

„Neuere Geometrie“ als
Unterrichtsgegenstand der höheren Lehranstalten.

Ein Reformvorschlag und seine Umsetzung zwischen
1870 und 1920.

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Erziehungswissenschaften (Dr. paed.)

am Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften der
Bergischen Universität Wuppertal eingereichte

Dissertation

von

Sebastian Kitz

Wuppertal, im April 2015

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20150804-104417-8

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn:nbn:de:hbz:468-20150804-104417-8>]

Euklid hatte einst seinem Könige Ptolemäus, der das mühsame Studium der „Elemente“ zu abschreckend fand, mit dem ganzen Stolze eines Gelehrten erwidert: „Es giebt keinen Königsweg zur Geometrie.“ Wir aber können hinzufügen: Die neuere Geometrie ist dieser Königsweg.

Hermann Hankel (1869)

Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem Reformvorschlag für den Geometrieunterricht, der im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts zunächst breit diskutiert und anschließend in nahezu allen deutschen Ländern die Gestaltung der Lehrpläne beeinflusste, nämlich der Aufnahme der damals so genannten „Neueren Geometrie“ in den Unterricht der höheren Schulen. Da die Reformbewegung eng mit der Entstehung des „realistischen“ Bildungswesens verbunden war, gibt die Einleitung zunächst einen zusammenfassenden Überblick über die Veränderungen im deutschen Schulsystem zwischen 1870 und 1900, die zur Etablierung weiterer höherer Schulformen neben dem humanistischen Gymnasium führten. Im sich anschließenden ersten Kapitel wird sodann dargestellt, was im 19. Jahrhundert von fachlicher Seite unter „Neuerer Geometrie“ verstanden wurde, wobei sich die Ausführungen hauptsächlich auf die Aussagen damaliger Lehrbücher stützen. Im zweiten Kapitel sollen die Kritik am traditionellen Aufbau des Geometrieunterrichts nach Euklid und die Gründe für die Einführung der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht thematisiert werden. Dabei kommt zu den bereits im ersten Kapitel dargestellten inhaltlichen Aspekten ein weiterer hinzu, nämlich unter „Neuerer Geometrie“ vorwiegend eine methodische Veränderung zu verstehen. Als Quellen dienen hier vor allem in der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* veröffentlichte Artikel und die Tagungsprotokolle der Fachverbände. Ein Blick in die damaligen Lehrpläne zeigt den sich einstellenden Erfolg der Reformer. Das dritte Kapitel vermittelt anhand von vier ausgewählten Lehrgängen einen Eindruck von den mit der Reform verbundenen Veränderungen, während im vierten Kapitel einige Vorschläge zu ihrer Weiterführung

vorgestellt werden. Diese entwickelten sich nach der Aufnahme der „Neueren Geometrie“ in die Lehrpläne zu Beginn des 20. Jahrhunderts, konnten jedoch die sich abzeichnenden Tendenzen zu ihrer Verdrängung nicht aufhalten, sondern trugen im Gegenteil mit dazu bei. Die Grundlage der Betrachtung bilden hier wie schon in Kapitel 2 vor allem die Artikel der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*. Der Ausblick am Schluss der Arbeit stellt überblicksmäßig einige Vorschläge zur „Neueren Geometrie“ im Schulunterricht vor, die nach dem zweiten Weltkrieg veröffentlicht wurden.

Die Anregung zur Beschäftigung mit dem Thema „Neuere Geometrie“ im Kontext der höheren Schulen erhielt ich von Prof. Dr. Klaus Volkert, der mich beim Verfassen der Arbeit durch vielfältige Hinweise, Ratschläge und Ermutigungen unterstützte. Dafür gilt ihm mein größter Dank. Herrn Prof. Dr. Andreas Filler danke ich für die Erstellung des Zweitgutachtens. Außerdem bedanke ich mich bei meinen Kolleginnen und Kollegen in der Arbeitsgruppe *Didaktik und Geschichte der Mathematik* der Bergischen Universität Wuppertal für die gute Zusammenarbeit in den vergangenen fünf Jahren und bei den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Universitätsbibliothek, die auch meine ausgefallensten Fernleihbestellungen beschaffen konnten.

Wuppertal, im April 2015

Sebastian Kitz

Inhalt

Einleitung

Die Entwicklung des höheren Schulwesens im 19. Jahrhundert.....1

Kapitel 1

Was ist „Neuere Geometrie“?.....7

1.1 Jacob Steiner.....8

1.2 Heinrich Schröter & Carl Friedrich Geiser.....11

1.3 Karl Georg Christian von Staudt.....12

1.4 Theodor Reye.....15

1.5 Moritz Pasch.....18

1.6 Hermann Hankel.....20

1.7 „Neuere Geometrie“ alias projektive Geometrie.....25

1.8 „Neuere Geometrie“ im Kontext der Technischen Hochschulen.....26

Kapitel 2

Reform des Geometrieunterrichts hin zur „Neueren Geometrie“.....29

2.1 Die Diskussion innerhalb der ZmnU.....31

2.1.1 Sturms erster Artikel: Der Ausgangspunkt der Debatte.....32

2.1.2 Erste Reaktionen auf Sturm.....38

2.1.3 Weitere Reaktionen in Band 2.....43

2.1.4 Sturms Erwiderung auf die Kritiker.....49

2.1.5 Erneuter Widerspruch durch Kober und Becker.....53

2.1.6 Der Abbruch der Debatte durch Hoffmann.....57

2.1.7 Weitere Argumente für die „Neuere Geometrie“.....60

2.1.8 Kritiker der „Neueren Geometrie“.....66

2.2 Diskussionen auf Versammlungen und Konferenzen.....70

2.2.1 Die Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner.....70

2.2.2 Die Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte.....77

2.2.3 Die Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts
in der Mathematik und den Naturwissenschaften.....82

2.3 Zusammenfassung der Argumente.....92

2.4 Schulprogramme.....99

2.5 Erfolg der Reformer: Aufnahme der „Neueren Geometrie“ in die Lehrpläne.....	102
2.5.1 Königreich Preußen.....	103
2.5.2 Königreich Bayern.....	105
2.5.3 Großherzogtum Baden.....	108
2.5.4 Weitere Länder.....	112

Kapitel 3

Ausgewählte Lehrgänge.....	115
----------------------------	-----

3.1 *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik*

von Gustav Holzmüller.....	116
----------------------------	-----

3.1.1 Sätze von Ceva und Menelaos, vollständiges Vierseit, harmonische Punkte, Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise.....	117
3.1.2 Alternativer Beweis zum „Satz vom vollständigen Vierseit“.....	121
3.1.3 Satz des Pascal und mögliche Grenzfälle.....	124
3.1.4 Pol und Polare am Kreis.....	126
3.1.5 Inversion am Kreis.....	131
3.1.6 Potenz eines Punktes bzgl. eines Kreises, Potenzlinie.....	135
3.1.7 Lösung des Apollonischen Berührproblems.....	137

3.2 *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* von Julius Henrici

und Peter Treutlein.....	138
--------------------------	-----

3.2.1 „Zweistrahl“ als Grundfigur, Sätze von Menelaos und Ceva.....	141
3.2.2 Harmonische Punkte, vollständiges Viereck und Vierseit.....	142
3.2.3 Pol und Polare am Kreis, Dualität.....	144
3.2.4 Perspektive und projektive Verwandtschaft, Sätze von Pascal und Brianchon.....	147
3.2.5 Satz des Desargues, Zentralkollineation.....	152
3.2.6 Zentralkollineare Abbildung eines Kreises auf einen Kreis.....	154
3.2.7 Zentralkollineare Abbildung eines Kreises auf einen Kegelschnitt.....	157

3.3 <i>Leitfaden der ebenen Geometrie</i> von Hubert Müller.....	160
--	-----

3.3.1. Projektive Verwandtschaft, Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.....	162
3.3.2 Fernelemente, projektive Punktreihen mit demselben Träger (Doppelpunkte, Involution).....	165
3.3.3 Pol und Polare am Kreis, konjugierte Punkte und Geraden.....	167

3.3.4 Erzeugung von Kurven mithilfe projektiver Gebilde in schiefer Lage...	169
3.3.5 Ebene Systeme in perspektivischer Lage, Identität der Kegelschnitte mit den vorher behandelten Kurven.....	172
3.3.6 Ableitung von Eigenschaften der Kegelschnitte aus ihrer projektiven Erzeugung.....	175
3.4 <i>Elemente der Geometrie der Lage</i> von Rudolf Böger.....	178
3.4.1 Satz des Desargues, vollständiges Viereck und Vierseit, harmonische Punkte.....	180
3.4.2 Perspektive und projektive Verwandtschaft.....	184
3.4.3 Projektivität, Ordnungselemente, Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.....	186
3.4.4 Konstruktion von krummen Grundgebilden aus fünf gegebenen Punkten.....	188
3.4.5 Weitere Möglichkeiten der Festlegung einer Kurve zweiter Ordnung, Sätze von Pascal und Brianchon.....	191
3.4.6 Pol und Polare, Gleichungen der Kurven zweiter Ordnung.....	193
3.5 Übersicht der behandelten Inhalte.....	196

Kapitel 4

Vorschläge zur Weiterentwicklung der Reform und der Anfang

vom Ende der „Neueren Geometrie“ als Unterrichtsgegenstand.....	199
4.1 „Neuere Geometrie“ und darstellende Geometrie.....	200
4.1.1 Paul Zühlke.....	201
4.1.2 Maximilian Enders.....	203
4.1.3 Christian Beyel.....	205
4.2 Ein Plädoyer für die wahre „Neuere Geometrie“.....	207
4.2.1 Rudolf Böger.....	207
4.2.2 Hans Keferstein.....	212
4.2.3 Max Zacharias.....	214
4.3 <i>Erlanger Programm</i> und „Neuere Geometrie“.....	217
4.3.1 Wilhelm Dieck.....	219
4.3.2 Albert Schülke.....	224
4.3.3 Oskar Höfling.....	229
4.3.4 Umfrage in der ZmnU.....	234
4.4 Der Einfluss der <i>Meraner Reform</i> auf die „Neuere Geometrie“.....	235
4.4.1 „Neuere Geometrie“ im Lehrplanentwurf.....	236

4.4.2 Eduard Götting.....	238
4.4.3 Elisabeth Staiger.....	240
4.4.4 Philipp Weinmeister.....	243
4.5 Das beginnende Verschwinden der „Neueren Geometrie“ aus den Lehrplänen.....	244
Ausblick	
Vorschläge zur projektiven Geometrie in der Folgezeit.....	257
Literatur.....	271
Anhang.....	279

Einleitung

Die Entwicklung des höheren Schulwesens im 19. Jahrhundert

Anlässlich des Deutsch-Französischen Krieges gab es auf deutscher Seite unter Führung Otto von Bismarcks ein verstärktes Interesse, die Beziehungen zwischen dem Norddeutschen Bund, der seit 1866 aus den Königreichen Preußen und Sachsen, 17 kleineren Herzogtümern, Großherzogtümern und Fürstentümern sowie den Hansestädten Bremen, Hamburg und Lübeck bestand, und den mit ihm verbündeten süddeutschen Ländern neu zu ordnen. Infolge langwieriger Verhandlungen trat am 1. Januar 1871 die Verfassung des neu gebildeten Deutschen Reiches in Kraft, dem die Länder des ehemaligen Norddeutschen Bundes sowie die Königreiche Bayern und Württemberg und die Großherzogtümer Baden und Hessen angehörten. Die Zustimmung der süddeutschen Länder zu diesem Schritt wurde dadurch ermöglicht, dass die auf den Bund verlagerten Kompetenzen vor allem den Bereich der Außen- und Militärpolitik betrafen¹, während den Ländern ansonsten eine weitgehende Selbstständigkeit erhalten blieb.² Am 18. Januar 1871 wurde als oberster Repräsentant des Reiches der preußische König Wilhelm I. im besetzten Schloss von Versailles zum Kaiser gekrönt, für die operative Politik war jedoch der zum Reichskanzler aufgestiegene Otto von Bismarck zuständig. Am 10. Mai 1871 endete offiziell der Deutsch-Französische Krieg mit der Unterzeichnung des Friedensvertrags in Frankfurt am Main. Dieser sah vor, dass Frankreich die Gebiete Elsaß und Lothringen an das Deutsche Reich abtreten musste³, das damit seine bis zum Ende des ersten Weltkrieges bestehende Form erreicht hatte.⁴

Aufgrund der weitgehenden Eigenständigkeit der Länder behielten diese auch die Zuständigkeit für die Bildungspolitik. Der Einfluss der Bundesebene beschränkte sich offiziell auf die Festlegung der Zulassungsbedingungen für den höheren Militärdienst und für bestimmte Berufsgruppen (u.a. Ärzte).⁵ Trotz dieser formalen Autonomie folgten in der Zeit nach der Reichsgründung nahezu alle Länder dem preußischen Vor-

¹ Zusätzlich erhielt der Bund noch die Zuständigkeit für einige Bereiche der Wirtschaftspolitik wie die Gewerbe-, Handels- und Währungsgesetzgebung.

² vgl. Seeber u.a 1981, S. 166

³ Sie wurden als *Reichsland Elsaß-Lothringen* der direkten Verwaltung durch den Bund unterstellt.

⁴ vgl. Seeber u.a 1981, S. 181

⁵ vgl. Lexis 1904a, S. 4; Wilhelm Lexis (1837-1914) studierte Mathematik und Physik in Bonn und wandte sich anschließend der Ökonomie zu (u.a. Professuren für Nationalökonomie und Volkswirtschaftslehre). Im Auftrag des preußischen Kultusministeriums gab er anlässlich der Weltausstellung in St. Louis die hier zitierte Publikation *Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich* heraus, in der er die Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer besonders positiv herausstellte.

bild und führten eine weitgehende strukturelle Reform des Schulwesens durch. Diese führte dazu, dass dem humanistischen Gymnasium mit dem Realgymnasium und der Oberrealschule⁶ zwei weitere höhere Lehranstalten an die Seite gestellt wurden.⁷

Die Wurzeln der Reform liegen bereits am Beginn des 19. Jahrhunderts, als die Gymnasien noch die einzige höhere Schulform darstellten. Der Unterricht wurde in Anknüpfung an die Ideen des Neuhumanismus von den alten Sprachen Latein und Griechisch dominiert: „Das Studium beider alten Sprachen soll zusammenwirken, um einerseits eine ethische und ästhetische Erziehung, andererseits eine grammatisch logische und stilistische Schulung zu geben; beides zusammen umfaßt die Gesamtheit menschlicher Bildung, und legt daher für jeden höheren Beruf, insbesondere für jede wissenschaftliche Tätigkeit die einzig mögliche gemeinsame Grundlage. Die Berücksichtigung anderer Lehrfächer ist folgerichtigerweise eigentlich gar nicht erforderlich, denn es gibt keine Seite des geistigen Lebens, die nicht im Altertum entwickelt worden ist und folglich am Studium des Altertums von neuem entwickelt werden kann. [...] Daß sie [andere Fächer] überhaupt in den Lehrplan aufgenommen wurden, entspricht somit nicht eigentlich der Konsequenz des neuhumanistischen Denkens; es ist von vornherein eine Konzession an das Publikum und an das Bedürfnis des Lebens, die denn doch nicht wohl zu umgehen war, aber auf den Geist der gymnasialen Erziehung keinen Einfluß haben sollte und tatsächlich lange Zeit hindurch auch nicht gehabt hat.“⁸ Durch die großen Fortschritte im Bereich der Technik und die sich daraus ergebenden Anforderungen an die Gesellschaft „trat das Bedürfnis hervor, für diejenigen Berufsarten, die auf eine engere Fühlung mit dem praktischen Leben angewiesen waren, vor allem für Kaufleute und Techniker, eine Vorbildung moderneren und praktischeren Inhalts zu schaffen. Es waren die Realanstalten, welche diese Aufgabe übernahmen.“⁹ Diese Realanstalten stellten zunächst eine Mischform zwischen Fachschulen mit dem Ziel der Vorbereitung auf bestimmte Berufe und allgemeinbildenden Schulen dar. In der Folgezeit kam es jedoch zu einer Ausdifferenzierung, so dass sich auf der einen Seite das technische Schulwesen¹⁰ und auf der anderen Seite die realistischen Lehranstalten herausbildeten. Letztere verzichteten „auf die technische Vorbildung für bestimmte Berufsfächer und rückt[en] Mathe-

⁶ Als Sammelbezeichnung sprach man auch von „realistischen Anstalten“.

⁷ Eine genauere Darstellung dieser Entwicklung in Preußen, Bayern und Baden im Hinblick auf die Lehrpläne folgt in Unterkapitel 2.5.

⁸ Lexis 1904a, S. 71

⁹ Lexis 1904a, S. 71

¹⁰ Hier kam es im Lauf der Zeit zu weiteren Spezialisierungen, aus denen u.a. auch die Technischen Hochschulen hervorgingen. (vgl. Lexis 1904b, S. 3f)

matik und Naturwissenschaften einerseits, die neueren Sprachen andererseits in den Mittelpunkt des Lehrplans.“¹¹ Die Ausgestaltung der realistischen Anstalten war zu diesem Zeitpunkt noch nicht einheitlich geregelt, was dazu führte, dass einige (die sogenannten Realschulen I. Ordnung) Lateinunterricht verbindlich vorschrieben, während andere ganz auf ihn verzichteten. Außerdem bestanden Unterschiede in der Anzahl der vorgesehenen Schuljahre. Die Mathematik nahm in der Konzeption der realistischen Anstalten eine zentrale Rolle ein, da sich in ihr die angestrebte Verbindung von reiner Wissenschaft und Anwendungen (die formale und die materiale Bildung) widerspiegelte: „Die Mathematik vereinigt die praktische mit einer streng wissenschaftlichen Seite, sie führt einerseits ins Technische, andererseits unmittelbar ins wissenschaftliche Denken und Erkennen hinein. [...] In vollem Umfang freilich erreicht die Mathematik diese Bedeutung erst durch ihre Verbindung mit den exakten Naturwissenschaften, besonders der Mechanik, denn erst hier treten die beiden Teile ihres Wesens dem Schüler in voller Deutlichkeit entgegen: neben der Höhe und Allgemeinheit ihres Erkenntniswertes die durchgängige Beziehung zur Wirklichkeit und die Möglichkeit, diesen Erkenntniswert jeden Augenblick ins Praktische umzusetzen.“¹²

Die bereits bei der Einführung des realistischen Schulwesens relevanten Gründe kamen nun in Folge der Reichsgründung erneut auf die Tagesordnung: „Je entschiedener Deutschland in den Brennpunkt des modernen Völkerlebens, in Politik, Handel und Technik trat, desto wichtiger wurde es, daß die deutsche Jugend mit derjenigen Bildung ausgestattet wurde, durch die allein eine solche Stellung behauptet werden konnte: Kenntnis der grundlegenden Naturwissenschaften, Bekanntschaft mit den neueren Völkern, ihren Sprachen und ihrer Geschichte, bewußtes Verständnis für die Eigenart des eigenen Vaterlandes.“¹³ Dies führte zunächst (1882) zu einer klareren gesetzlichen Regelung für die Realanstalten. Neben dem Gymnasium bestanden fortan das Realgymnasium (mit verpflichtendem Lateinunterricht) und die lateinlose Oberrealschule als weitere höhere Schulformen, die alle neun Schuljahre umfassten. Außerdem wurde an den Gymnasien der Umfang der Unterrichtsstunden in Mathematik, Naturwissenschaften und Französisch zulasten der alten Sprachen erhöht, an den Realgymnasien hingegen der Lateinunterricht ausgeweitet.¹⁴

¹¹ Lexis 1904a, S. 72

¹² Lexis 1904a, S. 73

¹³ Lexis 1904a, S. 76

¹⁴ Dies führte zu einer weitgehenden Übereinstimmung der Lehrpläne dieser Schulformen in den drei untersten Jahrgangsstufen.

Ein weiterer Reformschritt wurde durch die im Jahr 1890 stattfindende *Dezemberkonferenz* ausgelöst, eine vom preußischen Kultusminister einberufene Versammlung von Lehrern, Beamten des Kultusministeriums sowie einigen Hochschullehrern und Vertretern der Kirchen. Die Konferenz eröffnete Kaiser Wilhelm II. mit einer Rede, in der er „sich schroff und entschieden gegen den Geist des humanistischen Gymnasiums wandte, dem er vorhielt, das er seit dem Jahre 1870 stehen geblieben sei und nicht dazu geholfen habe, die große nationale Entwicklung weiterzuführen. Die Idee der formalen Bildung im alten Sinne des Wortes lehnte der kaiserliche Redner ausdrücklich ab.“¹⁵ Auch die an den Gymnasien hauptsächlich vermittelten Inhalte missfielen dem Kaiser, der anstelle des klassischen Altertums das „Moderne“ und „Nationale“ ins Zentrum stellen wollte. Die am Ende der Konferenz gefassten Beschlüsse¹⁶ mündeten in einer Neufassung der preußischen Lehrpläne, die 1892 in Kraft trat. Diese sah zur Entlastung der Schüler eine Reduktion der Unterrichtsstunden in allen höheren Lehranstalten vor, die an den Gymnasien und Realgymnasien nahezu vollständig zu Lasten der alten Sprachen verwirklicht wurde. Außerdem wurde die Bedeutung des Deutschunterrichts gestärkt, sodass das klassische humanistische Gymnasium Geschichte war: „Es kann scheinen, als ob es immer noch das humanistische Gymnasium in der alten Bedeutung des Wortes sei, das durch einige Einschränkungen seiner Ziele und einige methodische Reformen lebensfähig erhalten werden soll. In Wirklichkeit freilich ist die Eigenart der neuhumanistischen Schule zerstört und ein Nebeneinander gleichgewichteter Fächer entstanden [...]“¹⁷ Wie bereits oben erwähnt, diente die preußische Reform den anderen Ländern des Reiches als Vorbild, das sie zu ähnlichen Veränderungen in ihren Schulsystemen veranlasste: „Die Bedeutung der Reform zeigte sich schon darin, daß fast sämtliche deutsche Staaten sich veranlaßt sahen, im Laufe der nächsten Jahre ihr Schulwesen ebenfalls zu revidieren, und daß die entstandenen neuen Schulordnungen sich überall mehr oder weniger dem Geiste des preußischen annäherten.“¹⁸

Die bis zu diesem Zeitpunkt durchgeführten Reformschritte konnten jedoch die in sie gesetzten Erwartungen nicht erfüllen, da das Gymnasium das Privileg behalten hatte, als einzige Schulform die Berechtigung zum Universitätsstudium aller Fächer vergeben zu dürfen. Dies änderte sich im Jahr 1900 durch einen Kaiserlichen Erlass, der

¹⁵ Lexis 1904a, S. 81

¹⁶ Da eine große Zahl von Konferenzteilnehmern die bestehende Form des Gymnasiums bewahren wollte, gingen die Beschlüsse nicht so weit wie eigentlich vom Kaiser gewünscht.

¹⁷ Lexis 1904a, S. 84

¹⁸ Lexis 1904a, S. 86

die Frage der „Berechtigungen“ neu regelte und bestehende Einschränkungen für die Absolventen der realistischen Anstalten weitgehend beseitigte. Wörtlich heißt es darin: „Bezüglich der Berechtigungen ist davon auszugehen, daß das Gymnasium, das Realgymnasium und die Oberrealschule in der Erziehung zur allgemeinen Geistesbildung als gleichwertig anzusehen sind und nur insofern eine Ergänzung erforderlich bleibt, als es für manche Studien und Berufszweige noch besonderer Vorkenntnisse bedarf, deren Vermittlung nicht oder doch nicht in demselben Umfange zu den Aufgaben jeder Anstalt gehört. Dementsprechend ist auf die Ausdehnung der Berechtigungen der realistischen Anstalten Bedacht zu nehmen. Damit ist zugleich der beste Weg gewiesen, das Ansehen und den Besuch dieser Anstalten zu fördern und so auf die größere Verallgemeinerung des realistischen Wissens hinzuwirken.“¹⁹ Der Erlass hatte zur Folge, dass im gesamten Deutschen Reich auch das Abschlusszeugnis des Realgymnasiums zum Medizinstudium berechtigte und die Absolventen aller höheren Schulen die Offizierslaufbahn einschlagen durften. In Preußen wurden Gymnasium, Realgymnasium und Oberrealschule auch bei der Berechtigung zum Studium der Rechts- und Staatswissenschaft und zur Vorbereitung auf die Lehramtsprüfung an der philosophischen Fakultät vollständig gleichgestellt.²⁰ Lediglich für das Theologiestudium blieb der Gymnasialabschluss im gesamten Reich die alleinige Zugangsberechtigung.²¹

¹⁹ Lexis 1904a, S. 50

²⁰ In den anderen Ländern gab es diesbezüglich sehr differierende Bestimmungen. So galt beispielsweise im Königreich Sachsen eine ähnlich weitgehende Regelung wie in Preußen, während im Königreich Bayern keine über die durch Bundesrecht vorgegebene Erweiterung der Berechtigungen hinausgehende Vorschrift erlassen wurde.

²¹ Lexis 1904a, S. 63

Kapitel 1

Was ist „Neuere Geometrie“?

Im Laufe des 19. Jahrhunderts waren die Fortschritte auf dem Gebiet der damals so genannten „Neueren Geometrie“¹, die u.a. von Geometern wie Jacob Steiner (1796-1863) und Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) erzielt worden waren, einem größeren Kreis von mathematisch interessierten Personen bekannt geworden. Dies lag vor allem daran, dass die Schüler Steiners seine Vorlesungsskripte überarbeiteten und als Bücher herausgaben. Diese Aufgabe übernahmen Carl Friedrich Geiser (1843-1934) und Heinrich Schröter (1829-1892). Dazu bemerkt Moritz Cantor: „Geiser gab die „populären Kegelschnitte“, wie die Ueberschrift von Steiner's Notizen lautete, als Jakob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, I. Theil (1867) heraus; Schröter bearbeitete in dem II. Theil (1867) die Vorlesung „über die neuern Methoden der synthetischen Geometrie“. Beide Bände dürften wohl mehr gewirkt haben, als Steiner's eigene Vorträge, welche ein sehr fleißiges Mitarbeiten der Zuhörer erheischten und deshalb nicht von vielen andauernd besucht wurden, abgesehen davon, daß Steiner's Gewohnheit, mitten im Winter die Fenster des Hörsaales aufzureißen, ihm manchen Schüler abspenstig machte.“²

Im Falle von Staudts bemühte sich Karl Theodor Reye (1838-1919) darum, dessen Ideen einem breiteren Leserkreis zu erschließen. Dazu schrieb er das mehrbändige Werk *Geometrie der Lage*, welches er 1866 veröffentlichte (19 Jahre vorher hatte von Staudt unter demselben Titel ein einbändiges Werk herausgegeben). Der große Erfolg dieses Buches zeigt sich daran, dass es 1923 bereits in der sechsten Auflage erschien.

Es stellt sich nun die Frage, was eigentlich damals mit dem Begriff „Neuere Geometrie“ gemeint war. Welche Inhalte wurden damit verbunden? Und in welchem Verhältnis stehen die von Geiser/Schröter bzw. Reye verwendeten Bezeichnungen „synthetische Geometrie“ und „Geometrie der Lage“ dazu? Um diese Fragen beantworten zu können, werden im Folgenden Aussagen von Mathematikern der damaligen Zeit wiedergegeben, in denen sie die in ihren Augen charakteristischen Merkmale der „Neueren Geometrie“ beschreiben.

¹ Meines Wissens wurde die Bezeichnung „Neuere Geometrie“ das erste Mal explizit von August Leopold Crelle verwendet in seinem Buch *Ueber Parallelen-Theorieen und das System in der Geometrie*. Berlin: Maurer 1816

² Cantor 1893, S. 703

1.1 Jacob Steiner

Schaut man sich die von Jacob Steiner in der Vorrede zu seinem Werk *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (1832) gemachten Aussagen an, erkennt man die Richtung der Veränderung (also das "Neue") sehr deutlich. Er erklärte darin, dass es das Ziel seiner Arbeit sei, „Fundamenteigenschaften, die den Keim aller Sätze, Porismen³ und Aufgaben der Geometrie, womit uns die ältere und neuere Zeit so freigebig beschenkt hat, in sich enthalten“⁴, zu finden und mit deren Hilfe Ordnung in die Geometrie zu bringen. Dabei sei vor allem wichtig, die Beziehungen der einzelnen Sätze zueinander aufzudecken und aus wenigen einfachen Grundgebilden alle weiteren Figuren und deren Eigenschaften zu entwickeln. Dies habe den Vorteil, dass sich einerseits ein genauer Überblick über den Gegenstand ergebe, andererseits die Beweise einfacher und kürzer gestaltet werden könnten und sich weiterhin manche Eigenschaften von selbst ergäben. Hierin sah Steiner den großen Vorteil seines Konzeptes, das er deutlich von den bislang üblichen abgrenzte. „Wenn Jemand alle bis jetzt bekannt gewordenen Sätze und Aufgaben nach den bisher üblichen Vorschriften zu beweisen und zu lösen sich vornehmen wollte, so wäre dazu viel Zeit und Mühe erforderlich, und am Ende hätte man doch nur eine Sammlung von auseinander liegenden, wenn auch sehr scharfsinnigen, Kunststücken, aber kein organisch zusammenhängendes Ganze zu Stande gebracht.“⁵ Hier betonte er also den großen Unterschied seines Ansatzes gegenüber dem Althergebrachten, so dass die Bezeichnung „Neuere Geometrie“ (als Abgrenzung zum "Alten") zweckmäßig erscheint, auch wenn er sie in der *Systematischen Entwicklung* nicht gebrauchte.

Obwohl Steiner die synthetische Methode verwendete (also auf die Benutzung von Koordinaten zur Beschreibung der geometrischen Gebilde verzichtete), war er kein dogmatischer Anhänger derselben und hielt sie nicht für konstitutiv. Vielmehr seien die selben Resultate auch auf analytischem Wege erreichbar, ohne dass dadurch der natürliche Gang der Entwicklung gestört werde: „Hierbei macht weder die synthetische, noch die analytische Methode, den Kern der Sache aus, der darin besteht, dass die Abhängigkeit der Gestalten von einander, und die Art und Weise aufgedeckt

³ Die Bezeichnung einer mathematischen Aussage als „Porisma“ stammt aus der antiken Geometrie und wurde im Sinne von Korollar benutzt. (vgl. Chasles 1839, S. 283)

⁴ Steiner 1832, S. V

⁵ Steiner 1832, S. V

wird, wie ihre Eigenschaften von den einfachern Figuren zu den zusammengesetztern sich fortpflanzen.“⁶ Vermutlich benutzte Steiner aus diesem Grunde in seinen Vorlesungen die Bezeichnung „neuere synthetische Geometrie“⁷.

Betrachtet man die von Steiner behandelten Inhalte, so ging es ihm hauptsächlich um die projektive Behandlung der Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Dazu führte er zunächst Grundgebilde in der Ebene (*Gerade* und *ebener Strahlbüschel*) und im Raum (*Ebenenbüschel*, *Ebene* und *Strahlbüschel im Raume*) ein und untersuchte die Eigenschaften der projektiven und perspektiven Beziehung dieser Gebilde zueinander. Gemäß seiner Zielsetzung, von einfachen Grundfiguren ausgehend für eine größtmögliche Systematik zu sorgen, begann er mit der Konstellation, dass eine Gerade und ein Strahlbüschel in einer Ebene perspektiv liegen. In diesem Fall ist jeder Geraden des Strahlbüschels genau ein Punkt der Geraden (nämlich der Schnittpunkt) zuge-

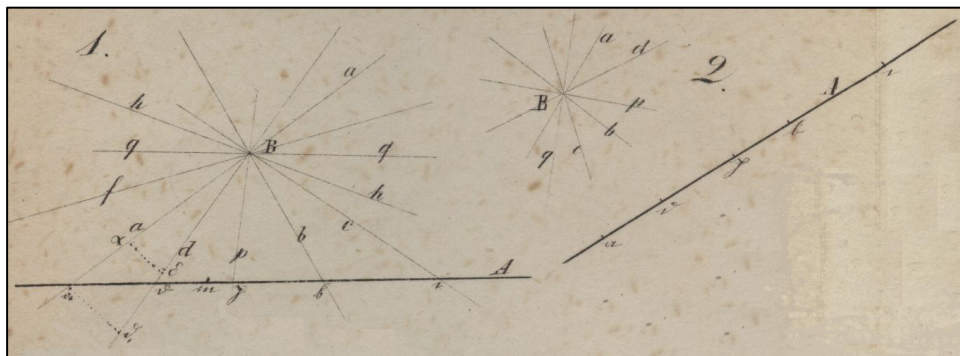


Abbildung 1: Strahlbüschel und Gerade in perspektiver bzw. projektiver Lage (aus: Steiner 1832, Tafel I)

geordnet. Durch Verschiebung des Strahlbüschels an eine andere Stelle der Ebene kam Steiner zur allgemeinen projektiven Lage⁸, bei der die Geraden des Strahlbüschels nicht mehr durch die ihnen zugeordneten Punkte verlaufen. Daraus ergibt sich die naheliegende Frage, wie man in dieser Situation zu einer beliebigen Geraden des Büschels den zugeordneten Punkt findet. Diese motiviert zu einer genaueren Untersuchung der perspektiven Lage, aus der sich u.a. das Doppelverhältnis als Invariante der projektiven Beziehung ergibt. Daraus lässt sich dann eine konstruktive Lösung für das Problem entwickeln, indem mithilfe einer Kette von perspektiven Grundgebilden auch bei einer Geraden und einem Strahlbüschel in schiefer Lage zu jedem Element das zugeordnete konstruiert wird. Diese kann ohne großen Aufwand auf weitere Kombinationen projektiver Grundgebilde in schiefer Lage übertragen werden. Auf die Rückführung bereits bekannter Sätze und Aufgaben der Geometrie auf allgemeine und grundlegende

⁶ Steiner 1832, S. VI

⁷ vgl. Schröter 1867, S. VII

⁸ Er nennt diese die schiefe Lage.

Aussagen und Prinzipien als zweiten für die Systematisierung wichtigen Aspekt ging Steiner in diesem Zusammenhang ebenfalls ein. So thematisierte er nach Abschluss der Betrachtung der projektiven Beziehung einige Sätze über das vollständige Viereck und Vierseit, die sich teilweise schon bei Pappos, de La Hire und Carnot finden, von Steiner aber nun in einheitlicher Form unter dem Gesichtspunkt der vorher entwickelten Zusammenhänge behandelt werden.⁹

Gemäß seiner Grundposition, alle neuen geometrischen Objekte mithilfe schon be-

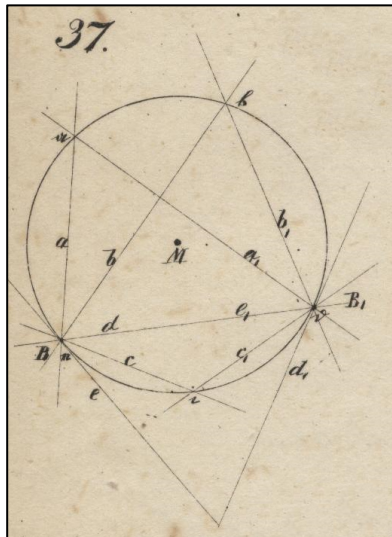


Abbildung 2: Projektive Strahlbündel am Kreis
(aus: Steiner 1832, Tafel III)

kannter entstehen zu lassen, erzeugte Steiner im Anschluss den Kreis projektiv als Schnittlinie zweier schiefer, projektiver Strahlbündel und übertrug diese Erzeugung unter Nutzung der bereits zuvor behandelten Schnitte am Kegel auf Ellipse, Parabel und Hyperbel. Die vorher untersuchten Eigenschaften projektiver Geraden und Strahlbündel wurden dann zum Beweis von Aussagen über die Kegelschnitte herangezogen. Die Flächen zweiter Ordnung erzeugte Steiner mit Hilfe von projektiv liegenden Gebilden im Raum.

Wichtig zu erwähnen ist noch, dass Steiner davon überzeugt war, die Grundzüge seiner Theorie auch auf den Schulunterricht anwenden zu können: „Ich bemerke hier noch, dass die Betrachtung projektivischer Gerader und Strahlbündel sich so vereinfachen lässt, dass sie ohne Hülfe trigonometrischer Ausdrücke durchgeführt werden kann, wodurch sie geeignet wird, der Elementargeometrie einverleibt zu werden und darin manche zweckmässige Verbesserung zu bewirken, indem zu ihrem trocknen Inhalt die belebenden Porismen, die Theorie der Transversalen und besonders die vollständige Lehre von den Kegelschnitten hinzutritt, dergestalt, dass alle diese Gegenstände sich ebenso leicht und einfach behandeln lassen, als nach der bisherigen Methode der Kreis.“¹⁰

⁹ Steiner merkte dazu an: „Nachdem die Eigenschaften und die Fundamentalsätze über projectivische Gerade und Strahlbündel aufgefunden sind, dürfte es wohl für Viele wünschenswerth sein, an einigen Beispielen zu sehen, wie sehr umfassend diese Sätze sind, d. h., wie sie die eigentliche Grundlage vieler anderen Sätze sind, die unmittelbar aus ihnen hervorgehen, wie durch sie manche anscheinend schwere Aufgaben, leicht zu lösen sind, und wie endlich durch sie besonders die eigentliche Bedeutung verschiedener Porismen verständlich hervortritt.“ (Steiner 1832, S. 71f)

¹⁰ Schröter 1867, S. IX

1.2 Heinrich Schröter & Carl Friedrich Geiser

Die von Heinrich Schröter herausgegebene Bearbeitung der Steinerschen Vorlesungen über synthetische Geometrie (*Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften*) geht in dieselbe Richtung wie die *Systematische Entwicklung*. In völliger Analogie behandelte Schröter auch zunächst die projektive Beziehung ebener Gebilde und ging dann zur Erzeugung der Kegelschnitte mit Hilfe projektiver Punktreihen über. Der Unterschied besteht jedoch darin, dass Schröter diese Kurven nicht als ebene Schnitte des Kegels behandelte und daher keine Übertragung von für den Kreis bewiesenen Sätzen auf alle Kegelschnitte vornehmen konnte. Wie Schröter in seinem Vorwort anmerkte, hatte Steiner selbst dies jedoch als großen Mangel in seinem Werk empfunden, den jener nun beseitigen wollte¹¹. Weitere Unterschiede bestehen darin, dass sich Schröter allein auf ebene Gebilde beschränkte und zusätzlich jeweils ein Kapitel über *Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar* sowie *Das Involutions-Netz*¹² hinzugefügt hat.

Erwähnt werden muss noch, dass eine der Quellen für Schröters Buch eine im Wintersemester 1852/53 an der Berliner Universität gehaltene Vorlesung Steiners mit dem Titel *Ueber die neueren Methoden der synthetischen Geometrie*¹³ war. Diese Bezeichnung unterstreicht die von Steiner in der Vorrede der *Systematischen Entwicklung* gemachte Aussage, dass es ihm neben der Untersuchung neuer Inhalte vor allem um eine neue Art der Behandlung ging. Außerdem ist wichtig zu bemerken, dass Schröter die Bedeutung der synthetischen Methode sehr stark betonte und die Gefahr sah, dass diese von der analytischen an den Rand gedrängt werde.

Der von Carl Friedrich Geiser bearbeitete erste Teil von Steiners Vorlesungen mit dem Titel *Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung* bildet in gewisser Weise das Komplement zu Schröters Buch, da hier die projektive Behandlung ganz bewusst außen vor gelassen wird. Wie Geiser im Vorwort anmerkte, wurde ein zunächst dafür vorgesehenes Kapitel bei der Endredaktion gestrichen. Daher ist das Buch nun so aufgebaut, dass in einem ersten Kapitel einige grundlegende Inhalte über harmonische Punkte, Ähnlichkeitspunkte, Potenzlinien den Satz des Pascal sowie Pol und Polare am Kreis behandelt werden. Im dann folgenden Teil werden die Kegelschnitte jeweils einzeln über die Brennpunkteigenschaft definiert und aus die-

¹¹ vgl. Schröter 1867, S. VII

¹² vgl. Schröter 1867, S. XIX

¹³ vgl. Schröter 1867, S. VI

ser Definition Eigenschaften der Kurven wie z.B. zur Konstruktion der Tangenten oder zu konjugierten Durchmessern abgeleitet. Auch wenn Geiser hier nach der synthetischen Methode verfuhr, ist die Darstellung in viel größerem Ausmaß als bei Steiner und Schröter durch die Nutzung von Maßbeziehungen geprägt, was allerdings wegen der zugrunde gelegten Definition auch nicht verwunderlich ist. Allerdings wird auch der Zusammenhang zu den von Steiner formulierten Zielen der „Neueren Geometrie“ deutlich, da im letzten Teil des Buches, der mit *Gemeinsame Behandlung der Kegelschnitte*¹⁴ überschrieben ist, das Verbindende der vorher getrennt behandelten Kurven gesucht wird. So zeigte Geiser zunächst an einigen Beispielen, dass sich viele der vorher für die verschiedenen Kegelschnitte getrennt bewiesenen Eigenschaften bei allen wiederfinden. Im Anschluss daran behandelte er die Erzeugung der Kegelschnitte durch Polarisierung eines Kreises an einem zweiten (Polarisations-)kreis und bewies unter Nutzung dieses Verfahrens einige Eigenschaften direkt für alle Kegelschnitte gemeinsam (u.a. den Pascalschen Satz).

Dasselbe Ziel verfolgte er dann auch bei der nachfolgenden Betrachtung der Kegelschnitte als ebene Schnitte am Kreiskegel. Er wies dabei zunächst nach, dass sich durch dieses Verfahren gerade die vorher untersuchten Kurven ergeben. Somit können also alle Kegelschnitte als zentralperspektivische Bilder des Kreises aufgefasst und daher alle am Anfang des Buches für den Kreis entwickelten Sätze auf alle Kegelschnitte übertragen werden. Das Verfahren ähnelt also dem von Steiner in der *Systematischen Entwicklung* verwendeten, der Unterschied besteht lediglich darin, wie die Sätze für den Spezialfall des Kreises bewiesen werden.

1.3 Karl Georg Christian von Staudt

Gehen wir nun zu Karl Georg Christian von Staudt und seinem Werk *Geometrie der Lage* über, welches 1847 veröffentlicht wurde. Im Vorwort nannte von Staudt zwei Aspekte, die ihm beim Verfassen des Buches wichtig erschienen. Zum einen handelte es sich dabei um die bereits durch die Wahl des Titels ausgedrückte Hinwendung zum Aspekt der Lage. Staudt sagte dazu im Vorwort: „Man hat in den neuern Zeiten wohl mit Recht die Geometrie der Lage von der Geometrie des Masses unterschieden, indessen gleichwohl Sätze, in welchen von keiner Grösse die Rede ist, gewöhn-

¹⁴ vgl. Geiser 1867, S. VIII

lich durch Betrachtung von Verhältnissen bewiesen. Ich habe in dieser Schrift versucht, die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf.“¹⁵ Ihm ging es also darum, in seiner gesamten Ausarbeitung auf das Messen zu verzichten. Ein Beispiel für die von ihm angesprochenen Sätze, die keine Aussagen über (Längen- oder Winkel-) Größen enthalten, aber dennoch durch Nutzung von Zahlverhältnissen bewiesen werden, ist der Satz über die Eindeutigkeit des vierten harmonischen Punktes zu drei vorgegebenen Punkten einer Geraden. Dieser Satz wurde beispielsweise von Steiner in seiner *Systematischen Entwicklung* mit Hilfe des Doppelverhältnisses bewiesen. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, da er die harmonischen Punkte gerade als solche definiert, für die das Doppelverhältnis den Wert 1 annimmt.¹⁶ Um dies zu vermeiden, ging von Staudt den Weg, harmonische Punkte mit Hilfe des vollständigen Vierecks zu definieren und über den Desargueschen Satz zu zeigen, dass zu drei gegebenen Punkten genau ein vierter harmonischer Punkt existiert.¹⁷

Das zweite Anliegen von Staudts macht die gedankliche Nähe zu Steiner deutlicher. Auch ihm ging es darum, in der Geometrie von allgemeinen Grundsätzen, Prinzipien und Begriffen auszugehen. Dies begründete er einerseits damit, dass nur auf diese Weise der Lernende von Beginn an einen Überblick über das gesamte Gebiet sowie Verständnis für die einzelnen Sätze und vor allem deren Verhältnis zueinander entwickeln könne. So wollte er beispielsweise die Ähnlichkeit von ebenen Figuren als Spezialfall von kollinearverwandtschaft ebener Systeme verstanden wissen.¹⁸ Ein anderer wichtiger Grund für die Verwendung allgemeiner Begriffe war für ihn die Förderung der geometrischen Anschauung. Als Beispiel verwies von Staudt hier auf die große Bedeutung des Gesetzes der Reciprocität, welches viel mehr als jede einzelne Aufgabe dazu anrege, sich „durch eigene Thätigkeit Gebilde zur Anschauung zu bringen“¹⁹, indem man zu bereits bekannten Sätzen die reciproken (d.h. dualen) sucht. Von inhaltlicher Seite betrachtet war das Ziel des von Staudtschen Buches die Behandlung der Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Dabei ist die Darstellung sehr stark durch die Nutzung der projektiven Verwandtschaft geprägt, die von Staudt sowohl in der Ebene als auch im Raum anwendete. Er ging zunächst in Analogie zum

¹⁵ von Staudt 1847, S. III

¹⁶ vgl. Steiner 1832, S. 18ff; Steiner verwendet keine gerichteten Strecken. Im Zweifelsfall dient ihm eine Zeichnung zur eindeutigen Festlegung eines Punktes.

¹⁷ vgl. von Staudt 1847, S. 43

¹⁸ vgl. von Staudt 1847, S. III und S. 203

¹⁹ von Staudt 1847, S. IV

Vorgehen Steiners von so genannten Grundgebilden aus und untersuchte die Eigenschaften projektiver Abbildungen dieser aufeinander. Wegen des bereits erwähnten Verzichts auf die Nutzung des Doppelverhältnisses verstand er unter projektiven Abbildungen solche, die harmonische Gebilde auf harmonische Gebilde abbilden. Von besonderer Bedeutung ist dabei die projektive Abbildung *ebener Systeme* aufeinander, wobei unter einem ebenen System die Menge aller *Strahlenbüschel* und aller *geraden Gebilde*²⁰ einer Ebene verstanden wird. Hierbei können nun zwei Fälle unterschieden werden, nämlich *kollineare* und *reziproke Systeme*. Bei ersteren entspricht jedem Strahlenbüschel des einen Systems ein Strahlenbüschel des anderen Systems (also jeder Geraden eine Gerade) bzw. jedem geraden Gebilde des einen Systems ein gerades Gebilde des anderen Systems (jedem Punkt entspricht ein Punkt). Bei reziproken Systemen ist es genau umgekehrt, Strahlenbüschel entsprechen geraden Gebilden und gerade Gebilde entsprechen Strahlenbüscheln. Von Staudt wies nun nach, dass bei zwei reziproken Systemen in einer Ebene (ein so genanntes Polarsystem) entweder kein Punkt (in diesem Zusammenhang Pol genannt) auf der ihm zugeordneten Geraden (seiner Polaren) liegt oder die Menge der Punkte, die mit ihren Polaren inzidieren, eine Kurve bildet (vorher hat er bereits ebene Kurven behandelt). Diese Kurven definierte er dann als Kurven zweiter Ordnung.²¹ Zur Definition der Flächen zweiter Ordnung nutzte von Staudt räumliche Polarsysteme, bei denen jedem Punkt des Raumes eine Ebene und jeder Ebene ein Punkt zugeordnet wird.

Ebenso wie Steiner war auch von Staudt davon überzeugt, dass die Geometrie der Lage den Schulunterricht beeinflussen müsse: „Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterrichte in der Geometrie des Masses das Wesentliche aus der Geometrie der Lage voranzuschicken, damit ihre Schüler gleich Anfangs denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständniss der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist.“²²

²⁰ Ein *gerades Gebilde* besteht aus den Punkten einer Geraden. Eine andere übliche Bezeichnung war *Punktreihe*.

²¹ vgl. von Staudt 1847, S. 137

²² von Staudt 1847, S. IV

1.4 Theodor Reye

Die große gedankliche Nähe Theodor Reyes zu von Staudt zeigt sich bereits in der Übereinstimmung der Titel ihrer Werke. Im Vorwort des ersten Teils (in erster Auflage erschienen 1866) unterstrich er dies dann in aller Deutlichkeit. „Und die Art, wie Herr von Staudt, im Gegensatz zu allen übrigen Autoren der neuern Geometrie, diese Wissenschaft begründet, scheint mir so bedeutende Vortheile zu gewähren, dass ich auch ohne anderweitige Veranlassung sie jeder andern vorziehen würde.“²³ Erwähnt werden muss noch, dass der Ursprung des Reyeschen Textes in einer Vorlesung liegt, welche dieser am Polytechnikum in Zürich für Ingenieur-Studenten angeboten hatte. Diese Vorlesung (Titel: *Geometrie der Lage*) diente dazu, den Hörern eine Einführung in die Methoden der „Neueren Geometrie“ zu geben, die Karl Culmann²⁴ als Grundlage für die Entwicklung neuer Konstruktionsmethoden in der Statik verwendete, welche er offenbar auch in seinen Vorlesungen vermehrt einsetzte.

Dieser Hintergrund spielt auch bei den Gründen eine Rolle, die Reye für die Behandlung der „Neueren Geometrie“ im Sinne von Staudts anführte. Dabei betonte er besonders den Beitrag des Geometrieunterrichts zur Ausbildung des Vorstellungsvermögens, was für die zukünftigen Ingenieure von größter Wichtigkeit sei. Gerade durch den Verzicht auf sämtliche Rechnungen, die wegen ihres eher routinemäßigen Charakters eigentlich nichts mit Geometrie zu tun hätten und zur Förderung der Raumanschauung keinen Beitrag leisteten, könnten hier insgesamt bessere Ergebnisse erreicht werden.

Als weiteren Vorteil führte Reye an, dass „das wichtige, so ungemein fruchtbare Gesetz der Dualität oder Reciprocität, von welchem die ganze Geometrie der Lage beherrscht wird, in seiner vollen Reinheit und in seinem ganzen Umfange zur schönsten Geltung“²⁵ komme. Dies sei in der Geometrie des Maßes in dieser Weise nicht möglich und daher könne das Gesetz dort nicht seine volle Wirkung entfalten, nämlich den Lernenden zur Selbsttätigkeit anzuregen. Da es in der Geometrie des Raumes noch viel stärker zum Tragen komme als in der Ebene, habe er bewusst auf die Trennung von Planimetrie und Stereometrie verzichtet. Ihm ging es also auch um die damals so genannte "Fusion" von ebener und räumlicher Geometrie.

²³ Reye 1866, S. VI

²⁴ Culmann war von 1855 bis 1881 Professor für Ingenieurwissenschaften am Polytechnikum.

²⁵ Reye 1866, S. IX

Als Schwierigkeit in von Staudts Werk führte Reye die besondere Kürze der Darstellung an, die sich nur auf das Notwendigste beschränke und dem Leser keinerlei Beispiele liefere. Zudem werde durch die strenge Systematik ein hoher Grad an Abstraktheit erreicht, der Anfänger überfordere. Daher sah er von Staudts Buch eher als ein Nachschlagewerk der „Neueren Geometrie“ (genauso wie Euklids Elemente für die „Geometrie der Alten“) denn als Lehrbuch. Ein weiteres Hindernis sah er in den hohen Anforderungen, die an das räumliche Vorstellungsvermögen gestellt würden. Da dieses aber gerade durch den Lehrgang gefördert werden sollte, könnten in diesem Bereich für den Lernenden nicht alle Probleme ausgeräumt werden. Zur Unterstützung im Lernprozess plädierte Reye jedoch im Gegensatz zu von Staudt für den Einsatz von Abbildungen.

Von inhaltlicher Seite behandelte Reye im ersten Band hauptsächlich die projektive Beziehung der Grundgebilde erster Stufe (*gerades Gebilde, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel*) und die Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung. Diese führte er im Gegensatz zu von Staudt über in einer Ebene liegende projektive, aber nicht perspektive Punktreihen ein (analog zu Schröter). Der zweite Band beschäftigte sich dann mit der *kollinearen* und *reziproken Verwandtschaft* ebener Systeme sowie den aus den Grundgebilden projektiv erzeugten Kurven und Flächen höherer Ordnung.

Interessant sind noch einige Bemerkungen, die Reye in der sich im ersten Band an das Vorwort anschließenden Einleitung machte. Hier grenzte er die „Geometrie der Lage“ von weiteren Zweigen der Geometrie ab. Dabei nannte er als erstes Charakteristikum den Verzicht auf das Messen. „Von der Geometrie der Alten und der analytischen Geometrie unterscheidet sich die reine Geometrie der Lage wesentlich dadurch, dass sie von dem Begriff des Maasses keinen Gebrauch macht. Im Gegensatz zu ihr wird daher die ältere Geometrie auch wohl Geometrie des Maasses genannt.“²⁶ Reye setzte hier also die Geometrie der Antike („Ältere Geometrie“) mit dem Begriff „Geometrie des Maßes“ gleich. Nicht ganz klar wird, ob er im Umkehrschluss auch für eine Gleichsetzung von „Neuerer Geometrie“ und „Geometrie der Lage“²⁷ plädierte, da er ja explizit von der „reinen Geometrie der Lage“ (vollständiger Verzicht auf Maße) sprach. Ein Anhaltspunkt dafür ist auch der Beginn der Einleitung, wo Reye im ersten Satz von der „Geometrie der Lage“ und zwei Sätze weiter im selben Zusammenhang von „Neuerer Geometrie“ sprach.

²⁶ Reye 1866, S. 1

²⁷ Damit meinte er möglicherweise Steiners Ansatz, bei Beweisen Maßbeziehungen zu nutzen.

Eine enge Verbindung sah Reye zur darstellenden Geometrie (Zentral- und Parallelprojektion), da sie ebenso wie die „Geometrie der Lage“ hohe Anforderungen an das räumliche Vorstellungsvermögen stelle und die Lage der betrachteten Objekte eine stärkere Rolle spiele als Größenbeziehungen. Zudem habe die Zentralprojektion auch eine große Bedeutung für die „Geometrie der Lage“ und viele Begriffe seien aus der darstellenden Geometrie entnommen.

Zuletzt kam Reye nochmals auf die Abgrenzung zur analytischen Geometrie zurück, wobei er hier wieder von der „Neueren Geometrie“ redete: „Zu der analytischen Geometrie steht die neuere Geometrie in einem gewissen Gegensatze schon durch ihre Methode, welche die aus der Geometrie der Alten Ihnen schon bekannte synthetische ist.“²⁸ Er führte dann aus, dass bei diesem Vorgehen aus einer geringen Zahl von Grundgebilden und deren Beziehungen (einem Axiomensystem entsprechend) alle weiteren Objekte und deren Eigenschaften entwickelt werden, wobei mit-schwingt, dass sich diese Entwicklung gewissermaßen natürlich ergibt. Das analytische Vorgehen („mit räumlichen Gebilden rechnen“²⁹) könne wegen des Verzichts auf alle Maßbeziehungen nicht zum Einsatz kommen. Und er ging schließlich noch einen Schritt weiter, wenn er sagte: „Die neuere Geometrie wird wegen der in ihr angewendeten Methode vielfach im Gegensatz zu der analytischen mit dem Namen „synthetische Geometrie“ bezeichnet“³⁰. Die Abgrenzung zur analytischen Geometrie wog bei dieser Benennung also schwerer als möglicherweise dadurch hervorgerufene Verwechslungen mit der antiken Geometrie, da er die synthetische Methode ja vorher als ein Charakteristikum dieser vorgestellt hatte. Abschließend betonte er nochmals den hohen Grad von Allgemeinheit, der sich aus der Verwendung der synthetischen Methode für die Aussagen der „Neueren Geometrie“ ergebe und brachte eine Reihe von Beispielen, die dies untermauern sollten.

Zur Frage der Aufnahme der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht nahm Reye in der anlässlich seines Eintritts in das Rektorat der Universität Straßburg 1886 gehaltenen Rede *Die synthetische Geometrie im Alterthum und in der Neuzeit* sehr deutlich Stellung: „Damit aber ist die Antwort auf die Frage gegeben ob die neuere synthetische Geometrie in die höheren Schulen einzuführen ist oder nicht. Ihre Einführung ist unabweislich; Bildungselemente, welche zu den besten und fruchtbarsten der elementaren Mathematik gehören, dürfen unserer Jugend nicht vorenthalten

²⁸ Reye 1866, S. 3

²⁹ Reye 1866, S. 3

³⁰ Reye 1866, S. 3

bleiben zu Gunsten anderer minderwerthiger; durch Ausscheidung der letzteren können sie nach meiner Ueberzeugung ohne neue Belastung den Schülern der oberen Classen zugänglich gemacht werden.“³¹

1.5 Moritz Pasch

Eine weitere Quelle zur Klärung der Frage, was mit dem Begriff „Neuere Geometrie“ gemeint war, ist der Anfang von Moritz Paschs Buch *Vorlesungen über neuere Geometrie* von 1882. Im Vorwort führte er zunächst aus, dass seiner Auffassung nach die Grundlagen der Geometrie immer aus der Erfahrung gewonnen und daraus alle weiteren Aussagen abgeleitet werden müssten. Er plädierte also durchaus für einen axiomatischen Aufbau, was er auch in seinem Buch (in viel größerem Maße als die bislang genannten Autoren in ihren Werken) umgesetzt hat. Sodann ging Pasch auf die von ihm behandelten Inhalte ein, wobei er deutlich herausstellte, dass dabei „die projectiven Eigenschaften der Figuren“³² im Zentrum ständen. Gemäß dem axiomatischen Aufbau beginnt die Darstellung mit den Grundbegriffen und Grundsätzen, woran anschließend perspektiv liegende Figuren, harmonische Gebilde, die kollineare und reziproke Verwandtschaft und schließlich das Doppelverhältnis behandelt werden. Pasch war demnach kein Anhänger des absoluten Verzichts auf metrische Beziehungen. Im Großen und Ganzen handelt es sich also um Inhalte, die man auch bei den bisher erwähnten Autoren findet. Der Unterschied besteht jedoch darin, dass Pasch an keiner Stelle die Kurven oder Flächen zweiter (oder höherer Ordnung) erwähnte, was ja bislang das Gemeinsame aller Darstellungen war. Hinzu kommt, dass er im letzten Kapitel des Buches homogene Koordinaten einführte und so die Verbindung zur analytischen Geometrie herstellte.

In einer sich an das Vorwort anschließenden Einleitung ging Pasch dann noch auf die Beziehung der „Neueren Geometrie“ zur antiken und zur analytischen Geometrie ein. Dabei vertrat er die Auffassung, dass die Unterschiede zwischen der „Neueren Geometrie“ und der antiken (Pasch spricht hier von der „Geometrie der Alten“) relativ gering seien, während sich die analytische Geometrie stärker davon abhebe. Er begründete das damit, dass zwar ein Teil der „Geometrie der Alten“ (die so genannten

³¹ Reye 1886, S. 48

³² Pasch 1882, S. 3

„Elemente“ oder auch „elementare Geometrie“) das für die analytische Geometrie notwendige Vorwissen vermitteln. Dies bedeute allerdings nicht, dass beide in den Inhalten übereinstimmen, sondern die analytische Geometrie setze die elementare Geometrie fort. Der größte Unterschied bestand laut Pasch jedoch in den benutzten Methoden, da die elementare Geometrie sich hauptsächlich auf die Konstruktion stütze und die Zahlen nur dann zu Hilfe nehme, „soweit die Natur des Problems sie bedingt“³³. In der analytischen Geometrie sei hingegen das erklärte Ziel, möglichst viele Aufgaben durch Berechnungen zu lösen.

Für einen anderen Zweig der Geometrie, der sich ebenfalls auf die Elemente gründe und deren Inhalte weiterführe, sei laut Pasch der möglichst weitgehende Verzicht auf Berechnungen charakteristisch. „Diese Schöpfung, welche ihre Hilfsmittel unmittelbar aus der Natur des Gegenstandes entnahm, wurde von der elementaren und von der analytischen Geometrie als reine, höhere, synthetische, auch neuere synthetische oder neuere unterschieden.“³⁴ Bei ihr bestehe wegen der grundsätzlichen methodischen Herangehensweise eine engere Beziehung zur elementaren Geometrie. Jedoch gebe es im Einzelnen auch Unterschiede. So zeichne sich die „Neuere Geometrie“ dadurch aus, dass in ihr die Begriffe möglichst weit und umfassend gewählt würden. Außerdem könne man bei denjenigen Sätzen, bei deren Beweis man in der elementaren Geometrie verschiedene Fälle unterscheiden müsse, mit einem einzigen (alle Fälle umfassenden) Beweis auskommen. Für die Zukunft erhoffte sich Pasch eine Einwirkung der „Neueren Geometrie“ auf die elementare Geometrie (für die analytische Geometrie hatte eine solche seiner Meinung nach schon stattgefunden, was auch seine Behandlung der homogenen Koordinaten erklärt), wobei er insbesondere an zwei Stellen Änderungen sehen wollte. Einmal solle durch die Nutzung von „erweiterten Begriffen“ die „Schwerfälligkeit“ der Darstellung beseitigt werden, so dass diese „durchsichtiger“ und „einfacher“ werde. Weiterhin könnten durch die Berücksichtigung der „Neueren Geometrie“ die „Unvollkommenheit oder Unklarheit, welche den Begriffen und Beweisen in ausgedehntem Maasse noch anhaften“³⁵ ausgeräumt werden. Daher plädierte er dafür, sich auch in den Elementen stärker auf die „Reinheit der Entwicklung“ zu konzentrieren, wofür die „Neuere Geometrie“ als Vorbild diene: „Die erweiterten Begriffe sind auch in den Elementen verwendbar, und

³³ Pasch 1882, S. 1

³⁴ Pasch 1882, S. 1

³⁵ Pasch 1882, S. 2

wenn man sie an der rechten Stelle einführt, nämlich überall da, wo zuerst ihr Verständniss möglich ist, dann tritt auch früher schon ihr Nutzen zu Tage.“³⁶

1.6 Hermann Hankel³⁷

Zuletzt soll noch auf die Bemerkungen zur historischen Entwicklung der Geometrie eingegangen werden, die Hermann Hankel in der Einleitung zu seinem Buch *Die Elemente der Projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung* (1875) machte. Diese Einleitung hat einen Umfang von über 33 Seiten und kann daher fast als eigenständige Abhandlung angesehen werden. Hankel begann dabei mit der Geometrie der Antike, die er als „Geometrie der Alten“ bezeichnete und für ihren streng logischen Aufbau sowie ihren Beitrag zur Schulung des Denkens im Mathematikunterricht lobte. Allerdings gab es für ihn auch negative Aspekte, deren gemeinsame Wurzel er im Fehlen von allgemeinen Prinzipien und Methoden sah. Die ganze Geometrie bestehe aus einer (logisch korrekten) Aneinanderreihung von Aussagen, zwischen denen kein innerer Zusammenhang erkennbar sei. Dadurch werde an vielen Stellen ein zu großer Aufwand getrieben, da sich viele Aussagen eigentlich auf eine Kernaussage zurückführen ließen, und zusätzlich werde die Beziehung der einzelnen Resultate nicht erkannt. Als Beispiel für ersteres führte Hankel Apollonius' Bücher über den Verhältnisschnitt (*de sectione rationis*) an, in denen ein und dieselbe Aufgabe für 80 verschiedene Lagen der beteiligten Geraden und Punkte bewiesen werde. Er fasste zusammen: „So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit die wahre Einfachheit auf, welche in der Einheit der Principien besteht, und erreicht eine triviale sinnliche Anschaulichkeit auf Kosten der Erkenntniss

³⁶ Pasch 1882, S. 2

³⁷ Die von Hankel mit Nachdruck vertretene Überlegenheit der projektiven Geometrie gegenüber der Euklidischen war wohl im wissenschaftlichen Bereich eher eine Außenseiterposition. So merkte Felix Klein rückblickend an: „Wegen der Leichtigkeit und Eleganz, mit der die projektive Geometrie von wenigen Anfangsbegriffen rasch zu vielsagenden Sätzen aufsteigt, wurde sie nämlich von ihren begeisterten Anhängern häufig überschätzt. Man glaubte, auf diesem Wege könne man die schwierigen Untersuchungen axiomatischen Charakters vermeiden, wie sie der euklidischen Geometrie von alters her anhafteten. So behauptet Hankel in seiner rednerisch glänzenden, sachlich aber unzureichenden Antrittsrede in Tübingen 1869, die neuere Geometrie sei der „Königsweg“ unserer Wissenschaft, den Euklid zu Unrecht dem König Ptolemäus gegenüber in Abrede gestellt habe [...]. Euklid behält dennoch recht: es gibt keinen „Königsweg“ in der Mathematik.“ (Klein 1956, S. 135) Die von Klein angesprochene Antrittsrede spielt im folgenden Kapitel noch eine Rolle.

vom Zusammenhang geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage.“³⁸

Im großen Unterschied dazu sah Hankel die analytische Geometrie, die die auf dem Gebiet der Arithmetik und Algebra im 15. Jahrhundert gemachten Fortschritte bezüglich umfassenderer Methoden, der Ableitung des Speziellen aus dem Allgemeinen und der Zusammenfassung von einzelnen Sätzen zu übergeordneten Aussagen auf die Geometrie übertrug. Der Preis sei jedoch gewesen, dass man sich nun einseitig darauf konzentrierte, alle Probleme durch Rechnung zu lösen, und die Geometrie mehr und mehr zurückgedrängt wurde.

Als Reaktion darauf entwickelte sich zuerst in Frankreich unter dem Einfluss von Monge die darstellende Geometrie („Géométrie descriptive“), wobei diese vor allem das Bedürfnis der Techniker nach brauchbaren Zeichnungen befriedigen sollte. Dies konnte die analytische Geometrie nicht leisten. Die darstellende Geometrie brachte zwei große Fortschritte. Sie schuf „den bis dahin unbekanntem Begriff der geometrischen Allgemeinheit und der geometrischen Eleganz.“³⁹ Damit meinte Hankel, dass im Unterschied zur „Geometrie der Alten“ nicht unbedingt eine bildliche Darstellung (er spricht hier vom „Wust der Figuren“) notwendig sei, sondern durch die Beschreibung allein ein geistiges Bild entstehen könne. Dazu trage auch die von Monge geschaffene neue Art der Bezeichnung der geometrischen Objekte bei, so dass die Darstellung insgesamt an die bereits in der Analysis erreichte Eleganz heranreiche. Die „geometrische Allgemeinheit“ bezog sich darauf, dass es in der darstellenden Geometrie nicht darauf ankomme, in welchem Lageverhältnis sich die betrachteten Objekte befinden. Das Ziel war, alle Aufgaben in völliger Allgemeinheit zu behandeln und im Anschluss daran durch Betrachtung von speziellen Konstellationen weitere Sätze als Spezialfälle abzuleiten. Hilfreich ist dabei auch die Verwendung von imaginären Größen, die aus der Analysis übernommen und nun geometrisch interpretiert werden. Hankel beschrieb das folgendermaßen: „So verschaffte sich die Geometrie in allen ähnlichen Fällen eine Freiheit der Bewegung, die, vom Standpunkte der alten Geometer angesehen, einer wahren Zügellosigkeit glich und die bisherige Evidenz und Solidität der Geometrie im höchsten Grade zu gefährden schien. In der That konnte jenes Princip, das Poncelet später das der Continuität genannt hat, insofern

³⁸ Hankel 1875, S. 2

³⁹ Hankel 1875, S. 5

es die verschiedenen konkreten Fälle in einen Zusammenhang setzt, geometrisch nicht bewiesen werden“⁴⁰.

Parallel zur Entwicklung der darstellenden Geometrie durch Monge sah Hankel noch eine andere Richtung, nämlich die von Carnot geschaffene „Géométrie de position“. Während sich erstere hauptsächlich mit den Gestaltverhältnissen beschäftigte, ging es bei der zweiten mehr um die Größenverhältnisse, die bei Schnitten mit Transversalen auftreten. Aus diesem Grunde stehe sie der antiken Geometrie näher, allerdings sei auch bei Carnot das Bemühen um möglichst allgemeine Aussagen zu erkennen.

Die „Géométrie descriptive“ und die „Géométrie de position“ bilden die Grundlage für die „Neuere Geometrie“, die von Poncelet während der russischen Kriegsgefangenschaft (1812-1814) begründet und 1822 mit dem Werk *Traité des propriétés projectives des figures* der Öffentlichkeit vorgestellt wurde. Die Untersuchung von „projectivischen Eigenschaften“ ebener Figuren stehe laut Hankel im Mittelpunkt von Poncelets Untersuchungen, d.h. solche Eigenschaften, die bei Zentralprojektion invariant bleiben. Dies können sowohl Eigenschaften der Lage als auch des Maßes sein, wobei methodisch so vorgegangen werde, dass eine Aussage zunächst an einer einfachen Figur (gewissermaßen für einen Spezialfall) mit elementaren Mitteln bewiesen und anschließend durch Projektion auf den allgemeinen Fall übertragen werde. Dies ist also vergleichbar mit der von Geiser am Ende seines Buches genutzten Methode. Neben der Projektion seien laut Hankel noch zwei weitere Ideen grundlegend für Poncelets Werk. Einmal die Betrachtung von „homologen Figuren“, die man dadurch erhalte, dass bei einer Zentralprojektion die Urbild- und die Bildebene um ihre Schnittgerade so lange gedreht werden, bis sie zusammenfallen. Dies ist im Grunde ein Spezialfall der kollinearen Verwandtschaft von Staudts, ein Beispiel für homologe Figuren ist die Konfiguration des Satzes von Desargues. Die zweite grundlegende Idee ist die von Pol und Polare (also die reziproke Verwandtschaft), welche Poncelet zum Auffinden neuer Sätze nutzte und von Gergonne als „Prinzip der Dualität“ bezeichnet wurde.

Im Anschluss daran ging Hankel auf die Beiträge ein, die von deutschen Geometern für die Weiterentwicklung der Geometrie erbracht wurden. Er nannte zunächst Möbius, der mit der Einführung der „barycentrischen Koordinaten“ zum ersten Mal homogene Koordinaten benutzt und damit einerseits die analytische Geometrie vorange-

⁴⁰ Hankel 1875, S. 9

bracht habe. Darüber hinaus habe er die Koordinaten aber auch zum Auffinden von Sätzen benutzt, die zwar zum großen Teil metrische Verhältnisse betreffen, „aber solche, welche nicht von den Grössen- und Winkelverhältnissen der Figuren, vom Winkelmaass und Magister Matheseos, wie es Möbius (1823) selbst ausdrückt, sondern ausschliesslich von deren descriptiven, d.h. nur auf die Lage bezüglichen Constructionsverhältnissen abhängen“⁴¹, und diese Sätze anschließend auch rein geometrisch bewiesen. Außerdem entwickelte Möbius die Ideen Carnots zum umfassenderen „Princip der Zeichen“ (also eine Strecke je nach Durchlaufrichtung als positiv oder negativ anzusehen) weiter und begründete die Idee der geometrischen Verwandtschaft. Daher sei Möbius auch als Vertreter der „Neueren Geometrie“ anzusehen.

Anders sehe es hingegen bei Plücker aus, dessen Arbeiten sich ausschließlich auf das Gebiet der analytischen Geometrie bezogen. Allerdings sprach Hankel in diesem Zusammenhang von der „neueren analytischen Geometrie“, die es ermögliche, mit den Gebilden selbst zu operieren und sich daher an die synthetische Geometrie angenähert habe. Als Beitrag zur „Neueren Geometrie“ scheint Hankel dies aber nicht anzusehen.

Das bereits oben besprochene Werk Jacob Steiners *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* stellte für Hankel eine Art Zäsur dar. Er sprach in diesem Zusammenhang von zwei Perioden der „Neueren Geometrie“, wobei sich erstere mit den Kegelschnitten und den Flächen zweiter Ordnung beschäftigt habe und durch Steiners Werk zum Abschluss gekommen sei. Die zweite, die die Kurven und Flächen höherer Ordnung umfasse, sei Gegenstand der aktuellen Forschung und solle nicht näher beleuchtet werden. Bei Steiners Werk stellte Hankel besonders das Bemühen heraus, die wenigen fundamentalen Gebilde und Prinzipien zu finden, aus denen sich dann quasi von selbst alles Weitere ableite: „In dem schönen Satze, dass ein Kegelschnitt durch den Durchschnitt zweier collinearer (projectivischer) Büschel erzeugt werden kann und dem dazu dualen erkannte er das Fundamentalprincip, aus dem sich alle die unzähligen, bisher oft so wunderbaren Eigenschaften dieser merkwürdigen Curven, wie von selbst, mit spielender Leichtigkeit ergeben.“⁴²

Zuletzt erwähnte Hankel noch die Beiträge von Staudts und Chasles', wobei letzterer vor allem durch sein Buch *Aperçu historique sur l'origine et le développement des*

⁴¹ Hankel 1875, S. 23

⁴² Hankel 1875, S.26f

méthodes en géométrie von 1837, in dem er die zuvor von Möbius und Steiner gefundenen Zusammenhänge darstellte, zur Verbreitung der „Neueren Geometrie“ beitrug. Er lobte von Staudt für die in der *Geometrie der Lage* verwirklichte Reinheit der Methode, kritisierte aber zugleich, dass es dadurch unter einer gewissen Einseitigkeit leide (da der Aspekt des Maßes nicht auftrete) und das ganze System etwas gekünstelt wirke. Hankel war auch der Überzeugung, dass ein solches Werk nicht von einem Franzosen hätte geschrieben werden können, da dazu einmal ein gewisses Maß an „wissenschaftlicher Pedanterie“ und weiterhin die Ruhe eines möglichst abgeschiedenen Ortes wie Erlangen (Paris könnte diese nicht liefern) notwendig sei. Am Schluss seiner Ausarbeitung stellte Hankel noch einmal die wichtigsten Aspekte zur Abgrenzung der „Neueren Geometrie“ von anderen geometrischen Zweigen zusammen. Dabei betonte er zunächst die Unterschiede zur analytischen Geometrie (treffender wäre für ihn der Begriff „Koordinatengeometrie“), nämlich „dass sie mit den geometrischen Gebilden selbst und nicht mit deren algebraischen Gleichungen operiert, dass sie deren Eigenschaften durch räumliche Constructionen entdeckt und beweist, nicht aber durch algebraische Verbindung ihrer Symbole.“⁴³ Allerdings sah er auch, dass sich beide Zweige im Laufe der Zeit angenähert haben (vermutlich meint er die Einflüsse Plückers) und konnte sich vorstellen, dass diese Entwicklung weitergehe. Weitaus größere Unterschiede stellte Hankel zwischen der „Neueren Geometrie“ und der antiken Geometrie fest, wenn er auch die Betonung der Anschaulichkeit und das direkte Arbeiten an den geometrischen Objekten als verbindende Elemente sah. So gründete sich für ihn die antike Geometrie in weiten Teilen auf den Satz des Pythagoras und den Winkelsummensatz, ihre Sätze bezögen sich fast ausschließlich auf Strecken- und Winkelverhältnisse und sie nutze für Konstruktionen Zirkel und Lineal. Die „Neuere Geometrie“ hingegen kenne den Pythagoras nicht, ihre Sätze behandelten nur Lageverhältnisse und solche metrischen Verhältnisse, die allein von der Lage abhängen, und es werde ausschließlich mit dem Lineal konstruiert. Zudem suche die antike Geometrie nur die Eigenschaften ähnlicher und kongruenter Figuren, während die neuere die bei Projektion invarianten Eigenschaften studiere. Daher können für Hankel auch die Begriffe „Geometrie der Lage“ und „projectivische Geometrie“ als Synonyme für „Neuere Geometrie“ verwendet werden. Vorsichtig müsse man seiner Meinung nach aber mit der Benutzung des Begriffs „synthetische Geometrie“ sein. Verstehe man nämlich unter der synthetischen Me-

⁴³ Hankel 1875, S.31

thode den Gang vom Einzelnen zum Allgemeinen und umgekehrt unter der analytischen Methode den vom Allgemeinen zum Speziellen, so seien sowohl die „Neuere Geometrie“ als auch die Koordinatengeometrie analytisch, die antike Geometrie synthetisch. Verwende man hingegen den Begriff „Analysis“ für die Teile der Mathematik, die mit Berechnungen und veränderlichen Größen zu tun haben, und nenne aus diesem Grunde die Koordinatengeometrie „Analytische Geometrie“, so könne Hankel auch die Bezeichnung „Synthetische Geometrie“ für den Zweig akzeptieren, der die geometrischen Objekte selbst untersuche. Als noch besser geeignet empfand er aber den Namen „constructive Geometrie“.

1.7 „Neuere Geometrie“ alias projektive Geometrie

Versucht man nun, in den dargestellten Positionen eine Antwort auf die eingangs gestellte Frage *Was ist „Neuere Geometrie“?* zu finden, fallen zunächst die bei nahezu allen Autoren auftretenden gemeinsamen Leitideen auf, die sich vor allem auf das methodische Vorgehen beziehen:

- systematische Erzeugung
- Ordnung
- Allgemeinheit
- Operieren mit den Gegenständen selbst
- Anschaulichkeit

Von inhaltlicher Seite finden sich viele Anknüpfungspunkte zur projektiven Geometrie, die allerdings damals noch unter vielen verschiedenen Aspekten betrachtet und nicht nur im Sinne der modernen Auffassung (d.h. vereinfacht als "Euklidische Geometrie mit hinzugefügten Fernelementen") gesehen wurde. So ist bei vielen Autoren die grundlegende Idee der Projektion noch zu erkennen, die einmal dazu dient, geometrische Gebilde aus möglichst einfachen Grundgebilden zu erzeugen (im Sinne einer *genetischen* Geometrie). Außerdem ging es ihnen um die Untersuchung der unter Projektion invarianten Eigenschaften der Figuren. Damit sind gewissermaßen durch die Auswahl einer Methode (das Projizieren) die zu betrachtenden Gegenstände und weitgehend auch der Aufbau der Geometrie festgelegt. Ein anderer Zugang stellte die Phänomene „Continuität“ und „Reciprocität“ und deren uneingeschränkte Gültigkeit (gewissermaßen axiomatisch) an den Anfang und entwickelte von diesen

ausgehend alle weiteren Zusammenhänge. Auch die als Alternativen zum Begriff „Neuere Geometrie“ verwendeten Bezeichnungen rücken jeweils einen für den jeweiligen Autor besonders wichtigen Teilaspekt in den Vordergrund. Der Ausdruck „Geometrie der Lage“ unterstreicht, wenn auch nicht in der Radikalität von Staudts, die Unterschiede zur „Geometrie des Maßes“, d.h. die weitestgehende Konzentration auf Aussagen über die Lage der geometrischen Objekte zueinander.⁴⁴ Dazu gehört auch, dass alle Konstruktionen nur mit dem Lineal ausgeführt werden können. Außerdem werden die geometrischen Figuren als beweglich angesehen (*bewegliche Geometrie*), d.h. man untersucht, welche Eigenschaften einer Figur bei einer Veränderung der Lage einzelner Bestandteile erhalten bleiben bzw. wie sich die Figur verändert, wenn man einzelne Teile bewegt. Der Begriff „synthetische Geometrie“ betont (in Abgrenzung zur „analytischen Geometrie“) den Verzicht auf die Verwendung von Koordinaten.

Trotz dieser unterschiedlichen Schwerpunkte ist davon auszugehen, dass schon recht früh im fachwissenschaftlichen Bereich eine weitgehend einhellige Auffassung davon bestand, was unter „Neuerer Geometrie“ zu verstehen sei, und der Begriff im Laufe der Zeit mehr oder weniger synonym mit der Bezeichnung *projektive* bzw. *projektive Geometrie* verwendet wurde.

1.8 „Neuere Geometrie“ im Kontext der Technischen Hochschulen

Schaut man sich die Biografien der oben genannten Autoren etwas genauer an, fällt auf, dass bei vielen eine Verbindung zum technischen Bildungswesen bestand. So arbeitete Jakob Steiner ab 1827 als Lehrer an der Gewerbeakademie in Berlin, die 1879 in der Technischen Hochschule aufging. Auch Karl Georg Christian von Staudt war vor seiner Tätigkeit an der Universität Erlangen an der Polytechnischen Schule in Nürnberg beschäftigt. Carl Friedrich Geiser studierte und lehrte ab 1870 am Polytechnikum in Zürich. Sein Vorgänger dort war seit 1863 Theodor Reye, der von Zürich aus an die Technische Hochschule in Aachen wechselte (1870-1872).⁴⁵

Die darstellende Geometrie (*géométrie descriptive*) im Sinne Monges wurde in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts sehr schnell in die Unterrichtsgegenstände der

⁴⁴ Wenn auch durch die (teilweise implizite) Annahme weiterer "Axiome" (z.B. bezüglich der Stetigkeit) keine reine Inzidenzgeometrie vorlag, ging es dennoch hauptsächlich um Inzidenzaussagen.

⁴⁵ vgl. Gottwald u.a. 1990

polytechnischen Schulen und der technischen Hochschulen aufgenommen, weil die Ingenieure sie als ihre „Sprache“ verwendeten⁴⁶. Darüber hinaus wirkte sie gewissermaßen identitätsstiftend für die Mathematik der Polytechnika: „Speziell die mathematischen Disziplinen [...] haben zufolge der von Seiten der Technik an sie gestellten Forderungen einen Ausbau ihrer graphischen, konstruktiven und rechnerischen Untersuchungen erfahren, der von den Arbeiten von Monge und Poncelet auf geometrischen Gebieten beginnt, in den genialen Arbeiten Culmanns eine Ausdehnung auf mechanische Aufgaben erfahren hat und heute in den verschiedenartigsten, weitausgebauten konstruktiven und rechnerischen Methoden dem Techniker als wichtiges Werkzeug zur Verfügung steht.“⁴⁷ Daher nahm die darstellende Geometrie gegenüber den anderen (ebenfalls für die Studierenden aller Fachgebiete obligatorischen) mathematischen Teilgebieten⁴⁸ eine herausgehobene Stellung ein und bildete dort gewissermaßen den Kern der Mathematikausbildung, was sich u.a. am Umfang der vorgesehenen Lehrveranstaltungen zeigte.⁴⁹ Ein Teil der Unterrichtszeit entfiel dabei auf praktische Übungen im Zeichnen, die „Technische Hilfskräfte“ und „Assistenten“ sowie Zeichensäle erforderten.⁵⁰ Ihren herausgehobenen Status an den Polytechnika behielt die darstellende Geometrie bis in die 1890er Jahre.

Seit den 1860er Jahren entwickelte Wilhelm Fiedler, der von 1863 bis 1867 an der Technischen Hochschule in Prag und ab 1867 am Züricher Polytechnikum eine Professur für darstellende Geometrie innehatte, ein Konzept zur Verbindung der darstellenden mit der projektiven Geometrie, wobei die letztere als Hintergrundtheorie für erstere dienen sollte. Fiedlers Ideen zielten beispielsweise darauf ab, die Zentralkollineation als Hilfsmittel für die darstellende Geometrie zu etablieren: „Das System der darstellenden Geometrie muss diese Constructionsmethoden der centralen Collineation oder der räumlichen homographischen Transformation in sich aufnehmen und es ist gewiss, dass sie in allen ihren Theilen davon grosse Vortheile zu ziehen im Stande sein wird. Das Letztere ist in vielem Einzelnen längst bekannt, und es kann nicht ausbleiben, dass auch die systematische Einführung der betreffenden Theorien der neueren Geometrie in die darstellende Geometrie vollzogen werden wird, weil sie

⁴⁶ vgl. Hensel u.a. 1989, S. 28f

⁴⁷ Lexis 1904b, S. 16

⁴⁸ Elementarmathematik, analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung

⁴⁹ vgl. Lexis 1904b; Dies war ein großer Unterschied zu den Universitäten, wo die Analysis den Kern der mathematischen Ausbildung darstellte. Man vergleiche dazu die beispielhaften Angaben zum Umfang der *Darstellenden Geometrie* und der *Höheren Mathematik* für Bauingenieure an den Technischen Hochschulen im Anhang.

⁵⁰ Beides war damals an den Universitäten unüblich, was ein weiteres Unterscheidungsmerkmal zwischen diesen und den Technischen Hochschulen darstellt.

eben dieser Letzteren naturgemäss angehören.“⁵¹ Dadurch sei man an den Punkt gekommen, „wo die neuere Geometrie sich an die wissenschaftliche Sphäre der technischen Lehranstalten anschliesst, der die darstellende von jeher angehört. Dass sie den Ingenieur-Wissenschaften manichfaltige noch unvorhergesehene Dienste leisten wird, ist zuversichtlich zu erwarten.“⁵² Fiedlers Bemühungen wurden nach seinem Wechsel nach Zürich noch zusätzlich dadurch befördert, dass dort Karl Culmann (von 1855 bis 1872 Professor für Ingenieurwissenschaften in Zürich) in der graphischen Statik die „Neuere Geometrie“ verwendete und bei den Hörern seiner Vorlesungen entsprechende Kenntnisse voraussetzte.

Die Verwendung der „Neueren Geometrie“ als Hilfsmittel der darstellenden Geometrie und der graphischen Statik im Sinne Fiedlers wurde an den deutschen technischen Hochschulen, wenn auch nicht in so starkem Maße wie in Zürich, weitgehend positiv gesehen und daher umgesetzt. Ein Grund für diese Entwicklung war sicherlich der Einfluss Reyes, der sich nach seinem Wechsel nach Aachen 1870 für die entsprechende Umgestaltung der dortigen Lehrpläne einsetzte.⁵³ Auch nach seinem Weggang nach Straßburg blieb er seiner Position treu und betonte in der bereits erwähnten Rektoratsrede die hilfreiche Rolle der Zentralprojektion, die er als Grundlage der projektiven Geometrie ansah, für die darstellende Geometrie: „alle in der descriptiven Geometrie üblichen Projectionsarten, insbesondere die Darstellung von Gegenständen durch Grundriss und Aufriss, sind in der Centralprojection als Specialfälle mit enthalten.“⁵⁴

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass der „Neueren Geometrie“ im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts an den Polytechnika eine große Bedeutung zugemessen wurde. Dies und der nahezu zeitgleich stattfindende Ausbau des realistischen Schulwesens, der gerade mit dem Ziel einer angemessenen Vorbereitung auf das Studium an den Polytechnika erfolgte, bildeten eine der Voraussetzungen für die im Folgenden dargestellte Aufnahme der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht.

⁵¹ Fiedler 1863, S. 445

⁵² Fiedler 1864, S. 355; Diese Erwartung Fiedlers hat sich langfristig nicht erfüllt, da die rechnerischen Verfahren schließlich die Oberhand gewannen. (vgl. Scholz 1989)

⁵³ vgl. Hensel u.a. 1989, S. 28f

⁵⁴ Reye 1886, S. 42

Kapitel 2

Reform des Geometrieunterrichts hin zur „Neueren Geometrie“

Mit der zunehmenden Verbreitung der „Neueren Geometrie“ wurden im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts Stimmen laut, die sich für die Einführung ihrer Inhalte in den Schulunterricht einsetzten. Neben den bereits zitierten Fachwissenschaftlern kamen entsprechende Vorschläge auch von einigen engagierten Lehrern¹, die für entsprechende Reformschritte im Geometrieunterricht plädierten. Gründe, die für die Berücksichtigung der „Neueren Geometrie“ genannt wurden, waren zum einen die bessere Vorbereitung der Schüler auf die Anforderungen im Studium und zum anderen die Annahme, die „Neuere Geometrie“ sei für die Vermittlung in der Schule besser geeignet als die bis dahin übliche (alte) Geometrie des Euklid. Allerdings gab es auch kritische Stimmen, die sich vehement gegen die vorgeschlagene Reform aussprachen. Ich möchte im Folgenden versuchen, beide Positionen darzustellen und auch aufzeigen, um welche Inhalte sich die Diskussion drehte (d.h. was man in Bezug auf den Schulunterricht unter „Neuerer Geometrie“ verstand). Dabei sei im Vorhinein angemerkt, dass die schon bei der Betrachtung in Kapitel 1 aufgezeigte Vielschichtigkeit des Begriffs „Neuere Geometrie“ in diesem auf die Schule abzielenden Diskurs noch vergrößert wurde. Es ging hier nämlich nicht mehr nur um die Bearbeitung neuer mathematischer Inhalte, sondern in starkem Maße auch um methodische Veränderungen. Diese bezogen sich sowohl auf die Behandlung der Inhalte als auch auf die Unterrichtsmethodik. Im Laufe der Zeit gewann der letzte Aspekt immer stärker an Bedeutung, während die neuen Inhalte mehr und mehr an den Rand gedrängt wurden.²

Die Diskussion um die schulische Umsetzung der „Neueren Geometrie“ war eingebettet in eine generelle Debatte über Veränderungen im Geometrieunterricht, die eine Abkehr von der bis dahin üblichen Orientierung an den *Elementen* des Euklid zum Ziel hatte. Rückblickend bemerkte Peter Treutlein³ dazu im Jahre 1911: „Indem

¹ Diese waren mehrheitlich an den realistischen Anstalten beschäftigt, wie den Biografien der im Folgenden zitierten Personen zu entnehmen ist.

² Dieser Aspekt wird insbesondere in Kapitel 4 deutlich.

³ Peter Treutlein wurde am 26.1.1845 in Wieblingen geboren und studierte ab 1862 in Heidelberg Mathematik und Naturwissenschaften. Ab 1866 war er als Lehrer in Karlsruhe tätig, wo er zwei Jahre später zum Professor am Realgymnasium ernannt wurde, das er ab 1894 als Direktor leitete. Daneben kämpfte er aktiv für die Gleichberechtigung der realistischen Lehranstalten mit den Gymnasien und engagierte sich in der Reformbewegung für den Mathematikunterricht, wobei er insbesondere für die Idee der "Fusion" von Planimetrie und Stereometrie eintrat. Treutlein war auch

der Gymnasialunterricht, als er überhaupt anfang, der Mathematik mehr Beachtung zu schenken, das Werk des Euklid als Führer und Lehrbuch übernahm, ihm anfangs sklavisch folgend, später doch jedenfalls ziemlich eng sich daran anlehnend, übernahm man in den Unterrichtsbetrieb auch vier Dinge, die für diesen Betrieb kennzeichnend wurden, lange scharf kennzeichnend geblieben und dies zum guten Teil noch heute sind. Diese vier Merkmale geometrischen Unterrichtes sind: 1) der bekannte viel gerühmte und nicht selten hart geschmähte streng dogmatische Lehrvortrag, 2) die scharf durchgeführte Trennung der allgemeinen Raumgeometrie von der ebenen Geometrie, 3) die Rückschiebung der Raumbetrachtung gegen das Ende des ganzen üblichen Lehrganges und 4) die Voranstellung der abstrakteren Lehren über Geraden und Ebenen vor die Betrachtung der körperlichen Raumgebilde.“⁴

Um diese von Treutlein angesprochenen Nachteilen des Geometrieunterrichts nach der Methode Euklids zu beheben, wurde unter anderem vorgeschlagen, Planimetrie und Stereometrie zu "fusionieren" und einen anschaulichen, propädeutischen Geometrieunterricht in der Mittelstufe einzuführen. Letzteres forderte Jakob von Falke schon im Jahr 1866: „Eine wahre Propädeutik darf nicht mit Abstraktionen anfangen, sie muss vielmehr Schritt für Schritt von dem Concreten ausgehend an alle die Abstraktionen gewöhnen, welche die Geometrie später verlangt; sie darf den Schüler nicht bloß mit trockenen Definitionen abspeisen, sie muss ihm auch das Wesentlichste von den in Grundsätzen und Sätzen ausgesprochenen geometrischen Wahrheiten darbieten; sie muss ihn auch mit den wichtigsten geometrischen Aufgaben und deren Lösungen bekannt machen, und ihn endlich noch in den geometrischen Beweis so einführen, dass derselbe in seiner streng mathematischen Fassung in Wirklichkeit vorbereitet ist; sie muss mit einem Worte ganz allmählig so in die Geometrie selbst übergehen, dass man gar nicht sagen kann, wo die Propädeutik aufhört und die eigentliche Geometrie beginnt.“⁵

Eine andere Gruppe von Kritikern des Euklidischen Stils bemängelte die Starrheit der Figuren, d.h. die Vernachlässigung von Bewegungen in der Geometrie. Zudem kritisierten sie, dass es in der Euklidischen Behandlungsweise zu viele Ausnahmen gebe, die zu einer unnötigen Komplizierung beitragen würden. Als Alternative schlugen die Kritiker vor, die oben bereits erwähnte „Neuere Geometrie“ in den

Mitglied des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU) und einer der drei deutschen Vertreter in der Internationalen mathematischen Unterrichtskommission (IMUK). Er starb am 26.7.1912 in Karlsruhe. (vgl. Schönbeck 1994)

⁴ Treutlein 1911, S.70f

⁵ Falke 1866, S.10f

Schulunterricht einzuführen, um die genannten Mängel aufzuheben. Diesen Ansatz möchte ich nun genauer vorstellen.

2.1 Die Diskussion innerhalb der ZmnU

Die Diskussion über die „Neuere Geometrie“ spielte sich in weiten Teilen in der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (im Folgenden mit ZmnU abgekürzt) ab, die im Jahre 1870 zum ersten Mal von J. C. V. Hoffmann herausgegeben wurde und sich als erste Zeitschrift im deutschsprachigen Raum speziell mit Fragen der Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften beschäftigte. Daneben wurden jedoch auch immer eher fachwissenschaftlich orientierte Beiträge abgedruckt, die keinen direkten Bezug zum Schulunterricht hatten. Während unter der Leitung Hoffmanns die didaktischen Aspekte vergleichsweise stark berücksichtigt wurden, verschoben sich ab dem 1902 erschienenen 33. Band (Übernahme der Leitung durch Heinrich Schotten) die Prioritäten mehr in Richtung Fachwissenschaft. Hoffmanns starkes Eintreten für didaktische Fragen wurde im Rückblick nicht von allen Lehrern gutgeheißen. So führte Wilhelm Lorey 1910 aus: „Auch der damalige Herausgeber der Zeitschrift für mathematischen Unterricht [gemeint ist Hoffmann] ließ manches doch recht Bedenkliche, wie man geradezu sagen muß, Unwissenschaftliche zu Worte kommen, was seiner Zeitschrift mitunter für den Fernstehenden einen Charakter gab, der sich für ein Blatt für höhere Schulen, die doch durch die Wissenschaft für das Leben erziehen, nicht eignete.“⁶ Eine erneute Verschiebung in die andere Richtung brachte allerdings 1914 der Eintritt von Walther Lietzmann, der sich ab dem 45. Band die Herausgeberschaft mit Schotten teilte. Am Anfang dieses ersten von ihm mitverantworteten Bandes machte Lietzmann in einer kurzen Einführung deutlich, dass aus seiner Sicht wieder verstärkt didaktische Fragen in den Blick genommen werden sollten: „Die Zeitschrift soll ein Mittelpunkt lebendigen Austausches von Erfahrungen und Gedanken über mathematische Erziehung sein und gleichzeitig eine Stelle, die die Gesamtheit der Fragen mathematischen Unterrichts, die in der Literatur der Gegenwart auftauchen, im Auge behält und darüber getreulich berichtet.“⁷

⁶ Lorey 1911, S. 52

⁷ Lietzmann 1914, S. 2

Diese Akzentverschiebungen erklären einige der im Folgenden dargestellten Zusammenhänge.

2.1.1 Sturms erster Artikel: Der Ausgangspunkt der Debatte

Gleich im ersten Band der ZmnU (1870) erschien ein Artikel mit dem Titel *Die neuere Geometrie auf der Schule* von Dr. Rudolf Sturm⁸, in dem dieser sich sehr deutlich für die Einführung der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht aussprach. Der Artikel beginnt folgendermaßen: „Euklid hatte einst seinem Könige Ptolemäus, der das mühsame Studium der „Elemente“ zu abschreckend fand, mit dem ganzen Stolze eines Gelehrten erwidert: „Es giebt keinen Königsweg zur Geometrie.“ Wir aber können hinzufügen: Die neuere Geometrie ist dieser Königsweg, sie „hat den Organismus aufgedeckt, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind,“ und hat, wie wir ohne Uebertreibung sagen können, das Ideal einer Wissenschaft beinahe erreicht.“⁹ Gleich zu Beginn seiner Ausführungen machte Sturm also klar, dass er die „Neuere Geometrie“ für allen bisherigen Ideen überlegen hielt. Dies begründete er im weiteren Verlauf des Artikels näher, indem er ausführte, dass seiner Meinung nach die Geometrie der Antike nur Spezialfälle behandelt habe. Die antiken Geometer hätten sich nur mit dem „synthetisch fortschreitenden Entwicklungsgang“¹⁰ beschäftigt und daher „fehlen ihnen allgemeine Pincipien und Methoden“¹¹. So käme es, dass sie Probleme, die eigentlich nur verschiedene Fälle ein und derselben Aufgabe darstellten, getrennt voneinander lösten, anstatt sie auf ein gemeinsames Grundproblem zurückzuführen. Sturm kam zum Ergebnis: „So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit die wahre Einfachheit auf, welche in der Allgemeinheit der Principien, und die wahre Anschaulichkeit, welche in der Erkenntniss des Zusammenhangs geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller

⁸ Rudolf Sturm (1841-1919) arbeitete nach seiner Promotion (1863) in Breslau, in der er einige von Steiner aufgestellte Sätze über Flächen dritten Grades bewies, neun Jahre lang als Lehrer am Gymnasium von Bromberg. In dieser Zeit blieb er wissenschaftlich aktiv (u.a. erhielt er zusammen mit Luigi Cremona im Jahr 1866 den Steiner-Preis der Berliner Akademie); er wechselte schließlich 1872 als Professor für darstellende und neuere Geometrie an die Technische Hochschule Darmstadt. Es folgten weitere Stationen in Münster (1878) und Breslau (1892), wo er die Nachfolge seines Lehrers Heinrich Schröter antrat (vgl. Ludwig 1926, S. 41)

⁹ Sturm 1870b, S. 474

¹⁰ Sturm 1870b, S. 474

¹¹ Sturm 1870b, S. 475

Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage beruht.“¹² Und er verglich in anschaulicher Weise das Lösen eines mathematischen Problems mit dem Zerkleinern eines Felsblocks: der griechische Mathematiker erledige dies in mühevoller Arbeit mit Hammer und Meißel, während der moderne Mathematiker nur wenige Gänge in den Stein treibe, die letztlich das gesamte Gebilde zum Zerbersten brächten.

Nun ist zu bemerken, dass Sturm alle bisher gemachten Aussagen dem bereits in Kapitel 1 erwähnten Vortrag entnommen hat, den Hermann Hankel bei seinem Eintritt in den akademischen Senat der Universität Tübingen 1869 gehalten hatte und der im selben Jahr unter dem Titel *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten* in schriftlicher Form herausgegeben wurde.¹³ Das Urteil Hankels über die Vorzüge der „Neueren Geometrie“ empfand Sturm als besonders wichtig, da sich der Zitierte seiner Auffassung nach hauptsächlich mit Fragen aus dem Gebiet der Analysis beschäftigt hatte (was die Darstellung der Biografie Hankels durch Moritz Cantor in der Allgemeinen Deutschen Biographie (Band 10 (1879), S. 516-519) belegt)¹⁴. Aus diesem Grunde sei Hankel im Stande, ein objektives und neutrales Urteil zu fällen. Allerdings ist es so, dass neben den von Sturm zitierten Stellen, die die Verbannung der Euklidischen Geometrie aus den Schulen stützen, in Hankels Werk auch andere Passagen zu finden sind. Diese lassen erkennen, dass Hankel keineswegs die Auffassung vertrat, dass unter dem Eindruck von neuen mathematischen Entwicklungen die älteren keine Bedeutung mehr hätten und vergessen werden könnten. So schrieb er beispielsweise: „Bei einer so konservativen Wissenschaft, als die Mathematik, welche die Arbeiten früherer Perioden nie zerstört, um an ihre Stelle neue Gebäude aufzuführen, ist es begreiflich, dass man eine Zeit nicht ohne Beziehung zur Vergangenheit betrachten kann“¹⁵ und an anderer Stelle (nachdem er die Entwicklung der Mathematik seit der Antike dargestellt hatte): „So ist denn der schöne gewaltige Bau entstanden, dessen Anblick den Mathematiker mit Stolz erfüllt; denn fest gegründet, auf unerschütterlichen Fundamenten steigt er planmässig, durch jenen wissenschaftlich-ästhetischen Tact geleitet, gewaltig empor“¹⁶. Meines Erachtens wird aus diesen Zitaten deutlich, dass Hankel keineswegs glaubte, die

¹² Sturm 1870b, S. 475

¹³ Die Abhandlung Hankels und vor allem die auch von Sturm zitierten Aussagen wurden von mehreren Lehrern als Argumente für die „Neuere Geometrie“ herangezogen.

¹⁴ Gleichzeitig war Hankel aber auch an der projektiven Geometrie interessiert. (vgl. Kapitel 1 und Hankel 1875)

¹⁵ Hankel 1869, S. 6

¹⁶ Hankel 1869, S. 34

historische Entwicklung der Mathematik unbeachtet lassen zu können.¹⁷ Vielmehr maß er auch den einzelnen Stufen, die zum aktuellen Stand geführt haben, eine Bedeutung zu. Dies verschwieg Sturm jedoch völlig. Er hielt vielmehr ein Nachvollziehen der Entwicklung für unnötig, da man z.B. auch im Unterricht der Chemie nicht auf die Idee käme, mit den ersten Anfängen (in seinen Augen die Alchemie) zu beginnen.

Bedauernd musste Sturm jedoch feststellen: „Im grossen Ganzen hat sich die Umwandlung der Geometrie nur auf den Hochschulen vollzogen: der Unterricht an den höheren Lehranstalten hält sich noch grösstentheils an das Muster der Griechen.“¹⁸ Er vertrat die These, dass die Stellung der Mathematik im Vergleich zu den übrigen Unterrichtsfächern umso wichtiger werde, „je mehr wir uns von der alten Geometrie in der ganzen Behandlungsweise und durch die Aufnahme vieler erst den Neuen zu verdankenden Wahrheiten freigemacht haben.“¹⁹ Dies hielt Sturm in allen höheren Schulformen für sinnvoll; er empfahl zu Gunsten einer Ausweitung des Geometrieunterrichts, aus dem gymnasialen Lehrplan Themen aus der Algebra (höhere Reihen, Kettenbrüche, diophantische Gleichungen) zu streichen. Noch viel wichtiger war Sturm jedoch eine Veränderung im Unterricht der Realschulen (er meint damit wohl die Realgymnasien und Oberrealschulen), die auf das Studium an technischen Hochschulen vorbereiten sollten, denn deren Schüler „verlangen ferner ein gut ausgebildetes räumliches Anschauungsvermögen: also ist gerade auf den Realschulen die reine Geometrie viel mehr angebracht, als die jetzt vorgeschriebene analytische, deren Formelwesen die Anschauung meistens unterdrückt“²⁰. Ein Problem sah Sturm in der Ausbildung der Lehrkräfte, die meist keine Prüfung in synthetischer Geometrie ablegen müssten, sich daher nicht mit ihr beschäftigten und sie folglich nicht an ihre Schüler weitergeben könnten.

Um die fehlenden Kenntnisse bei den zu den höheren technischen Schulen wechselnden Schülern auszugleichen, sei es notwendig (so Sturm), dass diese sogenannten Vorbereitungscollegien durchführten (vergleichbar den heutigen Vorkursen). Aus einem solchen sei das Buch *Einleitung in die synthetische Geometrie*

¹⁷ Dafür spricht auch, dass Hankel ein Buch über Mathematikgeschichte geschrieben hat, das posthum veröffentlicht wurde. (*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig: Teubner 1874)

¹⁸ Sturm 1870b, S. 475f

¹⁹ Sturm 1870b, S. 476

²⁰ Sturm 1870b, S. 476f

(Leipzig, 1869) von Carl Friedrich Geiser entstanden, welches Sturm als besonders gelungen bezeichnete.

Ziel der Reform war es nach Sturm, den gesamten Geometrieunterricht auf eine völlig neue Grundlage zu stellen. Er schrieb dazu: „Aber es ist nicht bloß meine Ansicht, dass am Ende des Schulunterrichts die Leistungen der synthetischen Geometrie verwandt werden sollen, sondern sie soll gleich von Anfang an einwirken“²¹. Und er machte deutlich, in welche Richtung die Veränderungen gehen sollten: „Die alte Euklid'sche Geometrie ist vorzugsweise eine Geometrie des Masses und diesen Charakter hat unsere Schulgeometrie auch mit angenommen: diese muss von der neuern Geometrie, die ja oft geradezu Geometrie der Lage heisst, mehr und mehr eine grössere Berücksichtigung der Lage lernen“²². Dabei berief er sich explizit auf Karl Christian von Staudt, der im Vorwort zur *Geometrie der Lage* bereits gefordert hatte, dem Unterricht in der Geometrie des Maßes die wichtigsten Kapitel aus der Geometrie der Lage voranzugehen zu lassen: „Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterrichte in der Geometrie des Masses das Wesentliche aus der Geometrie der Lage voranzuschicken, damit ihre Schüler gleich Anfangs denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständnis der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist.“²³ Als Beispiele für sinnvolle Veränderungen führte Sturm an: Seiner Erfahrung nach sei es für die Schüler durchaus nachvollziehbar, dass Aussagen, die sich auf die Gleichheit zweier Längen in einer bestimmten Konfiguration beziehen, eines Beweises bedürfen, da die Gleichheit viel "unwahrscheinlicher" sei als die Ungleichheit. Das gelte auch für die Kongruenz (also die Gleichheit) und die Ähnlichkeit von Figuren. Völlig anders sehe es nach Sturm allerdings bei Fragen aus, die sich mit der Lagebeziehung beschäftigen (z.B. ob drei Punkte auf einer Geraden liegen bzw. ob drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen). Auch hier müsse den Schülern vermittelt werden, dass es "wahrscheinlicher" sei, dass für drei Punkte keine gemeinsame Gerade existiere und dass drei Geraden im Allgemeinen ein Dreieck bildeten und nicht durch einen Punkt gingen. Das Auftreten einer besonderen Lage bedürfe also (genauso wie die Gleichheit zweier Längen) eines Beweises. „Es ist kein Grund vorhanden, jener Erkenntnis vor dieser den Vorzug zu geben, aber

²¹ Sturm 1870b, S. 481f

²² Sturm 1870b, S. 482

²³ von Staudt 1847, S. IV

ich glaube mich nicht zu irren, wenn jetzt im Allgemeinen dies geschieht.“²⁴ Als weiteres Beispiel nannte Sturm die Lagebeziehung von Kreis und Gerade, wo das Auftreten der Tangente viel "unwahrscheinlicher" sei als das der Sekante und Passante und daher einer Begründung bedürfe.²⁵

Weiterhin hielt Sturm es für wichtig, im Schulunterricht zu untersuchen, ob durch das Festlegen von bestimmten Bedingungen eine Aufgabe eine endliche Anzahl von Lösungen habe, ob noch unendlich viele Lösungen möglich blieben oder ob die Aufgabe unlösbar werde (vergleichbar mit der sogenannten Determination bei Konstruktionsaufgaben). Beispielsweise führte er aus, dass sich in der Ebene "doppelt unendlich" viele Geraden finden ließen, wenn kein Punkt vorgegeben sei, durch den die Gerade verlaufen solle. Bei einem vorgegebenen Punkt seien es "einfach unendlich" viele, bei zwei Punkten genau eine und bei drei Punkten im Allgemeinen keine. Genauso gebe es bei Vorgabe einer Geraden in einer Ebene "doppelt unendlich" viele Kreise, die die Gerade als Tangente hätten. Bei Vorgabe von zwei Tangenten blieben noch "einfach unendlich" viele Kreise und bei drei Tangenten nur eine endliche Zahl (genauer gesagt sind es im Allgemeinen vier Kreise; falls alle Geraden durch einen Punkt gehen, ist kein Kreis möglich). Zusammenfassend bemerkte Sturm dazu: „die Erkenntniss der Zahl der Lösungen ist ebenso wichtig wie die der Art und Weise ihrer Auffindung, aber auch die, dass nicht unter allen Umständen alle möglich sind, und welche Lage oder Länge der gegebenen Stücke die Lösungen sämtlich oder theilweise unmöglich (imaginär) macht.“²⁶ Und weiter: „Lassen wir so die geometrischen Gebilde aus ihrer Starrheit hervortreten und sich bewegen, verändern und vermehren, so wird dies gewiss wesentlich zur Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens beitragen und dies Lebendigwerden des Materials, mit dem der Schüler zu thun hat, wird sicher sein Interesse auch mehr fesseln.“²⁷

Zuletzt kam Sturm noch auf das Gesetz der Reciprocität (gemeint ist das Prinzip der Dualität in der projektiven Geometrie) zu sprechen, das er ebenfalls im Schulunterricht behandelt sehen wollte. Dabei gab er unumwunden zu, dass eine strenge Begründung in der Schule nicht möglich sei. Dennoch sollte versucht werden, das Prinzip dem Schüler zu verdeutlichen, was nach Aussage Sturms auch schon Gergonne und Cremona gefordert haben sollen (die genaue Quelle erwähnt Sturm leider

²⁴ Sturm 1870b, S. 483

²⁵ Aus moderner Sicht ist Sturms Operieren mit „Wahrscheinlichkeiten“ eher naiv zu nennen.

²⁶ Sturm 1870b, S. 484

²⁷ Sturm1870b, S.484

nicht). Dabei gehe es darum, aus bereits bewiesenen Sätzen die dazu dualen abzuleiten und so eine größere Zahl von Aussagen zu erhalten. Sturm beschrieb den Prozess des Dualisierens so: „Diese Verwandlung eines Satzes in einen andern muss dem Schüler eine grosse Freude bereiten, weil er erfindet und schafft, und wird in der Klärung und Erweiterung seiner räumlichen Anschauung von nichts Anderem übertroffen, wie ich aus meiner eigenen Erfahrung weiss.“²⁸ Und er führte im Folgenden eine sich über drei Seiten erstreckende Liste von dualen Sätzen an, die sich seiner Meinung nach für die Schule eigneten und sowohl die Planimetrie als auch die Stereometrie umfassten. Beispielsweise nannte er im Bereich der ebenen Geometrie die Aussage, dass mehr als drei Punkte im Allgemeinen nicht auf einem Kreis lägen. Die dazu duale Aussage sei dann, dass mehr als drei Geraden im Allgemeinen nicht Tangenten an nur einen Kreis sein könnten. Als Beispiel aus der Raumgeometrie führte er unter anderem an, dass man zu einem Punkt und zwei Geraden, die nicht durch diesen verlaufen, immer eine weitere Gerade finde, die den Punkt enthalte und die beiden ersten Geraden schneide. Die dazu duale Aussage sei: Zu einer Ebene und zwei nicht in dieser liegende Geraden existiert immer eine weitere Gerade, die in der Ebene liegt und die beiden ersten Geraden schneidet.²⁹ Außerdem nannte er die dualen Beziehungen der Platonischen Körper (Hexaeder dual zum Oktaeder, Icosaeder dual zum Pentagondodekaeder, Tetraeder dual zu sich selbst). Sturm schloss seinen Beitrag mit dem Wunsch, dass seine Kollegen die „Neuere Geometrie“ in ihrem Unterricht ausprobieren sollten und diese Versuche positive Einflüsse auf den Geometrieunterricht sowie seine Position und sein Ansehen unter den anderen Lehrgegenständen haben mögen.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass Sturm die „Neuere Geometrie“ (auf wissenschaftlicher Ebene) der Euklidischen überlegen hielt, er auch für die Schule eine vollständige Umwandlung des Geometrieunterrichts vorschlug und dies vor allem mit einer besseren Schulung der Raumanschauung sowie einem für die Schüler interessanteren und einfacheren Zugang begründete.

Ein weiteres Argument für seine These, dass Veränderungen im Geometrieunterricht notwendig seien, lieferte Sturm in einem weiteren Artikel des ersten Bandes der ZmnU (1870) mit dem Titel *Ueber einige Incorrectheiten, die sich in der Sprache, besonders der elementaren Mathematik eingeschlichen haben*. In diesem beschäftigte

²⁸ Sturm 1870b, S. 485

²⁹ Sind die Geraden parallel zur Ebene, so ist die gesuchte Gerade die Ferngerade der Ebene.

er sich unter anderem mit dem falschen Gebrauch des unbestimmten Artikels³⁰, mit einer passenderen Bezeichnung von Winkeln sowie mit den aus seiner Sicht falschen Bezeichnungen und der zu kurzen Formulierung der Lehrsätze in der Arithmetik. Am Schluss des Artikels machte er dann „noch einige Bemerkungen, die vielleicht nicht ganz zum Thema passen, aber hier nebenbei noch ihren Platz finden mögen“³¹. Darin vertrat er die Position, dass derjenige, der sich mit höherer Mathematik beschäftigen wolle, zunächst einiges, was er in der niederen Mathematik gelernt habe, wieder vergessen müsse, weil die unterschiedlichen Sichtweisen unvereinbar seien. Dieses Aufgeben von einmal angenommenen Vorstellungen sah Sturm als sehr schwierig an; er glaubte auch, es widerspräche „dem Charakter der Mathematik ganz und gar, denn dies ist ja eben ihr grosser Ruhm vor den andern Wissenschaften, dass beim Aufbau ihres erhabenen Gebäudes kein Umbau je nothwendig sei“³². Daher forderte er gewissermaßen die Abkehr von der niederen Mathematik in der Schule hin zu einer wissenschaftspropädeutischen Behandlung, was sich insbesondere auf die Behandlung der parallelen Geraden auswirken sollte: „Daher fort mit dem scharfen Gegensatze, den die niedere Geometrie zwischen parallelen und sich schneidenden Geraden bildet und den die höhere wieder aufhebt; parallele und sich schneidende Geraden haben viel mehr Gemeinsames, als Unterscheidendes. Ja, zwei Geraden, die in derselben Ebene liegen, treffen einander entweder in einem erreichbaren Punkte – sie mögen dann convergente oder divergente Gerade heissen – oder in einem unerreichbaren Punkte – dann heissen sie parallele Geraden. Ein Hinweis auf die Eisenbahnschienen wird dem Schüler diese Vorstellung plausibel machen.“³³

2.1.2 Erste Reaktionen auf Sturm

Als Reaktion auf die Artikel Sturms entwickelte sich eine lebhafte Kontroverse, in der es sowohl um inhaltliche Fragen (insbesondere die Existenz des unendlich fernen Punktes einer Geraden und die Frage, ob sich parallele Geraden im Unendlichen schneiden) als auch um die Verwendbarkeit der „Neueren Geometrie“ im Schulunter-

³⁰ Beispiel: Es macht nach Sturm keinen Sinn zu sagen, dass man ein Lot von einem Punkt auf eine Gerade fällt, sondern nur das Lot, da es nur ein einziges gibt.

³¹ Sturm 1870a, S. 276

³² Sturm 1870a, S. 277

³³ Sturm 1870a, S. 277

richt ging; dabei kam es durchaus zu Überschneidungen zwischen den beiden Themenkreisen. Ich möchte im Folgenden nur auf die Beiträge näher eingehen, die einen Bezug zur Schulfrage haben. So veröffentlichte die Redaktion der ZmnU (vermutlich der Herausgeber Volkmar Hoffmann) direkt im Anschluss an den Sturmschen Artikel *Die neuere Geometrie auf der Schule* eine Anmerkung, in der sie die grundsätzliche Kritik Sturms an der Euklidischen Behandlungsweise unterstützte, zugleich aber darauf hinwies, dass diese im Schulunterricht schon gar nicht mehr vorherrschend sei. Vielmehr sei durch die Verwendung der „genetischen Methode“ eine Umgestaltung des bestehenden Lehrgangs erfolgt, wobei aber offenbar an den bestehenden Inhalten festgehalten wurde. Wörtlich heißt es: „Denn der durch die Bewegung vermittelten Genesis der räumlichen Gebilde, welche der Verfasser [gemeint ist Sturm] als begeisterter Anwalt der neueren Geometrie vertritt und warm empfiehlt, und die dadurch nicht nur ermöglichte, sondern sogar gebotene Discussion der Specialfälle eines Problems, kann kein Lehrer der Geometrie, der nur einigermaßen die genetische Methode kennt und befolgt, sich verschliessen. Denn diese Erzeugung der Raumgebilde, dieses „Heraustretenlassen derselben aus ihrer Starrheit“, diese Veranschaulichung ihrer Übergänge, dieses Herausheben der besonderen Fälle aus dem Allgemeinen [...] erzeugt ja eben jene einfache, naturgemässe, sachlich-logische Anordnung der geometrischen Gesetze [...]; und eben diese natürliche Anordnung nach der sachlichen Verwandtschaft der geometrischen Gesetze – sie ist ja der wesentliche Vorzug der genetischen Methode vor der Euklid’schen, deren Hauptschwäche – sachlich-logische Unordnung – zum Theil eben eine Folge jener eisigen Starrheit ist, welche die Figur als ein unbewegliches Gebild aus Stein hinstellt. Dieser Grundmangel der Euklid’schen Geometrie hat aber dem mathematischen Gymnasialunterricht und der Anerkennung seines Bildungswerthes tiefe, zum Theil noch nicht geheilte Wunden geschlagen.“³⁴ Die Redaktion nannte als Vorteile der genetischen Methode gegenüber der Euklidischen die Einsicht in die Entstehung der betrachteten Figuren und damit zusammenhängend den klareren strukturellen Aufbau des gesamten Lehrgebäudes (Rückführung von Spezialfällen auf allgemeine Aussagen). Die Voraussetzung für dieses Verfahren sei die Beweglichkeit der Figuren, was die Starrheit des euklidischen Systems nicht leisten könne. In ihrer Kritik ging die Redaktion dann aber sogar noch einen Schritt weiter als Sturm, da die bei Euklid auftretenden Unzulänglichkeiten von ihr unmittelbar für

³⁴ ZmnU 1870, S. 489f

den schlechten Ruf des gesamten Mathematikunterrichts verantwortlich gemacht werden. In der Frage der sich daraus ergebenden Reformschritte kam man allerdings zu einem anderen Resultat als Sturm: „Wir möchten darum nicht uns allein, sondern zugleich die Mehrheit unserer Fachcollegen (und dies gewiss in ihrem Sinne) von vorn herein von dem Verdachte reinigen, wir lehrten nur Geometrie des Masses oder jene starre Geometrie der Lage des Euklid. Letztere ist für jeden denkenden Lehrer ein überwundener Standpunkt und es ist gerade ein Hauptzweck dieser Zeitschrift, eine rationellere Lehrmethode der Geometrie mit begründen zu helfen. Ja, wir möchten behaupten, ohne dadurch der Verwerthung der sogen. neueren Geometrie im höheren mathematischen Unterricht Abbruch thun zu wollen, dass die sogen. genetische Methode der Geometrie ein notwendiges und natürliches Uebergangsglied zur neueren Geometrie bilde.“³⁵ Der Verfasser der Anmerkung unterschied also zwischen den methodischen und den inhaltlichen Aspekten der „Neueren Geometrie“, wobei er die von Sturm vorgeschlagenen methodischen Veränderungen auf die Nutzung der genetischen Methode verkürzte³⁶. Diese erachtete er allerdings als unabdingbar notwendig und in weiten Teilen bereits umgesetzt. Was den inhaltlichen Aspekt angeht, wird keine klare Positionierung vorgenommen. Hier scheint es dem Verfasser zu genügen, die bisherigen Inhalte nach der neuen Methode zu unterrichten, eine radikale Veränderung hin zu den Inhalten der „Neueren Geometrie“ (also u.a. die Einführung der uneigentlichen Punkte) wurde nicht gefordert.

Eine auf den ersten Blick weitaus kritischere Position vertrat Julius Kober³⁷ ebenfalls im ersten Band der ZmnU (1870) in seinem Beitrag mit dem Titel *Ueber die Definition des Parallelismus*. In seiner Replik auf den Beitrag Sturms ging er vor allem auf die seiner Meinung nach bei der Annahme der wirklichen Existenz des unendlich fernen Punktes auftretenden Schwierigkeiten ein, die letztlich dazu führten, dass dieser Ansatz für den Schulunterricht völlig ungeeignet sei. Kober führte aus: „Denken wir uns eine Eisenbahn ins Unendliche hinausgebaut, so wird doch Niemand sagen wollen, dass die Schienen, wenn auch im Unendlichen, je zusammentreffen würden? dass

³⁵ ZmnU 1870, S. 490

³⁶ Anscheinend versuchte Hoffmann, Sturm im Sinne seiner eigenen Ideen zu funktionalisieren.

³⁷ Julius Kober wurde 1828 in Groß-Saara bei Gera geboren. Nach Besuch des Lyceums in Eisenberg (1839 bis 1844) und des Gymnasiums in Altenburg (bis 1847) studierte er in Jena zunächst Theologie und anschließend Mathematik und Naturwissenschaften. Ab 1854 war Kober Lehrer am Krauseschen Institut in Dresden (eine Privatschule, in der die Schüler bis zur Quarta gemeinsam unterrichtet und anschließend in einen Gymnasial- und einen Realschulzweig aufgeteilt wurden), ab 1872 Oberlehrer an der Fürstenschule in Grimma und ab 1875 Direktor der neu gegründeten Realschule mit Progymnasium in Grossenhain. Er leitete diese Schule bis zu seinem Tod im Jahr 1890. Kober veröffentlichte in den ersten Jahrgängen der ZmnU einige Beiträge zu geometrischen Themen.

also die Locomotive auf ihnen nicht mehr würde stehen können?“³⁸ Sturm hatte vorgeschlagen³⁹, die Existenz des unendlich fernen Punktes dem Schüler an Hand der Eisenbahnschienen, die sich scheinbar im Unendlichen schneiden, plausibel zu machen, was Kober offensichtlich nicht für besonders sinnvoll erachtete. Kober kritisierte weiter, dass sich bei Annahme eines unendlich fernen Punktes, in dem sich alle parallelen Geraden eines Büschels einer Ebene schneiden, die komplette Ebene im Unendlichen in einen Punkt zusammenziehen würde und fragte: „Glaubt der Verfasser [Sturm] damit Wahrheit zu lehren? Und auf Wahrheit kommt es an, nicht auf ein methodisches Princip. Wenn seine parallelen Geraden nach beiden (entgegengesetzten) Richtungen zusammentreffen, so haben sie zwei Punkte gemein, sie schliessen eine Fläche wirklich ein u.s.f. Will der Verfasser damit die Parallelen-theorie, die Planimetrie, beginnen? Glaubt er, dass der Schüler dies verstehen wird? Oder hält er es für statthaft, eine Wissenschaft auf einer Grundlage aufzubauen, die dem Schüler widersinnig erscheint und nur auf künstliche Weise „plausibel“ gemacht werden kann, deren Verständniss erst mit der Zeit, viel später, zu erwarten ist?“⁴⁰ Hier wandte sich Kober also in aller Deutlichkeit gegen die Einführung der uneigentlichen Punkte, wobei seine Begründung sowohl eine inhaltlich-mathematische Dimension (Annahme der uneigentlichen Punkte führt zu Widersprüchen) als auch eine didaktische (Konzept ist für Schüler widersinnig) umfasste. Am Schluss seines Artikels führte Kober dem Leser noch eine Absurdität vor Augen, die sich seiner Ansicht nach zwangsläufig aus der Annahme der uneigentlichen Punkte ergebe und aus moderner Sicht ziemlich bizarr erscheint. Er schrieb: „Consequenter Weise muss der Verfasser auch die Existenz der absoluten Null leugnen, vielmehr sich dieselbe als Differential vorstellen. Er wird also unbedingt lehren: $1:0=\infty$, d.h. wenn man unendlich oft Nichts von Eins wegnimmt, so verschwindet endlich die Eins! Er muss folglich auch in voller Allgemeinheit sagen: $\infty \cdot 0=1$ oder irgend einer endlichen Zahl. Schwerlich wird er aber damit einen Knaben überzeugen, dass derselbe, wenn er unendlich oft keinen Apfel bekommt, zuletzt einen hat, weil dieser „keine Apfel“ nur ein unendlich kleiner Theil, ein Differential, eines wirklichen Apfels sei.“⁴¹ Und er schloss seinen Beitrag, auf die von Sturm gemachte Unterscheidung von niederer

³⁸ Kober 1870b, S. 492

³⁹ vgl. Sturm 1870a, S. 277

⁴⁰ Kober 1870b, S. 492

⁴¹ Kober 1870b, S. 492f

und höherer Mathematik Bezug nehmend, mit den Worten: „Die Schwäche liegt also in der Methode der höheren Geometrie, nicht in der niederen“⁴²

Offenbar ist Kobers Kritik hauptsächlich getragen von inhaltlichen (falschen) Einwänden gegen das Konzept der unendlich fernen Punkte. Es scheint so, dass er dieses selbst nicht richtig verstanden hatte und aus dieser Position heraus die Möglichkeiten, die das Konzept bietet, nicht überblicken konnte. Dies zeigt sich zum einen daran, dass er sagt, die komplette Ebene würde in einem einzigen Punkt zusammenschrumpfen. Hier hat er vermutlich die projektive Ebene, in der es viele Punkte im Unendlichen gibt, mit der (modern gesprochen) Einpunktkompaktifizierung der Ebene zur Sphäre verwechselt. Zum anderen stimmt die oben zitierte Aussage nicht, dass bei Annahme der unendlich fernen Punkte parallele Geraden eine Fläche einschließen, da sie zwei Punkte gemeinsam haben. Er glaubte anscheinend, dass jede Gerade zwei unendlich ferne Punkte hat, da man sie in zwei Richtungen durchlaufen kann. Dies widerspricht zunächst Kobers eigener Aussage (Zusammenziehen der Ebene in einem unendlich fernen Punkt) und zeigt zudem, dass ihm nicht klar war, dass in der projektiven Geometrie für jede Gerade nur ein Fernpunkt angenommen wird.

Aus den bislang gemachten Aussagen darf man jedoch nicht schließen, dass sich Kober insgesamt gegen Reformen im Geometrieunterricht aussprach. So besprach er in seinem ebenfalls im ersten Band der ZmnU (1870) erschienenen Artikel *Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe* verschiedene Vorschläge, die Autoren von Lehrbüchern der Geometrie zur Definition der Begriffe Punkt, Gerade und Ebene gemacht hatten. Seine Ausführungen fasste er mit einem Zitat aus einem Lehrbuch von van Swinden⁴³ zusammen: „Es verhält sich mit dieser Erklärung, wie mit allen Erklärungen von Dingen, die zu einfach sind, als dass sie noch einer Erläuterung durch Worte fähig wären, - sie sind alle ungenügend und mehr oder weniger dunkel.“⁴⁴ Eine Gefahr sah Kober im (nach seiner Darstellung zur damaligen Zeit) üblichen Vorgehen, im Geometrieunterricht Euklids *Elementen* zu folgen und am Anfang mit den Schülern die Definitionen der Grundbegriffe zu behandeln. Der Schüler merke direkt, dass die vom Lehrer vorgetragenen Definitionen fehlerhaft seien, und gleichzeitig werde ihm der Eindruck vermittelt, dass diejenigen Vorstellungen, die er

⁴² Kober 1870b, S. 493

⁴³ van Swinden, Jan Hendrik: *Elemente der Geometrie*. Übersetzt und vermehrt von Carl F. A. Jacobi. Jena: Friedrich Frommann 1834

⁴⁴ Kober 1870a, S. 233

sich bislang durch eigene Anschauung von diesen Begriffen erworben habe, falsch und unnütz seien. Darin sah Kober einen Widerspruch zur Forderung, den Unterricht anschaulich zu gestalten und resümierte: „Der gewissenhafte Schüler lernt die Definition auswendig, obwohl er sich kopfschüttelnd fragt, wozu diese nützlich oder nöthig sei, und derselbe Lehrer, der dem Hersagen mit Wohlgefallen zuhört, kämpft für das Princip, nichts Unverstandenes auswendig lernen zu lassen! Man verwirrt also den Schüler, statt ihn aufzuklären; man verleitet ihn schon bei den ersten Elementen zu dem Glauben, dass die Geometrie seinem bisherigen Verständnis ganz fern liege – und will erreichen, dass er mit Lust und Selbstvertrauen die Wissenschaft durch seinen Verstand zu bewältigen suche!“⁴⁵

Als Alternative dazu schlug Kober vor, auf die „Neuere Geometrie“ zurückzugreifen, die nach seiner Auffassung auch in einige der Lehrbücher⁴⁶ aufgenommen wurde, die ansonsten der Euklidischen Methode treu geblieben waren. Wie genau die Umsetzung in den Lehrbüchern aussah, sagte er nicht, jedoch gab er einen kurzen Überblick über den seiner Meinung nach sinnvollen Einstieg in die Geometrie. Dabei legte er vor allem großen Wert darauf, Figuren durch Bewegung bereits bekannter Objekte entstehen zu lassen. Beispielsweise ergebe sich die Linie als Spur eines bewegten Punktes, wobei der Punkt nach Einschätzung Kobers überhaupt nicht definiert zu werden brauche. Zur Definition des Winkels betrachtete er eine Gerade, die um einen ihrer Punkte gedreht wird, wobei die Größe der Drehung als Winkel bezeichnet wird. Ihm ging es also hauptsächlich darum, die bereits etablierten Inhalte des Geometrieunterrichts in anderer Form zu behandeln, die an die Erfahrung der Schüler anknüpft und ihnen so das Lernen erleichtert. Die von Kober angestrebte Veränderung bezog sich also auf die Methode, während die Aufnahme anderer Inhalte eine untergeordnete (vielleicht sogar gar keine) Rolle spielte.

2.1.3 Weitere Reaktionen in Band 2

Die bislang dargestellte Diskussion setzte sich im zweiten Jahrgang der ZmnU (1871) fort, wobei sich der Schwerpunkt eher zu fachlichen Fragen verlagerte und Aspekte der schulischen Umsetzung nur am Rande eine Rolle spielten. Im Zentrum der Auseinandersetzung ging es darum, ob die unendlich fernen Punkte wirklich existieren.

⁴⁵ Kober 1870a, S. 234

⁴⁶ Kober gab keine Lehrbücher an, auf die er sich hier konkret bezog.

tierten (d.h. ob sich parallele Geraden im Unendlichen trafen), ob sie als mathematisches Konzept eine Berechtigung hätten oder generell zu verwerfen seien.

Als Reaktion auf Sturms Artikel zu den „Incorrectheiten“ in der mathematischen Ausdrucksweise im ersten Jahrgang veröffentlichte Johann Carl Becker⁴⁷ den Aufsatz *Zu dem Kapitel von den Incorrectheiten, die sich in die Sprache der Mathematik eingeschlichen haben*. In seiner Antwort auf Sturm bemerkte er zunächst, dass er dessen Artikel grundsätzlich zustimme und selbst bereits in Grunerts Archiv und Schlömilchs Zeitschrift⁴⁸ Aufsätze zu der Thematik der ungenauen Bezeichnungen veröffentlicht habe. Dann aber meinte er feststellen zu müssen, Sturm habe selbst eine solch schlechte Formulierung eingeführt „durch seine Empfehlung der neuen Auffassung der Parallellinien als Linien, die sich in einem „unerreichbaren“ Punkte schneiden.“⁴⁹ Im Anschluss daran stellte er jedoch klar, dass sich seine Kritik nicht gegen das Konzept der unendlich fernen Punkte richte, in dem er viele Vorteile sehe, insbesondere das Zurückführen verschiedener Sätze auf eine Kernaussage. Es solle nur immer klar herausgestellt werden, dass es sich bei den Fernelementen um eine Fiktion handele: „Zwei Gerade schneiden einander im Unendlichen« heißt durchaus nichts anderes, als »sie schneiden sich nicht«.“⁵⁰ Daher plädierte er für die Verwendung des Begriffs uneigentliche Elemente, wie er auch von Reye in seinem Buch verwendet werde. Im Hinblick auf den Schulunterricht vertrat Becker eine dezidiert andere Auffassung als Sturm. Dieser hatte ja mit dem Argument, ein Wechsel der Sichtweise von Parallelen als nichtschneidende Geraden hin zu sich im Fernpunkt schneidende Geraden sei problematisch, dafür argumentiert, den gesamten Geometrieunterricht von Anfang an auf der neuen Sichtweise aufzubauen. Becker hingegen meinte: „Ueberhaupt ist es durchaus nicht notwendig, dass man irgend einen klaren Begriff der

⁴⁷ Johann Carl Becker wurde 1833 in Mainz geboren und besuchte die dortige „Real- und höhere Bildungsanstalt“. Nach der Maturitätsprüfung (1851 in Darmstadt), auf die er sich privatim vorbereitet hatte, studierte er an der Universität Gießen zunächst zwei Semester Jura und danach Naturwissenschaften und Mathematik. Das Studium schloss er 1855 mit der Fakultäts- und Staatsprüfung ab. Da wegen fehlender Angebote eine Anstellung als Lehrer im Staatsdienst nicht möglich war, arbeitete er zunächst als Privatlehrer. Im Zuge dessen kam er 1859 nach Zürich, wo er die sich bietenden Möglichkeiten (vermutlich des Polytechnikums) nutzte, seine Studien fortzusetzen. 1869 übernahm er eine Vertretungsstelle an der Industrieschule Zürich, 1870 wechselte er an das Gymnasium Schaffhausen und wurde schließlich 1873 in den badischen Staatsdienst (Gymnasium Mannheim) aufgenommen. Es folgten noch Stationen an den Gymnasien in Wertheim und Bruchsal. Während seiner Tätigkeit als Lehrer verfasste er mehrere Artikel zu fachwissenschaftlichen Fragen aus dem Gebiet der Geometrie, die u.a. in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erschienen, sowie Lehrbücher für den Geometrieunterricht. Johann Carl Becker starb 1887.

⁴⁸ vgl. Archiv der Mathematik und Physik 38 (1862), S. 345-355 & Zeitschrift für Mathematik und Physik 14 (1869), S. 65-76

⁴⁹ Becker 1871, S. 89

⁵⁰ Becker 1871, S. 90

Elemente erst wieder los werden müsse, wenn man später die höhere Geometrie kennen lernt, wie Herr Dr. Sturm meint. Vielmehr muss man sich im Gegentheile hüten, dass durch die in die höhere Mathematik eingeführten Fiktionen die Grundbegriffe der Elemente nicht getrübt werden.⁵¹ Dem entsprechend ging er auch in seinem *Lehrbuch der Elementargeometrie* (Berlin: Weidmann 1877) so vor, erst nach der Behandlung der Euklidischen Geometrie (Parallelen als sich nicht schneidende Geraden) die projektive Geometrie zu thematisieren. Im restlichen Artikel besprach Becker noch weitere seiner Meinung nach schlecht gewählte Bezeichnungen, die aber für unsere Betrachtung keine Relevanz haben.

Ein weiterer Beitrag mit dem Titel *Noch einmal die neuere Geometrie und die unendlich entfernten Gebilde* wurde von Friedrich Carl Fresenius⁵² ebenfalls im zweiten Band veröffentlicht. In diesem Artikel machte Fresenius zunächst deutlich, dass sich im Laufe der Zeit in verschiedenen Zweigen der Wissenschaft (er nannte Chemie, Latein, Botanik und Zoologie, Geographie, Germanistik) Auffassungen von gewissen Sachverhalten verändert hätten. Die dadurch entstandene Notwendigkeit, das vorher Gelernte an diese neuen Vorstellungen anzupassen bzw. vollständig gegen sie auszutauschen, habe bei einigen Zeitgenossen große Schwierigkeiten verursacht. Beispielsweise führte er aus, er selbst könne sich noch daran erinnern, dass es an deutschen Universitäten Gelehrte gegeben habe, die der Vorstellung, dass Wasser aus Sauerstoff und Wasserstoff bestehe (also eine Flüssigkeit aus zwei Gasen), nichts abgewinnen konnten. Vor eine ähnliche Problematik seien nach Fresenius' Meinung auch die Mathematiker durch die Entwicklung der projektiven Geometrie gestellt: „Was sollen wir Alten aber sagen, wenn nun auch die festesten Säulen wanken, wenn unsre Geometrie gar nicht mehr recht wahr ist und eine neuere, organischere und consequentere auftritt, nicht nur zum Geheimbesitz der Gelehrten, sondern bereits mit dem Anspruch, der Schuljugend eingetrichtert zu werden?“⁵³ Und

⁵¹ Becker 1871, S. 90

⁵² Friedrich Carl Fresenius wurde 1819 in Frankfurt am Main geboren und studierte nach Besuch des Gymnasiums in Frankfurt zwischen 1839 und 1842 an den Universitäten Bonn und Marburg die Fächer Philologie, Philosophie, Naturwissenschaften und Mathematik. Nach der Promotion im Jahr 1842 (Titel der Arbeit: *De curvarum algebraicarum cuspidibus*) arbeitete er bis 1852 an der Benderschen Anstalt (ein 1829 von Dietrich Bender eröffnetes Knabeninstitut) in Weinheim an der Bergstraße. Diese Tätigkeit wurde von 1844 bis 1846 unterbrochen durch einen Aufenthalt in Mailand als Hauslehrer. Von 1852 bis 1855 war Fresenius als Professor der Mathematik am Gelehrtengymnasium in Eisenach, von 1857 bis zu seinem Tod 1876 Professor für Mathematik, Naturwissenschaften und Deutsch an der Höheren Bürgerschule in seiner Heimatstadt Frankfurt am Main tätig. Er veröffentlichte insgesamt 55 Vorträge und Abhandlungen, die sich überwiegend mit pädagogischen Fragen beschäftigen. (vgl. Hoff 1930)

⁵³ Fresenius 1871, S. 495

er sah sogar eine starke Tendenz, dass alle Mathematiker, die weiterhin an der wissenschaftlichen Diskussion teilnehmen wollten, dazu gezwungen seien, die Ideen der „Neueren Geometrie“ zu verwenden. Gleiches habe auch im Bereich der lateinischen Orthographie stattgefunden. Grundsätzlich gab es für Fresenius zwei Arten, auf diese Entwicklung zu reagieren. Einmal bestand für ihn die Möglichkeit, die neuen Konzepte abzulehnen und komplett zu ignorieren (mit der Konsequenz, als antiquiert zu gelten und in der Folge nicht mehr wahrgenommen zu werden). Die andere Alternative sei, sich nur noch um die neuen Ideen zu kümmern und darüber die althergebrachten Vorstellungen zu beseitigen. „Gehört er zu den hartnäckigen Naturen, so fasst er sogleich ein feindseliges Vorurtheil gegen die neue Lehre und beschliesst nach den ersten paar Seiten, die er gelesen, es sei das moderner Schwindel, von dem man keine Notiz zu nehmen habe. Ist er geschmeidig von Sinnesart, so verliebt er sich alsbald ins Neue und beeilt sich alles Alte über Bord zu werfen.“⁵⁴ Für welche der beiden möglichen Reaktionen man sich entscheide, hing für Fresenius sehr stark vom Alter ab. Die Jüngeren wendeten sich seiner Auffassung nach sehr stark dem Neuen zu, während die Alten bei den Theorien blieben, die sie einmal gelernt hätten.

Diese ablehnende Haltung der älteren Generation war für Fresenius nur insoweit nachvollziehbar und wurde von ihm unterstützt, wie sie sich auf die übereilte Einführung in die Schule bezog. Hier hielt auch er es für richtig, den Schülern zunächst die althergebrachten Theorien und Konzepte zu präsentieren und nicht direkt die neuesten Entwicklungen in den Unterricht einzubeziehen. Vielmehr solle noch einmal die geschichtliche Entwicklung der Wissenschaft (hier also der Geometrie) von den Schülern nachvollzogen werden. Fresenius plädierte also für einen historisch-genetischen Aufbau des Unterrichts. Als Begründung für diese Position führte er an, dass es für den Anfänger einfacher sei, sich zunächst mit einzelnen Problemen und Fragestellungen zu beschäftigen. Bevor der Übergang zu den allgemeinen bzw. umfassenderen (und damit laut Fresenius abstrakteren) Aussagen der „Neueren Geometrie“ erfolgen könne, müsse zunächst am Konkreten geübt werden. Er sagte dazu: „Wenn etwas langsame Vorbereitung am Concreten nöthig hat, so ist es das abstrakte Denken. (...) Wieviel mehr wird er [Fresenius] also in der Disciplin selbst der Einzelauffassung der Gebilde vor der Methode des Vorausumfassens bei der pädagogischen Praxis den Vorzug geben. Wenn der Geist reif ist, klebt er von selbst

⁵⁴ Fresenius 1871, S. 495

nicht mehr am Kleinlichen. Aber für immer verpfuscht für Abstraktes wird der Geist werden, der die Stufe des Concreten nie betreten hat.“⁵⁵ Und er führte weiter aus, dass im Anschluss an die Beschäftigung mit den konkreten, speziellen Sätzen in Sekunda oder Prima bei den Schülern von selbst das Bedürfnis entstehe, diese zu umfassenderen Aussagen zusammenzufügen. Die Hinführung zu diesem Punkt könne ohne Weiteres mit den alten Inhalten und Methoden vollzogen werden. Die Notwendigkeit, den Unterricht von Beginn an auf die „Neuere Geometrie“ auszurichten, d.h. den Schülern bestimmte neue Fertigkeiten zu vermitteln, sah Fresenius nicht. Genauso glaubte er (im Gegensatz zu Sturm in seinem Artikel über die „Incorrectheiten“) auch nicht daran, dass die Inhalte der Euklidischen Geometrie denen der „Neueren Geometrie“ im Wege ständen und jemand, der sich zunächst mit ersterer beschäftigt habe, alles Gelernte wieder vergessen müsse, wenn er sich letzterer zuwende.

Im weiteren Verlauf des Artikels ging Fresenius dann hauptsächlich auf inhaltliche Aspekte ein. Er benannte zunächst die „Continuität und Reciprocität“⁵⁶ als die beiden Merkmale, die seiner Meinung nach das Wesen der „Neueren Geometrie“ am stärksten prägten. Dabei verstand er unter „Continuität“ das Bestreben, die Aussagen möglichst allgemein und umfassend zu formulieren, was allerdings auch schon vorher (z.B. im Rahmen der Descartes'schen Geometrie) versucht wurde. Jedoch gestand er der „Neueren Geometrie“ zu, dass sie dabei weiter gekommen sei als ihre Vorgänger. Mit dem Begriff der „Reciprocität“ meinte er das heute unter Dualität bekannte Phänomen der Entsprechung von Aussagen, die sich mit Punkten und Geraden (ebene Dualität) bzw. Punkten und Ebenen (räumliche Dualität) beschäftigen. Den großen Vorteil sah Fresenius darin, dass man dadurch erst auf die Existenz von Sätzen aufmerksam werde, die man sonst übersehen hätte. Jedoch machte er auch deutlich, dass durch das bloße Dualisieren noch nicht der Wahrheitsgehalt der neuen Aussage erwiesen sei. Hierzu bedürfe es eines allgemeinen Beweises des Dualitätsprinzips, was vielfach übersehen werde.

Im Anschluss daran besprach er einige Aspekte der „Neueren Geometrie“, die seiner Meinung nach oftmals von deren Kritikern angeprangert würden. Bei diesen Kritikpunkten unterschied Fresenius für sich „zwischen solchen, bei welchen ein Compromiss mit unsrer gewohnten Anschauung möglich ist und solchen, bei denen

⁵⁵ Fresenius 1871, S. 496

⁵⁶ Fresenius 1871, S. 497

er nicht möglich ist.“⁵⁷ Für grundsätzlich mit der Anschauung vereinbar hielt er zum Beispiel die Aussage, dass sich zwei Parallelen im Unendlichen schneiden. Dies passe zur Beobachtung, dass Geraden, die sich in einem weit entfernten Punkt schneiden, nur schwer von Parallelen zu unterscheiden sind. Neben dieser Beobachtung könne auch eine Betrachtung am rechtwinkligen Dreieck, bei dem sich einer der spitzen Winkel immer mehr einem rechten annähere und der Scheitelpunkt des anderen spitzen Winkels ins Unendliche laufe, dazu genutzt werden, den Schülern (keine Anfänger, sondern Fortgeschrittene) die Existenz von Fernpunkten plausibel zu machen. „Auch der Schüler wird sich dann den Ausdruck gefallen lassen, dass nun der Schnittpunkt mit dem Eintritt der Parallelität ins Unendliche gerückt sei.“⁵⁸ Gänzlich anders sehe es beispielsweise bei der Frage aus, ob jeder Geraden jeweils nur ein unendlich ferner Punkt angehöre oder ob man nicht von zwei verschiedenen Fernpunkten ausgehen müsse (in beiden Richtungen, in denen man die Gerade durchlaufen kann, jeweils einer). Hier war Fresenius mit keiner Veranschaulichung, die von den Befürwortern der „Neueren Geometrie“ vorgebracht wurde, einverstanden. Auch das Argument, dass „Continuität und Reciprocität“ nur einen Fernpunkt pro Gerade zulassen, ließ er nicht gelten, da die beiden Prinzipien willkürliche Forderungen seien.

Zusammenfassend bemerkte Fresenius, dass es seiner Auffassung nach notwendig sei, Anschauung und Vorstellbarkeit ein Stück weit zu verlassen, um die „Neuere Geometrie“ betreiben zu können. Dafür bekomme man auf kürzerem Wege mit weniger Aufwand allgemeinere Aussagen. Dies hielt er als wissenschaftliches Prinzip auch für gerechtfertigt, erinnerte jedoch daran, dass insbesondere im Anfangsunterricht eine enge Beziehung zur Anschauung unerlässlich sei. „Aber wer mit der Jugend, mit der lernenden im Zusammenhang geblieben ist, der wird es auch rätlich und redlich finden, dass er sich aus der andern Sinnesart nicht vertreiben lasse, wo es gilt, auf ebner Erde bleiben und der Realität Rechnung tragen, bis einmal die idealen Flügel gewachsen sind. Darum nicht Feindschaft noch gegenseitige Missachtung!“⁵⁹

⁵⁷ Fresenius 1871, S. 498

⁵⁸ Fresenius 1871, S. 498

⁵⁹ Fresenius 1871, S. 504

2.1.4 Sturms Erwiderung auf die Kritiker

Um sich gegen die von Becker, Kober und Hoffmann vorgebrachten Einwände zu verteidigen und gleichzeitig einige früher gemachte Aussagen zu präzisieren, griff Rudolf Sturm mit dem Artikel *Ueber die unendlich entfernten Gebilde* im zweiten Band erneut in die Diskussion ein. Zu Beginn des Aufsatzes machte er zunächst deutlich, dass er durchaus mit kritischen Reaktionen auf seine Beiträge gerechnet habe. Allerdings sei er eher von Einwänden gegen die Einführung der Fernelemente in den Schulunterricht ausgegangen, während sich die tatsächlich vorliegenden Gegenstimmen fast ausschließlich gegen das Konzept als solches wendeten. Daher habe er sich anfangs gefragt, ob die Kritiker überhaupt mit den Elementen der höheren Geometrie bekannt seien, da mehrere der aufgeworfenen Fragen bereits von einschlägigen Lehrbüchern beantwortet würden. Letztlich sei er aber zu dem Schluss gekommen, dass er ein bestimmtes Maß an Kenntnissen voraussetzen müsse, da er es mit Mathematikern zu tun habe. Mit dieser ziemlich gehässigen Bemerkung ließ Sturm meiner Meinung nach durchblicken, dass er (als immer noch wissenschaftlich Aktiver) sein Wissen über die „Neuere Geometrie“ dem der Kritiker, die ihren Tätigkeitsschwerpunkt im Schuldienst hatten, für weit überlegen hielt und daher aus seiner Sicht keine Auseinandersetzung auf Augenhöhe stattfinden könne. Dazu passt auch seine Aussage, dass er mit seinen Ausführungen nicht das Ziel verfolge, seine Leser zu belehren, „obwohl ich mir vielleicht schmeicheln darf, dass sie diesem oder jenem Leser dieser Zeitschrift grössere Klarheit über einen schwierigen Punkt der Geometrie verschaffen werden.“⁶⁰

Bevor Sturm auf die Kritikpunkte einging, stellte er nochmals heraus, dass sich seine Abhandlung vorzugsweise mit inhaltlichen Fragen beschäftigen werde, was vor dem Hintergrund der geäußerten Kritik auch nachvollziehbar ist. Allerdings machte er dann eine interessante Bemerkung, die einen guten Eindruck von seiner Vorstellung von Mathematikunterricht vermittelt: „Ist erst die Richtigkeit [der neuen Konzepte] festgestellt, so wird die Pädagogik sich fügen und Mittel und Wege finden müssen, um die Anschauung auch den Schülern zur Klarheit zu bringen; darüber habe ich nicht den geringsten Zweifel und ebenso wenig, dass sie es können wird.“⁶¹ Er war also der festen Überzeugung, dass die Einführung der unendlich fernen Punkte in den Schulunterricht zwingend erfolgen werde, wenn alle inhaltlichen Unklarheiten

⁶⁰ Sturm 1871, S. 391

⁶¹ Sturm 1871, S. 392

ausgeräumt seien. Die von Kober und Becker vorgebrachten Einwände, die sich eher auf didaktische Probleme bezogen (z.B. die Überforderung der Schüler mit der Idee der unendlich fernen Gebilde), ließ er völlig außen vor. Hier wird deutlich, dass Sturm trotz seiner Tätigkeit als Lehrer in Bromberg aus der Perspektive des Wissenschaftlers argumentierte, der die Inhalte des Schulunterrichts möglichst eng mit dem aktuellen Stand der Forschung verknüpfen wollte.

Sodann folgte Sturm seiner Ankündigung und antwortete auf die gegen seine Ausführungen vorgebrachte Kritik. Dabei räumte er zunächst ein, dass der von ihm gewählte Begriff „unerreichbar“ im Zusammenhang mit den unendlich fernen Elementen Unklarheiten verursacht habe. Hoffmann hatte 1870 in einer Fußnote zu Sturms Artikel die Frage aufgeworfen, ob damit auch für Gott unerreichbar gemeint sei. Auf eine solche Frage sei Sturm nach eigener Aussage nicht gekommen. Er halte es zwar für nicht statthaft, für eine mathematische Argumentation Gott heranzuziehen, beharre aber auch nicht auf seiner Formulierung und benutze stattdessen den von Reye gebrauchten Ausdruck „uneigentliche Punkte“.

Weiterhin führte Sturm aus, es sei ihm auch nicht darum gegangen, eine Definition für Parallelismus vorzuschlagen (unter Benutzung der unendlich fernen Elemente). Dies könne man ihm schon allein deswegen nicht vorhalten, da er mit seinen Beiträgen den Fokus auf die Verwendung der projektiven Geometrie in der Schule lenken wollte, wo auf exakte Definitionen seiner Meinung nach nicht so viel Gewicht gelegt werden sollte. Die Schüler brächten eine klare Vorstellung von parallelen Linien bereits mit. Die Schule müsse diese Vorstellung schärfen und den Begriff „parallel“ einführen. „Vielleicht lässt man auf diesem Standpunkte es ganz unentschieden, ob die parallelen Linien sich treffen oder nicht: zwei parallele Linien sind solche, die mit einer dritten gleiche Gegenwinkel (correspondirende Winkel) bilden.“⁶² Spätestens an diesem Punkt widersprach Sturm seinen eigenen Aussagen, da er im Artikel *Die neuere Geometrie auf der Schule* ausdrücklich die Einführung der neuen Sichtweise von Beginn an gefordert hatte.

Im weiteren Verlauf des Artikels bemühte sich Sturm hauptsächlich darum, die Auffassung von Parallelen als sich im Unendlichen schneidende Geraden plausibel zu machen. Hinzu kam der Nachweis, dass auf jeder Geraden genau ein unendlich ferner Punkt liegt. Dabei berief er sich nahezu ausschließlich auf die bereits früher thematisierten Phänomene der „Continuität“ und „Reciprocität“, die er anscheinend

⁶² Sturm 1871, S. 393

axiomatisch voraussetzte, um daraus die von seinen Kritikern hinterfragten Sachverhalte abzuleiten (sodass diese nicht mehr hinterfragt werden konnten). In diesem Zusammenhang erlaubte er sich einen erneuten Seitenhieb auf die Lehrer, wobei sein Aufhänger Kobers Aussage von der „Schwäche in den Methoden der höheren Geometrie“ darstellte. „Leicht ist es, von der Schwäche der Methode der höheren Mathematik zu sprechen. Sonderbar ist es freilich, dass dieser Vorwurf gegen die höhere Mathematik sich nicht auch in den Schriften der forschenden Mathematiker findet; diese halten es vielmehr für einen grossen Vorzug der neuern Mathematik, dass sie sich von dem oft kleinlichen Geiste der Untersuchung der Alten frei gemacht hat, und die wahre Einfachheit, welche in der Allgemeinheit der Principien beruht, überall obenan hält.“⁶³ Hier baute er also wiederum einen Gegensatz zwischen Forschern und Nicht-Forschern auf. Die einen waren kompetent, die anderen nicht.

Interessant ist noch zu bemerken, dass Sturm von der Richtigkeit der von ihm vertretenen Auffassung überzeugt war, weil sich diese mit der Anschauung deckte. Alles, was aus der Anschauung abgeleitet sei, bedürfe eigentlich keiner weiteren Begründung. Wenn doch andere Begründungen gesucht würden, dann für solche Leute, die mit der Anschauung noch nicht vertraut seien. Gerade mit dem Argument der Anschaulichkeit plädierten auf der anderen Seite Kober und Fresenius gegen die Einführung der Fernelemente in den Schulunterricht. Weiterhin meinte Sturm nicht, dass sich die neue Vorstellung von Parallelität aus der Anschauung ergebe, sondern diese sei „eine nothwendige Consequenz gewisser allgemeiner Sätze“⁶⁴. Mit letzterem sind wohl wieder „Continuität“ und „Reciprocität“ gemeint, wobei mir völlig unklar ist, wie sich diese abstrakten Begriffe aus der Anschauung gewinnen lassen.

Nachdem Sturm noch gezeigt hatte, dass auch bei analytischer Betrachtung die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden einer Ebene gegen Unendlich gehen, wenn man die Koeffizienten in den die Geraden beschreibenden Gleichungen so ändert, dass diese parallel werden, ging er ganz am Ende seines Beitrags noch einmal kurz auf die Frage der schulischen Umsetzung ein. Auch hier revidierte er einige seiner früheren Aussagen, allerdings ohne dies zuzugeben. So führte er aus, dass die neue Sichtweise von parallelen Geraden seiner Meinung nach für Tertia und Sekunda ungeeignet sei und erst in der Prima eingeführt werden sollte. Dies begründete er damit, dass den Schülern der Tertia noch das Verständnis für die Fernpunkte fehle, während es in Sekunda nicht viele Gelegenheiten dafür gebe, diese zu be-

⁶³ Sturm 1871, S. 398

⁶⁴ Sturm 1871, S. 399

trachten. „In der Prima jedoch, besonders im stereometrischen und in dem aus der neuern Geometrie entlehnten planimetrischen Unterrichte drängt sich die Anschauung aller Orten auf und darf also nicht zurückgewiesen werden.“⁶⁵ Damit räumte Sturm seine frühere Position, den gesamten Mathematikunterricht auf den Inhalten der projektiven Geometrie aufzubauen. Dies gilt selbst dann, wenn man davon ausgeht, dass er mit der „neuen Anschauung“ hier lediglich die Fernelemente meinte, denn ohne diese sind die von Sturm früher angeführten Vorteile der „Neueren Geometrie“ (beispielsweise das Zurückführen von Sätzen auf allgemeinere, Dualisieren in der Ebene und im Raum) nicht umsetzbar. Die Behandlung in Prima begründete Sturm mit den Anforderungen, die laut seiner Aussage an die Mathematikstudenten gestellt wurden. So würden bereits in den für Anfänger konzipierten Lehrbüchern (Sturm nennt als Beispiel die *Analytische Geometrie der Kegelschnitte* von Salmon) Kenntnisse der „Neueren Geometrie“ vorausgesetzt.

Konkrete Vorschläge für den Schulunterricht machte Sturm kaum. Er merkte lediglich an, dass es seiner Meinung nach beim Einstieg in die projektive Geometrie günstig wäre, den Schülern beim Beweis einer Aussage jeweils zwei Beweise zu zeigen (einen Euklidischen und einen projektiven). Die Schulbücher müssten auch dementsprechend gestaltet werden. Seine eigenen Erfahrungen damit schätzte Sturm als noch zu gering ein, als dass er darüber berichten wollte. Wohl auch deshalb forderte er zuletzt die „erfahrenere[n] und geschicktere[n] Collegen“⁶⁶ auf, selbst eigene Versuche im Unterricht durchzuführen und sich auch Gedanken über ein Lehrbuch zu machen.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass Sturm seine Position bezüglich der schulischen Umsetzung innerhalb eines Jahres radikal geändert hatte. Die von ihm an dieser Stelle eingenommene Haltung, die projektive Geometrie am Ende der Schulzeit zu behandeln, ist meines Erachtens mit der seiner Kritiker durchaus vereinbar. Jedoch wurde durch Sturms weitgehend starre Position in den inhaltlichen Fragen und vermutlich auch durch seine unterschweligen Attacken gegen die Lehrer die Diskussion keineswegs einem Konsens zugeführt.

Vielmehr provozierte er Kober zu einer direkt an den Artikel anschließenden Bemerkung, in der dieser wiederum unterschwellig die pädagogischen Erfahrungen Sturms in Zweifel zog. „Schade, dass Herr Sturm seine Schulzeit nicht in Dresden verlebt und unsre Anstalt als Schüler besucht hat. Dann würde er wahrscheinlich den gröss-

⁶⁵ Sturm 1871, S. 407

⁶⁶ Sturm 1871, S. 407

ten Teil seines Aufsatzes, sicherlich aber die „Bitte“ an „erfahrenere Kollegen“, „Versuche“ mit der „neuen Anschauung“ zu machen, weggelassen haben, da er sich überzeugt hätte, dass dieselben wenigstens bei uns längst aufgehört haben, „Versuche“ zu sein. Nächstens hierüber mehr!“⁶⁷

2.1.5 Erneuter Widerspruch durch Kober und Becker

Seiner Ankündigung aus der Bemerkung folgend, sich in Zukunft näher zur schulischen Umsetzung der „Neueren Geometrie“ zu äußern, veröffentlichte Kober im dritten Band der ZmNU (1872) den Artikel *Ueber das Unendliche und die neuere Geometrie*. Darin machte er zunächst deutlich, dass er aus der Sicht des Lehrers argumentierte und es im Unterricht besonders auf die „Wahrheit“⁶⁸ ankomme. Das bedeutete für ihn, „dass die vorgetragenen Lehren der Art sein müssen, dass sie dem Schüler als selbsterkannte, nicht von aussen dargebrachte, sondern in seinem Geiste nur durch den Unterricht geweckte Wahrheiten, an denen zu zweifeln widersinnig sein würde, unbedingt einleuchten. Darin liegt die eigenthümliche Bedeutung der Mathematik für die allgemeine Bildung. Daher ist auch die heuristische Methode beim mathematischen Unterrichte so wohl am Platze.“⁶⁹ Darum war es für Kober ein Fehler, „Continuität“ und „Reciprocität“, die beide nicht (schon gar nicht ihre Gültigkeit im Unendlichen) durch den Schüler selbst entdeckt werden könnten, als eine Art von Axiomen zu verwenden und mit ihrer Hilfe, wie Sturm es tue, die wirkliche Existenz der unendlich fernen Punkte zu begründen. Sturms Aussage, dass sich das Verständnis für das Konzept der Fernelemente erst mit der Zeit entwickle (wenn die zuerst gelernte Anschauung vergessen worden sei), wies Kober als „unpädagogisch“⁷⁰ zurück. Hier betonte er deutlich die in seinen Augen fehlende pädagogische Qualifikation Sturms. Auch Sturms Argument, dass sich nur mit Hilfe der Fernelemente Ausnahmen beseitigen ließen, ließ Kober nicht gelten. Für ihn hatte die „Wahrheit“ ein höheres Gewicht und er schrieb in einer Fußnote: „Dass einer der Congruenzsätze (2 Seiten und 1 Winkel) eine Ausnahme erleidet, ist auch nicht nach meinem Geschmacke: kann ich desshalb die Wahrheit umstossen?“⁷¹

⁶⁷ Kober 1871, S. 408

⁶⁸ Kober 1872, S. 250

⁶⁹ Kober 1872, S. 250

⁷⁰ Kober 1872, S. 251

⁷¹ Kober 1872, S. 251

Im weiteren Verlauf des Artikels führte Kober dann bereits früher genannte Argumente gegen die wirkliche Existenz der Fernelemente näher aus. Allerdings machte er auch (wie bereits im ersten Band der ZmnU) deutlich, dass er deswegen nicht die „Neuere Geometrie“ als Ganzes ablehnte. Er schrieb vielmehr: „Die Einführung der stetigen Veränderung in die Geometrie gibt derselben ein wunderbares Leben, eine Beweglichkeit und Allgemeinheit, die gegenüber der Starrheit der alten Geometrie in höchst vorteilhaftem Lichte erscheint. Sie verwischt die schroffen Unterschiede der alten Geometrie: Secanten gehen über in Tangenten, der Kreis in die gerade Linie, schneidende Linien (mit Hülfe des Unendlichen) in Parallelen u. s. f. Aber bei den Uebergängen durch Null und Unendlich ist Vorsicht nöthig, um den schon erwähnten Incorrectheiten zu entgehen: und diess nannte ich die Schwäche der Methode.“⁷²

Wie nun die Einführung der „Neueren Geometrie“ in den Mathematikunterricht umgesetzt werden könne, führte Kober dann sehr ausführlich aus, wobei er jetzt mit seinen Vorschlägen wesentlich weiter ging als noch in seinen früheren Artikeln. Das Ziel war nun, nach der Behandlung der Euklidischen Geometrie einen Kurs in „Neuerer Geometrie“ in Sekunda durchzuführen. Für die Beibehaltung der Euklidischen Geometrie sprachen laut Kober zwei Gründe: „Man muss, ganz abgesehen davon, dass die alte Auffassung wegen ihrer innern, den Geist des Schülers völlig befriedigenden Wahrheit nicht übergangen werden kann, aus pädagogischen Gründen mit dem Concreten beginnen und darf erst, wenn die concreten Erkenntnisse die nöthige Sicherheit erlangt haben, nach und nach einzelne Partien von allgemeinerem Gesichtspunkte, im Sinne Steiners, zusammenfassen, um die natürliche Verwandtschaft der geometrischen Gebilde erkennen zu lassen.“⁷³ Seines Wissens nach habe sich der Ansatz, gleich mit der „Neueren Geometrie“ zu beginnen (wie Sturm vorschlug), nirgends durchgesetzt. Auch seine eigenen Erfahrungen damit seien negativ gewesen. Die von Sturm kritisierte Tatsache, dass gewisse nach altem Muster gelehrt Inhalte später "modifiziert" werden müssten, sah Kober zwar auch, hielt dies aber für kein großes Problem. Vielmehr werde im Bereich der Arithmetik genau so vorgegangen, indem man manche Aufgaben zunächst als unlösbar qualifiziere, während sie bei einer Erweiterung des Zahlbereichs plötzlich eine Lösung bekämen. „Man kann getrost im ersten Unterrichte sagen: „8 in 5 (d.h. 5:8) oder 8 von 5 (d.h. 5-8) geht nicht,“ während man später lehrt, dass jede Division oder Subtraction gehen muss. Ebenso ist es kein Widerspruch, dem Schüler erst zu sagen, dass Parallelen einander nicht

⁷² Kober 1872, S. 255

⁷³ Kober 1872, S. 256

schneiden, und später, dass man sie als im Unendlichen schneidend betrachten kann [...].“⁷⁴

Eine vollständige Beibehaltung des bislang üblichen Lehrgangs der Euklidischen Geometrie wollte Kober allerdings auch nicht gerne sehen. Dies würde seiner Meinung nach zu folgendem Problem führen: „Wollte man der alten Geometrie einen Cursus der neueren (etwa in Secunda) folgen lassen, so würde man, wenn nicht vorher schon die Wege gebahnt sind, weder das gewünschte Verständnis, noch das gehoffte Interesse finden: das dargebotene Neue schliesst sich zu wenig an den bisher gewohnten Gedankengang an, seine Fremdartigkeit erschwert dem Schüler das Verständnis, es entbehrt ausserdem eines hervorragenden praktischen Interesses und erscheint dem Schüler gar leicht als müssige Speculation.“⁷⁵ Daher schlug er vor, die Euklidische Geometrie „im Geiste“ der „Neueren Geometrie“ zu unterrichten. Damit meinte er die bereits im Artikel *Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe* angedeuteten Veränderungen: „In der Geometrie beginne man, wie ich in Bd. I, S. 235 kurz angegeben habe; man mache gleich anfangs auf die Unendlichkeit des Raumes aufmerksam [...], man gewöhne den Schüler, sich die gerade Linie nach beiden Richtungen hin unbegrenzt fortgesetzt zu denken, man lasse den Winkel durch Drehung entstehen und wachsen, wobei sich ergibt, dass die ganze Umdrehung die natürliche Einheit für die Winkelmessung ist.“⁷⁶ Weiterhin hielt es Kober für sinnvoll, Sätze auf verschiedene Art zu beweisen und dabei auch vom Prinzip der Beweglichkeit Gebrauch zu machen. Als Beispiel nannte er den Satz, dass die Summe der Außenwinkel beim Dreieck 360° beträgt, den er über die Drehung der Seiten beweisen wollte. Als letztes Beispiel brachte Kober die Kreislehre, wo er Sätze auch auf Grenzfälle anwenden wollte. So behielten der Sehnen- und der Sekantensatz auch dann ihre Gültigkeit, wenn der Schnittpunkt der beteiligten Geraden auf der Kreislinie bzw. im Unendlichen liege. Er betonte jedoch: „Verschiebung und Drehung von geraden Linien, Vergrösserung und Verkleinerung oder Fortrollung von Kreisen u.s.w. führen den Schüler in den Geist der neueren Geometrie ein, aber die Rücksicht auf die Wahrheit fordert, [...] dass man die gefundenen Sätze nicht ohne specielle Untersuchung als für die Grenzfälle gültig betrachte.“⁷⁷ Jene bedürften

⁷⁴ Kober 1872, S. 257

⁷⁵ Kober 1872, S. 258

⁷⁶ Kober 1872, S. 260f

⁷⁷ Kober 1872, S. 263

stets einer zusätzlichen Überlegung. In diesem Sinne sei es dann auch gerechtfertigt, „die nichtschneidenden Linien als im Unendlichen schneidend“⁷⁸ zu betrachten. Durch Kobers Ausführungen wird deutlich, dass er der „Neueren Geometrie“ doch weitaus positiver gegenüber stand, als es nach seinen ersten Artikeln den Anschein hatte. Er hatte grundsätzlich nichts gegen ihren Einsatz in der Schule einzuwenden, solange dieser nicht zu früh stattfindet und durch das Unterrichten der altbekannten Inhalte im „Geist der Neueren Geometrie“ vorbereitet werde, welche dadurch zusätzlich von den Schülern besser verstanden werden könnten. Es muss nur immer klar gemacht werden, dass die Fernelemente nicht wirklich existieren⁷⁹, sondern nur als Hilfsmittel zur leichteren und allgemeineren Formulierung von Sätzen benutzt werden. Daher sollten beim Führen eines Beweises auch weiterhin die laut Sturms Meinung beseitigten Sonderfälle betrachtet werden.

Eine ähnliche Klarstellung nahm Johann Carl Becker mit seinem Beitrag *Noch einige Bemerkungen über die unendlich fernen Gebilde* vor. Hier führte er aus, dass es zwischen den Parteien eigentlich keinen Dissens darüber gebe, ob die „Neuere Geometrie“ in den Schulunterricht aufgenommen werden solle. Die Kontroverse habe sich hauptsächlich an der Frage der Realexistenz der Fernelemente aufgebaut. „Hätte er [gemeint ist Sturm] gleich von vorn herein weiter nichts gesagt, als dass es zweckmässig sei, schon beim Vortrage der Elemente die Schüler mit der perspectivischen Auffassung des Parallelismus vertraut zu machen, und deren Nutzen zu zeigen, so würde wohl schwerlich jemand etwas dagegen eingewendet haben. Ich wenigstens führe meine Schüler seit Jahren in diese Auffassung, so wie sie Reye dargestellt, ein, ohne dabei auf Schwierigkeiten zu stossen; denn ich muthe ihnen dabei nicht zu, eine blosser Fiktion für etwas wirkliches zu halten.“⁸⁰ Ebenso wie Kober war also auch Becker der Auffassung, dass die Fernelemente nicht wirklich existieren. Wie er weiter ausführte, seien sie aber zur Erreichung größerer Allgemeinheit der Lehrsätze notwendig und ihre Verwendung in diesem Sinne auch legitim. Allerdings wollte Becker nicht gleich zu Beginn der Schulzeit mit dieser Auffassung von Parallelität beginnen und sah auch kein Problem darin, dass dann im Laufe der Schulzeit bei den Schülern eine Umwandlung der Vorstellung eintrete.

⁷⁸ Kober 1872, S. 263

⁷⁹ Die Existenz eines mathematischen Objekts war für Kober erst dann gegeben, wenn man sich in der Vorstellung ein anschauliches Bild davon machen kann. „Die Frage ist, ob Linien denkbar sind, die selbst im Unendlichen nicht zusammentreffen, sondern stets in gleicher Richtung oder gleicher Entfernung neben einander herlaufen. Solche Linien nennen wir parallel. Sie sind denkbar [...]“ (Kober 1870b, S. 491) Im Gegensatz dazu hielt er Fernpunkte nicht für denkbar.

⁸⁰ Becker 1872, S.158f

Dies sei nämlich beim Begriff der Potenz nicht anders: „So wenig man aber gleich anfangs mit dem Worte Potenz den Begriff verbinden kann, zu dem ihn schliesslich die Riemannsche Funktionenlehre hinaufgeschraubt hat, eben so wenig kann man gleich anfangs von unendlich fernen und imaginären Schnittpunkten sprechen.“⁸¹

Man kann somit auch bei Becker festhalten, dass er der Einführung der „Neueren Geometrie“ (unter gewissen Bedingungen) offen gegenüberstand.

2.1.6 Der Abbruch der Debatte durch Hoffmann

Es wäre nun zu erwarten, dass, nachdem die grundsätzliche Frage der Aufnahme der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht von allen Parteien positiv beantwortet wurde, in den folgenden Jahrgängen ein verstärkter Austausch über das "Wie", d.h. über sinnvolle Inhalte und methodische Fragen, in Gang gekommen wäre. Dies wurde jedoch durch die Redaktion der ZmnU (vor allem Hoffmann) verhindert, indem sie den Artikel von Christian Johann Scherling *Der Streit über den unendlich entfernten Punkt* (ZmnU 3 (1872), S. 463-464) mit folgender Fußnote versah: „Mit diesem Aufsätze wollen wir den lästigen Streit in dieser Zeitschrift als beendet ansehen.“⁸² Eigentlich war damit der Streit um die Realexistenz des unendlich fernen Punktes gemeint. Die Folge war jedoch, dass auch die Diskussion über die schulische Umsetzung der „Neueren Geometrie“ stark zurückgedrängt wurde.

Den Abbruch und auch den Verlauf der Debatte insgesamt kommentierte Georg Beyer im Schulprogramm der Realschule I. Ordnung zu Rawicz (Posen) von 1873 folgendermaßen: „Die Redaktion jener Zeitschrift hat den Streit abgebrochen, nachdem H. Sturm, der Verfechter der neueren Geometrie, durch seine Berufung an das Polytechnikum in Darmstadt dem Kreise, in dem das besagte Journal seine Thätigkeit entfaltet, entzogen worden war, und wohl darum von der weiteren Vertheidigung seiner Ueberzeugung Abstand genommen hatte, und H. Hoffmann glaubte die Sache scheinbar unparteiisch beigelegt zu haben, mit der Erklärung, daß ja auch Steiner den unendlich entfernten Punkt, den Angelpunkt des Streites, nur als eine Möglichkeit hingestellt habe. Ich habe es vermieden meine Ansichten in jenem Journal auszusprechen und die gegnerischen Ausführungen nach Möglichkeit zu entkräften, weil mir die Art, wie namentlich Sturm's Aufsätze durch Anmerkungen seitens des

⁸¹ Becker 1872, S.159

⁸² ZmnU 3, S. 463

Herausgebers und Bemerkungen einer Kritik unterzogen wurden, die an die von Schülerarbeiten erinnert, als unwürdig erschien.“⁸³ Daraus wird deutlich, dass einerseits Hoffmanns Kommentare und die teilweise polemischen Äußerungen der "Gegner" von einer Beteiligung an der Debatte im Rahmen der ZmnU abschreckten, andererseits diese Beiträge aber auch falsch interpretiert wurden. Außerdem wurde auch hier die Fokussierung auf fachwissenschaftliche Fragen betont.

Das zu frühe Ende der Debatte räumte Hoffmann selbst im 16. Jahrgang der ZmnU (1885) ein. Dort wies zunächst Hermann Gerlach⁸⁴ zu Beginn seines Artikels *Von der Multiplikation mit negativen und mit benannten Zahlen* auf das abrupte Ende hin: „Es wäre bedauerlich, wenn die jetzt schwebende Kontroverse über das genannte Thema ähnlich verlief, wie früherhin der ebenso lebhafte Streit über den „unendlich fernen Punkt“, wenn zuletzt nur allgemeine Ermüdung, nicht eine gewonnene Übereinstimmung zum Abschluss führte.“⁸⁵ Darauf reagierte Hoffmann zunächst mit einer Fußnote, in der er als erstes auf die Artikel Sturms als Ausgangspunkt der Auseinandersetzung hinwies und dann ausführte: „Der Behauptung aber, dass diese Controverse ohne gewonnene Übereinstimmung (also unerledigt) geblieben sei, können wir nicht beistimmen. Denn sie hat u. E. unter der Führung Beckers (II, 89 ff.) wenigstens zu der Einsicht geführt, dass der „unendlich ferne Punkt“ eine „Fiktion“ sei, welche für die logische Einordnung vieler Sätze unter ein allgemeines Princip zweckmässig ist. Die Existenz eines solchen Punktes ist hiermit gar nicht behauptet und kann nicht behauptet werden.“⁸⁶

Als Reaktion darauf sandte Gerlach einen Brief an Hoffmann, den dieser unter dem Titel *Nochmals der unendlich ferne Punkt im Schulunterricht* im 16. Band veröffentlichte. Darin stellt Gerlach folgendes klar: „In der Kontroverse über den unendlich fernen Punkt wurden gleichzeitig zwei Fragen behandelt, die Definition desselben und seine Bedeutung für die Wissenschaft, ferner die Einführung desselben in den Schulunterricht. In Bezug auf die erste Frage ist man allerdings zu einem befriedigenden Abschluss gelangt, die zweite Frage jedoch, die für uns Lehrer ein besonderes Interesse haben musste, ist nur gestreift worden. Meine Bemerkung, dass die Kontroverse unerledigt geblieben sei, betraf ausschliesslich diesen Punkt.

⁸³ Beyer 1873, S. 7

⁸⁴ Gerlach wurde am 12.6.1850 in Piltsch geboren. Nachdem er das Gymnasium zu Leobschütz 1871 mit dem Zeugnis der Reife verlassen hatte, studierte er in Breslau die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer. Er arbeitete an Schulen in Mayen, Gebweiler und Zabern.

⁸⁵ Gerlach 1885, S. 81

⁸⁶ ZmnU 16, S. 81

Empfiehl sich die Einführung einer „Fiktion“ in den Unterricht? Wann und wie hat man dann zu beginnen? Lässt sich die Fiktion in allen Fällen festhalten, oder muss man sie zuweilen wiederum aufgeben? [...] Um so mehr habe ich vermisst, dass in der früheren Kontroverse nach dieser Seite hin kein Austausch der Meinungen stattgefunden hat. Was hierüber gesagt worden ist, scheint mir die Sache nur zu streifen.“⁸⁷ Und Hoffmann erwiderte darauf: „Wir bitten also die Herren Fachgenossen, sich hierüber (vielleicht mit Rücksicht auf die früheren Artikel über dieses Thema) auszusprechen. Denn die Einwürfe des Hrn. Gerlach scheinen uns nicht unberechtigt.“⁸⁸

Dieser Aufruf Hoffmanns führte allerdings nicht zu einem signifikanten Anstieg der Anzahl der Beiträge zur „Neueren Geometrie“. Vielmehr finden sich vor dem Aufruf noch vereinzelt Artikel in der ZmnU, in denen der jeweilige Autor einen Lehrgang der „Neueren Geometrie“ vorstellte, den er selbst an seiner Schule durchführte. Beispiele dafür sind die Artikel von Ferdinand G. Affolter *Lehrsätze, Beweise und Constructionen für einen Cursus der neueren Geometrie an Mittelschulen* (ZmnU 4 (1873), S. 181-191), von Wilhelm Erler *Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung* (ZmnU 8 (1877), S. 99-130) oder von Peter Treutlein *Der Beweis des Satzes von Brianchon und das Princip der Dualität* (ZmnU 10 (1879), S. 89-98). Auf diese Beiträge möchte ich an dieser Stelle nicht im Einzelnen eingehen, da in Kapitel 3 noch ausführlich typische Lehrgänge vorgestellt werden. Daneben finden sich (vor und nach dem Aufruf Hoffmanns) aber auch Beiträge, in denen sich die Autoren bei der Behandlung allgemeinerer Fragen positiv zur „Neueren Geometrie“ äußerten. Diese Äußerungen waren im Unterschied zur Debatte in den drei ersten Jahrgängen stärker didaktisch motiviert (möglicherweise zum Teil als Folge der Bemerkung Gerlachs und des Hoffmannschen Aufrufs) und enthielten daher unter anderem auch neue Argumente für die Einführung der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht. Auffallend ist, dass auf der anderen Seite die Zahl der kritischen Bemerkungen verhältnismäßig gering ausfiel und die Gegner fast ausschließlich mit inhaltlich-fachlichen Argumenten arbeiteten. Hier wird stellvertretend auf die Beiträge von Victor Schlegel *Ueber Ziele und Methoden der Schul-Geometrie* (ZmnU 7 (1876), S. 179-184), von Christian Beyel *Über die Ellipse mit dem Achsenverhältnis $1:\sqrt{2}$* (ZmnU 23 (1892), S. 323-340) und von Josef Diekmann *Bewegung und Umformung*

⁸⁷ Hoffmann 1885, S. 190f

⁸⁸ Hoffmann 1885, S. 191

(ZmnU 24 (1893), S. 81-96 & ZmnU 25 (1894), S. 161-176) als Befürworter der Reform sowie auf die Artikel von Joseph Gilles *Bedenkliche Richtungen in der Mathematik* (ZmnU 11 (1880), S. 5-24) und von Karl Piper *Eine Methode des mathematischen Unterrichts, bei welcher die häuslichen Arbeiten fortfallen* (ZmnU 14 (1883), S. 460-469) eingegangen.

2.1.7 Weitere Argumente für die „Neuere Geometrie“

Victor Schlegel⁸⁹ ging in seinem Beitrag *Ueber Ziele und Methoden der Schul-Geometrie* zunächst auf die Entwicklung der Geometrie an den Universitäten ein, die seiner Meinung nach über lange Zeit von der analytischen Methode dominiert wurde. Diese habe jedoch eine innere Reform durchlaufen und sei so zum bloßen Hilfsmittel der „reine[n] Geometrie Steiners“⁹⁰ geworden. Somit zog Schlegel die Schlussfolgerung: „Wenn demnach in früherer Zeit die rechnende Geometrie der Schule als eine Vorstufe für die analytische Geometrie der Universität angesehen werden konnte, so besteht gegenwärtig, wo die Handhabung der recht- und schiefwinkligen Coordinaten aus den meisten Lehrbüchern verschwunden ist, dieser Zusammenhang nicht mehr.“⁹¹ Neben diesen methodischen Veränderungen hätten sich laut Schlegel auch die behandelten Inhalte geändert. Diese wären früher von der Betrachtung von Kurven und Flächen geprägt gewesen, die über eine Gleichung gegeben wurden und deren Eigenschaften analytisch berechnet werden sollten. „Statt in der oben bezeichneten Weise sich in Einzelheiten zu versenken, sucht die moderne Geometrie Ueberblicke zu gewinnen, classificirt die Gebilde, betrachtet sie nicht einzeln, sondern gruppenweise, und lässt die Eigenschaften des Masses als weniger wichtig zurücktreten gegenüber den Eigenschaften der Lage.“⁹²

In der Schulmathematik dagegen hatte Schlegel die genau umgekehrte Richtung der Entwicklung beobachtet, wo die analytische Geometrie ein immer größeres Ausmaß annehme, während die reine Geometrie (nach Euklid) zurückgedrängt werde. „Wenn

⁸⁹ Victor Schlegel wurde am 7. September 1871 in Waren geboren, sein Reifezeugnis erhielt er 1891 am Gymnasium in Hagen in Westfalen. Er studierte Mathematik und Naturwissenschaften in München und Berlin und bestand 1897 in Berlin die Prüfung für das höhere Lehramt. Nach Ableistung von Seminar- und Probejahr arbeitete er als Oberlehrer an der deutschen Realschule in Konstantinopel, an Gymnasien in Wattenscheid und Höchst am Main sowie an der höheren Maschinenbauschule in Hagen.

⁹⁰ Schlegel 1876, S. 179

⁹¹ Schlegel 1876, S. 179

⁹² Schlegel 1876, S. 180

wir daher die Bestrebungen der modernen Geometrie auf der Universität als einen Fortschritt betrachten, so ist die Geometrie der Schule, indem sie mehr und mehr den algebraischen Charakter herauskehrt, auf einem Rückschritte begriffen. In jedem Falle aber ist ein immer weiteres Auseinandergehen der beiderseitigen Richtungen zu constatiren.“⁹³ Dabei war Schlegel auch klar, dass auf die rechnende Geometrie nicht gänzlich verzichtet werden könne, da sie für viele praktische Anwendungen benötigt werde. Für die „Bildung des Geistes“⁹⁴ sei jedoch die reine Geometrie besser geeignet, denn „jede Lösung durch Rechnung kommt auf die mehr oder minder mechanische Anwendung einer eingelernten Methode hinaus [...]. Ein freies Schaffen des Geistes ist nur möglich, wenn sich derselbe in reinen räumlichen Anschauungen bewegt, ungehindert durch das Bleigewicht von Formeln“⁹⁵. Schlegel sah hier also sowohl den Beitrag des Mathematikunterrichts zur materialen wie zur formalen Bildung und wollte beide Aspekte berücksichtigt wissen. Daraus darf man jedoch nicht schließen, dass Schlegel im Bereich der reinen Geometrie in der Schule keinen Veränderungsbedarf sah. Diese müsse vielmehr von der Euklidischen Behandlung Abstand nehmen, da sie nicht mehr dem aktuellen Stand der Wissenschaft entspreche. Um dies zu belegen, zitierte Schlegel die Kritik Hankels (vgl. auf S. 32f das mit Fußnote 12 belegte Zitat) und fügte als weitere Kritikpunkte hinzu, „dass die Congruenzsätze als Haupt-Instrument der Forschung in die zu untersuchenden Beziehungen ein ganz fremdes Element hineinbringen, dass Betrachtungen über die Lage mit solchen über das Mass verquickt werden, und dass in Folge dieses durchgehenden Mangels einer Sonderung der Lagen- von den Massbeziehungen die ganze Richtung der auf dieses System gegründeten Forschung (u. a. das ganze Aufgaben-Material) auf die analytische Methode hindrängt, weil es für rein geometrische Behandlung an genügenden Principien fehlt.“⁹⁶

Zuletzt ging Schlegel noch auf die Frage ein, warum bislang kaum Veränderungen hin zur „Neueren Geometrie“ in den Schulen zu beobachten seien. Dafür verantwortlich war für ihn die Tatsache, dass kaum Versuche unternommen worden seien, die „Elemente der Geometrie“⁹⁷ (damit sind die Anfänge des Geometrieunterrichts gemeint) im Sinne Steiners zu unterrichten, d.h. alle „geometrischen Wahrheiten in ein

⁹³ Schlegel 1876, S. 180

⁹⁴ Schlegel 1876, S. 180

⁹⁵ Schlegel 1876, S. 180f

⁹⁶ Schlegel 1876, S. 181f

⁹⁷ Schlegel 1876, S. 182

den Verstand befriedigendes System⁹⁸ einzuordnen. Stattdessen werde die „Neuere Geometrie“ nur als Anhang zu den bestehenden Inhalten hinzugefügt, während eigentlich ein vollständiger Umbruch notwendig sei.

Ein weiteres Argument für die Einführung der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht führte Christian Beyel⁹⁹ in seinem Artikel *Über die Ellipse mit dem Achsenverhältnis $1:\sqrt{2}$* an, nämlich deren Nutzen für den Unterricht in der darstellenden Geometrie.¹⁰⁰ „Der Weg, den die darstellende Geometrie seit Bellavitis gegangen ist, zeigt deutlich den inneren Zusammenhang zwischen dieser Disziplin und der projektivischen Geometrie. Es wäre daher zu wünschen, dass dieser Zusammenhang auch im Unterrichte immer mehr hervorträte und dass der Lehrer von den so einfachen Grundgebilden der projektivischen Geometrie stets einen weitgehenden Gebrauch machen könnte.“¹⁰¹ Und er führte im Folgenden die Konstruktion der im Titel genannten Kurve mit Mitteln der darstellenden Geometrie vor, wobei zur

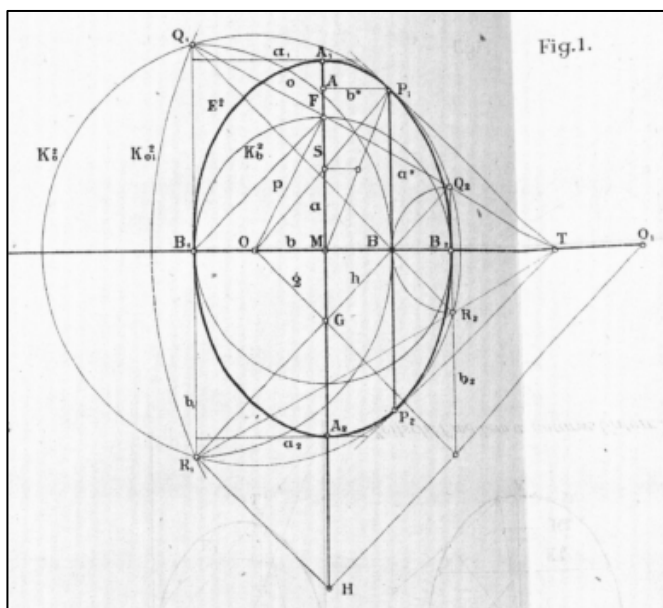


Abbildung 3: Ellipsenkonstruktion (aus: Beyel 1892, Figurentafel)

Begründung Sätze aus der projektiven Geometrie herangezogen wurden.

Am Schluss seines Beitrags kam Beyel noch darauf zu sprechen, wie die Vermittlung der Inhalte der projektiven Geometrie praktisch umgesetzt werden sollte. Eine Möglichkeit bestehe darin, die ebene projektive Geometrie in Verbindung mit der (räumlichen) Zentralprojektion einer Ebene auf eine zweite Ebene zu behandeln. Dies berge jedoch

die Gefahr, „dass die projektivische Geometrie überwuchert und dass die darstellende Geometrie und die Ausbildung der Raumschauung zu kurz kommen. Damit wird dann den Bedürfnissen des zukünftigen Technikers – und an solche wendet sich ja der der Lehrer der darstellenden Geometrie in erster Linie – nur schlecht ge-

⁹⁸ Schlegel 1876, S. 182

⁹⁹ Über Beyel konnte ich leider keine weiteren Informationen in Erfahrung bringen.

¹⁰⁰ Dieser Aspekt wurde später nochmals verstärkt aufgegriffen. (vgl. Unterkapitel 4.1)

¹⁰¹ Beyel 1892, S. 323

dient.“¹⁰² Daher müsse die projektive in jedem Fall vor der darstellenden Geometrie den Schülern bekannt sein. Auch für das spätere Studium in graphischer Statik oder Kinematik seien diese Kenntnisse von Vorteil.

Josef Diekmann¹⁰³ ging in seinem Beitrag *Bewegung und Umformung* insbesondere darauf ein, wie die Methoden der „Neueren Geometrie“ schon am Beginn des Geometrieunterrichts eingesetzt werden könnten. Wie der Titel bereits aussagt, war dabei der Aspekt der Beweglichkeit der geometrischen Figuren von zentraler Bedeutung. Zu Beginn des Artikels wies Diekmann zunächst darauf hin, dass in letzter Zeit die Forderung nach einer Umgestaltung der Elementargeometrie immer häufiger und vehementer vorgetragen werde. Auf die Argumente dafür wollte er nicht näher eingehen, zitierte aber eine Aussage von Paul Cauer¹⁰⁴ aus den *Preußischen Jahrbüchern* (Band 69 (1892), S. 274-275), die die Problematik genau auf den Punkt bringe: Während in anderen Zweigen der Wissenschaft (Geschichte, Dichtung, Redekunst) versucht werde, den Einfluss der Antike zurückzudrängen, sei dies in der Mathematik erstaunlicherweise nicht der Fall. Und auch bezüglich der zu erreichenden Veränderungen berief sich Diekmann auf Cauer. Es müsse gelingen, „die von ihm [gemeint ist Euklid] gefundenen Erkenntnisse von mancher neuen Seite zu betrachten, mehr in organischem Zusammenhange darzustellen, dasjenige in ihnen, was gerade zur Bildung des jugendlichen Geistes dienen kann wirksamer herauszuarbeiten. Die Versuche, in diesem Sinne den mathematischen Unterricht der Schulen zu vereinfachen, ihn lebensvoller und anschaulicher zu machen, sind bisher an dem Beharrungsvermögen der pädagogischen Welt so ziemlich gescheitert.“¹⁰⁵ Diekmann stimmte dieser Beschreibung völlig zu und ergänzte: „Diese herben Ausserungen eines ebenso hervorragenden wie vorurteilslosen Schulmannes sind gewiss beherzigenswert und entbehren in gewissem Umfange nicht der inneren Berechtigung; allein in Bezug auf das Scheitern der Versuche darf man auch nicht ausser acht lassen, dass trotz mancher verdienstvoller Arbeiten, es an einer fertigen methodischen Ausgestaltung der neuern Anschauungsweisen für Zwecke des elementaren Unterrichts

¹⁰² Beyel 1892, S. 340

¹⁰³ Diekmann wurde am 1. Januar 1848 in Höxter geboren. Nach dem Besuch des Gymnasiums in Münster studierte er dort und in Göttingen Mathematik und Naturwissenschaften. In Göttingen legte er das Staatsexamen ab und promovierte. Nach dem Probejahr an der höheren Bürgerschule Papenburg arbeitete er zunächst an der höheren Bürgerschule in Wesel, bevor er Oberlehrer am Königlichen Gymnasium in Essen wurde. 1880 wurde er Rektor des Realprogymnasiums in Viersen.

¹⁰⁴ Cauer (1854-1921) studierte Klassische Philologie in Leipzig, Straßburg und Berlin. Nach seiner Promotion arbeitete er als Gymnasiallehrer und Universitätsdozent (Kiel & Münster). Er war ein Verfechter des humanistischen Gymnasiums und wandte sich gegen die Vorschläge zur Einführung einer Einheitsschule, die die verschiedenen Formen höherer Schulen ersetzen sollte.

¹⁰⁵ Diekmann 1893, S. 81f

noch immer fehlt. Man vermisst in den hier in Betracht kommenden Lehrbüchern, einerseits eine konsequente Durchführung der benutzten, neuern Hilfsmittel, andererseits beschränken sie sich auf die Benutzung der Anschauungen, welche durch bestimmte Lagen, wie die centrische und axiale Symmetrie, geboten werden.“¹⁰⁶ Seinen Artikel sah er als einen Vorschlag, um diese Missstände zu beseitigen. Der Ansatz Diekmanns entsprach im Wesentlichen dem auch von Henrici und Treutlein in ihrem *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* verfolgten Konzept (vgl. Unterkapitel 3.2), so dass ich an dieser Stelle nur ein Beispiel für die Vorschläge Diekmanns geben möchte.

Sein grundsätzliches Ziel bestand darin, die gesamte ebene Geometrie mit Hilfe von Abbildungen aufzubauen. Er betrachtete dazu zunächst die Kongruenzabbildungen „Parallelverschiebung“, „centrische Drehung“ und „axiale Drehung“ (Geradenspiegelung), wobei er sich im ersten Teil der Abhandlung (in Band 24) hauptsächlich mit der „centrischen Drehung“ befasste. Unter dem Winkel zweier

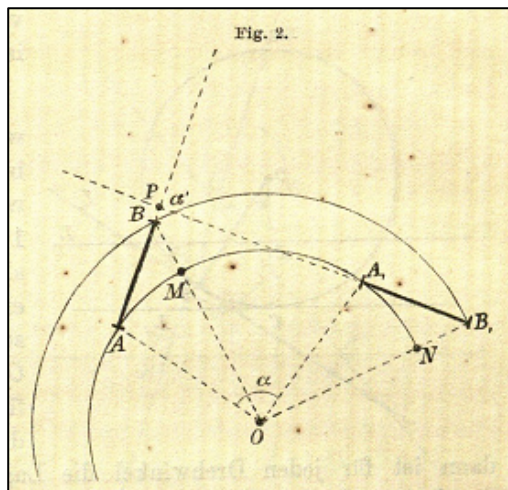


Abbildung 4: Drehung einer Strecke **AB** um Punkt **O** (aus: Diekmann 1893, S. 85)

Geraden versteht er die „Größe der Drehung, welche erforderlich ist, um die Richtung der einen Geraden mit der der andern Geraden zum Zusammenfallen zu bringen.“¹⁰⁷ Der Drehpunkt ist der Schnittpunkt der Geraden. Er führt nun die Drehung um einen Winkel α um **O** für eine Strecke **AB** aus und erhält die Strecke **A₁B₁**. Der Winkel der Geraden **AB** und **A₁B₁** (d.h. α') stimmt mit α überein, was sich die Schüler dadurch klarmachen können, dass sie die Drehung um den Punkt **P** (den Schnittpunkt der Geraden **AB** und **A₁B₁**) ausführen. „Es macht den Schülern ersichtlich Freude zu prüfen, dass wenn man um **P** mit **OA** einen Kreis schlägt, der erhaltene Bogen = arc. **AA₁** ist.“¹⁰⁸ (Statt des Winkels α nutzt Diekmann die Länge des Bogens **AA₁** zur Festlegung der Drehung.) Somit erhält man folgende Aussage: „Der Winkel zweier Geraden ist gleich dem Drehwinkel (Centriwinkel) um ein ausserhalb derselben gelegenes Centrum, durch welchen die eine Gerade in die Richtung der andern gebracht wird.“¹⁰⁹ Im Anschluss zeigte Diekmann, dass es zur Drehung einer Geraden genügt,

¹⁰⁶ Diekmann 1893, S. 82

¹⁰⁷ Diekmann 1893, S. 82

¹⁰⁸ Diekmann 1893, S. 86

¹⁰⁹ Diekmann 1893, S. 86

vom Drehzentrum **O** das Lot auf die Gerade zu fällen, den Lotfußpunkt **C** (der Bildpunkt sei **C'**) zu drehen und anschließend auf **OC'** in **C'** die Senkrechte zu errichten. Diese Kenntnisse nutzte er dann unter anderem beim Beweis des Winkelsummensatzes nach Thibaut, der so „eine für den Schüler viel greifbarere und anschaulichere Gestalt“¹¹⁰ erhält. Dazu wählt er einen festen Punkt **O** im Inneren des Dreiecks und fällt die Lote auf die Seiten. Der Winkel zwischen **a** und **b** ist α_1 (Außenwinkel des Dreiecks). Nach dem Vorhergehenden gilt $\alpha_1 = u$. Analog gilt $\beta_1 = v$ und $\gamma_1 = w$. Also $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = u + v + w$ und $u + v + w = 4R (= 360^\circ)$. Somit gilt: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 4R$. Fügt man zu dieser Summe die Innenwinkel des Dreiecks hinzu, so erhält man als Ergebnis $6R$. Folglich ergibt die Summe der Innenwinkel $2R$.

Mit Hilfe der Kongruenzabbildungen bewies Diekmann im Anschluss unter anderem die Kongruenzsätze und löste „das elementare Tangentenproblem [...] in einem Punkte der Peripherie, von einem Punkte ausserhalb und an zwei Kreise eine (gemeinschaftliche) Tangente zu ziehen.“¹¹¹

Am Schluss des ersten Teils seiner Arbeit gab Diekmann dann noch einen weiteren Grund für die von ihm vorgeschlagene Umgestaltung. Die Schüler sollten möglichst wenige Inhalte auswendig können¹¹² und stattdessen

mathematisches Denken lernen. „Es folgt, dass wir bemüht sein müssen zur Erkenntnis geometrischer Wahrheiten und ihrer Anwendungen allgemeine Methoden zu schaffen, welche den Schüler in den Stand setzen, gestützt auf seine gesunde Verstandeskraft voranzuschreiten, nicht aber genötigt zu sein, bei jeder Aufgabe in der Rüstkammer gedächtnismässig aufgespeicherter Sätze nach brauchbarem Handwerkszeug zu suchen. Ganz vorzüglich sind unserer Ansicht nach hierfür die Methoden der neueren Geometrie geeignet, und jeder Versuch dieselben metho-

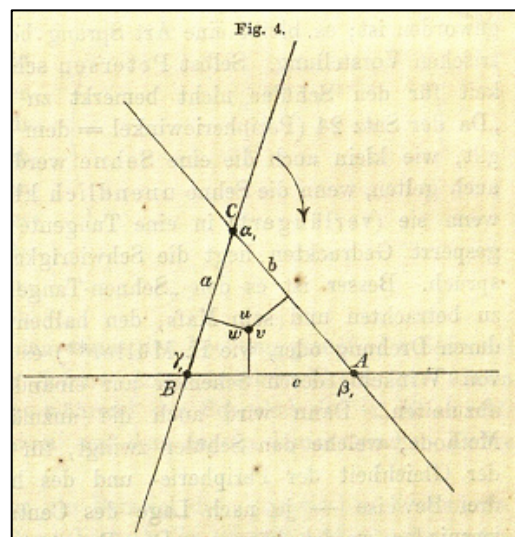


Abbildung 5: Beweis des Winkelsummensatzes (aus: Diekmann 1893, S. 87)

¹¹⁰ Diekmann 1893, S. 87

¹¹¹ Diekmann 1893, S. 89

¹¹² Der Aspekt der „Überbürdung“ der Schüler (d.h. einer zu großen Menge von Lehrstoff) wurde damals oft kritisiert. (vgl. z.B. ZmnU 13, S. 484-489)

disch und pädagogisch den Forderungen des Schulunterrichtes anzupassen, muss willkommen erscheinen.“¹¹³

Auch der zweite Teil des Artikels (Band 25), der sich schwerpunktmäßig mit Verschiebung und Geradenspiegelung befasste, schloss mit einem Argument für die „Neuere Geometrie“. So sei der von Euklid gewählte Aufbau für die Jugend ungeeignet, da „Euklid für gereifte und logisch geschulte Köpfe geschrieben hat, zu einer Zeit, wo das Bedürfnis nach logischen Abstraktionen fast der einzige Ausdruck wissenschaftlicher Tätigkeit der gebildeten Kreise war. Gewiss sind auch die Anforderungen an geistige Arbeit und folgerichtiges Denken bei Verwendung der neueren Methoden nicht gering, allein sie liegen auf Gebieten, welche dem Gesichtskreise der Schüler angepasst sind, und auf welchen sich seine Verstandeskraft, je nach Begabung, selbstthätig ausbilden kann, während der „Traditionelle Schematismus“ dem jugendlichen Geiste und seiner gestaltenden Phantasie nicht zusagen kann und erfahrungsmässig auch nicht zusagt.“¹¹⁴

2.1.8 Kritiker der „Neueren Geometrie“

Einer der eher rar gesäten kritischen Beiträge stammte von Joseph Johann Gilles¹¹⁵. In seinem Artikel *Bedenkliche Richtungen in der Mathematik* setzte er sich hauptsächlich mit seiner Meinung nach falschen Entwicklungen in der Mathematik auseinander, als da sind „die Lehren, dass die Gerade nur einen unendlich fernen Punkt habe; dass die Gerade eine in sich zurückkehrende Linie sei; dass $+\infty = -\infty$; ferner, dass der Raum eine in sich zurückkehrende Grösse sei, und in noch höherem Grade die Lehre von mehr als drei Dimensionen des Raumes, die ganze absolute Geometrie und schliesslich die selbst von Helmholtz vertretene Ansicht, dass die Mathematik eine Erfahrungswissenschaft sei.“¹¹⁶ Diese Ideen versuchte Gilles zu

¹¹³ Diekmann 1893, S. 96

¹¹⁴ Diekmann 1894, S. 175f

¹¹⁵ Gilles wurde 1838 in Oberesch bei Ahrweiler geboren und besuchte von 1855 bis 1859 die Gymnasien in Münstereifel und Trier. Nachdem er in Trier das Reifezeugnis erlangt hatte, studierte er Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften in Bonn und legte 1864 das Staatsexamen ab. Nach dem Probejahr am Gymnasium in Koblenz arbeitete Gilles zunächst an Progymnasien in Mönchengladbach und Boppard, dann an Gymnasien in Düsseldorf und Essen.

¹¹⁶ Gilles 1880, S. 5f

widerlegen und ging am Schluss des Artikels auf einen schulischen Aspekt ein.¹¹⁷ Dabei nahm er Bezug auf das Schulprogramm der Realschule I. Ordnung in Düsseldorf von 1878, in dem Wilhelm Stammer unter dem Titel *Die ersten Sätze der neuen Geometrie* einen Lehrgang für die Prima vorstellte. Darin betrachtete Stammer das Verhältnis der (gerichteten) Strecken **AD** und **BD**, wenn **A** und **B** feste Punkte sind und sich **D** bewegt.

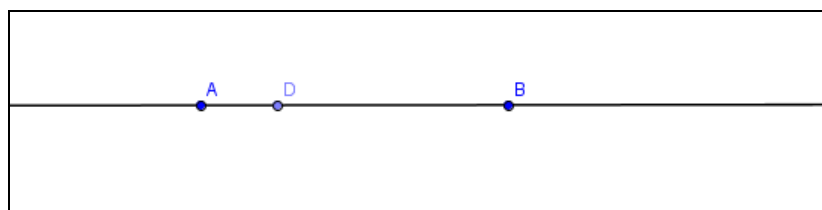


Abbildung 6: Innere Teilung der Strecke **AB** durch **D** (erstellt mit GeoGebra)

„Dann nimmt das Verhältniß $AD:BD$ alle möglichen negativen Werthe von 0 bis $-\infty$ an, während D sich von A nach B bewegt. Geht D von B aus in derselben Richtung weiter bis ins Unendliche, so wird $AD:BD = 1 + \frac{AB}{BD}$, und das Verhältniß nimmt ab von

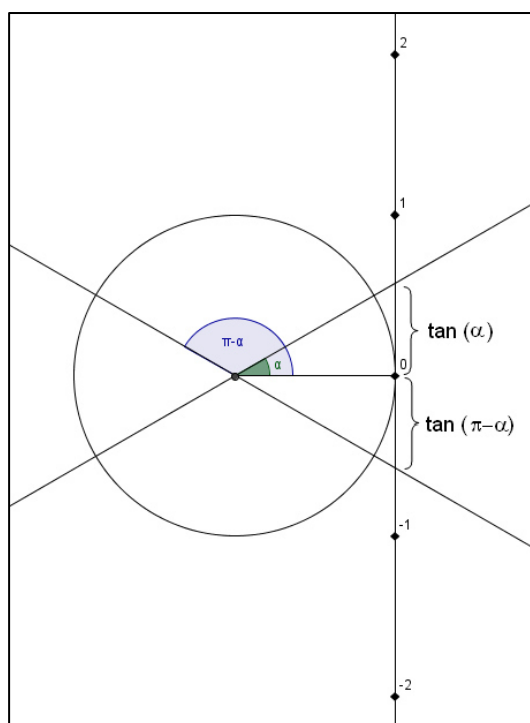


Abbildung 7: Tangens am Einheitskreis (erstellt mit GeoGebra)

$+\infty$ bis 1; nähert sich dann D, aus dem Unendlichen kommend, auf der andern Seite dem A, so sind sowohl AD als BD negativ; ihr Verhältniß bleibt positiv und nimmt weiter ab von 1 bis 0. Während also D die ganze gerade Linie durchläuft, nimmt das Verhältniß $AD:BD$ der Reihe nach alle mögliche Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ an, aber jeden Werth nur einmal.“¹¹⁸ In einer sich daran anschließenden Fußnote stellte Stammer dann fest: „Es ist hier wohl der Ort, den Schüler darauf aufmerksam zu machen, daß es auf einer Geraden nur einen

¹¹⁷ Dass der Artikel keinen direkten didaktischen Hintergrund hat, wird von der Redaktion (Hoffmann) schon zu Beginn in einer Fußnote klargelegt: „Obschon dieser Aufsatz nichts für die Schule direct Verwerthbares bietet, wir auch die darin enthaltenen idealistischen Anschauungen nicht theilen, so halten wir denselben doch für zeitgemäss und am Platze, gewissen Bestrebungen gegenüber, die unberechtigte oder noch ungeklärte Anschauungen gern in den mathematischen Schulunterricht einführen möchten.“ (Gilles 1880, S. 5) Hoffmanns eher ablehnende Haltung gegenüber den Fernpunkten ist spürbar.

¹¹⁸ Stammer 1878, S. 3

unendlich fernen Punkt gibt und daß $+\infty = -\infty$. Die letztere Behauptung kommt schon in der Trigonometrie vor, insofern $tg \frac{\pi}{2} = \pm\infty$.¹¹⁹

Auch Gilles zitierte diese Fußnote und versuchte im Anschluss zu beweisen, dass $tg \frac{\pi}{2}$ zwei verschiedene Werte haben muss (d.h. $+\infty \neq -\infty$). Dazu stellte er fest,

dass Stammers Argumentation nicht greife, weil zunächst gezeigt werden müsse, dass zu jedem Winkel nur ein Wert für den Tangens existiert. Außerdem könne aus der Gleichung $\sqrt{16} = \pm 4$ auch nicht $+4 = -4$ geschlossen werden. Für seine weitere Argumentation verwendete Gilles die Veranschaulichung des Tangens am Einheitskreis (vgl. Abbildung 7). Er stellte fest, dass $tg(\alpha) = -tg(\pi - \alpha)$. Somit folge dann auch

$tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = -tg\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$, d.h. $tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Dies bedeute jedoch nicht, dass $+\infty =$

$-\infty$, da man bei diesem Schluss wieder davon ausgehe, dass $tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nur einen Wert

(nämlich ∞) habe. Vielmehr sei es so, dass auf der linken Seite der Gleichung $+\infty$

und auf der rechten Seite $-(-\infty)$ stehe. „Ist das $\frac{\pi}{2}$ der einen Seite der ursprüngliche

Winkel w , so ist das $\frac{\pi}{2}$ der anderen der Supplementwinkel von w . Ist mithin $tg \frac{\pi}{2}$

der linken Seite gleich $+\infty$, so ist $tg \frac{\pi}{2}$ der rechten Seite gleich $-\infty$; und folglich $+\infty =$

$-(-\infty)$.“¹²⁰

Aus der Auseinandersetzung wird deutlich, dass Stammer und Gilles verschiedene Vorstellungen über die Gerade hatten. Stammer dachte projektiv, d.h. "seine" Gerade hat genau einen Fernpunkt und somit gehört auch zum Winkel $\frac{\pi}{2}$ nur ein Wert für

den Tangens. Gilles hatte hingegen die Vorstellung einer nicht geschlossenen Geraden und musste somit für $tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ zwei Werte annehmen. Einen Beweis für ihre

Aussagen konnten daher beide nicht erbringen. Gilles Ablehnung der projektiven

¹¹⁹ Stammer 1878, S. 3

¹²⁰ Gilles 1880, S. 23; Die Abkürzung "tgt" steht für den Tangens.

Geometrie ergibt sich somit, ähnlich wie bei den bereits vorgestellten Kritikern, ausschließlich aus inhaltlich-mathematischen Gründen.

Eine weitere Stimme, die sich für die Beibehaltung der bestehenden Inhalte aussprach, findet sich im 14. Band der ZmnU (1883) mit dem Artikel *Eine neue Methode des mathematischen Unterrichts, bei welcher die häuslichen Arbeiten fortfallen*. Der Verfasser Dr. Karl Piper¹²¹ beschrieb darin, wie er die sonst von den Schülern regelmäßig zu verfassenden Hausarbeiten durch wöchentliche Extemporalien (d.h. unangekündigte Klassenarbeiten) ersetzt habe, die Gründe dafür und seine gemachten Erfahrungen. Dabei kam er auch kurz auf die behandelten Inhalte und die Unterrichtsmethodik zu sprechen und machte deutlich, dass er ein Anhänger der Euklidischen Geometrie war: „In der Planimetrie lasse ich in den Extemporalien Constructionsaufgaben lösen, in den Lehrstunden nehme ich (ausser den zu den Aufgaben nötigen Erläuterungen) die Lehrsätze durch, und zwar nach der Euklidischen Methode. Ich ziehe letztere den neueren Methoden vor, denn erstens übertrifft sie dieselben an Eleganz; Euklids Mathematik ist eins der grössten Kunstwerke des Altertums. Zweitens hat die Euklidische Methode für die Schule noch den Vorzug, dass jeder Lehrsatz mit seinem Beweise, wiewohl er ein Baustein des ganzen Gebäudes ist, doch wieder ein abgeschlossenes Ganzes für sich bildet.“¹²² Den von den Vertretern der „Neueren Geometrie“ oftmals kritisierten Aspekt, dass bei Euklid die Lehrsätze meist separiert erscheinen, sah Piper also geradezu als Vorteil an. Zudem begegnete er dem Vorwurf, im bisherigen Geometrieunterricht würden die Schüler nicht lernen, selbstständig einen Beweis zu führen: „Bei den Extemporalien beschäftigen die Schüler sich mit planimetrischen Begriffen und üben sich im geometrischen Denken, und hierdurch werden ihnen auch die Lehrsätze verständlicher und die Beweise leichter, so dass dieselben in den Stunden allein gelernt werden können. Freilich habe ich die Absicht, später den Zusammenhang zwischen den Lehrstunden und den Extemporalstunden dadurch noch unmittelbarer zu machen, dass ich in den Extemporalstunden nicht nur Aufgaben lösen, sondern in eben so grosser Ausdehnung Beweise finden lasse. [...] Die Leistungen in der Planimetrie (und ganz

¹²¹ Piper wurde am 21.10.1849 in Malchin geboren und besuchte das Gymnasium in Rostock. Nach der Reifeprüfung 1869 studierte er in Rostock, Berlin und Göttingen Mathematik und Naturwissenschaften. Er arbeitete an der Realschule I. Ordnung in Frankfurt an der Oder und am Realgymnasium in Elberfeld und wurde schließlich Oberlehrer am Gymnasium in Lemgo.

¹²² Piper 1883, S. 467

besonders auch in der Stereometrie) würden dadurch ganz bedeutend gesteigert werden.“¹²³

2.2 Diskussionen auf Versammlungen und Konferenzen

Neben der schriftlichen Auseinandersetzung in der ZmnU wurde die Frage der Einführung der projektiven Geometrie in den Mathematikunterricht auch auf Versammlungen der Fachverbände diskutiert. Dabei sind insbesondere die *mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion* der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner, die *Abtheilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* in der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte sowie die *Jahresversammlung* des Vereins für Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften von Bedeutung. Ich werde im Folgenden einige ausgewählte Beiträge von Sitzungen der drei genannten Verbände näher vorstellen.

2.2.1 Die Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner

Karl Gerhardt (28. Versammlung, 1872)

Auf der 28. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Leipzig (22. bis 25. Mai 1872) wurde in der zweiten Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion (46 Teilnehmer) allgemein über die Frage einer Umgestaltung des Geometrieunterrichts diskutiert. Dazu hielt zunächst Prof. Karl Gerhardt¹²⁴ ein Referat *Ueber den geometrischen Unterricht*. Darin sprach er sich deutlich gegen die bisher verwendete Euklidische Methode aus: „Es sei die Euklid'sche Methode zu verlassen, weil sie keine streng wissenschaftliche sei und den Schülern nur lose zusammenhängende Sätze biete.“¹²⁵ Für die Umgestaltung empfahl er folgende Maßnahmen: „Eine umfassende Aenderung müsse dadurch

¹²³ Piper 1883, S. 467

¹²⁴ Gerhardt wurde am 2.12.1816 in Herzberg bei Torgau geboren. Er erhielt 1834 am Gymnasium Torgau das Reifezeugnis und studierte anschließend in Berlin Mathematik, wo er 1837 das Examen erhielt und promovierte. Neben seiner Tätigkeit im Schuldienst (Gymnasien in Eutin, Salzwedel, Berlin und Eisleben) war Gerhardt auch wissenschaftlich sehr aktiv. So bearbeitete er die in der Königlichen Bibliothek in Hannover befindlichen Handschriften von Leibniz und unternahm eine Forschungsreise nach Lausanne, Mailand und Paris.

¹²⁵ o.V. 1873, S. 234

eintreten, dass die Planimetrie nicht mehr getrennt von der Stereometrie behandelt werde, und die neuen Resultate der mathematischen Wissenschaft Berücksichtigung finden. Die Geometrie sei demgemäss etwa einzutheilen in 1) Geom. der Lage, 2) Geom. der Form und 3) Geom. des Masses.“¹²⁶ Am Schluss seines Beitrags stellte Gerhardt den Antrag, eine Kommission zu bilden, die einen neuen Lehrgang gemäß den von ihm genannten Aspekten ausarbeiten solle. In der anschließenden Diskussion wurde von der Mehrheit der Anwesenden die Meinung vertreten, die Verbindung von Planimetrie und Stereometrie sei bereits verwirklicht und daher müssten in dieser Richtung keine weiteren Anstrengungen unternommen werden. Dr. Hermann Guthe¹²⁷ lehnte die Bildung einer Kommission ab, „weil durch Einführung eines solchen Lehrbuchs eine schädliche Uniformität des mathematischen Unterrichts veranlasst werden könne. Ausserdem sei die neuere Geometrie noch nicht so abgeschlossen, dass ihre Resultate der Schule abgerundet übergeben werden können.“¹²⁸ In die gleiche Richtung argumentierte auch Dr. Johann Gottfried Friedlein¹²⁹, der dafür plädierte, „dass man nicht eine Commission beauftrage, sondern vielmehr ausspreche: jeder Lehrer solle den geometrischen Unterricht so ertheilen, dass das Anschauungsvermögen möglichst gefördert werde und dass so die Mathematik sich als ein wirkliches Bildungsmittel erweise.“¹³⁰ Der Antrag Gerhardts zur Bildung der Kommission wurde abgelehnt, die Sektion fasste jedoch mit großer Mehrheit folgenden von Guthe eingebrachten Beschluss: „die mathem. Sektion ist der Ansicht, dass von der Euklid’schen Methode abzugehen sei, dass dem geometrischen Unterrichte ein propädeutischer vorausgehen müsse, der in Verbindung mit dem Zeichnen steht, und dass der geometrische Unterricht in den oberen Klassen mit Betrachtungen abzuschliessen habe, die geeignet sind, Alles zu vereinigen, was auf den unteren Stufen getrennt behandelt wurde.“¹³¹ Daraus wird ersichtlich, dass sich die Sektion einerseits für die Veränderung des Geometrieunterrichts aussprach, andererseits

¹²⁶ o.V. 1873, S. 234f

¹²⁷ Guthe wurde 1825 in Andreasberg im Harz geboren. Nach dem Besuch des Gymnasiums in Clausthal studierte er von 1845 bis 1849 Philologie und Mathematik in Göttingen und Berlin. Er arbeitete von 1849 bis 1863 in Hannover als Lehrer am Lyceum und anschließend an der dortigen polytechnischen Schule. 1873 wurde er auf eine Professur für Geographie am Polytechnikum in München berufen. Guthe starb 1874 an den Folgen der Cholera.

¹²⁸ o.V. 1873, S. 235

¹²⁹ Friedlein (1828-1875) studierte ab 1846 Philologie und Mathematik an der Universität in München. Seit 1851 arbeitete er als Lehrer in Regensburg, Erlangen, Ansbach und Hof. Daneben betätigte er sich auch als Herausgeber von historischen mathematischen Texten, u.a. des Rechenbuchs des Victorius, der mathematischen Schriften des Boethius und des Kommentars des Proklos Diadochos zum ersten Buch der Elemente Euklids. (vgl. Cantor 1878)

¹³⁰ o.V. 1873, S. 236

¹³¹ o.V. 1873, S. 236

aber noch nicht die Aufnahme der projektiven Geometrie dezidiert forderte. Möglicherweise ist im vorliegenden Versammlungsbericht auch die Diskussion zwischen den Teilnehmern nicht vollständig wiedergegeben. Man könnte den letzten Teil des angenommenen Beschlusses (bezüglich des Geometrieunterrichts in den oberen Klassen) als Kompromiss zwischen Befürwortern und Gegnern (wie Guthe) einer sofortigen Einführung der projektiven Geometrie ansehen, der beiden Seiten alle Möglichkeiten offen ließ.

Guido Hauck (31. Versammlung, 1876)

Ein deutlich klareres Plädoyer für die projektive Geometrie fasste die mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion (18 Teilnehmer) der 31. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner auf ihrer Tagung in Tübingen (25. bis 28. September 1876). Dort hielt auf der ersten Sektionssitzung zunächst Prof. Guido Hauck¹³² einen Vortrag über *Die Stellung der neueren Geometrie zur euklidischen Geometrie und über die Aufnahme der ersteren in den Lehrplan der zehnclassigen Realschulen und Realgymnasien*. Darin bemerkte er zunächst, dass das System der Euklidischen Geometrie als in sich geschlossen anzusehen sei, d.h. eine Weiterentwicklung war nach seiner Auffassung nicht möglich. Daher sei ein neues System geschaffen worden, „die sogenannte neuere oder projectivische Geometrie“¹³³, das in drei Aspekten gegenüber der Euklidischen Geometrie eine Verallgemeinerung darstelle. Einmal betrachte die „Neuere Geometrie“ neben Kongruenz, Ähnlichkeit und Flächengleichheit auch die Affinität und Kollineation als mögliche Beziehungen zwischen geometrischen Objekten. Zusätzlich würden nicht nur einzelne Figuren betrachtet, „sondern ganze geometrische Systeme behandelt, in welchen die momentan in's Auge gefassten Punkte und Linien ihre Lage nach Belieben ändern können. [...] Der Fortschritt gegen die alte Anschauungsweise besteht wesentlich darin dass die Starrheit der Figuren aufgehoben und dafür die Beweglichkeit der Raumelemente

¹³² Hermann Guido Hauck wurde am 26.12.1845 in Heilbronn geboren. Nach dem Besuch der Gymnasien in Heilbronn und Stuttgart sowie der Polytechnischen Schule in Stuttgart (ab 1863) studierte er von 1865 bis 1870 Mathematik und Naturwissenschaften in Tübingen. Nach bestandener Professorsratsprüfung (1871), die dem Staatsexamen vergleichbar ist, arbeitete er an der Oberrealschule in Tübingen und war gleichzeitig als Lehrbeauftragter für darstellende Geometrie und Elementargeometrie an der dortigen Universität tätig. 1876 erfolgte die Promotion in Tübingen (*Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspektive*), 1877 wechselte Hauck als Professor für Darstellende Geometrie an die Bauakademie in Berlin. Nach der Fusion der Bau- mit der Gewerbeakademie zur Technischen Hochschule war Hauck für insgesamt drei Amtsperioden deren Rektor. Er starb am 25.1.1905 in Berlin.

¹³³ o.V. 1877, S. 185

eingeführt wurde.“¹³⁴ Als dritten Aspekt nannte Hauck die generelle Bestrebung der „Neueren Geometrie“, möglichst allgemeine und universelle Methoden zu entwickeln. In Bezug auf die Verwendung im Schulunterricht gab Hauck zu, dass meist immer noch auf Euklid zurückgegriffen werde. Jedoch könne die „Neuere Geometrie“ durch die Betrachtung der beweglichen Figuren besser zur Förderung der Raumanschauung beitragen und die Benutzung der allgemeineren Methoden helfe dabei, die Schüler zum „systematischen Denken“¹³⁵ zu befähigen. Darüber hinaus seien die Kenntnisse in der „Neueren Geometrie“ auch notwendig, da sie neuerdings in vielen Bereichen Verwendung finde. Beispielsweise habe die analytische Geometrie „ihre ganze Taktik geändert, indem sie in ihrer gegenwärtigen eleganten Operationsweise einfach die Methoden der neueren Geometrie in ihre Formelsprache übersetzt hat“¹³⁶, die darstellende Geometrie sei vollständig im Sinne der „Neueren Geometrie“ umgestaltet und auch der Techniker benötige sie dringend, denn auf „ihrer Grundlage hat Cullmann seine graphische Statik aufgebaut und damit eine Methode geschaffen die an Einfachheit, Uebersichtlichkeit und Sicherheit der Resultate alle seitherigen analytischen Methoden weit hinter sich lässt.“¹³⁷ Aus diesen Gründen sah Hauck die Einführung der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht als zwingend an und er machte auch Vorschläge zur Umsetzung. Allerdings war er strikt dagegen, die dabei neu aufzunehmenden Inhalte erst am Ende der Schulzeit zu behandeln und hierbei Euklidische Methoden zu benutzen: „Man hat seit längerer Zeit die Manier, einzelne Sätze aus der neueren Geometrie der euklidischen Geometrie als Anhang hinzuzufügen, und glaubt damit das Bedürfniss befriedigt. Es gehören hierher z. B. die Sätze von der harmonischen Teilung, von den Transversalen, vom Aehnlichkeitspunkt, von der Potenzlinie, von Pol und Polare u. A. Während diese Sätze im System der neueren Geometrie sich fast spielend von selbst ergeben, müssen sie dann – herausgerissen aus dem System – mit eigenen Beweisen im Geiste der euklidischen Geometrie versehen werden. Damit haben sie aber aufgehört, der neueren Geometrie anzugehören. Der Grundcharakter der neueren Geometrie besteht ja – wie oben ausgeführt wurde – nicht im Stoff, sondern in der Methode. Sobald man also einen ihr entnommenen Stoff nach antiker Methode behandelt, so ist es keine neuere Geometrie mehr, sondern antike.“¹³⁸ Dadurch könne der Schüler

¹³⁴ o.V. 1877, S. 185

¹³⁵ o.V. 1877, S. 189

¹³⁶ o.V. 1877, S. 190

¹³⁷ o.V. 1877, S. 190

¹³⁸ o.V. 1877, S. 190

sogar von der „Neueren Geometrie“ abgeschreckt werden, da ihm die mit der unpassenden Methode behandelten Inhalte außerordentlich kompliziert erscheinen würden. Das umgekehrte Verfahren, d.h. die bestehenden Inhalte durch die Methoden der „Neueren Geometrie“ zu ergänzen, hielt Hauck hingegen geradezu für notwendig: „Die vielen Mängel die dasselbe bezüglich der Gesamtanordnung des Stoffes, der Verkettung der Details, der Schärfe der Begriffsbestimmungen, der Strenge der Begründungen, der Zweckmässigkeit der Darstellungsweise u. s. w. aufweist, lassen sich in letzter Instanz auf jene Starrheit und Unbeweglichkeit zurückführen. Eben deshalb glaube ich aber auch dass jene Mängel sehr wohl gehoben werden könnten durch Adoptierung der Anschauungen der neueren Geometrie. Ein Reformieren und stilgerechtes Umbauen des euklidischen Systems im Geiste der neueren Geometrie scheint mir nicht bloss möglich und wünschenswert, sondern dringend notwendig.“¹³⁹ Ein Beispiel für eine gelungene Umsetzung seien die Vorschläge von Hubert Müller aus Metz, die auch im folgenden Kapitel noch näher vorgestellt werden.

Bei der Behandlung der neu einzuführenden Inhalte kam es laut Hauck vor allem darauf an, auf das Hilfsmittel der Projektion zurückzugreifen und die aufeinander zu beziehenden geometrischen Systeme in zwei getrennten Ebenen zu betrachten. „Während aber nun die geometrischen Verwandtschaften zweier ebener Systeme bei getrennten Ebenen so überaus klar und einleuchtend sind, so verlieren sie ihre Evidenz, sobald man von der collinearen Lage in einer und derselben Ebene ausgeht; die Achse der Collineation, der Affinität oder der Affingleichheit hat dann ihre natürliche Bedeutung als Schnittlinie der zwei Ebenen verloren, und die ganze Definition gewinnt den Charakter des Willkürlichen und Zufälligen. [...] Die neuere Geometrie ferner hat bei der Verschmelzung nicht nur nichts gewonnen, sondern dadurch dass dabei ihr Hauptoperationsmittel, das Projicieren, das doch den eigentlichen Kern ihres Wesens ausmacht, vollständig in den Hintergrund tritt, sehr viel verloren.“¹⁴⁰ (Als Beispiel für eine schlechte Umsetzung nannte Hauck das Buch *Elemente der Geometrie* (Berlin: Weidmann 1875) von Friedrich Kruse.) Daher sollten die neuen Inhalte auch im Anschluss an die darstellende Geometrie unterrichtet werden, wodurch beide Disziplinen gewinnen könnten. Denn die darstellende Geometrie sei zwar „ein äusserst wertvolles Mittel, räumliche Gebilde darzustellen, nicht aber ist sie

¹³⁹ o.V. 1877, S. 191f

¹⁴⁰ o.V. 1877, S. 193

ein Operationsmittel zur Entdeckung neuer Wahrheiten“¹⁴¹, wofür dann die „Neuere Geometrie“ genutzt werden könne. Letztere profitiert auf der anderen Seite von den bereits bekannten Darstellungsmethoden und dem geschulten Raumvorstellungsvermögen. Daher sollte die „Neuere Geometrie“ auch nur in den Schulen unterrichtet werden, die auch Unterricht in darstellender Geometrie anboten, d.h. in den zehnklassigen Realschulen.

Die in der zweiten Sitzung stattfindende Diskussion drehte sich vor allem darum, ob genügend Zeit für die Behandlung weiterer Inhalte vorhanden sei. Diese Frage wurde abschließend bejaht, da man durch die Einführung der „Neueren Geometrie“ auch im Bereich der Euklidischen und der analytischen Geometrie Zeit einsparen könne. Somit fasste die Sektion einstimmig folgende Resolution: „1) Im Unterricht der Elementargeometrie an Realschulen und Gymnasien bleibt die euklidische Geometrie dem System nach bestehen, wird aber im Geiste der neueren Geometrie reformiert. – Die Section begrüsst mit grosser Freude die von Dr. H. Müller in dieser Richtung eingeleiteten Schritte. 2) Die Einführung der neueren Geometrie ist notwendig in den zehnclassigen Realschulen und Realgymnasien, und sie findet ihren Platz zwischen dem I. und II. Teil der descriptiven Geometrie (nach Monge).“¹⁴²

Siegmond Günther (32. Versammlung, 1877)

Die Diskussion wurde dann in der zweiten Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion (67 Teilnehmer) der 32. Versammlung in Wiesbaden (26. bis 29. September 1877) nochmals aufgenommen durch einen Vortrag von Prof. Siegmund Günther¹⁴³ mit dem Titel *Die pädagogisch verwerthbaren mathematischen Errungenschaften der Neuzeit*. Darin beschäftigte er sich damit, wie die seiner Meinung nach immer größer werdende Kluft zwischen den Inhalten der Schule und denen der Hochschule geschlossen werden könne. In einer Fülle von angesproche-

¹⁴¹ o.V. 1877, S. 194

¹⁴² o.V. 1877, S. 196f

¹⁴³ Adam Wilhelm Siegmund Günther wurde am 6.2.1848 in Nürnberg geboren, wo er von 1855 bis 1865 das Gymnasium besuchte. Nach bestandener Reifeprüfung studierte er ab 1865 Mathematik und Physik in Erlangen, Heidelberg, Leipzig, Berlin und Göttingen. 1870 promovierte er in Erlangen (*Studien zur theoretischen Photometrie*), ein Jahr später bestand er das Staatsexamen. Anschließend arbeitete er ab 1872 als Lehrer am Realgymnasium zu Weißenburg am Sand. 1873 habilitierte sich Günther an der Universität Erlangen (*Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form*) und wurde dort Privatdozent. 1875 wechselte er in gleicher Position für drei Semester an das Polytechnikum in München. Nach einer kurzen Tätigkeit als Hilfslehrer am Gymnasium in Amberg wurde er 1877 Gymnasialprofessor für Mathematik und Physik am Gymnasium in Ansbach. Von dort wurde er 1886 auf den Lehrstuhl für Erdkunde an der TH München berufen. Zwischen 1878 und 1884 war Günther zusätzlich für die Deutsche Fortschrittspartei Abgeordneter des Deutschen Reichstags. Günther starb am 4.2.1923 in München.

nen Themen (vor allem aus der Analysis) kam Günther auch auf die Geometrie zu sprechen. Dabei ging er zunächst auf den Beitrag Haucks und einen Artikel von Wilhelm Fiedler (*Zur Reform des geometrischen Unterrichts*. In: Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich Band 22 (1877), S. 82-97) ein, die beide die Einführung der projektiven Geometrie in den Schulunterricht befürworteten und aus Gründen der Anschaulichkeit vehement für die Verwendung der Projektion (im Raum) plädierten. Letzteres hielt Günther für problematisch: „So sehr sich nun gewiss jeder Leser mit den Argumenten beider Männer – und insbesondere mit der jeder polemischen Färbung entbehrenden Darlegung des Züricher Forschers – einverstanden erklären wird, so erschwert doch andererseits deren negative Haltung gegen Kruse und andere Lehrbücher dem aktiven Lehrer die Wahl einer neuen selbständigen Taktik.“¹⁴⁴ Für die Gymnasien müsse ein anderer Schwerpunkt gewählt werden, nämlich „dem projectivischen Grundgedanken gleich vom ersten Anfang an zum Durchbruch zu verhelfen. Dies thun wir, indem wir sofort den richtigen Begriff des Parallelismus einführen, die Grundgebilde der Geometrie der Lage, als Strahlenbündel, Ebenenbündel etc. gebührend betonen und so viel als möglich die principielle Scheidung zwischen Ebene und Raum als unnatürlich fortfallen lassen [...]. Gewisse fundamentale Lehrsätze lassen sich natürlich ebenfalls gleich mit hereinziehen, so z. B. die schöne und ihres metrischen Charakters halber dem älteren Verfahren homogene Begründung der Vielecksschnittsverhältnisse [...]. Bei dieser Art der Auffassung, welche auch in dem schon von der vorjährigen Versammlung anerkannten geometrischen Leitfaden Hubert Müllers (vier Bändchen, Teubner, Leipzig) eine treffliche Stütze findet, werden wir fürs erste bestehen, und auch mit der Euklidischen Geometrie, welche aus unzähligen hier nicht näher zu erläuternden Gründen eben doch auch manches für sich hat, einen leidlichen modus vivendi herstellen können.“¹⁴⁵ Günther plädierte also für die Aufnahme einiger neuer Kapitel in den bestehenden Lehrgang, wollte andererseits aber auch weitgehend am bestehenden festhalten, da diese Inhalte auch weiterhin zur Bildung des Schülers beitragen könnten. Dazu brachte er folgendes Beispiel: „Hankel hat freilich gezeigt¹⁴⁶, dass die von Apollonius in seinem umfangreichen Aufgabencyklus „vom Verhältnisschnitt“ behandelten Probleme sämtlich auf eine relativ einfache Frage der neueren Geometrie, diejenige nach den zusammenfallenden Punkten zweier

¹⁴⁴ o.V. 1878, S. 175

¹⁴⁵ o.V. 1878, S. 176

¹⁴⁶ vgl. dazu Hankel 1875, S. 128ff

demselben Träger angehörigen projectivischen Punktreihen, zurückgeführt werden könne, allein hat durch diese Uebersetzung ins Moderne das Original irgend etwas an seiner Durchsichtigkeit und Eleganz eingebüsst?“¹⁴⁷ Daneben spielte aber vermutlich auch das Fehlen der darstellenden Geometrie an den Gymnasien eine entscheidende Rolle für seinen von den Ideen Haucks abweichenden Vorschlag. Eine Diskussion der von Günther gemachten Aussagen fand nicht statt bzw. wurde in den Versammlungsbericht nicht aufgenommen.

Somit lässt sich festhalten, dass die mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner der Reform des Geometrie-Unterrichts und der Einführung der „Neueren Geometrie“ in allen höheren Schulformen grundsätzlich positiv gegenüberstand. Dabei sollten die Reformen an den realistischen Anstalten umfassender ausfallen und auch die Behandlung neuer Inhalte einschließen. An den Gymnasien wurde eine weitgehende Beibehaltung des bestehenden Lehrgangs angestrebt, in dem nur an manchen Stellen Ergänzungen gemäß der neuen Sichtweise eingefügt werden sollten.

2.2.2 Die Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte

Auf den Tagungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte wurde das Thema „Neuere Geometrie“ zunächst kontrovers diskutiert, letztlich scheinen sich die Reformen aber auch hier durchzusetzen. Insbesondere lässt sich feststellen, dass nach Vorlage der Meraner Reformvorschläge die Betonung der Beweglichkeit im Geometrieunterricht auch als ein Aspekt zur Förderung des funktionalen Denkens angesehen wurde und sich die Diskussion weitestgehend auf diesen Punkt konzentrierte.¹⁴⁸

August Scholz (59. Versammlung, 1886)

Eine kritische Position nahm Johannes August Gottlob Julius Scholz¹⁴⁹ auf der ersten Sitzung der Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der

¹⁴⁷ o.V. 1878, S. 176

¹⁴⁸ vgl. dazu auch Unterkapitel 4.4

¹⁴⁹ Scholz wurde 1839 in Berlin geboren und besuchte das Gymnasium in Prenzlau in der Uckermark. Von 1860 bis 1863 studierte er Mathematik und Physik in Leipzig und Berlin, wo er promovierte und das Examen ablegte. Er absolvierte sein Probejahr in Brandenburg an der Havel und arbeitete danach an verschiedenen Schulen in Berlin (1864 Königliche Realschule, 1865 Dorotheenstädtische Realschule, 1873 Victoriaschule (Höhere Mädchenschule)).

59. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Berlin (18. bis 24. September 1886) ein. In seinem Vortrag *Die neuere Geometrie auf den höheren Lehranstalten* kritisierte er die Aufnahme derselben in den Schulunterricht sehr deutlich und plädierte stattdessen für eine vertiefte Betrachtung der darstellenden Geometrie. Dabei führte er als Gründe gegen die „Neuere Geometrie“ deren hohes Maß an Allgemeinheit und das zu wenig ausgeprägte räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler an. Er kritisierte also gerade die Aspekte, die von den Befürwortern als Gründe für die Einführung genannt wurden. Zusätzlich beklagte Scholz die für den Unterricht zu knapp bemessene Zeit und den zu schwachen Zusammenhang mit den übrigen Inhalten des Mathematikunterrichts. Die darstellende Geometrie auf der anderen Seite „sei wegen des Anhaltes, welchen die Zeichnung der Vorstellung gebe, auch schon dem wenig entwickelten Anschauungsvermögen zugänglich und sei wegen des steten Ueberganges vom Bild zum Gegenstand und umgekehrt, sowie durch die eigene Thätigkeit der Konstruktion, welche schon von Beginn an den Unterricht begleiten kann, in hohem Grade geeignet, das Anschauungsvermögen zu entwickeln und die Freude eigenen Könnens zu erzeugen.“¹⁵⁰ Außerdem betonte er ihre vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten, die sich sowohl im Bereich der Wissenschaft als auch im praktischen Leben fänden. In der sich an den Vortrag anschließenden Diskussion wurde der Beitrag der darstellenden Geometrie für die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens allgemein anerkannt. Gleichzeitig wurde aber betont, dass auch die „Neuere Geometrie“ anschaulich unterrichtet werden könne und sich für die Motivation der Schüler positiv auswirke: „Durch Eröffnung weiter Gesichtskreise wird Frische und Lebendigkeit bei den Schülern geweckt.“¹⁵¹ Zwischen den beiden Bereichen dürfe kein künstlicher Gegensatz aufgebaut, sondern es solle beim Unterricht des einen ein möglichst großer Nutzen aus dem jeweils anderen gezogen werden.

Josef Diekmann (61. Versammlung, 1888)

Zwei Jahre später hielt Josef Diekmann in der Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der 61. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Köln (18. bis 23. September 1888) einen Vortrag mit dem Titel *Der (erste) geometrische Unterricht, eine Naturgeschichte des Raumes*, in dem er zunächst auf die Gründe für den seiner Meinung nach nur geringen Lernerfolg im Mathematikunterricht einging. Einerseits sei dafür der Anfangsunterricht verantwortlich, in dem ein

¹⁵⁰ Guttstadt u.a. 1886, S. 170

¹⁵¹ Guttstadt u.a. 1886, S. 171

viel zu großes Gewicht auf das abstrakte Beweisen gelegt werde. Das bei den Schülern in diesem Stadium noch nicht entwickelte Beweisbedürfnis führe dazu, dass sie die Beweise nicht wirklich verständen sondern lediglich auswendig lernten. Den zweiten Grund für die eher schlechten Resultate sah Diekmann in der zu starken Betonung der Beweise Euklids im Geometrieunterricht. „Nachdem der Vortragende des weitern ausgeführt, dass die euklidischen Beweise eine absolute Beweiskraft nicht besitzen, wies er darauf hin, dass somit als Werth nur ihre Beweismethode, die Strenge der Schlussfolgerungen aus gegebenen oder angenommenen Praemissen bliebe. Das sei aber zu wenig.“¹⁵² Vielmehr müsse die Geometrie auch als „Erfahrungswissenschaft“ betrachtet werden und daher neben der starren Euklidischen Methode auch „Bewegung“ und „Entwicklung bzw. Transformation“, die bereits die übrigen Naturwissenschaften prägten, als Beweismethoden in den Unterricht einfließen. Dieser werde dadurch anschaulicher und anregender. Nur so sei es möglich, „bei dem Schüler eine klare Erkenntnis des inneren Zusammenhanges der geometrischen Lehren hervorzurufen und sein Gesamtwissen einigen wenigen Grundanschauungen unterzuordnen. Die gewaltigen Errungenschaften der neueren Geometrie, welche nichts von euklidischen Beweisen wisse, beruhen auf der Einfachheit ihrer Mittel, welche im Grunde dieselben seien, wie die genannten.“¹⁵³ Im restlichen Teil des Vortrags zeigte Diekmann anhand von Beispielen, wie er sich die Umgestaltung des Geometrieunterrichts vorstellte. Für den Aspekt der „Bewegung“ waren das in etwa die Vorschläge, die er fünf Jahre später in seinem Artikel *Bewegung und Umformung* in der ZmnU aufschrieb. Als Beispiel für eine „Transformation“ zeigte Dieckmann, wie Punkt, Gerade und Kreis „durch Grenzübergänge“ ineinander überführt werden können und nutzte dieses Verfahren zur Lösung von Berührungsaufgaben.

Hans Wittek (66. Versammlung, 1894)

Dieselbe Forderung wie Diekmann stellte auch Hans Wittek¹⁵⁴ in der Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der 66. Versammlung deut-

¹⁵² o.V. 1889, S. 342

¹⁵³ o.V. 1889, S. 342f

¹⁵⁴ Johann Wittek wurde am 6.4.1847 in Brünn geboren, wo er das Kaiserlich-Königliche Staatsgymnasium besuchte. Ab 1866 studierte er an der Universität Wien und erhielt 1872 die Lehrbefähigung für Mathematik und Physik. Wittek arbeitete zunächst als Hilfslehrer an der Kommunal-Oberrealschule im vierten Bezirk Wiens und wurde 1873 Professor am niederösterreichischen Landes-Real- und Obergymnasium in Horn. 1890 wechselte er an das Landes-Real- und Obergymnasium in Baden, wo er 1896 zum Direktor ernannt wurde. Gleichzeitig gründete er 1891 die höhere Töchterschule in Baden, die er bis 1898 leitete. Wittek wurde am 1.8.1906 in den Ruhestand versetzt.

scher Naturforscher und Ärzte in Wien (24. bis 28. September 1894) auf. In seinem Beitrag *Ueber einige zeitgemässe Reformen des geometrischen Mittelschulunterrichtes* legte er dem Aufbau des Mathematikunterrichts zwei gegenläufige Prinzipien zu Grunde: Einmal verlange die ständige Weiterentwicklung der Naturwissenschaften eine Erweiterung der vermittelten Inhalte, andererseits dürfe der Schüler aber auch nicht überlastet werden. Um beide Aspekte zu verwirklichen, sollte der Lehrer den Unterricht so organisieren, „dass die Forderungen auf jeder Alters- und Entwicklungsstufe dem jeweiligen Auffassungs- und Leistungsvermögen der Jugend angepasst seien, und dass Fragen, welche dem Schüler grosse Leistungen zumuthen, an das Ende seiner Mittelschulstudien verlegt werden.“¹⁵⁵ Am Beispiel des Geometrieunterrichts machte Wittek dann klar, welche Veränderungen er für notwendig erachtete. Dabei kritisierte er in nahezu völliger Übereinstimmung mit Diekmann den zu starken Einfluss der Beweise im Anfangsunterricht, der gemäß den amtlichen Vorgaben eigentlich ein „Anschauungsunterricht“ sein sollte. Stattdessen müsse ein stärkeres Gewicht auf das Zeichnen gelegt werden, da die Schüler dadurch einerseits den Umgang mit den Zeichengeräten lernten, andererseits aber auch auf experimentellem Weg zu geometrischen Sätzen gelangten.

Am bestehenden planimetrischen Unterricht kritisierte Wittek, wiederum in Übereinstimmung mit Diekmann, die „oft allzu hohen Anforderungen an das logische Auffassungs- und Leistungsvermögen des Schülers“¹⁵⁶. Insbesondere hob er die Betrachtung von kommensurablen und inkommensurablen Größen (vor Einführung der irrationalen Zahlen) und die Verwendung des indirekten Beweises als Mängel hervor und fasste seine Analyse so zusammen: „Der Schüler ist kaum im Stande, nachzudenken, was ihm der Lehrer vorgeführt hat, niemals aber ist er im Stande, es allein zu ersinnen; seine geistige Kraft wird durch das Erlernen, oft Auswendiglernen von Beweisen aufgebraucht, und es ereignet sich nicht selten, dass er den Beweis als die Hauptsache, den geometrischen Satz als Nebensache auffasst.“¹⁵⁷ Ebenso sollten im Geometrieunterricht nur solche Berechnungen durchgeführt werden, die bereits vorher eingeübt worden sind. Alle Inhalte, die weitergehende Operationen erforderten, sollten in eine spätere Jahrgangsstufe verschoben werden. Als Alternative hielt es auch Wittek für richtig, das „Princip der Bewegung“ als Leitidee im Geometrieunterricht zu verankern und die Bewegungen und die durch Bewegung entstehenden

¹⁵⁵ Wangerin u.a. 1895, S. 317

¹⁵⁶ Wangerin u.a. 1895, S. 318

¹⁵⁷ Wangerin u.a. 1895, S. 318

geometrischen Objekte qualitativ zu untersuchen. Wittek nannte als Beispiele für Qualitäten „Richtung“ und „Sinn“. Solche Betrachtungen würden beim Unterricht der Trigonometrie und der analytischen Geometrie dringend benötigt und daher bislang in diesem Rahmen eingeführt, so dass es zu einer „Überbürdung“ der Schüler komme. Diese Schwierigkeit stelle sich im Rahmen der Planimetrie nicht, da die meisten Inhalte den Schülern ohnehin bereits bekannt seien und nun unter verändertem Blickwinkel behandelt würden. Dadurch werde außerdem der Grad der Allgemeinheit und Anschaulichkeit erhöht und der Unterricht für die Schüler interessanter. Den Zustand nach der Umgestaltung sah Wittek folgendermaßen: „Dann wird es nicht mehr nöthig sein, „einige Grundlehren der neueren Geometrie“ anhangsweise an das Lehrgebäude der Planimetrie anzufügen, die modernen Anschauungsweisen werden vielmehr alle Gedankenkreise der Geometrie durchdringen.“¹⁵⁸ Im restlichen Teil seines Vortrags machte Wittek noch einige Ausführungen zum Unterricht in der Stereometrie, Trigonometrie und analytischer Geometrie, die jedoch für unser Thema ohne Belang sind.

Die Ausführungen Diekmanns und Witteks zeigen deutlich, dass sie den Fokus auf die Umgestaltung der bestehenden Inhalte unter dem Aspekt der Beweglichkeit der geometrischen Figuren richteten. Die Aufnahme neuer und die Nutzung wirklich projektiver Methoden kamen in ihren Argumentationen nicht vor. (Es finden sich auch keine anderen Beiträge, die dies thematisierten.)

Heinrich Schotten (81. Versammlung, 1909)

Diese Entwicklung wurde vermutlich noch verstärkt durch die Vorlage der Meraner Reformvorschläge im Jahr 1905 und die in ihnen enthaltene Forderung nach einer stärkeren Förderung des funktionalen Denkens. Dieses sollte nämlich im Geometrieunterricht gerade durch die beweglichen Figuren und die Veranschaulichung der Bewegungen mit Hilfe von Modellen verwirklicht werden. Dazu bemerkte Heinrich Schotten in seinem Vortrag *Das funktionale Denken im mathematischen Anfangsunterricht* auf der zweiten Sitzung der Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der 81. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Salzburg¹⁵⁹ (19. bis 25. September 1909) folgendes: „Im geometrischen Unterricht läßt sich das funktionale Denken ganz besonders dadurch fördern, daß

¹⁵⁸ Wangerin u.a. 1895, S. 319

¹⁵⁹ Ein Bericht von Schottens Vortrag existiert weder im Tageblatt der Versammlung noch im Tagungsband, sodass nur auf einen kurzen Bericht der ZmnU zurückgegriffen werden kann.

man die Beweglichkeit und Veränderlichkeit anschaulich vorführt.“¹⁶⁰ Als Hilfsmittel zur Veranschaulichung nannte Schotten einen in einem Punkt befestigten Faden, der auf Spannung gehalten wird und um den Punkt gedreht werden kann. Damit ließe sich beispielsweise die Definition des Abstands eines Punktes (in dem der Faden befestigt ist) zu einer Geraden veranschaulichen, indem bei der Drehung des Fadens die minimale Länge der Strecke zwischen dem "Schnittpunkt" des Fadens mit der Geraden und dem gegebenen Punkt gesucht wird. Außerdem könne der Übergang von der Sehne zur Tangente am Kreis veranschaulicht werden. Als weiteres Hilfsmittel zur Förderung des funktionalen Denkens nannte Schotten „Modelle mit beweglichen Gelenken“. Diese könnten auch zum Auffinden von geometrischen Sätzen verwendet werden, z.B. für den Satz, dass ein Viereck nicht durch Angabe aller Seitenlängen eindeutig festgelegt ist, sondern noch eine weitere Angabe benötigt wird. Schotten schloss seinen Beitrag folgendermaßen: „So bildet das funktionale Denken im Verein mit der Anschauung fortwährend den eigentlichen Kernpunkt des Unterrichts, beide ergänzen und fördern sich gegenseitig: und nicht zu unterschätzen ist, daß die Schüler erfahrungsgemäß an einem so erteilten Unterricht mit dem lebhaftesten Interesse teilnehmen; auch das Verständnis für die später einsetzende strenge Beweisführung wird wesentlich erleichtert.“¹⁶¹

2.2.3 Die Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften

Auch auf den Tagungen des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften (der so genannte Förderverein) wurde mehrfach das Thema „Neuere Geometrie“ behandelt, wobei sich ausschließlich positive Beiträge finden lassen.

Friedrich Pietzker (2. Versammlung, 1893)

Gleich auf der zweiten Hauptversammlung des Vereins (4. bis 6. April 1893 in Berlin) hielt Friedrich Pietzker¹⁶² in der allgemeinen Sitzung einen Vortrag mit dem Titel *Die*

¹⁶⁰ Schotten 1910, S. 103

¹⁶¹ Schotten 1910, S. 104

¹⁶² Friedrich Wilhelm Christian Pietzker, geboren am 18.12.1844 in Sondershausen, besuchte von 1854 bis 1862 das Domgymnasium in Naumburg und studierte anschließend bis 1866 Mathematik und Physik in Berlin, Göttingen und Königsberg. Nach Ableistung seines Militärdienstes und der Teil-

Verteilung des Lehrstoffes für den mathematischen Gymnasialunterricht auf zwei Stufen. Darin unterzog er die in den „neuen Lehrplänen“¹⁶³ enthaltenen Vorgaben einer kritischen Bewertung und machte Vorschläge zur besseren Verteilung des Stoffs auf die verschiedenen Jahrgangsstufen. Nach einigen Anmerkungen zur Algebra erklärte er: „Was die Geometrie betreffe, so sei die Strömung gegen die Euklidische Methode im Erstarren. Der Umfang des Lehrstoffes sei richtig, aber die Behandlung müsse anders werden; ebenso die Verteilung“¹⁶⁴. So solle u.a. die Ähnlichkeitslehre in Sekunda, die Körperberechnung bereits in Obertertia unterrichtet werden. Leider enthält der Tagungsbericht keine Angaben Pietzkers, wie er sich die neue Art der „Behandlung“ vorstellte. Im Bereich der Obersekunda und Prima lobte Pietzker das Streichen der diophantischen Gleichungen und Kettenbrüche aus dem Lehrplan, die verbliebenen Inhalte sollten jedoch „in einem wissenschaftlichen Zusammenhange gelehrt werden. Ein wirkliches System sei auch wirklich wissenschaftlich.“¹⁶⁵ Hier spielte er vermutlich auf die in der „Neueren Geometrie“ liegende Möglichkeit eines systematischen Aufbaus an. Weiter führte er aus: „Durch die Berücksichtigung der neueren Geometrie ergebe sich eine erhebliche Erweiterung des Gesichtskreises. Die Harmonielehre und was damit im Zusammenhange stehe müsse schon in Obersekunda gelehrt werden, dann sei es möglich in Prima, resp. Oberprima eine Vertiefung eintreten zu lassen und zwar müsse der elementarsynthetischen Behandlung die Verwertung der Ponceletschen Methode folgen. Den Schluss bilde dann die Lehre von den Kegelschnitten, die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, der Koordinatenbegriff sei zu lehren, aber nicht analytische Geometrie.“¹⁶⁶ Hier ist keine große Abweichung vom Lehrplan festzustellen, es handelt sich eher um eine Konkretisierung. (vgl. auch 2.5.1)

Die weiteren Aussagen Pietzkers sind für unser Thema nicht relevant. Der Vortrag wurde laut Tagungsbericht mit starkem Beifall bedacht, eine Diskussion fand nicht statt.

nahme am Deutsch-Französischen Krieg erhielt er 1872 eine Stelle am Pädagogium (eine private Lehr- und Erziehungsanstalt) in Ostrau (Posen). 1873 legte er in Breslau das Examen ab und erhielt eine Anstellung an der Realschule I. Ordnung in Tarnowitz (Schlesien), von wo er 1878 an das Gymnasium Nordhausen (Thüringen) wechselte.

¹⁶³ Gemeint waren die Lehrpläne Preußens von 1891.

¹⁶⁴ Schotten 1893, S. 226

¹⁶⁵ Schotten 1893, S. 226

¹⁶⁶ Schotten 1893, S. 226

Rudolf Böger (9. Versammlung, 1900)

Einen ausführlichen Beitrag mit dem Titel *Die Geometrie der Lage in der Schule* lieferte Rudolf Böger¹⁶⁷ auf der neunten Hauptversammlung (5. bis 7. Juni 1900 in Hamburg). Darin stellte er zunächst fest, dass Vorschläge zur Nutzung der Methoden der „Neueren Geometrie“ im Schulunterricht schon von verschiedenen Seiten gemacht wurden. Um diese Methoden den Zuhörern deutlich vor Augen zu führen, zitierte er einen Abschnitt aus dem Vorwort zu Jakob Steiners *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, in dem der bereits in Kapitel 1 dargestellte Aspekt, durch das Suchen von wenigen grundlegenden Beziehungen Ordnung in die Geometrie zu bringen, erläutert wird. Am Schluss des Zitats kommentierte Böger: „Wer das Werk Steiners nachgedacht hat, wird seine Begeisterung teilen und von der Ueberzeugung durchdrungen sein, dass die Steinerschen Methoden fähig sind, dem Schulunterricht neues Leben zuzuführen. Trotzdem sind seit den angeführten Worten 68 Jahre vergangen, ohne dass die neuere Geometrie eine Schulwissenschaft geworden ist.“¹⁶⁸ Hier und im Folgenden meinte Böger, dass es keinen systematischen Lehrgang der „Neueren Geometrie“ für die Schule gab. Die Aufnahme einzelner neuer Inhalte in die bestehenden Konzepte bestritt er nicht.

Fragt man nun nach den Gründen, die der vollständigen Einführung in den Schulunterricht entgegen standen, so waren für Böger zwei Aspekte relevant. Zum einen sah er eine starke Opposition auf Seiten der Lehrer, die an den altbekannten Inhalten festhalten wollten. Von viel entscheidender Bedeutung seien jedoch die Schwierigkeiten gewesen, die in der „Neueren Geometrie“ selbst lagen. Das erste dieser von Böger ausgemachten Probleme war die Nutzung des Doppelverhältnisses beim Aufbau der Geometrie durch Steiner, wodurch sich die grundlegenden Aussagen auf den ersten Blick schneller herleiten ließen. Dies stellte sich im weiteren Verlauf jedoch als Nachteil heraus: „Der Gedankeninhalt der neuern Geometrie ist ein so selbständiger, ein so weit von dem der Arithmetik und Planimetrie abliegender, dass man ihm Zwang anthun muss, um ihn in arithmetisch-planimetrische Darstellungs-

¹⁶⁷ Rudolf Karl Ferdinand Böger, geboren am 22.5.1854 in Burgsteinfurt, studierte nach dem Besuch des Gymnasiums in Lingen von 1872 bis 1875 Mathematik und Naturwissenschaften in Leipzig und Berlin. Die Examensprüfung legte er 1876 in Göttingen ab und absolvierte anschließend das Probejahr am Realgymnasium Altona. 1878 wurde er ordentlicher Lehrer am Realprogymnasium Lüdenscheid, 1879 wechselte er nach Hamburg an die Realschule vor dem Holstentor. Böger promovierte 1886 in Leipzig bei Klein und Neumann mit der Arbeit *Über Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen zweiter Ordnung*. 1889 wurde er Oberlehrer und 1892 an das Realgymnasium des Johanneums in Hamburg versetzt.

¹⁶⁸ Böger 1900, S. 67

formen zu pressen. Diese Darstellungsformen müssen doch erst wieder zerschlagen und durch rein geometrische ersetzt werden, bevor der Inhalt in dem Lernenden lebendig werden kann.“¹⁶⁹ Somit musste zunächst der wichtige Schritt getan werden, alle Maßbeziehungen aus der Geometrie auszuschließen, was mit von Staudts *Geometrie der Lage* (1847) erreicht wurde.

Doch auch dieses Werk brachte noch keine Veränderung für den Schulunterricht, wofür Böger das Streben von Staudts nach einer möglichst kurzen Darstellung verantwortlich macht, durch die das Buch für das breite Publikum unlesbar geworden sei. Daher musste zunächst die Bearbeitung des Werkes durch Reye (1866) abgewartet werden. Allerdings behielt Reye die Staudtsche Definition bei, nach der zwei Gebilde projektiv aufeinander bezogen sind, wenn harmonische Elemente stets harmonischen Elementen zugeordnet werden. Den sich dann ergebenden Beweis für den Fundamentalsatz, dass die projektive Verwandtschaft durch drei Paare von zugeordneten Elementen eindeutig festgelegt ist, hielt Böger für die Schule ungeeignet. Um diese Problematik zu umgehen, empfahl er die Definition von Johannes Thomaes¹⁷⁰ zu verwenden, die die projektive auf die perspektive Verwandtschaft zurückführt. Dadurch bekomme auch der Beweis des Fundamentalsatzes eine für die Schule angemessene Form. Eine noch größere Schwierigkeit sah Böger allerdings in der Verwendung des Wortes „imaginär“ durch von Staudt. Zwar habe er in den *Beiträgen zur Geometrie der Lage* diesem eine geometrische Bedeutung zugeordnet. „Statt aber diesen neuen Inhalt in einer neuen Form darzustellen, hat er, wiederum der Kürze zu Liebe, die alte Ausdrucksweise beibehalten, sodass sich Inhalt und Ausdruck nicht mehr decken und dem Leser eine schier unerträgliche Anspannung zugemutet wird. Für die Elementargeometrie aber ist das Wort imaginär unmöglich; es muss, weil ihm keine Vorstellung entspricht, getilgt werden.“¹⁷¹

Böger sah die von Seiten der Wissenschaft zu leistende Vorarbeit damit als erledigt an. Den Lehrern obliege nun die Aufgabe, die wissenschaftlichen Resultate aufzugreifen und daraus einen Lehrgang für die Schule zu entwickeln. Dabei sei es von entscheidender Bedeutung, dass die neuen Konzepte auch in der Praxis ausprobiert würden.

¹⁶⁹ Böger 1900, S. 67

¹⁷⁰ Diese ist enthalten in seinem Buch *Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung*. Halle a.S.: Nebert 1873

¹⁷¹ Böger 1900, S. 68

Mit dem aktuellen Stand der Umsetzung war Böger in hohem Maße unzufrieden. Zwar konstatierte er, dass die „Neuere Geometrie“ sich bereits auf den Schulunterricht auswirke. Allerdings geschah dies seiner Meinung nach in einer sehr ungünstigen Form: „Ueberall merkt man den Einfluss der neueren Methoden, überall begegnet man ihren Spuren. Aber diese Spuren sind noch verwischt; nur beiläufig oder in einem Anhang wagt man sich mit ihnen hervor. Neues und Altes wird mit einander verquickt; das Alte erscheint in ungünstiger Beleuchtung und das Neue kommt nicht zu seinem Recht. Es ist ein Zustand der Halbheit, der möglichst bald überwunden werden muss.“¹⁷² Er plädierte stattdessen für einen „zusammenhängenden“ und „selbständigen“ Lehrgang, d.h. für das Unterrichten der neuen Inhalte als Block und losgelöst von der Euklidischen Geometrie. Darum sollte auch auf die Verwendung arithmetischer Hilfsmittel möglichst verzichtet werden, weshalb Böger den Begriff „Geometrie der Lage“ verwenden wollte.

Neben den bereits genannten fachlich-inhaltlichen Vorteilen sah Böger auch drei eher didaktisch orientierte Gründe, die für den Einsatz der „Geometrie der Lage“ im Schulunterricht sprachen. Zum einen könne dadurch, dass stets aus allgemeinen Aussagen spezielle Sätze abgeleitet werden¹⁷³, der Schüler allein neue Zusammenhänge entdecken. „Dieses Schliessen vom allgemeinen auf den besonderen Fall ist eine Thätigkeit, die der Primaner vielfach selbständig auszuüben vermag, bei der er sogar oft die aufmunternde Freude hat, eine Thatsache auszusprechen, auf die der Lehrer noch nicht hingewiesen hat. Die Fülle der zu machenden Bemerkungen ist überall so gross, dass dem Schüler auch nach dem Lehrer etwas zu sagen bleibt, und welche Freude jede beim Schüler sichtbar werdende Spur eigenen Denkens dem Lehrer macht, brauche ich in dieser Versammlung nicht auszuführen.“¹⁷⁴ Weiterhin werde im Unterschied zum Unterricht in der Arithmetik dem Lehrer immer vor Augen geführt, welche Anstrengung das Lernen neuer Inhalte für die Schüler bedeutet. „Es giebt in der Geometrie der Lage kein mechanisches Wissen, das man durch jahrelange Uebung sich angeeignet hat und nun so mühelos verwertet, dass die Wahrnehmung einer geringeren Fertigkeit beim Schüler den Lehrer immer von neuem wieder an seiner pädagogischen Kunst verzweifeln lässt. [...] Gerade die Geometrie der Lage bestärkt den Lehrer in der Ueberzeugung, dass die Jugend ei-

¹⁷² Böger 1900, S. 68

¹⁷³ Böger sah daher die „Geometrie der Lage“ eher als analytische denn als synthetische Wissenschaft an. Auch die analytische Geometrie stufte er als weit weniger analytisch ein.

¹⁷⁴ Böger 1900, S. 68f

gentlich in jedem Augenblick aufnahmefähig und auch aufnahmewillig ist, und diese Erkenntnis ist es ja, die uns Berufsfreudigkeit giebt.“¹⁷⁵ Nicht zuletzt biete die „Geometrie der Lage“ den Vorteil, dass Schüler, deren mathematische Ausbildung zwar Lücken aufweist, die sich aber in der Prima um bessere Leistungen bemühen wollen, sich erfolgreich ein neues Thema erarbeiten können. Dadurch „hat der Lehrer bisweilen die Freude zu sehen, wie ein Schüler, der bis dahin ein unbrauchbares Mitglied der mathematischen Gesellschaft war, allmählich sich aus eigener Kraft zur verständnisvollen Teilnahme am Unterrichte aufschwingt.“¹⁷⁶

Um nun die methodischen Vorteile der „Geometrie der Lage“ für den Schulunterricht nicht zu gefährden, plädierte Böger für eine starke Begrenzung der Inhalte. So sollte z.B. die Theorie der Chordale zweier Kreise nicht in der Schule behandelt werden, da sich diese „ungekünstelt“¹⁷⁷ nur aus dem Satz ergebe, dass zu zwei Kegelschnitten immer zwei Geraden existieren, in denen mithilfe der Kegelschnitte identische Punktinvolutionen erzeugt werden können.¹⁷⁸ Dieser sei aber für den Schulunterricht zu kompliziert. Gleiches gelte auch für die Brennpunkteigenschaft der Kegelschnitte. Stets müsse gelten: „In der Geometrie der Lage muss man sich beschränken auf das, was sie freiwillig bietet; [...] für uns bedeutet die Methode mehr als die Zahl der Sätze.“¹⁷⁹

Der Umfang der vermittelten Inhalte hänge zudem davon ab, ob der Beginn der „Geometrie der Lage“ in der Unter- oder der Oberprima liege. Hier plädierte Böger klar für die Unterprima, damit die „Geometrie der Lage“ insbesondere vor der analytischen Geometrie behandelt werde. Dies begründete er (mit leicht polemischem Unterton) so: „Den Schülern bietet die analytische Geometrie die immer nur langsam zu überwindende Schwierigkeit, dass sie hinter einem arithmetischen Schleier geometrische Wahrheiten erkennen sollen. Sehr erleichtert wird ihnen die Ueberwindung dieser Schwierigkeit, wenn sie aus der Geometrie der Lage bereits wissen, was sie sehen sollen.“¹⁸⁰ Vor der „Geometrie der Lage“ sollten die Schüler im Rahmen der

¹⁷⁵ Böger 1900, S. 69

¹⁷⁶ Böger 1900, S. 69

¹⁷⁷ Als gekünstelt sah Böger die Herleitung mit Hilfe der analytischen Geometrie an. Dabei wird die Chordale als gemeinsame Sehne definiert, selbst wenn die Kreise sich nicht schneiden. „Auf solche Rätsel stösst man in der Geometrie der Lage nicht.“ (Böger 1900, S. 69)

¹⁷⁸ Sind ein Kegelschnitt und eine Gerade g gegeben, erhält man eine Involution, indem man jedem Punkt auf g den Schnittpunkt seiner Polare mit g zuordnet. Zu zwei Kegelschnitten existieren immer genau zwei Geraden, in denen die so gebildeten Involutionen identisch sind. Bei zwei Kreisen ist eine dieser Geraden die Ferngerade, so dass man die zweite (eigentliche) Gerade als Chordale definieren kann.

¹⁷⁹ Böger 1900, S. 69

¹⁸⁰ Böger 1900, S. 69

Planimetrie bereits die wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte kennengelernt haben. Den Zugang über ebene Schnitte am Doppelkegel empfahl Böger ebenfalls im Vorhinein in der darstellenden Geometrie zu vermitteln.

Am Schluss des Vortrags wies Böger noch darauf hin, dass er einen von ihm bereits erprobten Lehrgang in Form eines Leitfadens herausgegeben habe¹⁸¹, der sicherlich von mancher Seite Kritik erfahren werde. Die Besprechung dieser Kritik werde jedoch nach seiner Überzeugung nur dazu beitragen, „die Schönheiten der Geometrie der Lage heller hervorleuchten lassen und die Erkenntnis erwecken oder befestigen, dass ihr ein Platz im Schulunterricht gebührt.“¹⁸² Hinweise auf Reaktionen des Publikums finden sich im offiziellen Versammlungsprotokoll nicht.¹⁸³

Albert Schülke (19. Versammlung, 1910)

Eine im Vergleich zu Böger etwas andere Meinung zur „Neueren Geometrie“ vertrat Albert Schülke¹⁸⁴ zehn Jahre später auf der 19. Versammlung in Posen (17. bis 19. Mai 1910). Er hielt dort einen Vortrag mit dem Titel *Ueber neuere Geometrie*, in dem auch er sich als klarer Befürworter dieser positionierte, setzte allerdings andere Schwerpunkte. Der Ausgangspunkt Schülkes war die Frage, ob eine zu große Distanz zwischen Mathematikunterricht und wissenschaftlichem Fortschritt entstanden sei. Auf diese werde gewöhnlich geantwortet, dass durchaus neue Inhalte Aufnahme in den Mathematikunterricht fänden, wenn sie dafür geeignet seien. Als Beispiele für solche neu aufgenommenen Inhalte nannte Schülke den Feuerbachschen Kreis, die Nichteuklidische Geometrie und die Geometrographie, die er allerdings alle als eher ungeeignet einstufte¹⁸⁵. Auf der anderen Seite fehlten jedoch „perspektive Zeichnungen [...] und projektive Betrachtungen findet man in Schulbüchern nur spärlich,

¹⁸¹ vgl. dazu Unterkapitel 3.4

¹⁸² Böger 1900, S. 70

¹⁸³ In einem eher kurz gehaltenen Bericht in der ZmnU heißt es: „Die wohl durchdachten und klaren Erläuterungen und Vorschläge des Herrn Prof. Böger fanden bei den Versammelten in hohem Grade Anerkennung, die sich durch lebhaften Beifall kund gab.“ (Quensen 1900, S. 406)

¹⁸⁴ Albert Schülke, geboren am 13.12.1856 in Marienwerder (Westpreußen), studierte nach dem Besuch des Gymnasiums in Marienwerder ab 1875 Mathematik, Physik und Philosophie in Königsberg. Nach bestandenen Examen (1881) und Promotion (1882) absolvierte er das Probejahr am Altstädtischen Gymnasium in Königsberg. Anschließend arbeitete er am Realprogymnasium Osterode (Ostpreußen), von wo er 1904 als Lehrer an der Königlichen Oberrealschule auf der Burg nach Königsberg zurückkehrte. 1911 wechselte Schülke an das Realgymnasium Tilsit.

¹⁸⁵ „Von den vorhin erwähnten neuen Gegenständen erscheint mir die Nichteuklidische Geometrie zu schwierig, der Feuerbachsche Kreis zu speziell, und die Geometrographie gibt, abgesehen von grundsätzlichen Bedenken, jedenfalls eine sehr starke Belastung des Gedächtnisses.“ (Schülke 1911, S. 22)

obwohl dies das wesentlichste Kennzeichen der neueren Geometrie ist, und obwohl Cayley schon 1859 sagte: Projective geometry is all geometry.“¹⁸⁶

Als Ursache für das Fehlen dieser Inhalte sah er die Vernachlässigung der Stereometrie gegenüber der Planimetrie. Diese ergebe sich daraus, dass letztere in Euklids Elementen einen zu großen Raum einnehme, obwohl sie eigentlich nur ein Hilfsmittel für erstere sein dürfe. Die Einführung weiterer neuer Inhalte in Euklidischer Behandlung war für Schülke keine sinnvolle Lösung: „Auch gibt die Euklidische Geometrie, nachdem Kongruenz, Flächeninhalt, Aehnlichkeit und Ausmessung des Kreises besprochen ist, prinzipiell nichts Neues, und wenn wir noch einige Sätze über harmonische Punkte und Transversalen in üblicher, d.h. euklidischer, Weise in den oberen Klassen hinzufügen, dann erhalten die Schüler damit keinen Zuwachs an allgemeiner Bildung.“¹⁸⁷ Daher solle sein Vortrag zur Beantwortung der Frage beitragen, „ob die Behandlung der projektiven Geometrie pädagogisch wertvoller ist“¹⁸⁸ als die vorher von ihm abgelehnten Inhalte. Dazu führte er insgesamt drei Aspekte an, auf denen seiner Meinung nach die Vorteile der projektiven Geometrie gegenüber der Euklidischen beruhten.

Als erstes ging Schülke auf die „uneigentlichen Elemente“ ein, die einerseits eine in der Euklidischen Geometrie nicht vorkommende „Begriffserweiterung“¹⁸⁹ darstellten. Dabei war für ihn die Frage der Existenz der „uneigentlichen Punkte“ irrelevant: „Im Gegensatz zur Nichteuklidischen Geometrie, die über das Wesen der parallelen Geraden etwas aussagen will, handelt es sich hier um eine rein logische Definition.“¹⁹⁰ Zusätzlich könne mit den Fernelementen aber auch der „Unterschied von Anschauung und reinem Denken“¹⁹¹ besonders gut deutlich gemacht werden. So erscheine beispielsweise die Menge aller Fernpunkte bei Betrachtung des Horizonts am Meer (anschaulich) als Kreis. Werde allerdings (streng mathematisch) eine Zentralprojektion einer Ebene auf eine zweite Ebene ausgeführt, so entstehe als Bild des Horizonts

¹⁸⁶ Schülke 1911, S. 22; Hier meint Schülke mit „projektiven Betrachtungen“ insbesondere die Methode, mit Hilfe der Zentralprojektion Aussagen zu verallgemeinern, wofür er im weiteren Verlauf noch Beispiele lieferte. Die eigentliche Aussage von Cayley lautet: „descriptive geometry is all geometry“ (Cayley 1859, S. 90)

¹⁸⁷ Schülke 1911, S. 22; Hier ist eine große Nähe zu Böger erkennbar, der die Behandlung von neuen Inhalten mit alten Methoden ebenso ablehnte.

¹⁸⁸ Schülke 1911, S. 22

¹⁸⁹ Laut Schülke seien „Begriffserweiterungen“ bislang vor allem in der Arithmetik (Erweiterung von Zahlbereichen) zu finden. Dort werde ihnen allerdings ein zentraler Beitrag zur mathematischen Bildung beigemessen.

¹⁹⁰ Schülke 1911, S. 22

¹⁹¹ Schülke 1911, S. 22

(d.h. der Menge aller Fernpunkte der Urbildebene) immer eine Gerade. Aus Gründen der Logik müsse man als deren Urbild die unendlich ferne Gerade annehmen. Der zweite wichtige Aspekt der projektiven Geometrie war für Schülke die darin zu findende „ganz neue Art von Beweisen“¹⁹². Hiermit meinte er das Verfahren, einen Satz an einer konkreten Figur zu beweisen und im Anschluss durch Zentralprojektion zu verallgemeinern¹⁹³. Falls dieses Beweisverfahren nicht zur Verfügung stehe, würden stattdessen die Sätze von Menelaos und Ceva zum Beweis benutzt. Demgegenüber biete die Verwendung der Projektion erhebliche Vorteile. Erstens sei „der hier angedeutete Weg einfacher und leichter zu behalten“¹⁹⁴, was Schülke jedoch nicht näher begründete. Darüber hinaus gelange der Schüler durch die Projektion zur Einsicht, warum der behandelte Satz wahr ist, da er sich die Aussage zunächst an einem einfachen Spezialfall klar machen könne. Bei der anschließenden Abbildung trete keine wesentliche Veränderung ein. Im Gegensatz dazu sei man auch bei Verwendung von Menelaos und Ceva von der Richtigkeit der Aussage überzeugt, der Grund¹⁹⁵ dafür bleibe aber verborgen. Als dritten Vorteil der neuen Beweistechnik betrachtete Schülke, dass dabei „eine neue Art des Schließens auftritt, die sonst in der Schulmathematik nicht vorkommt, die man fast bezeichnen könnte als Schluß vom Besonderen auf das Allgemeine, und dies ist erkenntnistheoretisch von großer Wichtigkeit.“¹⁹⁶ Normalerweise werde bei einem mathematischen Beweis so vorgegangen, aus vorher festgelegten Voraussetzungen neue Aussagen abzuleiten. Dieses deduktive Vorgehen habe für den systematischen Aufbau der Mathematik auch seine Berechtigung, „aber es ist nicht der Weg, auf dem neue Wahrheiten für gewöhnlich gefunden werden.“¹⁹⁷ Daher sei es nur zu begrüßen, wenn den Schülern der Wert des induktiven Schließens, das sonst nur in der Physik vorkomme und generell für ihr späteres Leben unverzichtbar sei, für die Mathematik vor Augen geführt werde.¹⁹⁸

¹⁹² Schülke 1911, S. 22

¹⁹³ In einer ganzen Reihe von für dieses Vorgehen geeigneten Beispielen führte er auch an, dass beim vollständigen Viereck auf jeder Nebenseite vier harmonische Punkte liegen. Dies solle vom Parallelogramm, wo die Aussage trivial ist, durch Projektion auf alle vollständigen Vierecke übertragen werden.

¹⁹⁴ Schülke 1911, S. 23

¹⁹⁵ Schülke sprach hier vom „inneren Grund“.

¹⁹⁶ Schülke 1911, S. 23

¹⁹⁷ Schülke 1911, S. 23

¹⁹⁸ Bemerkenswert ist, dass sich Schülke hier im Widerspruch zu allen bisher genannten Autoren befindet, die stets das Schließen vom Allgemeinen auf das Spezielle als Markenkern der „Neueren Geometrie“ herausstellten.

Den dritten Vorteil der projektiven Geometrie gegenüber der Euklidischen sah Schülke in der Möglichkeit, mit Hilfe der Dualität neue Aussagen zu finden, worauf er aber nicht näher einging.

Dem Vorwurf, die projektive Geometrie sei wegen des fehlenden räumlichen Vorstellungsvermögens der Schüler in der Praxis nicht umsetzbar, begegnete Schülke mit der Forderung, auch der Zentralperspektive einen Platz im Schulunterricht einzuräumen. Dabei wollte er sich auf den Fall beschränken, eine ebene Figur bei orthogonaler Objekt- und Bildebene abzubilden. Das in der darstellenden Geometrie¹⁹⁹ erlangte Wissen über Grund- und Aufriss und das Umklappen der Aufriss- in die Grundrissebene könne nun gewinnbringend eingebracht werden. Schülkes Ziel bestand somit darin, von der räumlichen Anschauung ausgehend den Schülern beizubringen, die zentralperspektive Abbildung in einer Ebene auszuführen.

Als weiteres Hilfsmittel sah Schülke die Verwendung der Arithmetik in der Geometrie, die für beide Gebiete Vorteile bringen sollte. „Die Konzentration, die Schaffung einer neuen Beziehung zwischen Geometrie und Arithmetik muß für beide Teile fruchtbringend sein. Wir erhalten damit für die Rechnung einfache und naturgemäße Übungsbeispiele und andererseits können etwaige Mängel der Zeichnung durch die Rechnung geprüft und beseitigt werden.“²⁰⁰ Dafür sollte der Begriff der „Koordinatentransformation“ in den Schulunterricht eingeführt werden. Damit war nicht gemeint, Änderungen am Koordinatensystem vorzunehmen, sondern (modern gesprochen) eine Abbildung zu definieren, die dem Punkt **P** mit den Koordinaten (x,y) den Punkt **P'** zuordnet. Für die Koordinaten (x',y') des Bildpunktes **P'** sollte

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + c \\y' &= dx + ey + f\end{aligned}$$

gelten.²⁰¹ Durch diese allgemeine affine Transformation könne jede Parallelprojektion dargestellt werden, ebenso jede Zentralprojektion durch eine gebrochene Transformation.²⁰²

Am Schluss seines Beitrags fasste Schülke seine Ausführungen dahingehend zusammen, dass er die Umsetzung seiner Vorschläge ab der Obersekunda anstrebe.

¹⁹⁹ Dort wurde offenbar nur die Parallelprojektion behandelt.

²⁰⁰ Schülke 1911, S. 23; Auch hier befindet sich Schülke in klarer Opposition zu den Anhängern der Geometrie der Lage, die für rein geometrische Betrachtungen plädierten.

²⁰¹ Schülke bezog sich hier explizit auf Felix Klein, der „besonders darauf aufmerksam [gemacht habe], daß es viel fruchtbarer ist, die Achsen festzuhalten und den Punkt P (x y) [...] nach P' (x' y') zu bringen.“ In der Quelle lautet die zweite Gleichung $y' = dx + ey + b$, wobei es sich um einen Druckfehler handelt. Außerdem muss $ae - bd \neq 0$ gelten, was Schülke jedoch nicht erwähnt.

²⁰² Dabei können x' und y' jeweils als Quotient zweier linearer Terme geschrieben werden.

„Wir erhalten dann ebenso schöne Konstruktionsaufgaben wie gegenwärtig, aber die logische Durchbildung wird vielseitiger; dabei werden die Beweise einfacher und dringen mehr in das Wesen der Sache ein. Endlich werden die Schüler zu etwas genaueren Zeichnungen gezwungen, sie erhalten also mehr Handfertigkeit und vor allem mehr Raumanschauung.“²⁰³

Der Tagungsbericht enthält leider keine Hinweise auf Reaktionen des Publikums. In einem kurzen Bericht in der Zeitschrift *Pädagogisches Archiv* heißt es jedoch: „Es ist sehr zu bedauern, daß die Zeit zu knapp war, als daß der Redner mehr als nur flüchtige Andeutungen zu geben vermochte; daß auch keine Diskussion angeschlossen werden konnte, bedauert namentlich der Berichterstatte“²⁰⁴.

2.3 Zusammenfassung und Bewertung der Argumente

Betrachtet man die in den Zeitschriftenartikeln und den Konferenzbeiträgen formulierten Argumente der Reformer, so fällt auf, dass die „Neuere Geometrie“ im didaktischen Kontext in weiten Teilen negativ definiert war als "von Euklid verschiedene Geometrie". Der Begriff diente hier eher als eine Art Schlagwort (vergleichbar mit der *Neuen Mathematik* in den 1960er und 1970er Jahren) und dementsprechend breit waren auch die mit ihm verbundenen Vorschläge zur Umgestaltung des Geometrieunterrichts angelegt. So forderten bei weitem nicht alle Anhänger der Reform unbedingt die Aufnahme neuer Inhalte, manche setzten sich mehr für die Erneuerung der bestehenden (euklidischen) Themen gemäß den Methoden der „Neueren Geometrie“ ein. Andere wiederum hielten das Unterrichten neuer Inhalte in enger Anknüpfung an den bestehenden Lehrgang (also im Sinne der "alten" Methoden) für sinnvoll, nur "Radikalreformer" wollten den vollständigen Bruch mit dem bestehenden Geometrieunterricht erreichen.

Vor dem Hintergrund dieser Breite der Reformvorschläge ist es auf den ersten Blick überraschend, dass bezüglich der von den Reformern für ihre jeweilige Position vorgebrachten Argumente eine weitgehende Übereinstimmung bestand. Diese lässt sich jedoch damit erklären, dass die Argumente meist eine konkrete Schwäche des

²⁰³ Schülke 1911, S. 24

²⁰⁴ Witting 1910b, S. 447

damals praktizierten, eng an Euklids *Elementen* orientierten Geometrieunterrichts²⁰⁵ in den Blick nahmen, die durch die Einführung der „Neueren Geometrie“ (in der Sichtweise des jeweiligen Autors) behoben werden sollte. Dementsprechend darf bei einer rückblickenden Bewertung der Argumente auch nicht vergessen werden, vor welchem Hintergrund sie damals geäußert wurden. Die vorgetragenen Argumente lassen sich in drei Bereiche einordnen, die jedoch nicht vollkommen getrennt voneinander gesehen werden können.

Der erste Bereich umfasst diejenigen Argumente, die von der fachlichen Ebene der „Neueren Geometrie“ ausgehen und daraus Vorteile für den Schulunterricht herleiten. Dazu gehören vor allem der in der „Neueren Geometrie“ liegende hohe Grad an Allgemeinheit, das Identifizieren von Sätzen als Spezialfälle allgemeinerer Aussagen und der sich daraus ergebende geordnete Überblick über die Unterrichtsgegenstände. All dies führt nach Meinung der Anhänger der „Neueren Geometrie“ dazu, dass diese insgesamt einfacher sei und ihre Inhalte von den Schülern leichter und besser verstanden werden könnten. Die der „Neueren Geometrie“ zugeschriebenen Eigenschaften sind meines Erachtens in weiten Teilen zutreffend. So ist in der Tat möglich, in der projektiven Geometrie allgemeinere Aussagen zu formulieren, die viele Sätze der Euklidischen Geometrie als Spezialfälle umfassen. Beispielsweise erscheinen bei Kenntnis der Zentralkollineation u.a. die Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen lediglich als spezielle Typen dieser.²⁰⁶ Daher ist es auch nachvollziehbar, dass sich aus Sicht des Wissenden auf diese Weise ein geordneter Überblick ergibt, da ihm die Zusammenhänge zwischen den schon bekannten Inhalten deutlich werden. Allerdings kann man in Bezug auf die (noch unwissenden) Schüler zumindest skeptisch sein, ob sich ohne die vorherige Betrachtung der Spezialfälle ein Verständnis für die

²⁰⁵ Eine eindruckliche (sicherlich subjektiv gefärbte) Schilderung dieses Unterrichts gab Johann Carl Becker im Vorwort zum zweiten Band seines *Lehrbuchs der Elementar-Geometrie*: „Als Grundlage und eigentlicher Lehrmeister diente das seiner Zeit weit verbreitete Lehrbuch von Brettner [Brettner, Hans Anton: „Lehrbuch der Geometrie“. Breslau: Josef Max 1834], ein nach streng euklidischer Methode geschriebenes Lehrbuch von beträchtlichem Umfange, vielen Lehrsätzen, Folgerungen, Zusätzen und Aufgaben. Aus diesem Buche mußten wir von je einer Stunde zur andern jedesmal einen Lehrsatz mit Beweis, ohne alle Anleitung, und ohne daß vorher irgend wie davon die Rede war, einstudieren und das Gelernte dann in der nächsten Stunde an der Tafel reproducieren. Das ging nun natürlich nur so lange als das Gedächtniß das mühsam auswendig gelernte treu wiedergab. Trat eine Stockung ein, so wurde das spanische Rohr oder die Dose zu Hilfe gerufen, und wenn das auch nicht half, so wurde ein anderer gerufen, und wenn endlich die Demonstration glücklich abgehaspelt war, so wurde wieder von vorne begonnen, bis glücklich alle das Rohr oder die Dose gekostet hatten, und wieder ein neuer Satz aufgegeben werden konnte. Die Folge dieser Methode, Geometrie zu docieren, war natürlich, daß uns die Geometrie bis zum Ekel verleidet wurde, und wenn auch ein späterer Lehrer bei mir wieder Interesse für die Geometrie zu wecken wusste, so blieb mir doch lange der Widerwille gegen die Methode des Euklid.“ (Becker 1878, S VII f)

²⁰⁶ Dies wird in Kapitel 3 noch genauer erläutert.

Systematik einstellt. Sinnvoll erscheint mir daher nur ein auf die Euklidische Geometrie folgender Unterricht in „Neuerer Geometrie“ im Sinne eines induktiven Vorgehens vom Speziellen zum Allgemeinen und erst danach deduktives Schließen, wie er auch von der großen Mehrheit der Reformer angestrebt wurde. Im Vergleich zur damaligen Zeit könnte heutzutage Allgemeinheit und Systematik vermutlich nicht mehr als Argument für Reformen im Mathematikunterricht dienen.²⁰⁷ Zwar findet sich in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (2012) als eine von drei den Mathematikunterricht prägenden Grunderfahrungen: „Mathematik als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art“²⁰⁸, in den folgenden Kompetenzbereichen, wo die konkreteren Vorgaben für die zu erreichenden Fähigkeiten verankert sind, ist davon jedoch wenig zu sehen. Hier dominiert vielmehr das *Problemlösen* (sogar als eigener Kompetenzbereich), das vor allem auf das Bearbeiten einzelner spezieller Fragestellungen gerichtet ist. Diese Tendenz ist auch in den aktuellen Lehrwerken zur Mathematikdidaktik erkennbar. Beispielsweise wird in den *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* von Vollrath und Roth im Kapitel zum *Systemorientierten Lernen von Mathematik* ein eigener Abschnitt dem Thema *Die Problematik der Systematik für das Lernen* gewidmet, der mit der Aussage schließt: „Ein authentischer Mathematikunterricht kann deshalb nicht mit einer systematischen Darstellung von Mathematik beginnen. Im Vordergrund müssen vielmehr Probleme stehen.“²⁰⁹ Solch kritische Worte sucht man im Kapitel zum *Problemorientierten Lernen von Mathematik* vergeblich.

In einen zweiten Bereich lassen sich diejenigen Argumente zusammenfassen, die sich vor allem auf die Unterrichtsmethodik beziehen. Zentral ist dabei vor allem die Betonung der Veränderlichkeit der geometrischen Objekte, die zum einen durch Bewegung erzeugt und auch ineinander überführt werden können. Dies gestatte einen „natürlicheren“ Aufbau der Geometrie. Außerdem bestehe dadurch eher die Möglichkeit, dass die Schüler weitgehend selbstständig arbeiten und alleine neue Zusammenhänge entdecken können. Das bloße Auswendiglernen soll zurückgedrängt werden, wozu auch der Verzicht auf die Verwendung von metrischen Beziehungen beitragen könne. Aus den genannten Punkten wird der bereits oben angesprochene Aspekt, dass sich die einzelnen Argumente meist auf konkrete Kritik

²⁰⁷ Dies war am Ende der 1950er Jahre noch ganz anders, als von Dieudonné die Allgemeinheit massiv als Grund dafür angeführt wurde, die alte Figurengeometrie durch die lineare Algebra zu ersetzen. (vgl. Dieudonné 1961, S. 35f)

²⁰⁸ Sekretariat der KMK 2015, S. 11

²⁰⁹ Vollrath u.a. 2012, S. 60

an der Euklidischen Geometrie (bzw. deren schulischer Umsetzung) beziehen, besonders deutlich. Mit der „Neueren Geometrie“ sollte eine verbesserte Unterrichtsmethodik erreicht werden, die sich durch die Nutzung von ursprünglich im Rahmen der projektiven Geometrie herausgebildeten Methoden deutlich von der „Starrheit“ Euklids und der streng dogmatischen Unterrichtsgestaltung abhebt. Durch die Gestalt- und Lageveränderung der geometrischen Objekte können den Schülern zum einen leichter deren Eigenschaften und die zwischen ihnen bestehenden Zusammenhänge verdeutlicht werden.²¹⁰ Zum anderen lassen sich Beweise von Sätzen leichter nachvollziehen²¹¹ und nicht zuletzt kann durch das Erzeugen der geometrischen Objekte aus bereits bekannten bei den Schülern dem Eindruck einer gewissen Zufälligkeit bzw. Willkürlichkeit bei der Abfolge der Inhalte entgegengewirkt werden, so dass ihnen der Aufbau der Geometrie tatsächlich „natürlicher“ erscheint. Diese Maßnahmen und die zusätzlich geforderte stärkere Betonung der Eigentätigkeit der Schüler führten mit Sicherheit zu besseren Lernerfolgen als das von Becker (vgl. Fußnote 204) beschriebene Konzept. Allerdings machen die genannten Beispiele bereits deutlich, dass die methodische Erneuerung selbstverständlich genauso gut innerhalb der Euklidischen Geometrie umsetzbar ist. Einige Anhänger der „Neueren Geometrie“ erachteten daher die Umgestaltung des bestehenden Lehrgangs in diese Richtung bereits als ausreichend und hatten mit diesem Ansatz auch Erfolg, der sich in einer stärkeren Beachtung der Abbildungsgeometrie und dem Verzicht auf nur für Eingeweihte lösbare Konstruktionsaufgaben zeigte. Jedoch wurden diese Veränderungen kaum noch mit der „Neueren Geometrie“ sondern hauptsächlich mit Felix Kleins *Erlanger Programm* in Verbindung gebracht.²¹² Beide Kernaspekte der neuen Methodik, nämlich Beweglichkeit der Objekte und Selbsttätigkeit der Schüler, werden auch heute noch als wirkungsvolle Konzepte für den Mathematikunterricht angesehen. Ersteres dient u.a. als zentrales Argument für die Verwendung von Dynamischer Geometriesoftware (DGS): „Dabei zeigt das Dynamische einen entscheidenden Vorteil gegenüber einem starren Einzelbild. Ein Einzelbild kann jetzt paradigmatisch werden, es wird als prototypischer Schnappschuss einer Figur gesehen und verstanden. Einzelbilder beziehen sich stets auf eine zufällige Einzellage,

²¹⁰ Man denke z.B. an die verschiedenen Arten von Vierecken, die durch Verformungen ineinander übergehen können, wobei gewisse Eigenschaften verloren gehen und andere erhalten bleiben.

²¹¹ Beispielsweise kann beim Beweis des Satzes von Pythagoras die bei Euklid implizit vorkommende Scherung wirklich durchgeführt werden.

²¹² Dessen Verbreitung hat sicherlich auch zur Durchsetzung der Vorschläge zur Umgestaltung beigetragen, überdeckte und vereinnahmte jedoch auch die bereits vorher bestehenden Ansätze. (vgl. Unterkapitel 4.3)

die dazu verleiten kann, dass Lernende zufällige Umstände für wesentliche halten. Dies tritt beim dynamischen Arbeiten mit DGS nicht auf, da die Figuren von den Lernenden variiert werden können, nach Belieben im Zeitraffer oder in der Zeitlupe. Sie können bei Bedarf den Ausgangszustand wiederherstellen, Sonderfälle erzeugen, Zufälligkeiten sofort als solche erkennen und Vermutungen einfach und schnell überprüfen. Dadurch bekommen Beweise im Bereich der Geometrie eine neue Qualität.²¹³ Die Selbsttätigkeit der Schüler findet insbesondere im Konzept des *Entdeckenden Lernens* seine Verwirklichung: „Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller – sowohl im Hinblick auf handfeste Leistungen, speziell Transferleistungen, als auch im Hinblick auf mögliche schwer fassbare bildende Formung –, je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckenden Unternehmungen beruht.“²¹⁴ Von der methodischen Seite sind die Konzepte der „Neueren Geometrie“ also auch heute noch hochaktuell.

Sind die genannten fachlichen und methodischen Vorteile der „Neueren Geometrie“ bei einer Vielzahl von Autoren in nahezu identischer Form zu finden, gibt es im letzten Bereich, der die zu erreichenden Bildungsziele umfasst, eine breitere Streuung. Es lassen sich hier einmal solche Ziele ausmachen, die unter dem Aspekt der Nützlichkeit zu sehen sind (d.h. einen Beitrag zur materialen Bildung leisten). Hierzu gehören vor allem die Erfordernisse, die sich aus der stärkeren Verbreitung der Technik ergeben und auf die die Schulen entsprechend vorbereiten sollen. Als spezieller Aspekt davon ist der Hinweis auf die Nützlichkeit der „Neueren Geometrie“ beim Erlernen der darstellenden Geometrie zu sehen. Daneben wird aber auch von einigen Vertretern eine angemessene Vorbereitung auf das generelle Mathematikstudium gefordert, für die die "Lücke" zwischen Schule und Hochschule nicht zu groß werden dürfe. In etwa gleich großer Anzahl sind auf der anderen Seite diejenigen Befürworter der „Neueren Geometrie“ zu finden, die eher deren Einfluss auf die formale Bildung der Schüler betonten. Hierzu gehört vor allem das Argument, dass die „Neuere Geometrie“ einen größeren Beitrag zur Entwicklung des mathematischen Denkens²¹⁵ leisten könne als die Arithmetik oder die analytische Geometrie²¹⁶. Hinzu

²¹³ Elschenbroich 2005, S. 77

²¹⁴ Winter 1991, S. 1

²¹⁵ Damit war eine Art metamathematischen Wissens gemeint, das sich vor allem auf das Definieren von Begriffen, das Formulieren und Beweisen von Sätzen sowie den Aufbau einer mathematischen Theorie bezog.

kommen die Förderung der Raumanschauung und die Stärkung des Interesses der Schüler an der Mathematik. Aufgrund der am Ende von Kapitel 1 erwähnten Verwendung der projektiven Geometrie als Hilfswissenschaft der darstellenden Geometrie an den Technischen Hochschulen hat das Argument der Nützlichkeit eine gewisse Berechtigung.²¹⁷ Allerdings kann man dieses immer nur auf den Teil der Schüler beziehen, die auch tatsächlich ein entsprechendes Studium anstreben. Gemäß der daraus resultierenden, heute allgemein verbreiteten Position „wird sich Studierfähigkeit auf *grundlegende* mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten beschränken müssen. Wichtiger sind *allgemeine* Fähigkeiten, die beim wissenschaftlichen Arbeiten erforderlich und die vom Mathematikunterricht gefördert werden können.“²¹⁸ Jedoch dient der Aspekt der Nützlichkeit noch immer als starkes Argument für die Behandlung gewisser Inhalte, was sich beispielsweise in der wachsenden Betonung des Anwendungsbezugs niederschlägt. Der Beitrag der „Neueren Geometrie“ zur Entwicklung des mathematischen Denkens und zur Förderung des Interesses an der Mathematik ist einerseits wiederum im Vergleich mit der damals üblichen Behandlung der Euklidischen Geometrie zu sehen, die diesbezüglich in der Tat so gut wie keinen positiven Effekt gehabt haben dürfte. Darüber hinaus kann jedoch in der projektiven Geometrie meines Erachtens wegen der bei vielen Beweisen vorkommenden ähnlichen Argumentationsmuster leichter ein Verständnis für mathematisches Argumentieren und Beweisen²¹⁹ (und dadurch möglicherweise ein größeres Interesse für die Beschäftigung mit Mathematik²²⁰) erreicht werden als in der Euklidischen Geometrie. Fraglich erscheint zunächst der Beitrag der „Neueren Geometrie“ zur Förderung der Raumanschauung, da sich die für den Schulunterricht vorgeschlagenen Lehrgänge nahezu vollständig auf die ebene Geometrie beschränken. Allerdings war damals mit dem Begriff *Raumanschauung* nicht nur das räumliche (dreidimensionale) Vorstellungsvermögen gemeint, sondern eine generelle (anschauliche) Kenntnis geometrischer Objekte und ihrer Beziehungen.²²¹ Diese

²¹⁶ Der Grund hierfür liegt in den standardisierten Verfahren, von denen die Arithmetik und die analytische Geometrie dominiert werden.

²¹⁷ Auch an den Universitäten war die projektive Geometrie zu Beginn des 20. Jahrhunderts noch ein relevantes Gebiet. Man vergleiche dazu die in Lorey 1916 abgedruckten Studienpläne.

²¹⁸ Vollrath u.a. 2012, S. 21

²¹⁹ Auch heute noch sollen diese Fähigkeiten im Mathematikunterricht gefördert werden, was sich beispielsweise an der Verankerung eines eigenen Kompetenzbereichs *Mathematisch argumentieren* in den Bildungsstandards zeigt. (vgl. Sekretariat der KMK 2015, S. 14)

²²⁰ Die Förderung einer positiven Einstellung zur Mathematik wird auch heutzutage als wichtiges Ziel für den Mathematikunterricht angesehen. (vgl. Vollrath u.a. 2012, S. 32f)

²²¹ Man vergleiche dazu beispielsweise die Vorschläge für die Quinta im Lehrplanentwurf der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. (vgl. Gutzmer 1905, S. 547)

Sichtweise deckt sich weitgehend mit der in der Leitidee *Raum und Form* der KMK-Bildungsstandards vorgesehenen Fähigkeit, wonach die „Schülerinnen und Schüler [...] gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern [operieren]“²²², ist also auch heute noch aktuell.

Zu all den genannten Argumenten finden sich in den wiedergegebenen Quellen jeweils mindestens drei Vertreter, teilweise sind es sogar sechs bis sieben²²³. Demgegenüber kann bei den gegen die „Neuere Geometrie“ sprechenden Argumenten meist jeweils nur eine Quelle angegeben werden. Zudem sind die Argumente hier wesentlich heterogener verteilt, verbindende Elemente sind kaum erkennbar. Relativ häufig genannt wird der Aspekt, dass der Mathematikunterricht auch die historische Entwicklung der Geometrie nachbilden müsse und daher nicht auf die Euklidische Geometrie verzichtet werden könne. Ebenfalls mehrere Stimmen befürchten (allerdings unter verschiedenen Gesichtspunkten) eine Überforderung der Schüler, die mit der zu großen Allgemeinheit der „Neueren Geometrie“, ihrer Unanschaulichkeit und der bei den Schülern fehlenden räumlichen Vorstellungskraft begründet wird. Darüber hinaus werden an Gründen, die direkt gegen die „Neuere Geometrie“ gerichtet sind, noch die fehlende Anbindung an die bestehenden Inhalte und generelle Vorbehalte auf fachlicher Ebene²²⁴ genannt. Das erste Argument hätte nur dann eine Berechtigung, wenn die Reform auf eine vollständige Streichung des damals bestehenden Euklidischen Lehrgangs abzielte, was, wie bereits oben ausgeführt, auf die Mehrheit der Reformvorschläge nicht zutraf.²²⁵ Daher sind auch die Gegenargumente der zu großen Allgemeinheit und der fehlenden Anbindung für den größten Teil der Vorschläge nicht passend.²²⁶ Gleiches gilt auch für die fachlichen Einwände, die allesamt von falschen inhaltlichen Vorstellungen zeugen. Der Vorwurf der Unanschaulichkeit bezieht sich hauptsächlich auf die Verwendung der Fernelemente, die den Schülern jedoch auf verschiedene Art und Weise plausibel gemacht werden können. Die weiteren Argumente gegen den schulischen Einsatz der „Neueren Geometrie“ beziehen sich eher auf die dafür ungeeigneten Rahmenbedingungen wie die fehlende Ausbildung der Lehrkräfte und die nicht zur Verfügung stehende Unter-

²²² Sekretariat der KMK 2004, S. 11

²²³ Dies ist vor allem bei den Forderungen nach größtmöglicher Allgemeinheit und Beweglichkeit der Figuren der Fall.

²²⁴ Diese sind insbesondere in der Ablehnung des Konzepts der Fernelemente zu sehen.

²²⁵ Heute wird zwar ein *genetischer* Mathematikunterricht angestrebt, die Frage der historischen Entwicklung ist dabei aber eine eher untergeordnete. (vgl. Vollrath u.a. 2012, S. 118)

²²⁶ Die horizontale und vertikale Vernetzung der im Mathematikunterricht behandelten Inhalte ist heute durch die weitgehende Beachtung des Spiral- und Integrationsprinzips gesichert. (vgl. Vollrath u.a. 2012, S. 182) Zur Frage der Allgemeinheit ist bereits auf S. 91 alles gesagt.

richtszeit. Nicht zuletzt trug auch die Position, dass eine bloße methodische Umgestaltung der Euklidischen Geometrie im Sinne des „genetischen Prinzips“ ausreiche, eher zur Verhinderung der Einführung neuer Inhalte bei. Die Ausbildung der Lehrer stellte in der Tat ein Problem dar, welches auch von den Reformern (beispielsweise Sturm) beklagt wurde, für das sie aber keine Lösung vorschlugen.²²⁷ Der Vorwurf der fehlenden Unterrichtszeit ist jedoch insofern unberechtigt, da konkrete Inhalte benannt wurden, die zugunsten der „Neueren Geometrie“ gestrichen werden sollten. Die als Gründe für die Reform vorgetragene Argumente finden sich auch in einer Vielzahl von Schulprogrammen, die einen guten Eindruck von der geographischen Verteilung der Anhänger der „Neueren Geometrie“ geben. Diese werden im folgenden Unterkapitel genauer betrachtet.

2.4 Schulprogramme

Bereits seit dem 17. Jahrhundert veröffentlichten einzelne höhere Schulen im deutschsprachigen Raum zum Ende jedes Schuljahres ein so genanntes *Schulprogramm*, mit dem die Eltern und die lokalen politischen Vertreter zu den öffentlichen Abschlussprüfungen eingeladen und gleichzeitig über deren zeitlichen Ablauf (das Programm) informiert wurden. Im Laufe der Zeit stieg die Anzahl der veröffentlichten Programme beständig an, außerdem enthielten sie nun oftmals zusätzlich einen wissenschaftlichen Aufsatz, den der Direktor oder einer der Oberlehrer verfasste. In Preußen waren die Schulen ab dem Jahr 1824 sogar zur Herausgabe eines Schulprogramms verpflichtet, das zwingend eine wissenschaftliche Abhandlung und die sogenannten *Schulnachrichten* enthalten musste. Letztere bestanden aus einem Bericht über das abgelaufene Schuljahr, der u.a. Informationen zur Zusammensetzung der Schüler- und Lehrerschaft, der verwendeten Lehrwerke und der unterrichteten Inhalte enthielt. Zudem wurden die Programme jetzt nicht mehr nur auf lokaler Ebene verbreitet, sondern auch an übergeordnete Behörden und Bibliotheken verschickt.

²²⁷ Wie die fehlende Befähigung der Lehrkräfte zum Scheitern einer Reform beitragen kann, ist auch am Beispiel der Einführung der *Neuen Mathematik* in den 1960er Jahren zu sehen. Aktuell zeigt sich die Problematik wiederum beim Ausbau des Stochastikunterrichts im Primarbereich und beim Computereinsatz im Mathematikunterricht.

Außerdem gab es einen organisierten Programmaustausch zwischen den Schulen, um für einen gezielten Informationsfluss zu sorgen.²²⁸

Parallel zur bereits dargestellten Debatte wurde eine große Anzahl von Schulprogrammen veröffentlicht, in denen sich der Verfasser der Programmabhandlung mit dem Thema „Neuere Geometrie“ beschäftigte. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über diejenigen Programme, die ich im Rahmen meiner Recherche ermitteln konnte.

Autor	Titel	Schule	Jahr
Georg Beyer	Die neuere Geometrie und die Schule	Realschule I. Ordnung, Rawicz	1873
Rudolf Böger	Die Geometrie der Lage in der Schule	Realgymnasium des Johanneums, Hamburg	1897
Otto Böklen	Die Methode des Unterrichts in der projektiven Geometrie an der Oberrealschule	Königliche Realanstalt, Reutlingen	1894
Herman Franke	Sätze aus der neueren Geometrie. Für den Schulgebrauch bearbeitet	Friedrichs-Gymnasium, Altenburg	1878
Wilhelm Gallenkamp	Lehrgang der Elemente der synthetischen Geometrie in der Oberprima der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule	Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule, Berlin	1876
Karl Hermann Hüttig	Planimetrische Fundamentalconstructionen, ausgeführt mit dem Lineal	Königliches Stifts-Gymnasium, Zeitz	1878
Conrad Lips	Elementare Einleitung in die synthetische Geometrie	Großherzogliches Gymnasium, Darmstadt	1871
Andreas Maier	Neuere Geometrie. Für höhere Lehranstalten bearbeitet	Großherzogliches Realgymnasium, Karlsruhe	1873
Hilarius Nawrath	Einige Kapitel aus der neueren Geometrie für den Unterricht auf Gymnasien und Realschulen.	Königliches katholisches Gymnasium, Sagan	1874
Karl von Ott	Die neuere Geometrie oder Geometrie der Lage	Kaiserlich-königliche deutsche Ober-Realschule, Prag	1868
Ernst Ritsert	Ueber die Prinzipien der neueren Geometrie und deren Einführung in den elementaren geometrischen Unterricht	Großherzogliche Realschule, Offenbach	1868
Paul Schafheitlin	Die Kegelschnitte. Für die Schule bearbeitet	Sophien-Realgymnasium, Berlin	1912

²²⁸ vgl. Kalok 2007

Adolf Schaufler	Einführung in die Perspektive und die projektive Geometrie	Oberrealschule und Realgymnasium, Heilbronn	1909
Friedrich Schön	Die Theorie der Transversalen und die harmonische Theilung	Großherzogliche Realschule, Offenbach	1871
Heinrich Seeger	Bemerkungen über die Aufnahme der neueren Geometrie unter die Lehrgegenstände der ersten Klasse	Realschule I. Ordnung, Güstrow	1879
Wilhelm Stammer	Die ersten Sätze der neuen Geometrie als Pensum der Prima einer Realschule I. Ordnung	Realschule I. Ordnung, Düsseldorf	1878
Ludwig Stolte	Die neuere Geometrie. Ein Unterrichts-Gegenstand der höheren Lehr-Anstalten	Realschule bei St. Johann, Straßburg	1883

Daraus wird schon auf den ersten Blick ersichtlich, dass die Anhänger der „Neueren Geometrie“ nicht nur in einer bestimmten Region zu finden waren, sondern in nahezu allen Landesteilen existierten. Außerdem ist deutlich zu sehen, dass die *realistischen Anstalten* gegenüber den Gymnasien klar in der Überzahl sind, dem Thema dort also eine bedeutendere Rolle zugemessen wurde. Analysiert man die aufgeführten Programme genauer, stellt man fest, dass in den meisten der jeweilige Autor einen im eigenen Unterricht durchgeführten Lehrgang der „Neueren Geometrie“ vorstellt. Somit ist davon auszugehen, dass in den betreffenden Schulen die „Neuere Geometrie“ regelmäßig in großer Ausführlichkeit unterrichtet wurde. Die Lehrgänge werden fast immer von einem kurzen Vorwort eingeleitet, in dem der Autor einige aus seiner Sicht wichtige Argumente für die Aufnahme in den Schulunterricht nennt.²²⁹ Dabei kommen im Vergleich zu den bereits dargestellten keine neuen Argumente hinzu. Da außerdem im folgenden Kapitel noch genauer auf verschiedene Lehrgänge eingegangen wird, sollen die einzelnen Programme hier nicht genauer vorgestellt werden. Eine Übersicht über die in den Vorworten genannten positiven Aspekte (vgl. 2.3) gibt die folgende Tabelle.

²²⁹ Eine Ausnahme hiervon bilden die Abhandlungen von Lips und Maier, die beide jeweils nur die Darstellung des Lehrgangs enthalten. In den Programmen von Beyer, Ritsert und Seeger hingegen findet sich jeweils eine ausführlichere Argumentation für die Behandlung der „Neueren Geometrie“ in der Schule.

Argumente \ Autoren	Beyer	Böger	Böklen	Franke	Gallenkamp	Hütting	Nawrath	Ritsert	von Ott	Schafheitlin	Schaufler	Schön	Seeger	Stammer	Stolte
Fachliche Gründe															
Allgemeinheit	X	X						X	X			X	X		X
Einfachheit	X	X					X	X	X	X	X				
Methodische Gründe															
Selbsttätigkeit	X	X			X				X						X
Verzicht auf metrische Bez.		X			X	X		X	X						X
Natürlicher Aufbau	X	X							X				X		
Bildungsziele															
räumliche Vorstellung	X			X	X	X		X	X		X				X
Interesse der Schüler	X			X				X			X		X		
Nutzen für Technik			X					X	X	X	X	X	X		X
Vorbereitung Studium	X		X		X							X	X	X	X
Förderung math. Denkens	X							X	X				X	X	X

2.5 Erfolg der Reformer: Aufnahme der „Neueren Geometrie“ in die Lehrpläne

Als Folge der dargestellten Debatte wurden nach und nach Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ in die Lehrpläne der höheren Schulen der Länder des deutschen Reiches aufgenommen.²³⁰ Dabei lassen sich Unterschiede einerseits bezüglich des Zeitpunktes der Aufnahme, andererseits bezüglich des Umfangs der hinzugefügten Themen feststellen. Generell kann man jedoch festhalten, dass die „Neuere Geometrie“ zu Beginn des 20. Jahrhunderts in den Lehrplänen nahezu aller größeren Länder vorgesehen war. Im Folgenden soll für die beiden größten Länder (die Königreiche Preußen und Bayern) sowie das Großherzogtum Baden die Veränderung in den Lehrplänen detailliert aufgezeigt werden. Anschließend werden überblicksmäßig einige Beispiele aus den Lehrplänen weiterer Länder angegeben.

²³⁰ Um einen Eindruck vom Aufbau der Lehrpläne zu vermitteln, ist im Anhang ein Auszug aus dem preußischen Lehrplan von 1901 abgedruckt.

2.5.1 Königreich Preußen

In Preußen gab es seit der Mitte des 18. Jahrhunderts mit dem Gymnasium nur eine höhere Schulform, zu der 1859 mit dem Realgymnasium (zunächst unter der Bezeichnung Realschule I. Ordnung) eine weitere hinzukam. Diese umfasste ebenso wie das Gymnasium neun Klassen, legte aber ein stärkeres Gewicht auf die realistischen Fächer (Mathematik, Naturwissenschaften, moderne Sprachen) und verzichtete dafür auf den Unterricht in Griechisch. Ab 1870 war den Absolventen der Realgymnasien das Studium der Mathematik, der naturwissenschaftlichen Fächer und der neueren Sprachen erlaubt. Im Jahr 1878 kam mit den (lateinlosen) Oberrealschulen, die durch Aufstockung der bis dahin siebenklassigen Realschulen II. Ordnung um zwei weitere Jahrgänge entstanden, die dritte höhere Schulform hinzu.²³¹ Der erste gemeinsame Lehrplan²³² für alle drei höheren Schulformen wurde 1882 herausgegeben und sah für die einzelnen Klassen die folgende Wochenstundenzahl für das Fach *Rechnen und Mathematik* vor²³³:

	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Summe
Gymnasium	4	4	4	3	3	4	4	4	4	34
Realgymnasium	5	4	5	5	5	5	5	5	5	44
Oberrealschule	5	6	6	6	6	5	5	5	5	49

Bei den für das Gymnasium vorgesehenen Inhalten findet sich noch kein Hinweis auf die „Neuere Geometrie“, für die Realgymnasien und Oberrealschulen war die „Ebene Geometrie einschließlich der Grundlehren der synthetischen Geometrie“²³⁴ vorgesehen. Allerdings geht aus diesem Lehrplan nicht klar hervor, was mit „synthetischer Geometrie“ gemeint war.

Der im Jahr 1891 folgende Lehrplan²³⁵ brachte für die Realgymnasien eine Kürzung der Zahl der Unterrichtsstunden in Sexta und Quarta von jeweils fünf auf vier Wochenstunden, für die Oberrealschulen in Quinta und Obertertia von sechs auf fünf Wochenstunden. An den Gymnasien blieb die Unterrichtszeit unverändert. Von inhaltlicher Seite war jetzt für das Gymnasium im Rahmen der Ähnlichkeitslehre

²³¹ vgl. Lietzmann 1910

²³² Der Lehrplan war so aufgebaut, dass auf die Angabe der Stundenzahl für alle Fächer die sehr knappe Zusammenfassung der zu unterrichtenden Inhalte folgte, wobei eine Zuordnung zu einzelnen Klassen nicht vorgenommen wurde. Daran schlossen sich jeweils die so genannten *methodischen Bemerkungen* an, die genauere Erläuterungen zur Gestaltung des Unterrichts enthielten.

²³³ vgl. Kratz 1883

²³⁴ Kratz 1883, S. 47

²³⁵ Dieser unterschied sich von seinem Vorgänger dahingehend, dass jetzt eine genaue Zuordnung der Inhalte zu den einzelnen Jahrgangsstufen vorgenommen wurde.

„einiges über harmonische Punkte und Strahlen“²³⁶ in Obersekunda vorgesehen, in Oberprima „einige Grundlehren von den Kegelschnitten“²³⁷. In den *methodischen Bemerkungen* findet sich dazu allerdings der folgende Hinweis: „Der Wegfall gewisser früher in Obersekunda und Prima behandelter Abschnitte soll Gelegenheit bieten, den übrigen Lehrstoff zu vertiefen und zahlreichere Übungen anzuschließen; dann aber ergibt sich auch die Möglichkeit, die Schüler der obersten Klasse in den besonders wichtigen Koordinatenbegriff einzuführen und ihnen in möglichst einfach gehaltener Darstellung einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte klar zu machen. Selbstverständlich ist weder in analytischer noch in sogenannter neuerer Geometrie ein planmäßiger Unterricht zu erteilen.“²³⁸ An den realistischen Anstalten sollte jetzt in Obersekunda die „Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen, Chordalen, Ähnlichkeitspunkten und Achsen“²³⁹ durchgenommen werden, in Unterprima die „wichtigsten Sätze über Kegelschnitte in elementarer synthetischer Behandlung“²⁴⁰. Der nächste preußische Lehrplan erschien bereits im Jahr 1901. Er brachte bezüglich der Stundenzahl keinerlei Veränderung, auch die bei der Besprechung des vorherigen Lehrplans genannten Inhalte blieben in allen Schulformen bestehen. Für das Gymnasium war „Einiges über harmonische Punkte und Strahlen sowie über Transversalen“²⁴¹ jetzt aber ein eigenständiger Themenbereich in der Obersekunda, in den realistischen Anstalten sollten in Prima die „Grundlehren der darstellenden Geometrie“²⁴² unterrichtet werden. In den *methodischen Bemerkungen* finden sich implizite Hinweise darauf, dass die für die „Neuere Geometrie“ vorgebrachten Argumente bei der Erstellung des Lehrplans berücksichtigt wurden. So heißt es zum Beispiel in einem Abschnitt zum geometrischen Konstruieren: „Dabei sind jedoch unbedingt alle Aufgaben auszuschließen, deren Lösung die Kenntnis entlegener Lehrsätze oder besonderer Kunstgriffe erfordert. Der Lehrer hat auch hier durch besonnene Auswahl solcher Aufgaben, deren Lösung nach häufig anwendbaren Methoden und aus dem bereits bekannten Lehrstoff heraus erfolgen kann, sowie durch klare Anleitung in dem Schüler das Gefühl des selbständigen Könnens zu wecken und die bildende Kraft dieser Übungen zur Geltung zu bringen.“²⁴³ Dies kann

²³⁶ o.V. 1892, S. 48

²³⁷ o.V. 1892, S. 49

²³⁸ o.V. 1892, S. 50

²³⁹ o.V. 1892, S. 52

²⁴⁰ o.V. 1892, S. 52

²⁴¹ Güldner 1921, S. 55

²⁴² Güldner 1921, S. 57

²⁴³ Güldner 1921, S. 59

als Appell zur Nutzung allgemeinerer Methoden gesehen werden. Zusätzlich wurde auch die zu starke Betonung der arithmetischen Aspekte in den oberen Klassen kritisiert: „Dem Übelstande, daß der Unterricht auf der Oberstufe einen zu ausschließlich rechnerischen Charakter annimmt, wird sich durch Fortsetzung der Übungen in geometrischer Anschauung und Konstruktion steuern lassen.“²⁴⁴ Für die Gymnasien wurde jetzt explizit darauf hingewiesen, dass die Einführung in die Kegelschnitte auch in synthetischer Form erfolgen könne: „Für die oberste Klasse des Gymnasiums ist die Einführung der Schüler in den wichtigen Koordinatenbegriff sowie eine möglichst einfach gehaltene Darstellung einiger Grundeigenschaften der Kegelschnitte, die auch in synthetischer Form gegeben werden kann, vorgesehen. Aber es ist weder in analytischer noch in sogenannter neuerer Geometrie ein systematischer Unterricht beabsichtigt.“²⁴⁵ Somit erscheint es naheliegend, dass im Rahmen der genannten Lehrpläne eine Gleichsetzung der Begriffe „Neuere Geometrie“ und „synthetische Geometrie“ erfolgte.

Der Lehrplan von 1901 blieb bis zum Jahr 1925 gültig, so dass man sagen kann, dass die Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ über 30 Jahre im Preußischen Lehrplan verankert waren.

2.5.2 Königreich Bayern

Im Königreich Bayern existierten bereits seit Beginn des 16. Jahrhunderts die ersten Gymnasien, die allerdings zunächst durch den Jesuitenorden geführt wurden. Im Jahr 1773 gingen die Gymnasien nach Auflösung des Jesuitenordens in staatliche Trägerschaft über. Etwa 100 Jahre später wurde im Jahr 1864 das Realgymnasium als zweite höhere Schulform eingeführt, die vor allem der Vorbereitung eines Studiums an der polytechnischen Schule in München dienen sollte. Die Oberrealschule wurde in Bayern erst im Jahr 1907 durch den Ausbau der bis dahin sechsklassigen Realschulen²⁴⁶ um drei weitere Jahrgänge eingeführt. Diese Entwicklung war vor allem dadurch veranlasst, dass „die öffentliche Meinung immer dringender eine neue 9klassige Vollanstalt ohne Latein und Griechisch [forderte], in deren Mittelpunkt der

²⁴⁴ Güldner 1921, S. 60

²⁴⁵ Güldner 1921, S. 60

²⁴⁶ Diese dienten der Vorbereitung auf den Besuch der dreijährigen *Industrieschulen* (Fachschulen für bestimmte Berufe).

mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht stehen sollte, der durch zwei neuere Sprachen, Französisch und Englisch, sowie Geschichte und Geographie zu stützen war.“²⁴⁷ Für die Gymnasien und Realgymnasien existierten zunächst getrennte Lehrpläne, in denen sich kein Hinweis auf die „Neuere Geometrie“ findet. Dies mag auch an der im Vergleich zu Preußen geringen Unterrichtszeit für die Mathematik gelegen haben, die sich für die jeweils letzten separaten Lehrpläne aus folgender Tabelle²⁴⁸ ergibt:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Summe
Gymnasium (1901)	3	3	3	2	4	4	3	3	4	29
Realgymnasium (1891)	3	3	3	3	4	6	6	5	5	38

Der erste Lehrplan der Oberrealschulen von 1907 sah demgegenüber die folgende Zahl von Unterrichtsstunden pro Woche vor²⁴⁹:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Summe
Rechnen	4	4	3	1	-	-	-	-	-	12
Mathematik	-	-	2	4	5	5	5	5	5	31

Außerdem waren in ihm die Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ (noch weitgehender als in Preußen²⁵⁰) für den Unterricht der letzten beiden Schuljahre verbindlich vorgesehen. So heißt es bei den inhaltlichen Vorgaben für die Klasse VIII: „Analytische und synthetische Geometrie. – Einführung in die Methode der Koordinatengeometrie. Die Gerade. Kreis und Kreisbüschel. Tangente, Pol und Polare. Harmonische Eigenschaften. Die einfachsten Sätze der projektiven Geometrie.“²⁵¹ Für die Klasse IX findet man: „Analytische und synthetische Geometrie. Die Haupteigenschaften der Kurven zweiter Ordnung in synthetischer und analytischer Behandlung. Einige Konstruktionen der Kurven zweiter Ordnung. [...]“²⁵² In den so genannten *Bemerkungen zum Lehrziel* wurde deutlich darauf hingewiesen, dass der Unterricht über die Kegelschnitte „sich auf die Darlegung der wichtigsten metrischen

²⁴⁷ Wieleitner 1910, S. 39

²⁴⁸ vgl. Wieleitner 1910; In Bayern wurden die Jahrgangsstufen aufsteigend gezählt. Die höheren Schulen begannen mit Klasse I und endeten mit Klasse IX.

²⁴⁹ vgl. Wieleitner 1910

²⁵⁰ Heinrich Wieleitner sah diesen Lehrplan als unmittelbare Umsetzung der Meraner Reformvorschläge (vgl. 4.3) an. Man vergleiche dazu Wieleitner 1910, S. 44.

²⁵¹ Wieleitner 1910, S. 43

²⁵² Wieleitner 1910, S. 43

und projektiven Eigenschaften zu beschränken [habe]. Aller Formalismus, besonders der Rechnung, ist beiseite zu lassen.“²⁵³

Der erste gemeinsame Lehrplan²⁵⁴ für alle drei Schulformen erschien 1914 und sah die folgende Zahl an wöchentlichen Unterrichtsstunden vor:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Summe
Gymnasium und Realgymnasium	4	4	5	3	3	3	3	3	3	31
Oberrealschule	4	4	5	5	5	5	5	5	5	43

Somit ergab sich also eine Kürzung der Unterrichtszeit an den Gymnasien um zwei Wochenstunden und noch deutlicher an den Realgymnasien um sieben Wochenstunden.²⁵⁵ Dazu passend enthielten die (für alle Schulformen gemeinsamen) *Bemerkungen zum Lehrziel* nun den folgenden Hinweis: „Die Lehre von den Kegelschnitten hat sich auf die wichtigsten metrischen und projektiven Eigenschaften zu beschränken. An den Gymnasien ist dabei die Methode der analytischen Geometrie zu verwenden, während an den Oberrealschulen neben der analytischen auch die synthetische Behandlung berücksichtigt werden soll.“²⁵⁶ Die detaillierten Ausführungen zu den für die einzelnen Klassen vorgesehenen Lehrinhalten machen deutlich, dass es dabei an den Gymnasien und Realgymnasien nahezu ausschließlich um die Herleitung der Gleichungen der Kegelschnitte ging, denn es findet sich lediglich für die Klasse IX die Vorgabe: „Kurven 2. Grades, bezogen auf die Hauptachsen.“²⁵⁷ Demgegenüber fand bei den inhaltlichen Festlegungen für die Oberrealschule eine deutliche Explizifizierung statt. Hier war jetzt für die achte Klasse vorgesehen: „Die Gerade und das Geradenbüschel. Der Kreis und das Kreisbüschel. Tangente, Pol und Polare am Kreise. Harmonische Eigenschaften. Harmonische Lage von vier Punkten auf einer Geraden und vier Strahlen durch einen Punkt. Allgemeines Doppelverhältnis von Punktreihe und Geradenbüschel, Gleichheit bei perspektiver Lage, Unveränderlichkeit bei der Zentralprojektion einer Ebene in eine andere.“²⁵⁸ In der neunten Klasse sollten „Tangente, Pol und Polare. Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel, abgeleitet aus der Erzeugung des Kreises durch kongruente Strahlbüschel. Pascalscher Satz. Konstruktionen mittels des Pascalschen

²⁵³ Wieleitner 1910, S. 44

²⁵⁴ vgl. Lietzmann 1915; In diesem Lehrplan war die Trennung von *Rechnen* und *Mathematik* an den Oberrealschulen aufgehoben.

²⁵⁵ Die Angleichung des Gymnasiums und des Realgymnasiums bezüglich der Stundenzahl für Mathematik wurde wohl durch den Meraner Reformvorschlag angestoßen, der allerdings für beide Schulformen durchweg vier Wochenstunden in allen Jahrgangsstufen vorsah.

²⁵⁶ Lietzmann 1915, S. 100

²⁵⁷ Lietzmann 1915, S. 102

²⁵⁸ Lietzmann 1915, S. 104

Satzes.²⁵⁹ durchgenommen werden. Dieser Lehrplan blieb bis zum Jahr 1926 in Kraft.

Somit kann man feststellen, dass sich im Vergleich zu Preußen in Bayern die Umsetzung der „Neueren Geometrie“ auf die Oberrealschule beschränkte, dafür aber um einiges weiter ging. Ein Grund dafür liegt sicher in der schon angesprochenen Verteilung der Unterrichtszeit. Darüber hinaus enthielten die Lehrpläne für die Oberrealschule von 1907 und 1914 als selbstständiges, verpflichtendes Teilgebiet des Mathematikunterrichts die darstellende Geometrie. Zu deren Unterrichtsthemen gehörte unter anderem die Perspektive (d.h. die Zentralprojektion), mit der ebenfalls in Klasse 8 begonnen werden sollte. Hierin dürfte ein wichtiger Grund für die starke Betonung der „Neueren Geometrie“ gelegen haben.

2.5.3 Großherzogtum Baden

Eine im Vergleich zu Bayern und Preußen bezüglich der „Neueren Geometrie“ wesentlich weitgehendere Reform wurde im Großherzogtum Baden umgesetzt. Hier existierten bis zum Jahr 1869 mehrere höhere Schulformen (Gymnasium, Lyzeum, Pädagogium) nebeneinander, die sich unter anderem durch die vorgesehene Dauer der Schulzeit unterschieden. Diese wurden 1869 zu einer Schulform (Gymnasium) zusammengefasst, die neun Schuljahre umfasste und für das Fach Mathematik die folgende Zahl an Wochenstunden vorschrieb²⁶⁰:

I	II	III	IV	V	VI	Summe
4	4	3	4	4	3	33

Von inhaltlicher Seite sah der Plan für die Klasse V „Eigenschaften des Kreises, welche sich auf die Aehnlichkeit gründen, Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinie, Kreisberührung“²⁶¹ und für die Klasse VI „die ersten Elemente der neueren synthetischen Geometrie mit besonderer Rücksicht auf die Kegelschnitte“²⁶² vor. Der Plan wurde im Jahr 1883 dahingehend geändert, dass das Mathematikpensum in Obertertia um eine Stunde reduziert wurde, so dass insgesamt 32 Wochenstunden zur Verfügung standen. Außerdem wurde jetzt die Zählung der Klassenstufen an die in

²⁵⁹ Lietzmann 1915, S. 105

²⁶⁰ vgl. Hoffmann 1870, S. 248; Die drei oberen Klassen (IV, V, VI) umfassten jeweils zwei Schuljahre.

²⁶¹ Hoffmann 1870, S. 249

²⁶² Hoffmann 1870, S. 249

Preußen übliche (Quarta, Quinta, ...) angepasst. 1903 erfolgte wiederum eine Her- aufsetzung auf 34 Wochenstunden, die sich auf die einzelnen Klassen folgendermaßen verteilten²⁶³:

VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Summe
4	4	3	3	4	4	4	4	4	34

An den vorgesehenen Inhalten gab es nur geringfügige Änderungen. So wurde im Lehrplan von 1903 für die Obersekunda „Ähnlichkeitspunkte; Potenzlinie, harmonische Teilung“²⁶⁴ genannt, für die Unter- und Oberprima findet sich die sehr allgemeine Formulierung „Geometrie der Kegelschnitte“²⁶⁵. Gleichzeitig wurde mit diesem Lehrplan die darstellende Geometrie (geometrisches Zeichnen) als fakultatives, aber von der Mathematik unabhängiges Fach in den Gymnasien eingeführt. Offizielle inhaltliche Vorgaben wurden dazu nicht gemacht, die Lehrer orientierten sich an den Lehrplänen der Realanstalten.

Seit 1834 gab es in Baden die so genannten *Höheren Bürgerschulen* mit einem Umfang von sechs Klassen, die vor allem der Vorbereitung auf die „bürgerlichen Berufe“ und den Besuch der polytechnischen Schule in Karlsruhe dienten. Da sich diese in ihrer lokalen Ausgestaltung stark voneinander unterschieden und die polytechnische Schule weitergehende Anforderungen an ihre Schüler stellte, entstanden ab 1868 die (zunächst achtklassigen) badischen Realgymnasien. 1879 wurde deren Unterrichtszeit auf neun Schuljahre ausgeweitet und 1887 ein darauf abgestimmter Lehrplan herausgegeben. Dieser sah die folgende Zahl an Wochenstunden vor²⁶⁶:

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Summe
Mathematik	5	5	5	4	4	5	5	5	5	43
darstellender Unterricht ²⁶⁷	-	-	-	-	-	-	2	2	2	6

Gemäß diesem Lehrplan wurden in Untersekunda „Ähnlichkeitspunkte, Pol und Polare, Potenzlinie und das Apollonische Problem der Berührungen“²⁶⁸, in Oberprima „Elemente der synthetischen Geometrie, insbesondere Theorie der Kegelschnitte nach der Steinerschen Methode“²⁶⁹ behandelt. Außerdem sollte bezüglich der methodischen Umsetzung beachtet werden, „daß jede neue Erkenntnis auf die frühere

²⁶³ vgl. Cramer 1910, S. 7

²⁶⁴ Cramer 1910, S. 8

²⁶⁵ Cramer 1910, S. 9

²⁶⁶ vgl. Cramer 1910, S. 11

²⁶⁷ Dieser war an den Realgymnasien obligatorisch und umfasste die Grundlagen der Projektionslehre und der darstellenden Geometrie (Parallelprojektion).

²⁶⁸ Cramer 1910, S. 14

²⁶⁹ Cramer 1910, S. 15

gegründet und der Schüler angeleitet werden muß, den inneren Zusammenhang eines Lehrsatzes mit den früher erkannten Sätzen zu begreifen. Namentlich sollen demselben die Beweise nicht als fertige mitgeteilt, sondern, soweit irgend tunlich, von ihm selbst aufgefunden werden.“²⁷⁰

Dieser Lehrplan blieb bis zum Jahr 1912 in Kraft, wo es zu einer Verschmelzung des Mathematikunterrichts mit dem darstellenden Unterricht kam. Daraus ergaben sich eine Reduzierung der Zahl der Unterrichtsstunden sowie einige inhaltliche Veränderungen. Der Lehrplan sah jetzt für die Realgymnasien folgende Wochenstundenzahl vor²⁷¹:

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Summe
Mathematik	5	5	5	4	4	4	4	5	5	41

Dies bedeutete also insgesamt eine Reduzierung um acht Wochenstunden in Sekunda und Prima. Die zur „Neueren Geometrie“ gehörenden Inhalte waren jetzt vollständig in der Oberprima konzentriert: „Die Kegelschnitte in der Behandlung nach Poncelet oder nach Steiner. Harmonische Gebilde (Pol und Polare). Geometrische Verwandtschaften.“²⁷² Allerdings wurden die jetzt in den Mathematikunterricht integrierten Inhalte aus der darstellenden Geometrie²⁷³ um die Zentralprojektion erweitert. Nach Einführung des Realgymnasiums bildeten sich zwei Gruppen *Höherer Bürgerschulen*, nämlich einmal solche, die sich am Lehrplan des Realgymnasiums orientierten und verpflichtenden Unterricht in Latein anboten.²⁷⁴ Die zweite Gruppe konzentrierte sich weiterhin auf die Vorbereitung der Schüler für die „bürgerlichen Berufe“ und verzichtete daher auf den Lateinunterricht. Anfang der 1880er Jahre wurden die Schulen der letztgenannten Gruppe auf sieben Jahrgänge erweitert und nannten sich fortan *Realschulen*. Durch die Entwicklung in Preußen veranlasst kamen Anfang der 1890er Jahre nochmals zwei weitere Klassen hinzu, so dass nun auch die Oberrealschule als dritte höhere Schulform in Baden eingeführt war. Der erste offizielle Lehrplan²⁷⁵ erschien 1895 und sah folgende Zahl an Wochenstunden vor:

²⁷⁰ Cramer 1910, S. 15

²⁷¹ vgl. Lietzmann u.a. 1913, S. 41

²⁷² Lietzmann u.a. 1913, S. 43

²⁷³ Mit diesen sollte jetzt bereits in Untersekunda begonnen werden.

²⁷⁴ Diese wollten ihren Absolventen den anschließenden Besuch der oberen Klassen eines Realgymnasiums ermöglichen.

²⁷⁵ vgl. Cramer 1910, S. 17

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Summe
Mathematik	5	5	5	5	5	5	5	5	5	45
darstellender Unterricht ²⁷⁶	-	-	-	-	-	2	2	2	2	8

Die Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ waren hier in Obertertia („Die ebenen Gebilde und deren Grundeigenschaften (Punkt und Gerade; Strecke und Winkel, Dreieck, Viereck und Vieleck, Dreiseit, Vierseit und Vielseit; Kreis) unter Berücksichtigung der Lagebeziehungen. Begriff der geometrischen Verwandtschaft“²⁷⁷) und Untersekunda („Ähnlichkeit der ebenen Gebilde (Strecken, Dreiecke, Vielecke, Kreise)“²⁷⁸) vorgesehen, allerdings konnte sich der Lehrer bei der Behandlung der Kegelschnitte in Prima auch gegen die projektive Methode entscheiden: „Die Kegelschnitte als geometrische Örter und als Schnitte des Kegels, sowie (nach Wahl des Lehrers) entweder als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde oder in analytischer Behandlung“²⁷⁹. Eine Neufassung dieses Lehrplans erschien gleichzeitig mit dem neuen Plan für die Realgymnasien im Jahr 1912, wo auch an den Oberrealschulen die Trennung in Mathematik und darstellenden Unterricht aufgehoben wurde. Die Stundenverteilung sah nun so aus²⁸⁰:

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Summe
Mathematik	5	5	5	5	5	5	6	6	6	48

Somit verlor die Mathematik an den Oberrealschulen fünf Wochenstunden. Dennoch kam es zu einer Ausweitung der Inhalte aus der „Neueren Geometrie“, da die Vorgaben für die Obersekunda nun die schon mehrfach zitierten Inhalte „Harmonische Teilung. Viereck und Vierseit. Pol und Polare. Apollonische Aufgabe“²⁸¹ enthielten. Zusätzlich sollten in Unterprima die „Grundsätze der projektiven Geometrie“²⁸² und in Oberprima die „Kegelschnitte als projektive Gebilde. Geometrische Verwandtschaften“²⁸³ unterrichtet werden.

Der Grund für die starke Verankerung der „Neueren Geometrie“ in den badischen Lehrplänen dürfte neben der herausgehobenen Stellung der darstellenden Geometrie in den Bemühungen Peter Treutleins zur Reform des Geometrieunterrichts zu

²⁷⁶ Im Unterschied zu den Realgymnasien war für die Oberrealschulen neben der Parallel- auch die Zentralprojektion vorgesehen.

²⁷⁷ Cramer 1910, S. 19

²⁷⁸ Cramer 1910, S. 19

²⁷⁹ Cramer 1910, S. 19

²⁸⁰ vgl. Lietzmann u.a. 1913, S. 41

²⁸¹ Lietzmann u.a. 1913, S. 44

²⁸² Lietzmann u.a. 1913, S. 45

²⁸³ Lietzmann u.a. 1913, S. 45

sehen sein.²⁸⁴ So betonte er beispielsweise im zweiten Teil (*Der geometrische Unterricht der Oberstufe unserer höheren Schulen*) seines Buches *Der geometrische Anschauungsunterricht* die Wichtigkeit der Dualität, der geometrischen Verwandtschaften (affingleich, affin, ähnlich, projektiv) und der „perspektiven Beziehung“ (Abbildung durch Zentralkollineation) in der Ebene.²⁸⁵ Auch andere von Treutlein angestrebte Veränderungen wie die Einführung eines propädeutischen Geometrieunterrichts und die „Fusion“ von Planimetrie und Stereometrie wurden in den badischen Lehrplänen verwirklicht.

2.5.4 Weitere Länder

An dieser Stelle soll für die übrigen größeren Länder jeweils exemplarisch gezeigt werden, dass auch dort die zur „Neueren Geometrie“ gezählten Inhalte in den Lehrplänen zu finden waren. Auf eine detaillierte Angabe der Entwicklung der Lehrpläne und der Anzahl der vorgesehenen Unterrichtsstunden werde ich aus Platzgründen verzichten.

Großherzogtum Hessen

- Oberrealschule 1901:
 - Prima: „die Lehre von den Transversalen, der harmonischen Teilung, Ähnlichkeitspunkte, Chordalen und Kreispolaren“²⁸⁶

Königreich Sachsen

- Realgymnasium 1902:
 - Untersekunda: „Harmonische Punkte und Strahlen, Pol und Polare, Ähnlichkeitspunkte usw.“²⁸⁷
 - Unterprima: „Kegelschnitte in synthetischer Behandlung.“²⁸⁸
- Oberrealschule 1908:

²⁸⁴ vgl. Schönbeck 1994, S. 58ff

²⁸⁵ vgl. Treutlein 1911, S. 201ff; Man vergleiche dazu auch in Kapitel 3 die Darstellung des *Lehrbuchs der Elementar-Geometrie*, das Treutlein gemeinsam mit Julius Henrici herausgab.

²⁸⁶ Schnell 1910, S. 9

²⁸⁷ Witting 1910a, S. 29

²⁸⁸ Witting 1910a, S. 30

- Obersekunda: „Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen, Pol und Polare, Ähnlichkeitspunkte.“²⁸⁹

Königreich Württemberg

- Oberrealschule 1912:
 - Klasse VII: „Harmonische Punkte und Strahlen. Pol und Polarlinien. Das Kreispaar mit Potenzlinien.“²⁹⁰
 - Klasse VIII: „Lehre von den Kegelschnitten teils analytisch, teils synthetisch.“²⁹¹

Reichsland Elsaß-Lothringen

- Gymnasium und Realgymnasium 1905:
 - obere Klassen: „Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen sowie von dem Ähnlichkeitspunkt“²⁹²
- Oberrealschule 1905:
 - obere Klassen: „Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen, dem Ähnlichkeitspunkt und der Kreispotenz, [...] projektive Geometrie der Ebene“²⁹³

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass nach der Jahrhundertwende in allen Ländern des Deutschen Reiches Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ Eingang in die Lehrpläne gefunden hatten. Dabei konzentrierten sich die amtlichen Vorgaben hauptsächlich auf die realistischen Anstalten, während man an den humanistischen Gymnasien vielfach ganz auf die „Neuere Geometrie“ verzichtete. Dies hat vermutlich seine Ursachen darin, dass der größte Teil der Anhänger der „Neueren Geometrie“, wie bei der Darstellung der Argumente gesehen, an den realistischen Anstalten beschäftigt war und diese generell der Mathematik ein größeres Gewicht beimaßen. Außerdem lässt sich in den Ländern, die der darstellenden Geometrie einen breiteren Raum in ihren Lehrplänen einräumten, auch eine verstärkte Tendenz hin zur „Neueren Geometrie“ beobachten, was wohl in der Rolle der „Neueren Geo-

²⁸⁹ Witting 1910a, S. 35

²⁹⁰ Lietzmann u.a. 1913, S. 21

²⁹¹ Lietzmann u.a. 1913, S. 22

²⁹² Wirz 1911, S. 33

²⁹³ Wirz 1911, S. 33

metrie“ an den Technischen Hochschulen und der Vorbereitungsfunktion der realistischen Anstalten begründet liegt.

Im folgenden Kapitel soll nun anhand einiger damaliger Lehrbücher die inhaltliche Gestaltung der Lehrgänge in den Blick genommen werden.

Kapitel 3: Ausgewählte Lehrgänge

Im Rahmen der Diskussion über die Einführung der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht machten ihre Anhänger auch Vorschläge für die Gestaltung passender Lehrgänge. Ihre Ideen spiegeln sich in einer Vielzahl von Lehrbüchern wieder, die hauptsächlich in der Zeit zwischen 1870 und 1880 erschienen.¹ Die Konzentration auf diesen Zeitraum lässt sich dadurch erklären, dass die Reform hier gerade erst begann und sich noch kein einheitliches Konzept herausgebildet hatte², so dass viele Autoren ihre Ideen publizieren wollten. Außerdem gab es zu dieser Zeit so gut wie keine konkreten Vorgaben zur „Neueren Geometrie“ in den Lehrplänen, an denen man sich hätte orientieren können bzw. müssen.

Im Folgenden sollen nun anhand von vier damaligen Schulbüchern verschiedene Lehrgänge der „Neueren Geometrie“ detailliert dargestellt werden. Es handelt sich dabei um das *Methodische Lehrbuch der Elementar-Mathematik* von Gustav Holz-müller (3.1), das *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* von Julius Henrici und Peter Treutlein (3.2), den *Leitfaden der ebenen Geometrie* von Hubert Müller (3.3) und die *Elemente der Geometrie der Lage* von Rudolf Böger (3.4).³ Diese Bücher wurden ausgewählt, weil sich in ihnen die den meisten Lehrgängen zugrunde liegenden Leitgedanken wiederfinden. Jedoch existierten auch zwischen den Lehrgängen, die auf demselben Leitgedanken beruhten, teils deutliche Unterschiede. Eine Standardisierung oder Vereinheitlichung gab es eigentlich zu keiner Zeit, so dass die verschiedenen Ansätze mehr oder weniger fortwährend nebeneinander bestanden. Die vorgestellten Lehrbücher stehen daher exemplarisch für die große Fülle an Lehrgängen, können und sollen jedoch kein lückenloses Bild vermitteln.⁴

Das Ziel der Darstellung ist es demnach einmal, einen genaueren Einblick in die Inhalte der „Neueren Geometrie“ zu ermöglichen und damit in Anknüpfung an Kapitel 1 klarer zu machen, was damals im schulischen Kontext zu diesem Gebiet gezählt wurde. Dabei werden sich neben einer Reihe von Gemeinsamkeiten auch einige Unterschiede in der Stoffauswahl zeigen. Darüber hinaus sollen auch Unterschiede bezüglich der methodischen Herangehensweise deutlich werden, weshalb in den

¹ Die im Anhang befindliche (keineswegs vollständige) Liste von Lehrbüchern, in die damals Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ aufgenommen wurden, vermittelt einen Eindruck von der Vielzahl an Publikationen. Das meines Wissens erste derartige Lehrbuch ist das *Lehrgebäude der niederen Geometrie* von Carl Anton Bretschneider (Jena: Frommann 1844).

² Dieses wurde im Übrigen zu keiner Zeit erreicht.

³ Die vollständigen Inhaltsverzeichnisse dieser Lehrbücher finden sich im Anhang.

⁴ Aufgrund der Vielzahl der Konzepte würde dadurch der Rahmen dieser Arbeit gesprengt.

verschiedenen Lehrgängen die gemeinsamen Inhalte mehrfach aufgegriffen werden. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Frage, inwieweit die „Neuere Geometrie“ in Anknüpfung an die Euklidische Geometrie gelehrt oder ob sie als selbstständiges Gebiet aufgefasst wurde. Außerdem ergibt sich ein Eindruck davon, mit welchen Anforderungen und Ansprüchen sich die Schüler damals auseinander setzen mussten. Nicht zuletzt wird auch deutlich (insbesondere in 3.3 und 3.4), dass die Konzepte für den Schulunterricht sich sehr stark an der damals gängigen Auffassung der universitären Lehrbücher orientierten. Dies kann als Hinweis dafür gesehen werden, dass zwischen den höheren Lehranstalten und den Hochschulen eine größere Nähe bestand als heute zwischen den Gymnasien und den Universitäten, so dass der Übergang zwischen diesen Institutionen wesentlich flexibler war als heute.

3.1 Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik von Gustav Holzmüller

Als ein Beispiel für die weitgehende Integration der „Neueren Geometrie“ in den bestehenden Lehrgang der Geometrie und damit auch für den Rückgriff auf die Methoden der Euklidischen Geometrie soll im Folgenden das *Methodische Lehrbuch der Elementar-Mathematik* von Gustav Holzmüller⁵ vorgestellt werden. Das dreibändige Werk⁶ wurde sehr positiv rezensiert⁷, schon bald nach Erscheinen ins Spanische übersetzt und nach Aussage Holzmüllers sogar in südamerikanischen Schulen als Lehrbuch eingesetzt. Außerdem betonte Holzmüller stets, dass er sich sehr eng an den Preußischen Lehrplänen orientiere⁸, so dass auch ein genauerer Einblick in deren Intention ermöglicht wird.

⁵ Holzmüller wurde am 2.1.1844 in Merseburg geboren und studierte Mathematik und Physik in Halle, wo er 1870 promovierte (*Über die Anwendung der Jacobi-Hiltonschen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber*). Nach einer kurzen Tätigkeit als Hilfslehrer in Salzwedel und Merseburg wurde er 1871 Lehrer am Domgymnasium zu Magdeburg. 1872 wechselte er an das Gymnasium in Elberfeld, bevor er 1874 Direktor der Gewerbeschule in Hagen wurde. Dieses Amt legte er 1897 aus gesundheitlichen Gründen nieder. Holzmüller veröffentlichte nicht nur eine Vielzahl mathematischer Abhandlungen, sondern kämpfte auch mit großem Engagement für die Einführung von Real- und Oberrealschulen. Er starb am 27.11.1914 in Berlin.

⁶ Band 1: 1. Auflage 1894, 2. Auflage 1895, 3. Auflage 1898, 4. Auflage 1904

Band 2: 1. Auflage 1894, 2. Auflage 1897

Band 3: 1. Auflage 1895, 2. Auflage 1897

⁷ vgl. beispielsweise die Besprechung durch Siegmund Günther im 26. Band der ZmnU (S. 281-286)

⁸ In den Untertiteln mehrerer Ausgaben wird auch auf diesen Zusammenhang verwiesen.

Im ersten Band, der den Unterrichtsstoff für die ersten sechs Jahrgänge der höheren Lehranstalten enthielt, behandelte er im Rahmen der Geometrie hauptsächlich die

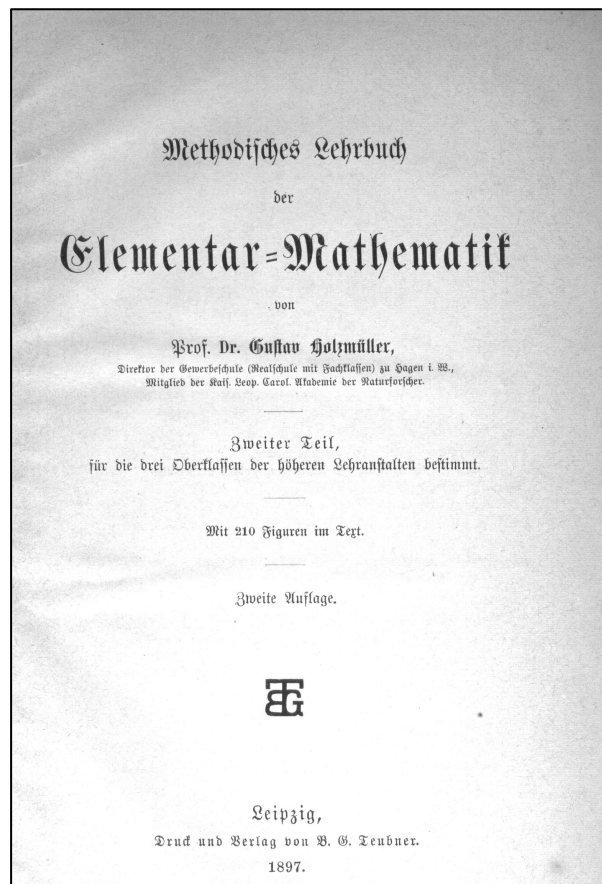


Abbildung 8: Titelblatt *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik* (aus: Holzmüller 1897, S. I)

Figuren Dreieck, Viereck und Kreis sowie deren Eigenschaften. Dazu gehörten insbesondere Kongruenz und Ähnlichkeit wie auch die Berechnung von Längen und Flächeninhalten. In Übereinstimmung mit den Preußischen Lehrplänen wurde hier also noch keine „Neuere Geometrie“ betrieben. Demgegenüber war im zweiten Band, der das Pensum der drei oberen Klassen umfasste, der Abschnitt zur Planimetrie (die erste „Abteilung“) sehr stark von der „Neueren Geometrie“ bestimmt⁹. Die entsprechenden Inhalte finden sich in den Kapiteln V bis XI, wobei das zu erreichende Ziel ganz klar darin bestand, in Kapitel XI das Apollonische Berührproblem zu lösen.

Band 3, der den Untertitel *Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl* trug, diente vornehmlich dazu, den Lehrern der Oberrealschulen Möglichkeiten zur Vertiefung der Inhalte in den Oberklassen zu geben. Somit werde ich mich im Folgenden auf den zweiten Band (2. Auflage) konzentrieren.

3.1.1 Sätze von Ceva und Menelaos, vollständiges Vierseit, harmonische Punkte, Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise

In Kapitel V (*Übergang zur neueren Geometrie*) behandelt Holzmüller zunächst den Satz des Ceva: „Die von den Ecken eines Dreiecks aus durch einen Punkt gezogenen Transversalen teilen die Gegenseiten so, daß die Produkte aus je drei nicht

⁹Diese Aussage bezieht sich wohlgerneht auf die betrachteten Inhalte, nicht auf die Methodik.

zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich sind.“¹⁰ Zum Beweis betrachtet er die Dreiecke **AGB** und **AGC**, deren Flächeninhalte aufgrund der

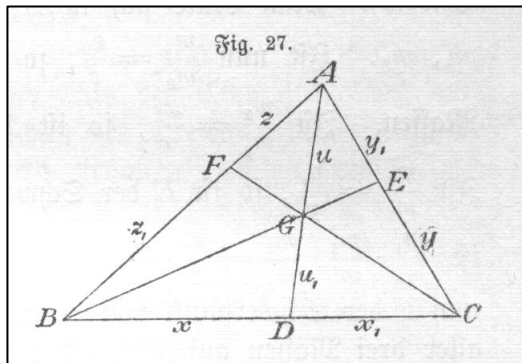


Abbildung 9: Beweis des Satzes von Ceva (aus: Holzmüller 1897, S. 33)

gemeinsamen Grundseite **AG** im gleichen Verhältnis stehen wie die Lote von **B** bzw. **C** auf **AG**. Wegen des zweiten Strahlensatzes (Zentrum **D**) verhalten sich diese aber wiederum genauso wie die Längen der Strecken **BD** und **DC**, die Holzmüller mit x und x_1 bezeich-

net¹¹. Insgesamt gilt also: $\frac{\Delta \mathbf{AGB}}{\Delta \mathbf{AGC}} = \frac{x}{x_1}$. Durch

analoge Betrachtungen für die Dreiecke **BGC**

und **BGA** bzw. **CGA** und **CGB** erhält man $\frac{\Delta \mathbf{BGC}}{\Delta \mathbf{BGA}} = \frac{y}{y_1}$ und $\frac{\Delta \mathbf{CGA}}{\Delta \mathbf{CGB}} = \frac{z}{z_1}$. Durch Mul-

tiplikation der linken und rechten Seiten der drei Gleichungen ergibt sich nach

vollständigem Kürzen: $1 = \frac{xyz}{x_1 y_1 z_1} \Leftrightarrow xyz = x_1 y_1 z_1$.

Im Anschluss beweist Holzmüller auch die Umkehrung des Satzes, wobei er annimmt, dass die Transversale durch **C** nicht durch den Schnittpunkt **G** der beiden anderen verlaufe und **AB** in **F'** schneide. Nach Voraussetzung erfüllen die durch **F'** auf der Strecke **AB** gebildeten Abschnitte z und z_1 die Gleichung $xyz = x_1 y_1 z_1$, was aber auch für die durch **F** gebildeten Abschnitte z' und z_1' gilt. Somit wäre also

$\frac{z}{z_1} = \frac{z'}{z_1'}$ und es gäbe zwei Punkte, die **AB** im Innern in diesem Verhältnis teilen.

In einer auf den Beweis folgenden Bemerkung betont Holzmüller einerseits die Tatsache, dass sich einige bereits bekannte Zusammenhänge wie die Existenz des Schnittpunkts der Höhen und Mittelsenkrechten im Dreieck als Spezialfälle des Satzes von Ceva herausstellen. Zum anderen weist er aber auch auf die Grundidee seines Ansatzes hin, die bewiesenen Aussagen durch Projektion auf andere Figuren zu übertragen, wobei er stillschweigend voraussetzt, dass Projektionen die Inzidenz erhalten: „Durch Parallel- oder Centralprojektion geht die Fig. 27 in eine andere über, von der wiederum der Satz des Ceva gilt. Die durch den letzteren ausgesprochene Eigenschaft des Dreiecks bleibt also bei jeder Projektion des Dreiecks erhalten. Man

¹⁰ Holzmüller 1897, S. 33

¹¹ Holzmüller arbeitet mit ungerichteten Strecken.

nennt solche Eigenschaften der Figuren projektivische Eigenschaften.¹² Anschließend beweist er ebenfalls unter Rückgriff auf Ergebnisse der Euklidischen Geometrie den Satz des Menelaos und dessen Umkehrung. Die Sätze von Ceva und Menelaos dienen Holzmüller sodann als Hilfsmittel, um den „Satz vom vollständigen Vierseit“¹³, den Satz des Pascal und eine wichtige Aussage über die Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise¹⁴ zu beweisen.

Ein vollständiges Vierseit wird von vier Geraden und deren sechs Schnittpunkten

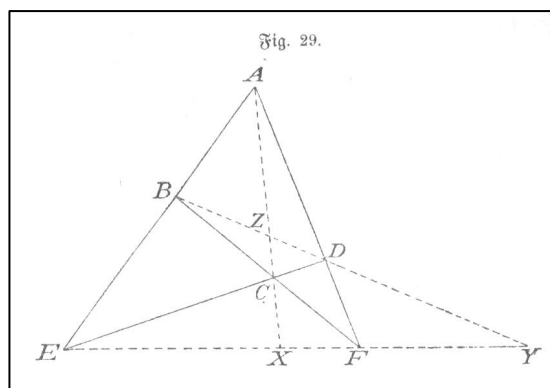


Abbildung 10: Harmonische Punkte am vollständigen Vierseit (aus: Holzmüller 1897, S. 36)

(den Ecken) gebildet. Durch je zwei Ecken, die nicht zusammen auf einer der vier Geraden liegen, verläuft eine Diagonale, von denen somit insgesamt drei existieren. Die zu beweisende Aussage bezieht sich nun darauf, dass auf jeder Diagonale vier harmonische Punkte¹⁵ liegen (zwei Ecken sowie die Schnittpunkte mit den beiden anderen Diagonalen). Zum Beweis betrachtet Holzmüller das vollständige Vierseit mit den Ecken **A**, **B**, **C**, **D**, **E** und **F** (vgl. Abb. 10). Die Schnittpunkte der Diagonalen seien **X**, **Y** und **Z**. Nach dem Satz des Ceva gilt im

Dreieck **AEF** (Transversalen durch **C**): $\frac{AB \cdot EX \cdot FD}{BE \cdot XF \cdot DA} = 1$. Durch die Transversale **BY**

gilt in demselben Dreieck gemäß dem Satz des Menelaos: $\frac{AB \cdot EY \cdot FD}{BE \cdot FY \cdot DA} = 1$. Somit gilt

also insgesamt: $\frac{EX}{XF} = \frac{BE \cdot DA}{AB \cdot FD} = \frac{EY}{FY}$, d.h. die Strecke **EF** wird durch **X** und **Y** harmo-

nisch geteilt. Im Anschluss an den Beweis weist Holzmüller darauf hin, dass harmonische Punkte bei Projektion erhalten bleiben, da die Sätze von Ceva und Menelaos projektivische Eigenschaften des Dreiecks beschreiben. Außerdem gebe es noch eine weitere Möglichkeit, den Satz vom vollständigen Vierseit zu beweisen: „Gerade der Umstand, daß auch dieser Satz von Maßbeziehungen unabhängig ist und die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes ohne den Zirkel gestattet,

¹² Holzmüller 1897, S. 35; Anstatt „projektivisch“ ist heute die Bezeichnung „projektiv“ üblich.

¹³ Bereits im ersten Band spricht Holzmüller kurz das vollständige Vierseit an, untersucht es dort aber nicht näher.

¹⁴ Es gibt vier Geraden (Ähnlichkeitsachsen), auf denen jeweils drei der sechs Ähnlichkeitspunkte liegen. Diese Aussage ist auch bekannt als *Satz von Monge*.

¹⁵ Diese werden ebenfalls bereits im ersten Band definiert und zwar so, dass eine Strecke von zwei Punkten jeweils im Inneren wie im Äußeren im gleichen Verhältnis geteilt wird.

läßt vermuten, daß noch eine andere Art von Beweisführung möglich ist, die aus dem Bereiche der (Euklidischen) Geometrie des Maßes ganz herausgeht. Die wichtigsten Folgerungen dieses Satzes bleiben daher bis zum späteren Beweise vorbehalten.“¹⁶ Die vollständige Unabhängigkeit von der Euklidischen Geometrie hat Holzmüller allerdings auch mit seinem zweiten Beweis nicht erreicht, wie die folgende Darstellung noch zeigen wird.

Bevor er sich in Kapitel VI dem alternativen Beweis zuwendet, beweist er jedoch unter Verwendung des Satzes von Ceva und des Satzes über Sekantenabschnitte den Satz des Pascal für den Kreis: „Die Gegenseiten des Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen.“¹⁷ Auf die Darstellung des Beweises wird an dieser Stelle verzichtet, da dieser lediglich auf dem geschickten Rechnen mit in der Figur auftretenden Streckenlängen beruht und in Kapitel VII noch ein alternativer Beweis geführt wird. Interessanter ist der letzte in Kapitel V auftretende Satz, der von den Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise handelt: „Die sechs Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen in Gruppen zu dreien auf vier geraden Linien.“¹⁸ Was

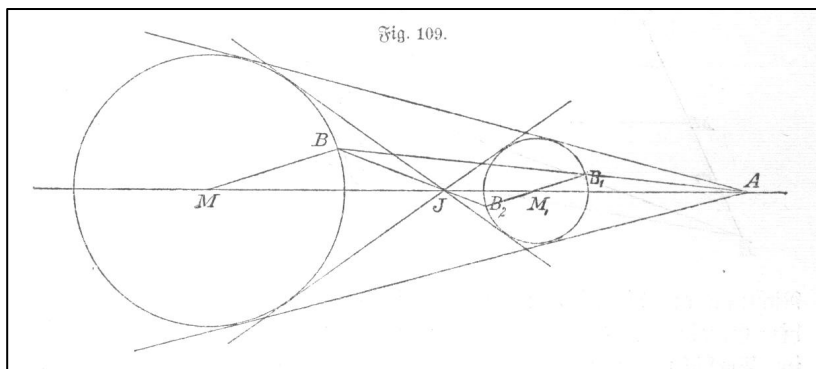


Abbildung 11: Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise (aus Holzmüller 1904, S. 145)

überhaupt unter Ähnlichkeitspunkten zu verstehen ist, erklärt Holzmüller bereits im ersten Band. Für zwei nicht konzentrische Kreise existieren stets ein äußerer und ein innerer Ähnlichkeitspunkt auf der

gemeinsamen Zentrale. Dabei verläuft jede Verbindungsgerade der Endpunkte zweier paralleler und gleichgerichteter Radien durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt, bei parallelen und entgegengesetzten Radien geht sie durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Wichtig ist auch die Eigenschaft, dass es sich bei den Ähnlichkeitspunkten getrennt liegender Kreise um die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten handelt.

Den Beweis des Satzes für drei Kreise führt Holzmüller ausführlich nur für die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte, d.h. er zeigt, dass A_1 , A_2 und A_3 auf einer Geraden lie-

¹⁶ Holzmüller 1897, S. 37

¹⁷ Holzmüller 1897, S. 37

¹⁸ Holzmüller 1897, S. 39

gen. Dazu stellt er zunächst fest, dass die Ähnlichkeitspunkte die durch die Mittelpunkte der Kreise gebildeten Strecken stets im Verhältnis der Radien teilen¹⁹. Somit

gilt: $\frac{M_1A_3}{M_2A_3} = \frac{r_1}{r_2}$, $\frac{M_2A_1}{M_3A_1} = \frac{r_2}{r_3}$ und $\frac{M_3A_2}{M_1A_2} = \frac{r_3}{r_1}$. Multipliziert man die linken und rechten

Seiten dieser drei Gleichungen ergibt sich: $\frac{M_1A_3 \cdot M_2A_1 \cdot M_3A_2}{M_2A_3 \cdot M_3A_1 \cdot M_1A_2} = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_3 \cdot r_1} = 1$.

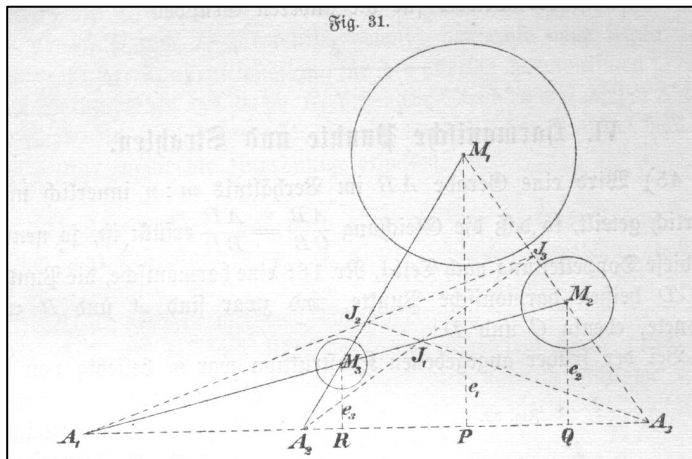


Abbildung 12: Lage der Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise (aus Holzmüller 1897, S. 39)

Somit liegen gemäß der Umkehrung des Satzes von Menelaos (Dreieck $M_1M_2M_3$) die Punkte A_1 , A_2 und A_3 auf einer Geraden. Analog zeigt man, dass auch jeweils ein äußerer und die inneren Ähnlichkeitspunkte der beiden anderen Kreise auf einer Geraden liegen. Die so entstehenden vier Geraden heißen Ähnlichkeitsachsen.

3.1.2 Alternativer Beweis zum „Satz vom vollständigen Vierseit“

In Kapitel VI (*Harmonische Punkte und Strahlen*) zeigt Holzmüller wie angekündigt einen vermeintlich von der Geometrie des Maßes unabhängigen Beweis für den Satz

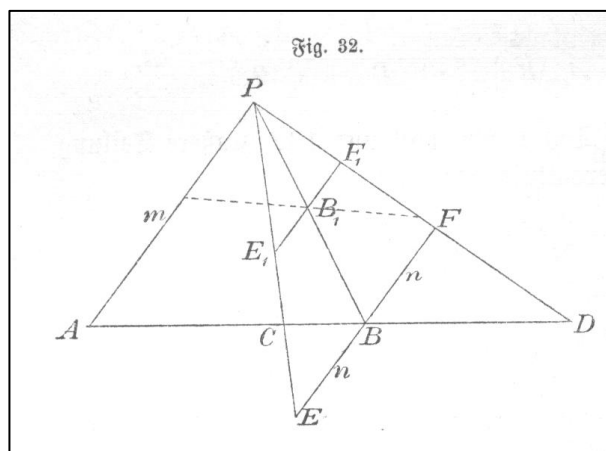


Abbildung 13: Äußere und innere Teilung einer Strecke AB (aus: Holzmüller 1897, S. 40)

vom vollständigen Vierseit. Dazu wiederholt er zunächst ausführlich die im ersten Band eingeführte Konstruktion harmonischer Punkte. Dabei soll die Strecke AB im Äußeren und im Inneren im selben Verhältnis $m : n$ geteilt werden, so dass also $\frac{AC}{BC} = \frac{m}{n} = \frac{AD}{BD}$. Dazu

legt man durch A eine beliebige Gerade,

¹⁹ Dies ergibt sich durch Anwendung des zweiten Strahlensatzes mit dem jeweiligen Ähnlichkeitspunkt als Zentrum.

auf der durch Abtragen einer gegebenen Strecke der Länge m der Punkt P entsteht. Durch B konstruiert man die Parallele zu AP , trägt eine Strecke der Länge n in beiden Richtungen von B aus ab und erhält E und F . Die Geraden PE und PF schneiden AB in den Punkten C und D . Zweimaliges Anwenden des zweiten Strahlensatzes (Zentren C und D) zeigt, dass die so konstruierten Punkte das Gewünschte liefern. Die Lage der Punkte C und D hängt davon ab, welchen Wert das Verhältnis $m : n$ annimmt. Holzmüller startet mit dem Fall $m = n$, bei dem C in der Mitte der Strecke AB und D „in unendlicher Entfernung“²⁰ liegt. Für $m > n$ liegt D rechts von AB , für $m < n$ links von AB .

Die Veränderung der Lage des Punktes C beschreibt Holzmüller in einer für die „Neuere Geometrie“ typischen Weise: „Wandert C von dem Halbierungspunkte der Geraden AB aus nach B , so wandert der Punkt D rechts von AB aus unendlicher Entfernung nach B . Wandert C von der Mitte nach A , so wandert D links von AB aus unendlicher Entfernung nach A . Für jede Lage von C existiert also eine und nur eine bestimmte Lage von D .“²¹ Somit ist also auch die Eindeutigkeit des vierten harmonischen Punktes gezeigt.

Als nächstes leitet Holzmüller die Tatsache her, dass es sich bei der harmonischen Lage um eine projektivische Eigenschaft handelt, d.h. sie bleibt bei Projektion erhalten. Dazu legt er eine Parallele zu EF durch einen Punkt B_1 auf der Geraden PB , die von PE und PF in den Punkten E_1 und F_1 geschnitten wird. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke PE_1F_1 und PEF bzw. PE_1B_1 und PEB sind die Strecken E_1B_1 und B_1F_1 gleich lang. Betrachtet man also irgendeine Gerade durch B_1 (in Abbildung 13 gestrichelt dargestellt), so wird diese von den Strahlen $P(ABCD)$ ²² in vier harmonischen Punkten geschnitten. Dasselbe gilt auch für alle Strahlen, die von einem beliebigen Punkt P_1 ausgehen und durch A, B, C und D verlaufen. Legt man nämlich die Parallele zu P_1A durch B und schneidet diese P_1C in E_2 und P_1D in F_2 , so müssen die Strecken E_2B und BF_2 dieselbe Länge haben. Ansonsten könnte man einen Punkt F_3 auf E_2F_2 so bestimmen, dass $\overline{E_2B} = \overline{BF_3}$ gilt, und erhielte zu A, B und C einen weiteren (von D verschiedenen) harmonischen Punkt D_1 . Somit kann Holzmüller harmonische Strahlen als solche definieren, die von irgendeinem Punkt nach vier harmonischen Punkten gezogen werden. Es gelten dann folgende Aussagen: „Zieht

²⁰ Holzmüller 1897, S. 40; Holzmüller verwendet keine Fernelemente, sondern nutzt nur die hier zitierte Formulierung.

²¹ Holzmüller 1897, S. 40

²² Dies ist die abgekürzte Schreibweise für die Strahlen PA, PB, PC und PD .

man zu einem von vier harmonischen Strahlen eine Parallele, so halbiert der zugeordnete Strahl das zwischen den beiden anderen zugeordneten liegende Stück der Parallelen. [...] Jede Gerade wird durch harmonische Strahlen in harmonischen Punkten geschnitten. Parallel- und Centralprojektion harmonischer Punkte und Strahlen giebt stets wieder harmonische Punkte bzw. Strahlen.“²³

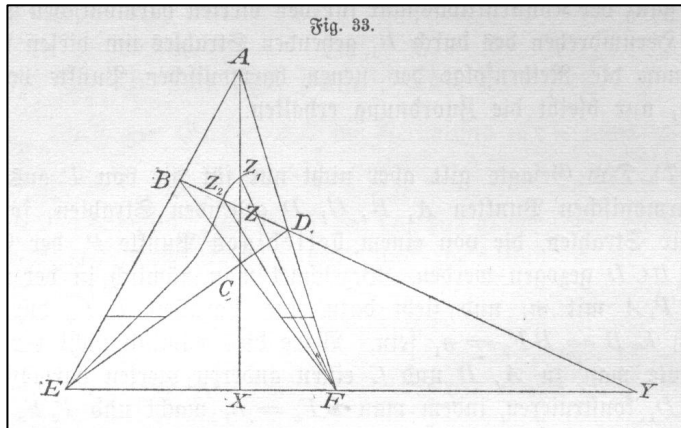


Abbildung 14: Harmonische Punkte am vollständigen Vierseit, zweiter Beweis (aus Holzmüller 1897, S. 42)

Darauf aufbauend präsentiert Holzmüller dann einen zweiten Beweis des Satzes vom vollständigen Vierseit. Die Ecken des Vierseits seien wieder mit **A**, **B**, **C**, **D**, **E** und **F** bezeichnet, die Diagonalen schneiden sich in **X**, **Y** und **Z**. Im Folgenden wird für die Diagonalen **BD** und **AC** der Beweis geführt, dass der Punkt **Z** einmal mit **B**, **D**

und **Y** und auch mit **A**, **C** und **X** harmonische Punkte bildet. Dazu konstruiert Holzmüller zunächst im Punkt **E** den vierten harmonischen Strahl zu **EB**, **EC** und **EF**, indem er die von **EB** und **EC** auf einer Parallelen zu **EF** ausgeschnittene Strecke halbiert.²⁴ Nun nimmt er an, dass dieser nicht durch **Z** verläuft und **AC** in **Z₁** sowie **BD** in **Z₂** schneidet.²⁵ Demnach sind **A**, **C**, **Z₁** und **X** harmonische Punkte, so dass die von **F** ausgehenden Strahlen **F(ACZ₁X)** ebenfalls harmonisch sind. Dasselbe gilt von den Punkten **B**, **D**, **Z₂** und **Y** bzw. den Strahlen **F(BDZ₂Y)**. Somit halbiert sowohl der Strahl **FZ₁** als auch der Strahl **FZ₂** die von **FB** und **FD** auf der Parallelen zu **FY**²⁶ ausgeschnittene Strecke, was offenbar nicht möglich ist. Daher fallen **Z**, **Z₁** und **Z₂** in einem Punkt zusammen und der Satz ist bewiesen. Zugegebenermaßen tritt bei dieser Argumentation der Aspekt des Messens nicht so deutlich hervor wie im ersten Beweis, wo wegen der Nutzung der Sätze von Ceva und Menelaos für jeden sichtbar mit Streckenlängen gerechnet wurde. Dennoch kann man auch hier nicht davon sprechen, dass es sich um „eine andere Art von Beweisführung [...], die aus dem Bereiche der (Euklidischen) Geometrie des Maßes ganz herausgeht“²⁷ handelt, denn

²³ Holzmüller 1897, S. 41

²⁴ Gemeint ist die in Abbildung 14 links liegende zu **EF** parallele Strecke.

²⁵ Da es sich um einen Widerspruchsbeweis handelt, ist der Strahl in Abbildung 14 gebogen dargestellt.

²⁶ Hier ist die rechts liegende Strecke gemeint.

²⁷ Holzmüller 1897, S. 37

die Nutzung der Strahlensätze und Ähnlichkeitsbeziehungen, das Halbieren von Strecken und auch die Definition der harmonischen Punkte bedarf ganz klar des Messens.

Im restlichen Teil des Kapitels behandelt Holzmüller noch zwei Sätze über die besondere Lage zweier Gruppen harmonischer Punkte bzw. Strahlen: „Gehen bei zwei Gruppen harmonischer Punkte die Verbindungslinien von drei gleichnamigen Paaren durch einen Punkt, so geht die vierte Verbindungslinie durch denselben Punkt. Schneiden sich bei zwei Gruppen harmonischer Strahlen drei gleichnamige Paare in Punkten einer Geraden, so schneiden sich die vierten Strahlen in einem Punkte derselben Geraden.“²⁸ Dabei handelt es sich um ein Kriterium dafür, dass zwei projektivische Punktreihen (Strahlenbündel) perspektivisch liegen, was Holzmüller jedoch nicht erwähnt.²⁹

3.1.3 Satz des Pascal und mögliche Grenzfälle

In Kapitel VII (*Ähnlichkeitspunkte und Pascalscher Lehrsatz*) besteht hauptsächlich das Ziel, einen alternativen Beweis für den Satz des Pascal zu führen und diesen durch Betrachtung von Grenzfällen auf einem Kreis einbeschriebene Vielecke mit weniger als sechs Ecken zu übertragen. Anknüpfend an den bereits in Kapitel V be-

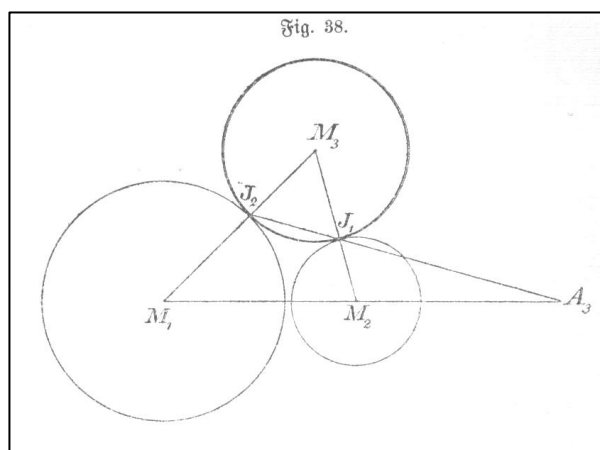


Abbildung 15: Ähnlichkeitspunkte dreier sich berührender Kreise (aus: Holzmüller 1897, S. 46)

wiesenen Satz über die Ähnlichkeitsachsen erwähnt Holzmüller zunächst, dass bei gleichartiger Berührung zweier Kreise durch einen dritten Kreis³⁰ die Verbindungsgerade der Berührungspunkte durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise verläuft.³¹ Bei ungleichartiger Berührung geht die Gerade durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Diese Aussage benutzt er dann zum Beweis

²⁸ Holzmüller 1897, S. 45; Ist **A**, **B**, **C**, **D** die erste Gruppe harmonischer Punkte und **A**₁, **B**₁, **C**₁, **D**₁ die zweite Gruppe, dann bilden **A** und **A**₁, **B** und **B**₁ usw. gleichnamige Paare.

²⁹ Von Staudt definiert zwei Punktreihen als projektivisch, wenn jeweils vier harmonischen Punkten der einen vier harmonische Punkte der anderen Punktreihe entsprechen. (vgl. von Staudt 1847, S. 49)

³⁰ Die fraglichen Kreise liegen also beide innerhalb oder beide außerhalb des dritten Kreises.

³¹ Das gilt deshalb, weil die Berührungspunkte gleichzeitig Ähnlichkeitspunkte sind.

des folgenden Satzes: „Werden zwei Kreise von einem dritten rechtwinklig geschnitten, so gehen die Verbindungslinien der Schnittpunkte des ersten Kreises mit denen des zweiten durch die Ähnlichkeitspunkte beider Kreise.“³² Zum Beweis betrachtet er die Kreise um M_1 und M_2 , die vom Kreis um M_3 in B_1 und C_1 bzw. B_2 und C_2 rechtwinklig geschnitten werden. Daher sind die Geraden M_1B_1 und M_2B_2 , die sich in M_4 schneiden, Tangenten an den Kreis um M_3 und die Strecken M_4B_1 und M_4B_2 gleich lang. Somit lässt sich um M_4 ein Kreis durch B_1 und B_2 zeichnen, der die Kreise um M_1 und M_2 gleichartig berührt, so dass die Gerade B_1B_2 durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt verläuft. Analog lässt sich zeigen, dass auch die Gerade C_1C_2 durch den äußeren und die Geraden B_1C_2 und C_1B_2 durch den inneren Ähnlichkeitspunkt gehen.

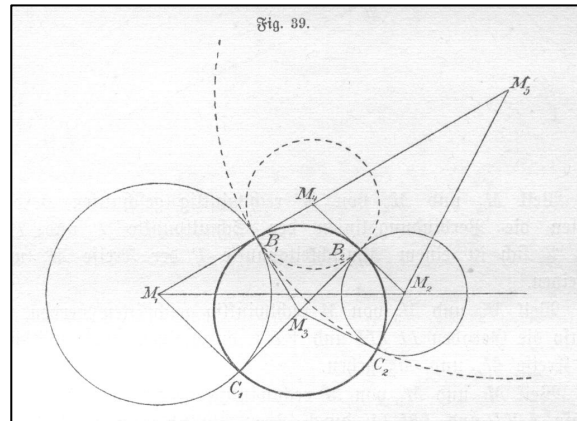


Abbildung 16: Zwei Kreise, die von einem dritten rechtwinklig geschnitten werden (aus: Holzmüller 1897, S. 47)

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich nun folgender Beweis für den Pascalschen Satz führen: Betrachtet wird der Kreis mit Mittelpunkt M , dem das Sechseck $I II III IV V VI$ eingeschrieben ist. Die Kreistangenten in I und IV , II und V sowie III und VI schneiden sich in M_1 , M_2 und M_3 . Zeichnet man also einen Kreis um M_1 durch I und IV , so schneidet dieser den Ausgangskreis rechtwinklig. Dasselbe gilt für entsprechende Kreise um M_2 und M_3 . Nach dem vorhergehenden Satz müssen also die Verbindungsgeraden von I mit II und von IV mit V durch einen Ähnlichkeitspunkt P der Kreise um M_1 und M_2 verlaufen. Ebenso

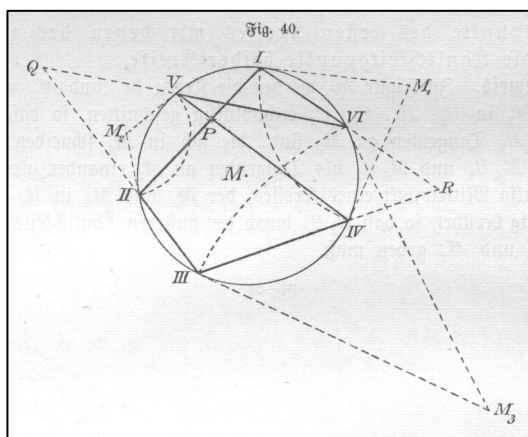


Abbildung 17: Beweis des Satzes von Pascal (aus: Holzmüller 1897, S. 48)

schneiden sich die Geraden $II III$ und $V VI$ in einem Ähnlichkeitspunkt Q der Kreise um M_2 und M_3 , die Geraden $I VI$ und $III IV$ in einem Ähnlichkeitspunkt R der Kreise um M_1 und M_3 . Da nur durch die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte bzw. je zwei innere und einen äußeren Ähnlichkeitspunkt eine Ähnlichkeitsachse verläuft, muss noch gezeigt werden, dass hier nur eine solche Kombination auftreten kann. Holzmüller merkt dazu jedoch lediglich an:

³² Holzmüller 1897, S. 47; vgl. Abbildung 16

„Untersucht man die Ähnlichkeitspunkte **P**, **Q**, **R** nach Art der Fig. 39 mit Hilfe von Berührungskreisen, so ergibt sich, daß es solche sind, die auf einer Geraden liegen.“³³

Im Folgenden betrachtet Holzmüller dann Grenzfälle des Satzes, bei denen zwei

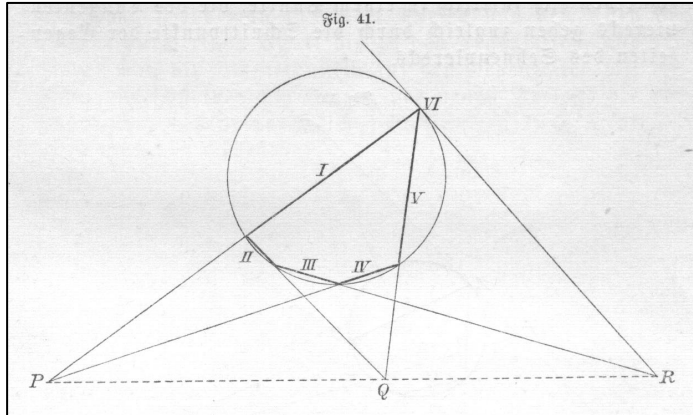


Abbildung 18: Grenzfall des Satzes von Pascal (aus: Holzmüller 1897, S. 49)

oder mehr benachbarte Punkte des Sechsecks zusammenfallen. Beispielsweise kann ein Sechseck als Sechseck mit zwei zusammenfallenden benachbarten Punkten aufgefasst werden. Die zwischen den Punkten liegende Seite geht dabei in die Kreistan-
gente über, so dass der Satz von Pascal die folgende Form an-

nimmt: „Demnach schneiden sich die Fünfecksseiten **I** und **IV**, **II** und **V** und außerdem die Seite **III** und die Tangente **VI** in Punkten **P**, **Q**, **R** einer Geraden.“³⁴

Am Schluss des Kapitels betont Holzmüller nochmals die Übertragbarkeit des Satzes auf alle Kegelschnitte: „Bezeichnet man jede Parallel- und Centralprojektion des Kreises als einen Kegelschnitt, so geht die Pascalsche Figur am Kreis durch die Projektion in die entsprechende Pascalsche Figur am Kegelschnitte über. Da die Geraden dabei Gerade bleiben, so gilt der Pascalsche Satz mit seinen Folgerungen von jedem Kegelschnitte.“³⁵

3.1.4 Pol und Polare am Kreis

Die Pol/Polare-Beziehung am Kreis bildet den Gegenstand des achten Kapitels (*Harmonische Punkte und Strahlen am Kreise*), in dem Holzmüller zunächst die Berührungssehne zu einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkt **A** betrachtet, die durch Verbinden der Berührungspunkte der von **A** ausgehenden Tangenten entsteht. Die

³³ Holzmüller 1897, S. 48; Streng genommen müsste für jede mögliche gegenseitige Lage der Kreise um **M**₁, **M**₂ und **M**₃ gezeigt werden, dass die gewünschten Ähnlichkeitspunkte entstehen.

³⁴ Holzmüller 1897, S. 48f

³⁵ Holzmüller 1897, S. 51; Die Einführung der Kegelschnitte als Bilder des Kreises unter Zentral- und Parallelprojektion erfolgt erst ganz am Ende des Buches.

durch **A** verlaufende Zentrale schneidet die Berührungssehne in **B**, den Kreis in **C** und **D**.

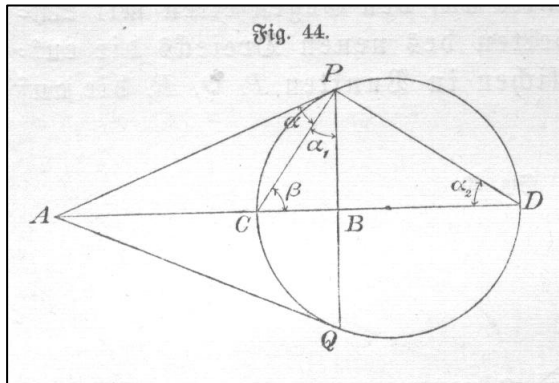


Abbildung 19: Konstruktion der Polare (aus: Holzmüller 1897, S. 52)

Da $\alpha = \alpha_2$ ³⁶ und $\alpha_2 = \alpha_1$ ³⁷, folgt $\alpha = \alpha_1$. Da zusätzlich **PC** orthogonal ist zu **PD**, sind **P(ABCD)** harmonische Strahlen, denn auf jeder Parallelen zu **PD** wird die von **PA** und **PB** ausgeschnittene Strecke durch **PC** halbiert.³⁸ Somit gilt: „Die von einem Punkte außerhalb des Kreises durch dessen Mittelpunkt gelegte Sekante ist durch Kreis und Berührungssehne harmonisch geschnitten.“³⁹

„³⁹

Diese Aussage lässt sich jedoch auf alle durch **A** gelegten Sekanten übertragen, was sich daraus ergibt, dass in Abbildung 20 die Winkel **EZC** und **CZF** gleich groß⁴⁰ und damit die von den Strahlen **ZE** und **ZC** bzw. **ZC** und **ZF** begrenzten Kreisbögen gleich lang sind. Somit gilt $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CBF$ und, da **BP** senkrecht zu **BA** ist, sind **B(EFCP)** harmonische Strahlen, d.h. **A, G, E** und **Z** harmonische Punkte.

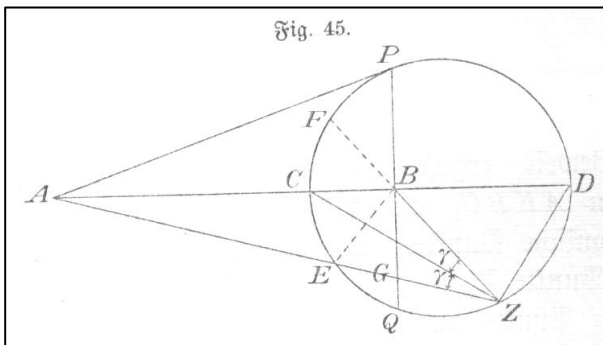


Abbildung 20: Harmonische Punkte auf einer durch den Pol gelegten Sekante (aus: Holzmüller 1897, S. 52)

Hat man nun zwei Sekanten an einen Kreis, die beide durch den außerhalb des Kreises liegenden Punkt **A** verlaufen und den Kreis in **G** und **F** bzw. **C** und **E** schneiden, so kann man die Geraden **GE**, **FC**, **GC** und **EF** mit

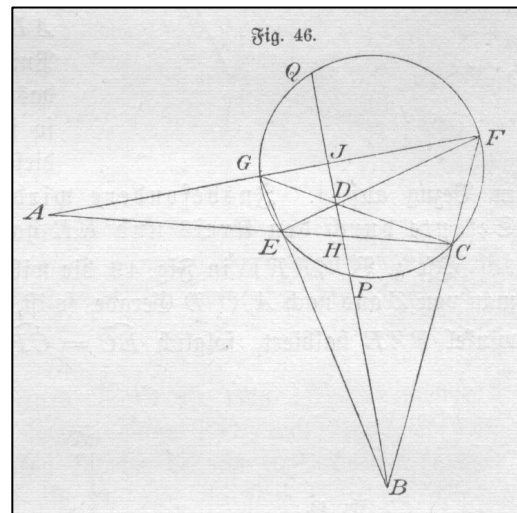


Abbildung 21: Vollständiges Vierseit am Kreis (aus: Holzmüller 1897, S. 53)

³⁶ α ist als Sehnen-Tangenten-Winkel so groß wie der Peripheriewinkel α_2 .

³⁷ $\alpha_1 + \beta = 90^\circ = \alpha_2 + \beta$

³⁸ Schneidet die zu **PD** parallele Gerade **PA** in **A**₁, **PB** in **B**₁ und **PC** in **C**₁, dann sind **PA**₁**C**₁ und **PB**₁**C**₁ kongruente Dreiecke.

³⁹ Holzmüller 1897, S. 52

⁴⁰ **Z(ABCD)** sind harmonische Strahlen und **ZC** ist orthogonal zu **ZD**.

ihren Schnittpunkten **B**, **C**, **D**, **E**, **F** und **G** als vollständiges Vierseit auffassen. Die Diagonalen schneiden sich in **A**, **H** und **J**. Somit sind sowohl **A**, **J**, **G** und **F** als auch **A**, **H**, **E** und **C** harmonische Punkte, so dass die Gerade **JH** mit der Berührungssehne von **A** zusammenfällt.⁴¹ Also gilt der Satz: „Zieht man von einem Punkte **A** außerhalb des Kreises zwei Sekanten, so schneiden sich die Verbindungslinien der Kreisschnittpunkte paarweise auf der Berührungssehne von **A**.“⁴² Kommen sich die beiden Sekanten durch **A** unendlich nahe, gehen die Sekanten **GE** und **FC** in die Tangenten über, deren Schnittpunkt also auch auf der Berührungssehne von **A** liegt.

Um nun für im Inneren des Kreises liegende Punkte eine Gerade zu finden, die die gleiche Rolle übernimmt wie für außerhalb liegende die Berührungssehne, betrachtet Holzmüller wiederum die auf der Zentrale liegenden harmonischen Punkte **A**, **B**, **C** und **D** und errichtet in **A** auf die Zentrale die Senkrechte **KL**. Für jede Sekante durch **B**, die die Gerade **KL** in **V** und den Kreis in **F** und **Z** schneidet, gilt dann, dass **Z(ABCD)** harmonische

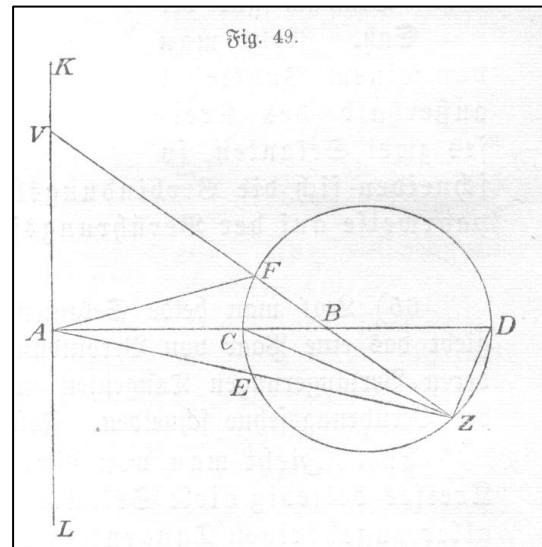


Abbildung 22: Polare eines Punktes im Inneren des Kreises (aus: Holzmüller 1897, S. 54)

Strahlen sind. Da **ZC** orthogonal zu **ZD** ist, gilt $\sphericalangle E Z C = \sphericalangle C Z B$ und damit sind die

Kreisbogen **CE** und **CF** gleich lang. Also ist wieder $\sphericalangle F A C = \sphericalangle C A E$ und **A(VCFE)** sind harmonische Strahlen, so dass **V**, **B**, **F** und **Z** harmonische Punkte sind.

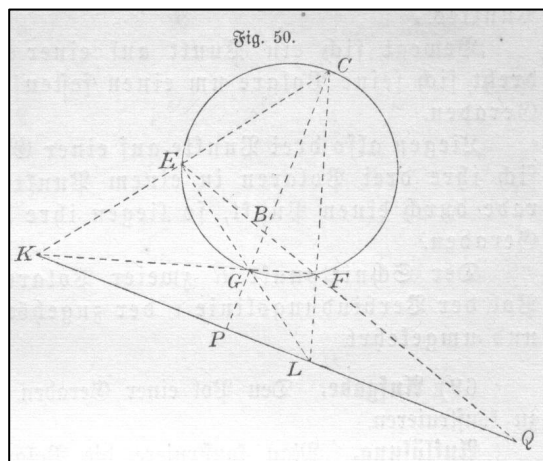


Abbildung 23: Zwei Sekanten durch einen im Inneren liegenden Punkt (aus: Holzmüller 1897, S. 55)

Legt man durch **B** zwei Sekanten, die den Kreis in **E** und **F** bzw. in **C** und **G** schneiden, erhält man wiederum ein vollständiges Vierseit mit den Ecken **C**, **E**, **F**, **G**, **K** und **L**. Auf der Diagonale **CG** ist **P** der vierte harmonische Punkt zu **C**, **B** und **G**. Genauso ist auf der Diagonale **EF** der Punkt **Q** der vierte

⁴¹ Alternativ könnte man auch über das vollständige Viereck mit den Ecken **C**, **E**, **F**, **G** argumentieren.

⁴² Holzmüller 1897, S. 53

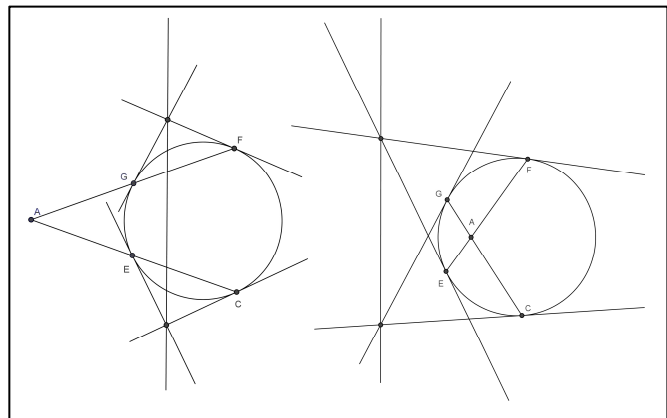
harmonische Punkt zu **E**, **B** und **F**. Also fällt die Gerade **PQ** mit der (vorher betrachteten) auf den Durchmesser durch **B** im vierten harmonischen Punkt **A** errichteten Senkrechten zusammen. Auch hier gilt also der Satz, dass sich die Verbindungsgeraden der Kreisschnittpunkte zweier Sekanten durch **B** paarweise auf der fraglichen Geraden schneiden. Gleiches gilt auch für die Tangenten in den Kreisschnittpunkten. All das fasst Holzmüller folgendermaßen zusammen: „Nennt man nun einen Punkt **P**, mag derselbe innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen, einen Pol, und bezeichnet man das auf dem durch **P** gehenden Durchmesser im zugeordneten harmonischen Punkte errichtete Lot als Polare, so kann man die obigen beiden Gruppen von Sätzen und Aufgaben einheitlich in folgende zusammenfassen:

Jede durch den Pol gehende Sekante wird durch Kreis und Polare in harmonischen Punkten geschnitten.

Zieht man durch den Pol zwei Sekanten, und verbindet man ihre Kreisschnittpunkte auf alle Arten, so schneiden sich die Verbindungslinien paarweise auf der Polare. [...]

Zieht man durch den Pol beliebige Sekanten, so liegen die Schnittpunkte zusammengehöriger Tangenten auf der Polare.“⁴³

Somit ergibt sich für beide Fälle (Pol innerhalb oder außerhalb des Kreises⁴⁴) ein einheitliches Verfahren, die einem Pol zugeordnete Polare zu finden: Man lege durch den Pol zwei Sekanten, in deren Schnittpunkten mit dem Kreis man die Tangenten



konstruiert. Verbindet man deren Schnittpunkte, hat man die Polare.

Abbildung 24: Einheitsliches Verfahren zur Konstruktion der Polare (erstellt mit GeoGebra)

Umgekehrt ist es so auch möglich, zu einer Polare den zugeordneten Pol zu finden. Daher kann man folgern: „Dreht sich die Polare um einen festen Punkt, so bewegt sich der Pol auf einer Geraden, der Polare des festen Punktes. Bewegt sich ein

⁴³ Holzmüller 1897, S. 55

⁴⁴ Bezüglich der auf dem Kreis liegenden Punkte merkte Holzmüller an: „Da jedem Punkte außerhalb des Kreises eine den Kreis schneidende Polare entspricht, jedem innerhalb gelegenen eine den Kreis nicht schneidende Polare, so gilt als Zwischenfall der eines auf dem Kreise liegenden Punktes, dessen Polare den Kreis weder schneidet noch gar nicht trifft, d. h. die Tangente im Punkte selbst.“ (Holzmüller 1897, S. 56)

Punkt auf einer festen Geraden, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, den Pol der Geraden.“⁴⁵

Aufgrund dieses Zusammenhangs kann man nun durch einen Kreis zu jeder Figur eine weitere Figur erzeugen, „indem man zu jedem Punkte die zugehörige Polare, zu jeder Geraden den zugehörigen Pol bestimmt. Man nennt dieses neue Gebilde die Polarfigur des gegebenen Gebildes (oder auch die reciproke Figur). [...] Aus den Eigenschaften jeder Figur kann man Schlüsse auf die Polarfigur ziehen. Aus gewissen Sätzen über Punkte auf einer Geraden kann man solche über Geraden durch einen

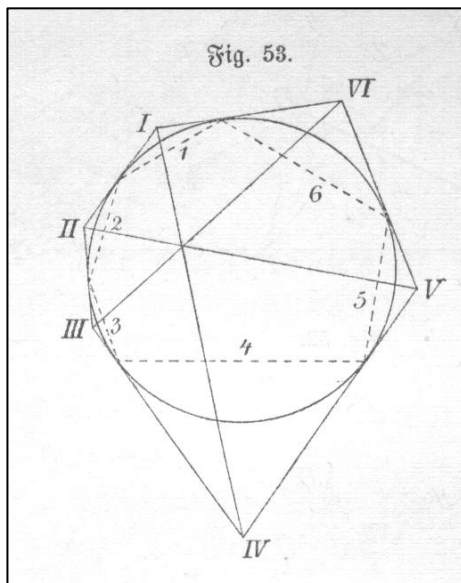


Abbildung 25: Satz des Brianchon
(aus: Holzmüller 1897, S. 58)

Punkt (und umgekehrt) ableiten.“⁴⁶ Als Beispiel für das Ableiten neuer Sätze präsentiert Holzmüller den Satz des Brianchon, der sich durch Polarisieren aus dem Satz des Pascal ergibt. Er lautet: „Die Verbindungslinien der Gegenecken des Tangentensechsecks schneiden sich in einem Punkte.“⁴⁷

Bildet man mit Hilfe des Inkreises die Polarfigur des Tangentensechsecks mit den Ecken **I**, **II**, **III**, **IV**, **V** und **VI**, so erhält man das Sehnensechseck mit den Seiten **1**, **2**, **3**, **4**, **5** und **6**, wobei Seite **1** die Polare zu Ecke **I** ist usw. Die Gegenseiten **1** und **4**, **2** und **5**, **3** und **6** schneiden sich nach dem Satz des Pascal in Punkten **P**, **Q** und **R**, die auf

einer Geraden liegen. Die Polare des Schnittpunktes von **1** und **4** verläuft durch die Pole von **1** und **4**, d.h. sie ist die Gerade **I IV**. Ebenso ist **II V** Polare zum Schnittpunkt von **2** und **5**, **III VI** Polare zum Schnittpunkt von **3** und **6**. Da **P**, **Q** und **R** auf einer Geraden liegen, verlaufen ihre Polaren (**I IV**, **II V** und **III VI**) alle durch den Pol dieser Geraden, so dass der Satz des Brianchon bewiesen ist. Analog zum Satz des Pascal können auch aus dem Satz des Brianchon durch das Zusammenfallen von Seiten Aussagen über das Tangentenfünfeck, –vierseit und –dreieck hergeleitet werden.

⁴⁵ Holzmüller 1897, S. 56

⁴⁶ Holzmüller 1897, S. 56; Auf dem dargestellten Zusammenhang zwischen einer Figur und ihrer Polarfigur beruht das Phänomen der Dualität in der projektiven Geometrie.

⁴⁷ Holzmüller 1897, S. 57

3.1.5 Inversion am Kreis

Als Übergang zum nächsten Kapitel betrachtet Holzmüller nochmals die Situation für den außerhalb des Kreises liegenden Punkt, wo **A**, **B**, **C** und **D** harmonische Punkte sind, d.h. $AC : CB = AD : BD$. Ist r der Radius und **M** der Mittelpunkt des Kreises, gilt $AC = AM - r$, $AD = AM + r$, $CB = r - BM$, $BD = BM + r$ und damit $(AM - r) : (r - BM) = (AM + r) : (BM + r)$. Daraus ergibt sich:

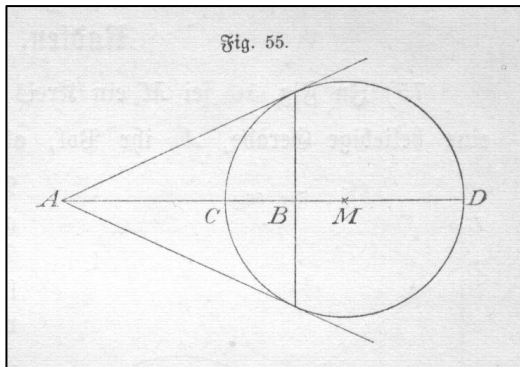


Abbildung 26: Kreisinversion
(aus: Holzmüller 1897, S. 59)

$$\begin{aligned} (AM - r) \cdot (BM + r) &= (AM + r) \cdot (r - BM) \\ \Leftrightarrow AM \cdot BM - r \cdot BM + r \cdot AM - r^2 \\ &= AM \cdot r + r^2 - AM \cdot BM - r \cdot BM \\ \Leftrightarrow AM \cdot BM &= r^2 \Leftrightarrow MA \cdot MB = r^2 \end{aligned}$$

Wählt man den Radius des Kreises als Längeneinheit, so gilt $MA \cdot MB = 1$. Somit sind also durch diese Gleichung jeweils ein Punkt außerhalb des Kreises und ein Punkt im Inneren einander zugeordnet. „Dieses Abbildungsprinzip bezeichnet man als die Abbildung oder Spiegelung mittels reziproker Radien. Es trägt auch den Namen der Inversion. Den Mittelpunkt des spiegelnden Kreises nennt man das Centrum der Inversion.“⁴⁸

Der einem Punkt **A** zugeordnete Punkt ergibt sich dabei jeweils als Schnittpunkt der Polare von **A** mit der Zentralen durch **A**. Einige Eigenschaften der Inversion behandelt Holzmüller im neunten Kapitel (*Die Inversion oder Spiegelung mittels reziproker Radien*), merkt allerdings zuvor noch in einer Fußnote an: „Kapitel IX und X und die sich anschließenden Berührungsaufgaben und kartographischen Betrachtungen können am Gymnasium selbstverständlich überschlagen werden. Es handelt sich aber dabei um einen Übungsstoff so anregender Art, daß der Versuch, durch ihn eine Reihe veralteter und geisttötender Konstruktionsaufgaben zu ersetzen, dringend anzuraten ist [...]“⁴⁹ Bezüglich der Inversion zeigt Holzmüller zunächst, dass jede Gerade, die nicht durch das Inversionszentrum geht,

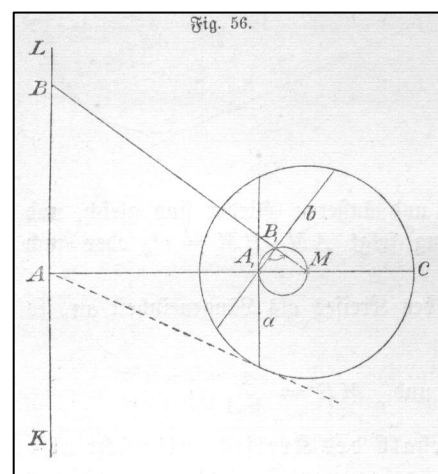


Abbildung 27: Abbildung einer Geraden durch Inversion
(aus: Holzmüller 1897, S. 60)

⁴⁸ Holzmüller 1897, S. 59

⁴⁹ Holzmüller 1897, S. 59

auf einen Kreis abgebildet wird. Ist nämlich **KL** die fragliche Gerade und **M** das Inversionszentrum, dann muss das Bild von **KL** durch ihren Pol **A₁** verlaufen, denn für diesen gilt $\mathbf{MA} \cdot \mathbf{MA}_1 = 1$. Ist **B** ein beliebiger Punkt von **KL**, dann ergibt sich sein Bildpunkt **B₁** als Schnittpunkt von **BM** mit seiner Polare **b**, die wiederum durch **A₁** und senkrecht zu **BM** verläuft. Auch der Punkt **M** gehört dem Bild von **KL** an: „Der unendlich ferne Bereich der Geraden **KL** entspricht dem Punkte **M**, denn $\frac{1}{\infty} = 0$.“⁵⁰

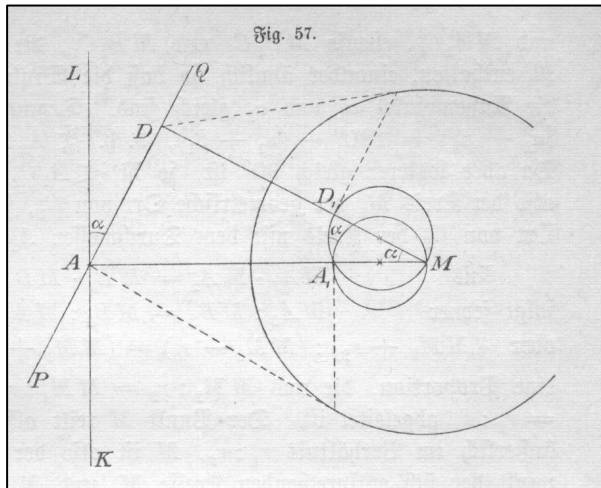


Abbildung 28: Erhaltung des Winkels bei Kreis inversion (aus: Holzmüller 1897, S. 61)

Somit ist nach der Umkehrung des Satzes von Thales das Bild von **KL** ein Kreis mit Durchmesser **A₁M**, d.h. das Bild einer nicht durch **M** verlaufenden Geraden enthält das Inversionszentrum sowie ihren Pol und hat die von diesen beiden Punkten begrenzte Strecke als Durchmesser.⁵¹

Demnach werden also alle Geraden, die einen Punkt **A** enthalten, auf ein Kreisbündel durch die Punkte **A₁** und **M** abgebildet. Dabei bleibt jeweils der Winkel zwischen den Geraden erhalten, d.h. der von den Tangenten an die Bildkreise im Punkt **A₁** gebildete Winkel ist so groß wie der zwischen den Geraden. Ist nämlich $\sphericalangle \mathbf{LAQ} = \alpha$, so folgt wegen $\sphericalangle \mathbf{LAM} = 90^\circ = \sphericalangle \mathbf{ADM}$, dass $\sphericalangle \mathbf{DMA} = \alpha$. Die Senkrechte

A₁T auf **AM** in **A₁** ist die Tangente zum Bildkreis von **KL**. Ist **M₁** der Mittelpunkt des Bildkreises von **PQ**, so gilt $\sphericalangle \mathbf{M}_1\mathbf{A}_1\mathbf{M} = \alpha$. Weil **A₁M₁** senkrecht ist zu **A₁T₁**,⁵² gilt $\sphericalangle \mathbf{MA}_1\mathbf{T}_1 = 90^\circ + \alpha$, d.h. $\sphericalangle \mathbf{T}_1\mathbf{A}_1\mathbf{T} = \sphericalangle \mathbf{MA}_1\mathbf{T}_1 - \sphericalangle \mathbf{MA}_1\mathbf{T} = \alpha$.

Anschließend zeigt Holzmüller rechnerisch, dass ein beliebiger Kreis durch Inversion immer auf einen Kreis abgebildet wird, wobei

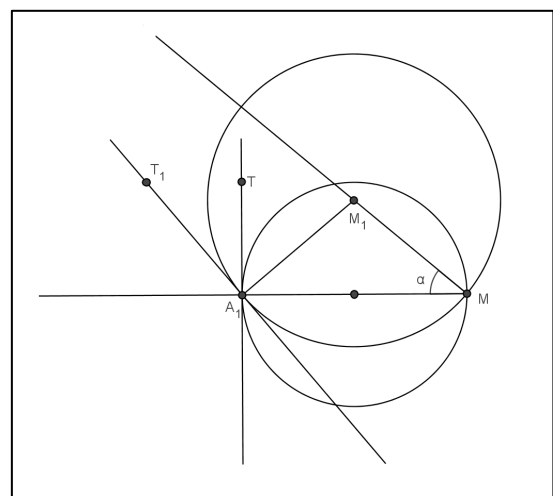


Abbildung 29: Abbildung eines Kreises durch Inversion (erstellt mit GeoGebra)

⁵⁰ Holzmüller 1897, S. 60

⁵¹ Im Falle, dass die Gerade durch **M** verläuft, wird sie jedoch auf sich selbst abgebildet.

⁵² **T₁** sei ein Punkt auf der Tangente in **A₁** an den Kreis um **M₁**.

das Inversionszentrum äußerer Ähnlichkeitspunkt des Kreises und seines Bildes ist. Einzige Ausnahme sind die Kreise durch das Inversionszentrum, deren Bilder Geraden sind. Außerdem gilt für zwei sich schneidende Kreise, dass sich die Bildkreise im gleichen Winkel schneiden wie die Urbilder, was sich aus der Betrachtung der Tangenten im Schnittpunkt und deren Bildern ergibt. Eine besondere Rolle nehmen die Kreise ein, die den Inversionskreis orthogonal schneiden. Für diese gilt nämlich wegen des Sekanten-Tangenten-Satzes $MA \cdot MA_1 = MB^2 = 1^2 = 1$, d.h. die Punkte A und A_1 sind einander zugeordnet und daher wird der Orthogonalkreis auf sich selbst abgebildet.

Hat man zwei Orthogonalkreise, die sich in X und X_1 schneiden, dann sind X und X_1 einander zugeordnet, denn das Bild von X muss auf beiden Kreisen liegen und damit ein Schnittpunkt der Kreise sein. Weiterhin folgt, dass alle Kreise durch X und X_1 den Inversionskreis rechtwinklig schneiden, denn jeder durch X und X_1 verlaufende Kreis wird auf sich selbst abgebildet.⁵³ Das kann aber wegen der Erhaltung der Winkel nur für Orthogonalkreise der Fall sein.

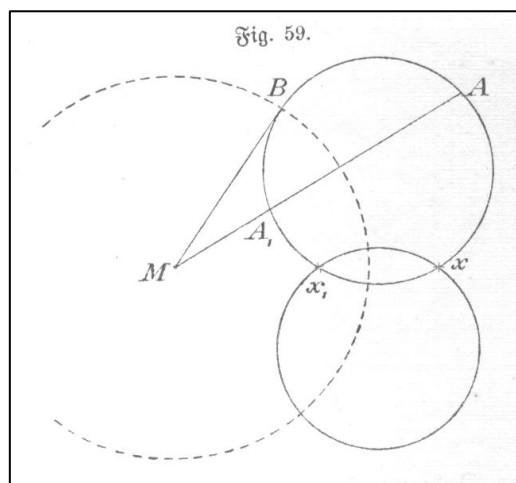


Abbildung 30: Inversion von Orthogonalkreisen (aus: Holzmüller 1897, S. 62)

Sucht man alle Kreise, die zwei gegebene Kreise mit Mittelpunkten M_1 und M_2 rechtwinklig schneiden, so verlaufen diese alle durch zwei (bezüglich beider Inversionskreise M_1 und M_2 ⁵⁴) zugeordnete Punkte X und X_1 auf M_1M_2 . Falls sich zwei Orthogonalkreise zu M_1 und M_2 schneiden, sind die Schnittpunkte bezüglich der Inversion an M_1 und der Inversion an M_2 einander zugeordnet und müssen somit auf der Geraden M_1M_2 liegen. Hat man nun zunächst zwei Orthogonalkreise O_1 und O_2 , so müssen sich die beiden schneiden. Der Fall, dass sie keine gemeinsamen Punkte haben (oder sich nur von außen in einem Punkt berühren), kann nicht auftreten, da der innere Ähnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2 innerhalb beider Orthogonalkreise liegen muss.⁵⁵ Würde O_1 vollständig in O_2 liegen (oder O_2 von Innen berühren), könnte man die Inversion an O_2 ausführen, wodurch die Kreise M_1 und M_2 auf sich

⁵³ X und X_1 werden durch die Inversion vertauscht und der Schnittpunkt des Kreisbogens zwischen X und X_1 mit dem Inversionskreis wird auf sich selbst abgebildet.

⁵⁴ Auch wenn er den gesamten Kreis meint, gibt Holzmüller oft nur dessen Mittelpunkt an.

⁵⁵ Das folgt aus dem Satz über die Verbindungslinien der Schnittpunkte eines Orthogonalkreises mit M_1 bzw. M_2 , vgl. S. 124.

selbst abgebildet werden und das Bild von O_1 außerhalb von O_2 liegen würde, was aber gerade ausgeschlossen wurde. Somit existieren immer Schnittpunkte. Würde nun ein dritter Orthogonalkreis O_3 den Kreis O_1 in Y und Y_1 schneiden, lägen M_1 und M_2 auf YY_1 , d.h. $YY_1 = M_1M_2 = XX_1$, sodass Y und Y_1 mit X und X_1 übereinstimmen.⁵⁶ Im restlichen Teil des Kapitels behandelt Holzmüller noch das Problem, einen Kreis

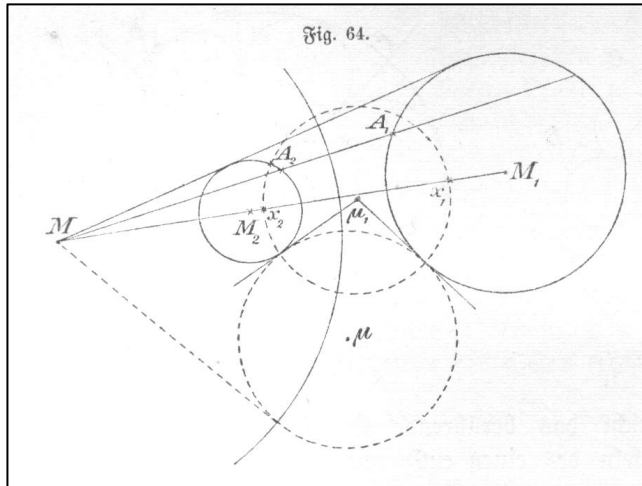


Abbildung 31: Abbilden eines Kreises auf einen zweiten durch Inversion (aus: Holzmüller 1897, S. 66)

M_1 durch Inversion auf einen gegebenen Kreis M_2 abzubilden. Dabei muss der äußere Ähnlichkeitspunkt M von M_1 und M_2 das Inversionszentrum werden. Schneiden sich M_1 und M_2 , legt man den Inversionskreis um M durch die Schnittpunkte. Schneiden sich M_1 und M_2 nicht, legt man durch M eine beliebige Sekante, die M_1 und M_2 in A_1 und A_2 schneidet, wobei A_1 und A_2 so ausgewählt werden, dass

M_1A_1 und M_2A_2 nicht parallel sind. Der Radius des Inversionskreises ist dann die mittlere Proportionale zwischen MA_1 und MA_2 ⁵⁷. Die Konstruktion liefert in beiden Fällen das Gewünschte, da bei der Inversion des Kreises M_1 am Kreis M der Punkt M äußerer Ähnlichkeitspunkt von M_1 und seinem Bild M_2' wird, d.h. der Punkt M_2' muss auf MM_1 liegen. Die genaue Lage von M_2' lässt sich bestimmen, indem man im Falle, dass der Inversionskreis den Kreis M_1 schneidet, durch den ersten Schnittpunkt eine Parallele zur Verbindungsgerade des Punktes M_1 mit dem zweiten Schnittpunkt zieht. Falls der Inversionskreis den Kreis M_1 nicht schneidet, zieht man die Parallele durch A_2 zur Verbindungsgerade von M_1 mit dem zweiten (von A_1 verschiedenen) Schnittpunkt von MA_1 mit dem Kreis M_1 . In beiden Fällen gilt also $M_2' = M_2$.

⁵⁶ Holzmüller beweist diese Aussage nicht, verwendet sie allerdings in Kapitel X, weshalb hier der vollständige Beweis angegeben ist.

⁵⁷ Der Radius r erfüllt also die Gleichung $\frac{MA_1}{r} = \frac{r}{MA_2}$. Im Übrigen funktioniert diese Konstruktion auch

bei sich schneidenden Kreisen.

3.1.6 Potenz eines Punktes bzgl. eines Kreises, Potenzlinie

In Kapitel X (*Potenz und Potenzlinie*) zeigt Holzmüller, dass für zwei Kreise stets eine Gerade existiert, deren Punkte jeweils bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz haben und die daher Potenzlinie genannt wird. Dazu stellt er zunächst unter Nutzung des Sekanten-Tangenten-Satzes fest, dass für jeden außerhalb eines Kreises liegenden Punkt **P** und jede durch ihn verlaufende Sekante, die den Kreis in **A** und **B** schneidet, die Gleichung $PA \cdot PB = t^2$ erfüllt ist.

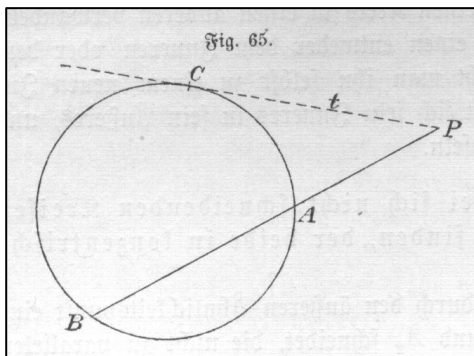


Abbildung 32: Potenz eines Punktes außerhalb eines Kreises (aus: Holzmüller 1897, 68)

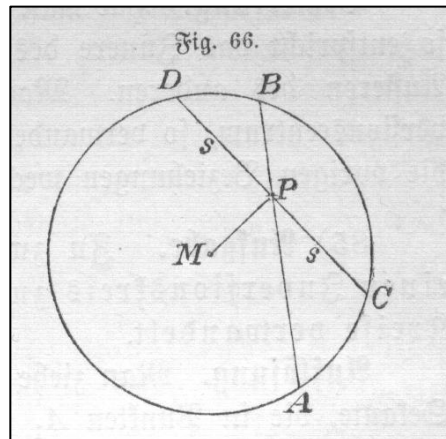


Abbildung 33: Potenz eines Punktes innerhalb eines Kreises (aus: Holzmüller 1897, S. 68)

Dabei ist t die Länge der Strecke zwischen **P** und dem Berührungspunkt der Tangente durch **P** an den Kreis. Liegt **P** innerhalb des Kreises, gilt wegen des Sehnensatzes für alle durch **P** verlaufenden Sehnen $PA \cdot PB = -s^2$, wobei **A** und **B** die Schnittpunkte der jeweiligen Sehne mit dem Kreis sind. s ist die Hälfte der Länge der kürzesten Sehne durch **P**. Somit kann er definieren: „In beiden Fällen bezeichnet man das genannte Produkt als die Potenz des Punktes **P** in Bezug auf den Kreis. Die Punkte mit positiver Potenz liegen also außerhalb, die mit negativer Potenz innerhalb des Kreises, die von Potenz Null auf ihm.“⁵⁸

Hat man nun zwei sich in den Punkten **X** und **X₁** schneidende Kreise mit gemeinsamer Sekante **XX₁**, so hat jeder außerhalb der Kreise liegende

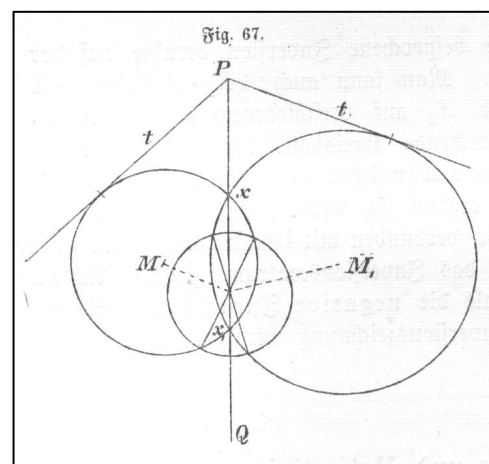


Abbildung 34: Potenzlinie für zwei sich schneidende Kreise (aus: Holzmüller 1897, S. 68)

⁵⁸ Holzmüller 1897, S. 68; Hier arbeitet Holzmüller zum ersten Mal mit gerichteten Strecken. Vermutlich möchte er anhand der Potenz unterscheiden können, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises liegt.

Punkt **P** der Sekante bezüglich beider Kreise die selbe Potenz. Immer gilt für die Tangenten durch **P** an die Kreise und die gemeinsame Sekante $\mathbf{PX} \cdot \mathbf{PX}_1 = t^2$, wobei man für jede Lage von **P** einen anderen Wert für t erhält. Das gleiche gilt auch für alle inneren Punkte der Sekante, da die jeweiligen kürzesten Sehnen ebenfalls gleiche Länge haben. Daher nennt man die gemeinschaftliche Sekante die Potenzlinie der beiden Kreise.

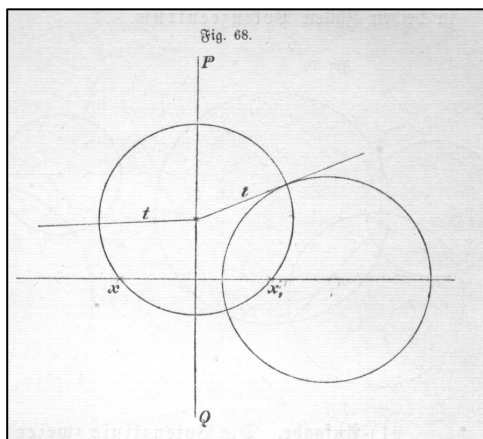


Abbildung 35: Potenzlinie für zwei sich nicht schneidende Kreise
(aus: Holzmüller 1897, S. 69)

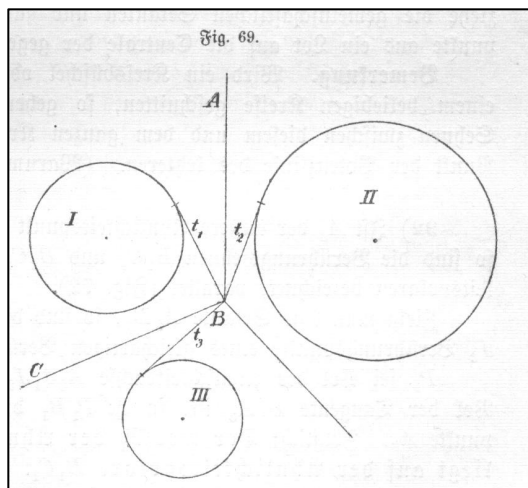


Abbildung 36: Potenzlinien dreier Kreise
(aus: Holzmüller 1897, S. 69)

Um auch für zwei sich nicht schneidende Kreise eine Potenzlinie zu erhalten, nutzt Holzmüller den (von ihm nicht bewiesenen) Zusammenhang, dass alle Kreise, die die gegebenen rechtwinklig schneiden, durch zwei Punkte **X** und **X₁** der gemeinschaftlichen Zentrale verlaufen. Die Mittelpunkte der Orthogonalkreise liegen folglich auf der Mittelsenkrechte der Strecke **XX₁** und haben bezüglich beider Kreise dieselbe Potenz⁵⁹. Im Fall, dass sich die zwei Kreise berühren, ist die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt die Potenzlinie. Für drei Kreise gilt nun der folgende Satz: „Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.“⁶⁰ Ist nämlich **AB** die Potenzlinie der Kreise **I** und **II** und **BC** die Potenzlinie der Kreise **I** und **III**, gilt für ihren Schnittpunkt **B**: $t_1 = t_2$ und $t_1 = t_3$. Also gilt auch $t_2 = t_3$, so dass **B** auch auf der Potenzlinie der Kreise **II** und **III** liegen muss. Der Schnittpunkt der drei Potenzlinien heißt Potenzzentrum.

⁵⁹ Die Berührungspunkte der Tangenten sind gerade die Schnittpunkte des jeweiligen Orthogonalkreises mit den gegebenen Kreisen. Um **X** und **X₁** zu ermitteln, kann man ausnutzen, dass die gesuchten Orthogonalkreise auch den Kreis rechtwinklig schneiden, dessen Mittelpunkt und Radius der äußere Ähnlichkeitspunkt und die mittlere Proportionale der gegebenen Kreise sind (vgl. Abbildung 31).

⁶⁰ Holzmüller 1897, S. 69

3.1.7 Lösung des Apollonischen Berührproblems

Aufbauend auf diesen Erkenntnissen kommt Holzmüller in Kapitel XI (*Einige Berührungsaufgaben*) schließlich zur Lösung des Apollonischen Berührproblems, die er allerdings in mehreren Schritten erreicht. Zunächst löst er die Aufgabe: „Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.“⁶¹ Ist M der gegebene Kreis und sind P und Q die gegebenen Punkte, so muss der Mittelpunkt M_1 des gesuchten Kreises auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ liegen. Zeichnet man einen Kreis C durch die Punkte P und Q , der den Kreis M in A und B schneidet, dann ist AB Potenzlinie der Kreise M und C , PQ Potenzlinie

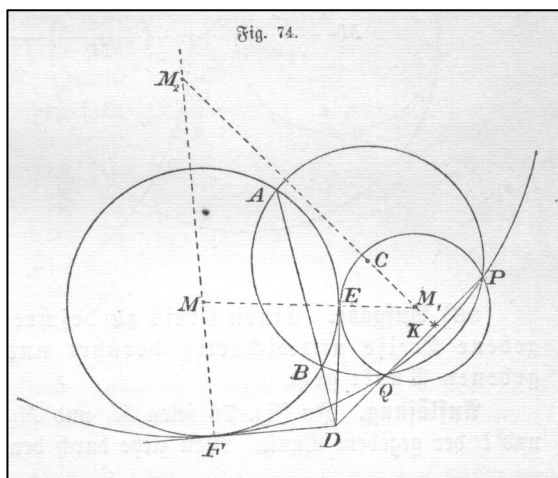


Abbildung 37: Konstruktion eines Kreises, der einen zweiten berührt und zwei gegebene Punkte enthält (aus: Holzmüller 1897, S. 73)

von C und dem gesuchten Kreis M_1 . AB und PQ schneiden sich im Potenzzentrum D . Da sich M und M_1 berühren sollen, ist die dritte Potenzlinie durch D die Tangente an M . Da es von D aus zwei Tangenten an den Kreis M mit Berührungspunkten E und F gibt, existieren sogar zwei Kreise M_1 und M_2 , die die Aufgabe lösen. Deren Mittelpunkte entstehen als Schnittpunkte von ME bzw. MF mit der Mittelsenkrechten von PQ .

Mithilfe dieser Konstruktion ergibt sich auch

eine Lösung der Aufgabe „Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise gleichartig berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.“⁶² Sind nämlich die Kreise M und M_1 sowie der Punkt P gegeben, kann man den Kreis der Inversion bestimmen, die M auf M_1 abbildet.⁶³ Nun kann man P an diesem Kreis invertieren und erhält Q . Gemäß der vorherigen Aufgabe können nun

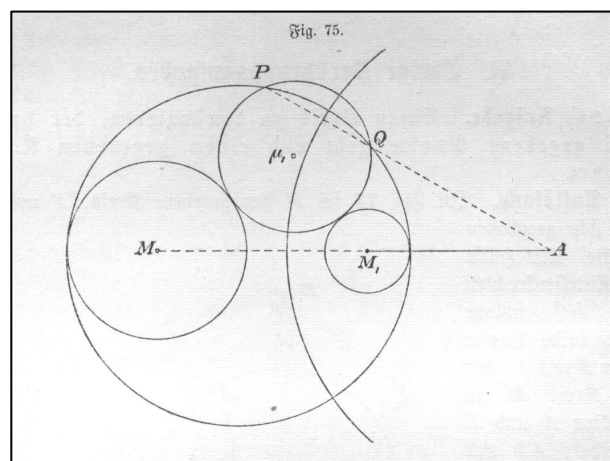


Abbildung 38: Konstruktion eines Kreises, der zwei Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht (aus: Holzmüller 1897, S. 74)

⁶¹ Holzmüller 1897, S. 73

⁶² Holzmüller 1897, S. 73

⁶³ Der Mittelpunkt A dieses Kreises ist der äußere Ähnlichkeitspunkt von M und M_1 , sein Radius ist mittlere Proportionale der Strecken AB und AC , wobei B und C die äußeren Schnittpunkte von MM_1 mit den Kreisen M und M_1 sind.

zwei Kreise konstruiert werden, die durch **P** und **Q** verlaufen und den Kreis **M** berühren. Diese fraglichen Kreise werden nun bei Inversion am Kreis **A** auf sich abgebildet (**P** und **Q** werden vertauscht, der Schnittpunkt des Kreisbogens **PQ** mit dem Kreis **A** wird auf sich abgebildet) und ihr Bild hat mit dem Bild des Kreises **M** einen Punkt gemeinsam, d.h. auch **M₁** berührt die Kreise.

Daraus ergibt sich nun die folgende Lösung für die Aufgabe „Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise gleichartig berührt. (Problem des Apollonius)“⁶⁴

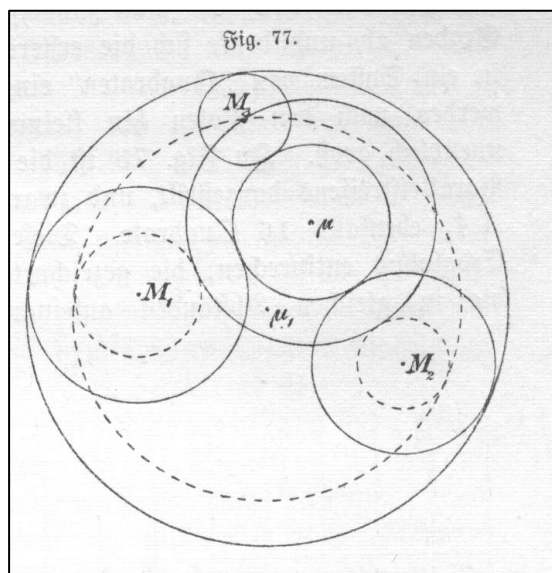


Abbildung 39: Lösung des Apollonischen Berührproblems (aus: Holzmüller 1897, S. 75)

Die gegebenen Kreise seien **M₁**, **M₂** und **M₃** mit Radien r_1 , r_2 , r_3 , von denen r_3 der kleinste sei. Um **M₁** und **M₂** zeichnet man nun Kreise mit Radius $r_1 - r_3$ bzw. $r_2 - r_3$ (in der Abbildung gestrichelt dargestellt). Gemäß der vorherigen Aufgabe können nun zwei Kreise μ und μ_1 konstruiert werden, die durch **M₃** verlaufen und die beiden Hilfskreise um die

Punkte **M₁** und **M₂** gleichartig berühren. Daraus ergeben sich zwei unterschiedliche Lösungen des Apollonischen Berührproblems: der erste Kreis ist konzentrisch zu μ , sein Radius wird im Vergleich zu μ um r_3 vermindert. Der zweite Kreis ist konzentrisch zu μ_1 , sein Radius muss um r_3 erhöht werden.

Punkte **M₁** und **M₂** gleichartig berühren. Daraus ergeben sich zwei unterschiedliche

Lösungen des Apollonischen Berührproblems: der erste Kreis ist konzentrisch zu μ , sein Radius wird im Vergleich zu μ um r_3 vermindert. Der zweite Kreis ist konzentrisch zu μ_1 , sein Radius muss um r_3 erhöht werden.

3.2 Lehrbuch der Elementar-Geometrie von Julius Henrici und Peter Treutlein

Das *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* von Julius Henrici⁶⁵ und Peter Treutlein umfasste insgesamt drei Teile, von denen jeweils mehrere Auflagen in relativ kurzer Zeit erschienen.⁶⁶ Ein Ziel der Autoren bestand darin, die „Neuere Geometrie“ mit den

⁶⁴ Holzmüller 1897, S. 75

⁶⁵ Friedrich Julius Henrici, geboren am 15.12.1841 in Eberbach, studierte von 1859 bis 1863 Mathematik und Physik am Polytechnikum in Karlsruhe und an den Universitäten Heidelberg und München. Er war von 1865 bis 1866 als Lehrer am Gymnasium in Bruchsal tätig. Anschließend wechselte er nach Heidelberg, wo er zunächst bis 1877 an der höheren Bürgerschule und dann bis 1906 am Großherzoglichen Gymnasium unterrichtete. Henrici starb am 24.05.1910 in Emmendingen.

⁶⁶ 1. Teil: 1. Auflage 1881, 2. Auflage 1891, 3. Auflage 1897

bestehenden Inhalten zu einem Lehrgang der Schulgeometrie zu verschmelzen.⁶⁷ Dieser sollte jedoch vollständig von den Methoden der „Neueren Geometrie“ geprägt sein und hob sich daher in seinem Aufbau stark vom althergebrachten ab. So bemerkte Hermann Thieme⁶⁸ in seiner Programmabhandlung *Die Umgestaltung der Elementargeometrie*: „Die Methoden der Beweisführung sind bei ihnen maßgebend

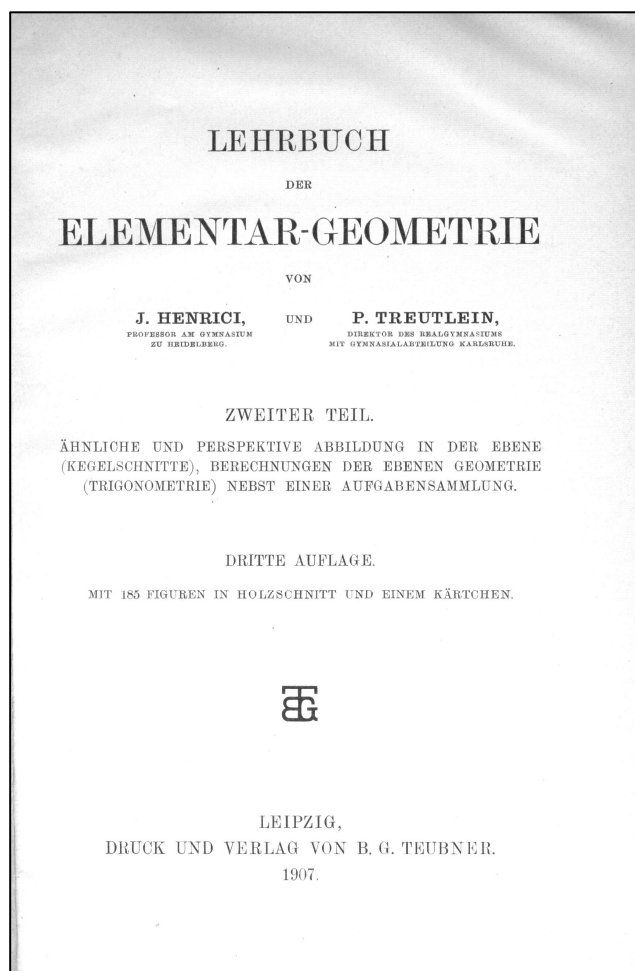


Abbildung 40: Titelblatt *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. I)

für die Gliederung des Stoffes. Diese Methoden selbst stammen aus der neueren Geometrie, sind im Grunde besondere Fälle der allgemeinen Methoden der Projektivität.“⁶⁹

Und auch die Autoren selbst führten im Vorwort zum ersten Band ihres Werkes aus: „Mit Recht gelten Euklids Elemente als ein Muster systematischer Anordnung der Schlüsse, insofern jeder Lehrsatz da steht, wo die Prämissen zu seinem Beweise vollständig gegeben sind. [...] Neuere Bearbeitungen der Geometrie haben daher vor Euklid den Vorzug, dass sie gleichartige Gegenstände zusammenstellen und ungleichartige in logischer Folge aneinander reihen. Zu diesem dem Stoff entlehnten Grundsatz der Einteilung nimmt unsere Elementargeometrie einen weiteren hinzu, indem sie die Lehrsätze nach den verschiedenen Arten der Beweisführung ordnet. [...] Bei einem derart vorgeschriebenen Weg werden jene sog. Mausefallenbeweise vermieden, bei welchen man sich schliesslich dem Lehr-

ometrie einen weiteren hinzu, indem sie die Lehrsätze nach den verschiedenen Arten der Beweisführung ordnet. [...] Bei einem derart vorgeschriebenen Weg werden jene sog. Mausefallenbeweise vermieden, bei welchen man sich schliesslich dem Lehr-

2. Teil: 1. Auflage 1882, 2. Auflage 1897, 3. Auflage 1907

3. Teil: 1. Auflage 1883, 2. Auflage 1901

⁶⁷ Ein anderes Anliegen von Henrici und Treutlein war die „Fusion“ von ebener und räumlicher Geometrie.

⁶⁸ Hermann Thieme, geboren am 9.11.1852 in Neu-Limmritz (Provinz Brandenburg), studierte nach dem Besuch des Friedrichs-Gymnasiums in Frankfurt a.O. Mathematik und Naturwissenschaften in Breslau (1873 bis 1877). Nach der Promotion (1877) und bestandem Examen (1878) leistete er bis 1879 das Probejahr an der höheren Bürgerschule in Striegau (Niederschlesien) ab, wo er anschließend bis 1881 weiter unterrichtete. Er wechselte dann an die Berger-Oberrealschule in Posen, wo er 1892 zum Oberlehrer ernannt wurde. 1902 ging er an das Realgymnasium in Bromberg.

⁶⁹ Thieme 1900, S. 34

satz gefangen gibt, ohne darüber klar zu sein, wie man dazu gekommen ist.“⁷⁰ Daher enthält der erste Band all diejenigen Sätze, die sich mit Hilfe von Kongruenzabbildungen beweisen lassen. Der zweite Band umfasst einerseits die Zentralkollineation⁷¹ mit den Spezialfällen Ähnlichkeit und Zentralperspektive, andererseits die Berechnung von Längen und Flächeninhalten sowie die trigonometrischen Funktionen. Im dritten Band werden Stereometrie und darstellende Geometrie behandelt. Das Ziel dieses Konzeptes war es, einen natürlichen Aufbau des Lehrgangs zu erreichen, bei dem die Lehrsätze nicht nur nach rein beweistechnischen bzw. logischen Aspekten angeordnet sind, sondern sich jeweils aus dem zuvor behandelten Stoff ergeben. Auch die Herkunft der Beweisideen sollte klarer hervortreten.⁷² „Auf diese Weise steigert sich die Anschaulichkeit und damit die Klarheit im Verständnis der Figuren und ihrer Beziehungen ebenso sehr, wie die Anforderungen an das Gedächtnis des Schülers sich vermindern“⁷³.

Neben der Anpassung des Aufbaus und der Methoden nahmen Henrici und Treutlein jedoch auch zusätzlich Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ in ihren Lehrgang auf. Dies geschah insbesondere in der ersten Hälfte des zweiten Bandes (der sogenannten ersten Abteilung), auf den sich die weiteren Betrachtungen konzentrieren.⁷⁴ Die fragliche Abteilung trug die Überschrift *Streckenverhältnisse und Abbildung in der Ebene* und gliederte sich in die Abschnitte *Einfache Verhältnisse bei ähnlicher Abbildung* (drei Kapitel) und *Zusammengesetzte Verhältnisse bei der Abbildung mit einer Bildachse* (drei Kapitel).

⁷⁰ Henrici/Treutlein 1891, S. III

⁷¹ Bei dieser Abbildung werden die Punkte der Ebene einander paarweise so zugeordnet, dass sich die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte alle in einem festen Punkt (Zentrum, Strahlpunkt) schneiden. Außerdem gilt für jeweils zwei beliebige Punkte **A** und **B**, denen die Punkte **A'** und **B'** zugeordnet sind, dass sich die Geraden **AB** und **A'B'** in einem Punkt einer festen Geraden (Achse) schneiden. Henrici und Treutlein sprechen von „Abbildung durch Bestrahlung“ bzw. „Abbildung mit einer Bildachse“.

⁷² Im Vorwort zum dritten Band bemerkten Henrici und Treutlein dazu: „Das Abbilden, ein Begriff, den die ältere Schulgeometrie nicht erwähnt, hat sich zum Leitgedanken entwickelt, nach dem sich Alles auf das natürlichste aneinander reihet und ordnet [...]“. (Henrici/Treutlein 1901, S. III) Diese Aussage ist vermutlich von folgender inspiriert, die Jakob Steiner im Vorwort der *Systematischen Entwicklung* gab: „es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen [...]. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können.“ (Steiner 1832, S. VI)

⁷³ Henrici/Treutlein 1891, S. IV

⁷⁴ Ich verwende die 3. Auflage des zweiten Bandes von 1907.

3.2.1 „Zweistrahl“ als Grundfigur, Sätze von Menelaos und Ceva

Der erste Abschnitt des zweiten Bandes enthält die Strahlensätze, die Ähnlichkeitsätze für Dreiecke, Höhensatz und Kathetensatz sowie die zentrische Streckung. Diese Inhalte werden dabei alle auf eine Grundfigur (zwei sich schneidende Geraden) zurückgeführt, die Henrici und Treutlein mit „Zweistrahl“ bezeichnen.⁷⁵ Der Beweis des Kathetensatzes

ergibt sich dann beispielsweise wie folgt (vgl. Abbildung 41): Betrachtet wird zuerst ein „Zweistrahl mit gewendet parallelen Geraden“ **AB** und **A₁B₁**, d.h. es wird $\alpha = \alpha_1$

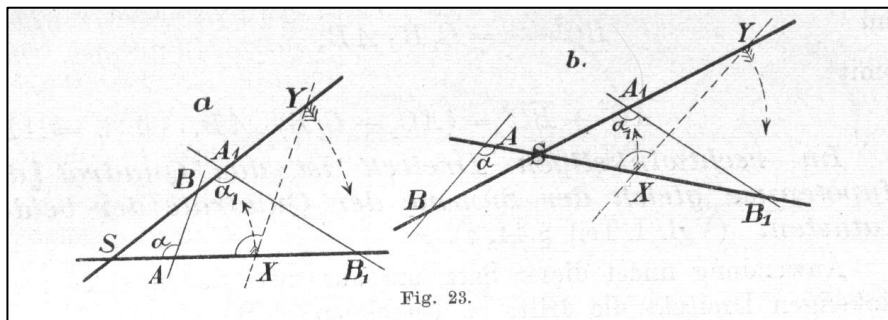


Abbildung 41: Zweistrahl mit parallelen Geraden (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 23)

vorausgesetzt. Die Bezeichnung kommt daher, dass die Gerade **A₁B₁** an der Winkelhalbierenden

von $\sphericalangle ASB$ gespiegelt („umgewendet“) werden

kann. Die Gerade **XY** verläuft als Resultat der Spiegelung parallel zu **AB**. Demnach gilt wegen des Strahlensatzes und der Ähnlichkeit der Dreiecke **SAB** und **SA₁B₁**:

$$SA:SB = SX:SY = SA_1:SB_1 \text{ oder } SA \cdot SB_1 = SB \cdot SA_1.$$

Hat man nun ein rechtwinkliges Dreieck **ABC** und errichtet die Höhe auf der Hypotenuse **AB**, so ist

$\sphericalangle AC_1C = 90^\circ = \sphericalangle ACB$. Daher gilt nach obiger Definition im von den Geraden **AC** und **AB** gebildeten

Zweistrahl: **CB** ist gewendet parallel zu **CC₁**, woraus folgt: **AC₁:AC = AC:AB** oder **AC² = AB · AC₁**.

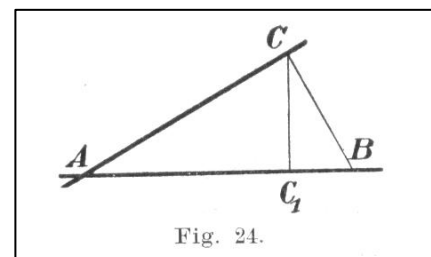


Abbildung 42: Beweis des Kathetensatzes (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 23)

Daneben sind allerdings auch bereits für den Aspekt der „Neueren Geometrie“ relevante Inhalte zu finden, wie etwa die Definition harmonischer Punkte (über die innere und äußere Teilung einer Strecke), Potenzlinie und Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise. Die Darstellung von Henrici und Treutlein unterscheidet sich hier jedoch kaum von der Holzmüllers und soll daher an dieser Stelle nicht näher betrachtet werden.

⁷⁵ Heute ist die Bezeichnung Geradenkreuzung üblich.

Viel tiefer in das Gebiet der „Neueren Geometrie“ führt dann der zweite Abschnitt (*Zusammengesetzte Verhältnisse bei der Abbildung mit einer Bildachse*), der insgesamt drei Kapitel auf 43 Seiten umfasst. Das erste dieser Kapitel⁷⁶ trägt den Titel *Abbildung der Strecke und ihrer harmonischen Punkte. Anwendung auf das Dreieit, Viereck und Vierseit und das Sechseck im Kreis*. Es beginnt mit den Sätzen von Menelaos und Ceva, für deren Beweis Henrici und Treutlein eine Gerade **AB** betrachten, deren Punkte von einem Punkt **S** aus auf eine Gerade **A₁B** projiziert werden.

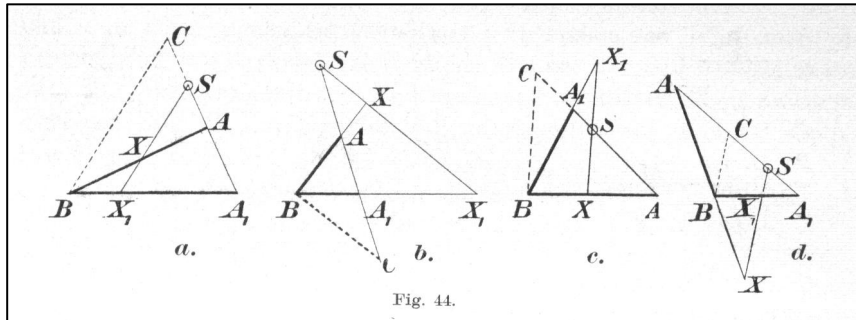


Abbildung 43: Beweis des Satzes von Menelaos (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 40)

Dabei sei **XX₁** ein Projektionsstrahl. Dann gilt für das Doppelverhältnis:

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{A_1X_1}{X_1B} = -\frac{AS}{SA_1} \quad 77.$$

Zum Beweis betrachtet man die Parallele **BC**

zu **XX₁** durch **B**. Gemäß Strahlensatz gilt dann: **AX:XB = AS:SC** (Zentrum **A**) und **A₁X₁:X₁B = A₁S:SC** (Zentrum **A₁**). Dividieren liefert obige Gleichung, die durch Umstellen und Umkehrung der Orientierung bei vier beteiligten Strecken in folgende

Form gebracht werden kann: $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BX_1}{X_1A_1} \cdot \frac{A_1S}{SA} = -1$. Dies ist nichts anderes als die

Aussage des Satzes von Menelaos für das Dreieck **ABA₁** und die Transversale **XX₁**. Im Anschluss werden dann die Umkehrung des Satzes von Menelaos sowie der Satz von Ceva und dessen Umkehrung bewiesen und die Sätze über den Schnittpunkt der Schwerlinien, Winkelhalbierenden und Höhen im Dreieck sowie der Satz von Pascal mit ihrer Hilfe abgeleitet.

3.2.2 Harmonische Punkte, vollständiges Viereck und Vierseit

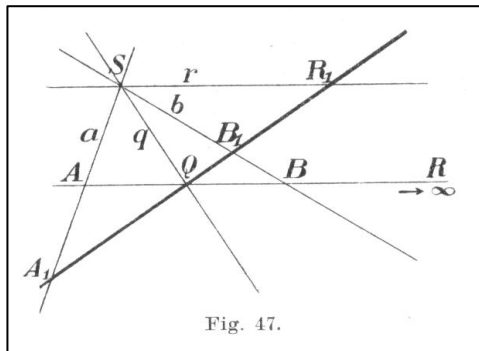
Danach untersuchen Henrici und Treutlein die bereits vorher metrisch eingeführten harmonischen Punkte näher. Ausgangspunkt ist dabei die Projektion⁷⁸ einer Geraden **AB** auf eine zweite Gerade **A₁B₁** von einem Punkt **S** aus, wobei zu fast allen Punkten

⁷⁶ Das vierte Kapitel in der Zählung des Buches.

⁷⁷ Henrici und Treutlein arbeiten mit gerichteten Strecken.

⁷⁸ Henrici und Treutlein sprechen hier von „Bestrahlung“.

von A_1B_1 ein Urbildpunkt existiert. Die einzige Ausnahme ist der Punkt R_1 , für den $SR_1 \parallel AB$ gilt. Dreht sich der Projektionsstrahl um S , erhält man eine Bewegung des Bildpunktes, die zu folgender Definition führt: „Der Punkt R_1 , der durch den parallelen Strahl zu AB erhalten wird, heißt der Fluchtpunkt zu AB oder das Bild des unendlich fernen Punktes von AB .“⁷⁹



Um nun den Zusammenhang zur Definition der harmonischen Punkte herzustellen, wählt man den Punkt B so, dass $AQ = QB$ (Q ist als Schnittpunkt der beiden Geraden gegeben.). Im Zweistrahl von A_1 (zweiter Strahlensatz) gilt

$$\text{dann: } \frac{A_1Q}{A_1R_1} = \frac{AQ}{SR_1} \text{ und im Zweistrahl von } B_1 \text{ gilt:}$$

$$\frac{QB}{SR_1} = \frac{QB_1}{B_1R_1}. \text{ Wegen } AQ = QB \text{ folgt:}$$

Abbildung 44: Projektion einer Geraden auf eine zweite Gerade (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 43)

$$\frac{A_1Q}{A_1R_1} = \frac{QB_1}{B_1R_1} \Leftrightarrow \frac{A_1Q}{QB_1} = -\frac{A_1R_1}{R_1B_1}. \text{ Somit sind } A_1B_1QR_1 \text{ harmonische Punkte. Wie be-}$$

reits im ersten Abschnitt des zweiten Bandes gezeigt wurde, gilt für jede Parallele zu

$$A_1B_1, \text{ die von } a, b, q \text{ und } r \text{ in } A_1', B_1', Q' \text{ und } R_1' \text{ geschnitten wird, } \frac{A_1Q}{A_1'Q'} = \frac{QB_1}{Q'B_1'}$$

$$\text{und } \frac{A_1R_1}{A_1'R_1'} = \frac{R_1B_1}{R_1'B_1'}. \text{ Damit folgt } \frac{A_1'Q'}{Q'B_1'} = -\frac{A_1'R_1'}{R_1'B_1'} \text{ und } A_1'B_1'Q'R_1' \text{ sind ebenfalls}$$

harmonische Punkte. Es kann also formuliert werden: „Das Bild einer Strecke wird durch das Bild ihres Mittelpunktes und durch den Fluchtpunkt (das Bild des unendlich fernen Punktes) harmonisch geteilt.“⁸⁰ Umgekehrt kann man $ABQR$ auch als Bilder

der harmonischen Punkte $A_1B_1QR_1$ bei Projektion von S aus auffassen, wobei sich dann aus der Betrachtung der Zweistrahle von A_1 und B_1 ergibt, dass $AQ = QB$.

„Fällt im Bild von vier harmonischen Punkten ein Punkt in unendliche Entfernung, so fällt das Bild des zugeordneten Punktes in die Mitte der Bilder der beiden andern Punkte, und umgekehrt.“⁸¹

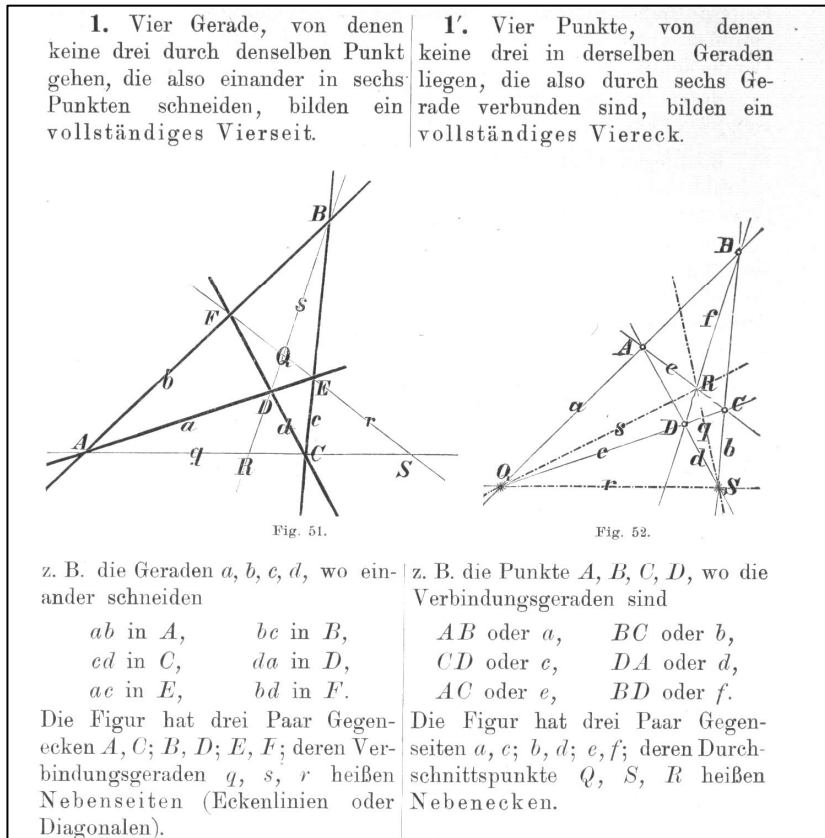
Darauf aufbauend definieren Henrici und Treutlein dann harmonische Strahlen als die Verbindungsgeraden eines Punktes mit vier harmonischen Punkten und weisen

⁷⁹ Henrici/Treutlein 1907, S. 43; Eine genauere Erklärung des „unendlich fernen Punktes“ wird nicht gegeben.

⁸⁰ Henrici/Treutlein 1907, S. 44

⁸¹ Henrici/Treutlein 1907, S. 44

die Eindeutigkeit des vierten harmonischen Strahls bei drei gegebenen Strahlen nach. Im Anschluss daran folgt die Betrachtung von vollständigem Viereck und Vierseit, wobei die Existenz der harmonischen Punkte mit den zuvor eingeführten Mitteln der Projektion nachgewiesen wird. Bemerkenswert ist, dass an dieser Stelle zum ersten Mal die Gegenüberstellung dualer Aussagen erfolgt.



Der Nachweis der harmonischen Punkte (hier beim vollständigen Vierseit) ist folgender: Die Punkte **S**, **C** und **A** werden aus **D** auf die Punkte **S**, **F** und **E** projiziert. Ist **R** der von **S** durch **C** und **A** harmonisch getrennte Punkt und **Q** der von **S** durch **E** und **F** harmonisch getrennte Punkt, so muss die Gerade **RQ** durch **D** verlaufen (Eindeutigkeit des vierten harmonischen Strahls). Genauso ergibt sich,

Abbildung 45: Vollständiges Vierseit und Viereck (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 46)

wenn man **B** als Projektionszentrum betrachtet, dass **QR** durch **B** verlaufen muss. Es gilt also, dass die Strecke **FE** durch **Q** und **S** harmonisch geteilt wird und damit: „Jede Nebenseite (der Abstand zweier Gegenecken) eines vollständigen Vierseits wird durch die Schnittpunkte mit den beiden andern Nebenseiten harmonisch geteilt.“⁸²

3.2.3 Pol und Polare am Kreis, Dualität

Als letzten Aspekt in diesem Kapitel betrachten Henrici und Treutlein die Pol/Polare-Beziehung in der Ebene, wobei sich inhaltlich im Großen und Ganzen kein Unter-

⁸² Henrici/Treutlein 1907, S. 47

schied zu Holzmüller zeigt. Allerdings wird das Phänomen der Dualität am Schluss des Abschnitts relativ ausführlich diskutiert. Die Darstellung beginnt mit der Definition der Polare, wozu die Punkte **B** und **B₁** betrachtet werden, die den Kreisdurchmesser

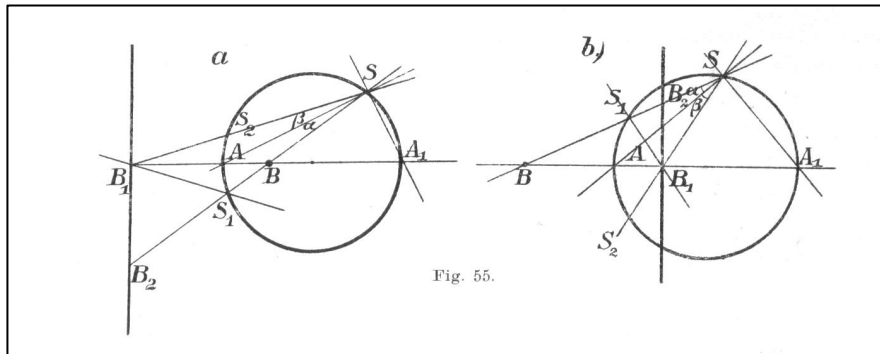


Fig. 55.

AA₁ harmonisch teilen (vgl. Abbildung 46). Dann gilt: „die Senkrechte **B₁B₂** zum Durchmesser in einem der Punkte heißt die Polare des anderen Punktes **B**;

Abbildung 46: Pol und Polare (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 48)

dieser heißt der Pol der Senkrechten.“⁸³ Da nach dem Satz des Thales für einen beliebigen Punkt **S** auf der Kreislinie **SA** ⊥ **SA₁** und **SB₁**, **SA**, **SB**, **SA₁** harmonische Strahlen sind, ergibt sich: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle B_1SA$ ⁸⁴

Damit gilt aber auch, dass die Kreisbögen **AS₁** und **AS₂** gleich lang sind und die Gerade **AA₁** den Winkel **S₁B₁S₂** halbiert.⁸⁵ Daher sind die durch **B₁** verlaufenden Geraden harmonische Strahlen und **B₂S₁BS** damit harmonische Punkte. Somit folgt: „Die Sehnen auf den Strahlen eines Punktes nach einem Kreis werden durch den Punkt und seine Polare harmonisch geteilt“ und „Der einem Teilpunkt einer Sehne harmonisch zugeordnete Punkt liegt auf der Polare des Teilpunktes.“⁸⁶

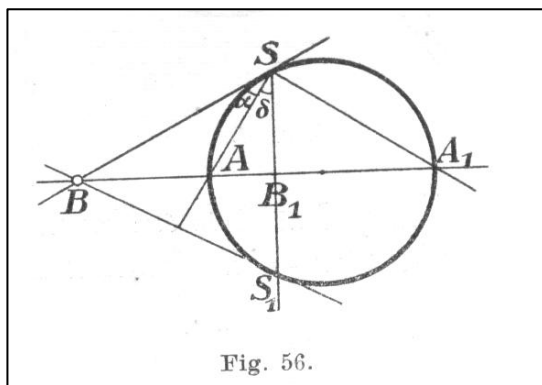


Fig. 56.

Abbildung 47: Polare als Berührungsehne (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 49)

Die Konstruktion der Polare als Berührungsehne ergibt sich mit einer ähnlichen Argumentation, denn die Kreisbögen **AS** und **AS₁** sind gleich lang und daher ist $\alpha = \delta$, so dass durch **S** vier harmonische Strahlen verlaufen (vgl. Abbildung 47). Interessant ist, dass sich Henrici und Treutlein zur Ableitung der weiteren Möglichkeiten auf die Bewegung des Punktes **B** stützen: „Wenn Pol oder Polare sich mehr und mehr der Kreislinie nähern, so folgt schließlich [...]: b) Die Polare eines Punktes der Kreislinie ist dessen Berührende.“ und weiter „Je näher dagegen

⁸³ Henrici/Treutlein 1907, S. 48

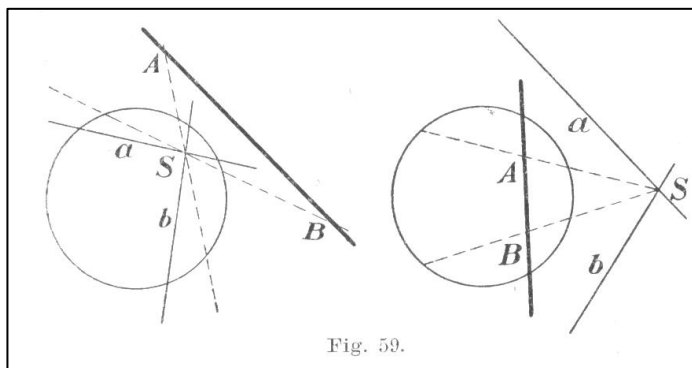
⁸⁴ Bei der Betrachtung harmonischer Strahlen wurde diese Aussage bewiesen.

⁸⁵ Die Strecken **AS₁** und **AS₂** sind gleich lang.

⁸⁶ Henrici/Treutlein 1907, S. 49

Pol oder Polare gegen den Mittelpunkt rückt, desto weiter rücken deren zugeordnete Stücke hinaus. Da einem Punkt oder einer Geraden immer nur ein solches zugeordnetes Stück entspricht, so gebraucht man auch für den Mittelpunkt [...] die folgende Redeweise: c) Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade der Ebene.⁸⁷ Somit ist die Einführung der Ferngerade letztlich einzig auf die Beseitigung einer Ausnahme gegründet, eine inhaltliche Rechtfertigung findet nicht statt.

Im Anschluss erfolgt die Konstruktion der Polare mithilfe zweier Sekanten durch den fraglichen Punkt, die schon in 3.1 erläutert wurde. Allerdings stützt sich die Argumentation anstatt auf das Sehnenvierseit auf das Sehnenviereck, was aber inhaltlich keinen Unterschied macht. Die zentrale Aussage zum Dualisieren in der Ebene wird folgendermaßen abgeleitet: Betrachtet man die Punkte **A** und **B** mit ihren Polaren **a** und **b**, die sich in **S** schneiden, dann liegen in den Geraden **AS** und **BS** jeweils vier



harmonische Punkte. Dabei sind **A** bzw. **B** dem Punkt **S** zugeordnet und sie müssen daher in der Polare zu **S** liegen. D.h. **AB** ist die Polare zu **S**, so dass man die Aussage erhält, dass die Polaren aller Punkte einer Geraden durch den Pol der Gerade verlaufen und umgekehrt. Dies wird von Henrici

Abbildung 48: Durch den Kreis vermittelte Dualität (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 50)

und Treutlein folgendermaßen kommentiert: „Diese Sätze begründen eine eigentümliche Beziehung zwischen Punktgebilden und Geradengebilden: Wird in der Ebene einer Figur ein beliebiger Kreis angenommen, und wird zu jedem Punkt der Figur die Polare, zu jeder ihrer Geraden der Pol bestimmt, so entsteht die zur ersten Figur polare Figur; in gleicher Weise entsteht aus der letzteren die erstere, so daß beide als wechselseitig polare Figuren (oder als reziproke Figuren) bezeichnet werden. Aus bekannten Eigenschaften der einen Figur lassen sich nun häufig gewisse Eigenschaften der anderen Figur erweisen.“⁸⁸ Als Beispiel für dieses Vorgehen dient wie schon bei Holzmüller die Übertragung des Satzes von Pascal in den Satz von Brianchon.

⁸⁷ Henrici/Treutlein 1907, S. 49

⁸⁸ Henrici/Treutlein 1907, S. 51

3.2.4 Perspektive und projektive Verwandtschaft, Sätze von Pascal und Brianchon

Im zweiten Kapitel des Abschnitts (*Abbildung beliebiger Punktreihen und Strahlenbüschel*) stellen Henrici und Treutlein die perspektive und projektive Verwandtschaft

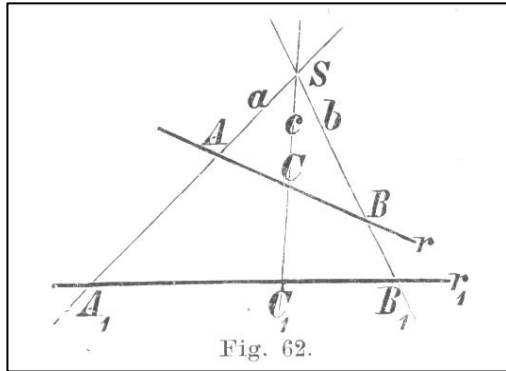


Abbildung 49: Perspektive Verwandtschaft (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 52)

vor. Dabei legen sie die rein geometrische Definition von perspektiv zugrunde und leiten daraus die projektive Verwandtschaft und die Beziehung zum Doppelverhältnis ab. Spezifisch ist hier die starke Betonung des Abbildungsaspekts, der sich wieder im Vorgang der „Bestrahlung“ zeigt: „Werden die Punkte ABC einer Gerade durch ein Strahlenbüschel S auf eine zweite Gerade in $A_1B_1C_1$ abgebildet, so

nennt man beide Punktreihen gegenseitig bestrahlt oder perspektiv ($ABC \wp. A_1B_1C_1$). Wenn Punktreihen zweier Geraden in diese Lage gebracht werden können, heißen sie gegenseitig bestrahlbar oder projektiv⁸⁹. Diese Definition wird direkt im Anschluss dahingehend erweitert, dass auch eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel

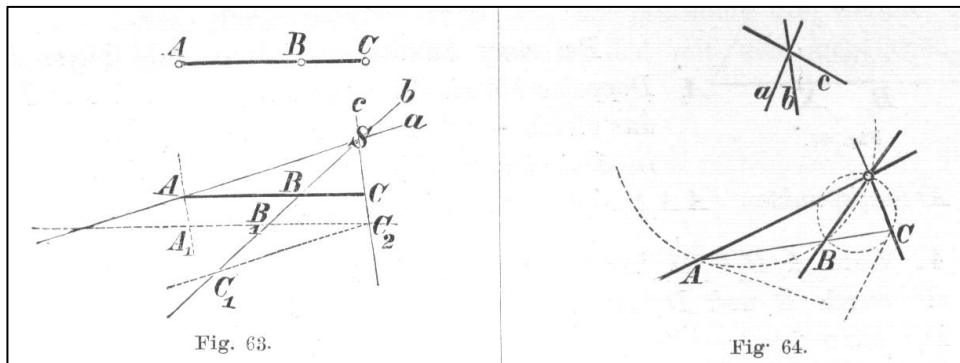


Abbildung 50: Punktreihe und Strahlenbüschel in perspektive Lage bringen (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 53)

perspektiv liegen können, was bei Zuordnung von drei Punkten zu drei Strahlen stets möglich

ist. Sollen nämlich die auf einer Geraden liegenden Punkte A, B, C in die sich im Punkt S schneidenden Strahlen a, b, c gelegt⁹⁰ werden, so wird zunächst auf einem Strahl (in Abbildung 50 auf dem Strahl b) die Strecke $SB_1 = AB$ und $B_1C_1 = BC$ abgetragen. Dann konstruiert man durch C_1 die Parallele zu a und trägt auf B_1C_2 die Strecke CA von C_2 aus ab. Da AA_1C_2C ein Parallelogramm ist, ist die Aufgabe damit gelöst. Analog ist es auch

⁸⁹ Henrici/Treutlein 1907, S. 52

⁹⁰ Damit ist gemeint, die die Punkte A, B, C enthaltende Gerade in eine solche Lage zu bringen, dass a durch A , b durch B und c durch C verläuft.

möglich, drei Strahlen **a**, **b**, **c** an drei Punkte **A**, **B**, **C** einer Geraden anzulegen.⁹¹ Demnach sind zwei Punktreihen immer bestrahlbar, wenn die Zuordnung der Punkte für drei Paare vorgegeben ist.

Die Beziehung zum Doppelverhältnis ergibt sich dadurch, dass zunächst unter Rückgriff auf die Ergebnisse der Betrachtungen beim Beweis des Satzes von Menelaos

gefolgert wird: $\frac{AX}{XC} : \frac{A_1X_1}{X_1C} = -\frac{AS}{SA_1}$ und

$\frac{BX}{XC} : \frac{B_1X_1}{X_1C} = -\frac{BS}{SB_1}$. Durch Division und teilweiser

Umkehrung der Orientierung erhält man:

$$\left(\frac{AX}{XC} : \frac{A_1X_1}{X_1C} \right) : \left(\frac{BX}{XC} : \frac{B_1X_1}{X_1C} \right) = \frac{AS}{SA_1} : \frac{BS}{SB_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AX}{XB} : \frac{A_1X_1}{X_1B_1} = \frac{AS}{SA_1} : \frac{BS}{SB_1}$$

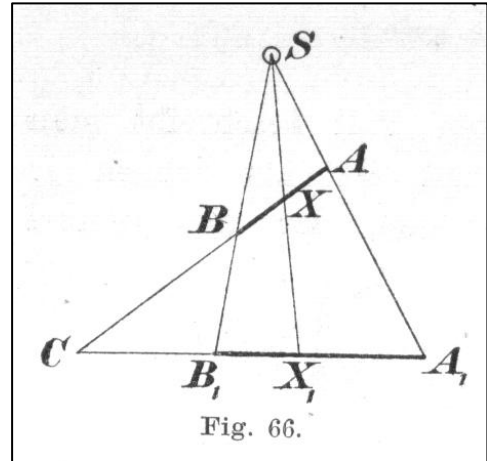


Fig. 66.

Diese Gleichung gilt somit für jeden Teilpunkt **X** der Strecke **AB**.

Abbildung 51: Doppelverhältnis bei Projektion einer Strecke (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 54)

Hat man nun vier Punkte **A**, **B**, **C**, **D** und ihre Bilder **A₁**, **B₁**, **C₁**, **D₁**, so kann man die Strecke **AC** einmal als von **B** geteilt ansehen, so

dass $\frac{AB}{BC} : \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AS}{SA_1} : \frac{CS}{SC_1}$ gilt.

Andererseits wird **AC** auch von **D** geteilt und

$\frac{AD}{DC} : \frac{A_1D_1}{D_1C_1} = \frac{AS}{SA_1} : \frac{CS}{SC_1}$. Insgesamt folgt also

$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{D_1C_1}$, d.h. die Punkte **A**, **B**, **C**,

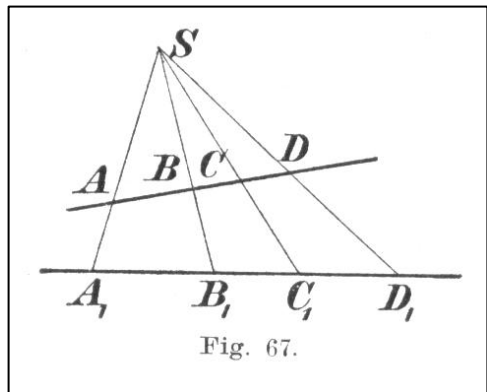


Fig. 67.

D und ihre Bilder haben dasselbe Doppelverhältnis.

Abbildung 52: Invarianz des Doppelverhältnisses (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 54)

Die für Punktreihen angestellten Überlegungen übertragen Henrici und Treutlein im Anschluss auf Strahlenbüschel. Dabei tritt der Abbildungsaspekt wiederum sehr klar hervor: „Wie eine Punktreihe dann ein Bild einer anderen genannt wird, wenn beide in ein Strahlenbüschel eingelegt werden können, so heißt ein Strahlenbüschel ein (projektives) Bild eines andern, wenn beide so durch eine Punktreihe gelegt werden können, daß die Strahlen einander paarweise auf der Gerade, der Bildachse,

⁹¹ Derselbe Vorgang wie oben, nur ändert sich die Lage des Strahlenbüschels.

schneiden⁹². Auch hier besteht das Ziel darin, die Festlegung der Zuordnung durch drei Strahlenpaare zu zeigen.

Danach folgt ein Abschnitt über die Bilder von Punktreihen und Strahlenbüscheln, die nicht in bestrahlter Lage sind. D.h. sie sind projektiv, aber nicht perspektiv, und die Zuordnung ist durch drei Paare von zugeordneten Elementen gegeben. Um im rechten Teil der Abbildung 53 die Strahlen des Büschels S den Strahlen des Büschels S_1 projektiv so zuzuordnen, dass a, b, c zu a_1, b_1, c_1 gehören, legen Henrici und Treutlein durch den Schnittpunkt A von a und a_1 zwei beliebige Geraden r und r_1 . Anschließend verbinden sie den Schnittpunkt B von b und r mit dem Schnittpunkt B_1 von b_1 und r_1 (Gerade b_2) sowie den Schnittpunkt C von c und r mit dem Schnittpunkt C_1 von c_1 und r_1 (Gerade c_2). Dadurch entsteht der Punkt S_2 als Schnittpunkt von b_2 und c_2 . Um nun zu einem beliebigen Strahl d von S den zugehörigen Strahl von S_1 zu finden, bestimmt man den Schnittpunkt von d und r und verbindet diesen mit S_2 (Strahl d_2 entsteht). Dann schneidet man d_2 mit r_1 und verbindet den so entstehenden Schnittpunkt D_1 mit S_1 , was den gesuchten Strahl d_1 liefert. Gemäß Konstruktion sind dann S und S_2 perspektive Strahlenbüschel, ebenso S_2 und S_1 . Folglich sind laut Definition S und S_1 projektiv aufeinander bezogen. In analoger Weise (linker Teil der Abbildung) können auch zwei Punktreihen projektiv aufeinander bezogen werden.

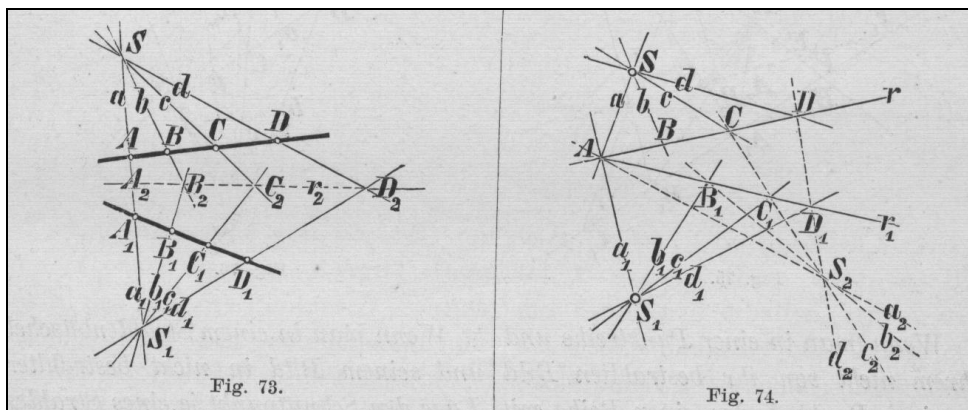


Abbildung 53: Projektive Verwandtschaft (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 57)

Im Anschluss an diese allgemeine Lösung betrachten Henrici und Treutlein dann noch zwei spezielle Lösungsmöglichkeiten, die ich hier nur für den Fall der Strahlenbüschel vorstelle. Bei der ersten Möglichkeit (Abbildung 54) fallen die frei zu wählenden Geraden durch A (r und r_1 in Abbildung 53) mit a_1 und a zusammen, woraus sich folgender Beweis des Satzes von Brianchon ergibt. Betrachtet man die Gerade SS_1 einmal als Strahl f des Büschels S und einmal als Strahl e_1 des Bü-

⁹² Henrici/Treutlein 1907, S. 54

schels S_1 , so schneiden sich die zugeordneten Strahlen f_1 und e nach Konstruktion in

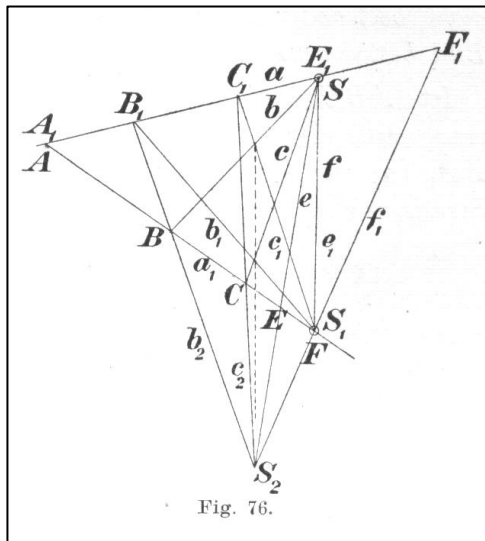


Abbildung 54: Brianchonsches Sechseck (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 58)

S_2 . Das Bild von f und das Urbild von e_1 sind aber durch die Zuordnung der Strahlen a, b, c zu a_1, b_1, c_1 festgelegt, so dass man denselben Punkt S_2 erhält, wenn z.B. b und b_1 die Rolle von a und a_1 übernehmen. Daher ergibt sich folgender Satz: „Wenn man in einem Strahlenbüschel und seinem Bild in nicht bestrahlter Lage den Schnittpunkt je eines Strahles a des einen Büschels und eines nicht entsprechenden Strahles b_1 des andern Büschels verbindet mit dem Schnittpunkt ihrer Bilder $a_1 b$, so geht diese Verbindungsgerade stets durch einen Punkt; dieser

ist der Schnittpunkt der Bilder des Scheitelstrahls beider Strahlenbüschel.“⁹³ Betrachtet man also das Sechseck, das aus den Strahlen $a, b_1, c, a_1, b, c_1, a$ besteht, so verlaufen die Verbindungsgeraden der Gegenecken durch einen Punkt (hier S_2). Es wird als „Brianchonsches Sechseck“ bezeichnet, die analoge Betrachtung projektiver Punktreihen führt zum „Pascalschen Sechseck“.

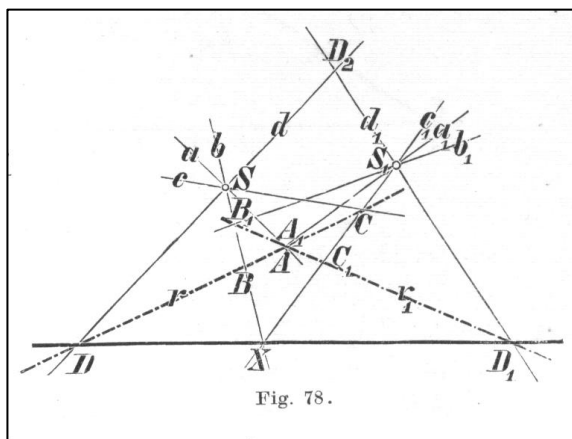


Abbildung 55: Pascalsches Sechseck (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 59)

Wählt man r als Verbindungsgerade von aa_1 und cc_1 sowie r_1 als Verbindungsgerade von aa_1 und bb_1 , so ergibt sich das Zentrum X des zwischengeschalteten Strahlenbüschels als Schnittpunkt von b und c_1 . Da die Punkte D, X und D_1 nach Konstruktion auf einer Geraden liegen, handelt es sich bei $AB_1SD_2S_1C$ um ein Pascalsches Sechseck und es ergibt sich der Satz: „Die Scheitel eines Strahlenbü-

schels und seines Bildes bestimmen mit vier Schnittpunkten entsprechender Strahlen ein Sechseck, in welchem die Gegenseiten einander in drei Punkten einer Geraden schneiden (Pascalsches Sechseck)“⁹⁴. Da man bei Vorliegen des Sechsecks auch den umgekehrten Weg gehen kann, gilt auch: „In einem Pascalschen Sechseck stellen die Verbindungsgeraden von vier Ecken mit den beiden übrigen Ecken einen

⁹³ Henrici/Treutlein 1907, S. 58

⁹⁴ Henrici/Treutlein 1907, S. 59

Strahlenbündel und sein Bild dar.“⁹⁵ Die analoge Betrachtung projektiver Punktreihen führt zur Aussage, dass die Träger der Punktreihen zusammen mit vier Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte ein Brianchonsches Sechseck bilden. Auch hier gilt die Umkehrung: „In einem Brianchonschen Sechseck stellen die Schnittpunkte von Seiten mit den beiden übrigen Seiten eine Punktreihe und ihr Bild dar.“⁹⁶

Als Beispiel für das Vorkommen von Pascalschen Sechsecken bzw. Brianchonschen Sechsecken dient der Kreis, wobei die Aussage für das Sechseck im Grunde schon

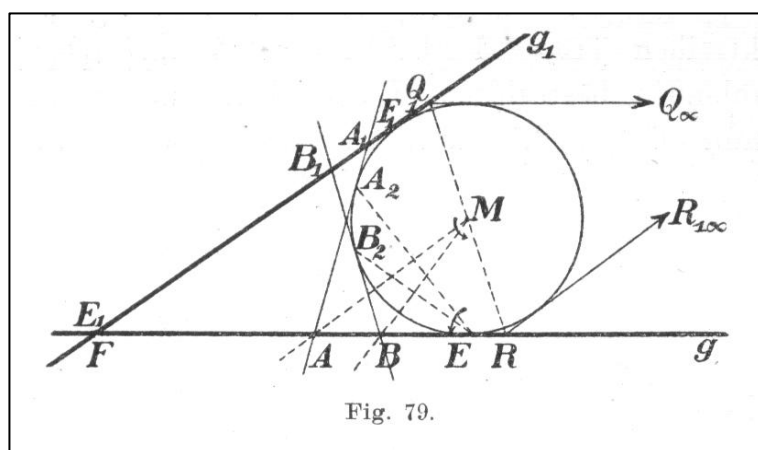


Abbildung 56: Brianchonsches Sechseck am Kreis (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 60)

und die sechs Punkte bilden ein Pascalsches Sechseck. Betrachtet man dagegen zwei Tangenten g (Berührungspunkt E) und g_1 (Berührungspunkt F_1) an den Kreis, auf denen die übrigen Tangenten jeweils eine Punktreihe $AB\dots$ und $A_1B_1\dots$ erzeugen, so sind die Strahlenbündel $E(A_2B_2\dots)$ ⁹⁸ und $F_1(A_2B_2\dots)$ projektiv. Außerdem sind die Strahlenbündel $E(A_2B_2\dots)$ und $M(AB\dots)$ bzw. $F_1(A_2B_2\dots)$ und $M(A_1B_1\dots)$ kongruent, denn zugeordnete Strahlen verlaufen orthogonal zueinander. Also gilt: $M(AB\dots)$ und $M(A_1B_1\dots)$ sind projektiv und damit auch die Punktreihen $AB\dots$ und $A_1B_1\dots$. „Die Schnittpunkte zweier Berührenden eines Kreises mit beliebigen andern Berührenden desselben bilden zwei Punktreihen, die einander als Vorlage und Bild entsprechen.“⁹⁹ Daher bilden sechs Tangenten an einen Kreis immer ein Brianchonsches Sechseck.

im ersten Band gezeigt wurde. Wählt man nämlich zwei Punkte der Kreislinie als Zentren und verbindet sie jeweils mit vier weiteren Punkten des Kreises, dann sind die so entstehenden Strahlenbündel kongruent⁹⁷, d.h. das eine kann als projektives Bild des anderen aufgefasst werden,

⁹⁵ Henrici/Treutlein 1907, S. 60

⁹⁶ Henrici/Treutlein 1907, S. 60

⁹⁷ Henrici und Treutlein sprechen hier von „übereinstimmenden Strahlenbündeln“.

⁹⁸ $E(A_2B_2\dots)$ ist das Strahlenbündel, bei dem vom Zentrum E die Strahlen nach A_2, B_2, \dots verlaufen.

⁹⁹ Henrici/Treutlein 1907, S. 60

3.2.5 Satz des Desargues, Zentralkollineation

Um den größtmöglichen Grad an Allgemeinheit zu erreichen, behandeln Henrici und Treutlein zuletzt die *Abbildung beliebiger Figuren mit einer Bildachse*, wobei sie sich zunächst um geradlinige Figuren kümmern. Als Grundlage dient dabei der Satz des Desargues, der mit Hilfe des Satzes von Menelaos bewiesen wird: „Je zwei Punkte auf drei Strahlen eines Punktes (AA_1, BB_1, CC_1) bestimmen zwei Dreiecke (ABC und $A_1B_1C_1$), deren Seiten einander paarweise auf einer Geraden schneiden ($S_1S_2S_3$).“ und „Je zwei Strahlen von drei Punkten einer Geraden (aa_1, bb_1, cc_1) bestimmen zwei Dreiecke (abc und $a_1b_1c_1$), deren Ecken paarweise auf drei Strahlen eines Punktes (S) liegen.“¹⁰⁰ Beim Beweis des ersten Teils betrachtet man die Dreiecke **ABS**, **BCS** und **CAS** mit ihren jeweiligen Transversalen **$A_1B_1S_3$** , **$B_1C_1S_1$** und **$C_1A_1S_2$** . Es gilt dann gemäß dem Satz von Menelaos:

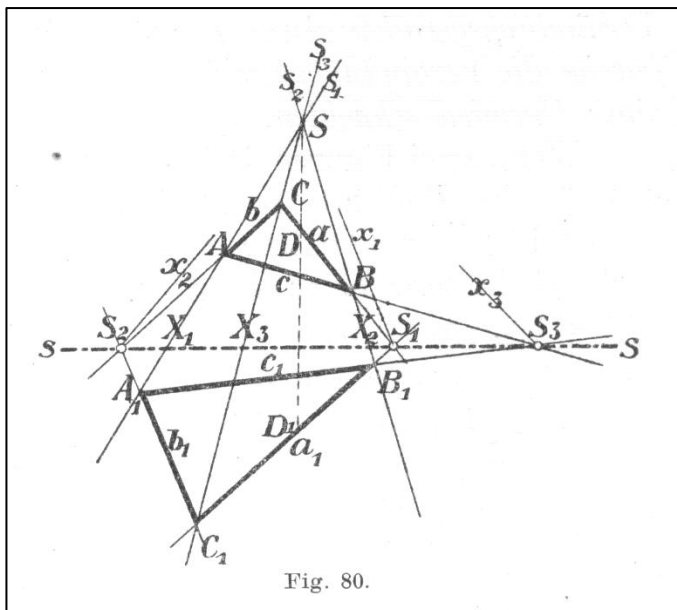


Abbildung 57: Satz des Desargues (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 61)

$$\frac{AS_3}{S_3B} \cdot \frac{BB_1}{B_1S} \cdot \frac{SA_1}{A_1A} = -1,$$

$$\frac{BS_1}{S_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1S} \cdot \frac{SB_1}{B_1B} = -1,$$

$$\frac{CS_2}{S_2A} \cdot \frac{AA_1}{A_1S} \cdot \frac{SC_1}{C_1C} = -1.$$

Multipliziert man jeweils die linken und rechten Seiten der Gleichungen und kürzt, erhält man

$$\frac{AS_3}{S_3B} \cdot \frac{BS_1}{S_1C} \cdot \frac{CS_2}{S_2A} = -1, \text{ d.h. die}$$

Punkte **S_1, S_2, S_3** liegen auf einer Geraden nach der Umkehrung des

Satzes von Menelaos. Der zweite Teil des Satzes ergibt sich mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises aus dem ersten.

Für das Zeichnen eines perspektiven (oder bestrahlten) Bildes einer Figur analog zum Satz des Desargues werden zunächst durch den (beliebigen) Strahlpunkt **S** Geraden durch die Punkte der Figur gelegt. Dann wird eine beliebige Gerade als Bildachse festgelegt und deren Schnittpunkte mit den Verbindungsgeraden eines Punktes **A** der Figur mit den übrigen Punkten ermittelt. Auf dem Strahl **SA** muss

¹⁰⁰ Henrici/Treutlein 1907, S. 61

dann das Bild A_1 von A ausgewählt werden. Das Bild B_1 eines Punktes B liegt dann zum einen auf SB , zum anderen auf der Verbindungsgerade von A_1 mit dem Schnittpunkt von AB und der Bildachse. Können zwei Figuren in eine Lage gebracht werden, dass ein Strahlpunkt und eine Bildachse existieren, so heißen sie projektiv (oder bestrahlbar). Als Eigenschaften der zentralperspektiven Abbildung¹⁰¹ zeigen Henrici und Treutlein dann, dass jede Gerade der Figur ihr Bild auf der Bildachse schneidet, die Abbildung geraden- und inzidenztreu ist und der Strahlpunkt sowie die Bildachse Fixelemente sind.

Die Beziehung zu den bisherigen Inhalten zeigt folgende Abbildung:

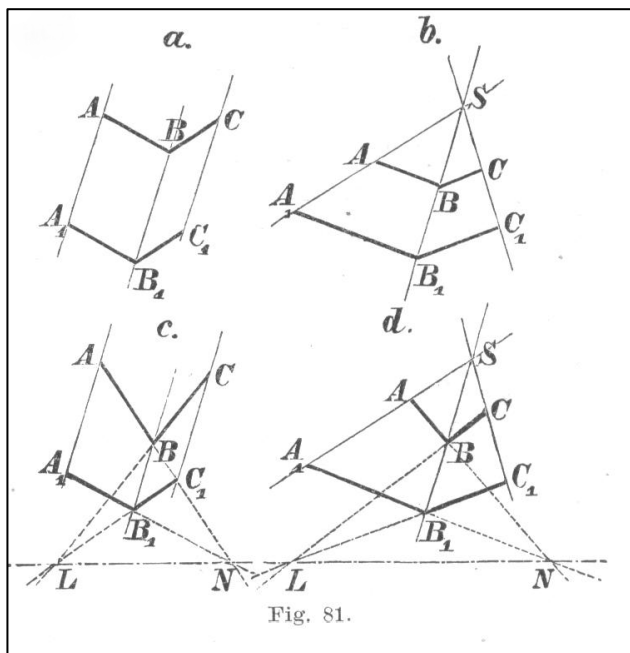


Abbildung 58: Zentralperspektive Abbildung, Fallunterscheidung (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 63)

Bild der Geraden a_1 (S Strahlpunkt, A_0B_0 Bildachse), dann entspricht jedem Punkt auf a_1 ein Bildpunkt auf a . Einzige Ausnahme ist A' , für den $SA' \parallel a_1$ gilt. Daher wird diesem der Fernpunkt von a_1 als Urbild zugewiesen und A' heißt „Fluchtpunkt zu a_1 auf a “. Hat man einen zweiten Fluchtpunkt B' zu b_1 auf b und schneiden sich a und b in C bzw. a_1

und b_1 in C_1 , dann liegen die Dreiecke $SA'B'$ und

Im Fall a. (Kongruenz) liegen Strahlpunkt und Bildachse im Unendlichen, bei b. (Ähnlichkeit) nur die Bildachse. Fall c. (Parallelperspektive) entsteht bei unendlich fernem Strahlpunkt und Fall d. (Zentralperspektive) ist gerade der aktuell betrachtete (allgemeinste) Fall.

Den bereits bei der perspektiven Abbildung von Punktreihen definierten Fluchtpunkt greifen Henrici und Treutlein nun in verallgemeinerter Form nochmals auf. Ist nämlich die Gerade a das

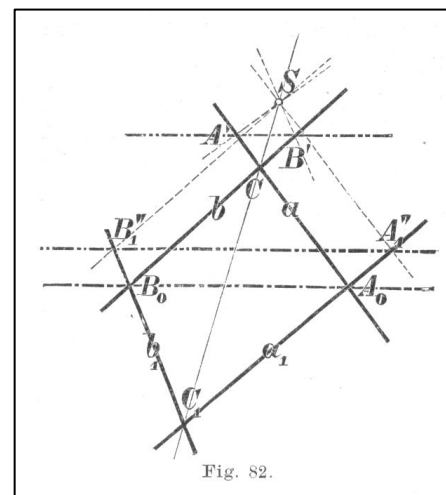


Abbildung 59: Fluchtgerade (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 64)

¹⁰¹ Heute spricht man von Zentralkollineation. Ein Zusammenhang zur (räumlichen) Zentralprojektion wird von Henrici und Treutlein nicht hergestellt.

$C_1A_0B_0$ perspektiv ähnlich (C ist Ähnlichkeitspunkt).

Da $SA' \parallel C_1A_0$ und $SB' \parallel C_1B_0$, muss dann auch $A'B' \parallel A_0B_0$ gelten und man kann folgern: „Die Fluchtpunkte zu allen Geraden einer Figur liegen im Bild auf einer Geraden, die parallel zur Achse ist. Diese Gerade heißt die Fluchtgerade der Figur oder auch das Bild der unendlich fernen Geraden der andern Figur, da ihr die Bilder der Geraden dieser Figur um so näher kommen, je weiter diese Geraden mit allen ihren Punkten parallel zur Achse hinausrücken.“¹⁰² Demnach schneiden sich die Bilder zweier paralleler Geraden stets auf der Fluchtgerade.

3.2.6 Zentralkollineare Abbildung eines Kreises auf einen Kreis

Neben möglichst großer Allgemeinheit war es ein weiteres Ziel der Autoren, mit Hilfe der zentralperspektiven Abbildung die Kegelschnitte aus dem Kreis zu erzeugen und bereits für jenen bewiesene Aussagen auf diese zu übertragen. Um dies zu erreichen und vermutlich auch, um Verbindungen zu den bereits vorher behandelten Inhalten

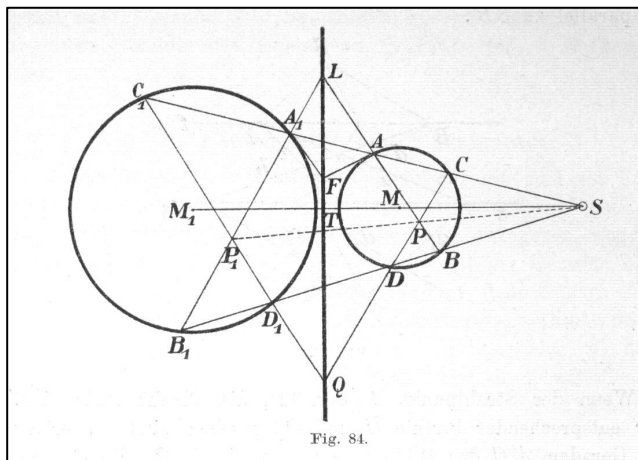


Abbildung 60: Zentralperspektive Abbildung mit Ähnlichkeitspunkt und Potenzlinie (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 66)

und dem Punkt C der Punkt A_1 entspricht. Analog kann man einen zweiten Strahl durch S wählen und erhält B und D bzw. B_1 und D_1 . Es gilt nun wegen der Ähnlichkeit $CD \parallel A_1B_1$ und damit $\sphericalangle CDB = \sphericalangle A_1B_1S$. Da außerdem $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB$ (Peripheriewinkelsatz) gilt, folgt also: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle A_1B_1S$, d.h. AB liegt gewendet paral-

aufzuzeigen, betrachten sie zunächst solche Zentralkollineationen, bei denen ein Kreis auf einen Kreis abgebildet wird.

Beginnt man mit zwei Kreisen M und M_1 und einem Ähnlichkeitspunkt S , dann schneidet ein Strahl durch S , der M in A und C trifft, M_1 in A_1 und C_1 . Die Bezeichnungen sind hier so gewählt, dass bei der ähnlichen Abbildung¹⁰³ dem Punkt A der Punkt C_1

¹⁰² Henrici/Treutlein 1907, S. 64

¹⁰³ Dabei muss für jeden Punkt gelten, dass der zugeordnete Bildpunkt auf der Verbindungsgerade des Punktes mit dem Ähnlichkeitspunkt S liegt. Zusätzlich muss die Verbindungsgerade zweier Punkte parallel sein zur Verbindungsgerade der zugehörigen Bildpunkte.

lel zu A_1B_1 im durch die Geraden AS und BS gebildeten Zweistrahl. Damit gilt $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$ (vgl. S. 141) und durch die Punkte A, A_1, B, B_1 kann ein Kreis gelegt werden (Umkehrung des Satzes über Sekantenabschnitte). Also gilt auch für den Schnittpunkt L von AB und A_1B_1 : $LA \cdot LB = LA_1 \cdot LB_1$, so dass L immer auf der Potenzlinie der Kreise liegt. Hat man also zwei Kreise und wählt einen Ähnlichkeitspunkt als Strahlpunkt und die Potenzlinie als Bildachse einer zentralperspektiven Abbildung, so wird jeder der Kreise auf den jeweils anderen abgebildet. Weiterhin zeigen Henrici und Treutlein, dass die Polaren des Ähnlichkeitspunktes sowohl von der ähnlichen als auch der zentralperspektiven Abbildung einander zugeordnet werden und die Potenzlinie genau die Mittelparallele der Polaren ist.

Die Bestimmung der Fluchtgerade eines Kreises liefert einerseits ein neues Beweisverfahren, andererseits wird damit auch der Grundstein für die Klassifizierung der Kegelschnitte gelegt. Sind P und P_1 die Pole zum Ähnlichkeitspunkt S^{104} der Kreise O und O_1 (die Bezeichnung der Mittelpunkte wechselt von M zu O) und sucht man das Bild P_1C_1 zum Strahl PC , so müssen sich PC und P_1C_1 auf der Potenzlinie der

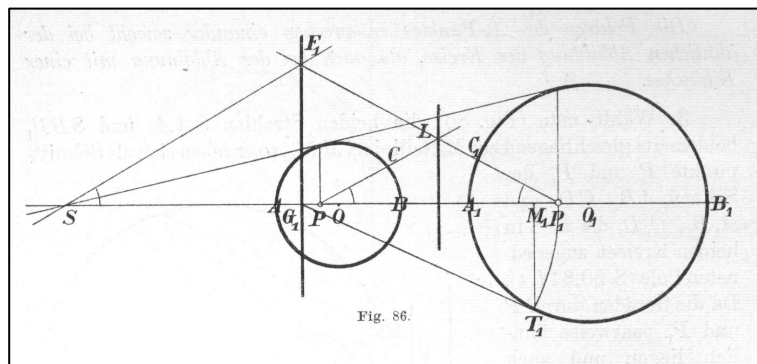


Abbildung 61: Konstruktion der Fluchtgerade eines Kreises (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 68)

Kreise (der Bildachse) treffen. Das Bild jeder Parallelen zu PC muss P_1C_1 auf der Fluchtgeraden des Kreises O_1 schneiden. Da alle Geraden durch S Fixgeraden sind, ist F_1 als Schnittpunkt von P_1C_1 mit der Parallelen zu PC durch S also ein Fluchtpunkt. Nun

gilt: $\sphericalangle F_1SP = \sphericalangle CPP_1 = \sphericalangle SP_1C_1$, d.h. $SF_1 = F_1P_1$. Somit ist die Fluchtgerade die Mittelsenkrechte von SP_1 . Für den Pol M_1 der Fluchtgerade bezüglich des Kreises O_1 gilt, dass dieser mit G_1 die Strecke A_1B_1 harmonisch teilt. Da das Bild von G_1 im Unendlichen liegt und harmonische Punkte bei zentralperspektiver Abbildung erhalten bleiben, muss gelten: „Das Bild des Poles der Fluchtgeraden (bei der Abbildung des Kreises als Kreis) ist Mittelpunkt des Bildkreises.“¹⁰⁵

Somit kann man festhalten, dass durch Wahl des Strahlpunktes die Fluchtgerade zum Kreis O_1 und der Punkt M_1 (als Bild des Mittelpunktes des Kreises O) eindeutig

¹⁰⁴ Pol meint hier den Schnittpunkt der Polare zu S mit SO bzw. SO_1 .

¹⁰⁵ Henrici/Treutlein 1907, S. 67

festgelegt sind. Alle Kreise, die bezüglich S ähnlich zum Kreis O_1 liegen, kommen als Bilder in Frage. Andererseits lässt sich die Abbildung auch durchführen, wenn entweder eine außerhalb des Kreises liegende Gerade als Fluchtgerade oder ein innerhalb des Kreises liegender Punkt als Bild M_1 des Kreismittelpunktes vorliegt, da dann die fehlenden Gebilde konstruiert werden können. Dies fassen Henrici und Treutlein in folgendem Satz zusammen:

„Ein Kreis läßt sich so als Kreis abbilden, daß

das Bild eines gegebenen Punktes innerhalb des Kreisumfangs Mittelpunkt wird. Das Bild der Polare jenes Punktes fällt dann in unendliche Entfernung.

das Bild einer gegebenen Geraden außerhalb des Kreises in unendliche Entfernung fällt. Das Bild des Poles der Geraden fällt dann in den Mittelpunkt des Kreises.“¹⁰⁶

Als direkte Nutzenanwendung aus diesem Satz „lassen sich Beziehungen der Lage von Punkten und Geraden im Kreis ermitteln, indem man die betreffenden Eigenschaften zuerst an Kreisbildern mit einfacheren Beziehungen aufsucht und sie dann auf die Figur der Vorlage überträgt.“¹⁰⁷

Als Beispiel werden die Sätze von Pascal und Brianchon angeführt. Für den Satz des Pascal (Sehnensechseck $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$) wird der Kreis (Abbildung 62 links) so ab-

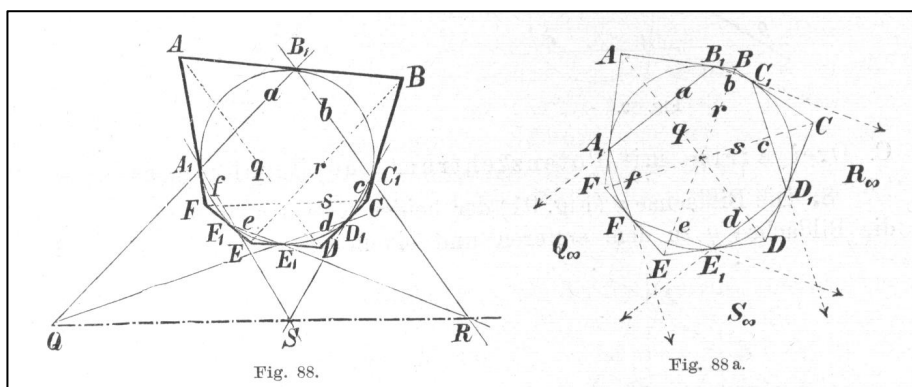


Abbildung 62: Beweis Satz von Pascal (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 46)

gebildet, dass die Gerade QR Fluchtgerade ist, d.h. im Bild (Abbildung 62 rechts) im Unendlichen liegt. Dann sind im Bild die Winkel bei B_1 und E_1 gleich groß. Damit sind aber auch die Kreisbögen über diesen Winkeln gleich lang ($C_1D_1E_1F_1A_1 = F_1A_1B_1C_1D_1$), so dass die Kreisbögen $A_1B_1C_1$ und $D_1E_1F_1$ gleich sind. Folglich gilt $A_1F_1 \parallel C_1D_1$, d.h. auch das Bild von S liegt im Unendlichen. S muss also auch ein Element der Fluchtgeraden sein, so dass der Satz von Pascal (Q, R und S liegen auf einer Gerade) bewiesen ist. Ohne Beweis ergeben sich weitere Sätze dadurch, dass im Grenzfall Elemente der Figur zusammenfallen: „Aus den

¹⁰⁶ Henrici/Treutlein 1907, S. 68

¹⁰⁷ Henrici/Treutlein 1907, S. 69

Sätzen von Pascal und Brianchon gehen weitere Beziehungen der Lage hervor, wenn man ein Paar aufeinander folgender Stücke der Figur (d. h. Ecken des Sehensechsecks oder Seiten des berührenden Sechsecks) zusammenfallen läßt, wobei einerseits die Schneidende in eine Berührende und andererseits der Schnittpunkt der Berührenden in den Berührungspunkt übergeht¹⁰⁸.

Im Anschluss behandeln Henrici und Treutlein ebenfalls unter Verwendung der Zentralperspektive das Apollonische Berührproblem, worauf an dieser Stelle aber nicht nochmals eingegangen werden soll.

3.2.7 Zentralkollineare Abbildung eines Kreises auf einen Kegelschnitt

Schließlich kommen Henrici und Treutlein am Ende des Abschnitts auf die Kegelschnitte zu sprechen. Anders als Holzmüller stellen sie zunächst keinerlei

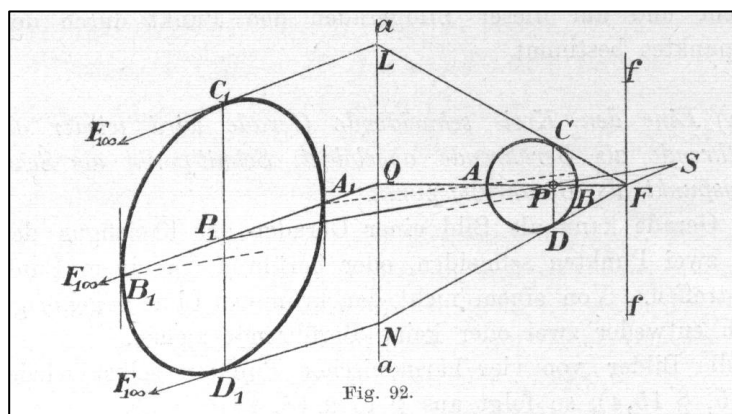


Abbildung 63: Abbildung eines Kreises auf eine Ellipse (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 75)

Verbindung zur Erzeugung mit Hilfe des Doppelkegels her, verwenden aber die Bezeichnung Kegelschnitte. Betrachtet werden wieder zentralperspektive Abbildungen des Kreises, allerdings können Strahlpunkt, Bildachse und Fluchtgerade nun beliebig gewählt werden. Es sind dann drei Fälle zu unterscheiden.

scheiden.

Im ersten Fall hat die Fluchtgerade f mit dem Kreis keinen Punkt gemeinsam, so dass folglich das Bild keinen Fernpunkt enthält. Es entsteht eine Ellipse.

Im zweiten Fall berührt die Fluchtgerade den Kreis, so dass das Bild von der unendlich fernen Geraden berührt wird. So entsteht eine Parabel.

Der dritte Fall liefert eine Hyperbel. Die Fluchtgerade

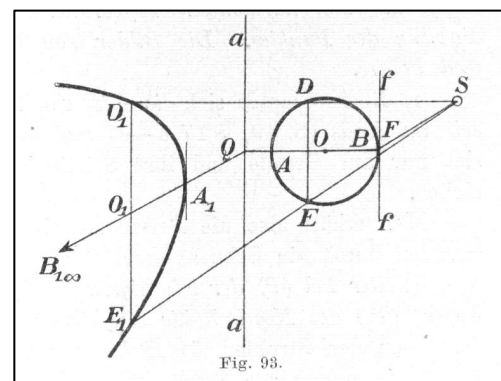
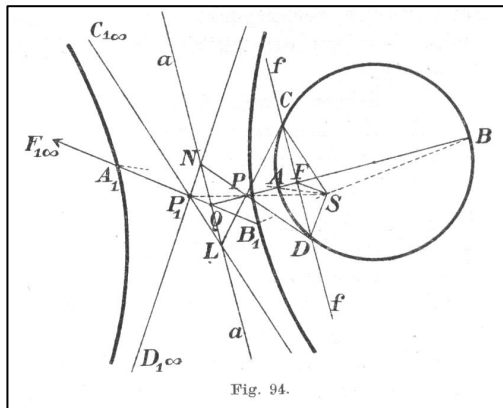


Abbildung 64: Abbildung eines Kreises auf eine Parabel (aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 75)

¹⁰⁸ Henrici/Treutlein 1907, S. 70

rade ist Sekante des Kreises. Alle für den Kreis bekannten nicht-metrischen Eigenschaften können nun auf alle Kegelschnitte übertragen werden. Es gilt nämlich: „Eine



den Kreis schneidende Gerade wird wieder als solche, eine Berührende als Berührende abgebildet, Schnittpunkt als Schnittpunkt, Berührungspunkt als Berührungspunkt.“¹⁰⁹ Daher müssen beispielsweise alle Punkte, die durch einen Kegelschnitt von einem festen Punkt harmonisch getrennt werden, auf einer Gerade liegen, der Polare des festen Punktes.

Abbildung 65: Abbildung eines Kreises auf eine Hyperbel
(aus: Henrici/Treutlein 1907, S. 75)

Weitere Eigenschaften der Kegelschnitte betreffen Mittelpunkt und (konjugierte)

Durchmesser.¹¹⁰ Auffällig ist dabei, dass der Umfang der Begründungen hier auf ein Minimum reduziert ist, was sich einerseits aus der Sache selbst ergibt, andererseits aber vielleicht auch als Vorteil der gewählten Methode gelten soll. Etwas mehr Aufwand wird auf die verschiedenen Möglichkeiten der eindeutigen Festlegung eines Kegelschnitts verwendet. Hier dienen die Sätze von Pascal und Brianchon (und ihre Spezialfälle) am Kreis als Grundlage, da sie nur Inzidenzaussagen enthalten und daher auf alle Kegelschnitte übertragen werden können. Damit lässt sich dann der folgende Satz beweisen:

„Ein Kegelschnitt ist eindeutig bestimmt, wenn von ihm gegeben sind:

- | | |
|---|---|
| <p>α) fünf Punkte,</p> <p>β) vier Punkte und die Berührende in einem,</p> <p>γ) drei Punkte und die Berührenden in zweien.</p> | <p>α') fünf Berührende,</p> <p>β') vier Berührende und der Berührungspunkt auf einer,</p> <p>γ') drei Berührende und die Berührungspunkte auf zweien.“¹¹¹</p> |
|---|---|

Die Festlegung durch fünf Punkte **1, 2, 3, 4, 5** wird dann beispielsweise damit begründet, dass diese mit jedem weiteren Punkt **6** des Kegelschnitts ein Pascalsches Sechseck bilden müssen. Legt man nun einen beliebigen Strahl durch Punkt **5**, erhält man **Q** als Schnittpunkt dieses Strahls mit **23**. **34** und **PQ** schneiden sich in **R** und der gesuchte Punkt **6** ergibt sich als Schnittpunkt von **1R** mit **5Q**. „In dieser Weise ist die Lage des Kegelschnittpunktes auf jedem beliebigen Strahl durch 5 und somit der

¹⁰⁹ Henrici/Treutlein 1907, S. 76

¹¹⁰ Hier stimmt die Darstellung weitgehend mit der in Abschnitt 3.4 folgenden (Böger) überein.

¹¹¹ Henrici/Treutlein 1907, S. 77

3.3 Leitfaden der ebenen Geometrie von Hubert Müller

Der Leitfaden der ebenen Geometrie von Hubert Müller¹¹⁴ besteht aus zwei Bänden und wurde, wie schon in Kapitel 2 erwähnt, auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner 1872 als Musterbeispiel für die Integration der „Neueren Geometrie“ in den bestehenden Lehrgang der Euklidischen Geometrie angesehen. Ein begeisterter Anhänger der Ideen, die Müller verwirklichen wollte, war auch sein Lehrer Alfred Clebsch¹¹⁵, wie er im Vorwort zur ersten Auflage des ersten Teils deutlich herausstellte: „Derselbe sprach sich dahin aus, dass eine Umbildung vieler Theile der in den Schulen gelehrt Geometrie an der Hand der neuern Geometrie ein Bedürfnis der Zeit sei, dass er vorliegenden Leitfaden als eine willkommene Gabe für die Schule betrachte und das Erscheinen desselben in Tendenz und Inhalt freudig begrüßen würde.“¹¹⁶

Der erste Teil (*Die geradlinigen Figuren und der Kreis*) erschien 1874 und umfasste im Wesentlichen die bereits bekannten Inhalte der Euklidischen Geometrie. Diese ergänzte Müller an verschiedenen Stellen um Aspekte aus der „Neueren Geometrie“,

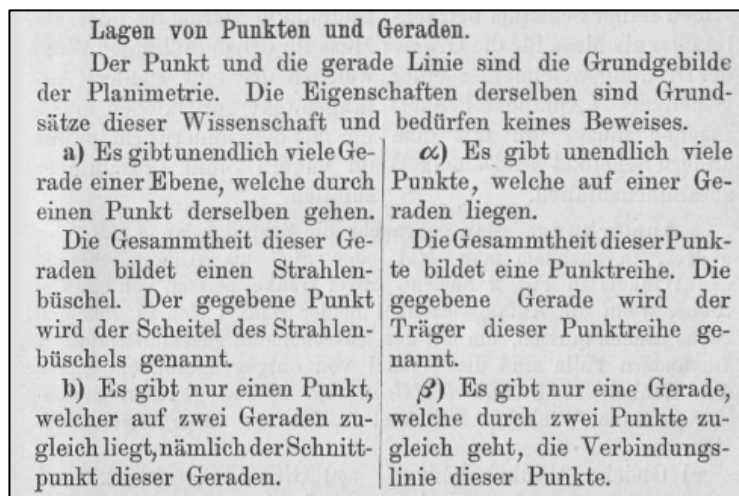


Abbildung 67: Eigenschaften von Punkt und Gerade (aus: Müller 1874, S. 1)

ohne allerdings einen völlig neuen Aufbau vorzulegen. Beispielsweise stellte er bei der Einführung der Grundbegriffe die Eigenschaften von Punkt und Gerade in Anlehnung an die Idee der Dualität in der Ebene gegenüber und erwähnte bereits bei der Behandlung von Dreieck und Viereck auch das Dreiseit und

das Vierseit. Daneben nahm er in diesen ersten Teil jeweils einen Abschnitt über harmonische Punkte und Strahlen, Potenzlinien, Pol und Polare sowie ähnliche Sys-

¹¹⁴ Müller wurde am 30.7.1840 in Gießen geboren. Nach seinem Studium in Göttingen arbeitete er zunächst von 1864 bis 1866 an der höheren Bürgerschule in Heidelberg. 1866 promovierte er an der Universität Freiburg, wo er anschließend zunächst als Privatdozent und ab 1870 als außerordentlicher Professor lehrte. Von 1870 bis 1872 war er am Großherzoglichen Progymnasium in Lahr tätig, von wo er an das Kaiserliche Lyceum in Metz wechselte.

¹¹⁵ Aufgrund seines frühen Todes (1872) hat Clebsch das Erscheinen des Lehrbuchs nicht mehr erlebt.

¹¹⁶ Müller 1874, S. III

teme von Kreisen auf, wobei sich die Darstellung nur unwesentlich von dem bereits vorgestellten Lehrgang Holzmüllers unterschied.¹¹⁷ Der eigentliche Schwerpunkt bezüglich der „Neueren Geometrie“ lag eindeutig im zweiten Teil (*Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie*), der erstmals 1875 erschien.¹¹⁸ Das Ziel dieses Buches beschrieb Müller im Vorwort so: „Der zweite Theil des Leitfadens der ebenen Geometrie soll ein Schulbuch darstellen, welches sich nicht auf die einleitenden Sätze der neueren Geometrie beschränkt, sondern das Wesentliche aus der Theorie der Kegelschnitte dem Unterricht leichter zugänglich macht.“¹¹⁹ Dabei war es ihm einerseits wichtig, an bereits bekannte Inhalte anzuknüpfen, weshalb er einige Abschnitte des ersten Teils (u.a. harmonische Punkte und Strahlen) hier

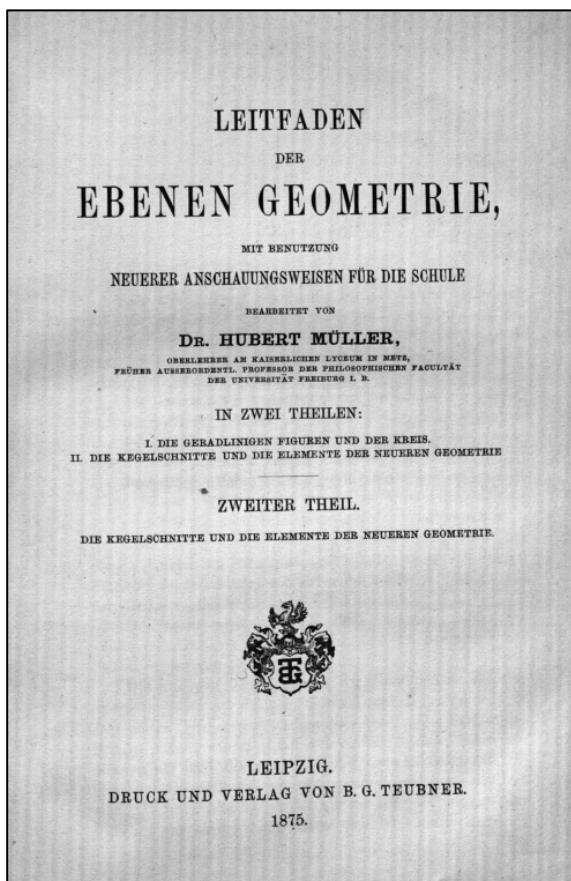


Abbildung 68: Titelblatt *Leitfaden der ebenen Geometrie* (aus: Müller 1875, S. I)

nochmals abdrucken ließ. Dies dürfe jedoch nicht verhindern, dass sich der Aufbau des Buches möglichst eng an der Wissenschaft orientiere: „Der Leser wird, wie ich hoffe, erkennen, dass die Wissenschaftlichkeit der Darstellung und die Symmetrie des Aufbaus dadurch nicht gelitten hat.“¹²⁰ Daher hätten ihm auch die Werke Steiners, Staudts, Chasles', Paulus' und Reyes als Vorlage gedient.¹²¹ Das Buch ist in insgesamt vier so genannte Kurse unterteilt, die sich wiederum in Abschnitte gliedern.

Im ersten „Cursus“ (*Ellipse, Parabel und Hyperbel*) werden die genannten Kurven über die Brennpunktsdefinition eingeführt und einige Eigenschaften abgeleitet. Er enthält somit noch keine Inhalte aus der

¹¹⁷ Im Unterschied zu Holzmüller wurden die genannten Inhalte von Müller nicht als Block präsentiert, sondern an den passenden Stellen in den Euklidischen Lehrgang eingebaut. Dies erklärt auch, warum sein Vorschlag als Beitrag zur Integration der „Neueren Geometrie“ in die Euklidische angesehen wurde.

¹¹⁸ Die zweite Auflage beider Teile erschien 1878, die dritte Auflage 1889.

¹¹⁹ Müller 1875, S. III

¹²⁰ Müller 1875, S. III

¹²¹ Die größten Überschneidungen sind jedoch mit Schröters *Die Theorie der Kegelschnitte* festzustellen, möglicherweise hat Müller Steiner und Schröter gleichgesetzt. Der vierte genannte Autor ist Christoph Paulus, der als Lehrer in Ludwigsburg arbeitete.

„Neueren Geometrie“. Diese beginnt erst im zweiten Kurs (*Die Grundgebilde der neuern Geometrie*), in dem Müller im ersten Abschnitt harmonische Punkte über das Teilungsverhältnis definiert und zeigt, dass sie bei Projektion erhalten bleiben. Harmonische Strahlen entstehen durch das Verbinden von harmonischen Punkten mit einem Punkt, der nicht auf derselben Geraden liegt wie die harmonischen. Außerdem zeigt er das Vorkommen der harmonischen Punkte am vollständigen Viereck und Vierseit. Diese Darstellung stimmt weitgehend mit der Holzmüllers überein und soll daher hier nicht erneut wiedergegeben werden.

3.3.1. Projektive Verwandtschaft, Fundamentalsatz der projektiven Geometrie

Im zweiten Abschnitt geht Müller dann auf die projektive Verwandtschaft ein, wobei er im Vergleich zu Henrici und Treutlein gewissermaßen den umgekehrten Weg geht. An den Beginn des ersten Bandes (vgl. Abb. 67) anknüpfend definiert er die Punktreihe als Menge aller auf einer bestimmten Geraden (dem Träger der Punktreihe) liegenden Punkte und den Strahlenbüschel als Menge aller Geraden, die durch einen festen Punkt (den Scheitel des Strahlenbüschels) verlaufen. Die seiner Ansicht nach grundlegende Idee der „Neueren Geometrie“ beschreibt Müller so: „Die Punktreihe und der Strahlenbüschel heissen die Grundgebilde der neueren Geometrie, weil man sich derselben zu der Erzeugung oder der Definition von zusammengesetzteren Figuren bedient. Die Punkte der Punktreihe oder die Strahlen des Strahlenbüschels werden als Elemente dieser Gebilde bezeichnet. Um aus zwei Grundgebilden neue Figuren entstehen zu lassen, ist es nöthig, dieselben so auf einander zu beziehen, dass jedem Elemente des einen Grundgebildes ein einziges Element des andern

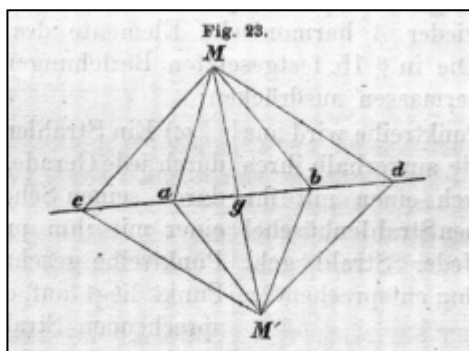


Abbildung 69: Perspektive Strahlenbüschel (aus: Müller 1875, S. 29)

entspricht.“¹²² In großer Systematik stellt er dann folgende Möglichkeiten der „eindeutigen Beziehung“ der Grundgebilde vor. Die Punkte **a**, **b**, **c**, **d**, ... einer Punktreihe werden mit einem nicht auf dem Träger liegenden Punkt **M** verbunden, so dass jedem Punkt der durch ihn verlaufende Strahl entspricht. Verbindet man **a**, **b**, **c**, **d**, ...

¹²² Müller 1875, S. 28f

noch mit einem zweiten Punkt M' , können die Strahlenbündel so in Beziehung gesetzt werden, dass sich zwei zugeordnete Strahlen jeweils in einem Punkt der Punktreihe schneiden. Möchte man zwei Punktreihen aufeinander beziehen, kann man diese mit einem Strahlenbündel schneiden und jeweils die auf einem Strahl liegenden Punkte einander zuordnen. Aufgrund der schon gezeigten Eigenschaft, dass harmonische Punkte beim Projizieren erhalten bleiben, entsprechen auch bei all

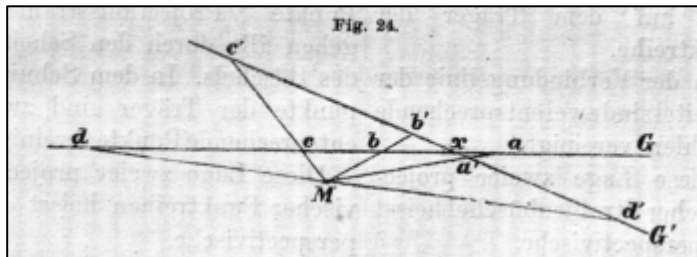


Abbildung 70: Perspektive Punktreihen
(aus: Müller 1875, S. 29)

eindeutig so auf einander bezogen sind, dass je 4 harmonischen Elementen des einen wieder 4 harmonische Elemente des andern entsprechen.¹²³ Die vorher betrachtete besondere Lage projektivischer Punktreihen und Strahlenbündel nennt er die „perspektivische Lage“.

Anschließend zeigt Müller, wie zwei projektivische Grundgebilde, von denen drei Paare zugeordneter Elemente gegeben sind, in perspektivische Lage gebracht werden können. Allerdings geht er noch einen Schritt weiter und weist nach, dass dies nur auf eine Art möglich ist.¹²⁴ Dazu zeigt er zunächst: „Wenn drei Elemente eines Grundgebildes mit den entsprechenden Elementen eines damit projectivischen gleichartigen Grundgebildes zusammenfallen, so fallen je zwei entsprechende Elemente der beiden Gebilde zusammen.“¹²⁵ Sind nämlich zwei projectivische Punktreihen mit gemeinsamem Träger gegeben, bei denen die Punkte a, b, c sich selbst entsprechen, so kann man zunächst drei weitere Punkte finden, die sich ebenfalls selbst entsprechen. Diese erhält man, indem man jeweils den vierten harmonischen Punkt zu a, b, c so bestimmt, dass dieser einmal a , einmal b und einmal c zugeordnet ist. Aus den sechs sich selbst entsprechenden Punkten können neue Gruppen von jeweils drei Punkten gebildet werden, mit deren Hilfe man durch Konstruktion des vierten harmonischen Punktes weitere sich selbst entsprechende Punkte findet. „In derselben Weise fortschliessend findet man, dass auf der gegebene-

¹²³ Müller 1875, S. 30

¹²⁴ Diese Aussage wird üblicherweise Fundamentalsatz der projektiven Geometrie genannt. Zu dessen Geschichte vergleiche man Voelke 2008.

¹²⁵ Müller 1875, S. 32

nen Geraden eine unendliche Zahl von Punkten existieren müsse, in welchen entsprechende Punkte beider Reihen zusammenfallen. Es bleibt nur noch zu beweisen, dass die sich selbst entsprechenden Punkte der Geraden in stetiger Weise der ganzen Ausdehnung der Geraden nach auf einander folgen.“¹²⁶ Zur Lösung dieses Problems merkt Müller an, dass bei zwei sich selbst entsprechenden Punkten **m** und **n** zu jedem Punkt im Inneren der Strecke **mn**, der sich selbst entspricht, auch außerhalb der Strecke **mn** ein sich selbst entsprechender Punkt existiert (nämlich der vierte harmonische Punkt). Umgekehrt gilt die Argumentation auch für außerhalb von **mn** liegende sich selbst entsprechende Punkte. Läge nun zwischen zwei sich selbst entsprechenden Punkten kein weiterer sich selbst entsprechender Punkt, würde also

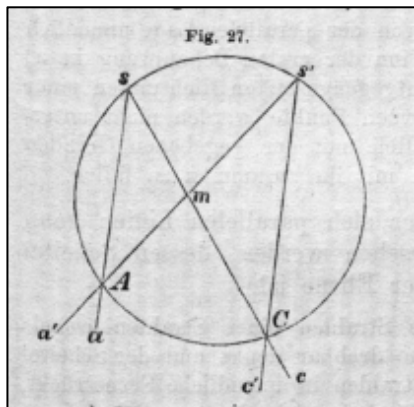


Abbildung 71: Kongruente Strahlenbündel am Kreis
(aus: Müller 1975, S. 35)

Strahlenbündel mit einer Geraden schneidet und die so entstehenden Punktreihen betrachtet. Eine zentrale Bedeutung für den weiteren Aufbau des Lehrgangs nimmt der folgende Satz ein, den Müller am Schluss des zweiten Abschnitts behandelt:

„a) Die Punkte eines Kreises werden aus zwei beliebigen unter ihnen durch zwei congruente und gleichlaufende Strahlenbündel projicirt.

α) Die Tangenten eines Kreises schneiden zwei beliebige derselben in zwei projectivischen Punktreihen.“¹²⁸

Werden die Punkte des Kreises aus den Kreispunkten **s** und **s'** projiziert und sind **A** und **C** zwei beliebige Punkte des Kreises, so gilt entweder nach dem Peripheriewin-

auch außerhalb von **mn** kein weiterer liegen, was aber unmöglich ist, da unendlich viele solche Punkte existieren. Somit kommt Müller zum Schluss: „Wenn aber keine noch so kleine Strecke, welche zwischen zwei sich selbst entsprechenden Punkten liegt, von weiteren Punkten dieser Art frei sein kann, so müssen diese Punkte in stetiger Weise auf einander folgen, was zu beweisen war.“¹²⁷

Den Beweis für zwei Strahlenbündel führt Müller auf den Beweis für die Punktreihen zurück, indem er die

¹²⁶ Müller 1875, S. 32; Dieser Stetigkeitsaspekt spielt eine zentrale Rolle im Beweis des Fundamentalsatzes, vgl. Voelke 2008.

¹²⁷ Müller 1875, S. 32; Eigentlich wiederholt Müller hier den von Staudtschen Beweis, der später von Klein gerade wegen der der projektiven Geometrie fremden Stetigkeitsannahme kritisiert wurde (vgl. Voelke 2008).

¹²⁸ Müller 1875, S. 34; Zwei Strahlenbündel heißen „congruent und gleichlaufend“, wenn ihre Geraden so einander zugeordnet sind, dass die von entsprechenden Geraden eingeschlossenen Winkel stets dieselbe Größe und Orientierung haben.

kelsatz $\sphericalangle \mathbf{AsC} = \sphericalangle \mathbf{As'C}$ oder $\sphericalangle \mathbf{AsC} = 180^\circ - \sphericalangle \mathbf{As'C}$.¹²⁹ Beachtet man allerdings die Orientierung der Winkel, gilt in beiden Fällen $\sphericalangle \mathbf{asc} = \sphericalangle \mathbf{a's'c'}$, wodurch die Aussage a) bewiesen ist. Umgekehrt gilt auch, dass sich die entsprechenden Strahlen zweier kongruenter Strahlenbüschel in den Punkten eines Kreises schneiden, was Müller aber nicht beweist.

3.3.2 Fernelemente, projektive Punktreihen mit demselben Träger (Doppelpunkte, Involution)

Im dritten Abschnitt führt Müller die Fernelemente ein, was bei ihm jedoch eher an einen Satz als an eine Definition oder ein Postulat erinnert. Im Anschluss an die Aussage „Parallele Geraden können als Linien angesehen werden, welche einen unendlich fernen Punkt mit einander gemein haben und umgekehrt. Eine Gerade hat nur einen einzigen unendlich fernen Punkt.“¹³⁰ erfolgt nämlich deren "Beweis" auf folgende Art. Betrachtet man zwei sich schneidende Geraden und dreht eine von beiden um einen ihrer Punkte, während die andere fest bleibt, so werden beide parallel, „wenn der Schnittpunkt der Geraden nach der einen oder andern Seite in unendliche Ferne gerückt ist und die letztern beiden Lagen sind von der parallelen Lage unendlich wenig verschieden [...]. Die nach entgegengesetzten Richtungen einer Geraden liegenden unendlich fernen Punkte werden nicht unterschieden, weil sonst jede Parallele mit der gegebenen Geraden zwei Punkte gemein hätte ohne mit ihr zusammen zu fallen.“¹³¹ Der so genannte Beweis ist also eher eine Mischung aus einer anschaulichen Begründung für die Annahme der Fernpunkte und dem Wunsch, bekannte Eigenschaften auf die neuen Objekte zu übertragen.¹³² Auf die gleich Art und Weise "beweist" Müller auch die Aussage, dass eine Schar von parallelen Geraden einer Ebene ein Strahlenbüschel mit unendlich fernem Scheitel ist und alle unendlich fernen Punkte einer Ebene auf einer Geraden liegen.

Im Anschluss daran löst Müller u.a. die Aufgabe, bei zwei projektivischen Punktreihen mit demselben Träger diejenigen Punkte zu bestimmen, die sich selbst

¹²⁹ Dies ist dann der Fall, wenn **A** und **C** durch **s** und **s'** getrennt werden.

¹³⁰ Müller 1875, S. 35

¹³¹ Müller 1875, S. 36

¹³² Man könnte hier also von einer Art Permanenzprinzip sprechen.

entsprechen.¹³³ Sind die fraglichen Punktreihen **a, b, c, ...** und **a', b', c', ...**, so kann man vom Punkt **m** aus die Punktreihe **a, b, c, ...** projizieren, wodurch sich der Strahlenbüschel **m** ergibt.¹³⁴ Ein dazu kongruenter Strahlenbüschel **n** wird mit der Punktreihe **a', b', c', ...** in perspektivische Lage gebracht. Da die Strahlenbüschel **m** und **n** kongruent sind, liegen (wie oben erwähnt) die Schnittpunkte **α, β, γ, ...** der sich entsprechenden Strahlen auf einem Kreis. Schneidet der Kreis den Träger der Punktreihen, so sind die Schnittpunkte die gesuchten Doppelpunkte. In Abhängigkeit von der Lage der Gerade und des Kreises gibt es daher zwei (Sekante), einen (Tangente) oder keinen (Passante) Doppelpunkt.¹³⁵

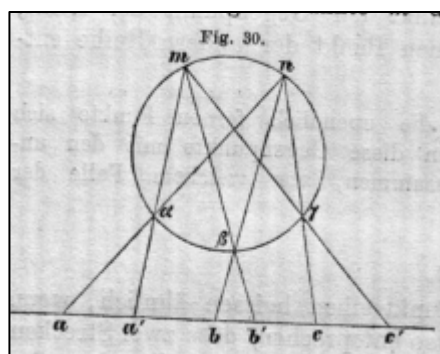


Abbildung 72: Bestimmung sich selbst entsprechender Punkte (aus: Müller 1875, S. 38)

Im vierten Abschnitt beschäftigt sich Müller mit involutorischen Punktreihen und Strahlenbüscheln. Erstere definiert er so, dass auf einer Geraden ein fester Punkt **m**, der so genannte Mittelpunkt, und eine (positive oder negative) Zahl **k** gegeben sind. Die auf der Geraden liegenden Punkte werden dann

so zusammengefasst, dass zwei Punkte **c** und **d** ein Paar bilden, wenn die Gleichung $(mc) \cdot (md) = k$ er-

füllt ist. Diese Punktepaare bilden eine involutorische Punktreihe, die Zahl **k** nennt man deren Potenz. Von einem involutorischen Strahlenbüschel spricht man dann, wenn eine involutorische Punktreihe aus einem nicht auf ihrem Träger liegenden Punkt projiziert wird. In Abhängigkeit davon, ob die Potenz positiv oder negativ ist, existieren in der Involution Punkte bzw. Strahlen, die sich selbst zugeordnet sind (Doppelpunkte oder –strahlen).¹³⁶ Falls Doppelpunkte existieren, bilden sie mit jeweils einem weiteren Punktepaar vier harmonische Punkte, gleiches gilt auch für Doppelstrahlen. Anschließend zeigt Müller, dass eine involutorische Punktreihe nichts anderes ist als „die Vereinigung zweier projectivischer Punktreihen, deren Punkte sich paarweise doppelt entsprechen.“¹³⁷ Interessant ist noch die folgende

¹³³ Nach dem Fundamentalsatz kann es maximal zwei solcher Punkte, die auch als Doppelpunkte bezeichnet werden, geben, wenn sich nicht alle Punkte selbst entsprechen sollen.

¹³⁴ In Abbildung 72 sind **m** und **n** vertauscht.

¹³⁵ Diese Argumentation findet sich nahezu in gleicher Form in Schröter 1867, S. 47ff.

¹³⁶ Fallen die zugeordneten Punkte **c** und **d** in einem Punkt **x** zusammen, muss die Gleichung

$(mc) \cdot (md) = (mx)^2 = k$ lösbar sein.

¹³⁷ Müller 1875, S. 46; Ist bei zwei projektiven Punktreihen mit demselben Träger einem Punkt **A** der ersten Punktreihe der Punkt **A'** der zweiten Punktreihe zugeordnet, so kann man **A'** auch als Punkt **B** der ersten Punktreihe auffassen. **B'** sei dann der Punkt der zweiten Punktreihe, der **B** zugeordnet ist. Hat man nun den Fall, dass die „Punkte sich paarweise doppelt entsprechen“, gilt: $A = B'$.

Anmerkung bezüglich der Doppelpunkte für den Fall, dass die Zahl k negativ ist. „Je nachdem k positiv oder negativ ist, wird \sqrt{k} reell oder imaginär sein und man spricht, zumal in der analytischen Geometrie von reellen oder imaginären Doppelpunkten der involutorischen Reihe. Aus ähnlichen Gründen schreibt man einem involutorischen Strahlenbüschel reelle oder imaginäre Doppelstrahlen zu. Bei Annahme dieser Begriffe kann man alsdann sagen: Ein involutorisches Grundgebilde ist durch seine reellen oder imaginären Doppelpunkte bestimmt.“¹³⁸

3.3.3 Pol und Polare am Kreis, konjugierte Punkte und Geraden

Eine direkte Anwendung erfährt die Involution im fünften Abschnitt, der von der Pol/Polare-Beziehung am Kreis handelt. Zunächst definiert Müller bei gegebenem Kreis die Polare zu einem Punkt p , indem er auf dem Durchmesser durch p , der den Kreis in a und b schneidet, den vierten harmonischen Punkt zu a , b und p sucht und in diesem die Senkrechte auf den Durchmesser errichtet.¹³⁹ Analog wird der Pol zu einer Geraden P konstruiert, indem vom Kreismittelpunkt aus das Lot auf P gefällt und zum Lotfußpunkt und den Schnittpunkten des Lotes mit dem Kreis der vierte harmonische Punkt bestimmt wird. Aus Ergebnissen, die bereits bei der Behandlung der harmonischen Punkte gezeigt wurden, folgert Müller dann:

„b) Die Polare eines ausserhalb des Kreises gelegenen Punktes ist durch seine Berührungssehne dargestellt.
Die Polare eines Kreispunktes fällt mit seiner Tangente zusammen.
Die Polare eines innerhalb des Kreises gelegenen Punktes trifft den Kreis nicht.

β) Der Pol einer Sehne ist der Schnittpunkt ihrer Endtangente.
Der Pol einer Tangente fällt mit ihrem Berührungspunkte zusammen.
Der Pol einer Geraden, welche den Kreis nicht trifft, ist innerhalb des Kreises gelegen.“¹⁴⁰

Um dann zu zeigen, dass die Polaren aller Punkte einer festen Geraden durch deren Pol verlaufen, nutzt Müller folgenden Satz: „Die Punkte einer Geraden (welche den Kreis nicht berührt) und die Schnittpunkte der zugehörigen Polaren mit derselben Geraden bilden die Punktepaare einer involutorischen Punktreihe. Wenn die gegebene Gerade den Kreis in zwei Punkten trifft, so sind dieselben Doppelpunkte der

¹³⁸ Müller 1875, S. 48

¹³⁹ Das ist dasselbe Vorgehen wie im Buch von Henrici und Treutlein.

¹⁴⁰ Müller 1875, S. 52

involutorischen Reihe. Wenn die gegebene Gerade den Kreis nicht trifft, so enthält die involutorische Reihe keine Doppelpunkte.“¹⁴¹ Zum Beweis betrachtet Müller die

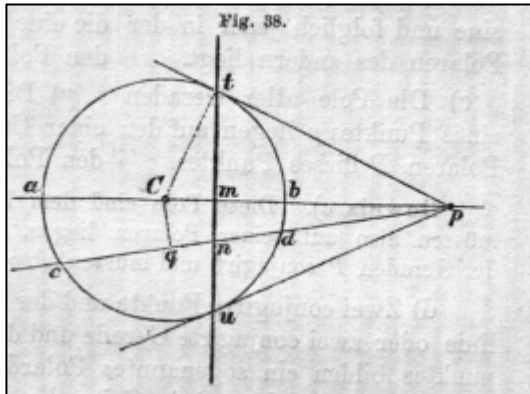


Abbildung 73: Die durch die Pol/Polare-Beziehung gegebene Involution (aus: Müller 1875, S.53)

Gerade **cd** und den auf ihr liegenden Punkt **p** sowie dessen Polare. Der Schnittpunkt der Polare mit **cd** sei **n** und **q** sei der Fußpunkt des vom Kreismittelpunkt **C** auf **cd** gefällten Lotes. Gezeigt werden soll nun, dass **n** und **p** zugeordnete Punkte einer Involution sind, wobei **q** die Rolle des Mittelpunkts übernimmt.

Nach Konstruktion gilt, dass $\sphericalangle nmp = 90^\circ$, d.h.

die Punkte **n**, **m** und **p** liegen auf einem Kreis,

der die Strecke **np** als Durchmesser hat. Die Potenz des Punktes **C** bezüglich dieses Kreises ist $(\mathbf{Cm}) \cdot (\mathbf{Cp})$, die des Punktes **q** ist $(\mathbf{qn}) \cdot (\mathbf{qp})$. Im ersten Teil hat Müller bereits gezeigt, dass die Differenz der Potenzen genau so groß ist wie die Differenz der quadrierten Entfernungen der Punkte **C** und **q** zu **M**¹⁴², d.h. $(\mathbf{Cm}) \cdot (\mathbf{Cp}) - (\mathbf{qn}) \cdot (\mathbf{qp}) = (\mathbf{CM})^2 - (\mathbf{qM})^2$. Da $\sphericalangle \mathbf{CqM} = 90^\circ$, folgt $(\mathbf{Cm}) \cdot (\mathbf{Cp}) - (\mathbf{qn}) \cdot (\mathbf{qp}) = (\mathbf{Cq})^2$. Aufgrund des Kathetensatzes im Dreieck **Ctp** gilt $(\mathbf{Cm}) \cdot (\mathbf{Cp}) = (\mathbf{Cb})^2$, sodass sich durch Subtraktion ergibt: $(\mathbf{Cb})^2 - (\mathbf{Cq})^2 = (\mathbf{Cm}) \cdot (\mathbf{Cp}) - ((\mathbf{Cm}) \cdot (\mathbf{Cp}) - (\mathbf{qn}) \cdot (\mathbf{qp})) = (\mathbf{qn}) \cdot (\mathbf{qp})$. Wegen $\sphericalangle \mathbf{Cqd} = 90^\circ$, gilt aber auch $(\mathbf{Cb})^2 - (\mathbf{Cq})^2 = (\mathbf{Cd})^2 - (\mathbf{Cq})^2 = (\mathbf{qd})^2$, d.h. insgesamt $(\mathbf{qn}) \cdot (\mathbf{qp}) = (\mathbf{qd})^2$. Somit sind **n** und **p** zugeordnete Punkte einer Involution mit Mittelpunkt **q** und Potenz (\mathbf{qd}) .

Mit Hilfe dieses Satzes beweist Müller nun die folgende Aussage:

„a) Wenn der Punkt **q** auf der Polare von **p** liegt, so liegt auch **p** auf der Polaren von **q**.
 $\left. \begin{array}{l} \alpha) \text{ Wenn die Gerade } \mathbf{Q} \text{ durch den Pol} \\ \text{von } \mathbf{P} \text{ geht, so geht auch } \mathbf{P} \text{ durch den} \\ \text{Pol von } \mathbf{Q}. \end{array} \right\} \text{“}^{143}$

Dabei werden zwei Fälle unterschieden. Im ersten Fall berührt die Gerade **pq** den Kreis nicht, d.h. sie ist Sekante oder Passante. Wie gerade gesehen entsteht dann eine Involution, indem jedem Punkt auf der Geraden der Schnittpunkt seiner Polare mit **pq** zugewiesen wird. Unter dieser Involution sind also **p** und **q** einander zugeord-

¹⁴¹ Müller 1875, S. 52; Diese Idee findet sich so (allerdings für beliebige Kegelschnitte) auch in Schröter 1867, S. 138ff.

¹⁴² **M** sei der Mittelpunkt des Kreises durch **n**, **m** und **p**. Er ist in der Zeichnung nicht eingetragen!

¹⁴³ Müller 1875, S. 53

net. Verliefe die Polare von q nicht durch p , wäre q noch ein weiterer Punkt m zugeordnet, was bei einer Involution nicht möglich ist. Im zweiten Fall ist pq Tangente an den Kreis, d.h. die Polaren aller Punkte der Geraden verlaufen durch den Berührungspunkt. Daher muss q dieser Berührungspunkt sein, dessen Polare folglich die Tangente pq ist. Somit kann Müller definieren:

„b) Erklärung. Zwei Punkte heissen conjugirt, wenn der eine und folglich jeder in der Polaren des andern liegt.

β) Erklärung. Zwei Geraden heissen conjugirt, wenn die eine und folglich jede durch den Pol der andern geht.“¹⁴⁴

Der vorher bewiesene Satz lässt sich dann vereinfacht so formulieren: „Die conjugirten Punkte einer Geraden bilden eine involutorische Punktreihe. Die Doppelpunkte dieser Reihe sind durch die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise dargestellt.“¹⁴⁵ Auch hier erwähnt Müller den Fall, dass die Schnittpunkte imaginär werden: „Die reellen oder imaginären Punkte, welche eine Gerade mit einem Kreise gemein hat, sind die reellen oder imaginären Doppelpunkte derjenigen involutorischen Reihe, welche durch die conjugirten Punkte jener Geraden gebildet ist.“¹⁴⁶

3.3.4 Erzeugung von Kurven mithilfe projektiver Gebilde in schiefer Lage

Im sechsten Abschnitt behandelt Müller projektivische Gebilde, die nicht perspektivisch liegen. Diese Situation bezeichnet er als schiefe Lage. Ebenso wie Henrici und

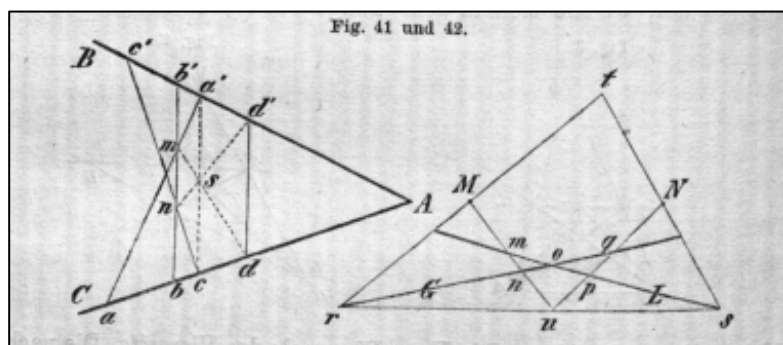


Abbildung 74: Projektive Gebilde in schiefer Lage (aus: Müller 1875, S. 56)

Treutlein zeigt auch er, wie man bei Vorliegen von drei Paaren zugeordneter Punkte zweier Punktreihen zu jedem weiteren Punkt einer Reihe den entsprechenden

der anderen findet. Gleiches gilt auch für zwei Strahlen-

büschel. Dabei beschränkt er sich allerdings auf den zweiten Spezialfall von Henrici und Treutlein. Bei den projektivischen Punktreihen a, b, c, \dots und a', b', c', \dots dienen

¹⁴⁴ Müller 1875, S. 54

¹⁴⁵ Müller 1875, S. 54; Der hier angesprochene Kreis ist derjenige, bezüglich dessen die Pol/Polare-Beziehung betrachtet wird.

¹⁴⁶ Müller 1875, S. 55

die Schnittpunkte **m** von **aa'** und **bb'** bzw. **n** von **bb'** und **cc'** als Scheitel der zwischengeschalteten Strahlenbüschel. Analog dazu sind bei den projektivischen Strahlenbüscheln **Mm**, **Mo**, **Mq** und **Nm**, **No**, **Nq** die Geraden **mo** und **oq** Träger der zwischengeschalteten Punktreihen. Da Müller das Ziel hat, mit Hilfe projektivischer Gebilde in schiefer Lage Kegelschnitte zu erzeugen, betrachtet er zunächst allgemein die Möglichkeit, eine Kurve als Punkt- oder als Tangentengebilde aufzufassen, was er in folgender Definition festhält:

„Wenn ein Punkt **a** sich bewegt, so beschreiben er eine Gerade oder eine „Curve.“

Der Punkt **a** ist in jeder Lage ein „Punkt“ der Curve.

Wenn eine Gerade **A** sich bewegt, so dreht sie sich um einen Punkt oder sie beschreibt eine „Umhüllung.“

Die Gerade **A** ist in jeder Lage eine „Erzeugende“ der Umhüllung.“¹⁴⁷

Verbindet man den sich bewegenden Punkt **a** mit einem festen Punkt **b** der Curve, erhält man eine Gerade, die sich um **b** dreht. Tritt der Fall ein, dass **a** dem Punkt **b** unendlich nahe kommt (mit ihm zusammenfällt), „nimmt die sich drehende Gerade **ab** eine Lage **P** ein, in welcher man sie als „Tangente“ des Punktes **b** bezeichnet.“¹⁴⁸

Somit kann die Tangente als Verbindungsgerade zweier unendlich naher Punkte der Curve aufgefasst werden und jeder Kurvenpunkt als Schnittpunkt zweier Tangenten, „welche nämlich diesen Punkt mit dem nächst vorhergehenden und mit dem nächstfolgenden verbinden.“¹⁴⁹ Die analoge Betrachtung der bewegten Geraden führt zu der Aussage, dass auf jeder Erzeugenden ein Berührungspunkt zu finden ist, der als Schnittpunkt zweier unendlich naher Erzeugender gesehen werden kann. Daher ist es auch berechtigt, jede Erzeugende als Verbindungsgerade zweier aufeinanderfolgender Berührungspunkte zu betrachten. Somit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Auffassungen der Curve als Punkt- und Tangentengebilde:

„Wenn man daher die Tangenten einer Curve als Erzeugende einer Umhüllung ansieht, so sind die Berührungspunkte der Erzeugenden durch die Curvenpunkte dargestellt.“

Wenn man daher die Berührungspunkte einer Umhüllung als Punkte einer Curve ansieht, so sind die Tangenten der Curvenpunkte durch die Erzeugenden der Umhüllung dargestellt.“¹⁵⁰

¹⁴⁷ Müller 1875, S. 61

¹⁴⁸ Müller 1875, S. 61; Eigentlich existiert in diesem Moment gar keine Verbindungsgerade. Müller meint wohl, die Lage der Tangente sei als stetige Fortsetzung der Drehbewegung anzusehen.

¹⁴⁹ Müller 1875, S. 62

¹⁵⁰ Müller 1875, S. 62

Überträgt man diese allgemeine Untersuchung auf die projektivischen Grundgebilde in schiefer Lage, so ergibt sich, dass zwei projektivische Punktreihen eine Kurve erzeugen, wobei die Projektionsstrahlen (die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte) und die Träger der Punktreihen Tangenten der Kurve sind. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ und $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \dots$ die projektivischen Punktreihen (vgl. Abb. 75). Durchläuft \mathbf{a} den Träger \mathbf{AC} in „stetiger Bewegung“, werden die Punkte auf \mathbf{AB} von \mathbf{a}' ebenfalls stetig durchlaufen und der Projektionsstrahl hüllt eine Kurve ein. Die Berührungspunkte ergeben sich als „Schnittpunkte zweier auf einander folgender Projektionsstrahlen“¹⁵¹. Ist \mathbf{p} der dem Schnittpunkt \mathbf{A} der Träger (aufgefasst als Punkt von \mathbf{AC}) entsprechende Punkt der Punktreihe \mathbf{AB} , so gilt, dass \mathbf{AB} als Verbindungsgerade zweier zugeordneter Punkte ebenfalls eine Tangente ist.

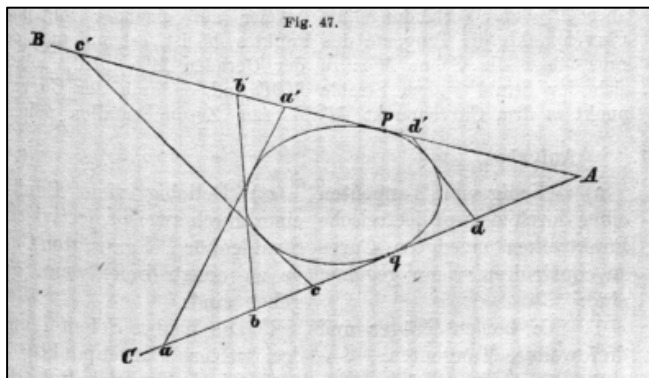


Abbildung 75: Erzeugung einer Kurve mithilfe projektiver Punktreihen (aus: Müller 1875, S. 63)

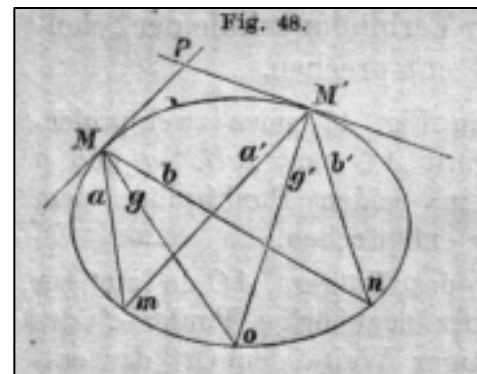


Abbildung 76: Erzeugung einer Kurve mithilfe projektiver Strahlenbüschel (aus: Müller 1875, S. 64)

Nähert sich \mathbf{a} dem Punkt \mathbf{A} an, so kommt \mathbf{a}' immer näher an \mathbf{p} , d.h. \mathbf{p} ist Schnittpunkt zweier aufeinander folgender Tangenten und damit Berührungspunkt der Tangente \mathbf{AB} . Analog gilt, dass der Punkt \mathbf{q} als dem Punkt \mathbf{A} entsprechender Punkt auf \mathbf{AC} Berührungspunkt von \mathbf{AC} ist.

Hat man zwei projektivische Strahlenbüschel in schiefer Lage, so bilden die Projektionspunkte (Schnittpunkte zugeordneter Strahlen) ebenfalls eine Kurve, auf der die Scheitel der Büschel liegen. Die Tangenten in letzteren sind diejenigen Strahlen, die jeweils der Verbindungsgerade der Scheitel entsprechen.

¹⁵¹ Müller 1875, S. 63

3.3.5 Ebene Systeme in perspektivischer Lage, Identität der Kegelschnitte mit den vorher behandelten Kurven

Im dann folgenden dritten Kurs (*Projectivische Figuren. Kegelschnitte*) verfolgt Müller das Ziel, die Übereinstimmung der eben eingeführten Kurven mit den Kegelschnitten¹⁵² nachzuweisen. Dazu führt er zunächst den Begriff des „ebenen Systems“ ein, worunter er alle Punkte und Geraden einer Ebene (des Trägers des ebenen Systems) versteht. Alle Geraden und Ebenen, die durch einen festen Punkt verlaufen, bilden ein Strahlenbündel. Der feste Punkt wird als dessen Träger bezeichnet. Diese beiden neu eingeführten Objekte stehen nun so miteinander in Beziehung, dass jedes ebene System aus einem nicht auf dem Träger des Systems liegenden Punkt durch die Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels projiziert wird. Umgekehrt ergibt der Schnitt eines Strahlenbündels mit einer nicht durch den Scheitel verlaufenden Ebene ein ebenes System.

Darüber hinaus können zwei ebene Systeme auf folgende Weise in Beziehung gesetzt werden: „Die Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels erzeugen auf zwei Ebenen, welche nicht durch den Scheitel des Strahlenbündels gehen, zwei ebene Systeme. Die beiden ebenen Systeme heissen in Rücksicht auf diese Lage perspektivisch.“¹⁵³ In zwei solchen Systemen heißen zwei durch das Strahlenbündel einander zugeordnete Punkte bzw. Geraden entsprechend oder homolog. Gehören

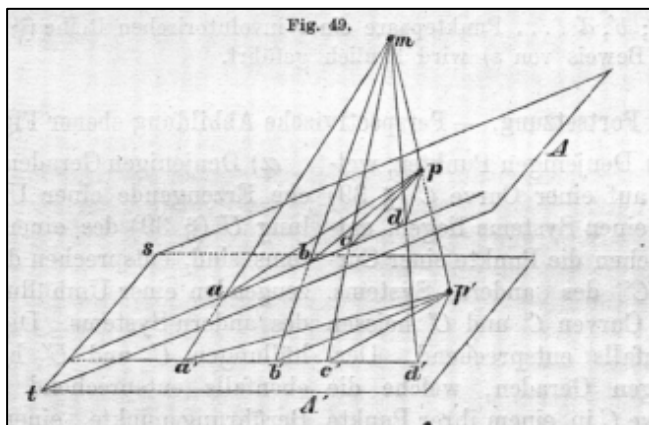


Abbildung 77: Perspektive ebene Systeme (aus: Müller 1875, S. 69)

in einem System Punkte einer bestimmten Geraden an, dann liegen im anderen System die homologen Punkte auf der homologen Gerade, d.h. einer Punktreihe entspricht eine (projektivische) Punktreihe. Analog entspricht einem Strahlenbündel ein (projektivischer) Strahlenbündel.

Daher sind vier harmonischen Punkten (Strahlen) immer vier harmonische Punkte (Strahlen) homolog. Darauf aufbauend kann man nun eine Kurve **C** des einen Systems als einer Kurve **C'** des zweiten Systems entsprechend

¹⁵² Hierunter sind expressis verbis die ebenen Schnitte am Doppelkegel gemeint.

¹⁵³ Müller 1875, S. 68; Im Grunde genommen handelt es sich hier um einen speziellen Zugang zur Zentralprojektion.

definieren, wenn die Punkte der Kurven homolog sind. Die Kurven als ganzes nennt man dann entsprechend. Einer Tangente der einen Kurve entspricht immer eine Tangente der anderen Kurve.

Dass man die Situation auch unter dem Abbildungsaspekt betrachten kann, wird auch von Müller deutlich herausgestellt: „Wenn man in dem Einen von zwei perspektivischen Systemen eine Figur gegeben denkt (Originalfigur), so entspricht derselben eine ganz bestimmte Figur (Abbildung) des andern Systems. Die bisherigen Sätze handeln von der Abhängigkeit dieser Figuren von einander. Die Ebenen der Originalfigur und der Abbildung werden auch als Originalebene und Bildebene

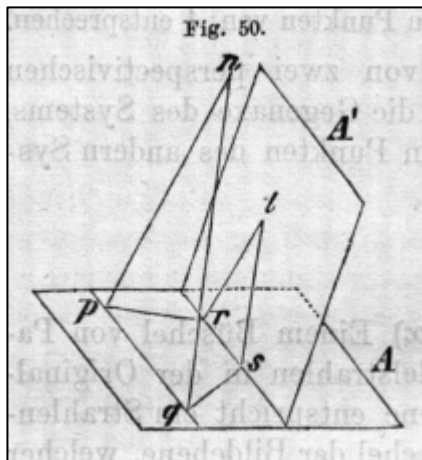


Abbildung 78: Konstruktion der Gegenachse
(aus: Müller 1875, S. 74)

unterschieden. Die Originalfigur und ihre Abbildung heißen auch perspektivische Figuren.“¹⁵⁴ Ein besonderer Fall tritt ein, wenn die Träger der beiden ebenen Systeme parallel liegen, da die perspektivischen Figuren dann ähnlich sind. In allen anderen Fällen schneiden sich Objekt- und Bildebene in einer Geraden, der so genannten Projektionsachse, deren Punkte alle auf sich selbst abgebildet werden. Daher schneiden sich zwei entsprechende Geraden auch entweder auf der Projektionsachse oder sind beide zu ihr parallel.¹⁵⁵ Sind **A** und **A'** die Träger der

perspektivischen ebenen Systeme, so kann man diejenigen Punkte in **A** bestimmen, die den unendlich fernen Punkten von **A'** entsprechen. Jeder Projektionsstrahl, der durch einen unendlich fernen Punkt von **A'** verläuft, ist eine zu **A'** parallele Gerade durch **m**.¹⁵⁶ Alle diese Geraden bilden eine zu **A'** parallele Ebene **E** durch **m**, die **A** in einer Geraden **G** schneidet. Somit entsprechen die Punkte von **G** den unendlich fernen Punkten von **A'**. Genauso kann man auch in **A'** eine Gerade bestimmen, die den unendlich fernen Punkten von **A** entspricht.¹⁵⁷ Diese Geraden werden von Müller *Gegenachsen* genannt, eine andere damals übliche Bezeichnung war *Flucht-* bzw. *Verschwindungsgerade*. Es gilt nun, dass einem Strahlenbüschel in der Originalebene, dessen Scheitel auf der Gegenachse **G** liegt, in der Bildebene ein Büschel von

¹⁵⁴ Müller 1875, S. 71

¹⁵⁵ Dies ist ein Beispiel dafür, dass Müller den Fall der Parallelität zweier Geraden durchgehend als Sonderfall betrachtet, d.h. die Fernpunkte nicht wie gewöhnliche Punkte benutzt.

¹⁵⁶ In Abbildung 78 wird als Bezeichnung des Scheitels **n** statt **m** verwendet.

¹⁵⁷ Dieser Zusammenhang ist wichtig für die später folgende Unterscheidung der Kegelschnitte in Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln.

Parallelstrahlen entspricht. Umgekehrt gehört zu jedem Bündel von Parallelstrahlen in der Originalebene ein Strahlenbündel in der Bildebene, dessen Scheitel auf der Gegenachse \mathbf{G}' liegt.

Im zweiten Abschnitt definiert Müller die Kegelschnitte zunächst als ebene Schnitte am Kreiskegel: „Die Punkte eines Kreises werden aus einem Punkte, welcher nicht auf seiner Ebene gelegen ist, durch Strahlen projicirt, welche eine krumme Oberfläche bilden. Diese Oberfläche heisst ein Kreiskegel. Die Projectionsstrahlen der Kreispunkte heissen die Seiten des Kegels und der angenommene Projectionsmittelpunkt ist seine Spitze. Jede Ebene, welche nicht durch die Spitze des Kegels geht, schneidet die Oberfläche desselben in einer krummen Linie, welche ein Kegelschnitt genannt wird.“¹⁵⁸ Daraus folgert er dann direkt, dass jedes perspektivische Bild eines Kreises ein Kegelschnitt ist und umgekehrt jeder Kegelschnitt als perspektivisches Bild eines Kreises gesehen werden kann. Die Übereinstimmung zwischen den Kegelschnitten und den vorher behandelten Kurven weist er im Anschluss ebenfalls nach, was allerdings etwas mehr Aufwand erfordert. Müller geht zuerst von einem Kegelschnitt als perspektivischem Bild eines Kreises aus und wählt fünf Punkte \mathbf{p}' , \mathbf{q}' , \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' auf dem Kegelschnitt, denen die Punkte \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} des Kreises entsprechen. Demnach ist der Strahlenbündel $\mathbf{p}'(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \dots)$ ¹⁵⁹ dem Strahlenbündel $\mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots)$ projektivisch. Gleiches gilt auch für $\mathbf{q}'(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \dots)$ und $\mathbf{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots)$. Da \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} auf einem Kreis liegen, sind $\mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots)$ und $\mathbf{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots)$ projektivisch, was folglich auch für $\mathbf{p}'(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \dots)$ und $\mathbf{q}'(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \dots)$ gilt. Somit ist also jeder Kegelschnitt eine von projektivischen Strahlenbündeln erzeugte Kurve. Die umgekehrte Richtung beweist Müller folgendermaßen. Liegt die gegebene Kurve \mathbf{C} in der Ebene \mathbf{A} , so wählt man eine beliebige Gerade \mathbf{G} in \mathbf{A} , die die Kurve nicht schneidet.¹⁶⁰ Die projektivischen Strahlenbündel \mathbf{P} und \mathbf{Q} , die die Kurve erzeugen, schneiden auf \mathbf{G} zwei projektivische Punktreihen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ aus. Durch \mathbf{G} legt man nun eine weitere Ebene \mathbf{E} , in der ein Punkt \mathbf{m} so bestimmt wird, dass die Strahlenbündel $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots)$ und $\mathbf{m}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ kongruent sind. Vom Punkt \mathbf{m} als Projektionszentrum aus wird nun die Kurve \mathbf{C} auf eine zu \mathbf{E} parallele Ebene \mathbf{A}' projiziert. Dabei gehen die Strahlenbündel \mathbf{P} und \mathbf{Q} in die Strahlenbündel \mathbf{P}' und \mathbf{Q}' über, die wiederum wegen der Parallelität von \mathbf{E} und \mathbf{A}' den Strahlenbündeln

¹⁵⁸ Müller 1875, S. 77

¹⁵⁹ Auch Müller verwendet die abgekürzte Schreibweise $\mathbf{p}'(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \dots)$ für den Strahlenbündel mit Scheitel \mathbf{p}' , dessen Strahlen durch \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' , ... verlaufen.

¹⁶⁰ Die Existenz einer solchen Geraden hat Müller vorher bewiesen.

Den Tangenten **nc** und **lc** entsprechen in der Bildebene die Tangenten in den unendlich fernen Punkten, die als Asymptoten bezeichnet werden.

Die Kreisbogen **nal** und **nbl** werden zu „zwei getrennten Aesten, welche beiderseits ins Unendliche verlaufen. [...] Die beiden Seiten eines jeden Curvenastes scheinen gegen die Asymptoten zu convergiren, erreichen jedoch dieselben in dem endlichen Raum der Ebene nicht.“¹⁶³ Die Kegelschnitte

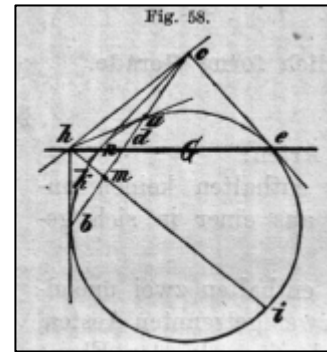


Abbildung 80: Gegenachse schneidet Kreis (aus: Müller 1875, S. 98)

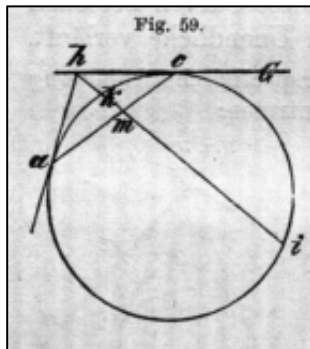


Abbildung 81: Gegenachse berührt Kreis (aus: Müller 1875, S. 98)

3. Art haben nur einen Fernpunkt, die unendlich ferne Gerade ist Tangente in diesem Punkt. In der Originalebene wird der Kreis von der Gegenachse berührt. Im Anschluss daran führt Müller den Begriff des Mittelpunktes ein und zeigt, dass die Kegelschnitte der ersten und zweiten Art immer einen solchen besitzen. Da die Gegenachse **G** den Kreis in der Originalebene nicht berührt, werden auf allen durch den Pol **c** von **G** verlaufenden Sekanten die durch den Kreis ausgeschnittenen Sehnen durch **G** und **c** harmonisch geteilt. In der Bildebene entspricht dem Pol **c** der Punkt **c'** und auf allen durch **c'** verlaufenden Sekanten werden die durch den Kegelschnitt ausgeschnittenen Sehnen durch die Ferngerade und **c'** harmonisch geteilt. Folglich halbiert **c'** die ausgeschnittenen Sehnen und wird daher als Mittelpunkt bezeichnet. Die durch den Mittelpunkt verlaufenden Geraden werden Durchmesser genannt. Da der Mittelpunkt Pol der un-

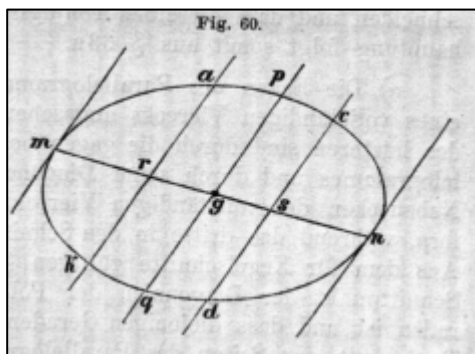


Abbildung 82: Konjugierte Durchmesser (aus: Müller 1875, S. 99)

endlich fernen Gerade ist, ist jeder Durchmesser Polare eines Fernpunktes. Zu jedem Durchmesser lässt sich nun ein zweiter finden, der durch den Pol des ersten verläuft, und man spricht von konjugierten Durchmessern, da die Geraden nach der auf S. 169 angegebenen Definition konjugiert sind. Zwei konjugierte Durchmesser schneiden die Ferngerade jeweils in zwei konjugierten Punkten, die, wie oben gezeigt, eine involutorische Punktreihe bilden. Daher bilden die konjugierten Durchmesser einen involutorischen Strahlenbüschel.

¹⁶³ Müller 1875, S. 97

Weiterhin gilt, dass die Tangenten in den Schnittpunkten eines Durchmessers mit dem Kegelschnitt parallel zu dessen konjugiertem Durchmesser verlaufen. Die Tangenten in **m** und **n** schneiden sich nämlich im Pol der Geraden **mn**¹⁶⁴, d.h. im Fernpunkt des konjugierten Durchmessers **pq**, und verlaufen daher parallel zu **pq**. Außerdem werden die einem Durchmesser parallelen Sehnen durch den konjugierten Durchmesser halbiert. Dies folgt daraus, dass auf allen Sekanten, die durch den Fernpunkt des Durchmessers **pq** verlaufen, die durch den Kegelschnitt ausgeschnittenen Sehnen durch den Fernpunkt und den konjugierten Durchmesser **mn** (die Polare des Fernpunktes) harmonisch geteilt werden.

Diese Zusammenhänge nutzt Müller dann, um zu zeigen, dass die Kegelschnitte der ersten und zweiten Art stets zwei so genannte Achsen besitzen. Dazu nutzt er die vorher bewiesene Eigenschaft, dass in einem involutorischen Strahlenbündel immer zwei zugeordnete Strahlen zu finden sind, die zueinander senkrecht verlaufen. Daher finden sich also auch stets zwei zueinander senkrechte konjugierte Durchmesser, die als Achsen bezeichnet werden.¹⁶⁵ Die Schnittpunkte der Achsen mit dem Kegelschnitt heißen Scheitelpunkte der Kurve. Die Achsen haben nun die Eigenschaft, dass sie Symmetrieachsen der Kurve sind, denn jede Sehne, die senkrecht zu einer Achse verläuft, ist parallel zur anderen Achse und wird daher von der ersten halbiert. Außerdem verlaufen die Tangenten in den Scheitelpunkten senkrecht zu derjenigen Achse, auf der die Scheitelpunkte liegen.

Aufbauend auf diesen Erkenntnissen wird im vierten Abschnitt gezeigt, dass die Kegelschnitte auch mit den im ersten Kurs betrachteten Kurven übereinstimmen, d.h.

„a) Jede Ellipse ist ein Kegelschnitt der 1. Art. Jede Hyperbel ist ein Kegelschnitt der 2. Art. Jede Parabel ist ein Kegelschnitt der 3. Art.	α) Jeder Kegelschnitt der 1. Art ist eine Ellipse. Jeder Kegelschnitt der 2. Art ist eine Hyperbel. Jeder Kegelschnitt der 3. Art ist eine Parabel.“ ¹⁶⁶
--	---

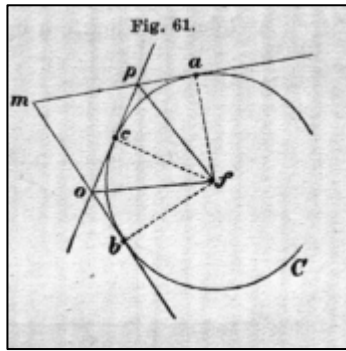
Zunächst beweist Müller die unter a) zusammengefassten Aussagen, wobei er benutzt, dass die Verbindungsgeraden eines Brennpunktes mit dem Schnittpunkt zweier Tangenten der Kurve den Winkel halbiert, der durch die Verbindungsgeraden

¹⁶⁴ vgl. dazu die analoge Betrachtung am Kreis

¹⁶⁵ Falls mehr als ein Paar konjugierter Durchmesser zueinander senkrecht sind, gilt dies für alle Paare und der Kegelschnitt ist ein Kreis.

¹⁶⁶ Müller 1875, S. 109

des Brennpunktes mit den Berührungspunkten der Tangenten gebildet wird.¹⁶⁷ Sei



also **C** eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, **f** sei einer ihrer Brennpunkte und **a**, **b**, **c** seien drei Punkte der Kurve.

Die Tangenten in **a**, **b**, **c** schneiden sich in **m**, **o** und **p**. Es gilt dann $\sphericalangle cfp = \sphericalangle afp$ und $\sphericalangle cfo = \sphericalangle bfo$, d.h. $\sphericalangle pfo = \frac{1}{2} \sphericalangle afb$. Bewegt sich der Punkt **c** auf der Kurve, während **a**

Abbildung 83: Beweis der Aussage a) (aus: Müller 1875, S. 109)

und **b** fest bleiben, behält $\sphericalangle pfo$ stets seine Größe bei, d.h. die Strahlen **fo** und **fp** bilden zwei kongruente Strahlenbüschel, die auf **ma** und **mb** zwei projektivische Punktreihen ausschneiden. Damit verbindet die Tangente in **c** also immer zwei zugeordnete Punkte, d.h. **C** ist ein Kegelschnitt. Die Art des Kegelschnitts ist dann durch die Anzahl der auf ihm liegenden Fernpunkte festgelegt. Zum Beweis der ersten in α) enthaltenen Aussage betrachtet Müller einen Kegelschnitt **C** der ersten Art, dessen Achsen **ab** und **cd** seien. Wie im ersten Kurs gezeigt, kann aus zwei zueinander senkrechten Strecken eine Ellipse konstruiert werden, die die Endpunkte der Strecken enthält.¹⁶⁸

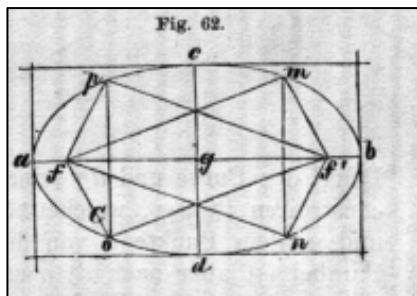


Abbildung 84: Beweis der Aussage α) (aus: Müller 1875, S. 109)

Die Tangenten in den Endpunkten verlaufen dann senkrecht zur Strecke. Gemäß a) ist diese Ellipse aber ein Kegelschnitt **C'** der ersten Art und, da **C** und **C'** beide **a**, **b**, **c** und **d** enthalten und dieselben Tangenten in diesen Punkten haben, sind **C** und **C'** identisch. Mit einer ähnlichen Argumentation werden auch die Aussagen für die Hyperbel und die Parabel bewiesen.

3.4 Elemente der Geometrie der Lage von Rudolf Böger

Die erste Auflage dieses Buches erschien im Jahr 1900 beim Verlag Göschen und gründete sich im Wesentlichen auf das von Böger verfasste Schulprogramm *Die Geometrie der Lage in der Schule* von 1897. Im Jahr 1910 wurde die zweite Auflage veröffentlicht, bei der es sich jedoch laut Vorwort um einen nahezu unveränderten

¹⁶⁷ Diese Aussage beweist Müller im ersten Kurs jeweils für Ellipse, Hyperbel und Parabel.

¹⁶⁸ Die Strecken heißen dann auch Achsen der Ellipse.

Nachdruck der ersten Auflage handelte. Die einzige Ausnahme stellte das letzte Kapitel dar, in das Böger nun die von seinen Schülern im Rahmen der ersten Reinschrift¹⁶⁹ in der Oberprima im Jahr 1909 entwickelten Aufgaben aufgenommen hatte. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf diese zweite Auflage, die insgesamt 45 Seiten¹⁷⁰ umfasste.

Das Buch ist von zwei Aspekten geprägt: Zum einen der vollständige Verzicht auf die Nutzung von Maßbeziehungen beim Aufbau der Geometrie, die Böger bereits bei seinem Vortrag auf der Hamburger Versammlung des Fördervereins zur Gefahr für die „Neuere Geometrie“ erklärt hatte.¹⁷¹ Allerdings zeigte Böger auch an verschiedenen Stellen, wie sich die metrischen Beziehungen aus den rein projektiven Betrachtungen ableiten lassen, ohne sie jedoch im weiteren Verlauf zur Entwicklung

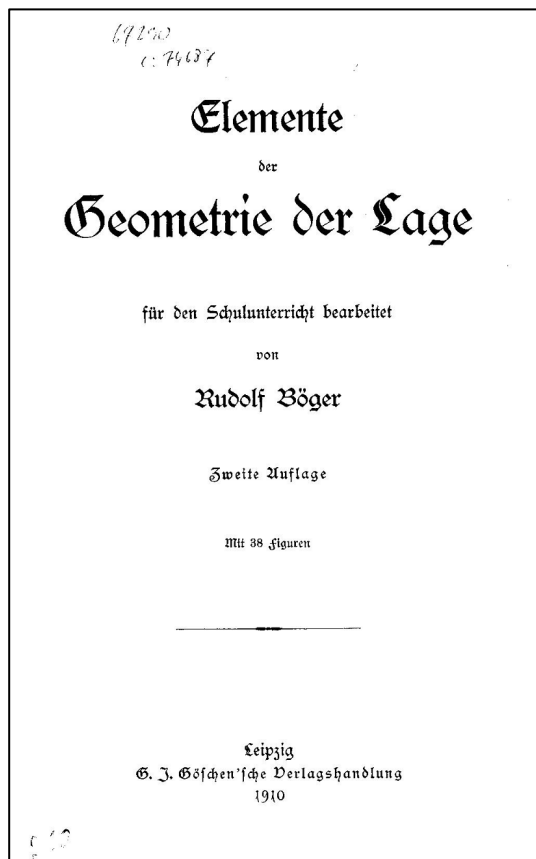


Abbildung 85: Titelblatt *Elemente der Geometrie der Lage* (aus: Böger 1910)

neuer Aussagen zu verwenden.

Die gleiche Vorgehensweise findet sich auch in Reyes weit verbreiteten Lehrbuch *Die Geometrie der Lage*, das Böger vermutlich als Vorbild diente (vgl. dazu auch die Aussagen Bögers in 4.2). Der zweite konstitutive Aspekt ist die Konzentration auf diejenigen Inhalte, die einerseits durch den Lehrplan vorgeschrieben wurden (hauptsächlich in Kapitel 1 zu finden), andererseits zur projektiven Behandlung der Kegelschnitte notwendig sind.

Daraus ergibt sich die folgende Gliederung:

- §1 Harmonische Elemente
- §2 Projektive Verwandtschaft
- §3 Krumme Grundgebilde
- §4 Pol und Polare
- §5 Ortsaufgaben

In seinem Vorwort zur ersten Auflage wies

¹⁶⁹ Reinschriften waren eine Prüfungsleistung, bei der die Schüler über einen längeren Zeitraum an einer Aufgabe arbeiten und die Lösung dann schriftlich darstellen mussten.

¹⁷⁰ Den Grund für die Kürze des Buches nannte Böger im Vorwort seines Schulprogramms von 1897: „Bei der Zusammenstellung des Leitfadens war die Hauptschwierigkeit, aus der überreichen Fülle von Sätzen die wirklich fruchtbaren auszusondern und auf diese allein die Darstellung zu beschränken; es durften, im Gegensatz zu einem wissenschaftlichen Lehrbuch, nur solche Sätze ausgesprochen werden, die sich durch ihre häufige Anwendung den Schülern von selbst einprägen.“ (Böger 1897, S. II)

¹⁷¹ vgl. Kapitel 2

Böger auf den seiner Meinung nach allgemein kritisierten Zustand hin, dass in den oberen Klassen der Gymnasien und realistischen Anstalten die Arithmetik gegenüber der Geometrie eine zu große Rolle spiele. Die meisten Vorschläge zur Ergänzung der geometrischen Inhalte seien daran gescheitert, dass nur einzelne Themen dem Lehrgang hinzugefügt und mit Euklidischen Methoden behandelt worden seien. Demgegenüber wollte Böger die Geometrie der Lage als einen nahezu eigenständigen Abschnitt (d.h. mit möglichst wenig Anbindung an die zuvor behandelten Inhalte) in Obersekunda und Prima an den bestehenden Lehrgang anfügen¹⁷². Den Unterschied zwischen der herkömmlichen Planimetrie und der Geometrie der Lage in Bezug auf den Schulunterricht beschrieb Böger so: „Da alle Sätze gleich in der allgemeinsten Form gewonnen werden, so ist in der Geometrie der Lage das Lösen von Aufgaben eine wesentlich andere Tätigkeit als in der Planimetrie; es kommt darauf hinaus, die allgemeinen Gesetze auf besondere Fälle anzuwenden, eine Arbeit, die zwar nicht immer mühelos ist, die aber nie die Anwendung eines schwer zu findenden Kunstgriffes verlangt und daher von jedem Schüler, der sich die allgemeinen Methoden zu eigen gemacht hat, geleistet werden kann. Dies Fortschreiten vom Allgemeinen zum Besondern gibt der Geometrie der Lage ihren pädagogischen Wert und sichert ihr einen Platz im Schulunterricht.“¹⁷³

Da sein Buch aus dem Unterricht am Realgymnasium des Johanneums in Hamburg entstanden war, war es nach Meinung seines Autors auch auf die Bedürfnisse der realistischen Anstalten (Realgymnasien und Oberrealschulen) abgestimmt. Jedoch könne es – so Böger – auch an den Gymnasien verwendet werden, wobei auf das vierte Kapitel (Pol und Polare) vollständig verzichtet werden könne.

3.4.1 Satz des Desargues, vollständiges Viereck und Vierseit, harmonische Punkte

Im ersten Kapitel (S. 1-10) beschäftigt sich Böger hauptsächlich mit der Definition von harmonischen Punkten und harmonischen Strahlen und beweist einige Eigen-

¹⁷² Vorher sollten die Kegelschnitte mit planimetrischen Methoden als geometrische Örter und mit Mitteln der darstellenden Geometrie als ebene Schnitte am Kegel behandelt und die zugehörigen Gleichungen aufgestellt werden.

¹⁷³ Böger 1910, Vorwort

schaften dieser Gebilde.¹⁷⁴ Dabei dient ihm der Satz des Desargues und dessen Umkehrung als Hilfsmittel, weshalb er zunächst unter Rückgriff auf einige grundlegende Aussagen aus der Raumgeometrie für beide Richtungen den Beweis führt. Die Aussage des Satzes ist folgende: „Wenn die drei Punkte, in denen sich die homologen Seiten zweier zugeordneten Dreiecke schneiden, in einer Geraden liegen, so gehen die drei Geraden, welche die homologen Ecken verbinden, durch einen Punkt.“¹⁷⁵ Dabei sollen die Ecken der Dreiecke einander paarweise zugeordnet werden (homologe Ecken **A** und **A**₁, **B** und **B**₁, **C** und **C**₁). Homologe Seiten sind solche, deren Endpunkte homolog sind. Die Dreiecke heißen dann als Ganzes zugeordnet. Zum Beweis (vgl. Abb. 86) überträgt Böger das eigentlich ebene Problem¹⁷⁶ in ein räumliches, indem er durch die Gerade **t** eine beliebige Ebene σ_1 legt. In dieser Ebene wird durch die Punkte **P**, **Q** und **R** jeweils eine Gerade α , β und γ gelegt.¹⁷⁷ Diese schneiden¹⁷⁸ sich in drei Punkten und zwar α und β in Γ , β und γ in **A**, α und γ in **B**¹⁷⁹, d.h. das Dreieck **AB** Γ liegt in σ_1 .

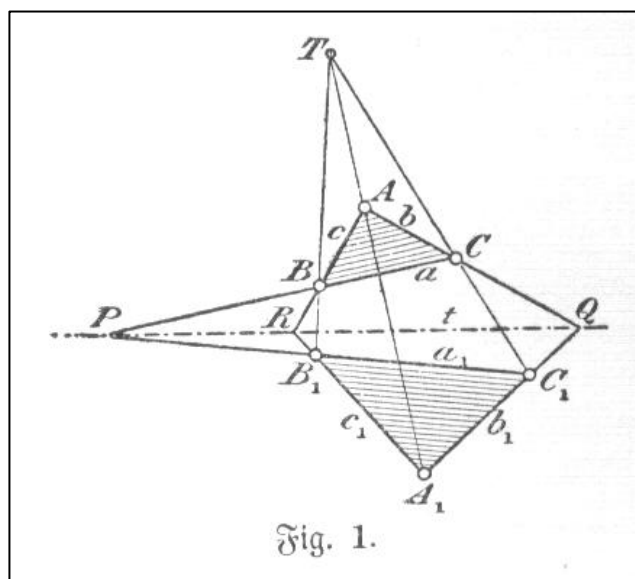


Abbildung 86: Satz des Desargues
(aus: Böger 1910, S. 2)

Betrachtet man nun die Dreiecke **ABC** und **AB** Γ , dann liegen die vier Punkte **B**, **C**, **B**, Γ in einer Ebene (die Geraden **a** und α schneiden sich in **P**) und damit schneiden sich **BB** und **C** Γ in einem Punkt. Ebenfalls schneiden sich **AA** und **C** Γ sowie **AA** und **BB** in einem Punkt. Damit müssen die drei Schnittpunkte zu einem Punkt **S** zusammenfallen, denn sonst würden **AA**, **BB** und **C** Γ eine Ebene bilden, was aber nach Wahl von **A**, **B**, Γ aus-

¹⁷⁴ Bögers Vorgehen zur Einführung der harmonischen Punkte findet sich fast genauso in Reye 1866, S. 21ff.

¹⁷⁵ Böger 1910, S. 2

¹⁷⁶ Aufgrund der Formulierung der Voraussetzungen des Satzes kann das Problem auch von vorneherein räumlich gesehen werden, wobei der Beweis dann wesentlich einfacher wird. Böger behandelt nur das ebene Problem, muss für dessen Beweis allerdings in den Raum übergehen.

¹⁷⁷ Die Geraden α , β und γ sind in der Abbildung nicht dargestellt.

¹⁷⁸ Hier und auch im Folgenden ist zu erkennen, dass Böger projektiv denkt und bereits Fernpunkte verwendet, bevor er sie eingeführt hat, da zwei Geraden einer Ebene für ihn immer einen Schnittpunkt haben.

¹⁷⁹ Böger benutzt leider die sehr ähnlichen Buchstaben **A** und **A** bzw. **B** und **B**, sodass man hier und im Folgenden darauf achten muss, diese auseinander zu halten.

geschlossen ist (σ_1 ist verschieden von der gegebenen Ebene σ , die A , B , und C enthält). Mit der gleichen Argumentation findet man, dass sich A_1A , B_1B und C_1C in einem Punkt S_1 schneiden.

Der Schnittpunkt von SS_1 mit σ sei T , dann gilt: SA und S_1A_1 schneiden sich in A , also schneiden sich auch SS_1 und AA_1 . Als gemeinsamer Punkt von SS_1 und der Ebene σ ist der letztgenannte Schnittpunkt also T . Ebenso verlaufen BB_1 und CC_1 durch T , der damit der gesuchte Punkt ist. Mit einer ähnlichen Argumentation beweist Böger dann im Anschluss die Umkehrung des Satzes des Desargues: „Wenn die drei Geraden, welche die homologen Ecken zweier zugeordneten Dreiecke verbinden, durch einen Punkt gehen, so liegen die drei Punkte, in denen sich die homologen Seiten schneiden, in einer Gerade.“¹⁸⁰

Der Satz des Desargues und seine Umkehrung dienen im Folgenden als Hilfsmittel, um harmonische Punkte ohne Verwendung von Maßbeziehungen über das vollständige Viereck zu definieren. Dazu stellt Böger zunächst vollständiges Viereck und vollständiges Vierseit gegenüber:

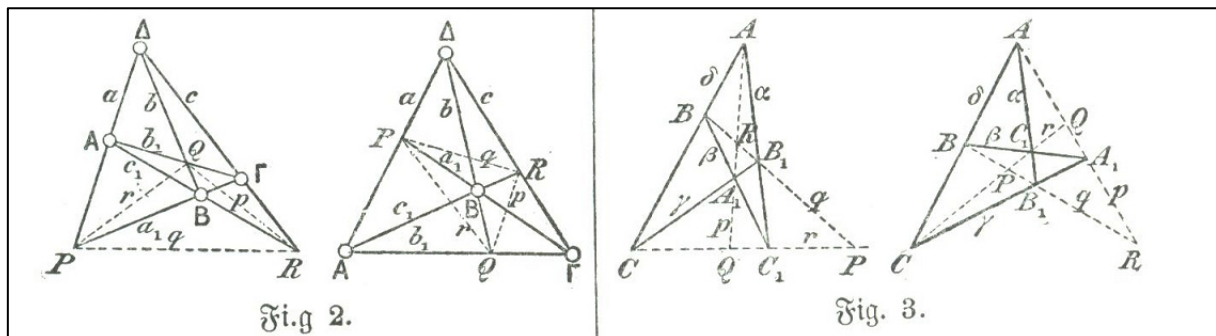


Abbildung 87: Vollständiges Viereck und Vierseit (aus: Böger 1910, S. 3)

Das vollständige Viereck (linke Seite der Abbildung) entsteht bei ihm folgendermaßen: Man beginnt mit vier Punkten A , B , Γ und Δ ¹⁸¹, die als Ecken bezeichnet werden, und legt durch jeweils zwei von ihnen die Gerade. Dadurch entstehen die sechs Seiten a , a_1 , b , b_1 , c und c_1 . Zwei Seiten, die nicht durch dieselbe Ecke gehen (Gegenseiten), schneiden sich in einem Diagonalpunkt. Zwei Diagonalpunkte können durch eine Diagonallinie verbunden werden. Man erhält so drei Diagonalpunkte (P , Q , R) und drei Diagonallinien (p , q , r). Jeder Diagonalpunkt wird der Diagonallinie zugeordnet, die ihn nicht enthält.

¹⁸⁰ Böger 1910, S. 2

¹⁸¹ Von diesen vier Punkten dürfen nicht drei auf einer Geraden liegen, was Böger allerdings nicht erwähnt.

Im weiteren Verlauf zeigt Böger, dass bei einem harmonischen Wurf (zwei Punktpaare) jedes Punktpaar die Rolle der Diagonalknoten übernehmen kann und sich die Punktpaare gegenseitig trennen. Er definiert dann harmonische Strahlen als die Verbindungsgeraden eines Punktes mit vier harmonischen Punkten und weist nach, dass der Schnitt einer Gerade mit vier harmonischen Strahlen immer vier harmonische Punkte liefert. Im Anschluss erfolgt die Einführung der Fernelemente, die stillschweigend bereits vorher vorausgesetzt wurden. Böger geht dabei so vor, dass er alle Punkte einer Gerade s mit einem festen außerhalb der Gerade liegenden Punkt S verbindet, so dass er alle Geraden durch S erhält mit Ausnahme der Parallele u . Die Einführung des Fernpunktes dient der Beseitigung dieser Ausnahme: „Dieser Strahl u nimmt aber, wie wir im folgenden sehen werden, keine Ausnahmestellung ein; wir wollen deswegen den lästigen Zusatz umgehen, indem wir der Gerade s noch einen Punkt, den wir zum Unterschied von den übrigen den uneigentlichen nennen wollen, beilegen. Da dieser uneigentliche Punkt, in dem nach unserer neuen Ausdrucksweise der parallele Strahl die Gerade s schneidet, von jedem eigentlichen Punkt der Gerade unendlich weit entfernt ist, so nennen wir ihn auch den unendlich fernen Punkt der Gerade.“¹⁸⁴ Dass die Gesamtheit aller unendlich fernen Punkte ebenfalls eine Gerade bildet, begründet Böger damit, dass jede (eigentliche) Gerade nur einen Fernpunkt besitzen kann (denn sonst könnte man durch einen Punkt zwei Parallelen zu ihr finden). Würden die unendlich fernen Punkte eine andere Linie als eine Gerade bilden, könnte man zwei von ihnen durch eine Gerade verbinden, die dann zwei Fernpunkte enthalten würde.

3.4.2 Perspektive und projektive Verwandtschaft

Im zweiten Kapitel (S. 10-19) beginnt Böger gemäß seiner eigenen Auffassung mit der eigentlichen Geometrie der Lage: „Das Wesen der Geometrie der Lage besteht darin, die Elemente [Punkte und Strahlen] der geraden Grundgebilde [Punktreihen und Strahlenbüschel] einander zuzuordnen, d.h. jedem Element des einen Grundgebildes ein Element des andern zuzuweisen. – Die einander zugewiesenen Elemente heißen homolog.“¹⁸⁵ Als erstes Beispiel für eine solche Zuordnung, die allgemein auch als „Verwandtschaft“ bezeichnet wird, betrachtet er den Fall, dass den Strahlen

¹⁸⁴ Böger 1910, S. 8

¹⁸⁵ Böger 1910, S. 10

eines Strahlenbüschels jeweils ihr Schnittpunkt mit einer festen Gerade (Punktreihe) zugewiesen wird: „Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel heißen perspektiv zugeordnet oder kurz perspektiv, wenn die Punktreihe ein Schnitt des Strahlenbüschels

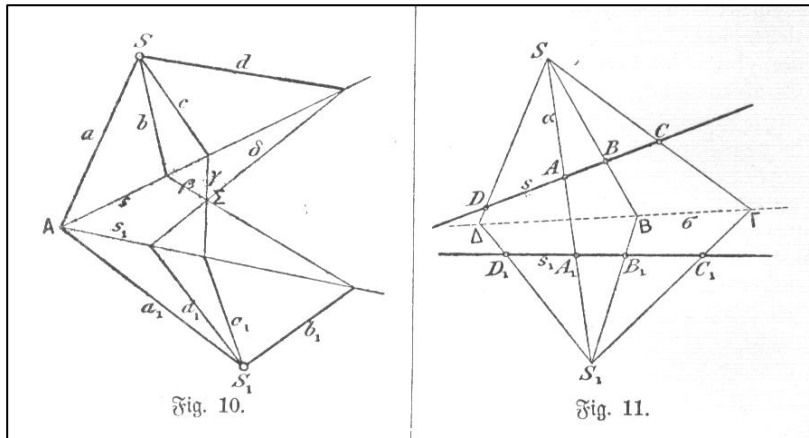


Abbildung 89: Projektive Verwandtschaft von Grundgebilden (aus: Böger 1910, S. 12)

ist (oder, was dasselbe sagt, wenn der Strahlenbüschel ein Schein der Punktreihe ist).“¹⁸⁶ Weiterhin gilt: „Zwei Strahlenbüschel heißen perspektiv, wenn sie Scheine derselben Punktreihe sind.“¹⁸⁷ und „Zwei Punktreihen heißen

perspektiv, wenn sie Schnitte desselben Strahlenbüschels sind.“¹⁸⁸ Im Anschluss daran führt Böger dann den Begriff der projektiven Verwandtschaft ein, den er auf die perspektive Verwandtschaft zurückführt: „Zwei gerade Grundgebilde heißen projektiv, wenn sie die Endglieder einer Kette von perspektiven Gebilden sind.“¹⁸⁹ Da

bereits in §1 gezeigt wurde, dass vier harmonische Strahlen jede Gerade in vier harmonischen Punkten schneiden, sind also bei zwei projektiven Grundgebilden vier harmonische Elemente immer vier harmonischen Elementen zugeordnet. Dies benutzt Böger später zum Beweis des Fundamentalsatzes, der besagt, dass die projektive Verwandtschaft durch drei Paare zugeordneter Elemente eindeutig festgelegt ist. Zunächst zeigt er jedoch eine abgeschwächte Version dieses Satzes, nämlich dass man die Strahlen zweier Strahlenbüschel (bzw. die Punkte zweier Punktreihen) einander projektiv zuordnen kann, wenn drei Paare homologer Elemente gegeben sind, wobei sein Vorgehen mit dem von Henrici und Treutlein identisch ist.

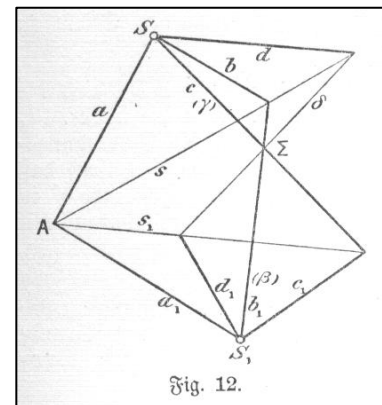


Abbildung 90: Erster Spezialfall (aus: Böger 1910, S. 13)

Im Anschluss an diese allgemeine Lösung betrachtet Böger dann ebenfalls die von Henrici und Treutlein vorgestellten speziellen Lösungsmöglichkeiten. Dabei behan-

¹⁸⁶ Böger 1910, S. 10

¹⁸⁷ Böger 1910, S. 10

¹⁸⁸ Böger 1910, S. 10

¹⁸⁹ Böger 1910, S. 11

delt er zuerst deren zweiten Spezialfall (Abbildung 90), bei dem die Gerade s Verbindungsgerade der Schnittpunkte von a und a_1 bzw. b und b_1 ist. Die Gerade s_1

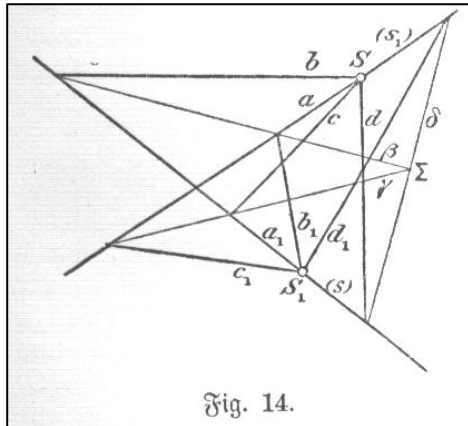


Abbildung 91: Zweiter Spezialfall (aus: Böger 1910, S: 13)
der Vorstellung des dritten Kapitels noch sehen werden.

verbindet die Schnittpunkte von a und a_1 sowie von c und c_1 . Dadurch fällt dann auch c mit γ und b_1 mit β zusammen, so dass sich Σ direkt ergibt.

Die zweite spezielle Lösung entsteht so, dass die Gerade a_1 die Rolle von s und die Gerade a die Rolle von s_1 übernimmt.¹⁹⁰ Allerdings wird damit nicht wie von Henrici und Treutlein der Satz von Brianchon bewiesen, sondern die projektive Behandlung der Kegelschnitte vorbereitet, wie wir bei

3.4.3 Projektivität, Ordnungselemente, Fundamentalsatz der projektiven Geometrie

Auf diese konstruktive Lösung folgt dann die Einführung des Begriffs der Projektivität: „Der Inbegriff zweier projektiven Grundgebilde, die einen gemeinsamen Träger haben, heißt Projektivität.“¹⁹¹ Dabei sucht er so genannte Ordnungselemente, worunter er solche Elemente versteht, die homolog zu sich selbst sind.¹⁹² Auf folgende einfache Weise lässt sich zeigen, dass bei Vorliegen eines Ordnungselements immer noch ein zweites vorhanden ist. Hat man eine Projektivität zweier Punktreihen in einer Gerade, so dass den Punkten K, B, C die Punkte K, B_1, C_1 entsprechen (K Ordnungselement), so kann gemäß der obigen Konstruktion der einem beliebigen Punkt D zugehörige Punkt D_1 konstruiert werden.

Da A und A_1 hier in K zusammenfallen, tritt an die Stelle der Verbindungsgerade von A und A_1 eine beliebige durch K verlaufende Gerade

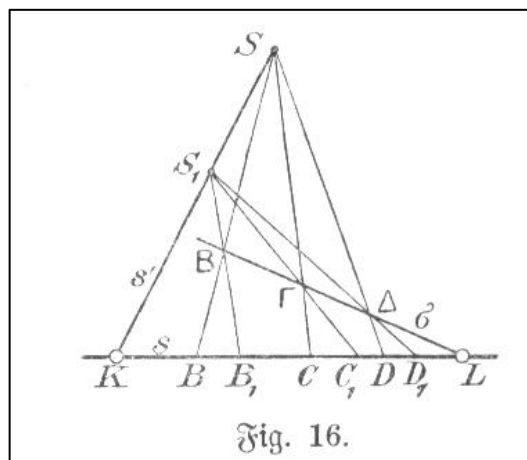


Abbildung 92: Konstruktion des zweiten Ordnungselements (aus: Böger1910, S. 14)

¹⁹⁰ Dies entspricht dem ersten Spezialfall Henricis und Treutleins.

¹⁹¹ Böger 1910, S. 14

¹⁹² Die Ordnungselemente sind die Doppелеlemente Müllers.

s' , auf der zwei beliebige Punkte S und S_1 gewählt werden. S verbindet man mit B und C , S_1 mit B_1 und C_1 , so dass die Schnittpunkte B und Γ entstehen. Diese legen wiederum die Gerade σ fest, über die der zu D homologe Punkt D_1 konstruiert werden kann. Betrachtet man nun den Schnittpunkt L von s und σ , so erhält man als zugeordneten Punkt wieder L selbst, d.h. L ist ein zweites Ordnungselement.

Dass nicht mehr als zwei Ordnungselemente existieren können, ohne dass jeder Punkt mit dem ihm zugeordneten zusammenfällt, ergibt sich aus der Aussage des Fundamentalsatzes: „Wenn zwei projektive Grundgebilde drei Elemente entsprechend gemeinsam haben, so haben sie jedes Element entsprechend gemeinsam.“¹⁹³

Um diesen Satz beweisen zu können, stellt Böger zunächst fest: „Jeder Punkt, der mit drei sich selbst homologen Punkten einer Projektivität einen harmonischen Wurf bildet, ist sich selbst homolog.“¹⁹⁴ Hier nutzt er, wie bereits oben erwähnt, die Tatsache aus, dass bei der projektiven Verwandtschaft ein harmonischer Wurf immer einem harmonischen Wurf zugeordnet wird und bei drei gegebenen Punkten der vierte harmonische eindeutig bestimmt ist.

Der Beweis des Satzes von Staudt (hier für eine Projektivität zweier Punktreihen) erfolgt in zwei Schritten. Die sich selbst entsprechenden Punkte seien K , L und M .

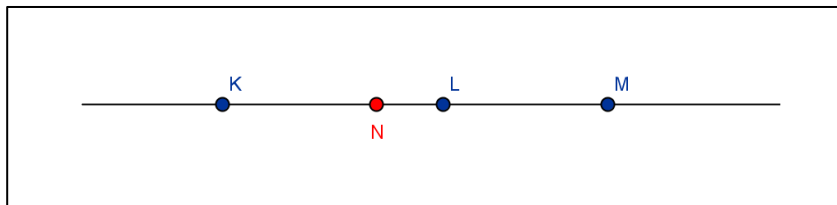


Abbildung 93: Konstruktion weiterer sich selbst homologer Punkte (erstellt mit GeoGebra)

Zu zeigen ist zunächst, dass alle Punkte zwischen K und L (d.h. die durch K und L von M getrennt sind) sich selbst homolog sind.

Dazu bestimmt Böger den von M durch K und L harmonisch getrennten Punkt N , der dann sich selbst homolog sein muss. Er führt dann weiter aus, dass sich auf diese Art und Weise unendlich viele Punkte zwischen K und L finden lassen, die sich selbst homolog sind (Bestimmung des von M durch K und N harmonisch getrennten Punktes usw.). Betrachtet man nun einen dieser unendlich vielen Punkte P , so müssen auch dessen benachbarte Punkte sich selbst entsprechen. Werden nämlich von P ausgehend die Punkte der Punktreihe durchlaufen und wäre dabei Q der erste sich selbst homologe Punkt und kein Nachbarpunkt von P , dann würden zwischen P und Q nur solche Punkte liegen, die nicht sich selbst entsprechen. Gleichzeitig müsste

¹⁹³ Böger 1910, S. 15; Böger verwendet die Bezeichnung „Staudtscher Satz“.

¹⁹⁴ Böger 1910, S. 15; Diese Aussage benutzt auch Hubert Müller in seinem Beweis, vgl. S. 163.

aber der von **M** durch **P** und **Q** harmonisch getrennte Punkt zwischen **P** und **Q** liegen und sich selbst entsprechen. Daraus folgert Böger dann, dass alle Punkte zwischen **K** und **L** sich selbst homolog sind.¹⁹⁵

Im zweiten Schritt von Bögers Beweis wird dann ein außerhalb der Strecke **KL** gelegener Punkt **R** betrachtet. Der von **R** durch **K** und **L** harmonisch getrennte Punkt liegt zwischen **K** und **L** und ist somit sich selbst homolog, so dass auch **R** sich selbst homolog ist. Damit ist zum einen der Staudtsche Satz bewiesen, zum anderen ergibt sich aber auch die Eindeutigkeit der projektiven Verwandtschaft gerader Grundgebilde bei Vorliegen von drei Paaren zugeordneter Elemente.

Im Anschluss hieran zeigt Böger, dass zwei projektive Strahlenbüschel perspektiv sind, wenn die Verbindungsgerade der Mittelpunkte (der Schnittpunkt der Geraden des jeweiligen Büschels) sich selbst homolog ist. Bei projektiven Punktreihen muss zusätzlich der Schnittpunkt der beiden Trägergeraden sich selbst entsprechen. Am Ende des Kapitels führt er dann noch unter Nutzung von Streckenlängen das Doppelverhältnis ein, zeigt, dass dieses beim Projizieren erhalten bleibt (und daher auch als Kennzeichen der projektiven Verwandtschaft dienen kann), und bestimmt den Wert des Doppelverhältnisses eines harmonischen Wurfes zu -1 .

3.4.4 Konstruktion von krummen Grundgebilden aus fünf gegebenen Punkten

Im dritten Kapitel (S.19-30) behandelt Böger die projektive Erzeugung der Kegelschnitte. Jedoch vermeidet er dabei die Bezeichnung Kegelschnitt und spricht stattdessen von „krummen Grundgebilden“, die er in Analogie zu den geraden Grundgebilden folgendermaßen definiert: „Der Inbegriff der Punkte, in denen sich die homologen Strahlen zweier projektiven geraden Strahlenbüschel schneiden, heißt eine krumme Punktreihe oder eine Kurve zweiter Ordnung.“ und „Der Inbegriff der Geraden, die die homologen Punkte zweier projektiven geraden Punktreihen verbinden, heißt ein krummer Strahlenbüschel oder ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung.“¹⁹⁶

¹⁹⁵ Die Argumentation Bögers mithilfe des benachbarten Punktes führt sich im Grunde genommen selbst ad absurdum. Geht man nämlich davon aus, dass **Q** der Nachbarpunkt von **P** ist und sich (wie Böger meint bewiesen zu haben) selbst entspricht, kann man den von **M** durch **P** und **Q** harmonisch getrennten Punkt konstruieren, der zwischen **P** und **Q** liegt. Somit kann **Q** nicht der Nachbar von **P** sein.

¹⁹⁶ Böger 1910, S. 19

Im Folgenden konzentriert er sich dann auf die Kurven zweiter Ordnung und zeigt zunächst, dass zu fünf gegebenen Punkten immer eine solche Kurve existiert, die die Punkte enthält. Dazu nutzt er die in Kapitel 2 erarbeiteten Möglichkeiten, zwei Strahlenbündel projektiv aufeinander zu beziehen, so dass sich die Entstehung der Kurve fast von selbst ergibt. Gegeben seien die Punkte S , S_1 , A , B und Γ , die auf der zu ermittelnden Kurve zweiter Ordnung liegen sollen.

Da diese nach Definition durch die Schnittpunkte zweier projektiver Strahlenbündel entsteht, macht Böger die Punkte S und S_1 zu Mittelpunkten zweier Strahlenbündel.

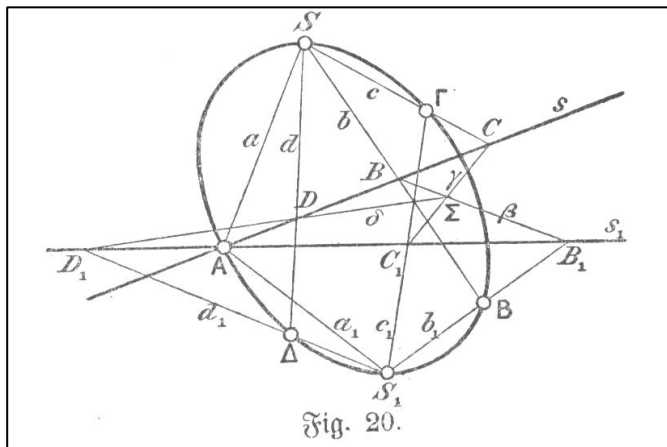


Abbildung 94: Konstruktion weiterer Kurvenpunkte aus fünf gegebenen Punkten (aus: Böger 1910, S. 20)

In A , B und Γ sollen sich jeweils zwei homologe Strahlen schneiden, wodurch die projektive Verwandtschaft von S und S_1 festgelegt ist. Um nun einen weiteren Punkt Δ der Kurve zu finden, wird gemäß der bereits bekannten Konstruktion zu einem beliebigen Strahl d von S der homologe d_1 ermittelt. Der Schnittpunkt Δ von d und d_1 ist dann laut

Definition ein weiterer Kurvenpunkt. Böger merkt hier bereits an, dass die Hilfsgeraden s und s_1 durch jeden beliebigen Kurvenpunkt gelegt werden können, da dies

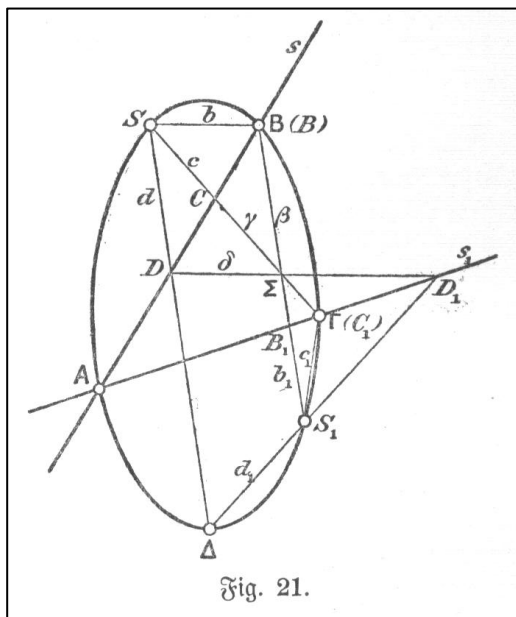


Abbildung 95: Beweis des Satzes von Pascal (aus: Böger 1910, S. 21)

keinen Einfluss auf die projektive Verwandtschaft von S und S_1 (und damit auf die Kurve) hat. Offen bleibt jedoch zunächst die Frage, ob diese Freiheit auch für die Wahl von S und S_1 gilt.

Die in Kapitel 2 vorgestellten speziellen Lösungen zur projektiven Verwandtschaft zweier Strahlenbündel nutzt Böger ebenfalls zur Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung. Werden s und s_1 als Verbindungsgeraden AB und $A\Gamma$ gewählt, so fallen wie oben gezeigt c und γ sowie b_1 und β zusammen. Nach Konstruktion gilt aber auch $B = B$ und $C_1 = \Gamma$. Betrachtet

man das Kurvensechseck $S\Gamma A B S_1 \Delta$, so gilt: $S\Gamma$ und $B S_1$ schneiden sich in Σ , ΓA und

$S_1\Delta$ schneiden sich in D_1 , AB und ΔS schneiden sich in D . Da Σ , D und D_1 auf einer Gerade liegen, hat man damit den Satz von Pascal bewiesen.¹⁹⁷

Auch die zweite spezielle Lösung spielt bei der Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung eine zentrale Rolle, da sie auf den Begriff der Tangente führt. Hierbei fällt die

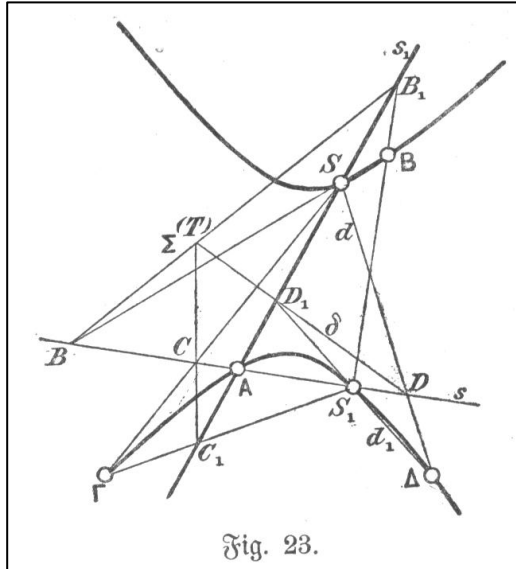


Abbildung 96: Einführung der Tangente (aus Böger 1910, S. 21)

Gerade s_1 mit SA und die Gerade s mit S_1A zusammen. Um die Punkte B und B_1 zu ermitteln, schneidet man SB mit s und S_1B mit s_1 . Ebenso findet man C und C_1 (Γ statt B verwenden). So erhält man Σ als Schnittpunkt von BB_1 und CC_1 . Weitere Kurvenpunkte Δ konstruiert man, indem ein beliebiger Strahl d durch S mit s geschnitten wird (man erhält D) und anschließend $D\Sigma$ mit s_1 (liefert D_1). Δ ist dann der Schnittpunkt von d mit S_1D_1 . Eine besondere Rolle nimmt nun die Verbindungsgerade SS_1 ein, wenn man sie als Strahl m von

S auffasst. Offenkundig muss auch zu m ein homologer Strahl m_1 von S_1 gehören, der folgendermaßen konstruiert werden kann: Man verbindet den Schnittpunkt von m mit s (also S_1) mit Σ durch die Gerade μ , bildet den Schnittpunkt von μ mit s_1 und verbindet diesen mit S_1 . Folglich ist $\mu = m_1$ der m homologe Strahl. Im Unterschied zu allen anderen Strahlen von S_1 enthält m_1 nur den Kurvenpunkt S_1 , während der beliebige Strahl d_1 zwei Kurvenpunkte (S_1 und Δ) enthält. Völlig analog könnte man SS_1 auch als Strahl n_1 von S_1 auffassen, dessen homologer Strahl n dann auch nur einen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat. Daher definiert Böger am Schluss dieser Betrachtung „Die Mittelpunkte zweier projektiven Strahlenbüschel sind Punkte der erzeugten krummen Punktreihe. – Die Strahlen, welche der Verbindungslinie der Mittelpunkte entsprechen, sind Tangenten der Kurve.“¹⁹⁸ und merkt an „Der Punkt Σ ist, wie wir sehen, der Schnittpunkt der Tangenten in S und S_1 . Um uns immer an diese geometrische Bedeutung zu erinnern, wollen wir an die Stelle des Buchstaben Σ von jetzt an T setzen.“¹⁹⁹

¹⁹⁷ Böger weist zunächst nur auf das Phänomen hin. Den Satz nennt er erst, nachdem er gezeigt hat, dass jeder der Punkte S , S_1 , A , B und Γ als Mittelpunkt der Strahlenbüschel gewählt werden kann.

¹⁹⁸ Böger 1910, S. 22

¹⁹⁹ Böger 1910, S. 23

3.4.5 Weitere Möglichkeiten der Festlegung einer Kurve zweiter Ordnung, Sätze von Pascal und Brianchon

Im Anschluss daran zeigt Böger zunächst, wie eine Kurve zweiter Ordnung aus drei Punkten und den Tangenten in zweien dieser Punkte konstruiert werden kann, bevor er die Gleichwertigkeit der Punkte S , S_1 , A , B und Γ nachweist. Dazu geht er wieder von diesen fünf Punkten aus und macht S und S_1 zu Mittelpunkten der projektiven Strahlenbüschel.

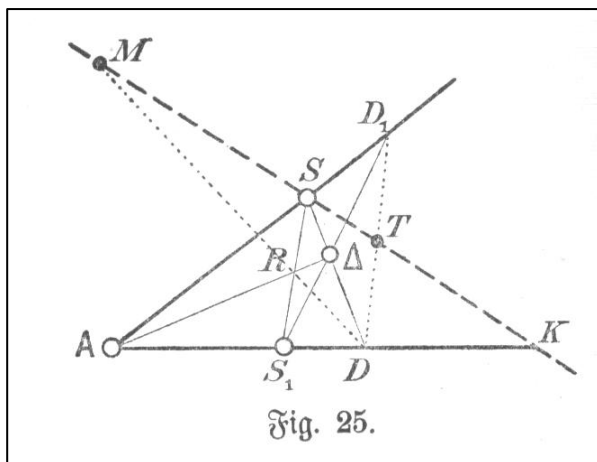


Abbildung 97: Eindeutige Festlegung einer Kurve durch fünf Punkte (aus: Böger 1910, S. 23)

Zusätzlich konstruiert er den Schnittpunkt T der Tangenten in S und S_1 und den beliebigen Kurvenpunkt Δ . So erhält er das Kurvenviereck $SS_1A\Delta$, zu dem D und D_1 Diagonalpunkte sind. Der dritte Diagonalpunkt sei R . Nach Definition sind DA , DR , $D\Delta$ und DD_1 vier harmonische Strahlen, d.h. K , M , S und T sind vier harmonische Punkte. Da diese Betrachtung für jeden Kurvenpunkt Δ gilt, verläuft

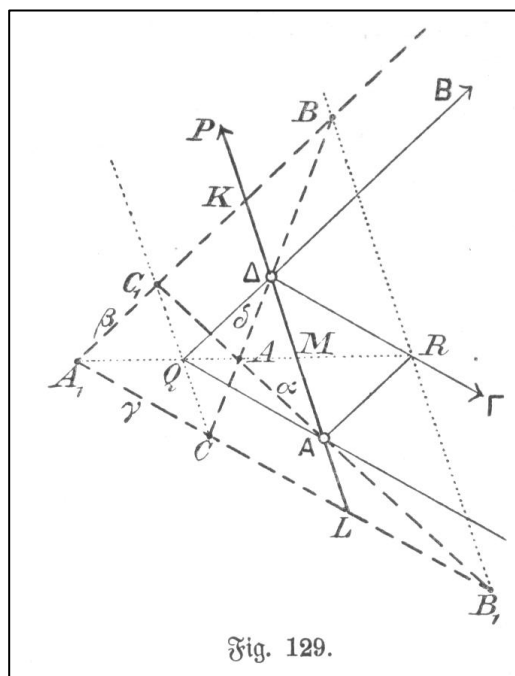
DR immer durch den von T durch K und S harmonisch getrennten Punkt, also durch M . Durchläuft Δ also sämtliche Kurvenpunkte, gilt: In A und M entstehen zwei perspektive Strahlenbüschel (Verbindungsgeraden von A bzw. M mit R , der immer in SS_1 liegt). Ebenso werden in M und S zwei perspektive Strahlenbüschel gebildet (Verbindungsgeraden von M bzw. S mit D , der immer in AS_1 liegt). Also sind die Strahlenbüschel in A und S projektiv. Dieselbe Argumentation könnte man anstelle von A für jeden weiteren Kurvenpunkt B durchführen. Somit ist auch der Strahlenbüschel, der durch Verbindung von B mit Δ entsteht, projektiv zum Strahlenbüschel S , also die Strahlenbüschel A und B auch projektiv. Dies fasst Böger in folgendem Lehrsatz zusammen: „Eine krumme Punktreihe wird aus zwei beliebigen ihrer Punkte durch zwei projektive Strahlenbüschel projiziert.“²⁰⁰ Da es nur eine projektive Verwandtschaft der Strahlenbüschel A und B gibt, bei der die Strahlen durch S , S_1 und Γ einander homolog sind, erhält man die selbe Kurve, wenn A und B die Rolle von S und S_1 beim Zeichnen der Kurve übernehmen. Somit kann man festhalten: „Eine

²⁰⁰ Böger 1910, S. 24

krumme Punktreihe ist durch fünf Punkte bestimmt.“ und „Alle Sätze, die von S und S_1 gelten, gelten von jedem Kurvenpunkt.“²⁰¹

Im Folgenden formuliert Böger dann die (bereits bewiesenen) Sätze von Pascal und Brianchon und behandelt weitere Möglichkeiten, eine Kurve zweiter Ordnung eindeutig festzulegen (vier Punkte und eine Tangente, zwei Punkte und drei Tangenten, ein Punkt und vier Tangenten, fünf Tangenten). Außerdem zeigt er, dass die Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung immer einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung bilden, sodass beide Gebilde stets gemeinsam auftreten.

Am Schluss des Kapitels untersucht Böger die möglichen Formen der Kurven zweiter Ordnung. Dazu definiert er „Eine Kurve zweiter Ordnung heißt Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem sie mit der uneigentlichen Gerade keinen, zwei oder einen Punkt gemeinsam hat.“²⁰² und leitet im Anschluss einige (metrische) Eigenschaften von Hyperbel und Parabel her. Beispielsweise ergeben sich die Asymptoten der Hyperbel als Tangenten in den Fernpunkten. Ihre Konstruktion kann so durchgeführt werden: Man sucht die drei Diagonalpunkte P , Q und R des Kurvenvierecks $AB\Gamma\Delta$ (B und Γ seien Fernpunkte, A und Δ beliebige Kurvenpunkte, wobei zusätzlich die Tangente δ gegeben ist) und verbindet sie durch die Diagonalen. Wie beim Nachweis der



Gleichwertigkeit der Punkte S , S_1 , A , B und Γ gezeigt, liegt der Schnittpunkt der Tangenten in zwei Ecken eines Kurvenvierecks immer in der der Seite zugeordneten Diagonale.²⁰³ Will man also die Tangente in B zeichnen, sucht man deren Schnittpunkt mit PR (die BA zugeordnete Diagonale). Durch diesen verläuft aber auch die Tangente δ , so dass Punkt B der gesuchte ist. Nun verbindet man B mit B und hat die Tangente β gefunden. Völlig analog lassen sich die Tangenten in A und Γ ermitteln. Da der Punkt P ein Fernpunkt ist, sind die Diagonalen PQ und PR parallel und für die Tangenten in den (belie-

Abbildung 98: Konstruktion der Asymptoten der Hyperbel (aus: Böger 1910, S. 30)

²⁰¹ Böger 1910, S. 24

²⁰² Böger 1910, S. 29

²⁰³ Man vergleiche dazu Abbildung 97. $SS_1A\Delta$ ist das Kurvenviereck. Die Tangenten in S und S_1 schneiden sich in T , der immer auf der der Seite SS_1 zugeordneten Diagonale DD_1 liegt.

bigen) Kurvenpunkten A und Δ gilt: „Zwei beliebige Hyperbeltangenten schneiden die Asymptoten in den Ecken eines Trapezes, dessen Grundlinien der Berührungssehne der beiden Tangenten parallel sind.“²⁰⁴ Ebenso folgt aus der Parallelität von BB_1 und CC_1 , dass das Dreieck CC_1B flächengleich Dreieck CC_1B_1 und somit Dreieck A_1BC flächengleich Dreieck $A_1B_1C_1$ ist, d.h. „Jede Tangente begrenzt mit den beiden Asymptoten ein Dreieck von unveränderlichem Inhalt.“²⁰⁵

3.4.6 Pol und Polare, Gleichungen der Kurven zweiter Ordnung

Im vierten Kapitel (S. 31-38) behandelt Böger zunächst die Eigenschaften der durch einen festen Kegelschnitt realisierten Pol/Polare-Beziehung in der Ebene und nutzt diese im Anschluss zur Herleitung weiterer Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung. Dabei gelangt er zuletzt bis zu den Gleichungen der Kurven bezüglich eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so dass damit die Übereinstimmung mit den bereits bekannten Methoden der Erzeugung gezeigt ist.²⁰⁶

Die Definition der Polare zu einem beliebigen Punkt führt Böger auf bereits bekannte

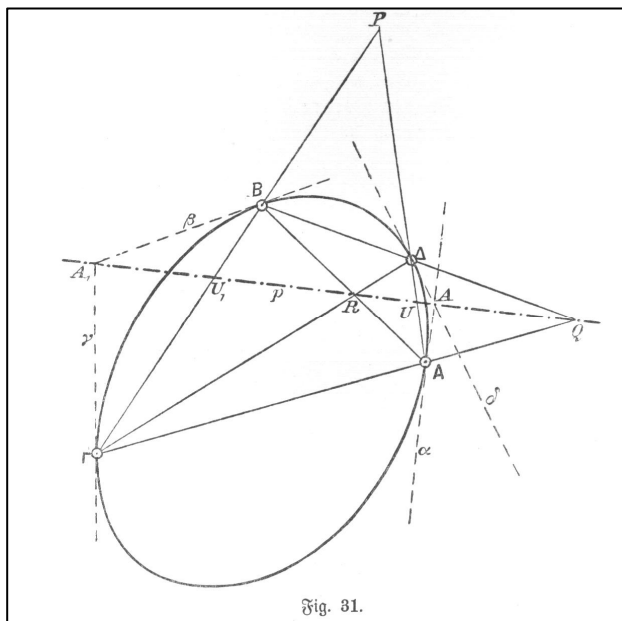


Abbildung 99: Pol und Polare am Kegelschnitt
(aus: Böger 1910, S. 31)

Inhalte zurück, so dass sich viele Zusammenhänge mit nur wenig Aufwand ergeben. Gegeben seien also eine Kurve zweiter Ordnung und ein beliebiger Punkt P , dann kann man definieren: „Die Gerade, welche den Punkt P (Abbildung 99) mit einem beliebigen Kurvenpunkt Δ verbindet, schneidet die Kurve noch in einem zweiten Punkt A ; zeichnen wir den von P durch Δ und A harmonisch getrennten Punkt U und ferner den Schnittpunkt A der Tangenten δ und α in Δ

²⁰⁴ Böger 1910, S. 29

²⁰⁵ Böger 1910, S. 29

²⁰⁶ Man vergleiche dazu Fußnote 172. Die Vorgehensweise Bögers findet sich nahezu unverändert in Reye 1866, S. 77ff.

und A , so heißt die Verbindungslinie p von U und A die Polare des Punktes P .²⁰⁷ Streng genommen müsste man fordern, dass PA nicht Tangente an die Kurve sein darf, denn dann würden A , U und A mit Δ zusammenfallen. Nichtsdestotrotz wurde oben gezeigt, dass abgesehen von der Tangenten jede Gerade, die einen Punkt mit der Kurve gemein hat, noch einen weiteren Schnittpunkt mit ihr besitzt. Darüber hinaus ist anzumerken, dass die von Böger gewählte Konstruktion für alle Punkte funktioniert.²⁰⁸ Offen bleibt dafür jedoch zunächst die Frage, ob die Polare durch diese Konstruktion eindeutig bestimmt ist.

Dazu betrachtet Böger eine weitere Gerade durch P , die die Kurve in B und Γ schneidet, und konstruiert wie zuvor die Polare als Verbindungsgerade von A_1 und U_1 . Um zu zeigen, dass AU und A_1U_1 identisch sind, wird das Kurvenviereck $AB\Gamma\Delta$ gebildet, dessen Diagonalpunkte P , Q und R sind. Da U und U_1 die von P durch A und Δ bzw. B und Γ harmonisch getrennten Punkte sind, liegen sie in RQ .²⁰⁹ Außerdem liegen A und A_1 als Schnittpunkte der Tangenten in der der Seite zugeordneten Diagonale. Folglich gilt: $AU = QR = A_1U_1$ und die Eindeutigkeit der Polare ist bewiesen. Die im Beweis festgestellten Zusammenhänge formuliert Böger schließlich in Form eines Satzes: „In der Polare des Punktes P liegen 1. die von P durch die Kurve harmonisch getrennten Punkte; 2. die Schnittpunkte derjenigen Tangentenpaare, deren Berührungssehnen durch P gehen; 3. zwei Diagonalpunkte jedes Kurvenvierecks, dessen dritter Diagonalpunkt P ist.“²¹⁰

Daran anschließend leitet er die für das Dualisieren zentrale Aussage ab, dass die Polaren aller Punkte einer festen Gerade durch einen Punkt (den Pol der Gerade) verlaufen. Dazu betrachtet er einen beliebigen Punkt Q auf der festen Gerade p und einen beliebigen Punkt Δ der Kurve.²¹¹ Die

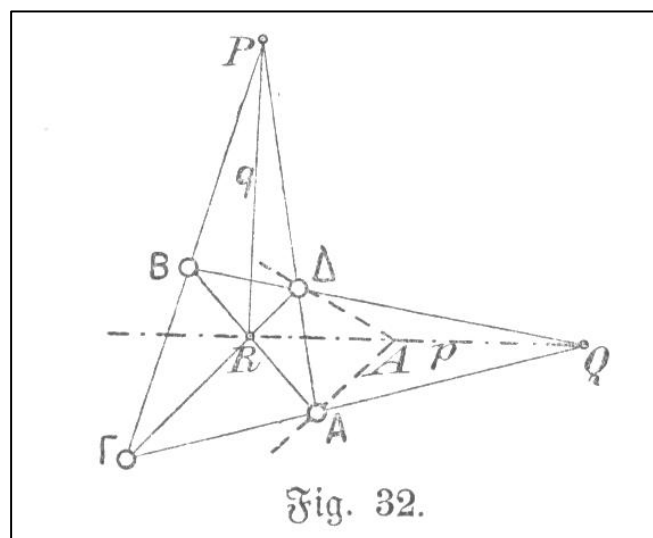


Abbildung 100: Durch einen Kegelschnitt vermittelte Dualität (aus: Böger 1910, S. 32)

²⁰⁷ Böger 1910, S. 31

²⁰⁸ Dies ist im Wesentlichen die Konstruktion Holzmüllers für beliebige Kegelschnitte.

²⁰⁹ Dies ergibt sich aus der Definition von harmonischen Punkten und der Eigenschaft, dass diese bei Projektion erhalten bleiben.

²¹⁰ Böger 1910, S. 32

²¹¹ Hier setzt Böger implizit voraus, dass Δ nicht der Berührungspunkt der Tangente aus Q an die Kurve ist.

Tangente in Δ schneide \mathbf{p} in \mathbf{A} . Dann lässt sich durch \mathbf{A} eine zweite Tangente an die Kurve zeichnen, die diese in \mathbf{A} berührt. Die Geraden $\mathbf{Q}\Delta$ und $\mathbf{Q}\mathbf{A}$ schneiden die Kurve jeweils ein zweites Mal in \mathbf{B} und $\mathbf{\Gamma}$. Dann ist $\mathbf{AB}\mathbf{\Gamma}\Delta$ ein Kurvenviereck mit Diagonalpunkt \mathbf{Q} , die beiden anderen Diagonalpunkte seien \mathbf{P} und \mathbf{R} . Also ist nach dem oben zitierten Satz $\mathbf{PR} = \mathbf{q}$ die Polare zu \mathbf{Q} und die Gerade $\mathbf{AQ} = \mathbf{p}$ ist Diagonallinie²¹², d.h. \mathbf{R} liegt in \mathbf{p} . Im Polardreieck \mathbf{PQR} ist somit \mathbf{p} die Polare zu \mathbf{P} , d.h. \mathbf{P} ist der von \mathbf{p} durch \mathbf{A} und Δ harmonisch getrennte Punkt. Bewegt sich nun \mathbf{Q} auf \mathbf{p} , während Δ festgehalten wird, so bleiben \mathbf{A} und \mathbf{A} unverändert, d.h. von den vier harmonischen Punkten bleiben drei unverändert und somit auch der vierte. Folglich verläuft die Polare \mathbf{q} zu \mathbf{Q} immer durch \mathbf{P} , so dass Böger die Definition „Der Punkt \mathbf{P} heißt der Pol der Gerade \mathbf{p} , wenn \mathbf{p} die Polare von \mathbf{P} ist“ und den Satz „Die Polaren \mathbf{q} der Punkte \mathbf{Q} einer Gerade \mathbf{p} gehen durch einen Punkt \mathbf{P} , den Pol der Gerade \mathbf{p} “²¹³ formulieren kann.

Den übrigen Teil des Kapitels verwendet Böger, um weitere Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung und zuletzt deren Gleichungen abzuleiten. Dazu definiert er zunächst den Pol der unendlich fernen Gerade als Mittelpunkt der Kurve und die Polare eines Fernpunktes als Durchmesser.²¹⁴ Unter konjugierten Durchmessern versteht Böger ein Paar von Durchmessern, bei denen einer den Pol des anderen enthält. Stehen konjugierte Durchmesser senkrecht aufeinander, werden sie als Achsen bezeichnet. Zur Herleitung der Gleichungen soll die Kurve gegeben sein durch die Punkte \mathbf{S} , \mathbf{S}_1 und \mathbf{A} sowie die Tangenten in \mathbf{S} und \mathbf{S}_1 , die sich in einem unendlich fernen Punkt \mathbf{T}_∞ schneiden. Zur Ermittlung eines Kurvenpunktes Δ wird eine beliebige Gerade durch \mathbf{T}_∞ und deren Schnittpunkte \mathbf{D} und \mathbf{D}_1 mit $\mathbf{S}_1\mathbf{A}$ bzw. \mathbf{SA} betrachtet.²¹⁵ Die Geraden \mathbf{SD} und $\mathbf{S}_1\mathbf{D}_1$ sind dann homolog, d.h. ihr Schnittpunkt ein weiterer Kurvenpunkt. Böger unterscheidet nun die Fälle, dass \mathbf{S}_1 ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt ist. Ist \mathbf{S}_1 ein eigentlicher Punkt, so verbindet er den Mittelpunkt \mathbf{O} von \mathbf{SS}_1 mit \mathbf{T}_∞ und ermittelt die Schnittpunkte von \mathbf{OT}_∞ mit \mathbf{SA} , $\mathbf{S}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{S}\Delta$ und $\mathbf{S}_1\Delta$ zu \mathbf{B}_1 , \mathbf{B} , \mathbf{E} und \mathbf{E}_1 . Der Schnittpunkt von $\Delta\mathbf{T}_\infty$ und \mathbf{SS}_1 sei \mathbf{Q} . Aus den Strahlensätzen folgt dann

$$\frac{\mathbf{OE}}{\mathbf{OB}_1} = \frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{CD}_1} \text{ (Zentrum } \mathbf{S}) \text{ und } \frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{CD}_1} = \frac{\mathbf{OB}}{\mathbf{OE}_1} \text{ (Zentrum } \mathbf{S}_1),$$

²¹² Die Tangenten in \mathbf{A} und Δ schneiden sich in einem Punkt der Diagonallinie, vgl. Fußnote 203.

²¹³ Böger 1910, S. 33

²¹⁴ vgl. die Vorgehensweise Müllers in 3.3

²¹⁵ $\mathbf{S}_1\mathbf{A}$ übernimmt wieder die Rolle von \mathbf{s} , \mathbf{SA} die von \mathbf{s}_1 (zweite spezielle Kurvenkonstruktion).

also $OE \cdot OE_1 = OB \cdot OB_1$.

Außerdem gilt

$$\frac{QA}{OE} = \frac{SQ}{SO} \text{ (Zentrum } S) \text{ und } \frac{QA}{OE_1} = \frac{S_1Q}{S_1O} \text{ (Zentrum } S_1).$$

Multipliziert man jeweils die linken und rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen ergibt sich²¹⁶

$$\frac{QA^2}{OE \cdot OE_1} = \frac{SQ \cdot S_1Q}{SO \cdot S_1O} = \frac{(SO + OQ) \cdot (-SO + OQ)}{-OS^2} = \frac{-SO^2 + OQ^2}{-OS^2} = 1 - \frac{OQ^2}{OS^2},$$

$$\text{d.h. } \frac{QA^2}{OE \cdot OE_1} + \frac{OQ^2}{OS^2} = 1.$$

Werden nun OS als x-Achse und OT_∞ als y-Achse gewählt, so folgt

$$\frac{x^2}{OS^2} + \frac{y^2}{OE \cdot OE_1} = 1.$$

Damit hat man bereits die bekannte Gleichung für Kurven zweiter Ordnung erreicht, da OS^2 und $OE \cdot OE_1 = OB \cdot OB_1$ konstant sind.²¹⁷

Im Fall, dass S_1 ein Fernpunkt ist, ist die Kurve eine Parabel. Hier findet man durch ähnliche Überlegungen die Gleichung $\frac{y^2}{x} = \frac{Q_1A^2}{SQ_1^2}$, wobei SS_1 und ST_∞ als Koordinatenachsen gewählt werden.

3.5 Übersicht der behandelten Inhalte

Vergleicht man die vorgestellten Lehrgänge bezüglich der von ihnen behandelten Inhalte, stellt man fest, dass es hier eine überraschend große Übereinstimmung gibt. Einen ungefähren Überblick vermittelt die folgende Tabelle, wobei ein "x" bedeutet, dass das Thema im jeweiligen Lehrbuch enthalten ist..

	Holzmüller	Henrici/Treutlein	Müller	Böger
Harmonische Punkte	x	x	x	x
Vollständiges Viereck und/oder Vierterseit	x	x	x	x

²¹⁶ Böger arbeitet hier mit gerichteten Strecken.

²¹⁷ OS^2 ist immer positiv. $OB \cdot OB_1$ ist dann positiv, wenn A zwischen s und s_1 liegt, sonst negativ. Im positiven Fall erhält man eine Ellipse, im negativen Fall eine Hyperbel.

Sätze von Pascal und Brianchon	x	x	x	x
Pol und Polare	x	x	x	x
Perspektive und projektive Verwandtschaft		x	x	x
Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise	x	x	x	
Potenz und Potenzlinie	x	x	x	
Sätze von Ceva und Menelaos	x	x		
Satz von Desargues		x		x
Apollonisches Berührproblem	x	x		
Doppelverhältnis		x		x
Erzeugung der Kegelschnitt mithilfe projektiver Gebilde			x	x
Zentralkollineation		x		
Kreisinverson	x			
Involution			x	

Unterschiede zwischen den Lehrgängen bestehen einmal bezüglich der eingesetzten Methodik und in der Beziehung der Euklidischen zur „Neueren Geometrie“. So bleiben in Holzmüllers Lehrbuch die bestehenden Inhalte aus der Euklidischen Geometrie unverändert bestehen. Die dabei erzielten Resultate (beispielsweise die Strahlensätze und die Flächeninhaltsformel für Dreiecke) werden zum Beweis der Sätze aus der „Neueren Geometrie“ benutzt, die als selbstständiges in sich geschlossenes Themengebiet präsentiert wird. Bei Henrici und Treutlein ist der gesamte Geometrielehrgang durch die Nutzung von Abbildungen geprägt und die Euklidische Geometrie dementsprechend umgestaltet. Daher erscheint der Übergang zu den Inhalten der „Neueren Geometrie“ hier fließender. Gleiches gilt auch für den Lehrgang Müllers, der einige für die „Neuere Geometrie“ charakteristische Aspekte wie den Aufbau aus möglichst einfachen Grundgebilden oder die Dualität bereits in der Euklidischen Geometrie berücksichtigte und zum Beweisen von Sätzen vielfach auf Symmetrieargumente zurückgriff. Von einer wirklichen Integration der „Neueren Geometrie“ in die Euklidische kann jedoch bei beiden nicht wirklich die Rede sein, da beide den größten Teil der neuen Inhalte erst im Anschluss an die traditionellen Themen behandelten. Die vollständige Trennung von Euklidischer und „Neuerer Geometrie“ findet sich nur im Lehrgang Bögers, da er bei der Entwicklung der letzteren in keiner Weise auf erster zurückgreift.

Kapitel 4

Vorschläge zur Weiterentwicklung der Reform und der Anfang vom Ende der „Neueren Geometrie“ als Unterrichtsgegenstand

Wie bereits in Kapitel 2.1 dargestellt veröffentlichte die ZmnU nach dem Ende der breiten Diskussion in den Anfangsjahren noch vereinzelte Artikel, die einen Bezug zum Thema „Neuere Geometrie“ und deren schulischer Umsetzung aufwiesen. Dabei lässt sich feststellen, dass ungefähr ab 1885 keine kritischen Beiträge mehr veröffentlicht wurden, während sich die Befürworter der Reform (meist durch Vorstellen eines selbst erprobten Lehrganges) weiterhin zu Wort meldeten. Dies änderte sich mit Beginn des 20. Jahrhunderts, als mehrere Autoren eine Bilanz des Erreichten zogen und Vorschläge für die weitere Entwicklung machten. Einen besonderen Schub erhielt die Debatte durch eine Fußnote zu einem Artikel Rudolf Bögers im 1914 erschienenen 45. Band (vgl. 4.2), in der die Schriftleitung der ZmnU an die Diskussion um die „Neuere Geometrie“ in den ersten Jahrgängen erinnerte. Nachdem die Passage über den „Königsweg zur Geometrie“¹ zitiert wurde, führte sie aus: „Seitdem sind fast 45 Jahre ins Land gegangen. Die neuere Geometrie hat in dieser Zeit, weit entfernt, als selbständiges und gleichwertiges Unterrichtsgebiet neben die euklidische Geometrie zu treten, nur geringe Fortschritte in der höheren Schule gemacht. Es hat aber den Anschein, als ob in letzterer Zeit die Versuche, die nie ganz geruht haben, der neueren Geometrie ihren Platz an der Sonne zu schaffen, energischer und häufiger sich wiederholen. Da dürfte es angebracht sein, auch in dieser Zeitschrift wieder einmal die Frage zur Erörterung zu stellen.“² Und die Schriftleitung ermunterte die Leser, ihre Meinungen und Erfahrungen in Form von Artikeln einzusenden und so erneut eine breite Diskussion anzustoßen. Das Erscheinen der Fußnote war vermutlich eine erste Folge des in Kapitel 2.1 erwähnten Eintritts Walther Lietzmanns in die Redaktion der ZmnU und der damit einhergehenden Verschiebung der Schwerpunkte der Zeitschrift in Richtung didaktischer Fragen. Bei den in den Artikeln vertretenen Standpunkten fällt auf, dass auch die Befürworter der „Neueren Geometrie“ Veränderungen an ihrer bisherigen Umsetzung anmahnten. So plädierte eine relativ große Zahl von Autoren für eine stärkere Verbindung der „Neueren Geometrie“ mit der darstellenden Geometrie (4.1). Eine andere Gruppe

¹ vgl. S. 32

² ZmnU 45, S. 19

kritisierte die zu starke Anbindung der „Neueren Geometrie“ an die euklidische und forderte deren vollständige Loslösung (4.2). Ein dritter Ansatz bestand darin, die „Neuere Geometrie“ im Sinne des *Erlanger Programms* weiterzuentwickeln (4.3). Auf der anderen Seite wurde auch das Verhältnis zu den neu aufkommenden Vorschlägen zur Umgestaltung des Mathematikunterrichts diskutiert, die sich vor allem in der *Meraner Reform* manifestierten (4.4). Die genannten Aspekte dürften neben einer allgemeinen Kürzung des Umfangs des Mathematikunterrichts in den 1920er Jahren zum allmählichen Verschwinden der „Neueren Geometrie“ aus den Lehrplänen beigetragen haben (4.5).

4.1 „Neuere Geometrie“ und darstellende Geometrie

Nachdem die bereits in Kapitel 1 erwähnte Verbindung von projektiver und darstellender Geometrie an den Technischen Hochschulen erfolgreich etabliert worden war, entstand aufseiten der dort Lehrenden der Wunsch, die für die Fachwissenschaft vorgesehenen Konzepte auch auf den schulischen Bereich zu übertragen. So führte beispielsweise Wilhelm Fiedler in einem Artikel von 1877 aus: „ich bin niemals darüber in Zweifel gewesen, dass das Nämliche auch für den Elementarunterricht gelte, weil die darstellend geometrische Methode allein die fundamentale Bedeutung der Steiner’schen Elementargebilde und die natürliche Richtung der Untersuchung auf die projectivischen Eigenschaften der Figuren ganz direct hervortreten lässt durch ihre Bedeutung im Vorgange des Projicirens.“³ Und auch Theodor Reye plädierte in der bereits erwähnten Rektoratsrede für die Übertragung seines Vorschlags, beide Gebiete zu verbinden, auf den Schulunterricht: „Dass die Kenntniss der neueren synthetischen Geometrie von grossem Nutzen ist, dass insbesondere die heutigen Projectionsmethoden nicht allein für Techniker und Naturforscher, sondern für jeden Gebildeten von hohem Interesse sind, wird kein Kundiger bestreiten.“⁴

Daneben wurde allerdings auch seitens der Lehrer verstärkt auf die Vorteile hingewiesen, die aus ihrer Sicht die Verzahnung von projektiver und darstellender

³ Fiedler 1877, S. 86f

⁴ Reye 1886, S. 47

Geometrie biete.⁵ Im Unterschied zum in Kapitel 2 dargestellten Beginn der Diskussion über die „Neuere Geometrie“, wo es noch eher um ein nutzbringendes Nebeneinander beider Gebiete ging (vgl. die Ausführungen Beyels und Haucks in Kapitel 2), lag der Fokus jetzt auf der Überwindung der Trennung durch eine Annäherung der „Neueren Geometrie“ an die darstellende Geometrie.

4.1.1 Paul Zühlke⁶

Infolge des Aufrufs der Schriftleitung erschien bereits im 45. Band⁷ der ZmnU (1914) eine Vielzahl von Beiträgen, in denen der aktuelle Stand der Reform und Möglichkeiten der Weiterentwicklung angesprochen wurden. Einer dieser Artikel stammte von Paul Zühlke und trug den Titel *Zur Frage nach der Bedeutung der projektiven Geometrie für den mathematischen Schulunterricht* (ZmnU 45, S. 393-397). Darin betonte er zunächst sehr deutlich, dass „ordnende Prinzipien“ eine große Relevanz für die Mathematik hätten⁸ und stellte fest: „Die neuere Geometrie (auch „projektive Geometrie“ oder „Geometrie der Lage“) ist ein solches ordnendes Prinzip; sie bringt Klarheit und Übersicht in die schier endlose Fülle geometrischer Sätze, sie schließt mathematische Wahrheiten, die sonst zerstreut nebeneinander, ja fast chaotisch durcheinander zu laufen scheinen, wie mit einem Zauberschlage zu einer Einheit zusammen [...]“⁹. Daher könnten nun auch die Schüler bei Verwendung der projektiven Geometrie im Mathematikunterricht mehr Inhalte (geordnet) im Gedächtnis behalten. Neben dem Aspekt des Ordnen war es Zühlke aber auch wichtig, dass durch die projektive Geometrie Verbindungen zu anderen mathematischen Gebieten aufge-

⁵ Auch dies mag durch den Unterricht an den Technischen Hochschulen mit verursacht worden sein, da die Mathematiklehrer (in Preußen ab 1898) einen Teil ihres Studiums an einer solchen absolvieren durften.

⁶ Paul Fritz Zühlke wurde am 1.7.1877 in Berlin geboren. Nachdem er 1895 am dortigen Königstädtischen Realgymnasium die Reifeprüfung abgelegt hatte, studierte er ebenfalls in Berlin Mathematik und Naturwissenschaften. Das Studium schloss er 1899 mit der Staatsprüfung ab. Nach Seminar- und Probejahr erhielt er 1901 eine Stelle als Oberlehrer an der Oberrealschule in Charlottenburg, 1907 wurde er an das Realgymnasium in Grunewald versetzt. 1911 wurde Zühlke zum Direktor des Realgymnasiums in Landeshut (Schlesien) ernannt. Neben seiner Tätigkeit im Schuldienst war Zühlke auch im wissenschaftlichen Bereich aktiv. So promovierte er 1902 an der Universität Rostock (*Über die geodätischen Linien und Dreiecke auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses und ihre Beziehungen zur sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie*) und war zwischen 1903 und 1910 nebenamtlicher Assistent an der TH Berlin.

⁷ Ein Band der ZmnU bestand aus jeweils sechs Heften, die über das Jahr verteilt erschienen.

⁸ Zum Vergleich zog er das Befüllen eines Koffers heran, in dem sich bei ordentlichem Packen viel mehr Gegenstände unterbringen lassen.

⁹ Zühlke 1914, S. 393f

zeigt werden könnten, die dadurch nicht mehr isoliert nebeneinander ständen. Er betonte insbesondere das Zusammenspiel mit der darstellenden Geometrie, die zur damaligen Zeit als eigenständiges Fach in den realistischen Anstalten (Realgymnasien und Oberrealschulen) unterrichtet wurde. Dabei wurde inhaltlich sowohl die Theorie der Parallel- als auch der Zentralprojektion (Perspektive) behandelt. Die praktische Ausführung der Zeichnungen erfolgte vor allem im (meist fakultativen) „Linearzeichnen“.¹⁰ Laut Zühlke sei schon in ihrer historischen Entwicklung die darstellende Geometrie stets eng mit der projektiven Geometrie verknüpft gewesen¹¹. Diese enge Verbindung könne nun auch im Schulunterricht so genutzt werden, dass beide Gebiete profitierten. Einmal biete es sich an, beim Beweis projektiver Sätze auf die darstellende Geometrie zurückzugreifen. Als ein mögliches Beispiel dafür nannte Zühlke den Satz von Desargues, der

den Schülern sehr viel leichter falle, wenn die von **S** ausgehenden Strahlen als Kanten einer Pyramide aufgefasst würden. Die Dreiecke **A₁B₁C₁** und **A₂B₂C₂** stellten ebene Schnitte mit dieser Pyramide dar. Die Aussage des Satzes ergebe sich dann sehr einfach, wenn man beachte, dass sich zwei Ebenen in einer Geraden schneiden¹². Zühlke stellte zusammenfassend fest: „Wer sich einmal daran gewöhnt hat, die Figur räumlich anzusehen, dem wird die Richtigkeit des Desarguesschen Satzes sinnfällig und nahezu unvergeßlich geworden sein. Aber das Hilfsmittel, die Figur des Desar-

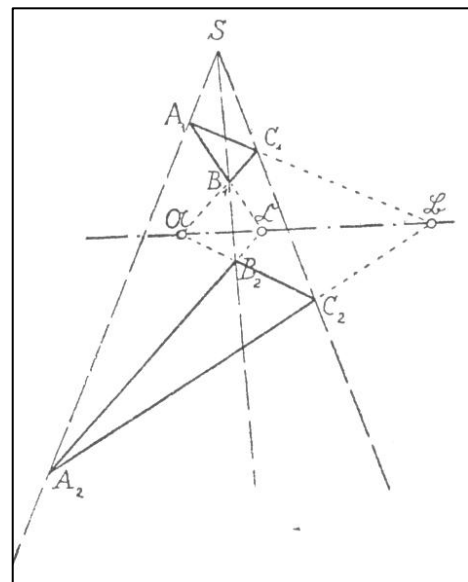


Abbildung 101: Satz von Desargues
(aus: Schülke 1911, S. 395)

guesschen Satzes als ebenes Abbild einer räumlichen Konfiguration zu betrachten, ist nicht etwa nur ein pädagogischer Kunstgriff, es ist auch sachlich völlig berechtigt, denn weil der Desarguessche Satz im Raume gilt, darum gilt er auch für die Ebene.“¹³ Auf der anderen Seite könne auch die darstellende von der projektiven Geometrie profitieren, indem deren Bezeichnungsweise (z.B. uneigentliche Punkte)

¹⁰ vgl. Zühlke 1911

¹¹ Desargues und Poncelet seien beispielsweise von der Zentralprojektion ausgegangen und hätten daraus die projektive Geometrie entwickelt.

¹² Im Grunde genommen nutzte Zühlke hier dieselbe Argumentation wie Böger (vgl. 3.4).

¹³ Zühlke 1914, S. 396; In seinen *Grundlagen der Geometrie* zeigte Hilbert in großer Ausführlichkeit, dass der Satz des Desargues in der ebenen Geometrie nur mit Hilfe der Axiome der Kongruenz bewiesen werden kann. Für einen (rein projektiven) Beweis ohne Verwendung der Kongruenz bleibt nur der Übergang in den Raum. (vgl. Hilbert 1899)

in die darstellende Geometrie übernommen werde. Auf „Fragen der darstellenden Geometrie läßt sich in der Sprache der projektiven Geometrie sehr einfach, natürlich und erschöpfend antworten, während die alte Euklidische Sprache zu gekünstelten und unbefriedigenden Antworten führt.“¹⁴

Als weiteren für die Schule wichtigen Aspekt sah Zühlke die Vorteile bei der Behandlung der Kurven zweiten Grades in den oberen Klassen. Da diese stets als Kegelschnitte bezeichnet würden, sollten die Schüler auch deren Erzeugung als ebene Schnitte des Kreiskegels kennenlernen und die Kurven selbst zeichnen, was stets große Freude hervorrufe. Dabei sei es gleichgültig, ob man mit der neueren oder der darstellenden Geometrie beginne. Beide Möglichkeiten führten dazu, „daß die projektive Geometrie und die darstellende Geometrie sich gegenseitig unterstützen und ihren Wert für den Schulunterricht gegenseitig steigern.“¹⁵

4.1.2 Maximilian Enders¹⁶

Ebenfalls für die Verbindung der „Neueren Geometrie“ mit der darstellenden Geometrie plädierte Maximilian Enders in seinem Artikel *Die Perspektivität im geometrischen Unterricht der OII*¹⁷ (ZmnU 48 (1917), S. 341-350), wobei er die bisherige Behandlung der „Neueren Geometrie“ in der Schule sehr hart kritisierte. Er tat dies vor dem Hintergrund, dass alle Unterrichtsfächer ihren Beitrag zum „Verständnis der wichtigsten Kulturerscheinungen“¹⁸ leisten müssten. Für den Mathematikunterricht ergebe sich daraus die „nachdrückliche Betonung der Anwendungen, da hauptsächlich auf diesen der Wert der Mathematik für unsere Kultur beruht.“¹⁹ Die in der Schule behandelten Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ seien nun mit dem Ziel

¹⁴ Zühlke 1914, S. 396

¹⁵ Zühlke 1914, S. 397

¹⁶ Enders wurde am 2.1.1883 in Dammerkirch (Elsass) geboren und verließ 1901 das Gymnasium in Colmar mit dem Reifezeugnis. Anschließend studierte er Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität in Straßburg, wo er 1905 promovierte und 1906 die Examensprüfung bestand. Das Probejahr absolvierte er am Gymnasium in Hagenau und an der Oberrealschule in Metz, wo er anschließend noch ein Jahr als Hilfslehrer arbeitete. 1908 erhielt er dann eine Stelle als Oberlehrer am Realprogymnasium in Nowawes (Brandenburg).

¹⁷ OII war die Abkürzung für die Obersekunda, die der heutigen Klasse 11 (im neunjährigen Gymnasium) entsprach.

¹⁸ Enders 1917, S. 341

¹⁹ Enders 1917, S. 341

ausgewählt worden²⁰, das Apollonische Berührproblem lösen zu können. Dieses habe aber „weder einen praktischen noch einen theoretischen Wert und darf daher nicht maßgebend sein für die Auswahl und Behandlung des Lehrstoffs.“²¹ Weiterhin hätten die von ihm genannten Inhalte eigentlich gar nichts miteinander zu tun, es fehle an einem leitenden Prinzip und sie seien „bestenfalls eine Auswahl aus einem größeren Ganzen. Dieses nennt man „neuere“ Geometrie, weil es an einem sachlichen Namen fehlt, d. h. eben, weil man keinen gemeinsamen Grundgedanken erkennen kann.“²² Hier negierte Enders also eines der zentralen Argumente der Befürworter der „Neueren Geometrie“, durch die ja gerade ein systematischer Aufbau nach wenigen Leitideen erfolgen sollte. Als letzten Kritikpunkt nannte Enders die fehlende Verknüpfung der „Neueren Geometrie“ mit den in der Prima vorgesehenen Inhalten (*Grundlehren der darstellenden Geometrie und die wichtigsten Sätze über Kegelschnitte in elementar synthetischer Behandlung*), so dass er letztlich zum Ergebnis kam: „Nach alledem ist der Nutzen des Unterrichts in der neueren Geometrie so gering, daß er in keinem Verhältnis mehr steht zu der aufgewendeten Zeit und Arbeit.“²³

Als Alternative schlug Enders nun vor, aus der „neueren Geometrie“ eine „projektive Geometrie“²⁴ zu machen, indem die Perspektivität (d.h. Zentralprojektion und Zentralkollineation) als leitendes Prinzip herangezogen werde. Um zu zeigen, dass die Auswahl und Verteilung des Stoffes davon kaum beeinflusst würde, beschrieb Enders dann den seines Erachtens sinnvollen Aufbau des Lehrgangs. Er schlug vor, die Sätze von Menelaos und Ceva in die Dreiecksgeometrie in Untersekunda vorzuziehen und dafür in Obertertia auf die Ähnlichkeit ganz zu verzichten. Die projektive Geometrie sollte dann in Obersekunda beginnen und zum einen allgemeine Grundlagen der Perspektivität ebener Figuren (u.a. harmonische Punkte, Ähnlichkeitslage und Involutionen), zum anderen die Erzeugung der Kegelschnitte durch Zentralprojektion des Kreises umfassen. Dabei könnten die Potenzlinie und die Polare im Zusammenhang mit speziellen Zentralkollineationen behandelt werden. Die Herleitung der projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte sollte dann in Prima erfolgen²⁵.

²⁰ Enders bezog sich auf die im Preußischen Lehrplan von 1901 für die Oberrealschule vorgesehenen Inhalte. Zusätzlich würden die meisten Schulbücher die Sätze von Menelaos, Ceva, Pascal und Brianchon sowie die Polarentheorie enthalten.

²¹ Enders 1917, S. 342

²² Enders 1917, S. 341

²³ Enders 1917, S. 342

²⁴ Die Wahl der Bezeichnung erfolgte hier wohl zur Betonung des Vorgangs der Projektion.

²⁵ Zur Betrachtung der Brennpunkteigenschaften empfahl Enders die analytische Geometrie.

Den restlichen Teil des Artikels nutzte Enders dann, um seine Vorschläge für den Beginn des Unterrichts in Obersekunda (bis zur Involution) anhand von Beispielen zu verdeutlichen. Am Schluss bemerkte er dann noch, dass die projektive Geometrie weitaus stärker das Anschauungsvermögen der Schüler fordere als die ebene Euklidische Geometrie und daher Veranschaulichungsmittel wie Modelle oder die Projektion mit einer Lampe eingesetzt werden sollten. Dadurch werde aber auch die Raumvorstellung gefördert: „So wird gerade durch die projektive Geometrie das Vorstellungsvermögen gut ausgebildet, was den Schülern dann in der darstellenden Geometrie, wo die Anforderungen noch erheblich größer sind, sehr zu statten kommt.“²⁶

4.1.3 Christian Beyel

Waren sich Zühlke und Enders in ihrer positiven Bewertung der Verbindung mit der darstellenden Geometrie weitgehend einig, gab es auf der anderen Seite auch Widerspruch zu diesem Vorschlag. So vertrat Christian Beyel im 46. Band der ZmnU (1915) die genau gegenteilige Position, nämlich beide Gebiete strikt zu trennen. In seinem Aufsatz *Über das geometrische Denken mit besonderer Berücksichtigung der darstellenden Geometrie* sprach er sich sogar dagegen aus, die Zentralprojektion im Rahmen der darstellenden Geometrie in der Schule zu behandeln. Diese habe zwar von wissenschaftlicher Seite ihre Berechtigung, da sie zu systematischem Arbeiten anrege und als Hilfsmittel beim Beweisen vieler Sätze der Raumgeometrie diene. In Bezug auf die Schule, wo es insbesondere um die Ausbildung der Raumanschauung gehe, kam Beyel allerdings zum gegenteiligen Urteil: „Aber so, wie sie [die Zentralprojektion] als Darstellungsmethode ausgebildet wurde, ist sie geradezu verwirrend, und sie schlägt die Raumanschauung tot.“²⁷ Als Gründe für sein vernichtendes Urteil führte Beyel an, dass in praktischen Aufgaben vielfach eine zu geringe Distanz von nur wenigen Zentimetern gewählt werde²⁸, so dass verzerrte Bilder entstünden. Wer-

²⁶ Enders 1917, S. 349

²⁷ Beyel 1915, S. 87

²⁸ Unter der Distanz versteht man den Abstand des Projektionszentrums zur Bildebene. Die Fluchtpunkte aller Geraden, die die Bildebene im 45°-Winkel schneiden, liegen auf einem Kreis, dessen Radius so groß ist wie die Distanz (dem *Distanzkreis*). Vermutlich um diesen zeichnen zu können, durfte die Distanz nicht zu groß gewählt werden.

de zusätzlich das Projektionszentrum in den zu projizierenden Körper gelegt²⁹, gehe die Raumanschauung völlig verloren. Übrig bleibe ein „Schematismus, dem jede Bildlichkeit verloren gehen muß. Der Schüler zieht seine Linien so, wie er oft mechanisch seine algebraischen Formeln gebraucht. Er kann dabei zu ganz richtigen Resultaten kommen, aber der Zweck der darstellenden Geometrie geht verloren.“³⁰ Den Grund für die Aufnahme der Zentralprojektion in die darstellende Geometrie sah Beyel in dem Bestreben, die „projektivische Geometrie in „organischen Zusammenhang“ mit der darstellenden Geometrie zu bringen.“³¹ Dies berge die Gefahr, dass nur noch die Situation in der Bildebene betrachtet werde und die Schüler den Vorgang der Abbildung im Raum aus dem Blick verlören. Damit trete die Grundidee der darstellenden Geometrie und vor allem die eigentlich anzustrebende Förderung der Raumanschauung in den Hintergrund. Jedoch war Beyel, wie man an dieser Stelle meinen könnte, kein Gegner der projektiven Geometrie. Er plädierte vielmehr dafür, der Behandlung der darstellenden Geometrie einen ausführlicheren Kurs der projektiven Geometrie voranzustellen³². Dies bringe einerseits den Vorteil, dass die dort unterrichteten Inhalte in der darstellenden Geometrie vorausgesetzt werden könnten. Zudem ergebe sich oft „Gelegenheit zu konstruktiven Aufgaben, zu Übungen im Zeichnen und zu Entwicklungen des praktischen Blickes beim Disponieren von Zeichnungen. Der Sinn für Ordnung, für Genauigkeit, ja für ein gewisses ästhetisches Empfinden“³³ werde gefördert und zwar sowohl an den realistischen Anstalten als auch an den Gymnasien. Daher sollten die Dreiecksberechnung und die sphärische Trigonometrie³⁴ aus der Mittelstufe gestrichen werden und die Kegelschnitte an ihre Stelle treten, jedoch nicht in analytischer Behandlung, „sondern so, daß man nach Pascal, Brianchon u.a. die Objekte wirklich konstruiert. Ihre Darstellung ist das Wesentliche beim Unterricht in der darstellenden Geometrie, und für ihn bietet die Einführung in die projektivische Geometrie die natürliche und gegebene Vorstufe.“³⁵

²⁹ Laut Beyel geschah dies „der Kuriosität willen oder weil die Disposition „schlecht geraten“ ist“ (Beyel 1915, S. 87).

³⁰ Beyel 1915, S. 87

³¹ Beyel 1915, S. 87

³² Dieselbe Position hatte er auch in seinem Artikel von 1894 vertreten (vgl. 2.1.4).

³³ Beyel 1915, S. 88

³⁴ Hierin sah Beyel einen „Überrest aus der Zeit, in welcher Feldmesserei und Astronomie das Wesen der praktischen Mathematik ausmachten“ (Beyel 1915, S. 88).

³⁵ Beyel 1915, S. 88

4.2 Ein Plädoyer für die wahre „Neuere Geometrie“

Eine andere Idee zur Weiterführung der Reform zielte gewissermaßen auf das Gegenteil der im vorigen Unterkapitel dargestellten Vorschläge ab, nämlich die „Neuere Geometrie“ als weitgehend eigenständiges Gebiet zu verstehen. Die damit verbundene Absicht war, zwei Fehlentwicklungen der Reform zu beheben, die als Ursache für ein völlig falsches Bild der „Neueren Geometrie“ in der öffentlichen Wahrnehmung gesehen wurden: die Verwendung der Methoden der Euklidischen Geometrie und die Beachtung von Nützlichkeitsaspekten zulasten von innermathematischen Überlegungen. Diese Gefahr wurde schon bei der früheren Diskussion um die Einführung der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht gesehen (vgl. etwa die Ausführungen Haucks in Kapitel 2.2.1) und hatte sich wohl in Teilen bewahrheitet. Daher sollte die „Neuere Geometrie“ im Sinne Steiners bzw. noch besser im Sinne von Staudts betrieben werden, d.h. als Inzidenzgeometrie in der projektiven Ebene.

4.2.1 Rudolf Böger

Wie schon erwähnt bildete der im 45. Band der ZmnU (1914) erschienene Artikel Rudolf Bögers *Inhalt, Art und Name der neueren Geometrie* (ZmnU 45, S. 19-27) und der sich daran anschließende Aufruf der Schriftleitung den eigentlichen Ausgangspunkt für das erneute Aufkeimen der Diskussion um die „Neuere Geometrie“. Darin lieferte Böger gewissermaßen den theoretischen Überbau, auf dem die Konzeption seines Unterrichtsvorschlags³⁶ beruhte. Gleichzeitig kritisierte er (teilweise implizit) die bisherige Auswahl der unter dem Begriff „Neuere Geometrie“ unterrichteten Inhalte und die im Unterricht benutzten Methoden, die seiner Meinung nach zu einer zu starken Anbindung an die Euklidische Geometrie geführt hätten.

Bezüglich der unterrichteten Inhalte begrüßte es Böger sehr, dass die „Neuere Geometrie“ in den aktuellen Lehrbüchern in den oberen Klassen eine größere Rolle spiele und man gleichzeitig aufgehört habe, harmonische Punkte und Strahlen, die Potenzlinie sowie Ähnlichkeitspunkte und –achsen unter dieser Überschrift zu unterrichten.³⁷ Die genannten Inhalte hätten nämlich „in der gebräuchlichen Fassung nicht

³⁶ vgl. dazu das in 3.4 vorgestellte Lehrbuch Bögers *Elemente der Geometrie der Lage*

³⁷ Letzteres scheint eher ein Wunsch Bögers als eine gesicherte Tatsache zu sein.

einmal den Wert von Übungsbeispielen³⁸. Stattdessen habe die Mehrheit der Autoren nun verstanden, „daß man die Ziele der neueren Geometrie weiter stecken muß, wenn man aus den in ihr liegenden unbegrenzten Möglichkeiten für die Schule Nutzen ziehen will, und macht sich daran, die Lehre von den Kegelschnitten im Sinne der neueren Geometrie vorzutragen.“³⁹ Eine große Schwierigkeit liege allerdings darin festzulegen, bis zu welchem Punkt man im Schulunterricht gehen könne. So habe es einerseits dahingehend Auswüchse gegeben, dass die für den Schulunterricht ausgewählten Inhalte zu umfangreich gewesen seien.⁴⁰ Auf der anderen Seite sei es aber auch gerade eine Eigenschaft der „Neueren Geometrie“, dass man sie aufgrund der Verwendung allgemeiner Methoden wesentlich einfacher und schneller erlerne als die „alte“ Geometrie und zusätzlich auch die bereits bekannten Inhalte besser einordnen könne: „Die alte Geometrie schreitet also vom Besonderen zum Allgemeinen fort, und jeder ihrer Schritte ist ein „Kunstwerk“, ist schwer. Die neuere Geometrie schreitet vom Allgemeinen zum Besonderen fort, und solche Schritte sind leicht. Die alte Geometrie ist daher das Schwere von gestern und die neuere Geometrie das Leichte von morgen.“⁴¹

Nachdem Böger nun die Kegelschnitte als Inhalt festgelegt hatte, führte er aus, dass unter dem Begriff „Neuere Geometrie“ mehrere „Arten“ der Geometrie zusammengefasst seien und eine allgemeine Definition gar nicht möglich sei. Aus dem Schulunterricht gänzlich ausschließen wollte er allerdings diejenige Art, „welche durch planimetrische Hilfsmittel gewonnene Kreissätze [vermutlich meinte er den Satz des Pascal oder die Sätze über Pol und Polare am Kreis] durch Projektion auf Kegelschnitte überträgt. Sie hat für die Schule keinen Wert, weil Kreissätze, die von projektiven Eigenschaften handeln, sich gegen planimetrische Beweisformen spröde verhalten und obendrein leichter unmittelbar für die Kegelschnitte bewiesen werden.“⁴² Damit war selbstverständlich noch nicht gesagt, was Böger denn nun unter „Neuerer Geometrie“ verstehen wollte. Dies machte er erst deutlich, als er anschließend den Unterschied zur „alten“ Geometrie erklärte, wobei auch bei ihm die benutzten Methoden das Unterscheidungsmerkmal waren: „Die neuere Geometrie

³⁸ Böger 1914, S. 19

³⁹ Böger 1914, S. 19f

⁴⁰ Als Negativbeispiele nannte Böger die Bücher von Seeger (*Fundamentaltheorieen der Neueren Geometrie*. Braunschweig: Vieweg 1880) und Gallenkamp (*Die Kegelschnitte in elementar-synthetischer Behandlung*. Iserlohn: Baedeker 1880), die in der Tat eher an mathematische Fachliteratur als an Schulbücher erinnern.

⁴¹ Böger 1914, S. 21

⁴² Böger 1914, S. 21; Vermutlich schloss er gerade diese Art der „Neueren Geometrie“ aus, weil sie im Schulunterricht eine große Rolle spielte, jedoch nicht Bögers Vorstellungen entsprach.

gewinnt daher ihre Sätze durch Projizieren, d.h. durch Aufstellen von Ketten perspektiv liegender Gebilde; die alte Geometrie durch Messen.“⁴³ Somit könnten also die Begriffe messende und projizierende Geometrie oder auch Geometrie des Maßes und Geometrie der Lage als Bezeichnungen verwendet werden. Anstatt von projizierender könne man auch von projektiver oder reiner Geometrie sprechen, in besonderen Fällen auch von neuerer Geometrie. Hingegen sollte die Bezeichnung synthetische Geometrie nicht mehr verwendet werden. Diese habe zwar Steiner eingeführt, allerdings eher als Abgrenzung zum bereits üblichen Begriff analytische Geometrie. Die in der projektiven Geometrie übliche Richtung vom Allgemeinen zum Besonderen sei nun einmal kein synthetisches Vorgehen und daher müsse auch dieser Name verschwinden.

Als Entdecker der „Neueren Geometrie“ sah Böger Steiner und von Staudt an⁴⁴, deren Werke *Systematische Entwicklung* und *Geometrie der Lage* die Basis für den schulischen Lehrgang bilden sollten⁴⁵: „Beide Werke bringen für die Schule dasselbe: den neuen Gedanken, durch Aneinanderreihung von Strahlenbüscheln und Punktreihen in perspektiver Lage Kegelschnittaufgaben zu lösen und Kegelschnittsätze zu beweisen.“⁴⁶ Da die Darstellung in beiden Büchern allerdings an vielen Stellen sehr schwierig sei, empfahl er den Rückgriff auf die Bearbeitungen von Schröter (*Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt aus projektivische Eigenschaften*) und Reye (*Die Geometrie der Lage*), merkte jedoch an, dass auch diese nicht direkt für den Einsatz in der Schule geeignet seien: „Es bleibt also noch die Arbeit, aus der Geometrie der Lage eine Schulgeometrie zu machen. Diese Arbeit, die bisher kaum begonnen ist, fällt den Lehrern zu. Daß diese sich ihr bis jetzt entzogen haben, wird nur durch den Umstand begreiflich, daß an den Universitäten selten über projektive Geometrie gelesen wird.“⁴⁷ Hieraus wird ersichtlich, dass Böger zwar gewisse Anpassungen des wissenschaftlichen Lehrgangs der projektiven Geometrie für den Schulunterricht (d.h. eine didaktische Transposition) als notwendig ansah, die grundlegende Konzeption jedoch erhalten bleiben sollte. Dies wird auch bei Betrachtung seines Lehrbuches deutlich (vgl. 3.4), wo an vielen Stellen Parallelen zu Reyes *Geometrie der Lage* er-

⁴³ Böger 1914, S. 21

⁴⁴ Die Beiträge der französischen Mathematiker erwähnt Böger nicht, sondern betont (der Zeit entsprechend), dass die „Neuere Geometrie“ von zwei Deutschen erschaffen worden sei.

⁴⁵ Böger favorisierte dabei den Ansatz von Staudts, die „Neuere Geometrie“ unabhängig von der Euklidischen aufzubauen und regte an, „im Gegensatz zur euklidischen Geometrie von einer Staudtschen Geometrie zu sprechen.“ (Böger 1914, S. 23)

⁴⁶ Böger 1914, S. 22

⁴⁷ Böger 1914, S. 23

kennbar sind. Die fehlenden Vorlesungen an den Universitäten wurden bereits 40 Jahre vorher von Sturm als Ursache für die Probleme bei der Aufnahme der „Neueren Geometrie“ in den Schulunterricht angesehen.⁴⁸

Bei der Entwicklung eines Lehrgangs für die Schule müsse laut Böger vor allem darauf geachtet werden, dass sie zu jeder Zeit in voller Allgemeinheit erfolge, da nur so die Einfachheit der Geometrie der Lage erhalten bleibe. Beispielsweise sollten „imaginäre“ Elemente, die letztlich nur einen Sonderfall darstellten, im Schulunterricht überhaupt nicht verwendet werden.⁴⁹ Die neben dem Lehrgang auch benötigten Übungsaufgaben würden sich aufgrund der Allgemeinheit der Geometrie der Lage quasi von selbst ergeben: „Die Übungen bestehen eben darin, daß die allgemeinen Sätze auf besondere Fälle angewendet werden. Vom Schüler wird also nur gefordert, daß er im Besonderen das ihm bereits bekannte Allgemeine wiedererkennt, und dieser Forderung kann auch der Durchschnittsschüler ohne große Anspannung genügen.“⁵⁰

Für den Aufbau des Lehrgangs schlug Böger eine Gliederung in sechs Stufen vor, die sich weitgehend auch in seinem Lehrbuch (vgl. 3.4) wiederfinden. Auf der ersten Stufe sollten die Schüler durch das praktische Ausführen von Zeichnungen mit der projektiven Geometrie in Kontakt kommen und dabei selbstständig Zusammenhänge erkennen. Beispielsweise könne die Konstruktion eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte mit Hilfe projektiver Strahlenbüschel durchgeführt⁵¹ und die Veränderungen des Kegelschnitts bei Variation der Punkte untersucht werden. Innerhalb der zweiten Stufe sollte dann bewiesen werden, dass die Konstruktion unabhängig ist von der Wahl der zwei Hilfsgeraden, die dazu dienen, die Strahlenbüschel projektiv aufeinander zu beziehen. Außerdem könne man die Festlegung eines Kegelschnitts durch vier Punkte und eine Tangente, drei Punkte und zwei Tangenten usw. behandeln. Die Herleitung der analytischen Zusammenhänge aus der projektiven Geometrie bildete den Inhalt der dritten Stufe⁵². Allerdings warnte Böger davor, bereits bei der Einführung der projektiven Inhalte auf Hilfsmittel aus der Euklidischen

⁴⁸ In den Preußischen Ordnungen für die Staatsprüfung ab 1866 ist die „Neuere Geometrie“ nicht als Prüfungsgegenstand benannt (vgl. Lorey 1911), Vorlesungen fanden jedoch statt (vgl. Lorey 1916).

⁴⁹ Im Vorwort seines fachwissenschaftlichen Buches *Ebene Geometrie der Lage* erwähnte Böger, dass er die imaginären Elemente nicht benötige, da er anstatt mit Ordnungselementen, die in manchen Fällen imaginär werden, immer mit Involutionen arbeite: „Das Wort imaginär ist aber nicht bloss unnötig, es ist geradezu schädlich; denn es kann, weil ihm keine Vorstellung entspricht, nur verwirrend wirken. Das Wort imaginär sollte daher aus der Geometrie der Lage verbannt werden.“ (Böger 1900, S. III)

⁵⁰ Böger 1914, S. 24

⁵¹ vgl. die auf S. 188f dargestellte Konstruktion

⁵² vgl. dazu S. 195f

Geometrie zurückzugreifen: „Überhaupt sollte man aus der reinen Geometrie die Trigonometrie ganz verbannen und z.B. nicht versuchen, das Doppelverhältnis von vier Strahlen durch trigonometrische Funktionen zu definieren. Das ist ein Versuch mit untauglichen Mitteln. – Ferner soll man bei der Übertragung projektiver Ergebnisse auf die messende Geometrie, z.B. bei den erwähnten projektiv-analytischen Aufgaben, Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze nicht verwenden, sondern immer nur den Satz vom Doppelverhältnis⁵³; denn dieser allein wahrt die Allgemeinheit.“⁵⁴ Die vierte Stufe umfasste schließlich die Polarentheorie, die fünfte Stufe die Erzeugung der Kegelschnitte über ihre Tangenten, d.h. durch Verbinden der zugeordneten Punkte zweier projektiver Punktreihen. Wer dies alles mit seinen Schülern behandelt habe, könne auf der sechsten Stufe auch die geometrische Optik aus dem Blickwinkel der projektiven Abbildungen behandeln. Dabei war Böger allerdings auch klar, dass nicht in allen Schulen alle Stufen durchlaufen werden konnten, was er auch nicht als Ziel ansah: „Die hier vorgeschlagene Einteilung der projektiven Geometrie in sechs Stufen hat nur den Zweck zu zeigen, wie wenig gefährlich ein Versuch für den Lehrer ist. Wo er auch abbricht, er hat dem Schüler fruchtbringende Kenntnisse vermittelt. Auf jeder Stufe findet der Lehrer, wenn er nur für die wenigen Hauptsätze, die „großen Marksteine“, den Grund sicher gelegt hat, die Schüler empfänglicher für die projektive Geometrie als für die euklidische.“⁵⁵

Somit kann man also festhalten, dass Böger für die vollständige Unabhängigkeit der „Neueren Geometrie“ von der Euklidischen Geometrie plädierte, wie er sie auch in seinem Lehrbuch umgesetzt hatte. Die damals bereits im Schulunterricht erreichten Veränderungen scheinen für ihn nur wenig mit „Neuerer Geometrie“ zu tun gehabt zu haben, mögliche Kompromisslinien sind nicht erkennbar.

⁵³ Das Doppelverhältnis von vier Punkten bleibt beim Projizieren erhalten.

⁵⁴ Böger 1914, S. 26

⁵⁵ Böger 1914, S. 27

4.2.2 Hans Keferstein⁵⁶

In eine ähnliche Richtung wie Böger argumentierte auch Hans Keferstein in seinem Artikel *Aus dem Unterricht in der Geometrie der Lage* (ZmnU 45, S. 385-389). Dabei ist eine gedankliche Nähe zu Böger schon alleine deswegen nicht überraschend, da beide als Kollegen am Realgymnasium des Johanneums in Hamburg arbeiteten. Wie Keferstein ausführte, war dort bereits seit dem Jahr 1900 im Unterricht der Obersekunda und Prima eine Einführung in die Geometrie der Lage üblich, wodurch sich das Johanneum von allen anderen Schulen in Hamburg abgrenzte und den Ruf hatte, die Schüler mit dem Unterricht in diesem nicht obligatorischen Gebiet⁵⁷ unnötig zu belasten. Auch Keferstein selbst hatte bei seinem Dienstantritt im Jahr 1910 Vorbehalte gegenüber der „Neueren Geometrie“, mit der er sich vorher nie beschäftigt hatte. Dennoch übernahm er direkt den Unterricht in der Obersekunda und konnte, da er selbst noch lernte, die sich den Schülern stellenden Schwierigkeiten gut nachvollziehen. Sehr schnell stellte er jedoch fest, „daß auf diesem Gebiete der Mathematik eine selbständige Mitarbeit der Schüler sich entfaltet, wie auf keinem andern.“⁵⁸ Die Gründe für diese Beobachtung, die sich aus der „Neueren Geometrie“ selbst ergäben, stellte er dann im weiteren Verlauf seines Artikels dar.

Zunächst sei die „projektive Schulgeometrie“ dadurch gekennzeichnet, dass der zu vermittelnde Stoff keinen allzu großen Umfang habe und die Beweise lediglich die geometrische Anschauung benötigten: „Sie besteht aus einer ziemlich kurzen und eng zusammenhängenden, darum leicht zu behaltenden Folge von Sätzen, deren Beweise zumeist nur die Anschauungsfähigkeit in Anspruch nehmen.“⁵⁹ Aus den behandelten Sätzen ergäben sich einige Konstruktionsverfahren für die Kurven zweiter Ordnung und auch deren Eigenschaften könnten mit in den Blick genommen werden. Wie Böger sah auch Keferstein es als großen Vorteil an, dass sich aus den allgemei-

⁵⁶ Johannes (Hans) Keferstein wurde am 28.2.1857 in Dresden geboren. Nach dem Besuch der Königlich Preußischen Landesschule Pforta (ein Gymnasium mit Internat) in Naumburg studierte er ab 1877 Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften in Jena und Berlin. Die Examensprüfung legte er 1882 in Berlin ab. 1883 promovierte er in Jena und begann das Probejahr am Wilhelm-Gymnasium in Hamburg, an dem er anschließend zunächst als Hilfslehrer und ab 1885 als ordentlicher Lehrer tätig war. 1889 wechselte er an die Realschule vor dem Lübeckertore, von dort 1896 an die Oberrealschule auf der Uhlenhorst. 1907 wurde er Direktor der Realschule St. Pauli und ging 1910 in gleicher Funktion an das Realgymnasium des Johanneums.

⁵⁷ Nicht obligatorisch meint hier die Form der „Neueren Geometrie“, die Böger und Keferstein als die einzig wahre erachteten. Im Sinne der in 2.5 betrachteten Lehrpläne war die „Neuere Geometrie“ durchaus auch in Hamburg verankert.

⁵⁸ Keferstein 1914, S. 385

⁵⁹ Keferstein 1914, S. 386

nen Sätzen durch Betrachtung von Spezialfällen eine große Zahl verschiedener Übungsaufgaben ableiten lasse, die alle nach einem einheitlichen Verfahren bearbeitet werden könnten. Dadurch würden auch die schwächeren Schüler, deren mathematische Kenntnisse unter Umständen große Lücken aufwiesen, motiviert, sich wieder mit Mathematik zu beschäftigen: „Die projektive Geometrie gibt ihm [dem Schüler] Gelegenheit, noch einmal von vorn anzufangen, und in der Tat hat sich an unsrer Anstalt wiederholt gezeigt, daß Schüler, die bis dahin in der Mathematik völlig versagt hatten, hier endlich wieder festen Boden unter die Füße bekamen und nun wenigstens auf einem mathematischen Gebiete Genügendes, ja Gutes leisteten.“⁶⁰ Auf der anderen Seite könnten die stärkeren Schüler dazu angeregt werden, selbstständig neue Zusammenhänge aufzudecken und auch zu beweisen. Eine große Bedeutung maß Keferstein auch der Variation der Lage der in einer Aufgabe gegebenen geometrischen Objekte bei, wodurch die Fantasie der Schüler aktiviert werde. Dabei könnten oft durch logisches Schließen die Aufgaben „erweitert“ und „verallgemeinert“ werden.⁶¹ Da die projektive Lösung von Ortsaufgaben, die einen Kegelschnitt als Lösung hätten, oft einfacher sei als die analytische Lösung, könnte erstere als Vorbereitung der letzteren dienen.

Anhand des folgenden Beispiels illustrierte Keferstein dann, was die Schüler zu leisten im Stande seien: „Die Spitze eines Dreiecks bewegt sich in Richtung der Grundlinie fort. Welches ist der Ort des Höhenschnitts?“⁶² Dazu präsentierte er eine Lösung der Aufgabe, bei der mit Hilfe von projektiven Strahlenbüscheln gezeigt wird, dass der Höhenschnittpunkt immer auf einer Parabel liegt, und bemerkte, dass seine Schüler diese selbstständig erarbeitet hätten.

Am Schluss seines Artikels machte Keferstein noch zwei wichtige Bemerkungen, von denen sich die erste darauf bezog, dass die zu starke Betonung der Arithmetik in den oberen Klassen der Grund für die Einführung neuer geometrischer Inhalte gewesen sei. Diese Inhalte, die andere Autoren ohne Zweifel als „Neuere Geometrie“ bezeichneten, beschrieb Keferstein in seiner zweiten Bemerkung so: „Man hat die Abhilfe in einer Erweiterung stereometrischer Betrachtungen, in der isolierten Behandlung der Sätze von Polaren, Ähnlichkeitspunkten usw. und in der sogenannten synthetischen

⁶⁰ Keferstein 1914, S. 386

⁶¹ Damit war wohl gemeint, sich systematisch zu überlegen, wie sich die Bestandteile einer Figur bei Variation eines Teils verändern und so auch spezielle Konstellationen mit zu erfassen. Das Wort „verallgemeinern“ ist daher hier etwas missverständlich.

⁶² Keferstein 1914, S. 386; Dieses Problem wird heutzutage noch dazu genutzt, die Überlegenheit von dynamischer Geometriesoftware zu beweisen. (vgl. Weigand 2002, S. 161)

Untersuchung der Kegelschnitte gesucht. Diese Übungen mögen nicht ohne Nutzen sein. Aber sie erinnern etwas an die heilgymnastischen Exerzitien, bei denen im Zimmer Ruder- oder Reitbewegungen ausgeführt werden, ohne daß man dabei vom Fleck kommt. Wer's haben kann, dürfte doch wohl das Boot im freien Wasser und das lebendige Roß vorziehen.“⁶³

Damit ist klar, dass Keferstein in Übereinstimmung mit Böger die neu eingeführten Inhalte nicht als „Neuere Geometrie“ verstand, da ihnen dazu die charakteristischen Methoden fehlten. Beide erinnern in ihrer Radikalität stark an die Positionen, die von den Fürsprechern der „Neueren Geometrie“ 40 Jahre vorher vorgebracht wurden und sich offensichtlich in Reinform nicht durchsetzen ließen.

4.2.3 Max Zacharias⁶⁴

Ein grundsätzlicher Befürworter der Bögerschen Position war auch Max Zacharias, der ebenfalls im 45. Band der ZmnU den Artikel *Zur Frage des Unterrichts in der neueren Geometrie* (ZmnU 45, S. 390-393) veröffentlichte. Darin zeigte er allerdings auch Möglichkeiten auf, den Vorschlag Bögers so zu ergänzen bzw. abzuändern, dass eine Anknüpfung an die bereits praktizierten Lehrgänge ermöglicht wurde. Zacharias' Leitgedanke war dabei, den Mathematikunterricht in den Oberklassen so zu gestalten, dass er die „Geschichte der Wissenschaft“ widerspiegele, wozu sich das Gebiet der „Neueren Geometrie“ besonders gut eigne.

Die wichtigsten Beiträge zur Entwicklung der „Neueren Geometrie“ lieferten laut Zacharias Desargues, Pascal, Poncelet, Möbius, Steiner, von Staudt und Klein, deren zentrale Entdeckungen er jeweils kurz darstellte. Im Unterschied zu Böger und zum Zeitgeist erkannte Zacharias also auch die Leistungen der französischen Mathemati-

⁶³ Keferstein 1914, S. 389

⁶⁴ Heinrich Wilhelm Max Zacharias wurde am 5.5.1873 in Berlin geboren. Er studierte dort von 1894 bis 1897 (Technische Hochschule und Universität) und legte 1898 die Lehramtsprüfung ab. Anschließend leistete er das Seminarjahr am Königstädtischen Realgymnasium und ab 1899 das Probejahr am Königlichen Joachimsthalschen Gymnasium. Danach arbeitete Zacharias ein halbes Jahr als Hilfslehrer am Städtischen Gymnasium Charlottenburg, bevor er 1901 zum Oberlehrer an der XII. Realschule ernannt wurde. 1903 promovierte er an der Universität Rostock (*Über die Beziehung zwischen den 27 Geraden auf einer Fläche 3. Ordnung und den 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung*). 1904 wechselte er an das Humboldt Gymnasium (Berlin), wo er bis zu seiner Pensionierung im Jahr 1935 blieb. Während seiner Tätigkeit im Schuldienst blieb Zacharias wissenschaftlich aktiv. So war er Mitglied der Berliner Mathematischen Gesellschaft (von 1922 bis 1924 Vorsitzender) und arbeitete u.a. an der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* mit. Er starb am 2.5.1962.

ker an und stellte zusammenfassend fest: „Diese gedrängte geschichtliche Übersicht läßt uns erkennen, wie die neuere Geometrie ursprünglich aus der alten, auf die metrischen Begriffe der Strecke und des Winkels gegründeten Euklidischen Geometrie hervorstößt, sich allmählich zu einem selbständigen, der metrischen Geometrie nebengeordneten Zweige geometrischer Forschung entwickelt, schließlich die Herrschaft an sich reißt und die alte Euklidische Geometrie in eine untergeordnete Stellung zurückdrängt.“⁶⁵ Jedoch machte er auch sofort deutlich, dass er die bei von Staudt und Klein zu findenden Inhalte für die Schule ungeeignet hielt, d.h. nur die Stufen von Desargues bis Steiner mit den Schülern nachvollziehen wollte. Außerdem hielt es Zacharias noch aus einem anderen Grund für wichtig, den von Böger sehr eng gefassten Begriff der projektiven Geometrie zu erweitern, nämlich um eine Verbindung zu den vorher gelernten Inhalten zu ermöglichen.

Daher empfahl er, den von Böger vorgeschlagenen Stufen eine „Vorstufe“ voranzustellen, auf der man sich im Sinne von Desargues und Pascal mit „Neuerer Geometrie“ beschäftigen sollte: „Man definiert auf dieser Vorstufe die Kegelschnitte als perspektive Abbilder des Kreises, entwickelt die wichtigsten Gesetze der Zentralperspektive und überträgt bekannte Eigenschaften des Kreises durch Projektion auf die Kegelschnitte.“⁶⁶ Dabei könne man an die Behandlung der Kegelschnitte nach Apollonius anknüpfen und anhand der Zentralprojektion die Fernelemente einführen. Die Polarentheorie, konjugierte Durchmesser und der Satz von Pascal sollten vom Kreis auf alle Kegelschnitte übertragen werden. Für die nächste Stufe, die als Ersatz für die erste Stufe Bögers dienen sollte, schlug Zacharias vor, zunächst im Sinne Poncelets die projektiven Eigenschaften geometrischer Figuren zu thematisieren, dann den Satz von Pappus über die Konstanz des Doppelverhältnisses bei projektiven Abbildungen zu beweisen und schließlich die Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung durch projektive Grundgebilde (Punktreihen bzw. Strahlenbüschel) herzuleiten. Letzteres sollte wieder durch Betrachtung des Spezialfalls Kreis und anschließende Zentralprojektion geschehen. Von dieser Stelle an könne der Konzeption Bögers (ab Stufe 2) gefolgt werden.

Abweichend von Böger sah Zacharias es allerdings auch als wichtig an, die Überlegungen nicht nur auf die Ebene zu beschränken, sondern gelegentlich auch die projektive Entstehung räumlicher Gebilde, d.h. der Flächen zweiter Ordnung, zu thematisieren. Er begründete dies so: „Abgesehen von der Belebung des Interesses

⁶⁵ Zacharias 1914, S. 391

⁶⁶ Zacharias 1914, S. 391

sowie von der Ausbildung der Raumanschauung würde damit auch einem wesentlichen Charakterzug der Geometrie der Lage Rechnung getragen: Von jeher ist in diesem Teile der Geometrie die „Fusion“, die Verschmelzung ebener und räumlicher Betrachtung, zu Hause gewesen, die in neuerer Zeit ja von manchen Seiten auch für die Euklidische Elementargeometrie angestrebt wird.“⁶⁷

Als noch offenen Punkt für eine weitergehende Diskussion sah Zacharias neben einer genaueren Festlegung der Inhalte die Frage an, wie viel Unterrichtszeit man der projektiven Geometrie einräumen müsse. Hier war er der Überzeugung, dass ihr die realistischen Anstalten mehr Zeit zur Verfügung stellen könnten als die Gymnasien. „Immerhin wird sich aber auch auf diesen durch Ausscheidung manches Überflüssigen und Veralteten und durch Beschränkung auf das Wesentliche in den oberen Klassen so viel Zeit finden lassen, daß man den Schülern wenigstens einen kleinen Einblick in das reizvolle Gebiet der projektiven Geometrie geben und ihnen den Unterschied gegenüber der alten Euklidischen Geometrie fühlbar machen kann.“⁶⁸ Auf den Realanstalten könne eventuell sogar am Ende des Lehrgangs ein Ausblick auf das Konzept von Staudts gegeben werden.

Zacharias' Wunsch nach einer stärkeren Anbindung der projektiven Geometrie an die Euklidische Geometrie (genauer die „Elementargeometrie“) ist auch vor dem Hintergrund zu sehen, dass er eine starke Beeinflussung der letzteren durch die erstere konstatierte. So erklärte er in seinem Beitrag *Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung* in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, dass sich zum einen die „Form“ der Elementargeometrie dahingehend geändert habe, dass „viele anscheinend zusammenhanglose Sätze der Elementargeometrie in eine organische Beziehung zueinander“⁶⁹ gebracht worden seien. Als Beispiel nannte Zacharias, die geometrischen Beziehungen der Affinität, Ähnlichkeit und Kongruenz als Spezialfälle der Kollineation zu sehen, was Henrici und Treutlein in ihrem Lehrbuch sehr gut geglückt sei.⁷⁰ Außerdem sah er auch die Bemühungen um eine stärkere Verbindung von Planimetrie und Stereometrie, die so genannte „Fusion“, im Kern durch die projektive Geometrie angestoßen. Diese musste nämlich die Trennung „aufgeben, als sie versuchte, sich von der elementaren Metrik unabhängig zu machen: Die Begründung

⁶⁷ Zacharias 1914, S. 392; vgl. die Ausführungen zur Zielsetzung des Lehrbuchs von Henrici/Treutlein auf S. 138f

⁶⁸ Zacharias 1914, S. 392f

⁶⁹ Zacharias 1914-1931, S. 905

⁷⁰ vgl. dazu 3.2

der projektiven Geometrie der Ebene ist ohne Benutzung des Raumes, wenn der Gebrauch metrischer Sätze ausgeschlossen wird, unmöglich.“⁷¹ Darüber hinaus seien jedoch auch einige Inhalte der „Neueren Geometrie“ in die Elementargeometrie integriert worden⁷², wie die Transversalentheorie, das Doppelverhältnis, Ähnlichkeitspunkte und –achsen, Potenzlinien und die Sätze von Pascal und Brianchon.⁷³

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass Böger, Keferstein und Zacharias darin übereinstimmen, dass man im Unterricht der „Neueren Geometrie“ in jedem Falle bis zur projektiven Erzeugung der Kegelschnitte vordringen sollte. Zacharias bewegte sich mit seinem Vorschlag jedoch viel näher an der realen Situation, indem er einerseits die bereits erreichte Aufnahme einiger Inhalte aus der „Neueren Geometrie“ anerkannte und begrüßte sowie Möglichkeiten für eine Verbindung mit der darstellenden Geometrie (vgl. 4.1) eröffnete.⁷⁴ Seine Position war daher eher integrierend als spaltend. Die sehr radikale Position Kefersteins und Bögers, den Lietzmann als den „energischsten Vertreter der projektiven Geometrie im Schulunterricht“⁷⁵ bezeichnete, dürfte mit ihrer schroffen Ablehnung der schon eingetretenen Veränderungen und dem Aufstellen von Maximalforderungen auf viele Lehrer abschreckend gewirkt haben. Vermutlich trug sie so eher zum Verschwinden als zum eigentlich erhofften Ausbau der schulischen Umsetzung der „Neueren Geometrie“ bei.

4.3 Erlanger Programm und „Neuere Geometrie“

Bei seinem Eintritt in die Universität Erlangen im Jahr 1872 legte Felix Klein eine wissenschaftliche Abhandlung mit dem Titel *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* vor, die in gedruckter Form herausgegeben und später

⁷¹ Zacharias 1914-1931, S. 906

⁷² Als Beispiele für die Aufnahme neuer Inhalte nannte Zacharias die folgenden Lehrbücher: Jan H. van Swinden; Carl F. A. Jacobi (Übers.): *Elemente der Geometrie*. Jena: Frommann 1834
Ernst F. August: *Lehrbuch der Mathematik*, Band 3. Berlin: Reimer 1854
Gallenkamp, Wilhelm: *Die Elemente der Mathematik*, 1. Teil. Iserlohn: Bädeker 1860
Baltzer, Richard: *Die Elemente der Mathematik*, Band 2. Leipzig: Hirzel 1862

⁷³ Die von Zacharias genannten Inhalte entsprechen ungefähr den im Lehrbuch von Holzmüller behandelten (vgl. 3.1).

⁷⁴ Dies erwähnte Zacharias nicht explizit. Allerdings ist die Zentralprojektion als verbindendes Element klar vorhanden.

⁷⁵ Lietzmann 1916, S. 244

unter dem Schlagwort *Erlanger Programm* bekannt wurde. Darin formulierte Klein die grundlegende Idee, dass zu jeder Geometrie eine Gruppe von Abbildungen („Transformationen“) gehört, die einen bestimmten Raum auf sich selbst abbilden. Gegenstand der Geometrie sind dann die Sätze über diejenigen Eigenschaften der geometrischen Objekte, die durch die Transformationen erhalten bleiben („Invarianten“). Ein Vergleich der Transformationsgruppen ermöglicht es somit, auch eine Aussage über das Verhältnis der zugehörigen Geometrien zu treffen. Ist nämlich eine Transformationsgruppe T_2 Untergruppe einer anderen Transformationsgruppe T_1 , so gelten alle in der zu T_1 gehörenden Geometrie G_1 vorhandenen Sätze auch in der Geometrie G_2 bzw. alle Invarianten von G_1 sind auch Invarianten von G_2 . G_2 kann darüber hinaus weitere Invarianten besitzen und ist dann ein Spezialfall von G_1 .⁷⁶ Beispielsweise bildet die Menge aller projektiven Abbildungen der projektiven Ebene auf sich⁷⁷ die Transformationsgruppe, die zur projektiven Geometrie gehört. Betrachtet man als Untergruppe alle diejenigen projektiven Abbildungen, die die unendlich ferne Gerade auf sich abbilden (Affinitäten), erhält man die Transformationsgruppe der affinen Geometrie.⁷⁸ Einen Überblick über die Beziehungen zwischen den grundlegenden Geometrien gibt die folgende Abbildung:

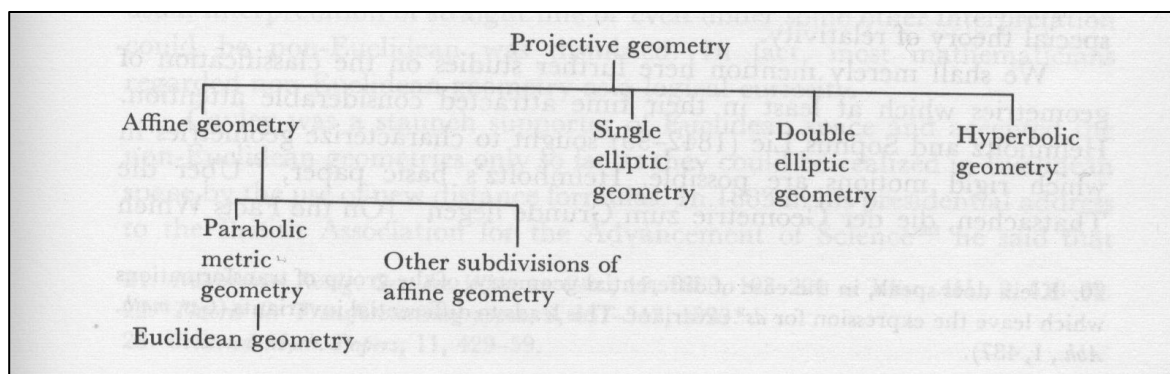


Abbildung 102: System der Geometrien (aus: Kline 1972, S. 919)

Mit wachsender Verbreitung des *Erlanger Programms* wurde auch die Frage diskutiert, inwieweit sich der Schulunterricht daran orientieren müsse. Dabei zeigten sich

⁷⁶ vgl. dazu Kline 1972, S. 917ff und Efimow 1970, S. 393ff

⁷⁷ Bei diesen Abbildungen wird entweder jedem Punkt ein Punkt und jeder Geraden eine Gerade (Kollineation) oder jedem Punkt eine Gerade und jeder Geraden ein Punkt (Korrelation) so zugeordnet, dass die Inzidenz erhalten bleibt. Zusätzlich muss die Zuordnung (modern gesprochen) bijektiv sein. In beiden Fällen werden je vier harmonische Elemente (Punkte oder Geraden) auf vier harmonische Elemente abgebildet.

⁷⁸ Im Unterschied zur projektiven Ebene sind die Fernpunkte in der affinen Ebene nicht mit den gewöhnlichen Punkten gleichgestellt, sondern nehmen eine Sonderrolle ein. Alternativ kann man beim Übergang von der projektiven zur affinen Ebene auch die Fernpunkte entfernen und stattdessen von Parallelität sprechen.

auch Anknüpfungspunkte zur Debatte um die „Neuere Geometrie“, die im Folgenden näher betrachtet werden sollen.

4.3.1 Wilhelm Dieck⁷⁹

Eine größtmögliche Übereinstimmung zwischen *Erlanger Programm* und „Neuerer Geometrie“ sah Wilhelm Dieck in seinem Artikel *Der Geist der neueren Geometrie* (ZmnU 45, S. 432-440). Darin diskutierte er zunächst die Frage, was eigentlich unter „Neuerer Geometrie“ zu verstehen sei, wobei er grundsätzlich folgende Festlegung vornahm: „Auf den Namen „neuere Geometrie“ können sinngemäß alle diejenigen Zweige der Geometrie Anspruch erheben, die ihre Entstehung der Geistesarbeit der letzten Jahrhunderte verdanken.“⁸⁰ Grundlegend war für ihn also die Abgrenzung von der traditionellen Geometrie. Von inhaltlicher Seite sei es laut Dieck üblich, die Sätze von Ceva und Menelaus, die Eigenschaften des vollständigen Vierseits, harmonische Punkte und Strahlen, die Polarentheorie am Kreis sowie die Potenzlinie, Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen als „Neuere Geometrie“ zu bezeichnen. Allerdings lasse es sich vor dem Hintergrund der obigen Festlegung auch gut begründen, die synthetische Geometrie, die vor allen Dingen mit anschaulichen Zeichnungen arbeite und daher auch zeichnende oder reine Geometrie genannt werden könne, als „Neuere Geometrie“ zu bezeichnen. Gleiches gelte auch für die analytische oder rechnende Geometrie. Eine Gleichsetzung mit den Begriffen „Geometrie der Lage“ bzw. „Geometrie des Maßes“ sei folglich nicht möglich: „Beide Gebiete, sowohl die Geometrie der Lage als auch die Geometrie des Maßes, können in analytischer wie in synthetischer Weise behandelt werden. Bei der Einteilung der Geometrie in analytische und synthetische ist also der Einteilungsgrund die Methode, bei der Einteilung in Geometrie des Maßes und Geometrie der Lage handelt es sich um verschiedene Stoffgebiete.“⁸¹ Nicht zuletzt wäre es auch denkbar, den Begriff „Neuere Geometrie“ für die nichteuklidischen Geometrien bzw. die geometrische Axiomatik zu verwenden. All dies lehnte Dieck jedoch ab und plädierte dafür, den Begriff

⁷⁹ Dieck wurde am 27.4.1880 in Windberg bei Mönchengladbach geboren. Nach Besuch des Gymnasiums in Mönchengladbach studierte er zunächst Theologie und Philologie, dann Mathematik und Naturwissenschaften. 1903 bestand er das Staatsexamen und absolvierte anschließend das Seminarjahr in Essen und ab 1905 das Probejahr an den Königlichen Gymnasien in Düsseldorf und Bonn. Danach erhielt er eine Stelle am Realgymnasium in Sterkrade (Oberhausen).

⁸⁰ Dieck 1914, S. 432

⁸¹ Dieck 1914, S. 433

als Sammelbezeichnung für die oben genannten Inhalte beizubehalten: „Trotzdem möchte ich dafür eintreten, die eingangs erwähnten Kapitel der Schulplanimetrie wie bisher unter dieser Flagge zu führen. Damit sie diesen Namen aber voll und ganz verdienen, muß ihre Behandlungsweise von dem geometrischen Geiste der Gegenwart getragen und erfüllt sein.“⁸²

Als wichtige Aspekte dieses „geometrischen Geistes“ sah Dieck die „Beweglichkeit der Figuren“ und den „Fortschritt vom Allgemeinen zum Besonderen“ an. Allerdings werde die „Neuere Geometrie“ dadurch nur unzureichend charakterisiert, weshalb er empfahl, „als den bedeutsamsten und fruchtbarsten Leitgedanken der neueren Geometrie die zielbewußte Gruppenbildung in den geometrischen Beziehungen“⁸³ anzunehmen. Die Grundlage für diesen Ansatz sei durch die Trennung der Geometrie der Lage von der Geometrie des Maßes geschaffen worden, die zunächst synthetisch und anschließend analytisch durchgeführt wurde. 1859 habe dann Cayley⁸⁴ festgestellt, dass alle metrischen Eigenschaften einer geometrischen Figur aus deren projektiver Beziehung zu einem „absoluten Gebilde“ abgeleitet werden könnten, so dass die Geometrie des Maßes in die Geometrie der Lage einbezogen werden könne. Diese Idee wurde laut Dieck dann von Felix Klein im *Erlanger Programm* aufgegriffen und 1896 von Eduard Study⁸⁵ vollständig bearbeitet.

Im weiteren Verlauf des Artikels erläuterte Dieck dann, wie man von der projektiven Geometrie ausgehend über die affine Geometrie zur äquiformen Geometrie⁸⁶ gelangen kann. Dazu charakterisierte er zunächst die ebene projektive Geometrie über die Elemente Punkt und Gerade sowie deren mögliche Beziehungen, die die Geometrie aufdecken müsse. Dabei sei der Zusammenhang „Die gerade Linie ist der Träger von unendlich vielen Punkten.“⁸⁷ besonders naheliegend. Genauso könne aber auch der Punkt durch die durch ihn verlaufenden Geraden erzeugt gedacht werden: „Der Punkt ist der Träger von unendlich vielen Geraden.“⁸⁸ Um die vollkommene Gleichberechtigung zwischen Punkten und Geraden zu verwirklichen⁸⁹, müsse allerdings

⁸² Dieck 1914, S. 433

⁸³ Dieck 1914, S. 433

⁸⁴ Cayley 1859, S. 90

⁸⁵ vgl. Study 1896; Study betrachtete alle zwischen der projektiven Gruppe und der Gruppe der Bewegungen liegenden reellen Transformationsgruppen.

⁸⁶ Bei dieser kommt als zusätzliche Invariante die Orthogonalität hinzu.

⁸⁷ Dieck 1914, S. 434

⁸⁸ Dieck 1914, S. 434

⁸⁹ Dieck wandte sich wegen der Problematik bei der Definition des Punktes dagegen, lediglich die Gerade als Menge ihrer Punkte aufzufassen: „Gehen wir allerdings der Sache etwas genauer auf den Grund, so macht doch dieses Ding, „dessen Teil nichts ist“, uns allerlei begriffliche Schwierigkeiten. Wir vermeiden sie, wenn wir den Punkt genau so behandeln wie die Gerade.“ (Dieck 1914, S. 434)

auch dem Grundsatz, dass zwei Punkte immer eine Gerade festlegen, eine entsprechende Aussage bezüglich der Geraden gegenübergestellt werden. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die uneigentlichen oder unendlich fernen Punkte als Schnittpunkte paralleler Geraden einzuführen, die jedoch gegenüber den gewöhnlichen Punkten keine Sonderrolle einnehmen.⁹⁰

Auf diesen Festlegungen beruhe nun als notwendige Konsequenz das Phänomen der Dualität zwischen Punkten und Geraden. Da die in der Geometrie verwendeten Begriffe fast alle anhand der Euklidischen Geometrie entwickelt wurden, wies Dieck darauf hin, „daß die Sprache die Dualität zwischen Punkt und Gerade in der Ebene nicht nur nicht hervorkehrt, sondern sie geradezu verschleiert.“⁹¹ Aus diesem Grund müsse man sich das Phänomen immer wieder an konkreten Beispielen (wie Schnittpunkt und Verbindungsgerade, Dreieck und Dreieck) klarmachen. Außerdem könne jedem Satz sein duales Pendant gegenübergestellt werden, was zu einer Bereicherung der einzigen in der projektiven Geometrie zu untersuchenden geometrischen Beziehung (der Inzidenz) führe: „Es könnte nun scheinen, als ob diese einzige ausgezeichnete Lagerungsmöglichkeit so nichtssagend und inhaltsarm wäre, daß eine Geometrie der Inzidenzen ein mathematisches Aschenbrödel sein müßte. Das ist aber keineswegs der Fall. Die Geometrie der Inzidenzen ist die eigentliche Geometrie der Lage oder projektive Geometrie. Ihr oberstes Gesetz ist das Prinzip der Dualität. Ihre Sätze sind also ausnahmslos Zwillingengebilde.“⁹² Als Beispiel für ein

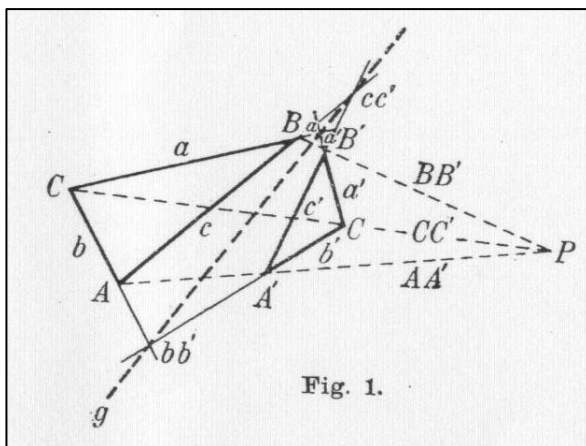


Abbildung 103: Satz des Desargues
(aus: Dieck 1914, S. 436)

Paar dualer Sätze nannte Dieck die beiden Richtungen des Satzes von Desargues, d.h. nimmt man eine Richtung und dualisiert sie, so erhält man die andere.

Um nun die Geometrie der Lage zu verlassen und zur Geometrie des Maßes überzugehen, müssten in der projektiven Ebene die uneigentlichen Elemente aus-

⁹⁰ Letzteres ist im Folgenden noch wichtig für die Unterscheidung der projektiven und der Euklidischen Ebene.

⁹¹ Dieck 1914, S. 435

⁹² Dieck 1914, S. 435f

gezeichnet werden.⁹³ Durch Auswahl eines unendlich fernen Punkte auf jeder Geraden (oder einer uneigentlichen Geraden) in der projektiven Ebene, erhalte man die Euklidische Geometrie bzw. genauer die affine Geometrie der Euklidischen Ebene.⁹⁴ In dieser sei die Dualität aufgehoben, da zwar unendlich viele uneigentliche Punkte aber nur eine uneigentliche Gerade (mit Sonderstatus) existiere. Dafür erhalte man jedoch neben der Inzidenz die Parallelität als weitere geometrische Beziehung. Den eigentlichen Nutzen dieses systematischen Vorgehens sah Dieck darin, durch Spezialisierung aus allgemeinen Sätzen neue Aussagen abzuleiten. Für das Beispiel des Satzes von Desargues ergäben sich so vier Spezialfälle:

- (i) eine Dreiecksseite liegt in der Ferngerade
- (ii) ein Eckpunkt eines Dreiecks ist ein Fernpunkt
- (iii) die Inzidenzgerade (**g**) ist die Ferngerade
- (iv) der Inzidenzpunkt (**P**) ist ein Fernpunkt.

Die beiden Fälle (iii) und (iv) betrachtete Dieck dann näher und stellte fest, dass sich im Fall (iii) die entsprechenden Dreiecksseiten auf der Ferngeraden schneiden und somit parallel sind. Die Umkehrung des Satzes von Desargues müsse in diesem affinen Spezialfall also lauten: „Sind die entsprechenden Seiten zweier Dreiecke parallel, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einem Punkte, dem Ähnlichkeitspunkte der beiden Dreiecke“⁹⁵. Im Fall (iv) sei der Punkt **P**

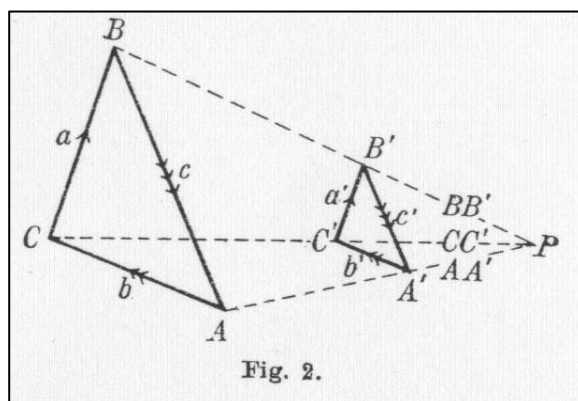


Abbildung 104: Spezialfall (iii)
(aus: Dieck 1914, S. 437)

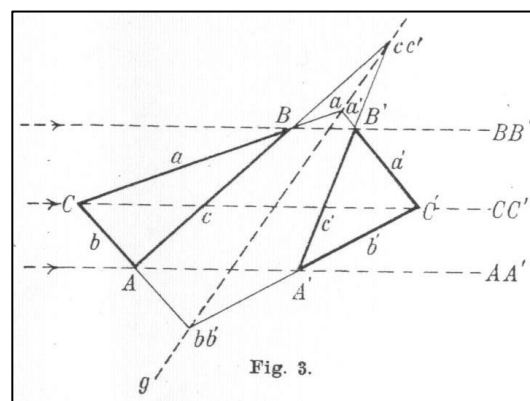


Abbildung 105: Spezialfall (iv)
(aus: Dieck 1914, S. 438)

⁹³ Damit ist gemeint, dass sie gewissermaßen einen Sonderstatus erhalten und anders behandelt werden als die gewöhnlichen Punkte und Geraden. In der projektiven Ebene werden alle Punkte und Geraden gleich behandelt.

⁹⁴ Dieck bemerkte auch, dass man durch Annahme zweier Fernpunkte pro Gerade die hyperbolische Geometrie erhalte. Enthalten die Geraden keine unendlich fernen Punkte, sei die Geometrie elliptisch, wobei er nicht klar herausstellte, wie die elliptische Geometrie mit der projektiven Geometrie zusammenhängt. Gegenstand der elliptischen Geometrie ist die projektive Ebene, auf der aber zusätzlich eine Metrik definiert wird. (vgl. dazu Efimow 1970, S. 409ff)

⁹⁵ Dieck 1914, S. 437; Der Ähnlichkeitspunkt kann auch ein Fernpunkt sein.

ein Fernpunkt, so dass die Verbindungsgeraden der zugeordneten Eckpunkte parallel werden. Daher erhält man hier folgenden affinen Spezialfall des Satzes von Desargues: „Sind die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken zweier Dreiecke parallel, so schneiden sich die entsprechenden Seiten auf einer Geraden, der Affinitätsachse der beiden Dreiecke.“⁹⁶ Beide Spezialfälle lassen sich nur unter Nutzung der Begriffe Ähnlichkeitspunkt und Affinitätsachse umkehren⁹⁷, weshalb Dieck zu folgendem Urteil kam: „Immerhin sind diese Umkehrungen mehr oder weniger gekünstelt, eine Folge der verloren gegangenen Dualität. Der Gegensatz: Affinität und ähnliche Lage ist ihr letzter Widerschein.“⁹⁸ Im Anschluss leitete Dieck aus der affinen die äquiforme Geometrie⁹⁹ ab, bei der die Punkte der uneigentlichen Geraden eine spezielle Involution bilden, die unter allen Abbildungen der zugehörigen Transformationsgruppe erhalten bleibt. Dadurch komme die Orthogonalität¹⁰⁰ als dritte geometrische Beziehung hinzu. Auch hier entwickelte Dieck weitere Spezialfälle des Satzes von Desargues.

Am Schluss des Artikels fasste Dieck nochmals die Vorteile der von ihm vorgestellten Methode zusammen, wozu er einmal „ästhetische und orientierende Vorzüge“¹⁰¹, zum anderen aber auch das Erreichen größtmöglicher Vollständigkeit zählte. Nicht zuletzt könne auch durch entsprechende Behandlung der Euklidischen Geometrie¹⁰² der Übergang zur Geometrie der Lage angebahnt werden. Daher appellierte er nochmals, die als „Neuere Geometrie“ bezeichneten Inhalte endlich nach dem geschilderten Prinzip („das Leitmotiv der neueren Geometrie“) zu unterrichten: „Wenn dieses Prinzip die als neuere Geometrie bezeichneten Kapitel der Schulplanimetrie erfüllt und durchdringt, dann sind sie ebenso gut wie etwa die synthetische Geometrie der Kegelschnitte geeignet, unseren Schülern die wertvollsten geometrischen Anschauungen der Gegenwart zu vermitteln.“¹⁰³

⁹⁶ Dieck 1914, S. 438

⁹⁷ Allgemein ist die Aussage „Schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Dreiecke in einem Punkt, so sind die entsprechenden Seiten parallel“ (Umkehrung von (iii)) falsch. Es muss vorausgesetzt werden, dass es sich bei dem Schnittpunkt um den Ähnlichkeitspunkt handelt, was wiederum eine spezielle Lage der Dreiecke voraussetzt.

⁹⁸ Dieck 1914, S. 438

⁹⁹ Heute würde man von Ähnlichkeitsgeometrie sprechen.

¹⁰⁰ Zwei Geraden sind genau dann orthogonal, wenn ihre Schnittpunkte mit der Ferngerade einander durch die ausgezeichnete Involution zugeordnet sind.

¹⁰¹ Dieck 1914, S. 439

¹⁰² Vermutlich ist gemeint, den umgekehrten Weg zu gehen und zunächst die Euklidischen Spezialfälle zu betrachten, woraus sich dann letztlich der projektive Satz ergibt.

¹⁰³ Dieck 1914, S. 440

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass Diecks Vorschlag darauf abzielte, den Teil des *Erlanger Programms*, der sich mit dem Auffinden der Beziehungen zwischen den einzelnen Geometrien beschäftigte, anhand der Inhalte der „Neueren Geometrie“ im Schulunterricht zu verwirklichen. Dabei ist der Aspekt des Aufdeckens allgemeiner Gesichtspunkte und der Zuordnung speziellerer Aussagen von den früheren Verfechtern der „Neueren Geometrie“ übernommen und im Sinne des *Erlanger Programms* weiterentwickelt. Etwas unglücklich erscheint sein Vorgehen, die projektive Ebene mit ausgezeichneten Fernpunkten als Ersatz für die Euklidische Ebene zu betrachten. Konsequenter wäre es, die Fernpunkte wegzulassen und stattdessen von Parallelität zu sprechen, wodurch auch an die den Schülern bekannte Vorstellung der Euklidischen Ebene angeknüpft würde. Eher zwischen den Zeilen klingt die Kritik an den bisherigen („veralteten“) Methoden an, womit vermutlich die Anbindung neuer Inhalte an die Methoden der Euklidischen Geometrie gemeint war. Völlig unberücksichtigt bleibt bei Dieck der Aspekt der Transformationen.

4.3.2 Albert Schülke

Die gewissermaßen komplementäre Position nahm Albert Schülke in einem Beitrag im 58. Band der *ZmnU* (1927) ein. Unter dem Titel *Das Erlanger Programm und die Schulgeometrie* (*ZmnU* 58, S. 401-407) wurde die schriftliche Version eines von ihm auf der 29. Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Frankfurt am Main gehaltenen Vortrags veröffentlicht, in dem er die schulische Umsetzung der „Neueren Geometrie“ sehr hart kritisierte und für die Umgestaltung der Schulgeometrie durch Nutzung von Transformationen plädierte. Schülke stellte zunächst fest, dass die Schulgeometrie anfangs auf den Inhalt von Euklids Elementen beschränkt gewesen sei, dem im Laufe der Zeit weitere Inhalte (die „Neuere Geometrie“) hinzugefügt wurden. Diese Ergänzung hielt er aus folgendem Grund, mit dem er eine Grundannahme der Befürworter in Frage stellte, nicht für besonders sinnvoll: „Man hat öfters die Neuere Geometrie als ein Sammelsurium bezeichnet, denn wir haben für harmonische Punkte, Kreisverwandtschaften, die Sätze von Menelaus und Pascal keine Reihenfolge, welche eine fortschreitende Entwicklung aufzeigt. Wir sehen also, daß die Geometrie bis zur Gegenwart nicht imstande gewesen ist, aus sich selbst ein systematisches

Lehrgebäude zu schaffen.“¹⁰⁴ Demgegenüber verlangten die Lehrpläne gerade, die Mathematik als geordnete Wissenschaft darzustellen, was für den Bereich der Arithmetik bereits verwirklicht sei.

Als Lösung schlug Schülke nun vor, die Schulgeometrie anhand des *Erlanger Programms* umzugestalten: „Wir müssen die neueren Entwicklungen hinzunehmen, die sich zwar gelegentlich schon bei Euler finden, die aber erst von F. Klein im Erlanger Programm 1872 systematisch benutzt sind, nämlich die Abbildungen und Bewegungen in analytischer Form, d. h. die Transformationen. Dadurch wird die Rechnung gleichberechtigt mit der Zeichnung“¹⁰⁵. Die stärkere Berücksichtigung analytischer Methoden hatte Schülke bereits 1910 gefordert (vgl. 2.2.3), im *Erlanger Programm*, das aufgrund seiner Funktion (Programm zum Eintritt in die Philosophische Fakultät) nicht allzu technisch sein durfte, ist dieser Ansatz jedoch nicht zu finden (vgl. Kline 1972, S. 917). Anhand einer Vielzahl von Beispielen zeigte Schülke dann, wie er sich die konkrete Umsetzung seines Vorschlags vorstellte. So empfahl er, die Kongruenzabbildungen¹⁰⁶ mithilfe der Abbildungsgleichungen zu behandeln, was er anhand der folgenden Beispiele veranschaulichte¹⁰⁷:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}, \quad \mathbf{y}' = -\mathbf{y} \quad (\text{Geradenspiegelung an der } x\text{-Achse})$$

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}' = -\mathbf{y} \quad (\text{Punktspiegelung am Ursprung})$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{b} \quad (\text{Verschiebung})$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \cos \alpha - \mathbf{y} \cdot \sin \alpha, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{x} \cdot \sin \alpha + \mathbf{y} \cdot \cos \alpha \quad (\text{Drehung um den Ursprung})$$

Zur Untermauerung seines Vorschlags berief er sich wieder auf Klein: „Daher beweist Euklid alles durch Kongruenz. Klein dagegen stellt die Bewegung voran, und dies ist pädagogisch weit wertvoller. Die Kongruenz braucht jedesmal drei Stücke, die man mühsam zusammensuchen muß, und außerdem entstehen dadurch die von Schopenhauer sogenannten Mausefallenbeweise. Man sieht, daß es richtig ist, aber man sieht nicht, warum es richtig ist. Dagegen folgt bei Spiegelung und Bewegung die Gleichheit aller Stücke unmittelbar aus der Anschauung.“¹⁰⁸ Fraglich bleibt bei dieser

¹⁰⁴ Schülke 1927, S. 401; Den Kritikpunkt der fehlenden Systematik hatte Schülke schon bei seinem Vortrag auf der Posener Versammlung des Fördervereins im Jahr 1910 geäußert, damals aber die verstärkte Nutzung der Zentralprojektion als Lösung vorgeschlagen (vgl. 2.2.3).

¹⁰⁵ Schülke 1927, S. 401

¹⁰⁶ Diesen Begriff verwendet Schülke nicht, sondern spricht bei den Spiegelungen von Symmetrie und bei Drehung und Verschiebung von Bewegungen.

¹⁰⁷ Vermutlich wollte Schülke nicht mit den Schülern die allgemeinen Abbildungsgleichungen aufstellen, sondern zeigen, dass es sich bei den betrachteten Beispielen um Spezialfälle der affinen Abbildung (s.u.) handelt.

¹⁰⁸ Schülke 1927, S. 402

Begründung allerdings, warum zur Betonung der Anschauung gerade die analytische Darstellung empfohlen wird.

Um nicht nur bei den Kongruenzabbildungen stehen zu bleiben, sollten auch die zentrische Streckung am Ursprung ($\mathbf{x}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}$) und die in der darstellenden Geometrie behandelten Projektionen analytisch gefasst werden. Die beim Zeichnen von Schrägbildern benutzte Parallelprojektion (Abbildung 106) führe beispielsweise¹⁰⁹ zur Abbildungsgleichung $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}$, $\mathbf{y}' = \frac{\mathbf{y}}{2}$.

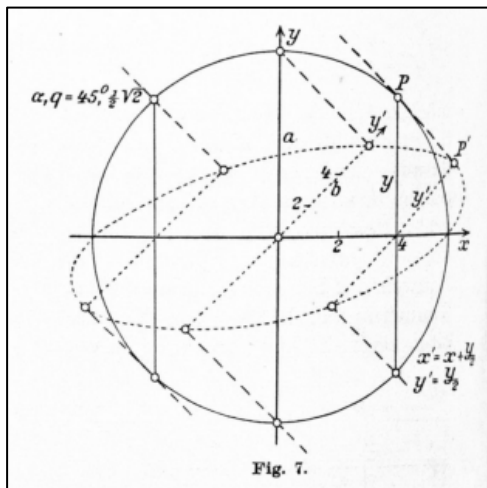


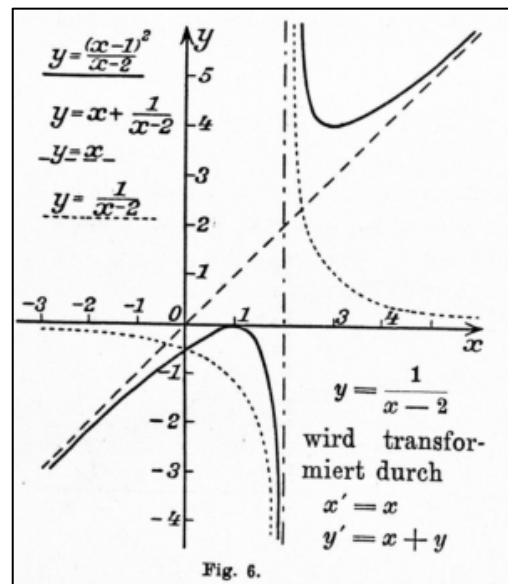
Abbildung 106: Parallelprojektion (aus: Schülke 1927, S. 404)

Auch die „geometrische Addition“ könne aus dem Blickwinkel der Transformationen zu solchen Gleichungen führen. Im betrachteten Beispiel (Abbildung 107) wird die Kurve $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ konstruiert, indem für jeden x-Wert aus den Graphen zu $y = x$ und $y = \frac{1}{x-2}$ die y-Werte abgelesen und addiert werden. Dies führt dann wegen

$$x + \frac{1}{x-2} = \frac{x \cdot (x-2) + 1}{x-2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} = \frac{(x-1)^2}{x-2}$$

zum gewünschten Resultat. Schülke schlug nun vor, die Situation so aufzufassen, dass auf die Kurve $y = \frac{1}{x-2}$ die Transformation (Scherung) $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ angewendet wird.

Den Vorteil dieser Methode beschrieb er (leicht übertrieben) so: „Aber wie ist der innere Zusammenhang? Die Geometrie weiß keine Antwort, die Transformationen zeigen sofort, daß wir von der Kongruenz zur Affinität überge-



gangen sind. Die Transformation

Abbildung 107: Geometrische Addition (aus: Schülke 1927, S. 404)

¹⁰⁹ Im Beispiel bilden die Bilder der zur x-Achse senkrechten Geraden einen 45°-Winkel mit der x-Achse, der Verkürzungsfaktor ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{k} \\ \mathbf{y}' &= \mathbf{cx} + \mathbf{dy} + \mathbf{l} \end{aligned}$$

enthält alle diese Gebiete, und F. Klein sagt mit Recht, daß die ver-

wirrende Fülle der geometrischen Sätze erst übersichtlich wird durch die Erkenntnis, daß es sich nur um verschiedene Werte der Konstanten handelt.¹¹⁰ Als letztes Beispiel nannte Schülke die Perspektive (Zentralprojektion), wo die Abbildungsgleichungen auch Brüche enthalten müssten, um die Fernpunkte abbilden zu können. Homogene Koordinaten benutzte er jedoch nicht.

Neben der beabsichtigten Systematisierung verfolgte Schülke noch ein weiteres Ziel, das er ebenfalls anhand von Beispielen verdeutlichte: „Nachdem wir durch das Erlanger Programm die natürliche Entwicklung kennen gelernt haben, können wir die Beweise vereinfachen und dadurch den Schülern überflüssige Arbeit ersparen“¹¹¹. Dabei fällt allerdings auf, dass zwar weiterhin die zuvor hergeleiteten Abbildungen als Hilfsmittel dienen, die analytische Darstellung jedoch in den Hintergrund tritt.¹¹² Zusätzlich stammen die meisten Beispiele aus dem Gebiet der „Neueren Geometrie“,

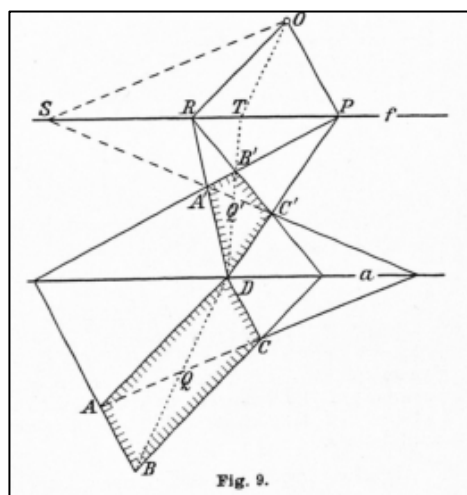


Abbildung 108: Harmonische Punkte am vollständigen Vierseit (aus: Schülke 1927, S. 405)

was als ein weiteres Indiz dafür gesehen werden kann, dass Schülke vornehmlich mit der praktizierten schulischen Umsetzung unzufrieden war.¹¹³ So empfahl er beispielsweise, den „Satz vom vollständigen Vierseit“¹¹⁴ anstatt wie üblich mit dem Satz von Menelaus durch Verwendung einer perspektiven Abbildung (d.h. einer Zentralprojektion) zu beweisen.¹¹⁵ Betrachtet wird dabei das durch die Geraden **A'B'**, **B'C'**, **C'D** und **DA'** gebildete vollständige Vierseit, das als perspektives Bild des Parallelogramms **ABCD** aufgefasst wird.¹¹⁶ Ein

¹¹⁰ Schülke 1927, S. 403f

¹¹¹ Schülke 1927, S. 405

¹¹² Es ist allerdings nicht klar, ob dadurch nur der Umfang der Darstellung reduziert werden soll oder das explizite Angeben der Abbildungsgleichungen für verichtbar gehalten wird.

¹¹³ Somit ergibt sich zumindest in dieser Hinsicht kein Widerspruch zu seinen Aussagen von 1910 (vgl. 2.2.3).

¹¹⁴ Auf jeder Diagonallinie eines vollständigen Vierseits bilden die auf ihr liegenden Gegenecken und die Schnittpunkte mit den beiden anderen Diagonalen vier harmonische Punkte.

¹¹⁵ Die Idee der Darstellung von Urbild und Bild einer (eigentlich räumlichen) Zentralprojektion in einer Ebene wurde in den 1960er Jahren erneut diskutiert (vgl. Ausblick).

¹¹⁶ In Abbildung 108 ist unterhalb der Geraden **a** ein Ausschnitt der Grundebene (Urbild), zwischen **a** und **f** (Horizont) ein Ausschnitt der Bildebene, oberhalb von **f** ein Ausschnitt der zur Grundebene parallelen Ebene durch das Projektionszentrum **O** zu sehen. Die Bildebene verläuft senkrecht zur Grundebene und schneidet diese in **a**. Als Abbildung in der Ebene aufgefasst, handelt es sich um eine Zentralkollineation mit Zentrum **O** und Achse **a**.

zum Vierseit perspektives Parallelogramm lässt sich konstruieren, indem man **O** beliebig wählt und Parallelen zu **OR** durch **D** (Gerade **AD**) sowie den Schnittpunkt von **B'C'** mit **a** (Gerade **BC**) zeichnet. Genauso erhält man **AB** und **CD** als Parallelen zu **OP**.¹¹⁷ Als Argument dafür, dass die Punkte **A'**, **C'**, **Q'** und **S** harmonisch liegen, führte Schülke nun folgendes an: Die Punkte **A'**, **C'**, **Q'** und **S** haben als Urbilder **A**, **C**, **Q** und den Fernpunkt der Geraden **AC**. Da **Q** der Mittelpunkt der Strecke **AC** ist, bilden die Urbilder vier harmonische Punkte, die bei perspektivischer Abbildung erhalten bleiben. Auch den Beweis des Satzes von Pascal für den Kreis durch Nutzung des Satzes von Menelaus empfand Schülke als wenig geglückt. Stattdessen könne dieser für beliebige Kegelschnitte aus der Tatsache abgeleitet werden, dass sich die zugeordneten Strahlen zweier projektiver Strahlenbüschel in den Punkten eines Kegelschnitts schneiden und die Zuordnung der Strahlen durch Angabe von fünf Strahlenpaaren eindeutig festgelegt ist. Die Konstruktion eines beliebigen sechsten Kegelschnitt-Punktes liefere dann sofort den Satz von Pascal.¹¹⁸ Vor dem Hintergrund der betrachteten Beispiele kam Schülke zu dem Schluss: „Hieraus folgt, daß die Sätze von Menelaus und Ceva für das System nicht notwendig sind.“¹¹⁹

Auch die Behandlung von Pol und Polare könne durch Übertragung der Zusammenhänge am Kreis auf alle Kegelschnitte mithilfe einer Zentralprojektion vereinfacht werden, wobei einmal der Mittelpunkt als Pol und die Ferngerade als seine Polare aufgefasst werde. Die Abbildung mache dann aus dem Kreis einen Kegelschnitt, der

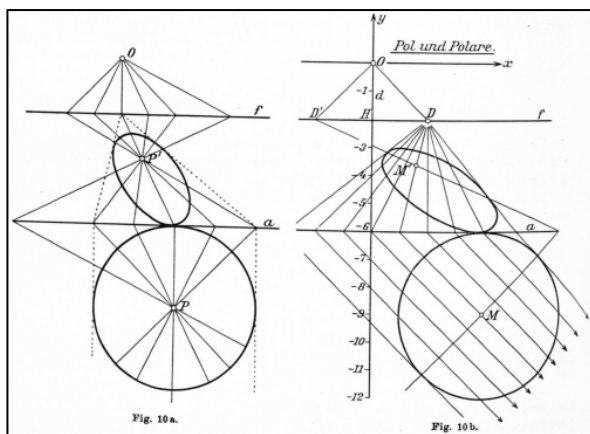


Abbildung 109: Pol und Polare am Kegelschnitt (aus: Schülke 1927, S. 406)

Horizont (als Bild der Ferngerade) werde Polare, das Bild des Mittelpunktes der zugehörige Pol. Um auch die Situation zu erhalten, dass der Pol außerhalb des Kegelschnitts liegt, sollte im Urbild der (unendlich ferne) Schnittpunkt einer Schar von paralleler Sehnen als Pol und der zu den Sehnen senkrechte Durchmesser als Polare dienen.

Wenn Schülke auch den Ideen des *Er-*

¹¹⁷ Schülke erwähnt diese Konstruktion nicht und erläutert folglich auch nicht, warum sie das Gewünschte liefert. Sie beruht letztlich darauf, dass die Punkte **S**, **R**, **T** und **P** auf dem Horizont **f** liegen und daher ihre Urbilder Fernpunkte sein müssen. Dies begründet die Konstruktion mit **AD** \parallel **BC** und **AB** \parallel **DC**.

¹¹⁸ Dies ist dieselbe Beweisidee, die auch Böger verwendet (vgl. 3.4).

¹¹⁹ Schülke 1927, S. 405

langer Programms (oder dem, was er dafür hielt) einen großen Einfluss auf den Schulunterricht einräumte, wollte er es dennoch nicht vollständig übernehmen: „Das weitere Ziel des Erlanger Programms, Geometrie als Invariantentheorie, möchte ich zurückstellen. [...] Aber die Durchführung ist für den Unterricht zu schwierig, und man wird sich zunächst mit dem Hinweis auf einzelne Invarianten begnügen.“¹²⁰

Am Schluss des Artikels fasste Schülke die sich seiner Meinung nach durch die Implementierung der grundlegenden Ideen des *Erlanger Programms* für den Mathematikunterricht ergebenden Vorteile nochmals dahingehend zusammen, dass eine stärkere Verbindung von Geometrie und Arithmetik sowie ein systematischer Überblick über die Geometrien erreicht werde. Dies führe einerseits zur Erfüllung der Vorgaben des Lehrplans und andererseits durch eine „naturgemäßere“ Gestaltung der Beweise zur Entlastung der Schüler.

Im Grunde genommen verfolgte Schülke ein ähnliches Ziel wie auch Dieck, nämlich einen systematischen Aufbau der Geometrie umzusetzen. Der Unterschied bestand jedoch darin, dass er den bei Dieck völlig fehlenden Abbildungsaspekt und die analytische Darstellung ins Zentrum rückte. Zusätzlich zielte sein Vorschlag darauf ab, die Ideen des *Erlanger Programms* anhand der bestehenden Inhalte umzusetzen, während es bei Dieck eher darum ging, am Ende des Geometrielehrgangs das Gelernte zu systematisieren.

4.3.3 Oskar Höfling¹²¹

Für eine Mischform aus beiden Vorschlägen trat Oskar Höfling in seinem Beitrag *60 Jahre Erlanger Programm* (ZmnU 63 (1932), S. 153-159) ein, in dem er zunächst aus seiner Sicht die Entstehungsgeschichte des *Erlanger Programms* und dessen grundlegende Aussagen (Geometrie als Invariantentheorie) darstellte. Demnach könne es einmal unter dem Aspekt der Systematisierung gesehen werden, zum anderen biete sich aber auch die Möglichkeit, neue Zusammenhänge zu erforschen (beispielsweise bei der Übertragung von Eigenschaften bekannter Figuren auf neue Gebilde durch Abbildungen). Höfling ging dann im weiteren Verlauf der Frage nach, ob sich die bei-

¹²⁰ Schülke 1927, S. 406

¹²¹ Höfling wurde am 17.11.1906 in Essen geboren, wo er 1926 die Abiturprüfung bestand. Anschließend studierte er Mathematik, Physik und Chemie in Bonn. Er promovierte 1929 (*Über dreigliedrige Gruppen konformer Transformationen des Raumes*) und legte 1931 die Examensprüfung ab. Höfling arbeitete als Studienrat an Gymnasien in Bonn und Hamburg.

den im *Erlanger Programm* angelegten Aspekte (Ordnungsprinzip und Forschungsmittel) nicht auch positiv auf den Geometrieunterricht auswirken könnten. Seiner Meinung nach sei die anfänglich in dieser Angelegenheit weit verbreitete Skepsis und Ablehnung inzwischen gewichen und es gebe bereits einige ausgearbeitete Vorschläge.

Was nun die Verwendung der Transformationsgruppen als Ordnungsprinzip betreffe, so sollten die Schüler zunächst jeweils einen genügend großen Vorrat an Inhalten aus einer Geometrie kennenlernen, bevor die zu ihrer Transformationsgruppe gehörenden Abbildungen betrachtet werden. Es dürfe niemals so sein, „daß man dieses Ordnungsprinzip schon von vornherein an den Schüler heranbringt, ehe es überhaupt etwas zu ordnen gibt, sondern so, daß es allmählich aus dem Unterricht herauswächst.“¹²² Allerdings müsse beim Aufbau des Lehrgangs darauf geachtet werden, dass alle zu einer bestimmten Geometrie gehörenden Aussagen auch im Zusammenhang unterrichtet werden, was Höfling bei den seinerzeit bestehenden Lehrbüchern noch nicht verwirklicht sah. Insbesondere kritisierte er die Lehrbücher für die Oberstufe wegen ihrer Behandlung der „Neueren Geometrie“: „Unter dem wenig sagenden Namen „neuere Geometrie“ pflegte man ein Konvolut von Sätzen über harmonische Punkte und Strahlen, über Chordalen und Ähnlichkeitspunkte sowie die Sätze von Menelaus und Ceva, von Pascal und Brianchon zusammenzufassen. Dazu kam dann die synthetische Geometrie nach Steiner, die aber in letzter Zeit immer mehr in den Hintergrund tritt.“¹²³

In Übereinstimmung mit Dieck sah auch Höfling die projektive, die affine und die metrische (äquiforme) Geometrie als für den Geometrieunterricht relevant an, deren Inhalte jeweils durch die geometrischen Beziehungen der Inzidenz, des Parallelismus und des Senkrechtstehens gegeben seien. Die im obigen Zitat bereits angeklungene Abgrenzung der projektiven Geometrie von der synthetischen Geometrie nach Steiner erläuterte Höfling dann noch etwas näher, wobei er zunächst sehr klar definierte, was er mit dem Begriff projektive Geometrie meinte: „Unter projektiver Geometrie wollen wir vielmehr die durch die Gruppe aller Kollineationen und Korrelationen bestimmte Geometrie verstehen. Es ist gewiß nicht unwichtig, sich den Unterschied dieser beiden Auffassungen einmal klarzumachen, da sich hierbei ein Grund für die

¹²² Höfling 1932, S. 155

¹²³ Höfling 1932, S. 155; Auf welche Bücher er sich mit seiner Kritik konkret bezog, sagte Höfling nicht.

ablehnende Stellung ergeben wird, die man heute vielfach der synthetischen Geometrie gegenüber einnimmt.“¹²⁴

Was unter „synthetischer Geometrie“ nach Steiner zu verstehen sei (also die zweite Auffassung), erklärte er leider nicht so deutlich¹²⁵, sondern betrachtete die perspektive

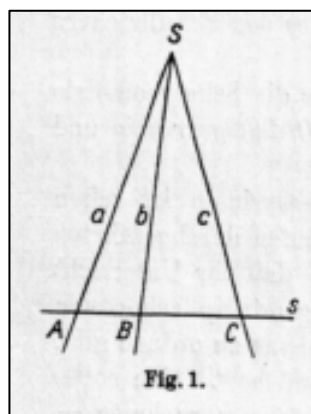


Abbildung 110: Perspektiv-
ve Zuordnung (aus:
Höfling 1932, S. 156)

Zuordnung des Strahlenbüschels **S** zur Punktreihe **s**, wobei er zur folgenden seltsamen Feststellung kam: „Diese paarweise Zuordnung zwischen den Punkten **A, B, C** und den Geraden **a, b, c** muß als Korrelation bezeichnet werden.“¹²⁶

Nun stellte Höfling jedoch richtigerweise fest¹²⁷, dass es unendlich viele Korrelationen gebe, die die Geraden **a, b, c, ...** den Punkten **A, B, C, ...** in gewünschter Weise zuordnen, wobei die nicht durch **S** verlaufenden Geraden der Ebene

jeweils verschieden abgebildet werden. Und er stellte weiter fest, „daß sowohl die perspektive wie die projektive Beziehung

keine Transformation ist, sondern daß es sich stets um eine Schar von unendlich vielen Kollineationen oder Korrelationen handelt, die aber keine Gruppe bilden.

Aus diesem Grunde ist eine Einordnung der Steinerschen Gedankengänge in das *Erlanger Programm* nicht möglich.“¹²⁸ Weiterhin sah Höfling ein Problem darin, die

Kegelschnitte mit Hilfe der projektiven Beziehung zweier Punktreihen zu erzeugen, denn diese beziehe sich nur auf die Punkte der beteiligten Geraden, sei also ein ein-dimensionales Phänomen. Wolle man die Zuordnung konstruktiv ausführen, müsse man die übrigen Punkte der Ebene aber benutzen, was eine Inkonsequenz darstelle.

„Daraus folgt weiter, daß auch die Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung durch projektive Punktreihen als nicht sachgemäß bezeichnet werden muß und deshalb auf der Schule unterbleiben könnte, insbesondere da wir andere, sehr viel fruchtbarere Methoden zur Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung haben.“¹²⁹ Eine analytische

¹²⁴ Höfling 1932, S. 155f

¹²⁵ Vermutlich meinte er damit die projektive Verwandtschaft und die darauf basierende Erzeugung der Kegelschnitte.

¹²⁶ Höfling 1932, S. 156; Offenbar sah er die Zuordnung der Geraden **a, b, c, ...** zu den Punkten **A, B, C, ...** als Abbildung an und glaubte, jede in der projektiven Geometrie auftretende Abbildung müsse in der zugehörigen Transformationsgruppe enthalten sein. Da die Kollineationen und Korrelationen die einzigen Elemente der Transformationsgruppe (d.h. die einzigen Transformationen) sind und hier den Geraden Punkte zugeordnet werden, muss es sich gemäß dieser Logik um eine Korrelation handeln.

¹²⁷ Eine Korrelation ist erst dann eindeutig festgelegt, wenn die Zuordnung von vier Punkten, von denen jeweils drei nicht auf einer Geraden liegen, zu vier Geraden, von denen jeweils drei nicht durch einen Punkt gehen, gegeben ist.

¹²⁸ Höfling 1932, S. 156

¹²⁹ Höfling 1932, S. 156

Behandlung der projektiven Geometrie in der Schule hielt Höfling für nicht sinnvoll, da die homogenen Koordinaten für die Schüler zu schwer seien. Jedoch könnten auch bei synthetischer Behandlung „reizvolle[n] Fragestellungen und interessante[n] Einsichten“¹³⁰ erreicht werden.

Im Unterschied zur projektiven Geometrie sah Höfling für die affine Geometrie, der generell eine größere Bedeutung beigemessen werden müsse, auch die Möglichkeit der analytischen Behandlung. Darüber hinaus biete „sie für die unterrichtliche Behandlung sehr viel bessere Ansatzmöglichkeiten als die projektive Geometrie.“¹³¹ Die durch die Untergruppen der „Dehnungen“¹³² und „Bewegungen“ gegebenen Inhalte würden ohnehin in weiten Teilen den Stoff abdecken, der bislang zur Elementargeometrie gezählt werde. Für das konkrete Vorgehen im Unterricht empfahl Höfling in Übereinstimmung mit Schülke, von der Elementargeometrie auszugehen und die dort behandelten Aussagen zu verallgemeinern: „Man wird natürlich im Unterricht so verfahren müssen, daß man von den Eigenschaften dieser Elementargeometrie ausgeht und allmählich alles das abstreift, was sich auf Entfernungen und Winkel bezieht und nur affine Invarianten (Teilverhältnis und Inhaltsverhältnis) beibehält. An geeigneten Beispielen kann man schließlich auch diese Begriffe beseitigen und zu rein projektiven Beziehungen vordringen.“¹³³

Am Schluss seines Artikels kam Höfling auch auf die Idee des *Erlanger Programms* als Forschungsmittel zu sprechen, wobei er sich auf ein Beispiel beschränkte. Ge-

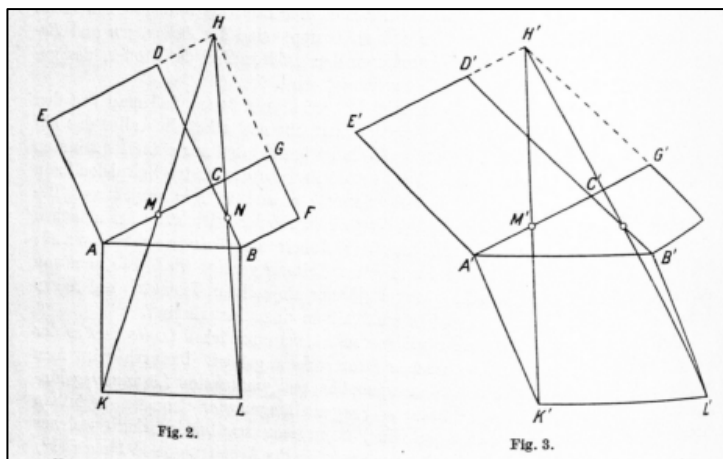


Abbildung 111: Affine Version des Satzes von Pythagoras (aus Höfling 1932, S. 158)

sucht ist eine affine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras, der in seiner gewöhnlichen Form zur metrischen Geometrie gehört. Dazu wird auf die ursprüngliche Pythagoras-Figur eine affine Abbildung angewendet, wodurch in der entstehenden Bildfigur das rechtwinklige Dreieck

¹³⁰ Höfling 1932, S. 156

¹³¹ Höfling 1932, S. 157; Dies bezieht sich vermutlich darauf, dass der Übergang von der metrischen zur affinen Geometrie leichter fällt, da lediglich die geometrische Beziehung der Orthogonalität verloren geht, während der betrachtete Raum erhalten bleibt.

¹³² Gemeint ist wohl die zentrische Streckung.

¹³³ Höfling 1932, S. 157

ein beliebiges Dreieck (Orthogonalität bleibt bei allgemeiner affiner Abbildung nicht erhalten) und die Quadrate Parallelogramme werden. Beachtet man, dass in der Pythagoras-Figur der Punkt **M** sowohl die Strecke **AC** als auch die Strecke **HK** halbiert¹³⁴ und affine Abbildungen das Teilverhältnis erhalten, so ergibt sich die affine Version des Satzes: „Zeichnet man über zwei Seiten eines beliebigen Dreiecks irgendwelche Parallelogramme, so ist die Summe ihrer Inhalte gleich dem Inhalt eines Parallelogrammes über der letzten Seite, dessen dritte Ecke man erhält, indem man den Schnittpunkt der äußeren Parallelogrammseiten an der Mitte einer der beiden ersten Dreiecksseiten spiegelt.“¹³⁵ In diesem Sinne sollten die Schüler selbst aus bekannten Sätzen neue Aussagen ableiten, so dass aus dem „Arbeitsunterricht“ ein „Forschungsunterricht“ werde. Diese Forderung war im Grunde genommen auch schon 50 Jahre früher in der Diskussion um die „Neuere Geometrie“ aufgestellt worden (vgl. 2.1).

Zuletzt betonte Höfling noch die Bedeutung der Auffassung von Geometrie als Invariantentheorie für die geometrischen Beweise. Oftmals werde von den Schülern gefragt, warum ein geometrischer Beweis anhand einer konkreten Figur Allgemeingültigkeit habe. Darauf müsse man antworten, „daß in einem sachgemäßen Beweis nur solche Schritte vorkommen dürfen, die gegenüber der dem betreffenden Zweig der Geometrie zugrunde liegenden Transformationsgruppe invarianten Charakter haben. Dann ist es selbstverständlich, daß der Beweis auch für alle zur Beweisfigur äquivalenten Figuren gilt. – Hieraus ergibt sich also, daß das invariante Arbeiten nicht nur große Vorteile mit sich bringt, sondern daß es für einen sachgemäßen Beweis auch die notwendige Voraussetzung ist.“¹³⁶

Insgesamt lässt sich also festhalten, dass auch Höfling den ordnenden Charakter des *Erlanger Programms* betonte und die sich daraus ergebende Systematik anhand der mit den Schülern bearbeiteten Inhalte aufzeigen wollte. Damit befand er sich also nahe an Schülkes Position, verzichtete aber im Gegensatz zu ihm auf die übermäßig starke Betonung der analytischen Darstellung. Das am Beispiel des Satzes von Pythagoras erläuterte Ableiten neuer Sätze zeigt hingegen eine größere Nähe zum Vorschlag Diecks. Der einzige Unterschied besteht darin, ob die Abfolge projektiv – affin – metrisch (Dieck) oder metrisch – affin – projektiv (Höfling) durchlaufen wird.

¹³⁴ Die Dreiecke **AKM** und **CHM** sind kongruent.

¹³⁵ Höfling 1932, S. 158f

¹³⁶ Höfling 1932, S. 159

4.3.4 Umfrage in der ZmnU

Die von Dieck, Schülke und Höfling diskutierten Fragen waren auch Gegenstand einer Umfrage, die die Schriftleitung im 64. Band der ZmnU (1933) unter der Überschrift *Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht* anschob. Der vorgegebene Fragenkatalog umfasste insgesamt acht Punkte, von denen für unser Thema die folgenden relevant sind:

„4. Soll man den Gruppenbegriff und die Abbildungslehre mit der projektiven Geometrie koppeln? An sich ist die Betonung des Gruppenbegriffes auch möglich, ohne daß man bis zur projektiven Geometrie vorschreitet. Andererseits kann man mit einer Berücksichtigung topologischer Fragen (Eulerscher Polyedersatz, Zusammenhangsverhältnisse) auch darüber hinausgehen.

5. Soll man die absteigende Linie projektiv – affin – äquiform-metrisch oder umgekehrt die aufsteigende bevorzugen? [...]

8. Sollen zumindest auf der Oberstufe andere geometrische Methoden (synthetische, im Sinne von Euklid oder von Steiner, stereometrische im Sinne von Dandelin, analytische im Sinne von Descartes usw.) verdrängt werden oder soll, etwa am Beispiel der Kegelschnitte, eine Darstellung der Verschiedenheit geometrischer Methoden versucht werden, in der sich Gruppen- und Abbildungsbegriff als ordnendes Prinzip erweisen?“¹³⁷

In den Bänden 64 und 65 wurden die Antworten der folgenden Leser abgedruckt:

- L. Balsler (Darmstadt)
- H. Beck (Bonn)
- F. Bosch (Aachen)
- W. Dreetz (Berlin)
- K. Fladt (Stuttgart)
- E. Geck (Stuttgart)
- Hch. Hofman (Frankfurt a.M.)
- B. Kerst (Zwickau)
- A. Schülke (Berlin)

Dabei zeigte sich eine große Übereinstimmung bezüglich Frage 5, bei der alle für die aufsteigende Linie plädierten. Insgesamt sechs Leser sprachen sich in ihrer Antwort zu Frage 4 für die Verschmelzung mit der projektiven Geometrie aus. Allerdings wird

¹³⁷ o.V. 1933, S. 201f

aus den Antworten auch deutlich, dass es ihnen hauptsächlich darum ging, bis zu den Kollineationen (speziell bis zur Zentralkollineation) zu kommen. Dies sollte insbesondere der Erzeugung der Kegelschnitte als zentralperspektive Bilder des Kreises dienen. Die Beibehaltung bzw. Hinzunahme weiterer geometrischer Methoden in der Oberstufe (Frage 8) wurde mit Ausnahme der analytischen von nahezu allen Lesern abgelehnt.

4.4 Der Einfluss der *Meraner Reform* auf die „Neuere Geometrie“

Auf der im Jahr 1904 in Breslau stattfindenden 76. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte wurde im Anschluss an eine breite Diskussion über die aktuelle Lage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts und mögliche Reformschritte die folgende Resolution einstimmig angenommen: „In voller Würdigung der großen Wichtigkeit der behandelten Fragen spricht die Versammlung dem Vorstande den Wunsch aus, in einer möglichst vielseitig zusammengesetzten Kommission diese Fragen weiter behandelt zu sehen, damit einer späteren Versammlung bestimmte, abgeglichene Vorschläge zu möglichst allseitiger Annahme vorgelegt werden können.“¹³⁸ Diese Kommission, der Vertreter aus Schule und Hochschule sowie der größeren Fachverbände angehörten¹³⁹, legte dann der nächstjährigen Naturforscherversammlung in Meran ihren Reformvorschlag vor, weshalb sich auch der Begriff *Meraner Reform* eingebürgert hat.

Der Vorschlag gliederte sich in einen allgemeinen Teil und jeweils einen speziellen Teil für die einzelnen Unterrichtsfächer (Mathematik, Physik, Chemie und Biologie), der neben methodischen Bemerkungen auch einen Lehrplanentwurf enthielt. Die zentralen Aspekte für die Mathematik waren folgende: „Es handelt sich bei der Mathematik wesentlich darum, daß der Unterricht von manchem Ballast befreit werde, und daß er sich noch mehr den modernen Aufgaben der Schule [...] anpasse. Unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik muß auf einseitige und praktisch wertlose Spezialkenntnisse verzichtet, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung und Auffassung der Vorgänge in der Natur und in den menschlichen Lebensverhältnissen geweckt und gekräftigt werden. Demgemäß stellt

¹³⁸ Gutzmer 1905, S. 535

¹³⁹ Zu den Einzelheiten der Einsetzung der Kommission und deren Zusammensetzung vergleiche man Krüger 2000.

die Kommission die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens als wichtigste Aufgaben des Mathematikunterrichts hin.“¹⁴⁰ Diese Festschreibung des „funktionalen Denkens“ dürfte (beabsichtigt oder unbeabsichtigt) einen nicht zu unterschätzenden Beitrag für das Verschwinden der „Neueren Geometrie“ aus dem Schulunterricht geleistet haben.

4.4.1 „Neuere Geometrie“ im Lehrplanentwurf

Zunächst liest sich der Lehrplanentwurf, der primär für die Gymnasien gestaltet war¹⁴¹, vom Standpunkt der Befürworter der „Neueren Geometrie“ jedoch sehr positiv. So war für die Obersekunda das „Eingehen auf die harmonischen Beziehungen und die Grundlagen der neueren Geometrie als Abschluß der Planimetrie“¹⁴² und für die Oberprima „Kegelschnittslehre sowohl in analytischer als in synthetischer Behandlung“¹⁴³ vorgesehen. Neu aufgenommen in Unterprima wurde die „zusammenhängende Betrachtung der bisher aufgetretenen Funktionen in ihrem Gesamtverlauf nach Steigen und Fallen (unter eventueller Heranziehung der Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals)“¹⁴⁴, wodurch die Tür für die Einführung der Differential- und Integralrechnung in allen höheren Schulen geöffnet wurde. Auch die methodischen Hinweise für den Geometrieunterricht griffen viele in der Diskussion um die „Neuere Geometrie“ aufgestellten Forderungen auf. So heißt es etwa in den Erläuterungen für die unteren Klassen (Sexta, Quinta, Quarta): „Der geometrische Unterricht soll sich an die natürliche Anschauung anschließen und von praktischen Messungen ausgehen; er wird auf das sorgfältigste vermeiden müssen, Dinge, die dem natürlichen Gefühl als selbstverständlich erscheinen, durch eine pedantische Beweissystematik dem Verständnis zu entfremden, vielmehr alle logischen Beweise zu einem Bewußtwerden der ganz von selbst im Geiste auftretenden Erwä-

¹⁴⁰ Gutzmer 1905, S. 537

¹⁴¹ Die Kommission forderte, in allen Jahrgangsstufen des Gymnasiums der Mathematik vier Unterrichtsstunden pro Woche zuzuweisen, was einen Zuwachs von einer Stunde pro Woche in Unter- und Obertertia bedeutete. In den Realgymnasien sollte ab Untertertia der Mathematik eine Wochenstunde gestrichen werden, so dass in beiden Schulformen derselbe Stundenumfang vorhanden wäre. Daher sollte auch der Gymnasiallehrplan für die Realgymnasien gelten. Für die Oberrealschulen, in denen die Mathematik ihren größeren Stundenumfang behalten sollte, sah der Plan vor, denselben Stoff vertieft zu behandeln und zusätzlich analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung weiterzuführen.

¹⁴² Gutzmer 1905, S. 549

¹⁴³ Gutzmer 1905, S. 549

¹⁴⁴ Gutzmer 1905, S. 549

gungsmomente zu gestalten suchen, mit dieser Behandlung aber auch erst allmählich einsetzen.“¹⁴⁵ Und auch für die mittleren Klassen (Unter- und Obertertia, Untersekunda) wurden einige bekannte Aspekte gefordert: „Diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie durch fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lagenänderung im einzelnen erleidet, z. B. bei Gestaltänderung der Vierecke, Änderung in der gegenseitigen Lage zweier Kreise usw. Zugleich aber bietet die Betrachtung der hierbei auftretenden Beziehungen, die man nach mannigfachen Gesichtspunkten in Reihen ordnen kann, ein vorzügliches Mittel zur Schulung des logischen Denkens, [...] ebenso die Betrachtung der Übergangsfälle und die Herausarbeitung des Grenzbegriffs. [...] besonderer Wert ist auf die der Gewohnheit des funktionalen Denkens sehr förderliche Determination¹⁴⁶ zu legen (wobei wieder die Grenzfälle in erster Linie zu diskutieren sind).“¹⁴⁷ Im Kern finden sich in diesen Ausführungen die Forderungen, die Rudolf Sturm bereits in seinem ersten Artikel zur „Neueren Geometrie“ auf der Schule von 1870 aufgestellt hatte. Allerdings fehlt der Hinweis, dass die vorgeschlagenen Methoden der „Neueren Geometrie“ entstammen. Alles wird vom „funktionalen Denken“ aus gesehen und von diesem Schlagwort überlagert. Ein sehr zaghafter Verweis auf die Inhalte der „Neueren Geometrie“ findet sich nur noch in den Erläuterungen zu den oberen Klassen. Dort heißt es: „In der Stereometrie ist die rechnerische Verwendung der Volumenformeln zu gunsten eines mehr auf die Anschauung zurückgehenden, die wesentlichen Grundbegriffe der darstellenden Geometrie hervorkehrenden Verfahrens möglichst zu beschränken. Auch sind einfache stereometrische Konstruktionsaufgaben, bei denen besonders auf eine gute zeichnerische Behandlung Wert zu legen ist, zu pflegen. Dabei wird sich unter Umständen auch Gelegenheit finden, früher behandelte Abschnitte der Planimetrie (Ähnlichkeitslehre, harmonische Beziehungen) unter stereometrischer Herleitung ihrer Grundlagen in einem neuen Lichte zu zeigen.“¹⁴⁸ Daraus ergibt sich also, dass die genannten Inhalte (wie im Lehrplanentwurf vorgesehen) unterrichtet werden sollten, zur Einführung aber ein anderer Zugang als die Integration in die darstellende Geometrie (vgl. 4.1) favorisiert wurde.

¹⁴⁵ Gutzmer 1905, S. 550

¹⁴⁶ Damit ist eigentlich gemeint, bei einer Konstruktionsaufgabe anzugeben, wie viele Lösungen existieren. Im Sinne des funktionalen Denkens ging es hier wohl auch darum, die Anzahl der Lösungen bei Variation der vorgegebenen Größen zu ermitteln.

¹⁴⁷ Gutzmer 1905, S. 551f

¹⁴⁸ Gutzmer 1905, S. 552

Somit enthält der Reformvorschlag an sich zunächst keinen direkten Anhaltspunkt für das Verschwinden der „Neueren Geometrie“ aus dem Schulunterricht. Anders verhielt es sich aber wohl bei der praktischen Umsetzung des Vorschlags, wo die Herkunft der für den Geometrieunterricht vorgeschlagenen und weitgehend akzeptierten methodischen Änderungen (also insbesondere die Beweglichkeit der Figuren) kaum noch eine Rolle spielte. Damit hatte die „Neuere Geometrie“ einen zentralen Legitimierungsaspekt verloren. Zudem wurde unter dem Einfluss Felix Kleins¹⁴⁹ die Einführung der Differential- und Integralrechnung in den Schulunterricht, die eigentlich von vornherein sein eigentliches Ziel gewesen war, forciert. Um den dafür nötigen Raum im Lehrplan zu schaffen, mussten notwendigerweise andere Inhalte entfallen.

4.4.2 Eduard Götting¹⁵⁰

Bereits drei Jahre vor der Vorlage der Meraner Reformvorschläge wies Eduard Götting in seinem Artikel *Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten* auf beide Aspekte hin. Hauptsächlich beschäftigte er sich mit den Vorschlägen Kleins zur Einführung der Differential- und Integralrechnung, denen er weitgehend positiv gegenüberstand. „Herr F. Klein hat in seinem Aufsatz: „Über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen“ [...] Gedanken über eine Erweiterung des mathematischen Lehrziels an den höheren Realanstalten ausgesprochen, die im wesentlichen darauf hinauslaufen, dass die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung in den Lehrplan aufzunehmen seien. Der Begründung dieses Gedankens [...] pflichte ich durchaus bei. Ich möchte nur, bevor ich auf eine Prüfung der Möglichkeit und der Art dieser Erweiterung eingehe, der Begründung noch einiges vom Standpunkt der Schule zufügen.“¹⁵¹ Im Rahmen dieser Begründung kam Götting auch auf die „Neuere Geometrie“ zu sprechen. Diese sah er als eine große

¹⁴⁹ Auch nach der Auflösung der Reformkommission im Jahre 1907 spielte Klein als Mitglied des *Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (DAMNU) und der *Internationalen mathematischen Unterrichtskommission* (IMUK) eine zentrale Rolle.

¹⁵⁰ Götting wurde am 7.2.1860 in Eschwege (Hessen) geboren. Nach dem Besuch des dortigen Progymnasiums und des Gymnasiums Hersfeld studierte er ab 1880 Mathematik und Naturwissenschaften in Berlin und Göttingen, wo er 1884 das Examen ablegte. Das Probejahr absolvierte er dann am Königlichen Gymnasium Göttingen, wo er anschließend zwei Jahre als Hilfslehrer arbeitete und 1887 zum ordentlichen Lehrer ernannt wurde. Im selben Jahr erfolgte die Promotion an der Universität Göttingen. Gemeinsam mit Otto Behrendsen verfasste Götting das *Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen* (Leipzig: Teubner 1909).

¹⁵¹ Götting 1902, S. 294

Ausnahme von der sonst vorherrschenden allgemeinen Haltung an, der Aufnahme neuer Inhalte in die Schulmathematik große Widerstände entgegen zu setzen. Der Grund dafür lag nach Göttings Meinung meist darin, dass eine Überforderung der Schüler befürchtet werde. Für die Geometrie gelte jedoch: „Durch die Methoden der neueren Geometrie soll der geometrische Schulunterricht befruchtet werden. Es soll durch sie erstens der Aufbau des Systems und die Anwendungen an Anschaulichkeit gewinnen, zweitens sollen einzelne Gebiete der neueren Geometrie dem Unterrichte angegliedert werden. Der erste Gedanke hat viel Gutes geschaffen, bei der Ausführung des zweiten aber ist man wenig glücklich gewesen. Die eingefügten Bruchstücke der neueren Geometrie wurden in die alte euklidische Form gepresst und haben so kein rechtes Leben gewinnen können. Jedenfalls lassen sie den Gedankeninhalt und den Wert der neuen Methoden gar nicht ahnen.“¹⁵² Götting unterscheidet also klar zwischen Methode und Inhalt der „Neueren Geometrie“, wobei er die methodischen Veränderungen im Unterricht der bestehenden Inhalte positiv sieht. Demgegenüber sei die Aufnahme der neuen Inhalte misslungen, da diese paradoxerweise in der alten Form unterrichtet würden.

Für uns besonders interessant ist Göttings Hinweis, dass viele Aspekte, die durch die Differential- und Integralrechnung Eingang in den Schulunterricht finden sollten, längst umgesetzt seien. „Aber auch dass durch sie [die Differential- und Integralrechnung] ganz neue Ideen und Methoden in den Elementarunterricht eingeführt würden, ist nicht richtig. [...] Man führt geometrische Beweise durch Bewegung und wenn man aus der stetigen Veränderung der Figuren neue geometrische Sätze und tieferen Einblick in ihren Zusammenhang gewinnt, so erkennt man darin den Einfluss der neueren Geometrie. Veränderliche Größen und „Funktionen“ werden oder sollten wenigstens schon früh in der Arithmetik wie in der Geometrie benutzt werden [...].“¹⁵³ Hier unterstreicht er also sehr klar, dass seiner Ansicht nach die unter dem Schlagwort „funktionales Denken“ zusammengefassten methodischen Vorschläge der „Neueren Geometrie“ entstammten und zumindest in Ansätzen verwirklicht waren.

Um nun die Einführung der Differential- und Integralrechnung in den Realgymnasien zu ermöglichen, schlug Götting eine Reihe von Änderungen bzw. Kürzungen für den Lehrplan vor. So plädierte er u.a. dafür, die darstellende Geometrie mit dem Unterricht im Linearzeichnen, das ein eigenständiges (meist fakultatives) Fach darstellte, zu verschmelzen und dieses Gebiet dem Mathematiklehrer zu übertragen. Dort wür-

¹⁵² Götting 1902, S. 295

¹⁵³ Götting 1902, S. 295

den dann „auch einige wichtige Abschnitte der neueren Geometrie ihren richtigen Platz“¹⁵⁴ finden. Die im Lehrplan vorgesehene elementar-synthetische Behandlung der Kegelschnitte sollte vollständig entfallen, da diese damit vergleichbar wäre, „als wollte man mit dem Spiess statt mit der Flinte zur Jagd gehen.“¹⁵⁵ An dieser Stelle muss allerdings deutlich betont werden, dass Göttings Vorschläge bezüglich darstellender und „Neuerer Geometrie“ nicht von inhaltlichen Gründen getragen waren, sondern vor allem der Aspekt der Zeitersparnis ausschlaggebend war.

4.4.3 Elisabeth Staiger¹⁵⁶

Einen deutlichen Hinweis auf die Vereinnahmung der „Neueren Geometrie“ durch die Anhänger des „funktionalen Denkens“ gab Elisabeth Staiger, eine Tochter Felix Kleins, im 49. Band der ZmnU (1918). Ihr Beitrag *Über die Anwendung beweglicher Figuren im geometrischen Unterricht* erschien allem Anschein nach infolge des Aufrufs der Schriftleitung im 45. Band, enthielt aber im Gegensatz zu den anderen in diesem Rahmen veröffentlichten Artikeln kaum Hinweise auf die Inhalte der „Neueren Geometrie“ und deren Umsetzung. Stattdessen konzentrierte sich Frau Staiger darauf, als Hauptnutzen der aus der projektiven Geometrie entnommenen Methoden die Förderung des „funktionalen Denkens“ herauszustellen: „Unter den neuen Gedanken, die durch den Einfluß der projektiven Geometrie in der Schulmathematik lebendig geworden sind, ist vielleicht der pädagogisch wichtigste der, welcher die geometrischen Figuren als in ihren Teilen bewegliche Gebilde anzusehen lehrt. Zweck dieser Beweglichkeit ist nämlich, zunächst die funktionale Abhängigkeit der Teile der Figur zu studieren“¹⁵⁷. Weiterhin werde durch die Beweglichkeit der Figuren auch die Möglichkeit eröffnet, mehrere geometrische Aussagen als Spezialfälle eines allgemeinen Satzes zu erkennen, wozu sie auch so genannte „Grenzfälle“ zählte. Wurde dieses Vorgehen von den Anhängern der „Neueren Geometrie“ vor allem unter dem Aspekt der Systematisierung und Steigerung der Übersichtlichkeit gepriesen,

¹⁵⁴ Götting 1902, S. 299

¹⁵⁵ Götting 1902, S. 299

¹⁵⁶ Elisabeth Staiger wurde am 21.5.1888 in Göttingen geboren. Sie besuchte zunächst die Höhere Mädchenschule in Göttingen und legte 1908 die Reifeprüfung an der Leibnizschule in Hannover ab. Anschließend studierte sie Mathematik und Physik in Göttingen, wo sie 1913 das Examen ablegte. Das Probejahr legte sie 1917 in Trier ab und erhielt danach auf Fürsprache ihres Vaters eine Stelle in Essen. Nach ihrer Pensionierung kehrte sie nach Göttingen zurück, wo sie am 18.7.1968 starb. (vgl. Tobies 1995)

¹⁵⁷ Staiger 1918, S. 341

sah sie es primär als Vorbereitung für die Einführung des Grenzwertes: „Was hier [beim Übergang vom allgemeinen Satz zum Grenzfall] geleistet wird am einfachsten faßlichsten Beispiel, ist nicht weniger als die Vollziehung eines regelrechten Grenzprozesses. Für eins der Hauptziele der Erziehung zum funktionalen Denken, für die Erfassung des limes-Begriffes, ist hier ein in seiner Verständlichkeit und Einfachheit nicht zu übertreffendes reiches Material gegeben.“¹⁵⁸ Darüber hinaus könne die Erkenntnis, dass spezielle Aussagen aus allgemeineren hergeleitet werden können, auch ein Bedürfnis dafür wecken, den umgekehrten Weg zu gehen und nach allgemeineren Konzepten zu suchen. Jedoch war auch dies nicht wie bei den Anhängern der „Neueren Geometrie“ auf einzelne Aussagen und Sätze innerhalb der Geometrie bezogen, sondern auf das Verhältnis verschiedener Geometrien zueinander. Es ging um „eins der großen Prinzipien aller Wissenschaft: das Ordnen der einzelnen Erkenntnisse unter einen höheren gemeinsamen Gesichtspunkt, ein Verfahren, das wiederum in der projektiven Geometrie die imposantesten Beispiele findet; denn als eine ihrer größten Leistungen darf wohl betrachtet werden, daß sie die gesamte, bis zu ihrer Zeit bekannte euklidische Geometrie als Sonderfall umschließt und sie als Übergangs- oder Grenzfall zweier nichteuklidischer Geometrien erkennen läßt.“¹⁵⁹ Vermutlich dachte Frau Staiger hier an das *Erlanger Programm* ihres Vaters (vgl. dazu auch 4.3).

Zur Illustration der genannten Aspekte wurden zwei konkrete Beispiele vorgestellt, von denen sich eines auf die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise bezog. Hierzu sollten die Schüler folgendes Modell anfertigen: Auf einer Pappe wird ein Kreis aus

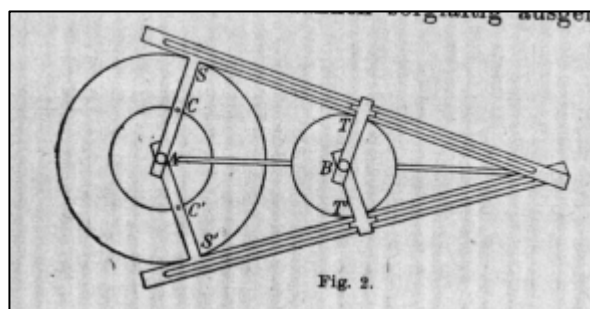


Abbildung 112: Gemeinsame Tangenten zweier Kreise (aus: Staiger 1918, S. 343)

Papier mit einem Radius von 8 cm (Mittelpunkt **A**) aufgeklebt. Der Mittelpunkt **B** eines zweiten, aus Pappe bestehenden Kreises mit Radius 2 cm kann in einem von **A** ausgehenden Schlitz bewegt werden. Die Tangenten werden durch zwei rechte Winkel aus Pappe dargestellt, wobei jeweils ein Schenkel 8 cm lang und

mit dem freien Ende in **A** drehbar befestigt ist. In den zweiten Schenkel wird jeweils über die gesamte Länge ein Schlitz geschnitten. Von zwei Papierstreifen der Länge 2 cm ist jeweils ein Ende in **B** drehbar befestigt, das zweite Ende kann sich auf den

¹⁵⁸ Staiger 1918, S. 341

¹⁵⁹ Staiger 1918, S. 341

Tangenten (Schlitze) bewegen. Mit diesem Modell sollten die Schüler nun untersuchen, wie sich die Lage der Berührungspunkte und des Tangentenschnittpunkts, die Länge der Tangentenabschnitte und die auftretenden Winkel bei Bewegung des Punktes **B** verändern.¹⁶⁰ Das zweite angeführte Beispiel bezog sich auf den Satz des Pythagoras und hatte somit auch keine direkte Verbindung zu den Inhalten der „Neueren Geometrie“. Diese wurden von Frau Staiger offenbar nicht mehr als Selbstzweck, sondern als Lieferant für weitere Beispiele zur Förderung des „funktionalen Denkens“ gesehen, wie sie am Schluss ihres Artikels deutlich machte: „Die Fülle des Materials an methodischen Anregungen und Übungsbeispielen, die diese Betrachtungsweise erschließt, wächst mit dem Pensum der aufsteigenden Klasse. Die Trigonometrie, vor allem aber das Pensum der Obersekunda, umfassend die Lehre von Chordalen, Polaren, harmonischer Teilung, Apollonischen Aufgaben usw., ist geradezu eine Fundgrube für den „funktional denkenden“ Geometer.“¹⁶¹

Im Laufe der Zeit wurden mit dem vorgestellten Beispiel vergleichbare Hilfsmittel entwickelt, um geometrische Zusammenhänge so zu visualisieren, dass die Wechselwirkung zwischen den beteiligten Größen deutlich wurde. Unter anderem wurden Unterrichtsfilme, Kinohefte (Daumenkinos) und Modelle mit Gelenkmechanismen eingesetzt¹⁶². Sie alle zeigen das Ziel der Anhänger des „funktionalen Denkens“, nämlich dass „der „Geist“ der neueren Geometrie [...], d.h. die für die projektive Geometrie charakteristischen Methoden der Begriffsbildung und Beweisführung, jedoch nicht deren spezifische Inhalte in den Schulunterricht aufgenommen werden sollten.“¹⁶³

¹⁶⁰ Die genannten Zusammenhänge kann man heutzutage mithilfe von Dynamischer Geometrie-Software untersuchen.

¹⁶¹ Staiger 1918, S. 348

¹⁶² Für eine genauere Darstellung der verschiedenen Möglichkeiten vergleiche man Krüger 2000, S. 193ff.

¹⁶³ Krüger 2000, S. 204

4.4.4 Philipp Weinmeister¹⁶⁴

Der Aspekt der Verdrängung der Inhalte der „Neueren Geometrie“ durch die Einführung der Differential- und Integralrechnung wurde bereits von Philipp Weinmeister kurz nach Erscheinen der *Meraner Vorschläge* thematisiert. In seinem Artikel *Unendlichkeitsrechnung in der Schule* betonte er gleich zu Beginn die große Relevanz der von ihm behandelten Thematik: „Wohl kaum hat eine Frage die mathematische Lehrerwelt Deutschlands so in Erregung versetzt als die zur Zeit schwebende über die Einführung der Infinitesimalrechnung in die höheren Lehranstalten.“¹⁶⁵ Er selbst gab sich im Folgenden als klarer Befürworter der Einführung zu erkennen und betonte, dass es auf Seiten der Gegner oftmals falsche Vorstellungen davon gebe, wie sich die Befürworter die praktische Umsetzung vorstellten. Weit verbreitet sei zum Beispiel die falsche Auffassung, „der bisherige mathematische Unterrichtsstoff solle zusammengedrängt, und ihm dann als Kopf die Unendlichkeitsrechnung aufgesetzt werden.“¹⁶⁶ Da dadurch die Schüler mehr belastet und die anderen Unterrichtsinhalte vernachlässigt würden, lehnte Weinmeister ein solches Konzept strikt ab: „Das darf auf keinen Fall geschehen. Weder die Unterrichtsstunden, noch die Hausarbeiten der Schüler dürfen vermehrt werden. Diese sollen nicht noch mehr lernen, nein, sie sollen bei gleicher Arbeit auf ein höheres Niveau gehoben werden.“¹⁶⁷ Als notwendige Konsequenz müssten also einige der bestehenden Inhalte aus dem Lehrplan ausscheiden.

Im weiteren Verlauf des Artikels zeigte Weinmeister dann, an welchen Stellen des bestehenden Lehrplans er welche Änderungen vornehmen und welche Inhalte der Differential- und Integralrechnung er stattdessen behandeln wollte. Dabei kam er auch auf die „Neuere Geometrie“ zu sprechen: „In die Planimetrie hat man noch einiges aus der sogenannten neueren synthetischen Geometrie aufgenommen, nämlich die harmonischen Gebilde, Pol und Polare, Sätze von Pascal und Brianchon, Potenz-

¹⁶⁴ Johann Philipp Weinmeister wurde am 27.8.1848 in Kassel geboren und besuchte zunächst eine Privatschule, ab Quinta das Kurfürstliche Gymnasium in Marburg. Nach bestandener Reifeprüfung 1868 studierte er an der Universität Marburg Mathematik und Philosophie. Bedingt durch die Teilnahme am Deutsch-Französischen Krieg legte er das Examen erst 1872 ab. Im selben Jahr wurde er Hilfslehrer an der Realschule 1. Ordnung in Leipzig, wo er 1873 zum Oberlehrer befördert wurde. Auch während seiner Lehrtätigkeit blieb Weinmeister wissenschaftlich interessiert, hörte Vorlesungen an der Universität Leipzig (u.a. bei Klein) und promovierte 1876. 1883 wurde Weinmeister auf eine Professur für Mathematik und Physik an der Forstakademie in Tharandt (Sachsen) berufen. Er starb am 27.8.1910. (vgl. Weinmeister 1911)

¹⁶⁵ Weinmeister 1907, S. 1

¹⁶⁶ Weinmeister 1907, S. 1

¹⁶⁷ Weinmeister 1907, S. 1f

linie beim Kreis und die Ähnlichkeitspunkte.“¹⁶⁸ Den erstgenannten Inhalten (harmoonische Gebilde, Pol und Polare) maß er eine große Bedeutung für die Behandlung der Kegelschnitte bei, die übrigen Sätze sah er hingegen als überflüssig an: „Der Schüler lernt einige hübsche Sätze kennen, aber eine Perspektive öffnet sich ihm nicht. Berücksichtigen wir, daß die Geometrie des Maßes den Anwendungen weit näher liegt, als die der Lage, und daß wir den mathematischen Unterricht gerade in dieser Richtung weiter ausbilden wollen, so können wir ruhig auf jene Sätze verzichten.“¹⁶⁹ Wieder findet sich das Argument der fehlenden Perspektive, also eines zusammenfassenden Grundgedankens. Neu ist der Hinweis auf eine stärkere Anwendungsorientierung, zu der die „Neuere Geometrie“ keinen Beitrag leisten könne. Dabei wird allerdings übersehen, dass sich im Zusammenhang mit der darstellenden Geometrie und dem perspektivischen Zeichnen durchaus Möglichkeiten für die Anwendung der projektiven Geometrie ergeben (vgl. 4.1).

Die Ausführungen Weinmeisters zeigen die Stoßrichtung der weiteren Entwicklung. Waren in der Folgezeit solche deutlichen Aussagen für die Streichung der „Neueren Geometrie“ zugunsten der Differential- und Integralrechnung auch eher rar, erscheint es bei Betrachtung der in den 1920er Jahren durchgeführten Lehrplanreformen (vgl. 4.5) nicht unplausibel, diesen Zusammenhang herzustellen und die *Meraner Reform* als einen Sargnagel der „Neueren Geometrie“ anzusehen.

4.5 Das beginnende Verschwinden der „Neueren Geometrie“ aus den Lehrplänen

Um die Wirkung der dargestellten Vorschläge auf das weitere Schicksal der „Neueren Geometrie“ im Schulunterricht bewerten zu können, muss zunächst das zu dieser Zeit durch die Reform Erreichte genauer in den Blick genommen werden. Einen guten Eindruck davon vermittelte Walther Lietzmann in seiner *Methodik des mathematischen Unterrichts* (1916), in der er der „Neueren Geometrie“ ein aus vier Abschnitten bestehendes Kapitel widmete. Zu Beginn des ersten Abschnitts (*Neuere Geometrie des Dreiecks, Vierecks und Kreises*) stellte er fest: „Das Planimetrieempfinden der Unter- und Mittelstufe pflegt eine Erweiterung in der Weise zu finden, daß

¹⁶⁸ Weinmeister 1907, S. 12

¹⁶⁹ Weinmeister 1907, S. 12

man mit den der euklidischen Geometrie eigenen Methoden eine Reihe von Sätzen entwickelt, die sich auch auf die typischen Figuren Euklids, auf das Dreieck, das Viereck, den Kreis beziehen, die aber in ihrem Inhalt über das hinaus gehen, was sich bei Euklid findet.“¹⁷⁰ Die neu aufgenommenen Inhalte gliederte Lietzmann in drei im Unterricht meist in dieser Reihenfolge durchgenommene Gruppen, wobei er zur ersten die Sätze von Ceva und Menelaus einschließlich ihrer Umkehrungen, den Satz von Pascal für den Kreis, den Satz von Desargues sowie weitere Sätze aus der neuen Dreieckslehre (z.B. über den Feuerbachschen Kreis) zählte. Die zweite Gruppe umfasste harmonische Punktreihen und Strahlenbüschel und deren Anwendung auf vollständiges Viereck und Vierseit, während sich die dritte Gruppe mit Pol und Polare am Kreis, Potenz und Potenzlinie und den Ähnlichkeitspunkten zweier Kreise beschäftigte. Als Ziel des gesamten Lehrgangs (d.h. aller drei Gruppen zusammen) sah Lietzmann die Lösung des Apollonischen Berührproblems.¹⁷¹ Positiv bewertete er an diesem Konzept, dass mit dessen Einführung viele methodische Neuerungen¹⁷² Eingang in den Geometrieunterricht gefunden hätten. Diese würden aber inzwischen auch in der Euklidischen Geometrie berücksichtigt, sodass kein allzu großer Unterschied mehr zwischen den beiden Bereichen bestehe, weshalb Lietzmann zu folgender Schlussfolgerung kam: „Meine Beurteilung dieses Gebietes der Geometrie will ich zunächst einmal etwas krass aussprechen. Es könnte nichts schaden, wenn das Kapitel als solches ganz verschwände und, soweit es wertvollen Stoff enthält, in andere Gebiete der Geometrie aufgehen würde.“¹⁷³ Im Einzelnen bedeutete das für die genannten Inhalte, die Lehre von den harmonischen Gebilden, die Sätze von Ceva und Menelaus sowie die Ähnlichkeitspunkte und Potenzlinie am Kreis in die Ähnlichkeitslehre zu integrieren. Die bislang nur für den Kreis betrachteten Sätze von Pascal und Brianchon sowie die Polarentheorie und den Satz von Desargues wollte Lietzmann in die Kegelschnittslehre verschieben, da diese Inhalte in ihrer bisherigen Form „zu einer gewiß ganz interessanten, aber doch für den Fortschritt der Raumbeherrschung unwesentlichen Tatsache“¹⁷⁴ verkämen. Gänzlich

¹⁷⁰ Lietzmann 1916, S. 234

¹⁷¹ Ein Beispiel für einen solchen Lehrgang ist also der in Kapitel 3.1 vorgestellte von Gustav Holz Müller.

¹⁷² Diese stellte Lietzmann im dritten Abschnitt genauer vor.

¹⁷³ Lietzmann 1916, S. 236

¹⁷⁴ Lietzmann 1916, S. 237

gestrichen werden sollte das Apollonische Berührproblem.¹⁷⁵ Allerdings bemerkte Lietzmann auch, dass die Auflösung des Gebietes mit den aktuellen Vorgaben des Lehrplans nicht vereinbar sei. Außerdem müsste dazu der Ähnlichkeitslehre ein größerer zeitlicher Rahmen eingeräumt werden und zusätzlich eine Umgestaltung der (synthetischen) Kegelschnittslehre erfolgen.

Deren zumeist praktizierte Form¹⁷⁶ stellte Lietzmann im zweiten Abschnitt (*Die synthetische Geometrie der Kegelschnitte*) näher vor. Ausgangspunkt dabei sei die Definition der Kegelschnitte als Ortslinien, wobei verschiedene Möglichkeiten in Frage kämen (zwei Brennpunkte, Brennpunkt und Leitlinie, ...). Anschließend solle beispielsweise auf die Gliederung der Ebene durch einen Kegelschnitt (Welche Punkte liegen im Inneren, welche im Äußeren?) oder die Konstruktion der Tangenten eingegangen werden. Diesen Teil fasste Lietzmann so zusammen: „Die Art und Weise, wie diese Sätze abgeleitet werden, unterscheidet sich in den Lehrgängen, die wir bisher im Auge hatten, in nichts von dem Verfahren des Euklid. In der Tat handelt es sich um eine methodisch und zum größten Teil auch inhaltlich der Apollonischen nachgebildete Kegelschnittlehre.“¹⁷⁷ Der Zusammenhang zur Definition der Kegelschnitte als ebene Schnitte des Kreiskegels sollte mithilfe der Dandelin'schen Kugeln hergestellt werden. Am Schluss des Abschnitts machte Lietzmann deutlich, dass diese Form der synthetischen Behandlung der Kegelschnitte nur dann zum Tragen kommen solle, wenn die „Geometrie der Lage oder die projektive Geometrie“¹⁷⁸ nicht zur Verfügung stehe: „Mit der Verneinung oder Bejahung dieser Frage steht und fällt die eben skizzierte Apollonische Methode. Denn wer die Mittel jener geometrischen Theorien zur Hand hat, wird eine ganz anders geartete Geometrie der Kegelschnitte an die Stelle setzen.“¹⁷⁹ Die Nutzung dieser anderen Form der Kegelschnittlehre, die er offenbar als der Apollonischen überlegen erachtete und später im vierten Abschnitt genauer erläuterte, war die zweite Voraussetzung für die Auflösung des Lehrgangs über die *Neuere Geometrie des Dreiecks, Vierecks und Kreises*.

Anschließend ging Lietzmann im dritten Abschnitt (*Einfügung einiger Grundgedanken der neueren Geometrie in die alte*) darauf ein, welche Wirkung der Methoden der

¹⁷⁵ In der zweiten Auflage des Buches (1923) merkte Lietzmann jedoch an: „Das Apollonische Berührproblem konnte bis vor kurzem als eine praktisch belanglose Aufgabe gelten. Sie hat im Kriege durch das Schallmeßproblem ungeahnte Bedeutung gewonnen.“ (Lietzmann 1923, S. 188)

¹⁷⁶ Lietzmann verwendete hier nicht die Bezeichnung „Neuere Geometrie“, zu der er diesen Zugang (in Übereinstimmung mit der breiten Mehrheit) offenbar nicht hinzurechnete.

¹⁷⁷ Lietzmann 1916, S. 241

¹⁷⁸ Lietzmann 1916, S. 244; Zur deutlichen Unterscheidung der verschiedenen Ansätze verwendete er hier und im weiteren Text diese Bezeichnung, jedoch zusätzlich auch den Begriff „Neuere Geometrie“.

¹⁷⁹ Lietzmann 1916, S. 244

projektiven Geometrie auf den bestehenden Geometrieunterricht zu beobachten sei. Dabei erwähnte er zunächst die seit über vierzig Jahren andauernden Bemühungen zur Aufnahme ihrer Inhalte, die im Artikel Sturms im ersten Band der ZmnU ihren Ausgangspunkt gehabt hätten. Ein klares Resultat konnte er jedoch nicht feststellen: „Und doch, wenn man das Ergebnis dieser letzten vierzig Jahre übersieht, so muß man sagen, eine irgendwie klare Stellungnahme zu dem damit für den mathematischen Unterricht gegebenen Problem ist nicht erkennbar.“¹⁸⁰ In einem Punkt konnte er jedoch eine weitgehende Übereinstimmung in den verschiedenen Positionen bemerken: „Daran, daß die euklidische oder metrische Geometrie durch die projektive Geometrie oder Geometrie der Lage schon auf der Unter- und Mittelstufe ersetzt werde, ist nicht zu denken. Wir werden auch für die Zukunft in Quarta mit Dreiecken, Vierecken und Kreisen anfangen und nicht mit Punktreihen und Strahlenbüscheln.“¹⁸¹ Nach diesem Exkurs, der bereits auf die Ausführungen des vierten Abschnitts vorbereitete, kam Lietzmann auf das eigentliche Thema, nämlich die methodische Umgestaltung des Geometrieunterrichts im Sinne der projektiven Geometrie, zurück, wobei er eine deutliche Position bezog: „Gewisse Grundgedanken, die die neuere Geometrie geschaffen hat, müssen in die alte Geometrie eindringen und sie allmählich umwandeln. In diesem Umsetzungsprozeß sind wir gegenwärtig begriffen.“¹⁸² Für die Schwierigkeiten des lange Zeit praktizierten Geometrieunterrichts hatte er nämlich drei Gründe ausgemacht, die er als „einen didaktischen, einen psychologischen und einen stofflichen“¹⁸³ charakterisierte. Zur Behebung des ersten sollten geometrische Aufgaben sich nicht mehr ausschließlich auf das Durchführen von Konstruktionen beziehen und durch Verzicht auf eine strenge Axiomatik könne das zweite Problem beseitigt werden. Die Lösung zum Ausräumen des dritten Problems sah er schließlich darin, „die alte Geometrie im Sinne der neueren umzuwandeln“¹⁸⁴. Was damit genauer gemeint war, führte Lietzmann im Folgenden näher aus, indem er jeweils die Vorteile der einzelnen Aspekte erklärte und eine Empfehlung abgab, ab welcher Stelle diese im Unterricht benutzt werden sollten. Im Einzelnen diskutierte er die Beweglichkeit der geometrischen Gebilde, die Verwendung des Richtungsbegriffs

¹⁸⁰ Lietzmann 1916, S. 244; Gleichzeitig wies er auf den 45. Band der ZmnU hin, anhand dessen man sich einen Überblick über die verschiedenen Positionen verschaffen könne.

¹⁸¹ Lietzmann 1916, S. 245

¹⁸² Lietzmann 1916, S. 245

¹⁸³ Lietzmann 1916, S. 245

¹⁸⁴ Lietzmann 1916, S. 245

bei Geraden bzw. Strecken und Winkeln¹⁸⁵, die Nutzung der unendlich fernen Punkte, die Thematisierung der Dualität anhand von konkreten Beispielen¹⁸⁶ und die Gliederung der Planimetrie gemäß den geometrischen Verwandtschaften (Kongruenz und Ähnlichkeit).

Im letzten Abschnitt (*Projektive Geometrie und Kegelschnittlehre*) ging Lietzmann dann schließlich auf die Frage der Einführung der Inhalte der projektiven Geometrie in den Schulunterricht ein, wobei er zu Beginn klarmachte, dass es aktuell dazu noch keine einhellige Meinung gebe: „Hier ist alles im Fluß; und das will schon einen Fortschritt gegen früher bedeuten, wo eigentlich alles im Schlaf lag. Nur über eines ist man sich wohl im klaren, daß als Gegenstand die Kegelschnittlehre gewählt wird.“¹⁸⁷ Aus historischer Perspektive sah er insgesamt vier Perioden¹⁸⁸, in denen die Entwicklung dieses Gebiets verlaufen sei. Die erste Phase hätten Desargues und Pascal geprägt, die die Kegelschnitte als Zentralprojektion des Kreises erzeugten und dabei auch auf die Fernelemente und die Pol/Polare-Beziehung eingingen. Die „Methode der Kollineationen“¹⁸⁹ ordnete Lietzmann ebenfalls dieser Periode zu. Die zweite Phase sei durch das Doppelverhältnis geprägt, welches Poncelet einführte und Steiner zum grundlegenden Prinzip seiner Geometrie machte. In der dritten Phase habe von Staudt durch Verzicht auf das Doppelverhältnis die „reine Geometrie der Lage“¹⁹⁰ geschaffen und das letzte Stadium habe dazu geführt, dass „die projektive Geometrie als die allgemeine Geometrie erkannt wird, aus der man die euklidische ebenso wie die nichteuklidischen gewinnen kann; auch da zwei Namen: Cailey und Klein.“¹⁹¹ Als für die schulische Umsetzung geeignet sah Lietzmann jedoch nur die Inhalte der beiden ersten Perioden an, was er im Folgenden anhand von Auszügen aus gelungenen Lehrgängen illustrierte.¹⁹² Dabei wies er darauf hin, dass eine große Zahl von Lehrern in ihrem Unterricht nur die erste Phase behandelten und „nicht bis zur eigentlichen projektiven Geometrie“¹⁹³ vorstoßen würde. Deren Vorgehen hielt er durchaus für sinnvoll, merkte aber auch an, dass dies nicht von allen Seiten so gesehen werde: „Eine solche Behandlung der Kegelschnittlehre unter dem

¹⁸⁵ Dazu gehörte auch, die Strecken und Winkel mit einem Vorzeichen zu versehen.

¹⁸⁶ Er nannte die Sätze von Pascal und Brianchon und die Zusammenhänge am vollständigen Viereck und Vierseit.

¹⁸⁷ Lietzmann 1916, S. 249

¹⁸⁸ Diese Einteilung übernahm Lietzmann aus dem Buch von Max Zacharias: *Einführung in die projektive Geometrie*. Leipzig: Teubner 1912

¹⁸⁹ Lietzmann 1916, S. 250

¹⁹⁰ Lietzmann 1916, S. 250

¹⁹¹ Lietzmann 1916, S. 250

¹⁹² Man vergleiche dazu die Lehrgänge von Müller und Henrici/Treutlein in Kapitel 3.

¹⁹³ Lietzmann 1916, S. 250

Gesichtswinkel der Perspektive ist nach meinen Erfahrungen durchaus zu empfehlen, auch wenn man schon nach der Polarenlehre halt macht und den Nachdruck auf die an die Sätze von Pascal und Brianchon anknüpfenden Konstruktionen legt. Gerade die regsten Freunde einer projektiven Geometrie auf der Schule sehen nun aber diese „Vorstufe“ nicht für voll an. Sie wollen einen Lehrgang, der mit der Einführung der Punktreihen und Strahlenbüschel beginnt und die projektive Verwandtschaft zwischen zwei Grundgebilden einführt.“¹⁹⁴ Die Position dieser „regsten Freunde“ spiegelt sich in den in 4.2 zitierten Aussagen wieder.

Am Ende des Kapitels stellte Lietzmann rückblickend für die gesamte „Neuere Geometrie“ fest, „daß kein Gebiet der Schulmathematik einen so unabgeklärten Zustand aufweist wie dieses. Wenn schon die Reformbewegung dem Bunde der drei großen A, der Arithmetik, der Algebra, der Analysis, mehr Interesse entgegengebracht hat als der Geometrie, so sind doch immer noch die anderen Zweige der Geometrie besser gefahren als gerade dieses Stiefkind der Reform.“¹⁹⁵ Die Ursache für diese schlechte Position sah er vor allem darin, dass im Bereich der Wissenschaft die Geometrie eine immer kleiner werdende Rolle spiele und die Arithmetiker und Analytiker eine Art Vormachtstellung eingenommen hätten. Bezüglich der weiteren Entwicklung des Gebiets wollte er keine Vorhersage treffen, merkte allerdings an, dass „radikale Leute“¹⁹⁶ bereits an der vollständigen Streichung der „Neueren Geometrie“ arbeiteten. Diesen Tendenzen stellte er sich jedoch (zu diesem Zeitpunkt) mit größter Deutlichkeit entgegen, indem er alle Formen der „Neueren Geometrie“ als „wertvoll und [...] unentbehrlich als ein Gegengewicht zu einer allzu starken Betonung der rechnerischen Seite der Mathematik“¹⁹⁷ lobte.

Die zuletzt von Lietzmann angesprochene Einschätzung bezüglich der Wichtigkeit der „Neueren Geometrie“ setzte sich letztlich nicht durch.¹⁹⁸ Es kam vielmehr zu einer gegenteiligen Entwicklung, bei der die in die Lehrpläne aufgenommenen Inhalte wieder aus diesen verschwanden und damit einhergehend in den Schulen eine immer kleiner werdende Rolle spielten. Worin liegen die Ursachen für diesen Verlauf?

¹⁹⁴ Lietzmann 1916, S. 251

¹⁹⁵ Lietzmann 1916, S. 254

¹⁹⁶ Lietzmann 1916, S. 254

¹⁹⁷ Lietzmann 1916, S. 254

¹⁹⁸ In der zweiten Auflage des Buches (1923) wurde der entsprechende Absatz gestrichen und Lietzmann entschuldigte sich fast für seine früheren Aussagen: „Ich habe den Eindruck, daß wir in den letzten Jahren in der Klärung des Problems der neueren Geometrie auf der Schule vorwärts gekommen sind. Die Linien zeichnen sich weit deutlicher ab, als sie es taten, als ich die erste Auflage niederschrieb.“ (Lietzmann 1923, S. 204)

Zunächst ist zu sagen, dass sich die in den Schulunterricht aufgenommenen neuen Inhalte zum großen Teil auf den von Lietzmann zuerst beschriebenen Lehrgang (*Neuere Geometrie des Dreiecks, Vierecks und Kreises.*) bezogen. Dafür sprechen einerseits die in Kapitel 2 wiedergegebenen Ausführungen in den Lehrplänen, die sich weitestgehend auf die in diesem Konzept vorgesehenen Inhalte konzentrieren, und andererseits die dazu passende große Masse an Schulbüchern. Umso bemerkenswerter ist es nun, dass die Reformer keinerlei Anstalten machten, diesen "Erfolg" gegen aufkommende Kritik zu verteidigen und den beispielsweise von Lietzmann geäußerten Vorschlag zur Aufspaltung zurückzuweisen. Ganz im Gegenteil bliesen sie selbst mit ziemlicher Härte in dasselbe Horn.¹⁹⁹ Somit herrschte wohl auf allen Seiten eine große Unzufriedenheit mit dem Ist-Zustand vor: einmal auf Seiten der Gegner der „Neueren Geometrie“, die von vornherein gegen jede Form ihrer schulischen Umsetzung eingestellt waren, aber auch bei den Befürwortern, die offenbar mit ihren Bemühungen eigentlich etwas anderes erreichen wollten. Zusätzlich machte sich ein zweites Problem negativ bemerkbar, nämlich die Spaltung des Lagers der Reformer in verschiedene Gruppen. Auf der einen Seite standen nun die "Praktiker", die die „Neuere Geometrie“ vor allem unter Anwendungsgesichtspunkten und ihren Nutzen für die darstellende Geometrie sahen und sie daher im Sinne von Pascal und Desargues betreiben wollten (vgl. 4.1). Demgegenüber ging es den "Theoretikern" eher darum, die „Neuere Geometrie“ im Anschluss an Steiner und von Staudt als eigenständiges, möglichst von der Euklidischen Geometrie unabhängiges Gebiet zu behandeln und die Anwendungen möglichst außen vor zu lassen (vgl. 4.2). Die neu hinzugekommenen Vorschläge, die bestehenden Konzepte der „Neueren Geometrie“ aufzugreifen und im Sinne des *Erlanger Programms* weiterzuentwickeln (vgl. 4.3), hatten keinen durchschlagenden Erfolg, was vermutlich daran lag, dass schon unter den Vertretern dieses Ansatzes keine Übereinkunft darüber bestand, was sie genau erreichen wollten. Zusätzlich gab es auch aus dieser Richtung keine positive Resonanz auf den Ist-Zustand der „Neueren Geometrie“ in der Schule, so dass letztlich nur die ohnehin schon bestehende Vielstimmigkeit an Vorschlägen noch weiter vergrößert wurde. Dies dürfte im Ergebnis eher zur Schwächung denn zur Stärkung der Position der „Neueren Geometrie“ beigetragen haben. Außerdem wurde es offenbar von vielen Anhängern der Berücksichtigung des *Erlanger Programms* im Schulunterricht als ausreichend erachtet, dessen grundlegende Ideen

¹⁹⁹ Man vergleiche dazu die Ausführungen in 4.1 und 4.2.

anhand der den Schülern bekannten Geometrien aufzuzeigen.²⁰⁰ Ein Voranschreiten bis zur projektiven Geometrie war dazu nicht unbedingt erforderlich. Nicht vergessen werden darf auch die nicht kleine Gruppe der "Methodiker"²⁰¹, die sich aufgrund der erreichten Erfolge²⁰² von der Reformbewegung abgekoppelt haben dürften. Somit führte der Verlust des gemeinsamen Feindbilds (der eng an Euklids Elementen orientierte Geometrieunterricht) und des gemeinsamen primären Ziels, dieses Feindbild zu beseitigen, letztlich dazu, dass die bereits vorher bestehenden, aber noch verdeckten Differenzen bezüglich der weitergehenden Ziele sichtbar wurden und sich die Bewegung in mehrere, weniger schlagkräftige Teile spaltete.

Hinzu kam, dass sich etwa zur gleichen Zeit neue Reformvorschläge für den Geometrieunterricht ausbreiteten, die sich hauptsächlich aus den in 4.4 vorgestellten Empfehlungen der *Meraner Kommission* ergaben.²⁰³ Deren negative Wirkung auf die „Neuere Geometrie“ bestand einmal darin, dass sich die Aufmerksamkeit der am Mathematikunterricht Interessierten nun in hohem Maße auf diese neuen Ansätze richtete.²⁰⁴ Zum anderen wurden aber auch die von vielen tendenziell positiv gesehenen Aspekte der „Neueren Geometrie“ in diesen neuen Reformvorschlag integriert oder genauer gesagt von ihm vereinnahmt, da vom Kontext ihrer ursprünglichen Entstehung keinerlei Rede mehr war. Anstatt von „Neuerer Geometrie“ sprach man eben jetzt von der *Meraner Reform* und nutzte die bereits bestehenden und im Unterricht verwirklichten Vorschläge unter diesem Gesichtspunkt.²⁰⁵ In diesem Zusammenhang hatten die übernommenen Konzepte daher ihren Selbstzweck weitgehend verloren und dienten als Teil einer Sammlung verschiedener mathematischer Inhalte der exemplarischen Umsetzung einer übergeordneten Idee. Die inhaltliche Dimension der „Neueren Geometrie“ fand dabei so gut wie keine Berücksichtigung.²⁰⁶

²⁰⁰ Dies wird beispielsweise aus der in 4.3 erwähnten Umfrage der ZmnU deutlich.

²⁰¹ Damit sind die Reformer gemeint, denen es vor allem um einen Umbau der Euklidischen Geometrie unter Verwendung der Methoden der „Neueren Geometrie“ ging.

²⁰² Diese werden u.a. durch die oben zitierten Ausführungen Lietzmans zur Umgestaltung der euklidischen Geometrie durch die "projektiven Methoden" belegt.

²⁰³ Weitere, allerdings eher am Rande stattfindende Diskussionen betrafen beispielsweise die Aufnahme der nichteuklidischen Geometrien in den Schulunterricht. Daneben wurden auch andere neue Reformansätze verfolgt, die sich nicht nur auf den Geometrieunterricht bezogen, wie beispielsweise die stärkere Anwendungsorientierung oder die Berücksichtigung der Analysis.

²⁰⁴ Dies lag wohl unter anderem am beharrlichen Werben Felix Kleins für diese Vorschläge (vgl. beispielsweise Klein 1907).

²⁰⁵ Beispiele dafür sind die Einbeziehung der Beweglichkeit der geometrischen Gebilde unter das *Prinzip des funktionalen Denkens* oder die Berücksichtigung der geometrischen Verwandtschaften zur Gliederung des Unterrichtsstoffs.

²⁰⁶ vgl. Krüger 2000, S. 193ff

Es ist daher keine große Überraschung, dass die in den 1920er Jahren beginnende Umgestaltung der Lehrpläne im Sinne des *Meraner Reformvorschlags* das weitgehende Verschwinden der „Neueren Geometrie“ als eigenständiges Themengebiet mit sich brachte. Die mit ihr verbundenen Inhalte blieben zu einem kleinen Teil als Bestandteil der darstellenden Geometrie erhalten, wo sie im Sinne der "Praktiker" unterrichtet wurden. Den weit überwiegenden Teil jedoch verdrängten die mit der Meraner Reform neu eingeführten bzw. in ihrem Umfang erweiterten Inhalte, wie beispielsweise die Grundlagen der Differenzial- und Integralrechnung. Allerdings muss man auch bemerken, dass diese Entwicklung (d.h. das Verschwinden der „Neueren Geometrie“) durch eine Reduzierung der für den Mathematikunterricht zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit befördert wurde. Deren Gründe lagen einmal in der generellen Kürzung der Unterrichtszeit²⁰⁷, zum anderen in der (in den einzelnen Ländern unterschiedlich gehandhabten) Ausweitung der Stunden für die Fächer Deutsch, Geschichte, Erdkunde oder Turnen.²⁰⁸ Im Einzelnen ergeben sich für die bereits in Kapitel 2 betrachteten Länder²⁰⁹ folgende Änderungen:

Freistaat Preußen

Der 1925 veröffentlichte Lehrplan²¹⁰ sah die folgende Anzahl an Wochenstunden für das Fach Mathematik vor:

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	I ²¹¹	Summe	Änderung
Gymnasium	4	4	4	3	3	4	3	4	33	-1
Realgymnasium	4	4	4	4	4	4	4	4	36	-6
Oberrealschule	4	4	4	4	4	6	6	5	42	-5

In den für das Gymnasium vorgesehenen Inhalten findet die „Neuere Geometrie“ keine Erwähnung mehr, auch die Kegelschnitte sollten nur noch analytisch behandelt werden. An den realistischen Anstalten verblieben nur noch „harmonische Punkte und Strahlen“²¹² in Untersekunda, an den Oberrealschulen zusätzlich noch die „Ke-

²⁰⁷ Dadurch sollte der "Überbürdung" der Schüler entgegengewirkt werden.

²⁰⁸ Diese Veränderungen in den Lehrplänen veranlassten die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte zur Verabschiedung einer scharfen Resolution, in der bestritten wurde, dass „die gesamte seelische Entwicklung unserer Jugend [...] durch eine weitgehende Einfügung „kulturkundlicher“ Fächer gelehrt werden könne“ (Kerst 1925, S. 51).

²⁰⁹ Das Reichsland Elsaß-Lothringen gehörte ab 1918 nicht mehr zum Deutschen Reich, für die aus dem Großherzogtum hervorgegangene Republik Baden konnte ich leider keine Informationen bezüglich der dort geltenden Lehrpläne ermitteln.

²¹⁰ vgl. Lietzmann 1925

²¹¹ Die Prima bestand weiterhin aus zwei Jahrgängen, die beide jeweils die angegebene Stundenzahl umfassten.

²¹² Lietzmann 1925, S. 204ff

gelschnitte als perspektive Bilder des Kreises (Sätze von Pascal und Brianchon)²¹³. Die Ursachen für diese Veränderungen finden sich in folgendem Kommentar Lietzmanns zum Gymnasium: „Weggefallen sind die Kombinatorik, die Wahrscheinlichkeitslehre, die algebraische und die sog. neuere Geometrie. Es ist gut, daß man klipp und klar festgelegt hat, was wegfallen muß, um Raum für die mancherlei neuen Aufgaben zu schaffen.“²¹⁴ Bezüglich der realistischen Anstalten merkte er an, dass in der Kegelschnittlehre der Prima „– bei dem Zeitmangel wohl mit Recht – auf die projektive Behandlung verzichtet worden“²¹⁵ sei.

Freistaat Bayern

Der bayerische Lehrplan für die Oberrealschule von 1926²¹⁶ enthielt folgende Vorgaben zur Anzahl der Wochenstunden für die Mathematik:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Summe	Änderung
Oberrealschule	4	4	5	4	5	5	5	5	4	41	-2

Diese Kürzung führte zu dem, dass die darstellende Geometrie in der neunten Klasse nicht mehr unterrichtet wurde und sich nur noch auf die siebte und achte Klasse beschränkte. Nahezu vollständig gestrichen wurde „auch die synthetische Geometrie (8. und 9. Klasse). Nur das harmonische, nicht mehr das allgemeine Doppelverhältnis und seine Unveränderlichkeit bei Zentralprojektion ist geblieben, die projektive Erzeugung der Kegelschnitte und der Pascalsche Satz aber gefallen.“²¹⁷

Volksstaat Hessen

An den hessischen Oberrealschulen war ab 1925 die folgende Stundenverteilung für „Rechnen und Mathematik“ vorgesehen²¹⁸:

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Summe	Änderung
Oberrealschule	5	5	6	5	5	5	5	7	7	50	-5

Im Unterschied zum Lehrplan von 1901 war das „Geometrische Zeichnen“ nun in die Mathematik integriert, weshalb sich die angegebene Änderung auf das Stundenvolumen der beiden vormals eigenständigen Fächer bezieht. Von den im Lehrplan von

²¹³ Lietzmann 1925, S. 205; Im Rahmen der Stereometrie fanden bereits seit 1882 an den realistischen Anstalten die Grundlagen der beschreibenden bzw. darstellenden Geometrie Berücksichtigung, in die an den Oberrealschulen nun Teile der „Neueren Geometrie“ (im Sinne der "Praktiker") integriert wurden.

²¹⁴ Lietzmann 1925, S. 202

²¹⁵ Lietzmann 1925, S. 206

²¹⁶ vgl. Cramer 1927

²¹⁷ Cramer 1927, S. 288f

²¹⁸ vgl. o.V. 1925, S. 8

1901 für die Oberrealschule vorgesehenen Inhalten der „Neueren Geometrie“ war nichts mehr zu sehen, allerdings sollte in Prima die „Erzeugung der Kegelschnitte durch perspektive Abbildung des Kreises (ebener Schnitt des Kegels)“²¹⁹ unterrichtet werden.

Freistaat Sachsen

Der sächsische Lehrplan von 1932²²⁰ sah für die Realgymnasien und Oberrealschulen folgende Zahl an Wochenstunden für die Fächer Mathematik und Darstellende Geometrie (jeweils die zweite Zeile in Sekunda bzw. Prima) vor:

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Summe	Änderung
Realgymnasium	4	4	4	5	4	4	4	3	4	36	-6
						1	1	1	1	2	-4
Oberrealschule	4	5	5	5	5	4	5	5	4	42	-3
						1	1	1	2	5	-2

Von den in den Lehrplänen von 1902 bzw. 1908 enthaltenen Inhalten der „Neueren Geometrie“ blieben nur die Kegelschnitte übrig, die nun primär analytisch behandelt werden sollten.

Volksstaat Württemberg

Der Lehrplan für die Oberrealschulen in Württemberg von 1928 schrieb folgende Wochenstundenzahlen für die Mathematik vor²²¹:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Summe	Änderung
Oberrealschule	4	5	5	5	5	6	6	6	6	48	-8

Von den im Lehrplan von 1912 für die siebte Klasse genannten Inhalten war nichts übrig geblieben, in der achten Klasse blieben jedoch die „Kegelschnitte, analytisch und synthetisch“²²² erhalten. Da keine Verbindung zur (in ihrem Umfang gekürzten) darstellenden Geometrie zu erkennen ist und die sonstigen Vorgaben des Lehrplans auch eher auf eine Stärkung der analytischen Geometrie gerichtet waren, dürfte bei den Kegelschnitten diese Methode überwogen haben.

²¹⁹ o.V. 1925, S. 96

²²⁰ vgl. Kerst 1932; Angegeben sind hier die Stunden für den *Normalzug*. Den Schulen war es erlaubt, daneben in Prima eine *sprachlich-geschichtliche* bzw. *mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung* einzurichten.

²²¹ vgl. Fladt 1926

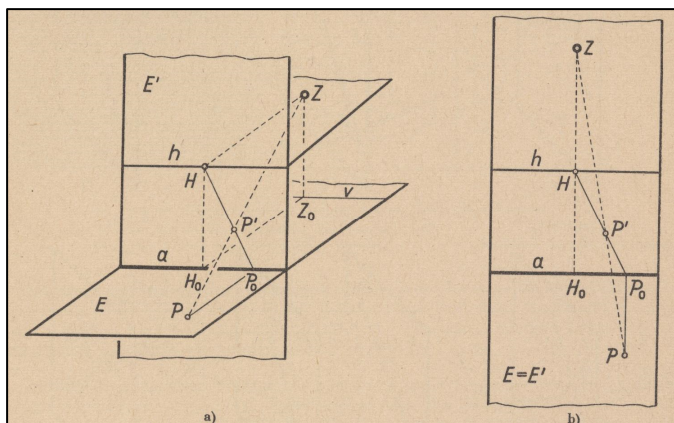
²²² Fladt 1929, S. 31

Zusammenfassend kann man also festhalten, dass die von Lietzmann so genannte *Neuere Geometrie des Dreiecks, Vierecks und Kreises* (mit Ausnahme der harmonischen Punkte) während der Weimarer Republik nahezu vollständig aus den Lehrplänen verschwunden war. Bei der noch verbliebenen synthetischen Geometrie der Kegelschnitte dürfte in den meisten Fällen auf die Apollonische Behandlungsweise zurückgegriffen worden sein. In den offiziellen Vorgaben verblieben wenn überhaupt die in die darstellende Geometrie (Kegelschnitte als Zentralprojektion des Kreises) verschobenen Inhalte der „Neueren Geometrie“. Von andauerndem Bestand waren nur die durch sie angeregten methodischen Veränderungen des Geometrieunterrichts.

Ausblick

Vorschläge zur projektiven Geometrie in der Folgezeit

Im Rahmen der Diskussion um die Berücksichtigung der Abbildungsgeometrie im Schulunterricht in den 1950er und 1960er Jahren wurde die projektive Geometrie¹ von einigen Didaktikern wieder aufgegriffen. Interessant dabei ist, dass viele in der Diskussion um die „Neuere Geometrie“ aufgetretenen Argumente nun auch im Zusammenhang mit der Abbildungsgeometrie genannt wurden, wie z.B. der *genetische* Aufbau der Geometrie, Anschaulichkeit, Beweglichkeit der Figuren oder die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler. Allerdings war es wohl so, dass sich die Mehrzahl der Konzepte zur Abbildungsgeometrie auf die Abbildungen der Euklidischen Ebene konzentrierte. Beispielsweise enthielt der *Kasseler Lehrplan*, ein Entwurf des Fördervereins von 1953, die Vorgabe, mindestens bis zu den Affinitäten zu kommen.² Einige weitergehende Vorschläge gaben sich damit jedoch nicht zufrieden und berücksichtigten auch die projektive Geometrie. Sie schlossen sich inhaltlich an die bereits in Unterkapitel 4.3 angesprochenen Versuche zur schulischen Umsetzung des *Erlanger Programms* an, thematisierten aber auch die Beziehung zur Zentralprojektion (vgl. 4.1). Ein in diesem Sinne gestalteter Lehrgang findet sich im 1955 erschienenen vierten Band der Lehrbuchreihe *Die Elemente der Mathematik*, der den Stoff für die Oberstufe enthielt. Dort heißt es bereits im Vorwort: „Der Ruf nach der Gruppentheorie als Ordnungsprinzip der projektiven Geometrie hat im Bd. 2 einen konsequenten Aufbau gemäß der Hauptgruppe erstehen lassen. Dieser Aufbau bliebe ein Torso, würden die geometrischen Verwandtschaften nicht nach oben (Affinität, Kollineation, Reziprozität) so fortgeführt, daß die höchste Gruppe, nämlich die der Projektivität erreicht wird.“³



Als Ausgangspunkt dient die Abbildung einer Ebene **E** auf eine Bildenebene **E'** durch Zentralprojektion,

Abbildung 113: Zentralprojektion und -kollineation
(aus: Wolff 1955, S. 146)

¹ Der Begriff „Neuere Geometrie“ wurde nun nicht mehr verwendet.

² vgl. Bender 1982, S. 14

³ Wolff 1955, S. 3; Ein ähnliches Konzept findet sich beispielsweise auch in Wölz 1964/1965.

die im Rahmen der darstellenden Geometrie behandelt wird. Durch Drehung von E um die Schnittgerade a von E und E' werden die beiden Ebenen vereinigt, um die eigentlich räumliche Konstruktion des Bildpunktes P' zu einem gegebenen Punkt P in einer Ebene durchführen zu können. Auf diese Weise erhält man die *zentrische Kollineation* als Abbildung der Ebene auf sich selbst mit den Eigenschaften: „Die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte gehen durch einen festen Punkt, das Kollineationszentrum Z . Die Schnittpunkte zugeordneter Geraden liegen auf einer festen

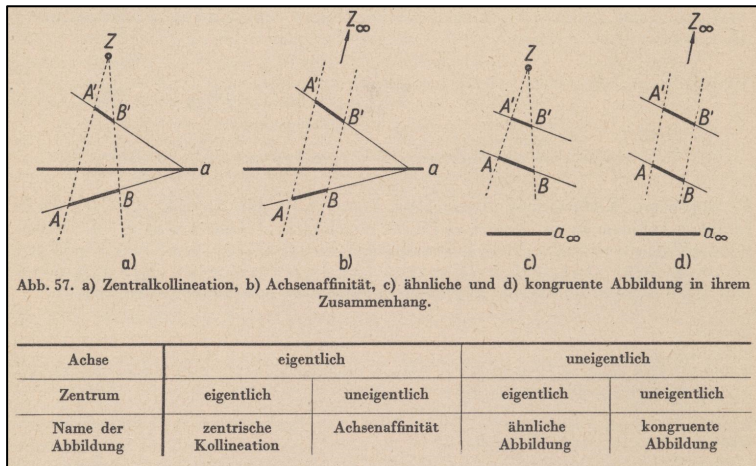


Abbildung 114: Spezialfälle der Zentralkollineation (aus: Wolff 1955, S. 169)

Geraden, der Kollineationsachse a .“⁴ Je nach Lage des Zentrums bzw. der Achse erhält man die den Schülerinnen und Schülern bereits aus der Mittelstufe bekannten Abbildungen.⁵

Durch Konzentration auf die Abbildung der Punkte einer Geraden auf eine zweite Gerade durch eine Zentralkollineation erfolgt die Überleitung zur perspektiven Verwandtschaft und dem Doppelverhältnis als deren Invariante. Durch Verallgemeinerung gelangt man von dort zur projektiven Verwandtschaft von Punktreihen bzw. Strahlenbüscheln und letztlich zur projektiven Abbildung der Ebene auf sich. Daran anschließend werden weitere (bereits

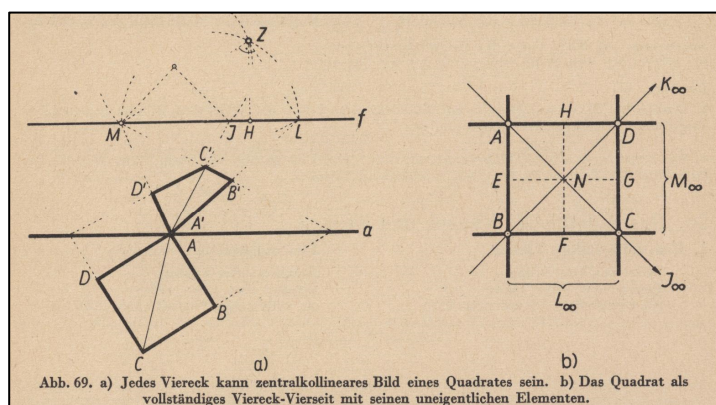


Abbildung 115: Harmonische Punkte am vollständigen Viereck (aus: Wolff 1955, S. 182)

in Kapitel 3 vorgestellte) Inhalte behandelt wie vollständiges Viereck und Vierseit, Pol und Polare am Kreis und die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Punktreihen bzw. Strahlenbüschel⁶, wobei der Abbildungsaspekt immer eine zentrale Rolle spielt. Beispielsweise

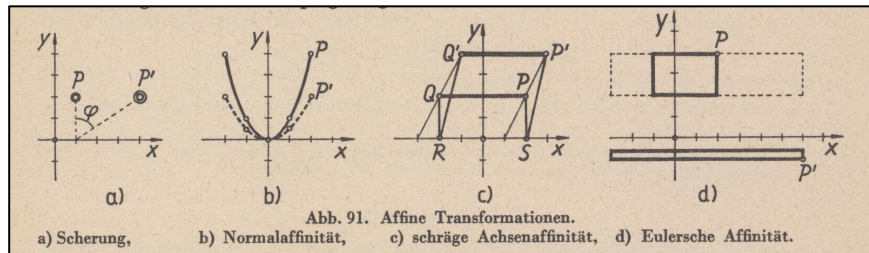
⁴ Wolff 1955, S. 168; Die *zentrische Kollineation* ist nichts anderes als die *Zentralkollineation*.

⁵ Diese werden im zweiten Band der *Elemente der Mathematik* thematisiert. Die Unterscheidung erinnert stark an die Darstellung von Henrici/Treutlein, vgl. S. 151.

⁶ Letztere wird durch Zentralprojektion vom Kreis auf alle Kegelschnitte übertragen.

erfolgt der Beweis, dass beim vollständigen Viereck mit den Ecken **A, B, C, D** und Diagonalmittelpunkten **L, M, N** durch jeden Diagonalmittelpunkt vier harmonische Strahlen verlaufen⁷, indem das Viereck durch Zentralkollineation auf ein Quadrat abgebildet wird. Die Betrachtung von Pol und Polare führt auf die Reziprozität als weitere projektive Abbildung.

Um die durch das *Erlanger Programm* gegebene „Systematisierung der Geometrie“⁸ durchzuführen, werden im Kapitel *Transformation und Gruppe* die den Schülerinnen



und Schülern bekannten Abbildungen⁹ nochmals aufgegriffen, wobei jeweils zunächst für einige Beispiele die Herleitung

Abbildung 116: Sonderfälle der affinen Abbildung (aus: Wolff 1955, S. 216)

der Transformationsgleichung erfolgt. Die Gleichung für den allgemeinen Fall wird anschließend angegeben, genauso die Invarianten der Abbildung und die Idee für den Beweis der Gruppeneigenschaft. Der Abschnitt zu den affinen Abbildungen beginnt beispielsweise mit den in Abbildung 116 gezeigten Sonderfällen. Die allgemeine Transformationsgleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned}$$

mit $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ und die zugehörigen

Invarianten sind die Parallelität, das Teilverhältnis einer Strecke und das Verhältnis der Inhalte

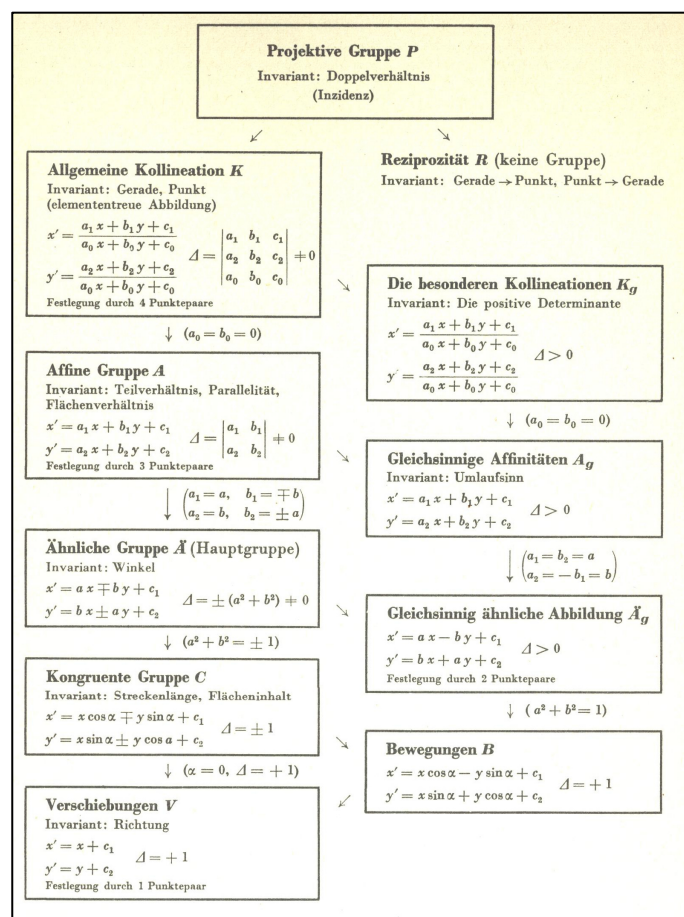


Abbildung 117: Hierarchie der Abbildungsgruppen (aus: Wolff 1955, S. 222)

⁷ Es handelt sich dabei um die jeweiligen Diagonalen und Seiten des Vierecks.

⁸ Wolff 1955, S. 207

⁹ Es handelt sich in dieser Reihenfolge um kongruente, ähnliche, affine und projektive Abbildungen.

zweier Flächen. Die zuvor behandelten ähnlichen Abbildungen stellen einen Spezialfall der affinen Abbildungen dar¹⁰ und bilden eine Untergruppe.

Diese systematische Untersuchung mündet in der hierarchischen Ordnung der Abbildungsgruppen, die alle letztlich Untergruppen der *Projektiven Gruppe* darstellen. Einen Überblick über die Eigenschaften und Invarianten der jeweiligen Transformationen gibt Abbildung 118. Die im Rahmen der *Neuen Mathematik* in den 1960er und 1970er Jahren aufkommende Strukturorien-

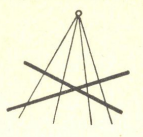
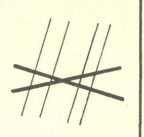
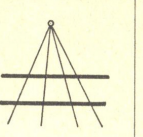
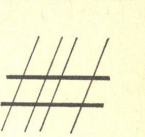





					
Objekt-Bildebene	schneidend		parallel		
Projektions-Strahlen	Strahlenbündel	Parallelschar	Strahlenbündel	Parallelschar	
Invarianten	Geraden	Strecken-Doppelverhältnisse (Verhältnisse von Punkt-Quadrupeln). Nur Spurparallelen ähnlich mit verschiedenen Streckungsmaßstäben. Spur: kongruent	Streckenverhältnisse (Verhältnisse von Punkt-Tripeln) Spurparallelen: kongruent; alle anderen: ähnlich, verschiedene Streckungsmaßstäbe	Streckenverhältnisse (Verhältnisse von Punkt-Tripeln) alle Richtungen denselben Streckungsmaßstab	Streckenlängen
	Winkel	ungleich	ungleich	gleich	gleich
	Parallelen	nicht parallel	parallel	parallel	parallel
	Ferngerade	Ferngerade in eine eigentliche Gerade	Ferngerade in Ferngerade	Ferngerade (Spur) in sich	Ferngerade (Spur) in sich
Figurenverwandtschaft	Projektivität (Kollinearität)	Affinität	Ähnlichkeit	Kongruenz	
					

Abbildung 118: Eigenschaften der Transformationen (aus: Wolff 1955, S. 223)

tierung hatte auch Einfluss auf die Abbildungsgeometrie in der Oberstufe. So wurde in der vierten Auflage der *Methodik des mathematischen Unterrichts*¹¹ (1968) weiterhin die große Bedeutung der Abbildungen für den Geometrieunterricht betont, die aber jetzt unter Verwendung des Vektorbegriffs behandelt werden sollten. Allerdings wurde in diesem Zusammenhang auch vorgeschlagen, die projektive Geometrie zu berücksichtigen, mit der zum einen weiterhin „ein Überblick über die ganze Schulgeometrie im Sinne von Kleins Erlanger Programm erreicht [wird], andererseits aber wird das Vorstellungsvermögen geübt und dem Schüler eine große Anzahl interessanter und doch einfacher geometrischer Tatsachen vermittelt, die im Zuge der heute modernen strukturellen Betrachtungsweise (so sehr diese berechtigt ist!) leider in Vergessenheit zu geraten drohen.“¹² Gerade vor dem Hintergrund der zweiten Zielsetzung ist es doch ein wenig überraschend, dass die projektive Geometrie nun auch vollständig dem allgemeinen Wunsch nach einer weitgehenden Algebraisierung unterworfen werden sollte: „Es wurde und wird in manchen Gymnasien Projektive Ge-

¹⁰ Für $a_1 = b_2$, $b_1 = -a_2$ bzw. $a_1 = -b_2$, $b_1 = a_2$.

¹¹ Auch nach Lietzmanns Tod (1959) erschienen mehrere überarbeitete Neuauflagen, die vierte Auflage wurde von Horst Jahner herausgegeben.

¹² Jahner 1968, S. 255

ometrie mit rein „synthetischen Methoden“ etwa im Sinne Staudts oder Steiners getrieben. Wir würden dagegen doch, gerade im Hinblick auf die allgemeine Tendenz zur Algebraisierung, eine mehr „analytische“ Methode, insbesondere unter Benutzung homogener Koordinaten vorziehen. Dabei kann man mit Hilfe der Vektorrechnung einen einfachen, dem Schüler auch anschaulich leicht verständlichen Weg gehen.¹³ Die projektive Ebene P_2 soll bei diesem Weg als Menge aller linearen Unterräume eines dreidimensionalen Vektorraums V_3 aufgefasst werden, die einen festen Bezugspunkt (oder Koordinatenursprung) \mathbf{O} enthalten.¹⁴ Die dahinterliegende Idee ist, dass jede Ebene α , die \mathbf{O} nicht enthält, mit jedem dieser Unterräume genau einen gemeinsamen Punkt hat.¹⁵ Die Ursprungsebenen in V_3 bilden die Geraden in P_2 . Wie bereits erwähnt diente diese anschauliche Beschreibung jedoch nur dazu, zur vektoriellen Darstellung der Punkte und Geraden in P_2 überzuleiten und mit dieser zu arbeiten (d.h. hauptsächlich zu rechnen). Sehr naheliegend ist daher die Frage, ob es sich bei diesem Unterricht überhaupt noch um Geometrie handelt, was aber eindeutig bejaht wurde: „Die neueingeführten Begriffe und Definitionen dürfen nicht Selbstzweck bleiben, sie bilden nur die Hilfsmittel, um nun Geometrie zu treiben! Dabei kann man mit Vorteil oft von der Deutung in P_2 zu der Deutung im V_3 übergehen. Sätze wie: „Durch zwei verschiedene Punkte ist immer genau eine Gerade bestimmt“ oder „Zwei verschiedene Geraden schneiden sich immer in genau einem Punkt“ sind dann auch für den Schüler beinahe trivial, ihre Erarbeitung aber natürlich wichtig.“¹⁶ Worin nun allerdings für den Geometrieunterricht die Vorteile gegenüber der synthetischen Methode liegen, wird leider nicht ausgeführt und ist auch nicht ohne weiteres erkennbar. Jedenfalls war mit dieser Herangehensweise offenbar die größtmögliche Distanz zu den ursprünglichen Ideen der „Neueren Geometrie“ geschaffen worden.¹⁷

Die gerade gegenteilige Tendenz besteht bei den Vorschlägen, die Johannes Kratz in seinem Buch *Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht* (1993) im Rahmen der Ähnlichkeitslehre präsentiert. Diese zeigen nämlich eine grobe Übereinstimmung mit dem von Lietzmann so genannten Lehrgang der *Neueren*

¹³ Jahner 1968, S. 253

¹⁴ Die Unterräume sind also Ursprungsgeraden.

¹⁵ Die zu α parallelen Geraden schneiden diese in einem Fernpunkt.

¹⁶ Jahner 1968, S. 254; Die dahinterliegende Frage, ob die Algebra hier eher ein Hilfsmittel oder einen Selbstzweck darstellt, kann man auch heutzutage bezüglich der so genannten *Analytischen Geometrie* in Kombination mit Linearer Algebra stellen.

¹⁷ vgl. Unterkapitel 1.7

Geometrie des Dreiecks, Vierecks und Kreises¹⁸ und sind dementsprechend in den Abschnitten *Über Teilverhältnisse* und *Harmonische Verhältnisse in geometrischen Figuren* verortet. Kratz beginnt die Betrachtung der Teilverhältnisse mit der in Abbildung 119 dargestellten Figur, bei der die Strecken **AB** und **DE** parallel sind. Durch Verwendung der Strahlensätze erhält man dann jeweils für das Verhältnis der Streckenlängen: $\overline{DE} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{CA}$ ($\Delta \text{ ABC}$), $\overline{CD} : \overline{CA} = \overline{DT'} : \overline{AT} = \overline{CT'} : \overline{CT}$ ($\Delta \text{ CAT}$), $\overline{CT'} : \overline{CT} = \overline{T'E} : \overline{TB}$ ($\Delta \text{ CTB}$). Insgesamt gilt also: $\overline{DE} : \overline{AB} = \overline{DT'} : \overline{AT} = \overline{T'E} : \overline{TB}$.

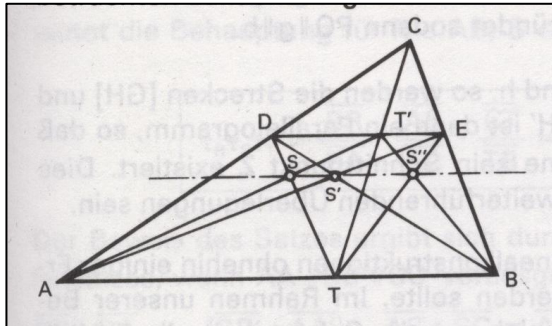


Abbildung 119: Grundfigur
(aus: Kratz 1993, S. 151)

In den Trapezen **ATT'D**, **ABED** und **TBET'** bilden jeweils die Diagonalen und die parallelen Seiten ebenfalls eine Strahlensatzfigur (mit dem jeweiligen Diagonalschnittpunkt als Zentrum), so dass gilt: $\overline{DS} : \overline{ST} = \overline{DT'} : \overline{AT}$, $\overline{DS'} : \overline{S'B} = \overline{DE} : \overline{AB}$, $\overline{T'S''} : \overline{S''B} = \overline{T'E} : \overline{TB}$. Da die rechten Seiten der Gleichungen denselben Wert haben,

folgt also: $\overline{DS} : \overline{ST} = \overline{DS'} : \overline{S'B} = \overline{T'S''} : \overline{S''B}$. Fällt man von **S** aus das Lot auf **AB** und **DE** und bestimmt darauf die Abstände von **P** zu **AB** und **DE**, haben diese das Verhältnis $\overline{DS} : \overline{ST}$ (ähnliche Dreiecke). Durch analoge Betrachtungen für **S'** und **S''** findet man, dass das Verhältnis der Abstände zu **AB** und **DE** für alle Diagonalschnittpunkte gleich ist, weshalb diese auf einer Parallelen zu **AB** und **DE** liegen. Diese Erkenntnis

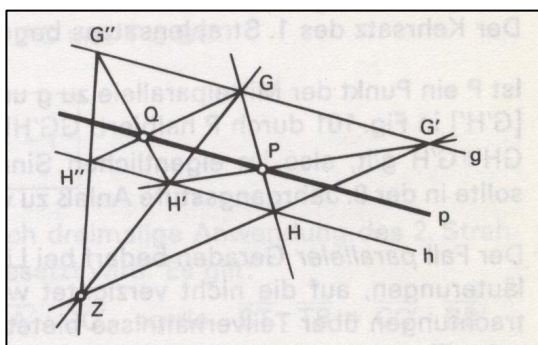


Abbildung 120: Linealkonstruktion der Parallelen
(aus: Kratz 1993, S. 151)

kann man nun dazu benutzen, allein mit dem Lineal eine Parallele zu zwei parallelen Geraden **g** und **h** durch einen Punkt **P** zu konstruieren.¹⁹ Ein besonderer Fall tritt dann ein, wenn der Punkt **P** genau in der Mitte zwischen **g** und **h** liegt. Dann werden die Strecken **GH** und **G'H'** durch **P** halbiert und

GG'HH' ist ein Parallelogramm, d.h. es gibt

eigentlich keinen Schnittpunkt **Z**. „Im Rahmen unserer Betrachtungen über Teilverhältnisse bietet sich nun die Gelegenheit, die Euklidische Ebene zur projektiven Ebene zu erweitern, in der parallelen Geraden ein Punkt der „unendlich fernen Geraden“

¹⁸ vgl. Abschnitt 4.5

¹⁹ vgl. Abbildung 120; Die hier vorliegende Situation stellt einen Spezialfall des Satzes von Pappos/Pascal dar, der im Weiteren noch genauer betrachtet wird.

den“ als uneigentlicher Schnittpunkt zugeordnet wird. Dies vermeidet Fallunterscheidungen. Man kann dann von zwei Geraden einer Ebene immer sagen, daß sie einen gemeinsamen Punkt haben.“²⁰

Ebenfalls unter Verwendung der Strahlensätze beweist Kratz den Satz des Menelaos²¹ und mit dessen Hilfe den Satz des Desargues. Allerdings merkt er an, dass man letzteren auch auf anderen Niveaustufen (z.B. durch mehrmalige zeichnerische Überprüfung) den Schülerinnen und Schülern plausibel machen könne, und erwähnt

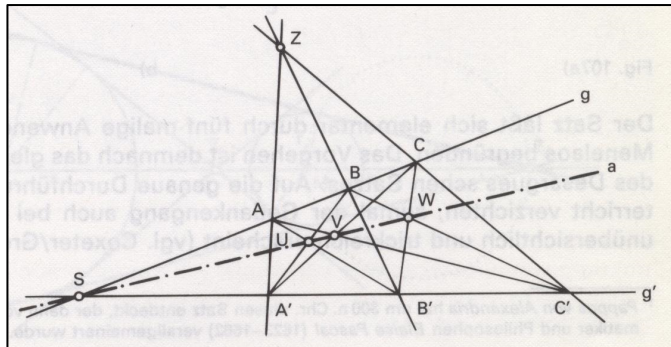


Abbildung 121: Satz von Pappos/Pascal
(aus: Kratz 1993, S. 157)

im weiteren Verlauf des Buches auch die Möglichkeit, die Desargues-Figur räumlich zu interpretieren und den Beweis vor diesem Hintergrund zu führen.²² Als Spezialfall des Satzes von Desargues ergibt sich der Satz von Pappos/Pascal: „Drei Geraden durch

einen Punkt Z schneiden zwei gegebene Geraden g und g' in den Punkten A, B, C bzw. A', B', C'. Dann sind die Schnittpunkte von AB' und A'B, von AC' und A'C sowie von BC' und B'C zusammen mit dem Schnittpunkt S von g und g' kollinear.“²³

Seine Ausführungen über Teilverhältnisse zusammenfassend bemerkte Kratz: „Die didaktische Bedeutung dieser Beispiele aus dem Bereich der projektiven Geometrie liegt zum einen in der Vielfalt der Aufgabenmöglichkeiten, zum anderen in der nahen „Verwandtschaft“ zum Themenkreis der zentrischen Streckung und der Strahlensätze.

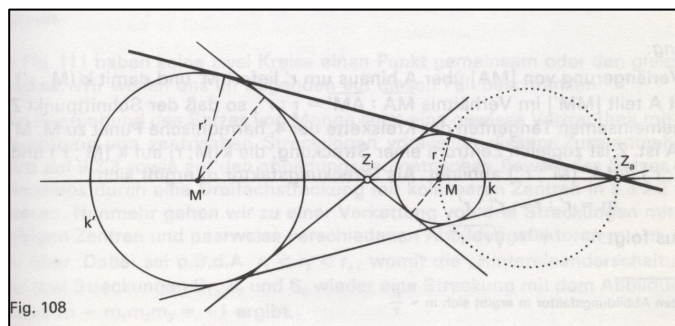


Abbildung 122: Ähnlichkeitspunkte
(aus: Kratz 1993, S. 159)

Dabei erweitert sich das Feld der reinen Linealkonstruktionen, die in der Ähnlichkeitslehre nur auf Spezialfälle beschränkt bleiben, im Sinne kreativer Elementargeometrie.“²⁴

Zu Beginn des Abschnitts über *Harmonische Verhältnisse in geo-*

²⁰ Kratz 1993, S. 152

²¹ Der Beweis des Satzes von Ceva erfolgt bereits im vorherigen Kapitel durch Nutzung der Flächeninhaltsformel für Dreiecke.

²² vgl. Kratz 1993, S. 203f

²³ Kratz 1993, 157f; Hier handelt es sich streng genommen um einen Spezialfall des Satzes, da die Punkte A, B, C und A', B', C' perspektiv liegen. Dies ist im allgemeinen Fall nicht notwendig so.

²⁴ Kratz 1993, S. 159

metrischen Figuren definiert Kratz harmonische Punkte über die betragsgleiche Teilung²⁵ einer Strecke im Äußeren und im Inneren. Als ein Beispiel für das Vorkommen von harmonischen Punkten betrachtet er dann zwei Kreise k und k' sowie die Zentren Z_i und Z_a zweier zentrischer Streckungen, die k auf k' abbilden.²⁶ Wegen der Winkel- und Inzidenztreue der zentrischen Streckung folgt, dass jede Tangente von k auf eine Tangente von k' abgebildet wird, so dass sich Z_i und Z_a als Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten ergeben.

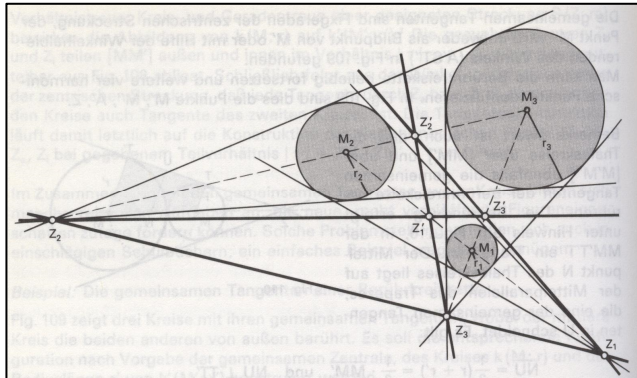


Abbildung 123: Satz von Monge
(aus: Kratz 1993, S. 162)

Weiterhin führt Kratz einen Beweis des Satzes von Monge über die kollineare Lage der Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise²⁷, der die Tatsache ausnutzt, dass bei der Verkettung zweier zentrischer Streckungen mit Zentren Z_1 und Z_2 im Allgemeinen wieder eine zentrische Streckung entsteht, deren Zentrum auf der Geraden Z_1Z_2 liegt.

Führt man also in Abbildung 123 beispielsweise zunächst die zentrische Streckung an Z_1 aus (M_2 wird auf M_1 abgebildet) und anschließend die zentrische Streckung an Z_3' (M_1 wird auf M_3 abgebildet), ergibt sich als Resultat die zentrische Streckung an

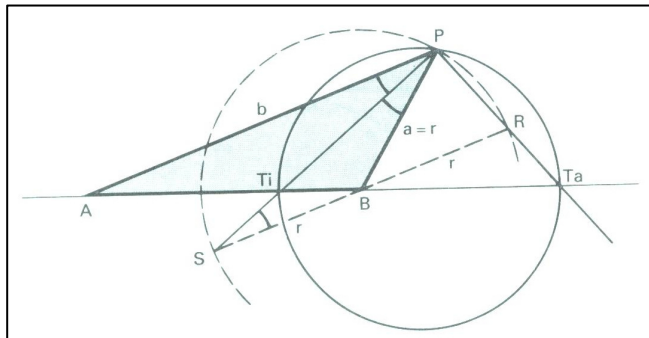


Abbildung 124: Apollonischer Kreis
(aus: Kratz 1993, S. 166)

Z_2' (M_2 wird auf M_3 abgebildet). Daher muss Z_2' auf der Geraden Z_1Z_3' liegen.

Im Anschluss zeigt Kratz das Vorliegen von harmonischen Punkten am vollständigen Vierseit²⁸ und bei der Teilung einer Dreiecksseite im Verhältnis $b:a$ der Längen der beiden anderen Seiten durch die Winkelhalbierenden des gegenüberliegenden Winkels und dessen Nebenwinkel. Der Thaleskreis über T_iT_a ist dann ein apollonischer Kreis der Strecke AB , d.h. auf ihm liegen alle Punkte P , für die das Verhältnis der Abstände zu

²⁵ Kratz verwendet gerichtete Strecken.

²⁶ vgl. Abb. 122; Bei Z_i und Z_a handelt es sich um die Ähnlichkeitspunkte der Kreise, was Kratz jedoch nicht erwähnt.

²⁷ Dieser wurde bereits bei der Vorstellung des Lehrbuchs von Holzmüller erwähnt, vgl. 3.1.

²⁸ Er nutzt dazu die Sätze von Ceva und Menelaos.

derholung und Einübung schon bzw. neu erworbener Kenntnisse und Einsichten wesentlich leichter fällt als bei der Bearbeitung zusammenhangloser Routineaufgaben.“³¹

Außerhalb des staatlichen Schulwesens spielt die projektive Geometrie eine große Rolle im Mathematikunterricht an Waldorfschulen. Ein Grund dafür liegt sicherlich in Rudolf Steiners Anthroposophie, in der er die Existenz weiterer geistiger Welten neben der für alle Menschen sichtbaren physischen Welt postulierte. Um Zugang zu diesen Welten zu erhalten, bedürfe es laut Steiner eines mehrstufigen Lernprozesses, an dessen Anfang die Beschäftigung mit Mathematik stehe: „Daher kann derjenige, der im anthroposophischen Sinne ein Geistesforscher werden will, vor allen Dingen ein großes Vorbild haben innerhalb der heutigen Wissenschaftlichkeit: das ist die Mathematik. [...] Was ist es denn eigentlich, was die Seele von der Mathematik besonders hat? Das hat sie, daß alles, was im mathematischen Erkennen vor die Seele tritt, innerlich durchsichtig, übersichtlich ist, daß gewissermaßen nichts in dieser Erkenntnis drinnen steckt, dem man sich nur unbewußt und ohne Anwendung seines Willens hingibt.“³² Eine besondere Bedeutung kommt dabei der projektiven Geometrie zu, da es hier mit den Fernelementen Objekte gibt, die man sich in keiner Weise vorstellen sondern nur durch seinen Willen schaffen kann: „An der synthetischen Geometrie habe ich hauptsächlich mir zum Bewußtsein gebracht den Hellseher-Prozeß. Es ist natürlich nicht so, daß derjenige, der synthetische Geometrie studiert hat, ein Hellseher ist, aber veranschaulichen kann man den Prozeß auf diese Weise.“³³

Es ist daher nicht verwunderlich, dass sich Steiner dafür aussprach, die projektive Geometrie in den Unterricht der ersten Waldorfschule³⁴ aufzunehmen: „Das sind Kinder von fünfzehn bis sechzehn Jahren. Wenn sie also bei Ihnen in der Geometrie der Lage durchkriegen die ersten Grundbegriffe bis zum Gesetz der Dualität mit der Perspektive, daß die Kinder perplex sind und staunen, und wenn sie dann von der neuen Dissertation für einige der Figuren Interesse kriegen, dann haben Sie alles erreicht, was Sie erreicht haben sollen.“³⁵ Seinen Vorgaben entsprechend findet sich im erstmals 1931 herausgegebenen *Lehrplan der freien Waldorfschule*³⁶ als Thema

³¹ Kratz 1993, S. 170f

³² Kiltbau u.a. 1994, S. 654f

³³ Kiltbau u.a. 1994, S. 675f

³⁴ Diese wurde 1919 in Stuttgart gegründet.

³⁵ Kiltbau u.a. 1994, S. 96; Gemeint ist die Dissertation von Hermann von Baravalle (*Zur Pädagogik der Physik und Mathematik*. Stuttgart: Freies Geistesleben ³¹1964)

³⁶ 2009 erschien der Lehrplan nahezu unverändert in der elften Auflage.

für den Mathematikunterricht der zehnten Klasse: „Einführung in die Elemente der Geometrie der Lage“³⁷.

Auch heute noch ist die projektive Geometrie an vielen Waldorfschulen ein zentrales Thema³⁸, allerdings abweichend von den Empfehlungen Steiners in der Klasse 11³⁹. In den Begründungen für die Behandlung scheint allerdings noch die Bewertung Steiners bezüglich der Bedeutung der projektiven Geometrie klar hervor: „Durch diese Erweiterung der euklidischen Gedankenwelt lassen sich Beziehungen entdecken, die durch bloße Sinneswahrnehmung nicht gegeben sind und sich nur durch denkendes Betrachten ergeben. Durch synthetisches Vorgehen werden mit den geometrischen Elementen – ganz unabhängig von jeder Metrik – die Lagebeziehungen erfasst und geübt, diese in der Vorstellung in Bewegung zu bringen.“⁴⁰ Aufgrund der Eigenständigkeit der einzelnen Waldorfschulen existiert nicht ein für alle verbindliches Curriculum an vorgeschriebenen Inhalten. In der Fülle an Vorschlägen⁴¹ lassen sich jedoch zwei Zugangswege erkennen, die sehr oft eingesetzt werden: einmal der schon bekannte Übergang von der Zentralprojektion zur Zentralkollineation und daneben die (eher abstrakte) Einführung von Grundgebilden⁴² und Fernelementen sowie die Untersuchung der Gliederung der Ebene durch Punkte bzw. Geraden. Beiden Zugän-

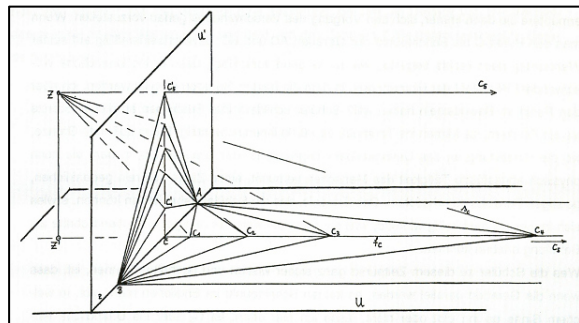


Abbildung 126: Variation bei Zentralprojektion (aus: Lehrplaninitiative 2006, S. 61)

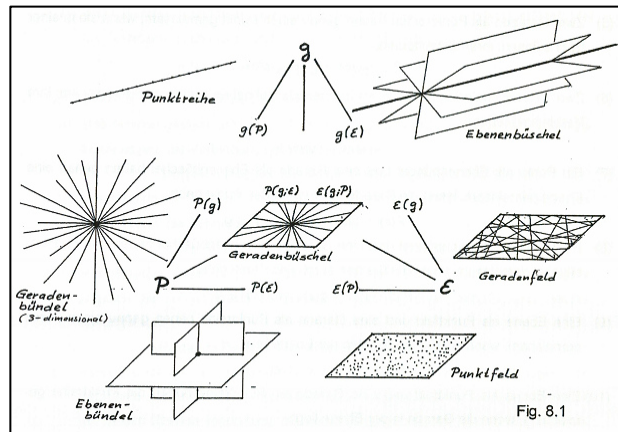


Abbildung 127: Grundgebilde (aus: Lehrplaninitiative 2006, S. 111)

gen gemeinsam ist, dass unter dem Stichwort der "Metamorphosen" ein starkes Gewicht auf Fragen der Variation der Figuren und des Verschiebens von Elementen ins Unendliche gelegt wird: „Der Weg führt über das erlebende Tun und das gespannte

³⁷ Heydebrand 1990, S. 44

³⁸ Vor Einführung des Zentralabiturs wurden teilweise auch Abituraufgaben zur projektiven Geometrie gestellt, vgl. dazu Stolzenburg 2009.

³⁹ Der Unterricht findet in Form einer meist vierwöchigen Unterrichtsepoche statt, d.h. die beiden ersten Unterrichtsstunden sind an allen Wochentagen der projektiven Geometrie gewidmet.

⁴⁰ Lehrplaninitiative 2006, S. 75

⁴¹ Man vergleiche dazu Lehrplaninitiative 2006.

⁴² Hierzu gehören auch räumliche Grundgebilde.

Selbst-Entdecken, bis sich schließlich in der sich dabei aufdrängenden inneren Folgerichtigkeit notwendige Begriffsbildungen vollziehen, die zu harmonischen Ganzheiten ohne Ausnahmen führen. [...] Eine dieser Ganzheiten ist die geometrische Metamorphose, die über das Vehikel des Zeichnerischen gedanklich erlebt werden kann und eine exzellente Möglichkeit bedeutet, bewegliches Vorstellen und Denken heranzubilden und eigentlich erst dadurch die Möglichkeit zu entwickeln, Verwandlungsprozesse vollständig zu erfassen.“⁴³ Außerdem wird der Aspekt der Dualität stark betont. Die weiteren auftretenden Inhalte stimmen weitgehend mit den bereits vorgestellten überein (harmonische Punkte und Strahlen, Satz von Desargues, perspektive und projektive Verwandtschaft, ...), werden aber auch unter speziellen Gesichtspunkten untersucht. Eine Übersicht gibt die folgende Abbildung:

⁴³ Lehrplaninitiative 2006, S. 185f

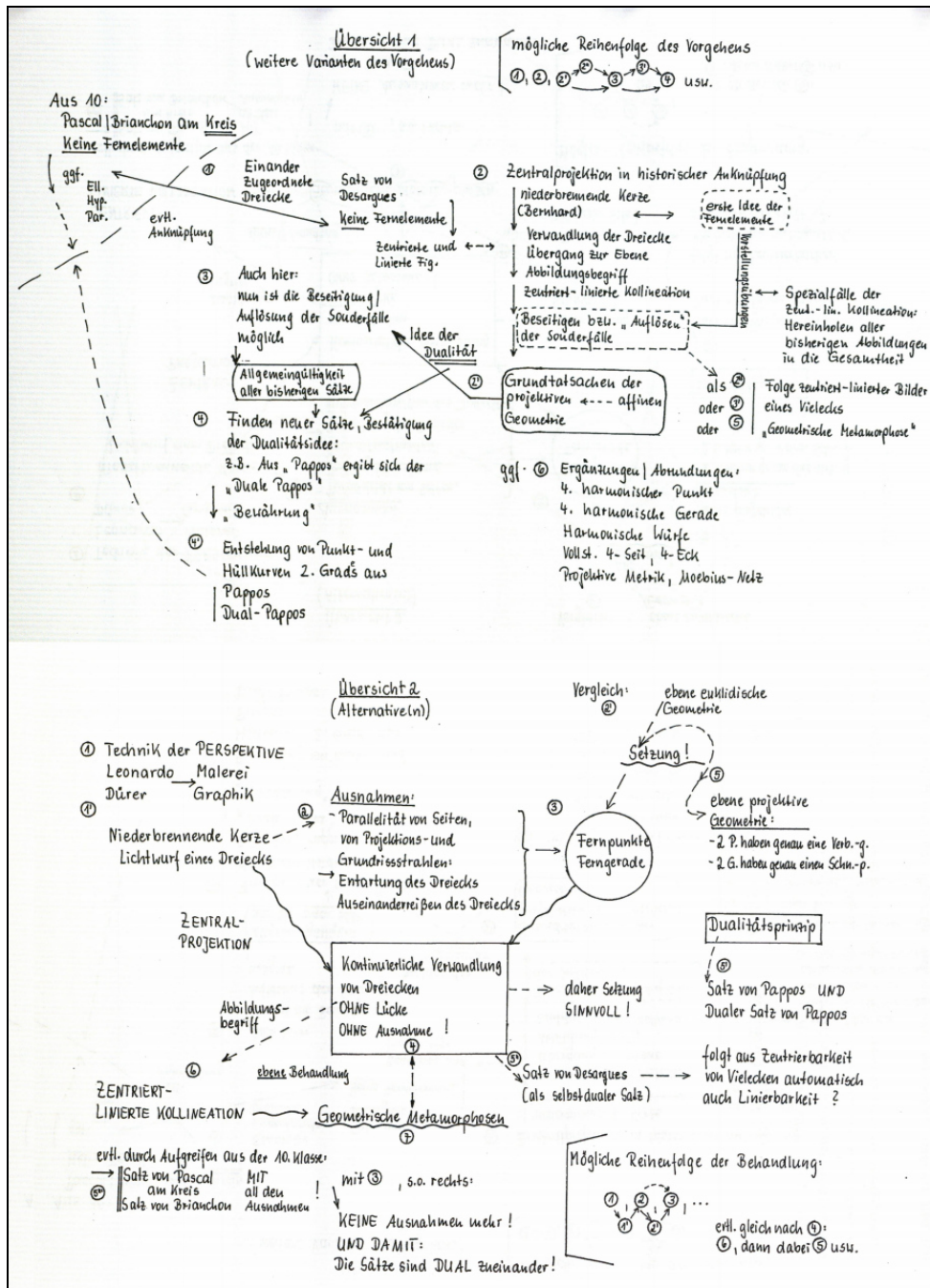


Abbildung 128: Übersicht über mögliche Themenbereiche (aus: Lehrplaninitiative 2006, S. 199f)

Die in diesem Abschnitt gegebene Darstellung der Vorschläge zur projektiven Geometrie im schulischen Kontext nach dem zweiten Weltkrieg und im Bereich der Waldorfschulen erhebt selbstverständlich nicht den Anspruch auf Vollständigkeit, sondern soll nur einen ersten Überblick verschaffen. Hier bietet sich eine Möglichkeit für zukünftige Untersuchungen, die insbesondere der Frage nachgehen könnten, welche Verbreitung die angesprochenen Vorschläge erfuhren. Darüber hinaus könnte es interessant sein zu erforschen, ob vergleichbare historische Ansätze zur Berücksich-

tigung der projektiven Geometrie auch in anderen Ländern existierten.⁴⁴ Und nicht zuletzt wäre ein Lehrgang der projektiven Geometrie für die gymnasiale Oberstufe zu entwickeln, der die durch den aktuellen Geometrieunterricht gegebenen Grenzen und Möglichkeiten berücksichtigt. Denn auch heute könnte man es nur begrüßen, wenn die projektive Geometrie die Rolle übernähme, die ihr Walther Lietzmann bereits vor 100 Jahren zudachte, nämlich „ein Gegengewicht zu einer allzu starken Betonung der rechnerischen Seite der Mathematik“⁴⁵ zu bilden.

⁴⁴ Insbesondere wären Österreich (besondere Rolle der darstellenden Geometrie), Frankreich und Italien (Beiträge zur Entwicklung der Geometrie auf wissenschaftlicher Ebene) von Interesse.

⁴⁵ Lietzmann 1916, S. 254

Literatur

- Becker, Johann Carl: *Zu dem Kapitel von den Incorrectheiten, die sich in die Sprache der Mathematik eingeschlichen haben*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 2 (1871), S. 89-97
- Becker, Johann Carl: *Noch einige Bemerkungen über die unendlich fernen Gebilde*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 3 (1872), S. 158-159
- Becker, Johann Carl: *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* (Zweites Buch). Berlin: Weidmann 1878
- Begehr, Heinrich: *Die Berliner Mathematische Gesellschaft: Ursprung, Gründung, Neugründung*. In: Sitzungsberichte der BMG Jg. 1997-2000 (2001), S. 267 - 366
- Bender, Peter: *Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion*. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14 (1982), S. 9-24
- Beneš, Julius: *Schulnachrichten*. In: 44. Jahresbericht des Kaiser Franz Josef - Landes-Real- und Obergymnasiums in Baden bei Wien. Baden: Verlag des Kaiser Franz Josef - Landes-Real- und Obergymnasiums 1907, S. 17-55
- Beyel, Christian: *Über die Ellipse mit dem Achsenverhältnis $1:\sqrt{2}$* . In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 23 (1892), S. 323-340
- Beyel, Christian: *Über das geometrische Denken mit besonderer Berücksichtigung der darstellenden Geometrie*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 46 (1915), S. 81-94
- Beyer, Georg: *Die neuere Geometrie und die Schule*. In: 20. Jahresbericht der Realschule I. Ordnung zu Rawicz. Rawicz: Frank 1873, S. 3-20
- Böger, Rudolf: *Die Geometrie der Lage in der Schule*. Hamburg: Lütcke und Wulff 1897
- Böger, Rudolf: *Ebene Geometrie der Lage*. Leipzig: Göschen 1900
- Böger, Rudolf: *Die Geometrie der Lage in der Schule*. In: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 6 (1900), S. 66-70
- Böger, Rudolf: *Elemente der Geometrie der Lage*. Leipzig: Göschen 1910
- Böger, Rudolf: *Inhalt, Art und Name der neueren Geometrie*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 45 (1914), S. 19-27
- Cantor, Moritz: *Friedlein, Johann Gottfried*. In: Allgemeine Deutsche Biographie Band 7 (1878), S. 398-399
- Cantor, Moritz: *Steiner, Jakob*. In: Allgemeine Deutsche Biographie Band 35 (1893), S. 700-703
- Cayley, Arthur: *A Sixth Memoir upon Quantics*. In: Philosophical Transactions of the Royal Society of London 149 (1859), S. 61-90
- Chasles, Michel; Sohncke, Ludwig Adolph (Übers.): *Geschichte der Geometrie*. Halle: Gebauer 1839
- Cramer, Hans: *Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Baden*. Leipzig und Berlin: Teubner 1910
- Cramer, Hans: *Der neue mathematische Lehrplan für die bayrischen höheren Schulen*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 58 (1927), S. 286-289

- Dieck, Wilhelm: *Der Geist der neueren Geometrie*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 45 (1914), S. 432-440
- Diekmann, Josef: *Bewegung und Umformung*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 24 (1893), S. 81-96
- Diekmann, Josef: *Bewegung und Umformung II*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 25 (1894), S. 161-176
- Dieudonné, Jean: *New Thinking in School Mathematics*. In: o.V.: „New Thinking in School Mathematics“. Paris: OEEC 1961
- Elschenbroich, Hans-Jürgen: *Mit dynamischer Geometrie argumentieren und beweisen*. In: Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo (Hrsg.): „Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht“. Berlin: Cornelsen Scriptor 2005
- Efimow, Nikolai Wladimirowitsch: *Höhere Geometrie II*. Braunschweig: Vieweg 1970
- Enders, Maximilian: *Die Perspektivität im geometrischen Unterricht der OII*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 48 (1917), S. 341-350
- Falke, Jacob von: *Propädeutik der Geometrie*. Leipzig: Verlag von Quandt & Händel 1866
- Fiedler, Wilhelm: *Ueber das System in der darstellenden Geometrie*. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik Band 8 (1863), S. 444-447
- Fiedler, Wilhelm: *Ueber die Transformationen in der darstellenden Geometrie*. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik Band 9 (1864), S. 331-355
- Fiedler, Wilhelm: *Zur Reform des geometrischen Unterrichts*. In: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich Band 22 (1877), S. 82-97
- Fladt, Kuno: *Die neuen Stundentafeln für die höheren Schulen Württembergs*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 57 (1926), S. 358-360
- Fladt, Kuno: *Die Mathematik in den neuen württembergischen Lehrplänen*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 60 (1929), S. 28-34
- Fresenius, Friedrich Carl: *Noch einmal die neuere Geometrie und die unendlich entfernten Gebilde*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 2 (1871), S. 494-504
- Geiser, Carl Friedrich: *Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung*. Leipzig: B. G. Teubner 1867
- Gerlach, Hermann: *Von der Multiplikation mit negativen und mit benannten Zahlen*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 16 (1885), S. 81-90
- Gilles, Joseph Johann: *Bedenkliche Richtungen in der Mathematik*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 11 (1880), S. 5-24
- Götting, Eduard: *Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 33 (1902), S. 294-302
- Gottwald, Siegfried; Ilgands, Hans-Joachim, Schlote, Karl-Heinz (Hrsg.): *Lexikon bedeutender Mathematiker*. Thun u.a.: Harri Deutsch 1990
- Güldner, Hans: *Lehrpläne und Lehraufgaben der höheren Lehranstalten für die männliche Jugend in Preußen von 1901*. Berlin: Weidmann 1921

- Guttstadt, Guttman, Sklarek (Redaktion): *Tageblatt der 59. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Berlin*. Berlin: Schumacher 1886
- Gutzmer, August: *Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 36 (1905), S. 533-580
- Hankel, Hermann: *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*. Tübingen: L. Fr. Fues'sche Sortimentsbuchhandlung 1869
- Hankel, Hermann: *Die Elemente der Projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung*. Leipzig: Teubner 1875
- Henrici, Julius; Treutlein, Peter: *Lehrbuch der Elementar-Geometrie*, erster Teil. Leipzig: Teubner ²1891
- Henrici, Julius; Treutlein, Peter: *Lehrbuch der Elementar-Geometrie*, zweiter Teil. Leipzig: Teubner ³1907
- Henrici, Julius; Treutlein, Peter: *Lehrbuch der Elementar-Geometrie*, dritter Teil. Leipzig: Teubner ²1901
- Hensel, Susann; Ihmig, Karl-Norbert; Otte, Michael: *Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert in Deutschland*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1989
- Heydebrand, Caroline von: *Vom Lehrplan der freien Waldorfschule*. Stuttgart: Freies Geistesleben ⁹1990
- Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner 1899
- Höfling, Oskar: *60 Jahre Erlanger Programm*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 63 (1932), S. 153-159
- Hoff, Joh. Friedrich: *Briefe Jakob Burckhardts an Karl Fresenius aus den Jahren 1842/46*. In: Historische Zeitschrift Band 141 (1930), S. 288-314
- Hoffmann, Volkmar: *Die mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 1 (1870), S. 248-253
- Hoffmann, Volkmar: *Nochmals der unendlich ferne Punkt im Schulunterricht*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 16 (1885), S. 190-191
- Holzmüller, Gustav: *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik*, zweiter Teil. Leipzig: Teubner ²1897
- Holzmüller, Gustav: *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik*, erster Teil. Leipzig: Teubner ⁴1904
- Jahner, Horst (Hrsg.): *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Heidelberg: Quelle & Meyer ⁴1968
- Kalok, Lothar: *Schulprogramme: Eine fast vergessene Literaturgattung*. In: Hort, Irmgard; Reuter, Peter (Hrsg.): *Aus mageren und aus ertragreichen Jahren*. Giessen: Universitätsbibliothek 2007
- Keferstein, Hans: *Aus dem Unterricht in der Geometrie der Lage*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 45 (1914), S. 385-389
- Kerst, Bruno: *88. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Innsbruck, 21.-27. September 1924*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 56 (1925), S. 49-56

- Kerst, Bruno: *Landeslehrplan für die höheren Schulen Sachsens vom 10. Mai 1932*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 63 (1932), S. 394-397
- Kirschmer, Gottlob: *Holz Müller, Gustav*. In: Neue Deutsche Biographie 9 (1972), S. 578
- Klein, Felix: *Vorträge über den mathematischen Unterricht* (Teil 1). Leipzig: Teubner 1907
- Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Teil 1). New York: Chelsea Publishing Company 1956
- Kline, Morris: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press 1972
- Kober, Julius: *Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 1 (1870a), S. 228-236
- Kober, Julius: *Ueber die Definition des Parallelismus*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 1 (1870b), S. 491-493
- Kober, Julius: *Bemerkung zu Dr. Sturm's vorstehendem Aufsatz*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 2 (1871), S. 408
- Kober, Julius: *Ueber das Unendliche und die neuere Geometrie*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 3 (1872), S. 249-264
- Kössler, Franz: *Personenlexikon von Lehrern des 19. Jahrhunderts*. Gießen: Universitätsbibliothek 2008
- Kratz, Heinrich: *Die Lehrpläne und Prüfungsordnungen für die höheren Schulen in Preußen vom 31. März und 27. Mai 1882*. Neuwied und Leipzig: Heuser 1883
- Kratz, Johannes: *Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht*. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag 1993
- Krüger, Katja: *Erziehung zum funktionalen Denken*. Berlin: Logos-Verlag 2000
- Lehrplaninitiative der Pädagogischen Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen (Hrsg.): *Mathematikthemen für die 11. Klasse*. Kassel: Bildungswerk Beruf und Umwelt 2006
- Lexis, Wilhelm (Hrsg.): *Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich*, II. Band. Berlin: A. Asher & Co. 1904a
- Lexis, Wilhelm (Hrsg.): *Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich*, IV. Band, 1. Teil. Berlin: A. Asher & Co. 1904b
- Lietzmann, Walther: *Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen*. Leipzig und Berlin: Teubner 1910
- Lietzmann, Walther; Geck, Erwin; Cramer, Hans: *Neue Erlasse in Bayern, Württemberg und Baden*. Leipzig und Berlin: Teubner 1913
- Lietzmann, Walther: *Zur Einführung*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 45 (1914), S. 1-3
- Lietzmann, Walther: *Amtliche Verordnungen*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 46 (1915), S. 98-105
- Lietzmann, Walther: *Methodik des mathematischen Unterrichts* (2. Teil). Leipzig: Quelle & Meyer 1916
- Lietzmann, Walther: *Methodik des mathematischen Unterrichts* (2. Teil). Leipzig: Quelle & Meyer 1923
- Lietzmann, Walther: *Die neuen mathematischen Lehrpläne für die höheren Knabenschulen in*

- Preußen*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 56 (1925), S. 193-207
- Lorey, Wilhelm: *Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preussen und einigen norddeutschen Staaten*. Leipzig und Berlin: Teubner 1911
- Lorey, Wilhelm: *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts*. Leipzig und Berlin: Teubner 1916
- Ludwig, W.: *Rudolf Sturm*. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Band 34 (1926), S. 41-51
- Müller, Hubert: *Leitfaden der ebenen Geometrie*, erster Theil. Leipzig: Teubner 1874
- Müller, Hubert: *Leitfaden der ebenen Geometrie*, zweiter Theil. Leipzig: Teubner 1875
- o.V.: *Verhandlungen der achtundzwanzigsten Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner*. Leipzig: Teubner 1873
- o.V.: *Verhandlungen der einunddreissigsten Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner*. Leipzig: Teubner 1877
- o.V.: *Verhandlungen der zweiunddreissigsten Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner*. Leipzig: Teubner 1878
- o.V.: *Tageblatt der 61. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Köln, wissenschaftlicher Theil*. Köln: Albert Ahn 1889
- o.V.: *Die Lehrpläne und Prüfungsordnungen für die höheren Schulen in Preußen vom Jahre 1891*. Neuwied und Leipzig: Heuser 1892
- o.V.: *Lehrpläne für die höheren Schulen im Volksstaate Hessen*. Darmstadt: Staatsverlag 1925
- o.V.: *Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 64 (1933), S. 201-207
- Pasch, Moritz: *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig: Teubner 1882
- Piper, Karl: *Eine neue Methode des mathematischen Unterrichts, bei welcher die häuslichen Arbeiten fortfallen*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 14 (1883), S. 460-469
- Quensen, Karl: *Die IX. Hauptversammlung des „Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften“ in Hamburg (Pfungstwoche 1900)*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 31 (1900), S. 401-413
- Reye, Theodor: *Die Geometrie der Lage* (2 Bände). Hannover: Carl Rümpler 1866-1868
- Reye, Theodor: *Die synthetische Geometrie im Alterthum und in der Neuzeit*. In: o.V.: *Der Rectoratswechsel an der Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg am 1. Mai 1886*. Strassburg: Heitz & Mündel 1886, S. 31-48
- Schlegel, Victor: *Ueber Ziele und Methoden der Schul-Geometrie*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 7 (1876), S. 179-184
- Schnell, Heinrich: *Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Hessen*. Leipzig: Teubner 1910
- Schönbeck, Jürgen: *Der Mathematikdidaktiker Peter Treutlein*. In: Schönbeck, Jürgen; Struve, Horst;

- Volkert, Klaus (Hrsg.): *Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften*, Band I. Weinheim: Deutscher Studien Verlag 1994
- Scholz, Erhard: *Symmetrie, Gruppe, Dualität*. Basel (u.a.): Birkhäuser 1989
- Schotten, Heinrich: *Bericht über die Jahresversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 24 (1893), S. 223-232
- Schotten, Heinrich: *81. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte. – Salzburg 19.-25. Sept. 1909*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 41 (1910), S. 98-104
- Schröter, Heinrich: *Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften*. Leipzig: B. G. Teubner 1867
- Schülke, Albert: *Ueber neuere Geometrie*. In: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 17 (1911), S. 22-24
- Schülke, Albert: *Das Erlanger Programm und die Schulgeometrie*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 58 (1927), S. 401-407
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss* (Beschluss vom 4.12.2003). München: Wolters Kluwer 2004
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Köln: Wolters Kluwer 2015
- Seeber, Gustav; Wolter, Heinz: *Die preußisch-deutsche Reichsgründung von 1870/71*. Köln: Pahl-Rugenstein 1981
- Staiger, Elisabeth: *Über die Anwendung beweglicher Figuren im geometrischen Unterricht*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 49 (1918), S. 341-348
- Stammer, Wilhelm: *Die ersten Sätze der neuen Geometrie*. In: Osterprogramm der Realschule I. Ordnung zu Düsseldorf. Düsseldorf: Voß 1878, S. 1-23
- Stark, Helmuth: *Hauck, Hermann Guido*. In: Neue Deutsche Biographie 8 (1969), S. 77
- Staudt, Karl Georg Christian von: *Die Geometrie der Lage*. Nürnberg: Bauer und Raspe 1847
- Steiner, Jacob: *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin: G. Fincke 1832
- Study, Eduard: *Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie*. In: Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Band 48 (1896), S. 649-664
- Sturm, Rudolf: *Ueber einige Incorrectheiten, die sich in der Sprache, besonders der elementaren Mathematik eingeschlichen haben*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 1 (1870a), S. 272-279
- Sturm, Rudolf: *Die neuere Geometrie auf der Schule*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 1 (1870b), S. 474-489

- Sturm, Rudolf: *Ueber die unendlich entfernten Gebilde*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 2 (1871), S. 391-407
- Thieme, Hermann: *Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie*. Posen: Merzbach 1900
- Tobies, Renate: *Elisabeth Staiger, geborene Klein*. In: Weber-Reich, Traudel (Hrsg.): *Des Kennenlernens werth. Bedeutende Frauen Göttingens*. Göttingen: Wallstein-Verlag 1995, S. 248-260
- Treutlein, Peter: *Der Geometrische Anschauungsunterricht*. Leipzig und Berlin: Teubner 1911
- Voelke, Jean-Daniel: *Le théorème fondamental de la géométrie projective: évolution de sa preuve entre 1847 et 1900*. In: Archive for History of Exact Sciences 62 (2008), S. 243-296
- Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen: *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum 2012
- Wangerin, Taschenberg (Hrsg.): *Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 66. Versammlung zu Wien. Zweiter Theil. I. Hälfte*. Leipzig: Vogel 1895
- Weigand, Hans-Georg; Weth, Thomas: *Computer im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Spektrum 2002
- Weinmeister, Paul: *Philipp Weinmeister*. In: *Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft ISIS Jahrgang 1910*. Dresden: H. Burdach 1911, S. V-XII
- Weinmeister, Philipp: *Unendlichkeitsrechnung in der Schule*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 38 (1907), S. 1-15
- Wieleitner, Heinrich: *Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern*. Leipzig und Berlin: Teubner 1910
- Winter, Heinrich: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg 1991
- Wirz, Josef: *Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsass-Lothringen*. Leipzig: Teubner 1911
- Witting, Alexander: *Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen*. Leipzig: Teubner 1910a
- Witting, Alexander: *Bericht über die XIX. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zu Posen Pfingsten 1910*. In: Pädagogisches Archiv 52 (1910b), S. 440-450
- Wölz, Rudi: *Ein Vorschlag zur Behandlung der Zentralkollineation*. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 17 (1964/1965), S. 406-412
- Wolff, Georg (Hrsg.): *Die Elemente der Mathematik* (Band 4). Paderborn: Schöningh; Hannover: Schroedel 1955
- Zacharias, Max: *Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung*. In: Meyer, Wilhelm Franz; Mohrmann, Hans (Hrsg.): *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* Band 3 (1. Teil, 2. Hälfte). Leipzig: Teubner 1914-1931
- Zacharias, Max: *Zur Frage des Unterrichts in der neueren Geometrie*. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band 45 (1914), S. 390-393
- Zühlke, Paul: *Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen*

Realanstalten. Leipzig und Berlin: Teubner 1911

Zühlke, Paul: *Zur Frage nach der Bedeutung der projektiven Geometrie für den mathematischen Schulunterricht*. In: *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* Band 45 (1914), S. 393-397

Anhang

I) Vorgaben für Bauingenieure an den Technischen Hochschulen (aus: Lexis 1904b)

a) Umfang der Höheren Mathematik

Hochschule zu	Semester	St. V.	St. Ü.	Σ V.	Σ Ü.	Semester	St. V.	St. Ü.	Σ V.	Σ Ü.
Aachen . .	I. W.-S.	6	$\frac{1}{2}$	120	10	II. S.-S.	6	—	90	—
Berlin . .	„	6	2	120	40	„	6	2	90	30
Braun- schweig .	„	8	2	160	40	„	6	2	90	30
Darmstadt .	„	5	4	100	80	„	5	3	75	45
Dresden .	—	—	—	—	—	I. S.-S.	3	1	45	15
Hannover .	I. W.-S.	8	1	160	20	II. S.-S.	6	2	90	30
Karlsruhe .	„	6	2	120	40	„	6	2	90	30
München .	„	6	3	120	60	„	6	2	90	30
Stuttgart ¹⁾ .	„	4	3	80	60	„	3	1	45	15

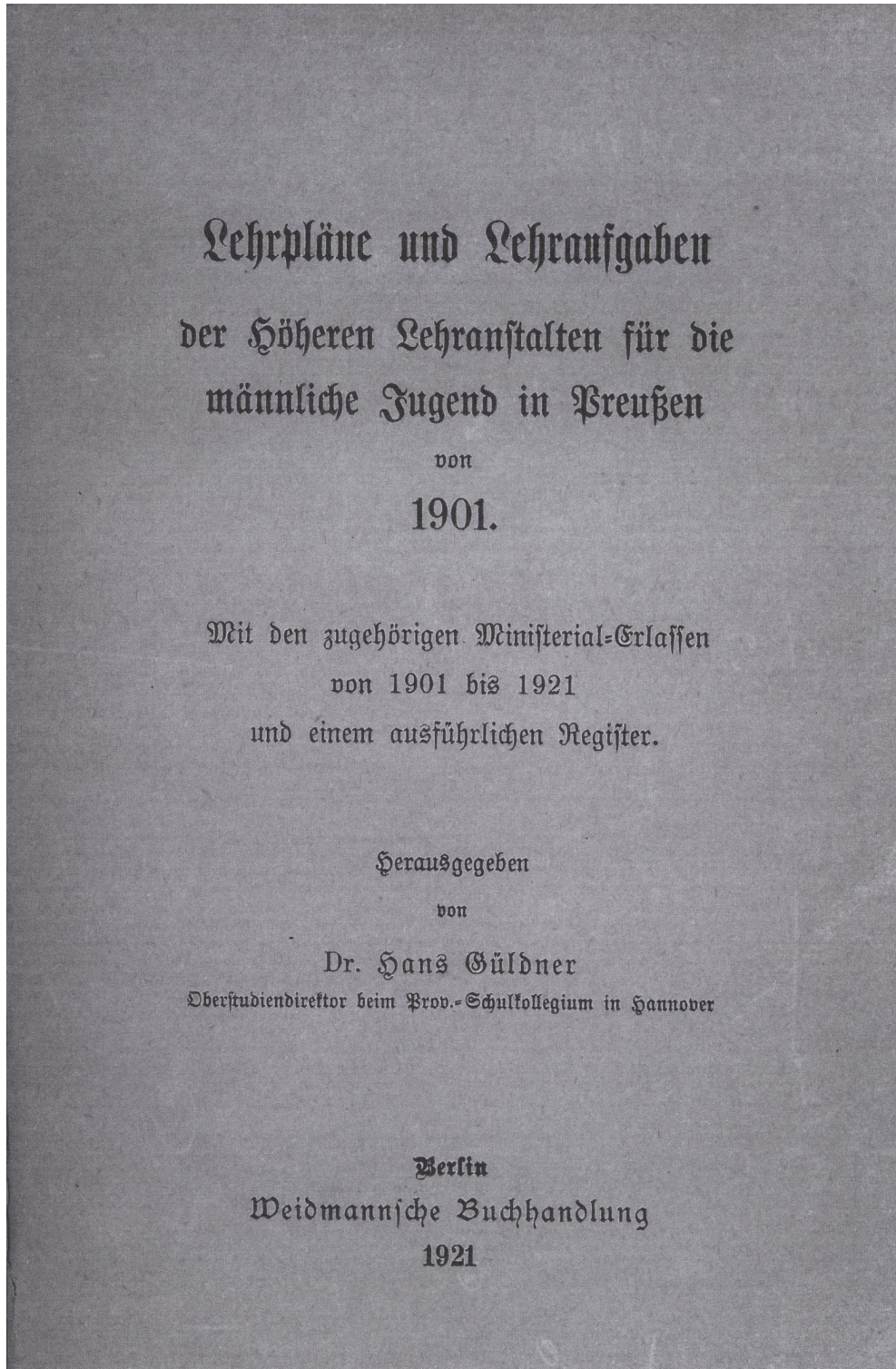
Semester	St. V.	St. Ü.	Σ V.	Σ Ü.	Semester	St. V.	St. Ü.	Σ V.	Σ Ü.	Gesamtsumme der Stunden		
										V.	Ü.	V.+Ü.
III. W.-S.	3	1	60	20	IV. S.-S.	3	1	45	15	315	45	360
„	2	—	40	—	„	2	—	30	—	280	70	350
„	2	—	40	—	—	—	—	—	—	290	70	360
„	2	—	40	—	—	—	—	—	—	215	125	340
II. W.-S.	7	3	140	60	III. S.-S.	6	1	90	15	275	90	365
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	250	50	300
III. W.-S.	3	—	60	—	IV. S.-S.	2	—	30	—	300	70	370
„	5	3	100	60	„	2	2	30	30	340	180	520
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	125	75	200
										(290 ¹)	(120 ¹)	(410 ¹)

b) Umfang der Darstellenden Geometrie

Hochschule zu	Semester	St. V.	St. Ü.	Σ V.	Σ Ü.	Semester	St. V.	St. Ü.	Σ V.	Σ Ü.
Aachen . . .	I. W.-S.	4	4	80	80	II. S.-S.	4	4	60	60
Berlin . . .	„	5	5	100	100	„	5	5	75	75
Braunschweig	„	4	6	80	120	„	4	6	60	90
Darmstadt .	„	4	6	80	120	„	4	6	60	90
Dresden . .	—	—	—	—	—	I. S.-S.	4	6	60	90
Hannover . .	I. W.-S.	3	6	60	120	II. S.-S.	3	6	45	90
Karlsruhe . .	„	4	4	80	80	„	4	4	60	60
München . .	„	4	4	80	80	„	4	4	60	60
Stuttgart . .	„	—	4	—	80	„	—	2	—	30
		[4] ¹⁾	[6] ¹⁾	[80] ¹⁾	[120] ¹⁾		[4] ¹⁾	[6] ¹⁾	[60] ¹⁾	[90] ¹⁾

Semester	St-V.	St-Ü.	Σ V.	Σ Ü.	Gesamtsumme der Stunden		
					V.	Ü.	V. + Ü.
—	—	—	—	—	140	140	280
—	—	—	—	—	175	175	350
—	—	—	—	—	140	210	350
III. W.-S.	1	2	20	40	140	210	350
II. W.-S.	4 ¹ / ₂	6	90	120	150	210	360
—	—	—	—	—	105	210	315
IV. S.-S.	—	3	—	45	140	185	325
—	—	—	—	—	140	140	280
—	—	—	—	—	—	110	110
					[140]	[320]	[460]

**II) Auszug aus dem preußischen Lehrplan für die höheren
Lehranstalten von 1901
(aus: Güldner 1921)**



I. Allgemeine Lehrpläne.

Bemerkung: Die Klammern in den Plänen bezeichnen die Zulässigkeit einer zeitweiligen Verschiebung der Stundenzahlen innerhalb der einzelnen Fachgruppen.

A. Lehrplan der Gymnasien.

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Sa.
Religion	3	2	2	2	2	2	2	2	2	19
Deutsch und Geschichtserzählungen	3) 1) 4	2 ¹⁾	3	2	2	3	3	3	3	25
Lateinisch	8	8	8	8	8	7	7)	7)	7)	68
Griechisch	—	—	—	6	6	6	6)	6)	6)	36
Französisch	—	—	4	2	2	3	3	3	3	20
Geschichte	—	2 ¹⁾	2	2	2	2	3	3	3	19
Erdkunde	2	2	2	1	1	1	—	—	—	9
Rechnen und Mathematik	4	4	4	3	3	4)	4)	4)	4)	34
Naturwissenschaften	2	2	2	2	2	2)	2)	2)	2)	18
Schreiben	2	1 ¹⁾	—	—	—	—	—	—	—	3
Zeichnen	—	2	2	2	2	—	—	—	—	8
zusammen	25	25	29	30	30	30	30	30	30	259

Dazu kommen:

als verbindlich: je 3 Std. Turnen durch alle Klassen und je 2 Std. Singen für die Schüler der VI und V. Einzelbefreiungen finden nur auf Grund ärztlichen Zeugnisses und in der Regel nur auf ein halbes Jahr statt. Die für das Singen beantragten Schüler von IV an aufwärts sind zur Teilnahme am Chorsingen verpflichtet.

als wahlfrei: von UII ab je 2 Std. Zeichnen; von OII ab je 2 Std. Englisch und je 2 Std. Hebräisch. — Die Meldung zu dem wahlfreien Unterrichte verpflichtet zur Teilnahme auf mindestens ein halbes Jahr.

¹⁾ Siehe Seite 105.

Für Schüler der IV und III mit schlechter Handschrift ist besonderer Schreibunterricht einzurichten.

Eine Abweichung von dem vorstehenden Lehrplan ist dahingehend zulässig, daß in den drei oberen Klassen (O II, U I und O I) an Stelle des verbindlichen Unterrichts im Französischen solcher Unterricht im Englischen mit je 3 Stb. tritt, das Französische aber wahlfreier Lehrgegenstand mit je 2 St. wird.

Von dem in U III, O III und U II neben dem Griechischen gestatteten Ersatzunterrichte sind regelmäßig je 3 Stunden dem Englischen zuzuweisen; von den übrigen Stunden kommen in der Regel in U III und O III je 2 auf Französisch und je 1 auf Rechnen und Mathematik, dagegen in U II nur 1 auf Französisch und 2 auf Mathematik und Naturwissenschaften.

B. Lehrplan der Realgymnasien.

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Sa.
Religion	3	2	2	2	2	2	2	2	2	19
Deutsch und Geschichtserzählungen	3) 1) 4	2 ¹⁾	3	3	3	3	3	3	3	27
Lateinisch	8	8	7	5	5	4	4	4	4	49
Französisch	—	—	5	4	4	4	4)	4)	4)	29
Englisch	—	—	—	3	3	3	3)	3)	3)	18
Geschichte	—	2 ¹⁾	2	2	2	2	3	3	3	19
Erdkunde	2	2	2	2	2	1	—	—	—	11
Rechnen und Mathematik	4	4	4	5	5	5	5	5	5	42
Naturwissenschaften	2	2	2	2	2	4	5	5	5	29
Schreiben	2	1 ¹⁾	—	—	—	—	—	—	—	3
Zeichnen	—	2	2	2	2	2	2	2	2	16
zusammen	25	25	29	30	30	30	31	31	31	262

Dazu kommen als wahlfrei: von O III ab je 2 Stb. Linearzeichnen.

In Bezug auf Turnen und Singen vgl. Gymnasium; ebenso in Bezug auf den Schreibunterricht für Schüler der IV und III.

¹⁾ Siehe Seite 105.

C. Lehrplan der Oberrealschulen.¹⁾

	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Sa.
Religion	3	2	2	2	2	2	2	2	2	19
Deutsch und Geschichtserzählungen	4) 1) 5	3 ²⁾	4	3	3	3	4	4	4	33
Französisch	6	6	6	6	6	5)	4)	4)	4)	47
Englisch	—	—	—	5	4	4)	4)	4)	4)	25
Geschichte	—	2 ²⁾	3	2	2	2	3	3	3	20
Erdkunde	2	2	2	2	2	1	1	1	1	14
Rechnen und Mathematik	5	5	6	6	5	5	5	5	5	47
Naturwissenschaften	2	2	2	2	4	6	6	6	6	36
Schreiben	2	1 ²⁾	2	—	—	—	—	—	—	5
Freihandzeichnen	—	2	2	2	2	2	2	2	2	16
zusammen	25	25	29	30	30	30	31	31	31	262

Dazu kommen als wahlfrei: von O III ab je 2 Std. Linearzeichnen.

In Bezug auf Turnen und Singen vgl. Gymnasium; ebenso in Bezug auf den Schreibunterricht für Schüler der III.

D. Lehrplan der Realschulen (höheren Bürgerschulen).

Für diese Schulen gilt der Lehrplan der Oberrealschulen von VI bis U II einschließlich. Ihre III entspricht der U III, ihre II der O III und ihre I der U II der Oberrealschulen.

Inwieweit es unter Berücksichtigung örtlicher Bedürfnisse angängig ist, diesen Lehrplan dahin zu ändern, daß von VI—II einschließlich eine Verstärkung des Deutschen und dementsprechend eine Verminderung des Rechnens und der Mathematik oder des Französischen auf den bezüglichen Stufen eintrete, bleibt der Entscheidung der Aufsichtsbehörde überlassen. Die Wochenstundenzahl für die einzelnen Klassen darf dadurch nicht erhöht werden. Eine der möglichen Formen eines solchen Lehrplanes zeigt D 1.

¹⁾ In Bezug auf Latein vgl. den Ministerial-Erlass v. 20. Juli 1904 auf Seite 92.

²⁾ Siehe Seite 105.

D 1. Andere Form eines Lehrplanes für Realschulen.

	VI	V	IV	III	II	I	Sa.
Religion	3	2	2	2	2	2	13
Deutsch und Geschichtserzählungen	5 6 1	4	5	5	4	4	28
Französisch	6	6	6	5	4	4	31
Englisch	—	—	—	5	4	4	13
Geschichte	—	2	3	2	2	2	11
Erdkunde	2	2	2	2	2	2	12
Rechnen und Mathematik	4	4	5	5	5	5	28
Naturwissenschaften	2	2	2	2	5	5	18
Schreiben	2	1	2	—	—	—	4
Freihandzeichnen	—	2	2	2	2	2	10
zusammen	25	25	29	30	30	30	169

Dazu kommen als wahlfrei: vom III ab je 2 Std. Linearzeichnen.

In Bezug auf Turnen und Singen vgl. Gymnasium; ebenso in Bezug auf den Schreibunterricht für Schüler der III.

Zusatz zu A—D.

Der bis auf weiteres zugelassene gymnasiale Unterbau bis U II einschließlich mit nicht allgemein verbindlichem Griechisch und dessen Ersatz durch Englisch und daran anschließend der Oberbau des Gymnasiums oder der Oberrealschule bedarf eines besonderen Lehrplanes nicht, vielmehr gilt dafür, abgesehen von der bezeichneten Änderung bezüglich des Griechischen und Englischen, der Lehrplan des Gymnasiums oder von O II an neben dem des Gymnasiums der der Oberrealschule. Zur Einführung dieser Form ist die Genehmigung der Aufsichtsbehörde erforderlich.

Die Einrichtung von Schulen nach den besonderen Altonaer und Frankfurter Lehrplänen bedarf der ministeriellen Genehmigung.

von den unteren Klassen größere Atlanten auszuschließen. Bei Neuanschaffung von Wandkarten ist darauf zu sehen, daß das System dieser mit dem der Atlanten, welche von den Schülern gebraucht werden, möglichst übereinstimmt.

4. Sehr wichtig für diesen Unterricht ist das Zeichnen als ein Hilfsmittel zur Förderung klarer Anschauungen und zur Einprägung festen erdkundlichen Wissens. Dabei ist aber vor Überspannung der Anforderungen zu warnen. Mit Umrissen, Profilen und ähnlichen übersichtlichen Darstellungen an der Wandtafel wird man sich meist begnügen müssen. Häusliche Zeichnungen sind im allgemeinen nicht zu verlangen. Die Schüler werden sich nach vorbildlichem Zeichnen des Lehrers auf freihändige Anfertigung einfacher Skizzen während der Unterrichtsstunden zu beschränken haben. Ausgeschlossen ist das bloße Nachzeichnen von Vorlagen. Auf der Oberstufe empfiehlt sich das Zeichnen besonders für die regelmäßig anzustellenden Wiederholungen.

5. Wünschenswert ist, daß auf allen Schulen der Unterricht in der Erdkunde in die Hand von Lehrern gelegt werde, die für ihn durch eingehendere Studien besonders befähigt sind; auch ist darauf zu achten, daß er an den einzelnen Anstalten nicht unter zu viele Lehrer verteilt werde. Die Wiederholungen auf der Oberstufe der Gymnasien und Realgymnasien, soweit sie die physische und politische Erdkunde betreffen, werden dem Lehrer der Geschichte, die mathematische Erdkunde dem Lehrer der Mathematik oder der Physik zufallen.

In den Klassen, deren Lehrplan nur je eine Stunde in der Woche für Erdkunde aufweist, ist darauf zu halten, daß diese Zeit regelmäßig und uneingeschränkt dafür verfügbar bleibt.

9. Rechnen und Mathematik.

A. Gymnasium.

a. Allgemeines Lehrziel.

Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen, besonders auch im Kopfrechnen, und in der Anwendung dieser Fertigkeiten auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens. Arithmetik bis zur Entwicklung des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten. Algebra bis zu den Gleichungen zweiten Grades einschließlich. Die ebene und körperliche Geometrie und die ebene Trigonometrie. Der Koordinatenbegriff. Einige Grundlehren von den Regelschnitten.

b. Lehraufgaben.

VL 4 Stunden wöchentlich.

Die Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, unbenannten und benannten. Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen

nebst Übungen in der dezimalen Schreibweise und den einfachsten dezimalen Rechnungen. Vorbereitung der Bruchrechnung.

V. 4 Stunden wöchentlich.

Teilbarkeit der Zahlen. Gemeine Brüche. Fortgesetzte Übungen mit benannten Dezimalzahlen wie in VI. Einfache Aufgaben aus der Regelbetri (durch Schluß auf die Einheit oder ein gemeinschaftliches Maß zu lösen).

IV. 4 Stunden wöchentlich.

Rechnen: Dezimalbruchrechnung. Einfache und zusammenge-setzte Regelbetri mit ganzen Zahlen und Brüchen; Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, namentlich die einfachsten Fälle der Prozent-, Zins- und Rabattrechnung.

Planimetrie: Propädeutischer geometrischer Anschauungs-unterricht. Übungen im Gebrauche von Zirkel und Lineal. Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken.

UIII. 8 Stunden wöchentlich.*)

Arithmetik: Die Grundrechnungen mit absoluten Zahlen und Einführung der positiven und negativen Zahlgrößen unter Beschränkung auf das Notwendigste. Bei den Übungen sind auch Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten zu be-nutzen.

Planimetrie: Erweiterung der Dreieckslehre. Lehre von den Parallelogrammen, den Sehnen und Winkeln am Kreise. Konstruktionsübungen.

OIII. 8 Stunden wöchentlich.*)

Arithmetik: Wiederholung der Bruchrechnung in An-wendung auf Buchstabenausdrücke. Ergänzung des in UIII Gelehrten. Einfachste Sätze der Proportionslehre. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten.

Planimetrie: Wiederholung und Fortsetzung der Kreislehre. Sätze über die Flächengleichheit der Figuren (Pythagoreischer Lehrsatz). Berechnung der Fläche geradliniger Figuren. Kon-struktionsaufgaben.

UII. 4 Stunden wöchentlich.*)

Arithmetik: Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Loga-rithmen. Übungen im Rechnen mit (fünf- oder vierstelligen)

*) An denjenigen Anstalten, welche die Einrichtung von Ersatzunterricht an Stelle des Griechischen haben, soll je eine Stunde in UIII und OIII auf kaufmännisches Rechnen, elementare Körperberechnung und das Notwendigste über Wurzelgrößen, in UII auf die Anfänge der Trigonometrie verwendet werden.

Logarithmen. Einfache quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Planimetrie: Ähnlichkeitslehre, Proportionalität gerader Linien am Kreise, stetige Teilung. Regelmäßige Vielecke. Kreisumfang und -inhalt. Konstruktionsaufgaben.

OII. 4 Stunden wöchentlich.

Arithmetik: Gleichungen, besonders quadratische mit mehreren Unbekannten.

Planimetrie: Einiges über harmonische Punkte und Strahlen sowie über Transversalen. Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Konstruktionsaufgaben, besonders auch solche mit algebraischer Analysis.

Trigonometrie: Goniometrie. Einfache Dreiecksberechnungen.

U und OI. Je 4 Stunden wöchentlich.

Arithmetik: Arithmetische Reihen erster Ordnung und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung. Grundregeln der Kombinatorik und ihre nächstliegenden Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitslehre. Binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrganges (Erweiterung des Zahlbegriffs durch die algebraischen Operationen von der ganzen positiven bis zur komplexen Zahl). Gleichungen, auch solche höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen.

Fortsetzung der Übungen in der Trigonometrie und im Lösen planimetrischer Konstruktionsaufgaben.

Stereometrie und deren Anwendung auf die mathematische Erd- und Himmelskunde. Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde.

Der Koordinatenbegriff. Einige Grundlehren von den Regelschnitten.

Ergänzungen, Zusammenfassungen und Übungen auf allen Gebieten der vorhergehenden Klassen.

B. Realgymnasium und Oberrealschule.

a. Allgemeines Lehrziel.

Sicherheit und Gewandheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen, besonders auch im Kopfrechnen, und in der Anwendung dieser Fertigkeiten auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens. Arithmetik bis zur Entwicklung des binomischen Lehrsatzes für beliebige Exponenten und der einfacheren unendlichen Reihen. Algebra bis zu den Gleichungen dritten Grades einschließlich. Ebene Geometrie einschließlich der Lehre von den

harmonischen Punkten und Strahlen, Chordalen, Ähnlichkeitspunkten und -achsen; körperliche Geometrie nebst den Grundlehren der darstellenden Geometrie. Ebene und sphärische Trigonometrie. Elementare Aufgaben über Maxima und Minima. Analytische Geometrie der Ebene.

Für Oberrealschulen ist ferner die Behandlung der wichtigsten Reichen der algebraischen Analysis verbindlich. An diesen Anstalten kann je nach den Verhältnissen entweder das arithmetische Pensum durch die Behandlung allgemeiner Lehren von den Gleichungen sowie der Methoden zur angenäherten Lösung numerischer algebraischer und transzendenter Gleichungen oder das geometrische durch die Weiterführung der darstellenden, synthetischen oder analytischen Geometrie erweitert werden.

b. Lehraufgaben.

VI. 4 bzw. 5 Stunden wöchentlich.

Wie im Gymnasium.

V. 4 bzw. 5 Stunden wöchentlich.

Wie im Gymnasium. Dazu in der Oberrealschule: Propädeutischer geometrischer Anschauungsunterricht. Übungen im Gebrauche von Zirkel und Lineal.

IV. 4 bzw. 6 Stunden wöchentlich.

Wie im Gymnasium. Dazu in der Oberrealschule: Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Lehre von den Parallelogrammen.

III. 5 bzw. 6 Stunden wöchentlich.

Arithmetik: Die Grundrechnungen mit absoluten Zahlen und Einführung der positiven und negativen Zahlgrößen. Lehre von den Proportionen. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben und dem sogenannten kaufmännischen Rechnen.

Planimetrie: Lehre von den Parallelogrammen (in der Oberrealschule deren ergänzende Wiederholung). Kreislehre. Sätze über die Flächengleichheit der Figuren (Pythagoräischer Lehrsatz). Berechnung der Fläche geradliniger Figuren. Konstruktionsaufgaben.

0 III. 5 Stunden wöchentlich.

Arithmetik: Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Einfache quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Planimetrie: Ähnlichkeitslehre. Proportionalität gerader Linien am Kreise, stetige Teilung. Regelmäßige Vielecke, Kreisumfang und -inhalt. Konstruktionsaufgaben.

U II. 5 Stunden wöchentlich.

Arithmetik: Lehre von den Logarithmen. Übungen im Rechnen mit (fünf- oder vierstelligen) Logarithmen. Quadratische Gleichungen. Wiederholungen aus den Lehrgebieten der vorhergehenden Klassen.

Planimetrie: Anwendungen der Algebra auf die Geometrie. Konstruktionsaufgaben, besonders auch solche mit algebraischer Analysis. Wiederholungen aus dem ganzen Gebiete der Planimetrie.

Trigonometrie: Grundlegung der Goniometrie. Einfache Dreiecksberechnungen.

Stereometrie: Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde. Die einfachen Körper nebst Berechnungen von Kantenlängen, Oberflächen und Inhalten.

O II. 5 Stunden wöchentlich.

Arithmetik: Arithmetische Reihen erster Ordnung und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung. Die imaginären und komplexen Zahlen. Reziproke und binomische, sowie schwierigere quadratische Gleichungen.

Planimetrie: Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen, Chordalen, Ähnlichkeitspunkten und -achsen. Konstruktionsaufgaben.

Trigonometrie: Ergänzung und Fortführung der Goniometrie; schwierigere Dreiecksberechnungen.

Stereometrie: Systematische Begründung, weitere Ausführungen und Anwendungen.

O und VI. Je 5 Stunden wöchentlich.

Arithmetik: Kombinatorik und Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitslehre. Binomischer Lehrsatz für beliebige Exponenten und die einfachsten unendlichen Reihen. Wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrganges (Erweiterung des Zahlbegriffs durch die algebraischen Operationen von der ganzen positiven bis zur komplexen Zahl). Kubische Gleichungen. Elementare Aufgaben über Maxima und Minima.

Sphärische Trigonometrie nebst Anwendungen auf die mathematische Erd- und Himmelskunde.

Geometrie: Grundlehren der darstellenden Geometrie. Die wichtigsten Sätze über Kegelschnitte in elementar-synthetischer Behandlung. Analytische Geometrie der Ebene.

Ergänzungen, Zusammenfassungen und Übungen auf allen Gebieten der vorhergehenden Klassen.

An der Oberrealschule treten dazu die in dem allgemeinen Lehrziele als verbindlich oder wahlfrei bezeichneten Gebiete.

C. Realschule.

a. Allgemeines Lehrziel.

Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen, besonders auch im Kopfrechnen, und in der Anwendung dieser Fertigkeiten auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens. Arithmetik bis zur Kenntnis der Logarithmen. Algebra bis zu leichten Gleichungen zweiten Grades. Grundlagen der ebenen und körperlichen Geometrie. Ausmessung von Figuren und Körpern. Die Anfangsgründe der ebenen Trigonometrie.

b. Lehraufgaben.

Wie in VI bis VII der Oberrealschule oder (für Plan D¹) des Realgymnasiums.

Methodische Bemerkungen für Rechnen und Mathematik.

1) Für die höheren Lehranstalten besteht die wichtigste Aufgabe des mathematischen Unterrichts in einer Schulung des Geistes, welche den Schüler befähigt, die erworbenen Anschauungen und Kenntnisse in selbständiger Arbeit richtig anzuwenden. Auf allen Gebieten dieses Lehrfaches ist daher ein klares Verständnis der zu entwickelnden Sätze und ihrer Herleitung ebenso wie Übung und Gewandtheit in ihrer Anwendung zu erzielen. Demnächst muß, wie jeder andere Unterricht, so auch der mathematische sich die Pflege der Muttersprache angelegen sein lassen, ein Gesichtspunkt, der besonders bei der Korrektur der schriftlichen Arbeiten zur Geltung kommt, namentlich für die selbständigeren häuslichen Ausarbeitungen, die in den oberen Klassen neben den regelmäßigen Klassenübungen in der Regel alle vier Wochen zu fordern sind.

2) Der Rechenunterricht hat Sicherheit und Geläufigkeit in den Operationen mit bestimmten Zahlen zu erstreben. Damit er mit dem darauf folgenden arithmetischen Unterricht im Einklang stehe und diesen vorzubereiten und zu unterstützen geeignet sei, muß sowohl die Wiederholung der Grundrechnungsarten in VI als auch die Behandlung des Bruchrechnens unter Anlehnung an die mathematische Form geschehen, so daß dabei auch die Verwendung von Klammern und Vorzeichen dauernd geübt wird. Andererseits sind die Verhältnisse des praktischen Lebens, schon von der untersten Stufe ab, namentlich beim Kopfrechnen nicht zu vernachlässigen. Die Kenntnis der deutschen Münzen, Maße und Gewichte ist durch die Anschauung zu vermitteln. Ebenso ist die Einführung in das Wesen der Brüche anschaulich zu gestalten und bei den Erklärungen davon auszugehen, daß die Schüler mit Bruchteilen wie mit benannten Zahlen rechnen lernen.

Kopfrechenaufgaben mit kleinen Zahlen gehen zur Vermittelung des Verständnisses auf allen Stufen den schriftlichen Aufgaben mit größeren Zahlen voran. Verwickeltere Rechenaufgaben sind thunlichst zu vermeiden. Auch sind bei der Behandlung der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten alle Aufgaben auszuschließen, denen für die Schüler unverständliche Vorkommnisse und Gepflogenheiten des rein geschäftlichen Verkehrs zu Grunde liegen. Der eigentliche Rechenunterricht findet auf dem Gymnasium in IV, auf den Realanstalten in VIII seinen Abschluß. Die Sicherheit im Rechnen ist aber im arithmetischen Unterrichte der folgenden Klassen durch fortgesetzte Übungen zu erhalten.

3) Der geometrische Unterricht beginnt mit einem Vorbereitungsunterricht, welcher von der Betrachtung einfacher Körper ausgehend das Anschauungsvermögen ausbildet und zugleich Gelegenheit giebt, die Schüler im Gebrauche von Zirkel und Lineal zu üben.

4) Am Gymnasium ist bei der durch manche Rücksichten gebotenen Beibehaltung von drei Stunden in U und OIII eine planmäßige Sichtung des Lehrstoffes unter Ausschcheidung alles nicht unbedingt Notwendigen geboten. Aber auch an den Realanstalten empfiehlt es sich, z. B. in der Planimetrie, nur die für das System unentbehrlichen Sätze einzuprägen, alles andere als Übungsstoff, womöglich in der Form von Aufgaben, zu behandeln. In der Arithmetik wird von manchen Gebieten abgesehen werden können, die auf späteren Stufen seltener Verwendung finden, wie z. B. von der Division eines umfangreicheren Polynoms durch ein anderes, von der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung aus größeren algebraischen Summen u. A.

5) Auf allen Anstalten ist schon von III ab der Übung im Konstruieren die sorgfältigste Pflege zu widmen; sie muß bis in die oberste Klasse neben den dort behandelten Gebieten fortgesetzt werden. Dabei sind jedoch unbedingt alle Aufgaben auszuschließen, deren Lösung die Kenntnis entlegener Lehrsätze oder besonderer Kunstgriffe erfordert. Der Lehrer hat auch hier durch besonnene Auswahl solcher Aufgaben, deren Lösung nach häufig anwendbaren Methoden und aus dem bereits bekannten Lehrstoff heraus erfolgen kann, sowie durch klare Anleitung in dem Schüler das Gefühl des selbständigen Könnens zu wecken und die bildende Kraft dieser Übungen zur Geltung zu bringen.

6) Der Fortfall eines vorbereitenden Kurses der Trigonometrie und Stereometrie in der VII des Gymnasiums soll für die spätere Behandlung dieser Gebiete keineswegs ausschließen, daß sie zunächst einen propädeutischen Charakter trage. Die Trigonometrie ist zunächst anschaulich, d. h. geometrisch zu be-

handeln und, um möglichst bald zur Auflösung von Dreiecken zu gelangen, sind zunächst nur diejenigen Formeln einzuüben, welche dazu unbedingt erforderlich sind. Ebenso ist in der Stereometrie von der Betrachtung einfacher Körper, wie Würfel und Prisma, auszugehen und erst später eine strengere systematische Lehrweise anzuwenden. Bei den für die Realanstalten vorgesehenen Vorkursen in der Trigonometrie und Stereometrie ist jene propädeutische Behandlungsweise durchweg und ausschließlich inne zu halten. Hier, wie auch schon auf den früheren Stufen, werden Modelle, mathematische Wandtafeln u. s. w. für die Anschaulichkeit und Vertiefung des Unterrichts sich hilfreich erweisen.

7) Ob die verschiedenen Gebiete des Pensums neben- oder nacheinander zu behandeln seien, ist nach den jeweiligen Verhältnissen der Anstalt zu entscheiden. An den Realanstalten wird auch der Ausbau der einzelnen Lehrgebiete nach den Jahrgängen der Schüler etwas verschieden sein, und zwar an der Oberrealschule weiter gehend als am Realgymnasium. Die in den Lehrplan als wahlfrei aufgenommenen Gebiete näher zu umgrenzen, scheint zunächst nicht angängig. Es soll auch nicht als durchaus notwendig bezeichnet werden, sie eingehender zu betreiben. Aber andererseits soll die Möglichkeit, diese Disziplinen unterrichtlich genauer durchzuarbeiten, nicht vorenthalten werden. Die so gesammelten Erfahrungen werden späterhin eine mehr ins einzelne gehende Festsetzung der Lehrziele ermöglichen.

8. Für die oberste Klasse des Gymnasiums ist die Einführung der Schüler in den wichtigen Koordinatenbegriff sowie eine möglichst einfach gehaltene Darstellung einiger Grundeigenschaften der Kegelschnitte, die auch in synthetischer Form gegeben werden kann, vorgesehen. Aber es ist weder in analytischer noch in sogenannter neuerer Geometrie ein systematischer Unterricht beabsichtigt. Ebenförmig erfordern die zum Verständnis der mathematischen Erd- und Himmelskunde nötigen Formeln eine eingehende Behandlung der sphärischen Trigonometrie. Sie lassen sich in einfacher Weise bei der Behandlung der dreiseitigen Ecke ableiten. Jedenfalls ist hier wie überall darauf zu achten, daß neben der Sicherheit der Kenntnisse Gewandheit in deren Anwendung zu erstreben ist, und daß dieser Gesichtspunkt bei der Auswahl und Ausdehnung des Lehrstoffes maßgebend sein muß.

9. Dem Übelstande, daß der Unterricht auf der Oberstufe einen zu ausschließlich rechnerischen Charakter annimmt, wird sich durch Fortsetzung der Übungen in geometrischer Anschauung und Konstruktion steuern lassen. Besonders ist im stereometrischen Unterrichte, ganz abgesehen von dem Betriebe der darstellenden

Geometrie, das Verständnis projektivischen Zeichnens vorzubereiten und zu unterstützen.

10. In der obersten Klasse wird auf den verschiedenen Lehrgebieten neben der fortgesetzten Übung im Lösen von Aufgaben eine zusammenfassende Rückschau auf den erledigten Lehrstoff anzustreben sein. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffes, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden sind, zu erschließen.

11. Die selbständige Bedeutung welche der Mathematik auf den höheren Lehranstalten zukommt, schließt nicht aus, daß — vor allem auf der Oberstufe — der Unterricht Gewinn davon hat, wenn durch die Aufgaben, deren Lösung er verlangt, auch die Anwendbarkeit der Wissenschaft auf anderen Gebieten, sei es des Lebens, sei es besonders der physikalischen Wissenschaften aufgezeigt und die Gelegenheit geboten wird, den mathematischen Sinn durch die Anwendung auf diese Gebiete zu üben. So wird es gestattet sein, die Teile der Physik, welche eine Verwertung zu Aufgaben zulassen, auch nach dieser Richtung noch mehr auszunützen und Übungen dieser Art nicht nur in den physikalischen, sondern auch in den mathematischen Stunden vorzunehmen. An dem Gymnasium werden freilich bei der Beschränkung der Stundenzahl solche Übungen sich nur dann fruchtbar gestalten lassen, wenn, soweit irgend möglich, in den Klassen der Oberstufe der mathematische und physikalische Unterricht in der Hand desselben Lehrers vereinigt ist, worauf auch schon durch die Klammern in dem allgemeinen Lehrplane hingewiesen wird. An den Realanstalten tritt bei der größeren Stundenzahl diese Notwendigkeit nicht in gleichem Maße hervor.

12. Da die Schwierigkeit, welche der mathematische Unterricht in den oberen Klassen zuweilen macht, erfahrungsmäßig fast ausnahmslos auf Lücken in den Grundlagen beruht, so ist auf die Einprägung dieser Grundlagen im Anfangsunterrichte die nötige Zeit und Sorgfalt zu verwenden. Dabei empfiehlt es sich, an den einzelnen Anstalten den unentbehrlichen Gedächtnisstoff besonders der unteren und mittleren Stufe festzustellen und durch stete Wiederholungen in den folgenden Klassen zu befestigen. Gewissenhafte Strenge bei der Versekung bleibt aber auch dann eine dringende Pflicht gegen die Schüler.

10. Naturwissenschaften.

A. Gymnasium.

a. Allgemeines Lehrziel.

Botanik: Kenntnis der wichtigeren Familien des natürlichen Systems und der Lebenserscheinungen ihrer Vertreter, auch der

III) Liste von Lehrbüchern, in denen Inhalte aus der projektiven Geometrie enthalten waren

a) Allgemeine Geometriebücher

Becker, Johann Karl	Lehrbuch der Elementar-Geometrie für den Schulgebrauch (2. Buch)	Berlin: Weidmann 1878
Bretschneider, Carl Anton	Lehrgebäude der niederen Geometrie	Jena: Frommann 1844
Brockmann, Franz Joseph	Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen (Teil 1)	Leipzig: Teubner 1871
Bunkhofer, Wilhelm	Die Geometrie des Progymnasiums (II. Theil)	Freiburg: Herder 1879
Diekmann, Josef; Koppe, Karl	K. Koppes Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten, Ausgabe für Reallehranstalten (II. Teil)	Essen: Bädecker 171895
Fahle, Heinrich	Mathematische Extemporalien: ein Übungsbuch für die drei ersten Klassen der Gymnasien und Realschulen	Paderborn: Schöningh 1868
Focke, Moritz; Krass, Martin	Lehrbuch der Geometrie (Teil 1)	Münster: Coppenrath 1870
Frischauf, Johannes	Elemente der Geometrie	Graz: Leuschner und Lubensky 1870
Gallenkamp, Wilhelm	Synthetische Geometrie (2. Abtheilung)	Iserlohn: Bädeker 1880
Heilermann, Hermann	Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Mathematik an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen (Teil 1)	Koblenz: Hergt ² 1872
Helmes, Joseph	Die Elementar-Mathematik nach den Bedürfnissen des Unterrichts streng wissenschaftlich dargestellt (2. Theil, II. Abtheilung)	Hannover: Hahn ² 1876
Köstler, Hermann Julius	Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten (3. Heft)	Halle: Nebert ² 1890
Kruse Friedrich	Elemente der Geometrie (1. Abtheilung)	Berlin: Weidmann 1875

Lesser, Oskar; Schwab, Karl	Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, Ausgabe A (Band 2, Teil 2)	Leipzig: Freytag 1911
Mehler, Ferdinand Gustav	Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen	Berlin: Reimer ⁵ 1871
Milinowski, Alfons	Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen (Teil 1)	Leipzig: Teubner 1881
Müller Heinrich	Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen (Teil 2)	Berlin: Moeser 1899
Müller, Johannes	Lehrbuch der elementaren Planimetrie	Bremen: C. Ed. Müller 1870
Müller, Johann Heinrich Traugott; Bauer, Karl Ludwig	J. H. T. Müller's Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten, Teil 3	Halle: Buchhandlung des Waisenhauses ² 1877
Nagel, Christian	Ebene Geometrie, zweite Abtheilung	Ulm: Wohler 1873
Oppel, Johann Joseph	Leitfaden für den geometrischen Unterricht an Gymnasien und ähnlichen Lehranstalten	Frankfurt a. M.: Winter ² 1878
Pietzker, Friedrich	Lehrgang der Elementar-Mathematik (Teil 3)	Leipzig: Teubner 1908
Recknagel, Georg	Ebene Geometrie für Schulen	München: Ackermann 1871
Reidt, Friedrich	Die Elemente der Mathematik (Teil 2)	Berlin: Grote ² 1873
Schlegel, Victor	Lehrbuch der elementaren Mathematik (Teil 2)	Wolfenbüttel: Zwissler 1879
Schröder, Theodor August Emil	Lehrbuch der Planimetrie	Nürnberg: Korn 1882
Spieker, Theodor	Lehrbuch der ebenen Geometrie	Potsdam: Stein ⁴ 1870
Wolff, Heinrich	Sätze und Aufgaben der Geometrie für Realanstalten (Teil I)	Leipzig: Teubner 1908
Worpitzky, Julius	Elemente der Mathematik für gelehrte Schulen und zum Selbststudium (3. und 4. Heft)	Berlin: Weidmann 1874

b) Spezielle Bücher zur projektiven Geometrie

Bobek, Karl Joseph; Küpper, Karl Josef	Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene	Leipzig: Teubner 1889
Doehlemann, Karl	Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung	Leipzig: Göschen 1898
Fuhrmann, Wilhelm	Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien	Leipzig: Teubner 1881
Kober, Georg	Die Grundgebilde der neueren Geometrie	Hannover & Leipzig: Hahn 1898
Maier, Andreas	Neuere Geometrie. Für höhere Lehranstalten	Karlsruhe: Malsch und Vogel 1873
Rottok, Heinrich Ludwig	Neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien	Schleswig: Bergas 1877
Rulf, Wilhelm	Elemente der projectivischen Geometrie	Halle a. S.: Nerbert 1889
Sachs, Joseph	Leitfaden zum Unterricht in der projektivischen Geometrie	Bremerhaven: Vangerow 1907
Seeger, Heinrich	Die Fundamentaltheorien der neueren Geometrie	Braunschweig: Vieweg 1880
Staudigl, Rudolf	Lehrbuch der neueren Geometrie für höhere Unterrichts-Anstalten und zum Selbststudium	Wien: Seidel 1870
Stoll, Franz X.	Anfangsgründe der neueren Geometrie	Bensheim: Verlag der Lehrmittelanstalt 1872
Volk, Karl G.	Die Elemente der neueren Geometrie unter besonderer Berücksichtigung des geometrischen Bewegungsprinzips	Leipzig: Teubner 1907

IV) Inhaltsverzeichnisse der in 3.1 bis 3.3. vorgestellten Lehrbücher

a) Holzmüller: Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Inhalts-Verzeichnis.	
Erste Abtheilung.	
Geometrie der Geraden und des Kreises.	
	Seite
I. Übungen am Kreisviereck und am regelmäßigen Vieleck	1
II. Übungen an den Dreieckskreisen	8
a) Die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks	8
b) Der Radius des Um-Kreises und seine Beziehungen zu den Seiten und Berührungskreisen des Dreiecks.	11
III. Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkel- halbierenden des Dreiecks.	17
IV. Allgemeine Bemerkungen über Konstruktionsaufgaben	21
Lösungen mit Hilfe von Lehrsätzen	21
Methode der Symmetrie oder der Spiegelbilder	24
Methode der Parallelverschiebungen	25
Methode der konzentrischen Verschiebung	26
Methode der Ähnlichkeit	26
Methode der Umkehrung der Aufgabe	28
Methode der Drehung	29
Methode des geometrischen Ortes	30
Methode der algebraischen Analysis	32
V. Übergang zur neueren Geometrie	33
Satz des Ceva	33
Satz des Menelaos	35
Anwendungen auf vollständiges Vierseit, Pascalschen Satz und Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise	36
VI. Harmonische Punkte und Strahlen	40
VII. Ähnlichkeitspunkte und Pascalscher Satz.	46
VIII. Harmonische Punkte und Strahlen am Kreise, Pol und Polare.	52
IX. Die Inversion oder Spiegelung mittels reciproker Radien.	60
X. Potenz und Potenzlinien	67
XI. Einige Berührungsaufgaben	73
XII. Kartographische Anwendungen.	75
Mercatorkarte, Karte der nördlichen und südlichen, der östlichen und westlichen Halbkugel, Halbkugel der größten und kleinsten Wasser- masse nach Hipparch-Ptolemäus	75

	Seite
XIII. Der Koordinatenbegriff	82
a) Graphische Darstellungen	82
b) Die Koordinaten von Punkten	86
c) Die Gleichung ersten Grades und die gerade Linie	89
d) Die Gleichung des Kreises	94
XIV. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse	100

Zweite Abteilung.

Arithmetik.

I. Geometrische Reihen	102
a) Die geometrische Reihe mit endlicher Gliederzahl	102
b) Anwendung auf die Rentenrechnung	105
c) Die geometrischen Reihen mit unendlich großer Gliederzahl	108
II. Arithmetische Reihen	114
a) Arithmetische Reihen erster Ordnung	114
b) Einige arithmetische Reihen höherer Ordnung	115
III. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten	119
IV. Ableitung gewisser arithmetischer Reihen höherer Ordnung mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes	124
V. Die Exponentialreihe und die natürlichen Logarithmen	128
VI. Der Moivre'sche Lehrsatz und einige aus ihm abgeleitete Reihen	134
VII. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen und der n ten Wurzeln aus der Einheit und aus anderen Zahlen	141
VIII. Reciproke Gleichungen und Anwendung derselben auf reducierbare Gleichungen höheren Grades	148
IX. Einiges über Gleichungen mit mehreren Unbekannten	158
X. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse	162

Dritte Abteilung.

Trigonometrie.

I. Verallgemeinerung der Grundbegriffe	164
II. Die Funktionen von Winkelsummen und die Summen von Funktionen	172
III. Goniometrische Übungen	177
IV. Sätze über die Seiten und Winkel des Dreiecks	184
V. Dreiecksberechnungen	188
VI. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	193

Vierte Abteilung.

Stereometrie.

	Seite
I. Begriff der Drehung und Entstehung von Drehungsgebilden . . .	195
II. Ebenen und Gerade im Raume	197
III. Die körperlichen Ecken	204
IV. Die Fundamentalkonstruktionen und einige Anwendungen derselben	209
V. Anleitung zum korrekten stereometrischen Zeichnen	212
a) Die schräge Parallelprojektion	212
b) Die senkrechte Projektion	215
VI. Berechnungsübungen	219
a) Körperstumpfe	219
b) Kugelberechnungen	225
c) Übungsaufgaben	231
VII. Der Schwerpunkt, die Guldin'schen Regeln und die Sätze über abgeschrägte Körper	233
VIII. Die Newton-Simpson'sche Regel und die Summenformel	239
IX. Kugelbetrachtungen mit kartographischen Anwendungen	247
X. Zusammenstellung der wichtigsten Berechnungsformeln der Stereometrie	251

Fünfte Abteilung.

Die Grundlehren von den Kegelschnitten.

I. Die Ellipse als Zylinderschnitt	252
II. Die Ellipse als Kegelschnitt	260
III. Die Parabel als Spezialfall der Ellipse	262
IV. Die Hyperbel als Kegelschnitt	267
V. Allgemeines über die Kegelschnitte	275
VI. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse	281

Anhang.

I. Eine Hauptaufgabe der mathematischen Geographie	283
II. Einige Bemerkungen über Maxima und Minima	284
III. Die Quadrateinteilung der Ebene mittels der Polarkoordinaten	290

b) Henrici/Treutlein: Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Inhaltsverzeichnis.

Erste Abteilung.

Streckenverhältnisse und Abbildung in der Ebene.

Einleitung: Verhältnisse von Strecken und Verhältnis-Gleichungen.

	Seite
§ 1. Messung und Verhältnis von Strecken	3
§ 2. Verhältnis-Gleichungen	8

I. Abschnitt.

Einfache Verhältnisse bei ähnlicher Abbildung.

Erstes Kapitel: Verhältnisse von Strecken im Strahlenbüschel mit Parallelen.

§ 3. Der Zweistrahel mit zwei Parallelen	11
§ 4. Ähnliche Dreiecke im Zweistrahel. Bedingungen der Ähnlichkeit der Dreiecke	13
§ 5. Das Teilverhältnis einer Strecke. Der Strahlenbüschel mit Parallelen	15
§ 6. Zeichnung der vierten Verhältnisstrecke	16
§ 7. Teilung einer Strecke in gegebenem Verhältnis. Harmonische Teilung	19

Zweites Kapitel: Produkte von Strecken, im Zweistrahel mit gewendet parallelen Geraden und dem Kreis.

§ 8. Das rechtwinkelige Dreieck mit der Hypotenusenhöhe	22
§ 9. Der Strahlenbüschel mit dem Kreis. Potenz und Potenzgerade	24
§ 10. Zeichnung des geometrischen Mittels, des goldenen Schnittes und der berührenden Kreise zu Geraden und Punkten	27

Drittes Kapitel: Ähnliche Abbildung.

§ 11. Ähnliche Abbildung geradliniger Figuren	29
§ 12. Der Kreis als ähnliches Bild des Kreises. Das Sechseck im Kreis	33
§ 13. Anwendung der Ähnlichkeit zur Lösung von Aufgaben	36

II. Abschnitt.

Zusammengesetzte Verhältnisse bei der Abbildung
mit einer Bildachse.Viertes Kapitel: Abbildung der Strecke und ihrer harmonischen Punkte.
Anwendung auf Dreieck, Viereck, Vierseit und Sechseck im Kreis.

	Seite
§ 14. Der Zweistrahle mit nicht parallelen Geraden. Das Dreiseit mit den Schnittpunkten einer Geraden und mit den Eckstrahlen eines Punktes. Das Sechseck im Kreis	39
§ 15. Vier harmonische Punkte und ihre Bilder	43
§ 16. Harmonische Punkte und Strahlen im vollständigen Viereck und Vierseit	46
§ 17. Harmonische Punkte und Strahlen im Kreis. Pol und Polare, Viereck, Vierseit und Sechseck des Kreises	48

Fünftes Kapitel: Abbildung beliebiger Punktreihen und Strahlenbüschel.

§ 18. Abbildung von Punktreihen. Das Doppelverhältnis	52
§ 19. Abbildung von Strahlenbüscheln	55
§ 20. Bilder von Punktreihen und Strahlenbüscheln außer der bestrahlten Lage	57

Sechstes Kapitel: Abbildung beliebiger Figuren mit einer Bildachse.

§ 21. Abbildung geradliniger Figuren mit einer Bildachse	61
§ 22. Fluchtunkte und Fluchtgerade	64
§ 23. Der Kreis als Bild des Kreises mit Bildachse. Das Sechseck und Sechseck des Kreises	65
A. Potenzgerade und Ähnlichkeitspolare	65
B. Die Fluchtgerade. Sätze von Pascal und Brianchon	67
C. Drei Kreise mit Potenzzentrum und Berührungskreisen	70
§ 24. Anwendung zur Zeichnung berührender Kreise Apollonische Aufgabe	72
§ 25. Die Kegelschnitte als Bilder des Kreises	74
A. Mit dem Kreis gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte	74
B. Gleichungen der Kegelschnitte	80
C. Eigenschaften der Brennpunkte	82

Zweite Abteilung.

Berechnung der Größen der ebenen Geometrie.

III. Abschnitt.

Berechnung von Strecken, Flächen und Bögen.

Siebentes Kapitel: Strecken und Fläche des Dreiecks und Vierecks.

§ 26. Verhältnisse von Flächen und Inhaltsberechnung	91
§ 27. Berechnung von Strecken und Fläche eines Dreiecks und eines Sehnenvierecks	94
§ 28. Zeichnung von Rechenausdrücken für Strecken und Flächen	99
A. Ausdrücke für Strecken	100
B. Ausdrücke für Flächen	104

	Seite
§ 29. Lösung von Aufgaben durch Zeichnung nach der Rechnung. Pythagoreische Zahlendreiecke	105
Achtes Kapitel: Berechnung von Umfang und Inhalt des regelmäßigen Vielecks und des Kreises.	
§ 30. Das dem Kreis ein- und umbeschriebene regelmäßige Vieleck	111
A. Berechnung der Winkel	111
B. Die Seiten der einbeschriebenen Vielecke	112
C. Die Seiten der umbeschriebenen Vielecke	115
§ 31. Umfang des regelmäßigen Vielecks und des Kreises	116
§ 32. Inhalt des regelmäßigen Vielecks und des Kreises	118
§ 33. Teile des Kreisumfangs und des Kreisinhalt	120

IV. Abschnitt.

Beziehungen der Strecken und Inhalte geradliniger Figuren zu ihren Winkeln (Trigonometrie).

Neuntes Kapitel: Die Funktionen spitzer Winkel im rechtwinkligen Dreieck und im Kreis.

§ 34. Sinus und Cosinus eines spitzen Winkels	123
§ 35. Formeln für Sinus und Cosinus des halben und doppelten Winkels	127
§ 36. Formeln für Sinus und Cosinus von Summe und Unterschied zweier Winkel. Tafeln für Sinus und Cosinus	129
§ 37. Tangens und Cotangens eines spitzen Winkels	132
§ 38. Formeln für Summen und Unterschiede von Winkelfunktionen	136
§ 39. Gebrauch der logarithmisch-goniometrischen Tafeln	137
§ 40. Berechnung von Seiten und Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks	139
§ 41. Anwendung der Winkelfunktionen auf Berechnungen im Kreis	140

Zehntes Kapitel: Die Winkelfunktionen im schiefwinkligen Dreieck.

§ 42. Die Funktionen stumpfer Winkel	142
§ 43. Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln des schiefwinkligen Dreiecks	144
§ 44. Berechnung von Seiten und Winkeln im Dreieck	148
§ 45. Berechnung des Inhaltes des Dreiecks, der Halbmesser seiner Kreise und weiterer Stücke	152
§ 46. Anwendung der Dreiecksrechnung auf Vermessungen	155
A. Berechnung von Entfernungen	155
B. Berechnung von Höhen	159
C. Flächenmessung	160

Elfte Kapitel: Die Winkelfunktionen in der Koordinatengeometrie und Arithmetik.

§ 47. Rechtwinkelige und Polar-Koordinaten	162
§ 48. Die Funktionen von Winkeln jeder Größe	163
§ 49. Allgemeine Gültigkeit der Funktionsformeln	166
§ 50. Bestimmungsgleichungen für Winkelfunktionen	168
§ 51. Berechnung des Geradenzuges und des Vielecks (Polygonometrie)	169
§ 52. Anwendung der Winkelfunktionen in der Arithmetik	173
A. Berechnung von Zahlenausdrücken	173
B. Darstellung der imaginären Zahlen	174

Übungsaufgaben.

Aufgaben zur ersten Abteilung.

	Seite
I. Aufgaben über Streckenverhältnisse	179
Aufgaben zum ersten Kapitel	179
II. Lehrsätze.	
III. Berechnungen und Zeichnungen.	
Aufgaben zum zweiten Kapitel	182
IV. Lehrsätze.	
V. Zeichnungen.	
Aufgaben zum dritten Kapitel	184
VI. Lehrsätze.	
VII. Zeichnungen und Berechnungen.	
Aufgaben zum vierten Kapitel	188
VIII. Lehrsätze.	
IX. Zeichnungen und Berechnungen.	
Aufgaben zum fünften Kapitel	194
X. Zeichnungen, Berechnungen und Lehrsätze.	
Aufgaben zum sechsten Kapitel	196
XI. Lehrsätze und Zeichnungen.	

Aufgaben zur zweiten Abteilung.

Aufgaben zum siebenten Kapitel	199
XII. Lehrsätze.	
XIII. Zeichnungen und Berechnungen.	
XIV. Zeichnung nach Rechnungsausdrücken.	
Aufgaben zum achten Kapitel	206
XV. Berechnungen und Lehrsätze.	
Aufgaben zum neunten Kapitel	212
XVI. Gebrauch der Funktionstafeln. (Obne Logarithmen.)	
XVII. Formeln der Funktionen eines Winkels.	
XVIII. Formeln der Funktionen zweier Winkel.	
XIX. Anwendung der log.-gon. Tafeln im rechtwinkligen Dreieck und im Kreis.	
XX. Die Winkelfunktionen im gleichschenkeligen Dreieck und regelmäßigen Vieleck.	
Aufgaben zum zehnten Kapitel	224
XXI. Die Winkelfunktionen im schiefwinkligen Dreieck.	
XXII. Seiten und Winkel des schiefwinkligen Dreiecks.	
XXIII. Berechnung des Inhalts weiterer Stücke im Dreieck.	
XXIV. Anwendung der Dreiecksrechnung auf Vermessungen.	
Aufgaben zum elften Kapitel	237
XXV. Funktionen eines beliebigen Winkels.	
XXVI. Bestimmung von Winkeln aus Gleichungen.	
XXVII. Koordinaten- und Vierecks-Berechnung.	

c) Müller: Leitfaden der ebenen Geometrie

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken. — 2. Die Halbierungslinien der Winkel und Aussenwinkel eines Dreiecks. — 3. Sätze über Verhältnisse von Strecken. — 4. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Kreis.	
Erster Cursus.	
Ellipse, Parabel und Hyperbel.	
I. Abschnitt. Die Ellipse	6
§ 1. Definition der Ellipse — Brennpunkte. — 2. Axen der Ellipse. — 3. Tangenten der Ellipse.	
II. Abschnitt. Die Hyperbel	10
§ 4. Definition der Hyperbel. — Brennpunkte. — 5. Axen der Hyperbel. — 6. Tangenten der Hyperbel. — 7. Asymptoten der Hyperbel.	
III. Abschnitt. Die Parabel	14
§ 8. Definition der Parabel. — Brennpunkte. — 9. Tangenten der Parabel. — 10. Uebungen.	
Zweiter Cursus.	
Die Grundgebilde der neuern Geometrie.	
I. Abschnitt. Harmonische Punkte und Strahlen. Das vollständige Viereck und Vierseit	21
§ 11. Harmonische Punkte und Strahlen. — 12. Fortsetzung. — 13. Das vollständige Viereck und Vierseit. — 14. Uebungen.	
II. Abschnitt. Projectivische Grundgebilde	28
§ 15. Punktreihen und Strahlenbüschel. — 16. Projectivische Grundgebilde. — 17. Aufgaben. — 18. Allgemeine Sätze. — 19. Bedingungen der perspectivischen Lage der Grundgebilde. — 20. Von dem Sinne der Grundgebilde. — 21. Der Kreis und die projectivischen Grundgebilde.	
III. Abschnitt. Die projectivischen Grundgebilde. (Fortsetzung)	35
§ 22. Unendlich ferne Punkte. — 23. Die Gegenpunkte projectivischer Punktreihen. — 24. Aehnliche Punktreihen. — 25. Aufgaben. — 26. Uebungen.	
IV. Abschnitt. Involutorische Gebilde	43
§ 27. Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel. — 28. Der Büschel von Kreisen, welche durch zwei feste Punkte gehen. — 29. Vorbereitende Sätze. — 30. Identität involutorischer Gebilde mit projectivischen Gebilden, deren Elemente sich doppelt entsprechen. — 31. Folgerungen. — 32. Aufgaben. — 33. Uebungen.	
V. Abschnitt. Pol und Polare in Bezug auf den Kreis	51
§ 34. Pol und Polare. — 35. Conjugirte Punkte. — 36. Fortsetzung.	
VI. Abschnitt. Projectivische Gebilde in schiefer Lage	56
§ 37. Aufgaben. — 38. Aufgaben. — 39. Die Curve als Punktgebilde oder als Tangentengebilde. — 40. Curven, welche das Erzeugniss projectivischer Gebilde sind. — 41. Aufgaben.	

Dritter Cursus.

Projectivische Figuren. Kegelschnitte.

I. Abschnitt. Projectivische Figuren	66
§ 42. Das ebene System und der Strahlenbündel. — 43. Beziehung des ebenen Systems auf den Strahlenbündel. — 44. Beziehung ebener Systeme aufeinander. — 45. Fortsetzung. Perspective Abbildung ebener Figuren. — 46. Der besondere Fall, wo die Träger perspectivischer Systeme parallel sind. — 47. Die Träger der perspectivischen Systeme sind nicht parallel. — 48. Die Gegenaxen perspectivischer Systeme. — 49. Fortsetzung. — 50. Uebungen.	
II. Abschnitt. Kegelschnitte. Identität derselben mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde . . .	77
§ 51. Kegelschnitte. — 52. Identität der Kegelschnitte mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde. — 53. Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf Bedingungen. — 54. Uebungen.	

Vierter Cursus.

Eigenschaften der Kegelschnitte. Identität derselben mit den Curven des ersten Cursus.

I. Abschnitt. Figuren, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben oder umbeschrieben sind	83
§ 55. Sätze von Pascal und Brianchon. — 56. Aufgaben.	
II. Abschnitt. Pol und Polare	88
§ 57. Pol und Polare. — 58. Reciproke Figuren. — 59. Fortsetzung. — 60. Uebungen.	
III. Abschnitt. Der Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade	97
§ 61. Eintheilung der Kegelschnitte. — 62. Die Kegelschnitte der ersten und zweiten Art haben einen Mittelpunkt. — 63. Conjugirte Durchmesser. — 64. Einbeschriebene und umbeschriebene Parallelegramme. — 65. Die Kegelschnitte der dritten Art haben keinen Mittelpunkt. — 66. Axen der Kegelschnitte. — 67. Uebungen.	
IV. Abschnitt. Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus	109
§ 68. Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus. — 69. Uebungen.	