen aufgrund der Gradientenbildung aus der Differenz der Einzelsignale als ein Phasenfehler bemerkbar machen. Schlimmstenfalls wird dann eine Wellenfront in verkehrter Richtung detektiert. In dem beschriebenen Aufbau gestaltete sich der genaue Abgleich der beiden Kapseln als eher schwierig. Ein im Detail besserer Abgleich hätte Entzerrungsfilter noch höherer Ordnung verlangt, die allerdings zu größeren Signalverzögerungen geführt hätten, was für den Echtzeitbetrieb nicht akzeptabel gewesen wäre. Zudem verringert sich die Systemdynamik mit dieser Mikrofon-Konstellation frequenzabhängig [Kra10]. Auch zeigte sich bei weiteren Untersuchungen, dass die Frequenzgänge der in das Aluminium-Vierkantrohr eingebauten Elektret-Mikrofonkapseln ungleichmäßiger verliefen als im ausgebauten Zustand [Sch13]. Zudem ist die mechanische Entkopplung der Referenzempfänger von der Sekundärquelle durch diese Konstruktion nicht gewährleistet. So wurden erste Versuche in [Jac10] unternommen, als Dipolempfänger Bändchenmikrofone einzusetzen. Dies führte erstmalig zu nennenswerten Dämpfungsergebnissen im Online-Betrieb.



Abbildung 7.3.: Die Anordnung der Referenzmikrofone im überarbeiteten Systemaufbau. Das AKG Perception 420 (unteres Mikrofon) kann wahlweise in Kugel-, Nieren- oder Achtercharakteristik betrieben werden. Das Behringer ECM 8000 (oberes Mikrofon) ist ein reiner Druckempfänger. Die Aluminium-Ausleger sind an die Rückseiten der Canton CD 300 Lautsprecher montiert. Wegen des zusätzlichen Gewichts der neuen Mikrofone, wurden die Ausleger verstärkt. Die Mikrofonspinnen dienen der besseren mechanischen Entkopplung der Referenzempfänger von den Lautsprechern.

Anstelle von Bändchenmikrofonen standen für den Umbau des ANC-Systems Großmembran-Kondensator-Mikrofone AKG Perception 420 als Referenzempfänger zur Verfügung. Die Richtcharakteristik dieser Mikrofone kann auf Kugel-, Achter- und Nierencharakteristik eingestellt werden. Die Konstruktion besteht aus zwei kardioiden Mikrofonkapseln, die in entgegengesetzter Empfangsrichtung an den Rückseiten zusammengefügt sind. Durch die unterschiedliche Verschaltung der beiden Einzelsignale der Kapseln können die verschiedenen Richtungsabhängigkeiten des Mikrofons realisiert werden [Wei08]. Als reine Druckempfänger standen Elektret-Kondensatormikrofone vom Typ ECM 8000 des Herstellers Behringer zur Verfügung, die als kostengünstige

Messmikrofone angeboten werden. Diese können im überarbeiteten Systemaufbau als Referenz- und Fehlermikrofone eingesetzt werden. Sowohl das Perception 420 als auch das ECM 8000 benötigen Phantomspeisung. Um darüber hinaus die Mikrofone besser von den Sekundärquellen zu entkoppeln, wurde die Konstruktion der Aluminium-Ausleger mechanisch verstärkt und die Referenz-Empfänger in Feder-Halterungen (Mikrofonspinnen) daran befestigt. Die überarbeitete Konstruktion ist in Abbildung 7.3 dargestellt.

7.1.2. Austausch der Wandler und Preamps



Abbildung 7.4.: Das auf das DSK6455 aufgesteckte Field Programmable Gate Array (FPGA)-Board mit drei Alesis Digital Audio Tape (ADAT) Schnittstellen. Im Bild ist zudem eines der Focusrite OktoPre MkII Dynamic zu sehen, die als Mikrofon-Vorverstärker und Wandler eingesetzt wurden.

Mit der Zeit gab es aufgrund häufiger Umbauten sowohl bei den Mikrofon-Vorverstärkern als auch bei der mehrkanaligen Wandlerkarte aus eigener Herstellung zunehmend Ausfälle. In dem überarbeiteten Aufbau wurde daher versucht, möglichst auf kommerziell erhältliche Produkte mit standardisierten Steckverbindungen zurückzugreifen. Aus diesem Grund wurden drei OktoPre MkII Dynamic mit ADAT-Interface des Herstellers Focusrite verwendet, die mit einer Auflösung von 24 Bit und Abtastraten von bis zu 96 kHz arbeiten. Diese besitzen jeweils acht Mikrofon-Vorverstärker mit 48 V Phantomspeisung und acht Line-Ausgänge. Die OktoPre MkII Dynamic zeigten im Vergleich mit anderen zur Auswahl stehenden Produkten die geringsten Latenzen bei der Wandlung zwischen analogen und digitalen Signalen.

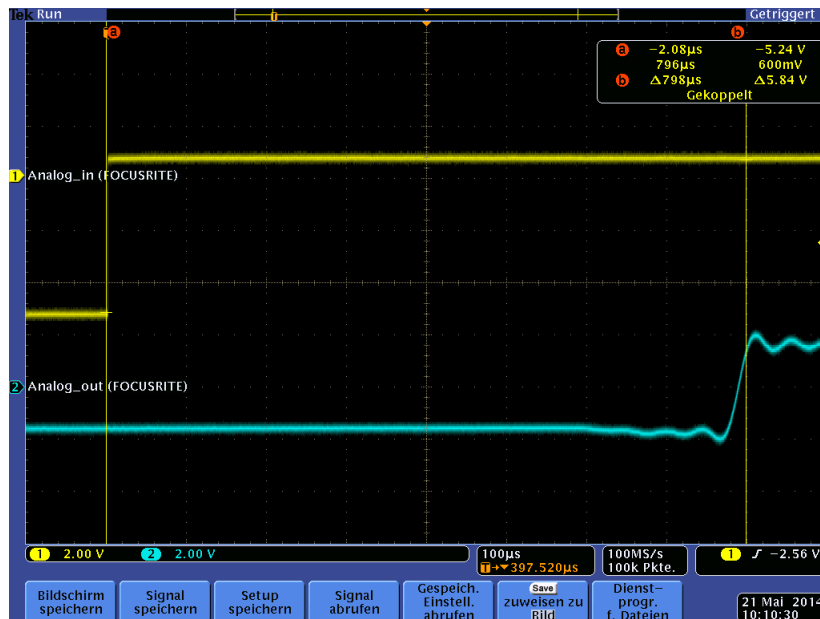


Abbildung 7.5.: Messung der Verzögerung im digitalen Loopback. Die als Eingangssignal dienende Sprungfunktion wird mit etwa $800 \mu\text{s}$ Verzögerung ausgegeben. In dieser Zeit hat das Signal die gesamte Signalkette von den Eingängen bis zu den Ausgängen der OktoPre MkII Dynamic nach Abbildung 7.8 durchlaufen.

Um die digitalisierten Mikrofonsignale im DSP zu verarbeiten und dessen Ausgangssignale über die OktoPre MkII Dynamic wiederzugeben, bedarf es einer Schnittstellenumsetzung, da der C6455+ über eine ADAT-Schnittstelle nicht verfügt. Zu diesem Zweck wurde in [Loh14] eine FPGA-Platine entwickelt, die auf das DSK6455 aufgesteckt werden kann und zwischen drei ADAT-Schnittstellen und der seriellen DSP-Schnittstelle Multichannel Buffered Serial Port (McBSP) vermittelt [Tex06]. Diese Platine, die einen Xilinx Spartan-3A-XC3S200A FPGA verwendet, stellt die einzige Eigenanfertigung im gesamten überarbeiteten ANC-System dar [Xil10]. Im neuen Systemaufbau tauscht der DSP Audio-Daten mit einer Abtastrate von 48 kHz über die ADAT-Schnittstelle aus.

Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass die Wandlerplatine aus eigener Entwicklung eine sehr geringere Latenz bei der Wandlung aufweist. Im digitalen *Loopback*-Modus, in dem der DSP die Eingangssignale direkt zurück an die Ausgänge sendet, lag diese bei etwa $50 \mu\text{s}$. Diese geringe Latenzzeit konnten durch die Verwendung von Successive Approximation Register (SAR)-Wandlern erreicht werden. Im Studio-Bereich ist der Einsatz von Delta-Sigma-Wandlern üblich, so vermutlich auch bei der OktoPre MkII Dynamic. Diese hat nach Abbildung 7.5 eine Input/Output (IO)-Latenz im digitalen *Loopback*-Modus von $800 \mu\text{s}$, wobei lediglich $40 \mu\text{s}$ dieser Verzögerung auf die Schnittstellen-Umwandlung zwischen ADAT und McBSP im FPGA entfallen [Loh14]. Ausgedrückt durch die Wegstrecke, die der Schall in dieser Zeit zurück legt, ist dies ein

Verlust von ca. 0,27 m bei einer angenommenen Schallgeschwindigkeit von 343 ms^{-1} .

7.2. Aufbau des zweidimensionalen ANC-Systems als aktive Schall-Barriere

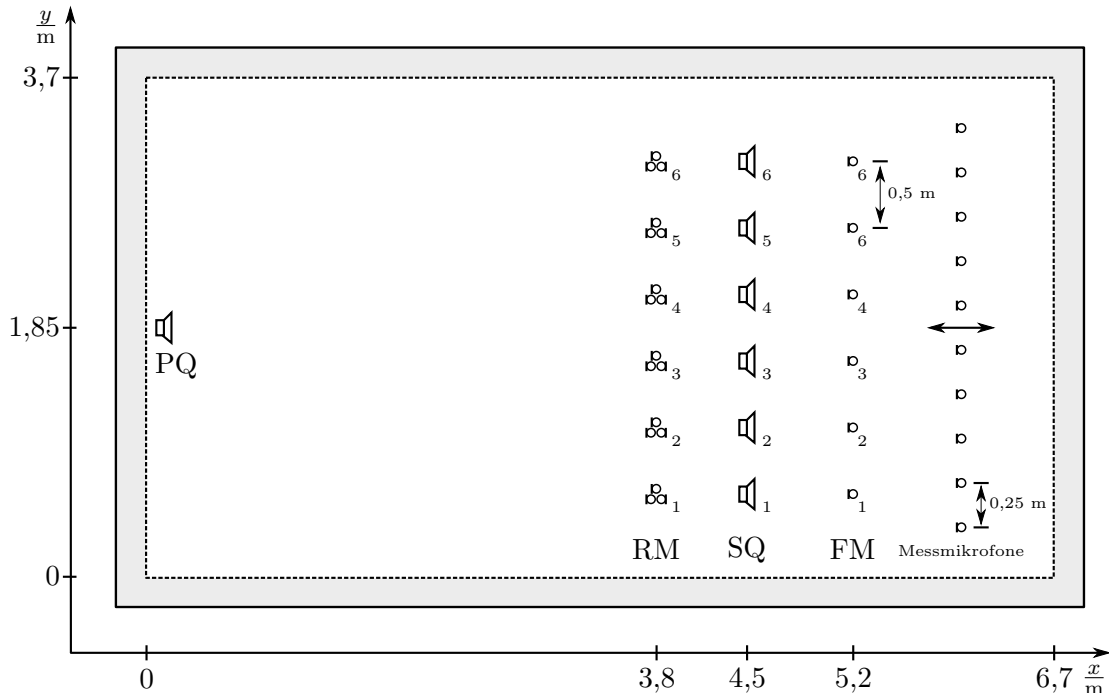


Abbildung 7.6.: Draufsicht des MIMO ANC-Systems im reflexionsarmen Halbraum. Die Primärquelle (PQ) befand sich am Kopfende des Raums, in 3,70 m Entfernung von den Referenzempfängern (RM). Der Abstand zwischen den Sekundärquellen (SQ), den Referenzempfängern (RM) und Fehlermikrofonen (FM) betrug jeweils 0,70 m. Die Messmikrofone rechts im Bild konnten in x -Richtung verschoben werden.

Das zweidimensionale ANC-System wurde als Schallbarriere entsprechend den Abbildungen 7.6 und 7.7 zur Untersuchung der Dämpfungswirkung im reflexionsarmen Halbraum der Bergischen Universität Wuppertal aufgebaut. Die nutzbare Grundfläche des Raumes beträgt $6,70 \times 3,70 \text{ m}^2$. Wie in Abbildung 7.7 zu erkennen ist, besitzt der Messraum eine Deckenschräge, die sich etwa von $y = 1,40 \text{ m}$ bis $y = 3,70 \text{ m}$ nach Abbildung 7.6 erstreckt. Die nutzbare Höhe des Raumes ist demnach $2,70 \text{ m}$ bei $y = 0 \text{ m}$ und $1,0 \text{ m}$ bei $y = 3,70 \text{ m}$. Das ANC-System besteht aus 12 Referenz-Empfängern (RM), 6 Gegenlautsprechern (SQ) und 6 Fehlersensoren (FM). Kurzzeitig stand zudem ein Messsystem mit 12 Elektret-Mikrofonen zur Verfügung. Die Messmikrofone waren in $0,25 \text{ m}$ Abstand zueinander auf einer Einrichtung angebracht, die in x -Richtung

verschoben und in der Höhe eingestellt werden konnte. Allerdings war die maximal einstellbare Höhe des Systems durch die Deckenschräge auf 1,30 m beschränkt. Messungen mit diesem System sind in Kapitel 7.4.3.2 aufgeführt.

Der Abstand der Referenzmikrofone, Gegenlautsprecher und Fehlermikrofone zueinander in y -Richtung betrug 0,5 m. Aus dem Abstand von 0,70 m der Referenzmikrofone von den Sekundärlautsprechern in x -Richtung ergibt sich die maximale Verzögerung, die das System haben darf, wenn die Gegensignale rechtzeitig von den Sekundärquellen abgespielt werden sollen:

$$\Delta t_{\max} = \frac{0,70 \text{ m}}{343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 2 \text{ ms.} \quad (7.1)$$

Diese Zeit enthält die Verzögerungen des gesamten Signalverlaufs nach Abbildung 7.8, inklusive der Mikrofone und Lautsprecher.

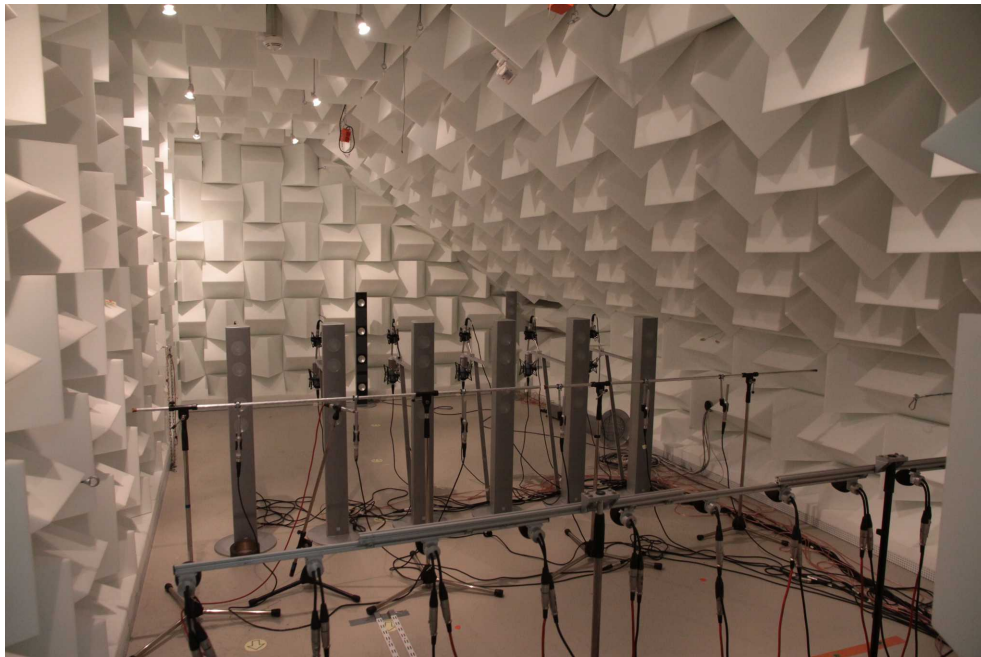


Abbildung 7.7.: Aufbau des überarbeiteten ANC-Systems als aktive Schall-Barriere im reflexionsarmen Halbraum der Bergischen Universität Wuppertal. Im Vordergrund sind die Messmikrofone und etwas weiter hinten die Fehlermikrofone (FM) zu sehen. Danach folgen die Sekundärlautsprecher (SQ), Referenzempfänger (RM) an den Aluminiumauslegern und am Kopfende des Raumes die Primärquelle.

Die Primärsignale wurden von einem Lautsprecher (PQ) am Kopfende des Raumes erzeugt, der etwa 3,70 m in x -Richtung von den Referenzmikrofonen entfernt lag (vergleiche Abbildung 7.6). Dieser Primärlautsprecher konnte wahlweise an einem Ausgang des

DSP-Systems oder an einem unabhängigen Signalgenerator betrieben werden. Erstere Variante wurde eingesetzt, um Primärsignale synchron mit allen im System vorhandenen Mikrofonen aufzunehmen oder synchronisiert mit allen Sekundärquellen abzuspielen (siehe auch Kapitel 7.3.1.1). Der Betrieb mit dem Signalgenerator diente den Messungen im Online-Betrieb, der im weiteren Verlauf beschrieben ist.

7.3. Anpassung der Software

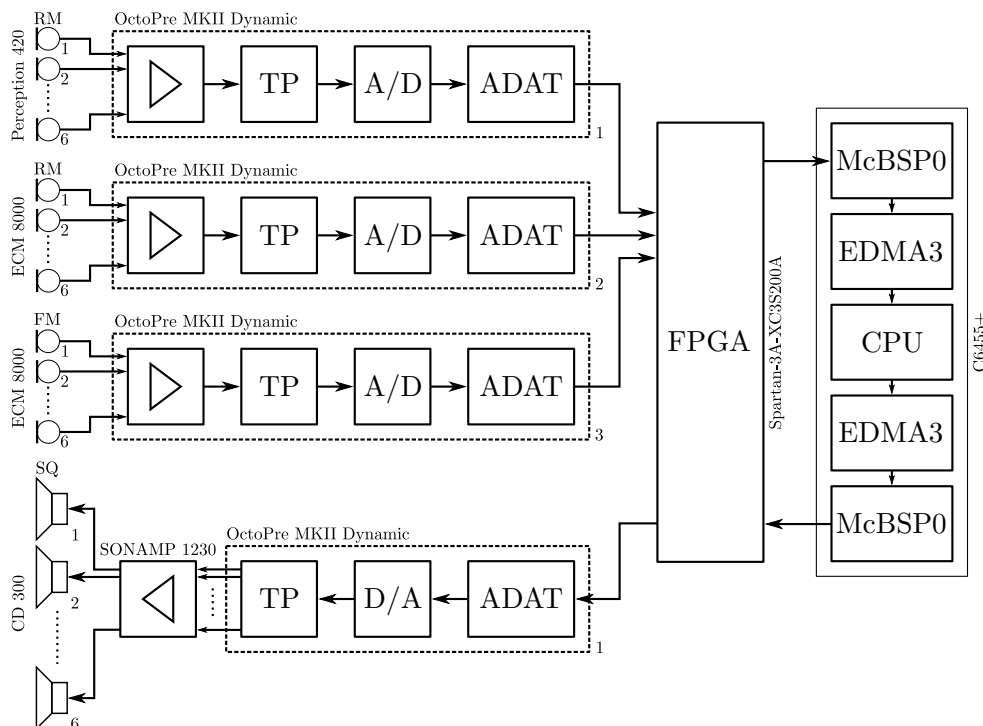


Abbildung 7.8.: Signalflussplan des ANC-Systems.

Die Software zum Betrieb des ANC-Systems untergliedert sich in drei Bereiche: Das in C geschriebene DSP-Programm, die in C# verfasste Windows-Software zur Fernsteuerung und zum Austausch von Daten eines PCs mit dem DSP und die Signalverarbeitungsroutinen in MATLAB.

Aufgrund der neuen Hardware-Komponenten und der Verarbeitung von 24 Bit anstelle von 16 Bit breiten Audio-Signalen musste die DSP-Software des Vorgänger-Systems vollständig überarbeitet werden. Dem Signalflussplan aus Abbildung 7.8 entsprechend, wird die serielle Schnittstelle McBSP0 des DSP eingesetzt, um die Audio-Daten von der FPGA-Platine entgegenzunehmen [Tex06]. Damit keine unnötige Belastung der CPU durch diesen Vorgang auftritt, werden die Ein- und Ausgangsregister des McBSP0 durch den Enhanced Direct Memory Access (EDMA)3 Controller des C6455+ beschrieben und

ausgelesen. Erst wenn ein vollständiger Audio-IO-Frame transportiert wurde und neue Daten im Speicher zur Verfügung stehen, wird dies der CPU per Interrupt mitgeteilt [Tex10b].

Sämtliche Befehle zur Programmsteuerung, sowie Filterkoeffizienten und Audiodaten werden über die Ethernet-Schnittstelle des DSP [Tex10a] mit einem Personal Computer (PC) übertragen. Das für die Kommunikation mit der DSP-Software verantwortliche C#-Programm tauscht wiederum Daten mit MATLAB aus. Die Signalverarbeitung innerhalb des DSP wurde auf die Berechnung der Tiefpass- und ANC-Filter, sowie der FXLMS-Routinen beschränkt. Die zusätzlichen Berechnungen, um zum Beispiel Übertragungsfunktionen zu bestimmen, wurden vollständig in MATLAB durchgeführt.

7.3.1. Betriebsmodi

Das DSP-Programm wurde so aufgebaut, dass es in drei verschiedenen Betriebsmodi arbeitet:

- Audio Interface-Modus
- Online ANC-Modus
- Adaptiver Online ANC-Modus

7.3.1.1. Audio Interface-Modus

In dieser Betriebsart arbeitet der DSP mit einer Abtastrate von 48 kHz der Audiodaten. Durch gleichzeitiges Abspielen und Aufzeichnen von bis zu 24 Ein- und Ausgängen, können mehrkanalige Aufnahmen erzeugt werden. Durch den Austausch der Audiodaten per Ethernet mit MATLAB, können die Daten mit den Mitteln der Software weiterverarbeitet werden um dort Übertragungsfunktionen zu bestimmen oder die Synthese der Gegenfelder durchzuführen. In diesem Betriebsmodus werden auch die später beschriebenen Offline-ANC-Messungen durchgeführt.

7.3.1.2. Online ANC-Modus

Dieser Modus stellt den Online-Betrieb des ANC-Systems dar. Die Eingangssignale werden bei einer Abtastrate von 48 kHz einer Dezimations-Routine zugeführt und anschließend bei einer Abtastrate von 4 kHz weiterverarbeitet [Zöl05]. Nach der Filterung mit den ANC-Filterkoeffizienten, stehen die Lautsprechersignale zu Verfügung. Diese werden nach der Aufwärtstastung auf 48 kHz erneut dem Dezimations-Tiefpassfilter zugeführt und schließlich über die McBSP0-Schnittstelle an das Audio-Interface gesendet und ausgegeben (siehe Abbildung 7.9).

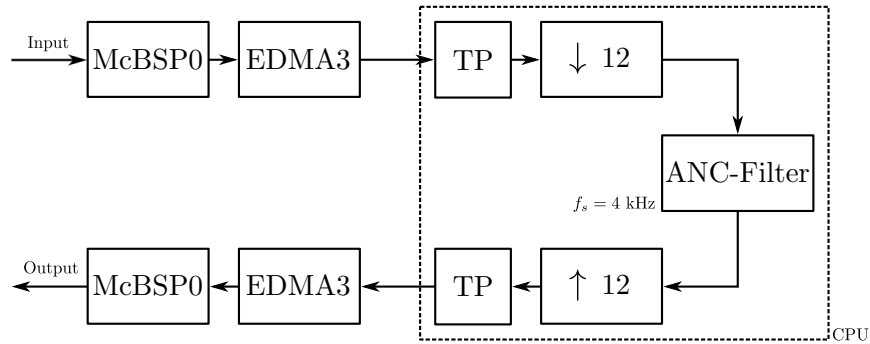


Abbildung 7.9.: Signalverarbeitung im Online-ANC-Modus und im adaptiven Online-ANC-Modus.

7.3.1.3. Adaptiver Online ANC-Modus

Der adaptive Betrieb des Systems findet in diesem Modus statt. Entsprechend Abbildung 7.9 werden die Eingangssignale bei 4 kHz verarbeitet und es wird der SISO FXLMS in der in Kapitel 6 beschriebenen eindimensionalen Varianten berechnet. Über die Ethernetschnittstelle kann die Online-Adaption gesteuert und zwischen zwei Verfahren gewählt werden: Der SISO FXLMS unter Verwendung eines kardioiden Referenzmikrofons und eines Fehlermikrofons oder der SISO FXLMS, der das Fehlersignal aus der Reflexions-Prädiktion und einem zweiten, entgegengesetzten, kardioiden Referenzempfänger abschätzt.

7.3.2. Abschätzung der benötigten Rechenoperationen im Online-Betrieb

Für den Linien-Aufbau mit sechs Sekundärlautsprechern und unter Verwendung von jeweils sechs Omnidirektional- und sechs Dipol-Empfängern werden

$$N_{\text{FIR,O+D}} = N_{\text{RM}} \cdot N_{\text{SQ}} = 12 \cdot 6 = 72 \quad (7.2)$$

FIR-Filter benötigt. Darin ist N_{RM} die Anzahl der Referenzmikrofone und N_{SQ} die Anzahl der Sekundärquellen.

Innerhalb der Voruntersuchungen in den Kapiteln 5 und 6 konnte gezeigt werden, dass kardioider Referenz-Empfänger für den linienförmigen Aufbau des ANC-Systems ausreichen können, um eine Dämpfung des Primärfeldes zu erzielen. Bei der Verwendung von Kardioid-Mikrofonen verringert sich die notwendige Anzahl an Filtern innerhalb des Systems zu

$$N_{\text{FIR,K}} = N_{\text{RM}} \cdot N_{\text{SQ}} = 6 \cdot 6 = 36. \quad (7.3)$$

Bei einer internen Abtastrate von 4 kHz und einer Filterlänge von $N = 256$ Koeffizienten

werden demnach

$$N_{\text{MACS,FIR,O+D}} = 72 \cdot 256 \cdot 4000 \text{ MACS} = 73\,728\,000 \text{ MACS} \quad (7.4)$$

oder

$$N_{\text{MACS,FIR,K}} = 36 \cdot 256 \cdot 4000 \text{ MACS} = 36\,864\,000 \text{ MACS} \quad (7.5)$$

benötigt. Die Tiefpassfilterung der Abtastratenumsetzung nutzt FIR-Filter mit $N_{\text{TP}} = 34$ Koeffizienten. Bei zwölf oder sechs Eingangs- und sechs Ausgangskanälen ergeben sich bei einer IO-Abtastrate von $f_{s,\text{IO}} = 48 \text{ kHz}$ für die Dezimations-Filter

$$\begin{aligned} N_{\text{MACS,TP,O+D}} &= (N_{\text{RM}} + N_{\text{SQ}}) \cdot N_{\text{TP}} \cdot f_{s,\text{IO}} \text{ MACS} \\ &= (12 + 6) \cdot 34 \cdot 48\,000 \text{ MACS} \\ &= 29\,376\,000 \text{ MACS} \end{aligned} \quad (7.6)$$

oder

$$N_{\text{MACS,TP,K}} = 2 \cdot 6 \cdot 34 \cdot 48\,000 \text{ MACS} = 19\,584\,000 \text{ MACS}. \quad (7.7)$$

Die Gesamtanzahl an Multiplikationen ergibt sich demnach für den Betrieb mit Omnidirektional- und Dipol-Empfängern zu

$$N_{\text{MACS,ANC,O+D}} = N_{\text{MACS,FIR,O+D}} + N_{\text{MACS,TP,O+D}} = 103\,104\,000 \text{ MACS} \quad (7.8)$$

und für die Verwendung von kardioiden Empfängern zu

$$N_{\text{MACS,ANC,K}} = N_{\text{MACS,FIR,K}} + N_{\text{MACS,TP,K}} = 56\,448\,000 \text{ MACS}. \quad (7.9)$$

Da Audio-Daten in 24 Bit Auflösung verarbeitet werden, müssen 32 Bit große Register für der Multiplikation eingesetzt werden, wobei die oberen acht Bit keine Information tragen. Die Filterkoeffizienten können hingegen 16 Bit oder 32 Bit groß sein. Laut Datenblatt des C6455+ können pro Taktzyklus maximal eine 32 Bit x 32 Bit Multiplikation oder zwei 32 Bit x 16 Bit Multiplikationen von der CPU durchgeführt werden [Tex12]. Wird von 32 Bit breiten Koeffizienten für einen möglichst großen Dynamikumfang ausgegangen, ergeben sich maximal 1000 MMACS. Damit liegen die Anforderungen durch die MIMO-Filterung des ANC-Systems an den eingesetzten DSP bei etwa 10 % oder 6 % der zur Verfügung stehenden Rechenleistung. Dennoch kann dieser Datendurchsatz nur erreicht werden, wenn die Audio- und Koeffizienten-Daten dermaßen im Speicher angeordnet sind, dass ein schneller Zugriff durch die CPU möglich ist. Auch ist zu beachten, dass die CPU-interne Pointer-Architektur für derart schnelle Zugriffe auf den internen Speicher nur 15 Bit große *near*-Pointer besitzt. Größere Speicherbereiche müssen entweder mit den langsameren *far*-Pointern adressiert werden oder es können beispielsweise *trampolines* eingesetzt werden [Tex11].

7.3.3. Abschätzung der benötigten Rechenoperationen im Online MIMO FXLMS-Betrieb

Nach [Dou99] kann die Anzahl benötigter Multiplikationen für das Aufdatieren der Koeffizienten des MIMO FXLMS mit N_{RM} Eingangssignalen, N_{SQ} Ausgangssignalen, N_{FM} Fehlersensoren und N Filterkoeffizienten für die ANC- und Sekundärpfad-Filter wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} N_{MACS,FXLMS,update,O+D} &= (N_{RM} \cdot N_{SQ} \cdot N_{FM} \cdot 2N + N_{FM}) \text{ MAC} \cdot fs \\ &= (12 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 256 + 6) \cdot 4000 \text{ MACS} \\ &= 884\,760\,000 \text{ MACS.} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Für nur sechs Eingangssignale ist die Anzahl Multiply Accumulate Cycles per Second (MACS) entsprechend:

$$\begin{aligned} N_{MAC,FXLMS,update,K} &= (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 256 + 6) \cdot 4000 \text{ MACS} \\ &= 442\,392\,000 \text{ MACS.} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Zu diesen Werten müssen noch die Multiplikationen für die Filter-Berechnungen addiert werden. Insgesamt belaufen sich die MACS für den vollständigen MIMO FXLMS mit 12 Eingängen auf

$$N_{MACS,FXLMS,O+D} = 103\,104\,000 + 884\,760\,000 \text{ MACS} = 987\,864\,000 \text{ MACS.} \quad (7.12)$$

Bei der Verwendung von sechs Eingängen ergibt dies

$$N_{MACS,FXLMS,K} = 56\,448\,000 + 442\,392\,000 \text{ MACS} = 498\,840\,000 \text{ MACS.} \quad (7.13)$$

Auch bei dieser Anzahl an Multiplikationen liegen die Anforderungen in beiden Fällen noch unterhalb der möglichen 1000 MMACS des C6455+. Erfahrungsgemäß muss die Programmierung die Hardware sehr gut ausnutzen, um diesen Daten-Durchsatz zu erreichen und die CPU sollte möglichst wenig andere Aufgaben bearbeiten. Eine Möglichkeit, den Rechenaufwand zu verringern, stellt die Nutzung geringerer Filter-Längen dar. In Tabelle 7.1 sind für typische Filter-Ordnungen die benötigten MMACS in Abhängigkeit der verwendeten Anzahl von Referenzempfängern für die aktive Schallbarriere mit sechs Gegenquellen und sechs Fehlermikrofonen aufgeführt. An dieser Stelle sei erneut darauf hingewiesen, dass effiziente Implementierungen des MIMO FXLMS bekannt sind [Dou99].

Tabelle 7.1.: Benötigte Rechenoperationen (MMACS) für den MIMO FXLMS in Abhängigkeit der FIR-Länge N und der Anzahl der Referenzmikrofone N_{RM} für $N_{\text{FM}} = 6$ Fehlermikrofone.

$N_{\text{RM}} \backslash N$	64	96	128	192	256	
12	269	389	509	763	988	MMACS
6	139	199	259	387	499	

Die Anzahl der benötigten Filterkoeffizienten ergibt sich im Minimum aus der längsten Strecke zwischen den Rerenzempfängern und den Gegenschallquellen. Die größte Distanz im System liegt zwischen dem äußersten Mikrofon und dem äußersten Lautsprecher am gegenüber liegenden Ende der Schall-Barriere und beträgt etwa 2,60 m. Bei einer angenommenen Schallgeschwindigkeit von 343 ms^{-1} und der Abtastrate von 4 kHz hat diese Strecke ausgedrückt als Samples eine Verzögerung von

$$N_{\Delta t} = \frac{2,6 \text{ m}}{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \frac{1}{4000 \text{ s}} \approx 31. \quad (7.14)$$

Somit könnte das zweidimensionale ANC-System nach Abbildung 7.6 durchaus mit einer Filter-Ordnung von $N = 64$ betrieben werden, sofern alle Impulsantworten ausreichend schnell abklingen.

7.3.4. Anmerkungen zur Festkomma-Arithmetik

Der C6455+ ist ein Festkomma-DSP, weshalb alle Filter-Berechnungen entsprechend angepasst werden müssen. Die Umwandlung von Filterkoeffizienten vom Fließkomma-Format in ganzzahlige Werte wurde in der MATLAB-Software vorgenommen. Für die Berechnung der Filter-Ausgänge im DSP ist zu beachten, dass die Ausgangswerte aufgrund der Festkomma-Arithmetik grundsätzlich eine Verstärkung erfahren, die durch eine *shift*-Operation des Wertes nach rechts ausgeglichen werden muss. Die bei der Adaption verwendete Schrittweite μ (siehe Kapitel 6) wurde ebenfalls durch eine *shift*-Operation nach rechts implementiert.

7.4. Messungen am realen ANC-System

7.4.1. Rahmenbedingungen

7.4.1.1. Die Unterscheidung von Offline-Messung und Online-Messung

Im Offline-Betrieb wird das Primärfeld durch die Referenzempfänger aufgenommen und abgespeichert. Anschließend werden die Lautsprecher signale bestimmt und entweder das Gegenfeld separat, ohne das Vorhandensein des Primärfeldes, wiedergegeben und die Aufnahmen von Primär- und Sekundärfeld werden in einem Computer überlagert und die Dämpfung bestimmt. Wenn Zugriff auf die Primärquelle besteht, können Primär- und Sekundärfeld gleichzeitig abgespielt und aufgenommen werden und die Dämpfung kann direkt gemessen oder wiederum *offline* im Computer bestimmt werden. Bei beiden Varianten wird die Dämpfung aus dem Verhältnis von Primärfeld zur Superposition bestimmt. Dieses Vorgehen besitzt die Vorteile, dass beliebig viel Zeit für die Berechnung der Gegensignale zur Verfügung steht, blockweise Verarbeitung und die Faltung mit nicht-kausalen Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich möglich sind. Zudem haben die im System vorhandenen Feedback-Pfade bei dieser Art der Messung keinen Einfluss. Aus diesen Gründen kann eine Offline-Messung nur zur Abschätzung der Dämpfungsleistung eines ANC-Systems herangezogen werden, da sie unter idealisierten Rahmenbedingungen entsteht.

Bei einer Online-Messung hingegen wird das System so betrieben, dass die Referenzsignale direkt gefiltert werden und das Ergebnis über die Sekundärquellen ausgegeben wird. Die Berechnung muss dementsprechend ausreichend schnell geschehen, damit die Sekundär signale genau dann am Lautsprecher abgestrahlt werden, wenn das Primärfeld diesen passiert. Eine blockweise Verarbeitung der Eingangssignale kann daher oftmals nicht eingesetzt werden [Kra04]. Zudem sind jetzt die Feedback-Pfade aktiv, da die Sekundär signale auch zurück in die Referenzempfänger gelangen können. Eine Aussage über die Dämpfungsleistung und die Stabilität des ANC-Systems kann daher nur unter realen Bedingungen im Online-Betrieb getroffen werden.

7.4.1.2. Prädizierte Offline-Dämpfung

Anhand der ausgemessenen Systempfade und der aufgenommenen Primär signale an allen Sensoren im System, kann bereits im Vorfeld eine sehr exakte Vorhersage der Dämpfung bestimmt werden. Dies zeigte sich beim Vergleich der Messergebnisse mit Abschätzungen, die auf Grundlage der gemessenen Sekundärpfade bestimmt wurden. Das Sekundärfeld muss demnach nicht zwangsläufig vom System wiedergegeben und von den Fehlermikrofonen aufgenommen werden, da der Unterschied zwischen der messtechnischen Erfassung des Sekundärfeldes und dessen Prädiktion anhand der Sekundärpfade vernachlässigbar klein ist. Aus diesem Grund können Algorithmen auch ohne Messungen am System hinsichtlich ihrer Offline-Dämpfung evaluiert werden. Die Anwendung

des hier beschriebenen Verfahrens wird im Folgenden als *prädierte Offline-Dämpfung* gekennzeichnet.

7.4.1.3. System-Übertragungsfunktionen

Für die in Kapitel 6 beschriebenen adaptiven Verfahren ist die Kenntnis der Sekundärpfade oder der Feedback-Pfade notwendig. Für das Ausmessen dieser Pfade wurde die auf [Far00] zurück gehende Messtechnik mit logarithmischen Sinus-Sweeps verwendet. Die Zeitfunktion des logarithmischen Sinus-Sweeps ist durch

$$x(t) = \sin \left[\frac{T\omega_1}{\ln \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)} \cdot \left(e^{\frac{t}{T} \cdot \ln \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)} - 1 \right) \right] \quad (7.15)$$

gegeben. Darin sind ω_1 die Startfrequenz, ω_2 die Stoppfrequenz und T die Dauer des Sweeps, dessen Startzeit bei $t = 0$ s liegt. Im Gegensatz zu Rauschen haben Sweep-Signale ein glattes Spektrum und es reicht ein Messdurchgang, um alle Frequenzanteile zu berücksichtigen. Dadurch erhöht sich gleichzeitig die Robustheit gegenüber Zeitinvarianzen im zu messenden System. Voraussetzung einer erfolgreichen Sweep-Messung ist, dass dem Sweep-Signal ausreichend Stille folgt, damit dieses im Hintergrundrauschen abklingen kann. Die Sweep-Messmethode ermöglicht hohe Pegel des Messsignals, da nichtlineare Verzerrungen der Lautsprecher bei der Dekonvolution zur Bestimmung der Impulsantwort größtenteils in den negativen Zeitbereich verschoben werden [Far00]. Dadurch lässt sich der Signal to Noise Ratio (SNR) im Gegensatz zu Messungen mit Rauschsignalen erheblich verbessern [Wei08]. Für die Messungen der Übertragungsfunktionen wurden Sweep-Signale zwischen 50 Hz und 1 kHz verwendet. Die Sweep-Länge betrug eine halbe Sekunde.

7.4.1.4. Verwendete Primärsignale

Für die Messungen wurde Phasenrauschen als Primärsignal eingesetzt, dessen Bandbreite durch die Absorberlänge des reflexionsarmen Halbraums und die Aliasing-Frequenz des ANC-Systems bestimmt war. Die Absorber besitzen eine Länge von $l_{\text{Absorber}} = 0,35$ m und haben demnach eine untere Grenzfrequenz von

$$f_{\text{cut,u}} = \frac{c}{4 \cdot l_{\text{Absorber}}} = \frac{343 \text{ ms}^{-1}}{4 \cdot 0,35 \text{ m}} = 245 \text{ Hz} \quad (7.16)$$

ab der die Absorption einsetzt. Die Aliasing-Frequenz der aktiven Schallbarriere gibt die obere Grenzfrequenz

$$f_{\text{cut,o}} = \frac{c}{2 \cdot d} = \frac{343 \text{ ms}^{-1}}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} = 343 \text{ Hz} \quad (7.17)$$

vor. Unter diesen Rahmenbedingungen wurde Phasenrauschen verwendet, dass mit einem Hamming-Fenster bei den folgenden Stopp- und Grenzfrequenzen im Frequenzbereich gewichtet wurde:

- $f_{\text{stop,u}} = 200$ Hz
- $f_{\text{cut,u}} = 250$ Hz
- $f_{\text{cut,o}} = 350$ Hz
- $f_{\text{stop,o}} = 400$ Hz.

Wie zu erkennen ist, besitzt das verwendete Phasenrauschen damit unter- und oberhalb der durch Raum und Systemgeometrie vorgegeben Grenzfrequenzen noch Signalanteile. Um Einschaltgeräusche zu unterdrücken, wurde das Primärsignal zudem im Zeitbereich mit einem Tukey-Fenster der Anstiegsdauer 0,025 s gewichtet.

7.4.2. Auswahl der zu untersuchenden ANC-Verfahren

Es wurde eine Auswahl der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten zweidimensionalen ANC-Verfahren getroffen, die am realen System untersucht werden sollten. Der Fokus lag dabei auf dem Einsatz als linienförmige Schallbarriere. Da der Betrieb des Systems als reine Steuerung unter Verwendung messtechnisch optimierter Übertragungsfunktionen in [KSK14] gezeigt wurde, war die Untersuchung des adaptiven Betriebs von besonderem Interesse. Es wurden daher folgende Verfahren am überarbeiteten Systemaufbau untersucht:

- MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und Fehlersensoren (Offline-Adaption)
- MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und der Reflexions-Prädiktion (Offline-Adaption)
- SISO FXLMS unter Verwendung eines kardioiden Referenzempfängers und eines Fehlersensors (Online-Adaption)
- SISO FXLMS unter Verwendung eines kardioiden Referenzempfängers und der Reflexions-Prädiktion (Online-Adaption)

7.4.3. MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und Fehlersensoren

7.4.3.1. Messungen im Offline-Betrieb

In Kapitel 6.4.2.1 wurde der MIMO FXLMS vorgestellt, der Referenzsignale von kardioiden Mikrofonen nutzt und das System mit Hilfe von Fehlersensoren im Dämpfungsbereich adaptiert. Zur Überprüfung dieses Algorithmus am Systemaufbau, wurden

die AKG Perception 420 auf kardioider Empfangscharakteristik eingestellt. Die Behringer ECM 8000 Mikrofone entfielen demnach als Referenzempfänger und wurden ausschließlich als Fehlersensoren verwendet. Somit handelte es sich bei dem Aufbau um ein 6x6x6 MIMO ANC-System, dessen Übertragungspfade im Vorfeld mit der Sweep-Messmethode ausgemessen wurden. Anschließend wurde im Audio Interface-Modus des DSP das Primärsignal über die Primärquelle abgespielt und gleichzeitig mit den Referenz- und Fehlersensoren aufgezeichnet. In MATLAB erfolgte daraufhin die Adaption der ANC-Filterkoeffizienten und Berechnung der Sekundärsignale. Die Adaption erfolgte über eine Signallänge von vier Sekunden.

Die Filterkoeffizienten und Lautsprecher-signale wurden anschließend an den DSP übermittelt. Es folgte das Abspielen der Sekundärsignale und das gleichzeitige Aufnehmen der Mikrofonsignale der Fehlersensoren im Audio Interface-Modus des DSP. Die auf diese Weise erhaltenen unabhängigen Messungen von Primär- und Sekundärfeld wurden in MATLAB überlagert und die Dämpfungen bestimmt. Tabelle 7.2 gibt die Dämpfung des Primärsignals als Root Mean Square (RMS) über eine Dauer von einer Sekunde an den sechs Fehlermikrofonen wieder. In Abbildung 7.10 ist die spektrale Verteilung der Dämpfung an den diskreten Frequenzpunkten $f_n = n \frac{f_s}{N_{\text{DFT}}}$ dargestellt nach:

$$L_D[f_n] = 20 \log_{10} \left(\frac{|P_{\text{pri}}[f_n]|}{|P_{\text{sup}}[f_n]|} \right) \text{ dB.} \quad (7.18)$$

$P_{\text{pri}}[f_n]$ und $P_{\text{sup}}[f_n]$ wurden mit Hilfe der FFT aus den Primär- und Sekundärsignalen an den Fehlermikrofonen gewonnen. Die Zeitsignale wurden vor der FFT in sich überlappende Blöcke zerteilt, mit einem Hanning-Fenster gewichtet und nach der FFT im Frequenzbereich gemittelt. Die Anzahl der DFT-Punkte betrug $N_{\text{DFT}} = 12000$.

Tabelle 7.2.: Offline-Dämpfung an den Fehlersensoren für den MIMO FXLMS unter Verwendung von kardioiden Referenzmikrofonen und Fehlersensoren. Gemittelt über $t = 1\text{s}$ an den Fehlersensoren. Nummerierung der Fehlermikrofone entsprechend Abbildung 7.6.

Fehlermikrofon	1	2	3	4	5	6
$20 \log_{10} (\tilde{p}_{\text{pri}}/\tilde{p}_{\text{sup}})$ [dB]	20,6	23,1	21,5	18,4	20,0	22,3

Der Tabelle 7.2 ist zu entnehmen, dass die Dämpfung des Primärsignals an allen Fehlermikrofonen im Durchschnitt 20 dB betrug. Auch die in Abbildung 7.10 zu sehende frequenzabhängige Dämpfung ist für den gesamten Bereich zwischen den Grenzfrequenzen des Primärsignals sehr ausgeprägt. Somit vermag das ANC-System unter Verwendung von kardioiden Referenzmikrofonen und des MIMO FXLMS das Primärfeld an den Fehlersensoren in dem betrachteten Frequenzbereich sehr gut zu dämpfen.

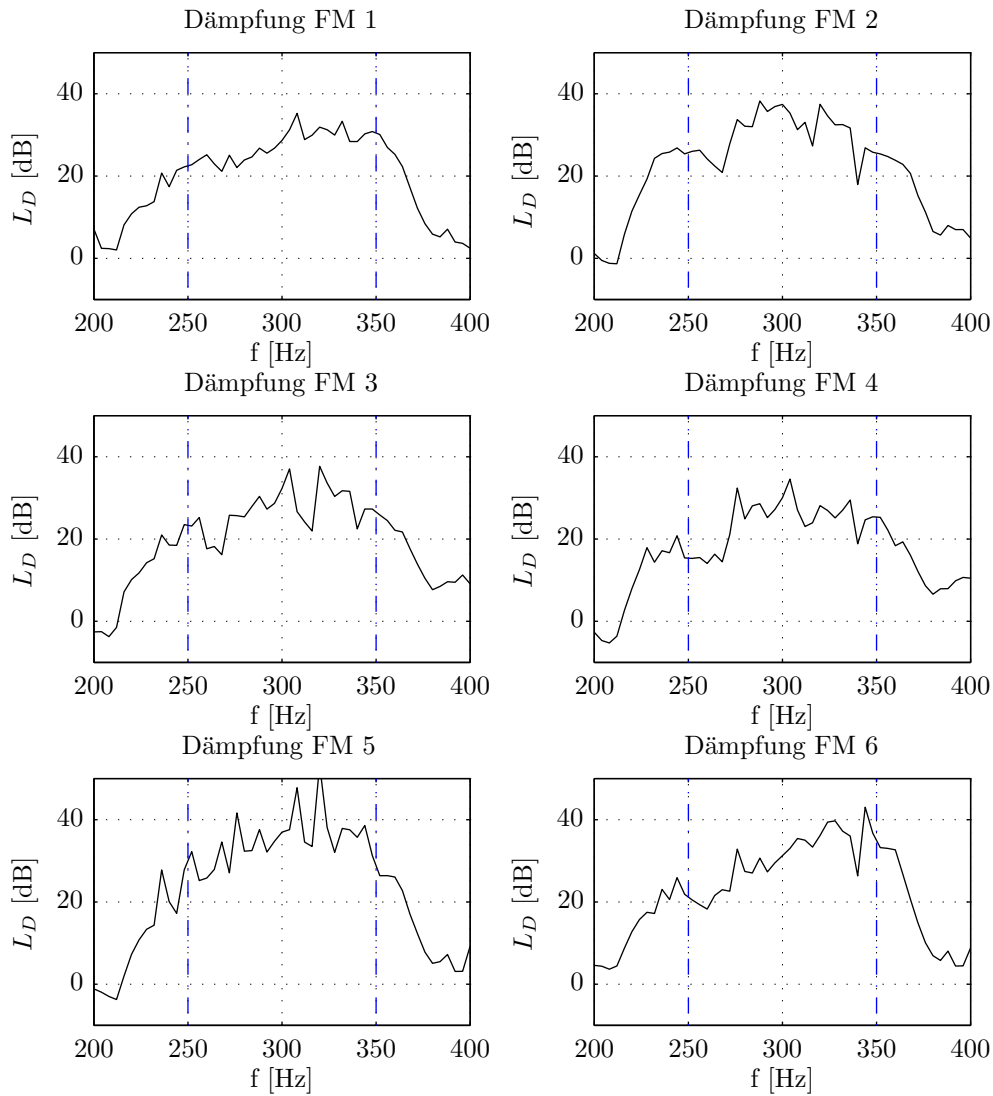


Abbildung 7.10.: Spektrale Verteilung der Dämpfungen an den sechs Fehlermikrofonen (FM). Die blau gestrichelten Linien markieren die obere und untere Grenzfrequenz des Primärsignals. Wie zu erkennen ist, wird dieses an allen Sensoren breitbandig gedämpft.

7.4.3.2. Messungen im Online-Betrieb

Die im letzten Abschnitt gezeigten Messergebnisse beschränkten sich auf die Orte der Fehlermikrofone. Über andere Positionen im Raum kann keine zuverlässige Aussage getroffen werden. Darüber hinaus handelte es sich um Ergebnisse aus Offline-Messungen. Um die Eigenschaften der Dämpfungsleistung des ANC-Systems im Online-Betrieb zu bestimmen, und möglichst den ganzen Dämpfungsbereich hinter den Fehlermikrofonen zu erfassen, wurden Messungen mit den kurzzeitig zur Verfügung stehenden 12 Messmikrofonen durchgeführt (siehe Abbildung 7.7). Die Messmikrofone waren auf einem fahrbaren Untersatz befestigt und konnten zwischen den Fehlermikrofonen und der Rückwand des reflexionsarmen Halbraums verschoben werden. Dies entspricht einer Verschiebung in x -Richtung nach Abbildung 7.6. Die y -Positionen blieben unverändert.

Der Ablauf der Messungen gestaltete sich wie folgt:

- System einmessen und die ANC-Filter offline per MIMO FXLMS bestimmen
- Filterkoeffizienten an den DSP übertragen
- Für alle Positionen in x -Richtung:
 1. Messposition anfahren
 2. Primärfeld einschalten und aufzeichnen
 3. ANC-System im Online-Modus dazuschalten und das gedämpfte Feld aufzeichnen

Auf diese Weise wurde an 96 diskreten Punkten Messsignale erfasst und die Dämpfung in drei verschiedenen Ebenen der Höhen 0,90 m, 1,10 m und 1,30 m bestimmt. Es sei daran erinnert, dass aufgrund der Dachschräge keine Messungen oberhalb von 1,30 m durchgeführt werden konnten. Das ANC-System wurde im Online-Modus betrieben und somit gelangten auch Signale von den Sekundärquellen über die Feedback-Pfade in die Referenzempfänger. Auf zeitliche Änderungen, die zum Beispiel durch Erwärmung hervorgerufen wurden, konnte das System nicht reagieren, da keine Online-Adaption der ANC-Koeffizienten statt fand. Es musste zeitinvariantes Verhalten aller beteiligten Größen wie die Schallgeschwindigkeit oder die Nachgiebigkeit der Lautsprecher über den Zeitraum der Messungen innerhalb einer Ebene angenommen werden. Bevor die nächst höher gelegene Messebene angefahren wurde, erfolgte ein erneutes Einmessen des Systems um zwischenzeitliche Änderungen zu berücksichtigen.

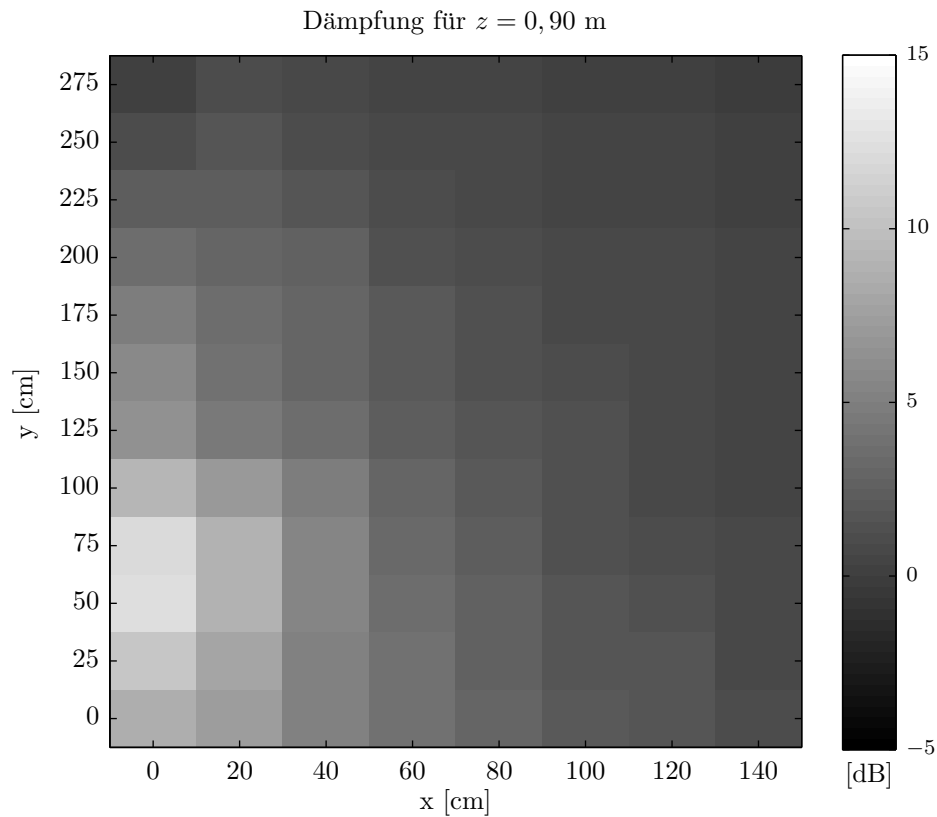


Abbildung 7.11.: Dämpfungsfeld in der horizontalen Ebene in einer Höhe von 0,90 m im Online-Betrieb des MIMO ANC-Systems nach der Offline-Adaption durch den MIMO FXLMS unter Verwendung von Fehlermikrofonen und kardioiden Referenzempfängern. Die Messpositionen $x = 0$ befindet sich direkt vor den Fehlermikrofonen. Das Primärfeld bewegte sich von links kommend in positiver x -Richtung (Vergleiche auch Abbildung 7.6).

Die Abbildungen 7.11, 7.12 und 7.13 stellen das Ergebnis der Messungen in jeweils 0,90 m, 1,10 m und 1,30 m Höhe dar. Die Positionen $x = 0$ m zeigt die Dämpfung direkt vor den Fehlermikrofonen des Systems, welche ebenfalls auf einer Höhe von 0,90 m angebracht waren. Aufgrund der Positionen der Messmikrofone wurden vorwiegend die Zwischenräume der Fehlermikrofone erfasst (vergleiche Abbildung 7.6).

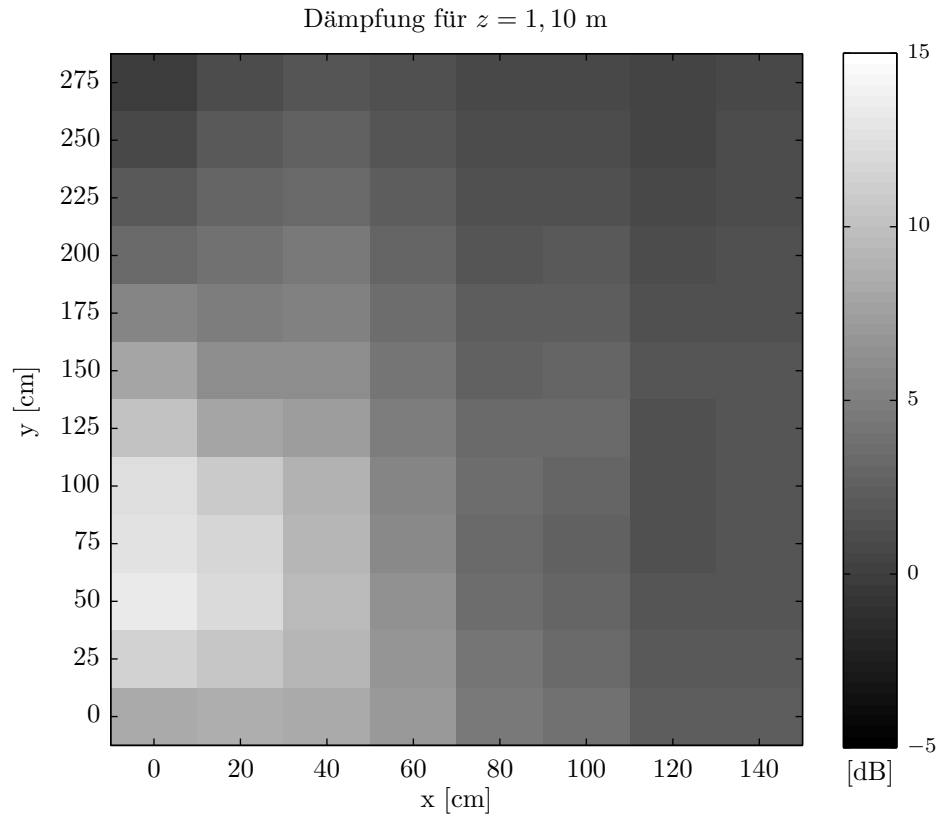


Abbildung 7.12.: Dämpfungsfeld in der horizontalen Ebene in einer Höhe von 1,10 m im Online-Betrieb des MIMO ANC-Systems nach der Offline-Adaption durch den MIMO FXLMS unter Verwendung von Fehlermikrofonen und kardioiden Referenzempfängern. Die Messpositionen $x = 0$ m befindet sich direkt vor den Fehlermikrofonen. Das Primärfeld bewegte sich von links kommend in positiver x -Richtung (Vergleiche auch Abbildung 7.6).

Zu erkennen ist, dass die durch das System verursachte Dämpfung in 0,90 m Höhe in der Nähe der Fehlersensoren am stärksten ausfällt. Mit zunehmender Höhe ist die Auslöschung des Primärfeldes gleichmäßiger verteilt. Dies deckt sich mit dem subjektiven Höreindruck im Dämpfungsbereich. In allen drei Ebenen nimmt die Dämpfung des Primärfeldes in positiver y -Richtung ab. Dies ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass die Deckenschräge einen negativen Einfluss auf die Wirkung des Systems hatte. Wird zusätzlich berücksichtigt, dass die Dämmkeile für den Frequenzbereich der verwendeten Primärsignale noch nicht vollständig absorbieren, erklärt dies das ungleichmäßige Ergebnis in y -Richtung, da insbesondere tiefe Frequenzanteile von der Schräge in den Dämpfungsbereich hinein reflektiert wurden.

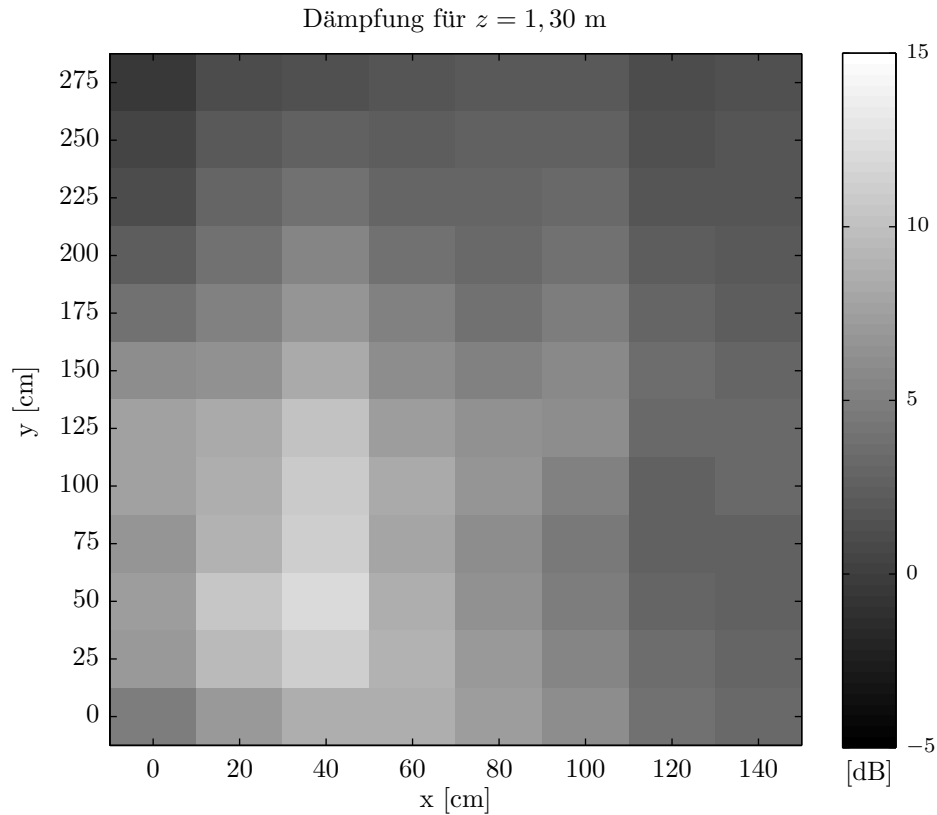


Abbildung 7.13.: Dämpfungsfeld in der horizontalen Ebene in einer Höhe von 1,30 m im Online-Betrieb des MIMO ANC-Systems nach der Offline-Adaption durch den MIMO FXLMS unter Verwendung von Fehlermikrofonen und kardioiden Referenzempfängern. Die Messpositionen $x = 0$ m befindet sich direkt vor den Fehlermikrofonen. Das Primärfeld bewegte sich von links kommend in positiver x -Richtung (Vergleiche auch Abbildung 7.6).

Im Online-Betrieb des ANC-Systems konnte auch festgestellt werden, dass die verwendeten Referenzmikrofone in der Einstellung als Kardioid-Empfänger offensichtlich eine ausreichende Dämpfung der Signale von der Rückseite besitzen. Das System zeigte zu keiner Zeit instabiles Verhalten, auch nicht durch impulshaltige Geräuschquellen im Dämpfungsbereich bei ausgeschaltetem Primärsignal. Diese Beobachtungen bestätigen die Erkenntnisse aus den Kapiteln 4 und 5, dass die Reaktionen des Systems auf Quellen im Dämpfungsbereich bei Verwendung kardioider Referenzempfänger zu vernachlässigen sind. Voraussetzung ist eine ausreichend gute und möglichst frequenzunabhängige kardioider Richtcharakteristik des verwendeten Empfängers.

7.4.4. MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und der Reflexions-Prädiktion

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Modifikationen des MIMO FXLMS vorgestellt, die das Fehlersignal aus der Messung der reflektierten Feldanteile durch das ANC-System bestimmen und zur Adaption verwenden. Das System wird demnach nicht auf die Minimierung des Signals an den Fehlersensoren optimiert, sondern auf die Herstellung einer schallweichen Reflexion. Zur Überprüfung dieses Ansatzes, wurde mit Hilfe der im System gemessenen Übertragungsfunktionen, die Variante des MIMO FXLMS nach Kapitel 6.4.2.3 untersucht. Bei den folgenden Dämpfungsergebnissen handelt es sich eine prädizierte Offline-Dämpfung (siehe Kapitel 7.4.1.2). Als Referenzempfänger wurden kardioide Mikrofone zur Erfassung des Primärfeldes verwendet. Für die Messung der rücklaufenden Welle standen keine zusätzlichen Kardioid-Mikrofone zur Verfügung. Daher wurden die Omnidirektionalempfänger genutzt. Dies stellt für die Untersuchungen kein Hindernis dar, weil alle Feldanteile aufgrund der Verwendung der ausgemessenen Übertragungsfunktionen separat betrachtet werden können.

Wie schon bei den Untersuchungen in Kapitel 6.4.2.3, stammen die Filterkoeffizienten der Reflexions-Prädiktion aus einer FDTD-Simulation. Innerhalb dieser zweidimensionalen Simulation wurden Freifeldbedingungen unter Einsatz der PML angenommen (siehe Kapitel 6.5). Der Aufbau des ANC-Systems nach Abbildung 7.6 wurde in der Simulation übernommen, mit einer Ausnahme: Die Referenzmikrofone wurden etwa um die Strecke näher an die Sekundärquellen gelegt, die durch die elektrische Verzögerung entsteht und welche nicht in der FDTD-Simulation abgebildet wurde. Wie bereits gezeigt wurde, beläuft sich die elektrische Verzögerung auf ungefähr $800 \mu\text{s}$ beziehungsweise auf $0,27 \text{ m}$ als zurückgelegter Weg des Primärfeldes. Dieser Wert wurde geringfügig korrigiert, damit die Verzögerungen der Feedback-Pfade aus Simulation und Messung besser übereinstimmen. Dadurch ergab sich eine Verkürzung der Distanz zwischen den Sekundärquellen und den Referenzempfängern für die FDTD-Simulation zur Bestimmung der Filterkoeffizienten der Reflexions-Prädiktion um $0,21 \text{ m}$. Nachdem die Prädiktions-Filter bestimmt waren, wurde die Adaption entsprechend Abbildung 6.4.2.3 mit den gemessenen Primärsignalen und Übertragungsfunktionen des Systems *offline* in MATLAB durchgeführt.

In Tabelle 7.3 ist die prädizierte Offline-Dämpfungen an den sechs Fehlermikrofonen aufgeführt. Die Werte schwanken zwischen $5,0 \text{ dB}$ und $11,7 \text{ dB}$. Im Vergleich zu den Ergebnissen des MIMO FXLMS unter Verwendung von Fehlersensoren, fallen damit die Ergebnisse im Durchschnitt 10 dB bis 15 dB geringer aus.

Tabelle 7.3.: Prädizierte Offline-Dämpfung des ANC-Systems unter Verwendung des MIMO FXLMS mit der Reflexions-Prädiktion. Gemittelt über $t = 1$ s an den Fehler Sensoren.

Fehlermikrofon	1	2	3	4	5	6
$20 \log_{10} (\hat{p}_{pri}/\hat{p}_{sup})$ [dB]	11,2	11,7	5,0	5,9	6,3	8,5

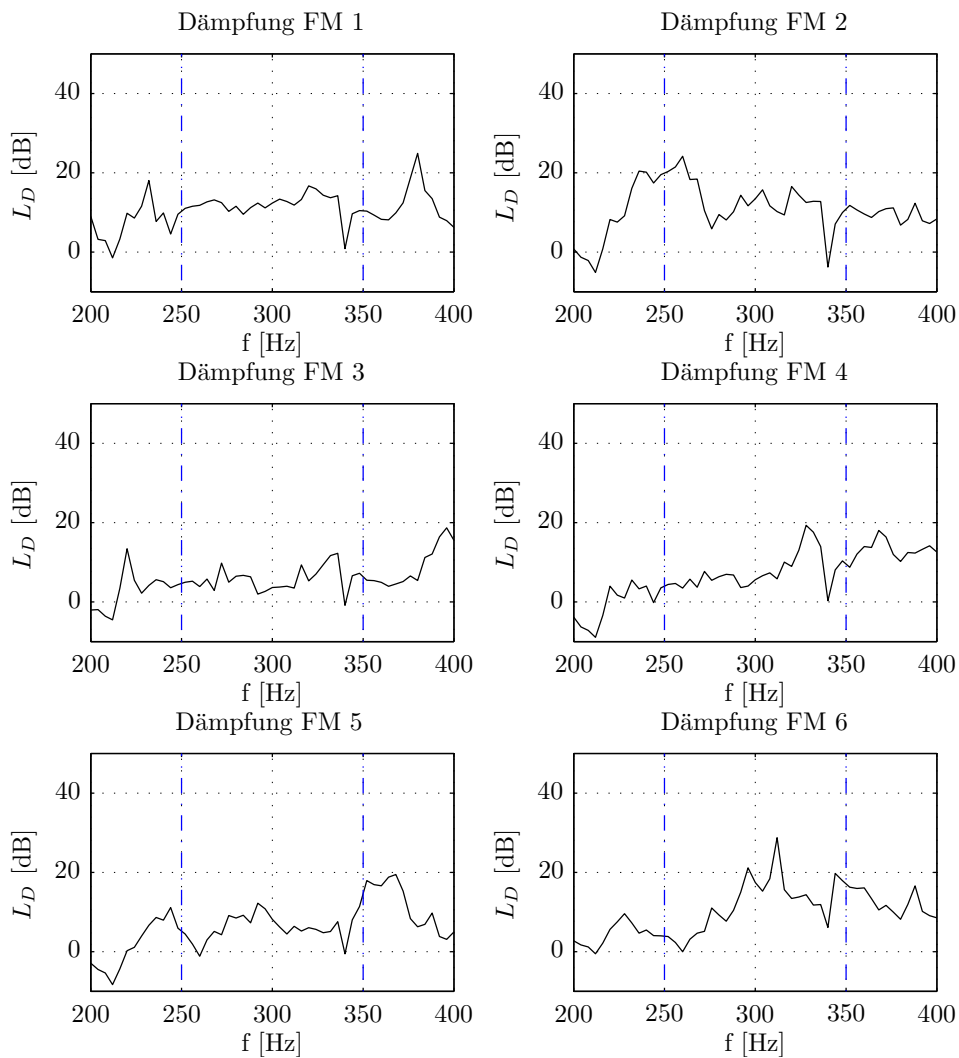


Abbildung 7.14.: Spektrale Verteilung der prädizierten Offline-Dämpfung durch das ANC-System. Zur Adaption wurde der MIMO FXLMS-Algorithmus unter Verwendung der Reflexions-Prädiktion genutzt.

Auch die spektrale Verteilung aus Abbildung 7.14 zeigt, dass die Auslöschung des Primärfeldes weniger ausgeprägt ist. Dennoch erfolgt eine Dämpfung durch das ANC-System und das Ergebnis bestätigt, dass die verwendete Methode verwendet werden kann. Es ist zu bedenken, dass die Prädiktions-Filter außer der Laufzeitkorrektur keine zusätzlichen Optimierungen erfuhren. Die FDTD-Berechnungen müsste demnach weiter optimiert werden, sodass eine realistischere Simulation der Schallausbreitung im reflexionsarmen Halbraum entsteht. In erster Linie könnten dreidimensionale Simulationen unter Berücksichtigung der Deckenschräge und der höhenabhängigen Anordnung der Teilstrahler der Sekundärquellen wesentliche Verbesserungen bringen. Darüber hinaus könnte das Einbringen der Übertragungseigenschaften der realen Wandler in die Simulation einen positiven Effekt auf die Prädiktion der Reflexionen erzielen.

7.4.5. SISO FXLMS unter Verwendung eines kardioiden Referenzempfängers und eines Fehlersensors

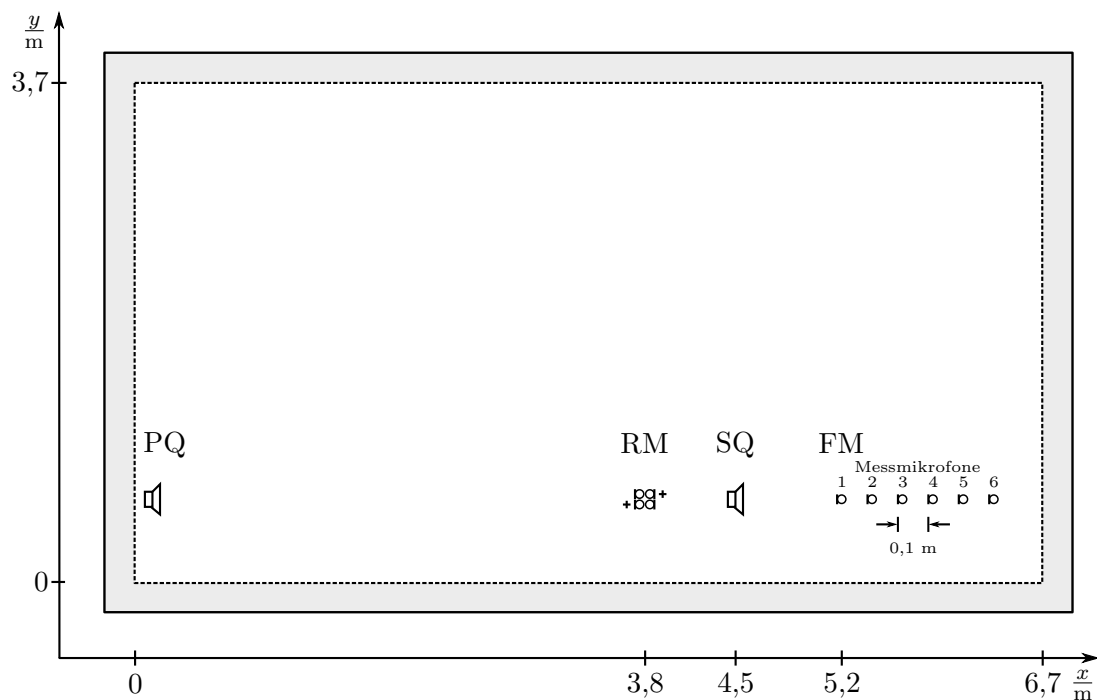


Abbildung 7.15.: Aufbau des SISO ANC-Systems zur Untersuchung des SISO FXLMS im Online-Modus des ANC-Systems. Als Referenzempfänger (RM) wurden zwei kardioiden Mikrofone in entgegengesetzter Ausrichtung verwendet. Das vorderste Messmikrofon 1 befindet sich am gleichen Ort wie das Fehlermikrofon (FM) des ANC-Systems. Die Messmikrofone haben einen Abstand von 0,10 m und befindet sich auf der gleichen Höhe von 0,90 m wie das Referenz- und das Fehlermikrofon.

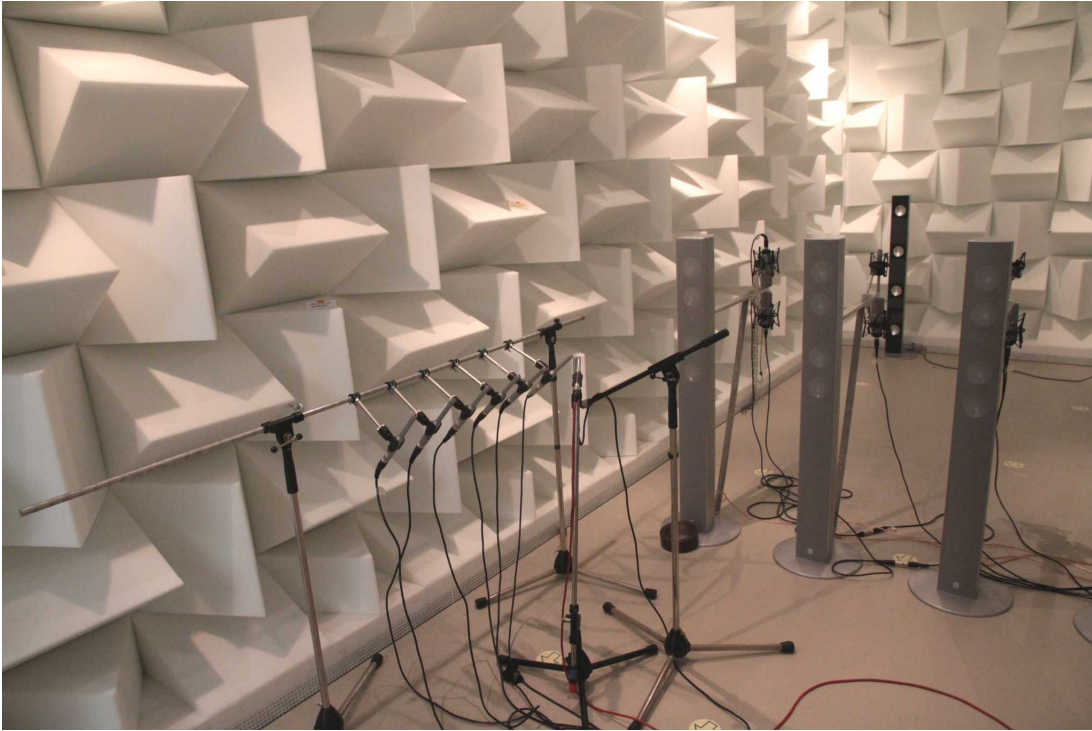


Abbildung 7.16.: Fotografie des SISO ANC-Systems zur Untersuchung des SISO FXLMS im Online-Modus des ANC-Systems im reflexionsarmen Halbraum. Die Primärquelle befindet sich in einer Linie mit Referenzempfängern, Sekundärquelle, Fehlermikrofon und Messmikrofonen. Es wurde für den Aufbau des SISO ANC-Systems eine Position möglichst weit entfernt von der Deckenschräge gewählt. Die beiden Sekundärlautsprecher in der Bildmitte rechts hatten keine Funktion.

Da das eigentliche Interesse der Adaption im Online-Betrieb galt und in dieser Hinsicht ein MIMO-Experiment unverhältnismäßigen Aufwand dargestellt hätte, wurden Messungen im einkanaligen, adaptiven Online ANC-Modus des DSP-Programms durchgeführt. Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 7.15 dargestellt. Demnach wurden auf einer Linie Primärquelle, Referenzempfänger, Sekundärquelle, Fehlermikrofon und Messmikrofone angeordnet. Diese wurden möglichst weit von der Deckenschräge des reflexionsarmen Halbraums platziert, um ungewollte Reflexionen zu verringern. In Abbildung 7.16 sind alle Komponenten des Systemaufbaus zu sehen. Im Vordergrund befinden sich die sechs Messmikrofone, die jeweils in einem Abstand von 0,10 m voneinander an ein Stativ befestigt wurden. Das vom Betrachter aus gesehen hinterste Messmikrofon nimmt die Signale an der gleichen Position wie das Fehlermikrofon des SISO ANC-Systems auf, um auch dort die Dämpfung des Primärfeldes bestimmen zu können. Mit diesem Aufbau konnte demnach die Dämpfung auf einer Länge von 0,60 m hinter dem Fehlermikrofon erfasst werden.



Abbildung 7.17.: Verwendung von zwei AKG Perception 420 als kardioider Referenzempfänger mit entgegengesetzter Ausrichtung. Das obere Mikrofon empfängt den zurückkommenden Schall der Gegenquelle und wird für die Adaption des SISO FXLMS unter Verwendung der Reflexions-Prädiktion genutzt. Das untere Mikrofon dient als kardioider Referenzempfänger.

Das Behringer ECM 8000 als Referenzempfänger wurde durch ein weiteres AKG Perception 420 ausgetauscht. Dadurch konnten zwei kardioider Referenzmikrofone mit entgegengesetzter Ausrichtung eingesetzt werden. Entsprechend Abbildung 7.17 wurde das obere Mikrofon zur Erfassung der von der Sekundärquelle zurückkommenden Signale und das untere Mikrofon zur Erfassung des Primärfeldes eingesetzt. Die Sekundärfeld-

messung wurde für den SISO FXLMS unter Verwendung der Reflexions-Prädiktion verwendet. Das DSP-Programm wurde für die Messungen im Adaptiven Online-Modus betrieben und es wurden vier Untersuchungen durchgeführt. Die ersten beiden Versuche verwendeten den SISO FXLMS mit einem kardioiden Referenzempfänger und einem Fehlermikrofon. Als Primärsignal diente im ersten Versuch ein Sinussignal der Frequenz $f = 300$ Hz und im zweiten Versuch ein Bandpass gefiltertes Phasenrauschen. In den beiden weiteren Untersuchungen wurde der SISO FXLMS unter Verwendung der Reflexions-Prädiktion und des oberen Referenzmikrofons aus Abbildung 7.17 eingesetzt. Als Primärsignale kamen dabei ebenfalls das Sinussignal und das Rauschsignal zum Einsatz. Das Bandpass-Rauschen besaß die gleichen Stopp- und Grenzfrequenzen wie das Phasenrauschen aus dem vorangegangenen Kapitel: $f_{\text{stop,u}} = 200$ Hz, $f_{\text{cut,u}} = 250$ Hz, $f_{\text{cut,o}} = 350$ Hz und $f_{\text{stop,o}} = 400$ Hz.

Tabelle 7.4.: Online-Dämpfung für ein Sinussignal $f = 300$ Hz durch den SISO FXLMS an den Messmikrofonen.

Messmikrofon	1	2	3	4	5	6
$20 \log_{10} (\tilde{p}_{\text{pri}}/\tilde{p}_{\text{sup}})$ [dB]	26,1	17,1	7,0	12,3	10,6	12,3

Tabelle 7.5.: Online-Dämpfung für Bandpass gefiltertes Rauschen durch den SISO FXLMS an den Messmikrofonen.

Messmikrofon	1	2	3	4	5	6
$20 \log_{10} (\tilde{p}_{\text{pri}}/\tilde{p}_{\text{sup}})$ [dB]	14,3	12,7	5,7	8,0	6,7	10,0

Die Dämpfungswerte des SISO FXLMS an den Messmikrofonen nach der Adaptionsphase sind in den Tabellen 7.4 und 7.5 jeweils für das Sinussignal und das Bandpass-Rauschen aufgeführt. Das Messmikrofon 1 nahm an der gleichen Position wie das Fehlermikrofon den Schalldruck auf. Der Adaptionsverlauf lässt sich aus den Abbildungen 7.18 und 7.19 erkennen. Das Sinussignal wird innerhalb kürzester Zeit sehr stark gedämpft. Der Tabelle 7.4 ist zu entnehmen, dass der RMS-Wert der Aufnahme durch die Adaption um 26,1 dB verringert wird. Das Sinussignal war dann nicht mehr vom Hintergrundrauschen der Aufnahme zu unterscheiden. Im Spektrum des Signals ergab sich daher bei 300 Hz eine Dämpfung von 44 dB. Mit zunehmenden Abstand von dem Fehlermikrofon wurde der Pegel des Restsignals erst stärker und nahm an den hinteren Mikrofonen wieder etwas ab. Dieser Verlauf ist sowohl in der Tabelle 7.4 als auch in Abbildung erkennbar. Für die Dämpfung des Bandpass-Rauschens benötigte der Algorithmus deutlich länger als für das Sinussignal, wie in Abbildung 7.19 zu sehen ist.

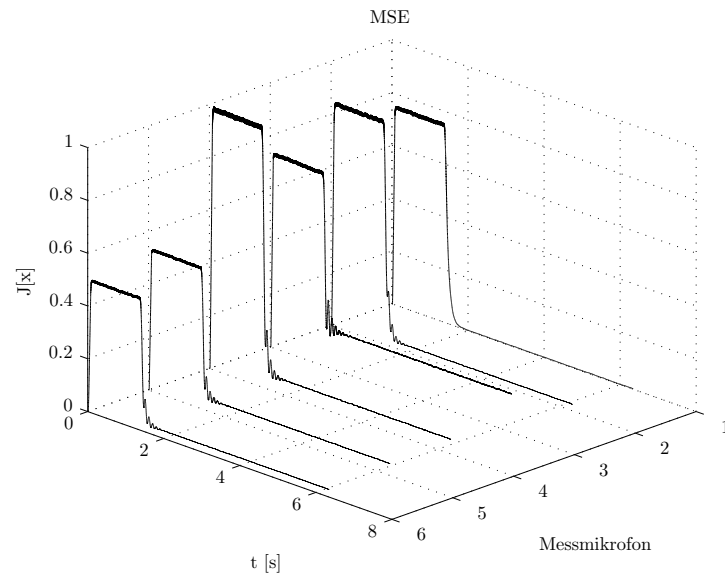


Abbildung 7.18.: MSE an den Messmikrofonen für ein sinusförmiges Primärsignal der Frequenz $f = 300$ Hz. Für die Adaption wurde der SISO FXLMS im Online-Betrieb eingesetzt.

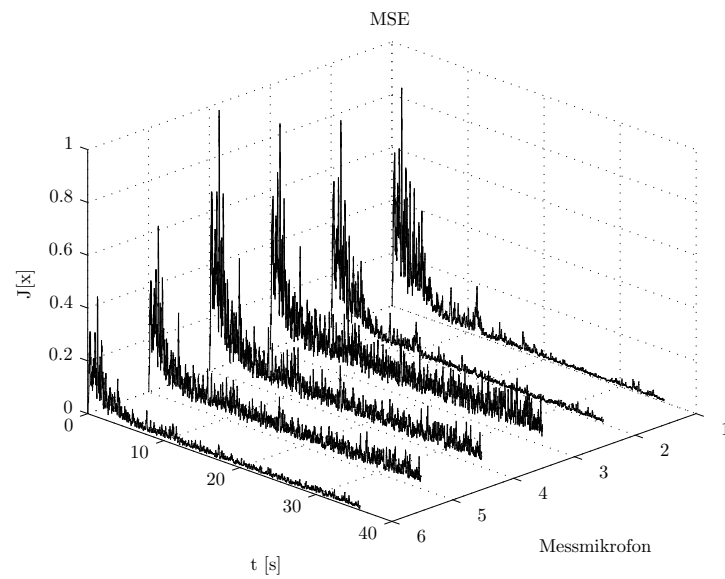


Abbildung 7.19.: MSE an den Messmikrofonen für Bandpass-gefiltertes Rauschen als Primärsignal. Für die Adaption wurde der SISO FXLMS im Online-Betrieb eingesetzt.

Auch hier zeigte sich, dass die Dämpfung erwartungsgemäß am Fehlermikrofon ihr Maximum hat und mit größerem Abstand etwas abnimmt. Aber auch bei dieser Messung stieg die Dämpfung zu den hinteren Mikrofonen wieder etwas an. Dieses Interferenzmuster kann vermutlich mit der Deckenschräge in Zusammenhang gebracht werden und ist demnach auf die nicht symmetrischen Verhältnissen im Messraum zurückzuführen. Für verlässliche Aussagen sind jedoch weiter Untersuchungen notwendig.

7.4.6. SISO FXLMS unter Verwendung eines kardioiden Referenzempfängers und der Reflexions-Prädiktion

Für den FXLMS auf Basis der Reflexions-Prädiktion, wurde das Prädiktions-Filter mit Hilfe der in Kapitel 4.3.4 beschriebenen Methode bestimmt. Wie eingangs beschrieben, wurde zur Messung des von der Sekundärquelle zurück laufenden Schalls das obere AKG Perception 420 aus Abbildung 7.17 verwendet. Vor Beginn der Adaption wurden die Übertragungsfunktion zwischen der Sekundärquelle und diesem Mikrofon ausgemessen, da diese für die Filterung des Eingangssignals benötigt wird (vergleiche Kapitel 6.4.2.3). Das untere Mikrofon aus Abbildung 7.17 diente als kardioider Referenzempfänger. Die Ergebnisse der Adaption sind für das sinusförmige und das rauschartige Primärsignal in den Abbildungen 7.20 und 7.21, sowie in den Tabellen 7.6 und 7.7 dargestellt.

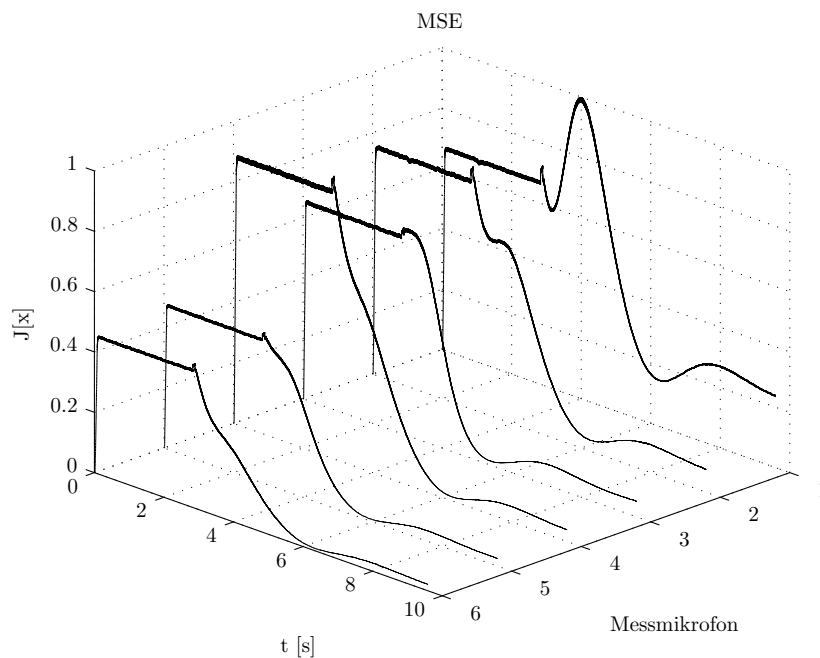


Abbildung 7.20.: MSE an den Messmikrofonen. Als Primärsignal wurde ein Sinus mit $f = 300$ Hz eingesetzt. Zur Adaption wurde die SISO Reflexions-Prädiktion verwendet.

Für das Sinussignal adaptiert der Algorithmus auf ein Minimum der Fehlerfunktion und verlässt dieses kurz darauf, um sich auf einem etwas höheren Niveau zu stabilisieren. Auffällig ist auch das leichte Überschwingen zu Beginn der Adaption. Die beste Dämpfung wird zudem nicht am Fehlermikrofon erzielt, sondern an den weiter hinten gelegenen Mikrofonen. Es ist zu bedenken, dass der SISO FXLMS keine Information über das in Abbildung 7.6 dargestellte Fehlersignal am Messmikrofon 1 beziehungsweise dem Fehlermikrofon hat. Dieses Verhalten lässt sich in erster Linie auf folgende Ursachen zurück führen:

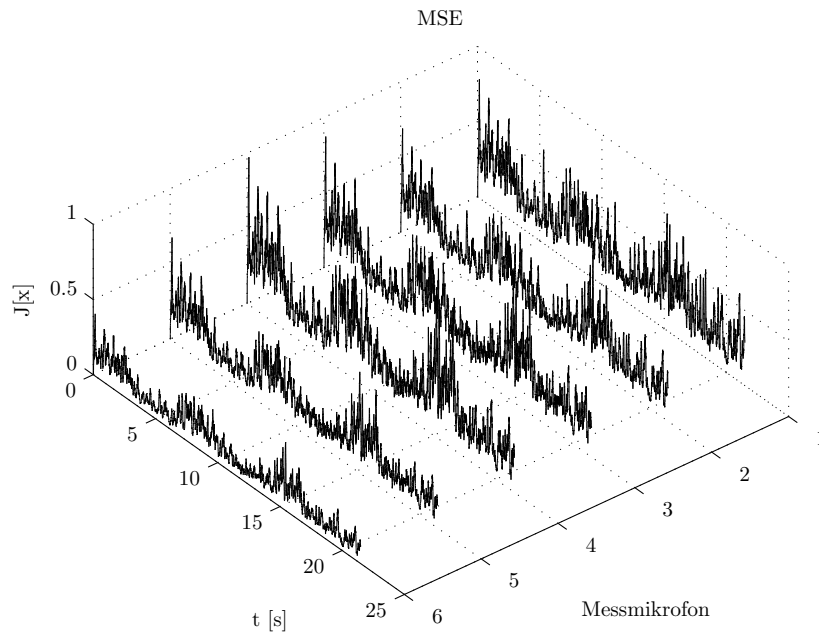


Abbildung 7.21.: MSE an den Messmikrofonen. Als Primärsignal wurde Bandpass gefiltertes Rauschen eingesetzt. Zur Adaption wurde die SISO Reflexions-Prädiktion verwendet.

Die Prädiktion der Reflexionen ist nicht ausreichend genau und die Raum-Geometrie erschwert die Adaption bei diesem Verfahren zusätzlich. Bei dem letzten Punkt können auch die Bodenreflexionen eine erschwerende Rolle spielen. Eine weitere Ursache kann die Richtcharakteristik der Referenzempfänger sein, die keine ausreichende Dämpfung entgegen der Empfangsrichtung aufweist. Festzuhalten ist im Fall der Sinus-Messungen, dass das Verfahren grundsätzlich eine Dämpfung bewirkt, das Ergebnis aber noch nicht vollkommen zufriedenstellend ist.

Bei Verwendung von Bandpass-Rauschen als Primärsignal bewirkt das System an den Messmikrofon nur geringe Dämpfungen. Auch fällt anhand der zeitlichen Entwicklung des MSE auf, dass Schwankungen im Systemverhalten vorhanden sind. Als Ursachen können wohl die gleichen Gründe wie zuvor genannt werden. Daher sollten für weitere

Untersuchungen die Rahmenbedingungen verbessert werden. Das gesamte System sollte nicht in einer Höhe von 0,90 m, sondern direkt auf dem Boden platziert werden. Gegebenenfalls können mit anderen Referenzempfängern, die eine genauere Trennung der unterschiedlich ausgerichteten Wellenfelder aufweisen, bessere Ergebnisse erzielt werden. Für die Bestimmung der Prädiktion-Filter ist ebenfalls eine FDTD-Simulation zu empfehlen.

Tabelle 7.6.: Online-Dämpfung für ein Sinussignal $f = 300$ Hz durch den SISO-FXLMS mit Reflexions-Prädiktion an den Messmikrofonen.

Messmikrofon	1	2	3	4	5	6
$20 \log_{10} (\tilde{p}_{\text{pri}}/\tilde{p}_{\text{sup}})$ [dB]	4,2	9,5	10,9	12,9	12,2	12,7

Tabelle 7.7.: Online-Dämpfung für Bandpass gefiltertes Rauschen durch den SISO FXLMS unter Verwendung der Reflexions-Prädiktion an den Messmikrofonen.

Messmikrofon	1	2	3	4	5	6
$20 \log_{10} (\tilde{p}_{\text{pri}}/\tilde{p}_{\text{sup}})$ [dB]	1,6	2,0	2,1	2,6	2,5	2,4

7.5. Zusammenfassung und weiterführende Betrachtungen

In diesem Kapitel wurden die Hardwareimplementierung des zweidimensionalen ANC-Systems und deren Modifikation vorgestellt. Die Verwendung von Mikrofon-Vorverstärkern mit ADAT-Schnittstelle in Kombination mit dem C6455+ DSP erwies sich als funktionstüchtig und ausreichend schnell, um innerhalb der Schalllaufzeit von 2 ms Gegenfelder synthetisieren zu können.

Anhand von Offline- und Online-Messungen im MIMO-Betrieb konnte gezeigt werden, dass die Verwendung kardioider Referenzempfänger für den Aufbau als Schallbarriere geeignet ist, ohne die Feedbackpfade berücksichtigen zu müssen.

Der MIMO FXLMS unter Verwendung von Fehlersensoren zeigte innerhalb der Offline-Messungen sehr gute Dämpfungen an den Fehlermikrofonen. Die Online-Messungen im Dämpfungsbereich konnten bestätigen, dass das System auch hinter den Fehlersensoren eine Dämpfung erzeugt. Bei diesen Untersuchungen zeigte sich der negative Einfluss der Deckenschräge im verwendeten Messraum. Auch konnte festgestellt werden, dass die Dämpfungswirkung in der Vertikalen nicht einheitlich ist, sondern mit der Höhe zunimmt. Dies ist ein Hinweis darauf, dass ein Zusammenhang zwischen der Anordnung der Chassis innerhalb der verwendeten Sekundär-Lautsprecher und der vertikalen

Ausrichtung des Sekundärfeldes besteht. Die Chassis sind derzeit der linken Seite in Abbildung 7.22 entsprechend angeordnet. Eine gleichmäßig verteilte Anordnung der Chassis, wie es auf der rechten Seite von Abbildung 7.22 dargestellt ist, ist empfehlenswert. Das unterste Chassis sollte dann den halben Abstand, den es zum nächst höher gelegenen Chassis hat, vom Boden entfernt angebracht werden. Dadurch ergäbe sich eine gleichmäßige Verteilung aller Elementarstrahler und deren Spiegelquellen im Boden. Es entstünde eine Abstrahlcharakteristik, die mehr Gemeinsamkeiten mit der Abstrahlcharakteristik einer Zylinderquelle aufweist. Dies würde sich auch positiv auf die Erfassung der zurücklaufenden Wellen bei Verwendung der Reflexions-Prädiktion auswirken, zumal alle theoretischen Betrachtungen einer zweidimensionalen Sichtweise entstammen.

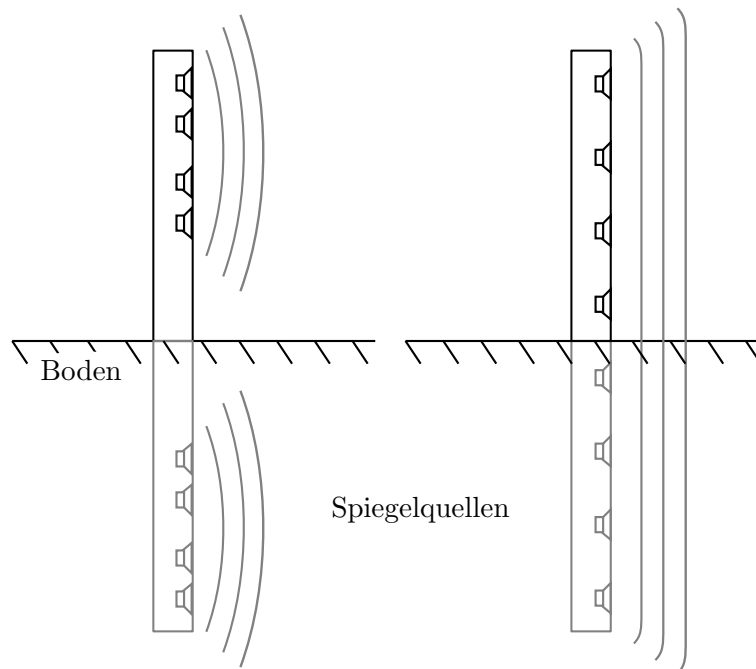


Abbildung 7.22.: Schematische Darstellung der modifizierten Chassis-Anordnung. Links: Anordnung der Chassis im derzeitigen System. Rechts: Empfohlene Chassis-Anordnung zur Herstellung eines möglichst zylinderförmigen Sekundärfeldes.

Der MIMO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und der Reflexions-Prädiktion erzielte innerhalb der Offline-Messungen eine gute Dämpfung an den Fehlermikrofonen. Diese konnte durch Verwendung von Prädiktions-Filtern aus einer FDTD-Simulation erreicht werden. Hier gibt es weitere Möglichkeiten, die Simulation genauer und realitätsnäher zu gestalten, um dieses Verfahren zu verbessern. So könnten beispielsweise die Übertragungsfunktionen des realen Systems in die Simulationen integriert werden.

Die Online-Messungen des SISO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und Fehlersensoren konnte sowohl für das periodische als auch für das breitbandige Signal eine sehr gute Dämpfung im Online-Betrieb erreichen. Auch hier konnte keine weitere Verbesserung durch Berücksichtigung der Feedbackpfade innerhalb der Adaption mit dem FXLMS festgestellt werden. Diese Beobachtung bestätigt erneut, dass die verwendeten Kardioid-Empfänger eine ausreichende Dämpfung entgegen der Empfangsrichtung im betrachteten Frequenzbereich besitzen.

Online-Messungen des SISO FXLMS unter Verwendung kardioider Referenzempfänger und der Reflexions-Prädiktion zeigten gute Dämpfungsergebnisse für das sinusförmige Primärfeld bei 300 Hz. Dennoch konnte anhand des Verlaufs des MSE festgestellt werden, dass die Prädiktions-Filter nicht genau auf das System abgestimmt waren. Noch deutlicher zeigte dies die Untersuchung des Verfahrens mit dem breitbandigen Signal. Hier sind weitere Untersuchungen notwendig. Erste Ansätze sind die bereits vorgeschlagene Modifikation der Sekundärquellen und die Verwendung einer realitätsnäheren FDTD-Simulation zur Bestimmung der Prädiktions-Filter. Ebenso könnten kleinere Sekundär-Lautsprecher genutzt werden, um das gesamte System auf dem Boden des reflexionsarmen Halbraums untersuchen zu können. Dies hätte den Vorteil, dass Bodenreflexion ausgeschlossen werden und die Decke etwas weiter vom Aufbau entfernt wäre.

Innerhalb der in diesem Kapitel durchgeführten Messungen wurden ausschließlich die Großmembranmikrofone in kardioider Einstellung verwendet. Ein Grund dafür war, dass sich in Voruntersuchungen gezeigt hatte, dass kardioide Mikrofone ausreichen, um geeignete Referenzsignale für das linienförmige ANC-System zu erhalten. Ein weiterer Grund war der Abgleich des Großmembranmikrofons in Achtercharakteristik mit dem Druckempfänger, der sich als problematisch herausstellte [Tön14]. Vor diesem Hintergrund sollte der Einsatz abgeglicherer Mikrofonpaare untersucht werden. Am Markt sind zudem Großmembranempfänger erhältlich, bei denen die Signale der beiden kardioiden Kapseln einzeln abgreifbar sind, sogenannte *Twin*-Mikrofone.

8. Zusammenfassung und Ausblick

8.1. Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit zweidimensionalen ANC-Systemen und fokussiert sich auf deren Aufbau als Schallbarriere. Einen besonderen Aspekt stellt die Betrachtung eines ANC-Systems als schallweicher Reflektor dar. Aus dieser Herangehensweise ergeben sich die Reflexionsäquivalenz und die Reflexions-Prädiktion. Erstere ermöglicht eine neuartige Methode zur Synthese der Lautsprecher-signale im zweidimensionalen ANC-System. Die Reflexions-Prädiktion hingegen kann genutzt werden, um aus den Signalen einer geeigneten Referenzmikrofon-Anordnung ein Fehlersignal anhand der durch das System reflektierten Feldanteile zu generieren und auf die Herstellung einer schallweichen Impedanz zu optimieren.

Das ursprünglich zugrunde liegende Konzept aus [Tri03] wurde in Teilbereiche zerlegt. Diese wurden näher untersucht oder um weitere Methoden ergänzt. Insbesondere aus dem Bereich der WFS flossen weitere Methoden ein, die zur Analyse und Prädiktion des Primärfeldes eingesetzt werden können. Für linienförmige und den kreisförmige Mikrofonanordnungen konnten zudem Prädiktionsmethoden aufgezeigt werden, die ein Feld unter Annahme einer linien- oder kreisförmigen Impedanz vorherbestimmen. Diese sind die Voraussetzung für die Verwendung der Reflexionsäquivalenz und der Reflexions-Prädiktion. Letztere kann darüber hinaus in Verfahren wie der FDTD bestimmt werden, wie ebenfalls gezeigt wurde. Des Weiteren konnte das ANC-Verfahren um adaptive Optimierungsmethoden erweitert werden. Zum einen wurde der klassische MIMO FXLMS-Algorithmus unter Verwendung von Fehlersensoren auf die Eigenschaften des Systems angepasst, zum anderen die Reflexions-Prädiktion genutzt, um eine weitere Modifikation hervorzubringen. Anhand zweidimensionaler Feldsimulationen im Zeitbereich wurde die Wirksamkeit dieser Adaptionenverfahren bestätigt.

Für Messungen stand ein Prototyp eines zweidimensionalen ANC-Systems zur Verfügung. Dieser wurde zum Teil überarbeitet. Die ursprünglichen Referenzmikrofone wurden ausgetauscht und durch Großmembran-Kondensator- und Elektretmikrofone ersetzt. Der Aufbau wurde zudem um Fehlersensoren erweitert, die ebenfalls aus Elektretmikrofonen bestanden. Als Mikrofonvorverstärker und als Wandler konnten kommerziell erhältliche Produkte aus dem Studio-Bereich eingesetzt werden. Diese verwenden die digitale ADAT-Schnittstelle und werden mit Hilfe eines FPGA an den DSP angebunden. Es zeigte sich, dass dieser Systemaufbau ausreichend schnell ist, um ein Gegenfeld zu synthetisieren.

Erste Messungen mit diesem System, in denen die adaptiven Verfahren untersucht wurden, zeigten gute Ergebnisse mit Hinblick auf die Anwendung als aktive Schallbarriere. Auch der FXLMS-Algorithmus unter Verwendung der Reflexions-Prädiktion erzielte vielversprechende Resultate. So konnten die für dieses Verfahren notwendigen Prädiktions-Filter anhand einer FDTD-Simulation bestimmt werden, die das reale System virtuell abbildet. Diese Kombination aus Simulation und realer Hardware erzielte gute Ergebnisse in der Offline-Dämpfung ohne zusätzliche Optimierung. Die Versuche machten dennoch deutlich, dass für diese Methode weitere Untersuchungen und die zusätzliche Eliminierung von Fehlerquellen nötig sind.

8.2. Ausblick

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Verfahren stellen eine breite Grundlage für weitere Untersuchungen am zweidimensionalen ANC-System dar. In weiteren Untersuchungen können die vorgestellten Extrapolations-Verfahren in Verbindung mit der Analysepunkte-Methode am realen System verifiziert werden. Im Gegensatz zum Analysepunkte-Verfahren stellt die Reflexionsäquivalenz eine Möglichkeit dar, ohne die Invertierung der Sekundärpfade auszukommen. Auch hier sind weitere Versuche notwendig, um das reale System und dessen mathematische Beschreibung in Einklang zu bringen. Ein wichtiges Element ist dabei die genaue Kenntnis aller System-Parameter, insbesondere die der elektroakustischen Wandler.

Die Signalverarbeitungskette des ANC-Systems beginnt bei den Referenzempfängern. Hier sollten weitere Untersuchungen angestellt werden. Die Kombination aus Großmembran-Mikrofon und Druckkapsel kann im bestehenden Systemaufbau und unter realen Bedingungen nicht ausreichend genau abgeglichen werden. Herstellerseitig abgestimmte Mikrofone, die Druck- und Gradientensignale bereitstellen, sind daher empfehlenswert. Eine gute Alternative dazu sind Mikrofone mit zwei entgegengesetzte, abgeglichenen Kardioid-Kapseln, deren Signale einzeln abgreifbar sind. Die Referenzempfänger sollten zudem mechanisch vollständig von den Sekundärquellen getrennt werden.

Eine gleichmäßige Anordnung der Chassis in den verwendeten Gegenlautsprechern hätte eine positive Auswirkung auf die höhenabhängige Dämpfungsleistung des Systems (siehe Kapitel 7). Zudem würde es den negativen Einfluss von Bodenreflexionen verringern, welche die Trennung der hin- und zurück laufenden Felder in den Referenzempfängern erschweren. Für den Einsatz einer aktiven Schallbarriere in Räumen, in denen Böden und Decken planparallel verlaufen, ist die Ausweitung der Lautsprechersäulen bis zur Decke sinnvoll.

Die Signalverarbeitung im DSP kann durch effektivere Implementierungen der Adaptionsverfahren weiter optimiert werden. Hinsichtlich der ANC-Algorithmen innerhalb des MIMO-Systems ist sicherlich interessant, ob ein modular aufgebautes, verteiltes System mehr Flexibilität mit Bezug auf die Anwendbarkeit und Erweiterbarkeit mit sich bringt.

A. Glossar

Akronyme

ADAT	Alesis Digital Audio Tape
ADC	Analog to Digital Converter
AKF	Autokorrelationsfunktion
ANC	Active Noise Control
CPU	Central Processing Unit
DAC	Digital to Analog Converter
DFT	Discrete Fourier Transform
DSP	Digital Signal Processor
EDMA	Enhanced Direct Memory Access
EMAC	Ethernet Media Access Controller
FDM	Finite Differenzen Methode
FDTD	Finite Differences in the Time Domain
FEM	Finite Elemente Methode
FFT	Fast Fourier Transform
FIR	Finite Impulse Response
FPGA	Field Programmable Gate Array
FXLMS	Filtered x Least Mean Square
HOA	High Order Ambisonics
IIR	Infinite Impulse Response
IO	Input/Output
KHI	Kirchhoff-Helmholtz-Integral
KKF	Kreuzkorrelationsfunktion
LMS	Least Mean Square
MAC	Multiply Accumulate
MACS	Multiply Accumulate Cycles per Second
McBSP	Multichannel Buffered Serial Port
MCU	Microcontroller Unit
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MISO	Multiple Input Single Output

MMACS	Million Multiply Accumulate Cycles per Second
MSE	Mean Squared Error
NLMS	Normalized Least Mean Square
PC	Personal Computer
PML	Perfectly Matched Layer
PWD	Plane Wave Decomposition
RLS	Recursive Least Square
RMS	Root Mean Square
SAR	Successive Approximation Register
SIMO	Single Input Multiple Output
SISO	Single Input Single Output
SNR	Signal to Noise Ratio
WFE	Wave Field Extrapolation
WFS	Wave Field Synthesis
ZHE	Zirkulare Harmonische Extrapolation

Notationen

$X(\omega)$	Funktion der Kreisfrequenz ω
$X(f)$	Funktion der Frequenz f
Δ	Laplace-Operator
\bar{P}	Plane Wave Decomposition
\mathbf{X}	Matrix
\mathbf{x}	Vektor
\mathcal{F}	Fouriertransformierte bezüglich der Zeit t
\mathcal{F}^{-1}	Inverse Fouriertransformierte bezüglich der Zeit t
\mathcal{F}_x	Fouriertransformierte bezüglich der räumlichen Variable x
\mathcal{F}_x^{-1}	Inverse Fouriertransformierte bezüglich der räumlichen Variable x
$\mathcal{F}_{\mathbf{x}}$	Fouriertransformierte bezüglich des Ortsvektors \mathbf{x}
$\mathcal{F}_{\mathbf{x}}^{-1}$	Inverse Fouriertransformierte bezüglich des Ortsvektors \mathbf{x}
∇	Nabla-Operator, Gradient
$\partial/\partial\varphi$	Partielle Ableitung nach dem Winkel φ
$\partial/\partial r$	Partielle Ableitung nach dem Radius r
$\partial/\partial t$	Partielle Ableitung nach der Zeit
\tilde{x}	Effektivwert (RMS) von x
x	Skalar
$x(n)$	Funktion der diskreten Zeitpunkte n
$x(t)$	Funktion der Zeit t

Liste der verwendeten Symbole

F	Einhüllende des dreidimensionalen Lösungsgebiets oder Kontur des zweidimensionalen Lösungsgebiets
G	Greensche Funktion
G_{2D}	Zweidimensionale Greensche Funktion
G_{3D}	Dreidimensionale Greensche Funktion
G_D	Dirichlet Green-Funktion
G_N	Neumann Green-Funktion
G_R	Robin Green-Funktion
$H_\nu^{(1)}$	Hankelfunktion ν -ter Ordnung und der ersten Art
$H_\nu^{(2)}$	Hankelfunktion ν -ter Ordnung und der zweiten Art
J_{\min}	Minimum der Fehlerfunktion
$J_\nu^{(1)}$	Besselfunktion ν -ter Ordnung und der ersten Art
$J_\nu^{(2)}$	Besselfunktion ν -ter Ordnung und der zweiten Art
$J(\mathbf{w})$	Fehlerfunktion von \mathbf{w}
N	Anzahl der Filterkoeffizienten / Länge der Impulsantwort
N_A	Anzahl der Analysepunkte oder Fehlermikrofone
N_{DFT}	Anzahl der DFT-Punkte
N_L	Anzahl der Lautsprecher
N_M	Anzahl der (Referenz-)Mikrofone
\tilde{P} [Pa]	Schalldruck im Raum-Frequenzbereich
P [Pa]	Schalldruck im Frequenzbereich
\tilde{P}_P [Pa]	Schalldruck im Raum-Frequenzbereich in Polarkoordinaten
\tilde{P}_Y [Pa]	Schalldruck im Raum-Frequenzbereich in Zylinderkoordinaten
$R(r)$	Allgemeine Ansatzfunktion in Abhängigkeit vom Radius r
\mathbf{R}	Autokorrelationsmatrix
R_M [m]	Radius Mikrofonskreis
R_Z [m]	Radius eines Zylinders
\mathbf{R}_{xx}	Kovarianzmatrix
$R(z)$	Übertragungsfunktion der Reflexions-Prädiktion
$\mathbf{R}(z)$	Matrix der Übertragungsfunktionen der Reflexions-Prädiktion
$S(z)$	Übertragungsfunktion des Sekundärpfades
$\hat{S}(z)$	Schätzung der Übertragungsfunktion des Sekundärpfades
$\mathbf{S}(z)$	Matrix der Übertragungsfunktionen der Sekundärpfade
$\hat{\mathbf{S}}(z)$	Schätzung der Matrix der Übertragungsfunktionen der Sekundärpfade
$U(z)$	Übertragungsfunktion des Feedback-Pfades
$\hat{U}(z)$	Schätzung der Übertragungsfunktion des Feedback-Pfades
$\hat{\mathbf{U}}(z)$	Schätzung der Matrix der Übertragungsfunktionen der Feedback-Pfade
$\mathbf{U}(z)$	Matrix der Übertragungsfunktionen der Feedback-Pfade
\bar{V} [m ³]	Bereich außerhalb des Lösungsgebiets V
V	Drei- oder Zweidimensionales Lösungsgebiet

Liste der verwendeten Symbole

\mathbf{V} [m/s]	Schallschnelle im Frequenzbereich
V_n [m/s]	Schallschnelle im Frequenzbereich in Richtung des Normalenvektors \mathbf{n}
$W_p(z)$	Übertragungsfunktion des ANC-Systems für den Druck-Empfänger
$\mathbf{W}_p(z)$	Matrix der Übertragungsfunktionen des ANC-Systems für die Druck-Empfänger
$W_v(z)$	Übertragungsfunktion des ANC-Systems für den Schnelle-Empfänger
$\mathbf{W}_v(z)$	Matrix der Übertragungsfunktionen des ANC-Systems für die Schnelle-Empfänger
$W(z)$	Übertragungsfunktion des ANC-Systems
$\mathbf{W}(z)$	Matrix der Übertragungsfunktionen des ANC-Systems
$Y_\nu^{(1)}$	Neumannfunktion ν -ter Ordnung und der ersten Art
$Y_\nu^{(2)}$	Neumannfunktion ν -ter Ordnung und der zweiten Art
Z [Ns/m ³]	Schallkennimpedanz
$Z_1, Z_2, \Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2$	Allgemeine Konstanten
Z_W [Ns/m ³]	Wand- oder Oberflächenimpedanz
$Z(z)$	Allgemeine Ansatzfunktion in Abhängigkeit von z
c [m/s]	Schallgeschwindigkeit
$d(n)$	Erwünschtes oder unerwünschtes Signal (desired)
$\hat{e}(n)$	Abschätzung des Fehlersignals eines adaptiven Systems
$e(n)$	Fehlersignal eines adaptiven Systems
f [Hz]	Frequenz
\mathbf{f} [N/m ³]	Kraftquelle
$f(n)$	Feedback-Signal am Referenzempfänger
$g(n)$	Beliebige Quellfunktion der FDTD
\mathbf{k} [1/m]	Wellenzahlvektor in kartesischen Koordinaten
k [1/m]	Wellenzahl
\mathbf{k}_Y [1/m]	Wellenzahlvektor in Zylinderkoordinaten
k_r [1/m]	Wellenzahl in radialer Abhängigkeit
k_x [1/m]	Wellenzahl in x-Richtung in kartesischen Koordinaten
k_y [1/m]	Wellenzahl in y-Richtung in kartesischen Koordinaten
k_z [1/m]	Wellenzahl in z-Richtung in kartesischen Koordinaten
μ	Schrittweite des LMS-Algorithmus
$\mu(n)$	Die zeitabhängige Schrittweite des NLMS-Algorithmus
\mathbf{n} [m]	Normalenvektor
\tilde{p} [Pa]	Schalldruck im Raum-Zeitbereich
p [Pa]	Schalldruck im Zeitbereich
q [m ³ s ⁻¹]	Ergiebigkeit/Quellstärke/Schallfluss/Volumenschnelle
\mathbf{q}	Diskreter Quellsignalvektor
\mathbf{r} [m]	Verbindungsvektor zweier Ortspunkte
\mathbf{r}_R [m]	Ortsvektor im Innern eines Volumens oder einer Fläche
\mathbf{r}_S [m]	Ortsvektor auf einer Oberfläche oder Berandung
s	Courant-Zahl
σ_d^2	Varianz des Signals $d(n)$
$s(n)$	Impulsantwort des gesamten Sekundärpfades inkl. Wandler und Lautsprecher

$s'(n)$	Impulsantwort des akustischen Sekundärpfades
t [s]	Zeit
$u'(n)$	Impulsantwort des akustischen Feedback-Pfades
$u(n)$	Impulsantwort des gesamten Feedback-Pfades inkl. Wandler und Lautsprecher
$\hat{u}(n)$	Abschätzung der Impulsantwort des gesamten Feedback-Pfades inkl. Wandler und Lautsprecher
\mathbf{v} [m/s]	Schallschnelle im Zeitbereich
$\mathbf{w}(n)$	Koeffizientenvektor eines FIR-Filters
$x'(n)$	Das mit dem Sekundärpfad oder dem Feedback-Pfad gefaltete Eingangssignal eines FIR-Filters
$x(n)$	Eingangssignal eines FIR-Filters
$y(n)$	Ausgangssignal eines FIR-Filters
β	Verstärkungskonstante des NLMS-Algorithmus
γ [rad]	Winkel in Polarkoordinaten, bezogen auf die Ausrichtung eines Line-Arrays
δ	Dirac-Funktion
ζ	Reflexionsfaktor
θ [rad]	Polarwinkel des Wellenzahlvektors in Zylinder- oder Polarkoordinaten
θ [rad]	Elevations-Winkel in Kugelkoordinaten
κ	Sicherheitskonstante des NLMS-Algorithmus
λ [m]	Wellenlänge
ν	Ordnung
ρ [kg/m ³]	Dichte des Mediums
$\Phi(\varphi)$	Allgemeine Ansatzfunktion in Abh. vom Winkel φ
φ [rad]	Azimutaler Winkel in Polar-, Zylinder oder Kugelkoordinaten
Ψ_a	Äußere Quellenverteilung
Ψ_i	Innere Quellenverteilung
ω [rad/s]	Kreisfrequenz
\mathfrak{P}	Kreuzkorrelationsmatrix
\mathbf{p}	Kreuzkorrelationsvektor

B. Mathematische Ergänzungen

B.1. Grenzwertbildung des Zirkularen Harmonischen Reflexionsfaktors

Die Funktion $R_\nu(\omega)$ wird im Folgenden für $R_Z \rightarrow 0$ untersucht, um

$$\lim_{R_Z \rightarrow 0} R_\nu(\omega) = \lim_{R_Z \rightarrow 0} \frac{H_\nu^{(1)}(kR_Z) + j \frac{Z}{\rho c} H_\nu'^{(1)}(kR_Z)}{H_\nu^{(2)}(kR_Z) + j \frac{Z}{\rho c} H_\nu'^{(2)}(kR_Z)} = -1 \quad (\text{B.1})$$

zu zeigen für ganzzahlige ν . Es gilt für die Hankel-Funktionen und deren Ableitungen

$$H_\nu^{(1)}(k_r r) = J_\nu(k_r r) + jY_\nu(k_r r) \quad (\text{B.2})$$

$$H_\nu^{(2)}(k_r r) = J_\nu(k_r r) - jY_\nu(k_r r) \quad (\text{B.3})$$

$$H_\nu'^{(1)}(kr) = \frac{1}{2} [H_{\nu-1}^{(1)}(kr) - H_{\nu+1}^{(1)}(kr)] \quad (\text{B.4})$$

$$H_\nu'^{(2)}(kr) = \frac{1}{2} [H_{\nu-1}^{(2)}(kr) - H_{\nu+1}^{(2)}(kr)]. \quad (\text{B.5})$$

Für die Grenzwertbildung können folgende Reihenentwicklung und Näherung aus [Wil99] herangezogen werden

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (\text{B.6})$$

$$Y_\nu(x) \approx -\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \quad (\text{B.7})$$

Nützlich sind auch die folgenden Eigenschaften [AS65]

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \quad (\text{B.8})$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x) \quad (\text{B.9})$$

$$Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) \quad (\text{B.10})$$

$$Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x) = 2Y_\nu'(x) \quad (\text{B.11})$$

$$(\text{B.12})$$

Darüber hinaus sind die folgenden Grenzwerte der die Bessel- und Neumann-Funktionen für $x \rightarrow 0$ bekannt [BS97; Wil99; AS65]

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1 \quad (\text{B.13})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_\nu(x) = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_\nu(x) = -\infty \quad (\text{B.15})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y'_\nu(x) = -\infty. \quad (\text{B.16})$$

Zuerst werden die Hankelfunktionen und deren Ableitungen aufgelöst. Mit $Z_r = Z/\rho c$ und $x = kR_Z$ erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} R_\nu &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H_\nu^{(1)}(x) + jZ_r H_\nu'^{(1)}(x)}{H_\nu^{(2)}(x) + jZ_r H_\nu'^{(2)}(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_\nu(x) + jY_\nu(x) + j\frac{Z_r}{2} [J_{\nu-1}(x) + jY_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) - jY_{\nu+1}(x)]}{J_\nu(x) - jY_\nu(x) + j\frac{Z_r}{2} [J_{\nu-1}(x) - jY_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) + jY_{\nu+1}(x)]} \quad (\text{B.17}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_\nu(x) + jY_\nu(x) + jZ_r \left[\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + jY_\nu'(x) \right]}{J_\nu(x) - jY_\nu(x) + jZ_r [J_\nu'(x) - jY_\nu'(x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_\nu(x) - Z_r Y_\nu'(x) + j \left[\frac{\nu}{x} Z_r J_\nu(x) + Y_\nu(x) \right]}{J_\nu(x) + Z_r Y_\nu'(x) + j [Z_r J_\nu'(x) - Y_\nu(x)]} \end{aligned}$$

Darstellung der Terme durch Reihenentwicklungen und Näherungen:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \frac{1}{(\nu+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \frac{1}{2(\nu+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} - \dots \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{d}{dx} J_\nu(x) = \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu(\nu-1)!} - \frac{(\nu+2)x^{\nu+1}}{2^{\nu+2}(\nu+1)!} + \frac{(\nu+4)x^{\nu+3}}{2^{\nu+5}(\nu+2)!} - \dots \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\nu}{x} Z_r J_\nu(x) = Z_r \left[\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!2^\nu} - \frac{\nu x^{\nu+1}}{(\nu+1)!2^{\nu+2}} + \frac{\nu x^{\nu+3}}{(\nu+2)!2^{\nu+4}} - \dots \right] \quad (\text{B.20})$$

$$Y_\nu(x) \approx -\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{d}{dx} Y_\nu(x) \approx \frac{2^\nu \nu!}{\pi x^{\nu+1}} \quad (\text{B.22})$$

$$(\text{B.23})$$

Untersuchung des Grenzwertes für den ersten Term:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_\nu(x)}{J_\nu(x) + Z_r Y'_\nu(x) + j [Z_r J'_\nu(x) - Y_\nu(x)]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \frac{1}{(\nu+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \dots}{\left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \dots\right] + Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi x^{\nu+1}}\right] + j Z_r \left[\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!} - \dots\right] + j \left[\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\nu+1} \left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \frac{1}{(\nu+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \dots\right]}{x^{\nu+1} \left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \dots\right] + Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi}\right] + j Z_r x^{\nu+1} \left[\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!} - \dots\right] + j x \left[\frac{(\nu-1)!}{\pi} 2^\nu\right]} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Untersuchung des zweiten Terms:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-Z_r Y'_\nu(x)}{J_\nu(x) + Z_r Y'_\nu(x) + j [Z_r J'_\nu(x) - Y_\nu(x)]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi x^{\nu+1}}\right]}{\left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \dots\right] + Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi x^{\nu+1}}\right] + j Z_r \left[\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!} - \dots\right] + j \left[\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi}\right]}{x^{\nu+1} \left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \dots\right] + Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi}\right] + j Z_r x^{\nu+1} \left[\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!} - \dots\right] + j x \left[\frac{(\nu-1)!}{\pi} 2^\nu\right]} \\
 &= -1
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Untersuchung des dritten Terms:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{j \frac{\nu}{x} Z_r J_\nu(x)}{J_\nu(x) + Z_r Y'_\nu(x) + j [Z_r J'_\nu(x) - Y_\nu(x)]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{j Z_r \left[\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)! 2^\nu} - \frac{\nu x^{\nu+1}}{(\nu+1)! 2^{\nu+2}} \dots\right]}{\left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \dots\right] + Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi x^{\nu+1}}\right] + j Z_r \left[\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!} - \dots\right] + j \left[\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\nu+1} j Z_r \left[\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)! 2^\nu} - \frac{\nu x^{\nu+1}}{(\nu+1)! 2^{\nu+2}} \dots\right]}{x^{\nu+1} \left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \dots\right] + Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi}\right] + j Z_r x^{\nu+1} \left[\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!} - \dots\right] + j x \left[\frac{(\nu-1)!}{\pi} 2^\nu\right]} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Untersuchung des vierten Terms:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{jY_\nu(x)}{J_\nu(x) + Z_r Y'_\nu(x) + j [Z_r J'_\nu(x) - Y_\nu(x)]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu}{\left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \dots\right] + Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi x^{\nu+1}}\right] + j Z_r \left[\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!} - \dots\right] + j \left[\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu\right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \frac{(\nu-1)!}{\pi} 2^\nu}{x^{\nu+1} \left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \dots\right] + Z_r \left[\frac{2^\nu \nu!}{\pi}\right] + j Z_r x^{\nu+1} \left[\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!} - \dots\right] + j x \left[\frac{(\nu-1)!}{\pi} 2^\nu\right]} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

Damit ergibt sich für den gesamten Ausdruck

$$\lim_{x \rightarrow 0} R_\nu = 0 - 1 + 0 + 0 = -1 \tag{B.28}$$

Literaturverzeichnis

- [Ahr10] J. Ahrens. „The Single-layer Potential Approach Applied to Sound Field Synthesis Including Cases of Non-enclosing Distributions of Secondary Sources“. Diss. Technische Universität Berlin, 2010.
- [ARS08] J. Ahrens, R. Rabenstein und S. Spors. „The Theory of Wave Field Synthesis Revisited“. In: *Audio Engineering Society Convention 124*. 2008.
- [AS65] M. Abramowitz und I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, 1965. ISBN: 0486612724.
- [BAUA87] J.J. Bowman, T.B. A, P.L.E. Uslenghi und J.S. Asvestas. *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*. A SUMMA book. Hemisphere Pub. Corp., 1987. ISBN: 9780891166726.
- [Ber88] A.J. Berkhout. „A Holographic Approach to Acoustic Control“. In: *J. Audio Eng. Soc* 36.12 (1988), S. 977–995.
- [Ber94] J.P. Berenger. „A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves“. In: *J. Computational Physics* 114 (1994), S. 185–200.
- [Bot95] D. Botteldoren. „Finite-Difference Time-Domain Simulation of Low-Frequency Room Acoustic Problems“. In: *JASA* 98.6 (1995), S. 3302–3308.
- [BS97] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik, 3. Edition*. Hrsg. von G. Musiol und H. Mühlig. Verlag Harri Deutsch Thun und Frankfurt am Main, 1997.
- [Bur81] J.C. Burgess. „Active adaptive sound control in a duct: A computer simulation“. In: *JASA* 70.3 (1981), S. 715. ISSN: 0001-4966.
- [BVH01] E. Bourdillat, D. de Vries und E. Hulsebos. „Improved microphone array configurations for auralization of sound fields by Wave Field Synthesis.“ In: *Audio Engineering Society Convention 110*. 2001.
- [BVV93] A.J. Berkhout, D. de Vries und P. Vogel. „Acoustic control by wave field synthesis“. In: *JASA* 5 (1993), 2764–2778.
- [CK13] D. Colton und R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 3rd Edition*. Hrsg. von S.S. Antman, P. Holmes und K. Sreenivasan. Bd. 93. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York Heidelberg Dordrecht London, 2013.

- [CN08] A. Celestinos und S.B. Nielsen. „Low-Frequency Loudspeaker–Room Simulation Using Finite Differences in the Time Domain - Part 1: Analysis“. In: *J. Audio Eng. Soc.* 56.10 (2008), S. 772–786.
- [CT65] W. Cooley und J.W. Tukey. „An algorithm for the machine calculation of complex fourier series“. In: *Math. Computation* 19 (1965), S. 297–301.
- [DEG06] DEGA. *DEGA-Empfehlung 101 - Akustische Wellen und Felder*. Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V. Voltastraße 5, Gebäude 10-6, D-13355 Berlin, März 2006. URL: <http://www.dega-akustik.de/publikationen/dega-empfehlung-101> (besucht am 05.10.2014).
- [Dou99] S.C. Douglas. „Fast implementations of the filtered-X LMS and LMS algorithms for multichannel active noise control“. In: *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* 7.4 (1999), S. 454–465.
- [Ehl07] F. Ehlötzky. *Angewandte Mathematik für Physiker*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [Ell01] S. Elliott. *Signal Processing for Active Control*. Hrsg. von R. Green und T. Nguyen. First Edition. Signal Processing and its Application. Academic Press, San Diego, 2001. ISBN: 0-12-237085-6.
- [Far00] A. Farina. „Simultaneous Measurement of Impulse Response and Distortion with a Swept-Sine Technique“. In: *Audio Engineering Society Convention 108*. 2000.
- [Far51] J.J. Faran. „Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 23.4 (1951), S. 405.
- [Faz10] F.M. Fazi. „Sound Field Reproduction“. Diss. university of Southampton, 2010.
- [FN13] F.M. Fazi und P.A. Nelson. „Sound field reproduction as an equivalent acoustic scattering problem“. In: *JASA* 134.5 (2013), S. 3721–3729.
- [Han01] C.H. Hansen. *Understanding Active Noise Cancellation*. Taylor & Francis New York, 2001.
- [HBC06] Y. Huang, J. Benesty und J. Chen. *Acoustic MIMO Signal Processing*. Springer Series on Signals and Communication Technology. Springer New York, 2006.
- [HSVB03] E. Hulsebos, T. Schuurmans, D. de Vries und R. Boone. „Circular Microphone Array for Discrete Multichannel Audio Recording.“ In: *Audio Engineering Society Convention 114*. 2003.
- [Hul04] E.M. Hulsebos. „Auralization using Wave Field Synthesis“. Diss. Technische Universität Delft, 2004.
- [Jac10] R.C. Jacobi. „Untersuchungen an einem 2 1/2 -dimensionalen ANC-System unter Verwendung von Mono- und Dipolempfängern“. Unveröffentlichte Master Thesis, Bergische Universität Wuppertal. 2010.

- [KFCS00] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens und J.V. Sanders. *Fundamentals of Acoustics*. Fourth Edition. New York: John Wiley & Sons, 2000. ISBN: 0-471-84789-5.
- [KK10] C. Kleinhenrich und D. Krahé. „An adaptive Approach to enhance Damping in a two dimensional Feed Forward Active Noise Control System using Velocity Microphones“. In: *Proceedings of 20th Int. Congress on Acoustics, ICA 2010, Sydney*. 2010.
- [Kle10] C. Kleinhenrich. „Reflektierte Feldgrößen zur Regelung in einem adaptiven Antischall-System“. In: *Zeitschrift für Lärmbekämpfung* 4 (2010), S. 147–154.
- [KM96] S.M. Kuo und D.R. Morgan. *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*. Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [Koh04] H.-I. Koh. „Aktiv verbesserte Aufsätze für Schallschutzwände“. Diss. Technische Universität Berlin, 2004.
- [Kow08] K. Kowalczyk. „Boundary and medium modelling using compact finite difference schemes in simulations of room acoustics for audio and architectural design applications“. Diss. Sonic Arts Research Centre, School of Electronics, Electrical Engineering und Computer Science, Queen’s University Belfast, 2008.
- [Kra04] D. Krahé. „Performance of a 2D-ANC-System under Realtime Condition“. In: *Proceedings of Active 04, Williamsburg, VA*. 2004.
- [Kra05] D. Krahe. „A MIMO-system for a 2-dimensional active noise control application“. In: *Multidimensional Systems, 2005. NDS 2005. The Fourth International Workshop on*. 2005, S. 123–128.
- [Kra10] D. Krahé. „ANC - Schallfeldanalyse und -synthese im Zusammenwirken“. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2010 Berlin - 36. Jahrestagung für Akustik*. 2010.
- [KSK14] C. Kleinhenrich, S. Schäfer und D. Krahé. „Untersuchungen an einer linienförmigen aktiven Schallbarriere“. In: *Fortschritte der Akustik, 40. Jahrestagung für Akustik, DAGA 2014, Oldenburg*. 2014, S. 612–613.
- [KWK10] C. Kleinhenrich, T. Weigler und D. Krahé. „Analysis of an Adaptive Technique using the Reflected Field of an Active-Noise-Cancellation System as Control Input“. In: *Proceedings of the 39th International Congress on Noise Control Engineering, Lisbon, Portugal*. 2010.
- [Leh10] G. Lehner. *Elektromagnetische Feldtheorie*. 7. Aufl. Springer, Heidelberg, 2010.
- [Lev47] N. Levinson. „The Wiener rms (root-mean-square) error criterion in filter design and prediction“. In: *J. Math. Phy.* 25 (1947), S. 261–278.

- [Loh14] S. Lohmann. „Implementierung einer FPGA-basierten ADAT-Schnittstelle für DSP der C6000-Reihe“. Unveröffentlichte Bachelor Thesis, Bergische Universität Wuppertal. 2014.
- [Lue37] P. Lueg. „Verfahren zur Daempfung von Schallschwingungen“. Deutsch. Anmeldung DPR Nr. 655508. 1937.
- [MC95] J.G. Maloney und K.E. Cummings. „Adaption of FDTD techniques to acoustic modelling“. In: *Proceedings of the 11 Annual Reviews of Progress in Applied Computational Electromagnetics, Monterey, CA*. Bd. 2. 1995, S. 724–731.
- [MH00] G.S. Moschytz und M. Hofbauer. *Adaptive Filter*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [Mor80] D. Morgan. „An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path“. In: *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.* 28.4 (1980), S. 454–467. ISSN: 0096-3518.
- [Mös08] M. Möser. „Theoretische Akustik - Skript zur Vorlesung“. Institut für Technische Akustik, Technische Universität Berlin. 2008.
- [Mös95] M. Möser. „Die Wirkung von Zylindrischen Aufsätzen an Schallschirmen“. In: *Acustica* 81 (1995), S. 565–586.
- [Nel92] P.A. Nelson. *Active Control of Sound*. Academic Press Ltd., London, 1992.
- [NK08] A. Niepenberg und C. Kleinhennrich. „Zweidimensionales ANC-System“. In: *Zeitschrift für Lärmbekämpfung – Zeitschrift für Akustik, Schallschutz und Schwingungstechnik* 3.5 (2008), S. 194–205.
- [Ols53] H.F. Olson. „Electronic Sound Absorber“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 25.4 (1953), S. 829. ISSN: 0001-4966.
- [Opp96] A.V. Oppenheim. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, 1996.
- [OUONT00] H. Ohnishi, K. Uesaka, K. Ohnishi, M. Nishimura und S. Teranishi. „Development of the noise barrier using aactive controlled acacoustic soft edge - Part 2: Field test using a loud speaker and a high speed running truck“. In: *Proceedings of the 29th International Congress on Noise Control Engineering (inter.noise 2000), Nice, France*. 2000.
- [SB07] S. Spors und H. Buchner. „An approach to massive multichannel broadband feedforward active noise control using wave-domain adaptive filtering“. In: *Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 2007 IEEE Workshop on*. IEEE. 2007, S. 171–174.
- [Sch10] J.B. Schneider. „Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method“. 2010. URL: www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd (besucht am 23.09.2014).

- [Sch13] S. Schäfer. „Untersuchungen zu einer gradlinigen aktiven Schallbarriere“. Unveröffentlichte Master Thesis, Bergische Universität Wuppertal. 2013.
- [Sim55] E.D. Simshauser. „The Noise-Cancelling Headset - An Active Ear Defender“. In: *JASA* 27.1 (1955), S. 207. ISSN: 0001-4966.
- [Son00] J.-J. Sonke. „Variable Acoustics by Wave Field Synthesis“. Diss. Technische Universität Delft, 2000.
- [Spo05] S. Spors. „Active Listening Room Compensation for Spatial Sound Reproduction Systems“. Diss. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2005.
- [Sta97] E.W. Start. „Direct sound enhancement by wave field synthesis“. Diss. Technische Universität Delft, 1997.
- [SWB98] J.B. Schneider, C.L. Wagner und S.L. Broschat. „Implementation of transparent sources embedded in acoustic finite difference time domain grids“. In: *JASA* 103 (1998), S. 136–142.
- [SWF12] J. Sheaffer, M. Van Walstijn und B. Fazenda. „A Physically-Constrained Source Modell For FDTD Acoustic Simulation“. In: *Proceedings of the 15th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-12)*, York, UK. 2012.
- [Tri03] M. Trimpop. „Grundlagen zur Auslöschung von Schallfeldern durch Antischall unter Verwendung eines zweidimensionalen Ansatzes“. Diss. Bergische Universität Wuppertal, 2003.
- [Tön14] T. Töns. „Untersuchungen zur Abstimmung eines Mikrofonsets zur separaten Erfassung räumlich verschieden orientierter Schallfeldkomponenten“. Unveröffentlichte Bachelor Thesis, Bergische Universität Wuppertal. 2014.
- [Ver97] E. Verheijen. „Sound Reproduction by Wave Field Synthesis“. Diss. Technische Universität Delft, 1997.
- [Vog93] P. Vogel. „Application of Wave Field Synthesis in Room Acoustics“. Diss. Technische Universität Delft, 1993.
- [Wei08] S. Weinzierl. *Handbuch der Audiotechnik*. 1. Aufl. Springer Berlin, 2008.
- [WH31] N. Wiener und E. Hopf. „Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen“. In: *S.-B. Preuss. Akad. Wiss.* (1931), S. 696–706.
- [Wil99] E.G. Williams. *Fourier Acoustics - Sound Radiation and Nearfield Acoustic Holography*. Academic Press, New York, 1999.
- [WS85] B. Widrow und S.D. Stearns. *Adaptive Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- [Xil10] Xilinx. *Spartan-3A FPGA Family: Data Sheet*. Xilinx. 2010. URL: http://www.xilinx.com/support/documentation/data_sheets/ds529.pdf (besucht am 25.09.2014).

- [Yee66] K. Yee. „Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 14 (1966), 302–307.
- [Zio94] L. Ziomak. *Fundamentals of Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing*. CRC Press, 1994. ISBN: 0849394554.
- [ZZ93] M. Zollner und E. Zwickert. *Elektroakustik*. 3. Aufl. 1. korrigierter Nachdruck 1998. Springer Berlin, 1993.
- [Zöl05] U. Zölzer. *Digitale Audiosignalverarbeitung*. 3. Aufl. Teubner, Stuttgart, 2005.
- [Spe06] Spectrum Digital. *DSK6455 Technical Reference Manual*. C. Spectrum Digital. www.spectrumdigital.com, 2006. URL: http://c6000.spectrumdigital.com/dsk6455/v2/files/6455_dsk_techref.pdf (besucht am 25.09.2014).
- [Tex06] Texas Instruments. *TMS320C6000 DSP Multichannel Buffered Serial Port (McBSP) Reference Guide*. G. SPRU580G. <http://www.ti.com/>, 2006. URL: <http://www.ti.com/lit/ug/spru580g/spru580g.pdf> (besucht am 25.09.2014).
- [Tex10a] Texas Instruments. *TMS320C645x DSP Ethernet Media Access Controller (EMAC)/Management Data Input/Output (MDIO) Module User’s Guide*. K. SPRU975E. <http://www.ti.com/>, 2010. URL: <http://www.ti.com/lit/ug/spru975e/spru975e.pdf> (besucht am 25.09.2014).
- [Tex10b] Texas Instruments. *TMS320C64x+ DSP Megamodule Reference Guide*. K. SPRU871K. <http://www.ti.com/>, 2010. URL: <http://www.ti.com/lit/ug/spru871k/spru871k.pdf> (besucht am 25.09.2014).
- [Tex11] Texas Instruments. *TMS320C6000 Optimization Workshop - Discussion Notes*. Technical Training Organization. 2011. URL: http://software-dl.ti.com/trainingTTO/trainingTTO_public_sw/op6000/op6000_v1.51/op6000_student_guide_v1.51.pdf (besucht am 28.09.2014).
- [Tex12] Texas Instruments. *TMS320C6455 Fixed-Point Digital Signal Processor Reference Manual*. M. SPRS276M. <http://www.ti.com/>, 2012. URL: <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/tms320c6455.pdf> (besucht am 25.09.2014).

Abbildungsverzeichnis

1.1. Schallharte Barriere	4
1.2. Schallweiche Barriere	5
2.1. Koordinatensysteme	11
2.2. Besselfunktionen erster Art	14
2.3. Besselfunktionen zweiter Art	15
2.4. Richtcharakteristika	16
2.5. Lösungsgebiet Allgemeines Kirchhoff-Integral	20
2.6. Das Lösungsgebiet zur Herleitung der Rayleigh-Integrale	27
2.7. Lösungsgebiet Simple Source Formulation	30
3.1. Veranschaulichung der auf die x -Achse entfallenden Wellenlänge	35
3.2. Räumliche FT 1D kontinuierlich	36
3.3. Räumliche FT 2D kontinuierlich	37
3.4. Räumliche FT 1D diskret	38
3.5. Räumliche FT 2D diskret	39
3.6. Ausbreitung einer ebenen Welle	40
3.7. Kontinuierliche Plane Wave Decomposition	43
3.8. Quellfunktion und Betragsspektrum der ebenen Welle	44
3.9. Diskrete Plane Wave Decomposition Linien-Array	45
3.10. Lösungsgebiet Plane Wave Decomposition Polarkoordinaten	48
3.11. Lösungsgebiet Plane Wave Decomposition Expansions-Koeffizienten	49
3.12. Plane Wave Decomposition Zeit- und Frequenzbereich Linien-Array	50
3.13. Lösungsgebiet Zirkulare Harmonische Extrapolation	51
4.1. Array-Geometrie Kreis	55
4.2. Array-Geometrie Linie	57
4.3. Extrapolation Kirchhoff-Helmholtz-Integral Kreis	60
4.4. Übereinstimmung Kirchhoff-Helmholtz-Integral Kreis	61
4.5. 2D Extrapolation Kirchhoff-Helmholtz-Integral 3D Quelle	62
4.6. Übereinstimmung Extrapolation Kirchhoff-Helmholtz-Integral Kreis	62
4.7. Übereinstimmung Zirkulare Harmonische Extrapolation	63
4.8. Zirkulare Harmonische Extrapolation	64
4.9. Lösungsgebiet Zirkulare Harmonische Extrapolation schallweicher Zylinder	65
4.10. Vergleich ZHE schallweiche Impedanz Zylinder	68
4.11. Übereinstimmung Kirchhoff-Helmholtz-Integral Linie	69

4.12. Extrapolation Kirchhoff-Helmholtz-Integral Linie	70
4.13. Übereinstimmung Extrapolation Rayleigh-II-Integral	71
4.14. Übereinstimmung Extrapolation Kirchhoff-Helmholtz-Integral Linie	72
4.15. Extrapolation Plane Wave Decomposition Linie	73
4.16. Übereinstimmung Extrapolation Plane Wave Decomposition Halbraum Linie	74
4.17. Lösungsgebiet für Extrapolation unendliche Impedanz	75
4.18. Übereinstimmung Extrapolation Spiegelempfänger	77
4.19. Extrapolation Spiegelempfänger Linie	78
4.20. Übereinstimmung Extrapolation Kirchhoff-Helmholtz-Integral Linie Ta- pering 300 Hz	80
4.21. Übereinstimmung Extrapolation Kirchhoff-Helmholtz-Integral Linie Ta- pering 1500 Hz	81
5.1. Prinzipieller Aufbau eines MIMO Feedforward ANC-Systems.	83
5.2. Lösungsgebiet allgemeines Kirchhoff-Integral	85
5.3. MIMO Feedforward ANC Druck und Schnelle	86
5.4. Aufbau ANC-Kreis	87
5.5. Simulation ANC-Kreis Analysepunkte	89
5.6. Dämpfung ANC-Kreis Verfahren der Analysepunkte	90
5.7. Dämpfung ANC-Kreis Verfahren der Zirkulare Harmonischen Extrapo- lation	91
5.8. Aufbau ANC-Linie	93
5.9. Dämpfung ANC-Linie Verfahren der Analysepunkte	94
5.10. Simulation ANC-Linie Analysepunkte	95
5.11. Dämpfung ANC-Linie Verfahren der Analysepunkte und Rayleigh-II- Integral	97
5.12. Dämpfung ANC-Linie Verfahren der Plane Wave Decomposition	98
5.13. Geometrie ANC-Kreis Reflexionsäquivalenz	100
5.14. Dämpfung ANC-Kreis Verfahren der Reflexionsäquivalenz	102
5.15. Geometrie ANC-Linie Reflexionsäquivalenz	103
5.16. Dämpfung ANC-Linie Reflexionsäquivalenz	104
5.17. Dämpfung ANC-Linie kardioide Empfänger Reflexionsäquivalenz	105
5.18. Dämpfung ANC-Linie kardioide Empfänger inverse Feedbackpfade Re- flexionsäquivalenz	106
5.19. Simulation ANC-Linie Reflexionsäquivalenz	107
6.1. Aufbau eines adaptiven FIR-Filters	110
6.2. Aufbau eines Feedforward ANC-Systems	114
6.3. Blockschaltbild des einkanaligen FXLMS	115
6.4. Blockschaltbild des einkanaligen FXLMS mit Feedback-Pfad	116
6.5. Veranschaulichung Reflexionsmodell eindimensionale Schallausbreitung	118
6.6. Blockschaltbild des modifizierten FXLMS zur Reflexions-Prädiktion	118
6.7. MIMO FXLMS kardioide Empfänger	123

6.8. MSE MIMO FXLMS kardioide Empfänger	124
6.9. MIMO FXLMS Dämpfung kardioide Empfänger	125
6.10. MIMO FXLMS Druck- und Schnellempfänger	126
6.11. MSE MIMO FXLMS Druck- und Schnellempfänger	127
6.12. MIMO FXLMS Dämpfung Druck- und Schnellempfänger	128
6.13. Dämpfung ANC-Kreis Adaption MIMO FXLMS	129
6.14. MIMO FXLMS kardioide Empfänger Reflexions-Prädiktion	130
6.15. MSE MIMOFXLMS Reflexions-Prädiktion kardioide Empfänger	131
6.16. MIMO FXLMS ANC-Linie Reflexions-Prädiktion	132
6.17. MSE MIMO FXLMS kardioide Empfänger optimierte Reflexions- Prädiktion	133
6.18. MIMO FXLMS Dämpfung kardioide Empfänger Optimierte Reflexions- Prädiktion	134
6.19. MIMO FXLMS Druck- und Schnellempfänger Reflexions-Prädiktion . .	135
6.20. MSE MIMO FXLMS Druck- und Schnellempfänger optimierte Reflexions-Prädiktion	136
6.21. MIMO FXLMS Dämpfung Druck- und Schnellempfänger Optimierte Reflexions-Prädiktion	137
6.22. Staggered FDTD Grid	138
7.1. Foto des ANC-Kreises	143
7.2. Ursprüngliche Anordnung der Referenzmikrofone	144
7.3. Anordnung der Referenzmikrofone überarbeiteter Aufbau	146
7.4. DSK6455 und FPGA-Board	147
7.5. Verzögerung im digitalen Loopback	148
7.6. ANC-System im reflexionsarmen Halbraum	149
7.7. ANC-Linie im reflexionsarmen Halbraum	150
7.8. Signalfussplan des ANC-Systems	151
7.9. Signalverarbeitung Online-ANC	153
7.10. Spektrale Offline-Dämpfung MIMO FXLMS	161
7.11. Online-ANC Dämpfungsfeld 0,90 m Höhe	163
7.12. Online-ANC Dämpfungsfeld 1,10 m Höhe	164
7.13. Online-ANC Dämpfungsfeld 1,30 m Höhe	165
7.14. Spektrale Offline-Dämpfung MIMO FXLMS Reflexions-Prädiktion . . .	167
7.15. Aufbau des SISO ANC-Systems im reflexionsarmen Halbraum	168
7.16. SISO ANC-System im reflexionsarmen Halbraum	169
7.17. Foto zweier kardioider Referenzmikrofone	170
7.18. MSE an den Messmikrofonen für Sinussignal und Online SISO FXLMS .	172
7.19. MSE an den Messmikrofonen für Bandpass-Rauschen und Online SISO FXLMS	172
7.20. MSE an den Messmikrofonen. SISO Reflexions-Prädiktion mit Sinussignal.	173
7.21. MSE an den Messmikrofonen. SISO Reflexions-Prädiktion mit Rausch- signal.	174
7.22. Modifizierte Chassis-Anordnung	176

Tabellenverzeichnis

6.1. Der LMS-Algorithmus	113
6.2. Ablauf der Simulationen zur adaptiven Optimierung.	122
6.3. Ablauf einer FDTD-Simulation	141
7.1. Benötigte Rechenoperationen in Abhängigkeit der FIR-Länge	156
7.2. Offline-Dämpfung MIMO FXLMS Fehlersensoren kardioide Referenzmikrofone	160
7.3. Offline-Dämpfung MIMO-FXLMS Reflexions-Prädiktion	167
7.4. Online-Dämpfung SISO FXLMS Sinussignal	171
7.5. Online-Dämpfung SISO-FXLMS Bandpass-Rauschen	171
7.6. Online-Dämpfung SISO FXLMS Reflexions-Prädiktion Sinussignal . . .	175
7.7. Online-Dämpfung SISO FXLMS Reflexions-Prädiktion Bandpass-Rauschen	175

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Köln, den 18. Oktober 2014

Christian Kleinhenrich