



BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FACHBEREICH C – MATHEMATIK UND
NATURWISSENSCHAFTEN –
FACHGRUPPE PHYSIK

**Bestimmung und Faktorisierung von
Korrelationsfunktionen der integrablen Spin-1
Heisenberg-Kette bei endlicher Temperatur**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften des Fachbereiches C
der Bergischen Universität Wuppertal
vorgelegt von

Dominic Nawrath

im Februar 2014

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20140528-144955-3

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20140528-144955-3>]

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Die XXZ-Kette	8
2.1. Die Yang-Baxter-Algebra	9
2.2. Die Yang-Baxter-Gleichung	9
2.3. Die fundamentale Darstellung der Yang-Baxter-Algebra	10
2.4. Die Quantentransfer-Matrix	12
2.5. Der algebraische Bethe-Ansatz	16
2.6. Korrelationen bei endlicher Temperatur	17
2.6.1. Quantentransfer-Matrix-Formalismus	17
2.6.2. Dichte-Matrix	17
2.6.3. Dynamische Korrelationsfunktionen	19
3. Fusion	20
3.1. Integrable Struktur	20
3.2. Bethe-Ansatz-Lösungen	23
3.2.1. „Crossing“-Symmetrie	28
3.3. Dichte-Matrizen	32
3.3.1. „Emptiness formation probability“	35
3.3.2. Dichte-Matrix mit Alpha-Parameter	35
3.4. Fusion höher-dimensionaler Spin-Darstellungen	37
3.4.1. Bethe-Ansatz-Lösungen	39
3.4.2. Dichte-Matrizen	42
4. Nichtlineare Integralgleichungen	43
4.1. Nichtlineare Integralgleichungen für die Spin-1 XXZ -Kette	43
4.1.1. Hilfsfunktionen	43
4.1.2. Herleitung der nichtlinearen Integralgleichungen	44
4.1.3. Integrationskonstanten	47
4.1.4. Eigenwerte	48
4.1.5. Freie Energie	49
4.1.6. Die Hilfsfunktionen f und \bar{f}	50
4.1.7. Der Nulltemperatur-Limes	50
4.1.8. Der XXX -Limes	51
4.2. Einschub zweier Spin-1/2-Linien	54
4.2.1. Modifizierte Spin-1-Eigenwerte	55
4.2.2. Modifizierte Spin- s -Eigenwerte	56
4.2.3. Nichtlineare Integralgleichungen modifizierter Transfer-Matrizen	57
4.2.4. Nichtlineare Integralgleichungen modifizierter Transfer-Matrizen höheren Spins	65
4.3. Einschub zweier Spin-1-Linien	71
4.3.1. Nichtlineare Integralgleichungen	71
5. Vielfach-Integraldarstellung von Dichte-Matrixelementen für $\gamma < \pi/4$	74
5.1. Fusionierte Wellenfunktionen	81
5.2. Weiten der Kontur	82
5.3. Lineare Integralgleichungen	84
5.3.1. „Emptiness formation probability“	86
5.4. Homogener Limes	86
5.5. Einpunkt-Korrelationsfunktionen	88
5.5.1. Der Nulltemperatur-Limes bei verschwindendem Magnetfeld	88

6. Der XXX-Dichte-Operator bei endlicher Temperatur	91
6.1. Diskrete Funktionalgleichungen	91
6.1.1. Diskrete Funktionalgleichungen der Dichte-Operatoren $D(\xi)$ bzw. $D^{[2]}(\xi)$	91
6.1.2. Diskrete Funktionalgleichungen des Dichte-Operators $D^{[1]}(\xi)$	93
6.2. Der XXX Ein- und Zweiplatz-Dichte-Operator	95
6.2.1. Bestimmung des Einplatz-Dichte-Operators	95
6.2.2. Bestimmung des Zweiplatz-Dichte-Operators	95
6.2.3. Lösung der Funktionalgleichung des Zweiplatz-Dichte-Operators	97
6.2.4. Integraldarstellungen der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen	107
6.2.5. Die Innere Energie	113
6.3. Äquivalenz der Zugänge 6.1.1 und 6.1.2	114
6.3.1. „Emptiness formation probability“	114
6.4. Der XXX Dreiplatz-Dichte-Operator	115
6.5. Der XXX m -Platz-Dichte-Operator	116
6.6. Der XXX m -Platz-Dichte-Operator beliebigen Spins	116
7. Der XXZ-Dichte-Operator bei endlicher Temperatur	118
7.1. Diskrete Funktionalgleichung für verschwindenden Alpha-Parameter	118
7.2. Diskrete Funktionalgleichung für endlichen Alpha-Parameter	119
8. Zusammenfassung und Ausblick	122
A. Eichtransformation	125
B. Hochtemperatur-Entwicklung	126
C. Zusammenhang zwischen der ω-Funktion und dem Eigenwert (4.3.6b)	127
D. Bemerkungen zur logarithmischen Ableitung des Eigenwertes (4.2.33a)	128
E. Die affine Quantengruppe $U_q(\widehat{sl}_2)$	132
E.1. Die Quantengruppe $U_q(sl_2)$	132
E.1.1. Endlich dimensionale Darstellung der Quantengruppe $U_q(sl_2)$	133
E.1.2. Tensorprodukte von Darstellungen	134
E.1.3. Spin-1-Projektionsoperatoren	135
E.2. Die affine Quantengruppe $U_q(\widehat{sl}_2)$	136
Literatur	138

Einleitung

Die theoretische Festkörperphysik beschäftigt sich im Allgemeinen mit der Beschreibung von dreidimensionalen Vielteilchensystemen, wie zum Beispiel auf einem Kristallgitter. Ihr Ziel ist das Verständnis der makroskopischen Eigenschaften solcher Systeme zurückgeführt auf die mikroskopischen Zusammenhänge. Auch wenn relativ kleine Systeme betrachtet werden, müssen dennoch eine große Anzahl miteinander wechselwirkender Konstituenten (z.B. Elektronen, Atome bzw. Atomrümpfe und Moleküle) berücksichtigt werden. Denn selbst für den Fall eines endlich-dimensionalen Einteilchen-Hilbertraumes wächst die Dimension des Hilbertraumes eines N -Teilchen-Problems exponentiell mit der Anzahl der Teilchen N , weshalb kleine Systeme schon eine enorme Komplexität aufweisen, sodass es meist nicht möglich ist, diese numerisch oder gar analytisch zu lösen. Um aber zum Beispiel thermodynamische Eigenschaften des Festkörpers zu bestimmen, ist die Kenntnis der Spur des statistischen Operators notwendig. Dazu muss aber das Spektrum des zugrunde liegenden Hamilton-Operators bestimmt werden.

Damit Aussagen über physikalische Eigenschaften von Vielteilchensystemen gegeben werden können, werden geeignet vereinfachte, quantenmechanische Modelle verwendet, welche bestimmte physikalisch interessante Eigenschaften approximieren. Zum Beispiel lässt sich eine Approximation eines Kristallgitters im Fall einer kurzreichweitigen Wechselwirkung der Konstituenten untereinander durch ein System mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung rechtfertigen. Des Weiteren beschränkt man sich oft auf zwei- oder eindimensionale Gittersysteme, die zum Beispiel in der Natur an Festkörperoberflächen oder in stark anisotropen Materialien realisiert sind. Da aber auf diese Weise motivierte, vereinfachte Modelle dennoch zu kompliziert sein können, werden diese so weit vereinfacht, dass diese meist auf effektive Einteilchen-Probleme, wie zum Beispiel auf das Bänder-Modell der Festkörperphysik [4], reduziert werden. Kompliziertere Modelle, welche von effektiven Einteilchen-Modellen ausgehen, können störungstheoretisch untersucht werden. Andere Möglichkeiten bestehen darin, Näherungsverfahren für die motivierten Modelle zu verwenden. Hierzu gibt es verschiedene etablierte Methoden. Eine ist zum Beispiel die Molekularfeldtheorie, in der über Nachbar-Wechselwirkungen gemittelt wird. Diese Methoden haben alle gemeinsam, dass langreichweitige Korrelationen zwischen den Teilchen vernachlässigt werden, weshalb diese Vorgehensweisen bei Auftreten von kollektiven Phänomene versagen. Solche Phänomene sind zum Beispiel die unkonventionelle Hochtemperatur-Supraleitung oder das Verhalten bei Phasenübergängen [3].

Es gibt aber Modelle, die eine exakte Lösung erlauben und somit z.B. das Studium von Phasenübergängen ermöglichen. Solche Modelle werden in der Theorie der kondensierten Materie als integrierbar bezeichnet. Ein Beispiel für ein solches Modell ist das Hubbard-Modell, welches von der Annahme ausgeht, dass die inneratomare effektive Coulomb-Wechselwirkung dominant ist und die Elektronen in engen Bänder in der Nähe der Ionenrümpfe lokalisiert sind. Eine Spezialisierung dieses Elektronenmodelles besteht im Falle einer starken repulsiven Wechselwirkung der Elektronen untereinander, sodass Doppelbesetzung an einem Gitterplatz ausgeschlossen wird. Sitzt nun auf jedem Gitterplatz genau ein Elektron, d.h. dass jedes Atom zum betrachteten Energieband genau ein Elektron beiträgt, ist ein Hüpfen der Elektronen zum benachbarten Gitterplatz nicht möglich. Das System stellt also bei Halbfüllung des Bandes einen Isolator dar. In zweiter Ordnung entarteter Störungstheorie ergibt sich das sogenannte Spin-1/2 Heisenberg-Modell mit Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j ,$$

wobei über alle nächsten Gitterplatz-Nachbarn $\langle i,j \rangle$ summiert wird. Die Konstanten J_{ij} bezeichnen die Spin-Austauschintegrale. Mit \vec{S}_i werden die Spin-1/2 Operatoren, welche am Gitterplatz i nichttrivial wirken, benannt [42]. Für den eindimensionalen, homogenen Fall, d.h. $J_{ij} \equiv J \forall \langle i,j \rangle$, war H. Bethe 1931 in der Lage, das komplette Spektrum der Spin-1/2-Quantenkette zu bestimmen. Mittels seiner Methode, die heutzutage als Koordinaten-Bethe-Ansatz bezeichnet wird, ist es ihm gelungen zu zeigen, dass sich jeder Eigenwert des Hamilton-Operators der Kettenlänge L durch $M \leq L/2$ komplexe Zahlen parametrisieren lässt. Diese Zahlen erfüllen ein nichtlineares Gleichungssystem, welches Bethe-Ansatz-Gleichungssystem genannt wird [13]. Daraufhin konnte 1938 L. Hulthén die Grundzustandsenergie des Spin-1/2-Heisenberg-Modelles im thermodynamischen Limes durch Lösung eines Systems von gekoppelten nichtlinearen In-

tegralgleichungen bestimmen [54]. Als Nächstes wurde der Bethe-Ansatz 1963 durch E. H. Lieb und W. Liniger beim Bose-Gas angewendet [82]. Weiterhin verallgemeinerte E. H. Lieb diesen und wendete ihn auf Spezialfälle des Sechs-Vertexmodelles an [79, 80, 81]. Dieses klassische Vertexmodell der statistischen Mechanik (ice-type-model) führte Pauling 1935 zur Bestimmung der Nullpunktsentropie von Eiswasser ein [92], welches Slater 1941 zur Beschreibung von Kaliumdihydrogenphosphat (KH_2PO_4) verwendete [95]. Kurz darauf, im Jahr 1967, fand B. Sutherland die allgemeine Lösung des Sechs-Vertexmodelles [98]. Einige Jahre später löste R. J. Baxter die vollständig anisotrope Spin-1/2 Heisenberg-Kette, auch XYZ-Kette genannt, indem er die Verwandtschaft des Modelles zum Acht-Vertexmodell erkannte [10]. M. Gaudin und C. N. Yang verallgemeinerten den Bethe-Ansatz zum sogenannten verschachtelten Bethe-Ansatz, und wendeten diesen auf Systeme mit inneren Freiheitsgraden an [44, 110]. B. Sutherland verallgemeinerte 1975 die Techniken des Bethe-Ansatz für Fälle, in denen die zugrunde liegende Symmetriegruppe höher als su_2 ist [99].

Die Fragestellung, wann genau ein Modell integrabel ist bzw. was genau Integrabilität bedeutet und unter welchen Kriterien exakte Lösbarkeit des betrachteten Modelles gegeben ist, führt zur Theorie exakt lösbarer Modelle.

Integrabilität

Während in der klassischen Mechanik die Integrabilität eines Vielteilchensystems über das Liouville-Theorem formuliert werden kann, gilt dies nicht analog für quantenmechanische Systeme. Jedoch lässt sich auch hier der Begriff Integrabilität im folgenden Sinn einführen: Aus heutiger Sicht bezeichnet man speziell eindimensionale, quantenmechanische Systeme als integrabel, sofern das Eigenwertspektrum des zugehörigen Hamilton-Operators durch den Bethe-Ansatz bestimmt und der Grundzustand des Systems angegeben werden kann [42]. Eine wichtige Erkenntnis, dass Integrabilität von quantenmechanischen Modellen (hinreichend) gegeben ist, sofern die Streumatrix des Vielteilchenproblems in Zweiteilchen-Streuprobleme unter einer Konsistenzbedingung faktorisiert, war erstmals für eindimensionale Modelle von C. N. Yang herausgefunden worden [110]. Baxter erkannte schließlich, dass die Stern-Dreiecks-Relation, mit der Onsager 1944 das zweidimensionale Ising-Modell löste [91], äquivalent zur Konsistenzbedingung ist, welche heutzutage Yang-Baxter-Gleichung (YBG) genannt wird [11].

Nachdem diese Zusammenhänge erkannt worden waren, konnte der Bethe-Ansatz algebraisiert werden: Betrachtet man nun ein integrables quantenmechanisches Modell, so lässt sich dieses im Allgemeinen mit der Trotter-Suzuki-Abbildung als zweidimensionales klassisches Vertexmodell auffassen, dessen Vertices lokale Boltzmann-Gewichte zugeordnet werden können. Diese hängen von einem Spektralparameter ab und können in der sogenannten \mathcal{R} -Matrix zusammengefasst werden, welche die YBG erfüllt. Über diese \mathcal{R} -Matrix lässt sich die Verbindung der YBG zur Yang-Baxter-Algebra (YBA) zeigen. Weiterhin lässt sich mit der \mathcal{R} -Matrix eine Darstellung der YBA, die sogenannte Monodromie-Matrix, welche sich als Verkettung von \mathcal{R} -Matrizen ergibt, einführen. Die Spur der Monodromie-Matrix wird als Transfer-Matrix definiert. Als Konsequenz folgt, dass der Hamilton-Operator sich durch die logarithmische Ableitung der Transfer-Matrix nach dem Spektralparameter darstellen lässt. Die so konstruierte Transfer-Matrix lässt sich mittels eines geeigneten Pseudovakuums und Kommutatorrelationen, welche aus der YBA folgen, diagonalisieren. Die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren der Transfer-Matrix lassen sich, parametrisiert durch die Bethe-Ansatz-Zahlen, angeben (siehe [75]). Beispiele von integrablen Modellen und Anwendungen der oben genannten Techniken finden sich unter anderem in den Lehrbüchern [35, 42, 75].

Thermodynamik

Da der absolute Nullpunkt der Temperatur aus theoretischen Gründen nicht experimentell zu erreichen ist, ist gerade das Verhalten bei endlicher, also bei nicht-verschwindender, Temperatur interessant. Zudem gehen eindimensionale Untersysteme bei zu niedrigen Temperaturen verloren.

Die erste Beschreibung der Thermodynamik eines integrablen Modelles gelang C. N. Yang und C. P. Yang für das Bose-Gas in einer Dimension mit Delta-Funktions-Wechselwirkung [111]. Die dort verwendete Methode, welche heute als thermodynamischer Bethe-Ansatz (TBA) bezeichnet wird, wurde 1971 von M. Gaudin und M. Takahashi auf die anisotrope Heisenberg-Kette angewendet [45, 105]. Hierbei ging die

Beobachtung ein, dass Bethe-Ansatz-Zahlen Strings in der komplexen Ebene bilden können. Somit lassen sich alle Anregungen, und damit alle Eigenwerte, durch diese String-Hypothese klassifizieren. Die Freie Energie, welche die globalen thermodynamischen Eigenschaften des physikalischen Systems beschreibt, lässt sich im thermodynamischen Limes durch im Allgemeinen unendlich viele, gekoppelte, nichtlineare Integralgleichungen beschreiben.

Eine alternative Beschreibung der Freien Energie wurde von A. Klümper eingeführt [69, 70]. Hierbei wird der statistische Operator eines eindimensionalen, quantenmechanischen Modelles auf ein klassisches, zweidimensionales Gitter mit Inhomogenitäten mittels der Trotter-Suzuki-Formel abgebildet [102, 103]. Dieses inhomogene Gitter lässt sich durch eine geeignete Transfer-Matrix, die sogenannte Quantentransfer-Matrix (QTM), beschreiben. Im thermodynamischen Limes, d.h. im Limes unendlicher Teilchenzahl aber konstantbleibender Teilchendichte des Systems, trägt unter bestimmten Annahmen, die beispielsweise für die XXZ -Kette erfüllt sind, nur der betragsmäßig größte Eigenwert der QTM bei. Mit geeigneten Hilfsfunktionen und unter der Annahme von Analytizitätseigenschaften des betragsmäßig größten Eigenwertes, konnte ein endlicher Satz von nichtlinearen Integralgleichungen der Hilfsfunktionen bestimmt werden, mit denen sich der Eigenwert und somit auch die Freie Energie angeben lässt [71, 72]. Die Äquivalenz beider Vorgehensweisen zur Bestimmung der Thermodynamik wurde von M. Takahashi, M. Shiroishi und A. Klümper 2001 gezeigt [107]. Obige Methoden konnten auf verschiedene Elektronenmodelle, aber auch auf Modelle höherer Spin-Darstellungen, wie zum Beispiel das Spin-1 XXX - und XXZ -Modell, welche sich auf das Neunzehn-Vertexmodell abbilden lassen [57, 112], angewendet werden.

Da die im Experiment gemessenen dynamischen Strukturfaktoren gerade Fourier-transformierten dynamischen Korrelationsfunktionen entsprechen [4], sind Korrelationsfunktionen von besonderem Interesse. Ein Anwendungsbeispiel ist die Untersuchung des magnetischen Verhaltens mittels Neutronenstreuung. Allerdings kann die Freie Energie höchstens über spezielle Nächste-Nachbar-Korrelatoren, wie zum Beispiel die Innere Energie, aber nicht über langreichweitigere (drei oder mehr Gitterplätze) lokale Eigenschaften des Modelles Aufschluss liefern.

Im Allgemeinen können jedoch selbst für integrable Modelle die Korrelationsfunktionen nicht explizit berechnet werden.

Für die Berechnung einer beliebigen statischen m -Platz-Korrelationsfunktion wird der m -Platz-Dichte-Operator benötigt. Erste Ergebnisse für Korrelationsfunktionen, welche nicht aus der Freien Energie folgen, berechnete 1977 M. Takahashi für das Hubbard-Modell. Dabei ging in seinen Formeln die Riemannsche Zeta-Funktion ein [106]. Es stellte sich die Frage, ob sein Ergebnis für große Abstände verallgemeinert werden könne.

Die neuere Entwicklung in der Mathematik sowie in der theoretischen Physik, die in Beziehung zu der konformen Feldtheorie [12] und zu Quantengruppen [41] steht, ist das Ergebnis beider Wissenschaftszweige im engen Zusammenspiel verschiedener Ideen. Der mathematische Hintergrund dieser Theorien liegt in der Darstellungstheorie von unendlich dimensional Lie-Algebren und Gruppen. Die physikalische Intuition ging von der zweidimensionalen Quantenfeldtheorie integrierbarer Modelle und Stringtheorie aus. So führten V. G. Drinfeld und M. Jimbo um 1985 die sogenannte Quantengruppe ein [40, 58]. Diese ist eine quantisierte, universelle Einhüllende einer halbeinfachen Lie- bzw. Kac-Moody-Algebra, mit der sich weitere (trigonometrische) Lösungen der YBG finden ließen. Die \mathcal{R} -Matrizen werden in der Darstellungstheorie der affinen Quantengruppen als „Intertwiner“ von Evaluationsabbildungen interpretiert [41, 43, 64]. Aus mathematischer Sicht ist die konforme Feldtheorie eine reguläre Darstellung geometrischer Klassen von Riemann-Flächen, komplex eindimensionale Mannigfaltigkeiten, oder eine reguläre Darstellung einer parameterabhängigen Lie-Algebra [43]. Dagegen ist die konforme Feldtheorie aus physikalischer Sicht in erster Linie die Theorie, welche das kritische Verhalten (zweidimensionaler) physikalischer Systeme charakterisiert [12]. Eines der fundamentalsten Beispiele der zweidimensionalen konformen Feldtheorie ist das sogenannte Wess-Zumino-Novikov-Witten-Modell (WZNW-Modell), welches auf der Darstellungstheorie von affinen Lie-Algebren oder Loop-Algebren basiert. Das WZNW-Modell ist ein Beispiel für ein nichtlineares Sigma-Modell mit klassischen Feldern, die Werte auf einer Mannigfaltigkeit annehmen. Im Fall des WZNW-Modelles ist diese Mannigfaltigkeit die Gruppen-Mannigfaltigkeit einer kompakten Lie-Gruppe [46].

Mit der fortschreitenden Entwicklung der konformen Feldtheorie konnten 1984 V. G. Knizhnik und A. B. Zamolodchikov eine lineare Differentialgleichung aufstellen, welche die m -Punkt-Korrelationsfunktionen der primären Felder der WZNW-Modelle beschreibt, wobei in der zweidimensionalen konformen Feldtheorie die Korrelationsfunktionen einen Satz von komplexen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung erfüllen. Ihre Gleichung wurde als Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung bekannt, welche aus einer zusätzlichen Symmetrie resultiert. Diese Symmetrie ergibt sich von WZNW-Modellen zu einer affinen Lie- oder Kac-Moody-Algebra. Mit der „Crossing“-Symmetrie der Vierpunkt-Funktionen und der Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung sind die Korrelationsfunktionen eindeutig bestimmt [12, 74]. 1987 führten A. Tsuchiya und Y. Kanie Vertex-Operatoren, die als „Intertwiner“ zwischen Höchstgewichts-Darstellungen definiert werden, in die konforme Feldtheorie ein [109]. 1992 leitete F. A. Smirnov Funktionalgleichungen vom Differenzentyp für zweidimensionale Quantenfeldtheorien her [97]. Kurz darauf formulierten I. B. Frenkel und N. Y. Reshetikhin das Analogon der Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung für affine Quantengruppen, welche für Darstellungen vom Level 0 den Gleichungen von F. A. Smirnov entsprechen¹ [43]. Diese Gleichung wird als q -deformierte Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung (q -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung) bezeichnet.

Daraufhin leiteten M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa und A. Nakayashiki eine Vielfach-Integraldarstellung der Matrixelemente des m -Platz-Dichte-Operators der Spin-1/2 XXZ -Kette im Grundzustand her. Die Methode basiert auf die Realisierung der Quanten affinen Symmetrie unter Verwendung von Vertex-Operatoren. Mittels einer bosonischen Darstellung dieser Vertex-Operatoren lässt sich eine Vielfach-Integraldarstellung für Korrelationsfunktionen beliebiger lokaler Operatoren finden. Diese Vertex-Operatoren enthalten Spektralparameter, die zu zusätzlichen Gleichungen, dabei auch zur sogenannten reduzierten q -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung (für $|q| = 1$), führen [60, 61, 62]. Diese Vielfach-Integrale wurden 2001 für $m = 4$ von H. E. Boos und V. E. Korepin für die isotrope Heisenberg-Kette berechnet, wobei die Korrelationsfunktionen sich durch Produkte von Riemannschen Zeta-Funktionen mit ungeraden Argumenten darstellen ließen. Weiterhin gelang es, die Vielfach-Integrale zu faktorisieren, das heißt, diese als Produkte einfacher Integrale auszudrücken [24]. Dieses Ergebnis wurde 3 Jahre später für beliebiges m verallgemeinert [27]. In [20] wurde eine Konstruktion für den m -Platz-Dichte-Operator der XXX -Kette im Grundzustand auf Basis der reduzierten Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung gefunden. Kurz darauf wurde dies für den XXZ -Fall verallgemeinert [21]. Eine unabhängige Herleitung einer Vielfach-Integraldarstellung der m -Platz-Korrelationsfunktionen der Spin-1/2 XXZ -Kette, basierend auf dem algebraischen Bethe-Ansatz, gelang 2000 N. Kitanine, J. M. Maillet und V. Terras [66]. Dabei wird die Identität benutzt, dass Skalarprodukte von Bethezustände durch Verhältnisse von Determinanten ausgedrückt werden können [96]. Des Weiteren lassen sich im thermodynamischen Limes für den Grundzustand die auftretenden Summen mittels Techniken der Funktionentheorie durch Produkte von Integralen ersetzen. Zudem wurde die Wirkung eines statischen, homogenen Magnetfeldes bezüglich der Symmetrieachse untersucht. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen, welche sich für verschwindendes Magnetfeldes über den Zugang der reduzierten q -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung ergeben, konnte explizit gezeigt werden [66]. F. Göhmann, A. Klümper und A. Seel erzielten die erste Integraldarstellung der Korrelationsfunktionen des XXZ -Modelles für endliche Temperatur [48] über den Quantentransfer-Matrix-Zugang. Darauf aufbauend wurden Vielfach-Integraldarstellungen für die Dichte-Matrixeinträge sowie für die Zweipunkt-Funktionen im Falle endlicher Temperatur bestimmt [47, 49]. Im darauf folgenden Jahr wurde erkannt, dass die Vielfach-Integrale in [49] faktorisieren, d.h. dass die Vielfach-Integrale sich in Produkte über wenige, einfache Integrale umschreiben lassen [17]. 2011 erreichten B. Aufgebauer und A. Klümper eine weitere Verallgemeinerung für die Konstruktion des m -Platz-Dichte-Operators der Spin-1/2 XXX - sowie der XXZ -Kette, wobei bewiesen wurde, dass die Konstruktion des „algebraischen Anteils“ aus [20] bzw. [21] übernommen werden kann und lediglich der „physikalische Teil“, welcher die analytischen Eigenschaften der Lösung der reduzierten q -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung bestimmt, angepasst werden muss. Im Falle endlicher Temperatur liegen diskrete reduzierte q -Knizhnik-Zamolodchikov-Funktionalgleichungen vor. Der „physikalische Anteil“ ist, wie auch in den Arbeiten [20, 21] beobachtet, durch eine Zweipunkt-Funktion für das

¹siehe Gleichung (6.40) in [43]

XXX -Modell und durch zwei Zweipunkt-Funktionen im Fall des XXZ -Modelles gegeben [5, 6]. Für das XXX -Modell wurde in [17] bereits eine Integraldarstellung für die Zweipunkt-Funktion hergeleitet. Eine alternative Herleitung für die Integralgleichung wurde in [5] dargelegt. Hierzu wurde mittels des Hellmann-Feynman-Theorems die Verbindung einer logarithmischen Ableitung eines Eigenwertes einer Quantentransfer-Matrix mit modifiziertem Quantenraum, in dem zwei zusätzliche parameterabhängige Spektrallinien eingefügt sind, zur Zweipunkt-Funktion ausgenutzt [5, 6]. Dieser Zusammenhang wurde bereits in [18] erkannt.

Die algebraische Struktur der statischen Korrelationsfunktionen wurde 2006 bis 2009 in einem sehr allgemeinen Zusammenhang von H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov und Y. Takeyama geklärt [19, 22, 23, 63]. B. Aufgebauer und A. Klümper gelang 2011 ein alternativer Beweis der Produktstruktur der inhomogenen Korrelationsfunktionen mittels einer diskreten Funktionalgleichung [5, 6].

Gleichermaßen wurden auch einige Ergebnisse zur Bestimmung der (statischen) Korrelationsfunktionen für integrable Modelle höherer Spin-Darstellungen, im speziellen für die XXZ - und XXX -Kette, gefunden.

So gelang M. Idzumi 1993 die Bestimmung einer Integraldarstellung für die Einpunkt-Korrelationsfunktionen der Spin-1 XXZ -Kette mittels der Vertexoperator-Methode für $T = 0$ [56]. A. H. Bougourzi und R. A. Weston konnten mit derselben Methode ein Jahr später eine Integralformel für m -Punkt-Korrelationsfunktionen beliebiger, lokaler Operatoren des antiferromagnetischen Spin-1 XXZ -Modells herleiten [30]. 2001 wurde für die Korrelationsfunktionen beliebigen Spins für das XXX -Modell eine Darstellung von N. Kitanine, ebenfalls für den $T = 0$ -Fall, hergeleitet. Weiterhin berechnete er explizit die Einpunkt-Korrelationsfunktionen und gab eine Vielfach-Integraldarstellung für die m -Punkt-Korrelationsfunktionen der Spin-1 XXX -Kette im thermodynamischen Limes an [65]. Hierbei wurde der algebraische Bethe-Ansatz verwendet, wobei die Transfer-Matrix über die Fusionsmethode von P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin und E. K. Sklyanin konstruiert wurde [77]. Mittels dieser Fusionsprozedur fanden T. Deguchi und C. Matsui 2010 eine Vielfach-Integraldarstellung für die Korrelationsfunktionen des XXX - und XXZ -Modelles höherer Spins, ebenfalls für den Grundzustand, und bestimmten die „emptiness formation probability“ für Temperatur $T = 0$. Hierbei wurde auch die Methodik des algebraischen Bethe-Ansatzes benutzt. Weiterhin berechneten Sie die Einplatz-Korrelatoren, welche im isotropen Limes die in [65] bereits angegebenen Werte der Einpunkt-Funktionen reproduzieren [37, 38]. F. Göhmann, A. Seel und J. Suzuki formulierten die erste Vielfach-Integraldarstellung für die Spin-1 XXX -Kette im homogenen Magnetfeld für endliche Temperatur im thermodynamischen Limes und berechneten die Einpunkt-Korrelationsfunktionen für verschwindende Magnetfelder im Fall nicht-verschwindender Temperatur. Die Ergebnisse wurden ebenfalls mittels des algebraischen Bethe-Ansatzes und der Fusionsprozedur erzielt [50]. Hierbei lag bei der Berechnung der Vielfach-Integraldarstellung die größte Schwierigkeit im analytischen Teil. Die Integralform wurde durch Ersetzen der Summen über die Bethe-Ansatz-Zahlen durch Integrale über geschlossene Konturen, welche die Bethe-Ansatz-Zahlen umschließen, erzielt. Für den Spin-1-Fall verteilen sich die Bethe-Ansatz-Zahlen für den dominierenden Eigenwert der Quantentransfer-Matrix in weit ausgedehnten Zweier-Strings in der komplexen Zahlenebene. Im thermodynamischen Limes gruppieren sich diese in der Nähe zu $(\mathbb{R} \pm i)$, weshalb Konturen, bestehend aus zwei separierten Schleifen, eingeführt wurden, um zusätzliche Terme zu vermeiden. Jedoch führen diese aufgespaltenen Konturen zu einer erheblich technisch komplexeren Struktur im Vergleich zum Spin-1/2-Fall (vgl. [47] mit Anhang C in [50]). Des Weiteren wurde erkannt, dass die gefundenen Vielfach-Intergaldarstellungen im Fall der Einpunkt-Korrelationsfunktionen faktorisieren. Daher stellt sich die Frage, ob auch beliebige m -Platz-Korrelationsfunktionen für höhere Spins faktorisieren.

Experimentelle Umsetzungen

Es lassen sich zahlreiche experimentelle Realisierungen dreidimensionaler Festkörper finden, welche Strukturen von quasi-eindimensionalen Untersystemen aufzeigen. Da die Wechselwirkungen zwischen den Ketten in solchen Materialien oft vernachlässigbar klein sind, bestimmen die Substrukturen das Verhalten des dreidimensionalen Körpers. Erstmals wurden spin-ketten-ähnliche Systeme in der experimentellen Fest-

körperphysik Anfang der 70er Jahren untersucht. Eins der klassischen Beispiele sind die frühen Neutronenstreuexperimente an Tetramethyl-Trichloro-Manganat (TMMC, $(CH_3)_4NMnCl_3$) [55]. Eine der ersten qualitativen Heisenberg-Ketten ist zum Beispiel 1978 von I. U. Heilmann et. al. $CuCl_2 \cdot 2N(C_5D_5)$ betrachtet worden [52]. Ein weiteres, neueres Beispiel für ein sehr gut realisiertes Spin-Kettensystem ist Kupfer-Pyrazin-Dinitrat ($CuPzN$).

In diesem System sind Kupferatome durch die benachbarten Nitratgruppen zweifach positiv ionisiert. Die zwischen den Kupferatomen liegenden Pyrazinringe vermitteln die Wechselwirkung der Spin-Momente. Dieses Material zählt zu einer der besten Realisierungen einer antiferromagnetischen Spin-1/2-Heisenberg-Kette und weist als Funktion eines äußeren Magnetfeldes einen Phasenübergang auf [31].

Auch Gittermodelle, welche durch höhere Spin-Modelle (z.B. $s = 1, 3/2, 2, 5/2$), unter anderem durch das antiferromagnetische Spin-1 Heisenberg-Modell, gut beschrieben werden können, wurden im Experiment schon umgesetzt [88, 94]. Neben sogenannten Haldane-Substanzen sind auch Spin-Ketten-Modelle, welche nicht nur durch bilineare Nächste-Nachbar-Kopplungsterme, sondern auch durch nicht zu vernachlässigende biquadratische Nächste-Nachbar-Kopplungsterme beschrieben werden, realisiert, wie zum Beispiel Lithium-Vanadium-Metagermanat, $LiVGe_2O_6$ [89].

Gliederung und Ziel der vorliegenden Arbeit

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit besteht darin, für die Spin-1 XXX -Kette die Einträge der Dichte-Matrix, in dem Sinne wie oben beschrieben, in faktorisierte Form, also in Abhängigkeit von einer Zweipunkt-Korrelationsfunktion, auszudrücken. Dies gelingt auf Basis der reduzierten Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichungen, mit denen sich für die Dichte-Matrix Funktionalgleichungen formulieren lassen.

Zunächst wird in Kapitel 2 eine Einführung in den Transfer- und Quantentransfer-Matrix-Formalismus gegeben. Hierbei wird neben der Erläuterung des algebraischen Bethe-Ansatzes anhand des Sech-Vertexmodelles der inhomogene Dichte-Operator für endliche Temperatur untersucht. Im dritten Kapitel wird die Konstruktion des zugehörigen Hamilton-Operators der Spin-1 XXZ -Kette mittels der Techniken der Fusionsprozedur gezeigt. Neben der Diskussion der Eigenschaften der entsprechenden \mathcal{R} -Matrizen werden Ausdrücke für die betragsmäßig größten Eigenwerte der Quantentransfer-Matrizen hergeleitet. Diese können durch einen Satz von Hilfsfunktionen, die ein nichtlineares Gleichungssystem erfüllen, dargestellt werden. Weiterhin werden fusionierte, inhomogene Dichte-Operatoren eingeführt. Die Dichte-Operatoren werden für die Bestimmung von Erwartungswerten von statischen Korrelationsfunktionen, die auf einem endlichen Kettensegment nichttrivial wirken, benötigt. Im darauf folgenden Kapitel 4 werden nichtlineare Integralausdrücke für die Hilfsfunktionen hergeleitet. Weiterhin werden durch im Quantenraum zusätzlich eingeführte Spektrallinien modifizierte Transfer-Matrizen definiert sowie die entsprechenden Integralgleichungen der modifizierten Hilfsfunktionen hergeleitet. Die modifizierten Eigenwerte hängen mit der zu konstruierenden Zweipunkt-Korrelationsfunktion zusammen. Diese Verbindung wird in Kapitel 6 aufgegriffen. In Kapitel 5 wird die in [50] gefundene Vielfach-Integraldarstellung für Matricelemente des m -Platz-Dichte-Operators der XXX -Kette für das XXZ -Modell für Anisotropien $\gamma \in (0, \pi/4)$ verallgemeinert. Es werden Einpunkt-Korrelationsfunktionen im Nulltemperatur-Limes berechnet. Da die Auswertung dieser Vielfach-Integraldarstellung selbst für Nächste-Nachbar-Korrelationsfunktionen einen erheblichen Aufwand zeigt, werden in Kapitel 6 auf Basis der reduzierten Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichungen zwei alternative Zugänge vorgestellt. Einerseits können Funktionalgleichungen für das Spin-1-System analog zum isotropen Spin-1/2-Modell, siehe [5], (direkt) konstruiert werden. Andererseits lassen sich durch eine Regularisierung eines Hilfssystems, mit welchem sich durch Fusion der Spin-1-Dichte-Operator berechnen lässt, Funktionalgleichungen formulieren, die dem Spin-1/2-Modell in [5] entsprechen. Das heißt, dass die bereits bekannte Faktorisierung der Spin-1/2-Kette für das Hilfssystem für verschwindenden Regularisierungsparameter erhalten bleibt. Es ist nun lediglich die richtige Zweipunkt-Korrelationsfunktion, welche das System charakterisiert („physikalischer Anteil“), zu bestimmen. Dies wird mit dem ersten Zugang bewerkstelligt, wobei grundlegende Ergebnisse von [5] verwendet werden. Da im Allgemeinen die Bestimmung von Korrelationsfunktionen, also von Erwartungswerten von (kurzreichweitigen) Operatoren, sehr schwierig

ist, möchte man lieber das Problem auf Eigenwertgleichungen von Transfer-Matrizen zurück führen, da diese sich durch Integralgleichungen relativ bequem darstellen lassen. Wie auch in [5, 6] und [18] ist hierfür das Hellmann-Feynman-Theorem ein nützliches Werkzeug. Mit diesem Theorem wird für die Zweipunkt-Korrelationsfunktion ein Integralausdruck hergeleitet, welcher durch die in Kapitel 4 eingeführten modifizierten Hilfsfunktionen und Eigenwerte beschrieben wird. Mit diesem Integralausdruck werden die Literaturwerte der Inneren Energie pro Gitterplatz im Nulltemperatur-Limes sowie im Hochtemperatur-Limes reproduziert. In Kapitel 7 werden die diskreten Funktionalgleichungen für die Dichte-Matrix des Spin-1/2 und Spin-1 XXZ -Modelles erläutert, wobei der Zugang im Vergleich zu Kapitel 6 anschaulich durch Einfügen eines „linksseitigen Magnetfeldes“, welches durch den sogenannten Alpha-Parameter beschrieben wird, nach [15, 18] abgeändert wird. M. Jimbo, T. Miwa und F. Smirnow wiesen auf einen rein algebraischen Ansatz für das Problem zur Berechnung von statischen Korrelationsfunktionen des XXZ -Modelles für nicht-verschwindendes Magnetfeld und endliche Temperatur hin: Mittels der in [19, 23] konstruierten fermionischen Basis konnte ein lineares Funktional bestimmt werden, welches mit der Zustandssumme zusammenhängt. Sie bewiesen die Faktorisierung der Korrelationsfunktionen dieser mit dem Unordnungsparameter verallgemeinerten XXZ -Kette. Es wurde gezeigt, dass die Korrelationsfunktionen durch eine Einpunkt- und eine Zweipunkt-Funktion beschrieben werden können [63]. In [15] wurden für diese „physikalischen Funktionen“ Integralausdrücke hergeleitet, die die Ausführung des Trotter-Limes erlauben. Die Ergebnisse von [15] zur Beschreibung der „physikalischen Funktionen“ der Spin-1/2-Kette werden zusammenfassend dargestellt. In Kapitel 8 werden die wichtigsten Ergebnisse sowie weitere Fragestellungen und Ausblicke kommentiert.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit wurden in [68] publiziert.

Die XXZ -Kette

In der hier vorgelegten Arbeit werden eindimensionale, quantenmechanische Modelle mit Nächste-Nachbar-Wechselwirkung, insbesondere das Heisenberg-Modell (XXX -Kette) sowie dessen anisotrope Verallgemeinerung, das sogenannte XXZ -Modell, mit periodischen Randbedingungen betrachtet. Die Spin-1/2 XXZ -Kette mit einer Kettenlänge L ist durch den Hamilton-Operator

$$H_{XXZ}^{[\frac{1}{2}]} := J \sum_{n=1}^L \left\{ S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y + \Delta \left(S_n^z S_{n+1}^z - \frac{1}{4} \mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_{n+1} \right) \right\} \quad (2.0.1)$$

im antiferromagnetischen Regime, $J > 0$, gegeben, wobei die Operatoren S_n^α , $\alpha = x, y, z$, die gewöhnlichen Spin-1/2-Operatoren der su_2 sind und nur nichttrivial auf den n -ten Gitterplatz wirken. Der Operator $\mathbb{1}_n$ entspricht dem Identitätsoperator bzgl. des n -ten Raumes. Der zugrunde liegende Quantenraum ergibt sich aus dem Tensorprodukt der lokalen Vektorräume der Plätze $1, 2, \dots, L$. Für eine Kette, die nur aus Spin-1/2-Teilchen besteht, ist der Quantenraum zu $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ isomorph. Der Anisotropieparameter ist durch $\Delta := \cosh(\eta)$ mit $\eta = i\gamma$ definiert. Es wird dabei zwischen dem kritischen ($-1 < \Delta < 1$) und massiven Bereich ($\Delta > 1$) unterschieden. Im weiteren Verlauf wird nur der kritische Bereich, d.h. $\gamma \in \mathbb{R}$, betrachtet. Unter periodischen Randbedingungen ist $S_{L+1}^\alpha = S_1^\alpha$ für $\alpha = x, y, z$ zu verstehen. Dieses quantenmechanische Modell lässt sich auf ein zweidimensionales, klassisches Vertexmodell, das Sechs-Vertexmodell, abbilden. Den Vertizes werden lokale spektralparameterabhängige Boltzmann-Gewichte zugeordnet, mit denen sich die sogenannte \mathcal{R} -Matrix formulieren lässt [11]. Dies gilt nicht nur für die Spin-1/2-Kette (2.0.1), sondern auch für höher-dimensionale Spin-Darstellungen, welche sich mittels der Fusionsprozedur konstruieren lassen [77]. Zum Beispiel korrespondiert die Spin-1 XXZ -Kette mit dem Hamilton-Operator

$$H_{XXZ}^{[1]} = J \sum_{n=1}^L \left\{ \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} - \left(\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} \right)^2 + 2 \sinh^2(\eta) \left(S_n^z S_{n+1}^z + (S_n^z)^2 + (S_{n+1}^z)^2 - (S_n^z S_{n+1}^z)^2 \right) - 4 \sinh^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) \left[(S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y) S_n^z S_{n+1}^z + S_n^z S_{n+1}^z (S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y) \right] + 2(1 - \cosh(2\eta)) \mathbb{1}_n \mathbb{1}_{n+1} \right\}, \quad (2.0.2)$$

welcher auf dem Raum $(\mathbb{C}^3)^{\otimes L}$ operiert, mit dem Neunzehn-Vertexmodell. Dieses Modell ist das sogenannte Fateev-Zamolodchikov-Modell [86, 112]. Die Operatoren $S^{x,y,z}$ sind die gewöhnlichen Spin-1-Generatoren der su_2 ,

$$S^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der allgemeine Zusammenhang einer integrablen Quantenspin-Kette für beliebige Spin-Darstellungen zum Spin s und der zugehörigen Vertexmodelle wird in diesem Kapitel dargelegt.

Die Konstruktion des Spin-1-Modells (2.0.2) wird in Kapitel 3, „Fusion“, erläutert. Die zugehörigen isotropen Modelle ergeben sich im Limes $\Delta \rightarrow 1$ bzw. $\eta \rightarrow 0$. Deren Hamilton-Operatoren sind durch

$$H_{XXX}^{[\frac{1}{2}]} = J \sum_{n=1}^L \left\{ \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} - \frac{1}{4} \mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_{n+1} \right\}, \quad (2.0.3a)$$

$$H_{XXX}^{[1]} = J \sum_{n=1}^L \left\{ \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} - \left(\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} \right)^2 \right\} \quad (2.0.3b)$$

gegeben, wobei der Hamilton-Operator $H_{XXX}^{[1]}$ das sogenannte Takhtajan-Babujian-Modell beschreibt [7, 108].

Statt $H_{XXZ}^{[1]}$ und $H_{XXX}^{[1]}$ wird von nun an H_{XXZ} bzw. H_{XXX} geschrieben.

2.1. Die Yang-Baxter-Algebra

Die Yang-Baxter-Algebra (YBA) $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ ist eine assoziative quadratische Algebra und wird bezüglich ihrer Generatoren $\mathcal{T}_{\beta}^{\alpha}(\lambda)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, d$, $\lambda \in \mathbb{C}$, durch die Relation

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) \mathcal{T}_1(\lambda) \mathcal{T}_2(\mu) = \mathcal{T}_2(\mu) \mathcal{T}_1(\lambda) \mathcal{R}(\lambda, \mu) \quad (2.1.1)$$

definiert. Hierbei werden die Notationen

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \otimes \mathbb{1}_d, \mathcal{T}_{1\alpha\beta}^{\gamma\delta}(\lambda) = \mathcal{T}_{\alpha}^{\gamma}(\lambda) \delta_{\beta}^{\delta}, \mathcal{T}_2 = \mathbb{1}_d \otimes \mathcal{T}, \mathcal{T}_{2\alpha\beta}^{\gamma\delta}(\lambda) = \mathcal{T}_{\beta}^{\delta}(\lambda) \delta_{\alpha}^{\gamma}$$

und

$$\mathcal{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1^1(\lambda) & \cdots & \mathcal{T}_1^d(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{T}_d^1(\lambda) & \cdots & \mathcal{T}_d^d(\lambda) \end{pmatrix}$$

verwendet, wobei $\mathbb{1}_d$ die d -dimensionale Einheitsmatrix ist. Die Parameter λ und μ heißen Spektralparameter, welche auch komplexe Werte annehmen können. Die sogenannte \mathcal{R} -Matrix $\mathcal{R}(\lambda, \mu) \in \mathfrak{End}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ ist eine numerische $(d^2 \times d^2)$ -Matrix, welche für fast alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ invertierbar sein soll. $\mathcal{T}(\lambda)$ wird als Monodromie-Matrix bezeichnet, deren Spur die Transfer-Matrix definiert,

$$t(\lambda) := \text{Spur}_j \{ \mathcal{T}_j(\lambda) \} = \mathcal{T}_{\gamma}^{\gamma}(\lambda). \quad (2.1.2)$$

Multiplizieren der Gleichung (2.1.1) mit $\mathcal{R}(\lambda, \mu)^{-1}$ von rechts und anschließende Spurbildung führt zu

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0. \quad (2.1.3)$$

Die Räume \mathbb{C}^d werden als Hilfsräume bezeichnet, während der Darstellungsraum der Yang-Baxter-Algebra gewöhnlich der Quantenraum ist. Die Dimension der Hilfsräume d ist von der gewählten Spin-Darstellung $s \in \{1/2, 1, 3/2, \dots\}$ des Modells abhängig. Allgemein gilt $d = 2s + 1$. Mit der Kommutatorrelation (2.1.3) ist $t(\lambda)$ eine Familie kommutierender Matrizen, was bedeutet, dass die Transfer-Matrix $t(\lambda)$ eine erzeugende Funktion von kommutierenden Unteralgebren von $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ ist. Wenn zum Beispiel die Transfer-Matrix in der Form

$$t(\lambda) = I_0 + \lambda I_1 + \lambda^2 I_2 + \dots$$

ausgedrückt werden kann, dann gilt $[I_j, I_k] = 0 \forall j, k$. Das bedeutet, dass jede Transfer-Matrix (bzgl. ihres Spektralparameters) unendlich viele Erhaltungsgrößen generiert. Solche Modelle werden integrabel genannt [42]. Mit

$$\check{\mathcal{R}}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) = \mathcal{R}_{\gamma\delta}^{\beta\alpha}(\lambda, \mu) \quad (2.1.4)$$

lässt sich (2.1.1) umschreiben zu

$$\check{\mathcal{R}}(\lambda, \mu) (\mathcal{T}(\lambda) \otimes \mathcal{T}(\mu)) = (\mathcal{T}(\mu) \otimes \mathcal{T}(\lambda)) \check{\mathcal{R}}(\lambda, \mu). \quad (2.1.5)$$

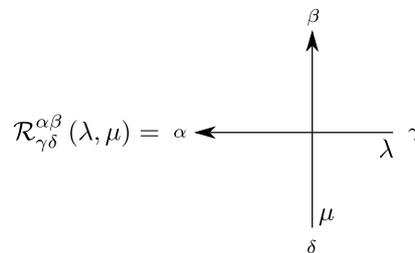


Abbildung 2.1.: Grafische Darstellung der \mathcal{R} -Matrix.

2.2. Die Yang-Baxter-Gleichung

Die Yang-Baxter-Algebra $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ lässt sich wie folgt in den Tensorproduktraum $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ einbetten:

$$\mathcal{T}_1(\lambda) = \mathcal{T}(\lambda) \otimes \mathbb{1}_d \otimes \mathbb{1}_d, \quad \mathcal{T}_2(\lambda) = \mathbb{1}_d \otimes \mathcal{T}(\lambda) \otimes \mathbb{1}_d, \quad \mathcal{T}_3(\lambda) = \mathbb{1}_d \otimes \mathbb{1}_d \otimes \mathcal{T}(\lambda). \quad (2.2.1)$$

Die drei möglichen kanonischen Einbettungen der \mathcal{R} -Matrizen lassen sich durch

$$\mathcal{R}_{12}(\lambda, \mu) = \mathcal{R}(\lambda, \mu) \otimes \mathbb{1}_d, \quad \mathcal{R}_{23}(\lambda, \mu) = \mathbb{1}_d \otimes \mathcal{R}(\lambda, \mu), \quad (2.2.2a)$$

beziehungsweise

$$\mathcal{R}_{13}^{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{R}_{\delta\varphi}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) \delta_\epsilon^\beta \quad (2.2.2b)$$

ausdrücken. Der Index der Einheitsmatrix, welcher die Dimension signalisiert, wird von nun an weggelassen. Mittels der Yang-Baxter-Algebra und obiger Einbettungen der \mathcal{R} -Matrizen ergibt sich schließlich folgende Bedingung, die sogenannte Yang-Baxter-Gleichung (YBG), für die \mathcal{R} -Matrix:

$$\mathcal{R}_{12}(\lambda, \mu) \mathcal{R}_{13}(\lambda, \nu) \mathcal{R}_{23}(\mu, \nu) = \mathcal{R}_{23}(\mu, \nu) \mathcal{R}_{13}(\lambda, \nu) \mathcal{R}_{12}(\lambda, \mu). \quad (2.2.3)$$

In Komponentenschreibweise lautet die Yang-Baxter-Gleichung (2.2.3)

$$\mathcal{R}_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}(\lambda, \mu) \mathcal{R}_{\alpha''\gamma''}^{\alpha'\gamma}(\lambda, \nu) \mathcal{R}_{\beta''\gamma''}^{\beta'\gamma'}(\mu, \nu) = \mathcal{R}_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}(\mu, \nu) \mathcal{R}_{\alpha'\gamma''}^{\alpha\gamma'}(\lambda, \nu) \mathcal{R}_{\alpha''\beta''}^{\alpha'\beta'}(\lambda, \mu). \quad (2.2.4)$$

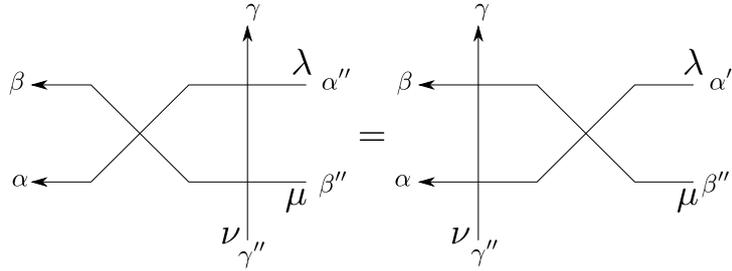


Abbildung 2.2.: Grafische Darstellung der Yang-Baxter-Gleichung.

Erfüllt die \mathcal{R} -Matrix diese Relation, so ist die Yang-Baxter-Algebra (2.1.1) nicht nur assoziativ, sondern besitzt auch nichttriviale Darstellungen. Demnach liefert die Yang-Baxter-Gleichung (2.2.3) eine hinreichende Integrabilitätsbedingung [42, 51]. Oft werden Vertexmodelle, die die Yang-Baxter-Gleichung erfüllen, als integrable Modelle definiert [34, 51]. Es gibt aber auch exakt lösbare Modelle, deren Integrabilität unabhängig von der Yang-Baxter-Gleichung bewiesen wurde. Beispielsweise wurde in [1] die Integrabilität des Sechzehn-Vertexmodells über die sogenannte „pair propagation“-Gleichung gezeigt.

Viele Lösungen der YBG (2.2.3), die Anwendung in der Physik finden, hängen nur von der Differenz der Spektralparameter ab. In diesem Fall existiert eine Matrix $\mathcal{R}(\lambda)$ mit nur einem Argument, sodass $\mathcal{R}(\lambda, \mu) = \mathcal{R}(\lambda - \mu)$ die YBG (2.2.3) löst. Die YBG (2.2.3) erhält dann folgende Form;

$$\mathcal{R}_{12}(\lambda - \mu) \mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{23}(\mu) = \mathcal{R}_{23}(\mu) \mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{12}(\lambda - \mu), \quad (2.2.5)$$

wobei die Substitution $\lambda \rightarrow \lambda + \nu$ und $\mu \rightarrow \mu + \nu$ verwendet wurde [42].

2.3. Die fundamentale Darstellung der Yang-Baxter-Algebra

Für den Raum der Endomorphismen auf \mathbb{C}^d , $\mathfrak{E}nd(\mathbb{C}^d)$, wird als Standardbasis die Menge

$$\{e_\alpha^\beta \mid \alpha, \beta = 1, \dots, d\} \quad (2.3.1)$$

gewählt. Dabei ist e_α^β eine $(d \times d)$ -Matrix mit einem einzigen nicht-verschwindenden Eintrag 1 in der Zeile α und Spalte β . Mit e_α soll ein Spaltenvektor mit einem nicht-verschwindenden Eintrag 1 in Zeile α definiert sein. Dann gelten die Multiplikationsregeln

$$e_\alpha^\beta e_\gamma = \delta_\gamma^\beta e_\alpha, \quad e_\alpha^\beta e_\gamma^\delta = \delta_\gamma^\beta e_\alpha^\delta.$$

Im Folgenden wird eine Spin-Kette der Länge L betrachtet, wobei die Hilfsräume alle isomorph zu \mathbb{C}^d sind. Dann ist der gesamte Quantenraum durch das L -fache Tensorprodukt der Hilfsräume $(\mathbb{C}^d)^{\otimes L}$ gegeben. Um Operatoren auf diesem Spin-Kettenraum zu definieren, wird zunächst die kanonische Einbettung der

Standardbasis (2.3.1) in den Raum $(\mathbb{C}^d)^{\otimes L}$ vorgenommen,

$$e_{j\alpha}^\beta := \mathbb{1}^{\otimes(j-1)} \otimes e_\alpha^\beta \otimes \mathbb{1}^{\otimes(L-j)}, \quad j = 1, \dots, L. \quad (2.3.2)$$

Mit obiger Definition gilt die lokale Multiplikationsregel

$$e_{j\alpha}^\beta e_{j\gamma}^\delta = \delta_\gamma^\beta e_{j\alpha}^\delta, \quad (2.3.3)$$

und Kommutatorrelation

$$[e_{j\alpha}^\beta, e_{k\gamma}^\delta] = 0 \text{ für } j \neq k. \quad (2.3.4)$$

Mit den oben definierten Operatoren $e_{j\alpha}^\beta$ können die eingebetteten \mathcal{R} -Matrizen in der YBG (2.2.5) ausgedrückt werden durch

$$\mathcal{R}_{jk}(\lambda, \mu) = \mathcal{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} e_{j\alpha}^\beta e_{k\gamma}^\delta. \quad (2.3.5)$$

Die \mathcal{L} -Matrix wird durch

$$\mathcal{L}_{j\beta}^\alpha(\lambda, \mu) = \mathcal{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) e_{j\gamma}^\delta \quad (2.3.6)$$

eingeführt. Multiplizieren der YBG (2.2.4) mit $e_{j\gamma}^{\gamma'}$ ergibt

$$\check{\mathcal{R}}(\lambda, \mu) [\mathcal{L}_j(\lambda, \nu) \otimes \mathcal{L}_j(\mu, \nu)] = [\mathcal{L}_j(\mu, \nu) \otimes \mathcal{L}_j(\lambda, \nu)] \check{\mathcal{R}}(\lambda, \mu). \quad (2.3.7)$$

Die Matrizen $\mathcal{L}_j(\lambda, \nu)$ sind demnach eine Darstellung der Yang-Baxter-Algebra (2.1.5). Diese Darstellung wird auch als fundamentale Darstellung bezeichnet. Wegen der Kommutatorrelation (2.3.4) kommutieren die \mathcal{L} -Matrizen ebenfalls an verschiedenen Plätzen. Dies impliziert, dass auch das Produkt zweier \mathcal{L} -Matrizen eine Darstellung der Yang-Baxter-Algebra ist. Diese Darstellung kann als Tensorprodukt-Darstellung zweier fundamentaler Darstellungen interpretiert werden. Diese Eigenschaft der Yang-Baxter-Algebra, dass das Tensorprodukt zweier Darstellungen eine Darstellung ist, heißt Komultiplikation. Iterieren der Komultiplikation zeigt, dass auch das L -fache geordnete Produkt der \mathcal{L} -Matrizen,

$$\mathcal{T}(\lambda | \{\nu_j\}_{j=1}^L) = \prod_{j=1}^L \mathcal{L}_j(\lambda, \nu_j) = \mathcal{L}_L(\lambda, \nu_L) \cdots \mathcal{L}_1(\lambda, \nu_1), \quad (2.3.8)$$

welches kurz mit $\mathcal{T}(\lambda)$ bezeichnet wird, eine Darstellung der Yang-Baxter-Algebra ist. Die Parameter ν_j werden Inhomogenitäten genannt. Spurbilden ergibt die Transfer-Matrix

$$t(\lambda) = \mathcal{T}_\gamma^\gamma(\lambda) = \mathcal{L}_{L\beta_{L-1}}^\gamma(\lambda, \nu_L) \mathcal{L}_{L\beta_{L-2}}^{\beta_{L-1}}(\lambda, \nu_{L-1}) \cdots \mathcal{L}_{2\beta_1}^{\beta_2}(\lambda, \nu_2) \mathcal{L}_{1\beta_1}^{\beta_1}(\lambda, \nu_1). \quad (2.3.9)$$

Durch die \mathcal{R} -Matrizen ausgedrückt, wird die Monodromie-Matrix durch

$$\mathcal{T}_a(\lambda) = \mathcal{R}_{aL}(\lambda, \nu_0) \cdots \mathcal{R}_{a1}(\lambda, \nu_0) \quad (2.3.10)$$

definiert, wobei der Raum a der Hilfsraum ist. Dann ist die Transfer-Matrix $t(\lambda)$ nach (2.3.9) durch

$$t(\lambda) = \text{Spur}_a \{ \mathcal{T}_a(\lambda) \} \quad (2.3.11)$$

gegeben.

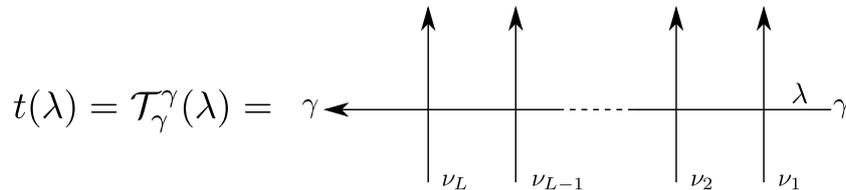


Abbildung 2.3.: Grafische Darstellung der Transfer-Matrix $t(\lambda)$.

Für periodisch geschlossene Enden soll die grafische Notation in Abbildung 2.4 gelten.



Abbildung 2.4.: Grafische Darstellung für periodisch geschlossene Linien.

Eine Lösung $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$ der YBG (2.2.5) heißt regulär, falls es Werte λ_0, ν_0 für die Spektralparameter existieren, so dass

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(\lambda_0, \nu_0) = \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta$$

gilt. Für den \mathcal{L} -Operator folgt

$$\mathcal{L}_j^\beta(\lambda_0, \nu_0) = e_{j\beta}^\alpha,$$

und für die Transfer-Matrix für den homogenen Fall $\nu_j = \nu_0$ für $j = 1, \dots, L$ ($\gamma \equiv \beta_L$)

$$t(\lambda_0) = e_{L\beta_{L-1}}^{\beta_L} e_{L-1\beta_{L-2}}^{\beta_{L-1}} \cdots e_{2\beta_1}^{\beta_2} e_{1\beta_L}^{\beta_1} = e_{1\beta_L}^{\beta_1} e_{2\beta_1}^{\beta_2} \cdots e_{L-1\beta_{L-2}}^{\beta_{L-1}} e_{L\beta_{L-1}}^{\beta_L}.$$

Mit der Einführung des Permutationsoperators¹,

$$P_{jk} := e_{j\beta}^\alpha e_{k\alpha}^\beta, \quad (2.3.12)$$

ist

$$t(\lambda_0) = P_{12} P_{23} \cdots P_{L-1L} =: \hat{U}$$

der Rechtsschiebeoperator. Die Entwicklung der Transfer-Matrix $t(\lambda)$ um den Punkt $\lambda = \lambda_0$ lautet somit

$$t(\lambda) = \hat{U} \exp \left[(\lambda - \lambda_0) H_L + \mathcal{O}(\lambda - \lambda_0)^2 \right]. \quad (2.3.13)$$

Der Hamilton-Operator H_L der Spin-Kette mit Länge L wird durch

$$H_L := \hat{U}^{-1} t'(\lambda_0) \quad (2.3.14)$$

definiert, wobei $t'(\lambda_0)$ die Ableitung der Transfer-Matrix nach dem Argument an der Stelle λ_0 bezeichnet. Wird

$$H_L = \sum_{i=1}^L H_{i,i+1} \quad (2.3.15)$$

gesetzt, wobei periodische Randbedingungen, also

$$H_{L,L+1} = H_{L,1}, \quad (2.3.16)$$

gelten sollen, folgt durch Auswerten der linken Seite

$$H_{i,i+1} = \partial_\lambda \check{\mathcal{R}}_{i,i+1}(\lambda, \nu_0) \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \partial_\lambda \check{\mathcal{R}}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\lambda, \nu_0) \Big|_{\lambda=\lambda_0} e_{i\alpha}^\gamma e_{i+1\beta}^\delta. \quad (2.3.17)$$

Die Operatoren $H_{i,i+1}$ werden als lokale Hamilton-Operatoren, die die Nächste-Nachbar-Wechselwirkung ausdrücken, interpretiert. Wegen (2.3.14) lässt sich das Spektrum des Hamilton-Operators durch alle Eigenwerte der Transfer-Matrix bestimmen [42]. Für die Spin-1/2- bzw. Spin-1-Modelle, (2.0.1)-(2.0.3), gilt der Zusammenhang

$$\begin{aligned} 2H_{XXZ}^{[\frac{1}{2}]} &= J \sinh(\eta) H_L, & H_{XXZ}^{[1]} &:= H_{XXZ} = J \sinh(2\eta) H_L, \\ H_{XX}^{[\frac{1}{2}]} &= iJ H_L, & H_{XX}^{[1]} &:= H_{XXX} = 4iJ H_L. \end{aligned}$$

2.4. Die Quantentransfer-Matrix

In diesem Abschnitt soll die Thermodynamik eines Systems, dessen zugehörige \mathcal{R} -Matrizen die Yang-Baxter-Gleichung (2.2.5) erfüllen, betrachtet werden. Dies erfolgt über die sogenannte Quantentransfer-Matrix (QTM), mit der sich die Zustandssumme und somit auch die Freie Energie berechnen lässt. Dazu werden zunächst um 90° im Uhrzeigersinn, beziehungsweise gegen den Uhrzeigersinn gedrehte \mathcal{R} -

¹Anders geschrieben, ist der Permutationsoperator (2.3.12) im Sinn $P(x_1 \otimes x_2) = x_2 \otimes x_1 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{C}^d$, $P \equiv P^{(s)} \in \text{End}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$, mit $d = 2s + 1$ zu verstehen. Mit P_{jk} wird die Einbettung im Raum $(\mathbb{C}^d)^{\otimes L}$ bezeichnet, wobei dieser Operator lediglich die Plätze j und k vertauscht und auf allen anderen trivial wirkt. Für $s = 1/2, 1$ wird dieser nun mit $P^{(1/2)}$, bzw. $P^{(1)}$ bezeichnet.

Matrizen, $\overline{\mathcal{R}}$ und $\tilde{\mathcal{R}}$, eingeführt.

$$\overline{\mathcal{R}}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) = \mathcal{R}_{\delta\alpha}^{\gamma\beta}(\mu, \lambda) \quad , \quad \tilde{\mathcal{R}}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) = \mathcal{R}_{\gamma\beta}^{\delta\alpha}(\mu, \lambda) . \quad (2.4.1)$$

Eine alternative Definition der \mathcal{L} -Matrix ist durch

$$\overline{\mathcal{L}}_{j\beta}^{\alpha}(\lambda, \mu) = \overline{\mathcal{R}}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) e_{j\gamma}^{\delta} = \mathcal{R}_{\delta\alpha}^{\gamma\beta}(\mu, \lambda) e_{j\gamma}^{\delta} \quad (2.4.2)$$

gegeben, welche aus (2.3.6) durch Vertauschen des Hilfsraumes mit dem Quantenraum hervorgeht. Dabei wird in der Darstellung von $\mathcal{R}(\lambda, \mu) \in \mathfrak{Cn}\mathfrak{d}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ der mit dem Kettenplatz identifizierte Raum als Quantenraum und der andere Raum als Hilfsraum bezeichnet. Die \mathcal{R} -Matrizen sollen hier regulär sein.

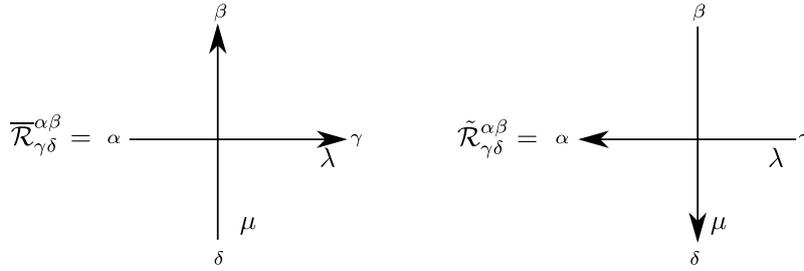


Abbildung 2.5.: Grafische Darstellung der Matrizen $\overline{\mathcal{R}}(\lambda, \mu)$ und $\tilde{\mathcal{R}}(\lambda, \mu)$.

Durch Komultiplikation lässt sich analog aus der Monodromie-Matrix

$$\overline{\mathcal{T}}(\lambda) \equiv \overline{\mathcal{T}}\left(\lambda \mid \{\nu_j\}_{j=1}^L\right) := \overline{\mathcal{L}}_1(\lambda, \nu_1) \cdots \overline{\mathcal{L}}_L(\lambda, \nu_L) \quad (2.4.3)$$

eine weitere Transfer-Matrix

$$\overline{t}(\lambda) = \overline{\mathcal{T}}_{\gamma}^{\gamma}(\lambda) = \overline{\mathcal{L}}_{1\beta_1}^{\gamma}(\lambda, \nu_1) \overline{\mathcal{L}}_{2\beta_2}^{\beta_1}(\lambda, \nu_2) \cdots \overline{\mathcal{L}}_{L-1\beta_{L-1}}^{\beta_{L-2}}(\lambda, \nu_{L-1}) \overline{\mathcal{L}}_{L\gamma}^{\beta_{L-1}}(\lambda, \nu_L) \quad (2.4.4)$$

angeben. Für den homogenen Fall, d.h. $\nu_j = \lambda_0, j = 1, \dots, L$, besitzt die Transfer-Matrix die Entwicklung

$$\overline{t}(\lambda) = \exp\left[-(\lambda - \nu_0) H_L + \mathcal{O}(\lambda - \nu_0)^2\right] \hat{U}^{-1} \quad (2.4.5)$$

um $\lambda = \nu_0$, falls die \mathcal{R} -Matrix folgende Bedingung erfüllt:

$$\partial_{\lambda} \mathcal{R}(\lambda, \mu) = -\partial_{\mu} \mathcal{R}(\lambda, \mu) .$$

Diese Bedingung ist offenbar für alle physikalischen Modelle, deren \mathcal{R} -Matrizen nur von der Differenz der Spektralparameter λ und μ abhängen, gegeben. Es gibt aber auch Modelle, bei denen die \mathcal{R} -Matrizen nicht von der Differenz abhängen, die trotzdem dieses Kriterium erfüllen, wie zum Beispiel das eindimensionale Hubbard-Modell. Per Definition ist

$$\overline{t}(\lambda_0) = e_{L\beta_L}^{\beta_{L-1}} e_{L-1\beta_{L-1}}^{\beta_{L-2}} \cdots e_{1\beta_1}^{\beta_L} e_{2\beta_2}^{\beta_1} = P_{L L-1} \cdots P_{2 1} = \hat{U}^{-1}$$

der Linksschiebeoperator. Für eine gegen X konvergierende Folge $(X_M)_{M \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, oder sogar quadratischer Matrizen, gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{X_M}{M}\right)^M = e^X . \quad (2.4.6)$$

Dieser Grenzwert ist als Trotter-Suzuki-Formel bekannt [103]. Setzt man nun $\hat{U}^{-1} t(\lambda_0 - \beta/N)$ in obige Formel ein, wobei N die Trotterzahl ist, folgt wegen (2.3.13) die Beziehung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\hat{U} t\left(\lambda_0 - \frac{\beta}{N}\right)\right)^N = e^{-\beta H_L} = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{N,L} = \rho_L . \quad (2.4.7)$$

Da wegen (2.3.13) und (2.4.5)

$$\overline{t}(-\lambda + \nu_0) t(\lambda + \lambda_0) = 1 + \lambda H_L + \mathcal{O}(\lambda^2) = 1 + 2\lambda X(\lambda)$$

mit $\lim_{\lambda \rightarrow 0} X(\lambda) = H_L$ gilt, folgt für endliche Trotterzahl N für den Dichte-Operator $\rho_{N,L}$ die approximierende Darstellung

$$\rho_{N,L} = \left[\overline{t}\left(\frac{\beta}{N} + \nu_0\right) t\left(\lambda_0 - \frac{\beta}{N}\right)\right]^{\frac{N}{2}} = \left[1 + \frac{2}{N} \left(-\beta H_L + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right]^{\frac{N}{2}} , \quad (2.4.8)$$

wobei $\lambda = -\beta/N$ und $N/2 \in \mathbb{N}$. Die Zustandssumme

$$\mathcal{Z}_L := \text{Spur} \left(e^{-\beta H_L} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{N,L} = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Spur}_{1,\dots,L} \rho_{N,L} \quad (2.4.9)$$

kann über die Eigenwerte der Quantentransfer-Matrix berechnet werden. Die Quantentransfer-Matrix wird wie folgt eingeführt: Zunächst werden unter Zuhilfenahme von N Hilfsräumen $\bar{1}, \dots, \bar{N}$ über die Monodromie-Matrizen

$$\mathcal{T}_{\bar{j}}(\lambda) = \mathcal{R}_{\bar{j}L}(\lambda, \nu_0) \cdots \mathcal{R}_{\bar{j}1}(\lambda, \nu_0) \quad , \quad \bar{\mathcal{T}}_{\bar{j}}(\lambda) = \mathcal{R}_{1\bar{j}}(\lambda_0, \lambda) \cdots \mathcal{R}_{L\bar{j}}(\lambda_0, \lambda) \quad (2.4.10)$$

die beiden Transfer-Matrizen

$$t(\lambda) := \text{Spur}_{\bar{j}} \mathcal{T}_{\bar{j}}(\lambda) \quad , \quad \bar{t}(\lambda) := \text{Spur}_{\bar{j}} \bar{\mathcal{T}}_{\bar{j}}(\lambda) \quad (2.4.11)$$

eingeführt. Aus (2.4.8) folgt

$$\rho_{N,L} = \text{Spur}_{\bar{1},\dots,\bar{N}} \left[\bar{\mathcal{T}}_{\bar{N}} \left(\frac{\beta}{N} + \nu_0 \right) \mathcal{T}_{\bar{N}-1} \left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0 \right) \cdots \bar{\mathcal{T}}_{\bar{2}} \left(\frac{\beta}{N} + \nu_0 \right) \mathcal{T}_{\bar{1}} \left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0 \right) \right]. \quad (2.4.12)$$

Mit

$$\mathcal{R}_{\beta\delta}^{t_1 \alpha\gamma} := \mathcal{R}_{\alpha\delta}^{\beta\gamma},$$

was einer Transposition des Hilfsraumes entspricht, lassen sich die in den Monodromie-Matrizen $\mathcal{T}(\lambda)$ und $\bar{\mathcal{T}}(\lambda)$ enthaltenden \mathcal{R} -Matrizen unter der Spur des Dichte-Operators $\rho_{N,L}$ umsortieren. Es folgt

$$\begin{aligned} \rho_{N,L} &= \text{Spur}_{\bar{1},\dots,\bar{N}} \left[\mathcal{R}_{1\bar{N}} \left(\lambda_0, \frac{\beta}{N} + \nu_0 \right) \mathcal{R}^{t_1 \bar{N}-1} \left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0 \right) \cdots \mathcal{R}^{t_1 \bar{1}} \left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdots \mathcal{R}_{L\bar{N}} \left(\lambda_0, \frac{\beta}{N} + \nu_0 \right) \mathcal{R}^{t_1 \bar{N}-L} \left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0 \right) \cdots \mathcal{R}^{t_1 \bar{1}L} \left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \nu_0 \right) \right] \\ &= \text{Spur}_{\bar{1},\dots,\bar{N}} \left[\mathcal{T}_1^{QTM}(\lambda_0) \cdots \mathcal{T}_L^{QTM}(\lambda_0) \right], \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

wobei

$$\mathcal{T}_j^{QTM}(\lambda) := \mathcal{R}_{j\bar{N}} \left(\lambda, \frac{\beta}{N} + \nu_0 \right) \mathcal{R}^{t_1 \bar{N}-j} \left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \lambda \right) \cdots \mathcal{R}^{t_1 \bar{1}j} \left(-\frac{\beta}{N} + \lambda_0, \lambda \right) \quad (2.4.14)$$

die Quantenmonodromie-Matrix ist. Aus ihr folgt durch Bilden der Spur die Quantentransfer-Matrix

$$t^{QTM}(\lambda) := \text{Spur}_j \mathcal{T}_j^{QTM}(\lambda) \quad . \quad (2.4.15)$$

Die Zustandssumme \mathcal{Z}_L zum Spektralparameter λ_0 lässt sich folglich durch

$$\mathcal{Z}_L = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Spur}_{\bar{1},\dots,\bar{N}} \left[t^{QTM}(\lambda_0) \right]^L = \sum_{n=0}^{\infty} (\Lambda_n(\lambda_0))^L \quad (2.4.16)$$

darstellen, wobei $\Lambda_n(\lambda)$ die Eigenwerte der Quantentransfer-Matrix im Trotter-Limes, d.h. $N \rightarrow \infty$, sind [69]. Es wird davon ausgegangen, dass sich die Limese $L \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ vertauschen lassen. Falls der führende Eigenwert $\Lambda_0(\lambda)$ reell, positiv und nicht entartet und im Trotter-Limes vom nächst-führenden Eigenwert durch eine endliche Lücke getrennt ist [48, 103, 104], dann wird die Freie Energie pro Gitterplatz durch den betragsmäßig größten Eigenwert der Quantentransfer-Matrix $\Lambda_0(\lambda)$ durch

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{Z}_{N,L}}{\beta L} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \Lambda_0(\lambda_0)}{\beta} \quad (2.4.17)$$

beschrieben. Mit

$$\mathcal{L}_{\bar{j}}^{QTM \alpha}_{\beta}(\lambda, \mu) = \begin{cases} \mathcal{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) e_{\bar{j}\gamma}^{\delta}, & \text{falls } \bar{j} \text{ gerade,} \\ \mathcal{R}^{t_1 \bar{j}\alpha}_{\delta\beta}(\mu, \lambda) e_{\bar{j}\gamma}^{\delta} = \tilde{\mathcal{R}}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda, \mu) e_{\bar{j}\gamma}^{\delta}, & \text{falls } \bar{j} \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (2.4.18)$$

lässt sich die Quantenmonodromie-Matrix durch

$$\mathcal{T}^{QTM}(\lambda) = \mathcal{L}_{\bar{N}}^{QTM} \left(\lambda, \frac{\beta}{N} + \nu_0 \right) \mathcal{L}_{\bar{N}-1}^{QTM} \left(\lambda, -\frac{\beta}{N} + \lambda_0 \right) \cdots \mathcal{L}_{\bar{1}}^{QTM} \left(\lambda, -\frac{\beta}{N} + \lambda_0 \right) \quad (2.4.19)$$

und somit die Quantentransfer-Matrix durch

$$t^{QTM}(\lambda) = \mathcal{L}_{\bar{N}}^{QTM \beta_1}_{\beta_N} \left(\lambda, \frac{\beta}{N} + \nu_0 \right) \mathcal{L}_{\bar{N}-1}^{QTM \beta_N}_{\beta_{N-1}} \left(\lambda, -\frac{\beta}{N} + \lambda_0 \right) \cdots \mathcal{L}_{\bar{1}}^{QTM \beta_2}_{\beta_1} \left(\lambda, -\frac{\beta}{N} + \lambda_0 \right) \quad (2.4.20)$$

ausdrücken. Für gerade \bar{j} ist $\mathcal{L}_{\bar{j}}^{QTM}(\lambda, \mu)$ nach (2.3.7) eine fundamentale Darstellung der Yang-Baxter-

2.5. Der algebraische Bethe-Ansatz

Der algebraische Bethe-Ansatz wird benutzt, um die Transfer-Matrix zu diagonalisieren. Dazu wird die zugehörige Monodromie-Matrix $\mathcal{T}^{QTM}(\lambda)$ (mit Spin-1/2-Hilfsraum) als Blockmatrix mit den Einträgen $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$ ausgedrückt:

$$\mathcal{T}^{QTM}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}^{QTM+}(\lambda) & \mathcal{T}^{QTM-}(\lambda) \\ \mathcal{T}^{QTM+}(\lambda) & \mathcal{T}^{QTM-}(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.5.1)$$

Wird diese in die Yang-Baxter-Algebra (2.1.5) eingesetzt,

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{R}}(\lambda, \mu) & \left[\begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{pmatrix} \right] \\ & = \left[\begin{pmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \right] \check{\mathcal{R}}(\lambda, \mu), \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

so lassen sich mit der expliziten Darstellung der \mathcal{R} -Matrix die Vertauschungsrelationen für die Monodromie-Matrixelemente $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$ ablesen. Hier wird als Ausgangsmodell das Sechsv-Vertexmodell mit der trigonometrischen \mathcal{R} -Matrix,

$$\check{R}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(\lambda, \mu) & b(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & b(\lambda, \mu) & c(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda, \mu) & c(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & c(\lambda, \mu) & b(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5.3)$$

gewählt, wobei

$$b(\lambda, \mu) = \frac{\sinh(\lambda - \mu)}{\sinh(\lambda - \mu + \eta)}, \quad c(\lambda, \mu) = \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\lambda - \mu + \eta)}.$$

Diese \mathcal{R} -Matrix ist mit $\lambda_0 = 0 = \nu_0$ regulär und unitär,

$$\check{R}(0, 0) = \mathbf{1}, \quad \check{R}(\lambda, \mu)\check{R}(\mu, \lambda) = \mathbf{1}.$$

Es ergeben sich durch Vergleich beider Seiten von (2.5.2) u.a. die Vertauschungsrelationen

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{b(\mu, \lambda)}B(\mu)A(\lambda) - \frac{c(\mu, \lambda)}{b(\mu, \lambda)}B(\lambda)A(\mu), \quad (2.5.4a)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{b(\lambda, \mu)}B(\mu)D(\lambda) - \frac{c(\lambda, \mu)}{b(\lambda, \mu)}B(\lambda)D(\mu), \quad (2.5.4b)$$

$$B(\lambda)B(\mu) = B(\mu)B(\lambda). \quad (2.5.4c)$$

Des Weiteren wird die Existenz eines Pseudovakuums $|0\rangle$ mit

$$\mathcal{T}^{QTM}(\lambda)|0\rangle = \begin{pmatrix} a(\lambda)|0\rangle & B(\lambda)|0\rangle \\ 0 & d(\lambda)|0\rangle \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

verlangt. Die Eigenwertfunktionen $a(\lambda)$ und $d(\lambda)$ der Diagonaleinträge $A(\lambda)$ und $D(\lambda)$, die sogenannten Pseudovakuum-Erwartungswerte, hängen explizit von der Darstellung ab und bestimmen letztendlich damit die Lösung des Bethe-Ansatzes. Durch Anwenden des Operators $B(\lambda)$ auf das Pseudovakuum werden die zugehörigen Eigenvektoren

$$B(\lambda_1)B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_{M-1})B(\lambda_M)|0\rangle = |\{\lambda_j\}_{j=1}^M\rangle \equiv |\{\lambda\}\rangle \quad (2.5.6)$$

erzeugt. Damit der Vektor $|\{\lambda\}\rangle$ ein Eigenvektor der Transfer-Matrix $t(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ ist, muss das nichtlineare gekoppelte Gleichungssystem

$$\frac{d(\lambda_j)}{a(\lambda_j)} = \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^M \frac{b(\lambda_j, \lambda_k)}{b(\lambda_k, \lambda_j)} = - \prod_{k=1}^M \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k - \eta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + \eta)} \quad (2.5.7)$$

erfüllt werden. Dies sind die Bethe-Ansatz-Gleichungen (BAG), deren Lösungen die sogenannten Bethe-Ansatz-Zahlen oder auch Bethe-Rapiditäten sind [42]. Der Eigenwert $\Lambda(\lambda)$ der Transfer-Matrix $t(\lambda)$ be-

züglich des Eigenvektors $|\{\lambda\}\rangle$ berechnet sich somit zu

$$\Lambda(\lambda) = a(\lambda) \left[\prod_{j=1}^M \frac{\sinh(\lambda - \lambda_j - \eta)}{\sinh(\lambda - \lambda_j)} \right] + d(\lambda) \left[\prod_{j=1}^M \frac{\sinh(\lambda - \lambda_j + \eta)}{\sinh(\lambda - \lambda_j)} \right]. \quad (2.5.8)$$

2.6. Korrelationen bei endlicher Temperatur

2.6.1. Quantentransfer-Matrix-Formalismus

Für endliche Temperatur können Korrelationsfunktionen der Form

$$\langle X_j^{(1)} \dots X_k^{(k-j+1)} \rangle_T = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{Spur}_{1, \dots, L} e^{-\beta H_L} X_j^{(1)} \dots X_k^{(k-j+1)}}{\text{Spur}_{1, \dots, L} e^{-\beta H_L}} \quad (2.6.1)$$

beliebiger lokaler Operatoren $X_j^{(1)}, \dots, X_k^{(k-j+1)}$ mit $j, k \in \{1, \dots, L\}$, $j \leq k$, über den Zugang zur Thermodynamik durch die Quantentransfer-Matrix mittels des algebraischen Bethe-Ansatzes angegeben werden. Mit den Gleichungen (2.4.7) und (2.4.13) und unter der Annahme, dass die Quantentransfer-Matrix im thermodynamischen Limes unter Einführung von Inhomogenitäten ξ_l , $l = 1, \dots, m = k - j + 1$, diagonalisierbar ist^{II}, folgt nach [47, 48]

$$\begin{aligned} & \langle X_j^{(1)} \dots X_k^{(m)} \rangle_T \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} \frac{\langle \Phi_0 | \text{Spur}_1 \left\{ \mathcal{T}_1^{QTM}(\xi_1) X^{(1)} \right\} \dots \text{Spur}_m \left\{ \mathcal{T}_m^{QTM}(\xi_m) X^{(m)} \right\} | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \prod_{j=1}^m \Lambda_0(\xi_j)}, \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

wobei $\Lambda_0(\lambda)$ der betragsmäßig größte Eigenwert der Quantentransfer-Matrix sei. Da die Quantentransfer-Matrizen aufgrund der Yang-Baxter-Algebra eine kommutierende Familie bilden, hängen die zugehörigen Eigenvektoren nicht vom Spektralparameter ab. Der Vektor $|\Phi_0\rangle$ ist (bis auf Normierung) der zugehörige Eigenvektor zum Eigenwert $\Lambda_0(\lambda)$ der Quantentransfer-Matrix $t^{QTM}(\lambda)$ und wird als dominanter Eigenvektor bezeichnet,

$$\Lambda_0(\lambda) = \frac{\langle \Phi_0 | t^{QTM}(\lambda) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle}.$$

2.6.2. Dichte-Matrix

Mit der in Kapitel 2.3, „Die fundamentale Darstellung der Yang-Baxter-Algebra“, gewählten Standardbasis kann jeder Operator $A_{1, \dots, m}$, welcher auf den Gitterplätzen 1 bis m der Spin-Kette wirkt, durch die Basisvektoren $e_{j\beta_j}^{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, m$ dargestellt werden. Mit

$$A_{1, \dots, m} = A_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots A_{\alpha_m}^{\beta_m} e_{1\beta_1}^{\alpha_1} \dots e_{m\beta_m}^{\alpha_m} \quad (2.6.3)$$

gilt folglich

$$\langle A_{1, \dots, m} \rangle_{T, h} = A_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots A_{\alpha_m}^{\beta_m} \langle e_{1\beta_1}^{\alpha_1} \dots e_{m\beta_m}^{\alpha_m} \rangle_{T, h}. \quad (2.6.4)$$

Der statistische Operator wird nach (2.4.7) und (2.4.22) durch

$$\rho_L = \exp \left[- \frac{(H_L - 2h S^z)}{T} \right]$$

beschrieben. Die Dichte-Matrix eines Untersystems der Länge $m \leq L$ wird durch

$$D_{[1, m]}^{(L)}(T, h) := \frac{\text{Spur}_{m+1, \dots, L} \rho_L}{\text{Spur}_{1, \dots, L} \rho_L} \quad (2.6.5a)$$

mit

$$D_{[1, m]}(T, h) := \lim_{L \rightarrow \infty} D_{[1, m]}^{(L)}(T, h) \quad (2.6.5b)$$

^{II}Für die XXZ -Kette ist dies bekannt. Im Allgemeinen muss dies aber nicht gelten.

eingeführt. Damit gilt

$$\begin{aligned} \langle A_{1,\dots,m} \rangle_{T,h} &= \frac{\text{Spur}_{1,\dots,L} \{A_{1,\dots,m} \rho_L\}}{\text{Spur}_{1,\dots,L} \rho_L} = \frac{\text{Spur}_{1,\dots,m} \{A_{1,\dots,m} \text{Spur}_{m+1,\dots,L} \rho_L\}}{\text{Spur}_{1,\dots,L} \rho_L} \\ &= \text{Spur}_{1,\dots,m} \left\{ A_{1,\dots,m} D_{[1,m]}^{(L)}(T, h) \right\}. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Mit der oben genannten Standardbasis ist

$$D_{[1,m]}^{(L) \alpha_1 \dots \alpha_m}(T, h) = \text{Spur}_{1,\dots,m} e_{1\beta_1}^{\alpha_1} \dots e_{m\beta_m}^{\alpha_m} D_{[1,m]}^{(L)}(T, h) = \left\langle e_{1\beta_1}^{\alpha_1} \dots e_{m\beta_m}^{\alpha_m} \right\rangle_{T,h}. \quad (2.6.7)$$

Für $L \rightarrow \infty$ folgt unter Einführen eines Satzes regularisierender Inhomogenitäten $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_m)$ im thermodynamischen Limes mit (2.6.2) für $X_l^{(n)} = e_{l\beta_n}^{\alpha_n}$, $l \in \{j, j+1, \dots, k-1, k\}$ und $n \in \{1, 2, \dots, k-j+1\}$ schließlich

$$\left\langle e_{1\beta_1}^{\alpha_1} \dots e_{m\beta_m}^{\alpha_m} \right\rangle_{T,h} = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} D_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(\xi)}_{D_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(T, h)}, \quad (2.6.8)$$

wobei

$$D_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(\xi) = \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}_1^{QTM \alpha_1}(\xi_1) \dots \mathcal{T}_m^{QTM \alpha_m}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m t^{QTM}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} \quad (2.6.9)$$

ein Dichte-Matrixelement des inhomogenen Dichte-Operators

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{Spur} \left\{ (t^{QTM}(0))^k (\mathcal{T}^{QTM}(\xi_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}^{QTM}(\xi_m)) (t^{QTM}(0))^k \right\}}{\text{Spur} \left\{ (t^{QTM}(0))^k \prod_{j=1}^m t^{QTM}(\xi_j) (t^{QTM}(0))^k \right\}} \\ &= \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}^{QTM}(\xi_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}^{QTM}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m t^{QTM}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

mit $L = 2k + m$ bei endlicher Trotterzahl N beschreibt.

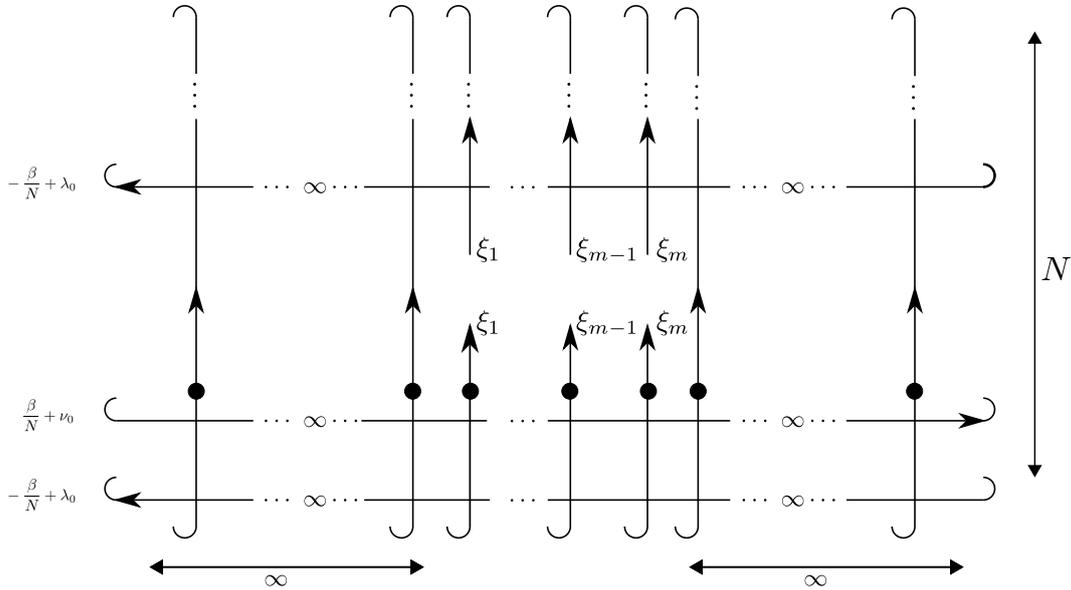


Abbildung 2.9.: Grafische Notation des inhomogenen Dichte-Operators $D(\xi)$ multipliziert mit der zugehörigen Zustandssumme $\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{N,L}(\xi)$. Hierbei wurde die Periodizität der vertikalen Linien ausgenutzt, weshalb sich die „row-to-row“-Transfer-Matrizen umsortieren lassen.

Schließlich lässt sich der Erwartungswert des Operators $A_{1,\dots,m}$ durch

$$\langle A_{1,\dots,m} \rangle_{T,h} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} \text{Spur}_{1,\dots,m} \{A_{1,\dots,m} D(\xi)\} \quad (2.6.11)$$

ausdrücken [47].

Eigenschaften der Dichte-Matrix

Per Konstruktion besitzt der m -Platz-Dichte-Operator (2.6.10) folgende Eigenschaften:

- „Intertwining“-Relation: Wegen der Yang-Baxter-Algebra (2.4.21) gilt

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{R}}_{j,j+1}(\xi_j, \xi_{j+1}) D(\xi_1, \dots, \xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_m) \\ = D(\xi_1, \dots, \xi_{j+1}, \xi_j, \dots, \xi_m) \check{\mathcal{R}}_{j,j+1}(\xi_j, \xi_{j+1}). \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

- Reduktionsbedingung: Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur}_m \{ D(\xi_1, \dots, \xi_m) \} &= \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}^{QTM}(\xi_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}^{QTM}(\xi_{m-1}) \otimes \text{Spur} \mathcal{T}^{QTM}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m t^{QTM}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} \\ &= \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}^{QTM}(\xi_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}^{QTM}(\xi_{m-1}) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^{m-1} t^{QTM}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} = D(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}). \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

Eine analoge Aussage gilt auch für die Bildung der Teilspur über den ersten Raum.

Für die Dichte-Matrix $D(\xi)$ wird in dieser Arbeit auch folgende grafische Notation verwendet.

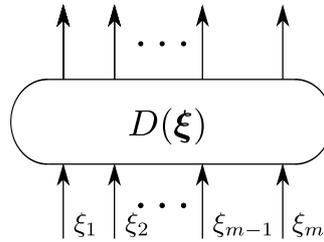


Abbildung 2.10.: Grafische Notation des inhomogenen Dichte-Operator $D(\xi)$.

Im Folgenden wird die Monodromie-Matrix $\mathcal{T}^{QTM}(\lambda)$ des Spin 1/2 XXZ -Modells, welche den Hilfsraum \mathbb{C}^2 und den Quantenraum $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ hat, mit $\mathcal{T}(\lambda)$ bezeichnet. Der zur Quantentransfer-Matrix $t(\lambda) \equiv t^{QTM}(\lambda)$ gehörige betragsmäßig größte Eigenwert wird mit $\Lambda_0(\lambda)$ bezeichnet. Im nächsten Kapitel werden weitere Monodromie-Matrizen mit anderen Hilfsräumen bzw. Quantenräumen zu höheren Spin-Darstellungen sowie eichtransformierte Monodromie-Matrizen eingeführt.

2.6.3. Dynamische Korrelationsfunktionen

Um zum Beispiel die Streuquerschnitte im Neutronenstreuexperiment bestimmen zu können, wird der dynamische Strukturfaktor benötigt. Dieser lässt sich als Fourier-Transformierte von dynamischen Spin-Spin-Korrelationsfunktionen darstellen. Für nicht-verschwindende Temperatur werden die Spin-Spin-Korrelationsfunktionen durch

$$S^{\alpha\beta}(m, t) = \frac{\text{Spur}_{1, \dots, L} \{ S_1^\alpha e^{iHt} S_m^\beta e^{-iHt} \rho_L \}}{\text{Spur}_{1, \dots, L} \{ \rho_L \}} \quad (2.6.14)$$

beschrieben, wobei $H = H_L - 2h S^z$ der Hamilton-Operator des Systems ist [32, 53]. Für $L \rightarrow \infty$ folgt mit obigen Überlegungen (2.6.11) die Darstellung

$$S^{\alpha\beta}(m, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} \text{Spur}_{1, \dots, m} \left\{ S_1^\alpha e^{iHt} S_m^\beta e^{-iHt} D(\xi) \right\}. \quad (2.6.15)$$

In dieser Arbeit wird sich nur auf statische Korrelationsfunktionen ($t = 0$) beschränkt. Die (numerische) Berechnung von dynamischen Korrelationsfunktionen ist selbst für kleine Kettenlängen aufwendig, weshalb diese für sich ein eigenes Projekt formuliert.

Fusion

In diesem Kapitel soll die Fusionsprozedur zur Konstruktion des Neunzehn-Vertexmodells, ausgehend vom Sechs-Vertexmodell, vorgestellt werden. Zunächst werden fusionierte \mathcal{R} -Matrizen, welche die Yang-Baxter-Gleichung erfüllen, konstruiert. Diese werden in analoger Weise zu den Arbeiten von P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin und E. K. Sklyanin bzw. L. Mezincescu und R. Nepomechie eingeführt (siehe dazu [77] und [84, 85]). Mit diesen lassen sich die lokalen Hamilton-Operatoren der zugehörigen Spin-1 XXZ -Quantenspin-Kette bestimmen. Ferner werden aus den fusionierten \mathcal{R} -Matrizen geeignete Quantenmonodromie-Matrizen, welche die Yang-Baxter-Algebra erfüllen, konstruiert. Diese haben den Quantenraum einer Spin-1 Kette und den Hilfsraum eines Spin-1/2- bzw. Spin-1-Teilchens. Es werden die den Bethe-Rapiditäten entsprechenden Bethe-Ansatz-Gleichungen sowie die Eigenwerte der Quantentransfer-Matrix der Spin-1 XXZ -Kette hergeleitet. Der betragsmäßig größte Eigenwert, über welchem sich die Freie Energie pro Gitterplatz angeben lässt, kann über nichtlineare Integralgleichungen von geeigneten Hilfsfunktionen im Trotter-Limes berechnet werden, was im nächsten Kapitel diskutiert werden wird. Des Weiteren wird die Fusion von Dichte-Matrixelementen über die bereits oben angesprochenen Hilfsmittel betrachtet.

3.1. Integrable Struktur

Ausgangspunkt wird die zum Sechs-Vertexmodell gehörige trigonometrische \mathcal{R} -Matrix der Form (2.5.3) sein. Diese \mathcal{R} -Matrix hängt lediglich von der Differenz der Spektralparameter λ und μ ab, weshalb für die weiteren Überlegungen $\lambda \rightarrow \lambda + \mu$ gesetzt wird. Die \mathcal{R} -Matrix (2.5.3) lässt sich, wie in Anhang A beschrieben, zu (A.0.5) eichtransformieren:

$$\mathcal{R}^{\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(\lambda) := \mathcal{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda)e^\lambda & 0 \\ 0 & c(\lambda)e^{-\lambda} & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin wird die \mathcal{R} -Matrix $\widehat{\mathcal{R}}(\lambda)$,

$$\widehat{\mathcal{R}}(\lambda) := \frac{\mathcal{R}(\lambda)}{b(\lambda) [2]_q},$$

eingeführt, wobei $q = \exp(\eta)$ mit $\eta = i\gamma$, $\gamma \in (0, \pi/2)$, keine Einheitswurzel ist. Die sogenannte q -Zahl wird in (E.1.4) definiert. Offenbar gilt

$$\widehat{\mathcal{R}}(-\eta) = (V(-\eta) \otimes V(\eta))\mathcal{P}^-, \quad \widehat{\mathcal{R}}(\eta) = (V(\eta) \otimes V(-\eta))\mathcal{P}^+, \quad (3.1.1)$$

wobei $V(\lambda)$ durch (A.0.4) gegeben ist. Die Projektionsoperatoren \mathcal{P}^\pm sind in (E.1.10) angegeben. Multiplizieren der eichtransformierten Yang-Baxter-Gleichung (A.0.2) mit $\frac{1}{b(\lambda) [2]_q}$ liefert für $\lambda - \mu = -\eta$ die Bedingung

$$V_1(-\eta)V_2(\eta) \mathcal{P}_{12}^- \mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{23}(\lambda + \eta) \mathcal{P}_{12}^+ = 0.$$

Da aber $V_1(-\eta)V_2(\eta)$ regulär ist, folgt schließlich, dass

$$\mathcal{P}_{12}^- \mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{23}(\lambda + \eta) \mathcal{P}_{12}^+ = 0 \quad (3.1.2a)$$

gelten muss. Analog gilt für $\lambda - \mu = \eta$

$$\mathcal{P}_{12}^+ \mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{23}(\lambda - \eta) \mathcal{P}_{12}^- = 0. \quad (3.1.2b)$$

Auf ähnlicher Weise erhält man für $\mu = \pm\eta$ die Relationen

$$\mathcal{P}_{23}^\pm \mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{12}(\lambda \mp \eta) \mathcal{P}_{23}^\mp = 0. \quad (3.1.2c)$$

Die Gleichungen (3.1.2) haben die überaus wichtige Bedeutung, dass die Produkte der \mathcal{R} -Matrizen $\mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{23}(\lambda + \eta)$ den Raum $V^{[1]} \otimes \mathbb{C}^2$ und $\mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{12}(\lambda + \eta)$ den Raum $\mathbb{C}^2 \otimes V^{[1]}$ invariant lassen, wobei $V^{[1]} \cong \mathbb{C}^3$ den Triplett-Unterraum bezeichnet. Nun lassen sich „fusionierte“ \mathcal{R} -Matrizen mittels der in (E.1.9) und (E.1.11b) eingeführten Abbildungen S und S^t definieren,

$$\mathcal{R}^{\left[1, \frac{1}{2}\right]}(\lambda) := \mathcal{R}_{(12)3}(\lambda) = S_{12} \mathcal{R}_{13}(\lambda - \eta) \mathcal{R}_{23}(\lambda) S_{12}^t, \quad (3.1.3a)$$

$$\mathcal{R}^{[\frac{1}{2},1]}(\lambda) := \mathcal{R}_{1(23)}(\lambda) = S_{23} \mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{12}(\lambda + \eta) S_{23}^t, \quad (3.1.3b)$$

$$\mathcal{R}^{[1,1]}(\lambda) := \mathcal{R}_{(12)(34)}(\lambda) = S_{12} \mathcal{R}_{1(34)}(\lambda - \eta) \mathcal{R}_{2(34)}(\lambda) S_{12}^t, \quad (3.1.3c)$$

welche auf $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$ oder $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ beziehungsweise auf $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ operieren. Aus obigen Definitionen folgt mit den Invarianzen (3.1.2) unmittelbar

$$\mathcal{R}_{(12)(34)}(\lambda) = S_{34} S_{12} \mathcal{R}_{14}(\lambda - \eta) \mathcal{R}_{24}(\lambda) \mathcal{R}_{13}(\lambda) \mathcal{R}_{23}(\lambda + \eta) S_{12}^t S_{34}^t. \quad (3.1.3d)$$

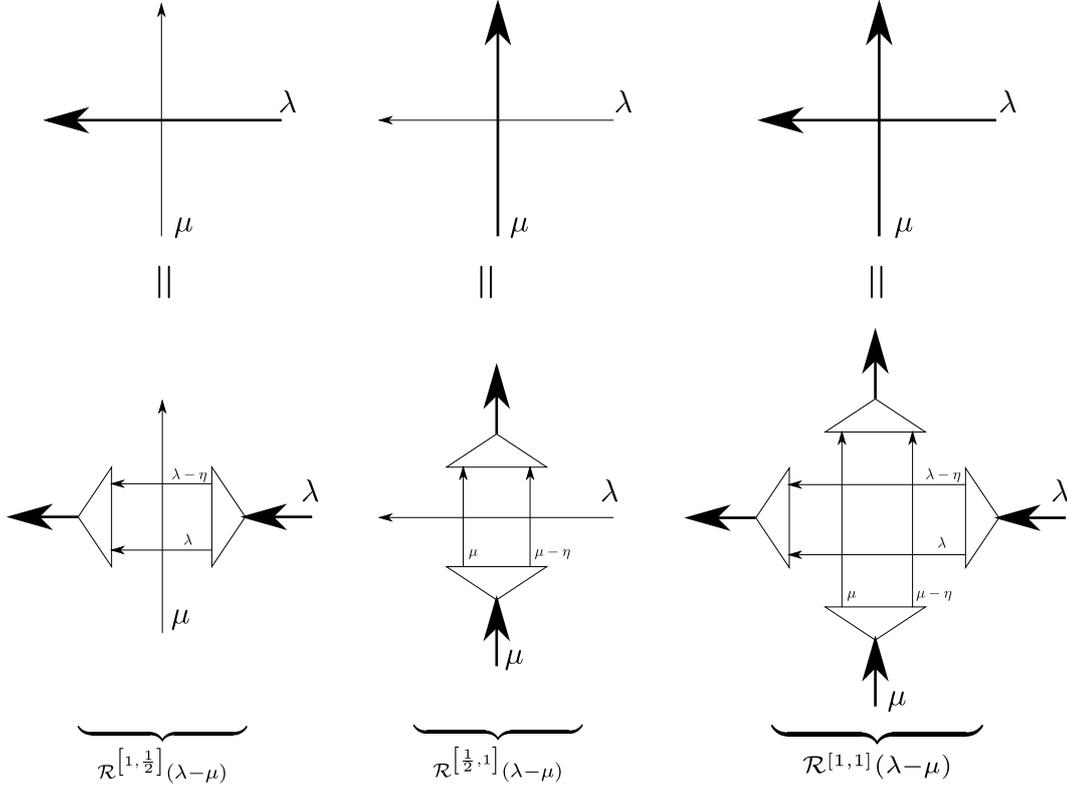


Abbildung 3.1.: Grafische Notation der fusionierten \mathcal{R} -Matrizen (3.1.3). Die schmalen Linien entsprechen Spin-1/2-Räumen, dagegen die dickeren Spin-1-Räumen.

Die fusionierten \mathcal{R} -Matrizen (3.1.3) erfüllen mit den Eigenschaften (3.1.2) die Yang-Baxter-Gleichungen

$$\mathcal{R}_{12}^{[s_1, s_2]}(\lambda - \mu) \mathcal{R}_{13}^{[s_1, s_3]}(\lambda) \mathcal{R}_{23}^{[s_2, s_3]}(\mu) = \mathcal{R}_{23}^{[s_2, s_3]}(\mu) \mathcal{R}_{13}^{[s_1, s_3]}(\lambda) \mathcal{R}_{12}^{[s_1, s_2]}(\lambda - \mu), \quad (3.1.4)$$

wobei $s_j = 1/2, 1$ für $j = 1, 2, 3$. Mit der konkreten Darstellung des Projektionsoperators (E.1.10) und der \mathcal{R} -Matrix (2.5.3) können die fusionierten \mathcal{R} -Matrizen explizit angegeben werden:

$$\mathcal{R}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda + \eta)} & \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\lambda + \eta)} e^\lambda & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\lambda + \eta)} e^{-\lambda} & \frac{\sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda + \eta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.5a)$$

$$\mathcal{R}^{[1, \frac{1}{2}]}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}(\lambda) & \hat{b}(\lambda) e^{\lambda - \frac{\eta}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{b}(\lambda) e^{\frac{\eta}{2} - \lambda} & \hat{c}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{c}(\lambda) & \hat{b}(\lambda) e^{\lambda - \frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{b}(\lambda) e^{\frac{\eta}{2} - \lambda} & \hat{a}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.5b)$$

$$\mathcal{R}^{[\frac{1}{2},1]}(\lambda - \eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c}(\lambda) & 0 & \hat{b}(\lambda)e^{\lambda-\frac{\eta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a}(\lambda) & 0 & \hat{b}(\lambda)e^{\lambda-\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & \hat{b}(\lambda)e^{\frac{\eta}{2}-\lambda} & 0 & \hat{a}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{b}(\lambda)e^{\frac{\eta}{2}-\lambda} & 0 & \hat{c}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.5c)$$

mit

$$\hat{a}(\lambda) := \frac{\sinh(\lambda - \eta)}{\sinh(\lambda + \eta)}, \quad \hat{b}(\lambda) := \frac{\sqrt{\sinh(\eta) \sinh(2\eta)}}{\sinh(\lambda + \eta)}, \quad \hat{c}(\lambda) := \frac{\sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda + \eta)},$$

und

$$\mathcal{R}^{[1,1]}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}(\lambda) & 0 & \tilde{c}(\lambda)e^\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}(\lambda) & 0 & \tilde{d}(\lambda)e^\lambda & 0 & \tilde{f}(\lambda)e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c}(\lambda)e^{-\lambda} & 0 & \tilde{a}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}(\lambda)e^{-\lambda} & 0 & \tilde{a}(\lambda) + \tilde{f}(\lambda) & 0 & \tilde{d}(\lambda)e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}(\lambda) & 0 & \tilde{c}(\lambda)e^\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f}(\lambda)e^{-2\lambda} & 0 & \tilde{d}(\lambda)e^{-\lambda} & 0 & \tilde{b}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}(\lambda)e^{-\lambda} & 0 & \tilde{a}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.5d)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\lambda) &:= \frac{\sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda + 2\eta)}, & \tilde{b}(\lambda) &:= \frac{\sinh(\lambda - \eta) \sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda + \eta) \sinh(\lambda + 2\eta)}, & \tilde{c}(\lambda) &:= \frac{\sinh(2\eta)}{\sinh(\lambda + 2\eta)}, \\ \tilde{d}(\lambda) &:= \frac{\sinh(2\eta) \sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda + \eta) \sinh(\lambda + 2\eta)}, & \tilde{f}(\lambda) &:= \frac{\sinh(2\eta) \sinh(\eta)}{\sinh(\lambda + \eta) \sinh(\lambda + 2\eta)}. \end{aligned}$$

Letztere \mathcal{R} -Matrix (3.1.5d) lässt sich mit

$$W(\lambda) = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

zu

$$\mathcal{R}^{[1,1]}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}(\lambda) & 0 & \tilde{c}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}(\lambda) & 0 & \tilde{d}(\lambda) & 0 & \tilde{f}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c}(\lambda) & 0 & \tilde{a}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}(\lambda) & 0 & \tilde{a}(\lambda) + \tilde{f}(\lambda) & 0 & \tilde{d}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}(\lambda) & 0 & \tilde{c}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f}(\lambda) & 0 & \tilde{d}(\lambda) & 0 & \tilde{b}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}(\lambda) & 0 & \tilde{a}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.7)$$

eichtransformieren. Die \mathcal{R} -Matrix (3.1.7) entspricht (bis auf Normierung) der \mathcal{R} -Matrix der Literatur [57, 86, 112]. Im isotropen Limes ($\eta = i\gamma =: 2i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$) nimmt die Spin-1/2 \mathcal{R} -Matrix (2.5.3) bzw. (A.0.5) die Form

$$\mathcal{R}^{XXX}(x) \equiv \mathcal{R}^{XXX}(x_1, x_2) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}(\lambda - \mu) = \frac{x}{x + 2i} \mathbb{1}_4 + \frac{2i}{x + 2i} P^{(1/2)} \quad (3.1.8a)$$

an, wobei $x := x_1 - x_2$ und die Spektralparameter λ und μ zu $\lambda \rightarrow \epsilon x_1$ und $\mu \rightarrow \epsilon x_2$ umskaliert wurden. Der Operator $P^{(1/2)}$ ist der Spin-1/2-Permutationsoperator ($d = 2$).

Die zugehörigen, fusionierten Spin-1 \mathcal{R} -Matrizen sind gegeben durch

$$\mathcal{R}^{XXX[1, \frac{1}{2}]}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x-2i}{x+2i} & \frac{2\sqrt{2}i}{x+2i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}i}{x+2i} & \frac{x}{x+2i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{x+2i} & \frac{2\sqrt{2}i}{x+2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}i}{x+2i} & \frac{x-2i}{x+2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.8b)$$

$$\mathcal{R}^{XXX[\frac{1}{2}, 1]}(x-2i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{x+2i} & 0 & \frac{2\sqrt{2}i}{x+2i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x-2i}{x+2i} & 0 & \frac{2\sqrt{2}i}{x+2i} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}i}{x+2i} & 0 & \frac{x-2i}{x+2i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}i}{x+2i} & 0 & \frac{x}{x+2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.8c)$$

und

$$\mathcal{R}^{XXX[1, 1]}(x) = \frac{x}{x+4i} \mathbb{1} + \frac{4i}{x+4i} P^{(1)} - \frac{12ix}{(x+2i)(x+4i)} P^-, \quad (3.1.8d)$$

wobei $P^{(1)} := E_\beta^\alpha \otimes E_\alpha^\beta$ mit Standardbasis $\{E_\beta^\alpha \mid \alpha, \beta = 1, 2, 3\}$ von $\mathfrak{Cnd}(\mathbb{C}^3)$ ¹ der Spin-1-Permutationsoperator und

$$P^- := -\frac{1}{24} (x+2i)(x+4i) \mathcal{R}^{XXX[1, 1]}(x) \Big|_{x=-2i}$$

der Projektionsoperator auf den Spin-0-Unterraum $V^{[0]} \cong \mathbb{C}$ ist. Offensichtlich ist $\mathcal{R}^{[1, 1]}(0) = R^{[1, 1]}(0) = P^{(1)}$. Das bedeutet, dass mit der \mathcal{R} -Matrix $R^{[1, 1]}(\lambda)$ ein fundamentales Modell beschrieben wird, dessen lokaler Hamilton-Operator die Form

$$H_{n, n+1} = P^{(1)} \frac{d}{d\lambda} R_{n, n+1}^{[1, 1]}(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} P^{(1)} R_{n, n+1}^{[1, 1]}(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \check{R}_{n, n+1}^{[1, 1]}(\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

hat. Mit

$$\check{H}_{n, n+1} = J \sinh(2\eta) H_{n, n+1} \quad (3.1.9)$$

ergibt sich der Hamilton-Operator der anisotropen Spin-1 XXZ -Kette [57, 86, 112], siehe (2.0.2). Die Hauptterme $\check{H}_{n, n+1}$ entsprechen dem Fateev-Zamolodchikov-Modell [112]. Der Hamilton-Operator weist erst nach Addition mit einem geeigneten Randterm $U_q(sl_2)$ -Invarianz auf [9, 86, 87].

Hier werden periodische Randbedingungen nach (2.3.16) gewählt, sodass $S_{L+1}^\alpha = S_1^\alpha$, $\alpha = x, y, z$, gilt. Der Hamilton-Operator der XXX -Kette ergibt sich aus dem Limes des Anisotropieparameters $\gamma \rightarrow 0$ und führt zum Takhtajan-Babujian-Modell (2.0.3b).

3.2. Bethe-Ansatz-Lösungen

Mit (2.4.14) und (2.4.22) sowie (3.1.3a) als auch (3.1.3b) wird die Spin-1 Quantenmonodromie-Matrix mit Hilfsraum Spin-1/2 und gerader Trotterzahl N durch

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) &:= \exp\left(\frac{\hbar \sigma_a^z}{T}\right) \mathcal{R}_{a, N}^{[\frac{1}{2}, 1]}(\lambda - \frac{\eta}{2} - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{N-1, a}^{[1, \frac{1}{2}]}(t_1 - \frac{\beta}{N} - \lambda + \frac{\eta}{2}) \cdots \\ &\quad \cdots \mathcal{R}_{a, \frac{1}{2}}^{[\frac{1}{2}, 1]}(\lambda - \frac{\eta}{2} - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\frac{1}{2}, a}^{[1, \frac{1}{2}]}(t_1 - \frac{\beta}{N} - \lambda + \frac{\eta}{2}) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(\frac{\hbar}{T}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{\hbar}{T}) \end{pmatrix} \mathcal{R}_{a, (2N-1, 2N)}(\lambda - \frac{\eta}{2} - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{(2N-3, 2N-2), a}(t_1 - \frac{\beta}{N} - \lambda + \frac{\eta}{2}) \cdots \\ &\quad \cdots \mathcal{R}_{a, (3, 4)}(\lambda - \frac{\eta}{2} - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{(1, 2), a}(t_1 - \frac{\beta}{N} - \lambda + \frac{\eta}{2}) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

¹Die Matrizen $E_\beta^\alpha \in \mathfrak{Cnd}(\mathbb{C}^3)$ haben in der Zeile β und Spalte α einen einzigen nicht-verschwindenden Eintrag 1.

definiert. Hierbei wurden die Parameter λ_0 und ν_0 auf Null gesetzt. Wegen (3.1.3) folgt für die Spin-1 Quantenmonodromie-Matrix mit Hilfsraum Spin-1

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{\langle a b \rangle}^{[1]}(\lambda) &:= \exp\left(2\frac{h S_{\langle a b \rangle}^z}{T}\right) \mathcal{R}_{\langle a b \rangle N}^{[1,1]}(\lambda - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{N-1 \langle a b \rangle}^{[1,1]}(-\frac{\beta}{N} - \lambda) \cdots \\
 &\quad \cdots \mathcal{R}_{\langle a b \rangle 2}^{[1,1]}(\lambda - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{1 \langle a b \rangle}^{[1,1]}(-\frac{\beta}{N} - \lambda) \tag{3.2.2} \\
 &= \exp\left(2\frac{h S_{\langle a b \rangle}^z}{T}\right) \mathcal{R}_{\langle a b \rangle \langle 2N-1 \ 2N \rangle}(\lambda - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\langle 2N-3 \ 2N-2 \rangle \langle a b \rangle}(-\frac{\beta}{N} - \lambda) \cdots \\
 &\quad \cdots \mathcal{R}_{\langle a b \rangle \langle 3 \ 4 \rangle}(\lambda - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\langle 1 \ 2 \rangle \langle a b \rangle}(-\frac{\beta}{N} - \lambda) \\
 &= S_{a b} \exp\left(\frac{h \sigma_a^z}{T}\right) \exp\left(\frac{h \sigma_b^z}{T}\right) S_{a b}^t \mathcal{R}_{a \langle 2N-1 \ 2N \rangle}(\lambda - \eta - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{b \langle 2N-1 \ 2N \rangle}(\lambda - \frac{\beta}{N}) S_{a b}^t \\
 &\quad S_{a b} \mathcal{R}_{\langle 2N-3 \ 2N-2 \rangle a}(-\frac{\beta}{N} - \lambda + \eta) \mathcal{R}_{\langle 2N-3 \ 2N-2 \rangle b}(-\frac{\beta}{N} - \lambda) S_{a b}^t \cdots \\
 &\quad \cdots S_{a b} \mathcal{R}_{a \langle 3 \ 4 \rangle}(\lambda - \eta - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{b \langle 3 \ 4 \rangle}(\lambda - \frac{\beta}{N}) S_{a b}^t \\
 &\quad S_{a b} \mathcal{R}_{\langle 1 \ 2 \rangle a}(-\frac{\beta}{N} - \lambda + \eta) \mathcal{R}_{\langle 1 \ 2 \rangle b}(-\frac{\beta}{N} - \lambda) S_{a b}^t \\
 &= S_{a b} \exp\left(\frac{h \sigma_a^z}{T}\right) \mathcal{R}_{a \langle 2N-1 \ 2N \rangle}(\lambda - \eta - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\langle 2N-3 \ 2N-2 \rangle a}(-\frac{\beta}{N} - \lambda + \eta) \cdots \\
 &\quad \cdots \mathcal{R}_{a \langle 3 \ 4 \rangle}(\lambda - \eta - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\langle 1 \ 2 \rangle a}(-\frac{\beta}{N} - \lambda + \eta) \\
 &\quad \exp\left(\frac{h \sigma_b^z}{T}\right) \mathcal{R}_{b \langle 2N-1 \ 2N \rangle}(\lambda - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\langle 2N-3 \ 2N-2 \rangle b}(-\frac{\beta}{N} - \lambda) \cdots \\
 &\quad \cdots \mathcal{R}_{b \langle 3 \ 4 \rangle}(\lambda - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\langle 1 \ 2 \rangle b}(-\frac{\beta}{N} - \lambda) S_{a b}^t \\
 &\quad = S_{a b} \mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\lambda - \frac{\eta}{2}) \mathcal{T}_b^{[\frac{1}{2}]}(\lambda + \frac{\eta}{2}) S_{a b}^t \tag{3.2.3}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Identität

$$\exp\left(2\frac{h S_{\langle a b \rangle}^z}{T}\right) = S_{a b} \exp\left(\frac{h \sigma_a^z}{T}\right) \exp\left(\frac{h \sigma_b^z}{T}\right) S_{a b}^t$$

benutzt. Diese kann grafisch wie folgt dargestellt werden.

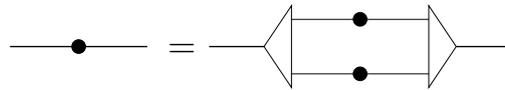


Abbildung 3.2.: Grafische Darstellung der Fusionsregel des Operators $\exp\left(2\frac{h S_{\langle a b \rangle}^z}{T}\right)$.

Aus (3.2.1) und (3.1.4) lässt sich zeigen, dass die Spin-1 Quantenmonodromie-Matrix $\mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\lambda)$ die Yang-Baxter-Algebra

$$\check{\mathcal{R}}(\lambda - \mu) \left(\mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) \otimes \mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\mu) \right) = \left(\mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\mu) \otimes \mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) \right) \check{\mathcal{R}}(\lambda - \mu) \tag{3.2.4}$$

erfüllt. Mit den Definitionen

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(\lambda) & \mathcal{B}(\lambda) \\ \mathcal{C}(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda) \end{pmatrix} =: \mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) = V(\lambda) T^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) V(-\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \exp(\lambda) \\ C(\lambda) \exp(-\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.2.5a}$$

bzw.

$$\mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(\lambda \pm \frac{\eta}{2}) := \begin{pmatrix} \mathcal{A}^\pm & \mathcal{B}^\pm \\ \mathcal{C}^\pm & \mathcal{D}^\pm \end{pmatrix}, \quad T^{[\frac{1}{2}]}(\lambda \pm \frac{\eta}{2}) := \begin{pmatrix} A^\pm & B^\pm \\ C^\pm & D^\pm \end{pmatrix}, \tag{3.2.5b}$$

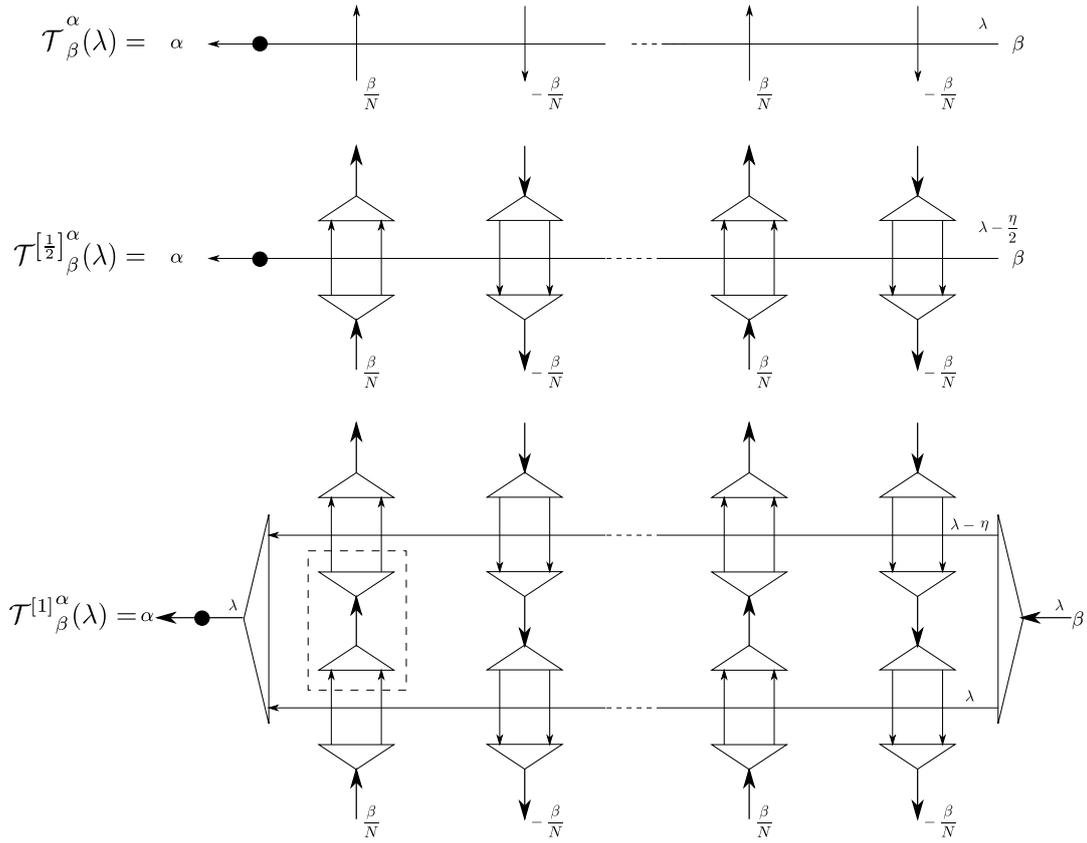


Abbildung 3.3.: Grafische Darstellung der (fusionierten) Monodromie-Matrizen. Die Abbildung der Monodromie-Matrix mit Spin-1-Hilfsraum lässt sich unter Benutzung der aus (3.1.2) resultierenden Invarianzen vereinfachen; die Produkte der Operatoren S^t und S zwischen den beiden horizontalen Hilfsräumen entsprechen Spin-1-Projektionsoperatoren (Beispiel: gestrichelter Kasten) und können weggelassen werden. Zwischen zwei Linien der Inhomogenitäten lassen sich dagegen wegen (3.1.2) Produkte von $S^t S = \mathcal{P}^+$ einfügen, sodass eine Verkettung von Spin-1 \mathcal{R} -Matrizen entsteht. Zu beachten sind hierbei die grafischen Notationen der fusionierten \mathcal{R} -Matrizen der Abbildungen 3.1 und 3.2.

folgt aus (3.2.4) mit den Eigenschaften (E.1.11c)

$$S \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) \otimes \mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) \right) U^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t, \quad (3.2.6a)$$

$$U \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) \otimes \mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) \right) S^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.6b)$$

$$S \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) \otimes \mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) \right) S^t = S \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) \otimes \mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) \right) S^t, \quad (3.2.6c)$$

$$U \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) \otimes \mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) \right) U^t = U \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) \otimes \mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) \right) U^t, \quad (3.2.6d)$$

und schließlich

$$\mathcal{T}^{[1]}(\lambda) = \begin{pmatrix} A^+ A^- & \sqrt{[2]_q} A^+ B^- e^\lambda & B^+ B^- e^{2\lambda} \\ \sqrt{[2]_q} A^- C^+ e^{-\lambda} & A^+ D^- + C^+ B^- & \sqrt{[2]_q} B^- D^+ e^\lambda \\ C^+ C^- e^{-2\lambda} & \sqrt{[2]_q} C^+ D^- e^{-\lambda} & D^+ D^- \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Bilden der Spur gibt

$$t^{[1]}(\lambda) = t^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) t^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) - \det_q \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) \right) \quad (3.2.8)$$

mit

$$\begin{aligned} \det_q \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) \right) &:= U \left(\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) \otimes \mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) \right) U^t \\ &= D^+ A^- - C^+ B^- = D^- A^+ - B^- C^+ = A^+ D^- - B^+ C^- = A^- D^+ - C^- B^+. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Dabei bezeichnen

$$t^{[s]}(\lambda) := \text{Spur} \left\{ \mathcal{T}^{[s]}(\lambda) \right\} \quad (3.2.10)$$

die entsprechenden Transfer-Matrizen. Die Spin-1 Monodromie-Matrix lässt sich mit (3.1.6) zu

$$\begin{aligned} T^{[1]}(\lambda) &= W(-\lambda) \mathcal{T}^{[1]}(\lambda) W(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix} T^{[1]+}_{+}(\lambda) & T^{[1]+}_{0}(\lambda) & T^{[1]+}_{-}(\lambda) \\ T^{[1]0}_{+}(\lambda) & T^{[1]0}_{0}(\lambda) & T^{[1]0}_{-}(\lambda) \\ T^{[1]-}_{+}(\lambda) & T^{[1]-}_{0}(\lambda) & T^{[1]-}_{-}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{+}A^{-} & \sqrt{[2]_q}A^{+}B^{-} & B^{+}B^{-} \\ \sqrt{[2]_q}A^{-}C^{+} & A^{+}D^{-} + C^{+}B^{-} & \sqrt{[2]_q}B^{-}D^{+} \\ C^{+}C^{-} & \sqrt{[2]_q}C^{+}D^{-} & D^{+}D^{-} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

umeichen. Die zur Quantenmonodromie-Matrix $\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]}(\lambda)$ gehörigen \mathcal{L} -Matrizen werden nach (2.4.18) und den Ergebnissen (3.1.5b) sowie (3.1.5c) durch

$$\mathcal{L}_{\bar{j}}^{QTM\alpha}(\lambda, \mu) = \begin{cases} \mathcal{L}_{\bar{j}\beta}^{\alpha}(\lambda, \mu) := \mathcal{R}^{[\frac{1}{2}, 1]}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda - \frac{\eta}{2} - \mu) E_{\bar{j}\gamma}^{\delta}, & \text{falls } \bar{j} \text{ gerade,} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\bar{j}\beta}^{\alpha}(\lambda, \mu) := \mathcal{R}^{[1, \frac{1}{2}]}_{\delta\beta} t_1^{\gamma\alpha}(\mu - \lambda + \frac{\eta}{2}) E_{\bar{j}\gamma}^{\delta}, & \text{falls } \bar{j} \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (3.2.12)$$

konstruiert. Es folgt

$$\mathcal{L}\left(\lambda, \frac{\beta}{N}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{c}(\lambda) & 0 & \check{b}(\lambda)e^{\lambda - \frac{\beta}{N}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{a}(\lambda) & 0 & \check{b}(\lambda)e^{\lambda - \frac{\beta}{N}} & 0 \\ 0 & \check{b}(\lambda)e^{\frac{\beta}{N} - \lambda} & 0 & \check{a}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{b}(\lambda)e^{\frac{\beta}{N} - \lambda} & 0 & \check{c}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.13a)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}\left(\lambda, -\frac{\beta}{N}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \check{b}(-\lambda)e^{\lambda - \frac{\beta}{N}} & 0 \\ 0 & \check{c}(-\lambda) & 0 & 0 & 0 & \check{b}(-\lambda)e^{\lambda - \frac{\beta}{N}} \\ 0 & 0 & \check{a}(-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \check{a}(-\lambda) & 0 & 0 \\ \check{b}(-\lambda)e^{\frac{\beta}{N} + \lambda} & 0 & 0 & 0 & \check{c}(-\lambda) & 0 \\ 0 & \check{b}(-\lambda)e^{\frac{\beta}{N} + \lambda} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.13b)$$

mit

$$\begin{aligned} \check{a}(\lambda) &= \hat{a}\left(\lambda - \frac{\beta}{N} + \frac{\eta}{2}\right) = \frac{\sinh\left(\lambda - \frac{\beta}{N} - \frac{\eta}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda - \frac{\beta}{N} + \frac{3}{2}\eta\right)}, \\ \check{b}(\lambda) &= \hat{b}\left(\lambda - \frac{\beta}{N} + \frac{\eta}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sinh(\eta)\sinh(2\eta)}}{\sinh\left(\lambda - \frac{\beta}{N} + \frac{3}{2}\eta\right)}, \\ \check{c}(\lambda) &= \hat{c}\left(\lambda - \frac{\beta}{N} + \frac{\eta}{2}\right) = \frac{\sinh\left(\lambda - \frac{\beta}{N} + \frac{\eta}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda - \frac{\beta}{N} + \frac{3}{2}\eta\right)}. \end{aligned}$$

Die Quantenmonodromie-Matrix $\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]}(\lambda)$ soll nun wieder als (2×2) -Matrix nach Ansatz (3.2.5) interpretiert werden. Mit

$$\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) = \exp\left(\frac{h\sigma^z}{T}\right) \mathcal{L}_{\bar{N}}\left(\lambda, \frac{\beta}{N}\right) \tilde{\mathcal{L}}_{\bar{N}-1}\left(\lambda, -\frac{\beta}{N}\right) \cdots \mathcal{L}_{\bar{2}}\left(\lambda, \frac{\beta}{N}\right) \tilde{\mathcal{L}}_{\bar{1}}\left(\lambda, -\frac{\beta}{N}\right) \quad (3.2.14)$$

und

$$\mathcal{L}\left(\lambda, \frac{\beta}{N}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \check{b}(\lambda)e^{\lambda - \frac{\beta}{N}} S^{-} \\ 0 & \check{a}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.15a)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}\left(\lambda, -\frac{\beta}{N}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{a}(-\lambda) & \check{b}(-\lambda)e^{\lambda - \frac{\beta}{N}} S^{+} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.15b)$$

ist

$$|0\rangle := \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{\otimes \frac{N}{2}}$$

ein Pseudovakuum der Quantentransfer-Matrix $t^{[\frac{1}{2}]}(\lambda)$. Dabei gilt

$$A(\lambda) |0\rangle = e^{\frac{\hbar}{T}} [\check{\alpha}(-\lambda)]^{\frac{N}{2}} |0\rangle = e^{\frac{\hbar}{T}} \left(\frac{\sinh\left(\lambda + \frac{\beta}{N} + \frac{\eta}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda + \frac{\beta}{N} - \frac{3}{2}\eta\right)} \right)^{\frac{N}{2}} |0\rangle =: a(\lambda) |0\rangle, \quad (3.2.16a)$$

$$D(\lambda) |0\rangle = e^{-\frac{\hbar}{T}} [\check{\alpha}(\lambda)]^{\frac{N}{2}} |0\rangle = e^{-\frac{\hbar}{T}} \left(\frac{\sinh\left(\lambda - \frac{\beta}{N} - \frac{\eta}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda - \frac{\beta}{N} + \frac{3}{2}\eta\right)} \right)^{\frac{N}{2}} |0\rangle =: d(\lambda) |0\rangle. \quad (3.2.16b)$$

Unter Einführung der Funktionen

$$\phi_{\pm}(\lambda) := [\sinh(\lambda \pm iu)]^{\frac{N}{2}}, \quad (3.2.17)$$

wobei $\beta/N =: -iu$, lassen sich explizite Ausdrücke der Pseudovakuum-Erwartungswerte des algebraischen Bethe-Ansatzes $a(\lambda)$ und $d(\lambda)$ durch

$$a(\lambda) = e^{\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_{-}(\lambda + \frac{\eta}{2})}{\phi_{-}(\lambda - \frac{3}{2}\eta)}, \quad d(\lambda) = e^{-\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_{+}(\lambda - \frac{\eta}{2})}{\phi_{+}(\lambda + \frac{3}{2}\eta)} \quad (3.2.18)$$

angeben. Aufgrund von (3.1.9) wird die physikalische Temperatur T zu

$$T = \frac{J \sinh(2\eta)}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{N} = \frac{iJ \sin(2\gamma)}{NT} =: -iu \quad (3.2.19)$$

umskaliert. Des Weiteren wird die Funktion

$$q(\lambda) := \prod_{j=1}^M \sinh(\lambda - \lambda_j) \quad (3.2.20)$$

definiert. Demnach ist der Eigenwert der Quantentransfer-Matrix $\Lambda^{[\frac{1}{2}]}(\lambda)$ zum Eigenzustand

$$|\{\lambda\}\rangle := B(\lambda_1) B(\lambda_2) \cdots B(\lambda_{M-1}) B(\lambda_M) |0\rangle$$

durch (2.5.8) gegeben,

$$\begin{aligned} \Lambda^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) &= a(\lambda) \frac{q(\lambda - \eta)}{q(\lambda)} + d(\lambda) \frac{q(\lambda + \eta)}{q(\lambda)} \\ &= e^{\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_{-}(\lambda + \frac{\eta}{2})}{\phi_{-}(\lambda - \frac{3}{2}\eta)} \frac{q(\lambda - \eta)}{q(\lambda)} + e^{-\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_{+}(\lambda - \frac{\eta}{2})}{\phi_{+}(\lambda + \frac{3}{2}\eta)} \frac{q(\lambda + \eta)}{q(\lambda)}, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

falls die Bethe-Ansatz-Gleichungen (2.5.7) erfüllt werden. Diese lauten

$$\frac{\phi_{+}(\lambda_j - \frac{\eta}{2}) \phi_{-}(\lambda_j - \frac{3}{2}\eta)}{\phi_{-}(\lambda_j + \frac{\eta}{2}) \phi_{+}(\lambda_j + \frac{3}{2}\eta)} = -e^{2\frac{\hbar}{T}} \frac{q(\lambda_j - \eta)}{q(\lambda_j + \eta)} \quad \text{für } j = 1, \dots, M. \quad (3.2.22)$$

Da die Quantendeterminante $\det_q(T^{[\frac{1}{2}]}(\lambda))$ und die Operatoren $B(\lambda)$ vertauschen, ist der zugehörige Eigenwert der Spin-1 Quantentransfer-Matrix $\Lambda^{[1]}(\lambda)$ zum Eigenvektor $|\{\lambda\}\rangle$ wegen (3.2.8) und (3.2.9) durch

$$\Lambda^{[1]}(\lambda) = \Lambda^{[\frac{1}{2}]}(\lambda + \frac{\eta}{2}) \Lambda^{[\frac{1}{2}]}(\lambda - \frac{\eta}{2}) - d(\lambda - \frac{\eta}{2}) a(\lambda + \frac{\eta}{2}) \quad (3.2.23)$$

gegeben. Explizit ist

$$\begin{aligned} \Lambda^{[1]}(\lambda) &= a\left(\lambda + \frac{\eta}{2}\right) a\left(\lambda - \frac{\eta}{2}\right) \frac{q(\lambda - \frac{3}{2}\eta)}{q(\lambda + \frac{\eta}{2})} + d\left(\lambda + \frac{\eta}{2}\right) a\left(\lambda - \frac{\eta}{2}\right) \frac{q(\lambda + \frac{3}{2}\eta) q(\lambda - \frac{3}{2}\eta)}{q(\lambda + \frac{\eta}{2}) q(\lambda - \frac{\eta}{2})} \\ &\quad + d\left(\lambda + \frac{\eta}{2}\right) d\left(\lambda - \frac{\eta}{2}\right) \frac{q(\lambda + \frac{3}{2}\eta)}{q(\lambda - \frac{\eta}{2})} \\ &= e^{2\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_{-}(\lambda + \eta)}{\phi_{-}(\lambda - \eta)} \frac{\phi_{-}(\lambda)}{\phi_{-}(\lambda - 2\eta)} \frac{q(\lambda - \frac{3}{2}\eta)}{q(\lambda + \frac{\eta}{2})} + \frac{\phi_{+}(\lambda)}{\phi_{+}(\lambda + 2\eta)} \frac{\phi_{-}(\lambda)}{\phi_{-}(\lambda - 2\eta)} \frac{q(\lambda + \frac{3}{2}\eta) q(\lambda - \frac{3}{2}\eta)}{q(\lambda + \frac{\eta}{2}) q(\lambda - \frac{\eta}{2})} \\ &\quad + e^{-2\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_{+}(\lambda)}{\phi_{+}(\lambda + 2\eta)} \frac{\phi_{+}(\lambda - \eta)}{\phi_{+}(\lambda + \eta)} \frac{q(\lambda + \frac{3}{2}\eta)}{q(\lambda - \frac{\eta}{2})}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Weiterhin gilt $M = N$ für den betragsmäßig größten Eigenwert $\Lambda_0^{[s]}(\lambda)$, $s = 1, 1/2$, also

$$|\{\lambda\}\rangle = B(\lambda_1) \cdots B(\lambda_N) |0\rangle \propto |\Phi_0\rangle$$

bis auf Normierung. Im Folgenden wird nur der Fall gerader N betrachtet. Wie in [2, 90] beschrieben wird, liegt für den Fall $M = N$ eine symmetrische Verteilung von sogenannten Zweier-String-Lösungen der Bethe-Ansatz-Zahlen, also $\text{Im}(\lambda_{2j-1}) = -\text{Im}(\lambda_{2j})$, $\text{Re}(\lambda_{2j-1}) = \text{Re}(\lambda_{2j})$ und $\lambda_k = -\lambda_{N-k+1}$, $k = 1, \dots, N = M$, bzw. $\lambda_{2j-1} = -\lambda_{2(N/2-j+1)}$ und $\lambda_{2j} = -\lambda_{2(N/2-j+1)-1}$, $j = 1, \dots, N/2$, vor, sofern der Anisotropieparameter γ hinreichend klein ist. Dabei gilt $0 < |\text{Im}(\lambda_k)| - \gamma/2 \ll 1$. Für den Grundzustand wurde diese Verteilung der Bethe-Ansatz-Zahlen in [71, 72] verifiziert.

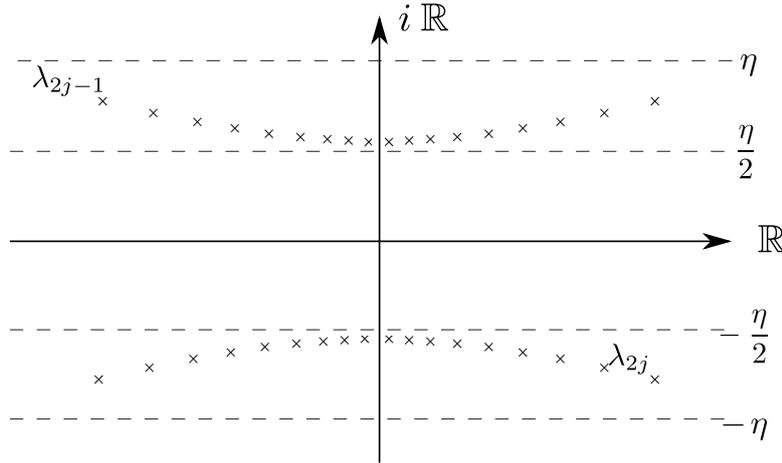


Abbildung 3.4.: Bethe-Ansatz-Verteilung. Für $M = N$ wird eine symmetrische Zweier-String-Verteilung der Bethe-Zahlen angenommen.

Die Funktion $q(\lambda)$ lässt sich dann beispielsweise durch

$$q(\lambda) = \prod_{j=1}^{N/2} \sinh(\lambda - \lambda_{2j-1}) \sinh(\lambda + \lambda_{2(N/2-j+1)-1}) = \prod_{j=1}^{N/2} \sinh(\lambda - \lambda_{2j-1}) \sinh(\lambda + \lambda_{2j-1}) \quad (3.2.25)$$

ausdrücken.

Wie bereits erwähnt, lassen sich die Eigenwerte (3.2.21) und (3.2.24) durch geeignete Hilfsfunktionen, welche ein nichtlineares Integralgleichungs-System erfüllen, ausdrücken. Dies wird unter anderem Gegenstand von Kapitel 4, „Nichtlineare Integralgleichungen“, sein.

3.2.1. „Crossing“-Symmetrie

Die \mathcal{R} -Matrix (A.0.5) bzw. (3.1.5a),

$$\mathcal{R}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \mu) := \mathcal{R}(\lambda, \mu) ,$$

erfüllt die Eigenschaften

- **Anfangsbedingung (Regularität):**^{II}

$$\mathcal{R}_{12}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(0) = P_{12} , \quad (3.2.26a)$$

- **Unitarität:**

$$\mathcal{R}_{12}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda) \mathcal{R}_{21}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(-\lambda) = \mathbb{1} , \quad (3.2.26b)$$

^{II}Für die Definition des Permutationsoperators P siehe (2.3.12).

- **PT-Symmetrie:**

$$P_{12} \mathcal{R}_{12}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda) P_{12} = \mathcal{R}_{21}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda) = \mathcal{R}_{12}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}{}^{t_1 t_2}(\lambda), \quad (3.2.26c)$$

- **„Crossing“-Symmetrie:**

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \eta) &= -\frac{\sinh(\lambda - \eta)}{\sinh(\lambda)} Q_1^{[1/2]} \mathcal{R}_{12}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}{}^{t_2}(-\lambda) Q_1^{[1/2]} \\ &= -\frac{\sinh(\lambda - \eta)}{\sinh(\lambda)} \left(Q_2^{[1/2]}\right)^{t_2} \mathcal{R}_{12}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}{}^{t_1}(-\lambda) \left(Q_2^{[1/2]}\right)^{t_2} \end{aligned} \quad (3.2.26d)$$

mit $Q_1^{[1/2]} := Q^{[1/2]} \otimes \mathbf{1}$, $Q_2^{[1/2]} := \mathbf{1} \otimes Q^{[1/2]}$ und

$$Q^{[1/2]} = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1/2} \\ q^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(Q^{[1/2]}\right)^2 = -\mathbf{1}.$$

In diesem Zusammenhang wird η daher als „Crossing“-Parameter bezeichnet (siehe dazu [61] oder Kapitel 5 in [35]).

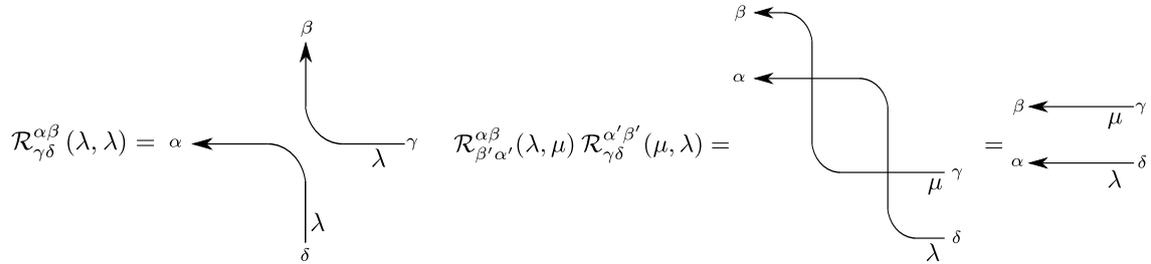


Abbildung 3.5.: Grafische Darstellung der Anfangsbedingung und der Unitarität.

Die Spin-1-Lösung der Yang-Baxter-Gleichung (3.1.5d), $\mathcal{R}^{[1,1]}(\lambda, \mu) = \mathcal{R}^{[1,1]}(\lambda - \mu)$, mit Anfangsbedingung

$$\mathcal{R}_{12}^{[1,1]}(0) = P_{12} \quad (3.2.27a)$$

ist ebenfalls unitär,

$$\mathcal{R}_{12}^{[1,1]}(\lambda) \mathcal{R}_{21}^{[1,1]}(-\lambda) = \mathbf{1}, \quad (3.2.27b)$$

und erfüllt die PT-Symmetrie,

$$P_{12} \mathcal{R}_{12}^{[1,1]}(\lambda) P_{12} = \mathcal{R}_{21}^{[1,1]}(\lambda) = \mathcal{R}_{12}^{[1,1]}{}^{t_1 t_2}(\lambda). \quad (3.2.27c)$$

Weiterhin wird die „Crossing“-Symmetrie (E.2.7) mit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}^{[1,1]}(\lambda - \eta) &= \frac{\sinh(\lambda - \eta) \sinh(\lambda - 2\eta)}{\sinh(\lambda) \sinh(\lambda + \eta)} Q_1^{[1]} \mathcal{R}_{12}^{[1,1]}{}^{t_2}(-\lambda) Q_1^{[1]} \\ &= \frac{\sinh(\lambda - \eta) \sinh(\lambda - 2\eta)}{\sinh(\lambda) \sinh(\lambda + \eta)} \left(Q_2^{[1]}\right)^{t_2} \mathcal{R}_{12}^{[1,1]}{}^{t_1}(-\lambda) \left(Q_2^{[1]}\right)^{t_2} \end{aligned} \quad (3.2.27d)$$

erfüllt. Dabei ist die Matrix $Q^{[1]}$ durch

$$Q^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-\eta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -e^{\eta} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $(Q^{[1]})^2 = \mathbf{1}$, $Q_1^{[1]} := Q^{[1]} \otimes \mathbf{1}$ und $Q_2^{[1]} := \mathbf{1} \otimes Q^{[1]}$ [76, 78, 84, 85]. Die Spin-1 \mathcal{R} -Matrix (3.1.5d) lässt sich grafisch durch Abbildung (2.1) darstellen, wobei hier die \mathcal{R} -Matrix als „Intertwiner“ auf

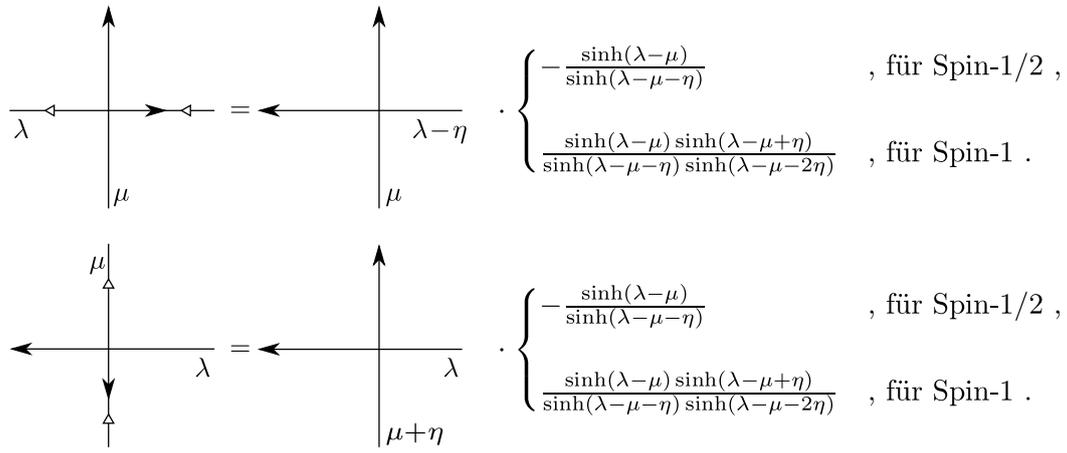


Abbildung 3.6.: „Crossing“-Symmetrie der \mathcal{R} -Matrizen (3.1.5a) und (3.1.5d). Hierbei ist zu beachten, dass für den Spin-1/2-Fall $(Q^{[1/2]})^2 = -\mathbb{1}$ ist, weshalb der skalare Faktor in (E.2.7) durch $\frac{\sinh(\lambda-\mu-\eta)}{\sinh(\lambda-\mu)}$ gegeben ist.

$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ operiert ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, 2, 3\} \equiv \{+, 0, -\}$). Die „Crossing“-Symmetrie liegt in einer speziellen Eigenschaft von Darstellungen der $U_q(sl_2)$ begründet (siehe Anhang (E.2.9)). Diese Eigenschaft gilt nicht unbedingt für \mathcal{R} -Matrizen anderer integrierbarer Modelle. Mit der „Crossing“-Symmetrie lassen sich die Quantentransfer-Matrizen der Spin-1/2- bzw. Spin-1-Kette zu

$$\begin{aligned}
 t(\lambda) &= \text{Spur}_j \left\{ \exp\left(\frac{h\sigma_j^z}{T}\right) \mathcal{R}_{j\overline{N}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \nu_{\overline{N}}) \mathcal{R}_{\overline{N-1}j}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]t_1}(\nu_{\overline{N-1}} - \eta - \lambda) \cdots \mathcal{R}_{\overline{1}j}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]t_1}(\nu_{\overline{1}} - \eta - \lambda) \right\} \\
 &= \text{Spur}_j \left\{ \exp\left(\frac{h\sigma_j^z}{T}\right) \mathcal{R}_{j\overline{N}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \nu_{\overline{N}}) \mathcal{R}_{j\overline{N-1}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \nu_{\overline{N-1}}) \cdots \mathcal{R}_{j\overline{1}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \nu_{\overline{1}}) \right\} \\
 &\quad \times \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\sinh(\lambda - \nu_{2k-1} + \eta)}{\sinh(\lambda - \nu_{2k-1})} \quad (3.2.28)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 t^{[1]}(\lambda) &= \text{Spur}_j \left\{ \exp\left(2\frac{hS_j^z}{T}\right) \mathcal{R}_{j\overline{N}}^{[1,1]}(\lambda - \nu_{\overline{N}}) \mathcal{R}_{\overline{N-1}j}^{[1,1]t_1}(\nu_{\overline{N-1}} - \eta - \lambda) \cdots \mathcal{R}_{\overline{1}j}^{[1,1]t_1}(\nu_{\overline{1}} - \eta - \lambda) \right\} \\
 &= \text{Spur}_j \left\{ \exp\left(2\frac{hS_j^z}{T}\right) \mathcal{R}_{j\overline{N}}^{[1,1]}(\lambda - \nu_{\overline{N}}) \mathcal{R}_{j\overline{N-1}}^{[1,1]}(\lambda - \nu_{\overline{N-1}}) \cdots \mathcal{R}_{j\overline{1}}^{[1,1]}(\lambda - \nu_{\overline{1}}) \right\} \\
 &\quad \times \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\sinh(\lambda - \nu_{2k-1} + \eta) \sinh(\lambda - \nu_{2k-1} + 2\eta)}{\sinh(\lambda - \nu_{2k-1}) \sinh(\lambda - \nu_{2k-1} - \eta)} \quad (3.2.29)
 \end{aligned}$$

umschreiben, wobei Inhomogenitäten, ausgedrückt durch $\nu_{2k} = \frac{\beta}{N}$, $\nu_{2k-1} = -\frac{\beta}{N} + \eta$ für $k = 1, \dots, N/2$, eingeführt wurden. Dabei sind die Inhomogenitäten wie folgt eingegrenzt.

$$\text{Im}(\nu_{2k}) \in (0, \gamma/2), \quad \text{Im}(\nu_{2k-1}) \in (\gamma/2, \gamma), \quad k = 1, \dots, N/2.$$

Die Funktionen $\phi_{\pm}(\lambda)$ sind durch

$$\phi_{-}(\lambda) = \prod_{k=1}^{N/2} \sinh(\lambda - \nu_{2k-1} + \eta), \quad \phi_{+}(\lambda) = \prod_{k=1}^{N/2} \sinh(\lambda - \nu_{2k}) \quad (3.2.30)$$

zu ersetzen. Also gilt

$$t(\lambda) \frac{\phi_{-}(\lambda - \eta)}{\phi_{-}(\lambda)} = \text{Spur}_j \left\{ \exp\left(\frac{h\sigma_j^z}{T}\right) \mathcal{R}_{j\overline{N}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \nu_{\overline{N}}) \mathcal{R}_{j\overline{N-1}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \nu_{\overline{N-1}}) \cdots \mathcal{R}_{j\overline{1}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \nu_{\overline{1}}) \right\} \quad (3.2.31)$$

sowie

$$t^{[1]}(\lambda) \frac{\phi_{-}(\lambda - 2\eta)\phi_{-}(\lambda - \eta)}{\phi_{-}(\lambda)\phi_{-}(\lambda + \eta)}$$

$$= \text{Spur}_j \left\{ \exp \left(2 \frac{\hbar S_j^z}{T} \right) \mathcal{R}_{j \overline{N}}^{[1,1]} (\lambda - \nu_{\overline{N}}) \mathcal{R}_{j \overline{N-1}}^{[1,1]} (\lambda - \nu_{\overline{N-1}}) \cdots \mathcal{R}_{j \overline{1}}^{[1,1]} (\lambda - \nu_{\overline{1}}) \right\}. \quad (3.2.32)$$

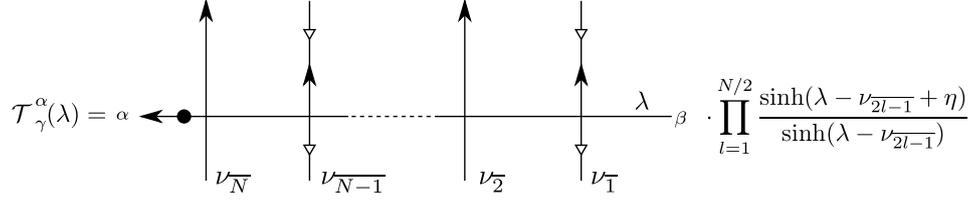


Abbildung 3.7.: Grafische Notation der Quantenmonodromie-Matrix unter Ausnutzung der „Crossing“-Symmetrie für die ungeraden Hilfsräume $\overline{1}, \overline{3}, \dots, \overline{N-1}$.

Eine wichtige Folgerung aus den Eigenschaften Anfangsbedingung, Unitarität und insbesondere „Crossing“-Symmetrie (siehe Abbildungen 3.5 und 3.6) ist die Inversionsrelation. Zunächst werden anders normierte \mathcal{R} -Matrizen eingeführt, sodass die Matrixeinträge polstellenfrei sind:

$$\tilde{\mathcal{R}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda) := \sinh(\lambda + \eta) \mathcal{R}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda), \quad (3.2.33a)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}^{[1, \frac{1}{2}]}(\lambda) := \sinh(\lambda + \eta) \mathcal{R}^{[1, \frac{1}{2}]}(\lambda), \quad (3.2.33b)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}^{[\frac{1}{2}, 1]}(\lambda) := \sinh(\lambda + 2\eta) \mathcal{R}^{[\frac{1}{2}, 1]}(\lambda), \quad (3.2.33c)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}^{[1, 1]}(\lambda) := \sinh(\lambda + \eta) \sinh(\lambda + 2\eta) \mathcal{R}^{[1, 1]}(\lambda). \quad (3.2.33d)$$

Analog zu den Monodromie-Matrizen (3.2.1) und (3.2.2) ergeben sich mit den \mathcal{R} -Matrizen (3.2.33) alternative Quantenmonodromie-Matrizen der Form

$$\tilde{\mathcal{T}}_a(\lambda) := \exp \left(\frac{\hbar \sigma_a^z}{T} \right) \tilde{\mathcal{R}}_{a \overline{N}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\lambda - \nu_{\overline{N}}) \tilde{\mathcal{R}}_{\overline{N-1} a}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{N-1}} - \lambda - \eta) \cdots \tilde{\mathcal{R}}_{\overline{1} a}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{1}} - \lambda - \eta), \quad (3.2.34a)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_a^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) := \exp \left(\frac{\hbar \sigma_a^z}{T} \right) \tilde{\mathcal{R}}_{a \overline{N}}^{[\frac{1}{2}, 1]}(\lambda - \nu_{\overline{N}} - \frac{\eta}{2}) \tilde{\mathcal{R}}_{\overline{N-1} a}^{[1, \frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{N-1}} - \lambda - \frac{\eta}{2}) \cdots \tilde{\mathcal{R}}_{\overline{1} a}^{[1, \frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{1}} - \lambda - \frac{\eta}{2}), \quad (3.2.34b)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{(a b)}^{[1]}(\lambda) := \exp \left(\frac{2\hbar S_{(a b)}^z}{T} \right) \tilde{\mathcal{R}}_{(a b) \overline{N}}^{[1, 1]}(\lambda - \nu_{\overline{N}}) \tilde{\mathcal{R}}_{\overline{N-1} (a b)}^{[1, 1]}(\nu_{\overline{N-1}} - \lambda - \eta) \cdots \tilde{\mathcal{R}}_{\overline{1} (a b)}^{[1, 1]}(\nu_{\overline{1}} - \lambda - \eta), \quad (3.2.34c)$$

wobei N als gerade angenommen wird. Folglich gilt der Zusammenhang

$$\tilde{t}(\lambda) = \phi_-(\lambda - \eta) \phi_+(\lambda + \eta) t(\lambda), \quad (3.2.35a)$$

$$\tilde{t}^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) = \phi_- \left(x - \frac{3}{2}\eta \right) \phi_+ \left(x + \frac{3}{2}\eta \right) t^{[\frac{1}{2}]}(\lambda), \quad (3.2.35b)$$

$$\tilde{t}^{[1]}(\lambda) = \phi_-(\lambda - 2\eta) \phi_-(\lambda - \eta) \phi_+(\lambda + \eta) \phi_+(\lambda + 2\eta) t^{[1]}(\lambda). \quad (3.2.35c)$$

Die Inversionsrelation lautet somit

$$\tilde{t}(\nu_{\overline{k}} \mid \{\nu_{\overline{i}}\}_{i=1}^N) \tilde{t}(\nu_{\overline{k}} - \eta \mid \{\nu_{\overline{i}}\}_{i=1}^N) = \prod_{i=1}^N \sinh(\nu_{\overline{k}} - \nu_{\overline{i}} + \eta) \sinh(\nu_{\overline{k}} - \nu_{\overline{i}} - \eta) \mathbb{1}^{\otimes N}, \quad (3.2.36a)$$

$$\tilde{t}^{[1]}(\nu_{\overline{k}} \mid \{\nu_{\overline{i}}\}_{i=1}^N) \tilde{t}^{[1]}(\nu_{\overline{k}} - \eta \mid \{\nu_{\overline{i}}\}_{i=1}^N) = \prod_{i=1}^N \left[\sinh(\nu_{\overline{k}} - \nu_{\overline{i}} + 2\eta) \sinh(\nu_{\overline{k}} - \nu_{\overline{i}} + \eta) \sinh(\nu_{\overline{k}} - \nu_{\overline{i}} - \eta) \sinh(\nu_{\overline{k}} - \nu_{\overline{i}} - 2\eta) \right] \mathbb{1}^{\otimes N} \quad (3.2.36b)$$

für $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Abbildung 3.8 zeigt einen grafischen Beweis. Folglich gilt für die betragsmäßig

$$\begin{aligned}
 \tilde{t}(\nu_{\bar{k}})\tilde{t}(\nu_{\bar{k}} - \eta) &= \text{Diagram 1} \\
 &= \text{Diagram 2} \cdot \sinh^2(\eta) \\
 &= \text{Diagram 3} \cdot \underbrace{\sinh^2(\eta) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N [-\sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} - \eta) \sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} + \eta)]}_{\prod_{i=1}^N [-\sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} - \eta) \sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} + \eta)]}
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.8.: Beweis der Inversionsrelation. Als Ausgangspunkt wird die mittels der „Crossing“-Symmetrie transformierte und unnormierte Transfer-Matrix $\tilde{t}(\lambda)$, siehe (3.2.35), verwendet. Anwenden der „Crossing“-Symmetrie auf der unteren Horizontalen sorgt dafür, dass zwei horizontale Linien gegenläufig mit demselben Spektralparameter $\nu_{\bar{k}}$ entstehen. Mittels der Anfangsbedingung und Unitarität folgt die Aussage (3.2.36), wobei N als gerade angenommen wurde. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde k gerade gesetzt. Für das Produkt der Spin-1 Transfer-Matrizen lässt sich der Beweis analog durchführen. Ein Magnetfeld lässt sich hierbei ohne Weiteres einführen.

größten, normierten Eigenwerte der Transfer-Matrizen (3.2.35)

$$\tilde{\Lambda}_0(\nu_{\bar{k}})\tilde{\Lambda}_0(\nu_{\bar{k}} - \eta) = \prod_{i=1}^N \sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} + \eta) \sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} - \eta), \quad (3.2.37a)$$

$$\tilde{\Lambda}_0^{[1]}(\nu_{\bar{k}})\tilde{\Lambda}_0^{[1]}(\nu_{\bar{k}} - \eta) = \prod_{i=1}^N \left[\sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} + 2\eta) \sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} + \eta) \sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} - \eta) \sinh(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} - 2\eta) \right], \quad (3.2.37b)$$

und für die isotropen Spin-1/2 bzw. Spin-1 Heisenberg-Modelle ($x \rightarrow x\gamma/2$, $\gamma \rightarrow 0$)

$$\tilde{\Lambda}_0(\nu_{\bar{k}})\tilde{\Lambda}_0(\nu_{\bar{k}} - 2i) = \prod_{i=1}^N (\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} + 2i)(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} - 2i), \quad (3.2.38a)$$

$$\tilde{\Lambda}_0^{[1]}(\nu_{\bar{k}})\tilde{\Lambda}_0^{[1]}(\nu_{\bar{k}} - 2i) = \prod_{i=1}^N \left[(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} + 4i)(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} + 2i)(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} - 2i)(\nu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{i}} - 4i) \right] \quad (3.2.38b)$$

für alle $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Die Eigenwerte $\tilde{\Lambda}_0^{[k]}(\lambda)$, $k \in \{1/2, 1\}$, der Transfer-Matrizen $\tilde{t}_0^{[k]}(\lambda)$ werden im weiteren Verlauf kurz durch die Symbole $\Lambda_{2k}(\lambda)$ ausgedrückt.

3.3. Dichte-Matrizen

Nach (2.6.5) und (2.6.9) ist die Dichte-Matrix für ein Kettensegment der Länge m der Spin-1 XXZ -Kette mit Spin- s -Hilfsraum ($s \in \{1/2, 1\}$) durch

$$D_{[1,m]}(T, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} D(\boldsymbol{\xi}), \quad D_{[1,m]}^{[2s]}(T, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} D^{[2s]}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.3.1)$$

bzw.

$$D_{[1,m]}(T, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} D(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathcal{D}_{[1,m]}^{[2s]}(T, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} \mathcal{D}^{[2s]}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.3.2)$$

mit

$$D(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\langle \Phi_0 | T(\xi_1) \otimes \dots \otimes T(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m \Lambda_0(\xi_j) | \Phi_0 \rangle}, \quad \mathcal{D}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}(\xi_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m \Lambda_0(\xi_j) | \Phi_0 \rangle}, \quad (3.3.3a)$$

$$D^{[2s]}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\langle \Phi_0 | T^{[s]}(\xi_1) \otimes \dots \otimes T^{[s]}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[s]}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle}, \quad \mathcal{D}^{[2s]}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}^{[s]}(\xi_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}^{[s]}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[s]}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} \quad (3.3.3b)$$

gegeben, wobei $T_j(\xi_j)$ und $T_j^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j)$ die mit $V(\xi_j)$, siehe (A.0.4), und $T_j^{[1]}(\xi_j)$ die mit $W(\xi_j)$, siehe (3.1.6) und (3.2.11), eichtransformierten Monodromie-Matrizen sind. Alternativ lassen sich die Dichte-Operatoren (3.3.3) auch über die Monodromie-Matrizen (3.2.34) formulieren. Da die Einträge der \mathcal{R} -Matrizen (3.2.33) mit Spin-1/2-Linien Polynome vom Grad 1 bzw. die Einträge der reinen Spin-1 \mathcal{R} -Matrix (3.2.33) Polynome vom Grad 2 sind, folgt schließlich, dass die Einträge der Dichte-Matrizen multipliziert mit den Eigenwerten,

$$D(\boldsymbol{\xi}) \prod_{j=1}^m \tilde{\Lambda}_0(\xi_j), \quad D^{[1]}(\boldsymbol{\xi}) \prod_{j=1}^m \tilde{\Lambda}_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j), \quad \text{bzw.} \quad D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) \prod_{j=1}^m \tilde{\Lambda}_0^{[1]}(\xi_j),$$

Polynome vom Grad N bzw. vom Grad $2N$ in den Variablen ξ_j , $j = 1, \dots, m$, sind. Im isotropen Limes sind die Dichte-Operatoren $\mathcal{D}(\boldsymbol{\xi})$ und $D(\boldsymbol{\xi})$ identisch.

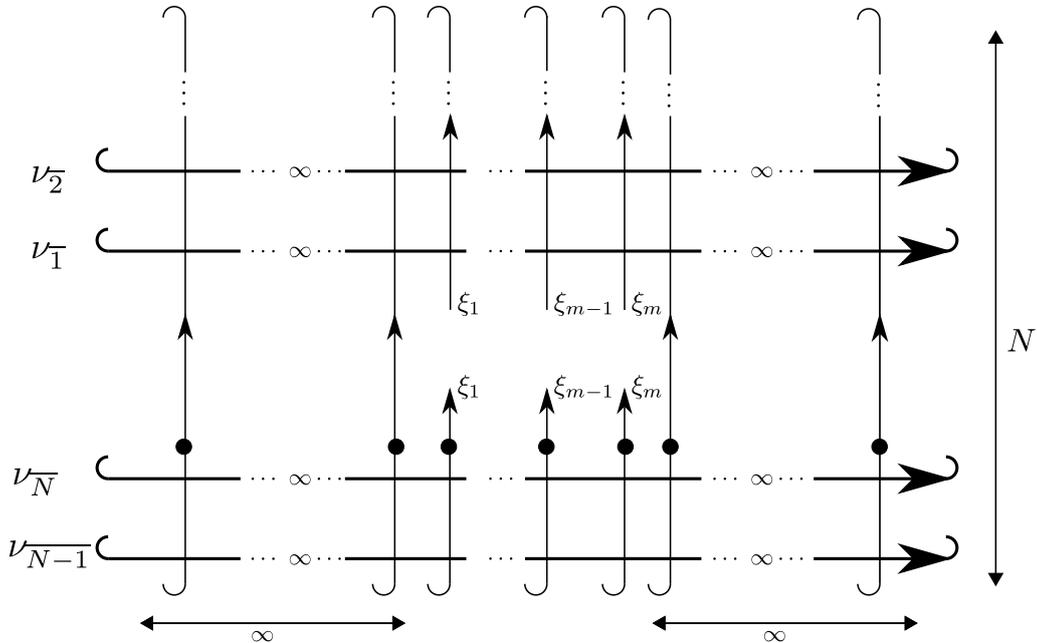


Abbildung 3.9.: Darstellung der Dichte-Operatoren $\mathcal{D}(\boldsymbol{\xi})$ und $\mathcal{D}^{[2s]}(\boldsymbol{\xi})$ multipliziert mit der zugehörigen Zustandssumme $\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{N,L}(\boldsymbol{\xi})$ und entsprechenden Faktoren der „Crossing“-Symmetrie. Weiterhin wurde die Periodizität der vertikalen Linien und die Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen benutzt. Die vertikalen Linien entsprechen Spin- s -Vektorräumen, $s \in \{1/2, 1\}$, während die horizontalen Linien stets Spin-1-Räume darstellen.

Für $s = 1$ gilt wegen (3.2.3) und (3.2.6c)

$$D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) = S^{\otimes m} \frac{\langle \Phi_0 | T^{[\frac{1}{2}]}(\xi_1 \mp \frac{\eta}{2}) \otimes T^{[\frac{1}{2}]}(\xi_1 \pm \frac{\eta}{2}) \otimes \cdots \otimes T^{[\frac{1}{2}]}(\xi_m \mp \frac{\eta}{2}) \otimes T^{[\frac{1}{2}]}(\xi_m \pm \frac{\eta}{2}) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[1]}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} S^{t \otimes m}. \quad (3.3.4)$$

Die Inhomogenitäten ξ_1, \dots, ξ_m sollen nun als rein reelle Parameter gewählt werden. Mit $\epsilon > 0$ und $\delta_j \in \{1 + \epsilon, -1 - \epsilon\}$ werden Parameter

$$\zeta_{2j-1} := \xi_j + \frac{\eta}{2} \delta_j, \quad \zeta_{2j} := \xi_j - \frac{\eta}{2} \delta_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.3.5)$$

eingeführt, wobei $\eta = i\gamma$ rein imaginär ist. Die geordnete Menge aller ζ_j wird mit $\boldsymbol{\zeta} := (\zeta_1, \dots, \zeta_{2m})$ definiert. Die inhomogene Dichte-Matrix (3.3.4) kann durch

$$\begin{aligned} D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} S^{\otimes m} \frac{\langle \Phi_0 | T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_1) \otimes \cdots \otimes T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_{2m}) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[1]}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} S^{t \otimes m} \\ &= \left[\prod_{j=1}^m \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j - \frac{\eta}{2}) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j + \frac{\eta}{2})}{\Lambda_0^{[1]}(\xi_j)} \right] S^{\otimes m} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D^{[1]}(\boldsymbol{\zeta}) S^{t \otimes m} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

ausgedrückt werden. Nach [50] verschwinden alle Matrixelemente $\langle \Phi_0 | T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_1) \otimes \cdots \otimes T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_{2m}) | \Phi_0 \rangle$, für die nicht

$$\sum_{j=1}^{2m} (\alpha_j - \beta_j) = 0 \quad (3.3.7)$$

gilt. Als Konsequenz bedeutet dies, dass für nicht-verschwindende Matrixelemente die Anzahl der Pluszeichen bzw. Minuszeichen in den Sequenzen (α_j) und (β_k) der oberen und unteren Indizes, welche mit $|\alpha^+|$ bzw. $|\beta^-|$ bezeichnet wird, identisch sind. Mit

$$\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{2m}), \quad x_j \in \mathbb{Z}_{2m} := \{1, \dots, 2m\}, \quad j = 1, 2, \dots, 2m,$$

wobei die Zahlen in den Mengen $\{x_1, \dots, x_p\}$ und $\{x_{p+1}, \dots, x_{2m}\}$ paarweise verschieden sind, wird durch

$$B_{2m} := \{b_p(\boldsymbol{x}) \mid 2m \geq x_1 > x_2 > \cdots > x_p \geq 1 \leq x_{p+1} < \cdots < x_{2m} \leq 2m; p = 0, \dots, 2m\}$$

mit $b_p(\boldsymbol{x}) = \sigma_{x_{2m}}^- \cdots \sigma_{x_{p+1}}^- \sigma_{x_1}^+ \cdots \sigma_{x_{2m}}^+ \sigma_{x_p}^- \cdots \sigma_{x_1}^-$ eine Basis zu diesem Unterraum gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \begin{cases} +, & \text{falls } j \in \{x_1, \dots, x_p\}, \\ -, & \text{sonst,} \end{cases} \\ b_p(\boldsymbol{x}) &= e_1^{\alpha_1} \cdots e_{2m}^{\alpha_{2m}}, \quad \text{wobei} \\ \beta_j &= \begin{cases} +, & \text{falls } j \notin \{x_{p+1}, \dots, x_{2m}\}, \\ -, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

mit $p = |\alpha^+|$. Sei

$$D^{[1]}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\zeta}) := \frac{\langle \Phi_0 | \text{Spur} \left\{ T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_1) \otimes \cdots \otimes T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_{2m}) b_p^t(\boldsymbol{x}) \right\} | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \prod_{j=1}^{2m} \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_j)}. \quad (3.3.8)$$

Dichte-Matrixelemente dieser Form wurden für die Spin-1/2 XXZ -Kette bei endlicher Temperatur in [47] berechnet. Für die Dichte-Matrix (3.3.4) folgt

$$\begin{aligned} D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) &= \left[\prod_{j=1}^m \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j - \frac{\eta}{2}) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j + \frac{\eta}{2})}{\Lambda_0^{[1]}(\xi_j)} \right] \sum_{b_p(\boldsymbol{x}) \in B_{2m}} S^{\otimes m} b_p(\boldsymbol{x}) S^{t \otimes m} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D^{[1]}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\zeta}) \\ &= \sum_{b_p(\boldsymbol{x}) \in B_{2m}} S^{\otimes m} b_p(\boldsymbol{x}) S^{t \otimes m} D^{[2]}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

wobei

$$D^{[2]}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\xi}) = \left[\prod_{j=1}^m \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j - \frac{\eta}{2}) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j + \frac{\eta}{2})}{\Lambda_0^{[1]}(\xi_j)} \right] \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D^{[1]}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\zeta}). \quad (3.3.10)$$

Für ein gegebenes Dichte-Matrixelement der Form

$$D^{[2]}_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\langle \Phi_0 | T_1^{[1]\alpha_1}(\xi_1) \dots T_m^{[1]\alpha_m}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[1]}(\xi_j)} \quad (3.3.11)$$

ist der lokale Raum Spin-1, weshalb die Indizes drei verschiedene Werte, $\alpha_j, \beta_k \in \{+, 0, -\}$, annehmen können. Die rechte Seite der Gleichung (3.3.11) kann durch Linearkombinationen der Koeffizienten $D^{[2]}(\boldsymbol{x} | \boldsymbol{\xi})$ dargestellt werden, da B_{2m} eine Basis des Unterraumes aller nicht-verschwindender Matrixelemente

$$\langle \Phi_0 | T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_1) \otimes \dots \otimes T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_{2m}) | \Phi_0 \rangle$$

ist. Mittels (3.2.11) können diese identifiziert werden. Ferner wird die Notation $(\alpha) := (\alpha_j)_{j=1}^m$, $(\beta) := (\beta_j)_{j=1}^m$, sowie $n_\sigma(x)$ mit $\sigma \in \{+, 0, -\}$ und $(x) = (\alpha), (\beta)$ eingeführt. Dann gilt

$$n_+(\alpha) + n_0(\alpha) + n_-(\alpha) = m, \quad (3.3.12a)$$

$$n_+(\beta) + n_0(\beta) + n_-(\beta) = m, \quad (3.3.12b)$$

$$n_+(\beta) - n_-(\beta) - n_+(\alpha) + n_-(\alpha) = 0, \quad (3.3.12c)$$

sowie

$$2n_+(\alpha) + n_0(\alpha) = 2n_+(\beta) + n_0(\beta), \quad (3.3.13)$$

wobei die letzte Beziehung aus (3.3.12) folgt, da für die oberen Indizes α_j und unteren Indizes β_j der Matrix $T^{[\frac{1}{2}]}(\zeta_j)$ die Bedingung (3.3.7) für Matrixeinträge ungleich Null gelten muss.

3.3.1. „Emptiness formation probability“

Die Wahrscheinlichkeit, einen String der Länge m anzutreffen, dessen Spins auf den jeweiligen Gitterplätzen alle bezüglich derselben Vorzugsrichtung, hier die z -Achse, in positive Richtung zeigen, nennt man „emptiness formation probability“ (EFP). Diese (inhomogene) m -Punkt-Korrelationsfunktion der Spin- s -Kette wird im Folgenden durch

$$P^{[2s]_m^+}(\boldsymbol{\xi}) := \langle e_{1+} \dots e_{m+} \rangle$$

definiert und entspricht dem Element $D^{[2s]_{+ \dots +}^+}(\boldsymbol{\xi})$ der Dichte-Matrix $D^{[2s]}(\boldsymbol{\xi})$. Mit (3.3.9) gilt per Konstruktion

$$D^{[2]_{+ \dots +}^+}(\boldsymbol{\xi}) = \left[\prod_{j=1}^m \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j - \frac{\eta}{2}) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j + \frac{\eta}{2})}{\Lambda_0^{[1]}(\xi_j)} \right] \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D^{[1]_{+ \dots +}^+}(\boldsymbol{\zeta}). \quad (3.3.14)$$

Liegt der feldfreie Fall vor, d.h. es existieren keine äußeren magnetischen Felder, so gilt die Spinumkehr-Symmetrie. In diesem Fall ist die Orientierung des betrachteten Strings bezüglich der z -Achse bedeutungslos,

$$D^{[2s]_{+ \dots +}^+}(\boldsymbol{\xi}) = D^{[2s]_{- \dots -}^-}(\boldsymbol{\xi}).$$

3.3.2. Dichte-Matrix mit Alpha-Parameter

Nun soll die Dichte-Matrix für endliche Temperatur, äußeres Magnetfeld und zusätzlichen Parameter, der im Folgenden Alpha-Parameter genannt wird, betrachtet werden. Wegen der Symmetrie der \mathcal{R} -Matrizen (3.1.5a) und (3.1.5d),

$$\left[\mathcal{R}^{[s,s]}(\lambda), e^{\kappa S_z} \otimes e^{\kappa S_z} \right] = 0,$$

lässt sich nicht nur ein äußeres Magnetfeld, z.B. durch $\kappa = 2h/T$ (vgl. (2.4.22)), sondern auch eine „einseitige“ Modifikation einführen. Dazu kann zum Beispiel eine linksseitige Modifikation durch Einschieben des Operators

$$\left(e^{2\alpha\eta S^z} \right)^{\otimes k} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m+k)} \quad \text{mit } L = 2k + m \quad (3.3.15)$$

in Abhängigkeit des Alpha-Parameters, α , erzeugt werden. Dieser entspricht für die Spin-1/2-Kette dem in [22] eingeführten Regularisierungsparameter.


 Abbildung 3.10.: Grafische Notation des zusätzlichen Operators $e^{2\alpha\eta S^z}$.

Die dementsprechend modifizierten Monodromie-Matrizen werden durch

$$T(\xi_j; \alpha) := e^{2\alpha\eta S^z} T(\xi_j), \quad \mathcal{T}(\xi_j; \alpha) := e^{2\alpha\eta S^z} \mathcal{T}(\xi_j), \quad (3.3.16a)$$

$$T^{[s]}(\xi_j; \alpha) := e^{2\alpha\eta S^z} T^{[s]}(\xi_j), \quad \mathcal{T}^{[s]}(\xi_j; \alpha) := e^{2\alpha\eta S^z} \mathcal{T}^{[s]}(\xi_j) \quad (3.3.16b)$$

gegeben. Die Transfer-Matrizen ergeben sich wie gewohnt durch Spurbilden über den Hilfsraum,

$$t(\xi; \alpha) := \text{Spur}_j \{ \mathcal{T}_j(\xi; \alpha) \}.$$

Somit ist die Verallgemeinerung von (3.3.3) durch

$$D(\xi; \alpha) = \frac{\langle \Phi_0^\alpha | T(\xi_1) \otimes \cdots \otimes T(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^\alpha | \prod_{j=1}^m \Lambda_0(\xi_j) | \Phi_0 \rangle}, \quad \mathcal{D}(\xi; \alpha) = \frac{\langle \Phi_0^\alpha | \mathcal{T}(\xi_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^\alpha | \prod_{j=1}^m \Lambda_0(\xi_j) | \Phi_0 \rangle}, \quad (3.3.17a)$$

$$D^{[2s]}(\xi; \alpha) = \frac{\langle \Phi_0^\alpha | T^{[s]}(\xi_1) \otimes \cdots \otimes T^{[s]}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^\alpha | \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[s]}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle}, \quad \mathcal{D}^{[2s]}(\xi; \alpha) = \frac{\langle \Phi_0^\alpha | \mathcal{T}^{[s]}(\xi_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}^{[s]}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^\alpha | \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[s]}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} \quad (3.3.17b)$$

gegeben, wobei $|\Phi_0^\alpha\rangle$ der Eigenvektor bezüglich des betragsmäßig größten Eigenwertes der α -deformierten Transfer-Matrizen, $\Lambda_0(\xi_j; \alpha)$ und $\Lambda_0^{[s]}(\xi_j; \alpha)$, ist. Hier wird vorausgesetzt, dass

$$\langle \Phi_0^\alpha | \Phi_0 \rangle \neq 0$$

gilt.

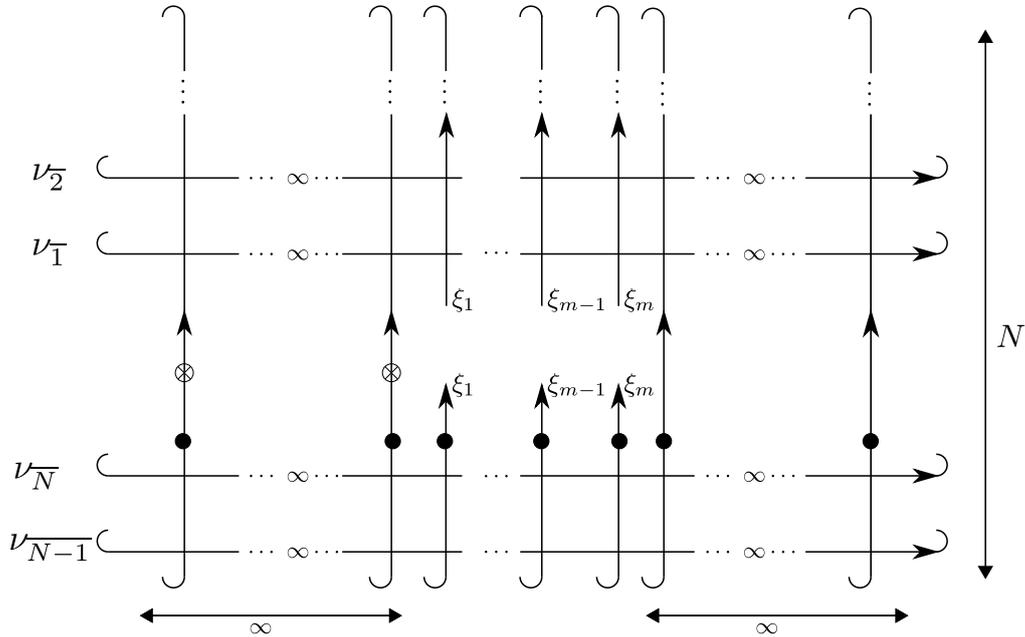


Abbildung 3.11.: Grafische Notation der Dichte-Operatoren mit Alpha-Parameter multipliziert mit der entsprechenden Zustandssumme und Normierungsfaktor der „Crossing“-Symmetrie.

Da für den Beweis (3.2.36) ein (lokales) Magnetfeld keinen Einfluss hat, gilt die Inversionsrelation ebenfalls für die normierten Eigenwerte

$$\tilde{\Lambda}_0(\lambda; \alpha) := \phi_-(\lambda - \eta)\phi_+(\lambda + \eta)\Lambda_0(\lambda; \alpha), \quad (3.3.18a)$$

$$\tilde{\Lambda}_0^{[1]}(\lambda; \alpha) := \phi_-(\lambda - 2\eta)\phi_-(\lambda - \eta)\phi_+(\lambda + \eta)\phi_+(\lambda + 2\eta)\Lambda_0^{[1]}(\lambda; \alpha). \quad (3.3.18b)$$

Eigenschaften

Für die Dichte-Operatoren (3.3.17) gilt unverändert weiterhin die

- „Intertwining“-Relation (2.6.12),
- Reduktionsbedingung:

$$\text{Spur}_m \{D(\xi_1, \dots, \xi_m; \alpha)\} = D(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}; \alpha), \quad (3.3.19a)$$

$$\begin{aligned} \text{Spur}_1 \left\{ D(\xi_1, \dots, \xi_m; \alpha) \left(e^{2\eta\alpha S^z} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m-1)} \right) \right\} &= \frac{\langle \Phi_0^\alpha | t(\xi_1; \alpha) \otimes T(\xi_2) \otimes \dots \otimes T(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^\alpha | \Lambda_0(\xi_1) \prod_{j=2}^m \Lambda_0(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} \\ &= \frac{\Lambda_0(\xi_1; \alpha)}{\Lambda_0(\xi_1)} \frac{\langle \Phi_0^\alpha | T(\xi_2) \otimes \dots \otimes T(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^\alpha | \prod_{j=2}^m \Lambda_0(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} = \frac{\Lambda_0(\xi_1; \alpha)}{\Lambda_0(\xi_1)} D(\xi_2, \dots, \xi_m; \alpha). \end{aligned} \quad (3.3.19b)$$

Für den Quotienten der Eigenwerte wird die Funktion

$$\rho(\lambda) := \frac{\Lambda_0(\lambda; \alpha)}{\Lambda_0(\lambda)} \quad (3.3.20)$$

eingeführt. Obige Eigenschaften werden auch von den Dichte-Operatoren $D^{[2s]}(\xi_1, \dots, \xi_m; \alpha)$ erfüllt. Es sind lediglich die Eigenwerte durch die Entsprechenden zu ersetzen.

- **Asymptotik:** Der Dichte-Operator $D^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_m; \alpha)$ besitzt die Asymptotik

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_m \rightarrow \infty} D^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_m; \alpha) &= \frac{D^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}; \alpha) \otimes \exp\left(\frac{h\sigma^z}{T}\right)}{\lim_{\xi_m \rightarrow \infty} \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_m)} \\ &= \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{h}{T}\right)} D^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}; \alpha) \otimes \exp\left(\frac{h\sigma^z}{T}\right), \end{aligned} \quad (3.3.21a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_m \rightarrow \infty} D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_m; \alpha) &= \frac{D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}; \alpha) \otimes \exp\left(\frac{2hS^z}{T}\right)}{\lim_{\xi_m \rightarrow \infty} \Lambda_0^{[1]}(\xi_m)} \\ &= \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{2h}{T}\right) + 1} D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}; \alpha) \otimes \exp\left(\frac{2hS^z}{T}\right). \end{aligned} \quad (3.3.21b)$$

Analoge Gleichungen gelten auch für $\xi_1 \rightarrow \infty$.

3.4. Fusion höher-dimensionaler Spin-Darstellungen

Analog zu (3.1.3) lassen sich durch Verkettung fusionierter \mathcal{R} -Matrizen höher-dimensionale Spin-Darstellungen konstruieren. Im Folgenden wird sich auf den isotropen Fall beschränkt. Für die \mathcal{R} -Matrix (3.1.8b) gilt

$$\left. \frac{x+2i}{x-4i} \mathcal{R}^{XXX[1, \frac{1}{2}]}(x) \right|_{x=-2i} = \mathbb{1}_6 - \left(S^{[\frac{3}{2}], (1 \otimes \frac{1}{2})} \right)^t S^{[\frac{3}{2}], (1 \otimes \frac{1}{2})} = \mathbb{1}_6 - P^{[\frac{3}{2}]} = P^{[\frac{1}{2}]}, \quad (3.4.1)$$

wobei die Operatoren $P^{[s]}$, $s \in \{1/2, 3/2\}$, die Projektionsoperatoren auf den Spin- s -Unterraum des Tensorproduktraumes $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2 \cong V^{[1]} \otimes V^{[\frac{1}{2}]}$ sind^{III}. Aus den Yang-Baxter-Gleichungen (3.1.4) folgen analog zu (3.1.2) die Relationen

$$P_{12}^{[\frac{1}{2}]} \mathcal{R}^{XXX[1, s_3]}(x) \mathcal{R}^{XXX[\frac{1}{2}, s_3]}(x+2i) P_{12}^{[\frac{3}{2}]} = 0, \quad (3.4.2a)$$

$$P_{23}^{[\frac{1}{2}]} \mathcal{R}^{XXX[s_1, \frac{1}{2}]}(x) \mathcal{R}^{XXX[s_1, 1]}(x+2i) P_{23}^{[\frac{3}{2}]} = 0, \quad (3.4.2b)$$

wobei $s_1, s_3 \in \{1/2, 1\}$. Das bedeutet, dass die \mathcal{R} -Matrizen

$$\mathcal{R}^{XXX[1, s_3]}(x) \mathcal{R}^{XXX[\frac{1}{2}, s_3]}(x+2i)$$

den Raum $V^{[\frac{3}{2}]} \otimes V^{[s_3]} \cong \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^{2s_3+1}$ beziehungsweise

$$\mathcal{R}^{XXX[s_1, \frac{1}{2}]}(x) \mathcal{R}^{XXX[s_1, 1]}(x+2i)$$

^{III}Zur Konstruktion der Matrix $S^{[\frac{3}{2}], (1 \otimes \frac{1}{2})}$ siehe Anhang E.1.3, „Spin-1-Projektionsoperatoren“.

den Raum $V^{[s_1]} \otimes V^{[\frac{3}{2}]} \cong \mathbb{C}^{2s_1+1} \otimes \mathbb{C}^4$ invariant lassen, wobei $V^{[\frac{3}{2}]}$ der zu Spin-3/2 gehörige Quadruplett-Raum und $V^{[\frac{1}{2}]}$ der zu Spin-1/2 gehörige Dublett-Raum ist. Mit diesen Eigenschaften und der YBG (3.1.4) lässt sich zeigen, dass auch die zur Spin-3/2-Darstellung fusionierten \mathcal{R} -Matrizen

$$\mathcal{R}^{XXX}[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}](x) = \mathcal{R}_{1 \langle (23) 4 \rangle}^{XXX}(x) := S_{\langle 23 \rangle 4} \mathcal{R}_{14}^{XXX}(x) \mathcal{R}_{1 \langle 23 \rangle}^{XXX}(x+2i) S_{\langle 23 \rangle 4}^t, \quad (3.4.3a)$$

$$\mathcal{R}^{XXX}[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}](x) = \mathcal{R}_{\langle (12) 3 \rangle 4}^{XXX}(x) := S_{\langle 12 \rangle 3} \mathcal{R}_{\langle 12 \rangle 4}^{XXX}(x-2i) \mathcal{R}_{34}^{XXX}(x) S_{\langle 12 \rangle 3}^t, \quad (3.4.3b)$$

$$\mathcal{R}^{XXX}[1, \frac{3}{2}](x) = \mathcal{R}_{\langle (12) \rangle \langle (34) 5 \rangle}^{XXX}(x) := S_{\langle 34 \rangle 5} \mathcal{R}_{\langle 12 \rangle 5}^{XXX}(x) \mathcal{R}_{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}^{XXX}(x+2i) S_{\langle 34 \rangle 5}^t, \quad (3.4.3c)$$

$$\mathcal{R}^{XXX}[\frac{3}{2}, 1](x) = \mathcal{R}_{\langle (12) 3 \rangle \langle 45 \rangle}^{XXX}(x) := S_{\langle 12 \rangle 3} \mathcal{R}_{\langle 12 \rangle \langle 45 \rangle}^{XXX}(x-2i) \mathcal{R}_{3 \langle 45 \rangle}^{XXX}(x) S_{\langle 12 \rangle 3}^t, \quad (3.4.3d)$$

$$\mathcal{R}^{XXX}[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}](x) = \mathcal{R}_{\langle (12) 3 \rangle \langle (45) 6 \rangle}^{XXX}(x) := S_{\langle 12 \rangle 3} \mathcal{R}_{\langle 12 \rangle \langle (45) 6 \rangle}^{XXX}(x-2i) \mathcal{R}_{3 \langle (45) 6 \rangle}^{XXX}(x) S_{\langle 12 \rangle 3}^t \quad (3.4.3e)$$

die YBG (3.1.4) auch für $s_j \in \{1/2, 1, 3/2\}$, $j = 1, 2, 3$, erfüllen. Mit obigem Konstruktionsverfahren gilt dies für beliebige Spin-Darstellungen. Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, zu überprüfen, ob die \mathcal{R} -Matrizen Eigenschaften der Art (3.1.2) bzw. (3.4.2) besitzen. Nach [100] ist diese Eigenschaft aber gewährleistet, da die nach obigem Konstruktionschema eingeführten fusionierten \mathcal{R} -Matrizen sich als Summe über Projektoren auf die Spin-Unterräume zerlegen lassen.

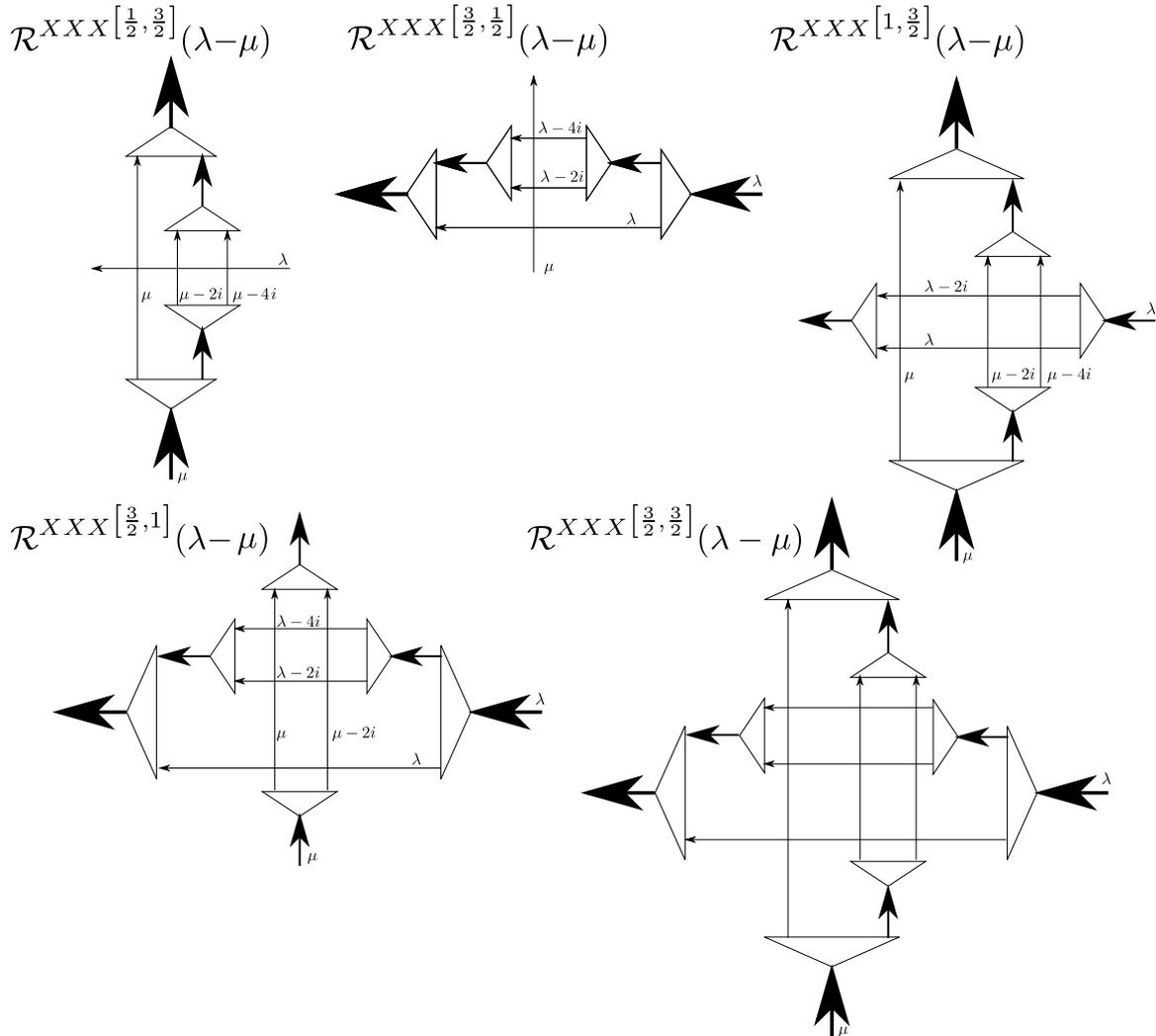


Abbildung 3.12.: Grafische Darstellung der fusionierten \mathcal{R} -Matrizen (3.4.3). Hierbei wurden die Relationen (3.4.2) verwendet, um die grafische Notation zu vereinfachen.

Mit den Verschachtelungen der links- und rechtsseitigen Symmetrisierer-Operatoren, (E.1.12) und (E.1.14), welche für die Spin- s -Darstellung die Form

$$S^{[s]} := S^{[s],((s-\frac{1}{2})\otimes\frac{1}{2})} \left(S^{[s-\frac{1}{2}],((s-1)\otimes\frac{1}{2})} \otimes \mathbb{1}_2 \right) \left(S^{[s-1],((s-\frac{3}{2})\otimes\frac{1}{2})} \otimes \mathbb{1}_2^{\otimes 2} \right) \dots$$

$$\dots \left(S^{[1],(\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2})} \otimes \mathbb{1}_2^{\otimes 2(s-1)} \right) \text{ (linksseitig),} \quad (3.4.4a)$$

$$\left(S^{[s]} \right)^t := \left(S^{[1],(\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2})} \otimes \mathbb{1}_2^{\otimes 2(s-1)} \right)^t \left(S^{[\frac{3}{2}],(1\otimes\frac{1}{2})} \otimes \mathbb{1}_2^{\otimes 2(s-1)-1} \right)^t \dots$$

$$\dots \left(S^{[s-\frac{1}{2}],((s-1)\otimes\frac{1}{2})} \otimes \mathbb{1}_2 \right)^t \left(S^{[s],((s-\frac{1}{2})\otimes\frac{1}{2})} \right)^t \text{ (rechtsseitig)} \quad (3.4.4b)$$

bzw.

$$S_{1\ 2\dots 2s}^{[s]} := S_{\langle\dots\langle(1\ 2)\ 3\rangle\dots 2s-1\rangle 2s} S_{\langle\dots\langle(1\ 2)\ 3\rangle\dots 2s-2\rangle 2s-1} \dots S_{\langle 1\ 2\rangle 3} S_{1\ 2} \text{ (linksseitig),} \quad (3.4.4c)$$

$$\left(S_{1\ 2\dots 2s}^{[s]} \right)^t := S_{1\ 2}^t S_{\langle 1\ 2\rangle 3}^t \dots S_{\langle\dots\langle(1\ 2)\ 3\rangle\dots 2s-2\rangle 2s-1}^t S_{\langle\dots\langle(1\ 2)\ 3\rangle\dots 2s-1\rangle 2s}^t \text{ (rechtsseitig)} \quad (3.4.4d)$$

annehmen, führt obiges Konstruktionsverfahren für beliebige Darstellungen zum Spin s auf folgende \mathcal{R} -Matrizen:

$$\mathcal{R}^{XXX[\frac{1}{2},s]}(x) = \mathcal{R}_{1\langle\dots\langle(2\ 3)\ 4\rangle\dots 2s+1\rangle}^{XXX}(x)$$

$$= S_{2\ 3\dots 2s+1}^{[s]} \left[\prod_{k=1}^{\widehat{2s}} \mathcal{R}_{1\ k+1}^{XXX}(x + 2i(2s - k)) \right] \left(S_{2\ 3\dots 2s+1}^{[s]} \right)^t, \quad (3.4.5a)$$

$$\mathcal{R}^{XXX[s,\frac{1}{2}]}(x) = \mathcal{R}_{\langle\dots\langle(1\ 2)\ 3\rangle\dots 2s\rangle 2s+1}^{XXX}(x)$$

$$= S_{1\ 2\dots 2s}^{[s]} \left[\prod_{k=1}^{\widehat{2s}} \mathcal{R}_{k\ 2s+1}^{XXX}(x - 2i(2s - k)) \right] \left(S_{1\ 2\dots 2s}^{[s]} \right)^t, \quad (3.4.5b)$$

$$\mathcal{R}^{XXX[s,s]}(x) = \mathcal{R}_{\langle\dots\langle(1\ 2)\ 3\rangle\dots 2s\rangle \langle\dots\langle(2s+1\ 2s+2)\ 2s+3\rangle\dots 4s\rangle}^{XXX}(x)$$

$$= S_{1\ 2\dots 2s}^{[s]} \left[\prod_{k=1}^{\widehat{2s}} \mathcal{R}_{k\langle\dots\langle(2s+1\ 2s+2)\ 2s+3\rangle\dots 4s\rangle}^{XXX}(x - 2i(k - 1)) \right] \left(S_{1\ 2\dots 2s}^{[s]} \right)^t$$

$$= S_{1+2s\ 2+2s\dots 4s}^{[s]} \left[\prod_{k=1}^{\widehat{2s}} \mathcal{R}_{\langle\dots\langle(1\ 2)\ 3\rangle\dots 2s\rangle k+2s}^{XXX}(x + 2i(2s - k)) \right] \left(S_{1+2s\ 2+2s\dots 4s}^{[s]} \right)^t$$

$$= S_{1\ 2\dots 2s}^{[s]} S_{1+2s\ 2+2s\dots 4s}^{[s]} \left[\prod_{k=1}^{\widehat{2s}} \prod_{j=1}^{\widehat{2s}} \mathcal{R}_{j\ k+2s}^{XXX}(x + 2i(j - k)) \right] \left(S_{1+2s\ 2+2s\dots 4s}^{[s]} \right)^t \left(S_{1\ 2\dots 2s}^{[s]} \right)^t. \quad (3.4.5c)$$

3.4.1. Bethe-Ansatz-Lösungen

Allgemein lässt sich die Monodromie-Matrix mit Quantenraum $(\mathbb{C}^{2s+1})^{\otimes \overline{N}}$ (Tensorproduktraum \overline{N} -vieler Spin- s -Linien) und Hilfsraum \mathbb{C}^{2k+1} (korrespondierend zum Spin- k -Raum) wie folgt einführen:

$$\mathcal{T}_a^{[s;k]}(\lambda) := \exp\left(2\frac{h S_a^z(k)}{T}\right) \mathcal{R}_{a\ \overline{N}}^{[k,s]}(\lambda + 2i(k-1) - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\overline{N-1}\ a}^{[s,k]}(-\frac{\beta}{N} - \lambda - 2i(k-1)) \dots$$

$$\dots \mathcal{R}_{a\ \frac{1}{2}}^{[k,s]}(\lambda + 2i(k-1) - \frac{\beta}{N}) \mathcal{R}_{\frac{1}{2}\ a}^{[s,k]}(-\frac{\beta}{N} - \lambda - 2i(k-1)), \quad (3.4.6)$$

wobei $S^z(k)$ der zugehörige Spin-Operator der Spin- k -Darstellung in z -Richtung ist. Mit den Überlegungen in Kapitel 3.2, „Bethe-Ansatz-Lösungen“, kann die Monodromie-Matrix $\mathcal{T}_a^{[s;k]}$ analog zu (3.2.3) in folgender Form dargestellt werden;

$$\mathcal{T}_{\langle\dots\langle(1\ 2)\ 3\rangle\dots}^{[s;k]}(\lambda) = S_{1\ 2\dots 2k}^{[k]} \mathcal{T}_1^{[s;\frac{1}{2}]}(\lambda - i(2k-1)) \dots \mathcal{T}_{2k}^{[s;\frac{1}{2}]}(\lambda + i(2k-1)) \left(S_{1\ 2\dots 2k}^{[k]} \right)^t. \quad (3.4.7)$$

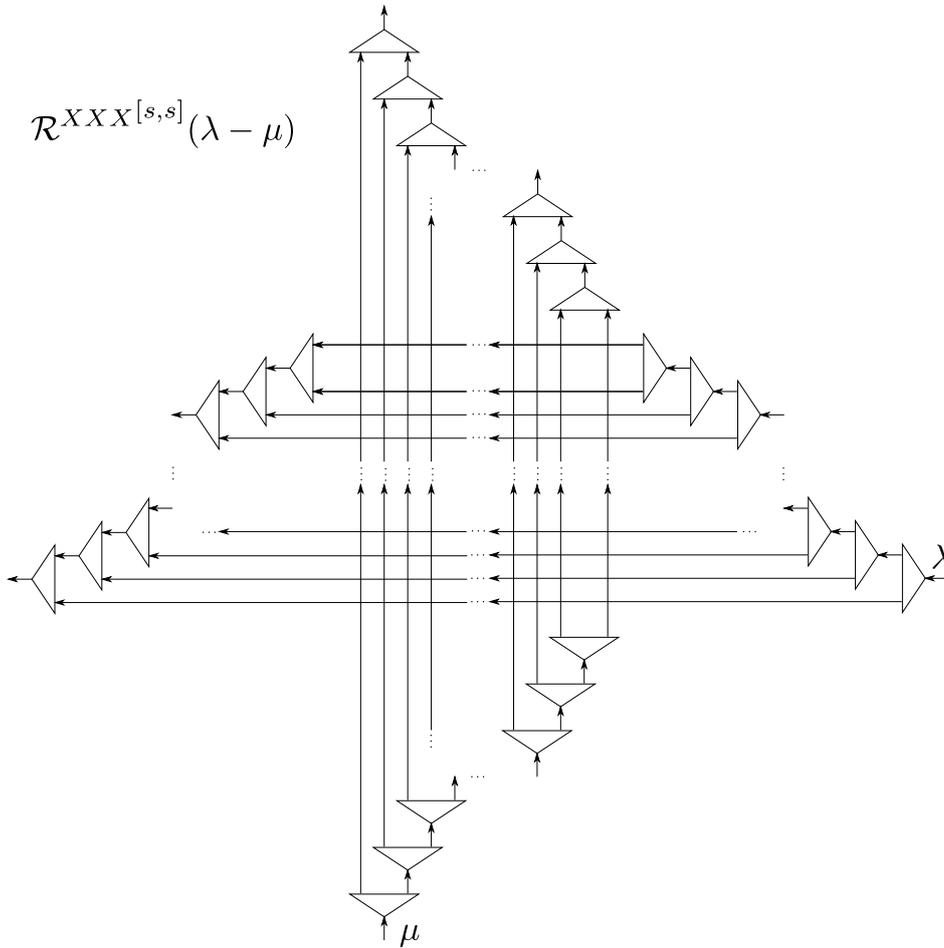


Abbildung 3.13.: Grafische Darstellung der fusionierten \mathcal{R} -Matrix (3.4.5c), wobei entsprechende Invarianzbedingungen bezüglich höher-dimensionaler Spin-Darstellungen vorausgesetzt wurden.

Die zugehörigen Transfer-Matrizen sind wieder durch die Spur der Monodromie-Matrix bezüglich des Hilfsraumes,

$$t^{[s;k]}(\lambda) := \text{Spur}_a \left\{ \mathcal{T}_a^{[s;k]}(\lambda) \right\}, \quad (3.4.8)$$

definiert. Der betragsmäßig größte Eigenwert wird mit $\Lambda_0^{[s;k]}(\lambda)$ bezeichnet. Kompatibel zu (3.2.34) werden anders normierte Transfer-Matrizen, definiert durch

$$\tilde{\mathcal{T}}^{[s;\frac{1}{2}]}(\lambda) := \phi_+(\lambda + (2s+1)i) \phi_-(\lambda - (2s+1)i) \mathcal{T}^{[s;\frac{1}{2}]}(\lambda) \quad (3.4.9)$$

und allgemein für $k \geq 1$

$$\tilde{\mathcal{T}}^{[s;k]}(\lambda) := \prod_{p=0}^{2k-1} \phi_+(\lambda + 2i(s+k-p)) \phi_-(\lambda - 2i(s-k+1+p)) \mathcal{T}^{[s;k]}(\lambda), \quad (3.4.10)$$

eingeführt ^{IV}. Nach den Ergebnissen der Fusionshierarchie von [100] sind die Eigenwerte der Transfer-Matrizen durch

$$\Lambda_0^{[s;\frac{1}{2}]}(x) = \bar{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x) + \bar{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x), \quad \Lambda_0^{[s;k]}(x) = \sum_{l=0}^{2k} \bar{\lambda}_l^{(k)}(x), \quad k \geq 1, \quad (3.4.11)$$

$$\bar{\lambda}_l^{(k)}(x) := \prod_{j=0}^{2k-l-1} \bar{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x + i(2(s-j)-1)) \prod_{j=0}^{l-1} \bar{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x - i(2(s-j)-1)),$$

^{IV}Diese Monodromie-Matrizen entsprechen der Definition in [100].

Für die Eigenwerte der Transfer-Matrix gilt $\text{Spur}\{\tilde{\mathcal{T}}^{[s;k]}(\lambda)\} \equiv T_{2k}(\lambda)$, welche hier mit $\Lambda_{2k}(\lambda)$ bezeichnet werden.

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x) &:= d^{(s)}(x) \frac{q(x+2i)}{q(x)} = e^{-\frac{\hbar}{T} \frac{\phi_+(x-i(2s-1))}{\phi_+(x+i(2s+1))}} \frac{q(x+2i)}{q(x)}, \\ \bar{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x) &:= a^{(s)}(x) \frac{q(x-2i)}{q(x)} = e^{\frac{\hbar}{T} \frac{\phi_-(x+i(2s-1))}{\phi_-(x-i(2s+1))}} \frac{q(x-2i)}{q(x)}\end{aligned}$$

gegeben, wobei die Funktionen $a^{(k)}(x)$ und $d^{(k)}(x)$ die Pseudovakuum-Erwartungswerte sind.

Die Bethe-Ansatz-Gleichungen sind durch

$$\frac{\bar{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x_j)}{\bar{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x_j)} = -1 \quad \forall x_j \in \{x_k\}_{k=1}^M \quad (3.4.12)$$

gegeben, wobei $\{x_k | k = 1, \dots, M\}$ die Menge aller Bethe-Ansatz-Zahlen ist. Analog zu (4.1.7) werden die Funktionen

$$\mathfrak{a}^{(s)}(x) := \frac{\bar{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x)}{\bar{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x)}, \bar{\mathfrak{a}}^{(s)}(x) := \frac{1}{\mathfrak{a}^{(s)}(x)}, \mathfrak{A}^{(s)}(x) := 1 + \mathfrak{a}^{(s)}(x), \bar{\mathfrak{A}}^{(s)}(x) := 1 + \bar{\mathfrak{a}}^{(s)}(x) \quad (3.4.13)$$

eingeführt. Die Eigenwerte der zugehörigen Transfer-Matrizen bezüglich der unnormierten Monodromie-Matrizen (3.4.10) sind dann durch

$$\Lambda_{2k}(x) \equiv \tilde{\Lambda}_0^{[s;k]}(x) := \Lambda_0^{[s;k]}(x) \left[\prod_{j=0}^{2k-1} \phi_+(x+2i(s+k-j)) \phi_-(x-2i(s-k+j+1)) \right] \quad (3.4.14)$$

gegeben. Explizit folgt

$$\begin{aligned}\Lambda_1(x) &= \lambda_0^{(\frac{1}{2})}(x) + \lambda_1^{(\frac{1}{2})}(x), \quad \Lambda_{2k}(x) = \sum_{l=0}^{2k} \lambda_l^{(k)}(x), \quad k \geq 1, \\ \lambda_l^{(k)}(x) &:= \prod_{j=0}^{2k-l-1} \lambda_0^{(\frac{1}{2})}(x+i(2(s-j)-1)) \prod_{j=0}^{l-1} \lambda_1^{(\frac{1}{2})}(x-i(2(s-j)-1)), \\ \lambda_0^{(\frac{1}{2})}(x; \mu) &:= e^{-\frac{\hbar}{T} \frac{\phi_+(x-i(2s-1))}{\phi_-(x-i(2s+1))}} \frac{q(x+2i)}{q(x)}, \\ \lambda_1^{(\frac{1}{2})}(x) &:= e^{\frac{\hbar}{T} \frac{\phi_-(x+i(2s-1))}{\phi_+(x+i(2s+1))}} \frac{q(x-2i)}{q(x)}.\end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Die Funktionen $\lambda_l^{(k)}(x)$ entsprechen denen in [100]^V. Die Eigenwerte erfüllen die Funktionalgleichung

$$\Lambda_{2k}(x+i)\Lambda_{2k}(x-i) = f_{2k}(x; \mu) + \Lambda_{2k-1}(x)\Lambda_{2k+1}(x), \quad (3.4.16)$$

wobei die Funktionen $f_{2k}(x)$ durch

$$f_{2k}(x) := \prod_{j=1}^{2k} \prod_{\sigma=\pm} \phi_\sigma(x+i\sigma(2(k-s-j)+1)) \phi_\sigma(x+i\sigma(2(s-k+j)+1))$$

und $\Lambda_0 \equiv 1$ definiert sind. Analog zu [73] werden $(2s-1)$ -viele Hilfsfunktionen $y_{2k}(x)$ durch

$$y_{2k}(x) := \frac{\Lambda_{2k-1}(x)\Lambda_{2k+1}(x)}{f_{2k}(x)}, \quad k = \frac{1}{2}, 1, \dots, s - \frac{1}{2}, \quad (3.4.17)$$

definiert. Wegen (3.4.16) gilt

$$1 + y_{2k}(x) = \frac{\Lambda_{2k}(x+i)\Lambda_{2k}(x-i)}{f_{2k}(x)}. \quad (3.4.18)$$

Daraus folgt

$$1 + y_{2k}^{-1}(x) = \frac{\Lambda_{2k}(x+i)\Lambda_{2k}(x-i)}{\Lambda_{2k-1}(x)\Lambda_{2k+1}(x)}. \quad (3.4.19)$$

Die Eigenwerte $\Lambda_{2k}(x)$ werden in [100] über nichtlineare Integralgleichungen bestimmt. Nach Gleichung (18) in [100] erfüllen die Hilfsfunktionen (3.4.17) folgende Funktionalgleichungen:

$$y_{2k}(x-i)y_{2k}(x+i) = Y_{2k-1}(x)Y_{2k+1}(x), \quad k = \frac{1}{2}, 1, \dots, s-1, \quad (3.4.20)$$

^VDie hier gewählte Notation weicht von der in [100] ab. Diese Funktionen sind durch $\lambda_{l+1}^{(2k)}(x)$ in Gleichung (16) in [100] definiert.

wobei $y_0 := 0$. Außerdem gilt

$$1 + y_1(x) = \mathfrak{A}^{(s)}(x+i)\overline{\mathfrak{A}}^{(s)}(x-i). \quad (3.4.21)$$

3.4.2. Dichte-Matrizen

Analog zu (3.3.4) lässt sich die Dichte-Matrix

$$\mathcal{D}^{[2s;2s]}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}^{[s;s]}(\xi_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}^{[s;s]}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[s;s]}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} \quad (3.4.22)$$

durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{[2s,2s]}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\prod_{j=1}^m \prod_{k=0}^{2s-1} \Lambda_0^{[s;\frac{1}{2}]}(\xi_j - i(2(s-k) - 1))}{\prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[s;s]}(\xi_j)} \left(S^{[s]} \right)^{\otimes m} \\ \mathcal{D}^{[2s;1]}(\xi_1 - i(2s-1), \dots, \xi_1 + i(2s-1), \dots, \xi_m - i(2s-1), \dots, \xi_m + i(2s-1)) &\left(\left(S^{[s]} \right)^t \right)^{\otimes m} \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

darstellen, wobei

$$\mathcal{D}^{[2s;2k]}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}^{[s;k]}(\xi_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}^{[s;k]}(\xi_m) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[s;s]}(\xi_j) | \Phi_0 \rangle} \quad (3.4.24)$$

ist. Da die Dichte-Matrix von der Normierung der Monodromie-Matrix unabhängig ist, gilt dementsprechend

$$\frac{\prod_{j=1}^m \prod_{k=0}^{2s-1} \Lambda_0^{[s;\frac{1}{2}]}(\xi_j - i(2(s-k) - 1))}{\prod_{j=1}^m \Lambda_0^{[s;s]}(\xi_j)} = \frac{\prod_{j=1}^m \prod_{k=0}^{2s-1} \Lambda_1(\xi_j - i(2(s-k) - 1))}{\prod_{j=1}^m \Lambda_{2s}(\xi_j)}.$$

Mittels (3.4.19) lässt sich der Normierungsfaktor durch Kombinationen der in (3.4.17) definierten Hilfsfunktionen umschreiben. Es gilt

$$\frac{\prod_{j=1}^m \prod_{k=0}^{2s-1} \Lambda_1(\xi_j - i(2(s-k) - 1))}{\prod_{j=1}^m \Lambda_{2s}(\xi_j)} = \prod_{j=1}^m \prod_{l=1}^{2s-1} \prod_{k=1}^{2s-l} (1 + y_l^{-1}(\xi_j - i(2(s-k) - (l-1)))) .$$

Anschließendes Anwenden der Funktionalgleichung (3.4.20) führt zu dem einfacheren Ausdruck

$$\prod_{j=1}^m \frac{\prod_{k=1}^{2s-1} (1 + y_1(\xi_j - 2i(s-k)))}{y_{2s-1}(\xi_j)},$$

weshalb

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{[2s;2s]}(\boldsymbol{\xi}) &= \prod_{j=1}^m \frac{\prod_{k=1}^{2s-1} (1 + y_1(\xi_j - 2i(s-k)))}{y_{2s-1}(\xi_j)} \left(S^{[s]} \right)^{\otimes m} \\ \mathcal{D}^{[2s;1]}(\xi_1 - i(2s-1), \dots, \xi_1 + i(2s-1), \dots, \xi_m - i(2s-1), \dots, \xi_m + i(2s-1)) &\left(\left(S^{[s]} \right)^t \right)^{\otimes m} \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

folgt. Die Matrixeinträge des Operators

$$\left[\prod_{j=1}^m \Lambda_{2s}(\xi_j) \right] \mathcal{D}^{[2s;2s]}(\boldsymbol{\xi})$$

sind Polynome vom Grad $(2s N)$ in den Spektralparametern ξ_j .

Nichtlineare Integralgleichungen

Gesucht sind nichtlineare Integralgleichungen von Hilfsfunktionen, über die im thermodynamischen Limes der führende Eigenwert der Quantentransfer-Matrix $\Lambda_0^{[1]}(x)$, siehe (3.2.24), angegeben werden kann. Mittels des Eigenwertes kann nach (4.1.30) die Freie Energie pro Gitterplatz und somit die Thermodynamik des Modells bestimmt werden. Die Konstruktion der nichtlinearen Integralgleichungen wird im nächsten Unterkapitel diskutiert.

In den darauffolgenden Abschnitten werden mit der im ersten Abschnitt vorgestellten Methode Integralgleichungen für Eigenwerte von Quantentransfer-Matrizen mit modifiziertem Quantenraum hergeleitet. Diese Modifizierung besteht darin, zusätzliche Räume mit speziellem Spektralparameter in den Quantenraum hinzuzufügen. In Kapitel 6, „Der XXZ -Dichte-Operator bei endlicher Temperatur“, und in Anhang C, „Zusammenhang zwischen der ω -Funktion und dem Eigenwert (4.3.6b)“, wird der Zusammenhang dieser modifizierten Eigenwerte mit bedeutsamen Zweipunkt-Korrelationsfunktionen hergestellt, welche gewisse Eigenschaften des zugrunde liegenden Modells beschreiben.

4.1. Nichtlineare Integralgleichungen für die Spin-1 XXZ -Kette

Die Vorgehensweise der Konstruktion der Integralgleichungen folgt analog zu den Arbeiten von J. Suzuki [100] und [101] bzw. zu den beiden Arbeiten [2] und [90].

4.1.1. Hilfsfunktionen

Als Normierung der betragsmäßig größten Eigenwerte der Quantentransfer-Matrizen wird anstatt (3.2.21) und (3.2.24) die Form (3.2.35) in Anlehnung an die Arbeiten [2] und [90] gewählt. Mit

$$\lambda_1(x) := e^{-2\frac{\hbar}{T}} \phi_-(x-2\eta) \phi_+(x-\eta) \phi_-(x-\eta) \phi_+(x) \frac{q(x+\frac{3}{2}\eta)}{q(x-\frac{\eta}{2})}, \quad (4.1.1a)$$

$$\lambda_2(x) := \phi_-(x-\eta) \phi_+(x) \phi_-(x) \phi_+(x+\eta) \frac{q(x+\frac{3}{2}\eta) q(x-\frac{3}{2}\eta)}{q(x+\frac{\eta}{2}) q(x-\frac{\eta}{2})}, \quad (4.1.1b)$$

$$\lambda_3(x) := e^{2\frac{\hbar}{T}} \phi_-(x) \phi_+(x+\eta) \phi_-(x+\eta) \phi_+(x+2\eta) \frac{q(x-\frac{3}{2}\eta)}{q(x+\frac{\eta}{2})} \quad (4.1.1c)$$

gilt

$$\Lambda_2(x) := \tilde{\Lambda}_0^{[1]}(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x). \quad (4.1.2)$$

Als geeignete Hilfsfunktionen zeigen sich die Funktionen

$$\mathfrak{b}(x) := \frac{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}{\lambda_3(x)}, \quad \mathfrak{B}(x) := 1 + \mathfrak{b}(x), \quad (4.1.3a)$$

$$\bar{\mathfrak{b}}(x) := \frac{\lambda_2(x) + \lambda_3(x)}{\lambda_1(x)}, \quad \bar{\mathfrak{B}}(x) := 1 + \bar{\mathfrak{b}}(x), \quad (4.1.3b)$$

$$y(x) := \frac{(\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)) \lambda_2(x)}{\lambda_1(x) \lambda_3(x)}, \quad Y(x) := 1 + y(x), \quad (4.1.3c)$$

wobei wegen (4.1.2) die Hilfsfunktion $y(x)$ per Konstruktion den zu berechnenden Eigenwert $\Lambda_0^{[1]}(x)$ enthält,

$$y(x) = \frac{\Lambda_2(x)}{f(x)}, \quad (4.1.4)$$

wobei

$$f(x) := \phi_+(x-\eta) \phi_-(x-2\eta) \phi_+(x+2\eta) \phi_-(x+\eta).$$

Unter anderem folgen die nützlichen Relationen

$$\mathfrak{b}(x) = e^{-3\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_+(x) \phi_-(x-\eta)}{\phi_+(x+2\eta) \phi_-(x+\eta) \phi_+(x+\eta) \phi_-(x)} \frac{q(x+\frac{3}{2}\eta)}{q(x-\frac{3}{2}\eta)} \Lambda_1\left(x-\frac{\eta}{2}\right), \quad (4.1.5a)$$

$$\bar{\mathfrak{b}}(x) = e^{3\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_+(x+\eta)\phi_-(x)}{\phi_+(x-\eta)\phi_-(x-2\eta)\phi_+(x)\phi_-(x-\eta)} \frac{q(x-\frac{3}{2}\eta)}{q(x+\frac{3}{2}\eta)} \Lambda_1\left(x+\frac{\eta}{2}\right). \quad (4.1.5b)$$

Weiterhin werden die folgenden Identitäten erfüllt:

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} e^{2\frac{\hbar}{T}} \phi_+(x+\eta)\phi_-(x)\phi_+(x+2\eta)\phi_-(x+\eta) \frac{q(x-\frac{3}{2}\eta)}{q(x+\frac{\eta}{2})} \mathfrak{B}(x) \\ e^{-2\frac{\hbar}{T}} \phi_+(x-\eta)\phi_-(x-2\eta)\phi_+(x)\phi_-(x-\eta) \frac{q(x+\frac{3}{2}\eta)}{q(x-\frac{\eta}{2})} \overline{\mathfrak{B}}(x) \end{cases}, \quad (4.1.6a)$$

$$y\left(x+\frac{\eta}{2}\right)y\left(x-\frac{\eta}{2}\right) = \mathfrak{B}\left(x+\frac{\eta}{2}\right)\overline{\mathfrak{B}}\left(x-\frac{\eta}{2}\right). \quad (4.1.6b)$$

Mit

$$\mathfrak{a}(x) := \frac{d(x)}{a(x)} \prod_{k=1}^M \frac{\sinh(x-x_k+\eta)}{\sinh(x-x_k-\eta)} = e^{-2\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_+(x-\frac{\eta}{2})\phi_-(x-\frac{3}{2}\eta)}{\phi_-(x+\frac{\eta}{2})\phi_+(x+\frac{3}{2}\eta)} \frac{q(x+\eta)}{q(x-\eta)}, \quad (4.1.7a)$$

$$\bar{\mathfrak{a}}(x) := \frac{1}{\mathfrak{a}(x)}, \quad \mathfrak{A}(x) := 1 + \mathfrak{a}(x), \quad \bar{\mathfrak{A}}(x) := 1 + \bar{\mathfrak{a}}(x) = \frac{\mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{a}(x)} \quad (4.1.7b)$$

und den Normierungen (3.2.35) gelten die weiteren Identitäten

$$\begin{aligned} 1 + y^{-1}(x) &= \frac{\Lambda_1(x-\frac{\eta}{2})\Lambda_1(x+\frac{\eta}{2})}{\Lambda_2(x)} = \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x-\frac{\eta}{2})\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x+\frac{\eta}{2})}{\Lambda_0^{[1]}(x)} \\ &= \frac{\mathfrak{A}(x+\frac{\eta}{2})\mathfrak{A}(x-\frac{\eta}{2})}{\mathfrak{B}(x)} = \frac{\bar{\mathfrak{A}}(x+\frac{\eta}{2})\bar{\mathfrak{A}}(x-\frac{\eta}{2})}{\bar{\mathfrak{B}}(x)}, \end{aligned} \quad (4.1.8a)$$

und

$$Y(x) = \frac{\Lambda_1(x+\frac{\eta}{2})\Lambda_1(x-\frac{\eta}{2})}{f(x)} = \mathfrak{A}(x+\frac{\eta}{2})\bar{\mathfrak{A}}(x-\frac{\eta}{2}) = \mathfrak{b}(x)\bar{\mathfrak{b}}(x). \quad (4.1.8b)$$

Ziel ist nun für die Hilfsfunktionen $y(x)$, $\mathfrak{b}(x)$ und $\bar{\mathfrak{b}}(x)$ Integralgleichungen herzuleiten.

4.1.2. Herleitung der nichtlinearen Integralgleichungen

Da $\Lambda_2(x)$ in der Nähe der reellen Achse analytisch ist, gilt nach dem Cauchy-Theorem

$$0 = \oint_{C_\epsilon} dx \ln[\Lambda_2(x)]'' e^{ikx} = \int_{C_1} dx \ln[\Lambda_2(x)]'' e^{ikx} + \int_{C_2} dx \ln[\Lambda_2(x)]'' e^{ikx}, \quad (4.1.9)$$

wobei die Kontur $C_\epsilon = C_1 + C_2$ mit C_2 entlang der reellen Achse um $-i\epsilon$ und C_1 entgegengesetzt der reellen Achse und um $+i\epsilon$ verschoben, so wie in Abbildung 4.1, gewählt ist.

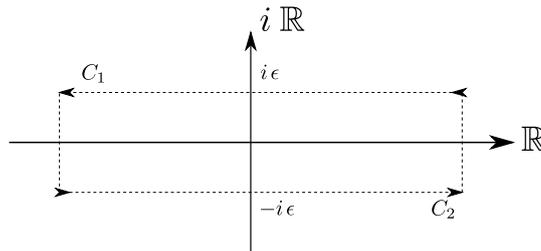


Abbildung 4.1.: Die Kontur $C_\epsilon = C_1 + C_2$.

Die Fourier-Transformierte der zweifachen logarithmischen Ableitung entlang der Konturen C_1 und C_2 einer Funktion f wird im Folgenden durch

$$\widehat{\mathcal{L}f''}(k) := \int_{C_1} dx \ln[f(x)]'' e^{ikx} \quad \text{bzw. durch} \quad \widehat{L}f''(k) := \int_{C_2} dx \ln[f(x)]'' e^{ikx} \quad (4.1.10)$$

definiert. Weiterhin soll mit

$$\tilde{q}(x) := q\left(x + \frac{i\pi}{2}\right) \quad (4.1.11)$$

die Funktion $\tilde{q}(x)$ eingeführt werden, deren Nullstellen somit auch für kleine Werte von γ nicht in der Nähe der reellen Achse liegen sollen.

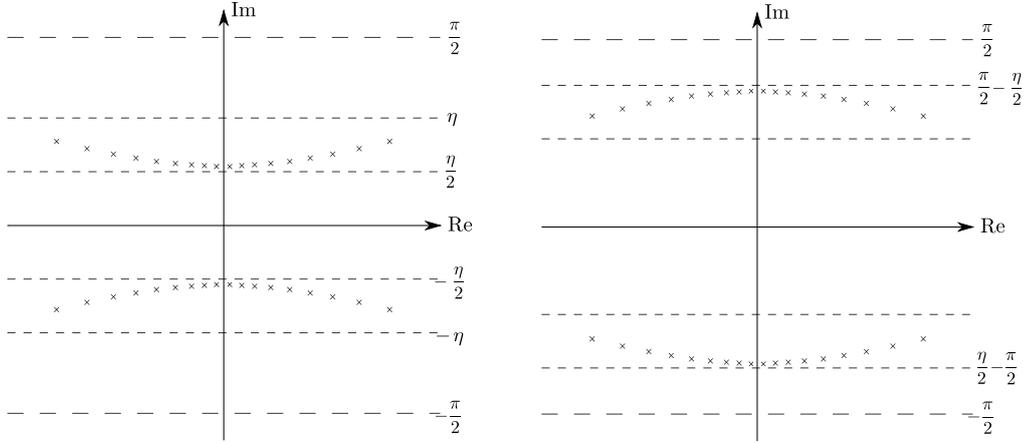


Abbildung 4.2.: Nullstellen der Funktionen q (links) und $\tilde{q}(x)$ (rechts).

Die $i\pi$ -Periodizität der Funktion $\tilde{q}(x)$ wird ausgenutzt, um die Imaginärteile der Argumente negativ zu wählen. Somit ist nämlich

$$\int_{\mathcal{C}_1} dx \ln \left[\frac{\tilde{q}\left(x - \frac{3}{2}\eta - \frac{i\pi}{2}\right)}{\tilde{q}\left(x + \frac{\eta}{2} - \frac{i\pi}{2}\right)} \right]'' e^{ikx} = \left[e^{\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}\right)k} - e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\gamma\right)k} \right] \widehat{L\tilde{q}}''(k),$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} dx \ln \left[\frac{\tilde{q}\left(x + \frac{3}{2}\eta - \frac{i\pi}{2}\right)}{\tilde{q}\left(x - \frac{\eta}{2} - \frac{i\pi}{2}\right)} \right]'' e^{ikx} = \left[e^{\left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{2}\right)k} - e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)k} \right] \widehat{L\tilde{q}}''(k).$$

Demnach gilt nach (4.1.6a)

$$\widehat{\mathcal{L}\Lambda}_2''(k) = \widehat{\mathcal{L}t}_-''(k) + \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}''(k) + \left[e^{\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}\right)k} - e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\gamma\right)k} \right] \widehat{L\tilde{q}}''(k), \quad (4.1.12a)$$

$$\widehat{L\Lambda}_2''(k) = \widehat{L\tilde{t}}_+''(k) + \widehat{L\mathfrak{B}}''(k) + \left[e^{\left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{2}\right)k} - e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)k} \right] \widehat{L\tilde{q}}''(k), \quad (4.1.12b)$$

wobei

$$\widehat{\mathcal{L}t}_-''(k) = \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [\phi_+(x + \eta) \phi_-(x) \phi_+(x + 2\eta) \phi_-(x + \eta)]'' e^{ikx},$$

$$\widehat{L\tilde{t}}_+''(k) = \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\phi_+(x - \eta) \phi_-(x - 2\eta) \phi_+(x) \phi_-(x - \eta)]'' e^{ikx}.$$

Addieren beider Seiten und Benutzen der Relation (4.1.9) führt zu

$$-\int_{\mathcal{C}_1} dx \ln \left[\frac{\tilde{q}\left(x - \frac{3}{2}\eta - \frac{i\pi}{2}\right)}{\tilde{q}\left(x + \frac{\eta}{2} - \frac{i\pi}{2}\right)} \right]'' e^{ikx} - \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln \left[\frac{\tilde{q}\left(x - \frac{3}{2}\eta - \frac{i\pi}{2}\right)}{\tilde{q}\left(x + \frac{\eta}{2} - \frac{i\pi}{2}\right)} \right]'' e^{ikx}$$

$$= \left[e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\gamma\right)k} - e^{\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}\right)k} - e^{\left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{2}\right)k} + e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)k} \right] \widehat{L\tilde{q}}''(k) = D(k) + \widehat{L\mathfrak{B}}''(k) + \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}''(k).$$

Dabei ist

$$D(k) = \widehat{L\tilde{t}}_+''(k) + \widehat{\mathcal{L}t}_-''(k).$$

Mit der Identität

$$\int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\sinh(x - i\tilde{x})]'' e^{ikx} = \frac{\pi k e^{-k(\tilde{x} - (n + \frac{1}{2})\pi)}}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right)}, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}, \quad 0 < \tilde{x} - n\pi < \pi, \quad (4.1.13)$$

folgt

$$D(k) = 4N\pi \frac{\cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right)} \cosh\left(\left(2u + \gamma\right)\frac{k}{2}\right) \sinh\left(\left(\pi - 2\gamma\right)\frac{k}{2}\right) k. \quad (4.1.14)$$

Es ergibt sich somit

$$\widehat{L\bar{q}}''(k) = \frac{\widehat{L\mathfrak{B}}''(k) + \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}''(k)}{4 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right) \sinh\left((\pi - 2\gamma)\frac{k}{2}\right)} + \frac{\cosh\left((2u + \gamma)\frac{k}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right)} N\pi k. \quad (4.1.15)$$

Als Nächstes soll Gleichung (4.1.8b) benutzt werden, um die zweite logarithmische Ableitung der Fourier-Transformierten des Eigenwertes $\Lambda_1(x)$ durch die Hilfsfunktion $Y(x)$ auszudrücken. Da $\Lambda_1(x)$ innerhalb \mathcal{S} ein konstantes asymptotisches Verhalten besitzt, polstellen- sowie nullstellenfrei ist, gilt für Magnetfelder $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \int dx \ln \left[\Lambda_1 \left(x + \frac{\eta}{2} \right) \right]'' e^{ikx} &= e^{\frac{\gamma}{2}k} \int dx \ln [\Lambda_1(x)]'' e^{ikx}, \\ \int dx \ln \left[\Lambda_1 \left(x - \frac{\eta}{2} \right) \right]'' e^{ikx} &= e^{-\frac{\gamma}{2}k} \int dx \ln [\Lambda_1(x)]'' e^{ikx}, \\ \Rightarrow 2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right) \int dx \ln [\Lambda_1(x)]'' e^{ikx} &= \int dx \ln \left[\Lambda_1 \left(x + \frac{\eta}{2} \right) \Lambda_1 \left(x - \frac{\eta}{2} \right) \right]'' e^{ikx} \end{aligned}$$

für eine Kontur innerhalb \mathcal{S} , woraus

$$2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right) \widehat{L\Lambda_1}''(k) = \widehat{LY}''(k) + \widehat{Lf}''(k) \quad (4.1.16)$$

folgt. Dabei ist $\widehat{Lf}''(k)$ durch

$$\widehat{Lf}''(k) = \frac{2N\pi}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right)} \cosh\left((2u + \gamma)\frac{k}{2}\right) \cosh\left((\pi - 3\gamma)\frac{k}{2}\right) k \quad (4.1.17)$$

gegeben. Für die Fourier-Transformierten von $\mathfrak{b}(x)$ und $\bar{\mathfrak{b}}(x)$ ergeben sich die Integralgleichungen

$$\widehat{L\mathfrak{b}}''(k) = -\widehat{G}(k) \left[\widehat{L\mathfrak{B}}''(k) + \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}''(k) \right] + \widehat{G}_2(k) \widehat{LY}''(k) + \frac{\cosh\left((2u + \gamma)\frac{k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} N\pi k, \quad (4.1.18a)$$

$$\widehat{L\bar{\mathfrak{b}}}''(k) = \widehat{G}(k) \left[\widehat{L\mathfrak{B}}''(k) + \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}''(k) \right] + \widehat{G}_2(-k) \widehat{LY}''(k) - \frac{\cosh\left((2u + \gamma)\frac{k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} N\pi k, \quad (4.1.18b)$$

mit

$$\widehat{G}(k) := \frac{\sinh\left((\pi - 3\gamma)\frac{k}{2}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right) \sinh\left((\pi - 2\gamma)\frac{k}{2}\right)}, \quad \widehat{G}_2(k) := \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}k}}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)}. \quad (4.1.18c)$$

Die nichtlineare Integralgleichung für die Fourier-Transformierte der zweifachen logarithmischen Ableitung der Hilfsfunktion $y(x)$ lässt sich mit den Ergebnissen (4.1.12) bestimmen. Multipliziert man passende Faktoren daran, z. B. $\exp(-\gamma/2 k)$ zur Gleichung (4.1.18a) und $-\exp(\gamma/2 k)$ zur Gleichung (4.1.18b), und addiert beide Gleichungen, lässt sich das Funktional $\widehat{L\bar{q}}''(k)$ eliminieren. Man erhält

$$\widehat{L\Lambda_2}''(k) = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}k} \widehat{L\mathfrak{B}}''(k) - e^{\frac{\gamma}{2}k} \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}''(k)}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} + \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}k} \widehat{L\mathfrak{t}_+}''(k) - e^{\frac{\gamma}{2}k} \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{t}_-}''(k)}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)}. \quad (4.1.19)$$

Folglich ergibt sich wegen (4.1.4) die Integralgleichung

$$\widehat{Ly}''(k) = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}k} \widehat{L\mathfrak{B}}''(k) - e^{\frac{\gamma}{2}k} \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}''(k)}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} = \widehat{G}_2(-k) \widehat{L\mathfrak{B}}''(k) - \widehat{G}_2(k) \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}''(k). \quad (4.1.20)$$

Im Vergleich zu den Arbeiten [2] und [90] besteht ein Unterschied in dem Fourier-transformierten Integralgleichungs-System lediglich in den Inhomogenitäten, die im Folgenden als die sogenannten „Driving“-Terme bezeichnet werden. In diese fließen offensichtlich die Randbedingungen des Modells ein. Die Fourier-Rücktransformierte des in (4.1.18) vorkommenden „Driving“-Terms kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} I &:= N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\cosh\left((2u + \gamma)\frac{k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} k e^{-ikx} = \frac{N}{2\pi} \frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sinh\left((2u + \gamma)\frac{k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} e^{-ikx} \\ &= \frac{N}{2\pi\gamma} \frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp\left[-iq\left(\frac{2}{\gamma}x + i\left(\frac{2u}{\gamma} + 1\right)\right)\right] - \exp\left[-iq\left(\frac{2}{\gamma}x - i\left(\frac{2u}{\gamma} + 1\right)\right)\right]}{\cosh(q)}, \end{aligned}$$

wobei hier die Substitution $q = \gamma/2 k$ gewählt worden ist. Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{ixy}}{\cosh(y)} = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

gilt, folgt nach Ausführen der Ableitung bzgl. u

$$I = \frac{N\pi}{2\gamma^2} \left[\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x-iu)\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi}{\gamma}(x-iu)\right)} - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x+iu)\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi}{\gamma}(x+iu)\right)} \right] = -\frac{J\sin(2\gamma)}{2\pi u T} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2\gamma}(x+iu)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{2\gamma}(x-iu)\right)} \right],$$

wobei nach (3.2.19) N durch u ausgedrückt wurde. Verwendet man anstelle der Definition (3.2.17) die inhomogene Verallgemeinerung (3.2.30), so ändert sich der Ausdruck in

$$I = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2\gamma}(x - \nu_{2k-1} - i)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{2\gamma}(x - \nu_{2k} + i)\right)} \right].$$

Obige Rechnungen lassen sich im Wesentlichen für den inhomogenen Fall analog durchführen, da die Inhomogenisierung sich nur auf die „Driving“-Terme auswirkt. Anwenden der Fourier-Rücktransformation zum Ortsraum, zweifaches Integrieren bezüglich der Ortsvariablen und anschließendes Durchführen des Trotter-Limes, $N \rightarrow \infty$ oder $u \rightarrow 0$, der Gleichungen (4.1.18) und (4.1.20) führt zu folgenden nichtlinearen Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} \ln \mathfrak{b}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x'-i\epsilon) \ln \mathfrak{B}(x'+i\epsilon) - \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x'+i\epsilon) \ln \overline{\mathfrak{B}}(x'-i\epsilon) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G_2(x-x'+i\epsilon) \ln Y(x'-i\epsilon) - i \frac{J\pi \sin(2\gamma)}{T\gamma \sinh\left(\frac{\pi}{\gamma}x\right)} + c_{\mathfrak{b}}, \end{aligned} \quad (4.1.21a)$$

$$\begin{aligned} \ln \overline{\mathfrak{b}}(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x'-i\epsilon) \ln \mathfrak{B}(x'+i\epsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x'+i\epsilon) \ln \overline{\mathfrak{B}}(x'-i\epsilon) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G_2(x'-x+i\epsilon) \ln Y(x'+i\epsilon) + i \frac{J\pi \sin(2\gamma)}{T\gamma \sinh\left(\frac{\pi}{\gamma}x\right)} + c_{\overline{\mathfrak{b}}}, \end{aligned} \quad (4.1.21b)$$

$$\begin{aligned} \ln y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' G_2(x'-x+i\epsilon) \ln \mathfrak{B}(x'+i\epsilon) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G_2(x-x'+i\epsilon) \ln \overline{\mathfrak{B}}(x'-i\epsilon) + c_y, \end{aligned} \quad (4.1.21c)$$

mit

$$G(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\sinh\left(\left(\pi - 3\gamma\right)\frac{k}{2}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right) \sinh\left(\left(\pi - 2\gamma\right)\frac{k}{2}\right)} e^{-ikx}, \quad (4.1.22a)$$

$$G_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}k}}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} e^{-ikx} = \frac{i}{2\gamma \sinh\left(\frac{\pi}{\gamma}x\right)}. \quad (4.1.22b)$$

Dabei sind $c_{\mathfrak{b}}$, $c_{\overline{\mathfrak{b}}}$ und c_y Integrationskonstanten, welche über die Asymptoten der Hilfsfunktionen bestimmt werden können.

4.1.3. Integrationskonstanten

Der Vergleich beider Seiten von (4.1.21) im asymptotischen Grenzfall ($x \rightarrow \pm\infty$) liefert die zugehörigen Integrationskonstanten. Dabei lässt sich mit

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(x+iy_1)}{\sinh(x+iy_2)} = e^{i \operatorname{sgn}(x)(y_1-y_2)}, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

die Asymptoten der in (4.1.3) eingeführten Hilfsfunktionen leicht bestimmen. Es folgt für die Hilfsfunktionen $\mathfrak{b}(x)$, $\overline{\mathfrak{b}}(x)$ und $y(x)$ folgende Asymptoten:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathfrak{b}(x) &= e^{-2\frac{h}{T}} \left(1 + e^{-2\frac{h}{T}}\right), & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \overline{\mathfrak{b}}(x) &= e^{2\frac{h}{T}} \left(1 + e^{2\frac{h}{T}}\right), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) &= e^{-2\frac{h}{T}} + 1 + e^{-2\frac{h}{T}}. \end{aligned}$$

Die Asymptoten der Funktionen $\mathfrak{B}(x)$, $\overline{\mathfrak{B}}(x)$ und $Y(x)$ können durch die Asymptoten der Funktionen $\mathfrak{b}(x)$, $\overline{\mathfrak{b}}(x)$ und $y(x)$ ausgedrückt werden.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathfrak{B}(x) = e^{-2\frac{h}{T}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \overline{\mathfrak{B}}(x) = e^{2\frac{h}{T}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Y(x) = \begin{cases} e^{6\frac{h}{T}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathfrak{b}^2(x), \\ e^{-6\frac{h}{T}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{\mathfrak{b}}^2(x). \end{cases}$$

Mit den Nullmoden der Integrationskerne

$$\widehat{G}(0) = \frac{1}{2} \frac{\pi - 3\gamma}{\pi - 2\gamma}, \quad \widehat{G}_2(0) = \frac{1}{2}$$

ergeben sich die Integrationskonstanten zu

$$c_y = 0, \quad c_b = -\frac{h}{T} \frac{\pi}{\pi - 2\gamma}, \quad c_{\bar{b}} = \frac{h}{T} \frac{\pi}{\pi - 2\gamma}, \quad (4.1.23)$$

wobei die „Driving“-Terme im asymptotischen Limes verschwinden. Aus konventionellen Gründen werden die verschobenen Funktionen

$$\mathfrak{b}_\epsilon(x) := \mathfrak{b}\left(x + \frac{i\gamma}{2} - i\epsilon\right), \quad \mathfrak{B}_\epsilon(x) := 1 + \mathfrak{b}_\epsilon(x), \quad (4.1.24a)$$

$$\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x) := \bar{\mathfrak{b}}\left(x - \frac{i\gamma}{2} + i\epsilon\right), \quad \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x) := 1 + \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x) \quad (4.1.24b)$$

eingeführt. Mit der Matrixkonvolution

$$\left(\hat{\mathcal{K}} * g\right)_i := \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{ij}(x - x') g_j(x')$$

lässt sich obiges Integralgleichungs-System in folgender Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \ln y(x) \\ \ln \mathfrak{b}_\epsilon(x) \\ \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_b(x) \\ \Delta_{\bar{b}}(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \ln Y(x) \\ \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x) \\ \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x) \end{pmatrix} \quad (4.1.25)$$

darstellen, wobei

$$\Delta_b(\lambda) := d(u, \lambda - i\epsilon) + \frac{h}{T} \frac{\pi}{2\gamma - \pi}, \quad \Delta_{\bar{b}}(\lambda) := d(u, \lambda + i\epsilon) - \frac{h}{T} \frac{\pi}{2\gamma - \pi}, \quad (4.1.26a)$$

$$d(u, \lambda) := -\frac{J\pi \sin(2\gamma)}{T\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}\lambda\right)}. \quad (4.1.26b)$$

Die Kernmatrix ist durch

$$\hat{\mathcal{K}}(x) := \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{K}}_{yy}(x) & \hat{\mathcal{K}}_{yb}(x) & \hat{\mathcal{K}}_{y\bar{b}}(x) \\ \hat{\mathcal{K}}_{by}(x) & \hat{\mathcal{K}}_{bb}(x) & \hat{\mathcal{K}}_{b\bar{b}}(x) \\ \hat{\mathcal{K}}_{\bar{b}y}(x) & \hat{\mathcal{K}}_{\bar{b}b}(x) & \hat{\mathcal{K}}_{\bar{b}\bar{b}}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}(x + i\epsilon) & \mathcal{K}(x - i\epsilon) \\ \mathcal{K}(x - i\epsilon) & G(x) & -G(x + i(\gamma - 2\epsilon)) \\ \mathcal{K}(x + i\epsilon) & -G(x - i(\gamma - 2\epsilon)) & G(x) \end{pmatrix} \quad (4.1.27)$$

mit

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{2\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}x\right)}, \quad G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\sinh\left(\left(\pi - 3\gamma\right)\frac{k}{2}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right) \sinh\left(\left(\pi - 2\gamma\right)\frac{k}{2}\right)} e^{-ikx}$$

gegeben.

4.1.4. Eigenwerte

Aus Gleichung (4.1.16) beziehungsweise (4.1.4) folgen die Darstellungen

$$\ln \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x - x') \left\{ \ln Y(x') + \ln \left[\frac{\phi_-(x' + \eta) \phi_+(x' - \eta)}{\phi_-(x' - \eta) \phi_+(x' + \eta)} \right] \right\} + \text{konst.}, \quad (4.1.28a)$$

$$\ln \Lambda_0^{[1]}(x) = \ln y(x) + \ln \left[\frac{\phi_+(x - \eta) \phi_-(x + \eta)}{\phi_-(x - \eta) \phi_+(x + \eta)} \right] \quad (4.1.28b)$$

für die betragsmäßig größten Eigenwerte der Quantentransfer-Matrizen. Mit der letzten Gleichung sind die globalen thermodynamischen Eigenschaften zugänglich.

4.1.5. Freie Energie

Nach (2.4.17) folgt für die Freie Energie pro Gitterplatz der Ausdruck

$$f = -T \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \Lambda_0^{[1]}(x) \right) = -T \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln y(x) + \lim_{u \rightarrow 0} \ln \left[\frac{\phi_+(x-\eta)\phi_-(x+\eta)}{\phi_-(x-\eta)\phi_+(x+\eta)} \right] \right) \quad (4.1.29)$$

unter Beachtung des richtigen Normierungsfaktors nach (4.1.4) und (3.2.35). Mit

$$N = -\frac{J \sin(2\gamma)}{uT}$$

wegen (3.2.19) und dem nacheinander Ausführen der Limites $u \rightarrow 0$ und $x \rightarrow 0$ ist

$$\begin{aligned} f &= -4J \cos^2(\gamma) - T \lim_{x \rightarrow 0} \ln y(x) \\ &= -4J \cos^2(\gamma) - T \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\ln \mathfrak{B}_\epsilon(x')}{2\gamma \cosh\left((x' - i\epsilon)\frac{\pi}{\gamma}\right)} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x')}{2\gamma \cosh\left((x' + i\epsilon)\frac{\pi}{\gamma}\right)} \right). \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Mit (4.1.30) lassen sich physikalisch interessante thermodynamische Größen, wie zum Beispiel die Innere Energie pro Gitterplatz oder die Magnetisierung pro Gitterplatz, berechnen.

Innere Energie pro Gitterplatz

Die Innere Energie pro Gitterplatz

$$e := \frac{\text{Spur} \left\{ H_{XXZ} \exp\left(-\frac{H_{XXZ}}{T}\right) \right\}}{L \text{Spur} \left\{ \exp\left(-\frac{H_{XXZ}}{T}\right) \right\}},$$

lässt sich mit

$$e = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{f}{T} \right) \quad (4.1.31)$$

über die Freie Energie bestimmen. Für die Spin-1 XXZ -Kette ist die Innere Energie durch

$$\begin{aligned} e &= -4J \cos^2(\gamma) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{2\gamma \cosh\left((x' - i\epsilon)\frac{\pi}{\gamma}\right)} \frac{T^2 \partial_T \ln \mathfrak{b}_\epsilon(x')}{1 + \mathfrak{b}_\epsilon^{-1}(x')} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{2\gamma \cosh\left((x' + i\epsilon)\frac{\pi}{\gamma}\right)} \frac{T^2 \partial_T \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x')}{1 + \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon^{-1}(x')} \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

gegeben. Dabei können die Funktionen $T^2 \partial_T \mathfrak{b}_\epsilon(x)$ und $T^2 \partial_T \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x)$ über die Integralgleichungen (4.1.25) angegeben werden. Es gilt

$$\begin{pmatrix} T^2 \partial_T \ln y \\ T^2 \partial_T \ln \mathfrak{b}_\epsilon \\ T^2 \partial_T \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -T \Delta_{\mathfrak{b}}(x) \\ -T \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{T^2 \partial_T \ln y}{1+y^{-1}} \\ \frac{T^2 \partial_T \ln \mathfrak{b}_\epsilon}{1+\mathfrak{b}_\epsilon^{-1}} \\ \frac{T^2 \partial_T \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon}{1+\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon^{-1}} \end{pmatrix} (x), \quad (4.1.33)$$

wobei hier $T^2 \partial_T \Delta_{\mathfrak{b}}(x) = -T \Delta_{\mathfrak{b}}(x)$ und $T^2 \partial_T \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x) = -T \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x)$ ausgenutzt wurden.

Magnetisierung pro Gitterplatz

Die Magnetisierung pro Gitterplatz

$$m(h, T) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle S^z \rangle_{T, h}}{L}$$

lässt sich aus der Freien Energie pro Gitterplatz f mittels

$$m(h, T) = -\frac{\partial f}{\partial h} \quad (4.1.34)$$

bestimmen. Aus (4.1.30) ergibt sich für die Magnetisierung folgende Integralgleichung:

$$m(h, T) = T \lim_{x \rightarrow 0} \partial_h \ln y(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{2\gamma \cosh\left(\frac{(x' - i\epsilon)\pi}{\gamma}\right)} \frac{T\partial_h \ln \mathfrak{b}_\epsilon(x')}{1 + \mathfrak{b}_\epsilon^{-1}(x')} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{2\gamma \cosh\left(\frac{(x' + i\epsilon)\pi}{\gamma}\right)} \frac{T\partial_h \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x')}{1 + \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon^{-1}(x')} . \quad (4.1.35)$$

Über (4.1.25) können die partiellen logarithmischen Ableitungen der Hilfsfunktionen $y(x)$, $\mathfrak{b}_\epsilon(x)$ und $\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x)$ durch lineare Integralgleichungen bestimmt werden. Diese lauten

$$\begin{pmatrix} T\partial_h \ln y \\ T\partial_h \ln \mathfrak{b}_\epsilon \\ T\partial_h \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2\gamma - \pi} \\ -\frac{\pi}{2\gamma - \pi} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{T\partial_h \ln y}{1 + y^{-1}} \\ \frac{T\partial_h \ln \mathfrak{b}_\epsilon}{1 + \mathfrak{b}_\epsilon^{-1}} \\ \frac{T\partial_h \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon}{1 + \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon^{-1}} \end{pmatrix} (x) . \quad (4.1.36)$$

4.1.6. Die Hilfsfunktionen \mathfrak{f} und $\bar{\mathfrak{f}}$

Nun werden alternative Hilfsfunktionen $\mathfrak{f}_\epsilon(x)$, $\mathfrak{F}_\epsilon(x)$ und $\bar{\mathfrak{f}}_\epsilon(x)$, $\bar{\mathfrak{F}}_\epsilon(x)$ eingeführt, die folgendermaßen über die Hilfsfunktionen $\mathfrak{b}_\epsilon(x)$ und $\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x)$ definiert sind:

$$\mathfrak{f}_\epsilon(x) := \frac{1}{\mathfrak{b}_\epsilon(x - \eta + 2i\epsilon)} = \frac{1}{\mathfrak{b}(x - \frac{\eta}{2} + i\epsilon)} , \quad \mathfrak{F}_\epsilon(x) := 1 + \mathfrak{f}_\epsilon(x) , \quad (4.1.37a)$$

$$\bar{\mathfrak{f}}_\epsilon(x) := \frac{1}{\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x + \eta - 2i\epsilon)} = \frac{1}{\bar{\mathfrak{b}}(x + \frac{\eta}{2} - i\epsilon)} , \quad \bar{\mathfrak{F}}_\epsilon(x) := 1 + \bar{\mathfrak{f}}_\epsilon(x) . \quad (4.1.37b)$$

Einsetzen der Argumente $x - \eta - 2i\epsilon$ bzw. $x + \eta + 2i\epsilon$ in (4.1.25) liefert unter Benutzung der obengenannten Definitionen für die Funktionen $\mathfrak{f}_\epsilon(x)$ und $\bar{\mathfrak{f}}_\epsilon(x)$ die Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \ln \mathfrak{f}_\epsilon(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}}(x - x') \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{b}}}(x - x') \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x') \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{f}y}(x - x') \ln Y_-(x') + \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x) , \end{aligned} \quad (4.1.38a)$$

$$\begin{aligned} \ln \bar{\mathfrak{f}}_\epsilon(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}(x - x') \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}}(x - x') \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x') \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{\bar{\mathfrak{f}}y}(x - x') \ln Y_+(x') + \Delta_{\mathfrak{b}}(x) . \end{aligned} \quad (4.1.38b)$$

Dabei ist der Integrations-Kern $\hat{\mathcal{K}}_{ij}(x)$ durch die Matrix in (4.1.25) bis auf $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{f}y}(x)$ und $\hat{\mathcal{K}}_{\bar{\mathfrak{f}}y}(x)$, welche explizit durch $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{f}y}(x) := \mathcal{K}(x - \frac{\eta}{2} + i\epsilon)$ bzw. $\hat{\mathcal{K}}_{\bar{\mathfrak{f}}y}(x) := \mathcal{K}(x + \frac{\eta}{2} - i\epsilon)$ definiert sind, gegeben. Die Funktionen $Y_\pm(x)$ bezeichnen die verschobenen Funktionen $Y_\pm(x) := Y(x \pm \frac{\eta}{2})$, welche jedoch nicht über (4.1.25), aufgrund der Singularität der Kern-Funktion, bestimmt werden können. Daher werden die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ln y_+(x) &= \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x + i\epsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{y\mathfrak{b}}\left(x - x' + \frac{\eta}{2}\right) \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x') \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{y\bar{\mathfrak{b}}}\left(x - x' + \frac{\eta}{2}\right) \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x') , \end{aligned} \quad (4.1.39a)$$

$$\begin{aligned} \ln y_-(x) &= \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x - i\epsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{y\mathfrak{b}}\left(x - x' - \frac{\eta}{2}\right) \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x') \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\mathcal{K}}_{y\bar{\mathfrak{b}}}\left(x - x' - \frac{\eta}{2}\right) \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x') \end{aligned} \quad (4.1.39b)$$

benötigt. Diese lassen sich aus (4.1.25) und mittels Verwenden des Residuensatzes der Funktionentheorie herleiten. Ferner gelten offenbar folgende nützliche Relationen zwischen den Hilfsfunktionen:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}(x + \eta)} = \frac{\bar{\mathfrak{F}}_0(x)}{\mathfrak{B}(x + \frac{\eta}{2})} , \quad \frac{1}{\mathfrak{A}(x - \eta)} = \frac{\mathfrak{F}_0(x)}{\mathfrak{B}(x - \frac{\eta}{2})} . \quad (4.1.40)$$

4.1.7. Der Nulltemperatur-Limes

Dank der Integraldarstellungen (4.1.25) und (4.1.38) lässt sich der Limes $T \rightarrow 0$ (bei verschwindendem Magnetfeld) bestimmen: Da im Limes $T \rightarrow 0$ der „Driving“-Term in den Ausdrücken für $\mathfrak{b}_\epsilon(\lambda)$ und $\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(\lambda)$

bzw. für $f_\epsilon(\lambda)$ und $\bar{f}_\epsilon(\lambda)$ gegen minus unendlich geht, folgt, dass

$$\lim_{T \rightarrow 0} b_\epsilon(\lambda) = \lim_{T \rightarrow 0} \bar{b}_\epsilon(\lambda) = 0 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} y(\lambda) = 1, \quad \lim_{T \rightarrow 0} Y(\lambda) = 2, \quad \lim_{T \rightarrow 0} f_\epsilon(\lambda) = \lim_{T \rightarrow 0} \bar{f}_\epsilon(\lambda) = 0 \quad (4.1.41)$$

nahe oberhalb bzw. nahe unterhalb der reellen Achse gilt. Folglich konvergiert $y(\lambda \pm \eta/2)$ gegen 1. Somit folgt mit (4.1.8b) und (4.1.40)

$$\lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\mathfrak{A}(x + \eta)} = 1, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\mathfrak{A}(x - \eta)} = 1, \quad (4.1.42a)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\mathfrak{A}(x)} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{\mathfrak{A}}(x)} = \frac{1}{2}. \quad (4.1.42b)$$

Im Nulltemperatur-Limes ergibt sich aus der Inneren Energie e die Grundzustandsenergie. Diese lautet

$$\lim_{T \rightarrow 0} e = -4J \cos^2(\gamma). \quad (4.1.43)$$

4.1.8. Der XXX -Limes

Werden die Argumente x, x' zu $\tilde{x}\gamma/2$ und $\tilde{x}'\gamma/2$ umskaliert, folgen aus (4.1.25) im XXX -Limes, $\gamma \rightarrow 0$, die Integralgleichungen (11) und (12) in [100]. Für \tilde{x} und \tilde{x}' wird wieder nur x bzw. x' geschrieben. Diese lauten

$$\begin{pmatrix} \ln y(x) \\ \ln b_\epsilon(x) \\ \ln \bar{b}_\epsilon(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_b(x) \\ \Delta_{\bar{b}}(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \ln Y(x) \\ \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x) \\ \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x) \end{pmatrix}, \quad (4.1.44)$$

wobei die „Driving“-Terme folgende Form annehmen:

$$\Delta_b(\lambda) := d(u, \lambda - i\tilde{\epsilon}) - \frac{h}{T}, \quad \Delta_{\bar{b}}(\lambda) := d(u, \lambda + i\tilde{\epsilon}) + \frac{h}{T}, \quad d(u, \lambda) := -\frac{2J\pi}{T \cosh(\frac{\pi}{2}\lambda)}. \quad (4.1.45a)$$

Die Kernmatrix ist durch

$$\hat{\mathcal{K}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}(x + i\tilde{\epsilon}) & \mathcal{K}(x - i\tilde{\epsilon}) \\ \mathcal{K}(x - i\tilde{\epsilon}) & F(x) & -F(x + 2i(1 - \tilde{\epsilon})) \\ \mathcal{K}(x + i\tilde{\epsilon}) & -F(x - 2i(1 - \tilde{\epsilon})) & F(x) \end{pmatrix}, \quad (4.1.46)$$

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{4 \cosh(\frac{\pi}{2}x)}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-|k|}}{2 \cosh(k)} e^{-ikx},$$

gegeben¹. Die Funktion $F(x)$ lässt sich mittels der Digamma-Funktion,

$$\Psi(x) := \frac{\partial}{\partial x} \ln(\Gamma(x)), \quad \Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

wie folgt darstellen:

$$F(x) = \frac{1}{8\pi} \left\{ \Psi\left(-\frac{i}{4}x\right) + \Psi\left(\frac{i}{4}x\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{4}x\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}x\right) \right\}. \quad (4.1.47)$$

Eigenwerte

Im XXX -Limes sind die betragsmäßig größten Eigenwerte der Quantentransfer-Matrizen durch

$$\ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x - x') \left\{ \ln Y(x') + \ln \left[\frac{\phi_-(x' + 2i) \phi_+(x' - 2i)}{\phi_-(x' - 2i) \phi_+(x' + 2i)} \right] \right\} + \text{konst.}, \quad (4.1.48a)$$

$$\ln \Lambda_0^{[1]}(x) = \ln y(x) + \ln \left[\frac{\phi_+(x - 2i) \phi_-(x + 2i)}{\phi_-(x - 2i) \phi_+(x + 2i)} \right] \quad (4.1.48b)$$

gegeben.

Freie Energie

Für die Freie Energie pro Gitterplatz folgt der Ausdruck

¹Im Vergleich zur Notation von [100] gilt $h = -H$. Des Weiteren wurde hier im Hamilton-Operator (2.0.3b) eine andere Normierung der Kopplungsstärke J gewählt, welche in der Notation von [100] gerade $4J$ entspricht.

$$\begin{aligned}
 f &= -4J - T \lim_{x \rightarrow 0} \ln y(x) \\
 &= -4J - T \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\ln \mathfrak{B}_{\tilde{\varepsilon}}(x')}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x' - i\tilde{\varepsilon})\right)} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\ln \bar{\mathfrak{B}}_{\tilde{\varepsilon}}(x')}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x' + i\tilde{\varepsilon})\right)} \right). \quad (4.1.49)
 \end{aligned}$$

Innere Energie pro Gitterplatz

Für die Spin-1 XXX -Kette ist die Innere Energie durch

$$\begin{aligned}
 e &= -4J + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x' - i\tilde{\varepsilon})\right)} \frac{T^2 \partial_T \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x')}{1 + \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}(x')} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x' + i\tilde{\varepsilon})\right)} \frac{T^2 \partial_T \ln \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x')}{1 + \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}(x')} \quad (4.1.50)
 \end{aligned}$$

gegeben. Dabei werden die Funktionen $T^2 \partial_T \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ und $T^2 \partial_T \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ durch die Integralgleichungen

$$\begin{pmatrix} T^2 \partial_T \ln y \\ T^2 \partial_T \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}} \\ T^2 \partial_T \ln \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}} \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -T \Delta_{\mathfrak{b}}(x) \\ -T \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{T^2 \partial_T \ln y}{1+y^{-1}} \\ \frac{T^2 \partial_T \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}}{1+\mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}} \\ \frac{T^2 \partial_T \ln \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}}{1+\bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}} \end{pmatrix} (x) \quad (4.1.51)$$

beschrieben. Die Grundzustandsenergie ist

$$\lim_{T \rightarrow 0} e = -4J \quad (4.1.52)$$

und stimmt mit dem Literaturwert [108] überein^{II}.

Magnetisierung pro Gitterplatz

Für die Magnetisierung pro Gitterplatz $m(h, T)$ folgt die Integralgleichung

$$m(h, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x' - i\tilde{\varepsilon})\right)} \frac{T \partial_h \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x')}{1 + \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}(x')} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x' + i\tilde{\varepsilon})\right)} \frac{T \partial_h \ln \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x')}{1 + \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}(x')} \quad (4.1.53)$$

Die partiellen logarithmischen Ableitungen der Hilfsfunktionen $y(x)$, $\mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ und $\bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ werden durch lineare Integralgleichungen bestimmt:

$$\begin{pmatrix} T \partial_h \ln y \\ T \partial_h \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}} \\ T \partial_h \ln \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}} \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{T \partial_h \ln y}{1+y^{-1}} \\ \frac{T \partial_h \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}}{1+\mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}} \\ \frac{T \partial_h \ln \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}}{1+\bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}} \end{pmatrix} (x). \quad (4.1.54)$$

Der Hochtemperatur-Limes

Als Hochtemperatur-Entwicklung für die Hilfsfunktionen $y(x)$, $\mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ und $\bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ des nichtlinearen Integralgleichungs-Systems (4.1.44) wird analog zum Spin-1/2 Fall (vgl. [39]) folgender Ansatz verwendet:

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\right)^k y_k(x), \quad \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x) = \mathfrak{b}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\right)^k \mathfrak{b}_k(x), \quad \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x) = \bar{\mathfrak{b}}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\right)^k \bar{\mathfrak{b}}_k(x), \quad (4.1.55)$$

wobei y_0 , \mathfrak{b}_0 und $\bar{\mathfrak{b}}_0$ drei komplexe Zahlen seien und nicht vom Spektralparameter x abhängen sollen. Zunächst werden die nullten Ordnungen der Hochtemperatur-Entwicklung, also die Zahlen y_0 , \mathfrak{b}_0 und $\bar{\mathfrak{b}}_0$ bestimmt. In nullter Ordnung verschwinden die „Driving“-Terme $\Delta_{\mathfrak{b}}(x)$ und $\Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x)$. Da die Zahlen $\ln(1 + y_0)$, $\ln(1 + \mathfrak{b}_0)$ und $\ln(1 + \bar{\mathfrak{b}}_0)$ ebenfalls unabhängig vom Spektralparameter x sind, können die Konvolutionsintegrale einfach ausgeführt werden. Somit erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \ln y_0 &= \frac{1}{2} [\ln(1 + \mathfrak{b}_0) + \ln(1 + \bar{\mathfrak{b}}_0)] , \\
 \ln \mathfrak{b}_0 &= \frac{1}{2} [\ln(1 + y_0) - \ln(1 + \mathfrak{b}_0) + \ln(1 + \bar{\mathfrak{b}}_0)] ,
 \end{aligned}$$

^{II}Im Vergleich zu [108] ist $J = 1/4$ zu wählen (siehe Gleichung (1) und (7)).

$$\ln \bar{b}_0 = \frac{1}{2} [\ln(1 + y_0) + \ln(1 + b_0) - \ln(1 + \bar{b}_0)]$$

mit der eindeutigen Lösung

$$y_0 = 3, \quad b_0 = 2 = \bar{b}_0. \quad (4.1.56)$$

Einsetzen des Ansatzes (4.1.55) in (4.1.44) und Vergleichen der Ordnungen in $1/T$ auf beiden Seiten, liefert Bestimmungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten $y_k(x)$, $b_k(x)$ und $\bar{b}_k(x)$. Mit den Näherungen

$$\ln(n+x) \approx \ln(2) + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \mathcal{O}(x^3)$$

für $|x| \ll 1$ und $n \in \mathbb{N}$, folgen beispielsweise für die erste Ordnung in $1/T$ die Integralgleichungen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}y_1(x) \\ \frac{1}{2}b_1(x) \\ \frac{1}{2}\bar{b}_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2J\pi}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-i\tilde{\epsilon}))} - h \\ -\frac{2J\pi}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x+i\tilde{\epsilon}))} + h \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{1}{4}y_1(x) \\ \frac{1}{3}b_1(x) \\ \frac{1}{3}\bar{b}_1(x) \end{pmatrix}, \quad (4.1.57)$$

und für die zweite Ordnung in $1/T$ die Integralgleichungen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}y_2(x) \\ \frac{1}{2}b_2(x) \\ \frac{1}{2}\bar{b}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18}y_1^2(x) \\ \frac{1}{8}b_1^2(x) \\ \frac{1}{8}\bar{b}_1^2(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{1}{4}[y_2(x) - \frac{1}{8}y_1^2(x)] \\ \frac{1}{3}[b_2(x) - \frac{1}{6}b_1^2(x)] \\ \frac{1}{3}[\bar{b}_2(x) - \frac{1}{6}\bar{b}_1^2(x)] \end{pmatrix}. \quad (4.1.58)$$

Durch Anwenden der Fourier-Transformation auf (4.1.57) wird das Integralgleichungs-System in ein lineares Gleichungssystem überführt, welches eindeutig (algebraisch) gelöst werden kann.

$$\mathcal{F}(y_1(x))(k) = \frac{32J\pi}{3} (e^{-4|k|} - 2e^{-2|k|}), \quad (4.1.59a)$$

$$\mathcal{F}(b_1(x))(k) = -\frac{16J\pi}{3} e^{-k\tilde{\epsilon}} (e^{2k} + 1) [e^{-3k}\Theta(k) + e^k (2e^{2k} - 3)\Theta(-k)] - 12h\pi\delta(k), \quad (4.1.59b)$$

$$\mathcal{F}(\bar{b}_1(x))(k) = -\frac{16J\pi}{3} e^{k\tilde{\epsilon}} (e^{-2k} + 1) [e^{-k} (3 - 2e^{-2k})\Theta(k) + e^{3k}\Theta(-k)] + 12h\pi\delta(k). \quad (4.1.59c)$$

Hierbei ist die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(x)$ durch

$$\mathcal{F}(f(x))(k) := \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{ikx} \quad (4.1.60)$$

definiert. Anschließende Fourier-Rücktransformation liefert schließlich die Ergebnisse der Koeffizienten der ersten Ordnung. Es ergeben sich die Koeffizienten

$$y_1(x) = -\frac{512J}{(4+x^2)(16+x^2)}, \quad (4.1.61a)$$

$$b_1(x) = -6h - J \frac{128i(4+i(x-i\tilde{\epsilon})+(x-i\tilde{\epsilon})^2)}{((x-i\tilde{\epsilon})^2+1)((x-i\tilde{\epsilon})^2+9)(x-i\tilde{\epsilon}+5i)}, \quad (4.1.61b)$$

$$\bar{b}_1(x) = 6h + J \frac{128i(4-i(x+i\tilde{\epsilon})+(x+i\tilde{\epsilon})^2)}{((x+i\tilde{\epsilon})^2+1)((x+i\tilde{\epsilon})^2+9)(x+i\tilde{\epsilon}-5i)}. \quad (4.1.61c)$$

Setzt man die Ergebnisse (4.1.61) in das Gleichungssystem (4.1.58) ein, so ist es möglich, dieses mittels Fourier-Transformation wieder in ein lineares Gleichungssystem zu überführen, welches algebraisch eindeutig gelöst werden kann. Wird die inverse Fourier-Transformation daraufhin auf die Lösung angewendet, erhält man analog zur Bestimmung von (4.1.61) die zweite Ordnung der Hochtemperatur-Entwicklungen (4.1.55). Für die Hilfsfunktion $y(x)$ ergibt sich somit die Reihenentwicklung

$$y(x) = 3 - \frac{512J}{(4+x^2)(16+x^2)} \frac{1}{T} + \left(\frac{512J(x^4+12x^2+128)}{(4+x^2)^2(16+x^2)^2} + 4h^2 \right) \frac{1}{T^2} + \mathcal{O}(T^{-3}). \quad (4.1.62)$$

Prinzipiell ermöglicht iteratives Anwenden dieser Methode beliebige Ordnungen zu berechnen. Jedoch lässt sich schon anhand der Form des Gleichungssystems (4.1.58) erkennen, dass der Rechenaufwand erheblich mit der Ordnung wächst, da niedrige Ordnungen polynomial eingehen.

Wird die Hochtemperatur-Entwicklung für die Hilfsfunktion $y(x)$ nun in den Ausdruck der Freien Energie (4.1.29) für den isotropen Grenzfall unter Berücksichtigung der entsprechenden Skalierung der physikali-

schen Temperatur^{III} eingesetzt, so folgt mit der Taylor-Entwicklung des Logarithmus das Ergebnis

$$f = -\ln(3)T - \frac{4J}{3} - \left(\frac{16J^2}{9} + \frac{4h^2}{3} \right) \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}). \quad (4.1.63)$$

Mit (4.1.31) folgt für die Innere Energie pro Gitterplatz e der erste Term der Hochtemperatur-Entwicklung,

$$e = -\frac{4J}{3} - \left(\frac{32J^2}{9} + \frac{8h^2}{3} \right) \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}). \quad (4.1.64)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (B.0.4) überein.

Weiterhin folgt für die Magnetisierung $m(h, T)$ nach (4.1.34) der Ausdruck

$$m(h, T) = \frac{8}{3} \frac{h}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}). \quad (4.1.65)$$

4.2. Einschub zweier Spin-1/2-Linien

Die mit zwei zusätzlichen Spin-1/2-Räumen im Quantenraum modifizierte Quantenmonodromie-Matrix, mit Spin-1/2-Hilfsraum, wird durch

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a^{[\frac{1}{2}]}(x + \frac{\eta}{2}; \mu) &:= \exp \left[\frac{h \sigma_a^z}{T} \right] \mathcal{R}_{a \overline{N+2}}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x - \nu_{\overline{N+2}}) \mathcal{R}_{\overline{N+1} a}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{N+1}} - x - \eta) \\ &\mathcal{R}_{a \overline{N}}^{[\frac{1}{2}, 1]}(x - \nu_{\overline{N}}) \mathcal{R}_{\overline{N-1} a}^{[1, \frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{N-1}} - x - \eta) \cdots \mathcal{R}_{a \overline{2}}^{[\frac{1}{2}, 1]}(x - \nu_{\overline{2}}) \mathcal{R}_{\overline{1} a}^{[1, \frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{1}} - x - \eta) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

definiert, wobei die zwei weiteren Inhomogenitäten $\nu_{\overline{N+1}}$ und $\nu_{\overline{N+2}}$ durch

$$\nu_{\overline{N+2}} = \mu - \frac{\eta}{2}, \nu_{\overline{N+1}} = \mu + \delta + \frac{\eta}{2} \quad (4.2.2)$$

gegeben sind. Die restlichen Inhomogenitäten werden wie gehabt gewählt und folgendermaßen eingegrenzt:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\nu_{\overline{2k}}) &\in (0, \gamma/2), \text{Im}(\nu_{\overline{2k-1}}) \in (\gamma/2, \gamma), k = 1, \dots, N/2, \\ \text{Im}(\nu_{\overline{N+2}}) &\in (-\gamma, 0), \text{Im}(\nu_{\overline{N+1}}) \in (0, \gamma). \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Insbesondere ist also $\text{Im}(\mu) \in (-\gamma/2, \gamma/2)$ und $0 < \text{Im}(\delta) \ll \gamma$, so dass $\text{Im}(\mu + \delta) \in (-\gamma/2, \gamma/2)$ gilt.

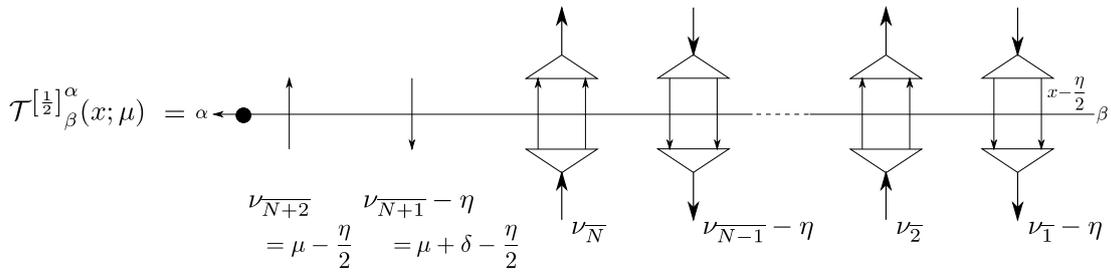


Abbildung 4.3.: Grafische Notation der modifizierten Quantenmonodromie-Matrix $\mathcal{T}^{[\frac{1}{2}]}_{\beta}(x; \mu)$ mit Hilfsraum Spin-1/2 und modifizierten Quantenraum bestehend aus insgesamt N Spin-1-Linien und zwei Spin-1/2-Linien.

Mit den zugehörigen \mathcal{L} -Matrizen, definiert durch

$$\mathcal{L}_{\bar{j}}^{QTM\alpha}_{\beta}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} \mathcal{L}_{\bar{j}\beta}^{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) := \mathcal{R}_{\beta\delta}^{[\frac{1}{2}, 1]}(\lambda_1 - \frac{\eta}{2} - \lambda_2) E_{\bar{j}\gamma}^{\delta} & , \text{ falls } \bar{j} \in \{\overline{1}, \dots, \overline{N}\} \text{ gerade,} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\bar{j}\beta}^{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) := \mathcal{R}_{\delta\beta}^{[1, \frac{1}{2}]}(\lambda_2 - \lambda_1 + \frac{\eta}{2}) E_{\bar{j}\gamma}^{\delta} & , \text{ falls } \bar{j} \in \{\overline{1}, \dots, \overline{N}\} \text{ ungerade,} \\ \mathcal{L}_{\overline{N+2}\beta}^{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) := \mathcal{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\lambda_1 - \frac{\eta}{2} - \lambda_2) E_{\bar{j}\gamma}^{\delta} & , \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\overline{N+1}\beta}^{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) := \mathcal{R}_{\delta\beta}^{t_1\gamma\alpha}(\lambda_2 - \lambda_1 + \frac{\eta}{2}) E_{\bar{j}\gamma}^{\delta} & , \end{cases} \quad (4.2.4)$$

^{III}Siehe (2.0.3b). Die Skalierung des Hamilton-Operators H_{XXX} entspricht der skalierten (inversen) Temperatur $i\beta = -\frac{4J}{T}$.

lässt sich die Quantentransfer-Matrix zu (4.2.1) wie folgt ausdrücken:

$$t^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu) = \exp\left(\frac{\hbar \sigma^z}{T}\right) \mathcal{L}_{\overline{N+2}}\left(x, \nu_{\overline{N+2}}\right) \tilde{\mathcal{L}}_{\overline{N+1}}\left(x, \nu_{\overline{N+1}} - \eta\right) \\ \mathcal{L}_{\overline{N}}\left(x, \nu_{\overline{N}}\right) \tilde{\mathcal{L}}_{\overline{N-1}}\left(x, \nu_{\overline{N-1}} - \eta\right) \cdots \mathcal{L}_{\overline{2}}\left(x, \nu_{\overline{2}}\right) \tilde{\mathcal{L}}_{\overline{1}}\left(x, \nu_{\overline{1}} - \eta\right). \quad (4.2.5)$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}_{\overline{N+2}}\left(x, \nu_{\overline{N+2}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \frac{\sinh(\eta)}{\sinh\left(x - \nu_{\overline{N+2}} + \frac{\eta}{2}\right)} \sigma^- \\ 0 & \frac{\sinh\left(x - \nu_{\overline{N+2}} - \frac{\eta}{2}\right)}{\sinh\left(x - \nu_{\overline{N+2}} + \frac{\eta}{2}\right)} \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.6a)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\overline{N+1}}\left(x, \nu_{\overline{N+1}} - \eta\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sinh\left(\nu_{\overline{N+1}} - x - \frac{\eta}{2}\right)}{\sinh\left(\nu_{\overline{N+1}} - x + \frac{\eta}{2}\right)} \mathbb{1} & \frac{\sinh(\eta)}{\sinh\left(\nu_{\overline{N+1}} - x - \frac{\eta}{2}\right)} \sigma^+ \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.6b)$$

Wird die Quantenmonodromie-Matrix $\mathcal{T}^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu)$ wieder nach (3.2.5) als 2×2 -Matrix geschrieben, dann ist durch

$$|0\rangle := \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{\otimes \frac{N}{2}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Pseudovakuum gegeben.

4.2.1. Modifizierte Spin-1-Eigenwerte

Nach dem algebraischen Bethe-Ansatz (2.5.8) werden die modifizierten betragsmäßig größten Eigenwerte durch

$$\Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu) = e^{\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_-(x + \frac{\eta}{2}) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+1}} + \frac{\eta}{2}\right)}{\phi_-(x - 3\frac{\eta}{2}) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+1}} - \frac{\eta}{2}\right)} \frac{q(x - \eta; \mu)}{q(x; \mu)} \\ + e^{-\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_+(x - \frac{\eta}{2}) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+2}} - \frac{\eta}{2}\right)}{\phi_+(x + 3\frac{\eta}{2}) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+2}} + \frac{\eta}{2}\right)} \frac{q(x + \eta; \mu)}{q(x; \mu)}, \quad (4.2.7a)$$

$$\Lambda_0^{[1]}(x; \mu) = \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x + \frac{\eta}{2}; \mu) \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x - \frac{\eta}{2}; \mu) \\ - \frac{\phi_+(x - \eta) \phi_-(x + \eta) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+1}} + \eta\right) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+2}} - \eta\right)}{\phi_+(x + \eta) \phi_-(x - \eta) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+1}}\right) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+2}}\right)} \quad (4.2.7b)$$

bestimmt, wobei die Funktion $q(x; \mu)$ durch

$$q(x; \mu) := \prod_{j=1}^{N+1} \sinh(x - x_j)$$

gegeben ist. Durch die Modifizierung mit den zusätzlichen Spin-1/2-Linien kommt eine weitere Bethe-Ansatz-Zahl x_{N+1} hinzu. Dabei hängen auch die anderen N -vielen Bethe-Ansatz-Zahlen $x_j, j = 1, \dots, N$, (bzgl. der N Spin-1-Räume) nun vom Parameter δ und Spektralparameter μ ab. Diese Abhängigkeit wird durch die Bethe-Ansatz-Gleichungen beschrieben. Für die weitere Diskussion werden die Funktionen

$$\phi(x) := \phi_-\left(x - \frac{\eta}{2}\right) \phi_+\left(x + \frac{\eta}{2}\right), \quad (4.2.8a)$$

$$\varphi(x; \mu) := \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+1}}\right) \sinh\left(x - \nu_{\overline{N+2}}\right) = \sinh\left(x - (\mu + \delta) - \frac{\eta}{2}\right) \sinh\left(x - \mu + \frac{\eta}{2}\right) \quad (4.2.8b)$$

eingeführt. Die Bethe-Ansatz-Gleichungen lauten für den Fall des betragsmäßig größten Eigenwerts der Quantentransfer-Matrix $\Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu)$

$$e^{-2\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi(x_j - \eta) \varphi\left(x_j - \frac{\eta}{2}; \mu\right)}{\phi(x_j + \eta) \varphi\left(x_j + \frac{\eta}{2}; \mu\right)} = \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^{N+1} \frac{\sinh(x_j - x_k - \eta)}{\sinh(x_j - x_k + \eta)}. \quad (4.2.9)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 & e^{-2\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi(x_j - \eta) \sinh(x_j - (\mu + \delta) - \eta) \sinh(x_j - \mu)}{\phi(x_j + \eta) \sinh(x_j - (\mu + \delta)) \sinh(x_j - \mu + \eta)} \\
 &= \frac{\sinh(x_j - (\mu + \epsilon(\delta)) - \eta)}{\sinh(x_j - (\mu + \epsilon(\delta)) + \eta)} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^N \frac{\sinh(x_j - x_k - \eta)}{\sinh(x_j - x_k + \eta)}, \text{ für } j \in \{1, \dots, N\}, \\
 & -e^{-2\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi(\mu + \epsilon(\delta) - \eta) \sinh(\epsilon(\delta) - \delta - \eta) \sinh(\epsilon(\delta))}{\phi(\mu + \epsilon(\delta) + \eta) \sinh(\epsilon(\delta) - \delta) \sinh(\epsilon(\delta) + \eta)} = \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(\mu + \epsilon(\delta) - x_k - \eta)}{\sinh(\mu + \epsilon(\delta) - x_k + \eta)}.
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde $x_{N+1} = \mu + \epsilon(\delta)$ gesetzt, wobei die Funktion $\epsilon(\delta)$ im Limes $\delta \rightarrow 0$ erwartungsgemäß verschwindet. Für $\delta \rightarrow 0$ folgt

$$e^{-2\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi(x_j - \eta)}{\phi(x_j + \eta)} = \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^N \frac{\sinh(x_j - x_k - \eta)}{\sinh(x_j - x_k + \eta)}, \forall j = 1, \dots, N. \quad (4.2.10)$$

Das Gleichungssystem (4.2.10) ist gerade das Bethe-Ansatz-Gleichungssystem des nicht-modifizierten Falls (3.2.22) mit den in (3.2.17) oder (3.2.30) definierten Funktionen $\phi_{\pm}(x)$.

Mit den Bethe-Ansatz-Gleichungen (4.2.9) lassen sich zu (4.1.7) entsprechende Funktionen definieren,

$$\mathfrak{a}(x; \mu) := e^{-2\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi(x_j - \eta) \varphi(x_j - \frac{\eta}{2}; \mu) q(x + \eta; \mu)}{\phi(x_j + \eta) \varphi(x_j + \frac{\eta}{2}; \mu) q(x - \eta; \mu)}, \quad (4.2.11a)$$

$$\bar{\mathfrak{a}}(x; \mu) := \frac{1}{\mathfrak{a}(x; \mu)}, \mathfrak{A}(x) := 1 + \mathfrak{a}(x; \mu), \bar{\mathfrak{A}}(x) := 1 + \bar{\mathfrak{a}}(x; \mu) = \frac{\mathfrak{A}(x; \mu)}{\mathfrak{a}(x; \mu)}. \quad (4.2.11b)$$

4.2.2. Modifizierte Spin-s-Eigenwerte

Mit den Ergebnissen in (3.4.11) lassen sich für den isotropen Fall analog zu (4.2.7) die Eigenwerte der Transfer-Matrizen der wie in (4.2.1) modifizierten Monodromie-Matrizen

$$\mathcal{T}_a^{[s; \frac{1}{2}]}(x + i; \mu) := \exp\left[\frac{\hbar \sigma_a^z}{T}\right] \mathcal{R}_{a, N+2}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x - \mu + i) \mathcal{R}_{N+1, a}^{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\mu + \delta - x - i) \mathcal{T}_a^{[s; \frac{1}{2}]}(x + i), \quad (4.2.12a)$$

$$\mathcal{T}_{\langle \dots \langle (1 \ 2) \ 3 \dots \rangle \rangle}^{[s; k]}(x; \mu) := S_{1 \ 2 \dots 2k}^{[k]} \mathcal{T}_1^{[s; \frac{1}{2}]}(x - i(2k - 1); \mu) \cdots \mathcal{T}_{2k}^{[s; \frac{1}{2}]}(x + i(2k - 1); \mu) \left(S_{1 \ 2 \dots 2k}^{[k]}\right)^t \quad (4.2.12b)$$

bestimmen. Es werden lediglich die Pseudovakuum-Erwartungswerte $a^{(s)}(x; \mu)$ und $d^{(s)}(x; \mu)$ um die Beiträge der beiden Spin-1/2-Linien ergänzt. Dies wirkt sich wie folgt aus:

$$\Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x; \mu) = \tilde{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x; \mu) + \tilde{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x; \mu), \quad \Lambda_0^{[s; k]}(x; \mu) = \sum_{l=0}^{2k} \tilde{\lambda}_l^{(k)}(x; \mu), \quad k \geq 1, \quad (4.2.13)$$

$$\tilde{\lambda}_l^{(k)}(x; \mu) := \prod_{j=0}^{2k-l-1} \tilde{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x + i(2(s-j) - 1); \mu) \prod_{j=0}^{l-1} \tilde{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x - i(2(s-j) - 1); \mu),$$

$$\tilde{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x; \mu) := d^{(s)}(x; \mu) \frac{q(x + 2i; \mu)}{q(x; \mu)} = e^{-\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_+(x - i(2s - 1))}{\phi_+(x + i(2s + 1))} \frac{x - \mu}{x - \mu + 2i} \frac{q(x + 2i; \mu)}{q(x; \mu)},$$

$$\tilde{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x; \mu) := a^{(s)}(x; \mu) \frac{q(x - 2i; \mu)}{q(x; \mu)} = e^{\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_-(x + i(2s - 1))}{\phi_-(x - i(2s + 1))} \frac{x - \mu - \delta}{x - \mu - \delta - 2i} \frac{q(x - 2i; \mu)}{q(x; \mu)}.$$

Entsprechend zu (3.4.12) sind die Bethe-Ansatz-Gleichungen durch

$$\frac{\tilde{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x_j)}{\tilde{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x_j)} = -1 \quad \forall x_j, \quad j = 1, \dots, N + 2 \quad (4.2.14)$$

gegeben, wobei x_j die Bethe-Ansatz-Zahlen sind. Analog zu (3.4.13) werden die Funktionen

$$\mathfrak{a}^{(s)}(x; \mu) := \frac{\tilde{\lambda}_0^{(\frac{1}{2})}(x; \mu)}{\tilde{\lambda}_1^{(\frac{1}{2})}(x; \mu)}, \quad \bar{\mathfrak{a}}^{(s)}(x; \mu) := \frac{1}{\mathfrak{a}^{(s)}(x; \mu)}, \quad (4.2.15a)$$

$$\mathfrak{A}^{(s)}(x; \mu) := 1 + \mathfrak{a}^{(s)}(x; \mu), \quad \bar{\mathfrak{A}}^{(s)}(x; \mu) := 1 + \bar{\mathfrak{a}}^{(s)}(x; \mu) \quad (4.2.15b)$$

definiert.

4.2.3. Nichtlineare Integralgleichungen modifizierter Transfer-Matrizen

Um die Eigenwerte $\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu)$ und $\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)$ durch Integralgleichungen auszudrücken, werden zuvor anders normierte Eigenwerte analog zu Kapitel 4.1, „Nichtlineare Integralgleichungen für die Spin-1 XXZ -Kette“,

$$\begin{aligned} \Lambda_1(x; \mu) &:= \phi_+ \left(x + 3\frac{\eta}{2} \right) \phi_- \left(x - 3\frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x - \nu_{N+1} - \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x - \nu_{N+2} + \frac{\eta}{2} \right) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \\ &= e^{\frac{h}{T}} \phi \left(x + \eta \right) \varphi \left(x + \frac{\eta}{2} \right) \frac{q \left(x - \eta; \mu \right)}{q \left(x; \mu \right)} + e^{-\frac{h}{T}} \phi \left(x - \eta \right) \varphi \left(x - \frac{\eta}{2} \right) \frac{q \left(x + \eta; \mu \right)}{q \left(x; \mu \right)}, \end{aligned} \quad (4.2.16a)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x; \mu) &:= \phi_- \left(x - 2\eta \right) \phi_+ \left(x + \eta \right) \phi_- \left(x - \eta \right) \phi_+ \left(x + 2\eta \right) \\ &\quad \sinh \left(x - \nu_{N+1} \right) \sinh \left(x - \nu_{N+1} - \eta \right) \sinh \left(x - \nu_{N+2} \right) \sinh \left(x - \nu_{N+2} + \eta \right) \Lambda_0^{[1]}(x) \\ &= \lambda_1(x; \mu) + \lambda_2(x; \mu) + \lambda_3(x; \mu), \end{aligned} \quad (4.2.16b)$$

eingeführt. Dabei ist

$$\begin{aligned} \lambda_1(x; \mu) &:= e^{-2\frac{h}{T}} \phi \left(x - 3\frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x - \frac{\eta}{2} \right) \varphi(x; \mu) \varphi(x - \eta; \mu) \frac{q \left(x + 3\frac{\eta}{2}; \mu \right)}{q \left(x - \frac{\eta}{2}; \mu \right)}, \\ \lambda_2(x; \mu) &:= \phi \left(x - \frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x + \frac{\eta}{2} \right) \varphi^2(x; \mu) \frac{q \left(x + 3\frac{\eta}{2}; \mu \right) q \left(x - 3\frac{\eta}{2}; \mu \right)}{q \left(x + \frac{\eta}{2}; \mu \right) q \left(x - \frac{\eta}{2}; \mu \right)}, \\ \lambda_3(x; \mu) &:= e^{2\frac{h}{T}} \phi \left(x + \frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x + 3\frac{\eta}{2} \right) \varphi(x; \mu) \varphi(x + \eta; \mu) \frac{q \left(x - 3\frac{\eta}{2}; \mu \right)}{q \left(x + \frac{\eta}{2}; \mu \right)}. \end{aligned}$$

Hilfsfunktionen

In analoger Weise zu Kapitel 4.1 werden folgende Hilfsfunktionen definiert:

$$\mathfrak{b}(x; \mu) := \frac{\lambda_1(x; \mu) + \lambda_2(x; \mu)}{\lambda_3(x; \mu)}, \quad \mathfrak{B}(x; \mu) := 1 + \mathfrak{b}(x; \mu), \quad (4.2.17a)$$

$$\bar{\mathfrak{b}}(x; \mu) := \frac{\lambda_2(x; \mu) + \lambda_3(x; \mu)}{\lambda_1(x; \mu)}, \quad \bar{\mathfrak{B}}(x; \mu) := 1 + \bar{\mathfrak{b}}(x; \mu), \quad (4.2.17b)$$

$$y(x; \mu) := \frac{(\lambda_1(x; \mu) + \lambda_2(x; \mu) + \lambda_3(x; \mu)) \lambda_2(x; \mu)}{\lambda_1(x; \mu) \lambda_3(x; \mu)}, \quad Y(x; \mu) := 1 + y(x; \mu). \quad (4.2.17c)$$

Es gelten zu (4.1.4)-(4.1.8a) ähnliche Relationen. Die Wichtigsten werden im Folgenden aufgelistet:

$$\mathfrak{b}(x; \mu) = e^{-3\frac{h}{T}} \frac{\phi \left(x - \frac{\eta}{2} \right)}{\phi \left(x + 3\frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x + \frac{\eta}{2} \right)} \frac{1}{\varphi \left(x + \eta; \mu \right)} \frac{q \left(x + \frac{3}{2}\eta; \mu \right)}{q \left(x - \frac{3}{2}\eta; \mu \right)} \Lambda_1 \left(x - \frac{\eta}{2}; \mu \right), \quad (4.2.18a)$$

$$\bar{\mathfrak{b}}(x; \mu) = e^{3\frac{h}{T}} \frac{\phi \left(x + \frac{\eta}{2} \right)}{\phi \left(x - 3\frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x - \frac{\eta}{2} \right)} \frac{1}{\varphi \left(x - \eta; \mu \right)} \frac{q \left(x - \frac{3}{2}\eta; \mu \right)}{q \left(x + \frac{3}{2}\eta; \mu \right)} \Lambda_1 \left(x + \frac{\eta}{2}; \mu \right), \quad (4.2.18b)$$

$$\Lambda_2(x; \mu) = \begin{cases} e^{2\frac{h}{T}} \phi \left(x + \frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x + 3\frac{\eta}{2} \right) \varphi \left(x + \eta; \mu \right) \varphi(x; \mu) \frac{q \left(x - \frac{3}{2}\eta; \mu \right)}{q \left(x + \frac{\eta}{2}; \mu \right)} \mathfrak{B}(x; \mu) \\ e^{-2\frac{h}{T}} \phi \left(x - 3\frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x - \frac{\eta}{2} \right) \varphi \left(x - \eta; \mu \right) \varphi(x; \mu) \frac{q \left(x + \frac{3}{2}\eta; \mu \right)}{q \left(x - \frac{\eta}{2}; \mu \right)} \bar{\mathfrak{B}}(x; \mu) \end{cases}. \quad (4.2.19a)$$

Des Weiteren gelten die Relationen

$$y(x; \mu) = \frac{\Lambda_2(x; \mu)}{f(x; \mu)}, \quad (4.2.19b)$$

wobei

$$f(x; \mu) := \phi \left(x - 3\frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x + 3\frac{\eta}{2} \right) \varphi \left(x - \eta; \mu \right) \varphi \left(x + \eta; \mu \right) = f(x) \varphi \left(x - \eta; \mu \right) \varphi \left(x + \eta; \mu \right)$$

sowie

$$Y(x; \mu) = \frac{\Lambda_1 \left(x + \frac{\eta}{2}; \mu \right) \Lambda_1 \left(x - \frac{\eta}{2}; \mu \right)}{f(x; \mu)} = \mathfrak{A} \left(x + \frac{\eta}{2}; \mu \right) \bar{\mathfrak{A}} \left(x - \frac{\eta}{2}; \mu \right) = \mathfrak{b}(x; \mu) \bar{\mathfrak{b}}(x; \mu) \quad (4.2.19c)$$

als auch

$$\begin{aligned} 1 + y^{-1}(x; \mu) &= \frac{\Lambda_1(x + \frac{\eta}{2}; \mu) \Lambda_1(x - \frac{\eta}{2}; \mu)}{\Lambda_2(x; \mu)} = \frac{\Lambda^{[\frac{1}{2}]}(x + \frac{\eta}{2}; \mu) \Lambda^{[\frac{1}{2}]}(x - \frac{\eta}{2}; \mu)}{\Lambda^{[1]}(x; \mu)} \\ &= \frac{\mathfrak{A}(x + \frac{\eta}{2}; \mu) \mathfrak{A}(x - \frac{\eta}{2}; \mu)}{\mathfrak{B}(x; \mu)} = \frac{\overline{\mathfrak{A}}(x + \frac{\eta}{2}; \mu) \overline{\mathfrak{A}}(x - \frac{\eta}{2}; \mu)}{\overline{\mathfrak{B}}(x; \mu)}. \end{aligned} \quad (4.2.19d)$$

Herleitung der nichtlinearen Integralgleichungen

Die Herleitung der nichtlinearen Integralgleichungen für die Funktionen $\mathfrak{b}(x)$, $\overline{\mathfrak{b}}(x)$ und $y(x)$ folgt derselben Strategie wie im nicht-modifizierten Fall, Kapitel 4.1.2, „Herleitung der nichtlinearen Integralgleichungen“. Es wird dieselbe Definition (4.1.60) der Fourier-Transformierten der zweifachen logarithmischen Ableitung entlang der Konturen \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 einer Funktion f gewählt. Um die Abhängigkeit von der Modifikation mit den zusätzlichen Inhomogenitäten ν_{N+1} und ν_{N+2} zu kennzeichnen, wird im Folgenden die Notation

$$\widehat{\mathcal{L}f''_{\mu}}(k) := \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [f(x; \mu)]'' e^{ikx}, \quad \widehat{\mathcal{L}f''_{\mu}}(k) := \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [f(x; \mu)]'' e^{ikx} \quad (4.2.20)$$

verwendet. Mit

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}t''_{-\mu}}(k) &= \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln \left[\phi \left(x + \frac{\eta}{2} \right) \phi_+ \left(x + 3\frac{\eta}{2}; \mu \right) \varphi(x) \varphi(x + \eta; \mu) \right]'' e^{ikx} \\ &= \widehat{\mathcal{L}t''_{-}}(k) + \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [\varphi(x; \mu) \varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx}, \\ \widehat{\mathcal{L}t''_{+\mu}}(k) &= \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln \left[\phi \left(x - 3\frac{\eta}{2} \right) \phi \left(x - \frac{\eta}{2} \right) \varphi(x; \mu) \varphi(x - \eta; \mu) \right]'' e^{ikx} \\ &= \widehat{\mathcal{L}t''_{+}}(k) + \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x; \mu) \varphi(x - \eta; \mu)]'' e^{ikx} \end{aligned}$$

ergibt sich schließlich das Integralgleichungs-System

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}b''_{\mu}}(k) &= -\widehat{G}(k) \left[\widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}''_{\mu}}(k) + \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}''_{\mu}}(k) \right] + \widehat{G}_2(k) \widehat{\mathcal{L}Y''_{\mu}}(k) + \frac{\cosh \left((2u + \gamma) \frac{k}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\gamma}{2} k \right)} N\pi k \\ &\quad - \widehat{G}(k) \left\{ \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x; \mu) \varphi(x - \eta; \mu)]'' e^{ikx} + \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [\varphi(x; \mu) \varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx} \right\} \\ &\quad + \widehat{G}_2(k) \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - \eta; \mu) \varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx} - \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx}, \end{aligned} \quad (4.2.21a)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}\overline{b}''_{\mu}}(k) &= \widehat{G}(k) \left[\widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}''_{\mu}}(k) + \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}''_{\mu}}(k) \right] + \widehat{G}_2(-k) \widehat{\mathcal{L}Y''_{\mu}}(k) - \frac{\cosh \left((2u + \gamma) \frac{k}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\gamma}{2} k \right)} N\pi k \\ &\quad + \widehat{G}(k) \left\{ \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x; \mu) \varphi(x - \eta; \mu)]'' e^{ikx} + \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [\varphi(x; \mu) \varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx} \right\} \\ &\quad + \widehat{G}_2(-k) \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - \eta; \mu) \varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx} - \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - \eta; \mu)]'' e^{ikx}, \end{aligned} \quad (4.2.21b)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}y''_{\mu}}(k) &= \widehat{G}_2(-k) \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}''_{\mu}}(k) - \widehat{G}_2(k) \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}''_{\mu}}(k) \\ &\quad + \widehat{G}_2(k) \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x; \mu) \varphi(x - \eta; \mu)]'' e^{ikx} - \widehat{G}_2(-k) \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [\varphi(x; \mu) \varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx} \\ &\quad - \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - \eta; \mu) \varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx}, \end{aligned} \quad (4.2.21c)$$

sowie

$$2 \cosh \left(\frac{\gamma}{2} k \right) \widehat{\mathcal{L}\Lambda''_{1\mu}}(k) = \widehat{\mathcal{L}Y''_{\mu}}(k) + \widehat{\mathcal{L}f''}(k) + \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - \eta; \mu) \varphi(x + \eta; \mu)]'' e^{ikx}, \quad (4.2.22)$$

wobei die in (4.1.18c) definierten Funktionen $\widehat{G}(k)$ und $\widehat{G}_2(k)$ benutzt wurden. Wegen

$$\widehat{G}(k) + \widehat{G}_2(k) - 1 = -(\widehat{G}_2(-k) - \widehat{G}(k)) = -\frac{e^{(\pi - 2\gamma) \frac{k}{2}} \tanh \left(\frac{\gamma}{2} k \right)}{2 \sinh \left((\pi - 2\gamma) \frac{k}{2} \right)},$$

$$\widehat{G}_2(k) - \widehat{G}(k) = -(\widehat{G}(k) + \widehat{G}_2(-k) - 1) = \frac{e^{-(\pi-2\gamma)\frac{k}{2}} \tanh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)}{2 \sinh\left((\pi-2\gamma)\frac{k}{2}\right)}$$

und

$$\int_{\mathcal{C}_2} dx \ln[\varphi(x+\eta; \mu)]'' e^{ikx} = e^{k(2\gamma-\pi)} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln[\varphi(x-\eta; \mu)]'' e^{ikx},$$

verschwinden die zusätzlichen „Driving“-Terme in den Funktionalen $\widehat{L}\widehat{\mathfrak{b}}''_\mu(k)$ und $\widehat{L}\widehat{\mathfrak{b}}''_\mu(k)$ und es folgt aus (4.2.21) schließlich

$$\widehat{L}\widehat{\mathfrak{b}}''_\mu(k) = -\widehat{G}(k) \left[\widehat{L}\widehat{\mathfrak{B}}''_\mu(k) + \widehat{\mathcal{L}}\widehat{\mathfrak{B}}''_\mu(k) \right] + \widehat{G}_2(k) \widehat{L}\widehat{Y}''_\mu(k) + \frac{\cosh\left((2u+\gamma)\frac{k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} N\pi k, \quad (4.2.23a)$$

$$\widehat{L}\widehat{\mathfrak{b}}''_\mu(k) = \widehat{G}(k) \left[\widehat{L}\widehat{\mathfrak{B}}''_\mu(k) + \widehat{\mathcal{L}}\widehat{\mathfrak{B}}''_\mu(k) \right] + \widehat{G}_2(-k) \widehat{L}\widehat{Y}''_\mu(k) - \frac{\cosh\left((2u+\gamma)\frac{k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} N\pi k, \quad (4.2.23b)$$

$$\widehat{L}\widehat{y}''_\mu(k) = \widehat{G}_2(-k) \widehat{L}\widehat{\mathfrak{B}}''_\mu(k) - \widehat{G}_2(k) \widehat{\mathcal{L}}\widehat{\mathfrak{B}}''_\mu(k) - G_2(k) e^{-k \operatorname{Im}(\mu - \frac{\eta}{2} + \delta)} \left(e^{k \operatorname{Im}(\delta)} - 1 \right) k\pi, \quad (4.2.23c)$$

wobei nach (4.1.13) die Identität

$$\begin{aligned} \widehat{L}\widehat{\varphi}''_\mu(k) - \frac{e^{-(\pi-2\gamma)\frac{k}{2}} \cosh\left((\pi-2\gamma)\frac{k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln[\varphi(x-\eta; \mu)]'' e^{ikx} \\ = -G_2(k) e^{-k \operatorname{Im}(\mu - \frac{\eta}{2} + \delta)} \left(e^{k \operatorname{Im}(\delta)} - 1 \right) k\pi \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

in (4.2.23c) eingesetzt wurde. Anwenden der Fourier-Rücktransformation und anschließende zweifache Integration nach x liefert das folgende Integralgleichungs-System, wobei die Asymptoten, die die Integrationskonstanten festlegen, dieselben wie im nicht-modifizierten Fall (siehe Kapitel 4.1.3, „Integrationskonstanten“, insbesondere (4.1.23)) sind und die verschobenen Hilfsfunktionen

$$\mathfrak{b}_\epsilon(x; \mu) := \mathfrak{b}\left(x + \frac{i\gamma}{2} - i\epsilon; \mu\right), \quad \mathfrak{B}_\epsilon(x; \mu) := 1 + \mathfrak{b}_\epsilon(x; \mu), \quad (4.2.25a)$$

$$\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x; \mu) := \bar{\mathfrak{b}}\left(x - \frac{i\gamma}{2} + i\epsilon; \mu\right), \quad \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x; \mu) := 1 + \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x; \mu) \quad (4.2.25b)$$

eingeführt werden. Im Trotter-Limes folgt

$$\begin{pmatrix} \ln y(x; \mu) \\ \ln \mathfrak{b}_\epsilon(x; \mu) \\ \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x; \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_y(x; \mu) \\ \Delta_{\mathfrak{b}}(x) \\ \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \ln Y(x; \mu) \\ \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x; \mu) \\ \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x; \mu) \end{pmatrix}, \quad (4.2.26)$$

wobei $\Delta_{\mathfrak{b}}(x)$ und $\Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x)$ in (4.1.26) definiert und die Kernmatrix $\hat{\mathcal{K}}(x)$ in (4.1.27) gegeben sind. Der „Driving“-Term $\Delta_y(x; \mu)$ berechnet sich zu

$$\Delta_y(x; \mu) = \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2\gamma}(x-\mu) + \frac{i\pi}{4}\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{2\gamma}(x-(\mu+\delta)) + \frac{i\pi}{4}\right)} \right]. \quad (4.2.27)$$

Im Limes $\delta \rightarrow 0$ geht das nichtlineare Gleichungssystem (4.2.26) in (4.1.25) über.

Eigenwerte

Aus (4.2.22) folgt nach Fourier-Rücktransformation

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_1''(x; \mu) = \mathcal{K} * \ln Y''(x; \mu) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{kN\pi \cosh\left((\pi-3\gamma)\frac{k}{2}\right) \cosh\left((2u+\gamma)\frac{k}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} e^{-ikx} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{k\pi \cosh\left((\pi-2\gamma)\frac{k}{2}\right) e^{-k(\operatorname{Im}(\mu) - \frac{\gamma}{2})} \left(1 + e^{-(\operatorname{Im}(\delta) + \gamma)k}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} e^{-ikx}. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Mit folgender Fourier-Rücktransformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{2k\pi \cosh\left((\pi-2\gamma)\frac{k}{2}\right) e^{-k(\operatorname{Im}(\mu) - \frac{\gamma}{2})} \left(1 + e^{-(\operatorname{Im}(\delta) + \gamma)k}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right)} e^{-ikx}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left[\sinh \left(x - \mu + \frac{3}{2}\eta \right) \sinh \left(x - \mu - \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x - (\mu + \delta) + \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x - (\mu + \delta) - \frac{3}{2}\eta \right) \right]$$

lässt sich der von den Parametern δ und μ abhängige Beitrag als Konvolutionsintegral umschreiben. Nach zweifacher Integration bezüglich x folgt

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_1(x; \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') \left\{ \ln Y(x'; \mu) \right. \\ &+ \ln \left[\sinh \left(x' - \mu + \frac{3}{2}\eta \right) \sinh \left(x' - \mu - \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x' - (\mu + \delta) + \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x' - (\mu + \delta) - \frac{3}{2}\eta \right) \right] \left. \right\} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{N \cosh \left((\pi - 3\gamma) \frac{k}{2} \right) \cosh \left((2u + \gamma) \frac{k}{2} \right)}{2k \sinh \left(\frac{\pi}{2}k \right) \cosh \left(\frac{\gamma}{2}k \right)} e^{-ikx} + \text{konst.} \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Der Eigenwert $\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu)$ ist somit durch

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') \left\{ \ln Y(x'; \mu) + \ln \left[\frac{\sinh \left(x' - \mu - \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x' - (\mu + \delta) + \frac{\eta}{2} \right)}{\sinh \left(x' - \mu + \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x' - (\mu + \delta) - \frac{\eta}{2} \right)} \right] \right\} \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{N \cosh \left((\pi - 3\gamma) \frac{k}{2} \right) \cosh \left((2u + \gamma) \frac{k}{2} \right)}{2k \sinh \left(\frac{\pi}{2}k \right) \cosh \left(\frac{\gamma}{2}k \right)} e^{-ikx} - \ln \left[\phi_+ \left(x + 3\frac{\eta}{2} \right) \phi_- \left(x - 3\frac{\eta}{2} \right) \right] + \text{konst.} \end{aligned} \quad (4.2.30a)$$

bestimmt. Mittels (4.2.19b) ergibt sich der Eigenwert $\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)$ zu

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_0^{[1]}(x; \mu) &= \ln y(x; \mu) + \ln \left[\frac{\phi_+(x-\eta) \phi_-(x+\eta)}{\phi_+(x+\eta) \phi_-(x-\eta)} \right] \\ &\quad + \ln \left[\frac{\sinh \left(x - \mu - \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x - (\mu + \delta) + \frac{\eta}{2} \right)}{\sinh \left(x - (\mu + \delta) - \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(x - \mu + \frac{\eta}{2} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.30b)$$

Weiterhin werden sechs weitere Funktionen $G_\mu^{(0)}(x)$, $G_\mu^{(+)}(x)$ und $G_\mu^{(-)}(x)$ sowie $g_\mu^{(0)}(x)$, $g_\mu^{(+)}(x)$ als auch $g_\mu^{(-)}(x)$, definiert durch

$$G_\mu^{(0)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln y(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad g_\mu^{(0)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln y(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad (4.2.31a)$$

$$G_\mu^{(+)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \mathfrak{b}_\epsilon(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad g_\mu^{(+)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \mathfrak{b}_\epsilon(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad (4.2.31b)$$

$$G_\mu^{(-)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad g_\mu^{(-)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad (4.2.31c)$$

eingeführt. Diese erfüllen offenbar das Integralgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} (1+y^{-1}(x))G_\mu^{(0)}(x) \\ (1+\mathfrak{b}_\epsilon^{-1}(x))G_\mu^{(+)}(x) \\ (1+\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon^{-1}(x))G_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\pi/\gamma}{\cosh(\frac{\pi}{\gamma}(x-\mu))} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} G_\mu^{(0)}(x) \\ G_\mu^{(+)}(x) \\ G_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix}, \quad (4.2.32a)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} g_\mu^{(0)}(x) \\ g_\mu^{(+)}(x) \\ g_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\pi/\gamma}{\cosh(\frac{\pi}{\gamma}(x-\mu))} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{g_\mu^{(0)}(x)}{1+y^{-1}(x)} \\ \frac{g_\mu^{(+)}(x)}{1+\mathfrak{b}_\epsilon^{-1}(x)} \\ \frac{g_\mu^{(-)}(x)}{1+\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon^{-1}(x)} \end{pmatrix}, \quad (4.2.32b)$$

wobei die Funktionen $y(x)$, $\mathfrak{b}_\epsilon(x)$ und $\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(x)$ die Lösungen des Gleichungssystems (4.1.25) sind. Zwischen den Funktionen $G_\mu^{(0)}(x)$, $G_\mu^{(+)}(x)$ und $G_\mu^{(-)}(x)$ und den logarithmischen Ableitungen der Eigenwerte $\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu)$ und $\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)$ bezüglich δ besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') \left\{ G_\mu^{(0)}(x') + t \left(x' - \mu - \frac{\eta}{2} \right) \right\} \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\sinh \left((\pi - \gamma) \frac{k}{2} \right) e^{-ik(x-\mu)}}{2 \sinh \left(\frac{\pi}{2}k \right) \cosh \left(\frac{\gamma}{2}k \right)} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') G_\mu^{(0)}(x') \end{aligned}$$

$$\text{für } |\operatorname{Im}(x)| < \gamma/2, \quad (4.2.33a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[1]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} = g_\mu^{(0)}(x) + t\left(x - \mu - \frac{\eta}{2}\right), \quad (4.2.33b)$$

wobei die Funktion $t(x)$ durch

$$t(x) := \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(x) \sinh(x + \eta)} = \coth(x) - \coth(x + \eta) \quad (4.2.33c)$$

definiert ist. Andererseits folgt aus (4.2.19c) und (4.2.19d) die Relation

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x + \frac{\eta}{2}; \mu) \right|_{\delta=0} + \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x - \frac{\eta}{2}; \mu) \right|_{\delta=0} = G_\mu^{(0)}(x) + t\left(x - \mu - \frac{\eta}{2}\right). \quad (4.2.33d)$$

Die Inhomogenität in (4.2.33a) lässt sich in

$$2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\sinh\left(\left(\pi - \gamma\right)\frac{k}{2}\right) e^{-ik(x-\mu)}}{2 \sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} = i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[1 - \coth\left(\frac{\pi}{2}k\right) \tanh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)\right] e^{-ik(x-\mu)}$$

umschreiben. Offensichtlich hat der Integrand (unendlich viele) Polstellen bei $k = \pm 2i \pmod{2i}$, außer bei $k = 0$, und bei $k = \pm \frac{i\pi}{\gamma} \pmod{\frac{2i\pi}{\gamma}}$.

Der Nulltemperatur-Limes

Im Nulltemperatur-Limes folgt aus (4.2.32b)

$$\lim_{T \rightarrow 0} g_\mu^{(0)}(x) = -\frac{i\pi}{\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x - \mu)\right)}, \quad (4.2.34a)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} g_\mu^{(\pm)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' \lim_{T \rightarrow 0} g_\mu^{(0)}(x')}{4\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x \pm i\epsilon - x')\right)} = -\frac{i\pi}{2\gamma^2} \frac{x \pm i\epsilon - \mu}{\sinh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x \pm i\epsilon - \mu)\right)}. \quad (4.2.34b)$$

Die Berechnung des Limes $\lim_{T \rightarrow 0} g_\mu^{(\pm)}(x)$ wird wie folgt durchgeführt: Anwenden der Fourier- und inversen Fourier-Transformation liefert die Identität

$$\lim_{T \rightarrow 0} g_\mu^{(\pm)}(x) = -\frac{i\pi}{4\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{e^{ikx'}}{\cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x' \mp i\epsilon)\right)} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{e^{ikx'}}{\cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x' - \mu)\right)} \right).$$

Unter Ausnutzung von (4.1.22b) folgt nach Verschieben der Argumente der Ausdruck

$$\lim_{T \rightarrow 0} g_\mu^{(\pm)}(x) = -\frac{i\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-ik(x \mp i\epsilon - \mu)}}{\cosh^2\left(\frac{\gamma}{2}k\right)}.$$

Mit der inversen Fourier-Darstellung des Tangens Hyperbolicus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tanh(ak) e^{-ikx} = -\frac{i}{2a \sinh\left(\frac{\pi}{2a}k\right)},$$

ergibt sich schließlich das Ergebnis

$$\lim_{T \rightarrow 0} g_\mu^{(\pm)}(x) = -\frac{i\pi}{2\gamma^2} \frac{x - \mu \mp i\epsilon}{\sinh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x - \mu \mp i\epsilon)\right)}. \quad (4.2.35)$$

Weiterhin folgt

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} = -\frac{i\pi}{2\gamma^2} \frac{x - \mu}{\sinh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x - \mu)\right)} + 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\sinh\left(\left(\pi - \gamma\right)\frac{k}{2}\right) e^{-ik(x-\mu)}}{2 \sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)}, \quad (4.2.36a)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[1]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} = -\frac{i\pi}{\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x - \mu)\right)} + t\left(x - \mu - \frac{\eta}{2}\right). \quad (4.2.36b)$$

Der XXX-Limes

Analog zu Kapitel 4.1.8, „Der XXX-Limes“, werden die Argumente x , μ und δ umskaliert. Dann folgt für $\gamma \rightarrow 0$ aus (4.2.26) schließlich

$$\begin{pmatrix} \ln y(x; \mu) \\ \ln \mathfrak{b}_\varepsilon(x; \mu) \\ \ln \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon(x; \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_y(x; \mu) \\ \Delta_{\mathfrak{b}}(x) \\ \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \ln Y(x; \mu) \\ \ln \mathfrak{B}_\varepsilon(x; \mu) \\ \ln \bar{\mathfrak{B}}_\varepsilon(x; \mu) \end{pmatrix}. \quad (4.2.37)$$

Dabei sind die „Driving“-Terme $\Delta_{\mathfrak{b}}(x)$ und $\Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x)$ sowie die Kernmatrix $\hat{\mathcal{K}}(x)$ in (4.1.45) bzw. in (4.1.46) gegeben. Für den „Driving“-Term $\Delta_y(x; \mu)$ folgt

$$\Delta_y(x; \mu) = \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu + i)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - (\mu + \delta) + i)\right)} \right]. \quad (4.2.38)$$

Wegen (4.1.44) ist der XXX-Limes von (4.2.32) durch

$$\begin{pmatrix} (1 + y^{-1}(x))G_\mu^{(0)}(x) \\ (1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x))G_\mu^{(+)}(x) \\ (1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x))G_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\pi/2}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} G_\mu^{(0)}(x) \\ G_\mu^{(+)}(x) \\ G_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} \quad (4.2.39a)$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} g_\mu^{(0)}(x) \\ g_\mu^{(+)}(x) \\ g_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\pi/2}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{g_\mu^{(0)}(x)}{1+y^{-1}(x)} \\ \frac{g_\mu^{(+)}(x)}{1+\mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)} \\ \frac{g_\mu^{(-)}(x)}{1+\bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)} \end{pmatrix} \quad (4.2.39b)$$

bestimmt. Für die Eigenwerte $\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu)$ und $\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)$, welche nach (4.2.7) im XXX-Limes durch

$$\begin{aligned} \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\lambda; \mu) &= e^{\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_-(\lambda + i)}{\phi_-(\lambda - 3i)} \frac{\lambda - (\mu + \delta)}{\lambda - (\mu + \delta) - 2i} \frac{q(\lambda - 2i)}{q(\lambda)} \\ &\quad + e^{-\frac{\hbar}{T}} \frac{\phi_+(\lambda - i)}{\phi_+(\lambda + 3i)} \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu + 2i} \frac{q(\lambda + 2i)}{q(\lambda)}, \end{aligned} \quad (4.2.40a)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0^{[1]}(\lambda; \mu) &= \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\lambda + i; \mu) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\lambda - i; \mu) \\ &\quad - \frac{\phi_+(\lambda - 2i) \phi_-(\lambda + 2i) \lambda - (\mu + \delta) + i \lambda - \mu - i}{\phi_+(\lambda + 2i) \phi_-(\lambda - 2i) \lambda - (\mu + \delta) - i \lambda - \mu + i} \end{aligned} \quad (4.2.40b)$$

gegeben sind, ergeben sich die folgenden Integralgleichungen,

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x - x') \left\{ \ln Y(x'; \mu) + \ln \left[\frac{(x' - \mu - i)(x' - (\mu + \delta) + i)}{(x' - \mu + i)(x' - (\mu + \delta) - i)} \right] \right\} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{N e^{-3|k|} \cosh((u+1)k)}{2|k| \cosh(k)} e^{-ikx} - \ln[\phi_+(x+3i)\phi_-(x-3i)] + \text{konst.} \end{aligned} \quad (4.2.41a)$$

bzw.

$$\ln \Lambda_0^{[1]}(x; \mu) = \ln y(x; \mu) + \ln \left[\frac{\phi_+(x-2i)\phi_-(x+2i)}{\phi_+(x+2i)\phi_-(x-2i)} \right] + \ln \left[\frac{(x-\mu-i)(x-(\mu+\delta)+i)}{(x-(\mu+\delta)-i)(x-\mu+i)} \right]. \quad (4.2.41b)$$

Für die partiellen Ableitungen bezüglich des Parameters δ folgen die Integralausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-x')\right)} \left\{ G_\mu^{(0)}(x') + \frac{2i}{(x' - \mu)^2 + 1} \right\} \\ &= 2\pi i F(x - \mu) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{G_\mu^{(0)}(x')}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-x')\right)}, \quad \text{für } |\text{Im}(x)| < 1, \end{aligned} \quad (4.2.42a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[1]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} = g_\mu^{(0)}(x) + \frac{1}{x - \mu - i} - \frac{1}{x - \mu + i}, \quad (4.2.42b)$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x + i; \mu) \Big|_{\delta=0} + \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x - i; \mu) \Big|_{\delta=0} = G_\mu^{(0)}(x) + \frac{1}{x - \mu - i} - \frac{1}{x - \mu + i}. \quad (4.2.42c)$$

Die Funktion $F(x - \mu)$ in (4.2.42a) entspricht dabei die in (4.1.47) definierte Funktion.

Der Nulltemperatur-Limes

Im Nulltemperatur-Limes folgt

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} = \frac{\pi}{8i} \frac{x - \mu}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x - \mu)\right)} + \frac{1}{4i} \left\{ \Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{4}(x - \mu)\right) + \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}(x - \mu)\right) - \Psi\left(-\frac{i}{4}(x - \mu)\right) - \Psi\left(\frac{i}{4}(x - \mu)\right) \right\}, \quad (4.2.43a)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[1]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} = -\frac{i\pi}{2 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x - \mu)\right)} + \frac{1}{x - \mu - i} - \frac{1}{x - \mu + i}. \quad (4.2.43b)$$

Der Hochtemperatur-Limes

Mit der nullten Ordnung (4.1.56) der Hochtemperatur-Entwicklung (4.1.55) der Hilfsfunktionen $y(x)$, $b_{\tilde{\epsilon}}(x)$ und $\bar{b}_{\tilde{\epsilon}}(x)$ folgt für (4.2.39b) das lineare Integralgleichungs-System

$$g_{\mu}^{(0)}(x) = \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[K(x - x' + i\tilde{\epsilon})g_{\mu}^{(+)}(x') + K(x - x' - i\tilde{\epsilon})g_{\mu}^{(-)}(x') \right] - \frac{i\pi}{2 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x - \mu)\right)} + \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (4.2.44a)$$

$$g_{\mu}^{(+)}(x) = \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[F(x - x')g_{\mu}^{(+)}(x') - F(x - x' - 2i(1 - \tilde{\epsilon}))g_{\mu}^{(-)}(x') \right] + \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x - x' - i\tilde{\epsilon})g_{\mu}^{(0)}(x') + \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (4.2.44b)$$

$$g_{\mu}^{(-)}(x) = \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[F(x - x')g_{\mu}^{(-)}(x') - F(x - x' + 2i(1 - \tilde{\epsilon}))g_{\mu}^{(+)}(x') \right] + \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x - x' + i\tilde{\epsilon})g_{\mu}^{(0)}(x') + \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (4.2.44c)$$

welches sich mittels Fourier-Transformation lösen lässt. Die Fourier-transformierten Gleichungen,

$$\mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(0)}(x)\right)(k) = \frac{1}{\cosh(k)} \left\{ e^{k\tilde{\epsilon}} \mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(+)}(x)\right)(k) + e^{-k\tilde{\epsilon}} \mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(-)}(x)\right)(k) \right\} - \frac{\pi i e^{ik\mu}}{\cosh(k)} + \mathcal{O}(T^{-1}),$$

$$\mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(+)}(x)\right)(k) = \frac{1}{\cosh(k)} \left\{ e^{-|k|} \mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(+)}(x)\right)(k) - e^{-|k|+2(1-\tilde{\epsilon})k} \mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(-)}(x)\right)(k) \right\} + \frac{3e^{-k\tilde{\epsilon}}}{8 \cosh(k)} \mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(0)}(x)\right)(k) + \mathcal{O}(T^{-1}),$$

$$\mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(-)}(x)\right)(k) = \frac{1}{\cosh(k)} \left\{ e^{-|k|} \mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(-)}(x)\right)(k) - e^{-|k|-2(1-\tilde{\epsilon})k} \mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(+)}(x)\right)(k) \right\} + \frac{3e^{+k\tilde{\epsilon}}}{8 \cosh(k)} \mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(0)}(x)\right)(k) + \mathcal{O}(T^{-1}),$$

haben die Lösungen

$$\mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(0)}(x)\right)(k) = -\frac{2\pi i}{3} e^{ik\mu} \left[3e^{-|k|} - e^{-3|k|} \right] + \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (4.2.45a)$$

$$\mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(+)}(x)\right)(k) = -\frac{\pi i}{2} e^{ik(\mu+i\tilde{\epsilon})} \left[e^{-2k} \Theta(k) + e^{2k} (3 - 2e^{2k}) \Theta(-k) \right] + \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (4.2.45b)$$

$$\mathcal{F}\left(g_{\mu}^{(-)}(x)\right)(k) = -\frac{\pi i}{2} e^{ik(\mu-i\tilde{\epsilon})} \left[e^{-2k} (3 - 2e^{-2k}) \Theta(k) + e^{2k} \Theta(-k) \right] + \mathcal{O}(T^{-1}). \quad (4.2.45c)$$

Es folgt

$$g_{\mu}^{(0)}(x) =: g_0^{(0)}(x, \mu) + \mathcal{O}(T^{-1}) = -\frac{16i}{((x - \mu)^2 + 1)((x - \mu)^2 + 9)} + \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (4.2.46a)$$

$$g_{\mu}^{(+)}(x) =: g_0^{(+)}(x, \mu) + \mathcal{O}(T^{-1})$$

$$= \frac{6}{(x - \mu + i(2 - \tilde{\epsilon}))(x - \mu - i(2 + \tilde{\epsilon}))(x - \mu + i(4 - \tilde{\epsilon}))} + \mathcal{O}(T^{-1}), \quad (4.2.46b)$$

$$g_{\mu}^{(-)}(x) =: g_0^{(-)}(x, \mu) + \mathcal{O}(T^{-1})$$

$$= -\frac{6}{(x - \mu + i(2 + \tilde{\epsilon}))(x - \mu - i(2 - \tilde{\epsilon}))(x - \mu - i(4 - \tilde{\epsilon}))} + \mathcal{O}(T^{-1}). \quad (4.2.46c)$$

Somit folgt für die Fourier-Transformation der logarithmischen Ableitung des modifizierten Eigenwertes (4.2.42) der Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} \right) (k) \\ = 2\pi i \mathcal{F}(F(x - \mu))(k) + \mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{4 \cosh(\frac{\pi}{2}(x - x'))} G_{\mu}^{(0)}(x') \right) (k) + \mathcal{O}(T^{-1}) \\ = \pi i e^{ik\mu} \frac{e^{-|k|} + e^{-3|k|}}{4 \cosh(k)} + \mathcal{O}(T^{-1}) = \frac{\pi i}{2} e^{ik\mu} e^{-2|k|} + \mathcal{O}(T^{-1}). \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

Mit der Fourier-Rücktransformation ergibt sich das Ergebnis

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} = \frac{i}{(x - \mu)^2 + 4} + \mathcal{O}(T^{-1}). \quad (4.2.48)$$

Um die nächsten Ordnungen in $1/T$ für (4.2.48) auszudrücken, wird zunächst die Hochtemperatur-Entwicklung der Funktionen $g_{\mu}^{(\alpha)}(x)$ benötigt. Mit dem Ansatz

$$g_{\mu}^{(\alpha)}(x) = g_0^{(\alpha)}(x, \mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \right)^k g_k^{(\alpha)}(x, \mu) \quad (4.2.49)$$

folgen für die nächsten Ordnungen durch Koeffizientenvergleich beider Seiten des Integralgleichungs-System (4.2.39b) die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} g_1^{(0)}(x, \mu) \\ g_1^{(+)}(x, \mu) \\ g_1^{(-)}(x, \mu) \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{1}{16} [g_0^{(0)}(x, \mu)y_1(x) + 12g_1^{(0)}(x, \mu)] \\ \frac{1}{9} [g_0^{(+)}(x, \mu)\mathbf{b}_1(x) + 6g_1^{(+)}(x, \mu)] \\ \frac{1}{9} [g_0^{(-)}(x, \mu)\bar{\mathbf{b}}_1(x) + 6g_1^{(-)}(x, \mu)] \end{pmatrix} \quad (4.2.50a)$$

und

$$\begin{pmatrix} g_2^{(0)}(x, \mu) \\ g_2^{(+)}(x, \mu) \\ g_2^{(-)}(x, \mu) \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{1}{64} [g_0^{(0)}(x, \mu)(4y_2(x) - y_1^2(x)) + 4g_1^{(0)}(x, \mu)y_1(x) + 48g_2^{(0)}(x, \mu)] \\ \frac{1}{27} [g_0^{(+)}(x, \mu)(3\mathbf{b}_2(x) - \mathbf{b}_1^2(x)) + 3g_1^{(+)}(x, \mu)\mathbf{b}_1(x) + 18g_2^{(+)}(x, \mu)] \\ \frac{1}{27} [g_0^{(-)}(x, \mu)(3\bar{\mathbf{b}}_2(x) - \bar{\mathbf{b}}_1^2(x)) + 3g_1^{(-)}(x, \mu)\bar{\mathbf{b}}_1(x) + 18g_2^{(-)}(x, \mu)] \end{pmatrix}, \quad (4.2.50b)$$

wobei hier die Hochtemperatur-Entwicklungen der Funktionen $y(x)$, $\mathbf{b}_{\tilde{\epsilon}}(x)$ und $\bar{\mathbf{b}}_{\tilde{\epsilon}}(x)$, siehe (4.1.55), eingesetzt wurden. Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} &= \frac{i}{(x - \mu)^2 + 4} \\ + \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{4 \cosh(\frac{\pi}{2}(x - x'))} &\frac{1}{64} [g_0^{(0)}(x', \mu)(4y_2(x') - y_1^2(x')) + 4g_1^{(0)}(x', \mu)y_1(x') + 48g_2^{(0)}(x', \mu)] \\ + \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{4 \cosh(\frac{\pi}{2}(x - x'))} &\frac{1}{16} [g_0^{(0)}(x', \mu)y_1(x') + 12g_1^{(0)}(x', \mu)] + \mathcal{O}(T^{-3}). \end{aligned} \quad (4.2.51)$$

Damit die nächst-höhere Ordnung in (4.2.51) explizit angeben werden kann, wird die Koeffizientenfunktion $g_1^{(0)}(x, \mu)$ benötigt. Um diese zu berechnen, werden die Ergebnisse (4.2.46) und (4.1.61) in das Fourier-transformierte Integralgleichungs-System (4.2.50a) eingesetzt. Es folgt das lineare, eindeutig lös- bare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g_1^{(0)}(x, \mu))(k) &= \frac{e^{k\tilde{\epsilon}}}{2 \cosh(k)} \left[\frac{1}{9} \mathcal{F}(g_0^{(+)}(x, \mu)\mathbf{b}_1(x))(k) + \frac{2}{3} \mathcal{F}(g_1^{(+)}(x, \mu))(k) \right] \\ &+ \frac{e^{-k\tilde{\epsilon}}}{2 \cosh(k)} \left[\frac{1}{9} \mathcal{F}(g_0^{(-)}(x, \mu)\bar{\mathbf{b}}_1(x))(k) + \frac{2}{3} \mathcal{F}(g_1^{(-)}(x, \mu))(k) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left(g_1^{(+)}(x, \mu)\right)(k) &= \frac{e^{-k\tilde{\epsilon}}}{2 \cosh(k)} \left[\frac{1}{16} \mathcal{F}\left(g_0^{(0)}(x, \mu)y_1(x)\right)(k) + \frac{3}{4} \mathcal{F}\left(g_1^{(0)}(x, \mu)\right)(k) \right] \\
 &\quad + \frac{e^{-|k|}}{2 \cosh(k)} \left[\frac{1}{9} \mathcal{F}\left(g_0^{(+)}(x, \mu)\mathfrak{b}_1(x)\right)(k) + \frac{2}{3} \mathcal{F}\left(g_1^{(+)}(x, \mu)\right)(k) \right] \\
 &\quad - \frac{e^{-|k|+2(1-\tilde{\epsilon})}}{2 \cosh(k)} \left[\frac{1}{9} \mathcal{F}\left(g_0^{(-)}(x, \mu)\bar{\mathfrak{b}}_1(x)\right)(k) + \frac{2}{3} \mathcal{F}\left(g_1^{(-)}(x, \mu)\right)(k) \right], \\
 \mathcal{F}\left(g_1^{(-)}(x, \mu)\right)(k) &= \frac{e^{k\tilde{\epsilon}}}{2 \cosh(k)} \left[\frac{1}{16} \mathcal{F}\left(g_0^{(0)}(x, \mu)y_1(x)\right)(k) + \frac{3}{4} \mathcal{F}\left(g_1^{(0)}(x, \mu)\right)(k) \right] \\
 &\quad - \frac{e^{-|k|-2(1-\tilde{\epsilon})}}{2 \cosh(k)} \left[\frac{1}{9} \mathcal{F}\left(g_0^{(+)}(x, \mu)\mathfrak{b}_1(x)\right)(k) + \frac{2}{3} \mathcal{F}\left(g_1^{(+)}(x, \mu)\right)(k) \right] \\
 &\quad + \frac{e^{-|k|}}{2 \cosh(k)} \left[\frac{1}{9} \mathcal{F}\left(g_0^{(-)}(x, \mu)\bar{\mathfrak{b}}_1(x)\right)(k) + \frac{2}{3} \mathcal{F}\left(g_1^{(-)}(x, \mu)\right)(k) \right].
 \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} &= \frac{i}{(x - \mu)^2 + 4} \\
 &\quad + \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk e^{-ikx}}{2\pi} \frac{\frac{1}{16} \mathcal{F}\left(g_0^{(0)}(x, \mu)y_1(x)\right)(k) + \frac{3}{4} \mathcal{F}\left(g_1^{(0)}(x, \mu)\right)(k)}{2 \cosh(k)} + \mathcal{O}(T^{-2}), \quad (4.2.52)
 \end{aligned}$$

wobei der Term

$$\frac{\frac{1}{16} \mathcal{F}\left(g_0^{(0)}(x, \mu)y_1(x)\right)(k) + \frac{3}{4} \mathcal{F}\left(g_1^{(0)}(x, \mu)\right)(k)}{2 \cosh(k)}$$

explizit berechnet werden kann. Es folgt schließlich

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} = \frac{i}{(x - \mu)^2 + 4} \left\{ 1 + \frac{1}{T} \frac{128J}{(9 + x^2)(9 + \mu^2)} \right\} + \mathcal{O}(T^{-2}). \quad (4.2.53)$$

4.2.4. Nichtlineare Integralgleichungen modifizierter Transfer-Matrizen höheren Spins für die XXX-Kette

In diesem Abschnitt sollen nach der Methode in [100] die nichtlinearen Integralgleichungen der Eigenwerte (4.2.13) analog zu Kapitel 4.2.3, „Nichtlineare Integralgleichungen modifizierter Transfer-Matrizen“, konstruiert werden. In Anlehnung an die in [100] gewählte Normierung der Eigenwerte der Quantentransfermatrix werden zunächst anders normierte Eigenwerte $\Lambda_{2k}(x; \mu)$ eingeführt. Diese Eigenwerte korrespondieren zu den entsprechend anders normierten Monodromie-Matrizen $\tilde{T}^{[s;k]}(\lambda)$, siehe (3.4.10), welche mit zwei zusätzlichen Spin-1/2-Linien analog zu (4.2.12) modifiziert werden. Sei

$$\Lambda_{2k}(x; \mu) := \Lambda_0^{[s;k]}(x; \mu) \left[\prod_{j=0}^{2k-1} \phi_+(x + 2i(s + k - j)) \phi_-(x - 2i(s - k + j + 1)) \right. \\
 \left. (x - \mu - \delta + i(2k - 2j - 3))(x - \mu + i(2k - 2j + 1)) \right]. \quad (4.2.54)$$

Dann lassen sich die Eigenwerte explizit wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1(x; \mu) &= \lambda_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x; \mu) + \lambda_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x; \mu), \quad \Lambda_{2k}(x; \mu) = \sum_{l=0}^{2k} \lambda_l^{(k)}(x; \mu), \quad k \geq 1, \quad (4.2.55) \\
 \lambda_l^{(k)}(x; \mu) &:= \prod_{j=0}^{2k-l-1} \lambda_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x + i(2(s - j) - 1); \mu) \prod_{j=0}^{l-1} \lambda_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x - i(2(s - j) - 1); \mu), \\
 \lambda_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x; \mu) &:= e^{-\frac{\hbar}{T}} \phi_+(x - i(2s - 1)) \phi_-(x - i(2s + 1)) \varphi(x - i; \mu) \frac{q(x + 2i; \mu)}{q(x; \mu)}, \\
 \lambda_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x; \mu) &:= e^{\frac{\hbar}{T}} \phi_-(x + i(2s - 1)) \phi_+(x + i(2s + 1)) \varphi(x + i; \mu) \frac{q(x - 2i; \mu)}{q(x; \mu)},
 \end{aligned}$$

wobei

$$\varphi(x; \mu) := (x - \mu - \delta - i)(x - \mu + i).$$

Mit (16) in [100] ist

$$\lambda_l^{(k)}(x; \mu) = \lambda_l^{(k)}(x) \left[\prod_{j=0}^{2k-l-1} \varphi(x + 2i(k-j-1); \mu) \right] \left[\prod_{j=0}^{l-1} \varphi(x - 2i(k-j-1); \mu) \right]. \quad (4.2.56)$$

Die Eigenwerte der Quantentransfer-Matrizen erfüllen die Funktionalgleichung

$$\Lambda_{2k}(x+i; \mu) \Lambda_{2k}(x-i; \mu) = f_{2k}(x; \mu) + \Lambda_{2k-1}(x; \mu) \Lambda_{2k+1}(x; \mu), \quad (4.2.57)$$

wobei die Funktionen $f_{2k}(x; \mu)$ durch

$$f_{2k}(x; \mu) := \prod_{j=1}^{2k} \prod_{\sigma=\pm} \left[\phi_\sigma(x + i\sigma(2(k-s-j)+1)) \phi_\sigma(x + i\sigma(2(s-k+j)+1)) \right. \\ \left. \varphi(x + i\sigma(2(j-k)+1)) \right]$$

definiert sind. Hierbei ist $\Lambda_0 \equiv 1$.

Hilfsfunktionen

Analog zu [100] werden $(2s-1)$ -viele Hilfsfunktionen $y_{2k}(x; \mu)$ durch

$$y_{2k}(x; \mu) := \frac{\Lambda_{2k-1}(x; \mu) \Lambda_{2k+1}(x; \mu)}{f_{2k}(x; \mu)}, \quad k = \frac{1}{2}, 1, \dots, s - \frac{1}{2} \quad (4.2.58)$$

definiert. Mit $Y_{2k}(x; \mu) = 1 + y_{2k}(x; \mu)$ gilt wegen (4.2.57)

$$Y_{2k}(x; \mu) = \frac{\Lambda_{2k}(x+i; \mu) \Lambda_{2k}(x-i; \mu)}{f_{2k}(x; \mu)}. \quad (4.2.59)$$

Das System der y -Hilfsfunktionen erfüllt die Relationen

$$y_{2k}(x-i; \mu) y_{2k}(x+i; \mu) = Y_{2k-1}(x; \mu) Y_{2k+1}(x; \mu), \quad k = \frac{1}{2}, 1, \dots, s-1, \quad (4.2.60)$$

wobei $y_0 := 0$. Speziell erfüllt die Funktion $Y_1(x; \mu)$ die Relation

$$Y_1(x; \mu) = \mathfrak{A}^{(s)}(x+i; \mu) \overline{\mathfrak{A}}^{(s)}(x-i; \mu). \quad (4.2.61)$$

Neben den y -Hilfsfunktionen werden zwei weitere Hilfsfunktionen $\mathfrak{b}(x; \mu)$ und $\overline{\mathfrak{b}}(x; \mu)$ wie folgt eingeführt:

$$\mathfrak{b}(x; \mu) := \frac{\sum_{l=0}^{2s-1} \lambda_l^{(s)}(x+i; \mu)}{\lambda_{2s}^{(s)}(x+i; \mu)}, \quad \overline{\mathfrak{b}}(x; \mu) := \frac{\sum_{l=1}^{2s} \lambda_l^{(s)}(x-i; \mu)}{\lambda_0^{(s)}(x-i; \mu)}. \quad (4.2.62)$$

Hierbei ist zu beachten, dass im Gegensatz zum anisotropen Fall die Hilfsfunktionen $\mathfrak{b}(x; \mu)$ und $\overline{\mathfrak{b}}(x; \mu)$ um $\pm i$ verschoben sind (vgl. (4.2.17)). Mit $\mathfrak{B}(x; \mu) := 1 + \mathfrak{b}(x; \mu)$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}(x; \mu) := 1 + \overline{\mathfrak{b}}(x; \mu)$ folgt

$$\Lambda_{2s}(x+i; \mu) = \lambda_{2s}^{(s)}(x+i; \mu) \mathfrak{B}(x; \mu) \\ = e^{2s \frac{\hbar}{T}} \left[\prod_{j=1}^{2s} \varphi(x - (2s-2j-1)i; \mu) \left[\prod_{\sigma=\pm} \phi_\sigma(x + (2j+\sigma)i) \right] \right] \frac{q(x-2is; \mu)}{q(x+2is; \mu)} \mathfrak{B}(x; \mu), \quad (4.2.63a)$$

$$\Lambda_{2s}(x-i; \mu) = \lambda_0^{(s)}(x-i; \mu) \overline{\mathfrak{B}}(x; \mu) \\ = e^{-2s \frac{\hbar}{T}} \left[\prod_{j=1}^{2s} \varphi(x + (2s-2j-1)i; \mu) \left[\prod_{\sigma=\pm} \phi_\sigma(x - (2j-\sigma)i) \right] \right] \frac{q(x+2is; \mu)}{q(x-2is; \mu)} \overline{\mathfrak{B}}(x; \mu). \quad (4.2.63b)$$

Wegen (4.2.60) gilt insbesondere

$$y_{2s-1}(x-i; \mu) y_{2s-1}(x+i; \mu) = Y_{2s-2}(x; \mu) \frac{\Lambda_{2s}(x+i; \mu) \Lambda_{2s}(x-i; \mu)}{f_{2s}(x; \mu)}$$

$$= Y_{2s-2}(x; \mu) \frac{\lambda_{2s}^{(s)}(x+i; \mu) \lambda_0^{(s)}(x-i; \mu)}{f_{2s}(x; \mu)} \mathfrak{B}(x; \mu) \overline{\mathfrak{B}}(x; \mu) = Y_{2s-2}(x; \mu) \mathfrak{B}(x; \mu) \overline{\mathfrak{B}}(x; \mu). \quad (4.2.64)$$

Weiterhin gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(x; \mu) &= \frac{\lambda_0^{(\frac{1}{2})}(x+2is; \mu)}{\lambda_{2s}^{(s)}(x+i; \mu)} \Lambda_{2s-1}(x) \\ &= \frac{e^{-(2s+1)\frac{h}{T}} \varphi(x+(2s-1)i; \mu) \left[\prod_{\sigma=\pm} \phi_{\sigma}(x+i\sigma) \right]}{\left[\prod_{j=1}^{2s} \varphi(x-(2s-2j-1)i; \mu) \left[\prod_{\sigma=\pm} \phi_{\sigma}(x+(2j+\sigma)i) \right] \right]} \frac{q(x+2i(s+1); \mu)}{q(x-2is; \mu)} \Lambda_{2s-1}(x; \mu), \end{aligned} \quad (4.2.65a)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{b}}(x; \mu) &= \frac{\lambda_1^{(\frac{1}{2})}(x-2is; \mu)}{\lambda_0^{(s)}(x-i; \mu)} \Lambda_{2s-1}(x) \\ &= \frac{e^{(2s+1)\frac{h}{T}} \varphi(x-(2s-1)i; \mu) \left[\prod_{\sigma=\pm} \phi_{\sigma}(x+i\sigma) \right]}{\left[\prod_{j=1}^{2s} \varphi(x+(2s-2j-1)i; \mu) \left[\prod_{\sigma=\pm} \phi_{\sigma}(x-(2j-\sigma)i) \right] \right]} \frac{q(x-2i(s+1); \mu)}{q(x+2is; \mu)} \Lambda_{2s-1}(x; \mu). \end{aligned} \quad (4.2.65b)$$

Aufgrund von (4.2.58) und (4.2.57) gilt insbesondere

$$\Lambda_{2s-1}(x-i; \mu) \Lambda_{2s-1}(x+i; \mu) = f_{2s-1}(x; \mu) Y_{2s-1}(x; \mu). \quad (4.2.66)$$

Herleitung der nichtlinearen Integralgleichungen

Es werden die Funktionen $\Psi_1(x) := q(x-2is; \mu)$ und $\Psi_2(x) := q(x+2is; \mu)$ eingeführt. Dann folgt aufgrund des Cauchy-Theorems und der Analytizität, Nullstellenfreiheit und des konstanten asymptotischen Verhaltens des Eigenwertes $\Lambda_{2s}(x; \mu)$ innerhalb der Kontur $\mathcal{C}_{\varepsilon} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [\Lambda_{2s}(x; \mu)]' e^{ikx} + \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\Lambda_{2s}(x; \mu)]' e^{ikx} \\ &= e^{-k} \widehat{\mathcal{L}} \widehat{\mathfrak{B}}'_{\mu}(k) + e^k \widehat{L} \widehat{\mathfrak{B}}'_{\mu}(k) + e^{-k} \widehat{\mathcal{L}} \widehat{\Psi}'_1(k) - e^k \widehat{L} \widehat{\Psi}'_1(k) - e^{-k} \widehat{\mathcal{L}} \widehat{\Psi}'_2(k) + e^k \widehat{L} \widehat{\Psi}'_2(k) \\ &\quad + \frac{2N\pi i \sinh(2sk) \cosh((1+u)k)}{\sinh(k)} e^{-2s|k|} \\ &+ \sum_{j=1}^{2s} \left(\int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x+2i(s-j); \mu)]' e^{ikx} + \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [\varphi(x-2i(s-j); \mu)]' e^{ikx} \right), \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

wobei

$$\widehat{\mathcal{L}} f'_{\mu}(k) := \int_{\mathcal{C}_1} dx \ln [f(x; \mu)]' e^{ikx}, \quad \widehat{L} f'_{\mu}(k) := \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [f(x; \mu)]' e^{ikx}. \quad (4.2.68)$$

Es folgt die Relation

$$\begin{aligned} \widehat{L} \widehat{\Psi}'_1(k) - \widehat{L} \widehat{\Psi}'_2(k) &= \frac{e^{-k} \widehat{\mathcal{L}} \widehat{\mathfrak{B}}'_{\mu}(k)}{2 \cosh(k)} + \frac{e^k \widehat{L} \widehat{\mathfrak{B}}'_{\mu}(k)}{2 \cosh(k)} + \frac{\operatorname{sgn}(k) N \pi i \sinh(2sk) \cosh((1+u)k) e^{-2s|k|}}{\cosh(k) \sinh(k)} \\ &+ \frac{1}{2 \cosh(k)} \sum_{j=1}^{2s} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln \left[\frac{\varphi(x+2i(s-j); \mu)}{\varphi(x-2i(s-j); \mu)} \right]' e^{ikx}, \quad k \neq 0 \end{aligned} \quad (4.2.69)$$

für die unbekanntenen Funktionen $\widehat{L} \widehat{\Psi}'_1(k)$ und $\widehat{L} \widehat{\Psi}'_2(k)$.

Mit (4.2.66) lässt sich das zum Eigenwert $\Lambda_{2s-1}(x; \mu)$ entsprechende Funktional ausdrücken, wobei abhängig vom Spin s der Eigenwert $\Lambda_{2s-1}(x; \mu)$ innerhalb des Streifens

$$\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| \leq 1\}$$

einfache Nullstellen aufweist, was für $s = 1$ nicht der Fall war. Daher muss für die Herleitung der nichtlinearen Integralgleichung eine Fallunterscheidung vorgenommen werden:

- **Spin $s = 3/2$:** Um dennoch den Verschiebungssatz der Fourier-Transformation anwenden zu können, muss der Eigenwert $\Lambda_{2s-1}(x; \mu) = \Lambda_2(x; \mu)$ bezüglich der Nullstellen im Streifen \mathcal{S} regulariert werden. Dazu wird der Eigenwert

$$\tilde{\Lambda}_2(x; \mu) := \frac{\Lambda_2(x; \mu)}{\varphi(x; \mu)} \quad (4.2.70)$$

eingeführt, welcher innerhalb \mathcal{S} null- und polstellenfrei ist. Anwenden des Fourier-Verschiebungssatzes führt zu

$$\begin{aligned} \widehat{L\tilde{\Lambda}}'_{2\mu}(k) &= \frac{\widehat{LY}'_{2\mu}(k)}{2 \cosh(k)} + \frac{N\pi i \sinh(2k) \cosh((1+u)k)}{\cosh(k) \sinh(k)} \operatorname{sgn}(k) e^{-5|k|} \\ &+ \frac{1}{2 \cosh(k)} \sum_{j=1}^2 \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x + 2i(1/2 - j); \mu) \varphi(x - 2i(1/2 - j); \mu)]' e^{ikx} \\ &- \frac{1}{2 \cosh(k)} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - i; \mu) \varphi(x + i; \mu)]' e^{ikx}. \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

Somit gilt definitionsgemäß

$$\begin{aligned} \widehat{L\tilde{\Lambda}}'_{2\mu}(k) &= \frac{\widehat{LY}'_{2\mu}(k)}{2 \cosh(k)} + \frac{N\pi i \sinh(2k) \cosh((1+u)k)}{\cosh(k) \sinh(k)} \operatorname{sgn}(k) e^{-5|k|} \\ &+ \frac{1}{2 \cosh(k)} \sum_{j=1}^2 \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x + 2i(1/2 - j); \mu) \varphi(x - 2i(1/2 - j); \mu)]' e^{ikx} \\ &+ \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x; \mu)]' e^{ikx} - \frac{1}{2 \cosh(k)} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - i; \mu) \varphi(x + i; \mu)]' e^{ikx}. \end{aligned} \quad (4.2.72)$$

- **Spin $s \geq 2$ ganzzahlig:** Entsprechend zu (4.2.70) wird der Eigenwert

$$\tilde{\Lambda}_{2s-1}(x; \mu) := \frac{\Lambda_{2s-1}(x; \mu)}{\varphi(x - i; \mu) \varphi(x + i; \mu)} \quad (4.2.73)$$

eingeführt, welcher innerhalb \mathcal{S} null- und polstellenfrei ist. Daraus ergibt sich für $\Lambda_{2s-1}(x; \mu)$ folgende Fourier-transformierte logarithmische Ableitung.

$$\begin{aligned} \widehat{L\tilde{\Lambda}}'_{2s-1\mu}(k) &= \frac{\widehat{LY}'_{2s-1\mu}(k)}{2 \cosh(k)} + \frac{N\pi i \sinh((2s-1)k) \cosh((1+u)k)}{\cosh(k) \sinh(k)} \operatorname{sgn}(k) e^{-(2s+2)|k|} \\ &+ \frac{1}{2 \cosh(k)} \sum_{j=1}^{2s-1} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x + 2i(s-j-1); \mu) \varphi(x - 2i(s-j-1); \mu)]' e^{ikx} \\ &+ \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - i; \mu) \varphi(x + i; \mu)]' e^{ikx} \\ &- \frac{1}{2 \cosh(k)} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x - 2i; \mu) \varphi^2(x; \mu) \varphi(x + 2i; \mu)]' e^{ikx} \end{aligned} \quad (4.2.74)$$

für ganzzahliges $s \geq 2$.

- **Spin $s \geq 5/2$ halbzahlig:** Für halbzahliges $s \geq 5/2$ wird der Eigenwert $\Lambda_{2s-1}(x; \mu)$ durch

$$\tilde{\Lambda}_{2s-1}(x; \mu) := \frac{\Lambda_{2s-1}(x; \mu)}{\varphi(x - 2i; \mu) \varphi(x; \mu) \varphi(x + 2i; \mu)} \quad (4.2.75)$$

reguliert, damit dieser ebenfalls innerhalb \mathcal{S} null- und polstellenfrei ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \widehat{L\tilde{\Lambda}}'_{2s-1\mu}(k) &= \frac{\widehat{LY}'_{2s-1\mu}(k)}{2 \cosh(k)} + \frac{N\pi i \sinh((2s-1)k) \cosh((1+u)k)}{\cosh(k) \sinh(k)} \operatorname{sgn}(k) e^{-(2s+2)|k|} \\ &+ \frac{1}{2 \cosh(k)} \sum_{j=1}^{2s-1} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x + 2i(s-j-1); \mu) \varphi(x - 2i(s-j-1); \mu)]' e^{ikx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x; \mu)]' e^{ikx} - \frac{2}{2 \cosh(k)} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x-i; \mu) \varphi(x+i; \mu)]' e^{ikx} \\
 & + \frac{e^k}{2 \cosh(k)} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x-2i; \mu)]' e^{ikx} + \frac{e^{-k}}{2 \cosh(k)} \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln [\varphi(x+2i; \mu)]' e^{ikx}. \quad (4.2.76)
 \end{aligned}$$

Somit folgen mit (4.2.65) die Bestimmungsgleichungen der Funktionen $\widehat{Lb}'_\mu(k)$ und $\widehat{L\bar{b}}'_\mu(k)$:

$$\widehat{Lb}'_\mu(k) = -\frac{e^{-|k|}}{2 \cosh(k)} \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}'_\mu(k) - \frac{e^{-|k|+2k}}{2 \cosh(k)} \widehat{L\mathfrak{B}}'_\mu(k) + \frac{\widehat{LY}'_{2s-1\mu}(k)}{2 \cosh(k)} - \frac{N\pi i \sinh(ku)}{\cosh(k)}, \quad (4.2.77a)$$

$$\widehat{L\bar{b}}'_\mu(k) = \frac{e^{-|k|-2k}}{2 \cosh(k)} \widehat{\mathcal{L}\mathfrak{B}}'_\mu(k) + \frac{e^{-|k|}}{2 \cosh(k)} \widehat{L\mathfrak{B}}'_\mu(k) + \frac{\widehat{LY}'_{2s-1\mu}(k)}{2 \cosh(k)} - \frac{N\pi i \sinh(ku)}{\cosh(k)}. \quad (4.2.77b)$$

Da die Funktion $y_{2s-1}(x; \mu)$ innerhalb \mathcal{S} null- und polstellenfrei ist, folgt aus (4.2.64)

$$\widehat{Ly}'_{2s-1\mu}(k) = \frac{1}{2 \cosh(k)} \left\{ \widehat{L\mathfrak{B}}'_\mu(k) + \widehat{L\bar{\mathfrak{B}}}'_\mu(k) + \widehat{LY}'_{2s-2\mu}(k) \right\}, \quad (4.2.78)$$

für $s \neq 1$. Wegen (4.2.60) gilt für die übrigen y -Hilfsfunktionen

$$\widehat{Ly}'_{2k\mu}(k) = \frac{1}{2 \cosh(k)} \left\{ \widehat{LY}'_{2k-1\mu}(k) + \widehat{LY}'_{2k+1\mu}(k) \right\} \quad (4.2.79)$$

für $k = 1, \dots, s-1$. Da die Funktion $y_1(x; \mu)$ innerhalb \mathcal{S} bei $\mu \pm i$ und $\mu + \delta \mp i$ Null- oder Polstellen (abhängig vom Vorzeichen des imaginären Anteils des Spektralparameters μ) besitzt, muss diese zunächst regularisiert werden, sodass dennoch die Funktionalgleichung (4.2.60) erfüllt wird: Für $\text{Im}(\mu) > 0$ liegt innerhalb \mathcal{S} die Nullstelle $\mu - i$ sowie die Polstelle $\mu + \delta - i$ vor. Ist aber $\text{Im}(\mu) < 0$ so besitzt die Funktion $y_1(x; \mu)$ innerhalb \mathcal{S} bei $\mu + \delta + i$ eine Nullstelle und bei $\mu + i$ eine Polstelle. Die Regularisierung wird zum Beispiel für $\text{Im}(\mu) > 0$ durch

$$\tilde{y}_1(x; \mu) := \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu - \delta + i)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu + i)\right)} y_1(x; \mu) \quad (4.2.80)$$

bzw. für $\text{Im}(\mu) < 0$ durch

$$\tilde{y}_1(x; \mu) := \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu - i)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu - \delta - i)\right)} y_1(x; \mu) \quad (4.2.81)$$

erzielt. Aufgrund der Symmetrie des Tangens Hyperbolicus,

$$\tanh\left(\frac{\pi}{2}(x \pm i)\right) = \frac{1}{\tanh\left(\frac{\pi}{2}x\right)},$$

ist obige Fallunterscheidung nicht notwendig. Es folgt

$$\widehat{Ly}'_{1\mu}(k) = \frac{\widehat{LY}'_{2\mu}(k)}{2 \cosh(k)} + \int_{\mathcal{C}_2} dx \ln \underbrace{\left[\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu + i)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu - \delta + i)\right)} \right]'}_{=\Delta'_y(x; \mu)} e^{ikx}. \quad (4.2.82)$$

Anwenden der Fourier-Rücktransformation und Integration nach x der Gleichungen (4.2.77) und (4.2.78) sowie (4.2.79) als auch (4.2.82) liefert schließlich ein geschlossenes System nichtlinearer Integralgleichungen. Über das asymptotische Verhalten der Hilfsfunktionen,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathfrak{b}(x; \mu) &= \sum_{l=1}^{2s} e^{-2l\frac{h}{T}} = \frac{1 - e^{-4s\frac{h}{T}}}{2} \left[\coth\left(\frac{h}{T}\right) - 1 \right], \\
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{\mathfrak{b}}(x; \mu) &= \sum_{l=1}^{2s} e^{2l\frac{h}{T}} = -e^{2\frac{h}{T}} \frac{1 - e^{4s\frac{h}{T}}}{2} \left[\coth\left(\frac{h}{T}\right) - 1 \right], \\
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} Y_{2k}(x; \mu) &= \left(e^{-2k\frac{h}{T}} \sum_{l=0}^{2k} e^{2l\frac{h}{T}} \right)^2 = \left(\frac{\sinh\left(2s\frac{h}{T}\right)}{\sinh\left(\frac{h}{T}\right)} \right)^2,
 \end{aligned}$$

lassen sich die Integrationskonstanten bestimmen. Als Lösung erhält man

$$\begin{pmatrix} \ln y_1(x; \mu) \\ \ln y_2(x; \mu) \\ \vdots \\ \ln y_{2s-1}(x; \mu) \\ \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\epsilon}}(x; \mu) \\ \ln \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\epsilon}}(x; \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_y(x; \mu) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_{\mathfrak{b}}(x) \\ \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \ln Y_1(x; \mu) \\ \ln Y_2(x; \mu) \\ \vdots \\ \ln Y_{2s-1}(x; \mu) \\ \ln \mathfrak{B}_{\tilde{\epsilon}}(x; \mu) \\ \ln \bar{\mathfrak{B}}_{\tilde{\epsilon}}(x; \mu) \end{pmatrix}, \quad (4.2.83)$$

wobei

$$\hat{\mathcal{K}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{K}(x) & 0 & \mathcal{K}(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{K}(x) & & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \vdots & & 0 & \mathcal{K}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \mathcal{K}(x) & 0 & 0 & \mathcal{K}(x+i\tilde{\epsilon}) & \mathcal{K}(x-i\tilde{\epsilon}) & \\ 0 & \vdots & 0 & \mathcal{K}(x+i\tilde{\epsilon}) & F(x) & -F(x+2i(1-\tilde{\epsilon})) & & \\ 0 & \vdots & 0 & \mathcal{K}(x-i\tilde{\epsilon}) & -F(x-2i(1-\tilde{\epsilon})) & F(x) & & \end{pmatrix},$$

und

$$\Delta_y(x; \mu) = \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x-\mu+i)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x-\mu-\delta+i)\right)} \right], \quad \Delta_{\mathfrak{b}}(\lambda) = d(u, \lambda - i\epsilon) - \frac{h}{T}, \quad \Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}(\lambda) = d(u, \lambda + i\epsilon) + \frac{h}{T},$$

$$d(u, \lambda) = -\frac{2J\pi}{T \cosh\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)}, \quad \mathcal{K}(x) = \frac{1}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}x\right)}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-|k|}}{2 \cosh(k)} e^{-ikx}.$$

Im Limes $\delta \rightarrow 0$ geht das Gleichungssystem (4.2.83) in das entsprechende, ohne Modifizierung, über, welches in [100] hergeleitet wurde.^{IV}

Eigenwerte

Aus (4.2.59) folgt für $k = 1/2$ die Integralgleichung für den Eigenwert $\Lambda_1(x; \mu)$. Mit (4.2.54) folgt

$$\ln \Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x; \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') \left\{ \ln Y_1(x'; \mu) + \ln \left[\frac{\phi_+(x' - 2is)\phi_-(x' + 2is)}{\phi_-(x' - 2is)\phi_+(x' + 2is)} \right] \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{(x' - \mu - i)(x' - \mu - \delta + i)}{(x' - \mu + i)(x' - \mu - \delta - i)} \right] \right\} + \text{konst.} \quad (4.2.84)$$

Die anderen $(2s-1)$ -Eigenwerte $\Lambda_0^{[s; k]}(x; \mu)$, $k = 1, \dots, s$, können ebenfalls aus der Lösung des Integralgleichungs-Systems bestimmt werden.

Hier wird die Behandlung auf den Eigenwert $\Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x; \mu)$ beschränkt. Die logarithmische Ableitung nach dem Spektralparameter δ lautet analog zu (4.2.42)

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} = 2\pi i F(x - \mu) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{G_{1\mu}^{(0)}(x')}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-x')\right)}, \quad \text{für } |\text{Im}(x)| < 1, \quad (4.2.85)$$

wobei die Funktion $G_{1\mu}^{(0)}(x)$ über das lineare Integralgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} (1 + y_1^{-1}(x))G_{1\mu}^{(0)}(x) \\ (1 + y_2^{-1}(x))G_{2\mu}^{(0)}(x) \\ \vdots \\ (1 + y_{2s-1}^{-1}(x))G_{2s-1\mu}^{(0)}(x) \\ (1 + \mathfrak{b}_{\tilde{\epsilon}}^{-1}(x))G_{\mu}^{(+)}(x) \\ (1 + \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\epsilon}}^{-1}(x))G_{\mu}^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\pi/2}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} G_{1\mu}^{(0)}(x) \\ G_{2\mu}^{(0)}(x) \\ \vdots \\ G_{2s-1\mu}^{(0)}(x) \\ G_{\mu}^{(+)}(x) \\ G_{\mu}^{(-)}(x) \end{pmatrix} \quad (4.2.86)$$

^{IV}vgl. (25) in [100]. Bemerkung: $\beta = 1/T$, $H = -h$, $J_{[100]} = 4J$.

bestimmt ist.^V

4.3. Einschub zweier Spin-1-Linien

Im Gegensatz zu Kapitel 4.2, „Einschub zweier Spin-1/2-Linien“, werden nun zwei zusätzliche Spin-1-Linien für den XXX -Fall eingefügt. Diese sollen die Spektralparameter $\nu_{\overline{N+1}} - 2i = \mu + \delta$ und $\nu_{\overline{N+2}} = \mu$, wobei $\text{Im}(\mu), \text{Im}(\mu + \delta) \in (-1, 1)$ gewählt wird, tragen. Demnach ist die modifizierte Monodromie-Matrix durch

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{T}}_a^{[\frac{1}{2}]}(x+i; \mu) &:= \exp\left[\frac{h\sigma_a^z}{T}\right] \mathcal{R}_{a\overline{N+2}}^{[\frac{1}{2},1]}(x-\mu) \mathcal{R}_{\overline{N+1}a}^{[1,\frac{1}{2}]}(\mu+\delta-x) \\ &\mathcal{R}_{a\overline{N}}^{[\frac{1}{2},1]}(x-\nu_{\overline{N}}) \mathcal{R}_{\overline{N-1}a}^{[1,\frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{N-1}}-x-2i) \cdots \mathcal{R}_{a\overline{2}}^{[\frac{1}{2},1]}(x-\nu_2) \mathcal{R}_{\overline{1}a}^{[1,\frac{1}{2}]}(\nu_{\overline{1}}-x-2i) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

gegeben. Die Einführung zusätzlicher Spin-1-Linien führt zu einer Modifikation der Funktionen $\phi_{\pm}(x)$:

$$\phi_-(x) \mapsto \widehat{\phi}_-(x) = \prod_{k=1}^{N/2+1} (x - \nu_{2k-1} + 2i) = (x - \mu - \delta)\phi_-(x), \quad (4.3.2)$$

$$\phi_+(x) \mapsto \widehat{\phi}_+(x) = \prod_{k=1}^{N/2+1} (x - \nu_{2k}) = (x - \mu)\phi_+(x). \quad (4.3.3)$$

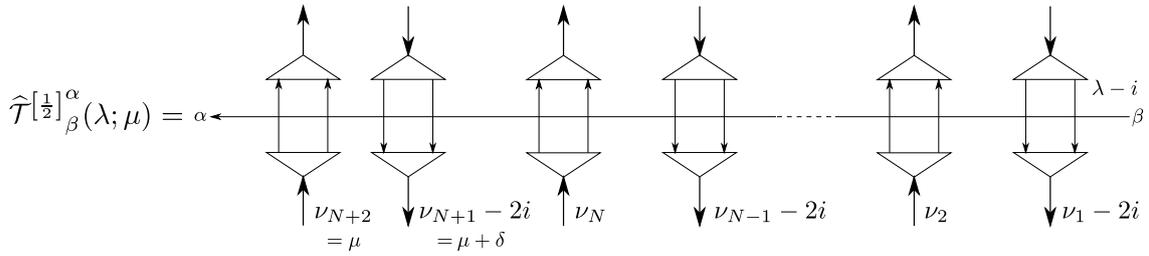


Abbildung 4.4.: modifizierte Monodromie-Matrix (4.3.1).

4.3.1. Nichtlineare Integralgleichungen

Die nichtlinearen Integralgleichungen können in analoger Weise (mit $k = 2$) zu [100] hergeleitet werden. Im Gegensatz zu (4.2.37) liefern die zusätzlichen Spin-1-Linien weitere „Driving“-Terme in den Hilfsfunktionen $\mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x; \mu)$ und $\overline{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x; \mu)$, aber keine in der Hilfsfunktion $y(x; \mu)$. Die weiteren „Driving“-Terme lauten $\Delta(x - i\tilde{\varepsilon}; \mu)$ für die Hilfsfunktion $\mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x; \mu)$ bzw. $\Delta(x + i\tilde{\varepsilon}; \mu)$ für die Hilfsfunktion $\overline{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x; \mu)$, wobei die Funktion $\Delta(x; \mu)$ durch

$$\begin{aligned} \Delta(x; \mu) &= \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - (\mu + \delta) - i)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu - i)\right)} \right] = \ln \left[\frac{\coth\left(\frac{\pi}{4}(x - (\mu + \delta) + i)\right)}{\coth\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu + i)\right)} \right] \\ &= \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - \mu + i)\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{4}(x - (\mu + \delta) + i)\right)} \right] = \Delta_y(x; \mu) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

gegeben ist. Es ergibt sich das Integralgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} \ln y(x; \mu) \\ \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x; \mu) \\ \ln \overline{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x; \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_{\mathfrak{b}}(x) + \Delta_y(x - i\tilde{\varepsilon}; \mu) \\ \Delta_{\overline{\mathfrak{b}}}(x) + \Delta_y(x + i\tilde{\varepsilon}; \mu) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \ln Y(x; \mu) \\ \ln \mathfrak{B}_{\tilde{\varepsilon}}(x; \mu) \\ \ln \overline{\mathfrak{B}}_{\tilde{\varepsilon}}(x; \mu) \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

^VDie Hilfsfunktionen $y_1(x), \dots, y_{2s-1}(x), \mathfrak{b}_{\tilde{\varepsilon}}(x), \overline{\mathfrak{b}}_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ sind dabei die Lösungen des nicht-modifizierten Integralgleichungs-Systems, also (4.2.83) im Limes $\delta \rightarrow 0$ (vgl. [100] Gleichung (25) und (26), wobei $2s \equiv k$).

Die „Driving“-Terme $\Delta_b(x)$ und $\Delta_{\bar{b}}(x)$ sowie die Kernmatrix $\hat{\mathcal{K}}(x)$ sind in (4.1.45) bzw. in (4.1.46) gegeben.

Eigenwerte

Für die Eigenwerte $\ln \hat{\Lambda}_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu)$ und $\ln \hat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu)$ folgen die Integralausdrücke

$$\ln \hat{\Lambda}_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') \left\{ \ln Y(x'; \mu) + \ln \left[\frac{(x' - \mu - 2i)(x' - (\mu + \delta) + 2i)}{(x' - \mu + 2i)(x' - (\mu + \delta) - 2i)} \right] + \ln \left[\frac{\phi_-(x' + 2i)\phi_+(x' - 2i)}{\phi_-(x' - 2i)\phi_+(x' + 2i)} \right] \right\} + \text{konst.} \quad (4.3.6a)$$

und

$$\ln \hat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu) = \ln y(x; \mu) + \ln \left[\frac{\phi_+(x-2i)\phi_-(x+2i)}{\phi_+(x+2i)\phi_-(x-2i)} \right] + \ln \left[\frac{(x-\mu-2i)(x-(\mu+\delta)+2i)}{(x-(\mu+\delta)-2i)(x-\mu+2i)} \right]. \quad (4.3.6b)$$

Es werden weitere Hilfsfunktionen analog zu (4.2.31) eingeführt;

$$\hat{G}_\mu^{(0)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln y(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad \hat{g}_\mu^{(0)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln y(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad (4.3.7a)$$

$$\hat{G}_\mu^{(+)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \mathfrak{b}_\varepsilon(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad \hat{g}_\mu^{(+)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \mathfrak{b}_\varepsilon(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad (4.3.7b)$$

$$\hat{G}_\mu^{(-)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad \hat{g}_\mu^{(-)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon(x; \mu) \right|_{\delta=0}, \quad (4.3.7c)$$

welche wegen (4.3.5) durch das lineare Integralgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} \hat{g}_\mu^{(0)}(x) \\ \hat{g}_\mu^{(+)}(x) \\ \hat{g}_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i\pi/2}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\mu-i\tilde{\varepsilon}))} \\ -\frac{i\pi/2}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\mu+i\tilde{\varepsilon}))} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{\hat{g}_\mu^{(0)}(x)}{1+y^{-1}(x)} \\ \frac{\hat{g}_\mu^{(+)}(x)}{1+\mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)} \\ \frac{\hat{g}_\mu^{(-)}(x)}{1+\bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)} \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

beschrieben werden. Damit lassen sich die logarithmischen Ableitungen der Eigenwerte (4.3.6) bezüglich δ durch

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \hat{\Lambda}_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') \left\{ \hat{G}_\mu^{(0)}(x') + \frac{1}{x' - \mu - 2i} - \frac{1}{x' - \mu + 2i} \right\} \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-2|k|}}{2 \cosh(k)} e^{-ik(x-\mu)} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') \hat{G}_\mu^{(0)}(x') \\ &= \frac{1}{x-\mu-i} - \frac{1}{x-\mu+i} - \frac{i\pi/2}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\mu))} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x-x') \hat{G}_\mu^{(0)}(x'), \end{aligned} \quad (4.3.9a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \hat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} = \hat{g}_\mu^{(0)}(x) + \frac{1}{x-\mu-2i} - \frac{1}{x-\mu+2i} \quad (4.3.9b)$$

darstellen. Im Nulltemperatur-Limes gilt

$$4iJ \lim_{T \rightarrow 0} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \hat{\Lambda}_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} = \frac{2\pi J}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\mu))} - \frac{8J}{1+(x-\mu)^2}, \quad (4.3.10a)$$

$$4iJ \lim_{T \rightarrow 0} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \hat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} = -\frac{16J}{4+(x-\mu)^2}. \quad (4.3.10b)$$

Im Hochtemperatur-Limes folgt

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{g}_\mu^{(0)}(x) &= -\frac{128i}{3(4+(x-\mu)^2)(16+(x-\mu)^2)} \\ &\quad + \frac{2^{13} J i ((6+x^2)(6+\mu^2)(6+(x-\mu)^2) + 40)}{9(4+x^2)(4+\mu^2)(4+(x-\mu)^2)(16+x^2)(16+\mu^2)(16+(x-\mu)^2)} \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{g}_\mu^{(+)}(x) &= \frac{16i(4+i(x-\mu-i\tilde{\varepsilon})+(x-\mu-i\tilde{\varepsilon})^2)}{((x-\mu-i\tilde{\varepsilon})^2+1)((x-\mu-i\tilde{\varepsilon})^2+9)(x-\mu-i\tilde{\varepsilon}+5i)} + \mathcal{O}(T^{-1}), \end{aligned}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{g}_\mu^{(-)}(x) = \frac{16i(4 - i(x - \mu + i\tilde{\epsilon}) + (x - \mu + i\tilde{\epsilon})^2)}{((x - \mu + i\tilde{\epsilon})^2 + 1)((x - \mu + i\tilde{\epsilon})^2 + 9)(x - \mu + i\tilde{\epsilon} - 5i)} + \mathcal{O}(T^{-1}),$$

und somit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \widehat{\Lambda}_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} &= \frac{2i}{9 + (x - \mu)^2} + \frac{1024iJ(6 + \mu^2)}{3(9 + x^2)(9 + (x - \mu)^2)(4 + \mu^2)(16 + \mu^2)} \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}), \\ \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \widehat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} &= \frac{4i(16 + 3(x - \mu)^2)}{3(4 + (x - \mu)^2)(16 + (x - \mu)^2)} \\ &+ \frac{2^{13}Ji((6 + x^2)(6 + \mu^2)(6 + (x - \mu)^2) + 40)}{9(4 + x^2)(4 + \mu^2)(4 + (x - \mu)^2)(16 + x^2)(16 + \mu^2)(16 + (x - \mu)^2)} \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}), \end{aligned}$$

sowie

$$4iJ \lim_{x, \mu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \widehat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} = -\frac{4J}{3} - \frac{32J^2}{9} \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}) = e|_{h=0} + \mathcal{O}(T^{-2}). \quad (4.3.11)$$

Die Ergebnisse (4.3.10) (für $(x - \mu) \rightarrow 0$) und (4.3.11) stimmen mit den Ergebnissen in der Literatur [108] bzw. mit der Hochtemperatur-Entwicklung (B.0.4) überein^{VI}. Da das Gleichungssystem (4.3.8) (multipliziert mit $4iJ$) für $\mu \rightarrow 0$ und $h \equiv 0$ äquivalent zu (4.1.51) ist, gilt auch für nicht-verschwindende Temperatur der Zusammenhang

$$\begin{aligned} e|_{h=0} &= 4iJ \lim_{x, \mu \rightarrow 0} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \widehat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} \\ &= -4J + 4iJ \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x' - i\tilde{\epsilon})\right)} \frac{\widehat{g}_0^{(+)}(x')}{1 + \mathfrak{b}_\tilde{\epsilon}^{-1}(x')} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x' + i\tilde{\epsilon})\right)} \frac{\widehat{g}_0^{(-)}(x')}{1 + \overline{\mathfrak{b}}_\tilde{\epsilon}^{-1}(x')} \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

^{VI}Im Vergleich zu [108] ist $J = 1/4$ zu wählen (siehe Gleichung (1) und (7)).

Vielfach-Integraldarstellung von Dichte-Matrixelementen für $\gamma < \pi/4$

Mit Hilfe der Fusionsprozedur soll in diesem Kapitel eine Vielfach-Integraldarstellung für fusionierte Dichte-Matrixelemente der Spin-1 XXZ -Kette möglichst aus den Ergebnissen von Darstellungen der Dichte-Matrixelemente der Spin-1/2 XXZ -Kette gewonnen werden. Es wird die Notation aus [47] und [50] verwendet und in analoger Weise zu [50] vorgegangen.

Zunächst wird ein Satz von Funktionen $w_j(x)$, $j = 1, \dots, N$, definiert, welche dem linearen Gleichungssystem

$$\alpha'(\lambda_j)w_j(x) = t(x - \lambda_j)\alpha(x) - t(\lambda_j - x) + \sum_{k=1}^N K(\lambda_j - \lambda_k)w_k(x) \quad (5.0.1)$$

genügen, wobei $\alpha(\lambda)$ die in (4.1.7a) definierte Hilfsfunktion ist. $\alpha'(\lambda_j)$ bezeichnet die Ableitung der Funktion $\alpha(\lambda)$ bezüglich λ an der Stelle λ_j . Die Funktionen $t(x)$, siehe (4.2.33c), und $K(x)$ sind durch

$$\begin{aligned} t(x) &:= \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(x)\sinh(x+\eta)} = \coth(x) - \coth(x+\eta), \\ K(x) &:= \frac{\sinh(2\eta)}{\sinh(x-\eta)\sinh(x+\eta)} = \coth(x-\eta) - \coth(x+\eta) \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

definiert. Weiterhin werden die in Gleichung (47) nach [47] eingeführten Funktionen

$$F_j^{[1]}(x) := \left[\prod_{k=1}^{x_j-1} \sinh(x - \zeta_k - \eta) \right] \left[\prod_{k=x_j+1}^{2m} \sinh(x - \zeta_k) \right], \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.0.3a)$$

$$\bar{F}_j^{[1]}(x) := \left[\prod_{k=1}^{x_j-1} \sinh(x - \zeta_k + \eta) \right] \left[\prod_{k=x_j+1}^{2m} \sinh(x - \zeta_k) \right], \quad j = p+1, \dots, 2m, \quad (5.0.3b)$$

verwendet. Entsprechend Gleichung (C.9) aus [50] folgt aus Gleichung (63) von [47]

$$\begin{aligned} D^{[1]}(\mathbf{x} | \zeta) &= \sum_{(\{\epsilon^+\}, \{\epsilon^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m})} \sum_{l_{\epsilon_1^+}, \dots, l_{\epsilon_{2m-n}^+} = 1} \sum_{\substack{(\{\delta^+\}, \{\delta^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m}) \\ \text{card}\{\delta^-\} = n}} \left[\prod_{j=1}^{2m} \frac{1}{1 + \alpha(\zeta_j)} \right] \text{sgn}(PQ) \\ &\times \sum_{R \in \mathfrak{S}^n} \frac{\text{sgn}(R) \det \left[-w_{l_{\epsilon_j^+}}(\zeta_{\delta_k^+}) \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\zeta_k - \zeta_j) \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)} \Bigg|_{\substack{\omega_{\epsilon_j^+} = \lambda_{\epsilon_j^+}, \omega_{\epsilon_j^-} = \zeta_{\delta_{Rj}^-}}} \\ &\times \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^+ \leq p}}^{2m-n} F_{\epsilon_j^+}^{[1]}(\lambda_{\epsilon_j^+}) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^+ > p}}^{2m-n} -\bar{F}_{\epsilon_j^+}^{[1]}(\lambda_{\epsilon_j^+}) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- \leq p}}^n F_{\epsilon_j^-}^{[1]}(\zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- > p}}^n \alpha(\zeta_{\delta_{Rj}^-}) \bar{F}_{\epsilon_j^-}^{[1]}(\zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right], \end{aligned} \quad (5.0.4)$$

wobei $\mathbb{Z}_{2m} = \{1, \dots, 2m\}$ und $p_2(\mathbb{Z}_{2m})$ die Menge aller Zerlegungen von \mathbb{Z}_{2m} in zwei disjunkte Teilmengen ist. Weiterhin ist $\text{card}\{A\}$ die Kardinalität (gleich Anzahl der Elemente) einer Menge A . Per Definition ist $\text{card}\{\epsilon^-\} = n$. Die Elemente der Mengen $\{\epsilon^\pm\}$ und $\{\delta^\pm\}$ werden so angeordnet, dass $\epsilon_j^\pm < \epsilon_k^\pm$ und $\delta_j^\pm < \delta_k^\pm$ für $j < k$ gilt. Dann werden für jede Zerlegung $(\{\epsilon^+\}, \{\epsilon^-\})$ und $(\{\delta^+\}, \{\delta^-\})$ die Permutationen $P, Q \in \mathfrak{S}^{2m}$ durch

$$Pj = \begin{cases} \epsilon_j^- & , \text{für } j = 1, \dots, n, \\ \epsilon_{j-n}^+ & , \text{für } j = n+1, \dots, 2m, \end{cases} \quad Qj = \begin{cases} \delta_j^- & , \text{für } j = 1, \dots, n \\ \delta_{j-n}^+ & , \text{für } j = n+1, \dots, 2m, \end{cases} \quad (5.0.5)$$

festgelegt. Mit der Relation (4.1.8a) erhält man für die Koeffizienten unter der Summe der Spin-1-Dichte-Matrix (3.3.10) den Ausdruck

$$D^{[2]}(\mathbf{x} | \xi) = \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{\mathfrak{B}(\xi_j)} \right] \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\prod_{j=1}^{2m} \mathfrak{A}(\zeta_j) \right] D^{[1]}(\mathbf{x} | \zeta). \quad (5.0.6)$$

Einsetzen des Ergebnisses (5.0.4) in (5.0.6) führt zu

$$\begin{aligned}
D^{[2]}(x|\xi) & \left[\prod_{j=1}^m -\sinh(\eta) \operatorname{sgn}(\delta_j) \right] \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \left(\sinh^2(\xi_k - \xi_j) - \sinh^2(\eta) \right) \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_{(\{\epsilon^+\}, \{\epsilon^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m})} \sum_{l_{\epsilon_1^+}, \dots, l_{\epsilon_{2m-n}^+} = 1}^N \sum_{\substack{(\{\delta^+\}, \{\delta^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m}) \\ \operatorname{card}\{\delta^-\} = n}} \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{\mathfrak{B}(\xi_j)} \right] \operatorname{sgn}(PQ) \\
& \quad \times \sum_{R \in \mathfrak{S}^n} \frac{\operatorname{sgn}(R) \det \left[-w_{l_{\epsilon_j^+}} \left(\zeta_{\delta_k^+} \right) \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)} \Bigg|_{\substack{\omega_{\epsilon_j^+} = \lambda_{l_{\epsilon_j^+}}, \omega_{\epsilon_j^-} = \zeta_{\delta_{Rj}^-}}} \\
& \quad \times \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^+ \leq p}}^{2m-n} F_{\epsilon_j^+}^{[1]} \left(\lambda_{l_{\epsilon_j^+}} \right) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^+ > p}}^{2m-n} -\overline{F}_{\epsilon_j^+}^{[1]} \left(\lambda_{l_{\epsilon_j^+}} \right) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- \leq p}}^n F_{\epsilon_j^-}^{[1]} \left(\zeta_{\delta_{Rj}^-} \right) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- > p}}^n \mathfrak{a} \left(\zeta_{\delta_{Rj}^-} \right) \overline{F}_{\epsilon_j^-}^{[1]} \left(\zeta_{\delta_{Rj}^-} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.0.7}$$

Hierbei wurde der Limes $\epsilon \rightarrow 0+$ des folgenden Terms ausgeführt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\zeta_k - \zeta_j) & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \prod_{j=1}^m \sinh(\zeta_{2j} - \zeta_{2j-1}) \\
& \quad \times \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh(\zeta_{2k-1} - \zeta_{2j-1}) \sinh(\zeta_{2k-1} - \zeta_{2j}) \sinh(\zeta_{2k} - \zeta_{2j-1}) \sinh(\zeta_{2k} - \zeta_{2j}) \\
& = \left[\prod_{j=1}^m -\sinh(\eta) \operatorname{sgn}(\delta_j) \right] \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \left(\sinh^2(\xi_k - \xi_j) - \sinh^2(\eta) \right).
\end{aligned}$$

Es wird folgende Funktion $\chi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert:

$$\chi(\lambda, x) := t(x - \lambda) \mathfrak{a}(x) - t(\lambda - x) + \sum_{k=1}^N K(\lambda - \lambda_k) w_k(x). \tag{5.0.8}$$

Dann erfüllt die Funktion $\chi(\lambda, x)$ per Definition (siehe Gleichung (5.0.1)) die Relation

$$\chi(\lambda_j, x) = \mathfrak{a}'(\lambda_j) w_j(x), \tag{5.0.9}$$

welche sich später noch als nützlich erweisen wird. Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda + \eta, \zeta) & = \coth(\lambda - \zeta + 2\eta) + \mathfrak{a}(\zeta) \coth(\lambda - \zeta) - \mathfrak{A}(\zeta) \coth(\lambda - \zeta + \eta) \\
& \quad + \sum_{k=1}^N [\coth(\lambda - \lambda_k) - \coth(\lambda - \lambda_k + 2\eta)] w_k(\zeta),
\end{aligned} \tag{5.0.10a}$$

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda - \eta, \zeta) & = \coth(\lambda - \zeta) + \mathfrak{a}(\zeta) \coth(\lambda - \zeta - 2\eta) - \mathfrak{A}(\zeta) \coth(\lambda - \zeta - \eta) \\
& \quad + \sum_{k=1}^N [\coth(\lambda - \lambda_k - 2\eta) - \coth(\lambda - \lambda_k)] w_k(\zeta).
\end{aligned} \tag{5.0.10b}$$

Die beiden $i\pi$ -periodischen Funktionen $\chi(\lambda \pm \eta, \zeta_j)$ bzgl. des Argumentes λ sind meromorph und besitzen lediglich einfache, wenn auch unendlich viele, Polstellen: Die Polstellen der Funktion $\chi(\lambda + \eta, \zeta_j)$ liegen bei

- $\lambda = \zeta_j \bmod i\pi$ mit Residuum $\mathfrak{a}(\zeta_j)$,
- $\lambda = \zeta_j - \eta \bmod i\pi$ mit Residuum $-\mathfrak{A}(\zeta_j)$,
- $\lambda = \zeta_j - 2\eta \bmod i\pi$ mit Residuum 1,
- $\lambda = \lambda_k \bmod i\pi$, $k = 1, \dots, N$ mit Residuum $w_k(\zeta_j)$,
- $\lambda = \lambda_k - 2\eta \bmod i\pi$, $k = 1, \dots, N$ mit Residuum $-w_k(\zeta_j)$.

Die Funktion $\chi(\lambda - \eta, \zeta_j)$ besitzt Polstellen bei

- $\lambda = \zeta_j \bmod i\pi$ mit Residuum 1,
- $\lambda = \zeta_j + \eta \bmod i\pi$ mit Residuum $-\mathfrak{A}(\zeta_j)$,
- $\lambda = \zeta_j + 2\eta \bmod i\pi$ mit Residuum $\mathfrak{a}(\zeta_j)$,
- $\lambda = \lambda_k \bmod i\pi, k = 1, \dots, N$ mit Residuum $-w_k(\zeta_j)$,
- $\lambda = \lambda_k + 2\eta \bmod i\pi, k = 1, \dots, N$ mit Residuum $w_k(\zeta_j)$.

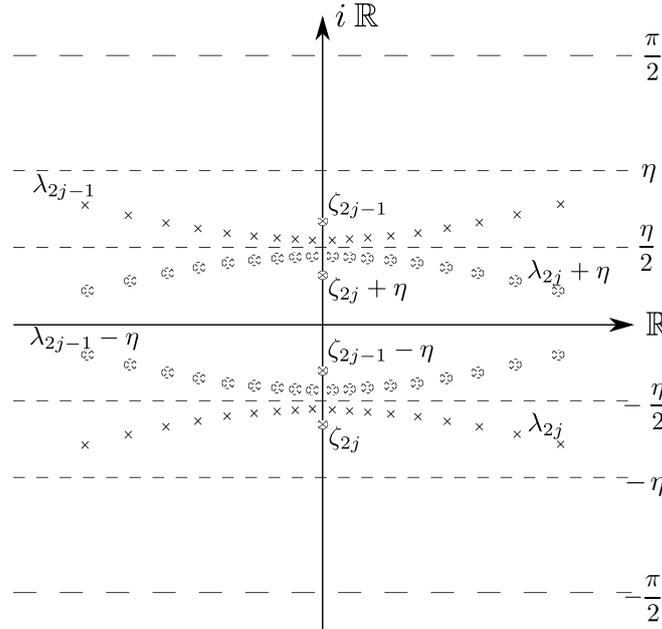


Abbildung 5.1.: Nach [2, 90] verteilen sich die Bethe-Rapiditäten, wie in Kapitel 3.2, „Bethe-Ansatz-Lösungen“, beschrieben, für den dominanten Eigenwert der Quantentransfer-Matrix ($N = M$, N gerade) in $N/2$ -viele Zweier-String-Lösungen in den Gebieten $\mathcal{S}^\pm := \{x \in \mathbb{C} \mid 0 < \pm \text{Im}(x) < \gamma\}$ mit $\eta = i\gamma, 0 < \gamma < \pi/2$ verteilen, wobei $\{\lambda_{2j-1}\} \in \mathcal{S}^+$ und $\{\lambda_{2j}\} \in \mathcal{S}^-$ für $j = 1, \dots, N/2$.

Es werden die Gebiete $\mathcal{R}^\pm := \{x \in \mathbb{C} \mid \gamma/2 < \pm \text{Im}(x) < \gamma\}$ und $\mathcal{R} := \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$ sowie $\mathcal{S}^\pm := \{x \in \mathbb{C} \mid 0 < \pm \text{Im}(x) < \gamma\}$ als auch $\mathcal{S} := (\mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^-)$ eingeführt. Dann ist die Lage der Polstellen von η bzw. γ abhängig. Je nach Größe des Parameters γ liegen diese entweder innerhalb $\mathcal{R}, \mathcal{S} \setminus \mathcal{R}$ oder außerhalb \mathcal{S} . Dies wird im Folgenden näher untersucht. Weiterhin wird die Menge $\mathcal{T} := \{x \in \mathbb{C} \mid \gamma/2 < |\text{Im}(x)| < \pi/2\}$ eingeführt. Der Anisotropieparameter wird im Folgenden durch $\gamma =: 2\pi s, s \in (0, 1/4)$ definiert sowie $\epsilon\eta/2 =: i\tilde{\epsilon}\pi \Rightarrow \tilde{\epsilon} = s\epsilon, \epsilon \ll 1$. Angenommen, es existiert ein $l \in \{1, \dots, N/2\}$, sodass $\delta_l = +1 + \epsilon$. Ferner ist ζ_{2l-1} bzw. ζ_{2l} definiert wie in (3.3.5). Dann gilt

$$\text{Im}(\zeta_{2l-1}) = \pi(s + \tilde{\epsilon}) \in \mathcal{R}, \quad \text{Im}(\zeta_{2l}) = -\pi(s + \tilde{\epsilon}) \in \mathcal{R},$$

$$\text{Im}(\zeta_{2l-1} - \eta) = \pi(-s + \tilde{\epsilon}) > -s\pi \Rightarrow \zeta_{2l-1} - \eta \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{R},$$

$$\text{Im}(\zeta_{2l} - \eta) = \pi(-3s - \tilde{\epsilon}) < -2s\pi \Rightarrow \zeta_{2l} - \eta \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \in \left(0, \frac{1}{6}(1 - 2\tilde{\epsilon})\right),$$

$$\text{Im}(\zeta_{2l} - \eta + i\pi) = \pi(1 - 3s - \tilde{\epsilon}) \Rightarrow \zeta_{2l} - \eta + i\pi \in \begin{cases} \mathcal{R}^+ & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{5}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{4}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}\right), \\ \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{6}(1 - 2\tilde{\epsilon}), \frac{1}{5}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l-1} - 2\eta) = \pi(-3s + \tilde{\epsilon}) < -2s\pi \Rightarrow \zeta_{2l-1} - 2\eta \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \in \left(0, \frac{1}{6}(1 + 2\tilde{\epsilon})\right),$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l-1} - 2\eta + i\pi) = \pi(1 - 3s + \tilde{\epsilon}) \Rightarrow \zeta_{2l-1} - \eta + i\pi \in \begin{cases} \mathcal{R}^+ & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{5}(1 + \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}\right), \\ \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{6}(1 + 2\tilde{\epsilon}), \frac{1}{5}(1 + \tilde{\epsilon})\right), \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l} - 2\eta) = \pi(-5s - \tilde{\epsilon}) < -2s\pi \Rightarrow \zeta_{2l} - 2\eta \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \in \left(0, \frac{1}{10}(1 - 2\tilde{\epsilon})\right),$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l} - 2\eta + i\pi) = \pi(1 - 5s - \tilde{\epsilon}) \Rightarrow \zeta_{2l} - \eta + i\pi \in \begin{cases} \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{10}(1 - 2\tilde{\epsilon}), \frac{1}{7}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{R}^+ & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{7}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{6}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{6}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{R}^- & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{4}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}\right), \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l-1} + \eta) = \pi(3s + \tilde{\epsilon}) > 2s\pi \Rightarrow \zeta_{2l-1} + \eta \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \in \left(0, \frac{1}{6}(1 - 2\tilde{\epsilon})\right),$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l-1} + \eta - i\pi) = \pi(3s + \tilde{\epsilon} - 1) \Rightarrow \zeta_{2l-1} + \eta - i\pi \in \begin{cases} \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{6}(1 - 2\tilde{\epsilon}), \frac{1}{5}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{R}^- & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{5}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{4}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}\right), \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l} + \eta) = \pi(s - \tilde{\epsilon}) < s\pi \Rightarrow \zeta_{2l} + \eta \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{R},$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l-1} + 2\eta) = \pi(5s + \tilde{\epsilon}) > 2s\pi \Rightarrow \zeta_{2l-1} + 2\eta \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \in \left(0, \frac{1}{10}(1 - 2\tilde{\epsilon})\right),$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l-1} + 2\eta - i\pi) = \pi(5s + \tilde{\epsilon} - 1) \Rightarrow \zeta_{2l-1} + 2\eta - i\pi \in \begin{cases} \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{10}(1 - 2\tilde{\epsilon}), \frac{1}{7}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{R}^- & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{7}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{6}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{6}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}(1 - \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{R}^+ & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{4}(1 - \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}\right), \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l} + 2\eta) = \pi(3s - \tilde{\epsilon}) > 2s\pi \Rightarrow \zeta_{2l} + 2\eta \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \in \left(0, \frac{1}{6}(1 + 2\tilde{\epsilon})\right),$$

$$\operatorname{Im}(\zeta_{2l} + 2\eta - i\pi) = \pi(3s - \tilde{\epsilon} - 1) \Rightarrow \zeta_{2l} + 2\eta - i\pi \in \begin{cases} \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{6}(1 + 2\tilde{\epsilon}), \frac{1}{5}(1 + \tilde{\epsilon})\right), \\ \mathcal{R}^- & \Leftrightarrow s \in \left(\frac{1}{5}(1 + \tilde{\epsilon}), \frac{1}{4}\right). \end{cases}$$

Falls $\delta_l = -1 - \epsilon$ ist, dann lassen sich obige Ergebnisse durch Vertauschen der Indizes $2l - 1 \Leftrightarrow 2l$ einfach korrigieren. Mit der in Abbildung 5.1 angenommenen Verteilung der Bethe-Ansatz-Zahlen gilt für $j = 1, \dots, N/2$

$$\lambda_{2j-1} \in \mathcal{R}^+, \lambda_{2j} \in \mathcal{R}^-.$$

Weiterhin gilt

$$\operatorname{Im}(\lambda_{2j-1} - 2\eta) \in (-3s\pi, -2s\pi) \subset \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \leq \frac{1}{6},$$

falls jedoch $s \geq \frac{1}{6}$, dann liegen die Bethe-Ansatz-Zahlen nur teilweise in \mathcal{T} , einige schieben sich dann nach unten hinaus für $s \geq \frac{1}{6}$. Dagegen liegen die um $+i\pi$ verschobenen Bethe-Ansatz-Zahlen

$$\operatorname{Im}(\lambda_{2j-1} - 2\eta + i\pi) \in ((1 - 3s)\pi, (1 - 2s)\pi)$$

für $s \leq \frac{1}{6}$ komplett oberhalb von \mathcal{T} , für $s \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right)$ komplett außerhalb von \mathcal{R}^+ , aber teilweise oberhalb von \mathcal{T} und für $s \geq \frac{1}{5}$ teilweise in \mathcal{R}^+ , $\mathcal{T} \setminus \mathcal{R}$ oder oberhalb von \mathcal{T} . Des Weiteren ist

$$\operatorname{Im}(\lambda_{2j} - 2\eta) \in (-6s\pi, -5s\pi) \subset \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \leq \frac{1}{12},$$

falls jedoch $s \in (\frac{1}{12}, \frac{1}{10})$, dann liegen die Bethe-Ansatz-Zahlen nur teilweise in \mathcal{T} , einige schieben sich dann nach unten hinaus für $s \geq \frac{1}{12}$. Falls $s \geq \frac{1}{10}$, dann liegen alle λ_{2j} unterhalb von \mathcal{T} . Dagegen verteilen sich die um $+i\pi$ verschobenen Bethe-Ansatz-Zahlen wie folgt:

$$\text{Im}(\lambda_{2j} - 2\eta + i\pi) \in ((1 - 6s)\pi, (1 - 5s)\pi) \Rightarrow \lambda_{2j} - 2\eta + i\pi \in \begin{cases} \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{10}, \frac{1}{8}), \\ \mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{T} \setminus \mathcal{S}) & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{7}), \\ \mathcal{R}^+ & \Leftrightarrow s = \frac{1}{7}, \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R}^- & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{7}, \frac{1}{6}), \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{5}), \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R}^+ & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{5}, \frac{1}{4}), \\ \mathcal{R}^- & \Leftrightarrow s = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Für $s \leq \frac{1}{10}$ liegen die Bethe-Ansatz-Zahlen λ_{2j} oberhalb \mathcal{T} und für $s \in (\frac{1}{12}, \frac{1}{10})$ liegen diese teilweise in $\mathcal{T} \setminus \mathcal{S}$ aber auch oberhalb von \mathcal{T} . Ferner gilt

$$\text{Im}(\lambda_{2j-1} + 2\eta) \in (5s\pi, 6s\pi) \subset \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \leq \frac{1}{12}.$$

Falls jedoch $s \in (\frac{1}{12}, \frac{1}{10})$, dann liegen die Bethe-Ansatz-Zahlen nur teilweise in \mathcal{T} , einige schieben sich dann nach oben hinaus für $s \geq \frac{1}{12}$. Falls $s \geq \frac{1}{10}$, dann liegen alle λ_{2j-1} oberhalb von \mathcal{T} . Dagegen verteilen sich die um $-i\pi$ verschobenen Bethe-Ansatz-Zahlen wie folgt:

$$\text{Im}(\lambda_{2j-1} + 2\eta - i\pi) \in ((5s - 1)\pi, (6s - 1)\pi) \Rightarrow \lambda_{2j-1} + 2\eta - i\pi \in \begin{cases} \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{10}, \frac{1}{8}), \\ \mathcal{R}^- \cup (\mathcal{T} \setminus \mathcal{S}) & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{7}), \\ \mathcal{R}^- & \Leftrightarrow s = \frac{1}{7}, \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R}^+ & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{7}, \frac{1}{6}), \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{5}), \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{R}^- & \Leftrightarrow s \in (\frac{1}{5}, \frac{1}{4}), \\ \mathcal{R}^+ & \Leftrightarrow s = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Für $s \leq \frac{1}{10}$ liegen die Bethe-Ansatz-Zahlen λ_{2j} oberhalb \mathcal{T} und für $s \in (\frac{1}{12}, \frac{1}{10})$ liegen diese teilweise in $\mathcal{T} \setminus \mathcal{S}$, aber auch oberhalb von \mathcal{T} . Offenbar gilt

$$\text{Im}(\lambda_{2j} + 2\eta) \in (2s\pi, 3s\pi) \subset \mathcal{T} \setminus \mathcal{S} \Leftrightarrow s \leq \frac{1}{6},$$

falls jedoch $s \geq \frac{1}{6}$, dann liegen die Bethe-Ansatz-Zahlen nur teilweise in \mathcal{T} , einige schieben sich dann nach unten hinaus für $s \geq \frac{1}{6}$. Dagegen liegen die um $-i\pi$ verschobenen Bethe-Ansatz-Zahlen

$$\text{Im}(\lambda_{2j} + 2\eta - i\pi) \in ((2s - 1)\pi, (3s - 1)\pi)$$

für $s \leq \frac{1}{6}$ komplett unterhalb von \mathcal{T} , für $s \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{5})$ komplett außerhalb von \mathcal{R}^+ , aber teilweise unterhalb von \mathcal{T} und für $s \geq \frac{1}{5}$ teilweise in \mathcal{R}^+ , $\mathcal{T} \setminus \mathcal{R}$ oder unterhalb von \mathcal{T} .

Für $\gamma < \frac{\pi}{4}$ ergibt sich (im wesentlichen) der in [50] beschriebene Fall (siehe (C.18)): Die einzigen Polstellen für $s < \frac{1}{8}$ der Funktionen $\chi(\lambda \pm \eta, \zeta_j)$ innerhalb \mathcal{R} sind ζ_j und λ_k , $k = 1, \dots, N$, mit Residuen

$$\text{res} [\chi(\lambda + \eta, \zeta_j)]|_{\lambda=\zeta_j} = \mathfrak{a}(\zeta_j), \quad \text{res} [\chi(\lambda + \eta, \zeta_j)]|_{\lambda=\lambda_k} = w_k(\zeta_j), \quad (5.0.11a)$$

$$\text{res} [\chi(\lambda - \eta, \zeta_j)]|_{\lambda=\zeta_j} = 1, \quad \text{res} [\chi(\lambda - \eta, \zeta_j)]|_{\lambda=\lambda_k} = -w_k(\zeta_j). \quad (5.0.11b)$$

Als Nächstes werden zwei Konturen Γ^\pm eingeführt, sodass $\Gamma^+ \subset \mathcal{R}^+$ die Menge aller Bethe-Ansatz-Zahlen $\{\lambda_{2j-1}\}_{j=1}^{N/2}$ sowie alle Inhomogenitäten ζ_{2j-1} , $j = 1, \dots, m$, und analog $\Gamma^- \subset \mathcal{R}^-$ die Menge aller Bethe-Ansatz-Zahlen $\{\lambda_{2j}\}_{j=1}^{N/2}$ sowie alle Inhomogenitäten ζ_{2j} , $j = 1, \dots, m$ umschließt. Die Wege Γ^\pm werden jeweils in zwei Wege zerlegt:

$$\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^-, \quad \Gamma^\pm := \mathcal{B}^\pm + \mathcal{J}^\pm, \quad \mathcal{J} := \mathcal{J}^+ + \mathcal{J}^-, \quad \mathcal{B} := \mathcal{B}^+ + \mathcal{B}^-.$$

Die Wege \mathcal{J}^\pm sollen nur die inhomogenen Parameter, dagegen die Wege \mathcal{B}^\pm ausschließlich die Bethe-Ansatz-Zahlen enthalten.

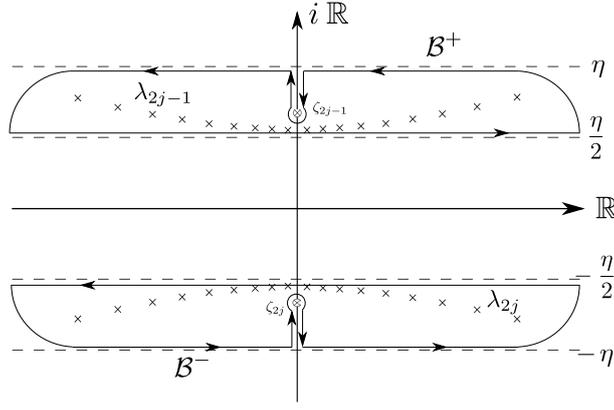


Abbildung 5.2.: Der Integrationsweg Γ setzt sich aus den Integrationswegen $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ + \mathcal{B}^-$ und $\mathcal{J} = \mathcal{J}^+ + \mathcal{J}^-$ zusammen, wobei die Wege \mathcal{B}^\pm die Bethe-Ansatz-Zahlen $\{\lambda_{2j-1}\}$ bzw. $\{\lambda_{2j}\}$ und \mathcal{J}^\pm die Inhomogenitäten $\{\zeta_{2j-1}\}$ bzw. $\{\zeta_{2j}\}$ innerhalb \mathcal{R}^\pm umschließen (vgl. mit Abbildung 2 in [48]).

Daraus folgt mit

$$g_j(\omega|\zeta) := \begin{cases} \chi(\omega - \eta, \zeta) & , \text{für } j \leq p, \\ \chi(\omega + \eta, \zeta) & , \text{für } j > p, \end{cases} \quad (5.0.12)$$

einerseits für $j > p$

$$\frac{\left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- \leq p}}^n F_{\epsilon_j^-}^{[1]}(\zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right]}{\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq 2m \\ \epsilon_j^- \leq p}} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta) \Big|_{\omega_{\epsilon_j^+} = \lambda_{\epsilon_j^+}, \omega_{\epsilon_j^-} = \zeta_{\delta_{Rj}^-}}} = \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- \leq p}}^n \int_{\mathcal{J}} \frac{d\omega_{\epsilon_j^-}}{2\pi i} \right] \frac{\left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- \leq p}}^n F_{\epsilon_j^-}^{[1]}(\omega_{\epsilon_j^-}) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- \leq p}}^n g_{\epsilon_j^-}(\omega_{\epsilon_j^-} | \zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right]}{\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq 2m \\ j \leq p}} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta) \Big|_{\omega_{\epsilon_j^+} = \lambda_{\epsilon_j^+}, \omega_{\epsilon_j^-} = \zeta_{\delta_{Rj}^-}}}, \quad (5.0.13a)$$

und andererseits für $j \leq p$

$$\frac{\left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- > p}}^n \alpha(\zeta_{\delta_{Rj}^-}) \overline{F}_{\epsilon_j^-}^{[1]}(\zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right]}{\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq 2m \\ \epsilon_j^- > p}} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta) \Big|_{\omega_{\epsilon_j^+} = \lambda_{\epsilon_j^+}, \omega_{\epsilon_j^-} = \zeta_{\delta_{Rj}^-}}} = \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- > p}}^n \int_{\mathcal{J}} \frac{d\omega_{\epsilon_j^-}}{2\pi i} \right] \frac{\left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- > p}}^n \overline{F}_{\epsilon_j^-}^{[1]}(\omega_{\epsilon_j^-}) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ \epsilon_j^- > p}}^n g_{\epsilon_j^-}(\omega_{\epsilon_j^-} | \zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right]}{\prod_{\substack{1 \leq j < k \leq 2m \\ j > p}} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta) \Big|_{\omega_{\epsilon_j^+} = \lambda_{\epsilon_j^+}, \omega_{\epsilon_j^-} = \zeta_{\delta_{Rj}^-}}}. \quad (5.0.13b)$$

Analog folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_{l_{\epsilon_1^+}, \dots, l_{\epsilon_{2m-n}^+}} &= \frac{\left[\prod_{j=1}^{2m-n} -\bar{F}_{\epsilon_j^+}^{[1]}(\lambda_{\epsilon_j^+}) \right] \left[\prod_{j=1}^{2m-n} F_{\epsilon_j^+}^{[1]}(\lambda_{\epsilon_j^+}) \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta) \Big|_{\omega_{\epsilon_j^+} = \lambda_{\epsilon_j^+}}} \det \left[-w_{l_{\epsilon_j^+}}(\zeta_{\delta_k^+}) \right] \\
 &= \left[\prod_{j=1}^{2m-n} \int_{\mathcal{B}} \frac{d\omega_{\epsilon_j^+}}{2\pi i} \right] \frac{\left[\prod_{j=1}^{2m-n} \bar{F}_{\epsilon_j^+}^{[1]}(\omega_{\epsilon_j^+}) \right] \left[\prod_{j=1}^{2m-n} F_{\epsilon_j^+}^{[1]}(\omega_{\epsilon_j^+}) \right] \det \left[g_{\epsilon_j^+}(\omega_{\epsilon_j^+} | \zeta_{\delta_k^+}) \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)}. \quad (5.0.14)
 \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (5.0.13) und (5.0.14) erhält man aus (5.0.7) die Vielfach-Integraldarstellung

$$\begin{aligned}
 D^{[2]}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\xi}) &= \left[\prod_{j=1}^m -\sinh(\eta) \operatorname{sgn}(\delta_j) \right] \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \left(\sinh^2(\xi_k - \xi_j) - \sinh^2(\eta) \right) \\
 &= \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{\mathfrak{B}(\xi_j)} \right] \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{(\{\epsilon^+\}, \{\epsilon^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m})} \left[\prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{J}} \frac{d\omega_{\epsilon_j^-}}{2\pi i} \right] \left[\prod_{j=1}^{2m-n} \int_{\mathcal{B}} \frac{d\omega_{\epsilon_j^+}}{2\pi i} \right] \\
 &\times \sum_{\substack{(\{\delta^+\}, \{\delta^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m}) \\ \operatorname{card}\{\delta^-\} = n}} \operatorname{sgn}(PQ) \sum_{R \in \mathfrak{S}^n} \operatorname{sgn}(R) \left[\prod_{j=1}^n g_{\epsilon_j^-}(\omega_{\epsilon_j^-} | \zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right] \det \left[g_{\epsilon_j^+}(\omega_{\epsilon_j^+} | \zeta_{\delta_k^+}) \right] \\
 &\times \frac{\left[\prod_{j=1}^{2m-n} \bar{F}_{\epsilon_j^+}^{[1]}(\omega_{\epsilon_j^+}) \right] \left[\prod_{j=1}^{2m-n} F_{\epsilon_j^+}^{[1]}(\omega_{\epsilon_j^+}) \right] \left[\prod_{j=1}^n \bar{F}_{\epsilon_j^-}^{[1]}(\omega_{\epsilon_j^-}) \right] \left[\prod_{j=1}^n F_{\epsilon_j^-}^{[1]}(\omega_{\epsilon_j^-}) \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)}. \quad (5.0.15)
 \end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{(\{\delta^+\}, \{\delta^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m}) \\ \operatorname{card}\{\delta^-\} = n}} \operatorname{sgn}(PQ) \sum_{R \in \mathfrak{S}^n} \operatorname{sgn}(R) \left[\prod_{j=1}^n g_{\epsilon_j^-}(\omega_{\epsilon_j^-} | \zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right] \det \left[g_{\epsilon_j^+}(\omega_{\epsilon_j^+} | \zeta_{\delta_k^+}) \right] \\
 &= \sum_{\substack{(\{\delta^+\}, \{\delta^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m}) \\ \operatorname{card}\{\delta^-\} = n}} \operatorname{sgn}(PQ) \det \left[g_{\epsilon_j^-}(\omega_{\epsilon_j^-} | \zeta_{\delta_{Rj}^-}) \right] \det \left[g_{\epsilon_j^+}(\omega_{\epsilon_j^+} | \zeta_{\delta_k^+}) \right] = \det [g_j(\omega_j | \zeta_k)], \quad (5.0.16)
 \end{aligned}$$

und

$$\sum_{(\{\epsilon^+\}, \{\epsilon^-\}) \in p_2(\mathbb{Z}_{2m})} \left[\prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{J}} \frac{d\omega_{\epsilon_j^-}}{2\pi i} \right] \left[\prod_{j=1}^{2m-n} \int_{\mathcal{B}} \frac{d\omega_{\epsilon_j^+}}{2\pi i} \right] = \left[\prod_{j=1}^{2m} \int_{\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right], \quad (5.0.17)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 D^{[2]}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\xi}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\prod_{j=1}^m \frac{-1}{\sinh(\eta) \mathfrak{B}(\xi_j)} \right] \frac{1}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \left(\sinh^2(\xi_k - \xi_j) - \sinh^2(\eta) \right)} \\
 &\times \left[\prod_{j=1}^{2m} \int_{\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \left[\prod_{j=p+1}^{2m} \bar{F}_j^{[1]}(\omega_j) \right] \left[\prod_{j=1}^p F_j^{[1]}(\omega_j) \right] \frac{\det [g_j(\omega_j | \zeta_k)] \left[\prod_{j=1}^m \operatorname{sgn}(\delta_j) \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)}. \quad (5.0.18)
 \end{aligned}$$

Mit der Notation

$$\tilde{v}_{2k-1} := \xi_k + \frac{\eta}{2}(1 + \epsilon), \quad \tilde{v}_{2k} := \xi_k - \frac{\eta}{2}(1 + \epsilon)$$

und

$$\chi_{j\ k}^{(p,\epsilon)} := \begin{cases} \chi(\lambda_j - \eta, \tilde{\nu}_k) & j = 1, \dots, p, \\ \chi(\lambda_j + \eta, \tilde{\nu}_k) & j = p + 1, \dots, 2m, \end{cases}$$

folgt die Relation

$$\det [g_j(\omega_j | \zeta_k)] \left[\prod_{j=1}^m \operatorname{sgn}(\delta_j) \right] = \det [\chi_{j\ k}^{(p,\epsilon)}]. \quad (5.0.19)$$

5.1. Fusionierte Wellenfunktionen

Mit (3.2.11) können die Beiträge der Koeffizienten $D^{[2]}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\xi})$ für die Dichte-Matrixelemente (3.3.11) nach derselben Vorgehensweise wie in [50] ermittelt werden. In der Tabelle 5.1 werden die Beiträge der „fusionierten Spin-1-Wellenfunktionen“ der Integraldarstellung (5.0.18) für die Matrixelemente $T^{[1]\alpha_l}_{\beta_l}(\xi_l)$ aufgeführt:

Matrixelement	Faktor unter dem Integral (5.0.18)
$T^{[1] +}_{+}(\xi_l)$	$F_l(\omega_j)F_l(\omega_{j+1}) + \mathcal{O}(\epsilon)$
$T^{[1] +}_{0}(\xi_l)$	$\sqrt{[2]_q}F_l(\omega_j)F_l(\omega_{j+1})\bar{F}_l(\omega_i) + \mathcal{O}(\epsilon)$
$T^{[1] +}_{-}(\xi_l)$	$F_l(\omega_j)F_l(\omega_{j+1})\bar{F}_l(\omega_i)\bar{F}_l(\omega_{i+1}) + \mathcal{O}(\epsilon)$
$T^{[1] 0}_{+}(\xi_l)$	$\sqrt{[2]_q}F_l(\omega_j) + \mathcal{O}(\epsilon)$
$T^{[1] 0}_{0}(\xi_l)$	$[2]_qF_l(\omega_j)\bar{F}_l(\omega_i) + \mathcal{O}(\epsilon)$
$T^{[1] 0}_{-}(\xi_l)$	$\sqrt{[2]_q}F_l(\omega_j)\bar{F}_l(\omega_i)\bar{F}_l(\omega_{i+1}) + \mathcal{O}(\epsilon)$
$T^{[1] -}_{+}(\xi_l)$	1
$T^{[1] -}_{0}(\xi_l)$	$\sqrt{[2]_q}\bar{F}_l(\omega_i) + \mathcal{O}(\epsilon)$
$T^{[1] -}_{-}(\xi_l)$	$\bar{F}_l(\omega_i)\bar{F}_l(\omega_{i+1}) + \mathcal{O}(\epsilon)$

Tabelle 5.1.: Beiträge innerhalb des Integrals (5.0.18).

Dabei sind die „fusionierten Spin-1-Wellenfunktionen“ durch

$$F_l(x) := \prod_{k=1}^m \sinh\left(x - \xi_k - \frac{\eta}{2}\right) \prod_{k=1}^{l-1} \sinh\left(x - \xi_k - \frac{3}{2}\eta\right) \prod_{k=l+1}^m \sinh\left(x - \xi_k + \frac{\eta}{2}\right), \quad (5.1.1a)$$

$$\bar{F}_l(x) := \prod_{k=1}^m \sinh\left(x - \xi_k + \frac{\eta}{2}\right) \prod_{k=1}^{l-1} \sinh\left(x - \xi_k + \frac{3}{2}\eta\right) \prod_{k=l+1}^m \sinh\left(x - \xi_k - \frac{\eta}{2}\right) \quad (5.1.1b)$$

definiert. Bei der Berechnung der Resultate in Tabelle 5.1 wurde immer angenommen, dass $j, j + 1 \in \{1, \dots, p\}$ und $i, i + 1 \in \{p + 1, \dots, 2m\}$ ist. Bis auf Korrekturen in Ordnung von ϵ setzt sich die „Wellenfunktion“ unter dem Integral (5.0.18) nach obigen Resultaten wie folgt zusammen:

Für jede in den Sequenzen (α_j) und (β_k) vorkommende Null erhält man einen Faktor $\sqrt{[2]_q}$ bzw. insgesamt

$$([2]_q)^{\frac{n_0(\alpha) + n_0(\beta)}{2}} = ([2]_q)^{m - n_+(\alpha) - n_-(\beta)}.$$

Weiterhin erhält man von der Folge (α_j) für jedes Pluszeichen den Faktor $F_l(\omega_j)F_l(\omega_{j+1})$ und für jede Null den Faktor $F_l(\omega_j)$. Von der Folge (β_k) kommen für jede Null ein Faktor $\bar{F}_l(\omega_i)$ und für jedes Minuszeichen ein Faktor $\bar{F}_l(\omega_i)\bar{F}_l(\omega_{i+1})$ hinzu. Insgesamt sind dies $2n_+(\alpha) + n_0(\alpha) + n_0(\beta) + n_-(\beta) = 2m$ Faktoren mit $p = 2n_+(\alpha) + n_0(\alpha)$. Somit erhält man eine Folge $(z) = (z_j)_{j=1}^{2m}$, $z_j \in \{1, \dots, m\}$ mittels Umsortierung in einer aufsteigenden Reihenfolge bezüglich der ω_j :

$$F_{z_1}(\omega_1) \dots F_{z_p}(\omega_p) \bar{F}_{z_{p+1}}(\omega_{p+1}) \dots \bar{F}_{z_{2m}}(\omega_{2m}).$$

Um die Folge (z) zu konstruieren, werden zunächst die Indizes der Dichte-Matrixelemente in der Reihenfolge $\alpha_m, \dots, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m$ angeordnet. Beginnend von der linken Seite, also α_m , wird $z_1 = m$, falls $\alpha_m = 0$, und $z_1 = z_2 = m$ definiert, falls $\alpha_m = +$. Für den Fall, dass $\alpha_m = -$, wird keine Zuordnung

vorgenommen. Es wird analog für α_{m-1} bis α_1 fortgefahren. Dort angekommen, hat man bereits die ersten $p = 2n_+(\alpha) + n_0(\alpha)$ vielen Folgenglieder $(z)_{j=1}^p$ definiert. Für $\beta_1 = -$ wird $z_{p+1} = z_{p+2} = 1$ gesetzt. Falls $\beta_1 = 0$ wird $z_{p+1} = 1$ definiert. Tritt der Fall $\beta_1 = +$ auf, wird wieder nichts zugeordnet. Dies wird in analoger Weise mit β_2 fortgesetzt, bis man schließlich bei β_m ankommt.

j	1	2	3	4	5	6	7	8
α_j	+	0	0	-				
β_j	0	-	+	0				
z_j	3	2	1	1	1	2	2	4

Tabelle 5.2.: Beispiel für eine Folge (z) , $p = 4$.

Damit folgt aus dem Ausdruck (5.0.18) schließlich die Darstellung

$$\begin{aligned}
 D_{\beta_1 \dots \beta_m}^{[\alpha_1 \dots \alpha_m]}(\xi) &= \frac{([2]_q)^{-n_+(\alpha) - n_-(\beta)}}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \left(\sinh^2(\xi_k - \xi_j) - \sinh^2(\eta) \right)} \\
 &\times \left(-\frac{[2]_q}{\sinh(\eta)} \right)^m \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{\mathfrak{B}(\xi_j)} \right] \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\prod_{j=1}^{2m} \int_{\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \frac{\det [\chi_{j k}^{(p, \epsilon)}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)} \\
 &\times [F_{z_1}(\omega_1) \cdots F_{z_p}(\omega_p) \bar{F}_{z_{p+1}}(\omega_{p+1}) \cdots \bar{F}_{z_{2m}}(\omega_{2m}) + \mathcal{O}(\epsilon)] . \quad (5.1.2)
 \end{aligned}$$

Hier ist der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ noch nicht offensichtlich, da die inhomogenen Parameter unvermeidlich die Kontur Γ kreuzen. Daher wird zunächst die Kontur geweitet, wobei dies mit Vorsicht aufgrund der zusätzlich vorkommenden Terme bedingt durch die Polstellen der Funktionen $\chi(\lambda \pm \eta, \tilde{\nu}_k)$ (siehe Gleichung (5.0.10)) geschehen muss.

5.2. Weiten der Kontur

Ziel ist es zu zeigen, dass mit den Konturen \mathcal{C} und $\bar{\mathcal{C}}$, welche durch

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &= \mathcal{C}^+ + \mathcal{C}^- , \quad \bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{C}}^+ + \bar{\mathcal{C}}^- , \quad \mathcal{C}^\pm , \quad \bar{\mathcal{C}}^\pm \subset \mathcal{S}^\pm , \quad \mathcal{C}^- = \bar{\mathcal{C}}^- , \\
 \mathcal{C}^- &\text{ innerhalb } \mathcal{C}^+ - \eta , \quad \bar{\mathcal{C}}^+ - \eta \text{ innerhalb } \bar{\mathcal{C}}^- , \quad \Gamma \text{ innerhalb } \mathcal{C} , \quad \bar{\mathcal{C}}
 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

festgelegt werden,

$$\begin{aligned}
 &\left[\prod_{j=1}^{2m} \int_{\Gamma} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \frac{\det [\chi_{j k}^{(p, \epsilon)}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)} [F_{z_1}(\omega_1) \cdots F_{z_p}(\omega_p) \bar{F}_{z_{p+1}}(\omega_{p+1}) \cdots \bar{F}_{z_{2m}}(\omega_{2m}) + \mathcal{O}(\epsilon)] \\
 &= \left[\prod_{j=1}^p \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \left[\prod_{j=p+1}^{2m} \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \right] \frac{\det [\chi_{j k}^{(p, \epsilon)}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)} \\
 &\quad \times [F_{z_1}(\omega_1) \cdots F_{z_p}(\omega_p) \bar{F}_{z_{p+1}}(\omega_{p+1}) \cdots \bar{F}_{z_{2m}}(\omega_{2m}) + \mathcal{O}(\epsilon)] \quad (5.2.2)
 \end{aligned}$$

gilt. Dabei umschließen die Konturen \mathcal{C}^+ und $\bar{\mathcal{C}}^+$ nicht nur die Bethe-Ansatz-Zahlen λ_{2j-1} und Inhomogenitäten $\tilde{\nu}_{2k-1}$, sondern auch die um η verschobenen Bethe-Rapiditäten $\lambda_{2j} + \eta$ und inhomogenen Parameter $\tilde{\nu}_{2k} + \eta$. Entsprechendes gilt für die Konturen \mathcal{C}^- und $\bar{\mathcal{C}}^-$: Diese beinhalten neben den Bethe-Ansatz-Zahlen λ_{2j} und Inhomogenitäten $\tilde{\nu}_{2k}$ die um $(-\eta)$ verschobenen Parameter $\lambda_{2j-1} - \eta$ und $\tilde{\nu}_{2k-1} - \eta$.

Äquivalent zur Aussage von Gleichung (5.2.2) ist folgender Ausdruck, wobei hier die Definition der Determinante benutzt wird:

$$\sum_{Q \in \mathfrak{S}^{2m}} \text{sgn}(Q) \int_{\Gamma} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \chi(\omega_1 - \eta, \tilde{\nu}_{Q1}) \cdots \int_{\Gamma} \frac{d\omega_p}{2\pi i} \chi(\omega_p - \eta, \tilde{\nu}_{Qp})$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \frac{d\omega_{p+1}}{2\pi i} \chi(\omega_{2m} + \eta, \tilde{\nu}_{Q(2m)}) \cdots \int_{\Gamma} \frac{d\omega_{p+1}}{2\pi i} \chi(\omega_{p+1} + \eta, \tilde{\nu}_{Q(p+1)}) f(\omega_1, \dots, \omega_{2m}) \\
 &= \sum_{Q \in \mathfrak{S}^{2m}} \operatorname{sgn}(Q) \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \chi(\omega_1 - \eta, \tilde{\nu}_{Q1}) \cdots \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_p}{2\pi i} \chi(\omega_p - \eta, \tilde{\nu}_{Qp}) \\
 & \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\omega_{2m}}{2\pi i} \chi(\omega_{2m} + \eta, \tilde{\nu}_{Q(2m)}) \cdots \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\omega_{p+1}}{2\pi i} \chi(\omega_{p+1} + \eta, \tilde{\nu}_{Q(p+1)}) f(\omega_1, \dots, \omega_{2m}) , \quad (5.2.3)
 \end{aligned}$$

wobei

$$f(\omega_1, \dots, \omega_{2m}) = \frac{F_{z_1}(\omega_1) \cdots F_{z_p}(\omega_p) \bar{F}_{z_{p+1}}(\omega_{p+1}) \cdots \bar{F}_{z_{2m}}(\omega_{2m}) + \mathcal{O}(\epsilon)}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - \eta)} . \quad (5.2.4)$$

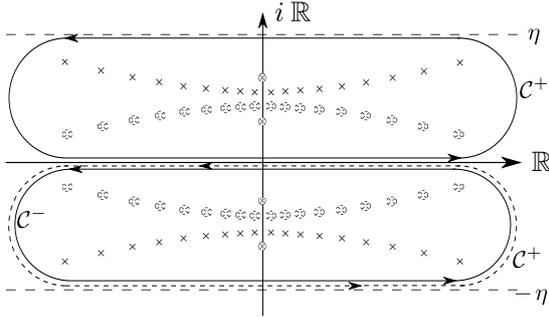


Abbildung 5.3.: Kontur \mathcal{C} .

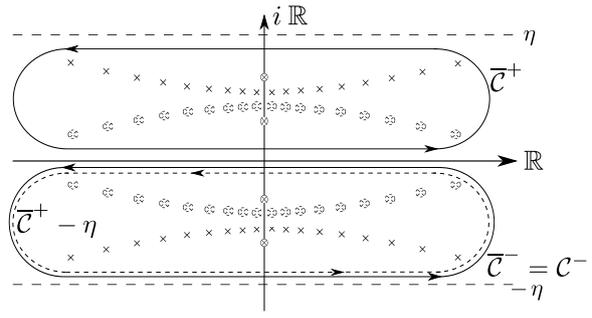


Abbildung 5.4.: Kontur $\bar{\mathcal{C}}$.

Da $\gamma < \pi/4$ vorausgesetzt wird, ist der Beweis für den Ausdruck (5.2.3) in analoger Weise wie in [50] für Gleichung (C.30) durchführbar. Der einzige Unterschied liegt darin, dass anstatt polynomiale Ausdrücke der Form

$$\omega_j - \omega_k \pm ai, a \in \mathbb{N}$$

Terme mit Sinus Hyperbolicus-Funktionen der Form

$$\sinh(\omega_j - \omega_k \pm a\eta/2), a \in \mathbb{N}$$

vorkommen. Aufgrund derselben Algebra der für $\gamma < \pi/4$ vorkommenden einfachen Polstellen innerhalb der Konturen \mathcal{C} und $\bar{\mathcal{C}}$, aber außerhalb der Kontur Γ , liegt für die Beweisführung exakt die im Beweis von (C.30) geschilderte Situation a) bis g) vor. Mit der Definition

$$\chi_{j k}^{(p)} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{j k}^{(p, \epsilon)} \quad (5.2.5)$$

folgt

$$\begin{aligned}
 D_{\beta_1 \dots \beta_m}^{[2] \alpha_1 \dots \alpha_m}(\boldsymbol{\xi}) &= 2^{m-n_+(\alpha)-n_-(\beta)} \frac{\cos(\gamma)^{-n_+(\alpha)-n_-(\beta)}}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \left(\sinh^2(\xi_k - \xi_j) + \sin^2(\gamma) \right)} \\
 & \times \left[\prod_{j=1}^m \frac{i \cot(\gamma)}{\mathfrak{B}(\xi_j)} \right] \left[\prod_{j=1}^p \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} F_{z_j}(\omega_j) \right] \left[\prod_{j=p+1}^{2m} \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \bar{F}_{z_j}(\omega_j) \right] \frac{\det[\chi_{j k}^{(p)}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - i\gamma)} \quad (5.2.6)
 \end{aligned}$$

für die inhomogene Dichte-Matrix der Spin-1 XXZ -Kette für Anisotropieparameter $\gamma < \pi/4$. Im isotropen Limes, d.h. $\gamma = 2\delta$, $\delta \rightarrow 0+$ und Umskalieren der Integrationsvariablen $\omega_j \rightarrow \tilde{\omega}_j \delta$, sowie die Inhomogenitäten $\xi_i \rightarrow \tilde{\xi}_i \delta$ für $j = 1, \dots, 2m$ und $i = 1, \dots, m$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \lim_{\gamma/2 \rightarrow 0} D_{\beta_1 \dots \beta_m}^{[2] \alpha_1 \dots \alpha_m}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{2^{-n_+(\alpha)-n_-(\beta)}}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} (\tilde{\xi}_k - \tilde{\xi}_j)^2 \left((\tilde{\xi}_k - \tilde{\xi}_j)^2 + 4 \right)} \\
 & \times \left[\prod_{j=1}^m \frac{i}{\mathfrak{B}(\tilde{\xi}_j)} \right] \left[\prod_{j=1}^p \int_{\mathcal{C}} \frac{d\tilde{\omega}_j}{2\pi i} F'_{z_j}(\tilde{\omega}_j) \right] \left[\prod_{j=p+1}^{2m} \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\tilde{\omega}_j}{2\pi i} \bar{F}'_{z_j}(\tilde{\omega}_j) \right] \frac{\det[\tilde{\chi}_{j k}^{(p)}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} (\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_k - 2i)} \quad (5.2.7)
 \end{aligned}$$

mit

$$F_l'(\tilde{x}) := \prod_{k=1}^m (\tilde{x} - \tilde{\xi}_k - i) \prod_{k=1}^{l-1} (\tilde{x} - \tilde{\xi}_k - 3) \prod_{k=l+1}^m (\tilde{x} - \tilde{\xi}_k + i),$$

$$\bar{F}_l'(\tilde{x}) := \prod_{k=1}^m (\tilde{x} - \tilde{\xi}_k + i) \prod_{k=1}^{l-1} (\tilde{x} - \tilde{\xi}_k + 3) \prod_{k=l+1}^m (\tilde{x} - \tilde{\xi}_k - i).$$

Die Matrix $\tilde{\chi}_{j k}^{(p)}$ ist gleich der Matrix (C.46) bzw. (C.23) in [50]. In (5.2.7) wurde aus der Determinante aus jede Spalte ein Faktor δ herausgezogen. Die Hilfsfunktion $\mathfrak{B}(x)$ geht im isotropen Limes über zu der von J. Suzuki in [100] eingeführten Hilfsfunktion bis auf eine Verschiebung $+i$, was in der unterschiedlichen Definition der Hilfsfunktionen (4.1.3) und Definition (19) in [100] begründet liegt. Das Ergebnis (5.2.7) ist identisch mit dem Resultat (C.48) aus [50].

5.3. Lineare Integralgleichungen

Die Vorgehensweise der Konstruktion von Funktionen, die durch lineare Integralgleichungen gelöst werden, und mit denen die Determinante der Matrix $\chi_{j k}^{(p)}$ bestimmt werden soll, ist für $\gamma < \pi/4$ dieselbe, wie in [50] (siehe Abschnitt (C.3)). Wegen (4.1.7) und (3.2.21) ist offenbar

$$\Lambda^{[\frac{1}{2}]}(\lambda) = a(\lambda) \frac{q(\lambda - \eta)}{q(\lambda)} \mathfrak{A}(\lambda) = d(\lambda) \frac{q(\lambda + \eta)}{q(\lambda)} \bar{\mathfrak{A}}(\lambda).$$

Unter der Annahme, dass der Eigenwert $\Lambda^{[\frac{1}{2}]}(\lambda)$ innerhalb \mathcal{S} nullstellenfrei ist, folgt, dass die Hilfsfunktionen $\mathfrak{A}(\lambda)$ und $\bar{\mathfrak{A}}(\lambda)$ bis auf die Bethe-Rapiditäten innerhalb \mathcal{S} keine weiteren Nullstellen besitzen. Die Polstellen der beiden Funktionen werden durch die Polstellen bzw. durch die Nullstellen der Hilfsfunktion $\mathfrak{a}(\lambda)$ wegen (4.1.7) bestimmt:

$$\mathfrak{A}(\lambda + \eta) \text{ besitzt in } \begin{cases} \lambda = \lambda_k \pmod{i\pi} & \text{einfache Polstelle,} \\ \lambda = \lambda_k - \eta \pmod{i\pi} & \text{einfache Nullstelle,} \end{cases}$$

$$\bar{\mathfrak{A}}(\lambda - \eta) \text{ besitzt in } \begin{cases} \lambda = \lambda_k \pmod{i\pi} & \text{einfache Polstelle,} \\ \lambda = \lambda_k + \eta \pmod{i\pi} & \text{einfache Nullstelle,} \end{cases}$$

wobei $k = 1, \dots, N$. Die Funktionen $\mathfrak{A}(\lambda + \eta)$ und $\bar{\mathfrak{A}}(\lambda - \eta)$ besitzen noch weitere Polstellen, die aber hier nicht von Interesse sind. Innerhalb \mathcal{S} besitzt die Funktion $\mathfrak{A}(\lambda + \eta)$ die Polstellen $\lambda_{2j-1} - \eta$, während die Polstellen der Funktion $\bar{\mathfrak{A}}(\lambda - \eta)$ durch $\lambda_{2j} + \eta$ gegeben sind. Somit haben die Funktionen

$$\frac{\chi(\lambda + \eta, \xi \pm \frac{\eta}{2})}{\mathfrak{A}(\lambda + \eta)} \quad \text{und} \quad \frac{\chi(\lambda - \eta, \xi \pm \frac{\eta}{2})}{\bar{\mathfrak{A}}(\lambda - \eta)} \quad (5.3.1)$$

innerhalb \mathcal{S}^- bzw. \mathcal{S}^+ die in Tabelle 5.3 aufgeführten Polstellen.

Funktion	Polstellen	zug. Residuum	im Gebiet
$\frac{\chi(\lambda + \eta, \xi + \frac{\eta}{2})}{\mathfrak{A}(\lambda + \eta)}$	$\lambda_{2j-1} - \eta$ $\xi - \frac{\eta}{2}$	$w_{2j-1}(\xi + \frac{\eta}{2})$ -1	\mathcal{S}^-
$\frac{\chi(\lambda - \eta, \xi + \frac{\eta}{2})}{\bar{\mathfrak{A}}(\lambda - \eta)}$	$\lambda_{2j} + \eta$ $\xi + \frac{\eta}{2}$	$-w_{2j}(\xi + \frac{\eta}{2})$ $\frac{\mathfrak{a}(\xi - \frac{\eta}{2})}{\bar{\mathfrak{a}}(\xi - \frac{\eta}{2})}$	\mathcal{S}^+
$\frac{\chi(\lambda + \eta, \xi - \frac{\eta}{2})}{\mathfrak{A}(\lambda + \eta)}$	$\lambda_{2j-1} - \eta$ $\xi - \frac{\eta}{2}$	$w_{2j-1}(\xi - \frac{\eta}{2})$ $\frac{\mathfrak{a}(\xi - \frac{\eta}{2})}{\bar{\mathfrak{a}}(\xi + \frac{\eta}{2})}$	\mathcal{S}^-
$\frac{\chi(\lambda - \eta, \xi - \frac{\eta}{2})}{\bar{\mathfrak{A}}(\lambda - \eta)}$	$\lambda_{2j} + \eta$ $\xi + \frac{\eta}{2}$	$-w_{2j}(\xi - \frac{\eta}{2})$ $-\mathfrak{a}(\xi - \frac{\eta}{2})$	\mathcal{S}^+

Tabelle 5.3.: Polstellen und Pol-Lage der Funktionen (5.3.1).

Mittels des Residuensatzes der Funktionentheorie lässt sich (5.0.10) umschreiben. Es folgt

$$\begin{aligned} \chi\left(\lambda - \eta, \xi + \frac{\eta}{2}\right) &= \mathfrak{A}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right) \coth\left(\lambda - \xi - \frac{5}{2}\eta\right) - \frac{\mathfrak{B}(\xi)}{\mathfrak{A}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)} \coth\left(\lambda - \xi - \frac{3}{2}\eta\right) \\ &\quad - \frac{\mathfrak{a}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)}{\mathfrak{A}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)} \coth\left(\lambda - \xi + \frac{\eta}{2}\right) \\ &+ \int_{\bar{C}^-} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu - 2\eta)}{\mathfrak{A}(\mu + \eta)} \chi\left(\mu + \eta, \xi + \frac{\eta}{2}\right) - \int_{C^+} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu)}{\mathfrak{A}(\mu - \eta)} \chi\left(\mu - \eta, \xi + \frac{\eta}{2}\right), \lambda \in C^+, \end{aligned} \quad (5.3.2a)$$

$$\begin{aligned} \chi\left(\lambda + \eta, \xi + \frac{\eta}{2}\right) &= \mathfrak{A}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right) \coth\left(\lambda - \xi - \frac{\eta}{2}\right) - \frac{\mathfrak{B}(\xi)}{\mathfrak{A}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)} \coth\left(\lambda - \xi + \frac{\eta}{2}\right) \\ &\quad - \frac{\mathfrak{a}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)}{\mathfrak{A}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)} \coth\left(\lambda - \xi + \frac{5}{2}\eta\right) \\ &+ \int_{\bar{C}^-} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu)}{\mathfrak{A}(\mu + \eta)} \chi\left(\mu + \eta, \xi + \frac{\eta}{2}\right) - \int_{\bar{C}^+} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu + 2\eta)}{\mathfrak{A}(\mu - \eta)} \chi\left(\mu - \eta, \xi + \frac{\eta}{2}\right), \lambda \in C^-, \end{aligned} \quad (5.3.2b)$$

$$\begin{aligned} \chi\left(\lambda - \eta, \xi - \frac{\eta}{2}\right) &= \mathfrak{A}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right) \coth\left(\lambda - \xi + \frac{\eta}{2}\right) - \frac{\mathfrak{B}(\xi)}{\mathfrak{A}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right)} \coth\left(\lambda - \xi - \frac{\eta}{2}\right) \\ &\quad - \frac{\mathfrak{a}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)}{\mathfrak{A}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right)} \coth\left(\lambda - \xi - \frac{5}{2}\eta\right) \\ &+ \int_{\bar{C}^-} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu - 2\eta)}{\mathfrak{A}(\mu + \eta)} \chi\left(\mu + \eta, \xi - \frac{\eta}{2}\right) - \int_{C^+} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu)}{\mathfrak{A}(\mu - \eta)} \chi\left(\mu - \eta, \xi - \frac{\eta}{2}\right), \lambda \in C^+, \end{aligned} \quad (5.3.2c)$$

$$\begin{aligned} \chi\left(\lambda + \eta, \xi - \frac{\eta}{2}\right) &= \mathfrak{A}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right) \coth\left(\lambda - \xi + \frac{5}{2}\eta\right) - \frac{\mathfrak{B}(\xi)}{\mathfrak{A}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right)} \coth\left(\lambda - \xi + \frac{3}{2}\eta\right) \\ &\quad - \frac{\mathfrak{a}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)}{\mathfrak{A}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right)} \coth\left(\lambda - \xi - \frac{\eta}{2}\right) \\ &+ \int_{\bar{C}^-} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu)}{\mathfrak{A}(\mu + \eta)} \chi\left(\mu + \eta, \xi - \frac{\eta}{2}\right) - \int_{\bar{C}^+} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu + 2\eta)}{\mathfrak{A}(\mu - \eta)} \chi\left(\mu - \eta, \xi - \frac{\eta}{2}\right), \lambda \in C^-. \end{aligned} \quad (5.3.2d)$$

Mit den folgenden Definitionen

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}^\pm(\lambda, \xi) \\ \mathcal{S}^\pm(\lambda, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathfrak{A}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)}{\mathfrak{B}(\xi)} & \frac{\mathfrak{A}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right)}{\mathfrak{B}(\xi)} \\ -\frac{1}{\mathfrak{A}\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right)} & \frac{1}{\mathfrak{A}\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi\left(\lambda \mp \eta, \xi + \frac{\eta}{2}\right) \\ \chi\left(\lambda \mp \eta, \xi - \frac{\eta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (5.3.3)$$

ergibt sich für die Funktionen \mathcal{G}^\pm und \mathcal{S}^\pm ein Satz von linearen Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^+(\lambda, \xi) &= K\left(\lambda - \xi - \frac{3}{2}\eta\right) - K\left(\lambda - \xi - \frac{\eta}{2}\right) \\ &+ \int_{\bar{C}^-} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu - 2\eta)}{\mathfrak{A}(\mu + \eta)} \mathcal{G}^-(\mu, \xi) - \int_{C^+} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu)}{\mathfrak{A}(\mu - \eta)} \mathcal{G}^+(\mu, \xi), \lambda \in C^+, \end{aligned} \quad (5.3.4a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^-(\lambda, \xi) &= K\left(\lambda - \xi + \frac{\eta}{2}\right) - K\left(\lambda - \xi + \frac{3}{2}\eta\right) \\ &+ \int_{\bar{C}^-} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu)}{\mathfrak{A}(\mu + \eta)} \mathcal{G}^-(\mu, \xi) - \int_{\bar{C}^+} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu + 2\eta)}{\mathfrak{A}(\mu - \eta)} \mathcal{G}^+(\mu, \xi), \lambda \in C^-, \end{aligned} \quad (5.3.4b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^+(\lambda, \xi) &= -t\left(\lambda - \xi - \frac{\eta}{2}\right) - t\left(\lambda - \xi - \frac{5}{2}\eta\right) - \frac{1}{Y(\xi)} \left[K\left(\lambda - \xi - \frac{\eta}{2}\right) + K\left(\lambda - \xi - \frac{3}{2}\eta\right) \right] \\ &+ \int_{\bar{C}^-} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu - 2\eta)}{\mathfrak{A}(\mu + \eta)} \mathcal{S}^-(\mu, \xi) - \int_{C^+} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu)}{\mathfrak{A}(\mu - \eta)} \mathcal{S}^+(\mu, \xi), \lambda \in C^+, \end{aligned} \quad (5.3.4c)$$

$$\mathcal{S}^-(\lambda, \xi) = -t\left(\lambda - \xi - \frac{\eta}{2}\right) - t\left(\lambda - \xi + \frac{3}{2}\eta\right) - \frac{1}{Y(\xi)} \left[K\left(\lambda - \xi + \frac{\eta}{2}\right) + K\left(\lambda - \xi + \frac{3}{2}\eta\right) \right]$$

$$+ \int_{\mathcal{C}^-} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu)}{\mathfrak{A}(\mu + \eta)} \mathcal{S}^-(\mu, \xi) - \int_{\mathcal{C}^+} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{K(\lambda - \mu + 2\eta)}{\mathfrak{A}(\mu - \eta)} \mathcal{S}^+(\mu, \xi), \lambda \in \mathcal{C}^-. \quad (5.3.4d)$$

Weiterhin wird eine Matrix $\Theta_{j k}^{(p)}$ eingeführt, deren Matrixelemente über

$$\Theta_{j 2k-1}^{(p)} = \begin{cases} \mathcal{G}^+(\omega_j, \xi_k) & j = 1, \dots, p, \\ \mathcal{G}^-(\omega_j, \xi_k) & j = p+1, \dots, 2m, \end{cases} \quad \Theta_{j 2k}^{(p)} = \begin{cases} -\frac{\mathcal{S}^+(\omega_j, \xi_k)}{2 \sinh(\eta)} & j = 1, \dots, p, \\ -\frac{\mathcal{S}^-(\omega_j, \xi_k)}{2 \sinh(\eta)} & j = p+1, \dots, 2m, \end{cases} \quad (5.3.5)$$

bestimmt werden sollen. Da aber

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\mathfrak{A}(\xi - \frac{\eta}{2})}{\mathfrak{B}(\xi)} & \frac{\mathfrak{A}(\xi + \frac{\eta}{2})}{\mathfrak{B}(\xi)} \\ -\frac{1}{\mathfrak{A}(\xi + \frac{\eta}{2})} & \frac{1}{\mathfrak{A}(\xi - \frac{\eta}{2})} \end{pmatrix} = \frac{2}{\mathfrak{B}(\xi)}$$

gilt, ergibt sich

$$\det [\Theta_{j k}^{(p)}] = \frac{\det [\chi_{j k}^{(p)}]}{(-\sinh(\eta))^m \prod_{k=1}^m \mathfrak{B}(\xi)}. \quad (5.3.6)$$

Aus (5.2.6) folgt somit

$$D_{\beta_1 \dots \beta_m}^{[2] \alpha_1 \dots \alpha_m}(\xi) = \frac{(2 \cos(\gamma))^{m-n_+(\alpha)-n_-(\beta)}}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) (\sinh^2(\xi_k - \xi_j) + \sin^2(\gamma))} \times \left[\prod_{j=1}^p \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} F_{z_j}(\omega_j) \right] \left[\prod_{j=p+1}^{2m} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \bar{F}_{z_j}(\omega_j) \right] \frac{\det [\Theta_{j k}^{(p)}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - i\gamma)}. \quad (5.3.7)$$

5.3.1. „Emptiness formation probability“

Die m -Platz-EFP ist demnach durch

$$D_{+\dots+}^{[2] +\dots+}(\xi) = \frac{1}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) (\sinh^2(\xi_k - \xi_j) + \sin^2(\gamma))} \times \left[\prod_{j=1}^{2m} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} F_{z_j}(\omega_j) \right] \frac{\det [\Theta_{j k}^{(2m)}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - i\gamma)} \quad (5.3.8)$$

gegeben.

5.4. Homogener Limes

Ziel ist es, den homogenen Limes der Dichte-Matrix (5.3.7) zu bestimmen. Dieser Limes ist für die „fusionierten Wellenfunktionen“ (5.1.1) einfach durchzuführen. Lediglich im Term

$$\frac{\det [\Theta_{j k}^{(p)}]}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) (\sinh^2(\xi_k - \xi_j) + \sin^2(\gamma))}$$

ist der Limes $\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0$ nicht-trivial. Der Nenner, ein Produkt über eine Summe, kann als eine Summe über Produkte umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) (\sinh^2(\xi_k - \xi_j) + \sin^2(\gamma)) &= (\sin(\gamma))^{m^2-m} \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \\ &+ (\sin(\gamma))^{m^2-m-2} \sum_{l_1=2}^m \sum_{n_1=1}^{l_1-1} \sinh^2(\xi_{l_1} - \xi_{n_1}) \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \\ &+ (\sin(\gamma))^{m^2-m-4} \sum_{m \geq l_1 > l_2 \geq 2} \sum_{l_1 > n_1, l_2 > n_2} \prod_{i=1}^2 \sinh^2(\xi_{l_i} - \xi_{n_i}) \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \end{aligned}$$

$$+ \dots + \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^4(\xi_k - \xi_j).$$

Faktorisieren nach dem ersten Summanden ergibt

$$(\sin(\gamma))^{m^2-m} \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) [1 + \text{Terme mit höherer Ordnung in } \xi_1, \dots, \xi_m],$$

weshalb es reicht, statt des gesamten Nenners nur den Ausdruck

$$(\sin(\gamma))^{m^2-m} \prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j)$$

für den Limes zu betrachten. Zunächst wird für die Matrix $\Theta_{j k}^{(p)}$ eine geeignetere Notation eingeführt, indem deren Einträge durch Spaltenvektoren $\vec{\mathcal{G}}(\xi_k)$ und $\vec{\mathcal{S}}(\xi_k)$ dargestellt werden:

$$\vec{\mathcal{G}}(\xi_k) := \begin{pmatrix} \mathcal{G}^+(\omega_1, \xi_k) \\ \vdots \\ \mathcal{G}^+(\omega_p, \xi_k) \\ \mathcal{G}^-(\omega_{p+1}, \xi_k) \\ \vdots \\ \mathcal{G}^-(\omega_{2m}, \xi_k) \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{S}}(\xi_k) := -\frac{1}{2 \sinh(\eta)} \begin{pmatrix} \mathcal{S}^+(\omega_1, \xi_k) \\ \vdots \\ \mathcal{S}^+(\omega_p, \xi_k) \\ \mathcal{S}^-(\omega_{p+1}, \xi_k) \\ \vdots \\ \mathcal{S}^-(\omega_{2m}, \xi_k) \end{pmatrix}, \quad (5.4.1a)$$

$$\Rightarrow \Theta_{j k}^{(p)} = \left(\vec{\mathcal{G}}(\xi_1) \quad \vec{\mathcal{S}}(\xi_1) \quad \dots \quad \vec{\mathcal{G}}(\xi_m) \quad \vec{\mathcal{S}}(\xi_m) \right). \quad (5.4.1b)$$

Mit Verwendung der Taylor-Reihenentwicklungen für $\vec{\mathcal{G}}(\xi_k)$ und $\vec{\mathcal{S}}(\xi_k)$ lässt sich der homogene Limes in Analogie zu [49, 66] durchführen.

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi_m \rightarrow 0} \dots \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\det \left[\Theta_{j k}^{(p)} \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j)} \\ &= \lim_{\xi_m \rightarrow 0} \dots \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\det \left[\vec{\mathcal{G}}(\xi_1) \quad \vec{\mathcal{S}}(\xi_1) \quad \dots \quad \vec{\mathcal{G}}(\xi_m) \quad \vec{\mathcal{S}}(\xi_m) \right]}{\left[\prod_{k=2}^m \sinh^2(\xi_k - \xi_1) \right] \left[\prod_{2 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \right]} \\ &= \lim_{\xi_m \rightarrow 0} \dots \lim_{\xi_3 \rightarrow 0} \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{\det \left[\vec{\mathcal{G}}(0) \quad \vec{\mathcal{S}}(0) \quad \frac{\vec{\mathcal{G}}(\xi_2)}{\sinh(\xi_2)} \quad \frac{\vec{\mathcal{S}}(\xi_2)}{\sinh(\xi_2)} \quad \dots \quad \frac{\vec{\mathcal{G}}(\xi_m)}{\sinh(\xi_m)} \quad \frac{\vec{\mathcal{S}}(\xi_m)}{\sinh(\xi_m)} \right]}{\prod_{2 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j)} \\ &= \lim_{\xi_m \rightarrow 0} \dots \lim_{\xi_3 \rightarrow 0} \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{\det \left[\vec{\mathcal{G}}(0) \quad \vec{\mathcal{S}}(0) \quad \vec{\mathcal{G}}'(0) \frac{\xi_2}{\sinh(\xi_2)} \quad \vec{\mathcal{S}}'(0) \frac{\xi_2}{\sinh(\xi_2)} \quad \dots \quad \frac{\vec{\mathcal{G}}(\xi_m)}{\sinh(\xi_m)} \quad \frac{\vec{\mathcal{S}}(\xi_m)}{\sinh(\xi_m)} \right]}{\left[\prod_{k=3}^m \sinh^2(\xi_k - \xi_2) \right] \left[\prod_{3 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \right]} \\ &= \lim_{\xi_m \rightarrow 0} \dots \lim_{\xi_4 \rightarrow 0} \lim_{\xi_3 \rightarrow 0} \frac{\det \left[\vec{\mathcal{G}}(0) \quad \vec{\mathcal{S}}(0) \quad \vec{\mathcal{G}}'(0) \quad \vec{\mathcal{S}}'(0) \quad \frac{\vec{\mathcal{G}}(\xi_3)}{\sinh^2(\xi_3)} \quad \frac{\vec{\mathcal{S}}(\xi_3)}{\sinh^2(\xi_3)} \quad \dots \quad \frac{\vec{\mathcal{G}}(\xi_m)}{\sinh^2(\xi_m)} \quad \frac{\vec{\mathcal{S}}(\xi_m)}{\sinh^2(\xi_m)} \right]}{\prod_{3 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j)} \\ &= \dots = \lim_{\xi_m \rightarrow 0} \frac{\det \left[\vec{\mathcal{G}}(0) \quad \vec{\mathcal{S}}(0) \quad \dots \quad \frac{\partial_{\xi}^{m-2} \vec{\mathcal{G}}(\xi)}{(m-2)!} \Big|_{\xi=0} \quad \frac{\partial_{\xi}^{m-2} \vec{\mathcal{S}}(\xi)}{(m-2)!} \Big|_{\xi=0} \quad \frac{\vec{\mathcal{G}}(\xi_m)}{\sinh^{m-2}(\xi_m)} \quad \frac{\vec{\mathcal{S}}(\xi_m)}{\sinh^{m-2}(\xi_m)} \right]}{\sinh^2(\xi_m)} \\ &= \det \left[\frac{\partial_{\xi}^{k-1} \vec{\mathcal{G}}(\xi)}{(k-1)!} \Big|_{\xi=0} \quad \frac{\partial_{\xi}^{k-1} \vec{\mathcal{S}}(\xi)}{(k-1)!} \Big|_{\xi=0} \right], \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Dabei wurde in der dritten Zeile die Taylor-Entwicklung

$$\vec{\mathcal{G}}(\xi_2) = \vec{\mathcal{G}}(0) + \vec{\mathcal{G}}'(0)\xi_2 + \mathcal{O}(\xi_2^2)$$

und entsprechendes für $\vec{\mathcal{S}}(\xi_2)$ eingesetzt, sowie die Multilinearität der Determinante benutzt. Weiterhin ist $\xi_j / \sinh(\xi_j) = 1 + \mathcal{O}(\xi_j^2)$. Also ist

$$\lim_{\xi_m \rightarrow 0} \dots \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\det \left[\Theta_{j k}^{(p)} \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq m} \sinh^2(\xi_k - \xi_j) \left(\sinh^2(\xi_k - \xi_j) + \sin^2(\gamma) \right)} = (\sin(\gamma))^{m-m^2} \det \left[\Xi_{j k}^{(p)} \right], \quad (5.4.2)$$

wobei

$$\Xi_{j 2k-1}^{(p)} = \frac{\partial_\xi^{k-1}}{(k-1)!} \begin{cases} \mathcal{G}^+(\omega_j, \xi)|_{\xi=0} & j = 1, \dots, p, \\ \mathcal{G}^-(\omega_j, \xi)|_{\xi=0} & j = p+1, \dots, 2m, \end{cases}$$

$$\Xi_{j 2k}^{(p)} = -\frac{1}{2 \sinh(\eta)} \frac{\partial_\xi^{k-1}}{(k-1)!} \begin{cases} \mathcal{S}^+(\omega_j, \xi)|_{\xi=0} & j = 1, \dots, p, \\ \mathcal{S}^-(\omega_j, \xi)|_{\xi=0} & j = p+1, \dots, 2m. \end{cases}$$

Aus (5.3.7) resultiert

$$D_{[1,m]_{\beta_1 \dots \beta_m}}^{[2]_{\alpha_1 \dots \alpha_m}}(T, h) = (2 \cos(\gamma))^{m-n_+(\alpha)-n_-(\beta)} \times \left[\prod_{j=1}^p \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} F_{z_j}(\omega_j) \right] \left[\prod_{j=p+1}^{2m} \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\omega_j}{2\pi i} \bar{F}_{z_j}(\omega_j) \right] \frac{(\sin(\gamma))^{m-m^2} \det \left[\Xi_{j k}^{(p)} \right]}{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} \sinh(\omega_j - \omega_k - i\gamma)}. \quad (5.4.3)$$

5.5. Einpunkt-Korrelationsfunktionen

Für $m = 1$ lassen sich aus (5.3.7) die Einpunkt-Korrelationsfunktionen analog zu (73) in [50] bestimmen. Diese sind gegeben durch

$$D_{+}^{[2]+}(\xi) = \frac{i}{2 \sin(\gamma)} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_2}{2\pi i} \frac{\sinh(\omega_1 - \xi - \frac{\eta}{2}) \sinh(\omega_2 - \xi - \frac{\eta}{2})}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 - \eta)} \begin{vmatrix} \mathcal{G}^+(\omega_1, \xi) & \mathcal{S}^+(\omega_1, \xi) \\ \mathcal{G}^+(\omega_2, \xi) & \mathcal{S}^+(\omega_2, \xi) \end{vmatrix},$$

$$D_{0}^{[2]0}(\xi) = i \cot(\gamma) \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\omega_2}{2\pi i} \frac{\sinh(\omega_1 - \xi - \frac{\eta}{2}) \sinh(\omega_2 - \xi + \frac{\eta}{2})}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 - \eta)} \begin{vmatrix} \mathcal{G}^+(\omega_1, \xi) & \mathcal{S}^+(\omega_1, \xi) \\ \mathcal{G}^-(\omega_2, \xi) & \mathcal{S}^-(\omega_2, \xi) \end{vmatrix},$$

$$D_{-}^{[2]-}(\xi) = \frac{i}{2 \sin(\gamma)} \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\omega_2}{2\pi i} \frac{\sinh(\omega_1 - \xi + \frac{\eta}{2}) \sinh(\omega_2 - \xi + \frac{\eta}{2})}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 - \eta)} \begin{vmatrix} \mathcal{G}^-(\omega_1, \xi) & \mathcal{S}^-(\omega_1, \xi) \\ \mathcal{G}^-(\omega_2, \xi) & \mathcal{S}^-(\omega_2, \xi) \end{vmatrix}. \quad (5.5.1)$$

5.5.1. Der Nulltemperatur-Limes bei verschwindendem Magnetfeld

Die Temperatur-Abhängigkeit der Vielfach-Integraldarstellung (5.3.7) verbirgt sich in den Funktionen $\mathcal{G}^{\pm}(\omega_j, \xi)$ und $\mathcal{S}^{\pm}(\omega_j, \xi)$. Bei verschwindendem Magnetfeld h können die Ergebnisse für den Grundzustand mittels (5.3.4) angegeben werden. Dazu müssen die entsprechenden Grenzwerte der Funktionen bestimmt werden. Dabei fließt die Temperaturabhängigkeit in den Funktionen $\mathfrak{A}(\lambda)$ und $\bar{\mathfrak{A}}(\lambda)$ ein, welche sich in die in (4.1.3) bzw. (4.1.24) und (4.1.37) definierten Hilfsfunktionen $\mathfrak{b}_\epsilon(\lambda)$, $\bar{\mathfrak{b}}_\epsilon(\lambda)$, $\mathfrak{f}(\lambda)$ und $\bar{\mathfrak{f}}(\lambda)$ zerlegen lassen. Einsetzen der Nulltemperatur-Grenzwerte (4.1.42) in (5.3.4) gibt einen Satz von linearen Integralgleichungen vom Konvolutionstyp. Dieses Gleichungssystem lässt sich durch Fourier-Transformation in ein lineares Gleichungssystem umschreiben, welches einfach zu lösen ist. Hier wird die Notation aus [50] verwendet, um die relative Lage der jeweiligen Kontur zu unterscheiden.

$$Z^{++}(\lambda, \xi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} Z^+(\lambda + \eta - i\epsilon, \xi), \quad (5.5.2a)$$

$$Z^{+-}(\lambda, \xi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} Z^+(\lambda + i\epsilon, \xi), \quad (5.5.2b)$$

$$Z^{-+}(\lambda, \xi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} Z^-(\lambda - i\epsilon, \xi), \quad (5.5.2c)$$

$$Z^{--}(\lambda, \xi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} Z^-(\lambda - \eta + i\epsilon, \xi), \quad (5.5.2d)$$

$$Z_{++}(\lambda, \xi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} Z^+(\lambda - i\epsilon, \xi), \quad (5.5.2e)$$

$$Z_{+-}(\lambda, \xi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} Z^+(\lambda - \eta + i\epsilon, \xi), \quad (5.5.2f)$$

$$Z_{-+}(\lambda, \xi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} Z^-(\lambda + \eta - i\epsilon, \xi), \quad (5.5.2g)$$

$$Z_{--}(\lambda, \xi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} Z^-(\lambda + i\epsilon, \xi), \quad (5.5.2h)$$

wobei Z entweder \mathcal{G} oder \mathcal{S} ist. Die Fourier-Rücktransformation der Lösung führt zu dem Resultat

$$\mathcal{G}^{++}(\lambda, \xi) = \mathcal{G}^{--}(\lambda, \xi) = 0, \quad (5.5.3a)$$

$$\mathcal{G}^{-+}(\lambda, \xi) = -\mathcal{G}^{+-}(\lambda, \xi) = \frac{\pi i}{\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\lambda - \xi)\right)}, \quad (5.5.3b)$$

$$\mathcal{S}^{++}(\lambda, \xi) = \mathcal{S}^{--}(\lambda, \xi) = \frac{2\pi i}{\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\lambda - \xi)\right)}, \quad (5.5.3c)$$

$$\mathcal{S}^{-+}(\lambda, \xi) = \frac{\pi(\lambda - \xi - i\gamma)}{\gamma^2 \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\lambda - \xi)\right)}, \quad \mathcal{S}^{+-}(\lambda, \xi) = -\frac{\pi(\lambda - \xi + i\gamma)}{\gamma^2 \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\lambda - \xi)\right)}. \quad (5.5.3d)$$

Die Limes der Funktionen $\mathcal{G}^+(\lambda, \xi)$ und $\mathcal{S}^+(\lambda, \xi)$ im unteren Streifen \mathcal{S}^- bzw. $\mathcal{G}^-(\lambda, \xi)$ und $\mathcal{S}^-(\lambda, \xi)$ im oberen Streifen \mathcal{S}^+ entlang Wegen parallel zur reellen Achse in der Nähe von 0 und $\pm i\gamma$ können durch Einsetzen der Ergebnisse (5.5.3) in (5.3.4) ermittelt werden. Es ist

$$\mathcal{G}_{-+}(\lambda, \xi) = \mathcal{G}_{+-}(\lambda, \xi) = 0, \quad (5.5.3e)$$

$$\mathcal{G}_{--}(\lambda, \xi) = -\mathcal{G}_{++}(\lambda, \xi) = \frac{\pi i}{\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\lambda - \xi)\right)}, \quad (5.5.3f)$$

$$\mathcal{S}_{-+}(\lambda, \xi) = \mathcal{S}_{+-}(\lambda, \xi) = 0, \quad (5.5.3g)$$

$$\mathcal{S}_{--}(\lambda, \xi) = \frac{\pi(\lambda - \xi - 2i\gamma)}{\gamma^2 \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\lambda - \xi)\right)}, \quad \mathcal{S}_{++}(\lambda, \xi) = -\frac{\pi(\lambda - \xi + 2i\gamma)}{\gamma^2 \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\lambda - \xi)\right)}. \quad (5.5.3h)$$

Einsetzen obiger Ergebnisse (5.5.3) in (5.5.1) bei $\xi = 0$ im Limes $T, h \rightarrow 0$ gibt

$$\begin{aligned} D^{[2] +}_+(0) &= \frac{i}{2 \sin(\gamma)} \lim_{\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}' \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_2}{2\pi i} \left[\frac{1}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 - i\tilde{\epsilon})} - \frac{1}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 + i\tilde{\epsilon}')} \right] \\ &\quad \sinh\left(\omega_1 + \frac{\eta}{2}\right) \sinh\left(\omega_2 - \frac{\eta}{2}\right) \mathcal{S}^{++}(\omega_1, 0) \mathcal{G}^{+-}(\omega_2, 0) \\ &= \frac{i}{2 \sin(\gamma)} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi i} \sinh\left(\omega + \frac{\eta}{2}\right) \sinh\left(\omega - \frac{\eta}{2}\right) \mathcal{S}^{++}(\omega, 0) \mathcal{G}^{+-}(\omega, 0) \\ &= \frac{\pi}{2\gamma^2 \sin(\gamma)} \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{\sinh\left(\omega + \frac{\eta}{2}\right) \sinh\left(\omega - \frac{\eta}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\omega\right)} = \frac{\pi}{4\gamma \sin(\gamma)} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\cosh(2\gamma x) - \cosh(\eta)}{\cosh^2(\pi x)} \\ &= \frac{\gamma - \sin(\gamma) \cos(\gamma)}{2\gamma \sin^2(\gamma)}, \end{aligned} \quad (5.5.4a)$$

$$\begin{aligned} D^{[2] 0}_0(0) &= i \cot(\gamma) \lim_{\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}' \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_2}{2\pi i} \left[\frac{1}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 - i\tilde{\epsilon})} - \frac{1}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 + i\tilde{\epsilon}')} \right] \\ &\quad \sinh\left(\omega_1 + \frac{\eta}{2}\right) \sinh\left(\omega_2 + \frac{\eta}{2}\right) \mathcal{S}^{++}(\omega_1, 0) \mathcal{G}^{-+}(\omega_2, 0) \\ &= -\frac{\pi \cot(\gamma)}{2\gamma^2} \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{\sinh^2\left(\omega + \frac{\eta}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{\gamma}\omega\right)} \\ &= \frac{\cos(\gamma)(\sin(\gamma) - \gamma \cos(\gamma))}{\gamma \sin^2(\gamma)} = 1 - \frac{\gamma - \sin(\gamma) \cos(\gamma)}{\gamma \sin^2(\gamma)}, \end{aligned} \quad (5.5.4b)$$

$$\begin{aligned} D^{[2] -}_-(0) &= \frac{i}{2 \sin(\gamma)} \lim_{\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}' \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_2}{2\pi i} \left[\frac{1}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 + i\tilde{\epsilon}')} - \frac{1}{\sinh(\omega_1 - \omega_2 - i\tilde{\epsilon})} \right] \\ &\quad \sinh\left(\omega_1 + \frac{\eta}{2}\right) \sinh\left(\omega_2 - \frac{\eta}{2}\right) \mathcal{G}^{-+}(\omega_1, 0) \mathcal{S}^{++}(\omega_2, 0) \\ &= -\frac{i}{2 \sin(\gamma)} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi i} \sinh\left(\omega + \frac{\eta}{2}\right) \sinh\left(\omega - \frac{\eta}{2}\right) \mathcal{G}^{-+}(\omega, 0) \mathcal{S}^{++}(\omega, 0) = D^{[2] +}_+(0) \end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma - \sin(\gamma) \cos(\gamma)}{2\gamma \sin^2(\gamma)} . \quad (5.5.4c)$$

Die Ergebnisse stimmen mit den Erwartungswerten des Grundzustandes in [37] überein. $D_{+}^{[2]+}(0)$ entspricht der EFP für $m = 1$, $h = 0$, $T = 0$. Im XXX -Limes ergeben sich die Ergebnisse nach [50] bzw. [65]

$$D_{+}^{[2]+}(0) = D_{0}^{[2]0}(0) = D_{-}^{[2]-}(0) = \frac{1}{3} \quad (5.5.5)$$

nach mehrmaligen Anwenden der Regel von L'Hospital.

Für obige Dichte-Matrixelemente lieferte (5.3.7) für $m = 1$ insgesamt 32 Zweifach-Integrale, welche sich auf zwei reduzierten. Allgemein muss für jedes von Null verschiedene m -Platz-Dichte-Matrixelement nach der Vielfach-Integraldarstellung (5.3.7) insgesamt $4^{2m} \cdot (2m)!$ Integrale berechnet werden, da die Determinante einer $(2m \times 2m)$ -Matrix $(2m)!$ Terme liefert und die Konturen des $2m$ -fachen Vielfach-Integrals in 4 unterschiedliche Wege parallel zur reellen Achse zerlegt werden.

Ein alternativer Zugang zu den Matrixelementen der m -Platz-Dichte-Operatoren ist über diskrete Funktionalgleichungen vom q -Knizhnik-Zamolodchikov-Typ möglich, sofern die zum Vertexmodell gehörige \mathcal{R} -Matrix die Anfangsbedingung erfüllt sowohl unitär ist als auch die „Crossing“-Symmetrie besitzt (3.2.27) [5, 6]. Der Vorteil dieses Zuganges ist es, dass die reduzierte Dichte-Matrix $D^{[2]}(\xi)$, (3.3.3), in faktoriisierter Form dargestellt werden kann. Diese Herangehensweise wird im nächsten Kapitel für die isotrope Quantenspin-Kette diskutiert.

Der $X X X$ -Dichte-Operator bei endlicher Temperatur

In diesem Kapitel soll ein alternativer Zugang zur Bestimmung der Spin-1 m -Platz-Dichte-Matrix der isotropen Heisenberg-Kette (2.0.3b) bei endlicher Temperatur und bei verschwindendem Magnetfeld gegeben werden. Dazu werden auf Basis der reduzierten Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung diskrete Funktionalgleichungen, insbesondere für die Zweiplatz-Dichte-Matrix, hergeleitet. Ziel ist es, die Korrelationsfunktionen für den isotropen Fall durch eine transzendente Funktion darzustellen, also in „faktorisierte“ Form anzugeben:

$$D^{[2]}(\xi) = D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_m) \\ = N(\xi_1, \dots, \xi_m) \sum_{k=0}^m \sum_{\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1} \sum_{I, J} f_{m, I, J, \sigma_1, \sigma_2}(\xi_1, \dots, \xi_m) \left[\prod_{p=1}^k \omega(\xi_{i_p} + i\sigma_1, \xi_{j_p} + i\sigma_2) \right]. \quad (6.0.1)$$

Dabei sind die Mengen $I, J, I \cap J = \emptyset$, k -Tupel mit $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_k$ und $1 \leq i_p \leq j_p \leq m$. Der Faktor $N(\xi_1, \dots, \xi_m)$ ist ein von den Inhomogenitäten abhängiger Normierungsfaktor. Die Matrixeinträge der Operatoren $f_{m, I, J, \sigma_1, \sigma_2}(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathfrak{End}(\mathbb{C}^3)^{\otimes m}$ sind rationale Funktionen in den Inhomogenitäten ξ_1, \dots, ξ_m und beschreiben den sogenannten „algebraischen Anteil“. Die ω -Funktion charakterisiert die Physik des zugrunde liegenden Modells, da zur Beschreibung der Dichte-Matrixelemente nur in ihr die physikalischen Parameter, wie z.B. die Temperatur, eingehen. Daher spricht man bei den Produkten der ω -Funktion auch vom „physikalischen Anteil“ (vgl. [20]).

Im Folgendem werden zwei verschiedene Herangehensweisen zur Bestimmung der Dichte-Matrixelemente über Funktionalgleichungen erläutert. Anschließend wird die „physikalische Funktion“ konstruiert und weiterhin werden die beiden Zugänge anhand der Zweiplatz-Dichte-Matrixelemente auf Konsistenz überprüft.

6.1. Diskrete Funktionalgleichungen

Zur Bestimmung der Matrixeinträge des Dichte-Operators des Spin-1-Modells (2.0.3b) erschließen sich zwei verschiedene Wege. Zum einen lassen sich analog zum Spin-1/2-Fall auf Basis der reduzierten Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung für den Dichte-Operator $D^{[2]}(\xi) = D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_m)$ direkt diskrete Funktionalgleichungen formulieren. Diese lassen sich für den Zweiplatz-Dichte-Operator explizit lösen. Andererseits lässt sich der Dichte-Operator $D^{[2]}(\xi)$ wegen der Fusionsregel (3.3.6) aus der Dichte-Matrix $D^{[1]}(\zeta) = D^{[1]}(\zeta_1, \dots, \zeta_{2m})$ konstruieren. Um nun für dieses System ebenfalls Funktionalgleichungen formulieren zu können, werden die Spin-1-Quantenräume der Quantentransfer-Matrizen mittels der Fusion durch Spin-1/2-Räume repräsentiert. Es lässt sich beobachten, dass die Symmetrisierer, auf den Quantenraum wirkend, weggelassen werden können. Führt man nun eine Regularisierung im Quantenraum durch, so ist es möglich, auch hier wieder Funktionalgleichungen vom Knizhnik-Zamolodchikov-Typ anzugeben. Diese entsprechen dem Programm des reinen Spin-1/2-Modells [6]. Das bedeutet, dass die bekannte Faktorisierung des Spin-1/2-Modells zur Berechnung der Dichte-Matrix $D^{[1]}(\zeta)$ verwendet werden kann und anschließende Fusion der Hilfsräume schließlich die Matrixeinträge des Spin-1 Dichte-Operators $D^{[2]}(\xi)$ liefert.

6.1.1. Diskrete Funktionalgleichungen der Dichte-Operatoren $D(\xi)$ bzw. $D^{[2]}(\xi)$

Der inhomogene m -Platz-Dichte-Operatoren $D(\xi) = D(\xi_1, \dots, \xi_m)$ mit horizontalen Spektralparametern $\nu_j, j = 1, \dots, N$, aufgefasst als Funktionen nach den vertikalen Spektralparametern $\xi_j, j = 1, \dots, m$, wird eindeutig durch diskrete Funktionalgleichungen für generische Werte der horizontalen Spektralparameter charakterisiert [5]. Der Dichteoperator $D^{[2]}(\xi) = D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_m)$ dagegen wird nicht allein durch die diskreten Funktionalgleichungen vollständig beschrieben. Erst in Verbindung mit der „Intertwining“-Relation (2.6.12) und dem asymptotischen Verhalten lässt sich der Dichteoperator eindeutig charakterisieren. Die horizontalen Spektralparameter werden als äußere Parameter interpretiert. Zur Formulierung der Funktionalgleichungen für beliebiges m wird die Notation aus [20] und [21] verwendet. Die inho-

mogenen m -Platz-Dichte-Operatoren sind Endomorphismen des m -fachen Tensorproduktes des zur Spin-Darstellung gehörigen Hilfsraumes (vertikale Linien mit Spektralparameter ξ_j),

$$D(\boldsymbol{\xi}) \in \mathfrak{End} \left(V^{\left[\frac{1}{2}\right]} \right)^{\otimes m} \quad \text{und} \quad D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathfrak{End} \left(V^{[1]} \right)^{\otimes m},$$

wobei $V^{[s]} := \mathbb{C}^{2s+1}$ mit kanonischer Basis $\{e_1, \dots, e_{2s+1}\}$.

Durch die Dualitätstransformationen

$$h_m^{[1]}(\boldsymbol{\xi}) := h_m^{[1]}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) := (D(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{1}^{\otimes m}) \left(\mathbf{S}_m^{\left[\frac{1}{2}\right]} \right), \quad (6.1.1a)$$

$$h_m^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) := h_m^{[2]}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) := (D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{1}^{\otimes m}) \left(\mathbf{S}_m^{[1]} \right) \quad (6.1.1b)$$

sind diese als Vektoren im Raum $(V^{[s]})^{\otimes 2m}$ gegeben, wobei die Unterräume wie folgt organisiert sind:

$$\begin{aligned} (V^{[s]})^{\otimes 2m} &= V^{[s]}_1 \otimes V^{[s]}_2 \otimes \dots \otimes V^{[s]}_m \otimes V^{[s]}_m \otimes V^{[s]}_{m-1} \otimes \dots \otimes V^{[s]}_1, \\ &V^{[s]}_k, V^{[s]}_{\bar{k}} \in \mathbb{C}^{2s+1} \quad \text{für } k \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Dabei sind die Vektoren $\mathbf{S}_m^{[s]}$, definiert durch

$$\mathbf{S}_m^{[s]} = \prod_{j=1}^m \mathbf{s}_{j\bar{j}}^{[s]}, \quad (6.1.2)$$

die Verschachtelungen von (nichtnormierten) $U(sl_2)$ -Singulett-Operatoren $\mathbf{s}_{j\bar{j}}^{[s]}$. Dies entspricht eine Einschränkung auf den Spin-0-Unterraum $V^{[0]}$. Für $s \in \{1/2, 1\}$ ist

$$\mathbf{s}_{\bar{1}1}^{\left[\frac{1}{2}\right]} = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, \quad \mathbf{s}^{[1]} = e_1 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_1.$$



Abbildung 6.1.: Grafische Notation der Singulettoperatoren in der Bra- und Ket-Schreibweise

$$\langle \mathbf{s}^{[s]} | \in (\mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathbb{C}^{2s+1})^* \quad \text{bzw.} \quad | \mathbf{s}^{[s]} \rangle \in (\mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathbb{C}^{2s+1}).$$

Obige Notation ist hierbei im folgenden Sinn zu verstehen: Die Funktionen $f, g \in V \otimes V$ werden durch

$$f = \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{1, \dots, 2s+1\}} f^{\epsilon_1, \epsilon_2} e_{\epsilon_1} \otimes e_{\epsilon_2}, \quad g = \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{1, \dots, 2s+1\}} g^{\epsilon_1, \epsilon_2} e_{\epsilon_1} \otimes e_{\epsilon_2}$$

mit Koeffizienten $f^{\epsilon_1, \epsilon_2}$ bzw. $g^{\epsilon_1, \epsilon_2}$ definiert. Dann ist mit $f_{1\bar{1}} \in V_1 \otimes V_{\bar{1}}$ und $g_{2\bar{2}} \in V_2 \otimes V_{\bar{2}}$ der Vektor $f_{1\bar{1}} \cdot g_{2\bar{2}}$ durch

$$f_{1\bar{1}} \cdot g_{2\bar{2}} = \sum_{\epsilon_1, \bar{\epsilon}_1, \epsilon_2, \bar{\epsilon}_2 \in \{1, \dots, 2s+1\}} f^{\epsilon_1, \bar{\epsilon}_1} g^{\epsilon_2, \bar{\epsilon}_2} e_{\epsilon_1} \otimes e_{\epsilon_2} \otimes e_{\bar{\epsilon}_2} \otimes e_{\bar{\epsilon}_1} \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_{\bar{2}} \otimes V_{\bar{1}}.$$

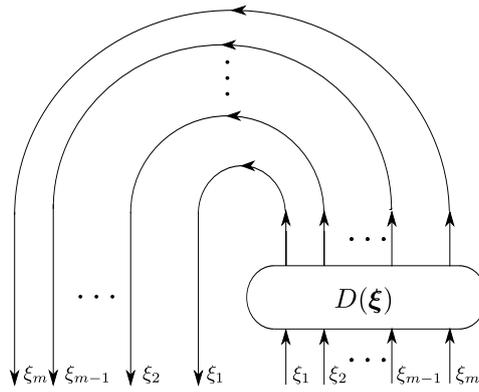
gegeben. Des Weiteren gelten die diskreten Funktionalgleichungen

$$A_m^{(j)[s]}(\boldsymbol{\xi}) h_m^{[2s]}(\boldsymbol{\xi}) = h_m^{[2s]}(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_j - 2i, \xi_{j+1}, \dots, \xi_m) \quad (6.1.3)$$

an den Stellen $\xi_j \in \{\nu_{\bar{1}}, \dots, \nu_{\bar{N}}\}$, $j = 1, \dots, m$ [5, 6, 20, 21]. Die Operatoren $A^{[s]}$ haben dabei die Gestalt

$$\begin{aligned} A_m^{(j)[s]}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{(-1)^m}{C^{[s]}(\xi_j)} \mathcal{R}^{XXX[s,s]}_{j\bar{j}-1}(\xi_j - 2i, \xi_{j-1}) \cdots \mathcal{R}^{XXX[s,s]}_{j\bar{1}}(\xi_j - 2i, \xi_1) \mathcal{R}^{XXX[s,s]}_{j\bar{j}+1}(\xi_j - 2i, \xi_{j+1}) \cdots \\ &\cdots \mathcal{R}^{XXX[s,s]}_{j\bar{m}}(\xi_j - 2i, \xi_{j+1}) P_{j\bar{j}} \mathcal{R}^{XXX[s,s]}_{j\bar{m}}(\xi_j, \xi_m) \cdots \mathcal{R}^{XXX[s,s]}_{j\bar{j}+1}(\xi_j, \xi_{j+1}) \\ &\quad \cdot \mathcal{R}^{XXX[s,s]}_{j\bar{1}}(\xi_j, \xi_1) \cdots \mathcal{R}^{XXX[s,s]}_{j\bar{j}-1}(\xi_j, \xi_{j-1}), \quad (6.1.4) \end{aligned}$$

wobei die Normierungskonstanten $C^{[s]}(\xi_j)$ von der Normierungswahl der \mathcal{R} -Matrizen (3.1.8a) bzw. (3.1.8d)


 Abbildung 6.2.: Grafische Notation des Operators $h_m^{[1]}(\xi)$.

abhängen und daher hier von den Arbeiten [6, 20, 21] abweichen. Hier sind diese durch

$$C^{[s]}(\xi_j) := \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^m C_k^{[s]}(\xi_j)$$

gegeben, wobei die Faktoren $C_k^{[s]}(\xi_j)$ durch

$$C_{2i-1}^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j) := \frac{\xi_j - \xi_{2i-1} + 2i}{\xi_j - \xi_{2i-1}}, \quad C_{2i}^{[\frac{1}{2}]}(\xi_j) := \frac{\xi_j - \xi_{2i} - 2i}{\xi_j - \xi_{2i}}, \quad (6.1.5a)$$

$$C_{2i-1}^{[1]}(\xi_j) := \frac{(\xi_j - \xi_{2i-1} + 4i)(\xi_j - \xi_{2i-1} + 2i)}{(\xi_j - \xi_{2i-1})(\xi_j - \xi_{2i-1} - 2i)}, \quad C_{2i}^{[1]}(\xi_j) := \frac{(\xi_j - \xi_{2i} - 4i)(\xi_j - \xi_{2i} - 2i)}{(\xi_j - \xi_{2i})(\xi_j - \xi_{2i} + 2i)} \quad (6.1.5b)$$

für $i = 1, 2, \dots, m/2$ gegeben sind. Alternativ wird der Faktor $C^{[s]}(\xi_j)$ eindeutig von der Spur-Eigenschaft der Dichte-Matrix festgelegt. Des Weiteren wird beim isotropen Fall zwischen den \mathcal{R} -Matrizen

$$\mathcal{R}^{XXX[s,s]}(\lambda, \mu) \text{ und } R^{XXX[s,s]}(\lambda, \mu)$$

nicht unterschieden, da im isotropen Fall die Eichung (A.0.4) bzw. (3.1.6) der $(2s+1)$ -dimensionalen Einheitsmatrix entspricht. Mittels der „Crossing“-Symmetrie folgt die alternative Darstellung

$$A_m^{(1)[s]}(\xi)(B) = \frac{1}{C^{[s]}(\xi_1)} \text{Spur}_1 \left\{ \check{\mathcal{R}}^{XXX[s,s]}_{m-1 m}(\xi_1, \xi_m) \cdots \check{\mathcal{R}}^{XXX[s,s]}_{1 2}(\xi_1, \xi_2) (\mathbb{1} \otimes B) \right. \\ \left. (P^- \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m-1)}) \check{\mathcal{R}}^{XXX[s,s]}_{1 2}(\xi_2, \xi_1) \cdots \check{\mathcal{R}}^{XXX[s,s]}_{m-1 m}(\xi_m, \xi_1) \right\} \quad (6.1.6)$$

für $B \in \mathfrak{End}(\mathbb{C}^{2s+1})^{\otimes m}$, wobei

$$P^- := \left(\mathbf{s}^{[s]} \right)^t \mathbf{s}^{[s]} \in \mathfrak{End}(\mathbb{C}^{2s+1})^{\otimes 2} \quad (6.1.7)$$

der entsprechende (nichtnormierte) $U(sl_2)$ -Singulett-Operator ist ($q \equiv 1$).

In [5] findet sich ein grafischer Beweis der Funktionalgleichung (6.1.3) (siehe Kapitel 3). In [5] wurde zwar das Spin-1/2 XXZ -Modell betrachtet, jedoch erfüllt die \mathcal{R} -Matrix (3.1.5d) und somit auch (3.1.8d) ebenfalls die in [5, 6] geforderten Eigenschaften Anfangsbedingung, Unitarität sowie „Crossing“-Symmetrie als auch die Inversionsrelation der betragsmäßig größten Eigenwerte (3.2.38).

6.1.2. Diskrete Funktionalgleichungen des Dichte-Operators $D^{[1]}(\xi)$

Aus fundamentaler Sicht wäre die Herangehensweise über die Dichte-Matrix $D^{[1]}(\xi)$ wünschenswert, um eine Verbindung zum Spin-1/2-System (2.0.3a) herzustellen, jedoch gibt es hier keine klaren Funktionalgleichungen, da einerseits die \mathcal{R} -Matrizen (3.1.8b) keine Standard-Anfangsbedingungen erfüllen. Jedoch lässt sich die Dichte-Matrix $D^{[1]}(\xi)$ in einem bestimmten Grenzwert aus einem System mit m -vertikalen und $2N$ -horizontalen Spin-1/2-Räumen und unendlich vielen vertikalen Spin-1-Linien konstruieren (siehe Abbildung 6.3 mit $\epsilon = 0$). Als Nächstes würde man die Symmetrisierer S und S^t auf die horizontalen Räume wirken lassen. Danach könnte man die Funktionalgleichungen auswerten, da die \mathcal{R} -Matrizen nun die

Standard-Anfangsbedingung und die „Crossing“-Symmetrie erfüllen. Jedoch sind andererseits die Spektralparameter der horizontalen Räume voneinander abhängig. Daher ergeben sich lediglich N statt $2N$ -viele Funktionalgleichungen. Die anderen N -Gleichungen führen zu unkontrollierbaren $0/0$ -Ausdrücken.

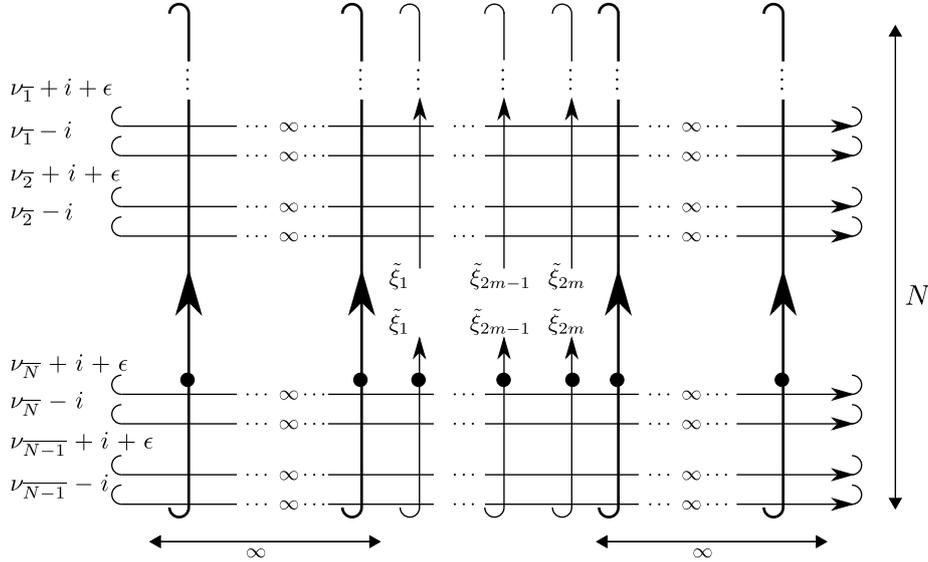


Abbildung 6.3.: Darstellung des Hilfsgitters. Die vertikalen dicken Linien entsprechen Spin-1-Vektorräumen während die horizontalen Linien und alle anderen vertikalen Linien Spin-1/2-Räume darstellen. Für $\epsilon = 0$ und Anwenden der Symmetrisierer S und S^t auf die Paare der horizontalen Linien mit Spektラルparameter $\nu_j - i$ und $\nu_j + i$, $j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{N}\}$, liefert den Dichte-Operator $D^{[1]}(\tilde{\xi})$. Da aber unendlich viele „column-to-column“-Quantentransfer-Matrizen mit Hilfsraum Spin-1 eingefügt werden, folgt dasselbe Resultat auch im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ ohne Anwenden der Symmetrisierer.

Das Hilfsgitter mit endlichen ϵ (siehe Abbildung 6.3) ist wohldefiniert und besitzt einen regulären Limes $\epsilon \rightarrow 0$: Die Quantentransfer-Matrizen mit Hilfsraum Spin-1 nehmen ihren dominanten Zustand nahe dem Raum der Zustände, die in benachbarten Paaren symmetrisch sind, an. Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ konvergiert der dominante Zustand zu einem Zustand im reinem Spin-1-Unterraum

$$(\mathbb{C}^3)^{\otimes N} \subset (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2N}.$$

Dies folgt aus den Bethe-Ansatz-Lösungen des Gittersystems in Abbildung 6.3. Diese Eigenschaft wird im Folgenden als „Selbst-Fusion“ bezeichnet. Der Vorteil des ϵ -regularisierten halb-unendlichen Gitters besteht darin, dass sich nun $2N$ -viele Funktionalgleichungen formulieren lassen [68]. Diese sind für kleine, aber endliche, ϵ -Werte für das halb-unendliche System in Abbildung 6.3 gültig. Dies ist der Untersuchungsgegenstand reiner Spin-1/2-Systeme gewesen, was zu algebraischen Ausdrücken der Dichte-Matrix in Abhängigkeit von Nächste-Nachbar-Korrelatoren führte [6, 63]. Die algebraische Struktur ist unabhängig vom Parameter ϵ , lediglich hängen die Nächste-Nachbar-Korrelatoren von ϵ ab. Diese besitzen aber einen regulären Limes $\epsilon \rightarrow 0$. Daher bleibt die faktorisierte Form des Spin-1/2-Modells auch für die Dichte-Matrix $D^{[1]}(\tilde{\xi}) = D^{[1]}(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{2m})$ erhalten. Die Strategie zur Berechnung der Spin-1-Korrelationsfunktionen besteht nun darin, die Einträge der Dichte-Matrix $D^{[1]}(\tilde{\xi})$ in Abhängigkeit einer Zweipunkt-Funktion $\omega(\xi_1, \xi_2)$, welche im übernächsten Abschnitt bestimmt wird, anzugeben. Anschließend ist die Projektion bzw. Symmetrisierung der vertikalen Spin-1/2-Linien mit den Spektラルparametern $\tilde{\xi}_{2k-1} = \xi_k - i$ und $\tilde{\xi}_{2k} = \xi_k + i$, $k = 1, \dots, m$, auf den Spin-1-Unterraum $(\mathbb{C}^3)^{\otimes N}$ durchzuführen [68].

6.2. Der XXX Ein- und Zweiplatz-Dichte-Operator für die Spin-1-Kette für verschwindendes Magnetfeld

Um die charakterisierende Zweipunkt-Funktion des Modells zu konstruieren, wird die Strategie von Kapitel 6.1.1 benutzt.

6.2.1. Bestimmung des Einplatz-Dichte-Operators

Da kein äußeres Feld wirkt, gilt Spinumkehr-Symmetrie. Somit lässt sich für die Einplatz-Dichte-Matrix der Ansatz

$$D^{[2]}(\xi) = \begin{pmatrix} D^{[2] \pm}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & D^{[2] 0}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & D^{[2] \pm}(\xi) \end{pmatrix} \quad (6.2.1)$$

wählen. Aus der Rotationsinvarianz des lokalen Hamilton-Operators (2.0.3b) folgt ebenso die Rotationsinvarianz des Dichte-Operators. Dies liefert die zusätzliche Bedingung $D^{[2] \pm}(\xi) = D^{[2] 0}(\xi) = D^{[2] -}(\xi)$. Mit der Spur-Eigenschaft der Dichte-Matrix, $\text{Spur}\{D^{[2]}(\xi)\} = 1$, folgt schließlich

$$D^{[2] \pm}(\xi) = D^{[2] 0}(\xi) = D^{[2] -}(\xi) = 1/3. \quad (6.2.2)$$

Dieses wurde bereits in [65] hergeleitet (siehe (5.9), (5.12) und (5.13)).

6.2.2. Bestimmung des Zweiplatz-Dichte-Operators

Aufgrund der Rotationsinvarianz des lokalen Hamilton-Operators (ohne äußeres Magnetfeld, d.h. $h = 0$) in Gleichung (2.0.3b) lässt sich die Zweiplatz-Dichte-Matrix $D^{[2]}(\xi_1, \xi_2)$ durch

$$D^{[2]}(\xi_1, \xi_2) = \rho_1(\xi_1, \xi_2) \mathbb{1}_9 + \rho_2(\xi_1, \xi_2) P^{(1)} + \rho_3(\xi_1, \xi_2) P^{-} \quad (6.2.3)$$

in Abhängigkeit von drei Funktionen $\rho_k(\xi_1, \xi_2)$, $k = 1, 2, 3$, darstellen. Alternativ lässt sich die Darstellung von (6.2.3) auch mittels der „Intertwining“- und Reduktionseigenschaft, (2.6.12) und (2.6.13), und der Symmetrie des Dichteoperators, $D^{[2]}(\xi_1, \xi_2) = D^{[2]}(\xi_2, \xi_1)$, die am Ende dieses Abschnittes gezeigt wird (siehe (6.2.17)), verifizieren.

Aus (6.1.3) und (6.1.4) folgt für $j = 1$ und $m = 2$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \rho_1(\xi_1 - 2i, \xi_2) \\ \rho_2(\xi_1 - 2i, \xi_2) \\ \rho_3(\xi_1 - 2i, \xi_2) \end{pmatrix} = L(\xi_1 - \xi_2) \cdot \begin{pmatrix} \rho_1(\xi_1, \xi_2) \\ \rho_2(\xi_1, \xi_2) \\ \rho_3(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Mit $\xi := \xi_1 - \xi_2$ ist die Matrix $L(\xi)$ durch

$$L(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi^2(20+\xi^2)}{(\xi-2i)(\xi+2i)(\xi-4i)(\xi+4i)} & \frac{4i\xi(4-4i\xi+\xi^2)}{(\xi-2i)(\xi+2i)(\xi-4i)(\xi+4i)} & \frac{4i\xi}{(\xi+2i)(\xi+4i)} \\ -\frac{16\xi^2}{(\xi-2i)(\xi+2i)(\xi-4i)(\xi+4i)} & \frac{-4i\xi(8-6i\xi+\xi^2)}{(\xi-2i)(\xi+2i)(\xi-4i)(\xi+4i)} & \frac{\xi(\xi-2i)}{(\xi+2i)(\xi+4i)} \\ \frac{16(12+\xi^2)}{(\xi-2i)(\xi+2i)(\xi-4i)(\xi+4i)} & \frac{64-16i\xi-4\xi^2-8i\xi^3+\xi^4}{(\xi-2i)(\xi+2i)(\xi-4i)(\xi+4i)} & \frac{-4i(\xi-2i)}{(\xi+2i)(\xi+4i)} \end{pmatrix}$$

gegeben. Mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} F(\xi_1, \xi_2) \\ G(\xi_1, \xi_2) \\ H(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ -16 & 4\left(\left(\frac{\xi}{2i}\right)^2 - 2\right) & -4\left(\left(\frac{\xi}{2i}\right)^2 - 1\right) \\ -8 & 2\left(\left(\frac{\xi}{2i}\right)^2 - 3\right) & -2\left(\left(\frac{\xi}{2i}\right)^2 + 3\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1(\xi_1, \xi_2) \\ \rho_2(\xi_1, \xi_2) \\ \rho_3(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} \quad (6.2.5)$$

und der Spur-Bedingung der Dichte-Matrix,

$$\text{Spur}\{D^{[2]}(\xi_1, \xi_2)\} = (9\rho_1(\xi_1, \xi_2) + 3\rho_2(\xi_1, \xi_2) + 3\rho_3(\xi_1, \xi_2))(\xi_1, \xi_2) \equiv 1 =: F(\xi_1, \xi_2), \quad (6.2.6)$$

ergibt sich das einfachere Funktionalgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} 1 \\ G(\xi_1 - 2i, \xi_2) \\ H(\xi_1 - 2i, \xi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\xi(\xi-6i)}{(\xi-2i)(\xi+4i)} & 0 \\ \frac{-256i(\xi-i)}{3(\xi+2i)(\xi-2i)^2(\xi+4i)} & \frac{-\xi(\xi-6i)(\xi^2-2i\xi-4)}{(\xi-2i)^2(\xi+2i)(\xi+4i)} & \frac{\xi^2(\xi-6i)(\xi-4i)}{(\xi-2i)^2(\xi+2i)(\xi+4i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ G(\xi_1, \xi_2) \\ H(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} \quad (6.2.7)$$

in den Funktionen $G(\xi_1, \xi_2)$ und $H(\xi_1, \xi_2)$. Wegen (6.2.5) sind die gesuchten Funktionen $\rho_k(\xi_1, \xi_2)$, $k = 1, 2, 3$, durch

$$\begin{pmatrix} \rho_1(\xi_1, \xi_2) \\ \rho_2(\xi_1, \xi_2) \\ \rho_3(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\xi^2+36}{45(\xi^2+4)} & -\frac{\xi^2}{30(\xi^2+4)} & \frac{\xi^2+6}{15(\xi^2+4)} \\ -\frac{64}{45(\xi^2+4)} & \frac{3\xi^2-20}{60(\xi^2+4)} & -\frac{3\xi^2+28}{30(\xi^2+4)} \\ \frac{16}{45(\xi^2+4)} & \frac{3\xi^2+20}{60(\xi^2+4)} & -\frac{3\xi^2+8}{30(\xi^2+4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ G(\xi_1, \xi_2) \\ H(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} \quad (6.2.8)$$

bestimmt. Anstelle der Funktionen $G(\xi_1, \xi_2)$ und $H(\xi_1, \xi_2)$ sollen im weiteren Verlauf die Funktionen $g(\xi_1, \xi_2)$ und $h(\xi_1, \xi_2)$, definiert durch

$$G(\xi_1, \xi_2) =: \frac{1}{2i}(\xi^2 + 16)(\xi^2 + 4)g(\xi_1, \xi_2), \quad (6.2.9a)$$

$$H(\xi_1, \xi_2) =: \frac{1}{(2i)^2}(\xi^2 + 16)(\xi^2 + 4)^2h(\xi_1, \xi_2) - \frac{16}{3\xi^2}, \quad (6.2.9b)$$

bestimmt werden. Aus (6.2.7) folgen die Bestimmungsgleichungen für $g(\xi_1, \xi_2)$ und $h(\xi_1, \xi_2)$:

$$\begin{pmatrix} g(\xi_1 - 2i, \xi_2) \\ h(\xi_1 - 2i, \xi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2i(\xi^2 - 2i\xi - 4)}{(\xi - 4i)(\xi - 2i)\xi(\xi + 2i)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\xi_1, \xi_2) \\ h(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix}. \quad (6.2.10)$$

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass die Funktionalgleichungen (6.2.10) gelöst werden können und somit über (6.2.9) und (6.2.8) sich die in Abhängigkeit einer Zweipunkt-Korrelationsfunktion $\omega(\xi_1, \xi_2)$ (eindeutige) Lösung der Funktionen $\rho_k(\xi_1, \xi_2)$, $k = 1, 2, 3$, finden lässt:

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi_1, \xi_2) = & -\frac{1}{12} \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y^{-1}(\xi_2))}{15\xi^2(4 + \xi^2)} \left\{ -\frac{9}{4}(5\xi^2(4 + \xi^2)) \right. \\ & - \frac{3}{2}(5\xi^2(4 + \xi^2) - 96)(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & - (5\xi^2(4 + \xi^2) - 96)(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & - 3(4 + \xi^2)((\xi + 2i)(\xi - 6i)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + (\xi - 2i)(\xi + 6i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \\ & + 3\xi^2(16 + \xi^2)(\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)) \\ & + (6 + \xi^2)(\xi^2(16 + \xi^2)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) \\ & \left. - (4 + \xi^2)^2\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \right\}, \quad (6.2.11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\xi_1, \xi_2) = & -\frac{1}{12} \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y^{-1}(\xi_2))}{15\xi^2(4 + \xi^2)} \left\{ \right. \\ & 12(5\xi^2 - 28)(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & + 8(5\xi^2 - 28)(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & - 3(4 + \xi^2)((\xi + 2i)(\xi + 14i)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + (\xi - 2i)(\xi - 14i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \\ & - 12\xi^2(16 + \xi^2)(\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)) \\ & - \frac{1}{2}(28 + 3\xi^2)(\xi^2(16 + \xi^2)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) \\ & \left. - (4 + \xi^2)^2\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \right\}, \quad (6.2.11b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_3(\xi_1, \xi_2) = & -\frac{1}{12} \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y^{-1}(\xi_2))}{15\xi^2(4 + \xi^2)} \left\{ \right. \\ & - 12(8 + 5\xi^2)(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & - 8(8 + 5\xi^2)(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & + 12(4 + \xi^2)((\xi - i)(\xi + 2i)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + (\xi - 2i)(i + \xi)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \\ & + 3\xi^2(16 + \xi^2)(\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)) \\ & - \frac{1}{2}(8 + 3\xi^2)(\xi^2(16 + \xi^2)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) \\ & \left. - (4 + \xi^2)^2\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \right\}. \quad (6.2.11c) \end{aligned}$$

Diese Zweipunkt-Funktion ist diejenige, die den „physikalischen Anteil“ des Modells beschreibt. Die Funktion $\omega(\xi_1, \xi_2)$ erfüllt hierbei eine Dreipunkt-Funktionalgleichung bezüglich ihres ersten Argumentes. Diese lautet für diskrete Werte für $x \in \{\nu_{\bar{k}} | k = 1, \dots, N\}$

$$(1 + y^{-1}(x)) \{ \Omega(x + i, \mu) + \Omega(x - i, \mu) - \varphi(x - \mu) \} \\ + (1 + y^{-1}(x - 2i)) \{ \Omega(x - i, \mu) + \Omega(x - 3i, \mu) - \varphi(x - 2i - \mu) \} = 0, \quad (6.2.12)$$

wobei

$$\Omega(x, \mu) = \frac{2i(\omega(x, \mu) + \frac{1}{2})}{(x - \mu)^2 + 4}, \quad \varphi(z) = \frac{2i(z^2 - 3)}{(z - 3i)(z - i)(z + i)(z + 3i)}.$$

Ferner lässt sich für die ω -Funktion eine Integraldarstellung mittels der in Kapitel 4.2, „Einschub zweier Spin-1/2-Linien“, hergeleiteten logarithmischen Ableitung des Eigenwertes der modifizierten Transfer-Matrix (4.2.42) bestimmen. Dies wird im nächsten Abschnitt 6.2.3, „Lösung der Funktionalgleichung des Zweiplatz-Dichte-Operators“, gezeigt.

Asymptotisches Verhalten und Symmetrie der Dichte-Operatoren

Bevor die Lösung der Funktionalgleichungen (6.2.10) konstruiert wird, wird zuerst die Asymptotik und Symmetrie der Dichte-Operatoren $D^{[2s]}(\xi_1, \xi_2)$ diskutiert. Die \mathcal{R} -Matrizen (3.1.8) haben die Asymptotik $\mathbb{1}$ für $x \rightarrow \infty$, weshalb der m -Platz-Dichte-Operator $D^{[1]}(\xi)$ bzw. $D^{[2]}(\xi)$ folgendes asymptotisches Verhalten besitzt:

$$\lim_{\xi_m \rightarrow \infty} D^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \frac{D^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \otimes \mathbb{1}_2}{\lim_{\xi_m \rightarrow \infty} \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\xi_m)} = \frac{1}{2} D^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \otimes \mathbb{1}_2, \quad (6.2.13a)$$

$$\lim_{\xi_m \rightarrow \infty} D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \frac{D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \otimes \mathbb{1}_3}{\lim_{\xi_m \rightarrow \infty} \Lambda_0^{[1]}(\xi_m)} = \frac{1}{3} D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \otimes \mathbb{1}_3. \quad (6.2.13b)$$

Für die Zweiplatz-Dichte-Matrizen gilt folglich

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} D^{[2s]}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2s+1} \mathbb{1}_{2s+1} \otimes D^{[2s]}(\xi_2), \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} D^{[2s]}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2s+1} D^{[2s]}(\xi_1) \otimes \mathbb{1}_{2s+1} \quad (6.2.14)$$

für $s \in \{1/2, 1\}$. Wegen (3.3.12) hat die Einplatz-Dichte-Matrix $D^{[2s]}(\xi_1)$ lediglich auf der Hauptdiagonalen von Null verschiedene Einträge. Daraus folgt sofort, dass die Funktionen $\rho_2(\xi_1, \xi_2)$ und $\rho_3(\xi_1, \xi_2)$ aufgrund von Gleichung (6.2.13) im Limes $\xi_1 \rightarrow \infty$ verschwinden. Dann ist wegen der Spur-Eigenschaft der Dichte-Matrix $D^{[2]}(\xi_1, \xi_2)$ einerseits

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \rho_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{9}, \quad (6.2.15)$$

aber andererseits

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} D^{[2]}(\xi_1, \xi_2) = \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \rho_1(\xi_1, \xi_2) \mathbb{1} = \frac{1}{3} D^{[2]}(\xi_1) \otimes \mathbb{1}. \quad (6.2.16)$$

Also gilt offenbar $D^{[2]}_+(\xi_1) = D^{[2]}_0(\xi_1) = D^{[2]}_-(\xi_1) = 1/3$, was bereits in (6.2.2) gezeigt wurde. Aus der „Intertwining“- und Reduktionseigenschaft, (2.6.12) und (2.6.13), folgt $D^{[1]}(\xi_1) = 1/2\mathbb{1}$. Aufgrund der „Intertwining“-Relation (2.6.12) folgt weiterhin wegen des Kommutierens des Zweiplatz-Dichte-Operators mit der \mathcal{R} -Matrix,

$$\mathcal{R}^{XXX[s,s]}(\xi) D^{[2s]}(\xi_1, \xi_2) - D^{[2s]}(\xi_1, \xi_2) \mathcal{R}^{XXX[s,s]}(\xi) = 0,$$

dass die Zweiplatz-Dichte-Matrix $D^{[2s]}(\xi_1, \xi_2)$ und somit insbesondere auch die Funktionen $\rho_k(\xi_1, \xi_2)$, $k = 1, 2, 3$, symmetrisch in den beiden Argumenten ξ_1 und ξ_2 , d.h.

$$D^{[2s]}(\xi_1, \xi_2) = D^{[2s]}(\xi_2, \xi_1), \quad (6.2.17)$$

sein müssen.

6.2.3. Lösung der Funktionalgleichung des Zweiplatz-Dichte-Operators

Zunächst soll folgende Zweiplatz-Hilfsdichte-Matrix $D^{[1]}(\xi_1, \xi_2)$, welche in (3.3.3) definiert wurde, betrachtet werden (grafische Darstellung siehe Abbildung 3.9). Die logarithmische Ableitung des modifizier-

ten Eigenwertes (4.2.40) steht mit dieser Dichte-Matrix $D^{[1]}(\xi_1, \xi_2)$ wie folgt in Verbindung:

Mit $|\Psi\rangle$ wird der zum betragsmäßig größten Eigenwert $\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu)$ auf Eins normierte Eigenvektor bezeichnet. Dann gilt nach dem Hellmann-Feynman-Theorem

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right\} \right|_{\delta=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \langle \Psi | \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) | \Psi \rangle \right\} \right|_{\delta=0} = \left. \frac{\langle \Psi | \frac{\partial}{\partial \delta} t^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | t^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) | \Psi \rangle} \right|_{\delta=0} \\ &= \left. \frac{\langle \Psi | t^{[\frac{1}{2}]}(\mu; \mu) \left[t^{[\frac{1}{2}]}(0; \mu) \right]^k \left[\frac{\partial}{\partial \delta} t^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right] \left[t^{[\frac{1}{2}]}(0; \mu) \right]^k | \Psi \rangle}{\langle \Psi | t^{[\frac{1}{2}]}(\mu; \mu) \left[t^{[\frac{1}{2}]}(0; \mu) \right]^k t^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \left[t^{[\frac{1}{2}]}(0; \mu) \right]^k | \Psi \rangle} \right|_{\delta=0} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left. \frac{\text{Spur} \left\{ t^{[\frac{1}{2}]}(\mu; \mu) \left[t^{[\frac{1}{2}]}(0; \mu) \right]^k \left[\frac{\partial}{\partial \delta} t^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right] \left[t^{[\frac{1}{2}]}(0; \mu) \right]^k \right\}}{\text{Spur} \left\{ t^{[\frac{1}{2}]}(\mu; \mu) \left[t^{[\frac{1}{2}]}(0; \mu) \right]^k t^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \left[t^{[\frac{1}{2}]}(0; \mu) \right]^k \right\}} \right|_{\delta=0}. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Anwenden der Yang-Baxter-Algebra (Kommutieren der Transfer-Matrizen) und der Eigenschaft (3.2.26) (Anfangsbedingung) führt zu dem Ausdruck

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right\} \right|_{\delta=0} = \frac{\text{Spur} \left\{ D_{12}^{[1]}(x, \mu) \mathcal{R}_{12}^{XXX}(x - \mu) \frac{\partial}{\partial \delta} \mathcal{R}_{21}^{XXX}(\mu + \delta - x) \right\} \Big|_{\delta=0}}{\text{Spur} \left\{ D_{12}^{[1]}(x, \mu) \mathcal{R}_{12}^{XXX}(x - \mu) \mathcal{R}_{21}^{XXX}(\mu - x) \right\}}. \quad (6.2.19)$$

Obige Relation ist von der Normierung der \mathcal{R} -Matrix abhängig. Wird die Unitarität sowie die Parität der \mathcal{R} -Matrix verwendet, so lässt sich (6.2.19) in den in der Arbeit [5] angegebenen Ausdruck (siehe Gleichung (4.37)) umschreiben. Unter Ausnutzen der Unitarität der \mathcal{R} -Matrix

$$\mathcal{R}_{12}^{XXX}(x - \mu) \mathcal{R}_{21}^{XXX}(\mu + \delta - x) \Big|_{\delta=0} = \mathbb{1}_4$$

und mit

$$\mathcal{R}_{12}^{XXX}(x - \mu) \frac{\partial}{\partial \delta} \mathcal{R}_{21}^{XXX}(\mu + \delta - x) \Big|_{\delta=0} = \frac{2i}{(x - \mu + 2i)(x - \mu - 2i)} \left[\mathbb{1}_4 - P_{12}^{(1/2)} \right]$$

folgt unter Einführung der Funktion $\Omega(x, \mu)$, definiert durch

$$\Omega(x, \mu) := \frac{2i}{(x - \mu + 2i)(x - \mu - 2i)} \text{Spur} \left\{ D^{[1]}(x, \mu) P^{(1/2)} \right\}, \quad (6.2.20)$$

schließlich

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right\} \right|_{\delta=0} = -\Omega(x, \mu) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x - \mu + 2i} - \frac{1}{x - \mu - 2i} \right]. \quad (6.2.21)$$

Die Funktion $\Omega(x, \mu)$ kann mit (4.2.42) durch die Beziehung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \Omega(x - i, \mu) + \Omega(x + i, \mu) \} = -G_\mu^{(0)}(x) + \varphi(x - \mu) \quad (6.2.22)$$

ausgedrückt werden, wobei

$$\varphi(z) := -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} + \frac{1}{z + 3i} - \frac{1}{z - 3i} \right] = \frac{2i(z^2 - 3)}{(z - 3i)(z - i)(z + i)(z + 3i)} \quad (6.2.23)$$

ist. Des Weiteren wird die Funktion $\omega(x, \mu)$ eingeführt, welche durch

$$\omega(x, \mu) := \text{Spur} \left\{ D^{[1]}(x, \mu) P^{(1/2)} \right\} - \frac{1}{2} = \Omega(x, \mu) \frac{(x - \mu + 2i)(x - \mu - 2i)}{2i} - \frac{1}{2} \quad (6.2.24)$$

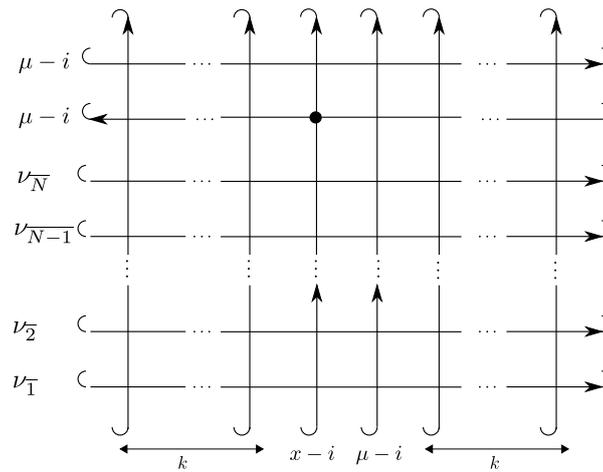
definiert ist¹. Aufgrund von Gleichung (6.2.21) folgt

$$\omega(x, \mu) = \frac{1}{2} - \frac{(x - \mu)^2 + 4}{2i} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right\} \right|_{\delta=0}. \quad (6.2.25)$$

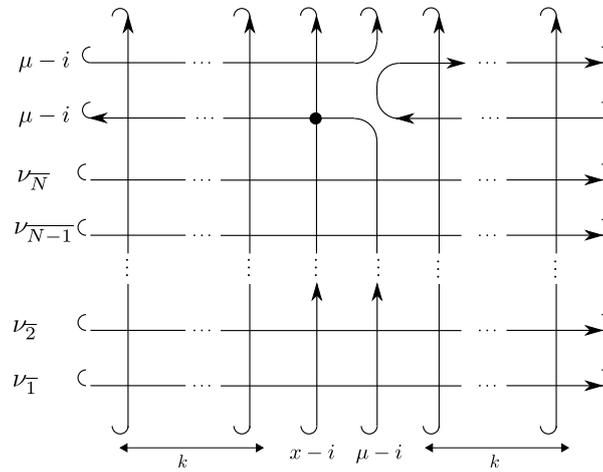
Einsetzen der Integralgleichung (4.2.42) führt zu der Darstellung

$$\omega(x, \mu) = \frac{1}{2} - ((x - \mu)^2 + 4) \pi F(x - \mu) - \frac{(x - \mu)^2 + 4}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{G_\mu^{(0)}(x')}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x - x')\right)}. \quad (6.2.26)$$

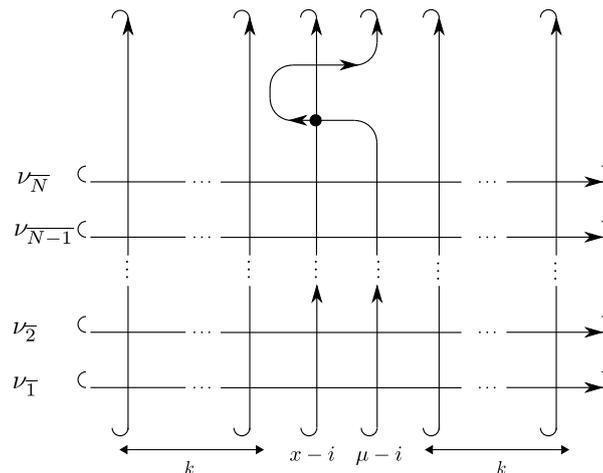
¹Diese Definition der ω -Funktion entspricht der Definition in [6], wobei der Unterschied im Operator $D^{[1]}(\mu, x)$ liegt. In [6] handelt es sich um den reinen Spin-1/2 Zweiplatz-Dichte-Operator, d.h. alle Räume, auch die horizontalen, sind Spin-1/2 Räume.



(a) Zunächst wird das Kommutieren der Quantentransfer-Matrix benutzt. Das Symbol \bullet bezeichnet die Stelle der Ableitung bzgl. δ an der Stelle Null.



(b) Hier wird die Anfangsbedingung der \mathcal{R} -Matrix ausgenutzt.



(c) Benutzen der Unitarität der \mathcal{R} -Matrix führt schließlich zu dem Ausdruck in (6.2.19).

Abbildung 6.4.: Beweis von (6.2.19).

Mit dieser Funktion lässt sich der Hilfsdichte-Operator $D^{[1]}(x, \mu)$ durch

$$D^{[1]}(x, \mu) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\omega(x, \mu) \right) \mathbb{1} + \frac{1}{3}\omega(x, \mu)P^{(1/2)} \quad (6.2.27)$$

darstellen. Wegen der Symmetrie des Dichte-Operators (6.2.17) ist die Zweipunkt-Funktion $\omega(x, \mu)$ ebenfalls symmetrisch in beiden Argumenten,

$$\omega(x, \mu) = \omega(\mu, x) \quad , \quad \omega(x, \mu) = \omega(-x, -\mu) \quad . \quad (6.2.28)$$

Alternativ folgt die zweite Symmetrierelation bereits aus den Symmetrieeigenschaften der Funktion $F(x)$, (4.1.47), und des Integralgleichungs-Systems (4.2.39b). Diese Symmetrien gelten dann auch für die Ω -Funktion, sowie für die logarithmische Ableitung des Eigenwertes,

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x; \mu) \right\} \Big|_{\delta=0} \equiv \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(\mu; x) \right\} \Big|_{\delta=0} \quad .$$

Weiterhin folgt

$$\text{Spur} \left\{ D^{[1]}(x, \mu) \frac{\mathbb{1}_4 + P^{(1/2)}}{2} \right\} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\omega(x, \mu) \quad , \quad (6.2.29)$$

wobei $(\mathbb{1}_4 + P^{(1/2)})/2$ gerade der Symmetrisierer, also der Projektor auf den Spin-1-Unterraum, für den XXX -Fall ist. Ebenso gilt wegen der Fusionseigenschaft der Quantenmonodromie-Matrizen, Gleichung (3.2.3)^{II}, der Zusammenhang

$$\begin{aligned} & \text{Spur} \left\{ D^{[1]}(x-i, x+i) (\mathbb{1}_4 + P^{(1/2)})/2 \right\} \\ &= \frac{\text{Spur} \left\{ D^{[1]}(x-i, x+i) \mathcal{P}^+ \right\}}{\text{Spur} \left\{ D^{[1]}(x-i, x+i) \right\}} = \frac{\langle \Psi | t^{[1]}(x) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | t^{[\frac{1}{2}]}(x-i) t^{[\frac{1}{2}]}(x+i) | \Psi \rangle} = \frac{1}{1+y^{-1}(x)} \quad , \quad (6.2.30) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Gleichungskette die Identität (4.2.19d) verwendet wurde^{III}. Folglich gilt

$$1 + y^{-1}(x) = \frac{4}{3 + 2\omega(x-i, x+i)} \Leftrightarrow \omega(x-i, x+i) = -\frac{1}{2} \left(3 - \frac{4}{1+y^{-1}(x)} \right) \quad . \quad (6.2.31)$$

Um zu zeigen, dass diese Identität auch aus der Integralgleichung (6.2.26) folgt, wird an Stelle der Funktion $G_\mu^{(0)}(x)$ folgende Transformierte eingeführt.

$$\tilde{G}_\mu^{(0)}(x) := G_\mu^{(0)}(x) + \frac{i\pi}{2} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)} \quad , \quad (6.2.32a)$$

$$\tilde{g}_\mu^{(0)}(x) := (1+y^{-1}(x))\tilde{G}_\mu^{(0)}(x) = g_\mu^{(0)}(x) + \frac{i\pi}{2} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \frac{1+y^{-1}(x)}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)} \quad , \quad (6.2.32b)$$

wobei $\theta = \pm 1$ ist. Einsetzen dieser Transformation in das Integralgleichungs-System (4.2.39) liefert

$$\begin{pmatrix} (1+y^{-1}(x))\tilde{G}_\mu^{(0)}(x) \\ (1+\mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x))G_\mu^{(+)}(x) \\ (1+\mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x))G_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\pi}{2} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \left[1 - \frac{1+y^{-1}(x)}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)} \right] \\ -\frac{i\pi}{4} \frac{x-\mu-i\tilde{\varepsilon}}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu-i\tilde{\varepsilon})\right)} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)} \\ -\frac{i\pi}{4} \frac{x-\mu+i\tilde{\varepsilon}}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu+i\tilde{\varepsilon})\right)} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \tilde{G}_\mu^{(0)}(x) \\ G_\mu^{(+)}(x) \\ G_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} \quad , \quad (6.2.33a)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_\mu^{(0)}(x) \\ g_\mu^{(+)}(x) \\ g_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\pi}{2} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \left[1 - \frac{1+y^{-1}(x)}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)} \right] \\ -\frac{i\pi}{4} \frac{x-\mu-i\tilde{\varepsilon}}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu-i\tilde{\varepsilon})\right)} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)} \\ -\frac{i\pi}{4} \frac{x-\mu+i\tilde{\varepsilon}}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu+i\tilde{\varepsilon})\right)} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \frac{\tilde{g}_\mu^{(0)}(x)}{(1+y^{-1}(x))} \\ \frac{g_\mu^{(+)}(x)}{(1+\mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x))} \\ \frac{g_\mu^{(-)}(x)}{(1+\mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x))} \end{pmatrix} \quad . \quad (6.2.33b)$$

Für Gleichung (6.2.26) folgt dann

$$\omega(x, \mu) = \frac{1}{2} - ((x-\mu)^2 + 4) \pi F(x-\mu) + \frac{\pi}{8} \frac{(x-\mu)((x-\mu)^2 + 4)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu+\theta i)}$$

^{II}Die Gleichung (3.2.3) lässt sich für die XXX -Kette mit den Projektionsoperatoren $\mathcal{P}^\pm = (\mathbb{1}_4 \pm P^{(1/2)})/2$ in analoger Weise herleiten. Die Darstellung der Projektionsoperatoren für die XXX -Kette lässt sich durch den Limes $q \rightarrow 1$ aus der der XXZ -Kette, siehe (E.1.10), bestimmen.

^{III}Gleichung (4.2.19d) wurde zwar nur für das XXZ -Modell angegeben, jedoch gilt entsprechendes auch für die XXX -Kette.

$$- \frac{(x-\mu)^2 + 4}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\mu}^{(0)}(x')}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x-x')\right)}. \quad (6.2.34)$$

Der Ausdruck (6.2.34) soll nun an den Stellen $x = \pm i$ und $\mu = \mp i$ ausgewertet werden. Dazu werden die Argumente x und μ zunächst um $\pm i$ bzw. $\mp i$ verschoben. Der Parameter Θ wird dabei, abhängig von der Verschiebung des Spektralparameters $\mu \rightarrow \mu \mp i$ auf $\Theta = \pm 1$ gesetzt. Dies führt formal zu

$$\begin{aligned} \omega(x \pm i, \mu \mp i) &= \frac{1}{2} - (x-\mu)(x-\mu \pm 4i)\pi F(x-\mu \pm 2i) \\ &\quad - \frac{\pi}{8} \frac{(x-\mu)(x-\mu \pm 2i)(x-\mu \pm 4i)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right)} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu)} \\ &\quad \pm \frac{(x-\mu)(x-\mu \pm 4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\mu \mp i}^{(0)}(x') \Big|_{\Theta=\pm 1}}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(x-x')\right)}. \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

Für $\mu \rightarrow x$ folgt Gleichung (6.2.31), vorausgesetzt, dass

$$\lim_{\mu \rightarrow x} (x-\mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\mu \mp i}^{(0)}(x') \Big|_{\Theta=\pm 1}}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(x-x')\right)} = 0 \quad (6.2.36)$$

gilt. Weiterhin folgt aus (6.2.14) das asymptotische Verhalten

$$\lim_{x, \mu \rightarrow \infty} \omega(x, \mu) = 0.$$

Ziel ist es nun, eine Lösung der Funktionalgleichungen der Funktionen $g(x, \mu)$ und $h(x, \mu)$ durch die Funktion $\Omega(x, \mu)$ über den Zusammenhang (6.2.21) zu bestimmen. Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \frac{\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)}{\frac{(x-\mu-i)(x-\mu-\delta+i)}{(x-\mu+i)(x-\mu-\delta-i)}} \right\} \Bigg|_{\delta=0} &= \frac{\frac{(x-\mu-i)(x-\mu-\delta+i)}{(x-\mu+i)(x-\mu-\delta-i)}}{\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)} \Bigg|_{\delta=0} \frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \frac{\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)}{\frac{(x-\mu-i)(x-\mu-\delta+i)}{(x-\mu+i)(x-\mu-\delta-i)}} \right\} \Bigg|_{\delta=0} \\ &= \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x+i; \mu) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x-i; \mu)}{\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)} \frac{\frac{(x-\mu-i)(x-\mu-\delta+i)}{(x-\mu+i)(x-\mu-\delta-i)}}{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x+i; \mu) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x-i; \mu)} \Bigg|_{\delta=0} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x+i; \mu) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x-i; \mu)}{\frac{(x-\mu-i)(x-\mu-\delta+i)}{(x-\mu+i)(x-\mu-\delta-i)}} - \frac{\phi_+(x-2i)\phi_-(x+2i)}{\phi_+(x+2i)\phi_-(x-2i)} \right\} \Bigg|_{\delta=0} \\ &= \left\{ \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x+i; \mu) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x-i; \mu)}{\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)} \right\} \Bigg|_{\delta=0} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \frac{\Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x+i; \mu) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x-i; \mu)}{\frac{(x-\mu-i)(x-\mu-\delta+i)}{(x-\mu+i)(x-\mu-\delta-i)}} \right\} \Bigg|_{\delta=0} \\ &= (1+y^{-1}(x)) \left(\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x+i; \mu) \Lambda_0^{[\frac{1}{2}]}(x-i; \mu) \right\} \Bigg|_{\delta=0} - \frac{1}{x-\mu-i} + \frac{1}{x-\mu+i} \right), \end{aligned} \quad (6.2.37)$$

wobei im zweiten Rechenschritt der Zusammenhang (4.2.40) benutzt wurde, erfüllt die (diskrete) Funktionalgleichung

$$g(x-2i) + g(x) = 0 \quad \forall x \in \{\nu_k \mid k = 1, \dots, N\}. \quad (6.2.38)$$

Dies folgt aus der Inversionrelation (3.2.38). Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \frac{\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)}{\frac{(x-\mu-i)(x-\mu-\delta+i)}{(x-\mu+i)(x-\mu-\delta-i)}} \right\} \Bigg|_{\delta=0} = (1+y^{-1}(x))G_{\mu}^{(0)}(x) = - (1+y^{-1}(z))G_{\mu}^{(0)}(z) \Big|_{z=x-2i}, \quad (6.2.39)$$

was eine Konsequenz aus dem Gleichungssystem (4.2.39) ist, da einerseits der „Driving“-Term und andererseits die Kern-Funktion $\mathcal{K}(x)$ für $x \rightarrow x-2i$ ein relatives Vorzeichen liefern. Mit (6.2.21) folgt

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \frac{\Lambda_0^{[1]}(x; \mu)}{\frac{(x-\mu-i)(x-(\mu+\delta)+i)}{(x-\mu+i)(x-(\mu+\delta)-i)}} \right\} \Bigg|_{\delta=0} = - (1+y^{-1}(x)) \{ \Omega(x+i, \mu) + \Omega(x-i, \mu) - \varphi(x-\mu) \}. \quad (6.2.40)$$

Aus (6.2.38) folgt

$$\begin{aligned} (1+y^{-1}(x)) \{ \Omega(x+i, \mu) + \Omega(x-i, \mu) - \varphi(x-\mu) \} \\ + (1+y^{-1}(x-2i)) \{ \Omega(x-i, \mu) + \Omega(x-3i, \mu) - \varphi(x-2i-\mu) \} = 0. \end{aligned} \quad (6.2.41)$$

Dies ist die definierende Dreipunkt-Funktionalgleichung für die Zweipunkt-Funktion $\Omega(x, \mu)$ (vgl. (6.2.12)). Da die Funktionalgleichung (6.2.38) unabhängig von der Wahl des Spektralparameters μ ist, erfüllt auch

$$(1 + y^{-1}(x)) \{ \Omega(x + i, \mu \mp i) + \Omega(x - i, \mu \mp i) - \varphi(x - \mu \pm i) \}$$

die Funktionalgleichung (6.2.38). Die Funktion $g(x, \mu)$ wird nun durch

$$g(x, \mu) := -n N(x, \mu) \left\{ \Omega(x + i, \mu + i) + \Omega(x - i, \mu + i) + \Omega(x + i, \mu - i) + \Omega(x - i, \mu - i) \right. \\ \left. - \varphi(x - \mu - i) - \varphi(x - \mu + i) \right\} \quad (6.2.42)$$

definiert, wobei n ein von x unabhängiger Faktor ist und

$$N(x, \mu) := - (1 + y^{-1}(\mu)) (1 + y^{-1}(x)) .$$

Mit

$$h(x, \mu) := -n N(x, \mu) \left\{ \Omega(x + i, \mu + i)\Omega(x - i, \mu - i) - \Omega(x - i, \mu + i)\Omega(x + i, \mu - i) \right. \\ \left. + \Omega(x - i, \mu + i)\varphi(x - \mu + i) + \Omega(x + i, \mu - i)\varphi(x - \mu - i) - \varphi(x - \mu + i)\varphi(x - \mu - i) \right\} \quad (6.2.43)$$

wird die Funktionalgleichung

$$h(x, \mu) - h(x - 2i, \mu) = \varphi(x - \mu - i)g(x, \mu) \quad (6.2.44)$$

gelöst.

Beweis: Mit (6.2.41) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \varphi(x - \mu - i)g(x, \mu) &:= \varphi(x - \mu - i) (1 + y^{-1}(\mu)) (1 + y^{-1}(x)) \left\{ \Omega(x + i, \mu + i) + \Omega(x - i, \mu + i) \right. \\ &\quad \left. + \Omega(x + i, \mu - i) + \Omega(x - i, \mu - i) - \varphi(x - \mu - i) - \varphi(x - \mu + i) \right\} \\ &= \varphi(x - \mu - i) (1 + y^{-1}(\mu)) \left\{ (1 + y^{-1}(x)) [\Omega(x + i, \mu - i) + \Omega(x - i, \mu - i) - \varphi(x - \mu + i)] \right. \\ &\quad \left. - (1 + y^{-1}(x - 2i)) [\Omega(x - i, \mu + i) + \Omega(x - 3i, \mu + i) - \varphi(x - \mu - 3i)] \right\} \\ &= (1 + y^{-1}(\mu)) \left\{ \Omega(x - i, \mu - i) [(1 + y^{-1}(x)) \varphi(x - \mu - i) + (1 + y^{-1}(x - 2i)) \varphi(x - \mu - 3i)] \right. \\ &\quad - \Omega(x - i, \mu + i) [(1 + y^{-1}(x - 2i)) \varphi(x - \mu - i) + (1 + y^{-1}(x)) \varphi(x - \mu + i)] \\ &\quad + (1 + y^{-1}(x)) [\Omega(x - i, \mu + i)\varphi(x - \mu + i) + \Omega(x + i, \mu - i)\varphi(x - \mu - i) \\ &\quad \quad - \varphi(x - \mu + i)\varphi(x - \mu - i)] \\ &\quad \left. - (1 + y^{-1}(x - 2i)) [\Omega(x - i, \mu - i)\varphi(x - \mu - 3i) + \Omega(x - 3i, \mu + i)\varphi(x - \mu - i) \right. \\ &\quad \quad \left. - \varphi(x - \mu - 3i)\varphi(x - \mu - i)] \right\} \\ &= (1 + y^{-1}(\mu)) \left\{ \Omega(x - i, \mu - i) [(1 + y^{-1}(x)) \Omega(x + i, \mu + i) + (1 + y^{-1}(x - 2i)) \Omega(x - 3i, \mu + i)] \right. \\ &\quad - \Omega(x - i, \mu + i) [(1 + y^{-1}(x - 2i)) \Omega(x - 3i, \mu - i) + (1 + y^{-1}(x)) \Omega(x + i, \mu - i)] \\ &\quad + (1 + y^{-1}(x)) [\Omega(x - i, \mu + i)\varphi(x - \mu + i) + \Omega(x + i, \mu - i)\varphi(x - \mu - i) \\ &\quad \quad - \varphi(x - \mu + i)\varphi(x - \mu - i)] \\ &\quad \left. - (1 + y^{-1}(x - 2i)) [\Omega(x - i, \mu - i)\varphi(x - \mu - 3i) + \Omega(x - 3i, \mu + i)\varphi(x - \mu - i) \right. \\ &\quad \quad \left. - \varphi(x - \mu - 3i)\varphi(x - \mu - i)] \right\} \\ &= (1 + y^{-1}(\mu)) \left\{ (1 + y^{-1}(x)) [\Omega(x + i, \mu + i)\Omega(x - i, \mu - i) - \Omega(x - i, \mu + i)\Omega(x + i, \mu - i)] \right. \\ &\quad \left. + \Omega(x - i, \mu + i)\varphi(x - \mu + i) + \Omega(x + i, \mu - i)\varphi(x - \mu - i) - \varphi(x - \mu + i)\varphi(x - \mu - i) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (1 + y^{-1}(x - 2i)) [\Omega(x - i, \mu + i)\Omega(x - 3i, \mu - i) - \Omega(x - 3i, \mu + i)\Omega(x - i, \mu - i) \\
 & + \Omega(x - 3i, \mu + i)\varphi(x - \mu - i) + \Omega(x - i, \mu - i)\varphi(x - \mu - 3i) - \varphi(x - \mu - i)\varphi(x - \mu - 3i)] \Big\} .
 \end{aligned}$$

Somit sind die Funktionen

$$\begin{aligned}
 G(\xi_1, \xi_2) & := -n N(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{2i} (\xi^2 + 16)(\xi^2 + 4) \\
 & \times \left\{ \Omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) + \Omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + \Omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) + \Omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) - \frac{4i}{(\xi)^2 + 16} \right\} ,
 \end{aligned} \tag{6.2.45a}$$

und

$$\begin{aligned}
 H(\xi_1, \xi_2) & := -n N(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{(2i)^2} (\xi^2 + 16)(\xi^2 + 4)^2 \\
 & \times \left\{ \Omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)\Omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) - \Omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\Omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) \right. \\
 & + \frac{2i(\xi^2 + 2i\xi - 4)}{(\xi - 2i)\xi(\xi + 2i)(\xi + 4i)} \Omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + \frac{2i(\xi^2 - 2i\xi - 4)}{(\xi - 4i)(\xi - 2i)\xi(\xi + 2i)} \Omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) \\
 & \left. - \frac{(2i)^2(\xi^4 - 4\xi^2 + 16)}{(\xi - 4i)(\xi - 2i)^2\xi^2(\xi + 2i)^2(\xi + 4i)} \right\} - \frac{16}{3\xi^2} \tag{6.2.45b}
 \end{aligned}$$

Lösungen des Gleichungssystems (6.2.7), wobei $\xi_1 \equiv x$, $\xi_2 \equiv \mu$ und $\xi \equiv \xi_1 - \xi_2$ ist. Mit (6.2.24) folgen die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 G(\xi_1, \xi_2) & = -n N(\xi_1, \xi_2) \left\{ \xi^2 [\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) + \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) \right. \\
 & + \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)] + 4i\xi [\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) - \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] \\
 & + 4 [4 (\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) + \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)) + \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] \\
 & \left. + 16i\xi^{-1} [\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) - \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] + 12 \right\} , \tag{6.2.46a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(\xi_1, \xi_2) & = -n N(\xi_1, \xi_2) \left\{ \xi^2 [\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) - \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] \right. \\
 & + 8 [2 (\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)) - \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] \\
 & - 16\xi^{-2}\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) \\
 & + \frac{\xi^2}{2} [\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) + \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)] \\
 & + 2i\xi [\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) - \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] \\
 & - 4 [2 (\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) + \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)) - \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) - \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] \\
 & + 8i\xi^{-1} [\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) - \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] \\
 & \left. - 24\xi^{-2} [\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)] + 6 - 36\xi^{-2} \right\} - \frac{16}{3}\xi^{-2} . \tag{6.2.46b}
 \end{aligned}$$

Für die Funktionen $g(\xi_1, \xi_2)$, $h(\xi_1, \xi_2)$, $G(\xi_1, \xi_2)$, $H(\xi_1, \xi_2)$ ergibt sich per Konstruktion dieselbe Symmetrie wie für die ω -Funktion (6.2.28). Mittels (6.2.46) und (6.2.8) ergeben sich mit der Relation (6.2.31) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \rho_1(\xi_1, \xi_2) & = \frac{-n N(\xi_1, \xi_2)}{15\xi^2 (4 + \xi^2)} \left\{ \frac{3}{16} \frac{5\xi^2 (4 + \xi^2) - 96}{n} - 216 \right. \\
 & + \frac{5\xi^2 (4 + \xi^2) - 96}{8n} (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\
 & + \frac{5\xi^2 (4 + \xi^2) - 96}{12n} (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\
 & - 3 (4 + \xi^2) ((\xi + 2i)(\xi - 6i)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + (\xi - 2i)(\xi + 6i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \\
 & \left. + 3\xi^2 (16 + \xi^2) (\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (6 + \xi^2) \left(\xi^2 (16 + \xi^2) \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) \right. \\
 & \left. - (4 + \xi^2)^2 \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) \right) \Big\} , \tag{6.2.47a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_2(\xi_1, \xi_2) = & \frac{-n N(\xi_1, \xi_2)}{15\xi^2(4 + \xi^2)} \Big\{ 18(28 - 5\xi^2) - \frac{3(5\xi^2 - 28)}{2n} \\
 & - \frac{(5\xi^2 - 28)}{n} (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\
 & - \frac{2(5\xi^2 - 28)}{3n} (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\
 & - 3(4 + \xi^2) ((\xi + 2i)(\xi + 14i) \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + (\xi - 2i)(\xi - 14i) \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \\
 & - 12\xi^2(16 + \xi^2) (\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)) \\
 & - \frac{1}{2}(28 + 3\xi^2) \left(\xi^2 (16 + \xi^2) \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) \right. \\
 & \left. - (4 + \xi^2)^2 \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) \right) \Big\} , \tag{6.2.47b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_3(\xi_1, \xi_2) = & \frac{-n N(\xi_1, \xi_2)}{15\xi^2(4 + \xi^2)} \Big\{ 18(8 + 5\xi^2) + \frac{3(8 + 5\xi^2)}{2n} \\
 & + \frac{(8 + 5\xi^2)}{n} (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\
 & + \frac{2(8 + 5\xi^2)}{3n} (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\
 & + 12(4 + \xi^2) ((\xi - i)(\xi + 2i) \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + (\xi - 2i)(i + \xi) \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \\
 & + 3\xi^2(16 + \xi^2) (\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)) \\
 & - \frac{1}{2}(8 + 3\xi^2) \left(\xi^2 (16 + \xi^2) \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) \right. \\
 & \left. - (4 + \xi^2)^2 \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) \omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i) \right) \Big\} . \tag{6.2.47c}
 \end{aligned}$$

Die Zahl n ist durch die Analytizität des statistischen Operators (6.2.3) bzw. durch die Analytizität der Funktionen $\rho_j(\xi_1, \xi_2)$ festgelegt. Wird zum Beispiel $\xi_1 \equiv \xi_2$ gesetzt, so dürfen die Ausdrücke (6.2.47) kein singuläres Verhalten zeigen. Für diesen Fall ist dies nur für $n = -1/12$ gegeben. Somit folgen die Ergebnisse (6.2.11). Die geforderte Symmetrie des Dichte-Operators (6.2.17) wird erfüllt. Durch das Gleichungssystem (6.2.8) wird alternativ eine faktorisierte Darstellung in den Funktionen $G(\xi_1, \xi_2)$ und $H(\xi_1, \xi_2)$ gegeben. Mit der Bemerkung (C.0.3) lässt sich die Funktion $G(\xi_1, \xi_2)$ aus der logarithmischen Ableitung des Eigenwertes (4.3.6b) bestimmen. Dies liefert eine adäquate Integraldarstellung. Für die Funktion $H(\xi_1, \xi_2)$ fehlt jedoch eine derartige Beschreibung, da in dieser die ω -Funktion in quadratischer Form erscheint: Die ω -Funktion lässt sich selbst wieder als logarithmische Ableitung eines Eigenwertes schreiben, nicht aber Produkte von ω -Funktionen. Es ist unklar, wie sich Produkte von logarithmischen Ableitungen des Eigenwertes (4.2.42), ausgewertet bei verschiedenen Argumenten, durch eine logarithmische Ableitung eines anderen Eigenwertes darstellen lassen. Mit den in Kapitel 4, „Nichtlineare Integralgleichungen“, eingeführten Eigenwerten ist keine einfachere Beschreibung der Funktion $H(\xi_1, \xi_2)$ ersichtlich.

Eindeutigkeit der Lösung

Wegen der Symmetrie des Zweiplatz-Dichte-Operators $D^{[2]}(\xi_1, \xi_2)$ (6.2.17) folgt, dass jedes von Null verschiedene Dichte-Matrixelement ein symmetrisches Polynom zweier Argumente vom Grad $2N$ dividiert durch das Produkt der Eigenwerte $\tilde{\Lambda}_0^{[1]}(\xi_1) \tilde{\Lambda}_0^{[1]}(\xi_2)$ ist. Jedes dieser Polynome hat $(2N + 1)^2$ Koeffizienten, welche sich aufgrund der Symmetrie lediglich zu $(2N + 1)(N + 1)$ unabhängigen Koeffizienten reduzieren. Für beliebige Spektralparameter ξ_1 liefert die Funktionalgleichung (6.1.3) für $\xi_2 \in \{\nu_{\overline{1}}, \dots, \nu_{\overline{N}}\}$ insgesamt $(2N + 1)N$ -viele Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten. Weitere $(2N + 1)$ -viele Gleichungen kommen hinsichtlich der Asymptotik (6.2.13) hinzu. Insgesamt sind dies $(2N + 1)(N + 1)$ -viele Bestimmungsgleichungen. Die lineare Unabhängigkeit der Gleichungen wurde für charakteristische Fälle

und kleine Trotterzahlen N getestet [68]. Mit der linearen Unabhängigkeit der Bestimmungsgleichungen folgt, dass die Lösung der Funktionalgleichungen, welche der Symmetrie und der asymptotischen Bedingungen genügen, eindeutig bezüglich der Analytizität der Elemente der m -Platz-Dichte-Matrix $D^{[2]}(\xi)$ ist.

Homogener Limes

Mit $\omega^{(k,0)}(\xi_1, \xi_2)$ wird die k te Ableitung nach dem ersten Argument an der Stelle ξ_1 bezeichnet. Wegen der Symmetrie der ω -Funktion gilt

$$\omega^{(0,1)}(x \pm i, x \mp i) = \omega^{(1,0)}(x \mp i, x \pm i). \quad (6.2.48a)$$

Weiterhin folgt daraus

$$\omega^{(0,2)}(x \pm i, x \mp i) = \omega^{(2,0)}(x \mp i, x \pm i), \quad (6.2.48b)$$

sowie

$$\omega^{(1,1)}(x \pm i, x \mp i) = \omega^{(1,1)}(x \mp i, x \pm i). \quad (6.2.48c)$$

Ausnutzen dieser Symmetrien führt im Limes $\xi_2 \rightarrow \xi_1$ explizit zu folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi_1, \xi_1) = & \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2}{240} \left\{ 15 + 52\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) - 16(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i)) \right. \\ & + 28\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) - 32\omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i)\omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i) \\ & + 16i(\omega^{(1,0)}(\xi_1 + i, \xi_1 - i) - \omega^{(1,0)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)) - 48\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) \\ & \left. + 32(\omega^{(1,0)}(\xi_1 + i, \xi_1 - i)\omega^{(1,0)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) - \omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)) \right\}, \end{aligned} \quad (6.2.49a)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\xi_1, \xi_1) = & \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2}{90} \left\{ -33\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + 24(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i)) \right. \\ & - 22\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + 28\omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i)\omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i) \\ & + 24i(\omega^{(1,0)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) - \omega^{(1,0)}(\xi_1 + i, \xi_1 - i)) + 42\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) \\ & \left. - 28(\omega^{(1,0)}(\xi_1 + i, \xi_1 - i)\omega^{(1,0)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) - \omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)) \right\}, \end{aligned} \quad (6.2.49b)$$

$$\begin{aligned} \rho_3(\xi_1, \xi_1) = & \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2}{90} \left\{ -3\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) - 6(\omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i)) \right. \\ & - 2\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + 8\omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i)\omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i) \\ & + 6i(\omega^{(1,0)}(\xi_1 + i, \xi_1 - i) - \omega^{(1,0)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)) + 12\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) \\ & \left. - 8(\omega^{(1,0)}(\xi_1 + i, \xi_1 - i)\omega^{(1,0)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) - \omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)) \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.49c)$$

Der Nulltemperatur-Limes

Für $T \rightarrow 0$ folgt aus der Integraldarstellung (6.2.26) bzw. (6.2.34)^{IV}

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \omega(x, \mu) &= \frac{1}{2} - \pi((x - \mu)^2 + 4) \left\{ F(x - \mu) - \frac{x - \mu}{16 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(x - \mu)\right)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}((x - \mu)^2 + 4) \left(\left\{ \Psi\left(-\frac{i}{4}(x - \mu)\right) + \Psi\left(\frac{i}{4}(x - \mu)\right) \right\} \right) \end{aligned}$$

^{IV}Wegen (4.1.39) folgt, dass auch im XXX-Limes die Hilfsfunktion $y(x)$ entlang $(\mathbb{R} \pm i)$ für $T \rightarrow 0$ gegen 1 konvergiert (vgl. Gleichung (B.16) in [50]).

$$- \Psi \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{4}(x - \mu) \right) - \Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}(x - \mu) \right) \left. \vphantom{\Psi} \right\} - \frac{\pi(x - \mu)}{2 \sinh \left(\frac{\pi}{2}(x - \mu) \right)} \quad (6.2.50a)$$

und andererseits wegen (6.2.31) und (4.1.41)

$$\lim_{T \rightarrow 0} \omega(x - i, x + i) = -\frac{1}{2}, \quad (6.2.50b)$$

was zu (6.2.50a) konsistent ist. Weiterhin folgt

$$\lim_{T \rightarrow 0} \omega(\xi_1 \pm i, \xi_1 \pm i) = 1 - 2 \ln 2, \quad (6.2.51a)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \omega^{(0,1)}(\xi_1 \mp i, \xi_1 \pm i) = \lim_{T \rightarrow 0} \omega^{(1,0)}(\xi_1 \pm i, \xi_1 \mp i) = \pm \frac{1}{2i} \left(\frac{5}{2} - 4 \ln 2 \right), \quad (6.2.51b)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \omega^{(1,1)}(\xi_1 \pm i, \xi_1 \mp i) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 2 \ln 2 + \frac{\pi^2}{6} \right). \quad (6.2.51c)$$

Somit lautet der Nulltemperatur-Limes von (6.2.42) und (6.2.43) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} g(\xi_1, \xi_2) &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow 0} h(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{\lim_{T \rightarrow 0} (1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y^{-1}(\xi_2))}{12} \frac{\pi^2}{16 \sinh^2 \left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - \xi_2) \right)} \\ &= -\frac{\pi^2}{48} \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - \xi_2) \right)}, \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass die ω -Funktion im Nulltemperatur-Limes nur von der Differenz der Argumente abhängt. Weiterhin wurden die Funktionalgleichungen der Digamma-Funktion

$$\Psi(1 - x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x)$$

und

$$\Psi(x + 1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}$$

verwendet. Im homogenen Limes $\xi_2 \rightarrow \xi_1$ ist zwar die Funktion $h(\xi_1, \xi_2)$ im Nulltemperatur-Limes singular, jedoch die Funktion $H(\xi_1, \xi_2)$ (siehe (6.2.9)) nicht. Die Nulltemperatur-Limites der Funktionen $\rho_j(0, 0)$ sind durch

$$\lim_{T \rightarrow 0} \rho_1(0, 0) = \frac{1}{2} - \frac{2}{45} \pi^2, \quad (6.2.52a)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \rho_2(0, 0) = -\frac{19}{18} + \frac{14}{135} \pi^2, \quad (6.2.52b)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \rho_3(0, 0) = -\frac{1}{9} + \frac{4}{135} \pi^2 \quad (6.2.52c)$$

gegeben. Diese Ergebnisse des Nulltemperatur-Limes können durch die Riemannschen ζ -Funktion mit geraden Argumenten ausgedrückt werden, $\zeta(0) = -1/2$ und $\zeta(2) = \pi^2/6$. Es folgt

$$\rho_1(0, 0) \rightarrow -\zeta(0) - \frac{12}{45} \zeta(2), \quad \rho_2(0, 0) \rightarrow \frac{19}{9} \zeta(0) + \frac{28}{45} \zeta(2), \quad \rho_3(0, 0) \rightarrow \frac{2}{9} \zeta(0) + \frac{8}{45} \zeta(2). \quad (6.2.53)$$

Der Hochtemperatur-Limes

Aus Gleichung (4.2.52) folgt für die Hochtemperatur-Entwicklung der ω -Funktion:

$$\begin{aligned} \omega(x, \mu) &= -\frac{1}{T} \frac{(x - \mu)^2 + 4}{2i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{4 \cosh \left(\frac{\pi}{2}(x - x') \right)} \frac{1}{16} \left[g_0^{(0)}(x', \mu) y_1(x') + 12g_1^{(0)}(x', \mu) \right] \right. \\ &+ \left. \frac{1}{64T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{4 \cosh \left(\frac{\pi}{2}(x - x') \right)} \left[g_0^{(0)}(x', \mu) (4y_2(x') - y_1^2(x')) + 4g_1^{(0)}(x', \mu) y_1(x') + 48g_2^{(0)}(x', \mu) \right] \right\} \\ &+ \mathcal{O}(T^{-3}) = -\frac{1}{T} \frac{64J}{(9 + x^2)(9 + \mu^2)} + \mathcal{O}(T^{-2}). \quad (6.2.54) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\rho_1(0, 0) = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} \frac{J}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}), \quad \rho_2(0, 0) = -\frac{1}{9} \frac{J}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}), \quad \rho_3(0, 0) = \frac{2}{9} \frac{J}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}).$$

6.2.4. Integraldarstellungen der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen

In diesem Kapitel sollen für die Funktionen $\rho_j(\xi_1, \xi_2)$ für $\xi_2 \rightarrow \xi_1$ Integralgleichungen bestimmt werden. Mittels der Integralgleichung (6.2.34) folgt

$$\omega(\xi_1 \pm i, \xi_1 \pm i) = \frac{1}{2} \left(1 - 4 \ln 2 + \frac{2}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right) \pm 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi_1 \pm i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)}, \quad (6.2.55a)$$

wobei hier die Kurzschreibweise

$$\tilde{G}_{\xi \pm i}^{(0)}(x') := \tilde{G}_{\mu}^{(0)}(x') \Big|_{\mu=\xi \pm i, \theta=\mp 1}$$

verwendet wird. Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} \omega^{(1,0)}(\xi_1 \pm i, \xi_1 \mp i) &= \pm \frac{1}{2i} \left(1 - 4 \ln 2 + \frac{3}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right) \\ &+ 2i \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \pm \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \frac{(\xi_1 - \mu)(\xi_1 - \mu \pm 4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{x'} \tilde{G}_{\mu \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \end{aligned} \quad (6.2.55b)$$

sowie

$$\begin{aligned} \omega^{(0,1)}(\xi_1 \pm i, \xi_1 \mp i) &= \mp \frac{1}{2i} \left(1 - 4 \ln 2 + \frac{3}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \mp 4i \frac{\partial_{\xi_1} \ln y(\xi_1)}{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y(\xi_1))} \right) \\ &- 2i \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \pm \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \frac{(\xi_1 - \mu)(\xi_1 - \mu \pm 4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \tilde{G}_{\mu \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \end{aligned} \quad (6.2.55c)$$

als auch

$$\begin{aligned} \omega^{(1,1)}(\xi_1 \pm i, \xi_1 \mp i) &= -\frac{1}{2} \left(1 + 2 \ln 2 - \frac{3 + \pi^2}{3} \frac{1}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \pm 3i \frac{\partial_{\xi_1} \ln y(\xi_1)}{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y(\xi_1))} \right) \\ &\mp \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} + 2i \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \tilde{G}_{\mu}^{(0)}(x') \Big|_{\mu=\xi_1 \mp i} - \partial_{x'} \tilde{G}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \\ &\pm \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \frac{(\xi_1 - \mu)(\xi_1 - \mu \pm 4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \partial_{x'} \tilde{G}_{\mu \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)}. \end{aligned} \quad (6.2.55d)$$

Die Funktionen $\tilde{g}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x) := (1 + y^{-1}(x)) \tilde{G}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x)$ erfüllen dabei die Integralgleichungen

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x) \\ g_{\xi_1 \mp i}^{(+)}(x) \\ g_{\xi_1 \mp i}^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x - \xi_1)\right)} \left[1 - \frac{1 + y^{-1}(x)}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right] \\ \mp \frac{\pi}{4} \frac{x - \xi_1 - i(\tilde{\epsilon} \mp 1)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x - \xi_1 - i\tilde{\epsilon})\right)} \frac{1}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \\ \mp \frac{\pi}{4} \frac{x - \xi_1 + i(\tilde{\epsilon} \pm 1)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}(x - \xi_1 + i\tilde{\epsilon})\right)} \frac{1}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \tilde{g}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x) \\ g_{\xi_1 \mp i}^{(+)}(x) \\ g_{\xi_1 \mp i}^{(-)}(x) \end{pmatrix}. \quad (6.2.56)$$

Dementsprechend können die Integralgleichungen für die Funktionen

$$\partial_x \tilde{g}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x), \partial_x g_{\xi_1 \mp i}^{(+)}(x), \partial_x g_{\xi_1 \mp i}^{(-)}(x)$$

sowie

$$\partial_{\xi_1} \tilde{g}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x), \partial_{\xi_1} g_{\xi_1 \mp i}^{(+)}(x), \partial_{\xi_1} g_{\xi_1 \mp i}^{(-)}(x)$$

als auch

$$\partial_x \partial_{\xi_1} \tilde{g}_{\xi_1 \mp i}^{(0)}(x), \partial_x \partial_{\xi_1} g_{\xi_1 \mp i}^{(+)}(x), \partial_x \partial_{\xi_1} g_{\xi_1 \mp i}^{(-)}(x)$$

aus (6.2.33) formal durch Ableiten nach den jeweiligen Spektralparametern bestimmt werden. Analog lässt sich die Funktion $\partial_x \ln y(x)$ durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \partial_x \ln y(x) \\ \partial_x \ln \mathfrak{b}_{\tilde{\epsilon}}(x) \\ \partial_x \ln \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\epsilon}}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J\pi^2 \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x - i\tilde{\epsilon})\right)}{T \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}(x - i\tilde{\epsilon})\right)} \\ J\pi^2 \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}(x + i\tilde{\epsilon})\right)}{T \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}(x + i\tilde{\epsilon})\right)} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \partial_x \ln y(x) \\ \frac{1 + y^{-1}(x)}{1 + \mathfrak{b}_{\tilde{\epsilon}}(x)} \\ \frac{1 + \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\epsilon}}(x)}{1 + \bar{\mathfrak{b}}_{\tilde{\epsilon}}(x)} \end{pmatrix} \quad (6.2.57)$$

bestimmen. Aus Kombinationen obiger Integralausdrücke lassen sich durch Ausnutzen der Symmetrieeigenschaften (6.2.48a) einfachere Relationen finden. Es folgt

$$\omega(\xi + i, \xi + i) + \omega(\xi - i, \xi - i) = 1 - 4 \ln 2 + \frac{2}{1 + y^{-1}(\xi)} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x') - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi - x')\right)}, \quad (6.2.58a)$$

$$\omega(\xi + i, \xi + i) - \omega(\xi - i, \xi - i) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x') + \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi - x')\right)}, \quad (6.2.58b)$$

wobei per Definition

$$\widehat{G}_{\xi}^{(0)}(x) = \sum_{\sigma=\pm 1} (1 + y^{-1}(\mu + i\theta)) \tilde{G}_{\mu}^{(0)}(x) \Big|_{\substack{\mu=\xi+i\sigma \\ \theta=-\sigma}} = (1 + y^{-1}(\xi)) \sum_{\sigma=\pm 1} \tilde{G}_{\mu}^{(0)}(x) \Big|_{\substack{\mu=\xi+i\sigma \\ \theta=-\sigma}}, \quad (6.2.59a)$$

$$\widehat{G}_{\xi}^{(\pm)}(x) = \sum_{\sigma=\pm 1} (1 + y^{-1}(\mu + i\theta)) G_{\mu}^{(\pm)}(x) \Big|_{\substack{\mu=\xi+i\sigma \\ \theta=-\sigma}} = (1 + y^{-1}(\xi)) \sum_{\sigma=\pm 1} G_{\mu}^{(\pm)}(x) \Big|_{\substack{\mu=\xi+i\sigma \\ \theta=-\sigma}}, \quad (6.2.59b)$$

gilt und

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^{(1,0)}(\xi \pm i, \xi \mp i) - \omega^{(0,1)}(\xi \mp i, \xi \pm i) \\ &= \pm \lim_{\mu \rightarrow \xi} \frac{\xi - \mu}{2} \left[(\xi - \mu \pm 4i) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{x'} \tilde{G}_{\mu \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi - x')\right)} + (\xi - \mu \mp 4i) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \tilde{G}_{\mu \pm i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi - x')\right)} \right] \\ &\quad - 2 \frac{\partial_{\xi} \ln y(\xi)}{(1 + y^{-1}(\xi))(1 + y(\xi))} + 2i \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi \mp i}^{(0)}(x') + \tilde{G}_{\xi \pm i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi - x')\right)}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \pm \lim_{\mu \rightarrow \xi} \frac{(\xi - \mu)(\xi - \mu \pm 4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{x'} \tilde{G}_{\mu \mp i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi - x')\right)} \\ = 2 \frac{\partial_{\xi} \ln y(\xi)}{(1 + y^{-1}(\xi))(1 + y(\xi))} - i [\omega(\xi + i, \xi + i) - \omega(\xi - i, \xi - i)] \\ \mp \lim_{\mu \rightarrow \xi} \frac{(\xi - \mu)(\xi - \mu \mp 4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \tilde{G}_{\mu \pm i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi - x')\right)}, \quad (6.2.60) \end{aligned}$$

und folglich, konsistent mit der Symmetrie (6.2.48a),

$$\begin{aligned} \omega^{(1,0)}(\xi_1 \pm i, \xi_1 \mp i) &= \pm \frac{1}{2i} \left(1 - 4 \ln 2 + \frac{3}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \pm 4i \frac{\partial_{\xi_1} \ln y(\xi_1)}{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y(\xi_1))} \right) \\ &\quad - 2i \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi_1 \pm i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \mp \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \frac{(\xi_1 - \mu)(\xi_1 - \mu \mp 4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \tilde{G}_{\mu \pm i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)}. \end{aligned} \quad (6.2.61)$$

Wegen der Symmetrie (6.2.48a) lässt sich für die Funktion $\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)$ alternativ der Ausdruck

$$\begin{aligned} \omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) &= -\frac{1}{2} \left(1 + 2 \ln 2 - \frac{3 + \pi^2}{3} \frac{1}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right) \\ &\quad + 2i \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \left[\tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') + \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x') \right] \Big|_{\mu=\xi_1} - \partial_{x'} \left[\tilde{G}_{\xi_1+i}^{(0)}(x') + \tilde{G}_{\xi_1-i}^{(0)}(x') \right]}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\tilde{G}_{\xi_1+i}^{(0)}(x') - \tilde{G}_{\xi_1-i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} + \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \frac{(\xi_1 - \mu)^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \partial_{x'} \left[\tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x') - \tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') \right]}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \\ &\quad + 2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \partial_{x'} \left[\tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x') + \tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') \right]}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)}. \end{aligned} \quad (6.2.62)$$

angeben. Aus den Integralgleichungen (6.2.58) und (C.0.6) folgt die Relation

$$\omega(x - i, x - i) + \omega(x + i, x + i) - i \left[\omega^{(1,0)}(x + i, x - i) - \omega^{(1,0)}(x - i, x + i) \right]$$

$$= -\frac{1}{1+y^{-1}(x)} - \lim_{\mu \rightarrow x} \left\{ \frac{(x-\mu)^2}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} [\tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') + \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))} \right. \\ \left. - 2(x-\mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} [\tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') - \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))} \right\}.$$

Die Funktion

$$\mathfrak{G}_{\mu}^{(0)}(x) := \partial_{\mu} [\tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x) + \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x)]$$

erfüllt dabei das Integralgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} (1+y^{-1}(x))\mathfrak{G}_{\mu}^{(0)}(x) \\ (1+\mathfrak{b}_{\varepsilon}^{-1}(x))\mathfrak{G}_{\mu}^{(+)}(x) \\ (1+\overline{\mathfrak{b}}_{\varepsilon}^{-1}(x))\mathfrak{G}_{\mu}^{(-)}(x) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i\pi^2}{4} \frac{\sinh(\frac{\pi}{2}(x-\mu-i\varepsilon))}{\cosh^2(\frac{\pi}{2}(x-\mu-i\varepsilon))} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu)} - \frac{i\pi}{2} \frac{1}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\mu-i\varepsilon))} \frac{\partial_{\mu} \ln y(\mu)}{(1+y(\mu))(1+y^{-1}(\mu))} \\ -\frac{i\pi^2}{4} \frac{\sinh(\frac{\pi}{2}(x-\mu+i\varepsilon))}{\cosh^2(\frac{\pi}{2}(x-\mu+i\varepsilon))} \frac{1}{1+y^{-1}(\mu)} - \frac{i\pi}{2} \frac{1}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\mu+i\varepsilon))} \frac{\partial_{\mu} \ln y(\mu)}{(1+y(\mu))(1+y^{-1}(\mu))} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_{\mu}^{(0)} \\ \mathfrak{G}_{\mu}^{(+)} \\ \mathfrak{G}_{\mu}^{(-)} \end{pmatrix} (x), \quad (6.2.63)$$

wobei

$$\mathfrak{G}_{\mu}^{(\pm)}(x) := \partial_{\mu} [G_{\mu+i}^{(\pm)}(x) + G_{\mu-i}^{(\pm)}(x)].$$

Offensichtlich sind die Funktionen $\mathfrak{G}_{\mu}^{(0)}(x)$ und $\mathfrak{G}_{\mu}^{(\pm)}(x)$ im Limes $\mu \rightarrow x$ regulär, weshalb der Term

$$\lim_{\mu \rightarrow x} (x-\mu)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} [\tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') + \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))}$$

verschwindet. Folglich gilt

$$\lim_{\mu \rightarrow x} (x-\mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} [\tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') - \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))} = \frac{i \lim_{\mu \rightarrow x} \hat{G}_{\mu}^{(0)}(x)}{1+y^{-1}(x)}.$$

Daraus lässt sich die Identität

$$\lim_{\mu \rightarrow x} \frac{(x-\mu)(x-\mu+4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x')}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))} \\ + \lim_{\mu \rightarrow x} \frac{(x-\mu)(x-\mu-4i)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} \tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x')}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))} = \frac{2 \lim_{\mu \rightarrow x} \hat{G}_{\mu}^{(0)}(x)}{1+y^{-1}(x)}$$

herleiten. Mit den Integralgleichungen (6.2.55) folgt der Ausdruck

$$\omega^{(1,0)}(x \pm i, x \mp i) = \mp \frac{1}{2i} \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow x} \hat{G}_{\mu}^{(0)}(x) - 1}{1+y^{-1}(x)} + \frac{2\partial_x \ln y(x)}{(1+y^{-1}(x))(1+y(x))} \mp i\omega(x \pm i, x \pm i) \\ + i \lim_{\mu \rightarrow x} (x-\mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} [\tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') + \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))}, \quad (6.2.64)$$

wobei

$$\lim_{\mu \rightarrow x} (x-\mu)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_{\mu} [\tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') - \tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))} = \lim_{\mu \rightarrow x} (x-\mu) \frac{i\hat{G}_{\mu}^{(0)}(x)}{1+y^{-1}(x)} = 0$$

benutzt wurde. Daraus folgt

$$\omega^{(1,0)}(x+i, x-i)\omega^{(1,0)}(x-i, x+i) - \omega(x+i, x+i)\omega(x-i, x-i) \\ = f^{(+)}(x)f^{(-)}(x) - i [\omega(x+i, x+i)f^{(-)}(x) - \omega(x-i, x-i)f^{(+)}(x)] \quad (6.2.65)$$

mit

$$f^{\pm}(x) := \mp \frac{1}{2i} \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow x} \hat{G}_{\mu}^{(0)}(x) - 1}{1+y^{-1}(x)} + \frac{2\partial_x \ln y(x)}{(1+y^{-1}(x))(1+y(x))} + i \lim_{\mu \rightarrow x} (x-\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' \mathfrak{G}_{\mu}^{(0)}(x')}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-x'))}.$$

Aus (6.2.49) folgt

$$\rho_1(\xi_1, \xi_1) = \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2}{240} \left\{ \frac{16(4 - 3y^{-1}(\xi_1))}{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2} - \frac{32i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1 + y^{-1}(\xi_1)} + 32f^{(+)}(\xi_1)f^{(-)}(\xi_1) \right. \\ \left. - 32 \left(i \left[\omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i)f^{(-)}(\xi_1) - \omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i)f^{(+)}(\xi_1) \right] + 2 \frac{\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right) \right\}, \quad (6.2.66a)$$

$$\rho_2(\xi_1, \xi_1) = \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2}{90} \left\{ -\frac{2(23 - 21y^{-1}(\xi_1))}{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2} + \frac{48i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1 + y^{-1}(\xi_1)} - 28f^{(+)}(\xi_1)f^{(-)}(\xi_1) \right. \\ \left. + 28 \left(i \left[\omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i)f^{(-)}(\xi_1) - \omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i)f^{(+)}(\xi_1) \right] + 2 \frac{\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right) \right\}, \quad (6.2.66b)$$

$$\rho_3(\xi_1, \xi_1) = \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2}{90} \left\{ \frac{4(1 + 3y^{-1}(\xi_1))}{(1 + y^{-1}(\xi_1))^2} - \frac{12i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1 + y^{-1}(\xi_1)} - 8f^{(+)}(\xi_1)f^{(-)}(\xi_1) \right. \\ \left. + 8 \left(i \left[\omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i)f^{(-)}(\xi_1) - \omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i)f^{(+)}(\xi_1) \right] + 2 \frac{\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right) \right\}, \quad (6.2.66c)$$

wobei die Symmetrie (6.2.48a) verwendet wurde und

$$f^{(+)}(\xi_1)f^{(-)}(\xi_1) = \left(\frac{2\partial_{\xi_1} \ln y(\xi_1)}{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y(\xi_1))} + i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\mathfrak{G}_\mu^{(0)}(x')}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))} \right)^2 \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{2i \lim_{\mu \rightarrow x} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1) - 1}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right)^2 \quad (6.2.67a)$$

sowie

$$i(1 + y^{-1}(\xi_1)) \left[\omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i)f^{(-)}(\xi_1) - \omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i)f^{(+)}(\xi_1) \right] + 2\omega^{(1,1)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i) \\ = \left(\frac{4i\partial_{\xi_1} \ln y(\xi_1)}{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y(\xi_1))} - 2 \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' \mathfrak{G}_\mu^{(0)}(x')}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' \widehat{G}_{\xi_1}^{(0)}(x')}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))} \\ + 2i \lim_{\mu \rightarrow x} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1) \left[\frac{1}{2} \left(1 - 4 \ln 2 + \frac{2}{1 + y^{-1}(\xi_1)} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\widetilde{G}_{\xi_1+i}^{(0)}(x') - \widetilde{G}_{\xi_1-i}^{(0)}(x')}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))} \right] \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\widetilde{G}_{\xi_1+i}^{(0)}(x') - \widetilde{G}_{\xi_1-i}^{(0)}(x')}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))} + 4i \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\mathfrak{G}_{\xi_1}^{(0)}(x') - \partial_{x'} [\widetilde{G}_{\xi_1+i}^{(0)}(x') + \widetilde{G}_{\xi_1-i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))} \\ + \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_\mu \partial_{x'} [\widetilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x') - \widetilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))} \\ + 4i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_\mu \partial_{x'} [\widetilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x') + \widetilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x')]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))} + \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{1 + y^{-1}(\xi_1)} - \frac{3}{2} \quad (6.2.67b)$$

gilt. Um nun die Funktionen $\rho_j(\xi_1, \xi_1)$ für endliche Temperatur angeben zu können, müssen zunächst die Integralgleichungen der Funktionen

- $y(x)$, siehe nichtlineare Integralgleichungen (4.1.44),
- $\partial_x \ln y(x)$, siehe lineare Integralgleichungen (6.2.57),
- $\widehat{G}_\xi^{(0)}(x)$, siehe lineare Integralgleichungen (4.3.8),
- $\widetilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \widetilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x)$,
- $\mathfrak{G}_\xi^{(0)}(x) = \partial_\xi [\widetilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) + \widetilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x)]$, siehe lineares Integralgleichungs-System (6.2.63),

- $\partial_x \left[\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) + \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right] = \frac{1}{1+y^{-1}(\xi)} \partial_x \widehat{G}_{\xi}^{(0)}(x),$
- $\partial_{\xi} \partial_x \left[\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) + \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right] = \partial_x \mathfrak{G}_{\xi}^{(0)}(x)$

gelöst werden. Mittels (6.2.56) folgt für die Funktion $\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x)$ das lineare Integralgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} (1+y^{-1}(x)) \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right) \\ (1+\mathfrak{b}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \left(G_{\xi+i}^{(+)}(x) - G_{\xi-i}^{(+)}(x) \right) \\ (1+\overline{\mathfrak{b}}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \left(G_{\xi+i}^{(-)}(x) - G_{\xi-i}^{(-)}(x) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\sinh(\frac{\pi}{2}(x-\xi))} \left[1 - \frac{1+y^{-1}(x)}{1+y^{-1}(\xi)} \right] \\ \frac{\pi}{2} \frac{x-\xi-i\bar{\epsilon}}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\epsilon}))} \frac{1}{1+y^{-1}(\xi)} \\ \frac{\pi}{2} \frac{x-\xi+i\bar{\epsilon}}{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\epsilon}))} \frac{1}{1+y^{-1}(\xi)} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \\ G_{\xi+i}^{(+)}(x) - G_{\xi-i}^{(+)}(x) \\ G_{\xi+i}^{(-)}(x) - G_{\xi-i}^{(-)}(x) \end{pmatrix}. \quad (6.2.68)$$

Ableiten bzgl. ξ liefert

$$\begin{pmatrix} (1+y^{-1}(x)) \partial_{\xi} \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right) \\ (1+\mathfrak{b}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \partial_{\xi} \left(G_{\xi+i}^{(+)}(x) - G_{\xi-i}^{(+)}(x) \right) \\ (1+\overline{\mathfrak{b}}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \partial_{\xi} \left(G_{\xi+i}^{(-)}(x) - G_{\xi-i}^{(-)}(x) \right) \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \partial_{\xi} \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right) \\ \partial_{\xi} \left(G_{\xi+i}^{(+)}(x) - G_{\xi-i}^{(+)}(x) \right) \\ \partial_{\xi} \left(G_{\xi+i}^{(-)}(x) - G_{\xi-i}^{(-)}(x) \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{2} \frac{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi))}{\sinh^2(\frac{\pi}{2}(x-\xi))} \left(1 - \frac{1+y^{-1}(x)}{1+y^{-1}(\xi)} \right) - \frac{\pi}{\sinh(\frac{\pi}{2}(x-\xi))} \frac{(1+y^{-1}(x)) \partial_{\xi} \ln y(\xi)}{(1+y^{-1}(\xi))(1+y(\xi))} \\ \frac{[-2\pi + \pi^2(x-\xi-i\bar{\epsilon}) \tanh(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\epsilon}))](1+y(\xi)) + 2\pi(x-\xi-i\bar{\epsilon}) \partial_{\xi} \ln y(\xi)}{4(1+y(\xi))(1+y^{-1}(\xi)) \cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\epsilon}))} \\ \frac{[-2\pi + \pi^2(x-\xi+i\bar{\epsilon}) \tanh(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\epsilon}))](1+y(\xi)) + 2\pi(x-\xi+i\bar{\epsilon}) \partial_{\xi} \ln y(\xi)}{4(1+y(\xi))(1+y^{-1}(\xi)) \cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\epsilon}))} \end{pmatrix}. \quad (6.2.69)$$

Dieses Integralgleichungs-System ist im Limes $\xi \rightarrow x$ ($\bar{\epsilon} \rightarrow 0$) regulär. Dies ist für den ersten Eintrag des „Driving“-Termes zunächst nicht ersichtlich, jedoch zeigt eine Analyse mittels L'Hospital, dass der Grenzwert $\xi \rightarrow x$ existiert;

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x} \left[\frac{\pi^2}{2} \frac{\cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi))}{\sinh^2(\frac{\pi}{2}(x-\xi))} \left(1 - \frac{1+y^{-1}(x)}{1+y^{-1}(\xi)} \right) - \frac{\pi}{\sinh(\frac{\pi}{2}(x-\xi))} \frac{(1+y^{-1}(x)) \partial_{\xi} \ln y(\xi)}{(1+y^{-1}(\xi))(1+y(\xi))} \right] \\ = (1+y^{-1}(x)) \partial_{x^2}^2 \left(\frac{y(x)}{1+y(x)} \right) = \frac{(1-y(x)) [\partial_x \ln y(x)]^2 + (1+y(x)) \partial_{x^2}^2 \ln y(x)}{(1+y(x))^2}. \end{aligned}$$

Wegen der Zusammenhänge

$$(1+y^{-1}(x)) \partial_x \widehat{G}_{\xi}^{(0)}(x) = \partial_x \left[(1+y^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(0)}(x) \right] + (1+y^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(0)}(x) \frac{\partial_x \ln y(x)}{1+y(x)}, \quad (6.2.70a)$$

$$(1+\mathfrak{b}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \partial_x \widehat{G}_{\xi}^{(+)}(x) = \partial_x \left[(1+\mathfrak{b}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(+)}(x) \right] + (1+\mathfrak{b}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(+)}(x) \frac{\partial_x \ln \mathfrak{b}_{\bar{\epsilon}}(x)}{1+\mathfrak{b}_{\bar{\epsilon}}(x)}, \quad (6.2.70b)$$

$$(1+\overline{\mathfrak{b}}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \partial_x \widehat{G}_{\xi}^{(-)}(x) = \partial_x \left[(1+\overline{\mathfrak{b}}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(-)}(x) \right] + (1+\overline{\mathfrak{b}}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(-)}(x) \frac{\partial_x \ln \overline{\mathfrak{b}}_{\bar{\epsilon}}(x)}{1+\overline{\mathfrak{b}}_{\bar{\epsilon}}(x)} \quad (6.2.70c)$$

lässt sich die Funktion $\partial_x \widehat{G}_{\xi}^{(0)}(x)$ formal über die Integralgleichungs-Systeme (4.1.44), (6.2.57) sowie (4.3.8) als auch

$$\begin{pmatrix} \partial_x \left[(1+y^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(0)}(x) \right] \\ \partial_x \left[(1+\mathfrak{b}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(+)}(x) \right] \\ \partial_x \left[(1+\overline{\mathfrak{b}}_{\bar{\epsilon}}^{-1}(x)) \widehat{G}_{\xi}^{(-)}(x) \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\pi^2}{4} \frac{\sinh(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\epsilon}))}{\cosh^2(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\epsilon}))} \\ \frac{i\pi^2}{4} \frac{\sinh(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\epsilon}))}{\cosh^2(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\epsilon}))} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \partial_x \widehat{G}_{\xi}^{(0)}(x) \\ \partial_x \widehat{G}_{\xi}^{(+)}(x) \\ \partial_x \widehat{G}_{\xi}^{(-)}(x) \end{pmatrix} \quad (6.2.71)$$

lösen. Die Funktion $\partial_x \mathfrak{G}_\xi^{(0)}(x)$ wird in analoger Weise gelöst:

$$(1 + y^{-1}(x)) \partial_x \mathfrak{G}_\xi^{(0)}(x) = \partial_x \left[(1 + y^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(0)}(x) \right] + (1 + y^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(0)}(x) \frac{\partial_x \ln y(x)}{1 + y(x)}, \quad (6.2.72a)$$

$$(1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)) \partial_x \mathfrak{G}_\xi^{(+)}(x) = \partial_x \left[(1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(+)}(x) \right] + (1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(+)}(x) \frac{\partial_x \ln \mathfrak{b}_\varepsilon(x)}{1 + \mathfrak{b}_\varepsilon(x)}, \quad (6.2.72b)$$

$$(1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)) \partial_x \mathfrak{G}_\xi^{(-)}(x) = \partial_x \left[(1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(-)}(x) \right] + (1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(-)}(x) \frac{\partial_x \ln \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon(x)}{1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon(x)}. \quad (6.2.72c)$$

Aus (6.2.63) folgt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \partial_x \left[(1 + y^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(0)}(x) \right] \\ \partial_x \left[(1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(+)}(x) \right] \\ \partial_x \left[(1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)) \mathfrak{G}_\xi^{(-)}(x) \right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\pi^3 \cosh(\pi(x-\xi-i\bar{\varepsilon})) - 3}{16 \cosh^3(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\varepsilon}))} \frac{1}{1+y^{-1}(\xi)} + \frac{i\pi^2 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\varepsilon}))}{4 \cosh^2(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\varepsilon}))} \frac{\partial_\xi \ln y(\xi)}{(1+y^{-1}(\xi))(1+y(\xi))} \\ \frac{i\pi^3 \cosh(\pi(x-\xi+i\bar{\varepsilon})) - 3}{16 \cosh^3(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\varepsilon}))} \frac{1}{1+y^{-1}(\xi)} + \frac{i\pi^2 \sinh(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\varepsilon}))}{4 \cosh^2(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\varepsilon}))} \frac{\partial_\xi \ln y(\xi)}{(1+y^{-1}(\xi))(1+y(\xi))} \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \partial_x \mathfrak{G}_\xi^{(0)}(x) \\ \partial_x \mathfrak{G}_\xi^{(+)}(x) \\ \partial_x \mathfrak{G}_\xi^{(-)}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2.73)$$

Mit derselben Vorgehensweise folgt

$$(1 + y^{-1}(x)) \partial_x \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right) = \partial_x \left[(1 + y^{-1}(x)) \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right) \right] + (1 + y^{-1}(x)) \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right) \frac{\partial_x \ln y(x)}{1 + y(x)}, \quad (6.2.74a)$$

$$(1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)) \partial_x \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(+)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(+)}(x) \right) = \partial_x \left[(1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)) \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(+)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(+)}(x) \right) \right] + (1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)) \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(+)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(+)}(x) \right) \frac{\partial_x \ln \mathfrak{b}_\varepsilon(x)}{1 + \mathfrak{b}_\varepsilon(x)}, \quad (6.2.74b)$$

$$(1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)) \partial_x \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(-)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(-)}(x) \right) = \partial_x \left[(1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)) \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(-)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(-)}(x) \right) \right] + (1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)) \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(-)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(-)}(x) \right) \frac{\partial_x \ln \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon(x)}{1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon(x)}, \quad (6.2.74c)$$

wobei

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \partial_x \partial_\xi \left[(1 + y^{-1}(x)) \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right) \right] \\ \partial_x \partial_\xi \left[(1 + \mathfrak{b}_\varepsilon^{-1}(x)) \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(+)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(+)}(x) \right) \right] \\ \partial_x \partial_\xi \left[(1 + \bar{\mathfrak{b}}_\varepsilon^{-1}(x)) \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(-)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(-)}(x) \right) \right] \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \partial_x \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right) \\ \partial_x \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(+)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(+)}(x) \right) \\ \partial_x \partial_\xi \left(\tilde{G}_{\xi+i}^{(-)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(-)}(x) \right) \end{pmatrix} \\ & + \partial_x \begin{pmatrix} \frac{\pi^2 \cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi))}{2 \sinh^2(\frac{\pi}{2}(x-\xi))} \left[1 - \frac{1+y^{-1}(x)}{1+y^{-1}(\xi)} \right] - \frac{\pi}{\sinh(\frac{\pi}{2}(x-\xi))} \frac{(1+y^{-1}(x)) \partial_\xi \ln y(\xi)}{(1+y^{-1}(\xi))(1+y(\xi))} \\ \frac{[-2\pi + \pi^2(x-\xi-i\bar{\varepsilon}) \tanh(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\varepsilon}))](1+y(\xi)) + 2\pi(x-\xi-i\bar{\varepsilon}) \partial_\xi \ln y(\xi)}{4(1+y(\xi))(1+y^{-1}(\xi)) \cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi-i\bar{\varepsilon}))} \\ \frac{[-2\pi + \pi^2(x-\xi+i\bar{\varepsilon}) \tanh(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\varepsilon}))](1+y(\xi)) + 2\pi(x-\xi+i\bar{\varepsilon}) \partial_\xi \ln y(\xi)}{4(1+y(\xi))(1+y^{-1}(\xi)) \cosh(\frac{\pi}{2}(x-\xi+i\bar{\varepsilon}))} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2.75)$$

Da das obige Integralgleichungs-System (6.2.75) ebenfalls wie (6.2.69) im Limes $\xi \rightarrow x$ regulär ist, folgt, dass der Integralausdruck

$$\lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_\mu \partial_{x'} \left[\tilde{G}_{\mu-i}^{(0)}(x') - \tilde{G}_{\mu+i}^{(0)}(x') \right]}{4 \sinh(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x'))}$$

verschwindet. Daher muss zur Berechnung der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen $\rho_j(\xi_1, \xi_1)$ die Funktion

$$\partial_\xi \partial_x \left[\tilde{G}_{\xi+i}^{(0)}(x) - \tilde{G}_{\xi-i}^{(0)}(x) \right]$$

im Ausdruck (6.2.67b) nicht bestimmt werden. Zusammenfassend ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi_1, \xi_1) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{45}\pi^2 + \frac{(1+y^{-1}(\xi_1))^2}{45} \left\{ -6 \left(\frac{f_2(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} - f_1(\xi_1) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} (6 - 12 \ln 2) + \frac{3}{2} \left(\frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} \right)^2 - 9 \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{(1+y^{-1}(\xi_1))^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.2.76a)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\xi_1, \xi_1) &= -\frac{19}{18} + \frac{14}{135}\pi^2 + \frac{(1+y^{-1}(\xi_1))^2}{45} \left\{ +14 \left(\frac{f_2(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} - f_1(\xi_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} (19 - 28 \ln 2) - \frac{7}{2} \left(\frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} \right)^2 + 21 \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{(1+y^{-1}(\xi_1))^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.2.76b)$$

$$\begin{aligned} \rho_3(\xi_1, \xi_1) &= -\frac{1}{9} + \frac{4}{135}\pi^2 + \frac{(1+y^{-1}(\xi_1))^2}{45} \left\{ +4 \left(\frac{f_2(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} - f_1(\xi_1) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} (1 + 8 \ln 2) - \left(\frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{1+y^{-1}(\xi_1)} \right)^2 + 6 \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)}{(1+y^{-1}(\xi_1))^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.2.76c)$$

wobei

$$f_1(\xi_1) := \left(\frac{2\partial_{\xi_1} \ln y(\xi_1)}{(1+y^{-1}(\xi_1))(1+y(\xi_1))} + i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\mathfrak{G}_\mu^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \right)^2 \quad (6.2.76d)$$

und

$$\begin{aligned} f_2(\xi_1) &= \left(1 + 2i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} \widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1) \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\widetilde{G}_{\xi_1+i}^{(0)}(x') - \widetilde{G}_{\xi_1-i}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \\ &\quad + \left(\frac{4i\partial_{\xi_1} \ln y(\xi_1)}{(1+y^{-1}(\xi_1))(1+y(\xi_1))} - 2 \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' \mathfrak{G}_\mu^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' \widehat{G}_{\xi_1}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} \\ &\quad + 4i \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\mathfrak{G}_{\xi_1}^{(0)}(x') - \frac{1}{1+y^{-1}(\xi_1)} \partial_{x'} \widehat{G}_{\xi_1}^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)} + 4i \lim_{\mu \rightarrow \xi_1} (\xi_1 - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' \partial_{x'} \mathfrak{G}_\mu^{(0)}(x')}{4 \sinh\left(\frac{\pi}{2}(\xi_1 - x')\right)}. \end{aligned} \quad (6.2.76e)$$

Da im Nulltemperatur-Limes die Ausdrücke $f_1(\xi_1)$ und $f_2(\xi_1)$ sowie die Funktion $\widehat{G}_\mu^{(0)}(\xi_1)$ verschwinden, ist das Ergebnis (6.2.76) konsistent zu den in (6.2.52) bestimmten Nulltemperatur-Limites.

6.2.5. Die Innere Energie

Der lokale Hamilton-Operator $\widetilde{H}_{n,n+1}$ der Spin-1 XXX-Kette, (2.0.3b), kann durch die Operatoren $\mathbb{1}$, $P^{(1)}$ und P^- dargestellt werden. Es gilt

$$\frac{1}{J} \widetilde{H}_{n,n+1} = -\mathbb{1} + P^{(1)} - 6P^-. \quad (6.2.77)$$

Somit lautet der Erwartungswert gemäß (2.6.6) und (2.6.8) sowie (3.3.1)

$$\begin{aligned} e|_{h=0} &= \langle \widetilde{H}_{n,n+1} \rangle_{h=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \xi_2 \rightarrow 0} \text{Spur}_{n,n+1} \left\{ \widetilde{H}_{n,n+1} D^{[2]}(\xi_1, \xi_2) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \xi_2 \rightarrow 0} J \text{Spur}_{n,n+1} \left\{ \left(-\mathbb{1} + P^{(1)} - 6P^- \right) \left(\rho_1(\xi_1, \xi_2) \mathbb{1} + \rho_2(\xi_1, \xi_2) P^{(1)} + 3\rho_3(\xi_1, \xi_2) P^- \right) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1, \xi_2 \rightarrow 0} -6J (2\rho_1(\xi_1, \xi_2) + 3\rho_3(\xi_1, \xi_2)) \\ &= -\frac{J}{4} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} (1+y^{-1}(\xi_1))^2 \left\{ 3 - 8[\omega(\xi_1 - i, \xi_1 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_1 + i) - \omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)] \right. \\ &\quad \left. + 4\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)^2 + 8i [\omega^{(1,0)}(\xi_1 + i, \xi_1 - i) - \omega^{(1,0)}(\xi_1 - i, \xi_1 + i)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.78)$$

Explizit ergibt sich der Ausdruck für den Nulltemperatur-Limes mit (6.2.50a) und (6.2.50b)

$$e|_{T=0, h=0} = \langle \tilde{H}_{n, n+1} \rangle_{T=0, h=0} = -4J. \quad (6.2.79)$$

Dies steht in Übereinstimmung mit (4.1.52). Wird in Gleichung (6.2.78) mit (6.2.54) der Hochtemperatur-Limes durchgeführt, so ergibt sich

$$e|_{T \rightarrow \infty, h=0} = \langle \tilde{H}_{n, n+1} \rangle_{T \rightarrow \infty, h=0} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{4J}{3} - \frac{32J^2}{9} \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}) \right\} = -\frac{4J}{3}. \quad (6.2.80)$$

Dieses Ergebnis stimmt ebenfalls mit (4.1.64) überein und lässt sich ebenfalls mittels (2.6.1) im Limes $T \rightarrow \infty$ bzw. $\beta \rightarrow 0$ verifizieren bzw. über den Zugang in Anhang B, „Hochtemperatur-Entwicklung“, finden (vgl. (B.0.4)).

6.3. Äquivalenz der Zugänge 6.1.1 und 6.1.2

Im Folgenden wird für die Zweiplatz-Korrelationsfunktionen explizit bewiesen, dass die beiden verschiedenen Strategien zur Bestimmung der Dichte-Matrixelemente der Spin-1-Kette (2.0.3b) äquivalent sind und die in Kapitel 6.2.3 konstruierte ω -Funktion (6.2.24), die Funktion ist, welche den „physikalischen“ Anteil richtig beschreibt.

6.3.1. „Emptiness formation probability“

Wie bereits in (6.2.2) diskutiert, sind die nicht-verschwindenden Matrixelemente der Einplatz-Dichte-Matrix, und somit auch die EFP für $m = 1$ durch

$$P^{[2]1+}(\xi) = \frac{1}{3} \quad (6.3.1)$$

gegeben. Andererseits gilt aufgrund der Gleichungen (3.3.14) und (4.1.8a)

$$P^{[2]1+}(\xi) = (1 + y^{-1}(\xi)) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P^{[1]2+}(\zeta_1, \zeta_2) = (1 + y^{-1}(\xi)) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \omega(\zeta_1, \zeta_2) \right], \quad (6.3.2)$$

wobei hier die Darstellung (6.2.27) des Dichte-Operators $D^{[1]}(\zeta_1, \zeta_2)$ verwendet wurde.

Mit der Kenntnis der Funktionen der Zweiplatz-Dichte-Matrix $\rho_j(\xi_1, \xi_2)$, $j = 1, 2$, in faktorisierter Form (6.2.11), kann die EFP für $m = 2$, $D^{[2]++}(\xi_1, \xi_2)$, angegeben werden. Mit (6.2.47) folgt aus (6.2.3) der Ausdruck

$$\begin{aligned} P^{[2]2+}(\xi_1, \xi_2) = & \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y^{-1}(\xi_2))}{180\xi^2(4 + \xi^2)} \left\{ \frac{9}{4}(5\xi^2(4 + \xi^2)) \right. \\ & + \frac{3}{2}(128 - 20\xi^2 + 5\xi^4) (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & + 9\xi^2(16 + \xi^2) (\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)) \\ & + 6(4 + \xi^2) ((2i + \xi)(4i + \xi)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + (2i - \xi)(4i - \xi)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \\ & + (128 - 20\xi^2 + 5\xi^4) (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & + \frac{(16 + \xi^2)}{2} (\xi^2(16 + \xi^2) \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) \\ & \left. + (4 + \xi^2)^2 \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \right\}. \quad (6.3.3) \end{aligned}$$

Nach (3.3.14) ist die Zweiplatz-EFP des Spin-1-Systems andererseits durch

$$P^{[2]2+}(\xi_1, \xi_2) = (1 + y^{-1}(\xi_1))(1 + y^{-1}(\xi_2)) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P^{[1]4+}(\zeta_1, \dots, \zeta_4) \quad (6.3.4)$$

gegeben. Betrachtet man nun die Ausdrücke der Vierplatz-EFP nach [25, 26, 28] mit den Argumenten ζ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, und führt den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ durch, stimmen alle Polynom-Koeffizienten vor den entsprechenden ω - bzw. G -Funktionen mit denen der EFP $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P^{[1]4+}(\zeta_1, \dots, \zeta_4)$ überein. Dies bedeutet, dass für $m = 1, 2$ die EFP $P_m^{[1]}$ sich so wie die EFP des reinen Spin-1/2 isotropen Heisenberg-Modell verhält: die faktorisierten Ausdrücke bleiben erhalten; nur die bisherige Zweipunkt-Korrelationsfunktion $\omega(\xi_1, \xi_2)$ ist gegen die neue Funktion, definiert in (6.2.24), zu ersetzen. Diese erfüllt eine andere (diskrete) Funktional-

gleichung, nämlich (6.2.41) [25, 28, 93]. Dabei ist die zu verwendende Zweipunkt-Korrelationsfunktion $\omega(\xi_1, \xi_2)$ wie folgt gegen die in [25, 26, 28] gewählte Funktion $G(z_1, z_2)$, die den „physikalischen Anteil“ beschreibt, auszutauschen:

$$G\left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{2}\right) \rightleftharpoons \omega(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2}.$$

Analog zu (3.3.14) folgt aus (3.3.6) für die Zweipunkt-Korrelationsfunktion $D_{+-}^{[2]+-}(\xi_1, \xi_2)$ der Zusammenhang

$$D_{+-}^{[2]+-}(\xi_1, \xi_2) = (1 + y^{-1}(\xi_1)) (1 + y^{-1}(\xi_2)) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D_{++++}^{[1]++--}(\zeta_1, \dots, \zeta_4). \quad (6.3.5)$$

Andererseits ist diese Korrelationsfunktion durch $\rho_1(\xi_1, \xi_2) + \rho_3(\xi_1, \xi_2)$ gegeben. Also ist

$$\begin{aligned} D_{+-}^{[2]+-}(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{12} \frac{(1 + y^{-1}(\xi_1)) (1 + y^{-1}(\xi_2))}{15\xi^2 (4 + \xi^2)} \left\{ \frac{9}{4} (5\xi^2 (4 + \xi^2)) \right. \\ & + \frac{3}{2} (5\xi^4 + 60\xi^2 - 32) (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i) + \omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & + (5\xi^4 + 60\xi^2 - 32) (\omega(\xi_1 - i, \xi_1 + i)\omega(\xi_2 - i, \xi_2 + i)) \\ & - 3 (4 + \xi^2) ((\xi + 2i)(3\xi + 2i)\omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i) + (\xi - 2i)(3\xi - 2i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \\ & + 6\xi^2 (16 + \xi^2) (\omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i) + \omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i)) \\ & + \frac{(\xi^2 - 4)}{2} (\xi^2 (16 + \xi^2) \omega(\xi_1 - i, \xi_2 - i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 + i) \\ & \left. - (4 + \xi^2)^2 \omega(\xi_1 - i, \xi_2 + i)\omega(\xi_1 + i, \xi_2 - i)) \right\}. \quad (6.3.6) \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis stimmt mit den algebraischen Ausdrücken von [28] überein. Mit den beiden Korrelationsfunktionen (6.3.3) und (6.3.6) können alle Einträge der Zweiplatz-Dichte-Matrix des vollen Spin-1 XXX-Modells angegeben werden. Mit den in Kapitel 6.1.2 angemerkten Argumenten ist für beliebige (statische) Korrelationsfunktionen, auf einem Kettensegment m wirkend, die Faktorisierung der (totalen) Spin-1/2-Kette auf das Modell bzgl. der Dichte-Matrix $D^{[1]}(\zeta)$ übertragbar. Die eingeführte Zweipunkt-Korrelationsfunktion $\omega(x, \mu)$, (6.2.24), ist diejenige, die den „physikalischen Anteil“ der Dichte-Matrix der Spin-1 XXX-Kette (2.0.3b) korrekt beschreibt.

6.4. Der XXX Dreiplatz-Dichte-Operator für die Spin-1 Kette für verschwindendes Magnetfeld

Analog zum Ansatz (6.2.2) für die Zweiplatz-Dichte-Matrix lässt sich ebenfalls aus der „Intertwiner“-Bedingung (2.6.12) sowie mittels der Reduktionseigenschaft (2.6.13) als auch aufgrund der su_2 -Invarianz des Dichte-Operators folgender Ausdruck für die Dreiplatz-Dichte-Matrix rechtfertigen,

$$D^{[2]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\alpha=1}^{15} \rho_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3) P_\alpha. \quad (6.4.1)$$

Eine grafische Beschreibung der Projektoren P_α wird in Kapitel 6 in [68] gegeben. Hierbei sind nicht alle Dreipunkt-Funktionen $\rho_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ von einander unabhängig. Wegen der Spinumkehr-Symmetrie und Reflexion an der anti-diagonalen Linie sind lediglich sieben Dreipunkt-Funktionen unabhängig. Mit der in Abschnitt 6.1.2, „Diskrete Funktionalgleichungen des Dichte-Operators $D^{[1]}(\xi)$ “, beobachteten Erhaltung der Faktorisierung der Korrelationsfunktionen lassen sich die Koeffizienten $\rho_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ mittels der Sechsplatz-Korrelationsfunktionen der Spin-1/2-Kette berechnen. Die expliziten Ergebnisse der Dreiplatz-Korrelationsfunktionen werden in Anhang C in [68] bestimmt. Die Ergebnisse in [68] für die Dreiplatz-Korrelatoren sind gegen direkte Berechnungen für einige relevante Dichte-Matrixelemente für feste Trotterzahlen N geprüft worden [68].

6.5. Der XXX m -Platz-Dichte-Operator für die Spin-1 Kette für verschwindendes Magnetfeld

Wegen der in 6.1.2 beschriebenen „Selbst-Fusion“ des Hilfsgittersystems lassen sich die m -Platz-Dichte-Matrixeinträge der Spin-1-Kette $D^{[2]}(\xi)$ aus der faktorisierten Darstellung des Spin-1/2-Modelles bestimmen, wobei die Spin-1/2 Zweipunkt-Korrelationsfunktion gegen die ω -Funktion (6.2.24) bzw. (6.2.26) auszutauschen ist. Mit den Zusammenhängen (3.3.6) und (4.1.8a) sowie (6.2.31) ergeben sich mittels der Einträge der Hilfsdichte-Matrix $D^{[1]}(\zeta)$, wobei $\zeta := (\xi_1 - i, \xi_1 + i, \dots, \xi_m - i, \xi_m + i)$, die Matrixeinträge der Dichte-Matrix $D^{[2]}(\xi)$. Es gilt

$$\begin{aligned} D^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_m) &= \left[\prod_{j=1}^m \frac{4 y^{-1}(\xi_j)}{(1 - \omega(\xi_j - i, \xi_j + i))} \right] S^{\otimes m} D^{[1]}(\xi_1 - i, \xi_1 + i, \dots, \xi_m - i, \xi_m + i) S^{t \otimes m} \\ &= \left[\prod_{j=1}^m \frac{4}{3 + 2\omega(\xi_j - i, \xi_j + i)} \right] S^{\otimes m} D^{[1]}(\xi_1 - i, \xi_1 + i, \dots, \xi_m - i, \xi_m + i) S^{t \otimes m}. \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Somit lassen sich also über den Zugang in Kapitel 6.1.2 alle m -Platz-Korrelatoren der Spin-1 Quantenspin-Kette (2.0.3b) auf Grundlage der faktorisierten Form der Spin-1/2-Kette bestimmen.

6.6. Der XXX m -Platz-Dichte-Operator beliebigen Spins für verschwindendes Magnetfeld

Die Beobachtung in den vorangegangenen Abschnitten, Kapitel 6.3 bis Kapitel 6.5, lässt die Vermutung rechtfertigen, dass allgemein die Faktorisierung für den m -Platz-Dichte-Operator der per Fusion konstruierten integrierbaren Spin- s XXX -Kette erhalten bleibt:

Das heißt, es wird angenommen, dass die Dichte-Matrix $D^{[2s;1]}(\zeta)$, siehe (3.4.24) für $k = 1/2$, wobei $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{2sm})$, dieselbe algebraische Struktur wie die Dichte-Matrix $D^{[1;1]}(\zeta) \equiv D(\zeta)$ besitzt. Dann ergibt sich die m -Platz-Dichte-Matrix $D^{[2s;2s]}(\xi)$ durch (3.4.25), indem die Inhomogenitäten ζ_l wie folgt gesetzt werden,

$$\zeta_{2s(i-1)+k} := \xi_i - i(2s + 1 - 2k) \quad , \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad k \in \{1, \dots, 2s\}, \quad (6.6.1)$$

und die Zweipunkt-Funktion $\omega(x, \mu)$ durch

$$\omega^{[2s]}(x, \mu) := \text{Spur} \left\{ D^{[2s;1]}(x, \mu) P^{(1/2)} \right\} - \frac{1}{2} \quad (6.6.2)$$

ersetzt wird. Analog zu (6.2.19) folgt

$$\begin{aligned} \omega^{[2s]}(x, \mu) &= \frac{1}{2} - \frac{(x - \mu)^2 + 4}{2i} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \left\{ \Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x; \mu) \right\} \Big|_{\delta=0} \\ &= \frac{1}{2} - ((x - \mu)^2 + 4) \pi F(x - \mu) - \frac{(x - \mu)^2 + 4}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{G_{1\mu}^{(0)}(x')}{4 \cosh\left(\frac{\pi}{2}(x - x')\right)}. \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

Per Definition gilt analog zu (6.2.29) und (6.2.30)

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \omega^{[2s]}(x - i, x + i) &= \frac{\text{Spur} \left\{ D^{[2s;1]}(x - i, x + i) \mathcal{P}^+ \right\}}{\text{Spur} \left\{ D^{[2s;1]}(x - i, x + i) \right\}} \\ &= \frac{\langle \Psi | t^{[1]}(x) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | t^{[s; \frac{1}{2}]}(x - i) t^{[s; \frac{1}{2}]}(x + i) | \Psi \rangle} = \frac{1}{1 + y_1^{-1}(x)}, \quad \Leftrightarrow 1 + y_1^{-1}(x) = \frac{4}{3 + 2\omega^{[2s]}(x - i, x + i)}. \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

Umstellen der Gleichung liefert

$$1 + y_1(x) = \frac{4}{1 - \omega^{[2s]}(x - i, x + i)}. \quad (6.6.5)$$

Somit folgt für (3.4.25) der Ausdruck

$$D^{[2s,2s]}(\xi) = \prod_{j=1}^m \frac{\prod_{k=1}^{2s-1} \frac{4}{1 - \omega^{[2s]}(\xi_j - 2i(s-k) - i, \xi_j - 2i(s-k) + i)}}{y_{2s-1}(\xi_j)} \left(S^{[s]}\right)^{\otimes m}$$

$$D^{[2s;1]}(\xi_1 - i(2s-1), \dots, \xi_1 + i(2s-1), \dots, \xi_m - i(2s-1), \dots, \xi_m + i(2s-1)) \left(\left(S^{[s]}\right)^t\right)^{\otimes m}, \quad (6.6.6)$$

welcher unter oben genannter Annahme lediglich von einer Zweipunkt-Funktion $\omega^{[2s]}(\xi_1, \xi_2)$ abhängt. Die Funktion $y_{2s-1}(x)$ ist durch ein nichtlineares Integralgleichungs-System, Gleichung (25) in [100], bestimmt.

Da es sich um ein su_2 -invariantes Modell handelt, gilt wie im Spin-1-Fall für den Zweiplatz-Dichte-Operator $D^{[2s,2s]}(\xi_1, \xi_2)$ die Symmetrie

$$D^{[2s,2s]}(\xi_1, \xi_2) = D^{[2s,2s]}(\xi_2, \xi_1),$$

weshalb die Einträge der Dichte-Matrix multipliziert mit dem Produkt der normierten Eigenwerte $\Lambda_{2s}(\xi_1)\Lambda_{2s}(\xi_2)$, siehe (3.4.14), symmetrische Polynome in ξ_1 und ξ_2 vom Grad $(2s N)$ sind. Wegen der Symmetrie hat jedes Polynom $(2s N + 1)(s N + 1)$ unabhängige Koeffizienten. Wird der Spektralparameter ξ_1 beliebig gewählt, dann liefert die Funktionalgleichung (6.1.3) für $\xi_2 \in \{\nu_{\overline{1}}, \dots, \nu_{\overline{N}}\}$ insgesamt $(2s N + 1)N$ -viele und die Asymptotik weitere $(2s N + 1)$ -viele Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten. Es sind also weitere Symmetrie-Eigenschaften nötig, welche weitere linear unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten liefern, damit die Matrixeinträge eindeutig bestimmt werden können.

Der XXZ -Dichte-Operator bei endlicher Temperatur mit Magnetfeld und Alpha-Parameter

In diesem Kapitel soll die Formulierung der Funktionalgleichungen in Kapitel 6.1.1 für das anisotrope Modell (2.0.1) bzw. (2.0.2) verallgemeinert werden.

7.1. Diskrete Funktionalgleichung für verschwindenden Alpha-Parameter

Analog zum isotropen Fall in Kapitel 6.1.1 werden die Vektoren

$$h_m^{[1]}(\boldsymbol{\xi}) := h_m^{[1]}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) := (D(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{1}^{\otimes m}) (\mathcal{S}_m^{[\frac{1}{2}]}) , \quad (7.1.1a)$$

$$h_m^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) := h_m^{[2]}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) := (D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{1}^{\otimes m}) (\mathcal{S}_m^{[1]}) \quad (7.1.1b)$$

für den XXZ -Fall wie zuvor definiert. Der Operator $A_m^{(j)[s]}(\boldsymbol{\xi})$ ist durch

$$\begin{aligned} A_m^{(j)[s]}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{C^{[s]}(\xi_j)} (-1)^m R_{j,j-1}^{[s,s]}(\xi_j - \eta, \xi_{j-1}) \cdots R_{j,1}^{[s,s]}(\xi_j - \eta, \xi_1) R_{j,j+1}^{[s,s]}(\xi_j - \eta, \xi_{j+1}) \cdots \\ &\cdots R_{j,m}^{[s,s]}(\xi_j - \eta, \xi_{j+1}) P_{j,j} R_{j,m}^{[s,s]}(\xi_j, \xi_m) \cdots R_{j,j+1}^{[s,s]}(\xi_j, \xi_{j+1}) R_{j,1}^{[s,s]}(\xi_j, \xi_1) \cdots R_{j,j-1}^{[s,s]}(\xi_j, \xi_{j-1}) \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

gegeben und erfüllt die Funktionalgleichung

$$A_m^{(j)[s]}(\boldsymbol{\xi}) h_m^{[2s]}(\boldsymbol{\xi}) = h_m^{[2s]}(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_j - \eta, \xi_{j+1}, \dots, \xi_m) . \quad (7.1.3)$$

Verwendet man jedoch die \mathcal{R} -Matrizen (3.1.5), welche sich nach der Eichtransformation (A.0.5) aus den \mathcal{R} -Matrizen definiert in (2.5.3) bzw. (3.1.7) ergaben, so gilt zwischen den Dichte-Operatoren die Beziehung

$$D(\boldsymbol{\xi}) = (V(\xi_1) \otimes \cdots \otimes V(\xi_m)) \mathcal{D}(\boldsymbol{\xi}) (V(-\xi_1) \otimes \cdots \otimes V(-\xi_m)) , \quad (7.1.4a)$$

$$D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) = (W(\xi_1) \otimes \cdots \otimes W(\xi_m)) \mathcal{D}^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) (W(-\xi_1) \otimes \cdots \otimes W(-\xi_m)) . \quad (7.1.4b)$$

Der Dichte-Operator $\mathcal{D}^{[2s]}(\boldsymbol{\xi})$ bzw. $\mathcal{D}(\boldsymbol{\xi})$ besitzt dieselbe Asymptotik wie zuvor. Die zugehörigen diskreten Funktionalgleichungen lauten nach [21]

$$\mathcal{A}_m^{(j)[s]}(\boldsymbol{\xi}) h_m^{[2s]}(\boldsymbol{\xi}) = h_m^{[2s]}(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_j - \eta, \xi_{j+1}, \dots, \xi_m) \quad (7.1.5)$$

an den Stellen $\xi_j = \nu_1, \dots, \nu_N, j = 1, \dots, m$. Der Operator $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ ist analog durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m^{(j)[s]}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{C^{[s]}(\xi_j)} (-1)^m \mathcal{R}_{j,j-1}^{[s,s]}(\xi_j - \eta, \xi_{j-1}) \cdots \mathcal{R}_{j,1}^{[s,s]}(\xi_j - \eta, \xi_1) \mathcal{R}_{j,j+1}^{[s,s]}(\xi_j - \eta, \xi_{j+1}) \cdots \\ &\cdots \mathcal{R}_{j,m}^{[s,s]}(\xi_j - \eta, \xi_{j+1}) P_{j,j} \mathcal{R}_{j,m}^{[s,s]}(\xi_j, \xi_m) \cdots \mathcal{R}_{j,j+1}^{[s,s]}(\xi_j, \xi_{j+1}) \mathcal{R}_{j,1}^{[s,s]}(\xi_j, \xi_1) \cdots \mathcal{R}_{j,j-1}^{[s,s]}(\xi_j, \xi_{j-1}) \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

gegeben. Dabei sind die Vektoren $h_m^{[2s]}(\boldsymbol{\xi})$ durch

$$h_m^{[1]}(\boldsymbol{\xi}) := h_m^{[1]}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) := (\mathcal{D}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{1}^{\otimes m}) (\mathcal{S}_m^{[\frac{1}{2}]}(q)) , \quad (7.1.7a)$$

$$h_m^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) := h_m^{[2]}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) := (\mathcal{D}^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{1}^{\otimes m}) (\mathcal{S}_m^{[1]}(q)) \quad (7.1.7b)$$

definiert, wobei auch hier $\mathcal{S}_m^{(s)}(q)$ die Verschachtelung von (nichtnormierten) $U_q(sl_2)$ -Singulett-Operatoren $\mathcal{s}_{j,j}^{(s)}(q)$ ist,

$$\mathcal{S}_m^{(s)}(q) = \prod_{j=1}^m \mathcal{s}_{j,j}^{(s)}(q) . \quad (7.1.8)$$

Zum Beispiel ist

$$\mathcal{s}_{j,j}^{[\frac{1}{2}]}(q) = q^{1/2} e_1 \otimes e_2 - q^{-1/2} e_2 \otimes e_1 .$$

Analog zum isotropen Fall lässt sich das Bild der Operatoren $\mathcal{A}_m^{(1)[s]}$ bzw. $A_m^{(j)[s]}$ durch

$$\mathcal{A}_m^{(1)[s]}(\boldsymbol{\xi})(B) = \frac{1}{C^{[s]}(\xi_1)} \text{Spur}_1 \left\{ \check{\mathcal{R}}_{m-1,m}^{[s,s]}(\xi_1, \xi_m) \cdots \check{\mathcal{R}}_{1,2}^{[s,s]}(\xi_1, \xi_2) (\mathbf{1} \otimes B) \right.$$

$$A_m^{(1)[s]}(\boldsymbol{\xi})(B) = \frac{1}{C^{[s]}(\xi_1)} \text{Spur}_1 \left\{ \check{R}_{m-1 m}^{[s,s]}(\xi_1, \xi_m) \cdots \check{R}_{1 2}^{[s,s]}(\xi_2, \xi_1) (\mathbb{1} \otimes B) \right. \\ \left. (P^- \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m-1)}) \check{R}_{1 2}^{[s,s]}(\xi_2, \xi_1) \cdots \check{R}_{m-1 m}^{[s,s]}(\xi_m, \xi_1) \right\}, \quad (7.1.9a)$$

$$(P^- \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m-1)}) \check{R}_{1 2}^{[s,s]}(\xi_2, \xi_1) \cdots \check{R}_{m-1 m}^{[s,s]}(\xi_m, \xi_1) \left. \right\} \quad (7.1.9b)$$

darstellen, wobei

$$P^- := \left(\mathbf{s}^{(s)}(q) \right)^t \mathbf{s}^{(s)}(q), \quad P^- := \left(\mathbf{s}^{(s)} \right)^t \mathbf{s}^{(s)}$$

die (nichtnormierten) $U_q(sl_2)$ - bzw. $U(sl_2)$ -Singulett-Operatoren sind.

7.2. Diskrete Funktionalgleichung für endlichen Alpha-Parameter

Die diskreten Funktionalgleichungen an den Stellen $\xi_1 = \nu_{\overline{1}}, \dots, \nu_{\overline{N}}$ der Spin-1/2- und Spin-1-Dichte-Matrizen lauten

$$\mathcal{A}_m^{(1)[1]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha) (\mathcal{D}(\boldsymbol{\xi}, \alpha)) = \mathcal{D}(\xi_1 - \eta, \xi_2, \dots, \xi_m, \alpha), \quad (7.2.1a)$$

$$A_m^{(1)[1]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha) (D(\boldsymbol{\xi}, \alpha)) = D(\xi_1 - \eta, \xi_2, \dots, \xi_m, \alpha), \quad (7.2.1b)$$

$$\mathcal{A}_m^{(1)[2]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha) (\mathcal{D}^{[2]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha)) = \mathcal{D}^{[2]}(\xi_1 - \eta, \xi_2, \dots, \xi_m, \alpha), \quad (7.2.1c)$$

$$A_m^{(1)[2]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha) (D^{[2]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha)) = D^{[2]}(\xi_1 - \eta, \xi_2, \dots, \xi_m, \alpha), \quad (7.2.1d)$$

wobei die Bilder der Operatoren $\mathcal{A}_m^{(1)[2s]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha)$ und $A_m^{(1)[2s]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha)$ für $s \in \{1/2, 1\}$ durch

$$\mathcal{A}_m^{(1)[s]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha) (B) = \frac{\rho(\xi_1 - \eta)}{C^{[s]}(\xi_1)} \text{Spur}_1 \left\{ \check{R}_{m-1 m}^{[s,s]}(\xi_1, \xi_m) \cdots \check{R}_{1 2}^{[s,s]}(\xi_2, \xi_1) (\mathbb{1} \otimes B) \right. \\ \left. (\mathbb{1} \otimes e^{2\alpha\eta S_z} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m-1)}) (P^- \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m-1)}) \check{R}_{1 2}^{[s,s]}(\xi_2, \xi_1) \cdots \check{R}_{m-1 m}^{[s,s]}(\xi_m, \xi_1) \right\}, \quad (7.2.2a)$$

$$A_m^{(1)[s]}(\boldsymbol{\xi}, \alpha) (B) = \frac{\rho(\xi_1 - \eta)}{C^{[s]}(\xi_1)} \text{Spur}_1 \left\{ \check{R}_{m-1 m}^{[s,s]}(\xi_1, \xi_m) \cdots \check{R}_{1 2}^{[s,s]}(\xi_2, \xi_1) (\mathbb{1} \otimes B) \right. \\ \left. (\mathbb{1} \otimes e^{2\alpha\eta S_z} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m-1)}) (P^- \otimes \mathbb{1}^{\otimes(m-1)}) \check{R}_{1 2}^{[s,s]}(\xi_2, \xi_1) \cdots \check{R}_{m-1 m}^{[s,s]}(\xi_m, \xi_1) \right\} \quad (7.2.2b)$$

gegeben sind.

Für den Spin-1/2-Fall (2.0.1) mit homogenen Magnetfeld $h = T\kappa/2$ ist die Lösung der Funktionalgleichung der Dichte-Matrix (3.3.17) bekannt: In [63] konnte gezeigt werden, dass die Korrelationsfunktionen der inhomogenen und mit dem Alpha-Parameter verdrillten („twisted“) Dichte-Operator, definiert in (3.3.17), faktorisieren und durch zwei transzendente Funktionen, eine Einpunkt- und eine Zweipunkt-Funktion, dargestellt werden können. Für diese Funktionen wurden in [15] explizite Integraldarstellungen hergeleitet. Im Folgenden werden die Ergebnisse von [15] zusammengefasst:

Es wird die Funktion $G(\lambda, \nu|\kappa, \alpha)$ eingeführt, welche die lineare Integralgleichung

$$G(\lambda, \nu|\kappa, \alpha) := e^{-\alpha\eta} \coth(\lambda - \nu - \eta) - \rho(\nu) \coth(\lambda - \nu) \\ + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\mu}{2\pi i \rho(\mu)} \frac{G(\mu, \nu|\kappa, \alpha)}{1 + \tilde{\mathbf{a}}(\lambda)} [e^{-\alpha\eta} \coth(\lambda - \mu - \eta) - e^{\alpha\eta} \coth(\lambda - \mu + \eta)] \quad (7.2.3)$$

erfüllt, wobei die Kontur \mathcal{C} gegen den Uhrzeigersinn innerhalb des Streifens $\mathcal{S} \setminus \mathcal{R} = \{x \in \mathbb{C} | -\gamma/2 < \text{Im}(x) < \gamma/2\}$ die reelle Achse umschließt. Die Funktion $\tilde{\mathbf{a}}(\lambda)$ ist das Spin-1/2-Analogon der in (4.1.7a) definierten Funktion und kann durch eine nichtlineare Integralgleichung beschrieben werden (siehe Gleichung (28) in [15]). Die Funktion $\rho(\lambda)$ ist in (3.3.20) eingeführt worden. Mit der Integralgleichung der Funktion $G(\lambda, \nu|\kappa, \alpha)$ erfüllt die Funktion

$$\Psi(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}|\kappa, \alpha) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\mu}{2\pi i \rho(\mu)} \frac{G(\mu, \lambda_2|\kappa, \alpha)}{1 + \tilde{\mathbf{a}}(\lambda)} [e^{\alpha\eta} \coth(\mu - \lambda_1 - \eta) - \rho(\lambda_1) \coth(\mu - \lambda_1)] \quad (7.2.4)$$

folgende Funktionalgleichung:

$$\Psi(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}|\kappa, \alpha) + \rho(\lambda_1) e^{-\alpha\eta} \Psi(e^{\lambda_1 - \eta}, e^{\lambda_2}|\kappa, \alpha) = \frac{G(\lambda_1, \lambda_2|\kappa, \alpha)}{1 + \tilde{\mathbf{a}}(\lambda_1)} - \rho(\lambda_1) e^{-\alpha\eta} \frac{G(\lambda_1 - \eta, \lambda_2|\kappa, \alpha)}{1 + \tilde{\mathbf{a}}(\lambda_1 - \eta)}$$

$$\begin{aligned}
 & -e^{-\alpha\eta} \coth(\lambda_1 - \lambda_2 - \eta) + \rho(\lambda_2) \coth(\lambda_1 - \lambda_2) \\
 & -e^{-\alpha\eta} [\rho(\lambda_1)\rho(\lambda_1 - \eta) - 1] \int_{\mathcal{C}} \frac{d\mu}{2\pi i \rho(\mu)} \frac{G(\mu, \lambda_2)}{1 + \tilde{\alpha}(\lambda)} \coth(\mu - \lambda_1 + \eta). \quad (7.2.5)
 \end{aligned}$$

Die in [15] verwendete Quantenmonodromie-Matrix entspricht der Monodromie-Matrix (2.4.19) mit \mathcal{R} -Matrix (2.5.3) und Magnetfeld $h = 2T\kappa\eta$. Die Inhomogenitäten $\nu_{\bar{k}}$ (in [15] als β_k bezeichnet) sind genauso wie in Kapitel 3.2.1 gewählt worden. Im Limes $\lambda_1 \rightarrow \nu_{\bar{k}}$ vereinfacht sich mit $\tilde{\alpha}(\nu_{\bar{k}} - \eta) = \bar{\alpha}(\nu_{\bar{k}}) = 0$ und der Inversionsrelation,

$$\rho(\nu_{\bar{k}})\rho(\nu_{\bar{k}} - \eta) = 1,$$

oberer Ausdruck. Es folgt die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}
 \Psi(e^\lambda, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha) + \rho(\lambda) e^{-\alpha\eta} \Psi(e^{\lambda-\eta}, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha) \\
 = -e^{-\alpha\eta} \coth(\lambda - \lambda_2 - \eta) + \rho(\lambda_2) \coth(\lambda - \lambda_2), \lambda \in \{\nu_{\bar{k}}\}_{k=1}^N. \quad (7.2.6)
 \end{aligned}$$

Die in [63] verwendete Einpunkt-Funktion ist mit der Funktion $\rho(\lambda)$ verknüpft und die eingeführte Zweipunkt-Funktion kann durch die Funktionen $\rho(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, und $\Psi(\exp(\lambda_1), \exp(\lambda_2) | \kappa, \alpha)$ ausgedrückt werden. Die Zusammenhänge lauten wie folgt:

$$\varphi(\lambda | \kappa, \alpha) = \frac{\cosh(\alpha\eta) - \rho(\lambda)}{\sinh(\alpha\eta)}, \quad (7.2.7a)$$

$$\begin{aligned}
 \omega(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, \alpha) = 2e^{\alpha\lambda_{12}} \Psi(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha) - \frac{e^{\alpha\lambda_{12}}}{2} [e^{\alpha\eta} \coth(\lambda_{12} + \eta) - e^{-\alpha\eta} \coth(\lambda_{12} - \eta)] \\
 + e^{\alpha\lambda_{12}} [\rho(\lambda_1) - \rho(\lambda_2)] \coth(\lambda_{12}), \quad (7.2.7b)
 \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{12} := \lambda_1 - \lambda_2$ ist. Der Einplatz-Dichte-Operator wird durch

$$D(\xi, \alpha) = \frac{1}{2} \mathbb{1} - \varphi(\lambda | \kappa, \alpha) \sigma^z \quad (7.2.8)$$

beschrieben. Die Funktionalgleichung für $\omega(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, \alpha)$ lautet

$$\begin{aligned}
 \omega(\lambda, \lambda_2 | \kappa, \alpha) + \rho(\lambda) \omega(\lambda - \eta, \lambda_2 | \kappa, \alpha) \\
 = -\frac{e^{\alpha(\lambda - \lambda_2)}}{2} [e^{\alpha\eta} \coth(\lambda - \lambda_2 - \eta) - e^{-\alpha\eta} \coth(\lambda - \lambda_2 + \eta)] \\
 - \rho(\lambda) \frac{e^{\alpha(\lambda - \lambda_2 - \eta)}}{2} [e^{\alpha\eta} \coth(\lambda - \lambda_2) - e^{-\alpha\eta} \coth(\lambda - \lambda_2 + 2\eta)] \\
 + e^{\alpha(\lambda - \lambda_2)} [\rho(\lambda) + \rho(\lambda_2)] \coth(\lambda - \lambda_2) \\
 - 2e^{\alpha(\lambda - \lambda_2 - \eta)} [1 + \rho(\lambda)\rho(\lambda_2)] \coth(\lambda - \lambda_2 - \eta), \lambda \in \{\nu_{\bar{k}}\}_{k=1}^N. \quad (7.2.9)
 \end{aligned}$$

Die Darstellung des Zweiplatz-Dichte-Operators ist in [15] in Gleichung (57) angegeben. Die Funktionalgleichung (7.2.6) konnte über den Zugang (7.2.1) bzw. (7.2.2) mit $s = 1/2$ in [5] reproduziert werden. Im Limes $\alpha \rightarrow 0$ folgt die in [18] bereits gefundene Darstellung (siehe Gleichung (115)-(117)). Für die dort definierten „physikalischen Funktionen“, im Folgenden durch $\omega_{[14]}(\lambda_1, \lambda_2)$ und $\omega'_{[14]}(\lambda_1, \lambda_2)$ bezeichnet, wurden in [14] Integralausdrücke hergeleitet, die numerisch gelöst werden können. Diese stehen mit der Funktion $\omega(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, \alpha)$ wie folgt in Verbindung:

$$\omega_{[14]}(\lambda_1, \lambda_2) = -\omega(\lambda_1, \lambda_2 | 0), \quad (7.2.10a)$$

$$\omega'_{[14]}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^{\alpha\lambda_{12}} \omega(\lambda_2, \lambda_1 | \kappa, \alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^{-\alpha\lambda_{12}} \omega(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, \alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} \right]. \quad (7.2.10b)$$

Es gelten nach [15] die Symmetrien

$$\omega(\lambda_2, \lambda_1 | -\kappa, -\alpha) = \omega(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, \alpha)$$

und

$$\omega(\lambda_2, \lambda_1 | \kappa, 0) = \omega(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, 0).$$

Das asymptotische Verhalten der Funktionen $G(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, \alpha)$ und $\Psi(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha)$ als Funktion eines Spektralparameters wurde in [16] bestimmt, sodass der Beweis der Faktorisierung der Korrelationsfunk-

tionen unabhängig von der Vielfach-Integraldarstellung in [15] ist,

$$\lim_{\operatorname{Re}(\lambda_1) \rightarrow \infty} G(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, \alpha) = \lim_{\operatorname{Re}(\lambda_2) \rightarrow \infty} G(\lambda_1, \lambda_2 | \kappa, \alpha) = 0 \quad (7.2.11)$$

und

$$\lim_{\operatorname{Re}(\lambda_1) \rightarrow \infty} \Psi(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha) = -\frac{e^{-\alpha\eta} - \rho(\lambda_2)}{1 + e^{2\kappa\eta}}, \quad (7.2.12a)$$

$$\lim_{\operatorname{Re}(\lambda_2) \rightarrow \infty} \Psi(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha) = -\frac{e^{\alpha\eta} - \rho(\lambda_1)}{1 + e^{-2\kappa\eta}}. \quad (7.2.12b)$$

Zusammenfassung und Ausblick

Das in der vorliegenden Arbeit behandelte Modell, die integrable anisotrope Spin-1 XXZ -Kette im antiferromagnetischen Regime, lässt sich über die Fusionsprozedur aus der trigonometrischen Lösung des Sechsv-Vertexmodells konstruieren (siehe (3.1.3), (3.1.9) und (2.0.2)). Für die Spin-1-Kette lässt sich, basierend auf der Trotter-Suzuki-Abbildung, ein zweidimensionales klassisches Neunzehn-Vertexmodell finden, mit dem die thermodynamischen Eigenschaften des Systems über die Quantentransfer-Matrix beschrieben werden können. Im thermodynamischen Limes lässt sich die Freie Energie lediglich durch den betragsmäßig größten Eigenwert dieser Transfer-Matrix und somit alle weiteren globalen thermodynamischen Eigenschaften angeben. Die Bestimmung des Eigenwertes für endliche Temperatur erfordert das (numerische) Lösen eines nichtlinearen Integralgleichungs-Systems dreier Hilfsfunktionen (siehe (3.2.24) sowie (4.1.25) bis (4.1.29)).

Um Aussagen über lokale Eigenschaften treffen zu können, wird die (reduzierte) Dichte-Matrix benötigt, damit die Erwartungswerte eines lokal wirkenden Operators bestimmt werden können (siehe (2.6.6)). Ziel dieser Arbeit war es eine adäquate Beschreibung für die Dichte-Matrixeinträge zu finden.

Es konnte eine Verallgemeinerung der Vielfach-Integraldarstellung der nicht-verschwindenden Elemente der reduzierten Dichte-Matrix [50] für die XXZ -Kette für hinreichend kleine Anisotropien ($0 \leq \gamma \leq \pi/4$), siehe Kapitel 5 Gleichung (5.3.7) sowie (5.4.3), konstruiert werden. Für verschwindendes homogenes Magnetfeld h wurden die Grundzustands-Einpunkt-Korrelationsfunktionen ermittelt, welche in Übereinstimmung zu [38] sind. Da aber aufgrund der Struktur der gefundenen Vielfach-Integraldarstellung (Vielfach-Integrale über Konturen bestehend aus zwei Schlaufen) der Rechenaufwand für Korrelatoren über mehrere benachbarten Gitterplätzen ($m \geq 2$) enorm ist, sucht man nach einer Beschreibung der Korrelationsfunktionen in faktorisierte Form. Dies ist für die integrable, isotrope, su_2 -invariante Spin-1-Kette gelungen. Es konnte eine faktorisierte Form für die Zweiplatz-Korrelatoren für endliche Temperatur, aber verschwindendes Magnetfeld h , explizit hergeleitet werden (siehe (6.2.11)).

Für die Herleitung der algebraischen Ausdrücke für die (statischen) Korrelationsfunktionen wurde der Zusammenhang zur Fusionsprozedur (siehe (3.3.4) und (3.3.6)) sowie zu diskreten Funktionalgleichungen der reduzierten Dichte-Matrix (siehe (6.1.3) und insbesondere (6.2.4)), welche vom Typ der reduzierten Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung sind, benutzt. Die Konstruktion der Funktionalgleichungen erfolgte nach der Herangehensweise von [5], wobei ausgenutzt wurde, dass die per Fusion gebildeten Spin-1 \mathcal{R} -Matrizen (3.1.3) ebenfalls die in [5] geforderten Eigenschaften (Anfangsbedingung, Unitarität und „Crossing“-Symmetrie) erfüllen (siehe (3.2.27)). Es wurde eine faktorisierte Form der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen bestimmt, mit denen sich alle Matrixeinträge der inhomogenen Zweiplatz-Dichte-Matrix angeben lassen (siehe (6.2.11)). Hierbei wurde gezeigt, dass die faktorisierte Form der Spin-1/2-Kette [25, 26, 28], bis auf Normierung, für die Spin-1-Kette erhalten bleibt. Lediglich ist die entsprechende Zweipunkt-Korrelationsfunktion, die den „physikalischen Anteil“ beschreibt, auszutauschen (siehe (6.3.3) und (6.3.6)). Diese Zweipunkt-Korrelationsfunktion, die sogenannte ω -Funktion, lässt sich durch eine Integralgleichung in Abhängigkeit geeigneter Hilfsfunktionen, welche wiederum einerseits nichtlineare und andererseits lineare Integralgleichungen erfüllen, angeben (siehe (6.2.26) oder (6.2.34)). Dabei hilft die Erkenntnis, dass analog zur integrablen Spin-1/2 XXZ -Kette, auch hier ein Zusammenhang der ω -Funktion zur logarithmischen Ableitung des Eigenwertes einer Quantentransfer-Matrix mit modifizierten Quantenraum besteht. Mit dem Integralausdruck der ω -Funktion lassen sich insbesondere für den homogenen Limes die Zweipunkt-Korrelatoren der isotropen Spin-1-Kette für endliche Temperatur durch Integralgleichungen (siehe (6.2.76)) darstellen. In [68] wurde die beobachtete Erhaltung der Form der Faktorisierung ebenfalls für die Dreiplatz-Dichte-Matrix benutzt. Wegen der „Selbst-Fusion“ des im Zugang 6.1.2 beschriebenen ϵ -regularisierten Systems lassen sich allgemein beliebige m -Platz-Dichte-Matrixelemente über die vom Spin-1/2-Modell bekannte faktorisierte Darstellung der $(2m)$ -Platz-Dichte-Matrixelemente durch Ersetzen der ω -Zweipunkt-Korrelationsfunktion bestimmen.

Die Vermutung liegt nun nahe, dass beliebige m -Platz-Korrelationsfunktionen für die integrable,

su_2 -invariante Spin-Kette beliebiger Spin- s -Darstellungen mittels der faktorisierten Form der $(2s \cdot m)$ -Platz-Korrelatoren der Spin-1/2-Kette bestimmt werden können. Einen möglichen Zugang bietet Formel (6.6.6) mit der in Kapitel (6.1.2) beschriebenen Methode, welche eine verbesserte Herangehensweise zur Bestimmung von Korrelationsfunktionen höherer Spin- su_2 -invariante Ketten im Vergleich zu [50] bietet. Weiterhin wurde gezeigt, dass im Nulltemperatur-Limes die Korrelationsfunktionen der Spin-1 XXX -Kette für zwei und drei Plätze nur Riemann-Zeta-Funktionen gerader Argumente enthalten (siehe (6.2.53) und [68]). Dies ergänzt die Vermutung von [24], dass Korrelationsfunktionen der Spin-1/2 Heisenberg-Kette im Nulltemperatur-Limes lediglich von Riemann-Zeta-Funktionen ungerader Argumente abhängen. Diese Struktur lässt sich bei der Spin-1/2-Kette über die explizite Konstruktion der Lösung der q -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung unter Verwendung von q -Oszillatoren erklären [15, 23, 63]. Hier stellt sich die Frage, ob eine analoge Begründung auch für höhere Spin-Darstellungen möglich ist. Die Literaturwerte für die Innere Energie konnten im Nulltemperatur-Limes wie auch im Hochtemperatur-Limes für die isotrope Spin-1-Kette reproduziert werden [108].

Für die Zukunft ist es interessant zu untersuchen, wie sich die Vielfach-Integraldarstellung (5.3.7) für Anisotropieparameter $\gamma \in (\pi/4, \pi/2)$ verallgemeinern lässt. Die Problematik, die sich in diesem Zugang über die Funktionen (5.0.10) zeigt, ist, dass sich aufgrund der Periodizität der in (5.0.10) definierten Funktionen in Abhängigkeit von größer werdender Anisotropie γ zusätzliche Polstellen innerhalb der Gebiete der zur Konstruktion der Vielfach-Integrale verwendeten Konturen gruppieren. Eine detaillierte numerische Untersuchung der Bethe-Ansatz-Zahlen, insbesondere für $\gamma \in (\pi/4, \pi/2)$, um mehr Informationen über die Ausdehnung der Bethe-Strings im Gebiet zu erhalten, ist sicherlich hilfreich.

Weiterhin wäre es erstrebenswert auch für die anisotrope Verallgemeinerung der Spin-1-Kette eine faktorisierte Form für die inhomogene reduzierte Dichte-Matrix zu konstruieren. Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, dass wie im Spin-1/2-Fall eine einzige ω -Funktion zur Beschreibung nicht ausreicht. Da diese zusätzlichen Funktionen, wie bereits das Spin-1/2-Modell zeigte (vgl. [5]), nicht über Ableitungen modifizierter Eigenwerte bestimmt werden können, ist eine Abänderung des Zugangs über die reduzierte q -deformierte Knizhnik-Zamolodchikov-Funktionalgleichung notwendig. Im Spin-1/2-Fall wird hierzu ein „linksseitiges Magnetfeld“ (Alpha-Parameter) eingeführt. In [15, 18] ist es gelungen, eine geeignete, allgemeinere Funktion zu konstruieren, deren Ableitung nach dem zusätzlichen Alpha-Parameter die fehlende weitere ω -Funktion liefert. Diese allgemeine Funktion lässt sich durch eine Integralgleichung darstellen, wobei diese über geschlossene Konturen formuliert ist. Jedoch ist für das Spin-1-Modell keine Beschreibung der Thermodynamik durch Integralgleichungen über eine geschlossene Kontur bekannt, weshalb die Ergebnisse aus [15] in einer Formulierung wie in [14] zunächst verstanden werden müssten. Hat man nun eine, nach Möglichkeit einfache, Formulierung dieser Art für endlichen Alpha-Parameter gefunden, ist die Hoffnung, dies für den Spin-1-Fall zu verallgemeinern.

Ein weiterer offener Punkt ist die numerische Auswertung der Integralgleichung der ω -Funktion und deren Ableitungen im homogenen Limes bzw. der Zweiplatz-Dichte-Matrix-Korrelatoren. Die in dieser Arbeit gefundenen Integralausdrücke scheinen recht kompliziert und verwickelt zu sein, weshalb diese für numerische Berechnungen eher ungeeignet erscheinen. Sicherlich lassen sich durch geeignete Transformationen und Ausnutzen von Symmetrien praktikablere Integralgleichungen herleiten. Zudem ist die numerische Auswertung der Integralgleichung der Funktion $\omega(x_1, x_2)$ an den Stellen $x_1 = \pm i$ und $x_2 = \pm i$ schwierig, da man sich hier oberhalb oder unterhalb des Analytizitätsgebietes der Integralgleichung (6.2.26) befindet. Abhilfe schafft die Transformation in (6.2.32) welche zu der alternativen Integralgleichung (6.2.34) führt. Jedoch bestehen in den Integralgleichungen für die Ableitungen der Funktion $\omega(x_1, x_2)$ weiterhin ähnliche Probleme dieser Art (siehe 6.2.4).

Des Weiteren ist die Untersuchung von dynamischen Korrelationsfunktionen und die Berechnung von für Streuversuche relevanten dynamischen Struktur Faktoren bei endlicher Temperatur für die (anisotrope) Spin-1-Kette ein weiterer offener und interessanter Punkt.

Ist die Beschreibung der Korrelationsfunktionen für su_2 -invariante Quantenspin-Ketten vollständig verstanden, so ist die Erweiterung der hier verwendeten Methode zur Berechnung von Korrelationsfunktionen

für su_n -invariante Modelle erwünscht. Denn neuartige Materialien, wie z.B. Spin-Leiter- oder Spin-Nanoröhren, lassen sich durch Modelle beschreiben, die Lie-Symmetrien höheren Rangs aufweisen [8]. Jedoch erfüllen die hier zugrunde liegenden \mathcal{R} -Matrizen nicht unbedingt die für die Konstruktion der Funktionalgleichungen nach [6] geforderte „Crossing“-Symmetrie, weshalb die Verallgemeinerung eine schwierige Aufgabe sein wird.

Eichtransformation

Es werden die Matrizen $V_1(\lambda)$, $V_2(\lambda)$ und $V_3(\lambda) \in \mathfrak{C}n\mathfrak{d}\{(\mathbb{C}^d)^{\otimes 3}\}$ durch

$$V_1(\lambda) := V(\lambda) \otimes \mathbb{1}_d \otimes \mathbb{1}_d, \quad V_2(\lambda) := \mathbb{1}_d \otimes V(\lambda) \otimes \mathbb{1}_d, \quad V_3(\lambda) := \mathbb{1}_d \otimes \mathbb{1}_d \otimes V(\lambda)$$

definiert, wobei $\mathbb{1}_d$ die d -dimensionale Einheitsmatrix und $V(\lambda)$ eine beliebige aber reguläre, also invertierbare, Matrix im Raum \mathbb{C}^d ist. Wird nun die Yang-Baxter-Gleichung

$$R_{12}(\lambda, \mu) R_{13}(\lambda, \nu) R_{23}(\mu, \nu) = R_{23}(\mu, \nu) R_{13}(\lambda, \nu) R_{12}(\lambda, \mu) \quad (\text{A.0.1})$$

mit $V_1(\lambda) V_2(\mu) V_3(\nu)$ von links und mit $V_3^{-1}(\nu) V_2^{-1}(\mu) V_1^{-1}(\lambda)$ von rechts multipliziert, folgt

$$\begin{aligned} & V_1(\lambda) V_2(\mu) R_{12}(\lambda, \mu) V_2^{-1}(\mu) V_1^{-1}(\lambda) V_1(\lambda) V_3(\nu) R_{13}(\lambda, \nu) V_3^{-1}(\nu) V_1^{-1}(\lambda) \\ & \quad V_2(\mu) V_3(\nu) R_{23}(\mu, \nu) V_3^{-1}(\nu) V_2^{-1}(\mu) \\ & = V_2(\mu) V_3(\nu) R_{23}(\mu, \nu) V_3^{-1}(\nu) V_2^{-1}(\mu) V_1(\lambda) V_3(\nu) R_{13}(\lambda, \nu) V_3^{-1}(\nu) V_1^{-1}(\lambda) \\ & \quad V_1(\lambda) V_2(\mu) R_{12}(\lambda, \mu) V_2^{-1}(\mu) V_1^{-1}(\lambda) \quad . \quad (\text{A.0.2}) \end{aligned}$$

Also ist die \mathcal{R} -Matrix

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = (V(\lambda) \otimes V(\mu)) R(\lambda, \mu) (V(\lambda) \otimes V(\mu))^{-1} \quad (\text{A.0.3})$$

ebenfalls eine Lösung der Yang-Baxter-Gleichung. Die Lösung $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$ heißt Eichtransformierte der Lösung $R(\lambda, \mu)$ [42]. Sei nun für $d = 2$ die \mathcal{R} -Matrix $R(\lambda, \mu)$ gegeben durch (2.5.3). Wird für $V(\lambda)$ die spezielle Matrix

$$V(\lambda) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.4})$$

gewählt, so gilt

$$V^{-1}(\lambda) = V(-\lambda), \quad V(\lambda) \otimes V(\mu) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(-\frac{\lambda-\mu}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(-\frac{\lambda+\mu}{2}\right) \end{pmatrix},$$

weshalb sich die Eichtransformierte zu

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda, \mu) & c(\lambda, \mu)e^{\lambda-\mu} & 0 \\ 0 & c(\lambda, \mu)e^{-(\lambda-\mu)} & b(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.5})$$

ergibt. Diese erfüllt die in Kapitel 3.2.1 aufgeführten Relationen [83].

Hochtemperatur-Entwicklung

Die Hochtemperatur-Entwicklung für den Erwartungswert eines Operators $\langle A \rangle_{T,h}$ kann formal durch

$$\langle A \rangle_{T,h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle A \rangle_{T,h}^{(k)}}{k!} \left(\frac{1}{T} \right)^k \quad (\text{B.0.1a})$$

dargestellt werden, wobei

$$\langle A \rangle_{T,h}^{(k)} := \left. \frac{\partial^k \langle A \rangle_{T,h}}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)^k} \right|_{T=\infty} \quad (\text{B.0.1b})$$

gilt. Mit (2.6.6) folgt

$$\langle A \rangle^{(0)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle A \rangle_{T,h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{Spur} \{ A \exp \left(\frac{1}{T} (H_L - 2hS^z) \right) \}}{\mathcal{Z}_L} = \frac{\text{Spur} \{ A \}}{\text{Spur} \{ \mathbb{1} \}}. \quad (\text{B.0.2a})$$

Per Induktion lässt sich zeigen, dass die Ableitungen $\langle A \rangle^{(k)}$ rekursiv berechnet werden können. Wird $H := H_L - 2hS^z$ definiert, so gilt

$$\begin{aligned} \langle A \rangle^{(n)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ (-1)^n \left[\langle H^n A \rangle_{T,h} - \langle H^n \rangle_{T,h} \langle A \rangle_{T,h} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n}{k} \langle H^{n-k} \rangle_{T,h} \frac{\partial^k \langle A \rangle_{T,h}}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)^k} \right\} \\ &= (-1)^n \langle H^n A \rangle^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n}{k} \langle H^{n-k} \rangle^{(0)} \langle A \rangle^{(k)} \quad \text{für } n \geq 1. \end{aligned} \quad (\text{B.0.2b})$$

So folgt zum Beispiel für die Spin-1 XXX-Kette mit homogenen äußeren Magnetfeld h ,

$$H := H_{XXX} - 2hS^z, \quad (\text{B.0.3})$$

schließlich

$$\begin{aligned} \langle H \rangle^{(0)} &= \frac{JL}{9} \text{Spur} \left\{ \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 \right\} - \frac{2hL}{3} \text{Spur} \{ S_1^z \} = -\frac{4JL}{3}, \\ \left\langle \frac{H}{L} \right\rangle^{(0)} &= \frac{J}{9} \text{Spur} \left\{ \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 \right\} - \frac{2h}{3} \text{Spur} \{ S_1^z \} = -\frac{4J}{3}, \\ \left\langle \frac{H^2}{L} \right\rangle^{(0)} &= \frac{J^2}{9} \text{Spur} \left\{ \left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 \right)^2 \right\} + \frac{J^2(L-3)}{9^2} \text{Spur} \left\{ \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 \right\}^2 \\ &\quad + \frac{J^2}{27} \text{Spur} \left\{ \left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 \right) \left(\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 - (\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3)^2 \right) \right\} \\ &\quad + \frac{J^2}{27} \text{Spur} \left\{ \left(\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 - (\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3)^2 \right) \left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{4hJ}{9} \text{Spur} \left\{ \underbrace{\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 \right)}_{=0} S^z \right\} + \frac{4h^2}{3} \text{Spur} \{ (S_1^z)^2 \} \\ &= \frac{16J^2L}{9} + \frac{32J^2}{9} + \frac{8h^2}{3}. \end{aligned}$$

Somit ist die Hochtemperatur-Entwicklung der Inneren Energie pro Gitterplatz e für das isotrope Spin-1 Heisenberg-Modell durch

$$\begin{aligned} e = \left\langle \frac{H}{L} \right\rangle_{T,h} &= \left\langle \frac{H}{L} \right\rangle^{(0)} + \frac{1}{T} \left[\langle H \rangle^{(0)} \left\langle \frac{H}{L} \right\rangle^{(0)} - \left\langle \frac{H H}{L} \right\rangle^{(0)} \right] + \mathcal{O}(T^{-2}) \\ &= -\frac{4J}{3} - \left[\frac{32J^2}{9} + \frac{8h^2}{3} \right] \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}) \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

gegeben. Für $H := H_{XZX} - 2hS^z$ folgt die Approximation

$$e = -\frac{2J}{9} [1 + 5 \cosh(2\eta)] - \left[\frac{8J^2}{27} (7 + 4 \cosh(2\eta) + \cosh(4\eta)) + \frac{8h^2}{3} \right] \frac{1}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}). \quad (\text{B.0.5})$$

Zusammenhang zwischen der ω -Funktion und dem Eigenwert (4.3.6b)

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang einer bestimmten Linearkombinationen von ω -Funktionen (6.2.24) und deren Ableitungen bzw. von der Funktion $g(\xi_1, \xi_2)$, definiert in (6.2.42), zum Eigenwert (4.3.6b) untersucht.

Anwenden des Hellmann-Feynman-Theorems auf den Eigenwert (4.3.6b) liefert die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \widehat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} &= \frac{\langle \Psi | \frac{\partial}{\partial \delta} \widehat{t}^{[1]}(x; \mu) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \widehat{t}^{[1]}(x; \mu) | \Psi \rangle} \Big|_{\delta=0} \\ &= \text{Spur} \left\{ D^{[2]}(x, \mu) \mathcal{R}^{XXX[1,1]}(x - \mu) \frac{\partial}{\partial \delta} \mathcal{R}^{XXX[1,1]}(\mu + \delta - x) \Big|_{\delta=0} \right\} \\ &= \frac{4i}{(4 + (x - \mu)^2)(16 + (x - \mu)^2)} [6(\rho_1(\mu, x)(8 + 3(x - \mu)^2) + 2\rho_3(\mu, x)(6 + (x - \mu)^2)) - (x - \mu)^2] \\ &= N(x, \mu) \left\{ \Omega(x - i, \mu - i) + \Omega(x + i, \mu - i) + \Omega(x - i, \mu + i) + \Omega(x + i, \mu + i) - \frac{4i}{16 + (x - \mu)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{4i}{4 + (x - \mu)^2} = 12g(x, \mu) + \frac{4i}{4 + (x - \mu)^2}, \quad (\text{C.0.1}) \end{aligned}$$

wobei

$$N(x, \mu) := -(1 + y^{-1}(x))(1 + y^{-1}(x)).$$

Hierbei wurden die Relationen (6.2.3) sowie die Unitarität der \mathcal{R} -Matrix ausgenutzt. Insbesondere gilt also

$$g(x, \mu) \equiv \frac{1}{12} \widehat{g}_\mu^{(0)}(x), \quad (\text{C.0.2})$$

bzw.

$$G(x, \mu) = \frac{1}{24i} (\xi^2 + 16)(\xi^2 + 4) \widehat{g}_\mu^{(0)}(x). \quad (\text{C.0.3})$$

Weiterhin folgt aus obiger Gleichung die Identität

$$g(\xi_1, \xi_2) = \text{Spur} \left\{ D^{[2]}(\xi_1, \xi_2) \mathcal{O}_g(\xi_1 - \xi_2) \right\}, \quad (\text{C.0.4})$$

wobei der Operator $\mathcal{O}_g(\xi)$ durch

$$\mathcal{O}_g(\xi) = \mathcal{O}_g(-\xi) = \frac{1}{3i(4 + \xi^2)(16 + \xi^2)} \left\{ 12\mathbb{1} + (4 + \xi^2)P^{(1)} - (8 + \xi^2)P^- \right\} \quad (\text{C.0.5})$$

definiert ist. Wegen der Symmetrie der ω -Funktion (6.2.28) bzw. der Symmetrie des Operators $\mathcal{O}_g(\xi)$, erfüllt die logarithmische Ableitung des Eigenwertes offensichtlich dieselbe Symmetrie:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \widehat{\Lambda}_0^{[1]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} = \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \widehat{\Lambda}_0^{[1]}(\mu; x) \Big|_{\delta=0}.$$

Wird $\mu \equiv x$ gesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} &\omega(x - i, x - i) + \omega(x + i, x + i) - i \left[\omega^{(1,0)}(x + i, x - i) - \omega^{(1,0)}(x - i, x + i) \right] \\ &= \frac{2i \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \widehat{\Lambda}_0^{[1]}(x; x) \Big|_{\delta=0} + (1 - y^{-1}(x))}{(1 + y^{-1}(x))^2} = \frac{2i \lim_{\mu \rightarrow x} \widehat{G}_\mu^{(0)}(x) - 1}{1 + y^{-1}(x)}. \quad (\text{C.0.6}) \end{aligned}$$

Dies ist in Übereinstimmung zu den Ergebnissen (4.3.12) und (6.2.78). Hierbei wird der Zusammenhang (6.2.31) benutzt. In der letzten Termumformung wurde die Identität (4.3.9b) ausgenutzt.

Bemerkungen zur logarithmischen Ableitung des Eigenwertes (4.2.33a)

Für die Integralgleichung der logarithmischen Ableitung des Eigenwertes (4.2.33a) lässt sich mittels des Zusammenhangs (4.2.19c) eine Integraldarstellung mit einer gewissen algebraisch ähnlichen Form zur Integralgleichung der logarithmischen Ableitung des betragsmäßig größten Eigenwertes der Quantentransfer-Matrix des Spin-1/2-Modells (2.0.1) in [14] erkennen. Per Definition (4.2.31) gilt

$$G_{\mu}^{(0)}(x) := \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln Y(x; \mu) \right|_{\delta=0}.$$

Einsetzen von Gleichung (4.2.19c) in (4.2.33a) liefert

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sinh\left(\left(\pi - \gamma\right)\frac{k}{2}\right) \cos((x - \mu)k)}{2i \sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x - x') \left[\frac{\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \mathbf{a}\left(x' + \frac{\eta}{2}; \mu\right) \right|_{\delta=0}}{1 + \mathbf{a}^{-1}\left(x' + \frac{\eta}{2}; \mu\right) \Big|_{\delta=0}} + \frac{\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \bar{\mathbf{a}}\left(x' - \frac{\eta}{2}; \mu\right) \right|_{\delta=0}}{1 + \bar{\mathbf{a}}^{-1}\left(x' - \frac{\eta}{2}; \mu\right) \Big|_{\delta=0}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.0.1})$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit [14], so scheint zunächst im „Driving“-Term (D.0.1) das Vorzeichen nicht zu stimmen. Jedoch wurde im Vergleich zu [14] eine andere Reihenfolge der Räume $(\bar{N} + 1)$ und $(\bar{N} + 2)$ bzw. der Inhomogenitäten, vgl. (4.2.2), gewählt. Dies wirkt sich in der Herleitung der zugehörigen nichtlinearen Integralgleichung für den Spin-1/2-Eigenwert in einem relativen Vorzeichen bezüglich des Eigenwertes aus. Deswegen ist es in Bezug auf [14] äquivalent, die logarithmische Ableitung bzgl. $(-\delta)$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial(-\delta)} \ln \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} &= - \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x; \mu) \right|_{\delta=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sinh\left(\left(\pi - \gamma\right)\frac{k}{2}\right) \cos((x - \mu)k)}{2i \sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x - x') \left[\frac{\left. \frac{\partial}{\partial(-\delta)} \ln \mathbf{a}\left(x' + \frac{\eta}{2}; \mu\right) \right|_{\delta=0}}{1 + \mathbf{a}^{-1}\left(x' + \frac{\eta}{2}; \mu\right) \Big|_{\delta=0}} + \frac{\left. \frac{\partial}{\partial(-\delta)} \ln \bar{\mathbf{a}}\left(x' - \frac{\eta}{2}; \mu\right) \right|_{\delta=0}}{1 + \bar{\mathbf{a}}^{-1}\left(x' - \frac{\eta}{2}; \mu\right) \Big|_{\delta=0}} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.0.2})$$

zu betrachten. Die Integralgleichungen für das System (2.0.1) wurden in [29] hergeleitet¹. In [14], Gleichung (54), werden folgende Hilfsfunktionen,

$$g_{\mu}^{(\pm)}(x) = \pm \left. \frac{\partial}{\partial(-\delta)} \ln \tilde{\mathbf{a}}\left(x \pm \frac{\eta}{2}; \mu\right) \right|_{\delta=0}$$

definiert, wobei die Funktion $\tilde{\mathbf{a}}(x)$ die entsprechende Spin-1/2-Funktion ist, welche analog über die Bethe-Ansatz-Gleichungen eingeführt wird. Es lässt sich erkennen, dass die logarithmischen Ableitungen der Eigenwerte (4.2.33a) und des Spin-1/2-Modells dieselbe Form haben. Diese unterscheiden sich lediglich in den zugehörigen Funktionen $\mathbf{a}(x)$ bzw. $\tilde{\mathbf{a}}(x)$ und deren Ableitungen. In [14] bzw. in [18] wurde die ω -Funktion durch

$$\omega_{[14]}(x, \mu) := -\frac{1}{2} [\coth(\mu - x - \eta) - \coth(\mu - x + \eta)] - 2 \left. \frac{\partial}{\partial(-\delta)} \ln \Lambda_0(x, \mu) \right|_{\delta=0}$$

eingeführt, wobei hier die Symmetrie $\omega_{[14]}(x, \mu) = \omega_{[14]}(\mu, x)$ ausgenutzt wurde. Im isotropen Limes folgt

$$\omega_{[14]}(x, \mu) := -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x - \mu - 2i} - \frac{1}{x - \mu + 2i} \right] - 2 \left. \frac{\partial}{\partial(-\delta)} \ln \Lambda_0(x, \mu) \right|_{\delta=0}. \quad (\text{D.0.3})$$

Im Vergleich zu (6.2.25) zeigt die unnormierte Funktion $\omega^{XXX}(x, \mu)$, definiert durch

$$\begin{aligned} \omega^{XXX}(x, \mu) &:= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x - \mu - 2i} - \frac{1}{x - \mu + 2i} \right] - \frac{4i(\omega(x, \mu) + \frac{1}{2})}{(x - \mu)^2 + 4} = -\frac{4i\omega(x, \mu)}{(x - \mu)^2 + 4} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x - \mu - 2i} - \frac{1}{x - \mu + 2i} \right] - 2 \left. \frac{\partial}{\partial(-\delta)} \ln \Lambda_0^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x, \mu) \right|_{\delta=0}, \end{aligned} \quad (\text{D.0.4})$$

eine ähnliche Struktur zur Zweipunktfunktion (D.0.3). Obige Gleichung (D.0.1) kann für allgemeine Spins ($s \geq 1$) mit (4.2.61) und (4.2.85) verallgemeinert werden. Es folgt für den isotropen Fall

¹Der abweichende Faktor 4 in den „Driving“-Termen der nichtlinearen Integralgleichung [14] und [29] kommt durch eine andere Normierung der Kopplungskonstante des Hamilton-Operators zustande.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} &= 2\pi i F(x - \mu) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x - x') \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \mathbf{a}^{(s)}(x' + i) \Big|_{\delta=0}}{1 + [\mathbf{a}^{(s)}(x' + i)]^{-1} \Big|_{\delta=0}} + \frac{\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \bar{\mathbf{a}}^{(s)}(x' - i) \Big|_{\delta=0}}{1 + [\bar{\mathbf{a}}^{(s)}(x' - i)]^{-1} \Big|_{\delta=0}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.0.5})$$

Die Vermutung liegt nun nahe, dass die entsprechende anisotrope Verallgemeinerung durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x; \mu) \Big|_{\delta=0} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sinh\left(\left(\pi - \gamma\right)\frac{k}{2}\right) \cos((x - \mu)k)}{2i \sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x - x') \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \mathbf{a}^{(s)}\left(x' + \frac{\eta}{2}; \mu\right) \Big|_{\delta=0}}{1 + [\mathbf{a}^{(s)}\left(x' + \frac{\eta}{2}; \mu\right)]^{-1} \Big|_{\delta=0}} + \frac{\frac{\partial}{\partial \delta} \ln \bar{\mathbf{a}}^{(s)}\left(x' - \frac{\eta}{2}; \mu\right) \Big|_{\delta=0}}{1 + [\bar{\mathbf{a}}^{(s)}\left(x' - \frac{\eta}{2}; \mu\right)]^{-1} \Big|_{\delta=0}} \right] \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sinh\left(\left(\pi - \gamma\right)\frac{k}{2}\right) \cos((x - \mu)k)}{2i \sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{K}(x - x') G_{1\mu}^{(0)}(x') \end{aligned} \quad (\text{D.0.6})$$

gegeben sein könnte, wobei die Funktion $G_{1\mu}^{(0)}(x)$ über ein lineares Integralgleichungs-System, ähnlich zu (4.2.32b) und (4.2.86), der Form

$$\begin{pmatrix} (1 + y_1^{-1}(x))G_{1\mu}^{(0)}(x) \\ (1 + y_2^{-1}(x))G_{2\mu}^{(0)}(x) \\ \vdots \\ (1 + y_{2s-1}^{-1}(x))G_{2s-1\mu}^{(0)}(x) \\ (1 + \mathbf{b}_\epsilon^{-1}(x))G_\mu^{(+)}(x) \\ (1 + \bar{\mathbf{b}}_\epsilon^{-1}(x))G_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\pi/\gamma}{\cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(x-\mu)\right)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} G_{1\mu}^{(0)}(x) \\ G_{2\mu}^{(0)}(x) \\ \vdots \\ G_{2s-1\mu}^{(0)}(x) \\ G_\mu^{(+)}(x) \\ G_\mu^{(-)}(x) \end{pmatrix}$$

und die Hilfsfunktionen $y_k(x)$, $k = 1, \dots, 2s - 1$, $\mathbf{b}_\epsilon(x)$ und $\bar{\mathbf{b}}_\epsilon(x)$ durch das nichtlineare Integralgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} \ln y_1(x) \\ \ln y_2(x) \\ \vdots \\ \ln y_{2s-1}(x) \\ \ln \mathbf{b}_\epsilon(x) \\ \ln \bar{\mathbf{b}}_\epsilon(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_{\mathbf{b}}(x) \\ \Delta_{\bar{\mathbf{b}}}(x) \end{pmatrix} + \hat{\mathcal{K}} * \begin{pmatrix} \ln Y_1(x) \\ \ln Y_2(x) \\ \vdots \\ \ln Y_{2s-1}(x) \\ \ln \mathfrak{B}_\epsilon(x) \\ \ln \bar{\mathfrak{B}}_\epsilon(x) \end{pmatrix} \quad (\text{D.0.7})$$

gegeben sein könnten. Die Form der Kernmatrix $\hat{\mathcal{K}}(x)$ könnte hierbei der Form der Kernmatrix des Gleichungssystems (4.2.83) entsprechen, wobei die Funktionen $\mathcal{K}(x)$ und $F(x)$ gegen die Funktionen

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{2\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}x\right)}, \quad G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\sinh\left(\left(\pi - 3\gamma\right)\frac{k}{2}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right) \sinh\left(\left(\pi - 2\gamma\right)\frac{k}{2}\right)} e^{-ikx}$$

auszutauschen sind. Der „Driving“-Term könnte demnach wie folgt lauten:

$$\Delta_{\mathbf{b}}(\lambda) = d(u, \lambda - i\epsilon) - \frac{\hbar}{T} f(\gamma, s), \quad \Delta_{\bar{\mathbf{b}}}(\lambda) = d(u, \lambda + i\epsilon) + \frac{\hbar}{T} f(\gamma, s)$$

mit

$$d(u, \lambda) = -\frac{2J\pi}{T \cosh\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)}$$

und einer einfachen Funktion $f(\gamma, s)$, welche vom Anisotropieparameter γ und vom Spin s abhängt. Für $s = 1$ ist diese durch

$$f(\gamma, 1) = \frac{\pi}{2\gamma - \pi}$$

gegeben (vgl. (4.1.26)). Diese Funktion wird durch das asymptotische Verhalten der Hilfsfunktionen festgelegt.

So könnte die Spin-1 XXZ -Verallgemeinerung der ω -Funktion zu (D.0.4) oder (6.2.25) folgendermaßen

heißen:

$$\omega^{XXZ}(x, \mu) = -\frac{1}{2} [\coth(\mu - x - \eta) - \coth(\mu - x + \eta)] - 2 \frac{\partial}{\partial(-\delta)} \ln \Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x, \mu) \Big|_{\delta=0},$$

beziehungsweise

$$\omega(x, \mu) = \frac{1}{2} - 2 \frac{\sinh(x - \mu - \eta) \sinh(x - \mu + \eta)}{\sinh(2\eta)} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \Lambda_0^{[s; \frac{1}{2}]}(x, \mu) \Big|_{\delta=0}. \quad (\text{D.0.8})$$

Es wird vermutet, dass die Faktorisierung der $(2s \cdot m)$ -Dichte-Matrix $D(\xi_1, \dots, \xi_{2s \cdot m})$ auf die Dichte-Matrix $D^{[2s; 1]}(\zeta_1, \dots, \zeta_{2s \cdot m})$ sowohl für das XXX -Modell als auch für die anisotrope Verallgemeinerung übertragen werden kann. Die Schwierigkeit besteht nun darin, das Analogon der Funktion $\omega'(x, \mu)$ (siehe [14]) für den Spin- $(s \geq 1)$ -Fall zu formulieren und zu überprüfen, ob der Ansatz für die in (D.0.8) eingeführte „physikalische Funktion“ korrekt ist.

Alternativ, anstatt nach der Funktion $\omega'(x, \mu)$ zu suchen, lässt sich eventuell analog zur Spin-1/2 XXZ -Kette (2.0.1) eine verallgemeinerte Funktion $\Psi^{(s)}(e^x, e^\mu | \kappa, \alpha)$ mit weiteren Parameter α einführen, wobei diese im Limes $\alpha \rightarrow 0$ einerseits die ω -Funktion, aber andererseits ihre Ableitung bezüglich des neuen Parameters α die Funktion $\omega'(x, \mu)$ generiert (vgl. Gleichung (7.2.10)). Die Idee ist nun, die Ergebnisse in [15] des Spin-1/2-Modelles auf den Spin-1-Fall zu übertragen. Jedoch ergibt sich hier die weitere Schwierigkeit, dass die Funktion $\Psi^{(1/2)}(\exp(x), \exp(\mu); \alpha) \equiv \Psi(\exp(x), \exp(\mu); \alpha)$ durch eine Integralgleichung über eine Kontur dargestellt ist. Diesen Formalismus kennt man aber für das Spin-1-Modell (2.0.2) nicht. Daher muss zunächst eine, nach Möglichkeit einfache, Beschreibung durch Integrale entlang der reellen Achse konstruiert werden.

Als Ansatz bietet sich folgende Form an:

$$\Psi(e^{\xi_1}, e^{\xi_2} | \kappa, \alpha) = \Psi_0(e^{\xi_1}, e^{\xi_2} | \kappa, \alpha) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{K}(\xi_2, x | \kappa, \alpha) \left[\frac{g_{\xi_1}^{(+)}(x | \kappa, \alpha)}{1 + \bar{\mathfrak{a}}^{-1}(x + \frac{\eta}{2}; \xi_1) \Big|_{\delta=0}} + \frac{g_{\xi_1}^{(-)}(x | \kappa, \alpha)}{1 + \bar{\mathfrak{a}}^{-1}(x - \frac{\eta}{2}; \xi_1) \Big|_{\delta=0}} \right], \quad (\text{D.0.9})$$

wobei

$$\mathcal{K}(\xi_1, \xi_2 | \kappa, \alpha) := \frac{\exp(\alpha(\xi_1 - \xi_2))}{4\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\xi_1 - \xi_2)\right)} (1 + \rho(\xi_2))$$

und die Funktionen $g_{\mu}^{(\pm)}(x | \kappa, \alpha)$ im Limes $\alpha \rightarrow 0$ gegen die Funktionen $g_{\mu}^{(\pm)}(x)$, definiert in [14] in Gleichung (54), konvergieren sollen. Im Limes $\alpha \rightarrow 0$ folgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{K}(\xi_1, \xi_2 | \kappa, \alpha) = \frac{1}{2\gamma \cosh\left(\frac{\pi}{\gamma}(\xi_1 - \xi_2)\right)}.$$

Weiterhin soll für die Inhomogenität $\Psi_0(e^{\xi_1}, e^{\xi_2} | \kappa, \alpha)$ der Grenzwert

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Psi_0(e^{\xi_1}, e^{\xi_2} | \kappa, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sinh\left(\left(\pi - \gamma\right)\frac{k}{2}\right) \cos\left(\left(\xi_1 - \xi_2\right)k\right)}{2i \sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)}$$

gelten, sodass (7.2.10a) erfüllt wird. Wird der Ansatz (D.0.9) in die Funktionalgleichung eingesetzt, folgt für die Inhomogenität $\Psi_0(e^{\xi_1}, e^{\xi_2} | \kappa, \alpha)$ die weitere Bedingung

$$\begin{aligned} \Psi_0\left(e^\lambda, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha\right) + \rho(\lambda) e^{-\alpha\eta} \Psi_0\left(e^{\lambda-\eta}, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha\right) \\ = -e^{-\alpha\eta} \coth(\lambda - \lambda_2 - \eta) + \rho(\lambda_2) \coth(\lambda - \lambda_2), \lambda \in \{\nu_k^-\}_{k=1}^N. \end{aligned} \quad (\text{D.0.10})$$

Im Limes $\alpha \rightarrow 0$ vereinfacht diese sich zu

$$\Psi_0\left(e^\lambda, e^{\lambda_2} | 0\right) + \Psi_0\left(e^{\lambda-\eta}, e^{\lambda_2} | 0\right) = \coth(\lambda - \lambda_2) - \coth(\lambda - \lambda_2 - \eta), \lambda \in \{\nu_k^-\}_{k=1}^N,$$

welche durch oben genannten Limes

$$\Psi_0(e^{\xi_1}, e^{\xi_2} | \kappa, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sinh\left(\left(\pi - \gamma\right)\frac{k}{2}\right) \cos\left(\left(\xi_1 - \xi_2\right)k\right)}{2i \sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}k\right)}$$

gelöst wird. Des Weiteren werden an die Funktionen $g_{\mu}^{(\pm)}(x | \kappa, \alpha)$ und $\Psi_0(e^{\xi_1}, e^{\xi_2} | \kappa, 0)$ über dem Zusammenhang (7.2.10b) weitere Bedingungen gestellt: Einsetzen der Definition (7.2.7b) führt zu

$$\omega'_{[14]}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\eta}{2} [\coth(\lambda_{12} + \eta) + \coth(\lambda_{12} - \eta)] - 2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha) \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi(e^{\lambda_2}, e^{\lambda_1} | \kappa, 0) \Big|_{\alpha=0} \right]. \quad (\text{D.0.11})$$

Verwenden des Ansatzes (D.0.9) in Gleichung (7.2.10b) und Vergleichen mit der Integralgleichung der Funktion $\omega_{[14]}(\lambda_1, \lambda_2)$ (siehe Gleichung (62) in [14]) liefert Bestimmungsgleichungen für

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} g_{\mu}^{(\pm)}(x | \kappa, \alpha) \Big|_{\alpha=0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi_0(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2} | \kappa, \alpha) \Big|_{\alpha=0}.$$

Der nächste Schritt besteht darin, Lösungen für die Gleichungen (D.0.10) und (D.0.11) zu finden, sodass der Ansatz (D.0.9) für die Funktion $\Psi(e^{\xi_1}, e^{\xi_2} | \kappa, \alpha)$, definiert in (7.2.4), das asymptotische Verhalten (7.2.12) erfüllt.

Anschließend steht noch die Verallgemeinerung des Ergebnis auf den Spin-1-Fall aus.

Die affine Quantengruppe $U_q(\widehat{sl}_2)$

Zunächst wird die Quantengruppe $U_q(sl_2)$, die sich als Unter algebra der affinen Quantengruppe $U_q(\widehat{sl}_2)$ ergibt, und deren Darstellungen in Kürze diskutiert. Daraufhin wird der Zusammenhang der \mathcal{R} -Matrix zu den sogenannten Evaluationsdarstellungen der affinen Quantenalgebra $U_q(\widehat{sl}_2)$, welche mit den endlich dimensionalen Darstellungen der Quantengruppe $U_q(sl_2)$ verbunden sind, erläutert. Hier wird sich auf generische Werte für $q := e^\eta$ beschränkt, d.h. q ist keine Einheitswurzel bzw. $i\eta \neq \frac{2\pi k}{l}$ für zwei Zahlen $l, k \in \mathbb{Z}$.

E.1. Die Quantengruppe $U_q(sl_2)$

Im Folgenden ist q eine feste komplexe Zahl, sodass $q \neq 0$ und $q^2 \neq 1$ gilt. Dann wird die assoziative Algebra mit Eins über dem Körper \mathbb{C} , deren Generatoren E, F, K, K^{-1} die Relationen

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \quad (\text{E.1.1a})$$

$$[E, F] := EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (\text{E.1.1b})$$

erfüllen, als Universelle Einhüllende $U_q(sl_2)$ bezeichnet. Die Generatoren E, F, K, K^{-1} sind die sogenannten Chevalley-Erzeuger. Mit

$$C_q := EF + \frac{Kq^{-1} + K^{-1}q}{(q - q^{-1})^2} = FE + \frac{Kq + K^{-1}q^{-1}}{(q - q^{-1})^2}$$

wird der Quanten-Casimir-Operator eingeführt. Dieser liegt im Zentrum der Algebra $U_q(sl_2)$. Falls q keine Einheitswurzel ist, wird das Zentrum durch den Quanten-Casimir-Operator erzeugt. Mit dem Koprodukt $\Delta : U_q(sl_2) \rightarrow U_q(sl_2) \otimes U_q(sl_2)$, der Koeins $\epsilon : U_q(sl_2) \rightarrow \mathbb{C}$ und der Antipode $S : U_q(sl_2) \rightarrow U_q(sl_2)$, welche durch die Eigenschaften

$$\Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, \quad \Delta(K) = K \otimes K, \quad (\text{E.1.2a})$$

$$S(K) = K^{-1}, \quad S(E) = -EK^{-1}, \quad S(F) = -KF, \quad (\text{E.1.2b})$$

$$\epsilon(K) = 1, \quad \epsilon(E) = \epsilon(F) = 0 \quad (\text{E.1.2c})$$

definiert sind, wird eine eindeutige Hopf-Algebrastruktur auf $U_q(sl_2)$ gegeben:

Sei $\mu : U_q(sl_2) \otimes U_q(sl_2) \rightarrow U_q(sl_2)$ eine bilineare Abbildung und η die in $U_q(sl_2)$ eingebettete Eins. Dann sind die Abbildungen Δ und ϵ Algebra-Homomorphismen, S ein Antialgebra-Homomorphismus und die Multiplikation μ und die Eins η Koalgebra-Homomorphismen. Weiterhin kommutiert das folgende Diagramm E.1 (*hier: $H \equiv U_q(sl_2)$, und Körper $K \equiv \mathbb{C}$*).

$$\begin{array}{ccccc}
 & H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes \text{id}} & H \otimes H & \\
 \Delta \nearrow & & & & \searrow \mu \\
 H & \xrightarrow{\epsilon} & K & \xrightarrow{\eta} & H \\
 \Delta \searrow & & & & \nearrow \mu \\
 & H \otimes H & \xrightarrow{\text{id} \otimes S} & H \otimes H &
 \end{array}$$

Abbildung E.1.: Hopf-Algebrastruktur der Quantenalgebra $H \equiv U_q(sl_2)$.

Diese Hopf-Algebra wird als Quantenalgebra oder auch Quantengruppe $U_q(sl_2)$ bezeichnet. Der klassische Grenzwert $q \rightarrow 1$ führt zur Hopf-Algebra $U(sl_2)$, welche durch die Erzeuger x_\pm, y über die definierenden Relationen $[y, x_\pm] = \pm 2x_\pm$ und $[x_+, x_-] = 2y$ generiert wird [64, 67].

E.1.1. Endlich dimensionale Darstellung der Quantengruppe $U_q(sl_2)$

Eine Darstellung (π, V) der Quantengruppe $U_q(sl_2)$ ist ein linearer Vektorraum V mit einer linearen Abbildung $\pi : U_q(sl_2) \rightarrow \mathfrak{End}(V)$, sodass gilt $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ für alle $A, B \in U_q(sl_2)$. Sei nun (π, V) eine Darstellung von $U_q(sl_2)$. Dann ist durch $V_\mu := \{v \in V \mid \pi(K)v = \mu v\}$ für nichttriviale Räume V_μ der Gewichtsraum zum Gewicht μ definiert. Vektoren ungleich Null aus V_μ werden als Gewichtsvektoren zum Gewicht μ bezeichnet. Falls $\pi(E)v = 0$ und $\pi(K)v = \mu'v$ gilt, wird der Vektor v als Vektor des höchsten Gewichtes μ' genannt. In diesem Fall heißt μ' das höchste Gewicht der Darstellung (π, V) . Falls der Vektorraum V sich in eine direkte Summe von Gewichtsvektorräumen zerlegen lässt, wird die Darstellung (π, V) als Gewichtsdarstellung bezeichnet. Der Parameter q teilt die Darstellungstheorie für die Quantenalgebra $U_q(sl_2)$ in zwei Klassen: Es wird unterschieden ob entweder q generisch, oder eine Einheitswurzel ist.

- **q ist keine Einheitswurzel:** Die Vorgehensweise eine Darstellung zu konstruieren geschieht in ähnlicher Weise zu der undeformierten Liealgebra sl_2 . Die endliche irreduzible Darstellung, die Spin-Darstellung der $U_q(sl_2)$, wird durch einen positiv-halbzahligem Spin l gekennzeichnet. Es kann gezeigt werden, dass jede endlich dimensionale Darstellung eine Gewichtsdarstellung, und jede endlich dimensionale Darstellung π von $U_q(sl_2)$ reduzibel ist, d.h. π zerfällt in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen: Sei π eine Darstellung der Quantenalgebra $U_q(sl_2)$, l eine halbzahlige, nicht negative Zahl, und V_l ein $(2l + 1)$ -dimensionaler komplexer Vektorraum mit Basis e_m , $m = -l, -l + 1, \dots, l$. Sei ferner $\omega \in \{1, -1\}$. Dann definieren wir die Operatoren $\pi_{\omega l}(E), \pi_{\omega l}(F), \pi_{\omega l}(K)$ über die Wirkung auf dem Vektorraum V_l durch

$$\pi_{\omega l}(K)e_m := \omega q^{2m} e_m, \quad (\text{E.1.3a})$$

$$\pi_{\omega l}(E)e_m := \sqrt{[l - m]_q [l + m + 1]_q} e_{m+1}, \quad (\text{E.1.3b})$$

$$\pi_{\omega l}(F)e_m := \omega \sqrt{[l + m]_q [l - m + 1]_q} e_{m-1}, \quad (\text{E.1.3c})$$

wobei

$$[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad (\text{E.1.4})$$

die sogenannte q -Zahl ist. Definitionsgemäß ist

$$[n]_q! := [n]_q [n - 1]_q \cdots [1]_q [0]_q$$

für $n \geq 0$, wobei $[0]_q! \equiv 1$ ist. Die Bedingungen an die Darstellung π , welche von den definierenden Relationen herrühren (siehe (E.1.1)), werden erfüllt: Der Operator $\pi(K)$ ist invertierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \pi(K)\pi(E)\pi(K^{-1}) &= q^2\pi(E), \quad \pi(K)\pi(F)\pi(K^{-1}) = q^{-2}\pi(F), \\ \pi(E)\pi(F) - \pi(F)\pi(E) &= \frac{\pi(K) - \pi(K)^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass jede irreduzible endlich dimensionale Darstellung π von $U_q(sl_2)$ äquivalent zu einer der Darstellungen $\pi_{\omega l}$, $\omega \in \{1, -1\}$ und $l = 0, 1/2, 1, \dots$ ist. Falls $\omega = 1$ gilt, dann wird statt $\pi_{\omega l}$ kurz π_l geschrieben. Diese Darstellung wird als Darstellung Typ 1 bezeichnet [64, 67].

- **q ist Einheitswurzel:** Sei q eine p -fache Einheitswurzel, wobei $\mathbb{N} \ni p \geq 3$, und $p' := p$ für ungerades p und $p' = p/2$, falls p gerade. In diesem Fall ist das Zentrum von $U_q(sl_2)$ viel größer, da es außer dem Casimir-Operator C_q auch von den Elementen $X^{p'}$, $X \in \{E, F, K, K^{-1}\}$ erzeugt wird. Ein Beweis dazu findet sich in [36]. Es lässt sich zeigen, dass alle irreduziblen Darstellungen endlich dimensional sind. Sei π nun eine irreduzible Darstellung. Dann gilt, dass die Bilder von $\pi(E^{p'})$ und $\pi(F^{p'})$ ein skalares Vielfaches des Identitätsoperators sind. Nun werden die drei Fälle unterschieden, ob $\pi(E^{p'}) = 0 = \pi(F^{p'})$, $\pi(E^{p'}) \neq 0 \neq \pi(F^{p'})$, oder $\pi(E^{p'}) \neq 0, \pi(F^{p'}) = 0$ bzw. $\pi(E^{p'}) = 0, \pi(F^{p'}) \neq 0$ gilt [51, 67]. Es ergeben sich vier verschiedene Klassen von irreduziblen Darstellungen: Die zyklische, semizyklische und die nilpotente irreduzible Darstellung der Dimension p' , und eine irreduzible Darstellung mit Dimension $d < p'$, welche als klassische Darstellung bezeichnet wird. In [51] wird eine Übersicht mit den Unterschieden der Darstellungen gegeben.

E.1.2. Tensorprodukte von Darstellungen. Die q -deformierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten

In diesem Abschnitt sollen Darstellungen, die sich aus Tensorprodukten von Darstellungen ergeben, für generisches q untersucht werden. Für zwei auf den Vektorräumen V und V' gegebene Darstellungen π und π' der Quantengruppe $U_q(sl_2)$ ist ihr Tensorprodukt $\pi \otimes \pi'$ eine Darstellung des Vektorraumes $V \otimes V'$, welche über

$$\pi \otimes \pi'(a) := \sum \pi(a_{(1)}) \otimes \pi'(a_{(2)}) \quad (\text{E.1.5})$$

definiert ist. Im Folgenden sind π_{l_1} und π_{l_2} irreduzible Darstellungen mit $l_1, l_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Die Tensorprodukt-Darstellung $\pi_{l_1} \otimes \pi_{l_2}$ zerfällt in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen der Dimensionen $m \in \{|l_1 - l_2|, |l_1 - l_2| + 1, \dots, |l_1 + l_2|\}$,

$$\pi_{l_1} \otimes \pi_{l_2} \cong \bigoplus_{m=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \pi_m. \quad (\text{E.1.6})$$

Im weiteren Verlauf wird der Tensorprodukt-Vektorraum $V^{[l_1]} \otimes V^{[l_2]}$ durch $\tilde{V}^{[l_1+l_2]}$ bezeichnet. Mit e_j, e_k und e_m^l sollen Basen der Vektorräume $V^{[l_1]}, V^{[l_2]}$, bzw. $\tilde{V}^{[l]}$ angegeben werden, sodass die beiden Mengen

$$\left\{ e_j \otimes e_k \mid j = -l_1, -l_1 + 1, \dots, l_1; k = -l_2, -l_2 + 1, \dots, l_2 \right\},$$

$$\left\{ e_m^l \mid l = |l_1 - l_2|, |l_1 - l_2| + 1, \dots, l_1 + l_2; m = -l, -l + 1, \dots, l \right\}$$

eine Basis von $\tilde{V}^{[l_1+l_2]}$ sind. Dann gibt es eine Matrix C , deren Matrixeinträge $C_q(l_1, l_2, l; m_1, m_2, m)$ die Gleichungen

$$e_m^l = \sum_{j,k} C_q(l_1, l_2, l; j, k, m) e_j \otimes e_k \quad (\text{E.1.7})$$

erfüllen. Die Zahlen $C_q(l_1, l_2, l; m_1, m_2, m)$ sind die sogenannten q -deformierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGK). Mit $\pi_{mn}^{(l)}, m, n = -l, -l + 1, \dots, l$, werden die Matrixeinträge der Darstellung π_l der $U_q(sl_2)$ bzgl. der Basis $\{e_m\}$ des Vektorraumes V_l beschriftet. Dann gilt

$$\pi_l(\cdot) e_n = \sum_m \pi_{mn}^{(l)}(\cdot) e_m.$$

Anwenden der Darstellung $\pi_{l_1} \otimes \pi_{l_2}$ auf beiden Seiten von (E.1.7) und Benutzen der Darstellungsvorschriften (E.1.3) liefert durch Koeffizientenvergleich die CGK und eine eindeutige Darstellung der Basisvektoren e_m^l durch die Vektoren $e_j \otimes e_k$ [51, 67]. In der Ket-Schreibweise sind die Basisvektoren $e_j \equiv |l_1 j\rangle$, $e_k \equiv |l_2 k\rangle$ und $e_m^l \equiv |l m\rangle$ durch

$$|l m\rangle = \sum_{j=-l_1}^{l_1} \sum_{k=-l_2}^{l_2} C_q(l_1, l_2, l; j, k, m) |l_1 j\rangle \otimes |l_2 k\rangle.$$

gegeben. Für $l_1 = l_2 = 1/2$ lauten die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der Quantenalgebra $U_q(su_2)$ folgendermaßen:

$$C_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = -C_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{q^{-1/2}}{\sqrt{[2]_q}},$$

$$C_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = -C_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{q^{1/2}}{\sqrt{[2]_q}}, \quad (\text{E.1.8})$$

$$C_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = -C_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) = 1.$$

Zu bemerken ist, dass die Vektoren $|l m\rangle$ keine orthogonale Basis aufspannen, falls q eine Phase und nicht reell ist. Denn dann gilt $q^\dagger = q^{-1}$ und somit ist im Fall $l_1 = l_2 = 1/2$ beispielsweise $\langle 0, 0 \mid 1, 0\rangle \neq 0$. Für reelles q gilt wie bei den gewöhnlichen CGK der su_2 ¹

$$C_q(l_1, l_2, l; j, k, m) = \langle l_1, j \mid \langle l_2, k \mid \mid l, m\rangle.$$

¹Die CGK der su_2 erhält man aus den q -deformierten CGK im Limes $q \rightarrow 1$.

E.1.3. Spin-1-Projektionsoperatoren

Mit $S : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ und $U : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^{-1/2}}{\sqrt{[2]_q}} & \frac{q^{1/2}}{\sqrt{[2]_q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q^{1/2}}{\sqrt{[2]_q}} & -\frac{q^{-1/2}}{\sqrt{[2]_q}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.1.9})$$

werden zwei Abbildungen eingeführt, welche den Tensorproduktraum zweier Spin-1/2-Darstellungen $V^{[\frac{1}{2}]}$ auf die beiden Untervektorräume $V^{[1]} \equiv V^{(t)}$ und $V^{[0]} \equiv V^{(s)}$ des Tensorprodukt-Vektorraumes $V^{[\frac{1}{2}]} \otimes V^{[\frac{1}{2}]} \cong V^{[0]} \oplus V^{[1]}$ abbilden. Die Matrixeinträge der Abbildungen S und U entsprechen den CGK (E.1.8). Dabei werden als Basen die Standardbasen

$$B_{(t)} := \{|1\ 1\rangle, |1\ 0\rangle, |1\ -1\rangle\} \quad (\text{Triplettraum}), \quad \text{bzw.} \quad B_{(s)} := \{|0\ 0\rangle\} \quad (\text{Singuletttraum})$$

gewählt. Mit

$$\mathcal{P}^+ := S^t S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^{-1}}{[2]_q} & \frac{1}{[2]_q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{[2]_q} & \frac{q}{[2]_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^- := U^t U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{[2]_q} & \frac{q}{[2]_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.10})$$

ergeben sich zwei Projektionsoperatoren \mathcal{P}^\pm auf den Singuletttraum (\mathcal{P}^- mit $\mathcal{P}^- |0\ 0\rangle = |0\ 0\rangle$, $\mathcal{P}^- |1\ m\rangle = 0$, $m = \pm 1, 0$) bzw. auf den Triplettraum (\mathcal{P}^+ mit $\mathcal{P}^+ |0\ 0\rangle = 0$, $\mathcal{P}^+ |1\ m\rangle = |1\ m\rangle$, $m = \pm 1, 0$), welche die Eigenschaften

$$\mathcal{P}^\pm \mathcal{P}^\mp = 0 \quad (\text{E.1.11a})$$

erfüllen. Dabei sind die Matrizen S^t und U^t durch

$$S^t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^{-1/2}}{\sqrt{[2]_q}} & 0 \\ 0 & \frac{q^{1/2}}{\sqrt{[2]_q}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^t := \begin{pmatrix} 0 & \frac{q^{1/2}}{\sqrt{[2]_q}} \\ -\frac{q^{-1/2}}{\sqrt{[2]_q}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.11b})$$

definiert. Weiterhin gilt

$$S S^t = \mathbb{1}_3, \quad U U^t = 1, \quad S U^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U S^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.1.11c})$$

wobei der hochgestellte Index t die Transposition der Matrizen bezeichnet ^{II}.

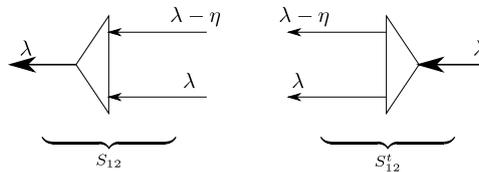


Abbildung E.2.: Grafische Darstellung der Operatoren S_{12} und S_{12}^t . Die schmalen Linien stellen die Spin-1/2-Vektorräume dar, während der Spin-1-Vektorraum durch die dickere Linie repräsentiert wird.

Die Operatoren S und S^t werden auch als linksseitige bzw. rechtsseitige Symmetrisierer bezeichnet. Analog lassen sich Symmetrisierer zu Darstellungen höherer Spins mittels der Clebsch-Gordan-Koeffizienten, siehe hierfür z. B. [67], als auch durch entsprechende Eigenschaften zu (E.1.11c) konstruieren. Für die

^{II}Dies gilt jedoch im Allgemeinen für höhere Spindarstellungen nicht für komplexwertige q , sondern nur im Falle reeller q -Werte, insbesondere im isotropen Fall.

Abbildung S soll folgende Notation eingeführt werden:

$$S := S^{[1],(1/2 \otimes 1/2)}$$

und allgemein für höhere Spin-Darstellungen

$$S^{[s],(s_1 \otimes s_2)}$$

mit $s \in \{|s_1 - s_2|, |s_1 - s_2| + 1, \dots, s_1 + s_2 - 1, s_1 + s_2\}$. Falls $s = s_1 + s_2$ gilt, wird für $s_2 = 1/2$ auch die Notation der Fusionsprozedur, siehe (3.1.3),

$$S^{[s],((s-1/2) \otimes 1/2)} = S_{\langle \dots \langle (1 \ 2) \ 3 \rangle \dots 2s-1 \rangle 2s} \quad (\text{E.1.12})$$

verwendet, wobei die Räume $1, 2, \dots, 2s, 2s + 1$ isomorph zu \mathbb{C}^2 sind. Die $(s + 1 - m)$ te Zeile mit $4s$ Einträgen ist dann durch

$$\begin{aligned} & \left(S^{[s],((s-1/2) \otimes 1/2)} \right)_{s+1-m} \\ &= (\dots, C_q(s-1/2, 1/2, s; j, 1/2, m), C_q(s-1/2, 1/2, s; j, -1/2, m), \dots), \\ & \quad j \in \left\{ s - \frac{1}{2}, s - \frac{3}{2}, \dots, -s + \frac{1}{2} \right\}, \quad (\text{E.1.13}) \end{aligned}$$

definiert, wobei $m \in \{-s, \dots, s\}$. Der Operator $S^{[s],((s-1/2) \otimes 1/2)}$ ist nach der Definition (E.1.12) eine Abbildung

$$S^{[s],((s-1/2) \otimes 1/2)} : \mathbb{C}^{2(s-(1/2))+1} \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{2s+1}.$$

Analog lässt sich der rechtsseitige Symmetrisierer durch

$$\left(S^{[s],((s-1/2) \otimes 1/2)} \right)^t = S_{\langle \dots \langle (1 \ 2) \ 3 \rangle \dots 2s-1 \rangle 2s}^t : \mathbb{C}^{2s+1} \rightarrow \mathbb{C}^{2(s-(1/2))+1} \otimes \mathbb{C}^2 \quad (\text{E.1.14})$$

einführen.

E.2. Die affine Quantengruppe $U_q(\widehat{sl}_2)$

Die affine Quantengruppe $U_q(\widehat{sl}_2)$ ist eine durch die Generatoren E_i, F_i und K_i^\pm für $i = 0, 1$ definierte, assoziative Algebra mit Eins über dem Körper \mathbb{C} , wobei die Generatoren die Relationen

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad K_0 K_1 = K_1 K_0, \quad (\text{E.2.1a})$$

$$K_i E_i K_i^{-1} = q^2 E_i, \quad K_i F_i K_i^{-1} = q^{-2} F_i, \quad (\text{E.2.1b})$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q^{-2} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^2 F_j, \quad \text{für } i \neq j, \quad (\text{E.2.1c})$$

$$[E_i, F_i] = \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad [E_i, F_j] = 0, \quad \text{für } i \neq j, \quad (\text{E.2.1d})$$

$$(E_i)^3 E_j - [3]_q (E_i)^2 E_j E_i + [3]_q E_i E_j (E_i)^2 - E_j (E_i)^3 = 0, \quad (\text{E.2.1e})$$

$$(F_i)^3 F_j - [3]_q (F_i)^2 F_j F_i + [3]_q F_i F_j (F_i)^2 - F_j (F_i)^3 = 0 \quad (\text{E.2.1f})$$

erfüllen. Mit der Komultiplikation $\Delta : U_q(\widehat{sl}_2) \rightarrow U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$, der Koeins $\epsilon : U_q(\widehat{sl}_2) \rightarrow \mathbb{C}$ und der Antipode $S : U_q(\widehat{sl}_2) \rightarrow U_q(\widehat{sl}_2)$, welche auf den Erzeugern durch

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes K_i + \mathbf{1} \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes \mathbf{1} + K_i^{-1} \otimes F_i, \quad \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad (\text{E.2.2a})$$

$$S(K_i) = K_i^{-1}, \quad S(E_i) = -E_i K_i^{-1}, \quad S(F_i) = -K_i F_i, \quad (\text{E.2.2b})$$

$$\epsilon(K_i) = 1, \quad \epsilon(E_i) = \epsilon(F_i) = 0 \quad (\text{E.2.2c})$$

definiert sind, ist für die affine Quantengruppe $U_q(\widehat{sl}_2)$ ebenfalls eine Hopf-Algebrastruktur gegeben. Demnach ist die Quantengruppe $U_q(sl_2)$ eine Hopf-Unteralgebra der $U_q(\widehat{sl}_2)$, welche von den Generatoren E_i, F_i und K_i mit entweder $i = 0$ oder $i = 1$ erzeugt wird. Also generiert die affine Quantengruppe $U_q(\widehat{sl}_2)$ die Quantengruppe $U_q(sl_2)$. Für die Darstellung der affinen Quantengruppe gibt es zwei wichtige Klassen von Darstellungstypen: Höchstgewichtsmodule oder Evaluationsmodule.

Die Evaluationsmodule werden über die endlich-dimensionalen Modulen der $U_q(sl_2)$ unter Einführung von Spektralparametern konstruiert. Man spricht hierbei von der „Affinization“ [61]. Nach [59] wird durch

folgenden Algebra-Homomorphismus $\varphi_\lambda : U_q(\widehat{sl}_2) \rightarrow U_q(sl_2)$, der durch

$$E_0 \mapsto \lambda F, \quad F_0 \mapsto \lambda^{-1} E, \quad K_0 \mapsto K^{-1}, \quad E_1 \mapsto E, \quad F_1 \mapsto F, \quad K_1 \mapsto K$$

über die Erzeuger definiert ist, eine Evaluationsabbildung zu einer nicht-verschwindenden, komplexen Zahl x gegeben. Ist $V = Cv_+ \oplus Cv_-$ ein $U_q(sl_2)$ -Modul, dann wirken die Erzeuger auf die Eigenbasis von K folgendermaßen:

$$\begin{aligned} Ev_+ &\mapsto 0, & Fv_+ &\mapsto v_-, & K^\pm v_+ &\mapsto q^{\pm 1} v_+, \\ Ev_- &\mapsto v_+, & Fv_- &\mapsto 0, & K^\pm v_- &\mapsto q^{\mp 1} v_-. \end{aligned}$$

Der entsprechende Modul wird als Evaluationsmodul V zum Parameter λ bezeichnet. Dieser soll durch V_λ gekennzeichnet werden. Sei π_l bzgl. des Vektorraumes V_l eine endlich dimensionale Darstellung der Quantenalgebra $U_q(sl_2)$. Dann lässt sich mit $(\pi_l \circ \varphi_\lambda)a$ für $a \in U_q(\widehat{sl}_2)$ eine Darstellung, die sogenannte Evaluationsdarstellung, der affinen Quantenalgebra $U_q(\widehat{sl}_2)$ konstruieren. Genauso wie bei der Quantenalgebra $U_q(sl_2)$ lässt sich über die Komultiplikation das Tensorprodukt zweier Darstellungen der $U_q(\widehat{sl}_2)$ wieder als eine Darstellung von $U_q(\widehat{sl}_2)$ verstehen. Da Tensorprodukte von Darstellungen mit vertauschter Reihenfolge der Darstellungsräume zueinander äquivalent sind, muss daher ein „Intertwiner“ $\check{\mathfrak{R}}$ auf dem Tensorprodukt zweier Evaluationsdarstellungen existieren, so dass gilt

$$\check{\mathfrak{R}}(\lambda_1, \lambda_2) : V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \rightarrow V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_1}. \quad (\text{E.2.3})$$

Es folgt, dass

$$\check{\mathfrak{R}}(\lambda_1/\lambda_2)(\pi_{l'} \circ \varphi_{\lambda_1} \otimes \pi_l \circ \varphi_{\lambda_2})(\Delta(a)) = (\pi_{l'} \circ \varphi_{\lambda_2} \otimes \pi_l \circ \varphi_{\lambda_1})(\Delta(a))\check{\mathfrak{R}}(\lambda_1/\lambda_2) \quad (\text{E.2.4})$$

für alle $a \in U_q(\widehat{sl}_2)$ gilt. Für den Fall $l = l' = 1/2$ ergeben sich aus (E.2.4) lineare Funktionalgleichungen, welche durch

$$\check{\mathfrak{R}}(\lambda \equiv \lambda_1/\lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-q^2)\lambda}{1-q^2\lambda^2} & \frac{(1-\lambda^2)q}{1-q^2\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\lambda^2)q}{1-q^2\lambda^2} & \frac{(1-q^2)\lambda}{1-q^2\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(q-q^{-1})\lambda_1}{\lambda_1 q - \lambda_2 q^{-1}} & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 q - \lambda_2 q^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 q - \lambda_2 q^{-1}} & \frac{(q-q^{-1})\lambda_1}{\lambda_1 q - \lambda_2 q^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.5})$$

gelöst werden. Mit $\lambda_1 := e^\lambda$ und $\lambda_2 := e^\mu$ ergibt sich die in (2.5.3) eingeführte \mathcal{R} -Matrix [59, 61]. Mit der alternativen Evaluationsabbildung $\tilde{\varphi}_\lambda$, definiert über

$$E_0 \mapsto e^{2\lambda} F, \quad F_0 \mapsto e^{-2\lambda} E, \quad K_0 \mapsto K^{-1}, \quad E_1 \mapsto E, \quad F_1 \mapsto F, \quad K_1 \mapsto K,$$

liefert (E.2.4) die Bestimmungsgleichungen (2.5) in [38], welche durch die \mathcal{R} -Matrix

$$\mathfrak{R}(\lambda - \mu) = P\check{\mathfrak{R}}(\lambda - \mu) \quad (\text{E.2.6})$$

gelöst werden. In [38] wird diese mit R_{12}^+ (siehe (3.2)) bezeichnet. Diese steht über die (inverse) Eichtransformation (A.0.4) mit (2.5.3) im Zusammenhang. Durch Vertauschen der beiden Räume ergibt sich die Form in (A.0.5). Eine weitere nützliche Eigenschaft von $U_q(sl_2)$ -Darstellungen ist die „Crossing“-Symmetrie,

$$\mathfrak{R}(\lambda - \mu - \eta) = (\text{Skalar}) (Q^{-1} \otimes \mathbb{1}) (\mathfrak{R}(\lambda - \mu)^{-1})^{t_1} (Q \otimes \mathbb{1}), \quad (\text{E.2.7})$$

wobei Q eine Abbildung vom $U_q(sl_2)$ -Modul V in den Dualraum V^* ist. Der skalare Faktor ist hierbei von der Normierung der \mathcal{R} -Matrix abhängig [61]. Die „Crossing“-Symmetrie ist eine Konsequenz der Hopf-Algebrastruktur: Mittels der Antipode erhält man aus jeder endlich-dimensionalen Darstellung $\pi : A \rightarrow \mathfrak{End}(V)$ einer Hopf-Algebra A eine Darstellung $\pi' : A \rightarrow \mathfrak{End}(V^*)$ via

$$v^*(S(a) \cdot v) = (a \cdot v^*)(v) \quad \forall a \in A, v \in V, v^* \in V^*. \quad (\text{E.2.8})$$

Mit (E.1.2b) und (E.2.2b), sowie mit der Definition der Evaluationsabbildung $\tilde{\varphi}_\lambda$ lässt sich zeigen, dass die Relation

$$S_{U_q(sl_2)} \circ \tilde{\varphi}_{\lambda-\eta} = \tilde{\varphi}_\lambda \circ S_{U_q(\widehat{sl}_2)} \quad (\text{E.2.9})$$

für alle Chevalley-Erzeuger der $U_q(\widehat{sl}_2)$ erfüllt wird [33].

Literaturverzeichnis

- [1] C. Ahn, M. Horibe, and K. Shigemoto, *Relation between Yang-Baxter and pair propagation equations in 16-vertex models*, Mod. Phys. Lett. B **8** (1994), 1729.
- [2] C. Ahn, R. Nepomechie, and J. Suzuki, *Finite size effects in the spin-1 XXZ and supersymmetric sine-Gordon models with Dirichlet boundary conditions*, Nucl. Phys. B **767** (2007), 250.
- [3] D. J. Amit, *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena*, 2nd ed., World Scientific, 2004.
- [4] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, *Solid state physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [5] B. Aufgebauer, *Berechnung der Korrelationsfunktionen des Heisenberg-Modells bei endlicher Temperatur mittels Funktionalgleichungen*, Dissertation, urn:nbn:de:hbz:468-20120622-093736-2, 2012.
- [6] B. Aufgebauer and A. Klümper, *Finite temperature correlation functions from discrete functional equations*, J. Phys A: Math. Theor. **45** (2012), 345203, DOI: 10.1088/1751-8113/45/34/345203.
- [7] H. M. Babujian, *Exact solution of the one-dimensional isotropic Heisenberg chain with arbitrary spin s* , Phys. Lett. A **90** (1982), 479.
- [8] M. T. Batchelor and M. Masken, *Exactly solvable quantum spin tubes and ladders*, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999), L377–L380.
- [9] M.T. Batchelor, L. Mezincescu, R. Nepomechie, and V. Rittenberg, *q -deformations of the $o(3)$ symmetric spin-1 Heisenberg chain*, J. Phys A: Math. Gen. **23** (1990), L141–L144.
- [10] R. J. Baxter, *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Phys. (N.Y.) **70** (1972), 193.
- [11] ———, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [12] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B **241** (1984), 333–380.
- [13] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Z. Phys. **71** (1931), 205.
- [14] H. Boos, J. Damerau, F. Göhmann, A. Klümper, J. Suzuki, and A. Weiße, *Short-distance thermal correlations in the XXZ chain*, J. Stat. Mech. (2008), P08010.
- [15] H. Boos and F. Göhmann, *On the physical part of the factorized correlation functions of the XXZ chain*, J. Phys. A **41** (2009), 315001.
- [16] ———, *Properties of linear integral equations related to the six-vertex model with disorder parameter*, New Trends in Quantum Integrable Systems (Boris Feigin, Michio Jimbo, and Masato Okado, eds.), World Scientific, Singapore, (2010), Proceedings of the conference on Infinite Analysis 09, pp 1–10.
- [17] H. Boos, F. Göhmann, A. Klümper, and J. Suzuki, *Factorization of multiple integrals representing the density matrix of a finite segment of the Heisenberg spin chain*, J. Stat. Mech. (2006), P04001.
- [18] ———, *Factorization of the finite temperature correlation functions of the XXZ chain in a magnetic field*, J. Phys. A **40** (2007), 10699.
- [19] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Completeness of a fermionic basis in the homogeneous XXZ model*, J. Math. Phys. **50** (2009), 095206.

- [20] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *A recursion formula for the correlation functions of an inhomogeneous XXX model*, Algebra and Analysis **17** (2005), 115.
- [21] ———, *Reduced q KZ equation and correlation functions of the XXZ model*, Comm. Math. Phys. **261** (2006), 245.
- [22] ———, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 263.
- [23] ———, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model II: creation operators*, Comm. Math. Phys. **286** (2009), 875.
- [24] H. E. Boos and V. E. Korepin, *Quantum spin chains and Riemann zeta function with odd arguments*, J. Phys. A **34** (2001), 5311.
- [25] H. E. Boos, V. E. Korepin, and F. A. Smirnov, *Emptiness formation probability and quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation*, Nucl. Phys. B **658** (2003), 417.
- [26] ———, *Emptiness formation probability and quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation*, Int. J. Mod. Phys. A, Suppl. **19** (2004), 57.
- [27] ———, *New formulae for solutions to quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations of level -4 and correlation functions*, Moscow Math. J. **4** (2004), 593.
- [28] H. E. Boos, M. Shiroishi, and M. Takahashi, *First principle approach to correlation functions of spin-1/2 Heisenberg chain: fourth-neighbor correlators*, Nucl. Phys. B **712** (2005), 573.
- [29] M. Bortz and F. Göhmann, *Exact thermodynamic limit of short range correlation functions of the antiferromagnetic XXZ chain at finite temperatures*, Eur. Phys. J. B **46** (2005), 399.
- [30] A. H. Bougourzi and R. A. Weston, *N -point correlation functions of the spin-1 XXZ model*, Nucl. Phys. B **417** (1994), 439–462.
- [31] W. Brenig, M. Günther, S. Grossjohann, H. H. Klauss, H. Kühne, P. L. Kuhns, C. P. Landee, F. J. Litterst, A. P. Reyes, and M. M. Turnbull, *Low frequency spin dynamics in the quantum magnet copper pyrazine dinitrate*, Phys. Stat. Sol. **B** (2010), 671.
- [32] J.-S. Caux, R. Hagemans, and J. M. Maillet, *Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains: the gapless anisotropic regime*, J. Stat. Mech.: Theor. Exp. (2005), P09003.
- [33] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **142** (1991), 261–283.
- [34] ———, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, 1994.
- [35] A. R. Chowdhury and A.G. Choudhury, *Quantum integrable systems*, Chapman&Hall/CRC, 2004.
- [36] C. De Concini and V. G. Kac, *Representation of quantum groups at root of 1*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [37] T. Deguchi and C. Matsui, *Correlation functions of the integrable higher-spin XXX and XXZ spin chains through the fusion method*, Nucl. Phys. B **831** (2010), 359–407.
- [38] T. Deguchi and J. Sato, *Quantum group $U_q(sl(2))$ symmetry and explicit evaluation of the one-point functions of the integrable spin-1 XXZ chain*, SIGMA **7** (2011), 056, 41 pages.
- [39] C. Destri and H. J. de Vega, *New thermodynamic Bethe ansatz equations without strings*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 2313–2317.
- [40] V. G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Dokl. Acad. Nauk SSSR **283** (1985), 1060.

- [41] ———, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, American Mathematical Society, 1987, p. 798.
- [42] F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, and V. E. Korepin, *The One-Dimensional Hubbard Model*, Cambridge University Press, 2005.
- [43] I. B. Frenkel and N. Yu. Reshetikhin, *Quantum affine algebras and holonomic difference equations*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 1.
- [44] M. Gaudin, *Un système à une dimension de fermions en interaction*, Phys. Lett. A **24** (1967), 55.
- [45] ———, *Thermodynamics of the Heisenberg-Ising Ring for $\Delta \geq 1$* , Phys. Rev. Lett. **26** (1971), 1301–1304.
- [46] K. Gawędzki, *Conformal field theories: a case study*, preprint, hep-th/9904145, 1999.
- [47] F. Göhmann, N. P. Hasenclever, and A. Seel, *The finite temperature density matrix and two-point correlations in the antiferromagnetic XXZ chain*, J. Stat. Mech. (2005), P10015.
- [48] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature*, J. Phys. A **37** (2004), 7625.
- [49] ———, *Integral representation of the density matrix of the XXZ chain at finite temperature*, J. Phys. A **38** (2005), 1833.
- [50] F. Göhmann, A. Seel, and J. Suzuki, *Correlation functions of the integrable isotropic spin-1 chain at finite temperature*, J. Stat. Mech. (2010), P11011.
- [51] C. Gómez, M. Ruiz-Altaba, and G. Sierra, *Quantum groups in two-dimensional physics*, Cambridge University Press, 1996.
- [52] I. U. Heilmann, G. Shirane, Y. Endoh, R. J. Birgeneau, and S. L. Holt, *Neutron study of the line-shape and Beld dependence of magnetic excitations in $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{N}(\text{C}_5\text{D}_5)$* , Phys. Rev. B **18** (1978), 3530–3536.
- [53] L. Van Hove, *Time dependent correlations between spins and neutron scattering in ferromagnetic crystals*, Phys. Rev. **95** (1954), 1374–1384.
- [54] L. Hulthén, *Über das Austauschproblem eines Kristalles*, Arkiv Matematik Astronomi Fysik A **26** (1938), 106.
- [55] M. T. Hutchings, G. Shirane, R. J. Birgeneau, and S. L. Holt, *Spin dynamics in the one-dimensional antiferromagnet $(\text{CD}_3)_4\text{NMnCl}_3$* , Phys. Rev. B **5** (1972), 1999–2014.
- [56] M. Idzumi, *Correlation functions of the spin-1 analog of the XXZ model*, Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University (1993), 926.
- [57] T. Inami, S. Odake, and Y. Z. Zhang, *Reflection K-matrices of the 19-vertex model and XXZ spin-1 chain with general boundary terms*, Nucl. Phys. B **470** (1996), 419–432.
- [58] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63.
- [59] ———, *Topics from representation of $Uq(\mathfrak{g})$ - an introductory guide to physicists*, Nankai Lectures on Mathematical Physics, World Scientific, Singapore, 1992.
- [60] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, and A. Nakayashiki, *Correlation functions of the XXZ model for $\Delta < -1$* , Phys. Lett. A **168** (1992), 256.

- [61] M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, American Mathematical Society, 1995.
- [62] ———, *Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime*, J. Phys. A **29** (1996), 2923.
- [63] M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model III: introducing Matsubara direction*, J. Phys. A **42** (2009), 304018.
- [64] C. Kassel, *Quantum groups*, Springer, 1995.
- [65] N. Kitanine, *Correlation functions of the higher spin XXX chains*, J. Phys. A **34** (2001), 8151.
- [66] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin- $\frac{1}{2}$ chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **567** (2000), 554.
- [67] A. Klimyk and K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Springer, 1997.
- [68] A. Klümper, D. Nawrath, and J. Suzuki, *Correlation functions of the integrable isotropic spin-1 chain: algebraic expressions for arbitrary temperature*, J. Stat. Mech. (2013), P08009.
- [69] A. Klümper, *Free energy and correlation length of quantum chains related to restricted solid-on-solid lattice models*, Ann. Physik **1** (1992), 540.
- [70] ———, *Thermodynamics of the anisotropic spin-1/2 Heisenberg chain and related quantum chains*, Z. Phys. B **91** (1993), 507.
- [71] A. Klümper and M. T. Batchelor, *An analytic treatment of finite-size corrections in the spin-1 antiferromagnetic XXZ chain*, J. Phys. A **23** (1990), L189–L195.
- [72] A. Klümper, M. T. Batchelor, and P. A. Pearce, *Central charges of the 6- and 19-vertex models with twisted boundary conditions*, J. Phys. A **24** (1991), 3111–3133.
- [73] A. Klümper and P. A. Pearce, *Conformal weights of RSOS lattice models and their fusion hierarchies*, Physica A **183** (1992), 304–350.
- [74] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. B **247** (1984), 83–103.
- [75] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge University Press, 1993.
- [76] P. P. Kulish, N. Manojlovi, and Z. Nagy, *Symmetries of spin systems and Birman-Wenzl-Murakami algebra*, J. Math. Phys. **51** (2010), 043516.
- [77] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, and E. K. Sklyanin, *Yang-Baxter equation and representation theory: I*, Lett. Math. Phys. **5** (1981), 393.
- [78] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Solutions of the Yang-Baxter equation*, J. Soviet Math. **19** (1982), 1596.
- [79] E. H. Lieb, *Exact solution of the F model of an antiferroelectric*, Phys. Rev. Lett. **18** (1967), 1046–1048.
- [80] ———, *Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice*, Phys. Rev. Lett. **18** (1967), 692–694.
- [81] ———, *Exact solution of the two-dimensional Slater KDP model of a ferroelectric*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 108–110.

- [82] E. H. Lieb and W. Liniger, *Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state*, Phys. Rev. **130** (1963), 1605.
- [83] L. Mezincescu and R. Nepomechie, *Integrable open spin chains with nonsymmetric R-matrices*, J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991), L17.
- [84] ———, *Analytical Bethe ansatz for quantum-algebra- invariant spin chains*, Nucl. Phys. B **372** (1992), 597.
- [85] ———, *Fusion procedure for open chains*, J. Phys. A **25** (1992), 2533.
- [86] L. Mezincescu, R. Nepomechie, and V. Rittenberg, *Bethe ansatz solution of the Fateev-Zamolodchikov quantum spin chain with boundary terms*, Phys. Lett. A **147** (1990), 70–78.
- [87] ———, *Unitarity and irrationality for the quantum algebra $U_q(su(2))$* , Phys. Lett. B **246** (1990), 412–416.
- [88] H. J. Mikeska and M. Steiner, *Solitary excitations in one dimensional magnets*, Adv. Phys. **40** (1991), 192–356.
- [89] P. Millet, F. Mila, F. C. Zhang, M. Mambrini, A. B. Van Oosten, V. A. Pashchenko, A. Sulpice, and A. Stepanov, *Biquadratic interactions and spin-Peierls transition in the spin 1 chain $LiVGe_2O_6$* , Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 4176.
- [90] R. Murgan, *On the NLIE of (inhomogeneous) open spin-1 XXZ chain with general integrable boundary terms*, JHEP (2011), 1, DOI:10.1007/JHEP02(2011)016.
- [91] L. Onsager, *Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition*, Phys. Rev. **65** (1944), 117–149.
- [92] L. Pauling, *The structure and entropy of ice and of other crystals with some randomness of atomic arrangement*, J. Am. Chem. Soc. **57** (1935), 2680–2684.
- [93] J. Sato, M. Shiroishi, and M. Takahashi, *Exact evaluation of density matrix elements of the Heisenberg chain*, J. Stat. Phys. (2006), P12017.
- [94] U. Schollwöck, Richter J, D. J. J. Farnell, and R.F. Bishop, *Quantum magnetism*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [95] J. C. Slater, *Theory of the transition in KH_2PO_4* , Jour. Chem. Phys. **9** (1941), 16.
- [96] N. A. Slavnov, *Calculation of scalar products of the wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe ansatz*, Teor. Mat. Fiz. **79** (1989), 232.
- [97] F. A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [98] B. Sutherland, *Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 103.
- [99] ———, *Model for a multi component quantum system*, Phys. Rev. B **12** (1975), 3795.
- [100] J. Suzuki, *Spinons in magnetic chains of arbitrary spins at finite temperatures*, J. Phys. A **32** (1999), 2341.
- [101] ———, *Excited states nonlinear integral equations for an integrable anisotropic spin 1 chain*, J. Phys. A **A37** (2004), 11957.

- [102] M. Suzuki, *Generalized Trotter's formula and systematic approximants of exponential operators and inner derivations with applications to many-body problems*, *Comm. Math. Phys.* **51** (1976), 183–190.
- [103] ———, *Transfer-matrix method and Monte Carlo simulation in quantum spin systems*, *Phys. Rev. B* **31** (1985), 2957.
- [104] M. Suzuki and M. Inoue, *The ST-transformation approach to analytic solutions of quantum systems. I. General formulations and basic limit theorems*, *Prog. Theor. Phys.* **78** (1987), 787.
- [105] M. Takahashi, *One-dimensional Heisenberg model at finite temperature*, *Prog. Theor. Phys.* **46** (1971), 401.
- [106] ———, *Half-filled Hubbard model at low temperature*, *J. Phys. C* **10** (1977), 1289.
- [107] M. Takahashi, M. Shiroishi, and A. Klümper, *Equivalence of TBA and QTM*, *J. Phys. A* **34** (2001), L187–L194.
- [108] L. A. Takhtajan, *The picture of low-lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spins*, *Phys. Lett. A* **87** (1982), 479.
- [109] A. Tsuchiya and Y. Kanie, *Vertex operators in conformal field theory on \mathbb{P}^1 and monodromy representations of braid group*, *Lett. Math. Phys.* **13** (1987), 303–312.
- [110] C. N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312.
- [111] C. N. Yang and C. P. Yang, *Thermodynamics of a one-dimensional system of Bosons with repulsive delta-function interaction*, *J. Math. Phys.* **10** (1969), 1115.
- [112] A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, *A model factorized S-matrix and an integrable Heisenberg chain*, *Sov. J. Nucl. Phys. A* **32** (1980), 298.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Zunächst möchte ich Herrn Prof. Dr. Andreas Klümper für die Möglichkeit an dieser interessanten, aber auch anspruchsvollen Aufgabe zu arbeiten danken. Seine intensive Unterstützung, viele hilfreiche Anregungen und Diskussionen während der Arbeit an der Dissertation waren von unschätzbarem Wert.

Herr Priv.-Doz. Dr. Frank Göhmann hat meine Arbeit stets mit großem Interesse verfolgt und durch viele Diskussionen und Anregungen zu deren Gelingen beigetragen. Dafür möchte ich meinen Dank aussprechen.

Weiterhin bin ich Frau Dr. Britta Aufgebauer und Herrn Priv.-Doz. Dr. Andreas Fledderjohann und Herrn Dipl. Phys. Win Nuding für viele interessante Diskussionen und Anregungen zu Dank verpflichtet.

Meinen besonderen Dank möchte ich an Herrn Priv.-Doz. Dr. Andreas Fledderjohann und Herrn M. Sc. Maxime Dugave für das sorgfältige Korrekturlesen des Manuskripts richten.

Darüber hinaus möchte ich mich bei der gesamten Arbeitsgruppe „Vielteilchensysteme“ für die sehr freundliche und angenehme Arbeitsatmosphäre sowie für das herzliche Umfeld bedanken.

Besonders danke ich meinen Freunden und meiner Familie für ihre liebevolle Unterstützung und Geduld.