Abraham Gotthelf Kästner als Lehrbuchautor.

Unter Berücksichtigung weiterer deutschsprachiger mathematischer Lehrbücher für den universitären Unterricht.

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor (Dr. paed.)
im Fach Didaktik und Geschichte der Mathematik

Eingereicht an der
Bergischen Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Arbeitsgruppe Didaktik und Geschichte der Mathematik

von
Desirée Kröger

Rektor der Bergischen Universität Wuppertal:
Prof. Dr. Lambert T. Koch

Dekan des Fachbereichs Mathematik und Naturwissenschaften:
Prof. Dr. Wolfgang Wagner

Gutachter:
1. Prof. Dr. Klaus Volkert
2. Prof. Dr. Volker Remmert

Eingereicht am 11. August 2014
Disputation am 11. Dezember 2014

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20150311-103303-7
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20150311-103303-7]

Zusammenfassung

Die sogenannten mathematischen „Anfangsgründe“ präsentieren sich als besondere Lehrbücher des 18. Jahrhunderts. Es handelt sich hierbei um einführende Lehrwerke, die in erster Linie für die Lehre an deutschsprachigen Universitäten und für Studenten jeden Wissensgrades konzipiert wurden. Sie enthalten all diejenigen Disziplinen, die damals unter dem Namen der Mathematik verstanden wurden. Aus diesem Grund findet sich nicht nur die reine, sondern auch die angewandte Mathematik, beispielsweise Mechanik, Statik und Optik. Ein wichtiger Aspekt ist, dass diese Lehrbücher in Deutsch geschrieben wurden. Latein war noch vor dem 18. Jahrhundert die dominierende Wissenschaftssprache, aber nicht jeder beherrschte Latein. Durch die Verwendung der deutschen Sprache hatte nun ein breiterer Personenkreis die Möglichkeit, die Mathematik zu erlernen, auch solche Personen, die nicht zu einem Studium zugelassen wurden.

Es gibt eine Handvoll berühmter „Anfangsgründe“-Autoren. Einer von ihnen ist Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), Professor für Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Er veröffentlichte sein Lehrbuch *Mathematische Anfangsgründe* ab 1758, das in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts führend war.

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Erstens erfolgt eine Charakterisierung der „Anfangsgründe“ als besondere Lehrbuchgattung. Zweitens werden Kästner als erfolgreicher Lehrbuchautor und seine Verdienste innerhalb der „Anfangsgründe“-Tradition dargestellt.

Abstract

The so-called mathematical “Anfangsgründe” appear as specific 18th-century textbooks. They are introductory textbooks, which were mainly created to assist teaching mathematics at German-speaking universities and for the use by students at any level. They contain all subjects which were associated with mathematics at the time. Therefore, you can find not only pure, but also applied mathematics, for instance mechanics, statics, and optics in it. Very important is that these textbooks were written in German. Actually, Latin was the dominant language within the scientific community before the 18th century, but not everybody could read and write Latin. By using the German language, a broader audience could learn mathematics, including those who were not allowed to study.

A handful of popular “Anfangsgründe”-authors are known; one of them is Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), professor of mathematics and physics at the University of Göttingen. Since 1758, he published his textbook *Mathematische Anfangsgründe,* which was leading in the second half of the 18th century.

The work in hand is divided into two parts. Firstly, the “Anfangsgründe” will be characterized as a specific literary genre. Secondly, Kästner will be presented as an influential textbook-writer and his merits within the “Anfangsgründe”-tradition will be showed up.

Danksagung

In erster Linie bedanke ich mich bei all denjenigen Personen, die mich während meiner Arbeit unterstützt und motiviert haben.
Zu diesen Personen zählt vor allem mein Betreuer Prof. Dr. Klaus Volkert. Ihm ist es zu verdanken, dass ich mich dieser Arbeit widmete. Durch sein breites Interesse und Wissen im Bereich der Mathematikgeschichte stand er mir jederzeit mit wertvollen Anregungen und Hilfestellungen zur Seite.
Weiterhin danke ich Prof. Dr. Volker Remmert für die Erstellung des Zweitgutachtens und seine Ratschläge.
Zudem möchte ich meinen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe „Didaktik und Geschichte der Mathematik“ sowie den Mitarbeitern des „Interdisziplinären Zentrums für Wissenschafts- und Technikforschung“ (IZWT), beides an der Bergischen Universität Wuppertal, danken, die mich nicht nur in fachlicher, sondern auch in persönlicher Hinsicht unterstützten. Nicht zu vergessen sind meine Familie, meine Freunde, insbesondere Inez, und mein Partner Timm, die mir während der Erstellung dieser Arbeit mit ihrem Verständnis und ihrem Interesse zur Seite standen.

Wuppertal, im August 2014 Desirée Kröger

„Nicht die Glücklichen sind dankbar.
Es sind die Dankbaren, die glücklich sind.“
Francis Bacon

Inhaltsverzeichnis

Einleitung ... 1

1 Die Lehrbuchgattung „Anfangsgründe“ ... 9
- 1.1 Bedeutung und Bestandsaufnahme ... 9
- 1.2 Bildungskontext und Stellung der Mathematik ... 12
  - 1.2.1 Der Stellenwert der Mathematik ... 14
  - 1.2.2 Mathematische Lehrbücher ... 22
- 1.3 Die mathematischen „Anfangsgründe“ und ihre Charakteristika ... 27
  - 1.3.1 Terminus ... 27
  - 1.3.2 Zeitraum ... 31
  - 1.3.3 Deutsche Sprache ... 33
  - 1.3.4 Inhalt und Aufbau ... 36
  - 1.3.5 Adressaten ... 39
  - 1.3.6 Verbreitung und Verwendung ... 42
  - 1.3.7 Intention ... 45
  - 1.3.8 Didaktisches Vorgehen ... 47
- 1.4 Zusammenfassung ... 51

2 Abraham Gotthelf Kästner ... 53
- 2.1 Kindheit und Jugend ... 54
- 2.2 Studium ... 55
- 2.3 Lehrtätigkeit ... 59
  - 2.3.1 Lehrtätigkeit in Leipzig ... 59
  - 2.3.2 Lehrtätigkeit in Göttingen ... 61
- 2.4 Außeruniversitäre Tätigkeiten ... 68
  - 2.4.1 Mitgliedschaften in Akademien und anderen gelehrten Gesellschaften ... 68
  - 2.4.2 Korrespondenz ... 72
  - 2.4.3 Publikationstätigkeit ... 75
- 2.5 Zusammenfassung ... 77

3 Abraham Gotthelf Kästners „Mathematische Anfangsgründe“ ... 79
- 3.1 Aufbau der „Mathematischen Anfangsgründe“ ... 80
- 3.2 Intention und Adressaten ... 87
- 3.3 Didaktische Merkmale ... 90
  - 3.3.1 Umfang der mathematischen Lehren und Zeitraum für ihr Erlernen ... 91
  - 3.3.2 Nutzen der mathematischen Lehren ... 93
  - 3.3.3 Mathematische Lehrart ... 94
  - 3.3.4 Verbindung von Lehre und Lehrbuch ... 101
  - 3.3.5 Historische Anmerkungen ... 104

3.3.6 Literaturangaben ... 106
3.3.7 Aufgaben und Lösungen ... 107
3.3.8 Abbildungen ... 109
3.3.9 Verbindung von Forschung und Lehrbuch ... 111
3.4 Verwendung, Verbreitung und Ansehen der „Mathematischen Anfangsgründe“ ... 114
3.4.1 Rezensionen ... 118
3.5 Zusammenfassung ... 121

4 Kästner im Vergleich mit anderen Autoren ... 123
4.1 Die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften ... 124
4.1.1 Abraham Gotthelf Kästner ... 125
4.1.2 Gaspar Schott ... 130
4.1.3 Johann Christoph Sturm ... 132
4.1.4 Christian Wolff ... 135
4.1.5 Heinrich Wilhelm Clemm ... 139
4.1.6 Wenceslaus Johann Gustav Karsten ... 140
4.1.7 Georg Simon Klügel ... 145
4.1.8 Zusammenfassung ... 148
4.2 Negative Größen ... 152
4.2.1 Abraham Gotthelf Kästner ... 157
4.2.2 Johann Christoph Sturm ... 165
4.2.3 Christian Wolff ... 170
4.2.4 Johann Andreas von Segner ... 174
4.2.5 Heinrich Wilhelm Clemm ... 180
4.2.6 Wenceslaus Johann Gustav Karsten ... 189
4.2.7 Georg Simon Klügel ... 200
4.2.8 Immanuel Kant ... 204
4.2.9 Zusammenfassung ... 209
4.3 Parallelenpostulat ... 218
4.3.1 Abraham Gotthelf Kästner ... 223
4.3.2 Johann Christoph Sturm ... 228
4.3.3 Christian Wolff ... 232
4.3.4 Johann Andreas von Segner ... 236
4.3.5 Heinrich Wilhelm Clemm ... 241
4.3.6 Wenceslaus Johann Gustav Karsten ... 244
4.3.7 Georg Simon Klügel ... 254
4.3.8 Zusammenfassung ... 256
4.4 Fortifikation ... 261
4.4.1 Abraham Gotthelf Kästner ... 263
4.4.2 Johann Christoph Sturm ... 267
4.4.3 Christian Wolff ... 272
4.4.4 Heinrich Wilhelm Clemm ... 278
4.4.5 Wenceslaus Johann Gustav Karsten ... 282
4.4.6 Georg Simon Klügel ... 284

4.4.7 Karl August Struensee ... 288
4.4.8 Zusammenfassung ... 291
4.5 Zusammenfassung der Fallstudien ... 295

5 Kästners Facettenreichtum ... 298
5.1 Kästner als Mathematiker ... 298
5.2 Kästner als Lehrbuchautor ... 305
5.3 Kästner als Lehrer ... 309
5.4 Kästner als Universitätsprofessor ... 313
5.5 Zusammenfassung ... 315

6 Schlusswort ... 317

7 Quellen- und Literaturverzeichnis ... 320
8 Anhänge ... 336
9 Personenverzeichnis ... 345

Einleitung

„Weil aber ohne Mathematik fast keine Künste und Wissenschaften, keine Ordnung in den gewöhnlichsten Verrichtungen, keine Bequemlichkeit bey den allgemeinen Bedürfnissen gesitteter Völker möglich sind, so wird derjenige, der Nationen angeben will, zu deren Aufklärung die Mathematik ganz unnütz ist, keine sanftern Namen sagen können, als Topinambous[1] und Hottentoten“[2].

Dieser Ausspruch über die Mathematik ist dem Vortrag *Ueber den Gebrauch des mathematischen Geistes außer der Mathematik* entnommen, den Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800) am 26.3.1768 in der Deutschen Gesellschaft zu Göttingen[3] hielt. Kästner wirkte von 1756 bis zu seinem Tod als Professor für Mathematik und Naturlehre beziehungsweise Physik[4] an der Universität Göttingen. Das Zitat zeigt Kästners Haltung zur Mathematik. Die Nützlichkeit der Wissenschaften wurde vor allem im Zeitalter der Aufklärung – aber auch schon vorher – betont.[5] Die diffamierende Bezeichnung, die Kästner für Personen verwendet, die die Bedeutung der Mathematik abstreiten, gibt zugleich einen Einblick in Kästners spöttischen Charakter, mit dem er sich nicht immer Freunde gemacht hat.[6]

Die mathematischen Wissenschaften bestanden im 18. Jahrhundert aus den reinen mathematischen Wissenschaften (Arithmetik, Geometrie, Algebra, Analysis) und den angewandten mathematischen Wissenschaften (mechanische, optische, astronomische und architektonische Wissenschaften). Als Oberbegriff zur reinen und angewandten Mathematik diente der Ausdruck „mathematische Wissenschaften“. Zuvor findet man die Bezeichnung „gemischte Mathematik“ beziehungsweise „mathematica mixta“, doch dieser Begriff wurde im Laufe des 18. Jahrhunderts durch „angewandte Mathematik“ ersetzt. Diese war eine Sammlung von Wissenschaften, die mit Hilfe der reinen Mathematik ausgearbeitet wurden. Viele dieser Themen finden wir heute in der Physik wieder (mechanische Wissenschaften), einige von ihnen zählen gar nicht mehr zur Mathematik (architektonische Wissenschaften). In der vorliegenden Arbeit verwende ich die Bezeichnungen „mathematische Wissenschaften“ und „angewandte Mathematik“ in ihren damaligen Bedeutungen, die nicht mit unserer heutigen Auffassung exakt übereinstimmen.

Der Name Abraham Gotthelf Kästner ist heutzutage nur wenigen Personen geläufig, obwohl er zu Lebzeiten sowohl als Mathematiker, als auch als Dichter und Philosoph bekannt war. Er war kein schöpferischer Mathematiker, der die Mathematik in fachwissenschaftlicher Hinsicht bereicherte, wie beispielsweise sein Zeitgenosse Leonhard Euler (1707-1783), sondern war in erster Linie als erfolgreicher Lehrbuchautor bekannt. Seine *Mathematischen*

---

[1] Essbare Knolle einer amerikanischen Sonnenblumenart; fälschlicherweise nach den Indianerstämmen der Tupinamba benannt; vgl. Wahrig, S. 1483, Stichwort „Topinambur“.

[2] Kästner, Ueber den Gebrauch des mathematischen Geistes außer der Mathematik. In: Kästner, Vermischte Schriften, S. 103 f.

[3] Die Göttinger Deutsche Gesellschaft wurde 1740 mit dem Ziel der Reinigung, Hebung und Pflege der deutschen Sprache und Literatur von Johann Matthias Gesner (1691-1761) gegründet; vgl. Ebel, S. 159.

[4] Oftmals wurde die Naturlehre auch mit der Physik gleichgesetzt. Die Bezeichnungen von Kästners Professur an der Universität Göttingen variieren dementsprechend.

[5] Vgl. Geißler, S. 71 f.

[6] Vgl. Ebel, S. 195.

Anfangsgründe, in denen Kästner sämtliche Wissenschaften behandelte, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik zählten, waren „in jedermanns Händen“[7]. Sie wurden ab 1758 zuerst in sechs, später in zehn Bänden veröffentlicht, wobei einige der Bände mehrere Auflagen erlebten. Durch den Erfolg seiner *Mathematischen Anfangsgründe* sowie seiner Tätigkeit als Mathematikprofessor an einer führenden deutschen Universität im 18. Jahrhundert kann ihm eine breite Wirkung auf die mathematische Lehre nachgesagt werden.

Dass Kästner die Mathematik nicht um neue Kenntnisse bereicherte, mag der Grund sein, warum er nach seinem Tod bald in Vergessenheit geriet und in der mathematikhistorischen Forschung lange Zeit nicht beachtet wurde. Dieser Umstand und mein Interesse an der Geschichte des mathematischen Unterrichts führten dazu, mich intensiver mit Kästner und seinen *Mathematischen Anfangsgründen* zu beschäftigen. Um mehr über Kästner zu erfahren, bildet das umfangreiche bio-bibliographische Werk von Baasner (1991) die erste Anlaufstelle, in dem nicht nur die mathematischen Schriften Kästners, sondern auch weitere Quellen wie Lexikoneinträge über Kästner gesammelt und ausgewertet wurden. Aus den detaillierten Ausführungen Baasners wird schnell deutlich, dass Kästner eine sehr vielseitige Person war. Er war zu seiner Zeit nicht nur als Universitätslehrer und Lehrbuchautor, sondern auch als Poet, Schriftsteller, Übersetzer sowie Rezensent tätig und war darüber hinaus Mitglied verschiedener wissenschaftlicher Akademien, die im 18. Jahrhundert einen großen Aufschwung erlebten.

Baasner stellte bei der Auswertung der Quellen fest, dass es in den ersten Jahrzehnten nach Kästners Tod noch zahlreiche Lexikonartikel über Kästner gab, bis dieser schließlich, wie es scheint, in Vergessenheit geriet.[8] Baasner begründet das nachlassende Interesse an Kästner mit der geringen Wertschätzung der Aufklärer durch die nachfolgenden Generationen.[9] Von Seiten der Germanistik wurden Kästners poetische Werke in den 1970er und 1980er Jahren wieder entdeckt.[10] Seine mathematischen Leistungen wurden erst durch George Goe in Erinnerung gerufen und gewürdigt.[11] Zuvor gab es bereits Monographien, in denen Kästner als Mathematiker am Rande betrachtet wurde, beispielsweise dessen Anteil an der Lehre von den Parallellinien (Stäckel/Engel, 1895).

Die vorliegende Arbeit stellt Kästners Leistungen in der Vermittlung von Mathematik in den Mittelpunkt, die vor allem in seinen *Mathematischen Anfangsgründen* sichtbar werden. Meine Untersuchung trägt dazu bei mehr über Kästner, über die mathematische Lehrbuchliteratur und über den mathematischen Unterricht an deutschsprachigen Universitäten des 18. Jahrhunderts zu erfahren.

An dem Namen Abraham Gotthelf Kästner kommt man nicht vorbei, ohne dem Begriff „Anfangsgründe“ zu begegnen. Hierbei handelt es sich um deutschsprachige Lehrbücher aus dem 18. Jahrhundert. Sie wurden in erster Linie für den Gebrauch an Universitäten geschrieben und konnten als Vorlesungsgrundlage genutzt werden. Das Neue dieser Werke war, dass sie nicht mehr in Latein, sondern in Deutsch verfasst wurden. Aus diesem Grund konnten die „Anfangsgründe“ auch für autodidaktische Studien verwendet werden, beispielsweise von Personen, die kein Latein beherrschten oder die keine Universität besuchten.

[7] AGE, 1799, 4. Bd., 4. St., Artikel „Abraham Gotthelf Kästner“, S. 377.
[8] Vgl. Baasner, S. 17.
[9] Vgl. Baasner, S. 12.
[10] Vgl. Baasner, S. 18 f.
[11] Vgl. Baasner, S. 28.

Die „Anfangsgründe“ waren im 18. Jahrhundert sehr bekannt und wurden oft genutzt, aber nach diesem Zeitraum scheinen sie nicht mehr verwendet worden zu sein. Ein möglicher Grund hierfür dürfte die Bildungsreform 1810 in Preußen gewesen sein, die sich vor allem auf Universitäten und Gymnasien auswirkte.[12] Durch die damit verbundene Ausdifferenzierung des Bildungssystems und die neuen Lehrpläne gab es einen Bedarf an neuen stärker spezialisierten Lehrbüchern, die die „Anfangsgründe“ ersetzten. Parallel hierzu erfolgten eine zunehmende Spezialisierung der Mathematik selbst sowie die Forderung nach der Einheit von Forschung und Lehre.

Durch die mathematischen „Anfangsgründe“ ist es möglich einen Überblick über die mathematische Lehre an deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts zu erhalten. Das damalige Schul- und Universitätssystem war von unserem heutigen sehr verschieden. Unter anderem war die Mathematik noch kein eigenständiges Fach an Universitäten, sondern Bestandteil des propädeutischen Studiums und der Sieben Freien Künste, die in der Artisten- beziehungsweise philosophischen Fakultät zu finden waren.[13] Dieses propädeutische Studium musste jeder Student durchlaufen, um sich in einer der drei sogenannten höheren Fakultäten Medizin, Theologie oder Jurisprudenz einschreiben zu können. Darüber hinaus gab es keine allgemeine Schulpflicht.[14] So war es möglich, dass man sich als Student einschreiben konnte, ohne zuvor eine öffentliche Schule besucht zu haben. Durch das propädeutische Studium wollte man einen einheitlichen Wissensstand schaffen. Dies erklärt, wieso in den „Anfangsgründen“ auch solche Inhalte zu finden sind, die heute zum Lehrstoff der Grundschulen gehören, beispielsweise die Definition der Zahl, das Zahlensystem oder die vier Grundrechenarten.

Es gibt sowohl mathematische „Anfangsgründe“ zu einzelnen Themen, wie der Arithmetik oder Geometrie, als auch „Anfangsgründe“, die sämtliche Disziplinen behandelten, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik gerechnet wurden. Aus diesem Grund finden sich nicht nur Disziplinen der reinen, sondern auch der angewandten Mathematik, beispielsweise Mechanik, Statik, Optik und Architektur. Die verschiedenen Disziplinen wurden in eigenständigen Kapiteln dargestellt, so dass sie mehr oder minder unabhängig voneinander erarbeitet werden konnten.

Obwohl viele mathematische Lehrbücher unter dem Namen „Anfangsgründe“ oder einem ähnlichen Titel erschienen sind, gibt es nur wenige bekannte „Anfangsgründe“-Autoren. Als Begründer dieser Lehrbuchtradition kann Christian Wolff (1679-1754) angesehen werden. Er veröffentlichte seine *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften* ab 1710, die auch noch über seinen Tod hinaus zahlreiche Neuauflagen erlebten. Zu Beginn des 18. Jahrhunderts veröffentlichte auch Johann Christoph Sturm (1635-1703) deutschsprachige Lehrbücher, die jedoch nicht so erfolgreich waren wie Wolffs Werke. Nahezu 50 Jahre lang waren Wolffs Lehrbücher konkurrenzlos, bis Kästner seine *Mathematischen Anfangsgründe* ab 1758 veröffentlichte. Es folgten weitere Autoren in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wie Johann Andreas von Segner (1704-1777), Wenceslaus Johann Gustav Karsten (1732-1787), Heinrich Wilhelm Clemm (1725-1775) und Georg Simon Klügel (1739-1812).

Die mathematikhistorische Forschung befasste sich lange Zeit hauptsächlich mit den fachmathematischen Leistungen von Mathematikern, so dass die „Anfangsgründe“ kaum beachtet

[12] Vgl. Geißler, S. 98.
[13] Vgl. hierzu und zum Folgenden Gericke, S. 9.
[14] Vgl. Kühn, S. 40.

wurden. Für meine Untersuchungen stellen diese Lehrbücher aus verschiedenen Gründen interessante Quellen dar. Sie eignen sich einerseits als Quellen für das Studium der Geschichte der Mathematik im Allgemeinen, andererseits für das Studium der Geschichte des mathematischen Unterrichts und der verwendeten Lehrbücher. Die „Anfangsgründe“ stellen neue mathematische Gebiete, wie die analytische Geometrie und die Analysis, didaktisch aufbereitet dar, was man als didaktische Transposition bezeichnen könnte. Unter diesem Begriff versteht man den Übergang vom Gelehrtenwissen zum unterrichteten Wissen.[15]

Im letzten Drittel des 20. Jahrhunderts begann man sich vermehrt für die Geschichte des mathematischen Unterrichts und damit einhergehend für die Lehrbücher zu interessieren. Dabei wurden die mathematischen „Anfangsgründe“ oft nur Rande betrachtet, beispielsweise im Rahmen der Disziplingenese der Physik (Lind 1992; Krafft 1978). Den Fokus auf die Mathematik legte erstmals Kühn (1987), die in ihrer Dissertation die Rolle der Mathematik im deutschen Hochschulwesen des 18. Jahrhunderts und damit zahlreiche Lehrbücher untersuchte. Ausführungen über Lehrbücher ausgewählter Autoren finden wir bei Reich (2005), nämlich einen kurzen Vergleich von Wolffs und Kästners Lehrbüchern, und Sommerhoff-Benner (2002), die ihre Dissertation Wolff widmete. An diese Entwicklung möchte ich mit der vorliegenden Arbeit anknüpfen.

Fragestellungen und Ziele

Die vorliegende Arbeit stellt den Versuch dar, zwei große Themen, die mich interessieren, zu vereinen: Erstens werden die „Anfangsgründe“ betrachtet, zweitens wird, um das breite Feld der Lehrbücher einzugrenzen, der Fokus auf Kästner und seine *Mathematischen Anfangsgründe* gelegt. Da der Bezug zur „Anfangsgründe“-Literatur im Allgemeinen nicht aus den Augen verloren werden soll, werden Kästners Lehrbücher mit denen weiterer Autoren verglichen.

Zunächst werden die mathematischen „Anfangsgründe“ im Allgemeinen untersucht. Es gibt bislang kein Werk, das diese Lehrbücher für sich betrachtet, was wiederum mein Interesse weckte. Meine Untersuchung wurde von folgenden Fragen geleitet: Was sind die Charakteristika der „Anfangsgründe“? Wodurch zeichnen sie sich aus? Was sind ihre Inhalte? Darüber hinaus sind auch die Fragen nach ihrer Nutzung, Funktion und Verbreitung sehr interessant. Durch die Beantwortung dieser Fragen möchte ich einen Einblick in die mathematischen Lehrbücher des 18. Jahrhunderts und somit in den mathematischen Unterricht und dessen Inhalte an deutschen Universitäten geben.

Im ersten Teil geht meine Arbeit auf das Genre „Anfangsgründe“ im Allgemeinen ein. Aufbauend auf der Analyse der „Anfangsgründe“ wird ein Vergleich der deutschsprachigen „Anfangsgründe“ mit Lehrbüchern aus anderen Epochen oder Nationen möglich sein. So können nationale und kulturelle Unterschiede und Prägungen der Lehrbücher ausfindig gemacht werden.[16]

---

[15] Vgl. Chevallard, S. 39 f.

[16] Innerhalb unserer Forschergruppe erfolgte ein Vergleich zur sogenannten „Cours“-Literatur in Frankreich, die im weitesten Sinne mit der „Anfangsgründe“-Literatur vergleichbar ist. Wir konnten feststellen, dass es in Frankreich ein differenzierteres Bildungssystem gab als im deutschsprachigen Raum und die Inhalte der französischsprachigen Lehrbücher sich in einigen Punkten von den deutschsprachigen Lehrbüchern unterschieden. Ein Beispiel sind die französischen Marineschulen, für deren mathematische Vorlesungen spezielle Lehrbücher, bei-

In einem nächsten Schritt gehe ich auf Kästner als einen erfolgreichen „Anfangsgründe"-Autoren ein. Zunächst möchte ich herausarbeiten, was Kästner zur Mathematik bewegte, die im 18. Jahrhundert keine eigenständige akademische Disziplin war. Wodurch zeichneten sich seine Tätigkeit und seine mathematischen Lehrbücher aus? Wie ist die Stellung von Kästners *Mathematischen Anfangsgründen* innerhalb der mathematischen Lehrbuchliteratur?

Ziel ist es, Kästners mathematische Leistungen innerhalb der Geschichte der Mathematik sowie der Geschichte des mathematischen Unterrichts einzuordnen. Hierbei soll deutlich werden, dass man nicht notwendigerweise ein schöpferischer Mathematiker gewesen sein muss, um Einfluss auf die mathematische Bildung zu nehmen. Kästner wirkte vielmehr erfolgreich als Mathematiklehrer sowie Lehrbuchautor und konnte dadurch Einfluss auf die Ausbildung neuer Mathematiker nehmen. Damit knüpfe ich an Sommerhoff-Benners Arbeit über Wolff an. Kästners Lehrwerke, die oftmals im Schatten von Wolffs Lehrbüchern erscheinen, werden in der vorliegenden Arbeit im Rahmen der mathematischen „Anfangsgründe"-Literatur positioniert. Hierbei werden Fallstudien zu ausgewählten Bereichen der Mathematik, die gleichzeitig einen Einblick in die Inhalte und den Aufbau der Lehrbücher geben, angestellt.

Quellenlage

Für die Untersuchung der „Anfangsgründe" und zu ihrer Charakterisierung dienten in erster Linie die Lehrbücher selbst. Als sehr hilfreich erwies sich das „Verzeichnis der im deutschen Sprachraum erschienenen Drucke des 18. Jahrhunderts" (VD18)[17]. Neben Quellen habe ich auch weiterführende Literatur eingesehen, die sich – wenn auch nur untergeordnet – mit deutschsprachigen Mathematiklehrbüchern des 18. Jahrhunderts befassen (Lind, Kühn, Krafft, u. a.).

Im 18. Jahrhundert wurden viele deutschsprachige mathematische Lehrbücher veröffentlicht. Um dieses weite Feld handhabbar zu machen, beschränke ich mich auf die populärsten „Anfangsgründe" des 18. Jahrhunderts. Die Bekanntheit ist zum einen an der Anzahl der Auflagen erkennbar, zum anderen dienten mir entsprechende Informationen aus der Sekundärliteratur (beispielsweise Kühn) dazu, diese festzumachen. Es stellte sich heraus, dass die erfolgreichsten mathematischen Lehrbücher diejenigen waren, die sämtliche Wissenschaften, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik gerechnet wurden, behandelten. In der vorliegenden Arbeit betrachte ich vor allem die deutschsprachigen Lehrbücher von Wolff, Sturm, Kästner, Segner, Clemm, Karsten und Klügel, wobei stellenweise auch noch Lehrbücher weiterer Autoren untersucht werden. Sofern es mir möglich war, verwendete ich die aktuellste Auflage vor dem Tod des Verfassers. Dadurch wird sichergestellt, dass die Ausführungen tatsächlich von den jeweiligen Autoren stammen und nicht durch fremde Personen erweitert wurden. Bei Wolffs *Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschaften* und den Lehrbüchern von Clemm wurden posthume Auflagen verwendet, die jedoch – bei den von uns betrachteten Inhalten – keine Unterschiede zu vorherigen Auflagen aufzeigen. Im Allgemeinen werden die verschiedenen Auflagen der Lehrbücher in meinen Untersuchungen miteinander verglichen, um inhaltliche Veränderungen zu finden. Im Vergleich mit anderen Auflagen des jeweiligen Lehr-

spielsweise *Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie* von Étienne Bézout (1730-1783), geschrieben wurden.

[17] Siehe http://vd18.de/ (1.6.2014).

buchs werden die Jahreszahlen der anderen, nicht hauptsächlich verwendeten Auflagen in Klammern angegeben. Welche Auflagen der Lehrbücher meiner Arbeit zugrunde liegen, kann dem Quellenverzeichnis entnommen werden.

In Bezug auf Kästner ist die Quellenlage vor allem dank der umfangreichen Monographie von Baasner sehr gut aufgearbeitet. Für meine Untersuchungen verwende ich nicht nur Kästners *Mathematische Anfangsgründe*, sondern auch seine beiden Autobiographien (1768, 1787) sowie Lexikonartikel über Kästner. Leider mangelt es an schriftlicher Korrespondenz zwischen Kästner und anderen Gelehrten, die nähere Informationen, beispielsweise über seinen Werdegang und seine Gedanken zum mathematischen Unterricht, enthalten können.[18]

Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel gegliedert, wobei ich den Weg vom Allgemeinen – den Lehrbüchern – zum Speziellen – Kästner – verfolge.

Im ersten Kapitel werden die „Anfangsgründe" im Allgemeinen beschrieben. Hierfür werden die Lehrbücher bekannter Autoren (Wolff, Kästner, Karsten, Segner, Clemm, Klügel) vergleichend untersucht, um Merkmale der „Anfangsgründe" herauszustellen. Zudem werden die Lehrbücher in den Bildungskontext des 18. Jahrhundert eingebettet, wobei auch die Stellung und das Ansehen der Mathematik in Deutschland deutlich werden.

Das zweite Kapitel widmet sich der Biographie von Abraham Gotthelf Kästner. Als Grundlage für meine Ausführungen dienten in erster Linie Kästners Autobiographien, Lexikonartikel über Kästner sowie die Monographie von Baasner. Da letztere bereits eine detaillierte Lebensbeschreibung von Kästner enthält, möchte ich deren Inhalte in der vorliegenden Arbeit nicht reproduzieren. Stattdessen lege ich den Fokus auf Kästners mathematischen Werdegang sowie weitere Aspekte seiner mathematischen Arbeit. Auf diese Weise wird es möglich, sich ein Bild von der Tätigkeit eines Mathematikprofessors des 18. Jahrhunderts zu machen und das Wissen über das damalige Bildungssystem zu erweitern.

Im dritten Kapitel stelle ich Kästners zehnbändige *Mathematische Anfangsgründe* vor. Ich beginne mit einem deskriptiven Teil über die äußere Form, den Aufbau und die Inhalte. Im Anschluss werden Charakteristika von Kästners Lehrbuch aufgezeigt, wobei auch einige didaktische Merkmale untersucht werden. Kästner wird als Lehrbuchautor und Universitätslehrer betrachtet, wobei nicht nur seine Lehrbücher, sondern auch weitere Schriften, in denen er sich über die Pädagogik seiner Zeit und den bildenden Wert der Mathematik äußerte, berücksichtigt werden. Darüber hinaus wird die Verbreitung und Verwendung von Kästners *Mathematischen Anfangsgründen* aufgezeigt.

Im vierten Kapitel vergleiche ich Kästners *Mathematische Anfangsgründe* mit den Lehrbüchern anderer Autoren. So wird die Verbindung zwischen Kästners Lehrbüchern und weiteren „Anfangsgründen" hergestellt und gleichzeitig ein Einblick in die Inhalte und den Aufbau der „Anfangsgründe" allgemein gegeben. Da es nicht möglich ist alle Gebiete, die in diesen umfangreichen Lehrwerken dargestellt werden, zu betrachten, habe ich mich für vier Fallstudien entschieden. Die erste Fallstudie befasst sich mit der Klassifikation der mathematischen Wissenschaften, was in den Bereich der Meta-Mathematik fällt. Es folgen zwei Fallstudien zur reinen Mathematik, nämlich erstens über negative Größen als Thema der Arithme-

[18] Vgl. Baasner, S. 81.

tik, zweitens über das Parallelenpostulat aus dem Bereich der Geometrie. Die letzte Fallstudie behandelt die Fortifikation, die im 18. Jahrhundert zur angewandten Mathematik gerechnet wurde. Durch diese Untersuchungen soll die Frage beantwortet werden, in wie weit sich Kästners *Anfangsgründe* von anderen Lehrbüchern unterschieden. Somit kann ansatzweise der Erfolg von Kästners *Anfangsgründen* erklärt werden, der ihnen nachgesagt wird, nämlich dass sie als Vorbild für weitere Lehrbücher der 1770er und 1780er Jahre dienten.[19]

Das fünfte Kapitel stellt Kästners Ansehen und Wirkung dar und dient dazu, Kästners Facettenreichtum aufzuzeigen. Hierbei konzentriere ich mich auf Kästners mathematische Tätigkeiten und blende seine dichterischen Arbeiten aus.[20] Kästner wird als Mathematiker, Lehrbuchautor, Lehrer und Universitätsprofessor betrachtet. Als Quellen dienten sowohl Kästners eigene Ausführungen als auch zeitgenössische Aussagen, die beispielsweise in Lexikonartikeln zu finden sind.

Lesehinweise/Anmerkungen zum Formalismus

In der vorliegenden Arbeit wird die originale Schreibweise in den Zitaten beibehalten.

Die Originaltitel der verwendeten Schriften und Werke werden in Kursivschrift gesetzt. Es werden nicht immer die vollständigen Titel wie „*Mathematische Anfangsgründe*“ genannt, sondern im laufenden Text mit *„Anfangsgründe*“ abgekürzt, nachdem der jeweilige Buchtitel zu Beginn jedes Kapitels vollständig genannt wurde. In den Fußnoten werden ebenfalls abgekürzte Titel gebraucht. Für Kästners *Anfangsgründe* beispielsweise wird die Abkürzung „AG x.y.“ verwendet, wobei „x“ den „Theil“ und „y“ die „Abtheilung“ der *Anfangsgründe* gemäß Kästners eigener Einteilung seines Lehrwerks angibt (siehe hierzu Kapitel 3.1, Abbildung 10: Bände von Kästners *Mathematischen Anfangsgründen*). Bei einigen Quellen verwende ich ähnliche Abkürzungen, die der unteren Liste zu entnehmen sind. In den Klammern sind die für unsere Untersuchungen hauptsächlich verwendeten Auflagen angegeben. Sollten andere Auflagen, etwa zu Vergleichszwecken, verwendet werden, wird dies in den Ausführungen deutlich gemacht und im Quellenverzeichnis angegeben. Bei den in der unteren Liste nicht aufgeführten Werken werden in den Fußnoten die Autoren sowie die abgekürzten Titel der Werke genannt.

Die biographischen Daten zu den Personen, die in der vorliegenden Arbeit vorkommen und in der Regel bei der Erstnennung der Personen mit vollständigem Namen angegeben werden, sind, soweit nicht ausdrücklich anders angezeigt, der „Allgemeinen Deutschen Biographie“ (ADB), der „Neuen Deutschen Biographie“ (NDB) und dem „Dictionary of Scientific Biography“ (DSB) entnommen.

Abschließend möchte ich mich für die Möglichkeit zu der vorliegenden Arbeit bedanken. Diese ist aus dem übergeordneten Projekt „Traditionen der schriftlichen Mathematik und Mathematikvermittlung im deutschen und französischen Sprachraum zwischen 1650 und 1820 – Herausbildung und Differenzierung von wissenschaftlichen Disziplinen in nationalen Kontexten“ entsprungen, das von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) finanziert wurde und unter der Leitung von Prof. Dr. Klaus Volkert und Prof. Dr. Volker Remmert stand.

[19] Vgl. Müller, C. H., S. 58.

[20] Siehe hierzu Baasner, S. 165-528.

Abkürzungen für die Fußnoten

Abkürzung in Fußnote	*Vollständiger Titel*
Clemm, EG	Heinrich Wilhelm Clemm, *Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften* (^{3}1777)
Clemm, ML x	Heinrich Wilhelm Clemm, *Mathematisches Lehrbuch* und „Theil“ (^{3}1777)
Kästner, AG x.y.	Abraham Gotthelf Kästner, *Mathematische Anfangsgründe,* „Theil“ und „Abteilung“ (jeweils jüngste Auflage, 1790-1801)
Karsten, AG x	Wenceslaus Johann Gustav Karsten, *Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften* und Band (1780)
Karsten, L x bzw. Karsten, L x(.y.)	Wenceslaus Johann Gustav Karsten, *Lehrbegrif der gesamten Mathematik* und „Theil“ (1767-1777) bzw. *Lehrbegriff der gesamten Mathematik,* „Theil“ (und „Abtheilung“) (^{2}1782-1794)
Klügel, AG	Georg Simon Klügel, *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie* (^{2}1792)
Klügel, MW x	Georg Simon Klügel, *Mathematisches Wörterbuch* und Band (1803-1808)
Segner, AG	Johann Andreas von Segner, *Anfangsgründe der Arithmetick, Geometrie und der Geometrischen Berechnungen* (1764)
Segner, VL	Johann Andreas von Segner, *Deutliche und vollständige Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie* (^{2}1767)
Sturm, KM	Johann Christoph Sturm, *Kurtzgefasste Mathesis* (1717)
Sturm, MJ x	Johann Christoph Sturm, *Mathesis Juvenilis* und Band (^{2}1710/14)
Wolff, AG x	Christian Wolff, *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften* und Band (^{9}1755)
Wolff, ML	Christian Wolff, *Mathematisches Lexicon* (1716)

Die in den Fußnoten verwendeten Abkürzungen für Zeitschriften und Nachschlagewerke können der Auflistung am Anfang des Quellen- und Literaturverzeichnisses entnommen werden.

1 Die Lehrbuchgattung „Anfangsgründe“

Dieses erste Kapitel ist den mathematischen „Anfangsgründen“ gewidmet, wobei ich zunächst die Bedeutung dieser Lehrbücher aufzeigen möchte. Hierbei dienen folgende Leitfragen: Was waren die „Anfangsgründe“? Wer waren ihre Autoren? In welchem Zeitraum erschienen sie? Zeichnen sie sich durch besondere Merkmale aus? Einleitend sind einige Bemerkungen über das Bildungssystem des 18. Jahrhunderts notwendig, um die „Anfangsgründe“ in diesen Kontext einbetten zu können.

1.1 Bedeutung und Bestandsaufnahme

Über die Mathematik an deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts und der verwendeten Lehrbücher wissen wir vergleichsweise wenig. Der Grund für diese Vernachlässigung innerhalb der mathematikhistorischen Forschung mag darin liegen, dass der Fokus zunächst auf bekannten Mathematikern sowie ihren mathematischen Leistungen lag. Im 18. Jahrhundert bestand noch keine Einheit von Forschung und Lehre. Während die Forschung überwiegend an den Akademien stattfand, wo herausragende Mathematiker wie Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) und Leonhard Euler (1707-1783) wirkten, waren die Universitäten für die Lehre zuständig.[21] Dies mag eine Erklärung dafür sein, wieso man den Universitäten und den Professoren, die gleichzeitig als Lehrbuchautoren, nicht jedoch als Entdecker neuer mathematischer Kenntnisse in Erscheinung traten, ein geringeres Interesse innerhalb der mathematikhistorischen Forschung entgegenbrachte.

Im 20. Jahrhundert entstanden einige Monographien, die die mathematische Lehre des 18. Jahrhunderts behandeln, wobei sie sich auf die Umstände an einer bestimmten Universität konzentrieren. Hier sind die Arbeiten von Müller (1904) für die Universität Göttingen und Kühn (1987) für die Universität Leipzig zu nennen. In ihren Arbeiten erscheinen die mathematischen „Anfangsgründe“ als bedeutungsvolle und einflussreiche Lehrwerke. Erst in jüngster Zeit standen die „Anfangsgründe“ im Zentrum der Betrachtung und wurden im Rahmen der mathematikhistorischen und -didaktischen Forschung in verschiedener Hinsicht gewürdigt. Erste Arbeiten stammen von Sommerhoff-Benner (2002) und Reich (2005). In der Dissertation von Sommerhoff-Benner werden die zwei wichtigen Lehrbücher von Christian Wolff (1679-1754), nämlich die deutschsprachigen *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften* und die *Elementa matheseos universae* analysiert, miteinander verglichen und ihr Einfluss auf die mathematische Lehre aufgezeigt. Reich betrachtet die „Anfangsgründe“ von Wolff und Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800) als Lehrbücher der Aufklärung.

An diese Entwicklung knüpft die vorliegende Arbeit an. Die mathematischen „Anfangsgründe“ waren vielgenutzte Lehrbücher an deutschen Universitäten vor allem des 18. Jahrhunderts und eignen sich als Quellen für die mathematikhistorische und -didaktische Forschung in vielerlei Hinsicht. Bislang fehlt es an einer Arbeit zur Geschichte und zum Wesen des mathematischen Lehrbuchs. In erster Linie kann das Studium der „Anfangsgründe“ einen Beitrag zur Kenntnis der mathematischen Lehrbuchliteratur im deutschsprachigen Raum leisten, wobei Inhalte und didaktische Methoden analysiert werden können. Eine solche

[21] Vgl. Grau, S. 16.

Untersuchung, die von mir angestrebt wird, bietet die Basis für weitere Fragestellungen, beispielsweise für Vergleiche mit anderen Nationen und Epochen, um Unterschiede, Gemeinsamkeiten oder eventuelle Einflüsse von zeitlich vorausgegangenen oder auf nachfolgende Lehrbücher ausfindig zu machen.

Die „Anfangsgründe“ eigenen sich nicht nur als Quellen zur Untersuchung der mathematischen Lehrbuchliteratur, sondern auch zur mathematischen Lehre an deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts, über die im Gegensatz zu nachfolgenden Epochen wenig bekannt ist. Durch die Analyse der „Anfangsgründe“ kann herausgearbeitet werden, welche Disziplinen im 18. Jahrhundert zur Mathematik gezählt wurden und im Rahmen der universitären Lehre unterrichtet werden sollten. Naheliegend ist hier die Frage nach der Unterscheidung von elementarer und höherer Mathematik, wie sie heutzutage gemacht wird. Von besonderem Interesse ist ferner die Unterscheidung von reiner und angewandter Mathematik, die im 17. und 18. Jahrhundert nicht einheitlich und zudem verschieden von den heutigen Gegebenheiten war.

Ob die mathematischen Wissenschaften tatsächlich so gelehrt wurden, wie sie in den Lehrbüchern dargestellt werden, hing von verschiedenen Faktoren ab und kann in der vorliegenden Arbeit nicht umfassend untersucht werden. Zum einen müssten die Satzungen und Statuten der Universtäten betrachtet werden, um herauszufinden, in welchem zeitlichen und inhaltlichen Umfang die Mathematik gelehrt werden sollte – sofern solche Regelungen überhaupt aufgenommen wurden. Die Vorlesungsverzeichnisse lassen kaum Rückschlüsse zu, ob diese Vorgaben tatsächlich umgesetzt worden sind. Hinzu kommt, dass die Ankündigung einer Vorlesung nicht bedeutet, dass diese auch tatsächlich stattfand. Entsprechende Professoren- oder Studentenaufzeichnungen, die mehr Aufschluss hierüber geben könnten, sind rar. Ebenfalls sehr spärlich ist die Quellenlage auch in Bezug auf die tatsächliche didaktische Umsetzung und Lehre des mathematischen Studiums. Hier könnten vor allem zeitgenössische Quellen wie Universitätsdarstellungen oder Briefe helfen, die Aussagen über die gelehrten Inhalte und das didaktische Vorgehen der Mathematikdozenten enthalten. Es stellte sich heraus, dass einige Passagen in den Vorreden der „Anfangsgründe“ Rückschlüsse auf die mathematische Lehre an deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts sowie auf das Ansehen der Mathematik im Allgemeinen zulassen. Die Ergebnisse werden in die folgenden Betrachtungen miteinfließen.

Um uns einen ersten Überblick über die mathematischen „Anfangsgründe“ zu verschaffen, erfolgte eine gezielte Suche von Werken, die den Titel „Anfangsgründe“ oder einen ähnlichen tragen. Hierfür dienten vor allem Datenbanken und Universitätskataloge. Als besonders hilfreich erwies sich das DFG-geförderte Digitalisierungsprojekt „VD18“[22], dessen Ziel es ist alle deutschsprachigen Drucke des 18. Jahrhunderts zu erfassen und in digitalisierter Form öffentlich zur Verfügung zu stellen. Durch die entsprechende Suchmaske war es nicht nur möglich nach Titeln und Zeiträumen, sondern auch nach Buchgattungen zu suchen, so dass in kurzer Zeit eine große Anzahl von mathematischen Lehrbüchern ausfindig gemacht werden konnte. Durch die Suche wurden auch deutschsprachige Lehrwerke gefunden, die nicht für die akademische Lehre, sondern für niedere Schulen[23] bestimmt waren. Wenn nicht bereits der

---

[22] Nähere Informationen unter http://vd18.de/ (1.6.2014).

[23] Unter niederer Bildung wurde die Bildung des gemeinen Volkes verstanden, die sich von der höfischen und der gelehrten Bildung an Lateinschulen, Gymnasien und Universitäten unterschied; vgl. Lind, S. 3-5.

Titel Aufschluss über die intendierte Personengruppe gab, so war es notwendig in die Vorreden nach der jeweiligen Adressatengruppe zu schauen.

Während der Suche und Eingrenzung der Lehrbücher zeigten sich bereits einige Entwicklungslinien. Zu diesen zählen beispielsweise der enorme Anstieg deutschsprachiger mathematischer Lehrbücher in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, sowie ihre zunehmende Spezialisierung auf bestimmte Inhalte und Personengruppen. Da die Anzahl mathematischer Lehrbücher im 18. Jahrhundert schlagartig anwuchs und nicht alle von ihnen im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden können, beschränke ich mich auf diejenigen, die an Universitäten verwendet wurden und sämtliche Wissenschaften enthalten, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik gehörten. So konnten in kurzer Zeit die Lehrwerke von Wolff, Kästner, Wenceslaus Johann Gustav Karsten (1732-1787), Heinrich Wilhelm Clemm (1725-1775) und Georg Simon Klügel (1739-1812) ausfindig gemacht werden. Bereits die Titel dieser umfangreichen Lehrwerke machen deutlich, dass ihre Autoren den Anspruch hatten, sämtliche mathematische Wissenschaften zu behandeln.

Das erste einflussreiche Werk, das im Rahmen unserer Thematik Beachtung verdient, sind die *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften*[24] von Wolff. Sie waren wegen ihres Umfangs und ihres verständlichen Vortrags bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts das führende Lehrbuch an deutschen Universitäten.[25] Neben seinen *Anfangs=Gründen* veröffentlichte Wolff auch den *Auszug aus den Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschafften* [sic][26]. Dann folgte die zweite Generation der Mathematiker, die einflussreiche „Anfangsgründe" schrieben. Zu ihnen gehören Kästner mit seinen *Mathematischen Anfangsgründen*[27] sowie Karsten mit dem *Lehrbegrif der gesamten Mathematik*[28], den *Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften*[29] und dem *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der mathematischen Wissenschaften*[30]. Clemm schrieb das *Mathematische Lehrbuch, oder vollständiger Auszug aus allen so wohl zur reinen als angewandten Mathematik gehörigen Wissenschaften*[31]. Es ist in zwei „Theile" geteilt. Der erste Teil umfasst die Lehren der reinen Mathematik, der zweite Teil die der angewandten Mathematik. Clemm war in erster Linie Theologe, im Gegensatz zu den drei anderen Autoren, die ordentliche Professuren für

[24] 4 Bde. Insgesamt elf Auflagen: 1710, [2]1716/17, [3]1725, [4]1731, [5]1737/38, [6]1743, [7]1750/57, [8]1763, [9]1775 (jeweils in Wien und Halle), [10]1800.

[25] Vgl. Kühn, S. 65.

[26] Erschienen in 14 Auflagen: 1717, [2]1724, [3]1728, [4]1732, [5]1734, [6]1737, [7]1740, [8]1743, [9]1746, [10]1749, [11]1752, [12]1755, [13]1772, [14]1775. 1797 gaben Johann Tobias Mayer und Karl Christian von Langsdorf *Des Freyherrn von Wolf Neuer Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften* heraus. Für unsere Untersuchungen liegt die sechste Ausgabe von 1737 zugrunde.

[27] Die Erstauflage 1758-69 umfasste sechs Bände. Es erfolgte schrittweise eine Erweiterung auf zehn Bände, wobei einzelne Bände bis zu sechs Auflagen erfuhren. Für unsere Untersuchungen verwenden wir hauptsächlich die jeweils jüngsten Ausgaben. Vgl. Kapitel 3.1, Abbildung 10.

[28] 8 Bde. Erstauflage 1767-1777. Einige Bände sind, auch nach seinem Tod hinaus, in der zweiten Auflage 1782-1794 erschienen, wobei beim zweiten Band noch eine „zweyte Abtheilung" hinzugefügt wurde, die auch unter dem Namen *Anfangsgründe der mathematischen Analysis und höhern Geometrie* veröffentlicht wurde; vgl. Karsten, L 2.1., Vorrede zur zweyten Auflage, o. S. Somit umfasste Karstens Gesamtwerk in der zweiten Auflage neun Bände. Des Weiteren finden wir in der zweiten Auflage die Schreibweise „Lehrbegriff" statt, wie noch in der ersten Auflage, „Lehrbegrif" im Titel des Werks.

[29] 3 Bde. 1780.

[30] Erste Auflage in einem Band: 1781; zweite Auflage in zwei Bänden: [2]1785.

[31] Erste Auflagen in einem Band: 1764, [2]1768, [3]1777; vierte Auflage in zwei Bänden: [4]1786.

Mathematik bekleideten. Außerdem sind seine Lehrwerke nicht so umfangreich wie die der anderen „Anfangsgründe"-Autoren. Dies lässt auf eine andere Intention und Adressatengruppe schließen, was in den folgenden Ausführungen näher analysiert werden wird.

Neben den Werken von Wolff, Kästner und Karsten wurden vor allem auch diejenigen von Johann Andreas von Segner (1704-1777) an deutschen Universitäten viel verwendet, wie Kühn durch die Auswertung der Leipziger Lektionskataloge vom SS 1770 bis WS 1790 feststellte.[32] Des Weiteren konnten keine signifikanten Unterschiede zu anderen Universitäten erkannt werden. Segner schrieb auch deutschsprachige „Anfangsgründe", aber diese betrachten in erster Linie nur die reine Elementarmathematik in Form von Arithmetik und Geometrie. Zu seinen Lehrbüchern gehören *Anfangsgründe der Arithmetick, Geometrie und der Geometrischen Berechnungen*[33] und *Deutliche und vollständige Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie*[34]. Obwohl Segners Werke nicht sämtliche mathematische Disziplinen umfassen, werden sie dennoch in der vorliegenden Arbeit wegen ihres Erfolgs für die Charakterisierung der „Anfangsgründe" herangezogen. Dies trifft auch auf die *Ersten Gründe aller mathematischen Wissenschaften*[35] von Clemm zu. Beachtenswert erscheinen auch die Werke von Klügel. Seine *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie*[36] erschienen in insgesamt sieben Auflagen. Dieses Werk ist ein Teil seiner umfangreicheren *Encyklopädie, oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten Kenntnisse*[37], in der er auch angewandte mathematische Disziplinen betrachtet.[38]

Bevor wir im vorliegenden Kapitel die mathematischen „Anfangsgründe" und ihre wesentlichen Charakteristika näher untersuchen, wird ein kurzer Einblick in die deutsche Universitäts- und Bildungslandschaft des 18. Jahrhunderts gegeben, wobei vor allem auch der Stellenwert und das Ansehen der Mathematik innerhalb des Bildungskontextes dargestellt werden wird. So ist es möglich, die mathematischen Lehrbücher diachronistisch zu betrachten und in die zeitlichen Umstände einzubetten.

1.2 Bildungskontext und Stellung der Mathematik

Das Heilige Römische Reich Deutscher Nation bestand im 18. Jahrhundert aus zahlreichen Kleinstaaten mit jeweils unterschiedlichen Regelungen. Hinzu kam die konfessionelle Spaltung in katholische und protestantische Gebiete. Diese Unterschiede lassen sich auch im Bildungssystem wiederfinden, weshalb es nicht möglich ist, ein homogenes Bild von den Bildungsinstitutionen zu entwerfen; es muss vielmehr auf die einzelnen regionalen Gegebenheiten eingegangen werden. Die vorliegende Arbeit hat nicht das primäre Ziel, das Bildungssys-

[32] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kühn, S. 79.

[33] Dieses Werk erschien zuerst in Latein unter dem Titel *Elementa Arithmeticae, Geometriae et Calculi Geometrici* (1756), wie der Vorrede in den *Anfangsgründen* zu entnehmen ist. Das Werk wurde von Johann Wilhelm von Segner, dem Sohn von Johann Andreas von Segner, ins Deutsche übersetzt und erschien 1764, ^{2}1773, ^{3}1801.

[34] 1747, ^{2}1767.

[35] 1759, ^{2}1769, ^{3}1777.

[36] 1782, ^{2}1792/93, ^{3}1798, ^{4}1802, ^{5}1809, ^{6}1819, ^{7}1821.

[37] Erste Auflage in drei Bänden: 1782-1784; zweite und dritte Auflage in fünf Bänden: ^{2}1792-1794, ^{3}1806-1809.

[38] Vgl. Klügel, AG, Vorrede, S. iii.

tem und die Stellung der Mathematik umfassend darzustellen; sie wird allgemeine Entwicklungstendenzen aufzeigen und in den größeren, grobskizzierten Kontext ohne Anspruch auf Vollständigkeit einbetten.

1790 gab es in Deutschland, das etwa 24 Millionen Einwohner zählte, 34 Universitäten.[39] Trotz der territorialen und konfessionellen Zersplitterung können für den Zeitraum von 1650 bis 1800 gemeinsame Entwicklungstendenzen ausfindig gemacht werden. Die Universitäten waren hauptverantwortlich für die Ausbildung und Wissenschaft.[40] Da an den Universitäten des 18. Jahrhunderts in erster Linie theoretisches und nicht praktisch-nützliches Wissen vermittelt wurde, galten sie zunehmend als unzeitgemäß, so dass alternative Bildungseinrichtungen in Form von Spezialschulen entstanden.[41] Halle und Göttingen hingegen galten als aufgeklärte Universitäten und wurden zum Vorbild für weitere Universitätsreformen, beispielsweise in Mainz, Würzburg, Ingolstadt und Wien.[42]

Die Änderungen an den deutschen Universitäten sind eng mit dem Gedankengut der Aufklärung verbunden. Durch die Aufklärung orientierten sich die Universitäten nicht mehr an den mittelalterlichen Lehrinhalten und Methoden wie der dogmatischen Lehrart, sondern setzten das eigenständige Denken und die Vernunft in den Mittelpunkt.[43] Die Bildung sollte in die Bevölkerung getragen werden, wodurch der deutschen Sprache eine besondere Stellung zukommt. Im Laufe des 18. Jahrhunderts etablierte sich Deutsch als Wissenschaftssprache und galt ab der Jahrhundertmitte neben dem Latein als gleichberechtigt.[44]

Die Zulassung zur Universität und damit der Bildungsstand vor Aufnahme eines Studiums waren nicht einheitlich geregelt, so wie es heutzutage mit dem Abitur der Fall ist. Durch das Fehlen einer einheitlichen Schulpflicht wurden viele Schüler oft durch Hauslehrer unterrichtet.[45] Vereinzelt wurden Aufnahmevoraussetzungen eingeführt wie 1788 durch das Abitur in Preußen.[46] Flächendeckende Änderungen setzten sich erst im 19. Jahrhundert durch. Während einige Studenten beim Eintritt in die Universität Vorkenntnisse aufweisen konnten, erlernten andere die notwendigen Kenntnisse erst an der Universität selbst.[47] Daher ist einleuchtend, dass zunächst ein einheitliches Bildungsniveau erreicht werden musste. Dies erfolgte durch das Studium der Sieben Freien Künste, das mit dem Magisterexamen endete und zum Studium in einer der drei sogenannten „höheren“ Fakultäten – Medizin, Jurisprudenz, Theologie – qualifizierte.[48] Die Sieben Freien Künste wurden in der sogenannten „niederen“ Artistenfakultät[49] gelehrt und bestanden aus dem Trivium und dem Quadrivium.[50] Dem Trivium gehörten die sprachlichen Disziplinen Grammatik, Rhetorik und Dialektik/Logik an, während zu dem Quadrivium die vier mathematischen Disziplinen Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik im Sinne der Harmonielehre zählten. Mathematik war also Bestandteil

[39] Vgl. Frijhoff, Grundlagen. In: Rüegg, Bd. 2, S. 79.
[40] Vgl. Schindling, Bildung und Wissenschaft in der Frühen Neuzeit, S. 44.
[41] Vgl. hierzu und zum Folgenden Hammerstein. In: Rüegg, Bd. 2, S. 112 f.
[42] Vgl. Hammerstein, Die Hochschulträger. In: Rüegg, Bd. 2, S. 128.
[43] Vgl. Kühn, S. 1.
[44] Vgl. Hammerstein, Universitäten. In: Hammerstein/Herrmann, S. 385.
[45] Vgl. Kühn, S. 40.
[46] Vgl. Kühn, S. 43.
[47] Vgl. di Simone, Die Zulassung zur Universität. In: Rüegg, Bd. 2. S. 238.
[48] Vgl. Gericke, S. 9.
[49] Im 18. Jahrhundert findet man häufiger die Bezeichnung „Philosophische Fakultät“.
[50] Vgl. hierzu und zum Folgenden Scriba, S. 25.

des Curriculums der philosophischen Fakultät und somit des propädeutischen Studiums. Seit der Spätantike bis zur Reformation hinein war dieser Kanon an propädeutischen Wissenschaften üblich. Ziel war nicht nur die Grundlage für eine höhere Bildung zu schaffen, sondern auch einen Beitrag zur Allgemeinbildung zu leisten. Im gesamten 18. Jahrhundert behielt die philosophische Fakultät weiterhin ihren propädeutischen Charakter für die höheren Wissenschaften. Eine entscheidende Wendung brachte erst die Gründung der Berliner Universität 1810.[51]

1.2.1 Der Stellenwert der Mathematik

Anhand der Einordnung der Mathematik im Rahmen des damals üblichen Vier-Fakultäten-Modells erkennt man bereits ihre Stellung. Sie war als propädeutische Wissenschaft in der niederen Artistenfakultät angesiedelt und war keine Brotwissenschaft – also eine Wissenschaft zum Broterwerb – wie die Wissenschaften aus den drei höheren Fakultäten. Allerdings muss gesagt werden, dass die Mathematik nie abgewertet wurde; im Gegenteil wurde ihre Wichtigkeit für das weitere Studium betont.

In der frühen Neuzeit gewannen die mathematischen Wissenschaften an Bedeutung, vor allem durch die technischen Erfindungen im Rahmen von Manufaktur und Handel im 16. und 17. Jahrhundert. Handel und Schifffahrt tangierten die mathematischen Gebiete Optik, Astronomie, Geographie, Navigation und angewandte Mechanik in Form von Schiffsbau.[52] Auch die Kriegsführung benötigte ballistische Kenntnisse, die auf Mathematik beruhten. Aufgrund dieser neuen Erkenntnisse wuchsen in dieser Zeit die mathematisch-philosophischen Studien an, wobei das Ansehen der Philosophie und der darin angesiedelten Wissenschaften gesteigert wurde und vermehrt Professuren für Mathematik und Physik eingerichtet wurden.[53] Da die Mathematik eng mit den physikalischen Wissenschaften verbunden war, wurden die Lehrstühle für Mathematik und Physik meist von derselben Person besetzt.[54] So hatten auch Wolff, Kästner, Segner, Karsten und Klügel Professuren für Mathematik und Naturlehre inne.

Im 18. Jahrhundert etablierte sich die Mathematik langsam an Gymnasien und Universitäten.[55] An Universitäten wurde die Mathematik zu einem wissenschaftlichen Fach und befreite sich so von ihrem Status als Hilfswissenschaft. Allerdings wurde sie – für unsere heutigen Vorstellungen – noch auf einem niedrigen Niveau gelehrt. Felix Klein (1849-1925) bemerkte, dass an den Universitäten des 18. Jahrhunderts elementare mathematische Inhalte vermittelt wurden.[56] Vorherrschend waren die Lehrbücher von Kästner und Étienne Bézout (1730-1783).[57] Die Inhalte, die wir in diesen Lehrbüchern finden, gehen allerdings über den Umfang des tatsächlichen Studiums hinaus. In der Regel wurden an den Universitäten am Ende des 18. Jahrhunderts folgende mathematische Gebiete gelehrt: Arithmetik, Geometrie, Elemente

---

[51] Vgl. Hammerstein, Universitäten. In: Hammerstein/Herrmann, S. 373 f.
[52] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kühn, S. 1.
[53] Vgl. Kühn, S. 29 f.
[54] Vgl. Kühn, S. 33.
[55] Vgl. Schubring, Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert, Kap. 4.
[56] Vgl. Klein, S. 81.
[57] Vgl. hierzu und zum Folgenden Bockstaele, Mathematik und exakte Naturwissenschaften. In: Rüegg, Bd. 3, S. 407 f.

der Algebra (lineare und quadratische Gleichungen), Logarithmen, ebene und sphärische Trigonometrie, Mechanik fester Körper und flüssiger Substanzen, Optik und Perspektive, Astronomie, Geographie, Gnomonik, Chronologie. An einigen Universitäten wurden auch Kegelschnitte und die Anwendungen der Algebra auf die Geometrie gelehrt. Die Differential- und Integralrechnung wurde nur selten behandelt.

An der protestantischen Universität Göttingen, die 1734 gegründet wurde, war von Beginn an eine ordentliche Professur für Mathematik und Naturlehre vorgesehen, die bis 1755 von Segner, ab 1756 von Kästner besetzt wurde. Die Göttinger Vorlesungsankündigungen[58] zeigen, dass im Laufe des 18. Jahrhunderts weitere Lehrer für die mathematischen Wissenschaften angestellt wurden und Vorlesungen angekündigt wurden, die über den propädeutischen Charakter hinausgingen, beispielsweise Vorlesungen zur Analysis und zu den Kriegswissenschaften. Das Anwachsen der Anzahl an mathematischen Dozenten und die damit einhergehende Spezialisierung der angebotenen Vorlesungen konnte auch Kühn durch die Analyse der Leipziger Adresskalender des Zeitraums von 1755 bis 1773/74 feststellen. Ihre Untersuchung ergab nicht nur, dass in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts die Mathematikprofessuren an deutschen Universitäten um 24 % zugenommen haben, sondern auch, dass sich die Mathematik von ihrer Verbindung mit anderen Fächern löste.[59] Hieraus kann abgeleitet werden, dass sich die Mathematik allmählich als eine eigenständige Wissenschaft präsentierte, wobei durch die gesteigerte Anzahl von Professuren speziellere Vorlesungen zur Mathematik angeboten werden konnten. Diese Entwicklung kann mit einem gesteigerten Bedarf an mathematischen Vorlesungen, die über die elementaren Kenntnisse hinausgingen, erklärt werden. Allerdings scheint diese Entwicklung nicht an allen deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts so gewesen zu sein. Im Folgenden wird ein kurzer Vergleich zwischen den Vorlesungen der Universitäten Göttingen und Heidelberg im WS 1797/98 angestellt.[60] Es gibt sowohl hinsichtlich der Anzahl der Lehrpersonen als auch der Anzahl und Vielfalt der angebotenen mathematischen Vorlesungen einige Unterschiede. In Göttingen waren 13 Personen für die mathematischen Wissenschaften zuständig, in Heidelberg nur drei. Deswegen konnten in Göttingen viel mehr und differenzierte Mathematikvorlesungen angeboten werden als in Heidelberg (siehe Abbildung 1 und Abbildung 2).

Es muss erwähnt werden, dass es sich bei der Universität Heidelberg um eine kleine Universität (etwa 100 bis 200 Studenten) handelte, im Gegensatz zur großen Universität Göttingen (bis 1000 Studenten).[61] Dennoch kann der Vergleich der beiden Vorlesungsverzeichnisse Aufschluss über die Verhältnisse an deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts geben. In dieser Zeit waren bereits Veränderungen spürbar, die den propädeutischen Charakter der philosophischen Fakultät betreffen. Die philosophische Fakultät und die unter ihr versammelten Disziplinen wurden gleichberechtigt, was von der Universität Göttingen ausging, aber erst

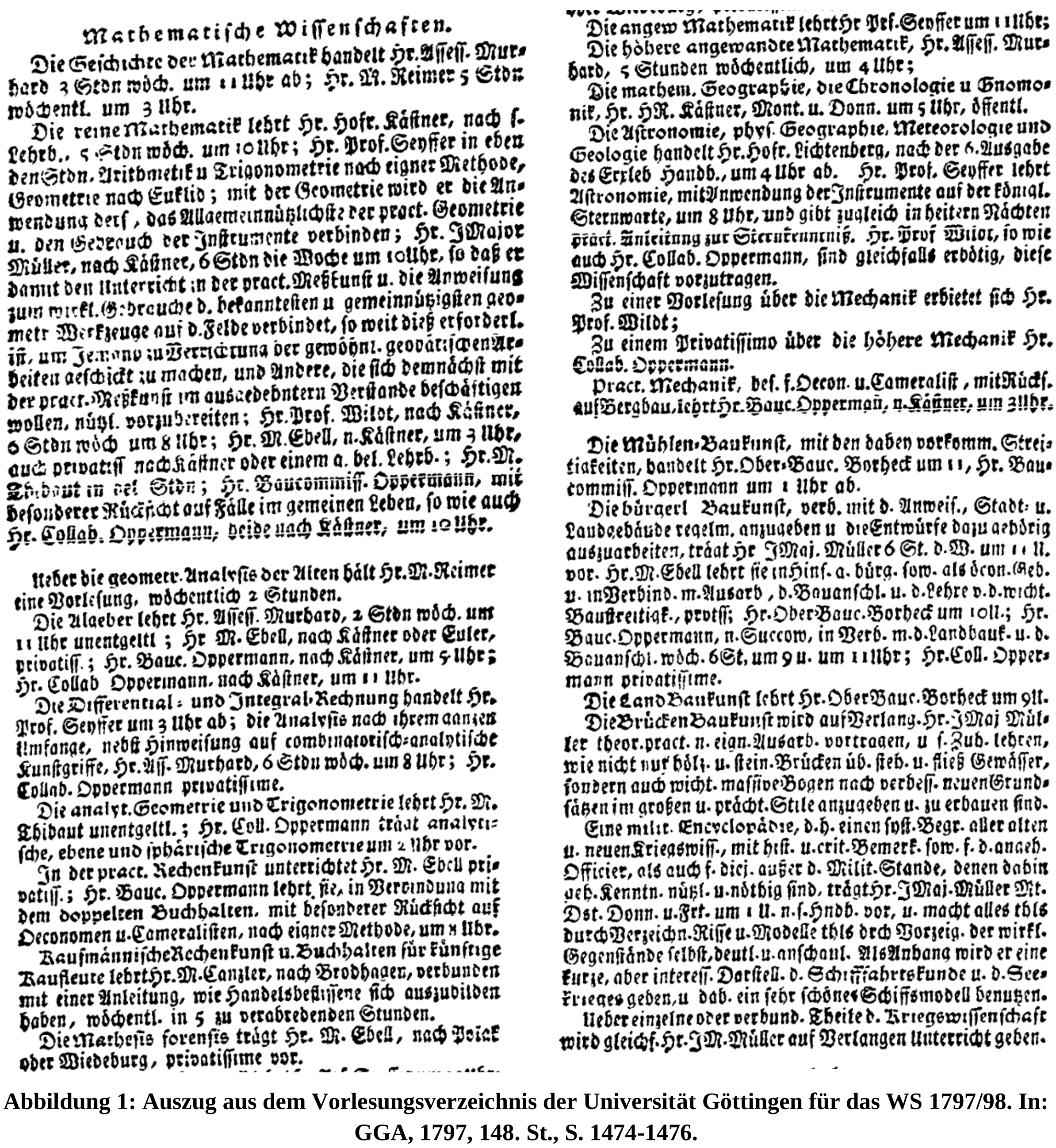
[58] Sie sind in den *Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen* (GGA) zu finden. Diese Rezensionszeitschrift wurde ab 1739 unter dem Titel *Göttingische Zeitung(en) von gelehrten Sachen* herausgegeben. Von 1753 bis 1801 trug sie den Titel *Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen*. Seit 1802 heißt die Zeitschrift *Göttingische Gelehrte Anzeigen*.

[59] Vgl. Kühn, S. 39.

[60] Die Vorlesungsverzeichnisse der Universität Heidelberg seit dem WS 1784 sind zu finden unter http://unihdvorlesungen1784-1930.uni-hd.de (8.5.2014).

[61] Vgl. Schindling, Die protestantischen Universitäten. In: Hammerstein, Universitäten und Aufklärung, S. 13.

vollkommen mit der Berliner Reform von 1810 realisiert werden konnte.[62] In Hinblick auf die Mathematik können wir diese Aussage bestätigen. Göttingen nahm nicht nur im Vergleich mit anderen Universitäten bezüglich der Anzahl der Lehrpersonen und der Vorlesungen, die weit über den propädeutischen Charakter hinausgingen, eine Führungsposition ein, sondern es war auch eine deutliche Veränderung an der Universität Göttingen selbst im Laufe des 18. Jahrhunderts spürbar. Während wir im WS 1797/98 13 Dozenten für die Mathematik finden, waren es im SS 1756, als Kästner seine Lehrtätigkeit an der Georgia Augusta aufnahm, nur sechs Personen. Auch das Vorlesungsangebot war im SS 1756 nicht so umfangreich wie am Ende des 18. Jahrhunderts (siehe Abbildung 3), aber dennoch umfangreicher als an der Universität Heidelberg am Ende des 18. Jahrhunderts.



Mathematische Wissenschaften.

Die Geschichte der Mathematik handelt Hr. Assess. Murhard 3 Stdn wöch. um 11 Uhr ab; Hr. M. Reimer 5 Stdn wöchentl. um 3 Uhr.

Die reine Mathematik lehrt Hr. Hofr. Kästner, nach s. Lehrb., 5 Stdn wöch. um 10 Uhr; Hr. Prof. Seyffer in eben den Stdn. Arithmetik u Trigonometrie nach eigner Methode, Geometrie nach Euklid; mit der Geometrie wird er die Anwendung ders, das Allgemeinnützlichste der pract. Geometrie u. den Gebrauch der Instrumente verbinden; Hr. I. Major Müller, nach Kästner, 6 Stdn die Woche um 10 Uhr, so daß er damit den Unterricht in der pract. Meßkunst u. die Anweisung zum wirkl. Gebrauche d. bekanntesten u gemeinnützigsten geometr Werkzeuge auf d. Felde verbindet, so weit dieß erforderl. ist, um Jemand zu Verrichtung der gewöhnl. geodätischen Arbeiten geschickt zu machen, und Andere, die sich demnächst mit der pract. Meßkunst im ausgedehntern Verstande beschäftigen wollen, nützl. vorzubereiten; Hr. Prof. Wildt, nach Kästner, 6 Stdn wöch um 8 Uhr; Hr. M. Ebell, n. Kästner, um 3 Uhr, auch privatiss nach Kästner oder einem a. bel. Lehrb.; Hr. M. Thibaut in del. Stdn; Hr. Baucommiss. Oppermann, mit besonderer Rücksicht auf Fälle im gemeinen Leben, so wie auch Hr. Collab. Oppermann, beide nach Kästner, um 10 Uhr.

Ueber die geometr. Analysis der Alten hält Hr. M. Reimer eine Vorlesung, wöchentlich 2 Stunden.

Die Algeber lehrt Hr. Assess. Murhard, 2 Stdn wöch. um 11 Uhr unentgeltl; Hr M. Ebell, nach Kästner oder Euler, privatiss.; Hr. Bauc. Oppermann, nach Kästner, um 5 Uhr; Hr. Collab Oppermann, nach Kästner, um 11 Uhr.

Die Differential- und Integral-Rechnung handelt Hr. Prof. Seyffer um 3 Uhr ab; die Analysis nach ihrem ganzen Umfange, nebst Hinweisung auf combinatorisch-analytische Kunstgriffe, Hr. Ass. Murhard, 6 Stdn wöch. um 8 Uhr; Hr. Collab. Oppermann privatissime.

Die analyt. Geometrie und Trigonometrie lehrt Hr. M. Thibaut unentgeltl.; Hr. Coll. Oppermann trägt analytische, ebene und sphärische Trigonometrie um 2 Uhr vor.

In der pract. Rechenkunst unterrichtet Hr. M. Ebell privatiss.; Hr. Bauc. Oppermann lehrt sie, in Verbindung mit dem doppelten Buchhalten, mit besonderer Rücksicht auf Oeconomen u. Cameralisten, nach eigner Methode, um 8 Uhr.

Kaufmännische Rechenkunst u. Buchhalten für künftige Kaufleute lehrt Hr. M. Canzler, nach Brodhagen, verbunden mit einer Anleitung, wie Handelsbeflissene sich auszubilden haben, wöchentl. in 5 zu verabredenden Stunden.

Die Mathesis forensis trägt Hr. M. Ebell, nach Polack oder Wiedeburg, privatissime vor.

Die angew Mathematik lehrt Hr Prf. Seyffer um 11 Uhr;

Die höhere angewandte Mathematik, Hr. Assess. Murhard, 5 Stunden wöchentlich, um 4 Uhr;

Die mathem. Geographie, die Chronologie u Gnomonik, Hr. HR. Kästner, Mont. u. Donn. um 5 Uhr, öffentl.

Die Astronomie, phys. Geographie, Meteorologie und Geologie handelt Hr. Hofr. Lichtenberg, nach der 6. Ausgabe des Erxleb Handb., um 4 Uhr ab. Hr. Prof. Seyffer lehrt Astronomie, mit Anwendung der Instrumente auf der königl. Sternwarte, um 8 Uhr, und gibt zugleich in heitern Nächten pract. Anleitung zur Sternkenntniß. Hr. Prof Wildt, so wie auch Hr. Collab. Oppermann, sind gleichfalls erbötig, diese Wissenschaft vorzutragen.

Zu einer Vorlesung über die Mechanik erbietet sich Hr. Prof. Wildt;

Zu einem Privatissimo über die höhere Mechanik Hr. Collab. Oppermann.

Pract. Mechanik, bes. f. Oecon. u. Cameralist, mit Rücks. auf Bergbau, lehrt Hr. Bauc. Oppermann, n. Kästner, um 3 Uhr.

Die Mühlen-Baukunst, mit den dabey vorkomm. Streitigkeiten, handelt Hr. Ober-Bauc. Borheck um 11, Hr. Baucommiss. Oppermann um 1 Uhr ab.

Die bürgerl Baukunst, verb. mit d. Anweis., Stadt- u. Landgebäude regelm. anzugeben u die Entwürfe dazu gehörig auszuarbeiten, trägt Hr I. Maj. Müller 6 St. d. W. um 11 U. vor. Hr. M. Ebell lehrt sie in Hins. a. bürg. sow. als öcon. Geb. u. in Verbind. m. Ausarb, d. Bauanschl. u. d. Lehre v. d. wicht. Baustreitigk., privtiss; Hr. Ober-Bauc. Borheck um 10 U.; Hr. Bauc. Oppermann, n. Succow, in Verb. m. d. Landbauk. u. d. Bauanschl. wöch. 6 St, um 9 u. um 11 Uhr; Hr. Coll. Oppermann privatissime.

Die Land-Baukunst lehrt Hr. Ober-Bauc. Borheck um 9 U.

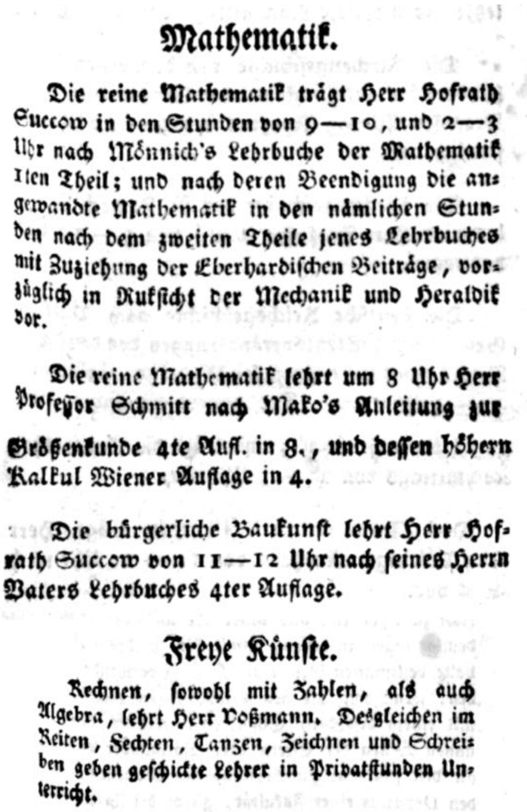
Die Brücken-Baukunst wird auf Verlang. Hr. I. Maj Müller theor. pract. n. eign. Ausarb. vortragen, u s. Zuh. lehren, wie nicht nur hölz. u. stein. Brücken üb. steh. u. fließ Gewässer, sondern auch wicht. massive Bogen nach verbess. neuen Grundsätzen im großen u. prächt. Stile anzugeben u. zu erbauen sind.

Eine milit. Encyclopädie, d. h. einen syst. Begr. aller alten u. neuen Kriegswiss., mit hist. u. crit. Bemerk. sow. f. d. angeh. Officier, als auch f. diej. außer d. Milit. Stande, denen dabin geh. Kenntn. nützl. u. nöthig sind, trägt Hr. I. Maj. Müller Mt. Dst. Donn. u. Frt. um 1 U. n. s. Hndb. vor, u. macht alles thls durch Verzeichn. Risse u. Modelle thls drch Vorzeig. der wirkl. Gegenstände selbst, deutl. u. anschaul. Als Anhang wird er eine kurze, aber interess. Darstell. d. Schiffahrtskunde u. d. Seekrieges geben, u dab. ein sehr schönes Schiffsmodell benutzen.

Ueber einzelne oder verbund. Theile d. Kriegswissenschaft wird gleichf. Hr. I. M. Müller auf Verlangen Unterricht geben.

Abbildung 1: Auszug aus dem Vorlesungsverzeichnis der Universität Göttingen für das WS 1797/98. In: GGA, 1797, 148. St., S. 1474-1476.

[62] Vgl. Schindling, Die protestantischen Universitäten. In: Hammerstein, Universitäten und Aufklärung, S. 17.



Mathematik.

Die reine Mathematik trägt Herr Hofrath Succow in den Stunden von 9—10, und 2—3 Uhr nach Mönnich's Lehrbuche der Mathematik 1ten Theil; und nach deren Beendigung die angewandte Mathematik in den nämlichen Stunden nach dem zweiten Theile jenes Lehrbuches mit Zuziehung der Eberhardischen Beiträge, vorzüglich in Rukficht der Mechanik und Heraldik vor.

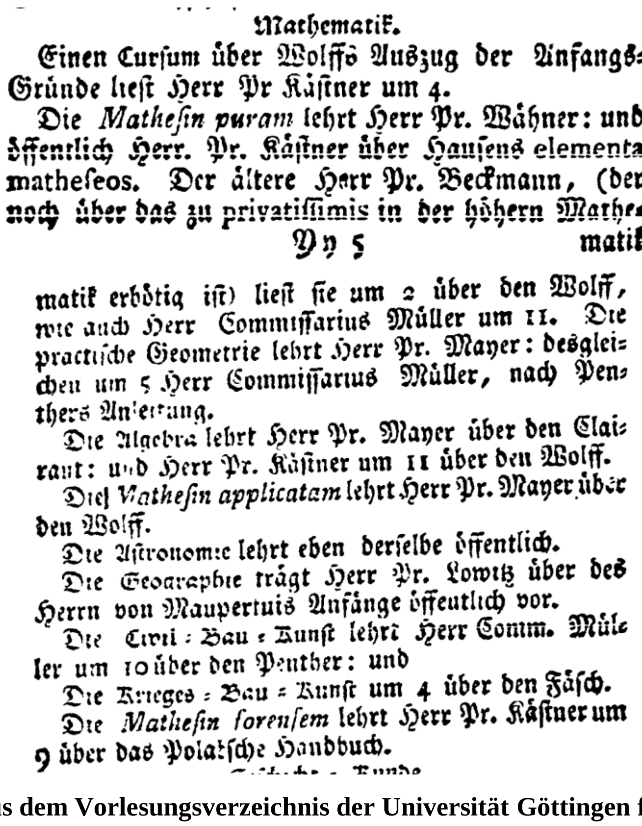
Die reine Mathematik lehrt um 8 Uhr Herr Professor Schmitt nach Mako's Anleitung zur Größenkunde 4te Aufl. in 8., und dessen höhern Kalkul Wiener Auflage in 4.

Die bürgerliche Baukunst lehrt Herr Hofrath Succow von 11—12 Uhr nach seines Herrn Vaters Lehrbuches 4ter Auflage.

Freye Künste.

Rechnen, sowohl mit Zahlen, als auch Algebra, lehrt Herr Voßmann. Desgleichen im Reiten, Fechten, Tanzen, Zeichnen und Schreiben geben geschickte Lehrer in Privatstunden Unterricht.

Abbildung 2: Auszug aus dem Vorlesungsverzeichnis der Universität Heidelberg für das WS 1797/98, S. 11 f. und S. 15.



Mathematik.

Einen Cursum über Wolffs Auszug der Anfangs-Gründe liest Herr Pr Kästner um 4.

Die *Mathesin puram* lehrt Herr Pr. Wähner: und öffentlich Herr. Pr. Kästner über Hausens elementa matheseos. Der ältere Herr Pr. Beckmann, (der noch über das zu privatissimis in der höhern Mathe-

Yy 5 matik

matik erbötig ist) liest sie um 2 über den Wolff, wie auch Herr Commissarius Müller um 11. Die practische Geometrie lehrt Herr Pr. Mayer: desgleichen um 5 Herr Commissarius Müller, nach Penthers Anleitung.

Die Algebra lehrt Herr Pr. Mayer über den Clairaut: und Herr Pr. Kästner um 11 über den Wolff.

Die *Mathesin applicatam* lehrt Herr Pr. Mayer über den Wolff.

Die Astronomie lehrt eben derselbe öffentlich.

Die Geographie trägt Herr Pr. Lowitz über des Herrn von Maupertuis Anfänge öffentlich vor.

Die Civil-Bau-Kunst lehrt Herr Comm. Müller um 10 über den Penther: und

Die Krieges-Bau-Kunst um 4 über den Fäsch.

Die *Mathesin forensem* lehrt Herr Pr. Kästner um 9 über das Polatsche Handbuch.

Abbildung 3: Auszug aus dem Vorlesungsverzeichnis der Universität Göttingen für das SS 1756. In: GGA, 1756, 45. St., S. 377 f.

Der Stellenwert der Mathematik hängt eng mit dem Ansehen der jeweiligen Professoren zusammen. Die Lehrstühle in der philosophischen Fakultät waren noch nicht gleichberechtigt gegenüber den Lehrstühlen in den anderen Fakultäten und galten für viele Dozenten lediglich als Durchlaufstation, bis sie eine Anstellung in einer der drei höheren Fakultäten erhielten.[63] Die Lehrstühle in der philosophischen Fakultät wurden erst im 18. Jahrhundert als vollwertige Lehramtspositionen anerkannt.[64] Einhergehend mit der minderen Stellung der Professuren in der philosophischen Fakultät gingen auch geringere Gehälter als in der „höheren“ Fakultäten einher.[65] Für die Universität Leipzig liegen uns einige Briefe vor, in denen Professoren um finanzielle Unterstützung für die Anschaffung von Büchern und Anschauungsmaterialien baten.[66] Oftmals reichte das Lehramt als einzige Einkommensquelle nicht aus, so dass sich die Professoren um weitere Einnahmen, beispielsweise aus Publikationen, bemühen mussten. An den Universitäten Halle und Göttingen wurden die Professuren der philosophischen Fakultät recht früh aufgewertet, was vor allem durch die Steigerung der Gehälter geschah.[67] Auf diese Weise mussten sich die Professoren nicht mehr um weitere finanzielle Einnahmen bemühen, sondern konnten sich vollkommen ihrem Fach widmen und leistungsfähiger sein.

Neben den dargestellten institutionellen Bedingungen ermöglichen uns einige Ausführungen der „Anfangsgründe“-Autoren in den Vorreden ihrer Werke interessante Rückschlüsse auf das Ansehen der Mathematik zu ziehen. Hier wird deutlich, dass zu Beginn des 18. Jahrhunderts die Mathematik eine Aufwertung erfahren haben muss. So schreibt Wolff in der Vorrede zur ersten Auflage seiner *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften* (1710), dass „der große und vielfältige Nutzen […] in unsern Tagen die mathematischen Wissenschaften so beliebt gemacht [hat], daß sie wol niemals in so hohem Werthe gewesen, und mit solchem Eifer getrieben worden sind“[68]. Diese Entwicklung zog sich offensichtlich durch das gesamte 18. Jahrhundert, denn Clemm äußerte sich positiv überrascht darüber, dass er bereits nach drei Jahren eine zweite Auflage seines *Mathematischen Lehrbuchs* veröffentlichten musste und sah dies als Beleg dafür an, „daß das teutsche Publicum die mathematischen Wissenschaften heut zu Tag besonders hochschätze“[69].

Womit ist das gesteigerte Ansehen der Mathematik zu begründen? In den Ausführungen der „Anfangsgründe“-Autoren begegnen uns vor allem zwei Argumente für das Erlernen der mathematischen Wissenschaften. Dies ist zum einen die Nützlichkeit der Mathematik für sämtliche Wissenschaften und das alltägliche Leben, was vor allem im 17. Jahrhundert betont wurde. Zum anderen erwähnen die Lehrbuchautoren den Stellenwert der Mathematik für die Verstandesbildung im Allgemeinen. Über die Mathematik als Mittel zur Denkschulung und Verstandesschärfung wurde bereits vor dem 18. Jahrhundert diskutiert.[70]

Wolff sieht den Nutzen der Mathematik nicht nur für andere Wissenschaften und für die Naturerkenntnis, sondern auch in der Ausbildung des Verstandes. Er betont in seiner Vorrede zur ersten Auflage der *Anfangs=Gründe*, dass man mit Hilfe der Algebra und der höheren

[63] Vgl. hierzu und zum Folgenden Turner, University Reformers. In: Stone, S. 499.
[64] Vgl. Vandermeersch, Die Universitätslehrer. In: Rüegg, Bd. 2, S. 203.
[65] Vgl. hierzu und zum Folgenden Turner, University Reformers. In: Stone, S. 499.
[66] Vgl. Kühn, S. 112 f.
[67] Vgl. Vandermeersch, Die Universitätslehrer. In: Rüegg, Bd. 2, S. 212.
[68] Wolff, AG 1, Vorrede, S. a4[r].
[69] Clemm, ML 1, Vorrede zur zweyten Ausgabe, S.)( )(.
[70] Vgl. Kühn, S. 47.

Geometrie alles ergründen könne.[71] Auch die angewandten mathematischen Wissenschaften lässt er nicht unbeachtet, wenn er schreibt, dass die Astronomie und Geographie als Beispiele dafür dienen, dass sich mit Hilfe der Mathematik alles erkennen und ausmessen lasse. In erster Linie scheint es Wolff allerdings um die Verbreitung der Mathematik als Mittel zur Verstandesschärfung zu gehen: „Derowegen ist kein gewisserer Weg zur Erkäntniß der Kräfte des menschlichen Verstandes zu gelangen, als wenn man mit Ernst die mathematischen Wissenschaften treibet, und, weil man eine Fertigkeit nicht anders als durch stete Uebung erhalten kan, ist dieses zugleich das sicherste Mittel zu hurtigen Gebrauche der Vernunft, so wohl in Erfindung der noch verborgenen, als in Beurtheilung der bereits erfundenen Wahrheiten, zu gelangen, und sich von der schädlichen Herrschaft der Imagination zu befreyen, das ist, alle Irrthümer und Vorurtheile glücklich zu vermeiden“[72]. Dieses Ziel sollte vor allem mit Hilfe der mathematischen Lehrart[73] erreicht werden, denn „die mathematische Lehr=Art giebt den rechten Gebrauch der Vernunft zu erkennen; wie man nemlich zu klaren, deutlichen und vollständigen Begriffen gelange, und daraus ohne Anstoß die übrigen Sachen herleite“[74]. Wolffs Ausführungen spiegeln nicht nur das gesteigerte Ansehen der Mathematik zu Beginn des 18. Jahrhunderts wider, sondern auch ihren Nutzen in vielfältiger Hinsicht. Sein Fokus auf die Verstandesschärfung zeugt davon, dass nicht mehr der vielfältige Nutzen der Mathematik für andere Wissenschaften, Gewerbe und Handel im Vordergrund stand, sondern die Mathematik als Mittel zur Verstandesschärfung gelehrt werden sollte. Diese Entwicklung wurde sicherlich durch die Aufklärung verstärkt, deren Wahlspruch Immanuel Kant (1724-1804) formulierte: „Sapere aude! Habe Muth dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!“[75]. Man sollte sich seines eigenen Verstandes bedienen und keine Lehren unhinterfragt annehmen.

Da in allen von uns betrachteten Lehrbüchern Ausführungen über die Bedeutung und den weitreichenden Nutzen der Mathematik zu finden sind, scheint dies ein besonderes Anliegen der Verfasser gewesen zu sein. Allem Anschein nach gingen solche Argumente für das Erlernen der Mathematik mit dem Bestreben einher, diese Wissenschaft als eigenständiges Fach zu etablieren. Bei einem solchen Ziel ist es wichtig, dass Einigkeit darüber bestand, welche Inhalte zur Mathematik zählten und vermittelt werden sollten. Als ein solcher Versuch können die von uns ausgewählten umfangreichen „Anfangsgründe“ angesehen werden, die sämtliche mathematische Wissenschaften enthalten. Hier sieht man nicht nur die ungeheure Spannweite der Mathematik, sondern auch ihre Nützlichkeit für verschiedene Verrichtungen des menschlichen Lebens. Durch die Veröffentlichung und Verbreitung solcher Lehrwerke war es möglich, dass andere Lehrer diese Lehrbücher für ihre eigenen Lehrstunden verwenden konnten. Auf diese Weise wurde eine weitgehend einheitliche Lehre vor allem an deutschen Universitäten ermöglicht. In diesem Punkt kommt Wolff eine besondere Stellung zu, der mit seinen *Anfangs=Gründen* einen ungeheuren Einfluss auf die Verbreitung der Mathematik vor allem an deutschen Universitäten gehabt zu haben schien. Kästner würdigt Wolffs Verdienste, wenn er über Wolffs *Anfangs=Gründe* schreibt: „Sein Verfasser [Wolff] suchte zuerst nach dem

[71] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, AG 1, Vorrede, S. a4^{r}.
[72] Wolff, AG 1, Vorrede, S. a5^{r}.
[73] Näheres zur mathematischen Lehrart siehe Kapitel 3.3.3.
[74] Wolff, AG 1, Vorrede, S. a4^{v}.
[75] Kant, Beantwortung der Frage: Was ist Aufklärung?. In: Kant, Gesammelte Schriften, Bd. VIII, S. 35.

Anfange, den der ältere Sturm[76] gemacht hatte, die Mathematik unter den Deutschen auszubreiten, und er durfte also von einer Wissenschaft, die dem gemeinen Haufen der deutschen Studenten und Professoren kaum dem Nahmen nach bekannt war, nur wenig, und nur das leichteste vortragen“[77]. „Es [Deutschland] hat ihm [Wolff] für die Ausbreitung der Vernunft, und der Mathematik, die einen so grossen Theil der Vernunft ausmacht, sehr vieles zu danken“[78]. Kästner sieht sich in der Tradition Wolffs und möchte mit seinen *Anfangsgründen* zur Ausbreitung mathematischer Kenntnisse beitragen. Er betont nicht nur die Wichtigkeit der reinen Mathematik zur Ausübung und zum Verständnis der angewandten Mathematik, sondern auch die Mathematik als Mittel zur Verstandesschärfung.[79]

Obwohl das Ansehen der mathematischen Wissenschaften zu Beginn des 18. Jahrhunderts gestiegen war, hatten vergleichsweise wenige Personen Kenntnisse der Mathematik, was mit schlecht besuchten mathematischen Vorlesungen einherging. Während Wolffs Tätigkeit als Professor an der Universität Leipzig gab es nur wenige Zuhörer, die Mathematikvorlesungen besuchten.[80] Kästner beschreibt in seiner Selbstbiographie die Umstände während seiner Studienzeit in Leipzig, dass „Hausen[81] […] über seine Elementa öffentlich [las], denn die Arithmetic, die darinne enthalten ist, die euklidische Geometrie und die Kegelschnitte wollte niemand gegen Geld hören, und selbst umsonst, verlangten sie manchmal nur drey zu wissen“[82]. In seinem Entlassungsgesuch an die Universität Leipzig schreibt er, dass er in Leipzig jährlich 16 bis 20 Studenten die Mathematik beigebracht habe.[83] Möglicherweise war das recht geringe Interesse an der Mathematik an der Universität Leipzig ein Grund für Kästners Entscheidung für die Universität Göttingen, wo er sich mehr von der Mathematik erhoffte, denn er wollte „lieber Neigung und Pflicht vereinigen, als Nahmen und Einkünfte“[84]. Auch im letzten Drittel des 18. Jahrhunderts scheinen sich vergleichsweise wenige Studenten für die Mathematik interessiert zu haben. So schreibt Karsten in der Vorrede seiner *Anfangsgründe*, dass sich nur wenige Studenten bei ihm eingefunden hätten, die mehr als ein Semester die reine Mathematik erlernen wollten.[85]

Kästners *Commentarius über eine Stelle des Varro von einer der Ursachen warum die Mathematik in Deutschland immer noch für unnütz gehalten wird* (1768) gewährt uns einen tieferen Einblick in das Ansehen der Mathematik sowie in mathematische Vorlesungen. Kästner nimmt Bezug auf eine Schrift des römischen Gelehrten Marcus Terentius Varro, in der es heißt, dass man von der Mathematik nicht genug lernen könne, um einen praktischen Nutzen daraus zu ziehen. Auf diese Aussage geht Kästner mit Bezug auf das Bildungssystem ein und schreibt, dass die Mathematik „in Deutschland so wenige lernen wollen, weil sie eine unnütze und brodlose Kunst seyn soll“[86]. Kästner sieht das Problem in der Struktur der Mathematikvorlesungen an den Universitäten selbst. Diejenigen Studenten, die sich neben ihren Studien

[76] Gemeint ist Johann Christoph Sturm (1635-1703).
[77] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^r.
[78] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^v.
[79] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^r.
[80] Vgl. Kühn, S. 112.
[81] Gemeint ist Christian August Hausen (1693-1743). Zu Hausen siehe Jöcher, Sp. 1408.
[82] Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 52.
[83] Vgl. Brief von Kästner an Holzendorff vom 14.8.1755. In: Kästner, Briefe, S. 36 f.
[84] Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 61
[85] Vgl. Karsten, AG 1, Vorrede, S. X.
[86] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 40.

noch mit der Mathematik befassen, würden meist nur ein Semester lang die reine Mathematik hören.[87] Es gebe auch Studenten, die sich noch ein weiteres Semester mit der angewandten Mathematik beschäftigen; doch ein halbes Jahr sei zu wenig Zeit, die angewandte Mathematik umfassend und nutzbringend zu erlernen.[88] Damit kritisiert Kästner implizit das Bildungssystem, in dem der Mathematik für sein Empfinden zu wenig Zeit eingeräumt wurde. In seinen *Anfangsgründen der angewandten Mathematik* äußert sich Kästner ebenfalls über entsprechende Vorlesungen: Den zweiten Teil der mathematischen Vorlesungen bildet die angewandte Mathematik, die in einem Semester erlernt werden sollte.[89] Hieraus können wir ableiten, dass es an deutschen Universitäten üblich war, nach Vorlesungen zur reinen Mathematik noch für ein weiteres Semester Vorlesungen zur angewandten Mathematik zu hören. Es gab anscheinend auch Studenten, die Vorlesungen zur angewandten Mathematik noch vor denen zur reinen Mathematik besuchten, was darauf hindeutet, dass die Reihenfolge der zu besuchenden mathematischen Vorlesungen nicht festgelegt war, denn Kästner schreibt: „[…] von denjenigen, welche die angewandte Mathematik zuerst lernen, darf man keine Fertigkeit in den Kunstgriffen der Analysis fodern: dagegen können sie auch nicht erwarten, daß man ihnen Erfindungen gründlich vortragen soll, die diese Kunstgriffe zum voraus setzen, oder wenigstens ohne dieselben mit grösserer Weitläufigkeit müssen erkläret werden“[90]. Kästners Ausführungen deuten darauf hin, dass sowohl der Umfang als auch die Reihenfolge der mathematischen Vorlesungen, die an deutschen Universitäten besucht werden sollten, entweder nicht fest geregelt waren oder die Regelungen nicht genau eingehalten wurden.

Karsten bezieht sich in der Vorrede zum ersten Teil seines *Lehrbegrifs* auf Kästners *Commentarius* und verknüpft die darin enthaltenen und von uns oben präsentierten Bemerkungen mit der Absicht, die er mit seinem eigenen Lehrbuch verfolgt: „Vielleicht würden wenigstens einige mehr lernen, wenn man in der Art, wie diese Wissenschaft auf Universitäten getrieben wird, einige Aenderungen machte, und die Einrichtung der Lehrbücher selbst in einigen Stücken geändert würde“[91]. Auch Karsten sah, wie Kästner, das Problem darin, wie die mathematischen Vorlesungen an Universitäten angelegt waren. Darüber hinaus sah er aber auch Veränderungsbedarf bei den Lehrbüchern.[92] Er verzichtete bei seinen Ausführungen bewusst auf den Terminus „verbessern“, da er die Verdienste der Autoren nicht tadeln möchte. Vielmehr möchte er dadurch die Unterschiede zu seinem Lehrbuch aufzeigen.

Dass nicht für alle mathematischen Themen Zeit an den deutschen Universitäten vorgesehen wurde, zeigt Kästners Anmerkung im zweiten Band seiner *Anfangsgründe*, der unter dem Titel *Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherley Geschäffte* erschien. Hier rechtfertigt Kästner die Veröffentlichung dieses Lehrbuchs, da für die Anwendungen der Rechenkunst nicht genügend Zeit in den mathematischen Lehrstunden bleibe.[93] Zwar gebe es laut Kästner bereits Bücher zu Anwendungen der Arithmetik, allerdings kritisiert er diese hin-

[87] Vgl. Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 40.
[88] Vgl. Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 41.
[89] Vgl. Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *2^r.
[90] Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *3^v.
[91] Karsten, L 1, Vorrede, o. S.
[92] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, Vorrede, o. S.
[93] Vgl. Kästner, AG 1.2., Vorrede, S. iii.

sichtlich der Deutlichkeit und der Entwicklung der Begriffe ebenso wie der Schärfe der Beweise.[94]

Im Allgemeinen herrschte Einigkeit über den Nutzen der Mathematik als Mittel zur Vorbereitung zu weiteren Studien, zur Vermittlung von Erkenntnissen, zur Verstandesbildung, Korrektheit, Beständigkeit und Unbestechlichkeit.[95] Diese Aspekte passen zum Charakter der Aufklärung, der es unter anderem um die Wissensverbreitung und um eigenständiges Denken ging. Dass die Lehrbuchautoren dies in ihren Lehrbüchern betonten, zeugt davon, dass sie auch Anfängern der Mathematik die Vorzüge dieser Wissenschaft präsentieren wollten. Es scheint also um die Rechtfertigung gegenüber Studenten oder Schülern zu gehen, die mit dem mathematischen Unterricht beginnen. Es wäre interessant, allerdings nur schwer möglich, herauszufinden, ob die hier betrachteten Lehrbuchautoren mit ihren Ausführungen zu der Entwicklung beitrugen, die Mathematik an deutschen Schulen bekannter zu machen und die Mathematik als eigenständiges Fach zu etablieren. Somit können die Argumente für das Erlernen dieser Wissenschaft als Legitimation der Mathematik als Unterrichtsfach angesehen werden.

1.2.2 Mathematische Lehrbücher

Monographien und Lehrbücher bilden einen beachtlichen Teil der mathematischen Literatur, wobei allerdings nur Lehrbücher Rückschlüsse auf die mathematische Lehre erlauben. Aus diesem Grund wird hier auf eine Schilderung der Entwicklung der mathematischen Literatur im Gesamten verzichtet und der Fokus auf die Lehrbücher gelegt. Unsere Betrachtungen sollen einen Beitrag dazu leisten, den Erfolg der in dieser Arbeit betrachteten „Anfangsgründe“ zu erklären. Bereits durch unsere Suche nach mathematischen Lehrbüchern sowie deren Sammlung konnten wir feststellen, dass ihre Anzahl ab der Mitte des 18. Jahrhunderts zunahm. Diese Entwicklung zeigte bereits Wagner (1985) auf, der eine Quantifizierung der Naturwissenschaften vornahm. Für die Mathematik stellt die *Bibliotheca Mathematica* (2 Bde., 1797/98), auch bekannt unter dem Titel *Litteratur der mathematischen Wissenschaften*, von Friedrich Wilhelm August Murhard[96] (1778-1853) seine Quelle dar, in der die internationale mathematische Literatur bis zum Jahr 1790 systematisch aufgeführt wird. Die Anzahl der gedruckten mathematischen Werke nahm nach der Erfindung des Buchdrucks schlagartig zu.[97] Vor allen zu den Themen Algebra, Infinitesimalrechnung, Geometrie, Geodäsie und Wahrscheinlichkeitsrechnung stieg die Anzahl der entsprechenden Werke im 18. Jahrhundert an, was eng mit den Fortschritten in diesen Bereichen zusammenhängt. Interessant ist auch, dass die Anzahl der mathematischen Lehrbücher zu dieser Zeit exponentiell wuchs. Abbildung 4 zeigt die zeitliche Entwicklung der Anzahl gedruckter mathematischer Lehrbücher.

[94] Vgl. Kästner, AG 1.2., Vorrede, S. iv.
[95] Vgl. Kühn, S. 52.
[96] Bei Wagner wird fälschlicherweise Karl Murhard als Autor genannt; vgl. Wagner, S. 115 f.
[97] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wagner, S. 115 f.

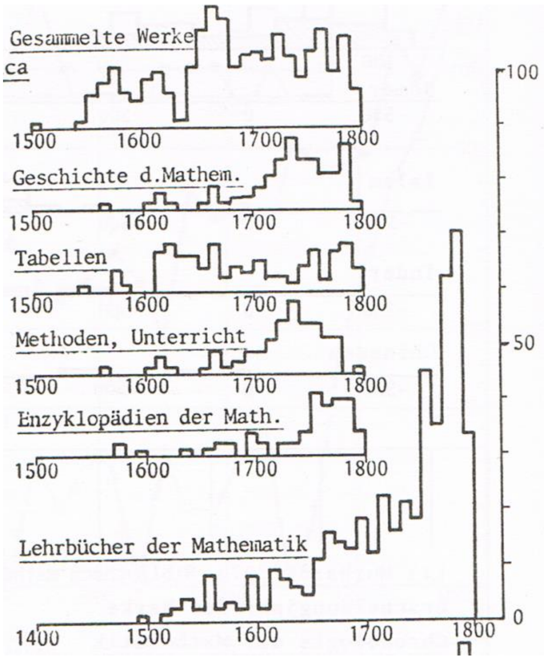


Abbildung 4: Ausschnitt aus Wagner, Abb. 37, Chronologie von Mathematikbüchern, o. S.

Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten „Anfangsgründe" waren nicht die ersten mathematischen Lehrwerke, die in deutscher Sprache geschrieben wurden. Zuvor gab es bereits deutschsprachige Lehrbücher, die für einen bestimmten Personenkreis gedacht waren und sich somit nur auf eine bestimmte Disziplin beschränkten. Hierzu gehören in erster Linie die Rechenbücher[98] ab dem 16. Jahrhundert, die primär für Handwerker, Praktiker und Kaufleute geschrieben und an Rechenschulen verwendet wurden.[99] Die Lehrbücher sollten nicht theoretisches, sondern praktisch-nützliches Wissen vermitteln. An den Universitäten selbst benutzten die Dozenten hauptsächlich lateinische Lehrbücher. Einige wenige deutschsprachige mathematische Lehrwerke sind bereits im 17. Jahrhundert aus Spezialvorlesungen hervorgegangen. Auf ebenfalls deutschsprachigen Vorlesungen basierend veröffentlichten Ambrosius Rhodius (1577-1633)[100] seine *Mathesis militaris Oder Kriegs Mathematic* (1623) und Christoph Nothnagel (1607-1666)[101] seine *Manuale Fortificatorium oder Kurzes Handbuechlein von der Vestungs-Bawkunst* (1659).[102] Allerdings handelt es sich bei diesen Schriften um Speziallehrbücher, so dass eine spezielle Adressatengruppe angenommen werden kann, beispielsweise Personen im Militärbereich. Diese Vermutung lässt sich auch mit den zeitlichen Umständen

[98] Als erstes deutschsprachiges Rechenbuch ist das *Bamberger Rechenbuch* (1483) von Ulrich Wagner anzusehen. Im 16. Jahrhundert folgten dann u. a. die bekannten Werke von Adam Ries; vgl. Pahl, S. 79 f.

[99] Vgl. Gerhardt, S. 27.

[100] Lebensdaten entnommen aus Schöneburg, Mathematische Lehrtätigkeit. In: Richter/Schöneburg, S. 46, Anm. 99.

[101] Lebensdaten entnommen aus Schöneburg, Mathematische Lehrtätigkeit. In: Richter/Schöneburg, S. 47, Anm. 101.

[102] Rhodius und Nothnagel waren Mathematikprofessoren an der Universität Wittenberg. Hier gab es zwei Professuren für Mathematik, nämlich eine für niedere und eine für höhere Mathematik. Rhodius bekleidete ab 1609 die Professur für niedere Mathematik, zwei Jahre später wurde er Professor für höhere Mathematik. Die Trennung zwischen der Professur für niedere und höhere Mathematik erfolgte im Jahr 1525; diese Aufteilung wurde 1536 bestätigt; 1785 wurden die beiden Professuren wieder zu einer Professur vereinigt; vgl. Schöneburg, Mathematische Lehrtätigkeit. In: Richter/Schöneburg, S. 15 und S. 44-47.

erklären, die von kriegerischen Auseinandersetzungen, vor allem durch den Dreißigjährigen Krieg (1618-1648), geprägt waren.

Es ist zu sehen, dass die aufgeführten Lehrbücher noch nicht sämtliche mathematische Disziplinen der entsprechenden Zeit umfassten. Als erstes Lehrbuch solcher Art kann das des deutschen Mathematikers Gaspar Schott SJ (1608-1666) ausgemacht werden, welches unter dem Titel *Cursus Mathematicus* (1661, ^{2}1674, ^{3}1677, ^{4}1699) veröffentlicht wurde. Das erste Lehrbuch in deutscher Sprache war die zweibändige *Mathesis Juvenilis* (1702/05, ^{2}1710/14) von Johann Christoph Sturm (1635-1703). Einen durchschlagenden Erfolg hatte allerdings erst Wolff mit seinen *Anfangs=Gründen*. Sie fanden schnell Einzug in die Universitäten und wurden als Vorlesungsgrundlage verwendet. In der zweiten Jahrhunderthälfte nahm die Anzahl an deutschsprachigen mathematischen Lehrbüchern zu. Umfassende Werke stammen unter anderem von Kästner, Karsten und Clemm. Aber auch zu einzelnen mathematischen Disziplinen findet man zunehmend deutschsprachige „Anfangsgründe“, wobei auf der anderen Seite die Zahl der lateinischen Bücher abnahm.

Die Entwicklung deutschsprachiger Lehrbücher deckt sich mit der These Paulsens, dass sich seit Ende des 17. Jahrhunderts ein Wandel im Bereich der deutschsprachigen und lateinischen Literatur vollzog.[103] Paulsen betrachtete hierzu das Werk *Codex nundinarius Germaniae literatae bisecularis* (2 Bde., 1850/77) von Karl Gustav Schwetschke (1804-1881), in dem der Verfasser die Messekataloge des deutschen Buchhandels von 1564 bis 1846 auswertete. Paulsen greift auf diese Analyse zurück um aufzuzeigen, wie sich die deutschsprachige Literatur im Vergleich zur lateinischen entwickelte. In der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts betrug der Anteil der lateinischen Werke 2/3 im Gegensatz zu 1/3 deutscher Literatur. In der Folgezeit nahmen die deutschsprachigen Werke zu, die lateinischen hingegen ab. Diese Entwicklung vollzog sich zunächst nur langsam, bis sie sich ab den 1670er Jahren beschleunigte. 1681 überwogen die deutschen Bücher erstmals, die lateinischen 1691 zum letzten Mal. Am Ende des 18. Jahrhunderts war das Verhältnis dann 1:20. Auch die französischsprachige Literatur hielt seit den 1740er Jahren vermehrt Einzug in Deutschland und erreichte in den 1770er Jahren ihren Höhepunkt, indem die französischsprachigen Werke 1/8 aller Werke, die in den Messekatalogen verzeichnet wurden, ausmachten. In deutscher Sprache gab es zuvor lediglich Kalender, Andachtsbücher, Flugschriften, Fabeln und weitere Literatur, die in erster Linie nicht für Gelehrte, sondern für das „gemeine Volk“ bestimmt waren. Im Bereich der wissenschaftlichen Literatur vollzog sich der Übergang ein wenig später, obwohl Latein noch lange Zeit für akademische Programme, Dissertationen, Reden und Schulübungen verwendet wurde. An dieser Darstellung erkennt man bereits die Adressatengruppe, die mit der Verwendung der jeweiligen Sprache verbunden ist. Schwetschke teilte die Literatur bis 1800 in sieben Gruppen auf, worunter sich auch eine Gruppe für die philosophischen Wissenschaften, zu der Mathematik und Naturwissenschaften im 18. Jahrhundert noch zählten, findet. Hier übertrafen im Jahre 1700 zum ersten Mal die deutschen die lateinischen Werke, letztere dominierten zum letzten Mal im Jahre 1712.

Die zahlreichen mathematischen Lehrbücher, die im 18. Jahrhundert geschrieben wurden, zeugen von dem Interesse an der Mathematik und ihrer Wichtigkeit. Ein Vorteil, die Werke in Deutsch zu publizieren, war nicht nur, dass sie nun einer größeren Personengruppe zugänglich waren, sondern auch, dass dadurch die alten Inhalte durch neue ersetzt werden konnten. Die

[103] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Paulsen, Bd. 1, S. 625 f.

von uns betrachteten mathematischen „Anfangsgründe“ stehen sowohl in Bezug auf die Entwicklung der mathematischen Literatur als auch in der Etablierung des Deutschen als Wissenschaftssprache im allgemeinen Trend ihrer Zeit. Aus den Vorreden der entsprechenden Lehrwerke erfahren wir, dass es nicht nur um die Etablierung der deutschen Sprache ging, sondern dass auch tatsächlich geeignete mathematische Lehrbücher fehlten. Es gäbe zwar Lehrbücher – so die Autoren – aber diese würden den Ansprüchen der „Anfangsgründe“-Autoren in vielerlei Hinsicht nicht mehr gerecht. Diesen generellen Mangel wollte Wolff beheben: Er habe durch seine Lehrtätigkeit in Leipzig und Halle festgestellt, „daß es an einem solchen Buche fehle, durch welches man ohne Umwege allen Lernenden nach ihren gantz verschiedenen Absichten eine Gnüge thun, auch ihnen die Repetition, so viel möglich, erleichtern könnte; so habe ich desto lieber diesen Mangel durch meine Arbeit zuersetzen getrachtet“[104]. Es wird deutlich, dass es zu Beginn des 18. Jahrhunderts kein Lehrwerk gab, welches Wolffs Vorstellungen genügte. In welchem Punkt genau Wolff die älteren Werke kritisierte, ist auf Grundlage seiner Ausführungen nicht eindeutig zu ermitteln. Wolff spricht verschiedene Bereiche an, nämlich die Gruppe der Lernenden sowie ihre Bedürfnisse. Möglicherweise ergab sich der Bedarf neuer Lehrbücher auch aus dem Umfang der zu betrachtenden Disziplinen, denn Wolff nahm im Gegensatz zu anderen Lehrwerken seiner Zeit sämtliche mathematische Wissenschaften in seinem Werk auf. Trotz des starken Anwachsens der Lehrbuchliteratur sind Wolffs *Anfangs=Gründe* „fast ein halbes Jahrhundert […] beym Unterrichte in der Mathematik […] gebraucht worden, ohne von der grossen Menge neuerer Einleitungen verdrängt zu werden, die auch in der That meistens viel schlechter sind“[105].

Unter den mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts gibt es vergleichsweise wenige, die sich mit sämtlichen mathematischen Wissenschaften befassen. Karsten schreibt in der Vorrede seines *Lehrbegrifs*: „Mir ist kein neues Lehrbuch der gesamten Mathematik als die Wolfischen Elementa[106] bekant, worin alle Theile der praktischen Mathematik <u>volständig</u> vorgetragen sind. (Ich rede hier, wie aus der Anführung der Wolfischen Elementorum erhellet, von keinem <u>Compendio</u> der angewandten Mathematik; daher wird man mir das Kästnerische Handbuch nebst dem Clemmschen nicht entgegen setzen). Ein Buch aber, welches zwischen einem eigentlichen Compendio und einem ganz ausführlichem Lehrbegrif das Mittel hielte, dürfte wohl zu algemeiner Verbreitung so nützlicher Kenntnisse, als die Mathematik lehret, das seinige beytragen. Ich fange mit diesem ersten Theil ein Buch an, dessen Einrichtung wenigstens nach meiner Absicht hierauf vorzüglich abzwecket“[107]. Hier finden wir einen Hinweis darauf, dass es zwischen den mathematischen Lehrbüchern Unterschiede gab, denn Karsten verwendet verschiedene Bezeichnungen für Lehrbücher und stellt diejenigen von Kästner und Clemm nicht auf eine Stufe mit demjenigen von Wolff sowie mit seinem eigenen Lehrbuch. Auf diesem Umstand werden wir bei der Charakterisierung der „Anfangsgründe“ zurückkommen.

Kästner gibt in der Vorrede seiner *Anfangsgründe der Arithmetik* an, dass er „es ohngefähr zu einer Zeit mit dem Hrn. v. Segner und dem Hrn. Karsten gewagt habe, die Arithmetik und

---

[104] Wolff, AG 1, Vorrede, S. b^{r}.

[105] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^{v} f.

[106] Gemeint ist Wolffs lateinisches Lehrbuch *Elementa matheseos universae* (2 Bde., Erstauflage 1713/15). Über dieses Werk, Wolffs *Anfangs*=Gründen sowie einen kurzen Vergleich zwischen diesen beiden Lehrbüchern siehe Sommerhoff-Benner, S. 37-47.

[107] Karsten, L 1, Vorrede, S. **^{v}. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.

Geometrie, gründlicher und ausführlicher vorzutragen, als in den gewöhnlichen Handbüchern geschehen ist, und da unsere Bemühungen Beyfall gefunden haben, so muß doch die Neigung zu einer wahren und brauchbaren Kenntniß der Mathematik in Deutschland nicht so gar geringe seyn“[108]. Die Veröffentlichung von Lehrwerken trafen also den Nerv der Zeit. Kästner betont die Gründlichkeit und Ausführlichkeit der Lehrbücher von Segner und Karsten. Diese Merkmale – so Kästner – seien bei anderen mathematischen Lehrbüchern nicht vorzufinden. Kästner lässt offen, um welche Werke es genau handelt. Dies kann als Begründung angesehen werden, wieso gerade die Lehrbücher von Kästner, Karsten und Segner so häufig verwendet wurden. Auch Clemm kritisiert einige zeitgenössische Lehrbücher: „Denn entweder sind sie zu weitläufig und allzugroß zum Lesen; oder sie sind […] [nicht zufriedenstellend] demonstrirt“[109]. Sein Lehrbuch sei „von ganz andrer Art, und weder zu groß, noch zu mager, noch, in seinen Demonstrationen, zu geheimnißvoll“[110]. Des Weiteren gab es – so Clemm – kein Lehrbuch zur reinen Mathematik, welches sämtliche Lehren einer Disziplin kompakt darstellte. Clemm schreibt, dass Personen, die sich mit der reinen Mathematik bekannt machen wollten, oft ihre Kenntnisse aus verschiedenen Lehrbüchern sammeln müssten.[111] Es gebe verschiedene Werke zu Arithmetik, Geometrie und Algebra, Clemm aber stellt alle diese Bereiche in seinen *Ersten Gründen* dar.

Die mathematischen „Anfangsgründe“, die hier für eine nähere Betrachtung ausgewählt wurden, behandeln sämtliche mathematische Wissenschaften. Eng damit hängt auch der Zeitraum zusammen, in der sie verfasst wurden. Im 18. Jahrhundert war die Tendenz zum Enzyklopädischen schon sehr stark.[112] Einzelne Wissenschaften wurden als Ganzes betrachtet und systematisiert – wie wir es auch an den von uns untersuchten mathematischen Lehrbüchern sehen. Dies steht im engen Zusammenhang mit der Anerkennung einzelner Fächer der philosophischen Fakultät. Allerdings gestaltete sich die Erstellung von Hand- und Lehrbüchern zur gesamten Mathematik im Laufe des Jahrhunderts zunehmend schwieriger, da die Anzahl der mathematischen Disziplinen beständig wuchs. Es kam somit darauf an, innere Zusammenhänge zu erkennen und darzustellen sowie neue Entwicklungen einzugliedern.[113] In Kapitel 4.1.1 wird Kästners Klassifikation der mathematischen Wissenschaften vorgestellt, die es ermöglichte neue Disziplinen in das System zu integrieren. Die deutschsprachigen „Anfangsgründe“ lassen sich in das allgemeine Bestreben des Zeitalters einordnen. Es geht nicht nur um das Aufkommen des Deutschen als Wissenschaftssprache oder die Darstellung der gesamten Mathematik, sondern auch um die Etablierung der Mathematik als eigenständige Disziplin mit einheitlichen Inhalten. Die Tatsache, dass einige „Anfangsgründe“ weit verbreitet waren und viel genutzt wurden, kann als erster Schritt in Richtung Vereinheitlichung der mathematischen Lehre angesehen werden.

---

[108] Kästner, AG 1.1., Erinnerung bey der zweyten Auflage, S. **^{r}.
[109] Clemm, ML 1, Vorbericht zur ersten Auflage, o. S.
[110] Clemm, ML 1, Vorbericht zur ersten Auflage, o. S.
[111] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(4^{v} f.
[112] Vgl. Schubring, Mathematische Wörterbücher des 18. Jahrhunderts. In: Das achtzehnte Jahrhundert, S. 114.
[113] Vgl. Kühn, S. 46.

1.3 Die mathematischen „Anfangsgründe“ und ihre Charakteristika

In den vorangegangenen Ausführungen wurden die „Anfangsgründe“ in ihren Bildungskontext eingebettet und mit ihrer Hilfe auch Rückschlüsse auf das Bildungssystem und das Ansehen der Mathematik gezogen. Nun werden diese Lehrbücher für sich betrachtet, wobei ihre signifikanten Merkmale aufgezeigt werden sollen. Zu Beginn meiner Forschung über die mathematische „Anfangsgründe“-Literatur war ich überrascht, dass es keine genaue Beschreibung dieser Lehrbücher gibt. Aus diesem Grund sah ich es als notwendig an, hier eine Darstellung dieser mathematischen Lehrbücher samt ihrer Charakteristika und ihrer Einordnung in den Bildungs- und Gesellschaftskontext zu geben.

Während der gezielten Suche nach der „Anfangsgründe“-Literatur ist aufgefallen, dass für mathematische Lehrbücher des 18. Jahrhunderts oft der Titel „Anfangsgründe“ oder auch verwandte Bezeichnungen wie beispielsweise „Erste Gründe“ oder „Lehrbegriff“ verwendet wurden. In der vorliegenden Arbeit werden alle diese Titel unter dem Begriff „Anfangsgründe“ zusammengefasst, da sie wichtige Gemeinsamkeiten, aber geringe Unterschiede aufweisen, wie unsere Analyse ergeben hat. Hierfür wurden die Lehrbücher auf bestimmte Aspekte hin untersucht, die im Folgenden vorgestellt werden. Da diese eng miteinander verbunden sind, waren einige Überschneidungen unausweichlich.

1.3.1 Terminus

Die Suche nach einer genauen Beschreibung der „Anfangsgründe“ erweist sich als schwierig. Dieser Begriff wurde nicht nur für mathematische Lehrbücher, sondern auch für Lehrbücher anderer Wissenschaften verwendet. Er war somit nicht an eine bestimmte Disziplin gebunden. Die Verfasser der Lehrbücher gehen nicht auf den Begriff selbst ein. Allerdings lässt dieser den Bestimmungszweck der Werke, die diesen Titel tragen, schon erahnen. Es geht um eine Kombination aus „Anfang“ und „Gründe“ im Sinne von „Grundlagen“[114]. Als Synonym zu „Anfangsgründe“ kann das Wort „Elemente“, das aus dem lateinischen „elementa“ abgeleitet ist, verwendet werden. Dass es hierbei um die Grundlagen einer Wissenschaft geht, zeigen die berühmten *Elemente* von Euklid. Da die von uns betrachteten Lehrbücher diese Bezeichnung tragen, ist davon auszugehen, dass es sich um einführende Lehrwerke handelt.

Das *Grosse vollständige Universal-Lexicon aller Wissenschaften und Künste* von Heinrich Wilhelm Zedler aus dem 18. Jahrhundert enthält kein Stichwort „Anfangsgründe“. Daher können wir annehmen, dass es sich hierbei nicht um einen wissenschaftlichen Terminus handelte, sondern dass dieser Begriff im allgemeinen Sinne für „Lehren“ verwendet wurde, die in eine bestimmte Wissenschaft einweisen. Erst das *Wörterbuch der deutschen Sprache* von Joachim Heinrich Campe (1746-1818) erklärt „Anfangsgrund“ als „der erste Grund, welchen man in einer Kunst oder Wissenschaft legt. […] Häufiger in der Mehrzahl, die ersten Grundsätze einer Kunst und Wissenschaft, auf welchen das Uebrige beruht“[115]. Auch das *Universal-Lexikon* von Heinrich August Pierer (1794-1850) aus dem 19. Jahrhundert enthält

[114] Dieser Begriff ist nicht logisch gemeint, sondern auf den Lernprozess bezogen, also sozusagen – modern gesprochen – für Anfänger.
[115] Campe, Bd. 1 (1807), S. 137.

den Begriff „Anfangsgrund“ und definiert ihn als „das Beginnen in dem Erlernen einer Wissenschaft oder Kunst, indem man sich die Elementarlehren derselben zu eigen macht. A-gründe, diese Elementarlehren selbst, in so fern alle übrigen Erkenntnisse darauf, wie auf einem Grunde, ruhen“[116]. Die neueren Lexika enthalten ebenfalls den Ausdruck „Anfangsgründe“. So werden im Wahrig-Lexikon die „Anfangsgründe“ als „die Grundlagen (eines Wissensgebietes)“[117] definiert. Auch im Duden werden „Anfangsgründe“ mit Grundlagen und elementaren Kenntnissen gleichgesetzt, wobei auch auf den lateinischen Ursprungsbegriff „elementa“ verwiesen wird.[118]

Um die „Anfangsgründe“ näher beschreiben zu können muss die Frage geklärt werden, ob es sich bei diesen Werken um Lehrbücher, Kompendien oder Handbücher handelt. Hauptsächlich diese drei Begriffe begegnen uns in den Ausführungen der „Anfangsgründe“-Autoren. In den vorangegangenen Ausführungen wurden die „Anfangsgründe“ allgemein als Lehrbücher bezeichnet, da sie nach Angaben ihrer Autoren zu Lehrzwecken geschrieben wurden. Da bei einem kurzen Blick in die „Anfangsgründe“-Literatur bereits Unterschiede sowohl in der Bezeichnung der Werke als auch in deren Vorreden aufgefallen sind, folgt hier nun eine diachronische Untersuchung der verschiedenen auftretenden Begrifflichkeiten. Als Quellen dienen in erster Linie zeitgenössische Lexika, aber auch die Ausführungen der Lehrbuchautoren selbst.

Für den Begriff „Handbuch“ gibt Campe drei verschiedene Erklärungen an: „1) Ein Buch von solcher Größe, daß es sich ohne Mühe handhaben lässt. 2) Ein Buch, welches man oft zur Hand nimmt, täglich gebraucht (Manuale). 3) Ein Buch, welches das Notwendigste und Vorzüglichste aus irgend einer Wissenschaft oder Kunst […] für irgend eine bestimmte Klasse von Lesern enthält (Enchiridium)“[119]. Pierer gibt vier verschiedene Definitionen an: „1) (Liter.), Schrift zu schneller Belehrung und Zurechtweisung über Gegenstände einer besondern Wissenschaft oder mehrerer; alle Real= und Verbalwörterbücher, so wie bes. alle Lehrschriften in compendiarischer Form dienen dazu. 2) Auch sehr gewöhnlicher Buchtitel zur Bezeichnung von Werken dieser Art, meist mit Andeutung, für welchen Zweig der Wissenschaften, oder für wen ein solchen bestimmt ist; 3) auch ein Buch, das zum Eintragen eigner Bemerkungen für irgend einen Lebenszweck dient (vgl. Manual u. Memorial); 4) (Bergb.), Buch, worin die beim Bergamt vorkommenden Verhandlungen aufgeschrieben werden“[120]. In Zedlers Universallexikon wird unter dem Stichwort „Hand=Buch“ nur der letzte Zweck aufgeführt.[121] Die Begriffe „Lehrbuch“ und „Lehrwerk“ sind in Zedlers Lexikon nicht enthalten. Dafür gewährt uns Campe einen näheren Einblick und definiert das Lehrbuch als „ein Buch, worin eine Wissenschaft oder Kunst gelehrt wird. In engerer und gewöhnlicher Bedeutung versteht man aber darunter ein Buch, welches nur den Abriß einer Lehre, d. h. einer Wissenschaft oder Kunst enthält, und welches derjenige, der eine solche Lehre vorträgt, bei seinem Unterricht zu Grunde legt, und mündlich erläutert und weiter ausführt (Compendium); ein Leitfaden“[122]. Pierer betrachtet das Lehrbuch als eine „Schrift, die zum Unterricht Anderer in

[116] Pierer, Bd. 1 (1835), S. 540.
[117] Wahrig, S. 146.
[118] Vgl. Duden, S. 143.
[119] Campe, Bd. 2 (1808), S. 529.
[120] Pierer, Bd. 9 (1835), S. 92.
[121] Vgl. Zedler, Bd. 12 (1735), Sp. 432.
[122] Campe, Bd. 3 (1809), S. 76.

einer Wissenschaft verabfaßt ist. Erfordernisse sind: daß es umfassend, verständlich (mit Berücksichtigung derer, denen es bestimmt ist), in einer guten systematischen Ordnung, doch nicht mit pedantischer Aengstlichkeit u. gleichförmig verfaßt sei, auch jeden Gegenstand nach seiner mehrern oder mindern Wichtigkeit, auch dem Standpunkte, auf dem eine Wissenschaft sich befindet, entsprechend darstelle. Es soll entweder nur zum Leitfaden beim mündlichen Unterricht dienen, als Compendium (s. d. 4) u. ist dann nur von beschränktem Umfange, oder auch zur Selbstbelehrung, oder zur Erweiterung bereits erfaßter Kenntnisse, wo ihm die noch nöthigen Erläuterungen oder Nachweisungen nicht ermangeln dürfen, und wo es überhaupt Ansprüchen gnügen soll, die nur selten in befriedigendem Maße erreicht sind“[123]. Den Begriff „Compedium“, der in dieser Erklärung vorkommt, definiert Pierer wie folgt: „Im spätesten Latein, Sammlung der wichtigsten Begriffe und Sätze einer Wissenschaft (kurzer Inbegriff, im Gegensatz von Commentar, s. d.), meist für Anfänger berechnet als Grundlage, um Alles, was sie in einer Wissenschaft lernen, darauf zu bauen. Wahrheit, Deutlichkeit, Ordnung und Kürze sind die Haupteigenschaften eines guten C. Besonders gebraucht man C. von dem Lehrbuche, über das ein akademischer Lehrer Vorlesungen hält“[124]. Auch Zedler beschreibt das Compendium als „ein kurtzer Begriff, eine Erspahrung, Vortheil, Gewinn. Etwas in ein Compendium bringen, etwas in die Kürtze fassen, daher compendiös, kürtzlich, enge, behend oder bequem in die Kürtze abgefaßt“[125].

Interessant ist, dass Campes und Pierers Lexika den Terminus „Lehrbegriff“ enthalten, mit dem Karsten sein Werk bezeichnete. Campe beschreibt den Lehrbegriff als „1) Der ganze Umfang einer in ihren Theilen gehörig geordneten Lehre (System). Besonders der ganze Umfang der Glaubenswahrheiten […]. 2) Eine Schrift, in welcher eine Lehre ihrem Umfange nach abgehandelt wird; mehr aber noch eine Schrift, in welcher der kurze Inbegriff einer Lehre enthalten ist; ein Lehrbuch“[126]. Diese Erklärungen finden wir auch bei Pierer, wobei er noch eine weitere Definition vorsieht und Campes zweite Erklärung aufspaltet: „1) der ganze Umfang einer in ihren Theilen gehörig geordneten Lehre, bes. der ganze Umfang der Glaubenswahrheiten, so: der christliche L., der evangelische L; 2) kurzer Begriff einer Lehre oder Wissenschaft; 3) Schrift, in welcher eine Lehre von ihrem Umfang nach abgehandelt wird; 4) Schrift, in der der kurze Inbegriff einer Lehre enthalten ist“[127].

Auch die heutigen Wörterbücher differenzieren zwischen den Begrifflichkeiten. Im Duden wird das Lehrbuch ganz allgemein als Buch für den Unterricht charakterisiert, das Kompendium als kurzgefasstes Lehrbuch.[128] Im Wahrig wird das Handbuch als „handliches, aber umfassendes Lehrbuch über ein Wissensgebiet“[129], das Lehrbuch als „Buch für den Schulunterricht und Studium“[130] und das Kompendium unter anderem als „Abriss, Handbuch, kurzes Lehrbuch“[131] bezeichnet. An den Ausführungen ist eine gewisse Hierarchie der Begrifflichkeiten zu erkennen. An erster Stelle stehen die Handbücher im weitesten Sinne, die nicht

[123] Pierer, Bd. 12 (1835), S. 347.
[124] Pierer, Bd. 5 (1835), S. 536.
[125] Zedler, Bd. 6 (1733), Sp. 868.
[126] Campe, Bd. 3 (1809), S. 76.
[127] Pierer, Bd. 12 (1835), S. 347.
[128] Vgl. Duden, S. 1105 und S. 1023.
[129] Wahrig, S. 670.
[130] Wahrig, S. 933.
[131] Wahrig, S. 864.

zwangsläufig für Lehrzwecke verwendet werden. Es folgen als spezifischere Literaturgattung die Lehrbücher. Eine Unterkategorie scheinen die Kompendien darzustellen, die als Lehrbücher in verkürzter Form bezeichnet werden können. Die „Anfangsgründe“ selbst werden als Lehrwerke bezeichnet, die die Grundlagen einer bestimmten Wissenschaft vermitteln sollen.

Interessanter als die Lexikoneinträge sind die Ausführungen der „Anfangsgründe“-Autoren selbst, wobei keiner explizit auf den Begriff „Anfangsgründe“ eingeht. Vielmehr können wir Informationen aus den Erläuterungen entnehmen, in denen die Autoren den Plan ihrer Lehrbücher rechtfertigen.

Kästner verwendet in seinen Vorreden verschiedene Bezeichnungen für die Lehrwerke, auf die er Bezug nimmt. Unterschiede scheinen hierbei nicht zu bestehen, vielmehr entsteht der Eindruck, dass er die Begriffe „Handbuch“, „Lehrbegriff“, „Compendium“ und „Anfangsgründe“ synonym verwendet. So bezeichnet er Wolffs Lehrwerke einmal als Handbücher, einmal als Lehrbücher.[132]

Karsten veröffentlichte 13 Jahre nach seinem *Lehrbegrif* die *Anfangsgründe*, so dass die Vermutung naheliegt, dass es zwischen diesen Lehrwerken Unterschiede gibt. Karsten schrieb seinen *Lehrbegrif* für diejenigen, „die durch eigenen Fleis sich volständigere Kenntnisse erwerben, und nicht bey den ersten Anfangsgründen stehen bleiben wollen“[133]. Seinem Verständnis nach sind also die Ausführungen im *Lehrbegrif* umfangreicher als diejenigen in den gewöhnlichen „Anfangsgründen“. In der Vorrede seiner *Anfangsgründe* wird deutlich, dass Karsten seinem Lehrbuch nicht lediglich einen anderen Titel gab, sondern dass er ein anderes System verfolgte als in seinem *Lehrbegrif*. Durch seine Lehrerfahrungen habe er gemerkt, dass nur wenige Studenten die reine Mathematik für zwei Semester besuchten.[134] Aus diesem Grund habe er die elementare reine Mathematik, die im *Lehrbegrif* noch umfassender und daher auf zwei Bände verteilt war, in den *Anfangsgründen* in einem Band zusammengefasst, so dass diese Inhalte innerhalb eines Semesters erlernt werden können. Dasselbe gilt auch für die beiden anderen Bände der *Anfangsgründe*, die Karsten jeweils für das Erlernen innerhalb eines Semesters konzipierte.

Karsten äußert sich in der Vorrede zum ersten Band seines *Lehrbegrifs* über verschiedene Lehrbücher und zeigt ihre Unterschiede auf.[135] Hierbei verwendet er unterschiedliche Bezeichnung und subsumiert Handbücher und Kompendien unter den Oberbegriff „Lehrbücher“. Dies ist ein Hinweis darauf, dass es zwischen den mathematischen Lehrbüchern Abstufungen gab und diese den Zeitgenossen auch bewusst waren. Karsten sieht die Inhalte zur theoretischen Elementarmathematik in seinem *Lehrbegrif* als weitläufiger an als die in einem Kompendium, aber dennoch sei er zufrieden, wenn man den ersten Teil seines Werks als „Compendium der theoretischen Elementarmathematik“[136] betrachte. An ein Kompendium stellt er gewisse Anforderungen: „Ein Compendium soll die Ersten Gründe der Wissenschaft, die es vorträgt, gründlich, deutlich, vollständig, und dabey so kurz als es sich bey diesen dreyen genanten Eigenschaften thun läst, abhandeln“[137]. Interessant ist, dass Karsten den Begriff „erste Gründe“ verwendet, denn so nennt Clemm eines seiner mathematischen Lehrwerke. Dieses

[132] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^{v} und *3$^{v.}$
[133] Karsten, L 1, Vorrede, S. **2^{r}.
[134] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, Vorrede, S. x f.
[135] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, Vorrede, S. **^{v}.
[136] Karsten, L 1, Vorrede, S. **2^{r}.
[137] Karsten, L 1, Vorrede, o. S.

behandelt zwar nur Arithmetik und Geometrie, allerdings lässt der vollständige Titel *Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften* bereits die Bedeutung dieser beiden Wissenschaften für die gesamte Mathematik erkennen. Clemm erwähnt nicht nur in seinen *Ersten Gründen*, sondern auch in seinem *Mathematischen Lehrbuch* die drei seiner Ansicht nach wichtigsten Eigenschaften eines mathematischen Lehrbuchs für Anfänger: Deutlichkeit, Gründlichkeit, Kürze.[138] Johann Wilhelm von Segner bemühte sich bei der deutschen Übersetzung der *Anfangsgründe* seines Vaters Johann Andreas von Segner, „die Deutlichkeit zu erreichen, so weit man diese mit der Kürtze verbinden kan“[139].

Neben den Begrifflichkeiten der Lehrbücher selbst erscheint folgende Beobachtung von besonderem Interesse. Obwohl Karstens Gesamtwerk den Titel *Lehrbegrif* trägt, wird das Kapitel zur Rechenkunst mit „Anfangsgründe der Rechenkunst“ bezeichnet. Dieser Umstand besagt, dass der Terminus „Anfangsgründe“ eher elementare Lehren einer Wissenschaft beziehungsweise die Einleitung in eine Wissenschaft oder in ein Themengebiet bezeichnet als eine Literaturgattung im Gesamten. Durch die Verwendung des Begriffs „Anfangsgründe“ als Titel von Lehrbüchern lassen die Autoren das Anforderungsniveau des Werks und die intendierte Personengruppe, nämlich Anfänger, erkennen.

Abbildung 5 zeigt die wichtigsten Begriffe, die die einzelnen Autoren zur Kennzeichnung ihrer Lehrbücher verwendeten.

Wolff	Kästner	Segner	Karsten	Clemm	Klügel
Anfangsgründe	*Anfangsgründe*	*Anfangsgründe*	*Anfangsgründe*	*Erste Gründe*	*Anfangsgründe*
Elementa		*Vorlesungen*	*Lehrbegriff*	*Lehrbuch*	

Abbildung 5: Bezeichnung der Lehrbücher verschiedener Autoren.

1.3.2 Zeitraum

Die mathematischen Lehrbücher, die den Titel „Anfangsgründe“ tragen, stammen größtenteils aus dem 18. und 19. Jahrhundert. Das erste Lehrbuch, welches wir mit diesem Titel ausfindig machen konnten, waren die *Anfangs-Gründe einer Vernunfft= und Schrifft=übenden Zahl- und Buchstaben=Rechen=Kunst, Deren diese sonst Algebra heisset, Zum gebrauch der nidrigen und hohen schulen* (1695) von Heinrich Horch (1652-1729). Wie aus dem Titel hervorgeht wird in diesem Werk nur ein Teil der Mathematik dargestellt. Die vorliegende Arbeit legt jedoch den Fokus auf diejenigen mathematischen „Anfangsgründe“, die sämtliche Disziplinen umfassen. Dies passt zu dem Charakter des 18. Jahrhunderts, in dem die Mathematik als Ganzes betrachtet und systematisiert wurde.[140] Im Bereich der Bildung und Wissenschaften traten zahlreiche enzyklopädische Darstellungen auf.[141] Das erste erfolgreiche Lehrbuch dieser Art stellen Wolffs *Anfangs=Gründe* dar. Sie kennzeichnen gleichzeitig den Beginn einer „Anfangsgründe-Tradition“, wofür folgende Aspekte sprechen. Erstens erkennen wir bei

[138] Vgl. Clemm, ML 1, Vorbericht der ersten Auflage, S.)(5^{r}.
[139] Segner, AG, Vorbericht des Uebersetzers, S. a3^{r}.
[140] Vgl. Kühn, S. 46.
[141] Vgl. Rüegg, Themen, Probleme, Erkenntnisse. In: Rüegg, Bd. 2, S. 21.

Wolff einen sprachlichen Umbruch. Er veröffentlichte nicht nur seine lateinischen *Elementa matheseos universae*, sondern auch seine deutschsprachigen *Anfangs=Gründe*. Zweitens hatten seine Lehrbücher einen großen Erfolg und wurden bis 1800 – weit nach seinem Tod hinaus – mehrfach neu aufgelegt. Seine *Anfangs=Gründe* blieben fast 50 Jahre nahezu konkurrenzlos, bis in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts neue umfangreiche „Anfangsgründe" erschienen, nämlich die Lehrbücher von Kästner, Segner, Karsten und Clemm. Diese Lehrbücher hatten einen ungeheuren Erfolg, wie allein schon aus der Anzahl der Auflagen hervorgeht. An den Universitäten wurden in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts vor allem die Lehrbücher von Wolff, Kästner, Segner und Karsten eingesetzt.[142] Kästners *Anfangsgründe* wurden nachweislich für Vorlesungen zur reinen Mathematik noch bis einschließlich WS 1816/17 an der Universität Göttingen verwendet.[143] Die Autoren aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts knüpften an den Erfolg und die Tradition Wolffs an. Kästner würdigt explizit Wolffs Leistungen auf dem Gebiet der mathematischen Lehre und möchte hieran anschließen.[144] Dies trifft auch auf Karsten zu, den mit seinem *Auszug* an Wolff anknüpfen wollte.[145]

Während der Suche und Sammlung geeigneter Lehrbücher für unsere Untersuchungen ist bereits aufgefallen, dass sich die Mathematiklehrbücher am Ende des 18. Jahrhunderts nicht mehr mit allen mathematischen Wissenschaften befassen, sondern sich meist nur auf einen Teilbereich beschränken, wie beispielsweise die *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie* (^{2}1792) sowie die *Anfangsgründe der Astronomie, nebst der mathematischen Geographie, Schifffahrtskunde, Chronologie und Gnomonik* (1793) von Klügel. Eine Besonderheit bei seinen „Anfangsgründen" ist, dass sie Auszüge aus seiner *Encyklopädie, oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten, insbesondere aus der Betrachtung der Natur und des Menschen gesammelten Kenntnisse* (3 Bde., 1782-84) sind, also zuvor nicht als eigenständige Lehrbücher erschienen.[146]

Auch innerhalb der Mathematik gab es Umbrüche. Es wurden einige Disziplinen aus dem Bereich der angewandten Mathematik selbstständig; sie lösten sich von der Mathematik und wurden in eigenen Lehrbüchern dargestellt. Während im 18. Jahrhundert der Großteil der physikalischen Wissenschaften noch im Rahmen der angewandten Mathematik gelehrt wurde, emanzipierten sie sich im 19. Jahrhundert.[147] Damit einhergehend wurden bereits im 18. Jahrhundert neue Lehrbücher zur Naturlehre veröffentlicht, beispielsweise die *Anfangsgründe der Naturlehre* (1772, ^{2}1777, ^{3}1784, ^{4}1787, ^{5}1791, ^{6}1794) von Johann Christian Polykarp Erxleben (1744-1777) sowie die *Anfangsgründe der Naturlehre* (1801, ^{2}1805, ^{3}1812) von Johann Tobias Mayer (1752-1830). Auch andere Disziplinen wurden eigenständig und in Lehrbüchern dargestellt, wie man bereits an den *Anfangsgründen der Kriegsbaukunst* (3 Bde., 1771-1774, ^{2}1786-1789) von Karl August von Struensee (1735-1804) erkennen kann. Diese Entwicklung verstärkte sich im 19. Jahrhundert. Als möglicher Grund für die Spezialisierung können auch die Reformen im Bildungssystem angesehen werden. Es wurden vermehrt Schulen zur Vorbereitung auf das Studium geschaffen sowie das Abitur als Voraussetzung für den

[142] Vgl. Kühn, S. 72 f.
[143] Vgl. GGA, 1816, 148. St., S. 1474.
[144] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^{r} f.
[145] Vgl. Karsten, Auszug, Vorrede zur ersten Auflage, S. iii f.
[146] Vgl. beispielsweise Klügel, AG, Vorrede, S. iii.
[147] Für nähere Ausführungen siehe Stichweh.

Universitätszutritt eingeführt, wie 1788 in Preußen.[148] Somit verlor das propädeutische Studium an den Universitäten allmählich seine Aufgabe. Elementare Kenntnisse wurden ab den 1830er Jahren nicht mehr an Universitäten, sondern an Schulen unterrichtet.[149] Im Rahmen von Schulreformen wurde auch über neue Lehrpläne und entsprechende Lehrbücher diskutiert, die den neuen Anforderungen gerecht wurden. Die „Anfangsgründe“, die Anfängern die Grundlagen aller mathematischen Wissenschaften vermitteln sollten, waren hierfür zu breit gefächert.

Aus den dargestellten Entwicklungen lässt sich der Zeitraum ableiten, in dem diejenigen „Anfangsgründe“ erschienen sind, die in dieser Arbeit näher betrachtet werden. Sie wurden im 18. Jahrhundert geschrieben und genügten den Bedürfnissen ihrer Zeit. Die Popularität dieser Lehrbücher kann unter anderem dadurch erklärt werden, dass sie wegen ihres Umfangs vielseitig einsetzbar waren, nicht nur in verschiedenen Bildungseinrichtungen, sondern auch für unterschiedliche Niveaustufen. Die dargestellten Umbrüche beim Übergang in das 19. Jahrhundert können wiederum erklären, wieso die „Anfangsgründe“ im 19. Jahrhundert nicht mehr verwendet wurden. Durch die fortschreitende Differenzierung von Bildungseinrichtungen und Disziplinen entstanden neue Lehrbücher, die den neuen Anforderungen gerechter werden konnten als die umfassenden „Anfangsgründe“.

1.3.3 Deutsche Sprache

Ein Kennzeichen aller Lehrbücher, die zur „Anfangsgründe“-Literatur gehören, ist die Verwendung der deutschen Sprache. Wie wir in Kapitel 1.2.2 gesehen haben, wuchs die Anzahl deutschsprachiger Lehrbücher im 18. Jahrhundert stark an. Nun sollen die Gründe erläutert werden, wieso es zu einer solchen Entwicklung kam und die Lehrbuchautoren ihre Bücher in deutscher Sprache verfassten.

Während Forschungsmonographien bis in das 18. Jahrhundert hinein in erster Linie in Latein geschrieben und veröffentlicht wurden, finden wir die deutsche Sprache zuerst bei den mathematischen Lehrbüchern. An den Schulen wurden bereits zu Beginn des 18. Jahrhunderts deutschsprachige mathematische Lehrbücher verwendet, beispielsweise die *Anleitung zu den fürnehmsten mathematischen Wissenschaften* (1713) von Benjamin Hederich (1675-1748) und die *Mathesis Juvenilis* (2 Bde., ^{1}1702/05, ^{2}1710/14) von Sturm.[150] Im akademischen Bereich hielt die deutsche Sprache mit Wolffs *Anfangs=Gründen* Einzug. Doch nicht nur Lehrbücher wurden in Deutsch verfasst, sondern auch Vorlesungen wurden in deutscher Sprache gehalten. Bereits im 17. Jahrhundert boten Rhodius und Nothnagel an der Wittenberger Universität deutschsprachige Vorlesungen zu speziellen Teilen der Mathematik an. Während Rhodius seine deutschsprachigen Vorlesungen zur angewandten Mathematik noch als Privatvorlesungen hielt, beantragte Nothnagel erfolgreich eine öffentliche deutschsprachige Vorlesung.[151] Mit der Einführung des Deutschen als Wissenschaftssprache wird der Name Christian Thomasius (1655-1728) verbunden. Er hielt an der Universität Leipzig im WS 1687/88 die

[148] Vgl. Kühn, S. 43.
[149] Vgl. Klein, S. 81.
[150] Vgl. Paulsen, Bd. 1, S. 566.
[151] Vgl. Schöneburg, Mathematische Lehrtätigkeit. In: Richter/Schöneburg, S. 46 f.

erste deutschsprachige Vorlesung, zu der es auch eine deutschsprachige Vorlesungsankündigung gab.[152] Zudem brachte er 1688 mit den *Monatsgesprächen* die erste deutschsprachige wissenschaftliche Zeitschrift heraus.[153] In Leipzig war es ab 1711 erlaubt, einige Vorlesungen in deutscher Sprache zu geben.[154] An der Universität Göttingen wurden ebenfalls die meisten Vorlesungen in deutscher Sprache gehalten.[155]

Ein Ziel im Zeitalter der Aufklärung war, Wissen in die Bevölkerung zu tragen. Dies konnte in erster Linie mit Hilfe der deutschen Sprache geschehen, da der Großteil der Bevölkerung keine Lateinkenntnisse besaß und ihr somit der Zugang zu höheren Bildungseinrichtung verwehrt wurde. Diese Personengruppe wollte Thomasius erreichen und somit zur Ausbreitung der Kenntnisse beitragen. Hierbei nahm er sich ein Beispiel an Frankreich, wo bereits wissenschaftliche Literatur in der Landessprache veröffentlicht worden war.[156] Hierzu gehören Antoine Arnaulds (1612-1694) *Nouveaux éléments de géométrie* (1667) und Nicolas-François Blondels (1618-1686) *Cours de mathématiques* (1683).

Durch die Einführung des Deutschen an den Universitäten wurden günstige Bedingungen für deutschsprachige Lehrbücher geschaffen. Dass es zuvor an solchen Lehrwerken gemangelt hat, wird an der schnell gestiegenen Anzahl an Lehrbüchern in der Landessprache ersichtlich. Diesem allgemeinen Trend folgten die Autoren der „Anfangsgründe“, deren Lehrbücher auch außerhalb der Universität von einer breiten Personengruppe verwendet werden konnten. Die deutsche Sprache war ein Vehikel, um mathematische Kenntnisse einem größeren Teil der deutschen Bevölkerung zugänglich zu machen. Der systematische Aufbau der Inhalte in den „Anfangsgründen“ trägt zusätzlich dazu bei, dass auch solche Personen die Mathematik erlernen konnten, die keine mathematischen Vorkenntnisse besaßen. Auf den inhaltlichen Aufbau werden wir weiter unten näher eingehen.

Deutliche Begründungen, wieso die Autoren Deutsch als Sprache gewählt haben, finden wir lediglich bei Wolff und Segner. Wolff hat seine „Anfangs=Gründe deutsch geschrieben, weil sie unsern Deutschen zu Dienste stehen sollen. Die Kunst=Wörter habe ich nach dem Exempel der Franzosen, Engländer und anderer Ausländer behalten, und ihnen nur unserer Mund=Art gemässe Endungen gegeben“[157]. Dass Wolff mit seinen verdeutschten mathematischen Fachwörtern einen durchschlagenden Erfolg hatte, wird auch bei Clemm deutlich, der für seine eigenen Lehrbücher „die vom Herrn Baron von Wolf geschöpfte[n] Namen und Ausdrücke mehrentheils beybehalten“[158] hat, auch um die Leser, die bereits andere mathematische Lehrwerke eingesehen haben, nicht zu irritieren.[159] Dies ist ein Hinweis darauf, dass einige Autoren Wolffs deutsche Terminologie übernommen haben. Auch in der Sekundärliteratur wurden Wolffs Leistungen hinsichtlich der deutschen Wissenschaftssprache gewürdigt; durch Wolff sei die Wissenschaft in Deutschland erst vernakulär geworden.[160]

---

[152] Vgl. Kühn, S. 15.
[153] Vgl. Heubaum, S. 107.
[154] Vgl. Kühn, S. 17.
[155] Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 276.
[156] Vgl. Heubaum, S. 106 f.
[157] Wolff, AG 1, Vorrede, S. b2^{v}.
[158] Clemm, EG, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(3^{v}.
[159] Vgl. Clemm, EG, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(3^{v}.
[160] Vgl. Menzel, S. 2.

Aus dem sechsseitigen Vorbericht von J. W. von Segner, der die *Anfangsgründe* seines Vaters J. A. von Segner aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzte, geht hervor, dass er hoffte, das Werk „in der Deutschen Sprache noch gemeinnütziger zu machen, als es in der Lateinischen allein sein konnte“[161]. Gerechtfertigt wird dies vor allem mit sprachlichen Unkenntnissen bei den Lesern. In seiner Übersetzung verwendete Segner aber nicht konsequent deutsche Fachtermini, sondern wollte „lieber die Lateinischen Benennungen beybehalten, als sie auf eine Art übersetzen wollen, welche einem Anfänger nur unvollkommene wo nicht gantz irrige Begriffe geben konnte“[162]. Leitendes Kriterium für Segner war die Verständlichkeit für Anfänger. Er erwähnt zwar, dass er deutsche Termini von anderen Autoren übernommen hat, gibt aber nicht explizit seine Quellen an. Die Aussage Segners, „die Unrichtigkeiten der Rechtschreibung, welche bey der großen Verschiedenheit derselben in unseren Deutschen Schriften schwer zu vermeiden sind“[163], zeugt davon, dass sich die deutsche Sprache zu seiner Zeit in einem Umbruch befand und noch nicht einheitlich war.

Die angeführten Stellen zeigen, dass unmittelbar mit der Verwendung der deutschen Sprache in Lehrbüchern auch die Entwicklung der deutschsprachigen mathematischen Fachtermini, die ursprünglich lateinisch waren, verbunden ist. Die „Anfangsgründe“-Autoren versuchten so viele Übersetzung wie möglich einzubauen, sofern die Verständlichkeit gesichert war. Anderenfalls blieb man bei den lateinischen Bezeichnungen. Dass die Frage nach den Fachtermini auch noch am Ende des 18. Jahrhunderts Aktualität besaß, zeigt Kästners Artikel *Ueber Kunstwörter, besonders in der Mathematik*. In diesem spricht sich Kästner dagegen aus alle lateinischen Termini einzudeutschen, denn es könne „in einer Wissenschaft, die wir von einer andern Nation gelernt haben, zuweilen besser seyn, sich nur unterrichten zu lassen, was Parabel, Hyperbel, Ellipse, ihrem Ursprunge nach bedeuten, als mit Sturmen vergleichende, ablange, übertreffende Kegellinie zu sagen, oder mit andern Brennlinie, Neigeschnitt, Standschnitt“[164]. Tatsächlich finden wir in Sturms *Mathesis Juvenilis* Ausdrücke, die sich nicht durchsetzen konnten, beispielsweise „geradstrahlende Sehe=Kunst“ für Optik, „widerstrahlende Sehe=Kunst“ für Katoptrik und „durchstrahlende Sehe=Kunst“ für Dioptrik.[165] Kästner kommt es nicht darauf an alle Begriffe einzudeutschen, sondern er verlangt eine Sprache, die von allen verstanden wird: „So habe ich auch nichts dagegen, logische, metaphysische, moralische Erfindungen der Ausländer zu nennen wie ihre Erfinder gethan haben, wenn die deutsche Sprache so was nicht ausdrücken kann“[166]. Nicht nur wegen der Verständlichkeit, sondern auch wegen des Verdienstes und des Andenkens an die entsprechenden Erfindungen sollten einige Wörter in ihrer Originalsprache beibehalten werden.[167] Einige Eindeutschungen seien auch nicht möglich, wie Kästner unter Bezug auf Leibniz‘ Ausführungen zum Begriff des Quadrats erläutert. Wenn man dieses in deutscher Sprache erklären möchte, müsste „man eine Seite voll schreiben […], wenn man den Begriff ohne alle geometrische Kunstwörter angeben wollte“[168]. Dies mag eine Übertreibung Kästners gewesen sein, denn er selbst schafft

---

[161] Segner, AG, Vorbericht des Uebersetzers, S. a2^{r}.
[162] Segner, AG, Vorbericht des Uebersetzers, S. a3^{v}.
[163] Segner, AG, Vorbericht des Uebersetzers, S. a4^{r}.
[164] Kästner, Ueber Kunstwörter. In: PM, 1791, 4. Bd., 3. St., S. 262.
[165] Vgl. Sturm, MJ 1, S. 5.
[166] Kästner, Ueber Kunstwörter. In: PM, 1791, 4. Bd., 3. St., S. 266.
[167] Vgl. Kästner, Ueber Kunstwörter. In: PM, 1791, 4. Bd., 3. St., S. 266.
[168] Kästner, Ueber Kunstwörter. In: PM, 1791, 4. Bd., 3. St., S. 267.

es, den Begriff Quadrat als eine Figur mit vier gleich langen Seiten und rechten Winkeln zu erklären.[169] Kästners Definition deckt sich mit derjenigen in Wolffs *Anfangs=Gründen,* wobei Wolff zusätzlich den lateinischen Begriff „quadratum“ erwähnt.[170] Auch in den übrigen mathematischen Lehrwerken finden wir diese Definition, wobei tatsächlich nicht mehr auf das lateinische Ursprungswort „quadratum“ Bezug genommen wird, wie es Wolff noch tat. Tatsächlich war es aber auch nicht notwendig, alle Begriffe einzudeutschen. Wolff hatte mit seinem *Mathematischen Lexicon* (1716) bereits einen wichtigen Beitrag dazu geleistet, zahlreiche mathematische Begriffe verständlich darzustellen. Hierbei stellte er sowohl die lateinischen als auch die deutschen Begriffe nebeneinander und nahm darüber hinaus Bezug auf die üblichen Bezeichnungen bei anderen Nationen. So definiert er beispielsweise das Quadrat als ein gleichseitiges und gleich- beziehungsweise rechtwinkliges Viereck und gibt eine entsprechende Zeichnung an.[171] Daneben verweist er darauf, dass die Franzosen das Quadrat „Quarré“ nennen.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Intention der „Anfangsgründe“-Autoren, ihre Lehrwerke in deutscher Sprache zu verfassen und zu veröffentlichen, mit den Umständen und dem Denken ihres Zeitalters in Einklang standen. Durch die Verwendung der deutschen Sprache sollte ein breiter Leserkreis erreicht werden, zu denen auch solche Personen gehören, die keine Lateinkenntnisse besaßen und keine Universität besuchten. Andererseits gab es sicherlich Abstriche in puncto Internationalität. Dieser Aspekt ist allerdings bei Lehrbüchern nur untergeordnet; wichtiger war sicherlich, dass Forschungsmonographien mit neuen mathematischen Kenntnissen in Latein geschrieben wurden und so ein internationales Gelehrtenpublikum erreicht werden konnte.

Zusammen mit dem Verfassen der Lehrbücher in Deutsch geht die Eindeutschung mathematischer Fachtermini einher. Unser kurzer Einblick zeigte, dass es Versuche gab, mathematische lateinische Begriffe ins Deutsche zu übertragen, wobei sich nicht alle Bezeichnungen halten konnten. Noch heute finden wir Namen in der Mathematik wieder, die näher am Lateinischen als am Deutschen sind, beispielsweise „Definitionen“ statt „Erklärungen“ sowie „Quadrat“.

1.3.4 Inhalt und Aufbau

Der überwiegende Teil der mathematischen Lehrbücher, die als „Anfangsgründe“ bezeichnet werden, behandelt die reine Elementarmathematik in Form von Arithmetik und Geometrie, wobei letztere oft noch die Trigonometrie enthält. Auch Segners hier betrachteten Lehrwerke sowie Clemms *Erste Gründe* sind diesen Wissenschaften gewidmet, wobei letzteres noch die höhere Elementarmathematik in Form von Algebra innerhalb der Arithmetik und die Differential- und Integralrechnung – unter diesem Namen – im Rahmen der Geometrie enthält. In den umfassenderen Lehrbüchern von Wolff, Kästner, Karsten und Clemm findet der Leser die Arithmetik und die Geometrie am Anfang der Lehrbücher. Diese beiden Disziplinen können

[169] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 185.
[170] Vgl. Wolff, AG 1, S. 124.
[171] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, ML, Sp. 1137 f.

als die „beyden Grund=Säulen der mathematischen Wissenschafften“[172] angesehen werden. Auf dieser Grundlage werden dann die höheren Kenntnisse in Gestalt der Algebra, Analysis[173] und der angewandten Mathematik aufgebaut.

Wolff betrachtet in seinen *Anfangs=Gründen* neben der Arithmetik und Geometrie mitsamt der ebenen und sphärischen Trigonometrie noch folgende mathematische Wissenschaften: (Zivil-)Baukunst, Artillerie, Fortifikation, Mechanik, Hydrostatik, Aerometrie, Hydraulik, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspektive, Astronomie, Chronologie, Geographie, Gnomonik, Algebra sowie Differential- und Integralrechnung.[174] Diese finden wir auch in Kästners *Anfangsgründen* in einer veränderten Reihenfolge wieder. Er unterscheidet zusätzlich zwischen Statik und (höherer) Mechanik und behandelt beide Disziplinen getrennt voneinander. Außerdem stellt er noch die Hydrodynamik dar.

Karstens *Lehrbegrifs* sollte zunächst zwölf oder mehr Bände umfassen.[175] In den ersten beiden Bänden behandelt er die theoretische Elementarmathematik, gefolgt von drei oder vier Bänden zur angewandten Mathematik. Diese Inhalte sollten ohne die höhere theoretische Mathematik in Form von Algebra und Analysis verständlich sein, die erst am Ende des Werks zusammen mit der höheren praktischen Mathematik betrachtet werden sollten. Allerdings erschienen nur acht Bände des geplanten Werks. In diesen betrachtet Karsten neben Arithmetik und Geometrie inklusive Trigonometrie folgende Wissenschaften: Statik, Hydrostatik, Aerostatik (synonym zu Aerometrie), Mechanik, Hydraulik, Pneumatik, Optik, Perspektive und Photometrie[176]. Pneumatik und Photometrie nahm er als neue Wissenschaften in sein Lehrbuch auf. Wir finden sie in keinem anderen der von uns betrachteten Lehrbücher. In Karstens *Lehrbegrif* fehlen allerdings die Betrachtungen zur Dioptrik und Katoptrik, ebenso Algebra, Analysis, Artillerie, Fortifikation und (Zivil-)Baukunst. Es ist anzunehmen, dass er sie in denjenigen Bänden des *Lehrbegrifs* behandeln wollte, die nicht mehr herausgegeben wurden. In der zweiten Auflage finden wir unter dem Titel *Lehrbegriff der gesamten Mathematik. Des zweyten Theils zweyte Abtheilung* (^{2}1786) auch die Algebra und Analysis im Sinne der Differential- und Integralrechnung. In Karstens *Anfangsgründen* werden dieselben Wissenschaften wie im *Lehrbegrif* betrachtet, wobei die Pneumatik nicht mehr enthalten ist, dafür aber die Katoptrik und Dioptrik als Anwendungen der Photometrie. In Clemms *Mathematischen Lehrbuch* findet der Leser neben der reinen elementaren Mathematik auch die Algebra und Analysis, Statik/Mechanik, Hydrostatik, Aerometrie, Hydraulik, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspektive, Astronomie, Geographie, Chronologie, Gnomonik, Zivilbaukunst, Militärbaukunst, Artillerie. Im Anhang gibt Clemm noch Ausführungen zur Naturgeschichte und Experimentalphysik an.

Es ist zu erkennen, dass im gesamten 18. Jahrhundert weitgehender Konsens bezüglich der mathematischen Wissenschaften bestand. Zugleich wird deutlich, dass sich die Inhalte dieser Lehrbücher von den heutigen unterscheiden und sich die Gestalt der Mathematik stark gewandelt hat. Wolff, Kästner, Karsten und Clemm behandelten angewandte mathematische Diszi-

---

[172] Wolff, Auszug, Vorrede, S.)(4^r.

[173] „Analysis“ war im 18. Jahrhundert ein vieldeutiger Begriff. In der Regel wurde die Differential- und Integralrechnung als solche bezeichnet.

[174] Zu den Definitionen der einzelnen Gebiete von Seiten der Autoren selbst siehe Kühn, S. 89-100.

[175] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. **3^r f.

[176] Karsten definiert die Photometrie als „Theorie von der Ausmessung der Stärke des Lichts“; vgl. Karsten, L 8, S. 1.

plinen, die heute oft zur Physik gerechnet werden, unter der Bezeichnung „Mathematik". Dass es hierzu aber bereits im 18. Jahrhundert andere Ansichten gab und dass diese Disziplinen auch losgelöst von der Mathematik betrachtet wurden, zeigt beispielsweise Segners *Einleitung in die Natur=Lehre* (1750, ²1754, ³1770). Hier finden sich unter anderem mechanische, optische und astronomische Wissenschaften.[177]

Die „Anfangsgründe" weisen einen unterschiedlichen Umfang auf. Die einzelnen Bände umfassen mehrere hundert Seiten. Dem Leser begegnet ein systematischer Vortrag. Bis auf Wolffs *Anfangs=Gründe* enthalten alle von uns betrachteten Lehrbücher mehr oder minder detaillierte Inhaltsverzeichnisse, die teilweise auch erst am Ende des Lehrwerks zu finden sind. Jede mathematische Wissenschaft wird separat dargestellt. Wolff widmet sogar jeder Wissenschaft eine eigene zweiseitige Vorrede, die vor dem jeweiligen Kapitel zu finden ist. Die einzelnen Kapitel bestehen aus mehreren durchnummerierten Abschnitten, die als selbstständige und in sich geschlossene Einheiten angesehen werden können. Zu Beginn der Kapitel werden zunächst die elementaren Begriffe der jeweiligen Disziplin erklärt. Darauf aufbauend gehen die Autoren zu höheren Kenntnissen über. Im weiteren Verlauf finden wir Lehrsätze und ihre Beweise, Aufgaben und Lösungen sowie zahlreiche Zusätze, praxisnahe Beispiele, historische Bemerkungen und Verweise auf weiterführende Literatur. Neben den Texten enthalten die Lehrbücher zur Veranschaulichung einige Kupfertafeln, die sich meist am Ende des Buches befinden. Auf den Kupfertafeln findet man zahlreiche Figuren, in erster Linie geometrische Konstruktionen. Sie lassen sich so aufklappen, dass Text und Abbildungen nebeneinander liegen und gleichzeitig betrachtet werden können.

Obwohl jedes Kapitel eigenständig für sich steht, werden immer wieder Rückgriffe auf vorangegangene Abschnitte oder Kapitel vorgenommen. Dies ist unproblematisch, da die einzelnen Abschnitte durchnummeriert und in einigen Lehrwerken mit zusätzlichen Bezeichnungen versehen sind. In Wolffs *Anfangs=Gründen* ist jedes Kapitel in einzelne durchnummerierte Abschnitte unterteilt, wobei die Nummerierung mit jedem Kapitel von neuem beginnt. Jeder einzelne Abschnitt wird eigens benannt, beispielsweise mit „1. Erklärung", „1. Grundsatz", „1. Zusatz" oder „Anmerckung". Am Seitenrand der Ausführungen finden wir die Verweise auf die Kupfertafeln und die darin enthaltenen Figuren.

Kästner unterteilt seine Ausführungen zu den einzelnen Disziplinen in verschiedene „Capitel". Die Abschnitte sind durchnummeriert und mit Namen versehen wie „Erkl.[ärung]", „Lehrs.[atz]", „Zus.[atz]", „Anm.[erkung]" oder „Aufgabe". Die Verweise auf die Abbildungen in den Kupfertafeln findet der Leser im Fließtext.

Karsten teilt in seinen *Anfangsgründen* und in seinem *Lehrbegrif* die einzelnen Kapitel in verschiedene Abschnitte. Diese sind wiederum eingeteilt in verschiedene durchnummerierte Paragraphen. Die Nummerierung beginnt mit jedem Kapitel neu. Innerhalb der einzelnen Paragraphen findet der Leser Bezeichnungen wie „Beweis" oder „Aufl.[ösung]". Am Rand gibt Karsten Hinweise auf die Abbildungen auf den Kupfertafeln am Ende des Werks.

Segner gruppiert seine *Anfangsgründe* in übergeordnete Kapitel mit den Bezeichnungen „Anfangsgründe der Arithmetick", „Anfangsgründe der Geometrie" sowie „Anfangsgründe der geometrischen Berechnungen". Die einzelnen Kapitel bestehen aus mehreren Abschnitten, die Segner mit Titeln versieht. Die einzelnen Paragraphen sind durchnummeriert und zudem unterschiedlich bezeichnet. Man findet beispielsweise Erklärungen, Lehrsätze, Zusätze, An-

[177] Vgl. Segner, Einleitung in die Natur=Lehre, Inhaltsverzeichnis am Ende des Werks, o. S.

merkungen, Aufgaben, Lösungen und Beweise. Die Nummerierung erlaubt es dem Autor auf bereits behandelte Inhalte zu verweisen, so dass diese leicht nachgeschlagen werden können. Die Nummerierung endet nicht mit den einzelnen Kapiteln, sondern wird bis zum Ende des Werks weitergeführt. Im laufenden Text wird an den entsprechenden Stellen auf die einzelnen Abbildungen verwiesen. Einen etwas anderen Aufbau finden wir in Segners *Vollständigen Vorlesungen*. Hier gibt es vierzehn betitelte Abschnitte, innerhalb deren man ebenfalls benannte Abschnitte findet. Im Gegensatz zu seinen *Anfangsgründen* werden hier die einzelnen Paragraphen nur mit Nummern, nicht aber konkret mit „Erklärung" und ähnlichen Bezeichnungen versehen. Am Rand wird auf die entsprechenden Abbildungen verwiesen, die am Ende des Werks zu finden sind.

Clemm orientierte sich beim Aufbau seines *Mathematischen Lehrbuchs* an Wolffs Lehrbüchern.[178] In seinen *Ersten Gründen* sind die einzelnen mathematischen Disziplinen in verschiedene Kapitel aufgeteilt. Die hier enthaltenen Paragraphen werden im Gegensatz zu denen im *Mathematischen Lehrbuch* nicht benannt, sondern nur nummeriert. Dafür finden sich in den *Ersten Gründen* am Textrand einige Bemerkungen, die den Leser kurz und bündig über den Inhalt des jeweiligen Abschnitts unterrichten und auf Abbildungen verweisen.

Die „Anfangsgründe" erscheinen als gut durchdachte Lehrbücher. Hinsichtlich ihres Aufbaus gibt es nur geringe Unterschiede zwischen den einzelnen Lehrbüchern. Obwohl die Autoren sämtliche mathematische Wissenschaften getrennt voneinander betrachten, wird der innere Zusammenhang der einzelnen Disziplinen vor allem durch die zahlreichen Rückgriffe auf bereits behandelte Inhalte, hauptsächlich auf diejenigen aus der reinen Mathematik, deutlich. Dies unterstreicht die Aussage, dass die reine Mathematik als Grundlage für die angewandte Mathematik angesehen werden kann und somit zu Beginn der Lehrbücher zu finden ist. Die Lehrbücher enthalten nicht nur theoretische Ausführungen, sondern auch Anschauungsmaterial in Gestalt von Abbildungen, die am Ende des Lehrwerks auf Kupfertafeln zu finden sind.

1.3.5 Adressaten

Die in dieser Arbeit betrachteten „Anfangsgründe" wurden in erster Linie von Universitätsprofessoren verfasst. Wolff, Kästner, Karsten und Klügel waren ordentliche Professoren für Mathematik und Naturlehre. In dieser Position wirkte Wolff in Halle und Marburg, Kästner in Göttingen, Karsten in Halle und Klügel in Helmstedt und Halle. Clemm war als Professor für Mathematik am Gymnasium in Stuttgart tätig. Da es sich bei ihren Werken um Lehrbücher handelt, liegt nahe, dass Studenten beziehungsweise Schüler die Adressatengruppe darstellen. Aus der von uns oben dargestellten Bedeutung des Begriffs „Anfangsgründe" können wir ableiten, dass diese Lehrbücher vor allem an diejenigen Studenten und Schüler adressiert waren, die mit ihren mathematischen Studien begannen und keine Vorkenntnisse besaßen. Die Richtigkeit dieser Schlussfolgerung wird durch die Erläuterungen in den Vorreden der Lehrbücher selbst bestätigt. Allerdings stellen Studenten und Schüler nur einen Teil der Adressatengruppe dar, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden.

[178] Vgl. Clemm, ML 1, Vorbericht zur ersten Auflage, o. S.

Wolff schrieb seine *Anfangs=Gründe* nicht nur für die Verwendung an Universitäten, sondern für den Gebrauch „so wohl auf hohen, als niedrigen Schulen“[179]. Er beschränkt sich nicht auf eine gewisse Personengruppe, sondern möchte „allen Lernenden nach ihren gantz verschiedenen Absichten eine Gnüge thun“[180]. Neben seinen *Anfangs=Gründen* veröffentlichte Wolff auch den *Auszug aus den Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschafften,* da vielen Personen die *Anfangs=Gründe* zu umfangreich und teuer erschienen.[181] Der einbändige *Auszug* wurde vor allem für den Gebrauch an Schulen geschrieben.

Kästner gibt in seiner Vorrede nicht explizit an, für welche Personengruppe er seine *Anfangsgründe* konzipiert hat. Da er sich in der Vorrede vor allem auf die Umstände an Universitäten bezieht, können wir schließen, dass Studenten, die mit der Mathematik begannen, seine primäre Adressatengruppe darstellten. Kästner hatte das Ziel die Lehren so vorzutragen, dass sie „keinen Anfänger erschrecken“[182].

Klügel schreibt in der Vorrede seiner *Anfangsgründe der Arithmetik*, dass er sie zum Gebrauch für seine Vorlesungen herausgegeben hat.[183] Tatsächlich wurde dieses Werk auch an Schulen verwendet.[184] Es bleibt allerdings offen, um welche Schularten es sich hierbei handelt.

Auch Autodidakten wurden angesprochen, wie Segner im Titel seiner *Deutlichen und vollständigen Vorlesungen* durch den Zusatz „Zum Gebrauche derjenigen, welche sich in diesen Wissenschaften durch eigenen Fleiß üben wollen“[185] betont. Das Lehrbuch sollte so aufgebaut sein, dass es auch von Kindern verwendet werden konnte.[186] Segner spricht noch eine weitere Absicht an: „Der Zweck bey der Ausfertigung des gegenwärtigen Buches war, denenjenigen, welche sich die Anfangsgründe der Mathematik durch eigenen Fleiß, oder unter der Anführung eines Lehrmeisters, der selbst nicht allzuweit in denselben gekommen ist, bekant machen wollen, dazu beförderlich zu seyn: andern aber die Wiederhohlung des mündlichen Vortrages zu erleichtern, und denselben, wo es nöthig ist, zu ergänzen“[187]. Die Ausführungen im Lehrbuch sollten also diejenigen des Lehrers unter Umständen ergänzen. Beachtet man die Tatsache, dass die Stellen der philosophischen Fakultät an deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts oft nur als Durchlaufstation angesehen wurden, wie wir weiter oben ausgeführt haben, so ist es nicht abwegig, dass die Positionen von Personen besetzt waren, die keine Fachmänner der Mathematik waren. Solche Dozenten konnten die „Anfangsgründe“ für ihre mathematischen Lehrstunden als Grundlage verwenden.

Autodidakten werden auch explizit bei Clemm angesprochen. Seine *Ersten Gründe* verfasste er vor allem für diejenigen Personen, „welche ohne mündlichen Unterricht für sich allein die Grössenlehre in deutscher Sprache lesen, und sich bekannt machen wollen“[188]. Mit Hilfe dieses Lehrbuchs könnten die Leser auch die Inhalte seines *Mathematischen Lehrbuchs*

---

179 Wolff, AG 1, Titelblatt.
180 Wolff, AG 1, Vorrede zur ersten Auflage, S. b^{r}.
181 Vgl. Wolff, Auszug, Vorrede, S.)(4^{v}.
182 Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *4^{v}.
183 Vgl. Klügel, AG, Vorrede, S. iii.
184 Vgl. Klügel, AG, Vorrede, S. v.
185 Segner, VL, Titelblatt.
186 Vgl. Segner, VL, Vorrede zur ersten Auflage, S.)( )( )(^{v}.
187 Segner, VL, Vorrede zur ersten Auflage, o. S.
188 Clemm, EG, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(2^{r}.

ohne mündlichen Unterricht verstehen.[189] Sein *Mathematisches Lehrbuch* richtet sich an den Anfänger, der „nach seinem Hauptzweck noch so viel anders zu lernen hat“[190].

Rückschlüsse darauf, dass über die akademischen Anfänger hinaus auch praktisch tätige Personen angesprochen werden sollten, zeigen einige Bemerkungen über den Nutzen der Mathematik für das Handwerk. Konkret schreibt J. W. von Segner über die abgekürzten Logarithmen- und Sinustafeln, die er auf Anweisung seines Vaters in den *Anfangsgründen* verbesserte, dass diese notwendig seien, da „man den Gebrauch derselben nicht bloß auf die Uebung der Anfänger einschränken muß, weil sie bey vielen practischen Arbeiten eine zureichende Schärfe der Rechnung giebt“[191].

Karsten schrieb seinen *Lehrbegrif* vor allem für Anfänger an den Universitäten, die sein Werk als Ergänzung zum Unterricht verwenden sollten. Es gehe darum „das in den Lehrstunden angehörte für sich zu wiederholen. Man wende nicht ein, daß auf solche Art der mündliche Vortrag ganz unnöthig seyn werde, wenn alles schon im Buch stehe, was der Lehrer von der Sache sagen könne. In den mathematischen Collegiis komt es nach meiner Erfahrung nicht so sehr darauf an, daß der Lehrer viel mehr vortrage, als was im Buch stehet, sondern vornemlich darauf, daß er den Zuhörern das Buch selbst nur verständlich und geläufig mache. Die allerwenigsten Zuhörer fassen dasjenige, was im Buch entweder gar nicht oder so kurz stehet, daß der mündliche Vortrag vieler zur Ergänzung beyfügen mus“[192]. Karsten unterscheidet zwischen der Aufgabe eines Lehrbuchs und der Aufgabe eines Lehrers im akademischen Unterricht. Zwar betont er, dass sein *Lehrbegrif* auch als Vorlesungsgrundlage verwendet werden könne, legt aber besonderen Wert auf den Fleiß der Studenten, denn nur dadurch könnten sie zu umfassenderen mathematischen Kenntnissen gelangen.[193] Sein *Lehrbegrif* war auch für autodidaktische Studien gedacht und für diejenigen Personen geschrieben, „die durch eigenen Fleis sich volständigere Kenntnisse erwerben, und nicht bey den ersten Anfangsgründen stehen bleiben wollen“[194]. Damit richtet er sich nicht nur an Anfänger, sondern auch an fortgeschrittene Personen, die einen tieferen Einblick in die Mathematik erhalten möchten. Aus Karstens Ausführungen kann auch gefolgert werden, dass an deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts hauptsächlich elementare mathematische Kenntnisse vermittelt wurden.

Die von uns angeführten Belegstellen zeigen, dass die Adressaten der „Anfangsgründe“ Anfänger der Mathematik im weitesten Sinne waren, die die mathematischen Wissenschaften an Universitäten, Schulen oder in autodidaktischen Studien erlernen wollten. Aufgrund der fehlenden Schulpflicht im deutschsprachigen Gebiet im 18. Jahrhundert können wir annehmen, dass die meisten Personen erst im Rahmen ihrer akademischen Ausbildung mit der Mathematik in Berührung kamen. Zwar wurde die Mathematik auch an einigen Schulen gelehrt, aber man beschränkte sich hier in erster Linie auf die Vermittlung elementarer Rechenfertigkeiten. Sowohl Schüler und Studenten, als auch Lehrer konnten die „Anfangsgründe“ als Vorlage verwenden. Nicht nur öffentlich angestellte, sondern auch Hauslehrer stellen potenti-

[189] Vgl. Clemm, EG, Vorrede zur zweyten Auflage, o. S.

[190] Clemm, ML 1, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(5^{r}.

[191] Segner, AG, Vorbericht des Uebersetzers, S. a4^{r}.

[192] Karsten, L 1, Vorrede, S. **^{r}.

[193] Vgl. Karsten, L 2, Vorrede, S. **^{r}.

[194] Karsten, L 1, Vorrede, S. **2^{r}.

elle Adressaten dar, denn immerhin war Privatunterricht im 18. Jahrhundert noch weit verbreitet.[195]

Auffällig ist, dass die Autoren der hier betrachteten „Anfangsgründe" ihren Adressatenkreis sehr offen hielten. Ihre Lehrbücher konnten von unterschiedlichen Personen mit verschiedenen Absichten verwendet werden. Die Vielfalt der intendierten Personengruppe und die vielseitige Einsetzbarkeit können als wichtige Merkmale dieser Lehrbücher angesehen werden. Diese Aspekte dürften auch die weite Verbreitung und Verwendung der Lehrbücher erklären, die wiederum einen entscheidenden Schritt zu einer einheitlichen mathematischen Lehre im deutschsprachigen Raum darstellen. Diese Faktoren hängen eng mit den Gegebenheiten des 18. Jahrhunderts zusammen, denn immerhin gab es noch kein differenziertes Bildungssystem mit entsprechenden Lehrbüchern. Zum Ende des 18. Jahrhunderts und im 19. Jahrhundert lassen sich bereits erste Spezialisierungen feststellen. Es wurden oftmals die Adressaten der Lehrbücher genauer benannt, beispielsweise durch Bezeichnung der Lehrwerke wie die *Anfangsgründe der Differenzial- und Integral=Rechnung zum Gebrauch des Ingenieurs und Artilleristen* (1784) von Christian Karl August Ludwig von Massenbach (1758-1827). Wir begegneten während unserer Studien auch Lehrbüchern, die für bestimmte Schulklassen geschrieben wurden, beispielsweise die *Anfangs-Gruende der Rechen-Kunst in Bruechen, welche der Pfoertnischen Jugend in der letzten Classe vorgetragen* (1745/46) von Johann Georg Gotthelf Hübsch. Mit der fortschreitenden Differenzierung des Schulsystems wurden die Lehrbücher immer präziser. Es erschienen dann Jacob Struves (1755-1841) *Leitfaden für den Unterricht in der reinen Mathematik auf Schulen und Gymnasien* (2 Bde., 1789/90) und Gerhard Ulrich Anton Vieths (1763-1836) *Erster Unterricht in der Mathematik für Bürgerschulen* (1796).

1.3.6 Verbreitung und Verwendung

Es ist schwierig, allgemeine Aussagen über die Verbreitung und Verwendung der „Anfangsgründe" zu machen und die Frage zu beantworten, ob die Lehrbücher tatsächlich von denjenigen Personen verwendet wurden, die von den „Anfangsgründe"-Autoren angesprochen wurden. Dies liegt vor allem an der ungünstigen Quellenlage. Vorlesungsverzeichnisse geben stellenweise Aufschluss darüber, welche Lehrwerke für Vorlesungen verwendet wurden. Außerhalb des universitären Milieus können wir nur sehr schwer herausfinden, wer die „Anfangsgründe" beispielsweise für autodidaktische Studien benutzte. In der Sekundärliteratur werden einige Werke als weit verbreitet bezeichnet.[196] Die Vorlesungsankündigungen der Universität Leipzig aus dem 18. Jahrhundert zeigen, dass vor allem die Lehrbücher von Wolff, Kästner und Karsten als Vorlesungsgrundlage verwendet wurden.[197] Unsere Analyse der Göttinger Vorlesungsankündigungen bis 1800[198], die in den *Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen* (GGA) zu finden sind, zeigte, dass hier die Lehrbücher von Kästner dominierten, wobei er sicherlich einen Vorteil hatte, da er fast 50 Jahre lang an dieser Uni-

[195] Vgl. Kühn, S. 40.
[196] Zu Kästner vgl. Müller, C. H., S. 58.
[197] Vgl. Kühn, S. 72 f.
[198] Das Vorlesungsverzeichnis des SS 1761 fehlt, da die Verfasser wegen des Siebenjährigen Krieges keine Beiträge für die GGA erstellen und drucken konnten; vgl. GGA, 1761/62, 1. St., S. 1.

versität wirkte und seine Kollegen auf seine Lehrbücher zurückgriffen. Bemerkenswert ist, dass auch häufig die Lehrbücher von Wolff an der Universität Göttingen verwendet wurden.

Allein durch die Auflagenzahl der Lehrbücher kann angenommen werden, dass sie einen hohen Absatz hatten. Die Autoren der „Anfangsgründe“ äußern sich teilweise in den Vorreden darüber, dass ihre Lehrwerke positiv aufgenommen wurden. Clemm beispielsweise war überrascht, dass er bereits drei Jahre nach der Erstauflage seines *Mathematischen Lehrbuchs* (1764) schon eine neue Ausgabe drucken lassen musste.[199]

Die deutschsprachigen „Anfangsgründe“ wurden – wie naheliegend ist – im deutschsprachigen Raum verwendet. Darüber hinaus gibt es Übersetzungen in andere Sprachen. Wolffs *Anfangs=Gründe* wurden ins Holländische, Französische, Polnische, Russische und Schwedische übersetzt.[200] 1794 erschien in Petersburg eine freie und anonym erschienene russische Übersetzung des ersten Bandes von Kästners *Anfangsgründen*.[201] Dies zeigt, dass es in diesen Ländern scheinbar an geeigneten mathematischen Lehrwerken mangelte und dass auch über die deutschsprachigen Grenzen hinaus einige „Anfangsgründe“ eine solche Berühmtheit erlangten, dass sie in die jeweilige Landessprache übersetzt wurden.

Außerhalb der Universitäten wurden die „Anfangsgründe“ auch für autodidaktische Studien verwendet. So brachte sich Kästner mit Hilfe von Wolffs *Auszug aus den Anfangs=Gründen* selbstständig die elementaren Rechentechniken bei.[202] Carl Friedrich Gauß (1777-1855) erwarb bereits während seiner Zeit als Gymnasiast einige Lehrwerke von Kästner und Wolff.[203] Bernard Bolzano (1781-1848) erlernte seine ersten mathematischen Kenntnisse mit Hilfe von Kästners Lehrbuch.[204]

Die Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf besitzt ein Exemplar des ersten Bandes von Karstens *Anfangsgründen*. In diesem findet man den Vermerk „Fr. Benzenberg 1802“ sowie den Stempel „Benzenberg, Sternwarte der Stadt Düsseldorf 1846“. Karstens Lehrwerke befanden sich also im Bestand dieser Sternwarte, bis die Düsseldorfer Universitätsbibliothek nach und nach den Bestand der Sternwartenbibliothek übernahm, die im Zweiten Weltkrieg zerstört wurde.[205]

Clemm war Lehrer am Gymnasium in Stuttgart und verwendete seine Lehrbücher für den Unterricht. Speziell für den Unterricht an Schulen gaben Wolff seinen *Auszug aus den Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschafften* und Karsten den *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der mathematischen Wissenschaften* heraus. Ob allerdings auch die umfangreicheren Lehrbücher von Wolff, Kästner und Karsten verwendet wurden, konnte aufgrund der spärlichen Quellenlage noch nicht genauer ermittelt werden.

Über die Verwendung der „Anfangsgründe“ von bestimmten Personen hinaus können wir auch Aussagen darüber treffen, für welchen zeitlichen Umfang die Autoren ihre Lehrbücher konzipierten. Die „Anfangsgründe“ wurden in erster Linie als Vorlesungsgrundlage verwendet, so dass naheliegt, dass sich die Autoren an dem Zeitabschnitt „Semester“ orientierten. Allerdings ist fraglich, ob die Inhalte der umfassenden Bände der einzelnen Lehrbücher auch

[199] Vgl. Clemm, ML 1, Vorrede zur zweyten Ausgabe, S.)( )(^{r}.
[200] Vgl. Sommerhoff-Benner, S. 40.
[201] Vgl. GGA, 1796, 177. St., S. 1766.
[202] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 50 f.
[203] Vgl. Reich, Mathematik der Aufklärung. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 79 f.
[204] Vgl. Bolzano, Beyträge, Vorrede, S. XI.
[205] Laut Aussage eines Bibliotheksmitarbeiters.

tatsächlich innerhalb eines Semesters erlernt werden konnten. An den Vorlesungsankündigungen der Universität Göttingen erkennt man, dass die mathematischen Vorlesungen recht differenziert waren. So finden wir beispielsweise Vorlesungen zur reinen Mathematik, Analysis, ebenen und sphärischen Trigonometrie, angewandten Mathematik, Mechanik, Markscheidekunst sowie Astronomie. Diese Themen stellen jeweils eigene Kapitel in den von uns betrachteten Lehrbüchern dar; die einzelnen Bände waren somit zu umfangreich für das Erlernen innerhalb eines Semesters.

Da sich die Autoren nicht immer über den vorgesehenen zeitlichen Umfang ihrer Lehrbücher äußerten, können die „Anfangsgründe“ als Gesamtwerk – im enzyklopädischen Sinne – angesehen werden, wobei durch die weitgehende Eigenständigkeit der darin enthaltenen Themengebiete gewährleistet war, dass bestimmte Kapitel für die individuellen Zwecke verwendet werden konnten. Diese Aussage kann sicher nicht für alle „Anfangsgründe“ getroffen werden, sondern beschränkt sich auf die von uns betrachteten Lehrbücher. Wie wir oben gesehen haben, wurden auch „Anfangsgründe“ für spezielle Schulklassen geschrieben, wobei davon auszugehen ist, dass die Inhalte innerhalb eines Schuljahres erlernt werden sollten, so wie wir es bei heutigen Lehrbüchern haben.

Karsten gewährt uns einen näheren Einblick in den Plan seines *Lehrbegrifs* und den vorgesehenen zeitlichen Rahmen. Die ersten beiden Bände seines Lehrbuchs, die die reine Elementarmathematik umfassen, konzipierte er jeweils für ein Semester.[206] Mit Hilfe des ersten Bandes sei man auf die Erarbeitung der geodätischen und architektonischen Wissenschaften vorbereitet – und gerade diese Bereiche seien bei den Studenten noch am beliebtesten. Für diejenigen, die mehr theoretische Mathematik erlernen wollten, sei der zweite Band des *Lehrbegrifs* gedacht. Auch die drei Bände der *Anfangsgründe* wurden nach Karstens Angaben für jeweils ein Semester geschrieben.[207]

Jeder der ersten beiden Bände von Karstens *Lehrbegrif* zur elementaren reinen Mathematik umfasst über 500 Seiten und lässt sich innerhalb eines halben Jahres erlernen, so Karsten. Der erste Band von Kästners *Anfangsgründen* behandelt die reine Elementarmathematik auf 614 Seiten, wobei neben der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie noch die Perspektive auf knapp 24 Seiten enthalten ist. Somit können wir annehmen, dass dieser Band auch für ein Semester geschrieben wurde. Dies wird durch die Vorlesungsankündigung für das WS 1762/63 bestätigt, in dem Kästner eine Vorlesung zur reinen Mathematik nach seinem Lehrbuch anbot.[208] Dasselbe trifft auch auf die angekündigte Vorlesung zur angewandten Mathematik im selben Semester zu, für die er seine *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* verwendete, die zu diesem Zeitpunkt noch in einem Band erschien.[209] Unsere Vermutung wird durch Kästner selbst bestätigt, der in der Vorrede zur ersten Auflage seiner *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* schreibt: „Meine Bemühung ist dahin gegangen, die Wahrheiten in einer solchen Verbindung abzuhandeln, daß man soviel davon lernen könnte, als sich nur durch einen halbjährigen Fleiß lernen lassen“[210].

Es gab hingegen auch Dozenten, die nur Teile aus einem Band von Kästners *Anfangsgründen* innerhalb eines Semesters behandelten. Professor Meister verwendete Kästners *An-*

[206] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 2, Vorrede, S. *5^{v}.
[207] Vgl. Karsten, AG 1, Vorrede, S. X f.
[208] Vgl. GGA, 1762, 75. St., S. 656.
[209] Vgl. GGA, 1762, 75. St., S. 657.
[210] Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *2^{v}.

fangsgründe für seine Geometrievorlesung.[211] Die Geometrie stellt nur ein Kapitel von Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik* dar, so dass unsere obige Aussage bestätigt wird, dass bestimmte Themen aus dem Gesamtwerk für die einzelnen Absichten verwendet werden konnten. Somit ist es schwierig, eine Aussage über den vorgesehenen zeitlichen Rahmen für das Erlernen der in den Lehrbüchern enthaltenen Inhalte zu geben. Es kommt sicherlich auch auf die tatsächliche Verwendung an, ob beispielsweise alle Abschnitte eines Kapitels behandelt wurden oder welche ausgelassen wurden. Als Richtwert können wir jedoch festhalten, dass ein Band – zumindest im Falle von Kästners und Karstens Lehrbüchern – für ein Semester vorgesehen war.

1.3.7 Intention

Über die offensichtliche Absicht eines Lehrbuchs hinaus, nämlich die Vermittlung mathematischer Kenntnisse, wollen wir der Frage nachgehen, ob die Autoren noch weitere Ziele verfolgten. Anlass dazu gaben nicht nur die Umbrüche innerhalb der Gesellschaft und des Ansehens der Mathematik im 18. Jahrhundert, sondern vor allem entsprechende Ausführungen in den Vorreden der „Anfangsgründe". Die Vorreden gehören im engeren Sinne nicht zum Kern des Werks, stellen aber wichtige Quellen in vielerlei Hinsicht dar, denn hier unterrichten die Verfasser die Leserschaft unter anderem über ihr Vorgehen und ihre Intention.[212]

Es liegt auf der Hand, dass ein Lehrbuch in erster Linie Wissen vermitteln soll. Dabei ist es wichtig, dass „die mathematischen Wissenschaften […] ohne Abbruch der Deutlichkeit und Gründlichkeit, so viel möglich, in einer angenehmen Kürze vorgetragen werden"[213]. Die Ausführungen dürfen „keinen Anfänger erschrecken"[214] oder überfordern. Diejenigen, die mit dem Erlernen einer Wissenschaft beginnen, benötigen ein solides Fundament, auf dem sie weitere Kenntnisse aufbauen können. So hatte Segner den Anspruch alle Lehren richtig darzustellen, da falsche Dinge, die zu Beginn erlernt werden, später schwierig zu eliminieren seien.[215]

Über die wichtigste Absicht hinaus, nämlich den „Lehrlingen der Mathematick zu dieser Wissenschaft eine Anleitung"[216] zu geben, verfolgten die Verfasser der „Anfangsgründe" nach eigenen Angaben noch andere Ziele, die eng mit dem Bildungskontext des 18. Jahrhunderts zusammenhingen und auf den moralischen und nützlichen Aspekt der Mathematik Bezug nahmen. Bereits bei Aristoteles musste die höhere Bildung drei Aufgaben gerecht werden, nämlich erstens Erkenntnis und Wissen, zweitens moralische Erziehung und Tugend, drittens gesellschaftliche Bedürfnisse, Nutzen und Berufsausbildung, wobei in der Geschichte jeweils unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt wurden.[217] Auch in den Vorreden der „Anfangsgründe" finden wir Bemerkungen zu allen drei aufgeführten Aspekten.

---

[211] Vgl. GGA, 1763, 39. St., S. 312.
[212] Vgl. Zedler, Bd. 50 (1746), Sp. 1073.
[213] Clemm, ML 1, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(5^{r}.
[214] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *4^{v}.
[215] Vgl. Segner, AG, Vorrede des Verfassers, S. a5^{v}.
[216] Segner, AG, Vorrede des Verfassers zu der Ausgabe von 1756, o. S.
[217] Vgl. Frijhoff, Grundlagen. In: Rüegg, Bd. 2, S. 53.

Wolff wollte sowohl mit seinen *Anfangs=Gründen* als auch mit seinem *Auszug* die mathematische Ordnung mit Hilfe der mathematischen Lehrart aufzeigen und Anfängern nahebringen, „denn nicht die mathematische Wahrheit, sondern die Ordnung, in welche sie gründlich erkant wird, ist das Mittel, wodurch der Verstand des Menschen geändert wird. […] Dieses war die Ursache, warum ich meine Anfangs=Gründe der mathematischen Wissenschafften heraus gab“[218]. Wolff ging es also um die Verbreitung der mathematischen Methode beziehungsweise Lehrart zwecks Schärfung des Verstandes. Seine Verdienste werden auch von Kästner in der Vorrede zur ersten Auflage seiner *Anfangsgründe der Arithmetik* gewürdigt: Er möchte die Anfangsgründe vollkommener lehren als Wolff „und Lehrlinge so weit […] führen, daß sie ihre Kenntniß durch eigenen Fleiß erweitern und anwenden können“[219]. Kästner möchte also mit seinen mathematischen Lehren den Grundstein für das eigenständige Denken und Weiterarbeiten legen.

Kästners „Absicht ist, durch gegenwärtiges Werk etwas zu Ausbreitung einer solchen Kenntniß der Mathematik beyzutrage, die dadurch erstlich recht brauchbar wird, daß sie gründlich und vollständig ist“[220]. Ihm geht es also zum einen um die Verstandesschärfung, zum anderen um das Verständnis und die Fertigkeiten in der angewandten Mathematik, die nur mit Hilfe der reinen Mathematik erworben werden können. Somit werden der Nutzen und die Notwendigkeit der reinen Mathematik für die angewandte Mathematik betont.

Über sein Lehrwerk hinaus nimmt Kästner in weiteren Schriften Bezug auf den moralischen Aspekt der Mathematik, beispielsweise in seiner Göttinger Antrittsrede *De eo quod studium matheseos facit ad virtutem* (1756). Die Beschäftigung mit der Mathematik leiste nicht nur einen Beitrag zur Verstandesschärfung und zur Sittenausbildung, sondern die Mathematik tritt auch in enger Verbindung mit der Wahrheitsfindung auf, wenn Kästner sagt, dass „keiner die Mathematik wirklich lieben [kann], wenn er nicht zugleich auch die Wahrheit liebt“[221]. Da die Mathematik „nur bei einem ausgeglichenen Gemütszustand erfolgreich betrieben werden“[222] könne, eignet sie sich für Kästner sogar dazu „heftigere Gemütsregungen zu besänftigen“[223]. Bemerkenswert ist, dass Kästner solche Gedanken in seiner Antrittsrede äußerte und sie somit einem größeren, nicht fachkundigen Publikum zugänglich wurden. In diesem Rahmen erfuhren auch Personen, die nicht mit mathematischen Schriften und entsprechenden darin enthalten Gedanken in Kontakt kamen, etwas über die Nützlichkeit der Mathematik – sowohl für die Ausübung anderer Wissenschaften als auch für die Erziehung und Charakterausbildung im Allgemeinen.

Segner nimmt in seinen *Anfangsgründen* sowohl auf den Aspekt der Nützlichkeit als auch auf die Verstandesbildung Bezug: „Was in der Philosophie brauchbar, gründlich, erhaben ist, haben wir gröstentheils der Mathematick zu dancken. Durch sie sind die Künste, welche uns die Bequemlichkeiten des Lebens verschaffen erfunden, oder zur Vollkommenheit gebracht worden. Sie zeigt uns unter allen Wissenschaften am deutlichsten den Weg zur Warheit und Gewisheit, ja sie hat öfters den menschlichen Verstand zu einer Höhe erhoben, welche zu

[218] Wolff, Auszug, Vorrede, S.)(3^{v}.
[219] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^{v}.
[220] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^{r}.
[221] Kästner, De eo quod studium matheseos facit ad virtutem. In: Ebel, S. 57.
[222] Kästner, De eo quod studium matheseos facit ad virtutem. In: Ebel, S. 57.
[223] Kästner, De eo quod studium matheseos facit ad virtutem. In: Ebel, S. 57.

erreichen, er sich kaum versprechen konte“[224]. Die Notwendigkeit der Verstandesbildung betont auch Clemm in seinen *Ersten Gründen* und schreibt, dass die Mathematik „weit geschickter [sei] unsern Verstand zu bilden, als dasjenige, was heut zu Tage den Geschmack vieler Studierenden ausmacht“[225]. Er stellt die Mathematik als eine Wissenschaft dar, durch deren Hilfe andere Wissenschaften gründlicher begriffen werden, aber auch für das Denken im Allgemeinen bedeutungsvoll ist, indem sie nämlich die Gedanken ordnet, die Aufmerksamkeit steigert sowie die Fähigkeit ausbildet, neue Erfindungen zu entdecken.[226]

Es wird deutlich, dass die Verfasser der „Anfangsgründe“ sich nicht nur auf die bloße Vermittlung der mathematischen Kenntnisse beschränkten, sondern dass sie auch auf die Vorzüge der Mathematik hinwiesen. Dies passt in das Zeitalter, in dem die Nützlichkeit der Mathematik für andere Wissenschaften und für die Erziehung im Allgemeinen betont wurde. Da die Autoren der hier betrachteten Lehrwerke auch auf diese Aspekte Bezug nehmen, scheint es, als hätten sie eine umfassendere Intention. Im 18. Jahrhundert war die Mathematik lediglich eine untergeordnete Wissenschaft. Aus den Ausführungen der Autoren selbst wird deutlich, dass sich nur wenige Studenten für die Mathematik begeistern konnten. In diesem Zusammenhang ist es möglich, dass die Autoren der Lehrbücher das Ziel verfolgten die Mathematik als Fach zu etablieren und für das Erlernen mathematischer Wissenschaften zu argumentieren.

1.3.8 Didaktisches Vorgehen

Das wichtigste Ziel der „Anfangsgründe“-Autoren war es, ein Lehrbuch für Anfänger der Mathematik zu schreiben. Eng mit dieser Adressatengruppe und dieser Intention hängt das didaktische Vorgehen zusammen, das auf das Ziel abgestimmt sein muss. An den Ausführungen der Autoren wird deutlich, dass sie sich auch mit didaktischen Fragen befasst und sich Gedanken um einen sinnvollen Aufbau ihrer Lehrbücher gemacht haben.

Der Leser der „Anfangsgründe“ benötigt keine mathematischen Vorkenntnisse. Zu Beginn jedes Kapitels werden elementare Begrifflichkeiten erklärt. Kästner erläutert am Anfang des Arithmetik-Kapitels im ersten Band seiner *Anfangsgründe* den Begriff „Zahl“ und die vier Rechenoperationen; diesen begegnet man heutzutage in den Lehrplänen der Grundschulen. Ausgehend von diesen Erklärungen werden dann sukzessiv weiterführende Themen bearbeitet. Kästner beendet sein Arithmetik-Kapitel mit der Lehre von den Logarithmen. Der Leser findet nicht nur Lehrsätze und ihre Beweise, sondern kann auch durch die gestellten Aufgaben, beispielsweise Rechen- und Konstruktionsaufgaben, und die anschließend präsentierten Lösungen selbst aktiv werden und seinen Verstand benutzen. Durch praxisnahe Beispiele wird den Lernenden ein Bezug der Mathematik zur Alltagswelt aufgezeigt. Am Ende der Werke sind Kupfertafeln eingefügt, die zahlreiche Abbildungen, in erster Linie geometrische Konstruktionen, zur Erläuterung enthalten (siehe Abbildung 6).

[224] Segner, AG, Vorrede des Verfassers, o. S.
[225] Clemm, EG, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(5.
[226] Vgl. Clemm, EG, S. 3.

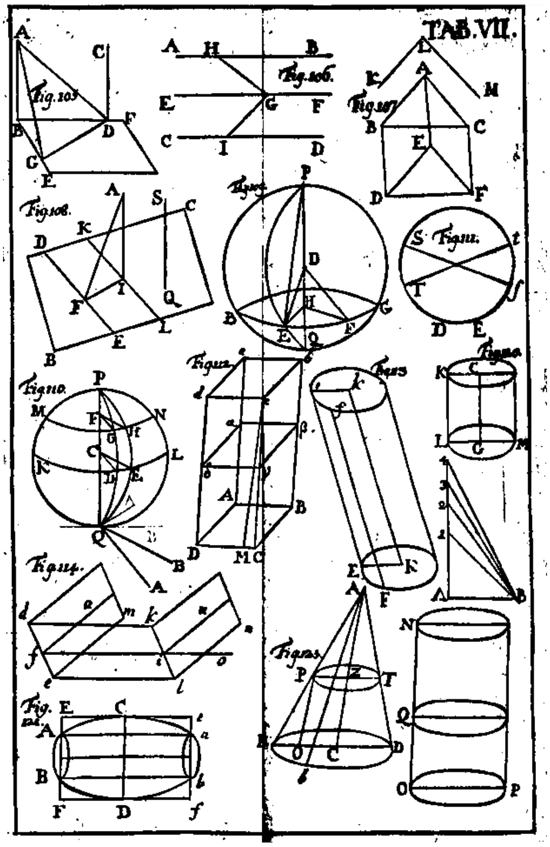


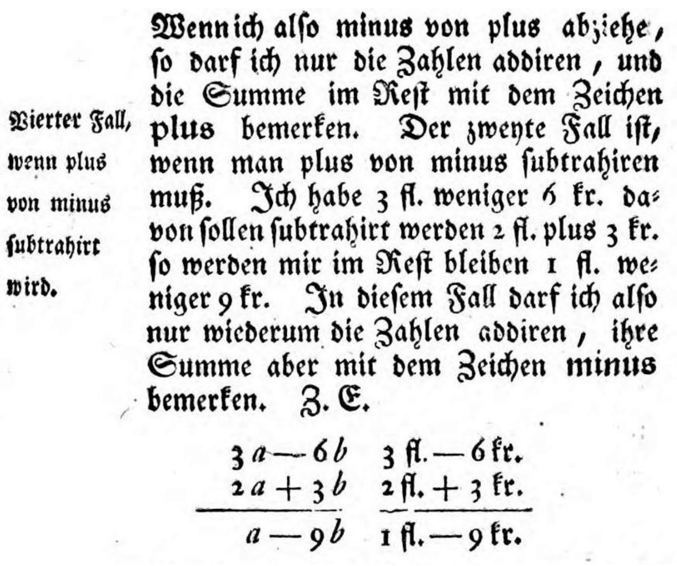
Abbildung 6: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, Tab. VII.

Zwar beschränken sich die Autoren der „Anfangsgründe“ auf die Vermittlung elementarer mathematischer Kenntnisse, aber durch die zahlreichen Literaturverweise eröffnen sie dem Leser die Möglichkeit, sich selbstständig weiterführendes Wissen anzueignen. Dabei wird immer wieder der eigene Fleiß der Studenten betont. Karsten appelliert, dass die Lehrer nicht alles aus dem Lehrbuch vortragen sollen, sondern die Studenten selbst aktiv werden müssen: „Ich meine, daß dies eben die rechte Methode sey, mit Anfängern die Mathematik zu treiben. Wenn diese nicht selbst Hand anlegen, und durch eigene Uebung sich eine Fertigkeit im Calcul erwerben, und die Lehren der Geometrie sich geläufig machen; so ist alle Mühe und Arbeit umsonst, wenn ihnen gleich der Lehrer alles haarklein vordemonstrirt“[227]. Diese moderne Idee nennt man heutzutage Handlungsorientierung, die sich von der passiven Lehrmethode der Scholastik abgrenzt. Hieran ist zu sehen, dass sich die Autoren an die Bedürfnisse ihrer Zeit anpassten. Man ging weg von der mittelalterlichen, dogmatischen Lehrart hin zu einer demonstrativen Methode, wobei das eigenständige Denken der Studenten angesprochen wurde.[228] Im Bereich der Mathematik wird Wolff als der erste Autor betrachtet, der diesen Wandel vollzog. Man entfernte sich vom reinen Können aus dem Gedächtnis heraus und begründete stattdessen sämtliche Schritte. Aus diesem Grund mussten alle Begriffe deutlich erklärt und die Sätze durch zusammenhängende Schlüsse bewiesen werden. Hierbei kommt der sogenannten geometrischen beziehungsweise mathematischen Methode oder Lehrart eine besondere Bedeutung, die vor allem Wolff stark verfolgte. Das Wesen der mathematischen Methode liegt für ihn nicht nur darin, dass ihre Lehren lückenlos vorgetragen werden,

[227] Karsten, L 2, Vorrede, S.**2^{v}.

[228] Vgl. hierzu und zum Folgenden Ahrbeck, Christian Wolffs Bedeutung. In: 450 Jahre Halle, S. 43.

„sondern man lernet auch dieselbe desto hurtiger in anderen Wissenschafften anbringen“[229]. Die mathematische Lehrart „fänget an von den Erklärungen, gehet fort zu den Grund=Sätzen, und hiervon weiter zu den Lehr=Sätzen und Aufgaben: überall aber werden Zusätze und Anmerckungen nach Gelegenheit angehänget“[230]. Auch Kästner verfolgt in seinem Lehrbuch diese synthetisch-deduktive Herangehensweise und beschreibt sie in dem Kapitel „Vorerinnerungen von der Mathematik überhaupt und ihrer Lehrart“[231]. Segner bedient sich ebenfalls der geometrischen Lehrart, „einer an einander hangenden, deutlichen, weitläuftigen und ungezwungenen Schreibart“[232]. Er schreibt primär für Anfänger, die diese Vorgehensweise nicht gewohnt sind, so dass er zu Beginn seines Lehrbuchs weitläufiger sein musste.[233] Je weiter man dann in den Abhandlungen fortschreitet, desto kürzer werden die Ausführungen. Die dargestellten Beweise stammen aus verschiedenen Quellen, und Segner achtet darauf, dass sie verständlich formuliert sind ohne dabei „den Zusammenhang der Sätze zu unterbrechen, und die Kette der Schlüsse, welche vom Anfange an durch das ganze Buch reichet, zu zerreissen“[234]. Clemm hingegen vermeidet in seinen *Ersten Gründen* die schulmäßige Herangehensweise und notiert stattdessen am Rand des Fließtextes kurze Merksätze, die sich leicht einprägen lassen und den Inhalt verständlicher machen (siehe Abbildung 7).[235] Auch die Zeichnungen hält er so einfach wie möglich, um die Leser nicht durch zu viel Schmuck abzulenken, oder sie durch zu viele Zeichnungen abzuschrecken.[236] Clemms *Mathematisches Lehrbuch* hingegen zeigt ein solches Vorgehen auf, wie wir es bei Wolff und Kästner finden, bei denen die einzelnen Paragraphen nicht nur nummeriert, sondern auch mit Bezeichnungen wie „Lehrsatz“, „willkürlicher Satz“ und dergleichen versehen sind.


Wenn ich also minus von plus abziehe, so darf ich nur die Zahlen addiren, und die Summe im Rest mit dem Zeichen plus bemerken. Der zweyte Fall ist, wenn man plus von minus subtrahiren muß. Ich habe 3 fl. weniger 6 kr. davon sollen subtrahirt werden 2 fl. plus 3 kr. so werden mir im Rest bleiben 1 fl. weniger 9 kr. In diesem Fall darf ich also nur wiederum die Zahlen addiren, ihre Summe aber mit dem Zeichen minus bemerken. Z. E.

Vierter Fall, wenn plus von minus subtrahirt wird.

$3a - 6b$	3 fl. — 6 kr.
$2a + 3b$	2 fl. + 3 kr.
$a - 9b$	1 fl. — 9 kr.

Abbildung 7: Clemm, *Erste Gründe*, S. 64.

229 Wolff, AG 1, S. 3.
230 Wolff, AG 1, S. 5.
231 In: Kästner, AG 1.1., S. 1-23.
232 Segner, VL, Vorrede zur ersten Auflage, o. S.
233 Vgl. Segner, VL, Vorrede zur ersten Auflage, o. S.
234 Segner, VL, Vorrede zur ersten Auflage, o. S.
235 Vgl. Clemm, EG, Vorrede zur ersten Auflage, S.)(2^{v} f.
236 Vgl. Clemm, EG, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(3^{r} f.

Ein Lehrbuch, das die ersten Grundlagen der Mathematik vermitteln soll, soll nach Karsten kurz, vollständig und deutlich sein: „[…] die strenge synthetische Methode, die sich hier vorzüglich anbringen läst, trägt dazu ungemein vieles bey“[237]. Allerdings kritisiert er diese Methode gleichzeitig bezüglich der Kürze der Ausführungen, da die meisten Studenten so nur wenige nützliche Kenntnisse von der Mathematik erlernten.[238] Darüber hinaus sei sie nicht für Anfänger geeignet, die die mathematischen Wissenschaften durch eigenen Fleiß erlernen wollen.[239] Daher konzentriert sich Karsten auf weniger Inhalte, welche er ausführlicher darstellt, um auch Studenten mit mittelmäßigen Fähigkeiten gerecht zu werden.[240]

Es besteht eine enge Verbindung zwischen den Lehrbüchern und dem tatsächlichen Unterricht. So berücksichtigten die Autoren ihre eigenen Lehrerfahrungen bei der Verfassung und Verbesserung ihrer Lehrwerke. Clemm wollte mit seinen *Ersten Gründen* ein Lehrbuch herausbringen, welches auch zu autodidaktischen Studien verwendet werden konnte.[241] Einzelne Teile des Lehrbuchs legte er bereits seinen Schülern vor, als sich sein Werk noch im Druck befand. Die Schüler haben – so Clemm – die Ausführungen tatsächlich verstanden. Aus diesem Grund hoffte er, dass dieser Effekt auch bei Schülern eintritt, die keine mathematischen Lehrstunden besuchen. Segner wurde hinsichtlich seiner *Anfangsgründe* „täglich in der Meinung bestärckt, daß man überhaupt auf die dem Anfänger zuerst vorgetragenen Lehren, den größten Fleis zu wenden habe, weil dieselben zu allem übrigen den Grund legen sollen“[242]. Daher sind für Segner „die Deutlichkeit der Schreibart, die geschickte Ordnung der Sätze, und die Kürtze und Bündigkeit der Beweise, welche aus jener entstehet“[243] besonders wichtig. Über sein Lehrbuch *Vorlesungen* schreibt Segner, dass es auf Grundlage seiner eigenen Lehrerfahrungen entstanden sei und es deswegen diesen Titel trage.[244]

Lehrerfahrungen finden nicht nur in dem didaktischen Vorgehen Niederschlag, sondern auch in dem Aufbau der Werke selbst. Karsten sah in seinem *Lehrbegrif* zwei Bände zur reinen Mathematik vor, die jeweils in einem Semester erlernt werden sollten. Allerdings erfuhr er durch seine Lehrtätigkeit, dass sich nur wenige Studenten zwei Semester lang der Mathematik widmeten. Aus diesem Grund überarbeitete er sein Lehrwerk und stellte in den daraus resultierenden *Anfangsgründen* die reine Mathematik in einem Band, also für ein Semester, dar.[245]

Charakteristisch für die „Anfangsgründe“ ist das schrittweise Vorgehen bei der Präsentation der mathematischen Inhalte. Die Autoren beginnen mit einfachen Begriffserklärungen und gehen weiter zu höheren Kenntnissen. Die mathematischen Lehrsätze werden bewiesen und mit Hilfe von Abbildungen und Beispielen veranschaulicht. Durch die angegebenen Literaturverweise können interessierte Leser sich noch selbstständig tiefergehende Kenntnisse mit Hilfe von anderen Werken aneignen.

---

237 Karsten, L 1, Vorrede, o. S.

238 Vgl. Karsten, L 1, Vorrede, o. S.

239 Vgl. Karsten, L 1, Vorrede, S. **2^{r} f.

240 Vgl. Karsten, L 1, Vorrede, o. S.

241 Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(2^{r} f.

242 Segner, AG, Vorrede des Verfassers, S. a5^{r} f.

243 Segner, AG, Vorrede des Verfassers, o. S.

244 Vgl. Segner, VL, Vorrede zur ersten Auflage, o. S.

245 Vgl. Karsten, AG 1, Vorrede, S. X.

Die häufig verwendete mathematische Methode trägt dazu bei, dass der Leser nicht nur Ergebnisse vorgesetzt bekommt, sondern die Entwicklung der mathematischen Lehren mitverfolgen kann. Dies passt zu den Maximen der Aufklärung: Loslösung von der dogmatischen Lehrart und die Förderung eigenständigen Denkens.

1.4 Zusammenfassung

Unsere Analyse zeigte, dass es sich bei den „Anfangsgründen“ nicht um eine Literaturgattung im engeren Sinne handelt, dass aber die hier interessierenden Lehrwerke unter der Bezeichnung „Anfangsgründe-Literatur“ zusammengefasst werden können, da sie gemeinsame Merkmale aufweisen. Der Begriff „Anfangsgründe“ wurde im weitesten Sinne mit „Einführung in eine Wissenschaft“ gleichgesetzt, so dass sich diese Lehrbücher an Anfänger richteten. Die „Anfangsgründe“ konnten nicht nur für den Unterricht an Schulen und Universitäten, sondern auch für autodidaktische Studien verwendet werden. Für letztere ist vor allem die Verwendung der deutschen Sprache wichtig, die sich im 18. Jahrhundert als Wissenschafts- und Vorlesungssprache etablierte. Damit einhergehend gab es einen großen Bedarf an deutschsprachigen Lehrbüchern, was den Anstieg der Anzahl mathematischer „Anfangsgründe“ erklärt.

Zur Charakterisierung der „Anfangsgründe“ betrachteten wir einzelne Aspekte näher, wobei diese lediglich eine Auswahl darstellen. In der vorliegenden Arbeit wurden diejenigen Werke als Quellengrundlage verwendet, die sich sowohl durch ihre Verbreitung als auch durch die Vielfalt der dargestellten mathematischen Wissenschaften auszeichnen. Man beschränkte sich nicht, wie bei Forschungsmonographien, auf ein Wissensgebiet, sondern versuchte alle mathematischen Disziplinen in einer lehr- und lernbaren Form darzustellen. So findet man nicht nur Ausführungen zur reinen, sondern auch zur angewandten Mathematik in Form von mechanischen, optischen, astronomischen und architektonischen Wissenschaften. Hier wurde erstmals das gesamte mathematische Wissen in deutscher Sprache dargestellt, wobei nicht das wissenschaftliche mathematische, sondern das unterrichtete mathematische Wissen präsentiert wird. Daher finden wir in den Lehrbüchern nicht alle mathematischen Inhalte in ihrem gesamten Umfang, sondern studienrelevante Anteile, die durch zahlreiche Literaturverweise insofern ergänzt werden, dass der Leser sich selbstständig weiterführende Inhalte aneignen kann.

Bei den Verfassern handelt es sich, bis auf Clemm, um Universitätsprofessoren für Mathematik (und Naturlehre). Gemeinsam haben die Autoren, dass sie auf Grund ihrer Lehrerfahrungen ihre Werke konzipieren und verbessern konnten. Es besteht eine enge Verbindung zwischen den Lehrbüchern und dem tatsächlichen Unterricht, was sich darin zeigt, dass die Verfasser ihre Inhalte didaktisch aufbereitet haben. Dem Leser begegnet eine eher wissenschaftliche Arbeitsweise, die sich unter anderem in einem systematischen Vortrag und einer strengen mathematischen Beweisführung zeigt. Die Autoren planten ihre Lehrbücher nicht nur für eine begrenzte Personengruppe, sondern hielten den Adressatenkreis weitgehend offen. Wie aus den Vorreden in den „Anfangsgründen“ hervorgeht, wurden diese als Lehrbücher verfasst, die in erster Linie von Professoren und Studenten als Vorlesungsgrundlage verwendet werden konnten. Die Lehrbücher beziehungsweise die einzelnen Bände der Gesamtwerke hatten einen solchen Umfang, dass die dargestellten Inhalte in der Regel innerhalb eines halben Jahres erlernt werden konnten. Zudem konnte durch die Lehrbücher eine

Zeitersparnis bei den Vorlesungen erreicht werden, indem sie das althereingebrachte Diktieren des Lehrstoffs in den Vorlesungen ersetzten. Vor allem Studenten konnten auf diese Weise die Inhalte nicht nur vor-, sondern vielmehr nachbereiten.

Die „Anfangsgründe" wurden nicht nur für Lehrer und Schüler im weitesten Sinne geschrieben, sondern sie eigneten sich auch für autodidaktische Studien. Eng mit dieser Absicht hängt die Verwendung der deutschen Sprache zusammen, die sich im 18. Jahrhundert als Wissenschaftssprache an deutschen Universitäten etablierte und allmählich das Latein verdrängte. So konnte die Mathematik auch von Personen erlernt werden, die keine oder nur wenige Lateinkenntnisse vorweisen konnten oder keinen Zugang zur Universität hatten. Dank des systematischen Vortrags, der mit den elementaren mathematischen Kenntnissen beginnt, waren Vorkenntnisse nicht notwendig. Durch sukzessives Fortschreiten zu höheren Kenntnissen sowie Aufgaben und Abbildungen konnten die Verwender der Lehrbücher selbst aktiv werden. Dies steht in Verbindung mit Zielen der Aufklärung, nämlich der Verbreitung von Wissen innerhalb der gesamten Bevölkerung und der Erziehung zu selbstständigem Denken.

Es scheint, dass die Verfasser der „Anfangsgründe" ein eigenes Selbstverständnis als Lehrer der Mathematik besaßen, das über das reine Publikationsbedürfnis hinausging. Dies zeigt sich nicht nur in ihrem Interesse an der mathematischen Lehre, sondern vor allem auch in der Betonung des Nutzens und des Stellenwerts der Mathematik für die Wissenschaften und die Erziehung im Allgemeinen. Durch die zahlreichen Ausführungen, die in den „Anfangsgründen" selbst zu finden sind, sieht es so aus, als wäre es den Autoren nicht nur um die reine Vermittlung mathematischer Inhalte gegangen, sondern auch um die Etablierung der Mathematik als eigenständige und anerkannte akademische Disziplin.

Dies sind einige Aspekte, um den Erfolg der „Anfangsgründe" auch ohne den Vergleich mit anderen Lehrbüchern ihrer Zeit zu erklären. Wegen der Beschränkung der Quellen ist es nicht möglich zu sagen, was diese Lehrbücher so erfolgreich machte. Zur Beantwortung dieser Frage müssen auch andere mathematische Lehrbücher des 18. Jahrhunderts in die Betrachtung mitaufgenommen und miteinander verglichen werden. Aus den Ausführungen der Verfasser der hier eingesehenen „Anfangsgründe" wird jedoch ersichtlich, dass ihre Lehrbücher beispielsweiser vollständiger waren als die übrigen. Der wahrscheinlichste Grund für den Erfolg der „Anfangsgründe" mag die direkte Verwendbarkeit bei der Lehre sein.

Trotz der weiten Verbreitung und Verwendung der alle mathematischen Disziplinen umfassenden „Anfangsgründe" im 18. Jahrhundert wurden sie nur noch zu Beginn des 19. Jahrhunderts genutzt. Sie scheinen dann von Lehrwerken verdrängt worden zu sein, die sich auf eine Disziplin oder Adressatengruppe spezialisierten. Hinzu kommen die Umbrüche innerhalb des Bildungssystems sowie die Entwicklung der einzelnen Disziplinen, beispielsweise die Emanzipation der Physik, so dass die „Anfangsgründe" den veränderten Anforderungen nicht mehr gerecht und neue Lehrbücher notwendig wurden.

2 Abraham Gotthelf Kästner

Die Ausführungen im vorangegangenen Kapitel sollten einen Einblick in die mathematischen „Anfangsgründe“ geben. Im Folgenden wird der Fokus auf einen berühmten Lehrbuchautor gelegt, nämlich Abraham Gotthelf Kästner. Seine erfolgreichen *Mathematischen Anfangsgründe*, die in der jüngsten Auflage zehn Bände umfassten, beinhalten sämtliche Wissenschaften, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik gezählt wurden. Trotz Kästners Berühmtheit und des Erfolgs seines Lehrbuchs erscheint er in der Sekundärliteratur oftmals von Wolff, der als Begründer der „Anfangsgründe“-Tradition angesehen wird, überschattet zu sein. Besonderes Interesse weckt die Aussage, dass Kästners Lehrbücher auf seine Zeitgenossen eine positive Wirkung hatten und sie für viele Lehrbuchautoren in den 1770er und 1780er Jahren als Vorbild dienten.[246]

Um mehr über Kästner zu erfahren, werden wir zunächst einen Einblick in seine Biographie mit dem Schwerpunkt auf seine mathematische Karriere werfen und dabei verschiedene Fragen beantworten, die sowohl Rückschlüsse auf Kästners Standpunkt innerhalb der Gelehrtenwelt als auch auf das Bildungssystem des 18. Jahrhunderts zulassen. Es gab verschiedene Möglichkeiten eine mathematische Laufbahn einzuschlagen. Einer dieser Wege soll exemplarisch anhand Kästners Biographie dargestellt werden, wobei die folgenden Fragen leitend sind: Wie wurde man im 18. Jahrhundert zum Professor für Mathematik – eine Wissenschaft, die zu dieser Zeit noch nicht als Brotwissenschaft galt? Was erweckte Kästners Interesse an dieser Wissenschaft? Wo erlernte er die Mathematik? Welchen außeruniversitären Tätigkeiten ging Kästner in seiner Position als Mathematikprofessor nach?

Die Ausführungen über Kästners mathematische Laufbahn und Aktivitäten sind in vier Teile gegliedert. Zuerst betrachten wir Kästners Erziehung in Kindheit und Jugend. Hier wird deutlich werden, dass Kästners Interesse an der Mathematik bereits in jungen Jahren geweckt wurde. Im zweiten Teil wird sein Studium an der Universität Leipzig dargestellt, wobei seine mathematische Ausbildung im Vordergrund steht. Im dritten Teil geht es um seine Lehrtätigkeit an den Universitäten Leipzig und Göttingen. Abschließend werden seine Aktivitäten in mathematischer Hinsicht außerhalb der Universität aufgezeigt, um seinen Standort innerhalb des wissenschaftlichen Milieus genauer zu ermitteln.

Um einen Einblick in Kästners Leben zu erhalten, ist die bio- und bibliographische Arbeit über Kästner von Baasner (1991) sehr nützlich. Ein Großteil seiner Ausführungen fließt in die vorliegende Arbeit mit ein. Als weitere Quellen zur Rekonstruktion von Kästners akademischer Laufbahn dienen seine eigene deutschsprachige Lebensbeschreibung (1764, gedruckt 1768)[247] und seine lateinischsprachige Vita (1787), aber auch weitere Schriften wie beispielsweise Lexikonartikel.

In diesem Kapitel werden Kästners *Mathematische Anfangsgründe* nur am Rande erwähnt, da sie in Kapitel 3 näher betrachtet werden. Eine Untersuchung von Kästners mathematischer Forschung und damit einhergehend sämtlicher Dissertationen und Zeitschriftenartikel wird in der vorliegenden Arbeit nicht erfolgen, wäre aber für ein umfassenderes Bild von Kästner als Mathematiker von großem Nutzen.

---

[246] Vgl. Müller, C. H., S. 58.

[247] In: Baldinger, S. 46-74. Vgl. Baasner, S. 76, Anm. 4.

2.1 Kindheit und Jugend

Abraham Gotthelf Kästner wurde am 27.9.1719 als einziges Kind seiner Eltern in Leipzig geboren.[248] Sein Vater Abraham Kästner war außerordentlicher Professor für Jurisprudenz an der Universität Leipzig, seine Mutter Anna Rosina (geb. Pommer) war Hausfrau. Kästner wuchs in soliden finanziellen Verhältnissen und genoss eine gute und wohlbehütete Erziehung.[249] Er besuchte keine öffentliche Schule, was im 18. Jahrhundert nicht ungewöhnlich war, da es in Deutschland noch keine einheitliche Schulpflicht gab. Als Lehrer für seinen Sohn wählte der Vater meist einige seiner Studenten, die seinen Sohn in bestimmten Fächern unterrichteten.[250] Neben diesen spielten Kästners Vater selbst und Kästners Onkel mütterlicherseits, der Sachverwalter Gottfried Rudolf Pommer, eine wichtige Rolle in der Erziehung Kästners. Zu Pommer hatte Kästner ein solch inniges Verhältnis, so dass er ihn „einen zweyten Vater"[251] nannte.

Bereits im frühen Kindesalter zeigten sich Kästners Wissbegierde und sein einzigartiges Talent, sich schnell und selbstständig Wissen anzueignen.[252] Von seinem Vater erlernte Kästner beispielsweise das Lesen ohne vorausgegangenen Erwerb des Alphabets.[253] Kästner erwarb also die Lesefähigkeit allein durch ihren praktischen Gebrauch. Er fand auch schnell Gefallen an Büchern und genoss Zugriff auf die umfangreiche Bibliothek seines Onkels, die seine Wissbegierde weckte. Auf diesem Wege konnte er sich ein umfassendes Wissen über sämtliche Bereiche aneignen, so dass er in seiner späteren Laufbahn als Universitätslehrer theoretische Formeln mit Beispielen belegen und so den Unterricht anschaulich gestalten konnte.[254]

In Bezug auf Pommer betont Kästner dessen umfangreiche historische Kenntnis.[255] Durch ihn erlernte er die modernen Sprachen Französisch, Englisch, Italienisch und Spanisch. Dadurch konnte er zu einem späteren Zeitpunkt nicht nur als Übersetzer tätig werden, sondern war auch befähigt fremdsprachige Literatur zu lesen – ein absolutes Muss in der Gelehrtenwelt des 18. Jahrhunderts. Vor allem wurden zu dieser Zeit viele wissenschaftliche Werke in französischer Sprache verfasst.[256] Besonders wichtig für Kästners Werdegang als Mathematiker war, dass er durch Pommer in Kontakt mit der Mathematik kam. Für den mathematischen Unterricht stellte ihm sein Onkel einige mathematische Bücher zur Verfügung.[257] Welche Werke sich allerdings darunter befanden, kann aufgrund der Quellenlage nicht beantwortet werden.

---

[248] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 46.
[249] Vgl. Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 196.
[250] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 46 f.
[251] Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 47.
[252] Vgl. Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 196.
[253] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 46 f.
[254] Vgl. Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 197.
[255] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Vita, S. XI. Diese Angaben stimmen mit denen im ADB-Artikel überein; vgl. Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf" von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 440. In seiner Selbstbiographie aus dem Jahre 1768 erwähnt Kästner nur Englisch, Französisch und Italienisch; vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 47. Kästner schreibt, dass er sich Spanisch erst während seiner Übersetzungstätigkeiten angeeignet habe; vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 60.
[256] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 47 f.
[257] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 47.

In seiner Selbstbiographie lässt Kästner bereits gewisse didaktische Elemente erkennen, die er für den Unterricht als wichtig ansieht. Er ist gegen das Auswendiglernen, bei dem der Verstand nicht gebraucht wird, stattdessen spricht er sich für ein Lernen basierend auf „Einsichten mit Begriffen und Ueberlegung“[258] aus. Konkret auf das Erlernen einer Fremdsprache bezogen schreibt er, dass er sich selbst nie lange mit der Grammatik beschäftigt habe, sondern die jeweilige Sprache praktisch erlernte.[259] Auch fiel ihm in jungen Jahren das Rechnen schwer, da er nur mit dem Gedächtnis ohne Überlegung arbeiten musste, was seiner Auffassung vom Lernen widersprach: „Als Knabe sollte ich freylich wohl rechnen lernen, aber wie ich nie Gedult hatte, wo blos mein Gedächtniß ohne Ueberlegung arbeiten sollte, so war ich selbst die Regeln des Addirens zu beobachten, zu flüchtig, und ward oft von meinen Eltern ausgelacht, wenn ich mich darauf verlies, in der Mathematic rechnen zu lernen. Ich glaube es doch da noch so ziemlich gelernt zu haben, ob ich gleich noch eigen weiß, daß ich Anfangs im Einmal eins in Wolfs Auszuge nachsahe, als ich eben noch nicht auswendig wußte, wie viel siebenmal Achte oder sechsmal Neune ist“[260].

Mit 10 Jahren nahm sein Vater Kästner zu seinen juristischen Vorlesungen mit, die er so aufmerksam verfolgte, dass er sich mit 11 Jahren bereits an einem „Collegio disputatorio“ beteiligen konnte.[261] Hier wird ersichtlich, dass der Vater für Kästner eine juristische Laufbahn vorgesehen hatte und hier die Weichen für seine weitere Laufbahn legen wollte.

2.2 Studium

Kästners Immatrikulation an der Universität Leipzig erfolgte an seinem zwölften Geburtstag am 27.9.1731.[262] Wie es sein Vater wünschte, schlug Kästner zunächst eine juristische Laufbahn ein. Zu dieser Zeit war es üblich, dass die Studenten zu Beginn ihres Studiums einige propädeutische Vorlesungen besuchen mussten, die in der philosophischen Fakultät[263] angesiedelt waren, um auf das weitere Studium vorbereitet zu sein.

Bereits früh zeigte Kästner großes Interesse an zahlreichen Wissenschaften, besonders an der Mathematik, Physik, Philosophie und Geschichte.[264] Damit aber war sein Interessengebiet noch nicht ausgeschöpft. Kästner nahm auch an Vorlesungen über Botanik, Chemie, Feldmessen, Anatomie, gerichtlicher Medizin und medizinischen Demonstrationen teil.

Anfangs hörte Kästner philosophische Vorlesungen bei Professor Johann Heinrich Winckler (1703-1770). Durch ihn wurde Kästners Interesse an der Physik geweckt, in der sich

[258] Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 47.

[259] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 48.

[260] Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 50 f.

[261] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 50.

[262] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 50 f. Zwar war es gängig, dass das Studium früher begonnen wurde als heutzutage, dennoch scheint Kästner mit diesem Alter eine Ausnahme gewesen zu sei. Dies geht aus einem Vergleich der Lebensbeschreibungen anderer Personen hervor.

[263] Laut Aussage eines Mitarbeiters des Universitätsarchivs Leipzig konnten keine Unterlagen über eine förmliche Umbenennung von der „Artistenfakultät“ zur „Philosophischen Fakultät“ ausfindig gemacht werden. Deswegen können wir vermuten, dass sich die Umbenennung schleichend durchgesetzt hat.

[264] Vgl. hierzu und zum Folgenden Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 440.

Winckler in der Folgezeit einen Namen gemacht habe, wie Kästner schreibt.[265] Physikalische Vorlesungen besuchte er bei Johann Christian Lehmann[266] (1675-1739). Kästner bezeichnet ihn als sehr erfahren in der Natur und in der Aufstellung von Apparaten.[267] Außerdem beherrschte er – so Kästner – die Grundlagen der Mathematik und wandte sie richtig in der Physik an, durchschaute aber nicht die höhere Mathematik. Nach zweijährigem Studium wurde Kästner 1733 zum Notar ernannt und hatte durch Ausübung dieses Amtes die Möglichkeit auf einen eigenen Verdienst.[268] 1735 erwarb er den Titel Baccalareus[269] und hatte dadurch das Recht über gedruckte philosophische Sätze zu disputieren.[270] Ab 1735 besuchte Kästner mathematische Vorlesungen bei Georg Friedrich Richter[271] (1691-1742), der über Wolffs *Auszug* las.[272] Darüber hinaus eignete sich Kästner selbstständig die Geometrie aus der Euklid-Ausgabe von Christoph Schlüssel SJ (1537-1612), bekannter als Clavius, an. Dasselbe trifft auch auf die Buchstabenrechnung zu, die Kästner mit Hilfe von Wolffs *Auszug* erlernte, da Richter in seinen Vorlesungen die Buchstabenrechnung nicht behandelt hatte. Ab 1735[273] hörte Kästner Mathematik bei Christian August Hausen[274] (1693-1743).[275] Dieser las öffentlich über seine *Elementa matheseos* (1734), wobei er auch die euklidische Geometrie und die Kegelschnitte behandelte. In Hausens privat gehaltenen Vorlesungen, an denen Kästner ebenfalls teilnahm, standen Wolffs *Anfangs=Gründe*, die Physik nach Hamberger und Newtons *Arithmetica universalis* auf dem Programm. Kästner lobte die Deutlichkeit von Hausens Vorlesungen, erwähnt aber auch, dass Hausen zum Selbststudium anregte.[276] Wenn man Hausen etwas fragte, so resultierten daraus eigentlich noch mehr Fragen zum eigenständigen Erforschen. Durch Hausen lernte Kästner auch philosophische Betrachtungen über die Mathematik kennen, beispielsweise wie viele Gemeinsamkeiten zwischen philosophischen Argumenten und geometrischen Beweisen bestehen.[277] Insgesamt schätzte Kästner seinen Lehrer Hausen sehr; in einem Brief an Gotthold Ephraim Lessing (1729-1781) schreibt Kästner, dass er von ihm „die meisten Wahrheiten gelernet habe“[278]. Spätestens zu diesem Zeitpunkt bemerkt

---

[265] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 50. Winckler erwarb sich vor allem wegen seiner Versuche im Bereich der Elektrizität Ansehen; vgl. Zedler, Bd. 57 (1748), Sp. 571 f.
[266] Kästner schreibt in seiner Biographie „Io. Christoph. Lehmannum“ (vgl. Kästner, Vita, S. XIV), allerdings passt die Beschreibung zu Johann Christian Lehmann, Physiker und Mediziner in Leipzig; vgl. Artikel „Lehmann, Joh. Christ.“ von Wilhelm Heß in: ADB, Bd. 18 (1883), S. 139.
[267] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Vita, S. XIV.
[268] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 51.
[269] Der „Baccalaureus“ war der niedrigste Grad, den man nach etwa zweijährigem Studium in der Artistenfakultät erreichen konnte; vgl. Krause, S. 37.
[270] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 52 f.
[271] Zu Richter siehe Zedler, Bd. 31 (1742), Sp. 1334-1338.
[272] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Vita, S. XIII.
[273] Vgl. Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 440. In beiden Biographien Kästners finden wir keine Jahreszahl, allerdings erwähnt er, dass er bereits vor Verfassung seiner Dissertation 1736 die Vorlesungen von Hausen besucht habe; vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 57 f.
[274] Zu Hausen siehe Jöcher, Sp. 1408.
[275] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 52.
[276] Vgl. hierzu und zum Folgenden Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 441.
[277] Vgl. Kästner, Vita, S. XVII.
[278] Brief von Kästner an Lessing von Ende Oktober oder Anfang November 1754. In: Kästner, Briefe, S. 34.

Kästner in seiner Autobiographie, dass die philosophischen und mathematischen Studien ihn von dem juristischen Studium abgelenkt haben.[279] Seine Laufbahn stand nun fest. Der Vater, der für seinen Sohn eine juristische Karriere vorgesehen hatte, war zwar nicht gänzlich begeistert, legte ihm aber keine Steine in den Weg. Durch die soliden finanziellen Verhältnisse konnte sich Kästner vollkommen auf sein nun in erster Linie mathematisches Studium konzentrieren.[280]

1736 verfasste Kästner seine erste mathematische Schrift *De theoria radicum in aequationibus*.[281] Diese Dissertation über die Theorie der Wurzeln von Gleichungen war allerdings nicht Kästners erste Wahl. Zunächst beabsichtigte er auf Anraten seines Professors Winckler über „Cartesens Beweis, vom Daseyn Gottes, aus dem Begriff des vollkommensten Wesens" zu schreiben, allerdings fiel ihm diese Arbeit schwer. Statt an dieser Thematik, zu der Kästner 1743 einen Aufsatz in den *Belustigungen des Verstandes und Witzes* schrieb, weiterzuarbeiten, entschied er sich für die Dissertation über die Theorie der Wurzeln. Hierbei unterstützte ihn sein Professor Hausen, bei dem er bereits zuvor in seinen Lehrstunden nützliche Inhalte kennengelernt hatte. Kästner hatte bei seiner Arbeit bereits das Ziel, die Beweise schärfer darzustellen, als es sein Professor verlangte. Mit dieser Dissertation sollte Kästner drei Jahre später seine Lehrerlaubnis erhalten. Allerdings erhoffte sich Kästner von Hausen ein größeres Lob zu seiner Arbeit. Kästner sandte eigenmächtig ein Exemplar seiner Dissertation an Euler nach Petersburg, der seine Zufriedenheit zeigte.[282]

Die mathematischen Vorlesungen von Gottfried Heinsius (1709-1769) besuchte Kästner ab 1736[283]. Dieser las die Algebra nach dem vierten Band von Wolffs *Anfangs=Gründen* im WS 1736/37, wobei Heinsius nur die ersten 198 Paragraphen behandelte, da er mit seiner Reise nach Petersburg beschäftigt war.[284] Aus diesem Grund eignete sich Kästner mit Hilfe von Wolffs Lehrbuch die fehlenden Inhalte selbstständig an. Kästner urteilt auch über Heinsius' Unterricht. Heinsius schrieb Rechnungen ausführlich an die Tafel, die eigentlich nur seinen Kommilitonen, nicht aber Kästner selbst nützten. Nach eigenen Angaben langweilte sich Kästner in der Buchstabenrechnung, da er sich diese zuvor selbst angeeignet hatte. Manchmal schlief er sogar bei den Vorlesungen ein.[285]

In Leipzig besuchte Kästner auch praktische Lehrstunden zum Feldmessen und zu architektonischen Zeichnungen bei Herrn Backofen[286], was für Kästner wichtig war, da Richter und Hausen keinen praktischen Unterricht auf dem Feld durchführten. Backofen war zwar ein geübter Praktiker, aber es mangelte ihm, laut Kästner, an theoretischen Einsichten, so dass sich Kästner mathematische Beweise eigenständig erarbeitete.[287] Hier ist nicht nur der Stellenwert der praktischen Erfahrungen für Kästner deutlich erkennbar, sondern auch sein An-

[279] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 52.

[280] Vgl. Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 196.

[281] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 57 f.

[282] Vgl. Kästner, Vita, S. XXIII.

[283] Im Gegensatz zu der Jahresangabe 1736 in seiner Vita nennt Kästner in seiner deutschsprachigen Lebensbeschreibung das Jahr 1737; vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 51. Für 1736 spricht allerdings, dass Heinsius bis 1736 in Leipzig als Privatdozent tätig war; vgl. Artikel „Heinsius, Gottfried" von Karl Christian Bruhns in: ADB, Bd. 11 (1880), S. 656.

[284] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Vita, S. XIII.

[285] Vgl. Müller, C. H., S. 53, Anm. 1: Auszug aus einem Brief an Wilhelm Olbers vom 2.3.1798.

[286] Weitere Angaben sind nicht bekannt.

[287] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 54 f.

spruch, alle Behauptungen durch mathematische Beweise auf eine gesicherte Grundlage zu stellen.

Kästner konnte sich 1737 Magister[288] und „Candidatus juris“ nennen, wobei er das Magisterexamen mit Bestnote bestand.[289] Beim Erwerb des Magisters erhielt er, wie auch andere Magister, eine gewisse Geldsumme. Für einen Thaler erwarb er sich Zugang zu einer Anatomie-Veranstaltung, für den Rest kaufte er sich einen Band von Wolffs *Elementa*. Leider können wir den exakten Wert dieser Summe nicht beziffern, was insofern interessant wäre, da man Rückschlüsse auf den Kaufpreis solcher Lehrbücher erhalten könnte.

Die Stellung der Astronomie, die im 18. Jahrhundert zu den mathematischen Wissenschaften gezählt wurde, war in Leipzig nicht hoch, aber Hausen zeigte seinen Zuhörern manchmal den Mond durch das Fernrohr; er ermöglichte praktischen Unterricht.[290] Dass Hausen sich für die Astronomie und entsprechende Rechnungen interessierte, zeigt die Tatsache, dass er im Juli 1742 die Bahn eines zu diesem Zeitpunkt sichtbaren Kometen bestimmte. Aus eigener Initiative vertiefte Kästner seine Kenntnisse durch selbstständige Beobachtungen und durch entsprechende Literatur. Erste wissenschaftliche astronomische Ergebnisse veröffentlichte er im *Hamburgischen Magazin*, 8. Bd. (1751/52), S. 57 ff. und 637 ff. Er beschreibt hier zwei astronomische Erscheinungen, die er beobachtet hatte, nämlich die Entdeckung des Jupiters am 9.10.1751 sowie die Lage der Venus vor dem Mond am 11.2.1752.

Das mathematische Studium in Leipzig schien Kästner nicht vollkommen zufrieden gestellt zu haben. Neben den regulären mathematischen Vorlesungen eignete er sich mathematische Inhalte in autodidaktischen Studien an. Zur Rechnung des Unendlichen[291] schreibt Kästner, dass Hausen nur so viel über dieses Gebiet las, wie in seinen *Elementa matheseos* zu finden war – und dies sei nicht viel gewesen.[292] Daher hat sich Kästner in autodidaktischen Studien mit den entsprechenden Ausführungen in Wolffs Lehrbuch auseinandergesetzt, kritisierte hier aber auch, dass die Inhalte nicht sehr viel mehr als die von Hausen boten. Mit diesem Wissen hat Kästner sich dann mit Eulers *Mechanik* befasst. Allerdings habe er Eulers Ausführungen erst dann verstanden, als er einen Artikel von Johann Bernoulli (1667-1748) in der Leipziger *Acta Eruditorum* fand. Hier kritisiert Kästner Euler, dass dieser nicht daran gedacht habe, dass sich auch Anfänger mit seinem Werk befassen könnten; Euler habe dementsprechend einen zu hohen Maßstab angelegt. Er mache zu wenige Ausführungen, im Gegensatz zu Wolff, bei dem schon zu viele Ausführungen zu finden seien.

Dass sich Kästner über die regulären Veranstaltungen zur Mathematik an der Universität Leipzig hinaus auch zahlreiche Kenntnisse in autodidaktischen Studien aneignete, spricht für seinen Wissensdrang und seinen Anspruch an mathematische Wahrheiten. Er war stets um tiefe theoretische Einsichten bemüht und hatte das Ziel, mathematische Beweise strenger auszuführen als seine Lehrer.

---

[288] Nach etwa vierjährigem Studium derjenige Grad der Artistenfakultät, der zu dem Studium in einer der höheren Fakultäten sowie zu Lehrveranstaltungen in der Artistenfakultät berechtigte; vgl. Krause, S. 37.

[289] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 51 f.

[290] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt AGE, 1799, 4. Bd., 4. St., Artikel „Abraham Gotthelf Kästner“, S. 369-371.

[291] „Analysis“ wurde im 18. Jahrhundert auch als „Rechnung des Unendlichen“ bezeichnet.

[292] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 55.

2.3 Lehrtätigkeit

2.3.1 Lehrtätigkeit in Leipzig

Um selbst die Lehrerlaubnis zu erhalten, musste Kästner eine Disputation abhalten. Dies tat er 1739 mit seiner drei Jahre zuvor verfassten Dissertation *De theoria radicum in aequationibus*. Von diesem Zeitpunkt an hielt er als Privatdozent[293] in Leipzig Vorlesungen zur Mathematik, Philosophie, Logik und Naturrecht, und bot auch praktische Übungen der Logik im Ausarbeiten und Disputieren an.[294] Nicht nur seine Vorlesungen, sondern auch seine weiteren Schriften scheinen großen Anklang gefunden zu haben.[295]

1746 erhielt Kästner die „Professio extraordinaria Matheseos“[296] an der Universität Leipzig. Als Grund für Kästners Berufung zum außerordentlichen Professor können seine hervorragenden mathematischen Leistungen, vor allem durch seine Entdeckungen auf dem Gebiet der höheren Arithmetik, angeführt werden.[297] Um welche Entdeckungen es sich hierbei allerdings handeln soll, wird nicht gesagt. Es ist bekannt, dass Kästner um 1743 und 1745 eigene Entdeckungen vor allem in der höheren Arithmetik gemacht hat.[298] Zu diesen Aussagen passen vor allem drei Schriften, die Kästner 1743 und 1745 verfasste. 1743 veröffentlichte Kästner die Abhandlung *Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series*[299], die zeigt, dass er sich mit den Schriften von Isaac Newton (1642-1727) beschäftigte. 1745 erschien Kästners Schrift *De resolutione aequationum differentialium per series*, die die Auflösung von Differentialgleichungen nach Newtons Methode der Fluxionen behandelt. Beide Schriften sind bedeutungsvoll, da Kästner sie später in seine *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* einbaute.[300] Die entsprechenden Ausführungen sind in §§ 632 f. des Lehrbuchs zu finden. 1745 erschien seine Schrift *Demonstratio theorematis binomialis*, die ebenfalls als wichtig für die erwähnte Anstellung als Professor angesehen werden kann. Auf diese Schrift verweist Kästner in seinen *Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen* beim Beweis des binomischen Lehrsatzes mit Hilfe der Differentialrechnung.[301]

Kästners Vorlesungsankündigungen seit seiner Lehrtätigkeit in Leipzig zeigen ein weites Feld mathematischer Vorlesungen: Zinsrechnung nach Leibniz, Katoptrik, Perspektive und Projektionen, Hebel und Zusammensetzung der Kräfte sowie Gnomonik.[302]

Kästners Karriere wurde durch einen privaten Schicksalsschlag getrübt. 1747 verstarb sein Vater und 1750 sein Onkel, so dass Kästner allein für seine kranke Mutter sorgen musste.[303]

[293] Im Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 441 wird Kästner als „Privatdocent“ bezeichnet. Auf den Titelblättern von Kästners Schriften *Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series* (1743) und *De resolutione aequationum differentialium per series* (1745) bezeichnet Kästner sich selbst nur als „M. A. Iur. Cand.“, nicht aber als Privatdozent.
[294] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 58.
[295] Vgl. Jöcher/Adelung/Rotermund, Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“, Sp. 17.
[296] Kästner, Vita, S. XXI.
[297] Vgl. Jöcher/Adelung/Rotermund, Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“, Sp. 18.
[298] Vgl. Jördens, Lexikon, Bd. 2, Artikel „Abraham Gotthelf Kästner“, S. 572.
[299] In Kästners Autobiographie steht fälschlicherweise „species“ statt „series“; vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 64.
[300] Vgl. Kästner, Vita, S. XX.
[301] Vgl. Kästner, AG 3.2., S. 63.
[302] Vgl. „Programmata lectionibus indicandis“ in: Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 64.

Da sein Gehalt nicht ausreichte, musste er sich nach anderen Einnahmequellen umsehen, statt sich primär mit der Erweiterung seiner wissenschaftlichen Kenntnisse zu befassen. In diesem Rahmen begann er mit Übersetzungstätigkeiten, zu denen unter anderem die Abhandlungen der Schwedischen Akademie der Wissenschaften, Johann Lulofs *Einleitung zu der mathematischen und physikalischen Kenntniß der Erdkugel* (1755) sowie Robert Smiths *Vollständiger Lehrbegriff der Optik* (1755) zählen. Obwohl er nach eigenen Angaben seine Zeit lieber für die Ausweitung seiner Kenntnisse verwendet hätte, war diese Tätigkeit nicht nur in finanzieller Hinsicht gewinnbringend, sondern seine Übersetzungen wurden auch wissenschaftlich positiv bewertet.

Kästner schien mit seiner Anstellung an der Universität Leipzig nicht vollkommen zufrieden gewesen zu sein: „Ich habe Gelegenheiten gewünscht und gehabt, aus meiner Vaterstadt zu gehen, und solche doch nicht ergriffen, weil ich meine Mutter bey einer schmerzlichen und langwierigen Krankheit ohne alle Verwandte zu verlassen mich ohnmöglich überwinden konnte“[304]. Ihm wurde 1750 von Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), dem damaligen Präsidenten der Berliner Akademie, eine Anstellung an dieser Akademie angeboten, doch Kästner schlug dieses Angebot wohl auch aus finanziellen Gründen aus.[305] Stattdessen bewarb er sich 1751 um den Lehrstuhl für Ökonomie an der Universität Göttingen, allerdings wurde die Position mit Tobias Mayer (1723-1762) besetzt.[306] Wenige Jahre später wurde Kästner erneut die Möglichkeit geboten, aus Leipzig wegzugehen. Während er in seiner deutschsprachigen Biographie offen lässt, um welche Gelegenheit es sich handelte, erwähnt er in seiner lateinischen Biographie, dass ihm 1753[307] die Nachfolge von Albrecht von Haller (1708-1777) als Leiter der Göttinger Sozietät der Wissenschaften angeboten worden sei.[308] Kästner lehnte dieses Angebot wegen der Krankheit seiner Mutter ab. Nach diesem Ruf aus Göttingen wurde Kästner die nächste freiwerdende Professur in der philosophischen Fakultät in Leipzig angeboten sowie eine jährliche Pension zugesichert.

Am 25.5.1755 erhielt Kästner ein neues Angebot für eine ordentliche Professur an der Göttinger Universität.[309] Dieses Angebot war großzügig und sicherte Kästner eine jährliche Besoldung von 1000 Reichstalern sowie weitere Äquivalenzgelder zu. Man erwartete, dass er sich als ordentlicher Professor nicht nur durch seine Veranstaltungen und Schriften bekannt machen, sondern auch als Mitarbeiter der deutschsprachigen und lateinischen Sozietätszeitschriften tätig sein sollte. Die hohe Besoldung zeigt, dass die mathematischen Wissenschaften in Göttingen ein großes Ansehen genossen haben und zudem die Universität über die finanziellen Mittel verfügte ordentliche Professoren für eine regelmäßige Lehre anzustellen. Die Göttinger Professur war frei geworden, da J. A. von Segner nach dem Tod Wolffs als dessen

---

303 Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 59 f.

304 Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 60.

305 Vgl. Baasner, S. 92.

306 Vgl. Brief von Kästner an Scheibel vom 19.4.1797. In: Kästner, Briefe, S. 213.

307 In seiner Vita steht die Jahresangabe „1743“. Dies ist wohl ein Druckfehler, denn alle anderen Quellen nennen das Jahr 1753. Vgl. Baasner, S. 27 und Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 443.

308 Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Vita, S. XXVI f.

309 Vgl. hierzu und zum Folgenden Rufschreiben an Abraham Gotthelf Kästner an die Universität Göttingen. In: Göttinger Universitätsarchiv, Personalakte Abraham Gotthelf Kästner, Kur. 5753, pag. 32-33. Baasner verweist noch auf die alte Signatur der Akte im Göttinger Universitätsarchiv, nämlich „4 Vb, 24“; vgl. Baasner, S. 95 f.

Nachfolger nach Halle berufen worden war.[310] Diesen Ruf nahm Kästner an, da der Tod seiner Mutter absehbar war.[311] Am 14.8.1755 schrieb Kästner an den Oberkonsistoral-Präsidenten Christian Gottlieb Freiherr von Holtzendorff ein Gesuch um seine Entlassung nach Göttingen.[312] Er begründete dieses nicht nur mit seinen verbesserten Verdienstmöglichkeiten an der Universität Göttingen, sondern auch mit der Tatsache, dass er in Leipzig entbehrlich sei, da ohnehin genügend Lehrpersonen vorhanden gewesen seien und er selbst jährlich nur etwa 16 bis 20 Personen die Anfangsgründe der Mathematik gelehrt habe.

2.3.2 Lehrtätigkeit in Göttingen

Göttingen war für Kästner in erster Linie nicht wegen der äußeren Umstände lukrativ, sondern vielmehr weil diese Anstellung als ordentlicher Professor für Mathematik und Naturlehre seinen Interessen vollkommen entsprach.[313] Seine Verbundenheit zur Wissenschaft und seine Verpflichtung als Universitätslehrer sind erkennbar, wenn er schreibt, dass er „lieber Neigung und Pflicht vereinigen, als Nahmen und Einkünfte“[314] möchte. Die nächste freigewordene Anstellung, die er in Leipzig in der philosophischen Fakultät hätte haben können, lehnte er mit seiner Entscheidung für Göttingen ab.[315] Hieran wird deutlich, dass sich Kästner vollkommen der Mathematik hingeben und als mathematischer Lehrer tätig sein wollte. Dies hätte er an der Universität Leipzig nur bedingt umsetzen können, da sie im 18. Jahrhundert eher einen Anziehungspunkt für Dichter und Literaten darstellte.[316]

Kästner begann seine Lehrtätigkeit in Göttingen an Ostern 1756. Zeitgleich wurde er als ordentliches Mitglied der mathematischen Klasse der Sozietät der Wissenschaften in Göttingen aufgenommen.[317] Am 31.7.1756 hielt er seine Antrittsrede *De eo quod studium matheseos facit ad virtutem* (Was das Studium der Mathematik zur sittlichen Vervollkommnung beiträgt), in der er darstellte, wie weit der Fleiß, mit dem die mathematischen Wissenschaften erlernt werden, die Tugend befördern kann.

Die Arbeitsbelastung war in Göttingen höher als in Leipzig. „Seit meiner Ankunft in Göttingen, an Ostern 1756. habe ich meine Vorlesungen nur auf die mir eigentlich aufgetragne Wissenschaften der Naturlehre und Meßkunst eingeschränkt, obgleich zuweilen auch andere, z. E. Metaphysische von mir verlangt worden“[318]. Dass die Universität Göttingen zu diesem Zeitpunkt über die finanziellen Möglichkeiten verfügte, genügend Lehrer für sämtliche Wissenschaften anzustellen, kam den Dozenten zugute, denn sie konnten sich auf ihre Wissenschaft konzentrieren und mussten sich nicht um weitere Einkommensquellen kümmern: „Auf der Göttingischen hohen Schule ist es desto weniger nöthig, daß ein Lehrer sich in so vielfältige Wissenschaften zerstreue, da jede Art von Wissenschaften mit Lehrern versehen wird, die

[310] Vgl. Kästner, Vita, S. XXVI f.
[311] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 60 f.
[312] Vgl. hierzu und zum Folgenden Brief von Kästner an Holzendorff vom 14.8.1755. In: Kästner, Briefe, S. 36 f.
[313] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 61.
[314] Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 61.
[315] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 61.
[316] Vgl. Krause, S. 456 f.
[317] Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 253.
[318] Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 61.

sich darinne vorzüglich gezeigt haben, und da zu dieser weisen Sorgfalt für das beste der hohen Schule, noch die gnädigste für die Lehrer selbst kommt, daß sie nicht nöthig haben, alle ihre Kenntniß von der größten bis zur kleinsten zu Gelde zu machen, und nicht übrig zu behalten, daß sie nur zum Vergnügen und zum Wohlstande für sich wüßten"[319]. Um mehr über Kästners Tätigkeit in Göttingen zu erfahren, stellen die Vorlesungsankündigungen in den *Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen* (GGA) eine wertvolle Quelle dar, die für die folgenden Ausführungen zugrunde gelegt werden. Zunächst bot Kästner ein breites Spektrum an Vorlesungen an. Neben mathematischen Vorlesungen finden wir beispielsweise Veranstaltungsankündigungen zur Physik, Experimentalphysik und sogar zur Geschichte der Fossilien und zu anderen Teilen der Naturgeschichte. Die letzte Vorlesung zur Experimentalphysik kündigte Kästner im SS 1780 an und konzentrierte sich anschließend auf mathematische Vorlesungen. Kästner erwähnt in einem Brief an Johann Ephraim Scheibel (1736-1809) vom 1.4.1799, dass er die Physik seinen Kollegen Erxleben und Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799) überlassen habe, da es ihm missfiel, dass die Zuhörer nur wegen der Vorführungen kamen, aber keine theoretischen Kenntnisse erwerben möchten.[320] In der Mathematik habe er aber wissbegierige Zuhörer. Auch Disputierübungen bot Kästner vom SS 1759 bis einschließlich SS 1773 an. Diese Disputationen über philosophische Sätze hielt er seinen Zuhörern zuliebe.[321] Bis einschließlich WS 1783/84 las Kästner sowohl die reine als auch die angewandte Mathematik neben weiteren Vorlesungen in einem Semester. Im SS 1784 erfolgte dann ein Wechsel. Seit diesem Zeitpunkt las er jedes Sommersemester die angewandte Mathematik und jedes Wintersemester die reine Mathematik. Hinzu kamen noch jeweils eine zweistündige Vorlesung, beispielsweise über die Markscheidekunst, über genauere Winkelmessung oder über die Theorie der Perspektive und der Projektionen einschließlich ihres Gebrauchs in der Astronomie und Geographie. Im Laufe der Jahre ging die Arbeitsbelastung für Kästner an der Universität Göttingen zurück. Betrachtet man die Vorlesungsverzeichnisse näher, so kann als Grund hierfür angegeben werden, dass für mathematische und physikalische Vorlesungen mehr Personen angestellt wurden.[322] Dies ging mit einer zunehmenden Spezialisierung und Differenzierung des Lehrangebots einherging.

Neben seiner Anstellung an der Universität Göttingen war Kästner auch Mitglied der Königlichen Sozietät sowie der Königlichen Deutschen Gesellschaft[323] in Göttingen, an deren Versammlungen er ebenfalls teilnahm. Erstere versammelte sich einmal monatlich, letztere alle zwei Wochen.[324]

In Göttingen fasste Kästner den Entschluss, eigene mathematische Lehrbücher zu publizieren. Seine *Mathematischen Anfangsgründe* erschienen ab 1758. Nicht immer wurden die verwendeten Lehrbücher in den Vorlesungsverzeichnissen in den GGA angekündigt. Aus den zur Verfügung stehenden Daten lassen sich jedoch einige Rückschlüsse ziehen. Zu Beginn trug Kästner die Mathematik nach den Lehrbüchern von Wolff (für Algebra und „applicierte Mathematik") oder Hausen (für Geometrie) vor. Ab dem SS 1759 kündigte Kästner die reine

[319] Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 61 f.
[320] Vgl. hierzu und zum Folgenden Brief von Kästner an Scheibel vom 1.4.1799. In: Kästner, Briefe, S. 218.
[321] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 62.
[322] Vgl. die Ausführungen in Kapitel 1.2.1.
[323] Die Göttinger Deutsche Gesellschaft wurde 1740 mit dem Ziel der Reinigung, Hebung und Pflege der deutschen Sprache und Literatur von Johann Matthias Gesner (1691-1761) gegründet; vgl. Ebel, S. 159.
[324] Diese Angaben sind zu Beginn jedes Vorlesungsverzeichnisses in den GGA zu finden.

Mathematik auf Grundlage seines eigenen Lehrbuchs an. Auch seine Kollegen legten ihren Vorlesungen Kästners Lehrwerke zugrunde, wie die Vorlesungsankündigungen zeigen. Hierzu zählen beispielsweise Beckmann, Erxleben, Meister, Phiel, Mayer, Lichtenberg und Oppermann. Magister Eberhard las in zwei getrennten Veranstaltungen – beide Vorlesungen zur reinen Mathematik – sowohl nach Wolffs *Auszug* als auch nach Kästners *Anfangsgründen*.[325] Auch die Lehrwerke von Segner wurden verwendet, beispielsweise von Meister für die reine Mathematik im SS 1759.[326]

1763 übernahm Kästner die Leitung der Göttinger Sternwarte, die Bestandteil der Universität war. Sie wurde zuvor von Tobias Mayer geleitet.[327] Nach dessen Tod am 20.2.1762 wurde Georg Moritz Lowitz (1722-1774) sein Nachfolger, der allerdings 1763 sein Amt niederlegte. Kästner blieb bis zu seinem Tod am 20.6.1800 in Göttingen und widmete sich bis zum Ende seines Lebens vollkommen seinen Studien.[328]

Schüler

Sowohl durch private Aufzeichnungen, als auch durch die Karrieren, die Kästners Schüler eingeschlagen haben, können Rückschlüsse auf Kästner selbst gezogen werden. Kästner kann als Mitbegründer der Mathematik als universitäres Fach in Deutschland angesehen werden, der auch in dieser Hinsicht durch seine Schüler weiterwirkte.[329] Unter seinen Schülern, die bei ihm Vorlesungen zur Mathematik besucht haben, begegnen uns bekannte Persönlichkeiten, die nicht nur zur ihren Lebzeiten, sondern teilweise über ihren Tod hinaus berühmt gewesen sind. Einige von ihnen standen auch nach ihrem Studium mit Kästner in Kontakt. Im Folgenden findet sich eine Auflistung von Kästners Schülern, die bei ihm promoviert haben, wobei die jeweiligen Promotionsjahre in Klammern angegeben sind[330]:

- Georg Simon Klügel (1763)
- Georg Christoph Lichtenberg (1765)
- Johann Christian Polykarp Erxleben (1767)
- Johann Tobias Mayer (1773)
- Karl Christian von Langsdorf (1781)
- Johann Friedrich Pfaff (1786)
- Bernhard Friedrich Thibaut (1796)
- Farkas (Wolfgang) Bolyai (1796)
- Johann Martin Christian Bartels (1799)
- Heinrich Wilhelm Brandes (1800).

[325] Vgl. GGA, 1774, 111. St., S. 955.
[326] Vgl. GGA, 1759, 41. St., S. 368.
[327] Vgl. hierzu und zum Folgenden Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 444.
[328] Vgl. Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 195.
[329] Vgl. Baasner, S. 110.
[330] Die Angaben sind entnommen aus: Mathematics Genealogy Project, Eintrag „Abraham Gotthelf Kästner“. Online verfügbar unter (http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=66476) (3.6.2014).

Alle bio- und bibliographischen Informationen zu diesen Personen, die in den folgenden Ausführungen zu finden sind, sind, sofern nicht ausdrücklich anders angegeben, der *Allgemeinen Deutschen Biographie* (ADB) und der *Neuen Deutschen Biographie* (NDB) entnommen.

Georg Simon Klügel[331] (1739-1812) wurde 1767 ordentlicher Professor für Mathematik in Helmstedt, bis er ab 1788 die ordentliche Professur für Mathematik und Physik an der Universität Halle als Nachfolger von Wenceslaus Johann Gustav Karsten besetzte. Klügel wirkte weniger als forschender Mathematiker, sondern vor allem als Enzyklopädist, beispielsweise mit seiner *Encyklopädie, oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigen Kenntnisse*, oder seinem unvollendeten *Mathematischen Wörterbuch*. Von großer Bedeutung ist seine von Kästner angeregte Dissertation *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (1763), in der er 28[332] Beweisversuche zur Theorie der Parallellinien widerlegte.[333]

Georg Christoph Lichtenberg[334] (1742-1799) wurde 1770 zum außerordentlichen Professor für Philosophie an der Universität Göttingen ernannt. Ab 1775 war er als ordentlicher Professor für Physik in Göttingen tätig. Zunächst las er über Mathematik und Astronomie. Im Sommersemester 1788 trat er die Nachfolge von Erxleben an und hielt auch Vorlesungen zur Experimentalphysik, wofür er berühmt wurde. In einem seiner wohlbekannten Sudelbücher[335] findet man folgenden Eintrag über Kästner: „Rätsel. Er ward in Leipzig geboren; der Stolz eines Königs der Briten[336], und das Wunder Deutschlands. Wer ist dies? Auflösung. Unter den Toten war es Leibniz, unter den Lebendigen ist es Kästner“[337]. Obwohl das Verhältnis zwischen Lichtenberg und Kästner zeitweise unter Spannungen litt[338], zeigt dieser Eintrag im Sudelbuch, dass Lichtenberg Kästner sehr schätzte.

Johann Christian Polykarp Erxleben[339] (1744-1777) wurde 1771 außerordentlicher Professor, 1775 ordentlicher Professor für Physik in Göttingen. Auch er war ein erfolgreicher Lehrbuchautor, der durch seine *Anfangsgründe der Naturgeschichte* (1768, [2]1773) sowie seine *Anfangsgründe der Naturlehre* (1772, [6]1794) bekannt wurde.

[331] Zu Klügel siehe Artikel „Klügel, Georg Simon“ von Richard Hoche in: ADB, Bd. 16 (1882), S. 253.

[332] In der Sekundärliteratur ist häufig fälschlicherweise von 30 Beweisversuchen die Rede.

[333] Vgl. Stäckel/Engel, S. 140.

[334] Zu Lichtenberg siehe Artikel „Lichtenberg, Georg Christoph“ von Wolfgang Proß und Claus Priesner in: NDB, Bd. 14 (1985), S. 449-464.

[335] Bei den sogenannten Sudelbüchern handelt es sich um Eintragungen und Niederschriften aus der Hand Lichtenbergs. Es existieren insgesamt 15 Bücher unterschiedlichen Formats, die Lichtenberg als Student begonnen hat und fortlaufend mit den Buchstaben A bis L bezeichnet hat; vgl. Promies, S. 950.

[336] Von 1714 bis 1837 bestand eine Personalunion zwischen Großbritannien und Hannover. Die Aussage über den König der Briten bezieht sich auf König Georg III. von Großbritannien und Irland, der in Deutschland auch als Kurfürst von Braunschweig-Lüneburg/Hannover regierte; vgl. Artikel „Georg III. (Wilhelm Friedrich)“ von Adolf Schaumann in: ADB, Bd. 8 (1878), S. 645-651.

[337] Lichtenberg, Sudelbücher B 407. In: Promies, S. 149. Das Sudelbuch B wurde zwischen 1768 und 1771 verfasst. Es enthält insgesamt 421 Eintragungen, so dass B 407 gegen Ende dieses Zeitraums entstanden sein dürfte; vgl. Promies, S. 41.

[338] Vgl. Artikel „Lichtenberg, Georg Christoph“ von Wolfgang Proß und Claus Priesner in: NDB, Bd. 14 (1985), S. 451.

[339] Zu Erxleben siehe Artikel „Erxleben, Johann Christian Polykarp“ von Eugen Lommel in: ADB, Bd. 6 (1877), S. 335.

Johann Tobias Mayer[340] (1752-1830) wurde 1780 zum ordentlichen Professor für Mathematik und Physik an der Universität Altdorf ernannt. 1786 besetzte er den Lehrstuhl für Mathematik und Physik an der Universität Erlangen. 1799 trat er die Nachfolge Lichtenbergs als ordentlicher Professor für Physik in Göttingen an.

Karl Christian von Langsdorf[341] (1757-1834) machte sich in erster Linie als Praktiker im Salinenwesen verdient, bekleidete aber auch von 1806 bis 1827 die ordentliche Professur für Mathematik an der Universität Heidelberg. Er verfasste die *Erläuterung der Kästner'schen Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* (2 Bde., 1776/77), in denen man die Anwendungen der Lehren auf alltägliche Probleme findet.

Johann Friedrich Pfaff[342] (1765-1825) wurde 1788 zum ordentlichen Professor für Mathematik in Helmstedt als Nachfolger von Klügel ernannt und 1810[343] an die Universität Halle versetzt.

Bernhard Friedrich Thibaut[344] (1775-1832) war seit 1797 als Privatdozent in Göttingen tätig, bekleidete 1802 die außerordentliche Professur, ab 1805 die ordentliche Professur für Mathematik in Göttingen. Auch Thibaut wurde als Lehrbuchautor berühmt. Zu nennen sind hier beispielsweise sein *Grundriß der reinen Mathematik zum Gebrauch bey academischen Vorlesungen* (1801, ^{5}1831) und der *Grundriß der allgemeinen Arithmetik oder Analysis zum Gebrauch bey academischen Vorlesungen* (1809, ^{2}1830). Bis zum Erscheinen seiner eigenen Lehrwerke nutzte er Kästners *Anfangsgründe* für seine mathematischen Vorlesungen.[345]

Farkas (Wolfgang) Bolyai (1775-1856) kehrte nach seinem Studium in Göttingen in seine Heimat Marosvásárhely (heute Rumänien) zurück und besetzte am dortigen Kolleg die zuvor eingerichtete Professur für Mathematik, Physik und Chemie.[346]

Johann Martin Christian Bartels[347] (1769-1836) bekleidete ab 1807 den mathematischen Lehrstuhl an der Universität Kasan (Russland). Unter seinen Schülern befand sich Nikolai Lobatschewski[348] (1792-1856), der sich im Bereich der nichteuklidischen Geometrie verdient gemacht hat. 1821 ging Bartels als Professor für reine und angewandte Mathematik nach Dorpat (heute Tartu in Estland). Er unterhielt zeitweise eine Korrespondenz mit Gauß und bildete bekannte russische Mathematiker aus.

Heinrich Wilhelm Brandes[349] (1777-1834) bekleidete ab 1811 die Professur für Mathematik an der Universität Breslau, ab 1826 die Professur für Physik in Leipzig.

---

340 Zu Mayer siehe Artikel „Mayer, Johann Tobias" von Siegmund Günther in: ADB, Bd. 21 (1885), S. 116-118.

341 Zu Langsdorf siehe Artikel „Langsdorf, Karl Christian von" von Siegmund Günther in: ADB, Bd. 17 (1883), S. 691 f.

342 Zu Pfaff siehe Artikel „Pfaff, Johann Friedrich" von Moritz Cantor in: ADB, Bd. 25 (1887), S. 592 f.

343 In ADB, Bd. 25 (1887), S. 592 steht fälschlicherweise „1800", aber aus dem Zusammenhang geht hervor, dass es sich um das Jahr 1810 handeln muss, in dem die Universität Helmstedt, der Pfaff angehörte, aufgehoben wurde.

344 Zu Thibaut siehe Artikel „Thibaut, Bernhard Friedrich" von Moritz Cantor in: ADB, Bd. 37 (1894), S. 745 f.

345 Vgl. Reich, Mathematik der Aufklärung. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 76.

346 Vgl. Stäckel, S. 16.

347 Zu Bartels siehe Artikel „Bartels, Johann Martin Christian" von Kurt Vogel in: NDB, Bd. 1 (1953), S. 598.

348 Die Schreibweise des Namens variiert in der Literatur. Bei Stäckel/Engel finden wir die Schreibweise „Lobatschefskij". Wir haben uns für die Schreibweise „Lobatschewski" entschieden.

349 Zu Brandes siehe Artikel „Brandes, Heinrich Wilhelm" von Karl Christian Bruhns in: ADB, Bd. 3 (1876), S. 242 f.

Neben diesen Schülern, die bei Kästner promovierten, gehörten noch weitere bekannte Namen seinem Schülerkreis an. Unter ihnen befand sich auch Gauß. Durch seine umfassenden Vorkenntnisse konnte er jedoch aus Kästners Vorlesungen keine neuen Erkenntnisse mitnehmen.[350] Gleichzeitig schien Kästner dessen Leistungen nicht geschätzt zu haben. Anlass zu dieser Aussage mag Gauß‘ Entdeckung der Konstruierbarkeit des regulären 17-Ecks noch während seiner Studienzeit 1796 gewesen sein. Das Ergebnis legte er seinem Lehrer Kästner vor, der aber, wie aus einem Brief Gauß‘ an Eberhard August Wilhelm von Zimmermann (1743-1815) vom 26.5.1796 hervorgeht, kein Verständnis dafür aufbringen konnte.[351] Zimmermann hingegen veröffentlichte im *Intelligenzblatt der allgemeinen Literatur-Zeitung* eine am 1.6.1796 gedruckte Ankündigung von Gauß‘ Entdeckung. Kästner habe Gauß gegenüber behauptet, dass die Grundlagen für die Konstruierbarkeit bereits in seinen *Anfangsgründen* enthalten, jedoch noch nicht ausgearbeitet seien.[352] Von Gauß ist eine Zeichnung (Abbildung 8) überliefert, die darstellt, wie sich Kästner an einer einfachen Additionsaufgabe verrechnet.

Abbildung 8: Gauß-Karikatur. In: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB Göttingen), Cod. Ms. Gauß Briefe B: Bolyai, Beilage 1.

[350] Vgl. hierzu und zum Folgenden Artikel „Gauß, Karl Friedrich“ von Moritz Cantor in: ADB, Bd. 8 (1878), S. 430 ff.

[351] Vgl. hierzu und zum Folgenden Ullrich, Herkunft, Schul- und Studienzeit von Carl Friedrich Gauß. In: Mittler, S. 26.

[352] Vgl. Reich, Mathematik der Aufklärung. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 78.

Carl Friedrich Hindenburg[353] (1741-1808), der sich im Bereich der kombinatorischen Analysis verdient gemacht hat, war ebenfalls ein Schüler von Kästner. 1781 wurde er außerordentlicher Professor für Philosophie, 1786 ordentlicher Professor für Mathematik und Physik an der Universität Leipzig. Hindenburg ist insofern interessant, als er zusammen mit Johann Bernoulli III. (1744-1807) das *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* (1786-1789) sowie das *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* (1795-1800) als erste deutschsprachige rein mathematische Zeitschriften herausgab. In diesen Zeitschriften sind auch einige Beiträge von Kästner zu finden.

Heinrich Wilhelm Olbers[354] (1758-1840) darf in der Liste von Kästners Schülern nicht fehlen. Er war als praktischer Arzt in Bremen tätig und Mitglied verschiedener wissenschaftlicher Akademien. Durch seinen Vater entdeckte er seine Neigung zur Astronomie, merkte aber schnell, dass er die Mathematik als grundlegende Wissenschaft benötigte.[355] Vor seinem Eintritt in die Universität Göttingen 1777 machte er sich mit Wolffs *Anfangs=Gründen* vertraut und las einige Passagen aus den Werken von Euler und Johann Heinrich Lambert (1728-1777). „In Göttingen hatte er [Olbers] das Glück, unsers verehrungswürdigen Kästner's gründlichen Unterricht zu geniessen. Er hörte alles, was derselbe las, ausser reine Mathematik, die er nicht mehr nöthig zu haben glaubte. Den grössten und vorzüglichsten Nutzen leistete ihm ein Privatissimum, das er über die Analysis des Unendlichen bey Kästner gehört hatte. Die Methode, zu welcher dieser grosse Lehrer seine Schüler gewöhnt, ist ganz vortrefflich, und Dr. Olbers verdankt ihm ganz, was er bisher in Auflösung schwieriger Aufgaben zu leisten vermochte. Nach Kästner's bekannter Güte und Gefälligkeit stand dem jungen Olbers nicht nur der freye Gebrauch seiner vielen auserlesenen und seltenen Bücher seiner Bibliothek, sondern auch der Zutritt der Sternwarte unter seiner Aufsicht offen“[356].

Betrachtet man die Laufbahnen von Kästners Schülern, so stellt man fest, dass einige von ihnen wichtige Positionen innerhalb des Universitätssystems besetzten. Diese Entwicklung zeigt, dass sich die Mathematik als selbstständige akademische Disziplin zu festigen begann – eine Entwicklung, an der Kästner maßgeblich mitwirkte. Im Zusammenhang mit der Etablierung der Mathematik als eigenständige Disziplin ist auch Hindenburg als Herausgeber des ersten deutschsprachigen mathematischen Journals hervorzuheben. Darüber hinaus waren Schüler von Kästner auch in Verwaltungen, Universitäten und Gymnasien tätig, sogar über die Grenzen protestantischer Gebiete hinaus.[357]

---

[353] Zu Hindenburg siehe Artikel „Hindenburg, Karl Friedrich von“ von Moritz Cantor in: ADB, Bd. 12 (1880), S. 456 f.

[354] Zu Olbers siehe Artikel „Olbers, Heinrich Wilhelm Mathias“ von Siegmund Günther in: ADB, Bd. 24 (1887), S. 236-238.

[355] Vgl. hierzu und zum Folgenden AGE, 1799, 4. Bd., 3. St., Artikel „Wilhelm Olbers”, S. 283 f.

[356] AGE, 1799, 4. Bd., 3. St., Artikel „Wilhelm Olbers”, S. 284.

[357] Vgl. Baasner, S. 110 f.

2.4 Außeruniversitäre Tätigkeiten

In erster Linie war Kästner ein erfolgreicher Universitätsprofessor und Lehrbuchautor, wobei er sich jedoch nicht nur für die Lehre, sondern vor allem auch für den Fortgang der Wissenschaften interessierte. Als Forscher, der die mathematischen Wissenschaften um neue Erkenntnisse bereicherte, ist er allerdings nie in Erscheinung getreten. Kästner machte sich früh innerhalb der Gelehrtenwelt bekannt, was seine Mitgliedschaften in verschiedenen Akademien und gelehrten Gesellschaften seiner Zeit belegen können. Darüber hinaus führte er umfangreiche Korrespondenzen mit namhaften Persönlichkeiten seiner Zeit.[358] Auch als Schriftsteller und Rezensent in gelehrten Zeitschriften machte er sich einen Namen, wobei er zu fast allen Bereichen der Wissenschaft beigetragen konnte.[359] Alle drei Elemente, die charakteristisch für das Aufklärungszeitalters sind, nämlich gelehrte Gesellschaften, wissenschaftliche Korrespondenz sowie schriftstellerische Tätigkeit in wissenschaftlichen Journalen, werden in den folgenden Ausführungen näher betrachtet. Vereinzelt kann es hierbei zu Überschneidungen kommen, da diese Aspekte eng miteinander verbunden waren.

2.4.1 Mitgliedschaften in Akademien und anderen gelehrten Gesellschaften

Die wissenschaftlichen Gesellschaften[360] als wichtiger Bestandteil der Aufklärung blühten im 18. Jahrhundert auf. Bis heute besteht ein enges Wechselverhältnis zwischen Akademien und Universitäten. Während Akademien primär auf Wissenserweiterung hinarbeiten, widmen sich Universitäten hauptsächlich der Wissensvermittlung.[361] Kästners Zeitgenossen trennten die Aufgabenbereiche dieser beiden Institutionen streng voneinander ab. Wolff sah die Universitäten als Stätten der Lehre, und die Akademien als Stätten der Forschung an, an denen die Erarbeitung neuer wissenschaftlicher Erkenntnisse und Erfindungen sowie deren Verbreitung im Mittelpunkt stehen sollten.[362] Auch Kästner äußerte sich in einem Brief an Anton von Klein (1748-1810) vom 19.4.1776 über die Aufgabe von wissenschaftlichen Akademien und deutschen Gesellschaften. Akademien sollten in erster Linie die Wissenschaften durch Entdeckungen bereichern, wobei die deutschen Gesellschaften bereits existierendes Wissen in eine fassliche Form bringen und somit zur Ausbreitung der Kenntnisse beitragen sollten.[363] Dieses Vorhaben habe die Göttinger Deutsche Gesellschaft – so Kästner – immer verfolgt, allerdings sei die Umsetzung wegen zahlreicher anderer Aufgaben der Mitglieder, die größtenteils aus Professoren bestanden, schwierig.

Zu Mitgliedern wissenschaftlicher Gesellschaften wurden diejenigen Personen ernannt, die die Wissenschaft bereichert hatten oder bereichern konnten. Betrachtet man die Personen, die als Mathematiker an den Akademien dieser Zeit beschäftigt waren, so fällt auf, dass sie sich nicht der universitären Lehrtätigkeit, sondern primär der Forschung an den Akademien widmeten. Zu diesen Personen zählen beispielsweise Euler und Maupertuis. Auch Kästner war

[358] Siehe hierzu das Briefverzeichnis Kästners in: Baasner, S. 645-661.

[359] Siehe hierzu das umfangreiche Schriftenverzeichnis Kästners in: Baasner, S. 606-645.

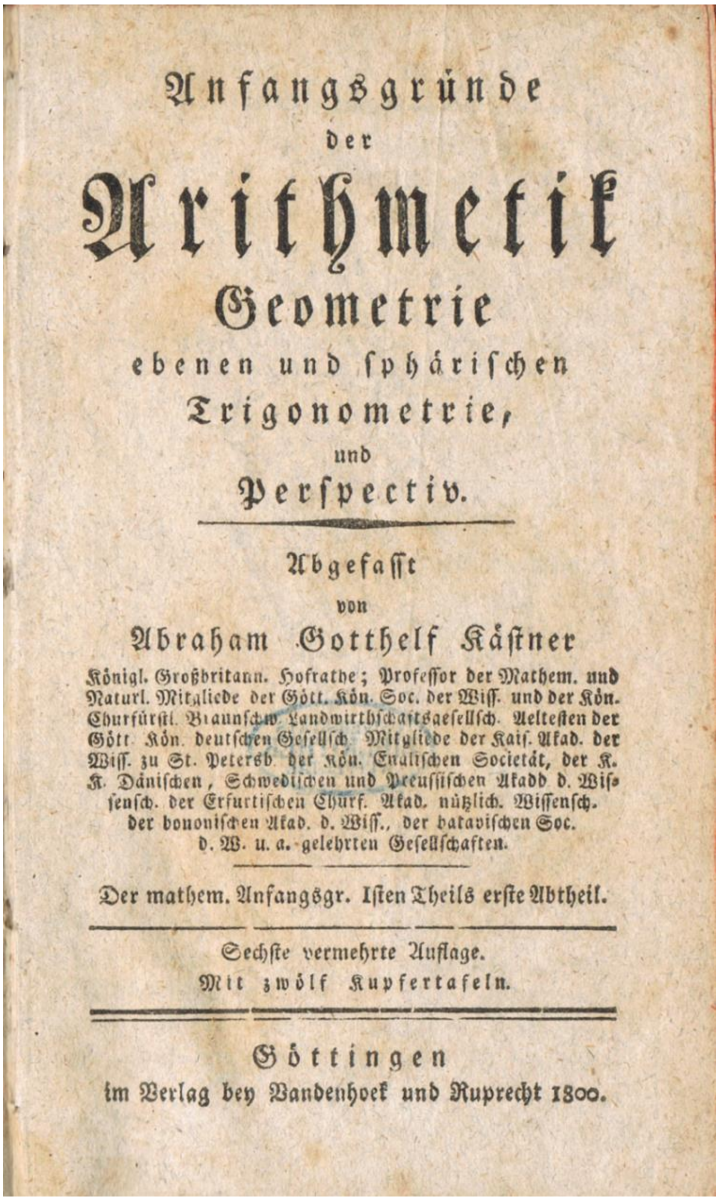
[360] Für nähere Informationen zur Organisation und Zielsetzung der einzelnen Gesellschaften siehe Domay.

[361] Vgl. Grau, S. 16.

[362] Vgl. Voss, Akademien und Gelehrte Gesellschaften. In: Reinalter, S. 19 f.

[363] Vgl. hierzu und zum Folgenden Brief von Kästner an Klein vom 19.4.1776. In: Kästner, Briefe, S. 108.

Mitglied zahlreicher Gesellschaften seiner Zeit. Um mehr über seine Mitgliedschaften zu erfahren, betrachte man das Titelblatt seiner *Anfangsgründe der Arithmetik* ([6]1800) (siehe Abbildung 9), welches die wichtigsten Mitgliedschaften auflistet. Die Erwähnung solcher Mitgliedschaften war zu dieser Zeit üblich und galt nicht der Selbstdarstellung, sondern sollte den wissenschaftlichen Wert des Werks betonen.[364] Mit Hilfe weiterer Quellen ist es uns möglich, die genauen Daten über die Aufnahme Kästners in die jeweiligen Gesellschaften herauszufinden. Hierdurch erfahren wir, wann Kästner innerhalb der gelehrten Welt Fuß fassen und sich einen Namen machen konnte. Darüber hinaus wurden Kästner im Jahr 1765 die Titel „Königlich Britannischer Hofrat“[365] und „Braunschweigisch-lüneburgischer Hofrath“[366] verliehen.



Anfangsgründe
der
Arithmetik
Geometrie
ebenen und sphärischen
Trigonometrie,
und
Perspectiv.

Abgefasst
von
Abraham Gotthelf Kästner
Königl. Großbritann. Hofrathe; Professor der Mathem. und Naturl. Mitgliede der Gött. Kön. Soc. der Wiss. und der Kön. Churfürstl. Braunschw. Landwirthschaftsgesellsch. Aeltesten der Gött. Kön. deutschen Gesellsch. Mitgliede der Kais. Akad. der Wiss. zu St. Petersb. der Kön. Englischen Societät, der K. K. Dänischen, Schwedischen und Preussischen Akadd. d. Wissensch. der Erfurtischen Churf. Akad. nützlich. Wissensch. der bononischen Akad. d. Wiss., der batavischen Soc. d. W. u. a. gelehrten Gesellschaften.

Der mathem. Anfangsgr. Isten Theils erste Abtheil.

Sechste vermehrte Auflage.
Mit zwölf Kupfertafeln.

Göttingen
im Verlag bey Vandenhoek und Ruprecht 1800.

Abbildung 9: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, Titelblatt.

[364] Vgl. Baasner, S. 10.
[365] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 72.
[366] Vgl. Meusel, Artikel „Kästner, Abraham Gotthelf“, S. 370.

- Göttinger Königliche Sozietät der Wissenschaften: Ordentliches Mitglied 1755.[367]
- Königliche Kurfürstliche Braunschweigische Landwirtschaftsgesellschaft in Celle: 1766.[368]
- Göttinger Deutsche Gesellschaft: Vorstand/Ältester seit 1762.[369]
- Kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg: 1786.[370]
- Königliche Englische Sozietät/Royal Society of London: 1789.[371]
- Dänische Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen: 1794.[372]
- Schwedische Akademie der Wissenschaften in Stockholm: 1752.[373]
- Preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin: Auswärtiges Mitglied 1750.[374]
- Bononische Akademie der Wissenschaften in Bologna: 1750.[375]
- Batavische Sozietät der Wissenschaften in Haarlem: 1799.[376]
- Akademie der Wissenschaften in Lissabon: Auswärtiges Mitglied 1790.[377]
- Leipziger Deutsche Gesellschaft: 1741.[378]
- Gesellschaft guter Freunde: 1736.[379]

Neben diesen Gesellschaften war Kästner auch noch Mitglied folgender Gesellschaften, wobei sich sein Eintrittsdatum nicht genau bestimmen lässt:

- Kurfürstliche Akademie nützlicher Wissenschaften in Erfurt: Vor 1765.[380]
- Perusinische Academie Augustae/Academiae Augustae zu Perugia: Vor 1765.[381]
- Leipziger Gesellschaft der freien Künste: Vor 1765.[382]
- Lateinische Gesellschaft in Jena: Spätestens 1752.[383]
- Deutsche Gesellschaft in Jena: Spätestens 1752.[384]

---

367 Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 253.
368 Vgl. GGA, 1766, 34. St., S. 265.
369 Vgl. Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf" von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 447.
370 Vgl. Pütter, Bd. 2, S. 153.
371 Laut Baasner war Kästner kein Mitglied der Royal Society of London; vgl. Baasner, S. 90. Die Ausführungen auf dem Titelblatt der *Anfangsgründe* zeigen das Gegenteil. Kästners Aufnahme in die Royal Society erfolgte am 30.4.1789; vgl. GGA, 1789, 148. St., S. 1481.
372 Vgl. GGA, 1794, 18. St., S. 169.
373 Vgl. GGA, 1752, 57. St., S. 565.
374 Vgl. Mitgliederverzeichnis der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Eintrag „Abraham Gotthelf Kästner". Online verfügbar unter http://www.bbaw.de/die-akademie/akademiegeschichte/mitglieder-historisch/alphabetische-sortierung?altmitglied_id=1322&letter=K (3.6.2014).
375 Vgl. Baasner, S. 89 f.
376 Vgl. GGA, 1799, 107. St., S. 1072.
377 Vgl. GGA, 1790, 31. St., S. 305.
378 Vgl. Baasner, S. 82.
379 Vgl. Baasner, S. 81.
380 Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 173.
381 Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 173.
382 Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 173.
383 Dies ist bereits auf dem Titelblatt von Kästners *D. Gottfried Rudolph Pommers Sammlungen historischer und geographischer Merkwürdigkeiten* erwähnt.
384 Vgl. Fußnote 383.

- Oberlausitzische Bienengesellschaft: Vermutlich 1756.[385]
- Lateinische Gesellschaft in Karlsruhe: Vermutlich 1756.[386]

Es ist zu sehen, dass Kästner bereits vor seiner Anstellung als ordentlicher Professor für Mathematik und Physik in Göttingen als Mitglied in einige Gesellschaften aufgenommen worden war. Erstaunlich ist die große Vielfalt in der Schwerpunktsetzung der einzelnen Gesellschaften. Dass sich unter diesen auch Gesellschaften befanden, die sich nicht mit der Mathematik, sondern beispielsweise mit der deutschen Sprache beschäftigten, steht als Zeichen für Kästners breites Interesse an verschiedenen Wissenschaften.

Zunächst beschränkten sich seine Mitgliedschaften auf Lese- und Sprachgesellschaften. Kästner war einer von Johann Christoph Gottscheds (1700-1766) Anhängern und stand mit ihm in Kontakt.[387] Beide setzten sich für die Aufwertung der deutschen gegenüber der lateinischen und französischen Sprache ein. Ab 1750 wurde Kästner dann auch in die wissenschaftlichen Akademien seiner Zeit aufgenommen. Kästners Korrespondenzpartner Quirini empfahl der Akademie in Bologna, Kästner als Mitglied aufzunehmen.[388] 1751 krönte die Berliner Akademie der Wissenschaften, in die Kästner ein Jahr zuvor aufgenommen worden war, seine Preisschrift über die philosophische Frage, welche Pflichten daraus entstehen, wenn die sogenannten Zufälle von Gottes Willen abhängen.[389]

Nachdem Kästner seine Professur in Göttingen angetreten hatte, wurde er sofort in die dort ansässige Sozietät der Wissenschaften und in die Deutsche Gesellschaft aufgenommen. In der Deutschen Gesellschaft hatte Kästner bereits 1762 den Rat des Ältesten inne. Hier machte sich Kästner vor allem um die Etablierung des Deutschen als Gelehrtensprache verdient.[390] Besonders bemerkenswert sind seine Leistungen für die Sozietät der Wissenschaften in Göttingen. Wie Christian Gottlob Heyne (1729-1812) in seiner Lobrede auf Kästner zu berichten weiß, hat Kästner bei dem Aufbau der Sozietät mit größter Sorgfalt geholfen.[391] Hierzu werden auch Kästners 47 Abhandlungen gerechnet, die er im Rahmen seiner Tätigkeiten an der Akademie in mündlichen Vorträgen präsentiert hat. Im akademischen Jahr 1761 war Kästner Sekretär der Gesellschaft der Wissenschaften.[392] In den folgenden Jahren übernahm Kästner das Amt des Direktors der Sozietät: 1770, 1773, 1775[393], 1778, 1781, 1784, 1787[394], 1790, 1793, 1796, 1799.[395]

---

385 Kurz nach Kästners Ankunft in Göttingen; vgl. Baasner, S. 90.
386 Kurz nach Kästners Ankunft in Göttingen; vgl. Baasner, S. 90.
387 Vgl. hierzu und zum Folgenden Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 447.
388 Vgl. Kästner, Vita, S. XXI.
389 Vgl. GGA, 1752, 29. St., S. 288 f.
390 Vgl. Müller, C. H., S. 72.
391 Vgl. hierzu und zum Folgenden Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 200.
392 Vgl. Baasner, S. 100.
393 Vgl. Pütter, Bd. 2, S. 281 und GGA, 1775, 139. St., S. 1169. Diese Jahreszahl wird jedoch nicht bei Baasner erwähnt.
394 Nicht 1788, wie bei Baasner angegeben, sondern 1787 wurde Kästner Direktor der Sozietät; vgl. GGA 1787, 193. St., S. 1929 und Pütter, Bd. 2, S. 281.
395 Vgl. Baasner, S. 100, Anm. 84.

2.4.2 Korrespondenz

Auf der Grundlage von Kästners Korrespondenz können Rückschlüsse auf Kästner in vielfältiger Hinsicht gezogen werden. Bereits die Korrespondenzpartner lassen einen Einblick zu, in welchen Kreisen er sich bewegte. Die Inhalte können Aufschluss über seine Forschungsinteressen geben. Die folgenden Ausführungen konzentrieren sich in erster Linie auf Kästners mathematischen Briefwechsel. Allerdings ist es nicht einfach, ein umfassendes Bild von Kästners Korrespondenz zu gewinnen, was zum einen an der Tatsache liegt, dass Kästner seine erhaltenen Briefe nicht aufbewahrte, zum anderen, dass sein Nachlass nicht sorgfältig verwahrt worden ist.[396] Ein umfassendes Briefverzeichnis wurde von Baasner zusammengestellt, das für unsere Ausführungen verwendet wird.[397] Aus diesem geht hervor, dass Kästner früh Korrespondenz mit verschiedenen Persönlichkeiten seiner Zeit führte. Baasner erwähnt in diesem Zusammenhang, dass Kästner bewusst den Kontakt zu Gelehrten seiner Zeit nicht abbrechen ließ, um sich der Gelehrtenwelt bekannt zu machen.[398]

Die ersten Briefwechsel führte Kästner in den 1740er Jahren mit Personen, die wichtige Positionen in wissenschaftlichen Gesellschaften besetzten. Zu diesen Personen gehörten Haller[399], Maupertuis[400], Johann Heinrich Samuel Formey[401] (1711-1797) sowie Pehr Wilhelm Wargentin (1717-1783)[402]. Die Initiative zum Schriftwechsel mit Maupertuis ging von Kästner aus. In seinem ersten Brief vom 7.10.1745 stellte sich Kästner als Maupertuis noch unbekannte Person vor und bekundete seinen Respekt gegenüber dem französischen Gelehrten.[403] Innerhalb von kurzer Zeit wurde Kästner zu einem wichtigen Ansprechpartner für Maupertuis, vor allem in Bezug auf das deutsche wissenschaftliche Milieu, so dass Kästner auch als korrespondierendes Mitglied in die Berliner Akademie aufgenommen wurde.[404]

Seit seiner Anstellung als außerordentlicher Professor an der Universität Leipzig 1746 machte sich Kästner auch außerhalb der deutschsprachigen Grenzen durch seine Korrespondenz bekannt. Unter anderem unterhielt er Briefwechsel mit Kardinal Angelo Maria Quirini, Euler, Joseph-Jérôme de Lalande (1732-1807) sowie Wargentin.[405] Kästner veröffentlichte den mathematischen Schriftwechsel mit Kardinal Quirini im Jahre 1753. Einer dieser Briefe trägt den Titel *De habitu Matheseos et Physicae ad religionem* (1752) und steht stellvertretend für die Thematik, über die Kästner und der Kardinal diskutiert haben, nämlich über die Stellung der Mathematik und Physik in der Religion.[406]

---

396 Vgl. Baasner, S. 81.
397 Siehe Baasner, S. 645 ff.
398 Vgl. Baasner, S. 93 f.
399 Mitbegründer der Göttinger Sozietät der Wissenschaften sowie ihrer Rezensionszeitschrift GGA; vgl. Artikel „Haller, Albrecht von“ von Emil Blösch in: ADB, Bd. 10 (1879), S. 422.
400 Seit 1746 Präsident der Berliner Akademie der Wissenschaften; vgl. Artikel „Maupertuis, Peter Ludwig Moreau de“ von Reinhold Koser in: ADB, Bd. 20 (1884), S. 692.
401 Seit 1748 Sekretär der Berliner Akademie der Wissenschaften; vgl. Artikel „Formey, Johann Heinrich Samuel“ von Arthur Richter in: ADB, Bd. 7 (1878), S. 156.
402 Sekretär der Schwedischen Akademie der Wissenschaften; vgl. Artikel „Wargentin, Pehr Wilhelm” von Sten Lindroth in: DSB, Bd. 14 (1976), S. 178 f.
403 Vgl. Brief von Kästner an Maupertuis vom 7.10.1745. In: Kästner, Briefe, S. 1.
404 Vgl. hierzu und zum Folgenden Baasner, S. 92 f.
405 Vgl. Jördens, Lexikon, Bd. 2, Artikel „Abraham Gotthelf Kästner“, S. 572.
406 Vgl. Kästner, Vita, S. XXII.

Auch weitere Gelehrte gehörten zu Kästners Korrespondenten, beispielsweise der Mathematiker Lambert. Die Korrespondenz zwischen Lambert und Kästner begann nach Lamberts Besuch in Göttingen im September 1757 und hielt, bis auf einige Unterbrechungen durch den Siebenjährigen Krieg, bis zum Jahre 1775 an.[407] Der Briefwechsel enthält in erster Linie fachmathematische Diskussionen, beispielsweise über Reihen, Photometrie, Perspektive und Geometrie. Zugleich sandten sie sich gegenseitig ihre Arbeiten zu. Kästner sandte 1770 die Bände fünf und sechs seiner *Anfangsgründe*[408] an Lambert. Zum fünften Band äußerte sich Lambert in positiver Weise.[409] In den folgenden Jahren sandte Kästner auch noch weitere Werke an Lambert, beispielsweise zwei Exemplare der *Dissertationes mathematicae et physicae* (1771), wobei eine für Lambert und eine für die Berliner Akademie der Wissenschaften bestimmt war.[410] Diese Arbeit bezeichnete Lambert als exzellent.[411]

Kästner wechselte auch Briefe mit dem Philosophen Immanuel Kant (1724-1804). Es sind drei Briefe aus den Jahren 1790 und 1793 überliefert, von denen zwei an Kästner gerichtet sind. In dem Briefwechsel ging es um die Leibniz-Wolffsche Philosophie sowie die Entwicklung der Sprache. Kant zeigt seine Hochachtung gegenüber Kästner, wenn er ihn als „Nestor aller philosophischen Mathematiker Deutschlands“[412] bezeichnet. Des Weiteren lobt er Kästner als Kenner vieler Wissenschaften sowie seinen einzigartigen Schreibstil.[413] Nicht nur in den Briefen selbst kommt Kants Anerkennung gegenüber Kästner zum Ausdruck, sondern er nimmt auch in seinen Schriften Bezug auf ihn. So heißt es beispielsweise in seinem handschriftlichen Nachlass, dass die Werke Kästners und auch Klügels den Wert jeder Büchersammlung steigern könnten.[414] In seiner Schrift *Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen* (1763) geht es um den Gebrauch der Mathematik in der Philosophie. Niemand habe, so Kant, den Begriff der negativen Größen so deutlich und bestimmt dargestellt wie Kästner, unter seinen Händen „alles genau, faßlich und angenehm“[415] werde.

Kästner führte auch einen umfangreichen Briefwechsel mit seinen ehemaligen Schülern, die sich in der Gelehrtenwelt einen Namen gemacht haben. Eine umfangreiche Korrespondenz führte er mit Lichtenberg, aber auch zu Klügel und Pfaff hielt Kästner den Kontakt aufrecht. Lichtenberg war nicht nur ein früherer Schüler Kästners, sondern wurde später zu seinem Kollegen an der Universität Göttingen. Seit Lichtenbergs Anstellung an der Universität Göttingen 1770 bis ein Jahr vor seinem Tod führten sie eine umfangreiche Korrespondenz.[416] Am 16.10.1775 berichtete Lichtenberg Kästner über die Umstände aus England, genauer von seinem Observatorium und den dort vorhandenen Instrumenten.[417] Daneben gab er auch Nachrichten von Johann Reinhold Forster (1729-1798) und dessen Expeditionsreisen. In

[407] Vgl. Bopp, S. 3.

[408] 1770 zählten Kästners *Anfangsgründe* insgesamt nur sechs Bände. Lambert meint mit dem fünften Band die *Anfangsgründe der höhern Mechanik*, mit dem sechsten Band die *Anfangsgründe der Hydrodynamik.*

[409] Vgl. Brief von Lambert an Kästner vom 1.5.1770. In: Bopp, S. 20.

[410] Vgl. Brief von Kästner an Lambert vom 7.10.1770. In: Bopp, S. 26.

[411] Vgl. Brief von Lambert an Kästner vom 20.4.1771. In: Bopp, S. 27.

[412] Brief von Kant an Kästner vom 5.8.1790. In: Kant, Gesammelte Schriften, Bd. XI, S. 186.

[413] Vgl. Brief von Kant an Kästner vom Mai 1793. In: Kant, Gesammelte Schriften, Bd. XI, S. 427 f.

[414] Vgl. Kant, Gesammelte Schriften, Bd. XX, S. 410.

[415] Kant, Versuch, S. 1 f.

[416] Vollständiger Briefwechsel Lichtenbergs in: Lichtenberg: Briefwechsel.

[417] Vgl. hierzu und zum Folgenden Lichtenberg, Brief aus England an Herrn Hofrath Kästner. In: DM, 1776, 1. Bd., S. 79-84.

ihrem Briefwechsel behandelten Kästner und Lichtenberg vor allem auch astronomische Probleme und Berechnungen.

Pfaff und Kästner schätzten sich gegenseitig sehr.[418] In ihrem Briefwechsel ging es unter anderem um die Vorlesungstätigkeit. Am 11.7.1788 berichtete Kästner Pfaff von seinen Erfahrungen mit der Vorlesung zur Enzyklopädie der Mathematik, die er zu Beginn seiner Tätigkeit in Göttingen halten musste.[419] Kästner gab entsprechende Ratschläge und Literatur in Bezug auf Vorlesungen. In einem Brief von Kästner an Pfaff vom 2.8.1789 wurde auch über geometrische Probleme und Mathematiker geurteilt.[420] Kästner sandte Pfaff an Ostern 1794 die neueste Auflage seiner *Analysis endlicher Größen* zu.[421] Umgekehrt versorgte Pfaff Kästner mit Büchern, wie aus Kästners Antwortschreiben vom 2.11.1795 hervorgeht.[422] Neben dem Austausch von mathematischer Literatur diskutierten beide Gelehrte auch über fachmathematische Themen, wie die „combinatorische Analytik“[423].

Zu Redakteuren bekannter Journale hielt Kästner ebenfalls schriftlichen Kontakt, beispielsweise zu Johann David Michaelis (1717-1791), Friedrich Nicolai (1733-1811) und Joachim Heinrich Campe (1746-1818). In den Briefwechseln geht es vor allem um Kästners Rezensionstätigkeit, da dieser zahlreiche Rezensionen in beiden Journalen verfasste. Michaelis war als Redakteur der *Göttingischen Anzeigen* tätig.[424] Nicolai war Herausgeber der *Allgemeinen Deutschen Bibliothek*, zu der Kästner einige Rezensionen beisteuerte.[425] Interessant sind die Aussagen Kästners in einem Brief an Nicolai vom 12.1.1766.[426] Kästner beklagte sich über die hohe Arbeitsbelastung als Professor in Göttingen. Neben vier oder fünf Stunden Collegia am Tag arbeitete Kästner noch für die *Göttingischen Anzeigen*, verfasste einige Bücher für die Ostermesse und nahm astronomische Beobachtungen vor. Aus diesem Grund konnte er weniger Beiträge für die *Allgemeine deutsche Bibliothek* leisten als ihm recht war. Campe war ein wichtiger Pädagoge seiner Zeit.[427] Er war Mitherausgeber des *Braunschweigischen Journals philosophischen, philologischen und pädagogischen Inhalts* (BJ; 1788-1791). Kästner sandte ihm Briefe mit pädagogischen Überlegungen zu, die in dem Journal abgedruckt wurden.

[418] Vgl. Pfaff, S. 11.
[419] Vgl. hierzu und zum Folgenden Brief von Kästner an Pfaff vom 11.7.1788. In: Pfaff, S. 211 f.
[420] Vgl. Brief von Kästner an Pfaff vom 2.8.1789. In: Pfaff, S. 213.
[421] Vgl. Brief von Kästner an Pfaff aus dem Jahr 1794. In: Pfaff, S. 214.
[422] Vgl. Brief von Kästner an Pfaff vom 2.11.1795. In: Pfaff, S. 214.
[423] Dieser Ausdruck wurde tatsächlich verwendet; vgl. Brief von Kästner an Pfaff vom 28.4.1797. In: Pfaff, S. 217.
[424] Vgl. Baasner, S. 101.
[425] Vgl. Baasner, S. 103.
[426] Vgl. hierzu und zum Folgenden Brief von Kästner an Nicolai, 12.1.1766. In: Kästner, Briefe, S. 65.
[427] Mit seinem Namen sind das Waisenhaus in Halle und die Franckeschen Stiftungen verbunden.

2.4.3 Publikationstätigkeit

Im 18. Jahrhundert entwickelte sich das Zeitschriftenwesen in Deutschland rasant. Die wissenschaftliche Zeitschrift wurde im Zeitalter der Aufklärung zu einem eigenständigen Medium, das sich neben monographischen Abhandlungen und dem Briefwechsel etablierte.[428] Wesentliche Merkmale von Zeitschriften sind die Öffentlichkeit von Diskussion und Kritik, ihre allgemeine Verfügbarkeit sowie ihre Aktualität. Der gelehrte Diskurs intensivierte sich durch die Zeitschriften.[429] Durch die Vielzahl an neuen Büchern wurden vor allem Rezensionszeitschriften wichtig, durch die die Leser, zum größten Teil akademisch gebildete Personen, über aktuelle Literatur informiert wurden.[430] Daneben etablierten sich auch die von den wissenschaftlichen Akademien herausgegebenen Schriften, die zum gelehrten Austausch beitrugen. Die regelmäßige Erscheinung dieser Zeitschriften kann als Indikator für das erfolgreiche Arbeiten an der jeweiligen Akademie angesehen werden.[431]

Kästner wirkte auch durch seine schriftstellerische Tätigkeit und machte sich auf diese Weise früh in der Gelehrtenwelt bekannt. Dies mag mit ein Grund für seine Berufung an die Universität Göttingen gewesen sein, da der Kurator der Universität, Gerlach Adolph von Münchhausen (1688-1770), nicht nur einen gebildeten akademischen Lehrer suchte, sondern gleichzeitig auch eine Person mit Öffentlichkeitswirksamkeit.[432] Die Verpflichtung zu Publikationen im Rahmen der Göttinger Universität und Akademie war auch Bestandteil von Kästners Aufgaben und wurde bereits in seinem Rufschreiben nach Göttingen 1755 festgelegt.[433]

Kästner war in vielerlei Hinsicht als Schriftsteller aktiv. Im Folgenden wird der Fokus auf wichtige Etappen in seiner Karriere sowie auf seine mathematischen Beiträge gelegt. Seine *Mathematischen Anfangsgründe* werden in Kapitel 3 aufgegriffen. Betrachtet man Kästners Schriftenverzeichnis[434], auf dem der Großteil der folgenden Ausführungen beruht, so stellt man fest, dass er seit 1736 beständig Beiträge für diverse Zeitschriften verfasste. Die Artikel zeigen ein breites Spektrum an Themengebieten auf. Neben mathematischen und naturwissenschaftlichen Artikeln sind auch zahlreiche literarische, philosophische und pädagogische Beiträge wiederzufinden. Während seiner Lehrtätigkeit in Leipzig veröffentlichte Kästner neben kleineren mathematischen Schriften in erster Linie philosophische und schöngeistige Artikel, beispielsweise Oden und Sinngedichte, die unter anderem in den *Belustigungen des Verstandes und des Witzes* veröffentlicht wurden. Bereits hier zeigte Kästner, dass sich seine Kenntnisse nicht auf den mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich beschränkten.

Auch in anderer Hinsicht machte sich Kästner früh einen Namen. Seine erste Zeitschrift gab er bereits ab 1747 gemeinsam mit Johann August Unzer (1727-1799) heraus. Sie trug den Titel *Hamburgisches Magazin oder gesammlete* [sic] *Schriften zum Unterricht und Vergnügen aus der Naturforschung und den angenehmen Wissenschaften überhaupt* (HM; 1747-

---

[428] Vgl. Schneider, Die Funktion wissenschaftlicher Rezensionszeitschriften. In: Schneider, S. 279.
[429] Vgl. Habel, S. 9.
[430] Vgl. Habel, S. 152.
[431] Vgl. Grau, S. 272 f.
[432] Vgl. Baasner, S. 102.
[433] Vgl. Rufschreiben an Abraham Gotthelf Kästner an die Universität Göttingen. In: Göttinger Universitätsarchiv, Personalakte Abraham Gotthelf Kästner, Kur. 5753, pag. 32-33.
[434] Ein umfangreiches Schriftenverzeichnis findet sich bei Baasner, S. 606-645.

1763, ab 1767 fortgeführt als *Neues Hamburgisches Magazin*). Sie stellt die erste deutschsprachige wissenschaftliche Zeitung dar, die sich mit Naturwissenschaften beschäftigte.[435]

Durch den Tod seines Vater und der damit verbundenen finanziellen Notlage musste Kästner ab 1747 als Übersetzer tätig werden. Schnell etablierte er sich auf diese Weise in der internationalen Gelehrtenwelt und war als Übersetzer gefragt. Durch seine Übersetzungen *Der Königlich Schwedischen Akademie der Wissenschaften Abhandlungen, aus der Naturlehre, Haushaltskunst und Mechanik* erhielt Kästner bereits während seiner Tätigkeit in Leipzig eine Schlüsselrolle, so dass er von schwedischen Gelehrten, die nach Deutschland reisten, aufgesucht wurde.[436] Die *Abhandlungen* erschienen ab 1739, ihre deutschsprachigen Übersetzungen ab 1749, wobei Kästner ab dem dritten Band 1751 als Übersetzer tätig war.[437] Seine Übersetzungen, die in den *Göttingischen Anzeigen* bekannt gegeben wurden, versah Kästner regelmäßig mit eigenen Anmerkungen. Seine Arbeit als Übersetzer kann als Grund für seine Aufnahme als Mitglied der Schwedischen Akademie 1752 angesehen werden.

Seit seiner Tätigkeit in Göttingen konzentrierte sich Kästner vor allem auf Artikel und Rezensionen aus den Bereichen Mathematik und Naturwissenschaften. Durch seine umfassende Bildung konnte er aber zu nahezu jedem Bereich der Wissenschaft Beiträge schreiben. Kästners Schriften in Journalen waren sehr gefragt, so dass die Herausgeber um einen Artikel von Kästner baten, um auf diese Weise das Ansehen des jeweiligen Journals zu steigern.[438] Kästners Rezensionen mathematischer Werke sind hauptsächlich in der *Allgemeinen Deutschen Bibliothek*, den *Göttingischen Anzeigen* (GGA) sowie der *Neuen Allgemeinen Deutschen Bibliothek* zu finden. Vor allem Kästners Verdienste für die GGA werden von Heyne betont.[439] Kästner verfasste mehr Artikel als Albrecht von Haller, der die Direktion dieser Zeitschrift von 1747 bis 1770 innehatte. Im Jahre 1770 übernahm Kästner das Direktorium der GGA. Er zeichnete sich durch seinen witzigen und satirischen Stil aus, wodurch seine Beiträge gerne gelesen wurden. Allerdings konnte Kästner wegen des allgemein mangelnden Interesses nicht sehr viele mathematische Bücher rezensieren.

Kästner war sehr bemüht, Beiträge für Journale zu schreiben, die sich den Naturwissenschaften widmeten. Hierzu gehören beispielsweise das *Göttingische Magazin der Wissenschaften und Literatur*, das *Magazin für das Neueste aus der Physik und Naturgeschichte*, *Allgemeine geographische Ephemeriden*, das *Berliner astronomisches Jahrbuch*, ebenso wie das *Philosophische Magazin*.[440]

Beiträge zu mathematischen Wissenschaften, teilweise mit philosophischen Betrachtungen, sind vor allem im *Hamburgischen Magazin*, im *Hannöverschen Magazin*, im *Philosophischen Magazin*, in den *Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen*, im *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* und im *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* enthalten. Pädagogische und – im heutigen Terminus – mathematikdidaktische Gedanken Kästners sind im *Braunschweigischen Journal* zu finden.

Kästner verfasste die Vorreden zu einigen Monographien aus dem Bereich der Naturwissenschaften und zunehmend auch zu einigen mathematischen Lehrbüchern. Dies zeigt seinen

---

[435] Vgl. Baasner, S. 89.
[436] Vgl. Baasner, S. 87.
[437] Vgl. GGA, 1796, 129. St., S. 1281.
[438] Vgl. Baasner, S. 108 f.
[439] Vgl. hierzu und zum Folgenden Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 200 f.
[440] Vgl. Baasner, S. 111.

Stellenwert innerhalb der Gelehrtenwelt. Interessant ist, dass Kästner im Laufe der Jahre mehr Rezensionen zu mathematischen Lehrbüchern verfasste. Dies ist ein Indiz für das große Ansteigen dieser Literaturgattung seit der Mitte des 18. Jahrhunderts.

Neben seinen umfassenden *Mathematischen Anfangsgründen* veröffentlichte Kästner in seinen letzten Lebensjahren seine vierbändige *Geschichte der Mathematik* (1796-1800). Dieses Werk entstand aufgrund seiner umfangreichen mathematischen Bücherkenntnis. Bereits in seinen jungen Jahren konnte er auf die Privatbibliothek seines Onkels zurückgreifen. Einige Bücher erwarb er sich in erster Linie auf Auktionen oder bekam sie geschenkt, in größerem Umfang von Pommer.[441] Im Laufe der Jahre sammelte er zahlreiche Bücher und konnte sich so eine eigene umfangreiche Bibliothek aufbauen. 1801 wurde das Verzeichnis seiner Privatbibliothek veröffentlicht, in dem über 7000 Bücher aufgelistet sind.[442] Die *Geschichte der Mathematik* enthält jedoch keinen historischen Abriss der Mathematik, sondern ist eine Sammlung von nützlichen und teilweise seltenen mathematischen Werken zu sämtlichen Bereichen der Mathematik. Allerdings sei das Werk, so Moritz Cantor (1829-1920), oft zu Unrecht negativ bewertet worden; diese Arbeit sei vor allem für mathematikhistorische Studien sinnvoll und könne als Nachschlagewerk verwendet werden.[443] Von Müller wird das Werk als „bloße Literärgeschichte“[444] bezeichnet. Hofmann (1963) urteilt, dass einige Fachliteratur nach 1650 nicht mehr enthalten sei, dass aber Kästners Werk einen wertvollen und detaillierten biographischen und kulturgeschichtlichen Einblick in die Geschichte der Mathematik ermöglicht.[445] Wahrscheinlich wollte Kästner den Umständen seines Zeitalters gerecht werden, in dem zahlreiche Bücher veröffentlicht wurden, und wählte deswegen einen bewusst enzyklopädischen Charakter. Seine *Geschichte der Mathematik* kann als Wegweiser durch die mathematische Literatur angesehen werden.

2.5 Zusammenfassung

Abraham Gotthelf Kästner wurde durch seinen Vater und seinen Onkel durch Privatunterricht früh an die Wissenschaften herangeführt. Seine Leidenschaft für Mathematik wurde vor allem durch seinen Onkel geweckt. Dieser stellte seinem Neffen mathematische Werke aus seiner umfangreichen Bibliothek zur Verfügung, so dass sich Kästner auch selbstständig mathematische Kenntnisse aneignen konnte. Obwohl Kästners Vater eine juristische Laufbahn für seinen Sohn vorgesehen hatte, die dieser zunächst auch einschlug, fand der jüngere Kästner während seiner Studien an der Universität Leipzig früh Gefallen an mathematischen Vorlesungen. Durch seine finanziellen soliden Verhältnisse sowie die Nachsicht seines Vaters konnte sich Kästner vollkommen auf die Mathematik konzentrieren. Da er einige Inhalte im Rahmen seiner mathematischen Studien nicht als ausreichend empfand, eignete sich Kästner auch hier in autodidaktischen Studien entsprechende Kenntnisse an. Sein weiterer Werdegang

---

[441] Vgl. AGE, 1799, 4. Bd., 4. St., Artikel „Abraham Gotthelf Kästner“, S. 369.

[442] Siehe Kästner/Kirsten.

[443] Vgl. Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 445 f.

[444] Müller, C. H., S. 9.

[445] Vgl. Artikel „Kästner, Abraham Gotthelf“ von Joseph Ehrenfried Hofmann und Franz Menges in: NDB, Bd. 10 (1974), S. 735.

als Mathematiker schien vorbestimmt, als er 1736 eine mathematische Dissertation verfasste und sich mit dieser 1739 die Lehrerlaubnis erwarb. An der Universität Göttingen hatte er das Glück, wie er in seiner deutschsprachigen Selbstbiographie beschreibt, dass er sich vollkommen der Mathematik, hingeben konnte. Hier wirkte er in erster Linie als erfolgreicher Universitätslehrer und Lehrbuchautor, der einen bedeutenden Beitrag zur Etablierung der Mathematik als akademisches Fach geleistet hat.[446] Auch außerhalb der Universität konnte Kästner schon früh Erfolge vorweisen und sich so in der internationalen Gelehrtenwelt bekannt machen. Hierzu gehören in erster Linie seine Rezensionen und Beiträge in sämtlichen Journalen seiner Zeit, aber auch die Übersetzungen ausländischer Werke ins Deutsche, sowie seine Korrespondenz mit bekannten Wissenschaftlern.

Kästner widmete sich bis zu seinem Tod vornehmlich den mathematischen Wissenschaften. Betrachtet man jedoch seine außeruniversitären Tätigkeiten, so stellt man fest, dass er auch zahlreiche Beiträge zu anderen Wissenschaften leistete. Auch seine Mitgliedschaften in verschiedenen Akademien und gelehrten Gesellschaften seiner Zeit zeigen ein breites Spektrum an Interessen. Seine Zeitgenossen sahen Kästner als vielseitigen Gelehrten an, der in der Mathematik beheimatet war.[447]

[446] Vgl. Baasner, S. 110.
[447] Vgl. Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 198.

3 Abraham Gotthelf Kästners „Mathematische Anfangsgründe“

Abraham Gotthelf Kästner veröffentlichte seine *Mathematischen Anfangsgründe* ab 1758. Dieses Werk verdient aus mehreren Gründen Beachtung, vor allem aber wegen seines Umfangs und seines Erfolgs. Im Vergleich zu anderen Lehrbüchern treten Kästners *Anfangsgründe* bereits durch ihren Umfang von zehn Bänden hervor. Der Erfolg der *Anfangsgründe* lässt sich nicht nur an der Anzahl der Neuauflagen ablesen, sondern wird sowohl durch Quellen als auch durch entsprechende Bemerkungen in der Sekundärliteratur bestätigt. Wohl durch Kästners durchschlagenden Erfolg mit seinen Lehrbüchern bezeichnete Johann Andreas Christian Michelsen (1749-1797) Kästner als „Lehrer[] Deutschlands in der Mathematik“[448]. Auch in der Sekundärliteratur wird Kästner als Universitätslehrer dargestellt, der durch seine Vorlesungen und seine Lehrbücher berühmt wurde und sogar als einer der besten Mathematiker seiner Zeit bezeichnet wurde.[449] Die *Anfangsgründe* wurden an der Universität Göttingen von Kästner und seinen Kollegen, aber auch an anderen deutschen Universitäten als Grundlage für mathematische Vorlesungen verwendet.[450] Sie verdrängten die *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften* von Wolff, die bis zum Erscheinen von Kästners *Anfangsgründen* dominierten.[451] Im vorliegenden Kapitel wird stellenweise Bezug auf Wolffs *Anfangs=Gründe* genommen, um die Unterschiede zwischen den Lehrbüchern von Wolff und Kästner herauszustellen und gleichzeitig den Erfolg von Kästners *Anfangsgründen* zu erklären.

Müller stellte die These auf, dass Kästners *Anfangsgründe* als Grundlage für weitere mathematische Lehrbücher der 1770er und 1780er Jahre verwendet wurden, wobei diese Behauptung noch zu untersuchen sei.[452] Die Analyse von Kästners *Anfangsgründen* kann also einen Beitrag zu Müllers These leisten, indem nämlich zunächst einmal Kästners Lehrwerk in Hinblick auf ausgewählte Aspekte näher untersucht wird – so wie es in der vorliegenden Arbeit erfolgt. Dies liefert die Grundlage, um Kästners Lehrbuch mit denen anderer Autoren auf Übereinstimmungen und Unterschiede hin zu untersuchen.

In den folgenden Ausführungen werden zunächst Kästners *Mathematische Anfangsgründe* vorgestellt, um dann auf ausgewählte Aspekte dieses umfangreichen Lehrbuchs einzugehen. Um den Stellenwert von Kästners Lehrwerk innerhalb der mathematisches Lehrbuchliteratur des 18. Jahrhunderts zu bestimmen, bedarf es eines Vergleichs mit Lehrbüchern anderer Autoren, der im Kapitel 4 erfolgen wird, wobei der Fokus auf ausgewählte fachmathematische Themen gelegt wird.

[448] Zitiert nach Müller, C. H., S. 58.
[449] Vgl. Hund, S. 25.
[450] Zur Verwendung von Kästners Lehrbüchern an der Universität Göttingen vgl. sämtliche Vorlesungsankündigungen in den GGA. Für andere Universitäten, vor allem für die Universität Leipzig, vgl. Kühn, S. 72 f.
[451] Vgl. Kühn, S. 70.
[452] Vgl. Müller, C. H., S. 58. Auch Bopp bezeichnet Kästner als „Lehrer Deutschlands“; in: Bopp, S. 3.

3.1 Aufbau der „Mathematischen Anfangsgründe“

Kästner verfasste seine *Mathematischen Anfangsgründe* im Rahmen seiner Lehrtätigkeit an der Universität Göttingen. Während seiner Tätigkeit an der Universität Leipzig verwendete er noch die Lehrwerke von Wolff.[453] Diese schätzte Kästner sehr und betonte ihren Wert für die mathematische Bildung in Deutschland. Kästner äußerte sich nicht explizit darüber, wieso er eigene „Anfangsgründe“ veröffentlichte. Aus der Vorrede zur ersten Auflage seiner *Anfangsgründe der Arithmetik* geht jedoch hervor, dass Wolffs Lehrbücher nach Kästners Einschätzung nicht mehr auf dem aktuellen Stand waren. Zudem kommt hinzu, dass die schriftstellerische Tätigkeit von Professoren als wichtig angesehen wurde und oftmals ein Kriterium für eine Anstellung war.[454]

Kästners Lehrbuch wurde zunächst zwischen 1758 und 1769 in sechs Bänden herausgegeben. Nicht das Werk als Ganzes, wohl aber einzelne Bände erfuhren Neuauflagen. Es kamen auch weitere Bände hinzu, so dass die *Anfangsgründe* schließlich ab dem Jahr 1791 auf zehn Bände unterschiedlichen Umfangs anwuchsen. Alle Bände und Auflagen erschienen im Göttinger Verlag Vandenhoeck und Ruprecht im Oktavformat. Dieser Verlag wurde 1735 als Universitätsverlag in Göttingen gegründet, um die junge Universität mit Büchern auszustatten und auf Universitätskosten Bücher zu drucken.[455]

Wolffs *Anfangs=Gründe* bestanden aus vier Bänden, in denen Wolff dieselben Disziplinen wie Kästner in zehn Bänden behandelte. Allerdings muss beachtet werden, dass die Kenntnisse in den mathematischen Wissenschaften zu Beginn des 18. Jahrhunderts, als Wolff sein Lehrwerk veröffentlichte, noch nicht so umfassend waren wie fast fünfzig Jahre später bei Kästner. Kästner erwähnt noch einen anderen Aspekt, der erklärt, wieso Wolffs deutschsprachiges mathematisches Lehrbuch nicht so umfangreich war. Wolff habe lediglich die einfachsten Lehren darstellen konnte, da die Mathematik in Deutschland zu Beginn des 18. Jahrhunderts noch nahezu unbekannt gewesen sei.[456]

Das Anwachsen der mathematischen Kenntnisse im Laufe des 18. Jahrhunderts wird vor allem an der Differential- und Integralrechnung deutlich, die bei Wolff noch der Algebra untergeordnet war, der Kästner aber bereits 1761 einen eigenen Band, nämlich *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, widmete. Dass die Mathematik gerade im 18. Jahrhundert stetig um neue Erkenntnisse bereichert wurde, zeigt auch die Tatsache, dass Kästner seine *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* wegen des großen Zuwachses an neuen Erkenntnissen in der dritten Auflage 1780/81 auf zwei Bände aufteilen musste: „Fast jeder Theil der angewandten Mathematik hat in den neuen Zeiten soviel Vermehrungen erhalten, daß blos deßwegen von Zeit zu Zeit neue Anfangsgründe erfodert [sic] werden“[457].

Das einzige Lehrwerk, welches einen größeren Umfang aufweisen sollte als Kästners *Anfangsgründe*, ist der *Lehrbegrif der gesamten Mathematik* (1767-1777) von Karsten. Allerdings müssen hierbei zwei Aspekte beachtet werden. Zum einen ist der *Lehrbegrif* unvollständig geblieben und lediglich acht statt der von Karsten selbst geplanten mindestens zwölf

[453] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^v-*3^v.
[454] Vgl. Meiners, Bd. 2, S. 28.
[455] Vgl. Vandenhoeck und Ruprecht Göttingen, Auf den Spuren von Forschung und Lehre, S. 9.
[456] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^r.
[457] Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *2^v.

Bände erschienen.[458] Es fehlen nicht nur die Ausführungen zur Katoptrik und Dioptrik, sondern auch zu sämtlichen astronomischen Wissenschaften, Artillerie, Fortifikation und Zivilbaukunst sowie zur Algebra und Analysis. Zum anderen sagt Karsten selbst, dass die Ausführungen in einem „Lehrbegriff“ über diejenigen hinausgehen, die in den gewöhnlichen „Anfangsgründen“ zu finden seien.[459] Also bildet der „Lehrbegriff“ eine andere Art von Lehrbuch, das sich nicht nur auf die elementaren Lehren beschränkt.[460]

Die einzelnen Bände der *Anfangsgründe* können als eigenständige Teile angesehen werden, stehen aber nicht zusammenhangslos nebeneinander. Dies lässt sich daraus schließen, dass Kästner sein Lehrwerk von Beginn an in verschiedene „Theile“ und „Abtheilungen“ einteilte. Der erste Teil der *Anfangsgründe* besteht aus vier „Abtheilungen“ beziehungsweise Bänden, die sich mit der reinen Elementarmathematik – und der Perspektive – befassen. Die beiden Bände des zweiten Teils widmen sich den angewandten mathematischen Wissenschaften. Die höhere reine Mathematik wird in Gestalt der Algebra und Analysis im dritten Teil des Lehrbuchs dargestellt. Der vierte Teil enthält die Lehren der höheren angewandten Mathematik, nämlich erstens die höhere Mechanik, zweitens die Hydrostatik.

Abbildung 10 zeigt die einzelnen Bände der *Anfangsgründe* gemäß Kästners Einteilung in „Theile“ und „Abtheilungen“ sowie ihre Auflagen.

Teil und Abt.	Titel	Auflagen
Teil I, Abt. I	*Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv*	1758, ^{2}1763, ^{3}1774, ^{4}1786, ^{5}1792, ^{6}1800
Teil I, Abt. II	*Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendungen auf mancherley Geschäffte*	1786, ^{2}1801 hrsg. v. Bernhard Thibaut
Teil I, Abt. III	*Geometrische Abhandlungen. Erste Sammlung. Anwendungen der Geometrie und ebenen Trigonometrie*	1790
Teil I, Abt. IV	*Geometrische Abhandlungen. Zweyte Sammlung. Anwendungen der Geometrie und ebenen Trigonometrie*	1791
Teil II, Abt. I	*Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Mechanische und optische Wissenschaften*[461]	1759, ^{2}1765, ^{3}1780, ^{4}1792
Teil II, Abt. II	*Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Astronomie, Geographie, Chronologie und Gnomonik*	1759, ^{2}1765, ^{3}1781, ^{4}1792
Teil III, Abt. I	*Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*	1760, ^{2}1767, ^{3}1794
Teil III, Abt. II	*Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*	1761, ^{2}1770, ^{3}1799
Teil IV, Abt. I	*Anfangsgründe der höhern Mechanik*	1766, ^{2}1793
Teil IV, Abt. II	*Anfangsgründe der Hydrodynamik*	1769, ^{2}1797

Abbildung 10: Bände von Kästners *Mathematischen Anfangsgründen*.

[458] Vgl. Karsten, L 1, Vorrede, S. **3^{r} f.

[459] Vgl. Karsten, L 1, Vorrede, S. **2^{r}.

[460] Vgl. Kapitel 1.3.1.

[461] Der zweite Teil der *Anfangsgründe* erschien erst ab der dritten Auflage 1780/81 in zwei Bänden. Zuvor erschienen sie in einem Band unter dem Titel *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*.

Bereits an den Titeln der einzelnen Bände von Kästners *Anfangsgründen* ist zu erkennen, welche mathematischen Gebiete Kästner in ihnen jeweils behandelte. Hinzu kommen noch Artillerie, Fortifikation und Baukunst, die in den *Anfangsgründen der angewandten Mathematik. Astronomie, Geographie, Chronologie und Gnomonik* zu finden sind. Kästners *Anfangsgründe* umfassten alle Disziplinen, die im 18. Jahrhundert die Gesamtheit der mathematischen Wissenschaften ausmachten.

Die Einteilung von Kästners *Anfangsgründen* in „Theile" und „Abtheilungen" lässt nicht nur auf eine Hierarchie der mathematischen Wissenschaften an sich schließen[462], sondern auch auf ein systematisches Vorgehen hinsichtlich des Erlernens der Mathematik mit Hilfe von Kästners Lehrwerk. Im ersten „Theil" der *Anfangsgründe* präsentiert Kästner diejenigen Wissenschaften, die heute die reine Elementarmathematik ausmachen: Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie. Vollkommen konsequent in der Einteilung scheint Kästner nicht gewesen zu sein, denn er behandelt im Band zur reinen Elementarmathematik auch die Perspektive, die er eindeutig zur angewandten Mathematik rechnet, aber er möchte durch die Behandlung dieser – so Kästner – leichtesten angewandten mathematischen Wissenschaften „eine Probe [...] geben, wie angenehme und nützliche Künste auf den geometrischen Sätzen beruhen"[463]. Die Lehren der reinen Mathematik sind wichtig, da ohne sie „niemand […] in der angewandten Mathematik, und in den Künsten und Wissenschaften, wo es auf Berechnungen und Abmessungen ankömmt, die gehörige Geschicklichkeit erlangen [kann]"[464]. Die angewandte Mathematik wiederum könne nur mit Hilfe der höheren Mathematik vollkommen gelehrt werden: „Sehr viel Lehren der angewandten Mathematik lassen sich ohne Algebra und Analysis des Unendlichen nicht finden, oder nicht bequem zum Nutzen anwenden, die Lehren selbst, trägt man doch ihrer Wichtigkeit wegen, auch denen vor, die ihre Erfindung oder Anwendung zu verstehen nicht im Stande sind"[465]. Neben dem Aspekt der Wichtigkeit, der die Behandlung der Algebra und Analysis im dritten Teil der *Anfangsgründe* rechtfertigt, finden wir noch einen anderen Aspekt, der erklärt, wieso Kästner in der Ordnung seiner *Anfangsgründe* die höhere Mathematik erst nach den angewandten mathematischen Wissenschaften ansiedelt: „Ich sah also nicht, warum ich in Anfangsgründen die ich allgemeinerem Gebrauche bestimmte, dem Liebhaber der Mathematik mit schweren Lehren, Beweisen und Rechnungen, unverständlich werden, vielleicht gar ihn abschrecken sollte, da dieses meiner Einsicht nach nicht einmahl für den Anfänger gehört, der Mathematiker werden will"[466]. Kästner war sich der Schwierigkeit der höheren mathematischen Kenntnisse durchaus bewusst und scheint in diesem Punkt die Anfänger von denjenigen zu unterscheiden, die die Mathematik in vollem Umfang lernen wollen, denn „Fertigkeit in analytischen Rechnungen muß er sich ohnedem erwerben, wenn er nicht ein Anfänger bleiben will"[467]. Die Lehren, welche analytische Rechnungen voraussetzen, nämlich die höhere Mechanik, Hydrodynamik und astronomische Lehren, behandelte Kästner in eigenen Werken.[468]

[462] Vgl. Kapitel 4.1.
[463] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, o. S.
[464] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^{r} f.
[465] Kästner, AG 4.2., Vorrede, S. *2^{v} f.
[466] Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. iv f.
[467] Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. iv.
[468] Vgl. Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. iv.

Die Einteilung der *Anfangsgründe* in verschiedene „Theile“ und „Abtheilungen“ zeigt nicht nur, dass sich Kästner Gedanken über einen sinnvollen Aufbau der mathematischen Lehren und seines Lehrbuchs gemacht hat, sondern sie erwies sich auch als nützlich bei der Erweiterung des Gesamtwerks durch Hinzufügen weiterer Bände. Zu Beginn erschienen nur sechs Bände der *Anfangsgründe*. Erst nach 1786 wurden dem ersten Teil drei weitere Abteilungen beziehungsweise Bände hinzugefügt, die sich mit den Anwendungen der Arithmetik und Geometrie befassen. Das Titelblatt der ersten Auflage der *Anfangsgründe der Arithmetik* von 1758 enthält noch nicht die Information, dass es sich hierbei um den „ersten Theil“ der *Anfangsgründe* handelt, dieser erfolgte nachweislich erst mit der vierten Auflage 1786.[469] Dass Kästner jedoch von Anfang an die Einrichtung von vier Teilen vorgesehen hat, ist dadurch belegt, dass die *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* seit ihrer ersten Auflage 1759 den Zusatz „der mathematischen Anfangsgründe zweyter Theil“ führen. Entsprechende Zusätze finden wir auch auf den Titelblättern der Bände, die den dritten und vierten „Theil“ ausmachen. Neben den drei ab 1786 hinzugefügten Bänden zur reinen Mathematik beziehungsweise zum ersten Teil der *Anfangsgründe* teilte Kästner seine *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* ab der dritten Auflage 1780/81 in zwei verschiedene „Abtheilungen“ auf. So wuchsen Kästners *Mathematische Anfangsgründe* auf einen Gesamtumfang von zehn Bänden an, wobei die Integration neuer Bände dank der Struktur der *Anfangsgründe* mit ihren Teilen und Abteilungen problemlos erfolgen konnte.

Die Titelblätter der *Anfangsgründe* (siehe beispielsweise Abbildung 9) enthalten wichtige Informationen für den Leser. Zunächst werden der Titel und damit gleichzeitig die behandelten Themengebiete des entsprechenden Bandes stichwortartig genannt. Es folgt die Angabe des Verfassers – Kästner – samt seiner Titel, akademischen Positionen und Mitgliedschaften in wissenschaftlichen Akademien und gelehrten Gesellschaften. Die Erwähnung solcher Informationen ist als Indikator für den wissenschaftlichen Wert des Werks zu verstehen.[470] Weiterhin finden sich Informationen zu der Auflage, der Anzahl der Kupfertafeln, dem Verlagsort, dem Verlag sowie dem Erscheinungsjahr. Schließlich gibt Kästner auf dem Titelblatt an, wie der jeweils vorliegende Band in das Gesamtwerk seiner *Mathematischen Anfangsgründe* einzuordnen ist, und zwar durch die Nennung des entsprechenden „Theils“ und der „Abtheilung“. In dem Fall der *Anfangsgründe der Arithmetik* handelt es sich um die erste Abteilung des ersten Teils.

Nach dem Titelblatt der *Anfangsgründe* findet der Leser in einigen Bänden älterer Auflagen Widmungsschreiben. Diese sind in sämtlichen Bänden der jeweils jüngsten Auflage nicht mehr zu finden. In den ersten Auflagen der *Anfangsgründe der Arithmetik* findet sich die Widmung an Münchhausen, dem Kurator der Universität Göttingen, datiert auf den 3.9.1758. Hier schreibt Kästner einleitend: „Ew. Hochfreyherrl. Excellenz habe durch gegenwärtiges Werk Rechenschaft abzulegen, wie ich einem Theile des mir gnädigst anvertrauten Lehramtes genug zu thun bemüht bin. Ich hoffe, die Wahrheiten, welche den Inhalt dieses Buches ausmachen, vollständiger, gründlicher und brauchbarer vorgetragen zu haben, als insgemein zu geschehen pfleget“[471]. Diese Aussage zeigt zwei verschiedene Arten von Intentionen. Zum einen möchte Kästner durch die Herausgabe seines Lehrbuchs zeigen, dass er geeignet für die

[469] Die zweite und dritte Auflage konnte nicht eingesehen werden.
[470] Vgl. Baasner, S. 10.
[471] Kästner, AG 1.1. (1758), S.)(3^r.

Professorenstelle ist. Es geht also um sein eigenes Ansehen. Zum anderen wollte er ein Lehrbuch publizieren, das hinsichtlich der Inhalte, der Gründlichkeit und des Nutzens besser ist als andere. Die weiteren Abteilungen des ersten Teils der *Anfangsgründe* enthalten keine Widmungen mehr. Die *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*, die in den ersten beiden Auflagen nur einen Band umfassten, widmete Kästner einem gewissen Freiherrn und Geheimen Rat August Wilhelm von Schwicheldt. Die *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* sind dem Geheimen Rat und Großvogt Carl von Dieden, die *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* dem Geheimen Rat und Consistorial-Präsidenten Levin Adolph von Hake gewidmet. Auch die beiden Abteilungen des vierten Teils der *Anfangsgründe* enthalten Widmungsschreiben, nämlich erstens an den Geheimen Rat Friedrich August von Hardenberg, zweitens an den Geheimen Rat Albrecht Friedrich von Lenthe.

Den Widmungen, sofern sie vorhanden sind, folgen die Vorreden. Vorreden sind ein elementarer Bestandteil von Büchern und stellen in vielerlei Hinsicht wichtige Quellen dar. Hier äußert sich der Autor nicht nur über Inhalt, Vorgehen, Intention und Gebrauch des Buches im Speziellen, sondern die Vorworte ermöglichen auch Rückschlüsse auf andere Sachverhalte, beispielsweise auf das Bildungssystem oder die Stellung der Mathematik.[472] Kästner fügte fast jedem Band seiner *Anfangsgründe* eine Vorrede bei. Nur in den *Geometrischen Abhandlungen. Zweyte Sammlung* gibt es keine Vorrede, da sich diejenige aus den *Geometrischen Abhandlungen. Erste Sammlung* auf beide Bände bezieht. Zudem finden sich in den jüngeren Auflagen auch die Vorreden der älteren Ausgaben. Kästner schrieb für jede Neuauflage eine neue Vorrede, in der er vor allem die Änderungen gegenüber der vorhergegangenen Auflage erläuterte.

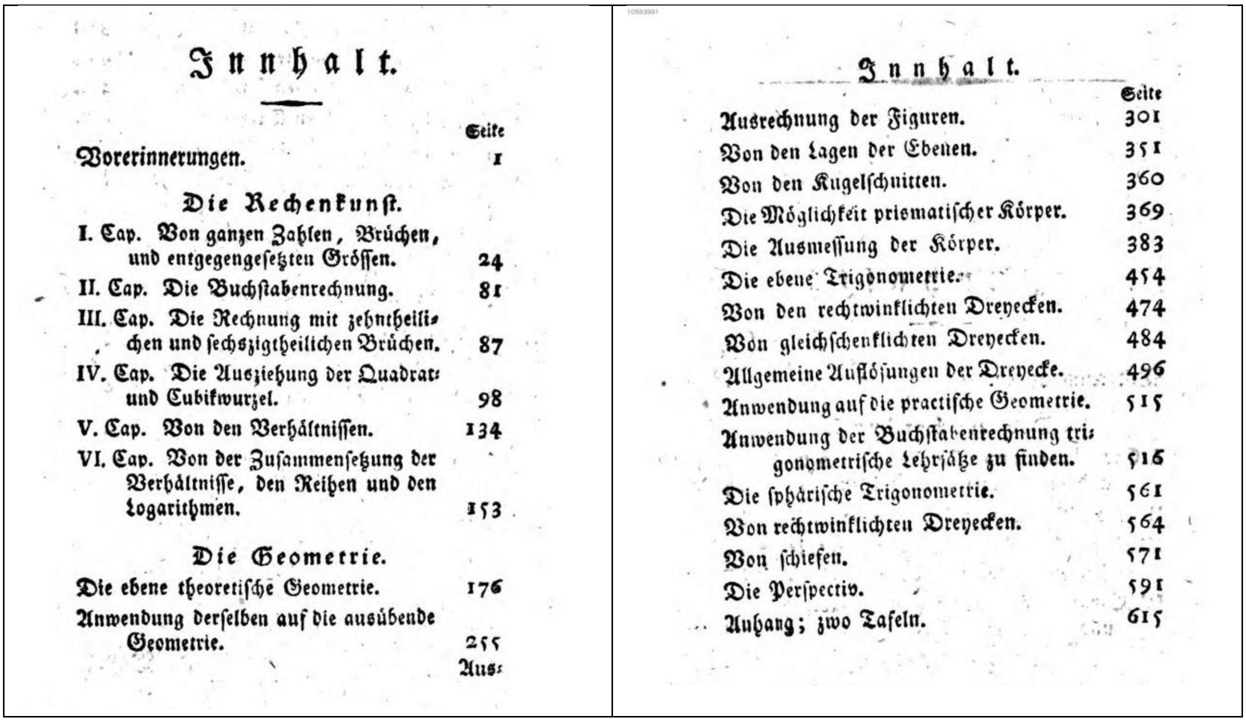
Die Unterschiede zwischen den einzelnen Auflagen sind vielfältig. Unter anderem erhielt Kästner durch Kollegen und Freunde, die seine *Anfangsgründe* verwendeten, Rückmeldungen über Inhalte und Druckfehler.[473] Die Neuerungen bestehen meist aus kleinen Veränderungen, beispielsweise in Form von Verbesserungen in Beweisen, Nennung neu erschienener Literatur oder Anmerkungen. Kästner nahm aber auch neue mathematische Kenntnisse in seine Lehrbücher mit auf, so dass deren Umfang beständig anwuchs. In den beiden Bänden zur Algebra und Analysis kennzeichnete Kästner die neu aufgenommenen Inhalte zudem mit einem „*“ im Inhaltsverzeichnis.[474] Kästner verbesserte nicht nur Inhalte und Beweise, sondern nahm vereinzelt auch Kürzungen vor, beispielsweise strich er die sogenannte Keplerische Aufgabe[475], die in der dritten Auflage der *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* nicht mehr zu finden ist.[476] An der Reihenfolge der Inhalte selbst veränderte Kästner nicht viel, womit die einzelnen Auflagen der *Anfangsgründe* kompatibel blieben: „Lehren selbst, Vortrag überhaupt, und Ordnung zu ändern fand ich nicht nöthig. So gar die Zahlen der Paragraphen suchte ich beyzubehalten, damit Anführungen nach den vorigen Ausgaben nicht un-

[472] Das Kapitel 1 gibt einen Einblick, wie ergiebig die Vorreden sind und welche Rückschlüsse aus den Darstellungen gezogen werden können.
[473] Vgl. beispielsweise Kästner, AG 1.1., Nachricht von der dritten Ausgabe, S. **3^v.
[474] Vgl. Kästner, AG 3.1., Erinnerung bey der dritten Ausgabe, S. xi.
[475] Hierbei handelt es sich um die „Anwendung der Integralrechnung auf die keplerische Theorie der Planeten“; vgl. Kästner, AG 3.2. (^{2}1770), Inhaltsverzeichnis, o. S.
[476] Vgl. Kästner, AG 3.2., Erinnerung wegen der dritten Ausgabe, S. xix.

brauchbar würden. Deßwegen habe ich oft solche die viel Vermehrungen erhielten in mehr Absätze getheilt“[477].

In jedem Band der *Anfangsgründe* befindet sich ein Inhaltsverzeichnis, welches mal mehr, mal weniger detailliert und umfangreich ist. So umfasst das Inhaltsverzeichnis der *Anfangsgründe der Arithmetik* nur zwei Seiten, das Inhaltsverzeichnis der *Geometrischen Abhandlungen. Zweyte Sammlung* hingegen 18 Seiten. Die einzelnen Inhaltsverzeichnisse weisen noch andere Unterschiede auf. So werden in einigen von ihnen nur die Überschriften mit der entsprechenden Seitenangabe, in anderen zusätzlich mit der Angabe der entsprechenden Paragraphen beziehungsweise Abschnitte versehen. Die Überschriften aus dem Inhaltsverzeichnis werden im Lehrbuch selbst – teilweise mit geringen, aber unbedeutenden Abweichungen der Schreibweise – wiederholt.

Recht uneinheitlich gestaltet Kästner die Einteilung der mathematischen Themen im Inhaltsverzeichnis selbst. Im Allgemeinen gliedert er thematisch zusammenhängende Inhalte in einzelne Passagen und versieht diese mit entsprechenden Überschriften. Einige Themen teilt er in Kapitel und Abschnitte ein, beispielsweise die Arithmetik, die Gegenstand der ersten beiden Bände der *Anfangsgründe* ist. Im ersten Band befinden sich sechs mit römischen Ziffern versehene „Capitel“, die im zweiten Band fortgeführt und zusätzlich noch in weitere Abschnitte unterteilt werden, so dass die Arithmetik insgesamt 13 „Capitel“ umfasst. In anderen Bänden der *Anfangsgründe* werden die Lehren nur mit Hilfe von Untertiteln eingeteilt. Dies trifft auch auf die Geometrie zu (siehe Abbildung 11).



Innhalt.

	Seite
Vorerinnerungen.	1
Die Rechenkunst.	
I. Cap. Von ganzen Zahlen, Brüchen, und entgegengesetzten Grössen.	24
II. Cap. Die Buchstabenrechnung.	81
III. Cap. Die Rechnung mit zehntheiligen und sechszigtheiligen Brüchen.	87
IV. Cap. Die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel.	98
V. Cap. Von den Verhältnissen.	134
VI. Cap. Von der Zusammensetzung der Verhältnisse, den Reihen und den Logarithmen.	153
Die Geometrie.	
Die ebene theoretische Geometrie.	176
Anwendung derselben auf die ausübende Geometrie.	255

Aus-

Innhalt.

	Seite
Ausrechnung der Figuren.	301
Von den Lagen der Ebenen.	351
Von den Kugelschnitten.	360
Die Möglichkeit prismatischer Körper.	369
Die Ausmessung der Körper.	383
Die ebene Trigonometrie.	454
Von den rechtwinklichten Dreyecken.	474
Von gleichschenklichten Dreyecken.	484
Allgemeine Auflösungen der Dreyecke.	496
Anwendung auf die practische Geometrie.	515
Anwendung der Buchstabenrechnung trigonometrische Lehrsätze zu finden.	516
Die sphärische Trigonometrie.	561
Von rechtwinklichten Dreyecken.	564
Von schiefen.	571
Die Perspectiv.	591
Anhang; zwo Tafeln.	615

Abbildung 11: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, Inhaltsverzeichnis, o. S.

Die ebene theoretische Geometrie, die ebene und sphärische Trigonometrie sowie die Perspektive, die neben der Arithmetik ebenfalls Themen des ersten Bandes der *Anfangsgründe* sind, sind im Inhaltsverzeichnis der Geometrie untergeordnet und erscheinen nicht als eigen-

[477] Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. v.

ständige Themen. Betrachtet man aber die Darstellung im Buch selbst, so wird schnell ersichtlich, dass diese Kapitel eigenständig sind, da die Nummerierung der jeweiligen Abschnitte zu Anfang der jeweiligen Themen bei „1“ beginnt. Trotz der uneinheitlichen Handhabung in Hinsicht auf die Einteilung der mathematischen Themen im Inhaltsverzeichnis wird im Text selbst durch die Nummerierung der einzelnen Abschnitte angezeigt, welche Inhalte zusammengehören und ein Themengebiet für sich ausmachen. Darüber hinaus haben die nummerierten Absätze noch eine viel wichtigere Funktion: Durch sie kann Kästner leicht auf bereits behandelte Inhalte zurückgreifen und dem Leser in Erinnerung rufen.

Die zweite Auflage der *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* (^{2}1770) enthält am Ende zwei Register, nämlich erstens über die ersten beiden Teile, zweitens über den dritten und vierten Teil der *Anfangsgründe*. Diese Register waren nicht mehr aktuell, als Kästner die beiden Bände über die angewandte Mathematik in der vierten Auflage 1792 herausgab. Ein aktualisiertes Register zur angewandten Mathematik befindet sich im zweiten Band der *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*, das für die dritte Auflage (^{3}1781) von Carl Chassot de Florencourt[478] angefertigt wurde.[479]

Am Ende der einzelnen Bände findet der Leser diverse Kupfertafeln, deren Anzahl bereits auf dem Titelblatt angegeben ist.[480] Alle Bände zusammengenommen umfassen in der letzten Ausgabe insgesamt 57 Kupfertafeln mit über 579 Abbildungen. Sowohl die Tafeln als auch die Abbildungen sind mit Nummern und die Tafeln selbst zudem noch mit den korrespondierenden Kapitelüberschriften versehen. Auf diese Weise erfolgt eine eindeutige Zuordnung von Bild und Text. Diese beiden Elemente sind eng miteinander verbunden, denn in den Ausführungen selbst wird auf die zugehörigen Abbildungen verwiesen. Die Kupfertafeln lassen sich so aufklappen, dass der Leser sowohl den Text, als auch die Tafeln nebeneinander im Blick hat. Die Abbildungen dienen in erster Linie der Anschauung und Verdeutlichung, werden aber auch als Grundlage für Beweise verwendet. Allerdings wollte Kästner in seinen *Anfangsgründen der angewandten Mathematik* auf zu viele Zeichnungen oder, anders gesagt, „Risse“ verzichten und reduzierte ihre Anzahl im Gegensatz zu denen in anderen mathematischen Handbüchern. Dies tat er nicht nur aus Sparsamkeit heraus – denn die Kupferstiche waren das teuerste in den Büchern – sondern auch, weil es im Rahmen eines Lehrbuchs nicht möglich sei, „daß diese Dinge nach den gehörigen Abmessungen und so vollständig als erfodert [sic] wird, vorgestellt werden; ihre unvollkommenen Abzeichnungen aber dienen zu nichts, als daß die Lehrlinge ein mathematisches Bilderbuch in die Hände bekommen“[481]. Stattdessen sprach sich Kästner für die wirkliche Demonstration mit Hilfe von Instrumenten und Versuchen aus.[482]

[478] Carl Chassot de Florencourt (1757-1790) wurde zum Professor an der Universität Göttingen ernannt, nahm diese Stelle aber nicht an, sondern reiste stattdessen nach England und Frankreich. Anschließend hatte er die Position des Kammer- und Bergrats in Braunschweig inne und wurde korrespondierendes Mitglied der Göttinger Sozietät der Wissenschaften. Kästner hob dessen Kenntnisse in Mathematik, Experimentalphysik, Naturgeschichte, Chemie und Bergwerkswissenschaften hervor. Vgl. zur gesamten Fußnote Kästner, AG 2.2., Erinnerung wegen der vierten Ausgabe, S. ix f.
[479] Vgl. Kästner, AG 2.2. Vorrede zur dritten Ausgabe, S. vii.
[480] Eine Ausnahme bilden die Titelblätter der AG 3.1. und AG 4.1.
[481] Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *3^{r}.
[482] Vgl. Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *3^{r}.

Kästner war nicht nur an einer reinen Neuauflage seiner Lehrwerke, sondern in erster Linie an der Aktualität ihrer Inhalte interessiert. Er wollte sowohl inhaltlich als auch durch die Literaturangaben sein Lehrwerk auf dem aktuellen Stand der mathematischen Wissenschaften halten. Diese Intention unterscheidet Kästner von Wolff. In Wolffs *Anfangs=Gründen* findet man – mit Ausnahme der Algebra und Analysis – trotz der zahlreichen Auflagen nur geringe Veränderungen in Form von Verbesserungen oder Kürzungen.[483] Bereits Clemm bemängelte 1764, dass die neuen Erkenntnisse in den mathematischen Wissenschaften zu keiner Zeit in Wolffs Handbuch mitaufgenommen wurden.[484] Dieser Mangel, der Wolffs Lehrwerken zur Last gelegt wurde, kann gleichzeitig erklären, wieso diese Bücher ihre konkurrenzlose Stellung verloren und von Kästners *Anfangsgründen* verdrängt wurden.

3.2 Intention und Adressaten

„Meine Absicht ist, durch gegenwärtiges Werk etwas zu Ausbreitung einer solchen Kenntniß der Mathematik beyzutragen, die dadurch erstlich recht brauchbar wird, daß sie gründlich und vollständig ist“[485] schreibt Kästner zu Beginn seiner *Anfangsgründe der Arithmetik*. In Bezug auf die Vollständigkeit bemängelt er Wolffs *Anfangs=Gründe*.[486] Gleichzeitig entschuldigt Kästner diese Unvollständigkeit und lobt Wolff für seine Verdienste bei der Ausbreitung der Mathematik. Zu Beginn des 18. Jahrhunderts hätten nur wenige Personen Kenntnis der Mathematik besessen, so dass Wolff bei seinen Ausführungen nicht in die Tiefe gehen und nur leichte Inhalte vortragen konnte. Kästner möchte nun einen Schritt weiter gehen als Wolff und „sich des durch ihn [Wolff] allgemeiner gemachten Geschmackes an der Mathematik bedien[en], ihre Anfangsgründe vollkommener […] lehren, als er es wagen wollte, und Lehrlinge so weit […] führen, daß sie ihre Kenntniß durch eigenen Fleiß erweitern und anwenden können“[487]. Genau wie Wolff hatte Kästner das Ziel ein Lehrbuch zu entwerfen, das mathematischen Vorlesungen zugrunde gelegt werden konnte. Kästner stellt die mathematischen Inhalte nicht nur ausführlicher als Wolff dar, sondern er kritisiert auch einige inhaltliche Dinge, die erklären, „warum ich die Menge der mathematischen Einleitungen vermehre, nachdem ich bey meinen Vorlesungen zwanzig Jahre lang das Wolfische Handbuch gebraucht habe“[488]. So stimmt Kästners nicht mit Wolffs Vorgehen überein, wenn dieser die Bruchzahlen auf der Lehre der Verhältnisse aufbaut. Stattdessen betonte Kästner seine Ansicht, dass die gesamte Arithmetik, und somit auch die Bruchzahlen, auf den Begriff der ganzen Zahl beruhe.[489]

Kästner achtete bei seinen inhaltlichen Ausführungen auf Klarheit, Deutlichkeit und Kürze, damit sie „keinen Anfänger erschrecken“[490]. Er richtete sich mit seinem Lehrbuch also an Anfänger beziehungsweise „Lehrlinge der Mathematik in Deutschland“[491] und verfolgte dabei

[483] Vgl. Sommerhoff-Benner, S. 39.
[484] Vgl. Clemm, ML 1, Vorbericht zur ersten Auflage, o. S.
[485] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^r.
[486] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1. Vorrede der ersten Ausgabe, S. *2^r ff.
[487] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^v.
[488] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^v.
[489] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^v f.
[490] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *4^v.
[491] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^v.

das Ziel, die „Lehrlinge so weit zu führen, daß sie ihre Kenntniß durch eigenen Fleiß erweitern und anwenden können“[492]. Hier wird wieder einmal der Anspruch an das eigenständige Handeln und Denken betont. So kann angenommen werden, dass Kästner mit seinen *Anfangsgründen* ein Fundament für die selbstständige Erarbeitung weiterer mathematischer Kenntnisse legen wollte. Aus diesem Grund ist er „im Erweisen so weit gegangen, als nur kann gefodert [sic] werden“[493].

Zwar sind Kästners *Anfangsgründe* als zusammenhängendes Werk zu betrachten, dennoch konnten die einzelnen Bände unabhängig voneinander verwendet werden. Daher ist anzunehmen, dass durch die einzelnen Bände jeweils unterschiedliche Personengruppen angesprochen wurden. Tatsächlich hält sich Kästner in der Vorrede seiner *Anfangsgründe der Arithmetik* sehr allgemein und spricht allgemein „Lehrlinge“ der Mathematik an. Er betont allerdings auch, dass „unsere Kenntniß der wirklichen, oder, wie ich sie lieber nennen wollte, der scheinbaren, Welt, […] sich auf Erfahrungen und Schlüsse [gründet], die sich daraus herleiten lassen. Ohne Ausmessungen und Berechnungen ist hier nichts zuverlässig und bestimmt; die Analysis und besonders die Rechnung des Unendlichen sind nothwendig die Natur kennen zu lernen“[494]. Die höhere Mathematik in Gestalt der Algebra und Analysis ist in erster Linie für diejenigen geschrieben, die bereits mit der elementaren Mathematik vertraut sind und nun zu höheren Kenntnissen gelangen möchten. Während die Hauptabsicht im ersten Band der *Anfangsgründe* noch dahin strebte, die mathematischen Kenntnisse auszubreiten und gründlich darzustellen, ohne dabei die Lehrlinge abzuschrecken, setzt Kästner im Rahmen der höheren Mathematik einen anderen Schwerpunkt. In seinen *Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen* schreibt er: „Meine Hauptabsicht ging dahin, diejenigen, die sich meines Unterrichts darinnen bedienen wollten, so vorzubereiten, daß sie ihre Erkänntniß aus andern analytischen Schriften ohne Anstoß zu erweitern im Stande wären“[495]. Auch dieser Band der *Anfangsgründe* richtet sich an Anfänger, allerdings nicht an Anfänger der Mathematik insgesamt – denn die in der höheren Mathematik enthaltenen Lehren setzen Kenntnisse der Elementarmathematik voraus – wohl aber an Anfänger, die in der höheren Mathematik noch keine ausreichenden Kenntnisse besitzen.[496] Im Allgemeinen ist festzuhalten, dass Anfänger auf unterschiedlichen Niveaustufen – Anfänger der Mathematik im Allgemeinen sowie Anfänger der höheren Mathematik – die Adressaten von Kästners *Anfangsgründen* sind. Kästner verwendet für beiden Gruppen den Begriff „Lehrlinge“, der recht allgemein gehalten ist und sich nicht zwangsläufig auf Studienanfänger beschränkt. Vielmehr liegt die Vermutung nahe, dass er auch praktisch tätige Personen wie Handwerker ansprechen wollte, die ihr Handwerk durch die Mathematik besser ausüben können, denn ohne die Lehren der reinen Mathematik könne niemand „in der angewandten Mathematik, und in den Künsten und Wissenschaften, wo es auf Berechnungen und Abmessungen ankömmt, die gehörige Geschicklichkeit erlangen“[497]. Auch an anderer Stelle erinnert Kästner daran, dass die meisten menschlichen Arbeiten – sei es in Kunst, Handwerk oder Handel – auf der Mathematik beruhen.[498]

[492] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^{v}.
[493] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *5^{r}.
[494] Kästner, AG 4.1. Vorrede der ersten Ausgabe, S. viii.
[495] Kästner, AG 3.1., Vorrede, S. iii f.
[496] Vgl. Kästner, AG 3.1., Vorrede, S. vii f.
[497] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^{r} f.
[498] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. 9 f.

Über die primäre Adressatengruppe „Anfänger“ hinaus kann noch eine weitere Personengruppe als Adressaten angesehen werden, nämlich die Professoren oder Lehrer der Mathematik. Denn diese waren für den Unterricht der Jugend zuständig und sollten Anfängern mathematische Kenntnisse vermitteln, was auf Grundlage von Kästners *Anfangsgründen* geschehen konnte. Dass die *Anfangsgründe* tatsächlich auch von Professoren verwendet wurden, zeigen nicht nur die zahlreichen Vermerke in den entsprechenden Vorlesungsankündigungen, sondern darüber hinaus auch die Tatsache, dass Kästner von Kollegen und Freunden Anregungen zu einigen Verbesserungen erhielt, die er in die Neuauflagen seiner *Anfangsgründe* miteinbaute.[499] Es gibt auch Belege, dass Kästners Lehrbuch an Gymnasien verwendet wurde, beispielsweise in der Zusatzklasse der Gelehrtenschule in Darmstadt, die Lichtenberg besuchte.[500]

Eine andere Intention, die Kästner mit seinen *Anfangsgründen* verfolgte, war der Nachweis, dass er seines Lehramtes an der Universität Göttingen würdig sei. Dies geht aus der Widmung an Münchhausen hervor, die in den ersten Auflagen der *Anfangsgründe der Arithmetik* enthalten ist. Hier zeigt sich der Einfluss von Seiten der Universität Göttingen. Zu publizieren gehörte im 18. Jahrhundert zu den Aufgaben eines akademischen Lehrers in Göttingen, wobei sowohl allgemeinnützliche Schriften als auch Schriften für die eigenen Vorlesungen veröffentlicht werden sollten.[501] Dozenten, die neu an der philosophischen Fakultät in Göttingen angestellt wurden, hatten die Verpflichtung, durchschnittlich fünf Monographien vorzuweisen.[502] Diese Forderung hängt eng mit dem Ruhm und Ansehen der Universität zusammen. Publikationen dienten nämlich nicht nur dazu, den Ruhm ihres Verfassers zu mehren, sondern sollten auch das Ansehen der Universität steigern, was gerade im Falle der Universität Göttingen als junge Universität wichtig war. Diese Komponente muss auch bei Kästners *Anfangsgründen*, die bereits zwei Jahre nach seinem Antritt an der Universität Göttingen herausgegeben wurden, beachtet werden. Dies zeigt, dass Kästner nicht ausschließlich aus intrinsischer Motivation heraus veröffentlichte, sondern das Publizieren auch als Pflicht ansah. Allerdings scheint der letztere Aspekt nur untergeordnet zu sein und Kästner seine mathematischen Lehrbücher in erster Linie nicht wegen des Ansehens und den Anforderungen an der Universität Göttingen heraus publiziert zu haben. Vielmehr kann Kästners Neigung zu seinem akademischen Lehramt als treibende Kraft zur Herausgabe seines Lehrbuchs angesehen werden. Er betont in seiner Selbstbiographie, dass das Lehramt in Göttingen vollkommen seinen Neigungen entsprach.[503] Wären diese Lehrbücher aus einem reinen Pflichtgefühl heraus entstanden, so wäre Kästner sicherlich nicht bemüht gewesen, die Neuauflagen auf dem aktuellen Stand der Forschung zu halten und sich intensive Gedanken über das didaktische Vorgehen zu machen. Dass sich Kästner auch mit pädagogischen beziehungsweise didaktischen Fragen gerade in der Mathematik auseinander gesetzt hat, belegen auch weitere Schriften Kästners, die im folgenden Unterkapitel betrachtet werden.

In erster Linie wollte Kästner mit seinen *Mathematischen Anfangsgründen* ein Lehrbuch für Anfänger zum allgemeinen Gebrauch schreiben. Dass er sowohl hinsichtlich seiner Inten-

---

[499] Vgl. Kästner, AG 1.1., Nachricht von der dritten Ausgabe, S. **3^{v}.

[500] Vgl. Artikel „Lichtenberg, Georg Christoph“ von Wolfgang Proß und Claus Priesner in: NDB, Bd. 14 (1985), S. 450.

[501] Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 3.

[502] Vgl. Vandermeersch, Die Universitätslehrer. In: Rüegg, Bd. 2, S. 185.

[503] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 61.

tion als auch der Zielgruppe seine Ausführungen weitgehend offen hielt, deutet darauf hin, dass die *Anfangsgründe* für Schüler im weitgehendsten Sinne konzipiert wurden, beispielsweise (Studien-)Anfänger, Handwerker, Künstler, Autodidakten. Hierbei präsentierte er den Stoff so, dass Personen ohne Vorkenntnisse die Mathematik erlernen und auf dieser Grundlage selbstständig zu weiteren Kenntnissen gelangen konnten.

3.3 Didaktische Merkmale

Anhand des Aufbaus von Kästners *Mathematischen Anfangsgründen* konnten wir bereits erkennen, dass sich Kästner Gedanken um einen sinnvollen Aufbau seines Gesamtwerks machte. Im Folgenden wollen wir nun einen Blick in das Werk selbst werfen, um didaktische Elemente von Kästners Lehrbuch aufzuzeigen. Anlass zu der Annahme, dass sich Kästners *Anfangsgründe* durch wichtige didaktische Merkmale auszeichneten, geben verschiedene Schriften, in denen sich Kästner über die Pädagogik seiner Zeit vor allem in Hinblick auf die mathematische Lehre äußerte, wobei er auch auf Erfahrungen aus seiner Erziehung und seiner Lehrtätigkeit zurückgriff. An dieser Stelle möchte ich versuchen, die Verbindung zwischen Kästners Äußerungen zu erzieherischen Fragen sowie zum mathematischen Unterricht und dem Vorgehen in seinem Lehrbuch herzustellen. Hierzu dienen in erster Linie die folgenden Quellen:

- Kästners Selbstbiographien
- *Commentarius über eine Stelle des Varro von einer der Ursachen warum die Mathematik in Deutschland immer noch für unnütz gehalten wird*
- *Einige Anecdoten aus der Jugendgeschichte des Herrn Hofraths Kästner; ein Auszug aus einem Briefe desselben an den R. Campe*
- Dreiteilige Schrift mit den Titeln
    - *Ueber die Art Kindern Geometrie und Arithmetik beizubringen*
    - *Fortsetzung des im vorigen Stücke abgebrochenen Aufsatzes: über die Art Kindern Geometrie und Arithmetik beizubringen*
    - *Beschluß des im vorigen Stücke abgebrochenen Aufsatzes: über die Art Kindern Geometrie und Arithmetik beizubringen*
- *Mathematische Anfangsgründe*.

Zwei dieser Schriften, nämlich die *Anecdoten* und *Ueber die Art* wurden im *Braunschweigischen Journal philosophischen, philologischen und pädagogischen Inhalts* gedruckt. Diese Zeitschrift erschien von 1788 bis 1791 in jährlich drei Bänden. Die Herausgeber waren Joachim Heinrich Campe (1746-1818), Ernst Christian Trapp (1745-1818), Johann Stuve (1752-1793) und Conrad Heusinger (1752-1820). Diese Personen sind wichtig für die Pädagogik und ihre Etablierung als eigenständiges Fach. Die Adressaten ihrer Zeitschrift waren „Erzieher im Kleinen und im Großen“[504]. Dies zeigt, dass es zu dieser Zeit ein großes Interesse an pädagogischen Fragen gab und sich Zeitschriften gezielt diesem Thema widmeten. Kästner verfasste seine Artikel für diese Zeitschrift mehrere Jahre nach der Erstauflage seines Lehrbuchs, was zeigt, dass er sehr an der Thematik interessiert war. Nimmt man die

[504] BJ, 1788, 1. Bd., S. 2.

Tatsache hinzu, dass er sein Lehrbuch auf dem aktuellen Stand halten wollte, können wir annehmen – und werden wir im Folgenden aufzeigen – dass hiermit nicht nur inhaltliche, sondern auch didaktische beziehungsweise methodische Verbesserungen gemeint sind. Gleichzeitig machen die Aspekte deutlich, dass Kästner sein Lehrbuch in erster Linie nicht aus Prestigegründen heraus veröffentlichte, sondern dass er dieses pädagogisch durchdachte, was seine Neigung und sein Selbstverständnis als Universitätslehrer und Lehrbuchautor unterstreicht. Diesbezüglich konnte er genügend Erfahrungen während seines Lebens sammeln. Er kam auf unterschiedliche Weise mit der mathematischen Lehre in Berührung. Bereits während seiner Kindheit erlernte er die Mathematik in autodidaktischen Studien, wobei ihm das Lernen nicht immer leicht fiel. So schreibt er, dass er anfänglich solche Probleme mit dem Rechnen gehabt habe, dass ihn sogar seine Eltern ausgelacht haben.[505] Während seiner Studienzeit konnte Kästner ebenfalls zahlreiche Erfahrungen mit der mathematischen Lehre sammeln. In seinen Selbstbiographien reflektiert er seine mathematischen Vorlesungen und seine Lehrer, wobei er sich auch kritisch äußert. Durch seine Tätigkeit als Dozent konnte er selbst sehen, welche Probleme Studenten beim Erlernen der Mathematik haben.[506] Kästner setzte sich kritisch mit seinen eigenen Erfahrungen auseinander, was dadurch belegt wird, dass er in seinen Schriften, in denen er Bezug auf die Pädagogik nimmt, immer wieder seine Erfahrungen einfließen lässt.

3.3.1 Umfang der mathematischen Lehren und Zeitraum für ihr Erlernen

Kästner verfolgte das übergeordnete Ziel, die Mathematik unter den Deutschen zu verbreiten, wobei dies kein einfaches Unterfangen war. Er setzte sich kritisch mit dem Stellenwert und dem Ansehen der Mathematik auseinander, so dass wir gewisse Rückschlüsse auf die Gegebenheiten im deutschsprachigen Raum des 18. Jahrhunderts ziehen können. Erstens genoss die Mathematik an den deutschen Universitäten keinen großen Zulauf, zweitens reichte die Zeit an Universitäten selbst nicht aus, die Mathematik in ihrem vollen Umfang zu lernen. Beide Probleme thematisiert Kästner in seinem *Commentarius* und schreibt über „die Mathematik, die in Deutschland so wenige lernen wollen, weil sie eine unnütze und brodlose Kunst seyn soll“[507]. Die Ursachen sieht Kästner vor allem in der „Art, wie sie in Deutschland getrieben wird, […] von denen ich mich iezt nur bey einer der einfachsten und allgemeinsten, aufhalten will“[508]. Es bleibe nur wenigen Studenten neben ihren regulären Studien noch die Zeit, mathematische Vorlesungen zu hören.[509] Und wenn sie diese Vorlesungen besuchten, so beschränkten sie sich meist nur auf ein Semester reine Mathematik. Allerdings reiche dieser zeitliche Umfang nicht aus, um nützliche Kenntnisse zu erlernen.

Kästner war diese Problematik bekannt, aber versuchte er diese auch anzugehen? Tatsächlich greift er in seinem *Commentarius* auf eigene Erfahrungen mit seinen Studenten zurück, welche belegen, dass die reine Mathematik sehr wohl innerhalb eines halben Jahres erlernt werden könne, wobei Kästner dem Fleiß seiner Studenten eine große Rolle beim Lernprozess

[505] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 50 f.
[506] Vgl. Kästner, Fortsetzung. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 360.
[507] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 40.
[508] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 40.
[509] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 40.

zuspricht.[510] Betrachtet man Kästners *Anfangsgründe*, so stellt man fest, dass sich der erste Band fast ausschließlich mit der reinen Mathematik in Form von Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie beschäftigt. Sieht man dies im Zusammenhang mit seinen Ausführungen im *Commentarius*, so lässt sich vermuten, dass Kästner diesen Band für die Arbeit eines Semesters geschrieben hat. Diese Annahme wird dadurch bestätigt, dass Kästner Vorlesungen zur gesamten reinen Mathematik – und nicht etwa nur zur Arithmetik oder Geometrie – ankündigte und hierfür seine *Anfangsgründe der Arithmetik* zugrunde legte.[511] Kästners Kollegen aber lasen auch über die Geometrie allein, und zwar nach Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik*, wie beispielsweise Magister Meister im SS 1763.[512]

Kästner versuchte also mit seinen *Anfangsgründen* der im *Commentarius* dargestellten Problematik entgegenzuwirken, indem er den Band zur reinen Mathematik so konzipierte, dass die Inhalte nutzbringend innerhalb eines halben Jahres erlernt werden konnte. Dass sich die *Anfangsgründe der Arithmetik* aber auch für eine intensivere Behandlung einiger Themengebiete eigneten, wird dadurch belegt, dass sie für speziellere Vorlesungen verwendet wurden, beispielsweise für die Geometrie. Allerdings kommen Kästners Lehrbücher nicht immer für eine intensivere Behandlung aller Gebiete in Betracht. So verwendete Kästner für seine Vorlesungen zur Markscheidekunst nicht etwa seine eigenen Werke, sondern die *Institutiones geometriae subterraneae* (1726, [2]1751) von Johann Friedrich Weidler (1691-1755).[513] Für Vorlesungen über genauere Winkelmessung benutzte er seine eigenen *Astronomischen Abhandlungen* (2 Bde., 1772/74).[514]

Kästner berichtet in seinem *Commentarius* auch über Vorlesungen zur angewandten Mathematik, welche diejenigen Studenten für ein weiteres Semester hören würden, die ein großes Interesse an der Mathematik zeigen.[515] Kenntnisse zum Nutzen könne man aber in den mindestens dreizehn Wissenschaften, die die angewandte Mathematik ausmachen, nur dann erwerben, wenn man sich jeweils ein halbes Jahr ihren Hauptabteilungen, nämlich den mechanischen, optischen, astronomischen und architektonischen Wissenschaften, widme. Und selbst dann sei lediglich der Grundstein für die weitere Beschäftigung gelegt, denn man könne in diesem halben Jahr nur „eine zum praktischen Gebrauche näher anleitende Kenntniß erwerben“[516]. In diesem Rahmen betont Kästner erneut, dass es auf den Fleiß und das selbstständige Arbeiten der Studenten ankommt: „Alle praktische Geschicklichkeit erfordert, daß man sich von der Theorie zulängliche Anfangsgründe bekannt macht, solche durch eigne Untersuchungen erweitert, und sich eine Fertigkeit durch lange Uebung erwirbt“[517]. Genau dieses Denken wird auch durch einen Blick in Kästners *Anfangsgründen der angewandten Mathematik* bestätigt. In diesen beiden Bänden – bis 1780/81 ein Band – werden die Lehren von insgesamt 14 mathematischen Gebieten dargestellt. Dass Kästner hiermit in erster Linie eine Einführung in die angewandte Mathematik geben wollte, zeigt sich dadurch, dass er sie für seine Vorle-

[510] Vgl. Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 41.
[511] Vgl. die Vorlesungsankündigungen in den GGA, beispielsweise GGA, 1758, 31. St., S. 291.
[512] Vgl. GGA, 1763, 39. St., S. 312.
[513] Vgl. beispielsweise GGA, 1773, 42. St., S. 356.
[514] Vgl. beispielsweise GGA, 1774, 41. St., S. 347.
[515] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 41 f.
[516] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 42.
[517] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 42.

sungen zur angewandten Mathematik im Gesamten verwendete.[518] Dies deutet darauf hin, dass auch dieser zweite „Theil" der *Anfangsgründe* für die Arbeit eines Semesters konzipiert wurde. Über die gesamte angewandte Mathematik hinaus wurden an der Universität Göttingen auch Vorlesungen über einzelne Gebiete der angewandten Mathematik angeboten, beispielsweise über Astronomie, Mechanik und Geographie. Allerdings kann wegen der fehlenden Angaben der zugrunde gelegten Lehrbücher in den Vorlesungsankündigungen in den GGA nicht ermittelt werden, ob Kästners *Anfangsgründe* verwendet wurden.

Die Vorlesungsankündigungen der Universität Göttingen zeigen auch, dass Kästners *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* sowie *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* jeweils für die Vorlesungen zur Algebra beziehungsweise Analysis verwendet wurden, beispielsweise von Magister Mayer im SS 1775.[519] So ist anzunehmen, dass Kästner auch diese beiden Bände für die Erarbeitung innerhalb eines Semesters abfasste. Dieselbe Beobachtung trifft auch auf den vierten „Theil" der *Anfangsgründe* zu, der sich mit der höheren Mechanik und der Hydrostatik befasst. Die *Anfangsgründe der höhern Mechanik* verwendete Kästner beispielsweise im SS 1766, die *Anfangsgründe der Hydrodynamik* für die Vorlesung über die Bewegung des Wassers und die Wasserräder im SS 1776.[520] Er verwendete aber auch beide „Abtheilungen" des vierten „Theils" seiner *Anfangsgründe* für eine Vorlesung, wie zur Vorlesung über die Bewegung fester und flüssiger Körper im WS 1769/70.[521]

Aus den bisherigen Ausführungen lassen sich zwei Merkmale der *Mathematischen Anfangsgründe* ableiten. Zum einen wollte Kästner mit seinen *Anfangsgründen* – wie der Name schon sagt – in die mathematischen Wissenschaften einleiten, zum anderen eignen sich die in den einzelnen Bänden dargestellten Inhalte für die Arbeit eines Semesters. Durch die Tatsache, dass er sich durch den Einführungscharakter seiner Lehrbücher auf die elementaren Lehren beschränken konnte, wurde es möglich, die wichtigsten Inhalte innerhalb eines überschaubaren Zeitraums von einem halben Jahr zu erlernen. Auf diese Weise konnte einem Anfänger die Scheu vor der Beschäftigung mit der Mathematik genommen und gleichzeitig eine motivierende Wirkung erzielt werden, da der zeitliche Rahmen überschaubar war.

3.3.2 Nutzen der mathematischen Lehren

Laut Kästners Ausführungen im *Commentarius* wurde die Mathematik im deutschsprachigen Raum im 18. Jahrhundert als „unnütze Kunst" angesehen. In dieser Schrift entkräftet Kästner bereits zu Beginn diesen Vorwurf, indem er sagt, dass die Mathematik bei vielen menschlichen Ausübungen oft implizit vorhanden ist, beispielsweise bei der Schifffahrt. In den Vorreden der *Anfangsgründe* betont Kästner die Wichtigkeit und die Nützlichkeit der mathematischen Wissenschaften. Auf diese Weise versucht er, die Motivation für und das Interesse an der Mathematik im Allgemeinen zu wecken. Die Brauchbarkeit der mathematischen Lehren, die Kästner aufzeigt, stellt für ihn ein wichtiges Element im Lernprozess dar.

[518] Vgl. beispielsweise GGA, 1761/62, 75. St., S. 657.
[519] Vgl. GGA, 1775, 34. St., S. 291.
[520] Vgl. GGA, 1766, 18. und 19. St., S. 146 sowie GGA, 1776, 27. St., S. 228.
[521] Vgl. GGA, 1769, 106. St., S. 963.

Es ist wichtig dem Schüler bewusst zu machen, wofür er gewisse Inhalte lernen soll, da er sonst die Motivation verliert oder sich dem Lernprozess gar komplett widersetzt: „Wenn ein Kind nicht weiß, warum es das lernen soll, was ihm auferlegt wird, so hat es keine Lust dazu. Ist ihm nun vollends das Lernen schwer, so bekömmt es Abneigung; die Lust bleibt nicht nur = 0 sondern wird negativ. Beidem wird wol ausgewichen, wenn es an einigen Kenntnissen Gefallen bekommen hat, bei denen es den Nutzen anderer sieht und sich schon an Aufmerksamkeit und anhaltenden Fleiß gewöhnt hat“[522].

Auf welche Weise zeigte Kästner den Nutzen mathematischer Lehren in seinen *Anfangsgründen* auf und wie versuchte er die Lernfreude zu wecken und aufrecht zu erhalten? Wie bereits erwähnt, stellt Kästner bereits in den Vorreden seiner *Anfangsgründe* ganz allgemein den Nutzen der Mathematik für andere Wissenschaften, für Verrichtungen im alltäglichen Leben und sogar für die Verstandes- und Persönlichkeitsbildung heraus.[523] Auf diese Weise soll der Leser überhaupt erst zur Beschäftigung mit der Mathematik motiviert werden. Ein weiteres wichtiges Merkmal, das auch heutzutage im Rahmen der Didaktik große Beachtung findet, sind die praxisnahen Aufgaben und Beispiele, die den Schülern die Brauchbarkeit der mathematischen Lehren verdeutlichen sollen. Betrachtet man Kästners Ausführungen zur Arithmetik, so erstaunt es zunächst, dass solche Aufgaben nicht zu finden sind. Allerdings muss erwähnt werden, dass es in den *Anfangsgründen der Arithmetik* zunächst darauf ankommt, Grundbegriffe und Rechenfertigkeiten zu erlernen. Die Ausführungen bleiben recht abstrakt, was bei der Darstellung der vier Grundrechenarten besonders sichtbar wird. Konkrete praxisnahe Aufgaben sind erst – und dafür in einem viel größeren Umfang – im zweiten Band des Lehrwerks, nämlich in der *Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendungen auf mancherley Geschäffte* enthalten. In den *Anfangsgründen der Arithmetik* begegnen dem Leser selbst nur vereinzelt Anmerkungen, die die Verbindung zu realen Situationen des Alltags herstellen. So heißt es bereits zu Beginn bei der Erklärung „Dinge von einer Art“, dass „z. E. ein Spanier und ein Deutscher, beyde als Europäer betrachtet“[524] solche „Dinge“ darstellen können. Am Ende des ersten Arithmetik-Kapitels, das von ganzen Zahlen, Brüchen und entgegengesetzten Größen handelt, schreibt Kästner in einer Anmerkung, dass es im gemeinen Leben, im Handel sowie in Künsten und Wissenschaften nützlicher sei, größere Einheiten in kleinere umzuwandeln.[525] Im 70. Abschnitt behandelt Kästner die Aufgabe, wie man einen Bruch kürzt, wobei die Ausführungen zunächst abstrakt sind. Ein konkretes praxisnahes Beispiel mit Bezug auf konkrete Währungseinheiten erfolgt dann in der korrespondierenden Anmerkung im 71. Abschnitt.[526]

3.3.3 Mathematische Lehrart

„Man hat noch einen anderen Grund, weshalb die Mathematik einem Gelehrten angepriesen wird. Ohne Absicht auf den Gebrauch ihrer Wahrheiten selbst, behauptet man, daß schon die Art, wie dieselben vorgetragen werden, seiner Aufmerksamkeit, und wo möglich seiner Nach-

[522] Kästner, Beschluß. In: BJ, 1788, 3. Bd., S. 6.
[523] Vgl. Kapitel 1.2.1.
[524] Kästner, AG 1.1., S. 24.
[525] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 49.
[526] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 56 f.

ahmung in der Wissenschaft, mit welcher er sich vornehmlich beschäfftigt, würdig sey. Die mathematische Methode nämlich soll die einzige seyn, die zur Gewißheit führet, und der man sich also zu bedienen hat, wenn man vor Irrthümern sicher seyn will"[527]. Diese Ausführungen finden wir in den „Vorerinnerungen von der Mathematik überhaupt und ihrer Lehrart"[528] in den *Anfangsgründen der Arithmetik*, wobei Kästner bereits die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften dargestellt und die Wichtigkeit der theoretischen Mathematik für die Praxis betont hat. Die sogenannte mathematische Methode beziehungsweise Lehrart ist eine spezielle Art des Vortrags, der Kästner sich zur Präsentation der mathematischen Lehren in seinen *Anfangsgründen* bedient. Eine Besonderheit der Mathematik besteht darin, „daß [sich] alle Lehrer der Arithmetik und Geometrie über alle Sätze vollkommen einig sind"[529]. Dies wird durch die Lehrart realisiert, indem von Anfang an die Gegenstände klar definiert und die Lehren sukzessiv auf diesen Kenntnissen aufgebaut werden. Am Beginn dieser logischen Ordnung stehen die Erklärungen der verwendeten Begriffe oder Gegenstände, wobei nur diejenigen Merkmale beziehungsweise Informationen genannt werden, die der Gegenstand wirklich enthält.[530] Die Erklärungen lassen sich in einteilen in Worterklärungen (definitiones nominales) und Sacherklärungen (definitiones reales vel geneticae). Bei den Worterklärungen werden die Gegenstände beschrieben, aber es wird nicht ohne Beweis angenommen, dass sie tatsächlich möglich sind oder existieren. In den Sacherklärungen hingegen werden die Merkmale genannt, aus denen ersichtlich wird, wie der Gegenstand, über den gesprochen wird, entsteht. „Aus den Erklärungen fliessen Grundsätze (axiomata) deren Wahrheit man einsieht, so bald man sie versteht"[531]. Kästner ordnet hier auch die gemeinen Begriffe (notiones communes) ein. Dies sind die Grundsätze, die implizit, also ohne die Kenntnis, dass es sich um einen mathematischen Grundsatz handelt, gebraucht und angewandt werden.[532] Kästner unterscheidet zwei Arten von Grundsätzen: Die Grundsätze (axiomata) im Speziellen und Heischesätze beziehungsweise Forderungen (postulata) – diese sind also „Postulate" im Sinne Euklids. Die ersteren enthalten lediglich „Wahrheiten" ohne Beweise – also „Axiome" im modernen Sinne. Die letzteren sagen aus, dass man eine bestimmte Sache tatsächlich verrichten könne, ohne dabei das entsprechende Vorgehen darzustellen, weil es offensichtlich sei. Kästner geht weiter zu den Sätzen, die bewiesen werden müssen, da ihre Richtigkeit nicht sofort offensichtlich ist, wie das bei den Grundsätzen der Fall ist. Die Sätze „behaupten entweder blos, daß etwas so sey oder nicht sey; oder sie verlangen etwas zu bewerkstelligen"[533]. Die Lehrsätze (theoremata) machen die erste Art, die Aufgaben (problemata) und die Auflösungen (solutio) die zweite Art dieser Sätze aus.[534] „Der Beweis des Lehrsatzes thut desselben Wahrheit dar, der Aufgabe ihrer zeigt, daß dasjenige, was man verlangt, erhalten wird, wenn man der Auflösung gemäß verfährt. Beyde bestehen in Schlüssen, die man, wenn

[527] Kästner, AG 1.1., S. 12.
[528] In: Kästner, AG 1.1., S. 1-23.
[529] Kästner, AG 1.1., S. 13.
[530] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 14. Die Unterstreichungen im Folgenden stellen die wesentlichen Bestandteile der mathematischen Methode heraus und sind teilweise durch Fettdruck in Kästners *Anfangsgründen* hervorgehoben. Die in Klammern angegebenen lateinischen Ausdrücke sind Kästners Ausführungen entnommen.
[531] Kästner, AG 1.1., S. 15.
[532] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 15.
[533] Kästner, AG 1.1., S. 15.
[534] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 15 f.

es gefällig ist, in die syllogistische Form bringen kann, und wozu die Vordersätze aus den vorhergehenden Erklärungen, Grundsätzen und bewiesenen Sätzen genommen werden“[535]. Für den Fall, dass sich aus den bewiesenen Sätzen „merkwürdige“ – des Merkens würdige – Sätze ergeben, erhalten diese den Namen „corollaria“.[536] Allerdings werde, so Kästner, dieser Begriff und seine deutsche Übersetzung „Zusätze“ mehr für Folgerungen, welche aus den erwiesenen Sätzen abgeleitet werden, und für Lehrsätze, deren Beweis offensichtlich ist, verwendet. Kästner sieht zudem noch die Anmerkungen (scholia) als einen wichtigen Bestandteil der mathematischen Methode an, die Erläuterungen und Anwendungen der Sätze enthalten. In der Arithmetik gibt es noch willkürliche Sätze (hypotheses), in denen die Zeichen, die anstelle von Zahlen verwendet werden, erklärt werden.[537] Behandelt man die Lehren der angewandten Mathematik gemäß der mathematischen Methode, so fließen hier noch Erfahrungen, Beobachtungen und Versuche mit ein. In einigen Bereichen sei es nicht möglich zu einer vollkommenen Gewissheit zu gelangen. Am Beispiel der Astronomie schreibt Kästner, dass man hierbei zunächst Hypothesen annimmt.[538] Je mehr sich aus diesen Hypothesen herleiten lasse, desto größer sei die Richtigkeit dieser Lehren. Umgekehrt könnten falsche Hypothesen einer Prüfung nicht lange standhalten, so dass diese verworfen werden müssten. Dadurch könne man sogar zu richtigen Annahmen gelangen.

Kästner unterscheidet in seinen Ausführungen zur mathematischen Lehrart zwei didaktische Vorgehensweisen, nämlich zum einen die synthetische, zum anderen die analytische Lehrart.[539] Bei der synthetischen Methode sind die entsprechenden Aussagen bereits bekannt und man muss nur noch zeigen, beispielsweise durch Beweise, wie man zu ihnen gelangt. Bei noch nicht gefundenen Wahrheiten, so wie es Kästner am Beispiel der Astronomie darstellt, müsse die analytische Methode angewandt werden, bei der es darum geht zu zeigen, wie man zu den Erkenntnissen gelangen könne. Für seine *Anfangsgründe* wählte Kästner eine Lehrart, die aus der synthetischen und analytischen zusammengesetzt ist.

In seinen *Anfangsgründen* orientiert sich Kästner größtenteils an der mathematischen Methode. Die einzelnen Textpassagen sind für diesen Zweck nicht nur mit Nummern, sondern auch mit Bezeichnungen wie „Erklärung“, „Aufgabe“, „Zusatz“ und dergleichen versehen. Allerdings hält sich Kästner nicht konsequent an die mathematische Methode und stellt nicht alle Inhalte gemäß dieser Lehrart vor. Eine Ausnahme macht Kästner bei der Betrachtung der Artillerie, Fortifikation und Baukunst, die Kästner nur kurz darstellt, damit die Gelehrten bei Konversationen mitreden können.[540] Scheinbar aus diesem Grund verzichtet Kästner auf die mathematische Methode und nummeriert nur die Textpassagen, ohne diese mit weiteren Bezeichnungen zu versehen. Auch in den Abteilungen 2, 3 und 4 des ersten „Theils“ der *Anfangsgründe* finden wir keine weiterführenden Bezeichnungen der durchnummerierten Abschnitte. Dies hängt bei diesen drei Bänden damit zusammen, dass sie in erster Linie eine Sammlung von Aufgaben und weiteren Erläuterungen zur Arithmetik und Geometrie darstellen und keine neuen theoretischen Lehren enthalten.

[535] Kästner, AG 1.1., S. 16.
[536] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 16.
[537] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 18 f.
[538] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 20 f.
[539] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 21 f.
[540] Vgl. Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. vi.

Die mathematische Methode bringt den wesentlichen Vorteil mit sich, dass die Inhalte in einer Form dargestellt werden, dass selbst Anfänger ohne Vorkenntnisse die Mathematik erlernen können. Die Ausführungen beginnen mit elementaren Erklärungen und schreiten sukzessiv zu höheren Kenntnissen, so dass der Leser den einzelnen Schritten folgen und die Kenntnisse in Aufgaben selbst anwenden kann.

Ein schönes Beispiel der mathematischen Lehrart bietet die Erklärung der Ausziehung der Quadratwurzel im vierten Kapitel von Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik* (siehe Abbildung 12).[541] Die Thematik wird in 26 Abschnitten behandelt.[542] Hier sieht man nicht nur die Vielfalt der bezeichneten Abschnitte, sondern es ist besonders deutlich zu erkennen, dass Kästner mit einfachen Lehren beginnt und schrittweise zu schwierigeren Aufgaben übergeht.

§	Bezeichnung	Inhalt
1	„Lehrsatz“ mit „Beweis“	„Wenn eine Zahl aus zween Theilen bestehet, so enthält ihr Quadrat das Quadrat des ersten Theiles, ein doppeltes Product aus dem ersten Theile in den andern, und das Quadrat des andern Theiles“. Beim Beweis wird auf ein bereits behandeltes Beispiel verweisen.
2-6	„Zusätze“	Erläuterung des Lehrsatzes
7	„Aufgabe“ mit „Auflösung“	Aufgabe: „Aus einer Zahl, die drey oder vier Zifern hat, die Quadratwurzel auszuziehen“. Die Lösung erfolgt in 14 mit römischen Ziffern versehenen, kommentierten Schritten zusammen mit einem konkreten Rechenbeispiel.
8	„Aufgabe“ mit „Auflösung“	Aufgabe: „Die Theile eines Quadrates zu finden, wenn die Wurzel aus mehr als zween Theilen besteht“. Die Auflösung enthält Rechenbeispiele.
9-21	„Zusätze“	Zahlreiche Erläuterungen zu Quadratzahlen.
22	-	[Fehlt bereits seit der ersten Auflage.]
23	„Aufgabe“ mit „Auflösung“ und „Exempel“	Aufgabe: „Aus einer Zahl, die so viel Ziffern hat als man will, die Quadratwurzel zu finden“. Die Lösung gliedert sich in neun durchnummerierten, kommentierten Schritten mit einem konkreten Rechenbeispiel.
24	„Lehrsatz“ mit „Beweis“	Lehrsatz: „Es sey u eine ganze Zahl, die sich nicht durch die kleinere ganze Zahl x dividiren lässt, also $\frac{u}{x}$ ein uneigentlicher Bruch, der sich nicht auf eine ganze Zahl bringen lässt (I. 57) das Quadrat eines solchen Bruchs wird keine ganze Zahl seyn“.
25-26	„Zusätze“	Weitere Ausführungen zu § 24.
27	„Aufgabe“ mit „Auflösung“, „Exempel“, „Probe“ und Literaturangaben	Aufgabe: „Aus einer ganzen Zahl, deren Quadratwurzel keine ganze Zahl ist, diese Wurzel durch Näherung auszuziehen“. Die Lösung enthält ein Rechenbeispiel mit konkreten Zahlen. Am Ende der Ausführungen gibt Kästner weiterführende Literatur von John Wallis zum vorausgegangenen Beispiel an.

Abbildung 12: Über die Ausziehung der Quadratwurzel. In: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, S. 98-118.

[541] In: Kästner, AG 1.1., S. 98-118.

[542] Die Nummerierung geht bis 27, allerdings fehlte bereits seit der ersten Auflage § 22.

Kästner wollte Anfängern die Voraussetzungen für eine weitere, eigenständige Beschäftigung mit der Mathematik liefern. Dafür reichten allerdings die theoretischen Inhalte allein nicht aus. Vielmehr sollte der Verstand von Beginn an entsprechend geschult werden, wofür sich laut Kästner die mathematische Methode besonders eigne: „Das Wesentliche der mathematischen Methode besteht darinnen, was man lehrt, aus Gründen, deren Wahrheit ungezweifelt ist, durch Schlüsse, deren Richtigkeit den Verstand zum Beyfalle zwingt, darzuthun“[543]. Es ist also erkennbar, dass die mathematische Lehrart in Kästners Augen nicht nur ein didaktisches Hilfsmittel zur Präsentation der Inhalte, sondern darüber hinaus auch wichtig für die Verstandesbildung war. Letztere stellt ein übergeordnetes Ziel in Kästners pädagogischen Ansichten dar und passt zu den Zielen der Aufklärung. In dieser Zeit veränderte sich die Unterrichtsform und die Lehrer gingen weg von einer dogmatischen und hin zu einer demonstrativen Lehrart. Im Mittelalter und in der frühen Neuzeit war der Unterricht rein dogmatisch, wobei es auf das bloße Können ankam.[544] Erst im 18. Jahrhundert wurde die Mathematik auch als Mittel zur Schulung des Geistes angesehen.[545] In diesem Rahmen wurden nun das selbstständige Denken und das verstandesgemäße Lernen betont. Auch Kästner spricht sich ganz explizit gegen ein reines Auswendiglernen ohne Verstand und gegen die dogmatische Lehrart aus und bevorzugt stattdessen das Lernen nach Einsichten mit Begriffen und Überlegungen.[546] „Alles blos dem Lehrer glauben, wäre freilich keine Anführung zum vernünftigen Denken: aber einen Satz annehmen und daraus weiter schließen, ist doch allemal Uebung für den Verstand“[547]. Hinzu kommt, dass erst durch diese vollkommene Betrachtungsweise, die die mathematische Lehrart ermöglicht, die erlernten Inhalte in optimaler Weise angebracht werden können: „Vorschriften, denen man folgt, ohne ihre Gründe zu wissen, können an sich unrichtig seyn […]: Sind sie auch richtig, so können wir bey ihrer Anwendung fehlen, weil wir ihre rechte Bedeutung und ihre Gränzen, nicht zu bestimmen wissen; und endlich wird es uns allzeit schwerer, wenn wir sie blos im Gedächtnisse behalten sollen, als wenn wir die Verbindung mit ihren Gründen durch den Verstand einsehen“[548].

Die mathematische Methode eigne sich nicht nur für das Lernen von Mathematik und zur Verstandesbildung, sondern lasse sich vor allem wegen der Deutlichkeit ihrer Begriffe, Grundsätze und Schlussfolgerungen auch in anderen Wissenschaften verwenden.[549] Über den Nutzen der Mathematik für andere Wissenschaften schrieb Kästner einige Aufsätze, beispielsweise *Ueber den Gebrauch des mathematischen Geistes außer der Mathematik*, *Ueber den Werth der Mathematik, wenn man sie als einen Zeitvertreib betrachtet* oder Kästners Antrittsrede an der Universität Göttingen *De eo quod studium matheseos facit ad virtutem* (Was das Studium der Mathematik zur sittlichen Vervollkommnung beiträgt). Die Titel geben Hinweise darauf, dass die Mathematik zu dieser Zeit den Status als Hilfswissenschaft noch nicht abgelegt hatte, so dass Kästner – wie auch andere Autoren – die Notwendigkeit sah, die Mathematik auf besondere Weise hervorzuheben, sei es durch ihre Anwendungen in anderen Wissenschaften, sei es durch ihre Bedeutung für die Verstandes- und Charakterbildung.

[543] Kästner, AG 1.1., S. 16.
[544] Vgl. Pahl, S. 99.
[545] Vgl. Pahl, S. 102.
[546] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 47 f.
[547] Kästner, Ueber die Art. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 262.
[548] Kästner, AG 1.1., S. 10.
[549] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 17.

Es lohnt sich einen Blick in die Schrift *Ueber den Gebrauch des mathematischen Geistes außer der Mathematik* zu werfen, da sich Kästner hier über die mathematische Methode äußert. Diese Schrift ging aus einer Rede hervor, die Kästner am 26.3.1768 vor der Deutschen Gesellschaft in Göttingen hielt. Bereits zu Beginn erwähnt Kästner, dass die mathematische Methode schon zu Anfang des 18. Jahrhunderts hinsichtlich der Anwendbarkeit auf andere Gebiete außerhalb der Mathematik diskutiert wurde.[550] Kästner distanziert sich von einer uneingeschränkten Übertragbarkeit: „Wenn man die Wahrheit gestehen soll, so schienen die Bejahung der Frage [ob man die mathematische Methode auf andere Gebiete außerhalb der Mathematik übertragen kann] nicht alle davon gegebene Proben vortheilhaft: am allerwenigsten der Umstand, daß man Lehrbücher von unterschiedenen Glaubensbekänntnissen, und rechtliche Deductionen für entgegen gesetzte Partheyen, von beyden Seiten in der strengen mathematischen Methode verfasst hat“[551]. Für Kästner ist es nicht ausreichend, die mathematische Methode allein anzuwenden; vielmehr gehört hierzu auch ein mathematischer Geist, der sich durch „die Geschicklichkeit, Größen mit einander zu vergleichen; wahrzunehmen, wie sich durch die Menge der Theile, ein Ganzes von dem andern, durch ihre Lage, Ordnung und Gestalt, ein Zusammengesetztes von dem andern unterscheidet“[552] auszeichnet. Da vielen Personen allerdings dieser mathematische Geist fehle, sei die mathematische Methode schlecht angewendet worden, obwohl Wolff „die mathematische Methode so fleißig empfohlen hat“[553]. Die Erwähnung von Wolff in Bezug auf diese Methode zeigt, dass dieser einen enormen Einfluss auf ihre Verbreitung gehabt hatte. Am Ende der Schrift zieht Kästner den Schluss, der eine Verbindung zur Aufklärung und zur Forderung nach dem Gebrauch des eigenen Verstandes herstellt: „Wenn die Mathematik auch nur unsern Verstand bildet, Wahrheiten zu lieben, zu beurtheilen, zu erforschen, so möchte sie doch wohl zu Aufklärung einer Nation nicht ganz unnütz seyn“[554].

Vergleich mit Christian Wolff

Kästner war nicht der einzige Autor, der sich mit der mathematischen Lehrart befasste. In einer historischen Anmerkung erwähnt er, dass diese Methode keine Errungenschaft des 18. Jahrhunderts war, sondern auf Euklid zurückgeht: „Man hat die mathematische Methode besonders nach dem Verfahren des Euklides abgeschildert, und sie daher die geometrische oder Euklidische genannt“[555]. Kästner erwähnt – wie es typisch für ihn ist – nicht nur die Ursprünge der mathematischen Methode, sondern auch einige Autoren, die über die mathematische Methode und auch über ihren Gebrauch für andere Wissenschaften geschrieben haben, beispielsweise Erhard Weigel (1625-1699), Johann Jacob Hentsch (1723-1764) und Lazarus Bendavid (1762-1832).[556] Dass die Beschäftigung mit der mathematischen Methode im 18. Jahrhundert einen besonderen Stellenwert hatte, lässt sich auch an Murhards Bibliographie ablesen, der eine eigene Abteilung für diejenigen Schriften vorsah, die sich mit der

[550] Vgl. Kästner, Ueber den Gebrauch. In: Kästner, Vermischte Schriften, S. 94.
[551] Kästner, Ueber den Gebrauch. In: Kästner, Vermischte Schriften, S. 94 f.
[552] Kästner, Ueber den Gebrauch. In: Kästner, Vermischte Schriften, S. 96.
[553] Kästner, Ueber den Gebrauch. In: Kästner, Vermischte Schriften, S. 95.
[554] Kästner, Ueber den Gebrauch. In: Kästner, Vermischte Schriften, S. 103.
[555] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 18.
[556] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 22 f.

mathematischen Methode befassten.[557] Darüber hinaus äußerten sich beispielsweise René Descartes (1596-1650) und Leibniz über eine Universalmathematik.[558] Die erste Person, die sich nicht nur für eine universelle Übertragbarkeit dieser Methode aussprach, sondern diese tatsächlich in mathematischen Lehrbüchern verwendete, war Wolff.[559] Vor allem Beweise waren nach Wolff zur Verstandesbildung wichtig.[560] Die Schärfung des Verstandes scheint für Wolff – wie später auch für Kästner – der ausschlaggebende Aspekt bei dem Vorschlag, die mathematische Lehrart zu verwenden, gewesen zu sein.[561]

Nicht nur weil Kästner Wolffs Verdienste in Hinblick auf die mathematische Methode schätzte, sondern auch um Kästners Vorgehen einordnen zu können, bietet sich ein kurzer Vergleich zwischen diesen beiden „Anfangsgründe"-Autoren an. Dieser wird dadurch erleichtert, dass Sommerhoff-Benner in ihrer Arbeit über Wolff bereits auf dessen Ideen zur mathematischen Lehrart eingegangen ist.[562]

Im ersten Kapitel „Kurtzer Unterricht von der Mathematischen Lehr=Art"[563] seiner *Anfangs=Gründe* erklärt Wolff – ausführlicher als Kästner – den Aufbau der mathematischen Lehrart.[564] „Die Lehr=Art der Mathematicorum, das ist, die Ordnung, deren sie sich in ihrem Vortrage bedienen, fänget an von den Erklärungen, gehet fort zu den Grund=Sätzen, und hiervon weiter zu den Lehr=Sätzen und Aufgaben: überall aber werden Zusätze und Anmerckungen nach Gelegenheit angehänget"[565]. Wolff geht zunächst ausführlich auf die <u>Erklärungen</u> ein, die er in <u>Wort- und Sacherklärungen</u> aufteilt. Nachdem sich Wolff über die Erklärungen im Allgemeinen geäußert hat, widmet er sich den <u>Grundsätzen</u>, die keinen Beweis erfordern. Auch hier unterscheidet er traditionell zwischen <u>Axiomata</u> und <u>Postulata</u>. Dann thematisiert er die <u>Erfahrungen</u>, gefolgt von den Ausführungen zum <u>Lehrsatz</u>. Der Lehrsatz wird aufgeteilt in den <u>Satz</u> an sich und in den <u>Beweis</u>. Anschließend erklärt Wolff die <u>Aufgaben</u>, die er in die drei Teile <u>Satz</u>, <u>Auflösung</u> und <u>Beweis</u> einteilt. Wolff erläutert die verschiedenen Arten der <u>Zusätze</u>, wobei er zwischen denjenigen Zusätzen unterscheidet, die einen Beweis nötig haben, und diejenigen, die keinen Beweis brauchen. Dann äußert sich Wolff zu den <u>Anmerkungen</u>. Die abschließenden Paragraphen befassen sich mit dem Nutzen der Mathematik und ihrer Lehrart für sämtliche Wissenschaften und zur Verstandesschärfung.

Es ist zu erkennen, dass sich die Ausführungen von Wolff und Kästner decken, wobei diejenigen von Wolff umfangreicher und ausführlicher sind. Während Wolff die mathematische Methode auf 28 Seiten in 53 Abschnitten erklärt, widmet Kästner dieser Lehrart 12 Seiten und 17 Abschnitte. Allerdings erscheinen die Inhalte bei Kästner – subjektiv betrachtet – fasslicher und verständlicher, da sie weniger weitläufig behandelt werden. Wolff stellt sämtliche Inhalte in seinen *Anfangs=Gründen* gemäß der mathematischen Methode dar. Die einzelnen Abschnitte sind durchnummeriert und mit Bezeichnungen wie „Erklärung", „Lehrsatz",

[557] Vgl. Murhard, Bd. 1, S. 14-16.
[558] Vgl. Folkerts/Eberhard/Reich, S. 17.
[559] Vgl. Kühn, S. 58.
[560] Vgl. Gericke, S. 41.
[561] Vgl. Sommerhoff-Benner, S. 277 f.
[562] Vgl. Sommerhoff-Benner, S. 275-279.
[563] In: Wolff, AG 1, S. 3-32
[564] Die Unterstreichungen im Folgenden stellen die wesentlichen Bestandteile der mathematischen Methode heraus und sind teilweise durch Fettdruck in Wolffs *Anfangs=Gründen* hervorgehoben.
[565] Wolff, AG 1, S. 5.

„Aufgabe“, „Anmerkung“ oder „Zusatz“ versehen.[566] Dieses Vorgehen finden wir auch in Kästners *Anfangsgründen* wieder. Kästner nahm sich also nicht nur hinsichtlich seiner Ausführungen der mathematischen Methode, sondern auch hinsichtlich ihrer Anwendung ein Beispiel an Wolff. Kästner wandte die mathematische Lehrart in seinen Lehrbüchern nicht mehr so konsequent an, wie es Wolff 50 Jahre vor ihm noch getan hat. Die Kapitel zur Artillerie, Zivil- und Militärbaukunst werden nicht nach dieser Lehrart erarbeitet, was in Wolffs *Anfangs=Gründen* anders ist. Reich analysierte das Kapitel über die Baukunst in Wolffs *Anfangs=Gründen* und stellte dabei fest, dass er dieses ebenfalls gemäß der mathematischen Lehrart ausarbeitete und es insgesamt 52 Lehrsätze, 70 Aufgaben, 51 Erklärungen und zahlreiche Beweise, Anmerkungen und Zusätze enthält.[567] Kästner hingegen behandelte die bürgerliche Baukunst auf nur neun Seiten in 21 Abschnitten.[568] Wolff war die erste Person, die diese Lehrart in einem mathematischen Lehrbuch anwandte, musste also auch ein Exempel statuieren und diese Methode konsequent verfolgen. Kästner betonte bei der Ausarbeitung der drei genannten Kapitel, dass er seine Ausführungen bewusst kurz halten wolle, um einen kurzen Einblick in diese Themengebiete zu liefern.

Einen weiteren Unterschied zwischen Wolff und Kästner betrifft die Anwendung der mathematischen Methode selbst. Wolff sprach sich für eine universelle Übertragbarkeit der mathematischen Lehrart auf andere Wissenschaften aus.[569] Kästner hingegen zeigte sich zurückhaltender und betonte, dass niemand je behauptet habe, dass die mathematische Methode immer und überall angewendet werden solle, vor allem nicht in den Bereichen, in denen keine Größen vorkommen.[570] Von der universellen Verwendung der mathematischen Methode distanzierte sich auch Kant mit der Begründung, dass diese nicht so vorteilhaft gewesen sei, wie man sich zunächst erhoffte.[571]

Trotz der Unterschiede zwischen Wolffs und Kästners Ansichten zur mathematischen Lehrart lässt sich ein gemeinsamer Kern ausfindig machen, nämlich das übergeordnete Ziel der Verstandesbildung. Für beide Autoren stellte diese Lehrart nicht nur ein didaktisches Vorgehen dar, um mathematische Inhalte vorzutragen. Vielmehr war sie in ihren Augen wichtig für die Ausbildung des Verstandes und des eigenständigen Denkens.

3.3.4 Verbindung von Lehre und Lehrbuch

Aus den Vorreden der *Anfangsgründe* wird ersichtlich, dass Kästner sein Lehrwerk für den Gebrauch in Vorlesungen konzipierte. Dies zeigt auch der vorgesehene zeitliche Umfang für die einzelnen Bände, deren Inhalte innerhalb eines Semesters erlernt werden konnten. Nun wollen wir schauen, in wie weit Lehre und Lehrbuch inhaltlich und methodisch aufeinander abgestimmt waren.

Einige Inhalte erläuterte Kästner zunächst nur in seinen Vorlesungen, bis er sich zu einem späteren Zeitpunkt aus praktischen Gründen für den Leser oder Zuhörer dazu entschloss,

[566] Vgl. Sommerhoff-Benner, S. 52.
[567] Vgl. Reich, Mathematik der Aufklärung. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 65.
[568] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 584-592.
[569] Vgl. Sommerhoff-Benner, S. 275 f.
[570] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 16 f.
[571] Vgl. Kant, Versuch, Vorrede, o. S.

diese auch in das Lehrbuch selbst mitaufzunehmen: „Ich habe dergleichen Anwendungen der Theorie auf die Ausübung immer in meinen Lehrstunden beygebracht, und glaubte es wäre eine Bequemlichkeit mehr für den Zuhörer, solche im Buche zu finden“[572]. Umgekehrt hat Kästner „von Manchem […] eben deßwegen umständlicher geschrieben, damit ich in den Lehrstunden kürzer davon reden könnte“[573]. Durch die Tatsache, dass in Kästners *Anfangsgründen* selbst bereits zahlreiche Inhalte behandelt werden, konnten die Vorlesungen entlastet werden. Es lag dann an den Studenten selbst, sich gewisse Inhalte selbstständig anzueignen, vor- oder nachzubereiten. Nur wenn die Studenten wirklich fleißig seien, könne die reine Mathematik innerhalb eines Semesters erlernt werden, so Kästner.[574]

Kästner stimmte nicht nur Lehre und Lehrbuch aufeinander ab, sondern wollte dieses wechselseitige Verhältnis auch optimieren. Anlass hierzu gaben ihm vor allem eigene Lehrerfahrungen, die ihm zeigten, welche Probleme bei Mathematikstudenten aufkommen können und gleichzeitig Anlass gaben darüber nachzudenken, wie man diese Probleme beheben oder umgehen kann.[575] Neben den eigenen Lehrerfahrungen erhielt Kästner auch Rückmeldungen von Freunden und Kollegen, aus denen weitere Änderungen in seine *Anfangsgründe* einflossen, beispielsweise die Verbesserung von Druckfehlern, Beweisen oder ausführlichere Erläuterungen.[576] Eine dieser Veränderungen betrifft das Kapitel zur Trigonometrie, welches Kästner veränderte und durch einige Formeln ergänzte: „Bisher hatte ich es meinen Vorlesungen vorbehalten, es ist aber ohne Zweifel gut, wenn der Zuhörer es auch im Buche selbst findet“[577].

Im 18. Jahrhundert war Kästners Lehrbuch auch für Studenten zugänglich. Die einzelnen Bände konnten entweder käuflich erworben oder auch in der Göttinger Universitätsbibliothek eingesehen und ausgeliehen werden. Dieser Zugang zu Büchern war eine Voraussetzung dafür, dass sich der Vorlesungsstil vom Dogmatismus wegbewegte und man sich schließlich gegen diesen aussprach. Da das Diktieren nun vermehrt wegfiel, war nicht nur ein freierer Vortragsstil, sondern sicherlich auch eine umfangreichere Interaktion zwischen Lehrer und Student möglich. Allerdings ist zu beachten, dass die „Anfangsgründe“ auch zu autodidaktischen Studien verwendet werden konnten, wobei eine Kommunikation zwischen dem Schüler und dem Lehrer nicht mehr möglich war, was gleichzeitig eine höhere Fehleranfälligkeit bei dem Erwerb mathematischer Kenntnisse sowie ihrer Umsetzung mit sich bringt. Daher legte Kästner großen Wert auf die Richtigkeit der Darstellung in seinen Büchern und wollte Druckfehler vermeiden.[578] Er gibt allerdings keine weiteren Hinweise, wie Autodidakten mit seinem Lehrbuch arbeiten sollen.

Kästner konzentrierte sich in seinen Vorlesungen nicht nur auf die theoretischen Ausführungen, sondern baute auch anschauliche Aspekte in seinen Unterricht ein. So heißt es in der Vorlesungsankündigung zum WS 1765/66, die seinem *Commentarius* beigefügt ist, dass Kästner im Rahmen seiner Veranstaltung über angewandte Mathematik plane „durch Vorzeigung dessen, was zu Erläuterung dieser Lehren dienen kann, in der Natur, in Modellen, oder

---

572 Kästner, AG 1.1., Vorrede der vierten Auflage, o. S.
573 Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. v.
574 Vgl. Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 41.
575 Vgl. Kästner, Fortsetzung. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 390.
576 Vgl. Kästner, AG 1.1., Nachricht von der dritten Ausgabe, S. **3^v.
577 Kästner, AG 1.1., Nachricht von der dritten Ausgabe, S. **4^v f.
578 Vgl. Kästner, AG 3.2, Erinnerung bey der zweyten Ausgabe, S. xv f.

Abbildungen, sinnlich und lebhaft zu machen“[579]. „Die Begriffe, worauf sich die angewandte Mathematik gründet, erhält man nicht wohl ohne Werkzeuge, Maschinen, Modelle, und Versuche würklich zu sehen. Ich besitze zu dieser Absicht selbst einen ziemlichen Vorrath, und wende hier die der Universität gnädigst verschafften schönen Sammlungen ihrer Absicht gemäß an. Ich habe auch, seitdem mir das Observatorium anvertrauet ist, denen Gelegenheit gegeben, die sich in der practischen Astronomie einige Geschicklichkeit erwerben wollen, und werde künftig noch mehr dazu im Stande seyn“[580]. Kästner spricht sich für die Veranschaulichung theoretischer Inhalte durch Modelle, Versuche und Vorführungen aus. Und hierbei wird gleichzeitig die Schwäche und Unvollständigkeit des Lehrbuchs deutlich, denn diese Elemente kann ein Lehrbuch nur in eingeschränktem Maße bieten. Zwar gibt es in Kästners *Anfangsgründen* zahlreiche Abbildungen, die dem Leser die Inhalte anschaulich nahebringen und die auch als Beweisgrundlage verwendet werden können. Dennoch können wirkliche Vorführungen nicht durch ein Lehrbuch realisiert werden. Deswegen können wir annehmen, dass in erster Linie Autodidakten, die die Mathematik nach Kästners Lehrbuch erlernten, nicht so sehr von diesem Buch profitierten wie Studenten, die Vorlesungen besuchten: „[…] da dieses Buch [Anfangsgründe] zur mündlichen Erklärung bestimmt ist, so versteht sich, daß verschiedene Sätze, welche die Kürze dort allgemein vorzutragen befahl, dem Lernenden erst in besondern Exempeln bekannt gemacht werden“[581].

Kästner äußerte sich in seinen Schriften auch über die Rolle des Lehrers beim Lernprozess. Der Lehrvortrag an sich soll vor allem aus Motivationsgründen deutlich und lebendig sein.[582] Die Aufgabe eines Lehrers besteht für Kästner nicht darin alle Inhalte zu diktieren, welche die Schüler dann unhinterfragt übernehmen, sondern er möchte – gemäß dem Gedankengut der Aufklärung, welches bei ihm häufig durchscheint – „Anführung zum vernünftigen Denken“[583] geben. Er schreibt, dass „die Pflicht eines akademischen Lehrers erfordert, sowohl die Kenntnisse auszubreiten, deren gänzliche Unwissenheit einem Gelehrten iezo schimpflich ist, als auch Lehrbegierigern einen Unterricht zu ertheilen, vermöge dessen sie die mathematischen Wahrheiten selbst, zu weiterem Gebrauche anwenden können“[584]. Dieses Ziel formulierte er explizit in seinen *Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen*.[585] Es geht also zunächst um die Vermittlung von Grundwissen, wobei das Fundament für eigenständiges Weiterarbeiten gelegt werden soll.

Durch die Tatsache, dass Kästner seinen mathematischen Unterricht durch anschauliche Elemente und weitere Anmerkungen ergänzte und zudem über die Aufgaben eines Lehrers sprach, können wir annehmen, dass seine Vorlesungen und seine *Anfangsgründe* aufeinander abgestimmt waren und eine Symbiose bildeten. Er änderte seine *Anfangsgründe* unter Beachtung der tatsächlichen Nutzung, sowohl seiner eigenen Verwendung als auch die von Kollegen und Freunden. Die Frage, inwieweit Kästner seine Lehre seinen *Anfangsgründen* anpasste, kann wegen der unvollständigen Quellenlage nur bedingt beantwortet werden. Als Quellen stehen lediglich die *Anfangsgründe* selbst zur Verfügung. Es fehlen Vorlesungsmitschriften,

[579] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 45.
[580] Kästner, zitiert nach Pütter, Bd. 1, S. 300.
[581] Pütter, Bd. 1, S. 300.
[582] Vgl. Kästner, Ueber die Art. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 263.
[583] Kästner, Ueber die Art. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 262.
[584] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 45.
[585] Vgl. Kästner, AG 3.1., Vorrede, S. iii.

die Aufschluss darüber geben könnten, in wie weit Kästner die Ausführungen, die in seinen Lehrbüchern zu finden sind, durch den mündlichen Vortrag ergänzte. Aus den Vorreden der *Anfangsgründe* kann aber entnommen werden, dass Kästner einige Inhalte in seinem Unterricht selbst erläuterte, und diese daher nur kurz in den Lehrbüchern abgehandelt werden; umgekehrt stellte er einige Lehren ausführlicher dar, um diese in den Lehrstunden nicht so umfangreich behandeln zu müssen. Zudem ergänzte er seine theoretischen Ausführungen – zumindest im Bereich der angewandten Mathematik – durch Vorführungen. Durch seine eigene Lehrtätigkeit konnte er gewisse Schwächen seiner Lehrbücher, wie unklare Beweise, Druckfehler und unvollständige Ausführungen, aufdecken und diese in den jeweiligen Neuauflagen beheben. Kästners Intention ging also nicht nur dahin, die *Anfangsgründe* auf die Lehre selbst abzustimmen, sondern sie auch aufgrund von Lehrerfahrungen zu optimieren.

3.3.5 Historische Anmerkungen

Eine Besonderheit in Kästners *Anfangsgründen* stellen die zahlreichen historischen Anmerkungen dar, die sich durch eine kleinere Schriftgröße vom übrigen Text abheben. Mit welcher Intention nahm Kästner diese in seinem Lehrwerk auf? „Ich habe zugleich allemahl ein Augenmerk mit auf die Geschichte der Wissenschaft gehabt, nicht daß ich alle Schriften sorgfältig hätte anführen wollen, denn das heisst die Geschichte der Büchertitel, sondern daß ich, so oft es die Gelegenheit gegeben hat, angezeigt habe, wie und von wem die Wissenschaft nach und nach ist erweitert worden“[586]. Als Grund gibt Kästner an, dass es hilfreich sei zu wissen, was bisher getan und wie eine Erfindung aus der anderen hergeleitet worden ist.[587] Dies erinnert stark an die genetisch-historische Vorgehensweise, der auch heutzutage im Rahmen der Fachdidaktik Beachtung geschenkt wird und die auf Otto Toeplitz (1881-1940) zurückgeht.[588] Betrachtet man diese Aussage Kästners in Zusammenhang mit seinen Ausführungen zur Verstandesbildung, so kann angenommen werden, dass er seinen Schülern beziehungsweise den Lesern der *Anfangsgründe* aufzeigen wollte, auf welche Weise man neue mathematische Wahrheiten entdecken und so die Wissenschaft bereichern konnte.

Die historischen Anmerkungen in Kästners *Anfangsgründen* sind von unterschiedlicher Art. Sie sind entweder rein informativ oder setzen sich kritisch mit zeitgenössischen mathematischen Problemen auseinander. Historische Anmerkungen mit einem rein informativen Charakter begegnen dem Leser bereits in den Vorreden der *Anfangsgründe*. So erläutert Kästner in der Vorrede der dritten Auflage seiner *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* die Herkunft und die Bedeutung des Begriffs „Algebra“ und verweist auf andere Autoren, die sich mit diesem Thema befasst haben.[589] Bei den elementaren Lehren der Arithmetik zeigt Kästner auf, woher vermutlich das Zehnersystem kommt.[590] Hierzu gibt er an, dass es die natürlichste Art sei, die Zahlen an den Fingern – zehn an der Zahl – abzulesen. Darüber hinaus verweist er auch auf Literatur, die sich ebenfalls dieser Frage widmet. Zum Satz des Pythagoras schreibt er kritisch, dass dieser nach seinem vermeintlichen Erfinder

---

[586] Kästner, AG 4.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. x.
[587] Vgl. Kästner, AG 4.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. x f.
[588] Vgl. Dauben/Scriba, S. 134.
[589] Vgl. Kästner, AG 3.1., Erinnerung bey der dritten Ausgabe, S. xi ff.
[590] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 30.

Pythagoras benannt wurde und nennt entsprechende Literatur.[591] Interessant ist, dass Kästner nicht vereinfacht schreibt, dass Pythagoras der Erfinder dieses Lehrsatzes sei, so wie es teilweise auch in modernen Lehrbüchern vorzufinden ist, sondern dass er sich kritisch mit historischen Gegebenheiten auseinandersetzte und den Leser für solche Fragen sensibilisieren wollte, indem er ausdrücklich von „seinem angeblichen Erfinder“[592] spricht. Auch hinsichtlich der mathematischen Lehrart findet der Leser eine historische Anmerkung, aus der hervorgeht, dass sie keine Errungenschaft des 18. Jahrhunderts war, sondern bereits zu Euklids Zeiten bekannt war.[593] In diesem Rahmen verweist Kästner auch auf einige Autoren, die über die mathematische Methode und ihren Gebrauch in anderen Wissenschaften geschrieben haben.[594]

Neben diesen Anmerkungen, die informativen Charakter haben und einen Einblick in die Historie bestimmter Lehrsätze oder Themen geben, finden wir in Kästners *Anfangsgründen* historische Anmerkungen, die den Forschungsstand der Mathematik betrachten. Hierzu gehören beispielsweise Kästners Ausführungen zum Parallelenaxiom, die wir an zwei Stellen der *Anfangsgründe der Arithmetik* finden. Zunächst schreibt er in der Vorrede zur ersten Auflage, dass er sich bereits seit Jahren mit dem Problem der Parallellinien beschäftigt habe und dass dieses immer noch nicht behoben sei.[595] Der entsprechende Satz wird im „12. Satz. 9. Grundsatz“ dargestellt: „Wenn zwo gerade Linien GP; CD, von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die innern entgegengesetzten Winkel HPG + GHD < 2R so stossen sie verlängert nach der Seite von EF wo diese Winkel liegen, zusammen“[596]. In der zugehörigen Anmerkung erfährt der Leser, dass dieser Satz nicht so offensichtlich sei, wie er zunächst schien – und dies sei das Problem.[597] An dieser Stelle verweist Kästner nicht nur auf seine Vorrede, in der er bereits auf die Problematik eingegangen ist, sondern nennt auch entsprechende Literatur. Was Kästner schreibt, ist sehr interessant, denn erstens verweist er auf den damals noch praktisch unbekannten Girolamo Saccheri[598] (1667-1733), zweitens verweist er auf Klügel und dessen Dissertation zur Lehre der Parallellinien, drittens zitiert er zeitgenössische Autoren.

Die historischen Anmerkungen in Kästners *Anfangsgründen* sind in erster Linie informativ. Für das Verständnis der mathematischen Lehren selbst haben die Anmerkungen keine Bedeutung, lockern aber die theoretischen Inhalte auf und machen sie anschaulicher, was eine positive Wirkung auf den Lernprozess haben kann. Neben diesen Bemerkungen finden wir auch solche, die den aktuellen Stand der mathematischen Forschung beinhalten. Mit der Darstellung von mathematischen Problemen sollte das Interesse der Leser geweckt werden, sich mit diesen auseinanderzusetzen. Gleichzeitig wird der Leser sensibilisiert, sich kritisch mit mathematischen Lehren zu befassen. Hierbei beschränkt sich Kästner nicht nur darauf, einen Einblick in die Geschichte der Mathematik zu geben, sondern gibt auch entsprechende

---

591 Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 219.
592 Kästner, AG 1.1., S. 219.
593 Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 18.
594 Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 22 f.
595 Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *5^r ff.
596 Kästner, AG 1.1., S. 205.
597 Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 205 f.
598 Eine Kurzbiographie Saccheris ist enthalten in: Stäckel/Engel, S. 34.

Literatur an, die der Leser einsehen kann, wenn er sich intensiver mit gewissen Inhalten beschäftigen möchte.

Dass Kästner über die Historie der mathematischen Wissenschaften Bescheid wusste, zeigt, dass er die Mathematik in universaler Weise überblickte. Dies wird uns auch durch sein Werk *Geschichte der Mathematik* (4 Bde., 1796-1800) bestätigt, in der Kästner entsprechende Literatur zu verschiedenen Zeiten und Themengebieten der Mathematik auflistete und kommentierte. Im Wesentlichen war die *Geschichte der Mathematik* ein Inventar von Kästners Bibliothek.

3.3.6 Literaturangaben

„Anfangsgründe" sollten in eine bestimmte Wissenschaft einleiten und beschränkten sich daher auf die elementaren Lehren, wobei der Weg für das selbstständige Weiterarbeiten geebnet werden sollte. Die zahlreichen Literaturverweise in Kästners *Anfangsgründen* erlauben es dem Leser, sich eigenständig und intensiver mit gewissen Themen zu beschäftigen, die über den Rahmen der einführenden Lehren hinausgehen. „Schriften, wird man an gehörigen Orte mit einiger Vollständigkeit angeführt finden. Ich lege sie fast alle aus meiner eigenen Sammlung […] vor. Viele meiner Zuhörer haben sich bey der Gelegenheit die Titel aufgezeichnet. Diese Arbeit kann bey Büchern die man zum erstenmahle in die Hände bekömmt, leicht mißrathen, und in den Lehrstunden ist nicht einmahl die Zeit dazu übrig"[599].

Kästner war im Besitz einer umfangreichen Privatbibliothek, die mehr als 7000 Werke zu verschiedenen mathematischen Themen umfasste.[600] Zudem war er als Übersetzer tätig und schrieb eine große Zahl von Rezensionen. Auf diese Weise erhielt Kästner einen Einblick in den aktuellen Stand der Forschung sowie in die zeitgenössische Literatur. Durch diese umfassenden Kenntnisse war es ihm möglich, Anfängern geeignete Literatur zu sämtlichen Gebieten an die Hand zu geben. Dabei beschränkte er sich nicht einfach darauf, die Titel summarisch aufzulisten, sondern fügte noch eigene, teils kritische und bewertende Anmerkungen hinzu.

Die Angabe der weiterführenden Literatur erfüllt in Kästners *Anfangsgründen* unterschiedliche Funktionen. Wie wir bereits im Rahmen der historischen Anmerkungen gesehen haben, gab Kästner diese an, damit sich der Leser eigenständig weitere Informationen einholen konnte, die über die fachmathematischen Lehren hinausgehen. Da Kästner sich in seinem Lehrbuch kurz halten musste und nicht alle Inhalte behandeln konnte, nennt er einige weiterführende Werke, die diese fehlenden Inhalte darstellen, wie die unbestimmte Analytik, die zwar nicht in Kästners *Anfangsgründen*, aber im zweiten Teil von Eulers *Anleitung zur Algebra* (1770) zu finden ist.[601] Zwar legte Kästner großen Wert auf mathematische Beweise, gibt aber nicht alle Beweise, die zu einem bestimmten Lehrsatz existierten, an. Hierfür verweist er auch auf andere Autoren, beispielsweise auf Euler, der einen alternativen Beweis angab, „daß in jeder Gleichung die unmöglichen Wurzeln allemahl in gerader Anzahl sind"[602]. Kästner ver-

[599] Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. vi.
[600] Siehe Kästner/Kirsten.
[601] Vgl. Kästner, AG 3.1., S. 115.
[602] Kästner, AG 3.1., S. 171.

nachlässigt auch bestimmte Disziplinen in seinen *Anfangsgründen*, nämlich die Artillerie, Fortifikation und Baukunst. Hier wollte er in seinem Lehrbuch nur eine kurze Einführung geben, damit sich Gelehrte aufgrund von Unwissenheit nicht lächerlich machen.[603] Daher verweist Kästner am Ende dieser Kapitel auf weitere Werke, unter denen sich auch Lehrbücher befinden, die sich explizit mit dem entsprechenden Thema befassen.

Durch die angeführte Literatur gibt Kästner auch einen Einblick in den aktuellen Stand der Forschung. So heißt es beispielsweise bei der Betrachtung der Summe der Kubikzahlen: „Ich finde nicht, daß Euler […] diese Schwierigkeit angezeigt und gehoben hätte“[604].

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die Verweise auf weitere mathematische Werke es Kästner ermöglichten, sich in seinen *Mathematischen Anfangsgründen* auf elementare Inhalte zu beschränken. Allerdings blieb er an diesem Punkt nicht stehen, sondern setzte indirekt seinen Unterricht fort, indem er dem Leser Hilfsmittel an die Hand gab, um sich eigenständig weitere mathematische Inhalte anzueignen, wobei es hier auf den – immer wieder betonten – Fleiß und die Eigenständigkeit der Leser ankommt. Durch die weiterführenden Literaturangaben lieferte Kästner ein umfassenderes Bild von der Mathematik. Er verwies nicht nur auf Lehrbücher zu bestimmten Themengebieten, sondern auch auf Forschungsmonographien, die in unterschiedlicher Hinsicht weiter gingen als seine Ausführungen in den *Anfangsgründen*. Dabei war Kästner darauf bedacht, dem Leser anzukündigen, was ihn genau in der genannten Literatur erwartet, zum Beispiel weitere Ausführungen zur Geschichte der Mathematik, ein alternativen Beweis oder ein zusätzliches Themengebiet. Auf diese Weise konnten Anfänger, wenn sie denn interessiert genug waren, einen Einblick in die zeitgenössische mathematische Forschung erhalten.

3.3.7 Aufgaben und Lösungen

Die Eigenständigkeit des Lernenden, auf die Kästner großen Wert legte, wird auch in seinen *Anfangsgründen* durch zahlreiche Aufgaben gefordert. So kann der Leser die zuvor theoretisch dargestellten Inhalte selbst anwenden; zudem hat er die Möglichkeit, die Richtigkeit der Rechnungen durch die angegebenen Lösungen zu überprüfen. Aus diesem Grund ist es Kästner wichtig, Druckfehler zu eliminieren, um die Leser nicht durch falsche Angaben zu irritieren.[605] Praxisnahe Beispiele und Aufgaben sind darüber hinaus erforderlich, um den Sinn der erlernten Inhalte zu erkennen und die Leser zur Beschäftigung mit der Mathematik zu motivieren. Kästner achtet bei seinen Ausführungen darauf, die Beziehung zu Geschäften des alltäglichen Lebens aufzuzeigen. So nimmt er in einigen Anmerkungen Bezug auf Umrechnungen von Maß- oder Währungseinheiten. Hierbei ist allerdings anzumerken, dass in den *Anfangsgründen der Arithmetik* vergleichsweise wenige Aufgaben mit Realitätsbezug zu finden sind. Dem hat Kästner insofern Abhilfe verschafft, als er ihnen einen kompletten Band, nämlich die *Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherley Geschäffte*, widmete. Hier gibt Kästner in der Vorrede den Grund an, wieso man in den üblichen Vorlesungen keine praxisnahen Beispiele der Arithmetik findet, obwohl der Nutzen der Rechenkunst für

[603] Vgl. Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. vi.
[604] Kästner, AG 3.1., S. 576.
[605] Vgl. Kästner, AG 3.2, Erinnerung bey der zweyten Ausgabe, S. xv f.

sämtliche Bereiche des alltäglichen Lebens offensichtlich sei: „Daß die Rechenkunst fast in jedem Geschäffte des menschlichen Lebens unentbehrlich ist, wird ziemlich allgemein zugestanden: Von diesem Gebrauche lassen sich in den gewöhnlichen mathematischen Lehrstunden, wo die Arithmetik mit abgehandelt wird, nur wenig Proben geben, theils weil die Zeit für die übrigen Theile der sogenannten reinen Mathematik muß gespart werden, theils weil die Gegenstände, auf welche man die Lehren anwenden will, erst Erläuterungen erfodern, auch wenn man nur für die einfachsten Exempel: Vergleichung auswärtiger Münzen mit den bekannten anstellen wollte“[606]. Zwar gebe es Bücher, die solche Lehren enthalten, jedoch kritisiert Kästner die Deutlichkeit der Begriffe und die Schärfe der Beweise, was ihn dazu bewegt hat, solche Aufgaben zu sammeln und sie im Rahmen der *Anfangsgründe* zu veröffentlichen.[607] Hier begegnet uns wieder der Aspekt der fehlenden Zeit an den deutschen Universitäten, so dass die mathematischen Lehren nicht umfassend und nutzbringend vorgetragen werden können. Daher kann angenommen werden, dass die *Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherley Geschäffte* als Weiterführung zu den mathematischen Vorlesungen an den Universitäten verwendet werden konnte. Einen Hinweis darauf, dass dieser zweite Band von Kästners *Anfangsgründen* für Vorlesungen verwendet worden wäre, liefern die Vorlesungsankündigungen der Universität Göttingen nicht, so dass es nahe liegt anzunehmen, dass sich der Leser bei Interesse selbstständig mit der Thematik befassen sollte. Dieser Band der *Anfangsgründe* enthält nicht nur weitere arithmetische Lehren, sondern vor allem auch zahlreiche praxisnahe Beispiele zur Zinsrechnung, zu kaufmännischen Rechnungen, Mischungsrechnungen oder Rechnungen zum Münzwesen. Ein Beispiel stellt das Verhältnis von zwei unterschiedlichen Währungseinheiten zueinander dar (siehe Abbildung 13).

Die Verhältniß zwischen ein Paar Geldsorten, ist gegeben; wie viel Stücke der einen betragen so viel als eine gegebene Menge Stück der andern?

15. Die erste Geldsorte heisse A, die andre B, ihre Verhältniß sey b : a

So betragen b Stücke der zweyten so viel, als a der ersten, oder, das Pary zwischen ihnen ist

$$a A = b. B$$

16. Nun sollen m Stücke der ersten so viel betragen, als n der andern, oder

$$m. A = n. B = \frac{n. a}{b}. A$$ Daher

17. $mb = na$ wo sich jede der vier Grössen aus den drey übrigen findet.

Abbildung 13: Kästner, *Fortsetzung der Rechenkunst* [AG 1.2.], S. 225 f.

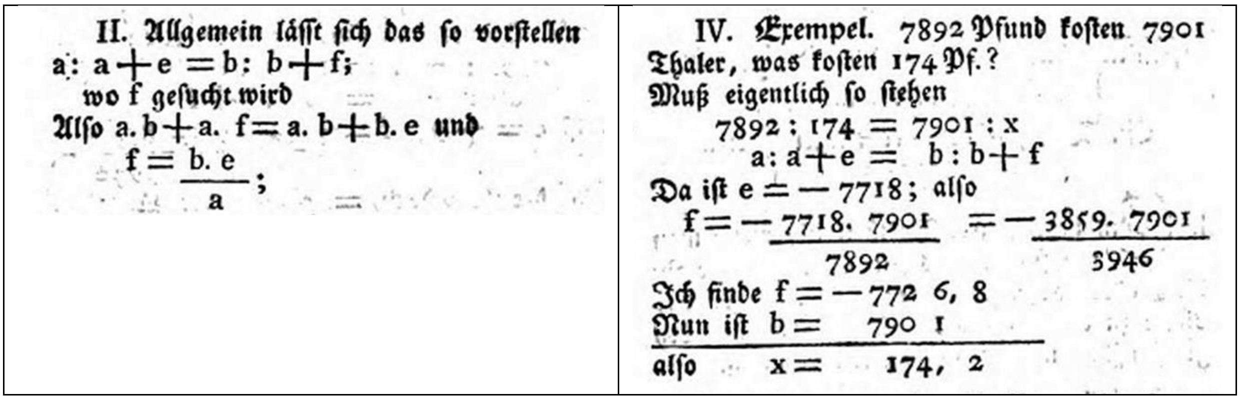
Die in diesem Band der *Anfangsgründe* zu findenden Aufgaben zeichnen sich durch ihren Realitätsbezug aus. Da Kästner hier auf die Anwendung der mathematischen Lehrart verzichtet, sind die entsprechenden Abschnitte nur durchnummeriert und nicht durchgängig mit weiteren Bezeichnungen versehen. Vereinzelt gibt es „Exempel“, die die zuvor dargestellten In-

[606] Kästner, AG 1.2., Vorrede, S. iii.

[607] Vgl. Kästner, AG 1.2., Vorrede, S. iii f.

halte veranschaulichen. Am Ende einzelner Kapitel findet man auch einige Aufgaben und ihre Lösungen, welche umfangreicher sind als diejenigen in den *Anfangsgründen der Arithmetik*. So erstreckt sich auch die Aufgabe „wie sich eine Mischung von Wasser und Wein ändert, wenn das Weggenommene immer mit Weine wiederum ersetzt wird“, ihre Auflösung, zugehörige Beispiele und weitere Zusätze auf über 23 Seiten.[608]

Auffällig ist, dass Kästner in den Aufgaben und Beispielen Buchstaben statt konkrete Zahlen verwendet, was dadurch möglich wird, da er die Buchstabenrechnung bereits im ersten Band der *Anfangsgründe* behandelt hat. Zu Beginn seiner Ausführungen zur Regel Detri (Dreisatz) beschreibt Kästner die Formel beziehungsweise das Verhältnis der einzelnen Glieder zunächst abstrakt mit Buchstaben.[609] Im zugehörigen „Exempel“ gibt er ein konkretes Zahlenbeispiel an und rechnet mit diesen Werten (siehe Abbildung 14).


II. Allgemein läßt sich das so vorstellen

$a : a + e = b : b + f;$

wo f gesucht wird

Also $a.b + a.f = a.b + b.e$ und

$f = \frac{b.e}{a};$

IV. Exempel. 7892 Pfund kosten 7901 Thaler, was kosten 174 Pf.?

Muß eigentlich so stehen

$7892 : 174 = 7901 : x$

$a : a + e = b : b + f$

Da ist $e = -7718$; also

$f = -\frac{7718.7901}{7892} = -\frac{3859.7901}{3946}$

Ich finde $f = -7726,8$

Nun ist $b = 7901$

also $x = 174,2$

Abbildung 14: Kästner, Fortsetzung der Rechenkunst [AG 1.2.], S. 1 f.

3.3.8 Abbildungen

Kästners *Anfangsgründe* enthalten neben den schriftlichen Ausführungen insgesamt 57 Kupfertafeln mit über 579 Abbildungen, die am Ende der einzelnen Bände zu finden sind. In seinen Ausführungen verweist Kästner auf die entsprechenden Abbildungen, so dass eine eindeutige Beziehung zwischen Text und Bild besteht. Die Abbildungen werden nicht dafür verwendet, um Bezeichnungen einzuführen (wie etwas „Punkt A liegt auf der Linie b, wie in Abb. X zu sehen ist“), sondern sie dienen der Veranschaulichung der theoretisch dargestellten Inhalte. Kästner verweist bei der Erklärung der elementaren geometrischen Elemente wie Punkt und Linie auf die entsprechenden Abbildungen, auf die durch seine detaillierten Ausführungen aber auch verzichtet werden könnte. Abbildung 15 zeigt ein solches Vorgehen.

[608] Vgl. Kästner, AG 1.2., S. 353-376.

[609] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.2., S. 1 f.

6. Eine gerade Linie ist, deren Puncte alle nach einer Gegend zu liegen; AB (1. Fig.) Eine krumme ABCDEF (2. Fig.) in der, zwischen jedem Paare Puncten f, c, so nahe man solche auch annimmt, welche liegen, die sich mit den angenommenen nicht in einer geraden Linie befinden.

7. Eine ebene Fläche oder Ebene (planum) heisst, in der man von jedem Puncte zum andern gerade Linien ziehen kann, so daß alle Puncte dieser Linien in der Fläche liegen. 4. F. Eine krumme Fläche diejenige, auf der man keinen Theil, der eben wäre, angeben kann.

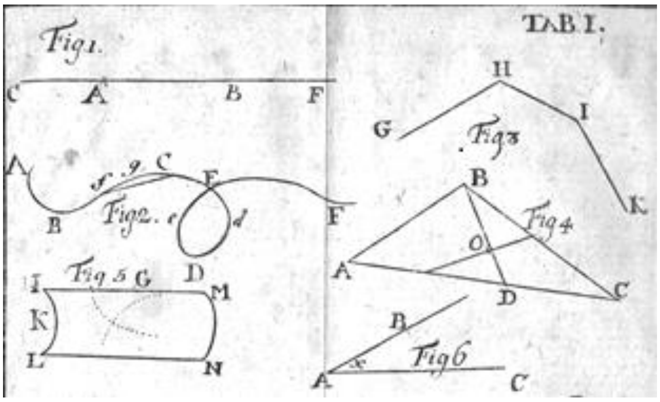


Abbildung 15: Ausschnitte aus Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, S. 180, S. 182, Tab. I.

Kästner scheint sich bewusst gewesen zu sein, dass es unterschiedliche Lerntypen gibt – eine Thematik, der auch heutzutage in der Didaktik große Aufmerksamkeit geschenkt wird. Er beschreibt in seinem Brief an Campe die Anekdote aus seiner Kindheit, in der Kästners Vater ihm die Musik beziehungsweise das Klavierspielen beibringen wollte, was allerdings erfolglos blieb, da Kästner selbst keine Lust dazu hatte: „Da beging nun mein Vater wirklich einen pädagogischen Fehler. Er meinte ich sollte Musik durch hören lernen, und hätte doch mich so viel kennen sollen, daß ich sie eher durch Lesen gelernt hätte“[610]. Kästners Aussage impliziert auch, dass man sich auf den jeweiligen Schüler und seine Bedürfnisse einstellen muss – so wie sein Vater hätte wissen müssen, dass sein Sohn am besten durch das Lesen lernte. In seinen *Anfangsgründen* spricht Kästner ebenfalls unterschiedliche Sinneskanäle an. Er stellt nicht nur die theoretischen Lehren dar, sondern durch die detaillierten Abbildungen ist es zudem möglich, sich ein Bild über komplizierte Konstruktionsaufgaben oder gewisse Sachverhalte zu machen. Das Element der Anschauung verfolgte Kästner nicht nur in seinen Lehrbüchern, sondern in größerem Umfang auch in seinem Unterricht. Er trug nicht nur die Inhalte seiner *Anfangsgründe* vor, sondern unterstützte seine Ausführungen – zumindest im Rahmen der angewandten Mathematik – auch mit visuellen Hilfsmitteln in Form von Instrumenten und Modellen.[611]

Neben dem Aspekt der Veranschaulichung der theoretischen Inhalte kommt noch ein weiterer Aspekt zum Tragen, nämlich die Motivation der Schüler, die für Kästner ein wichtiges Element im Unterricht darstellt. Mit der Frage „wie man dem Jungen Lust macht, etwas zu lernen, wozu er keine Lust hat“[612] befasste sich Kästner auch in dem bereits erwähnten Brief an Campe. Eine Möglichkeit, die Arbeitslust zu wecken, stellen Konstruktionsaufgaben dar, denn „gewöhnlich haben Kinder Lust Figuren zu machen, und so läßt sich diese Lust leicht zu geometrischen Figuren leiten“[613]. Ist die Lernfreude erst einmal geweckt, so fällt das weitere Lernen nicht schwer. Kästner schreibt hierzu: „Ich darf doch auch wol sagen, daß einem Knaben, der sonst Kopf und Neigung zur Geometrie hat, in den ersten vier Büchern Euklids kein Beweis zu schwer seyn wird, wenn des Lehrers Vortrag gehörige Deutlichkeit und Lebhaf-

[610] Kästner, Einige Anecdoten. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 41. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.

[611] Vgl. Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 45 f.

[612] Kästner, Einige Anecdoten. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 40.

[613] Kästner, Ueber die Art. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 257.

tigkeit hat, und der Lernende die Figur selbst zeichnet. Bei der Zeichnung fühlt man wie immer Eins das Andere bestimmt, und wird also auf die Gedanken gebracht, die zum Beweise führen“[614]. Der Lernende soll also eigenständig zum Beweis geführt werden, statt diesen nur diktiert zu bekommen. Daher sind die Abbildungen in Kästners *Anfangsgründen* oft mit geometrischen Konstruktionen verbunden. Hierbei handelt es sich nicht um Konstruktionsaufgaben im engeren Sinne, bei denen der Leser zur selbstständigen Anfertigung einer Konstruktion aufgefordert wird. Vielmehr gibt Kästner die einzelnen Konstruktionsschritte an und verweist auf die entsprechende Abbildung. Im Falle des Lehrsatzes, der auch gleichzeitig die Aufgabe darstellt, wie man ein gleichseitiges Dreieck über eine gegebene Linie konstruieren kann, enthält die korrespondierende Abbildung auch einen Hinweis auf den Lösungsweg, denn es ist nicht nur die Strecke AB und das gleichseitige Dreieck ABC wiedergegeben, sondern auch noch die Verlängerung der Strecke sowie zwei Kreisteile (siehe Abbildung 16). So kann der Leser zugleich einen Eindruck vom Ergebnis und vom Lösungsweg dieser Aufgabe gewinnen. In der dargestellten Auflösung beschreibt Kästner dann das Vorgehen: Man solle mit dem Radius AB Kreise um die Punkte A und B ziehen, welche sich dann in einem Punkt C treffen. C wird mit A und B verbunden, so dass das gesuchte Dreieck entsteht.

1. Satz. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie AB ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben 29. Fig.

Aufl. Man beschreibe aus den Mittelpuncten A, B, mit den Halbmessern AB, BA, Kreise, die einander in C schneiden; (2. Foder.) und ziehe nach C von A, B, gerade Linien; (1. Foder.) so ist ACB das verlangte Dreyeck.

Bew. Wenn es einen Durchschnitt C giebt, so ist AC = AB (13. Erkl.) = BC;

Daß es aber einen Durchschnitt giebt, erhellt so: Man verlängere AB, bis BD = AB (1. Foder.) so geht der Kreis um B, durch D (13. Erkl.) einen Punct auserhalb des Kreises um A, (weil AD = 2AB) und auch durch A, einen Punct innerhalb desselben; folglich schneidet er jenen Kreis (7. Grunds.).

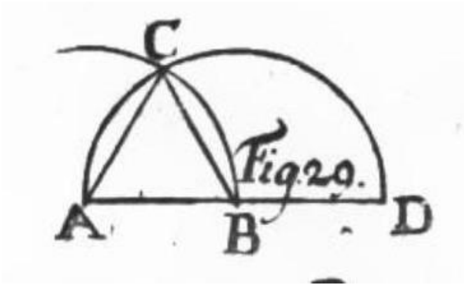


Abbildung 16: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, S. 190 und Fig. 29.

3.3.9 Verbindung von Forschung und Lehrbuch

Die Arbeit an den heutigen Universitäten zeichnet sich durch die Synthese von Forschung und Lehre aus. Der Unterschied zum 18. Jahrhundert besteht darin, dass damals die Lehre von der Forschung getrennt war. Während die wissenschaftliche Forschung an Akademien stattfand, verpflichteten sich die Universitäten hauptsächlich der Lehre.[615] Neben anderen Merkmalen moderner Universitäten war aber auch schon das Bestreben, Forschung und Lehre zu vereinigen, an den Aufklärungsuniversitäten Göttingen und Halle spürbar.[616] Vor allem Münch-

[614] Kästner, Ueber die Art. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 263.
[615] Vgl. Grau, S. 16.
[616] Vgl. Krause, S. 553 f.

hausen setzte für die Universität Göttingen einen Schwerpunkt auf die Forschung.[617] Die These, die daraus resultiert, lautet, dass die Grenze zwischen Forschung und Lehre bereits zu diesem Zeitpunkt an manchen Orten zu verwischen begann. Dies gibt Anlass zu der Frage, ob und wenn ja auf welche Weise Kästner, der 44 Jahre als ordentlicher Professor für Mathematik und Naturlehre in Göttingen wirkte, die mathematische Forschung in seinen Lehrbüchern berücksichtigte. Kästner war zwar in erster Linie Universitätsprofessor, aber offensichtlich auch an dem Fortschritt der mathematischen Wissenschaften interessiert. Dies zeigt sich nicht nur durch seine zahlreichen Mitgliedschaften in wissenschaftlichen Gesellschaften seiner Zeit, sondern auch an mathematischen Schriften, die er veröffentlichte.

Einen ersten Hinweis darauf, dass Kästner die mathematische Forschung in seinen *Anfangsgründen* berücksichtigte, liefert uns die Tatsache, dass er auf weiterführende Literatur verwies. Auch historische Anmerkungen, die an verschiedenen Stellen der *Mathematischen Anfangsgründe* zu finden sind, können den Leser in zeitgenössische Forschungsprobleme einführen, wie beispielsweise an Kästners Ausführungen zum Parallelenpostulat ersichtlich wird.

Kästner ging aber auch inhaltlich weiter als es in einführenden Lehrbüchern üblich war. So schreibt er in der Vorrede seiner *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*: „Die anfangs angezeigte Absicht[618] meines Lehrbuchs nöthigte mich von verschiedenen Dingen zu handeln, die man bisher eben nicht in den Anfangsgründen der Algebra angetroffen hat. Ich habe mich dabey vornehmlich der Schriften eines Gelehrten bedient, der mit gleicher Geschicklichkeit, sich zu Anfängern herabzulassen, und die grössten Meister zu lehren weiß. Weil ich hier Leser zum voraussetzen [sic] darf, die noch wenig Kenntniß von der höhern Mathematik haben, so ist mir erlaubt hinzuzusetzen, daß es Herr Euler ist“[619]. Obwohl Kästner oft auf Eulers Schriften zurückgriff, verwendete er für seine Ausführungen auch Werke anderer Mathematiker. Für die *Anfangsgründe der höhern Mechanik* stützte sich Kästner in erster Linie auf die Schriften von Euler, Joh. Bernoulli und Jean le Rond d'Alembert (1717-1783).[620] Für die *Anfangsgründe der Hydrodynamik* lagen neben Eulers Schriften vor allem diejenigen von Joh. Bernoulli über Hydraulik zugrunde.[621] An dieser Stelle wird auch deutlich, dass Kästner die Inhalte nicht unkritisch übernahm, sondern er betont, dass er oft nicht einer Meinung mit Joh. Bernoulli gewesen sei und entsprechende Stellen mit Anmerkungen versehen habe.

Kästner war sehr darauf bedacht, neu erschienene Literatur anzugeben. Er beschränkte sich allerdings nicht nur darauf, sie als Literaturverweise anzufügen, sondern verwandte sie auch, um seine Lehrbücher inhaltlich zu aktualisieren. So heißt es in der Vorrede der zweiten Auflage seiner *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*: „Endlich konnten einige neuere Schriften besonders Hr. Eulers Institutiones Calculi Integralis mir Materie zu Vermehrungen darbieten“[622]. In der Sekundärliteratur werden vor allem Kästners *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* gelobt, da sie das erste deutschsprachige Lehrbuch auf diesem

[617] Vgl. Schindling, Die protestantischen Universitäten. In: Hammerstein, S. 17.

[618] Nämlich die Lernenden „so vorzubereiten, daß sie ihre Erkänntniß aus andern analytischen Schriften ohne Anstoß zu erweitern im Stande wären“. In: Kästner, AG 3.1., Vorrede, S. iii f.

[619] Kästner, AG 3.1., Vorrede, S. vii f.

[620] Vgl. Kästner, AG 4.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. vii f.

[621] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 4.2., Vorrede, S. *3^{v} f.

[622] Kästner, AG 3.2., Erinnerung bey der zweyten Ausgabe, S. xvi.

Gebiet waren.[623] Auch in einer Rezension wird Kästners Leistung gewürdigt. Er habe sich bemüht die Rechnungen schärfer zu erweisen als in Lehrbüchern anderer Autoren.[624] In die Ausführungen zur Analysis flossen auch Betrachtungen von Nicolaus Bernoulli (1687-1759), Euler und Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) mit ein, „darunter sich auch Hr. Nicolaus Bernoullis allgemeine Art befindet, die Hr. Daniel Bernoulli dem Herrn K. schriftlich mitgetheilt hatte“[625]. Diese Bemerkung ist insofern interessant, da daraus hervorgeht, dass Kästner mit D. Bernoulli (1700-1782) in Kontakt stand und dass Kästner Themen, über die er sich in Korrespondenz mit Mathematikern austauschte, in einem Lehrbuch dargestellte.

Kästner nahm Schriften bekannter Mathematiker als Grundlage für seine *Anfangsgründe*, wobei anzunehmen ist, dass er die Inhalte nicht einfach nur übernahm, sondern sie so anpasste, dass sie für Anfänger geeignet waren. In Forschungsmonographien werden die Inhalte anders dargestellt als in Lehrbüchern. So bemerkt auch Kästner in Bezug auf Euler, dass dieser in seinen Werken einen zu hohen Maßstab angelegt habe, da er wohl nicht daran gedacht habe, dass auch Anfänger seine Werke lesen würden.[626] Zugleich hat Kästner die Werke von Euler zur Mechanik, die er als Vorlage für seine Lehrwerke verwendete, auf diese Weise einem breiteren Personenkreis bekannt gemacht.[627] Kästner griff nicht nur auf Lehrbücher anderer Autoren, sondern auch auf seine eigenen Arbeiten zurück. So lassen sich einige mathematische Schriften ausfindig machen, die er später in seine *Anfangsgründe* integrierte. Kästner schreibt in der Vorrede seiner *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*, dass er „den Inhalt verschiedener von mir seit vielen Jahren herausgegebenen Abhandlungen in gegenwärtiges Werk gebracht“[628] hat. Ebenfalls in diesem Band seiner *Anfangsgründe* kann man Teile aus seiner Dissertation finden, nämlich in §§ 310 f.[629] Seine Schriften *Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series* (1743) und *De resolutione aequationum differentialium per series* (1745) baute Kästner später in seine *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* (³1794, S. 417 ff.) ein.[630]

Ob und wie Kästner die Inhalte der Forschungsmonographien für seine *Anfangsgründe* anfängergerecht modifizierte, ist noch zu untersuchen. In der vorliegenden Arbeit werden wir in Kapitel 4 lediglich einen kurzen Einblick geben können, in wie weit Kästner Themen, zu denen es im 18. Jahrhundert Diskussionsbedarf gab (nämlich die negativen Größen sowie das Parallelenpostulat), darstellte, wobei Kästners Ausführungen mit denen anderer Lehrbuchautoren verglichen werden.

---

623 Vgl. Müller, C. H., S. 65.
624 Vgl. GGA, 1761, 3. St., S. 17.
625 GGA, 1761, 3. St., S. 20.
626 Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 55.
627 Vgl. Hund, S. 25.
628 Kästner, AG 3.1., Vorrede, S. ix.
629 Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 57 f.
630 Vgl. Kästner, Vita, S. XX.

3.4 Verwendung, Verbreitung und Ansehen der „Mathematischen Anfangsgründe"

Ein Blick auf die Verwendung und Verbreitung der *Mathematischen Anfangsgründe* kann Aufschluss über die Aussage Michelsens geben, dass Kästner der „Lehrer Deutschlands" in der Mathematik gewesen sei.[631] Jördens sieht Kästners *Anfangsgründe* als einen entscheidenden Beitrag zur „Vervollkommung und Erweiterung des mathematischen Studiums"[632] an. Diese Bemerkungen führen zu der These, dass Kästner mit seinem Lehrwerk einen Standard im Bereich der mathematischen Lehre setzte. Dass er seine *Anfangsgründe* nicht einfach aus Prestigegründen publizierte, sondern sich intensiv Gedanken über einen sinnvollen Aufbau, die Pädagogik seiner Zeit und einen effektiven mathematischen Unterricht machte, zeigen die obigen Ausführungen.

Es liegt auf der Hand, dass Kästner mit seinem Lehrwerk in erster Linie mathematische Kenntnisse verbreiten wollte, so wie er es in der Vorrede seiner *Anfangsgründe der Arithmetik* betonte. Dass ihm dies auch gelungen ist, kann an verschiedenen Merkmalen festgemacht werden. Hierzu zählen nicht nur die Auflagenanzahl der einzelnen Bände der *Anfangsgründe* selbst, sondern auch Rezensionen und weitere Aussagen von Zeitgenossen.

Zunächst lässt sich festhalten, dass Kästners *Anfangsgründe* einen großen Erfolg hatten, was man bereits an der Anzahl ihrer Auflagen und ihrer Wirkungsdauer sehen kann. Selbst 40 Jahren nach dem Erscheinen der Erstauflage wurden die *Anfangsgründe der Arithmetik* neu aufgelegt. Dies deutet darauf hin, dass vor allem dieser Band zur reinen Elementarmathematik häufig verwendet wurde.

Einen wichtigen Anhaltspunkt zur Verwendung von Kästners *Anfangsgründen* liefern uns die Vorlesungsverzeichnisse verschiedener deutscher Universitäten. Für unsere knappe Untersuchung griffen wir auf die Vorlesungsverzeichnisse der Universitäten Göttingen, Leipzig, Braunschweig[633], Freiburg, Gießen, Heidelberg, Ingolstadt/Landshut und Kiel zurück. Wir konzentrierten uns auf den Zeitraum von 1758 – dem Zeitpunkt der Erstauflage von Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik* – bis in das erste Drittel des 19. Jahrhunderts. Problematisch ist jedoch, dass in den Vorlesungsankündigungen oft die Information fehlt, welche Lehrbücher als Vorlesungsgrundlage verwendet wurden, so dass die Ausführungen unvollständig bleiben.

Wie wir in Kapitel 2.3.2 bereits gezeigt haben, verwendeten nahezu alle Mathematikdozenten an der Universität Göttingen Kästners Lehrbücher, vor allem für Vorlesungen zur reinen Mathematik. Klein hob die Stellung von Kästners *Anfangsgründen* hervor, indem er schrieb, dass sie „in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts in Göttingen eine führende Stellung"[634] hatten. Neben Kästners *Anfangsgründen* wurden an der Universität Göttingen noch andere Lehrbücher benutzt, vor allem Wolffs *Auszug*. So bot Magister Eberhard an der Universität Göttingen regelmäßig zwei Vorlesungen zur reinen Mathematik an, wobei er für die eine Wolffs *Auszug* und für die andere Kästners *Anfangsgründe* benutzte.[635] Kästners Werke wa-

[631] Vgl. Müller, C. H., S. 58.
[632] Jördens, Denkwürdigkeiten, Artikel „Abraham Gotthelf Kästner", S. 55.
[633] Von 1745 bis 1862 als Collegium, danach als polytechnische Schule geführt.
[634] Klein, S. 81.
[635] Vgl. beispielsweise GGA, 1785, 46. St., S. 458.

ren nicht die einzigen erfolgreichen Lehrbücher. So schreibt er selbst, dass die Lehrbücher von Segner und Karsten über die reine Elementarmathematik, die etwa zeitgleich mit Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik* erschienen, großen Anklang in Deutschland gefunden hätten.[636]

Für die Untersuchung der Vorlesungsverzeichnisse der Universität Leipzig greifen wir auf die Auswertung von Kühn zurück. Sie stellte fest, dass Kästners Lehrbücher neben denen von Karsten und Wolff dort am meisten verwendet wurden.[637] Die detaillierten Auflistungen zeigen, dass Kästners Lehrbücher zwischen WS 1777 und WS 1790 von einigen Professoren für nahezu alle Gebiete der reinen und angewandten Mathematik gebraucht wurden.[638] Von den in diesem Zeitraum insgesamt zwölf Leipziger Dozenten, die reine Mathematik lasen, benutzte die Hälfte die Lehrwerke von Kästner; bei den insgesamt acht Dozenten, die über angewandte Mathematik lasen, waren es drei.

Für die übrigen genannten Universitäten sahen wir die digitalisierten und online zugänglichen Vorlesungsverzeichnisse ein. Diejenigen der Technischen Universität Braunschweig stehen uns ab WS 1745/46 zur Verfügung und wurden für die folgenden Ausführungen verwendet.[639] Für die dort angebotenen mathematischen Vorlesungen wurden unterschiedliche Lehrbücher gebraucht, beispielsweise von Wolff, Segner, Karsten, Clairaut, Bélidor und Euler. Kästners Lehrbücher wurden nachweislich für Vorlesungen zur reinen Mathematik und zur Algebra zugrunde gelegt. Professor Oeder verwendete bereits im WS 1760/61 Kästners Lehrbuch zur Algebra, welches kurz zuvor erschienen war. Professor Eberhard August Wilhelm von Zimmermann nutzte für Vorlesungen zur reinen Mathematik zunächst die Lehrwerke von Segner, ab dem SS 1775 dann diejenigen von Kästner. Die Algebra las er hingegen nach Euler, ohne nähere Angabe, um welches Werk es sich handelte. Zum letzten Mal werden Kästners Lehrbücher ausdrücklich im Vorlesungsverzeichnis für das SS 1792 genannt.

Die Vorlesungsverzeichnisse für die Universität Freiburg können ab dem Jahr 1785, jedoch noch nicht vollständig, eingesehen werden.[640] Der einzige Dozent, der unter anderem nach Kästners *Anfangsgründen* las, war der außerordentliche Professor Seipel. Er verwendete sie nachweislich von SS 1811 bis WS 1813/14 für Vorlesungen über sphärische Trigonometrie, Lage von Ebenen, Kugelschnitte, Kegelschnitte und analytische Trigonometrie.

Der Bestand an digitalisierten Vorlesungsverzeichnissen der Universität Gießen, die für die folgenden Ausführungen eingesehen wurden, ist sehr umfangreich.[641] Allerdings enthalten sie nicht immer die Information, welches Lehrbuch für die jeweilige Vorlesung verwendet wurde. Im 18. Jahrhundert las Professor Andreas Böhm (1720-1790) die reine und angewandte Mathematik vor allem auf Grundlage von Wolffs Werken. Am Ende des 18. Jahrhunderts und zu Beginn des 19. Jahrhunderts hielten Georg Gottlieb Schmidt (1768-1837) und Friedrich Wilhelm Daniel Snell (1761-1827) mathematische Vorlesungen. Schmidt las vom SS 1790 bis WS 1795/96 die angewandte Mathematik nach Kästner; für die reine Mathematik verwendete er die Lehrbücher von Klügel. In den folgenden Jahren benutzte er dann seine eigenen

[636] Vgl. Kästner, AG 1.1., Erinnerung bey der zweyten Auflage, S. **^{r}.
[637] Vgl. Kühn, S. 72 f.
[638] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kühn, Anlage 4.2., 4.3., 4.5.
[639] Siehe http://www.biblio.tu-bs.de/universitaetsarchiv/bestaende/vorlesungsverzeichnisse.html (8.5.2014).
[640] Siehe http://www.ub.uni-freiburg.de/?id=123 (8.5.2014).
[641] Siehe http://geb.uni-giessen.de/geb/schriftenreihen?sr_id=6&la=de (8.5.2014).

Lehrbücher. Snell bot im WS 1789/90 eine Vorlesung über die Analysis des Endlichen und Unendlichen nach Kästner an.

Im Fall der Universität Heidelberg finden wir in den Vorlesungsverzeichnissen keinen Hinweis darauf, dass Kästners Lehrwerke verwendet wurden, dafür aber die Werke von Wolff und Clemm.[642]

Die Vorlesungsverzeichnisse für die Universitäten Ingolstadt und Landshut stehen ab dem Jahr 1780 zur Verfügung und liegen den folgenden Ausführungen zugrunde.[643] Die Universität Ingolstadt wurde im Jahr 1800 nach Landshut verlegt und im Jahr 1826 nach München.[644] Im 18. Jahrhundert wurden dort vor allem die Lehrbücher von Karsten und Clemm für mathematische Vorlesungen verwendet. Von 1800 bis SS 1812 hielt Professor Maurus Magold (1761-1837) Vorlesungen über reine Mathematik, ebene und sphärische Trigonometrie, optische Wissenschaften und angewandte Mathematik auf Grundlage von Kästners *Anfangsgründen*. Danach benutzte er seine eigenen Lehrbücher. Professor Konrad Dietrich Martin Stahl (1771-1833) verwendete für seine Vorlesungen zur angewandten Mathematik Kästners Lehrbücher, und zwar vom WS 1815/16 bis WS 1821/22 und im WS 1825/26.

Die Vorlesungsverzeichnisse der Universität Kiel können, bis auf wenige Lücken, ab dem Jahr 1665 eingesehen werden.[645] Nachweislich wurden Kästners *Anfangsgründe* für die Vorlesungen zur reinen und angewandten Mathematik an der Universität Kiel ab dem SS 1770 verwendet, und zwar von Professor Jöns Matthias Ljungberg. Auch Professor Johannes Nikolaus Tetens (1736-1807) benutzte Kästners Werke für die Lehre der reinen und angewandten Mathematik, aber auch diejenigen von Wolff und Karsten. Friedrich Valentiner (1756-1813) verwendete neben den Lehrbüchern von Wolff auch diejenigen von Kästner. Die letzte Nennung von Kästners Lehrbüchern war im Vorlesungsverzeichnis für das SS 1804, in dem der außerordentliche Professor Reimer Kästners Lehrwerk verwendete. In den danach erschienen Vorlesungsverzeichnissen fehlt die Nennung der für die mathematischen Vorlesungen zugrunde gelegten Werke.

Da wir nur eine kleine Auswahl an deutschen Universitäten betrachtet haben, kann unsere Auswertung der Vorlesungsverzeichnisse keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Kästners *Anfangsgründe* wurden scheinbar nicht an allen Universitäten verwendet, wie am Beispiel der Universität Heidelberg zu sehen ist – und wenn doch, dann wurden die Lehrwerke in den entsprechenden Vorlesungsverzeichnissen nicht genannt. Blicken wir auf die geographische Lage der einzelnen von uns betrachteten Universitäten, an denen Kästners Lehrbücher nachweislich für mathematische Vorlesungen gebraucht wurden, so können wir festhalten, dass sie im gesamten deutschen Gebiet des 18. und teilweise 19. Jahrhunderts verbreitet waren. An der Universität Landshut beispielsweise fanden Kästners Lehrbücher noch etwa 25 Jahre nach seinem Tod Verwendung.

Es steht die These im Raum, dass Kästners *Anfangsgründe* die *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften* von Wolff verdrängten.[646] Allerdings können wir diese Aussage auf Grundlage unserer knappen Untersuchung nicht vollkommen bestätigen, da Wolffs

[642] Siehe http://www.ub.uni-heidelberg.de/helios/digi/unihdvorlesungen1784-1930.html (8.5.2014).
[643] Siehe http://epub.ub.uni-muenchen.de/view/lmu/vlverz.html (8.5.2014).
[644] Vgl. Frijhoff, Grundlagen. In: Rüegg, Bd. 2, S. 82.
[645] Siehe http://www.uni-kiel.de/journals/receive/jportal_jpjournal_00000001?XSL.view.objectmetadata.SESSION=false (8.5.2014).
[646] Vgl. Murhard, Bd. 1, S. 71.

Lehrbücher auch nach dem Erscheinen von Kästners Lehrbüchern immer noch viel verwendet wurden. Allerdings wurde durch das Erscheinen neuer Lehrbücher in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts Wolffs Lehrbüchern die Monopolstellung streitig gemacht. Für eine Bestätigung dieser Aussage müsste eine systematische Untersuchung von sämtlichen Vorlesungsverzeichnissen vorgenommen werden. Möglicherweise kann man hierbei auch regionale Präferenzen für einen bestimmten Autor erkennen. In unserer Untersuchung konnten wir keine Tendenz zu einem bestimmten Lehrbuch festmachen. Vielmehr scheinen die Dozenten reflektiert zu haben, welches Lehrbuch sie für welche Zwecke nehmen konnten, denn einige Dozenten verwendeten unterschiedliche Lehrbücher für verschiedene Bereiche der reinen und angewandten Mathematik, wie es bei Seipel der Fall war.

Müller stellte die These auf, dass Kästners Lehrbücher als Vorbild für weitere Lehrbücher dienten.[647] Aus diesem Grund ist es interessant, Kästners indirekten Einfluss auf weitere Lehrbuchautoren zu untersuchen. Einen Anhaltspunkt, welche Lehrbücher mit den *Anfangsgründen* von Kästner verglichen werden können, bieten uns die Vorlesungsverzeichnisse. Wir konnten feststellen, dass einige Dozenten so lange nach Kästners *Anfangsgründen* lasen, bis sie eigene Lehrbücher herausbrachten, beispielsweise Schmidt an der Universität Gießen.

Nicht nur an den Universitäten, sondern auch außerhalb dieser Institution wurden Kästners *Anfangsgründe* verwendet, sei es als Vorbereitung auf das Studium oder in autodidaktischen Studien. Kästner schreibt in seiner Vorrede zur zweiten Auflage seiner *Anfangsgründe der Arithmetik*, dass der junge Sohn eines Kaufmanns in der Nähe von Halle nach seinen *Anfangsgründen* unterrichtet wurde.[648] Lichtenberg kam mit Kästners *Anfangsgründen* bereits in einer „Selecta“, einer Zusatzklasse der Gelehrtenschule in Darmstadt in Berührung, um auf das Studium vorbereitet zu werden.[649] Darüber hinaus wurden sie auch für autodidaktische Studien benutzt. Bolzano erlernte einige mathematische Inhalte mit Hilfe von „Kästners vortrefflichem Lehrbuche“[650]. Auch Gauß erwarb bereits vor Beginn seines Studiums Kästners *Anfangsgründe*, die er eigenständig durcharbeitete. Allerdings sind einige Stellen der Bücher mit sehr kritischen Bemerkungen versehen, die darauf schließen lassen, dass Gauß Kästner für einen schlechten Mathematiker hielt.[651]

Eine Auflage, die nicht von Kästner selbst stammt, wurde 1783 und 1788 in Wien beim Verlag Trattner unter dem Titel *Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv* veröffentlicht. Es findet sich allerdings kein Hinweis darauf, dass Kästner von dieser Auflage wusste. Auch eine anonyme russische Übersetzung von Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik* erschien 1794 in Petersburg.[652]

Kästners Zeitgenossen lobten seine *Mathematischen Anfangsgründe*. Der unbekannte Verfasser des Artikels in den *Allgemeinen geographischen Ephemeriden* zählt die mathematischen Werke Kästner gar nicht erst auf, „da sie in jedermanns Händen sind“[653]. Cantor äußerte sich in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (4 Bde., 1880-1908) über

[647] Vgl. Müller, C. H., S. 58.
[648] Vgl. Kästner, AG 1.1., Erinnerung bey der zweyten Auflage, S. **3^{r}.
[649] Vgl. Artikel „Lichtenberg, Georg Christoph“ von Wolfgang Proß und Claus Priesner in: NDB, Bd. 14 (1985), S. 450.
[650] Bolzano, Beyträge, Vorrede, S. xi.
[651] Vgl. Reich, Mathematik der Aufklärung. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 80
[652] Vgl. GGA, 1796, 177. St., S. 1766 sowie Murhard, Bd. 1, S. 71.
[653] AGE, 1799, 4. Bd., 4. St., Artikel „Abraham Gotthelf Kästner“, S. 377.

die Verbreitung von Kästners Schriften, dass sie von jedem deutschen Mathematiker gelesen werden.[654] Nicht nur Bolzano bezeichnete Kästners Lehrbücher als „vortrefflich“, sondern auch Karsten erwähnt Kästners „vortreffliche[…] Anfangsgründe der Geometrie“[655]. Karsten geht sogar noch weiter und lobt Kästner als Mathematiker, indem er ihn in Bezug auf dessen *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* einen „der grösten Meister in der mathematischen Erfindungskunst“[656] nennt. Vor allem Kästners Lehrbücher zur höheren reinen Mathematik, nämlich zur Algebra und Analysis, hatten eine große Wirkung, da es bis zu diesem Zeitpunkt noch kein deutschsprachiges Lehrwerk zu diesen Themen gab. Kästners Werk lösten das Lehrbuch zur Algebra *Élémens d'Algébre* von Clairaut ab.[657]

Kästners Lehrwerke waren weit verbreitet und wurden nicht nur an deutschen Universitäten und Schulen, sondern auch für autodidaktische Studien verwendet. Die hier aufgeführten Belegstellen zu Kästners *Anfangsgründen* deuten darauf hin, dass er mit seinen Lehrbüchern einen Standard in Richtung Vereinheitlichung der mathematischen Lehre schaffen wollte. Um diese These allerdings vollständig belegen zu können, bedarf es des Vergleichs mit weiteren Lehrbüchern, ihrer Verwendung und ihres Ansehens, was allerdings in der vorliegenden Arbeit, in der Kästner und sein Lehrwerk im Zentrum stehen, nur eingeschränkt erfolgen kann.

3.4.1 Rezensionen

Um einen Überblick über die Urteile der Zeitgenossen über Kästners *Anfangsgründe* zu erhalten, dienen Rezensionen. Sie machen neu erschienene Literatur einem weiten Personenkreis bekannt und können neben reinen Inhaltsangaben auch Wertungen der Werke beinhalten. Rezensionen findet man in unterschiedlichen Journalen; sie wurden in der Regel anonym verfasst. Im Folgenden gebe ich eine Liste der von mir gefundenen Rezensionen über die einzelnen Bände von Kästners *Anfangsgründen* wieder. Die einzelnen Bände dieses Lehrbuchs werden jeweils mit ihrem „Theil“ und ihrer „Abtheilung“ gekennzeichnet (siehe Abbildung 10). Am Ende der Literaturangabe, wo man die Rezension findet, steht die Auflage des jeweiligen Bandes auf die sich die Rezension bezieht, sofern es sich nicht um die erste Auflage handelt. Für die Rezensionszeitschriften werden die Abkürzungen verwendet, wie sie im Quellen- und Literaturverzeichnis auf Seite 320 zu finden sind.

<u>Mathematische Anfangsgründe 1.1.</u>

- GGA, 1758, 120. St., S. 1137-1141.
- GGA, 1763, 112. St., S. 897-899; 2. Auflage.
- GGA, 1774, 120. St., S. 1025 f.; 3. Auflage.
- GGA, 1786, 201. St., S. 1217 f.; 4. Auflage.
- LGZ, 1787, 4. St., S. 63 f.; 4. Auflage.
- GGA, 1792, 173. St., S. 1729 f.; 5. Auflage.
- GGA, 1800, 76. St., S. 753; 6. Auflage.

[654] Vgl. Cantor, Bd. 4, S. 1096.
[655] Karsten, Beyträge, 3. St., S. 217.
[656] Karsten, Beyträge, 4. St., S. 275.
[657] Vgl. Müller, C. H., S. 65.

Mathematische Anfangsgründe 1.2.

- GGA, 1786, 21. St., S. 201-204.
- LM, 1786, 2. St., S. 256-260.
- LGZ, 1786, 6. St., S. 88-92.
- TGA, 1786, 34. St., S. 265-268.
- AdB, 1787, Bd. 73/II, S. 455-459.

Mathematische Anfangsgründe 1.3.

- GGA, 1789, 177. St., S. 1769-1775.
- AdB, 1790, Bd. 96/I, S. 148 f.
- ALZ, 1791, Bd. 3, Sp. 369-374.

Mathematische Anfangsgründe 1.4.

- GGA, 1791, 93. St., S. 929-936.

Mathematische Anfangsgründe 2.1.

- GGA, 1759, 50. St., S. 441-444.
- GGA, 1765, 50. St., S. 401 f.; 2. Auflage.
- GGA, 1781, 18. St., S. 137-139; 3. Auflage.
- GGA, 1792, 79. St., S. 785 f.; 4. Auflage.
- NADB, 1793, 5. Bd., 1. St., S. 226 f.; 4. Auflage.

Mathematische Anfangsgründe 2.2.

- GGA, 1792, 79. St., S. 785 f.; 4. Auflage.

Mathematische Anfangsgründe 3.1.

- GGA, 1760, 54. St., S. 465-468.
- GGA, 1767, 138. St., S. 1097; 2. Auflage.
- GGA, 1794, 46. St., S. 449-451; 3. Auflage.
- AM, 1795, Bd. 1, S. 233-235; 3. Auflage.
- NADB, 1796, 21. Bd., 2. St., S. 442-444; 3. Auflage.

Mathematische Anfangsgründe 3.2.

- GGA, 1761, 3. St., S. 17-21.
- GGA, 1770, 124. St., S. 1081 f.; 2. Auflage.
- JGZ, 1771, 62. St., S. 520; 2. Auflage.
- GGA, 1799, 28. St., S. 273-277; 3. Auflage.
- NADB, 1799, 47. Bd., 2. St., S. 448-453; 3. Auflage.
- ALZ, 1800, Bd. 1, Sp. 500-503; 3. Auflage.

Mathematische Anfangsgründe 4.1.

- GGA, 1765, 126. St., S. 1009-1012.
- AdB, 1769, 8. Bd., 2. St., S. 208-219. Rezension stammt von A. L. F. Meister.
- GGA, 1793, 31. St., S. 297-299; 2. Auflage.
- ALZ, 1796, Bd. 1, Sp. 816; 2. Auflage.

Mathematische Anfangsgründe 4.2.

- GGA, 1769, 96. St., S. 857-860.
- AdB, 1770, 13. Bd., 1. St., S. 68-84. Rezension stammt von A. L. F. Meister.
- GGA, 1797, 92. St., S. 905 f.; 2. Auflage.
- NADB, 1798, Bd. 37, II, S. 311-314; 2. Auflage.

In den Rezensionen werden vor allem der Inhalt und die von Kästner vorgenommenen Änderungen des rezensierten Werks dargestellt. In einigen Rezensionen finden wir darüber hinaus interessante Bemerkungen über Kästners *Anfangsgründe*, die ich im Folgenden vorstellen möchte. Insgesamt können wir festhalten, dass die Kritik zu Kästners Lehrbüchern durchweg positiv war.

Kästner zeichnete sich unter anderem dadurch aus, dass er die geometrischen Beweise in seinen *Anfangsgründen der Arithmetik* schärfer ausgearbeitet habe als andere Autoren.[658] Über die *Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendungen auf mancherley Geschäffte* schrieb der Rezensent a priori positiv, nämlich dass Kästner mit diesem Lehrbuch ein Geschenk gemacht habe und dass kein Liebhaber der Mathematik dieses Lehrbuch unberührt lassen dürfte.[659] Auch über den dritten Band von Kästners *Anfangsgründen*, nämlich die erste Sammlung der *Geometrischen Abhandlungen* heißt es: „Es gehört also mit zu der Absicht dieser Schrift; Fortgang der Wissenschaft durch Erfindung neuer Lehren zu verbreiten, indem durchgehends neue Kunstgriffe angegeben, und diese mit denen weitläufigern und öfters nicht einmal ganz richtigen Auflösungen der Vorfahren sind verglichen worden, so daß man nirgends den Geist des Verf. verkennen kann“[660]. Es wird deutlich, dass Kästner sich durch sein methodisches Vorgehen auszeichnete, wodurch auch die Möglichkeit bestand, neue mathematische Kenntnisse zu entdecken. In einer anderen Rezension zu diesem Band der *Anfangsgründe* wird eine weitere Eigenschaft von Kästner gewürdigt, nämlich seine umfangreichen literarischen Kenntnisse und dass er an zahlreichen Stellen auf weitere Literatur verweist – und dies war wohl in Deutschland zu diesem Zeitpunkt nicht gewöhnlich.[661] Dieses Charakteristikum wird auch in der Rezension zu den *Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen* gelobt: „Ueberall sind sehr viele litterärische Notizen beygebracht, wie man überhaupt bey den Kästnerischen Schriften gewohnt ist, deren Werth nicht erst unsers Lobes bedarf“[662].

Eine besondere Bedeutung erhalten Kästners *Anfangsgründe der höhern Mechanik* sowie seine *Anfangsgründe der Hydrodynamik*, da sie die ersten deutschsprachigen Lehrwerke zu diesen Themen waren.[663] Zudem erfahren wir in einer Rezension zum erstgenannten Werk auch etwas über das didaktische Vorgehen Kästners, nämlich dass er bei den Anfangsgründen stehen blieb, da er dachte, dass der Leser auf der Grundlage der vermittelten Kenntnisse selbstständig die Werke von Euler zu dem Thema lesen könnte.[664] Dies belegt, dass Kästner den Grundstein für eine weitere und selbstständige Beschäftigung mit der Mathematik legen

---

[658] Vgl. GGA, 1758, 120. St., S. 1138.
[659] Vgl. LGZ, 1786, 6. St., S. 88 f.
[660] AdB, 1790, Bd. 96/I, S. 149.
[661] Vgl. ALZ, 1791, Bd. 3, Sp. 370.
[662] NADB, 1796, 21. Bd., 2. St., S. 444.
[663] Zu den *Anfangsgründen der höhern Mechanik* vgl. GGA, 1765, 126. St., S. 1012; zu den *Anfangsgründen der Hydrodynamik* vgl. AdB, 1770, 13. Bd., 1. St., S. 68 f.
[664] Vgl. GGA, 1765, 126. St., S. 1011.

wollte. Des Weiteren wird der Unterschied zwischen Kästners *Anfangsgründen der Hydrodynamik* und Karstens *Lehrbegrif* aufgezeigt, der in dem unterschiedlichen Vorgehen liegt: „Er [Karsten] fängt von allgemeiner Theorie an, gegenwärtiger Verfasser [Kästner] von Erfahrungen. Das hat vermuthlich seiner Arbeit den Beyfall so vieler Mathematiker erworben, die seitdem über diesen Gegenstand gearbeitet haben, obgleich die Grenzen, die er sich setzte, nicht gestatteten, sich in Berechnung vieler einzelnen Maschinen einzulassen, wodurch Karsten bey größerer Ausdehnung seines Buches nützlich geworden“[665]. Die unterschiedliche Herangehensweise ist ein Kriterium für die Auswahl eines Lehrbuchs, so dass dadurch erklärt werden könnte, wieso unterschiedliche Lehrbücher als Vorlesungsgrundlage gewählt wurden, nämlich gemäß der verfolgten Absicht der Lehrer.

Die Auszüge aus den Rezensionen zeigen nicht nur ein durchgehend positives Bild über Kästners Lehrwerke, sondern auch gewisse Eigenarten des Verfassers bei der Darstellung der Inhalte, die ihn von anderen Autoren unterscheiden. Solche Unterschiede, die den Zeitgenossen durchaus bewusst waren, können Kästners Erfolg als Lehrbuchautor begründen. Bemerkenswert ist, dass es bereits zu den Erstauflagen der einzelnen Bände positive Rezensionen gibt. Auf diese Weise wurde er einem weiten Personenkreis bekannt gemacht und konnte sich als Lehrbuchautor etablieren.

3.5 Zusammenfassung

In seinen umfangreichen *Mathematischen Anfangsgründen* behandelte Kästner all diejenigen Disziplinen, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik gerechnet wurden. Sein übergeordnetes Ziel war es, die Mathematik unter den Deutschen zu verbreiten, die, wie Kästner in seinem *Commentarius* schreibt, zu diesem Zeitpunkt kein großes Ansehen besaß.[666] Aus diesem Grund war Kästner überzeugt, dass er erst einmal die Motivation zur Beschäftigung mit der Mathematik wecken musste. Er war sich bewusst, dass man nur Lust hat, etwas zu lernen, wenn die Nützlichkeit der Lehren offensichtlich ist.[667] Daher verweist Kästner bereits in den Vorreden seiner *Anfangsgründe* auf den Nutzen der Mathematik für andere Wissenschaften, für Verrichtungen im alltäglichen Leben und sogar für die Verstandes- und Persönlichkeitsbildung. Nicht nur die in dem Lehrwerk enthaltenen Aufgaben, sondern auch die Anmerkungen beinhalten praxisnahe Beispiele, so dass der Leser den Nutzen der mathematischen Lehren sieht. Um die Anfänger nicht abzuschrecken, kündigt Kästner an, dass er die Inhalte so darstellen wird, dass sie niemanden überanstrengen.[668] Auf diese Weise wird den Lesern die Angst genommen, dass die Inhalte zu schwierig sein könnten. Kästner beschränkte sich auf elementare Lehren und achtete darauf, dass die Inhalte nicht zu weitläufig werden. Dies ist ganz im Sinne von „Anfangsgründen“, die in eine bestimmte Wissenschaft einleiten und den Grundstein für weitere eigenständige Studien liefern sollen. Um die Lehren in einer zu diesem Zweck angemessenen Art darzustellen und um den Verstand entsprechend zu schulen, verwendete Kästner die mathematische Lehrart.

[665] GGA, 1797, 92. St., S. 905.
[666] Vgl. Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 39 f.
[667] Vgl. Kästner, Beschluß. In: BJ, 1788, 3. Bd., S. 6.
[668] Vgl. Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. iv f.

Die zahlreichen historischen Anmerkungen und Literaturangaben in seinem Lehrwerk zeugen davon, dass Kästner die Mathematik in universaler Weise überblickte. Diese umfassende Sicht gab Kästner in seinen *Anfangsgründen* weiter; er bot dem Leser so die Möglichkeit, sich selbstständig weitere Inhalte anzueignen. Mathematische Forschungsmonographien nannte Kästner nicht nur in den Literaturangaben, sondern verwendete diese Werke selbst als Grundlage für seine Ausführungen in den *Anfangsgründen*, wodurch diese Schriften wiederum bekannt wurden.

Kästner zeigte nicht nur ein großes Interesse an den mathematischen Wissenschaften, sondern auch an der Pädagogik seiner Zeit. Seine Äußerungen zu diesen Themen, allen voran die Forderung nach der Förderung des eigenständigen Denkens sowie nach der Loslösung von der dogmatischen Lehrart, lassen sich in das Gedankengut der Aufklärung einfügen, so dass Kästner durchaus als Aufklärer bezeichnet werden kann.[669] Seine *Anfangsgründe* sind nicht nur inhaltlich begründet und folgen vor allem durch die Hierarchie der mathematischen Wissenschaften sowie die Verwendung der mathematischen Lehrart einem sinnvollen Aufbau. Sie scheinen auch pädagogisch durchdacht, da sich eine Verbindung zwischen Kästners pädagogischen Äußerungen und den Ausführungen in seinen Lehrbüchern herstellen lässt. Darüber hinaus besteht eine enge Verbindung zwischen der Lehre und den *Anfangsgründen*, die Kästner für die mathematischen Vorlesungen konzipierte. Aus seinen eigenen Erfahrungen im Umgang mit seinem Werk schöpfte er neue Verbesserungsmöglichkeiten, die er in die Neuauflagen miteinbaute. Nicht nur hinsichtlich der Methodik, sondern auch hinsichtlich der Inhalte war er bestrebt, seine Lehrbücher auf dem aktuellen Stand der Forschung zu halten – ein Merkmal, das seine *Anfangsgründe* von Wolffs *Anfangs=Gründen* unterscheidet.

Die dargestellten Merkmale sprechen für Kästners Verständnis als Universitätslehrer, der ein tiefes Interesse an der mathematischen Lehre seiner Zeit hatte. Er beschränkte sich nicht nur darauf die elementaren Lehren, wie es für „Anfangsgründe“ üblich war, darzustellen, sondern stellte die mathematischen Wissenschaften auf eine universale Weise dar und gab dem Leser Hilfsmittel zur eigenständigen Auseinandersetzung mit der Mathematik an die Hand.

Der Erfolg von Kästners Lehrbüchern lässt sich an ihrer Verbreitung ablesen. Die einzelnen Bände der *Anfangsgründe*, die teilweise bis zu sechs Auflagen erfuhren, wurden nicht nur an deutschen Universitäten, sondern auch für Selbststudien verwendet. Kästners Zeitgenossen lobten den Wert seiner Lehrbücher. In welchen Punkten sich Kästners *Anfangsgründe* von den Lehrbüchern anderer Autoren unterscheiden und gleichzeitig ihren Erfolg erklären können, muss noch eingehend untersucht werden.

[669] Auch Baasner wählte als Untertitel seines bio-bibliographischen Werks über Kästner den Begriff „Aufklärer“.

4 Kästner im Vergleich mit anderen Autoren

Während im vorangegangenen Kapitel Kästners *Mathematische Anfangsgründe* im Zentrum der Betrachtung standen, geht es nun um einen Vergleich zwischen Kästner und anderen zeitgenössischen Lehrbuchautoren. Dieser soll mit Hilfe der folgenden Fallstudien geschehen:

- Die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften
- Negative Größen
- Parallelenpostulat
- Fortifikation.

Durch die metamathematische Untersuchung der Klassifikation der mathematischen Wissenschaften wird die Frage beantwortet, welche Themen damals zur Mathematik gerechnet wurden und wie die Mathematik eingeteilt war. Die drei weiteren Untersuchungen decken Themen aus der reinen und angewandten Mathematik ab. Über die negativen Größen aus dem Bereich der Arithmetik und das Parallelenpostulat aus dem Bereich der Geometrie gab es im 18. Jahrhundert in einzelnen Punkten Klärungsbedarf, so dass bei diesen Themen die Frage naheliegt, ob und wie die Lehrbuchautoren die entsprechenden Schwierigkeiten darstellten. Durch die Hinzuziehung einzelner Monographien und Schriften zu den jeweiligen Themen wird auch die Frage tangiert, ob und auf welche Weise die Lehrbuchautoren die zeitgenössischen fachmathematischen Diskussionen in ihren Werken berücksichtigten und die Lehrwerke dem aktuellen Stand der Forschung entsprachen. Bei der Fortifikation handelt es sich um ein Thema, das damals zur angewandten Mathematik gehörte, heute jedoch nicht mehr zur Mathematik gerechnet wird, so dass es interessant ist, wie die Autoren die Fortifikation in ihren Lehrbüchern darstellten.

Bei den Fallstudien werden zunächst Kästners *Anfangsgründe* untersucht und seine Ausführungen mit denen anderer ausgewählter Lehrbuchautoren verglichen. Es werden diejenigen zeitgenössischen Lehrbücher zum Vergleich genommen, die Kästners *Anfangsgründen* ähnlich sind, also in erster Linie von Professoren der Mathematik geschrieben und an deutschen Universitäten verwendet wurden sowie bekannt waren. Dadurch kann davon ausgegangen werden, dass die Inhalte dieser Lehrbücher einen großen Teil der Studierenden erreichten. Diese Kriterien erfüllen die Lehrbücher von Sturm, Wolff, Segner, Clemm und Klügel, aber auch andere, die auszugsweise herangezogen werden. Die Ausführungen sind chronologisch nach dem Ersterscheinen der Werke geordnet, wobei die Inhalte aus Kästners *Anfangsgründen*, die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen, zuerst vorgestellt werden.

Das Ziel der Untersuchung ist es herauszufinden, ob und wie Kästners *Anfangsgründe* sich von anderen zeitgenössischen Lehrwerken unterschieden. Somit soll gleichzeitig Kästners Stellung und Ansehen in Bezug auf die Vervollkommnung der mathematischen Lehre, die von Zeitgenossen erwähnt wurden, erörtert werden.[670]

[670] Vgl. beispielsweise Schlichtegroll, Artikel „Abraham Gotthelf Kästner", S. 203 f.

4.1 Die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften

In den mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts begegnen uns zahlreiche Teilgebiete, die heute nicht mehr zur Mathematik gerechnet werden. Betrachtet man die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften seit der Antike, so stellt man fest, dass deren Anzahl bis in die frühe Neuzeit stark angewachsen ist. Platon (427-348/47 v. Chr.) zählte Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik beziehungsweise Harmonielehre zur Mathematik.[671] Diese vier mathematischen Wissenschaften machten später das Quadrivium aus, welches bis in die frühe Neuzeit in dieser Form bestand.[672] Seit der Antike existiert eine Vielzahl von Klassifikationen der mathematischen Gebiete durch unterschiedliche Mathematiker.[673] Bereits Geminos von Rhodos (1. Jh. v. Chr.)[674] erweiterte die Mathematik durch die Wissenschaften Mechanik, Optik, Geodäsie und Logistik/praktische Rechenkunst. Im Laufe der Jahre wurden immer mehr Themen zur Mathematik gerechnet, so dass diese im 17. und 18. Jahrhundert etwa 20 verschiedene Teilgebiete umfasste.

In der frühen Neuzeit wurden alle Wissenschaften als mathematische Wissenschaften bezeichnet, die auf Maß, Zahl und Gewicht beruhten.[675] Diese wurden in reine („mathematica pura“) und gemischte Mathematik („mathematica mixta“ oder „mathematica media“) eingeteilt. Während die reine Mathematik sich abstrakt mit diskreten und kontinuierlichen Mengen, Anzahlen, Größen oder Quantitäten beschäftigte, wurden bei der gemischten Mathematik auch die Eigenschaften der Größen mitbetrachtet. Bereits im 15. Jahrhundert finden wir die Unterscheidung von reiner und gemischter Mathematik bei Marsilio Ficino. Mit der Einteilung in reine und gemischte Mathematik gingen auch unterschiedliche Vorstellungen einher. Im 16. Jahrhundert vertrat man die Ansicht, dass die reine Mathematik absolute Sicherheit bringe, und diese dann in der gemischten Mathematik brauchbar angewendet werden könne. Während bezüglich der reinen Mathematik Konsens über die ihr zugehörigen Wissenschaften herrschte, trifft dies nicht auf die gemischte Mathematik zu. Der Grund liegt vor allem darin, dass um 1600 die Mathematik noch nicht als eigenständige Wissenschaft existierte, so wie es heute der Fall ist. Betrachtet man die Teilgebiete, die zur gemischten Mathematik gezählt worden sind, so fällt auf, dass viele von ihnen zwischen dem 17. und dem 19. Jahrhundert eigenständig wurden.

Die Bezeichnung „gemischte Mathematik“, der vom lateinischen Ausdruck „mixta“ stammt, ist aus unserem heutigen Sprachgebrauch verschwunden. Heute verwenden wir den Terminus „angewandte Mathematik“, der jedoch nicht mit der damaligen „vermischten Mathematik“ gleichzusetzen ist. Welche Bezeichnungen verwendeten die „Anfangsgründe“-Autoren? Im 18. Jahrhundert setzte sich die deutsche Sprache als Wissenschaftssprache durch, so dass in diesem Zusammenhang auch Bezeichnungen wie „mathematica mixta“ übersetzt werden mussten. Hinzu kommt, dass die Mathematik als eigenständige Disziplin etabliert werden sollte. Mit diesem Ziel hängt auch die Bestrebung zusammen, den Teilgebieten der „gemischten Mathematik“ einen festen Platz innerhalb der Mathematik zu geben, wofür aller-

[671] Vgl. Folkerts/Knobloch/Reich, S. 13.
[672] Vgl. Folkerts/Knobloch/Reich, S. 11.
[673] Vgl. hierzu und zum Folgenden Folkerts/Knobloch/Reich, S. 13 ff.
[674] Daten entnommen aus Folkerts/Knobloch/Reich, S. 13.
[675] Vgl. hierzu und zum Folgenden Imhausen/Remmert, S. 72 f.

dings die Bezeichnung „gemischt“ zu beziehungslos erscheint. Aus diesem Grund soll ein Blick auf die verwendeten Begriffe in den „Anfangsgründen“ geworfen werden, um herauszufinden, ob es im 18. Jahrhundert Änderungen bezüglich der Terminologie gab und ob es Anzeichen dafür gibt, dass es sich nicht nur um einen reinen Wandel der Begrifflichkeiten handelte, sondern mehr dahinter steckte.

Charakteristisch für das 18. Jahrhundert sind die vielen Gesamtdarstellungen in sämtlichen Disziplinen. Es herrschte eine allgemeine Entwicklung der Enzyklopädien.[676] Zahlreiche neue Erkenntnisse und Entdeckungen machten es notwendig, diese zu ordnen, um eine Basis für weitere Forschungen zu schaffen.[677] Für die Mathematik im Speziellen war es wichtig, dass sie vor allem wegen ihrer Etablierung als eigenständige Disziplin und Loslösung von der Philosophie systematisch dargestellt wurde.[678] Aus diesem Hintergrund erscheint es besonders interessant, diejenigen Lehrwerke einzusehen, die sämtliche Gebiete der Mathematik darstellten. Die Analyse der mathematischen „Anfangsgründe“ in Hinblick auf die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften soll nicht nur Aufschluss darüber geben, welche Teilbereiche im 18. Jahrhundert zur Mathematik gerechnet wurden, sondern auch, ob und wenn ja wie diese in ein zusammenhängendes, hierarchisches System gebracht wurden.

4.1.1 Abraham Gotthelf Kästner

Kästner bezeichnete die Mathematik als „eine Sammlung unterschiedener Wissenschaften“[679]. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob Kästner eine Einteilung dieser Wissenschaften vornahm. Die Einteilung seiner *Mathematischen Anfangsgründe* in verschiedene „Theile“ und „Abtheilungen“ (siehe Kapitel 3.1) deutet bereits auf eine gewisse Klassifikation beziehungsweise Hierarchie der mathematischen Wissenschaften hin. Dies ist bereits eine Weiterentwicklung gegenüber Wolffs *Anfangs=Gründen*, in denen die Themen ohne eine differenzierte Einteilung hintereinander behandelt wurden. Kästner äußerte sich nicht nur in seinen *Anfangsgründen*, sondern auch in seinem *Commentarius* zu seiner Klassifikation der mathematischen Wissenschaften, die im Folgenden vorgestellt wird.

Der erste Band von Kästners *Anfangsgründen* enthält das Kapitel „Vorerinnerungen von der Mathematik überhaupt und ihrer Lehrart“[680], in dem Kästner auf die mathematischen Wissenschaften eingeht. Nachdem er die Mathematik als Lehre von den Größen definiert hat, teilt er diese in reine und angewandte Mathematik ein: „Die Grösse lässt sich von allen andern Eigenschaften einer Sache abgesondert betrachten; und dieses thut die reine und abgesonderte Mathematik (Mathesis pura vel abstracta); oder man betrachtet zugleich die andern Eigenschaften der Sachen mit, bey denen sich die Grösse befindet, wie in der angewandten (applicata)“[681]. Als Beispiel gibt Kästner an, dass die Länge an sich zur reinen Mathematik gehöre, die Entfernung zweier Örter zueinander aber zur angewandten Mathematik.[682] Bemer-

[676] Vgl. Schubring, Mathematische Wörterbücher des 18. Jahrhunderts. In: Das achtzehnte Jahrhundert, S. 114.
[677] Vgl. Kühn, S. 88.
[678] Vgl. Kühn, S. 46.
[679] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 39.
[680] In: Kästner, AG 1.1., S. 1-23.
[681] Kästner, AG 1.1., S. 3 f.
[682] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 4.

kenswert ist, dass Kästner weder von „mixta" beziehungsweise „gemischter", sondern nur noch von „angewandter Mathematik" spricht. Ergänzend verwendet er das lateinische Wort „applicata", was darauf hindeutet, dass die deutschen Bezeichnungen noch nicht gebräuchlich waren. Anschließend fächert Kästner die reine Mathematik weiter auf und benennt die Arithmetik und die Geometrie als Hauptgegenstände.[683] Die reine Mathematik könne noch weiter aufgeteilt werden, wobei alle Unterabteilungen entweder auf der Arithmetik oder der Geometrie, oder auf einer Wissenschaft, die aus beiden zusammengesetzt ist, basieren. Hierzu rechnet Kästner die ebene und sphärische Trigonometrie, die Buchstabenrechnung sowie die Analysis. Er geht detailliert auf den Begriff „Analysis" ein: „[…] die Analysis lehrt das Unbekannt finden. […] Die Alten haben uns vornehmlich Muster der geometrischen Analysis hinterlassen. Die neuern haben sie erweitert, indem sie angefangen haben, die Grössen allgemeiner als Zahlen zu betrachten. Daraus ist die Algebra, die Lehre von den Gleichungen, von verschiedenen Ausdrücken einerley Grösse entstanden. Man hat diese Algebra auf die Kegelschnitte, welche die Alten mehr geometrisch betrachtet hatten, und auf andere krumme Linien angewandt, und auf den Grund, daß sich stetige Grössen ohne Ende vermindern und vermehren, theilen und vervielfachen lassen, die Rechnung des Unendlichen gebauet, die sich wieder in die Differential- und Integralrechnung theilet"[684]. All diese zur Analysis gehörenden Wissenschaften bezeichnet Kästner ausdrücklich als höhere Mathematik.[685] Er schreibt zwar nicht von „elementarer Mathematik", aber die Verwendung des Ausdrucks „höhere Mathematik" lässt auf eine entsprechende Einteilung schließen. Höhere Mathematik ist für Kästner derjenige Teil der Mathematik, der sich mit den Lehren der Analysis befasst.[686] Die entsprechenden Inhalte ermöglichen nicht nur, neue mathematische Erkenntnisse zu verstehen, sondern auch die Mathematik durch neue Entdeckungen zu bereichern. Gleichzeitig differenziert Kästner die Adressatengruppe, denn die Lehren der höheren Mathematik könnten erst Lehrlingen der Analysis vorgetragen werden.[687] Die Analysis in Form von Algebra und Differential- und Integralrechnung behandelt Kästner in den beiden Bänden *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* und *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. Diese beiden Lehrwerke stellen die erste und zweite Abteilung des dritten Teils seiner *Anfangsgründe* dar und stehen somit losgelöst von der reinen elementaren Mathematik, die in Form von Arithmetik und Geometrie in der ersten Abteilung des ersten Teils der *Anfangsgründe* zu finden ist. Diese Einordnung der höheren Mathematik beziehungsweise Analysis in Kästners Gesamtwerk zeigt, dass die Inhalte nicht für Anfänger, sondern für diejenigen bestimmt waren, die bereits Kenntnisse in der reinen und auch angewandten Mathematik erworben haben, was in den ersten beiden Teilen der *Anfangsgründe* dargestellt wird.

Nach den Ausführungen zur reinen Mathematik wendet sich Kästner den angewandten mathematischen Teilgebieten zu. „Die angewandte Mathematik erhält ihren Nahmen daher, daß sie jener ihre Lehren auf die wirklichen Sachen selbst anwendet"[688]. Hierzu zählt Kästner zunächst die Anwendungen der Arithmetik, die sich in den Bereichen Hauswirtschaft, Handel und kaufmännische Rechnungen finden. Die Anwendungen der Geometrie begegnen uns

[683] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 4-6.
[684] Kästner, AG 1.1., S. 5.
[685] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 6.
[686] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 6.
[687] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, o. S.
[688] Kästner, AG 1.1., S. 6.

dann bei der Feldmessung. Die entsprechenden inhaltlichen Darstellungen sind in den Abteilungen 2 bis 4 des ersten Teils der *Anfangsgründe* zu finden. Mit diesen Anwendungen ist der Bereich der angewandten Mathematik noch nicht ausgeschöpft, denn „die angewandte Mathematik [hat] keine andern Gränzen als die Welt, und kann so viel Wissenschaften enthalten, so vielerley Gegenstände es giebt, bey denen sich Grössen durch Schlüsse bestimmen lassen“[689]. Die Gegenstände, die in diesen Bereich fallen, sind „die Kräfte der Körper […]; das Licht, und die himmlischen Körper“[690]. Es geht um die Lehre von diesen Erscheinungen; diese werden definiert als die drei Hauptbestandteile der Mathematik, nämlich die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften, die noch weiter aufgegliedert werden können.[691] In den mechanischen Wissenschaften betrachtet Kästner Mechanik, Statik, Hydrostatik, Hydraulik und Aerometrie. Die optischen Wissenschaften setzen sich aus Optik, Katoptrik und Dioptrik zusammen. Zu den astronomischen Wissenschaften rechnet Kästner Astronomie, mathematische Geographie, Gnomonik und Chronologie. Neben diesen Themen zählt er auch noch die Geschützkunst, bürgerliche Baukunst und Kriegsbaukunst als Wissenschaften auf, in denen mathematische Kenntnisse vor allem zwecks Vervollkommnung notwendig seien. Über diese mathematischen Wissenschaften hinaus, die Kästner in seinen *Anfangsgründen* behandelt, nennt er noch weitere Gebiete, die nicht notwendigerweise in mathematischen Lehrbüchern zu finden seien, aber zu den mathematischen Wissenschaften gezählt werden können, wie die Musik, die Navigation als Bestandteil der Geographie sowie die Lenkung eines Schiffes, welches zu der Mechanik gerechnet werden könne.[692] Die Mathematik lasse sich aber laut Kästner nicht nur auf sinnliche Gegenstände anwenden, sondern auch, um „Wahrscheinlichkeiten und Hoffnungen“[693] zu berechnen, modern gesprochen also Wahrscheinlichkeitsberechnung und Statistik. Auch die Perspektive rechnet Kästner zur angewandten Mathematik und bezeichnet sie als „das Mathematische der Mahlerkunst“[694]. Ein wenig irritieren mag die Behandlung der Perspektive in dem Band der *Anfangsgründe* zur elementaren reinen Mathematik. Zwar kann die Perspektive heute durchaus zur Geometrie gerechnet werden, aber Kästner sah sie eindeutig als angewandte mathematische Wissenschaft an. Er erklärt, dass er sie bereits in die *Anfangsgründe der Arithmetik* aufgenommen habe, da sie „die wenigsten fremden oder unbekannten Gründe“[695] voraussetze und er so eine Probe von der Anwendung geometrischer Kenntnisse geben könne.

Die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften stellt Kästner nicht nur in seinen *Anfangsgründen*, sondern auch in seinem *Commentarius über eine Stelle des Varro von einer der Ursachen warum die Mathematik in Deutschland immer noch für unnütz gehalten wird* dar. Nachdem Kästner in dieser Schrift zunächst den Nutzen der Mathematik als „eine Sammlung unterschiedener Wissenschaften, ohne die wir von allem, was uns in die Sinne fällt, die unvollkommensten, und oft ungereimtesten Begriffe haben“[696] in aller Kürze aufgezeigt hat sowie auf die Situation der Mathematik an deutschen Universitäten eingegangen ist,

[689] Kästner, AG 1.1., S. 7.
[690] Kästner, AG 1.1., S. 7.
[691] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 7 f.
[692] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 8
[693] Kästner, AG 1.1., S. 9.
[694] Kästner, AG 1.1., S. 9.
[695] Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, o. S.
[696] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 39.

wendet er sich der Einteilung der mathematischen Wissenschaften zu. Zunächst unterscheidet er zwischen reiner und angewandter Mathematik. Im Gegensatz zu seinen Ausführungen in den *Anfangsgründen* geht Kästner im *Commentarius* nicht so detailliert auf diejenigen Wissenschaften ein, die zur reinen Mathematik gehören, dafür aber auf die angewandte Mathematik, „das ist: dreyzehn oder vierzehn Wissenschaften, die sich allenfalls in drey oder vier Hauptabtheilungen bringen liessen […]. Diese Abtheilungen wären: die mechanische, die optische und die astronomische“[697]. Daneben sieht Kästner auch die Möglichkeit einer vierten, nämlich der architektonischen Abteilung vor, in der die Fortifikation und die Baukunst einzuordnen wären. Alternativ könnten diese beiden Gebiete auch, zusammen mit der Artillerie, die Kästner als eine mechanische Wissenschaft ansieht, auch zu den mechanischen Wissenschaften gerechnet werden.[698]

Nachdem Kästner in seinen *Anfangsgründen* eine ausführliche Einteilung der mathematischen Wissenschaften gegeben und fast alle von ihnen behandelt hat, mag es zunächst befremdlich erscheinen, dass er sich nicht auf eine feste Anzahl angewandter mathematischer Wissenschaften festlegt. Er schreibt nur von „mehr als zwölf Wissenschaften, deren jede ihre Grundsätze hat“[699]. Auch in seinem *Commentarius* legt er sich bezüglich der Anzahl nicht fest, sondern schreibt nur von 13 oder 14 Wissenschaften, die der angewandten Mathematik zugerechnet werden könnten. Insgesamt scheint es, als ob zu diesem Zeitpunkt die Einteilung der mathematischen Wissenschaften noch nicht vollkommen gefestigt gewesen war und dass sie insbesondere offen für neue Teilgebiete war, vor allem im Bereich der angewandten Mathematik. Kästner äußert sich hierzu in seiner *Anzeige seiner nächsten Vorlesungen über Mathematik und Physik* für das Sommersemester 1768, die 1772 auch unter dem Titel *Ueber die Verbindung der Mathematik und Naturlehre* in seinen *Vermischten Schriften. Zweyter Theil* gedruckt wurde. Laut Kästner hatten es die magnetischen und elektrischen Lehren noch nicht geschafft, in den Kreis der angewandten mathematischen Wissenschaften aufgenommen zu werden, denn es „fehlt […] immer noch an richtiger Abmessung dieser Kräfte, an andern zur Grösse gehörigen Umständen, und daher ist unsere Kenntniß davon noch so ungewiß“[700]. Auf der anderen Seite aber konnten Lehren nach ihrer mathematischen Ausarbeitung als angewandte mathematische Wissenschaften betrachtet werden, wie es mit der Aerometrie geschehen ist. Es sei Wolff zu verdanken, dass diese nun als mathematische Wissenschaft angesehen werde, denn er sei der erste gewesen, der alle Kenntnisse über sie gesammelt und sie mathematisch ausgearbeitet habe.[701]

Hinsichtlich der Statik und Mechanik ist noch eine Besonderheit zu erwähnen. Es ist zunächst irritierend, dass Kästner als Kapitelüberschrift „Die Mechanik oder eigentlich die Statik“[702] gewählt hat. Scheinbar gab es im 18. Jahrhundert Unsicherheiten hinsichtlich der Terminologie, denn Kästner zieht zwischen diesen beiden Wissenschaften eine klare Grenze: „Die Statik, die in den gewöhnlichen Anleitungen zur Meßkunst[703], den Nahmen der Mechanik führet, betrachtet nur das Gleichgewicht […]: die Mechanik, wie das Wort jetzo genom-

[697] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 42.
[698] Vgl. Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 42.
[699] Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *2^r.
[700] Kästner, Ueber die Verbindung. In: Kästner, Vermischte Schriften, S. 88.
[701] Vgl. Kästner, Ueber die Verbindung. In: Kästner, Vermischte Schriften, S. 88 f.
[702] Kästner, AG 2.1., S. 2.
[703] Gemeint sind Lehrbücher zur Mathematik.

men wird, betrachtet wirkliche Bewegungen“[704]. In den mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts ist die Behandlung von Statik und Mechanik nicht einheitlich, aber in der Regel werden statische und mechanische Lehren innerhalb eines Kapitels entweder unter dem Oberbegriff der Statik oder der Mechanik behandelt.[705]

Wir können festhalten, dass Kästner eine detaillierte Klassifikation der mathematischen Wissenschaften vornahm, wobei er sowohl zwischen reiner und angewandter, als auch zwischen elementarer und höherer Mathematik unterschied. Zur reinen Elementarmathematik zählt Kästner Arithmetik und Geometrie inklusive ebener und sphärischer Trigonometrie. Algebra sowie Differential- und Integralrechnung bezeichnet er als höhere Mathematik. In der angewandten Mathematik stellt er die Lehren folgender Wissenschaften dar: Statik, (höhere) Mechanik, Hydrostatik, Hydraulik (inklusive Hydrodynamik und Maschinenlehre), Aerometrie, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Astronomie, Geographie, Gnomonik, Chronologie, Perspektive, Artillerie, Fortifikation und bürgerliche Baukunst. Kästner behandelt aber nicht alle Themen in seinen *Anfangsgründen* gleich ausführlich. So ist beispielsweise seine Darstellung der Artillerie, Fortifikation und Baukunst sehr knapp. Die Artillerie wird auf nur 17 Seiten in 24 Abschnitten, die Fortifikation auf 13 Seiten in 30 Abschnitten und die Baukunst auf nur neun Seiten in 21 Abschnitten behandelt. Zudem werden diese drei Gebiete im Gegensatz zu den anderen auf dem Titelblatt des entsprechenden Bandes der *Anfangsgründe* nicht explizit genannt. Auffällig ist auch, dass Kästner innerhalb seiner Ausführungen zur Klassifikation der mathematischen Wissenschaften, die in den *Anfangsgründen* zu finden sind, die Artillerie, Fortifikation und Baukunst nicht einer übergeordneten Kategorie zuordnet, wie er dies mit den mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften getan hat. Eine Begründung für die knappe Behandlung dieser drei Teilbereiche findet sich im Vorwort zur ersten Auflage. Hier heißt es, dass sich diese drei Wissenschaften im Rahmen der mathematischen Lehrstunden nicht ausreichend vortragen lassen, dass es aber stattdessen spezielle Lehrer für diese Wissenschaften gebe.[706] Kästner wollte aber auf diese Wissenschaften nicht komplett verzichten, „damit es nicht aussähe als rechnete ich diese Känntnisse nicht zur Mathematik, die für Manche allein Mathematik sind. Auch denke ich, meine kurzen Nachrichten enthalten wenigstens so viel als jeder Gelehrte von diesen Dingen wissen muß um nicht oft lächerlich zu werden“[707]. Eine solche kurze Darstellung dieser Themen in den zeitgenössischen Mathematiklehrbüchern war nicht ungewöhnlich; zumindest Festungsbau und Artillerie gehörten bereits im 17. Jahrhunderts zum Konversationswissen.[708]

Ein Blick in weitere mathematische Lehrbücher wird zeigen, dass Kästners Einteilung nicht nur maßgebend für andere Lehrbuchautoren, sondern auch offen für die Aufnahme neuer Wissenschaften war. Andererseits aber war es auch möglich, dass Wissenschaften aus den mathematischen Lehrbüchern verschwanden, wie beispielsweise die Musik.

[704] Kästner, AG 4.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *2^{r}.
[705] Vgl. zur Problematik der Begrifflichkeiten auch Kühn, S. 85 ff. und S. 98 f.
[706] Vgl. Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, o. S.
[707] Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. vi.
[708] Vgl. Hohrath, Mathematik für den Kriegsstaat. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 113.

4.1.2 Gaspar Schott

Gaspar Schott SJ (1608-1666) war zunächst Lehrer für Mathematik und Moral in Palermo und später Lehrer für Mathematik und Physik am Würzburger Gymnasium.[709] Aus seiner Feder stammt der *Cursus Mathematicus, Sive Absoluta omnium Mathematicarum Disciplinarum Encyclopaedia, In Libros XXVIII. Digesta* (1661)[710]. Hier stellt Schott in 28 Kapiteln, die bei ihm klassisch als „Liber“ bezeichnet werden, die mathematischen Teilgebiete dar. In „Liber I. Isagoge Mathematica”[711] präsentiert er zunächst mehrere mögliche Einteilungen der mathematischen Wissenschaften. Zunächst bezeichnet er die Arithmetik und Geometrie als „alae mathematicae“[712] – die Flügel der Mathematik. Dann nimmt er Bezug auf unterschiedliche Autoren und zeigt die Vielfalt der möglichen Einteilungen der Mathematik auf.[713] So kannte man, so Schott, in der pythagoreischen Mathematik die vier mathematischen Disziplinen Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie. Geminos von Rhodos teilte die gesamten mathematischen Teilgebiete in zwei Klassen ein, nämlich „quarum altera continet puras, altera no puras, seu mixtas“[714]. Zur reinen Mathematik gehörten demnach die Arithmetik und Geometrie, wobei die Arithmetik diskrete und die Geometrie kontinuierliche Größen behandeln. Zur nicht-reinen beziehungsweise gemischten Mathematik zählten die sechs Teilgebiete Mechanik, Astrologie, Perspektive, Geodäsie, Kanonik[715] und Linienrechnung auf dem Rechenbrett („Supputatricem“)[716]. Adriaan van Roomen (1561-1615) gab eine andere Einteilung an, nämlich diejenige „in principem, & mechanicam“[717], wobei die „führende“ Mathematik noch in die reine („pura“) und gemischte („mixta“) gegliedert wurde, die reine wiederum in die allgemeine („universalem“) und besondere („specialem“). Die „universale“ Mathematik wurde „in logisticam, & primam mathesin“[718] eingeteilt. Die „besondere“ Mathematik bestand aus Arithmetik und Geometrie. Unter dem Namen „gemischte Mathematik“ fanden sich folgende Wissenschaften: Kosmographie, Uranographie (Himmelsbeschreibung), Geographie, Astronomie, Chronologie, Geodäsie, Optik, Euthymetrie[719], Musik. Die mechanischen Wissenschaften, die auch die Lehren von Werkzeugen und Automaten enthalten, grenzen sich von der gemischten Mathematik ab. Paul Guldin (1577-1643) unterschied zwischen der reinen („pura“) und der gemischten („mixta“) Mathematik und teilte beide wiederum in spekulative und praktische Teile ein. Die reine Mathematik bestand in seinem System aus Arithmetik, Geometrie und – resultierend aus der Verbindung von Arithmetik und Geometrie – Algebra. Die gemischte Mathematik setzte sich aus den vier Teilen Optik, Statik, Musik und Astronomie zusammen. Sämtliche Wissenschaften der reinen und gemischten Mathematik lassen sich noch weiter aufgliedern. Schott stellt auch die Einteilung der mathe-

[709] Zu Schott siehe Artikel „Schott, Kaspar“ von Karl Ernst Hermann Krause in: ADB, Bd. 34 (1892), S. 739 f.

[710] Würzburg 1661, Frankfurt a. M. ^{2}1674, Bamberg ^{3}1677, Frankfurt ^{4}1699. Für unsere Untersuchung lag die erste Auflage zugrunde.

[711] In: Schott, S. 1-20.

[712] Schott, S. 1.

[713] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Schott, S. 2 f.

[714] Schott, S. 2.

[715] Ein Teil der Musik, der Klänge nach den Zahlen beurteilt; vgl. Zedler, Bd. 5 (1733), S. 572.

[716] Zur Wortbedeutung vgl. Zedler, Bd. 2 (1732), Sp. 1490 f. (weitergeleitet von Zedler, Bd. 41 (1744), Sp. 381).

[717] Schott, S. 2.

[718] Schott, S. 2.

[719] Wissenschaft, Linien zu messen; vgl. Zedler, Bd. 8 (1734), Sp. 2239.

matischen Wissenschaften von Honoré Fabri (1607-1688) vor. Hier findet man die Unterscheidung zwischen reiner und nicht-reiner Mathematik („puras, & non-puras“). Erstere bestand aus Arithmetik und Geometrie. Die nicht-reine Mathematik war aufgeteilt in praktische Geometrie, Rechnung auf den Linien, Astronomie, Optik, Statik und Musik, wobei sich alle Themen noch weiter aufgliedern lassen.

Nach dem Hinweis, dass andere Autoren noch weitere Einteilungen vorgenommen haben, geht Schott auf seine eigene Aufteilung ein.[720] Die Mathematik, die nahezu grenzenlos sei, befasst sich mit bestimmten Größen, die entweder diskret oder kontinuierlich sind. Beide wiederum sind entweder abstrakt, also fernab von sinnlichen Gegenständen, oder konkret, was bedeutet, dass die entsprechenden Inhalte Bezug zu Gegenständen der Natur haben. Die beiden Unterabteilungen, die sich mit abstrakten und konkreten Größen befassen, lassen sich erneut aufteilen, und zwar in die spekulative („speculativa“) und in die praktische („practica“) Mathematik. Schott nennt nach diesen theoretischen Einsichten die Arithmetik eine diskrete und abstrakte Wissenschaft, die sowohl spekulativ – nur Zahlen – als auch praktisch betrachtet werden kann. Die Musik bildet dann den konkreten[721] Teil der diskreten Mathematik, die entweder spekulativ oder praktisch sein kann. Die Geometrie ist für Schott der Bestandteil der Mathematik, der sich mit kontinuierlichen und abstrakten Größen befasst. Derjenige Teil aber, der sich mit konkreten Eigenschaften von kontinuierlichen Größen befasst, kann in vier Hauptteile eingeteilt werden: Astronomie, Mechanik, Optik und Musik. Diese lassen sich ebenfalls weiter differenzieren.

Schott betrachtet in seinem *Cursus Mathematicus* die folgenden mathematische Teilgebiete getrennt voneinander: Arithmetik, (elementare und praktische) Geometrie, (ebene und praktische) Trigonometrie, (elementare, theoretische und praktische) Astronomie, Astrologie, (astronomische, politische und kirchliche) Chronographie, Geographie, Hydrographie, Horographie[722], Mechanik, Statik, Hydrostatik, Hydrotechnik inklusive hydraulischen Maschinen, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Architektur und Militärarchitektur, Polemikus[723], Taktik[724], Musik/Harmonielehre, Algebra, Logarithmen.

Im Gegensatz zu Kästners Einteilung der mathematischen Wissenschaften und zu denjenigen, die Schott in seinem Werk vorstellt, unterscheidet Schott selbst nicht zwischen reiner und angewandter Mathematik und verwendet keine Bezeichnungen wie „pura“ oder „mixta“. Stattdessen entwickelt er eine Hierarchie, die von diskreten und kontinuierlichen Größen ausgeht, welche sich wiederum in abstrakte und konkrete Größen einteilen lassen, wobei jeweils zwischen spekulativer und praktischer Mathematik unterschieden wird. Die Wissenschaften, die wir in Schotts Einteilung unter der praktischen Mathematik finden, nämlich Astronomie, Mechanik, Optik und Musik, machen bei anderen Autoren die gemischte beziehungsweise angewandte Mathematik aus.

Vergleicht man die von Schott und Kästner thematisierten mathematischen Teilgebiete, so lassen sich einige Unterschiede feststellen. Die erste Auffälligkeit besteht darin, dass Kästner

---

[720] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Schott, S. 3.

[721] Schott verwendet wohl fälschlicherweise „discretam” statt „concretam“, denn gemäß seiner Architektur der Mathematik müsste sich, nachdem sich die Arithmetik mit diskreten und abstrakten Größen beschäftigt, die Musik mit diskreten und konkreten Größen befassen.

[722] Gnomonik; vgl. Schott, S. 389.

[723] Militärkunst; vgl. Schott, S. 502.

[724] Einteilung und Aufstellung des Heeres sowie Befestigung von Feldlagern; vgl. Schott, S. 509.

keine strenge Trennung zwischen elementaren, theoretischen und praktischen Teilen der mathematischen Wissenschaften vornimmt. Bei Kästner und auch weiteren mathematischen Lehrbuchautoren des 18. Jahrhunderts werden die Logarithmen nicht mehr eigenständig behandelt, sondern meist im Rahmen der Trigonometrie als Bestandteil der Arithmetik. Die zweite Auffälligkeit betrifft die Anzahl der mathematischen Themen. Während wir bei Schott noch die Astrologie, Taktik und Musik/Harmonielehre finden, thematisiert Kästner diese Wissenschaften nicht mehr in seinen *Anfangsgründen*. Diese Teilgebiete wurden nur noch selten in den mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts aufgegriffen. Auch die Hydrographie wird nicht mehr als separate Wissenschaft behandelt, sondern wird von Kästner im Rahmen der Geographie kurz dargestellt.[725] Kästner behandelt auch Themen, die bei Schott noch nicht zu finden sind, wie die Perspektive, Aerometrie und – selbstverständlich – die Differential- und Integralrechnung unter dem Namen „Analysis des Unendlichen". Die Artillerie als Geschützkunst wird bei Schott unter der Militärkunst behandelt.

4.1.3 Johann Christoph Sturm

Johann Christoph Sturm war von 1669 bis an sein Lebensende Professor für Mathematik und Physik an der Universität Altdorf.[726] Er wurde durch seine mathematischen Lehrbücher bekannt, zu denen auch die *Kurtzgefasste Mathesis Oder erste Anleitung zu mathematischen Wissenschafften* (1717) zählt. Dieses Werk wurde von seinem Sohn Leonhard Christoph Sturm (1669-1719) herausgegeben. Zuvor erschien dieses Lehrbuch unter dem Titel *Mathesis compendiaria* (1690, ²1693, ³1698, ⁴1703, ⁵1707, ⁶1714) in Latein.

Zu Beginn der *Kurtzgefassten Mathesis* gibt Sturm in dem Kapitel „Von denen Mathematischen Wissenschafften insgemein"[727] einige einführende Bemerkungen zur Mathematik. Für Sturm ist die Mathematik „nichts anders als ein Hauffen verschiedener Stücke derer Wissenschafften, so guten Theils, ohne die vornehmsten Hauptstücke der Mathematick, nemlich die Geometrie und die Arithmetick zum Grunde zu legen, nicht wohl zu verstehen sind"[728]. Die „Mathesis" selbst ist für Sturm eine Wissenschaft, die sich mit Quantitäten beschäftigt. Nachdem Sturm bereits die Arithmetik und die Geometrie als Hauptteile der Mathematik bezeichnet hat, nennt er weitere Teile der Mathematik.[729] Der erste und allgemeinste Teil sei die allgemeine Mathematik, die sogenannte Metageometriam. Diese teilt sich auf in die „Rechen=Kunst", gleich ob mit Zahlen oder Buchstaben, und die „Erfindungs=Kunst", die Algebra. Von diesem Teil unterscheidet er „die andere Mathesin, so die specialior oder besondere genennet wird"[730], welche sich „in die lautere [puram] und vermischte [mixtam]"[731] unterteilt. Die theoretische Arithmetik und die Geometrie sind die Bestandteile der reinen Mathematik. Die Anwendungen auf die wirklichen körperlichen Dinge erfolgen erst in der vermischten

[725] Siehe „Allgemeine Begriffe von der Schiffahrt" in: Kästner, AG 2.2., S. 438 ff.
[726] Zu Sturm siehe Artikel „Sturm, Joh. Christophorus" von Richard Falckenberg in: ADB, Bd. 37 (1894), S. 39 f.
[727] In: Sturm, KM, S. 2.
[728] Sturm, KM, S. 2.
[729] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, KM, S. 2.
[730] Sturm, KM, S. 2.
[731] Sturm, KM, S. 2.

Mathematik, die sich aus fünf Teilen mit verschiedenen Unterabteilungen zusammensetzt. Erstens gibt Sturm die „Gewichts=Wissenschafft [Phoronomiam]“ an, zu der die Statik und die Mechanik zählen. Zweitens nennt er die „Welt=Beschreibung“, zu der Astronomie, Geographie, Chronologie, Gnomonik und auch Astrologie gehören. Als dritten Teil unterscheidet er die „Gesicht=Wissenschafft“ mit ihren Unterabteilungen Optik, Katoptrik, Dioptrik und Perspektive. Viertens werden die „Musick“, und schließlich die bürgerliche und die Kriegsbaukunst als fünfter Teil der vermischten mathematischen Wissenschaften benannt.

An den Bezeichnungen, die Sturm für die mathematischen Themen verwendete, erkennt man, dass er versuchte die lateinischen Begriffe ins Deutsche zu übertragen, was im Zusammenhang mit der Etablierung des Deutschen als Wissenschaftssprache steht. Jedoch konnten sich diese Bezeichnungen nicht durchsetzen; in weiteren Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts sind sie nicht mehr zu finden.

In seiner *Kurtzgefassten Mathesis* betrachtet Sturm folgende Wissenschaften: Arithmetik, Geometrie, ebene Trigonometrie, Optik inklusive Perspektive, Katoptrik, Dioptrik, Kriegsbaukunst, bürgerliche Baukunst, Astronomie und Geographie, Chronologie, Gnomonik/Horographie[732], Statik/Mechanik, Chiromantie/Handlesekunst, Hydrostatik und Hydraulik.[733]

Das zweite deutschsprachige mathematische Lehrbuch von Sturm ist die *Mathesis Juvenilis* (^{2}1710/14). Es wurde zunächst in lateinischer Sprache veröffentlicht (2 Bde., 1699/1701, ^{2}1702/04, ^{3}1711/16). Die deutsche Übersetzung erschien unter dem Titel *Mathesis Juvenilis. Das ist: Anleitung vor die Jugend zur Mathesin* (2 Bde., 1702/05, ^{2}1710/14). Das Werk wurde auch unter dem Titel *Mathesis Juvenilis* ins Englische übersetzt (1709). Nicht nur die Anzahl der Neuauflagen und Übersetzungen, sondern auch Sturms Aussage, dass „meine Einleitung der Jugend zur Mathesin, welche zu förderst auch seinen Studiis dienen soll, da wie ich höre schon würcklich dienet“[734] zeugt von dem Erfolg des Lehrbuchs. Kühn betonte nicht nur die Deutlichkeit und Klarheit dieses Werks, sondern bemerkte, dass der in der *Mathesis Juvenilis* behandelte Lehrstoff nicht über die Lehrinhalte an Gymnasien hinausging und Sturm die Entdeckungen des 16. und 17. Jahrhunderts auf mathematischem Gebiet nicht berücksichtigt habe.[735] Betrachtet man aber das Werk genauer, so stellt man fest, dass dieses in erster Linie für Gymnasien geschrieben wurde, denn man findet nicht nur Anregungen, wie die einzelnen Themen „in die Schulen und Gymnasia auch deren Classen mit Nutzen einzuführen“[736] sind, sondern auch Übungsaufgaben[737] speziell für Gymnasialklassen.

In dem Werk finden wir das Kapitel „Vorbereitung über die der Jugend gewiedmete Mathesin“[738], in dem Sturm einen Einblick in die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften gewährt. Zur „Mathesin“ selbst rechnet Sturm die „Rechen= und Meßkunst“.[739] Da-

[732] Sturm verwendet Horographie synonym zu Gnomonik und bezeichnet sie als eine Kunst der Licht- und Schattenuhren; vgl. Sturm, KM, S. 85.
[733] Hydrostatik und Hydraulik wurden nachträglich von Bonifatius Heinrich Ehrenberger ergänzt; vgl. Sturm, KM, Titelblatt.
[734] Sturm, MJ 1, S.)(2^{r} f.
[735] Vgl. Kühn, S. 65 f.
[736] Sturm, MJ 1, S. 516. Auch an anderen Stellen findet man solche Bemerkungen.
[737] Beispielsweise geometrische Aufgaben für die dritte Klasse eines Gymnasiums; vgl. Sturm, MJ 1, S. 534 ff.
[738] In: Sturm: MJ 1, S. 1-6.
[739] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 1 f.

nach geht er noch auf weitere Wissenschaften ein, die zur Mathematik gehören, nämlich die „Stern=Kunst“, die „Seh=Kunst“ – beide laut Sturm eigentlich Teile der Naturlehre – ebenso wie die Zivil- und Kriegsbaukunst, die für Sturm im Wesentlichen zur Staatslehre gehören. Die mathematischen Wissenschaften seien im Laufe der Jahre angewachsen, „allein weil dieses und anders mehr ohne Beyhülff einer wohl gegründeten Erkäntniß der Rechen= und Meß=Kunst nicht wohl nach Würden kunte erlernet werden“[740]. Aus diesem Grund sieht Sturm die Notwendigkeit, die mathematischen Wissenschaften in Kategorien einzuteilen: „Freylich, und zwar könte man die Mathesin, an statt jener etwas garstigen Eintheilung in die Lautere (puram) und Unreine (impuram) viel schicklicher in die Unangebrachte (Simplicem oder Abstractam[)] und Angebrachte (Applicatam) eintheilen“[741]. Zur unangebrachten Mathematik rechnet Sturm die Arithmetik und Geometrie, sofern nur die Zahlen beziehungsweise Größen an sich betrachtet werden.[742] Es gibt aber auch eine angebrachte Arithmetik und Geometrie. Zur letzteren würden auch die Feldmesskunst beziehungsweise Geodäsie und die Astronomie zählen.

Nach diesen einführenden Bemerkungen stellt Sturm diejenigen Wissenschaften vor, die er in den beiden Bänden der *Mathesis Juvenilis* behandelt: Arithmetik (sowohl unangebracht als auch angebracht, ebenso Ausführungen zur Algebra), Geometrie inklusive ihrer Anwendung in Form von Geodäsie, Trigonometrie, Statik und Mechanik („Wäge=Kunst“ und „Hebe=Kunst“), Optik, Katoptrik und Dioptrik sowie Perspektive, Zivil- und Kriegsbaukunst, Astronomie („Stern=Kunst“) und Geographie („Erde=Beschreibung“), Chronologie (inklusive der kirchlichen Festrechnung und der „Calender=Schreiberey“) und Gnomonik. Sturm spricht sich eindeutig gegen die Behandlung der Astrologie aus, denn durch seine Ausführungen zur Astronomie soll „die Nichtigkeit der Sterndeutung augenscheinlich […] erwiesen werden“[743].

Vergleicht man die beiden deutschsprachigen Lehrwerke von Sturm, so erkennt man, dass die behandelten mathematischen Wissenschaften größtenteils übereinstimmen und sich nur in wenigen Punkten unterscheiden. So findet man beispielsweise die Chiromantie nur in der *Kurtzgefassten Mathesis*. Tatsächlich ist es für uns heute irritierend, die Chiromantie oder Handlesekunst als mathematische Wissenschaft zu betrachten. Sturms Ausführungen in dem entsprechenden Kapitel lassen den Schluss zu, dass die Einteilung der Hand sowie die Verhältnisse der Handflächenlinien wohl von ihm als mathematische Komponenten in dieser Kunst angesehen wurden.[744] In den im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachteten weiteren Lehrbüchern findet man dieses Thema nicht mehr. Hydrostatik und Hydraulik wurden erst nach Sturms Tod der *Kurtzgefassten Mathesis* beigefügt. In der *Mathesis Juvenilis* waren sie noch nicht zu finden. Dass diese Teilgebiete jedoch nicht erst seit diesem Zeitpunkt zu den mathematischen Wissenschaften gezählt wurden, zeigt ihre Behandlung in Schotts *Cursus Mathematicus*. Vielmehr ist davon auszugehen, dass Sturm entweder nicht die Notwendigkeit sah, diese Themen mit in sein Lehrbuch aufzunehmen, was mit der Adressatengruppe zusammenhängen könnte, oder aber Hydrostatik und Hydraulik noch nicht von allen Personen als mathematische Wissenschaften angesehen wurden.

[740] Sturm, MJ 1, S. 2.
[741] Sturm, MJ 1, S. 3.
[742] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 3 f.
[743] Sturm, MJ 1, S. 6.
[744] Vgl. Sturm, KM, S. 91 f.

Weitere Unterschiede im Vergleich zu Kästner bestehen darin, dass Sturm die Perspektive eindeutig den optischen Wissenschaften zuordnet. Sie wird nicht eigenständig, sondern im Rahmen der Optik behandelt. Des Weiteren finden wir bei Sturm die Aerometrie, Artillerie und Analysis in Gestalt der Differential- und Integralrechnung noch nicht.

4.1.4 Christian Wolff

Christian Wolff äußert sich in seinen *Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschaften* (^{9}1775) nicht explizit über die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften. Ergiebiger erweist sich die gezielte Suche in seinem *Mathematischen Lexicon* (1716). Hier finden wir zunächst das Stichwort „Mathematica seu Mathesis, die Mathematick“[745]. Wolff definiert die Mathematik als eine Wissenschaft der Größen.[746] Die große Anzahl mathematischer Wissenschaften wird dadurch erklärt, dass „alle endliche[n] Dinge sich ausmessen lassen in allem demjenigen, was sie endliches an sich haben, was sie sind; so ist nichts in der Welt, dabey die Mathematick nicht könnte angebracht werden“[747]. Hierbei betont Wolff, dass die Mathematik im engeren Sinne nur aus Arithmetik, Geometrie und Algebra bestehe, also aus denjenigen Wissenschaften, die sich mit dem Ausmessen von Dingen beschäftigen.[748] „Und solcher gestalt sind die übrigen Theile der Mathematick nichts anderes als aus anderen Wissenschafften entlehnte Stücke, die man durch die Mathematick ausgearbeitet oder zu ihrer Vollkommenheit gebracht“[749] hat. Konkret sind dies laut Wolff die Mechanik, Statik, Hydrostatik, Hydraulik, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspektive, Akustik, Aerometrie, Astronomie, Geographie, Hydrographie aus dem Bereich der Physik.[750] Aus der Metaphysik beziehungsweise Ontologie stammen die Gnomonik und die Chronologie, aus der Politik die Zivil- und Kriegsbaukunst.

Wolff beschränkt sich nicht nur darauf, die Mathematik im Allgemeinen zu betrachten, sondern teilt sie ein, was aus den einzelnen Unterabteilungen nochmal deutlich wird. Unter die „Mathesis pura sive simplex, die eigentliche Mathematick“[751] fallen für Wolff diejenigen Wissenschaften, welche nur die Größe an sich betrachten, und dies seien Arithmetik, Geometrie inklusive Trigonometrie, und Algebra.[752] Alle anderen Wissenschaften gehören zur angebrachten Mathematik. Unter der „Mathesis impura sive mixta, die angebrachte Mathematick“[753] versteht Wolff denjenigen Teil der Mathematik, „welche[r] die Größe besonderer in der Natur vorkommender Dinge erweget und ausmisset“[754]. Die theoretischen Grundlagen, die man beispielsweise in der Geometrie lernt, werden „im menschlichen Leben und der Natur angebracht“[755]. Solche Anwendungen der Geometrie sind beispielsweise Geodäsie,

[745] In: Wolff, ML, Sp. 863-866.
[746] Vgl. Wolff, ML, Sp. 863.
[747] Wolff, ML, Sp. 863.
[748] Vgl. Wolff, ML, Sp. 864.
[749] Wolff, ML, Sp. 864.
[750] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, ML, Sp. 864.
[751] In: Wolff, ML, Sp. 868.
[752] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, ML, Sp. 866 f.
[753] Wolff, ML, Sp. 866 f.
[754] Wolff, ML, Sp. 866.
[755] Wolff, ML, Sp. 866.

Altimetrie beziehungsweise Höhenmessung und Astronomie.[756] Von der angebrachten Mathematik unterscheidet Wolff die „Mathesis practica, die ausübende Mathematick“[757], in der die mathematischen Lehren tatsächlich in praktischer Form verwendet werden.[758] Dies geschehe beispielsweise durch Baumeister, Ingenieure, Rechenmeister, Künstler und Handwerker. Wolff spricht sich an dieser Stelle dafür aus, dass diese Personen theoretische Einsichten in die Mathematik erhalten sollten, beispielsweise um ihre Tätigkeiten sorgfältiger ausführen oder um mathematische Instrumente verbessern zu können. Als vierte Unterabteilung der Mathematik betrachtet Wolff die „Mathesis theoretica seu speculativa, die erwegende Mathematick“[759], in der man nur die theoretischen Grundlagen lernt, ohne diese anwenden zu wollen.[760] So sei man beispielsweise in der Geometrie damit zufrieden, dass man bestimmte Eigenschaften einer Figur erkennen kann.

An den Ausführungen im *Mathematischen Lexicon* ist zu erkennen, dass Wolff verschiedene Kategorisierungen der mathematischen Wissenschaften vornimmt. Zum einen unterscheidet er zwischen reiner und unreiner Mathematik („Mathesis pura“ und „Mathesis impura“) – in Wolffs deutschem Sprachgebrauch „eigentlicher“ und „angebrachter“ Mathematik –, zum anderen zwischen theoretischer und praktischer Mathematik („Mathesis theoretica“ und „Mathesis practica“). Es handelt sich hierbei um Unterscheidungen auf zwei verschiedenen Ebenen. Bei der Unterscheidung von reiner und unreiner Mathematik geht es allein um die Einteilung der verschiedenen mathematischen Teilgebiete ohne Beachtung ihrer tatsächlichen Anwendung in der Natur. Aus diesem Grund können die theoretischen Kenntnisse sämtlicher mathematischer Wissenschaften, also sowohl der reinen als auch der nichtreinen Mathematik, als theoretische Mathematik angesehen werden. Die entsprechenden Lehren werden erst in der „Mathesis practica“ umgesetzt und sowohl auf alltägliche Verrichtungen als auch auf die Natur angewendet.

Bei Kästner selbst finden wir nur die Unterscheidung zwischen reiner und angewandter Mathematik. In seinen „Vorerinnerungen“ schreibt er hingegen auch von Anwendungen der Arithmetik in Form von kaufmännischen Rechnungen.[761] Hierbei muss erwähnt werden, dass dies keine praktische, sondern theoretische Mathematik im Sinne Wolffs ist, denn die Lehrinhalte werden nicht in der Wirklichkeit, sondern nur auf dem Papier angewandt. Aber auch Kästner spricht die Notwendigkeit theoretischer mathematischer Kenntnisse für Handwerker und Künstler an, beispielsweise um die Beschaffenheit und den Gebrauch ihrer Maschinen besser beurteilen zu können, oder sogar selbst aus ihrer Tätigkeit heraus mathematische Regeln herzuleiten, was Kästner „natürliche Mathematik“ nennt.[762] Auch wenn Kästner nicht explizit von theoretischer und praktischer Mathematik schreibt und diese streng voneinander unterscheidet, so kommen seine Ausführungen denen von Wolff hinsichtlich dieser Differenzierung sehr nahe.

Wolff behandelt in seinen *Anfangs=Gründen* die mathematischen Wissenschaften in folgender Reihenfolge: Arithmetik, Geometrie, ebene Trigonometrie, Baukunst, Artillerie, Forti-

[756] Vgl. Wolff, ML, Sp. 866.
[757] In: Wolff, ML, Sp. 867 f.
[758] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, ML, Sp. 867 f.
[759] In: Wolff, ML, Sp. 868 f.
[760] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, ML, Sp. 868 f.
[761] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 6.
[762] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 9.

fikation, Mechanik/Bewegungskunst, Hydrostatik, Aerometrie, Hydraulik, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspektive, sphärische Trigonometrie, Astronomie, Geographie, Chronologie, Gnomonik, Algebra inklusive der Differential- und Integralrechnung. Er stellt jeden dieser Teilbereiche eine zweiseitige Vorrede[763] voran, aus denen einige Informationen hinsichtlich der mathematischen Wissenschaften entnommen werden können, die in die folgenden Ausführungen miteinfließen. Diese Themen – bis auf die sphärische Trigonometrie und die Differential- und Integralrechnung – finden wir auch in Wolffs *Auszug aus den Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschafften* (^{6}1737), den er vor allem für den Gebrauch an Schulen herausgab. Hieraus können wir ableiten, dass zwischen der Schul- und der Hochschulmathematik der Unterschied bestand, dass die Differential- und Integralrechnung nur an Hochschulen gelehrt wurde und dieses Gebiet die Grenze zwischen beiden Schulformen darstellte – noch bis weit in das 20. Jahrhundert hinein.[764]

Obwohl Wolff in seinen beiden hier betrachteten Lehrbüchern keine Klassifikation der mathematischen Wissenschaften vornimmt, erkennt man Ähnlichkeiten zu Kästners Einteilung. Zwar unterscheidet sich die Reihenfolge der betrachteten Themen, aber bei Wolff treten sie – Kästners Unterscheidung entsprechend – gebündelt auf, so dass sich diese implizite Zusammengehörigkeit auf Kästners Klassifikation der mathematischen Wissenschaften übertragen lässt. Wolff beginnt in seinen *Anfangs=Gründen* mit der Darstellung der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, ebenso wie Kästner in seinem Lehrbuch. Zwar unterscheiden Wolff und Kästner beide die ebene und die sphärische Trigonometrie voneinander, aber während Kästner diese Themen in seinen *Anfangsgründen* unmittelbar nacheinander betrachtet, findet man sie in Wolffs *Anfangs=Gründen* an unterschiedlichen Stellen. Die ebene Trigonometrie behandelt Wolff im ersten Band seiner *Anfangs=Gründe*, die sphärische Trigonometrie im dritten Band. Da die sphärische Trigonometrie erst Anwendung in der Astronomie, Geographie und Gnomonik finde, wollte Wolff sie erst kurz vor der Behandlung dieser Wissenschaften und nicht bereits im Rahmen der ebenen Trigonometrie vorstellen.[765] In Wolffs *Anfangs=Gründen* folgt nach der reinen Elementarmathematik die Behandlung der Baukunst, Artillerie und Fortifikation. Dann werden Mechanik, Hydrostatik, Aerometrie und Hydraulik betrachtet. Im Anschluss finden wir die Themen Optik, Katoptrik, Dioptrik und Perspektive. Den Schluss bildet die Algebra inklusive der Differential- und Integralrechnung, welche nur als Unterabteilung der Algebra auftritt. Bei Kästner werden zuerst die mechanischen und optischen Wissenschaften behandelt, bevor er die architektonischen Wissenschaften darstellt. Die Algebra und die Differential- und Integralrechnung erklärt Kästner, ebenso wie Wolff, getrennt von der reinen Elementarmathematik.

Über die Anzahl und Einteilung der mathematischen Wissenschaften hinaus gibt es noch weitere Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Wolff und Kästner. Es wurde bereits erwähnt, dass Kästner die Artillerie, Fortifikation und Baukunst vor allem aus Konversationszwecken heraus nur kurz behandelte. Eine ähnliche Bemerkung finden wir bei Wolff. In der Vorrede zur Artillerie heißt es, dass Wolff die Ausführungen zur Artillerie und Fortifikation auch für diejenigen geschrieben habe, „welche nichts weiter suchen, als in der Conversation

[763] Im Falle der Optik, Katoptrik, Dioptrik und Perspektive gibt es nur eine Vorrede, die diese vier Themen umfasst.
[764] Vgl. Pahl, S. 109.
[765] Vgl. Wolff, AG 3, S. 1081.

von dem, was sich im Kriege zu unseren Zeiten zuträget, vernünftig zu discuriren, oder auch nicht ohne Vergnügen in den Festungen auf Reisen sich umzusehen"[766]. Auch scheint der Status der Baukunst als mathematische Wissenschaft zu Beginn des 18. Jahrhunderts noch nicht gefestigt gewesen zu sein. Wolff betont, dass die Baukunst oft nur als Handwerk, nicht aber als mathematische Wissenschaft angesehen werde; er habe sie dennoch in seine *Anfangs=Gründe* mitaufgenommen, da sie dies „wegen ihres grossen Nutzens im menschlichen Leben, daß sie auf Academien gründlich gelehret und von der studirenden Jugend mit Fleiß erlernet werde"[767] verdiene.

Sehr interessant sind Wolffs Ausführungen in der Vorrede zur Aerometrie, welche vor Wolff noch nicht in den mathematischen Lehrbüchern zu finden ist. Wolff bezeichnet die Aerometrie als eine Wissenschaft von den Kräften und Eigenschaften der Luft.[768] Sie sei nicht nur für andere mathematische Teilbereiche wie Hydrostatik und Hydraulik nützlich, sondern auch für die Beschreibung von Instrumenten wie Luftpumpen. Die Begründung dafür, dass er sie nun als mathematisches Teilgebiet behandelt, gibt Wolff selbst: „Es ist ein altes Herkommen, daß man einen Theil aus der Physik zu einer Mathematischen Wissenschaft gemacht, wenn man ihn durch Hülfe der Arithmetik, Geometrie und Algebra recht ausgearbeitet. Denn auf solche Weise haben wir die Hydrostatik, Hydraulik, Optik und Astronomie in die Zahl der Mathematischen Disciplinen bekommen. Da man nun bereits von den Kräften und Eigenschaften der Luft nicht ein geringeres auf Mathematische Art erweisen, ausrechnen und zu nützlichen Künsten anwenden kan; so habe ich mir A. 1709. die Freyheit genommen, eine neue Mathematische Disciplin aufzubringen, welche ich die Aerometrie genennet"[769]. Auch Kästner würdigt die Leistung von Wolff in Bezug auf die Etablierung der Aerometrie als mathematische Wissenschaft.[770]

An den Ausführungen zur Aerometrie ist nicht nur zu erkennen, wann eine Wissenschaft zur Mathematik gerechnet werden konnte – nämlich nach ihrer arithmetischen, geometrischen und algebraischen Ausarbeitung – sondern auch, dass die Anzahl der mathematischen Wissenschaften nicht fest war, sondern durch neue Wissenschaften vergrößert oder – wie wir am Beispiel der Astrologie sehen – auch verringert werden konnte. Während durch Wolff die Aerometrie in den Kreis der mathematischen Wissenschaften aufgenommen wurde, fehlen bei ihm Wissenschaften, die noch von Schott im 17. Jahrhundert als mathematische betrachtet wurden, beispielsweise die Astrologie. Wie bereits Sturm spricht sich auch Wolff eindeutig gegen die Behandlung der Astrologie als mathematische Wissenschaft aus und bezeichnet sie in seinem *Lexicon* nur als eine Kunst, nicht aber als eine Wissenschaft.[771] Bereits in der Vorrede heißt es, dass er in der Astrologie nur das Allgemeinste geschrieben habe, „weil sie heute zu Tage von Rechtswegen fast schon begraben worden, und man unrecht thun würde, wenn man sie wiederum aufferwecken wolte"[772].

Im Vergleich zwischen Wolff und früheren Lehrbuchautoren sowie Kästner können einige Unterschiede ausfindig gemacht werden. Zwar zählt Wolff in seinem *Lexicon* die Akustik im

[766] Wolff, AG 2, S. 515 f.
[767] Wolff, AG 1, S. 303.
[768] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, AG 2, S. 875 f.
[769] Wolff, AG 2, S. 875 f.
[770] Vgl. Kästner, AG 2.1., S. 168.
[771] Vgl. Wolff, ML, Sp. 195.
[772] Wolff, ML, Vorrede, S. a5^{v}.

Rahmen der angewandten Mathematik als physikalische Wissenschaft auf, behandelt sie jedoch nicht in seinen *Anfangs=Gründen*.[773] Auch im *Lexicon* finden wir keinen separaten Eintrag zur Akustik. Diese Wissenschaft wird erst wieder im *Vollständigen mathematischen Lexicon* von 1734 genannt, wobei die Autorenschaft Wolffs bereits von Zeitgenossen angezweifelt wurde.[774] In den Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts ist die Akustik nur bei Clemm als Bestandteil der Aerometrie zu finden. Zur Chiromantie, die Sturm als mathematisches Teilgebiet behandelt hat, schreibt Wolff in seinem *Lexicon*, dass diese „Kunst" keine mathematischen Gründe habe.[775] In den weiteren mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts wurde diese Thematik ebenfalls nicht mehr behandelt. Die Perspektive ist bei Wolff – ebenso wie bei Sturm, aber im Unterschied zu Kästner – den optischen Wissenschaften, also der Optik, Katoptrik und Dioptrik zugeordnet.

In seinem *Lexicon* unterscheidet Wolff zwischen Statik und Mechanik. In den *Anfangs=Gründen* finden wir diese beiden Wissenschaften jedoch nicht getrennt voneinander vor. Die Statik – laut Wolff die „Wissenschafft von der Schweere der Cörper"[776] – betrachtet Wolff innerhalb der Mechanik, welche er wie folgt definiert: „Die Bewegungs=Kunst oder Mechanik ist eine Wissenschaft, entweder mit Vortheil der Kraft oder der Zeit etwas zu bewegen, das ist, eine grössere oder geschwindere Bewegung hervor zu bringen, als sonst der gegebenen Kraft vor sich möglich wäre"[777]. Wolff schreibt ausdrücklich, dass er die Elemente der Mechanik und Statik miteinander verbunden habe.[778]

Die Differential- und Integralrechnung, die im 18. Jahrhundert einen enormen Aufschwung und zahlreiche neue Kenntnisse verzeichnen konnte, wird in Wolffs *Anfangs=Gründen* noch nicht eigenständig, sondern im Rahmen der Algebra behandelt. Im Gegensatz hierzu widmet Kästner der Analysis im Sinne von Differential- und Integralrechnung einen gesamten Band seiner *Anfangsgründe*, nämlich die *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. Auch weitere mathematische Lehrbücher des 18. Jahrhunderts beinhalten die Analysis als eigenständiges Thema, so dass behauptet werden kann, dass diese Wissenschaft ein fester und selbstständiger Bestandteil der mathematischen Lehre – zumindest im akademischen Rahmen – geworden war.

4.1.5 Heinrich Wilhelm Clemm

Zum Vergleich der Einteilung der mathematischen Wissenschaften wird Clemms *Mathematisches Lehrbuch* (^{3}1777) zugrunde gelegt. Zwar äußert sich Clemm hier nicht explizit über die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften, aber aus der Anordnung der Teilgebiete und der entsprechenden Einteilung im Inhaltsverzeichnis können wir entsprechende Schlüsse ziehen. Die Ausführungen beginnen mit den arithmetischen Wissenschaften Zahlenrechnung, Buchstabenrechnung inklusive Gleichungsauflösungen und praktische Arithmetik. Es folgen

[773] Vgl. Wolff, ML, Sp. 864.
[774] Vgl. Zedler, Bd. 19 (1739), Sp. 2060. Auch Nobre setzt sich mit den weiteren Auflagen des *Lexicons* auseinander; vgl. Nobre, S. 12.
[775] Vgl. Wolff, ML, Sp. 345.
[776] Wolff, ML, Sp. 1317.
[777] Wolff, AG 2, S. 745.
[778] Vgl. Wolff, ML, Sp. 1317.

die geometrischen Wissenschaften in Form der Elementargeometrie, (ebenen und sphärischen) Trigonometrie, praktischen und höheren Geometrie. Im Rahmen der höheren Geometrie werden Algebra und Analysis behandelt. Unter den statischen Wissenschaften finden sich Statik und Mechanik, Hydrostatik, Aerometrie, Hydraulik. Die optischen Wissenschaften enthalten die Lehren der Optik, Katoptrik, Dioptrik und Perspektive. Unter der Überschrift „astronomische Wissenschaften" behandelt Clemm Astronomie, Geographie, Chronologie, Gnomonik. Zivil- und Militärbaukunst werden als architektonische Wissenschaften verstanden. Die Artillerie ist Bestandteil der Lehren zur Militärbaukunst. In einem Anhang behandelt Clemm auch die Naturgeschichte und die Experimentalphysik.

In Clemms *Mathematischen Lehrbuch* finden wir somit diejenigen Wissenschaften, die auch Kästner behandelt, wobei die Algebra sowie die Differentialrechnung und Integralrechnung als Bestandteil der höheren Geometrie bei Clemm recht kurz gehalten sind. Bemerkenswert ist, dass Clemm einige Betrachtungen zur Musik und Akustik im Rahmen der Aerometrie vorträgt. Diese beiden Wissenschaften wurden von früheren Lehrbuchautoren wie Wolff und Kästner nicht betrachtet. Dass Clemm sich dazu entschloss, diese beiden Themen auch – zumindest kurz – in seinem *Lehrbuch* vorzustellen, deutet darauf hin, dass diese noch nicht vollkommen emanzipiert von der Mathematik waren, zugleich aber nicht als feste Bestandteile der mathematischen Wissenschaften angesehen wurden, denn sonst wären sie mit Sicherheit auch von anderen Lehrbuchautoren oder bei Clemm im größeren Umfang betrachtet worden.

4.1.6 Wenceslaus Johann Gustav Karsten

Karsten veröffentlichte verschiedene deutschsprachige Lehrbücher, nämlich den *Lehrbegrif der gesamten Mathematik* (1767-1777), die *Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften* (1780) und den *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der mathematischen Wissenschaften* (²1785), die im Folgenden hinsichtlich der Einteilung der mathematischen Teilgebiete analysiert werden.

In den Vorreden der einzelnen Bände des *Lehrbegrifs* finden wir interessante Ausführungen von Karsten zur Klassifikation der mathematischen Wissenschaften. So heißt es beispielsweise: „Es ist zwar durchgängig eingeführt, daß man die Arithmetischen und Geometrischen Wissenschaften, mit Inbegrif der Algebra und höhern Geometrie, allein als Theile der theoretischen Mathematik, die mechanischen Wissenschaften aber als Theile der angewandten Mathematik betrachtet"[779]. In der Vorrede zum ersten Band des *Lehrbegrifs* nimmt Karsten auf Kästners *Commentarius* Bezug und spricht sich für die Richtigkeit der hier vorgenommenen Einteilung der angewandten mathematischen Wissenschaften aus.[780]

Karsten geht auch auf den geplanten Aufbau seines *Lehrbegrifs* ein, der Rückschlüsse auf seine Einteilung der Mathematik zulässt. So sollten die ersten beiden Bände sämtliche Ausführungen zur „theoretischen Elementar-Mathematik"[781] enthalten. „Es sollen nach den beyden ersten theoretischen Theilen drey oder vier Theile von der praktischen Mathematik fol-

[779] Karsten, L 3, Vorrede, o. S.
[780] Vgl. Karsten, L 1, Vorrede, o. S.
[781] Karsten, L 1, Vorrede, S. **3ʳ.

gen, und zwar nach den vom H.[errn] H.[ofrath] Kästner in der obenangeführten Schrift [*Commentarius*] gemachten Abtheilungen“[782]. Diese Ausführungen erfolgen laut Karsten ohne die Algebra mit Ausnahme der einfachen und quadratischen Gleichungen. „Hierauf wird die höhere sowohl theoretische als praktische Mathematik folgen, so daß das ganze Werk […] auf zwölf oder vielleicht mehr Theile […] anwachsen wird“[783]. De facto erschienen in der ersten Auflage nur acht Bände seines *Lehrbegrifs*, die nicht alle mathematischen Teilgebiete, wie es Karsten geplant hat, umfassen. Abbildung 17 enthält eine Auflistung der einzelnen Bände von Karstens *Lehrbegrif*.

Teil und Abt.	Titel	Auflagen
Teil I	*Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der erste Theil. Die Rechenkunst und Geometrie.*	1767, ^{2}1782
Teil II	*Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der Zweyte Theil. Weitere Ausführung der Rechenkunst. Die Buchstabenrechnung. Die ebene und sphärische Trigonometrie, nebst weiterer Ausführung der Geometrie.*	1768
Teil II, Abt. I	*Lehrbegriff der gesamten Mathematik. Des zweyten Theils erste Abtheilung. Weitere Ausführungen der Rechenkunst. Die Algebra mit den vornehmsten Anwendungen auf Zahlenrechnungen. Die ebene und sphärische Trigonometrie, nebst weiterer Ausführ. der Geometrie.*	^{2}1786
Teil II, Abt. II	*Lehrbegriff der gesamten Mathematik. Des zweyten Theils zweyte Abtheilung. Die mathematische Analysis und höhere Geometrie.*	^{2}1786
Teil III	*Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der Dritte Theil. Die statischen Wissenschaften, nebst den ersten Gründen der Mechanik.*	1769, ^{2}1790
Teil IV	*Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der Vierte Theil. Die Mechanik der festen Körper.*	1769, ^{2}1791
Teil V	*Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der Fünfte Theil. Die Hydraulik.*	1770, ^{2}1794
Teil VI	*Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der Sechste Theil. Beschluß der Hydraulik und Pneumatik.*	1771
Teil VII	*Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der Siebende Theil. Die Optik und Perspectiv.*	1775
Teil VIII	*Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der Achte Theil. Die Photometrie.*	1777

Abbildung 17: Bände von Karstens *Lehrbegrifs*.

Die ersten beiden Bände des *Lehrbegrifs* umfassen die theoretische Elementarmathematik in Form der Arithmetik inklusive der Buchstabenrechnung sowie Geometrie inklusive ebener und sphärischer Trigonometrie. In der zweiten Auflage des *Lehrbegrifs* erfuhr der zweite Band eine wichtige Änderung und wurde in zwei „Abtheilungen“ aufgeteilt. In der ersten Abteilung wurde die Algebra mitaufgenommen, in der zweiten Abteilung die Analysis im Sinne

[782] Karsten, L 1, Vorrede, S. **3^{r}.
[783] Karsten, L 1, Vorrede, S. **3^{r} f.

der Differential- und Integralrechnung. „Daher enthalten nun die drey ersten Bände des Lehrbegriffes die ganze theoretische elementar= und höhere Mathematik so vollständig, als es der Plan des Lehrbegriffes erfordert“[784].

Die Bände 3 bis 6 widmen sich den mechanischen Wissenschaften: Statik, Hydrostatik, Aerostatik, Mechanik, Hydraulik, Hydrodynamik und Pneumatik. Auffällig ist hier, dass Karsten den mechanischen Wissenschaften die Pneumatik hinzugefügt hat, was er wie folgt begründet: „Weil es schon gewöhnlich ist, daß man Hydrostatik und Hydraulik, oder Hydromechanik, von einander unterscheidet; so habe ich geglaubt, daß es nicht ganz unschicklich sey, Aerostatik und Aeromechanik, oder Pneumatik, zu unterscheiden, weil man in den gewöhnlichen Handbüchern unter dem Namen der Aerometrie nur die Wissenschaft vom Gleichgewichtszustande der Luft abzuhandeln pflegt“[785].

In dem Kapitel „Hydraulik“ behandelte Karsten nicht nur die Hydraulik, sondern auch Teile der Hydrodynamik, wie sie in Kästners *Anfangsgründen der Hydrodynamik* zu finden sind.[786] Allerdings ist Karsten seinen Aussagen zufolge weiter gegangen als Kästner, da dieser nicht auf deren Anwendungen in der Maschinenlehre eingegangen sei. Gleichzeitig lobt Karsten an dieser Stelle Kästners Werk, da dieses den Mangel an deutschsprachigen Lehrbüchern zur Hydraulik behoben habe. Hier wird deutlich, dass Kästner nicht nur bezüglich der Klassifikation der Wissenschaften, sondern auch in fachlicher Hinsicht, in diesem Fall auf die Hydraulik bezogen, ein Vorbild für Karsten gewesen ist.

Zur Mechanik und Statik finden wir bei Karsten noch eine interessante Bemerkung, aus der die Problematik dieser Bezeichnungen sichtbar wird. Man habe erst in jüngster Zeit die Bedeutung der Wörter „Statik“ und „Mechanik“ geändert.[787] „Die Statik hieß ehedem die Wissenschaft alles dessen, was in Ansehung der Schwere einer mathematischen Untersuchung fähig ist“[788]. Hingegen „die Mechanik hieß die Lehre von den Maschinen. Man berechnete darin die Kräfte der so genannten einfachen Maschinen, und gab Anleitung zur Kenntniß der zusammengesetzten, welche man durch Verbindung der einfachen zu wege bringt […]. Beyde Wissenschaften waren also in der That bloß auf die Betrachtung der Schwere eingeschränkt. Jetzt versteht man sowohl durch die Statik als auch durch die Mechanik eine Wissenschaft von einem viel allgemeinern Umfange, da man angefangen hat, alle andre Kräfte in der Natur mit der Schwere zu vergleichen; und die Maschinenlehre ist nur von beyden eine besondre Anwendung. In der Statik betrachtet man das Gleichgewicht mehrerer Kräfte, […] die Mechanik aber betrachtet die Bewegungen“[789]. Die Maschinenlehre bildet für Karsten nur einen Teil der Mechanik; die einfachen Maschinen stellt man für gewöhnlich im Rahmen der Statik vor, so wie es Karsten in seinem *Lehrbegrif* gemacht hat.[790] Zwar sei es nicht notwendig die Maschinenlehre als gesonderten Teil der angewandten Mathematik zu behandeln, dies hat Karsten aber dennoch gemacht.[791]

784 Karsten, L 2.1., Vorrede zur zweyten Auflage, S. **3^{v}.
785 Karsten, L 6, Vorrede, S. b3^{v}.
786 Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 5, Vorrede, o. S.
787 Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 3, Vorrede, S. **^{v} f.
788 Karsten, L 3, Vorrede, S. **^{v}.
789 Karsten, L 3, Vorrede, S. **2^{r}.
790 Vgl. Karsten, L 3, Vorrede, S. **2^{v}.
791 Vgl. Karsten, L 3, Vorrede, S. **2^{v} f.

In den Bänden 7 und 8 des *Lehrbegrifs* behandelt Karsten die optischen Wissenschaften Optik, Perspektive und Photometrie. Neu ist die Betrachtung der Photometrie als optische Wissenschaft, denn „die neuesten Untersuchungen hierüber haben veranlasset, daß die optischen Wissenschaften mit einer ganz neuen vorzüglich schönen Theorie von Ausmessung der Stärke des Lichts sind bereichert worden, und diese hat den Nahmen der Photometrie erhalten“[792]. Sonst sei es üblich, die Optik im engeren Sinne, Katoptrik und Dioptrik zu den optischen Wissenschaften zu zählen.[793] Hinzu könne noch die Perspektive gezählt werden, die eng mit der Optik verbunden sei und sie von dieser eigentlich gar nicht gesondert behandelt werden müsste, obwohl dies einige Autoren tun würden. Karsten plante die Gesamtheit der optischen Wissenschaften zu behandeln, denn „zu einem vollständigen Lehrbegrif der Optik im allgemeinen Verstande gehören demnach fünf Wissenschaften: der Optik im engern Verstande mit der Perspectiv verbunden ist derjenige Theil dieses Lehrbuchs gewidmet […], die Photometrie, Catoptrik und Dioptrik werden die beyden folgenden Theile abhandeln“[794]. Tatsächlich fehlen aber die Ausführungen zur Katoptrik und Dioptrik, da Karsten diese in einem weiteren Band zu den optischen Wissenschaften betrachten wollte, der jedoch nicht mehr erschienen ist. Da der *Lehrbegrif* nicht in dem Umfang veröffentlicht wurde, wie es Karsten eigentlich geplant hatte, fehlen nicht nur die Katoptrik und Dioptrik, sondern auch sämtliche astronomische Wissenschaften sowie Artillerie, Fortifikation und Zivilbaukunst. Tatsächlich plante Karsten auch die Zivil- und Kriegsbaukunst mitaufzunehmen und sie nach den mechanischen und optischen Wissenschaften vorzutragen.[795]

Nachdem die mathematischen Wissenschaften anhand des *Lehrbegrifs* nun ausführlich betrachtet wurden, wird im Folgenden kurz auf die beiden weiteren deutschsprachigen mathematischen Lehrbücher Karstens. Die *Anfangsgründe* erschienen 1780 in drei Bänden. Der erste Band widmet sich der Arithmetik, Geometrie und ebenen Trigonometrie; es fehlt die sphärische Trigonometrie. Der zweite Band umfasst die statischen und mechanischen Wissenschaften Statik, Hydrostatik, Aerostatik, Mechanik, Hydraulik und Maschinenlehre. Im dritten Band werden die optischen Wissenschaften Optik, Perspektive und Photometrie samt ihrer Anwendungen auf die Katoptrik und Dioptrik behandelt. Karsten plante noch einen weiteren Band, in dem die astronomischen Wissenschaften behandelt werden sollten.[796] Dieser ist allerdings nicht mehr erschienen. Auch die Algebra und die Analysis wurden in den *Anfangsgründen* nicht mehr behandelt.

Während der *Lehrbegrif* und die *Anfangsgründe* von ihrem Umfang her unvollständig blieben, ist die Anzahl der tatsächlich betrachteten mathematischen Wissenschaften in Karstens *Auszug* größer, obwohl der *Auszug* – wie der Titel bereits anzeigt – auf den beiden umfangreicheren Werken basiert. Neu im *Auszug* ist die Aufnahme des kurzen Kapitels über die „Vorbereitungslehren von der Mathematik und ihrer Lehrart“[797], welches stark an die Ausführungen von Wolff und Kästner erinnert. Hier äußert sich Karsten unter anderem über die Einteilung der mathematischen Wissenschaften. Er definiert zunächst die Mathematik als Wissenschaft von der Größe und bezeichnet die reine Mathematik als denjenigen Teil, der sich

[792] Karsten, L 7, Vorrede, S. a3v. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.
[793] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 7, Vorrede, S. a3v f.
[794] Karsten, L 7, Vorrede, S. a4v.
[795] Vgl. Karsten, L 3, Vorrede, o. S.
[796] Vgl. Karsten, AG 3, S. iv f.
[797] In: Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 3-10.

nur der Größe, nicht aber weiteren Eigenschaften widmet.[798] „Dieser Theil der Wissenschaft heißt auch die theoretische Mathematik, und man unterscheidet davon die practische oder angewandte Mathematik, welche sich mit Vergleichung und Ausmessung der Grösse solcher Dinge beschäftiget, die in der Natur wirklich vorhanden sind“[799]. Als Hauptlehren der reinen Mathematik benennt Karsten die Arithmetik und Geometrie, wobei er ihre Anwendungen gesondert betrachtet, unter die die ebene und sphärische Trigonometrie fallen.[800] Des Weiteren nennt er noch „die allgemeine mathematische Erfindungskunst […], welche auch die mathematische Analysis heißt. Man trägt sie bey dem jetzigen Zustande der Wissenschaft am besten in Verbindung mit der Buchstabenrechenkunst und Algebra vor, welches Erweiterungen der Rechenkunst sind. […] Mehrere dahin gehörige besondre Wissenschaften, wovon der eigentliche Inhalt sich hier noch nicht einmahl verständlich würde erklären lassen, haben den gemeinschaftlichen Nahmen der höhern theoretischen Mathematik erhalten“[801]. Als Klassen der angewandten Mathematik unterscheidet Karsten die mechanischen, optischen, architektonischen und astronomischen Wissenschaften.[802] Zu den mechanischen Wissenschaften zählt er all diejenigen, die sich mit der Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften befassen. Unter die optischen Wissenschaften fallen sämtliche Lehren vom Licht. Konkreter wird Karsten bei den architektonischen Wissenschaften, zu denen er die Zivilbaukunst, Kriegsbaukunst, Schiffsbaukunst und Steuermannskunst zählt, wobei er die beiden letztgenannten nicht als eigenständige Themen behandelt. Zu den astronomischen Wissenschaften gehören nicht nur die Astronomie, sondern auch die Geographie, Chronologie und Gnomonik.

Karsten teilt die Wissenschaften in seinem *Auszug* in verschiedene Kategorien ein. Dies wird dadurch kenntlich gemacht, dass sich vor der Darstellung der zusammengehörigen Themen eine Seite mit dem entsprechenden Titel befindet. „Die Theoretisch=Mathematischen Wissenschaften“ werden zu Beginn des Lehrbuchs vorgestellt und umfassen, neben den Vorbereitungslehren zur Mathematik und ihrer Lehrart, die Wissenschaften Arithmetik, (ebene und körperliche) Geometrie, ebene Trigonometrie, allgemeine Rechenkunst beziehungsweise Buchstabenrechnung und sphärische Trigonometrie. Unter die mechanischen Wissenschaften fallen Statik, Hydrostatik, Aerometrie, Hydraulik, Maschinenlehre und Artillerie. Die optischen Wissenschaften setzen sich aus Optik, Perspektive, Dioptrik und Katoptrik zusammen. Die astronomischen Wissenschaften beinhalten Astronomie, Gnomonik, Chronologie, Feldmeßkunst und Geographie. Im Rahmen der architektonischen Wissenschaften behandelt Karsten zum Abschluss die Zivil- und Kriegsbaukunst. In seinem *Auszug* greift Karsten – im Gegensatz zu seinen beiden umfangreicheren mathematischen Lehrwerken – die Photometrie, Pneumatik, Algebra und Analysis nicht auf.

Die von uns verwendete zweite Auflage des *Auszugs* erschien 1785 in zwei Bänden, wobei die Anzahl der Seiten im Vergleich zur ersten Auflage (1781) nur gering gewachsen war. Während die erste Auflage 853 Seiten umfasst, zählt die zweite Auflage insgesamt 901 Seiten. Im Vergleich zu der ersten Auflage gibt es nur wenige Änderungen, zu denen sich Karsten in der Vorrede äußert. So wurde die sphärische Trigonometrie neu in den ersten Band mit aufgenommen, allerdings losgelöst von der ebenen Trigonometrie behandelt. Eine weitere

[798] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 6.
[799] Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 6. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen bei Karsten.
[800] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 7.
[801] Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 8. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen bei Karsten.
[802] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 8 f.

Änderung betrifft die Mechanik und die Hydraulik, die in der zweiten Auflage unter dem Titel „Mechanik und Hydraulik“ betrachtet werden. Die Ausführungen decken sich weitgehend mit dem Kapitel „Hydraulik“ der ersten Auflage, in der Karsten auch die Mechanik dargestellt hat, ohne dies jedoch in dem Titel des Kapitels kenntlich zu machen.

Karsten unterscheidet die „theoretische“ von der „praktischen“ beziehungsweise „angewandten“ Mathematik, wobei er weder die Ausdrücke „reine Mathematik“ noch die lateinischen Bezeichnungen verwendet. Die Einteilung der einzelnen Teilgebiete erinnert stark an diejenige von Kästner. Karsten bezieht sich in der Vorrede des ersten Bandes des *Lehrbegrifs* explizit auf die Einteilung, die Kästner in seinem *Commentarius* vorgenommen hat. In dieser Hinsicht fungierte Kästner offensichtlich als Vorbild für Karsten. Betrachtet man alle mathematischen Teilgebiete bei Karsten zusammen, so gibt es nur wenige Abweichungen im Vergleich zu Kästner. Eine besteht darin, dass Karsten die Perspektive eindeutig den optischen Wissenschaften zuordnet, wie es auch andere mathematische Lehrbuchautoren getan haben. Die Maschinenlehre sondert Karsten im Gegensatz zu anderen Autoren von den übrigen mechanischen Wissenschaften ab. Neu bei Karsten ist die Behandlung der Photometrie und Pneumatik als eigenständige mathematische Themen. Hieran erkennt man, wie bereits im Falle der Aerometrie bei Wolff, dass das System der mathematischen Wissenschaften noch nicht vollkommen gefestigt war. Durch die Einteilung, wie Kästner sie beispielsweise vorgenommen hat, war es durchaus offen für neue Themen, die in dem bestehenden System mühelos integriert werden konnten.

4.1.7 Georg Simon Klügel

Klügel gab kein Lehrbuch heraus, das sich sämtlichen mathematischen Wissenschaften widmet und in denen er sich über die Hierarchie der Mathematik äußert. Allerdings stehen in seinem *Mathematischen Wörterbuch* (3 Bde., 1803-1808) einige Ausführungen über die mathematischen Wissenschaften. Unter dem Eintrag „Mathematik“[803] definiert Klügel die Mathematik zunächst als Wissenschaft von den Formen der Größe, wonach er dann auf die Bezeichnung „Mathematik“ sowie ihren Ursprung eingeht. Er teilt die Mathematik ein „in die reine und in die angewandte. Die reine, welche die eigentliche Mathematik ist, heißt darum so, weil alle Begriffe, alle Schlüsse, alle Zusammensetzungen und Zerlegungen der Größen unmittelbar durch den Verstand gebildet werden, ganz rein und unabhängig von aller Hülfe der sinnlichen Erkenntniß und Erfahrung. […] Die angewandte Mathematik enthält die Anwendungen der allgemeinen abstracten Lehrsätze und Auflösungsmethoden, theils auf die Eigenschaften und Veränderungen der natürlichen Körper, so fern sie sich messen lassen, theils auf eine Menge von Gegenständen zum Gebrauch des menschlichen Lebens“[804]. Zur reinen Mathematik zählt Klügel die Arithmetik, welche die gemeine Rechenkunst, Buchstabenrechnung, Algebra, höhere Arithmetik, Analysis endlicher Größen und Analysis unendlicher Größen umfasst, und die Geometrie mitsamt der Goniometrie – Sätze über die Lage der Linien zueinander – und der Trigonometrie.[805] Über die angewandte Mathematik schreibt

[803] In: Klügel, MW 3, S. 602-624.
[804] Klügel, MW 3, S. 603 f.
[805] Vgl. Klügel, MW 3, S. 606 f.

Klügel, dass diese nicht nur sehr umfangreich sei, sondern dass sie in den Lehrbüchern „als ein unförmliches Corpus von ganz ungleichen Kenntnissen erscheint“[806], da zahlreiche verschiedene Wissenschaften unter diesem Begriff versammelt werden. Er spricht sich dafür aus, die angewandte Mathematik in zwei Hauptteile zu teilen und entsprechend die Betrachtungen der Natur von den Anwendungen auf das alltägliche Leben zu trennen.[807] Dementsprechend ergibt sich erstens die physische angewandte Mathematik, zweitens die technische Mathematik. Zu dem ersten Hauptteil rechnet Klügel die mechanischen, astronomischen und optischen Wissenschaften. Er betrachtet die Mechanik im Allgemeinen ein bisschen näher und schließt daraus – je nach Beschaffenheit der betrachteten Körper – dass diese in zwei große Teile geteilt werden müsse, nämlich in die Mechanik der festen und in die Mechanik der flüssigen Körper.[808] Erstere befasst sich entweder mit dem Gleichgewicht von festen Körpern (Statik) oder mit der Bewegung von festen Körpern (Mechanik). Unelastische flüssige Körper werden unter der Hydrodynamik betrachtet. Die Hydrostatik befasst sich mit dem Gleichgewicht flüssiger Körper. Die Aerometrie oder Pneumatik thematisiert dann die Bewegung von flüssigen elastischen Körpern. Auch die Akustik und die Musik – oft Bestandteile älterer Lehrbücher – werden in diesem Teilgebiet erwähnt. Im Bereich der mechanischen Wissenschaften nennt Klügel also all diejenigen Wissenschaften, die bereits Kästner betrachtet hat. Zu den astronomischen Wissenschaften zählt Klügel nicht nur die Astronomie im engeren Sinne, sondern auch die mathematische Geographie, Chronologie und Gnomonik.[809] Auch hier finden wir die Übereinstimmung mit Kästners Vorstellungen über den Umfang der astronomischen Wissenschaften. Die optischen Wissenschaften bestehen für Klügel aus der Optik, Katoptrik und Dioptrik, wobei er die Perspektive und die Photometrie nicht dazurechnet.[810] Die Perspektive beruhe, so Klügel, eher auf Lehren der Geometrie und müsse auch in diesem Rahmen betrachtet werden. Auch die Photometrie, die Karsten als eigenständige optische Wissenschaft in seinem *Lehrbegrif* und seinen *Anfangsgründen* betrachtet hat, sieht Klügel als empirische, eher physikalische und nicht als mathematische Wissenschaft an. Im Rahmen der physischen angewandten Mathematik fehlen die Artillerie, Zivil- und Kriegsbaukunst. Diese finden wir innerhalb der technischen Mathematik, welche für Klügel aus folgenden sieben Abteilungen besteht:[811]

1. Praktische Arithmetik (kaufmännische, juristische und politische Rechenkunst)
2. Praktische Geometrie (Feldmesskunst, Forstgeometrie, Nivellierung und Markscheidekunst)
3. Praktische Mechanik (Maschinenlehre)
4. Bürgerliche Baukunst
5. Wasserbaukunst und Hydrotechnik
6. Kriegswissenschaften (Artillerie, Befestigungskunst, Führung des Angriffs und Verteidigung einer Festung, Taktik)
7. Seewesen (Schiffbau, Navigation, Steuermannskunst).

[806] Klügel, MW 3, S. 607.
[807] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 3, S. 607.
[808] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 3, S. 609-611.
[809] Vgl. Klügel, MW 3, S. 611 f.
[810] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 3, S. 612 f.
[811] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 3, S. 613-615.

All diese Gebiete bilden für Klügel eine Sammlung von Anwendungen der Mathematik. Hier finden wir auch Themen wieder, die andere Autoren zur angewandten Mathematik zählten, wie die Artillerie, Fortifikation und Baukunst, aber auch Wissenschaften, die in den von uns betrachteten deutschsprachigen Mathematiklehrbüchern nicht vorkamen, wie die Taktik. Dies zeigt, dass die Einteilung der mathematischen Wissenschaften im 18. Jahrhundert nicht wirklich gefestigt war. Die Grenzen zwischen angewandter Mathematik und Physik waren zu Beginn des 19. Jahrhunderts noch nicht deutlich gezogen, denn Klügel schreibt: „Die Bestimmung, welche ich der mathematischen Physik gegeben habe, wird dienlich seyn, die Gränzen zwischen angewandter Mathematik und Physik zu ziehen. Es bleibt freylich dem Gutbefinden eines jeden Schriftstellers überlassen, was er zu dem Umfange einer von ihm abgehandelten Wissenschaft auf einer verwandten nehmen will“[812].

Statt eines rein mathematischen Lehrbuchs mit sämtlichen mathematischen Wissenschaften schrieb Klügel eine umfangreiche *Encyklopädie oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten Kenntnisse*, aus denen separate, auch mathematische „Anfangsgründe“ hervorgegangen sind. Die *Encyklopädie* erschien in der ersten Auflage in drei Bänden (1782-1784), die folgende Wissenschaften enthalten:

- Band 1: Naturgeschichte der Gewächs- und Tierkunde, Anthropologie, Anfangsgründe der Mathematik (Arithmetik und Geometrie inklusive Trigonometrie und Feldmessen)
- Band 2: Mineralogie, Naturlehre, Chemie, Astronomie, mathematische Geographie, Schiffkunst, Chronologie, Gnomonik, physische Geographie, natürliche Theologie, Sittenlehre
- Band 3: Naturrecht, praktische Mechanik, bürgerliche Baukunst, Kriegsbaukunst, Schiffsbaukunst und Segelkunst, deutsche Sprachlehre, Geschichte.

In der Einleitung zur Mathematik im ersten Band der *Encyklopädie* nimmt Klügel eine Einteilung der mathematischen Wissenschaften vor.[813] Demnach befasst sich die reine Mathematik nur mit der Größe als Eigenschaft an sich. Die angewandte Mathematik wird unterteilt in die angewandte physische und in die bürgerliche Mathematik, welche im Wörterbuch als technische Mathematik bezeichnet wurde. In der ersteren werden die mathematischen Lehrsätze auf Eigenschaften und Veränderungen der natürlichen Körper angewandt, in der letzteren auf Dinge des alltäglichen menschlichen Lebens. Die physische angewandte Mathematik begreift die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften unter sich. Zur bürgerlichen Mathematik gehören neben der praktischen Mechanik auch die Zivilbaukunst, Wasserbaukunst, Kriegswissenschaften, Wissenschaft des Seewesens (Schiffskunst, Navigation, Schiffbaukunst), Feldmesskunst, Nivellieren, mathematische Forstwissenschaft und Markscheidekunst/Bergwerksgeometrie, sowie die politische Arithmetik. Die Ausführungen entsprechen denjenigen in Klügels *Wörterbuch*.

Die zweite und dritte Auflage dieses Werks erschien in umgearbeiteter Form unter dem Titel *Encyklopädie, oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten, insbesondere aus der Betrachtung der Natur und des Menschen gesammelten Kenntnisse* in fünf Bänden (^{2}1792-1794, ^{3}1806-1809). Im Vergleich der zweiten und dritten zur ersten Auflage gibt es hinsichtlich der mathematischen Wissenschaften nur geringfügige Änderungen. So wurde ab

[812] Klügel, MW 3, S. 616.
[813] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, Encyklopädie, Bd. 1, S. 530 f.

der zweiten Auflage nun auch die Artillerie als Teil der Kriegswissenschaften betrachtet, unter denen außerdem Ausführungen zur Kriegsbaukunst, Angriff und Verteidigung von Festungen und Kriegskunst zu finden sind. Sämtliche Wissenschaften, die die Schifffahrt betreffen, wurden unter dem Oberbegriff „Seewissenschaften“ vereinigt, die sich aus Schiffbau, Navigation und Seetaktik zusammensetzen. Unter der ebenfalls neu hinzugekommenen Philosophie betrachtete Klügel die Psychologie, Sittenlehre, natürliche Theologie sowie moralische Religion.

Klügel veröffentlichte auch mathematische „Anfangsgründe“, die teilweise aus seiner *Encyklopädie* abgetrennt wurden. Hierzu gehören die *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie* (1782, ^{2}1792/93, ^{3}1798, ^{4}1802, ^{5}1809, ^{6}1819, ^{7}1821), die *Anfangsgründe der Astronomie, nebst der mathematischen Geographie, Schifffahrtskunde, Chronologie und Gnomonik* (1793), die *Anfangsgründe der Naturlehre in Verbindung mit der Chemie und Mineralogie* (1792) und die *Anfangsgründe der praktischen Mechanik, der bürgerlichen Baukunst und der Kriegsbaukunst* (1784).

In seiner *Encyklopädie* und seinen *Anfangsgründen* betrachtet Klügel nicht alle Teilgebiete, die er zu den mathematischen Wissenschaften zählt. Es fehlen die mechanischen Wissenschaften Statik, Hydrostatik, Aerometrie, Hydraulik. Auch alle optischen Wissenschaften werden in der *Encyklopädie* nicht erwähnt, ebenso wenig wie die höhere Mathematik in Form der Algebra und Analysis.

4.1.8 Zusammenfassung

Während die Pythagoreer die vier Disziplinen Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik/Harmonielehre als mathematische Wissenschaften ansahen, stieg deren Anzahl im Laufe der Jahre an, bis sie im 17. und 18. Jahrhundert ihren Höhepunkt erreicht hatte. Seit der Antike gab es eine Vielzahl von Klassifikationen, in denen versucht wurde, die mathematischen Wissenschaften in ein stimmiges System zu bringen. Wie unsere Untersuchung der mathematischen „Anfangsgründe“ gezeigt hat, herrschte auch im 18. Jahrhundert keine vollständige Übereinstimmung bezüglich der Anzahl und der Einteilung der mathematischen Wissenschaften. Konsens herrschte in Bezug auf die Einteilung in reine und angewandte Mathematik, wobei die Bezeichnungen variierten. Während im Lateinischen die Unterscheidung von „Mathesis pura“ und „Mathesis impura“ beziehungsweise „Mathesis mixta“ üblich war, finden wir im Deutschen unterschiedliche Benennungen. Die hier betrachteten Lehrbuchautoren übersetzten nicht lediglich die Begriffe „non pura“ und „mixta“ als „nicht-rein“ und „gemischt“, sondern es etablierte sich ab der Mitte des 18. Jahrhunderts der Terminus „angewandte Mathematik“. Die Änderung der Begrifflichkeiten hängt möglicherweise eng damit zusammen, dass die mathematischen Wissenschaften in ein System gebracht wurden, für das „gemischte Mathematik“ zu unspezifisch erschien. Vielmehr waren die Themen, die als angewandte Mathematik verstanden wurden, solche Gegenstände aus dem Bereich der Natur, auf die die Lehren der reinen Mathematik angewendet wurden.

In Sturms *Kurtzgefasster Mathesis* finden wir die Einteilung der Mathematik in lautere (puram) und vermischte (mixta), in seiner *Mathesis Juvenilis* hingegen in unangebrachte beziehungsweise abstrakte und angebrachte Mathematik. Es scheint so, als ob nicht nur ein Wandel der Begrifflichkeiten, sondern auch der Bedeutung stattfand, denn Sturm spricht sich gegen die „garstige[…] Eintheilung“[814] in lautere und unreine Mathematik aus. Wolff benutzt in seinem *Lexicon* die Begriffe „mixta“ und „impura“ für die „angebrachte Mathematik“. Hierunter fallen diejenigen mathematischen Teilgebiete, die bei späteren Autoren unter der Bezeichnung „angewandte Mathematik“ zu finden sind. Dieser Ausdruck begegnet uns zum ersten Mal in Kästners *Anfangsgründen*. Er unterscheidet die reine beziehungsweise abgesonderte Mathematik (pura vel abstracta) von der angewandten Mathematik (applicata) und verwendet somit nicht nur im Deutschen, sondern auch im Lateinischen andere Bezeichnungen für die angewandte Mathematik als noch die Autoren vor ihm. Dies deutet noch einmal mehr darauf hin, dass es sich vielmehr um einen Wandel der Bedeutung statt nur der Terminologie handelt. Es liegt die Vermutung nahe, dass es mit dem Versuch, die Mathematik als eigenständige Disziplin zu etablieren, auch Bemühungen gab, die angewandten mathematischen Wissenschaften nicht lediglich als Sammelsurium unterschiedlicher mathematischer Teilgebiete erscheinen zu lassen, sondern ihnen einen festen Platz innerhalb der gesamten Mathematik zu geben, wofür die detaillierte Klassifikation der mathematischen Wissenschaften zeugt. Dass sich die Bezeichnung „angewandte Mathematik“, die Kästner verwendete, etablierte und ihm somit eine Vorbildfunktion zugesprochen werden kann, zeigen die Ausführungen in den Werken von Clemm, Karsten und Klügel, die ebenfalls diesen Ausdruck benutzten.

Zur reinen Elementarmathematik gehören bei den hier betrachteten Lehrbuchautoren nicht nur die Arithmetik und Geometrie, sondern auch die Trigonometrie sowie die Buchstabenrechnung[815]. Arithmetik und Geometrie wurden als die „beyden Grund=Säulen der mathematischen Wissenschafften“[816] angesehen. Dies geht besonders deutlich aus Kästners Klassifikation der Wissenschaften hervor, wenn er schreibt, dass sämtliche Lehren der reinen Mathematik auf der Arithmetik, der Geometrie, oder auf einer Wissenschaft, die aus beiden zusammengesetzt ist, beruhen.[817]

Zur höheren reinen Mathematik wurden Algebra und Analysis gezählt. Erst mit dem Aufkommen der Differential- und Integralrechnung erfolgte die Unterscheidung zwischen elementarer und höherer Mathematik.[818] Bereits im 18. Jahrhundert wurden die Lehren der Analysis in Form der Differential- und Integralrechnung nicht mehr als elementar angesehen.[819] Sie zog die Grenze zwischen dem Lehrstoff an Gymnasien und Universitäten.[820] Dass die Algebra kein Anlass für eine solche Unterscheidung war, zeigen die Ausführungen von Wolff, der Arithmetik, Geometrie und Algebra lediglich als reine Mathematik ohne nähere Differenzierung ansah.

Nicht eindeutig – zumindest zu Beginn des 18. Jahrhunderts – war die Einordnung der Analysis als neu aufgekommene Wissenschaft. Entsprechende Lehrbücher wurden in erster Linie von Hochschullehrern geschrieben.[821] Wolff ist die erste Person, die die Differential- und Integralrechnung in seinen *Anfangs=Gründen* als Bestandteil der Algebra in deutscher

[814] Sturm, MJ 1, S. 3.

[815] Bei der Buchstabenrechnung handelt es sich um die Rechnung mit Buchstaben statt mit Zahlen, die jedoch von der Algebra, der Lehre von den Gleichungen, unterschieden wird.

[816] Wolff, Auszug, Vorrede, S.)(4^{r}.

[817] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 6.

[818] Vgl. Pahl, S. 106.

[819] Vgl. Folkerts/Knobloch/Reich, S. 217.

[820] Vgl. Pahl, S. 109.

[821] Vgl. Folkerts/Knobloch/Reich, S. 217.

Sprache vorgetragen hat. Erst Kästner betrachtete die einzelnen Bereiche der höheren Mathematik – für ihn Algebra und Analysis – als eigenständige Bestandteile seiner *Anfangsgründe* unter den Titeln *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* sowie *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. Es gab bis zum Erscheinen der *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* kein deutschsprachiges vergleichbares Lehrwerk; die *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* verdrängten die *Élémens d'algèbre* (1746) von Clairaut.[822] Eine deutsche Übersetzung erschien unter dem Titel *Des Herrn Clairaut […] Anfangsgründe der Algebra* (1752, ²1778), übersetzt von Christlob Mylius (1722-1754).[823]

Zur angewandten Mathematik schreibt Klügel, dass sie „als ein unförmliches Corpus von ganz ungleichen Kenntnissen erscheint“[824], was er damit begründet, dass unter diesem Begriff viele unterschiedliche Teilgebiete ohne nähere Differenzierung verstanden würden. Auch Kästner bezeichnet die angewandte Mathematik als eine Sammlung von Wissenschaften mit jeweils eigenen Grundsätzen.[825] Dennoch herrschte weitgehend Einigkeit, was die Einteilung dieser Wissenschaften betrifft. Sie wurden eingeteilt in drei oder vier Klassen – mechanische, optische, astronomische und unter Umständen auch architektonische Wissenschaften – in die die einzelnen Teilgebiete eingeordnet werden konnten. Zunächst mag es irritieren, dass sich Kästner weder in seinen *Anfangsgründen* noch in seinem *Commentarius* auf eine feste Anzahl mathematischer Wissenschaften festlegte, obwohl er in beiden Schriften eine klare Einteilung der Wissenschaften gab. Dies lässt den Schluss zu, dass das System noch nicht vollkommen gefestigt und gleichzeitig offen für Veränderungen war. Auf der einen Seite wurden neue Wissenschaften, wie beispielsweise Aerometrie, der Mathematik hinzugefügt. Wolff hatte diese Thematik mathematisch aufgearbeitet und sie als mathematische Wissenschaft etabliert. Diese Integration war erfolgreich, denn sämtliche Lehrbuchautoren nach Wolff betrachteten die Aerometrie als festen Bestandteil der Mathematik und würdigten Wolff hinsichtlich seiner Leistung. Anders war dies mit der Pneumatik und der Photometrie, die Karsten als eigenständige Teilgebiete integrieren wollte. Auf der anderen Seite verschwanden andere Themen aus dem Kanon der mathematischen Wissenschaften. Anders als im 17. Jahrhundert wurde die Astrologie in den Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts nicht mehr betrachtet. Sturm sprach sich eindeutig gegen die Behandlung der Astrologie aus und auch Wolff bezeichnete sie in seinem *Lexicon* nicht mehr als Wissenschaft, sondern als „Kunst“. Auch die Musik, die bereits seit den alten Griechen neben der Arithmetik, Geometrie und Astronomie zum festen Bestandteil der mathematischen Wissenschaften und des späteres Quadriviums zählte, wurde nicht mehr als mathematische Wissenschaft angesehen.

Der Großteil der von uns betrachteten Lehrbuchautoren behandelte die Perspektive als optische Wissenschaft, nur Kästner stellte sie losgelöst von der Optik bereits im ersten Band seiner *Anfangsgründe,* der die elementare reine Mathematik beinhaltet, dar. Zum Ende des 18. Jahrhunderts hin wurde die Einordnung dieses Themas in die optischen Wissenschaften von Klügel angezweifelt, der sie eher als geometrische Wissenschaft ansah.[826]

---

822 Vgl. Müller, C. H., S. 65.
823 Vgl. Cantor, Bd. 4, S. 73.
824 Klügel, MW 3, S. 607.
825 Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. *2^{r}.
826 Vgl. Klügel, MW 3, S. 613.

Die These von Müller, dass Lehrbücher der 1770er und 1780er Jahre auf Kästners *Anfangsgründen* basierten[827], kann sowohl in Hinblick auf die Systematik als auch auf die inhaltlichen Ausführungen gestützt werden. Während Wolff sich in seinem deutschsprachigen Lehrbuch nicht über die Einteilung der mathematischen Wissenschaften äußerte, finden wir solche Ausführungen in Kästners Werk. Die detaillierten Ausführungen Kästners lassen den Schluss zu, dass die große Anzahl der mathematischen Wissenschaften in ein sinnvolles System gebracht werden musste. Durch das schnelle Anwachsen der mathematischen Kenntnisse und auch Themen war es zudem notwendig, eine Klassifikation zu erstellen, so dass neue Wissenschaften problemlos in diese integriert werden konnten. Kästners Klassifikation hatte tatsächlich Vorbildcharakter, denn Karsten lehnte sich explizit an diese an. Kästners *Anfangsgründe* waren auch inhaltlich richtungsweisend. Er widmete nicht nur der Algebra und Analysis eigenständige Bände seines Gesamtwerks, auch die Hydrodynamik arbeitete er in einer solchen Weise aus, dass Karsten ihn lobte und schrieb, dass „der Mangel eines Lehrbuchs der Hydraulik in unsrer Sprache durch das Kästnerische schon ersetzt ist“[828].

Die Analyse der hier betrachteten „Anfangsgründe“ zeigt, welche Wissenschaften im 18. Jahrhundert zur Mathematik gerechnet wurden. Darüber hinaus wird noch ein weiteres Merkmal deutlich, das sich vor allem aus dem Umfang der Lehrwerke und der Anzahl der behandelten mathematischen Teilgebiete ergibt, nämlich der enzyklopädische Charakter. Die enzyklopädische Darstellung diverser Inhalte auch in Lehrbüchern war ein wesentliches Merkmal des 18. Jahrhundert, in dem die Mathematik in ihrem gesamten Umfang betrachtet und systematisiert wurde.[829] Die Autoren der in dieser Arbeit eingesehenen mathematischen „Anfangsgründe“ hatten den Anspruch, sämtliche Wissenschaften, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik gerechnet wurden, in einem Lehrwerk darzustellen, wenn auch nur – im Falle der Artillerie, Baukunst und Fortifikation – zu Konversationszwecken. Hierfür war eine sinnvolle und zusammenhängende Klassifikation notwendig. Darüber hinaus begegnen uns mit den mathematischen Wörterbüchern von Wolff und Klügel sowie Klügels *Encyklopädie* Werke, die sämtliche Teile der Mathematik betrachten. Da keine entsprechenden Lehrwerke im 19. Jahrhundert ausfindig gemacht werden konnten, kann dies als Charakteristikum des 18. Jahrhunderts angesehen werden. Im 19. Jahrhundert überwiegen dann mathematische Lehrbücher, die sich einzelnen Bereichen, nicht aber der gesamten Mathematik widmen. Als Grund hierfür kann die zunehmende Stofffülle angesehen werden, die eine Spezialisierung erzwingt. Im Gegensatz dazu waren die Autoren der „Anfangsgründe“ Generalisten, die sämtliche mathematische Themen überblickten und in ihren Lehrbüchern darstellten.

Zum Schluss sei noch auf die Anhänge 1 und 2 verwiesen. Anhang 1 zeigt die in den Lehrbüchern der einzelnen Autoren tatsächlich behandelten mathematischen Teilgebiete, wobei die einzelnen Bereiche teilweise in anderen Kapiteln beziehungsweise unter einem anderen Oberbegriff zu finden sind. Anhang 2 stellt Kästners Klassifikation der mathematischen Wissenschaften dar.

---

[827] Vgl. Müller, C. H., S. 58.
[828] Karsten, L 5, Vorrede, o. S.
[829] Vgl. Kühn, S. 46.

4.2 Negative Größen

Während heutzutage Klarheit über die negativen Zahlen als Bestandteil der reellen Zahlen herrscht, war dies im 18. Jahrhundert keineswegs der Fall. Negative Zahlen wurden erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts allgemein anerkannt.[830] Sie wurden zwar bereits vorher verwendet, waren aber nicht genau definiert.[831] Dies führt uns zu der Frage, wie die negativen Größen in den mathematischen „Anfangsgründen" des 18. Jahrhunderts definiert wurden. Hierbei geht es in erster Linie um die negativen Größen als eigenständiges Thema und weniger um ihre konkrete Verwendung, beispielsweise in Gleichungen. Der Vollständigkeit wegen erfolgt nun ein kurzer historischer Einblick in die Verwendung dieser Zahlen.

Bereits die Babylonier kannten negative Zahlen in der Astronomie.[832] Im Mittelalter rechneten die Inder mit negativen Zahlen.[833] Sie lösten biquadratische Gleichungen, erkannten die Doppellösung an und ließen negativen Lösungen zu. Nicht nur die Inder, sondern auch die Chinesen verwendeten im Mittelalter negative Zahlen.[834] Auch Leonardo von Pisa, besser bekannt als Fibonacci (1170-1240), rechnete mit negativen Zahlen ohne Unterschied zu den üblichen anerkannten Zahlen.[835] Bei Girolamo Cardano (1501-1576) finden wir negative Lösungen einer Gleichung.[836] François Viète (1540-1603) bemerkte, dass für negative Größen kein Kalkül existierte, ließ sie aber dennoch als Lösungen einer Gleichung zu. Thomas Harriot (1560-1621) nannte Gleichungen, in denen es keine positiven Lösungen gibt, unmöglich. Michael Stifel (1487-1567) ließ negative Zahlen als Koeffizienten von Gleichungen zu, sprach sich aber nicht für die Anerkennung negativer Gleichungswurzeln aus.[837] Simon Stevin (1548-1620) akzeptierte negative Koeffizienten und Gleichungswurzeln.[838]

In der Geometrie wurden die negativen Zahlen bereits im 12. Jahrhundert anerkannt und gebraucht, um die entgegengesetzte Orientierung von Geraden auszudrücken.[839] Noch im 18. Jahrhundert gab es Autoren, die sich gegen die Verwendung von entgegengesetzten Größen außerhalb der Geometrie aussprachen, beispielsweise d'Alembert. Zu diesem Zeitpunkt war die Frage, als was die negativen Zahlen in der Arithmetik angesehen werden sollten, also noch weitgehend offen. In der vorliegenden Untersuchung der „Anfangsgründe" des 18. Jahrhunderts soll daher auch ein Augenmerk auf die Interpretation und Deutung der negativen Größen in der Arithmetik sowie die damit verbundenen Beispiele gelegt werden. Es muss aber betont werden, dass es bereits früher Deutungsversuche gab. Die Inder interpretierten die positiven und negativen Größen als Vermögen und Schulden.[840] Auch Fibonacci erklärte eine

---

[830] Vgl. Tropfke, S. 147.
[831] Vgl. Michelsen, S. 165.
[832] Vgl. Hofmann, S. 13.
[833] Vgl. hierzu und zum Folgenden Hofmann, S. 59 f.
[834] Vgl. Hofmann, S. 75.
[835] Vgl. Hofmann, S. 95.
[836] Vgl. hierzu und zum Folgenden Tropfke, S. 147.
[837] Vgl. Hofmann, S. 131.
[838] Vgl. Hofmann, S. 158.
[839] Vgl. hierzu und zum Folgenden Tropfke, S. 148.
[840] Vgl. Tropfke, S. 145.

negative Zahl als Ausdruck von Schulden.[841] John Wallis (1616-1703) deutete entgegengesetzte Größen als Vorwärts- und Rückwärtsgehen.[842]

Die Lehre der entgegengesetzten Größen war kein rein fachmathematisches Thema, sondern auch ein Gegenstand der Philosophie, um Ausdrücke wie „weniger als Nichts“ oder „kleiner als Null“ zu bestimmen. Stifel nannte negative Zahlen „fingierte Zahlen unter Null (numeri ficti infra nihil)“.[843] Wallis erwähnte, dass es unmöglich sei, eine Größe zu haben, die weniger als nichts sei. Allerdings habe man in der Physik entgegengesetzte Größen, um die entgegengesetzten Richtungen zu kennzeichnen, beispielsweise bei der Bewegung.

Ein wichtiges Merkmal ist die Bezeichnung entgegengesetzter Größen, die zu unterschiedlichen Zeiten und in den verschiedenen Lehrbüchern variierte. Stifel und Wallis nannten negative Zahlen „kleiner als Null“ oder „weniger als Nichts“. Die deutschen Begriffe „positiv“ und „negativ“ für die Bezeichnung von entgegengesetzten Größen sind bereits im Dresdener Codex (Maya-Handschrift vor dem 15. Jahrhundert) nachgewiesen.[844] Durch die in dieser Arbeit angestellte Untersuchung soll unter anderem die Frage beantwortet werden, ob die mathematischen Lehrbuchautoren des 18. Jahrhunderts diese Begriffe auch verwendeten, oder ob sie die entgegengesetzten Größen anders benannten.

Ein weiteres Thema, welches mit den negativen Größen in Zusammenhang steht, sind die Wurzeln aus negativen Zahlen. In unserer Fallstudie soll ein Blick darauf geworfen werden, ob und wie die Lehrbuchautoren die Quadratwurzel aus negativen Zahlen darstellten. Hierbei beschränken wir uns auf die Ausziehung der Quadratwurzel und nicht auf die negativen Lösungen in algebraischen Gleichungen. Etwa seit Descartes, der solche Lösungen „imaginär“ nannte, wird mit Wurzeln aus negativen Zahlen in größerem Stil gerechnet.[845] Allerdings konnte die Frage, was eine solche Zahl ist, erst nach 1800 beantwortet werden konnte. Dies geschah beispielsweise durch die geometrische Deutung der komplexen Zahlen durch Gauß.

Einen ersten Einblick in die zeitgenössische Debatte um die negativen beziehungsweise entgegengesetzten Größen und die damit verbundenen Schwierigkeiten liefern uns drei Quellen. Hierzu gehört erstens das Werk *Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik* (1789) von Michelsen, zweitens die anonym erschienene Schrift *Versuch das Studium der Mathematik durch Erläuterung einiger Grundbegriffe und durch zweckmäßigere Methoden zu erleichtern* (1805) von Franz Spaun (1753-1826), drittens die Reaktion auf Spauns Schrift, nämlich *Ueber Newtons, Eulers, Kästners und Konsorten Pfuschereien in der Mathematik* (1807) von Langsdorf. Gleichzeitig geben die darin enthaltenen Ausführungen, die im Folgenden betrachtet werden, Anhaltspunkte für die Untersuchung der mathematischen „Anfangsgründe“ des 18. Jahrhunderts.

Michelsen war zum Zeitpunkt des Erscheinens seiner Schrift „Professor der Mathematik und Physik am vereinigten Berlinischen und Cölnischen Gymnasium“[846]. Seine mathematischen Lehrstunden waren vor allem wegen der Anwendung der sogenannten sokratischen Methode, bei der die Schüler durch gezielte Fragen zu dem Ergebnis geführt werden, beliebt und

[841] Vgl. Tropfke, S. 146 f.
[842] Vgl. Tropfke, S. 148.
[843] Vgl. hierzu und zum Folgenden Tropfke, S. 147 f.
[844] Vgl. Tropfke, S. 150 f.
[845] Vgl. hierzu und zum Folgenden Tropfke, S. 152.
[846] Siehe Michelsen, Titelblatt.

erfolgreich.[847] Neben einigen mathematischen Abhandlungen übersetzte er Eulers *Einleitung in die Analysis des Unendlichen* sowie *Vollständige Anleitung zur Differenzial=Rechnung*. Michelsen äußert sich in seinen *Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik* unter anderem über entgegengesetzte Größen. In Bezug auf die Deutlichkeit und das Verständnis der Ausführungen zu diesem Thema zitiert er Karsten.[848] Dieser schreibt im Original: „Nachdem wir im Jahr 1734. die vortreflichen Elementa Matheseos des Herrn Hausen erhalten haben, worin die Elementarbegriffe von positiven und negativen Grössen gleich Anfangs […] im vollkommensten Lichte dargestellt werden, hat sich der ehemalige der Sache allerdings nicht recht angemessene Sprachgebrauch nach und nach aus den später erschienenen Lehrbüchern immer mehr verlohren. Hiezu haben überdem auch die Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie des H. von Segner […] sehr vieles beygetragen“[849]. Diese Aussage erweckt den Eindruck, dass die Lehre von den entgegengesetzten Größen ab dem zweiten Drittel des 18. Jahrhunderts als geklärt galt. Dass dies allerdings nicht der Fall war und es durchaus noch Verständnisschwierigkeiten gab, zeigen uns die Ausführungen von Spaun. Er war Regierungsbeamter und Schriftsteller mit einer Neigung zur Mathematik.[850] Während seiner Laufbahn als Beamter verfasste er eine als staatsfeindlich eingestufte Schrift, so dass er ins Gefängnis kam, wo er sich weiter mit der Mathematik beschäftigte. In seinem *Versuch* greift er einige Kontroversen in der Mathematik auf, wobei er betont, dass deren Grundlagen geklärt werden müssten.[851] In den Ausführungen über die negativen Größen beschreibt Spaun zunächst den Unterschied zwischen der „collectiven“ und „individuellen“ Bedeutung von Zahlen: Die kollektiven Zahlen können nicht negativ sein, die individuellen aber schon.[852] Erstere zeigen die Gesamtmenge eines bestimmten Gegenstandes an, während letztere die Position eines speziellen Gegenstandes innerhalb dieser Menge angibt. Somit entsprechen die kollektiven Zahlen den Betragszahlen beziehungsweise der Anzahl der Elemente einer Menge, und die individuellen Zahlen den Ordnungszahlen. Des Weiteren spricht sich Spaun gegen den Begriff „Negation“ aus und wählt stattdessen den Begriff „Opposition“.[853] Er hält an dieser Stelle fest, dass die Lehre der negativen Größen unvollkommen sei, erstens weil man fälschlicherweise die negative Bedeutung von Zahlen auch auf kollektive Zahlen ausgeweitet habe und zweitens, weil man – wegen der Verwechslung von Negation und Opposition – behaupte, dass positive Größen die negativen aufheben würden. Auch Michelsen nimmt eine Unterscheidung der Größen vor, nämlich in absolute und in positive.[854] Bei den absoluten Größen wird auf die Menge der Teile gesehen, wobei diese jede zufällige Eigenschaften annehmen können, das heißt positiv oder negativ. Die positive Größe hingegen steht für eine zufällige Eigenschaft, die unter entgegengesetzten Bedingungen vorhanden sein

[847] Vgl. hierzu und zum Folgenden Artikel „Michelsen, Johann Andreas Christian“ von Moritz Cantor in: ADB, Bd. 21 (1885), S. 698.
[848] Vgl. Michelsen, S. 15.
[849] Karsten, Mathematische Abhandlungen, S. 243.
[850] Vgl. hierzu und zum Folgenden Artikel „Spaun, Franz Anton Ritter von“ von Anton Schlossar in: ADB, Bd. 35 (1893), S. 69 f.
[851] Vgl. Spaun, S. 3 f.
[852] Vgl. hierzu und zum Folgenden Spaun, S. 5 f.
[853] Vgl. hierzu und zum Folgenden Spaun, S. 6 f.
[854] Vgl. hierzu und zum Folgenden Michelsen, S. 159 f.

kann. Allerdings habe man, so Michelsen, die absoluten und die positiven Größen bisher nicht konsequent voneinander unterschieden, was zu Missverständnissen führte.[855]

Spaun kritisiert im weiteren Verlauf seiner Schrift die Doppeldeutigkeit des Plus- und Minuszeichens, die einmal für die Addition und Subtraktion, einmal als Kennzeichnung der entgegengesetzten Größen verwendet werden, so dass Verwirrungen entstanden seien.[856] Diese Ausführungen führen uns zu der Frage, ob und wie die in der vorliegenden Untersuchung betrachteten Autoren diese Differenzierung vornahmen. Tatsächlich ist es für das Verständnis der entgegengesetzten Größen hilfreich, auf den Unterschied zwischen Vor- und Rechenzeichen aufmerksam zu machen.

Auf Spauns Ausführungen reagierte Langsdorf in seiner Schrift *Ueber Newtons, Eulers, Kästners und Konsorten Pfuschereien in der Mathematik*. Langsdorf, Mathematiker und Technologe, der unter anderem an der Universität Göttingen studierte, wurde in erster Linie durch seine Schriften über das Salinenwesen bekannt.[857] Er veröffentlichte auch die *Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endlicher Größen* (2 Bde., 1776/77) sowie *Erläuterungen über die Kästnerische Analysis des Unendlichen* (2 Bde., 1778/81). In seiner Schrift *Ueber Newtons, ...* wirft Langsdorf Spaun allgemeine mathematische Unkenntnis vor; er greift Abschnitte aus Spauns Schrift auf, um diese zu korrigieren. Spaun sprach sich beispielsweise gegen den Begriff „negativ“ zur näheren Kennzeichnung der Größen in Aussagen wie „negatives Aufgehen“ aus.[858] Hierauf reagierte Langsdorf mit der Anmerkung, dass dies eine Konvention der Mathematiker sei und der Begriff im Rahmen der Theorie der entgegengesetzten Größen verwendet werden könne.[859]

Michelsen stellt sich die Frage, woher die entgegengesetzten Größen in der Mathematik kämen, ob sie von der Mathematik selbst rührten oder ob sie sich eingeschlichen hätten.[860] Die Antwort darauf suchte er erstens in der *Encyclopédie methodique* (bearbeitet von d’Alembert, Bossut, de Lalande, de Condorcet u. a.), zweitens in Montuclas *Histoire des Mathematique*, in denen er allerdings keine Ausführungen zur Geschichte der entgegengesetzten Größen fand. Deswegen nimmt Michelsen an, „daß man auf die entgegengesetzten Größen als auf eine besonders zu betrachtende Gattung, dadurch aufmerksam gemacht worden sey, weil bey jeder Zusammennehmung zweyer von ihnen die kleinere von der größern abgezogen werden muß“[861]. Man nahm also offensichtlich Anstoß daran, dass die Größen, obwohl sie zusammengerechnet werden sollen, voneinander subtrahiert werden müssen. Michelsen bekräftigt seine Vermutung dadurch, dass entgegengesetzte Größen als solche angesehen werden, die sich gegenseitig – vollkommen oder teilweise – aufheben, oder aber die negativen Größen als solche beschrieben werden, die kleiner als Null sind.

Neben diesen Ausführungen macht sich Michelsen Gedanken über ein didaktisch sinnvolles Vorgehen. Er spricht sich für die inhaltliche Einordnung der negativen Größen in den Lehrbüchern aus: Das Thema solle nach der Planimetrie oder reinen Stereometrie im Rahmen

[855] Vgl. Michelsen, S. 166.
[856] Vgl. Spaun, S. 7 und S. 18.
[857] Zu Langsdorf siehe Artikel „Langsdorf, Karl Christian von“ von Siegmund Günther in: ADB, Bd. 17 (1883), S. 691-692.
[858] Vgl. Spaun, S. 7.
[859] Vgl. Langsdorf, S. 12.
[860] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Michelsen, S. 156 f.
[861] Michelsen, S. 157.

der Buchstabenrechnung und Algebra behandelt werden.[862] An anderer Stelle äußert sich Michelsen über die Behandlung der entgegengesetzten Größen noch vor der Geometrie, damit „die Fertigkeit im allgemeinen Denken"[863] ausgebildet werde, aber man müsse sie noch vor der Erklärung der Berechnung der Quadratwurzel behandeln, wo ja zwei entgegengesetzte Wurzeln vorkommen.[864] Michelsens Ausführungen zur inhaltlichen Einordnung der negativen Größen in den Lehrbüchern führen uns zu der Frage, an welche Stelle die jeweiligen Autoren dieses Thema eingeordnet haben.

Es wird deutlich, dass es ab dem zweiten Drittel des 18. Jahrhunderts Bemühungen gab, den Begriff der entgegengesetzten Größen deutlich darzustellen. Inwiefern dies in den deutschsprachigen mathematischen „Anfangsgründen" geschehen ist, soll in der vorliegenden Arbeit analysiert werden. Allerdings wird an den ausführlichen Anmerkungen von Michelsen sowie den Schriften von Spaun und Langsdorf schon deutlich, dass die Grundlagen der Lehre der entgegengesetzten Größen damals noch nicht vollkommen geklärt waren. Mit den mathematischen Schwierigkeiten, die mit den entgegengesetzten Größen aufkamen, gingen philosophische Betrachtungen einher, wenn nämlich der Ausdruck „weniger als Nichts", so wie die negativen Zahlen stellenweise auch bezeichnet wurden, erklärt werden sollte. Selbst Philosophen versuchten diesen Begriff griffig darzustellen, wie in der Schrift von Kant, die wir ebenfalls diskutieren werden, erkennbar wird.

Die negativen Größen können nicht für sich, sondern müssen im Kontext der entgegengesetzten Größen betrachtet werden. Die vorangegangenen Ausführungen bieten Anhaltspunkte für die Untersuchung der mathematischen „Anfangsgründe" des 18. Jahrhunderts, für die folgende Fragen zugrunde liegen:

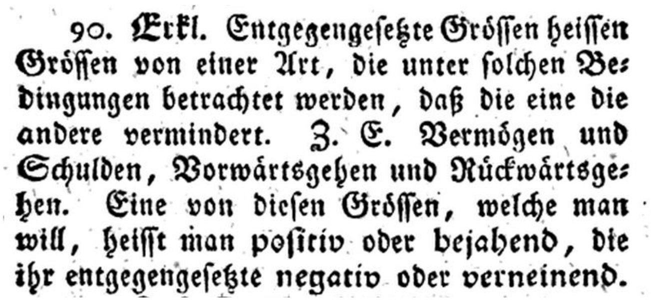
- Mathematische Einordnung: Wo stellen die Autoren die Lehre der entgegengesetzten Größen dar?
- Definition: Wie werden die entgegengesetzten Größen definiert?
- Fachterminologie: Wie werden die negativen Größen bezeichnet?
- Philosophische Betrachtungen: Gewähren die Autoren einen Einblick in die zeitgenössische Debatte um die Lehre der entgegengesetzten Größen? Gibt es neben der fachmathematischen Darstellung auch philosophische Betrachtungen?
- Anschaulichkeit: Wie werden die negativen Größen veranschaulicht? Welche Beispiele werden genannt?
- Rechenregeln: Wie werden die Rechenarten mit entgegengesetzten Größen dargestellt? Wird auf den Unterschied zwischen Rechen- und Vorzeichen hingewiesen? Ist die Schreibweise eindeutig? Wird die Wurzel aus negativen Zahlen betrachtet?

[862] Vgl. Michelsen, S. 158.
[863] Michelsen, S. 180.
[864] Vgl. Michelsen, S. 180.

4.2.1 Abraham Gotthelf Kästner

In Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv* (^{6}1800) findet sich im ersten Kapitel der Arithmetik die Passage „Von den entgegengesetzten Grössen“[865]. Dieser Abschnitt umfasst 24 nummerierte Absätze (90 bis 113), wobei in den ersten sechs Absätzen die entgegengesetzten Größen zunächst definiert werden, um anschließend darauf einzugehen, wie man mit diesen Größen rechnet. Diese Inhalte werden noch vor der Buchstabenrechnung behandelt, so dass wir in den Beispielen und Rechnungen konkrete Zahlen vorfinden. Dies deutet darauf hin, dass Kästner die Lehre der entgegengesetzten Größen als elementaren Bestandteil der Arithmetik beziehungsweise Zahlenrechnung ansah und sie deswegen gleich am Anfang darstellen wollte. Im Kapitel zur Buchstabenrechnung verweist er auf die Ausführungen zu den entgegengesetzten Größen. Er verallgemeinert also die bereits dargestellten Lehren und legitimiert dies durch die Aussage, dass Buchstaben stellvertretend für Zahlen verwendet werden könnten.[866]

Die ersten sechs Absätze bestehen aus einer „Erklärung“ und fünf dazugehörigen „Zusätzen“, in denen Kästner die entgegengesetzten Größen erläutert und anschauliche Beispiele angibt. Zunächst definiert er die entgegengesetzten Größen wie folgt:



90. Erkl. Entgegengesetzte Grössen heissen Grössen von einer Art, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden, daß die eine die andere vermindert. Z. E. Vermögen und Schulden, Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen. Eine von diesen Grössen, welche man will, heisst man positiv oder bejahend, die ihr entgegengesetzte negativ oder verneinend.

Abbildung 18: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, S. 71.

Kästner stellt in dieser Definition nicht nur die Entgegensetzung dieser Größen heraus, sondern auch ihre Zusammengehörigkeit, indem er schreibt, dass sie unter einem Oberbegriff stehen beziehungsweise „von einer Art“ sein müssen. Dies wird aus den darauf folgenden Ausführungen deutlich, in denen Kästner das Beispiel „Vermögen und Schulden“ beibehält und diese unter der gemeinsamen Einheit „Reichsthaler“ fasst.[867] Mit diesem Beispiel leitet er gleichzeitig in die Rechnung mit diesen Größen ein. Er spricht aber nicht ausdrücklich von einem Rechenbeispiel, vielleicht weil es ihm mehr um das Verständnis im Umgang mit diesen Größen ging.

Kästner bemerkt, dass es willkürlich sei, welche der Größen man negativ und welche man positiv nennt.[868] So können die Schulden als ein negatives Vermögen oder das Vermögen als negative Schulden angesehen werden. Im Folgenden ordnet er den negativen Größen das Minuszeichen, den positiven Größen das Pluszeichen zu und zeigt in dem dazugehörigen Beispiel, dass einmal die Schulden das negative Vorzeichen mit sich führen, ein anderes Mal

[865] In: Kästner, AG 1.1., S. 71-80.
[866] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 81.
[867] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 71.
[868] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 71 f.

das Vermögen, was noch einmal die Möglichkeit der Wahl, welche Größe man als negativ und welche man als positiv bezeichnen will, verdeutlicht. Die Wahl des Minuszeichens als Vorzeichen für die negative Größe begründet Kästner damit, dass diese von der positiven Größe abgezogen werden muss. Er bringt somit die Vorzeichen mit den Rechenzeichen in Verbindung, ohne ausdrücklich auf ihren Unterschied hinzuweisen. So wird in dem Beispiel des Absatzes, in dem Kästner den Größen die Vorzeichen zuweist, nicht deutlich, dass eine positive und eine negative Größe zusammengerechnet werden. Es heißt: „So machen 3 Rthlr. Schulden und 7 Rthlr. Vermögen zusammen + 7 – 3 Rthlr. Vermögen“[869]. Diese Schreibweise ist nicht eindeutig. Zum einen kann „+ 7 – 3“ als reine Subtraktion von Zahlen verstanden werden, wobei das Pluszeichen hier überflüssig wäre. Zum anderen können das Plus- und Minuszeichen als Vorzeichen aufgefasst werden, wobei dann das Rechenzeichen fehlen würde. Kästner hätte, um den Unterschied herauszustellen, die Rechnung in folgender Weise schreiben können: „+ 7 + (− 3)“. Einen Hinweis darauf, dass es sich um keine gewöhnliche Subtraktion handelt, liefert das positive Vorzeichen vor der Zahl 7, die am Beginn der Rechnung steht. Diese Schreibweise verfolgt Kästner jedoch nicht konsequent, was beispielsweise an der Angabe „7 – 10 Vermögen“[870], wobei 7 und 10 entgegengesetzte Größen sind, deutlich wird.

Im Gegensatz zu anderen Autoren fehlt bei Kästner die Information, dass das Pluszeichen bei einer positiven Größe, die am Anfang einer Gleichung steht, weggelassen werden kann. In den meisten Fällen setzt Kästner das positive Vorzeichen vor die Größe, lässt es aber an einigen Stellen bei der Erklärung der Rechenregeln auch weg.

Im Rahmen der Zahlenrechnung selbst beschreibt Kästner nur die Subtraktion einer kleineren von einer größeren Zahl.[871] Erst nach der Definition der entgegengesetzten Größen geht er auf den Fall ein, dass eine negative Größe die positive übertreffen könne, wobei die positive Größe vollkommen verschwinde beziehungsweise aufgehoben werde und noch ein Rest der negativen Größe mit dem negativen Vorzeichen übrig bleibe.[872] Als Beispiel nennt Kästner: „7 Vermögen und 10 Schulden machen 7 – 10 Vermögen, d. i. – 3 Vermögen“[873]. Dank der vorangegangenen Ausführungen kann das Ergebnis mit dem negativen Vorzeichen, nämlich „– 3 Vermögen“ nicht als eine negative Zahl missgedeutet, sondern muss als „3 Schulden“ angesehen werden. Nicht eindeutig ist, ob diese Beispiele bereits als reine Rechenbeispiele gemeint sind. Auf der einen Seite schreibt Kästner nicht explizit, dass es sich um eine Rechnung handelt; er verwendet auch nicht den Begriff „Subtraktion“, obwohl er von Beginn an schreibt, dass eine negative Größe von einer anderen subtrahiert wird. Auf der anderen Seite können die Größen durch die Art, wie sie aufgeschrieben werden, bereits als Gleichungen verstanden werden. Seine Ausführungen können als Hinführung zu der Rechnung mit entgegengesetzten Größen angesehen werden; sie sollen dem Leser ein Gefühl für den Umgang und ein Verständnis von negativen Größen geben. Die Rechnungen erklärt Kästner ab Absatz 96, losgelöst von den einleitenden Bemerkungen.

Den Fall, dass die negative Größe die positive übertreffen kann, nimmt Kästner zum Anlass, die entgegengesetzten Größen nicht nur aus fachmathematischer, sondern auch aus

[869] Kästner, AG 1.1., S. 71 f.
[870] Kästner, AG 1.1., S. 82.
[871] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 38 f.
[872] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 72.
[873] Kästner, AG 1.1., S. 72.

philosophischer Sicht zu betrachten. Zunächst betont er, dass eine negative Größe eine „wirkliche Grösse“[874] und nur die Entgegensetzung einer positiven Größe sei.[875] So seien drei Thaler Schulden etwas Wirkliches und könnten sowohl als positive Schulden als auch als negatives Vermögen angesehen werden. Schließlich leitet Kästner zum Begriff „weniger als Nichts“[876] über, indem er zeigt, dass sich zwei gleiche, aber entgegengesetzte Größen, nämlich drei Thaler Schulden und drei Thaler Einnahmen, aufheben und Null ergeben.[877] Anhand der Schulden zeigt er, wie man „weniger als Nichts“ interpretieren kann, beispielsweise als Entgegensetzung zu einem finanziellen Guthaben. In dieser Bedeutung sei mit „weniger als Nichts“ in Form der Schulden eine reale Größe vorhanden. Auf dieser Basis unterscheidet Kästner zwei Bedeutungen des Nichts, wobei die erste dem dargestellten Beispiel entspricht und als relatives Nichts („nihilum relativum“), also in Beziehung zu einem „Etwas“, angesehen werden kann. In der zweiten Bedeutung ist das „Nichts“ im absoluten Sinne („nihilum absolutum“) zu verstehen, wobei eine Größe ohne Beziehung zu einer anderen als „mehr als Nichts“ angesehen werden kann, da sie tatsächlich existiert. Diese Unterscheidung zwischen dem relativen und dem absoluten Nichts habe er, so Kästner, von einem Philosophen übernommen, dessen Namen er allerdings nicht erwähnt. Dies zeigt, dass Kästner philosophische Einflüsse berücksichtigte und auf die Mathematik übertrug. Eine solche Kombination erweist sich – wie hier bei den negativen Größen – als besonders effektiv, um mathematische Grundbegriffe zu klären. Zum Schluss gibt Kästner noch einen Einblick, dass es gerade wegen dieses Begriffs des „Nichts“ zu falschen Vorstellungen bei der Lehre der entgegengesetzten Größen gekommen sei.[878] Bereits in der Vorrede des ersten Bandes der *Anfangsgründe* merkte er an, dass diese Lehren, so wie er sie vorstellte „nichts Geheimnißvolles [haben], und […] keinen Anfänger erschrecken [werden]“[879]. Kästner war sich also der Schwierigkeiten bewusst, die mit der Lehre der entgegengesetzten Größen einhergingen. Er versuchte sie unter anderem durch genaue Begriffserklärungen aus dem Weg zu räumen. Kästners Erklärungen hinterließen nicht nur bei Zeitgenossen, sondern auch bei der Nachwelt bleibenden Eindruck. Kant ließ sich von Kästners Ausführungen inspirieren und beschäftigte sich aus philosophischer Sicht mit den negativen Größen (siehe Kapitel 4.2.8).

Nachdem Kästner die Grundbegriffe erläutert hat, stellt er in den Absätzen 96 bis 113 die Rechnung mit entgegengesetzten Größen dar, was in Form von „Aufgaben“ und „Lehrsätzen“ geschieht. Während wir bei den einleitenden Ausführungen noch anschauliche Beispiele vorgefunden haben, beschränkt sich Kästner bei der Darstellung der vier Rechnungsarten auf reine Zahlenbeispiele ohne Alltagsbezug. An den „Aufgaben“ und ihren „Auflösungen“ kann der Leser nun selbst aktiv werden und überprüfen, ob er die zuvor erlernten Inhalte anwenden kann. Allerdings muss erwähnt werden, dass es sich bei den Aufgaben nicht um solche handelt, in denen eine konkrete Aufgabenstellung vorgegeben ist. Vielmehr enthalten sie nur den Hinweis, welche Rechenoperationen dargestellt werden. So heißt es beispielsweise „Aufg. Entgegengesetzte Grössen zu addiren“[880], wobei sofort die Auflösung mit einem

[874] Kästner, AG 1.1., S. 72.
[875] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 72.
[876] Kästner, AG 1.1., S. 73.
[877] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 72-74.
[878] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 73 f.
[879] Kästner, AG 1.1., S. *4^r f.
[880] Kästner, AG 1.1., S. 74.

Beispiel folgt. Auf diese Weise werden die vier Rechenoperationen mit entgegengesetzten Größen vorgestellt. Die Ausführungen sind begleitet von „Lehrsätzen“, in denen man in erster Linie Rechenregeln und Beweise findet.

Bei der Addition entgegengesetzter Größen heißt es, dass die kleinere von der größeren Größe abgezogen werden und dem Ergebnis das Zeichen der größeren Größe vorgesetzt werden soll.[881] Hierbei liegt ein anderes Verständnis von der „größeren Größe“ als heutzutage zugrunde. Kästner betrachtet bei den Relationen „kleiner“ und „größer“ lediglich die absoluten Zahlen, also ohne Beachtung des Vorzeichens. Heutzutage verwenden wir die Betragszeichen zur Kennzeichnung solcher Größen, die in Kästners Lehrbuch jedoch nicht zu finden sind. Kästner wusste sehr wohl, dass jede negative Größe kleiner als jede positive Größe ist, was er ausdrücklich in seinem Aufsatz *Ueber eine scheinbare Schwierigkeit vom kleinern und grössern, bey Quotienten* schreibt. Er erklärt die Aussage, dass jede negative Größe kleiner als jede positive Größe ist, dadurch, dass jede negative Zahl kleiner als Nichts sei, jede positive hingegen mehr als Nichts.[882] Zudem erfahren wir, dass einem größeren Personenkreis bekannt gewesen sein muss, dass jede negative Zahl kleiner als jede positive Zahl ist, denn Kästner schreibt, dass diese Voraussetzung von Algebraikern und vor allem von Euler häufig verwendet werde. Aus der Tatsache, dass Kästner in seinen *Anfangsgründen* nicht erwähnt, dass jede negative Größe kleiner als jede positive Größe ist, können wir ableiten, dass dies nicht zum elementaren Lehrstoff zählte. Möglicherweise gab Kästner entsprechende Erläuterungen im Rahmen seiner Vorlesungen, was jedoch aufgrund der mangelnden Quellenlage nicht belegt werden kann.

Die Regel zur Addition entgegengesetzter Größen ist äquivalent zu der Erklärung, die Kästner zuvor gegeben hat, wo er ausführte, wie man zu verfahren habe, wenn eine verneinende Größe die positive übertrifft.[883] Dies bestätigt die Vermutung, dass Kästners einleitende Bemerkungen mit den zugehörigen Beispielen auf die Rechnung mit entgegengesetzten Größen hinführen sollten. Kästner erklärt die Addition entgegengesetzter Größen mit der Subtraktion ihrer Beträge, wobei er den Begriff nicht ausdrücklich verwendet, sondern lediglich von „wegnehmen“ schreibt.[884] Er sieht auch den Fall vor, dass mehrere Größen in einer Gleichung vorkommen und schlägt vor, zuerst alle positiven und alle negativen Größen separat zu addieren und dann entsprechend die kleinere von der größeren Größe – gemeint ist die Betragszahl – abzuziehen (siehe Abbildung 19).

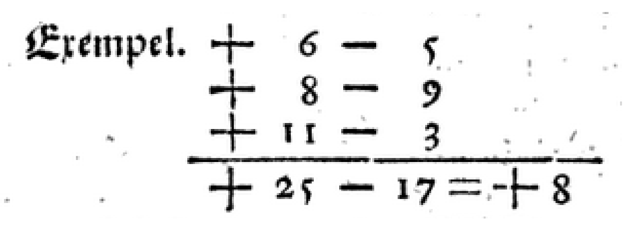
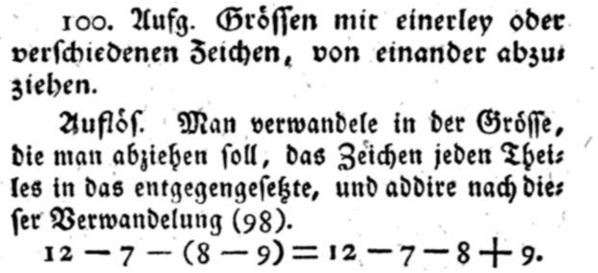

Exempel. $+ 6 - 5$
$+ 8 - 9$
$+ 11 - 3$
$+ 25 - 17 = + 8$

Abbildung 19: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, S. 74.

[881] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 74.
[882] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Ueber eine scheinbare Schwierigkeit. In: LM, 1787, 1. St., S. 71.
[883] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 72.
[884] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 74.

Negative Größen sieht Kästner als Größen an, die von den ihr entgegengesetzten positiven Größen abzuziehen sind.[885] Auf dieser Basis wird die Subtraktion von entgegengesetzten Größen auf die Addition zurückgeführt. Statt der Subtraktion erfolgt die Addition bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel des Subtrahenden.[886] Kästner erklärt dies anhand der Subtraktion der positiven Größe „4“ von der positiven Größe „7“, wobei der entsprechende Term „7 – 4“ lautet, in welchem die 4 nun zu einer negativen Größe wird. Diese Ausführungen sind irritierend, da Kästner nicht eindeutig zwischen den Rechenzeichen und den Vorzeichen unterscheidet, sondern sie vielmehr gleichsetzt. An diesem Beispiel erkennt man nicht, ob es sich um die Subtraktion zwei positiver Zahlen oder um die Addition einer negativen Zahl zu einer positiven handelt. Anschließend leitet Kästner zu dem Fall, eine negative von einer positiven Größe zu subtrahieren, über.[887] Auch hier könne die Subtraktion in die Addition bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel des Subtrahenden verwandelt werden, da – analog zum vorangegangenen Fall – die negative Größe ihr Vorzeichen ins entgegengesetzt positive verwandelt. Für den Beweis setzt er den positiven Minuenden mit dem Term gleich, in dem der Minuend mit dem negativen Subtrahenden sowie dem entgegengesetzt positiven Subtrahenden zusammengenommen wird. Kästner gibt hierzu folgendes Zahlenbeispiel an: „+ 7 = + 7 – 4 + 4“, wobei „+ 7“ der Minuend, „– 4“ der negative Subtrahend und „+ 4“ der entgegengesetzt positive Subtrahend ist. In dem zweiten Schritt wird der ursprüngliche Subtrahend „– 4“ abgezogen, so dass „+ 7 – (– 4) = + 7 + 4“ übrig bleibt und die Gleichheit somit bewiesen ist. Es handelt sich hierbei um das Verfahren der „Ergänzung“. Es gibt keinen direkten Anhaltspunkt, dass Kästner dieses Verfahren von anderen Autoren übernommen hat. Allerdings finden wir dieses sowohl in Segners *Anfangsgründen der Arithmetik* als auch in seinem lateinischen Werk *Elementa Arithmeticae, Geometriae et Calculi Geometrici* (1756).[888] Dieses Lehrbuch erschien bereits zwei Jahre vor Kästners *Anfangsgründen*. Wir können annehmen, dass Kästner die Inhalte dieses Lehrbuchs kannte, denn er schreibt, dass er Segners Werke als Grundlage für einige Inhalte seiner *Anfangsgründe* verwendete.[889]

Nach der Darstellung der Rechenregel zur Subtraktion von entgegengesetzten Größen in Form eines „Lehrsatzes“ wiederholt Kästner die Inhalte an einer „Aufgabe“, in der Größen mit gleichen oder verschiedenen Vorzeichen voneinander subtrahiert werden sollen, wobei gleichzeitig gezeigt wird, wie man eine Minusklammer auflöst (siehe Abbildung 20).


100. Aufg. Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen, von einander abzuziehen.

Auflös. Man verwandele in der Grösse, die man abziehen soll, das Zeichen jeden Theiles in das entgegengesetzte, und addire nach dieser Verwandelung (98).

$$12 - 7 - (8 - 9) = 12 - 7 - 8 + 9.$$

Abbildung 20: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, S. 76.

[885] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 71.
[886] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 75 f.
[887] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 75 f.
[888] Vgl. Segner, AG, S. 368 sowie Segner, Elementa Arithmeticae, S. 268.
[889] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, o. S.

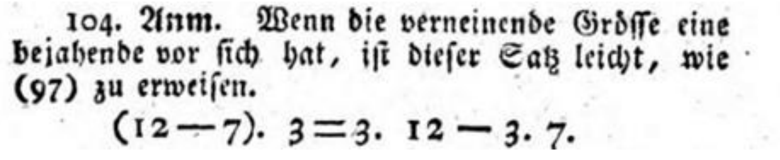
Im Rahmen der Addition und Subtraktion von entgegengesetzten Größen greift Kästner drei Fälle nicht gesondert auf, nämlich die Addition von zwei negativen Größen, die Subtraktion einer negativen Größe von einer negativen Größe und die Subtraktion einer positiven von einer negativen Größe. Allerdings lassen sich diese Fälle leicht auf die von Kästner dargestellten zurückführen. Durch die Tatsache, dass er diese Fälle nicht mehr aufnimmt, sind seine Ausführungen in den *Anfangsgründen* nicht so weitläufig, sondern beschränken sich auf das Wesentliche. Da sein Lehrbuch als Vorlesungsgrundlage verwendet wurde, ist es denkbar, dass die fehlenden Inhalte in den Vorlesungen erklärt oder hergeleitet wurden.

Als Einleitung zur Multiplikation klärt Kästner zunächst die Tatsache, dass bei der Rechnung mit entgegengesetzten Größen die Einheit positiv angenommen werden kann; man könne aber auch die Einheit negativ voraussetzen, da die Bezeichnungen „positiv“ und „negativ“ beliebig gesetzt werden können.[890] Dementsprechend können die positiven Zahlen als Vielfaches der positiven Einheit, und die negativen Zahlen als Vielfaches der entgegengesetzten, also negativen Einheit angesehen werden, oder umgekehrt. Durch diese Erklärung ist der in einer Zahl enthaltende Vielfache immer eine positive Größe. Interessant ist, dass Kästner hier von entgegengesetzten, positiven und negativen Zahlen statt Größen spricht. Er scheint Zahlen und Größen synonym zu verwenden, was dadurch unterstrichen wird, dass diese Ausführungen inhaltlich keinen Unterschied zu den übrigen aufweisen.

Der darauffolgende Absatz enthält den Lehrsatz, dass die Multiplikation einer positiven mit einer negativen Größe ein negatives Produkt ergibt, was Kästner mit Hilfe der positiven Einheit und der Proportionen erklärt.[891] Das Produkt soll den negativen Faktor so oft enthalten als das positive Produkt die positive Einheit. Da die Einheit jedoch positiv ist, der Faktor jedoch verneinend, müsse das Produkt auch verneinend sein.

Anschließend greift Kästner den Fall auf, eine negative Größe mit einer positiven Größe zu multiplizieren.[892] Dies entspricht fast dem vorangegangenen Lehrsatz, nur dass nun die Faktoren vertauscht sind. Kästner beachtet also die Kommutativität der Multiplikation. Die Gleichheit der Fälle kann mit Hilfe des Kommutativgesetzes[893] leicht erklärt werden, aber stattdessen gibt Kästner einen anderen Beweis an, in dem er den Begriff der Einheit wieder aufgreift.[894]

Dann greift Kästner das rechtsseitige Distributivgesetz auf, bei dem die entgegengesetzten Größen in der Klammer stehen (siehe Abbildung 21). Genau wie bei der Multiplikation von entgegengesetzten Größen, wo er einmal den ersten, einmal den zweiten Faktor als negativ ansah, hätte er auch hier noch das linksseitige Distributivgesetz aufzeigen müssen.


104. Anm. Wenn die verneinende Grösse eine bejahende vor sich hat, ist dieser Satz leicht, wie (97) zu erweisen.

$$(12 - 7).\ 3 = 3.\ 12 - 3.\ 7.$$

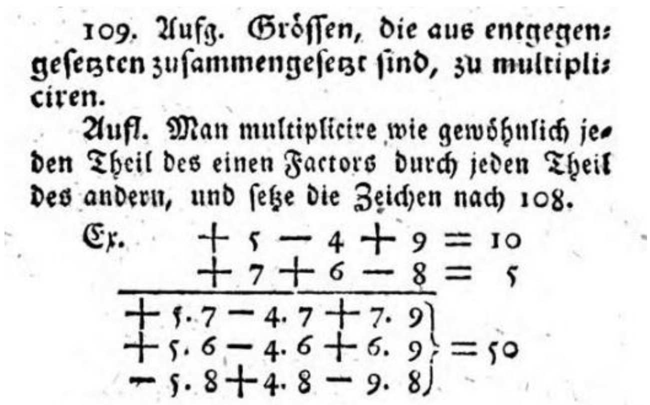
Abbildung 21: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, S. 78.

[890] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 76 f.
[891] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 77.
[892] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 77.
[893] Dieses hat Kästner bereits zuvor behandelt; vgl. Kästner, AG 1.1., S. 26.
[894] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 77 f.

Die Beweisführung zum Lehrsatz, dass zwei negative Größen ein positives Produkt ergeben, erfolgt ebenfalls über den Begriff der positiven Einheit.[895] Da das Vielfache des Gegenteils der positiven Einheit in dem einen negativen Faktor steckt, müsse auch das Ergebnis das Vielfache des Gegenteiligen des anderen negativen Faktors enthalten, so dass es positiv wird. Als Beispiel schreibt Kästner: „Wenn man – 7 mit – 3 multiplicirt, so soll – 7 in dem Producte so vielmahl stecken als + 1 in – 3. Es steckt aber das Gegentheil der + 1 in der – 3 dreymahl, also steckt auch das Gegentheil der – 7, das ist + 7 in dem Producte dreymahl, welches Product also + 21 seyn muß“[896]. Kästner erklärt nicht, wie die Multiplikation von zwei negativen Größen zu deuten ist.

Nach diesen Lehrsätzen greift Kästner sogar den trivialen Fall auf, dass zwei positive Größen miteinander multipliziert ein positives Produkt ergeben.[897] Die Erklärung ist äquivalent zu der, die zuvor in der reinen Zahlenrechnung gegeben wurde.[898] Hiernach merkt Kästner noch an, dass, wenn man die Einheit negativ annimmt, die Produkte bei der Multiplikation von jeweils zwei positiven oder negativen Größen negativ werden würden (statt wie bei der Annahme einer positiven Einheit positiv), wobei er gleichzeitig daran erinnert, dass in diesem Fall nur die positiven und negativen Größen miteinander vertauscht wurden, da es egal sei, welche Größen man als positiv und welche als negativ ansieht.[899] Hierbei erwähnt er jedoch nicht, dass sich auch das Vorzeichen der Produkte von zwei entgegengesetzten Größen umkehrt, also positiv statt negativ wird, wenn man die Einheit nicht positiv, sondern negativ annimmt.

Alle vier behandelten Fälle zur Multiplikation von entgegengesetzten Größen hält Kästner im folgenden Lehrsatz fest: „Einerley Zeichen beyder Factoren geben in der Mulitplication + und verschiedene –“[900]. Kästner beschränkt sich auf die Multiplikation von zwei Größen. Zum Abschluss der Multiplikation erläutert Kästner die Rechenregeln bei Größen, deren beide Faktoren aus entgegengesetzten Größen zusammengesetzt sind, wobei er sich hierbei auf die bereits erarbeiteten Rechenregeln beruft (siehe Abbildung 22).


109. Aufg. Grössen, die aus entgegengesetzten zusammengesetzt sind, zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire wie gewöhnlich jeden Theil des einen Factors durch jeden Theil des andern, und setze die Zeichen nach 108.

$$\begin{array}{llllll} \text{Ex.} & +5 & -4 & +9 & = 10 & \\ & +7 & +6 & -8 & = 5 & \\ \hline & +5.7 & -4.7 & +7.9 & & \\ & +5.6 & -4.6 & +6.9 & = 50 & \\ & -5.8 & +4.8 & -9.8 & & \end{array}$$

Abbildung 22: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, S. 79.

[895] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 78 f.
[896] Kästner, AG 1.1., S. 78 f.
[897] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 79.
[898] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 25 f.
[899] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 79.
[900] Kästner, AG 1.1., S. 79.

Analog zum Absatz zur Multiplikation erklärt Kästner die Division entgegengesetzter Größen mit Hilfe der Einheit. Zuerst gibt er die Rechenregel an, dass der Quotient negativ wird, wenn der Divisor und der Dividend verschiedene Vorzeichen haben.[901] Die Richtigkeit dieses Lehrsatzes erklärt er dadurch, dass das Entgegengesetzte des Divisors in dem Dividenden und dementsprechend auch die entgegengesetzte Einheit im Quotienten steckt. Auf diese Weise wird auch bewiesen, dass der Quotient positiv wird, wenn der Dividend und der Divisor dasselbe Vorzeichen besitzen. Zusammenfassend hält Kästner fest, dass verschiedene Vorzeichen einen negativen, selbe Vorzeichen einen positiven Quotienten ergeben.

Im Gegensatz zu den Ausführungen zur Multiplikation beschränkt sich Kästner bei der Division auf die übergeordneten Fälle. Er erklärt nur die Rechenregel, wenn der Divisor und der Quotient verschiedene Vorzeichen haben, ohne dabei zu unterscheiden, ob nun der Divisor oder der Dividend negativ sind. Bei der Multiplikation entgegengesetzter Größen unterscheidet Kästner, ob der erste oder der zweite Faktor die negative Größe ist.

Im Kapitel über die Quadrat- und Kubikwurzeln im Rahmen der Arithmetik greift Kästner keine Wurzeln aus negativen Größen auf. Diese finden wir erst in den *Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen* (^{3}1794) in dem Abschnitt „Die Rechnung mit den Wurzelgrössen“[902]. Er leitet in das Thema ein, indem er in einem „Lehrsatz“ festhält, dass alle Potenzen mit einem geraden Exponenten einer verneinten Größe positiv, mit einem ungeraden Exponenten negativ sind, was er mit den Sätzen zur Multiplikation entgegengesetzter Größen beweist und hierbei auf die Ausführungen in dem entsprechenden Arithmetik-Kapitel verweist.[903] „Wer eine Wurzel eines geraden Exponenten aus einer verneinten Grösse zu ziehen fodert, der fodert etwas unmögliches, denn es gibt keine verneinte Grösse, die eine solche Potenz wäre. […] Solche Wurzelgrössen […] heissen unmögliche (imaginariae)“[904]. Kästner beschränkt sich nicht nur auf die Quadrat- und Kubikwurzel, sondern hält die Ausführungen von Anfang an allgemein. Er eliminiert diese unmöglichen Größen nicht aus der Algebra, sondern erkennt ihre Existenz an und rechnet mit diesen, was die Ausführungen in den *Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen* zeigen. Er bezieht sich auf Leibniz und schreibt, dass das Aufkommen von unmöglichen Größen der Rechnung nicht schade.[905] Die Tatsache, dass Kästner die unmöglichen Größen erst im Rahmen der höheren Mathematik behandelt, ist ein Hinweis darauf, dass dieses Thema in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts nicht zu den Inhalten der Elementarmathematik gerechnet wurde.

Obwohl Kästner an der Geschichte der Mathematik interessiert war, finden wir keine Anmerkungen zur Historie der entgegengesetzten Größen.

Vergleicht man die erste und die sechste Auflage der *Anfangsgründe der Arithmetik*, so lässt sich feststellen, dass Kästner seit der ersten Auflage 1758 keine Änderungen mehr vorgenommen hat. Dies zeigt gleichzeitig, dass er sich bei seinen Ausführungen nicht an Eulers *Vollständigen Anleitung zur Algebra* (1770) orientierte oder in Form von Ergänzungen in seinen *Anfangsgründen* reagierte. Obwohl Kästner bestrebt war, seine Lehren stets auf dem aktuellen Stand der Forschung zu halten, sah er wohl bei der Lehre der entgegengesetzten Größen keine Notwendigkeit, seine Ausführungen zu verbessern oder zu ergänzen.

---

[901] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 80.
[902] In: Kästner, AG 3.1., S. 14-25.
[903] Vgl. Kästner, AG 3.1., S. 19.
[904] Kästner, AG 3.1., S. 20.
[905] Vgl. Kästner, AG 3.1., S. 24.

Insgesamt lässt sich bezüglich Kästners *Anfangsgründe* festhalten, dass es deren Verfasser bei der Lehre der entgegengesetzten Größen zunächst auf die Begriffserklärungen ankam, bevor er zu den konkreten Rechnungen überging. In den einleitenden Erklärungen findet der Leser nicht nur anschauliche Beispiele, mit denen Kästner auf die Rechnung mit diesen Größen vorbereiten wollte, sondern auch Betrachtungen, die über die fachmathematische Darstellung hinausgehen, nämlich die Klärung des Begriffs „Nichts".

Einen Anwendungsbezug finden wir bei Kästner in diesem Kontext nur bei der Erklärung und den zugehörigen Zusätzen am Anfang des Abschnitts über die entgegengesetzten Größen. Bei der Darstellung der Rechnung mit diesen Größen verzichtet er dann auf konkrete Beispiele, da er die Grundlagen und Begrifflichkeiten zu dem Thema bereits erklärt und anschaulich dargestellt hat. So konzentriert er sich auf die wesentlichen Inhalte, was gleichzeitig den Umfang der Ausführungen reduziert. Allerdings bleiben hierbei gewisse Rechnungen unklar, beispielsweise wieso zwei negative Größen überhaupt miteinander multipliziert werden können. Hinzu kommen Fälle, die Kästner nicht behandelt, wie die Subtraktion einer negativen von einer negativen Größe. Auf der anderen Seite jedoch unterscheidet er bei der Multiplikation zwei Fälle, und zwar einmal, wenn der erste Faktor, einmal, wenn der zweite Faktor negativ ist. Diese Fallunterscheidung wird im Rahmen der Division beim Dividenden und Divisor nicht mehr vorgenommen. An dieser Stelle muss daran erinnert werden, dass die *Anfangsgründe* als Vorlesungsgrundlage verwendet werden sollten und die fehlenden Inhalte in den Vorlesungen selbst vielleicht aufgegriffen wurden.

4.2.2 Johann Christoph Sturm

Den folgenden Ausführungen liegen die beiden deutschsprachigen Lehrwerke *Kurtzgefasste Mathesis* (1717) und *Mathesis Juvenilis* (²1710/14) von Johann Christoph Sturm zugrunde.

In der *Kurtzgefassten Mathesis* werden die entgegengesetzten Größen nicht unter diesem Namen aufgegriffen. Allerdings erarbeitet Sturm Rechenregeln, die bei späteren Lehrbuchautoren im Rahmen der entgegengesetzten Größen zu finden sind. Er behandelt die entsprechenden Inhalte knapp in dem Kapitel „Von der Buchstaben=Rechnung"[906], welches zu Beginn des Lehrbuchs noch vor der „Rechen=Kunst" zu finden ist. Sturm wählt somit den Weg vom Allgemeinen zum Speziellen. Der erste Absatz befasst sich mit der Addition und Subtraktion von Buchstaben, der zweite mit der Multiplikation und Division.

Zur Addition und Subtraktion schreibt Sturm: „Wenn die Buchstaben keine Zeichen zwischen sich haben und einerley sind, so geschieht die ADDITION so wohl als SUBTRACTION gewöhnlicher massen mit Zahlen. Sind verschiedene Buchstaben vorhanden, so setzet man bey der Addition des Zeichen +, welches Lateinisch plus, im Teutschen aber <u>darzu</u> füglich bedeutet. Bey der Subtraction aber das Zeichen – so minus oder <u>weniger</u> anzeiget"[907].

Sturm leitet zu der Rechnung mit entgegengesetzten Größen über, indem er das Problem aufgreift, wie man verfahren muss, wenn eine größere von einer kleineren Größe abgezogen werden muss, also aus unserer Sicht eine negative Größe heraus kommt: Er verwendet weder

[906] In: Sturm, KM, S. 3 f.

[907] Sturm, KM, S. 3. Die Hervorhebungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.

den Begriff der negativen noch den der entgegengesetzten Größe: „In den Buchstaben, welche mit Zeichen zusammen gehänget, verfähret man, wenn es einerley Zeichen sind, als wie in denen einfachen Buchstaben, es sey denn, daß in der Subtraction das Mehrere von dem wenigern abzuziehen vorkäme; Als in welchem Fall man nur dieses von jenem subtrahiret und das andere Zeichen davor setzet“[908]. An einer Stelle verwendet er den Begriff „Mangel“ zur Kennzeichnung einer Größe mit negativem Zeichen und schreibt hierzu, „daß den Mangel einer Sache wegnehmen sey so viel / als eine Sache würcklich darstellen / und einen Mangel hinzuthun / heisse die Sache wegnehmen“[909]. Diese Ausführungen lassen gleichzeitig erahnen, dass positive und negative Größen in einer gewissen Beziehung zueinander stehen, was jedoch für einen Unkundigen oder Anfänger der Mathematik nicht offensichtlich ist.
Es folgt die Darstellung der Regel, wie man Größen mit unterschiedlichen Vorzeichen[910] addiert beziehungsweise subtrahiert: „Wo aber verschiedene Zeichen über einander stehen, da wird die Addition in die Subtraction, und die Subtraction in die Addition verwandelt, und dort das Zeichen der grössern, hier aber das Zeichen derjenigen Quantität behalten, von welcher die Subtraction geschehen sollte“[911]. Sturm verwendet eine Schreibweise, in der er die einzelnen Bestandteile übereinander schreibt (siehe Abbildung 23 und Abbildung 24). Laut Sturms Regel soll im ersten Schritt die Rechenoperation umgekehrt werden, also die Addition in die Subtraktion und umgekehrt. Die Rechnung erfolgt dann ohne Berücksichtigung der Vorzeichen, also nur mit den absoluten Werten. In einem zweiten Schritt wird dem Ergebnis dann das Vorzeichen zugeteilt. Wenn anstatt der Addition die Subtraktion erfolgt, erhält das Ergebnis das Vorzeichen der zuvor größeren Größe; wenn anstatt der Subtraktion die Addition erfolgt, erhält das Ergebnis das Vorzeichen des Minuenden.

Zur Multiplikation und Division schreibt Sturm in aller Kürze ohne weitere Erklärung: „Einerley Zeichen machen in dem Product oder Quotienten + / verschiedene machen – “[912].

Sturm beschreibt ein rein mechanisches Vorgehen ohne Bezug auf reale Begebenheiten. Dies kann man als Regeldidaktik ansehen, bei der keine Einsicht angestrebt wird. Sturm gibt lediglich Zahlenbeispiele an, stellt aber keine anschaulichen Aufgaben dar, die das Verständnis erleichtern können.

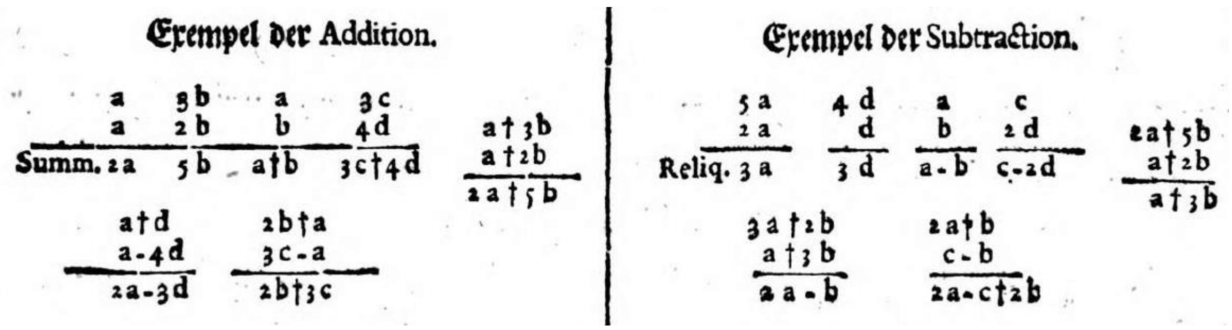


Abbildung 23: Sturm, *Kurtzgefasste Mathesis*, S. 3.

[908] Sturm, KM, S. 3.
[909] Sturm, KM, S. 3.
[910] Diesen Begriff verwendet Sturm in keinem seiner beiden Lehrbücher, wird aber in unseren Ausführungen zum besseren Verständnis verwendet.
[911] Sturm, KM, S. 3.
[912] Sturm, KM, S. 3.

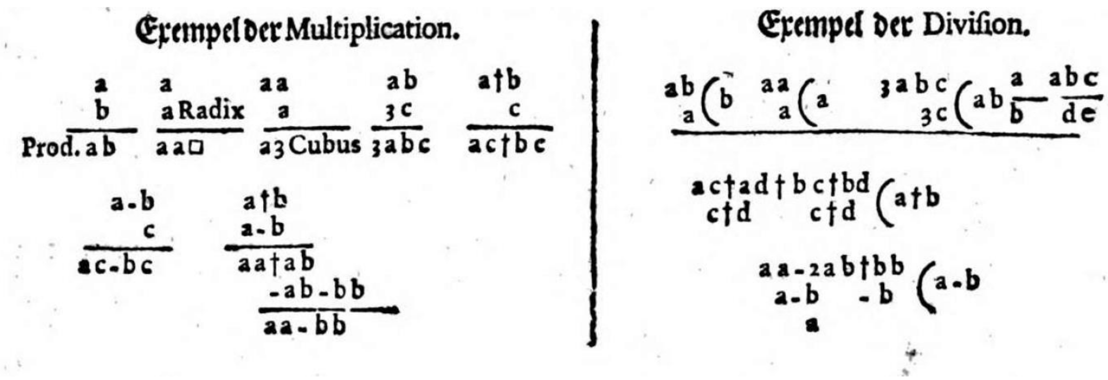


Abbildung 24: Sturm, *Kurtzgefasste Mathesis,* S. 4.

Die Zeichen „+“ und „–“ definiert Sturm lediglich als Operationszeichen, die jeweils „darzu“ beziehungsweise „weniger“ ausdrücken. Allerdings macht er den Unterschied zu den Vorzeichen nicht deutlich, der ihm allerdings bewusst gewesen zu sein scheint, da er von den „Zeichen derjenigen Quantität“[913] schreibt.

Nachdem Sturm diese Erklärungen zu Beginn seines Lehrbuchs im Rahmen der Buchstabenrechnung gemacht hat, greift er die Fälle bei der „Rechen=Kunst“ nicht mehr auf. Ebenso wenig behandelt er die Ausziehung der Wurzel aus negativen Zahlen.

Die Ausführungen zu den entgegengesetzten Größen in der *Mathesis Juvenilis* sind umfangreicher als in der *Kurtzgefassten Mathesis*. Die Rechnung mit Buchstaben und unterschiedlichen Vorzeichen wird in der vierten „Section“ der Arithmetik vorgenommen, und zwar unter dem Titel „Von der Algebra“[914]. Die ersten drei Sektionen umfassen die Rechnung mit unbenannten Zahlen, mit benannten Zahlen und die Proportions- und Progressionsregeln. Den allgemeinen Fall, also die Buchstabenrechnung, stellt Sturm hier erst nach der Vorstellung der konkreten Zahlen dar, und nicht umgekehrt, wie in seiner *Kurtzgefassten Mathesis*.

Wie auch in seinem anderen deutschsprachigen Lehrbuch erklärt Sturm in der *Mathesis Juvenilis* zunächst die vier Rechenoperationen und die entsprechenden Zeichen für die Buchstabenrechnung.[915] Nach diesen Ausführungen betont er: „Jedoch ist zum Voraus dieses annoch zu mercken, daß welche vor angesetzte Zahlen und Buchstaben in solchen Algebraischen Rechnen vor sich kein Zeichen mehr, oder wann sie nicht mehr voranstehen, zwischen sich und etwa andern vor ihnen stehenden Buchstaben und Zahlen ein Creutzlein [Additionszeichen] haben, die heissen in beyden Fällen ein positivum, oder was würckliches, was aber ein Querstrichlein [Subtraktionszeichen] vor sich hat, es sey im Anfang oder hinter andern Buchstaben und Zahlen, das bedeutet ein privativum, oder einen Mangel und Abgang“[916]. Zwar verwendet Sturm nicht die im 18. Jahrhundert geläufig gewordenen Begriffe „entgegengesetzt“, „negativ“ und „positiv“, um die Größen zu kennzeichnen, dafür aber „positivum“ für positive, sowie „privativum“, „Mangel“ und „Abgang“ für negative Größen. An anderer Stelle nennt er das „privativum“ auch „Schuld“ und stellt dies als Gegensatz zum „Geld haben“ dar.[917]

---

913 Sturm, KM, S. 3.
914 In: Sturm, MJ 1, S. 177-261.
915 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 181.
916 Sturm, MJ 1, S. 182. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.
917 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 186 f.

Sturm stellt den Bezug zwischen dem „positivum“ und „privativum“ her, indem er schreibt, dass die Addition eines „positivums“ gleichbedeutend ist mit der Subtraktion eines „privativums“.[918] Ebenso ist die Subtraktion eines „positivums“ mit der Addition eines „privativums“ gleichzusetzen. Diese Aussage impliziert die Vertauschung der Rechenoperationen bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel des zweiten Summanden beziehungsweise des Subtrahenden. Allerdings wird das Vorgehen bei Sturm nicht bewiesen. Sturms Ausführungen lassen zwar erahnen, dass ein „positivum“ und ein „privativum“ in einem gewissen Verhältnis zueinander stehen, allerdings stellt er dies nicht deutlich genug heraus, so dass die Bedeutung der entgegengesetzten Größen verborgen bleibt.

Eine positive Größe bezeichnet Sturm als etwas „würckliches“, betont aber nicht, dass ein „privativum“ – im philosophischen Sinne – auch ein reales Objekt darstellt, welches dem „positivum“ entgegengesetzt ist.

Die Begriffe „Creutzlein“ und „Querstrichlein“ verwendet Sturm zunächst, um die Addition und Subtraktion zu kennzeichnen. Allerdings macht er nicht mehr auf den Unterschied zwischen arithmetischen und algebraischen Zeichen aufmerksam. Er erwähnt nicht explizit, dass es sich um Vorzeichen handelt, sondern nur, dass diese Zeichen vor den Buchstaben und Zahlen stehen. Erst bei der Vorstellung einiger Rechenregeln für die Buchstabenrechnung schreibt Sturm, dass die Additions- und Subtraktionszeichen den Buchstaben neue Namen geben, nämlich entweder ein Positivum oder ein Privativum, Mangel oder Abgang.[919]

Für die Addition und Subtraktion stellt Sturm Regeln mit entsprechenden Fallunterscheidungen auf, wobei sich die Relationen „kleiner“ und „größer“ auf den Betrag der Zahl beziehen. Er unterscheidet jeweils sechs Fälle, die in Abbildung 25 in abgekürzter Form dargestellt sind.

Addition	Subtraktion
Positivum + Positivum = Positivum	Positivum – Positivum = Positivum (Minuend > Subtrahend)
Privativum + Privativum = Privativum[920]	Positivum – Positivum = Privativum (Minuend < Subtrahend)
Privativum + Positivum = Privativum (Privativum > Positivum)	Privativum – Privativum = Privativum (Minuend > Subtrahend)
Privativum + Positivum = Positivum (Privativum < Positivum)	Privativum – Privativum = Positivum (Minuend < Subtrahend)
Positivum + Privativum = Positivum (Positivum > Privativum)	Privativum – Positivum = Privativum
Positivum + Privativum = Privativum (Positivum < Privativum)	Positivum – Privativum = Positivum

Abbildung 25: Regeln zur Addition und Subtraktion entgegengesetzter Größen nach Sturms *Mathesis Juvenilis,* S. 186-189.

[918] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 182.

[919] Vgl. Sturm, MJ 1, S. 185.

[920] Sturm stellt diese Regel falsch dar, denn er schreibt: „Privativa zu Privativis addirt, machen in der Summ auch nichts anders, als wieder ein positivum aus“, in: Sturm, MJ 1, S. 186. Richtig müsste die Addition von zwei „Privativa“ wieder ein „Privativum“ ausmachen. Vermutlich handelt es sich um einen Druckfehler.

Es folgt die Darstellung der Multiplikation und Division, die zunächst noch allgemein gehalten ist. Erst später erfolgt die Unterscheidung von Privativum und Positivum, wozu Sturm zwei Regeln angibt, nämlich erstens, dass das Ergebnis, also das Produkt oder der Quotient, positiv ist, wenn die einzelnen Faktoren beziehungsweise der Dividend und der Divisor beide positiv oder negativ sind, zweitens das Ergebnis negativ, wenn man ein Positivum mit einem Privativum multipliziert oder durch ein Privativum dividiert, und umgekehrt.[921]

Sturm belegt die Richtigkeit der Rechenregeln weder mit Hilfe von Begründungen noch von mathematischen Beweisen. Er nimmt auch keinen Bezug zu realen Gegebenheiten, welche Aufschluss darüber geben, wo diese angewendet werden könnten. Allerdings bleiben seine Ausführungen nicht vollkommen abstrakt. Der Leser findet am Ende der vierten „Section" der Arithmetik einige algebraische Aufgaben, in denen auch mit unterschiedlichen Vorzeichen gerechnet werden muss. Diese Aufgaben sind laut Sturm für die sechste Klasse[922] des Gymnasiums vorgesehen.[923] Es ist irritierend, dass Sturm in der *Kurtzgefassten Mathesis* keine Aufgaben integriert hat, zumal er ihre Wichtigkeit für das Erlernen der Algebra in seiner *Mathesis Juvenilis* betont.[924] Möglicherweise hat der Mangel an Aufgaben etwas mit der Konzeption des Lehrbuchs zu tun, nämlich als eine Art Zusammenfassung. Im letzteren Lehrbuch sind entsprechende algebraische Aufgaben zu finden, so dass der Leser die Möglichkeit hat, die zuvor theoretisch erlernten Inhalte anzuwenden.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass Sturm die entgegengesetzten Größen als Bestandteil der Buchstabenrechnung behandelt. Allerdings sind sie nicht unter dem Titel „entgegengesetzte Größen" zu finden. Sie erscheinen noch nicht als eigenständiges Thema, was den Schluss zulässt, dass die Lehre von den entgegengesetzten Größen möglicherweise erst im Laufe des 18. Jahrhunderts als eigenständiges Thema in der Mathematik betrachtet, ausgearbeitet und in den Lehrbüchern dargestellt wurde. Hinzu kommt, dass Sturm nicht die Begrifflichkeiten verwendet, die wir heute mit dieser Lehre verbinden und die in späteren Lehrbüchern zu finden sind.

Betrachtet man die inhaltliche Einordnung zusammen mit Sturms Fokus auf die Rechenregeln, so kann man annehmen, dass es Sturm in erster Linie um die Vermittlung von Rechenfertigkeiten ging, um algebraische Aufgaben zu lösen. Es gibt keine mathematischen Beweise zu den aufgestellten Regeln. Die Ausführungen bleiben abstrakt, da Sturm keinen Bezug auf reale Begebenheiten nimmt, so dass dem Leser zunächst verborgen bleibt, wofür die erlernten Inhalte nützlich sind.

Über die Historie der entgegengesetzten Größen finden wir in Sturms Lehrbüchern keine Ausführungen. So erfahren wir nichts über die Schwierigkeiten, die zu diesem Zeitpunkt mit dem Begriff der negativen Größen in Verbindung gebracht wurden. Dass Sturm die Geschichte der Mathematik jedoch nicht missachtete, zeigen seine Ausführungen zu dem Ursprung des Wortes „Algebra".[925]

---

921 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 192.

922 Die sechste Klasse ist vermutlich die Abschlussklasse, also die Prima des Gymnasiums.

923 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 319.

924 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 178 und 183.

925 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 177 f.

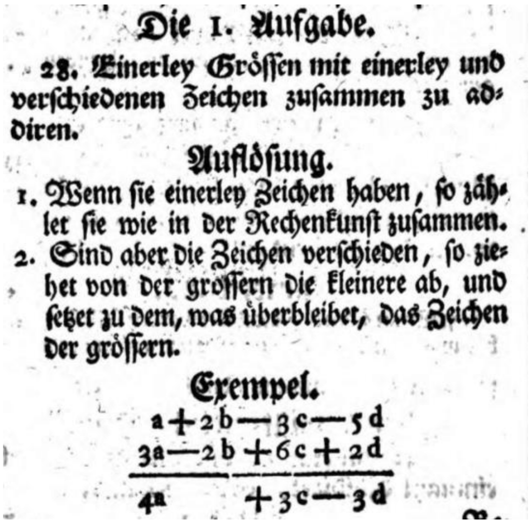
4.2.3 Christian Wolff

Die entgegengesetzten Größen stellt Wolff im Algebra-Kapitel im vierten Band seiner *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften* ([9]1775) dar. Im Arithmetik-Kapitel, welches im ersten Band der *Anfangs=Gründe* zu finden ist, behandelt Wolff keine negativen Größen. Nun muss er also von dem speziellen Fall – das Rechnen mit Zahlen – zu dem allgemeinen Fall – das Rechnen mit Buchstaben – führen. Daher definiert Wolff zu Beginn des Algebra-Kapitels die Buchstabenrechnung als diejenige, „welche an statt der Ziffern allgemeine Zeichen der Grössen brauchet, und dann damit die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichtet“[926] und eine „Grösse“ als „dasjenige, was sich vermehren und vermindern läst, in so weit es sich vermehren und vermindern läst“[927]. Die Verbindung zum Rechnen mit Zahlen stellt Wolff dadurch her, dass er die Größen als „undeterminirte Zahlen“[928] bezeichnet. Auf diese Weise begründet er, dass die vier arithmetischen Rechenoperationen auch auf Buchstaben angewendet werden können.[929]

Es ist vorweg zu nehmen, dass Wolff weder von „entgegengesetzten“ noch von „positiven“ oder „negativen“ Größen spricht. Diese Bezeichnungen werden im Folgenden also anachronistisch verwendet. Bei Wolff selbst finden wir Bezeichnungen wie „baares Geld“ für positive, „Mangel“ und „Schulden“ für negative Größen.[930]

In den *Anfangs=Gründen* gibt es keine Definition der entgegengesetzten Größen, stattdessen konzentriert sich Wolff auf die Vermittlung der Rechenregeln. Diejenigen für negative Größen in der Buchstabenrechnung werden von Wolff in „Aufgaben“ entwickelt. Es gibt vier Aufgaben, die sich jeweils mit einer der vier Rechenoperation befassen. Zum ersten Mal tangiert Wolff die negativen Größen in einer Additionsaufgabe (siehe Abbildung 26). Bei der Rechnung selbst betrachtet Wolff die Vorzeichen[931] nicht als Rechenzeichen, sondern rechnet nur mit den Beträgen. Das Ergebnis enthält dann das Vorzeichen der betragsmäßig größeren Größe. Im zugehörigen Beweis schreibt Wolff, dass alle Größen mit dem Zeichen „+“ „vorhanden“ sind, diejenigen mit dem Zeichen „–“ hingegen „fehlen“; durch diese Entgegensetzung wird der Mangel durch die positive Größe aufgehoben, so dass die Addition in eine Subtraktion verwandelt wird.[932] Er führt „+“ und „–“ als algebraische Zeichen ein, macht aber nicht explizit den Unterschied zu den arithmetischen Zeichen deutlich. Allerdings kann man aus dem Vorgehen, wie Größen mit verschiedenen Vorzeichen addiert werden, den Schluss ziehen, dass ein Unterschied zwischen den algebraischen Zeichen und den arithmetischen Operationen besteht, da Wolff die Vorzeichen nicht beachtet, sondern nur mit Betragszahlen rechnet.

[926] Wolff, AG 4, S. 1550.
[927] Wolff, AG 4, S. 1550.
[928] Wolff, AG 4, S. 1551.
[929] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1552.
[930] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1557.
[931] Wolff verwendet nicht den Begriff Vorzeichen, sondern schreibt lediglich von Zeichen der Größen. Der Begriff wird der Verständlichkeit wegen für die folgenden Ausführungen verwendet.
[932] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1557.


Die 1. Aufgabe.

28. Einerley Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen zusammen zu addiren.

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zählet sie wie in der Rechenkunst zusammen.
2. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet von der grössern die kleinere ab, und setzet zu dem, was überbleibet, das Zeichen der grössern.

Exempel.

$$\begin{array}{l} a+2b-3c-5d \\ 3a-2b+6c+2d \\ \hline 4a \quad +3c-3d \end{array}$$

Abbildung 26: Wolff, *Anfangsgründe*, Bd. 4, S. 1556.

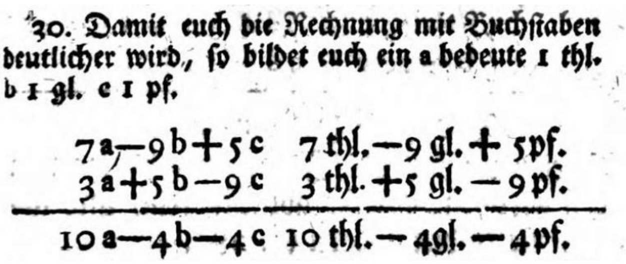
Im Folgenden bezeichnet Wolff die negativen Größen als „weniger als nichts“[933]. Diese Wortwahl irritiert, da sowohl positive als auch negative Größen tatsächlich existieren, worauf Wolff allerdings nicht hinweist. Beim aufmerksamen Lesen dieser Passage wird deutlich, dass Wolff den Ausdruck „weniger als nichts“ mit „Schulden“ gleichsetzt, so dass der Leser daraus selbst ableiten kann, dass der Ausdruck „weniger als nichts“ anders zu deuten ist, nämlich als einen realen Gegenstand und als Entgegensetzung zum Vermögen. Wir finden eine unvollständige Erklärung von „weniger als Nichts“ vor, die im Allgemeinen kritisiert und von nachfolgenden Autoren deutlicher dargestellt wurde.

Dass eine Beziehung zwischen positiven und negativen Größen besteht wird dadurch deutlich, dass man bei der Addition von Größen mit verschiedenen Vorzeichen die Addition in die Subtraktion verwandeln könne, da positive Größen die negativen aufheben.[934] Analoge Ausführungen finden wir auch bei der Darstellung der Subtraktion. Nachdem Wolff drei Regeln zur Subtraktion entgegengesetzter Größen angegeben hat, schreibt er, dass man die Zeichen der Subtrahenden umkehren und die Subtraktion in die Addition verwandeln könne.[935]

Um die Rechnung mit Buchstaben anschaulich darzustellen, schreibt Wolff, dass die Größen, die mit dem Minuszeichen versehen werden, als „Schulden“ anzusehen sind, die Größen mit dem Pluszeichen hingegen als „baares Geld“.[936] Somit stellt er den Bezug zu einer Lebenssituation her, mit der der Leser etwas anfangen und so die Verbindung der Lehren zu realen Gegebenheiten sehen kann, was das Verständnis erleichtert. Wolff gibt auch ein Beispiel an, in dem er die Buchstaben durch Zahlen mit Währungseinheiten ersetzt und die Rechnungen mit Buchstaben und Zahlen nebeneinander darstellt (siehe Abbildung 27). Dasselbe Vorgehen finden wir auch bei der Subtraktion.[937]

---

[933] Wolff, AG 4, S. 1557.
[934] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1557.
[935] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1558.
[936] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1557.
[937] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1558.



30. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher wird, so bildet euch ein a bedeute 1 thl. b 1 gl. c 1 pf.

7a — 9b + 5c	7 thl. — 9 gl. + 5 pf.
3a + 5b — 9c	3 thl. + 5 gl. — 9 pf.
10a — 4b — 4c	10 thl. — 4 gl. — 4 pf.

Abbildung 27: Wolff, *Anfangsgründe*, Bd. 4, S. 1557.

Die Erklärung der Multiplikation ist recht kurz gehalten. Wolff gibt die Regel an, „daß einerley Zeichen im Producte +, verschiedene aber – geben“[938]. Im zugehörigen Beweis erklärt er, „daß in dem Producte das Zeichen – seyn muß, wenn ihr + durch – multipliciret, weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etlichemahl nehmet“[939]. Die Behandlung der Multiplikation bei Wolff ist anders als bei Kästner, welcher mit dem Begriff der Einheit argumentiert. Zugleich entspricht Wolffs Auffassung derjenigen von Spaun, welcher schreibt, dass eine Größe nur mit einer Zahl im Sinne eines Koeffizienten multipliziert werden kann, nicht aber mit sich selbst.[940] Wolff interpretiert die Multiplikation einer negativen mit einer positiven Zahl als eine wiederholte Addition, nämlich „3 · (– 2) = (– 2) · (– 2) · (– 2)“.[941] Das Problem ist, dass man die Multiplikation von zwei negativen Zahlen so nicht erklären kann. Scheinbar sah bereits Wolff die Schwierigkeit, zwei negative Größen miteinander zu multiplizieren: Er erklärt mit Hilfe des Distributivgesetzes, dass die Multiplikation zwei negativer Größen eine positive ergeben muss: „Mercket demnach, daß, wenn ihr 3 – 2 durch – 2 multipliciren sollet, als 3 – 2 Einheiten hat; das ist 1 mahl. Da ihr nun anfangs 3 mit – 2 multipliciret, so nehmet ihr den Defect 3 mahl und demnach 2 mahl zuviel. Derowegen müsset ihr ihn noch zweymahl dazu wieder addiren. Und also giebt – 2 mit – 2 zum Producte + 4“[942]. In dem darauf folgenden Zusatz leitet er die Divisionsregeln für entgegengesetzte Größen als Umkehroperation der Multiplikation her.[943]

Die Ausführungen in Wolffs *Auszug aus den Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschafften* ([6]1737) entsprechen weitgehend denen in den *Anfangs=Gründen*. Im *Auszug* fehlen nur wenige Zusätze und Anmerkungen zum Begriff der Algebra und zu den Größen.

Die *Anfangs=Gründe* und der *Auszug* enthalten keine Ausführungen über Wurzeln aus negativen Zahlen. In Wolffs *Mathematischem Lexicon* (1716) hingegen finden wir den Eintrag „Radix imaginaria, eine eingebildete Wurtzel“[944]. Als solche bezeichnet Wolff Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten, unter denen eine negative Größe steht. Sie nennt man eingebildete Wurzeln, da sie unmöglich sind, aber in der Mathematik wegen ihres Nutzens geduldet werden.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Wolff die entgegengesetzten Größen im Rahmen der Buchstabenrechnung, welche zur Algebra gehört, darstellt. Allerdings behandelt er sie nicht als eigenständiges Thema und bezeichnet die Größen weder als „entgegengesetzt“

[938] Wolff, AG 4, S. 1560.
[939] Wolff, AG 4, S. 1560.
[940] Vgl. Spaun, S. 11.
[941] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1560.
[942] Wolff, AG 4, S. 1561.
[943] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1561.
[944] In: Wolff, ML, Sp. 1163.

noch als „positiv“ und „negativ“. Die Größen werden nur durch das Zeichen, welches ihnen vorangestellt wird, charakterisiert. Einen Hinweis darauf, dass Wolff solche Größen als eigenständig ansah, liefern uns die entsprechenden Einträge in seinem *Lexicon*. Über positive Größen schreibt Wolff: „Quantitas affirmativa, nihilo major, positiva, eine würckliche Grösse, Heisset in der Algebra diejenige, die das Mehr=Zeichen + vor sich hat, oder bey der dieses Zeichen zum wenigsten darunter verstanden wird. Dergleichen ist +b, +9, oder auch b, 9 u.s.w.“[945]. Die negative Größe wird wie folgt definiert: „Quantitas negativa, privativa, nihilo minor, der Mangel einer Grösse, Wird genennet in der Algebra eine Grösse, die das Minderzeichen – vor sich hat, als – 3, – 4, – a, – cd u.s.w. Dergleichen Grössen kan man sich am besten durch die Schulden vorstellen. Denn wenn einer 5 Thaler schuldig ist, so hat er 5 Thaler weniger als nichts, massen er erst 5 Thaler weggeben muß, daß er nichts habe. Daher sind dergleichen Grössen von verschiedener Art als die würcklichen und können dannenhero mit ihnen keine Verhältnis haben […]. Die dieses nicht erwogen, haben entweder seltsame algebraische Geheimnisse erdichtet, oder durch unnöthige Einwürffe Schweerigkeiten gemacht, wo keine zufinden“[946]. Diese Ausführungen lassen erahnen, dass mit der Lehre von den entgegengesetzten Größen einige Schwierigkeiten einhergingen, da man sich über den Unterschied von negativen und positiven Größen nicht im Klaren war. Wolff macht zwar deutlich, dass die negativen von den positiven Größen verschieden sind, aber nicht, welcher Zusammenhang, nämlich die Entgegensetzung, zwischen ihnen besteht. Auch in Bezug auf die Begrifflichkeiten sind Wolffs Ausführungen nicht eindeutig. Zum einen erscheinen die negativen Größen als wirklich existent, da Wolff sie definiert und es sie beispielsweise in Form von Schulden tatsächlich gibt. Zum anderen werden sie als Größen beschrieben, die von den „würcklichen“ verschieden sind und „weniger als nichts“ ausmachen. Diese unscharfen Ausdrücke haben wohl in der Folgezeit zu Verwirrungen geführt, wie beispielsweise aus den Ausführungen von Kästner hervorgeht, der die Begriffe dann genauer erläutert hat.

Der Unterschied zwischen Rechen- und Vorzeichen bleibt in Wolffs Lehrbüchern vage. Wolff definiert Plus- und Minuszeichen als Zeichen der Addition und der Subtraktion.[947] Allerdings findet in den darauf folgenden Ausführungen keine Abgrenzung zu den Vorzeichen statt. Bei den Rechnungen betrachtet Wolff die Vorzeichen nicht als Rechenzeichen und rechnet nur mit den Betragszahlen. Die Vorzeichen werden dann nach gewissen Regeln, die Wolff in den „Aufgaben“ angibt, hinzugefügt.

Auffällig ist, dass Wolffs Vorgehen, Erklärungen und Terminologie denjenigen in Sturms Lehrbüchern gleichen, aber von Kästners Ausführungen verschieden sind. Hinzu kommt, dass weder in Sturms noch in Wolffs Lehrbüchern die negativen Wurzeln dargestellt wurden, was bei Kästner hingegen der Fall ist. Dies lässt den Schluss zu, dass zu Beginn des 18. Jahrhunderts, als Wolff und Sturm ihre Lehrbücher veröffentlichten, diese Lehre noch nicht so ausgearbeitet war, wie wir sie in den Lehrbüchern ab der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts antreffen. Man kann auch annehmen, dass die Lehre der negativen Größen Expertenwissen war und zu dieser Zeit für Lehrbücher noch keine Rolle spielte.

---

[945] Wolff, ML, Sp. 1144.
[946] Wolff, ML, Sp. 1148.
[947] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1553 f .

4.2.4 Johann Andreas von Segner

Für die folgenden Ausführungen werden Segners *Anfangsgründe der Arithmetick, Geometrie und der geometrischen Berechnungen* (1764) sowie seine *Deutlichen und vollständigen Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie* (²1767) zugrunde gelegt.

In Segners *Anfangsgründen* werden negative Größen im „I. Abschnitt. Vornehmlich von den gantzen Zahlen“[948] im Rahmen der „Anfangsgründe der Arithmetick“ behandelt. Nach einigen allgemeinen Erklärungen zu den Zahlen geht Segner auf die vier Rechenarten ein.[949] Zur Subtraktion schreibt er, dass es intuitiv sei, welche Dinge zueinander addiert und welche voneinander subtrahiert werden müssten.[950] Dies verdeutlicht er am Beispiel von Einnahmen und Ausgaben, die für sich addiert werden und schließlich die kleinere von der größeren Summe subtrahiert werden müsse. Das Ergebnis gehöre dann entweder zu den Einnahmen oder den Ausgaben – je nachdem welche der Einzelsummen zuvor größer war. Auf diese Weise führt Segner in die Lehre der entgegengesetzten Größen ein. Im folgenden Absatz stellt er dann eine alternative Methode vor, wie entgegengesetzte Größen zusammengerechnet werden können.[951] Er unterscheidet Ein- und Ausgaben, indem er ersteren das Zeichen „+“ und letzteren das Zeichen „–“ zuordnet, die Werte nebeneinander schreibt und sie wie gewöhnlich addiert oder subtrahiert. Er unterscheidet also während der Rechnung nicht zwischen Vorzeichen[952] und Rechenzeichen. Falls eine negative Zahl herauskommt, so erklärt Segner, bedeute dies, dass die Ausgaben, welche man mit dem Minuszeichen versehen hat, die Einnahmen übersteigen.[953] Mit dieser Erklärung macht Segner die negativen Zahlen anschaulich. Er nennt die Größen, die mit dem Pluszeichen versehen sind, „positiv“, die mit dem Minuszeichen „negativ“ und schreibt, dass es bei der Benennung der Größen als positiv oder negativ auf das ankomme, was man berechnen möchte.[954] Im Folgenden gibt er noch weitere Beispiele solcher Größen, wobei zum ersten Mal der Begriff „entgegengesetzt“ fällt: Aufgang und Niedergang, einfließendes Wasser und ausfließendes Wasser, aufwärts wirkende Kräfte und unterwärts wirkende Kräfte.

Segner erklärt die Addition und Subtraktion nur an einem Beispiel, in welchem er nicht auf den Unterschied von Vorzeichen und Rechenzeichen aufmerksam macht, sondern diese vielmehr in dem Rechenbeispiel gleichsetzt. Es gibt keine genauen Rechenregeln zur Addition und Subtraktion von entgegengesetzten Größen, wie wir sie bei anderen Autoren finden.

Anschließend führt Segner in die Multiplikation und Division ein, bei denen wir keine Hinweise auf negative Größen finden, obwohl er auch hier mit Buchstaben und nicht nur mit konkreten Zahlen arbeitet.[955] Des Weiteren werden negative Größen nicht bei der Betrachtung der Quadratzahlen thematisiert.[956] Dies sind Anzeichen dafür, dass diese Themen für Segner zur höheren Mathematik beziehungsweise zur Buchstabenrechnung gehörten.

[948] In: Segner, AG, S. 1-52.
[949] Vgl. Segner, AG, S. 17 ff.
[950] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, AG, S. 22 f.
[951] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, AG, S. 23.
[952] Segner verwendet diesen Begriff nicht.
[953] Vgl. Segner, AG, S. 23.
[954] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, AG, S. 24 f.
[955] Vgl. Segner, AG, S. 25-52.
[956] Vgl. Segner, AG, S. 72-86.

Neben den beiden großen Kapiteln „Anfangsgründe der Arithmetick“ sowie „Anfangsgründe der Geometrie“ findet sich bei Segner noch das dritte Kapitel „Anfangsgründe der geometrischen Berechnungen“, welches das Unterkapitel „Die allgemeine Arithmetick“[957] enthält, was der Buchstabenrechnung entspricht. In einem „willkürlichen Satz“[958] greift Segner zunächst wieder den Begriff der positiven und negativen Größen auf, wobei er auf die entsprechenden Paragraphen im Arithmetik-Kapitel verweist.[959] Auch hier erwähnt er lediglich positive und negative Größen, ohne auf ihre Beziehung zueinander, nämlich die Entgegensetzung, einzugehen. Nach einigen allgemeinen Ausführungen zu Schreibweise und Rechnung innerhalb der Buchstabenrechnung, geht Segner auf die Addition von Größen ein: Die Addition von „a“ und „b“ ergibt die Summe „a + b“, die Addition von „a“ und „– b“ hingegen „a – b“.[960] Segner setzt die Addition von entgegengesetzten Größen ohne weitere Kommentare mit der Subtraktion gleich, so dass der Unterschied zwischen Vor- und Rechenzeichen nicht eindeutig wird. Im Folgenden gibt Segner Rechenbeispiele an, die jedoch keinen Bezug zu alltäglichen Gegebenheiten aufweisen.[961] Sowohl bei diesen Ausführungen als auch bei den vorangegangenen Erklärungen geht er nicht auf den Fall ein, wie man vorgehen muss, wenn zwei oder mehr negative Größen addiert werden müssen. Allerdings erwähnte er bereits anhand des Beispiels von Einnahmen und Ausgaben, dass die positiven und negativen Größen für sich genommen betragsmäßig addiert werden müssen, was also auch die Addition von negativen Größen impliziert.[962]

Die Subtraktion definiert Segner wie folgt: „Die allgemeine Subtraction einer Grösse B von einer Grösse A, ist die Erfindung einer dritten Grösse, welche wenn sie zu B addiret wird, A wieder herausbringt“[963]. Diese dritte Größe könne berechnet werden, indem die Vorzeichen der Größe B, oder all ihrer Bestandteile (wenn sie aus mehreren Größen zusammengesetzt ist) umgekehrt werden, also Plus in Minus und Minus in Plus, und dann die veränderte Größe B zu A addiert wird.[964] Heute nennt man dieses Verfahren „Ergänzen“ im Unterschied zum „Wegnehmen“. Es ist bereits in Segners lateinischem Lehrbuch *Elementa Arithmeticae, Geometriae et Calculi Geometrici* (1756) zu finden, das als Vorlage für seine deutschsprachigen *Anfangsgründe* diente.[965] Da Kästner sich für einige Ausführungen seines eigenen Lehrbuchs an denen von Segner orientierte, können wir annehmen, dass er die entsprechenden Inhalte kannte und dieses Verfahren verwendete.[966] Den Beweis zur Subtraktion einer negativen von einer positiven Größe stellt Kästner ebenfalls mit Hilfe der Ergänzung dar.[967]

Zum Abschluss nennt Segner folgende Regel: „Und es wird überhaupt, wenn man nur die Zeichen umkehrt, die Subtraction eben so verrichtet wie die Addition“[968]. Auf diese Weise

---

[957] In: Segner, AG, S. 356-374.

[958] Segner erklärt nicht, was ein „willkürlicher Satz“ ist. Es ist anzunehmen, dass hiermit eine Hypothese gemeint ist, da Kästner einen „willkürlichen Satz“ so definiert; vgl. Kästner, AG 1.1., S. 18.

[959] Vgl. Segner, AG, S. 361 f.

[960] Vgl. Segner, AG, S. 367.

[961] Vgl. Segner, AG, S. 367 f.

[962] Vgl. Segner, AG, S. 22.

[963] Segner, AG, S. 368.

[964] Vgl. Segner, AG, S. 368.

[965] Vgl. Segner, Elementa Arithmeticae, S. 268.

[966] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, o. S.

[967] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 76.

[968] Segner, AG, S. 369.

wird die Subtraktion in die ihr entgegengesetzte Rechnung, nämlich die Addition, verwandelt, wie es auch andere Lehrbuchautoren gehandhabt haben.

Wie aus den Ausführungen zur Subtraktion sichtbar wird, sieht Segner von Beginn an vor, dass eine Größe – in diesem Fall eine Größe B – auch aus mehreren Bestandteilen zusammengesetzt sein kann. Nicht nur im Rahmen der Subtraktion, sondern auch bei der Erklärung der Multiplikation sieht Segner vor, dass ein Faktor aus mehreren Größen statt nur aus einer Größe bestehen kann.[969]

Die Multiplikation von zwei Größen „a“ und „b“ wird mit dem Auffinden der vierten Proportionalgröße zu der Einheit zu den Größen „a“ und „b“ gleichgesetzt.[970] Segner beschränkt sich nicht nur auf die Multiplikation von zwei Größen, sondern geht auch auf Produkte aus mehreren Faktoren ein.[971] Die Multiplikation von zwei Größen wird nur knapp in einer Regel festgehalten: „Wenn zwo Grössen, deren eine durch die andre multipliciret werden soll, einerley Zeichen haben, so ist das Zeichen des Products +, sind aber die Zeichen der Factoren verschieden, so hat das Product das Zeichen –“[972]. Dies beweist Segner mit Hilfe der Proportionen, bei der die Einheit positiv angenommen wird, und gibt die vier verschiedenen Möglichkeiten an:

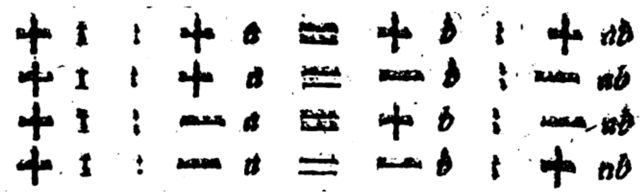

$+1 : +a = +b : +ab$
$+1 : +a = -b : -ab$
$+1 : -a = +b : -ab$
$+1 : -a = -b : +ab$

Abbildung 28: Segner, *Anfangsgründe*, S. 369.

Zur Division selbst gibt es keine separaten Ausführungen und entsprechende Rechenregeln. Sie wird nur im Rahmen der Multiplikation von Größen, die aus mehreren Faktoren zusammengesetzt sind, angeschnitten, indem Segner die Division als ein Verfahren erklärt, wodurch man aus einem gegebenen Produkt und einem Faktor den anderen Faktor findet.[973] Als Beispiel gibt Segner das Produkt „ab + bb“ sowie den Faktor „b“ an, die zusammen den Quotienten „ $\frac{ab+bb}{b}$ “ ergeben, der nach der Kürzung des Bruches den Faktor „a + b“ ergibt.[974]

Wurzeln aus negativen Zahlen kommen bei Segner nicht zur Sprache; er betont allerdings, dass Quadratzahlen nur positiv sein können.[975]

Der Vergleich zwischen der hier verwendeten ersten Auflage (1764) und der zweiten Auflage (^{2}1773) von Segners *Anfangsgründen* zeigt nur wenige Änderungen. In der ersten Auflage schreibt Segner, dass eine Größe, die kein Zeichen mit sich führt, als eine positive Größe

[969] Vgl. Segner, AG, S. 370 f.

[970] Vgl. Segner, AG, S. 363. Das Auffinden der vierten Proportionalgröße zu den Größen „a“ und „b“ entspricht dem Verfahren, eine Größe „a · b“, also ein Produkt, zu finden, das sich zu der multiplizierenden Größe „b“ so verhält, wie der Multiplikator „a“ zur Einheit; vgl. Segner, AG, S. 91 sowie Abbildung 28.

[971] Vgl. Segner, AG, S. 363.

[972] Segner, AG, S. 369.

[973] Vgl. Segner, AG, S. 373 f.

[974] Vgl. Segner, AG, S. 373.

[975] Vgl. Segner, AG, S. 370.

zu betrachten sei.[976] In der zweiten Auflage sind seine Ausführungen umfangreicher. Segner betont nun, dass nicht die Zahl an sich, sondern nur die Einheit, auf die sich die Zahl bezieht, als positiv oder negativ betrachtet werden könne.[977] Die Bezeichnungen „positiv“ und „negativ“, die beispielsweise stellvertretend für „Einnahmen“ oder „Ausgaben“ stehen, ändere nichts an der Größe selbst, beispielsweise ein Thaler. Segner denkt also an eine Art von Absolutbetrag. Auch die Bedeutung der Zeichen Plus und Minus beschreibt Segner in der zweiten Auflage des Lehrbuchs deutlicher, indem er auf den Unterschied zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen aufmerksam macht.[978] Jede Größe könne als positiv betrachtet werden, wobei dann „+“ die Addition und „−“ die Subtraktion andeutet. Man könne jedoch nicht per se die Vorzeichen als Rechenzeichen interpretieren, da es auf die Einheiten der Zahlen ankomme. Wenn diese bei zwei Zahlen gleich sind, so müssen ihre Beträge addiert werden. Sind die Einheiten der Zahlen und somit ihre Vorzeichen verschieden, so müsse die Differenz berechnet werden. Segner geht weiter auf die Beziehung zwischen entgegengesetzten Größen ein, indem er schreibt: „Ueberhaupt kan eine jede Grösse, sie mag positiv oder negativ seyn, eine andere, die eben das Zeichen hat, um eben so viel vermehren, als sie selbst beträgt. Ist aber eine von zwoen Grössen, die verschiedene Zeichen haben, einem Theil der andern gleich, so wird sie immer diesen Theil vernichten. Demnach ist immer $+ A - A = 0$, was auch A bedeuten mag“[979]. Die Erklärungen fügte Segner erst in der zweiten Auflage hinzu, was darauf hindeuten könnte, dass einige Leser der ersten Auflage Schwierigkeiten mit dem Verständnis der positiven und negativen Größen hatten und er sie durch seine umfangreicheren Ausführungen beheben wollte. Dies hat Segner möglicherweise in seinen Vorlesungen festgestellt, in denen er seine *Anfangsgründe* verwendete, und entsprechende Rückmeldungen von Seiten der Studenten oder anderen Personen, die sein Lehrbuch verwendeten, kamen, so dass er die Notwendigkeit sah, die Inhalte deutlicher darzustellen.

Segner greift in seinen *Vorlesungen* die entgegengesetzten Größen im ersten Abschnitt „Einfache Rechnungsarten mit ganzen Zahlen und zehentheilichten Brüchen“[980] auf, worin sich das Unterkapitel „Die Anwendung der Addition und Subtraction“[981] mit vorbereitenden Ausführungen zur Lehre der entgegengesetzten Größen findet. Segner beschränkt sich hier auf die Rechnung mit konkreten Zahlen. Einleitend stellt er die Frage, in welchen Fällen man addieren und in welchen man subtrahieren soll.[982] Er unterscheidet drei Fälle, die er anhand von Einnahmen und Ausgaben anschaulich darstellt: Erstens die Addition von Einnahmen, zweitens die Subtraktion der Ausgaben von den Einnahmen, wobei die Ausgaben kleiner als die Einnahmen sind, und drittens die Subtraktion der Ausgaben von den Einnahmen, wobei die Ausgaben größer sind als die Einnahmen. Den letzten Fall erklärt Segner wie folgt: „Wiederum gesetzt, es habe jemand zu Anfang des Februarii 16 Rthlr. und verzehrt in diesem Monat 27 Rthlr. so wird er zu Ende desselben 11 Rthlr. schuldig“[983]. Neben dem Beispiel mit Einnahmen und Ausgaben führt Segner noch ein weiteres, nämlich eines mit Vorwärts- und

[976] Vgl. Segner, AG, S. 25.
[977] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, AG (^{2}1773), S. 25 f.
[978] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, AG (^{2}1773), S. 25 f.
[979] Segner, AG (^{2}1773), S. 26.
[980] In: Segner, VL, S. 1-86.
[981] In: Segner, VL, S. 23-25.
[982] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 23 f.
[983] Segner, VL, S. 24.

Rückwärtsgehen mit einer entsprechenden Abbildung (siehe Abbildung 29) an: „Gesetzt, es geht jemand von dem Ort A nach B zu, und komt bis in C, kehret aber in C um, und gehet bis in D zurück, so mindert dieser Rückweg den Weg, welchen er vorhero von A nach B gemacht hatte, um seine ganze Grösse, und die Entfernung dieses Menschen von A nach der Seite B ist nunmehro nicht grösser als AD. Wäre aber jemand aus A auf der Linie AB gegangen, bis an C, und wäre an diesem Ort C umgekehret, und gerade zurück bis nach E gereiset, so wäre alsdenn seine Entfernung von A nach der andern Seite die AE. In beyden Fällen komt die Entfernung von dem Ort A, vorwärts oder rückwärts, wenn man die kleinere Entfernung von der grössern abziehet. Ist aber der Weg vorwärts AC grösser als der Weg rückwärts CD, so liegt die Entfernung AD vorwärts; im Gegentheil hat sich unser Reisender rückwärts von seinem Ort A entfernet, wenn der Weg AC, welchen er vorwärts gegangen ist, kleiner ist, als der Rückweg CE“[984]. Segner ist der einzige in dieser Untersuchung betrachtete Autor, der ein anschauliches Beispiel zur Rechnung mit entgegengesetzten Größen anhand einer Abbildung darstellt.

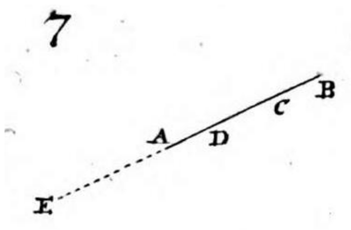


Abbildung 29: Segner, *Vorlesungen*, Abbildung 7.

Anschließend geht Segner auf die Beziehung von Größen zueinander ein, wenn er schreibt, dass sich Größen von einerlei Art vermehren oder vermindern können.[985] Hierbei bleibe die Größe an sich – beispielsweise ein Thaler – gleich, aber in Bezug auf die Rechnung bestehe ein Unterschied darin, ob der Thaler das Vermögen oder die Schulden vermehrt oder vermindert, je nachdem ob der Thaler eingenommen oder ausgegeben wird. Diese Wechselwirkung zwischen den einzelnen Größen drückt Segner wie folgt aus: „Also vermehret alle Einnahme mein Vermögen, und verschiedene Einnahmen vermehren einander. Die Ausgabe vermindert das Vermögen, und verschiedene Ausgaben vermehren einander. Eben so vermehren auch die Schulden einander, vermindern aber das Vermögen, und das Vermögen vermindert die Schulden, denn ich kan diese dadurch tilgen, so daß sie ganz und gar nicht mehr da sind“[986]. Analoge Ausführungen finden wir zu dem Beispiel Vor- und Rückwärtsgehen.[987] Am Ende des Abschnitts hält Segner fest, dass man Größen, die einander vermehren, addieren muss, Größen aber, die einander vermindern, subtrahieren muss, wobei die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert werden müsse und das Ergebnis dann von der „Beschaffenheit der grössern“[988] sei. Segner setzt also die Vermehrung beziehungsweise Verminderung von Größen nicht einfach mit der Addition und Subtraktion gleich, sondern zeigt ihre enge Verbindung zueinander auf.

[984] Segner, VL, S. 24.
[985] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 24.
[986] Segner, VL, S. 24.
[987] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 24 f.
[988] Segner, VL, S. 25.

Bis hierhin erwähnte Segner weder die Begriffe „positiv“, „negativ“ noch „entgegengesetzt“, um die Größen zu charakterisieren. Das holt er in dem Unterkapitel „Bezeichnung der Grössen, die einander vermehren oder vermindern“[989] nach. Er leitet dort in die abstrakte Schreibweise von entgegengesetzten Größen ein, indem er begründet, dass man dadurch Missverständnisse und Fehler bei der Addition und Subtraktion vermeiden könne.[990] Verwechslungen könnten leicht entstehen, da die Größen dieselbe Einheit, wie beispielsweise die Einheit Thaler, sowohl für Schulden als auch für bares Geld, haben könnten. Aus diesem Grund ordnet man den Größen die Zeichen „+“ und „–“ zu und beachtet folgende Regel: „Diejenigen Zahlen vor welchen einerley Zeichen stehet, es mag dieses + oder – seyn, vermehren einander, wenn sie zusammen kommen. Im Gegentheil aber, wenn vor einer Zahl + stehet, und vor einer andern –, so wird dadurch angezeiget, daß sie Grössen bedeuten, welche einander vermindern“[991]. Dies erläutert er in den beiden darauffolgenden Paragraphen anhand eines Beispiels mit Einnahmen und Ausgaben, wobei er zwei äquivalente Möglichkeiten der Berechnung angibt. Bei der ersten Möglichkeit werden die Beträge nebeneinander geschrieben, mit den Zeichen „+“ und „–“ verbunden – je nachdem, ob die Zahlen für die Einnahmen oder Ausgaben stehen – und anschließend zusammengerechnet.[992] Bei dieser Rechnung verwischt der Unterschied zwischen den Vorzeichen und den Rechenzeichen. Dieser wird deutlicher in der zweiten Möglichkeit der Rechnung, die Segner angibt. Hier addiert er zunächst einmal die Einnahmen und Ausgaben separat voneinander und subtrahiert anschließend die kleinere von der größeren Größe, wobei das Ergebnis die Einheit der größeren Größe erhält.[993] Segner weist darauf hin, dass man das Plus- und Minuszeichen nicht in ihrer eigentlichen Bedeutung, also als reine Vermehrung oder Verminderung ansehen darf, sondern macht auf die Beziehung zwischen positiven und negativen Größen aufmerksam: Die mit „plus“ bezeichneten Größen vermindern diejenigen mit Minuszeichen; die Größen mit demselben Vorzeichen vermehren sich jedoch. Diese Ausführungen intensiviert Segner in dem darauf folgenden Paragraphen (§ 77), in dem er unter anderem die Größen als „positiv“ und „negativ“ beziehungsweise „privativ“ bezeichnet, „die einander zu wider“[994] sind.[995] Irritierend ist zunächst, dass Segner die positiven Größen als „würklich“ bezeichnet, was jedoch relativiert wird, indem er betont, dass die Bezeichnungen „positiv“ und „negativ“ nicht mit den Eigenschaften der Größen selbst zusammenhängen, sondern die Bezeichnungen willkürlich nach Art der Fragestellung gesetzt seien. Zudem muss man beachten, dass die Gleichsetzung von „wirklich“ und „positiv“ vom Wortsinn her recht naheliegend ist.

Segners Ausführungen geben einen Hinweis darauf, dass die Bezeichnung mit dem Plus- und Minuszeichen zu Irritationen führte und er es als notwendig erachtete, die Begriffe genau zu erläutern. Zum Abschluss des Kapitels über die Bezeichnung der Größen gibt Segner ein Beispiel mit dem Fahrweg eines Schiffers an, bei dem es drei verschiedene Fragestellungen und somit unterschiedliche Interpretationen bezüglich Positivität und Negativität der Größen

[989] In: Segner, VL, S. 25-28.
[990] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 25.
[991] Segner, VL, S. 25.
[992] Vgl. Segner, VL, S. 26.
[993] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 26 f.
[994] Segner, VL, S. 27.
[995] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 27.

gibt.[996] Dieses Beispiel und der oben vorgestellte Absatz (§ 77) sind erst in der hier betrachteten zweiten Auflage der *Vorlesungen* enthalten. In der ersten Auflage (1747) fehlen sie komplett. Dies ist ein Indiz dafür, dass es für Segner wichtig war, den Gebrauch des Plus- und Minuszeichens näher zu erläutern und dies an einem anschaulichen Beispiel zu verdeutlichen. Ansonsten weisen die Ausführungen zu den entgegengesetzten Größen in den beiden Auflagen des Lehrbuchs keine Unterschiede auf.

Bei der Darstellung der Multiplikation und Division gibt es keine Ausführungen zu entgegengesetzten Größen. Ebenfalls kommen keine negativen Größen im Abschnitt zu den Quadrat- und Kubikzahlen vor. Dass Segner die Quadratwurzel einer negativen Zahl nicht in seinen Lehrbüchern aufgreift, zeigt, dass dies nicht zu den elementaren Lehren, die er in seinen Werken präsentiert, gehört.

Zusammenfassend lässt sich über Segners mathematische Lehrbücher festhalten, dass die Lehre der entgegengesetzten Größen nicht unter diesem Titel dargestellt wird. Es findet sich auch keine Definition dieser Größen in seinen Lehrwerken. Segner verwendet nicht den Begriff „entgegengesetzt", allerdings „einander zu wider". Er bezeichnet die Größen als „positiv" und „negativ" beziehungsweise „privativ" und stellt an zahlreichen Beispielen wie Einnahmen und Ausgaben sowie Aufgang und Niedergang ihre Beziehung zueinander dar. Die Ausführungen greift Segner so oft auf, dass es den Anschein hat, er wolle die Begriffe eindeutig klären. Er geht hierbei nicht ausdrücklich auf die Probleme seiner Zeit in Bezug auf die entgegengesetzten Größen ein. Wir können aber anhand seiner Ausführungen vermuten, dass Verständnisprobleme in Bezug auf die Bezeichnung der Größen mit Hilfe des Plus- und Minuszeichens aufgekommen waren, da Segner betont, dass diese Zeichen nicht die Beschaffenheit der Größe darstellen. Vermutlich sind diese Ausführungen der Grund für Karstens Lob für Segners Darstellung der entgegengesetzten Größen.[997]

4.2.5 Heinrich Wilhelm Clemm

Für die Untersuchung, wie Clemm entgegengesetzte Größen behandelte, werden seine beiden Lehrwerke *Mathematisches Lehrbuch* (^{3}1777) sowie *Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften* (^{3}1777) zugrunde gelegt.

In Clemms *Lehrbuch* macht die Buchstabenrechnung das zweite „Hauptstück" der Arithmetik aus. Hier findet man das 25 Paragraphen umfassende Kapitel „Die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchstaben"[998], in dem Clemm die entgegengesetzten Größen erklärt. Bemerkenswert ist, dass er die Bedeutung dieser Größen für die Buchstabenrechnung betont. Man könne deren Inhalte nur verstehen, wenn „man sich einen deutlichen Begriff von entgegengesetzten Grösen [sic], das ist, von positiven und negativen, oder bejahenden und verneinenden Grösen bilde. Man heißt nemlich entgegengesetzte Grösen, die in einer solchen Verhältniß gegeneinander betrachtet werden, daß eine die andere vermindert; z. E. Vorwarts [sic] und Rückwartsgehen [sic]; Vermögen und Schulden"[999]. Hier stellt er gleich zu Beginn den

[996] Vgl. Segner, VL, S. 27 f.
[997] Vgl. Karsten, Mathematische Abhandlungen, S. 243.
[998] In: Clemm, ML 1, S. 54-64.
[999] Clemm, ML 1, S. 54.

Bezug zu realen Gegenständen dar, was das Verständnis erleichtert. Danach macht Clemm darauf aufmerksam, dass es gleichgültig sei, welche Größe man als positiv und welche man als negativ betrachte und führt die Zeichen „+“ und „–“ ein, ohne sie jedoch Vorzeichen[1000] zu nennen.[1001] Clemm betont, dass es sich bei diesen Größen tatsächlich um wirkliche Größen handelt, was er noch einmal dadurch verdeutlicht, dass er sie mit realen Handlungen wie Vorwärts- und Rückwärtsgehen erklärt. Allerdings scheinen diese Ausführungen für Clemm noch nicht ausreichend gewesen zu sein, denn er schreibt: „Negative Grösen sind also wahrhaftige Grösen, und der Ausdruck, weniger als nichts, schickt sich nicht hieher, es wäre dann, daß man das Nichts vorher erklärte, und zeigte, daß man kein absolutes, sondern nur respectives Nichts darunter verstünde“[1002]. Er distanziert sich also von dem Ausdruck „weniger als Nichts“, sofern der Begriff „Nichts“ nicht vorher geklärt und schließlich als „respektives Nichts“ verstanden wird. Dieses respektive Nichts kann mit Kästners Deutung vom relativen Nichts – also ein Nichts, welches mit einem gegebenen Etwas in Beziehung steht – gleichgesetzt werden. Um diese recht abstrakten Ausführungen anschaulich zu machen und um zu erklären, als was das „Nichts“ verstanden werden kann, greift Clemm nicht nur auf die bereits erwähnten Beispiele von Vermögen und Schulden sowie Vorwärts- und Rückwärtsgehen zurück, sondern zieht auch die Geometrie heran und zeigt, dass die Sinusse zwischen 180° und 360° zwar negativ, aber dennoch vorhanden sind.[1003] Zudem stellt Clemm an einem konkreten Rechenbeispiel, nämlich „+ 3 – 3 = 0“ dar, wie zwei entgegengesetzte Größen ein respektives Nichts ergeben, das heißt sich gegenseitig aufheben.[1004] Dieses Beispiel verwendet auch Kästner in seinen *Anfangsgründen*.[1005] Clemms Betrachtungen zum Begriff „Nichts“ sind umfangreicher als bei anderen hier betrachteten Lehrbuchautoren. Dies zeigt, dass er die Notwendigkeit sah, diese Begriffe zu konkretisieren und durch Beispiele zu veranschaulichen.

Nach dieser Einführung zum Begriff und zur Bezeichnung der entgegengesetzten Größen widmet sich Clemm den Rechenarten. Die Addition von entgegengesetzten Größen erklärt Clemm mit Hilfe der Subtraktion: „Ungleiche entgegengesetzte, das ist, positive und negative Grösen von einer Art werden addirt, wenn man die kleinere von der grössern abzieht, und dem Rest das Zeichen der grösern gibt; denn das, was einander aufhebt, muß man aufheben, weil es solche Grösen sind, die einander vermindern“[1006]. Dies verdeutlicht er zusätzlich an zwei Zahlenbeispielen.[1007] Zur Addition von Größen mit demselben Vorzeichen schreibt Clemm, dass die Größen addiert und dem Ergebnis das Zeichen der Größen hinzugefügt werden soll. Er führt die Rechnung also mit den Betragszahlen durch, wobei dem Ergebnis je nach Beschaffenheit der Größen entweder ein positives oder ein negatives Zeichen vorgesetzt wird. Clemm beschränkt sich nicht nur darauf, die entsprechenden Rechenregeln anzugeben, sondern er fördert auch das Verständnis durch Rechenbeispiele.

[1000] Clemm verwendet in seinen beiden Lehrbüchern nicht den Begriff „Vorzeichen“, allerdings verwenden wir ihn aus Verständnisgründen für die folgenden Ausführungen.
[1001] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 1, S. 54.
[1002] Clemm, ML 1, S. 55. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.
[1003] Vgl. Clemm, ML 1, S. 55.
[1004] Vgl. Clemm, ML 1, S. 56.
[1005] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 72.
[1006] Clemm, ML 1, S. 55.
[1007] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 1, S. 55 f.

Bis hierhin verwendete Clemm in seinen Beispielen konkrete Zahlen, geht nun aber auf die Rechnung mit Buchstaben ein. Mit Hilfe der Buchstaben erklärt er, wie Größen von „verschiedener Art“, also Größen, die durch verschiedene Buchstaben ausgedrückt werden, addiert werden, nämlich durch die Verbindung mit dem Additionszeichen.[1008] Die Subtraktion führt er auf die Addition zurück: „Wenn man entgegengesetzte Grösen von einander subtrahirt, so darf man blos alle Zeichen der zu subtrahirenden Zahl mit den entgegengesetzten, das ist + mit – und – mit + verwechseln, und hernach addiren, die Summe wird die Differenz seyn. Denn entweder hat die zu subtrahirende Gröse das Zeichen + oder sie hat das Zeichen –; Ist jenes, so ist klar, daß durch die Subtraction aus plus minus werden müsse; denn wenn man + 3 von 8 subtrahirt, so hat man 8 – 3; Hat aber die abzuziehende Gröse das Zeichen minus, so muß + daraus werden; denn wenn die positive Gröse ihr Zeichen in das Zeichen der negativen bey der Subtraction verwandelt, so muß kraft des unmittelbaren Gegensatzes die negative ihr Zeichen in das Zeichen der positiven verwandeln“[1009]. Im Gegensatz zu den anderen Ausführungen sind diese nicht einleuchtend und begründen nicht, wieso die Subtraktion in eine Addition bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel des Subtrahenden verwandelt werden kann. Zwar geht Clemm auf die gegensätzliche Beziehung zwischen der Addition und der Subtraktion ein, allerdings reicht dies nicht aus, um zu erklären, wieso die Subtraktion einer negativen Größe mit der Addition einer positiven Größe gleichgesetzt werden kann. Es fehlen mathematische Beweise.

Clemm führt in die Multiplikation entgegengesetzter Größen ein, indem er die Schreibweise für Produkte erklärt.[1010] Dann gibt er die Regel an, dass das Ergebnis positiv ist, wenn die Faktoren dasselbe Vorzeichen haben, bei entgegengesetzten Vorzeichen negativ. Clemm erwähnt nicht, dass es sich um eine gerade Anzahl von Faktoren handeln muss. Allerdings wird aus der Erklärung dieser Regel deutlich, dass sich die Regel auf zwei Faktoren bezieht. Der Beweis gründet auf der Proportionenlehre: „Der eine Faktor [muss] so oft im Product enthalten seyn […], als die Einheit im andern Factor enthalten ist“[1011]. Auf diese Weise wird auch die Multiplikation von zwei negativen Größen bewiesen. Clemm erwähnt, dass er diesen Beweis von Kästner übernommen und auch bei keinen anderen Autoren gesehen hätte.[1012] Dies zeigt nicht nur, dass Kästner um neue und deutliche Beweise bemüht war, sondern dass er auch Wirkung auf andere Lehrbuchautoren hatte. An dieser Stelle gibt Clemm auch einen Einblick in die geläufige Beweisführung, indem er schreibt, dass bei der Erklärung der Multiplikation von zwei negativen Größen der Beweis gewöhnlich mit Hilfe eines Rechtecks erfolge, welchen er dann ausführt (siehe Abbildung 30).[1013] Diesen Bezug zur Geometrie finden wir nicht bei allen von uns betrachteten Lehrbuchautoren. Kästner beispielsweise ließ die Geometrie außer Acht und gab rein algebraische Beweise.

[1008] Vgl. Clemm, ML 1, S. 56.
[1009] Clemm, ML 1, S. 58.
[1010] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 1, S. 59 f.
[1011] Clemm, ML 1, S. 60.
[1012] Vgl. Clemm, ML 1, S. 60.
[1013] Vgl. Clemm, ML 1, S. 60. Clemm schreibt, dass dieser Beweis gewöhnlich sei, allerdings finden wir diesen bei keinem anderen der hier betrachteten Lehrbuchautoren.

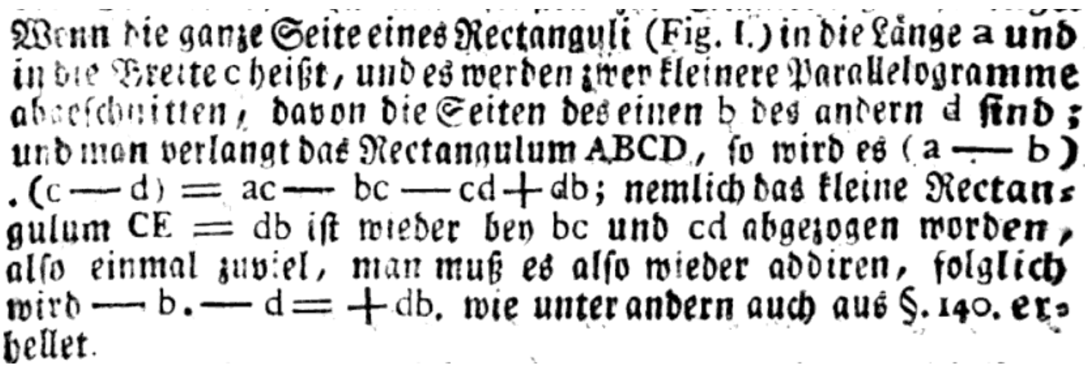

Wenn die ganze Seite eines Rectanguli (Fig. I.) in die Länge a und in die Breite c heißt, und es werden zwey kleinere Parallelogramme abgeschnitten, davon die Seiten des einen b des andern d sind; und man verlangt das Rectangulum ABCD, so wird es (a — b).(c — d) = ac — bc — cd + db; nemlich das kleine Rectangulum CE = db ist wieder bey bc und cd abgezogen worden, also einmal zuviel, man muß es also wieder addiren, folglich wird — b. — d = + db, wie unter andern auch aus §. 140. erhellet.

Abbildung 30: Clemm, *Mathematisches Lehrbuch*, S. 60.

Den Rechenregeln zur Multiplikation folgen Rechenbeispiele, auch für die Fälle, in denen die Faktoren aus einem oder mehreren Buchstaben und Zeichen zusammengesetzt sind, wobei hier auch die drei binomischen Formeln – ohne dass Clemm sie als solche bezeichnet – abgeleitet werden.[1014]

Die Division führt Clemm auf die Regeln der Multiplikation zurück, so dass gleiche Vorzeichen einen positiven, entgegengesetzte Zeichen einen negativen Quotienten ergeben.[1015] Es folgen Rechenbeispiele, die verschiedene Fälle der Division aufgreifen, beispielsweise wenn der Divisor aus verschiedenen Teilen zusammengesetzt ist oder eine einzelne Größe durch einen zusammengesetzten Divisor dividiert werden muss.

Das zweite „Hauptstück“ der Arithmetik enthält das Kapitel „Die Irrationalwurzeln und eingebildete oder unmögliche Grösen“[1016], welches einige Ausführungen über Potenzen in der Buchstabenrechnung enthält. Bemerkenswert ist die Kennzeichnung dieses Kapitels in dem Inhaltsverzeichnis. Es ist mit einem „*“ versehen, was bedeutet, dass dieses von Anfängern nicht beachtet werden muss.[1017] Scheinbar waren die Ausführungen also nicht ausdrücklich für Anfänger gedacht, was erklärt, wieso wir dieses Thema in einigen mathematischen Lehrbüchern nicht finden. Clemm definiert die eingebildeten Wurzeln wie folgt: „Eingebildete Wurzeln (Radices imaginariae) sind alle Wurzeln von negativen Grösen, die gerade Exponenten haben. z. E. $\sqrt{-4}$ oder $-4^{1/2,}$ $\sqrt[4]{-8}$ oder $-8^{1/4}$“[1018]. Interessant ist, dass Clemm direkt von Beginn an die Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Wurzelexponenten macht. Andere Autoren, und auch Clemm selbst in seinen *Ersten Gründen*, gehen zunächst auf die Quadratwurzeln ein und erwähnen erst später, wenn überhaupt, diese Unterscheidung. Er begründet die Bedingung, dass es sich um gerade Exponenten handeln muss, damit, dass eine gerade Anzahl von Faktoren immer ein positives Produkt ergebe und dementsprechend die Wurzel eines negativen Produktes unmöglich sei.[1019] Im folgenden Abschnitt zeigt Clemm, dass die Wurzel eines ungeraden Wurzelexponenten aus einer negativen Größe nicht unmöglich ist und erläutert dies an dem Beispiel „$\sqrt[3]{-8} = -2$“. Im Anschluss gibt Clemm einen Ausblick in die Lehre der Gleichungen, bei denen sowohl mögliche als auch unmögliche Wurzeln vorkommen können.

[1014] Vgl. Clemm, ML 1, S. 60 f.
[1015] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 1, S. 62-64.
[1016] In: Clemm, ML 1, S. 79-82.
[1017] Vgl. Clemm, ML 1, Inhaltsverzeichnis, S.)( )(3^{r}.
[1018] Clemm, ML 1, S. 81.
[1019] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 1, S. 81 f.

Aufgrund der mangelnden Quellenlage konnte nur die zweite Auflage (^{2}1768) und die hier verwendete dritte Auflage (^{3}1777) von Clemms *Mathematischem Lehrbuch* verglichen werden, wobei wir keine Unterschiede zwischen den Auflagen feststellen konnten.

Clemms Lehrbuch *Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften* weist einen anderen Aufbau auf als sein *Mathematisches Lehrbuch*. Während im *Lehrbuch* die Rechenarten für Zahlen und Buchstaben jeweils in zwei separaten „Hauptstücken" behandelt wurden, finden wir sie in den *Ersten Gründen* innerhalb eines Kapitels vor, nämlich im zweiten Kapitel zur Arithmetik, in dem Clemm die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division hintereinander vorstellt.[1020] In den einzelnen Abschnitten erklärt er die Rechenarten zunächst mit unbenannten Zahlen (Zahlen ohne Einheiten), dann mit benannten Zahlen (Zahlen, die mit Einheiten wie Gulden oder Thaler versehen sind) und schließlich mit Buchstaben. Die Rechnung mit benannten Zahlen stellt für Clemm eine Vorbereitung zur Buchstabenrechnung dar.[1021] Dass die Buchstabenrechnung als schwierig angesehen wurde, zeigt folgende Aussage: „Wir wollen noch ein Exempel in genannten Zahlen geben, um den Weg zu dieser schwerscheinenden aber in der That leichten Kunst desto besser zu bahnen"[1022]. Clemms Vorgehen, dass er die Rechnung von Zahlen und Buchstaben direkt hintereinander darstellt, erscheint sehr sinnvoll, da der Leser so ihre Gemeinsamkeiten besser erkennen kann und die Buchstabenrechnung nicht so abstrakt erscheint. Zur Einführung in die Addition mit Buchstaben wiederholt Clemm seine Ausführungen aus der Einleitung des Werks, in der er das Plus- und Minuszeichen erklärt hat, die nun den verschiedenen benannten Zahlen zugeordnet werden.[1023] Hierbei erwähnt Clemm nicht, ob es sich um Rechen- oder um Vorzeichen handelt. Anschließend wird der Leser vor die Aufgabe gestellt, Größen mit unterschiedlichen Zeichen zu addieren (siehe Abbildung 31). Interessant ist, dass Clemm in diesem Rechenbeispiel direkt mehrere zusammengesetzte Größen verwendet, und nicht erst anhand von zwei Größen in die Rechnung einführt, wie es andere Autoren gemacht haben.

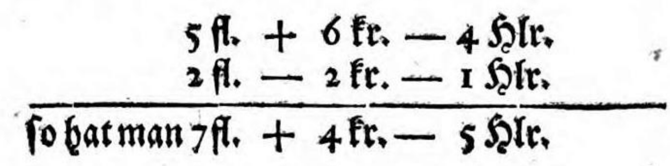


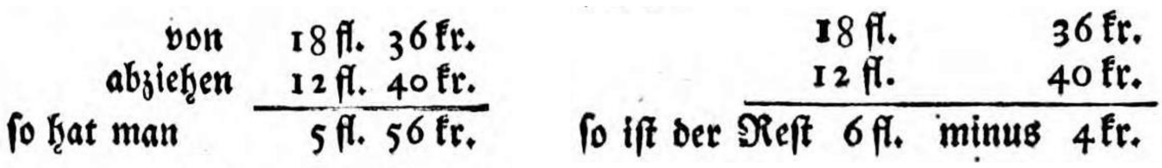
Abbildung 31: Clemm, *Erste Gründe*, S. 48.

An dieser Stelle erwähnt Clemm noch nicht die Begriffe „entgegengesetzt", „positiv" und „negativ", um die Größen zu bezeichnen. Er schreibt aber in der Erklärung zu dem Beispiel (siehe Abbildung 31), dass „− 2 kr." einen Mangel anzeigen, „6 kr." hingegen das Haben, so dass am Ende vier Kreuzer vorhanden sind.[1024] Diese Ausführungen scheinen recht zusammenhangslos, da er zuvor die entgegengesetzten Größen nicht thematisiert hat. Dennoch macht die Aussage, dass es sich um einen Mangel handelt, das Thema anschaulich. Zusammenfassend schreibt Clemm, dass die Rechnung mit Buchstaben einfacher sei als mit Zahlen,

[1020] Vgl. Clemm, EG, S. 39-129.
[1021] Vgl. Clemm, EG, S. 47.
[1022] Clemm, EG, S. 48.
[1023] Vgl. Clemm, EG, S. 48.
[1024] Vgl. Clemm, EG, S. 49.

wenn man nur beachtet, „daß man die Zeichen + und – wohl bemerke, und in der unten gezogenen Summe dasjenige, was gegen einander aufzuheben ist […] richtig aufhebe“[1025].

Im Rahmen der Subtraktion begegnen dem Leser negative Zahlen bereits bei der Behandlung der benannten Zahlen. Es geht darum, eine kleine Einheit von einer größeren abzuziehen, wobei Clemm zwei Methoden für dieses Vorgehen angibt (siehe Abbildung 32).



von	18 fl.	36 kr.		18 fl.	36 kr.
abziehen	12 fl.	40 kr.		12 fl.	40 kr.
so hat man	5 fl.	56 kr.	so ist der Rest	6 fl.	minus 4 kr.

Abbildung 32: Clemm, *Erste Gründe*, S. 60.

Es geht hier also um schriftliches Subtrahieren und mögliche Übertragungstechniken. Bei der ersten Methode wird ein Gulden, also 60 Kreuzer entlehnt, so dass man von 60 + 36 Kreuzer 40 Kreuzer abziehen soll. Bei der zweiten Methode subtrahiert Clemm 40 von 36 Kreuzer und setzt vor das Ergebnis ein „minus“.[1026] Diese Betrachtungen führen zur Behandlung der Subtraktion bei der Buchstabenrechnung, wobei Clemm zunächst anmerkt, dass es verschiedene Regeln gibt.[1027] Er unterscheidet folgende Fälle der Subtraktion: „Man kann plus von plus, minus von minus, plus von minus, minus von plus, grössers von kleinerm, und kleineres von grösserm subtrahiren“[1028]. Diese behandelt Clemm in fünf Fällen, wobei er an einigen Stellen Beweise und Beispiele angibt:[1029]

1. Plus von Plus subtrahieren, wobei das betragsmäßig Kleinere vom betragsmäßig Größeren abgezogen wird [(+a) – (+b), wobei a > b]
2. Plus von Plus subtrahieren, wobei das betragsmäßig Größere vom betragsmäßig Kleineren abgezogen wird [(+a) – (+b), wobei a < b]
3. Minus von Plus subtrahieren [(+a) – (–b)]
4. Plus von Minus subtrahieren [(–a) – (+b)]
5. Minus von Minus subtrahieren [(–a) – (–b), egal ob a < b oder b < a].

Bei der Subtraktion einer größeren positiven von einer kleineren positiven Größe hält Clemm die Regel fest, dass die kleinere von der größeren Größe subtrahiert und dem Ergebnis das entgegengesetzte Zeichen vorgesetzt werden muss.[1030] Er erklärt dies anhand eines Beispiels, in dem er konkrete Währungseinheiten statt Buchstaben verwendet.[1031] In den Fällen 3 und 4 (siehe obige Auflistung) führt Clemm nicht nur die Subtraktion auf die Addition zurück, sondern betont, dass man die Rechnung mit den absoluten Größen – modern: Beträge – ohne Beachtung der Vorzeichen durchführen muss und das Ergebnis entweder mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen soll.[1032] Die Erklärung zur Subtraktion zwei negativer Größen stellt

[1025] Clemm, EG, S. 50.
[1026] Vgl. Clemm, EG, S. 60.
[1027] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, S. 61.
[1028] Clemm, EG, S. 61.
[1029] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, S. 61-66.
[1030] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, S. 61 f.
[1031] Vgl. Clemm, EG, S. 61 f.
[1032] Vgl. Clemm, EG, S. 64.

Clemm nicht eindeutig dar.[1033] Zunächst erläutert er das Vorgehen an benannten Zahlen und geht dann erst auf die Buchstabenrechnung ein. Zudem subtrahiert er nicht eine einzelne Größe von einer anderen, sondern Minuend und Subtrahend sind jeweils aus zwei Größen zusammengesetzt, die mit dem Minuszeichen verbunden sind: „Ich solle von 2 fl. weniger 10 kr. subtrahiren 1 fl. weniger 4 kr. so werde ich im Rest haben 1 fl. weniger 6 kr. dann weil ich die 4 kr. nicht subtrahiren darf, so wird der obige Mangel von 10 kr. um 4 geringer, folglich nur noch 6 kr. seyn“[1034]. Zum besseren Verständnis hätte Clemm das Beispiel näher erläutern können, beispielsweise durch die Angabe, dass sich ein Mangel aufhebt oder geringer wird, wenn man einen anderen Mangel entferne.

Am Ende hält Clemm alle fünf behandelten Fälle der Subtraktion in einem Rechenbeispiel fest (siehe Abbildung 33). Zudem gibt er eine allgemeine Regel an, die die fünf oben angegebenen Fälle zusammenfasst, obwohl er zugibt, dass diese schlecht zu behalten sei: „[…] verändere alle Zeichen der abzuziehenden Zahl, und addire nach geschehener Veränderung. Oder verwandle bey der abzuziehenden Zahl die Zeichen plus in minus und minus in plus, hernach addire beede Zahlen“[1035].

$$\begin{array}{l}
4a + 3b - 5c + 8d - 7e - 2f \\
\underline{3a + 8b + 4c - 8d - 3e - 6f + g - 2h} \\
a - 5b - 9c + 16d - 4e + 4f - g + 2h
\end{array}$$

Abbildung 33: Clemm, Erste Gründe, S. 66.

Im Rahmen der Subtraktion von Größen geht Clemm auf die Ausdrücke „übrig bleiben“ und „weniger als Nichts“ ein.[1036] Bei der Subtraktion einer größeren von einer kleineren Zahl sollte man von „übrig bleiben“ sprechen, da dies mit etwas Positivem in Verbindung gebracht werde und der Ausdruck „weniger als Nichts“ zu Verwirrungen geführt habe. Er macht bewusst, dass die Verwirrungen aufgrund der Wortwahl zustande gekommen sind und betont, dass negative Größen in der höheren Geometrie wirklich vorhanden sind und als solche aufgefasst werden, die den positiven Größen entgegengesetzt sind. Auf diese Weise sollten auch die negativen Zahlen – er schreibt zum ersten Mal von negativen Zahlen – in der Arithmetik angesehen werden. „Weniger als Nichts“ erklärt Clemm anhand von Schulden. In diesem Abschnitt verwendet Clemm zum ersten Mal die Bezeichnungen „entgegengesetzt“, „positiv“ und „negativ“ in einer zusammenhängenden Weise, um die Größen näher zu charakterisieren. Zuvor begegnen uns auch die Bezeichnungen „negativ“ und „positiv“, aber diese erscheinen als Synonym zum Minus- beziehungsweise Pluszeichen und nicht eindeutig, um die Art der Größe näher zu bestimmen.

Die Multiplikation erklärt Clemm als wiederholte Addition einer Zahl zu sich selbst.[1037] Nach der Erklärung der Multiplikation mit benannten und unbenannten Zahlen geht Clemm

[1033] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, S. 64 f.
[1034] Clemm, EG, S. 65.
[1035] Clemm, EG, S. 67.
[1036] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, S. 62 f.
[1037] Vgl. Clemm, EG, S. 67.

auf die Buchstabenrechnung ein, wobei er zunächst die Schreibweise erklärt.[1038] Im Anschluss leitet er Regeln für die Multiplikation von Größen mit unterschiedlichen Vorzeichen her und gibt sie nicht nur an. Der Leser wird also damit vertraut gemacht, wie man neue Erkenntnisse entdecken und die Beweise eigenständig herleiten kann. Hierfür verwendet Clemm das Rechenbeispiel „(a – b) · c“ und zeigt, dass dies das Produkt „ac – bc“ ergibt, wobei „– b“ und „c“ ein negatives Resultat liefern.[1039] Dass die Multiplikation von zwei negativen Größen ein positives Produkt ergibt, beweist Clemm mit Hilfe eines geometrischen Beispiels, nämlich der Rechtecksfläche, welches er auch in seinem *Lehrbuch* angeschnitten hat (siehe Abbildung 30).[1040] Nach diesem Beweis mit Hilfe der Geometrie versucht Clemm die Multiplikation von zwei negativen Größen einleuchtender zu machen: „Das minus oder negative muß man sich als eine Schuld vorstellen. Wenn einer demnach – 10 fl. mit – 1 multipliciren soll, so ist es eben so viel, als wenn er 10 fl. Schulden einmal nicht heimgeben oder bezahlen dürfte. Nach geschehener Multiplication mit – 1 wird er also wirklich um 10 fl. reicher seyn“[1041]. Dies ist ein Beispiel aus dem Alltag, welches erklärt, wieso das Produkt von negativen Größen positiv ist. Eine solche Erklärung finden wir bei keinem anderen der hier betrachteten Lehrbuchautoren.

Nachdem Clemm auf die Fälle eingegangen ist, wie man positive und negative Größen miteinander multipliziert, fasst er die Rechenregeln in einer Regel zusammen: „Man multiplicirt alle Buchstaben der ersten Reyhe mit allen Buchstaben des Multiplicators, giebt denen, die einerley Zeichen haben, im Product das Zeichen plus, denen aber, die verschiedene Zeichen haben, das Zeichen minus, und addirt endlich die Partialproducte nach den Additionsregeln zusammen. […] Einerley Zeichen geben plus; verschiedene minus“[1042]. Clemm greift voraus und merkt an, dass diese letzte Regel auch bei der Division zugrunde gelegt werde.[1043] Analog zur Multiplikation definiert Clemm die Division als eine Rechenoperation, bei der eine Zahl von einer anderen wiederholt abgezogen wird.[1044] Nach der Erklärung der Division in Zahlen greift er die mit Buchstaben auf und erklärt zunächst die Schreibweise.[1045] Dann geht er auf die Fälle ein, wie man in der Buchstabenrechnung Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen dividiert und erwähnt bereits zu Beginn die Regel, dass – wie bei der Multiplikation – gleiche Zeichen „plus“ und verschiedene Zeichen „minus“ im Quotienten ergeben.[1046] Es folgen Beweise und Beispiele zur Division mit entgegengesetzten Größen.[1047]

Zwar erläutert Clemm im Rahmen der Division auch die Wurzeln, er geht jedoch nicht auf Wurzeln aus negativen Zahlen ein. Dies geschieht erst im fünften Kapitel der Arithmetik „Von wirklicher Ausziehung der Wurzeln, sie mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, wie auch von den algebraischen Aufgaben“[1048]. Hier heißt es: „Eingebildete Grössen sind solche Grössen, welche weder positiv noch negativ, und noch vielweniger Nullen sind. Z. E. $\sqrt{}\,– 2$.

[1038] Vgl. Clemm, EG, S. 83 f.
[1039] Vgl. Clemm, EG, S. 85 f.
[1040] Vgl. Clemm, EG, S. 86-89.
[1041] Clemm, EG, S. 89.
[1042] Clemm, EG, S. 90.
[1043] Vgl. Clemm, EG, S. 90.
[1044] Vgl. Clemm, EG, S. 97.
[1045] Vgl. Clemm, EG, S. 111-114.
[1046] Vgl. Clemm, EG, S. 114.
[1047] Vgl. Clemm, EG, S. 114-118.
[1048] In: Clemm, EG, S. 254-335.

wenn nemlich hinter dem Wurzelzeichen das Zeichen minus der Grösse vorgesetzt wird. Sie sind weder positiv noch negativ, sonst würde – 2 = + 2 seyn. Sie sind aber auch nicht Nullen, sonst wäre – 2 = 0. Folglich sind es eingebildete Grössen, und das ist der Grund dieser Benennung“[1049]. Clemm schränkt die Bedeutung der eingebildeten Größen ein, indem er schreibt, dass sie im philosophischen Verstande positive – im Sinne von tatsächlichen – Größen sind, da man sich diese vorstellen könne.[1050] Er geht auch auf den Unterschied zwischen Geometrie und Arithmetik in Hinblick auf die negativen Größen ein. In der Geometrie seien sie in Bezug auf die Richtung den positiven Größen entgegengesetzt und hier könne ein Quadrat „– 4“ sein, so dass die einzelnen Seiten eine Länge von „√ – 4“ hätten, wobei in der Arithmetik kein negatives Quadrat existiere. Auf diese Weise legitimiert Clemm die Rechnung mit imaginären Größen und zeigt die vier Rechenarten mit ihnen auf.

Der Vergleich zwischen den ersten beiden Auflagen (1759, ^{2}1769) und der hier verwendeten dritten Auflage (^{3}1777) der *Ersten Gründe* ergab, dass die Ausführungen zu den entgegengesetzten Größen identisch sind.

In Clemms *Mathematischem Lehrbuch* sowie in seinen *Ersten Gründen* finden wir jeweils unterschiedliche Herangehensweisen. Während wir im ersten Werk die entgegengesetzten Größen in dem eigenständigen Kapitel zur Buchstabenrechnung wiederfinden, wird die Buchstabenrechnung in den *Ersten Gründen* zusammen mit der Zahlenrechnung behandelt. In dem *Lehrbuch* schreibt Clemm explizit von der Lehre der entgegengesetzten Größe und verwendet die entsprechenden Begriffe „entgegengesetzt“, „positiv“ und „negativ“ zur Bezeichnung der Größen. Diese finden wir nicht so eindeutig in den *Ersten Gründen*, so dass die entgegengesetzten Größen nicht als eigenständiges Thema erscheinen und die Ausführungen sich in erster Linie auf die Vermittlung der Rechenregeln mit der Angabe von Rechenbeispielen beschränken. Die Kenntnisse, die Clemm im Rahmen der Buchstabenrechnung vermittelt, sollen auf algebraische Aufgaben angewendet werden, die am Ende des fünften Kapitels der *Ersten Gründe* zu finden sind. Eine solche Aufgabensammlung finden wir nicht im *Mathematischen Lehrbuch*. Der Unterschied mag mit der unterschiedlichen Adressatengruppe erklärt werden. Die *Ersten Gründe* schrieb Clemm in erster Linie für Autodidakten.[1051] Im *Lehrbuch* scheint es ihm weniger auf die Vermittlung der Rechenfertigkeiten anzukommen, sondern vielmehr auf das Verständnis der entgegengesetzten Größen. Aus diesem Grund sind hier viele Beispiele auf alltägliche Gegebenheiten wie Vermögen und Schulden angeführt.

Ein Vorteil der Herangehensweise in den *Ersten Gründen*, dass nämlich die Buchstabenrechnung nicht separat für sich betrachtet wird, ist, dass Clemm vom konkreten Fall mit Zahlen zum abstrakten Fall mit Buchstaben nahtlos überleiten kann. So ist es möglich, dass die Buchstabenrechnung für den Leser verständlicher wird. Als ein Nachteil kann jedoch angesehen werden, dass die Ausführungen zu den vier Rechenarten sehr umfangreich sind und somit unübersichtlich werden können. Die Grundlagen, die nur die Buchstabenrechnung betreffen, werden nicht zu Beginn dargestellt, sondern bei Gelegenheit aufgegriffen, beispielsweise bei der Addition von Größen, dass man bei positiven Größen das Pluszeichen weglassen kann.[1052] Weil wegen des großen Umfangs solche Anmerkungen schnell wieder vergessen

---

[1049] Clemm, EG, S. 296 f.
[1050] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, S. 297-299.
[1051] Vgl. Clemm, EG, Vorbericht zur ersten Auflage, S.)(2^r.
[1052] Vgl. Clemm, EG, S. 48.

werden können, wiederholt Clemm diese Regeln noch einmal im Rahmen der Multiplikation, was die Ausführungen entsprechend umfangreicher machen.[1053]

Clemm präsentiert in seinen beiden deutschsprachigen Lehrwerken die unmöglichen Größen bereits in seinen Ausführungen zur Arithmetik. Bei anderen Autoren sind diese erst im Rahmen der Algebra, also bei der höheren Mathematik, zu finden. In Clemms *Mathematischem Lehrbuch* wird durch die entsprechende Kennzeichnung im Inhaltsverzeichnis ersichtlich, dass die Lehren zu den unmöglichen Größen von Anfängern nicht durchgearbeitet werden müssen. Dies zeigt, dass dieses Thema nicht zwangsläufig zum Elementarstoff gerechnet wurde.

Bemerkenswert ist, dass Clemm in beiden Lehrbüchern über die Fachmathematik hinausgeht und Stellung zum Begriff „weniger als Nichts“ nimmt. Dies zeigt, dass er es als notwendig erachtete, diesen Begriff zu klären.

4.2.6 Wenceslaus Johann Gustav Karsten

Für die folgenden Betrachtungen wurden die drei deutschsprachigen Lehrbücher *Lehrbegrif der gesamten Mathematik* (1767-1777), *Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften* (1780) und *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der mathematischen Wissenschaften* (²1785) von Karsten verwendet.

Im zweiten Band von Karstens *Lehrbegrif* findet man das Kapitel „Die allgemeine Rechenkunst oder die Buchstaben=Rechnung mit ihrer Anwendung auf die gemeine Rechenkunst“[1054]. Für Karsten ist die Buchstabenrechnung Bestandteil der theoretischen Elementarmathematik, wobei sie auch zur Algebra gerechnet werden könne, da sie eine Vorbereitung zu dieser sei.[1055] Direkt zu Beginn des ersten Abschnitts „Von den vier allgemeinen Rechnungsarten“[1056] definiert Karsten die entgegengesetzten Größen: „Wenn zwo Größen eine solche Beziehung gegen einander haben, daß die eine eben so viel abnimt, als die andre wächst, und umgekehrt: die erste allemahl um eben so viel anwächst, als die andre abnimt: so heissen sie entgegengesetzte Größen“[1057]. Durch diese Formulierung stellt Karsten das wechselseitige Verhältnis dieser Größen in den Vordergrund. Dies erläutert er an anschaulichen Beispielen wie Vermögen und Schulden und dem Vorwärtsfahren und dem Rückgang eines Schiffes.[1058] Im folgenden Abschnitt macht Karsten deutlich, dass die entgegengesetzten Größen jeweils eigenständige Größen sind, aber „unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff“[1059] stehen. So können beispielsweise Vor- und Zurückgehen unter dem Begriff der Bewegung zusammengefasst werden.[1060] Auf diese Weise legitimiert Karsten die Addition von entgegengesetzten Größen, die allerdings nicht immer wie die gemeine Addition – also die Addition von Zahlen – geschehen könne, da die Größen von derselben Art sein müssen. Er

[1053] Vgl. Clemm, EG, S. 85.
[1054] In: Karsten, L 2, S. 64-293.
[1055] Vgl. Karsten, L 2, Vorrede, o. S.
[1056] In: Karsten, L 2, S. 64-85.
[1057] Karsten, L 2, S. 64.
[1058] Vgl. Karsten, L 2, S. 64 f.
[1059] Karsten, L 2, S. 65.
[1060] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 2, S. 65.

veranschaulicht seine Ausführungen: „Ein Schiff, das 700 Meilen vorwärts, und 300 Meilen rückwärts gesegelt hat, ist weder 1000 Meilen vorwärts, noch 1000 Meilen rückwärts gekommen. Der eigentliche Weg, um welchen es sich vom Hafen entfernet hat, beträgt 400 Meilen. Man könnte dies das Resultat der beyden entgegengesetzten Wege nennen“[1061]. Dieses Resultat könne auch Summe genannt werden, wobei diese wie folgt definiert wird: „Demnach ist die Summe zwoer entgegengesetzter Größen eigentlich dasjenige, was in der größern übrig bleibt, nachdem sie durch die entgegengesetzte Kleinere, um ein dieser letztern gleiches Stück vermindert worden“[1062]. Hierbei komme dann das Problem der Bezeichnung des Ergebnisses auf, welches aus der Subtraktion der kleineren von der größeren Betragsgröße entstanden ist.[1063] Da es zu weitläufig sei, hinter das Ergebnis den Namen der Größe wie „vorwärts“ oder „rückwärts“ zu schreiben, könne man stattdessen die eine als Verneinung der anderen ausdrücken, und so die Größen als „negative, oder verneinte“ beziehungsweise als „positive, oder bejahte Größe“ bezeichnen. Um Verwirrungen zu vermeiden, macht Karsten deutlich, dass es sich um keine negative Größe im absoluten Sinne handelt. Demnach wäre es angebrachter, die Größe als eine „verneint ausgedrückte Größe“ oder „positiv ausgedrückte Größe“ zu bezeichnen, da die Bejahung beziehungsweise Verneinung nicht die Größe an sich charakterisiere, sondern nur auf ihre Bezeichnung bezogen sei. Nun führt Karsten die Zeichen „+“ und „–“ als Kennzeichnung der entgegengesetzten Größen ein, wobei es egal sei, welche man als positiv und welche als negativ bezeichne. Seine Ausführungen veranschaulicht er an einem Beispiel, in dem nicht nur die Bezeichnungen „Schulden“ und „Vermögen“ sowie „vorwärts“ und „rückwärts“ durch „+“ und „–“ ersetzt werden, sondern die Größen auch unter dem gemeinsamen Hauptbegriff „Reichsthaler“ beziehungsweise „Meilen“ stehen. Durch dieses Vorgehen gelangt Karsten zur abstrakten Schreibweise, was der Leser schrittweise nachverfolgen und verstehen kann.

Im Anschluss hieran macht Karsten auf den Unterschied zwischen den Rechenzeichen und den Vorzeichen[1064], die die entgegengesetzten Größen charakterisieren, aufmerksam. Er schreibt, dass die Bedeutung des Plus- und Minuszeichens aus den arithmetischen Operationen entlehnt, aber im Rahmen der Lehre der entgegengesetzten Größen allgemeiner sei.[1065] „Eine mit – bezeichnete Größe ist hier also nicht allemahl eine Größe, die man abziehen soll. Denn eine mit + bezeichnete Größe vermindert so gut die ihr entgegengesetzte mit – bezeichnete, als diese jene vermindert“[1066]. Hiermit leitet Karsten in die Rechnung mit entgegengesetzten Größen ein, wobei er die Unterschiede zwischen der gemeinen und der allgemeinen Rechenkunst – also der Zahlen- und der Buchstabenrechnung – aufzeigt. Karsten ist der einzige der von uns betrachteten Lehrbuchautoren, der eine solche Unterscheidung vornimmt. An dieser Stelle nimmt er zum ersten Mal Bezug auf die Geometrie, um die Addition von entgegengesetzten Größen anhand von entgegengesetzten Linien zu verdeutlichen.[1067] Die Verweise auf die Geometrie finden wir auch in den folgenden Erläuterungen immer wieder und zwar

[1061] Karsten, L 2, S. 65. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.
[1062] Karsten, L 2, S. 66. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.
[1063] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Karsten, L 2, S. 66-68.
[1064] Diesen Begriff verwendet Karsten nicht in seinen Lehrbüchern, aber er wird für die folgenden Ausführungen wegen der Verständlichkeit verwendet.
[1065] Vgl. Karsten, L 2, S. 68.
[1066] Karsten, L 2, S. 68.
[1067] Vgl. Karsten, L 2, S. 68 f.

in einem solchen Umfang, wie wir es bei keinem anderen Lehrbuchautoren vorfinden. Auf diese Weise wird dem Leser neben der algebraischen Erklärung auch eine geometrische angeboten; durch diese zwei Zugänge wird ihm ein umfassenderer Einblick und ein tieferes Verständnis ermöglicht.

Karsten behandelt zuerst die Addition von Größen mit unterschiedlichen Vorzeichen, an der er, wie bereits dargestellt, diverse Begrifflichkeiten einführt und erklärt, bevor er auf die Addition von Größen mit gleichen Vorzeichen eingeht.[1068] Zur Addition von jeweils positiven oder negativen Größen schreibt Karsten, dass die Größen an sich, also nur die Beträge, addiert werden und dem Ergebnis das Zeichen hinzugefügt werden soll, welches die Größen mit sich führen.[1069]

Anhand der Addition leitet Karsten in die Subtraktion entgegengesetzter Größen ein, indem er zunächst auf die wechselseitige Beziehung der Addition und Subtraktion verweist und für die Subtraktion in der Buchstabenrechnung festhält: „Eine Größe von einer andern subtrahiren heist also auch im allgemeinen Verstande eine Größe, die jener entgegengesetzt ist, zu dieser im allgemeinen Verstande addiren“[1070]. Mit dieser Erklärung werden alle Fälle der Subtraktion auf die Regeln der Addition zurückgeführt. Karsten erklärt mit Rechenbeispielen, wie man Größen mit demselben Vorzeichen subtrahiert, wobei er unterscheidet, ob der Subtrahend kleiner oder größer als der Minuend ist, und diese beiden Fälle in separaten Absätzen betrachtet.[1071] Es folgt die Erklärung der Subtraktion von zwei entgegengesetzten Größen, wobei Karsten festhält, dass das Ergebnis das Vorzeichen des Minuenden erhält.[1072]

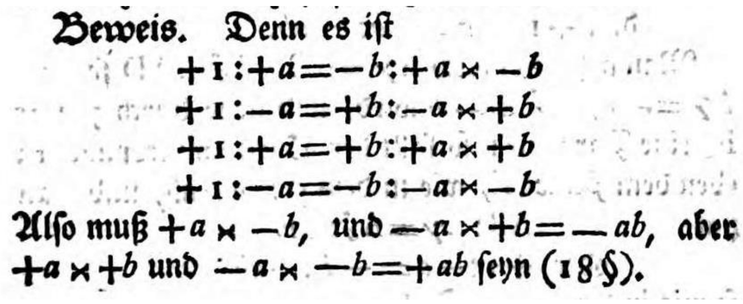
Bis hier hin beschränkte sich Karsten auf die Addition und Subtraktion von gleichartigen Größen, also Größen, die, im Gegensatz zu ungleichartigen Größen, mit demselben Buchstaben bezeichnet werden.[1073] Gleichartig heißt also, dass die Größen zum selben Größenbereich gehören und dementsprechend dieselbe Maßeinheit haben. Nun erklärt Karsten die Addition und Subtraktion, bei denen die Summanden, Minuenden und Subtrahenden aus ungleichartigen Größen bestehen und durch die vier Rechenoperationen zusammengesetzt sind (siehe Abbildung 34).[1074] Die explizite Unterscheidung zwischen gleichartigen und ungleichartigen Größen findet man bei anderen Autoren nicht, obwohl sie sowohl mit gleichartigen als auch mit ungleichartigen Größen rechnen.

$$\begin{array}{ll} & \frac{ab}{c} - 6k + 3\frac{m}{n} - 7g + \frac{r}{s} \\ & \frac{f}{c} - 9\frac{k}{e} - 7\frac{r}{nh} + \frac{t}{s} - c \\ \hline \text{Sum.} & \frac{ab+f}{c} - \frac{6ke+9k}{e} + \frac{3mh-7r}{nh} - 7g + \frac{r+t}{s} - c. \end{array}$$

Abbildung 34: Karsten, *Lehrbegrif*, Bd. 2, S. 75.

[1068] Vgl. Karsten, L 2, S. 67-69.
[1069] Vgl. Karsten, L 2, S. 69.
[1070] Karsten, L 2, S. 70.
[1071] Vgl. Karsten, L 2, S. 70-72.
[1072] Vgl. Karsten, L 2, S. 72 f.
[1073] Vgl. Karsten, L 2, S. 74.
[1074] Vgl. Karsten, L 2, S. 74-76.

Die Multiplikation und Division von Größen erklärt Karsten durch das Auffinden der vierten Proportionalgröße.[1075] Er geht von einer positiven Einheit aus und nennt die Regel, dass entgegengesetzte Größen ein negatives, und nicht entgegengesetzte Größen ein positives Produkt ergeben.[1076] Diese Regel ist richtig, sofern es sich um Größen in gerader Anzahl handelt. Dies macht Karsten allerdings nicht in der Rechenregel selbst deutlich, wird aber aus den vorausgegangenen Erklärungen, in denen Karsten von zwei Größen geschrieben hat, und dem zugehörigen Beweis (siehe Abbildung 35) ersichtlich.



Beweis. Denn es ist

$$+1 : +a = -b : +a \times -b$$
$$+1 : -a = +b : -a \times +b$$
$$+1 : +a = +b : +a \times +b$$
$$+1 : -a = -b : -a \times -b$$

Also muß $+a \times -b$, und $-a \times +b = -ab$, aber $+a \times +b$ und $-a \times -b = +ab$ seyn (18 §).

Abbildung 35: Karsten, *Lehrbegrif*, Bd. 2, S. 79.

Zusätzlich erläutert Karsten die Multiplikation von entgegengesetzten Größen mit Hilfe der Geometrie, und zwar mit dem Auffinden der vierten Proportionallinie „a b“ zu den gegebenen Linien „a“ und „b“ sowie einer Einheitslinie.[1077] Es folgt die Erklärung, wie man verfahren muss, wenn die Faktoren selbst aus unterschiedlichen Größen zusammengesetzt sind, wobei hier unter anderem auch die drei binomischen Formeln – allerdings nicht unter dieser Bezeichnung – vorgestellt werden.

Für die Division von entgegengesetzten Größen finden wir zur Multiplikation analoge Ausführungen.[1078]

Bevor Karsten jedoch die Rechenregeln der Multiplikation und Division erklärt, geht er auf den Vergleich und die Gleichheit von Größen ein und macht den Unterschied zwischen der Buchstabenrechnung und der Arithmetik deutlich.[1079] Erstens müssten die Begriffe von den Verhältnissen und Proportionen näher bestimmt werden, sobald man mit positiven und negativen Größen rechnet. In der gemeinen Rechenkunst gebe es nur die Proportion „A : B = C : D“, in der gemeinen Rechenkunst aber sind vier verschiedene Proportionen möglich (siehe Abbildung 36). Zweitens müsse der Begriff der Gleichheit bei der Rechnung mit entgegengesetzten Größen neu definiert werden. Bei Linien dürfte nicht nur auf ihre Länge, sondern müsse auch auf ihre Orientierung[1080] geachtet werden. Im Rahmen der allgemeinen Rechenkunst heißen zwei Linien gleich, wenn sie sowohl dieselbe Länge als auch dieselbe Orientierung haben. Drittens geht Karsten auf den Vergleich zweier Größen von derselben Art ein und schreibt, dass gewissermaßen jede negative Größe kleiner als jede positive Größer sei, also „– a < + a“.[1081] Diese Aussage ist irritierend, da Karsten bei der Erklärung der Addition

[1075] Vgl. Karsten, L 2, S. 76.
[1076] Vgl. Karsten, L 2, S. 79.
[1077] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 2, S. 79-81.
[1078] Vgl. Karsten, L 2, S. 82-84.
[1079] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 2, S. 76-79.
[1080] Karsten verwendet nicht den Begriff „Orientierung“, sondern „Lage“.
[1081] Vgl. Karsten, L 2, S. 78.

und Subtraktion zwar auch von kleineren und größeren Größen spricht, jedoch bei den Rechnungen selbst nicht das Vorzeichen, sondern nur die absoluten Beträge betrachtet. Karsten ist der einzige der in unserer Untersuchung betrachteten Autoren, der einen solchen Vergleich von Größen in seinem Lehrbuch vornimmt. Zudem könne, so Karsten, jede negative Größe als „kleiner als Nichts“ angesehen werden.[1082] Dies erklärt er damit, dass eine negative Größe der positiven umso näher komme, je kleiner – im absoluten Sinne – sie ist. Schließlich verschwindet sie komplett, so dass weder etwas von der positiven noch von der negativen Größe vorhanden sei, was er schließlich mit Null gleichsetzt. Erst im „II. Abschnitt. Von den Ausdrücken des Unendlichen“[1083] schreibt Karsten: „Die 0 ist an sich weder positiv noch negativ“[1084]. Diese Erklärung klingt einleuchtend, allerdings wird der Begriff „Nichts“ nicht erklärt, wobei hingegen Kästner die Notwendigkeit sah, diesen eindeutig zu bestimmen.

$$\begin{aligned} +A : +B &= +C : +D \\ +A : +B &= -C : -D \\ +A : -B &= +C : -D \\ +A : -B &= -C : +D. \end{aligned}$$

Abbildung 36: Karsten, *Lehrbegrif*, Bd. 2, S. 77.

Karstens Ausführungen im *Lehrbegrif* sind umfangreicher als bei anderen Autoren. Dies mag damit zusammenhängen, dass Karsten weiter gehen wollte als es in „Anfangsgründen“ üblich sei.[1085] Bei den Rechenarten macht er explizit auf den Unterschied zwischen der gemeinen Rechenkunst, also der Zahlenrechnung, und der allgemeinen Rechenkunst beziehungsweise Buchstabenrechnung aufmerksam. Auffällig und zugleich ein neues Merkmal bei Karsten ist, dass er sich bei der Lehre der entgegengesetzten Größen auf die Geometrie bezieht. So erklärt er beispielsweise die Addition, indem er zeigt, wie eine gerade Linie F zu einer anderen Linie AB addiert wird und welche Abschnitte der Linie eine der Linie AB entgegengesetzte Richtung haben.[1086] Hierbei bezieht sich Karsten auf seine Ausführungen im ersten Band des *Lehrbegrifs* und verweist auf die entsprechende Abbildung (siehe Abbildung 37).[1087] Diese Ausführungen hierzu lauten wie folgt: Zu einer Linie AB soll eine Linie F addiert werden.[1088] Gegeben ist eine gerade Linie AE, auf der sich ein Punkt B befindet. Gegeben ist ebenfalls eine Linie F. Nun wird um B ein Kreis mit dem Radius F konstruiert. Dieser Kreis schneidet AE in zwei Punkten, nämlich in C und in D. Sowohl BC als auch BD haben die Länge F. Die Addition der Linie F zu der Linie AB ergibt $AB + F = AB + BC = AC$. Analog gilt für die Subtraktion, falls $F < AB$: $AD = AB - F = AB - BD = AD$. Die Linienabschnitte BC und AB haben dieselbe Orientierung und vermehren sich entsprechend, während der Abschnitt BD, der in entgegengesetzter Richtung liegt und mit einem Minuszeichen versehen wird, die Linie

[1082] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 2, S. 78 f.
[1083] In: Karsten, L 2, S. 85-97.
[1084] Karsten, L 2, S. 96.
[1085] Vgl. Karsten, L 1, Vorrede, S. **1^{v} f.
[1086] Vgl. Karsten, L 2, S. 68 f.
[1087] Vgl. Karsten, L 1, S. 229.
[1088] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. 229.

AB vermindert.[1089] Dieses Beispiel verwendet Karsten auch, um die Addition von Größen mit gleichem Vorzeichen zu erklären.[1090] Bei der Erklärung der Subtraktion entgegengesetzter Größen zieht er ebenfalls geometrische Ausführungen zu Hilfe.[1091] Dadurch kann sich der Leser die abstrakten algebraischen Rechenoperationen geometrisch vorzustellen. Das Verständnis der Lehren wird zudem erleichtert, indem Karsten die Ausführungen mit Alltagsbeispielen wie Geldrechnungen erläutert und diese Beispiele wiederholt aufgreift.

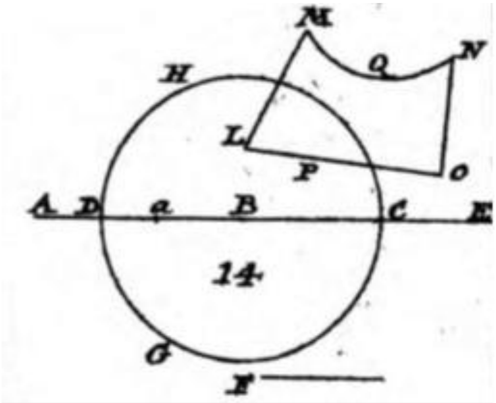


Abbildung 37: Karsten, *Lehrbegrif*, Bd. 1, Abbildung 14.

Im Abschnitt zur Buchstabenrechnung geht Karsten nicht auf die imaginären oder unmöglichen Größen ein. Ebenso wenig werden sie – wo man sie von der Überschrift her erwarten könnte – im „IV. Abschnitt. Von Ausziehung der Wurzeln aus Quadrat- und Cubik=Zahlen“[1092] aufgegriffen, dafür aber im „VIII. Abschnitt. Von der Auflösung mathematischer Aufgaben durch Gleichungen, als der verbesserten Regel Falsi“[1093]. Hier definiert er eine imaginäre Größe wie folgt: „Die Quadratwurzel aus einem negativen Quadrat, ist eine unmögliche Grösse“[1094]. Der Beweis hierzu erfolgt einmal durch das Aufzeigen, dass „$\sqrt{-a^2}$“ weder „+ a“ oder „– a“ noch „0“ zum Ergebnis haben kann, einmal durch die Proportionalgrößen.[1095]

Zwischen der ersten Auflage (1768) und der zweiten Auflage (^{2}1786) des zweiten Bandes des *Lehrbegrifs* gibt es nur geringfügige Änderungen. Die Inhalte stimmen im Grunde genommen überein, aber die Einteilung in die Paragraphen ist an einigen Stellen anders. Dies trifft auf die Ausführungen in den ersten beiden Paragraphen zu.[1096] Auch die Erklärung der Addition anhand von entgegengesetzten Linien ist nicht so umfangreich wie in der ersten Auflage.[1097] In der zweiten Auflage fügte Karsten einen Paragraphen 13 ein, in dem er den Unterschied zwischen – nach seinem Wortlaut – der arithmetischen und der algebraischen Subtraktion herausstellt: „Vormahls hat diese Subtractionsregel veranlasset, daß man die

[1089] Vgl. Karsten, L 2, S. 68 f.
[1090] Vgl. Karsten, L 2, S. 69.
[1091] Vgl. Karsten, L 2, S. 70-73.
[1092] In: Karsten, L 2, S. 121-159.
[1093] In: Karsten, L 2, S. 227-260.
[1094] Karsten, L 2, S. 251.
[1095] Vgl. Karsten, L 2, S. 251 f.
[1096] Vgl. Karsten, L 2 (1768), S. 64-66; vgl. Karsten, L 2.1. (^{2}1786), S. 78-80.
[1097] Vgl. Karsten, L 2 (1768), S. 68 f.; vgl. Karsten, L 2.1. (^{2}1786), S. 82 f.

negativen Grössen als solche vorstellig machte, die kleiner als Null seyn sollten. Weil die arithmetische Subtraction eine Verminderung ist, so sahe man auch jede algebraische Subtraction als Verminderung an, nicht anders, als wenn eine Grösse noch weiter, als bis auf 0 abnehmen könnte. Man kann zwar dergleichen Redensarten als Rechnungssprache gelten lassen, doch bleibt es allemahl besser, daß man sie vermeide, weil sie nicht allein von gar keinen Nutzen sind, sondern auch leicht zu andern fehlsamen Vorstellungen Anlaß geben“[1098]. Dass Karsten diese Bemerkung in die zweite Auflage seines Lehrbuchs mit aufnahm, deutet darauf hin, dass es zu dieser Zeit noch Missverständnisse bezüglich des Ausdrucks „kleiner als Null“ gab. Gleichzeitig konkretisiert Karsten seine knappe Aussage aus der ersten Auflage, nämlich dass man eine Größe als „kleiner als Nichts“ betrachten könne.[1099]

Die Multiplikation und Division entgegengesetzter Größen arbeitete Karsten in der zweiten Auflage seines Lehrbuchs anders aus als in der ersten, aber inhaltlich stimmen sie überein und beruhen auf dem Auffinden der vierten Proportionalgröße.[1100] Hier gebraucht Karsten auch zum ersten Mal den Begriff „negative Zahl“ statt nur „negative Größe“.[1101] Da er nun diesen Begriff verwendet, sind einige Ausführungen in den folgenden Erklärungen anders formuliert, entsprechen aber inhaltlich denen der ersten Auflage.[1102] Wegen der Verwendung des Begriffs „negative Zahl“ mussten auch einige Beweise wie diejenigen zu § 21 und § 24 entsprechend angepasst und umfangreicher formuliert werden.[1103] Am Ende der Ausführungen fügte Karsten noch drei Zusätze an, die die Division von Reihen betreffen, die in der ersten Auflage nicht zu finden sind.[1104]

Der Zugang zu den entgegengesetzten Größen in Karstens *Anfangsgründen* unterscheidet sich von dem im *Lehrbegrif*. In der Vorrede zum ersten Band seiner *Anfangsgründe* kündigt Karsten an, dass er nicht die gesamte Buchstabenrechnung behandelt habe, wohl aber Ausführungen zu der Lehre der entgegengesetzten Größen in dem Geometrie-Kapitel zu finden seien.[1105] Die Addition und Subtraktion entgegengesetzter Größen wird in den Paragraphen 38 bis 40 im „II. Abschnitt. Vom Umfange der ebenen Figuren überhaupt, und insbesondere von der Kreislinie“[1106] erklärt. Der erste Teil von § 38 im Geometrie-Kapitel der *Anfangsgründe* entspricht § 42 im Geometrie-Kapitel des *Lehrbegrifs*, auf den Karsten verweist, um die Addition entgegengesetzter Größen geometrisch darzustellen. In den *Anfangsgründen* erklärt Karsten zusätzlich die Subtraktion einer größeren von einer kleineren Linie, wobei er den Begriff der entgegengesetzten Linien anhand des Beispiels von Vorwärts- und Rückwärtsgehen veranschaulicht.[1107]

Im darauf folgenden Paragraphen definiert Karsten den Begriff der entgegensetzten Größen unabhängig von der Geometrie, sowie die Summe von entgegengesetzten Größen,

---

[1098] Karsten, L 2.1. (^{2}1786), S. 86 f.
[1099] Vgl. Karsten, L 2, S. 78.
[1100] Vgl. Karsten, L 2 (1768), S. 76 ff; vgl. Karsten, L 2.1., S. 90 ff.
[1101] Vgl. Karsten, L 2.1. (^{2}1786), S. 92.
[1102] Vgl. beispielsweise Karsten, L 2 (1768), S. 79 f.; vgl. Karsten, L 2.1. (^{2}1786), S. 94.
[1103] Vgl. Karsten, L 2 (1768), S. 79 und S. 82; vgl. Karsten, L 2.1. (^{2}1786), S. 93 f. und 96 f.
[1104] Vgl. Karsten, L 2.1. (^{2}1786), S. 100-103.
[1105] Vgl. Karsten, AG 1, Vorrede, S. xvi.
[1106] In: Karsten, AG 1, S. 364-383.
[1107] Vgl. Karsten, AG 1, S. 372.

welche auch das „Resultat“ genannt werden könne.[1108] Diese entstehe, wenn die eine Größe um die ihr entgegengesetzte vermindert wird; es liegt also eine arithmetische Subtraktion zugrunde. Im Gegensatz zu den Ausführungen im *Lehrbegrif* schreibt Karsten explizit von der geometrischen – und nicht nur von der arithmetischen – Addition und hält fest: „Entgegen gesetzte Grössen addiren heißt also dasjenige Stück der grössern angeben, um welches sie die kleinere ihr entgegen gesetzte übertrift. Man kann solches die allgemeine geometrische Addition nennen, um sie von der arithmetischen, die allemahl in einer Vermehrung besteht, zu unterscheiden“[1109]. Dies erläutert Karsten anhand desselben Beispiels von der Addition und Subtraktion gerader Linien, wie wir es bereits im *Lehrbegrif* gefunden und oben dargestellt haben. Im Anschluss führt Karsten das Plus- und das Minuszeichen zur Kennzeichnung der entgegengesetzten Größen ein, wobei die Ausführungen denjenigen im *Lehrbegrif* entsprechen.[1110] Nun hält Karsten zwei Rechenregeln zur geometrischen Addition fest. Erstens sei die geometrische Summe von zwei positiven oder negativen Größen mit der arithmetischen Summe gleichzusetzen (siehe Abbildung 38).[1111] Zweitens definiert Karsten die geometrische Summe entgegengesetzter Größen als den Überschuss der betragsmäßig größeren über die kleinere, wobei das Ergebnis das Vorzeichen der betragsmäßig größeren Größe erhält (siehe Abbildung 39).

$$
\begin{aligned}
AB + BC &= + AC \\
- BA - A\delta &= - B\delta
\end{aligned}
$$

Abbildung 38: Karsten, *Anfangsgründe,* Bd. 1, S. 375.

$$
\begin{aligned}
AB - BD &= + AD \\
AB - B\delta &= - A\delta \\
- BA + AD &= - BD \\
- BA + AC &= + BC.
\end{aligned}
$$

Abbildung 39: Karsten, *Anfangsgründe,* Bd. 1, S. 375.

In § 40 widmet sich Karsten der geometrischen Subtraktion, wobei er nicht nur den Zusammenhang zwischen der geometrischen und arithmetischen Subtraktion herstellt, sondern auch zwischen der Addition und Subtraktion im Allgemeinen: „Wie nun die allgemeine geometrische Addition zuweilen im arithmetischen Sinn eine Verminderung ist, so wird die allgemeine geometrische Subtraction zuweilen im arithmetischen Sinn eine Vermehrung“[1112]. Am Ende gibt er zwei Rechenregeln für die Subtraktion von Größen an – einmal wenn sie dasselbe, einmal wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.[1113] Diese Ausführungen zur Subtraktion von Größen mit einerlei Vorzeichen decken sich mit denen im *Lehrbegrif*. Die Subtraktion von entgegengesetzten Größen stellt Karsten in den *Anfangsgründen* deutlicher dar und führt

[1108] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 372 f.
[1109] Karsten, AG 1, S. 373.
[1110] Vgl. Karsten, AG 1, S. 373 f.
[1111] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 375.
[1112] Karsten, AG 1, S. 376.
[1113] Vgl. Karsten, AG 1, S. 376 f.

die Subtraktion auf die Addition dieser Größen bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel des Subtrahenden zurück.[1114]

Am Ende der Ausführungen zur Addition und Subtraktion gewährt Karsten einen kurzen historischen Einblick.[1115] Er schreibt, dass die älteren Geometer den Begriff der entgegengesetzten Größen nicht verwendet hätten und daher nicht die Notwendigkeit bestand, die Begriffe der Addition und Subtraktion deutlich zu erklären. Dies sei aber nun notwendig, da die höhere Rechenkunst auf die Geometrie angewendet werde, so dass aus dieser Verbindung die „allgemeine mathematische Erfindungskunst“ beziehungsweise „mathematische Analysis“ entstanden sei. Hier verweist Karsten auch auf das entsprechende Kapitel „Allgemeine Mathematische Analysis“, das in den folgenden Bänden des Lehrbuchs zu finden sei, die aber de facto nicht mehr veröffentlicht wurden.

Die Multiplikation und Division thematisiert Karsten in den Paragraphen 179 bis 182, die im „VIII. Abschnitt. Fernere Lehren von den Proportionen mit Anwendungen auf die Lehren der Proportionalität grader Linien“[1116] zu finden sind. Zunächst zeigt er, wie man zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie findet.[1117] Er beschränkt sich hier auf Linien, während er im *Lehrbegrif* allgemein von Größen sprach und die Multiplikation mit dem Auffinden der vierten Proportionalgröße erklärte.[1118] Abschließend geht Karsten auf den Vergleich von geraden Linien ein, bei dem es nicht nur auf die Größe, sondern auch auf ihre Orientierung ankommt. Im Fall einer entgegengesetzten Orientierung werden die Linien mit den Vorzeichen „+“ und „–“ bezeichnet und somit voneinander unterschieden.[1119] Dieser Umstand kommt auch bei der Betrachtung der Proportionalität zum Tragen, bei der Karsten erklärt, wie sich zwei Linien zueinander verhalten können. Diese können sich nur wie zwei andere verhalten, wenn sie in der Orientierung übereinstimmen, egal ob sie in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung zeigen. Zusammenfassend hält Karsten die vier möglichen Proportionen fest (siehe Abbildung 40). Diese Ausführungen decken sich mit denen, die wir im ersten Abschnitt der allgemeinen Rechenkunst im *Lehrbegrif* finden.[1120]

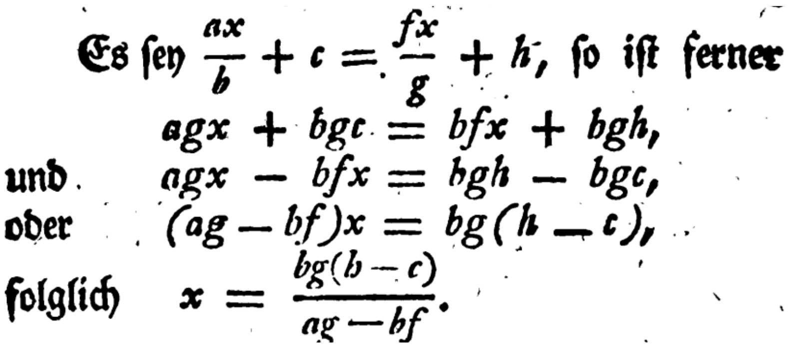
$$
\begin{aligned}
+A : +B &= +C : +D,\\
+A : +B &= -C : -D,\\
+A : -B &= +C : -D,\\
+A : -B &= -C : +D:
\end{aligned}
$$

Abbildung 40: Karsten, *Anfangsgründe*, Bd. 1, S. 485.

Anschließend erklärt Karsten die Multiplikation und Division entgegengesetzter Größen.[1121] In den *Anfangsgründen* fasst er diese Ausführungen in einem Paragraphen zusammen; im *Lehrbegrif* werden sie noch auf drei verschiedene aufgeteilt.[1122]

[1114] Vgl. Karsten, AG 1, S. 377.
[1115] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 377 f.
[1116] In: Karsten, AG 1, S. 470-490.
[1117] Vgl. Karsten, AG 1, S. 483 f.
[1118] Vgl. Karsten, L 2, S. 76.
[1119] Vgl. hierzu und zum Folgenden, Karsten, AG 1, S. 484 f.
[1120] Vgl. Karsten, L 2, S. 76-78.
[1121] Vgl. Karsten, AG 1, S. 485-488.

Zum Abschluss geht Karsten auf die Rechnung mit Größen im Sinne von Termen ein.[1123] Er schreibt, dass eine Größe auf unterschiedliche Weise aus mehreren Unbekannten und mit verschiedenen Operatoren zusammengesetzt sein kann. Sie könne aber durch Rechnung, wenn die Buchstaben Zahlen darstellen, oder Konstruktionen, wenn die Buchstaben für Linien stehen, gefunden werden. Auf diese Weise leitet er zur „neuern mathematischen Analysis" über, deren Aufgabe es ist, solche Gleichungen zu lösen. Er gibt ein Beispiel an, wie man eine Gleichung erster Ordnung mit Hilfe der Analysis löst (siehe Abbildung 41). Hieran erkennt der Leser, dass die erlernten Inhalte zu den entgegengesetzten Größen einen großen Nutzen bei der Rechnung mit Unbekannten haben. Dieser Bezug zur mathematischen Analysis fehlt im *Lehrbegrif*.



Es sey $\frac{ax}{b} + c = \frac{fx}{g} + h$, so ist ferner

$$agx + bgc = bfx + bgh,$$

und $agx - bfx = bgh - bgc$,

oder $(ag - bf)x = bg(h - c)$,

folglich $x = \frac{bg(b - c)}{ag - bf}$.

Abbildung 41: Karsten, *Anfangsgründe*, Bd. 1, S. 490.

Zusammenfassend lässt sich für Karstens *Anfangsgründe* festhalten, dass die Erklärungen zu den entgegengesetzten Größen nicht so umfangreich sind wie in seinem *Lehrbegrif*. Karsten präsentiert diese in seinen *Anfangsgründen* ausschließlich im Rahmen der Geometrie, während sie im *Lehrbegrif* unter der allgemeinen Rechenkunst beziehungsweise Buchstabenrechnung mit Verweisen auf die Geometrie zu finden sind. Trotz dieser Unterschiede bezüglich des Zugangs sind die Ausführungen zu den entgegengesetzten Größen weitgehend deckungsgleich. Da Karsten sich in den *Anfangsgründen* im Bereich der Geometrie bewegt, finden wir hier keine Interpretation der entgegengesetzten Größen als Schulden und Vermögen, sondern die Erklärungen erfolgen anhand von orientierten Linien. Nur an einer Stelle veranschaulicht Karsten die entgegengesetzten Größen anhand der Vorwärts- und Rückwärtsbewegung.[1124]

Karstens *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der mathematischen Wissenschaften* (^{2}1785), enthält – wie der Name schon sagt – die Inhalte der beiden umfangreicheren Lehrwerke in einer verkürzten Form. Karsten greift die negativen Größen zu Beginn der „Anfangsgründe der allgemeinen Rechenkunst"[1125] auf. Der Zugang über die Buchstabenrechnung entspricht dem im *Lehrbegrif*. In der ersten Erklärung definiert Karsten entgegengesetzte Größen und führt die Zeichen „+" und „–" zur Bezeichnung der positiven und negativen Größen ein.[1126] Es folgen die Erklärungen zu den vier Rechenarten mit diesen Größen.[1127]

[1122] Vgl. Karsten, L 2, S. 79-82, §§ 21, 22, 24.
[1123] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 488-490.
[1124] Vgl. Karsten, AG 1, S. 372.
[1125] In: Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 208-241.
[1126] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 208 f.
[1127] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 209-216.

Es fällt auf, dass die Ausführungen denen im *Lehrbegrif* gleichen, aber recht kurz gehalten sind und sich vor allem auf die Vermittlung der Rechenregeln konzentrieren. Zudem gibt Karsten nicht an, wie man entgegengesetzte Größen interpretieren kann, beispielsweise als Schulden und Vermögen. Der *Auszug* enthält weniger Rechenbeispiele als der *Lehrbegrif*. Karsten merkt aber an, dass weitere Erläuterungen zur Addition und Subtraktion im zweiten Band seines *Lehrbegrifs* zu finden seien.[1128] Analoges gilt für die Multiplikation und Division.[1129]

Während wir in den *Anfangsgründen* keine Erklärung der unmöglichen Größen finden, thematisiert Karsten diese in seinem *Auszug* im Zusammenhang mit dem Lösen von Gleichungen: „Ein Ausdruck bezeichnet eine unmögliche Grösse, wenn derselbe verlangt, daß eine Grösse durch solche Operationen zuwege gebracht werden soll, die mit einander nicht bestehen können“[1130]. In dem zugehörigen Zusatz heißt es, dass eine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl eine solche Größe sei, da eine Wurzel, egal ob sie positiv oder negativ ist, immer ein positives Quadrat ergebe.[1131]

Vergleicht man die Lehre der entgegengesetzten Größen in der ersten (1781) und der zweiten Auflage (^{2}1785) des *Auszugs*, so stellt man nur geringfügige Unterschiede fest. An drei Stellen nahm Karsten Ergänzungen vor. So sind die Anmerkungen zu den Paragraphen 5 und 13, in denen er auf seinen *Lehrbegrif* verweist, in der zweiten Auflage umfangreicher und geben einen tieferen Einblick in die Rechnung mit entgegengesetzten Größen.[1132] Schließlich ist in § 15 ein weiteres, viertes Beispiel zur Division von Größen hinzugekommen.[1133]

Anhand von Karstens Lehrbüchern, die in diesem Kapitel betrachtet wurden, sieht man Unterschiede bezüglich des Umfangs und der Darstellung der entgegengesetzten Größen. Je kürzer die Inhalte in den Lehrbüchern behandelt werden, desto weniger anschauliche Beispiele und Rechenexempel fügte Karsten ein. Im *Lehrbegrif* gibt er nicht nur ausführliche Erklärungen und zahlreiche Rechenbeispiele, sondern stellt auch die Verbindung zwischen den abstrakten negativen Größen und ihrem Vorkommen im Alltag her, nämlich beispielsweise in Form von Schulden und Vermögen. Diese Erläuterungen sind in den beiden anderen Lehrwerken nicht mehr in diesem Umfang zu finden.

Karsten verwendet den Begriff negative „Größe“, wobei er in der zweiten Auflage des *Lehrbegrifs* von negativen „Zahlen“ spricht. Es scheint so, als ob Karsten die Begriffe synonym benutzte, denn inhaltlich lassen sich keine Unterschiede ausfindig machen. Gleichzeitig gibt dies einen Hinweis darauf, dass der Begriff negative „Zahl“ anerkannt war. Hinzu kommt, dass Karsten in der zweiten Auflage des *Lehrbegrifs* noch einmal auf den Begriff „kleiner als Null“ eingeht, was zeigt, dass es wohl noch Klärungsbedarf bezüglich der Begrifflichkeiten gab.

[1128] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 210.
[1129] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 213.
[1130] Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 228.
[1131] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 228
[1132] Vgl. Karsten, Auszug (1781), S. 190 und S. 193; vgl. Karsten, Auszug (^{2}1785), Bd. 1, S. 210 und S. 213 f.
[1133] Vgl. Karsten, Auszug (1781), S. 194 f.; vgl. Karsten, Auszug (^{2}1785), Bd. 1, S. 214-216.

4.2.7 Georg Simon Klügel

Klügel betrachtet in seinen *Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie* (²1792) keine entgegengesetzten Größen oder negative Zahlen, was darauf hindeutet, dass er dieses Thema nicht zur Elementarmathematik rechnete. Möglicherweise hängt die Nichtbeachtung der entgegengesetzten Größen damit zusammen, dass Klügel im Rahmen der Arithmetik nur konkrete Zahlen und keine Rechnung mit Buchstaben behandelte. Kästner griff die negativen Größen bereits innerhalb der Arithmetik auf, aber er thematisierte auch – im Gegensatz zu Klügel – die Buchstabenrechnung in seinen *Anfangsgründen*, bei der die negativen Größen eine wichtige Rolle spielen. Ergiebiger erweist sich Klügels *Mathematisches Wörterbuch* (1803-1808). Dieses enthält das Stichwort „Entgegengesetzte Größen"[1134] mit umfangreichen Ausführungen. Klügel definiert entgegengesetzte Größen als „solche, bey welchen außer ihrer Quantität noch eine entgegengesetzte Beziehung, in Absicht auf Addition und Subtraction, betrachtet wird"[1135]. Er stellt die Verbindung dieser Größen zu den Rechenoperationen her und beschreibt zwei Möglichkeiten, wie die entgegengesetzten Größen zu betrachten sind. In Bezug auf die erste Möglichkeit zeigt Klügel zunächst an dem Beispiel der Größe „A = a + b – c – d", dass „a" und „b", welche er als Teile der Größe „A" betrachtet, „c" und „d" entgegengesetzt seien, betont aber, dass alle vier Bestandteile „gleichnamig" seien.[1136] Dies erläutert er an alltäglichen Beispielen. Er schreibt, dass bezüglich des Vermögensstandes die Schulden als entgegengesetzt zu den Schuldforderungen und dem tatsächlichen Kassenstand anzusehen sind. Mit Bezug auf das obige Beispiel stellt der Vermögensstand die Größe A dar, die sich aus den einzelnen Teilen wie den Schuldforderungen, dem Kassenstand und den Schulden zusammensetzt. Darüber hinaus gibt Klügel als weiteres Beispiel an, dass Steigen und Fallen sowie Vorwärts- und Rückwärtsbewegungen entgegengesetzte Größen seien, wenn man den tatsächlich zurückgelegten Weg betrachtet. Auf diese Weise stellt er das wechselseitige Verhältnis der Größen nicht nur anschaulich dar, sondern zeigt auch auf, dass sie unter einem gemeinsamen Oberbegriff – der einer Größe A – stehen. Des Weiteren verwendet er innerhalb dieser Erklärung explizit den Begriff „Vorzeichen", was bei anderen Autoren nicht zu finden ist.

„Diejenigen Größen, von welchen die ihnen entgegengesetzten abgezogen werden, nennt man positive, weil man setzt, daß der Werth der Größe A, die aus der Verbindung der entgegengesetzten Größen entsteht, ihnen gleichnamig sey. Die abzuziehenden Größen nennt man negative"[1137]. Somit macht Klügel noch einmal deutlich, dass die entgegengesetzten Größen zusammen eine Größe A ergeben, die gleichzeitig den Oberbegriff der einzelnen Teile darstellt, wie er zuvor an den bildlichen Beispielen erläutert hat.

Durch das Problem, dass der Subtrahend größer als der Minuend sein kann, so dass die Größe A einen negativen Wert erhält, leitet Klügel zu der Bezeichnung der Größen über, die man je nach Art der Fragestellung festlegen kann.[1138] Man könne von Beginn an der Größe A eine andere Bezeichnung zuordnen, damit A positiv bleibt, wobei die entgegengesetzten Grö-

[1134] In: Klügel, MW 2, S. 104-114.
[1135] Klügel, MW 2, S. 104.
[1136] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 2, S. 104.
[1137] Klügel, MW 2, S. 104.
[1138] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 2, S. 104.

ßen, aus denen sich A ergibt, ihre Vorzeichen wechseln. So könne man beispielsweise A als Schulden anstatt Vermögen bezeichnen, wobei aus der größeren und zuvor negativen Größe (Schulden) eine positive, und aus der zuvor positiven Größe (Einnahmen) eine negative wird.

Von solchen lebensnahen Beispielen geht Klügel zur Auflösung von algebraischen Gleichungen über und zeigt, dass sich das Vorzeichen des Ergebnisses bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel in der algebraischen Gleichung ändert.[1139] Die Ausführungen sind äquivalent zu den vorherigen Beispielen. Diese erste Möglichkeit, entgegengesetzte Größen zu betrachten, bezeichnet Klügel als die „unwichtigere“, welche aber als einzige in den zeitgenössischen Lehrbüchern dargestellt werde.[1140] Die entgegengesetzten Größen würden in den Lehrbüchern so erklärt, dass sie sich einander vermindern oder sogar aufheben. Dass dies auch auf die Buchstabenrechnung übertragen werde, führe zu Verwirrungen, vor allen in Hinblick auf die Multiplikation. Hier sei es nicht möglich, entgegengesetzte Größen wie Schulden und Vermögen zu multiplizieren.

Klügel geht es bei dieser ersten Möglichkeit, entgegengesetzte Größen zu betrachten, darum, dass sich die „Werthe einer zusammengesetzten Größe unter zweyerley Rubriken“[1141] zusammenfassen lassen können. In der zweiten Möglichkeit betrachtet er die Entgegensetzung von Größen in einer „Verbindung“ zu einer ähnlichen „Verbindung“, welche Klügel als wichtig für die Analysis ansieht.[1142] Hiermit meint er Gleichungen, die aus unterschiedlich zusammengesetzten Größen bestehen. Auf diese Weise können zahlreiche Fälle unter einem Fall zusammengefasst und durch Vertauschung der Vorzeichen neue Fälle hergeleitet werden. Das hätten die älteren Mathematiker nicht gemacht, sondern sie hätten jeden Fall einzeln untersucht. Als Beispiel solcher Gleichungen, aus denen man andere Fälle herleiten kann, gibt Klügel „$(a + b)^2 \cdot (a - b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$“ und „$(a - b)^2 \cdot (a + b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$“ an. Er zeigt, dass sich beim Vorzeichenwechsel von „b“ auch die Vorzeichen der ungeraden Potenzen von „b“ ändern. Zusammenfassend stellt Klügel ausführlich die Rechnung mit algebraischen Gleichungen und ihre Veränderung beim Wechsel des Vorzeichens einer Größe vor, wodurch weitere Fälle hergeleitet werden können. Er merkt an, dass in der allgemeinen Gleichung zunächst alle Größen positiv angenommen werden müssen, wobei die in der Gleichung vorgefundenen Vorzeichen die Addition und Subtraktion andeuten. Wenn Größen dann ihre Bezeichnung ändern, also negativ werden, so müssen alle Vorzeichen, die sich vor dieser Größe befinden, vertauscht werden, das heißt die Subtraktion wird zur Addition und umgekehrt. Auch die Vorzeichen bei den Produkten – dasselbe gilt auch für Quotienten – werden bei einer ungeraden Anzahl von Faktoren der betroffenen Größe vertauscht. An dieser Stelle verweist Klügel auf den Lexikoneintrag „Buchstabenrechnung“, in dem es heißt, dass die Multiplikation von Faktoren mit verschiedenen Vorzeichen ein negatives, bei gleichen Vorzeichen aber ein positives Produkt ergibt.[1143] Abschließend schreibt Klügel, dass ein negatives Ergebnis der Rechnung so zu verstehen sei, dass die gefundene Größe ihrer anfangs angenommenen Bezeichnung entgegengesetzt ist.[1144]

[1139] Vgl. Klügel, MW 2, S. 105.
[1140] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 2, S. 105 f.
[1141] Klügel, MW 2, S. 106.
[1142] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 2, S. 106-110.
[1143] Vgl. Klügel, MW 1, S. 375.
[1144] Vgl. Klügel, MW 2, S. 109 f.

Klügel gibt diejenigen mathematischen Themen an, bei denen solche allgemeinen Rechnungen vorgenommen werden und verweist auf die entsprechenden Einträge in seinem Lexikon: Anwendung der Analysis auf die Geometrie, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, Koordinaten, trigonometrische Funktionen, analytische Dioptrik.[1145] Diese Verweise auf Anwendungsmöglichkeiten innerhalb der Mathematik selbst finden wir in keinem der von uns betrachteten Lehrbücher.

Nach diesen Ausführungen folgt die Erklärung der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung, also Lösungen von quadratischen Gleichungen inklusive einem historischen Einblick in die Terminologie.[1146] Klügels Erläuterungen zeigen, dass er sowohl positive als auch negative Wurzeln als Lösungen einer Gleichung zuließ. Allerdings greift er nicht die Wurzel aus einer negativen Größe auf. Es gibt jedoch einen entsprechenden Eintrag im fünften Band des *Mathematischen Wörterbuchs* (1831) unter dem Stichwort „Unmögliche Größen"[1147]. Das *Wörterbuch* wurde zwar von Klügel begonnen, jedoch von Carl Brandan Mollweide (1774-1825) fortgesetzt und erst von Johann August Grunert (1797-1872) zu Ende geführt. Der „U" enthaltende Band wurde erst 1831 veröffentlicht, so dass dieses Stichwort hier nicht für die Betrachtung der unmöglichen Größen verwendet wird, da es erstens nicht von Klügel selbst stammt und zweitens nicht mehr repräsentativ für das 18. Jahrhundert ist.

Klügel nimmt in dem Artikel zu den entgegengesetzten Größen auch Bezug zu dem im 18. Jahrhundert diskutierten Begriff „weniger als Nichts", den er selbst als paradox bezeichnet.[1148] Seiner Meinung nach kann dieser Begriff gar nicht auf algebraische Gleichungen angewendet werden. Dieser sei nur im Rahmen einer arithmetischen Reihe sinnvoll, bei der die einzelnen Glieder bei fortgehender Subtraktion eines Wertes die Null überschreiten und schließlich negativ werden. Hier beschreibt Klügel den Übergang vom positiven in den negativen Bereich durch Übertreten der Null. Darauf basierend stellt er die Relationen „kleiner als" und „größer als" am Beispiel der entgegengesetzten Größen dar und hält fest: „Die Hinzusetzung von + a giebt Größeres, die Hinzufügung von – a oder Abziehung von + a giebt Kleineres, wenn gleich der Quantität nach das umgekehrte erfolgt, nämlich in dem Falle, wenn die Hinzusetzung zu einer negativen Größe geschieht"[1149]. Die Erklärung zu den Relationen der Ungleichheit bleibt ohne anschauliche Beispiele, wobei nicht zu vergessen ist, dass es sich um ein mathematisches Wörterbuch und nicht um ein Lehrbuch handelt.

Am Ende des Wörterbucheintrags „Entgegengesetzte Größen" verweist Klügel auf weitere Literatur.[1150] Er hebt das Werk *Principles of Algebra* (1796) von William Frend hervor, in dem der Autor auf die entgegengesetzten Größen verzichtet hat, um die Algebra zu vereinfachen. Zu diesem Werk habe Francis Maseres (1731-1824) einen Anhang geschrieben, der dieses Vorgehen unterstützte. Des Weiteren macht Klügel auf seinen eigenen Artikel über entgegengesetzte Größen in Hindenburgs *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*[1151] aufmerksam, auf den Friedrich Gottlieb Busse (1756-1835) in seinem Werk *Neue Erörterun-*

[1145] Vgl. Klügel, MW 2, S. 110.
[1146] Vgl. Klügel, MW 2, S. 112 f.
[1147] In: Klügel/Mollweide/Grunert, Mathematisches Wörterbuch, Bd. 5, S. 555-573.
[1148] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 2, S. 113.
[1149] Klügel, MW 2, S. 113.
[1150] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 2, S. 114.
[1151] Gemeint ist „Ueber die Lehre von den entgegengesetzten Größen". In: AM, 1795, 3. Heft, S. 309-319 und AM, 1795, 4. Heft, S. 470-481.

gen über Plus und Minus (1801) reagierte. Klügels Anmerkungen zeigen, dass das Thema „entgegengesetzte Größen“ zu Beginn des 19. Jahrhunderts noch mit Schwierigkeiten und Kontroversen unter Mathematikern verbunden war.

Im Eintrag zu den entgegengesetzten Größen finden wir keine Rechenregeln. Allerdings verweist Klügel an entsprechenden Stellen auf das Stichwort „Buchstabenrechnung“[1152]. Zu Beginn dieses Artikels definiert Klügel die Buchstabenrechnung als den ersten Teil der Analysis und erklärt die Schreibweise und Zusammensetzung der Größen – modern: Terme.[1153] Es folgen die unterschiedlichen Rechnungsarten innerhalb der Buchstabenrechnung. Bei der Addition kommen bei Klügel noch keine negativen oder entgegengesetzten Größen vor. Zur Subtraktion schreibt er: „Wenn sowohl das Ganze (Minuendus) als der Subtrahendus aus mehreren Theilen bestehen, so werden die Theile des Subtrahendus mit entgegengesetzten Vorzeichen zu den ihnen gleichartigen des Minuendus gesetzt: und bey verschiedenen Vorzeichen derselben in dem Aggregate wird dem Unterschiede das Vorzeichen des größern gegeben“[1154]. Klügel verwendet den Begriff „Aggregate“, wobei er die Aggregation wie folgt erklärt: „Wenn Größen, die aus additiven und subtractiven Theilen zusammengesetzt sind, addirt werden, so nenne man dieses Zusammennehmen, Aggregation. […] Ein Aggregat ist nämlich eine Zusammensetzung von mehreren Theilen, sie mögen einerley oder verschiedene Vorzeichen haben, und begreift also sowohl Summe als Unterschied“[1155]. Es besteht also ein Unterschied zwischen der Aggregation und der Addition und Subtraktion, wobei die Rechenregeln der Addition und Subtraktion in der Aggregation vereinigt werden, was Klügel in einem Beispiel darstellt (siehe Abbildung 42).

$$\begin{array}{l} 3a + 2b + 7c - 4d = A \\ 5a - 8b - 4c - 3d = B \\ \hline 8a - 6b + 3c - 7d = A + B. \end{array}$$

Abbildung 42: Klügel, *Mathematisches Wörterbuch*, Bd. 1, S. 374.

Bei der Multiplikation von zusammengesetzten Größen hält Klügel fest, dass Faktoren mit verschiedenen Vorzeichen ein negatives Vorzeichen, diejenigen mit gleichen Vorzeichen ein positives Vorzeichen im Produkt ergeben.[1156] Hierbei erwähnt er nicht, dass es sich im Fall der verschiedenen Vorzeichen um eine ungerade Anzahl von Faktoren handeln muss, die das negative Vorzeichen führen. Detaillierter in dieser Hinsicht sind seine Ausführungen unter dem Stichwort „Entgegengesetzte Größen“, in dem er schreibt, dass sich bei einer ungeraden Anzahl negativer Faktoren das Vorzeichen des Produkts wechselt.[1157]

Bei der Erklärung der Division von Größen behandelt Klügel nicht den Fall, wie sich die Division von zwei entgegengesetzten Größen auf das Vorzeichen des Quotienten auswirkt.

[1152] In: Klügel, MW 1, S. 371-385.
[1153] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 1, S. 371-373.
[1154] Klügel, MW 1, S. 373 f.
[1155] Klügel, MW 1, S. 374.
[1156] Vgl. Klügel, MW 1, S. 375.
[1157] Vgl. Klügel, MW 2, S. 109.

Stattdessen sind seine Ausführungen allgemeiner. Er schreibt, dass der Quotient negativ wird, wenn in dem Dividenden und Divisor einige Teile negativ werden, also ein Vorzeichenwechsel stattfindet.[1158]

In Bezug auf Klügels *Wörterbuch* können wir festhalten, dass Klügel die entgegengesetzten Größen auf zweifache Weise betrachtet: Erstens als Zuordnung von Größen zu zwei Kategorien, welche einander entgegengesetzt sind, aber zu ein und derselben übergeordneten Kategorie gehören; zweitens in algebraischen Gleichungen, wobei man durch die entgegengesetzten Rechenzeichen Fälle berücksichtigen kann, bei denen die Bezeichnungen einer oder mehrerer Größen in der Ausgangsbedingung geändert werden. Klügels Ausführungen sind umfassender als in den von uns betrachteten Lehrwerken. Da es sich bei Wörterbüchern und Lehrbüchern um unterschiedliche Literaturgattungen handelt, sind die Ausführungen nur bedingt miteinander vergleichbar. Es lässt sich aber im Vergleich feststellen, dass es Klügel nicht darum ging aufzuzeigen, wie man mit solchen Größen rechnet, so dass entsprechende Rechenregeln fehlen. In den von uns eingesehenen Lehrbüchern hingegen stehen diese im Fokus der Betrachtung.

Wie auch in den Lehrbüchern seiner Zeit ist Klügel bemüht, die Lehre der entgegengesetzten Größen deutlich darzustellen. Seine Erklärungen sind begleitet von anschaulichen Beispielen, die die Entgegensetzung der Größen und ihre Zuordnung zu einer gemeinsamen übergeordneten Kategorie betonen. So gehören Schulden und Kassenstand als entgegengesetzte Größen zu dem gemeinsamen Oberbegriff des Vermögensstandes. Es gibt keine geometrischen Veranschaulichungen.

Klügel ist der erste Autor, der den Begriff „Vorzeichen“ verwendet, so dass der Unterschied zwischen diesen und den Rechenzeichen deutlich wird. Er zeigt in diesem Rahmen aber auch die enge Verbindung in der Bedeutung der Rechenzeichen und der Vorzeichen auf. Auch die weiteren Begriffe, die er für die entgegengesetzten Größen verwendet, nämlich „positiv“ und „negativ“, entsprechen unseren heutigen Begriffen.

Neben der fachmathematischen Darstellung der entgegengesetzten Größen nimmt Klügel auch Bezug zu anderen Bereichen. So erfahren wir, dass die Lehre der entgegengesetzten Größen, wie sie in den zeitgenössischen Lehrbüchern zu finden war, unter Umständen zu Irrtümern führen konnte, beispielsweise bei der Multiplikation von Größen, da keine entgegengesetzten Größen wie Schulden und Vermögen miteinander multipliziert werden können. Des Weiteren geht Klügel auf den Begriff „kleiner als Nichts“ ein, wobei er sich weniger mit philosophischen Betrachtungen sondern vielmehr fachmathematisch befasst, indem er die mathematischen Relationen der Ungleichheit darauf bezieht.

4.2.8 Immanuel Kant

Kant war zwar kein Mathematiker, äußerte sich aber aus philosophischer Sicht über entgegengesetzte Größen. Daher soll an dieser Stelle seine Schrift *Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen* (1763) betrachtet werden, wobei der Fokus auf den Bezug zur Mathematik gelegt wird. Daher wird nur der erste Abschnitt der Schrift, nämlich

[1158] Vgl. Klügel, MW 1, S. 381.

„Erläuterung des Begriffes von den negativen Größen überhaupt“[1159] untersucht, da hier die für unser Thema wichtigsten Erklärungen zu finden sind.

In der Vorrede seiner Schrift betont Kant den Nutzen der Mathematik für die „Weltweisheit“, beispielsweise durch den Gebrauch der mathematischen Methode oder durch die Anwendung mathematischer Sätze auf Gegenstände der Philosophie.[1160] Letzteres begründet Kant damit, dass die entsprechenden Inhalte durch ihre Anwendung innerhalb der Mathematik exakt ausgearbeitet wurden, da die Mathematik eine Wissenschaft sei, die „alle insgesamt an Gewißheit und Deutlichkeit übertrift“[1161]. Die Philosophie sei durch die Verwendung mathematischer Lehren zu einer anerkannten Wissenschaft aufgestiegen.[1162] Kants Intention ist es, den Begriff der negativen Größen, der zwar in der Mathematik, jedoch nicht in der Philosophie bekannt sei, zu klären, da es diesbezüglich unter Philosophen zu Unstimmigkeiten gekommen sei.[1163]

Die Ausführungen Kants beginnen mit einem Einblick in die zeitgenössische Diskussion. Die Schwierigkeit der negativen Größen bestehe nicht in ihrer Anwendung – denn hierzu geben die mathematischen Definitionen genaue Anweisung – sondern in dem widersprüchlichen Verständnis, welches einige Personen von diesem Begriff hätten.[1164] Es geht also um „die Natur dieses abstrackten Begriffes“[1165]. An dieser Stelle nimmt Kant Bezug auf Kästner und dessen *Anfangsgründe der Arithmetik* – das einzige Mal in seiner Schrift – und lobt ihn: „Niemand hat vielleicht deutlicher und bestimmter gewiesen, was man sich unter den negativen Größen vorzustellen habe, als der berühmte Herr Professor Kästner, […] unter dessen Händen alles genau, faßlich und angenehm wird“[1166]. Die Erwähnung Kästners in Kants Schrift zeugt davon, dass Kästner auch außerhalb des mathematischen Milieus geschätzt wurde. Es zeigt auch, dass Kästner es nicht versäumte, kritische Themen wie die Erklärung der entgegengesetzten Größen in seinem Lehrbuch zu thematisieren und Begrifflichkeiten genau zu klären. Hierbei überschritt er fachmathematische Begrenzungen und öffnete die Mathematik für philosophische Betrachtungen.

Es kann angenommen werden, dass Kästners Ausführungen zu den negativen Größen Kant veranlasst haben, über diese zu schreiben: „[…] so wünsche ich auch keine andere Richter zu haben, als von der Art wie derjenige Mann von allgemeiner Einsicht ist dessen Schriften mir hiezu die Veranlassung geben“[1167]. Zwar wird Kästner an dieser Stelle nicht namentlich genannt, aber unmittelbar vor dieser Bemerkung hat Kant Kästner und dessen Betrachtungen zu den negativen Größen in den *Anfangsgründen* gewürdigt.

Es wird deutlich, dass die Existenz der negativen Größen zu diesem Zeitpunkt nicht angezweifelt wurde, denn die „Richtigkeit [ist] durch die Mathematik schon gesichert“[1168]. Vielmehr müssten die Begrifflichkeiten philosophisch fundiert werden.[1169] Hieran erkennt man

---

[1159] In: Kant, Versuch, S. 3-18
[1160] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kant, Versuch, Vorrede, o. S.
[1161] Kant, Versuch, Vorrede, o. S.
[1162] Vgl. Kant, Versuch, Vorrede, o. S.
[1163] Kant, Versuch, Vorrede, o. S.
[1164] Vgl. Kant, Versuch, S. 1.
[1165] Kant, Versuch, S. 1.
[1166] Kant, Versuch, S. 1 f.
[1167] Kant, Versuch, S. 2.
[1168] Kant, Versuch, S. 2.
[1169] Vgl. Kant, Versuch, S. 2.

die Wechselwirkung zwischen der Mathematik und der Philosophie. Fachmathematisch waren die negativen Größen Bestandteil der mathematischen Lehrbücher des 18. Jahrhunderts, deren Verwendung durch Lehrsätze genau festgelegt war. Allerdings geht aus den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Lehr- und Wörterbüchern hervor, dass es bezüglich einiger Begriffe wie „negativ" und „Nichts" zu Verständnisschwierigkeiten kam, die Kant nun durch seine ausführlichen Betrachtungen beseitigen möchte. Bereits in der Vorrede der Schrift betont er, dass die negativen Größen keine „Negationen von Größen, […] sondern etwas an sich selbst warhaft Positives, nur was dem andern entgegengesetzt ist"[1170] sind. Dies deckt sich mit Kästners Ausführungen, wenn er die negative Größe als wirkliche Größe bezeichnet, die der positiven entgegengesetzt ist.[1171]

In seiner Schrift gibt Kant zunächst eine Definition von entgegengesetzten Größen und unterscheidet anschließend die logische von der realen Entgegensetzung: „Einander entgegengesetzt ist: wovon eines dasjenige aufhebt was durch das andre gesetzt ist. Diese Entgegensetzung ist zwiefach; entweder logisch durch den Widerspruch, oder real d.i. ohne Widerspruch"[1172]. Die erste „Opposition" entspricht dem Satz vom Widerspruch, der aussagt, dass zwei einander sich widersprechende Aussagen, die Kant „bejahet" und „verneinet" nennt, nicht gleichzeitig in einem Gegenstand auftreten können.[1173] Dies veranschaulicht er an dem Beispiel von Bewegung und Stillstand als für sich wirkliche Zustände, die jedoch nicht gleichzeitig einem Gegenstand zugesprochen werden können, da sie zueinander im Widerspruch stehen. Die Folge dieser Verknüpfung sei unmöglich beziehungsweise „gar nichts (nihil negatiuum irrepraesentabile)"[1174]. Bei dem logischen Widerspruch ist eine Aussage wirklich bejahend – in Kants Beispiel die Bewegung –, die andere wirklich verneinend, also der Stillstand als Nicht-Bewegung.[1175] Bei der zweiten Opposition, nämlich der realen Entgegensetzung, geht es um die Beziehung zwischen zwei „Prädikaten", die nicht im Widerspruch, sondern entgegengesetzt zueinander stehen, wobei beide Merkmale wirklich vorhanden, also bejahend sind.[1176] Das eine Prädikat wird durch das entgegengesetzte aufgehoben, so dass „Etwas" im Sinne von etwas Tatsächlichem resultiert, was Kant „nihil priuatiuum repraesentabile" nennt. Hier wird das Beispiel der Bewegung eines Körpers in unterschiedliche Richtungen angeführt. Die entgegengesetzten Richtungen sind Prädikate beziehungsweise Zustände eines Körpers, die sich gegenseitig aufheben können, woraus ein Etwas, nämlich in dem Fall der Richtungen Ruhe als realer Sachverhalt, resultieren kann.

Widerspruch und Nicht-Widerspruch beziehen sich auf die jeweiligen Merkmale und der Beziehung zu einem Oberbegriff. Gemäß Kants Darstellung könne „Bewegung" als Oberbegriff für Richtungen und Bewegungen genannt werden. Bei der ersten Opposition kann der Bewegung nur die tatsächliche Bewegung, nicht aber ihr Gegenteil, der Stillstand, zugeordnet werden. „Nicht-Bewegung" steht im Widerspruch zum Oberbegriff „Bewegung". Bei der Realopposition kann ebenfalls „Bewegung" als Oberbegriff angesehen werden, wobei die Bewegung in verschiedene Richtungen als tatsächlich existierende und in diesem Sinne posi-

[1170] Kant, Versuch, Vorrede, o. S.
[1171] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 72.
[1172] Kant, Versuch, S. 3.
[1173] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kant, Versuch, S. 3.
[1174] Kant, Versuch, S. 3.
[1175] Vgl. Kant, Versuch, S. 5.
[1176] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kant, Versuch, S. 3 f.

tive Eigenschaften dem Begriff „Bewegung“ untergeordnet werden können. Sie stehen nicht im Widerspruch zueinander.

Auf dieser Grundlage wird ersichtlich, dass Kant den Begriff „Nichts“ differenziert. Bei der logischen Opposition kann dieses als etwas Nicht-Existentes angesehen werden. Das „Nichts“ allerdings, welches sich aus der Aufhebung der entgegengesetzten Eigenschaften bei der realen Opposition ergibt, ist wirklich vorhanden, wird aber als „Nichts“ bezeichnet, da von den vorherigen Größen durch die Aufhebung nichts mehr vorhanden ist. Dieses zweite „Nichts“ nennt Kant „Zero = 0“[1177]. Kants Erklärungen des „Nichts“ sind nicht so explizit wie bei Kästner, allerdings diesen äquivalent. Kästner differenziert zwischen dem absoluten und dem relativen Nichts, wobei das erste mit Kants logischer Entgegensetzung, das zweite mit der Realentgegensetzung gleichgesetzt werden kann. Kästner macht anhand des Zahlenbeispiels „– 3 + 3 = 0“ deutlich, dass sich die entgegengesetzten Größen aufheben und Null in Kants Sinne „Zero“ ergeben.[1178] Dieses Zero veranschaulicht er anhand von Schulden, zu denen auf der einen Seite die Aktivschulden in Form von Einnahmen, auf der anderen Seite die Passivschulden in Form von Ausgaben stehen, die zusammen ein „verhältnismäßiges Nichts“ ergeben.[1179]

Die Bezeichnungen „bejahend (realitas)“ und „verneinend (negatio)“ verwendet Kant für die widersprüchlichen Eigenschaften der logischen Entgegensetzung, die er nochmals anhand des Gegensatzes „finster“ und „nicht finster“ verbildlicht.[1180] Bei der realen Entgegensetzung hingegen bezeichnet Kant die entgegengesetzten Merkmale als „bejahend“, welche zusammen Zero ausmachen.

Anschließend nimmt Kant Bezug auf die Mathematik, in der nur die reale Entgegensetzung für die Darstellung der entgegengesetzten Größen, die durch Plus und Minus bezeichnet werden, verwendet werde.[1181] Kant stellt eine konkrete Rechnung dar: Er betrachtet die entgegengesetzten Größen zunächst als Weg eines Schiffes in der Einheit Meilen, einmal bei Morgenwind und einmal bei Nachtwind, und gibt dann den konkreten Weg als „+ 12 + 7 – 3 – 5 + 8 = 19 Meilen“ an.

Kant schreibt, dass das Minuszeichen keine Subtraktion anzeigt, sondern als Zusammenfassung entgegengesetzter Größen angesehen werden muss.[1182] Unter anderem greift er den Fall von zwei negativen[1183] Größen auf und erklärt, dass „– 4 – 5 = – 9“ keine Subtraktion, sondern eine Vermehrung im Sinne eines Zusammenfügens von negativen Größen ist. Von der Subtraktion unterscheidet Kant die „Abziehung“, die zwischen zwei entgegengesetzten Größen erfolgt, beispielsweise „+ 9 – 5 = 4“. Analoge Ausführungen finden wir zur Addition. Zusammenfassend hält Kant die folgende Regel fest: „[…] so ferne die Zeichen einerley seyn, so müssen die bezeichnete Sachen schlechthin summirt werden, in so ferne sie aber verschieden seyn, können sie nur durch ihre Entgegensetzung d. i. vermittelst der Subtraktion zusammen genommen werden“[1184]. Zwar macht Kant auf diese Unterschiede aufmerksam, aller-

[1177] Kant, Versuch, S. 4.
[1178] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 72.
[1179] Vgl. Kant, Versuch, S. 5 f.
[1180] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kant, Versuch, S. 5.
[1181] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kant, Versuch, S. 6 f.
[1182] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kant, Versuch, S. 7 f.
[1183] Kant verwendet hier noch nicht den Begriff „negativ“.
[1184] Kant, Versuch, S. 8.

dings wird aus der Schreibweise nicht ersichtlich, dass es sich um eine Zusammenfassung von entgegengesetzten Größen statt einer Subtraktion handelt. Geeigneter wäre eine Schreibweise wie „(+ 9) + (– 5) = 4“, bei der die entgegengesetzten Größen erkennbar sind.

Bis zu dieser Stelle verwendete Kant weder die Begriffe „Zahl“ noch „Größe“, wie sie im Rahmen der Mathematik gebraucht wurden. Nun bezieht er sich wieder auf die Mathematik und schreibt, dass hier das Plus- und Minuszeichen zur Unterscheidung des Entgegengesetzten dienen und man bei dem Ergebnis wisse, zu welchem der beiden „Größen“ dieses gehöre.[1185] Bei der Bezeichnung der beiden Größen sei es einem selbst überlassen, vor welche man das Plus- und vor welche man das Minuszeichen setzt. Es folgt die Definition einer negativen Größe als mathematischer Begriff: „Eine Größe ist in Ansehnung einer andern negativ, in so ferne sie mit ihr nicht anders als durch Entgegensetzung kann zusammen genommen werden, nemlich so, daß eine in der andern so viel ihr gleich ist aufhebt“[1186]. Hierbei müsse man immer das entgegengesetzte Verhältnis beachten, denn man könne eine Größe an sich nicht negativ nennen, sondern nur in Beziehung zu einer anderen Größe.[1187] An dieser Stelle verwendet Kant zwar den Begriff der negativen, nicht aber der positiven Größe. Dass die Bezeichnung „negative Größe“ zu Irritationen geführt hat, kann aus Kants Ausführungen geschlossen werden, denn er betont, dass diese Bezeichnung nichts über das Wesen der Größe aussage.[1188]

Anschließend betrachtet Kant diejenigen Gegenstände, welche man aus der Mathematik abstrahieren könne, da sie eigentlich Bestandteile der Philosophie seien.[1189] Er geht zunächst auf die Begrifflichkeit „negative Dinge“ ein, gegen die er sich ausspricht, da es sich nicht um Verneinungen handele.[1190] Auch die Verwendung dieser Bezeichnung in der Mathematik sei ungenau. Bei dessen Verwendung müsse man die entsprechenden Gegenverhältnisse im Sinne der realen Opposition vor Augen haben. Um ein solches Verhältnis auch mit Worten und nicht nur mit Zeichen ausdrücken zu können, entlehnt Kant den Sprachgebrauch aus der Mathematik, so dass beispielsweise der Untergang als negatives Aufgehen bezeichnet werden kann. Von einem solchen Ausdruck hat sich jedoch Spaun in seiner Schrift mit Bezug auf Kant distanziert.[1191]

Kants Schrift zeigt uns eine philosophische Sicht auf die entgegengesetzten Größen. Seine umfangreichen Ausführungen lassen vermuten, dass er es als notwendig ansah, die Begrifflichkeiten genau zu bestimmen, um Verständnisprobleme zu beheben. Er beschränkt sich nicht auf rein philosophische Betrachtungen, sondern bezieht sich auch auf die Mathematik. In diesem Rahmen begegnen uns die Begrifflichkeiten, die wir auch in den mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts vorfinden. Er macht sogar auf den Unterschied zwischen den Rechen- und den Vorzeichen aufmerksam und schreibt, dass es sich bei der Zusammenrechnung von entgegengesetzten Größen weder um eine reine Addition noch um eine reine Subtraktion handelt. Allerdings enthält Kants Schrift keine Ausführungen zur Multiplikation und Division mit entgegengesetzten Größen. Vereinzelt gibt Kant kurze Rechenbeispiele an,

---

[1185] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kant, Versuch, S. 8 f.
[1186] Kant, Versuch, S. 9.
[1187] Vgl. Kant, Versuch, S. 9 f.
[1188] Vgl. Kant, Versuch, S. 9 f.
[1189] Vgl. Kant, Versuch, S. 10.
[1190] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kant, Versuch, S. 11 f.
[1191] Vgl. Spaun, S. 7.

die jedoch vom Umfang her nicht mit denen in mathematischen Lehrbüchern vergleichbar sind. Dass Kant wohl für seine Betrachtungen mathematische Lehrbücher einsah, zeigt seine Referenz auf Kästner und dessen *Anfangsgründen*, welche fünf Jahre vor Kants Schrift erschienen sind. Die Ausführungen dieser beiden Autoren zum Begriff des „Nichts“ sind äquivalent zueinander. Kants Klärung des Begriffs der negativen Größen hat bleibenden Eindruck hinterlassen. So stützt sich beispielsweise Michelsen auf dessen Ausführungen, um das „Positive“ und das „Negative“ genau zu bestimmen.[1192]

4.2.9 Zusammenfassung

Die Lehre der entgegengesetzten Größen wurde in fast allen der hier betrachteten mathematischen Lehrbücher des 18. Jahrhunderts dargestellt. Es gibt aber in einigen Aspekten derselben Unterschiede. Zudem zeugen die Schriften von Michelsen, Spaun und Langsdorf davon, dass es noch zu Beginn des 19. Jahrhunderts in einigen Punkten Dissens gab. Einige Autoren gingen sogar soweit und beachteten die entgegengesetzten Größen in der Algebra nicht, um deren Inhalte einfacher darzustellen.[1193] Im Folgenden wird die Entwicklung der Lehre von den entgegengesetzten Größen in den „Anfangsgründen“ des 18. Jahrhunderts zusammengefasst, um Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Probleme aufzuzeigen, wobei die zu Beginn dieses Kapitels festgelegten Fragen beantwortet werden.

In den meisten mathematischen Lehrbüchern, die hier analysiert wurden, sind die entgegengesetzten Größen Bestandteil der Buchstabenrechnung oder der Algebra. Bei unserer Untersuchung fiel auf, dass die Einordnung der Buchstabenrechnung in den mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts variierte. Mal ist sie in der Arithmetik, mal in der Algebra zu finden. Im Folgenden werfen wir einen Blick auf die Einordnung der entgegengesetzten Größen in den von uns untersuchten Lehrbüchern. In Anhang 3 sind unsere Ergebnisse zusammengefasst.

Sturm stellt die entgegengesetzten Größen in seiner *Kurtzgefassten Mathesis* im Rahmen der Buchstabenrechnung vor. Dies trifft auch auf seine *Mathesis Juvenilis* zu, wobei hier die Buchstabenrechnung der Algebra untergeordnet ist, die wiederum das vierte Kapitel der Arithmetik ausmacht. In der *Kurtzgefassten Mathesis* erscheinen Buchstabenrechnung und Algebra getrennt voneinander. Wolff behandelt die entgegengesetzten Größen innerhalb der Buchstabenrechnung als einen Teil der Algebra im vierten Band seiner *Anfangs=Gründe*. Segner thematisiert die entgegengesetzten Größen in seinen *Vorlesungen* im Rahmen der Arithmetik. In den *Anfangsgründen* finden wir diese Inhalte zunächst in der Arithmetik bei der Zahlenrechnung und ausführlicher im Kapitel über allgemeine Arithmetik, also der Buchstabenrechnung. Bemerkenswert ist Kästners Einordnung der entgegengesetzten Größen. Er behandelt sie losgelöst von der Buchstabenrechnung und der Algebra, nämlich im ersten Kapitel der Arithmetik. Die Buchstabenrechnung ist im zweiten Kapitel von Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik* zu finden und stellt somit bei ihm einen Teil der Elementarmathematik dar. Die Algebra – für Kästner die Gleichungslehre – hingegen macht für ihn die höhere Mathematik aus und wird erst in den *Anfangsgründen der Analysis endlicher Grössen*,

[1192] Vgl. Michelsen, S. 160-162, Fußnote.
[1193] Vgl. Klügel, MW 2, S. 114.

also im siebten Band des Gesamtwerks betrachtet. Karsten behandelt in seinem *Lehrbegrif* und seinem *Auszug* die entgegengesetzten Größen als Bestandteil der Elementarmathematik. Er schreibt, dass die Buchstabenrechnung zur Elementarmathematik gehöre, sie aber auch als Vorbereitung zur Algebra, also der höheren Mathematik, angesehen werden kann.[1194] In Clemms Lehrbüchern sind die entgegengesetzten Größen innerhalb der Buchstabenrechnung, die für ihn ein Bestandteil der Arithmetik ist, zu finden. Während er sie im *Mathematischen Lehrbuch* genau erklärt, gibt es dieses Thema nicht in den *Ersten Gründen*. Dort geht es anscheinend nur um die Vermittlung der Rechenregeln. Dass die Lehre der entgegengesetzten Größen jedoch nicht flächendeckend zur Arithmetik gerechnet wurde, zeigt die Nichtbehandlung des Themas in Klügels *Anfangsgründen der Arithmetik*. Dies mag auch an der Frage hängen, was man als elementar betrachtet und was nicht. Möglich ist allerdings auch, dass die enge Verbindung zwischen der Buchstabenrechnung und den entgegengesetzten Größen ein Grund dafür war, dass Klügel diese nicht in seinen *Anfangsgründen* betrachtete, denn hier finden wir nur die Rechnung mit konkreten Zahlen, nicht aber mit Buchstaben.

Eine Besonderheit bilden Karstens *Anfangsgründe*, in denen die entgegengesetzten Größen innerhalb der Geometrie betrachtet werden. Auch in seinen anderen beiden deutschsprachigen Lehrwerken finden wir zahlreiche Bezüge zur Geometrie. Auch in den Lehrbüchern anderer Autoren finden wir vereinzelt Rückgriffe auf die Geometrie. Segner erarbeitet die entgegengesetzten Größen in seinen *Anfangsgründen* allgemein am Begriff der Größe, wobei er vorher die Größe, die durch eine Zahl ausgedrückt wird, anhand von Linien, Winkeln, Oberflächen und Körpern darstellt.[1195] So erklärt er beispielsweise die Multiplikation von Größen im Allgemeinen mit Bezug zur Geometrie als Auffinden der vierten Proportionalen.[1196] Auch Clemm nimmt geometrische Ausführungen zur Erläuterung der Multiplikation von zwei negativen Größen zu Hilfe. Er schreibt, dass ein geometrischer Zugang üblich sei.[1197] Kästners Ausführungen enthalten keine Bezüge zur Geometrie. Da er sich streng an die mathematische Methode hielt, konnte er auch nicht auf die Geometrie verweisen, da er dieses Kapitel erst nach der Erklärung der entgegengesetzten Größen behandelte. Dies liegt die Vermutung nahe, dass Kästner die Lehre der entgegengesetzten Größen vollkommen losgelöst von der Geometrie begründen wollte. Kästners Zugang unterstützt Michelsens Forderung, dass man zur Ausbildung des allgemeinen Denkens das Thema noch vor der Geometrie behandeln solle.[1198]

Um die Frage zu beantworten, ob die entgegengesetzten Größen als eigenständiges Thema in den „Anfangsgründen“ erschienen, ist es notwendig, nicht nur auf ihre inhaltliche Einordnung, sondern auch auf ihre Definition zu schauen. In den Werken von Sturm, Wolff und Segner finden wir keine Definition der entgegengesetzten Größen, die diese als eigenständiges Thema hervorhebt. Sogar in Wolffs *Lexicon* suchen wir vergeblich nach einem entsprechenden Stichwort. Der erste unter den von uns betrachteten Autoren, der dem Leser eine Definition dieser Größen liefert, ist Kästner. Er definiert die entgegengesetzten Größen als solche, die sich gegenseitig vermindern. Entsprechende Definitionen finden wir auch in Clemms *Mathematischem Lehrbuch* und Karstens *Lehrbegrif*. Auch wenn wir bei Segner

[1194] Vgl. Karsten, L 2, Vorrede, o. S.
[1195] Vgl. Segner, AG, S. 357.
[1196] Vgl. Segner, AG, S. 359.
[1197] Vgl. Clemm, ML 1, S. 60.
[1198] Vgl. Michelsen, S. 180.

keine Definition finden, nennt er die entgegengesetzten Größen – ohne sie als solche zu bezeichnen – als Größen, die sich einander vermehren und vermindern.[1199] Dieser Ausdruck ist auch in den Definitionen in den nach Segner erschienenen Lehrbüchern enthalten. Die Konformität der Definitionen merkte bereits Klügel in seinem *Wörterbuch* an.[1200]

Betrachtet man die inhaltliche Einordnung sowie die Definitionen zu den entgegengesetzten Größen, so können wir festhalten, dass sich diese Lehre in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts als eigenständiges Themengebiet etablierte. Ein weiteres Indiz für die Emanzipation der Lehre der entgegengesetzten Größen ist die Terminologie. Obwohl die fragliche Theorie nicht bei allen Autoren unter dieser Bezeichnung präsentiert wurde, wissen wir durch die Benennung der jeweiligen Größen, dass es sich tatsächlich um diese handelte. Alle Autoren haben gemeinsam, dass sie die Größen mit dem Plus- und dem Minuszeichen im Sinne von Vorzeichen versahen. Die Begrifflichkeiten hingegen variierten (siehe Anhang 4). Sturm verwendet in der *Kurtzgefassten Mathesis* zu Beginn des 18. Jahrhunderts noch nicht die Begriffe „positiv" und „negativ", sondern bezeichnet negative Größen lediglich als „Mangel". In der *Mathesis Juvenilis* schreibt er von „positivum" und „privativum". Auch in Wolffs *Anfangs=Gründen* finden wir keine Benennungen wie positive oder negative Größen, aber in seinem *Lexicon* werden die negativen und die positiven Größen jeweils unter einem eigenen Stichwort betrachtet. Die Begriffe „positiv" und „negativ" begegnen uns zum ersten Mal in Segners Lehrbüchern, wobei Segner auch den lateinischen Ausdruck „privatim" für die negative Größe verwendet. Kästner, Karsten und Clemm benutzen nur noch die Ausdrücke „positiv" oder „bejahend" sowie „negativ" oder „verneinend". Dies zeigt, dass sich die Bezeichnungen, wie wir sie heute kennen, spätestens in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts etabliert haben. Eine Ausnahme bildet der Begriff „Vorzeichen", der erst in Klügels Wörterbuch auftrat.

Die entgegengesetzten Größen waren nicht nur Gegenstand fachmathematischer, sondern auch philosophischer Diskussionen. Die Kennzeichnung einer Größe als „negativ" führte zu falschen Vorstellungen. Gegen diese Bezeichnung, vor allem in Verbindung mit der Größe an sich wie „negatives Aufgehen", sprach sich Spaun aus und plädierte stattdessen für die Bezeichnung „opponiert".[1201] Langsdorf sah diesen Einwand als unbegründet an und stellte klar, dass die Bezeichnung der entgegengesetzten Größen eine Konvention der Mathematiker sei.[1202] Einige der hier betrachteten Lehrbuchautoren verwendeten die von Spaun kritisierten Begrifflichkeiten, wiesen aber teilweise auch darauf hin, dass diese nichts über die Eigenschaft des Gegenstandes an sich aussagen. Aus diesem Grund finden wir in einigen mathematischen Lehrbüchern auch Betrachtungen, die über die fachmathematische Darstellung hinausgehen. Kant bringt es auf den Punkt, wenn er schreibt, dass die Schwierigkeit der negativen Größen nicht in ihrer Anwendung bestehe, sondern in den Begrifflichkeiten.[1203] Zu Verwirrungen führten Ausdrücke wie „weniger als Nichts" oder „kleiner als Null" zur Bezeichnung der negativen Größe. Wolff verwendet den Ausdruck „weniger als Nichts", ohne diesen jedoch näher zu erklären. Sturm und Segner gebrauchen diesen Begriff nicht. Zwar finden wir bei Sturm, Wolff und Segner keine weiterführenden Äußerungen zum Begriff

[1199] Vgl. Segner, VL, S. 25.
[1200] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 2, S. 105 f.
[1201] Vgl. Spaun, S. 7.
[1202] Vgl. Langsdorf, S. 12.
[1203] Vgl. Kant, Versuch, S. 1.

„weniger als Nichts", aber durch ihre anschaulichen Beispiele wird deutlich, dass die Bezeichnungen nichts mit der Beschaffenheit der Größe beziehungsweise des Gegenstandes an sich zu tun haben. Dass dies scheinbar nicht ausreichend war, zeigen die zeitlich späteren detaillierten Ausführungen zu den Begrifflichkeiten von Kästner, Kant, Karsten und Clemm. Erst Kästner erläutert ausführlich „weniger als Nichts". Dadurch hinterließ er bleibenden Eindruck bei Kant, der sich ebenfalls diesem Thema widmete. Anhand der Ausführungen von Kästner und Kant erkennt man die gegenseitige Beeinflussung von Mathematik und Philosophie. Kästner übernahm die Differenzierung des Begriffs „Nichts" von einem von ihm nicht namentlich erwähnten Philosophen und passte die Ausführungen auf die Lehre der entgegengesetzten Größen an.[1204] Kant hingegen bediente sich Kästners mathematischer Darstellung, um sich in erster Linie philosophisch zu dem Thema zu äußern.[1205] Beide Autoren betonen, dass der Begriff „Nichts" nur im relativen Sinn verstanden werden darf. Auch Clemm äußert sich in seinem *Mathematischen Lehrbuch* über die Begriffe und unterscheidet zwischen dem absoluten und dem respektiven Nichts.[1206] Dies ist Kästners Einteilung sehr ähnlich. Karsten und Clemm betonen in ihren Lehrbüchern, dass es sich bei negativen Größen tatsächlich um existente Größen handelt und die Bezeichnung nur auf den Ausdruck, nicht aber auf das Wesen der Größe bezogen ist.

Auffällig ist, dass alle von uns betrachteten Lehrbuchautoren um Einsichten in die negativen Größen bemüht waren. Eine Ausnahme stellen die Ausführungen in Sturms *Kurtzgefasster Mathesis* dar. Sturm beschränkt sich in diesem Lehrbuch auf die Vermittlung von Rechenregeln ohne die entgegengesetzten Größen zu deuten. Dies kommt einer Regeldidaktik gleich, die wir in den übrigen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts nicht mehr finden. Dies hängt möglicherweise mit einem der Ziele der Aufklärung zusammen, nämlich das Lernen aus Einsichten statt das Auswendiglernen. Um dies zu erreichen, verwendeten die Autoren zur Erläuterung der entgegengesetzten Größen anschauliche Beispiele beziehungsweise Modelle, die einander sehr ähnlich sind (siehe Anhang 5). Alle Autoren verwenden die Gegenüberstellung von Schulden und Einnahmen, um die entgegengesetzten Größen zu veranschaulichen. Ein beliebtes Beispiel war auch die Bewegung wie vorwärts und rückwärts (Kästner, Segner, Clemm, Karsten, Klügel). Diese beiden Vergleiche scheinen charakteristisch für die Erklärung der entgegengesetzten Größen gewesen zu sein. Vereinzelt finden wir noch weitere Beispiele zur Veranschaulichung. Segner nennt Aufgang und Niedergang sowie ein- und ausfließendes Wasser. Klügel führt die Entgegensetzung von Steigen und Fallen an. Negative Zahlen wurden auch als Mangel, Abgang oder Schuld angesehen (Wolff, Clemm). Mit diesen Beispielen versuchten die Lehrbuchautoren die negativen Größen im Rahmen der Arithmetik zu deuten. Beispiele aus der Geometrie finden wir bei Segner und Karsten, die die entgegengesetzten Größen anhand von entgegengesetzten Linien veranschaulichen. Vergleicht man die Modelle für negative Zahlen aus den Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts mit früheren Deutungsversuchen, so stellen wir fest, dass es keine Unterschiede gibt.

Positive und negative Größen stehen in einem wechselseitigen Verhältnis zueinander, was nicht nur durch die Definition, sondern auch durch die erwähnten Beispiele deutlich wird. Diese Größen können unter einen gemeinsamen Oberbegriff gefasst werden, was jedoch nicht

[1204] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 73.
[1205] Vgl. Kant, Vorrede, o. S.
[1206] Vgl. Clemm, ML 1, S. 55.

bei allen Autoren explizit erwähnt wird. Kästner schreibt, dass die entgegengesetzten Größen „Grössen von einer Art“[1207] sind. An den von ihm angebrachten Beispielen wird deutlich, dass entgegengesetzte Größen dieselbe Maßeinheit haben müssen. Besonders deutlich betont Karsten, dass die positiven und negativen Größen, die jeweils eigenständig sind, „unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff“[1208] stehen.

In den hier untersuchten Lehrbüchern wurden die Addition und Subtraktion mit entgegengesetzten Größen weitgehend einheitlich dargestellt. Basierend auf der Erklärung, dass sich entgegengesetzte Größen einander vermehren und vermindern, wird die Addition mit Hilfe der Subtraktion erklärt. Für den Fall, dass eine betragsmäßig größere von einer betragsmäßig kleineren Größe abgezogen werden muss, sehen die Autoren vor, die betragsmäßig kleinere von der betragsmäßig größeren Größe abzuziehen und dem Ergebnis ein negatives Vorzeichen vorzusetzen. Bei der Subtraktion entgegengesetzter Größen wird die Regel angeführt, die Subtraktion in die Addition bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel des Subtrahenden zu verwandeln. Auffällig ist, dass die von uns betrachteten Lehrbuchautoren implizit mit den Betragszahlen rechneten. Jedoch finden wir weder entsprechende Bezeichnungen wie „Betragszahlen“ oder „Beträge“, noch das Betragszeichen „| |“. Obwohl Karsten mit Betragszahlen rechnete, schreibt er in seinem *Lehrbegrif*, dass eine negative Zahl immer kleiner als eine positive Zahl ist, also „$- a < + a$“.[1209] Diese Aussage finden wir in keinem anderen von uns betrachteten Lehrbuch. Kästner erwähnt die Tatsache, dass jede negative Zahl kleiner als jede positive Zahl ist, zwar nicht in seinen *Anfangsgründen*, aber in seinem Artikel *Ueber eine scheinbare Schwierigkeit vom kleinern und grössern, bey Quotienten*.[1210] Dass jede negative Zahl kleiner als jede positive Zahl ist, schien den Zeitgenossen bekannt zu sein. Dass wir diese Aussage nur in Karstens Lehrbuch finden, zeugt davon, dass dies kein Bestandteil von Lehrbüchern war. Möglicherweise wurden solche Anmerkungen in den mathematischen Vorlesungen ergänzt, was wir aber aufgrund der mangelnden Quellen nicht belegen können.

Hinsichtlich der Rechenarten besteht ein Unterschied zwischen der Zahlenrechnung und der Buchstabenrechnung, bei der entgegengesetzte Größen vorkommen. Karsten geht in seinem *Lehrbegrif* auf den Unterschied zwischen der Addition und Subtraktion in der Zahlen- und in der Buchstabenrechnung ein.[1211] Auch Kant macht in seiner Schrift auf den Unterschied zur reinen Subtraktion und Addition bei der Zusammennehmung der entgegengesetzten Größen aufmerksam.[1212] Ganz deutlich wird die Unterscheidung in Klügels *Wörterbuch*, der neben der Addition und Subtraktion bei der Rechnung der entgegengesetzten Größen auch noch die Aggregation im Sinne eines Zusammennehmens als besondere Rechnung vorsieht.[1213]

Die Multiplikation und Division entgegengesetzter Größen werden von den Lehrbuchautoren unterschiedlich erklärt. Ohne mathematische Beweisführung gibt Sturm in seinen beiden Lehrbüchern die Regel an, dass gleiche Zeichen ein positives Produkt beziehungsweise einen positiven Quotienten ergeben, verschiedene jedoch ein negatives Produkt beziehungsweise

[1207] Kästner, AG 1.1., S. 71.
[1208] Karsten, L 2, S. 65.
[1209] Vgl. Karsten, L 2, S. 78.
[1210] Vgl. Kästner, Ueber eine scheinbare Schwierigkeit. In: LM, 1787, 1. St., S. 71.
[1211] Vgl. Karsten, L 2, S. 68.
[1212] Vgl. Kant, Versuch, S. 7 f.
[1213] Vgl. Klügel, MW 1, S. 374.

einen negativen Quotienten. Wolff beweist die Multiplikation entgegengesetzter Größen durch die Vervielfachung des negativen Faktors, wobei der positive Faktor den Koeffizienten darstellt.[1214] Beim Beweis der Multiplikation von zwei negativen Größen stellt er einen Faktor als eine Zusammensetzung von Größen dar.[1215] Am Beispiel „$(3 - 2) \cdot (- 2)$" zeigt er mit Hilfe des Distributivgesetzes – obwohl er den Terminus nicht verwendet – dass zwei negative Größen multipliziert ein positives Produkt ergeben, nämlich „$(- 2) \cdot (- 2) = + 4$". Zur Division schreibt Wolff, dass sie wie bei der gewöhnlichen Zahlenrechnung erfolgt, allerdings der Vorzeichenwechsel wie bei der Multiplikation dieser Größen beachtet werden muss.

In den Lehrbüchern aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wird die Multiplikation mit Hilfe der Proportionen erklärt, die ihren Ursprung in der Geometrie haben. Zum ersten Mal finden wir einen solchen Beweis in Segners *Anfangsgründen*.[1216] Einen ähnlichen Beweis liefert auch Kästner, ohne dabei den Begriff der Proportion zu verwenden.[1217] Kästners Beweis unterscheidet sich von Segners Beweis dadurch, dass er erstens nicht den Begriff der Proportion, sondern nur den der Einheit verwendet, zweitens dass, wie Kästner betont, nicht nur die positive, sondern auch die Entgegensetzung der positiven Einheit angenommen werden kann. In Karstens *Lehrbegrif* finden wir ebenfalls die Beweisführung mit Hilfe der vierten Proportionalen und gleichzeitig einen Bezug zur Geometrie.[1218] Clemm führt in seinem *Mathematischen Lehrbuch* zusätzlich einen indirekten geometrischen Beweis zur Multiplikation von zwei negativen Größen an.[1219]

Bei der Multiplikation von entgegengesetzten Größen stellt sich die Frage, was man sich hierunter bildlich vorstellen kann. Innerhalb der Geometrie kann eine Veranschaulichung durch die Multiplikation von Linien mit entgegengesetzter Orientierung erfolgen, aber wie sieht die Deutung innerhalb der Arithmetik aus? Das Problem war wohl, dass man keine brauchbare Vorstellung – modern gesprochen also kein Modell – von den negativen Größen hatte, die alle Rechenregeln abdeckte, also auch „minus" mal „minus" gleich „plus". Klügel spricht sich dagegen aus, dass man zwei entgegengesetzte Größen multiplizieren kann, wobei er dies am Beispiel von Schulden und Vermögen veranschaulicht.[1220] Spaun erklärt, dass der Koeffizient bei der Multiplikation immer positiv sein muss.[1221]

Die Ausführungen in den von uns betrachteten mathematischen Lehrbüchern sind sehr abstrakt und gehen nicht auf die Deutung der Multiplikation ein. Eine Ausnahme hiervon bildet Clemms Erklärung zur Multiplikation von zwei negativen Größen, indem er die eine negative Größe als Schulden darstellt, die einmal nicht bezahlt werden muss, was Clemm durch den negativen Faktor „– 1" ausdrückt.[1222] Man kann diese Erklärung auch so deuten, dass Clemm die Einheit negativ annimmt, und er sich so an die Ausführungen von Kästner, der auch das Entgegengesetzte der positiven Einheit für die Multiplikation und Division zuließ, hält.

[1214] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1560.
[1215] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, AG 4, S. 1561.
[1216] Vgl. Segner, AG, S. 369 f.
[1217] Vgl. Kästner, AG 1.1, S. 77-79.
[1218] Vgl. Karsten, L 2, S. 76.
[1219] Vgl. Clemm, ML, S. 60.
[1220] Vgl. Klügel, MW 2, S. 106.
[1221] Vgl. Spaun, S. 8.
[1222] Vgl. Clemm, EG, S. 89.

Die Ausführungen zur Division sind in der Regel recht kurz gehalten, da hier auf die Rechenregeln zur Multiplikation verwiesen wird. Es gibt sogar Autoren, die die Division entgegengesetzter Größen vernachlässigen. In Segners *Vorlesungen* finden wir keine entsprechende Erklärung. Obwohl Kant in seiner Schrift auf die Addition und Subtraktion einging, erklärt er nicht die anderen beiden Rechenarten.

Ein weiteres Problem, was mit den entgegengesetzten Größen einherging, war die Doppeldeutigkeit des Plus- und Minuszeichens und somit die mangelnde Unterscheidung zwischen Rechen- und Vorzeichen. Spaun wies darauf hin, dass die doppelte Bedeutung des Plus- und Minuszeichens nicht sinnvoll sei und zu Verwirrungen geführt habe.[1223] Tatsächlich wird uns dieses Bild durch die Analyse der Lehrbücher bestätigt. Aus der Art, wie die Größen geschrieben werden, wird nicht ersichtlich, ob es sich beispielsweise im Falle von „7 – 3" um die Subtraktion von zwei positiven Größen oder um die Addition einer negativen zu einer positiven Größe handelt. Aus Gründen der Verständlichkeit hätte man die Schreibweise anpassen und etwa „(+ 7) + (− 3)" schreiben können. Die in dieser Arbeit betrachteten Autoren scheinen den Unterschied zwischen Vor- und Rechenzeichen gekannt zu haben. So schreibt Sturm von „Zeichen der[…] Quantität"[1224]. Karsten erwähnt, dass das Plus- und Minuszeichen in der Buchstabenrechnung von allgemeinerer Bedeutung sind als in der Zahlenrechnung.[1225] Der erste Autor, der ausdrücklich den Begriff „Vorzeichen" verwendet, ist Klügel. Andere Autoren versuchten, die Verbindung zwischen den Vorzeichen und den Rechnungen zu verdeutlichen. So begründet Kästner das Minuszeichen als Vorzeichen der negativen Größe damit, dass dieses die ihr entgegengesetzte positive Größe vermindert.[1226] Der Grund, wieso keine ausdrückliche Differenzierung erfolgte, mag mit der engen Verbindung zwischen den Vor- und Rechenzeichen zusammenhängen, möglicherweise auch mit Bequemlichkeit.

Dass solche Erläuterungen nicht in den Lehrbüchern zu finden sind, lässt nicht darauf schließen, dass diese nicht in mündlicher Form im Rahmen von Vorlesungen oder Privatunterricht vermittelt wurden. Wie die Analyse der „Anfangsgründe" zeigte, kommt es bei dieser Gattung der Lehrbücher vor allem auf die Kürze der Darstellungen an, so dass die Autoren nicht alle Inhalte in ihren Werken selbst detailliert erläutern konnten.

Die imaginären Größen, insbesondere die Quadratwurzel aus negativen Größen, wurden nicht in allen mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts betrachtet. Wenn sie aufgenommen wurden, so konnte man sie unter der Bezeichnung „unmögliche" oder „eingebildete" Wurzeln finden, wobei die Inhalte losgelöst von den negativen Größen und der Ausziehung der Quadratwurzel betrachtet wurden. Sturm und Wolff behandeln die unmöglichen Größen nicht in ihren Lehrbüchern, aber Wolff widmet ihnen einen Eintrag in seinem *Lexicon*. Hier nimmt er eine Unterscheidung bezüglich des Wurzelexponenten vor und sagt, dass unmögliche oder eingebildete Wurzeln einer negativen Größe diejenigen mit geraden Wurzelexponenten seien.[1227] Segner schließt unmögliche Größen von vorneherein aus, indem er definiert, dass ein Quadrat nur positiv sein kann.[1228] Karsten gibt lediglich die Definition einer unmöglichen Größe an und beweist, dass „$\sqrt{-a^2}$" weder eine positive noch eine negative Größe sein

[1223] Vgl. Spaun, S. 7.
[1224] Sturm, KM, S. 3.
[1225] Vgl. Karsten, L 2, S. 68.
[1226] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 71.
[1227] Vgl. Wolff, ML, Sp. 1163.
[1228] Vgl. Segner, AG, S. 370.

kann.[1229] Kästner greift die imaginären Größen erst im Rahmen der Algebra auf, nämlich in den *Anfangsgründen der Analysis endlicher Grössen*. Er unterscheidet zwischen geraden und ungeraden Wurzelexponenten und schreibt, dass eine Wurzel mit einem geraden Wurzelexponenten aus einer negativen Zahl nicht möglich sei.[1230] Wie die weiteren Ausführungen innerhalb der Algebra zeigen, ließ Kästner auch die Rechnung mit solchen Größen zu. Bemerkenswert ist Clemms Anmerkung im Inhaltsverzeichnis seines *Mathematischen Lehrbuchs*, dass nämlich die Inhalte zu den unmöglichen Größen von Anfängern übergangen werden könnten.[1231] Auch er differenziert zwischen geraden und ungeraden Exponenten der Wurzel aus negativen Zahlen und führt Rechnungen mit ihnen durch. Diese Differenzierung von Wolff, Kästner und Clemm zeigt, dass man die Inhalte von Anfang an allgemein halten wollte, um mit solchen Größen innerhalb der Algebra rechnen zu können. Gleichzeitig wird deutlich, dass diese Theorien kein Bestandteil der Elementarmathematik waren, sondern zur höheren Mathematik gerechnet wurden.

Über die zu Beginn festgelegten Fragestellungen hinaus hat sich noch eine weitere Auffälligkeit ergeben, die die Unterscheidung von Zahlen und Größen betrifft. In erster Linie sprechen die hier betrachteten Autoren von entgegengesetzten Größen. Dies trifft auch auf Kästner zu, obwohl er seine Inhalte nur an konkreten Zahlen darstellt. Er verwendet aber auch den Begriff der negativen Zahl.[1232] Kästner scheint die Begriffe Größen und Zahl in seinen Ausführungen synonym zu gebrauchen. Dieselbe Beobachtung trifft auch auf Segner zu. Er verwendet die Begriffe synonym, wobei ihm der Unterschied dennoch bewusst war, da er erwähnt, dass Größen durch Zahlen ausgedrückt werden.[1233] Wolff schreibt nur von Größen, wobei er diese als undeterminierte Zahlen ansieht.[1234] Dies sind nach unserem Verständnis Variablen. Clemm verwendet in den *Ersten Gründen* den Begriff der negativen Zahlen.[1235] Auch Karsten spricht in der zweiten Auflage des *Lehrbegriffs* von negativen Zahlen.[1236]

Michelsen merkte in seiner Schrift an, dass er keine Informationen über die Geschichte der entgegengesetzten Größen gefunden habe.[1237] Auch die in unserer Untersuchung betrachteten Lehrbücher enthalten keine weitläufigen historischen Anmerkungen. In den Ausführungen finden sich lediglich Hinweise darauf, dass einige Begrifflichkeiten zu Schwierigkeiten führten, so dass vor allem auch die Begriffe wie „weniger als Nichts“ geklärt werden mussten. Die umfangreichsten Ausführungen hierzu finden wir in Karstens *Anfangsgründen*, der die Historie dazu verwendet, die Unstimmigkeiten im Bereich der entgegengesetzten Größen zu erklären. Er schreibt, dass die älteren Mathematiker die Begriffe der entgegengesetzten Größen nicht verwendeten und daher keine Veranlassung sahen, die Ausführungen zur Addition und Subtraktion genau zu erläutern.[1238] Die Notwendigkeit sei erst mit der Anwendung der höheren Arithmetik auf die Geometrie, was nun als allgemeine mathematische Analysis be-

[1229] Vgl. Karsten, L 2, S. 251 f.
[1230] Vgl. Kästner, AG 3.1., S. 20.
[1231] Vgl. Clemm, ML 1, Inhaltsverzeichnis, S.)( )(3r.
[1232] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 76.
[1233] Vgl. Segner, VL, S. 24.
[1234] Vgl. Wolff, AG 4, S. 1551.
[1235] Vgl. Clemm, EG, S. 63.
[1236] Vgl. Karsten, L 2.1., S. 92.
[1237] Vgl. Michelsen, S. 156 f.
[1238] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 377 f.

kannt sei, aufgekommen. Kästner, der durch seine vierbändige *Geschichte der Mathematik* als Kenner der Geschichte der Mathematik bekannt war, gibt in seinen *Anfangsgründen* keine historischen Anmerkungen zu den entgegengesetzten Größen. Die mathematischen Lehrbücher des 18. Jahrhunderts können wegen der fehlenden historischen Anmerkungen nicht dazu verwendet werden, mehr über die Geschichte der entgegengesetzten Größen zu erfahren. Wie die Analyse der Lehrbücher jedoch gezeigt hat, können sie Aufschluss über die Darstellung der entgegengesetzten Größen liefern.

Unsere Untersuchungen haben gezeigt, dass die Lehre der entgegengesetzten Größen zu Beginn des 18. Jahrhunderts noch nicht gefestigt war. Bei Wolff und Sturm fehlen die heute gängigen und auch in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts üblich gewordenen Begriffe wie „entgegengesetzt", „positiv" und „negativ". Die beiden genannten Autoren geben auch keine exakte Definition. Kästner war der erste, der die entgegengesetzten Größen losgelöst von der Buchstabenrechnung betrachtete und eine genaue Definition angab. Bei ihm treten zum ersten Mal konsequent die Begriffe „positiv", „negativ" und „entgegengesetzt" auf. Zudem stellte er, im Gegensatz zu anderen Autoren, keine Bezüge zur Geometrie her; er arbeitete Beweise arithmetisch aus. Man kann vermuten, dass Kästner diese Inhalte als eigenständiges Thema im Rahmen der Arithmetik etablieren wollte, während diese bei den früheren Lehrbuchautoren nur als ein untergeordnetes Thema präsentiert wurden. Kästner ging auch über die fachmathematische Darstellung hinaus, indem er den viel diskutierten Begriff „weniger als Nichts" erklärte. Zudem scheint Kästner auch einen Einfluss auf die nachfolgenden mathematischen Lehrbuchautoren gehabt zu haben, denn die Ausführungen von Karsten und Clemm sind denen von Kästner ähnlich. Dies liefert einen Beleg zur These von Müller, dass Kästners *Anfangsgründe* als Grundlage für mathematische Lehrbücher der 1770er und 1780er Jahre verwendet wurden.

4.3 Parallelenpostulat

Im Bereich der Elementargeometrie orientierte man sich im deutschsprachigen Raum im 18. Jahrhundert noch sehr an der Darstellung Euklids (3. Jh. v. Chr.). Dementsprechend können in den Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts weder neue Erkenntnisse noch neue Verfahrensweisen, wie etwa in der Beweisführung, erwartet werden, was wir bereits innerhalb unserer Forschungsgruppe in Untersuchungen, beispielsweise zum Satz des Pythagoras und zur Winkelsumme im Dreieck, festgestellt haben. Bei dem Problem der Parallellinien hingegen handelt es sich um ein Thema, bei dem es im 18. Jahrhundert noch Forschungsbedarf gab. Aus diesem Grund ist es interessant zu erfahren, wie das Thema in den mathematischen „Anfangsgründen", die Anfängern grundlegende mathematische Kenntnisse vermitteln sollten, dargestellt wurde. Dies stellt zugleich einen Beitrag zur Beantwortung der Frage dar, in wie weit mathematische Forschung in den Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts berücksichtigt wurde und somit die Trennung zwischen Lehre und Forschung langsam verschwamm. Als Quellen für die vorliegende Untersuchung wurden die Lehrbücher von Kästner, Sturm, Wolff, Segner, Karsten, Clemm und Klügel verwendet, die im Folgenden in dieser Reihenfolge betrachtet werden. Zunächst wird ein kurzer historischer Überblick zum Parallelenproblem gegeben, wobei das erste Buch von Euklids *Elementen*[1239], das Werk *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie* (1895) von Stäckel und Engel, Klügels Dissertation *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*[1240] (1763) und Klügels Wörterbucheintrag „Parallelen"[1241] zugrunde liegen. Sehr hilfreich erwies sich zudem das Vorlesungsskript „Geschichte des Parallelenproblems" von K. Volkert.[1242]

Euklid definierte in der 23. Erklärung parallele Geraden als „gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen"[1243]. Der implizite Begriff der Unendlichkeit wird auch in der fünften Forderung, das sogenannte Parallelenpostulat, verwendet: „Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind"[1244]. Für gewöhnlich wird diese fünfte Forderung in den Euklid-Ausgaben auch als elftes Axiom geführt. In der Euklid-Ausgabe von Clavius, erscheint sie als 13. Axiom.[1245] Daher wird das Parallelenpostulat auch als Parallelenaxiom bezeichnet.

[1239] Die folgenden Ausführungen beziehen sich ausschließlich auf das erste Buch von Euklids *Elementen*. Wenn wir Bezug auf Euklids Sätze nehmen, werden wir diese mit „I,27" usw. abkürzen, wobei „I" für das erste Buch der *Elemente* und „27" usw. für den jeweiligen Satz stehen.

[1240] Ein Digitalisat, die lateinische Edition sowie die deutsche Übersetzung von Klügels Dissertation ist zu finden unter http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/versuch.html (10.1.2014).

[1241] In: Klügel, MW 3, S. 727-739.

[1242] Das Vorlesungsskript ist online verfügbar unter http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Vorlesungen/Geschichte_des_Parallelenaxioms/ (29.11.2013).

[1243] Euklid, S. 2.

[1244] Euklid, S. 3.

[1245] Siehe Clavius, S. 19.

Euklid formulierte seine Theorie der Parallellinien in den Sätzen 27 bis 32:[1246]

- I,27: „Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien einander gleiche (innere) Wechselwinkel bildet, müssen diese geraden Linien einander parallel sein"
- I,28: „Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß ein äußerer Winkel dem auf derselben Seite innen gegenüberliegenden gleich oder innen auf derselben Seite liegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich werden, dann müssen diese geraden Linien einander parallel sein"
- I,29: „Beim Schnitt einer geraden Linie mit (zwei) parallelen geraden Linien werden (innere) Wechselwinkel einander gleich, jeder äußere Winkel wird dem innen gegenüberliegenden gleich, und innen auf derselben Seite entstehende Winkel werden zusammen zwei Rechten gleich"
- I,30: „Derselben geraden Linie parallele sind auch einander parallel"
- I,31: „Durch einen gegebenen Punkt eine einer gegebenen geraden Linie parallele gerade Linie zu ziehen"
- I,32: „An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln zusammen gleich, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich".

Euklid bewies I,27, indem er einen Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz[1247] aufzeigte: Wenn die Geraden nicht parallel wären und es somit einen Schnittpunkt gäbe, so wäre ein Außenwinkel des so entstandenen Dreiecks so groß wie der gegenüberliegende Innenwinkel.[1248] Für den Beweis von I,28 nahm Euklid I,27 zu Hilfe und zeigte mittels der Wechsel- und Scheitelwinkel, dass die Stufenwinkel gleich groß sind, mittels der Wechsel- und Nebenwinkel, dass die Innenwinkel zusammen so groß wie zwei rechte Winkel sind.[1249] I,29 unterscheidet sich von den beiden vorherigen Sätzen, insofern als dieser Satz unter Verwendung des Parallelenpostulats bewiesen wird. Euklid ging vom Gegenteil aus, nämlich dass die Wechselwinkel ungleich und demzufolge die inneren Winkel zusammen kleiner als 180° seien.[1250] Folglich müssten sich die Geraden schneiden und wären somit nicht parallel. Die Beweise der Sätze I,30 und I,32 geschieht mit Hilfe des Satzes I,29 und sind somit auch vom Parallelenpostulat abhängig.[1251]

So offensichtlich wie Euklids Parallelenlehre zunächst erschienen mag, ist sie wegen des unbewiesenen Parallelenpostulats nicht. Bereits im Altertum gab es Versuche, das Postulat zu beweisen. Die Gründe hierfür waren vielfältig und die Geschichte ist kompliziert. Der interessierte Leser kann sie bei Stäckel/Engel nachlesen. Wir gehen hier direkt zu den uns interessierenden Autoren.

Wie andere Autoren zuvor nahm auch Kästner Anstoß am Begriff der geraden Linie: „Der Grund, warum man in diesem Axiome [das Parallelenpostulat] nicht die Evidenz der übrigen findet, ist nicht der unendliche Raum […], sondern: daß man von der geraden Linie nur einen

[1246] Vgl. hierzu und zum Folgenden Euklid, S. 20-23.

[1247] I,16: „An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel"; in: Euklid, S. 13.

[1248] Vgl. Euklid, S. 20.

[1249] Vgl. Euklid, S. 21.

[1250] Vgl. hierzu und zum Folgenden Euklid, S. 21 f.

[1251] Vgl. Euklid, S. 22 f.

klaren Begriff hat, nicht einen deutlichen“[1252]. Kästner verweist auf seinen Artikel *Was heißt in Euklids Geometrie möglich?*, aus dem hervorgeht, dass er unter einem „klaren Begriff“ einen nicht deutlich definierten Begriff versteht, den man sich aber anschaulich vorstellen könne.[1253] Dies wird durch Klügels Aussage unterstützt, indem er schreibt, dass man von geraden und krummen Linien nur Begriffe habe, die der Anschauung entnommen seien.[1254] Kästner geht weiter auf die Problematik ein und erläutert sie am Unterschied zwischen geraden und krummen Linien.[1255] Eine krumme Linie, beispielsweise eine Hyperbel, schneidet ihre Asymptote – eine gerade Linien – nie. Darum sei nicht offensichtlich, wieso man bei der geraden Linie zwangsläufig einen Schnitt mit einer anderen Geraden voraussetze.

Mit dem Versuch, das Parallelenpostulat zu beweisen, gingen auch Bemühungen einher, Euklids Definition der Parallelen durch eine andere zu ersetzen. Klügel fasst in seinem *Wörterbuch* die drei geläufigen und zueinander äquivalente Definitionen paralleler gerader Linien zusammen: Erstens Parallelen als gerade, in derselben Ebene befindliche Linien, die sich nicht schneiden, egal wie weit man sie nach beiden Richtungen hin verlängert (dies entspricht Euklids Erklärung); zweitens Parallelen als äquidistante Linien, die sich in derselben Ebene befinden; drittens Parallelen als gerade Linien, die sich in derselben Ebene befinden und die von einer Schnittgeraden im selben Winkel auf derselben Seite geschnitten werden.[1256]

In den meisten Lehrbüchern vom 16. bis 18. Jahrhundert werden parallele Linien als äquidistante erklärt.[1257] Diese Idee geht laut Proklos Diadochus (410/12-485) auf Poseidonios zurück.[1258] Giordano Bitonto (1633-1711) scheint der erste gewesen zu sein, der behauptete, dass man das Vorhandensein solcher Geraden beweisen müsse.[1259] Dies versuchte er wie folgt: In den Endpunkten einer Grundlinie denkt er sich Lote von gleicher Länge und versucht zu zeigen, dass die Verbindungslinie der Lot-Endpunkte eine äquidistante Gerade ist. Er möchte also zeigen, dass Linien, auf die die gleichlangen Lote einer geraden Linie fallen, wieder gerade Linien sind.[1260] Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) kritisierte Euklids Verwendung des Unendlichkeitsbegriffs; stattdessen solle man gerade Linien parallel nennen, wenn sie ein gemeinsames Lot besitzen.[1261] Da sich herausstellte, dass diese Erklärung zum Beweis nicht ausreichte, nahm er sozusagen als neues Axiom Folgendes mit auf, das bereits bei Clavius zu finden ist: „Wird eine gerade Linie, die auf einer anderen senkrecht steht, in der Weise verschoben, dass der eine Endpunkt immer auf der Geraden verharrt und der rechte Winkel in ihm erhalten bleibt, so beschreibt der andere Endpunkt eine gerade Linie“[1262]. Auf diese Weise wird eine gerade Linie mit Hilfe der Bewegung eines Punktes konstruiert. Dies scheint jedoch nicht vollkommen anerkannt gewesen zu sein, denn Klügel nimmt Anstoß an

[1252] Kästner, Ueber den mathematischen Begriff des Raums. In: PM, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 414.
[1253] Vgl. Kästner, Was heißt in Euklids Geometrie möglich?. In: PM, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 397.
[1254] Vgl. Klügel, Conatuum, S. 1 f.
[1255] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, Ueber den mathematischen Begriff des Raums. In: PM, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 416-418.
[1256] Vgl. Klügel, MW 3, S. 727.
[1257] Vgl. Stäckel/Engel, S. 33.
[1258] Vgl. Proklos, S. 287.
[1259] Vgl. hierzu und zum Folgenden Stäckel/Engel, S. 33 f.
[1260] Vgl. Klügel, Conatuum, S. 19 f.
[1261] Vgl. Stäckel/Engel, S. 33.
[1262] Zitiert nach Stäckel/Engel, S. 33.

diesem Vorgehen.[1263] Auch Ferdinand Carl Schweikart (1780-1857) schreibt, dass sich Mathematiker gegen die Bewegung in der Geometrie aussprächen; dennoch gebe es mit Hilfe der Bewegung gute Beweisversuche zum Parallelenpostulat.[1264]

Klügel kritisiert die Beweisversuche, bei denen die Definition von Parallelen als äquidistante Geraden verwendet wird.[1265] Man habe, so Klügel, durch diese Definition versucht, das Problem, das mit Euklids Definition einherging, zu beseitigen; de facto habe man das Problem nur umgangen. Bei der Erklärung der Parallelen über ihren Abstand setze man implizit voraus, dass diejenige Linie, die durch die Endpunkte aller gleich langen Lote geht, welche auf der einen geraden Linie stehen, wieder eine gerade Linie sei. Nur zwei Schriftsteller, nämlich Bitonto in seiner *Euclides Restitutio* (1680) und Fr. Gott. Hanke in seiner Dissertation (1751), haben versucht diesen Satz zu beweisen. Clavius habe den Satz als Axiom angenommen. Wolff habe den Grundsatz mit einer Erklärung verwechselt und den Satz nicht bewiesen. An dieser Stelle übt Klügel Kritik an Wolffs Vorgehen und behauptet – vermutlich wegen der Verbreitung von Wolffs Lehrbüchern: „Das mag nicht ohne Einfluß auf den Vortrag der Geometrie in Deutschland und auch auswärts geblieben seyn“[1266]. Trotz aller Kritik räumt Klügel ein, dass der Vorteil der Definition von Parallelen als äquidistante Geraden darin liege, dass der Unendlichkeitsbegriff nicht verwendet werde und man sich die Tatsache besser vorstellen könne.[1267] Im Anschluss an diese Erklärung von Parallelen müsse man folgende drei Eigenschaften beweisen: 1. Wenn eine Gerade auf der einen Parallelen senkrecht steht, dann auch auf der anderen Parallelen; 2. Wenn zwei Geraden auf einer dritten senkrecht sind, dann sind sie parallel; 3. Wenn zwei Parallelen von einer dritten geschnitten werden, dann sind ihre Wechsel- und Stufenwinkel[1268] gleich groß und die beiden Innenwinkel ergeben zusammen zwei rechte Winkel. Klügel hält fest, dass die Winkeleigenschaften ein zentraler Bestandteil paralleler Geraden seien.[1269] Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel und Stufenwinkel[1270] gleich groß und die inneren Winkel machen zusammen zwei rechte Winkel aus (Euklid I,29). Umgekehrt heißt es, dass die Geraden dann parallel sind, wenn die Winkel an der Schnittgeraden diese Eigenschaften erfüllen (Euklid, I,27-28). Weiterhin stellt Klügel fest, dass das Problem beim Parallelenpostulat darin liege, dass I,27 und I,28 mit Hilfe des schwachen Außenwinkelsatzes beweisbar wären, nicht aber ihre Umkehrung, die wir in I,29 finden.[1271] Er bringt die Problematik auf dem Punkt, wenn er schreibt: „Und hier entsteht die Frage, ist das Nichtschneiden nothwendig mit einer Gleichheit der gedachten Winkel verbunden? Oder, hat die Ungleichheit dieser Winkel nothwendig das Schneiden zur Folge?“[1272]. Euklid habe dies, so Klügel, in Form des Parallelenpostulats unbewiesen angenommen.[1273]

[1263] Vgl. Klügel, Conatuum, S. 10.
[1264] Vgl. Schweikart, S. 13 f.
[1265] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 3, S. 734 f.
[1266] Klügel, MW 3, S. 735.
[1267] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 3, S. 735.
[1268] Klügel verwendet diesen Begriff nicht, sondern schreibt von äußeren und inneren entgegengesetzten Winkeln.
[1269] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, MW 3, S. 727 f.
[1270] Klügel verwendet den Begriff nicht, sondern schreibt von inneren und gegenüberliegenden äußeren Winkeln.
[1271] Vgl. Klügel, MW 3, S. 729.
[1272] Klügel, MW 3, S. 729.
[1273] Vgl. Klügel, MW 3, S. 729.

Bei Girard Desargues (1591-1661) finden wir aus dem Jahr 1639 die Erklärung, die für die projektive Geometrie wichtig werden sollte, nämlich dass Linien dann parallel sind, wenn sie denselben unendlich fernen Punkt gemeinsam haben.[1274] Dies entspricht Kästners Aussage, dass Parallelen sich im Unendlichen schneiden, was gleichbedeutend damit sei, dass sie sich im Endlichen nie schneiden.[1275]

In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts spürte man ein zunehmendes Interesse an dem Problem der Parallellinien.[1276] Vor allem in Deutschland gab es zahlreiche Veröffentlichungen und viele neue Beweisversuche.[1277] Cantor spricht von einem großen Interesse an der Parallelenlehre zwischen 1759 und 1800 und nennt als ausschlaggebenden Punkt Klügels Dissertation.[1278] Lambert wurde wahrscheinlich durch Klügel zu seiner Schrift *Theorie der Parallellinien* (1786 posthum herausgegeben durch Joh. Bernoulli), in der wir verschiedene Beweisansätze finden, angeregt.[1279]

Einigen Mathematikern des 18. Jahrhunderts scheint klar gewesen zu sein, dass alle bisherigen Versuche zum Beweis des Parallelenpostulats nicht gelungen waren.[1280] In den meisten Beweisversuchen konnte ein Zirkelschluss oder ein falscher Schluss nachgewiesen werden. Das Problem der Parallellinien konnte erst durch die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie, die unabhängig vom Parallelenpostulat ist, im 19. Jahrhundert durch die Mathematiker Gauß, Lobatschewski und János (Johann) Bolyai (1802-1860), die als Schöpfer der nichteuklidischen Geometrie gelten, gelöst werden.[1281]

Auf Grundlage der vorausgegangenen Ausführungen sollen in der vorliegenden Fallstudie zum Problem der Parallellinien folgende Fragen beantwortet werden:

- Wie definieren die „Anfangsgründe"-Autoren parallele Geraden?
- Wird das Parallelenpostulat dargestellt und, falls ja, bewiesen?
- Erkennen die „Anfangsgründe"-Autoren Euklids Parallelenpostulat explizit als Axiom an?
- Wird der unterschiedliche Status zwischen den Sätzen I,27/28 und I,29 erkannt?
- Machen die Autoren auf das Problematik mit dem Parallelenpostulat aufmerksam? Wird auf weiterführende Literatur verwiesen?
- Haben die Autoren auch fachmathematische Schriften über die Parallelentheorie veröffentlicht? Gibt es Beziehungen zwischen diesen Schriften und den Ausführungen in den Lehrbüchern?

[1274] Vgl. Stäckel/Engel, S. 18.

[1275] Vgl. Kästner, Ueber den mathematischen Begriff des Raums. In: PM, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 414 und Kästner, AG 1.1., S. 210 f.

[1276] Vgl. Stäckel/Engel, S. 139.

[1277] Siehe „Verzeichnis von Schriften über die Parallelentheorie, die bis zum Jahre 1837 erschienen sind" in: Stäckel/Engel, S. 287-313.

[1278] Vgl. Cantor, Bd. 4, S. 388 f.

[1279] Vgl. Stäckel/Engel, S. 141.

[1280] Vgl. hierzu und zum Folgenden Peters, S. 481 f.

[1281] Vgl. Stäckel/Engel, Vorwort, S. iii.

4.3.1 Abraham Gotthelf Kästner

Kästner wollte mit seinen *Mathematischen Anfangsgründen* den Studierenden ein Werkzeug an die Hand geben, damit sie nicht nur mathematisches Wissen erwerben, sondern darauf aufbauend auch neue mathematische Kenntnisse entdecken könnten.[1282] Somit liegt die Vermutung nahe, dass Kästner auch Themen tangierte, die über die einführenden und grundlegenden mathematischen Inhalte hinausgingen, um dadurch einen Einblick in die Forschung zu geben. Sollte sich dies bestätigen, so kann behauptet werden, dass Kästner seinem Lehrbuch einen wissenschaftlichen Charakter verlieh.

Kästner hatte ein reges Interesse an dem Problem der Parallellinien, was unter anderem die Tatsache belegt, dass er dieses Thema in seinen *Anfangsgründen der Arithmetik* ([6]1800) aufgriff. Er schreibt in der Vorrede dieses Bandes, dass man sich nicht mit mathematischen Sätzen zufrieden geben solle, die durch unzureichende oder falsche Schlussfolgerungen zustande kommen; er nennt das Beispiel der Parallellinien.[1283] An anderer Stelle in der Vorrede heißt es: „Die Schwierigkeit, welche sich bey der Lehre von den Parallellinien findet, hat mich schon seit vielen Jahren beschäfftiget. Ich glaubte, sie wäre in Hausens Elementis Matheseos […] völlig behoben.[1284] Der vormahlige Prediger bey der französischen Gemeinde zu Leipzig Mr. Coste benahm mit diese Zufriedenheit, als er mir […] anzeigte, es sey an dem angeführten Orte von Hausen ein Schluß gemacht worden, der nicht folge. Ich entdeckte diesen Fehler bald selbst […] und bemühte mich von der Zeit an, die Schwierigkeit selbst zu heben, oder Schriftsteller zu finden, die sie gehoben hätten, aber in beyder Absicht vergebens, ob ich gleich fast eine kleine Bibliothek[1285] von einzelnen Schriften oder Anfangsgründen der Geometrie sammlete, wo dieser Gegenstand besonders war betrachtet worden“[1286]. An dieser Stelle verweist Kästner auf Klügels Dissertation, an der Kästner einen bedeutenden Anteil hatte, da er Klügel zu dieser Arbeit angeregt hatte.[1287] Durch die Arbeit an seinen *Anfangsgründen* wurde Kästner erneut dazu veranlasst, sich mit der Theorie der Parallellinien zu beschäftigen und einen Beweis zu suchen. Er konnte aber keinen vollkommen zufriedenstellenden Beweis geben, sondern nur einen, der seinen Vorstellungen am nächsten kam; diesen hat er in den Zusätzen zu Satz 11 und 12 im Geometrie-Kapitel abgehandelt.[1288]

Zu Beginn des Geometrie-Kapitels gibt Kästner – angelehnt an das Vorgehen Euklids und der mathematischen Lehrart – Begriffserklärungen. Er beschreibt parallele Geraden wie folgt: „Gleichlaufende oder parallele Linien AB, CD, 7. Fig. [Abbildung 43] sind gerade Linien in einer Ebene, die nie zusammen stossen, so weit man sie auch auf beyden Seiten verlängert“[1289].

[1282] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 6.
[1283] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^r.
[1284] Siehe hierzu Hausen, S. 101 f. und Klügel, Conatuum, S. 11.
[1285] Das 1801 veröffentlichte Verzeichnis von Kästners Bücher enthält sämtliche verfügbare Schriften über Parallellinien vor 1770; vgl. Stäckel/Engel, S. 140.
[1286] Kästner, AG 1.1., S. *5^v f.
[1287] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *5^v, Fußnote (*). Hierbei handelt es sich offensichtlich um einen Nachtrag von Kästner in einer der jüngeren Auslagen, denn die erste Auflage seines Lehrbuchs erschien 1758, Klügels Dissertation erst 1763.
[1288] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *5^v f.
[1289] Kästner, AG 1.1., S. 183.

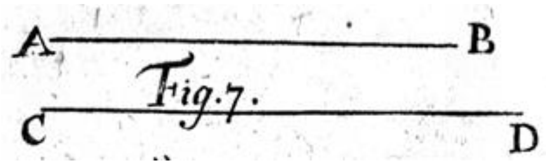


Abbildung 43: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, Tab. I, Fig. 7.

Im „11. Satz. Lehrsatz“ stellt Kästner die Umkehrung des Parallelenpostulats inklusive des Beweises und einigen Zusätzen vor.[1290] Er schreibt „Wenn zwo Linien AB, CD, 46. Fig. [Abbildung 44] von einer dritten so geschnitten werden, daß I) die beyden innern entgegengesetzten Winkel BGH + GHD = 2 R oder II) der äusere EGB = GHD dem innern entgegengesetzten [Stufenwinkel[1291]], oder III) die Wechselswinkel [sic] DHG = HGA; so sind AB, CD, gleichlaufend“[1292].

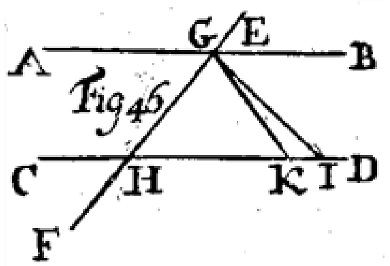


Abbildung 44: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, Tab. III, Fig. 46.

Dieser Satz entspricht I,27 und I,28. Ebenso wie Euklid beweist Kästner den Satz indirekt mit Hilfe des schwachen Außenwinkelsatzes.[1293] Beim Beweis nimmt er zunächst an, dass die Linien AB und CD in der Richtung von B und C zusammenlaufen, so dass ein Dreieck mit der Grundseite GH und den Schenkeln GB und HD entsteht. Anschließend wendet er separat voneinander die Eigenschaften der Winkel beziehungsweise die Voraussetzungen I, II und III aus dem Lehrsatz an und zeigt, dass die Winkel an der Grundlinie GH zusammen 180° ergeben. Dies steht jedoch im Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz. Am Ende des Beweises betont Kästner die Äquivalenz der drei Winkeleigenschaften an der Schnittgerade von zwei Parallelen: „Ein Satz von diesen dreyen angenommen hat die übrigen zu Folgen“[1294].

Nach dem Beweis dieses Satzes gibt Kästner sechs Zusätze an, die Folgerungen aus dem Lehrsatz darstellen. Da diese unmittelbar zum Parallelenpostulat führen, werden sie nun kurz wiedergegeben. Im ersten Zusatz heißt es, dass man, indem man für gleiche Wechselwinkel sorgt, eine Parallele durch einen gegebenen Punkt G zu einer gegebenen Geraden CD konstruieren kann.[1295] Dies entspricht I,31 und dem entsprechenden Beweis. Kästner veränderte also die Reihenfolge der Lehrsätze und hielt sich nicht an Euklids Anordnung. Im zweiten Zusatz beschreibt Kästner den Fall, dass sich die Gerade AB, die ursprünglich parallel zu

[1290] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 201-205.
[1291] Diesen Begriff verwendet Kästner in seinen *Anfangsgründen* nicht.
[1292] Kästner, AG 1.1., S. 201. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.
[1293] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 201 f.
[1294] Kästner, AG 1.1., S. 202.
[1295] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Kästner, AG 1.1., S. 202-205.

CD ist, um einen ihrer Punkte G dreht und die Gerade CD dann in einem Punkt schneidet; der „erste Durchschnitt“[1296] jedoch, so behauptet Kästner, lasse sich nicht angeben. Dies impliziert den Begriff der Unendlichkeit, den Kästner ausdrücklich im dritten Zusatz verwendet, um die Lage dieses ersten Schnittpunktes („der erste Durchschnittspunct“[1297]) der beiden Geraden als „unendlich weit von H“[1298] zu beschreiben. Im vierten Zusatz betont Kästner, dass die Parallelität von zwei Geraden nur von ihrer Lage, die durch die Winkel an der Schnittgerade bestimmt ist, nicht aber von ihrer Entfernung zueinander abhänge. Im fünften Zusatz greift Kästner erneut den Schnittpunkt von zwei nicht parallelen Geraden GP und CD auf und bedient sich hierfür der Methode der Verschiebung von Geraden. Ist der Schnittpunkt der beiden Geraden im betrachteten Abschnitt nicht sichtbar, so lege es nicht an ihrer Lage. Dies stellt er anschaulich dar, indem er die Gerade GP entlang der Schnittgeraden EF in Richtung CD bei gleichbleibenden Winkel BGP verschiebt, so dass der Schnittpunkt mit CD sichtbar wird. Diesen Punkt nennt Kästner „Punct des Durchschiebens“[1299]. Seine Ausführungen erläutert Kästner an Fig. 47 (Abbildung 45). Im sechsten Zusatz kommt Kästner auf Grundlage der vorausgegangenen Zusätze zu dem Schluss, dass es Dreiecke mit der Grundlinie GH geben müsse, da sich sonst die Linien GP und CD nicht schneiden würden. „Man sieht aber nicht, wie blos diese längere Grundlinie die Dreyecke unmöglich machen soll; Man wird vielmehr nach dem, was man bey den möglichen Dreyecken dieser Art wahrgenommen hat, urtheilen; daß bey einer längern Grundlinie nur die Seiten bis zum Zusammenstossen weiter müssen fortgezogen werden“[1300].

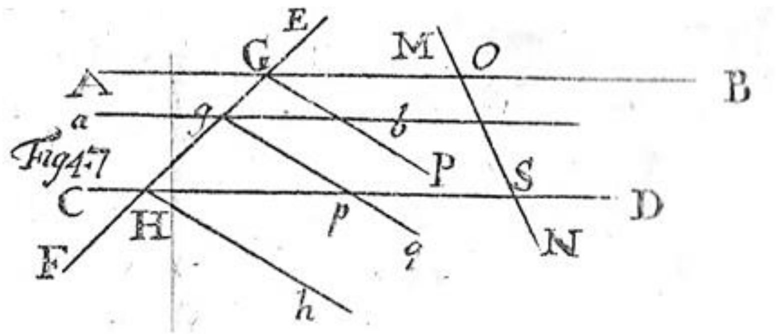


Abbildung 45: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, Tab. III, Fig. 47.

Stäckel und Engel stellten fest, dass das Verfahren von Kästner, nämlich die parallele Verschiebung von einer der beiden Schnittgeraden, dem von Wallis ähnlich ist.[1301] Da Kästner ein großes Interesse am Problem der Parallellinien hatte und zahlreiche Literatur hierüber sammelte, können wir davon ausgehen, dass er die Schriften von Wallis und dementsprechend das Verfahren kannte. Dies wird durch einen Verweis auf Wallis im Abschnitt zur Problematik mit dem Parallelenpostulat in Kästners *Geschichte der Mathematik* bestätigt.[1302]

[1296] Kästner, AG 1.1., S. 202.
[1297] Kästner, AG 1.1., S. 203.
[1298] Kästner, AG 1.1., S. 203.
[1299] Kästner, AG 1.1., S. 204.
[1300] Kästner, AG 1.1., S. 205.
[1301] Vgl. Stäckel/Engel, S. 140.
[1302] Vgl. Kästner, Geschichte der Mathematik, Bd. 1, S. 269.

Karsten äußerte sich kritisch über Kästners Beweis zum 11. Satz, vor allem über den sechsten Zusatz, und bemängelte, dass Kästner eine unbewiesene Voraussetzung angenommen habe.[1303] Man könne, so Karsten, bei einem Dreieck nicht per se annehmen, dass beim Verschieben einer Seite des Dreiecks dessen Grundlinie größer werden könne, sondern man müsse angeben, um wie viel die Grundlinie des Dreiecks größer geworden ist, wenn man eine Dreiecksseite in Richtung AB verschiebt.

Der sechste Zusatz führt Kästner unmittelbar zur Betrachtung des Parallelenpostulats, welches er im „12. Satz. 9. Grundsatz“ mit insgesamt 14 Zusätzen vorstellt.[1304] Dieser Grundsatz entspricht Euklids Parallelenpostulat: „Wenn zwo gerade Linien GP; CD, von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die innern entgegengesetzten Winkel HGP + GHD < 2 R so stossen sie verlängert nach der einen Seite von EF wo diese Winkel liegen, zusammen“[1305]. Hierbei geht Kästner davon aus, dass der Winkel EGP größer sei als GHD (siehe Abbildung 45) beziehungsweise, dass GP zwischen die beiden Parallelen AB und CD falle.[1306] In der zugehörigen Anmerkung geht er auf die Problematik zu diesem Satz ein, der nicht überzeugend sei.[1307] Er hält fest, dass es ein zunehmendes Interesse am Beweis des Parallelenpostulats gebe und verweist auf Klügels Dissertation sowie auf neu erschienene Untersuchungen.

Im ersten Zusatz des 12. Satzes drückt Kästner die Eindeutigkeit der Parallelen durch einen Punkt G aus.[1308] Er behauptet weiter, wenn eine Gerade die eine von zwei Parallelen schneide, so schneide sie auch die andere Parallele. Bei dem Schnitt – so heißt es im zweiten Zusatz – haben die Winkel der Schnittgeraden mit den beiden Parallelen diejenigen Eigenschaften, die im 11. Satz angegeben sind.[1309] Dies entspricht I,29 bei Euklid. Kästner verwendet also diesen Satz, um das Parallelenpostulat zu erläutern. Euklid nahm umgekehrt das Parallelenpostulat für den Beweis von I,29 zu Hilfe. In den Zusätzen 3 bis 11 geht Kästner auf die Eigenschaften der Winkel und Seiten von Parallelogrammen, Rauten, Rechtecken und Quadraten ein.[1310] Im zwölften Zusatz beschreibt Kästner den Fall, dass die Gerade GK, die die beiden Parallelen GB und HD schneidet, so weit um den Punkt G gedreht wird, bis sie schließlich mit GB zusammenfällt (siehe Abbildung 44).[1311] Bis zum Zusammentreffen mit der Geraden GB gibt es Schnittpunkte – „Durchschnittspunkte“ – zwischen GK und HD, die sich aber immer weiter von H entfernen. Die Parallelität der Geraden GB und HD tritt dann ein, wenn der Schnittpunkt unendlich weit von H entfernt ist. Dies setzt Kästner mit der Aussage gleich, dass sich Parallelen in einer unendlichen Entfernung schneiden, was er dadurch rechtfertigt, dass diese unendlich fernen Punkte den Übergang von der Schnittgeraden in die Lage der Parallelen GB darstellen und sich von dieser Lage nicht mehr unterscheiden lassen. Dies erinnert uns an die Aussage von Desargues (siehe oben).

Die Drehung von Geraden wird auch in den beiden darauffolgenden Zusätzen verwendet, um bestimmte Eigenschaften aufzuzeigen, die sich bei der Drehung einer Geraden ergeben,

[1303] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Beyträge, 3. St., S. 220 f.
[1304] Siehe Kästner, AG 1.1., S. 205-212.
[1305] Kästner, AG 1.1., S. 205.
[1306] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 205.
[1307] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 205 f.
[1308] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 206.
[1309] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 206 f.
[1310] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 207-209.
[1311] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 209-211.

bis sie schließlich mit einer Parallelen zusammenfällt.[1312] Am Ende geht Kästner von dem Fall aus, dass eine Gerade MG nach ihrer Deckung mit der Parallelen MS noch weiter um den Punkt M herum gedreht wird und sie – rückwärts verlängert – die andere Parallele NV in K wieder schneidet (siehe Abbildung 46). Hier bezeichnet er das Teilstück NK der Geraden links von N als verneinend, das Teilstück NG rechts von N als bejahend „und der Uebergang aus jenen in diese geschiehet hie durch das Unendliche, wenn sich die Linie MG auf die beschriebene Art drehet, daß die NG wachsen. Drehte sie sich auf die entgegengesetzte Art, daß die Winkel NMG, und die Linien NG abnähmen, so geschähe dieser Uebergang in N durch die Verschwindung oder einen Durchgang durch o. Der Uebergang durch das Unendliche, heisst eigentlich nur soviel, daß NG, NK, nach verschiedenen Seiten von N, jede ohne Ende wachsen, wenn man MG, MK so dreht, daß die Winkel NMG, NMK, bis zu rechten wachsen“[1313].

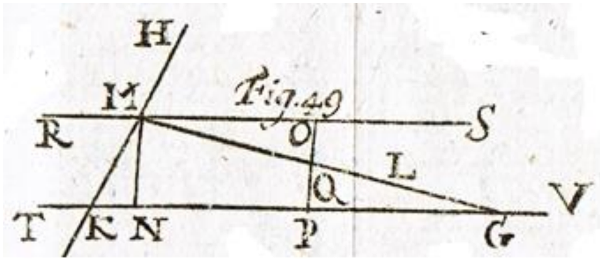


Abbildung 46: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, Tab. III, Fig. 49.

Kästner stellt die Lehre der Parallellinien in seinen *Anfangsgründen* mit kritischen Anmerkungen dar. Bereits in der Vorrede setzt er den Leser seiner *Anfangsgründe* darüber in Kenntnis, dass es schwierig sei, das Parallelenpostulat zu beweisen und es ihm selbst nicht gelungen sei, einen zufriedenstellenden Beweis zu liefern. Darüber hinaus geht aus Kästners Ausführungen hervor, dass er sich intensiv mit der Lehre der Parallellinien beschäftigte und einen Überblick über die ältere und zeitgenössische Literatur zu diesem Thema hatte. Kästner lässt also die mathematische Forschung in seinem Lehrbuch nicht unbeachtet und verweist auf weiterführende Literatur zu diesem Thema. Auf diese Weise haben die Leser des Lehrbuchs die Möglichkeit, sich selbstständig mit dem Thema zu befassen.

In anderen Quellen wird deutlich, dass Kästner Zweifel an der Beweisbarkeit des Parallelenpostulats hatte. In dem Begleitbrief von Klügels Dissertation schreibt Kästner, dass kein Beweis des Parallelenpostulats möglich sei, sofern man nicht die Lehre der Lage, die allerdings mit Leibniz in Vergessenheit geraten sei, ausarbeite.[1314] Auch Schweikart weiß über Kästners Resignation bezüglich der Beweisbarkeit des Postulats zu berichten: Kästner riet wohl zu einer allgemeinen Annahme des Parallelenaxioms als unbewiesenen Grundsatz.[1315] Kästners frühe Entmutigung ist in seinem Brief an Pfaff vom 2.8.1789 deutlich spürbar, denn er rät Pfaff davon ab, sich auf die Lehre der Parallellinien, mit der er selbst viel Zeit verbracht habe, einzulassen, weil man darüber viel Unnützes lese.[1316]

[1312] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 211 f.
[1313] Kästner, AG 1.1., S. 211 f.
[1314] Vgl. Klügel, Conatuum, Begleitbrief von Kästner, o. S.
[1315] Vgl. Schweikart, S. 6.
[1316] Vgl. Brief von Kästner an Pfaff vom 2.8.1789. In: Pfaff, S. 213.

Hindenburg äußerte sich positiv über Kästners Anmerkungen zum Parallelenpostulat in den *Anfangsgründen*; man könne keine bessere Erklärung finden.[1317] Klügel schrieb in seiner Dissertation *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* über Kästners Beweis, dass dieser in den Zusätzen 2 bis 6 zum elften Satz die Lehre der Parallelen so eindeutig dargestellt habe, dass Klügel nicht wüsste, was zu einem Beweis noch fehle.[1318] Interessant ist, dass wir durch Klügels Aussage erfahren, dass durch die Verbreitung von Kästners Lehrbuch dessen Erläuterung zum Parallelenpostulat bekannt gewesen sein muss und er deshalb auf eine weitläufige Erklärung verzichtet: „Liber cum omnium manibus teratur, longiore Methodi eius explicatione non opus erit“[1319]. Klügels Äußerung bezieht sich auf die erste oder zweite Auflage von Kästners *Anfangsgründen der Arithmetik* (1758, ²1763). Ein Vergleich zwischen der ersten und der sechsten Auflage zeigt, dass die Zusätze, auf die sich Klügel bezieht, identisch sind.

4.3.2 Johann Christoph Sturm

In seiner *Mathesis Juvenilis* (²1710/14) definiert Sturm parallele Linien als solche, die „nebeneinander also fort lauffen / daß sie allenthalben gleich weit voneinander stehen / und daher / man ziehe sie gleich so lang als man wolle, nimmermehr zusammen lauffen können“[1320]. Somit erklärt er Parallelen auf zweifache Art, nämlich erstens wie Euklid, zweitens als äquidistant. Im nächsten Abschnitt stellt er die Aufgabe, wie man durch einen gegebenen Punkt C eine gleichlaufende Linie zur gegebenen Linie AB ziehen kann.[1321] Hierfür gibt er vier verschiedene Lösungen an, wobei Fig. XI (Abbildung 47) zugrunde liegt:

- Num. 1: Vom Punkt C das Lot CD auf AB fällen, das Lot parallel verschieben (EF) und die Endpunkte der Lote in C und F durch eine gerade Linie verbinden
- Num. 2: Mit Hilfe des Zirkels die Entfernung zwischen der Linie AB und dem Punkt C bestimmen, diese Länge von einem beliebigen Punkt E aus übertragen und die Endpunkte C und F durch eine gerade Linie verbinden
- Num. 3: Aus C heraus eine schräge Linie CG auf AB ziehen, CG halbieren und durch den Mittelpunkt I die Linie HK ziehen, wobei I auch deren Mittelpunkt ist; dann die Endpunkte C und K durch eine gerade Linie verbinden
- Num. 4: Mit Hilfe des Zirkels einen Bogen EC um einen beliebigen Punkt D, der sich auf AB befindet, ziehen, diesen Bogen um einen anderen beliebigen Punkt F von AB ziehen, so dass der Bogen GH entsteht; anschließend die Endpunkte C und H durch eine gerade Linie verbinden.

Diese Aufgabe entspricht dem 31. Satz bei Euklid, der die Aufgabe jedoch mit Hilfe der Übertragung der Wechselwinkel löst. Dies kann bei Sturm nicht geschehen, da er erst später auf die Winkeleigenschaften von Parallelen eingeht.

[1317] Vgl. Hindenburg, Ueber die Schwürigkeit. In: LMN, 1781, 2. St., S. 153 f.
[1318] Vgl. Klügel, Conatuum, S. 18.
[1319] Klügel, Conatuum, S. 18.
[1320] Sturm, MJ 1, S. 342.
[1321] Vgl. Sturm, MJ 1, S. 344 f.

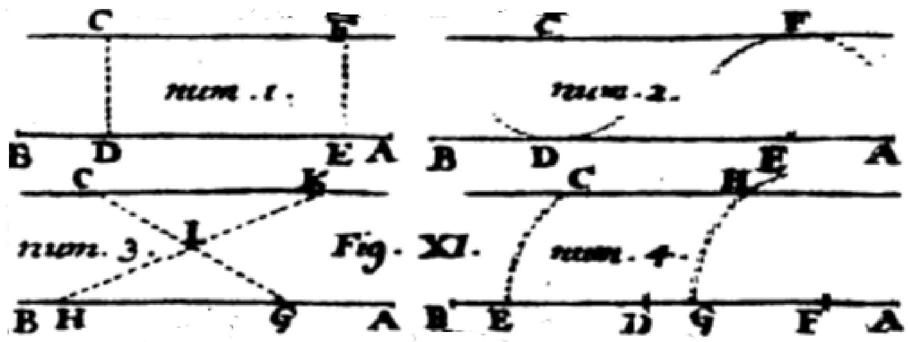


Abbildung 47: Sturm, ***Mathesis Juvenilis*****, Fig. XI.**

Diese vorherigen Ausführungen befinden sich in der „I. Vertheilung“[1322] der Geometrie, in der sämtliche Aufgaben dargestellt werden. Die „II. Vertheilung“[1323] der Geometrie befasst sich mit der in der Praxis angewandten Geometrie. Hier findet der Leser die Aufgabe, wie man auf einem Feld eine Linie durch einen Punkt C ziehen kann, die zu einer gegebenen Linie AB parallel ist.[1324] Die Lösung entspricht der ersten Möglichkeit in der oben vorgestellten Aufgabe.

In der „III. Vertheilung. Worinnen die vornehmste Betrachtungen der ganzen Meß=Kunst erwiesen“[1325] finden wir ebenfalls Ausführungen zur Parallelenlehre. Im zehnten Abschnitt heißt es: „Ich erinnere mich / daß bey dem Euclide gar viel von den gleichlauffenden Linien erwiesen worden / welches allenthalben seinen grossen Nutzen hat / derhalben möchte ich wünschen / daß auch die Anfänger hiervon etwas Bericht und Unterweisung empfiengen“[1326]. Sturm schreibt, dass Euklid in den Sätzen 27 bis 29 nützliche Dinge über parallele Linien bewiesen habe.[1327] Hierbei habe Euklid zum Beweis einen Grundsatz[1328] angenommen, welcher zwar wahr sei, aber von dem viele meinten, man könne ihn nicht ohne Beweis annehmen. Daher gibt Sturm einen anderen Beweis für I,27 und I,28 an, wofür er Fig. XCII (Abbildung 48) zugrunde legt. An dieser Stelle müssen wir anmerken, dass Sturms Ausführungen nicht vollkommen richtig sind. Euklid bewies I,27 und I,28 ohne Parallelenpostulat und verwendete erst für den Beweis von I,29 das unbewiesene Parallelenpostulat.

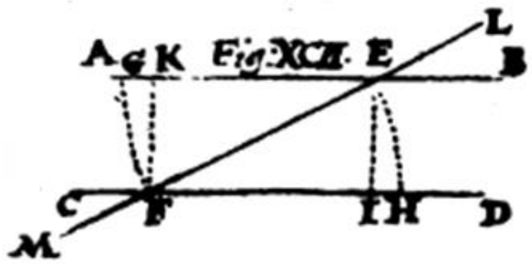


Abbildung 48: Sturm, ***Mathesis Juvenilis*****, Fig. XCII.**

[1322] In: Sturm, MJ 1, S. 329 ff.
[1323] In: Sturm, MJ 1, S. 406 ff.
[1324] Vgl. Sturm, MJ 1, S. 413.
[1325] In: Sturm, MJ 1, S. 474 ff.
[1326] Sturm, MJ 1, S. 486 f.
[1327] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 487.
[1328] Sturm meint das Parallelenpostulat.

Im gegebenen Beweis von I,27 konstruiert Sturm zunächst um F den Bogen EH durch E, analog durch E einen Bogen FG durch F, und errichtet die Lote („Sinus rectus", „Bley=Rechte") EI und FK.[1329] Aus der Gleichheit der Wechselwinkel FEG und EFH schließt er die Gleichheit der Bögen EH und FG und daraus wiederum die Gleichheit der Lote EI und FK. Da somit die Geraden[1330] AB und CD gleich weit voneinander entfernt sind, sind sie parallel zueinander. Dann geht Sturm zum Beweis von I,28 über.[1331] Zuerst nimmt er gemäß der Voraussetzung des Lehrsatzes an, dass die Stufenwinkel[1332] AEL und CFE gleich groß sind und begründet dies zusätzlich mit Hilfe des Scheitelwinkels FEB und der Gleichheit der Stufenwinkel FEB und CFE. Um zu zeigen, dass die inneren Winkel AEF und CFE zusammen zwei rechte[1333] Winkel ergeben, verwendet er die Tatsache, dass die Nebenwinkel AEF und FEB zusammen 180° ergeben und zeigt, dass der Nebenwinkel FEB zugleich der Wechselwinkel des inneren Winkels CEF ist und sie somit gleich groß sind. Sturm verwendet I,27 für den Beweis von I,28, so wie wir es auch bei Euklid vorfinden.

Sturm stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrungen dieser beiden Lehrsätze gelten.[1334] Er bejaht dies und stellt in drei Absätzen dar, dass, wenn die Geraden AB und CD parallel zueinander sind und somit denselben Abstand zueinander haben, auch die Wechsel- und Stufenwinkel gleich groß sind und die inneren Winkel zusammen zwei rechte Winkel bilden. Im Anschluss geht Sturm auf den Nutzen dieser Lehrsätze ein.[1335] Dieser bestehe darin, dass die vorausgegangen Ausführungen für den Beweis nachfolgender Betrachtungen verwendet werden können. Darüber hinaus seien die Sätze wichtig, um eine Parallele zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt zu ziehen (siehe oben). Als dritten Punkt erwähnt Sturm den Nutzen für einen bestimmten Satz, der in der gesamten Mathematik von hohem Nutzen sei, nämlich dass die Winkelsumme in einem Dreieck 180° beträgt. Diesen Satz stellt Sturm im Anschluss vor.[1336]

Sturms Vorgehen in seiner *Kurtzgefassten Mathesis* (1717) weicht vom dem in seiner *Mathesis Juvenilis* ab. Im erstgenannten Lehrbuch beschreibt Sturm zunächst drei Anordnungen von Linien, nämlich erstens diejenigen, die „in einander fallen", zweitens diejenigen, die „schreg gegen einander stehen" und drittens diejenigen, die „gleich lauffend oder parallel" sind.[1337] Letztere definiert Sturm als solche, wo „zwey oder mehr alle Wege gleichweit von einander stehen"[1338]. Sturm verweist auf Fig. 6 (Abbildung 49), aus der ersichtlich wird, dass sich Sturm nicht nur auf gerade Linien beschränkt, sondern dass er auch krumme Linien beziehungsweise Kurven mit gleichbleibendem Abstand miteinbezieht. Dies ist insofern bemerkenswert, da sich alle anderen von uns betrachteten Lehrbuchautoren ausschließlich auf gerade Linien beschränkten.

[1329] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 488.
[1330] Sturm verwendet nicht den Begriff „Gerade", sondern schreibt von „geraden Linien".
[1331] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 488 f.
[1332] Diesen Begriff verwendet Sturm nicht, sondern schreibt von inneren und äußeren Winkeln.
[1333] Sturm nennt rechte Winkel „gerade Winkel".
[1334] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 489 f.
[1335] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 490 f.
[1336] Vgl. Sturm, MJ 1, S. 491-493.
[1337] Vgl. Sturm, KM, S. 25.
[1338] Sturm, KM, S. 25.

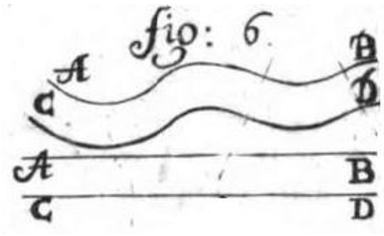


Abbildung 49: Sturm, *Kurtzgefasste Mathesis*, Tab. I, Fig. 6.

Es folgen einige Lehrsätze über Linien und Winkel, nämlich dass Nebenwinkel zusammen so groß sind wie zwei rechte Winkel, dass Vertikalwinkel (Scheitelwinkel) gleich groß sind und dass die Basiswinkel bei gleichschenkligen Dreiecken gleich groß sind.[1339] Diese Sätze führen Sturm unmittelbar zur Betrachtung der Parallellinien: „Wenn eine gleiche Linie EF fig. 11. [Abbildung 50] so durch zwey andere AB und CD zwerg [sic] über gezogen, (1) einen eussern Winckel AGE gleich macht einem inwendig gegen überstehenden CHG (opposito); Oder: (2) Wenn sie zwey Wechsel=Winckel (alternos) BGH und CHG gleich macht. Oder auch (3) die zwey inwendigen und an einer Seite gegen über stehenden Winckel (interne oppositos) AGH, CHG zusammen gerechnet, gleich machet zweyen rechten: So sind besagte Linien AB und CD einander parallel. Und umgewandt: Wenn besagte Linien parallel sind, so werden sich auch die Winckel auff besagte Art verhalten“[1340].

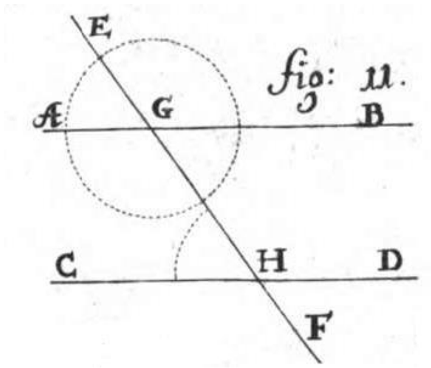


Abbildung 50: Sturm, *Kurtzgefasste Mathesis*, Tab. I, Fig. 11.

Sturm verweist darauf, dass es sich hierbei um Euklids Sätze I,27 bis I,29 handelt.[1341] Bemerkenswert ist, dass Sturm in seinem Lehrbuch keinen Beweis angibt, sondern lediglich anmerkt „wie wir solches leicht mündlich demonstriren wollen“[1342]. Er gibt dem Leser einen Hinweis auf den Beweis, indem er schreibt, dass man sich vorstellen müsse, dass eine Linie AB „ohne Wancken“ auf CD herunterfalle, so dass die Schenkel der Winkel EGA und CHG zusammenfallen, wenn AB und CD zusammentreffen.[1343] Sturm wählt also die Methode der parallelen Verschiebung einer geraden Linie in Richtung ihrer Parallelen und zeigt beim Zusammentreffen der Parallelen die Gleichheit der Winkel auf.

[1339] Vgl. Sturm, KM, S. 25.
[1340] Sturm, KM, S. 26.
[1341] Vgl. Sturm, KM, S. 26.
[1342] Sturm, KM, S. 26.
[1343] Vgl. Sturm, KM, S. 26.

Über die Gründe, wieso Sturm keinen ausführlichen Beweis angegeben hat, können wir nur spekulieren. Möglich ist, dass die Ausführungen zu umfangreich waren und aus Platzgründen weggelassen wurden. Denkbar wäre auch, dass die Inhalte in einem Lehrbuch nicht verständlich genug dargestellt werden konnten, so dass Sturm darauf verzichtete, sie in seine *Kurtzgefasste Mathesis* mitaufzunehmen. Wir können hingegen ausschließen, dass sich Sturm der Problematik nicht bewusst war, wofür seine kritischen Ausführungen in der wenige Jahre früher erschienenen *Mathesis Juvenilis* sprechen.

4.3.3 Christian Wolff

Zu Beginn des Geometrie-Kapitels seiner *Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften* (^{9}1775) erklärt Wolff einige geometrische Grundbegriffe. In der 14. Erklärung definiert er parallele Geraden[1344] über ihren gleichbleibenden Abstand zueinander: „Wenn zwey Linien AB und CD immer eine Weite von einander behalten, so sind es Parallellinien. Es wird demnach die Linie AB mit CD parallel beschrieben, wenn der Perpendicul IH sich an ihr dergestalt herunter beweget, daß er mit ihr beständig einen rechten Winkel machet“[1345]. Wolff schreibt nicht explizit, dass es sich um gerade Linien handelt, aber dies wird an den zugehörigen Abbildungen deutlich. Für den ersten Teil der Definition verweist er auf Fig. 22 (Abbildung 51), für den zweiten Teil auf Fig. 61 (Abbildung 43).

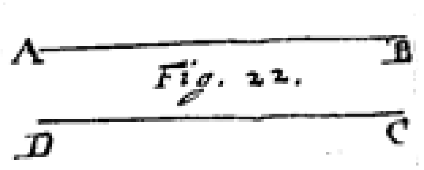


Abbildung 51: Wolff, *Anfangsgründe*, Bd. 1, Tab. III, Fig. 22.

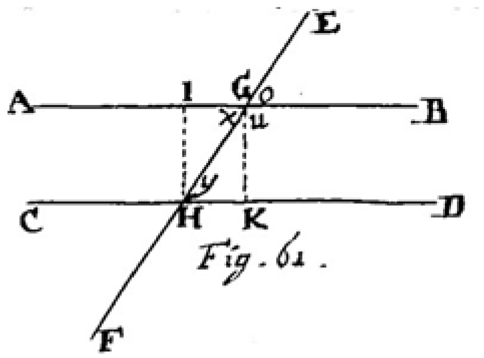


Abbildung 52: Wolff, *Anfangsgründe*, Bd. 1, Tab. IX, Fig. 61.

Wolff weicht von Euklids Darstellung ab, indem er nicht dessen Definition paralleler Linien verwendet, sondern Parallelen als abstandsgleiche Linien definiert. Zudem finden wir bei Wolff eine andere Anordnung der Lehrsätze vor als in Euklids *Elementen*. Euklids Satz I,32,

1344 Wolff verwendet in seinen gesamten Ausführungen nicht den Begriff „Gerade“, sondern spricht von „Linien“.
1345 Wolff, AG 1, S. 125.

nämlich die Konstruktion einer Parallelen durch einen gegebenen Punkt und zu einer gegebenen Geraden, finden wir in Wolffs *Anfangs=Gründen* in Form einer „Aufgabe“ noch vor den Ausführungen zu den Parallellinien und den entsprechenden Winkeleigenschaften.[1346] Aus diesem Grund löst Wolff die Aufgabe nicht durch die Übertragung der Wechselwinkel, sondern mit Hilfe von Zirkel und Lineal sowie eines Parallellineals[1347].[1348] Auch die Reihenfolge von Euklids Sätzen I,27 bis I,29 ist geändert, wobei Wolff zuerst I,29 (8. Lehrsatz bei Wolff) und anschließend I,27 und I,28 (9. Lehrsatz bei Wolff) behandelt.

Wolff schreibt im 8. Lehrsatz: „Wenn zwey Parallellinien AB und CD von einer dritten EF in G und H durchschnitten werden, so sind 1. die Wechselswinkel [sic] x und y einander gleich, 2. der äussere Winkel o ist dem innern y gleich, und 3. die beyden innern Winkel u und y machen zusammen 180°“[1349]. Zu dieser Erklärung gehört Fig. 61 (Abbildung 52). Während Euklid diesen Satz mit Hilfe des Parallelenpostulats bewies, geschieht der Beweis bei Wolff anders, da er das Postulat gar nicht erwähnt. Wolff zeigt die drei im Lehrsatz formulierten Winkeleigenschaften getrennt voneinander.[1350] Im ersten Absatz setzt Wolff voraus, dass die Lote gemäß der Definition von parallelen Geraden gleich lang sind. Die rechten Winkel bei I und K stimmen wegen der Gleichheit der Winkel an den Loten überein. Daraus schließt er, basierend auf der Kongruenz der Dreiecke HGI und HKG, die Gleichheit der Wechselwinkel x und y. Im zweiten Absatz zeigt Wolff die Gleichheit der Stufenwinkel[1351] y und o anhand der Gleichheit der Scheitelwinkel[1352] x und o. Die dritte Winkeleigenschaft, nämlich dass die inneren Winkel u und y zusammen 180° ergeben, begründet Wolff dadurch, dass Nebenwinkel u und o zusammen 180° ergeben.

Die Umkehrung des 8. Lehrsatzes betrachtet Wolff im 9. Lehrsatz mit Verweis auf Fig. 61 (Abbildung 52): „Wenn zwey Linien AB und CD von einer dritten EF dergestalt in G und H durchschnitten werden, daß die Wechselswinkel x und y, oder auch der äussere o und der innere y einander gleich sind, oder die beyden innern u und y zusammen 180° machen; so sind die Linien AB und CD parallel“[1353]. Interessant ist, dass Wolff „180°“ statt, wie bei den meisten der von uns betrachteten Autoren üblich, „zwei rechte Winkel“ schreibt. Der Beweis dieses Satzes ist, wie der zum vorherigen Lehrsatz, in drei Teile geteilt.[1354] Zuerst konstruiert Wolff das Lot GK und parallel zu diesem das Lot IH. Durch die Gleichheit der Wechselwinkel x und y sowie der Gleichheit der Grundlinie GH der beiden Dreiecke, die sich durch die Schnittgerade EF ergeben, folgert er, dass die Winkel I und K sowie die Seiten HI und GK übereinstimmen. Wolff beweist also, dass die parallelen Strecken GK und IH die gleiche Länge haben. Da ferner bei I ein rechter Winkel ist, sind die Geraden AB und CD parallel zueinander. Im zweiten Abschnitt zeigt Wolff die Gleichheit der Wechselwinkel x und y mit Hilfe der Gleichheit der Stufenwinkel o und y sowie der Gleichheit der Scheitelwinkel x und

[1346] Vgl. Wolff, AG 1, S. 147.
[1347] Als Parallellineal bezeichnet Wolff ein Instrument, das „aus zwey Linealen AB und CD bestehet, die durch zwey gleich lange Querbänder EF und GH dergestalt zusammen verknüpfet sind, daß sie sich nach Gefallen von einander verschieben lassen“; in: Wolff, AG 1, S. 147 f.
[1348] Vgl. Wolff, AG 1, S. 147 f.
[1349] Wolff, AG 1, S. 151.
[1350] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff AG 1, S. 151 f.
[1351] Den Terminus verwendet Wolff nicht.
[1352] Wolff verwendet den Begriff „Vertikalwinkel“.
[1353] Wolff, AG 1, S. 152.
[1354] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Wolff, AG 1, S. 152 f.

o. Er verweist auf den vorherigen Satz, wo er bereits erwiesen hat, dass zwei Geraden parallel zueinander sind, wenn die Wechselwinkel übereinstimmen. Im dritten Teil des Beweises führt Wolff ebenfalls auf die Ergebnisse des 8. Lehrsatzes zurück, wenn er nämlich zeigt, dass die Stufenwinkel y und o wegen der Nebenwinkel u und o zusammen 180° ergeben.

Klügel würdigt in seiner Dissertation *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi* Wolffs Beweis: Unter den Deutschen habe Wolff mit Hilfe der Abstandsdefinition den Lehrsatz am besten bewiesen.[1355] Kritik an Wolffs Vorgehen kommt von Lambert. In seiner *Theorie der Parallellinien*[1356] schreibt er, dass Wolff mit der Definition der Parallelen als solche, die einen gleichbleibenden Abstand zueinander haben, das Problem nicht gelöst habe.[1357] Außerdem habe Wolff die Definition ohne Beweis oder Erklärung angenommen, was Lambert nicht akzeptiert; man hätte dem Leser aufzeigen sollen, wie er den Begriff abstrahiert habe.[1358]

Wir konnten keine Unterschiede zwischen den unterschiedlichen Auflagen von Wolffs *Anfangs=Gründen* ausfindig machen. Ferner sind die Ausführungen, die wir in Wolffs *Anfangs=Gründen* finden, identisch mit denjenigen in Wolffs *Auszug*. Unterschiede bestehen nur in einer abweichenden Nummerierung der Abbildungen und Lehrsätze.

Wolffs *Mathematisches Lexicon* (1716) enthält das Stichwort „Lineae parallelae, Parallel=Linien", die Wolff als Linien definiert, die immer dieselbe Entfernung voneinander haben.[1359] Weiter schreibt er, dass viele Personen mit dem Beweis zu den Merkmalen der Parallellinien, den Euklid gegeben hat, nicht zufrieden seien, da er eine nicht bewiesene Eigenschaft verwendet habe, die man hätte beweisen sollen. Wolff erwähnt jedoch nicht, um welche Eigenschaft es sich handelt. Er erklärt ferner, er habe sich für einen anderen Beweis entschieden, den man in den Paragraphen 219 ff. in seinen *Elementis Geometriae* findet.

Wir wollen nun einen Blick auf die Paragraphen 219 ff. im ersten Band von Wolffs lateinischem Lehrbuch *Elementa matheseos universae* (1713) werfen, in dem sich die Geometrie unter dem Titel „Elementa Geometriae" befindet. Aus den Erklärungen in diesem Lehrbuch wird ersichtlich, dass Wolff wohl von der Eigenschaft des gleichbleibenden Abstands in seinem *Lexicon* gesprochen hat. Er schreibt zunächst im 33. Lehrsatz mit Bezug auf Fig. 58 (Abbildung 53), dass, wenn HI eine Parallele zu KL ist und BA senkrecht auf KL steht, so steht BA auch senkrecht auf HI, was Wolff mit Hilfe der Kongruenz von Dreiecken zeigt.[1360] In dem darauf folgenden Korollar hält Wolff fest, dass EG, AB und CD Entfernungen von KL von der Gerade HI sind, und umgekehrt, die Gerade HI parallel zu KL ist, und umgekehrt.[1361] Es folgt der Lehrsatz, dass zwei parallele Gerade AB und EF eine dritte parallele Gerade CD zwischen sich haben, was Wolff mit Hilfe von Loten beweist (siehe Abbildung 54).[1362] Anschließend kommt Wolff zu dem Satz, dass, wenn zwei Parallelen AB und CD von einer dritten Geraden EF in G und H geschnitten werden, die Stufen- und Wechselwinkel gleich sind und die inneren Winkel an der Schnittgeraden EF zusammen 180° ergeben (siehe

[1355] Vgl. Klügel, Conatuum, S. 26.
[1356] Erschienen in zwei Teilen: Teil 1 in: LM, 1786, 2. St., S. 137-164; Teil 2 in: LM, 1786, 3. St., S. 325-358.
[1357] Vgl. Lambert, Theorie der Parallellinien. In: LM, 1786, 2. St., S. 145.
[1358] Vgl. Lambert, Theorie der Parallellinien. In: LM, 1786, 2. St., S. 142.
[1359] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Wolff, ML, Sp. 797 f.
[1360] Vgl. Wolff, Elementa, Bd. 1, S. 127.
[1361] Vgl. Wolff, Elementa, Bd. 1, S. 127.
[1362] Vgl. Wolff, Elementa, Bd. 1, S. 127 f.

Abbildung 55).[1363] Der Beweis unterscheidet sich nur ein wenig von dem in Wolffs *Anfangs=Gründen*.

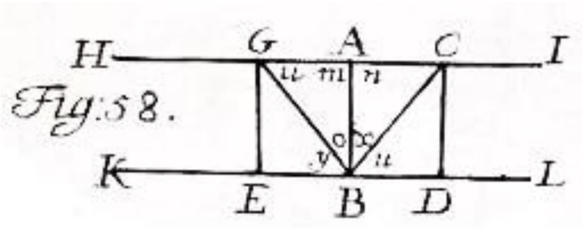


Abbildung 53: Wolff, *Elementa matheseos universae*, Bd. 1, Tab. III, Fig. 58.

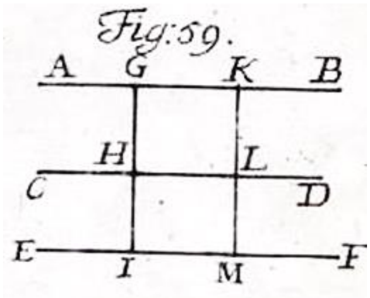


Abbildung 54: Wolff, *Elementa matheseos universae*, Bd. 1, Tab. III, Fig. 59.

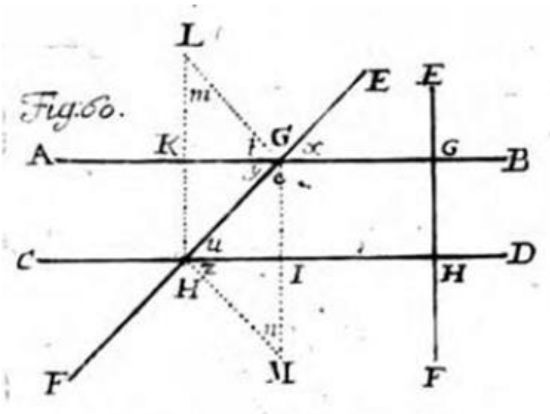


Abbildung 55: Wolff, *Elementa matheseos universae*, Bd. 1, Tab. III, Fig. 60.

Wolff hielt sich bei der Darstellung der Parallelenlehre nicht an Euklids Anordnung. Er veränderte nicht nur die Definition, sondern auch die Reihenfolge der Lehrsätze. Wolff behandelt zwar Euklids Sätze I,27 bis I,29, erwähnt aber weder das Parallelenpostulat, noch die Schwierigkeiten, die mit diesem einhergingen. Lediglich in seinem *Lexicon* merkt Wolff an, dass Euklids Beweis zu den Eigenschaften der Parallellinien mangelhaft sei.

[1363] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, Elementa, Bd. 1, S. 128.

4.3.4 Johann Andreas von Segner

J. W. von Segner übersetzte die *Anfangsgründe der Arithmetick, Geometrie und der Geometrischen Berechnungen* (1764) aus dem lateinischen Lehrbuchs seines Vaters J. A. von Segner. In der Vorrede zur Übersetzung schreibt J. W. v. Segner, dass er bei der Lehre der Parallellinien Verbesserungen und Zusätze miteingebaut habe, die von seinem Vater mitgeteilt oder akzeptiert wurden.[1364]

J. A. v. Segner definiert in seinen *Anfangsgründen* parallele Linien wie folgt: „Zwo in einer Ebene gezogene gerade Linien, welche, man mag sie verlängern wie man will, niemals zusammenlaufen, sind gleichlaufend oder parallel“[1365]. In der zugehörigen Anmerkung schreibt Segner, dass, wenn zwei gerade Linien auf einer dritten geraden Linie senkrecht stehen, sie in ihrer Verlängerung nicht zusammenlaufen können.[1366] Zur Veranschaulichung verweist er auf Fig. 12 (Abbildung 56).

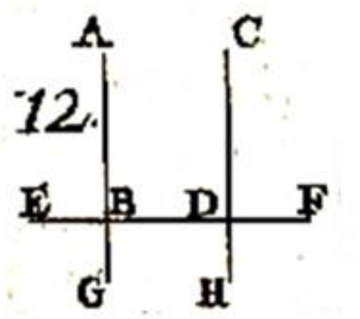


Abbildung 56: Segner, *Anfangsgründe*, Tab. I, Fig. 12.

Anschließend geht Segner auf einige Eigenschaften der Schnittwinkel ein und erklärt, dass, wenn eine Gerade EF zwei Geraden AB und CD schneidet und die Stufenwinkel[1367] ungleich sind, sich die Geraden AB und CD schneiden.[1368] Dies ist äquivalent zu Euklids Parallelenpostulat, mit dem Unterschied, dass Euklid dies nicht für die Gleichheit der Stufenwinkel, sondern für den Fall fordert, wenn die inneren Winkel zusammen kleiner als 180° sind. Kurz darauf formuliert Segner den Lehrsatz, dass, wenn die Stufenwinkel beim Schnitt von zwei Geraden mit einer dritten Geraden gleich sind, die Geraden parallel sind.[1369] Für die Ausführungen zu diesem Lehrsatz verweist Segner auf Fig. 17 (Abbildung 57). Den Lehrsatz beweist er mit der Gleichheit der Scheitelwinkel AGF und EGB, woraus er die Gleichheit der Stufenwinkel AGF und CHF folgert. Anschließend nimmt er die Nicht-Parallelität der beiden Geraden AB und CD an. Diese würden auf einer Seite zusammenlaufen, was die Ungleichheit der Stufenwinkel miteinschließt, was allerdings zu einem Widerspruch zu der Annahme führt. Demzufolge müssten die Geraden parallel sein.

[1364] Vgl. Segner, AG, Vorbericht des Uebersetzers, S. a3^{v}.
[1365] Segner, AG, S. 203.
[1366] Vgl. Segner, AG, S. 203.
[1367] Segner verwendet nicht den Begriff Stufenwinkel, sondern spricht von äußeren und inneren Winkeln.
[1368] Vgl. Segner, AG, S. 204 f.
[1369] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, AG, S. 206.

Abbildung 57: Segner, *Anfangsgründe*, Tab. 1, Fig. 17.

Aus diesem Lehrsatz zieht Segner zwei Folgerungen, die er in „Zusätzen“ formuliert. Erstens seien die Geraden AB und CD parallel, wenn die Wechselwinkel beim Schnitt mit einer dritten Geraden EF gleich sind, was er aus der Gleichheit der Scheitel- und Stufenwinkel herleitet.[1370] Zweitens seien die Geraden AB und CD parallel, wenn die inneren Winkel BGH und GHD beim Schnitt mit einer dritten Geraden EF zusammen 180° ergeben. Zusammen ergeben der Lehrsatz und die beiden Zusätze die Sätze I,27 und I,28.

Anschließend formuliert Segner den Lehrsatz, dass, wenn zwei Linien AB und CD parallel zueinander sind, die Stufenwinkel beim Schnitt mit einer dritten Linie EF gleich groß sind.[1371] Dies ist ein Teil von I,29. Segner beweist den Lehrsatz dadurch, dass, wenn die Stufenwinkel ungleich wären, es zum Schnitt kommen würde.[1372] In der zugehörigen Anmerkung schreibt er, dass man den Lehrsatz auch auf eine andere Art beweisen könne, nämlich, wenn der Grundsatz angenommen werde, dass durch einen gegebenen Punkt nur eine einzige Parallellinie gezogen werden könne, was er mit der Gleichheit beziehungsweise Übertragung der Stufenwinkel erklärt. Dies entspricht I,31, wobei bei Euklid nicht von der Eindeutigkeit der Parallelen die Rede ist.

In den beiden darauffolgenden Zusätzen behauptet Segner, dass beim Schnitt von zwei Parallellinien mit einer dritten geraden Linie EF die Wechselwinkel gleich seien und die beiden Innenwinkel zusammen 180° ergäben.[1373] Diese beiden Zusätze machen zusammen mit dem Lehrsatz den gesamten 29. Satz bei Euklid aus. Segner sieht noch einen dritten Zusatz vor, nämlich dass eine Gerade, die auf einer von zwei Parallelen senkrecht steht, auch auf der anderen senkrecht steht, woraus folgt, dass zwei Geraden, die zu einer anderen Geraden parallel sind, auch untereinander parallel sind.[1374] Die Transitivität paralleler Geraden formuliert Euklid in I,30.

In Segners *Deutlichen und vollständigen Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie* (²1767) finden wir das Kapitel „Parallellinien“[1375] im vierten Abschnitt „Von geraden Linien und Winkeln“ des Lehrbuchs. Zuvor beschreibt Segner einige allgemeine Eigenschaften von Linien und Winkeln. Der Abschnitt „Parallellinien“ beginnt mit § 79, in dem Segner auf § 50 im selben Kapitel verweist, in dem die Parallelität – zunächst noch nicht unter dieser Bezeichnung – aufgegriffen wird, sowie auf Fig. 40 (Abbildung 59): „Wenn demnach an

[1370] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, AG, S. 207.
[1371] Vgl. Segner, AG, S. 207.
[1372] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, AG, S. 207 f.
[1373] Vgl. Segner, AG, S. 208.
[1374] Vgl. Segner, AG, S. 208.
[1375] In: Segner, VL, S. 211-214.

einer geraden Linie EC zwo gerade Linien ED, BA dergestalt liegen, daß sie mit der EC die gleiche Winkel DEC und ABC [Stufenwinkel], deren Oefnungen nach einer Seite zu gekehret sind, einschließen, so können diese Linien ED und BA nicht zusammen laufen, man mag sie von E gegen D, und von B gegen A, verlängern wie man will. Denn, wenn die Linien ED, BA irgendwo zusammen laufen, wie die Linien ED, BA der vorigen 39 Figur [Abbildung 58] in A zusammen kommen, so müssen die Winkel DEC und ABC ungleich seyn, welches demjenigen widerspricht, so von demselben angenommen wird. Wir werden hernach sehen, daß die Linien AB, DE auch nicht an der andern Seite der EC zusammen laufen können"[1376]. Segner erklärt die Parallelität der Geraden damit, dass die Geraden im Falle der Ungleichheit der Stufenwinkel zusammenlaufen müssten. Dieser Satz entspricht einem Teil von Euklids 28. Satz.

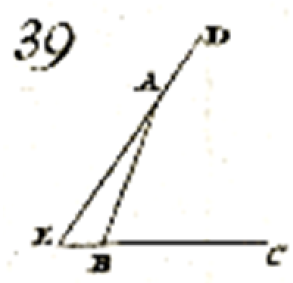


Abbildung 58: Segner, *Vorlesungen*, Tab. II, Fig. 39.

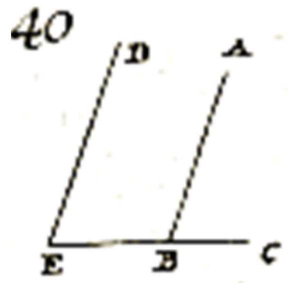


Abbildung 59: Segner, *Vorlesungen*, Tab. II, Fig. 40.

Abbildung 60: Segner, *Vorlesungen*, Tab. II, Fig. 45.

Die folgenden Ausführungen, die dem Abschnitt „Parallellinien" entnommen sind, beziehen sich auf Fig. 45 (Abbildung 60). In § 79 erklärt Segner, dass aus der Gleichheit der Stufenwinkel beim Schnitt von zwei geraden Linien mit einer dritten folgt, dass sich die

[1376] Segner, VL, S. 201 f.

Geraden nicht schneiden.[1377] Hierzu verwendet er Scheitelwinkel. In darauffolgenden Paragraphen benutzt Segner zum ersten Mal die Begriffe „parallel“ und „Parallellinien“ und gibt folgende Definition an: „Gerade Linien aber, welche nicht zusammen laufen, man mag sie auch verlängern wie man will, heißen Parallellinien, oder man pfleget die Lage einer derselben in Ansehung der andern dadurch anzuzeigen, daß man saget, sie sey dieser parallel“[1378]. Interessant ist, dass Segner betont, dass die beiden geraden Linien in einer Ebene liegen müssen.[1379] Er ist der einzige der von uns betrachteten Lehrbuchautoren, der hierfür ein anschauliches Beispiel angibt: Linien würden sich nicht in derselben Ebene befinden, wenn man sich die eine auf einem Tisch, die andere auf dem Boden vorstelle. Solche Linien würden sich niemals treffen, sind aber, da sie nicht in einer Ebene liegen, keine Parallellinien. Segner verwendet nicht den heutzutage üblichen Begriff „windschief“.

In § 81 zieht Segner mit Hilfe der Gleichheit der Stufen- und Scheitelwinkel den Schluss, dass die Geraden parallel zueinander sind, wenn die Wechselwinkel beim Schnitt von zwei Geraden mit einer dritten gleich groß sind.[1380] Dies entspricht I,27 bei Euklid. Segner greift in § 84 den Fall auf, dass die beiden Innenwinkel zusammen 180° ergeben, woraus er die Parallelität der Geraden schließt.[1381] Zusammen mit § 79 bildet dieser Satz den gesamten 28. Satz bei Euklid.

Im Abschnitt „Wie Parallellinien entstehen, und deren Eigenschaften“[1382] greift Segner noch einige Sätze auf, die aus den vorausgegangenen Sätzen folgen. Zunächst gibt er mehrere Möglichkeiten an, wie eine Parallele zu einer gegebenen geraden Linie gezogen werden kann, was durch Winkelübertragung geschieht.[1383] Dies ist vergleichbar mit Euklids Ausführungen in I,31, wobei Euklid die Konstruktion mit Hilfe der Übertragung der Wechselwinkel erklärt. Anschließend geht Segner zu den Eigenschaften von Parallelogrammen über.[1384] Nach diesen Ausführungen stellt er weitere Eigenschaften von Parallellinien vor, beispielsweise dass Parallellinien immer den gleichen Abstand voneinander haben.[1385] Dann heißt es, dass eine Gerade, die eine von zwei Parallelen schneidet, auch die andere schneidet. Daraus folgert Segner, dass durch einen gegebenen Punkt und zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele gezogen werden könne, also die Eindeutigkeit der Parallelen.

In § 188 schreibt Segner mit Bezug auf Fig. 91 (Abbildung 61), dass, wenn zwei Linien AB und CD parallel zueinander liegen und sie von einer dritten Linie EF geschnitten werden, die Wechselwinkel gleich groß sind.[1386] Dies sei die Umkehrung von § 81 (siehe oben) und Segner beweist dies in dem darauffolgenden Paragraphen mit Hilfe eines Widerspruchs, indem er annimmt, dass die Wechselwinkel CEF und EFB ungleich groß sind. Selbst wenn die Wechselwinkel ungleich groß seien, könne man eine Linie EG mit einem gleich großen Winkel wie EFB ziehen, die von der Linie CD verschieden sei. Unter diesen Voraussetzungen

[1377] Vgl. Segner, VL, S. 211.
[1378] Segner, VL, S. 212.
[1379] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 212.
[1380] Vgl. Segner, VL, S. 212.
[1381] Vgl. Segner, VL, S. 213.
[1382] In: Segner, VL, S. 244-257.
[1383] Vgl. Segner, VL, S. 244-246.
[1384] Vgl. Segner, VL, S. 246 f.
[1385] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 247 f.
[1386] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 248 f.

aber müsste GE mit AB parallel sein, aber CD ist ja auch parallel zu AB. Zudem gehen GE und CD durch denselben Punkt, nämlich E. Segner hat aber zuvor gezeigt, dass nur eine Parallele zu einer gegebenen Gerade durch einen gegebenen Punkt gezogen werden könne.

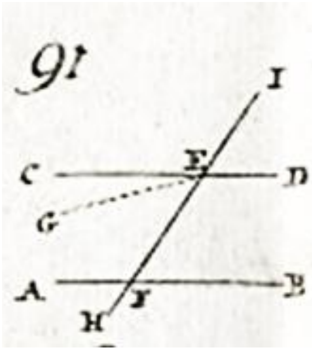


Abbildung 61: Segner, *Vorlesungen*, Tab. IIII, Fig. 91.

Aus diesen Ausführungen zieht Segner in den Paragraphen 190 und 191 den Schluss, dass bei zwei Parallelen, die von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, auch die Stufenwinkel gleich groß sein müssen und die Innenwinkel zusammen 180° ergeben müssen.[1387] Dies macht zusammen mit § 188 Euklids Satz I,29 aus.

Die Transitivität von parallelen Linien begründet Segner damit, dass sie ein gemeinsames Lot besitzen.[1388] In § 194 gibt er an, wie man den Abstand zwischen Parallelen misst, nämlich mit Hilfe der Lote. Anschließend gibt Segner einige Eigenschaften von mehreren Parallelen, die gleich weit voneinander entfernt sind, mit der Schnittgeraden an.[1389] Aus den Eigenschaften der Parallellinien schließt er auf Eigenschaften von Vierecken (Parallelogramme, Quadrate).[1390]

Die Ausführungen zu den Parallellinien in Segners beiden deutschsprachigen Lehrbüchern decken einander. Inhaltlich gibt es zwischen den verschiedenen Auflagen der Lehrbücher keine wichtigen Änderungen. Ein Unterschied zwischen der ersten Auflage der *Anfangsgründe* und der zweiten Auflage (^{2}1773) besteht lediglich in der Reihenfolge einiger Lehrsätze über die Winkeleigenschaften. Auch zwischen der hier verwendeten zweiten Auflage der *Vorlesungen* und der ersten Auflage (1747) können keine inhaltlichen Änderungen ausfindig gemacht werden. Unterschiede bestehen lediglich in der leicht veränderten Wortwahl.

Segners methodisches Vorgehen erinnert stark an das von Euklid. Zwar finden wir in den *Anfangsgründen* nicht das Parallelenpostulat in Euklids Wortlaut, allerdings verwendet Segner eine äquivalente Form und argumentiert mit Stufenwinkel statt – wie bei Euklid – mit Innenwinkeln. Im Gegensatz zu anderen Lehrbuchautoren geht Segner weder auf die Historie, noch auf die Problematik mit den Parallellinien ein. Dies unterscheidet sich von seinen Ausführungen in der Vorrede, die er für das Lehrbuch *Die sechs ersten Bücher der geometrischen Anfangsgründe des Euklides zum Gebrauch der Schulen* (1773) von Johann Friedrich Lorenz (1738-1807) verfasst hat. Dort äußert sich Segner kritisch über das Parallelenpostulat und merkt an, dass dies die einzige Stelle bei Euklid sei, gegen die Einwände erhoben werden

[1387] Vgl. Segner, VL, S. 249 f.
[1388] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 250 f.
[1389] Vgl. Segner, VL, S. 251-253.
[1390] Vgl. Segner, VL, S. 253-257.

könnten.[1391] Segner kritisiert die Einordnung des Postulats, nämlich als elften Grundsatz, als unverständlich und hält es für möglich, dass nicht Euklid das Postulat an diese Stelle gesetzt habe, sondern es erst in späteren Bearbeitungen geschehen sei. Dies begründet er damit, dass Euklid das Parallelenpostulat erst beim Beweis von I,29 benötigte.

Wir können nur vermuten, warum Segner solche Ausführungen nicht in seine Lehrbücher mitaufgenommen hat. Eine mögliche Erklärung ist, dass der Umfang des Lehrbuchs begrenzt war und Segner darauf verzichtete, entsprechende Kommentare einzubauen. Es besteht die Möglichkeit, dass er in seinen Vorlesungen weiterführende Bemerkungen zu dieser Thematik machte, was allerdings durch die unzureichende Quellenlage nicht belegt werden kann.

4.3.5 Heinrich Wilhelm Clemm

Clemm definiert Parallelen in seinem *Mathematischen Lehrbuch* (^{3}1777) wie folgt: „Parallellinien sind, welche, wenn man sie auf beeden Seiten ohne Ende verlängert, niemalen zusammen stosen“[1392]. Zur Erläuterung verweist Clemm auf Fig. 23 (Abbildung 62), aus der hervorgeht, dass Clemm von geraden Linien spricht. Direkt nach dieser Definition erläutert Clemm den Lehrsatz: „Wenn Fig. 23. zwo Linien AB, CD durch eine dritte EF so durchschnitten werden, daß I. die beede innere Winkel n + y zusammen 180°, II. die Wechselswinkel x und y einander gleich, III. der äussere Winkel o dem entgegengesetzten innern y [Stufenwinkel[1393]] gleich ist, so sind die Linien parallel“[1394]. Dieser Lehrsatz entspricht I,27 und I,28. Clemm verwendet die konkrete Größenbezeichnung „180°“ statt, wie bei anderen Autoren, „zwei rechte Winkel“. Er beweist die drei Teile des Lehrsatzes getrennt voneinander.[1395] Für I. nimmt Clemm an, dass die Geraden[1396] zusammenlaufen müssen, wenn die inneren Winkel zusammen kleiner als 180° sind. Im Umkehrschluss müssen die Geraden parallel zueinander sein, wenn die Innenwinkel zusammen 180° ergeben. Dass die Geraden bei der Gleichheit der Wechsel- beziehungsweise Stufenwinkel parallel sind (II und III), zeigt Clemm anhand der Innen- und Nebenwinkel. Für den Beweis von I. verwendet Clemm das Parallelenaxiom, ohne dieses zu benennen.

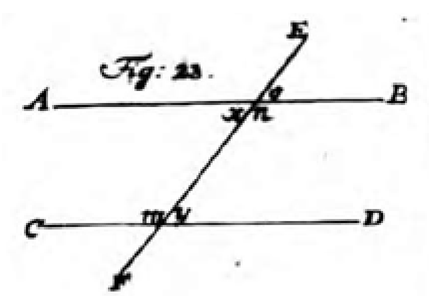


Abbildung 62: Clemm, *Mathematisches Lehrbuch*, Tab. II., Fig. 23.

[1391] Vgl. hierzu und zum Folgenden Lorenz, Vorrede von Segner, S. $a3^r$-$a4^r$.
[1392] Clemm, ML 1, S. 192.
[1393] Diesen Begriff verwendet Clemm nicht.
[1394] Clemm, ML 1, S. 192.
[1395] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 1, S. 192 f.
[1396] Clemm verwendet in seinem Lehrbuch nicht den Begriff „Gerade“, sondern „gerade Linie“.

In dem darauffolgenden Paragraphen finden wir die Umkehrung des Satzes (I,29), nämlich, dass, wenn die Geraden AB und CD parallel sind, die Stufen- und Wechselwinkel gleich groß sind und die inneren Winkel zusammen 180° ergeben.[1397] Die Gültigkeit dieser Umkehrung begründet Clemm durch die „Regeln der Conversion […]; der vorhergehende Lehrsatz ist unmittelbar und directe aus den ersten Gründen der Geometrie in aller mathematischen Schärfe; der zweyte ist Propositio prior conversa, und läßt sich noch auf verschiedene andere Methoden erweisen, wie wir in der Anmerkung zeigen“[1398]. In der erwähnten Anmerkung gibt Clemm einen Einblick in die Problematik des Beweises. Er schreibt, dass der von ihm gegebene Beweis eine leichte Abänderung desjenigen von Euklid sei, erklärt aber nicht, was er geändert hat.[1399] Dafür erwähnt er, dass Wolff einen anderen Beweis gegeben habe, den Clemm kurz wiedergibt. Zwar gibt er nicht an, von welchem Lehrwerk Wolffs er spricht, aber aus dem Vergleich der Ausführungen wird deutlich, dass es der Beweis ist, den Wolff in seinen *Anfangs=Gründen* dargestellt hat. Wolff bewies den Lehrsatz mit Hilfe der Lote, die den Abstand zweier Geraden zueinander anzeigen, und der Kongruenz von Dreiecken. Clemm spricht sich zwar für die Richtigkeit von Wolffs Beweis aus, wendet aber ein, dass Euklids Definition paralleler Linien nur aussage, dass zwei Linien nicht zusammenstoßen, nicht aber, dass die Lote zwischen Parallelen gleich lang sind; dies sei erst eine Folgerung aus dem Beweis.[1400] Man müsste zuvor eine andere Erklärung von Parallelen geben, damit der Beweis richtig ist, nämlich diejenige, dass Parallelen solche Geraden sind, die auf einer anderen Gerade senkrecht stehen – und dies sei bei Euklid nicht zu finden. Interessant ist, dass Clemm am Ende der Anmerkung erwähnt, dass auch ein mechanischer Beweis, also wenn sich die Linie CD in Richtung AB bewegt, möglich sei.

Clemm erwähnt, dass er den Beweis in dieser neuen Auflage seines *Mathematischen Lehrbuchs* abgeändert habe.[1401] Diese Anmerkung finden wir jedoch bereits in der zweiten Auflage (^{2}1768). Dementsprechend muss Clemm den Beweis, den er in der ersten Auflage (1764) des *Mathematischen Lehrbuchs* gegeben hat, modifiziert haben. Die erste Auflage konnte allerdings nicht eingesehen werden, da sie nicht verfügbar war. Ansonsten zeigt der Vergleich der zweiten und dritten Auflage keine Änderungen.

Durch die Anmerkung gibt Clemm einen Einblick in die Problematik zum Beweis des Lehrsatzes, dass, wenn zwei Parallelen von einer dritten Gerade geschnitten werden, die Wechsel- und Stufenwinkel gleich groß sind sowie die inneren Winkel zusammen 180° ausmachen. Allerdings bekommt der Leser den Eindruck vermittelt, als würde Clemm einen vollkommen richtigen Beweis liefern, da er sich nicht kritisch äußert. Für weitere Ausführungen zur Problematik dieses Lehrsatzes verweist er auf Kästners Bemerkungen in dessen *Anfangsgründen* sowie auf Klügels Dissertation.[1402]

Clemm leitet in seinen *Ersten Gründen aller mathematischen Wissenschaften* (^{3}1777) in den „höchstwichtigen Lehrsatz von den sogenannten Parallellinien“[1403] ein, indem er parallele

[1397] Vgl. Clemm, ML 1, S. 193.
[1398] Clemm, ML 1, S. 193.
[1399] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 1, S. 193.
[1400] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 1, S. 193 f.
[1401] Vgl. Clemm, ML 1, S. 194.
[1402] Vgl. Clemm, ML 1, S. 194.
[1403] Clemm, EG, S. 373.

Geraden[1404] wie folgt definiert: „Zwo Linien, welche auf einer dritten perpendicular aufstehen, sind einander parallel; folglich wird sich nach der Natur der Perpendicularlinien keine zur andern neigen, noch auch von ihr sich entfernen“[1405]. Diese Definition impliziert, dass die Winkel an dem Lot 90° groß sind und die Linien gerade sind. Clemm erwähnt nach seiner Definition, dass Euklid Parallelen als solche definiert habe, die weder konvergieren noch divergieren.[1406] Wolff habe sie über den gleichbleibenden Abstand definiert, wobei Clemm die Verbindung zu seiner eigenen Definition zieht, indem er schreibt, dass die Entfernung von zwei Parallelen durch die Lote, die die beiden Parallelen senkrecht schneiden, gemessen werden könne.

Der von Clemm angekündigte wichtige Lehrsatz ist ein Teil von I,29, den er anschließend vorstellt: Bei parallelen Geraden HD und IK, die von einer dritten Linie DE geschnitten werden, sind die Wechselwinkel x und y gleich groß, wobei er sich auf Fig. 12 (Abbildung 63) bezieht.[1407] Clemm beweist den Satz wie folgt: Zwischen die beiden Parallelen HD und IK[1408] soll ein Lot AB errichtet werden, das auf beiden Parallelen senkrecht steht.[1409] Das Lot AB soll in zwei gleich lange Teile geteilt werden, wobei C der Mittelpunkt sei. Anschließend soll durch C eine beliebige Linie ED gezogen werden, die HD und IK schneidet. So entstehen die Dreiecke ECB und ACD. Clemm zeigt dann die Kongruenz der Dreiecke, aus der er schließlich die Gleichheit der Wechselwinkel x und y ableitet.

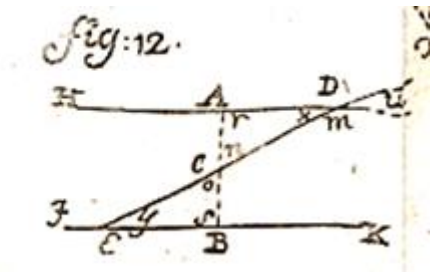


Abbildung 63: Clemm, *Erste Gründe*, Tab. I. Fig. 12.

Aus dem Satz und dem zugehörigen Beweis leitet Clemm zwei Folgerungen ab, die zusammen mit dem Lehrsatz den 29. Satz von Euklid ausmachen: Unter den gegebenen Bedingungen seien die Stufenwinkel[1410] gleich groß und die Innenwinkel ergeben zusammen 180°.[1411] Clemm schreibt, dass er diesen Satz „unumstößlich bewiesen“[1412] habe und aus diesem Grund den Satz umkehren und diese Umkehrung ebenfalls beweisen könne.[1413] Hierbei handelt es sich um I,27 und I,28. Clemm gibt keinen Beweis, verweist aber auf dem in seinem *Mathematischen Lehrbuch*.[1414]

[1404] Clemm verwendet diesen Begriff nicht, sondern schreibt von „Linien“.
[1405] Clemm, EG, S. 373.
[1406] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, S. 373.
[1407] Vgl. Clemm, EG, S. 373 f.
[1408] Im Original steht fälschlicherweise „AK“; siehe Clemm, EG, S. 374.
[1409] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, EG, S. 374 f.
[1410] Clemm verwendet diesen Begriff nicht.
[1411] Vgl. Clemm, EG, S. 375.
[1412] Clemm, EG, S. 375.
[1413] Vgl. Clemm, EG, S. 375.
[1414] Vgl. Clemm, EG, S. 376.

Der Vergleich der hier verwendeten dritten Auflage der *Ersten Gründe* mit den beiden vorherigen Auflagen (1759, ^{2}1769) zeigte, dass Clemm seine Ausführungen über die Parallellinien nicht veränderte.

Clemm gibt in seinen in dieser Untersuchung betrachteten Lehrbüchern unterschiedliche Definitionen paralleler Linien an. In beiden Werken erwähnt er weder, dass die Linien in derselben Ebene liegen müssen, noch, dass es sich um gerade Linien handelt. Letzteres wird hingegen aus den dazugehörigen Abbildungen deutlich und war wohl seinerzeit selbstverständlich.

In seinem *Mathematischen Lehrbuch* hält sich Clemm bei der Darstellung der Lehrsätze zur Parallelenlehre an die Anordnung Euklids und stellt nacheinander I,27 bis I,29 vor. In seinen *Ersten Gründen* hingegen weicht er von dieser Reihenfolge ab: Zuerst stellt er I,29 dar und folgert daraus I,27 und I,28. Clemm formuliert nicht das Parallelenpostulat, wie wir es bei Euklid finden. Er verweist in seinem *Mathematischen Lehrbuch* beim Beweis von I,29 auf die Problematik und auf weiterführende Literatur. Kritische Bemerkungen findet der Leser nicht in den *Ersten Gründen,* wo Clemm lediglich auf die Ausführungen in seinem *Mathematischen Lehrbuch* verweist. Es scheint so, als ob Clemm das Problem mit der Beweisbarkeit der Parallelentheorie nicht vollständig erfasst hat, denn er schreibt in seinen *Ersten Gründen*, dass er I,29 vollkommen bewiesen habe.

4.3.6 Wenceslaus Johann Gustav Karsten

Im ersten Band von Karstens *Lehrbegrif der gesamten Mathematik* (1767) findet der Leser einen separaten Abschnitt „Von den Dreyecken und Parallellinien“[1415]. Karsten definiert parallele Geraden[1416] im Euklidschen Sinne und verweist auf Fig. 42 (Abbildung 64): „Zwo grade Linien AB, CD, die auf einer Ebene eine solche Lage gegeneinander haben, daß die nicht zusammenstossen können, sie mögen auf beyden Seiten so weit man will verlängert werden, heissen Parallele Linien“[1417].

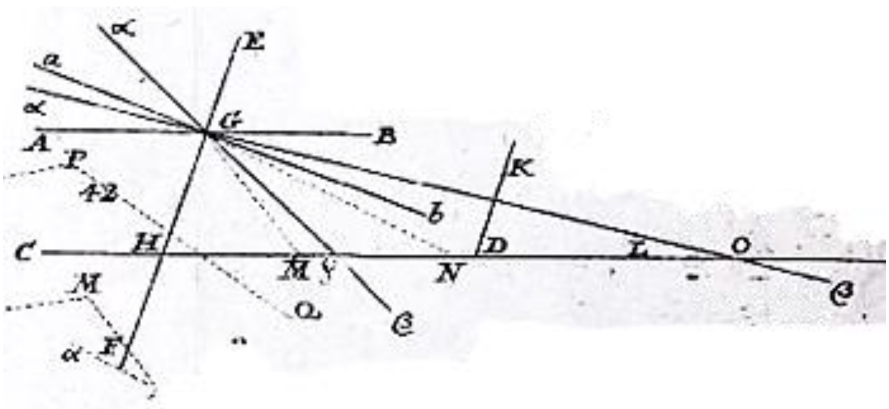


Abbildung 64: Karsten *Lehrbegrif*, Bd. 1, II. Taf., Fig. 42.

[1415] In: Karsten, L 1, S. 235-265.

[1416] Karsten verwendet in seinen Lehrbüchern nicht den Begriff „Gerade“, sondern spricht von „geraden Linien“.

[1417] Karsten, L 1, S. 254. Die Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.

In der zweiten Auflage des Lehrbuchs (^{2}1782) fügte Karsten der Definition hinzu: „Demnach sind solche grade Linien, die in einerley Ebene einerley Lage haben, einander parallel“[1418]. Im Anschluss führt Karsten das Zeichen „#“ ein, welches für die Parallelität gebraucht werde.[1419] Karsten ist somit der einzige der von uns betrachteten Lehrbuchautoren, der ein Zeichen für die Parallelität verwendet. Allerdings hat sich diesen Zeichen nicht durchgesetzt, denn wir verwendet heute das Zeichen „||“ als Ausdruck der Parallelität von Geraden. Weiter heißt es, was einem Teil von Euklids Satz I,28 entspricht: „Wenn zwo grade Linien AB, CD eine dritte EF in G und H so schneiden, daß die beyden inwendigen Winkel EHD, BGF, welche zwischen AB und CD an EF anliegen, zwey rechte Winkel ausmachen: so sind AB, und CD parallel“[1420]. Im Beweis nimmt Karsten an, dass die Geraden AB und CD auf der Seite von B und D zusammenstoßen, so dass ein Dreieck entsteht, bei dem – laut Voraussetzung – die Basiswinkel an der Linie GH jeweils rechte Winkel und somit zusammen 180°[1421] ergeben.[1422] Dies stehe im Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz. Es folgt die Aufgabe, zu einer gegebenen geraden Linie CD durch einen gegebenen Punkt G eine Parallele zu konstruieren.[1423] Dies geschieht bei Karsten durch die Übertragung der Wechsel- oder Stufenwinkel[1424] und entspricht somit I,31.

In Paragraph 82 heißt es: „Wenn die Summe beyder Winkel EHD + bGF < 2 R ist: so ist es wenigstens nicht unmöglich, daß ab die Linie CD, wenn beyde nach b und D verlängert werden, einmahl erreiche und schneide. Denn es könnte wohl ein Dreyeck geben, daß auf GH einer Grundlinie stünde, und dessen übrige beyden Seiten mit Gb und HD einerley wären. Aber auch allemahl wenn die Summe beyder inwendiger Winkel EHD + bGF < 2 R ist: so werden beyde Linien ab und CD verlängert, auf der Seite, wo diese beyden Winkel liegen, zusammen stossen“[1425]. Diese Ausführungen entsprechen Euklids Parallelenpostulat. Interessant ist die Formulierung, dass eine solche Konstruktion „nicht unmöglich“ sei. Diese deutet darauf hin, dass Karsten seine Aussage nicht beweisen kann. Tatsächlich schreibt er, dass seine Ausführungen zu diesem Satz keinen strengen Beweis liefern und man demnach diesen Satz als einen Grundsatz annehmen müsse.[1426] Er verzichtet auf detaillierte Ausführungen zu den Schwierigkeiten, die mit dem Postulat einhergehen und verweist auf Klügels Dissertation. In der zweiten Auflage des *Lehrbegriffs* erwähnt Karsten zudem Hindenburgs Artikel *Ueber die Schwürigkeit bey der Lehre von den Parallellinien*.[1427] Dies zeigt, dass er in seinem Lehrbuch nicht nur auf wissenschaftliche Literatur und somit auf die Forschung verwies, sondern entsprechende Anmerkungen auch aktualisierte.

Karsten gibt keinen Beweis des Parallelenpostulats an, erklärt es aber, mit Bezug auf Fig. 42 (Abbildung 64), wie folgt: Zunächst wird eine Linie αβ konstruiert, die AB in G und CD in γ schneidet.[1428] Zudem liege αβ zwischen GF und Gb. Dreht man die Linie αβ um G, so

---

[1418] Karsten, L 1 (^{2}1782), S. 254.
[1419] Vgl. Karsten, L 1, S. 254.
[1420] Karsten, L 1, S. 254.
[1421] Karsten verwendet in seinen Lehrbüchern die Bezeichnung „zwei rechte Winkel“.
[1422] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. 254 f.
[1423] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. 255.
[1424] Den Begriff „Stufenwinkel“ verwendet Karsten in seinen Ausführungen nicht.
[1425] Karsten, L 1, S. 255 f.
[1426] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. 256 f.
[1427] Vgl. Karsten, L 1 (^{2}1782), S. 256 f.
[1428] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. 256.

entferne sich der Schnittpunkt von αβ und CD immer weiter von H. Gleichzeitig wird der Winkel HGβ immer größer und schließlich größer als HGB, wobei die Linie αβ die Linie CD immer noch schneidet. Demzufolge müsse auch Gb bei Verlängerung CD schneiden. Erst wenn αβ so weit gedreht wird, dass αβ mit AB zusammenfällt, gibt es keinen Schnittpunkt mehr mit CD, da AB und CD parallel zueinander sind. Das Vorgehen erinnert an das von Kästner.[1429]

Der Beweis in der zweiten Auflage des *Lehrbegriffs* unterscheidet sich von dem in der ersten Auflage. Den Grund für diese Abänderung des Beweises nennt Karsten in der Vorrede des Lehrbuchs: „Meine neuesten Versuche, die Theorie von den Parallellinien mehr ins Licht zu setzen, scheinen einigen Beyfall gefunden zu haben: deßwegen habe ich auch hier davon Gebrauch gemacht“[1430]. Nicht nur der Beweis, sondern bereits die Formulierung des Parallelenpostulats ist ein wenig verändert. Zwar sind die Ausführungen der beiden Auflagen äquivalent zueinander, aber in der zweiten Auflage verzichtet Karsten auf den Begriff des Dreiecks.[1431] Da er sich selbst nicht zu dieser Änderung äußert, können wir nur Vermutungen anstellen. Es ist möglich, dass die Erklärung mit Hilfe des Dreiecks die Leser beziehungsweise Zuhörer irritierte. Im Beweis des Postulats verwendet Karsten hingegen auch in der zweiten Auflage Dreiecke (siehe Abbildung 64). Zunächst werden gleich große Stufenwinkel konstruiert, so dass die Innenwinkel, wie Karsten über die Eigenschaft der Nebenwinkel zeigt, zusammen 180° ergeben.[1432] Aus weiteren Winkeleigenschaften schließt er, dass Gb zwischen GF und GB liegt. Nun konstruiert Karsten ein Dreieck HOG, wobei der Winkel GOH, der der Grundseite HG gegenüberliegt, kleiner ist als der gegebene Winkel BGb. Durch weitere Winkeleigenschaften und -beziehungen zeigt er, dass Gb zwischen die Schenkel GH und GO des Dreiecks HGO fällt und, weil die Schenkel die Gerade HD schneiden, auch Gb die Gerade HD schneiden muss. Dies ist interessant, denn mit modernen Augen betrachtet ist dies ein Argument, das das sogenannte Pasch-Axiom verwendet, welches Moritz Pasch (1843-1930) in seinen *Vorlesungen über neue Geometrie* (1882) im zehnten Lehrsatz wie folgt formuliert: „Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkt, D ein Punkt der Geraden AB zwischen A und B, g eine Gerade in der Ebene ABC, welche durch D, aber durch keinen der Punkte A, B, C hindurchgeht, so begegnet g entweder der Geraden AC zwischen A und C oder der Geraden BC zwischen B und C“[1433] (siehe Abbildung 65).

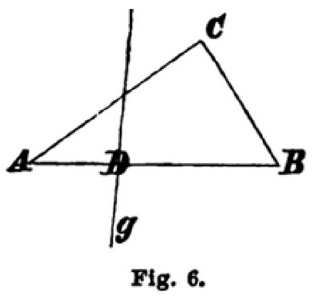


Fig. 6.

Abbildung 65: Pasch, *Vorlesungen*, Fig. 6, S. 25.

[1429] Siehe Kästner, AG 1.1., S. 203-205.
[1430] Karsten, L 1 (^{2}1782), Nachricht wegen der zweyten Auflage, S. **2^v.
[1431] Vgl. Karsten, L 1 (^{2}1782), S. 255.
[1432] Vgl. hierzu und zum Folgenden, Karsten, L 1 (^{2}1782), S. 256.
[1433] Pasch, S. 25.

Die Paragraphen 83 und 84 in Karstens *Lehrbegrif* stimmen mit I,29 überein. In § 83 beschreibt Karsten den Fall, dass, wenn zwei zueinander parallele gerade Linien AB und CD von einer dritten geraden Linie EF in G und H geschnitten werden, die Summe der beiden innen liegenden Winkel, also die Winkel, die zwischen AB und CD an EF liegen, 180° beträgt.[1434] Dies beweist Karsten, indem er annimmt, dass die Linien AB und CD zusammentreffen würden, wenn die beiden Innenwinkel zusammen kleiner als 180° sind. Es handelt sich also um einen Widerspruchsbeweis, wie wir ihn auch in I,29 wiederfinden.

In den drei darauffolgenden Paragraphen folgen Sätze zur Eindeutigkeit der Parallelen, die durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden konstruiert wird, zur Transitivität der Parallelitätsrelation (I,30) sowie der schwache Außenwinkel- und der Winkelsummensatz im Dreieck (I,32).[1435]

Zu Beginn seiner Ausführungen über Parallelen definiert Karsten Parallelen im Sinne Euklids. In § 94 erklärt er sie als Geraden, die durchgängig gleich weit voneinander entfernt sind, wobei er auf Fig. 52 (Abbildung 66) verweist.[1436] Die Äquidistanz zeigt er mit Hilfe der Kongruenz von Dreiecken. Zunächst konstruiert Karsten zwei gleiche Dreiecke EFH und EHG, indem er die Diagonale EH zieht. Er zeigt über die Gleichheit der Winkel EGH = EFH = GHF = 90° und des Schenkels EH die Gleichheit der Seiten GH und EF, die gleichzeitig die Lote sind und den gleichlangen Abstand der Geraden AB und CD anzeigen.

Anschließend stellt Karsten die Umkehrung des Satzes dar: Wenn zwei Entfernungen EF und GH zwischen den geraden Linien AB und CD gleich lang sind, sind die Linien AB und CD parallel.[1437] Der Beweis erfolgt ebenfalls über die Gleichheit von Dreiecken und den entsprechenden Winkeleigenschaften, woraus Karsten schließt, dass alle Entfernungen gleich lang sind. Er unterstellt allerdings, dass alle Punkte, die von CD die gleiche Entfernung zu AB haben, wieder auf einer geraden Linie liegen.

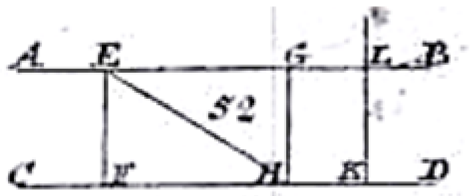


Abbildung 66: Karsten, *Lehrbegrif*, Bd. 1, III. Taf., Fig. 52.

Im ersten Band von Karstens *Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften* (1780) finden wir, wie im *Lehrbegrif*, das Kapitel „Von den Dreyecken und Parallel=Linien"[1438], allerdings weisen die Ausführungen einige Unterschiede zu denen im *Lehrbegrif* auf. Während Karsten im *Lehrbegrif* zunächst Winkel behandelte, beginnt er in seinen *Anfangsgründen* mit den Lagen von Geraden[1439] in einer Ebene. Zunächst schreibt er, dass sich die Lage einer geraden Linie in einer Ebene nur genau angeben lasse, wenn die Lage einer

[1434] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. 257.
[1435] Vgl. Karsten, L 1, S. 258 f.
[1436] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. 264.
[1437] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, L 1, S. 264 f.
[1438] In: Karsten, AG 1, S. 383-414.
[1439] Karsten verwendet nicht den Begriff „Gerade", sondern „gerade Linie".

anderen Geraden in derselben Ebene bekannt sei.[1440] Wenn sich zwei gerade Linien schneiden, so haben sie nicht dieselbe Lage; umgekehrt können sich zwei Geraden, die in derselben Ebene dieselbe Lage haben, nicht schneiden. Zwei Geraden haben auch dann dieselbe Lage, wenn sie von einer dritten Geraden unter demselben Winkel geschnitten werden, aber unterschiedliche Lagen, wenn die Winkel an der Schnittgeraden ungleich sind. Umgekehrt müssen Geraden, die in derselben Ebene dieselbe Lage haben, gleich große Winkel mit der Schnittgeraden bilden.

Anschließend geht Karsten auf Eigenschaften der Winkel im Dreieck ein. Zuerst heißt es, dass der Außenwinkel eines Dreiecks so groß sei wie die beiden gegenüberliegenden inneren Winkel.[1441] Im Beweis geht Karsten von einem Dreieck ABC aus, dessen Seite BC bis zum Punkt D verlängert wird (siehe Abbildung 67). Zunächst hält er fest, dass jeder Winkel im Dreieck kleiner als 180° ist. Es kann eine Linie CF konstruiert werden, die mit CD einen Winkel einschließt, der so groß ist wie der Winkel ABC. Wäre dieser Winkel DCF kleiner als der Winkel ABC, so könne man die Linie CF, welche gleichzeitig ein Schenkel des Winkels DCF ist, so weit in Richtung CB drehen, dass der Winkel DCF schließlich 180° groß wird. Dementsprechend müsste während dieser Drehung die Linie CF in eine solche Lage kommen, dass die Winkel DCF und ABC gleich groß sind. Wenn dies der Fall ist, dann haben CF und BA dieselbe Lage und können sich nicht schneiden, woraus folgt, dass der Winkel DCF kleiner sein muss als der Außenwinkel DCA des Dreiecks. Karsten zeigt, dass der Winkel DCF nur kleiner sein kann als DCA, denn wenn sie gleich groß wären oder DCF größer als DCA wäre, so würde es zum Schnitt zwischen CF und AB kommen. Anschließend verlängert Karsten die Linie FC bis in H und EC bis in G. Er zeigt, dass die Winkel HCG und BAC gleich groß sind (Stufenwinkel), da CF und AB dieselbe Lage haben. Durch die Gleichheit der Scheitelwinkel HCG und ACF sind auch die Winkel BAC und ACF gleich groß (Wechselwinkel). Zusammen mit der Tatsache, dass die Winkel DCF und ABC gleich groß sind, folgert Karsten mit Hilfe der Gleichheit ACF + DCF = BAC + ABC, dass der Außenwinkel ACD so groß ist wie die beiden gegenüberliegenden Innenwinkel BAC und ABC zusammen.

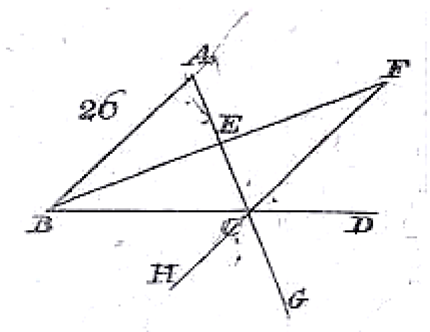


Abbildung 67: Karsten, *Anfangsgründe*, Bd. 1, II. Taf., Fig. 26.

Der darauffolgende Abschnitt (§ 57) besagt, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei rechten Winkeln gleich ist, was Karsten mit Hilfe des vorherigen Satzes beweist.[1442] Diese beiden Sätze bilden zusammen I,32. Karstens Ausführungen über die Lage von Geraden in einer

[1440] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 383-385.
[1441] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt Karsten, AG 1, S. 385 f.
[1442] Vgl. Karsten, AG 1, S. 386 f.

Ebene erinnern stark an die Eigenschaften von Parallelen. Diesen Begriff verwendet Karsten in diesen Ausführungen noch nicht, sondern definiert Parallellinien erst in § 80, nachdem er einige Lehrsätze über Dreiecke formuliert und bewiesen hat, wobei die Ausführungen mit denen im *Lehrbegrif* vergleichbar sind. Die Definition von Parallelen in den *Anfangsgründen* entspricht derjenigen im *Lehrbegrif*.[1443]

Nun geht Karsten auf die Aufgabe ein, wie eine Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt gezogen werden kann.[1444] Der Abschnitt enthält – im Gegensatz zu dem entsprechenden im *Lehrbegrif* – den Zusatz, dass die Geraden parallel sind, wenn zwei Geraden von einer dritten geschnitten werden und die Wechsel- oder Stufenwinkel[1445] gleich groß sind oder die inneren Winkel zusammen 180° ergeben. Diese Ausführungen entsprechen I,27 und I,28. Die Umkehrung – nämlich I,29 – findet man bei Karsten in § 82; er zeigt diese mit Hilfe der Gleichheit der Schnittwinkel und des vorhergegangenen Satzes.[1446]

Es folgt der Satz, dass bei zwei geraden Linien, die in einer Ebene nicht dieselbe Lage haben und von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, die Stufenwinkel ungleich und die Innenwinkel zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind.[1447] Das zeigt Karsten mit Hilfe der Winkeleigenschaften, die er im Rahmen der Lage von Geraden erklärt hat. Diese Formulierung weist eine große Ähnlichkeit zu Euklids Parallelenpostulat auf, wobei Karsten jedoch nicht erwähnt, dass sich die beiden Geraden in einem Punkt treffen. Dies erfolgt erst zwei Paragraphen weiter, wo Karsten schreibt: „Zwo grade Linien ab, CD, die in einerley Ebene nicht einerley Lage haben, schneiden einander nach der Seite verlängert, wo die Summe der innern Winkel, wenn man beyde mit einer dritten EF schneidet, kleiner als die Summe zweener rechten Winkel ist“[1448]. Der Beweis des Postulats entspricht dem Beweis, den Karsten in der zweiten Auflage seines *Lehrbegrifs* gegeben hat (siehe oben).[1449] Karsten erwähnt, dass es sich bei dem Satz um Euklids unbewiesenen Grundsatz handele und es zahlreiche Beweisversuche gebe, die in Klügels Dissertation nachzulesen seien.[1450] Er schreibt auch, dass er selbst den Beweis abgeändert habe und ihn nun für „vollkommen befriedigend“ halte. Neu sind nämlich die Anmerkungen über die Lage von geraden Linien, die zwar nicht bewiesen, aber dennoch offensichtlich seien. Karsten fasst seine Betrachtungen in dem Satz fest, dass parallele Linien in derselben Ebene dieselbe Lage haben.[1451]

In Karstens *Anfangsgründen* finden wir, wie im *Lehrbegrif*, noch eine weitere Erklärung von parallelen Linien, nämlich: „Wenn zwo Entfernungen EF, GH einer graden Linie AB von einer andern CD gleich groß sind: so sind die Linien AB, CD parallel. Wenn dagegen zwo Entfernungen AD, BC (54 Fig.) [Abbildung 68] einer graden Linie DC von der andern ungleich sind, so läuft DC mit AB nach der Seite verlängert zusammen, wo die Entfernung die kleinere ist“[1452]. Den ersten Satz beweist Karsten wie im *Lehrbegrif*.[1453] Für den Beweis

---

[1443] Vgl. Karsten, AG 1, S. 404.
[1444] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 404 f.
[1445] Diesen Begriff verwendet Karsten nicht, sondern schreibt von äußeren und inneren Winkeln.
[1446] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 405 f.
[1447] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 406.
[1448] Karsten, AG 1, S. 407.
[1449] Vgl. Karsten, AG 1, S. 408.
[1450] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 409.
[1451] Vgl. Karsten, AG 1, S. 408.
[1452] Karsten, AG 1, S. 412 f.
[1453] Vgl. Karsten, AG 1, S. 413.

des zweiten Satzes geht Karsten von zwei Parallelen AD und BC aus, die ungleich sind.[1454] Das kürzere Lot BC wird verlängert, so dass BE so lang ist wie AD. Anschließend wird die gerade Linien DE gezogen, so dass AB und DE zwei Parallelen sind und die Innenwinkel an der Geraden AD zusammen zwei rechte Winkel ergeben. Da der Winkel ADC kleiner ist als der Winkel ADE, muss die Linie DC in ihrer Verlängerung mit AB zusammenlaufen.

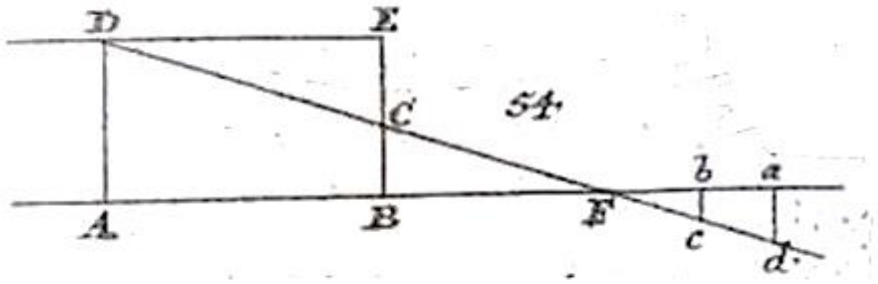


Abbildung 68: Karsten, *Anfangsgründe*, Bd. 1, III. Taf., Fig. 54.

Die Definition von Parallelen als äquidistante Geraden ist insofern problematisch, da man implizit annimmt, dass die Punkte, die von einer geraden Linie gleich weit entfernt sind, wieder auf einer geraden Linie liegen. Dies beweist Karsten am Ende des gesamten Abschnitts (siehe Abbildung 66).[1455] Hierfür nimmt er drei gleich lange Lote EF, GH und LK an, die senkrecht auf der Geraden CD stehen, und schließt aus dem vorhergegangenen Satz, dass die Linie durch E und G mit der Geraden CD parallel sei und die gerade Linie KL in L schneidet, so dass der Punkt L auch auf der Parallelen zu CD liegt. Karstens Beweis impliziert jedoch, dass die zwischen E und G gezogene Linie wirklich eine gerade Linie ist; tatsächlich kann es auch eine Kurve sein, die durch diese Punkte geht.

Auch in Karstens *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe* (²1785) findet der Leser Ausführungen zu den Parallellinien. In der 17. Erklärung führt Karsten aus, dass sich die Lage einer geraden Linie AC in einer Ebene nicht angeben lasse, wenn nicht die Lage einer anderen geraden Linie AB in derselben Ebene bekannt sei.[1456] Dabei werde die Lage der beiden Geraden zueinander durch den Winkel, den die beiden Geraden bilden, bestimmt. Karsten weitet seine Betrachtungen über die Lage von zwei Geraden auf drei Geraden aus und schreibt, dass zwei gerade Linien HC und EF zu einer dritten dieselbe Lage haben, wenn die Schnittwinkel an der dritten Geraden übereinstimmen. Im dazugehörigen Zusatz schreibt er, dass jeder Teil AE einer geraden Linie BE dieselbe Lage habe wie BE. In der ersten Auflage des *Auszugs* (1781) finden wir stattdessen den Zusatz, dass zwei gerade Linien, die einander schneiden, nicht dieselbe Lage haben können; gerade Linien in derselben Ebene und einerlei Lage hingegen schneiden sich nicht.[1457]

Interessant ist, dass Karsten die Stellung der Sätze offensichtlich verändert und sich nicht an Euklids Anordnung gehalten hat, denn bereits nach diesen Ausführungen greift er den starken Außenwinkelsatz und den Winkelsummensatz auf, was I,32 entspricht.[1458]

[1454] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 413.
[1455] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, AG 1, S. 413 f.
[1456] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 69 f.
[1457] Vgl. Karsten, Auszug (1781), S. 67.
[1458] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 70 f.

Der Begriff „parallel“ begegnet uns zum ersten Mal in der 20. Erklärung, wo Karsten parallele gerade Linien wie Euklid erklärt.[1459] Nachdem Karsten in einer „Aufgabe“ gezeigt hat, wie man einen Winkel konstruiert, der gleich groß ist wie ein anderer gegebener Winkel, geht er zu der Aufgabe über, eine Parallele zu einer geraden Linie durch einen gegebenen Punkt zu zeichnen, was mit Hilfe der Stufenwinkel[1460] geschieht.[1461] Dies ist I,31, den er mit Hilfe der Übertragung der Wechselwinkel zeigt. Im ersten Zusatz zu dieser Aufgabe schreibt Karsten, dass, wenn die Wechselwinkel und somit die Scheitelwinkel gleich groß sind, auch die Stufenwinkel übereinstimmen und die beiden Geraden parallel zueinander sind. Im zweiten Zusatz hält er fest, dass, wenn die inneren Winkel zusammen 180° ergeben, auch die Nebenwinkel 180° ergeben, so dass die Stufenwinkel gleich sind: Hieraus schließt er, dass zwei gerade Linien, die auf einer dritten geraden Linie senkrecht stehen, parallel zueinander sind.

Im 15. Lehrsatz formuliert Karsten das Parallelenpostulat von Euklid.[1462] Dieses beweist er wie in der zweiten Auflage seines *Lehrbegrifs* und wie in den *Anfangsgründen*.[1463] Allerdings finden wir keine Anmerkungen über die Schwierigkeiten zum Parallelenpostulat. Im 16. Lehrsatz kehrt Karsten den Satz um: Bei zwei parallelen Geraden, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, ist die Summe der beiden inneren Winkel zusammen gleich zwei rechten Winkeln.[1464] Das beweist er damit, dass das Parallelenpostulat aus dem vorherigen Satz zu einem Widerspruch führt. Im ersten Zusatz fügt Karsten hinzu, dass unter solchen Umständen auch die Stufenwinkel und die Wechselwinkel gleich groß sind. Zusammen entsprechen die Sätze I,29, den Euklid auch mit Hilfe des Parallelenpostulats bewiesen hat. Die darauffolgenden drei Zusätze in Karstens *Auszug* befassen sich mit weiteren Eigenschaften von Parallelen: Erstens, dass eine gerade Linie, die eine von zwei Parallelen schneidet, auch die andere schneidet; zweitens, dass zwei Winkel gleich groß sind, wenn ihre Schenkel parallel zueinander sind; drittens, dass zwei gerade Linien AB und CD, die zu einer dritten EF parallel sind, auch unter sich parallel sind.[1465]

Nach diesen Ausführungen geht Karsten auf Parallelogramme ein, wobei er in vier Zusätzen wieder über Merkmale von Parallelen spricht.[1466] Zunächst heißt es, dass, wenn die Entfernungen EF und GH von einer Geraden AB zu einer anderen Gerade CD gleich groß sind, AB und CD parallel zueinander sind. Umgekehrt gilt, wenn die Entfernungen der Geraden ungleich sind, die geraden Linien AB und CD auf der Seite zusammenlaufen müssen, wo die Entfernung der Linien zueinander abnimmt. Aufgrund dieser Betrachtungen kommt Karsten zu dem Schluss, dass parallele Linien durchgängig den gleichen Abstand zueinander haben. Dies entspricht der Definition von parallelen Linien, wie wir sie bei anderen Lehrbuchautoren, beispielsweise bei Wolff, finden. Allerdings gründet Karsten diese Aussage auf der Annahme, dass die Endpunkte der Entfernungslinien wieder eine gerade Linie bilden.

[1459] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 80.
[1460] Diesen Begriff verwendet Karsten nicht, sondern schreibt von äußeren und inneren Winkeln.
[1461] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 81 f.
[1462] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 82.
[1463] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 82 f.
[1464] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 83 f.
[1465] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 84 f.
[1466] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 85 f.

Karsten äußerte sich nicht nur in seinen Lehrwerken, sondern auch in anderen Schriften über das Parallelenpostulat, unter anderem in seinen *Beyträgen zur Aufnahme der Theoretischen Mathematik* (4 Bde., 1758-1761). Die *Beyträge* sind in vier „Stücken" erschienen und beinhalten Themen zur reinen und angewandten Mathematik. Karsten schrieb diese für Mathematikkundige sowie Studenten, die solche mathematischen Inhalte lernen wollten, für die in den Vorlesungen selbst nicht ausreichend Zeit bleibe.[1467] Im dritten Stück findet man das Kapitel „Von dem 13ten Grundsaz [sic] im 1sten Buch der Elementorum Euclidis"[1468]. Zu Beginn würdigt Karsten den Beweis in Segners *Vorlesungen*, den er selbst für sein lateinisches Lehrbuch *Matheseos Theoretica Elementaris* übernommen habe.[1469] Im weiteren Verlauf der Schrift geht Karsten auf verschiedene Definitionen von parallelen Geraden ein.[1470] Er kritisiert, dass einige Schriftsteller versucht hätten, Euklids Definition zu ersetzen. Der gleichbleibende Abstand von zwei Parallelen sei ein Kriterium, das aus Euklids Definition abgeleitet werden könne. Es sei jedoch schwierig, den gleichbleibenden Abstand für gerade Linien zu zeigen, denn man müsse als Grundsatz annehmen, dass die Punkte, die gleichweit von einer geraden Linie entfernt sind, wieder auf einer geraden Linie liegen. Aus diesem Grund ziehe Karsten die Definition von Euklid vor.

An einer anderen Stelle in seinen *Beyträgen* schreibt Karsten, dass er an der Beweisbarkeit des Parallelenpostulats zweifelte; auch seine Beweisversuche blieben erfolglos: „Die Lehre von den Parallellinien hat mir viele Zeit und Mühe gekostet, weil ich gern für den 13. Grundsatz des Euclides einen Beweis haben wolte, der auf keinen andern Grundsätzen gebauet wäre, als solchen, die seit Euclides Zeiten als Grundsätze in der Geometrie sind gebraucht worden. Allein ich sehe jetzt wohl, daß meine Bemühung bisher noch fruchtlos gewesen ist. […] Und da mich dieses[1471] veranlasset hat, die Sache nochmahl zu überdenken, so fange ich an zu glauben, daß man keinen völlig strengen Beweis aus den Grundsätzen, die sonst bey dieser Lehre nur vorausgesetzt werden, führen könne […]"[1472].

Zum Antritt seiner Professur an der Universität Halle stellte Karsten den *Versuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien* (1778) vor. Karsten selbst hat mehrere Beweisversuche zum Parallelenpostulat unternommen, wobei diese, ebenso wie die Beweisversuche seiner Vorgänger, nicht überzeugend waren.[1473] Karsten benennt die Schwierigkeit, die mit dem Parallelenpostulat einhergeht, richtig, wenn er schreibt, dass Euklids 28. Satz vollkommen bewiesen werden könne, nicht aber die Umkehrung (Satz 29).[1474] Weiter erwähnt Karsten, dass viele Schriftsteller nicht von Euklids Anordnung der Lehrsätze abgewichen seien; auch er selbst wagte keine großen Abweichungen.[1475] Aus dieser Aussage können wir schließen, dass die Lehrbuchautoren des 18. Jahrhunderts noch in der Tradition Euklids standen oder aber ihnen nichts Besseres eingefallen ist. Karsten spricht sich für Euklids Defi-

[1467] Vgl. Karsten, Beyträge, 1. St., Vorrede, S. 4.
[1468] In: Karsten, Beyträge, 3. St., S. 216-244.
[1469] Vgl. Karsten, Beyträge, 3. St., S. 216
[1470] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Beyträge, 3. St., S. 223.
[1471] Gemeint ist wohl die anonym erschiene Rezension zu Karstens Lehrbuch *Praelectiones matheseos theoreticae elementaris* (1758) in: GGA, 1758, 74. St., S. 708-712.
[1472] Karsten, Beyträge, 4. St., S. 286 f.
[1473] Vgl. Karsten, Versuch, S. 10.
[1474] Vgl. Karsten, Versuch, S. 11.
[1475] Vgl. Karsten, Versuch, S. 12.

nition der parallelen Linien aus.[1476] Auf den folgenden Seiten äußert sich Karsten über die Lage von Geraden zueinander. Die Schwierigkeit bei der Lehre der Parallellinien bestehe in dem Begriff der geraden Linien, die sich in derselben Ebene in derselben Lage befinden, wobei der Begriff der Lage zentral sei.[1477] Es komme nur auf die Lage der Linien zueinander, nicht aber auf ihre Länge an. Karsten gesteht, dass der Begriff der Lage von Linien zwar einfach, aber nicht zu erklären sei. Er hält fest, dass man von einer Identität der Größe und einer Identität der Lage sprechen kann, wenn sich die Linien decken. Auf diesen Betrachtungen baut Karsten einen neuen Beweisversuch auf und stellt ihn vor.[1478] Da der Fokus in der vorliegenden Fallstudie auf den Lehrbüchern liegt, wird auf die Darstellung dieses Beweisversuchs verzichtet.

Karsten definiert Parallelen nicht nur im Sinne Euklids, sondern auch als äquidistante Geraden. Der Begriff der Lage von Geraden ist für Karsten von besonderer Bedeutung. Hierauf baut er seine Ausführungen über die Parallelen in den *Anfangsgründen* und in dem *Auszug* auf. Darüber hinaus wird dies auch in seinen *Mathematischen Abhandlungen* (1786) deutlich. Hier finden wir das Kapitel „II. Abhandlung. Von den Parallellinien und den Bemühungen die Theorie davon zu ergänzen“[1479]. Darin schreibt er, dass bisher noch kein zufriedenstellender Beweis des Parallelenpostulats geliefert werden konnte und die Regeln der „Conversion“ nicht ausreichend seien.[1480] Er betont, dass es auf den Begriff der Lage und der Identität beziehungsweise Ungleichheit der Lage ankomme.[1481] Hätte Euklid dies erklärt, so wäre die Parallelentheorie evident.

Während der Arbeit an der vorliegenden Fallstudie stellte sich heraus, dass sich Karsten in seinen Schriften ausgiebig über das Parallelenpostulat äußerte. Ich beschränke mich hier darauf, die wichtigsten Gedanken zu erwähnen, da mein Fokus auf den Ausführungen in den Lehrbüchern liegen soll. Es wird aber deutlich, dass sich Karsten intensiv mit dem Problem der Parallellinien beschäftigte und dass er zahlreiche Beweisversuche unternommen hat. Dies mag der Grund dafür sein, dass wir in seinen drei deutschsprachigen Lehrbüchern unterschiedliche Beweisversuche und damit einhergehend unterschiedliche Anordnungen der Lehrsätze finden. Karsten hielt also die Beweise in seinen Lehrbüchern auf den aktuellen Stand der Forschung. In dem zeitlich früher erschienenen *Lehrbegrif* beweist Karsten das Parallelenpostulat mit Hilfe der Drehung einer Geraden, die in eine andere Gerade so lange schneidet, bis sie zu dieser parallel ist. In der zweiten Auflage des *Lehrbegriffs* sowie in den *Anfangsgründen* und dem *Auszug* beweist er das Postulat durch die Konstruktion eines Dreiecks, wobei eine Gerade, die nicht parallel zu einer anderen Geraden ist, diese schneidet, da sie zwischen die Schenkel des Dreiecks fällt. Dies erinnert uns an das Pasch-Axiom.

[1476] Vgl. Karsten, Versuch, S. 13.
[1477] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Versuch, S. 13 f.
[1478] Vgl. Karsten, Versuch, S. 14-20.
[1479] In: Karsten, Mathematische Abhandlungen, S. 113-202.
[1480] Vgl. Karsten, Mathematische Abhandlungen, S. 117.
[1481] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Mathematische Abhandlungen, S. 129.

4.3.7 Georg Simon Klügel

Klügel nimmt durch seine Dissertation *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (1763) eine besondere Stellung unter den hier betrachteten Lehrbuchautoren ein. Er gibt in dieser Arbeit eine historische Übersicht und setzt sich kritisch mit 28[1482] Beweisversuchen zum Parallelenpostulat auseinander. Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass Kästner einen besonderen Anteil an Klügels Dissertation hatte. Er gab den Anstoß für diese Arbeit, unterstützte Klügel und stellte ihm zahlreiche Quellen zur Verfügung.[1483]

Klügels Dissertation sowie seine Ausführungen über die Parallelen in seinem *Wörterbuch* (siehe Einleitung zum Kapitel „Parallelenpostulat") zeigen, dass Klügel umfassende Kenntnisse zu dem Problem der Parallellinien besaß. Aus diesem Grund ist es interessant zu erfahren, wie Klügel selbst das Thema in seinen *Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie* (²1792) darstellte. Zu Beginn des Geometrie-Kapitels in diesem Lehrbuch findet der Leser zunächst einige Erläuterungen über Winkel und Linien. Parallele Linien erklärt Klügel wie folgt: „Zwey gerade Linien schneiden sich entweder einander oder treffen sich gar nicht, so weit sie auch verlängert werden. […] Wenn sie sich nicht schneiden, so liegen sie entweder in zwey verschiedenen Ebenen, ein Fall, den wir ganz bey Seite setzen, oder sie liegen in derselben Ebene. In diesem Falle heißen sie <u>parallele</u>, oder <u>gleichlaufende Linien</u>"[1484]. Klügel sieht zwei Zustände vor, die bei Geraden in einer Ebene auftreten können, nämlich erstens den Schnitt, zweitens keinen Schnitt. Klügels Definition entspricht der von Euklid.

Die Parallelität von Geraden thematisiert Klügel ausführlicher in „II. Lage der geraden Linien gegeneinander"[1485]. Nachdem er die Neben- und die Vertikal- beziehungsweise Scheitelwinkel erklärt hat, formuliert er in Satz 24 den schwachen Außenwinkelsatz.[1486] Dies entspricht Euklids Satz I,16. Der darauffolgende Satz kehrt, wie Klügel schreibt, diesen Satz um: „Wenn zwey Linien AC, GH von einer dritten DE so geschnitten werden, daß der äußere Winkel HGE größer ist als der innere CAE auf derselben Seite von DE, so schneiden sich diese Linien, wenn sie genugsam verlängert werden, auf eben der Seite von DE, an welcher jene Winkel liegen"[1487]. Dies entspricht sinngemäß Euklids Parallelenpostulat, mit dem Unterschied, dass Euklid die Aussage an den Innenwinkeln festmachte, Klügel hingegen an den Stufenwinkeln[1488].

Klügel schreibt zu den Sätzen 24 und 25, dass der Schnitt von zwei Geraden mit der Ungleichheit der Stufenwinkel einhergehe und umgekehrt.[1489] Dies erläutert er ausführlicher anhand Fig. 6 (Abbildung 69). Er nimmt an, dass der Winkel FAE größer sei als der Winkel CAE. Die Linie FA soll unter Erhaltung des Winkels FAE entlang der Linie AE verschoben werden, was beinhaltet, dass nach und nach immer größere Abschnitte von AF durch AC durchgeschoben werden. Gesetzt den Fall, dass AF so weit verschoben werde, dass sie AC

[1482] In der Literatur ist fälschlicherweise oft die Rede von 30 Versuchen.
[1483] Vgl. Klügel, Conatuum, S. 2.
[1484] Klügel, AG, S. 69. Unterstreichungen entsprechen den Hervorhebungen im Original.
[1485] In: Klügel, AG, S. 72-76.
[1486] Vgl. Klügel, AG, S. 73.
[1487] Klügel, AG, S. 73.
[1488] Klügel verwendet diesen Ausdruck nicht, sondern beschreibt die Lage der Winkel zueinander.
[1489] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, AG, S. 73 f.

nicht mehr schneide, so müsse es einen Punkt geben, in dem der Übergang vom Schneiden zum Nicht-Schneiden geschehe. Aber ein solcher Zustand sei nicht möglich, da es nur den Schnitt oder den Nicht-Schnitt gebe. Diese Beweisidee geht auf Wallis zurück (siehe oben). Euklids Parallelenpostulat gibt Klügel anschließend in Satz 26 an, der dem vorherigen Satz entspreche, nur anders ausgedrückt sei: Sind die inneren Winkel beim Schnitt von zwei geraden Linien mit einer dritten zusammen größer oder kleiner als zwei rechte Winkel, so treffen die Linien auf der Seite zusammen, wo die Winkel zusammen kleiner als zwei rechte Winkel seien.[1490] Der Unterschied zu Euklids Formulierung besteht darin, dass Euklid nur die Relation „kleiner als zwei Rechte" verwendete, Klügel aber zwischen „größer" und „kleiner" unterscheidet. Einen Beweis oder nähere Erläuterungen gibt Klügel nicht an, vermutlich weil, wie er schreibt, die Formulierung äquivalent zu dem vorherigen Lehrsatz ist.

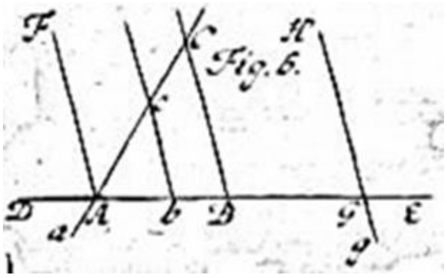


Abbildung 69: Klügel, *Anfangsgründe*, Tab. I, Fig. 6.

Die Sätze 27 bis 29 in Klügels *Anfangsgründen* entsprechen I,27 und I,28 bei Euklid. Klügel formuliert in den einzelnen Sätzen, dass zwei gerade Linien parallel zueinander sind, wenn beim Schnitt von zwei geraden Linien mit einer dritten geraden Linie die Stufenwinkel und die Wechselwinkel gleich sind und die inneren Winkel zusammen 180° ergeben.[1491] Die Gleichheit der Stufenwinkel zeigt Klügel mit Hilfe eines Widerspruchs des schwachen Außenwinkelsatzes. Die Gleichheit der Wechselwinkel wird über die Gleichheit der Stufen- und Vertikalwinkel begründet. Dass die Innenwinkel zusammen 180° ergeben, beweist Klügel mit Hilfe der Stufen- und Nebenwinkel.

Klügels 30. Satz entspricht Euklids Satz I,29, den Klügel mit Hilfe eines Widerspruchs zum Parallelenpostulat aus Satz 25 darlegt, so wie es Euklid auch tat.[1492]

Der Vergleich mit der verfügbaren dritten Auflage der *Anfangsgründe* (^{3}1798) zeigt keinerlei Veränderungen zu der von uns verwendeten zweiten Auflage. Der Vergleich mit der siebten Auflage (^{7}1821), die von Christian Gottlieb Zimmermann (1766-1841) herausgegeben wurde, zeigt ebenfalls keine Änderungen zu der zweiten Auflage. Die erste Auflage war nicht verfügbar und konnte nicht eingesehen werden.

Auffällig in Klügels *Anfangsgründen* ist die Ähnlichkeit im Aufbau zu den Ausführungen in Euklids *Elementen*. Obwohl Klügel durch seine Dissertation einen umfassenden Einblick in die Problematik mit den Parallellinien hatte, was durch seine kritischen Bemerkungen und Ausführungen in seinem *Mathematischen Wörterbuch* noch unterstrichen wird, finden wir in seinem Lehrbuch keine Ausführungen hierzu. Es scheint, als ob Klügel zwischen Lehrinhalten und Forschungswissen trennte. Fraglich ist, ob Klügel in seinen Vorlesungen, bei denen

[1490] Vgl. Klügel, AG, S. 74.
[1491] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, AG, S. 74 f.
[1492] Vgl. Klügel, AG, S. 75.

seine *Anfangsgründe* zugrunde gelegt werden sollten[1493], Anmerkungen oder Ergänzungen in mündlicher Form vornahm. Eine Möglichkeit ist auch, dass Klügel die Leser seines Lehrbuchs nicht überfordern wollte, denn sein Werk wurde auch an Schulen verwendet, wie Klügel selbst in der Vorrede seines Lehrbuchs schreibt.[1494]

4.3.8 Zusammenfassung

Die Lehre der Parallellinien gehört zum Lehrstoff der Elementargeometrie und wird in allen von uns betrachteten Lehrbüchern behandelt. Im Folgenden werden die in der Einleitung entwickelten Fragestellungen zur vorliegenden Fallstudie über die Parallelentheorie zusammenfassend beantwortet

Klügel gibt in seinem *Mathematischen Wörterbuch* drei Definitionen von Parallelen an, nämlich erstens als solche, die sich nicht treffen (Euklid), zweitens als äquidistante Geraden, drittens als Geraden, die gleiche Winkel an einer Schnittgeraden bilden.[1495] Tatsächlich können alle drei Definitionen in den von uns untersuchten Lehrbüchern wiedergefunden werden. Die geläufigste Definition war diejenige von Euklid. Auffällig ist, dass die Autoren, im Gegensatz zu Euklid, den Begriff „unendlich“ nicht verwendeten; gewöhnlich war stattdessen der Ausdruck „so weit verlängern wie man will“. Welche Definitionen die einzelnen Autoren verwendeten, kann nicht nur den vorausgegangenen Ausführungen, sondern auch Anhang 6 entnommen werden.

Einige Autoren bauten in ihre Definitionen die Bemerkung mit ein, dass sich die Parallelen in derselben Ebene befinden müssen. Sturm, Wolff und Clemm verzichten auf diesen Zusatz, obwohl er notwendig ist. Der einzige Autor, der auf die Wichtigkeit dieser Bedingung eingeht, ist Segner, der in seinen *Vorlesungen* mit Hilfe eines anschaulichen Beispiels klar macht, dass Geraden, die nicht in derselben Ebene liegen und sich nicht schneiden, nicht als parallel bezeichnet werden können.[1496] Mit dem Begriff der Ebene hängt der Begriff der Lage zusammen. Diesen erwähnt Segner in der Definition von Parallelen in seinen *Vorlesungen*. Auch Karsten formuliert die Lage von Geraden zueinander in seinen Definitionen von Parallelen.

Das Parallelenpostulat wurde nicht von allen „Anfangsgründe“-Autoren explizit behandelt. Welche Autoren das Parallelenpostulat behandelten ist sowohl den obigen Ausführungen als auch Anhang 7 zu entnehmen. Kästner und Karsten beschrieben in ihren Lehrbüchern das Parallelenpostulat als einen unbewiesenen „Grundsatz“ und erkannten die damit einhergehende Problematik.

Fast allen Autoren scheint der unterschiedliche Status von I,27/28 und I,29 bewusst gewesen zu sein, nämlich dass I,29 vom Parallelenpostulat abhängt und dessen Beweis deswegen problematisch ist. Nur Sturm scheint in seiner *Mathesis Juvenilis* das Problem nicht erfasst zu haben, da er einen alternativen Beweis für die Sätze I,27 und I,28, nicht aber für I,29 angibt. Er sieht – wie auch alle weiteren von uns betrachteten Autoren – I,29 als Umkeh-

[1493] Vgl. Klügel, AG, Vorrede, S. iii.
[1494] Vgl. Klügel, AG, Vorrede, S. v.
[1495] Vgl. Klügel, MW 3, S. 727.
[1496] Vgl. Segner, VL, S. 212.

rung von I,27 und I,28 an. Kästner ist der einzige unter diesen Autoren, der das Parallelenpostulat ausdrücklich als Umkehrung von I,27 und I,28 bezeichnet.[1497] Er zieht I,29 in einem Zusatz zur Erläuterung des Parallelenpostulats heran.

Unmittelbar vor der Betrachtung des Parallelenpostulats stellt Kästner dessen Umkehrung dar, nämlich dass, wenn die Innenwinkel zusammen 180° ergeben oder die Stufen- oder Wechselwinkel übereinstimmen, die Geraden parallel zueinander sind (I,27 und I,28).[1498] Dies beweist er mit Hilfe eines Widerspruchs: Würden die beiden Geraden unter den gegebenen Winkelbedingungen nicht parallel sein, sondern zusammenlaufen, so würde ein Dreieck entstehen, bei dem jedoch die Winkel an der Grundseite – die Innenwinkel – zusammen nicht 180° betragen können. Dies ist jedoch unbefriedigend, weil der Winkelsummensatz vom Parallelenaxiom abhängt. Zum Beweis genügt aber der schwache Außenwinkelsatz, der nicht vom Parallelenaxiom abhängt.

Zur Erläuterung des Parallelenpostulats bedient sich Kästner zweier Methoden, um zu zeigen, dass es im Falle der Nichtparallelität von Geraden immer zu einem Schnitt zwischen ihnen kommt, nämlich erstens der Drehung einer Geraden um einen Punkt („Durchschnittspunct“), zweitens der parallelen Verschiebung in Richtung der anderen Geraden („Punct des Durchschiebens“).

Kästners Methoden finden wir auch in Karstens Lehrwerken wieder, in denen das Parallelenpostulat aufgegriffen wird. In der ersten Auflage seines *Lehrbegrifs* motiviert er dieses mit Hilfe der Drehung einer Geraden um einen Punkt, um zu zeigen, dass diese Gerade die andere Gerade so lange schneidet, bis sie parallel zu ihr ist.[1499] Eine andere Erklärung finden wir in der zweiten Auflage des *Lehrbegriffs* sowie in den *Anfangsgründen* und im *Auszug*. Hier konstruiert Karsten ein Dreieck über einer Geraden, mit dessen Hilfe er zeigt, dass eine andere nicht parallele Gerade, zwischen den Schenkeln des Dreiecks liegt und die Gerade schneidet.[1500]

Sturm behandelt nicht das Parallelenpostulat, sondern I,27 bis I,29. In der *Mathesis Juvenilis* wird I,29 als Umkehrung der anderen beiden Sätze dargestellt, die wiederum über den gleichbleibenden Abstand zueinander sowie der Winkelübereinstimmung bewiesen werden.[1501] In der *Kurtzgefassten Mathesis* gibt Sturm gar keinen Beweis an, sondern weist lediglich darauf hin, wie dieser zu vollziehen sei, nämlich mit Hilfe der Parallelverschiebung der einen Geraden in Richtung der anderen Geraden, wobei die Gleichheit der Winkel bewiesen werden muss, wenn die beiden Geraden zusammenfallen.[1502]

In Wolffs Lehrbüchern wird das Parallelenpostulat nicht explizit erwähnt. I,29 beweist er nach der Konstruktion von Loten zwischen den beiden Parallelen mit Hilfe der Kongruenz von Dreiecken sowie deren Winkelgleichheit.[1503]

Klügel gibt, bevor er das Parallelenpostulat in Euklids Wortlaut erwähnt, eine zu diesem äquivalente Formulierung an, indem er es nicht für die Innenwinkel, sondern für die Stufen-

[1497] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, o. S.
[1498] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., S. 201-205.
[1499] Vgl. Karsten, L 1, S. 256.
[1500] Vgl. Karsten, L 1 (^{2}1782), S. 256.
[1501] Vgl. Sturm, MJ 1, S. 488-490.
[1502] Vgl. Sturm, KM, S. 26.
[1503] Vgl. Wolff, AG 1, S. 151 f.

winkel formuliert.[1504] Klügels Formulierung des Parallelenpostulats begegnet uns bereits in Segners *Anfangsgründen*. Es wird zwar nicht bewiesen, aber mit dessen Hilfe beweist Segner Euklids Satz I,29.[1505] In Segners *Vorlesungen* findet der Leser keine Ausführungen zum Parallelenpostulat. I,29 wird als Umkehrung von I,27 vorgestellt. Für den Beweis wird zunächst angenommen, dass die Wechselwinkel ungleich groß seien.[1506] In diesem Fall könne man jedoch eine Gerade zeichnen, die einen gleich großen Wechselwinkel wie die andere Gerade an der Schnittgeraden bilde. Da es jedoch nur eine Parallele durch einen gegebenen Punkt und zu einer gegebenen Geraden geben könne, führe diese Annahme zu Widerspruch.

Clemm greift in seinen beiden deutschsprachigen Lehrbüchern das Parallelenpostulat nicht auf. In seinem *Mathematischen Lehrbuch* stellt er I,29 als Umkehrung von I,27 und I,28 vor.[1507] In den *Ersten Gründen* wird ein Teil von I,29, nämlich die Aussage über die Wechselwinkel, mit Hilfe der Kongruenz von Dreiecken und der Übereinstimmung der Winkel bewiesen.[1508]

Interessant ist, dass wir nicht in allen eingesehenen mathematischen Lehrbüchern Anmerkungen über die Schwierigkeiten mit der Theorie der Parallellinien finden. Auf die Problematik weisen Sturm in seiner *Mathesis Juvenilis*, Wolff in seinem *Lexicon*, Kästner, Karsten in dem *Lehrbegrif* und den *Anfangsgründen* und Clemm in seiner *Kurtzgefassten Mathesis* hin. Die drei letztgenannten Autoren verweisen zudem auf Klügels Dissertation über das Parallelenpostulat. Neben Kästner äußerte auch Karsten Zweifel an der Beweisbarkeit des Parallelenpostulats.[1509]

Das Fehlen von kritischen Bemerkungen zum Parallelenpostulat in Klügels Lehrbuch spricht gegen die Vermutung, dass die Grenze zwischen Lehre und Forschung im 18. Jahrhundert allmählich verwischte. Ein gegenteiliges Bild liefern uns hingegen Kästner und Karsten. Beide Autoren veröffentlichten neben ihren Lehrbüchern auch Aufsätze über die Parallelenlehre. Kästner sah dabei in seinen Artikel *Ueber den mathematischen Begriff des Raums* und *Was heißt in Euklids Geometrie möglich?* mit einer philosophischen Komponente auf das Thema und versuchte, gewisse Begrifflichkeiten zu klären. Karsten veröffentlichte Beweisversuche und hielt sogar seine Antrittsrede an der Universität Halle über das Problem der Parallellinien. In Kästners und Karstens Lehrbüchern finden wir die meisten Anmerkungen über die Schwierigkeiten mit dieser Thematik sowie Hinweise auf weiterführende Literatur.

Ein interessanter Aspekt wäre es, die Korrespondenz der Mathematiker zu untersuchen, um herauszufinden, ob sie sich über das Parallelenpostulat ausgetauscht haben und so zu neuen Ideen gekommen sind. Da der Fokus der vorliegenden Arbeit hingegen auf der Untersuchung der Lehrbücher liegt, kann dies hier nicht umgesetzt werden, ebenso wenig wie die genaue Analyse weiterer Schriften zur Parallelentheorie.

Über die zu Beginn dargestellten Fragestellungen hinaus haben sich weitere interessante Ergebnisse gezeigt, die im Folgenden geschildert werden. Zunächst lässt sich festhalten, dass die im 18. Jahrhundert verwendete Terminologie mit unserer heutigen übereinstimmen. In den

[1504] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, AG, S. 73 f.
[1505] Vgl. Segner, AG, S. 207.
[1506] Vgl. hierzu und zum Folgenden Segner, VL, S. 248 f.
[1507] Vgl. Clemm, ML 1, S. 193.
[1508] Vgl. Clemm, EG, S. 374 f.
[1509] Vgl. Karsten, Beyträge, 3. St., S. 223.

Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts werden die Begriffe „parallel“ und „gleichlaufend“ benutzt. Einen Unterschied zu heute zeigt sich bei der graphischen Darstellung der Parallelität. Karsten ist der einzige der von uns betrachteten Autoren, der ein Zeichen für die Parallelität, nämlich „#“, in seinen Lehrbüchern eingeführt hat. Allerdings konnte sich dieses Zeichen nicht durchsetzen beziehungsweise halten, denn heutzutage wird die Parallelität von zwei Geraden mit zwei senkrechten Strichen „||“ bezeichnet, während die Raute heute die Kardinalität einer Menge anzeigt. Das Zeichen „||“ erwähnt auch Hindenburg in seinem Artikel über die Parallellinien.[1510] Dies zeigt, dass das Zeichen im 18. Jahrhundert bereits bekannt, aber scheinbar noch nicht populär war, worauf das Fehlen des Zeichens in den Lehrbüchern hindeutet.

Auffällig ist, dass der Begriff „Gerade“ von den hier betrachteten Autoren nicht verwendet wurde. Stattdessen benutzten sie den Begriff „(gerade) Linie“. In den Wörterbüchern von Wolff und Klügel fehlt das Stichwort „Gerade“. Bei Wolff finden wir stattdessen den Eintrag „Linea recta, eine gerade Linie“[1511]. Klügel verweist bei dem Stichwort „Gerade Linie“ auf den Eintrag „Linie“, wo Klügel eine gerade Linie als gleichförmige Linie definiert.[1512] Eine naheliegende Erklärung ist, dass der Begriff „Gerade“ im 18. Jahrhundert noch nicht geläufig, aber die Bedeutung bekannt war, was aus den Ausführungen der Autoren über den Begriff der (geraden) Linie deutlich wird.

Heutzutage werden Winkel meist mit einem kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, was jedoch in den „Anfangsgründen“ des 18. Jahrhunderts nicht der Fall war. Die in diesen mathematischen Lehrbüchern gebräuchliche Form der Winkelbezeichnung war diejenige mit drei hintereinander geschriebenen Großbuchstaben, wobei der mittlere Buchstabe den Scheitel des Winkels anzeigt und die äußeren Buchstaben die Punkte auf den beiden Schenkeln. Während unserer Untersuchung konnten wir feststellen, dass Winkel teilweise auch nur mit einem Großbuchstaben bezeichnet wurden, der dann den Scheitel des Winkels angibt. Eine dritte Möglichkeit war ein kleiner, in dem Winkel eingetragener Buchstabe. Diese drei Möglichkeiten scheinen im 18. Jahrhundert geläufig gewesen zu sein. Kästner erläutert sie in seinem Lehrbuch und illustriert die drei verschiedenen Winkelbezeichnungen (BAC = A = x) anhand Fig. 6 (Abbildung 70).[1513]

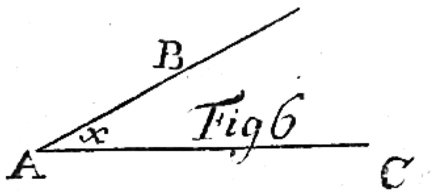


Abbildung 70: Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik*, Tab. I, Fig. 6.

Bei der Betrachtung der Lehrsätze zur Parallelentheorie fiel auf, dass die Autoren unterschiedliche Formulierungen für 180°-Winkel verwendeten. Clemm und Wolff benutzten die Bezeichnung „180°“, während die anderen Autoren von „zwei rechten Winkeln“ schrie-

[1510] Vgl. Hindenburg, Ueber die Schwürigkeit. In: LMN, 1781, 2. St., S. 165.
[1511] In: Wolff, ML, Sp. 806 f.
[1512] Vgl. Klügel, MW 3, S. 447.
[1513] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 182 f.

ben. Die beiden Bezeichnungen scheinen im 18. Jahrhundert nebeneinander existiert zu haben, wobei der Ausdruck „zwei rechte Winkel“ an Euklids Wortlaut erinnert.

Im Gegensatz zum Begriff „Wechselwinkel“ scheint der Begriff „Stufenwinkel“ im 18. Jahrhundert noch nicht bekannt oder zumindest geläufig gewesen zu sein, denn er begegnet uns in keinem der von uns untersuchten Lehrbücher. Die Autoren beschreiben diese Winkel als „äußere und innere entgegengesetzte Winkel“.

Die Fallstudie über Euklids Parallelenpostulat zeigt, dass sich die mathematischen Lehrbuchautoren des 18. Jahrhunderts noch stark an Euklid orientierten. In den „Anfangsgründen“, die mathematische Grundlagen vermitteln sollten, können nicht zwangsläufig kritische Anmerkungen erwartet werden, die einen Einblick in die mathematische Forschung gewähren. Das gelegentliche Vorkommen von Äußerungen zum Problem der Parallellinien und die Hinweise auf weiterführende Literatur deuten allerdings darauf hin, dass im 18. Jahrhundert nicht immer nur Buchwissen, also auswendig zu lernende und nicht zu hinterfragende Inhalte, vermittelt werden sollte, sondern dass man sich nach der Meinung einiger Autoren auch kritisch mit den Inhalten auseinander setzen sollte.

4.4 Fortifikation

Die vierte Fallstudie ist einem Thema aus dem Bereich der angewandten Mathematik gewidmet, nämlich der Fortifikation. Um uns einen ersten Überblick über die Fortifikation zu verschaffen, dient uns Wolffs *Mathematisches Lexicon* (1716), in dem es heißt: „Fortificiren oder befestigen, Ist so viel als einen Ort dergestalt einschliessen, daß der Feind nicht frey hinein dringen kan und Wenige sich gegen Viele mit Vortheile zu defendiren vermögend sind“[1514].

Wie wir in Kapitel 4.1 gesehen haben, wurde die Kriegsbaukunst von den von uns betrachteten Lehrbuchautoren zusammen mit der bürgerlichen Baukunst und der Artillerie in der Regel zu den architektonischen Wissenschaften gezählt. Heute wird die Fortifikation nicht mehr zur Mathematik gerechnet. Es ist auch kein entsprechendes Gebiet, das heutzutage an deutschen Universitäten gelehrt wird. Dies war im 18. Jahrhunderts anders. Durch die Analyse der Vorlesungsverzeichnisse der Universität Göttingen bis 1800, die in den *Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen* (GGA) zu finden sind, konnten wir feststellen, dass es hier ein reichhaltiges mathematisches Lehrangebot gab. Neben Vorlesungen zur reinen und angewandten Mathematik wurden auch zahlreiche Vorlesungen zum Bauanschlag[1515], zur bürgerlichen Baukunst, Kriegsbaukunst, Artillerie und Feuerwerkskunst angeboten. Diese Lehrveranstaltungen wurden nicht nur von Professoren, sondern vor allem auch von Ingenieuren beziehungsweise Architekten gehalten.[1516] Das breite Angebot an militärischen Wissenschaften an der Universität Göttingen ging wohl damit einher, dass ihr Kurator Münchhausen eine Kriegsakademie an die Universität angliedern wollte, so wie man es von Frankreich her kannte.[1517] Im Laufe des 18. Jahrhunderts verringerte sich die Anzahl der Vorlesungen zur Kriegsbaukunst. Stattdessen finden wir in einigen Vorlesungsankündigungen den Hinweis, dass Teile der Kriegswissenschaft auf Verlangen vorgetragen werden konnten.[1518] Vereinzelt gab es auch Vorlesungen, die eine militärische Enzyklopädie beinhalteten.[1519] Unsere Beobachtungen decken sich mit der Aussage Pahls, dass solche Wissenschaften wie Artillerie, Fortifikation und Baukunst allmählich aus dem universitären Unterricht verschwanden.[1520]

Die Fortifikation wurde nicht nur an Universitäten, sondern auch an Ritterakademien gelehrt, wo die mathematischen Wissenschaften, vor allem Architektur, Fortifikation, mathematische Geographie und Mechanik ein hohes Ansehen genossen.[1521]

Wir konnten verschiedene Lehrbücher aus dem 18. Jahrhundert zur Fortifikation ausfindig machen und feststellen, dass ihre Verfasser in der Regel Lehrer oder Ingenieure beziehungsweise Offiziere waren, die sich mit dem Kriegswesen auskannten. Hierzu gehörten Karl

---

[1514] Wolff, ML, Sp. 647.

[1515] Detaillierte Berechnung der Kosten eines Baus; vgl. Pierer, Bd. 3 (1835), S. 70 f.

[1516] Die Kriegsbaukunst planten für das SS 1759 Professor Mayer, Commissarius Müller und Architekt Eberhard. Professor Lowitz kündigte eine Vorlesung zur Kriegskunst an; vgl. GGA, 1759, 41. St., S. 369.

[1517] Vgl. Müller, C. H., S. 76.

[1518] Siehe beispielsweise GGA, 1799, 43. St., S. 427.

[1519] Siehe beispielsweise GGA, 1798, 148. St., S. 1475.

[1520] Vgl. Pahl, S. 215.

[1521] Vgl. Lind, S. 5.

August von Struensee[1522] (1735-1804), Andreas Böhm[1523] (1720-1790), Johann Rudolph Fäsch[1524] (1680-1749) und Gotthard Christoph Müller (?-1803)[1525]. Struensee war Lehrer für Mathematik und Philosophie an der Ritterakademie in Liegnitz und Verfasser der *Anfangsgründe der Artillerie* (1760, ²1769, ³1788) sowie *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst* (3 Bde., 1771-1774, ²1786-1789). Böhm war Professor für Philosophie und Mathematik an der Universität Gießen. Er veröffentlichte 1776 seine *Gründliche Anleitung zur Kriegs-Baukunst* (2 Bde.). Fäsch, Verfasser der *Kurtzen jedoch grund- und deutliche Anfangs-Gründe zu der Fortification* (1725), war „Ingenieur-Major“ wie dem Titelblatt dieses Werks zu entnehmen ist.[1526] Fäsch war Architekt und Architektur-Theoretiker, der im militärischen Dienst stand. Ebenfalls aus dem Titelblatt der *Militärischen Enyklopädie* (1796) können wir ablesen, dass deren Verfasser Müller sowohl „Ingenieur-Major“ als auch Lehrer für Mathematik und Militärwissenschaften an der Universität Göttingen war.[1527]

Die vorliegende Fallstudie befasst sich mit der Frage, wie die Fortifikation in den bekannten mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts dargestellt wurde. Der Fokus liegt dabei auf Kästners *Mathematischen Anfangsgründen*. Die entsprechenden Inhalte werden zuerst vorgestellt. In chronologischer Reihenfolge werden dann die Lehrbücher von Sturm, Wolff, Clemm, Karsten und Klügel untersucht. Am Ende werfen wir noch einen kurzen Blick auf Struensees Lehrbuch zur Fortifikation um herauszufinden, welche Inhalte die mathematischen Lehrbuchautoren übernommen haben und ob und wie weit sie diese reduziert haben.

In unserer Untersuchung wollen wir herausfinden, worauf es bei der Darstellung der Fortifikation ankam und ob bestimmte Tendenzen bezüglich des Umfangs oder Inhalts erkennbar sind. Unsere Fragestellungen lauten wie folgt:

- Wie umfangreich sind die Ausführungen zur Fortifikation?
- Wird die Fortifikation als eigenständiges Kapitel dargestellt?
- Welche Schwerpunkte werden gesetzt? Kommt es auf Begriffserklärungen oder auf die Vermittlung von Fertigkeiten an?
- Was ist das Mathematische bei dem Thema? Gibt es Verweise auf andere mathematische Gebiete?
- Gibt es Verweise auf weiterführende Literatur?
- Gibt es Ausführungen über die Geschichte der Kriegsbaukunst?
- Werden Argumente geliefert, welche belegen, warum das Studium der Fortifikation wichtig ist?

[1522] Zu Struensee siehe Artikel „Struensee, Karl August von“ von Hermann von Petersdorff in: ADB, Bd. 36 (1893), S. 661-665.
[1523] Zu Böhm siehe Artikel „Böhm, Andreas“ von Karl Bernhardi in: ADB, Bd. 3 (1876), S. 61 f.
[1524] Zu Fäsch siehe Artikel „Fäsch, Johann Rudolph“ von Hans Eberhard Scholze in: NDB, Bd. 4 (1959), S. 741 f.
[1525] Das Geburtsjahr ist unbekannt; vgl. Pütter, Bd. 2, S. 142.
[1526] Vgl. Fäsch, Titelblatt.
[1527] Vgl. Müller, G. C., Titelblatt.

4.4.1 Abraham Gotthelf Kästner

In der Vorrede zur ersten Auflage seiner *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* (1759) schreibt Kästner: „Die drey Wissenschaften, welche den Schluß der mathematischen Einleitungen zu machen pflegen, die Artillerie, die Fortification, die Baukunst, lassen sich aus bekannten Ursachen, in den ordentlichen Lehrstunden, welche zum Vortrage der gesammten Mathematik bestimmt sind, gar nicht zulänglich lehren: Und da hier verschiedene geschickte Leute besondern Unterricht darinnen ertheilen, so hielt ich mich desto eher berechtiget, davon nur ganz kurz gleichsam den Innhalt zu erzählen“[1528]. Interessant ist, dass wir aus dem Zitat die damals gängige Einordnung der drei Wissenschaften Artillerie, Fortifikation und Baukunst ableiten können; sie stehen am Ende der mathematischen Lehrbücher. Kästner schreibt einleitend, dass man diese drei Wissenschaften im Rahmen der mathematischen Vorlesungen nicht hinreichend lehren könne. Gründe gibt er an dieser Stelle nicht an, aber seine Ausführungen erinnern uns an die in seinem *Commentarius*, in dem es heißt, dass für die angewandten mathematischen Wissenschaften oft nur ein Semester Zeit bleibe, obwohl man für jede der vier Hauptabteilungen – nämlich die mechanischen, optischen, astronomischen und architektonischen Wissenschaften – mindestens ein halbes Jahr einrechnen müsse.[1529] Zudem geht aus dem obigen Zitat hervor, dass Kästner sich nicht als Fachmann beziehungsweise qualifizierter Lehrer für die Fortifikation sah, denn er erwähnt Personen, die für einen solchen Unterricht geeigneter seien als er selbst. Allerdings erhalten wir keine näheren Informationen darüber, wer diese Fachmänner waren und wo sie lehrten.

Bezüglich der Darstellung der Artillerie, Fortifikation und Baukunst erinnert Kästner erneut in der Vorrede zur dritten Auflage des zweiten Bandes seiner *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*: „Warum ich von der Artillerie, und Baukunst für Krieg und Frieden, nur so wenig gesagt habe, ist schon in der Vorrede zur ersten Ausgabe gemeldet worden. Ganz wollte ich davon nicht schweigen, damit es nicht aussähe als rechnete ich diese Känntnisse nicht zur Mathematik, die für Manche allein Mathematik sind. Auch denke ich, meine kurzen Nachrichten enthalten wenigstens so viel als jeder Gelehrte von diesen Dingen wissen muß um nicht oft lächerlich zu werden“[1530]. Es wird deutlich, dass Kästner die Fortifikation nicht im vollen Umfang darstellte, sondern eher ein Wissensfundament gab, welches zu Konversationszwecken dienen sollte. Auf diese Weise rechtfertigt er, wieso das Studium der Fortifikation wichtig ist. Dass die Fortifikation in erster Linie zu Konversationszwecken gelehrt wurde, war nicht ungewöhnlich für seine Zeit.[1531] Dass Kästner jedoch nicht vollkommen auf die fraglichen Inhalte verzichtete, ist ein Indiz dafür, dass er mit seiner Lehre der mathematischen Wissenschaften auf Universalgelehrtheit abzielte. Gebildete Personen sollten zumindest Grundkenntnisse aus allen Bereichen der Mathematik besitzen. So erhielten Kästners *Anfangsgründe* einen enzyklopädischen Charakter.

Weiter schreibt Kästner, dass bei der Fortifikation, Artillerie und Baukunst nicht alles mathematisch sei, sondern einige Inhalte zur Naturgeschichte und chemischen Physik gehörten,

[1528] Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, o. S.
[1529] Vgl. Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 41 f.
[1530] Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. vi.
[1531] Vgl. Hohrath, Mathematik für den Kriegsstaat. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 113.

aber auch Sitten, Lebensarten und Bedürfnisse miteinfließen würden.[1532] Aus der Mathematik seien die Geometrie und die Mechanik involviert, daher müssten die drei Wissenschaften zu den mechanischen Wissenschaften gezählt werden. Da Kästner allerdings die Fortifikation, Artillerie und Baukunst nur als einen Anhang wiedergibt, werden sie nicht im Rahmen der mechanischen Wissenschaften, sondern separat betrachtet.

Das Kapitel zur Fortifikation in Kästners *Anfangsgründen der angewandten Mathematik. Der mathematischen Anfangsgründe II. Theil, II. Abtheilung* ([4]1792) umfasst 13 Seiten mit 30 Absätzen und zwei Abbildungen.[1533] Auffällig ist, dass Kästner die einzelnen Absätze nicht mit „Erklärung“, „Lehrsatz“, „Zusatz“ und dergleichen bezeichnet, wie wir das in den Kapiteln finden, die gemäß der mathematischen Lehrart aufgebaut sind.[1534] Kästners Ziel scheint zu sein, die wichtigsten Grundlagen der Fortifikation zu vermitteln. Dabei zeigt er die Zusammenhänge auf, um das Verständnis beim Leser zu wecken. Zu Beginn des Kapitels zur Fortifikation erklärt er, dass es bei dieser darum gehe „zu zeigen, wie ein Ort dergestalt könne befestiget werden, daß sich darinnen wenig gegen viel, die ihn belagern, mit Vortheile wehren können“[1535]. In den beiden darauffolgenden Absätzen heißt es, dass eine Festung so aufgebaut sein solle, dass die Angreifer Nachteile haben, die Besatzung der Festung jedoch Vorteile, wobei Kästner auch geeignete Geschütze zur Verteidigung erwähnt.[1536] In diesem Zusammenhang spricht Kästner zum ersten Mal von konkreten Daten, nämlich dass die sogenannten Werke[1537] einer Festung so weit auseinanderliegen sollten, wie ein Musketenschuss[1538] reicht, nämlich 60 rheinländische Ruthen.[1539] Kästner leitet von der Art der Angriffe den Aufbau der Festungen ab, woraus hervorgeht, dass die Kriegsbaukunst eng mit der Artillerie zusammenhängt und die Art des Aufbaus einer Festung von den Geschützen beeinflusst wird.

Im fünften Absatz erklärt Kästner den Unterschied zwischen der regulären und der irregulären Fortifikation.[1540] Erstere wird angewandt, wenn die natürlichen Gegebenheiten um eine Festung herum gleich sind und demzufolge keine Seite der Festung verstärkt werden muss, um sich gegen Angriffe zu schützen. Wenn die natürliche Beschaffenheit es jedoch erfordert, dass eine Seite der Festung verstärkt werden muss, so müsse man eine andere Befestigungsart wählen, nämlich die irreguläre. Im ersten Fall wird als Grundriss der Festung ein reguläres Vieleck gewählt. An dieser Stelle verweist Kästner auf die 18. Erklärung in dem Geometrie-Kapitel: „Ein ordentliches Vieleck (regulare) […] hat lauter gleiche Seiten und Winkel: andere heißen unordentliche […]“[1541]. Kästner äußert sich nicht zur der Frage, ob das Vieleck,

[1532] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. vii.
[1533] Siehe Kästner, AG 2.2., S. 571-583 und Tab. XIIII [sic].
[1534] Dasselbe trifft auch auf die Kapitel zur Artillerie und zur Baukunst zu.
[1535] Kästner, AG 2.2., S. 571.
[1536] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 571 f.
[1537] Irritierend ist, dass Kästner die von ihm erwähnten Werke an dieser Stelle nicht erläutert, sondern erst in einem späteren Absatz. Hier weicht Kästner von seiner Methode ab, gemäß deren er zunächst alle Grundbegriffe erklärt. Werke sind Gebäude, die in den Winkeln des Vielecks, das der Festung zugrunde liegt, angelegt werden und über die Winkel hinausgehen; vgl. Kästner, AG 2.2., S. 575 f. Auf diese Weise können die Verteidiger einer Festung die Angreifer von allen Seiten sehen und sich gegen sie verteidigen. „ONAFE“ ist ein solches Werk (siehe Fig. 2 in Abbildung 71).
[1538] Eine Muskete ist ein langes Gewehr.
[1539] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 572.
[1540] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 2.2., S. 572 f.
[1541] Kästner, AG 1.1., S. 186.

das als Grundriss für die reguläre Fortifikation gewählt wird, konvex oder nicht-konvex sein muss, allerdings können wir aus dem Zusammenhang schließen, dass es sich um ein nicht-konvexes Vieleck handeln muss.

Die Absätze 6 bis 8 befassen sich mit dem Wall, dessen Bestandteilen und deren Funktionen.[1542] Kästner gibt einige Maße an und erklärt seine Ausführungen anhand einer Abbildung des Profils eines Walls (Fig. 1 in Abbildung 71). In Abschnitt 10 geht er auf die unterschiedlichen Verhältnisse der äußeren und inneren Böschung – das ist die äußere beziehungsweise innere Schräge eines Walls („MN" und „DC" in Fig. 1 in Abbildung 71) – zur Höhe des Wall selbst ein.[1543] Der Wall dürfte insgesamt nicht zu hoch gemacht werden, da sonst die Angreifer nicht mit Stückfeuer[1544] beschossen werden könnten.[1545]

Im 12. Abschnitt erklärt Kästner die Bollwerke, die an den Winkeln des Polygons errichtet werden, sowie ihre einzelnen Bestandteile anhand des Umrisses eines Ausschnitts einer regulären Festung (Fig. 2 in Abbildung 71).[1546] Danach geht er auf den Mittelwall und die Facen[1547], ihre Funktionen sowie optimale Höhen ein.[1548] Dasselbe gilt für die sogenannten Flanken, die zur Verteidigung der jeweils gegenüberliegenden Facen dienen.[1549] Hier verweist Kästner auf das Werk *Architecturae Militaris* (1688) von Johannes Teyler.

Es folgt eine geometrische Betrachtung, denn Kästner schreibt, dass durch die Spitzen der Bollwerke, die an den Winkeln des regulären Vielecks errichtet werden, welches als Grundriss für die reguläre Fortifikation dient, ein anderes Vieleck geht, welches ähnlich zu dem Vieleck des Grundrisses ist, und benennt die einzelnen Bestandteile.[1550]

In Absatz 19 findet der Leser wieder eine Höhenangabe, und zwar die der sogenannten beständigen Defenslinie („AH" in Fig. 2 in Abbildung 71), die zur Verteidigung der Facen dient.[1551] Diese soll laut Kästner nicht über 60 Ruthen hoch sein, wobei er erwähnt, dass Vauban[1552] eine Höhe bis 75 Ruthen erlaubt. Dies ist die einzige Stelle, an der Kästner namentlich auf einen bekannten Festungsbauer verweist.

Im darauf folgenden Absatz greift Kästner bei der Betrachtung diverser Winkel wieder auf die Geometrie zurück, um an Polygon- und Mittelpunktswinkel zu erinnern.[1553] Allerdings ist der hier gegebene Verweis „23. Satz 13. Zus." fehlerhaft, was vermutlich nur durch einen Druckfehler zustande kommt, denn die Zusätze 1 und 3 des 23. Satzes behandeln die beiden angegebenen Winkelarten.[1554]

[1542] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 573 f.
[1543] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 574 f.
[1544] Stücke sind große Geschütze, aus denen Kugeln abgefeuert werden; vgl. Kästner, AG 2.2., S. 557.
[1545] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 575.
[1546] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 575-577.
[1547] Facen sind sogenannte Gesichtslinien, die dazu dienen, den Feind in der Ferne zu beschießen; vgl. Kästner, AG 2.2., S. 576 f. Siehe „FA" und „AN" in Fig. 2 (Abbildung 71).
[1548] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 577.
[1549] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 2.2., S. 577 f.
[1550] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 578 f.
[1551] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 2.2., S. 579.
[1552] Sébastien Le Prestre de Vauban (1633-1707) war ein französischer Festungsbauer; vgl. Artikel „Vauban, Sébastien Le Prestre De" von Henry Guerlac in: DSB, Bd. 13 (1976), S. 590-595.
[1553] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 579.
[1554] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 242.

Die Abschnitte 21 bis 24 befassen sich mit dem Graben, der um eine Festung gebaut wird, dessen Funktion und Maße.[1555] Danach erklärt Kästner die Minen; das sind unterirdische Gruben, in denen die Belagerer Sprengpulver deponieren, um die darüber befindlichen Werke in die Luft zu sprengen und sich so Zutritt zur Festung zu verschaffen.[1556]

Im Absatz 26 geht Kästner darauf ein, wie die verschiedenen Manieren[1557] der Fortifikation zustande kommen.[1558] Hierbei beschreibt er nicht konkrete Manieren, sondern verweist auf L. Chr. Sturms *Architectura militaris hypothetico* (1720), Benjamin Hederichs *Progymnasmata Architectonica, oder Vor-Übungen in beyderley Bau-Kunst* (1757) und Albrecht Ludwig Friedrich Meisters (1724-1788) Artikel *De variis architectorum conatibus optimam munimenti formam ope analyseos definiendi* (1779) in der lateinischen Zeitschrift der Göttinger Sozietät der Wissenschaften *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*.

In Kästners Lehrbuch finden wir keine detaillierten Ausführungen zur irregulären Fortifikation. Er beschränkt sich auf die Aussage, dass es hierfür keine allgemeinen Regeln gebe, man aber bei den Proportionen der Linien und Winkel so wenig wie möglich von der regulären Fortifikation abweichen solle.[1559] Am Ende seiner Ausführungen zur Fortifikation verweist Kästner für gründlichere Kenntnisse auf weiterführende Literatur: Struensees *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst*, Böhms *Gründliche Anleitung zur Kriegs-Baukunst* sowie einzelne, nicht näher benannte Aufsätze im *Magazin für Ingenieure und Artilleristen*.[1560]

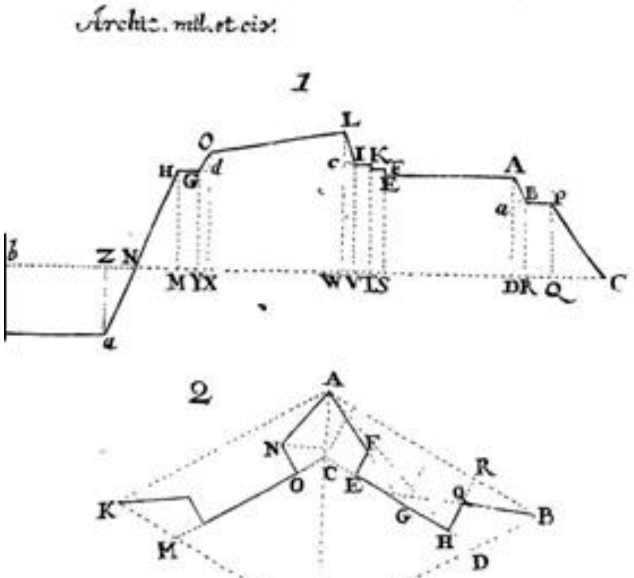


Abbildung 71: Kästner, *Anfangsgründe der angewandten Mathematik, II. Abtheilung*, Tab. XIIII.

[1555] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 579-581.
[1556] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 581.
[1557] Manieren sind Stile des Festungsbaus. Verschiedene Manieren unterscheiden sich in erster Linie im Grundriss der jeweiligen Festung; vgl. Hohrath, Mathematik für den Kriegsstaat. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 122.
[1558] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 2.2., S. 582.
[1559] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 582.
[1560] Vgl. Kästner, AG 2.2., S. 583.

Bei der Fortifikation gibt es inhaltlich keine Unterschiede zwischen den vier Auflagen der *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*. Der einzige Unterschied besteht darin, dass Kästner die Inhalte um neu erschienene Literatur ergänzte.

Im Gegensatz zu anderen Kapiteln in Kästners *Anfangsgründen* wird die Fortifikation nur kurz dargestellt. Kästner beschränkt sich auf die Vermittlung von allgemeinen Kenntnissen. Der Leser bekommt in aller Kürze verschiedene Bestandteile einer Festung, ihre Funktionen sowie die Hintergründe erklärt, worauf es beim Festungsbau ankommt und welche Umstände zu beachten sind. Zur Veranschaulichung dienen zwei Abbildungen. Interessant ist, dass Kästner bei der Benennung der einzelnen Bauteile hinter die Begriffe auch die französischen Namen in Klammern gesetzt schreibt. Dies zeugt davon, dass die Fortifikation ein Thema war, bei dem Frankreich seinerzeit eine führende Stellung einnahm. Im Laufe des 18. Jahrhunderts scheint der Bereich der Fortifikation im deutschsprachigen Raum wichtiger geworden zu sein. Das zeigt nicht nur die von Kästner angegebene Literatur, sondern vor allem die Etablierung einer Fachzeitschrift für Ingenieure und Artilleristen.

In Kästners Darstellung der Fortifikation findet der Leser nur wenige mathematische Ausführungen. Bei einigen Bestandteilen einer Festung gibt Kästner Maße und Proportionen an. An zwei Stellen verweist Kästner auf entsprechende Sätze in der Geometrie, und zwar bei den Begriffen des Polygons sowie des Polygon- und Mittelpunktswinkels. Diese Verweise dienen der Erinnerung an bereits behandelte Inhalte. Konkrete Berechnungen nimmt Kästner nicht vor.

4.4.2 Johann Christoph Sturm

In Johann Christoph Sturms *Kurtzgefasster Mathesis* (1717) wird die Fortifikation unter dem Titel „Kriegs=Bau=Kunst“[1561] vorgestellt. Das Kapitel umfasst neun Seiten und 20 Abbildungen. Sturm gab seinen Ausführungen die Form von sogenannten „Tabellen“. Das Kapitel über die Fortifikation enthält sechs solcher Tabellen, die mit Unterkapiteln gleichgesetzt werden können. Deren Überschriften lauten wie folgt:

- „I. Tabell. Grund=Lehren von der Kriegs=Bau=Kunst. Tab. I. Von denen vornehmsten Nahmen und Tabellen / welche zum Grund= und Auff=Riß derer Festungen gehören“
- „II. Tabell. Von dem Grund=Riß der grossen und kleinen Royal“
- „III. Tabell. Von der Kriegs=Bau=Kunst. Von dem Grund= und Auff=Riß derer Aussenwercke“
- „IV. Tabell. Von Befestigung derer ungleichen und ungeschickten Oerter“
- „V. Tabell. Von denen Feld=Schantzen / Lauff=Gräben / Verschantzungen / u.s.w.“
- „VI. Tabell. Von etlichen neuen Festungs=Arten“.

Im ersten Unterkapitel befasst sich Sturm mit den Namen verschiedener Linien und Winkel des Grundrisses und den Linien des Profils einer Festung. Hier finden wir nicht nur die deutschen, sondern auch die französischen Begriffe. Sturm verweist auf Abbildungen, an denen er die einzelnen Bestandteile einer Festung erläutert. Beachtenswert ist, dass wir auch Abbildungen finden, die perspektivisch gezeichnet sind (siehe Abbildung 72).

[1561] In: Sturm, KM, S. 41-50.

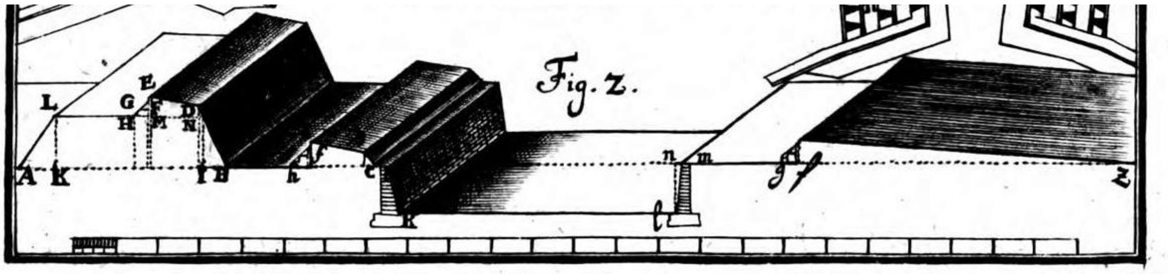


Abbildung 72: Sturm, *Kurtzgefasste Mathesis*, 1. Tafel zur Militärarchitektur, Fig. 2.

Sturm ergänzt seine Ausführungen durch Tabellen, die Angaben zu den Längen der Linien und den Größen der Winkel von einzelnen Bauteilen der Festung enthalten (siehe Abbildung 73). Am Ende des ersten Unterkapitels beschreibt Sturm, wie man selbst solche Tabellen erstellen beziehungsweise Maße berechnen kann, wofür, wie er selbst betont, Kenntnisse in der Trigonometrie wichtig seien.[1562]

II. Täffelein derer vornehmsten Winckel.

		V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Der Mittel-Puncts-Winckel.	A Z B	72	60	51. 25	45	40	36	32 44	30
Der Kehl-Winckel.	B A F	108	120	128. 35	135	140	144	147 16	150
Der Bollwercks-Punct.	H A G	60	65	73. 35	80	85	89	92 16	95
Der Winckel der Cortin mit der Streich-Linie.	H t h	24	27. 30	27. 30	27. 30	27. 30	27. 30	27. 30	27. 30
Der Winckel der Schulter mit der Streich-Linie.	H m I	90	85	85	85	85	85	85	85

Abbildung 73: Sturm, *Kurtzgefasste Mathesis*, S. 43.[1563]

Im zweiten Unterkapitel widmet sich Sturm dem Grundriss eines sogenannten Royals, was der französische Begriff für eine reguläre Festung ist.[1564] Er beschreibt, wie man den Grundriss eines Royals auf dem Papier erstellen kann. Hierbei unterscheidet er einerseits zwischen einem großen, andererseits zwischen einem mittleren und kleinen Royal. Bei den Ausführungen zum großen Royal erklärt er in zehn Schritten, wie man eine Festung in Form eines regulären Fünfecks konstruieren kann. Ausgangspunkt hierfür bilden die Maße aus einer bestimmten Tabelle (Abbildung 73), die maßstabsgetreu übertragen werden sollen. Zur Konstruktion eines mittleren beziehungsweise kleinen Royals schreibt Sturm, dass diese wie bei einem großen Royal geschehe, man jedoch die verschiedenen Maßstäbe zu berücksichtigen habe. Diese könne man mit Hilfe der Arithmetik, vor allem mit Hilfe des Dreisatzes („Regel Detri“) oder der Geometrie berechnen. Am Ende gibt Sturm vier Regeln an, wie der Platz innerhalb einer Festung einzuteilen ist.

[1562] Vgl. Sturm, KM, S. 43.
[1563] Die römischen Zahlen in den Spalten stehen für die Seitenanzahl des Vielecks.
[1564] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, KM, S. 43 f.

In der dritten „Tabell“ stellt Sturm den Grundriss und das Profil von Außenwerken vor.[1565] In sechs Abschnitten beschreibt er verschiedene Arten von Außenwerken. Zum Schluss erläutert er in sechs kurzen Abschnitten, wie man eine Zitadelle anlegen soll.

Das vierte Unterkapitel handelt von der irregulären Fortifikation, wobei Sturm nicht den Begriff „irregulär“ verwendet, sondern nur von „ungleichen Seiten und Winkeln“ schreibt.[1566] In fünf Abschnitten erklärt er, wie man bei ungleichen Seiten und Winkeln, auswärts gekehrten Winkeln, zu spitzen Winkeln, zu großen und zu kleinen Linien fortifiziert, wobei er arithmetische und geometrische Berechnungen vornimmt.[1567]

Im nächsten Unterkapitel werden in sieben Abschnitten sämtliche Arten von Schanzen, Umschanzungen, Laufgräben, Batterien, Sappen, Mühlen und verdeckte Gänge, sowie Minen und Pulverkammern vorgestellt.[1568]

Im letzten Unterkapitel behandelt Sturm die Manieren, also die unterschiedlichen Stile der Fortifikation der französischen Festungsbauer Pagan[1569] und Vauban[1570].[1571] Auch hier sind die Ausführungen durch Abbildungen und Tabellen ergänzt. Nicht erst in diesem Kapitel, sondern bereits in vorherigen Ausführungen verweist Sturm auf unterschiedliche Manieren, als er sich über Maße einzelner Bestandteile äußert.[1572]

Für Sturms *Kurtzgefasste Mathesis* können wir festhalten, dass Sturm viele Grundbegriffe erklärt. Seine Ausführungen werden von zahlreichen, teils sehr detaillierten Abbildungen und Tabellen mit Maßangaben begleitet. Sturm betont die Wichtigkeit der Geometrie, der Trigonometrie und der Arithmetik für Berechnungen im Rahmen des Festungsbaus und zeigt, wie man eine Festung auf dem Papier entwerfen kann.

In Sturms *Mathesis Juvenilis* (^{2}1710/14) ist das Kapitel über die Fortifikation umfangreicher als in seiner *Kurtzgefassten Mathesis*. Es umfasst 183 Seiten und ist in 160 Abschnitte eingeteilt.[1573] Zu dem Kapitel gehören 51 Abbildungen. Das Kapitel ist unterteilt in „eine kurtze Vorbereitung / zu der Kriegs=Bau= oder Befestigungs=Kunst“[1574] und drei „Abtheilungen“, welche verschiedene „Capitel“ beinhalten. Die Abteilungen lauten wie folgt:

- „Die erste Abtheilung Der Befestungs=Bau=Kunst / Worinnen verschiedener Manieren Haupt=Risse nach einerley Methode zu reissen / angewiesen wird“
- „Die andere Abtheilung. Worinnen die völlige Verzeichnung der übrigen Grund=Linien an den oben=beschriebenen Manieren angezeiget wird“
- „Die dritte Abtheilung. Worinnen die Aussen=Wercke / die Irregular-Fortification, und endlich die Feldschantzen in so viel besondern Capiteln abgehandelt werden“.

Sehr interessant ist das Titelblatt, welches in die Fortifikation einweist und diese erklärt: „Die Kunst zu befestigen / Oder Die auf Erhaltung der Sicherheit Menschlicher Gesellschafften

[1565] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, KM, S. 45 f.
[1566] Vgl. Sturm, KM, S. 46.
[1567] Vgl. Sturm, KM, S. 46 f.
[1568] Vgl. Sturm, KM, S. 47-49.
[1569] Blaise-François Pagan (1604-1665) war Ingenieur und ein bekannter Festungsbauer; vgl. Artikel „Pagan, Blaise-François“ von Charles Weiss in: Biographie universelle, Bd. 32 (1822), S. 358-360.
[1570] Siehe Fußnote 1552.
[1571] Vgl. Sturm, KM, S. 49 f.
[1572] Vgl. Sturm, KM, S. 44 und 46.
[1573] Siehe Sturm, MJ 1, S. 606-788.
[1574] In: Sturm, MJ 1, S. 606-614.

eingerichtete Mathesis, Welche insgemein Fortificatoria Oder Kriegs=Bau=Kunst benennet wird / Worinnen Insonderheit angewiesen wird / wie man alle bißher erfundene Manieren zu befestigen / aus einerley Grund und nach einerley Art verzeichnen könne“[1575]. Sturm stellt dadurch nicht nur seinen Schwerpunkt vor, den er in diesem Kapitel legt, nämlich die verschiedenen Manieren, sondern betont vor allem den Nutzen der Fortifikation, die zur Sicherheit der Menschen dient.

Die „kurtze Vorbereitung“ zur Fortifikation umfasst zehn Absätze.[1576] Hier geht Sturm zunächst auf die Geschichte der Fortifikation ein und beschreibt die ersten Befestigungsarten, die aus Zäunen und später aus Mauern bestanden.[1577] Im Folgenden erklärt er, wieso diese Arten der Befestigung nicht ausreichend gewesen seien und welche Lösungen man in Form von neuen Teilen einer Festung gefunden habe.[1578] Bei diesen Ausführungen benennt er bereits einzelne Bestandteile einer Festung und verwendet neben den deutschen auch die französischen Begriffe. Zur Veranschaulichung dienen Abbildungen. Im weiteren Verlauf geht Sturm auf verschiedene Teile des Walls und der damit verbundenen Linien ein.[1579] Danach stellt er die Frage, ob diese vorgestellte Art der Fortifikation – in diesem Fall die niederländische – beliebt und unkritisiert sei.[1580] Erstes bejaht er, zweites verneint er und verweist auf neue Arten der Fortifikation, die er in den ersten beiden Abteilungen des Kapitels darstellen werde.

Die erste „Abtheilung“ umfasst zwölf Kapitel und handelt von den Umrissen einer Festung.[1581] Zunächst gibt Sturm im ersten „Capitel“ einen Überblick über die unterschiedlichen Arten, wie man Festungen zeichnen kann, wobei er auf die französische, italienische und niederländische Manier eingeht.[1582] In den darauf folgenden Kapiteln stellt Sturm verschiedene Manieren vor: Niederländische Manier, Manieren nach Melder, de Ville, Reyher, Pagan, Rusenstein, Vauban, Blondel, Scheither, Rimpler.[1583] Die einzelnen Kapitel sind ähnlich aufgebaut. In jedem Kapitel beziehungsweise zu jeder Manier gibt Sturm eine Anleitung wie man einzelne Bestandteile einer Festung auf dem Papier zeichnen kann. Dabei erklärt er einige Bauteile, gibt sowohl die deutschen als auch die französischen Namen an und verweist er auf Abbildungen. Er nimmt geometrische Berechnungen der notwendigen Linien und Winkel vor, wobei er die Rechenschritte mit Worten erklärt und die Ergebnisse dann – wie in seiner *Kurtzgefassten Mathesis* – in Tabellenform festhält.[1584] Dieses Vorgehen bringt zwei Vorteile mit sich, nämlich erstens, dass man den Entstehungsprozess der Tabellen, also die geometrischen Berechnungen, schrittweise verfolgen und verstehen kann, zweitens, dass die Ingenieure insofern von den Tabellen profitieren, da sie sich nicht mit Berechnungen aufhalten müssen, sondern sie die Tabellen für konkrete Konstruktionen verwenden können.[1585] In seinen Ausführungen nimmt Sturm auch Bezug auf die Schriften der einzelnen

---

1575 Sturm, MJ 1, S. 605.
1576 Siehe Sturm, MJ 1, S. 606-614.
1577 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 607 f.
1578 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 608-611.
1579 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 612 f.
1580 Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 613 f.
1581 Siehe Sturm, MJ 1, S. 615-708.
1582 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 615-620.
1583 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 620-708.
1584 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 620.
1585 Vgl. Sturm, MJ 1, S. 632 f.

Festungsbauer und verweist auf entsprechende Passagen, über die sich Sturm kritisch äußert.[1586]

Die zweite Abteilung umfasst neun Kapitel, in denen separat voneinander folgende Manieren zu Grundrissen und Profilen einer Festung vorgestellt werden: Niederländische Manier, Manieren nach Pagan, Rusenstein, Vauban, Blondel, Scheither, de Ville und Mallet, eine neue unbekannte Manier und die Manier nach Rimpler.[1587] Die einzelnen „Capitel" sind so aufgebaut, wie wir sie in den Erläuterungen zur ersten „Abtheilung" beschrieben haben.

In den drei Kapiteln der dritten Abteilung stellt Sturm weitere Teile einer Festung vor, nämlich Grundrisse und Profile von Außenwerken, und geht auf die irreguläre Fortifikation sowie auf Feldschanzen ein.[1588] In dieser Abteilung liegt der Fokus auf der Erklärung von Begriffen rund um diese Themen. Wir finden nur noch vereinzelt Rechnungen und Aufgaben, beispielsweise wie man ein Bollwerk auf einer irregulären Figur zeichnen kann, wozu Sturm eine arithmetische und eine geometrische Lösung angibt.[1589] Weil in der gesamten dritten „Abtheilung" nicht mehr viele Berechnungen vorhanden sind, finden wir nur noch eine Tabelle zum Grundriss und zum Profil von Außenwerken.[1590]

Am Ende des gesamten Kapitels zur Fortifikation gibt Sturm noch eine „Zugab".[1591] Hier schreibt er, dass er sein Lehrbuch nicht nur für die „Jugend", sondern auch für „Jünglinge"[1592] geschrieben habe. Für die letztere Personengruppe würden gewisse Inhalte beziehungsweise Kapitel der Fortifikation, die Sturm detailliert angibt, zunächst ausreichen. Am Ende verweist er auf das Werk[1593] seines Sohnes L. Chr. Sturm, in dem ein Register der Autoren zur Zivil- und Kriegsbaukunst zu finden sei.

Der Vergleich der beiden hier betrachteten Lehrwerke von Sturm zeigt große Unterschiede. Die Ausführungen zur Fortifikation in der *Mathesis Juvenilis* sind umfangreicher als in der *Kurtzgefassten Mathesis*. Beim erstgenannten Werk, das in erster Linie für Schüler an Gymnasien geschrieben wurde und Aufgaben für die einzelnen Klassen enthält, legt Sturm den Fokus auf die Darstellung der unterschiedlichen Manieren zum Festungsbau. Wir finden zahlreiche Berechnungen und Tabellen vor. In seinem Lehrbuch *Kurtzgefasste Mathesis*, das sich an Anfänger im Allgemeinen richtet, befasst er sich weniger mit den Manieren verschiedener Festungsbauer und legt stattdessen den Fokus auf die Erklärung der einzelnen Bestandteile einer Festung. Er verwendet in beiden Lehrwerken nicht nur die deutschen, sondern auch die französischen Namen. In der *Kurtzgefassten Mathesis* finden wir nicht viele konkrete Berechnungen, aber Sturm gibt dennoch einige Tabellen mit Maßangaben an. Es scheint ihm hier darauf anzukommen, dass der Leser tatsächlich eine solche Festung auf dem Papier konstruieren kann.

[1586] Vgl. beispielsweise Sturm, MJ 1, S. 707.
[1587] Siehe Sturm, MJ 1, S. 708-763.
[1588] Siehe Sturm, MJ 1, S. 763-787.
[1589] Vgl. Sturm, MJ 1, S. 771-773.
[1590] Vgl. Sturm, MJ 1, S. 768.
[1591] Vgl. hierzu und zum Folgenden Sturm, MJ 1, S. 787 f.
[1592] Mit „Jünglingen" sind wohl Kinder gemeint.
[1593] Hierbei handelt es sich um Leonhard Christoph Sturms „Vade Mecum Architectonicum bestehend in neu ausgerechneten Tabellen zu der Civil- und Militar-Baukunst" (Amsterdam, 1700).

4.4.3 Christian Wolff

Im zweiten Band von Wolffs *Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschaften* (^{9}1775) findet man die Fortifikation unter der Überschrift „Anfangs=Gründe der Fortification oder Kriegs=Baukunst“ auf insgesamt 144 Seiten plus einer zweiseitigen Vorrede.[1594] Die Ausführungen umfassen 356 Absätze mit 26 Lehrsätzen, 61 Erklärungen, 59 Aufgaben und zahlreichen Beispielen, Zusätzen und Anmerkungen. Wolff verweist in seinen Ausführungen auf 42 Abbildungen, die auf 13 Kupfertafeln verteilt sind. Das Kapitel ist in fünf Unterkapitel eingeteilt:

- „Der erste Theil, von den Grundregeln der Fortification“
- „Der andere Theil der Fortification, von Verschiedenen Manieren zu fortificiren“
- „Der dritte Theil der Fortification, von der Irregulären Fortification, den Citadellen und Feldschantzen“
- „Der vierte Theil der Fortification, von dem würcklichen Baue der Festung“
- „Der Fünfte und letzte Theil der Fortification, von den Attaquen und der Gegenwehre wider dieselben“.

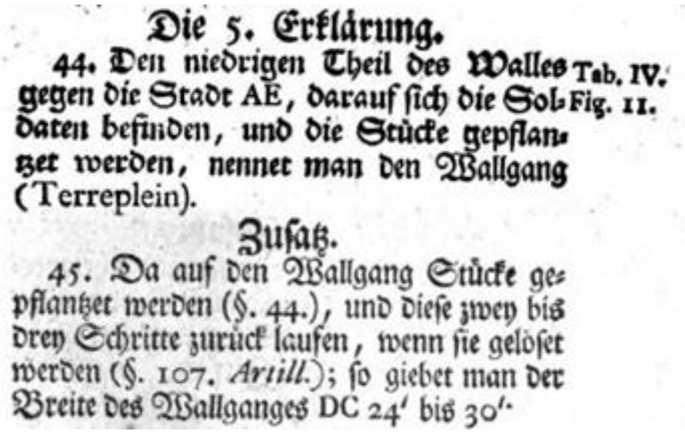
Ein Vergleich der verschiedenen Auflagen der *Anfangs=Gründe* zeigte, dass Wolff seit der zweiten Auflage (^{2}1716/17) keine Änderungen mehr vorgenommen hat.[1595] Auf die Unterschiede zwischen der hier verwendeten Auflage und der ersten Auflage (1710) werden wir an den entsprechenden Stellen eingehen. Insgesamt konnten wir feststellen, dass die Ausführungen in der ersten Auflage umfangreicher sind und das Kapitel zur Fortifikation dort 405 Absätze, also 49 Absätze mehr umfasst.

In der Vorrede zur Fortifikation unterrichtet Wolff den Leser darüber, dass er die Grundregeln der Fortifikation sowie die geläufigsten Manieren erkläre.[1596] Er schreibt zudem, dass man mit Hilfe der Geometrie und Trigonometrie alle Winkel und Linien berechnen könne, die für die Erbauung einer Festung notwendig seien. Er stellt also bereits in der Vorrede den Bezug zur Mathematik her, so dass der Leser erkennt, welche mathematischen Kenntnisse für die Fortifikation wichtig sind. Wolff verlangt, dass der Leser des Lehrbuchs die enthaltenen Beispiele nachrechnet.[1597]

Im ersten Unterkapitel erklärt Wolff zahlreiche Begriffe rund um die Fortifikation. Mit 174 Abschnitten ist es das umfangreichste der fünf Unterkapitel, in dem wir 42 Erklärungen, 22 Lehrsätze, zahlreiche Zusätze, Anmerkungen und eine Aufgabe finden. In den Erklärungen erläutert Wolff zahlreiche Begriffe, die mit dem Festungsbau zusammenhängen, und geht auf deren Funktion ein. An einigen Stellen findet der Leser auch Maßangaben zu den einzelnen Bauteilen (siehe Abbildung 74). An diesem Beispiel erkennt man besonders die Charakteristika von Wolffs Vorgehen. Zu Beginn wird ein Begriff beziehungsweise ein Bestandteil einer Festung sowie dessen Funktion erklärt. Wolff nennt nicht nur die deutschen, sondern auch die

[1594] Siehe Wolff, AG 2, S. 595-740.
[1595] Der einzige Unterschied besteht in der fehlerhaften Nummerierung der Absätze in der zweiten Auflage, wo Wolff den Absatz 347 überspringt. Dasselbe trifft auch auf die dritte Auflage (^{3}1725) zu. Die richtige Nummerierung finden wir spätestens ab der fünften Auflage (^{5}1737/38). Die vierte Auflage (^{4}1731) konnte nicht eingesehen werden, da es nicht verfügbar war.
[1596] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, AG 2, S. 595 f.
[1597] Vgl. Wolff, AG 2, S. 596.

französischen Bezeichnungen. Einige der Ausführungen sind begleitet von konkreten Maßangaben. Neben den theoretischen Ausführungen verweist Wolff auf eine Abbildung, so dass sich der Leser die Inhalte veranschaulichen kann. Darüber hinaus verweist Wolff auf bereits behandelte Inhalte und auf die entsprechenden Paragraphen. Stellenweise nimmt er in seinen Ausführungen auch Bezug auf verschiedene Manieren und nennt die Namen der jeweiligen Festungsbauer.[1598] Diese Verweise beziehen sich auf bestimmte Bauteile und Maßangaben. Erst im zweiten Unterkapitel werden die konkreten Manieren vorgestellt.


Die 5. Erklärung.

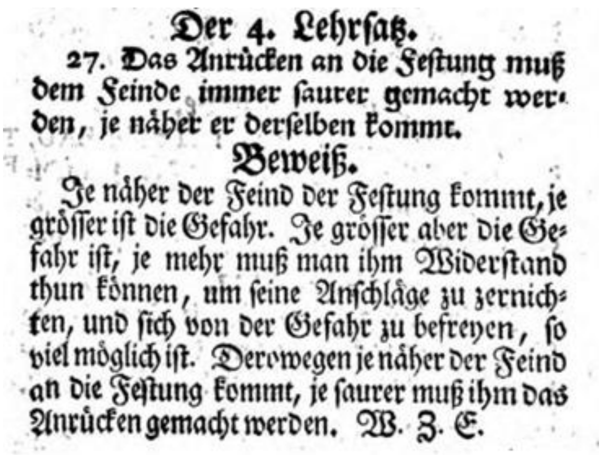
44. Den niedrigen Theil des Walles gegen die Stadt AE, darauf sich die Soldaten befinden, und die Stücke gepflanzet werden, nennet man den Wallgang (Terreplein). Tab. IV. Fig. 11.

Zusatz.

45. Da auf den Wallgang Stücke gepflantzet werden (§. 44.), und diese zwey bis drey Schritte zurück laufen, wenn sie gelöset werden (§. 107. *Artill.*); so giebet man der Breite des Wallganges DC 24′ bis 30′.

Abbildung 74: Wolff, *Anfangsgründe*, Bd. 2, S. 609.

Besonders die „Lehrsätze“ weckten unsere Aufmerksamkeit. Hierbei handelt es sich nicht um mathematische Lehrsätze, sondern um Regeln. Die dazugehörigen Beweise können als Rechtfertigung beziehungsweise Begründung für die Lehrsätze angesehen werden (siehe Abbildung 75).


Der 4. Lehrsatz.

27. Das Anrücken an die Festung muß dem Feinde immer saurer gemacht werden, je näher er derselben kommt.

Beweiß.

Je näher der Feind der Festung kommt, je grösser ist die Gefahr. Je grösser aber die Gefahr ist, je mehr muß man ihm Widerstand thun können, um seine Anschläge zu zernichten, und sich von der Gefahr zu befreyen, so viel möglich ist. Derowegen je näher der Feind an die Festung kommt, je saurer muß ihm das Anrücken gemacht werden. W. Z. E.

Abbildung 75: Wolff, *Anfangsgründe*, Bd. 2, S. 604.

Wolff beschränkt sich nicht nur auf die reine Vermittlung von Fakten, sondern stellt auch konkrete Berechnungen dar, die wir in den „Aufgaben“ finden (siehe Abbildung 76). Auch hier gibt es Verweise auf Abbildungen und Paragraphen beziehungsweise Inhalte aus der

[1598] Siehe beispielsweise den Verweis auf Rimpler; vgl. Wolff, AG 2, S. 606.

Geometrie und Trigonometrie, die notwendig für Berechnungen im Rahmen der Fortifikation sind.

Die 1. Aufgabe.

25. Aus dem gegebenen Winkel EAD, den die Defenslinie AD mit der secundirenden EA machet, und der Länge der secundirenden EA, ihre Stärcke zu finden. Tab. I. Fig. 1.

Auflösung.

Es ist nöthig, daß ihr die secundirende Linie suchet, welche mit eben dieser Defenslinie AD einen rechten Winkel macht (§. 24.). Derowegen sprechet:

Wie der Sinus totus
zu der gegebenen Länge der Linie AE:
So verhält sich der Sinus des gegebenen Winkels
zu der gesuchten Perpendicularlinie AB (§. 44. *Trigon.*).

Z. E. Es sey AE 48°, EAD, folgends BEA (§. 97. *Geom.*) 57°36′.

Log. Sin. Tot.	10.0000000
Log. AE	1.6812412
Log. Sin. AEB	9.9265112
Log. AB	11.6077524, dem in den Tabellen am nächsten kommt 40° 5′ 2″.

Anmerckung.

26. Man rechnet für jedes Stücke 12′; für jeden Soltaden 4′.

Abbildung 76: Wolff, *Anfangsgründe*, Bd. 2, S. 603 f.

Im Vergleich der hier verwendeten neunten Auflage und der ersten Auflage der *Anfangs=Gründe* fällt auf, dass sich die Ausführungen im ersten Unterkapitel inhaltlich entsprechen. Große Unterschiede lassen sich jedoch in der Benennung der einzelnen Paragraphen feststellen. So schreibt Wolff beispielsweise in der Auflage von 1775 als „Zusatz“, dass sich die Manieren der Fortifikationen nach den Angriffen zu richten haben; dies erscheint in der ersten Auflage als „Lehrsatz“.[1599] Er arbeitete auch Lehrsätze um. So findet man in der ersten Auflage bei einem Lehrsatz über die Länge der Facen genaue Maßangaben in einem „Zusatz“, in späteren Auflagen wurden sie in dem „Lehrsatz“ selbst mitaufgenommen.[1600] Weitere Umbenennungen von Absätzen finden sich auch bei den „Erklärungen“. Deshalb gibt es in der ersten Auflage auch mehr Lehrsätze (27 statt 22) und Erklärungen (46 statt 42). Die erste Auflage der *Anfangs=Gründe* erhält zudem eine zweite Aufgabe, die in späteren Auflagen nicht mehr erscheint, nämlich wie man die Anlage eines gesamten Walls finden kann.[1601] Wolff nahm auch Kürzungen in den Neuauflagen vor. Er verzichtete beispielsweise auf

[1599] Vgl. Wolff, AG 2 (1710), S. 84 und Wolff, AG 2 (⁹1775), S. 597.
[1600] Vgl. Wolff, AG 2 (1710), S. 119 f. und Wolff, AG 2 (⁹1775), S. 625.
[1601] Vgl. Wolff, AG 2 (1710), S. 103.

umfangreichere Ausführungen zum Orillon, dem oberen Teil der Flanken.[1602] In der ersten Auflage findet man insgesamt mehr Anmerkungen und Zusätze.[1603]

Im zweiten Unterkapitel geht Wolff auf verschiedene Baustile der Fortifikation ein.[1604] Er beginnt mit der holländischen Manier und geht weiter zu den französischen Manieren von Pagan, Blondel und Vauban. Wolff stellt diese Manieren vor, weil sie am bekanntesten seien.[1605] Man sieht, dass die französischen Arten der Befestigungskunst dominierten.
Das Unterkapitel zu den Manieren enthält 57 Absätze mit sieben Erklärungen, 25 Lehrsätzen und 25 Aufgaben. Zu jeder Manier finden wir eine Erklärung, Beispiele und zahlreiche Aufgaben, wie man Winkel, Linien, Grundrisse und weitere Teile einer Festung nach einer bestimmten Manier zu zeichnen hat. Wolff scheint es auf die Ausübung auf dem Papier anzukommen, denn seine Ausführungen sind sehr detailliert. Bei der Lösung der Aufgaben beziehungsweise konkreten Berechnungen sind geometrische und trigonometrische Kenntnisse notwendig. An einigen Stellen verweist Wolff auf die Inhalte in den Kapiteln zur Geometrie und Trigonometrie, so dass der Leser die Möglichkeit hat, die entsprechenden Ausführungen ohne lange Suche noch einmal nachzuschlagen. Als Resultat beziehungsweise Zusammenfassung einiger Aufgaben gibt Wolff Tabellen an, beispielsweise zu den Winkeln nach der holländischen Manier (siehe Abbildung 77). Neben den Aufgaben sind viele „Exempel" im Sinne von Rechenbeispielen vorhanden.

Grösse der Winkel in Holländischen regulären Festungen.

Nahmen der Winkel.	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Centri-Winkel	90°	72°	60°	51°26′	45 °	40°	36°	32°44′	30°
Polygon-Winkel	90	108	120	128.34	135	140	144	147.16	150
Bollwercks-Winkel	60	72	80	85. 42	90	90	90	90	90
Kleiner Winkel FGE	15	18	20	21. 26	21. 30	25	27	28. 38	30
Schulter-Winkel	105	108	110	111.26	111.30	115	117	118.38	120

Abbildung 77: Wolff, *Anfangsgründe*, Bd. 2, S. 643.[1606]

Vergleicht man die Ausführungen mit der ersten Auflage der *Anfangs=Gründe*, so lässt sich feststellen, dass das zweite Unterkapitel in der ersten Auflage mehr Aufgaben enthält (nämlich 41 statt 25 Aufgaben), zu denen die bereits genannten „Exempel" gehören.[1607] Die Bei-

[1602] Vgl. Wolff, AG 2 (1710), S. 116 und Wolff, AG 2 ([9]1775), S. 622 f.
[1603] Vgl. beispielsweise Wolff, AG 2 (1710), S. 123 und Wolff, AG 2 ([9]1775), S. 628.
[1604] Vgl. Wolff, AG 2, S. 641-686.
[1605] Vgl. Wolff, AG 2, S. 686.
[1606] Die römischen Zahlen in den Spalten stehen für die Seitenanzahl des Vielecks.
[1607] Vgl. beispielsweise Wolff, AG 2 (1710), S. 140-149 und Wolff, AG 2 ([9]1775), S. 643-651.

spiele waren in der ersten Auflage direkt mit den Aufgaben verbunden; in den nachfolgenden Auflagen stehen viele Rechenbeispiele losgelöst von Aufgaben.

Im dritten Unterkapitel zur Fortifikation widmet sich Wolff der irregulären Fortifikation. Zu Beginn erklärt er nicht nur die irreguläre Fortifikation, sondern auch die reguläre Fortifikation mit dem Verweis auf das zweite Kapitel, in dem er verschiedene Manieren vorgestellt hat.[1608] Neben sechs Erklärungen findet der Leser 14 Aufgaben, wie man einzelne Teile einer Festung fortifizieren kann. Die Aufgaben sind so aufgebaut wie oben beschrieben.

Bei der Gegenüberstellung der von uns verwendeten neunten und der ersten Auflage der *Anfangs=Gründe* ergibt sich, dass Wolff in einigen Aufgaben der ersten Auflage andere Maße zu Bestandteilen einer Festung angibt als in späteren Auflagen, beispielsweise bei der Aufgabe, wie man eine Linie unter angegebenen Maßen fortifizieren kann.[1609] Dadurch führen die Berechnungen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Darüber hinaus ist aufgefallen, dass in der ersten Auflage einige Ausführungen kürzer sind als in den übrigen Auflagen, in denen Wolff auch alternative Lösungen angibt. Ein weiterer Unterschied in den Auflagen besteht darin, dass eine Anmerkung in der ersten Auflage nur in Worte gefasst war; in den darauf folgenden Auflagen finden wir diese in einer übersichtlichen Tabellenform mit Maßangaben vor.[1610] Einen Grund für diese Änderungen gibt Wolff nicht an, aber es liegt nahe, dass er diese einbaute, um die Inhalte verständlicher und überschaubarer zu machen.

Wolff stellt nicht nur theoretische Ausführungen dar, sondern ihm kommt es offensichtlich auch darauf an, dass der Leser seine Kenntnisse praktisch umsetzen kann. Hierfür dient das vierte Unterkapitel, das sich mit dem tatsächlichen Bau einer Festung befasst. Es besteht aus einem Lehrsatz und 14 Aufgaben. Neben den bekannten Konstruktions- und Rechenaufgaben zu bestimmten Bauteilen berücksichtigt Wolff auch andere Aspekte. Hierzu gehören die Berechnung der Kosten, die beim Bau einer Festung entstehen, sowie der damit verbundene Zeitaufwand.[1611] Hierbei verwendet Wolff arithmetische Kenntnisse, nämlich den Dreisatz („Regel Detri"), und verweist auf den entsprechenden Absatz im Arithmetik-Kapitel. Auch die Beschaffenheit des Bodens und die damit verbundenen Anforderungen kalkuliert Wolff ein.[1612]

Zwischen der ersten und den darauf folgenden Auflagen kann man stellenweise Unterschiede in den Berechnungen beziehungsweise Ergebnissen finden.[1613] Darüber hinaus verzichtet Wolff auf einige Anmerkungen in den neuen Auflagen, so dass die Inhalte kürzer wurden.[1614]

Im fünften Unterkapitel thematisiert Wolff sowohl die Angriffe auf als auch die Verteidigung einer Festung und nimmt somit zwei unterschiedliche Sichtweisen ein. Die Inhalte sind in sechs Erklärungen, drei Lehrsätzen, acht Aufgaben, einigen Zusätzen und Anmerkungen

---

[1608] Vgl. Wolff, AG 2, S. 687.

[1609] Vgl. hierzu und zum Folgenden beispielsweise Wolff, AG 2 (1710), S. 196-198 und Wolff, AG 2 (^{9}1775), S. 694-696.

[1610] Vgl. Wolff, AG 2 (1710), S. 203 und Wolff, AG 2 (^{9}1775), S. 701 f.

[1611] Vgl. hierzu und zum Folgenden Wolff, AG 2, S. 713 f.

[1612] Vgl. Wolff, AG 2, S. 715 f.

[1613] Vgl. beispielsweise Wolff, AG 2 (1710), S. 210 und Wolff, AG 2 (^{9}1775), S. 709.

[1614] Vgl. Wolff, AG 2 (1710), S. 212 und Wolff, AG 2 (^{9}1775), S. 711.

dargestellt. Hier geht es in erster Linie um die Taktik bei einem Angriff. Er beachtet auch weitere Umstände, wie die Versorgung der Besatzung mit Proviant und Munition.[1615]

Inhaltlich kann man zur ersten Auflage der *Anfangs=Gründe* keine Unterschiede feststellen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass in der Auflage von 1775 ein „Zusatz" zur Auflösung der entsprechenden Aufgabe integriert und nicht mehr eigenständig aufgeführt ist wie noch in der ersten Auflage.[1616]

Im Folgenden werden wir einen kurzen Vergleich zwischen Wolffs *Anfang=Gründen* und seinem *Auszug aus den Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschafften* (^{6}1737) anstellen. In Wolffs *Auszug* findet man die Fortifikation im 17. Kapitel.[1617] Sie umfasst 47 Seiten, 147 Absätze, 51 Erklärungen, 16 Aufgaben und vier Kupfertafeln. Hieran sehen wir bereits, dass die Inhalte nicht so umfangreich sind wie in Wolffs *Anfangs=Gründen*. Das Kapitel ist in vier Unterkapitel gegliedert. Wolff verzichtet im *Auszug* auf die Inhalte zum tatsächlichen Bau einer Festung, so dass der *Auszug* im Gegensatz zu den *Anfangs=Gründen* nur vier statt fünf Unterkapitel enthält. Im ersten Unterkapitel zur Fortifikation, das die Grundlagen der Kriegsbaukunst behandelt, fehlen im *Auszug* einige Anmerkungen und Zusätze, was bedeutet, dass die Ausführungen nicht so detailliert sind wie in den *Anfangs=Gründen*. Stellenweise finden wir im *Auszug* eine veränderte Reihenfolge der Absätze vor als in den *Anfangs=Gründen*, aber inhaltlich sind die Ausführungen gleich und es werden wichtige Begriffe rund um die Fortifikation erklärt. Interessant ist, dass Wolff die Bezeichnungen der einzelnen Paragraphen in seinen beiden Lehrwerken unterschiedlich wählte. In den *Anfangs=Gründen* wird die empfohlene Länge einer Defenslinie als „Lehrsatz" dargestellt, im *Auszug* hingegen als „Zusatz".[1618] Allerdings können wir keinen Grund für die unterschiedliche Bezeichnung angeben.

Im zweiten Unterkapitel stellt Wolff in seinen *Anfangs=Gründen* unterschiedliche Manieren vor. Sein *Auszug* enthält nicht alle Manieren, die in seinem umfangreicheren Lehrbuch zu finden sind, sondern nur die beiden Manieren von Vauban, wobei die Ausführungen zudem kürzer sind als in den *Anfangs=Gründen*. Im *Auszug* fehlen beispielsweise die einleitenden Anmerkungen zu den unterschiedlichen Manieren. In beiden Lehrwerken werden die unterschiedlichen Arten des Festungsbaus vor allem mit Hilfe von „Aufgaben" vermittelt, in denen Verweise auf Geometrie und Trigonometrie sowie Tabellen und Maßangaben zu finden sind. Allerdings formuliert Wolff in seinem *Auszug* zu Vaubans erster Manier sogar noch zwei weitere Aufgaben, nämlich wie man ein Hornwerk[1619] und ein Profil zeichnen kann.[1620] Auch im vierten Kapitel des *Auszugs*, was dem fünften Unterkapitel in den *Anfangs=Gründen* entspricht, findet man noch eine weitere Aufgabe zu den Laufgräben.[1621]

[1615] Vgl. Wolff, AG 2, S. 722.

[1616] Vgl. Wolff, AG 2 (1710), S. 237 und Wolff, AG 2 (^{9}1775), S. 734.

[1617] Siehe Wolff, Auszug, S. 565-611.

[1618] Vgl. Wolff, AG 2, S. 619 und Wolff, Auszug, S. 574.

[1619] Ein Hornwerk ist eine Art Außenwerk und besteht aus zwei halben Bollwerken und einer Courtine; vgl. Wolff, Auszug, S. 580. Die Courtine ist der mittlere Wall zwischen zwei Bollwerken; vgl. Wolff, Auszug, S. 571.

[1620] Vgl. Wolff, Auszug, S. 590-592.

[1621] Vgl. Wolff, Auszug, S. 604-606.

Da die erste Auflage des *Auszugs* (1717) nicht verfügbar war, haben wir die in unserer Untersuchung verwendete sechste Auflage mit der zweiten Auflage (^{2}1724) verglichen und konnten keine Unterschiede feststellen.

Zusammenfassend können wir über Wolffs hier betrachteten deutschsprachigen Lehrbücher Folgendes festhalten: Wolffs Ausführungen zur Fortifikation sind umfangreich und sind in den *Anfangs=Gründen* in fünf, im *Auszug* in vier Unterkapitel eingeteilt. Der inhaltliche Aufbau in beiden Lehrbüchern ist gleich. Zunächst erklärt Wolff viele Begriffe zur Fortifikation. Anschließend befasst er sich mit verschiedenen Manieren zum Festungsbau sowie der irregulären Fortifikation. In den *Anfangs=Gründen* – nicht jedoch im *Auszug* – finden wir ein zusätzliches Unterkapitel, nämlich über die wirkliche Ausübung des Festungsbaus. Das letzte Unterkapitel befasst sich mit den Attacken und der Verteidigung einer Festung.

Wolff stellt die Inhalte in zahlreichen Erklärungen, Lehrsätzen und Aufgaben mit entsprechenden Auflösungen, Beweisen, Zusätzen, Anmerkungen und Beispielen dar. Zudem verweist er auf Abbildungen, damit sich der Leser ein konkretes Bild von den einzelnen Bestandteilen einer Festung machen kann. Bei den Erklärungen nennt Wolff nicht nur die deutschen, sondern auch die französischen Begriffe, was zeigt, dass die Fortifikation primär ein französisch geprägtes Gebiet war. Dies wird auch an den Manieren, bei denen die der französischen Festungsbauer dominierten, deutlich.

In der Vorrede zur Fortifikation in seinen *Anfang=Gründen* schreibt Wolff, dass geometrische und trigonometrische Kenntnisse wichtig für die Fortifikation seien. Tatsächlich finden wir viele Verweise auf Geometrie und Trigonometrie. Mathematische Berechnungen nimmt Wolff in erste Linie in den „Aufgaben“ vor. Aus diesen resultieren stellenweise Tabellen mit konkreten Maßangaben. Auch unabhängig von den Aufgaben gibt Wolff in seinen Erklärungen empfohlene Maßangaben für einzelne Teile einer Festung an. Mit Hilfe dieser Aufgaben ist es dem Leser möglich, eine Festung auf dem Papier zu zeichnen.

Es ist bekannt, dass Wolff während seiner Zeit an den Universitäten Halle und Marburg private Vorlesungen über die Fortifikation hielt.[1622] Da seine Lehrbücher als Vorlesungsgrundlage dienen sollten, können wir davon ausgehen, dass er die Kenntnisse vermitteln hat, die wir in seinen Lehrwerken finden.

4.4.4 Heinrich Wilhelm Clemm

In Clemms *Mathematischem Lehrbuch* (^{3}1777) ist die Fortifikation Teil der architektonischen Wissenschaften, die im zweiten „Theil“ des Lehrbuchs zu finden sind.[1623] Das Kapitel „Militarbaukunst“ umfasst 16 Seiten und 41 Absätze, unter denen sich 18 Erklärungen und zwei Lehrsätze befinden.[1624] Die einzelnen Absätze führen gemäß der mathematischen Lehrart die Bezeichnungen „Erklärung“, „Lehrsatz“, „Zusatz“ und „Anmerkung“. Clemm verweist bei seinen Ausführungen auf insgesamt 12 Abbildungen. Das Kapitel zur Fortifikation ist in fünf Unterkapitel aufgeteilt:

[1622] Vgl. Sommerhoff-Benner, S. 280.
[1623] Beide „Theile“ befinden sich in einem Band.
[1624] Siehe Clemm, ML 2, S. 337-350.

- „Geschichte der Militarbaukunst“
- „Allgemeine Regeln der Fortification, und die Namen der Haupttheile“
- „Die verschiedene Systeme der regulairen Vestungen, vornemlich die Holländische, die Französische, besonders beede Vaubanische, auch unter den Teutschen die Bilfingerische“
- „Von der irregulairen Bevestigung“
- „Etwas von der Artillerie“.

Zu Beginn gibt Clemm folgende Erklärung an: „Die Militairbaukunst ist eine Wissenschaft, welche lehret, nicht nur wie man einen gegebenen Ort so bevestigen solle, daß ihn wenige mit Vortheil gegen viele vertheidigen können, sondern auch in Rücksicht auf den Angriff (Attaque), wie ein dergleichen wohl bevestigter Ort am geschicktesten und am schwächsten Theil mit dem wenigsten Verlust anzugreiffen sey“[1625]. Im Anschluss findet der Leser einen kurzen historischen Überblick zur Fortifikation. Wir erfahren zunächst, dass man sich bereits seit der Antike mit der Kriegsbaukunst beschäftigte und dass es in der Geschichte unterschiedliche Arten der Befestigung gab.[1626] Anschließend geht Clemm auf die zeitgenössische Fortifikation ein, die eng mit der Artillerie zusammenhänge, und zwar insofern, dass sich die Kriegsbaukunst mit der Weiterentwicklung des Schießpulvers verändern musste. Dadurch wird klar, dass nicht nur die Fortifikation, sondern auch die Artillerie im 18. Jahrhundert einen Aufschwung erlebt hat und um neue Erkenntnisse bereichert wurde.

Im Rahmen der historischen Betrachtungen geht Clemm auf die unterschiedlichen Manieren des Festungsbaus ein. Er führt unter anderem aus, dass zuerst die italienische, dann die holländische und schließlich die französische Manier führend waren.[1627] Hierbei nennt Clemm die Namen Freytag, St. Julien, Blondel und Vauban. Die drei letztgenannten Personen sind französische Festungsbauer, die Clemm als „Meister von der Kriegsbaukunst“[1628] bezeichnet. Hieran ist wieder zu erkennen, dass die Franzosen zu Clemms Zeiten im Bereich der Kriegsbaukunst angesehen und federführend waren.

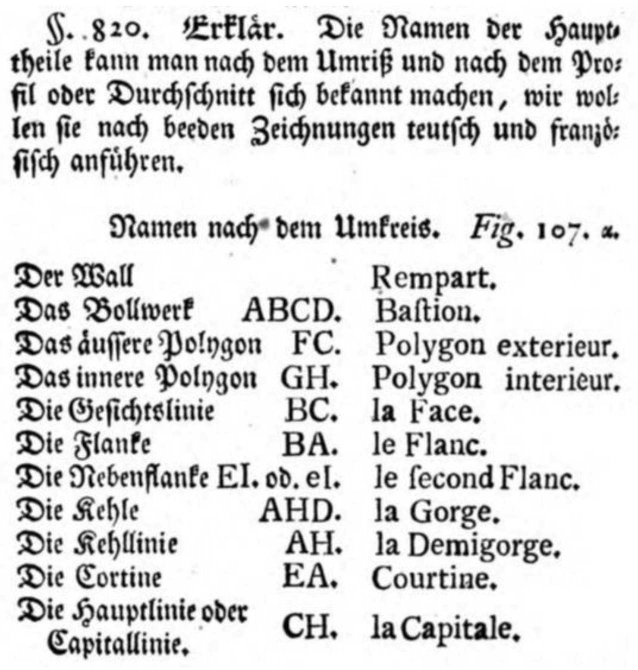
Am Ende der Ausführungen zur Historie der Fortifikation gibt Clemm neben den bereits genannten Autoren weitere Literaturangaben an: L. Chr. Sturms *Architectura Militaris hypothetico-eclectica, Oder Gründliche Anleitung zu der Kriegs=Baukunst*, St. Juliens *Architectura militaris*, Daniel Specklins *Architectura von Vestungen*, Johannes Faulhabers *Ingenieurs-Schul*, Georg Berhard Bilfingers Erläuterungen zu seiner eigenen Manieren und Böhms *Gründliche Anleitung zur Kriegs-Baukunst*.[1629] Neben diesen Werken zur Fortifikation erwähnt Clemm auch noch Abhandlungen zur Artillerie, nämlich die von Casimir Simienowicz, Michael Mieth, Benjamin Robin mit Leonhard Eulers Anmerkungen sowie von Struensee.

Das zweite Unterkapitel umfasst fünf Absätze. Der erste Absatz trägt die Bezeichnung „Lehrsatz“ und enthält sechs allgemeine Grundsätze zur Fortifikation.[1630] Hierbei nennt Clemm Bestandteile einer Festung, beispielsweise „Aussenwerke“ und „Flanken“, erklärt

---

[1625] Clemm, ML 2, S. 337.
[1626] Vgl. Hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 2, S. 337 f.
[1627] Vgl. Clemm, ML 2, S. 338.
[1628] Clemm, ML 2, S. 338.
[1629] Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 2, S. 339.
[1630] Vgl. Clemm, ML 2, S. 339 f.

jedoch nicht ihre Funktionen. Diese werden erst in den darauffolgenden Absätzen erläutert.[1631] Clemm verwendet zur Beschreibung der einzelnen Bauteile sowohl die deutschen als auch die französischen Begriffe. Seine Darstellung ist durch die spaltenweise Gegenüberstellung besonders übersichtlich (siehe Abbildung 78). Zur Veranschaulichung verweist Clemm auf eine Abbildung (Abbildung 79).



§. 820. Erklär. Die Namen der Haupttheile kann man nach dem Umriß und nach dem Profil oder Durchschnitt sich bekannt machen, wir wollen sie nach beeden Zeichnungen teutsch und französisch anführen.

Namen nach dem Umkreis. *Fig.* 107. α.

Der Wall		Rempart.
Das Bollwerk	ABCD.	Baſtion.
Das äussere Polygon	FC.	Polygon exterieur.
Das innere Polygon	GH.	Polygon interieur.
Die Gesichtslinie	BC.	la Face.
Die Flanke	BA.	le Flanc.
Die Nebenflanke	EI. od. eI.	le ſecond Flanc.
Die Kehle	AHD.	la Gorge.
Die Kehllinie	AH.	la Demigorge.
Die Cortine	EA.	Courtine.
Die Hauptlinie oder Capitallinie.	CH.	la Capitale.

Abbildung 78: Clemm, *Mathematisches Lehrbuch. Zweyter Theil,* S. 340.

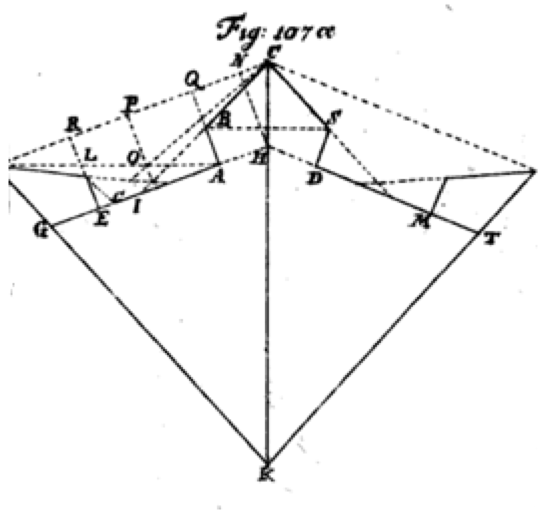


Abbildung 79: Clemm, *Mathematisches Lehrbuch. Zweyter Theil*, Tab. X, Fig. 107 α [unvollständig].

Nach diesen Erklärungen gibt Clemm an, dass die Zeichnungen, die zur Konstruktion von Festungen erstellt werden, aus der Elementargeometrie und der Trigonometrie bekannt seien, nämlich aus den Ausführungen zu den Polygonen.[1632] So erfährt der Leser, welche mathematischen Kenntnisse bei der Fortifikation wichtig sind. Die enge Verbindung zwischen Fortifi-

[1631] Vgl. Clemm, ML 2, S. 340-342.
[1632] Vgl. Clemm, ML 2, S. 342.

kation und Geometrie wird auch im dritten Unterkapitel deutlich. Hier erklärt Clemm zu Beginn: „Eine regulaire Bevestigung ist die Bevestigung eines regulairen Vielecks, z. E. eines Fünfecks, Sechsecks, Sieben= Acht = Neunecks u.s.w. Wo man den Centri= und Polygonwinkel nach geom. und trigonom. Gründen findet“[1633]. Im Folgenden stellt Clemm verschiedene Manieren der Fortifikation vor, nämlich die holländische, einige französische (nach Pagan, Blondel, Vauban, Bélidor), und eine deutsche (nach Bilfinger).[1634] Die unterschiedlichen Stile und ihre Charakteristika werden in den „Erklärungen“ dargestellt. In den „Zusätzen“ nimmt Clemm Berechnungen vor und unterrichtet den Leser näher über die einzelnen Systeme sowie ihre Schwachstellen. In seinen Ausführungen nimmt er Bezug auf die Geometrie, beispielsweise bei der Berechnung von Winkeln, verweist jedoch nicht auf die entsprechenden Ausführungen im Geometrie-Kapitel.

Beachtenswert ist der mit „Lehrsatz“ bezeichnete Absatz.[1635] Hier beschreibt Clemm, wie man eine Festung nach dem System von Bilfinger zeichnet. Es handelt sich also um eine angeleitete Aufgabe. Er stellt zwei Fälle vor, nämlich erstens, dass die Grundform der Festung ein Dreieck ist, zweitens, dass sie ein Viereck ist.

Im letzten Unterkapitel widmet sich Clemm der irregulären Fortifikation.[1636] Bei dieser solle man so wenig wie möglich von der regulären Fortifikation abweichen. Am Ende des Unterkapitels zur irregulären Befestigung schreibt Clemm, dass die Angriffe zur Kriegskunst gehörten, aber sie nicht im Rahmen eines mathematischen Lehrbuchs behandelt werden könnten. Es sei nur üblich, die Fortifikation in den mathematischen Lehrbüchern zu betrachten. Zur Artillerie gebe es spezielle Literatur sowie Kriegsschulen, in denen man die Inhalte lerne.

Clemm stellt die Verbindung zwischen der Kriegsbaukunst und der Artillerie her und sieht eine enge Verbindung zwischen diesen beiden Themen, so dass er am Ende des Kapitels zur Fortifikation einige Anmerkungen zur Artillerie beifügt.[1637] Hier findet der Leser Erklärungen zur Artillerie, zu Geschützen sowie zu Schüssen. Am Ende verweist Clemm auf weiterführende Literatur zur Wurfbahn von Geschossen, genauer auf die Werke von Euler, Robin, Gravenitz und Karsten.

Ein Vergleich zwischen der hier verwendeten dritten und der zweiten Auflage (^{2}1768) des *Mathematischen Lehrbuchs* zeigt, dass Clemm keine Veränderungen vorgenommen hat. Die erste Auflage (1764) konnte nicht eingesehen werden.

Eine Besonderheit an Clemms *Lehrbuch* ist, dass er über die Historie der Fortifikation berichtet. Clemm beschränkt sich auf die Namen der Bauteile einer Festung, lässt aber ihre Funktion weitgehend unerwähnt. Deshalb kann nicht behauptet werden, dass er tiefgehende Kenntnisse vermittelt. Allerdings gibt er zahlreiche Literatur an, so dass der Leser die Möglichkeit hat, sich weiter mit dem Thema der Fortifikation vertraut zu machen.

1633 Clemm, ML 2, S. 343.
1634 Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 2, S. 343-349.
1635 Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 2, S. 348 f.
1636 Vgl. hierzu und zum Folgenden Clemm, ML 2, S. 349 f.
1637 Vgl. Clemm, ML 2, S. 350-352.

4.4.5 Wenceslaus Johann Gustav Karsten

Da der *Lehrbegrif der gesamten Mathematik* und die *Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften* unvollständig geblieben sind, finden wir in diesen Lehrbüchern keine Ausführungen zu den architektonischen Wissenschaften. Im zweiten Band von Karstens *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der mathematischen Wissenschaften* (^{2}1785) befindet sich die Fortifikation unter dem Titel "Erster Grundriß der Kriegsbaukunst"[1638] im letzten Kapitel. Zwischen der hier verwendeten zweiten Auflage und der ersten Auflage des *Auszugs* (1781) gibt es keine Unterschiede. In der Vorrede schreibt Karsten, dass es üblich sei, in den mathematischen Lehrbüchern eine kurze Anleitung zu den architektonischen Wissenschaften zu geben; es sei jedoch nicht möglich, alle Inhalte vollständig wiederzugeben.[1639] Karstens Ausführungen umfassen knapp 21 Seiten mit 44 Absätzen, 16 Erklärungen und eine Aufgabe. Die Absätze sind gemäß der mathematischen Lehrart mit „Erklärung“, „Zusatz“ und „Aufgabe“ benannt. Er verdeutlicht seine Ausführungen anhand von 14 Figuren (Abbildung 80).

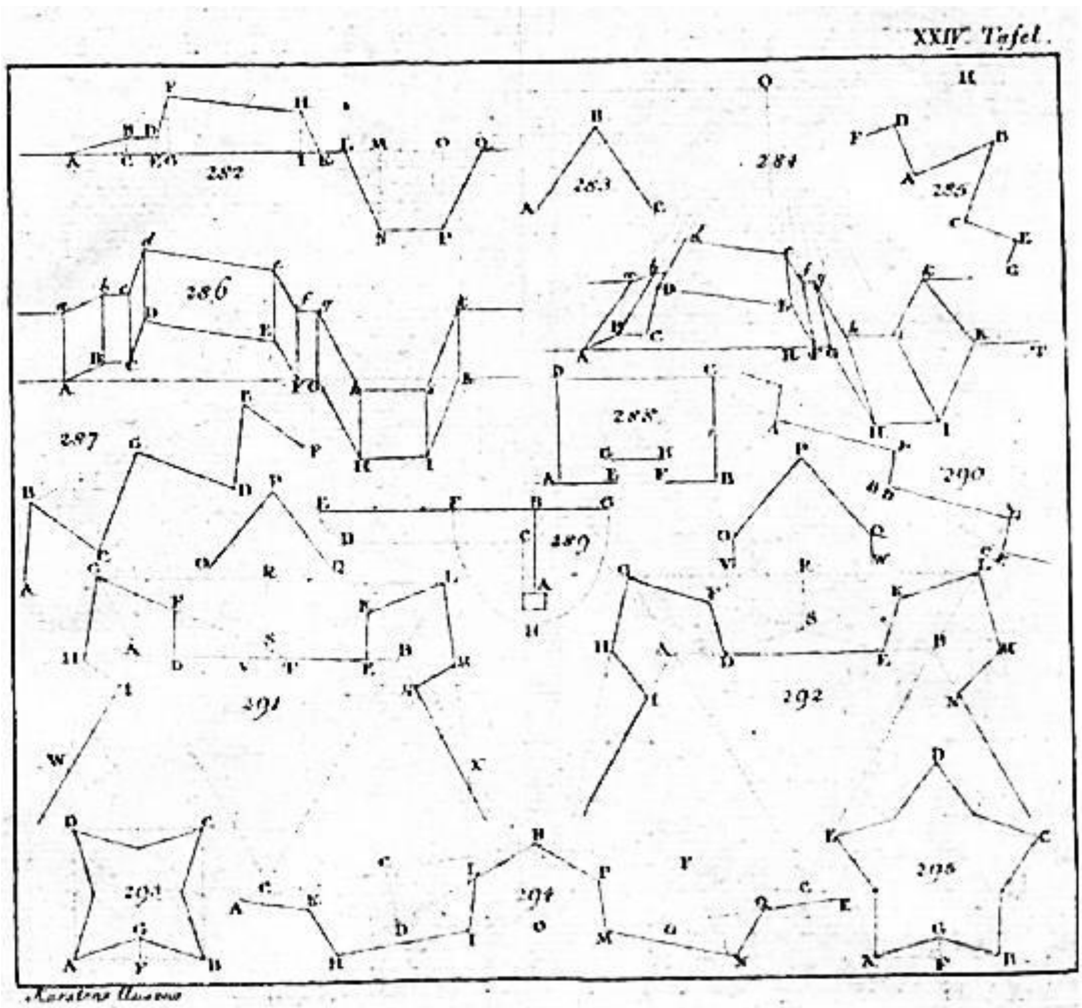


Abbildung 80: Karsten, *Auszug*, Bd. 2, XXIV. Tafel.

[1638] In: Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 425-445.
[1639] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 1, Vorrede zur ersten Auflage, S. xii f.

Zu Beginn des Kapitels definiert Karsten die Fortifikation wie folgt: „Eine Festung heißt zwar überhaupt jeder Ort, der durch solche Anlagen umher eingeschlossen ist, daß sich wenige Personen in demselben gegen viele sicher und mit Vortheil vertheidigen können […]. Die Kriegsbaukunst lehrt, wie dergleichen Festungen erbauet werden müssen"[1640]. In den Erklärungen erläutert Karsten einige Begriffe aus dem Bereich der Fortifikation wie „Festung“, „Brustwehr“ und „Wall“. An einzelnen Stellen gibt er auch die empfohlenen Maße bei der Errichtung der einzelnen Bestandteile an. Dies trifft auch auf die Brustwehr zu, deren Funktion der Schutz vor Geschützkugeln ist.[1641] Bei der Beschreibung von Verschanzungen (Fig. 290 in Abbildung 80) gibt Karsten ebenfalls genaue Maße an, wobei er sich auf einen gewissen Ritter von Clairac[1642] bezieht.[1643]

An den Abbildungen, die zum Kapitel „Fortifikation“ in Karstens *Auszug* gehören, ist zu sehen, dass einige von ihnen perspektivisch gezeichnet sind. In Karstens Ausführungen finden wir zwei Verweise auf die Perspektive. Diese beziehen sich auf Fig. 284 und Fig. 286 (beide in Abbildung 80), die unter Verwendung zwei unterschiedlicher Arten von Perspektiven das Profil der Brustwehr und des Grabens darstellen, wobei Karsten die zweite perspektivische Zeichnung (Fig. 286 in Abbildung 80) als „Cavalier=Perspectiv“ bezeichnet.[1644]

Bei der Erklärung der einzelnen Bestandteile einer Festung geht Karsten auch auf verschiedene Winkel ein. Er setzt Geometriekenntnisse voraus, denn er verwendet Begriffe wie „parallel“ und „einwärts gehende Winkel“ bei der Beschreibung der Brustwehr.[1645] Einen ausdrücklichen Verweis auf das Geometrie-Kapitel findet der Leser bei der Erklärung, wie man eine Sternschanze (Fig. 293 in Abbildung 80) errichten kann.[1646] Bei der Unterscheidung zwischen regulärer und irregulärer Fortifikation verwendet er Begriffe aus der Geometrie, nämlich „reguläre Figur“, verweist aber nicht auf den entsprechenden Abschnitt im Geometrie-Kapitel, sondern erläutert kurz, dass bei einer regulären Figur alle Seiten und Winkel gleich groß sind.[1647]

Bei der Erklärung der unterschiedlichen Manieren der Kriegsbaukunst betont Karsten den Nutzen geometrischer Kenntnisse: „Wer in der Geometrie geübt ist, wird leicht finden, wieviele Linien und Winkel er als gegeben annehmen kann, so daß alle übrige dadurch bestimmt werden, damit sie hiernächst sowohl durch Zeichnung, als auch durch Rechnung gefunden werden können“[1648]. Dieses Zitat zeigt deutlich die Wichtigkeit der reinen Mathematik für die Fortifikation.

Karsten geht nicht detailliert auf die einzelnen Manieren ein, sondern erwähnt nur die Namen bekannter Festungsbauer, nämlich Freytag, Pagan, Vauban, Blondel, Cöhorn und

[1640] Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 425 f.

[1641] Vgl. hierzu und zum folgenden Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 426.

[1642] Bei dem Ritter von Clairac handelt es sich um Louis-André de la Mamie de Clairac, der das Werk *L'ingénieur de campagne, ou, Traité de la fortification passagere* (1749, ²1757) veröffentlichte. Dieses wurde auch ins Deutsche übersetzt und erschien unter dem Titel *Abhandlung von der Befestigungskunst im Felde* (1755).

[1643] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 436.

[1644] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 428.

[1645] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 431.

[1646] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 433 f. Karsten verweist an dieser Stelle auf den ersten Strahlensatz; siehe Karsten, Auszug, Bd. 1, S. 109.

[1647] Vgl. Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 437 f.

[1648] Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 442.

Rimpler.[1649] Er empfiehlt dem Leser die *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst* von Struensee als umfassendes Werk zur Kriegsbaukunst.

Interessant ist, dass Karsten neben den Erklärungen und Zusätzen auch eine „Aufgabe" formuliert: „Ein Feldlager, oder eine Gegend, die von einer Armee besetzt ist, zu befestigen"[1650]. In der Auflösung und den zugehörigen drei Zusätzen nimmt Karsten Bezug auf einige Abbildungen und gibt konkrete Maße für die Errichtung der einzelnen Bauteile an.[1651] In diesem Zusammenhang werden auch der Unterschied zwischen der regulären und der irregulären Fortifikation sowie die verschiedenen Manieren der Kriegsbaukunst erwähnt.

Karsten hält seine Ausführungen sehr knapp. Er beschränkt sich auf die Erklärung der Grundbegriffe beziehungsweise Bestandteile einer Festung, die er anhand von 14 detaillierten Abbildungen erläutert. Bei der inhaltlichen Darstellung wird deutlich, dass vor allem geometrische Kenntnisse für die Errichtung einer Festung notwendig sind. Für einige Bestandteile der Festung gibt Karsten konkrete Maße an.

Eine interessante Beobachtung ist, dass Karsten bei seinen Ausführungen nur die deutschen und nicht die französischen Begriffe verwendete.

4.4.6 Georg Simon Klügel

Die Fortifikation behandelt Klügel in seinen *Anfangsgründen der praktischen Mechanik, der bürgerlichen Baukunst und der Kriegsbaukunst* (1784). Die entsprechenden Inhalte, die Klügel gleichzeitig für seine Vorlesungen verwendete, sind aus dem dritten Band seiner *Encyklopädie oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten Kenntnisse* (1784) entnommen.[1652] Die Fortifikation kündigt Klügel in der Vorrede seiner *Anfangsgründe* wie folgt an: „Den Aufsatz von der Kriegsbaukunst bitte ich als einen bloßen Anhang zu betrachten. Ueberhaupt wolle der Leser sich erinnern, daß diese Versuche Theile eines größern Buches sind, nach dessen Zwecke und Umfange sie sich richten mußten"[1653]. Nach der Betrachtung von Klügels *Anfangsgründen* werden wir einen kurzen Blick auf seine *Encyklopädie* werfen um zu sehen, ob und in wie weit Klügel die Inhalte komprimierte.

Das Kapitel „Die Kriegsbaukunst" [1654] in Klügels *Anfangsgründen* umfasst 64 Seiten und 155 nummerierte Absätze. Dabei sind die einzelnen Abschnitte nicht mit näheren Bezeichnungen wie „Lehrsatz" oder „Erklärung" bezeichnet. Das Kapitel unterteilt sich in vier Hauptabschnitte:

- „Erster Abschnitt. Von der Artillerie"
- „Zweyter Abschnitt. Von der Befestigung der Städte und Vertheidigungsplätze"
- „Dritter Abschnitt. Von dem Angriff und der Vertheidigung der Festungen"
- „Vierter Abschnitt. Von der Befestigungskunst im Felde".

[1649] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 442.
[1650] In: Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 435.
[1651] Vgl. hierzu und zum Folgenden Karsten, Auszug, Bd. 2, S. 435-438.
[1652] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, Vorrede, S. iii.
[1653] Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, Vorrede, S. vi.
[1654] In: Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 231-294.

Zu Beginn des Kapitels findet der Leser eine allgemeine Erklärung, was Fortifikation ist. Am Ende ist ein Verzeichnis mit Büchern zur Kriegsbaukunst und zur Artillerie enthalten, in dem Klügel auf 16 Werke hinweist.[1655] Es handelt sich vor allem um deutsche und französische Werke. Zu dem Kapitel gehört eine Kupfertafel mit fünf Abbildungen (siehe Abbildung 81).

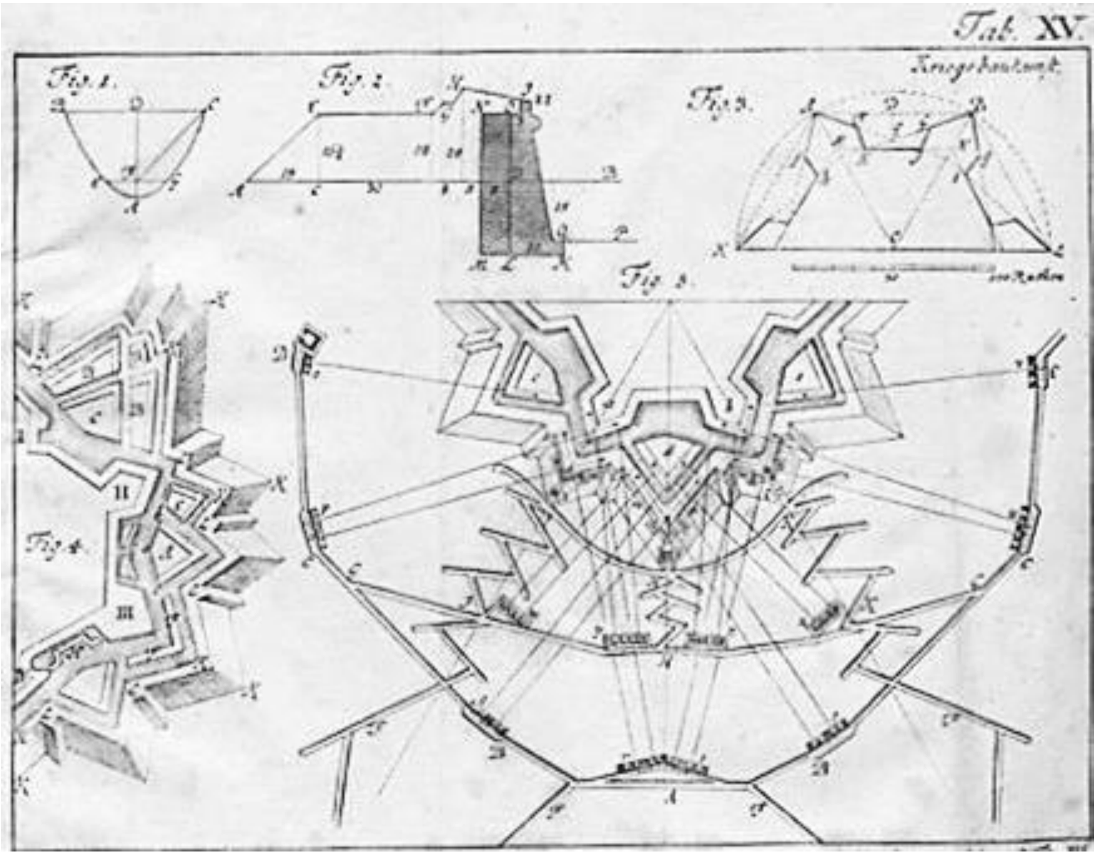


Abbildung 81: Klügel, *Anfangsgründe der praktischen Mechanik*, Tab. XV.

Aus Klügels Definition der Kriegsbaukunst geht hervor, dass er sie als eine Wissenschaft ansieht: „Die Kriegsbaukunst ist die Wissenschaft der vortheilhaftesten Vertheidigung durch aufgeworfene Werke und des vortheilhaftesten Angriffs auf dieselben. Der erstere Theil heißt die Befestigungskunst“[1656]. Es folgt die Erklärung, dass „Werke“ zur Vereidigung dienen.[1657] Hierbei unterscheidet er Werke an Festungen selbst und Werke im Feld, um sich gegen einen Angriff zu schützen oder einen Posten zu sichern, wobei er letzteres die „Befestigungskunst im Felde“ nennt. Bemerkenswert ist die Anmerkung, dass Klügel nur so viel von der Fortifikation lehre, dass Zivilpersonen mit Nachrichten über das Kriegswesen etwas anfangen könnten.[1658] Er beschränkt sich somit auf grundlegende Kenntnisse.

Klügel greift auch einige Grundsätze aus der Artillerie auf. Die Ausführungen hierzu begründet er mit der Tatsache, dass die Fortifikation eng mit dieser zusammenhänge.[1659] Im Gegensatz zur Fortifikation, die er als eine Wissenschaft bezeichnet, beschreibt Klügel die

[1655] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 293 f.
[1656] Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 231.
[1657] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 231.
[1658] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 231.
[1659] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 231.

Artillerie als „Kunst, des Schießpulvers sich mit Vortheil zum Angriff oder zur Vertheidigung zu bedienen“[1660]. Er verzichtet auf Ausführungen zur sogenannten Feuerwerkerkunst, die zur „Belustigung“ diene.[1661]

Interessant ist, dass die Artillerie bei Klügel ein Bestandteil der Fortifikation ist. In den meisten von uns betrachteten Lehrbücher bildet die Artillerie ein eigenständiges Kapitel. Bei der Darstellung der Artillerie geht Klügel zunächst auf die Zusammensetzung des Schießpulvers ein und gibt die genauen Mischungsverhältnisse sowie den Herstellungsprozess an.[1662] Es folgen Informationen über verschiedene Geschütze und deren Aufbau, Kanonen und deren Ladung, Schießpulver, Kugel und Caliber sowie verschiedene Arten von Schüssen.[1663] In den Ausführungen finden wir Verweise auf die Mechanik und die Geometrie ebenso wie auf weiterführende Literatur, beispielsweise auf das *Magazin für Ingenieure und Artilleristen*. Darüber hinaus sind Tabellen vorhanden, die gewisse Relationen aufzeigen, beispielsweise die Länge von Kalibern zu der Schwere der Kugeln bei bestimmten Geschützen (siehe Abbildung 82).

	Länge in Kalibern.	Schwere der Kugeln.	
Ganze Karthaunen . .	18	48	Pf.
Dreyviertel Karthaunen .	20	36	—
Halbe Karthaunen . .	22—24	24	—
Viertel Karthaunen . .	24	12	—
Achtel Karthaunen . .	27	6	—
Regimentsstücke . .	14—18	3	—
Ganze Feldschlangen . .	30	18	—
Halbe Feldschlangen . .	36	9	—
Viertel Feldschlangen .	34	4—5	—
Falkaunen . . .	27	5—6	—
Falkonets . . .	35—36	2—3	—
Halbe Falkonets . .	38	1	—
Serpentinels . . .	40	½	—

Abbildung 82: Klügel, *Anfangsgründe der praktischen Mechanik*, S. 236.

Im Unterkapitel „Von der Befestigung der Städte und Vertheidigungsplätze“ erklärt Klügel zunächst den Wall, sämtliche damit zusammenhängende Bestandteile sowie deren Funktionen und gibt einige Maße an.[1664] Bei seinen Ausführungen verweist Klügel auf Fig. 2 (Abbildung 81).

Es folgt die Unterscheidung der regulären von der irregulären Fortifikation, wobei Klügel anhand eines Sechsecks (Fig. 3 in Abbildung 81) die einzelnen Elemente erklärt.[1665] Danach

[1660] Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 232.
[1661] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 232.
[1662] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 232.
[1663] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 232-250.
[1664] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 251-254
[1665] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 254-256.

stellt er die Facen, Flanken und Bollwerke dar.[1666] Im Anschluss widmet er sich den Außenwerken, die zur Verteidigung des Hauptwalls dienen, sowie ihre Komponenten und Funktionen.[1667]

Dann schreibt Klügel „von andern Vertheidigungsmitteln einer Festung“[1668], „von Stadtthoren und Brücken“[1669] sowie „von Citadellen und verschanzten Lägern“[1670]. Danach geht er auf drei verschiedene Manieren zur Fortifikation ein, nämlich die von Vauban, Cöhorn und Rimpler.[1671]

Im dritten Unterkapitel zur Fortifikation finden wir Ausführungen über den Angriff und die Verteidigung von Festungen.[1672] Klügel führt aus, worauf es bei einem Angriff und bei der Verteidigung einer Festung ankommt; er betrachtet die Fortifikation somit aus zwei verschiedenen Blickwinkeln. Seine Darstellungen sind begleitet von Maßangaben und werden mit Hilfe der Abbildungen erläutert.

Im letzten Unterkapitel beschreibt Klügel wie man eine provisorische Festung im Feld errichten kann, wobei wir hier nicht nur Begriffserklärungen finden, sondern auch Verweise auf Abbildungen.[1673]

Klügel schreibt in der Vorrede seiner *Anfangsgründe der praktischen Mechanik,* dass sie ein Auszug aus seiner umfangreicheren *Encyklopädie* seien.[1674] Da er in der Vorrede seiner *Anfangsgründe* betont, dass sie für Vorlesungen bestimmt seien, können wir ableiten, dass die *Encyklopädie* eine andere Adressatengruppe hat und die Inhalte umfangreicher sind. Um herauszufinden, ob und wenn ja wie Klügel die Inhalte kürzte, werfen wir einen Blick in den dritten Band seiner *Encyklopädie*. In der entsprechenden Vorrede schreibt er, dass er sich im Rahmen der Kriegsbaukunst an den Schriften von Struensee orientiert habe und nur so viel darstelle, dass man einen Begriff von der Fortifikation bekomme.[1675] Die Kapitel zur Fortifikation sind in den beiden Werken von Klügel identisch.

Klügels Ausführungen sind umfangreicher als in den anderen hier betrachteten mathematischen Lehrbüchern aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts. Er macht den engen Zusammenhang zwischen der Fortifikation und der Artillerie deutlich und rechtfertigt dadurch die Aufnahme des Unterkapitels über die Artillerie. Klügel erklärt nicht nur die wichtigsten Begriffe und Elemente einer Festung, sondern auch ihre Funktion. Hierbei beschränkt er sich auf die deutschen Begriffe. Seine Ausführungen sind begleitet von Abbildungen, an denen er die Bauteile benennt.

[1666] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 256-258.
[1667] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 258-263.
[1668] In: Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 264-266.
[1669] In: Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 267 f.
[1670] In: Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 268.
[1671] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 268-271.
[1672] Vgl. hierzu und zum Folgenden Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 271-287.
[1673] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, S. 288-292.
[1674] Vgl. Klügel, Anfangsgründe der praktischen Mechanik, Vorrede, S. iii.
[1675] Vgl. Klügel, Encyklopädie, Bd. 3, Vorrede, S.)(2^r.

4.4.7 Karl August Struensee

Struensee studierte in Halle zunächst Theologie, anschließend Mathematik und Philosophie.[1676] Von 1757 bis 1771 war er Lehrer für Mathematik und Philosophie an der Ritterakademie in Liegnitz, wo er aus Mangel an Lehrbüchern zum Militärwesen bereits seine *Anfangsgründe der Artillerie* (1760, ²1769, ³1788) verfasste. Ein weiteres umfangreiches Werk zum Kriegswesen sind Struensees dreibändige *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst* (1771-1774, ²1786-1789).

Die Ritterakademie ist eine andere Institution als die Universität. Während an einer Universität verschiedene Wissenschaften gelehrt und unterschiedliche Berufsgruppen ausgebildet wurden, lag der Fokus einer Ritterakademie auf der Ausbildung von Edelleuten und Personen für den Kriegsdienst. Dementsprechend können wir erwarten, dass die Inhalte in Struensees Lehrbüchern nicht nur detaillierter, sondern auch anwendungsbezogener sind.

Für unsere Untersuchung zur Fortifikation werfen wir einen Blick auf die erste Auflage von Struensees *Anfangsgründen der Kriegsbaukunst*. Im Vordergrund steht ein kurzer inhaltlicher Vergleich zu den von uns bereits ausgewerteten mathematischen Lehrbüchern. Anhand dieses Vergleichs wollen wir sehen, welche Inhalte die mathematischen Lehrbuchautoren behandelten und welche nicht. Es geht um die Selektion der Inhalte für die Darstellung in den Lehrbüchern, die sämtliche mathematische Gebiete umfassten. Struensees *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst* bestehen aus drei Bänden:

- *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst. Erster Theil, so von der Befestigungskunst im Felde handelt* (1771)
- *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst. Zweyter Theil, darin von der Beschaffenheit der eigentlichen Festungen gehandelt wird* (1773)
- *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst. Dritter und letzter Theil, so von dem Angrif und der Vertheidigung der Festungen handelt* (1774).

Alle drei Bände haben zusammen einen Umfang von 1678 Seiten mit insgesamt 1550 Paragraphen und 99 Kupfertafeln. Dies übersteigt den Umfang bei den übrigen von uns betrachteten Lehrbüchern deutlich. Die Inhaltsverzeichnisse in Struensees Werk sind sehr detailliert und 16 bis 24 Seiten lang.

Aus der Vorrede zum ersten Band von Struensees *Anfangsgründen* können wir interessante Rückschlüsse auf die Darstellung der Fortifikation in Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts ziehen. Zunächst schreibt Struensee, dass es schon viele Schriften zur Fortifikation gebe, so dass er zunächst mit der Herausgabe seines Werks gezögert habe.[1677] Die meisten Werke seien von Ingenieuren verfasst worden, also von praxiserfahrenen Personen. Struensee selbst hatte keine Erfahrungen, sondern war Lehrer für die mathematischen Wissenschaften an der Ritterakademie in Liegnitz. Allerdings kannte er kein vollständiges und fehlerfreies Lehrbuch, das seinen Ansprüchen genügte.

[1676] Vgl. hierzu und zum Folgenden Artikel „Struensee, Karl August von“ von Hermann von Petersdorff in: ADB, Bd. 36 (1893), S. 661-665.

[1677] Vgl. hierzu und zum Folgenden Struensee, Anfangsgründe, Bd. 1, Vorrede, S.)(2ʳ f.

Struensee gibt an, dass es üblich geworden sei, die Kriegswissenschaften in den mathematischen Lehrbüchern nur am Rande zu betrachten.[1678] Hierbei beschränke man sich auf Kunstwörter und die übliche Einrichtung von Festungen. Struensee sah jedoch wegen der Kriegsumstände seiner Zeit die Notwendigkeit, auch über die Feldbefestigung und die Angriffe und Verteidigungen von Festungen zu schreiben, da solche Themen nur beiläufig in den Lehrbüchern dargestellt würden, diese aber wichtig für die jungen Offiziere – seine primäre Adressatengruppe – seien.[1679] Seine *Anfangsgründe* sind daraus entstanden, dass er die Inhalte zunächst seinen Studenten diktierte und auf dieser Grundlage Rückmeldungen in Form von Verbesserungen, Berichtigungen und Ergänzungen erhielt.[1680] Sein Lehrbuch ist seiner Meinung nach so detailliert, dass die Inhalte auch für Autodidakten verständlich seien. Aus Struensees Ausführungen zu seinem Lehrbuch können wir schließen, dass es sich hierbei um ein Speziallehrbuch zur Fortifikation handelt, denn es wurde für eine bestimmte Personengruppe an einer speziellen Institution verfasst und konzentriert sich auf ein Themengebiet.

Wir haben gesehen, dass die Fortifikation im 18. Jahrhundert als mathematische Wissenschaft angesehen wurde. Struensee bezeichnet die Fortifikation aber als Ingenieurswissenschaft.[1681] Dies ist ein Indiz für die Loslösung dieses Themas von der Mathematik und für die gleichzeitige Etablierung von Ingenieurswissenschaften.

Zu Beginn seiner Ausführungen gibt Struensee eine Einleitung zur Fortifikation, in der er unter anderem die Geschichte der Fortifikation erläutert und weiterführende Werke zu diesem Thema angibt. Dies zeigt seine umfassende Kenntnis über die Fortifikation und sein Bestreben, dieses Thema vollständig darzustellen.

Die in Struensees Lehrbuch dargestellten Inhalte werden nicht gemäß der mathematischen Lehrart vorgetragen. Die Absätze sind nur mit Nummern versehen, aber mit keinen weiteren Bezeichnungen wie „Lehrsatz“ oder „Beweis“. Die Kapitel sind in „Hauptstücke“ und „Abschnitte“ eingeteilt. Am Rande des Textes sind noch einmal Stichpunkte oder kurze Sätze vermerkt, die den Inhalt charakterisieren. Vereinzelt nimmt Struensee auch mathematische Berechnungen vor, beispielsweise bei der Berechnung einer Brustwehr und der zugehörigen Winkel und Linien.[1682]

Struensee stellt die verschiedenen Manieren der einzelnen Festungsbauer nicht in den Vordergrund, sie werden aber stellenweise bei den einzelnen Bauteilen immer wieder aufgegriffen. Erst das zehnte Hauptstück des zweiten Bandes von Struensees *Anfangsgründe*n handelt von den Manieren namhafter Festungsbauer.

Wie bei den „Anfangsgründe“-Autoren finden wir auch bei Struensee die Beschreibung der Bauteile einer Festung inklusive ihrer Funktion. Der zweite Band seiner *Anfangsgründe*, in dem es um Festungen an sich geht, beinhaltet unter anderem Erklärungen eines Walls und der Außenwerke. Hier findet der Leser auch Anleitungen, wie man diese Bauteile auf dem Papier zeichnen kann, wobei zwischen der regulären und der irregulären Fortifikation unterschieden wird.

Bedingt durch die Adressatengruppe von Struensees *Anfangsgründen*, nämlich primär Schüler der Ritterakademie in Liegnitz, können wir ein anderes Vorgehen in Struensees Lehr-

---

[1678] Vgl. hierzu und zum Folgenden Struensee, Anfangsgründe, Bd. 1, Vorrede, S.)(3^{r}.
[1679] Vgl. Struensee, Anfangsgründe, Bd. 1, Vorrede, S.)(3^{v}.
[1680] Vgl. hierzu und zum Folgenden Struensee, Anfangsgründe, Bd. 1, Vorrede, S.)(3^{v} f.
[1681] Vgl. Struensee, Anfangsgründe, Bd. 1, S. 1.
[1682] Vgl. Struensee, Anfangsgründe, Bd. 1, S. 71 f.

buch annehmen als in den von uns eingesehenen mathematischen „Anfangsgründen“. Bereits bei der Betrachtung der Kapitelüberschriften stellten wir fest, dass es Struensee auf die tatsächliche Ausführung im Feld ankommt, denn die beiden Hauptstücke des ersten Bandes der *Anfangsgründe* tragen die Namen „Von der Befestigungskunst im Felde“ und „Von dem Angriff und der Vertheidigung der im Feld vorkommenden Verschanzungen“. Betrachtet man beispielsweise den dritten Abschnitt des ersten Hauptstücks, in dem es um den Bau einer Brustwehr geht, so stellt man schnell fest, dass es um die tatsächliche Ausführung geht, denn Struensee gibt zahlreiche Anmerkungen über das Abstecken und über die Materialien zum Bau an und betrachtet auch, wie viele Arbeiter benötigt werden.[1683] Der zweite Band der *Anfangsgründe* beinhaltet das achte Hauptstück, das sich mit dem wirklichen Bau einer Festung befasst.[1684] Im darauffolgenden Hauptstück finden wir weitere Anmerkungen über die zusätzliche Versorgung einer Festung, beispielsweise mit Munitionen und Lebensmitteln.[1685]

In der *Auserlesenen Bibliothek der neuesten deutschen Litteratur* finden wir eine Rezension zum ersten Band von Struensees *Anfangsgründen der Kriegsbaukunst*.[1686] Hier lobt der anonyme Verfasser die didaktische Herangehensweise von Struensee, durch die es möglich sei, die Kenntnisse, die in erster Linie für Ingenieure und Offiziere bestimmt sind, fast ohne Vorkenntnisse aus der reinen Mathematik zu verstehen. Wir erfahren, dass Struensee niemals selbst mit der Ausübung der Kriegsbaukunst beschäftigt gewesen sei, sondern seine Informationen aus anderen Werken zur Fortifikation sammelte. Dennoch seien die Inhalte so gut ausgearbeitet, dass man die Fortifikation auf der Basis von Struensees Lehrbuch sowohl theoretisch als auch praktisch ausführen könne. Der Rezensent kritisiert die Darstellung der Historie der Kriegsbaukunst, die Maßangaben sowie die fehlenden Verweise auf weiterführende Literatur bei schwer verständlichen Stellen.

Struensees *Anfangsgründe der Kriegsbaukunst* waren im 18. Jahrhundert sehr verbreitet. Dies wird vor allem an der Nennung des Werks von den in unserer Untersuchung betrachteten „Anfangsgründe“-Autoren bestätigt. Darüber hinaus konnten wir eine Übersetzung von Struensees Lehrbuch ins Englische ausfindig machen, die im Jahr 1800 unter dem Titel *The first principles of field-fortification: containing concise and familiar precepts for the construction, attack, and defence in field-works; With a Preliminary Introduction to the Science of Fortification in General* von William Nicolay herausgegeben wurde.

[1683] Vgl. Struensee, Anfangsgründe, Bd. 1, §§ 130-185.
[1684] Vgl. Struensee, Anfangsgründe, Bd. 2, §§ 443-462.
[1685] Vgl. Struensee, Anfangsgründe, Bd. 2, §§ 463-484.
[1686] Vgl. hierzu und zum gesamten Abschnitt [Anonymus]: Karl August Struensees Anfangsgründe der Kriegsbaukunst. Erster Theil, so von der Befestigungskunst im Felde handelt [Rezension]. In: Auserlesene Bibliothek der neuesten deutschen Litteratur. 1772, 1. Bd, S. 297-299.

4.4.8 Zusammenfassung

Zusammenfassend wollen wir die in der Einleitung genannten Fragestellungen, die unsere Untersuchung zur Fortifikation begleiteten, beantworten. Unsere Auswertung zeigt, dass die von uns betrachteten mathematischen „Anfangsgründe“ die Fortifikation als eigenständiges Thema enthielten. Die Inhalte waren weniger umfangreich als bei anderen mathematischen Themen. Zu Beginn des 18. Jahrhunderts finden wir in den Lehrbüchern von Wolff und in der *Mathesis Juvenilis* von Sturm ausführliche Darstellungen zur Kriegsbaukunst. In den Lehrbüchern aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wird die Fortifikation nicht mehr so umfangreich erklärt. Kästner und Klügel schreiben explizit in der Vorrede ihrer Werke, dass sie nur so viele Kenntnisse von der Fortifikation vermitteln, dass diese zum allgemeinen Verständnis beziehungsweise zu Konversationszwecken ausreichten. Dies ist die einzige explizite Erklärung der von uns betrachteten „Anfangsgründe“-Autoren, wieso die Fortifikation gelehrt werden sollte. Dass dieses Gebiet dennoch in den mathematischen Lehrbüchern dargestellt wurde, zeugt von dem enzyklopädischen Charakter dieser Lehrwerke. Anders sieht es bei Struensees *Anfangsgründen der Kriegsbaukunst* aus, das als Speziallehrbuch zur Kriegsbaukunst bezeichnet werden kann und das an eine andere Personengruppe, nämlich unter anderem spätere Offiziere, adressiert war.

Ein Grund für die Verringerung der Inhalte zur Fortifikation in den mathematischen Lehrbüchern in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts mag sein, dass es in dieser Zeit genügend Fachmänner gab, die Fortifikation unterrichteten. Dies äußert Kästner in der Vorrede seiner *Anfangsgründe*. Zudem erschienen umfangreiche Lehrbücher, die sich ausschließlich der Fortifikation widmeten, wie wir an Struensees Lehrbuch sehen, auf das Kästner, Clemm, Karsten und Klügel verweisen. Das Aufkommen solch umfangreicher Werke zu diesem Thema kann als ein Grund dafür angesehen werden, wieso die Lehrbuchautoren aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts nur noch die Grundlagen der Kriegsbaukunst vermittelten. Dies ist ein Indiz dafür, dass sich Inhalte allmählich von der Mathematik emanzipierten und selbstständig wurden.

Die Definitionen der Lehrbuchautoren zur Fortifikation gleichen sich. Bei dieser geht es darum, einen bestimmten Ort so zu befestigen, dass sich die Belagerer der Festung im Falle eines Angriffs schützen und vorteilhaft wehren können. Die Kriegsbaukunst wird als eine Wissenschaft angesehen. Der Terminus „Wissenschaft“ wird explizit in den Definitionen von Wolff, Clemm und Klügel verwendet. Kästner bezeichnet die Fortifikation in der Vorrede seiner *Anfangsgründe* als eine Wissenschaft.[1687] Struensee sah dagegen die Kriegsbaukunst ausdrücklich als eine Ingenieurswissenschaft an, was als Schritt der Loslösung von der Mathematik angesehen werden kann.

Zwar erscheint die Fortifikation in den Lehrbüchern als eigenständiges Kapitel, aber bereits aus den Definitionen geht hervor, dass sie eng mit der Artillerie beziehungsweise Geschützkunst in Zusammenhang steht. Einige der Autoren betrachten die Artillerie und die Fortifikation in ihren Lehrbüchern getrennt voneinander. Bei Clemm und Klügel finden wir die Artillerie als Unterkapitel zur Fortifikation. Dennoch beziehen sich die Autoren immer auf die Geschützkunst und betonen, dass sich die Art des Festungsbaus nach den Angriffen und somit nach den Geschützen richten muss. Die Verbesserung der Waffen sei ein Grund, so

[1687] Vgl. Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, o. S.

Clemm, wieso die einzelnen Manieren zum Festungsbau laufend verbessert werden müssten.[1688] In Struensees *Anfangsgründen* finden wir kein eigenständiges Kapitel zur Artillerie. Stattdessen stellte er die Inhalte in seinen *Anfangsgründen der Artillerie* separat dar.

Allein der Umfang von Struensees *Anfangsgründen der Kriegsbaukunst* lässt uns vermuten, dass die dargestellten Inhalte nicht nur umfangreicher, sondern auch detaillierter sind. In allen von uns betrachteten Lehrbüchern werden die Grundbegriffe rund um den Festungsbau beziehungsweise die Bestandteile einer Festung sowie deren Funktionen erklärt. Zur Veranschaulichung verweisen alle Autoren auf Abbildungen, die detailliert und teilweise perspektivisch gezeichnet sind. Fast alle Autoren gehen auf verschiedene Stile der Fortifikation ein, nur Kästner verzichtet darauf und verweist stattdessen auf weiterführende Werke zur Fortifikation.

Die Inhalte in den mathematischen Lehrbüchern entsprechen weitgehend denen aus Struensees zweiten Band der *Anfangsgründe,* der sich mit der Beschaffenheit von Festungen befasst. Im ersten Band geht es um die Fortifikation im Felde. Dieses Thema greifen die übrigen Lehrbuchautoren nicht explizit und so umfassend auf, sondern konzentrieren sich auf die einzelnen Bestandteile einer Festung, beispielsweise was eine Brustwehr ist. Der einzige Autor, der sich mit der Befestigungskunst im Felde beschäftigt, ist Klügel, der hierfür ein eigenes Unterkapitel vorsieht. Der dritte Band von Struensees *Anfangsgründen* beinhaltet Erklärungen zum Angriff und zur Verteidigung einer Festung. Diese Themen stellten lediglich Wolff und Klügel in einem separaten Abschnitt in ihren Lehrbüchern dar.

Aufgrund von Struensees Position an der Ritterakademie in Liegnitz ist die Intention seines Lehrbuchs eine andere als bei den übrigen mathematischen Lehrbuchautoren. Er ist um tiefere Einsichten und um die Vermittlung anwendbarer Kenntnisse bemüht und legt den Fokus auf die praktische Umsetzung. Solche Ausführungen sind – in kürzerer Form – in Wolffs *Anfangs=Gründen* enthalten, nämlich im Kapitel über den wirklichen Bau einer Festung. Die übrigen Autoren beschränken sich – wenn überhaupt – auf die Zeichnung von Festungen oder ihrer Bestandteile auf dem Papier. Hierfür findet der Leser Maßangaben, die oftmals in übersichtlicher Tabellenform verfasst sind. Die Maßangaben sind oft das Resultat von geometrischen und trigonometrischen Berechnungen. Die Fortifikation beruht vor allem auf der Geometrie, worauf die Autoren ausdrücklich hinweisen. Der Grundriss einer regulären Festung entspricht dem eines regulären Polygons. Stellenweise werden auch arithmetische Berechnungen vorgenommen, beispielsweise um die Größen der Linien und Winkel, deren Maße in Tabellen angegeben sind, maßstabsgetreu auf dem Papier zu übertragen. Bei Wolff und Sturm finden wir zahlreiche Aufgaben zur Berechnung verschiedener Linien und Winkel. Bei den Lehrbuchautoren aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gibt es fast keine Berechnungen mehr. Es scheint, als legten Sturm und Wolff den Wert auf das Erstellen von Festungen oder einzelnen Bauteilen auf dem Papier. Sie nehmen nicht nur Berechnungen vor, sondern zeigen auch, wie man Bauteile konstruieren kann.

Bei den Maßangaben ist auffällig, dass die Autoren teilweise unterschiedliche Maßeinheiten für Längenangaben verwendeten. Geläufig waren „rheinländische Ruthen“, „Schuhe“ sowie „Fuß“. Clemm rechnet unter anderem mit der alten französischen Längeneinheit

[1688] Vgl. Clemm, ML 2, S. 338.

„Toisen“.[1689] Dies zeigt, dass das Maßsystem in Deutschland im 18. Jahrhundert noch nicht einheitlich war.

Die von uns betrachteten Lehrbuchautoren aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts verweisen umfangreicher auf weiterführende Literatur zur Fortifikation als Sturm und Wolff. Kästner und Klügel nennen unter anderem das *Magazin für Ingenieure und Artilleristen*, an dem zu erkennen ist, dass die Fortifikation in Deutschland im Laufe des 18. Jahrhunderts an Ansehen gewann und sich in Form einer Fachzeitschrift etablierte. Kästner, Clemm, Karsten und Klügel hoben die Bedeutung von Struensees *Anfangsgründen der Kriegsbaukunst* hervor, die eine Monopolstellung gehabt zu haben scheinen.

Über die Geschichte zur Kriegsbaukunst wird in den von uns untersuchten Lehrbüchern nur wenig geschrieben, und zwar bei Sturm und Clemm. Wir erhalten einen kurzen Einblick über die verschiedenen Möglichkeiten, sich vor Angriffen zu schützen. Aus Clemms Ausführungen geht zudem hervor, dass sich die Franzosen in dem Bereich der Fortifikation besonders bewährt haben. Dies wird auch dadurch deutlich, dass die Autoren – bis auf Karsten und Klügel – bei den Begriffserklärungen nicht nur die deutschen, sondern auch die französischen Namen nennen. Dass der Festungsbau eine große Rolle in Frankreich spielte, zeigen auch die zahlreichen französischen Manieren, also die Stile der Fortifikation, bei denen die französischen Festungsbauer dominierten.

Unsere Untersuchung zur Darstellung der Fortifikation sollte in erster Linie die Frage beantworten, wie dieses Thema in den mathematischen „Anfangsgründen“ des 18. Jahrhunderts dargestellt wurde. Als Tendenz können wir eine Verringerung der Inhalte in der zweiten Jahrhunderthälfte festhalten, was mit dem Aufkommen eigenständiger Werke zur Fortifikation einhergeht. Um allerdings mehr über die Fortifikation und ihre Stellung im deutschen Bildungssystem im 18. Jahrhundert zu erfahren, müssten nicht nur Lehrbücher speziell zur Kriegsbaukunst eingesehen werden, sondern auch die Schulen untersucht werden, an denen diese Wissenschaft gelehrt wurde. Hier wäre es besonders interessant festzustellen aus welchem (wissenschaftlichen) Milieu die Lehrer der Fortifikation und die Autoren der entsprechenden Lehrbücher stammten. Die Beantwortung dieser Fragen kann jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht erfolgen. Im Rahmen unserer Untersuchung konnten wir lediglich herausfinden, dass Wolff an den Universitäten Halle und Marburg Privatvorlesungen zur Fortifikation hielt.[1690] Als Fachmann der Fortifikation kann unter den von uns betrachteten Autoren lediglich Struensee angesehen werden.

Da Kästner und seine *Mathematischen Anfangsgründe* im Zentrum der vorliegenden Arbeit stehen, folgen abschließend einige Worte zu seiner Behandlung der Fortifikation. Er sticht nicht durch eine besondere Leistung auf dem Gebiet der Fortifikation hervor. Kästner beschränkt sich auf wesentliche Begriffserklärungen und nimmt keine mathematischen Berechnungen vor. Er rechtfertigt seine knappe Behandlung der Kriegsbaukunst damit, dass es Fachleute gebe, die besser dafür geeignet seien, diese Wissenschaft vorzutragen.[1691] Dennoch wollte er nicht vollkommen auf das Kapitel in seinem Lehrbuch verzichten, da er die Inhalte als notwendig für Konversationszwecke ansah.[1692] Es scheint so, als wollte Kästner mit seinen

---

[1689] Vgl. Clemm, ML 2, S. 344.
[1690] Vgl. Sommerhoff-Benner, S. 280.
[1691] Vgl. Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, o. S.
[1692] Vgl. Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. vi.

Anfangsgründen ein umfassendes Bild der mathematischen Wissenschaften vermitteln. Dies passt zudem in das Gesamtkonzept der *Anfangsgründe*, mit denen Kästner den Grundstein für die weitere und selbstständige Beschäftigung mit den mathematischen Wissenschaften geben wollte, denn er stellt lediglich die Grundlagen der Fortifikation vor und verweist auf weiterführende Literatur. Aus den in den *Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen* abgedruckten Vorlesungsverzeichnissen geht hervor, dass Kästner während seiner Lehrtätigkeit keine Vorlesungen zur Kriegsbaukunst hielt. Dies kann auch als ein Grund angesehen werden, wieso Kästner nicht die Notwendigkeit sah, ein ausführliches Kapitel zur Fortifikation in seine *Anfangsgründe* aufzunehmen.

4.5 Zusammenfassung der Fallstudien

Im Folgenden werden wir den Fokus auf Kästner und seine Behandlung mit den Themen legen, die Gegenstand der durchgeführten Fallstudien sind. Da in unserer Untersuchung sowohl Lehrbücher vor dem Erscheinen als auch nach der Veröffentlichung von Kästners *Mathematischen Anfangsgründen* eingesehen wurden, ist es möglich, Kästners Position innerhalb der deutschsprachigen mathematischen Lehrbuchtradition einzuordnen.

Insgesamt können wir große Fortschritte von Kästners Art, wie er die von uns ausgewählten Themen behandelte, gegenüber früheren Lehrbuchautor ausmachen. Hier ist vor allem die Entwicklung im Vergleich zu Wolffs *Anfangs=Gründen* hervorzuheben, was gleichzeitig erklärt, wieso Kästners Lehrbücher diejenigen von Wolff ablösten.

Die erste Neuerung besteht in einer expliziten Klassifikation der mathematischen Wissenschaften. Wolff äußerte sich in seinem Lehrbuch nicht über eine Einteilung der mathematischen Themen. Kästner hingegen brachte alle Themen der reinen und angewandten Mathematik in ein hierarchisches System, welches auch als Vorbild für andere Lehrbuchautoren – ausdrücklich für Karsten – diente. Kästners Klassifikation war dabei flexibel, so dass es möglich war, neue Gebiete zu integrieren, wie es Karsten mit der Pneumatik und Photometrie versuchte. Bei dem Versuch, die mathematischen Wissenschaften zu ordnen, war Kästner der erste, der die Begriffe „reine" und „angewandte" Mathematik konsequent verwendete. Diese Begriffe wurden auch von nachfolgenden Autoren wie Karsten und Klügel benutzt. Noch heute sind uns diese Bezeichnungen bekannt, auch wenn wir heute andere Bereiche darunter verstehen.

Bei Kästners Behandlung der negativen Größen können wir einen weiteren Fortschritt ausmachen. Im Gegensatz zu Wolff reflektierte Kästner in seinem Lehrbuch die entgegengesetzten Größen. Bei Kästner finden wir philosophische Betrachtungen, die sich kritisch mit den Begrifflichkeiten auseinandersetzen, vor allem mit der Bezeichnung „weniger als Nichts" und dass negative Größen tatsächlich existierende Größen sind.[1693] Kästners Erklärungen hatten maßgeblichen Einfluss auf Kant und dessen Schrift über die entgegengesetzten Größen. Auch in den Lehrbüchern, die nach Kästners *Anfangsgründen* erschienen sind, waren die Autoren bestrebt, Begrifflichkeiten genau zu klären. Zudem finden wir bei Kästner die erste griffige Definition entgegengesetzter Größen, ebenso wie die Bezeichnungen „entgegengesetzt", „positiv" und „negativ". Solche Ausführungen sind auch bei nachfolgenden Lehrbuchautoren zu finden. Besonders auffällig sind die Gemeinsamkeiten der Erklärungen zum „Nichts" bei Kästner und Clemm, so dass wir annehmen können, dass Clemm sich an Kästners Ausführungen orientierte.

Während wir die Lehre der entgegengesetzten Größen bei Wolff im Bereich der höheren Mathematik finden, wird sie bei Kästner und nachfolgenden Autoren in die Elementarmathematik eingeordnet. Hieran erkennen wir einen Umbruch im Verständnis darüber, welche Bereiche zur elementaren und welche zur höheren Mathematik gerechnet wurden.

Trotz der Betrachtungen, die über die Fachmathematik hinausgehen, sind Kästners Erklärungen zu den entgegengesetzten Größen nicht vollständig. Über gewisse Dinge, wie beispielsweise die Relation „$-a < +a$" äußerte er sich nicht in seinen *Anfangsgründen*, aber in seinem Aufsatz *Ueber eine scheinbare Schwierigkeit vom kleinern und grössern, bey Quoti-*

[1693] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 72 f.

enten, so dass wir wissen, dass ihm die Relation bekannt gewesen sein muss. Diese Relation erklärte Karsten hingegen in seinem *Lehrbegrif*.[1694]

Obwohl Kästner bemüht war, die entgegengesetzten Größen anhand von realen Lebenssituationen begreiflich zu machen, vermissen wir den Deutungsversuch, als was die Multiplikation von zwei negativen Größen verstanden werden kann. Einen solchen finden wir lediglich in Clemms *Ersten Gründen*.

Eine dritte Neuerung, die wir bei Kästner finden, sind die kritischen Auseinandersetzungen mit der Beweisbarkeit von Euklids Parallelenpostulat. Er berichtete in seinen *Anfangsgründen* nicht nur von der Schwierigkeit des Beweises dieses Axioms, sondern erwähnte auch seine eigenen, leider erfolglos gebliebenen Beweisversuche.[1695] Kästner kann also über seine Lehrtätigkeit hinaus eine Forschertätigkeit nachgewiesen werden. Sein Interesse an Euklids Parallelenpostulat wirkte sich auch auf seinen Schüler Klügel aus, der aus Kästners Anraten hin eine noch heute wertvolle Dissertation über 28 Beweisversuche schrieb. Kästner stellte in seinen *Anfangsgründen* nicht nur die Problematik mit dem Thema dar, sondern verwies unter anderem auf Klügels Dissertation, was zeigt, dass er dem Leser seines Lehrbuchs mit dem Thema näher vertraut machen wollte.

Die Tatsache, dass Kästner in den Ausführungen seiner Lehrbücher immer wieder auf weiterführende Literatur verwies, worunter sich auch Forschungsmonographien befinden, hebt ihn von anderen Lehrbuchautoren ab und wurde von Zeitgenossen gewürdigt. So heißt es in einer Rezension zum ersten Teil von Kästners *Anfangsgründen der angewandten Mathematik*, dass er überall – was typisch für ihn sei – mathematische Literatur angibt.[1696]

Kästner ist nicht der einzige Lehrbuchautor, der sich kritisch mit Euklids Parallelenpostulat befasste. Karsten und Klügel veröffentlichten Schriften, die sich diesem Thema widmeten. Hieran können wir festmachen, dass die Mathematikprofessoren des 18. Jahrhunderts sich nicht ausschließlich auf die Lehre konzentrierten, sondern sich auch mit Forschungsthemen beschäftigten. Es änderte sich sowohl der Aufgabenbereich als auch das Selbstverständnis der Professoren. Wir konnten keine Schriften von Clemm über das Parallelenpostulat ausfindig machen, was wir damit erklären können, dass er kein Universitätsprofessor, sondern Gymnasiallehrer war und damit einhergehend nicht die Notwendigkeit sah, sich näher mit mathematischen Forschungsthemen zu befassen. Denkbar ist aber auch, dass ihm das Verständnis für dieses schwierige Thema fehlte, was seine nicht vollständigen Ausführungen in seinen Lehrbüchern vermuten lassen.

Unsere Fallstudie zur Fortifikation zeigt, dass Kästner die entsprechenden Inhalte in seinem Lehrbuch nicht mehr so ausführlich behandelte wie es Wolff noch tat. Dies mag im ersten Moment als Rückschritt erscheinen. Betrachtet man aber Kästners Erklärung zu seiner Behandlung der Fortifikation, so erfahren wird, dass es Fachleute gab, die sich besser mit diesem Gegenstand auskannten.[1697] Daraus können wir den Schluss ziehen, dass Kästner keine Inhalte lehrte, über die er sich nicht vollkommen auskannte. Dies ist ein Indiz dafür, dass sich gewisse Themen aus dem Bereich der angewandten Mathematik emanzipierten und sich gleichzeitig Fachleute etablierten. Diese Aussage wird mit dem Aufkommen spezieller

[1694] Vgl. Karsten, L 2, S. 78.
[1695] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *5^r f.
[1696] Vgl. NDAB, 1796, 21. Bd., 2. St., S. 444.
[1697] Vgl. Kästner, AG 2.1., Vorrede der ersten Ausgabe, o. S.

Lehrbücher zu diesem Gebiet bestätigt, wie wir an Struensees dreibändigen *Anfangsgründen der Kriegsbaukunst* sehen. Trotz der recht kurzen Behandlung der Kriegsbaukunst bei Kästner stand er im Trend seiner Zeit, in der diese Wissenschaft auch zu Konversationszwecken – was er selbst auch anstrebte – gelehrt wurde.[1698]

Anhand der durchgeführten Fallstudien können wir gewisse Tendenzen innerhalb der mathematischen Lehrbuchtradition aufzeigen. Kästner setzte mit seinen *Mathematischen Anfangsgründen* neue Maßstäbe, die auch auf nachfolgende Lehrbuchautoren Einfluss hatten. Er war sehr darauf bedacht, mathematische Begrifflichkeiten zu klären, um Missverständnisse zu vermeiden, wie wir am Beispiel der entgegengesetzten Größen sehen können. Bei der Lehre der Parallellinien finden wir in Kästners Lehrbuch kritische Anmerkungen, die dem Leser die Problematik mit diesem Thema nahebringen. Die Lehren werden kritisch hinterfragt und reflektiert vorgetragen.

Kästners *Anfangsgründe* weisen einige Neuerungen im Gegensatz zu Wolffs Lehrbüchern auf, was erklären kann, wieso Kästners Werk die *Anfangs=Gründe* von Wolff, die in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts eine Monopolstellung hatten, ablösten und viel genutzt wurden. Gleichzeitig war Kästner Vorbild für andere Lehrbuchautoren, beispielsweise für Karsten hinsichtlich der Klassifikation der mathematischen Wissenschaften und für Kant bezüglich der Ausführungen zu den entgegengesetzten Größen. Aus den angeführten Gründen können wir behaupten, dass Kästner mit seinen *Anfangsgründen* eine neue Richtung im Bereich der mathematischen Lehrbuchtradition einschlug. Er konzentrierte sich nicht auf die reine Vermittlung mathematischer Inhalte, sondern gab auch einen Einblick in die fachmathematische Forschung inklusive ihrer Probleme. Dies kann gleichzeitig als Wandel in dem Beruf des Mathematikprofessors des 18. Jahrhunderts bezeichnet werden: Der Universitätslehrer wurde allmählich auch zum Forscher, indem er sich in Aufsätzen mit Forschungsfragen befasste. Dieser Aspekt ist auch in den Lehrbüchern wiederzufinden, die einen wissenschaftlichen Charakter bekamen, indem kritische Bemerkungen über fachmathematische Themen sowie weiterführende Literatur angegeben wurden.

Für die Fallstudien wurden diejenigen mathematischen Werke verwendet, die im 18. Jahrhundert weit verbreitet waren. So kann angenommen werden, dass die darin enthaltenen Kenntnisse eine recht große Anzahl von Studenten erreichten. Da aber weniger bekannte Lehrbücher in unserer Untersuchung nicht betrachtet wurden, können die Ergebnisse keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Vielmehr müssten sie durch die Untersuchung weiterer Lehrbücher geprüft werden. Dies gilt vor allem in Bezug auf die Wissenschaftlichkeit der Lehrbücher, wobei hierbei noch zum Vergleich Forschungsmonographien miteinbezogen werden müssen.

[1698] Vgl. Hohrath, Mathematik für den Kriegsstaat. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 13.

5 Kästners Facettenreichtum

Kästner wirkte in erster Linie als Universitätsprofessor und Lehrbuchautor, der auf seine Weise viel zur Verbreitung des mathematischen Wissens beitrug. Ziel des vorliegenden Kapitels ist es, Kästners Facettenreichtum aufzuzeigen und seine Leistungen in verschiedenen Bereichen in Erinnerung zu rufen. Hierbei wird Kästner als Mathematiker, Lehrbuchautor, Lehrer und Universitätsprofessor betrachtet werden, wobei diese Bereiche nicht exakt voneinander zu trennen sind, so dass es inhaltliche Überschneidungen gibt. Obwohl sich Kästner auch im Rahmen der Literatur einen Namen gemacht hat, werden seine poetischen Werke im Rahmen unserer Untersuchung nicht als Quellen herangezogen, da sie, wie Baasner bereits herausfand, fast keine Bezüge zur Mathematik enthalten.[1699] Der interessierte Leser kann Kästners Leistungen in diesem Bereich bei Baasner nachlesen.[1700]

Für die folgenden Darstellungen verwende ich vor allem die Ergebnisse aus den vorherigen Kapiteln und lasse darüber hinaus neue Kenntnisse miteinfließen, beispielsweise Aussagen von Zeitgenossen, die in unterschiedlichen Schriften zu finden sind. Dabei erheben die Ausführungen über Kästner keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Zudem sind die Meinungen über Kästner immer mit Sympathie oder Antipathie verbunden, so dass die herangezogenen Aussagen kritisch betrachtet werden müssen.

Indem ich Kästners Facettenreichtum und seine mathematischen Tätigkeiten aufzeige, möchte ich herausfinden, welchen Einfluss Kästner in mathematischer Hinsicht hatte. Dabei gehe ich der Frage nach, ob man ein erfolgreich forschender Mathematiker gewesen sein muss, um im 18. Jahrhundert Einfluss auf die Mathematik zu nehmen. Somit möchte ich Kästner in der Gelehrtenwelt des 18. Jahrhunderts positionieren.

5.1 Kästner als Mathematiker

Kästner ist der Nachwelt nicht als erfolgreich forschender Mathematiker in Erinnerung geblieben. Dennoch finden wir in einigen zeitgenössischen Beschreibungen über Kästner explizit die Bezeichnung „Mathematiker“. Dies nehmen wir zum Anlass, Kästner als Mathematiker zu betrachten, wobei wir der Frage nachgehen, in wie weit Kästner die Kriterien eines Mathematikers des 18. Jahrhunderts erfüllte. Zunächst ist es notwendig herauszufinden, was damals unter einem Mathematiker verstanden wurde, wobei Wörterbücher aus dieser Zeit als Quellen dienen. Wolff beschreibt in seinem *Mathematischem Lexicon* einen Mathematiker wie folgt: „Mathematicus, Heisset eine Person, welche die Mathematick gründlich verstehet, auch dahin gehörige Wahrheiten durch eigenes Nachsinnen zu erfinden geschickt ist“[1701]. Fast ein halbes Jahrhundert später heißt es in Klügels *Mathematischem Wörterbuch* mit Bezug auf den Eintrag „Géometre“[1702] in der *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (35 Bde., 1751-1780) von d’Alembert: „Mathematiker, eine der Mathematik kundige Person, im Französischen gewöhn-

[1699] Vgl. Baasner, S. 167, Anm. 2.
[1700] Siehe hierzu Baasner, S. 165-528.
[1701] Wolff, ML, Sp. 869 f.
[1702] Die Schreibweise bei Klügel ist nicht korrekt. Richtig heißt es „Géomètre“.

lich Géometre. […] Ein Mathematiker, wenn er sich auch darauf einschränkt, nur dasjenige zu verstehen, was von andern erfunden ist, muß doch verschiedene, nicht sehr gewöhnliche Fähigkeiten mit einander verbinden; ein richtiges Unterscheidungsvermögen für Wahrheit und Irrschlüsse, eine leichte Fassungskraft sowol für das Einzelne als das Ganze, besonders bey verwickelten Beweisen, Gedächtniß, um nicht allein die Sätze, sondern auch wenigstens den Geist der Beweise zu behalten, um davon, wo es nöthig, Gebrauch zu machen. Der Mathematiker aber, der zu den Entdeckungen seiner Vorgänger noch neue hinzufügen will, muß nebst jenen Fähigkeiten des Geistes noch andere, mehr seltene, besitzen, Erfindungskraft, Tiefsinn, Scharfsinn und Stärke“[1703]. Wir wollen nun nachgehen, ob diese Beschreibungen eines Mathematikers auf Kästner zutreffen.

Kästner war sehr am Fortschritt der mathematischen Wissenschaften interessiert, wovon unterschiedliche Schriften von ihm zeugen, in denen er sich mit Themen zur reinen und angewandten Mathematik befasste.[1704] Kästner publizierte auch in Fachzeitschriften. Die Tatsache, dass gegen Ende des 18. Jahrhunderts einige mathematische Journale veröffentlicht wurden, zeigt, dass sich die Mathematik als eigenständige Wissenschaft etabliert hat. Zu den bekanntesten mathematischen Fachzeitschriften dieser Zeit gehören das *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* (1786-1788, hg. v. Joh. Bernoulli und Carl Friedrich Hindenburg), das *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* (1794-1800, hg. v. Hindenburg) sowie das *Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie* (1781-1785, hg. v. Christlieb Benedict Funk, Nathanael Gottfried Leske und Hindenburg). In diesen Zeitschriften wurden auch mathematische Probleme behandelt, wozu damals unter anderem die negativen Größen zählten. Diese stellte Kästner nicht nur in seinen *Mathematischen Anfangsgründen* vor, sondern er veröffentlichte auch die kurze Schrift *Ueber eine scheinbare Schwierigkeit vom kleinern und grössern, bey Quotienten*. Die Ausführungen in diesem Artikel gehen über diejenigen in seinen *Anfangsgründen* hinaus und sind eher fachmathematisch. Weitere fachmathematische Aufsätze von Kästner sind beispielsweise *Giebt es Logarithmen verneinter Zahlen?*[1705] sowie *Summe und Unterschied von Tangente und Secante*[1706]. Im *Philosophischen Magazin* (1788-1792, hg. v. Johann August Eberhard) finden wir zahlreiche Schriften von Kästner über mathematisch-philosophische Grundlagen, beispielsweise *Was heißt in Euklids Geometrie möglich?, Ueber den mathematischen Begriff des Raums* und *Ueber die geometrischen Axiome*.

Kästner trat bereits um die Jahrhundertmitte als Mitherausgeber des *Hamburgischen Magazin, oder gesammlete* [sic] *Schriften, zum Unterricht und Vergnügen, aus der Naturforschung und den angenehmen Wissenschaften überhaupt* (1747-1763, hg. v. Kästner und Unzer) hervor. Dieses Magazin enthält auch einige mathematische Artikel von Kästner, beispielsweise *Gedanken zur Erläuterung des geometrischen Begriffs von dem Ursprunge einer Linie, aus der Bewegung eines Punktes*[1707] und *Von der Zusammensetzung der mathematischen Linie aus mathematischen Puncten*[1708].

[1703] Klügel, MW 3, S. 624 f.
[1704] Siehe hierzu Kapitel 2.4.3 sowie Baasners chronologisches „Verzeichnis der Schriften Abraham Gotthelf Kästners“ in: Baasner, S. 605-645.
[1705] In: LM, 1786, 4. St., S. 531-540.
[1706] In: AM, 1797, 6. Heft, S. 174-180.
[1707] In: HM, 1749, 4. Bd., S. 46-52.
[1708] In: HM, 1757, 20. Bd., S. 131-137.

Darüber hinaus veröffentlichte Kästner zahlreiche Rezensionen und Übersetzung von mathematischen Werken. Durch diese Tätigkeiten konnte er viel Wissen sammeln und hatte einen guten Überblick über mathematische Bücher seiner Zeit. Als Beleg hierfür dient das 1801 veröffentlichtes Verzeichnis der Schriften aus seiner Privatbibliothek, die etwa 7000 Titel umfasste.[1709] Durch seine umfangreichen Kenntnisse war es ihm möglich, in seinen *Mathematischen Anfangsgründen* viele Verweise auf weiterführende Literatur zu geben. Als aussagekräftigstes Ergebnis mag jedoch seine vierbändige *Geschichte der Mathematik* angesehen werden. Hierbei handelt es sich nicht um eine Geschichte der Mathematik in dem Sinne, dass Kästner historische Fakten auflistete, sondern er gab, geordnet nach Epochen und mathematischen Themengebieten, hauptsächlich Literatur an. Es handelt sich somit um eine kommentierte Bibliographie zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

Ein weiterer Aspekt, der in den obigen Definitionen eines Mathematikers zum Vorschein kommt, ist die Erweiterung der mathematischen Wissenschaften in Form von neuen Kenntnissen. Es heißt, dass Kästner neue Entdeckungen im Bereich der höheren Arithmetik gemacht habe und er wegen dieser Leistungen zum außerordentlichen Professor in Leipzig ernannt worden sei.[1710] Allerdings bleibt unklar, um welche Entdeckungen es sich genau gehandelt hat. Möglicherweise bezieht sich die Aussage auf Kästners Arbeiten über den binomischen Lehrsatz. 1745 erschien seine Schrift *Demonstratio theorematis binomialis*.

Im 18. Jahrhundert war der Gegenstand der Parallellinien ein großes Forschungsthema und veranlasste viele Mathematiker zu Beweisversuchen des Parallelenaxioms.[1711] Das Problem der Beweisbarkeit dieses Axioms bestand seit Euklid im dritten vorchristlichen Jahrhundert und endete mit der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie durch Gauß, Lobatschewski und J. Bolyai im 19. Jahrhundert. Nachdem Clavius seine Euklid-Ausgabe 1574 veröffentlicht hatte, wurde bis zu Leibniz‘ Zeiten kaum über die Theorie der Parallellinien geforscht.[1712] Indem Kästner das Interesse der Mathematiker in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wieder auf diesen Forschungsgegenstand lenkte, kann ihm eine besondere Position hinsichtlich der Forschung nachgesagt werden. Nach eigenen Aussagen konnte er selbst trotz großem Interesse am Problem der Parallellinien keinen zufriedenstellenden Beweis des Parallelenaxioms finden.[1713] Dennoch wurde in unserer Untersuchung deutlich, dass Kästner massiven Einfluss auf die weitere Forschung zum Parallelenpostulat hatte, indem er seinen Schüler Klügel zu der bekannten Arbeit *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (1763) bewegte, die eine besondere Stellung innerhalb der Forschung über das Parallelenpostulat einnimmt. Ab etwa 1781 ist die Anzahl der Publikationen zu diesem Thema merklich gestiegen.[1714]

Ein anderes Thema, das Kästner bekannt machte, war die – modern gesprochen – vollständige Induktion. Er verwendete sie als Beweismethode in seinen *Mathematischen Anfangsgründen*, vor allem im Bereich der Analysis.[1715] Felgner stellt in seinem Artikel *Das*

[1709] Siehe Kästner/Kirsten.
[1710] Vgl. Jöcher/Adelung/Rotermund, Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“, Sp. 18.
[1711] Für umfassende Darstellungen sei hier auf Stäckel/Engel sowie auf Kapitel 4.3. in der vorliegenden Arbeit hingewiesen.
[1712] Vgl. hierzu und zum Folgenden Stäckel/Engel, S. 139.
[1713] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *5^r f.
[1714] Vgl. Stäckel/Engel, S. 147.
[1715] Vgl. Kästner, Ueber die geometrischen Axiome. In: PM, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 427.

Induktions-Prinzip Kästners Leistung zu dieser Methode heraus. Dieser habe als einer der ersten die vollständige Induktion beschrieben, wobei er sie nur „Induktion“ oder „n + 1 Methode“ nannte.[1716] Die Bezeichnung „vollständige Induktion“ für die Beweismethode mit dem Schluss von „n“ auf „n + 1“ wurde erst im Laufe des 19. Jahrhunderts geläufig.[1717] Der erste, der sie „vollständige Induktion“ nannte, war wohl Jakob Friedrich Fries (1773-1843) in seinem 1811 erschienenen Werk *System der Logik*.[1718] Dennoch wurde dieses Verfahren lange bis ins 19. Jahrhundert hinein mit dem Namen Kästner verbunden. Der Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) nannte im Crelle-Journal 1826 die Methode „Kästnerische Methode“[1719]. 1842 veröffentlichte Constantin Frantz (1817-1891) *Die Philosophie der Mathematik*, in der er die Induktion als „Kästner’sche Beweismethode“[1720] bezeichnete. Selbst nachdem die Bezeichnung „vollständige Induktion“ üblich geworden war, begegnet uns der Name Kästner in dem Schulprogramm *Elementare Einleitung der synthetischen Geometrie* aus dem Jahre 1871. In § 9 diskutiert der Autor Conrad Lips das Prinzip der Vorzeichen für Winkel und Flächeninhalte, wobei er die vollständige Induktion verwendete, die er als „Kästner’schen Schluß von n auf n + 1“[1721] bezeichnete.

Die Tatsache, dass Kästner die vollständige Induktion für einige seiner mathematischen Beweise verwendete, leitet uns zu den mathematischen Beweisen im Allgemeinen. Diese hatten für Kästner einen besonderen Stellenwert in Bezug auf die mathematische Wahrheitsfindung. In seiner deutschsprachigen Autobiographie erklärt er, dass er während seiner Studienzeit an der Leipziger Universität bei seinem Lehrer Backofen mathematische Beweise vermisste und sie selbstständig erarbeitete.[1722] Auch im Rahmen seiner mathematischen Abschlussarbeit *De theoria radicum in aequationibus* (1736) versuchte Kästner die Beweise schärfer auszuarbeiten als es sein Lehrer Hausen verlangte.[1723] Über Hausen schreibt er, dass dieser in seinem Lehrbuch *Elementa matheseos* oft die Methode der Induktion verwendet habe, aber Kästner sich von ihrer allgemeinen Gültigkeit erst einmal selbst überzeugen musste.[1724] Diesen Anspruch übertrug er auf seine *Mathematischen Anfangsgründe*, in denen er viele mathematische Beweise angab. Sie stellen für ihn ein wesentliches Element im Rahmen der mathematischen Methode und somit zum Verständnis der Mathematik dar.[1725]

Kästners Beweise hatten eine Wirkung auf andere Mathematiker. So schreibt Clemm in seinem *Mathematischen Lehrbuch*, dass er den Beweis zur Multiplikation negativer Größen zuerst bei Kästner gesehen und für seine eigenen Ausführungen übernommen habe.[1726] Bolzano war um die Strenge in der Mathematik sehr bemüht. In seinen Werken nimmt er häu-

---

[1716] Vgl. Felgner, S. 36. Felgner bezieht sich auf folgende Stelle: „[…] Weil man hier vom nten auf den n(+1)ten fortgeht, nannte ein guter Freund von mir in Leipzig M. Orchliz, das im Scherze: Die n + 1 Methode“; in: Kästner, Ueber die geometrischen Axiome. In: PM, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 427 f.

[1717] Vgl. Felgner, S. 37.

[1718] Vgl. Fries, S. 237.

[1719] Jacobi, Ueber Gauss neue Methode. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1826, 1. Bd, S. 302.

[1720] Frantz, S. 107.

[1721] Lips, S. 16.

[1722] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 54 f.

[1723] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 57 f.

[1724] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 58.

[1725] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 16.

[1726] Vgl. Clemm, ML 1, S. 60.

fig Bezug auf Kästner. Bolzano selbst gibt hierzu einige Hinweise: So erfahren wir beispielsweise, dass Kästner einen Beweis für das Hebelgesetz erbracht habe, dessen Schwächen Bolzano allerdings aufzeigt.[1727] In seinem Werk *Der binomische Lehrsatz* (1816) bezeichnet Bolzano den binomischen Lehrsatz als einen der wichtigsten Sätze der Analysis und zählt auch Kästner unter denjenigen Personen auf, die um einen strengen Beweis dieses Satzes bemüht gewesen seien.[1728] In *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes* (1817) erwähnt Bolzano Kästners Verdienste für den Beweis des Nullstellensatzes.[1729] Kästner gab hierzu einen Beweis in der dritten Auflage seiner *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* in § 316, allerdings sah Bolzano diesen, wie auch andere Beweise von weiteren Mathematikern, als nicht ausreichend an.

Im Rahmen der mathematischen Lehre verfolgte Kästner nicht die altüberlieferte dogmatische Lehrart nach Diktat. Vielmehr strebte er an, dass die Schüler selbst zu neuen Ergebnissen und Beweisen gelangen sollten: „Ich darf doch auch wol sagen, daß einem Knaben, der sonst Kopf und Neigung zur Geometrie hat, in den ersten vier Büchern Euklids kein Beweis zu schwer seyn wird, wenn des Lehrers Vortrag gehörige Deutlichkeit und Lebhaftigkeit hat, und der Lernende die Figur selbst zeichnet. Bei der Zeichnung fühlt man wie immer Eins das Andere bestimmt, und wird also auf die Gedanken gebracht, die zum Beweise führen“[1730]. Diese Betonung der Selbsttätigkeit seitens der Lernenden war seinerzeit ungewöhnlich.

Ein Indikator für Kästners Ansehen innerhalb der Gelehrtenrepublik stellen seine Mitgliedschaften in verschiedenen gelehrten Gesellschaften und wissenschaftlichen Akademien dar.[1731] Die Akademien waren die Zentren wissenschaftlicher Forschung im 18. Jahrhundert, in denen in der Regel Personen als Mitglieder aufgenommen wurden, die zum Fortschritt der Wissenschaften beigetragen haben. Allerdings muss man differenzieren und schauen, wieso man Mitglied einer bestimmten Gesellschaft oder Akademie wurde. Kästner wurde beispielsweise nicht aufgrund seiner mathematischen, sondern aufgrund seiner literarischen Leistungen in die Londoner Royal Society aufgenommen, wie aus dem entsprechenden Aufnahmediplom hervorgeht.[1732]

In Bezug auf die Göttinger Sozietät der Wissenschaften hob Heyne in seiner Lobrede auf Kästner aus dem Jahre 1800 dessen Leistungen hervor.[1733] Kästner habe sich sehr um die Sozietät und ihr Ansehen bemüht und zur Beförderung der Wissenschaften beigetragen, wofür die 47 Abhandlungen ständen, die er in der Göttinger Sozietät vortrug.

Über Kästners wissenschaftliche Korrespondenz haben wir bereits berichtet.[1734] Schon früh machte sich Kästner in der Gelehrtenwelt bekannt und führte sowohl national als auch international Briefwechsel mit namhaften Gelehrten seiner Zeit. Kästners Korrespondenz zeigt, dass er innerhalb der Gelehrtenwelt angesehen war und er sich über mathematische Inhalte austauschte.

[1727] Vgl. Bolzano, Beyträge, Vorrede, S. VIII.
[1728] Vgl. Bolzano, Der binomische Lehrsatz, Vorrede, S. III f.
[1729] Vgl. hierzu und zum Folgenden Bolzano, Rein analytischer Beweis, Vorrede, S. 3-5.
[1730] Kästner, Ueber die Art. In: BJ, 1788, 2. Bd., S. 263.
[1731] Siehe Kapitel 2.4.1.
[1732] Vgl. Abraham Gotthelf Kästners Aufnahmediplom an die Royal Society. In: Universitätsarchiv Göttingen, Personalakte Abraham Gotthelf Kästner, Kur. 5753, pag. 3a.
[1733] Vgl. hierzu und zum Folgenden Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 199 f.
[1734] Siehe Kapitel 2.4.2.

Eine weitere Tatsache, die für Kästners Ansehen als Mathematiker spricht, ist, dass er im Besitz der Leibniz'schen Rechenmaschine war und er damit beauftragt wurde, eine Beschreibung von dieser abzugeben.[1735] Dies zeigt, welches große Vertrauen man in Kästners mathematische Fähigkeiten hatte.

Betrachtet man die zahlreichen Lexikoneinträge und andere zeitgenössische Äußerungen über Kästner, so wird deutlich, dass er zu Lebzeiten als einer der größten Mathematiker seiner Zeit angesehen wurde. In den Beschreibungen wurde explizit der Begriff „Mathematiker" verwendet. Dies kann bedeuten, dass Kästner als Mathematiker gemäß dem damaligen Bild eines Mathematikers angesehen wurde. Möglich ist aber auch, dass man zwischen den Begrifflichkeiten nicht genau unterschied und Kästners Leistungen als Mathematiker nicht von denen als Lehrbuchautor trennte. Im Folgenden findet man ein Sammelsurium an Aussagen über Kästner als Mathematiker.

Deutschland habe Kästner nicht nur „als einen seiner tiefsinnigsten Denker und Mathematiker verehrt"[1736], sondern auch als „einen der vielseitigsten Kenner der Wissenschaften, einen der größten Mathematiker aller Zeiten"[1737].

Im fünften Kapitel seiner Streitschrift über die Universität Göttingen befasst sich Wilhelm Friedrich August Mackensen (1768-1798) unter anderem mit Kästner: „[…] meines Erachtens ist Kästner der merkwürdigste[1738] Mann Göttingens. Unter unsern Enkeln können sich viele Genies befinden, aber kaum kann ich mich überreden, daß die zwey oder drey folgenden Generationen Einen Kästner wieder liefern werden. […] Sein Wissen ist in der That ungeheuer. Sein Gedächtniß ist, wie das aller großen Mathematiker, der Leibnitze, Wallisiusse u. A., zum Bewundern stark. Daher ist es ihm auch möglich so viele und so heterogene Fächer zu umfassen"[1739]. Mackensen stellt also den Universitätsprofessor Kästner bezüglich des Gedächtnisses auf eine Stufe mit Mathematikern wie Leibniz und Wallis. Am Ende unterstreicht Mackensen noch die Bedeutung Kästners als Mathematiker: „Denn es ist nicht genug seiner Wissenschaft gewachsen zu seyn, man muß ihr auch überlegen seyn. Und dieß ist Kästner"[1740].

Neben Mackensen schrieb auch eine andere Person in der anonym erschienen Schrift *Interessante Bemerkungen über Göttingen als Stadt und Universität betrachtet* (1801) über Kästner, der zu diesem Zeitpunkt bereits verstorben war. Der Verfasser beschreibt Kästner als eine Person, die durch seine große Gelehrsamkeit in der gesamten Welt angesehen war.[1741] „Er [Kästner] war einer der größten Zierden der Akademie und ohnstreitig einer der ersten Mathematiker in Europa. Fast in allen andern ganz heterogenen Wissenschaften war er weit über die Anfangsgründe hinaus. Auch unter den Dichtern nahm er mit den ersten Rang ein; sein Witz war treffend, und oft schneidend. Davon zeugen unter andern seine gedruckten Epigramme"[1742].

[1735] Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 243.
[1736] Jördens, Denkwürdigkeiten, Artikel „Abraham Gotthelf Kästner", S. 55.
[1737] Schlichtegroll, Artikel Abraham Gotthelf Kästner", S. 172.
[17381738] Im Sinne von „des Merkens würdig".
[1739] Mackensen, S. 61.
[1740] Mackensen, S. 64.
[1741] Vgl. [Anonymus] Interessante Bemerkungen, S. 85 f.
[1742] [Anonymus], Interessante Bemerkungen, S. 86.

Am Ende einer Rezension zu Kästners *Anfangsgründen der Hydrodynamik* heißt es: „Möchte es doch der Vorsicht gefallen, unserm würdigen Greise, der Krone aller forschenden deutschen Mathematiker (keinem der rühmlichen Männer unsers geliebten Vaterlandes zu nahe getreten) noch lange Munterkeit und Kräfte zu schenken, damit die nur reine Wahrheit ausspähende Wissenschaft durch sein thätiges Bestreben, nützlich zu seyn, immer mehr und mehr vervollkommnet werde!“[1743]

Auch jenseits der deutschsprachigen Grenzen findet man Lexikonartikel über Kästner, in denen seine mathematischen Verdienste hoch geschätzt werden. Er wurde vor allem durch seine Übersetzungen im Ausland bekannt. Heyne betont in seiner Lobrede auf Kästner aus dem Jahre 1800, dass Kästners internationale Bekanntheit ein wichtiger Faktor für dessen Berufung an die Universität Göttingen gewesen sei.[1744] In der *Biographie universelle* werden Kästners Leistungen und sein hervorragendes Ansehen gewürdigt, aber es wird auch erwähnt, dass Kästner in mathematischer Hinsicht keine neuen Entdeckungen gemacht habe.[1745]

Viele der obigen Aussagen stammen von Zeitgenossen. Allerdings gibt es auch Personen, die Kästner nicht so hoch ansahen. Du diesen gehört der Mathematiker Hermann Hankel (1839-1873), der schreibt, dass Kästner in mathematischer Hinsicht nichts geleistet habe.[1746] Hier wird die geringe Wertschätzung Kästners nach seinem Tod deutlich, auf die Baasner bereits hingewiesen hat.[1747] Es gibt jedoch auch Personen zu Kästners Lebzeiten, die in fachmathematischer Sicht kein gutes Bild von ihm hatten. Hierzu gehört Gauß, der zahlreiche Anmerkungen in seinen eigenen Exemplaren von Kästners *Anfangsgründen* hinterließ und so Kästners fachliche Mängel aufzeigte.[1748]

Zusammenfassend können wir festhalten, dass Kästner als mathematischer Forscher kaum in Erscheinung trat, obwohl er am Fortschritt der Wissenschaften seiner Zeit interessiert und aktiv beteiligt war. Dies zeigen seine Mitgliedschaften in wissenschaftlichen Akademien, seine wissenschaftliche Korrespondenz sowie seine schriftstellerische Tätigkeit, vor allem in Fachzeitschriften. Auf diese Weise konnte er zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse beigetragen. Betrachten wir seine Tätigkeiten in Hinblick auf die Beschreibungen eines Mathematikers in den Wörterbüchern von Wolff und Klügel, so können wir feststellen, dass Kästner alle Kriterien erfüllte, die einem Mathematiker damals zugeschrieben wurden. Kästner war kein Erfinder neuer Lehrsätze, aber ihm kann ein Verdienst in Hinblick auf die Ausarbeitung mathematischer Methoden wie der vollständigen Induktion zugesprochen werden. Man kann behaupten, dass Kästner die gesamte Mathematik seiner Zeit überblickte. Seine umfangreichen Kenntnisse vor allem über die mathematische Literatur können wir nicht nur an seinen *Mathematischen Anfangsgründen* erkennen, wo er an zahlreichen Stellen auf weiterführende Werke verwies, sondern auch an dem Umfang seiner Privatbibliothek sowie seiner *Geschichte der Mathematik*.

[1743] NADB, 1798, Bd. 37, II, S. 314.

[1744] Vgl. Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 199.

[1745] Vgl. Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Claude Marie Pillet in: Biographie universelle, Bd. 22 (1818), S. 206.

[1746] Vgl. Mahrenholz, Artikel „Abraham Gotthelf Kästner“, S. 20.

[1747] Vgl. Baasner, S. 12.

[1748] Vgl. Reich, Mathematik der Aufklärung. In: Holtz/Betsch/Zwink, S. 80. Für eine umfangreichere Darstellung von der Verbindung zwischen Gauß und Kästner vgl. Kröger.

5.2 Kästner als Lehrbuchautor

Die Anzahl der deutschsprachigen mathematischen Lehrbücher stieg im 18. Jahrhundert stark an.[1749] Trotz der großen Anzahl an Lehrbüchern haben sich Kästners *Mathematische Anfangsgründe* herauskristallisiert. Sie gehörten zu den führenden Mathematiklehrbüchern ihrer Zeit. Kästner veröffentlichte den ersten Band der *Anfangsgründe* 1758. Dies war zwei Jahre nach Antritt seiner Professur an der Universität Göttingen, so dass davon auszugehen ist, dass er in Göttingen mit der Arbeit an seinen Lehrbüchern begann. Im 18. Jahrhundert war es üblich, dass sich die Professoren durch Publikationen und eigene Lehrbücher bekannt machten und gleichzeitig beweisen konnten, dass sie ihrer Position würdig waren.[1750] Nicht nur das Ansehen der Professoren, sondern damit verbunden auch das der Universitäten, an denen sie beschäftigt waren, konnte auf diese Weise gesteigert werden.[1751] Sicherlich spielt auch noch der finanzielle Aspekt eine gewisse Rolle, da das Gehalt der Professoren im 18. Jahrhundert nicht sehr hoch war.[1752]

In der Sekundärliteratur erscheinen Kästners *Anfangsgründe* oft von Wolffs Lehrbüchern überschattet. Tatsächlich kommt Wolff eine Sonderstellung im Bereich der deutschen mathematischen Lehrbuchtradition zu, da er als erster mit seinen *Anfangs=Gründen* ein umfangreiches Lehrbuch veröffentlichte, das alle mathematischen Wissenschaften des 18. Jahrhunderts umfasste. Den Erfolg dieses Lehrbuchs kann man an der Tatsache festmachen, dass es bis 1800, weit über Wolffs Tod hinaus, zahlreiche Auflagen erlebte. Kästner erkannte das mathematische Verdienst Wolffs, würdigte dieses im Vorwort zum ersten Band seiner *Anfangsgründe* und knüpfte an Wolffs Tradition an, indem er dasselbe Ziel verfolgte, nämlich die Verbreitung mathematischer Kenntnisse.[1753] Dennoch ließ er nicht unerwähnt, dass er in Wolffs Lehrbuch einige Inhalte vermisste, weshalb er selbst einige Themen anders und umfangreicher ausgearbeitet habe als Wolff.

Vergleicht man die beiden deutschsprachigen mathematischen „Anfangsgründe“ von Wolff und Kästner, so fällt zunächst der ähnliche Aufbau auf. Beide Autoren behandelten dieselben mathematischen Wissenschaften und legten größtenteils die mathematische Lehrart[1754] zugrunde. Die vorgestellten mathematischen Wissenschaften erklärte Wolff scheinbar zusammenhangslos hintereinander. Kästner hingegen gab in seinen „Vorerinnerungen“ eine Klassifikation der mathematischen Wissenschaften an, mit deren Hilfe er die einzelnen Disziplinen in ein geschlossenes System einbetten wollte.[1755] Seine Klassifikation diente anderen Lehrbuchautoren als Vorbild. Karsten schrieb explizit, dass er Kästners Einteilung der Wissenschaften als sehr richtig ansehe und deshalb übernommen habe.[1756]

Unter den von uns betrachteten Lehrbuchautoren ist Kästner der erste, der in seinen deutschsprachigen *Anfangsgründen* von „angewandter Mathematik“ sprach. Möglicherweise trug dies zur Etablierung dieses Begriffs bei, denn durch die hohe Verbreitung von Kästners

---

[1749] Vgl. Wagner, S. 115 f. und Abbildung 4 in der vorliegenden Arbeit.
[1750] Vgl. Meiners, Bd. 2, S. 11 f.
[1751] Vgl. Meiners, Bd. 2, S. 9 f.
[1752] Vgl. Turner, University Reformers. In: Stone, S. 498.
[1753] Vgl. hierzu und zum Folgenden Kästner, AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *2^{v}-*4^{r}.
[1754] Zur mathematischen Lehrart siehe Kapitel 3.3.3.
[1755] Vgl. Kästner, AG 1.1., S. 3-11.
[1756] Vgl. Karsten, L 1, Vorrede, o. S.

Lehrbüchern kann angenommen werden, dass dieser Begriff vielen Personen in Deutschland bekannt wurde. Um diese These belegen zu können, was in der vorliegenden Arbeit leider nicht geleistet werden kann, müssten nicht nur Lehrbücher, sondern auch weitere Schriften heran gezogen werden, um mehr über den Ursprung des Begriffs „angewandte Mathematik" zu erfahren.

Einer der Kritikpunkte an Wolffs Lehrbüchern war, dass er neue mathematische Kenntnisse in den Neuauflagen nicht eingebaut habe, was bereits Zeitgenossen erkannten.[1757] Kästner beabsichtigte, die Kenntnisse vollständiger und somit auch umfangreicher darzustellen als Wolff.[1758] Vergleicht man allein den Umfang der beiden Werke, so scheint dies Kästner tatsächlich gelungen zu sein. Wolff und Kästner behandelten – mit geringen Unterschieden – sämtliche mathematische Wissenschaften, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik gerechnet wurden, wobei Wolff nur vier, Kästner jedoch zehn Bände veröffentlichte. Beim Vergleich der verschiedenen Auflagen von Kästners *Anfangsgründen* stellt man fest, dass er durchgehend neue Erkenntnisse in seine Lehrbücher integrierte, die er in den entsprechenden Vorreden der Werke erläuterte.

Zeitgenossen von Kästner erkannten die Unterschiede zwischen Kästners und Wolffs Lehrbüchern, auch in Hinblick auf die Aktualität der Inhalte. Jördens schreibt über Kästners *Anfangsgründe*: „[Sie] verdrängten allmählig durch ihre größere Vollständigkeit, durch innigern Zusammenhang und Konsequenz der einzelnen Lehren, durch weiteres Fortschreiten derselben, durch Verbesserung der bis dahin geltenden, und Aufstellung neuerer strengerer Beweise, die Wolfischen Lehrbücher, […], und man kann bei der großen Verbreitung, welche die Kästnerschen Anfangsgründe gehabt haben, ihnen mit dem vollkommensten Rechte einen entscheidenden Einfluß in die Vervollkommnung und Erweiterung des mathematischen Studiums zuschreiben"[1759]. Dennoch müssen die Unterschiede zwischen Wolffs und Kästners Lehrbüchern mit Vorsicht betrachtet werden, denn Wolff schrieb seine *Anfangs=Gründe* 1710, fast 50 Jahre vor dem Erscheinen von Kästners Lehrwerk. Durch die Tatsache, dass Wolff den Großteil der Inhalte nicht aktualisierte, blieben seine Bücher weitgehend auf dem Stand von 1710. Einige Themen hat Wolff jedoch umfangreicher ausgearbeitet als Kästner, beispielsweise die Kapitel zur Artillerie, Zivil- und Kriegsbaukunst. Zudem war die Analysis 1710 noch nicht auf dem Stand von 1760/61, als die beiden Bände von Kästners *Anfangsgründen der Analysis* erschienen, so dass die Ausführungen bei Wolff kürzer ausfallen mussten. Die Stellung der Analysis zu Beginn des 18. Jahrhunderts wird darüber hinaus daran deutlich, dass Wolff sie lediglich als untergeordnetes Kapitel zur Algebra behandelte.

Bei der Durchsicht der Rezensionen zu Kästners Lehrbüchern können wir folgende Passage entdecken, die sich auf Kästners *Anfangsgründe der Hydrodynamik* bezieht: „Die Ausgabe 1769 […] war das erste Deutsche Lehrbuch dieser Wissenschaft; Karsten bekam es zu sehen, als seine Hydraulik, die 1770 erschien, ganz ausgearbeitet war. Er fängt von allgemeiner Theorie an, gegenwärtiger Verfasser [Kästner] von Erfahrungen. Das hat vermuthlich seiner Arbeit den Beyfall so vieler Mathematiker erworben, die seitdem über diesen Gegenstand gearbeitet haben, obgleich die Grenzen, die er sich setzte, nicht

[1757] Vgl. Clemm, ML 1, Vorbericht zur ersten Auflage, o. S.

[1758] Vgl. Kästner AG 1.1., Vorrede der ersten Auflage, S. *3^r f.

[1759] Jördens, Denkwürdigkeiten, Artikel „Abraham Gotthelf Kästner", S. 55.

gestatteten, sich in Berechnung vieler einzelnen Maschinen einzulassen, wodurch Karsten bey größerer Ausdehnung seines Buches nützlich geworden"[1760]. Dieses Urteil über Kästners Lehrbuch belegt zum einen, dass er der erste war, der die Inhalte zur Hydrodynamik lehrbuchmäßig aufbereitet hat. Zum anderen wird der Unterschied zwischen Kästners und Karstens Herangehensweise deutlich, so dass man von eigenen Stilen oder wissenschaftlichen Methoden beider Autoren sprechen kann.

Ohne einen Vergleich mit weiteren Lehrbuchautoren sollen nun ein paar Charakteristika von Kästners *Anfangsgründen* genannt werden, die von dessen Zeitzeugen stammen oder der Sekundärliteratur entnommen sind. Eines der Merkmale, für die Kästner bekannt wurde, waren seine zahlreichen Verweise auf weiterführende Literatur. In der Rezension zum dritten Band von Kästners *Anfangsgründen* lobt deren anonyme Verfasser die literarischen Kenntnisse Kästners und dass dieser überall weitere mathematische Literatur angebe, was in Deutschland[1761] nicht der Normalfall sei.[1762] Eine Besonderheit stellt zudem Kästners analytische Behandlung der Geometrie dar, die im 18. Jahrhundert aufgekommen ist: „Dass Hr. K. geometrische Fragen fast durchgehends, nicht nach der Methode der Alten, sondern analytisch behandelt, (welches unstreitig dem gegenwärtigen Zustand und Bedürfnis der Wissenschaft, am angemessensten ist), ist bekannt"[1763]. Auf diese Weise wurden die Leser von Kästners Lehrbüchern an die zeitgenössische mathematische Arbeitsweise gewöhnt.

Zu Kästners *Anfangsgründe der höhern Mechanik* heißt es in einer anderen Rezension: „Es gehört also mit zu der Absicht dieser Schrift; Fortgang der Wissenschaft durch Erfindung neuer Lehren zu verbreiten, indem durchgehends neue Kunstgriffe angegeben, und diese mit denen weitläufigern und öfters nicht einmal ganz richtigen Auflösungen der Vorfahren sind verglichen worden, so daß man nirgends den Geist des Verf. verkennen kann"[1764].

Kästners Lehrbücher zeichnen sich auch dadurch aus, dass sie „tiefsinnige Wahrheiten erfinden und die auch solchen Lesern begreiflich machen können, die nicht allenfalls selbst im Stande gewesen wären, sie zu erfinden"[1765]. Auf diese Weise kommen Kästners Lehrbücher zwei Merkmale zu, nämlich erstens die Wissenschaftlichkeit, zweitens eine solche didaktische Aufbereitung, dass die Inhalte für die Leser verständlich waren.

Wie wir in Kapitel 3.3 gesehen haben, machte sich Kästner Gedanken zur Pädagogik und Didaktik seiner Zeit, die in seine *Anfangsgründe* einflossen. Er reihte nicht die mathematischen Kenntnisse aneinander, sondern bemühte sich um einen effizienten Aufbau seiner Lehrbücher. Seine Ausführungen beginnen mit elementaren Kenntnissen aus den mathematischen Wissenschaften und sind begleitet von zahlreichen Beispielen, Aufgaben und Hinweisen auf weiterführende Literatur. So heißt es in Bezug auf seine *Anfangsgründe der höhern Mechanik*, dass Kästner die einzigartige Gabe habe, seine Ausführungen anhand von Beispielen und

[1760] GGA, 1797, 92. St., S. 905.
[1761] Die Bezeichnung „Deutschland" wurde in der vorliegenden Quelle verwendet. Ob die umfangreiche Angabe weiterführender Literatur flächendeckend bereits in anderen Ländern praktiziert wurde, können wir im Rahmen der vorliegenden Untersuchung nicht beantworten.
[1762] Vgl. ALZ, 1791, Bd. 3, Sp. 370.
[1763] ALZ, 1791, Bd. 3, Sp. 370.
[1764] AdB, 1790, Bd. 96/I, S. 149.
[1765] AdB, 1769, 8. Bd., 2. St., S. 209.

Vergleichen einleuchtender zu machen und so die Verbindung zu mathematischen Sätzen aufzuzeigen.[1766]

Ein wichtiges Element – und möglicherweise eine Besonderheit von Kästners *Anfangsgründen* – stellt die Verbindung zwischen Lehrbuch und zeitgenössischer Forschung dar.[1767] Kästner war sehr an der mathematischen Forschung interessiert, veröffentlichte Schriften zu einzelnen mathematischen Themen und integrierte einige von ihnen später in seine *Anfangsgründe*. Hierzu zählt zum Beispiel seine Dissertation, aus der Teile in §§ 310 f. seiner *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* eingebaut wurden.[1768] 1743 und 1745 veröffentlichte Kästner zwei Schriften über Newton und mathematische Reihen, die ebenfalls zum Bestandteil dieses Lehrbuchs wurden.[1769]

In die Vorreden von Kästners *Anfangsgründen* wird der Leser unter anderem darüber informiert, welche Werke Kästners Ausführungen zugrunde lagen. Vor allem im Bereich der angewandten Mathematik verwendete Kästner Forschungsmonographien wie *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* von Euler.[1770] Auch für seine *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* nahm Kästner Bezug auf Eulers Werke.[1771] Über die *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* heißt es in einer Rezension: „Nach einigen Integrierungen, wenn die veränderlichen Grössen vermengt sind, folgt der Gebrauch des newtonischen Parallelogramms, und anderer Arten Reihen zu finden, darunter sich auch Hr. Nicolaus Bernoullis allgemeine Art befindet, die Hr. Daniel Bernoulli dem Herrn K. schriftlich mitgetheilt hatte“[1772]. Kästner nahm also in seinem Lehrbuch nicht nur Bezug auf neue Forschungsergebnisse und ließ die Inhalte in seine *Anfangsgründe* einfließen, sondern es wird hier auch deutlich, dass Kästner mit bekannten Mathematikern wie Daniel Bernoulli in Kontakt stand.

Die obigen Belegstellen zeigen, dass Kästner die mathematischen Inhalte in einer lehr- und lernbaren Form in den *Anfangsgründen* darstellte, so dass sie von Anfängern der Mathematik gelesen und verstanden werden konnten beziehungsweise sollten. Dies kann als didaktische Transposition bezeichnet werden.[1773]

Es gab auch Personen, denen die Inhalte in Kästners *Anfangsgründen* zu schwierig waren. Der Schriftsteller Heinrich von Kleist (1777-1811) erhielt Privatunterricht in Mathematik durch Johann Ludwig Bauer, dem damaligen Konrektor der „Großen Stadtschule“ in Potsdam.[1774] Er musste zu jeder Unterrichtsstunde gewisse Passagen aus Kästners Lehrbuch vorbereiten und in den Unterrichtsstunden vortragen, wobei er jedoch große Probleme mit der indirekten Beweisführung hatte und den Schlüssen nicht schnell genug folgen konnte.

Ein positives Urteil über Kästners Lehrbücher gibt der Mathematiker Bolzano, der die mathematischen Grundlagen nach „Kästners vortrefflichem Lehrbuche“[1775] erlernte. Vor allem am Beispiel Bolzanos sehen wir, dass Kästner durch seine Lehrbücher Einfluss auf die Aus-

---

[1766] Vgl. AdB, 1769, 8. Bd., 2. St., S. 210 f.
[1767] Siehe hierzu Kapitel 3.3.9.
[1768] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 57 f.
[1769] Vgl. Kästner, Vita, S. XX.
[1770] Vgl. Kästner, AG 4.1., Vorrede der ersten Ausgabe, S. vi.
[1771] Vgl. Kästner, AG 3.2., Erinnerung bey der zweyten Ausgabe, S. xvi.
[1772] GGA, 1761, 3. St., S. 20.
[1773] Vgl. Chevallard, S. 39 f.
[1774] Vgl. hierzu und zum Folgenden Radbruch, S. 87.
[1775] Bolzano, Beyträge, Vorrede, S. XI.

bildung künftiger Mathematik nehmen konnte, denn Bolzano – wie auch andere Mathematiker – erlernte die Mathematik mit Hilfe von Kästners *Anfangsgründen*.

Insgesamt werden Kästners *Anfangsgründe* – gemäß seiner eigenen Absicht – als gründlich, kurz und vollständig beschrieben.[1776] Zudem werden sie als Beitrag zu einem gründlichen mathematischen Studium in Deutschland angesehen. Unsere Darstellung von zeitgenössischen Stimmen zeigt, dass Kästners Lehrbücher einige Charakteristika aufweisen, die seine *Anfangsgründe* von den Lehrbüchern weiterer Autoren unterscheiden, beispielsweise die zahlreichen Aktualisierungen in den Neuauflagen, die sich auch in Form von Literaturangaben zeigen. Obwohl sich Kästner in seinen *Mathematischen Anfangsgründen* weitgehend auf die Vermittlung elementarer Kenntnisse beschränkte, die in den ersten beiden „Theilen" des Lehrwerks zu finden sind, lässt er fachmathematische Fragen und Probleme durch die Verweise auf weiterführende Literatur nicht unbeachtet. Unter anderem an seinen *Anfangsgründen der Hydrodynamik* erkennen wir, dass Kästner die Inhalte aus verschiedenen Forschungsmonographien so aufarbeitete, dass er mit diesem Band der *Anfangsgründe* das erste deutschsprachige Lehrbuch zu diesem Gebiet veröffentlichen konnte.

Die dargestellten Merkmale belegen nicht nur die Besonderheit von Kästners Lehrbüchern, sondern können auch als Hauptgründe für den Erfolg der *Anfangsgründe* angesehen werden. Die Rezensionen zu den einzelnen Bänden des Lehrbuchs sind durchweg positiv. Man darf jedoch nicht außer Acht lassen, dass Lehrer bei der Auswahl und Verwendung eines Lehrbuchs zu Vorlesungszwecken sicherlich Präferenzen zu einem bestimmten Autoren oder einer Methode hatten, wie es beispielsweise in der unterschiedlichen Behandlung der Hydrodynamik in Kästners und Karstens Lehrbüchern der Fall ist. Solche Bevorzugungen könnten auch erklären, wieso sich Wolffs Lehrbücher noch im gesamten 18. Jahrhundert halten konnten, obwohl es umfassendere Lehrbücher auf aktuellem Stand gab.

Mit seinen *Anfangsgründen* sprach Kästner, im Unterschied zu mathematischen Monographien, ein breiteres Publikum an. An der Auflagenzahl von Kästners *Anfangsgründen* können wir ablesen, dass sie in Deutschland weit verbreitet waren und somit viele Studenten mit den mathematischen Grundkenntnissen, wie sie Kästner darstellte, in Berührung kamen. Auf diese Weise wirkte er in der Breite und hatte einen entscheidenden Einfluss auf die mathematische Lehre und Bildung im 18. Jahrhundert. Darüber hinaus behauptet Müller, dass Kästners *Anfangsgründe* für die mathematischen Lehrwerke anderer Autoren in den 1770er und 1780er Jahren als Grundlage genommen wurden.[1777] Allerdings, wie Müller bereits erwähnte, sei es eine Aufgabe an sich, Kästners Einfluss auf die Lehrbuchliteratur des 18. Jahrhunderts zu untersuchen. Diese Aufgabe konnte auch mit der vorliegenden Arbeit nicht erfüllt werden, aber die vorgetragenen Ergebnisse können als Anhaltspunkte für weitere Studien dienen.

5.3 Kästner als Lehrer

Es besteht eine direkte Verbindung zwischen Kästners Tätigkeiten als Lehrbuchautor und als Lehrer. Aus den *Anfangsgründen* selbst können wir nur marginale Rückschlüsse auf Kästners Lehrtätigkeit ziehen. Wie in Kapitel 3.3.4 bereits ausgeführt, bestand eine Wechselwirkung

[1776] Vgl. hierzu und zum Folgenden AGE, 1799, 4. Bd., 4. St., Artikel „Abraham Gotthelf Kästner", S. 377.
[1777] Vgl. hierzu und zum Folgenden Müller, C. H., S. 58.

zwischen Kästners Lehre und seinen *Anfangsgründen*. So stellte Kästner einige Inhalte in den *Anfangsgründen* ausführlicher dar, damit er in den Vorlesungen selbst Zeit sparen konnte.[1778] Umgekehrt erläuterte er auch einige Ausführungen umfangreicher in seinen Lehrstunden als im Lehrbuch.[1779] Aufgrund seiner eigenen Nutzung des Lehrbuchs sowie die von Freunden und Kollegen, konnte Kästner einige Inhalte in seinen *Anfangsgründen* verbessern.[1780]

Auch wenn wir gezeigt haben, dass Kästners Lehrbücher erfolgreich waren und hoch geschätzt wurden, bedeutet das nicht gleichzeitig, dass dies auch auf Kästners Lehrtätigkeit zutrifft. Aus diesem Grund wollen wir hier einen Einblick in seine Unterrichtsweise geben und für diesen Zweck vor allem Ausführungen von Zeitzeugen heranziehen. Zunächst lässt sich feststellen, dass sich Kästner zum akademischen Lehramt hingezogen fühlte. Er begründete seine Entscheidung für die Mathematikprofessur an der Universität Göttingen damit, dass diese vollkommen seinen Neigungen entspräche.[1781] An den *Anfangsgründen* ist zu erkennen, dass sich Kästner viele Gedanken um den inneren Aufbau seines Lehrwerks gemacht hat. Darüber hinaus beschäftigte er sich mit der Didaktik seiner Zeit, welche am Ende des 18. Jahrhunderts einen Aufschwung erlebte, wovon zum Beispiel die Herausgabe des *Braunschweigischen Journals philosophischen, philologischen und pädagogischen Inhalts* (1788-1791) zeugt. In diesem wurden auch Schriften von Kästner veröffentlicht, die einen Einblick in seine didaktischen Gedanken ermöglichen. Einige von ihnen wurden in seinen *Anfangsgründen* umgesetzt, wie Anschaulichkeit durch Abbildungen und Anregung zum Selbstfinden von Beweisen.[1782]

In Bezug auf Kästners Lehrtätigkeit als Mathematikprofessor werden nicht nur seine Lehrbücher gelobt, sondern auch seine Art und Weise, Inhalte einleuchtend vorzutragen.[1783] Seine Vortragsart wird als klar, deutlich und beispielreich beschrieben, wobei Kästner den Einfluss der mathematischen Wissenschaften auf das alltägliche Leben aufzeige.[1784] Diese Aspekte treffen auch auf seine Lehrbücher zu.

Einen tieferen Einblick in Kästners Vorlesungstätigkeit erhalten wir aus dem ersten Band von Pütters *Versuch einer akademischen Gelehrten=Geschichte*, in dem Kästner zitiert wird. Für Kästner musste ein Lehrervortrag gründlich und weder zu schwer noch zu weitläufig sein.[1785] „[…]; da dieses Buch [Anfangsgründe] zur mündlichen Erklärung bestimmt ist, so versteht sich, daß verschiedene Sätze, welche die Kürze dort allgemein vorzutragen befahl, dem Lernenden erst in besondern Exempeln bekannt gemacht werden […]. Die Begriffe, worauf sich die angewandte Mathematik gründet, erhält man nicht wohl ohne Werkzeuge, Maschinen, Modell, und Versuche würklich zu sehen. Ich besitze zu dieser Absicht selbst einen ziemlichen Vorrath, und wende hier die der Universität gnädigst verschafften schönen Sammlungen ihrer Absicht gemäß an. Ich habe auch, seitdem mir das Observatorium anvertrauet ist, denen Gelegenheit gegeben, die sich in der practischen Astronomie einige Ge-

[1778] Vgl. Kästner, AG 2.2., Vorrede zur dritten Ausgabe, S. v.
[1779] Vgl. Kästner, AG 1.1., Vorrede der vierten Auflage, o. S.
[1780] Vgl. Kästner, AG 1.1., Nachricht von der dritten Ausgabe, S. **3^{v}.
[1781] Vgl. Kästner, [Selbstbiographie]. In: Baldinger, S. 61.
[1782] Siehe hierzu Kapitel 3.3.
[1783] Vgl. Schlichtegroll, Artikel „Abraham Gotthelf Kästner“, S. 203.
[1784] Vgl. Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 448.
[1785] Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 300.

schicklichkeit erwerben wollen, und werde künftig noch mehr dazu im Stande seyn"[1786]. Hieran ist deutlich zu sehen, dass Kästner über die Inhalte seiner Lehrbücher hinaus ging und sie durch einen anschaulichen Unterricht ergänzte, um seine Ausführungen einleuchtender zu machen. Ein solches Vorgehen wurde auch von seinen Schülern gelobt, beispielsweise von Olbers. Kästner stellte ihm, so wie man es von ihm gewohnt sei, nicht nur zahlreiche und seltene Werke aus seiner Privatbibliothek zur Verfügung, sondern gewährte ihm auch Zutritt zur Göttinger Sternwarte.[1787]

Den ersten Band seiner *Litteratur der mathematischen Wissenschaften* widmet Murhard seinem ehemaligen Lehrer und späteren Kollegen Kästner. Murhard dankt ihm voller Hochachtung für die Unterstützung, die ihm Kästner während seiner Studienzeit gewährte: „Sie waren es, der so oft die kühnen schnellen Schritte des raschen Jünglings aufhielt – mir mit Rath und That beistand, und mich durch alle Arten von litterarischer Hülfsleistung unterstützte"[1788]. Auch der ehemalige Schüler Mackensen genoss den Zutritt zur Kästners Privatbibliothek.[1789] Kästners Hilfsbereitschaft, vor allem in Hinblick auf die mathematische Literatur, wird auch in Klügels Dissertation über die Theorie der Parallellinien deutlich. Klügel würdigt hier Kästners Unterstützung bei dieser Arbeit hinsichtlich der Auswertung der Literatur und des inhaltlichen Feinschliffs.[1790]

Nicht immer finden wir positive Stimmen bezüglich Kästners Lehrtätigkeit. Für andere Schüler scheinen Kästners Vorlesungen zu schwierig gewesen zu sein, wie ein unbenannter Theologe festhielt: „Kästner war mein Lehrer in der Mathematik, insonderheit in der angewandten. Ich halte ihn für den größten Geist unter den Europäischen Gelehrten; aber auch zu groß, um Lehrer von Jünglingen zu seyn. Es erfordert ganz außerordentliche Anstrengung, ihm in seinen Gedanken zu folgen. In philosophischen Betrachtungen verkettet, vergißt er oft sich selbst"[1791].

An den angeführten Beispielen ist zu sehen, dass Kästner einige seiner Schüler bei ihren mathematischen Studien unterstützte. Er stellte nicht nur Bücher aus seiner Privatbibliothek zur Verfügung, aus denen die Studenten selbstständig tiefergehende mathematische Inhalte lernen konnten, sondern gestaltete seinen Unterricht auch anschaulich und motivierend. Auf das Unterrichtsniveau können wir allerdings keinen einheitlichen Schluss ziehen, da die Meinungen hierüber auseinander gehen. Gegenüber positiver Anerkennung hinsichtlich Kästners Lehre stehen die Ansichten von Gauß und die des unbekannten Theologen. Zum einen können wir davon ausgehen, dass Kästner elementare Inhalte lehrte. Grund zu der Annahme liefert die Tatsache, dass die Mathematik im 18. Jahrhundert kein eigenständiges universitäres Fach war und von vielen Studenten als propädeutische Disziplin besucht wurde, so dass man sie nicht überfordern durfte. Zum anderen zeigen die Vorlesungsverzeichnisse in den *Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen*, dass Kästner auch Vorlesungen zur Analysis anbot, was nicht mehr zum Stoff der Elementarmathematik gerechnet werden kann. Vielmehr können wir behaupten, dass der Schwierigkeitsgrad von Kästners Vorlesungen je nach mathematischem Vorwissen und Fähigkeiten von den Studenten unterschiedlich bewertet wurden.

[1786] Kästner zitiert nach Pütter, Bd. 1, S. 300.
[1787] Vgl. AGE, 1799, 4. Bd., 3. St., Artikel „Wilhelm Olbers", S. 284.
[1788] Murhard, Bd. 1, S.)(4^r.
[1789] Vgl. Mackensen, S. 62.
[1790] Vgl. Klügel, Conatuum, S. 2.
[1791] Zitiert nach Ebert, S. 67.

Aus den Quellen geht hervor, dass Kästners Vorlesungen von zahlreichen Studenten besucht wurden. In einem Brief[1792] an Johann Georg Zimmermann aus dem Jahre 1780 gewährt Kästner einen Einblick in seine Tätigkeit als akademischer Lehrer an der Universität Göttingen. Allerdings ist dieser Brief mit Bedacht zu lesen, denn an dem sarkastischen Ton, den Kästner anschlägt, ist zu erkennen, dass sich die beiden Herren zu dieser Zeit in Streitigkeiten befanden.[1793] Kästner schreibt, dass er sich nie über einen Mangel an Studenten beklagen konnte, obwohl die Mathematik erstens keine Brotwissenschaft sei und zweitens für schwierig gehalten werde.[1794] Zudem habe er in einem Semester wegen seiner hohen Arbeitsbelastung seine Studenten in die Vorlesung über reine Mathematik zu einem Kollegen schicken müssen. Pütter weiß zu berichten, dass sich für Kästners Vorlesungen zur Algebra sogar mehr Studenten eingefunden haben als er erwartet hatte.[1795]

Betrachtet man die Vorlesungsankündigungen in den *Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen*, so sieht man, dass Kästner zu fast allen Bereichen der reinen und angewandten Mathematik Vorlesungen anbot. Bis zur Anstellung von Lichtenberg im WS 1770/71 hielt Kästner auch Vorlesungen zur Physik beziehungsweise Naturlehre. Dass Kästner über fast alle Bereiche der Mathematik lehrte, mag Cantor zu der Aussage veranlasst haben, dass Kästners Vorlesungen im Zeitraum von 1760 bis 1780 epochebildend waren.[1796]

In den 1790er Jahren ging scheinbar die Anzahl der Studierenden, die Kästners Vorlesungen besuchten, zurück. Der anonyme Verfasser der Schrift *Interessante Bemerkungen über Göttingen als Stadt und Universität betrachtet* bezeichnet Kästner als angesehenen Mathematiker, erwähnt aber einen Mangel hinsichtlich seiner Lehrtätigkeit. So hatte Kästner im Zuge seines fortgeschrittenen Alters keine Zähne mehr und deswegen konnte man ihn in Vorlesungen nur schlecht verstehen.[1797] Allerdings seien Gespräche unter vier Augen mit ihm sehr ergiebig gewesen. Diese undeutliche Sprache wird als Grund genannt, wieso Kästners Vorlesungen in den letzten zehn Jahren seines Lebens so schlecht besucht waren.[1798]

Die vorgestellten Aspekte hinsichtlich Kästners Lehrtätigkeit belegen Michelsen Aussage, dass Kästner der „Lehrer[…] Deutschlands in der Mathematik“[1799] gewesen sei. Kästner erwarb sich offensichtlich nicht nur durch seine Lehrbücher, sondern auch durch seine Vorlesungen ein großes Ansehen. Seine weitreichende Wirkung als Mathematiklehrer im weitesten Sinne wird auch aus der Liste seiner Studenten an der Universität Göttingen deutlich. Einige von ihnen machten sich als Mathematiker beziehungsweise Mathematik- oder Physikprofessoren einen Namen, beispielsweise Klügel, Lichtenberg und Hindenburg. Auch auf diese Weise konnte Kästner in mathematischer Hinsicht indirekt auf die nachfolgende Generation Einfluss nehmen.

[1792] Brief an Hrn. Hofrath und Leibmedicus Zimmermann in Hannover. In: Kästner, Gesammelte poetische und prosaische schönwissenschaftliche Werke. Bd. 4. Berlin, Enslin, 1841, S. 51-72.
[1793] Vgl. auch Baasner, S. 116.
[1794] Vgl. hierzu und zum Folgenden Brief an Hrn. Hofrath und Leibmedicus Zimmermann in Hannover. In: Kästner, Gesammelte poetische und prosaische schönwissenschaftliche Werke, Bd. 4, S. 53.
[1795] Vgl. Pütter, Bd. 1, S. 301.
[1796] Vgl. Artikel „Kaestner, Abraham Gotthelf“ von Moritz Cantor und Jakob Minor in: ADB, Bd. 15 (1882), S. 445.
[1797] Vgl. hierzu und zum Folgenden [Anonymus], Interessante Bemerkungen, S. 86 f.
[1798] Vgl. [Anonymus], Interessante Bemerkungen, S. 90.
[1799] Michelsen zitiert nach Müller, C. H., S. 58.

5.4 Kästner als Universitätsprofessor

Da an den Universitäten des 18. Jahrhunderts die Forschung von der Lehre getrennt war, stellt sich die Frage nach der Aufgabe eines akademischen Lehrers. Welche Pflichten hatte Kästner als Mathematikprofessor an der Universität Göttingen? Die folgenden Ausführungen sollen einen Einblick in die Tätigkeit von Professoren im 18. Jahrhundert geben und einen Vergleich zu heutigen Verhältnissen ermöglichen.

Eine wichtige Quelle für uns ist Kästners Ruf an die Universität Göttingen, welcher am 25.5.1755 schriftlich erfolgte: Durch Kästners umfangreiches Wissen, seinen Fleiß und seine Begabung sei man auf ihn aufmerksam geworden und biete ihm nun eine ordentliche Professur für „Weltweisheit“[1800] an.[1801] Weiter heißt es, dass sich Kästner nicht nur durch Vorlesungen und Publikationen bekannt machen, sondern auch als Mitarbeiter für die Göttinger Sozietätszeitschriften tätig werden solle. Insgesamt solle Kästner zum Ansehen der Universität und zum Nutzen und Unterricht der Jugend beitragen. Unsere Untersuchungen zeigen, dass Kästner alle Aufgaben erfüllte. Seine Lehrtätigkeit wurde sehr geschätzt. Die Vorlesungsankündigungen in den *Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen* zeigen, dass Kästner ein hohes Lehrpensum hatte und zu fast allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik Vorlesungen hielt. Für das SS 1780 kündigte Kästner Vorlesungen über Experimentalphysik (5 h/Woche), über die reine Mathematik (5 h/Woche), über Markscheidekunst (2 h/Woche) sowie zur Analysis (mindestens 1 h/Woche) an.[1802] Dies macht einen Umfang von mindestens 13 Stunden Lehre pro Woche aus. In einigen Semestern war Kästners Lehrpensum noch höher, beispielsweise im WS 1762/63, wo er nicht nur „Disputatoria“ anbot, sondern auch Vorlesungen zur Naturlehre, eine Enzyklopädie über Mathematik und Physik sowie Vorlesungen zur reinen Mathematik, zur Algebra und zur angewandten Mathematik.[1803] Die Arbeitsbelastung ging im Laufe der Jahre zurück, als mehr Personen die mathematischen Wissenschaften an der Universität Göttingen lehrten.

Im Rahmen seiner Lehrtätigkeit war Kästner auch verantwortlich für die Betreuung seiner Studenten. Er erscheint – wie wir im vorhergegangenen Kapitel gesehen haben – als ambitionierter Lehrer, der seine Studenten bei ihrem mathematischen Werdegang unterstützte und zu mathematischen Forschungen anregte. Ein Paradebeispiel ist Klügel und seine Dissertation über die Lehre der Parallellinien.

Bereits im 18. Jahrhundert schienen die Meinungen, ob ein Universitätsprofessor Lehrer oder Forscher sein sollte, auseinander gegangen zu sein. Die einen forderten die vollkommene Konzentration auf die Lehre, die anderen sprachen sich dafür aus, dass die Professoren in erster Linie Lehrer und dann erst Forscher sein sollten.[1804] Die Aufgaben eines damaligen Universitätsprofessors gingen über die der Lehrverpflichtung hinaus, wie Kästner selbst sagt: „Ich glaubte, durch den Vortrag der Experimentalphysik, mein öffentliches Collegium, und zwey Privatissima, schon täglich so viel Stunden zum Nutzen der Studirenden anzuwenden,

---

[1800] Nicht für Mathematik! Dies zeigt den Stellenwert der Mathematik als eine der Philosophie beziehungsweise Weltweisheit untergeordnete Wissenschaft.

[1801] Vgl. hierzu und zum Folgenden Rufschreiben an Abraham Gotthelf Kästner an die Universität Göttingen. In: Göttinger Universitätsarchiv, Personalakte Abraham Gotthelf Kästner, Kur. 5753, pag. 32-33.

[1802] Vgl. GGA, 1780, 29. St., S. 242 f.

[1803] Vgl. GGA, 1761/62, 75. St., S. 655-657.

[1804] Vgl. Vandermeersch, Die Universitätslehrer. In: Rüegg, Bd. 2, S. 184.

als von einem Professor erfodert wird, der noch viel mehr thut, als Collegia zu lesen“[1805]. Kästner war unter anderem Mitglied der Göttinger Sozietät der Wissenschaften sowie der Göttinger Deutschen Gesellschaft. Für letztere war er seit 1762 sogar als Vorstand tätig. Für beide Institutionen engagierte sich Kästner sehr, was nicht nur an seinen Vorträgen, sondern auch an seinen Aufsätzen in den jeweiligen Journalen zu sehen ist. Zudem musste er jeden ersten Samstag im Monat die Versammlung der Göttinger Sozietät und gelegentlich die der Göttinger Deutschen Gesellschaft besuchen.[1806] Auch unabhängig von diesen beiden Göttinger Institutionen sowie ihren Publikationsorganen veröffentliche Kästner zahlreiche Artikel in anderen Fachzeitschriften und war als Übersetzer und Rezensent tätig. An erster Stelle steht dennoch der Erfolg seiner *Mathematischen Anfangsgründe*, denn dieser trug massiv zu seinem Bekanntheitsgrad – und damit einhergehend auch dem der Universität Göttingen – bei. Von Zeitgenossen wurde berichtet, dass Kästners Ruf an die Georgia Augusta als „Zierde und […] Stern erster Größe“[1807] galt. Kästner hatte einen Namen in ganz Europa und verhalf der Universität so zu einem breiteren Ruhm.[1808]

Im 18. Jahrhundert kam es zu einer weiteren Änderung im Aufgabenbereich eines akademischen Lehrers, der vom Gedankengut der Aufklärung geprägt war. Die Universitätslehrer sollten nicht mehr in erster Linie bekanntes Wissen vermitteln, sondern sie sollten die Schüler zu eigenständigem Denken und kritischer Prüfung anregen.[1809] Kästner schreibt, dass „die Pflicht eines akademischen Lehrers erfordert, sowohl die Kenntnisse auszubreiten, deren gänzliche Unwissenheit einem Gelehrten iezo schimpflich ist, als auch Lehrbegierigern einen Unterricht zu ertheilen, vermöge dessen sie die mathematischen Wahrheiten selbst, zu weiterem Gebrauche anwenden können“[1810]. Es geht also zunächst um die Vermittlung von Grundwissen, wobei das Fundament für eigenständiges Weiterarbeiten gelegt werden soll. Von einer dogmatischen Lehrart, wie sie einst im Mittelalter herrschte, ist in Kästners Ausführungen nichts mehr zu finden.

Die Frage nach den Aufgaben eines Universitätsprofessors heutzutage ist recht einfach – aber oberflächlich – zu beantworten. Diese sind Forschung und Lehre sowie Beteiligung an der Selbstverwaltung. Die Lehre wird in der sogenannten Lehrverordnung genauer geregelt. Für gewöhnlich beträgt die Höhe des Lehrdeputats heutzutage neun Semesterwochenstunden. Es ist zu prüfen, ob das Lehrdeputat im 18. Jahrhundert festgelegt war. Hierbei muss man unterscheiden, zwischen dem, was der ordentlich-öffentliche Professor anbieten musste und dem, was er sonst noch gegen Bezahlung anbot. Für die öffentlichen Vorlesungen erhielt der Professor keine Hörergelder, das heißt, die Veranstaltungen waren kostenfrei für Studenten. Vorlesungen gegen Bezahlung waren Privatvorlesungen und gehörten wohl nicht explizit zum Amt eines Universitätsprofessors, sondern hatten eher mit Geldverdienen zu tun. Des Weiteren muss untersucht werden, ob die Selbstverwaltung im 18. Jahrhundert komplett entfiel. Weiter scheint es so, dass der Aspekt Forschung im 18. Jahrhundert nicht explizit zu den Aufgaben eines Professors gehörte. Darüber hinaus hatte man wenig Einfluss darauf, da Mit-

[1805] Brief an Hrn. Hofrath und Leibmedicus Zimmermann in Hannover. In: Kästner, Gesammelte poetische und prosaische schönwissenschaftliche Werke, S. 53.
[1806] Vgl. GGA, 1780, 29. St., S. 233 f.
[1807] Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 199.
[1808] Vgl. Heyne, Lobrede auf Kästner. In: Ebel, S. 199.
[1809] Vgl. Paulsen, Bd. 2, S. 136.
[1810] Kästner, Commentarius. In: Kästner, Einige Vorlesungen, S. 45.

glieder ernannt wurden. Bei Kästner wurde unter anderem seine Mitarbeit in der Göttinger Sozietät der Wissenschaften verlangt, was aber damit erklärbar ist, dass sich die damals noch junge und erst 1751 gegründete Göttinger Akademie in der Gelehrtenwelt positionieren musste, indem sie bekannte Personen zu Mitgliedern ernannte.

Vergleicht man die Anforderungen, die an Kästners Professorenamt gestellt und bereits in dem Rufschreiben festgehalten wurden, mit Kästners Tätigkeiten, so kann man festhalten, dass er sämtliche Aufgaben erfüllte: Lehre und Betreuung der Studenten, Mitwirkung in Gesellschaften sowie Steigerung des Ansehens (sowohl für sich als auch für die Universität Göttingen) durch Publikationen. Die Forschung war nicht ausdrücklich geregelt, so wie es heute der Fall ist. Dies zeigt, dass im 18. Jahrhundert die Bereiche Forschung und Lehre auch institutionell oft getrennt voneinander stattfanden, nämlich die Lehre an Universitäten und die Forschung an Akademien. Dennoch war Kästner auch im Bereich der mathematischen Forschung aktiv, was sicherlich zur Steigerung seines Ansehens sowie das der Universität Göttingen beitrug.

5.5 Zusammenfassung

Obwohl Kästner in verschiedener Hinsicht mathematisch aktiv war, kam er zu keinen neuen heute noch bekannten Erkenntnissen, die die Mathematik bereichert hätten. Dies kann als Grund dafür angesehen werden, dass er der Nachwelt nur wenig in Erinnerung geblieben ist. Konträr zu der Nichtbeachtung der nachfolgenden Generationen stehen Aussagen von Zeitzeugen, die Kästner aus verschiedenen Blickwinkeln lobten und ihn als einen der größten Mathematiker seiner Zeit bezeichneten.

Unsere Ausführungen zeigen, dass Kästner breite Interessen hatte und vielfältige Tätigkeiten verfolgte. In erster Linie war er Lehrbuchautor und Lehrer. Er erfüllte alle Aufgaben, die mit seinem akademischen Lehramt an der Universität Göttingen verbunden waren, nämlich die Lehre, die Mitarbeit in den gelehrten Gesellschaften und die Steigerung des Ansehens der Institution. Darüber hinaus war Kästner an der mathematischen Forschung interessiert und veröffentlichte einige Schriften in Fachjournalen. Sein Ansehen als Wissenschaftler wird in der Anzahl seiner Mitgliedschaften in verschiedenen wissenschaftlichen Akademien und Gesellschaften deutlich. Hinsichtlich der Untersuchung des Parallelenaxioms wirkte er als eine treibende Kraft, was vor allem an Klügels Dissertation zu diesem Thema zu sehen ist. Darüber hinaus war Kästner an der Verbesserung mathematischer Methoden interessiert, die er in seinen Lehrbüchern einsetzte, wie die vollständige Induktion. In seinen *Mathematischen Anfangsgründen* stellte Kästner Inhalte aus Forschungsmonographien zu verschiedenen Themen in einer lehr- und lernbaren Form dar, was zur Verbreitung von mathematischen Inhalten beitrug.

Während unserer Arbeit stießen wir auf die Aussage, dass Kästner die Mathematik als eigenständiges akademisches Fach mitentwickelt habe.[1811] Eine solche These müsste eingehender untersucht werden, wobei auch der Stellenwert der Mathematik im Bildungssystem des 18. Jahrhunderts berücksichtigt werden muss. Aufgrund unserer Untersuchungen können wir festhalten, dass Kästner, der an der Reformuniversität Göttingen fast ein halbes

[1811] Vgl. Baasner, S. 110.

Jahrhundert lang als Professor für Mathematik und Naturlehre tätig war, mit seinen *Mathematischen Anfangsgründen* eine Grundlage für die mathematische Lehre seiner Zeit bereitstellte. Seine Lehrbücher, die ein hohes Ansehen genossen, erreichten einen breiten Personenkreis und wurden nicht nur von Studenten, sondern auch von Lehrern im weitgehendsten Sinne für mathematische Lehrzwecke verwendet. Auf diese Weise konnte Kästner auf die mathematische Lehre und Ausbildung wirken und einen neuen Standard setzen. Tatsächlich findet man unter seinen Studenten einige Personen, die später in der Mathematik durch neue Erkenntnisse berühmt wurden oder als Mathematikprofessoren tätig waren. Zusätzlich zeigte Kästner ein eigenes Selbstverständnis als Mathematiklehrer, da er sich nicht nur zum Lehramt hingezogen fühlte, wie aus seiner Selbstbiografie hervorgeht, sondern sich auch Gedanken um die Didaktik seiner Zeit machte. Darüber hinaus war er ein an der Fachwissenschaft interessierter Mathematiker, der sein Leben lang zahlreiche Schriften über reine und angewandte Mathematik veröffentlichte. An seinen Schriften, Artikeln und Rezensionen erkennt man, dass Kästner die Mathematik seiner Zeit weitgehend überblickte.

6 Schlusswort

Die vorliegende Arbeit stellt den Versuch dar, sowohl Abraham Gotthelf Kästners *Mathematische Anfangsgründe* zu beschreiben, als auch dieses Lehrbuch in den Kontext derjenigen Mathematiklehrbücher des 18. Jahrhunderts einzubetten, die unter dem Namen „Anfangsgründe“ geläufig waren.

Heutzutage sind die mathematischen „Anfangsgründe“ des 18. Jahrhunderts nicht mehr präsent, was damit zu erklären ist, dass diese Lehrbücher im 19. Jahrhundert allmählich durch neue Lehrwerke, die den veränderten Anforderungen entsprachen, ersetzt wurden. Zu ihrer Zeit hingegen waren die „Anfangsgründe“, die in erster Linie als Vorlesungsgrundlage verwendet wurden, führend und können als Repräsentanten des mathematischen unterrichteten Wissens angesehen werden.

Vor allem im 18. Jahrhundert finden wir Lehrbücher aus unterschiedlichen Fachrichtungen, die den Titel „Anfangsgründe“ oder einen ähnlichen Namen tragen. Dass dieser Terminus vorher nicht beziehungsweise nur vereinzelt auftrat, hängt damit zusammen, dass die meisten Lehrbücher in Latein verfasst wurden. Das lateinische Pendant zu den „Anfangsgründen“ bilden die „Elementa“. Hierbei handelt es sich um Lehrbücher, die die Elemente, also die Grundlehren eines Faches vermitteln sollten. Dass die Bezeichnung „Anfangsgründe“ erst im 18. Jahrhundert erscheint, liegt daran, dass sich zu dieser Zeit die deutsche Sprache als Wissenschaftssprache etablierte. Die deutschsprachige Literatur verdrängte die bis dahin dominierenden lateinischen Werke. Durch die Verwendung der deutschen Sprache öffneten sich die Wissenschaften gleichzeitig einem breiteren Personenkreis und erreichten Personen, die keine Lateinkenntnisse besaßen.

Die Autoren der „Anfangsgründe“ legten besonderen Wert auf eine umfassende Darstellung und auf Verständlichkeit der Inhalte. Man ging weg von der dogmatischen Lehrart und vom Auswendiglernen, hin zum Lernen aus Einsichten und zum selbstständigen Denken. Diese Elemente stehen im Einklang mit dem Gedankengut der Aufklärung. In diesem Zusammenhang wurde im 18. Jahrhundert vermehrt über Didaktik diskutiert. Auch Kästner äußerte sich über die Pädagogik und eine adäquate Lehre in seiner Zeit. Entsprechende Merkmale sind nicht nur in seinen *Anfangsgründen*, sondern auch in den Lehrwerken anderer Autoren sichtbar. Die Leser werden sukzessiv an die mathematischen Inhalte herangeführt und können jeden Schritt, der begründet oder bewiesen wird, nachverfolgen. Die Darstellungen der Inhalte sind nicht nur durch die zahlreichen Abbildungen und Beispiele anschaulich und realitätsbezogen, sondern haben dadurch auch eine motivierende Wirkung. Durch einen solchen strukturierten Aufbau konnten die Lehrbücher nicht nur von Studierenden, sondern auch von Autodidakten verwendet werden.

Die „Anfangsgründe“ zeichnen sich durch eine enge Verbindung an die Lehre aus. Ihre Verfasser waren in erster Linie Mathematikprofessoren, die somit nicht nur das fachliche Wissen hatten, sondern auch auf Erfahrungen aus ihren Vorlesungen zurückgreifen und die entsprechenden Erkenntnisse in ihren Lehrwerken berücksichtigen konnten.

Es gibt „Anfangsgründe“ zu verschiedenen Wissensgebieten. In unserer Untersuchung beschränkten wir uns auf diejenigen Lehrwerke, die sämtliche mathematische Wissenschaften beinhalten, die im 18. Jahrhundert zur Mathematik gehörten. Somit kann diesen Unterrichtswerken ein enzyklopädischer Charakter zugesprochen werden. Anhand der Inhalte dieser

Lehrbücher können wir einige Unterschiede hinsichtlich der mathematischen Wissenschaften zu heute festmachen. In erster Linie ist dies die Vielzahl der Wissenschaften. Im 18. Jahrhundert bestanden die mathematischen Wissenschaften aus rund 20 verschiedenen Themen, die eingeteilt waren in reine und angewandte Mathematik. Obwohl die damals verwendeten Bezeichnungen „reine" und „angewandte" Mathematik, die wir bei den von uns eingesehenen Autoren zuerst explizit bei Kästner finden, heute noch benutzt werden, verstehen wir nicht mehr die mechanischen, optischen, astronomischen und architektonischen Wissenschaften unter der angewandten Mathematik wie noch im 18. Jahrhundert – diese Bereiche gehören nun größtenteils zur Physik. Die reine Mathematik umfasste – damals wie heute – Arithmetik, Geometrie, Algebra und Analysis.

Ein weiterer Unterschied zu heute besteht in dem Niveau der dargestellten Lehren. In den „Anfangsgründen", die an den Universitäten verwendet wurden, finden wir unter anderem Inhalte, die heute zum Lehrstoff an Grundschulen gehören. Dies hängt damit zusammen, dass die Mathematik noch im 18. Jahrhundert eine propädeutische Wissenschaft war, die von vielen Studierenden erst bei Eintritt in die Universität erlernt wurde. Da es noch keine einheitliche Schulpflicht gab, konnten keine Grundkenntnisse oder ein bestimmter Bildungsgrad, wie es heutzutage in Form des Abiturs geregelt ist, verlangt werden. Der häusliche Unterricht war damals keine Ausnahme, wie wir am Beispiel von Kästner gesehen haben. Er wurde von seinem Vater und seinem Onkel privat unterrichtet, bis er bereits im Alter von 12 Jahren sein Studium an der Universität Leipzig aufnahm. Zunächst sollte er Jurisprudenz studieren, doch seine Neigungen brachten ihn zur Mathematik. Fast ein halbes Jahrhundert lang besetzte er die ordentliche Professur für Mathematik und Naturlehre an der damals jungen Göttinger Universität, wo er als bekannter Lehrbuchautor und Lehrer wirkte. Seine große Leistung ist sein zehnbändiges Lehrwerk *Mathematische Anfangsgründe*, in dem er sämtliche Themen, die damals zur reinen und angewandten Mathematik gehörten, in deutscher Sprache darstellte. Dabei sah sich Kästner in der Tradition von Christian Wolff, der als Begründer der deutschsprachigen mathematischen „Anfangsgründe"-Literatur angesehen werden kann und einen großen Einfluss auf die Verbreitung mathematischer Kenntnisse in Deutschland hatte. Kästner kann jedoch nicht einfach als Nachahmer Wolffs bezeichnet werden; vielmehr knüpfte er an die Entwicklung Wolffs an. Kästners *Anfangsgründe* enthalten einige Unterschiede und Neuerungen im Vergleich zu Wolffs *Anfangs=Gründen*, die erklären, wieso Kästners Lehrbücher an deutschsprachigen Universitäten vermehrt verwendet wurden und die bis dahin führende Stellung von Wolffs Lehrbüchern beendeten. Im Gegensatz zu Wolff achtete Kästner bei seinem Lehrbuch auf die Aktualität der Inhalte. Er kündigte im Vorwort jeder Neuauflage an, welche Änderungen er vorgenommen hatte. Diese betrafen nicht nur die fachmathematischen Inhalte in Form von Verbesserungen und Ergänzungen, sondern auch die Literaturangaben, die es dem Leser ermöglichten, über die mathematischen Grundlehren, die in „Anfangsgründen" dargestellt werden, hinauszugehen. Kästner war bei seinen Zeitgenossen für die umfassende Angabe mathematischer (Forschungs-)Literatur bekannt. Er überblickte die Mathematik seiner Zeit nicht nur in ihrem gesamten Inhalt, was die Behandlung aller Wissenschaften in seinem Lehrbuch zeigt, sondern auch die mathematische Literatur, wovon seine vierbändige *Geschichte der Mathematik* ein Zeugnis abliefert.

Kästners *Anfangsgründe* waren nicht nur weit verbreitet und wurden viel genutzt, sondern setzten in gewisser Weise Maßstäbe. Kästner ist der erste der von uns betrachteten „Anfangsgründe"-Autoren, der in seinem Lehrbuch eine konkrete Klassifikation der mathematischen

Wissenschaften formulierte, die repräsentativ für das 18. Jahrhundert ist. Damit trat er als Vorbild für andere Lehrbuchautoren auf, beispielsweise für Wenceslaus Johann Gustav Karsten, der sich explizit auf Kästners Klassifikation stützte. Kästner unterschied nicht nur zwischen reiner und angewandter Mathematik, sondern auch zwischen elementarer und höherer reiner Mathematik. Hier vollzog sich bereits die Trennung zwischen der Schul- und der Hochschulmathematik.

Kästner war um die Klarheit der mathematischen Begrifflichkeiten sehr bemüht, was sich vor allem an der Darstellung der entgegengesetzten Größen in seinen *Anfangsgründen* zeigt. Er ging über die fachmathematische Darstellung hinaus und äußerte sich auch aus philosophischer Sicht über die entgegengesetzten Größen, vor allem über Begrifflichkeiten wie „weniger als Nichts“, um Missverständnisse zu vermeiden, die im 18. Jahrhundert diesbezüglich nicht unüblich waren. Laut Immanuel Kant war Kästner der erste Mathematiker, der verständlich über diese Thematik schrieb und der ausdrücklich als Impulsgeber für seine eigenen Betrachtungen hinsichtlich der Natur der entgegengesetzten Größen wirkte.

Kästner beschränkte sich in seinen *Anfangsgründen* nicht auf die Vermittlung elementarer Kenntnisse, sondern gewährte auch Einblicke in mathematische Forschungsprobleme seiner Zeit, wie dem Parallelenpostulat. Er unterrichtete den Leser seines Lehrbuchs über die Problematik mit Euklids Parallelenaxiom, berichtete von seinen eigenen, nicht erfolgreichen Beweisversuchen und verwies auf Klügels Dissertation zu diesem Thema, die unter seiner Aufsicht entstanden war. Auf diese Weise bekommt das Lehrbuch einen wissenschaftlichen Charakter. Kästners weitreichende Interessen sind sowohl an seinen zahlreichen Mitgliedschaften in wissenschaftlichen Akademien und gelehrten Gesellschaften, als auch an seinen Artikeln in mathematischen Fachzeitschriften sichtbar. Kästner unterhielt eine umfangreiche Korrespondenz, auch zu mathematischen Persönlichkeiten wie Euler, und galt insgesamt als angesehener Mathematiker. Dabei war die Grenze zwischen Lehrer und Forscher beziehungsweise Mathematiker im heutigen Sinne noch nicht klar gezogen, sondern Forschung und Lehre waren weitgehend institutionell voneinander getrennt. Allerdings zeigt sich die Tendenz, dass diese Grenzziehung bereits im 18. Jahrhundert zu verwischen begann, denn Kästner, wie auch andere seiner Zeitgenossen, trat nicht nur als Mathematiklehrer auf, sondern auch als Forscher, der über seine Lehrverpflichtung hinaus über mathematische Themen schrieb.

Zu Lebzeiten war Kästner eine angesehene Persönlichkeit, vor allem wegen seiner erfolgreichen *Anfangsgründe*. Er trat allerdings nicht als produktiver Mathematiker, der die Wissenschaft um neue Erkenntnisse bereicherte, in Erscheinung. Dies kann als Grund angesehen werden, wieso er allmählich in Vergessenheit geriet und heutzutage nur noch wenigen Personen bekannt ist. Die vorliegende Arbeit sollte Kästners Leistungen vor allem im Bereich der mathematischen Lehrbuchliteratur in Erinnerung rufen. Zusammenfassend können wir festhalten, dass Kästner vor allem indirekt auf die mathematische Bildung seiner Zeit durch seine Lehrbücher wirkte. Er systematisierte große Teile des mathematischen Lehrstoffs und stellte ihn in deutscher Sprache in einer lehr- und lernbaren Form dar. Kästner hatte nicht nur einen Einfluss auf die mathematische Bildung, in erster Linie an deutschsprachigen Universitäten, sondern auch auf andere (Lehrbuch-)Autoren.

7 Quellen- und Literaturverzeichnis

Auflistung der in den Fußnoten verwendeten Abkürzungen für Zeitschriften und Nachschlagewerke

ADB	Allgemeine Deutsche Biographie
AdB	Allgemeine deutsche Bibliothek
AGE	Allgemeine geographische Ephemeriden
ALZ	Allgemeine Literatur-Zeitung
AM	Archiv der reinen und angewandten Mathematik
BJ	Braunschweigisches Journal philosophischen, philologischen und pädagogischen Inhalts
DM	Deutsches Museum
DSB	Dictionary of Scientific Biography
GGA	Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen (1739-1752) Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen (1753-1801) Göttingische gelehrte Anzeigen (seit 1802)
HM	Hamburgisches Magazin, oder gesammlete Schriften, zum Unterricht und Vergnügen, aus der Naturforschung und den angenehmen Wissenschaften überhaupt
JGZ	Jenaische gelehrte Zeitungen
LGZ	Neue Leipziger Gelehrte Zeitungen
LM	Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik
LMN	Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie
NADB	Neue allgemeine deutsche Bibliothek
NDB	Neue Deutsche Biographie
PM	Philosophisches Magazin
TGA	Tübingische gelehrte Zeitungen

A. Unveröffentlichte Quellen

Abraham Gotthelf Kästners Aufnahmediplom an die Royal Society. In: Universitätsarchiv Göttingen, Personalakte Abraham Gotthelf Kästner, Kur. 5753, pag. 3a.

Gauß-Karikatur. In: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB Göttingen), Cod. Ms. Gauß Briefe B: Bolyai, Beilage 1.

Rufschreiben an Abraham Gotthelf Kästner an die Universität Göttingen. In: Göttinger Universitätsarchiv, Personalakte Abraham Gotthelf Kästner, Kur. 5753, pag. 32-33.

B. Weitere Literatur

Ahrbeck, Hans: Christian Wolffs Bedeutung für die Reform des akademischen Unterrichts. In: 450 Jahre Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Bd. 2: Halle 1694-1817, Halle-Wittenberg 1817-1945. Halle, Selbstverlag der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 1952, S. 41-47.

Allgemeine Deutsche Biographie (ADB). Herausgegeben von der Historischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 56 Bde. Leipzig, Duncker & Humblot, 1875-1912.

Allgemeine deutsche Bibliothek (AdB). Berlin und Stettin, Nicolai, 1765-1794.

Allgemeine geographische Ephemeriden (AGE). Weimar, Verlag des Industrie-Comptoirs, 1798-1816.

Allgemeine Literatur-Zeitung (ALZ). Jena und Leipzig, Müller (u. a.), 1785-1803.

[Anonymus]: Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv. Abgefaßt von Abraham Gotthelf Kästner. Wien, Trattner, 1788. Online verfügbar unter http://vd18.de/de-sub-vd18/content/pageview/44734056, zuletzt geprüft am 7.7.2014.

[Anonymus]: Interessante Bemerkungen über Göttingen als Stadt und Universität betrachtet. Für Jünglinge, die dort studiren wollen, aber auch für andere zur Belehrung. Glückstadt, Lebrecht, 1801.

[Anonymus]: Karl August Struensees Anfangsgründe der Kriegsbaukunst. Erster Theil, so von der Befestigungskunst im Felde handelt [Rezension]. In: Auserlesene Bibliothek der neuesten deutschen Litteratur. Erster Band. Lemgo, Meyer, 1772, S. 297-299.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik (AM). Leipzig, Schäfer, 1794-1800.

Baasner, Rainer: Abraham Gotthelf Kästner, Aufklärer (1719-1800). Tübingen, Niemeyer, 1991.

Baldinger, Ernst Gottfried: Biographien jetztlebender Aerzte und Naturforscher in und ausser Deutschland. Ersten Bandes erstes Stück. Jena, Hartung, 1768.

Biographie universelle, ancienne et moderne, ou Histoire, par ordre alphabétique, de la vie publique et privée de tous les hommes. Herausgegeben von Louis-Gabriel Michaud. 52 Bde. Paris, Michaud, 1811-1828.

Bockstaele, Paul: Mathematik und exakte Naturwissenschaften. In: Rüegg, Walter (Hrsg.): Geschichte der Universität in Europa. Band 3: Vom 19. Jahrhundert zum Zweiten Weltkrieg (1800-1945). München, Beck, 2004, S. 407-426.

Bolzano, Bernard: Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Prag, Widtmann, 1810.

Bolzano, Bernard: Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag, Enders, 1816.

Bolzano, Bernard: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag, Haase, 1817.

Bopp, Karl: J. H. Lamberts und A. G. Kaestners Briefe aus den Gothaer Manuskripten herausgegeben (= Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Jahrgang 1928. Bd. 18). Berlin (u. a.), de Gruyter, 1928.

Braunschweigisches Journal philosophischen, philologischen und pädagogischen Inhalts (BJ). Braunschweig, Verlag der Schulbuchhandlung, 1788-1791.

Campe, Joachim Heinrich: Wörterbuch der deutschen Sprache. Reprographischer Nachdruck der Ausgabe Braunschweig 1807-1811. 5 Bde. Hildesheim (u. a.), Olms, 1969-1970.

Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bde. Nachdruck der ersten bis dritten Auflage, Stuttgart, Teubner, 1900-1907. New York, Johnson Reprint, 1965.

Chevallard, Yves: La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble, La Pensée Sauvage, ^{2}1991.

Clavius, Christoph: Euclidis Elementorum Libri XV. Accessit Liber XV. De quinque solidorum regularium inter se comparatione. Köln, Cholinus, 1627.

Clemm, Heinrich Wilhelm: Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften. Stuttgart, Mezler, 1759, ^{2}1769, ^{3}1777.

Clemm, Heinrich Wilhelm: Mathematisches Lehrbuch, oder vollständiger Auszug aus alles so wohl zur reinen als angewandten Mathematik gehörigen Wissenschaften, nebst einem Anhang oder kurzen Entwurf der Naturgeschichte und Experimentalphysik. Stuttgart, Mezler, ^{2}1768, ^{3}1777.

Dauben, Joseph W.; Scriba, Christoph J. (Hrsg.): Writing the History of Mathematics: Its Historical Development (= Science Networks, Bd. 27). Basel (u. a.), Springer, 2002.

Deutsches Museum (DM). Leipzig, Weygand, 1776-1788.

Di Simone, Maria Rosa: Die Zulassung zur Universität. In: Rüegg, Walter (Hrsg.): Geschichte der Universität in Europa. Band 2: Von der Reformation zur Französischen Revolution (1500-1800). München, Beck, 1996, S. 235-262.

Dictionary of Scientific Biography (DSB). Herausgegeben von Charles Coulston Gillispie. 16 Bde. New York, Scribner, 1970-1980.

Domay, Friedrich (Hrsg.): Handbuch der deutschen wissenschaftlichen Gesellschaften. Einschließlich zahlreicher Forschungsinstitute und Arbeitsgemeinschaften in der Bundesrepublik Deutschland. Wiesbaden, Steiner, 1964.

Duden - Deutsches Universalwörterbuch der Gegenwartssprache. Berlin (u. a.), Dudenverlag, ^{7}2011.

Dülmen, Richard van: Die Gesellschaft der Aufklärer. Zur bürgerlichen Emanzipation und aufklärerischen Kultur in Deutschland. Frankfurt a. M., Fischer, 1996.

Ebel, Wilhelm (Hrsg.): Göttinger Universitätsreden aus zwei Jahrhunderten (1737-1934). Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1978.

Ebert, Friedrich Adolf (Hrsg.): Ueberlieferungen zur Geschichte, Literatur und Kunst der Vor= und Mitwelt. Ersten Bandes erstes Stück. Dresden, Walther, 1826.

Euklid: Die Elemente. Buch I – XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, ^{7}1980.

Fäsch, Johann Rudolph: Kurtze jedoch grund- und deutliche Anfangs-Gründe zu der Fortification. Nürnberg, Weigel, [1725].

Felgner, Ulrich: Das Induktionsprinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 114. Stuttgart (u. a.), Teubner, 2012, S. 23-45.

Folkerts, Menso; Knobloch, Eberhard; Reich, Karin (Hrsg.): Maß, Zahl und Gewicht: Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung. Ausstellung im Zeughaus vom 15. Juli bis 24. September 1989. Weinheim, VCH, 1989.

Frantz, Constantin: Die Philosophie der Mathematik. Zugleich ein Beitrag zur Logik und Naturphilosophie. Leipzig, Hartung, 1842.

Fries, Jakob Friedrich: System der Logik. Ein Handbuch für Lehrer und zum Selbstgebrauch. Heidelberg, Mohr und Zimmer, 1811.

Frijhoff, Willem: Grundlagen. In: Rüegg, Walter (Hrsg.): Geschichte der Universität in Europa. Band 2: Von der Reformation zur Französischen Revolution (1500-1800). München, Beck, 1996, S. 53-102.

Geißler, Gert: Schulgeschichte in Deutschland. Von den Anfängen bis zur Gegenwart. Frankfurt a. M., Lang, 2011.

Gerhardt, Carl Immanuel: Geschichte der Mathematik in Deutschland (= Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit, Bd. 17). München, Oldenbourg, 1877.

Gericke, Helmuth: Zur Geschichte der Mathematik an der Universität Freiburg i. Br. (= Beiträge zur Freiburger Wissenschafts- und Universitätsgeschichte, 7. Heft). Freiburg i. Br., Albert, 1955.

Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen (GGA). Göttingen, Barmeier (u. a.), 1753-1801.

Göttingische gelehrte Anzeigen (GGA). Göttingen, Dieterich (u. a.), ab 1802.

Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen (GGA). Göttingen, Universitätsbuchhandlung, 1739-1752.

Grau, Conrad: Berühmte Wissenschaftsakademien. Von ihrem Entstehen und ihrem weltweiten Erfolg. Thun (u. a.), Deutsch, 1988.

Habel, Thomas: Gelehrte Journale und Zeitungen der Aufklärung. Zur Entstehung, Entwicklung und Erschließung deutschsprachiger Rezensionszeitschriften des 18. Jahrhunderts. Bremen, Ed. Lumière, 2007.

Hamburgisches Magazin, oder gesammlete Schriften, zum Unterricht und Vergnügen, aus der Naturforschung und den angenehmen Wissenschaften überhaupt (HM). Hamburg und Leipzig, Grund und Holle, 1747-1763.

Hammerstein, Notker: Die Hochschulträger. In: Rüegg, Walter (Hrsg.): Geschichte der Universität in Europa. Band 2: Von der Reformation zur Französischen Revolution (1500-1800). München, Beck, 1996, S. 105-137.

Hammerstein, Notker: Universitäten. In: Hammerstein, Notker; Herrmann, Ulrich (Hrsg.): Das 18. Jahrhundert. Vom später 17. Jahrhundert bis zur Neuordnung Deutschlands um 1800 (= Handbuch der deutschen Bildungsgeschichte, Bd. 2). München, Beck, 2005, S. 369-400.

Hammerstein, Notker (Hrsg.): Universitäten und Aufklärung (= Das 18. Jahrhundert. Supplementa, Bd. 3). Göttingen, Wallstein, 1995.

Hammerstein, Notker; Herrmann, Ulrich (Hrsg.): Das 18. Jahrhundert. Vom später 17. Jahrhundert bis zur Neuordnung Deutschlands um 1800 (= Handbuch der deutschen Bildungsgeschichte, Bd. 2). München, Beck, 2005.

Hausen, Christian August: Elementa matheseos. Pars Prima. Leipzig, Marche'sche Buchhandlung, 1734.

Heubaum, Alfred: Geschichte des deutschen Bildungswesens seit der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts. Bd. 1: Bis zum Beginn der allgemeinen Unterrichtsreform unter Friedrich dem Großen 1763ff. Das Zeitalter der Standes- und Berufserziehung. Berlin, Weidmann, 1905.

Heyne, Christian Gottlob: Lobrede auf Kästner (Elogium Abr. Gott. Kaestner) (1800). In: Ebel, Wilhelm (Hrsg.): Göttinger Universitätsreden aus zwei Jahrhunderten (1737-1934). Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1978, S. 195-202.

Hindenburg, Carl Friedrich: Ueber die Schwürigkeit bey der Lehre von den Parallellinien. Neues System der Parallellinien. In: Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie, 1781, 2. St., S. 145-168.

Hofmann, Joseph Ehrenfried: Geschichte der Mathematik. Erster Teil: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. Berlin, Gruyter, ^{2}1963.

Hohrath, Daniel: Mathematik für den Kriegsstaat. Georg Bernhard Bilfinger und die Fortifikation. In: Holtz, Sabine; Betsch, Gerhard; Zwink, Eberhard (Hrsg.): Mathesis, Naturphilosophie und Arkanwissenschaft im Umkreis Friedrich Christoph Oetingers (1702-1782). Stuttgart, Steiner, 2005, S. 107-128.

Holtz, Sabine; Betsch, Gerhard; Zwink, Eberhard (Hrsg.): Mathesis, Naturphilosophie und Arkanwissenschaft im Umkreis Friedrich Christoph Oetingers (1702-1782). Stuttgart, Steiner, 2005.

Hund, Friedrich: Die Geschichte der Göttinger Physik (= Göttinger Universitätsreden, Bd. 80). Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1987.

Imhausen, Annette; Volker R. Remmert: The Oration on the Dignity and the Usefulness of the Mathematical Sciences of Martin Hortensius (Amsterdam, 1634). Text, Translation and Commentary. In: History of Universities XXI/1 (2006), S. 71-150.

Jacobi, Carl Gustav Jacob: Ueber Gauss neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1826, 1. Bd., S. 301-307.

Jenaische gelehrte Zeitungen (JGZ). Jena, Cuno (u. a.), 1749-1786.

Jördens, Karl Heinrich: Denkwürdigkeiten, Charakterzüge und Anekdoten aus dem Leben der vorzüglichsten deutschen Dichter. Leipzig, Kummer, 1812.

Jördens, Karl Heinrich: Lexikon deutscher Dichter und Prosaisten. Bd. 2. Leipzig, Weidmann, 1807.

Jöcher, Christian Gottlieb: Allgemeines Gelehrten=Lexicon. Bd. 2. Leipzig, Gleditsch, 1750.

Jöcher, Christian Gottlieb; Adelung, Johann Christoph; Rotermund, Heinrich Wilhelm: Fortsetzung und Ergänzungen zu Christian Gottlieb Jöchers allgemeinem Gelehrten-Lexiko worin die Schriftsteller aller Stände nach ihren vornehmsten Lebensumständen und Schriften beschrieben werden. Bd. 3. Delmenhorst, Georg Jöntzen, 1810.

Kästner, Abraham Gotthelf: Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series. Leipzig, Breitkopf, 1743.

Kästner, Abraham Gotthelf: Beschluß des im vorigen Stücke abgebrochenen Aufsatzes: über die Art Kindern Geometrie und Arithmetik beizubringen. In: Braunschweigisches Journal, 1788, 3. Bd., S. 1-6.

Kästner, Abraham Gotthelf: Brief an Hrn. Hofrath und Leibmedicus Zimmermann in Hannover. In: Kästner, Abraham Gotthelf: Gesammelte poetische und prosaische schönwissenschaftliche Werke. Bd. 4. Berlin, Enslin, 1841, S. 51-72.

Kästner, Abraham Gotthelf: Briefe aus sechs Jahrzehnten. 1745-1800. Herausgegeben von Carl Scherer. Berlin, Behr, 1912.

Kästner, Abraham Gotthelf: Commentarius über eine Stelle des Varro von einer der Ursachen warum die Mathematik in Deutschland immer noch für unnütz gehalten wird. In:

Kästner, Abraham Gotthelf: Einige Vorlesungen. In der Königlichen deutschen Gesellschaft zu Göttingen gehalten. Altenburg, Richter, 1768, S. 38-48.

Kästner, Abraham Gotthelf: D. Gottfried Rudolph Pommers Sammlungen historischer und geographischer Merkwürdigkeiten. Altenburg, Richter, 1752.

Kästner, Abraham Gotthelf: De eo quod studium matheseos facit ad virtutem. [Deutsch: Was das Studium der Mathematik zur sittlichen Vervollkommnung beiträgt]. In: Ebel, Wilhelm (Hrsg.): Göttinger Universitätsreden aus zwei Jahrhunderten (1737-1934). Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1978, S. 55-63.

Kästner, Abraham Gotthelf: De resolutione aequationum differentialium per series. Leipzig, Breitkopf, 1745.

Kästner, Abraham Gotthelf: Einige Anecdoten aus der Jugendgeschichte des Herrn Hofraths Kästner; ein Auszug aus einem Briefe desselben an den R. Campe. In: Braunschweigisches Journal, 1788, 2. Bd., S. 39-44.

Kästner, Abraham Gotthelf: Fortsetzung des im vorigen Stücke abgebrochenen Aufsatzes: über die Art Kindern Geometrie und Arithmetik beizubringen. In: Braunschweigisches Journal, 1788, 2. Bd., S. 385-390.

Kästner, Abraham Gotthelf: Geschichte der Mathematik. 4 Bde. Göttingen, Rosenbusch, 1796-1800.

Kästner, Abraham Gotthelf: Mathematische Anfangsgründe. Erste Auflage (1758-1769) in 6 Bänden, jüngste Auflage (1790-1801) in 10 Bänden. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1758-1801. Auflistung der einzelnen Bände:

[1] Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv. Der mathematischen Anfangsgründe ersten Theils erste Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1758, ^{4}1786, ^{6}1800.

[2] Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendungen auf mancherley Geschäffte. Der mathematischen Anfangsgründe erster Theil zweyte Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, ^{2}1801 (herausgegeben von Bernhard Thibaut).

[3] Geometrische Abhandlungen. Erste Sammlung. Anwendungen der Geometrie und ebenen Trigonometrie. Der mathematischen Anfangsgründe ersten Theils dritte Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1790.

[4] Geometrische Abhandlungen. Zweyte Sammlung. Anwendungen der Geometrie und ebenen Trigonometrie. Der mathematischen Anfangsgründe ersten Theils vierte Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1791.

[5] Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Mechanische und optische Wissenschaften. Der mathematischen Anfangsgründe zweyten Theils erste Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, ^{4}1792.

[6] Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Astronomie, Geographie, Chronologie und Gnomonik. Der mathematischen Anfangsgründe zweyten Theils zweyte Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1759, ^{2}1765, ^{3}1781, ^{4}1792.

[7] Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen. Der mathematischen Anfangsgründe dritten Theils erste Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, ^{3}1794.

[8] Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. Der mathematischen Anfangsgründe dritten Theils zweyte Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, ^{2}1770, ^{3}1799.

[9] Anfangsgründe der höhern Mechanik. Der mathematischen Anfangsgründe vierten Theils erste Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, ^{2}1793.

[10] Anfangsgründe der Hydrodynamik. Der mathematischen Anfangsgründe vierten Theils zweyte Abtheilung. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, ^{2}1797.

Kästner, Abraham Gotthelf: [Selbstbiographie]. In: Baldinger, Ernst Gottfried: Biographien jetztlebender Aerzte und Naturforscher in und ausser Deutschland. Ersten Bandes erstes Stück. Jena, Hartung, 1768, S. 46-74.

Kästner, Abraham Gotthelf: Ueber den Gebrauch des mathematischen Geistes außer der Mathematik. In: Kästner, Abraham Gotthelf (Hrsg.): Vermischte Schriften. Zweyter Theil. Altenburg, Richter, 1772, S. 94-104.

Kästner, Abraham Gotthelf: Ueber den mathematischen Begriff des Raums. In: Philosophisches Magazin, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 403-419.

Kästner, Abraham Gotthelf: Ueber den Werth der Mathematik, wenn man sie als einen Zeitvertreib betrachtet. In: Kästner, Abraham Gotthelf (Hrsg.): Vermischte Schriften. Zweyter Theil. Altenburg, Richter, 1772, S. 56-75.

Kästner, Abraham Gotthelf: Ueber die Art Kindern Geometrie und Arithmetik beizubringen. In: Braunschweigisches Journal, 1788, 2. Bd., S. 257-268.

Kästner, Abraham Gotthelf: Ueber die geometrischen Axiome. In: Philosophisches Magazin, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 420-430.

Kästner, Abraham Gotthelf: Ueber die Verbindung der Mathematik und Naturlehre. In: Kästner, Abraham Gotthelf (Hrsg.): Vermischte Schriften. Zweyter Theil. Altenburg, Richter, 1772, S. 87-94.

Kästner, Abraham Gotthelf: Ueber eine scheinbare Schwierigkeit vom kleinern und grössern, bey Quotienten. In: Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, 1787, 1. St., S. 71-75.

Kästner, Abraham Gotthelf: Ueber Kunstwörter, besonders in der Mathematik. In: Philosophisches Magazin, 1791, 4. Bd., 3. St., S. 255-270.

Kästner, Abraham Gotthelf: Vermischte Schriften. Zweyter Theil. Altenburg, Richter, 1772.

Kästner, Abraham Gotthelf: Vita viri illustris atque celeberrimi Abrahami Gotthelf Kaestneri. Magistri semisecularis. Leipzig, 1787.

Kästner, Abraham Gotthelf: Was heißt in Euklids Geometrie möglich? In: Philosophisches Magazin, 1790, 2. Bd., 4. St., S. 391-402.

Kästner, Abraham Gotthelf; Kirsten, Adolph Friedrich: Bibliotheca Abr[aham] Gotth[elf] Kaestneri, Britanniar. regi quondam a consil. et mathes. atque physic. prof. p. o.

celeberrimi, ordine digesta quae Gottingae die XXVI. octob. a. MDCCCI publica auctionis lege divendetur. Göttingen, Typis Grapianis, 1801.

Kant, Immanuel: Beantwortung der Frage: Was ist Aufklärung? In: Kant, Immanuel: Gesammelte Schriften. Bd. VIII. Berlin und Leipzig, Gruyter, ^{2}1923, S. 33-42.

Kant, Immanuel: Gesammelte Schriften. Herausgegeben von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. Bd. XI, Bd. 2: 1789-1794. Berlin und Leipzig, Gruyter, ^{2}1922.

Kant, Immanuel: Gesammelte Schriften. Herausgegeben von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. Bd. XX. Berlin und Leipzig, Gruyter, 1942.

Kant, Immanuel: Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen. Königsberg, Kanter, 1763.

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav: Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften. 3 Bde. Greifswald, Röse, 1780.

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav: Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der mathematischen Wissenschaften. Greifswald, Röse, 1781, ^{2}1785 (2. Auflage in zwei Bänden).

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav: Beyträge zur Aufnahme der Theoretischen Mathematik. 4 Bände. Rostock, Röse, 1758-1761.

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav: Lehrbegrif der gesamten Mathematik. 8 Bde. Greifswald, Röse, 1767-1777, ^{2}1782-1794.

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav: Mathematische Abhandlungen, theils durch eine Preisfrage der königl. Pr. Acad. vom Jahr 1784 über das Mathematisch=Unendliche, theils durch andre neuere Untersuchungen veranlasset. Halle, Renger, 1786.

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav: Versuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien. Halle, 1778.

Klein, Felix: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band 1: Arithmetik, Algebra, Analysis. Nachdruck der 4. Auflage 1933. Berlin, Springer, 1968.

Klügel, Georg Simon: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, nebst ihrer Anwendung auf praktische Rechnungen, das Feldmessen und die Markscheidekunst. Berlin und Stettin, Nicolai, ^{2}1792/93, ^{3}1798, ^{7}1821.

Klügel, Georg Simon: Anfangsgründe der praktischen Mechanik, der bürgerlichen Baukunst und der Kriegsbaukunst. Berlin und Stettin, Nicolai, 1784.

Klügel, Georg Simon: Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Göttingen, Rosenbusch, 1763. Online verfügbar unter http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/versuch.html, zuletzt geprüft am 10.1.2014.

Klügel, Georg Simon: Encyklopädie oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten Kenntnisse. 3 Bde. Berlin und Stettin, Nicolai, 1782-1784; 5 Bde. ^{2}1792-1794, ^{3}1806-1809.

Klügel, Georg Simon: Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet in alphabetischer Ordnung. 3 Bde. Leipzig, Schwickert, 1803-1808.

Klügel, Georg Simon; Mollweide, Carl Brandan; Grunert, Johann August: Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet in alphabetischer Ordnung. Erste Abtheilung. Die reine Mathematik. Fünfter Theil von T bis Z. Leipzig, Schwickert, 1831.

Krafft, Fritz: Der Weg von den Physiken zur Physik an den deutschen Universitäten. In: Berichte zur Wissenschaftsgeschichte 1/1978, S. 123-162.

Krause, Konrad: Alma mater Lipsiensis. Geschichte der Universität Leipzig von 1409 bis zur Gegenwart. Leipzig, Universitätsverlag, 2003.

Kröger, Desirée: Ein Mathematiker, der nicht rechnen kann? Die Karikatur von Carl Friedrich Gauß über Abraham Gotthelf Kästner. In: Mathematische Semesterberichte. Bd. 61, Heft 1 (2014), S. 35-51.

Kühn, Heidi: Die Mathematik im deutschen Hochschulwesen des 18. Jahrhunderts (unter besonderer Berücksichtigung der Verhältnisse an der Leipziger Universität). Leipzig, 1987.

Lambert, Johann Heinrich: Theorie der Parallellinien. In: Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, 1786, 2. St., S. 137-164.

Langsdorf, Karl Christian von: Ueber Newtons, Eulers, Kästners und Konsorten Pfuschereien in der Mathematik. Heidelberg, Mohr und Zimmer, 1807.

Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik (LM). Leipzig, Müller, 1786-1789.

Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie (LMN). Leipzig, Müller, 1781-1785.

Lichtenberg, Georg Christoph: Brief aus England an Herrn Hofrath Kästner. In: Deutsches Museum, 1776, 1. Bd., S. 79-84.

Lichtenberg, Georg Christoph: Briefwechsel. Im Auftrage der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Herausgegeben von Ulrich Joost und Albrecht Schöne. 5 Bde. München, Beck, 1983-2004.

Lind, Gunter: Physik im Lehrbuch 1700-1850. Zur Geschichte der Physik und ihrer Didaktik in Deutschland. Berlin (u. a.), Springer, 1992.

Lips, Conrad: Elementare Einleitung der synthetischen Geometrie. Programm des Großherzoglichen Gymnasiums zu Darmstadt. Darmstadt, Brill, 1871.

[Lorenz, Johann Friedrich]: Die sechs ersten Bücher der geometrischen Anfangsgründe des Euklides zum Gebrauch der Schulen. Aus dem griechischen übersetzt durch L. Nebst einer Vorrede von J. A. v. Segner. Halle, Buchhandlung des Waisenhauses, 1773.

[Mackensen, Wilhelm Friedrich August:] Letztes Wort über Göttingen und seine Lehrer. Mit unter wird ein Wörtchen raisonnirt. Leipzig, 1791.

Mahrenholz, Johannes: Anekdoten aus dem Leben deutscher Mathematiker (= Mathematisch-physikalische Bibliothek, Reihe 1, herausgegeben von Walther Lietzmann und Alexander Witting), Leipzig und Berlin, Teubner, 1936.

Mathematics Genealogy Project. Eintrag „Abraham Gotthelf Kästner". Online verfügbar unter http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=66476, zuletzt geprüft am 3.6.2014.

Meiners, Christoph: Ueber die Verfassung und Verwaltung deutscher Universitäten. Zwei Bände in einem Band. Neudruck der Ausgabe Göttingen 1801-1802. Aalen, Scientia, 1970.

Menzel, Wolfgang Walter: Vernakuläre Wissenschaft. Christian Wolffs Bedeutung für die Herausbildung und Durchsetzung des Deutschen als Wissenschaftssprache (= Reihe Germanistische Linguistik, Bd. 166). Tübingen, de Gruyter, 1996.

Meusel, Johann Georg: Lexikon der vom Jahr 1750 bis 1800 verstorbenen teutschen Schriftsteller. Bd. 6. Leipzig, Gerhard Fleischer, 1806.

Michelsen, Johann Andreas Christian: Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik und die Art die Vollkommenheit und Brauchbarkeit derselben zu vergrößern. Ein Versuch, den Mathematikern und Philosophen zur Prüfung und Ergänzung vorgelegt. Berlin, Hesse, 1789.

Mitgliederverzeichnis der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Eintrag „Abraham Gotthelf Kästner". Online verfügbar unter http://www.bbaw.de/die-akademie/akademiegeschichte/mitglieder-historisch/alphabetische-sortierung?altmitglied_id=1322&letter=K, zuletzt geprüft am 3.6.2014.

Mittler, Elmar (Hrsg.): "Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst". Carl Friedrich Gauß in Göttingen (=Göttinger Bibliotheksschriften, 30). Göttingen, Niedersächsische Staats- und Landesbibliothek, 2005.

Müller, Conrad Heinrich: Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über den Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik. Leipzig, Teubner, 1904.

Müller, Gotthard Christoph: Militärische Encyklopädie; oder systematischer und gemeinnütziger Vortrag der sämmtlichen alten und neuen Kriegswissenschaften. Göttingen, Dieterich, 1796.

Murhard, Friedrich Wilhelm August: Litteratur der mathematischen Wissenschaften. 2 Bde. Leipzig, Breitkopf und Härtel, 1797/98.

Neue allgemeine deutsche Bibliothek (NADB). Berlin und Stettin (u. a.), Nicolai (u. a.), 1793-1806.

Neue Deutsche Biographie (NDB). Herausgegeben von der Historischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 23 Bde. Berlin, Duncker & Humblot, 1953-2010.

Neue Leipziger Gelehrte Zeitungen (LGZ). Leipzig, Breitkopf, 1785-1787.

Nobre, Sergio: Christian Wolffs Beitrag zur Popularisierung der Mathematik in Deutschland, europäischen und außereuropäischen Ländern. Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte. Preprint 258. Berlin, 2004.

Pahl, Franz: Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts. Handbuch des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts, Bd. 1. Herausgegeben von Johann Norrenberg. Leipzig, Quelle und Meyer, 1913.

Pasch, Moritz: Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, Teubner, 1882.

Paulsen, Friedrich: Geschichte des gelehrten Unterrichts auf den deutschen Schulen und Universitäten vom Ausgang des Mittelalters bis zur Gegenwart. Mit besonderer Rücksicht auf den klassischen Unterricht. 2 Bde. Herausgegeben und in einem Anhang fortgesetzt von Rudolf Lehmann. Unveränderter photomechanischer Nachdruck der Ausgaben Leipzig 1919 (Bd. 1) und Berlin/Leipzig 1921 (Bd. 2). Berlin, Gruyter, 1960.

Peters, Wilhelm Servatius: Das Parallelenproblem bei A. G. Kaestner. Zur Parallelenforschung im 18. Jahrhundert. In: Archive for History of Exact Sciences, Bd. 1, Heft 5, 1961, S. 480-487.

Pfaff, Johann Friedrich: Sammlung von Briefen gewechselt zwischen Johann Friedrich Pfaff und Herzog Carl von Würtemberg, F. Bouterwek, A. v. Humboldt, A. G. Kästner, und Anderen. Herausgegeben von Carl Pfaff. Leipzig, Hinrich, 1853.

Philosophisches Magazin (PM). Halle, Gebauer, 1788-1792.

Pierer, Heinrich August (Hrsg.): Universal-Lexikon oder vollständiges encyclopädisches Wörterbuch. 26. Bde. Nachdruck. Altenburg, Pierer, 1835-1836.

Proklos Diadochus, 410-485: Kommentar zum ersten Buch von Euklids "Elementen". Aus dem Griechischen ins Deutsche übertragen und mit textkritischen Anmerkungen versehen von P. Leander Schönberger. Eingeleitet, mit Kommentaren und bibliographischen Nachweisen versehen und in der Gesamtedition besorgt von Max Steck. Halle, Deutsche Akademie der Naturforscher, 1945.

Promies, Wolfgang (Hrsg.): Georg Christoph Lichtenberg. Schriften und Briefe. Bd. 1: Sudelbücher I. München, Hanser, ^{3}1980.

Pütter, Johann Stephan: Versuch einer academischen Gelehrten=Geschichte von der Georg=Augustus=Universität zu Göttingen. Bd. 1. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1765.

Pütter, Johann Stephan: Versuch einer academischen Gelehrten=Geschichte von der Georg=Augustus=Universität zu Göttingen. Zweyter Theil von 1765 bis 1788. Bd. 2. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1788.

Radbruch, Knut: Mathematische Spuren in der Literatur. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1997.

Reich, Karin: Mathematik der Aufklärung am Beispiel der Lehrbücher von Christian Wolff und Abraham Gotthelf Kästner. In: Holtz, Sabine; Betsch, Gerhard; Zwink, Eberhard (Hrsg.): Mathesis, Naturphilosophie und Arkanwissenschaft im Umkreis Friedrich Christoph Oetingers (1702-1782). Stuttgart, Steiner, 2005, S. 61-80.

Rüegg, Walter (Hrsg.): Geschichte der Universität in Europa. Band 2: Von der Reformation zur Französischen Revolution (1500-1800). München, Beck, 1996.

Rüegg, Walter (Hrsg.): Geschichte der Universität in Europa. Band 3: Vom 19. Jahrhundert zum Zweiten Weltkrieg (1800-1945). München, Beck, 2004.

Rüegg, Walter: Themen, Probleme, Erkenntnisse. In: Rüegg, Walter (Hrsg.): Geschichte der Universität in Europa. Band 2: Von der Reformation zur Französischen Revolution (1500-1800). München, Beck, 1996, S. 21-52.

Schindling, Anton: Bildung und Wissenschaft in der Frühen Neuzeit. 1650-1800 (= Enzyklopädie Deutscher Geschichte, Bd. 30). München, Oldenbourg, 1994.

Schindling, Anton: Die protestantischen Universitäten im Heiligen römischen Reich deutscher Nation im Zeitalter der Aufklärung. In: Hammerstein, Notker (Hrsg.), Universitäten und Aufklärung (= Das 18. Jahrhundert. Supplementa, Bd. 3). Göttingen, Wallstein, 1995, S. 9-19.

Schlichtegroll, Friedrich: Nekrolog auf das Jahr 1800. Enthaltend Nachrichten von dem Leben merkwürdiger in diesem Jahre verstorbener Deutschen. 11. Jahrgang, Bd. 2. Gotha, Perthes, 1806.

Schneider, Ute: Die Funktion wissenschaftlicher Rezensionszeitschriften im Kommunikationsprozess der Gelehrten. In: Schneider, Ulrich Johannes (Hrsg.): Kultur der Kommunikation. Die europäische Gelehrtenrepublik im Zeitalter von Leibniz und Lessing (= Wolfenbütteler Forschungen, Bd. 109). Wiesbaden, Harrassowitz, 2005, S. 279-291.

Schöneburg, Silvia: Mathematische Lehrtätigkeit an der Universität Wittenberg im 16. und frühen 17. Jahrhundert. In: Richter, Karin und Schöneburg, Silvia (Hrsg.): Mathematische Forschung und Lehre an der Universität Wittenberg. Bd. 1. Frühe Mathematik und Kometenbeobachtung in Wittenberg. Hamburg, Kovač, 2010, S. 1-56.

Schott, Gaspar: Cursus Mathematicus. Sive Absoluta omnium Mathematicarum Disciplinarum Encyclopaedia, In Libros XXVIII. digesta … Accesserunt in sine Theoreses Mechanicae Novae. Würzburg, Schönwetter, 1661.

Schubring, Gert: Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert. Studien und Materialien zum Prozeß der Professionalisierung in Preußen (1810-1870). Weinheim, Beltz, ²1991.

Schubring, Gert: Mathematische Wörterbücher des 18. Jahrhunderts. In: Das achtzehnte Jahrhundert. Zeitschrift der Deutschen Gesellschaft für die Erforschung des achtzehnten

Jahrhunderts. Jahrgang 22, Heft 1: Enzyklopädien, Lexika und Wörterbücher im 18. Jahrhundert. Sonderdruck. Göttingen, Wallstein, 1998, S. 114-128.

Schweikart, Ferdinand Carl: Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. Jena und Leipzig, Gabler, 1807.

Scriba, Christoph J.: Die mathematischen Wissenschaften im mittelalterlichen Bildungskanon der Sieben Freien Künste. In: Acta historica Leopoldina 16, 1985, S. 25-54.

Segner, Johann Andreas von: Anfangsgründe der Arithmetick, Geometrie und der Geometrischen Berechnungen. Aus dem Lateinischen seines Vaters übersetzt und nach dessen Anweisung verbessert durch Joh. Wilh. v. Segner. Halle, Renger, 1764, ²1773.

Segner, Johann Andreas von: Deutliche und vollständige Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie. Zum Gebrauche derjenigen, welche sich in diesen Wissenschaften durch eigenen Fleiß üben wollen. Lemgo, Meyer, 1747, ²1767.

Segner, Johann Andreas von: Einleitung in die Natur=Lehre. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, ³1770.

Segner, Johann Andreas von: Elementa Arithmeticae, Geometriae et Calculi Geometrici (= Cursus Mathematicus, Pars I). Halle, Renger, 1756.

Sommerhoff-Benner, Silvia: Christian Wolff als Mathematiker und Universitätslehrer des 18. Jahrhunderts. Aachen, Shaker, 2002.

[Spaun, Franz]: Versuch das Studium der Mathematik durch Erläuterung einiger Grundbegriffe und durch zweckmäßige Methoden zu erleichtern. Bamberg und Würzburg, Göbhardt, 1805.

Stäckel, Paul: Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. Erster Theil: Leben und Schriften der beiden Bolyai. Leipzig und Berlin, Teubner, 1913.

Stäckel, Paul; Engel, Friedrich: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie (= Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Bd. 41). Leipzig, Teubner, 1895.

Stichweh, Rudolf: Zur Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen. Physik in Deutschland 1740-1890. Frankfurt a. M., Suhrkamp, 1984.

Struensee, Karl August von: Anfangsgründe der Kriegsbaukunst. 3 Bde. Leipzig und Liegnitz, Siegert, 1771-1774.

Sturm, Johann Christoph: Kurtzgefasste Mathesis. Oder Erste Anleitung zu Mathematischen Wissenschafften. Herausgegeben von Leonhard Christoph Sturm. Coburg, Pfotenhauer, 1717.

Sturm, Johann Christoph: Mathesis Juvenilis. Das ist: Anleitung vor die Jugend zur Mathesin. 2 Bde. Nürnberg, Hoffmann und Streck, ²1710/14.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1. Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin und New York, de Gruyter, ⁴1980.

Tübingische gelehrte Anzeigen (TGA). Tübingen, Reiß (u. a.), 1783-1796.

Turner, R. Steven: University Reformers and Professorial Scholarship in Germany 1760-1806. In: Lawrence Stone (Hrsg.): The University in Society. Volume II: Europe, Scotland, and the United States from the 16th to the 20th Century. London, Oxford University Press, 1975, S. 495-531.

Ullrich, Peter: Herkunft, Schul- und Studienzeit von Carl Friedrich Gauß. In: Mittler, Elmar (Hrsg.): "Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst". Carl Friedrich Gauß in Göttingen. Göttingen, Niedersächsische Staats- und Landesbibliothek, 2005 (Göttinger Bibliotheksschriften, 30), S. 17-34.

Vandenhoeck und Ruprecht Göttingen: Auf den Spuren von Forschung und Lehre. 275 Jahre Verlag Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 2010.

Vandermeersch, Peter A.: Die Universitätslehrer. In: Rüegg, Walter (Hrsg.): Geschichte der Universität in Europa. Band 2: Von der Reformation zur Französischen Revolution (1500-1800). München, Beck, 1996, S. 181-212.

Verzeichnis der im deutschen Sprachraum erschienenen Drucke des 18. Jahrhunderts (VD 18). Online verfügbar unter http://vd18.de/, zuletzt geprüft am 1.6.2014.

Volkert, Klaus: Geschichte des Parallelenproblems. Vorlesung, gehalten an der Universität Frankfurt im WS 2002/03. Online verfügbar unter http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Vorlesungen/Geschichte_des_Parallelenaxioms/, zuletzt geprüft am 29.11.2013.

Vorlesungsverzeichnisse der Technischen Universität Braunschweig ab WS 1745/46. Online verfügbar unter http://www.biblio.tu-bs.de/universitaetsarchiv/bestaende/vorlesungsverzeichnisse.html, zuletzt geprüft am 8.5.2014.

Vorlesungsverzeichnisse der Universität Freiburg 1785-2003. Online verfügbar unter http://www.ub.uni-freiburg.de/?id=123, zuletzt geprüft am 8.5.2014.

Vorlesungsverzeichnisse der Universität Giessen. Online verfügbar unter http://geb.uni-giessen.de/geb/schriftenreihen?sr_id=6&la=de, zuletzt geprüft am 8.5.2014.

Vorlesungsverzeichnisse der Universität Heidelberg 1784-1930 - digital. Online verfügbar unter http://unihdvorlesungen1784-1930.uni-hd.de, zuletzt geprüft am 8.5.2014.

Vorlesungsverzeichnisse der Universitäten Ingolstadt und Landshut. Online verfügbar unter http://epub.ub.uni-muenchen.de/view/lmu/vlverz.html, zuletzt geprüft am 8.5.2014.

Vorlesungsverzeichnisse der Universität Kiel. Online verfügbar unter http://www.uni-kiel.de/journals/receive/jportal_jpjournal_00000001?XSL.view.objectmetadata.SESSION=false, zuletzt geprüft am 8.5.2014.

Voss, Jürgen: Akademien und Gelehrte Gesellschaften. In: Reinalter, Helmut (Hrsg.): Aufklärungsgesellschaften. Frankfurt a. M. (u. a.), Lang, 1993, S. 19-38.

Wagner, Siegfried: Die Entwicklung der exakten Naturwissenschaften von der Antike bis zur Gegenwart. Eine Quantifizierung ihrer Geschichte. Bd. 1: Der aufhaltsame Aufstieg der abendländischen Wissenschaft. Analyse nach Epochen und Fachgebieten (= Science Studies Report, Bd. 27). Bielefeld, Kleine, 1985.

Wahrig. Deutsches Wörterbuch. Herausgegeben von Renate Wahrig-Burfeind. Gütersloh/München, Wissen Media, [8]2006.

Wolff, Christian: Anfangs=Gründe aller mathematischen Wissenschaften. 4 Bde. Halle, Renger, 1710, [2]1716/17, [3]1725, [5]1737/38, [9]1775.

Wolff, Christian: Auszug aus den Anfangs=Gründen aller mathematischen Wissenschafften. Zu bequemerem Gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertiget. Frankfurt und Leipzig, Renger, [2]1724, [6]1737.

Wolff, Christian: Elementa matheseos universae. 2 Bde. Halle, Renger, 1713/15.

Wolff, Christian: Mathematisches Lexicon. Darinnen die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunst=Wörter erkläret und zur Historie der Mathematischen Wissenschafften dienliche Nachrichten ertheilet, auch die Schrifften, wo jede Materie ausgeführet zu finden. Leipzig, Gleditsch, 1716.

Zedler, Johann Heinrich (Hrsg.): Grosses vollständiges Universal-Lexicon aller Wissenschafften und Künste. 64 Bde., 4 Suppl.-Bände. Halle und Leipzig, Zedler, 1732-1754.

8 Anhänge

Anhang 1: In den Lehrbüchern behandelte mathematische Themen

Anhang 2: Abraham Gotthelf Kästners Klassifikation der mathematischen Wissenschaften

Anhang 3: Entgegengesetzte Größen – Inhaltliche Einordnung

Anhang 4: Entgegengesetzte Größen – Terminologie

Anhang 5: Entgegengesetzte Größen – Deutung

Anhang 6: Definitionen paralleler Linien

Anhang 7: Umgang mit dem Parallelenpostulat

Anhang 1: In den Lehrbüchern behandelte mathematische Themen (Tabelle 1/2)

Autor und Lehrbuch/ Teilgebiet	Schott: *Cursus Mathematicus* (1661)	Sturm: *Mathesis Juvenilis* (^{2}1710/14)	Sturm: *Kurtzgefasste Mathesis* (1717)	Wolff: *Anfangs= Gründe* (^{9}1775)	Wolff: *Auszug* (^{6}1737)	Kästner: *Anfangs-gründe* (^{6}1800)
Arithmetik	X	X	X	X	X	X
Geometrie	X	X	X	X	X	X
Ebene Trigonometrie	X	X	X	X	X	X
Sphärische Trigonometrie				X		X
Mechanik	X	X		X	X	X
Statik	X	X	X			X
Hydrostatik	X		X	X	X	X
Aerometrie/ Aerostatik				X	X	X
Hydraulik und Hydrodynamik	X		X	X	X	X
Pneumatik						
Optik	X	X	X	X	X	X
Katoptrik	X	X	X	X	X	X
Dioptrik	X	X	X	X	X	X
Perspektive		X	X	X	X	X
Photometrie						
Astronomie	X	X	X	X	X	X
Geographie	X	X	X	X	X	X
Chronologie	X	X	X	X	X	X
Gnomonik	X	X	X	X	X	X
Zivilbaukunst	X	X	X	X	X	X
Fortifikation	X	X	X	X	X	X
Artillerie				X	X	X
Algebra	X	X	X	X	X	X
Analysis				X		X
Akustik					X	
Musik	X				X	
Hydrographie	X					
Astrologie	X					
Taktik	X					
Chiromantie/ Händedeutung			X			

Anhang 1: In den Lehrbüchern behandelte mathematische Themen (Tabelle 2/2)

Autor und Lehrbuch/ Teilgebiet	Clemm: *Mathemat. Lehrbuch* ([3]1777)	Karsten: *Lehrbegrif* (1767-1777)	Karsten: *Lehrbegriff* ([2]1782-1794)	Karsten: *Anfangs-gründe* (1780)	Karsten: *Auszug* (1781)	Karsten: *Auszug* ([2]1785)
Arithmetik	X	X	X	X	X	X
Geometrie	X	X	X	X	X	X
Ebene Trigonometrie	X	X	X	X	X	X
Sphärische Trigonometrie	X	X	X			X
Mechanik		X	X	X		X
Statik	X	X	X	X	X	X
Hydrostatik	X	X	X	X	X	X
Aerometrie/ Aerostatik	X	X	X	X	X	X
Hydraulik und Hydrodynamik	X	X	X	X	X	X
Pneumatik		X	X			
Optik	X	X	X	X	X	X
Katoptrik	X			X	X	X
Dioptrik	X			X	X	X
Perspektive	X	X	X	X	X	X
Photometrie		X	X	X		
Astronomie	X				X	X
Geographie	X				X	X
Chronologie	X				X	X
Gnomonik	X				X	X
Zivilbaukunst	X				X	X
Fortifikation	X				X	X
Artillerie	X				X	X
Algebra	X		X			
Analysis	X		X			
Akustik	X					
Musik	X					
Hydrographie						
Astrologie						
Taktik						
Chiromantie/ Händedeutung						

Anhang 2: Abraham Gotthelf Kästners Klassifikation der mathematischen Wissenschaften

Mathematik

Lehre von den Größen

Elementare Mathematik

Arithmetik		*Geometrie*
inklusive Buchstabenrechnung (Größe als Menge von Teilen)		inklusive Trigonometrie (Verbindung dieser Teile untereinander)
	Auf diesen beiden Wissenschaften basiert die höhere Mathematik	

Höhere Mathematik

Algebra: Analysis endlicher Größen	Analysis als Oberbegriff (entweder zur Arithmetik oder zur Geometrie gehörend oder eine Mischung aus beiden)	*Analysis des Unendlichen*: Differential- und Integralrechnung

Reine Mathematik

Angewandte Mathematik

Es werden weitere Eigenschaften außer die Größe mitbetrachtet

Anwendungen der Arithmetik: Kaufmannsrechnung *Anwendungen der Geometrie*: Vermessung von Feldern, Perspektive	*Mechanische Wissenschaften*: Mechanik, Statik, Hydrostatik, Hydraulik, Aerometrie, Hydrodynamik inkl. Maschinenlehre, Artillerie	*Astronomische Wissenschaften*: Astronomie, Geographie, Gnomonik, Chronologie
	Optische Wissenschaften: Optik, Katoptrik, Dioptrik	*Architektonische Wissenschaften*: Bürgerliche Baukunst, Kriegsbaukunst

Anhang 3: Entgegengesetzte Größen – Inhaltliche Einordnung

Kästner	*Anfangsgründe*: „Von den entgegengesetzten Größen“ im ersten Kapitel der Arithmetik [Zahlenrechnung]		
Sturm	*Kurtzgefasste Mathesis*: „Von der Buchstaben=Rechnung“ [Buchstabenrechnung]	*Mathesis Juvenilis*: „Von der Algebra“ in der vierten „Sektion“ der Arithmetik [Buchstabenrechnung]	
Wolff	*Anfangs=Gründe*: „Buchstaben=Rechenkunst“ im vierten Band der *Anfangs=Gründe* (Algebra) [Buchstabenrechnung]	*Auszug*: Wie in den *Anfangs=Gründen* [Buchstabenrechnung]	*Mathematisches Lexicon*: „Quantitas affirmativa, nihilo major, positiva, eine würckliche Grösse“; „Quantitas negativa, privativa, nihilo minor, der Mangel einer Grösse“ [Zahlen- und Buchstabenrechnung]
Segner	*Anfangsgründe*: „Vornehmlich von den gantzen Zahlen“ im Kapitel „Anfangsgründen der Arithmetick“; später in „Die allgemeine Arithmetick“ im Kapitel „Anfangsgründe der geometrischen Berechnungen“ [Zahlen- und Buchstabenrechnung]	*Vorlesungen*: „Die Anwendung der Addition und Subtraction“ sowie „Bezeichnung der Grössen, die einander vermehren oder vermindern“ im Kapitel „Einfache Rechnungsarten mit ganzen Zahlen und zehentheilichten Brüchen“ [Zahlenrechnung]	
Clemm	*Mathematisches Lehrbuch*: „Die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchstaben“ im zweiten Hauptstück der Arithmetik [Buchstabenrechnung]	*Erste Gründe*: „Von den vier Rechnungsarten“ im zweiten Kapitel der Arithmetik [Zahlen- und Buchstabenrechnung]	
Karsten	*Lehrbegrif*: „Die allgemeine Rechenkunst oder die Buchstaben=Rechnung mit ihrer Anwendung auf die gemeine Rechenkunst“ [Buchstabenrechnung]	*Auszug*: Wie im *Lehrbegrif* [Buchstabenrechnung]	*Anfangsgründe*: Geometrie [Buchstabenrechnung]
Klügel	*Mathematisches Wörterbuch*: „Entgegengesetzte Größen“, „Buchstabenrechnung“ [Buchstabenrechnung]	*Anfangsgründe*: Keine Erwähnung	

Anhang 4: Entgegengesetzte Größen – Terminologie

Kästner	*Anfangsgründe*: Entgegengesetzt, positiv, bejahend; negativ, verneinend		
Sturm	*Kurtzgefasste Mathesis*: –	*Mathesis Juvenilis*: Positivum; Privativum	
Wolff	*Anfangs=Gründe*: –	*Auszug*: –	*Mathematisches Lexicon*: „Quantitas affirmativa, nihilo major, positiva, eine würckliche Grösse“; „Quantitas negativa, privativa, nihilo minor, der Mangel einer Grösse“
Segner	*Anfangsgründe*: Entgegengesetzt; positiv; negativ	*Vorlesungen*: „einander zu wider“; positiv, „würklich“; negativ, privatim	
Clemm	*Mathematisches Lehrbuch*: Entgegengesetzt; positiv, bejahend; negativ, verneinend	*Erste Gründe*: Entgegengesetzt; positiv; negativ	
Karsten	*Lehrbegrif*: Entgegengesetzt; positiv, bejaht, positiv ausgedrückte Größe; negativ, verneint, negativ ausgedrückte Größe	*Auszug*: Entgegengesetzt; positiv; negativ	*Anfangsgründe*: Entgegengesetzt; positiv, bejaht, positiv ausgedrückte Größe; negativ, verneint, negativ ausgedrückte Größe
Klügel	*Mathematisches Wörterbuch*: Entgegengesetzt; positiv; negativ		
Kant	Entgegengesetzt; positiv; negativ		

Anhang 5: Entgegengesetzte Größen – Deutung

Kästner	*Anfangsgründe*: Vermögen und Schulden, Vorwärts- und Rückwärtsgehen		
Sturm	*Kurtzgefasste Mathesis*: Mangel	*Mathesis Juvenilis*: „Würckliches“, „Geld haben“; Mangel, Abgang, Schuld	
Wolff	*Anfangs=Gründe*: „Baares Geld“; Mangel, Schulden, „weniger als nichts“	*Auszug*: Wie in den *Anfangs=Gründen*	*Mathematisches Lexicon*: Schulden
Segner	*Anfangsgründe*: Einnahmen und Ausgaben, Aufgang und Niedergang, einfließendes und ausfließendes Wasser, aufwärts wirkende Kräfte und unterwärts wirkende Kräfte	*Vorlesungen*: „Würklich“, Einnahmen und Ausgaben, Schulden und Vermögen/bares Geld, Vorwärts- und Rückwärtsgehen (auch anhand einer Linie erklärt)	
Clemm	*Mathematisches Lehrbuch*: Vermögen und Schulden, Vorwärts- und Rückwärtsgehen	*Erste Gründe*: Haben (nicht in dem Wortlaut, aber in der Bedeutung); Mangel, Schulden	
Karsten	*Lehrbegrif*: Vermögen und Schulden, Vorwärtsfahren und Rückgang eines Schiffes	*Auszug*: Keine Interpretation	*Anfangsgründe*: Vorwärts- und Rückwärtsgehen (anhand von orientierten Linien erklärt)
Klügel	*Mathematisches Wörterbuch*: Vermögensstand (zusammengesetzt aus Schuldforderungen, Schulden und Kassenstand), Steigen und Fallen, Vorwärts- und Rückwärtsbewegungen		
Kant	Weg eines Schiffes bei Morgenwind und Nachtwind, entgegengesetzte Richtungen, Aktivschulden/Kapital und Passivschulden/Schulden, Bewegung, Lust und Unlust, Kälte und Wärme, Tugend und Untugend, magnetische Kräfte		

Anhang 6: Definitionen paralleler Linien

Kästner	*Anfangsgründe*: Gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und nie zusammenstoßen, egal wie weit man die verlängert [Euklid]		
Sturm	*Kurtzgefasste Mathesis*: Linien, die gleich weit voneinander entfernt sind [Äquidistanz]	*Mathesis Juvenilis*: Linien, die gleich weit voneinander entfernt stehen oder nicht zusammenlaufen, egal wie lang man sie zieht [Euklid, Äquidistanz]	
Wolff	*Anfangs=Gründe*: Linien, die immer dieselbe Weite voneinander behalten; machen mit dem Lot einen rechten Winkel [Äquidistanz, Schnittwinkel/Lot]	*Auszug*: Wie in den *Anfangs=Gründen*	*Mathematisches Lexicon*: Linien mit derselben Entfernung voneinander [Äquidistanz]
Segner	*Anfangsgründe*: Zwei gerade Linien in derselben Ebene stoßen nie zusammen, egal wie weit man sie verlängert [Euklid]	*Vorlesungen*: Gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und nicht zusammen laufen, egal wie weit man sie verlängert; über ihre Lage bestimmbar [Euklid]	
Clemm	*Mathematisches Lehrbuch*: Linien, die nie zusammenstoßen, egal wie weit man sie verlängert [Euklid]	*Erste Gründe*: Zwei Linien, die auf einer dritten senkrecht stehen [Schnittwinkel/Lot]	
Karsten	*Lehrbegrif*: Zwei gerade Linien, die in derselben Ebene eine solche Lage zueinander haben, stoßen nie zusammen, egal wie weit man sie verlängert [Euklid]	*Auszug*: Wie im *Lehrbegrif*	*Anfangsgründe*: Wie im *Lehrbegrif*
Klügel	*Mathematisches Wörterbuch*: Übersicht über alle drei Definitionen [Euklid, Schnittwinkel, Äquidistanz]	*Anfangsgründe*: Gerade Linien in derselben Ebene, die sich nicht treffen, egal wie weit man sie verlängert [Euklid]	

Anhang 7: Umgang mit dem Parallelenpostulat (PP)

Kästner	*Anfangsgründe*: PP wird nicht bewiesen, aber mit Hilfe des umgekehrten Satzes (Euklid I,27 und I,28) sowie einigen Zusätzen erläutert, wobei Kästner sich zweier Methoden bedient, um den Schnitt zweier nicht parallelen Geraden zu zeigen: Erstens der Drehung einer Geraden um einen Punkt, die die andere Gerade so lange schneidet, bis sie parallel zu ihr ist, zweitens durch die parallele Verschiebung einer Geraden in Richtung der anderen		
Sturm	*Kurtzgefasste Mathesis*: PP wird nicht betrachtet; Hinweis auf die Beweise von I,27 bis I,29: Parallele Verschiebung der Geraden in Richtung ihrer Parallelen, um bei der Deckung der Geraden die Gleichheit der Winkel zu zeigen	*Mathesis Juvenilis*: PP wird nicht betrachtet; I,29 wird als Umkehrung von I,27 und I,28 dargestellt	
Wolff	*Anfangs=Gründe*: PP wird nicht betrachtet; I,29 wird über die Kongruenz von Dreiecken und die Übereinstimmung der Winkel bewiesen	*Auszug*: Wie in den *Anfangs=Gründen*	
Segner	*Anfangsgründe*: Äquivalente Formulierung zu Euklids PP (Stufen- statt Innenwinkel) ohne Beweis, mit dessen Hilfe I,29 bewiesen wird	*Vorlesungen*: PP wird nicht betrachtet; Beweis von I,29 mit Hilfe von I,27 und des Widerspruchs sowie der Eindeutigkeit von Parallelen	
Clemm	*Mathematisches Lehrbuch*: PP wird nicht betrachtet; I,29 wird als Umkehrung aus I,27 und I,28 hergeleitet durch die Regeln der „Conversion“	*Erste Gründe*: PP wird nicht betrachtet; Beweis von I,29 (der Teil mit den Wechselwinkeln) durch die Kongruenz der Dreiecke und die damit einhergehende Gleichheit der Winkel	
Karsten	*Lehrbegrif*: PP wird nicht streng bewiesen, aber mit Hilfe der Drehung einer Geraden um einen Punkt, die die andere Gerade so lange schneidet, bis sie parallel zu dieser ist, erläutert *Lehrbegriff*, 2. Aufl.: PP wird mit Hilfe eines Dreiecks erklärt, um zu zeigen, dass jede Linie, die nicht parallel zu einer der Dreieckseiten ist und stattdessen durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht, den gegenüberliegenden Schenkel schneidet	*Auszug*: Wie in der zweiten Auflage des *Lehrbegriffs*	*Anfangsgründe*: Wie in der zweiten Auflage des *Lehrbegriffs*
Klügel	*Anfangsgründe*: PP wird erwähnt, aber nicht bewiesen; kurz vorher bereits äquivalente Formulierung des PP (Stufen- statt Innenwinkel), wobei der Schnitt von zwei Geraden mit Hilfe der Verschiebung einer Geraden mit gleichbleibenden Winkel erklärt wird		

9 Personenverzeichnis

Das folgende Personenverzeichnis enthält die Namen einiger Personen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit genannt werden. Ein wichtiger Aspekt für die Auswahl der Personen war ihre mathematische Tätigkeit. Hierbei werden die Namen folgender Personen – in alphabetischer Reihenfolge – nicht aufgelistet, da sie der Hauptgegenstand dieser Arbeit sind: Heinrich Wilhelm Clemm, Abraham Gotthelf Kästner, Wenceslaus Johann Gustav Karsten, Georg Simon Klügel, Johann Andreas von Segner, Johann Christoph Sturm, Christian Wolff.

Alembert, Jean le Rond d‘ 112, 152, 298
Bartels, Johann Martin Christian.......63, 65
Bélidor, Bernard Forest de 115, 281
Bendavid, Lazarus..................................99
Bernoulli, Daniel 113, 308
Bernoulli, Johann 58, 112, 222, 299
Bernoulli, Johann III. 67
Bernoulli, Nicolaus.......................113, 308
Bézout, Étienne 5, 14
Bilfinger, Georg Bernhard............279, 281
Blondel, Nicolas-François......34, 270, 271, 275, 279, 281, 283
Böhm, Andreas.............115, 262, 266, 279
Bolyai, Farkas (Wolfgang)................63, 65
Bolyai, János (Johann) 222, 300
Bolzano, Bernard....43, 117, 118, 301, 302, 308, 309
Borelli, Giovanni Alfonso....................220
Brandes, Heinrich Wilhelm...............63, 65
Cardano, Girolamo...............................152
Clairaut, Alexis-Claude.113, 115, 118, 150
Clavius.....................56, 218, 220, 221, 300
Desargues, Girard.........................222, 226
Descartes, René 100, 153
Diadochus, Proklos...............................220
Erxleben, Johann Christian Polycarb 32, 62, 63, 64
Euklid ...56, 95, 99, 105, 218–22, 223, 226, 240, 241, 242, 243, 245, 249, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 260, 296, 300, 319
Euler, Leonhard......1, 9, 57, 58, 67, 68, 72, 106, 107, 112, 113, 115, 120, 160, 164, 279, 281, 308, 319
Fabri, Honoré 131
Fäsch, Johann Rudolph......................... 262
Faulhaber, Johannes............................. 279
Fibonacci... 152
Gauß, Carl Friedrich .. 43, 65, 66, 117, 153, 222, 300, 304, 311
Guldin, Paul 130
Harriot, Thomas................................... 152
Hausen, Christian August 20, 56, 57, 58, 62, 154, 223, 301
Heinsius, Gottfried................................. 57
Hentsch, Johann Jacob............................ 99
Hindenburg, Carl Friedrich.... 67, 228, 259, 312
Horch, Heinrich 31
Hübsch, Johann Georg Gotthelf 42
Jacobi, Gustav Jacob............................ 301
Kant, Immanuel ... 19, 73, 101, 159, 204–9, 211–13, 215, 295, 297, 319
Lalande, Joseph-Jérôme de..................... 72
Lambert, Johann Heinrich 67, 73, 222, 234
Langsdorf, Karl Christian von . 63, 65, 153, 155, 156, 209, 211
Lehmann, Johann Christian 56
Leibniz, Gottfried Wilhelm 9, 35, 100, 164, 227, 300, 303
Lichtenberg, Georg Christoph ... 62, 63, 64, 73, 74, 89, 117, 312
Ljungberg, Jöns Matthias..................... 116
Lobatschewski, Nikolai 65, 222, 300
Mackensen, Friedrich August....... 303, 311
Massenbach, Christian Karl August Ludwig von 42
Maupertuis, Pierre Louis Moreau de 60, 68, 72
Mayer, Johann Tobias................ 32, 63, 65

Mayer, Tobias....................................60, 63
Michelsen, Johann Andreas Christian....79, 114, 153–56, 209, 210, 216, 312
Müller, Gotthard Christoph...................262
Murhard, Friedrich Wilhelm August......22, 311
Newton, Isaac..................................59, 308
Nothnagel, Christoph 23, 33
Olbers, Heinrich Wilhelm 67, 311
Pagan, Blaise-François .269, 270, 271, 275, 281, 283
Pasch, Moritz..246
Pfaff, Johann Friedrich..63, 65, 73, 74, 227
Pisa, Leonardo von............Siehe Fibonacci
Platon..124
Rhodius, Ambrosius..........................23, 33
Rhodos, Geminos von 124, 130
Richter, Georg Friedrich 56, 57
Roomen, Adriaan van............................130
Saccheri, Girolamo................................105
Scheibel, Johann Ephraim.......................62
Schlüssel, Christoph............. Siehe Clavius
Schmidt, Georg Gottlieb 115, 117
Schott, Gaspar 24, 130, 134, 138
Schweikart, Ferdinand Carl...........221, 227
Segner, Johann Wilhelm von..... 31, 35, 41, 236
Snell, Friedrich Wilhelm Daniel........... 115
Spaun, Franz .. 153–56, 172, 208, 209, 211, 215–16
Specklin, Daniel.................................... 279
Stahl, Konrad Dietrich Martin 116
Stevin, Simon....................................... 152
Stifel, Michael.............................. 152, 153
Struensee, Karl August von ... 32, 262, 266, 279, 284, 287, 288–90, 291–94, 297
Struve, Jacob.. 42
Sturm, Leonhard Christoph 132, 279
Tetens, Johannes Nikolaus.................... 116
Thibaut, Bernhard Friedrich 63, 65
Thomasius, Christian 33, 34
Valentiner, Friedrich............................ 116
Vauban, Sébastien le Prestre de... 265, 269, 270, 271, 275, 277, 279, 281, 283, 287
Viète, François..................................... 152
Vieth, Gerhard Ulrich Anton 42
Wallis, John 97, 153, 225, 255, 303
Weigel, Erhard....................................... 99
Winckler, Johann Heinrich 55, 56, 57
Zimmermann, Eberhard August Wilhelm 66, 115