

---

**Reduktion von Speckle-Drop-Outs in der  
Laser-Doppler-Vibrometrie mithilfe von Regler-betriebenen  
adaptiven Optiken**

---

vom Fachbereich

Elektrotechnik, Informationstechnik, Medientechnik

der Bergischen Universität Wuppertal

genehmigte

---

**DISSERTATION**

---

zur Erlangung des akademischen Grades

eines Doktor-Ingenieurs

von

Sascha Paul Mayer, M.Sc.

aus Schwelm

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Mai 2013

Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Bernd Tibken

Korreferent: appl. Prof. Dr.-Ing. Rainer Möller

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20130719-113252-8

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn:nbn:de:hbz:468-20130719-113252-8>]

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	3
1.2	Stand der Forschung und Technik . . . . .	5
1.3	Weiterer Aufbau dieser Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Historische Entwicklung der Lasertechnik und Vibrometrie</b>	<b>7</b>
2.1	Laser . . . . .	8
2.2	Laserinterferometrie . . . . .	9
2.3	Vibrometer mit SLM-basierten Aktor . . . . .	11
2.4	Spatial Light Modulator (SLM) auf LCoS Basis . . . . .	13
2.5	Vibrometer mit Membranspiegel als Aktor . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Analyse und Modellbildung</b>	<b>17</b>
3.1	Beschreibung von Abbildungsfehlern über Zernike-Polynome . . . . .	18
3.2	Lösung der homogenen Wellengleichung im Messprozess . . . . .	19
3.3	Grenzen der analytischen Untersuchungen . . . . .	22
3.4	Herleitung der Signalgüte . . . . .	22
3.5	Signalstärke . . . . .	24
3.6	Gütefunktion . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Approximation durch radiale Basisfunktionen</b>	<b>26</b>
4.1	Interpolation am Beispiel Himmelblau-Funktion . . . . .	28
4.2	Herleitung des Gradienten und der Hesse-Matrix . . . . .	29
4.3	Herleitung des Gradienten . . . . .	29
4.4	Herleitung der Hesse-Matrix . . . . .	30
4.5	Gaußsche Funktion als radiale Basisfunktion . . . . .	31
4.6	Beispiele zur Interpolation mit der Gaußschen Funktion als radiale Basisfunktion . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Statische Optimierung des Signalpegels</b>	<b>37</b>
5.1	Pareto-Optimierung . . . . .	38

5.2	Zugehörige Minimierungsaufgabe . . . . .	38
5.3	Angepasster DIRECT-Algorithmus . . . . .	39
5.4	Shubert-Algorithmus . . . . .	39
5.5	DIRECT-Algorithmus . . . . .	42
5.6	Verschiebung der Evaluationspunkte . . . . .	43
5.7	Drittelnung der Suchintervalle . . . . .	44
5.8	Suchschritt: Ermittlung potentiell optimaler Kandidaten . . . . .	45
5.9	Abbruchkriterium . . . . .	49
5.10	Erweiterung auf den $\mathbb{R}^n$ . . . . .	50
5.11	Der Algorithmus im Überblick . . . . .	50
5.12	Hybrider DIRECT-Algorithmus . . . . .	51
5.13	Anpassung der Datenstruktur . . . . .	52
5.14	Such-Algorithmus . . . . .	55
5.15	Adaptierter Such-Schritt im DIRECT . . . . .	56
5.16	Optimierung mit einem Gradientenverfahren . . . . .	58
5.17	Optimierung mit Methoden zweiter Ordnung . . . . .	58
5.18	Laufzeitanalyse des Hybrid-DIRECT . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Experimentelle Parameterbestimmung und Tests am realen System</b>	<b>64</b>
6.1	Bestimmung des Gewichtungsfaktors $\gamma$ . . . . .	64
6.2	Totzeit des Vibrometers mit SLM . . . . .	65
6.3	Wertebereiche der Zernike-Koeffizienten . . . . .	66
6.4	Experimentelle Bestimmung der Wertebereiche . . . . .	66
6.5	Reduktion von Messfehlern im Optimierer . . . . .	70
6.6	Verifikation am Vibrometer . . . . .	71
6.7	Resultate der Optimierung . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Quadratische Approximation und Optimierung</b>	<b>75</b>
7.1	Taylor-Reihenentwicklung . . . . .	75
7.2	Quadratische Approximation . . . . .	76
7.3	Optimierung der interpolierten Funktion $f_{q_n}(c)$ . . . . .	79
7.4	Bestimmung der optimalen Schrittweite . . . . .	80
7.5	Abstiegsverfahren mit optimaler Schrittweite . . . . .	82
7.6	Wahl der Stützstellen . . . . .	83
7.7	Berücksichtigung von Messungenauigkeiten . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Entwurf eines Extremwertreglers</b>	<b>91</b>
8.1	Reglerentwurf mithilfe einer sukzessiven quadratischen Interpolation (SQI) . . . . .	92
8.2	Sukzessive parabolische Interpolation (SPI) . . . . .	93
8.3	Quadratische Interpolation (QI) . . . . .	95
8.4	Sukzessive quadratische Interpolation . . . . .	97
8.5	Beispiel zum Fallback-Modus . . . . .	100

---

8.6	Beispiel zur quadratischen Approximation . . . . .	105
8.7	Beispiel der quadratischen Approximation bei rauschbehafteter Zielfunktion . . . . .	106
8.8	Validierung des Regler-Konzepts . . . . .	109
8.9	Regler-Verifizierung bei Nutzung von Doppel- und Einzelparameter . . . . .	110
8.10	Regler-Verifizierung bei Nutzung kombinierter Parameter . . . . .	114
8.11	Erfassung von Vibrationen mit geregelterm Vibrometer . . . . .	120
<b>9</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>123</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>124</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Von Einstein 1916 postulierten Übergänge am Beispiel eines Wasserstoffatoms	8
2.2	Schematische Darstellung des Aufbaus eines Lasers	9
2.3	Michelson-Interferometer	10
2.4	Interferenzmuster auf dem Detektorschirm	10
2.5	Mach-Zehnder-Prinzip eines Laser-Doppler-Vibrometers, angelehnt an [52, 85]	11
2.6	Modell des genutzten Vibrometers	12
2.7	Wirkprinzip des SLM, nach [31]	13
2.8	Beispiel eines SLM-Musters	14
2.9	OKO Tech Membran-Spiegel MMDM 15 mm 37 Kanäle, aus [20]	15
2.10	Anschluss-Platine OKO Tech MMDM 15 mm 37 Kanäle, nach [20]	16
3.1	Schema des Messprozesses	17
3.2	Beispiel einiger Zernike-Polynome, entnommen aus [61]	19
3.3	Schema der beugungsbegrenzten Wellenausbreitung	20
3.4	Signalgüte über Betrag eines Vektors	23
3.5	Verformung des Spots durch Einschreiben von Aberration auf das SLM	24
4.1	Approximation der Himmelblau-Funktion mit 20 - 100 Stützstellen	28
4.2	Auswirkung des Strukturparameter $\theta$ auf die Interpolation	33
4.3	Die Himmelblau-Funktion verglichen mit verschiedenen Interpolationsmethoden, entnommen aus [2]	34
4.4	Die Rastrigin-Funktion verglichen mit verschiedenen Interpolationsmethoden, entnommen aus [2]	35
4.5	Eine zufällig generierte 2D-Funktion, entnommen aus [2]	36
5.1	Initialer Schritt des Shubert-Algorithmus	40
5.2	Shubert-Algorithmus, Schritt 1 - 2	41
5.3	Shubert-Algorithmus, Schritt 3 - 4	41
5.4	Initialer Schritt des DIRECT-Algorithmus	44
5.5	1D-DIRECT nach einer Teilung	45

---

5.6	1D-DIRECT nach drei Teilungen . . . . .	45
5.7	Beispiel für die Erfüllung der Ungleichungen (5.11) und (5.12) . . . . .	46
5.8	Verschiebung der Intervalle zur Ordinate . . . . .	46
5.9	Konvexe Hülle nach mehreren Iterationsschritten . . . . .	47
5.10	DIRECT-Datenstruktur . . . . .	48
5.11	UML-Aktivitätsdiagramm DIRECT-Algorithmus . . . . .	51
5.12	Element mitten in Liste gesucht . . . . .	53
5.13	Drittteilung eines Intervalls in 2D . . . . .	53
5.14	Suchbaum für adaptierte Suche . . . . .	54
5.15	Suchbaum mit zugehörigen Listenelementen . . . . .	55
5.16	Interface: SearchNode . . . . .	55
5.17	UML-Aktivitätsdiagramm hybrid DIRECT . . . . .	57
5.18	Newton-Verfahren . . . . .	59
5.19	Beispiel der Suche im Optimierungsalgorithmus anhand der 2-dimensionalen Rosenbrock Funktion, entnommen aus [2] . . . . .	60
5.20	Laufzeitanalyse anhand der 7-dimensionalen Rosenbrock-Funktion . . . . .	61
5.21	Laufzeitanalyse anhand der 2-dimensionalen Himmelblau-Funktion . . . . .	61
5.22	Laufzeitanalyse anhand der 4-dimensionalen elliptische Funktion . . . . .	62
5.23	Laufzeitanalyse anhand der 7-dimensionalen elliptische Funktion . . . . .	62
5.24	Laufzeitanalyse anhand der 4-dimensionalen Rastrigin-Funktion . . . . .	62
6.1	Experimentelle Bestimmung von $\gamma$ . . . . .	65
6.2	Latenzanalyse am SLM-basierten Vibrometer . . . . .	66
6.3	Ergebnis der Messungen für Astigma X . . . . .	68
6.4	Ergebnis der Messungen für Astigma Y . . . . .	68
6.5	Ergebnis der Messungen für Coma X . . . . .	69
6.6	Ergebnis der Messungen für Coma Y . . . . .	69
6.7	Ergebnis der Messungen für die sphärische Aberration . . . . .	70
6.8	Gegenüberstellung Kalman-Filter vs. Mittelwertbildung . . . . .	71
6.9	Skizze Messaufbau . . . . .	72
6.10	Aufbau am Institut für technische Optik (ITO) Stuttgart . . . . .	72
6.11	Auswertung des ersten (blau) und des zweiten (rot gestrichelt) Durchlaufs .	73
6.12	Auswertung des dritten (rot) und vierten (grün gestrichelt) Durchlaufs . .	73
7.1	Definition Umgebung (links 1d, rechts 2d) . . . . .	84
7.2	Beispiel zur Verteilung der Stützstellen . . . . .	86
7.3	Fehlerhafte Interpolation bei zu kleinem Radius $\rho$ . . . . .	90
7.4	Verbesserter Radius $\rho$ . . . . .	90
8.1	Standard-Regelkreis . . . . .	91
8.2	Strom-Spannungskennlinie eines Solarkollektor-Arrays nach [43] . . . . .	92
8.3	Erster Iterationsschritt der sukzessiven parabolischen Interpolation . . . .	93

8.4	Vierter Iterationsschritt der sukzessiven parabolischen Interpolation . . . . .	94
8.5	System mit quadratischer Interpolation . . . . .	96
8.6	Initialisierung sowie Iterationsschritte eins und zwei des Algorithmus . . . . .	100
8.7	Iterationsschritte 3 - 5 des Algorithmus . . . . .	101
8.8	Iterationsschritte 7 - 10 des Algorithmus . . . . .	102
8.9	12 Iterationsschritte auf der sich lateral bewegenden Himmelblau-Funktion	103
8.10	150 Iterationsschritte am Beispiel der Himmelblau-Funktion . . . . .	105
8.11	Auswertung der 150 Iterationsschritte . . . . .	106
8.12	Verlauf von $\bar{\rho}(t \cdot R(c))$ für $t = 0, \dots, 3$ mit Schrittweite $\Delta t = 0,0612$ . . . . .	108
8.13	300 Iterationsschritte am Beispiel der Himmelblau-Funktion mit $t = 2$ (zusätzliches additives Rauschen) . . . . .	108
8.14	Auswertung der 300 Iterationsschritte (zusätzliches additives Rauschen) . . . . .	109
8.15	Grafische Benutzeroberfläche zur Regler-Validierung . . . . .	110
8.16	Auswertung des Reglers für Doppelparameter „X-Y” . . . . .	112
8.17	Auswertung des Reglers für Doppelparameter „Astigma X-Astigma Y” . . . . .	112
8.18	Auswertung des Reglers für Doppelparameter „Coma X-Coma Y” . . . . .	113
8.19	Auswertung des Reglers für Parameter „sphärische Aberration” . . . . .	113
8.20	Auswertung X-Y-Coma X-Coma Y . . . . .	115
8.21	Auswertung X-Y-Astigma X-Astigma Y . . . . .	115
8.22	Auswertung X-Y-sphärische Aberration . . . . .	116
8.23	Auswertung Astigma X-Astigma Y-Coma X-Coma Y . . . . .	116
8.24	Auswertung Astigma X-Astigma Y-sphärische Aberration . . . . .	117
8.25	Auswertung X-Y-Astigma X-Astigma Y-Coma X-Coma Y . . . . .	117
8.26	Auswertung Astigma X-Astigma Y-Coma X-Coma Y-sphärische Aberration	118
8.27	Auswertung X-Y-Coma X-Coma Y-sphärische Aberration . . . . .	118
8.28	Auswertung X-Y-Astigma X-Astigma Y-sphärische Aberration . . . . .	119
8.29	Auswertung X-Y-Astigma X-Astigma Y-Coma X-Coma Y-sphärische Ab- erration . . . . .	119
8.30	Verlauf des Signalpegels während der Schwingungsmessung . . . . .	121
8.31	Messung an gekrümmter Oberfläche mit sinusförmiger Anregung bei 600 Hz	122

# Tabellenverzeichnis

2.1	Spezifikationen des LCOSSLM X10468-06 . . . . .	14
3.1	Übersicht über genutzte Zernike-Polynome . . . . .	18
4.1	Gebräuchliche radiale Basisfunktionen, entlehnt an [53] . . . . .	32
5.1	Übersicht der Optimierer . . . . .	38
5.2	Abbruchkriterien . . . . .	50
5.3	Testfunktionen zur Evaluierung des Hybrid-DIRECT-Algorithmus . . . . .	60
5.4	Ergebnisse der Laufzeituntersuchung . . . . .	63
6.1	Experimentell ermittelte Wertebereiche der Zernike-Koeffizienten . . . . .	70
7.1	Verteilung der Stützstellen . . . . .	84
7.2	Aufteilung der Stützstellen, abhängig von der Anzahl der Dimensionen . . . . .	85
8.1	Bestimmung des Schätzwerts $\hat{c}$ . . . . .	98
8.2	Übersicht über die ersten 12 Iterationsschritte des Algorithmus . . . . .	104
8.3	Übersicht der betrachteten Parameter und Zuordnung der Auswertung . . . . .	111
8.4	Parameterkombinationen und Zuordnung der Auswertung . . . . .	114
8.5	Auswertung der kombinierten Parameter . . . . .	120

# Algorithmenverzeichnis

4.1	Berechnung des Gradienten . . . . .	30
4.2	Berechnung der Hesse-Matrix . . . . .	31
5.1	Shubert-Algorithmus . . . . .	42
5.2	Bestimmung potentiell optimaler Kandidaten (POK) . . . . .	49
5.3	Adaptierte Suche . . . . .	56
7.1	Quadratische Approximation . . . . .	79
7.2	Quadratische Optimierung . . . . .	83
7.3	Haupt-Algorithmus zur Aufteilung der Stützstellen . . . . .	87
7.4	Berechnung von $\Delta$ ; Fall 1 . . . . .	88
7.5	Berechnung von $\Delta c$ ; Fall 1 und 3 . . . . .	88
7.6	Berechnung von $\Delta_{\Phi}$ ; Fall 2 und 3 . . . . .	89
8.1	Sukzessive parabolische Interpolation . . . . .	94
8.2	Extremwertregelung . . . . .	99

# Einleitung

Durch stetige Fortschritte in Forschung und Technik werden immer bessere Messverfahren benötigt, um physikalische Größen, wie zum Beispiel Zeit, Entfernung, Temperatur und elektrischen Strom, deutlich exakter zu erfassen. Aber auch abgeleitete Größen, wie beispielsweise Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Position spielen in vielen technischen Applikation eine bedeutende Rolle. So können solche Verfahren dem Schutz von Mensch und Material in sicherheitskritischen Umgebungen dienen. Man denke dabei an Beschleunigungssensoren, die in Airbags verbaut sind, an Kollisionswarngeräte in Flugzeugen, die über Radar die Entfernung zu einem Objekt messen oder die Überwachung der Temperatur in einem Kernreaktor, die Aufschluss über die Kernreaktion erlaubt. Aber auch in der Forschung, Entwicklung und Produktion sind solche Messverfahren von immenser Bedeutung. So wird bei der Produktion von Bandstahl die Länge des Stahls im laufenden Betrieb per Laser gemessen [71] und somit die Qualität gesichert. Für den LHC<sup>1</sup> wurden mit dem ATLAS-Experiment [1] sogar völlig neue Messtechniken entwickelt, um unentdeckten Teilchen wie dem Higgs-Boson auf die Spur zu kommen. Entwickelt sich eine Technologie weiter, müssen die benötigten Messverfahren schritt-haltend verbessert und erweitert oder sogar neue Methoden erdacht werden.

Ein Beispiel für ein uraltes Verfahren zur Zeitmessung sind astronomische Beobachtungen, welche die Maya [78] schon vor Christi Geburt nutzten, um den richtigen Tag zur Aussaat oder Ernte zu berechnen. Dazu musste der Stand der Sterne, der Mondzyklen oder der Sonnenstand zur Sommer- beziehungsweise Wintersonnenwende in Einklang mit dem Kalender gebracht werden. Ein wesentlich weiter entwickeltes Messinstrument, welches sich auch der Sterne bedient, ist der Sextant [50]. Er wurde in der Seefahrt als Navigationshilfe zur Positions- und Kursbestimmung genutzt. Bei richtiger Handhabung konnte die Position mit einer Genauigkeit von ca. 2 *km* bestimmt werden.

Die Entwicklung des Flugzeugs durch die Gebrüder Wright zu Beginn des 20. Jahrhunderts verhalfen dem Transportwesen zu einem Technologiesprung. Seither können Perso-

---

<sup>1</sup>Large Hadron Collider

nen und Güter dank dieser Errungenschaft sowohl über dem See- als auch dem Luftweg befördert werden. Der Personenverkehr über längere Distanzen erfolgt dabei heutzutage maßgeblich per Flugzeug. Anfangs wurden noch Versuche unternommen, Sextanten in der Luftfahrt [21] zur Positions- und Kursbestimmung zu verwenden. Man erkannte jedoch schnell, dass Messungen mit dieser Methode aufgrund der hohen Relativgeschwindigkeit eines Luftfahrzeugs schlechter verwertet werden konnten. Der Technologiesprung erforderte daher eine verbesserte Methode zur Positionsbestimmung. Etwa zur gleichen Zeit beschäftigte sich Frederick Augustus Kolster mit Verfahren zur Ortung über Radiowellen [13]. 1913 begann er, die wichtigsten US-amerikanischen Leuchttürme mit Langwellensender auszustatten. Da sie Dauersignale abstrahlen und angepeilt werden können, werden sie auch als Funkfeuer bezeichnet. Ein von ihm entwickelter Peilempfänger [13] benötigte zwei Funkfeuer um über eine Kreuzpeilung die Position bestimmen zu können. Während des ersten Weltkriegs wurde diese Technik zur Positionsbestimmung exklusiv vom Militär verwendet. Später fand der Kolster-Radiokompass auch Einzug in die zivile Schiff- und Luftfahrt, was erheblich zur Sicherheit der Reisenden beitrug. Heutzutage werden GPS<sup>2</sup>-Empfänger [87] genutzt, die Funksignal von Satelliten auswerten, um die Position auf maximal 10 m genau zu bestimmen.

## 1.1 Problemstellung

Eine Messaufgabe, die in der Forschung und Entwicklung häufig zum Einsatz kommt, ist die Erfassung von Oberflächenschwingungen. Diese sind von großer Bedeutung, da sie Aufschluss über das dynamische Verhalten von Systemen liefern können. Auch zur Verifikation von Modellrechnungen, die die Stabilität untersuchen, werden sie genutzt. Schwingungen können über verschiedene Methoden erfasst werden. So werden zum Beispiel Dehnungsmessstreifen [41] an Strukturen angebracht, um Aufschluss über das dynamische Schwingverhalten unter Belastung zu erhalten. Sind die Strukturen groß, so ist die aufgebrachte Masse durch die Sensoren vernachlässigbar. Beispielsweise können Dehnungsmessstreifen an Brücken oder Gebäuden angebracht werden, um Untersuchungen zur Stabilität durchzuführen. Wird eine Brücke durch Windböen erfasst und schwingt sich diese bis zur Eigenfrequenz auf, so kann das im schlimmsten Fall zum Einsturz der gesamten Konstruktion führen. Dies ist 1940 im US-Bundesstaat Washington mit der Tacoma-Narrows-Brücke [5] geschehen.

Werden die Strukturen kleiner, so muss das vorhandene Messverfahren entweder angepasst oder durch ein neues ersetzt werden. Befindet man sich noch im makroskopischen Bereich, können miniaturisierte Dehnungsmessstreifen oder Sensoren, die auf den piezoelektrischen Effekt [60] beruhen, genutzt werden. Verlässt man hingegen den makroskopischen Bereich, sind aufgebrachte Massen nicht mehr vernachlässigbar. Es müssen Messverfahren angewendet werden, die die Aufgabe berührungslos übernehmen. Im weitesten Sinn kann das

---

<sup>2</sup>Global Positioning System

Beamforming [66] zur berührungslosen Schwingungsanalyse genutzt werden. Dabei handelt es sich um mehrere Mikrofone, die zu einem Array zusammen geschaltet werden. Da die Mikrofone Schalldruckereignisse messen, können Frequenzen außerhalb ihrer Dynamik nicht mehr erfasst werden. Weiterhin muss das zu erfassende Signal über eine hinreichend große Amplitude verfügen, um überhaupt durch das Mikrofon aufgenommen werden zu können. Schwingungen im nicht hörbaren Bereich sind aber häufig die Auslöser für Instabilitäten oder geben einen Hinweis auf strukturelle Fehler.

Diese Arbeit befasst sich mit der Verbesserung eines Messverfahrens zur Analyse von Oberflächenschwingungen, das auf der Interferometrie [35] beruht und als Vibrometrie bezeichnet wird. Ein Laser-Doppler-Vibrometer kann das Schwingverhalten von Oberflächen berührungslos erfassen [70]. So können auch Strukturen im Sub-Millimeterbereich noch sicher vermessen werden. Durch die Nutzung eines Lasers müssen zudem keine zusätzlichen Massen auf das Messobjekt aufgebracht werden. Selbst große Strukturen, wie Eisenbahnbrücken, können mit entsprechender Technologie ohne das Aufbringen von Sensoren aus der „Ferne“ vermessen werden. Vibrometer können wesentlich ökonomischer eingesetzt werden, da diese nicht fest mit dem Messobjekt verbaut werden. Dazu muss jedoch die Messstelle durch den Laserstrahl erreichbar sein. So ist die Betriebsschwingungsanalyse [65] in der Entwicklung ein häufig genutztes Mittel, um beispielsweise das Schwingverhalten von Bauteilen im Betrieb zu untersuchen. Auch werden Vibrometer in der Luft- und Raumfahrt sowie der Automobilindustrie eingesetzt. Darüber hinaus gibt es noch etliche Einsatzmöglichkeiten, die hier aber nicht weiter aufgeführt werden sollen.

Ein Einflussfaktor der sich bei Messungen im Freifeld auf die Lichtleistung auswirken kann, ist der „Schlieren-Effekt“ der Luft. Dieser wird durch unterschiedliche Luftdrücke verursacht, die Luft von Gebieten mit hohem Druck zu Gebieten mit niedrigem Druck strömen lässt. Durchquert ein Laserstrahl Bereiche unterschiedlicher Dichten, wird die Phasenlage der elektromagnetischen Welle auf dem zu messenden Objekt beeinflusst. Durch Interferenzerscheinungen wirkt sich dies auf die Stärke des Signals aus, das am Photodetektor eines Vibrometers abgegriffen wird. Auch können Rauigkeiten im Bereich der Wellenlänge des genutzten Lasers zu Interferenzerscheinungen führen, die den Signalpegel am Detektor dämpfen. Dies wird im Allgemeinen auch als Speckle-Dropout bezeichnet.

Ziel dieser Arbeit ist es, solche Speckle-Dropouts durch geeignete Optimierungsverfahren zu reduzieren, so dass Messungen auch unter den vorab genannten Bedingungen möglich werden. Darauf aufbauend ist ein Regelungskonzept entwickelt worden, das den optimalen Arbeitspunkt bei sich ändernden Umweltbedingungen nachführt. In einem Forschungsprojekt, welches zusammen mit den Firmen Polytec GmbH, Bosch GmbH, Continental AG, der Universität Stuttgart und der Bergischen Universität Wuppertal bearbeitet wurde, ist ein neues Vibrometer entwickelt worden, welches über eine adaptive Optik verfügt. Mit der adaptiven Optik wird sowohl die Position des Laser-Spots als auch die Phasenlage der kohärenten Laserwelle modifiziert. Somit fungiert sie als Aktor, um gezielt nach einem optimalen Arbeitspunkt zu suchen, diesen über einen Regler zu halten und nachzuführen.

## 1.2 Stand der Forschung und Technik

Wird ein Laser-Vibrometer zur Schwingungsanalyse eingesetzt, so können verschiedene Techniken verwendet werden um Speckle-Dropouts zu reduzieren. Die einfachste Methode ist der Wechsel des Messpunktes auf dem zu analysierenden Objekt. Da aber nicht immer die Möglichkeit besteht den Messpunkt zu verschieben, muss auf andere Verfahren zurück gegriffen werden. Um die Reflektivität eines Messpunktes zu verbessern, können retroreflektierende Folien aufgebracht werden. Dies ist jedoch mit einer Veränderung des zu messenden Objekts verbunden, so dass fehlerhafte Messungen durch die veränderte Dynamik zu erwarten sind. Daher wurde für Scanning-Vibrometer eine Heuristik entwickelt [73], die den Bereich um den Messpunkt kreisförmig abtastet. Die Messungen mit dem besten Singal-zu-Rausch-Verhältnis fließen dann in die Auswertung mit ein.

In der vorliegenden Arbeit wurde zunächst das Vibrometer mit adaptiver Optik analysiert. Die Ergebnisse haben gezeigt, dass ein ableitungsfreier Optimierungsalgorithmus benötigt wird. Der aussichtsreichste Kandidat, der DIRECT-Algorithmus [45], wird als Optimierer genutzt. Um die Laufzeit des Optimierers zu verbessern wurde dieser um einen Schätzer erweitert. Aus den gemessenen Werten wird ein Modell nach [46] interpoliert und darauf optimiert. Das Optimum des Modells fließt als Schätzung in den DIRECT-Algorithmus ein. Die Idee der parallelen hybriden Optimierung ist dabei nicht neu. In [29] wurde der DIRECT-Algorithmus erweitert, so dass lokale Optimierungsalgorithmen in die Suchheuristik des DIRECT-Algorithmus integrierbar waren. Im vorliegenden Fall wurde der DIRECT-Algorithmus um eine Strategie erweitert, die zusätzlich eine globale Suche auf Basis einer Interpolation über radiale Basisfunktion [10, 30, 39, 53, 74, 82, 86] ermöglicht. In [54] wird eine Methode präsentiert, die DC<sup>3</sup>-Programming nutzt um den DIRECT-Algorithmus um eine globale ableitungsfreie Optimierung zu erweitern. Diese Methodik steht aber nur für die radiale Basisfunktion der Form  $\Phi(r) = r^3$  zur Verfügung. Um die Struktur der zu interpolierenden Funktion besser zu berücksichtigen, konnte diese radiale Basisfunktion nicht genutzt werden, so dass ein alternativer Ansatz zu untersuchen war.

## 1.3 Weiterer Aufbau dieser Arbeit

In Kapitel 2 wird auf die historische Entwicklung des Lasers bis hin zum Laser-Vibrometer mit adaptiver Optik eingegangen ohne in die zugehörigen Theorien mathematisch einzusteigen. Es soll dem Leser lediglich einen Überblick über die Entwicklung bis zum heutigen Tage verschaffen. Für tieferegehende Studien sind die entsprechenden Literaturquellen zu konsultieren. Kapitel 3 befasst sich mit der Analyse des neu entwickelten Vibrometers mit adaptiver Optik. Zunächst wird dort gezeigt, dass eine Beschreibung des Systems analytisch nicht möglich ist. Daher wird im zweiten Teil des Kapitels ein Modell in Form einer

---

<sup>3</sup>Difference of Convex functions

Kostenfunktion hergeleitet, die später durch einen gradienten-freien Optimierungsalgorithmus minimiert werden kann. In Vorbereitung auf den später vorgestellten Optimierer wird in Kapitel 4 ein Verfahren zur Interpolation von nichtlinearen multivariaten Funktionen vorgestellt. Die Interpolation basiert auf der Nutzung von radialen Basisfunktion und setzt die Kenntnis einiger Stützstellen mit den zugehörigen Funktionswerten voraus. Am Ende dieses Kapitels werden einige Interpolationstechniken über verschiedene Benchmark-Funktionen miteinander verglichen. Im darauf folgenden Kapitel 5 wird der DIRECT-Algorithmus als gradienten-freie „direct search“-Methode vorgestellt. Dazu wird der Shubert-Algorithmus hergeleitet, an einigen Stellen modifiziert und auf den DIRECT-Algorithmus erweitert. Um das Laufzeitverhalten des klassischen DIRECT-Algorithmus weiter zu verbessern, erfolgt die Erweiterung einer auf statistischen Methoden (Interpolation mittels radialer Basisfunktionen) basierenden Technik zur Schätzung eines optimalen Arbeitspunkts. Die Schätzung fließt in den DIRECT-Algorithmus mit ein, so dass beide zu einem hybriden Algorithmus zusammen gefasst werden. Der Algorithmus wird als Hybrid-DIRECT bezeichnet. Abschließend werden einige Benchmark-Tests am Hybrid-DIRECT durchgeführt und mit dem klassischen DIRECT-Algorithmus verglichen. Der entwickelte Hybrid-DIRECT wurde am realen System evaluiert, was in Kapitel 6 dokumentiert ist. Dazu wurden zunächst gültige Parameter ermittelt, um sinnvolle Ergebnisse aus der Optimierung mit dem Hybrid-DIRECT zu erhalten. Danach wird exemplarisch an zwei Beispielen gezeigt, welche Verbesserung im realen System durch eine Vorab-Optimierung erzielt werden können. Der Optimierer maximiert den Signalpegel nur einmalig, wobei zeitliche Änderungen des gefundenen Arbeitspunktes nicht berücksichtigt werden. Daher wird in den letzten beiden Kapiteln die Herleitung und Umsetzung eines Extremwert-Reglers beschrieben. Ausgehend von einem Arbeitspunkt, der vorab durch einen Optimierer ermittelt worden ist, folgt der Regler dem optimalen Arbeitspunkt falls dieser sich über die Zeit verändert. In Kapitel 7 werden die theoretischen Grundlagen des Reglers vorgestellt, während dessen der Regler-Algorithmus in Kapitel 8 entwickelt und verifiziert wird. Um das Verhalten des Reglers in realer Umgebung zu zeigen, wurde exemplarisch ein Messaufbau genutzt, in dem Spektralmessungen mit und ohne Regler durchgeführt und anschließend ausgewertet wurden. Ein Fazit und Ausblick schließt diese Arbeit ab. Dort wird noch einmal auf den Kern der Entwicklung, die erzielten Ergebnisse und zukünftige Forschungs- und Entwicklungsmöglichkeiten eingegangen.

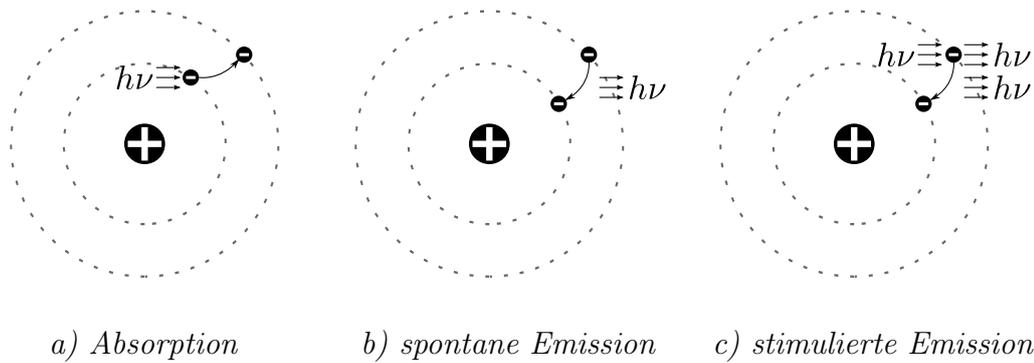
# Historische Entwicklung der Lasertechnik und Vibrometrie

Anfang des 20. Jahrhunderts revolutionierte Albert Einstein das physikalische Weltbild mit seinen wohl wichtigsten Veröffentlichungen, der allgemeinen und der speziellen Relativitätstheorie [16, 17]. Leider bleibt seine Forschung im Bereich der Quantenphysik [15, 18] außerhalb naturwissenschaftlicher beziehungsweise physikalischer Fachkreise häufig unbeachtet, obwohl auf Grund dieser Einstein 1921 den Nobelpreis für Physik erhielt.

In Untersuchungen zur Verteilung der thermischen Energie  $E$  eines schwarzen Körpers, welche sich proportional zur Frequenz  $\nu$  der Wärmestrahlung verhält, fand Planck 1900 heraus [69], dass nur Energieniveaus angenommen werden können, die ein Vielfaches von  $\frac{E}{\nu}$  betragen. Planck bezeichnete  $\frac{E}{\nu}$  als Wirkungsquantum  $h$ , es gilt somit  $E = h\nu$ .

Einstein wiederum erkannte, dass der von ihm untersuchte photoelektrische Effekt, also die Wechselwirkung von Materie und Licht, durch Quantisierung der Energie  $E$  des Lichts beschrieben werden kann und führte die Quantisierung in „Lichtpakete“ ein, die später auch als Photonen bezeichnet wurden. Wird ein Photon von einem Elektron absorbiert, so erhöht sich das Energieniveau des Atoms. Da jedes Atom energetisch einen möglichst niedrigen Zustand anstrebt, wird die durch das Elektron absorbierte Energie nach einer gewissen Zeitspanne wieder abgegeben (emittiert). Die Emission kann dabei entweder spontan oder stimuliert (induziert) erfolgen. In Abbildung 2.1a) wird ein Photon mit der Energie  $h\nu$  durch das Atom absorbiert, so dass das Elektron auf eine höhere Schale und somit ein höheres Energieniveau springt. In der darauf folgenden Darstellung 2.1b) fällt das Elektron spontan auf die energetisch niedrigere Bahn zurück und emittiert ein Lichtquant (Photon). Alternativ kann die Emission auch durch ein weiteres Lichtquant angeregt beziehungsweise stimuliert werden (Abbildung 2.1c) ).

Betrachtet man nun ein Medium in dem sich die Atome (oder auch Moleküle) in einem angeregten Zustand befinden, so können durch stimulierte Emission zusätzliche Photo-



**Abbildung 2.1:** Von Einstein 1916 postulierten Übergänge am Beispiel eines Wasserstoffatoms

nen aus dem angeregtem Zustand gelöst werden. Diese haben anschließend den gleichen Energiebetrag wie das stimulierende Photon. Dies führt dazu, dass Polarisation, Phase und Ausbreitungsrichtung der gelösten Photonen identisch sind. Es bildet sich somit ein kohärenter Wellenzug aus. Medien, die diese Eigenschaft besitzen, werden auch als aktive Medien bezeichnet und verfügen über eine Besetzungsinversion im angeregten Zustand. Das heißt, es existieren statistisch mehr Atome im angeregten als im energetisch niedrigen Zustand. Bewegt sich nun ein Photon durch ein solches Medium ohne absorbiert zu werden, wird es lawinenartig Photonen aus dem aktiven Medium lösen. Typische Medien sind zum Beispiel Wasserstoff, Ammoniak oder Rubin [44].

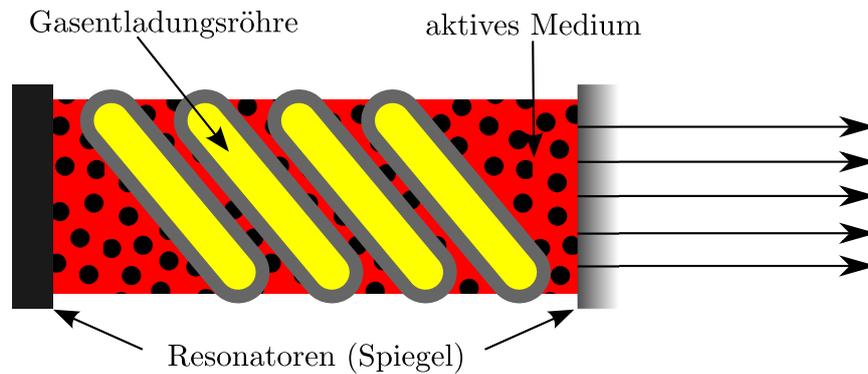
Die von Einstein vorgestellte Quantentheorie der Strahlung [18] wurde nach und nach aufgegriffen und in technischen Anwendungen umgesetzt. So stellte Joseph Weber 1953 an der University of Maryland erstmals die theoretischen Grundlagen für einen Mikrowellenverstärker vor [47], wobei ihm Einstein's veröffentlichten Ergebnisse als Ausgangsbasis dienten. Er erkannte, dass sich ein Mikrowellenverstärker mithilfe von aktiven Substanzen realisieren ließe, die sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Im Jahre 1954/55 bauten unter anderem Gordon, Zeiger und Townes einen solchen Mikrowellenverstärker [6]. Sie bezeichneten den Verstärker als MASER, was für: „**M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation“ steht und das Wirkprinzip in seiner Gesamtheit zusammenfasst.

Später wurde von mehreren Wissenschaftlern untersucht [19], ob das Konzept des Masers in das sichtbare Spektrum übertragbar sei. Letztendlich wurde das Konzept 1960 von Theodore Maiman umgesetzt [35]. Zunächst wurde er als optischer Maser und später als Laser<sup>1</sup> bezeichnet.

## 2.1 Laser

Ähnlich dem Prinzip eines elektronischen Signalverstärkers findet eine Rückkopplung des Signals (hier das Licht) über Resonatoren (Spiegel) statt. Dazu werden zwei Spiegel parallel zueinander aufgestellt, so dass das Licht zwischen diesen beiden Spiegeln reflektiert

<sup>1</sup>Light **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation



**Abbildung 2.2:** Schematische Darstellung des Aufbaus eines Lasers

wird. Zwischen den Spiegeln befindet sich das aktive Medium, welches durch stetige Energiezufuhr (zum Beispiel mit einer Gasentladungsröhre) auf einem energetisch hohem Niveau gehalten wird. Spontan emittierende Lichtquanten lösen weitere Photonen aus dem aktiven Medium und setzen so eine Kettenreaktion zwischen den Spiegeln in Gang. Damit das verstärkte Licht genutzt werden kann, muss ein Spiegel teilweise durchlässig sein. Abbildung 2.2 zeigt dazu den schematischen Aufbau eines durch Maiman [19] entworfenen Lasers.

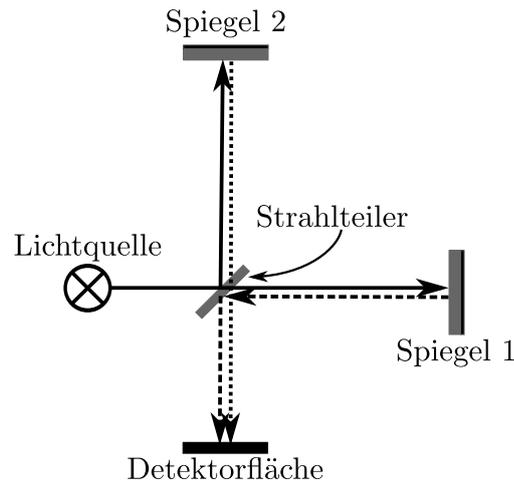
Moderne Laser verfügen über eine Kohärenzlänge von mehreren Kilometern mit einer Divergenz von wenigen *mrad*. Dies ermöglicht eine Vielzahl von technischen Anwendungen; die Bekannteste ist wohl die Auslesung einer Compact Disc. Die Lasertechnik ist darüber hinaus ein fester Bestandteil in Forschung und Entwicklung und auch im industriellen Bereich nicht mehr wegzudenken. Ein Laser kann sowohl zum schneiden, bohren, gravieren oder operieren als auch in der Messtechnik eingesetzt werden. Auf Laserscannern basierende Systeme können zum Beispiel die Echtheit von Produkten überprüfen [25], Entfernungen messen oder Oberflächenschwingungen analysieren. Es existieren noch etliche weitere Anwendungsmöglichkeiten, die hier aber nicht weiter aufgeführt werden sollen. Ein Spezialgebiet der berührungslosen Analyse von Oberflächenschwingungen soll im Folgenden aber weiter betrachtet werden.

## 2.2 Laserinterferometrie

Ende des 17. Jahrhunderts formulierte Christian Huygens die Wellentheorie des Lichts [12], in der der Lichtäther als Ausbreitungsmedium diente. Ähnlich der Ausbreitung von Schallwellen, kann die Wellentheorie Reflexion und Brechung von Licht in unterschiedlichen Medien erklären. Obwohl heutzutage bekannt ist, dass kein Äther zur Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen benötigt wird, taucht dieser im Sprachgebrauch immer wieder auf. So sprechen beispielsweise Funkamateure von „in den Äther geschickt“, wenn sie Funkbotschaften gesendet haben.

Um dem (Licht-)Äther systematisch auf die Spur zu kommen unternahm Michelson im 19. Jahrhundert einige Versuche, die letztendlich im Michelson-Morley-Experiment [35]

mündeten. Da Michelson zu dem damaligen Zeitpunkt noch keinen Laser zur Verfügung hatte, diente eine Entladungslampe als kohärente Lichtquelle. In modernen Aufbauten werden defokussierte Laser als Lichtquelle genutzt. Abbildung 2.3 zeigt den schematischen Aufbau des homodynem Michelson-Interferometers. Von der Lichtquelle ausgehend, trifft das Licht auf einen Strahlteiler, der das Licht auf Spiegel 1 und Spiegel 2 verteilt. Diese werfen das Licht auf den Strahlteiler zurück, so dass auf der Detektorfläche die Überlagerung beider Lichtbündel erfasst werden kann. Während der Spiegel 1 fest montiert ist, kann der Spiegel 2 auf einen Haltearm mit einem Freiheitsgrad in Richtung Strahlteiler bewegt werden.

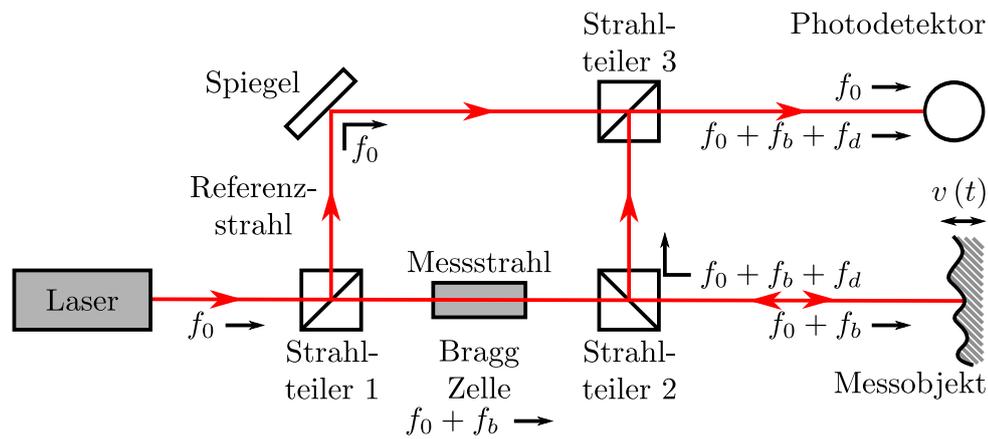


**Abbildung 2.3:** Michelson-Interferometer

Durch die Superposition der beiden Wellen entsteht ein charakteristisches Interferenzmuster, welches in Abbildung 2.4 zu sehen ist. Die roten Ringe entstehen durch konstruktive Interferenz und werden auch als Maxima bezeichnet, während die Minima durch destruktive Interferenz gebildet werden. Wird der Spiegel 2 auf dem Haltearm bewegt, so wechseln sich Minima und Maxima ab. Mit Kenntnis der Wellenlänge der genutzten Lichtquelle kann die Wegänderung durch Abzählen der Wechsel zwischen zwei Minima bestimmt werden. Die Wegänderung zwischen zwei nebeneinander liegenden Minima ist abhängig von der Wellenlänge  $\lambda$  und beträgt bei einem roten Laser ( $633 \text{ nm}$ )  $\frac{\lambda}{2} = 316,5 \text{ nm}$ .



**Abbildung 2.4:** Interferenzmuster auf dem Detektorschirm



**Abbildung 2.5:** Mach-Zehnder-Prinzip eines Laser-Doppler-Vibrometers, angelehnt an [52, 85]

Moderne Laser-Doppler-Vibrometer werden als heterodyne Interferometer aufgebaut. Abbildung 2.5 zeigt den Aufbau eines Laser-Doppler-Vibrometers nach dem Mach-Zehnder-Prinzip [35, 58]. Dazu wird ein Laserstrahl mit der Frequenz  $f_0$  in einen Messstrahl und einen Referenzstrahl am Strahlteiler 1 aufgeteilt. Der Messstrahl wird über einen akustooptischen Modulator (Bragg-Zelle) um die Frequenz  $f_b$  verschoben. Das am Messobjekt reflektierte Licht ist jetzt über den Doppler-Effekt mit einer Frequenzverschiebung  $f_d$  behaftet, die proportional zur Schwinggeschwindigkeit  $v(t)$  des Messobjektes ist. Dieses Lichtsignal wird dann über den Strahlteiler 2 auf den Strahlteiler 3 umgelenkt, so dass sich hinter dem Strahlteiler 3 das Referenz- und Messstrahl überlagern. Misst man nun am Photodetektor das Spannungssignal, so erhält man ein frequenzmoduliertes (FM) Signal mit der Trägerfrequenz  $f_b$ . Da die Trägerfrequenz bekannt ist, kann das Signal demoduliert und ausgewertet werden. Möchte der Leser tiefer in die Thematik einsteigen, so wird hier auf [4, 14, 35, 58] verwiesen.

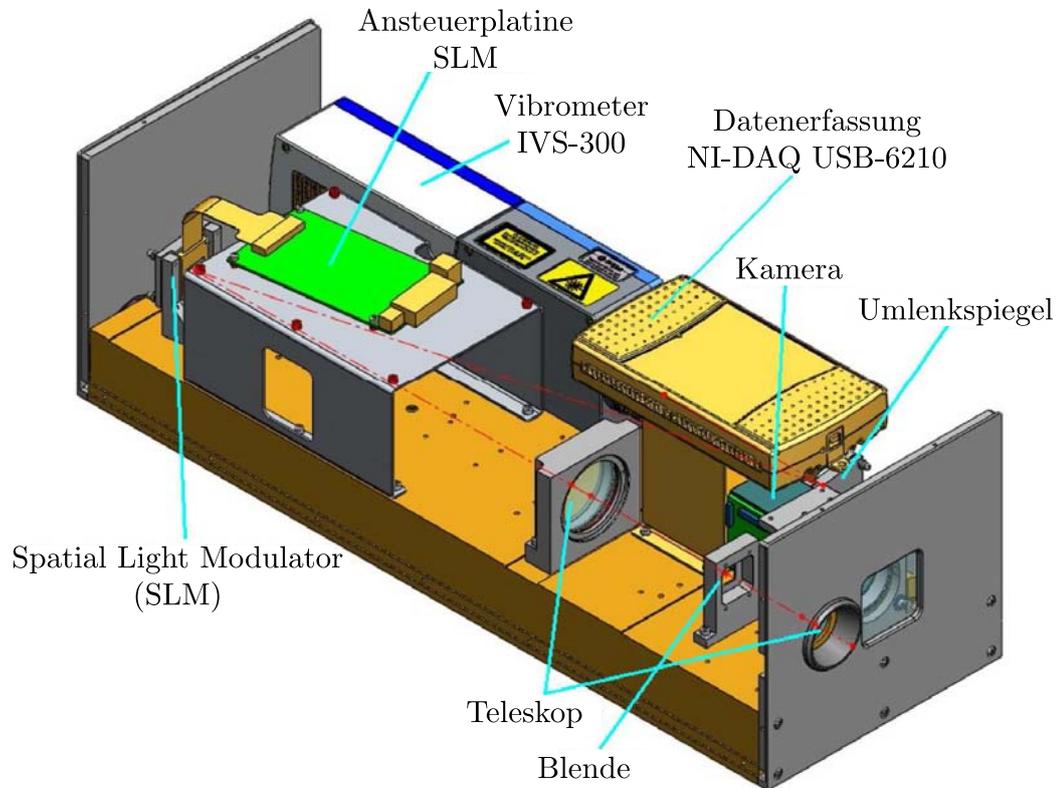
## 2.3 Vibrometer mit SLM-basierten Aktor

Das Testmuster des genutzten Vibrometers wurde von der Firma Polytec GmbH und dem Institut für Technische Optik (ITO) der Universität Stuttgart entwickelt. Es basiert auf dem von Polytec gebauten Industry Vibration Sensor IVS-300, einem Laser-Doppler-Vibrometer. Die Ansteuer- und Auswerteelektronik ist zusammen mit den optischen Komponenten in einem Gehäuse zu einem SLM<sup>2</sup>-basierten Scanning-Vibrometer verbaut. In Abbildung 2.6 ist ein CAD<sup>3</sup>-Modell des Testmusters dargestellt. Um den kompakten Aufbau zu ermöglichen, wurde der Strahlengang über einen Umlenkspiegel auf das SLM geführt. Das SLM ist der eigentliche Aktor im System, der über das Einschreiben von speziellen Computer-generierten Hologrammen (CGH) die Phaseneigenschaften des defokussierten kohärenten Lichts des IVS-300 derart modifiziert, dass der Laser-Spot gezielt auf bestimmte Positionen fokussiert werden kann und somit das „Scannen“ von einzelnen

<sup>2</sup>Spatial Light Modulator

<sup>3</sup>Computer Aided Design

Messpunkten ermöglicht. Die technischen Grundlagen dazu wurden am ITO entwickelt und in [89] vorgestellt. Zur Ansteuerung des SLM wurde eine auf CUDA [77] basierende Schnittstelle implementiert, die den Zugriff auf das SLM über die HDMI-Schnittstelle eines entsprechend ausgestatteten Laptops ermöglicht.



**Abbildung 2.6:** Modell des genutzten Vibrometers

Das vom SLM modifizierte Strahlenbündel wird über ein Teleskop nach außen geführt. Zusätzlich ist im Strahlengang des Teleskops eine Blende montiert, um Beugungserscheinungen höherer Ordnung zu unterdrücken und somit daraus resultierende Störeinflüsse zu reduzieren. Sensorseitig ist ein Datenerfassungssystem von National Instruments verbaut. Das NI-DAQ USB-6210 [67] greift dazu direkt den Signalpegel am Photodetektor des Vibrometers ab, und dieser ist ein Maß für die eingefallene Lichtleistung. Er ist proportional zur Lichtleistung, wobei eine Steigerung des Signalpegels um  $0,5\text{ V}$  mit einer Verbesserung von  $3\text{ dB}$  (Faktor 2) der Lichtleistung einher geht. Das NI-DAQ USB-6210 ermöglicht eine maximale Messwerterfassung von  $250\text{ kS/s}$  pro Kanal. Weiterhin ist im Testmuster eine Kamera verbaut, die aber für diese Arbeit nicht relevant war. In der von Polytec entwickelten Software PSV 8.7 wird die Kamera genutzt um Messpunkte auf dem Messobjekt zu positionieren und die Position zu verifizieren.

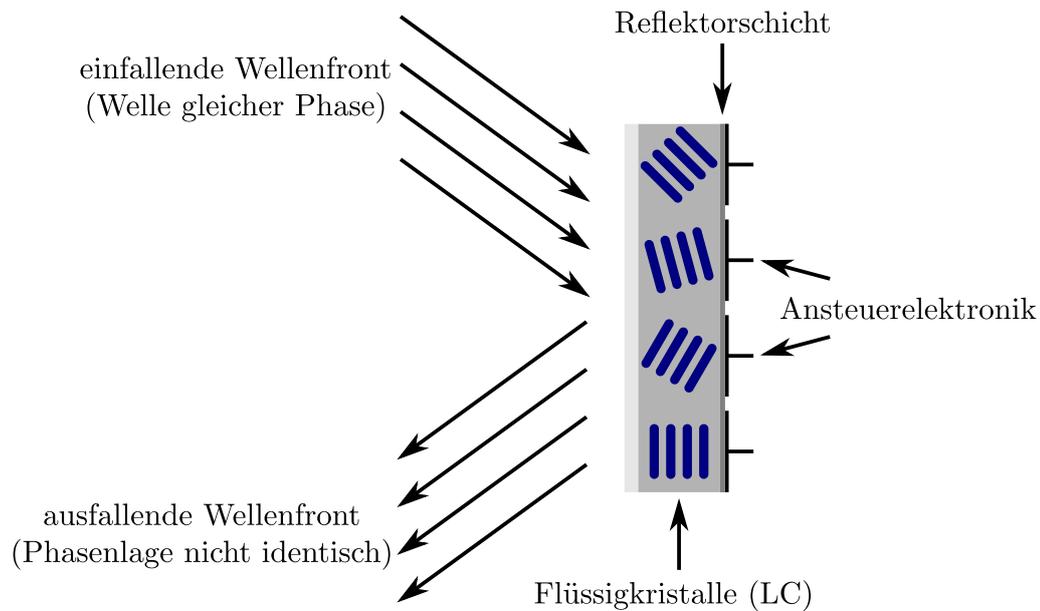


Abbildung 2.7: Wirkprinzip des SLM, nach [31]

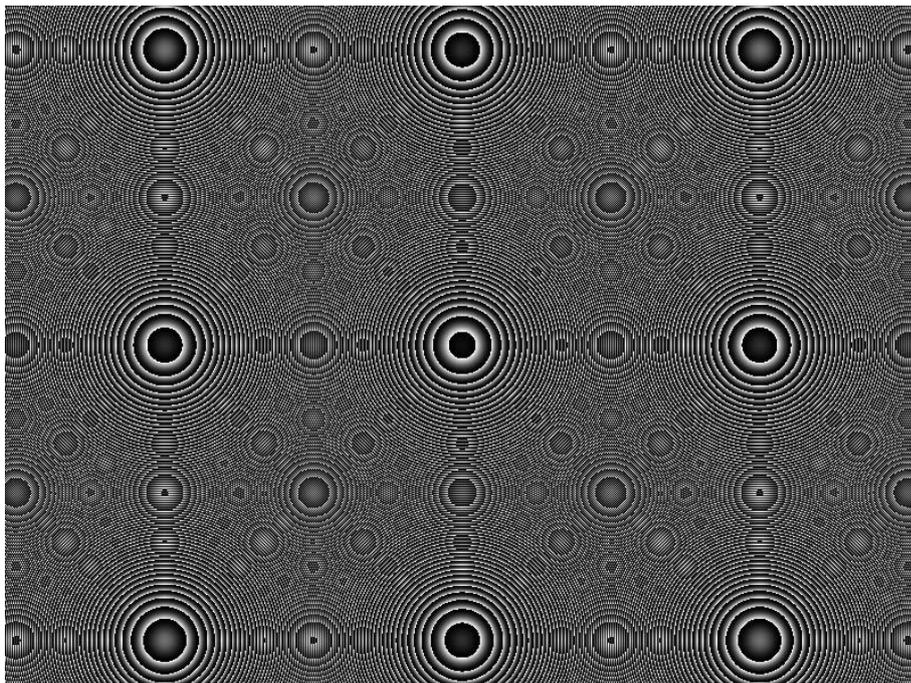
## 2.4 Spatial Light Modulator (SLM) auf LCoS Basis

Bei dem in Abbildung 2.6 verbauten SLM handelt es sich um das LCoSSLM X10468 Series von Hamamatsu [31]. Technisch betrachtet, handelt es sich um einzeln ansteuerbare Flüssigkristalle, die mit einer Ansteuerelektronik auf CMOS-Basis verbunden und auf ein Siliziumsubstrat aufgebracht sind. Die Flüssigkristalle modulieren das Licht nur in ihrer Phasenlage mit einem Shift von  $0$  bis  $2\pi$ ; Intensität und Polarisation des Lichts bleiben dabei unverändert. Die Ansteuerelektronik ermöglicht dabei das Ausrichten jedes einzelnen Flüssigkristalls. Abbildung 2.7 zeigt das Wirkprinzip des SLM. In Tabelle 2.1 sind die Spezifikation, entnommen aus [31], aufgelistet. Es verfügt über einen DVI-Anschluss, das auch über HDMI angesprochen werden kann. Weiterhin ist die Bildwiederholungsrate mit  $60$  Hz angegeben.

Parameter	X10468 series -06	Unit
Input Signal	Digital Video Interface (DVI)	-
DVI signal format	SVGA (800×600 pixels)	-
DVI frame rate	60	Hz
Number of input levels	256 (8 bits)	levels
Effective area	16×12	mm
Maximum spatial resolution	25	lp/mm
Fill factor	95	%
Typical response time (rise)	20	ms
Typical response time (fall)	45	ms
Readout light wavelength	650 ± 50	nm
Typical light utilization efficiency	90	%
Input voltage (AC)	100 to 230 (50 Hz / 60 Hz)	V
Power consumption	50	VA
Weight (Head)	Approx. 450	g
Weight (Controller including cables)	Approx. 4100	g

**Tabelle 2.1:** Spezifikationen des LCOSSLM X10468-06

Dies ist für weitere Analysen der Latenz im SLM-basierten Vibrometer von Bedeutung. Auf dem SLM befinden sich  $800 \times 600$  Bildpunkte, die dem SVGA<sup>4</sup>-Standard entsprechen. Jedes Pixel ist mit 8 Bit codiert und kann somit Werte von 0 - 255 annehmen, was einer Phasenverschiebung von 0 bis  $2\pi$  mit einer Schrittweite von  $0,025$  rad entspricht. Die eingeschriebenen Muster sind auf dem SLM mit dem bloßen Auge zwar nicht erkennbar, können aber als Grauwertbild visualisiert werden. Abbildung 2.8 zeigt ein Muster, dass den Laser bei 2m fokussiert, wenn es in das SLM eingeschrieben ist.



**Abbildung 2.8:** Beispiel eines SLM-Musters

<sup>4</sup>Super Video Graphic Array

Das Muster basiert auf Zernike-Polynome, die in Kapitel 3 detailliert beschrieben sind. Zunächst muss die Aussage genügen, dass durch die Nutzung der Zernike-Polynome eine Parameter-Reduktion von  $800 \times 600 = 480.000$  veränderbarer Parameter (hier: Anzahl der Pixel auf dem SLM) auf maximal sieben Parameter vorgenommen wird.

## 2.5 Vibrometer mit Membranspiegel als Aktor

Anstelle des SLM wurde als alternativer Aktor ein Membranspiegel getestet. Es handelte sich dabei um einen von OKO Tech gefertigten MMDM<sup>5</sup> mit 15 mm Durchmesser. Vorteil dieses Stellglieds ist die hohe Einschreibgeschwindigkeit von 250 Hz. Das Einschreiben der Muster ist somit  $\approx 4$  mal schneller als das in Abschnitt 2.4 vorgestellte SLM. Der Spiegel besteht aus einer reflektiven Siliziumnitrid-Membran, die über 37 Elektroden aufgespannt ist. Wird eine Spannung an die Elektroden angelegt, wird der darüber liegende Teil der Membran zur Elektrode hin verformt. In Abbildung 2.9 ist der Spiegel inklusive Gehäuse abgebildet. Da die Membran nur mit einem Abstand von wenigen  $\mu\text{m}$  über der Elektronik montiert ist, ist sie extrem empfindlich gegenüber externen Kräften.

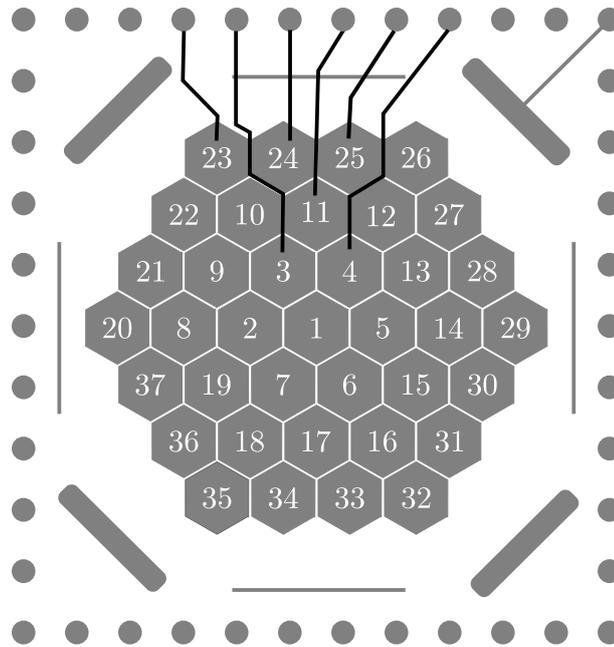


**Abbildung 2.9:** OKO Tech Membran-Spiegel MMDM 15 mm 37 Kanäle, aus [20]

Zu hoher Außendruck kann zu Stitching führen; die Membran klebt an der Elektrode fest und löst sich aufgrund von Kapillarkräfte nicht mehr selbständig ab. Die hohe Empfindlichkeit ist einer der Nachteile eines Membran-Spiegels dieser Bauart. Abbildung 2.10 zeigt das Array aus Ansteuer-Elektroden, über die der Spiegel aufgespannt ist. Die Elektroden (1 - 37) werden über die Spannungsversorgung mit 150 bis 300 V betrieben, die durch eine spezielle Verstärkereinheit geliefert werden muss, um Spannungsspitzen zu vermeiden. Durch Spannungsspitzen können Teile der Membran derart verformt werden, so dass sie die Elektrode berührt. Das wiederum verursacht, wie oben schon erwähnt, ein Stitching der Membran.

---

<sup>5</sup>Micro Machined Device Mirror

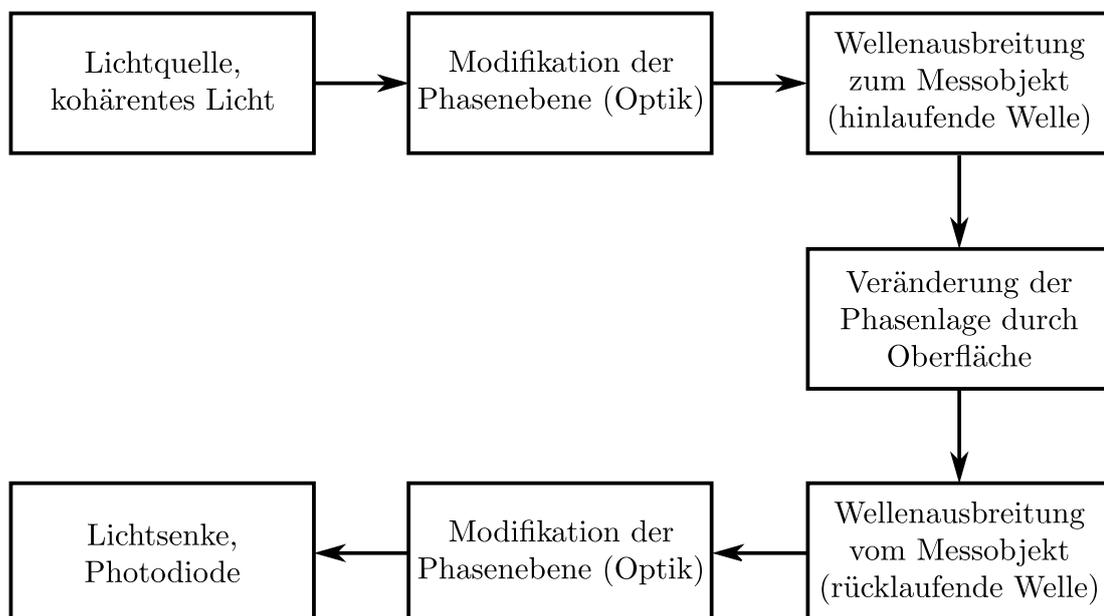


**Abbildung 2.10:** Anschluss-Platine OKO Tech MMDM 15 mm 37 Kanäle, nach [20]

Für einen robusten Betrieb in rauen Industrieumgebungen ist dieser Aktor also eher ungeeignet. Dennoch wurden einige Experimente mit dieser adaptiven Optik durchgeführt, um die technische Nutzbarkeit zu prüfen.

# Analyse und Modellbildung

Da ein erster Optimierungsansatz über alle Grauwerte eines jeden Pixels in dem SLM [89] zu 480.000 Optimierungsvariablen führen würde, wurde in dieser Arbeit ein Ansatz über die Modifikation von Zernike-Polynomen [59] genutzt. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um eine Variable-Reduktion, da über entsprechende Polynome die Werte aller Pixel des SLM implizit berechnet werden. Unter dieser Annahme wurde der Messprozess mathematisch analysiert. Der Messprozess kann wie in Abbildung 3.1 gezeigt vereinfacht dargestellt werden.



*Abbildung 3.1: Schema des Messprozesses*

### 3.1 Beschreibung von Abbildungsfehlern über Zernike-Polynome

In optischen Systemen können Abbildungsfehler über die Summe von gewichteten Zernike-Polynomen  $\Phi(c, \rho, \varphi)$  [59] beschrieben werden. Sie stellen damit die Wellenfront einer sich ausbreitenden Welle dar. Zernike-Polynome sind orthogonale Polynome, die in gerade und ungerade Polynome unterteilt sind. In Polarkoordinaten sind diese durch

$$Z_n^m(\rho, \varphi) = \begin{cases} R_n^{n-2m}(\rho) \cos(m\varphi) & n - 2m \leq 0 \\ R_n^{n-2m}(\rho) \sin(m\varphi) & n - 2m > 0 \end{cases} \quad \text{mit } n, m \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

definiert, wobei  $R_n^{n-2m}(\rho)$  den vom Radius  $\rho$  abhängigen und  $\varphi$  den azimuthalen Anteil darstellen. Der Radius-abhängige Anteil in Gleichung (3.1) ist seinerseits definiert als

$$R_n^{n-2m} = \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!(m-s)!(n-m-s)!} \rho^{n-2s}. \quad (3.2)$$

Daraus ergibt sich die Zernike-Dekomposition, die als Summe der gewichteten Zernike-Polynome mit dem zugehörigen Zernike-Koeffizienten  $c_{mn}$  mit

$$\Phi(c, \rho, \varphi) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n c_{mn} \cdot Z_n^m(\rho, \varphi) \quad (3.3)$$

bestimmt ist. Die Koeffizienten  $c_{mn}$  gewichten in Gleichung (3.3) die jeweiligen Zernike-Polynome, zu denen sie eindeutig zugeordnet sind. Fasst man die Koeffizienten zu einem Vektor  $c$  zusammen, so erhält man  $c = (c_{00}, \dots, c_{mn})^T \in \mathbb{R}^{n_c}$ , mit  $n_c$ : *Anzahl der genutzten Zernike-Polynome*. Die Koeffizienten der nicht genutzten Polynome werden auf  $c_{ij} = 0$ , mit  $i, j \in \mathbb{N}$  gesetzt und nicht in den Vektor  $c$  aufgenommen. Tabelle 3.1 zeigt die genutzten Zernike-Polynome. Nun kann die Phase einer homogenen Wellenfront am Ausgangspunkt über gewichtete und summierte Zernike-Polynome beschrieben werden.

#	n	m	Name	Polarkoordinaten	kartesische Koordinaten
1	1	0	Tilt X	$\rho \cdot \sin(\varphi)$	$x$
2	1	1	Tilt Y	$\rho \cdot \cos(\varphi)$	$y$
3	2	0	Astigma X	$\rho^2 \cdot \sin(2\varphi)$	$2x^2 - 1$
4	2	2	Astigma Y	$\rho^2 \cdot \cos(2\varphi)$	$2xy$
5	3	1	Coma X	$(3\rho^3 - 2\rho) \cdot \sin(\varphi)$	$3(x^2 + y^2)x - 2x$
6	3	2	Coma Y	$(3\rho^3 - 2\rho) \cdot \cos(\varphi)$	$3(x^2 + y^2)y - 2y$
7	4	0	sphär. Aberration	$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$	$6(x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2) + 1$

**Tabelle 3.1:** Übersicht über genutzte Zernike-Polynome

Da die Gleichung (3.3) in Polarkoordinaten, aber später Gleichung (3.8) in kartesischen

Koordinaten vorliegt, muss Gleichung (3.3) zunächst in kartesische Koordinaten transformiert werden. Mit den Transformationsvorschriften aus [11] erhält man die Phasenfunktion

$$\Phi(c, x, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n c_{mn} \cdot Z_n^m(x, y) \quad (3.4)$$

in kartesischen Koordinaten (siehe auch Tabelle 3.1). Beispielhaft sind in Abbildung 3.2 einige Zernike-Polynome grafisch dargestellt, mit der die Phasenlage einer Welle beschrieben wird.

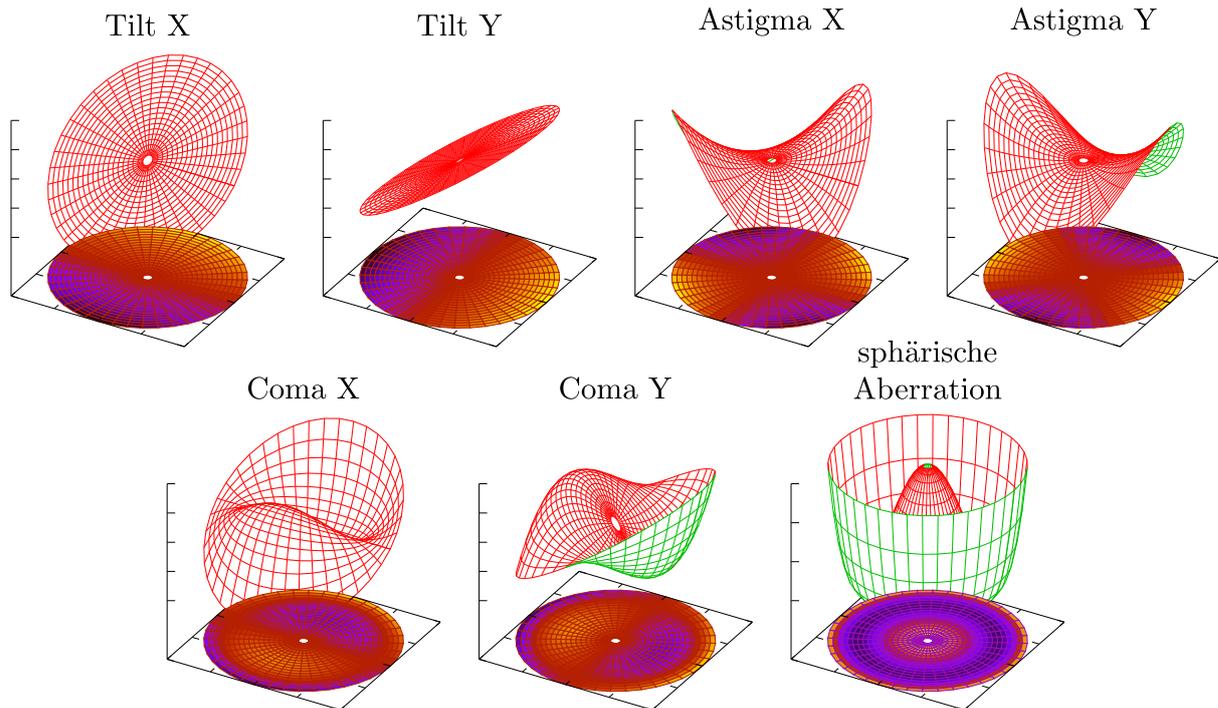


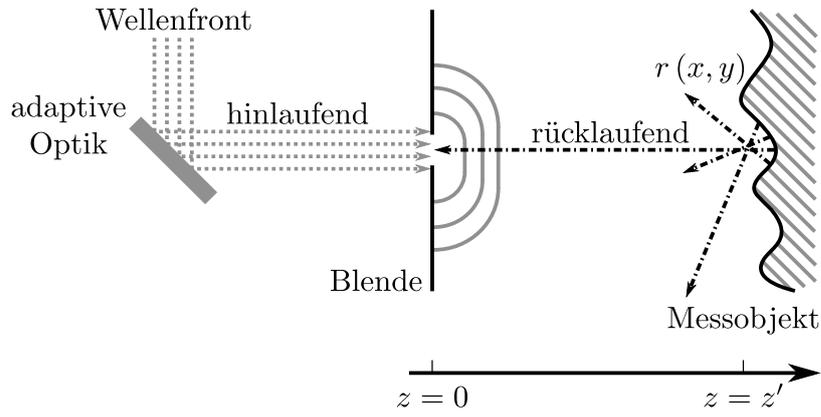
Abbildung 3.2: Beispiel einiger Zernike-Polynome, entnommen aus [61]

## 3.2 Lösung der homogenen Wellengleichung im Messprozess

Die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung wurde in [26] aus den Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet. Sie ist gegeben durch

$$E(z, t) = E_0 \cdot e^{j(kz - \omega t + \varphi)} \quad (3.5)$$

und definiert die Welle der kohärenten Lichtquelle in Abbildung 3.1 mit einer Amplitude  $E_0$ , der Ausbreitungsrichtung  $z$ , der Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der komplexen Phase  $\varphi$ . Zunächst wird untersucht, ob eine Zielfunktion analytisch berechenbar ist. Dazu sollte die Intensitätsverteilung in der Blende (siehe Aufbau des Vibrometers in Abschnitt 2.3) als Maß für die Signalstärke dienen. Allgemein bekannt ist,



**Abbildung 3.3:** Schema der beugungsbegrenzten Wellenausbreitung

dass die Intensität  $I(z, t)$  einer Welle proportional zum Quadrat ihrer Amplitude, mit

$$I(z, t) \propto E(z, t) \cdot E(z, t)^* , \quad (3.6)$$

ist. Um die Intensitätsverteilung herzuleiten, muss die Modulation der Phasenfront der Welle durch die adaptive Optik berücksichtigt werden. Dazu wird die komplexe Phase  $\varphi$  in Gleichung (3.5) mit der durch die Optik modulierte und über die Zernike-Dekomposition beschriebene Phasenterm  $\Phi(c, x, y)$  aus Gleichung (3.4) mit

$$\varphi = \Phi(c, x, y) \quad (3.7)$$

ersetzt, wobei der Vektor  $c$  die Zernike-Koeffizienten enthält. Die  $xy$ -Ebene bildet hierbei die Phasenebene und steht später senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Wird nun die Phasenlage  $\varphi$  durch Gleichung (3.7) ersetzt, so erhält man eine durch die adaptive Optik modifizierte Welle, die keine Flächen gleicher Phase mehr bildet. Die  $xy$ -Ebene repräsentiert nun die Phasenebene, so dass die modifizierte Wellengleichung mit

$$E_{\text{ad.Optik}}(c, x, y, z, t) = E_0 \cdot e^{j(kz - \omega t + \Phi(c, x, y))} \quad (3.8)$$

gegeben ist. Zur Berechnung muss, wie in Abbildung 3.3 gezeigt, die hin- und rücklaufende Welle berücksichtigt werden. Dabei ist die rücklaufende Welle mit einem Phasenversatz  $r(x, y)$  behaftet, der stochastisch in der  $xy$ -Ebene als gleichverteilt angenommen wird. Der Phasenversatz wird einerseits durch Rauigkeiten der Oberfläche des Messobjekts hervorgerufen, andererseits ist er abhängig von Zeitpunkt und dem aktuell betrachteten Ort. Zur Vereinfachung wurde die Reflexion an der Grenzfläche als ideal angenommen. Die Überlagerung der Wellen ergibt sich, indem die hin- und eine rücklaufende Welle summiert werden. Somit erhält man einen Zusammenhang für die überlagerten homogenen ebenen Wellen in der Form

$$E_{\text{hin,rück}}(x, y, z, c, t) = \underbrace{E_0 \cdot e^{j(kz - \omega t + \Phi(c, x, y))}}_{=E_{\text{hin}}(x, y, z, c, t)} + \underbrace{E_0 \cdot e^{-j(kz + \omega t - \Phi(c, x, y) - r(x, y))}}_{=E_{\text{rück}}(x, y, z, c, t)} . \quad (3.9)$$

Durch die Ersetzung von  $\varphi$  aus Gleichung (3.7) handelt es sich bei der Welle nicht mehr um eine homogene ebene Welle. Da zusätzlich Beugungserscheinungen an der Blende berücksichtigt werden müssen, wird im weiteren Verlauf die Auslenkung  $E_{\text{obj}}(x', y')$  auf dem Objekt über das Fraunhofer'sche Beugungsintegral [35] berechnet. Nach dem von Huygens aufgestellten Gesetz [12] ist jeder Punkt in der Blende Ausgangspunkt einer Elementarwelle  $E_{\text{EW}}(c, \vec{r}, x, y, t)$ , gegeben mit

$$E_{\text{EW}}(c, \vec{r}, x, y, t) = \frac{E_0}{|\vec{r}|} e^{j(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi(c, x, y))}. \quad (3.10)$$

Die Amplitude eines Punktes  $(x' y' z')^T$  auf einem Messobjekt, welches sich hinter einer Apertur befindet (siehe Abbildung 3.3) wird ermittelt, indem die Amplituden aller Elementarwellen  $E_{\text{EW}}(c, \vec{r}, x, y, t)$  in der Blende berücksichtigt werden. Hieraus folgt der Zusammenhang

$$E_{\text{obj}}(x', y') = \iint_{\text{Apertur}} \underbrace{\frac{E_0}{|\vec{r}|} \cdot e^{j(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi(c, x, y))}}_{\text{Amplitude einer einzelnen Elementarwelle}} dx dy, \quad (3.11)$$

wobei  $|\vec{r}|$  die Distanz zwischen der initialen Elementarwelle und dem Punkt  $(x' y' z')^T$  auf dem Objekt ist. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ist der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \vec{r}^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2xx' - 2yy' + x^2 + y^2 \\ &= r'^2 - 2xx' - 2yy' + x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

und somit

$$|\vec{r}| = |\vec{r}'| \cdot \sqrt{1 - \frac{2(xx' + yy')}{|\vec{r}'|^2} + \frac{x^2 + y^2}{|\vec{r}'|^2}} \quad (3.13)$$

gegeben. Unter der Annahme, dass die Blendenöffnung klein im Verhältnis zu  $z'$  ist, ergibt sich für den Term in Gleichung (3.13)  $\frac{x^2 + y^2}{|\vec{r}'|^2} \approx 0$ , so dass die Abschätzung

$$\vec{r} \approx |\vec{r}'| \cdot \sqrt{1 - \frac{2(xx' + yy')}{|\vec{r}'|^2} + \frac{x^2 + y^2}{|\vec{r}'|^2}} \approx |\vec{r}'| \cdot \left(1 - \frac{xx' + yy'}{|\vec{r}'|^2}\right) \quad (3.14)$$

in Gleichung (3.11) eingesetzt schlussendlich zu

$$E_{\text{obj}}(x', y') = \underbrace{\frac{E_0}{|\vec{r}|} \cdot e^{j(\vec{k}|\vec{r}'| - \omega t)} \cdot \iint_{\text{Apertur}} \frac{E_0}{|\vec{r}|} \cdot e^{-j \left( \overbrace{\vec{k} \left( \frac{xx' + yy'}{|\vec{r}'|^2} \right) - \Phi(c, x, y)}^{\text{grad}(\Phi(c, x, y)) > 1 \Rightarrow \text{analytisch nicht lösbar}} \right)} dx dy}_{\text{hinlaufende Welle}}, \quad (3.15)$$

führt. Für die rücklaufende Welle muss ähnlich verfahren werden. An Gleichung (3.15) ist eindeutig zu erkennen, dass ein analytischer Ausdruck für die Superposition der hin-

und rücklaufenden Welle nicht gefunden werden kann, da  $\text{grad}(\Phi(c, x, y)) > 1$  ist. Möchte man die Intensität am Detektor nach Gleichung (3.6) berechnen, so müsste der gesamte Ausdruck von hin- und rücklaufender Welle noch zusätzlich quadriert werden, was den Komplexitätsgrad der zu lösenden Gleichung noch weiter erhöhen würde.

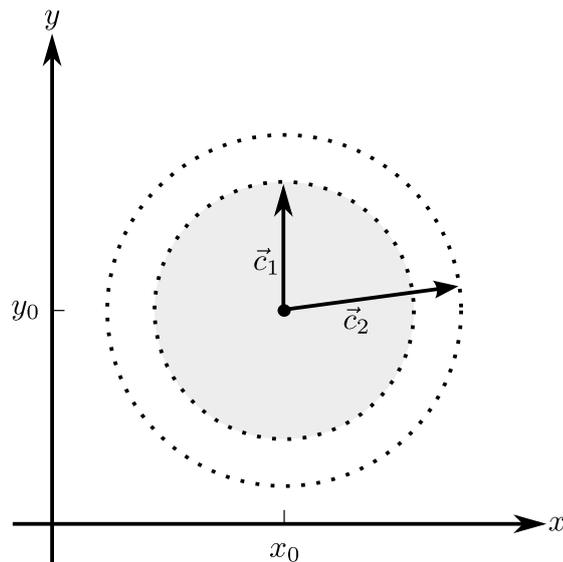
### 3.3 Grenzen der analytischen Untersuchungen

Das Ergebnis der Analyse ergab, dass eine geschlossene analytische Darstellung in Form von Systemgleichungen aufgrund der hohen Komplexität des Messprozesses nicht möglich ist. Gleichung (3.15) ist analytisch nicht mehr lösbar. Trotzdem muss eine hinreichend gute Gütefunktion identifiziert werden, die in einem Optimierungsalgorithmus genutzt werden kann, so dass das Auffinden des globalen Minimums zu einer erheblichen Verbesserung des Signalpegels führt. Die ab Abschnitt 3.4 hergeleitete Gütefunktion beruht auf der Variation von Zernike-Koeffizienten, die entsprechende Zernike-Polynome gewichten und damit eine gezielte Beeinflussung des Laser-Spots in Größe und Form ermöglichen. Die Optimierung der Gütefunktion muss dann über sogenannte ableitungsfreie Optimierungsalgorithmen erfolgen.

### 3.4 Herleitung der Signalgüte

Die adaptive Optik erlaubt über den Parameter  $c$  aus Gleichung (3.4) die Variation von Position, Form und Phasenlage des Messspots. Eine Bedingung, die sich direkt aus dem Messprozess ergibt ist, dass sich der Laser-Spot exakt auf der Position befindet, die vorab eingestellt wurde. Weiterhin soll der Spot so wenig wie möglich in seiner Form verändert werden.

Um den Signalpegel verbessern zu können, müssen jedoch minimale Variationen in Form und Position zugelassen werden. Daraus kann zunächst ein Gütekriterium für die Position im  $\mathbb{R}^2$  hergeleitet werden, welches in der Abbildung 3.4 für  $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$  veranschaulicht und später auf die Verformung des Spots im  $\mathbb{R}^n$  erweitert wird.



**Abbildung 3.4:** Signalgüte über Betrag eines Vektors

Abweichungen von der ursprünglichen Position  $(x_0, y_0)$  werden direkt mit der Länge des Vektors  $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$  verknüpft. Je größer der Betrag von Vektor  $\vec{c}$  ist, desto schlechter ist die gefundene Güte in Bezug auf die Positionierung. In Abbildung 3.4 hat der Vektor  $\vec{c}_1$  offensichtlich eine höhere Güte als  $\vec{c}_2$ . Mit

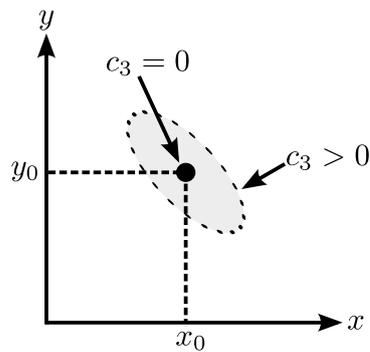
$$\Delta x = \tilde{x} - x_0 \quad (3.16)$$

$$\Delta y = \tilde{y} - y_0 \quad (3.17)$$

gilt dann für die euklidische Länge des Vektors  $\vec{c}$

$$\|\vec{c}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (3.18)$$

Wenn nun  $\|\vec{c}\|_2 = 0$  gilt, so ist die Signalgüte maximal, womit sich eine Minimierungsaufgabe für die Signalgüte ergibt. Möchte man die Signalgüte auf die Zernike-Koeffizienten höherer Ordnung erweitern, so ist der Zusammenhang schnell über die Verformung des Spots zu verdeutlichen. Dazu zeigt Abbildung 3.5 qualitativ die Verformung eines beliebigen Koeffizient  $c_3$  höherer Ordnung in der Fokusebene.



**Abbildung 3.5:** Verformung des Spots durch Einschreiben von Aberration auf das SLM

Je größer ein Zernike-Koeffizient  $c_{mn}$ ,  $mn \neq 10$ ,  $mn \neq 11$  betragsmäßig wird, desto mehr nimmt die Verformung des Spots zu. Auch hier ist das Minimum allgemein bei  $c_{mn} = 0$  zu suchen. Deshalb kann, analog zu einem Vektor  $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ , die Verformung über den Betrag des Vektors  $c \in \mathbb{R}^n$  berücksichtigt werden. Eine Normierung der Einzelkomponenten bezogen auf einen Maximalwert jeder einzelnen Komponente von  $c$  erreicht man durch

$$\Delta c_{i,\text{normiert}} = \frac{\Delta c_i}{\max \{ \Delta c_i \}}. \quad (3.19)$$

In Abschnitt 6.3 werden die experimentell ermittelten Maximalwerte vorgestellt. Dort werden untere und obere Schranken  $(\underline{c}_i, \bar{c}_i)$  angegeben, die für einen einzelnen Koeffizienten  $c_i$  gelten. Das betragsmäßige Maximum  $\max \{ |\Delta \underline{c}_i|, |\Delta \bar{c}_i| \}$  dieser Schranken wird zur Normierung genutzt. Man erhält daher

$$\Delta c_{i,\text{normiert}} = \frac{\Delta c_i}{\max \{ |\Delta \underline{c}_i|, |\Delta \bar{c}_i| \}}. \quad (3.20)$$

Für  $\| \Delta c_{\text{normiert}} \|_2$  gilt somit

$$\| \Delta c_{\text{normiert}} \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta c_i}{\max \{ |\Delta \underline{c}_i|, |\Delta \bar{c}_i| \}} \right)^2}. \quad (3.21)$$

Gleichung (3.21) hat einen Wertebereich von  $\| \Delta c_{\text{normiert}} \| = [0, \sqrt{n}]$ . Für die Signalgüte soll der Wertebereich auf  $[0, 1]$  in der später definierten Pareto-Optimierung in Gleichung (5.3) reduziert werden. Damit ist  $\beta(c)$  geben durch

$$\beta(c) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta c_i}{\max \{ |\Delta \underline{c}_i|, |\Delta \bar{c}_i| \}} \right)^2}{n}}. \quad (3.22)$$

### 3.5 Signalstärke

Die Signalstärke  $\tilde{\alpha}(c)$  in  $[V]$  wird im Vibrometer über einem Detektorboard messtechnisch erfasst. Sie ist proportional zur einfallenden Lichtintensität und kann Spannungswerte von

0 bis  $5V$  annehmen. Um mit einem Gewichtungsfaktor  $\gamma$  aus Gleichung (5.3) zwischen der Signalgüte und der Signalstärke zu gewichten, muss auch die Signalstärke normiert werden. Ferner soll der spätere Optimierer die Pareto-Gleichung (Gütefunktion) minimieren. Dies wird erreicht, indem die normierte Signalstärke auf der Abszisse um  $x = 0,5$  gespiegelt wird.

$$\alpha(c) = 1 - \frac{\tilde{\alpha}(c)}{\max\{\tilde{\alpha}(c)\}} \quad (3.23)$$

### 3.6 Gütefunktion

Das Berechnen der Quadratwurzel ist rechenaufwendiger als die Optimierung über das Quadrat der Wurzel. Wird die Gleichung (3.22) und Gleichung (3.23) quadriert, so ergibt sich die Kostenfunktion zu

$$z(c) = \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}(c)}{\max\{\tilde{\alpha}(c)\}}\right)^2 \cdot \gamma + \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta c_i}{\max\{|\Delta \underline{c}_i|, |\Delta \bar{c}_i|\}}\right)^2}{n}\right) \cdot (1 - \gamma). \quad (3.24)$$

Für alle weiteren Untersuchungen stellt diese Gütefunktion die Grundlage dar. Einerseits wird sie im Kapitel 5 als Zielfunktion genutzt. Andererseits wird sie in der Erweiterung des Optimierungsalgorithmus über das in Kapitel 4 vorgestellte Interpolationsverfahren approximiert. Die Approximation stellt ein Modell der Gleichung (3.24) dar und ist mit Verfahren, die sich der Gradienten und Hesse-Matrizen bedienen, optimierbar.

# Approximation durch radiale Basisfunktionen

Zur Verbesserung des Laufzeitverhaltens wurde ein hybrides Verfahren entwickelt, welches den DIRECT-Algorithmus aus Kapitel 5 um eine Interpolation mittels radiale Basisfunktionen (RBF) [82] erweitert. Sie stellt eine Methode zur Interpolation von Funktionen zur Verfügung, die analytisch berechnet und optimiert werden können. Auf Grundlage der RBF können Annahmen über den Verlauf der Kostenfunktion, insbesondere der Extrema, getroffen werden. Um diese in einem vorgegebenen Zeitraum ermitteln zu können, wurde in [2] ein Optimierungsalgorithmus auf Basis von schwarmähnlich arbeitenden lokalen Optimierern entwickelt.

Möchte man eine multivariate Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $k$  paarweise verschiedenen Stützstellen  $\hat{x}^k \in \hat{X}$  und den zugehörigen Funktionswerten  $\hat{f}_k = f(\hat{x}^k) \in \hat{F}$ ,  $1 \leq k \leq m$  approximieren, so führt dies nach [82] auf das Interpolationsproblem mit der Interpolierenden

$$\text{finde ein } s_f(x) \in \mathcal{T} \text{ mit } s_f(\hat{x}^k) = \hat{f}_k. \quad (4.1)$$

Dabei sei  $\mathcal{T}$  der Raum von Funktionen mit  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Interpolanten, die die Bedingungen in Gleichung (4.1) erfüllen. In einschlägiger Literatur [10, 39, 72, 74, 82, 86] wurden RBF untersucht, die ein solches Interpolationsproblem lösen. Ein radiales Basispolynom ist gegeben durch

$$r(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \Phi(\|x - \hat{x}^k\|), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

wobei  $\Phi(\|x - \hat{x}^k\|)$  eine radiale Basisfunktion ist und  $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  abbildet.  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  müssen hierbei bestimmt werden, um das Interpolationsproblem zu lösen. Enthält das zu interpolierende Problem lineare Abhängigkeiten ist es notwendig,

die Gleichung (4.2) um ein in  $x$  lineares Polynom  $p(x)$  zu erweitern. Mit Gleichung (4.2) führt dies zur Interpolante

$$s_f(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \Phi(\|x - \hat{x}^k\|) + \gamma_{\text{RBF}} \cdot p(x). \quad (4.3)$$

Wenn die Interpolationsbedingungen über alle  $\hat{X}$

$$f_i = \sum_{k=1}^m \lambda_k \Phi(\|\hat{x}^i - \hat{x}^k\|) + \gamma_{\text{RBF}} \cdot p(\hat{x}^i) \quad (4.4)$$

erfüllt sind und die Parameter  $\lambda$  und  $\gamma_{\text{RBF}}$  eindeutig bestimmt werden können, ist die Interpolante  $s_f(x)$  eindeutig. In Matrix-Schreibweise erhält man den in Gleichung (4.4) beschriebenen Zusammenhang mit

$$\begin{bmatrix} \Phi & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma_{\text{RBF}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

wobei die Matrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  definiert ist als

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi(\|\hat{x}^1 - \hat{x}^1\|) & \Phi(\|\hat{x}^1 - \hat{x}^2\|) & \dots & \Phi(\|\hat{x}^1 - \hat{x}^m\|) \\ \Phi(\|\hat{x}^2 - \hat{x}^1\|) & \Phi(\|\hat{x}^2 - \hat{x}^2\|) & \dots & \Phi(\|\hat{x}^2 - \hat{x}^m\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(\|\hat{x}^m - \hat{x}^1\|) & \Phi(\|\hat{x}^m - \hat{x}^2\|) & \dots & \Phi(\|\hat{x}^m - \hat{x}^m\|) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

und der Vektor  $P \in \mathbb{R}^m$  gegeben ist als

$$P = \left( p(\hat{x}^1) \quad p(\hat{x}^2) \quad \dots \quad p(\hat{x}^m) \right)^T. \quad (4.7)$$

Das resultierende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von  $\lambda$  und  $\gamma$

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma_{\text{RBF}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ist lösbar, wenn  $\begin{bmatrix} \Phi & P \\ P & 0 \end{bmatrix}$  invertierbar ist.

Während der Optimierung der Signalstärke des Vibrometers fließen die Messwerte  $\alpha(c)$  über die Kostenfunktion aus Gleichung (3.24) in die Bewertung des optimalen Signalpegels  $\alpha^*$  ein. Die Funktionsauswertung  $f = z(c)$  ist somit abhängig von den gewählten Koeffizienten  $c$  der Zernike-Polynome, so dass  $f(\alpha(c), \beta(c)) = z(c)$  gilt. Die schon bekannten  $\hat{F} = z(\hat{C})$  mit den zusammen gefassten Stützstellen  $\hat{X} = \hat{C} = (\hat{c}^1, \dots, \hat{c}^k)^T$  werden genutzt, um eine (Hyper-)Oberfläche im  $\mathbb{R}^n$  mittels RBF zu approximieren und anschließend wird das Minimum der (Hyper-)Oberfläche bestimmt.

## 4.1 Interpolation am Beispiel Himmelblau-Funktion

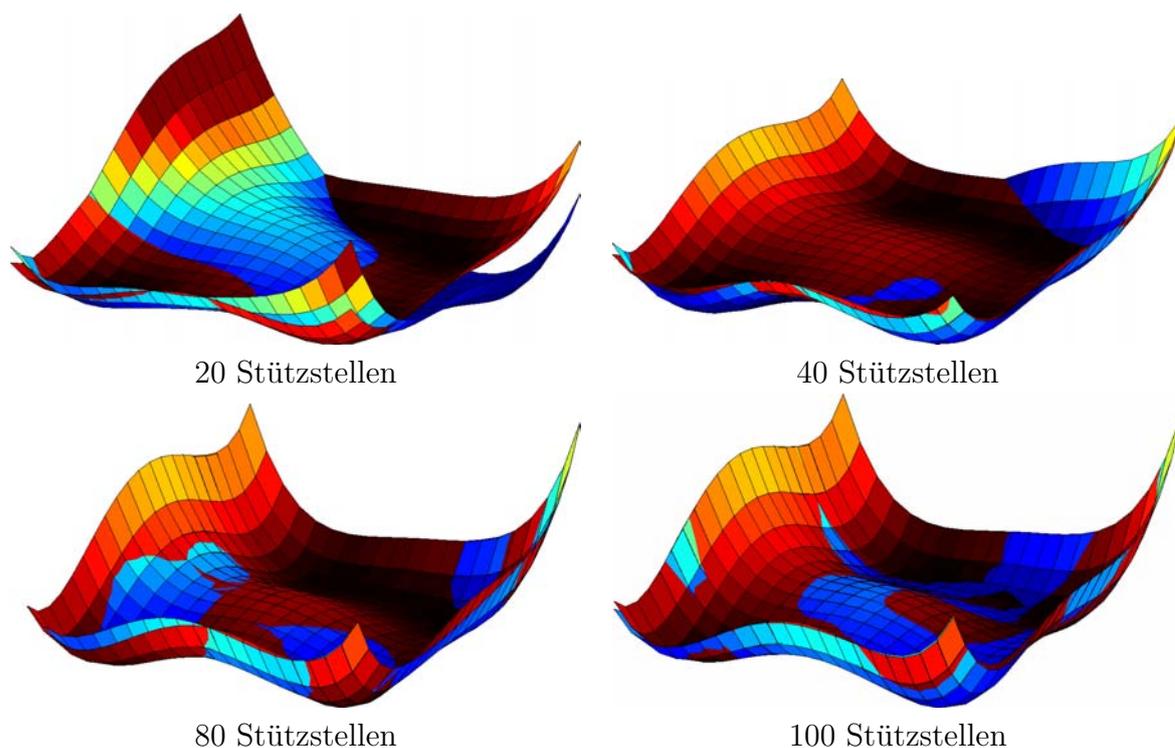
In dem folgenden Beispiel wurde die Himmelblau-Funktion, die durch

$$f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \quad (4.9)$$

gegeben ist, mit der radialen Basisfunktion und der Gleichung (4.3)

$$\Phi(\|r\|) = r^3 \quad (4.10)$$

approximiert. Dazu wurden die Parameter  $\lambda$  und  $\gamma$  über die Gleichung (4.8) bestimmt. Die Stützstellen  $\hat{X}$  wurden stochastisch gleichverteilt zufällig gewählt und die zugehörigen Funktionsevaluations  $\hat{F}$  mit der Gleichung (4.9) bestimmt. Zum Vergleich wurde eine unterschiedliche Anzahl Stützstellen erzeugt. Die Abbildungen in 4.1 zeigen die grafische Auswertung der Approximation.



**Abbildung 4.1:** Approximation der Himmelblau-Funktion mit 20 - 100 Stützstellen

Die 4 Minima der Funktion sind ab 20 Stützstellen schon sehr ausgeprägt erkennbar. Die Oberfläche mit der rötlich geprägten Farbpalette ist dabei der Verlauf der Originalfunktion, die bläuliche Oberfläche der Verlauf der Interpolante.

## 4.2 Herleitung des Gradienten und der Hesse-Matrix

Die Funktion  $s_f(x)$  auf der Basis von radialen Basispolynome soll genutzt werden, um die Zielfunktion  $f(x)$  zu approximieren und im späteren Verlauf zu minimieren. Um das Konvergenz-Verhalten in einem Optimierungsalgorithmus zu verbessern, sind Methoden 1. und 2. Ordnung besonders geeignet. Diese erfordern Informationen über Gradienten und Hesse-Matrizen. Auf Basis der in Gleichung (4.10) gegebenen Funktion wird das System approximiert.

## 4.3 Herleitung des Gradienten

Mit  $\Phi(\|x - \hat{x}^k\|) = \|x - \hat{x}^k\|^3$  gilt für die  $i$ -te Komponente des Gradienten

$$\frac{\partial s_f(x)}{\partial x_i} = \left( \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \|x - \hat{x}^k\|^3 \right) + \gamma_{\text{RBF}} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x_i}. \quad (4.11)$$

Die euklidische Norm  $\|x - \hat{x}^k\|$  in Gleichung (4.11) kann auch als

$$\|x - \hat{x}^k\| = \sqrt{(x_1 - \hat{x}_1^k)^2 + (x_2 - \hat{x}_2^k)^2 + \dots + (x_n - \hat{x}_n^k)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i^k)^2} \quad (4.12)$$

geschrieben werden. So erhält man für den Term  $\frac{\partial}{\partial x_i} \|x - \hat{x}^k\|^3$  aus Gleichung (4.11) den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \|x - \hat{x}^k\|^3 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i^k)^2} \right)^3 = 3 \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i^k)^2} \right) \cdot (x_i - \hat{x}_i^k) \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \|x - \hat{x}^k\|^3 = 3 \cdot \|x - \hat{x}^k\| \cdot (x_i - \hat{x}_i^k). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die  $i$ -te Komponente des Gradienten ergibt sich somit zu

$$\frac{\partial s_f(x)}{\partial x_i} = \left( 3 \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \|x - \hat{x}^k\| \cdot (x_i - \hat{x}_i^k) \right) + \gamma_{\text{RBF}} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x_i}. \quad (4.14)$$

Der folgende Algorithmus 4.1 beschreibt die Berechnung des Gradienten. Da die euklidische Norm der Differenz zwischen Funktionswert und Stützstelle  $\|x - \hat{x}^k\|$  nur  $k$ -mal berechnet werden muss, kann dies vorab geschehen. In diesem Zuge wird die Konstante  $3\lambda_k$  direkt in die Berechnung mit einbezogen. Der Vektor  $dx \in \mathbb{R}^n$  ist in Anlehnung an einen C++-Vektor notiert.

**Algorithmus 4.1** Berechnung des Gradienten**Eingangsdaten:**  $x, \hat{X}, \lambda$ 

```

Initialisiere  $dx[i] := \gamma \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x_i}$ 
für  $k = 1$  bis  $m$  {
  berechne  $t := 3\lambda_k \cdot \|x - \hat{x}^k\|$ 
  für  $i = 1$  bis  $n$  {
     $dx[i] = dx[i] + t \cdot (x_i - \hat{x}_i^k)$ 
  }
}

```

**Ausgangsdaten:**  $dx$ 

Der Aufwand der Initialisierung beträgt  $\propto \mathcal{O}(n)$ . Die eigentliche Berechnung hat einen Aufwand  $\propto \mathcal{O}(n \cdot m)$ . Mit  $m \gg n$  ergibt sich der Gesamtaufwand zu  $\propto \mathcal{O}(m)$  und ist somit proportional abhängig von der Anzahl der Stützstellen  $\hat{x}^k$ .

## 4.4 Herleitung der Hesse-Matrix

Für die Hesse-Matrix der Gleichung (4.3) mit  $\Phi(\|r\|) = r^3$  sei der Zusammenhang gegeben durch

$$\frac{\partial^2 s_f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial s_f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( 3 \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \|x - \hat{x}^k\| \cdot (x_i - \hat{x}_i^k) \right) + \gamma \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \right]. \quad (4.15)$$

Da  $p(x)$  linear in  $x$  ist erhält man  $\frac{\partial p(x)}{\partial x_i} := \text{const.}$  Daraus ergibt sich, dass  $\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$  gilt. Für die weitere Betrachtung ist in 2 Fälle zu unterscheiden. Zunächst sollen die Komponenten bestimmt werden, für die  $i \neq j$  gilt. Da nach  $\partial x_j$  differenziert wird, ist  $(x_i - \hat{x}_i^k)$  als Konstante anzunehmen. Für diesen Fall ist die Hesse-Matrix definiert als

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s_f(x)}{\partial x_i \partial x_j} &= 3 \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot (x_i - \hat{x}_i^k) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\|x - \hat{x}^k\|) \quad \forall i \neq j \\ &\Leftrightarrow 3 \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \frac{(x_i - \hat{x}_i^k) \cdot (x_j - \hat{x}_j^k)}{\|x - \hat{x}^k\|} \quad \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Im Fall  $i = j$  muss  $(x_i - \hat{x}_i^k)$  jedoch bei der Differenzierung gesondert betrachtet werden, da  $(x_i - \hat{x}_i^k) = (x_j - \hat{x}_j^k)$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s_f(x)}{\partial x_i \partial x_j} &= 3 \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\|x - \hat{x}^k\| \cdot (x_i - \hat{x}_i^k)) \quad \forall i = j \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 s_f(x)}{\partial x_i^2} = 3 \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \frac{(x_i - \hat{x}_i^k)^2 + \|x - \hat{x}^k\|^2}{\|x - \hat{x}^k\|} \quad \forall i = j. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die im Algorithmus genutzte Matrix  $ddx \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist in Anlehnung an den C++-Stil mit

Klammer-Operatoren notiert. Die Berechnung der Hesse-Matrix wird im folgenden Algorithmus 4.2 beschrieben. Unter Ausnutzung der Eigenschaft  $\frac{\partial^2 s_f(x)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 s_f(x)}{\partial x^2}\right)^T$  braucht der Wert  $ddx[i][j] = ddx[j][i]$  nur einmal berechnet werden. Daher läuft die zweite Schleife in Algorithmus 4.2 über alle  $n$ , die dritte Schleife jedoch nur über  $i - 1$  Elemente.

---

**Algorithmus 4.2** Berechnung der Hesse-Matrix
 

---

**Eingangsdaten:**  $x, \hat{X}, \lambda$

```

Initialisierung der Matrix  $\frac{\partial^2 s_f(x)}{\partial x_i \partial x_j} := ddx[i][j] = 0$ 
für  $k = 1$  bis  $m$  {
  berechne  $t_1 := \|x - \hat{x}^k\|$ 
  berechne  $t_2 := \frac{\lambda_k}{\|x - \hat{x}^k\|} = \frac{\lambda_k}{t_1}$ 
  für  $i = 1$  bis  $n$  {
    für  $j = 1$  bis  $i - 1$  {
       $ddx[i][j] = ddx[i][j] + t_2 \cdot (x_i - \hat{x}_i^k) \cdot (x_j - \hat{x}_j^k)$ 
      wenn  $k = m$  {
         $ddx[j][i] = ddx[i][j]$ 
      }
    }
     $ddx[i][i] = ddx[i][i] + t_2 \cdot \left((x_i - \hat{x}_i^k)^2 + t_1^2\right)$ 
  }
}

```

**Ausgangsdaten:**  $ddx$

---

Der Aufwand für die Berechnung von  $t_1$  ist  $\propto \mathcal{O}(n)$ . Da dies  $m$ -mal berechnet werden muss, ergibt sich dafür ein Aufwand von  $\propto \mathcal{O}(n \cdot m)$ . Weiterhin werden in den verschachtelten Schleifen  $\frac{n^2}{2}$  Operationen durchgeführt und haben somit einen Aufwand  $\propto \mathcal{O}(n^2)$ . Da auch dies  $m$ -mal durchgeführt wird, ergibt sich ein Gesamtaufwand von  $\propto \mathcal{O}(n \cdot m) + \mathcal{O}(m \cdot n^2)$ . Für  $m \gg n$  gilt für den ersten Term weiterhin ein abgeschätzter Aufwand von  $\propto \mathcal{O}(m)$ . Für den zweiten Term müsste gelten  $m \gg n^2$ . Aus der Anwendung ergibt sich, dass die Anzahl der Stützstellen auf  $m \leq 100$  beschränkt sind. Die Anzahl der Dimensionen  $n$  ist mit  $2 \leq n \leq 7$  festgelegt. Im Worst-Case gilt  $m \gg n^2$  nicht, so dass der Gesamtaufwand letztlich auf  $\propto \mathcal{O}(m \cdot n^2)$  abgeschätzt werden muss.

## 4.5 Gaußsche Funktion als radiale Basisfunktion

Zu Testzwecken ist ein Optimierungsalgorithmus implementiert worden, der von Hansen entwickelt und in [32] präsentiert wurde. Er nutzt Intervall-arithmetische Operatoren (beispielsweise in INTLAB [76] und filib++ implementiert [56]), um eine obere und untere Abschätzung des Funktionswerts auf einem auszuwertenden Intervall zu bestimmen. Er bedient sich der automatischen Differentiation [28], so dass Gradienten und Hesse-

Matrizen der auszuwertenden Punkte per Operatorüberladung während der Evaluierung automatisch generiert werden. Da die Intervall-arithmetische Überladung in der automatisch Differentiation für jede Stützstelle die Hesse-Matrix berechnet, führte dies bei vielen Stützstellen ( $> 50$ ) zu mehr als 100.000 arithmetischen Operationen pro Optimierung. Eine Analyse ergab, dass mindestens  $7 \cdot 7 \cdot 50 = 2450$  arithmetischen Operationen durch die Addition der einzelnen Terme in der 4.3 vorgenommen werden müssen. Bei 50 Iterationen im Optimierungsalgorithmus entspricht das insgesamt 122.500 arithmetischen Operationen. Die Bestimmung benötigte in Testläufen  $300\text{ ms}$  um ein brauchbares Minimum zu bestimmen. Deshalb wurde dieser Weg zugunsten alternativer radialer Basisfunktionen aufgegeben.

Die in Gleichung (4.10) genutzte radiale Basisfunktion (RBF) ist eine von mehreren möglichen Kandidaten für eine radiale Basisfunktion. Weitere nach [53] gebräuchliche radiale Basisfunktionen sind die in Tabelle 4.1 aufgelisteten. Die Verwendung von Gaußschen Funktionen als radiale Basisfunktion wurden zudem in [46] untersucht.

Bezeichnung	Funktion
Stückweise polynomiale Funktion	$\Phi(r) =  r ^n, n$ ungerade
Thin Plate Spline	$\Phi(c) =  r ^n \cdot \ln( r ), n$ gerade
Multiquadratische Funktion	$\Phi(c) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$
Inverse multiquadratische Funktion	$\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}}$
Inverse quadratische Funktion	$\Phi(c) = \frac{1}{1 + (\varepsilon r)^2}$
Gaußsche Funktion	$\Phi(c) = e^{-\theta r^2}$

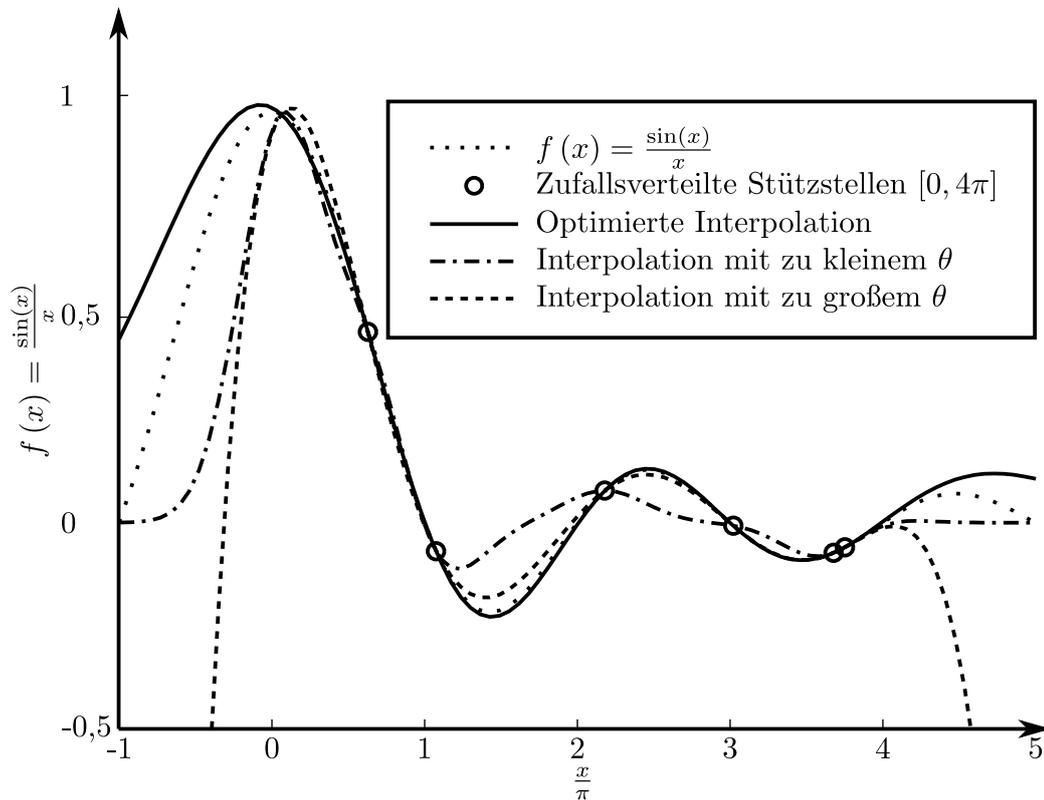
**Tabelle 4.1:** Gebräuchliche radiale Basisfunktionen, entlehnt an [53]

Im Gegensatz zur der in Gleichung (4.10) genutzten Funktion existiert für die Gaußsche Funktion nach [10] eine eindeutige Interpolation. Ferner kann mit der Maximum-Likelihood-Methode [55] der Strukturparameter  $\Theta$  optimal bestimmt werden, so dass die Interpolation auf die Oberflächengegebenheiten optimal angepasst wird.

Die Interpolation mit der gaußschen Funktion als radiale Basisfunktion und deren Optimierung wurde in [2] thematisiert. Die Ergebnisse aus [2] flossen unmittelbar in diese ein, da sie thematisch miteinander verbunden sind. Deshalb sei für weiterführende Studien, insbesondere die Herleitung des Gradienten, der Hesse-Matrix sowie der genutzten Optimierungsmethoden auf diese Arbeit verwiesen. Dennoch sollen zur Veranschaulichungen exemplarisch zwei Beispiele aus [2] im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

## 4.6 Beispiele zur Interpolation mit der Gaußschen Funktion als radiale Basisfunktion

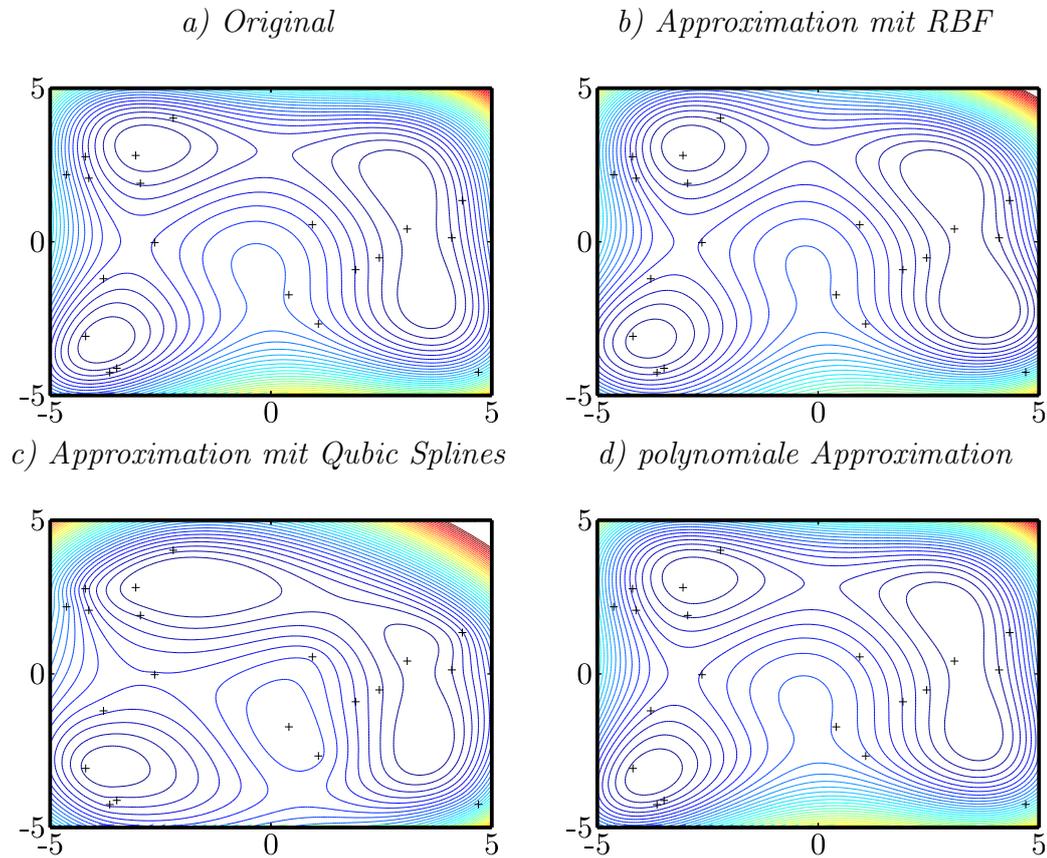
Der Strukturparameter  $\theta$  ist ein Maß für die Frequenz der Welligkeit der zu approximierenden Funktion. Betrachtet man anhand des Beispiels der in Abbildung 4.2 approximierten SI-Funktion, so ist zu erkennen, dass ein zu klein gewähltes  $\theta$  zu einer schnell auf den Mittelwert der SI-Funktion konvergierenden Interpolante führt. Hingegen, wird  $\theta$  zu groß gewählt, divergiert die Interpolante an den Rändern des betrachteten Intervalls.



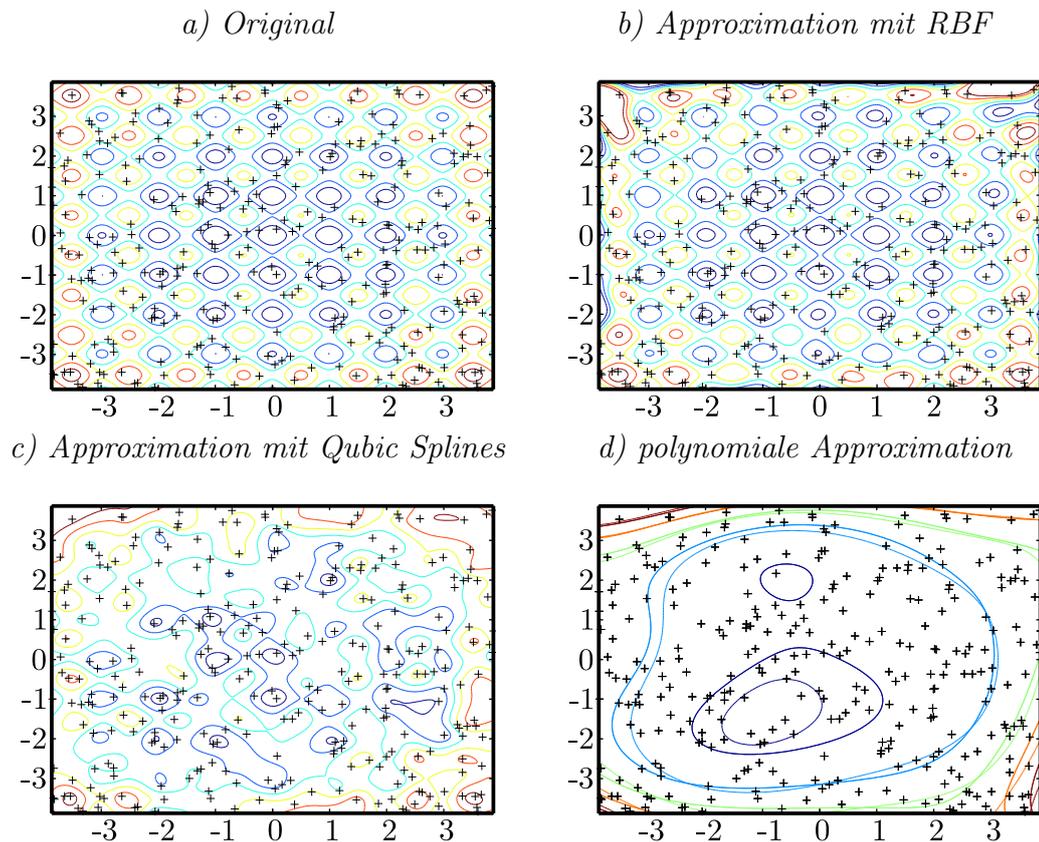
**Abbildung 4.2:** Auswirkung des Strukturparameter  $\theta$  auf die Interpolation

Dieses (Optimierungs-)Problem wird mit der Maximum-Likelihood-Methode gelöst. Eine optimale Strukturweite  $\theta$  ist eine notwendige Bedingung um hinreichend gute Resultate für das Optimum des interpolierten Modells zu erhalten. In den folgenden Abbildungen 4.3 hat wiederum die Himmelblau-Funktion als Benchmark gedient. Die zur Approximation zufällig generierten 20 Stützstellen sind jeweils mit einem Kreuz gekennzeichnet. Es wurden drei verschiedene Interpolationsmethoden verglichen. Zusätzlich ist in Abbildung 4.3a) die Originalfunktion dargestellt. Die polynomiale Approximation nutzte ein Polynom fünften Grades. Die Anzahl der Stützstellen waren in diesem Falle ausreichend, um die Originalfunktion (Polynom vierten Grades) exakt zu approximieren. Die polynomiale Approximation war somit an das Interpolationsproblem angepasst. Hingegen lieferte die Approximation Qubic Splines schlechtere Ergebnisse. Die Interpolation über die radialen Basispolyfunktionen konnte die vier Minima der Originalfunktion gut abbilden. Um die

volle Leistungsfähigkeit der Interpolation zu zeigen, bedarf es jedoch eines Beispiels mit wesentlich mehr Extrema. In den Abbildungen 4.4 wird nun die 2D-Rastrigin-Funktion (siehe Tabelle 5.3) als Benchmark genutzt. Sie verfügt durch einen trigonometrischen Term über eine Vielzahl von Minima und Maxima. Oben links ist wieder die Originalfunktion abgebildet. Rechts daneben befindet sich die Approximation mit der radiale Basisfunktion. Zur Interpolation wurden 300 Stützstellen wieder zufällig generiert. Man erkennt,

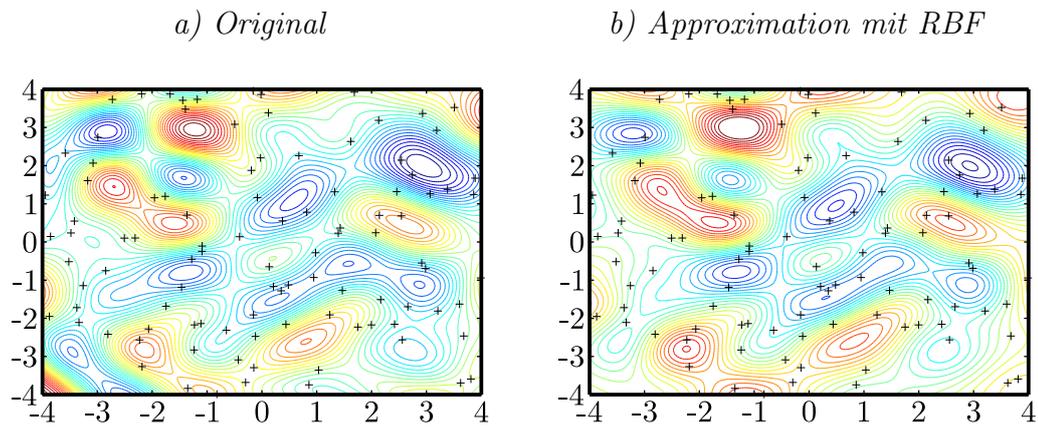


**Abbildung 4.3:** Die Himmelblau-Funktion verglichen mit verschiedenen Interpolationsmethoden, entnommen aus [2]



**Abbildung 4.4:** Die Rastrigin-Funktion verglichen mit verschiedenen Interpolationsmethoden, entnommen aus [2]

dass die Originalfunktion über RBF gut approximiert werden konnte. Nur an den Rändern des Bereichs, wo zu wenig Informationen über den Funktionsverlauf durch Stützstellen zur Verfügung gestellt wurden, kommt es zu Fehlern in der Approximation. Die polynomiale Interpolation der Stützstellen konnte die Rastrigin-Funktion gar nicht mehr approximieren. Dies ergibt sich allein schon aus der Struktur eines Polynoms vierten Grades. Dieses Ergebnis war also zu erwarten. Überraschenderweise konnte die abschnittsweise kubische Interpolation über Qubic Splines jedoch die Originalfunktion nicht in der benötigten Qualität abbilden. Abschließend soll noch ein Beispiel aus [2] diskutiert werden, welches eine Funktion mit zufällig generierter Topologie darstellt. Während die Rastrigin-Funktion durch den trigonometrischen Term noch über eine regelmäßige Topologie verfügt, ist die Topologie und somit die Struktur der Funktion in Abbildung 4.5 völlig zufällig. Durch die Optimierung des Strukturparameters  $\theta$  konnte die RBF-Interpolation auch in diesem Fall eine sehr gute Approximation der Originalfunktion zur Verfügung stellen.



**Abbildung 4.5:** Eine zufällig generierte 2D-Funktion, entnommen aus [2]

Zur Interpolation standen 100 Stützstellen mit zugehörigen Funktionswert zur Verfügung. Alle Minima und Maxima sind in der Approximation nicht nur angedeutet zu erkennen, sondern so stark ausgeprägt, dass eine Optimierung auf der Interpolante zu einem hinreichend guten Schätzwert führt, der im DIRECT-Algorithmus als zusätzlichen Kandidat für die Auswertung genutzt werden kann.

# Statische Optimierung des Signalpegels

Gegeben sei eine stetig differenzierbare, nach unten beschränkte Funktion  $f(c)$ . Die Suche nach einem Minimalwert der Funktion kann als Optimierungsaufgabe der Form

$$f^* = \min_{c \in S} f(c), \quad S \subseteq \mathbb{R}^n \quad (5.1)$$

geschrieben werden. Dabei wird  $f^*$  als Optimalwert und der zugehörige Parametersatz  $c^*$  als Lösung der Optimierung bezeichnet, so dass  $f^* = f(c^*)$  gilt. Üblicherweise kann die Optimierungsaufgabe nicht analytisch gelöst werden (z.B. nichtlineare Funktionen), so dass man auf numerische Verfahren angewiesen ist. Um diese Aufgabe numerisch zu lösen, stehen verschiedenen Algorithmen, die in diesem Zusammenhang als Optimierer bezeichnet werden, zur Verfügung. Diese werden über verschiedene Kriterien klassifiziert. Tabelle 5.1 stellt eine Übersicht über die wichtigsten Optimierer dar, ist jedoch keineswegs als vollständig zu betrachten. Das Verfahren zur Signalpegeloptimierung führt zu einem nichtlinearen Optimierungsproblem, welches deterministisch (in fest vorgegebener Zeit bzw. mit fest vorgegebener Anzahl Iteration) gelöst werden muss. Es wird nach einem Parametersatz  $\hat{c}$  gesucht, der das Problem hinreichend gut löst. Die hinreichende Bedingung dafür ist über den Signalpegel  $\alpha(\hat{c})$  abzuleiten, der einen bestimmten Schwellwert  $\alpha_{\min}$  überschreiten soll. Es soll somit

$$\alpha(\hat{c}) > \alpha_{\min} \quad (5.2)$$

gelten. Des Weiteren stehen keine mathematischen Modelle zur Verfügung, die das System analytisch beschreiben würden. Dies führt zu einem ableitungsfreien, sample-basierten Optimierer, der in einem Suchgebiet  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  global optimiert. Da das Konvergenzver-

Algorithmus	nichtlinear	global/lokal	determ.	ableitungsfrei
Genetic optimization	✓	global	<b>X</b>	✓
Simulated annealing	✓	global	<b>X</b>	✓
Lipschitz	✓	global	✓	✓
DIRECT	✓	global	✓	✓
Innere-Punkt-Methoden	<b>X</b>	global	✓	✓
Subgradienten (konvex)	<b>X</b>	lokal	✓	<b>X</b>
konjugierte Gradienten	<b>X</b>	lokal	✓	<b>X</b>
Nelder-Mead	✓	lokal	✓	✓
Abstiegsverfahren	✓	lokal	✓	<b>X</b>
Trust-Region-Verfahren	✓	lokal	✓	<b>X</b>
Intervall-Verfahren	✓	global	✓	<b>X</b>

*Tabelle 5.1: Übersicht der Optimierer*

halten des DIRECT<sup>1</sup>-Algorithmus erheblich besser als des Lipschitz-Optimierers ist, fiel letztendlich die Wahl auf diesen.

## 5.1 Pareto-Optimierung

Die Anforderungen, die in dieser Arbeit an die Position des Messspots gestellt werden, erfordern eine optimale Abwägung von Signalgüte zu Signalstärke. Diese Aufgabe kann von einer Pareto-Optimierung gelöst werden. Allgemein kann eine prozentuale Gewichtung zwischen zwei Optimierungszielen über

$$z(c, \gamma) = \alpha(c) \cdot \gamma + \beta(c) \cdot (1 - \gamma), \quad c \in S \subseteq \mathbb{R}^n \quad (5.3)$$

beschrieben werden. Dabei soll sowohl nach  $\alpha(c)$  als auch nach  $\beta(c)$  optimiert werden. Über den Faktor  $\gamma \in [0, 1]$  wird festgelegt, wie stark die beiden Funktion  $\alpha(c)$  und  $\beta(c)$  gewichtet werden sollen. Im Gegensatz zu einer allgemeinen Pareto-Optimierung wird in dieser Arbeit ein optimales  $\gamma$  experimentell ermittelt und bei den weiteren Optimierungsläufen als konstant angenommen. Abhängig von der späteren Applikation muss dieses  $\gamma$  in einer Kalibrierung einmalig bestimmt werden.

## 5.2 Zugehörige Minimierungsaufgabe

Die Optimierung erfolgt über die Gütefunktion aus Gleichung (3.24), die schon in der in Gleichung (5.3) vorgegebenen Form vorliegt. Die resultierende Optimierungsaufgabe ist nun gegeben als

$$c^* = \arg \min_{c \in S, \gamma \in [0, 1]} \{z(c, \gamma)\}, \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>Dividing **RECT**angles

und liefert den optimalen Parametersatz  $c^*$ , dass das Argument des Minimum  $z^*$  der Kostenfunktion  $z(c^*, \gamma)$ ,  $\gamma \in [0, 1]$  darstellt.

### 5.3 Angepasster DIRECT-Algorithmus

Der DIRECT-Algorithmus ist ein globaler Optimierungsalgorithmus, der ohne jegliche Information über die zu optimierende Zielfunktion auskommt. Er wurde von Jones, Pertunen und Stuckman entwickelt, in [45] vorgestellt und zählt zu den sample-basierten Optimierungsalgorithmen. Im Gegensatz zu stochastischen Verfahren, wie zum Beispiel die Monte-Carlo-Methode [7], wird das Minimum heuristisch bestimmt. Voraussetzung ist lediglich, dass die zu optimierende Zielfunktion Lipschitz-stetig ist. Dies ist in den überwiegenden Fällen technischer Anwendungen gegeben, auch wenn für diese keine geschlossenen mathematischen Systembeschreibungen existieren. Der DIRECT-Algorithmus ist eine Weiterentwicklung der Lipschitz-Optimierung die im Shubert-Algorithmus [79] implementiert wurde. Um den DIRECT-Algorithmus verstehen zu können, folgt im nächsten Abschnitt eine kurze Einführung in den Shubert-Algorithmus.

### 5.4 Shubert-Algorithmus

Gegeben sei die Minimierungsaufgabe aus Gleichung (5.4) mit  $c \in S = [\underline{c}, \bar{c}] \subseteq \mathbb{R}$  und  $\gamma$  konstant. Weiterhin sei angenommen, dass  $z(c, \gamma = \text{const.}) := z(c)$  Lipschitz-stetig ist. Dann kann eine Lipschitz-Konstante

$$K_L \geq \max \left\{ \left| \frac{z(c) - z(c')}{c - c'} \right| \right\}, \forall c, c' \in [\underline{c}, \bar{c}] \quad (5.5)$$

definiert werden. Alle kontinuierlichen, zweifach stetigen und differenzierbaren Funktionen  $z(c)$ , für die  $\sup \left\{ \left| \frac{dz(c)}{dc} \right| \right\}$  existiert, erfüllen die Gleichung (5.5) und werden Lipschitz-kontinuierlich genannt. Die Konstante  $K_L$  aus Gleichung (5.5) definiert dann die größte absolute Steigung zwischen zwei beliebigen Punkten auf dem Intervall  $[\underline{c}, \bar{c}]$ . Mit dieser Konstante kann über zwei lineare Ungleichungen

$$z(c) \geq z(\underline{c}) - K_L \cdot (c - \underline{c}), \quad (5.6)$$

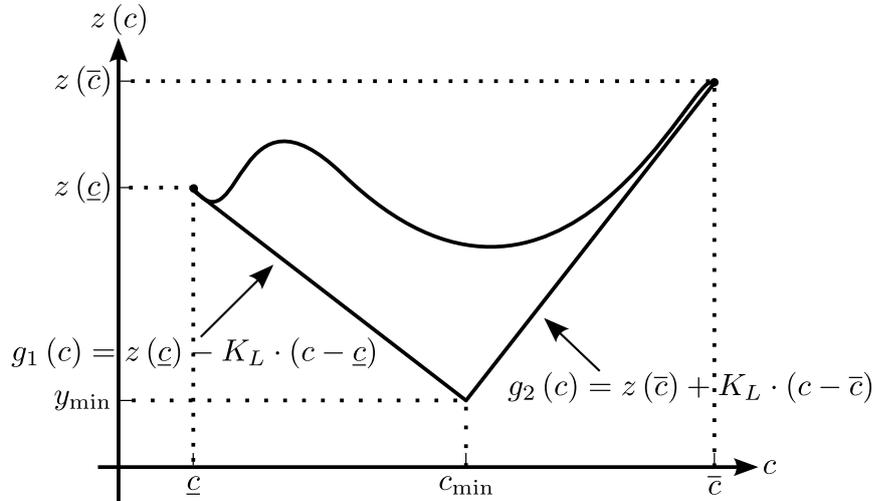
$$z(c) \geq z(\bar{c}) + K_L \cdot (c - \bar{c}) \quad (5.7)$$

eine untere Schranke  $c_{\min}$  für  $z(c)$  definiert werden. Für das Minimum  $c^*$  ist sie durch den Schnittpunkt der Gleichungen (5.6) und (5.7) gegeben als

$$c_{\min} = \frac{\bar{c} + \underline{c}}{2} + \frac{z(\underline{c}) - z(\bar{c})}{2 \cdot K_L}, \quad (5.8)$$

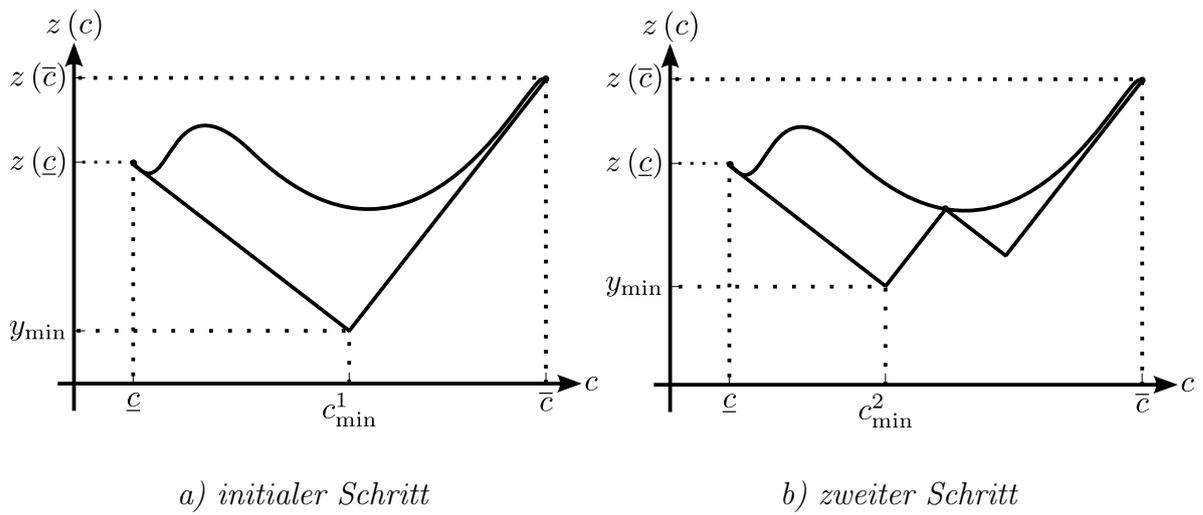
$$y_{\min} = K_L \cdot \frac{\underline{c} + \bar{c}}{2} + \frac{z(\bar{c}) + z(\underline{c})}{2}. \quad (5.9)$$

Abbildung 5.1 zeigt ein Beispiel für den initialen Schritt des Shubert-Algorithmus.



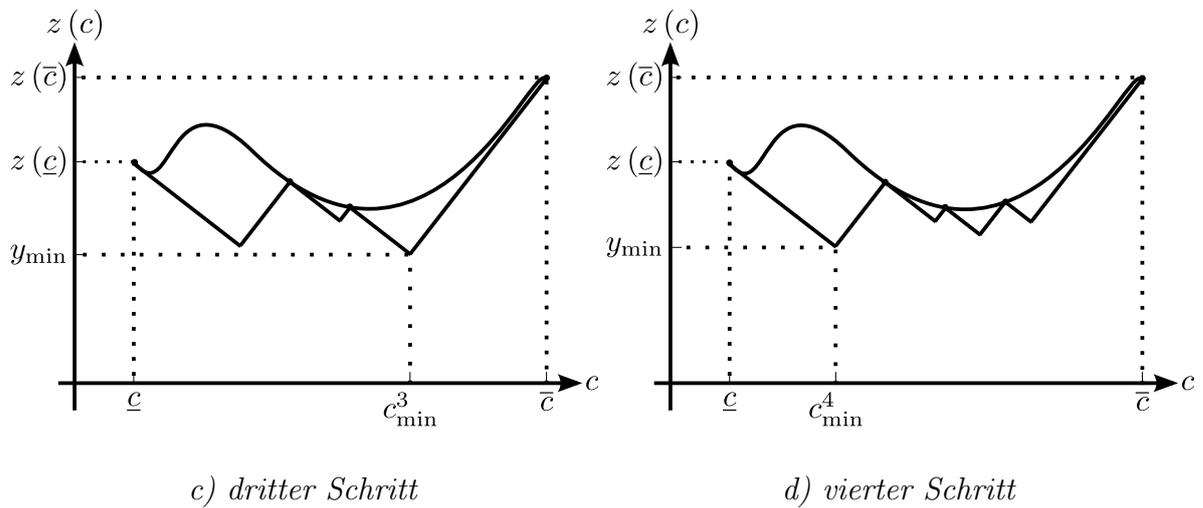
**Abbildung 5.1:** Initialer Schritt des Shubert-Algorithmus

Im Verlauf des Algorithmus wird das anfängliche Suchgebiet  $S = [\underline{c}, \bar{c}]$  in mehrere Teilgebiete  $\Omega^i = [\underline{c}^i, \bar{c}^i]$  mit  $i \in [1, \dots, m]$  und  $\bigcup_{i=1}^m \Omega^i = S$  aufgeteilt, die in einer Liste  $\mathcal{L} = \{(y_{\min}^0, [\underline{c}^0, \bar{c}^0]), \dots, (y_{\min}^m, [\underline{c}^m, \bar{c}^m])\}$  abgespeichert werden. Dazu wird das Intervall mit dem kleinsten  $y_{\min}$  aus  $\mathcal{L}$  entnommen und im Minimum  $c_{\min}^i$  geteilt, so dass  $[\underline{c}^i, \bar{c}^i] = [\underline{c}^i, c_{\min}^i] \cup [c_{\min}^i, \bar{c}^i]$  gilt. Um die Ungleichungen für die neuen Intervalle aufstellen zu können, muss wiederum der Punkt  $z(c_{\min}^i)$  evaluiert werden. Jetzt kann eine untere Schranke  $y_{\min}$  für jedes der neuen Intervalle bestimmt und die neuen Intervalle nach  $y_{\min}$  mit  $y_{\min}^0 \leq y_{\min}^1 \leq \dots \leq y_{\min}^m$  aufsteigend sortiert in  $\mathcal{L}$  eingefügt werden. Die globale untere Schranke ist dann gegeben durch das erste Listenelement  $\underline{y} = y_{\min}^0$  aus der Liste  $\mathcal{L}$  und liefert den Schätzwert  $\hat{z} = \underline{y}$  zu  $z^*$ . Die obere Schranke  $\bar{y}$  wird im ersten Schritt mit  $\bar{y} = \max\{z(\underline{c}), z(\bar{c})\}$  initialisiert und in jeder Iteration mit  $\bar{y} = \max\{z(c_{\min}^i), \bar{y}\}$  aktualisiert. Diese Schritte werden solange wiederholt, bis ein vorher definiertes Abbruchkriterium erfüllt wurde.



**Abbildung 5.2:** Shubert-Algorithmus, Schritt 1 - 2

Die Abbildungen 5.2 und 5.3 verdeutlicht die ersten vier Schritte des Shubert-Algorithmus.



**Abbildung 5.3:** Shubert-Algorithmus, Schritt 3 - 4

**Algorithmus 5.1** Shubert-Algorithmus**Eingangsdaten:**  $K_L, S, \varepsilon$ 

```

Evaluieren  $z_1 = z(\underline{c})$  und  $z_2 = z(\bar{c})$ 
Initialisiere  $z^0 = [z_1, z_2]$ 
Berechne  $c_{\min} = \frac{\bar{c} + \underline{c}}{2} + \frac{z(\underline{c}) - z(\bar{c})}{2 \cdot K_L}$   \\ \text{siehe Gleichung (5.8)}
Berechne  $y_{\min}^0 = K_L \cdot \frac{\bar{c} + \underline{c}}{2} + \frac{z_1 + z_2}{2}$   \\ \text{siehe Gleichung (5.9)}
Initialisiere  $\bar{y} = \min\{z_1, z_2\}$ 
Initialisiere  $\underline{y} = y_{\min}$ 
Initialisiere  $\mathcal{L} = \{(y_{\min}, S, z)\} = \{(y_{\min}^0, c, z^0)\} = \{l^0\}$ 
solange  $\bar{y} - \underline{y} > \varepsilon$  {
    entnehme erstes Element  $l = l^0$  aus  $\mathcal{L}$ 
     $y_{\min}^0 = l_1^0, c^0 = l_2^0, z^0 = l_3^0$ 
     $c_{\min} = \frac{\bar{c}^0 + \underline{c}^0}{2} + \frac{z(\underline{c}^0) - z(\bar{c}^0)}{2 \cdot K_L}$ 
     $c_1 = [\underline{c}^0, c_{\min}]$ 
     $c_2 = [c_{\min}, \bar{c}^0]$ 
     $z_1 = z_1^0$  und  $z_2 = z_2^0$ 
    Evaluieren  $z_{\min}^0 = z(c_{\min})$ 
    Berechne  $y_{1,\min}^0 = K_L \cdot \frac{\underline{c}^0 + c_{\min}}{2} + \frac{z_1 + z_{\min}^0}{2}$ 
    Berechne  $y_{2,\min}^0 = K_L \cdot \frac{c_{\min} + \bar{c}^0}{2} + \frac{z_{\min}^0 + z_2}{2}$ 
    Aktualisiere obere Schranke  $\bar{y} = \min\{z_{\min}^0, \bar{y}\}$ 
    Aktualisiere untere Schranke  $\underline{y} = \max\{\underline{y}, y_{1,\min}^0, y_{2,\min}^0\}$ 
    Sortiere  $(y_{1,\min}^0, c_1, [z_1, z_{\min}^0])$  und  $(y_{2,\min}^0, c_2, [z_{\min}^0, z_2])$  in Liste  $\mathcal{L}$  ein
    Entferne alle Elemente aus  $\mathcal{L}$  für die  $y_{\min}^i > \bar{y}$  gilt
}

```

**Ausgangsdaten:**  $\underline{y}, \bar{y}, \mathcal{L}$ 

Der Pseudo-Code in Algorithmus 5.1 implementiert den nach Shubert benannten Lipschitz-Optimierer. In der letzten Code-Zeile werden alle Elemente aus der Liste entfernt für deren untere Abschätzung  $y_{\min}^i > \bar{y}$  gilt. Eine Abschätzung  $y_{\max}$  (hier nicht implementiert) kann analog zu Gleichung (5.9) berechnet werden, so dass weitere Listenelemente aus der Liste entfernt und nicht weiter betrachtet werden müssten. Wie schon in [24, 45] analysiert weist der Shubert-Algorithmus drei Nachteile auf. Erstens muss die zu optimierende Zielfunktion bekannt sein. Weiterhin konvergiert der Algorithmus für sehr große Lipschitz-Konstanten extrem langsam. Zudem werden in  $n$  Dimensionen  $2^n$  Funktionsauswertungen pro Suchschritt benötigt. Diese Probleme werden im DIRECT-Algorithmus weitestgehend gelöst.

## 5.5 DIRECT-Algorithmus

Da der DIRECT-Algorithmus in mehreren Publikationen ausführlich beschrieben worden ist, soll in den folgenden Abschnitten der Algorithmus für Zielfunktionen  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beispielhaft gezeigt werden. Für weiterführende Studien sei auf [24, 45] verwiesen. Es sei

$\gamma$  konstant, so dass wieder  $z(c, \gamma = \text{const.}) = z(c)$  gilt. Darüber hinaus ist  $c \in S = [\underline{c}, \bar{c}] \subseteq \mathbb{R}$ .

## 5.6 Verschiebung der Evaluationspunkte

Die Heuristik des Shubert-Algorithmus aus dem voran gegangenen Abschnitt 5.4 wird derart verändert, dass die Funktionsevaluationen von  $z(\underline{c})$  und  $z(\bar{c})$  am Rand des Suchgebiets  $S = [\underline{c}, \bar{c}]$  ersetzt werden. An ihrer Stelle wird nun eine Evaluation  $z(\check{c})$  in der Mitte des Suchgebiets

$$\check{c} = \frac{\bar{c} + \underline{c}}{2} \quad (5.10)$$

vorgenommen und so die Anzahl der Evaluierungen reduziert. Durch die Verschiebung des aktuell auszuwertenden Punktes in die Mitte des Intervalls müssen die Gleichung (5.6) und Gleichung (5.7) angepasst werden. Die Lipschitz-Konstante  $K_L$  wird dabei noch als bekannt angenommen. Mit den Ungleichungen

$$z(c) \geq z(\check{c}) - K_L \cdot (c - \check{c}), \quad \forall c \in [\check{c}, \bar{c}] \quad (5.11)$$

$$z(c) \geq z(\check{c}) + K_L \cdot (c - \check{c}), \quad \forall c \in [\underline{c}, \check{c}] \quad (5.12)$$

kann wieder eine untere Abschätzung  $\hat{z}_{\text{DIR}} = y_{\text{min}}$  des Minimums  $z^*$  für  $z(c)$  auf dem Intervall  $S = [\underline{c}, \bar{c}]$  definiert werden. Die Abschätzung erfolgt am Rand des Intervalls über die Gleichung

$$y_{\text{min}} = z(\check{c}) - K_L \cdot \frac{\bar{c} - \underline{c}}{2}. \quad (5.13)$$

Abbildung 5.4 verdeutlicht die Änderungen, die sich durch Verschiebung der Funktionsauswertung am Rand in die Mitte des Intervalls ergeben.

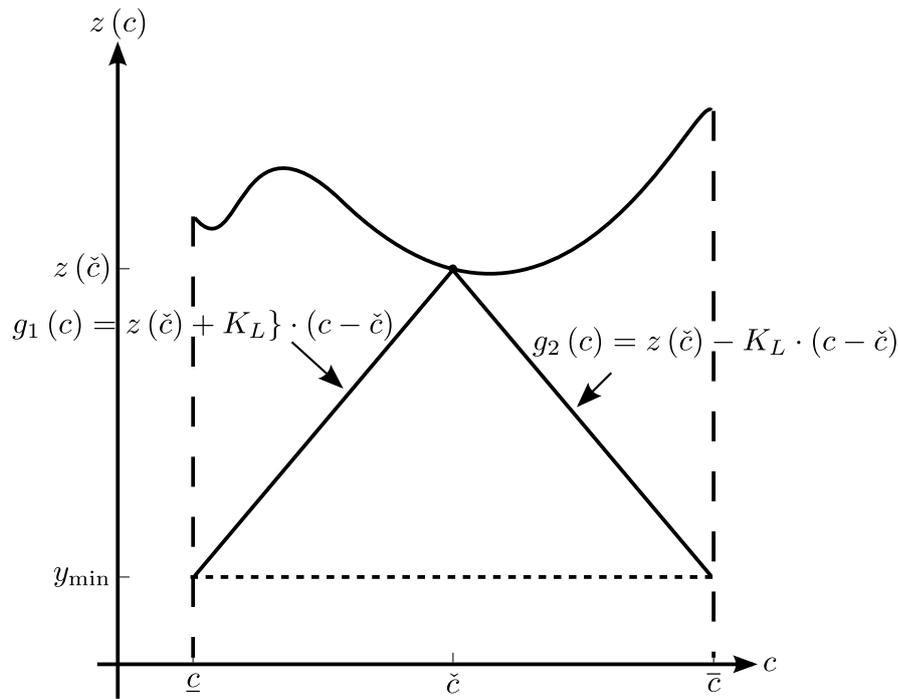


Abbildung 5.4: Initialer Schritt des DIRECT-Algorithmus

## 5.7 Drittelung der Suchintervalle

Durch die Verschiebung der Funktionsauswertung in den Mittelpunkt bietet sich nun eine Heuristik an, die das Suchintervall  $[\underline{c}, \bar{c}]$  drittelt, so dass

$$[\underline{c}, \bar{c}] = \left[ \underline{c}, \frac{2\underline{c} + \bar{c}}{3} \right] \cup \left[ \frac{2\underline{c} + \bar{c}}{3}, \frac{2\bar{c} + \underline{c}}{3} \right] \cup \left[ \frac{2\bar{c} + \underline{c}}{3}, \bar{c} \right] \quad (5.14)$$

gilt. Da gemäß Gleichung (5.14) das mittlere Intervall schon im Mittelpunkt evaluiert ist, muss nur noch die Auswertung im Mittelpunkt der beiden neuen Teilintervall durchgeführt werden. Ausblickend auf den  $\mathbb{R}^n$  müssen für einen Iterationsschritt daher nur noch  $2n$  Funktionsauswertungen vorgenommen werden, um den nächsten Schätzwert  $\hat{z}_{\text{DIR}}$  für das Minimum  $z^*$  zu bestimmen. Abbildung 5.5 zeigt den Algorithmus nach diesem Schritt. Der nächste Kandidat zur Teilung ist das Intervall mit dem niedrigsten  $y_{\text{min}}$ . Dies ist in Abbildung 5.5 das mittlere Intervall.

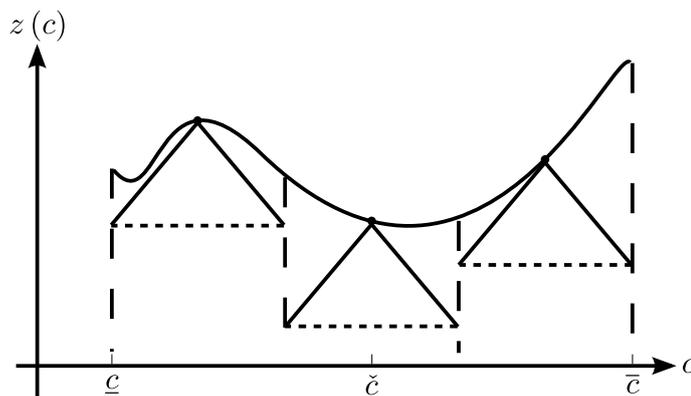


Abbildung 5.5: 1D-DIRECT nach einer Teilung

Jedoch wird jetzt ein Algorithmus benötigt, der die nächsten optimalen Kandidaten zur Drittelung in kleinere Intervalle bestimmt. Eine adäquate Heuristik wurde wiederum in [45] präsentiert.

Für die folgenden Betrachtungen wird angenommen, dass das Start-Intervall (auch als Suchgebiet bezeichnet)  $S = [\underline{c}, \bar{c}]$  mehrfach in  $m \in \mathbb{N}_+$  Subintervalle  $\Omega^i = [\underline{c}^i, \bar{c}^i]$ ,  $i \in [1, \dots, m]$  aufgeteilt und die Subintervalle im zugehörigen Mittelpunkt  $\tilde{c}^i$  ausgewertet wurden. In Abbildung 5.6 wird eine Momentaufnahme nach drei Teilungen gezeigt.

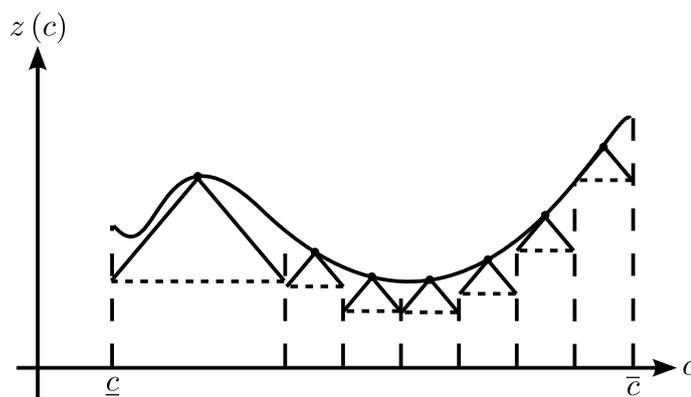
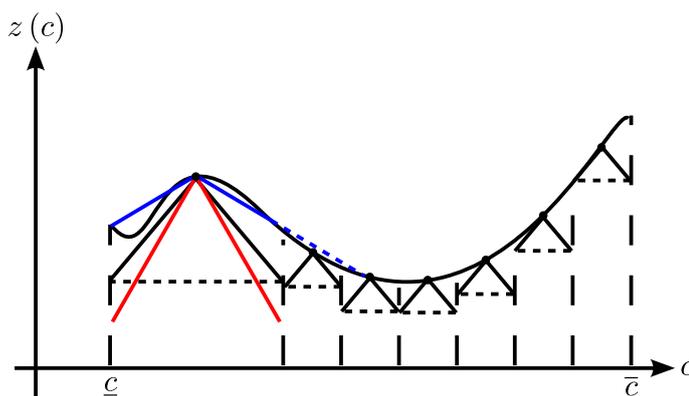


Abbildung 5.6: 1D-DIRECT nach drei Teilungen

## 5.8 Suchschritt: Ermittlung potentiell optimaler Kandidaten

Um ein Kriterium für die nächsten zu untersuchenden Kandidaten herzuleiten, werden die Mittelpunkte verschoben, so dass sie eine halbe Intervallbreite von der Ordinate entfernt sind. Dies hat den Vorteil, dass die zugehörigen  $y_{\min}^i$  direkt an der Achse abgelesen werden können. Im nächsten Schritt wird die Abhängigkeit von  $K_L$  eliminiert, indem das  $K_L$  generisch aus den Messwerten ermittelt wird. Nimmt man nun die Momentaufnahme nach drei Teilungen, so ergibt sich genau ein generisches  $K_L$ . Zunächst werden dem Graph in Abbildung 5.6 vier mögliche Geraden (rot und blau) hinzugefügt, die die Gleichungen

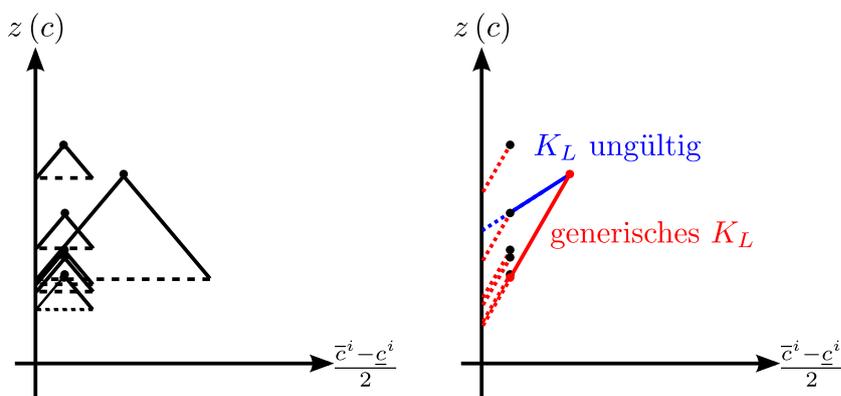
$g_1(c) = z(\check{c}^1) + K_L \cdot (c - \check{c}^1)$  und  $g_2(c) = z(\check{c}^1) - K_L \cdot (c - \check{c}^1)$  mit unterschiedlichen  $K_L$  repräsentieren.



**Abbildung 5.7:** Beispiel für die Erfüllung der Ungleichungen (5.11) und (5.12)

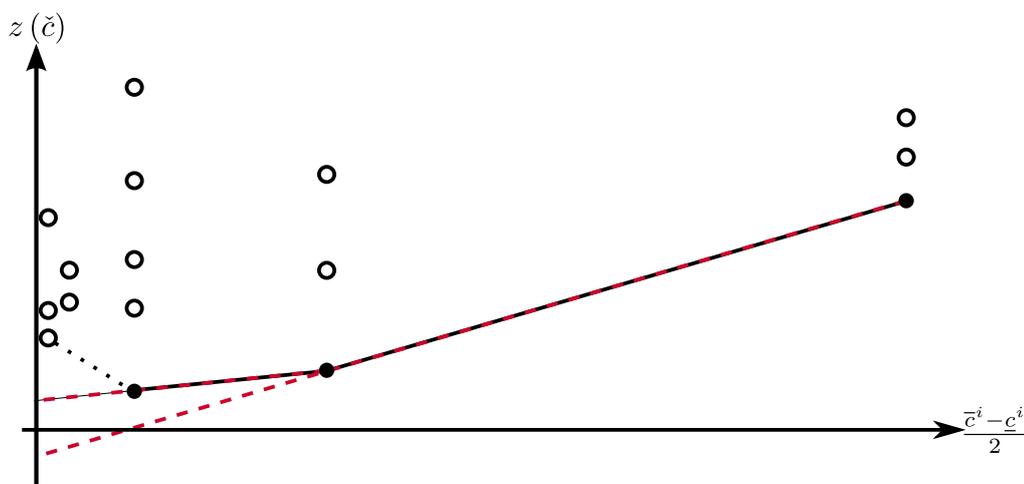
An den blauen Geraden ist zu erkennen, dass die Steigung  $K_L$  der Bedingung in Gleichung (5.5) nicht genügt, da nicht alle Punkte der Teilkurve im betrachteten Intervall über diesen Geraden liegen. Das gewählte  $K_L$  ist somit keine gültige Lipschitz-Konstante. Insbesondere ist zu erkennen, dass bei Verlängerung der blauen Gerade (gestrichelt) noch nicht einmal alle ausgewerteten Mittelpunkte der Sub-Intervalle  $\Omega_i$  oberhalb dieser liegen. Dies muss jedoch durch die Lipschitz-Bedingung aus der Ungleichung (5.5) sichergestellt sein. Daraus lässt sich ableiten, dass alle ausgewerteten Mittelpunkte über oder auf einer Geraden mit einer geeigneten Steigung  $K_L$  liegen müssen. Die Steigungen der roten Geraden hingegen nutzen eine gültige Konstante  $K_L$  für die Funktion  $z(c)$ . Die schwarzen Geraden nutzen weiterhin ein analytisch bestimmtes  $K_L$ .

Abbildung 5.8 zeigt grafisch, wie dieses  $K_L$  ermittelt werden kann. Die Mittelpunkte der Sub-Intervalle  $\Omega_i$  sind jetzt mit einem Abstand von einer halben Intervallbreite zur Ordinate hin verschoben. Die Darstellung wird auch als Transformationsgraf bezeichnet. Betrachtet man alle möglichen Geraden zwischen zwei beliebigen Punkten, so können die Punkte nur in einem Fall (rote Gerade) über oder auf einer entsprechenden Geraden platziert werden.



**Abbildung 5.8:** Verschiebung der Intervalle zur Ordinate

Erhöht sich die Anzahl der Iterationen und somit die Anzahl der ausgewerteten Punkte, stehen mehrere Kandidaten zur Auswahl zur Verfügung. Bei genauerer Analyse bilden diese Kandidaten eine untere konvexe Hülle mit positiver Steigung und erfüllen die Bedingungen aus den Ungleichungen (5.11) und (5.12). Im Transformationsgraf in Abbildung 5.9 wird gezeigt, wie eine konvexe Hülle nach mehreren Iterationsschritten aussehen könnte. Dort sieht man, dass mehrere generische  $K_L$  in Frage kommen können (rot gestrichelte Linien). Alle Intervalle  $\Omega^i$ , deren Funktionsauswertung am Mittelpunkt  $z(\check{c}^i)$  auf der unteren konvexen Hülle liegen und Anfangs- oder Endpunkt einer Geraden mit positiver Steigung darstellen, liefern mit dem zugehörigen  $K_L$  nach Gleichung (5.13) jeweils eine gültige untere Abschätzung  $y_{\min}$  für das Minimum  $z^*$ . Sie sind somit potentiell optimale Kandidaten (POK) für den nächsten Iterationsschritt.



**Abbildung 5.9:** Konvexe Hülle nach mehreren Iterationsschritten

Der Zusammenhang von  $K_{L_{jk}}$  für das Intervall-Paar  $(\Omega^j, \Omega^k)$ ,  $j, k \in [1, \dots, m]$  kann somit mathematisch mit

$$K_{L_{jk}} = 2 \cdot \frac{z(\check{c}^j) - z(\check{c}^k)}{(\bar{c}^j - \underline{c}^j) - (\bar{c}^k - \underline{c}^k)} \quad (5.15)$$

formuliert werden. Ein Intervall  $z(\check{c}^j)$  ist genau dann ein potentiell optimaler Kandidat, wenn eine zugehörige Steigung  $K_{L_{jk}}$  existiert, so dass

$$z(\check{c}^j) - K_{L_{jk}} \cdot \check{c}^j \leq z(\check{c}^i) - K_{L_{jk}} \cdot \check{c}^i \quad (5.16)$$

mit  $i, j, k = 1, \dots, m$  gilt. Aus Gleichung (5.16) ist der Algorithmus 5.2 zur Bestimmung der potentiellen Kandidaten ableitbar. Ein Iterationsschritt beinhaltet dann die Untersuchung aller Kandidaten, die die Ungleichung (5.16) erfüllen. Die nun zu untersuchenden Subintervalle werden sukzessive analog zu Gleichung (5.14) geteilt. Da das Auffinden der potentiell optimalen Kandidaten auf der Untersuchung einer konvexen Hülle basiert, bietet es sich an, die Intervalle in einer speziellen Datenstruktur zu speichern. Dazu werden die Sub-Intervalle  $\Omega^i = c^i$  mit der zugehörigen Funktionsauswertung  $z(\check{c}^i)$  in einem Tupel

$(z(\check{c}^i), c^i)$  zusammen gefasst und der Intervallgröße

$$\sigma_i = \frac{\bar{c}^i - \underline{c}^i}{2} \quad (5.17)$$

nach sortiert. Nach mehreren Iterationsschritten existieren verschiedene Intervalle die gleiche Intervallgröße  $\sigma_i$  besitzen. Diese werden nach dem Funktionswert  $z(\check{c}^i)$  in eine aufsteigend sortierte Liste  $\mathcal{L}_{\sigma_i}$  einsortiert. Die Listeneinträge in  $\mathcal{L}_\sigma$  zeigen wiederum auf die Listen  $\mathcal{L}_{\sigma_i}$ , wobei diese nach der Intervallgröße  $\sigma_i$  aufsteigend sortiert ist. Abbildung 5.10 zeigt ein Beispiel für eine solche Listenstruktur.

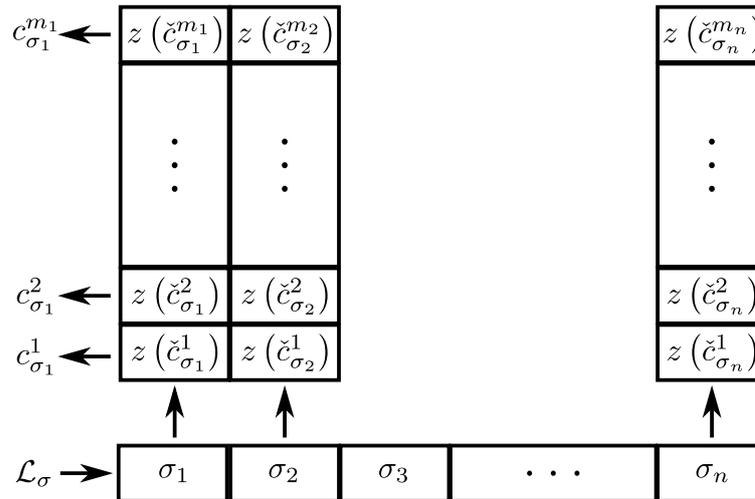


Abbildung 5.10: DIRECT-Datenstruktur

Die Indizes in Abbildung 5.10 sind nun wie folgt zu interpretieren. Es existieren  $i = 1, \dots, n$  unterschiedliche Intervallgrößen. Das Intervall  $c_{\sigma_i}^{j_i}$  befindet sich in der Liste in der alle Intervalle die Intervallgröße  $\sigma_i$  aufweisen, wobei  $j_i = 1, \dots, m_i$  gilt und die Liste also  $m_i$  Elemente besitzt. Da in diesen Listen nach  $z(\check{c}_{\sigma_i}^{j_i})$  aufsteigend sortiert wurde und  $z(\check{c}_{\sigma_i}^1)$  das Element mit dem kleinsten Funktionswert darstellt, werden für die konvexe Hülle nur die ersten Elemente jeder  $z(\check{c}_{\sigma_i}^{j_i})$ -sortierten Liste benötigt. Ab jetzt wird angenommen, dass das  $K_L$  nicht mehr bekannt ist. Es wird somit keine analytische Beschreibung der Funktion  $z(c)$  mehr benötigt. Ohne ein bekanntes  $K_L$  kann aber keine untere Abschätzung  $y_{\min}$  mehr bestimmt werden. Die Lösung  $c^*$  wird daher im DIRECT-Algorithmus mit dem Minimum

$$\hat{c}_{\text{DIR}} = \arg \min \{z(\check{c}_{\sigma_i}^{j_i})\} \quad (5.18)$$

der bis dahin evaluierten Stellen geschätzt. Die geschätzte Lösung  $\hat{c}_{\text{DIR}}$  und der zugehörige Funktionswert  $\hat{z}_{\text{DIR}} = z(\hat{c}_{\text{DIR}})$  werden in jedem Iterationsschritt aktualisiert. Für  $i \rightarrow \infty$  konvergiert der DIRECT-Algorithmus nach [45] aufgrund der Heuristik gegen die gesuchte Lösung. Der Konvergenzbeweis kann in der angegebenen Literaturstelle nachvollzogen werden.

**Algorithmus 5.2** Bestimmung potentiell optimaler Kandidaten (POK)**Eingangsdaten:** Listen  $\mathcal{L}_{\sigma_i}$ 

```

Initialisiere  $\mathcal{L}_{\text{tmp}} = \mathcal{L}_{PO} = \emptyset$ ,  $p = 2$ , aktuelle Steigung  $S = +\infty$ 
Entnehme alle ersten Elemente  $(z(c_{\sigma_i}^1), c_{\sigma_i}^1)$  aus  $\mathcal{L}_{\sigma_i}$  und speichere sie in
 $\mathcal{L}_{\text{tmp}}$  als  $(z(c_i^1), c_i^1)$ 
Entnehme erstes Element  $(z(c_1^1), c_1^1)$  aus  $\mathcal{L}_{\sigma}$ , setze  $l = (z(c_1^1), c_1^1)$ 
für  $j = 2$  bis  $m$  {
   $S = +\infty$ 
  für  $k = p$  bis  $m$  {
    entnehme nächstes Element  $r = (z(c_k^1), c_k^1)$  aus  $\mathcal{L}$ 
    und berechne die Steigung zwischen  $l$  und  $r$ 
    mit  $S_{lr} = \frac{z(c_k^1) - z(c_{k-1}^1)}{\sigma_k - \sigma_{k-1}}$ 
    wenn  $S_{lr} \leq 0$  {
       $l = r$ ,  $p = p + 1$ , unterbreche Schleife
    }
    sonst {
      wenn  $S_{lr} < S$  {
         $S =$ 
 $S_{lr}$ ,  $r$  ist nächstes Element auf konvexer Hülle  $e_{kh} = r$ 
      }
    }
  }
  wenn  $0 < S < +\infty$  {
    füge  $l$  zu Liste  $\mathcal{L}_{PO}$  hinzu
    setze  $l = e_{kh}$  und  $p = p + 1$ 
  }
}
Füge letztes Element  $(z(c_{\sigma_m}^1), c_{\sigma_m}^1)$  zu  $\mathcal{L}_{PO}$  hinzu.

```

**Ausgangsdaten:** Liste  $\mathcal{L}_{PO}$ 

## 5.9 Abbruchkriterium

Um den DIRECT-Algorithmus nach endlicher Zeit zu beenden, sind ein oder mehrere Abbruchkriterien notwendig. Da es sich um ein Sample-basiertes Verfahren handelt können Abbruchkriterien die auf Gradienten beruhen nicht genutzt werden. Deshalb erscheint es sinnvoll, den Algorithmus zum Beispiel nach einer bestimmten Anzahl Iterationen oder nach einer festgelegten Anzahl an Funktionsauswertungen abzurechnen. Zusätzlich wurde ein Abbruchkriterium eingeführt, welches den gemessenen Signalpegel  $l_{\text{cur}}$  berücksichtigt, indem er mit einem Mindest-Signalpegel  $l_{\text{min}}$  verglichen wird. Die Abbruchkriterien können alle miteinander nicht ausschließend disjunkt kombiniert werden. In der folgenden Tabelle 5.2 werden einige Abbruchkriterien vorgestellt.

Kriterium	Beschreibung
$n = n_{\max}$	Algorithmus hat die max. Anzahl Iterationen erreicht.
$s = s_{\max}$	Algorithmus hat die max. Anzahl Funktionsauswertungen erreicht.
$ \hat{c}_{\text{DIR,cur}} - \hat{c}_{\text{DIR,pre}}  < \varepsilon_c$	Der Abstand zwischen dem aktuellen und dem vorherigen Parametersatz unterschreitet den Schwellwert $\varepsilon_c$ .
$ \hat{z}_{\text{DIR,cur}} - \hat{z}_{\text{DIR,pre}}  < \varepsilon_z$	Die absolute Differenz der Funktionswerte des vorherigen und des aktuellen Minimums unterschreiten den Schwellwert $\varepsilon_z$ .
$l_{\text{cur}} > l_{\min} \wedge l_{\text{cur}} = \alpha(\hat{c}_{\text{DIR,cur}})$	Der Mindest-Signalpegel wurde mit den eingestellten Zernike-Koeffizienten $\hat{c}_{\text{DIR,cur}}$ erreicht.

**Tabelle 5.2:** Abbruchkriterien

Das letzte Abbruchkriterium kann so modifiziert werden, dass noch eine festgelegte Anzahl an Iterationen folgen, um einen möglichen guten Abstieg in ein Minimum weiter zu verfolgen.

## 5.10 Erweiterung auf den $\mathbb{R}^n$

Da die zu untersuchenden Funktion  $z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  abbildet, muss die Strategie der Teilung erweitert werden. Der Transformationsgraf wird dazu derart modifiziert, dass nicht mehr die halbe Intervallbreite  $\sigma_i$  aufgetragen wird, sondern einen Parameter, der die Größe des  $n$ -dimensionalen Intervalls widerspiegelt. Dies kann beispielsweise der Radius des betrachteten Intervalls sein. Die genutzte Listenstruktur, die Suche nach potentiell optimalen Kandidaten, etc. sind schon in diesem Kapitel beschrieben, so dass ein Verweis auf entsprechende Literatur genügen soll. Eine gute Übersicht ist dazu in [24, 36, 45] zu finden.

## 5.11 Der Algorithmus im Überblick

Nach Beendigung liefert der DIRECT-Algorithmus eine Schätzung  $\hat{c}_{\text{DIR}}$  zur Lösung  $c^*$  mit dem zugehörigen Funktionswert  $\hat{z}_{\text{DIR}}$ . Zuletzt soll der Such- und Evaluationsschritt des Algorithmus nochmal als UML-Aktivitätsdiagramm 5.11 dargestellt werden. Diese Darstellung wird später aufgegriffen, um den Suchschritt mit einer Heuristik zu erweitern, die auf der Optimierung radialer Basisfunktionen basiert.

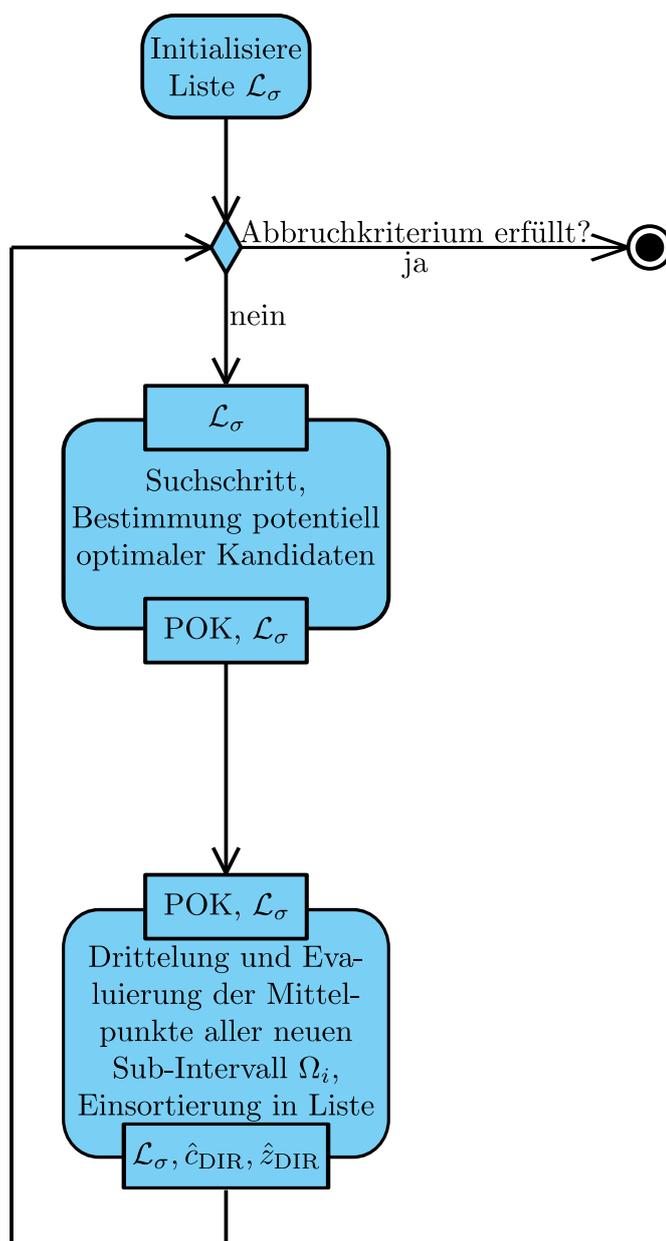


Abbildung 5.11: UML-Aktivitätsdiagramm DIRECT-Algorithmus

## 5.12 Hybrider DIRECT-Algorithmus

Aus der Systemanalyse des Vibrometers ergeben sich sofort einige physikalische Begrenzungen, die Latenzzeiten im System generieren. Dazu zählt in erster Linie der Spatial-Light-Modulator (SLM), da dieser eine feste Refresh-Rate besitzt. So kann zum Beispiel das SLM der Firma Hamamatsu nur mit einer Frequenz von 60 Hz zwischen zwei Bildern umschalten. Des weiteren entstehen durch die Auswerteelektronik zusätzliche Totzeiten im System. Die kumulierte Latenzzeit ist experimentell ermittelt worden (siehe Kapitel 6) und liegt bei dem untersuchten Gerät mit Hamamatsu-SLM bei  $t \approx 86 \text{ ms}$ .

Um den Algorithmus zu beschleunigen, kann die Totzeit zur Aufbereitung der schon vorhandenen Stützstellen genutzt werden. Dazu wird aus den Stützstellen eine Interpolante über die Gleichung (4.3) berechnet. Die Interpolation erfolgt über die in Kapitel 4 eingeführte Approximation mithilfe von radialen Basispolynome. Ein geeigneter Optimierer ermittelt eine Schätzung  $\hat{c}_{\text{RBF}}$ , die als „potentiell optimaler Kandidat“ (POK) in den Suchschritt des DIRECT-Algorithmus einfließt. Da der neue POK im gesamten Suchgebiet  $S$  disloziert sein kann, er jedoch einem bestimmten Intervall zugeordnet werden muss, muss die Datenstruktur an die neuen Bedingungen angepasst werden.

### 5.13 Anpassung der Datenstruktur

Die Zielfunktion  $z(c, \gamma)$  wird durch die Interpolante  $s_z(c, \gamma)$  über die in Kapitel 4 vorgestellten radialen Basisfunktionen approximiert. Wie schon in Kapitel 4 beschrieben, werden die ausgewerteten Stützstellen  $z(\check{c}_{\sigma_i}^{m_i})$  in einem Vektor  $\hat{Z}$  und die Punkte  $\check{c}_{\sigma_i}^{m_i}$  zu einem Vektor  $\hat{C}$  mit  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m_i$  zusammen gefasst. Sie dienen als Eingangsdaten  $\hat{X} = \hat{C}$  und  $\hat{F} = \hat{Z}$  für die Berechnung der Interpolationskoeffizienten  $\lambda, \gamma_{\text{RBF}}$ , die mit dem LGS aus Gleichung 4.8 bestimmt werden. Die Optimierungsaufgabe

$$\hat{c}_{\text{RBF}} = \arg \min_{c \in S} (s_z(c, \gamma)) \quad (5.19)$$

liefert dann eine Schätzung  $\hat{c}_{\text{RBF}}$  für die Lösung  $c^*$  (siehe Gleichung 5.4) mit dem geschätzten Optimalwert  $\hat{s}_z$ . Als nächste Fragestellung muss geklärt werden, in welchem Subintervall sich die gefundene Lösung befindet. Die in Abbildung 5.10 gezeigte Datenstruktur muss dazu angepasst werden, da sich das gesuchte Intervall mitten in den Listen (siehe Abbildung 5.12) befinden kann. Bei einer linearen Suche ist der Aufwand mit  $\mathcal{O}(n)$  zu beziffern. Durch geschickte Wahl der Datenstruktur kann der Aufwand jedoch auf  $\mathcal{O}(\log(n))$  reduziert werden.

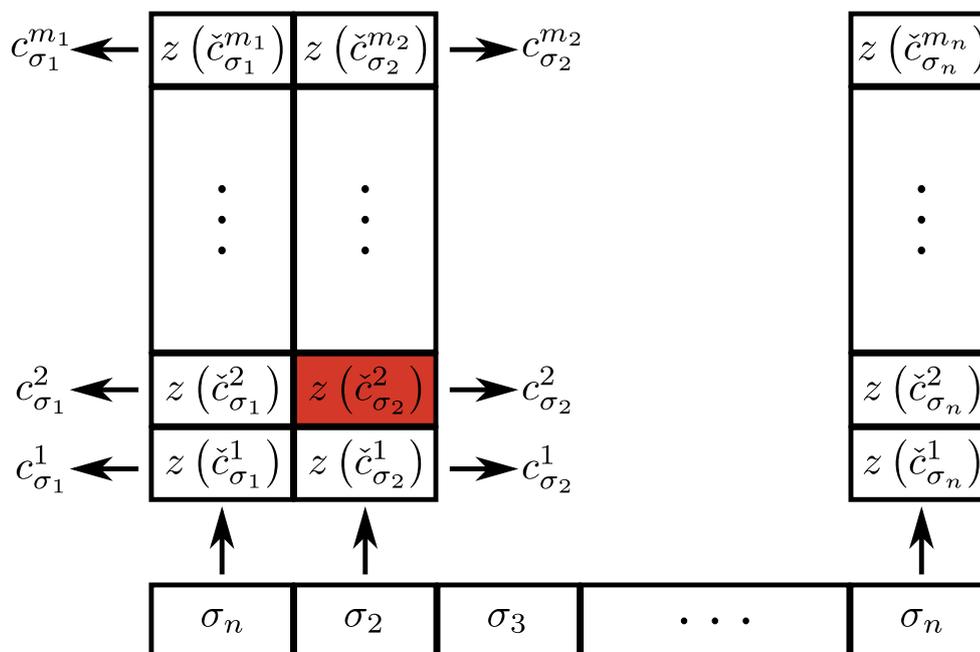


Abbildung 5.12: Element mitten in Liste gesucht

Die Protokollierung der Teilungsoperation in einem speziellen Suchbaum führt zu einer solchen Reduktion des Suchaufwands. Dazu wird zunächst in Abbildung 5.13 die Teilungsoperation betrachtet. Der Suchbaum muss bei einer Drittelung (Teilungsoperation, Branch-Schritt) somit drei Blätter pro Knoten besitzen. Der Knoten verfügt dann über die Information, wo sich welches Teilintervall befindet, so dass beginnend vom Wurzelknoten die Teilungsoperation sukzessive zurück verfolgt werden können. Die Blätter zeigen auf das eigentliche Element in der doppelt sortierten Liste, so dass ein direkter Zugriff auf das Listenelement über den Suchbaum erfolgen kann. Softwaretechnisch sind Blätter spezialisierte Knoten, die auf keine Knoten mehr zeigen und Informationen über das gesuchte Element enthalten.

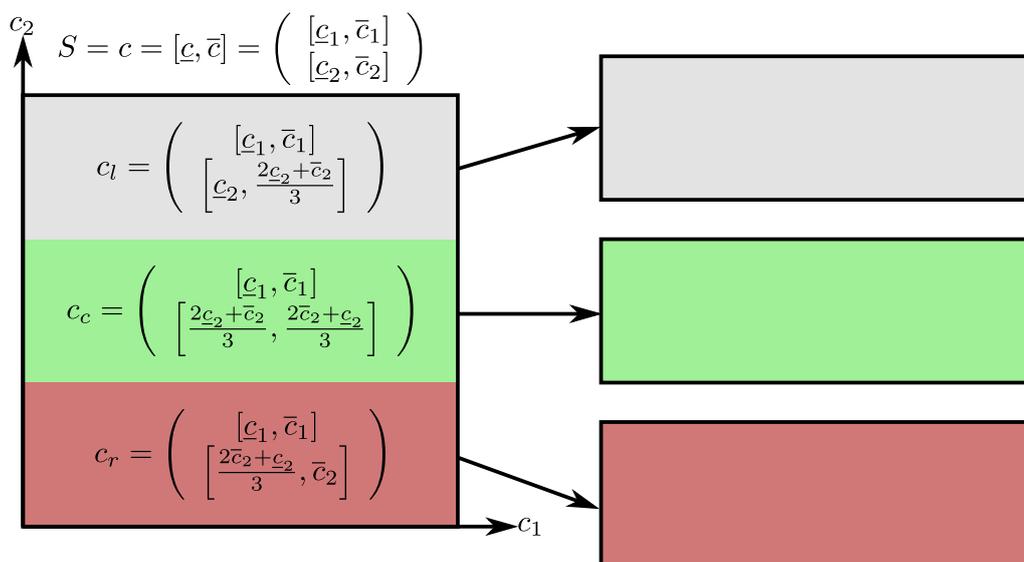
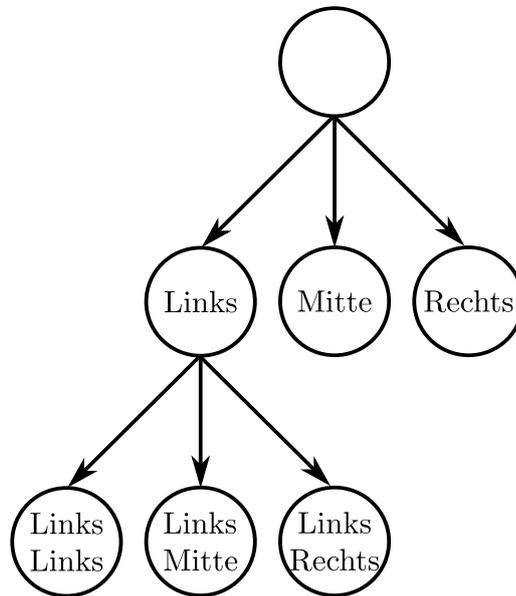


Abbildung 5.13: Drittelung eines Intervalls in 2D

Da der DIRECT-Algorithmus in seinem Suchschritt mit Hilfe der konvexen Hülle große Gebiete berücksichtigt, ist ein Suchbaum zu erwarten, der weitestgehend ausbalanciert ist. Somit erlangt man einen Suchaufwand von  $\propto \mathcal{O}(\log_3(n))$ . Abbildung 5.14 stellt einen Suchbaum mit einer maximalen Baumtiefe von 2 dar.



**Abbildung 5.14:** Suchbaum für adaptierte Suche

Die Teilgebiete können über einen solchen Baum unmittelbar mit einem Blatt des Baumes assoziiert werden, so dass eine direkte Verbindung zu diesem Suchgebiet über einen Zeiger im Blatt realisiert werden kann. Abbildung 5.15 zeigt den Zusammenhang zwischen verlinkten Blättern und den zugehörigen Teilgebieten. Dazu sind zur Vereinfachung die ausgewerteten Funktionswerte  $z(\tilde{c}_{\sigma_i}^{m_i})$  und der dazu gehörige Parametersatz  $\tilde{c}_{\sigma_i}^{m_i}$  als Zwei-Tupel  $(z(\tilde{c}_{\sigma_i}^{m_i}), \tilde{c}_{\sigma_i}^{m_i})$  zusammen gefasst.

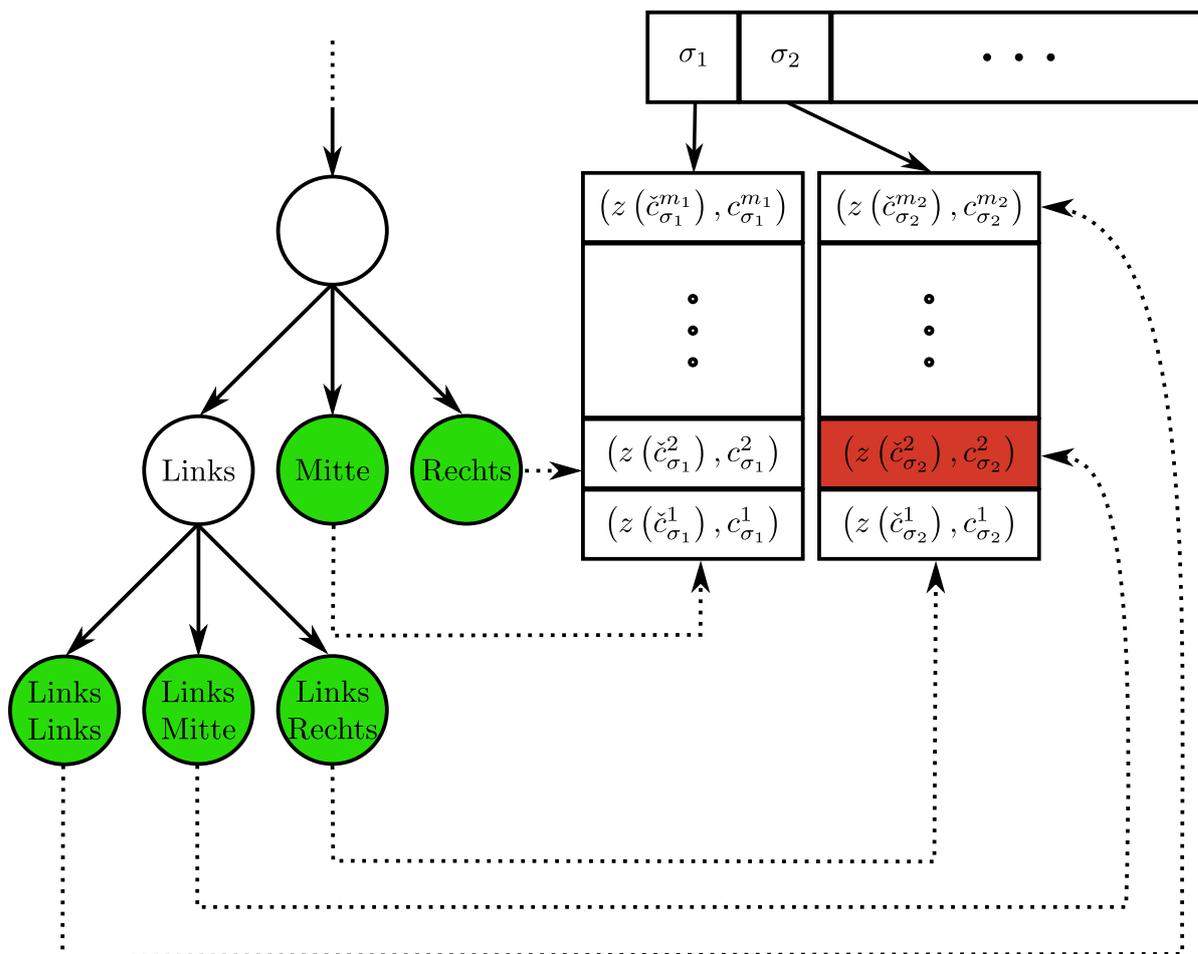


Abbildung 5.15: Suchbaum mit zugehörigen Listenelementen

## 5.14 Such-Algorithmus

Die auf dem Suchgebiet  $S$  durchgeführte Optimierung des DIRECT-Algorithmus nutzt Listenelemente  $(z(\check{c}_{\sigma_i}^{m_i}), \check{c}_{\sigma_i}^{m_i})$ , die in der C++-Klasse „DirData“ gespeichert werden. Diese Klasse kann über Vererbung mit einer weiteren Schnittstelle (Interface) versehen werden. Abbildung 5.16 zeigt das UML-Klassendiagramm der realisierten Schnittstelle. Wird eine Teilungsoperation durchgeführt, wird dies der Schnittstelle gemeldet und der Suchbaum aktualisiert. Die Knoten des Suchbaums werden mit  $k$  notiert.

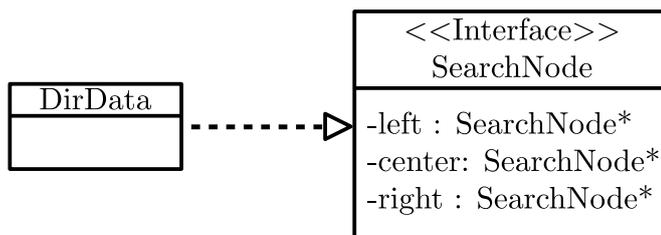


Abbildung 5.16: Interface: SearchNode

Nachfolgende Knoten eines Knoten  $k$  werden über  $k^{\text{left}}$ ,  $k^{\text{center}}$  und  $k^{\text{right}}$  notiert. Der Wurzelknoten wird mit  $k_{\text{root}}$  bezeichnet. Der adaptierte Suchalgorithmus ist im folgenden Algorithmus 5.3 formuliert und liefert das Blatt des Suchbaums (und somit das Intervall), in dem sich die nach (5.19) geschätzte Lösung  $\hat{c}_{\text{RBF}}$  befindet.

---

**Algorithmus 5.3** Adaptierte Suche
 

---

**Eingangsdaten:**  $k_{\text{root}}$ ,  $\hat{c}_{\text{RBF}}$ 

```

aktueller Knoten  $k_{\text{cur}} := k_{\text{root}}$ 
 $c_{\text{in\_Suchgebiet}} := \text{false}$ 
wenn gesuchter Punkt  $\hat{c}_{\text{RBF}}$  im Suchgebiet  $S$  {
   $c_{\text{in\_Suchgebiet}} := \text{true}$ 
  solange  $k_{\text{cur}}$  kein Blatt {
    wenn  $\hat{c}_{\text{RBF}} \in k_{\text{cur}}^{\text{left}}$  {
       $k_{\text{cur}} := k_{\text{cur}}^{\text{left}}$ 
    }
    sonst {
      wenn  $\hat{c}_{\text{RBF}} \in k_{\text{cur}}^{\text{center}}$  {
         $k_{\text{cur}} := k_{\text{cur}}^{\text{center}}$ 
      }
      sonst {
         $k_{\text{cur}} := k_{\text{cur}}^{\text{right}}$ 
      }
    }
  }
}

```

**Ausgangsdaten:**  $k_{\text{cur}}$ ,  $c_{\text{in\_Suchgebiet}}$ 


---

## 5.15 Adaptierter Such-Schritt im DIRECT

Der in Algorithmus 5.3 vorgestellte Suchschritt soll um eine Heuristik erweitert werden, die einen weiteren potentiell optimalen Kandidaten auf Basis der radialen Basisfunktion ermittelt und diesen in den Evaluierungsschritt (siehe Abbildung 5.11) einfließen lässt. Dazu wird aus den bekannten Stützstelle  $\hat{C}$  und den zugehörigen Funktionsauswertungen  $\hat{Z}$  die Interpolation für  $s_z(c)$  berechnet und das Minimum dieser Interpolanten bestimmt. Befindet sich das Ergebnis der Minimierung  $\hat{c}_{\text{RBF}}$  innerhalb des Suchgebiets  $S$ , so wird das zugehörige Sub-Intervall  $\tilde{\Omega} \subseteq S$  in den DIRECT-Listen mit Algorithmus 5.3 gesucht und im Evaluierungsschritt gedrittelt. Ist ein  $\tilde{\Omega}$  gefunden, müssen noch die Lösungen des DIRECT-Algorithmus und der Optimierung aus den RBF abgeglichen werden. Wenn für das Minimum der Interpolation  $\hat{s}_z < \hat{z}_{\text{DIR}}$  gilt, so wird der Funktionswert  $z(\hat{c}_{\text{RBF}})$  über eine Messung bestimmt. Ist auch der reale Messwert  $z(\hat{c}_{\text{RBF}}) < \hat{z}_{\text{DIR}}$ , wird diese Lösung als neues Minimum angenommen, so dass die Lösung des hybriden DIRECT-Algorithmus mit  $\hat{z}_{\text{HDIR}} = z(\hat{c}_{\text{RBF}})$  und  $\hat{c}_{\text{HDIR}} = \hat{c}_{\text{RBF}}$  gegeben ist. Ansonsten gilt  $\hat{z}_{\text{HDIR}} = \hat{z}_{\text{DIR}}$  und  $\hat{c}_{\text{HDIR}} = \hat{c}_{\text{DIR}}$ . Abbildung 5.17 zeigt die Erweiterung der Such-Heuristik.

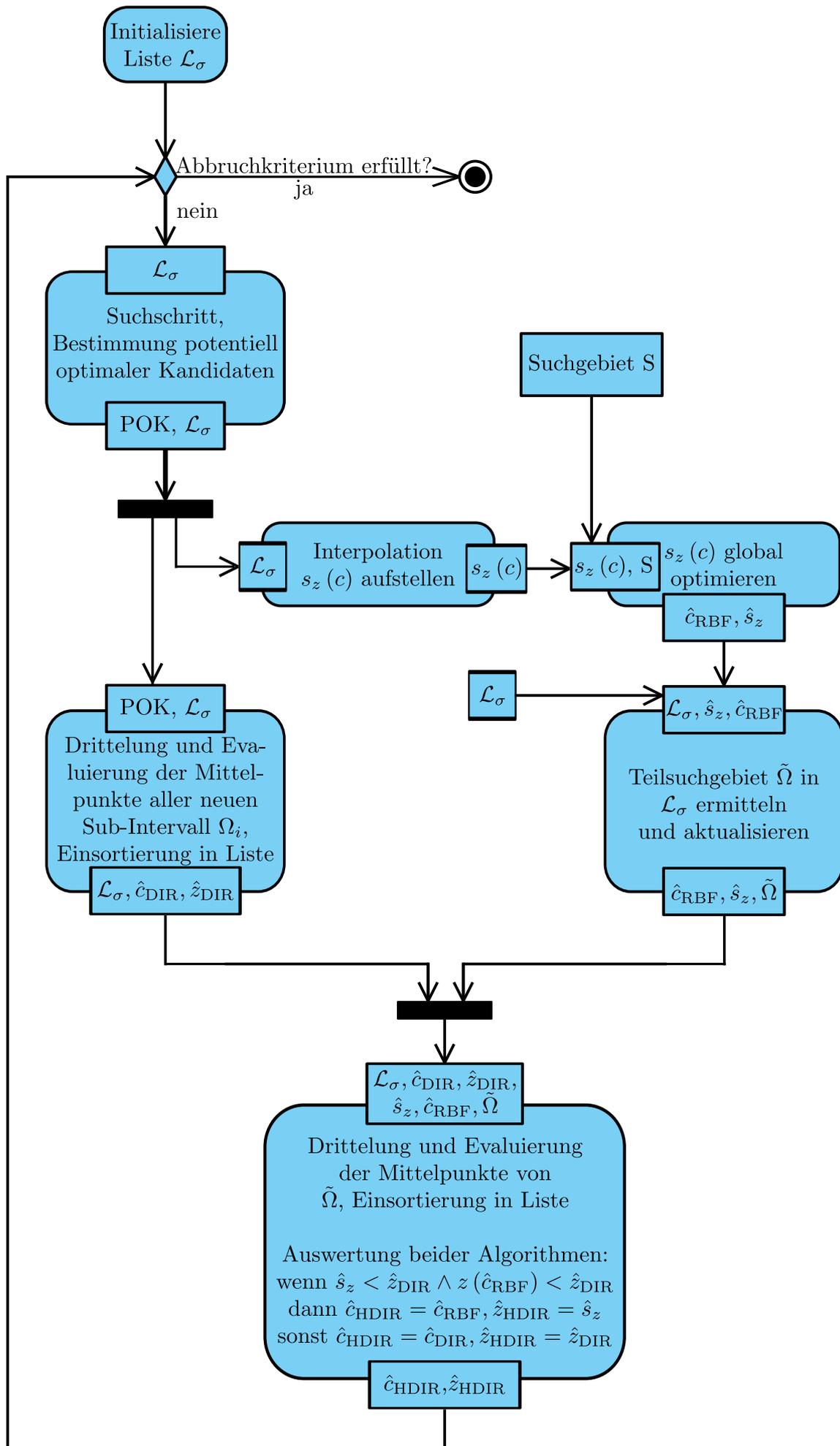


Abbildung 5.17: UML-Aktivitätsdiagramm hybrid DIRECT

## 5.16 Optimierung mit einem Gradientenverfahren

Im voran gegangenen Abschnitt wurde nur die Einbindung der Optimierungsergebnisse aus Gleichung (5.19) diskutiert. Die hohe Anzahl an Optimierungsvariablen (aktuell maximal sieben) stellt besondere Ansprüche an den Optimierer, weil eine Lösung nach circa 50 ms vorliegen muss. Da die Funktion  $z(c)$  durch  $s_z(c)$  approximiert ist und  $s_z(c)$  analytisch vorliegt, können Optimierungsverfahren zur Lösung genutzt werden, die Gradienten-Informationen ausnutzen (siehe Tabelle 5.1). Dadurch reduziert sich die Laufzeit bei der Bestimmung des Minimums von  $s_z(c)$ . Allgemein wird ein Punkt  $c^*$  als stationärer Punkt genau dann bezeichnet, wenn

$$g(c^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(c^*) = 0 \quad (5.20)$$

gilt. Dies wird als notwendiges Kriterium für ein Extremum bezeichnet. Da die Gleichung (5.20) im Allgemeinen ein nichtlineares Gleichungssystem darstellt, ist dies analytisch meist nicht lösbar, so dass auf numerische Methoden, wie zum Beispiel das Filter-Trust-Region-Verfahren [48], ausgewichen werden muss. Solche Verfahren benötigen neben dem Gradienten unter Umständen noch die Hesse-Matrix. Mit dem Gradienten eines beliebigen Punktes  $\tilde{c}$  kann eine Abstiegsrichtung  $\eta$  definiert werden, die in Abstiegsverfahren [23] oder dem Trust-Region-Verfahren [48] benötigt wird. Weiterhin können in Intervallarithmetischen Verfahren [32] Teilgebiete  $\Omega^i \subseteq S$  aus dem Suchgebiet  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ausgeschlossen werden, wenn die notwendige Bedingung nicht mehr erfüllt wird. Die Wahl und Implementierung eines geeigneten schnell konvergierenden Verfahrens ist somit maßgeblich für die Laufzeit des gesamten Algorithmus. Dazu wurden in [2] Untersuchungen hinsichtlich der Konvergenz und Laufzeitverbesserung durchgeführt. Die Ergebnisse werden in Abschnitt 5.18 vorgestellt.

## 5.17 Optimierung mit Methoden zweiter Ordnung

Nicht nur Gradienten-Informationen können genutzt werden, um das Laufzeitverhalten zu verbessern. Die Hesse-Matrix

$$H(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(c) \quad (5.21)$$

von  $f(c)$  (entspricht der Jacobi-Matrix von  $g(c)$ ) kann zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung

$$H(c^*) > 0 \quad (5.22)$$

für das Vorliegen eines Minimums bei  $c^*$  genutzt werden. Weiterhin wird die Hesse-Matrix beispielsweise im Newton-Verfahren [23] benötigt, um die notwendige Bedingung aus Gleichung (5.20) numerisch zu lösen. Das Newton-Verfahren für Funktionen  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist

definiert als

$$c_{k+1} = N_g(c_k) = c_k - (H(c_k))^{-1} g(c_k). \quad (5.23)$$

Dabei ist  $c_n$  die  $k$ -te Näherungslösung für  $c^*$ . Als Startlösung wird ein  $c_0$  benötigt, welches das Minimum hinreichend gut approximiert. Das Iterationsverfahren konvergiert dabei im optimalen Fall asymptotisch mit quadratischer Ordnung. Für quadratische Funktionen wird das Minimum sogar in einem Schritt erreicht. Es ist häufig Bestandteil von nichtlinearen Optimierern, da Funktionsverläufe in der Nähe des Minimums gut durch quadratische Funktionen approximiert werden können. Abbildung 5.18 zeigt mit zwei Iterationsschritten exemplarisch die Anwendung des Newton-Verfahrens.

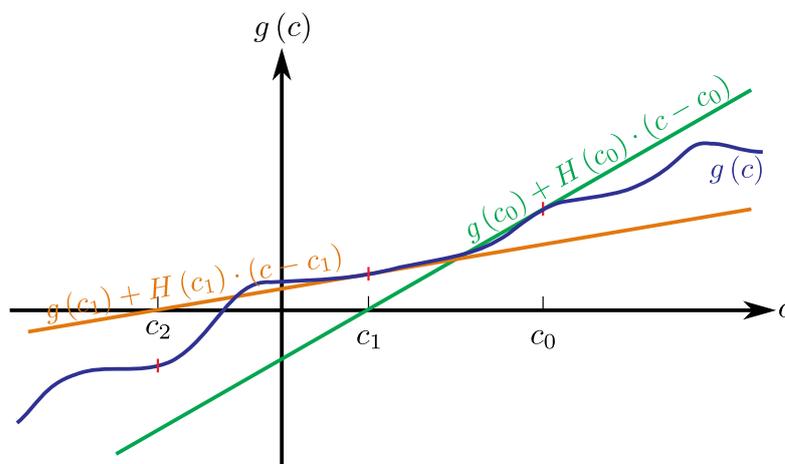
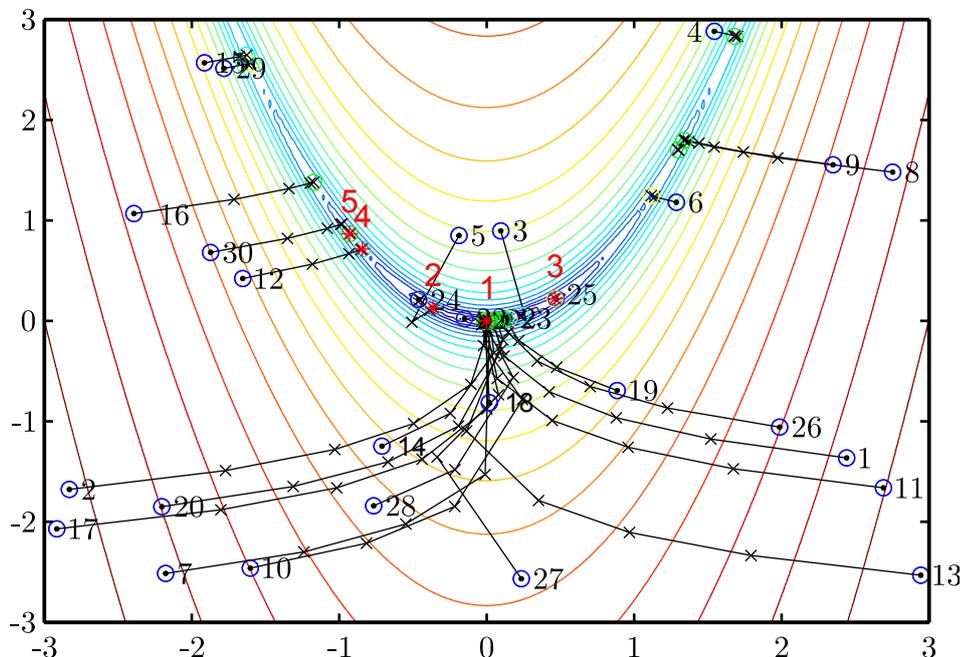


Abbildung 5.18: Newton-Verfahren

## 5.18 Laufzeitanalyse des Hybrid-DIRECT

Zur globalen Optimierung der Interpolante auf Basis der radialen Basisfunktion wurde in [2] ein Algorithmus entwickelt, der einen lokalen Optimierer mehrfach nutzt. Mehrere Optimierungsdurchläufe des lokalen Optimierers werden dort auch als Sucher bezeichnet. Dazu werden zunächst scheinbar beliebige Punkte im Suchraum  $S$  gewählt, die als Startpunkte für die Sucher dienen. Nun führt jeder Sucher, beginnend von seinem Startpunkt, einige Iterationsschritte in einem Abstiegsverfahren (vgl. Gleichung 5.23) aus. Das Minimum aller Sucher liefert dann das  $\hat{c}_{\text{RBF}}$ . Die Anzahl der Sucher ist abhängig von der maximal möglichen Anzahl von Minima in der Interpolante. Eine gute Abschätzung liefert die Anzahl der Stützstellen, so dass nicht mehr Sucher als Stützstellen genutzt werden müssen. Nach [2] wurden „standardmäßig 30 Sucher mit je sechs Iterationsschritten eingesetzt, wobei hiervon bis zu zehn Sucher für die Nachverfolgung der bereits identifizierten lokalen Minima verwendet wurden“. Wird die Interpolante ein weiteres Mal innerhalb des DIRECT-Algorithmus aufgestellt und optimiert, so können die Schätzungen für lokale

Minima genutzt werden, um ein Teil der Sucher in der Umgebung zu platzieren und diese zu verfolgen. Die Übrigen werden wieder möglichst zufällig auf dem verbliebenen Gebiet positioniert, um keine Bereiche mit schlechterer Abdeckung zu erhalten. Abbildung 5.19 zeigt ein Beispiel des Optimierungsalgorithmus anhand der 2-dimensionalen Rosenbrock-Funktion.



**Abbildung 5.19:** Beispiel der Suche im Optimierungsalgorithmus anhand der 2-dimensionalen Rosenbrock Funktion, entnommen aus [2]

Dort sind die zufällig gewählten Startpunkte (blaue Kreise) der Sucher 1-30 und der Verlauf über sechs Schritte in Abstiegsrichtung eingezeichnet. Zusätzlich markieren die roten Zahlen die fünf besten gefundenen Werte für das Minimum. Zum weiteren Studium der genutzten Methode sei auf [2] verwiesen. Zur Laufzeitanalyse wurden die Funktionen aus Tabelle 5.3 mit dem DIRECT und dem Hybrid-DIRECT optimiert und die Ergebnisse gegenübergestellt.

Name	Gleichung
n-dimensionale Rosenbrock-Funktion [75]	$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ (1 - x_i)^2 + 100(x_{i+1} - x_i^2)^2 \right]$
n-dimensionale sphärische Funktion	$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$
Himmelblau-Funktion [40]	$f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$
n-dimensionale Rastrigin-Funktion [81]	$f(x) = An + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - \text{Acos}(2\pi x_i)]$

**Tabelle 5.3:** Testfunktionen zur Evaluierung des Hybrid-DIRECT-Algorithmus

Der entwickelte Algorithmus enthält durch die Erweiterung um die Interpolation mit radialen Basisfunktionen einen statistischen Anteil, der zu einem nicht deterministischen

Verhalten führt. Um dennoch statistisch aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten, wurden 500 Optimierungen pro Funktion und pro Algorithmus durchgeführt. Zusätzlich wurden die Funktionen zufällig in ihrem Funktionsraum verschoben, damit einer der Algorithmen nicht aufgrund der Struktur der Testfunktionen extrem schnell konvergiert (zum Beispiel erster Evaluationspunkt bei 0 und Minimum bei 0). Dazu wurden die betrachteten Algorithmen auf die gleiche, verschobene Funktion angewendet, so dass ein Vergleich dieser möglich war. Zur Auswertung wurde der Mittelwert der aktuellen Minima  $\bar{c}_{\text{DIR}}(i)$ ,  $\bar{c}_{\text{HDIR1}}(i)$  und  $\bar{c}_{\text{HDIR2}}(i)$  der betrachteten Algorithmen in jedem Iterationsschritt  $i$  bestimmt. Sie sind in den Abbildungen 5.20 bis 5.24 grafisch dargestellt. Dabei ist in rot der DIRECT-Algorithmus aufgetragen. In blau (Strichpunkt) eingezeichnet ist der Hybrid-DIRECT1, der in Abschnitt 5.12 vorgestellt wurde. Zusätzlich ist in schwarz gestrichelt ein leicht modifizierter Hybrid-DIRECT2-Algorithmus dargestellt. Während der in Abschnitt 5.12 erläuterte Algorithmus nur Schätzungen auswertet, wo  $\hat{s}_z < \hat{c}_{\text{DIR}}$  gilt, werden im modifizierten Hybrid-DIRECT2 alle Schätzungen ausgewertet.

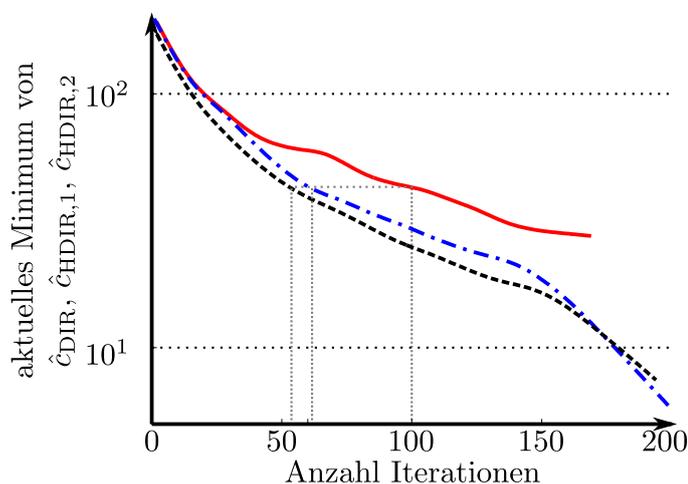


Abbildung 5.20: Laufzeitanalyse anhand der 7-dimensionalen Rosenbrock-Funktion

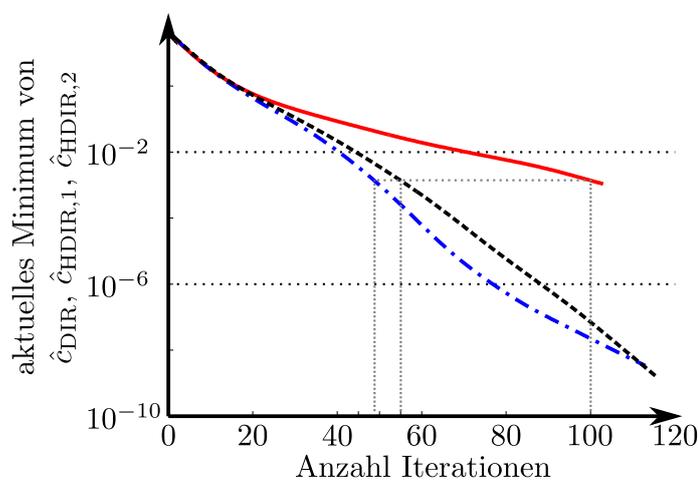
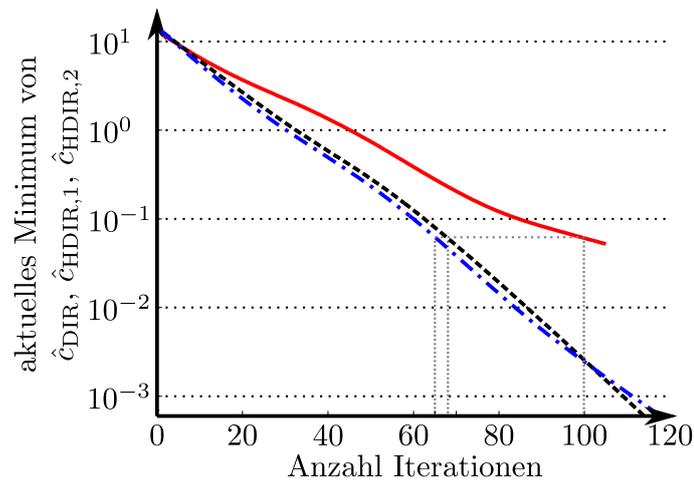
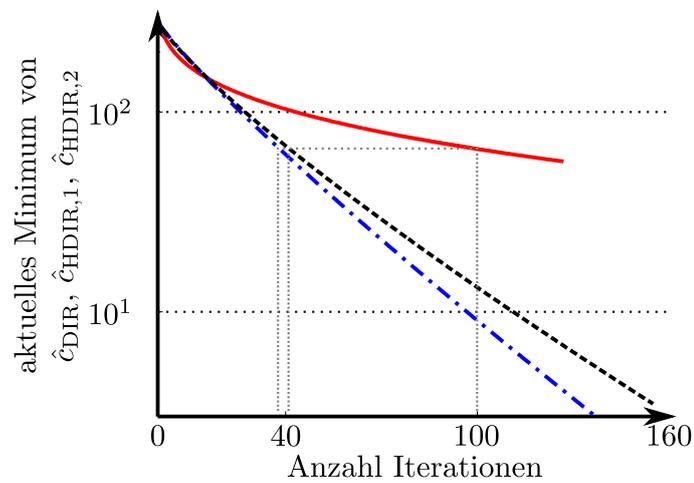


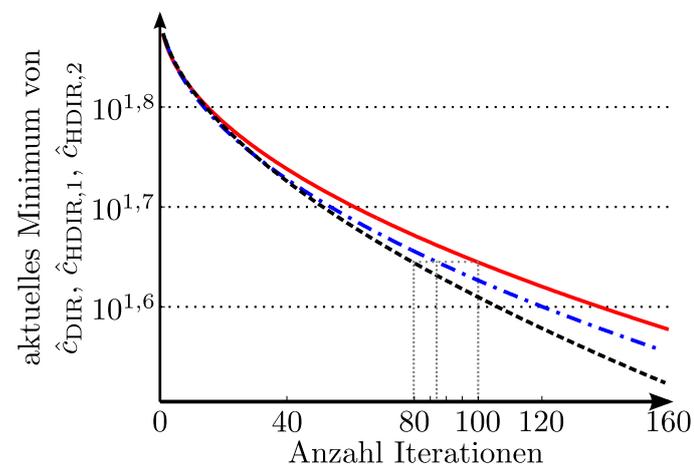
Abbildung 5.21: Laufzeitanalyse anhand der 2-dimensionalen Himmelblau-Funktion



**Abbildung 5.22:** Laufzeitanalyse anhand der 4-dimensionalen elliptische Funktion



**Abbildung 5.23:** Laufzeitanalyse anhand der 7-dimensionalen elliptische Funktion



**Abbildung 5.24:** Laufzeitanalyse anhand der 4-dimensionalen Rastrigin-Funktion

Tabelle 5.4 fasst die Ergebnisse der Laufzeituntersuchungen zusammen. Verglichen wird, wie viele Iterationen die Hybrid-Algorithmen benötigen, um einen gleichwertigen Funktionswert zu erhalten, den der DIRECT-Algorithmus nach 100 Iterationsschritten evaluiert

hat. Die Hybrid-Algorithmen konnten in allen Tests den DIRECT-Algorithmus verbessern. Sogar bei der Rastrigin-Funktion, die über sehr viele Extrema verfügt und extrem schwer zu optimieren ist, lag der Laufzeitgewinn noch zwischen 13 und 20 Prozent.

Testfunktion	Hybrid-DIR1 Iterationen	Hybrid-DIR2 Iterationen	zugehörige Abbildung
7d Rosenbrock	62/100	53/100	5.20
2d Himmelblau	49/100	55/100	5.21
4d elliptische Funktion	68/100	65/100	5.22
7d elliptische Funktion	41/100	37/100	5.23
4d Rastrigin	87/100	80/100	5.24

**Tabelle 5.4:** Ergebnisse der Laufzeituntersuchung

Aufgrund der einfachen Struktur der Sucher lieferte die in C++ erfolgte Implementierung des Optimierers in allen Fällen eine Lösung nach weniger als 100 ms, so dass die Latenzzeit von 86 ms optimal zur Modellbildung und -optimierung genutzt wurde. In fast allen Test-Szenarien war die Laufzeit des Hybrid-DIRECT2 besser als des Hybrid-DIRECT1 und immer besser als der eigentliche DIRECT-Algorithmus. Die Wahl fiel demnach auf diese Variante des Algorithmus.



# 6

## Experimentelle Parameterbestimmung und Tests am realen System

Um am Ende dieses Kapitels einige Beispiele zur statischen Optimierung präsentieren zu können, müssen vorab noch die Wertebereiche, in denen sich die Zernike-Polynome bewegen dürfen, der Gewichtungsfaktor  $\gamma$  aus Gleichung (3.24) und die Latenz des SLM-basierten Vibrometers experimentell bestimmt werden.

### 6.1 Bestimmung des Gewichtungsfaktors $\gamma$

Der Gewichtungsfaktor  $\gamma$  wurde vorab bestimmt, um das Optimierungsproblem um eine Entscheidungsvariable zu reduzieren. Dazu wurden je 100 Optimierungsläufe pro  $\gamma$  durchgeführt.  $\gamma$  wurde im Intervall  $[0, 1]$  von 0 beginnend sukzessive mit einer Schrittweite von 0.01 erhöht. Gemessen wurde auf einem Spiegel, wobei im Messaufbau zusätzlich ein linear polarisierter Filter mit einem Dichtefaktor von 0,5 installiert wurde, der zusätzlich für ein gedämpftes Signal sorgte. Dieses Signal galt es zu optimieren. In Abbildung 6.1 ist das Ergebnis der Auswertungen sehen, wobei  $\gamma$  auf der Abzisse und die gemittelten Werte von  $\bar{c}_{\text{HDIR}}(\gamma)$  auf der Ordinate aufgetragen sind. Der optimale Gewichtungsfaktor  $\gamma$  befindet sich im Intervall  $\gamma \in [0, 41 \dots 0, 5]$ . Wird  $\gamma$  weiter erhöht, verschiebt sich das Gewicht weiter in Richtung Signalstärke (siehe Gleichung (3.24)). Dies führt dazu, dass die Signalqualität, also die Position und Form des Spot, immer weniger gewichtet wird. Da im Messprozess aber ein Spot an der gewünschten Position gefordert ist, bietet das gefundene Intervall für  $\gamma$  die optimale Abwägung zwischen Signalgüte und Signalstärke. Für die weiteren

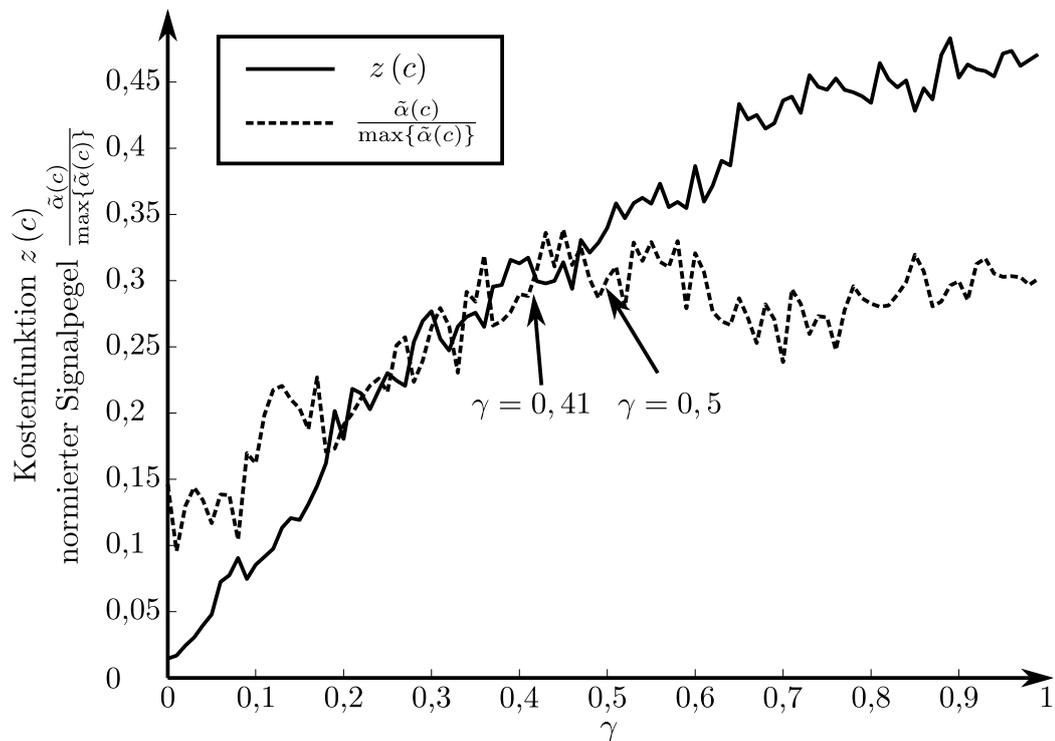
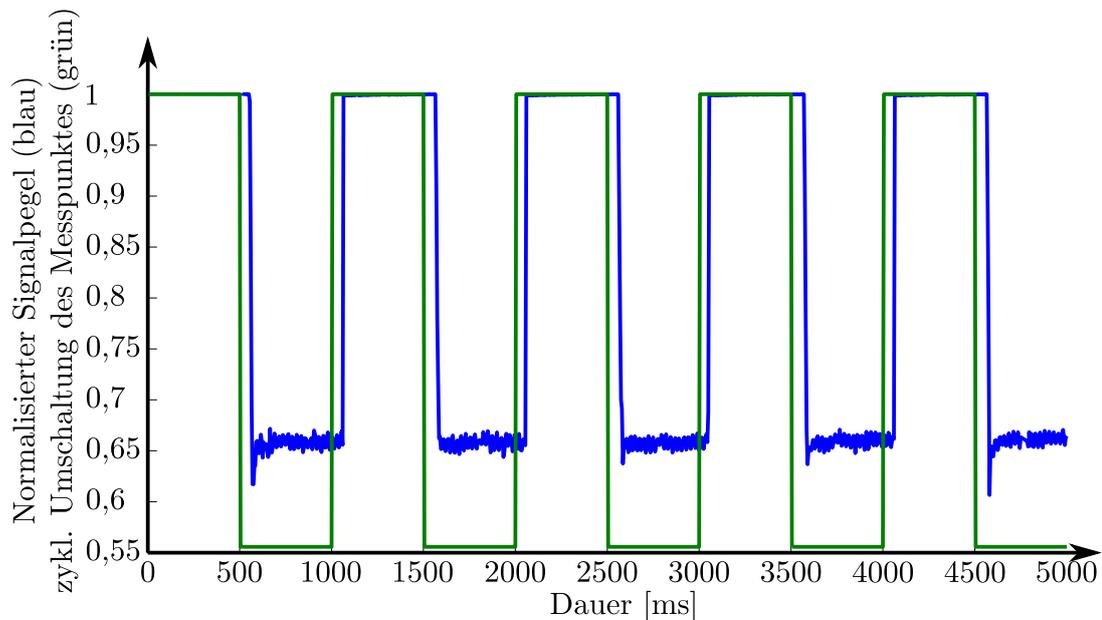


Abbildung 6.1: Experimentelle Bestimmung von  $\gamma$

Messungen wurde ein optimales  $\gamma = 0,455$  angenommen.

## 6.2 Totzeit des Vibrometers mit SLM

Die Bestimmung der Latenz des Systems ist entscheidend für das korrekte Messen des Signalpegels. Wird ein neues Bild im SLM eingeschrieben, so muss eine Dauer von  $t_L$  abgewartet werden, bis alle Pixel auf dem SLM umgeschaltet haben und alle weiteren verzögernden Effekte im Messprozess abgeklungen sind. Die Auswertung der Latenzanalyse ist mit Abbildung 6.2 gegeben.



**Abbildung 6.2:** Latenzanalyse am SLM-basierten Vibrometer

Über das SLM wurde alle 500 ms zwischen einem Punkt mit hoher Reflektivität (hoher Wert am Detektor) und einem Punkt niedriger Reflektivität umgeschaltet. Die Umschaltung zwischen den beiden Spot-Sites ist in grün dargestellt. In blau ist der normierte Signalpegel aufgetragen. Betrachtet man die Umschaltzeitpunkte, so ist in beiden Richtungen ein verzögertes Folgen des Signalpegels zu erkennen. Die Kumulierung der einzelnen Latenzen ergibt, dass alle verzögernden Effekte nach  $t_L \approx 86 \text{ ms}$  abgeklungen sind und ab dann mit einem zur Stellgröße  $c$  zugehörigen Signalpegel zu rechnen ist. Alle weiteren Betrachtungen wurden, wie auch in dem voran gegangenen Abschnitt, mit dieser Latenz durchgeführt.

### 6.3 Wertebereiche der Zernike-Koeffizienten

Fasst man die Koeffizienten  $c_{mn}$  aus Gleichung (3.4) zu einem Vektor  $c \in \mathbb{R}^n$  zusammen, so kann eine kompakte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert werden, auf der eine sinnvolle Optimierung möglich wird. Eine solche Menge  $\Omega$  muss experimentell bestimmt werden. Es gilt für jedes  $c \in \Omega$  die Beschränkung

$$\underline{c}_i \leq c_i \leq \bar{c}_i, \text{ mit } i = 1, \dots, n, \quad (6.1)$$

wobei  $c_i$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $c$ ,  $\underline{c}_i$  die untere Schranke (das Infimum) der  $i$ -ten Komponente und  $\bar{c}_i$  die obere Schranke (das Supremum) der  $i$ -ten Komponente darstellt.

### 6.4 Experimentelle Bestimmung der Wertebereiche

Zur Bestimmung der Wertebereiche diente der gleiche Messaufbau wie in Abschnitt 6.1 ohne Polarisationsfilter. wurden die Zernike-Koeffizienten über einen Wertebereich von -1

bis 1 einzeln durchlaufen und dabei die Signalstärke am Detektor gemessen. Dies wurde für jeden Koeffizienten 5-mal durchgeführt, um Messfehler weitestgehend auszuschließen und die Messungen zu verifizieren. Aufgetragen wurde über die Kostenfunktion  $z(c)$  aus Gleichung (3.24) mit einem  $\gamma = 1$ , so dass die Signalgüte während der Messung nicht berücksichtigt wurde. Für die Messung gilt somit die Kostenfunktion

$$z(c) = 1 - \frac{\tilde{\alpha}(c)}{\max\{\tilde{\alpha}(c)\}}. \quad (6.2)$$

Minimale Werte in der Kostenfunktion entsprechen damit maximalen Detektorsignalen. Die relevanten Parameterbereiche aus den Messungen sind in den Abbildungen 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 und 6.7 dargestellt. Aus den Abbildungen wurde eine Abschätzung abgelesen, indem aus allen Messungen für das  $\underline{c}_i$  das kleinste  $c$  gewählt wurde, welches eine Abgrenzung zu einem Minimum darstellt. Eine Abschätzung für  $\bar{c}_i$  erfolgte äquivalent. In Abbildung 6.3 ist beispielsweise die untere Schranke mit  $\underline{c}_3 = -0,004368$  bestimmt. Dazu wurden Bereiche mit niedriger Funktionswerten der Kostenfunktion von Bereichen mit hohen Werten der Kostenfunktion abgegrenzt. Um den Parameterbereich nicht von Anfang an zu sehr einzuschränken, wurde für  $\underline{c}_3$  der kleinste Wert aus allen Messung genommen, der als untere Schranke in Betracht kommt.

Die Wertebereiche für die Koeffizienten der Zernike-Polynome Tilt X und Tilt Y wurden händisch ermittelt, da diese von der Entfernung zum Messobjekt abhängig sind und entsprechend konfiguriert werden müssen. Dazu war das Messobjekt in einer Entfernung von 2 m positioniert. Die maximale Abweichung vom ursprünglich eingestellten Messspot betrug mit den ermittelten Koeffizienten Tilt X und Tilt Y in etwa eine Spotbreite.

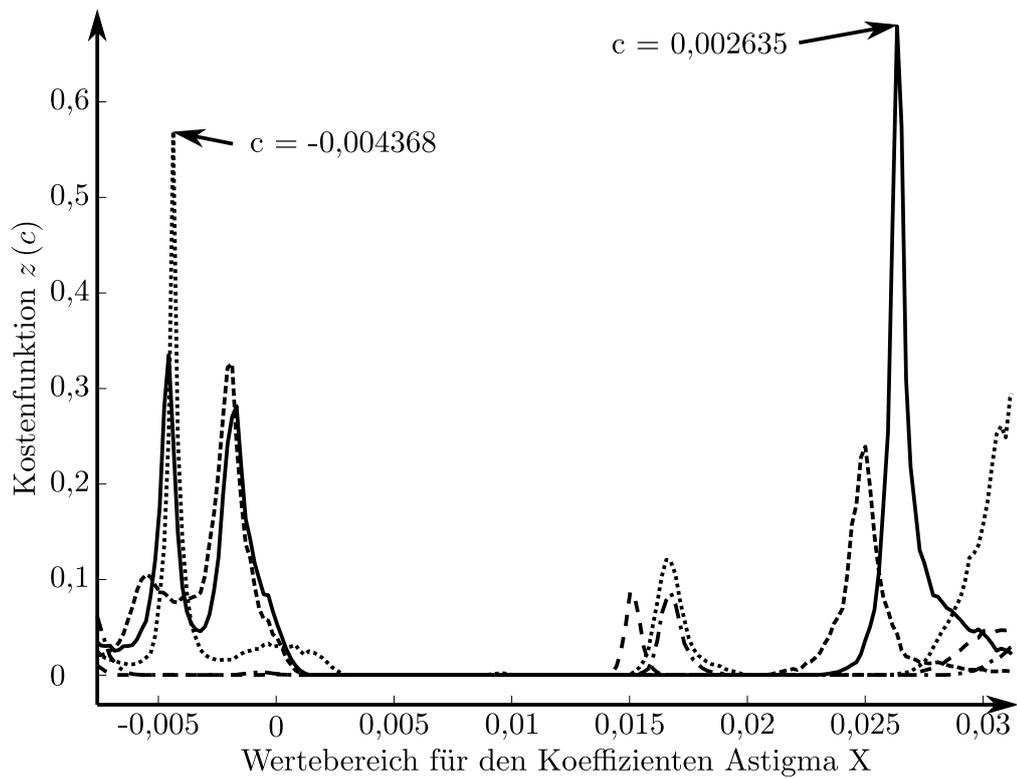


Abbildung 6.3: Ergebnis der Messungen für Astigma X

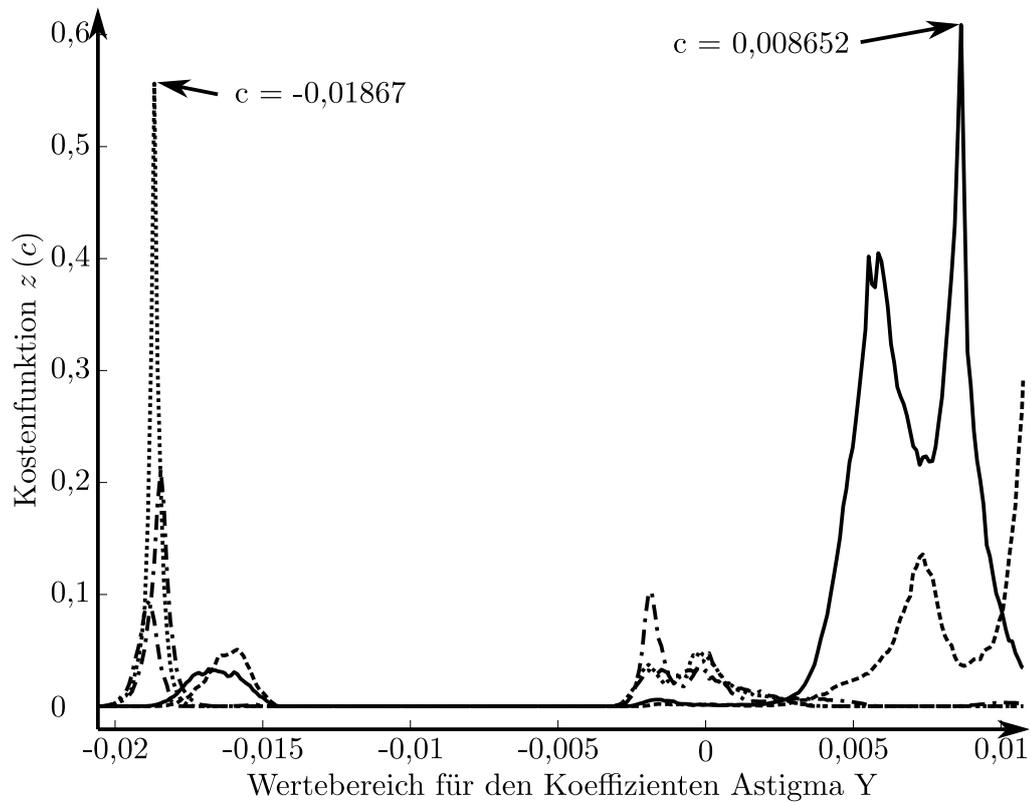


Abbildung 6.4: Ergebnis der Messungen für Astigma Y

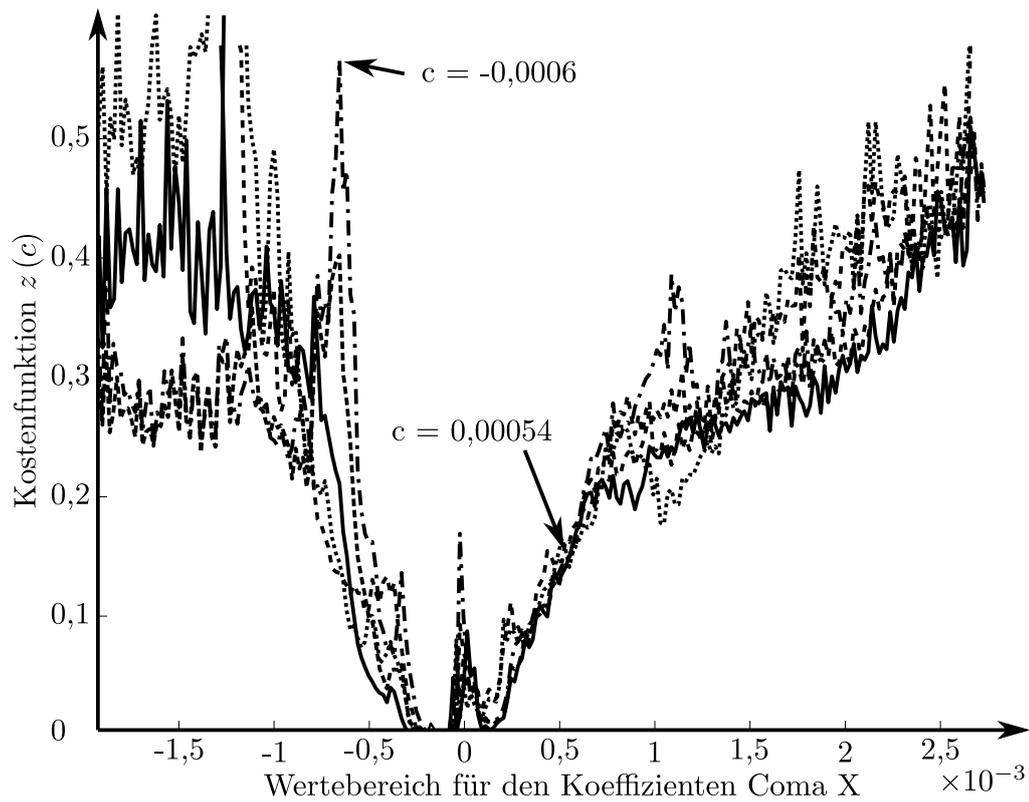


Abbildung 6.5: Ergebnis der Messungen für Coma X

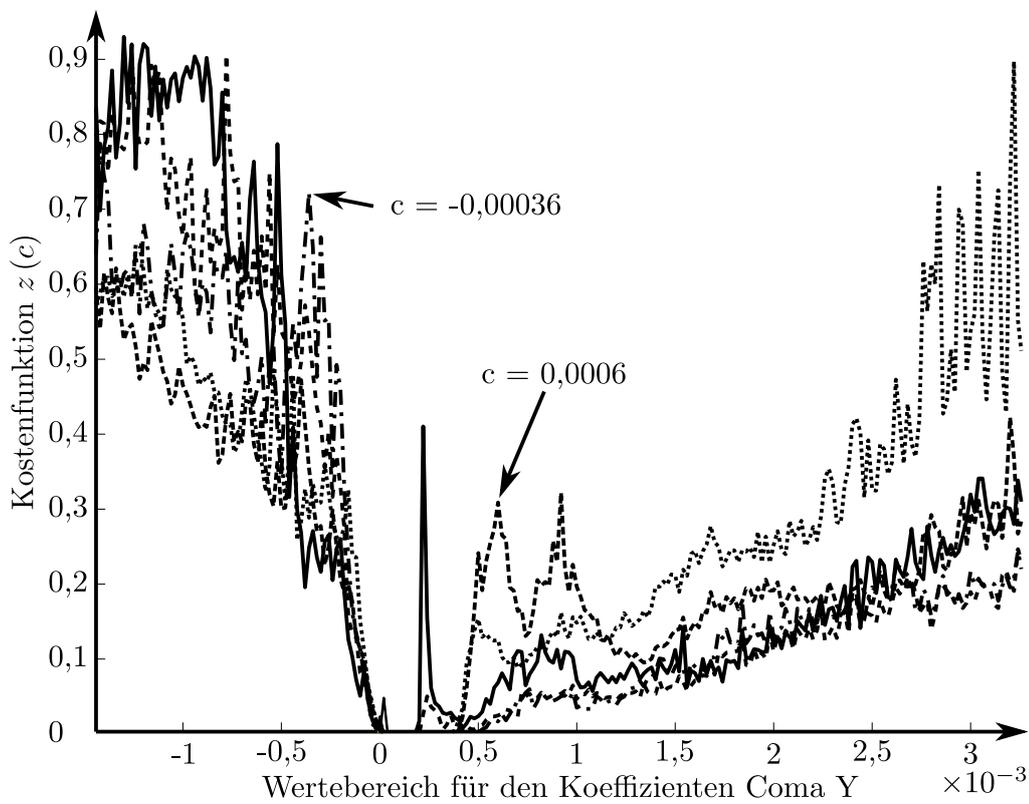
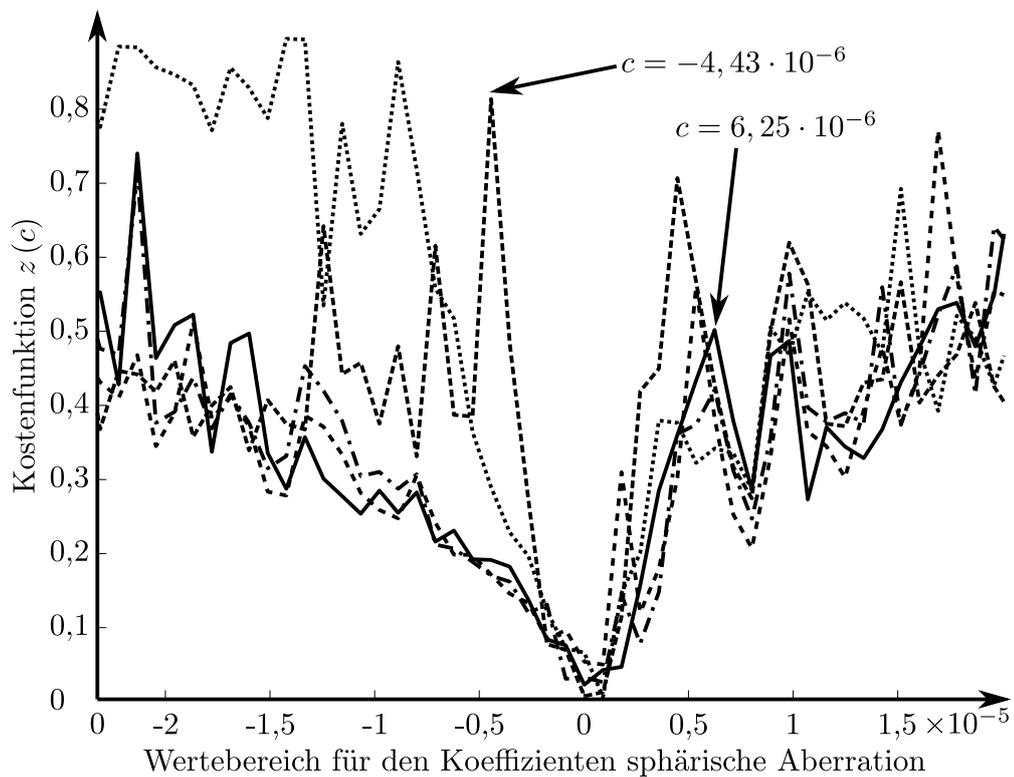


Abbildung 6.6: Ergebnis der Messungen für Coma Y



**Abbildung 6.7:** Ergebnis der Messungen für die sphärische Aberration

Die hier ermittelten Wertebereiche gelten für das genutzte Vibrometer mit einem LCOS-SLM X10468 Series von Hamamatsu. Für SLM's anderer Hersteller müssen die Parameter separat bestimmt werden. Tabelle 6.1 fasst die Ergebnisse der experimentellen Bestimmung der Wertebereiche zusammen. Eine weitere optische Kontrolle ist unter Umständen notwendig, um die Verformung des Spots auf die später zu nutzende Applikation anzupassen. Dazu werden die ermittelten Grenzen angefahren und überprüft, ob Verformungen des Spot sichtbar sind.

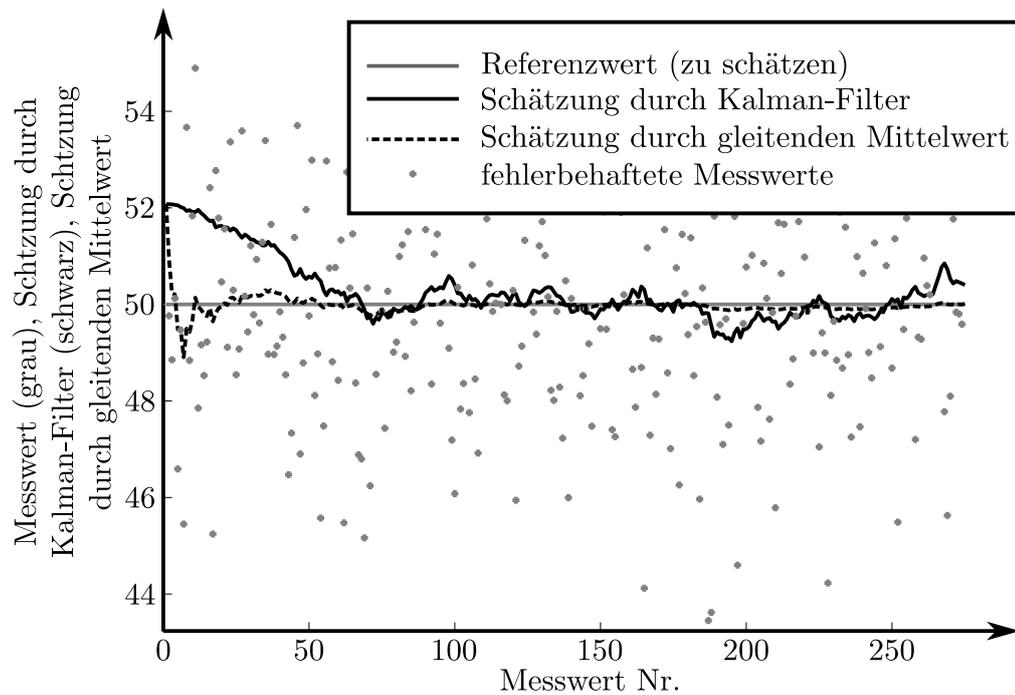
Name	n	m	$\underline{c}_{nm}$	$\bar{c}_{nm}$
Tilt X	1	0	-0,05	0,05
Tilt Y	1	1	-0,05	0,05
Astigma X	2	0	-0,004368	0,002635
Astigma Y	2	2	-0,01867	0,008652
Coma X	3	1	-0,0006	0,00054
Coma Y	3	2	-0,00036	0,0006
sphär. Aberration	4	2	$-4,43 \cdot 10^{-6}$	$6,25 \cdot 10^{-6}$

**Tabelle 6.1:** Experimentell ermittelte Wertebereiche der Zernike-Koeffizienten

## 6.5 Reduktion von Messfehlern im Optimierer

Durch äußere Einflüsse, wie zum Beispiel thermisches Rauschen, sind die Messwerte mit Fehlern behaftet. Der Optimierer hingegen benötigt ein möglichst fehlerbereinigtes Signal.

Dazu wurde die Fehlerreduktion durch einen Kalman-Filter [49] mit einem gleitenden Mittelwert gegenüber gestellt. Die Gegenüberstellung wird beispielhaft in Abbildung 6.8 gezeigt. In einer Simulation wurden fehlerbehaftete Messwerte gleichverteilt um den exakten Wert 50 gestreut und der Referenzwert mit dem Kalman-Filter bzw. dem gleitenden Mittelwert sukzessive geschätzt. Weil es sich bei der Messwernerfassung um ein  $SO^1$ -System handelt, ist für den im Projekt behandelten Fall eine Mittelwert-Bildung sinnvoller, da diese nach ca. 25 Messungen den exakten Wert mit einer geringeren Schwankungsbreite schätzt als das Kalman-Filter.



**Abbildung 6.8:** Gegenüberstellung Kalman-Filter vs. Mittelwertbildung

## 6.6 Verifikation am Vibrometer

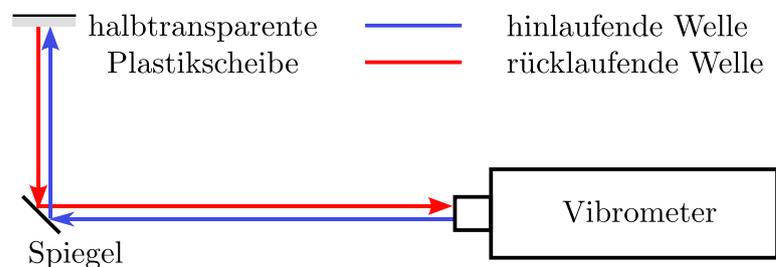
In diesem Abschnitt soll beispielhaft das erste Experiment zur Verifikation am SLM-basierten Vibrometer vorgestellt werden. Spätere Experimente bestätigten die Tauglichkeit des Optimierers auch in rauen Umgebungen, die zusätzlich in [62] vorgestellt wurden. Die in [62] vorgestellten Tests führten auf einem schwach reflektierenden Messobjekt zu vergleichbaren Resultaten, so dass diese nicht gesondert dargestellt werden müssen.

In diesem ersten Experiment wurde unter Laborbedingungen verifiziert ob der gewählte Algorithmus zu einer Verbesserung des Signalpegels führt. Dazu wurde ein vorhandener Messaufbau am ITO<sup>2</sup> genutzt. Das Vibrometer war dazu auf einem schwingungsgedämpften Tisch montiert. Um eine Scan-Entfernung von ca. 2 m zu realisieren, wurde der Messpunkt über einen Spiegel auf ein statische (nicht schwingende) halbtransparente

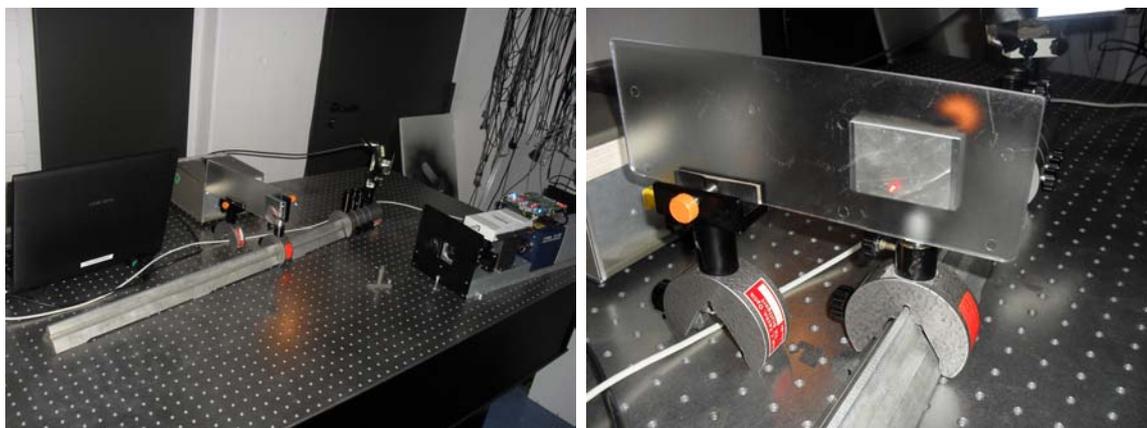
<sup>1</sup>Single-Output

<sup>2</sup>Institut für Technische Optik der Universität Stuttgart

Plastikscheibe abgelenkt. Diese Scheibe erzeugte ein hinreichend gutes Speckle, welches es zu optimieren galt. In Abbildung 6.9 ist der Messaufbau skizziert und in Abbildung 6.10 dargestellt. Die Fotodiode lieferte ein Spannungssignal zwischen  $0 - 5 V$ , welches über Datenaquisition mittels NIDAQ-6210 realisiert wurde. Das wurde in der Gleichung (3.24) mit  $\tilde{\alpha}(c)$  berücksichtigt. Der Maximalwert ist durch die Datenaquisition mit  $5 V$  beschränkt, so dass ein  $\max \{ \tilde{\alpha}(c) \} = 5$  gilt.



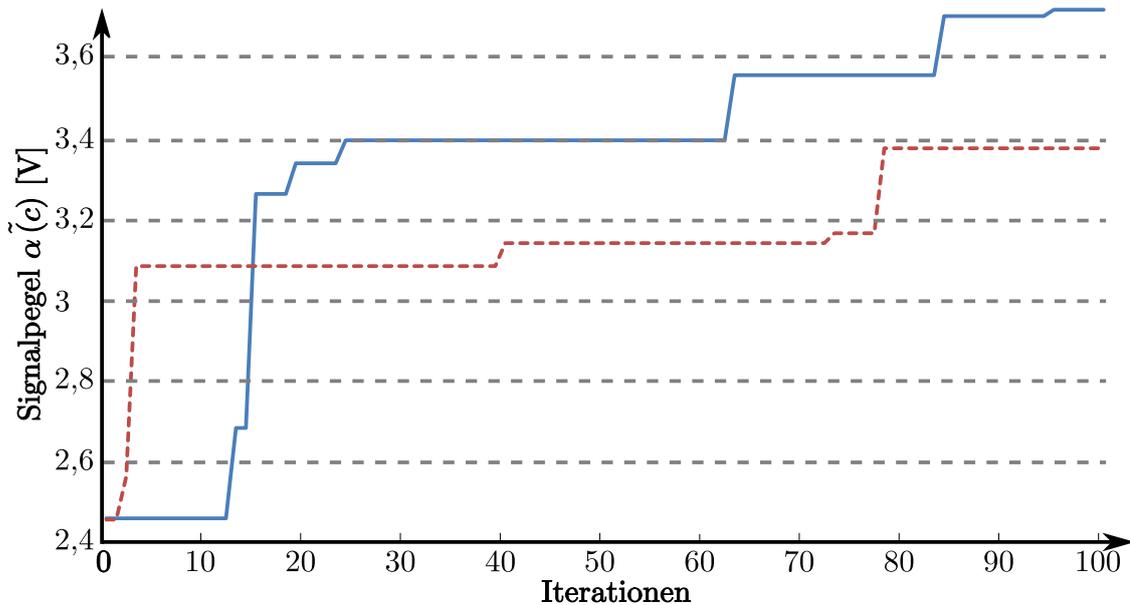
**Abbildung 6.9:** Skizze Messaufbau



**Abbildung 6.10:** Aufbau am Institut für technische Optik (ITO) Stuttgart

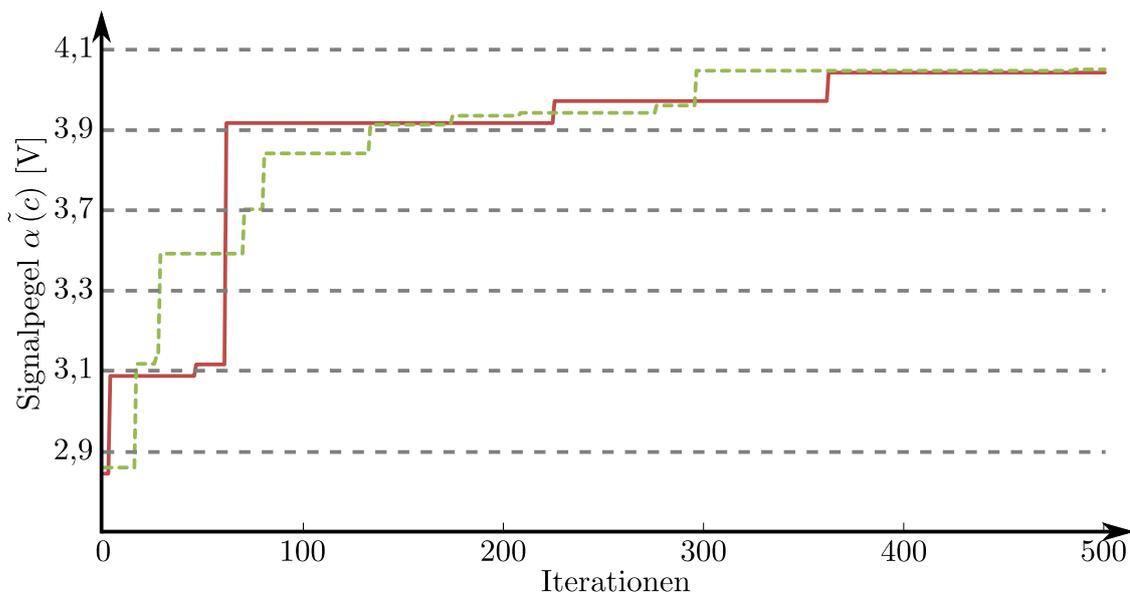
## 6.7 Resultate der Optimierung

Im ersten Optimierungslauf wurden die Zernike-Polynome 1 – 4 aus Tabelle 3.1 genutzt. Im zweiten Durchlauf wurden dann die Polynome 1, 2, 5 und 6 genutzt. Beide Durchläufe wurden nach 100 Iterationsschritten beendet und führten zu einer Verbesserung des Signalpegels. Während das erste Experiment zu einer Erhöhung des Signalpegels um ca.  $1,27 V$  führte (dies bedeutet eine Verbesserung des SNR um  $7,62 dB$ ; siehe dazu Abschnitt (2.3), konnte der Optimierer im zweiten Experiment den Signalpegel um ca.  $0,92 V$  (Verbesserung des SNR  $5,52 dB$ ) erhöhen. Die Auswertung in Abbildung 6.11 zeigt beide Durchläufe. Der blaue Plot stellt hier den ersten und der rot gestrichelte den zweiten Durchlauf dar.



**Abbildung 6.11:** Auswertung des ersten (blau) und des zweiten (rot gestrichelt) Durchlaufs

Im nächsten Schritt wurde die Anzahl der genutzten Koeffizienten erhöht. Dies ging mit einer Erhöhung der Laufzeit einher. Auch bei diesen Durchläufen konnte der Signalpegel signifikant verbessert werden. Der erste Durchlauf wurde um die Koeffizienten 5 und 6 erweitert und wird in Abbildung 6.12 rot dargestellt. Der letzte Durchlauf enthält alle zur Verfügung stehenden Zernike-Polynome, so dass alle Koeffizienten in die Optimierung mit einbezogen worden sind. Dieser ist in der Abbildung 6.12 grün geplottet. Beide Durchläufe verbesserten den Signalpegel um ca.  $1,2\text{ V}$  was einer Verbesserung des SNR um  $7,2\text{ dB}$  bedeutet. Vergleicht man alle vier Durchläufe, so erzielen alle ähnlich gute Verbesserungen



**Abbildung 6.12:** Auswertung des dritten (rot) und vierten (grün gestrichelt) Durchlaufs

des Signalpegels mit einer Werten zwischen  $5,52\text{ dB}$  und  $7,62\text{ dB}$ . Die höchsten Gewinne konnte im ersten Durchlauf mit den Parameterkombinationen 1 – 4 und  $7,62\text{ dB}$  sowie im

---

dritten Durchlauf mit den Parameterkombinationen 1–6 und 6 dB erreicht werden. Da mit steigender Anzahl der Parameter die Optimierung aufwändiger wird, ist der Parametersatz mit den Parametern 1 – 4 zu bevorzugen.

# Quadratische Approximation und Optimierung

Während der in Kapitel 5 vorgestellte Optimierer den Signalpegel einmalig statisch optimiert und somit als Steuerung des Aktors (SLM) angesehen werden kann, soll eine Extremwert-Regelung den Signalpegel im Maximum halten und gegebenenfalls nach führen. Bezogen auf die Kostenfunktion aus Gleichung (3.24) bedeutet dies, dass der Regler einem Minimum folgt. Dazu wird zunächst angenommen, dass das SLM über die Zernike-Koeffizienten  $c$  so parametrisiert ist, dass sich die entsprechende Kosten- beziehungsweise Zielfunktion in der Nähe eines lokalen Extremums befindet. Die Umgebung  $U$  um das Extremum kann somit quadratisch hinreichend genau angenähert werden. In diesem Kapitel sollen die für den Extremwert-Regler benötigten mathematischen Vorarbeiten geleistet werden. Der Regler basiert auf einer multivariaten quadratischen Interpolation, die mit exakt einem Newton-Schritt optimiert wird. Dazu wird zunächst eine allgemeine Approximation durch die Taylor-Reihenentwicklung eingeführt, die später genutzt wird, um den Regler-Algorithmus zu entwickeln.

## 7.1 Taylor-Reihenentwicklung

Die durch Brook Taylor gefundene und auf  $n$  Variablen erweiterte Reihenentwicklung [80, 83, 22] ermöglicht die Approximation jeder stetigen,  $m + 1$ -mal differenzierbaren und multivariaten Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Zur besseren Darstellung wird eine Multiindex-Notation, angelehnt an [22], eingeführt. Es sei ein  $n$ -Tupel mit  $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{R}^n$  und

den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 |i| &:= i_1 + i_2 + \dots + i_n, \\
 i! &:= i_1! i_2! \dots i_n!, \\
 D^i f &:= \frac{\partial^i f(c)}{\partial c^i} = \frac{\partial^{|i|} f(c)}{\partial c_1^{i_1} \dots \partial c_n^{i_n}} \text{ und} \\
 (c-a)^i &:= (c_1 - a_1)^{i_1} (c_2 - a_2)^{i_2} \dots (c_n - a_n)^{i_n}
 \end{aligned}$$

gegeben. So kann eine  $|i|$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f$  um den Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  mit

$$f(c) = \underbrace{\sum_{|i| \leq k} \frac{D^i f(a)}{i!} (c-a)^i}_{=T_k(c)} + \underbrace{\sum_{|i|=k+1} \frac{D^i f(\xi)}{i!} (c-a)^i}_{=R_k(c)} \quad (7.1)$$

entwickelt werden. Wobei  $T_k(c)$  die Taylorreihe vom Grad  $k$  und das Restglied  $R_k(c)$  vom Grad  $k+1$  ist. Der Punkt  $\xi$  ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden zwischen  $a$  und  $c$  innerhalb einer konvexen Menge. Bildet man den Grenzwert

$$\lim_{c \rightarrow a} \frac{R_k(c)}{(c-a)^k} = 0, \quad (7.2)$$

kann gezeigt werden, dass die Taylorreihe  $T_k(c) = f(c) - R_k(c)$  die Funktion  $f$  besser approximiert, je näher  $c$  dem Entwicklungspunkt  $a$  kommt, das heißt

$$c \rightarrow a \Rightarrow T_k(c) \rightarrow f(c). \quad (7.3)$$

## 7.2 Quadratische Approximation

Für die weiteren Betrachtungen sei die Funktion  $f$  nach unten beschränkt. Die Funktion verfügt also über mindestens ein Minimum. Dann existiert in der Umgebung  $U$  um ein Extremum eine quadratische Funktion  $f_{q_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\|f(c) - f_{q_n}(c)\| < \delta, \text{ mit } c \in U \quad (7.4)$$

gilt. Sind hinreichend viele Stützstellen oder, im hier vorliegenden Fall, Messungen bekannt, so kann die Umgebung  $U$  um den Extremwert mittels einer Taylor-Reihenentwicklung aus Gleichung (7.1) als  $f_{q_n}(c) = T_2(c)|_{a=0}$  mit der Genauigkeit  $\delta$  angenähert werden. Die Genauigkeit ist theoretisch über das Taylor-Restglied aus Gleichung (7.1) mit

$$\delta = \left\| \max_{c \in U} \{R_k(c)\} \right\| \quad (7.5)$$

festgelegt. Bei einer eindimensionalen Funktion mit  $f_{q_1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_{q_1}(c) = q_0 + q_1c + q_2c^2 \quad (7.6)$$

sind beispielsweise die drei Koeffizienten  $q_0$ ,  $q_1$  und  $q_2$  aus den Stützstellen zu berechnen.

Mit  $C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}^T$  Stützstellen und den dazu gehörigen Auswertungen  $F_{q_1}(C)$  erhält man ein lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_{q_1}(c_0) \\ f_{q_1}(c_1) \\ f_{q_1}(c_2) \end{pmatrix}}_{=F_{q_1}(C)} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_0 + q_1c_0 + q_2c_0^2 \\ q_0 + q_1c_1 + q_2c_1^2 \\ q_0 + q_1c_2 + q_2c_2^2 \end{pmatrix}}_{=M} \quad (7.7)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}_{=q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}}_{=M}$$

in  $q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ , welches es zu lösen gilt. In Matrix-Schreibweise ist dies nun recht einfach, sobald die Matrix  $M$  regulär und somit invertierbar ist. Die Lösung des LGS lautet dann

$$q = F_{q_1}(C) \cdot M^{-1}. \quad (7.8)$$

Um die Inverse  $M^{-1}$  zu berechnen, können verschiedene Methoden genutzt werden. Der naive Zugang ist die Berechnung der Inversen über den Laplaceschen Entwicklungssatz. Alternativ kann das LGS in Gleichung (7.8) über entsprechende Algorithmen, wie zum Beispiel der Cholesky-Zerlegung [64] (für symmetrische und positiv definite Matrizen) oder nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren [57, 9, 88], gelöst werden. Dies reduziert den Rechenaufwand von  $\mathcal{O}(n!)$  auf  $\mathcal{O}\left(\frac{2}{3}n^3\right)$ .

Erweitert man nun die zu interpolierende Funktion auf  $n$  Dimensionen, so bietet sich eine kompakte Matrix-Schreibweise dieser an. Es sei nun  $w(c) = \begin{pmatrix} 1 & c^T \end{pmatrix}^T$  mit  $c = \begin{pmatrix} c_0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^T$ . So kann jede beliebige quadratische Funktion in der Form

$$f_{q_n}(c) = w^T(c) \cdot Q_n \cdot w(c) \quad (7.9)$$

geschrieben werden, wobei  $Q_n$  die Koeffizientenmatrix darstellt. Handelt es sich beispielsweise um eine Funktion von zwei Veränderlichen, so ist diese gegeben durch

$$f_{q_2}(c) = q_0 + q_1c_0 + q_2c_1 + q_3c_0^2 + q_4c_0c_1 + q_5c_1^2. \quad (7.10)$$

Um die Gleichung (7.10) in Gleichung (7.9) zu überführen ist eine symmetrische Matrix

der Form

$$Q_2 = \begin{pmatrix} q_0 & \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \\ \frac{q_1}{2} & q_3 & \frac{q_4}{2} \\ \frac{q_2}{2} & \frac{q_4}{2} & q_5 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

eine sinnvolle Wahl. Zwar kann  $Q_n$  auch asymmetrisch gewählt werden, dies hätte jedoch zur Folge, dass nützliche Eigenschaften der symmetrischen Matrix später nicht genutzt werden könnten. Die Anzahl  $d$  der zu bestimmenden Koeffizienten umfasst hier sechs ( $q_0$  -  $q_5$ ). Für eine multivariate Funktion in drei Veränderlichen sind schon zehn Koeffizienten notwendig. Betrachtet man nun allgemein die Anzahl  $n$  der Veränderlichen, so kann gezeigt werden, dass

$$d = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \quad (7.12)$$

Koeffizienten benötigt werden, um eine quadratische Funktion  $f_{q_n}(c)$  eindeutig zu bestimmen. Aus Gleichung (7.12) kann auch direkt die Anzahl der Stützstellen beziehungsweise Messauswertungen hergeleitet werden. Um  $d$  Unbekannte in einem LGS eindeutig zu bestimmen, werden exakt  $d$  linear unabhängige Gleichungen benötigt, die aus  $d$  Stützstellen/Messungen bestimmt werden. Die Matrix  $M$  hat deshalb die Dimension  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und die zugehörige Determinante muss  $|M| \neq 0$  erfüllen. Sie hat somit die Form

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0d} \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nd} \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 & \cdots & c_{1d}^2 \\ c_{11}c_{21} & c_{12}c_{22} & \cdots & c_{1d}c_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{11}c_{n1} & c_{12}c_{n2} & \cdots & c_{1d}c_{nd} \\ c_{21}^2 & c_{22}^2 & \cdots & c_{2d}^2 \\ c_{21}c_{31} & c_{22}c_{32} & \cdots & c_{2d}c_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{21}c_{n1} & c_{22}c_{n2} & \cdots & c_{2d}c_{nd} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1}^2 & c_{n2}^2 & \cdots & c_{nd}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (7.13)$$

mit  $c_{ij}$  Wert der  $i$ -ten Variablen und  $j$ -ten Stützstelle. Mit  $M$  kann wie schon in Gleichung (7.8) der Koeffizientenvektor  $q$  allgemein über die Gleichung

$$q = F_{q_n}(C) \cdot M^{-1}, \quad (7.14)$$

mit  $q \in \mathbb{R}^d$ ,  $F_{q_n}(C) \in \mathbb{R}^d$ ,  $C = \{c_0, c_1, \dots, c_d\}$ ,  $c_i = \begin{pmatrix} c_{0i} & c_{1i} & \cdots & c_{ni} \end{pmatrix}^T$ ,  $i = 1, \dots, n$

und  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  bestimmt werden. Die zugehörige Matrix  $Q$  wird mit dem Algorithmus 7.1 generiert.

---

**Algorithmus 7.1** Quadratische Approximation
 

---

**Funktion quadApprox**
**Eingangsdaten:**  $\check{C}, \check{F}$ 

```

// Status s: 1, wenn Q bestimmt werden kann, sonst 0
q =  $\check{F} \cdot M(\check{C})$  // siehe Gleichungen (7.13) und (7.14)
wenn (q ==  $\emptyset$ ) {
  s = 0
  Q =  $\emptyset$ 
}
sonst {
  s = 1
  k = 1
  für i = 1 bis n + 1 {
    für j = 1 bis n + 1 {
      wenn (i == j) {
         $Q_{ij} = q_k$ 
      }
      sonst {
         $Q_{ij} = Q_{ji} = \frac{q_k}{2}$ 
      }
    }
    k = k + 1
  }
}

```

**Ausgangsdaten:**  $Q, s$ 


---

### 7.3 Optimierung der interpolierten Funktion $f_{q_n}(c)$

Sollen die stationären Punkte einer Funktion bestimmt werden, so liefern der Gradient und die Hessematrix notwendige und hinreichende Bedingung für das Extremum. Der Gradient der Funktion aus Gleichung (7.9) ist mit

$$\frac{\partial f_{q_n}(c)}{\partial c} = 2 \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial w(c)}{\partial c} \right)^T}_{=dQ} \cdot Q \cdot w(c) \quad (7.15)$$

und die Hessematrix mit

$$\frac{\partial^2 f_{q_n}(c)}{\partial c^2} = 2 \cdot \frac{\partial \left( \left( \frac{\partial w(c)}{\partial c} \right)^T \cdot Q \cdot w(c) \right)}{\partial c} \stackrel{\text{da quadratisch}}{\downarrow} 2 \cdot \left( \frac{\partial w(c)}{\partial c} \right)^T \cdot Q \cdot \frac{\partial w(c)}{\partial c} \quad (7.16)$$

$$= \underbrace{dQ \cdot \frac{\partial w(c)}{\partial c}}_{=ddQ} \quad (7.17)$$

gegeben. Der stationäre Punkt der interpolierten Funktion soll nun über ein Abstiegsverfahren [23] iterativ ermittelt werden. Eine Richtung  $\eta$  ist genau dann eine Abstiegsrichtung, wenn

$$f_{q_n}(c) - f_{q_n}(c - \alpha\eta) > 0 \quad (7.18)$$

mit der Schrittweite  $\alpha > 0$  gilt. Nach [23] ist die Newton-Richtung definiert als

$$\eta_N = \left( \frac{\partial^2 f_{q_n}(c)}{\partial c^2} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f_{q_n}(c)}{\partial c} \quad (7.19)$$

und ist genau dann eine Abstiegsrichtung, wenn

$$\left( \frac{\partial f_{q_n}(c)}{\partial c} \right)^T \cdot \eta > 0 \quad (7.20)$$

erfüllt ist. Setzt man nun die Newton-Richtung  $\eta_N$  als Abstiegsrichtung  $\eta$  in Gleichung (7.20) ein, so ist direkt ersichtlich, dass  $ddQ = ddQ^T > 0$  positiv definit (hinreichende Bedingung) sein muss, damit  $\eta_N$  eine Abstiegsrichtung ist.  $\eta_N$  kann in dem Abstiegsverfahren nach [23]

$$c^{k+1} = c^k - \alpha\eta_N \quad (7.21)$$

genutzt werden. Der skalare Faktor  $\alpha > 0$  repräsentiert dabei die Schrittweite im Abstiegsverfahren.

## 7.4 Bestimmung der optimalen Schrittweite

Um einen (quasi-)optimalen Schritt durchführen zu können, muss die Weite entweder analytisch oder heuristisch (zum Beispiel Armijo-Schrittweite, Wolfe-Powell-Schrittweite [23, 68] oder Goldstein-Schrittweite [68]) ermittelt werden. Grundlage hierfür ist die Minimierungsaufgabe

$$\alpha^* = \min_{\alpha > 0} f_{q_n}(c - \alpha\eta), \quad (7.22)$$

welche für quadratische Funktionen analytisch lösbar ist. Um die folgenden Berechnungen zu vereinfachen, sei die Matrix  $Q_n$  partitioniert als

$$Q_n = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2^T \\ \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_3 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

$\tilde{Q}_1 \in \mathbb{R}$  enthält den Koeffizienten der Konstanten,  $\tilde{Q}_2 \in \mathbb{R}^n$  die Koeffizienten der linearen Terme und  $\tilde{Q}_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Koeffizienten der quadratischen Terme von  $f_{q_n}(c)$ . Die Gleichung (7.9) kann somit als

$$f_{q_n}(c) = \tilde{Q}_1 + 2 \cdot \tilde{Q}_2^T c + c^T \tilde{Q}_3 c \quad (7.24)$$

geschrieben werden. Die Minimierungsaufgabe aus Gleichung (7.22) wird gelöst, indem der Gradienten von Gleichung (7.24) zu Null gesetzt und nach  $\alpha$  aufgelöst wird. Es folgt für  $\alpha^*$  demnach

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{q_n}(c - \alpha\eta)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \tilde{Q}_1 + 2 \cdot \tilde{Q}_2^T \cdot (c - \alpha\eta) + (c - \alpha\eta)^T \tilde{Q}_3 (c - \alpha\eta) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2^T \cdot (c - \alpha\eta) + c^T \tilde{Q}_3 c - \alpha c^T \tilde{Q}_3 \eta - \alpha \eta^T \tilde{Q}_3 c + \alpha^2 \eta^T \tilde{Q}_3 \eta \right) \\ &= -2 \tilde{Q}_2^T \eta - 2 c^T \tilde{Q}_3 \eta + 2 \alpha \eta^T \tilde{Q}_3 \eta \\ &= -2 \left( \tilde{Q}_2^T \eta + c^T \tilde{Q}_3 \eta - \alpha \eta^T \tilde{Q}_3 \eta \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \alpha^* &= \frac{Q_2^T \eta + c^T Q_3 c}{\eta^T Q_3 \eta}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Da von einer quadratischen Funktion  $f_{q_n}$  ausgegangen wird, ergibt sich für

$$\frac{\partial w(c)}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_l \\ I \end{pmatrix}, \quad (7.26)$$

wobei  $0_l \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  ein liegender Nullvektor,  $0_s \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  ein stehender Nullvektor und  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Einheitsmatrix der entsprechenden Größe ist. Um die Newton-Richtung  $\eta_N$  zu bestimmen, werden in Gleichung (7.19) das Ergebnis aus Gleichung (7.26) und Gleichung (7.23) eingesetzt. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \eta_N &= \left( 2 \cdot \begin{pmatrix} 0_s & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2^T \\ \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_l \\ I \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0_s & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2^T \\ \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_3 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \\ \eta_N &= \tilde{Q}_3^{-1} \cdot \left( \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3 c \right) = \tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + c. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Weiterhin wird Gleichung (7.27) in Gleichung (7.25) zur analytischen Bestimmung von  $\alpha^*$  eingesetzt. Für eine symmetrische Matrix  $\tilde{Q}_3 = \tilde{Q}_3^T$  ist allgemein bekannt, dass die

inverse Matrix ebenfalls symmetrisch ist und somit  $\tilde{Q}_3^{-1} = \left(\tilde{Q}_3^{-1}\right)^T$  gilt. Für den Nenner in Gleichung (7.25) mit  $\eta = \eta_N$  erhält man dann

$$\begin{aligned}
\eta_N^T \tilde{Q}_3 \eta_N &= \left(\tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + c\right)^T \tilde{Q}_3 \left(\tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + c\right) \\
&= \left(\tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + c\right)^T \left(\tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3 c\right) \\
&= \tilde{Q}_2^T \left(\tilde{Q}_3^{-1}\right)^T \tilde{Q}_2 + c^T \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2^T \left(\tilde{Q}_3^{-1}\right)^T \tilde{Q}_3 c + c^T \tilde{Q}_3 c \\
&= \tilde{Q}_2^T \tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + c^T \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2^T c + c^T \tilde{Q}_3 c \\
&= \tilde{Q}_2^T \tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + 2c^T \tilde{Q}_2 + c^T \tilde{Q}_3 c
\end{aligned} \tag{7.28}$$

und für den Zähler

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_2^T \eta_N + c^T \tilde{Q}_3 \eta_N &= \tilde{Q}_2^T \left(\tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + c\right) + c^T \tilde{Q}_3 \left(\tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + c\right) \\
&= \tilde{Q}_2^T \tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2^T c + c^T \tilde{Q}_3 \tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + c^T \tilde{Q}_3 c \\
&= \tilde{Q}_2^T \tilde{Q}_3^{-1} \tilde{Q}_2 + 2c^T \tilde{Q}_2 + c^T \tilde{Q}_3 c.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Da Zähler und Nenner aus Gleichung (7.29) und Gleichung (7.28) identisch sind, ergibt sich für  $\alpha^* = 1 > 0$ .

## 7.5 Abstiegsverfahren mit optimaler Schrittweite

Mit der Schrittweite  $\alpha^* = 1$  und der Abstiegsrichtung  $\eta_N$  ist diese Methode auch als Newton-Verfahren [23] bekannt und konvergiert für quadratische Funktionen in exakt einem Schritt. Die Optimierungsaufgabe

$$\hat{c} = \arg \min \{f_{q_n}(c)\} = c^0 - \left(\frac{\partial^2 f_{q_n}(c^0)}{\partial c^2}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f_{q_n}(c^0)}{\partial c}, \tag{7.30}$$

mit  $c^0$  eine beliebige Näherungslösung und dem zugehörigen  $w^0 = \left(1 \ (c^0)^T\right)^T$ , liefert einen Schätzwert  $\hat{c}$  für das Optimum  $c^*$ . Um  $\hat{f}_{q_n}$  zu berechnen, wird nur noch  $\hat{w}$  benötigt, welches wieder über  $\hat{w} = \left(1 \ (c^*)^T\right)^T$  gegeben ist. Den geschätzten optimalen Funktionswert  $\hat{f}_{q_n}$  der quadratisch approximierten Funktion  $f(c)$  erhält man dann mit

$$\hat{f}_{q_n} = (\hat{w})^T \cdot Q \cdot \hat{w}. \tag{7.31}$$

Um das  $\hat{c}$  zu bestimmen, wird der im Folgenden vorgestellte Algorithmus 7.2 verwendet. Dieser wurde um einen Fallback-Modus erweitert, der in Abschnitt 8.3 genauer erläutert wird.

**Algorithmus 7.2** Quadratische Optimierung**Funktion** quadOptEingangsdaten:  $Q, s, \check{C}, \check{F}, \rho$ 

```

 $\hat{c} = \arg \min \{F(\check{C})\}$ 
 $\hat{f} = \min \{F(\check{C})\}$ 
 $p_{\min} = \{i \in [1, d] \mid \hat{f} = f(\check{C}_i)\}$  // Spalte des Minimums  $\hat{f}$ 
wenn  $(s == 1)$  {
   $W = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \check{C}^T \end{pmatrix}^T$ 
   $dQ = 2 \cdot \left(\frac{\partial w(c)}{\partial c}\right)^T \cdot Q$  // siehe Gleichung (7.15)
   $ddQ = dQ \cdot \frac{\partial w(c)}{\partial c}$  // siehe Gleichung (7.17)
  wenn  $(ddQ > 0)$  { // positiv definit
     $\hat{c}_{\text{tmp}} = \check{C}_0 - ddQ^{-1} \cdot dQ \cdot W_0$  // siehe Gleichung (7.30)
     $\hat{w} = \begin{pmatrix} 1 & (\hat{c}_{\text{tmp}})^T \end{pmatrix}^T$ 
     $\hat{f}_{qn} = (\hat{w})^T \cdot Q \cdot \hat{w}$  // siehe Gleichung (7.31)
    wenn  $(\|\hat{c}_{\text{tmp}} - \check{C}_d\| < \rho)$  { // Minimum innerhalb von U
       $\hat{c} = \hat{c}_{\text{tmp}}$ 
       $\hat{f} = \hat{f}_{qn}$ 
    }
  }
}

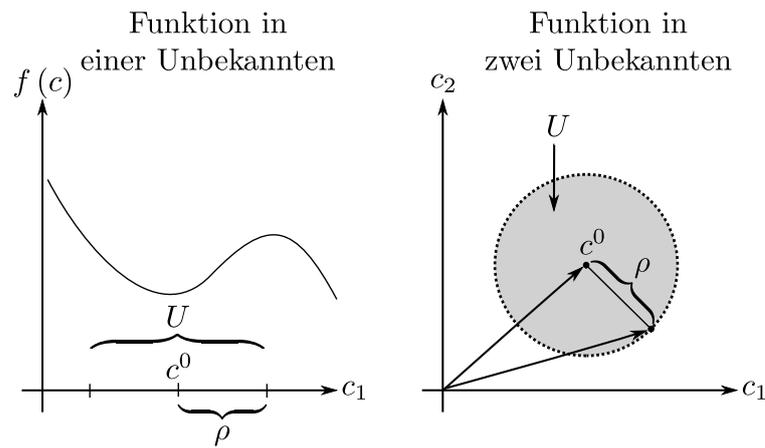
```

Ausgangsdaten:  $\hat{c}, p_{\min}$ 

## 7.6 Wahl der Stützstellen

Wählt man die Stützstellen auf dem Rand von  $U$ , so hängt die Genauigkeit  $\delta$  der Interpolation maßgeblich von der Ausdehnung der Umgebung  $U$  ab. Die Umgebung  $U$  soll im Weiteren über den Radius  $\rho$  um einen zunächst beliebigen Punkt  $c^0$  im Definitionsbereich  $D$  der Funktion festgelegt werden, mit

$$U = \left\{ c \in D \subseteq \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(c - c^0)^2} < \rho \right\}. \quad (7.32)$$



**Abbildung 7.1:** Definition Umgebung (links 1d, rechts 2d)

Abbildung 7.1 zeigt die Umgebung  $U$  einer beliebigen Funktion  $f(c)$  in einer (links) beziehungsweise in zwei (rechts) Unbekannten. Gesucht wird nun eine sinnvolle Verteilung der Stützstellen auf dem Rand der Umgebung, so dass das resultierende LGS eindeutig bestimmbar wird. Dazu sollen diese möglichst unterscheidbar sein. Um eine geeignete Strategie zu entwickeln, muss zunächst die Anzahl der zu bestimmenden Parameter  $d$  aus Gleichung (7.12) mit der Anzahl der Dimensionen  $n$  gegenüber gestellt werden. Der aktuelle Messpunkt  $c^0$  wird als Mittelpunkt in der Approximation berücksichtigt. Dadurch werden vorab exakt  $(d-1)/n$  Evaluierungen pro Dimension benötigt, um die Funktion zu interpolieren. Tabelle 7.1 listet die benötigten Evaluierungen bis zur Dimension  $n = 7$  auf. Daraus lässt sich zunächst intuitiv eine Verteilung auf die einzelnen Dimensionen herleiten.

$n$	$d = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$	$\frac{d-1}{n} = \frac{n+3}{2}$	Verteilung der Stützstellen auf
1	3	2	eine Dimension
2	6	2,5	zwei Dimensionen
3	10	3	1×eine und 1×zwei Dimensionen
4	15	3,5	2×zwei Dimensionen
5	21	4	5×eine Dimension
6	28	4,5	3×zwei Dimensionen
7	36	5	eine und je zwei Dimensionen

**Tabelle 7.1:** Verteilung der Stützstellen

Eine gerade (inklusive  $c^0$  als Mittelpunkt in allen Dimensionen) Anzahl Stützstellen ist nicht äquidistant auf eine Dimension verteilbar. Um diese möglichst gleichmäßig über die Dimensionen zu verteilen können, wurde eine Heuristik entwickelt. Sie enthält drei Fälle zur Verteilung der Stützstellen, die in Tabelle 7.2 angegeben sind.

Fall	Bedingung $k = 0, 1, \dots$	Folgerung	$n_{1d}$ und $n_{2d}$	$\delta_c(\rho)$
1	$n = 4k + 1$ $n = (1, 5, 9, \dots)$	$\frac{n+3}{2}$ pro Dimension verteilbar	$n_{1d} = \frac{n+3}{2}$ $n_{2d} = 0$	$\delta_c(\rho) = \frac{2\rho}{n+3}$
2	$n = 2k$ $(n = 0, 2, 4, \dots)$	$n + 3$ auf $\frac{n}{2} \times$ zwei Dimensionen verteilbar	$n_{1d} = 0$ $n_{2d} = n + 3$	$\delta_c(\rho) = 0$
3	$n = 4k + 3$ $(n = 3, 7, 11, \dots)$	$n + 2$ auf $\frac{n-1}{2} \times$ zwei Dimensionen verteilbar und $n + 1$ auf eine Dimension	$n_{1d} = n + 1$ $n_{2d} = n + 2$	$\delta_c(\rho) = \frac{\rho}{n+1}$

**Tabelle 7.2:** Aufteilung der Stützstellen, abhängig von der Anzahl der Dimensionen

Zunächst soll gezeigt werden, wie die Verteilung im 1. Fall vorgenommen wird. Bei einer Funktion  $f_{q_1}(c) \in \mathbb{R}$  werden laut Tabelle 7.1  $d = 3$  Stützstellen benötigt, wobei  $c^0$  in der Mitte der Umgebung schon evaluiert ist. Es fehlen also noch  $\frac{n+3}{2} \Big|_{n=1} = 2$  Stützstellen, die gemäß Fall 1 aus Tabelle 7.2 äquidistant verteilt werden müssen. Dafür wird  $\delta_c(\rho) = \frac{2\rho}{n+3} = \frac{\rho}{2}$  angenommen und jeweils von  $c^0$  subtrahiert ( $c^{-1}$ ) beziehungsweise zu  $c^0$  addiert ( $c^1$ ). Der linke Graph in Abbildung 7.2 zeigt beispielhaft diese Verteilung. Verallgemeinert müssen  $\frac{n+3}{4}$  Stützstellen links und  $\frac{n+3}{4}$  Stützstellen rechts von  $c^0$  auf der jeweiligen Dimension ausgewertet werden. Fast man die äquidistanten Schritte in einem Vektor

$$\Delta c(\rho) = \left( -\frac{\rho}{2} \quad \dots \quad -\frac{4\rho}{n+3} \quad -\frac{2\rho}{n+3} \quad \frac{2\rho}{n+3} \quad \frac{4\rho}{n+3} \quad \dots \quad \frac{\rho}{2} \right) \in \mathbb{R}^{1 \times n_{1d}} \quad (7.33)$$

zusammen, so können die Stützstellen über die Matrixgleichung

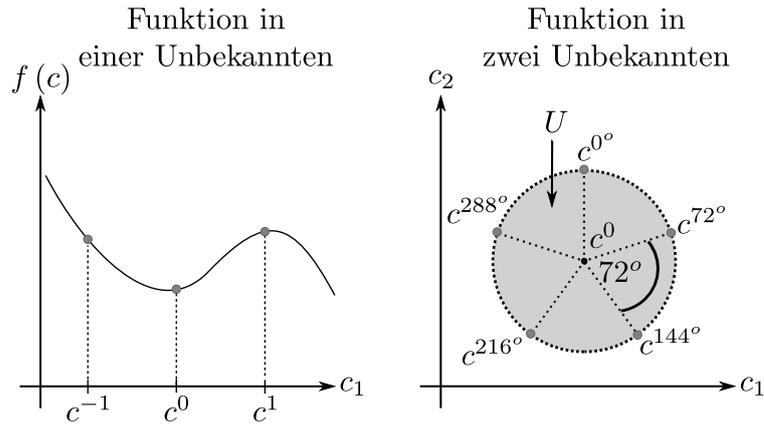
$$\tilde{C} = c^0 \underline{1}^T - \Delta \quad (7.34)$$

berechnet werden. Dabei ist  $\underline{1} = \left( 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \right)^T \in \mathbb{R}^{(d-1) \times 1}$  und

$$\Delta(\rho) = \Delta_c(\rho) = \begin{pmatrix} \Delta c(\rho) & \underline{0}_c & \cdots & \underline{0}_c \\ \underline{0}_c & \Delta c(\rho) & \cdots & \underline{0}_c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0}_c & \underline{0}_c & \cdots & \Delta c(\rho) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (d-1)} \quad (7.35)$$

mit dem Nullvektor  $\underline{0}_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_{1d}}$  gegeben. Die stehenden Vektoren von  $\tilde{c}$  können nun als Evaluierungspunkte genutzt werden.

Soll nun eine Funktion  $f_{q_2}(c) \in \mathbb{R}^2$  quadratisch approximiert werden, so müssen schon  $\frac{n+3}{2} \Big|_{n=2} = 2,5$  Evaluierungspunkte pro Dimension verteilt werden. Weil dies nicht ohne weiteres möglich ist, werden zwei Dimensionen zusammengefasst, auf die die Stützstellen positioniert werden. Da die Umgebung über einen Radius  $\rho$  definiert wird, bietet es sich an, die Stützstellen wie in Abbildung 7.2 äquidistant auf dem Kreisrand anzuordnen. Die



**Abbildung 7.2:** Beispiel zur Verteilung der Stützstellen

Winkeldifferenz  $\Delta\Phi$  zwischen zwei Punkten ergibt sich über den Zusammenhang

$$\delta_\Phi = \frac{2\pi}{n_{2d}}. \quad (7.36)$$

Die Winkel der einzelnen Punkte können über den Zusammenhang  $(\Delta\tilde{\Phi})_i = \delta_\Phi (i - 1)$ ,  $i = 1, \dots, n_{2d}$  berechnet und in einem Hilfsvektor

$$\Delta\tilde{\Phi} = \left( \Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_{n_{2d}} \right)^T \in \mathbb{R}^{n_{2d}} \quad (7.37)$$

zusammengefasst werden. Eine Transformation in kartesische Koordinaten erfolgt dann über die (auf  $\Delta\tilde{\Phi}$  bezogene elementweise) Sinus- und Kosinus-Funktion

$$\Delta\Phi(\rho) = \begin{pmatrix} \rho \cdot \sin(\Delta\tilde{\Phi}) \\ \rho \cdot \cos(\Delta\tilde{\Phi}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times n_{2d}}, \quad (7.38)$$

die dann jeweils auf die zwei aktuell in  $c^0$  betrachteten Dimensionen subtrahiert wird. Auch in diesem Falle kann eine Verallgemeinerung über Gleichung (7.34) vorgenommen werden. Dazu werden die, auf die Winkel bezogenen, äquidistant auseinander liegenden Punkte  $\Delta\Phi(\rho)$  wiederum in der Matrix

$$\Delta(\rho) = \Delta_\Phi(\rho) = \begin{pmatrix} \Delta\Phi(\rho) & \underline{0}_\Phi & \dots & \underline{0}_\Phi \\ \underline{0}_\Phi & \Delta\Phi(\rho) & \dots & \underline{0}_\Phi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0}_\Phi & \underline{0}_\Phi & \dots & \Delta\Phi(\rho) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (d-1)} \quad (7.39)$$

zusammengefasst. Hierbei sei zu beachten, dass die Größe des Nullvektors  $\underline{0}_\Phi \in \mathbb{R}^{2 \times n_{2d}}$  entsprechend angepasst werden muss und  $\Delta\Phi(\rho)$  nun  $n/2$  mal auf der Diagonalen der Matrix  $\Delta(\rho)$  vorkommt.

Zuletzt muss noch der 3. Fall aus Tabelle 7.2 betrachtet werden. Dieser stellt eine Kombination aus den Fällen 1 und 2 dar, wobei die Matrix  $\Delta(\rho)$  wiederum modifiziert werden

muss. Diese ist dann definiert als

$$\Delta(\rho) = \Delta_{\Phi_c}(\rho) = \begin{pmatrix} \Delta_{\Phi}(\rho) & 0 \\ 0 & \Delta_c(\rho) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (d-1)}. \quad (7.40)$$

Die Matrizen  $\Delta_{\Phi}(\rho)$  und  $\Delta_c(\rho)$  haben andere Größen, da  $n_{1d}$  und  $n_{2d}$  laut Tabelle 7.2 für Fall 3. Es gilt nun  $\Delta_{\Phi}(\rho) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (\frac{n^2+n-2}{2})}$  und  $\Delta_c \in \mathbb{R}^{1 \times n+1}$ . Wenn man nun die Dimension der Matrix  $\Delta_{\Phi_c}(\rho)$  betrachtet, so erhält man  $n-1+1 = n$  Zeilen und  $\frac{n^2+n-2}{2} + n + 1 = \frac{n(n+3)}{2} = d-1$  Spalten. Zusätzlich müssen die Nullvektoren in Gleichung (7.40) der Größe entsprechend angepasst werden.

Mit den vorab hergeleiteten Größen wurde ein Algorithmus formuliert, der die Auswahl der Stützstellen in Abhängigkeit der Anzahl der Dimensionen realisiert. Dieser ist in vier Teilalgorithmen aufgeteilt, da verschiedene Funktion mehrfach genutzt werden.

---

### Algorithmus 7.3 Haupt-Algorithmus zur Aufteilung der Stützstellen

---

#### Funktion berechneStützstellen

Eingangsdaten:  $n, \rho, c^0$

```

d = (n+1)(n+2) / 2
wenn (n modulo 2 ≠ 0) und (d modulo 2 == 0) { // 1. Fall
  n1d = (n+3) / 2
  δc = ρ / n1d
  Δ(ρ) =
  Δc(ρ) = berechneDeltaAusC(n, n1d, δc(ρ)) // siehe Algorithmus 7.4
}
sonst wenn (n modulo 2 == 0) { // 2. Fall
  n1d = 0
  n2d = n + 3
  δΦ = 2π / n2d
  Δ(ρ) =
  ΔΦ(ρ) = berechneDeltaAusRhoUndPhi(n, n1d, n2d, n/2, ρ, δΦ) // siehe
  // Algorithmus 7.6
}
sonst { // 3. Fall
  n1d = n + 1
  n2d = n + 2
  δc = ρ / n1d
  δΦ = 2π / n2d
  ΔΦ(ρ) = berechneDeltaAusRhoUndPhi(n, n2d, (n-1)/2, ρ, δΦ)
  Δc(ρ) = berechneDeltaC(n, n1d, δc(ρ))
  Δ(ρ) = ( ΔΦ(ρ)  0
           0      Δc(ρ) )
}
C̃ = c01T - Δ(ρ)

```

Ausgangsdaten:  $\tilde{C}$

---

In Algorithmus 7.3 wird die Auswahl der drei Fälle aus Tabelle 7.2 über Modulo-Opera-

tionen realisiert. Er liefert die Matrix  $\tilde{c}$  aus Gleichung (7.34) die die Auswertepunkte als stehende Vektoren enthält. Auf den Teilalgorithmus, der Zusammensetzen von  $\Delta(\rho)$  aus den Teilmatrizen  $\Delta_{\Phi}(\rho)$  und  $\Delta c(\rho)$  im 3. Fall vornimmt, wurde hier verzichtet, da es sich dabei um eine triviale Kopierfunktion handelt. Der folgenden Algorithmus 7.4 wird für Fall 1 aus Tabelle 7.2 genutzt und ist auch als Funktion mit Ein- und Ausgabeparameter entworfen worden.

---

**Algorithmus 7.4** Berechnung von  $\Delta$ ; Fall 1

---

**Funktion** berechneDeltaAusC

**Eingangsdaten:**  $n, n_{1d}, \delta_c(\rho)$

```

Initialisiere  $\Delta_c(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times n_{1d}}$  als Nullmatrix
 $\Delta c(\rho) = \text{berechneDeltaC}(n, n_{1d}, \delta_c(\rho))$  // siehe Algorithmus 7.5
für  $i = 1$  bis  $n$  {
    für  $j = 1$  bis  $n_{1d}$  {
         $(\Delta(\rho))_{i, (i-1)n_{1d}+j} = (\Delta c(\rho))_j$ 
    }
}

```

**Ausgangsdaten:**  $\Delta_c(\rho)$

---

Um das  $\Delta c(\rho)$  für die Fälle 1 und 3 zu berechnen, wird Algorithmus 7.5 genutzt. Entgegen der in Gleichung (7.33) vorgestellten Formel werden die Elemente nicht von  $-\frac{\ell}{2}$  bis  $\frac{\ell}{2}$  äquidistant in den Vektor  $\Delta c(\rho)$  geschrieben, sondern von  $-\delta_c$  bis  $-\frac{\ell}{2}$  und  $\delta_c$  bis  $\frac{\ell}{2}$ . Dies war algorithmisch einfacher zu realisieren; das Ergebnis änderte sich dadurch nicht!

---

**Algorithmus 7.5** Berechnung von  $\Delta c$ ; Fall 1 und 3

---

**Funktion** berechneDeltaC

**Eingangsdaten:**  $n, n_{1d}, \delta_c(\rho)$

```

Initialisiere  $\Delta c(\rho) \in \mathbb{R}^{1 \times n_{1d}}$  als Nullvektor
für  $i = 1$  bis  $\frac{n_{1d}}{2}$  {
     $(\Delta c(\rho))_i = -i\delta_c(\rho)$ 
     $(\Delta c(\rho))_{\frac{n_{1d}}{2}+i} = i\delta_c(\rho)$ 
}

```

**Ausgangsdaten:**  $\Delta c$

---

Der letzte Teilalgorithmus erzeugt das  $\Delta_{\Phi}(\rho)$  aus Gleichung (7.39). Hierbei wird auf den Hilfsvektor  $\Delta\tilde{\Phi}$  im Algorithmus 7.6 verzichtet, um die Ausführung zu beschleunigen.

---

**Algorithmus 7.6** Berechnung von  $\Delta_\Phi$ ; Fall 2 und 3

**Funktion** berechneDeltaAusRhoUndPhi

**Eingangsdaten:**  $n, n_{1d}, n_{2d}, n_{\max}, \rho, \delta_\Phi$ 

```

Initialisiere  $\Delta\Phi(\rho) \in \mathbb{R}^{2 \times n_{2d}}$  als Nullmatrix
Initialisiere  $\Delta_\Phi(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times (n_{\max} \cdot n_{2d} + n_{1d})}$  als Nullmatrix
für  $i = 1$  bis  $n_{2d}$  {
     $(\Delta\Phi(\rho))_{1,i} = \rho \cdot \sin(\delta_\Phi(i-1))$ 
     $(\Delta\Phi(\rho))_{2,i} = \rho \cdot \cos(\delta_\Phi(i-1))$ 
}
für  $i = 1$  bis  $n_{\max}$  {
    für  $j = 1$  bis  $n_{2d}$  {
         $(\Delta_\Phi(\rho))_{2(i-1)+1, (i-1)n_{1d}+j} = (\Delta\Phi(\rho))_{1,j}$ 
         $(\Delta_\Phi(\rho))_{2(i-1)+2, (i-1)n_{1d}+j} = (\Delta\Phi(\rho))_{2,j}$ 
    }
}

```

**Ausgangsdaten:**  $\Delta_\Phi$ 


---

## 7.7 Berücksichtigung von Messungenauigkeiten

Bei der messtechnischen Erfassung von Stützstellen muss berücksichtigt werden, dass jede Messung mit einem Messfehler  $\sigma$  behaftet ist. Messfehler können zum Beispiel durch thermisches Rauschen, Schrotrauschen oder Fehler durch Messabweichungen des Messgeräts entstehen. Der Schätzwert  $\hat{\sigma}$  für den Messfehler  $\sigma$  kann über eine Messreihe mit  $N$  Messungen stochastisch als Standardabweichung [51, 63]

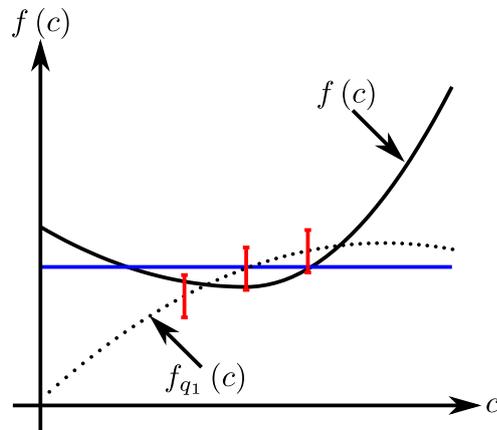
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f_i(c) - \bar{F})^2} \quad (7.41)$$

mit dem empirischen Mittelwert [51, 63]

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(c) \quad (7.42)$$

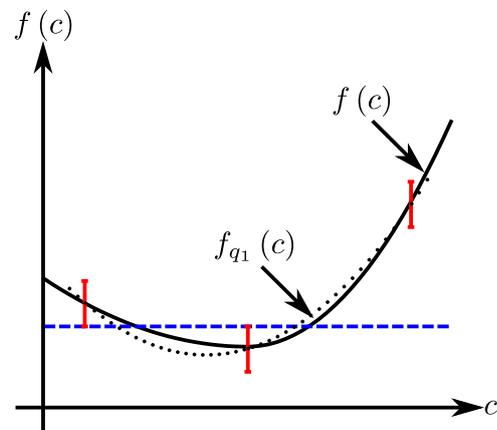
und  $f_i(c^0)$  mit  $i = 1, \dots, N$  Messungen bei  $c$  geschätzt werden. Um eine Stützstelle zu evaluieren, werden  $N$  Messungen mit dem selben Parameter durchgeführt, so dass eine Abschätzung des Standardfehlers möglich wird. Der Standardfehler ist ein Maß für die Streubreite der Messwerte und beschreibt die Genauigkeit zum empirischen Mittelwert  $\bar{F}$  aus Gleichung (7.42). Der Mittelwert  $\bar{F}$  und der Schätzwert  $\hat{\sigma}$  des Messfehlers  $\sigma$  werden online aktualisiert. Zur Datenerfassung wird im Messaufbau das in Abbildung 2.6 gezeigte NI-DAQ USB-6210 verwendet. Dies verfügt pro Kanal über eine Abtastrate von sind 250 kHz. Für die Bestimmung des empirischen Mittelwerts  $\bar{F}$  mit  $N = 50$  Einzelmessungen werden somit 2 ms benötigt. Im folgenden Beispiel soll gezeigt werden, was ein nicht an

den Standardfehler  $\sigma$  angepasster Radius  $\rho$  bewirkt. Abbildung 7.3 zeigt die fehlerhafte Interpolation  $f_{q_1}(c)$  (gepunktet) der Funktion  $f(c)$ . Der Radius  $\rho$  ist somit zu klein gewählt.



**Abbildung 7.3:** Fehlerhafte Interpolation bei zu kleinem Radius  $\rho$

Es wird demnach eine Strategie benötigt, um  $U$  mittels  $\rho$  an die Funktion möglichst optimal anzupassen. Ist die Standardabweichung aus empirischen Messungen bekannt, kann das minimale  $\rho$  durch sukzessive Erhöhung während einer Kalibrierung bestimmt werden. Abbildung 7.4 zeigt die Interpolation  $f_{q_1}(c)$  (gepunktet) bei einem vergrößertem Radius  $\rho$ .



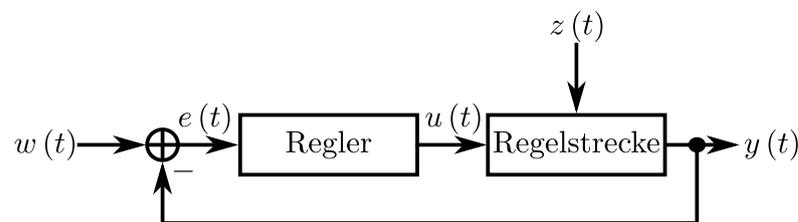
**Abbildung 7.4:** Verbesserter Radius  $\rho$

Ist die Hessematrix aus Gleichung (7.16) negativ definit oder indefinit, so kann dies also ein Hinweis auf einen zu kleinen Radius  $\rho$  sein, da in der Nähe eines Minimums die Hessematrix positiv definit sein muss. Im späteren Reglerentwurf ist für diesen Fall eine alternative Auswahlstrategie erforderlich. Zusätzlich muss der Radius  $\rho$  erhöht werden.

# Entwurf eines Extremwertreglers

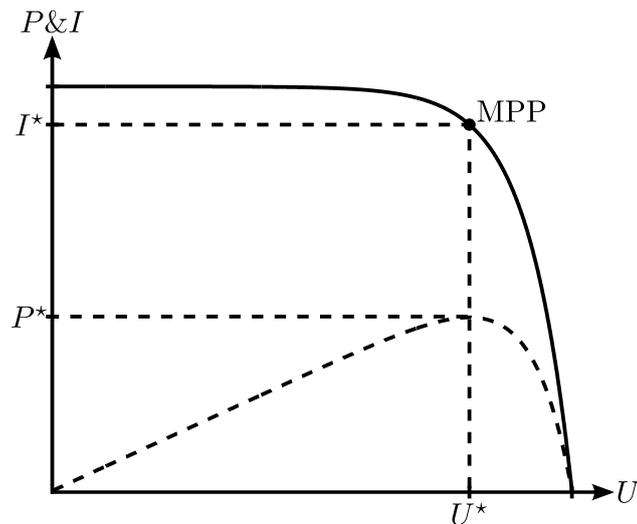
Die Regelung eines Systems auf einen Extremwert ist ein bisher kaum betrachtetes Anwendungsgebiet in der Regelungstechnik. Im Gegensatz zu einem konventionellen Regler, der das betrachtete dynamische System auf einen Soll-Wert regeln und halten soll, wird in der Extremwertregelung die laufende Optimierung einer vorab definierten Zielgröße verfolgt. Dies beinhaltet sowohl das Auffinden als auch das Halten des Optimums bei vorhandener Störgröße  $z(t)$ .

So realisierte zum Beispiel Wiederhold 2011, basierend auf den Theorien von Ariyur, Kartik und Krsti [3], eine „*Regelung abgelöster Strömungen in hoch belasteten Turbomaschinen*“ [84]. Auch Herbrand stützt seinen in [37, 38] entwickelten „*Extremwertregler zur automatischen Strahlführung an einem Linearbeschleuniger*“ auf diese Methode. Bei beiden Reglern wird die in Abbildung 8.1 dargestellte Stellgröße  $u(t)$  mit einem harmonischen Signal  $a \cdot \sin(\omega t)$  überlagert.



**Abbildung 8.1:** Standard-Regelkreis

Bei hinreichend kleinen Zeitkonstanten kann das dynamische System dem angeregten Signal folgen und es ist ein Ausgangssignal  $y(t)$  zu erwarten, welches ebenfalls harmonisch schwingt. Durch Hochpass-Filterung von  $y(t)$  wird der Gleichanteil entfernt und somit kann im weiteren Verlauf auf den noch unbekanntem Gradienten geschlossen werden. Zur



**Abbildung 8.2:** Strom-Spannungskennlinie eines Solarzellen-Arrays nach [43]

Vertiefung seien dazu auf die Arbeiten von Herbrand, Wiederhold und Ariyur et al. verwiesen [3, 37, 38, 84].

Einen völlig anderen Weg gehen sogenannte MPP<sup>1</sup>-Regler. Sie werden benötigt, um die Leistungsabgabe  $P$  eines Solarzellen-Arrays zu optimieren. Es existieren verschiedene Regler-Strategien [8, 27, 43], wobei die P&O<sup>2</sup>- und die InC<sup>3</sup>-Methode am Geläufigsten sind. Abbildung 8.2 zeigt eine typische Strom-Spannungskennlinie eines solchen Arrays. Zusätzlich ist die Leistung  $P(I, U) = I \cdot U$  aufgetragen. Am Punkt  $(I^*, U^*)$  ist  $P(I^*, U^*) = P^*$  maximal, wobei dieser Punkt als MPP bezeichnet wird.

Zunächst wird der Arbeitspunkt  $P^*$  ermittelt, indem die gesamte Kennlinie bezüglich  $U$  durchlaufen und danach das gefundene Maximum eingestellt wird. Durch Abschattung, wie zum Beispiel aufziehende Bewölkung oder Baumschatten, verschiebt sich der MPP des Arrays jedoch, so dass dieser dynamisch nachgeregelt werden muss. Dazu wird periodisch die Spannung um  $\pm \Delta U$  verschoben und somit überprüft, ob sich der MPP insgesamt verschoben hat. Das aktuell beste Resultat wird dann als neuer Arbeitspunkt des Kollektor-Arrays angenommen.

## 8.1 Reglerentwurf mithilfe einer sukzessiven quadratischen Interpolation (SQI)

Der im Folgenden vorgestellte Regler wurde angelehnt an die sukzessive parabolische Interpolation nach Heath [33]. Das Verfahren wurde auf multivariate Funktionen erweitert und in einen geschlossenen Regelkreis eingebettet. Vorteil der modifizierten Methode nach

<sup>1</sup>Maximum Power Point

<sup>2</sup>Perturb and Observe

<sup>3</sup>Incremental Conductance

Heath ist, dass nur eine Funktionsauswertung benötigt wird, um den nächsten geschätzten Kandidaten für ein Optimum zu finden. Bevor der Regler hergeleitet wird, soll zunächst die ursprüngliche Methode vorgestellt werden.

## 8.2 Sukzessive parabolische Interpolation (SPI)

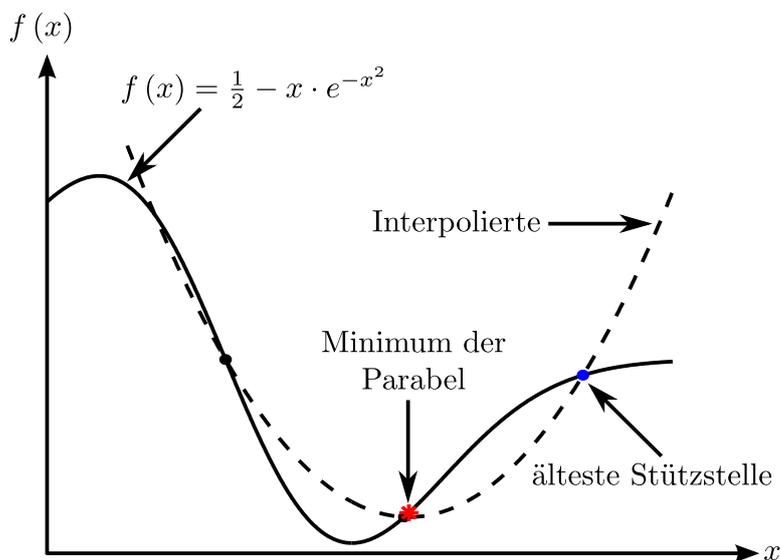
Es sei eine nichtlineare, analytische und univariate Funktion  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, die nach unten beschränkt ist. Zusätzlich seien drei Startpunkte  $(a, b, c) = (a_0, b_0, c_0)$ , mit  $a < b < c$  und  $x^* \in [a, c]$  vorgegeben. So kann das Minimum  $x^* = \arg \min \{f(x)\}$  nach [33, 34] mit dem Minimum

$$\hat{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)^2 [f(b) - f(c)] - (b-c)^2 [f(b) - f(a)]}{(b-a)[f(b) - f(c)] - (b-c)[f(b) - f(a)]} \quad (8.1)$$

der Interpolierten geschätzt werden. Abbildung 8.3 stellt den ersten Iterationsschritt des Verfahrens dar, welches beispielhaft auf die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} - x \cdot e^{-x^2} \quad (8.2)$$

angewendet wurde. Die initialen Startpunkte wurden mit  $(a, b, c) = (0, 1, 2)$  und mit der Auswerte-Reihenfolge  $c, b, a$  festgelegt, so dass  $c$  als erstes ausgewertet wurde und damit der älteste Punkt ist. Im weiteren Verlauf wird der (älteste) Punkt  $c$  verworfen, indem  $c = b$ ,  $b = a$  und  $a = \hat{x}$  gesetzt wird.



**Abbildung 8.3:** Erster Iterationsschritt der sukzessiven parabolischen Interpolation

Für die nächste Interpolation muss nur noch  $f(a)$  neu ausgewertet werden. Das gesamte Iterationsverfahren ist in Algorithmus 8.1 beschrieben. Als Abbruchkriterium dient eine

fest vorgegebene Anzahl  $n$  an Iterationsschritten.

---

**Algorithmus 8.1** Sukzessive parabolische Interpolation
 

---

**Funktion SPI**
**Eingangsdaten:**  $a_0, b_0, c_0, n$ 

 Initialisiere  $a = a_0, b = b_0$  und  $c = c_0$ 

 Evaluiere Startwerte mit  $f_a = f(a), f_b = f(b)$  und  $f_c = f(c)$ 

 für  $i = 1$  bis  $n$  {

$$\hat{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)^2[f(b)-f(c)] - (b-c)^2[f(b)-f(a)]}{(b-a)[f(b)-f(c)] - (b-c)[f(b)-f(a)]}$$

 verwerfe ältesten Punkt mit  $c = b, b = a$  und  $a = \hat{x}$ 

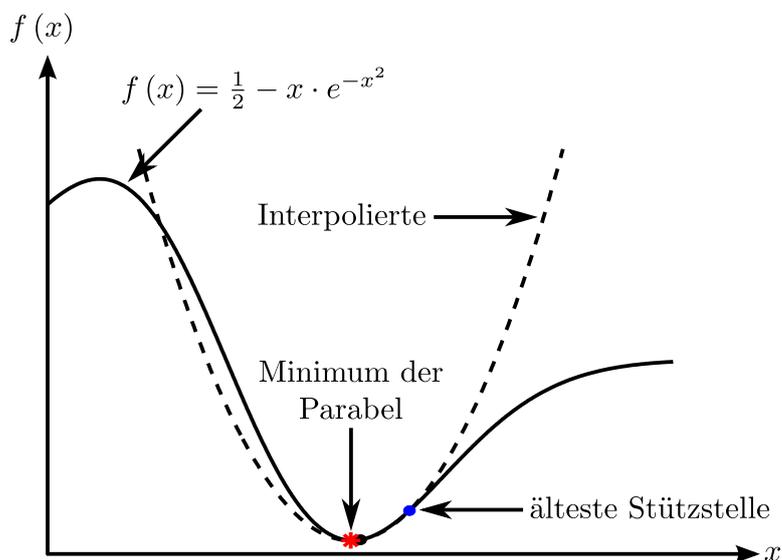
$$f_c = f_b, f_b = f_a \text{ und } f_a = f(a)$$

}

**Ausgangsdaten:**  $\hat{x}$ 


---

Alternativ kann auch der Abstand zwischen alten und neuem Schätzwert  $\hat{x}$  oder aber die Differenz zwischen den letzten beiden Optimalpunkten als Abbruchkriterium genutzt werden. Das Verfahren konvergiert laut Heath super-linear mit einer Konvergenzrate von  $r \approx 1,324$ . Abbildung 8.4 zeigt den Status nach vier Iterationsschritten. Die einzelnen Auswertepunkte haben sich sukzessive dem gesuchten Minimum angenähert. Da weitere Untersuchungen zum SPI-Verfahren nicht Gegenstand dieser Arbeit sind sei für weiterführende Studien auf [33, 34] verwiesen.



**Abbildung 8.4:** Vierter Iterationsschritt der sukzessiven parabolischen Interpolation

### 8.3 Quadratische Interpolation (QI)

Um lokale Informationen über das Kennlinienfeld eines nichtlinearen Systems zu erhalten, muss ein Extremwertregler die Umgebung  $U$  des aktuellen Arbeitspunktes mit einer Rate  $T_A$  hinreichend oft abtasten. Approximiert man das dynamische System um den Arbeitspunkt quadratisch und **nicht sukzessiv**, so werden nach Gleichung (7.12)  $d$  Abtastungen notwendig, um ein Minimum  $\hat{c}$  zu schätzen. Idealerweise befindet sich der Arbeitspunkt  $\hat{c}$  dann im Optimum  $c^*$ . Vorangegangene bzw. zukünftige, geschätzte Arbeitspunkte können eindeutig identifiziert werden, indem diese mit einem Index  $i$  versehen sind. So erhält man für den aktuellen Arbeitspunkt ein  $\hat{c}_i$  und für den nächsten  $\hat{c}_{i+1}$ . Um die Güte des Reglers zu bestimmen, ist es sinnvoll, ein Gütefunktional  $J$  anzugeben. Aus der gegebenen Aufgabenstellung muss intuitiv das Abstandsquadrat zwischen Schätzwert  $\hat{c}$  und tatsächlichen Wert  $c^*$  mit

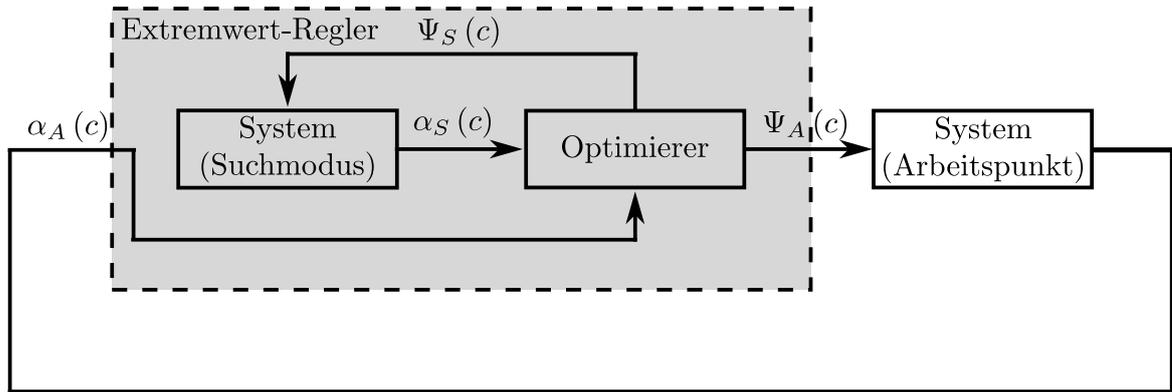
$$J^* = \min \{J(\hat{c}, c^*)\} = \min \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (\hat{c}_i - c_i^*)^2 \right\} \quad (8.3)$$

minimiert werden. Da keinerlei Informationen über  $c^*$  vorliegen, ist das Gütefunktional  $J$  jedoch nicht bestimmbar, so dass später andere Methoden zur Bestimmung der Regelgüte herangezogen werden müssen. Mit Gleichung (8.3) kann das Ziel der Regelung zwar angegeben werden, praktisch überprüfbar ist dies jedoch nicht.

Zunächst wird angenommen, dass eine Rate  $T_A$  existiert, mit der das zu untersuchende dynamische System  $d$ -mal abgetastet werden kann, ohne das sich die Systemzustände zu stark ändern. Zur Bestimmung des nächsten Arbeitspunktes  $\hat{c}_{i+1}$  wird das System aus dem Arbeitsmodus in den Suchmodus überführt. Da aus dem Arbeitsmodus das letzte  $\hat{c}_i$  als Startwert für die nächste Optimierung bekannt ist, gilt nun  $c^0 = \hat{c}_i$ . Im Suchmodus werden die Stützstellen  $\tilde{C}_i = \tilde{C}$ , die sich mit Gleichung (7.34) aus Abschnitt 7.6 ergeben, am System über den Stellvektor evaluiert. Die Messstellen werden in  $\tilde{F}$  zusammengefasst, indem die einzelnen stehenden Vektoren in  $\tilde{C}_i$  über

$$\tilde{F} = \tilde{\alpha}_S(\tilde{C}_i) = f(\tilde{C}_i) \quad (8.4)$$

sukzessive auf den Eingang des Systems gegeben und über die Messeinrichtung erfasst werden. Die Funktion  $f(c)$  ist weiterhin analytisch nicht beschreibbar, so dass das System, wie in Abschnitt 2.3 vorgestellt, als Blackbox aufgefasst werden muss.



**Abbildung 8.5:** System mit quadratischer Interpolation

Diese werden dann mit der Gleichung (7.14) aus Abschnitt 7.2 durch ein quadratisches Modell gemäß Gleichung (7.9) approximiert und mit der in Abschnitt 7.3 hergeleiteten Methode optimiert. Befindet sich das mit Gleichung (7.30) gefundene  $\hat{c}$  innerhalb der Umgebung  $U$  (siehe Abschnitt 7.6), so wird der neue Arbeitspunkt mit  $\hat{c}_{i+1} = \hat{c}$  festgelegt. Liegt es jedoch außerhalb von  $U$ , so muss  $\rho$  erhöht und durch einen Fallback-Modus ein neuer Arbeitspunkt geliefert werden. Vergleicht man die tatsächlich gemessenen Messpunkte über

$$\hat{c}_{\text{Fb}} = \arg \min \left\{ \left( \check{F} \quad f(\hat{c}_i) \right) \right\}, \quad (8.5)$$

so kann ein Kandidat  $\hat{c}_{\text{Fb}}$  identifiziert werden, der bis zur nächsten Iteration als Arbeitspunkt  $\hat{c}_{i+1} = \hat{c}_{\text{Fb}}$  im Fallback-Modus ausreicht. Diese Form der schrittweisen Suche wurde in ähnlicher Form schon 1961 durch Hooke und Jeeves vorgestellt [42] und zählt zu den Direct-Search Methoden.

Ein Nachteil dieser Methode wird sofort ersichtlich, wenn die Dimension der Stellgröße  $c$  berücksichtigt wird. Bei einem  $c \in \mathbb{R}^2$  werden schon fünf Messpunkte angefahren, bevor ein neuer Arbeitspunkt  $\hat{c}_{i+1}$  bestimmt ist. Während sich der Regler im Suchmodus befindet, kann nicht sichergestellt werden, dass der Signalpegel  $\alpha_S(c)$  ausreicht, um eine qualitativ hochwertige Schwingungsmessung vorzunehmen. Mit steigender Dimension erhöht sich zusätzlich die Verweildauer im Suchmodus. Beispielsweise werden bei  $c \in \mathbb{R}^7$  35 Messpunkte ausgewertet. Nimmt man an, dass sich die Zeitkonstanten des dynamischen Systems nicht verändern, muss die Rate  $T_A$  soweit angepasst werden, dass im Suchmodus weiterhin ein quasi-statisches System betrachtet wird. Die Abtastgeschwindigkeit des im Abschnitt 2.3 vorgestellten Systems ist jedoch durch das Stellglied begrenzt. Das SLM<sup>4</sup> verfügt über eine Umschaltfrequenz von 60 Hz. Somit kann theoretisch mit einer maximalen Rate von  $T_{A_{\text{max}}} = 16,6 \text{ ms}$  abgetastet werden. Dadurch ergibt sich eine Dauer von  $T_{\text{Opt}} \approx 0,58 \text{ s}$  pro Optimierungsschritt in sieben Dimensionen. Für die eigentliche Messung, das Erfassen der Oberflächen-Schwingungen, steht weniger Zeit zur Verfügung. Diese Nachteile führten zu den Überlegungen, dass Verfahren sukzessiv aufzubauen, wie es auch schon Heath vorgeschlagen hat.

<sup>4</sup>Spatial Light Modulator

## 8.4 Sukzessive quadratische Interpolation

Abweichend zu Heaths' Methode werden nicht nur Paraboloiden sondern insgesamt quadratische Funktionen im  $\mathbb{R}^n$  betrachtet. Auch kennt die Methode von Heath keine Schrittweiten-Regelung, da diese implizit durch den Algorithmus vorgegeben ist. Störeinflüsse auf die zu optimierende Funktion werden hingegen überhaupt nicht berücksichtigt. Diese Nachteile werden mit dem folgenden Konzept beseitigt.

Damit der Regler das Optimum finden kann, sei zunächst einmal angenommen, das sich der aktuelle Arbeitspunkt  $\hat{c}_0 = c^0$  schon in der Nähe des Minimums befindet. Dies kann durch die in Kapitel 5 vorgestellten Algorithmen sichergestellt werden. Im ersten Schritt wird der Regler initialisiert.

Dazu werden vorab die Parameter  $\rho_{\min}$  und  $\rho_{\max}$ , die einen minimalen und maximalen Radius der Umgebung  $U$  definieren, festgelegt. Durch technische Beschränkungen im Messprozess ist  $\rho_{\max}$  so zu wählen, dass der auszuwertende Messpunkt nicht zu weit vom aktuellen Arbeitspunkt entfernt ist. Für das vorgestellte Vibrometer gilt für den Mess-Spot, dass dieser sich nicht mehr als eine halbe Spot-Breite vom eigentlichen Messpunkt entfernen darf. Analog werden auch die Auswirkungen auf Fokus und Form beschränkt. Die Messwerterfassung (im vorliegenden System mittels NI-DAQ USB-6210) wiederum limitiert  $\rho_{\min}$ , da die Messwerte üblicherweise mit einem Rauschen (z.B. thermisches Rauschen, Schrotrauschen) beaufschlagt sind. Wie schon in Abschnitt 7.7 diskutiert, definiert daher das  $\rho_{\min}$  eine minimale Strukturbreite, in der einzelne Messwerte noch unterscheidbar bleiben. Zur Bestimmung der Stützstellen in der Umgebung  $U$  wird jedoch nicht das aktuelle  $\rho_i$  genutzt, sondern ein über die Anzahl der bisher erfolgten Optimierungsschritte (Iterationen)  $i$  berechneter Mittelwert

$$\bar{\rho} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \rho_k. \quad (8.6)$$

Dies hat den Vorteil, dass sich bei kurzzeitigen Pegelschwankungen der Radius nicht sprunghaft ändert und die Umgebung  $U$  mit einem an das System angepassten Radius  $\bar{\rho}$  bestimmt wird.

Die Matrix  $\check{C}$  sammelt die schon evaluierten Werte im Algorithmus und wird initialisiert mit  $\check{C} = \begin{pmatrix} \check{C}_0 & \hat{c}_0 \end{pmatrix}$ , mit  $\check{C}_0 = \check{C}$  und  $\hat{c}_0 = c^0$  aus Gleichung (7.34), indem  $\check{C}$  mit  $\check{F} = \begin{pmatrix} f(\check{C}_0) & f(\hat{c}_0) \end{pmatrix}$  ausgewertet und zusammengefasst wird. Nun erfolgt erstmalig die Bestimmung des Schätzwerts  $\hat{c}_1$  mit  $\bar{\rho} = \rho = \rho_{\min}$ , welche in drei mögliche Szenarien unterteilt werden muss und in Tabelle 8.1 dargestellt wird.

Szen.	$Q_n > 0$ ?	$\hat{c} \in U$ ?	$\hat{c}_{i+1} = ?$	$\rho$
1	ja	ja	$\hat{c}$ aus Gl. (7.30)	verkleinern
2	ja	nein	$\hat{c}_{\text{Fb}}$ aus Gl. (8.5)	vergrößern, $\Leftrightarrow \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \times \hat{c}_i$ auf Rand von Umgebung $U$
3	nein	-	$\hat{c}_{\text{Fb}}$ aus Gl.(8.5)	vergrößern, $\Leftrightarrow \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \times \hat{c}_i$ auf Rand von Umgebung $U$

**Tabelle 8.1:** Bestimmung des Schätzwerts  $\hat{c}$

Zur Bestimmung der nächsten Schätzung  $\hat{c}_{i+1}$  werden um die aktuelle Schätzung  $\hat{c}_i$  die zugehörigen Stützstellen  $\tilde{C}_i$  mit neuem  $\bar{\rho}$  aus Gleichung (8.6) generiert. Der älteste Messpunkt in  $\check{C}$  wird mit dem passenden Gegenstück aus  $\tilde{C}_i$  ersetzt. Ist zum Beispiel der erste stehende Vektor in  $\check{C}$  am ältesten, so wird dieser durch den ersten Vektor aus  $\tilde{C}_i$  ersetzt. Es wird somit bei jedem Optimierungsschritt je ein Messpunkt in  $\check{C}$  ersetzt, so dass alle Messpunkte im Verlauf des Algorithmus stetig (sukzessive) aktualisiert werden. In Algorithmus 8.2 ist das vorgestellte Verfahren in Pseudo-Code verfasst.

**Algorithmus 8.2** Extremwertregelung**Funktion** Extremwertregelung**Eingangsdaten:**  $n, n_{1d}, n_{2d}, n_{\max}, \rho, \delta_\Phi$ 

```

Initialisiere  $\check{C}, \check{F}, \hat{c}_0$ 
 $i_\rho = 0$ 
regelungAktiviert = wahr
solange (regelungAktiviert) {
  für  $j = 1$  bis  $d - 1$  {
    // neue Stützstelle hinzufügen
     $\check{C}_i = \text{berechneStützstellen}(n, \bar{\rho}, \hat{c}_i)$  // siehe Algorithmus 7.3
     $\check{C}_j = (\check{C}_i)_j$ 
     $\check{F}_j = f\left(\left(\check{C}_i\right)_j\right)$ 
     $i = i + 1$ 

    // Bestimmung des Optimums aus  $\check{C}$  und  $\check{F}$ 
     $[Q, s] = \text{quadApprox}(\check{C}, \check{F})$  // Status :  $s$ 
     $[\hat{c}_i, m, p_{\min}] = \text{quadOpt}(Q, s, \check{C}, \check{F}, \bar{\rho})$  // Modus :  $m$ 
    // Index im Fallback-Modus:  $p_{\min}$ 

     $\check{C}_d = \hat{c}_i$ 
     $\check{F}_d = f(\check{C}_d)$ 
    wenn ( $m == 1$ ) {
      wenn ( $p_{\min} < d - 1$ ) {
         $i_\rho = i_\rho + 1$ 
      }
    }
    sonst {
      wenn ( $\|\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1}\| > \bar{\rho} \wedge p_{\min} < d$ ) {
         $i_\rho = i_\rho + 1$ 
      }
    }
    wenn ( $i_\rho > \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ ) {
      wenn ( $\rho_i < \rho_{\max}$ ) {
         $\rho_i = \rho_{\max}$ 
         $i_\rho = 0$ 
      }
    }
    sonst {
       $\rho_i = \rho_{\min}$ 
    }
     $\bar{\rho} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \rho_k$ 
  }
}

```

**Ausgangsdaten:**  $\Delta_\Phi$

## 8.5 Beispiel zum Fallback-Modus

Im Folgenden wird der Algorithmus an einem Beispiel erläutert. Als Testfunktion wurde die Himmelblau-Funktion, welche schon in Abschnitt 4.1 mit Gleichung (4.9) definiert wurde, genutzt. Diese wurde derart modifiziert, dass sie sich mit dem Winkel  $\varphi$  um den Rotationspunkt  $P_{rz}$  dreht und somit ein driftendes Minimum simuliert. Weiterhin wurde ein Rauschterm  $R(c)$  hinzugefügt, um eine reale Messung so gut wie möglich zu nachzubilden. Daraus ergibt sich

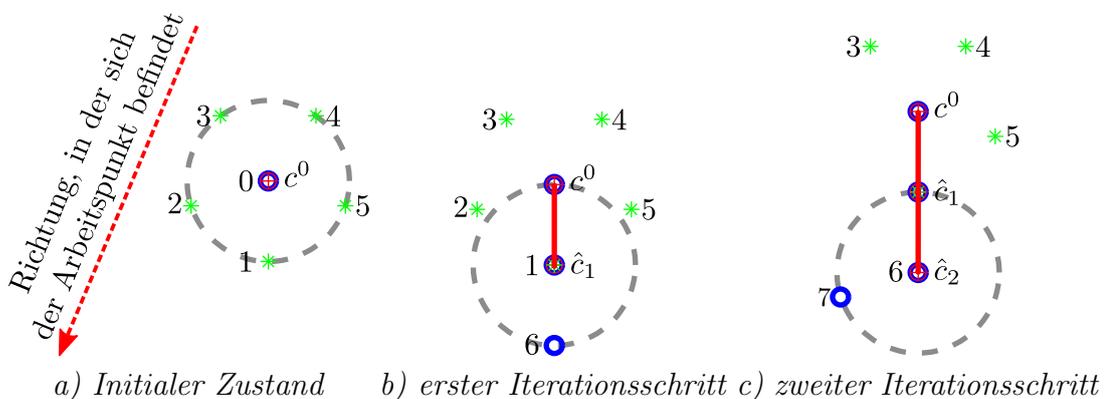
$$f(c) = ((c_1 - \Delta c_1)^2 + (c_2 - \Delta c_2) - 11)^2 + ((c_1 - \Delta c_1) + (c_2 - \Delta c_2) - 7)^2 + R(c). \quad (8.7)$$

Das Rotationszentrum befindet sich bei  $P_{rz} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}^T$ , so dass

$$\Delta c_f = \begin{pmatrix} \Delta c_1 & \Delta c_2 \end{pmatrix}^T = P_{rz} - \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}^T \quad (8.8)$$

gilt. Dabei ist  $r$  der Radius, mit dem sich die Funktion um den Punkt  $P_{rz}$  dreht. Im vorliegenden Beispiel wurde mit einem  $r = 2$  getestet. Weiterhin hat sich die Funktion bei jedem zweiten Iterationsschritt um  $\Delta\varphi = 1^\circ$  weiter gedreht, so dass  $\varphi = \varphi + \Delta\varphi$  gilt. Der Rauschterm  $R(c)$  ist für dieses Beispiel zu Null gesetzt, wird aber später in Abschnitt 8.8 diskutiert.

Die Abbildung 8.6a) stellt den initialen Zustand des Regelalgorithmus dar. Darin legen die Ziffern 1 bis 5 die Reihenfolge der Funktionsauswertungen  $f_i$  fest und nummerieren diese gleichzeitig eindeutig. Das quadratisch geschätzte Minimum  $\hat{c}$  befindet sich jedoch außerhalb der Umgebung  $U$ , welche durch den Kreis gekennzeichnet ist, so dass nach Tabelle 8.1 der Fallback-Modus genutzt werden muss. Dieser liefert als Schätzung  $\hat{c}_{FB}$  den Messwert  $\hat{c}_1 = f_1$ . Es wird also im ersten Iterationsschritt eine neue Umgebung  $U$  um Messwert 1 (jetzt  $\hat{c}_1$ ) aufgebaut und die Stützstelle aus  $\tilde{C}_1$  ausgewertet, die der Stützstelle des ältesten Messwerts (hier auch Messwert 1) entspricht.



**Abbildung 8.6:** Initialisierung sowie Iterationsschritte eins und zwei des Algorithmus

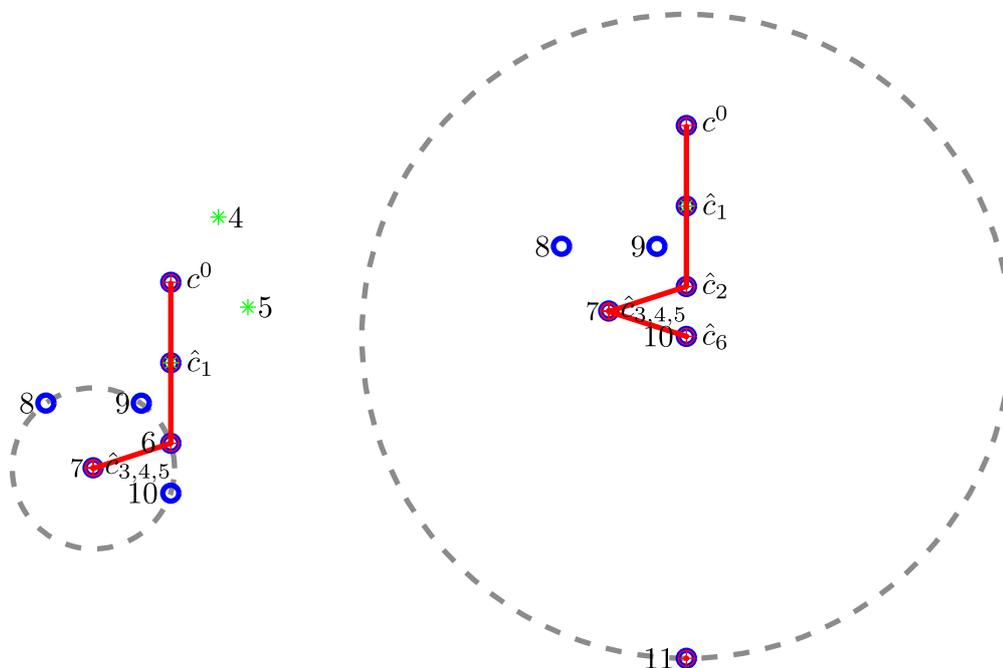
Die quadratische Approximation im zweiten Iterationsschritt liefert wieder keine Lösung, so dass wiederum der Fallback-Modus genutzt werden muss. Diesmal liefert dieser den Messwert 6 als optimalen Kandidaten ( $\hat{c}_2$  in Abbildung 8.6c).

Der Algorithmus wird in den Abbildungen 8.7a) und b) fortgesetzt. Es ist zu erkennen, dass die Auswertungen (blaue Kreise) der Stützstellen auf dem Rand der Umgebung  $U$  im Uhrzeigersinn erfolgen. Die Iterationen 3 und 4 (das entspricht den Messpunkten 8 und 9) liefern keine Verbesserung des Schätzwertes. Das heisst, die Werte an den Punkten 8 und 9 sind größer als am Punkt 7, womit dieser als aktuelles Minimum  $\hat{c}_{3,4,5}$  erhalten bleibt. Erst mit der zehnten Messung konnte das aktuelle Minimum verbessert werden.

Tabelle 8.1 gibt für das Szenario 2 und 3 an, dass der Radius  $\rho$  vergrößert werden muss, wenn  $\lceil \frac{d}{2} \rceil \times$  der Fallback-Modus genutzt wurde.

Die Vergrößerung des Radius  $\rho$  ist vergleichbar mit einer Erhöhung der Schrittweite in anderen Algorithmen. Dies soll sicherstellen, dass der Algorithmus nicht zu langsam konvergiert. Die Erhöhung soll dann erfolgt, wenn gerade die Hälfte der für eine quadratische Approximation benötigten Evaluationen ein Minimum auf dem Rand geliefert haben. Dies ist ein Hinweis, dass der Radius  $\bar{\rho}$  aktuell zu klein gewählt wurde. Andererseits erlaubt die Heuristik in einem gewissen Rahmen Ausreißer aufgrund von Rauschen im Messprozess.

Im fünften Iterationsschritt lagen die Minimas  $\lceil \frac{d}{2} \rceil = 3$ -mal auf dem Rand der Umgebung  $U$ , so dass der Radius auf  $\rho = \rho_{\max}$  verändert wurde und zu einem vergrößertem  $\bar{\rho}$  im 6. Iterationsschritt (Abbildung 8.7) führt.



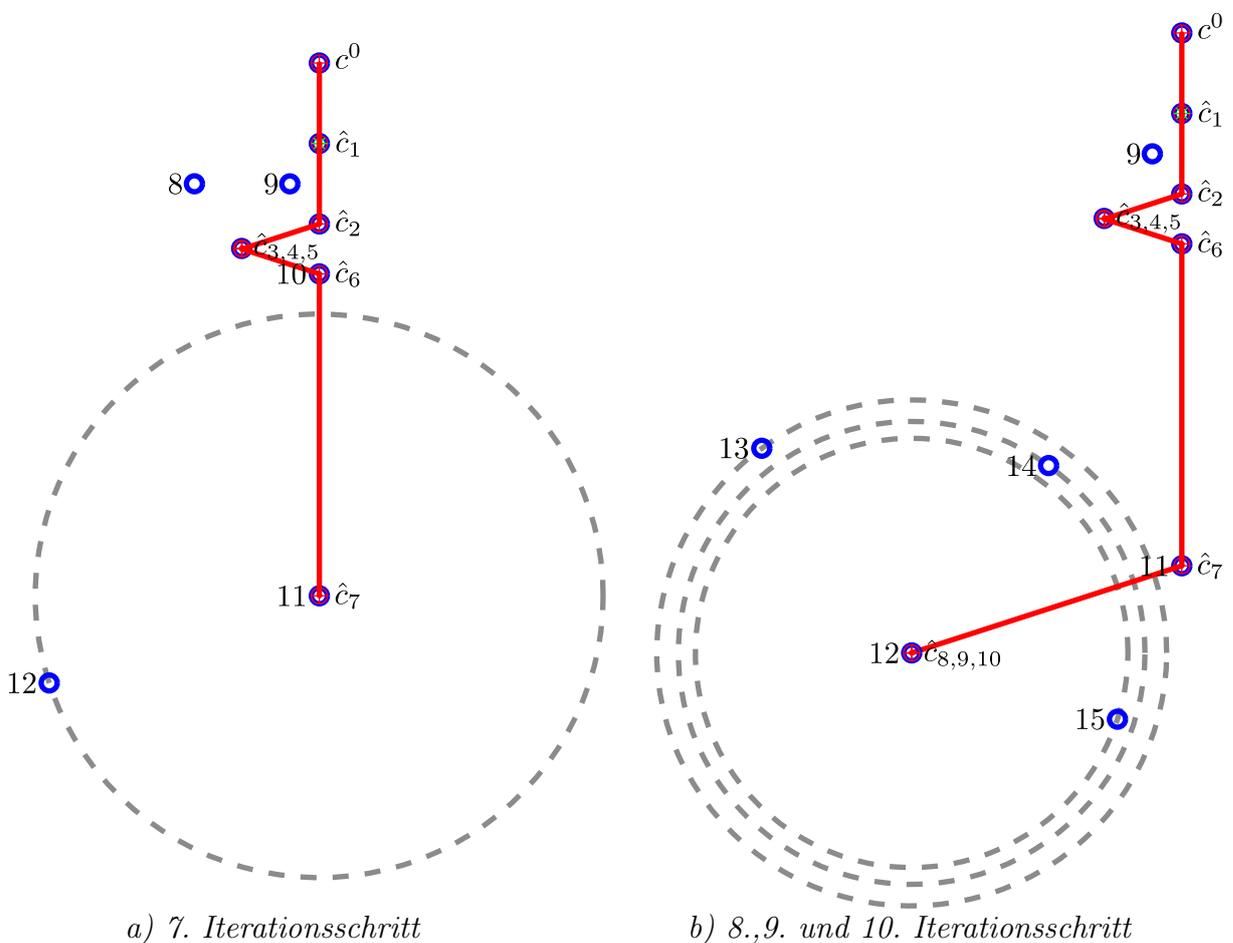
a) 3. - 5. Iterationsschritt

b) 6. Iterationsschritt

**Abbildung 8.7:** Iterationsschritte 3 - 5 des Algorithmus

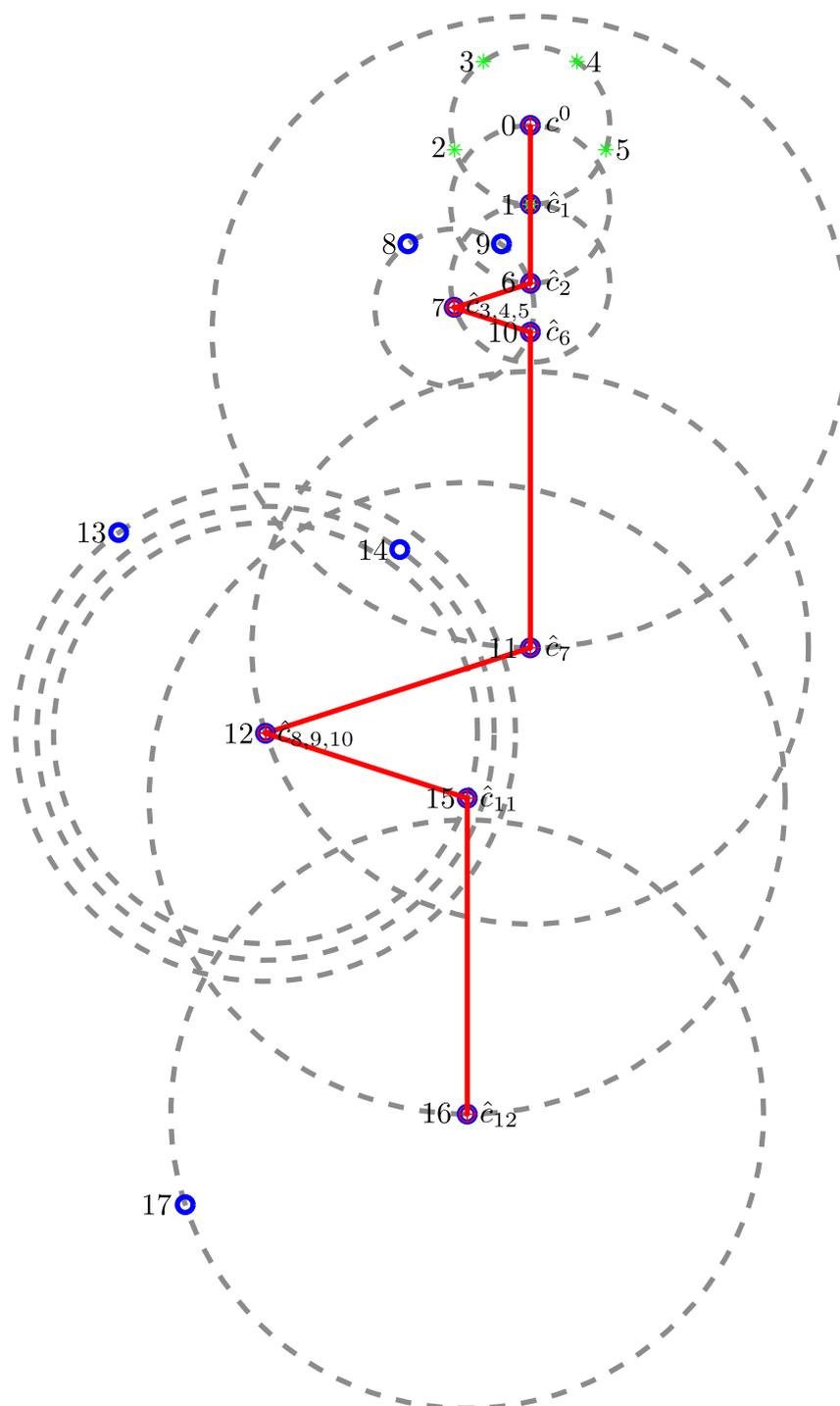
Der Radius wird in der darauf folgenden Iteration auf  $\rho = \rho_{\min}$  zurück gesetzt, um im

weiteren Verlauf den mittlere Radius  $\bar{\rho}$  wieder sukzessive zu verringern. Damit wird sichergestellt, dass der Regler später dem System mit möglichst optimalen  $\bar{\rho}$  folgen kann. Im Idealfall konvergiert  $\bar{\rho}$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\rho} = \rho_{\min}$ . Ist  $\rho_{\max}$  mit einer entsprechenden Toleranz gewählt, so können nun auch die Abtastschritte während der eigentlichen Messung von Oberflächenschwingungen mit genutzt werden. In Abbildung 8.8b) ist die sukzessive Reduktion des Radius  $\bar{\rho}$  sehr gut zu erkennen, da das Minimum für 3 Schritte am Messpunkt 12 verbleibt. Weiterhin zeigt Abbildung 8.8b) die eigentliche Methodik des Verfahrens. Wenn im weiterem Verlauf für die Evaluierung der Messpunkte 15, 16 und 17 ebenfalls  $f_{15,16,17} > \hat{c}_8$  gelten sollte, so wären hinreichend viele unabhängige Gleichungen vorhanden, um das LGS aus Gleichung (7.14) zu lösen und die quadratische Approximation würde ein Modell liefern, welches ein Minimum in der Umgebung  $U$  prediziert.



**Abbildung 8.8:** Iterationsschritte 7 - 10 des Algorithmus

Im vorliegenden Beispiel galt für Messwert 15 jedoch  $f_{15} < \hat{c}_{8,9,10}$ . Zusätzlich wird der Radius  $\bar{\rho}$  in der zwölften Iteration wieder erhöht. Um den Algorithmus in Gänze zu verfolgen enthält die Abbildung 8.9 enthält noch einmal alle bisherigen Iterationsschritte, die ergänzend in Tabelle 8.2 detailliert aufgelistet sind. Der Fallback-Modus verschiebt den Arbeitspunkt so lange in Richtung Minimum, bis eine quadratische Approximation um einen Schätzwert erfolgen kann. Diese Methode kann man, analog zu dem von Hooke und Jeeves vorgestellten Verfahrens [42], als Tasten und Voranschreiten bezeichnen.



**Abbildung 8.9:** 12 Iterationsschritte auf der sich lateral bewegendenden Himmelblau-Funktion

$i$	Messpunkt	$\text{in } ^\circ$	$i_\rho \rightarrow \rho$ im nächsten Schritt vergrößern?	$\bar{\rho}$	$\hat{c}_i$	$\hat{c}_{i+1}$	Anzahl linear unabhängiger Gleichungen
0	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4,9 \end{pmatrix}$	-	0 $\rightarrow$ nein	0,1	$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,9 \end{pmatrix}$	6
1	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,8 \end{pmatrix}$	0°	1 $\rightarrow$ nein	0,1	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,8 \end{pmatrix}$	6
2	$\begin{pmatrix} -1,0951 \\ 4,7691 \end{pmatrix}$	72°	2 $\rightarrow$ nein	0,1	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,0951 \\ 4,7691 \end{pmatrix}$	5
3	$\begin{pmatrix} -1,1539 \\ 4,85 \end{pmatrix}$	144°	2 $\rightarrow$ nein	0,1	$\begin{pmatrix} -1,0951 \\ 4,7691 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,0951 \\ 4,7691 \end{pmatrix}$	5
4	$\begin{pmatrix} -1,0363 \\ 4,85 \end{pmatrix}$	216°	2 $\rightarrow$ nein	0,1	$\begin{pmatrix} -1,0951 \\ 4,7691 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,0951 \\ 4,7691 \end{pmatrix}$	5
5	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,7382 \end{pmatrix}$	288°	3 $\rightarrow$ ja	0,1	$\begin{pmatrix} -1,0951 \\ 4,7691 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,7382 \end{pmatrix}$	5
6	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,3382 \end{pmatrix}$	0°	1 $\rightarrow$ nein	0,4	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,7382 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,3382 \end{pmatrix}$	5
7	$\begin{pmatrix} -1,3329 \\ 4,23 \end{pmatrix}$	72°	2 $\rightarrow$ nein	0,35	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4,3382 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,3329 \\ 4,23 \end{pmatrix}$	5
8	$\begin{pmatrix} -1,5176 \\ 4,4843 \end{pmatrix}$	144°	2 $\rightarrow$ nein	0,3143	$\begin{pmatrix} -1,3329 \\ 4,23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,3329 \\ 4,23 \end{pmatrix}$	5
9	$\begin{pmatrix} -1,1639 \\ 4,4626 \end{pmatrix}$	216°	2 $\rightarrow$ nein	0,2875	$\begin{pmatrix} -1,3329 \\ 4,23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,3329 \\ 4,23 \end{pmatrix}$	5
10	$\begin{pmatrix} -1,0793 \\ 4,1476 \end{pmatrix}$	288°	3 $\rightarrow$ ja	0,2667	$\begin{pmatrix} -1,3329 \\ 4,23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,0793 \\ 4,1476 \end{pmatrix}$	5
11	$\begin{pmatrix} -1,0793 \\ 3,7476 \end{pmatrix}$	0°	1 $\rightarrow$ nein	0,4	$\begin{pmatrix} -1,0793 \\ 4,1476 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,0793 \\ 4,1476 \end{pmatrix}$	5

Tabelle 8.2: Übersicht über die ersten 12 Iterationsschritte des Algorithmus

## 8.6 Beispiel zur quadratischen Approximation

Das Beispiel aus dem vorherigen Abschnitt 8.5 nutzte bisher nur eine Variation des Hooke-Jeeves Verfahren. Dieser Abschnitt zeigt die Fortführung des Algorithmus mit insgesamt 150 Iterationsschritten und ist in Abbildung 8.10 dargestellt. Um den Verlauf des Algorithmus besser zu erkennen, wurde auf das Einzeichnen der Umgebung  $U$  verzichtet. Der rote Pfad verbindet nacheinander die einzelnen geschätzten Minimas. Das Ende des schwarzen Kreisbogens (rechts unten in der Abbildung 8.10) kennzeichnet die aktuelle Position des tatsächlichen Minimums, welches sich im Verlauf der Regelung stetig fortbewegt hat. Sobald die Regelung einen Arbeitspunkt  $\hat{c}_i$  gefunden hat, welches sich hinreichend nah am tatsächlichen Minimum befindet, erfolgt die Schätzung durch quadratische Approximation. Durch die Driftbewegung des optimalen Arbeitspunkts ordnet der Regler die Position der Messpunkte schlauchförmig um den sich bewegenden Arbeitspunkt an.

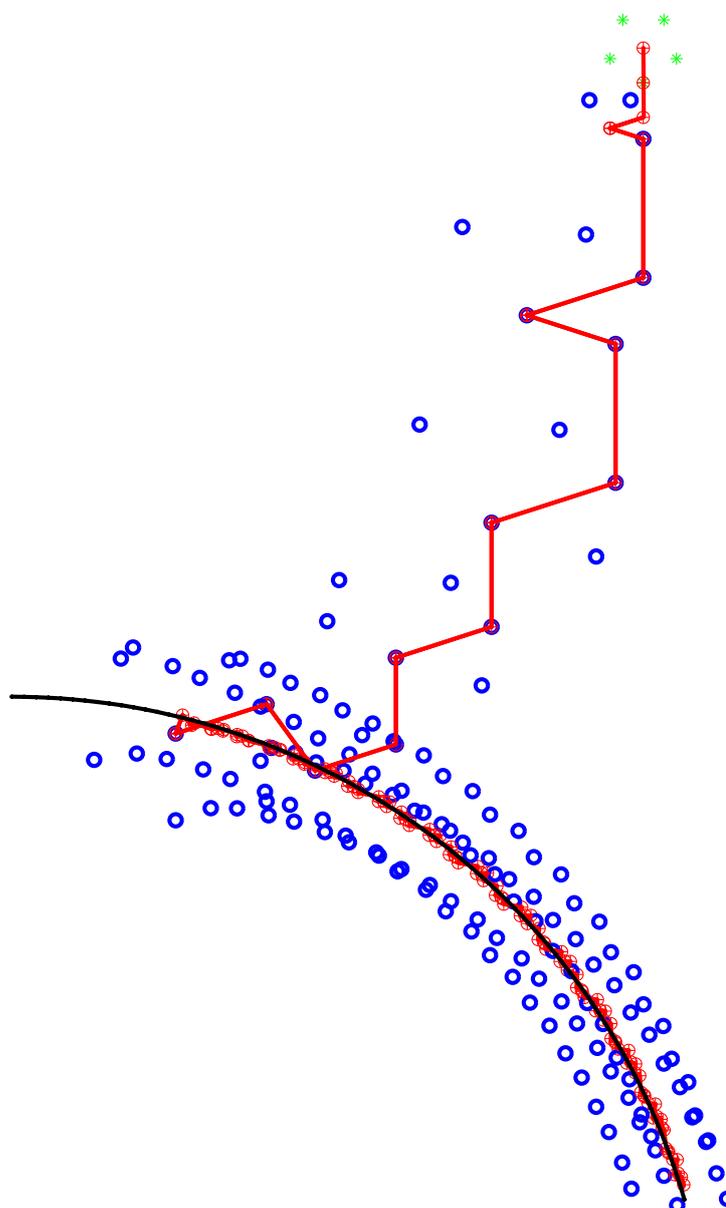


Abbildung 8.10: 150 Iterationsschritte am Beispiel der Himmelblau-Funktion

Sind die Messungen mit starken Rauschen belegt, so konvergiert  $\bar{\rho}$  zu einem größeren mittleren Radius als bei geringen Rauschverhalten (siehe Abschnitt 8.7). Durch die Konzeptionierung des Reglers wird  $\bar{\rho}$  somit dynamisch an das Systemverhalten angepasst. Dies ist in Abbildung 8.10 daran zu erkennen, dass der Radius sich immer weiter reduziert und der Schlauch sich um den bewegenden Arbeitspunkt zusammen zieht.

Wie sich  $\bar{\rho}$  über die Zeit entwickelt ist im Graph in Abbildung 8.11 an dem grün gestrichelten Verlauf ersichtlich. Zusätzlich ist noch der genutzte Modus (quadratische Approximation: 0, Fallback-Modus: 1) blau gepunktet im Graphen eingezeichnet. In schwarz ist die Entfernung zum analytischen Minimum aufgetragen.

Zu Beginn der Regelung ist ein Einschwingverhalten von  $\bar{\rho}$  zu erkennen, welches nach dem Auffinden eines guten Arbeitspunkts  $\hat{c}_i$  abklingt und in ein monoton fallendes Verhalten übergeht. Nach ca.  $i = 35$  Iterationsschritten ist der Abstand zwischen  $|\hat{c}_i - c_i^*| < \varepsilon$ . Der Regler folgt nun  $c_i^*$  mit einer Genauigkeit von  $\varepsilon$ .

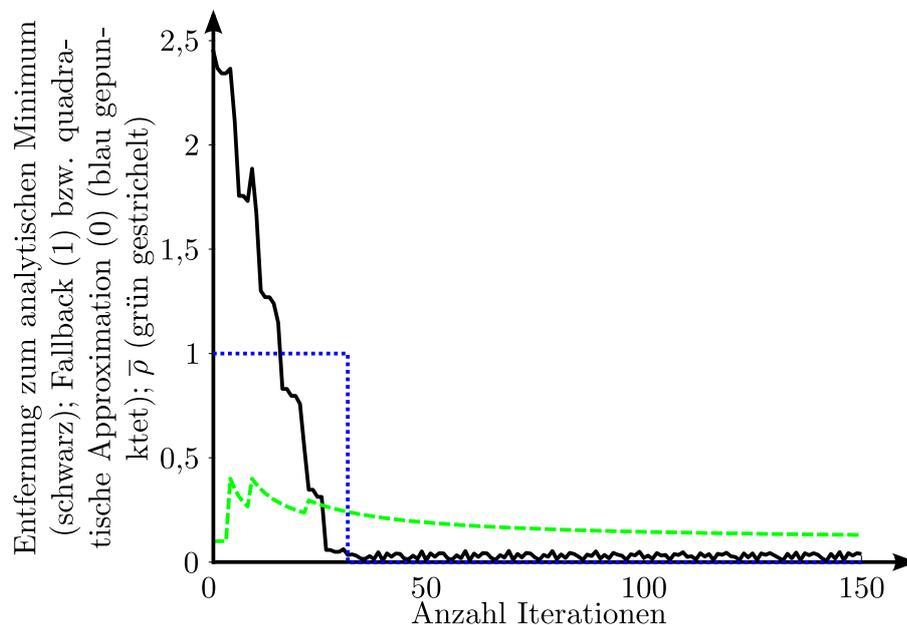


Abbildung 8.11: Auswertung der 150 Iterationsschritte

## 8.7 Beispiel der quadratischen Approximation bei rauschbehafteter Zielfunktion

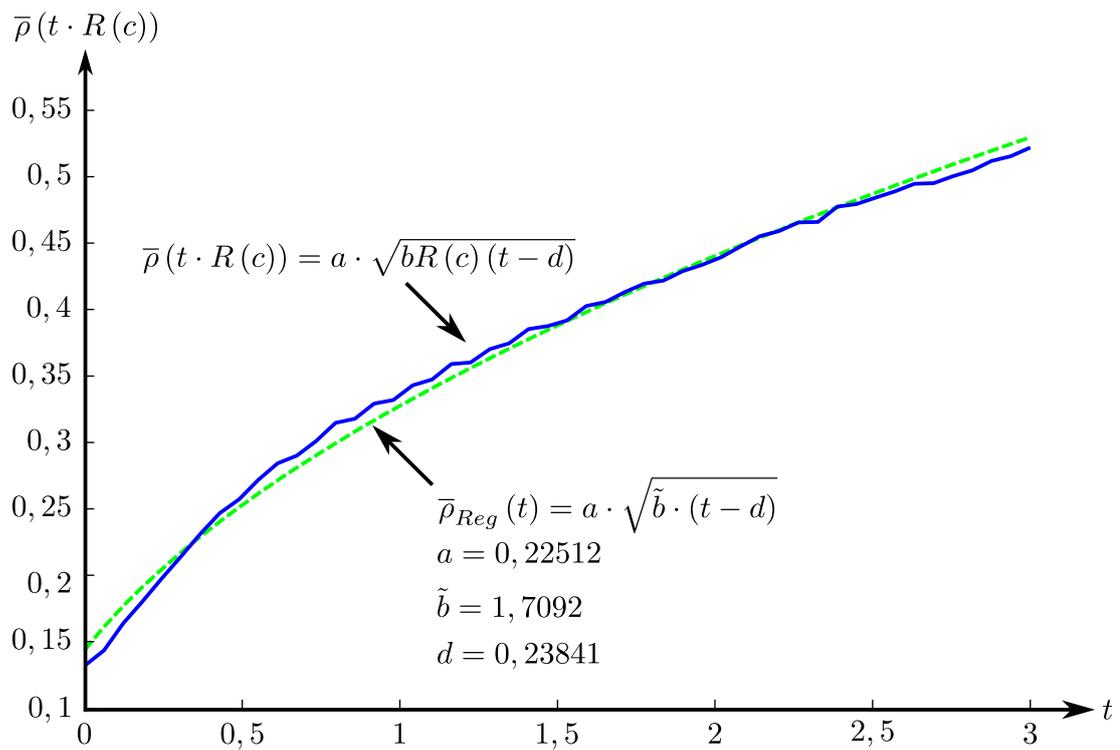
In realen Systemen sind Messwerte immer mit einem additiven Rauschen behaftet. Diese können zum Beispiel durch thermische Bewegungen der Elektronen in der Messschaltung verursacht werden. In den voran gegangenen Abschnitten 8.5 und 8.6 ist in dem Beispiel ein Rauschterm  $R(c) = 0$  angenommen worden. Nun soll überprüft werden inwiefern ein Rauschterm  $R(c) \neq 0$  das Verhalten des Reglers verändert. Der Term  $R(c)$  wurde über einen Zufallszahlengenerator simuliert, der weißes Rauschen mit Werten aus dem Intervall  $I_R = [-1, 1]$  erzeugt, so dass man für die Fouriertransformierte  $\mathcal{F}\{R(c)\} = \text{const.}$  erhält.

Um das Verhalten von  $\bar{\rho}$  bei unterschiedlichen Rauschniveaus statistisch zu betrachten, wurden 100 Durchläufe (Regelung der sich lateral bewegenden Himmelblau-Funktion mit je 300 Iterationsschritten) pro Rauschniveau durchgeführt und davon je der Mittelwert gebildet. Die verschiedenen Rauschniveaus wurden durch einen multiplikativen Faktor  $t$  mit  $t \cdot R(c)$  realisiert. Dabei wurde  $t = [0, 3]$  beginnend bei  $t = 0$  mit einer Schrittweite von  $\Delta t = 0,0612$  sukzessive erhöht. Die Auswertung der statistischen Untersuchung (blau) in Abbildung 8.12 zeigt die Entwicklung von  $\bar{\rho}(t \cdot R(c))$  bei steigendem Rauschniveau, wobei  $\bar{\rho}(t \cdot R(c))$  über nichtlineare Regression (grün gestrichelt) als

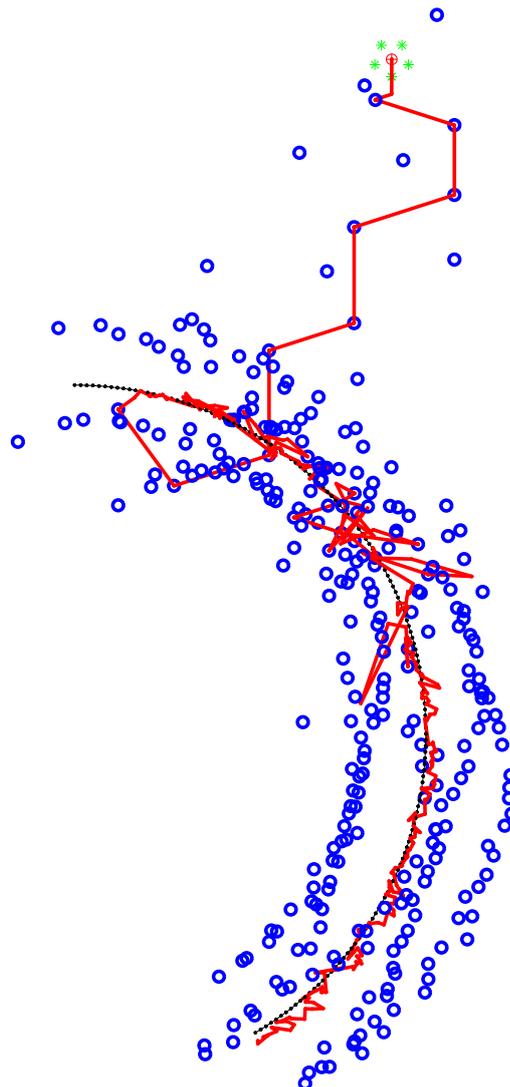
$$\bar{\rho}(t \cdot R(c)) = a \cdot \sqrt{bR(c)(t-d)} \quad (8.9)$$

identifiziert werden konnte. Abbildung 8.13 zeigt beispielhaft das Verhalten des Reglers mit  $t = 2$ . Verglichen mit dem Verlauf in Abbildung 8.10 ist zu erkennen, dass der Radius  $\bar{\rho}$ , der die Auswertestellen schlauchförmig um das analytische Minimum anordnet, erhöht ist. Die zeitliche Entwicklung von  $\bar{\rho}$  ist zusätzlich in Abbildung 8.14 aufgetragen. Ist das Signal mit additiven Rauschen behaftet, so verlängert sich der Einschwingvorgang von  $\bar{\rho}$  und konvergiert erst nach circa 250 Iterationen. Während des Einschwingvorgangs wechselt der Regler auch häufig zwischen quadratischer Approximation und dem Hooke-Jeves basierten Fallback-Modus. Erst nach dem Einschwingen wird ausschließlich die quadratische Approximation genutzt.

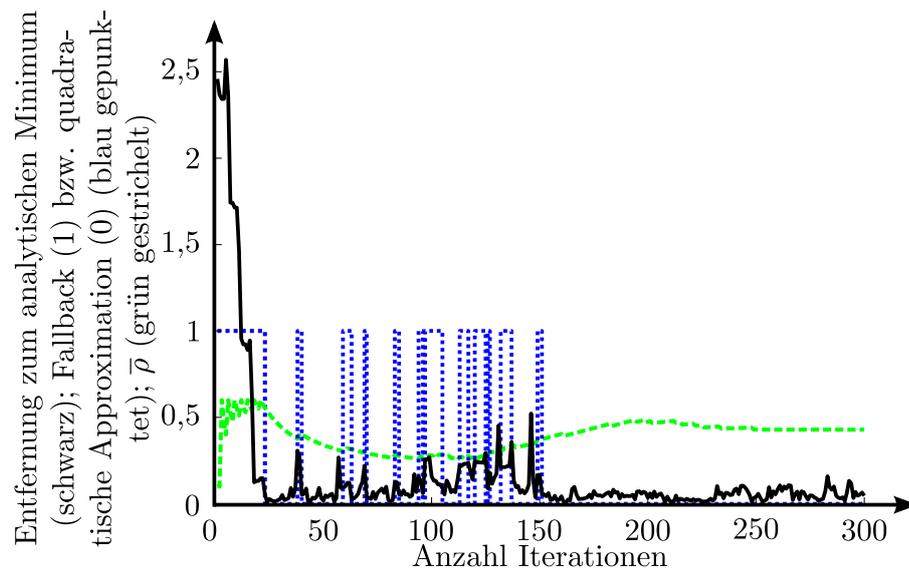
Ein vergleichbares Verhalten wird auch durch die Erhöhung der Änderungsrate pro Iterationsschritt  $\Delta\varphi$  oder, äquivalent, die Verringerung der Abtastrate  $T_A$  erreicht. Daraus ergibt sich, dass  $T_A \propto \frac{1}{\Delta\varphi}$  gilt. Wird  $T_A$  zu klein gewählt, kann der Regler also nicht mehr dem Minimum folgen.



**Abbildung 8.12:** Verlauf von  $\bar{\rho}(t \cdot R(c))$  für  $t = 0, \dots, 3$  mit Schrittweite  $\Delta t = 0,0612$



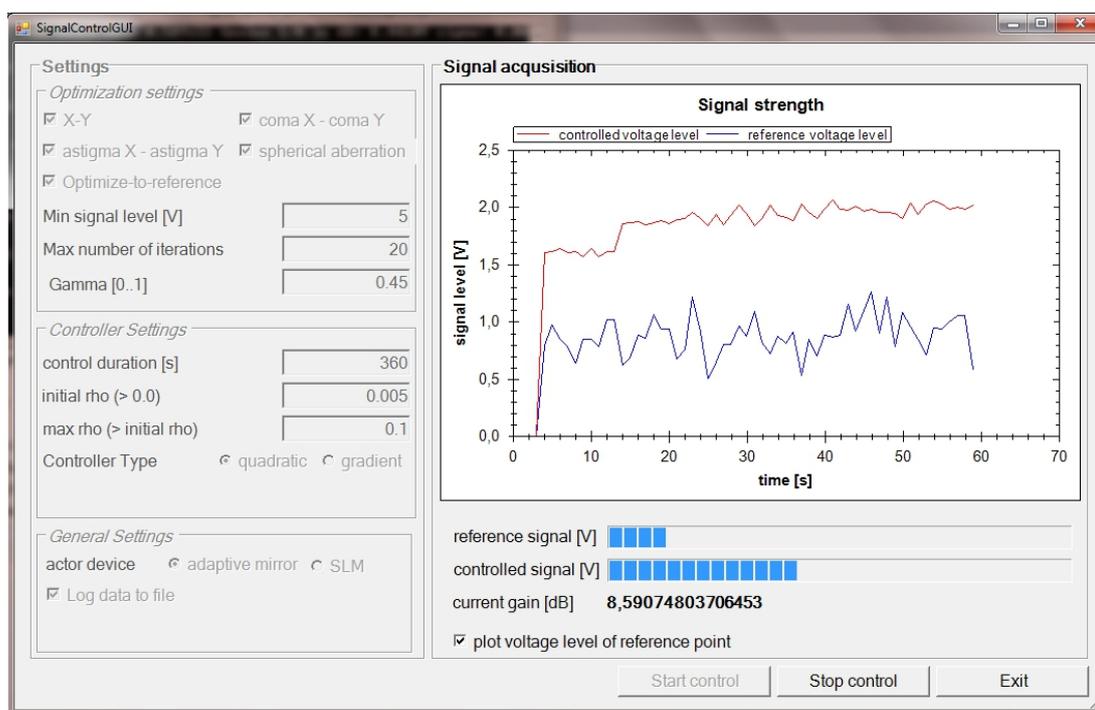
**Abbildung 8.13:** 300 Iterationsschritte am Beispiel der Himmelblau-Funktion mit  $t = 2$  (zusätzliches additives Rauschen)



**Abbildung 8.14:** Auswertung der 300 Iterationsschritte (zusätzliches additives Rauschen)

## 8.8 Validierung des Regler-Konzepts

Um das Regelkonzept zu validieren, wurde eine Benutzeroberfläche entworfen. Diese wurde in Visual Studio 2010 mit der Programmiersprache C++ erstellt und ist 8.15 zu sehen. Die Benutzeroberfläche ermöglicht es, den unregelmäßigen (reference) Signalpegel direkt im laufenden Betrieb mit dem geregelten Signalpegel zu vergleichen. Dadurch konnten verschiedene Tests am Vibrometer mit adaptiver Optik durchgeführt werden. Einerseits sollte untersucht werden, ob der Regler mit dem gegebenen Stellglied genügend schnell nachstellen konnte, um den optimalen Arbeitspunkt zu folgen. Die Abtastgeschwindigkeit war hierbei das maßgebliche Kriterium. Andererseits wurde überprüft, welche Parameterkombinationen sinnvoll zur Regelung einsetzbar sind. Dazu wurden Messreihen für die Referenzeinstellung (original Messpunkt ohne Optimierung und Regelung)  $V_{\text{Ref}}(k \cdot T_A)$  und Messreihen mit den optimierten / geregelten Einstellungen  $V_{\text{Opt}}(k \cdot T_A)$  und der Abtastgeschwindigkeit  $T_A$  erfasst.



**Abbildung 8.15:** Grafische Benutzeroberfläche zur Regler-Validierung

Da der optimale Arbeitspunkt nicht analytisch berechnet werden konnte, musste ein Vergleichskriterium geschaffen werden. Dazu wurde zwischen dem optimierten Arbeitspunkt und dem Referenzpunkt (initial eingestellter Messpunkt vor der statischen Optimierung) hin und her geschaltet. Die Abtast-Geschwindigkeit des Reglers wurde dadurch reduziert, was jedoch in Kauf genommen werden musste, um beurteilen zu können, ob der Regler auch im laufenden Betrieb die geforderten Kriterien erfüllen konnte. Die Benutzeroberfläche in Abbildung 8.15 enthielt dazu ein spezielles Steuerelement (plot voltage level of reference point), das die Zu- und Abschaltung des Referenzpunkts ermöglichte. Bei späteren Schwingungsmessungen müssen der optimierte Arbeitspunkt und der Referenzpunkt entkoppelt werden, was durch die Abschaltung der Messung des Referenzpunkts ermöglicht wird.

## 8.9 Regler-Verifizierung bei Nutzung von Doppel- und Einzelparameter

Die Parameter X und Y, die die laterale Verschiebung auf der Mesoerfläche beschreiben, sind zu einem Doppelparameter zusammen gefasst. Das selbe gilt für die Parameter Astigma X, Astigma Y und Coma X, Coma Y. Einzig die spärische Aberration wird als Einzelparameter betrachtet. Der Referenz-Algorithmus ist so ausgelegt, dass Doppel- und Einzelparameter (siehe Tabelle 8.3) zur Optimierung und Regelung hinzu genommen oder weg gelassen werden können. In Tabelle 8.3 sind zusätzlich für die folgenden Messungen

Einzel- bzw. Doppelparameter	mittlerer Gewinn [dB]	$\Delta V_{\text{Ref}}$	$\Delta V_{\text{Opt}}$	zugehörige Auswertung
X-Y	0,20304	0,27882	0,34039	Abbildung 8.16
Astigma X - Astigma Y	0,1024	0,25596	0,28916	Abbildung 8.17
Coma X - Coma Y	0,89645	0,28812	0,51866	Abbildung 8.18
spärische Aberration	0,16947	0,30761	0,45263	Abbildung 8.19

**Tabelle 8.3:** Übersicht der betrachteten Parameter und Zuordnung der Auswertung

die mittleren Gewinne, das  $\Delta V_{\text{Ref}}$ , welches als

$$\Delta V_{\text{Ref}} = \max \{V_{\text{Ref}}(k \cdot T_A)\} - \min \{V_{\text{Ref}}(k \cdot T_A)\} \quad (8.10)$$

definiert ist, und das  $\Delta V_{\text{Opt}}$ , das äquivalent zu Gleichung (8.10) definiert ist, aufgeführt. Das Verhältnis  $\Delta V_{\text{Opt}}/\Delta V_{\text{Ref}}$  liefert ein Maß für die Stabilisierung, die der Regler realisiert. Ist das Verhältnis  $\Delta V_{\text{Opt}}/\Delta V_{\text{Ref}} < 1$  konnte der Regler die Signalschwankungen reduzieren, was zusätzlich zu einem stabilisierten Signalpegel führte.  $\Delta V$  wird im weiteren Verlauf auch als Schwankungsbreite des Signalpegels bezeichnet.

Die Fragestellung, die in diesem Abschnitt beantwortet werden soll, ergibt sich aus der Anforderung einer möglichst hohen Abtastgeschwindigkeit  $T_A$ . Kann ein Doppel- oder Einzelparameter ausreichen, um den Signalpegel ausreichend gut zu optimieren und dann zu regeln? Wenn nein, welche Parameter kombiniert man sinnvollerweise, um den Signalpegel bestmöglich zu erhöhen?

Dazu wurde nacheinander jeder Doppel- bzw. Einzelparameter statisch optimiert (siehe Kapitel 5) und anschließend zwischen 100 und 300 s geregelt. Für den Regler wurde nach ersten Tests ein  $\rho_{\min} = 0,01$  und aufgrund der Parameterbeschränkungen  $\rho_{\max} = 0,8$  gewählt.

In den Abbildungen 8.16 - 8.19 sind exemplarisch Auswertungen des geregelten Systems mit den verschiedenen Parametern dargestellt. Sie wurden auf einer stark streuenden, gekrümmten Oberfläche durchgeführt, die eine häufige Applikation in der Vibrometrie darstellt. Für die ersten Analysen wurde die Oberfläche noch nicht mit einer Schwingung angeregt, da das Finden geeigneter Parameter im Fokus der Untersuchungen stand. In den folgenden Abbildungen ist der Signalpegel ohne Regelung am Referenzpunkt in blau und mit Regelung in rot abgebildet. Der Standardfehler, der aus jeder Messung mit insgesamt je  $N = 20$  Einzelmessungen (siehe Gleichung (7.42)) ist in grün dargestellt. Zusätzlich ist jeweils in blau und rot gestrichelt der zugehörige Mittelwert zum Referenz- und optimierten Signal aufgetragen.

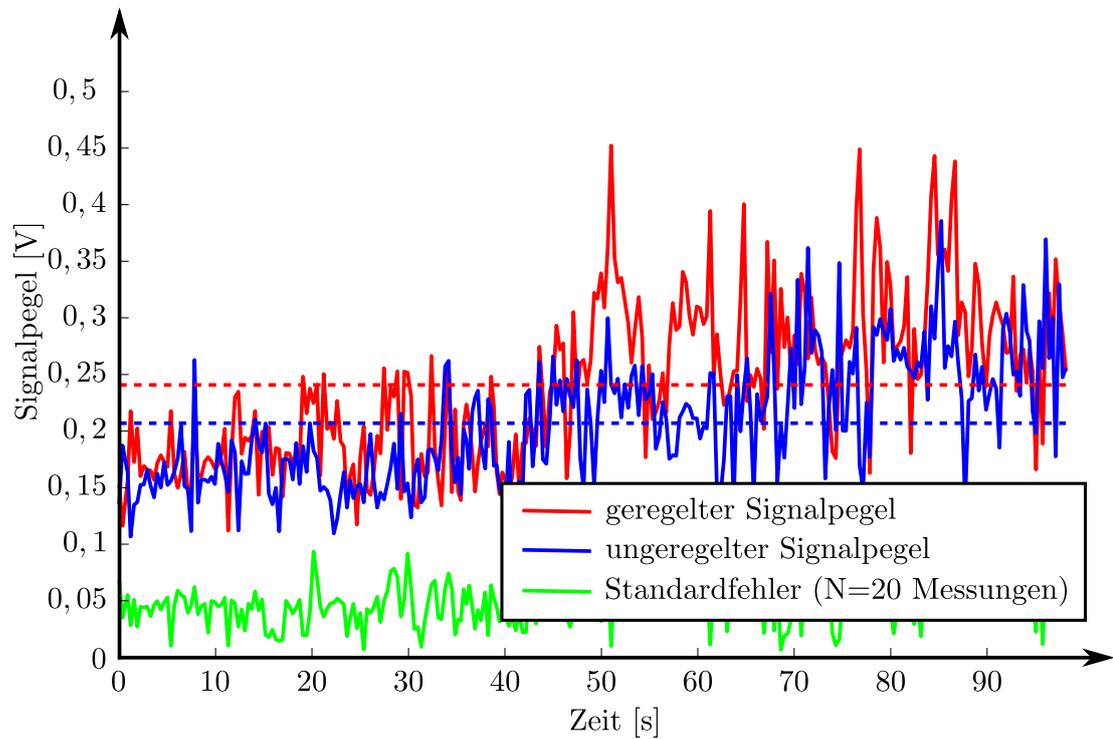


Abbildung 8.16: Auswertung des Reglers für Doppelparameter „X-Y“

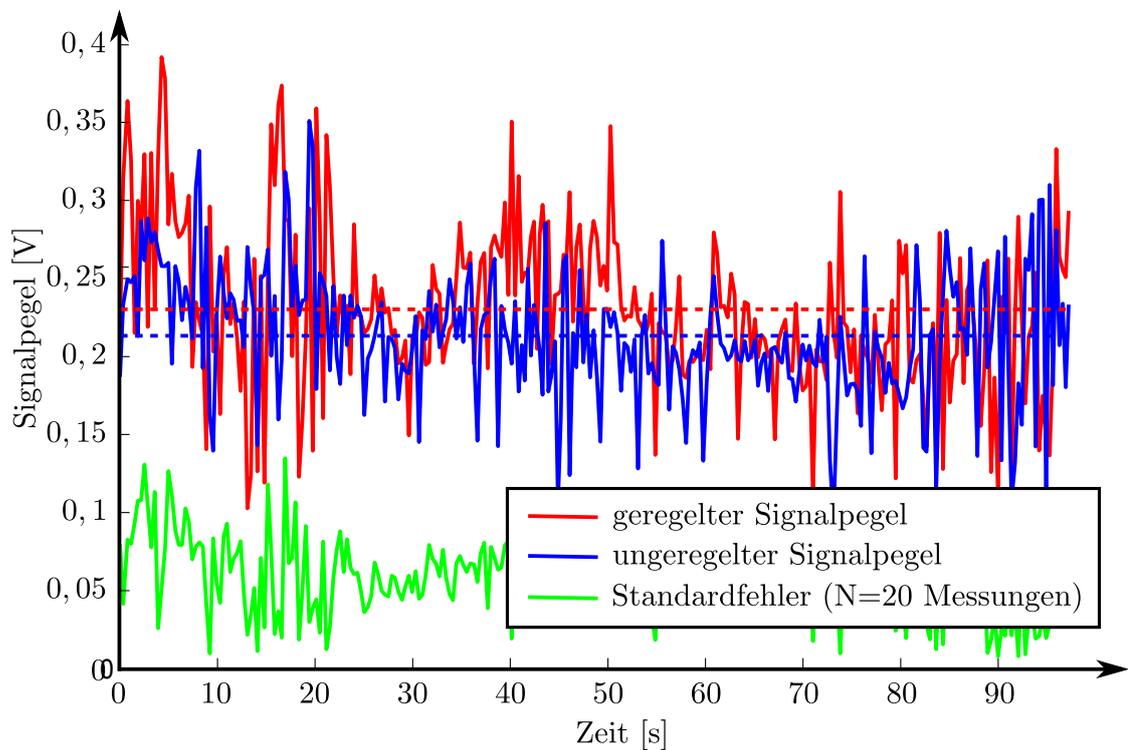
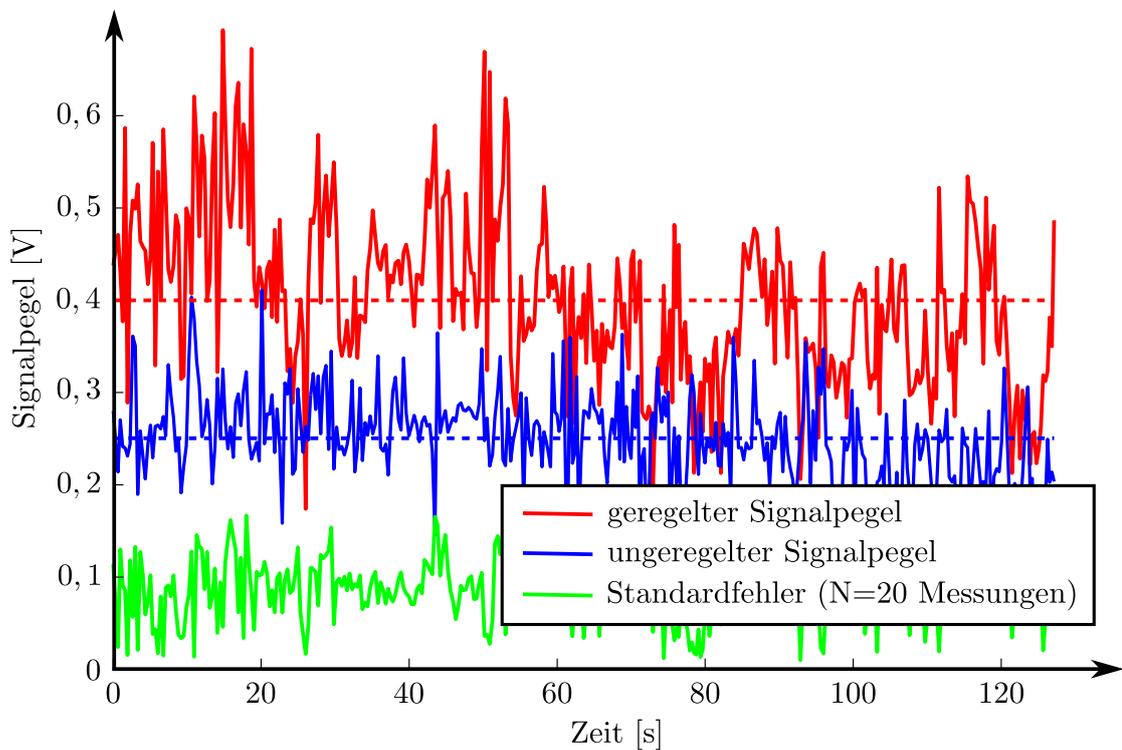
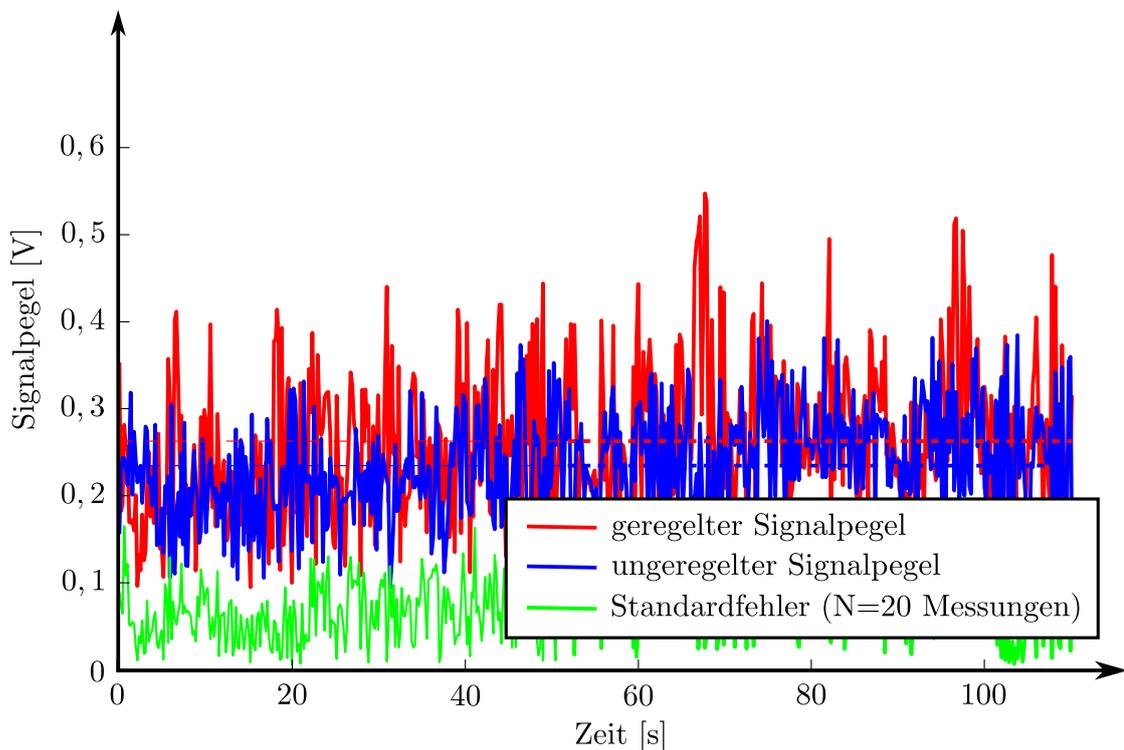


Abbildung 8.17: Auswertung des Reglers für Doppelparameter „Astigma X-Astigma Y“



**Abbildung 8.18:** Auswertung des Reglers für Doppelparameter „Coma X-Coma Y“



**Abbildung 8.19:** Auswertung des Reglers für Parameter „sphärische Aberration“

Bei Betrachtung der einzelnen Messungen ist zu erkennen, dass bei Wahl von Doppel- bzw. Einzelparametern keine bzw. nur marginale Verbesserungen des Signalpegels erzielt werden. Zudem ist zu erkennen, dass die Schwankungsbreite zwischen minimalen und maximalen optimalen Signalpegel sowie zwischen minimalen und maximalen Referenzpegel

sehr groß ist. Eine mögliche Ursache ist der bei Beginn der Regelung niedrige Signalpegel, der durch die Regelung nicht weiter erhöht werden konnte. Desweiteren kann der Arbeitspunkt sich in einem lokalen Minimum der Gütefunktion (siehe Gleichung (3.24)) befinden, so dass ein besseres Minimum nicht angefahren wird. Hier wird auch ersichtlich, dass die statische Optimierung aus Kapitel 5 obligatorisch ist und ein notwendiges Kriterium für die Initialisierung des Extremwert-Reglers darstellt. Um eine Verbesserung des Signalpegels hinsichtlich des mittleren Gewinns und der Schwankungsbreite zu erreichen, wurden die Parameter kombiniert.

## 8.10 Regler-Verifizierung bei Nutzung kombinierter Parameter

Die Verifizierung der kombinierten Parameter wurde mit der gleichen System-Konfiguration wie in Abschnitt 8.9 vorgenommen. Auch diesmal wurde auf einer gekrümmten Oberfläche gemessen. Die Abbildungen 8.20 bis 8.29 stellen exemplarisch die Auswertungen der kombinierten Parameter (siehe Tabelle 8.4) dar.

Nr.	XY	Ast.	X-Ast.	Y	Coma	X-Coma	Y	sphär.	Aberr.	zug.	Auswertung
1	X	-				X		-			Abbildung 8.20
2	X		X			-		-			Abbildung 8.21
3	X		-			-		X			Abbildung 8.22
4	-		X			X		-			Abbildung 8.23
5	-		X			-		X			Abbildung 8.24
6	X		X			X		-			Abbildung 8.25
7	-		X			X		X			Abbildung 8.26
8	X		-			X		X			Abbildung 8.27
9	X		X			-		X			Abbildung 8.28
10	X		X			X		X			Abbildung 8.29

**Tabelle 8.4:** Parameterkombinationen und Zuordnung der Auswertung

In den Abbildungen ist der mittlere Gewinn in Dezibel aufgetragen. Eine Verbesserung des Signalpegels um 0,5 V entspricht einem Gewinn von 3 dB Lichtleistung auf dem Detektor des Vibrometers, was mit einer Verdoppelung der Lichtleistung bedeutet. Bei der Analyse der Messungen fällt auf, dass alle Durchläufe, die den Parameter „sphärische Aberration“ enthalten, gute bis sehr gute Ergebnisse lieferten. Einzig die Messung die in Abbildung 8.25 ausgewertet wurde, enthielt diesen Parameter nicht. Der Signalpegel stieg um 6,2857 dB, bezogen auf die Lichtleistung entspricht dies eine 4,25-fache Verbesserung am Detektor. Tabelle 8.5 fasst die Ergebnisse aller Auswertungen zusammen.

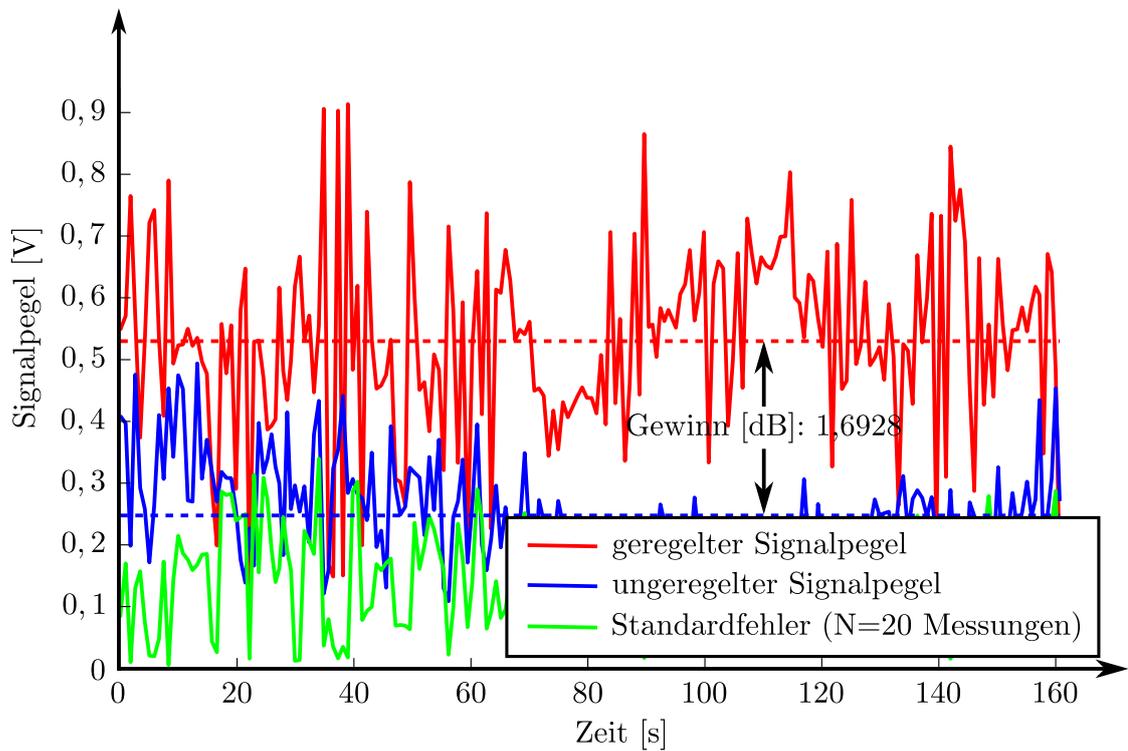


Abbildung 8.20: Auswertung X-Y-Coma X-Coma Y

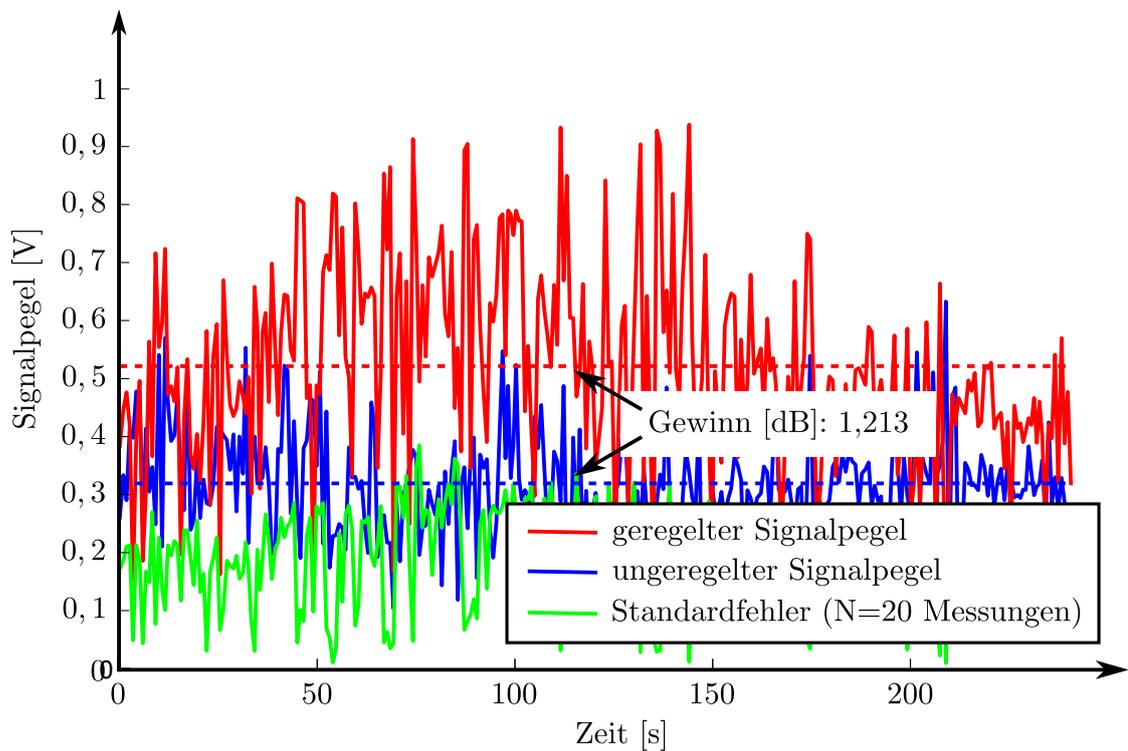


Abbildung 8.21: Auswertung X-Y-Astigma X-Astigma Y

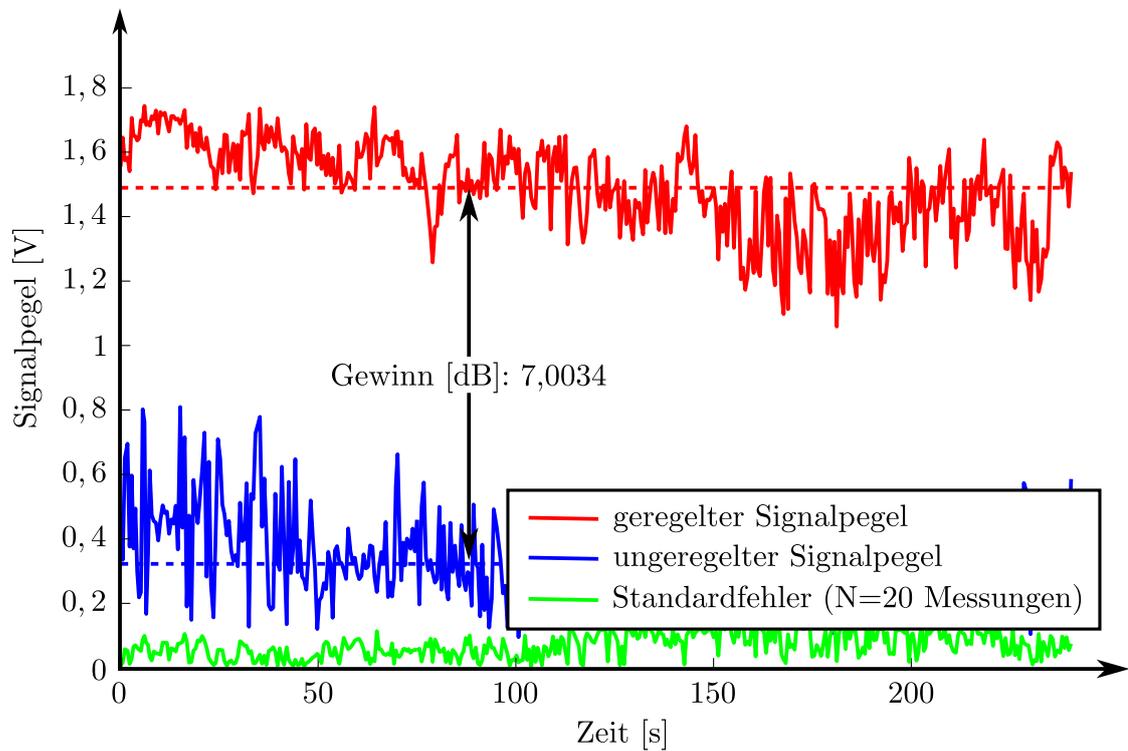


Abbildung 8.22: Auswertung X-Y-sphärische Aberration

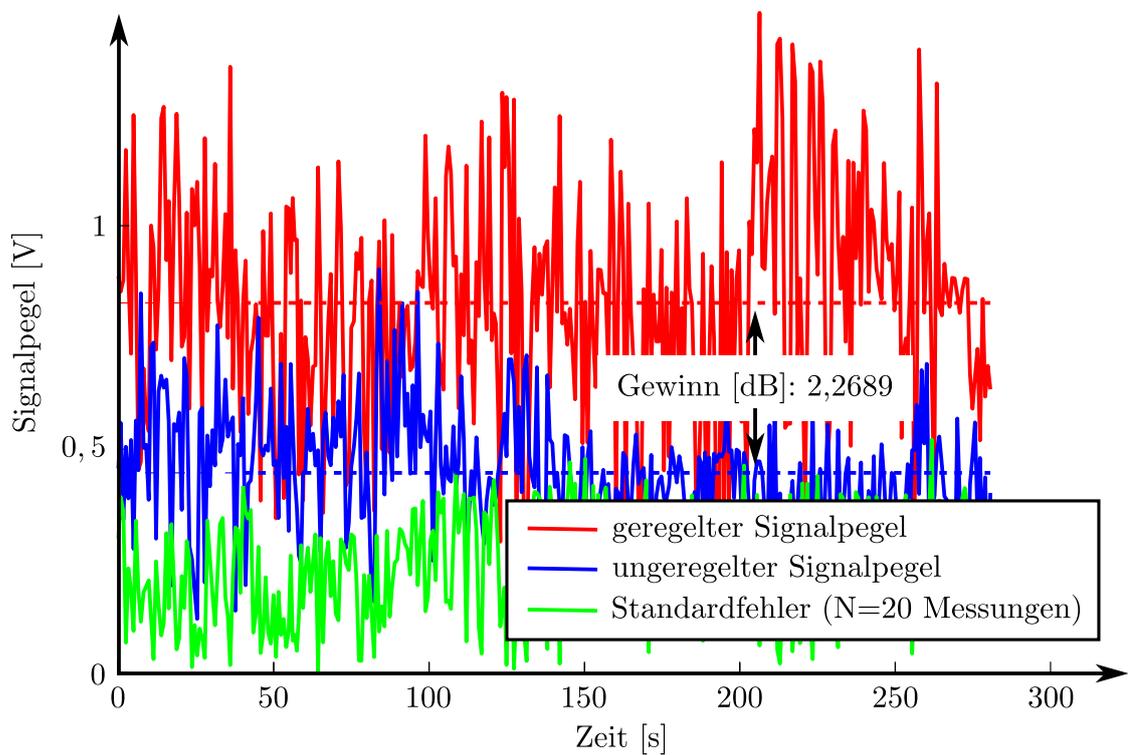


Abbildung 8.23: Auswertung Astigma X-Astigma Y-Coma X-Coma Y

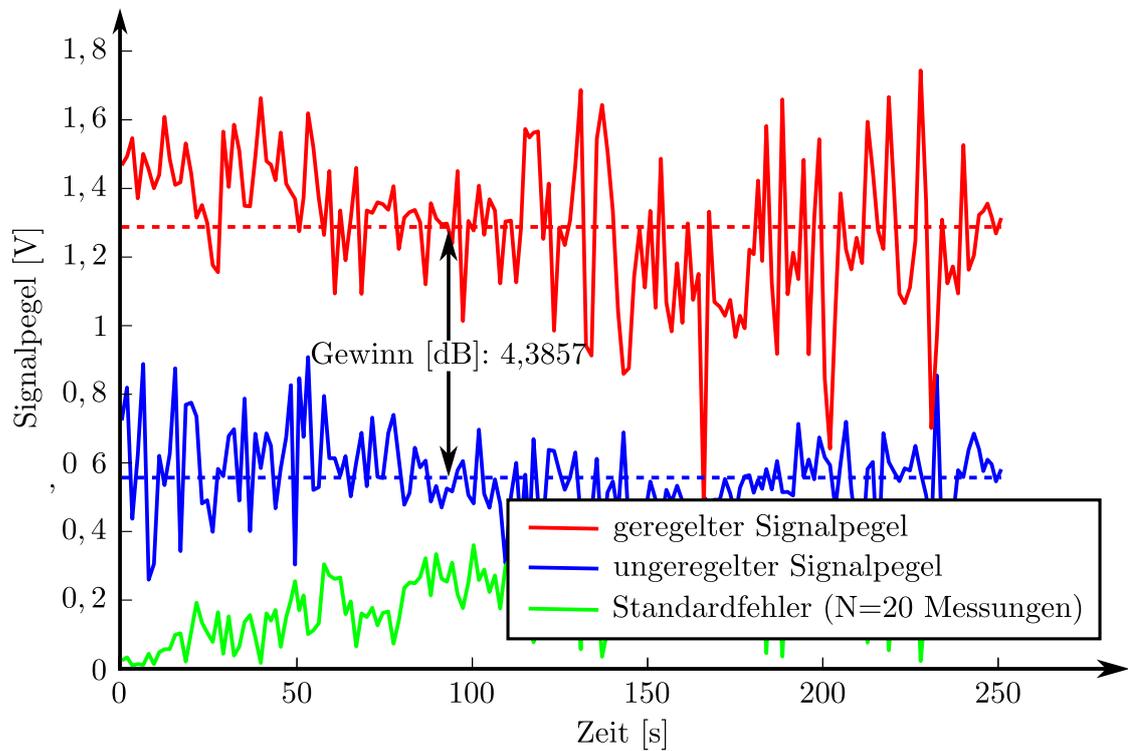


Abbildung 8.24: Auswertung Astigma X-Astigma Y-sphärische Aberration

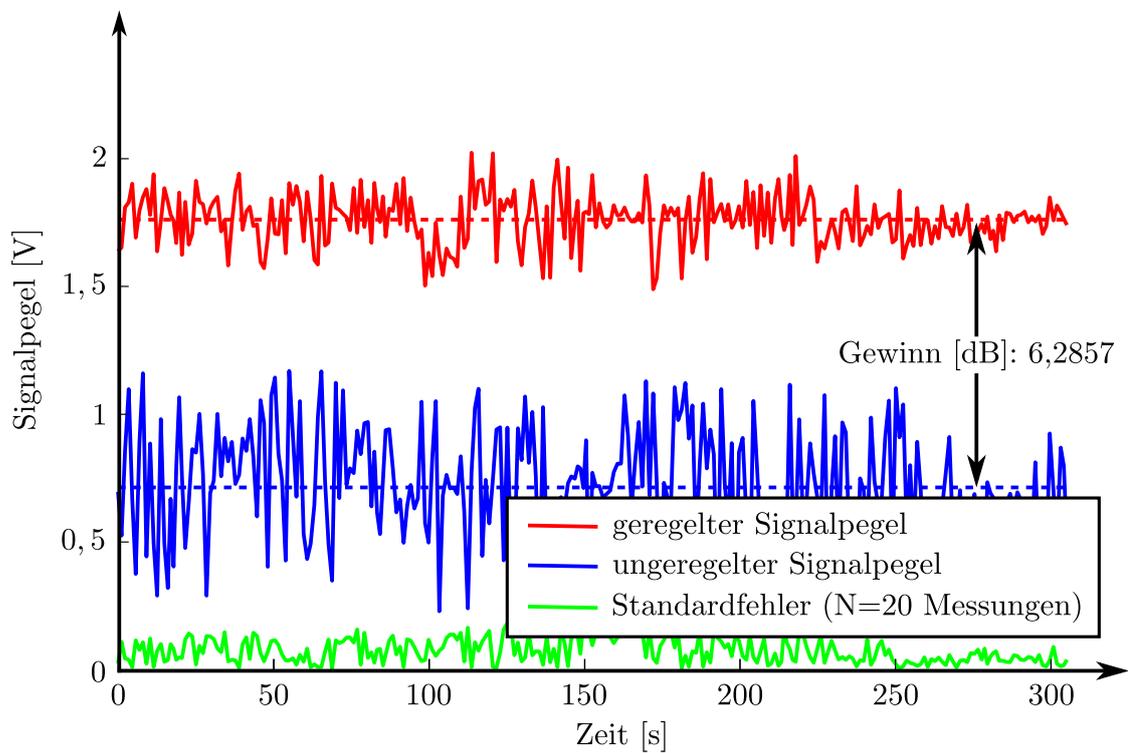


Abbildung 8.25: Auswertung X-Y-Astigma X-Astigma Y-Coma X-Coma Y

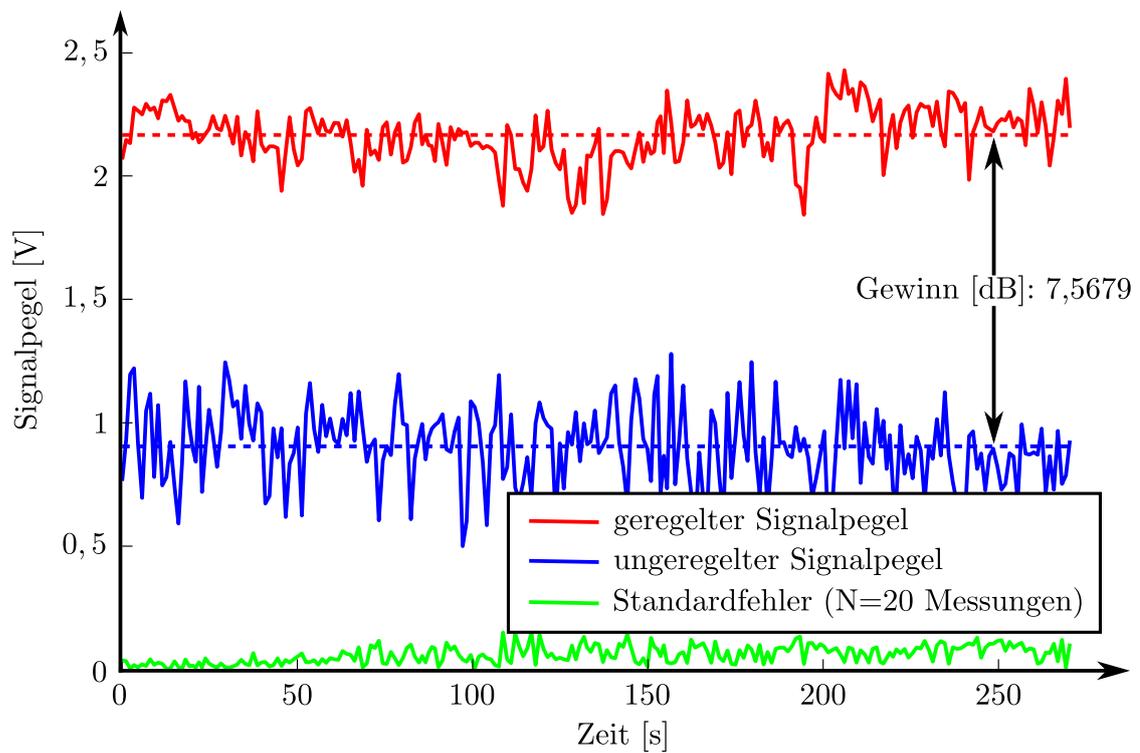


Abbildung 8.26: Auswertung Astigma X-Astigma Y-Coma X-Coma Y-sphärische Aberration

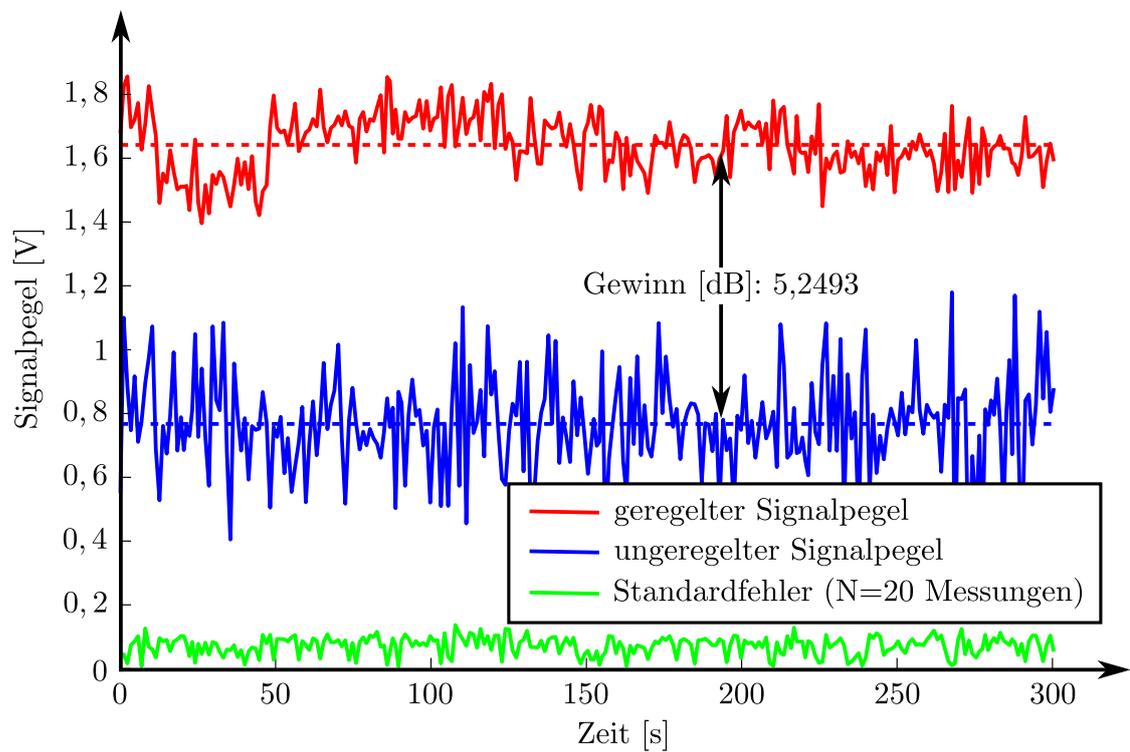
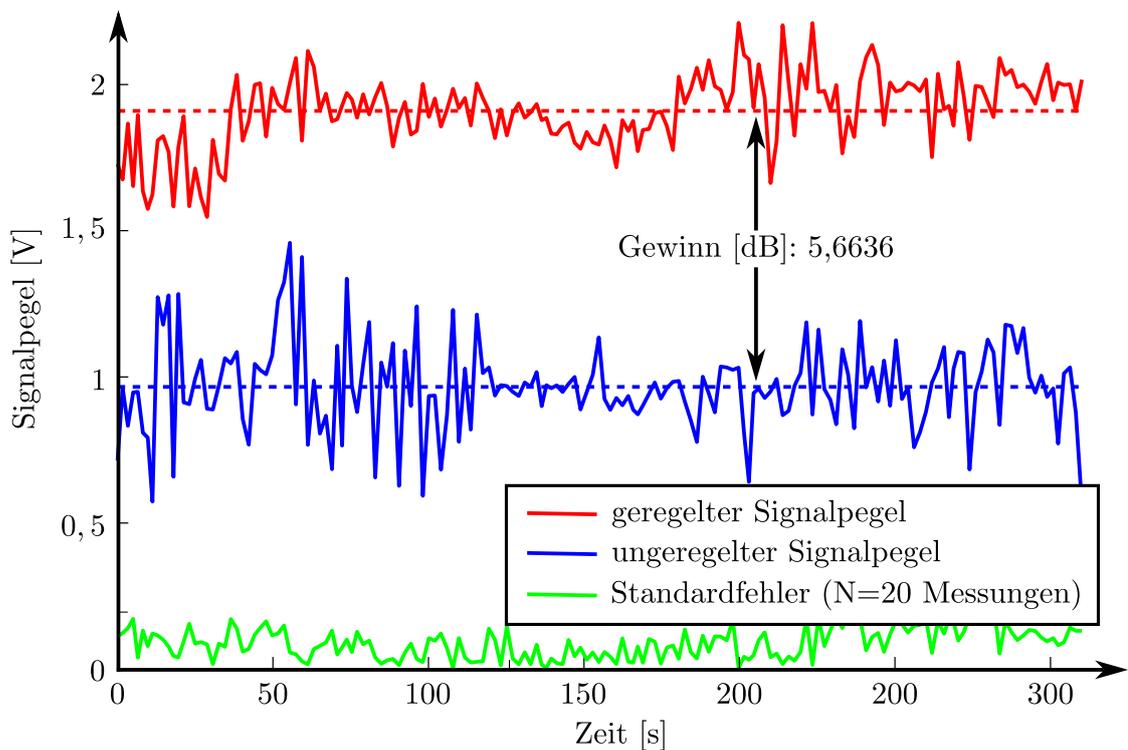
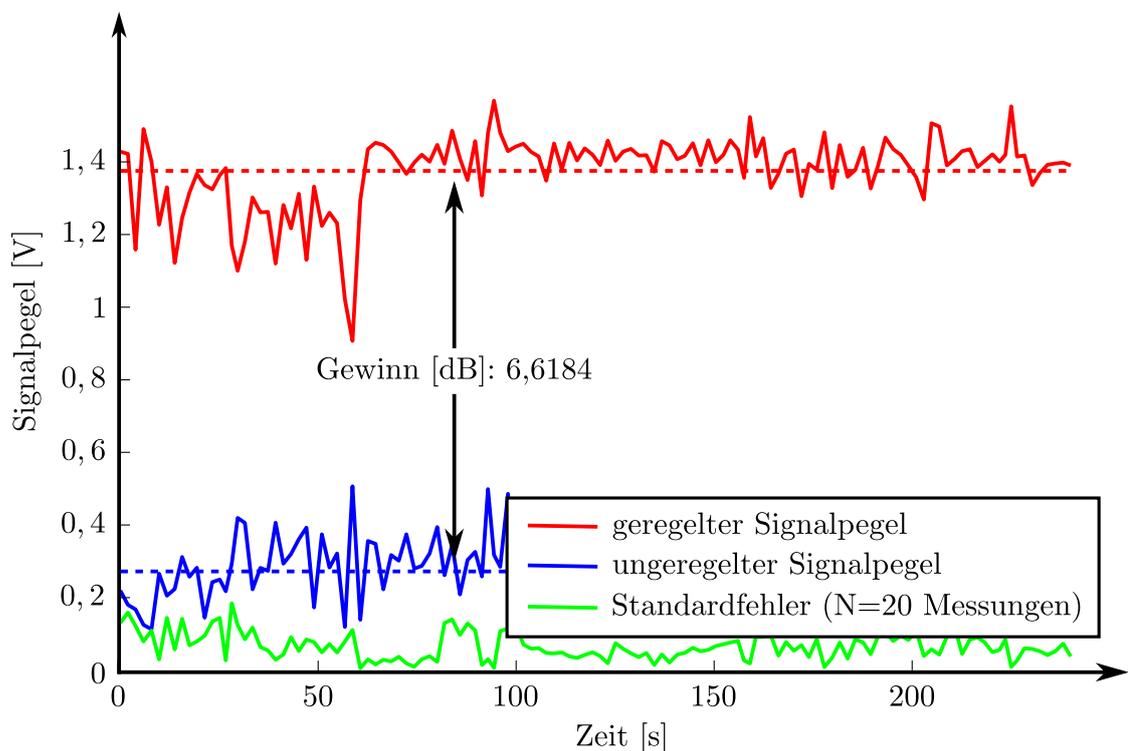


Abbildung 8.27: Auswertung X-Y-Coma X-Coma Y-sphärische Aberration



**Abbildung 8.28:** Auswertung X-Y-Astigma X-Astigma Y-sphärische Aberration



**Abbildung 8.29:** Auswertung X-Y-Astigma X-Astigma Y-Coma X-Coma Y-sphärische Aberration

Wenn man in Tabelle 8.5 die Auswertung zu Messung 10 betrachtet, fällt auf, dass  $\Delta V_{Opt}/\Delta V_{Ref} > 1$  ist. In der zugehörigen Abbildung 8.29 ist zu Beginn der Regelung (bei ca. 55 s) ein kurzzeitiger Einbruch des optimierten Signalpegels zu erkennen. Wenn man erst ab diesem Zeitpunkt die Regelung betrachtet, so beträgt der Gewinn 6,7335 dB mit

Nummer (nach Tabelle 8.4)	mittlerer Gewinn [dB]	$\Delta V_{\text{Ref}}$ [V]	$\Delta V_{\text{Opt}}$ [V]	$\Delta V_{\text{Opt}}/\Delta V_{\text{Ref}}$
1	1,6928	0,39048	0,79716	2,041
2	1,213	0,52957	0,82342	1,555
<b>3</b>	<b>7,0034</b>	<b>0,71448</b>	<b>0,68449</b>	<b>0,958</b>
4	2,2689	0,77792	1,2692	1,632
5	4,3857	0,64927	1,2812	1,973
<b>6</b>	<b>6,2857</b>	<b>1,0115</b>	<b>0,53488</b>	<b>0,529</b>
<b>7</b>	<b>7,5679</b>	<b>0,7796</b>	<b>0,58567</b>	<b>0,751</b>
<b>8</b>	<b>5,2493</b>	<b>0,89923</b>	<b>0,46035</b>	<b>0,512</b>
<b>9</b>	<b>5,6636</b>	<b>0,89535</b>	<b>0,66419</b>	<b>0,741</b>
10	6,6184	0,4023	0,66196	1,645

*Tabelle 8.5: Auswertung der kombinierten Parameter*

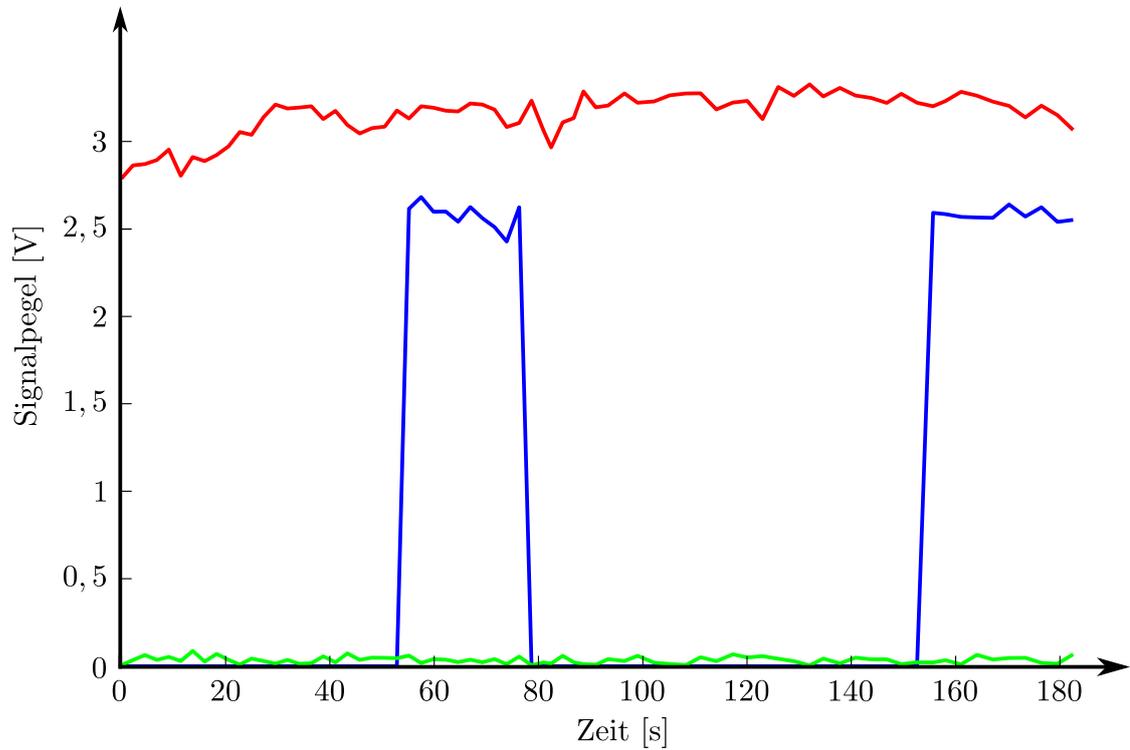
den Schwankungsbreiten  $\Delta V_{\text{Ref}} = 0,43615$  V und  $\Delta V_{\text{Opt}} = 0,31159$  V, was zu einem  $\Delta V_{\text{Opt}}/\Delta V_{\text{Ref}} = 0,714$  führt. Somit kommen vor allem die Parameterkombinationen 3, 7 und 10 aus Tabelle 8.4 in Frage, da sie den höchsten Gewinn des SNR erzielen konnten. Für die folgende Untersuchung wurde die Parameterkombination 10 gewählt.

## 8.11 Erfassung von Vibrationen mit geregelterm Vibrometer

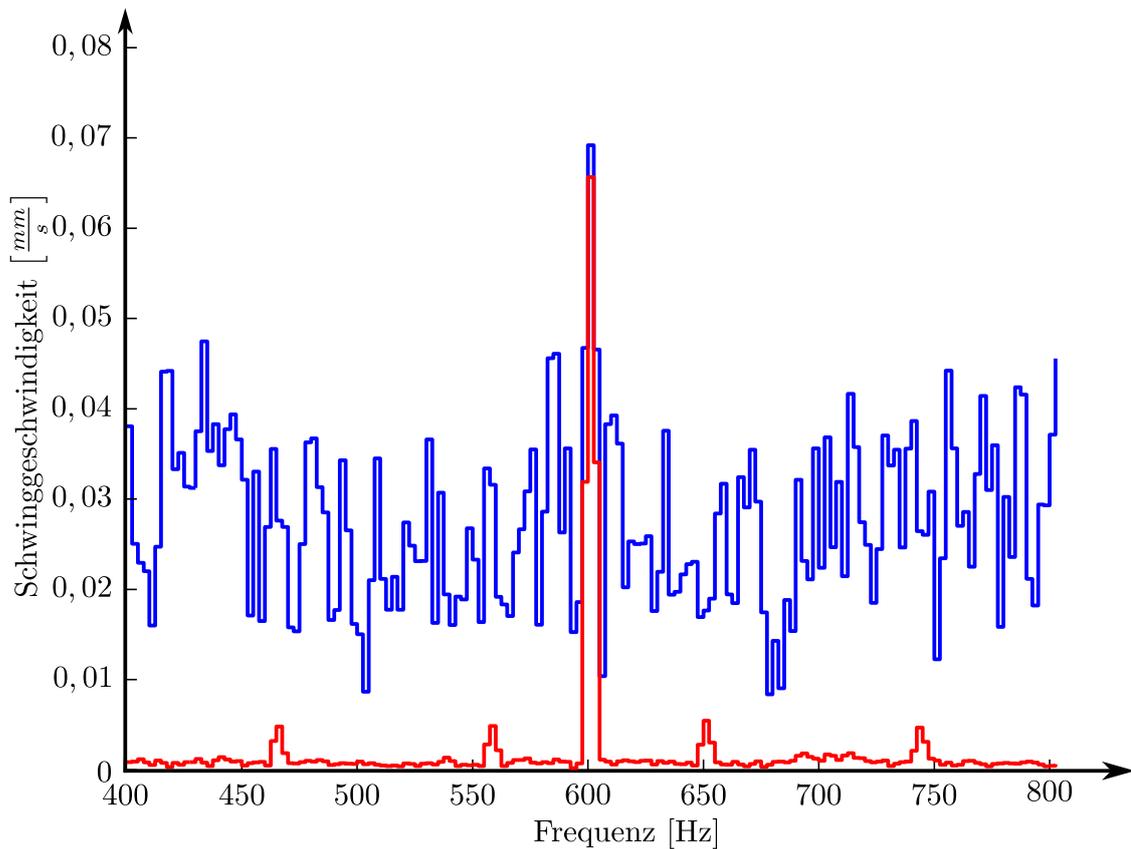
Zuletzt muss überprüft werden, ob die Erhöhung des Signalpegels zu einer verbesserten Vibrationsmessung führt. Dazu wurde während der Regelung die Messung des Referenzpunkts abgeschaltet, um eine Vermischung der Schwingungsmessung zwischen Referenzpunkt und Arbeitspunkt auszuschließen. Die Oberfläche wurde mit einem sinusförmigen Signal mit einer Frequenz von 600 Hz angeregt. Diese Frequenz sollte durch das Vibrometer erfasst werden. Der Graf in Abbildung 8.30 zeigt den Verlauf des Signalpegels während der Schwingungsmessung, welche im Zeitfenster von circa 80 bis 155 s vorgenommen wurde. Die Messung am Referenzpunkt (blau) wurde dazu in diesem Zeitraum abgeschaltet, was an den Sprüngen von und nach Null zu erkennen ist.

Eine spezielle Vibrometer-Software erfasste die Schwingung auf dem Messobjekt parallel zur in Abbildung 8.30 gezeigten Messung. In der Software wurden die gemessenen Spektren intern über drei Messungen gemittelt. Das Ergebnis wird an dieser Stelle exemplarisch anhand eines Vergleichs ausgewertet, der in Abbildung 8.31 gezeigt wird. In rot ist das Frequenzspektrum mit eingeschalteten Extremwert-Regler abgebildet. Verglichen wird dieses mit dem Frequenzspektrum einer unregelten Messung, welche in blau dargestellt ist. Diese wurde unmittelbar nach der geregelten Messung durchgeführt. Dazu wurde der Regelalgorithmus angehalten, um eine Kopplung zwischen beiden Betriebsmodi zu vermeiden. Bei eingeschalteter Regelung sind zusätzliche Peaks zu erkennen, die im unregelten Betrieb durch Rauschen überlagert wurden.

Die Regelung konnte den Arbeitspunkt im Optimum halten, so dass bisher nicht messbare Vibrationen erfassbar werden, ohne auf Hilfsmittel, wie zum Beispiel stark streuende und reflektierende Klebestreifen (Retro-Tape), zurück zu greifen.



**Abbildung 8.30:** Verlauf des Signalpegels während der Schwingungsmessung



**Abbildung 8.31:** Messung an gekrümmter Oberfläche mit sinusförmiger Anregung bei 600 Hz

Um einen Vergleich zwischen geregelten und ungeregelten Betriebsmodus vornehmen zu können, wurde der Mittelwert des Rauschens im Spektrum  $\bar{N}(f)$  und der maximalen Amplitude  $f_{\max}$  des Nutzsignals mit

$$\text{SNR}_{\text{Spektr.}} = \frac{f_{\max}}{\bar{N}(f)} \quad (8.11)$$

ins Verhältnis gesetzt. Dazu wurden im ungeregelten Modus alle Werte unterhalb von  $0,003 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \right]$  und im geregelten Modus unterhalb von  $0,048 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \right]$  als spektrales Rauschen aufgefasst. Im Falle des ungeregelten Betriebs ergibt dies nach Gleichung (8.11) ein  $\text{SNR}_{\text{Spektr.}} = 2,5309$  und im geregelten Fall  $\text{SNR}_{\text{Spektr.}} = 74,7975$ . Das  $\text{SNR}_{\text{Spektr.}}$  konnte im vorliegenden Beispiel demnach um ein Faktor von 29,55 verbessert werden.

## Fazit und Ausblick

Die Laser-Doppler-Vibrometrie ist eine weit verbreitete Methode um Oberflächenschwingungen zu erfassen und auszuwerten. Die Anwendungsgebiete umfassen zum Beispiel die Stabilitätsanalyse von dynamischen Systemen aus dem Automobilbereich, der Luftfahrt oder im Bereich des Bauingenieurwesens. Die technischen Herausforderungen, denen sich diese Messtechnik stellen muss, werden durch Entwicklungen in der Industrie vorgegeben und stetig erhöht. Wo anfangs noch ein Einpunkt-Vibrometer genügte, müssen und werden mittlerweile räumliche Informationen über die 3D-Vibrometrie verarbeitet.

Werden die zu messenden Strukturen kleiner, kommen Speckle-Dropouts häufiger vor, die nicht mehr durch einfaches Verschieben des Messpunktes kompensierbar sind. Es werden daher Messverfahren benötigt, die Speckle-Dropouts kompensieren, ohne eine laterale Verschiebung vorzunehmen. Müssen zudem keine Mittel zur Erhöhung der Reflektivität aufgebracht werden, so ändern solche Verfahren das dynamische Verhalten des Messobjekts nicht. Die vorgestellte Arbeit befasste sich mit einer Methode zur Reduktion von Speckle-Dropouts, die auf der Modifikation der Phasenfront des genutzten Laserstrahls basiert. Die Modifikation wird durch eine im Messaufbau integrierte adaptive Optik realisiert, so dass das Detektorboard nach einer Optimierung der Phasenfront mit genügend Lichtleistung versorgt werden kann und damit die Erfassung von Oberflächenschwingungen wieder möglich ist. Der genutzte Optimierer basiert auf dem DIRECT-Algorithmus, der um einen stochastischen Schätzer erweitert wurde. Dazu wird aus den vorhandenen Messwerten ein Modell generiert und optimiert, was zu einer deutlichen Laufzeitverbesserung führt. Der ursprüngliche DIRECT-Algorithmus wurde dem neuen Hybrid-DIRECT gegenüber gestellt. Je nach Komplexitätsgrad des zu optimierenden Modells konnten Laufzeitverbesserungen im Bereich von 20 - 50% erzielt werden. Zudem haben Tests ergeben, dass eine erhebliche Verbesserung der Lichtleistung am Detektor erzielt werden konnte. So konnte in Experimenten gezeigt werden, dass das SNR um einen Faktor von 5,78 gesteigert werden konnte. Dies bedeutet für die Spektralanalyse eine verbesserte Auflösung, wodurch Effekte untersucht werden können, die vorher durch überlagerndes Rauschen verdeckt waren.

Um Effekte zu kompensieren, die während der laufenden Messung den Signalpegel verschlechtern, wurde ein zusätzliches Regelungskonzept entwickelt. Zu diesen Effekten gehören zum Beispiel „Luft-Schlieren“ oder thermischer Drift des Geräts. Das Konzept baut auf die sukzessive parabolische Interpolation nach Heath auf und erweitert diese auf  $n$  Dimensionen. Von besonderer Bedeutung dieser Methode ist, dass für jeden Iterationsschritt nur eine Messung benötigt wird. Der Rand der Umgebung  $U$  um einen Arbeitspunkt wird sukzessive evaluiert, wobei eine Heuristik bestimmt, wo sich der nächste Evaluationspunkt befindet. Ist der Rand von  $U$  ein Kreis, so werden darauf nacheinander fest definierte Positionen ausgewertet. Mit jeder neuen Messung wird ein aktueller Arbeitspunkt ermittelt, indem eine quadratische Approximation aus den aktuellsten Messwerten gebildet wird. Da über eine Kostenfunktion ausgewertet wird, liefert das Minimum dieser Interpolation den neuen Arbeitspunkt. Ist der Arbeitspunkt stationär, wird der Radius der Umgebung  $U$ , auf dessen Rand die Auswertepunkte liegen, minimiert. Finden Driftbewegungen des Arbeitspunkts statt, so folgt der Regler mit einer maximalen Schrittweite, die durch einen Parameter  $\rho_{\max}$  limitiert ist. Der Parameter  $\rho_{\max}$  ist beschränkt durch die maximal gewünschte Variation des Laser-Spots in Position und Form. Auch der Regler wurde am realen System verifiziert. Die ausgewerteten Experimente haben nachweislich gezeigt, dass durch die vorgestellte Methode der Signalpegel des Vibrometers verbessert und stabilisiert werden konnte. Die Stabilisierung des Signalpegels führt zu einer reduzierten Schwankungsbreite. Anhand eines Beispiels wurde das gemessene Spektrum mit und ohne Regelung gegenüber gestellt. Hier war eindeutig zu erkennen, dass das Spektrum mit dem geregelten Signalpegel wesentlich stabiler und rauschärmer war, als die Spektren ohne unterstützenden Regler.

Für den Extremwertregler werden nur die limitierenden Parameter  $\rho_{\max}$  und  $\rho_{\min}$  benötigt, da der Radius  $\bar{\rho}$  der Umgebung  $U$  adaptiv aus dem Messprozess ermittelt wird. Der vorgestellte Extremwertregler wird typischerweise auf ein nichtlineares Regelungsproblem angewendet werden. Für die nichtlineare Regelungstechnik steht keine geschlossene Theorie zur Verfügung, die zur Untersuchung der Stabilität genutzt werden könnte. Dennoch konnte gezeigt werden, dass die Robustheit des Reglers abhängig von der Abtastrate des Sensors ist. Es ist zu erwarten, dass der optimale Arbeitspunkt besser geschätzt werden kann, je höher die Abtastrate ist. Weitergehende Studien und Untersuchungen können dazu beitragen, entsprechende Stabilitätskriterien zu definieren.

Die angestellten Untersuchungen sind bisher im Bereich der Vorentwicklung zu betrachten. Um ein für die Industrie nutzbares Produkt zu entwickeln, muss eine adaptive Optik ausgewählt werden, die auch in rauen Umgebungen effizient und verlässlich arbeiten. Seit einiger Zeit haben sich elektrisch fokussierbare Flüssiglinsen in modernen Smartphones etabliert. Solche Linsen haben ebenfalls keine mechanischen Elemente; eine entsprechende Robustheit kann somit unterstellt werden. Sie wären somit eine mögliche Alternative für die bisher betrachteten adaptiven Optiken.

# Literaturverzeichnis

- [1] AAD, G. ; ET. AL: The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider. In: *Journal of Instrumentation* 3 (2008), Nr. 08, S. S08003. <http://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/3/08/S08003>. – DOI 10.1088/1748-0221/3/08/S08003. – ISSN 1748-0221
- [2] ALEXANDER NUNN: *Analyse radialer Basispolynome hinsichtlich globaler Optimierungsalgorithmen, Entwurf und Implementierung eines Referenzalgorithmus*. Wuppertal, Bergische Universität Wuppertal, Diss., 2012
- [3] ARIYUR, Kartik B. ; KRSTIĆ, Miroslav: *Real time optimization by extremum seeking control*. Hoboken and NJ : Wiley Interscience, 2003. – ISBN 9780471468592
- [4] BÄUERLE, Dieter: *Laser: Grundlagen und Anwendungen in Photonik, Technik, Medizin und Kunst*. Weinheim : Wiley-VCH-Verl., 2009. – ISBN 9783527408030
- [5] BILLAH, K. Y. ; SCANLAN, Robert H.: Resonance, Tacoma Narrows bridge failure and undergraduate physics textbooks. In: *American Journal of Physics* 59 (1991), Nr. 2
- [6] BILLE, J.F ; KORABLINOVA, N.A ; PAPE, U. ; SCHMITT-LIEB, A.: *Medizinische Physik*. Heidelberg : Springer, 2005. – ISBN 978-3-540-65255-7
- [7] BINDER, K.: *Monte Carlo methods in statistical physics. 2*. Berlin and and New York : Springer-Verlag, 1986. – ISBN 9783540165149
- [8] BOSE, Bimal K. ; SZCZESNY, Paul M. ; STEIGERWALD, Robert L.: Microcomputer Control of a Residential Photovoltaic Power Conditioning System. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 21 (1985), Nr. 5, S. 1182–1191. <http://dx.doi.org/10.1109/TIA.1985.349522>. – DOI 10.1109/TIA.1985.349522. – ISSN 0093-9994
- [9] BROIDA, Joel G. ; WILLIAMSON, S. G.: *A comprehensive introduction to linear algebra*. Redwood City and Calif : Addison-Wesley, 1989. – ISBN 9780201500653
- [10] BUHMANN, Martin D.: *Radial basis functions: Theory and implementations*. Cambridge : Cambridge Univ Press, 2003. – ISBN 9780511051241
- [11] DEUTSCH, Harri: *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt a. M., 1999
- [12] DUILLIER, N. Fatio d.: *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. [<http://>

- gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k778578/f388.tableOnline-Zugriff]. In: *Société Hollandaise des Sciences* Bd. 9, 381–389
- [13] DUNLAP, Orrin E.: *Radio's 100 men of science: Biographical narratives of pathfinders in electronics and television*. New York : Harper, 1944
- [14] EICHLER, Jürgen ; EICHLER, Hans-Joachim: *Laser: Bauformen, Strahlführung, Anwendungen*. 7. Berlin and Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. – ISBN 9783642104619
- [15] EINSTEIN, Albert: Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), Nr. 132-148
- [16] EINSTEIN, Albert: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: *Annalen der Physik* 18 (1905), S. 639–641
- [17] EINSTEIN, Albert: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. 49 (1916), S. 769–822
- [18] EINSTEIN, Albert: Zur Quantentheorie der Strahlung. In: *Physikalische Gesellschaft Zürich. Mitteilungen* 18 (1916), S. 47–62
- [19] EUGENE HECHT: *Optik*. 4. München : Oldenbourg Verlag, 2005
- [20] FLEXIBLE OPTICAL B.V.: *37(19)-channel micromachined deformable mirror system: typical technical passport*. <http://www.okotech.com/images/pdfs/typical%20passport%2037ch%20MMDM.pdf>. Version: 2013
- [21] FLIEGERCLUB WASENTEGERNBACH E.V.: *Sextant für die Luftfahrt*. [http://www.ul-wasi.de/gallery/main.php?g2\\_itemId=2930](http://www.ul-wasi.de/gallery/main.php?g2_itemId=2930). Version: 10.02.2013
- [22] FORSTER, Otto: *Differentialrechnung im IR<sup>n</sup>, gewöhnliche Differentialgleichungen*. 8. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2008. – ISBN 3834895415
- [23] FROMMER, Andreas: *Numerische Methoden der nichtlinearen Optimierung: Sommersemester 2004*. Wuppertal, 2004
- [24] GABLONSKY, Jörg M.: *Modifications of the DIRECT algorithm*. North Carolina, North Carolina State University, Diss., 2001
- [25] GERIGK, Markus ; BÄCKER, Andreas ; BIRSZTEJN, Thomas ; IMHÄUSER, Ralf ; ROTH, Christian ; SPETH, Walter ; VOUGIOUKAS, Simon: *Identifying objects*. 2011
- [26] GERTHSEN, Christian: *Physik*. Berlin : Springer, 2004
- [27] GOMATHY, S. ; SARAVANAN S. ; THANGAVEL, S.: Design and Implementation of Maximum Power Point Tracking (MPPT) Algorithm for a Standalone PV System. In: *International Journal of Scientific & Engineering Research* 3 (2012), Nr. 3
- [28] GRIEWANK, Andreas ; WALTHER, Andrea: *Evaluating derivatives: Principles and techniques of algorithmic differentiation*. 2. Philadelphia and PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. – ISBN 9780898716597
- [29] GRIFFIN, Joshua D. ; KOLDA, Tamara G.: Asynchronous parallel hybrid optimization combining DIRECT and GSS. In: *OPTIMIZATION METHODS AND SOFTWARE* 25 (2010), Nr. 5, S. 797–817

- [30] GUTMANN, H.: A radial basis function based on methods for global optimization. In: *Journal of Global Optimization* 19 (2001)
- [31] HAMAMATSU: *Datenblatt LCOS-SLM X10468 series*. [http://sales.hamamatsu.com/assets/pdf/parts\\_X/X10468E.pdf](http://sales.hamamatsu.com/assets/pdf/parts_X/X10468E.pdf). Version: 2013
- [32] HANSEN, Eldon R.: *Global optimization using interval analysis*. New York : M. Dekker, 1992. – ISBN 9780585312033
- [33] HEATH, Michael T.: *Scientific computing: An introductory survey*. 2. Boston : McGraw-Hill, 2002. – ISBN 9780071122290
- [34] HEATH, Michael T.: *Nonlinear Equations and Optimization III*. [http://turing.une.edu.au/~amth247/Lectures/Lecture\\_15.pdf](http://turing.une.edu.au/~amth247/Lectures/Lecture_15.pdf). Version: 2006
- [35] HECHT, Eugene: *Optik*. 4. München : Oldenbourg, 2005. – ISBN 9789756885024
- [36] HENDRIX, Eligius M. ; G.-TÓTH, Boglárka: *Introduction to nonlinear and global optimization*. London : Springer, 2010
- [37] HERBRAND, Frank: *Extremwertregelung zur automatischen Strahlführung an Teilchenbeschleunigern*. Magdeburg, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Diss., 2001
- [38] HERBRAND, Frank: Extremwertregler zur automatischen Strahlführung an Linearbeschleunigern für Ionen. In: *atp 8/2001* 8 (2001)
- [39] HERYUDONO, Alfa R. H.: *Adaptive radial basis function methods for the numerical solution of partial differential equations, with application to the simulation of the human tear film*. 2008. – ISBN 0549813918
- [40] HIMMELBLAU, David M.: *Applied nonlinear programming*. New York and NY : McGraw-Hill, 1972. – ISBN 0070289212
- [41] HOFFMANN, Karl: *Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmeßstreifen*. Darmstadt : Hottinger Baldwin Messtechnik, 1987
- [42] HOOKE, Robert ; JEEVES, T. A.: “ Direct Search ” Solution of Numerical and Statistical Problems. In: *Journal of the ACM* 8 (1961), Nr. 2, S. 212–229. <http://dx.doi.org/10.1145/321062.321069>. – DOI 10.1145/321062.321069. – ISSN 00045411
- [43] JIANG, Joe-Air ; HUANG, Tsong-Liang ; HSIAO, Ying-Tung ; CHEN, Chia-Hong: Maximum Power Tracking for Photovoltaic Power Systems. In: *Tamkang Journal of Science and Engineering* 8 (2005), Nr. 2, S. 147–153
- [44] JOHNSTON, Sean: *Holographic visions: A history of new science*. Oxford and New York : Oxford University Press, 2006. – ISBN 1429470461
- [45] JONES, D. R. ; PERTTUNEN, C. D. ; STUCKMAN, B. E.: Lipschitzian Optimization Without the Lipschitz Constant. In: *Journal of Optimization Theory and Application* 79 (1993), Nr. 1
- [46] JONES, Donald R. ; SCHONLAU, Matthias ; WELCH, William J.: Efficient Global

- Optimization of Expensive Black-Box Functions. In: *Journal of Global Optimization* 13 (1998), S. 455–492
- [47] JOSEPH WEBER: Amplification of microwave radiation by substances not in thermal equilibrium. In: *IRE Transactions on Electron Devices* 3 (1953), S. 1
- [48] KAISER, Markus: *Ein Filter-Trust-Region-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme*. Erlangen-Nürnberg, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 2008
- [49] KALMAN, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. In: *Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering* (1960), S. 35–45
- [50] KNOPP, Helmut: *Astronomische Navigation: Großkreisnavigation, HO 249, HO 229, Taschenrechnerverfahren für C-Schein und Sporthochseeschiffer-Zeugnis*. Herford : Busse & Seewald, 1986. – ISBN 3512007384
- [51] KUCKARTZ, Udo ; RÄDIKER, Stefan ; EBERT, Thomas ; SCHEHL, Julia: Statistik: Eine verständliche Einführung. In: *Statistik* (2010)
- [52] LADERARANACH: *LDV Scheme*. [http://en.wikipedia.org/wiki/File:LDV\\_Schematic.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:LDV_Schematic.png)
- [53] LARSSON, Elisabeth ; FORNBERG, Bengt: A Numerical Study of some Radial Basis Function based Solution Methods for Elliptic PDEs. In: *Computer & Mathematics with Applications* 46 (2003)
- [54] LE-THI, Hoai A. ; VAZ, A. I. F. ; VICENTE, L. N.: Optimizing radial basis functions by d.c. programming and its use in direct search for global derivative-free optimization. In: *Top : an official journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research* 20 (2012), Nr. 1, S. 190–214
- [55] LECAM, Lucien: *Asymptotic methods in statistical decision theory*. New York and NY : Springer, 1986 (Springer series in statistics). – ISBN 0387963073
- [56] LERCH, M. ; TISCHLER, G. ; GUDENBERG, J. Wolff v. ; HOFSCHESTER, W. ; KRÄMER, W.: : filib++, a Fast Interval Library Supporting Containment Computations. In: *ACM TOMS* 32 (2006), Nr. 2, S. 299–324
- [57] LORENZ, Falko: *Lineare Algebra*. Mannheim : Bibliograph. Inst., 1983. – ISBN 9783411006014
- [58] MACH, Ludwig: Über ein Interferenzrefractometer. In: *Zeitschrift für Instrumentenkunde* 12 (1892), Nr. S. 89-93
- [59] MALACARA, Daniel: *Optical shop testing*. 2. New York : John Wiley & Sons, 1992. – ISBN 9780471522324
- [60] MARTIN, Richard M.: Piezoelectricity. In: *Physical Review B*. 5 (1972), Nr. 4, S. 1607–1613
- [61] MATHAR, R.J: *Übersicht Zernike-Polynome*. <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c0/ZernikePolynome5.svg>. Version: 2011

- [62] MAYER, Sascha ; TIBKEN, Bernd ; REMBE, Christian: Advanced techniques in vibrometry by using spatial light modulators. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Vibration Measurements by Laser and Noncontact Techniques* (2012)
- [63] MEINTRUP, David ; SCHÄFFLER, Stefan: *Stochastik: Theorie und Anwendungen*. Berlin : Springer, 2005. – ISBN 3540267077
- [64] MEISTER, Andreas: *Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren*. 2. Wiesbaden : Vieweg, 2005. – ISBN 3528131357
- [65] MOSER, F. ; FISCHER, M. ; RUMOLD, W.: Dreidimensionale Messung von Betriebs-schwingformen quietschender Scheibenbremsen. In: *VDI-Berichte Nr. 1736, 2002; S. 71-83, 2002* 1736 (2002), S. 71–83
- [66] MÖSER, Michael: *Messtechnik der Akustik*. Berlin and Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010 <http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10356153>. – ISBN 978–3–540–68087–1
- [67] NATIONAL INSTRUMENTS: *Datasheet NI-DAQ USB-6210*. 2013
- [68] OBERLE, H. J.: *Skript zur Vorlesung Optimierung SoSe 2012*. Hamburg, 2012
- [69] PLANCK, Max: Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. In: *Annalen der Physik : 4. Folge ; 4* (1901)
- [70] POLYTEC: *Grundlagen der Vibrometrie*. 2012
- [71] POLYTEC: *Geschwindigkeitssteuerung und Messung*. <http://www.polytec.com/de/quicklinks-on-home/laenge-und-geschwindigkeit-messen/>. Version: 2013
- [72] PRESS, William H.: *Numerical recipes: The art of scientific computing*. 3. Cambridge and UK and and New York : Cambridge University Press, 2007. – ISBN 978–0–521–88068–8
- [73] REMBE, Christian ; MAYER, Sascha (Hrsg.): *Techniken zur Reduktion Speckle-Dropouts: persönliche Mitteilung*. 16.10.2012
- [74] ROBERT SCHABACK ; UNIVERSITÄT GÖTTINGEN (Hrsg.): *Multivariate Interpolation by Polynomials and Radial Basis Functions*. <http://num.math.uni-goettingen.de/schaback/research/papers/MibPaRBF.pdf>. Version: 2002
- [75] ROSENBROCK, H. H.: An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function. In: *The Computer Journal* 3 (1960), S. 175–184
- [76] RUMP, Siegfried M.: Fast and Parallel Interval Arithmetic. In: *BIT Numerical Mathematics* 39 (1999), Nr. 3, S. 534–554
- [77] SANDERS, Jason ; KANDROT, Edward: *CUDA by example: An introduction to general-purpose GPU programming*. 3. Upper Saddle River and NJ : Addison-Wesley, 2011. – ISBN 9780131387683
- [78] SCHELE, Linda ; FREIDEL, David A. ; SCHEFFNER, Johann G.: *Die unbekannte Welt der Maya: Das Geheimnis ihrer Kultur entschlüsselt*. München : Knaus, 1991. – ISBN 3813563421

- [79] SHUBERT, B.: A Sequential Method Seeking the Global Maximum of a Function. In: *SIAM Journal of Numerical Analysis* (1972), Nr. 9, S. 379–388
- [80] TAYLOR, Brook: *Methodus incrementorum directa & inversa*. Auctore Brook Taylor. Londini : typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys, 1715
- [81] TÖRN, Aimo ; ZILINSKAS, Antanas: *Lecture notes in computer science*. Bd. 350: *Global optimization*. Berlin u.a : Springer, 1989. – ISBN 0–387–50871–6
- [82] WENDLAND, Holger: *Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompakten Träger*. Göttingen, Georg-August-Universität zu Göttingen, Diss., 1996
- [83] WESTERMANN, Thomas: *Ingenieurmathematik kompakt mit Maple*. 2012. Berlin and Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. – ISBN 364225053X
- [84] WIEDERHOLD, Olaf: *Regelung abgelöster Strömungen in hoch belasteten Turbomaschinen*. Berlin : Universitätsbibliothek der Technischen Universität Berlin, 2011. – ISBN 3798322953
- [85] WINKLER, Eric ; STEGER, Heinrich: Karlsruhe. In: *Proceedings of the 8. Forum Akustische Qualitätsicherung der DGAQS, Karlsruhe 2004*
- [86] WRIGHT, Grady B.: *Radial basis function interpolation: Numerical and analytical developments*. 2003
- [87] XU, Guochang: *GPS: Theory, Algorithms and Applications*. Dordrecht : Springer, 2007 <http://www.gbv.ebib.com/patron/FullRecord.aspx?p=337967>. – ISBN 978–3–540–72714–9
- [88] ZURMUHL, R.: *Gauss' elimination method for solving linear equation systems: Das Eliminationsverfahren von Gauss zur Auflösung linearer Gleichungssysteme ; ZWB/UM/774 R 2766 ; Darmstadt, Technische Hochschule May, 1944 / [tr. by H.R. Grumann ; checked by P.A. Buzard*. Wright Field and Dayton and OH : Headquarters Air Material Command, 1947
- [89] ZWICK, S. ; WARBER, M. ; HAIST, T. ; SCHAAL, F. ; OSTEN, W. ; BOEDECKER, S.: *Advanced Scanning Laser-Doppler Vibrometer with Computer Generated Holograms*. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Vibration Measurements by Laser and Noncontact Techniques and Short Course* (2010)