



FACHBEREICH PHYSIK
BERGISCHE UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

**Neutrinoeigenschaften und
Nukleonenzerfall in einer
renormierbaren
SUSY SO(10) GUT
mit realistischen Massenmatrizen**

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
am Fachbereich Physik der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von
Marcus Richter

WUB-DIS 2002-7
Dezember 2002

Abstract

Grand Unified Theories (GUTs) can cure several unpleasant features of the Standard Model of Particle Physics (SM). They unify the SM interactions and lead to relations between the quark and lepton mass matrices, thus reducing the arbitrariness in the fermionic sector. Furthermore, the smallness of the neutrino masses can be understood in the framework of the seesaw mechanism. In the scenario of supersymmetric (SUSY) GUTs gauge coupling unification can be achieved without the assumption of intermediate symmetries and the hierarchy problem (i.e. that the electroweak scale is affected by radiative corrections in all orders of perturbation theory) is solved in a highly elegant way.

Since quarks and leptons are connected in representations of the unifying gauge group, GUTs include baryon and lepton number violating interactions which mediate proton decay and lead to an instability of the bound neutron on an extremely large timescale. Nevertheless, proton decay via $d = 5$ operators is experimentally excluded by now not only in the framework of SUSY SU(5) but also its extensions like SUSY SO(10) are on the verge of being inconsistent with $d = 5$ decays. From this it is reasonable to suppress, e.g. by a symmetry, the $d = 5$ operators and to consider gauge boson induced $d = 6$ decays. This is suggested in several recent papers in the framework of models with a lighter M_X . Therefore, in this thesis the fermionic sector of such a renormalizable SUSY SO(10) with realistic mass matrices is developed explicitly. It is found that the experimentally indicated large leptonic mixing leads to an enhancement of the nucleon decay channels involving μ 's and in particular the $\mu^+\pi^0$, $\mu^+\pi^-$ modes.

This model is the first with realistic mass matrices where the CP-violation in the K and B decays and the one needed to explain the baryon-asymmetry in the universe arise from the same origin, a tiny phase of a single vacuum expectation value, which also induces the predicted violation in the leptonic sector.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Das Standardmodell	11
1.1 Eichgruppe und Teilcheninhalt	11
1.2 Symmetriebrechung und Massenerzeugung	13
1.3 Renormierung und laufende Kopplungen	20
1.4 Jenseits des Standardmodells	21
2 Das Minimale Supersymmetrische Standard Modell	27
2.1 Supersymmetrie	27
2.2 Das chirale Supermultiplett	29
2.3 Das Vektor-Supermultiplett	30
2.4 Kopplung von chiralen und Vektor-Multipletts	32
2.5 Feldinhalt des MSSMs, R -Parität	33
2.6 Brechung der Supersymmetrie	36
2.6.1 Eigenschaften global supersymmetrischer Theorien	37
2.6.2 Spontane SUSY-Brechung	37
2.6.3 Explizite Brechung der Supersymmetrie	39
2.7 Das Minimale Supersymmetrische SM	40
2.8 Elektroschwache Symmetrie-Brechung	40
2.9 Die Skala der SUSY-Brechung	43
3 Vereinheitlichte Theorien	45
3.1 Die Wahl der Symmetriegruppe G_{GUT}	45
3.2 Der Prototyp: $SU(5)$	48
3.2.1 Darstellung der Fermionen und Eichbosonen	48
3.2.2 Spontane Symmetriebrechung und Fermionmassen	50
3.2.3 Yukawa-Relationen und Weinberg-Winkel	51
3.2.4 Protonzerfall	52
3.2.5 Diskussion des Georgi-Glashow-Modells	53
3.3 $SO(10)$	54
3.3.1 $SU(5)$ als Untergruppe von $SO(10)$	54

3.3.2	Neutrinomassen	56
3.3.3	Brechungs-Szenarien der $SO(10)$ -Symmetrie	57
3.3.4	Protonzerfall	59
3.4	Supersymmetrische GUTs	60
3.5	Nukleonenzerfall in SUSY-GUTs	61
3.5.1	Dimension-4-Operatoren	61
3.5.2	Dimension-5-Operatoren	62
4	Neutrino-Oszillationen	65
4.1	Grundlagen	65
4.1.1	Vakuumoszillationen	66
4.1.2	Oszillationen in Materie	67
4.2	Experimentelle Ergebnisse	69
4.2.1	Sonnen-Neutrinos	70
4.2.2	Atmosphärische Neutrinos	74
4.2.3	LSND und KARMEN	77
4.2.4	Zusammenfassung der experimentellen Randbedingungen	78
5	Das SUSY $SO(10)$ Massenmodell	81
5.1	Grundlagen und Struktur des Massenmodells	82
5.2	Lösung des Massenmodells im Quark-Lepton-Sektor	84
5.3	Neutrino-Lösungen	93
5.4	CP-Verletzung	98
5.4.1	Direkte Implementierung einer Phase	98
5.4.2	Durch komplexen Vakuumerwartungswert induzierte CP-Verletzung	99
6	Zerfallsraten der Nukleonen	103
6.1	Die effektive Lagrangedichte	103
6.2	Hadronische Übergangsmatrixelemente	104
6.3	Berechnung der Zerfallsraten	106
	Zusammenfassung	111
A	SUSY Notation und verwendete Konventionen	113
B	Dimension von Operatoren	115
C	Diagonalisierung komplexer 3×3 Matrizen	119
C.1	Biunitäre Diagonalisierung einer Matrix	119
C.2	Parametrisierung unitärer Matrizen	119
C.3	Freiheiten in der Wahl von \mathbf{L} und \mathbf{R}	120
C.4	Numerische Verfahren	122

D	Renormierungsgruppen-Gleichungen	125
D.1	Renormierungsgruppen-Gleichungen des SMs	125
D.1.1	Eichkopplungen	125
D.1.2	Yukawa-Kopplungen	125
D.1.3	Higgs-Selbstkopplung	127
D.1.4	Seesaw-Matrix	127
D.2	Renormierungsgruppen-Gleichungen des MSSMs	127
D.2.1	Eichkopplungen	127
D.2.2	Yukawa-Kopplungen	128
D.2.3	Seesaw-Matrix	129
D.3	Schwellen-Korrekturen	130
E	Berechnung der Nukleonzerfallsraten	131
E.1	A_i -Koeffizienten	131
E.2	Meson-Wellenfunktionen	133
E.3	Phasenraumfaktoren	134
E.4	Übergangsamplituden	134
E.5	Experimentelle Grenzen für die Nukleonzerfallsraten	136
F	Explizite Form der LMA-Lösungen bei M_Z	147
	Literaturverzeichnis	189
	Schlusswort	197

Tabellenverzeichnis

1.1	Fermioninhalt des Standardmodells	12
1.2	Eichbosonen des Standardmodells	13
1.3	Fermionmassen bei M_Z	21
2.1	Chirale Supermultipletts des supersymmetrischen SMs	34
2.2	Vektor-Supermultipletts	34
3.1	Einfache Liegruppen und ihre wichtigsten Eigenschaften	46
3.2	Higgs-Kopplungen und Vakuumerwartungswerte in $SO(10)$ -GUTs	58
4.1	Sonnen-Neutrinoexperimente und deren Messwerte für R	70
4.2	Lokale Lösungen für das Sonnen-Neutrinoexperiment	73
5.1	Lösungstyp I bei M_{GUT}	86
5.2	Lösungstyp II bei M_{GUT}	87
5.3	Lösungstyp III bei M_{GUT}	88
5.4	Lösungstyp I bei M_Z	89
5.5	Lösungstyp II bei M_Z	90
5.6	Lösungstyp III bei M_Z	91
5.7	Diagonalelemente der drei Lösungstypen bei M_Z	92
5.8	Beträge der CKM-Matrixelemente bei M_{GUT} und M_Z	92
5.9	Parameter ausgewählter MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel	94
5.10	Parameter exemplarisch ausgewählter LMA-Lösungen	94
5.11	Elemente der Dirac- und Majorana-Neutrinomatrizen für die sechs LMA-Lösungen	96
5.12	Neutrinomassen ausgewählter LMA-Lösungen	96
5.13	Elemente der Dirac- und Majorana-Neutrinomatrizen für exemplarisch ausgewählte MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel	97
5.14	Neutrinomassen ausgewählter MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel	97
5.15	Modellparameter der LMA-Lösungen	101
5.16	Elemente der u - und Dirac-Neutrino-Matrix für $\Omega = 0.003$	102
6.1	Spinor-Amplituden der hadronischen Matrixelemente	106

B.1	Dimensionen verschiedener Felder	115
B.2	Baryon- bzw. leptonzahlverletzende Operatoren in SUSY GUTs	117
C.1	Verschiedene Parametrisierungen der Matrix \mathbf{U}	124
E.1	Wellenfunktionen der pseudoskalaren Mesonen	133
E.2	Wellenfunktionen der Vektormesonen	134
E.3	Phasenraumfaktoren für Proton- und Neutronzerfälle	135
E.4	Übergangsamplituden für die Elementarprozesse der Nukleonenzerfälle . . .	136
E.5	Übergangswahrscheinlichkeiten für Zerfallsprozesse der Nukleonen mit physikalischen Endzuständen	137
E.6	Aktuelle Resultate von Super-Kamiokande für die unteren Grenzen der Nukleonlebensdauern	137
E.7	Experimentelle Grenzen für die Lebensdauern $1/\Gamma_i$ der Nukleonen	138
E.8	Partielle p -Zerfallsraten für die reellen LMA-Lösungen	139
E.9	Partielle n -Zerfallsraten für die reellen LMA-Lösungen	140
E.10	Partielle p -Zerfallsraten für $\phi = 0.3$	141
E.11	Partielle n -Zerfallsraten für $\phi = 0.3$	142
E.12	Partielle p -Zerfallsraten für $\Omega = 0.003$	143
E.13	Partielle n -Zerfallsraten für $\Omega = 0.003$	144
E.14	Partielle p -Zerfallsraten für die S-MSW-Lösungen	145
E.15	Partielle n -Zerfallsraten für die S-MSW-Lösungen	146

Abbildungsverzeichnis

1.1	Laufende Kopplungen im SM und MSSM	23
3.1	Baryonzahlverletzende Vertizes der X - und Y -Bosonen	52
3.2	Beispiele für zum Protonzerfall beitragende Feynmandiagramme	52
3.3	Baryonzahlverletzende Vertizes der X' - und Y' -Bosonen	60
3.4	$d = 4$ Operator	61
3.5	$B - L$ verletzende Prozesse durch $d = 4$ und $d = 5$ Operatoren	62
3.6	Protonzerfall über $d = 5$ Operatoren	62
4.1	Erlaubte und ausgeschlossene Bereiche für Neutrino-Oszillationsparameter .	69
4.2	Energie-Spektrum der Sonnen-Neutrinos	71
4.3	Globale Lösungen für alle verfügbaren Sonnen-Neutrinodaten	73
4.4	$R_{\mu/e}/R_{\mu/e}^{\text{MC}}$ für verschiedene atmosphärische Neutrinodetektoren	75
4.5	Zenith-Winkelabhängigkeit der SuperKamiokande Daten	76
4.6	Vergleich der LSND-Evidenz für $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillationen mit den Ausschlussbereichen anderer Experimente (insbes. KARMEN2)	77
4.7	Neutrinooszillationsparameter auf der Basis von 2ν -Analysen	79
4.8	Statistische Signifikanz der SMA-Lösung	80
5.1	LMA-Lösungen	95
5.2	MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel	95
B.1	$d = 4$, $d = 5$ und $d = 6$ Operatoren	116
B.2	Supergraphen der Dimension fünf und sechs	116

Einleitung

Das Standardmodell (SM) der Elementarteilchen ist eine äußerst erfolgreiche Theorie, die die Physik in Beschleunigerexperimenten mit hoher Präzision beschreibt. Dennoch gibt es viele Indizien dafür, dass das SM selbst nicht fundamental ist, sondern den effektiven niederenergetischen Limes einer umfassenderen Theorie darstellt. Hierzu gehört einerseits die große Anzahl von Parametern¹, die experimentell bestimmt werden müssen. Von einer elementaren Theorie würde man jedoch erwarten, dass sie mit möglichst wenigen von außen vorgegebenen Größen auskommt. Andererseits enthält das SM zwei Bausteine, die nicht auf eine gemeinsame Grundlage zurückgeführt werden: die Quantenchromodynamik (QCD) und die Glashow-Weinberg-Salam-Theorie (GWS). Dies fällt besonders ins Auge, da im elektroschwachen Sektor des SMs durch die GWS-Theorie bereits ein hohes Maß an Vereinheitlichung erzielt werden konnte. Desweiteren werden Neutrinos in der ursprünglichen Form des SMs als masselos angenommen. Zwar kann das SM bezüglich der experimentell sich verdichtenden Hinweise auf kleine Neutrinomassen nachgebessert werden, dennoch wird nicht verstanden, warum die Massen der Neutrinos soviel kleiner sein sollen als die der übrigen Fermionen.

In den letzten dreißig Jahren sind bei der Suche nach Theorien jenseits des SMs erhebliche Fortschritte erzielt worden, dabei bilden die Grand Unified Theorien (GUTs) den naheliegendsten Ansatz, um die oben angesprochenen Schwachpunkte des SMs im Rahmen einer einheitlichen Theorie zu beheben. Das zugrundeliegende Konzept besteht darin, die Eichgruppe des SMs in eine Gruppe höheren Ranges einzubetten und dadurch eine einheitliche Beschreibung für die Wechselwirkungen des SMs zu entwickeln. Gleichzeitig induziert die höhere Symmetriegruppe Relationen zwischen den Yukawa-Kopplungen, so dass der Parameterinhalt zum Teil erheblich reduziert werden kann. Weiterhin wird die, durch Experimente wie Super-Kamiokande oder SNO indizierte Kleinheit der Neutrinomassen im Rahmen des sog. Seesaw-Mechanismus verständlich.

Ein weiteres Konzept, das für Vereinheitlichte Theorien in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen hat, ist die Supersymmetrie (SUSY), durch die bosonische und fermionische Freiheitsgrade verknüpft werden. Mit der Integration der SUSY in die Konstruktion von GUTs lassen sich zusätzliche wünschenswerte Eigenschaften realisieren: zum einen treffen sich die Eichkopplungen in der minimalen supersymmetrischen

¹19 bzw. 26 mit massiven Neutrinos und leptonen Mischungswinkeln.

Erweiterung des SMs (MSSM) exakt in einem Punkt, so dass in SUSY-Theorien eine Vereinheitlichung ohne intermediäre Symmetrien erreicht werden kann. Andererseits wird durch die SUSY das Hierarchie-Problem, welches unweigerlich mit GUTs verbunden ist, da mindestens zwei Symmetriebrechungsskalen mit einem immensen Größenordnungsunterschied auftreten, in sehr eleganter Weise gelöst. Die Strahlungskorrekturen, durch welche die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung in jeder Ordnung der Störungstheorie beeinflusst wird, kompensieren sich aufgrund gleichgroßer fermionischer und bosonischer Beiträge, die mit unterschiedlichem Vorzeichen eingehen.

Die wohl bemerkenswerteste Vorhersage von Grand Unified-Theorien besteht in der Instabilität des Protons und des gebundenen Neutrons aufgrund von baryon- und leptonzahlverletzenden Wechselwirkungen. Allerdings sind derartige Nukleonenzerfälle bisher experimentell nicht nachgewiesen worden, was höchstwahrscheinlich damit zusammenhängt, dass die relevante Wechselwirkung wegen der großen Masse der zugehörigen Eichbosonen bei niedrigen Energien ausgesprochen schwach ist. Durch die gestiegene Nachweisempfindlichkeit verschiedener Experimente ist der Prototyp der Grand Unified-Theorien, das $SU(5)$ -Modell von Georgi und Glashow, inzwischen klar ausgeschlossen. Modelle, die auf der Eichgruppe $SO(10)$ beruhen, wie das hier untersuchte, besitzen diesen Nachteil jedoch nicht.

Gegenstand dieser Arbeit ist ein supersymmetrisches $SO(10)$ -Massenmodell. Es wird ein asymmetrischer „Nearest Neighbour Interaction“-Ansatz für die Massenmatrizen der Fermionen benutzt, welcher durch eine globale $U(1)$ -Familiensymmetrie realisiert ist. Dieser Zugang führt auf voneinander unabhängige rechts- und linkshändige Mischungen, die auch große Beträge annehmen können. In vielen Massenmodellen werden jedoch große Mischungen im Bereich der geladenen Fermionen mit dem Hinweis auf die relativ kleinen CKM-Mischungen der Quarks außer Acht gelassen. In der Tat besitzen die gefundenen Lösungen des untersuchten Modells mehrere große Mischungswinkel, was zu Verzweigungsraten der Nukleonen führt, die sich von denjenigen verschwindender Mischungen deutlich unterscheiden. Zusätzlich sind die Neutrinoeigenschaften, welche ebenfalls Modellvorhersagen darstellen, in der Lage, die Anomalien der Sonnen- und atmosphärischen Neutrinos durch Oszillationslösungen zu erklären.

Im ersten Kapitel wird ein Überblick über die Konzepte und wichtigsten Eigenschaften des Standardmodells gegeben, auch dessen Grenzen werden diskutiert. Das zweite Kapitel behandelt die minimale supersymmetrische Erweiterung des SMs und enthält eine kurze Einführung in das Konzept der Supersymmetrie. Kapitel 3 befasst sich mit dem Themenkomplex der Grand Unified-Theorien. Nachdem die zugrunde liegenden Ideen vorgestellt wurden, werden die $SU(5)$ als Prototyp und die $SO(10)$ als Grundlage des in dieser Arbeit entwickelten Massenmodells ausführlich dargestellt; ebenso wird auf Vor- und Nachteile dieser Theorien eingegangen. Gegenstand des vierten Kapitels sind die theoretischen Grundlagen und der experimentelle Status von Neutrino-Oszillationen. Die drei bis heute beobachteten Neutrino-Anomalien und ihre möglichen Oszillationslösungen durch massive

Neutrinos werden vorgestellt. Kapitel 5 behandelt den konkreten Ansatz für das betrachtete $SO(10)$ -Massenmodell und dessen numerische Lösung. Als ein wichtiges Resultat werden hieraus Voraussagen über die Eigenschaften im Neutrino-sektor der Theorie entwickelt. In Kapitel 6 werden schließlich die Verzweigungsverhältnisse der Kanäle beim Nukleonenzerfall für die Lösungen mit großem Mischungswinkel berechnet. Diese stellen eine wesentliche und in absehbarer Zeit experimentell überprüfbare Vorhersage des untersuchten Modells dar.

Kapitel 1

Das Standardmodell

1.1 Eichgruppe und Teilcheninhalt

Das Standardmodell (SM) der Elementarteilchenphysik [2] umfasst die Theorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung: die Quantenchromodynamik (QCD) [3] und die Glashow-Weinberg-Salam-Theorie (GWS) [4]. Die QCD beruht auf der Eichgruppe $SU(3)_C$ und beschreibt die Wechselwirkung von Teilchen mit Farbladung, den Quarks¹ und Gluonen. Im Rahmen der GWS werden Elektromagnetismus und schwache Wechselwirkung auf einen gemeinsamen Ursprung zurückgeführt und durch eine vereinheitlichte Theorie mit der Eichgruppe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ beschrieben. Als Eichsymmetrie liegt dem SM damit das direkte Produkt dieser beiden Gruppen, eine $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie², zugrunde.

Die Fermionen (Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen) bilden die fundamentalen Bausteine der Materie. Hierzu gehören die Leptonen, die nicht stark wechselwirkenden Teilchen, und die Quarks, aus denen die Hadronen aufgebaut sind.

Ein wesentliches Element der GWS – und damit des SMs – ist, dass sie die schwache WW auf der Basis einer chiralen Theorie beschreibt und somit das Wechselwirkungsverhalten von der Chiralität der Zustände abhängt: nur linkshändige Teilchen können der schwachen WW unterliegen. Mit Hilfe des Projektionsoperators $\mathcal{P}_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)$ kann aus einem beliebigen Dirac-Spinor Ψ dessen linkshändige Komponente $\Psi_L = \mathcal{P}_L \Psi$ herausprojiziert werden. Die rechtshändige Komponente erhält man durch Anwenden des Projektionsoperators $\mathcal{P}_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)$. Die chiralen Komponenten Ψ_L bzw. Ψ_R enthalten nur noch zwei komplexe Freiheitsgrade und bilden einen Weyl-Spinor. Jeder Weyl-Spinor kann nun entsprechend seinem WWs-Verhalten in eine fundamentale Darstellung der Symmetriegruppe G_{SM} eingeordnet werden. Dabei werden die fundamentalen Darstellungen von nichtabelschen Lie-Gruppen durch ihre Dimension gekennzeichnet. Dubletts bilden eine

¹Inspiziert durch die Zeile „Three quarks for Muster Mark!“ aus *Finnegans Wake* von James Joyce verwendete Murray Gell-Mann diesen Namen für die fundamentalen Materieteilchen der starken WW.

²Die Symmetriegruppe des SMs wird im folgenden durch $G_{SM} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ bezeichnet. Der Index C steht für „color“, L für „left“ und Y für die Hyperladung.

2, Triplets eine **3** usw. Die zu einer Darstellung komplex konjugierte Darstellung wird durch einen Querstrich gekennzeichnet (z.B. $\bar{\mathbf{3}}$). Die Quarks, die in drei Farben auftreten, bilden jeweils eine dreidimensionale Darstellung der $SU(3)$. Alle linkshändigen Spinoren werden in $SU(2)$ -Dubletts eingeordnet, während die rechtshändigen in $SU(2)$ -Singulets liegen und somit an der schwachen WW nicht teilnehmen.

Experimentell ist sehr gut abgesichert [1], dass die Fermionen des Standardmodells in drei Generationen mit jeweils identischen Quantenzahlen aber sehr unterschiedlichen Massen vorkommen; diese sind in Tabelle 1.1 dargestellt. Das erste Element des unter G_{SM} angegebenen Tupels kennzeichnet die Dimension der Darstellung bzgl. $SU(3)_C$, der zweite Eintrag entspricht dem Verhalten unter $SU(2)_L$ -Transformationen. Als Index ist die $U(1)_Y$ -Quantenzahl, die Hyperladung Y , angegeben. Hieraus ergibt sich die elektrische Ladung zu:

$$Q = T_3 + Y, \quad (1.1)$$

wobei T_3 die dritte Komponente des schwachen Isospins ist.

In Erweiterungen des SMs ist es aus gruppentheoretischen Gründen sinnvoll, mit Fermionen einer Chiralität zu arbeiten. Deshalb sind in Tabelle 1.1 statt der rechtshändigen Teilchen die linkshändigen Komponenten ihrer Antiteilchen angegeben. Der Zusammenhang zwischen beiden Schreibweisen wird durch die Ladungskonjugationsoperation \mathcal{C} hergestellt: $\Psi_R = \mathcal{C}(\bar{\Psi}_L)^T$. Aus Tabelle 1.1 ist auch ersichtlich, dass im SM ausschließ-

Quarks	G_{SM}	Q	Leptonen	G_{SM}	Q
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}}$	$+\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$	0 -1
u_L^C, c_L^C, t_L^C	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}$			
d_L^C, s_L^C, b_L^C	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}}$	$+\frac{1}{3}$	e_L^+, μ_L^+, τ_L^+	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1$	+1

Tabelle 1.1: Fermioninhalt des Standardmodells

lich linkshändige Neutrinos vorkommen. Rechtshändige Neutrinos transformieren sich aufgrund ihrer Farb- und Ladungsneutralität nach der G_{SM} -Darstellung $(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$ und sind somit im Rahmen des SMs nicht beobachtbar, da sie an keiner WW teilnehmen.

Insgesamt transformieren sich die Fermionen einer Generation unter G_{SM} gemäß der Darstellung

$$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1. \quad (1.2)$$

Ein wesentliches Kriterium bei der Konstruktion von Eichtheorien ist die Forderung nach *lokaler* Eichinvarianz, d.h. nach einer explizit ortsabhängigen Eichtransformation, da man bei globaler Eichsymmetrie eine wechselwirkungsfreie Theorie erhalten würde. Dem SM liegt eine *lokale* Invarianz unter G_{SM} zugrunde. Hierdurch können alle Wechselwirkungen auf der Basis von Eichwechselwirkungen beschrieben werden: die Kräfte werden

durch den Austausch von Vektorbosonen vermittelt. Die Vektorbosonen der QCD sind die Gluonen, die der GWS-Theorie die W -Bosonen und das B -Boson (Tabelle 1.2). Sowohl die Gluonen als auch die W -Bosonen können mit sich selbst wechselwirken, da die zugehörigen Eichgruppen $SU(3)_C$ und $SU(2)_L$ nichtabelsch sind.

Die Eichbosonen transformieren sich stets wie die adjungierte Darstellung³ der Symmetriegruppe, im Falle des SMs also gemäß

$$(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 .$$

Die Kopplungsstärken der SM-Eichbosonen an die fermionischen Ströme $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ werden mit g_3 , g_2 und g' bezeichnet. In Erweiterungen des SM durch Vereinheitlichte Theorien (Grand Unified Theories = GUTs) muss g' auf $g_1 = \sqrt{5/3}g'$ umnormiert werden, damit die $U(1)_Y$ in die Symmetriegruppe der GUT integriert werden kann. Die Eigenschaften der SM-Eichbosonen sind in Tabelle 1.2 zusammengefasst.

Eichboson(en)	Eichgruppe	G_{SM}	Spin	Kopplung
Gluonen g	$SU(3)_C$	$(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0$	1	g_3
W -Bosonen	$SU(2)_L$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3})_0$	1	g_2
B -Boson	$U(1)_Y$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$	1	$g' = \sqrt{3/5}g_1$

Tabelle 1.2: Eichbosonen des Standardmodells

1.2 Symmetriebrechung und Massenerzeugung

In einer Eichtheorie können Fermionmassen durch den Ausdruck

$$m \bar{\Psi} \Psi \tag{1.3}$$

explizit in die Lagrangedichte eingebaut werden. Je nachdem, ob es sich bei Ψ um einen Dirac- oder Majorana-Spinor handelt, spricht man von einem Dirac- oder Majoranamassterm. Dieser Differenzierung liegt zugrunde, dass sich die chirale Dekomposition von (1.3) in beiden Fällen unterschiedlich verhält: für einen Diracspinor entspricht (1.3) dem Massenterm aus der Lagrangedichte der Dirac-Gleichung. In diesem Fall gilt⁴

$$m \bar{\Psi} \Psi = m (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L) = m (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \text{h.c.}) , \tag{1.4}$$

d.h. der Massenterm mischt beide chiralen Zustände.

Majorana-Spinoren sind Spinoren, die der Forderung

$$\Psi = \Psi^C \tag{1.5}$$

³Die adjungierte Darstellung hat die Dimension $N^2 - 1$, wobei N die Dimension der Fundamentaldarstellung ist. Die Transformationseigenschaften entsprechen denen der Generatoren der zugrundeliegenden Gruppe.

⁴h.c. steht für hermitesch konjugiert.

genügen; das Teilchen muss sein eigenes Antiteilchen sein. Dies kann nur durch ein elektrisch neutrales und farbloses Fermion erfüllt werden (z.B. ein Neutrino; in diesem Fall wären Neutrino und Anti-Neutrino identisch). Es ist zu beachten, dass die Weyl-Spinoren Ψ_L oder Ψ_R Gl. (1.5) nicht erfüllen. Betrachtet man aber den Ausdruck

$$\Psi_{M_L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_L + \Psi_R^C) \quad \text{oder} \quad \Psi_{M_R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_R + \Psi_L^C), \quad (1.6)$$

so ist die Bedingung (1.5) wegen der Identität $\Psi_{L,R}^C \equiv (\Psi_{R,L})^C$ in klarer Weise erfüllt. Den Ausdrücken Ψ_{M_L} und Ψ_{M_R} liegen wegen $\Psi_{R,L}^C = \mathcal{C}(\bar{\Psi}_{L,R})^T$ nur Spinoren einer Chiralität zugrunde; deshalb enthalten Majorana-Spinoren wie Weyl-Spinoren nur zwei unabhängige Komponenten. Dadurch wird der Massenterm (1.3) ausschließlich durch *eine* Chiralität realisiert:

$$m\bar{\Psi}_{M_L}\Psi_{M_L} = \frac{m}{2}(\bar{\Psi}_R^C\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R^C) = \frac{m}{2}(\Psi_L^T\mathcal{C}\Psi_L + \bar{\Psi}_L\mathcal{C}\bar{\Psi}_L^T) \quad (1.7)$$

$$m\bar{\Psi}_{M_R}\Psi_{M_R} = \frac{m}{2}(\bar{\Psi}_L^C\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L^C) = \frac{m}{2}(\Psi_R^T\mathcal{C}\Psi_R + \bar{\Psi}_R\mathcal{C}\bar{\Psi}_R^T). \quad (1.8)$$

Speziell für Neutrinos ist diese Art von Massenterm interessant, da sie im SM nur als linkshändige Teilchen vorkommen. Allerdings ist ein solcher Majorana-Massenterm im SM ausgeschlossen, da er die Leptonzahl um zwei Einheiten verletzt.

Das Transformationsverhalten der Massenterme für die geladenen Fermionen unter G_{SM} ergibt sich aus der chiralen Darstellung des Dirac-Massenterms (1.4):

$$(u, c, t)\text{-Quarks:} \quad (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \otimes (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \quad (1.9)$$

$$(d, s, b)\text{-Quarks:} \quad (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \otimes (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

$$\text{geladene Leptonen:} \quad (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

Da diese Terme nicht invariant unter G_{SM} -Transformationen sind, können die Fermionmassen nicht explizit in die Lagrangedichte des SMs aufgenommen werden. Abhilfe schafft hier die spontane Brechung der lokalen Eichsymmetrie (SSB⁵) durch den sogenannten Higgs-Mechanismus [11]. Dieser erklärt auch, warum in Experimenten bei niedrigen Energien nicht die volle G_{SM} -Symmetriegruppe, sondern eine reduzierte $SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}}$ -Symmetrie beobachtet wird.

Im Rahmen des Higgs-Mechanismus wird ein skalares Higgs-Feld Φ in die Theorie einbezogen. Die Fermionen koppeln dann durch sogenannte Yukawa-Kopplungen,

$$-G_Y \left[(\bar{\Psi}_L \Phi) \Psi_R + \bar{\Psi}_R (\Phi^\dagger \Psi_L) \right], \quad (1.12)$$

die durch die spontane Brechung der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie fermionische Massenterme generieren, an das Feld Φ . Damit diese Ausdrücke invariant unter $SU(2)_L$ -Transformationen sind, muss Φ ein $SU(2)$ -Dublett bilden. Dies kann durch die Wahl

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \phi^+ &\equiv (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2} \\ \phi^0 &\equiv (\phi_3 + i\phi_4)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

⁵Spontane Symmetrie-Brechung

erreicht werden, wobei die ϕ_i reell sind. Das hermitesch konjugierte Dublett Φ^\dagger beschreibt die Antiteilchen ϕ^- und $\bar{\phi}^0$. Die Ladungszuordnung in (1.13) ergibt sich aus der Struktur der Yukawa-Kopplungen (1.12): als $SU(2)$ -Dublett besitzt Φ einen schwachen Isospin von $\frac{1}{2}$; für ϕ^+ ergibt sich somit $T_3 = +\frac{1}{2}$, während für ϕ^0 gilt: $T_3(\phi^0) = -\frac{1}{2}$. Durch die Ladungsanordnung in Φ gemäß Gl. (1.13) folgt aus der Gell-Mann-Nishijima Relation (1.1), dass Φ die Hyperladung $Y = \frac{1}{2}$ trägt. Dies ist unbedingt erforderlich, um die Invarianz der Yukawa-Kopplungen (1.12) unter $U(1)_Y$ -Transformationen

$$\Xi \rightarrow \exp(iY(\Xi)\alpha(x))\Xi \quad \text{mit } \Xi = \Psi \text{ bzw. } \Xi = \Phi \quad (1.14)$$

zu realisieren. Damit liegt Φ in der G_{SM} -Darstellung $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$.

Das Higgs-Feld wird nun durch den Term

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \Phi) - V(\Phi) \quad (1.15)$$

in die Lagrangedichte aufgenommen. Über den kinetischen Term koppelt Φ durch die kovariante Ableitung \mathcal{D}_μ eichinvariant an die Eichbosonen

$$(\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \Phi) \equiv |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 = |(\partial_\mu + ig_2 T_i W_\mu^i + ig' Y B_\mu) \Phi|^2, \quad (1.16)$$

wobei g_2 und g' sowie T_i und Y die $SU(2)_L$ bzw. $U(1)_Y$ Kopplungen und Generatoren⁶ darstellen. Der allgemeinste $SU(2)$ -invariante und renormierbare Ausdruck für das Potenzial hat die Form:

$$V(\Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (1.17)$$

und beinhaltet damit auch einen Selbstwechselwirkungs-Term für Φ . In diesem steht λ für die quartische Higgskopplung. Die Betragsstriche haben die Funktion, das Potenzial nach unten zu beschränken.

Der Grundzustand für Φ ist durch

$$\frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi} = 0 \quad (1.18)$$

gegeben. Diese Gleichung hat die Lösungen

$$|\Phi| = 0 \quad \vee \quad |\Phi| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}. \quad (1.19)$$

Für $\mu^2 \geq 0$ bildet $\Phi = (0, 0)^T$ den Grundzustand des Higgs-Feldes. Da die Kopplung an die Eichbosonen durch (1.16) wie auch die Yukawa-Kopplungen (1.12) in diesem Fall verschwinden, bleiben die Bosonen und Fermionen masselos.

Die zweite Lösung ist im Fall $\mu^2 < 0$ gültig. Der Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes kann nun als

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle \equiv \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}} \quad (1.20)$$

⁶Die T_i genügen der $SU(2)$ -Algebra $[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k$. Somit gilt $T_i = \sigma_i/2$, wobei die σ_i die Pauli-Matrizen sind.

gewählt werden⁷. Hierbei ist zu beachten, dass nur das neutrale Feld ϕ^0 einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert annehmen kann, da die elektrische Ladung eine erhaltene Größe ist. Indem man Φ um Φ_0 entwickelt, ist es möglich, die Anregungen des Higgs-Feldes perturbativ zu beschreiben

$$\check{\Phi}(x) = \exp\left(\frac{i}{v}T_i\xi^i(x)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

wobei $\xi^i(x)$ und $H(x)$ als kleine Störungen betrachtet werden. Von diesen vier Freiheitsgraden ist nur $H(x)$ physikalisch, da die drei Größen $\xi^i(x)$ durch eine $SU(2)_L$ -Eichtransformation eliminiert werden können

$$\hat{\Phi}(x) = \exp\left(-\frac{i}{v}T_i\xi^i(x)\right) \check{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Das Feld $H(x)$ beschreibt eine eichinvariante Fluktuation weg vom Vakuumzustand des Higgs-Feldes; dies ist das physikalische skalare Higgs-Boson.

Durch die explizite Wahl eines Grundzustandes als Entwicklungspunkt – der somit gegenüber anderen ursprünglich äquivalenten Grundzuständen ausgezeichnet ist – wird die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie spontan in die $U(1)_{\text{em}}$ -Eichgruppe der QED gebrochen

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{|\Phi|=\frac{v}{\sqrt{2}}} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}}. \quad (1.23)$$

Dadurch werden die ursprünglich masselosen Eichbosonen massiv. Setzt man $\hat{\Phi}$ in die Lagrangedichte ein, so können die zugehörigen Massenterme identifiziert werden. Diese folgen aus Gl. (1.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scalar}} &= \left| \left(\partial_\mu + ig_2 \frac{\sigma_i}{2} W_\mu^i + ig' Y B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 - V(\hat{\Phi}) \\ &= \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} 2\partial_\mu + g_2 W_\mu^3 + g' B_\mu & g_2(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g_2(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & 2\partial_\mu - g_2 W_\mu^3 + g' B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \right|^2 - V(\hat{\Phi}) \\ &= \frac{1}{8} (v + H)^2 (g_2 W_\mu^3 - g' B_\mu)^2 + \frac{g_2^2}{4} (v + H)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + 0(g' W_\mu^3 + g_2 B_\mu)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |\partial_\mu H|^2 - \mu^2 (v + H)^2 - |\lambda| (v + H)^4 \\ &= \frac{v^2}{8} (g_2 W_\mu^3 - g' B_\mu)^2 + \frac{v^2}{4} g_2^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + 0(g' W_\mu^3 + g_2 B_\mu)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} |\partial_\mu H|^2 + \mu^2 H^2 - v|\lambda| H^3 - \frac{|\lambda|}{4} H^4 + \frac{\mu^4}{4|\lambda|} \end{aligned} \quad (1.24)$$

mit

$$W^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp iW^2). \quad (1.25)$$

⁷Der Wert von v ergibt sich durch die Beziehung $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$ aus der experimentell bestimmbaren Fermikonstante G_F ; er beträgt 246.22 GeV.

Die physikalischen Eichbosonen können nun als Masseneigenzustände der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Bosonen identifiziert werden:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp i W^2) \quad (1.26)$$

$$Z = \sin \theta_W B + \cos \theta_W W^3 \quad (1.27)$$

$$A = \cos \theta_W B - \sin \theta_W W^3, \quad (1.28)$$

wobei der Weinberg-Winkel θ_W durch die Beziehungen

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g_2^2}}, \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g_2} \quad (1.29)$$

definiert ist. Vergleicht man die Massenterme in (1.24) mit der üblichen Notation für Spin-1 und Spin-0 Felder⁸

$$m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu^2 + \frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu^2 - \frac{1}{2} m_H^2 H^2, \quad (1.30)$$

so ergeben sich die folgenden Massen für die Bosonen:

$$m_W = \frac{v}{2} g_2 \quad (1.31)$$

$$m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g_2^2 + g'^2} = \frac{m_W}{\cos \theta_W} \quad (1.32)$$

$$m_\gamma = 0 \quad (1.33)$$

$$m_H = \sqrt{2} |\mu|. \quad (1.34)$$

Das Feld A_μ entspricht dem masselosen Photon. Aus der Kopplung des Photons an die leptonenischen Ströme

$$\frac{g_2 g'}{\sqrt{g_2^2 + g'^2}} \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \quad (1.35)$$

ergibt sich die Relation

$$e = \frac{g_2 g'}{\sqrt{g_2^2 + g'^2}}. \quad (1.36)$$

Mit Hilfe der Beziehungen $g = \sqrt{4\pi\alpha}$ und $g' = \sqrt{3/5} g_1$ sowie $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi$ folgt hieraus unter Berücksichtigung von (1.29):

$$\alpha_1 = \frac{5\alpha_{\text{em}}}{3 \cos^2 \theta_W}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_{\text{em}}}{\sin^2 \theta_W}, \quad (1.37)$$

so dass die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Kopplungskonstanten aus der elektromagnetischen Kopplung α_{em} und dem Weinberg-Winkel θ_W bestimmt werden können.

Neben dem Photon bleiben auch die Gluonen masselos, da das Higgs-Feld keine Farbladung trägt. Das Higgs-Boson ist das einzige Teilchen des SMS, das bisher experimentell

⁸Die Massenterme reeller Felder tragen den Faktor 1/2, wobei der skalare Massenterm ein negatives Vorzeichen hat.

nicht nachgewiesen wurde. Seine Masse sollte jedoch aufgrund elektroschwacher Präzisionsmessungen unter Berücksichtigung der theoretischen Unsicherheiten in dem Bereich

$$m_H = 97_{-36}^{+53} \text{ GeV} \quad (1.38)$$

liegen, wobei $m_H < 194$ GeV als obere Schranke mit einem Konfidenzlevel von 95% vorausgesagt wird [17]. Im Szenario des Minimal Supersymmetrischen Standardmodells (MSSM) liegt die Obergrenze für die Higgsmasse bei etwa 135 GeV [18], was den in (1.38) angegebenen Bereich weiter einschränkt, sofern das MSSM in der Natur realisiert ist.

Die Fermionen erhalten im Rahmen der SSB durch die Yukawa-Kopplungen (1.12) Massen. Für den gesamten fermionischen Sektor des SMs resultiert hieraus der Beitrag

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{a,b=1}^3 \left(\bar{Q}_L^a \tilde{\Phi} (\mathbf{Y}_u)_{ab} u_R^b + \bar{Q}_L^a \Phi (\mathbf{Y}_d)_{ab} d_R^b + \bar{L}_L^a \Phi (\mathbf{Y}_e)_{ab} e_R^b \right) + \text{h.c.} \quad (1.39)$$

zur SM-Lagrangedichte mit

$$Q_L^a = \begin{pmatrix} u_L^a \\ d_L^a \end{pmatrix}, \quad L_L^a = \begin{pmatrix} \nu_L^a \\ e_L^a \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}, \quad (1.40)$$

wobei die Indizes a und b für die Fermion-Generation stehen ($d_L^a \equiv s_L$ für $a = 2$). Die Elemente der 3×3 -Matrizen \mathbf{Y}_i entsprechen jeweils der Kopplungskonstante G_Y in Gl. (1.12). Das ladungskonjugierte Higgs-Dublett $\tilde{\Phi}$ wird benötigt, um eine Masse für den oberen Zustand eines Fermion-Dubletts zu generieren:

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \xrightarrow{SSB} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert generieren die Yukawa-Kopplungsmatrizen im Rahmen der SSB die Massenmatrizen

$$\mathbf{M}_u = \frac{v}{\sqrt{2}} \mathbf{Y}_u, \quad \mathbf{M}_d = \frac{v}{\sqrt{2}} \mathbf{Y}_d, \quad \mathbf{M}_e = \frac{v}{\sqrt{2}} \mathbf{Y}_e \quad (1.42)$$

für die Fermionen. Gl. (1.39) geht dann über in

$$\mathcal{L}_M = \sum_{a,b=1}^3 \left((\mathbf{M}_u)_{ab} \bar{u}_L^a u_R^b + (\mathbf{M}_d)_{ab} \bar{d}_L^a d_R^b + (\mathbf{M}_e)_{ab} \bar{e}_L^a e_R^b \right) + \text{h.c.} \quad (1.43)$$

Da $\tilde{\Phi}$ nur an die Quark-Felder koppelt, bleiben die Neutrinos masselos.

Aus der schwachen WW der d, s und b -Quarks ist bekannt, dass die $SU(2) \otimes U(1)$ -Eigenzustände durch eine unitäre Transformation aus Masseneigenzuständen hervorgehen. Im allgemeinen kann den $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Wechselwirkungszuständen daher keine definierte Masse zugeordnet werden. Folglich handelt es sich bei den Massenmatrizen \mathbf{M}

um beliebige komplexe 3×3 -Matrizen, die durch eine biunitäre Transformation⁹ auf reelle Diagonalform gebracht werden können:

$$\mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{M}_d \mathbf{D}_R = \mathbf{M}_d^{(D)}, \quad \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{M}_u \mathbf{U}_R = \mathbf{M}_u^{(D)}, \quad \mathbf{E}_L^\dagger \mathbf{M}_e \mathbf{E}_R = \mathbf{M}_e^{(D)}. \quad (1.44)$$

Die Diagonalelemente der Matrizen $\mathbf{M}^{(D)}$ entsprechen dann den physikalischen Teilchenmassen. Der Zusammenhang zwischen den WW- und Massen-Eigenzuständen ist durch die Beziehungen

$$\mathcal{M}_{d_{L,R}}^a = \mathbf{D}_{L,R} d_{L,R}^a, \quad \mathcal{M}_{u_{L,R}}^a = \mathbf{U}_{L,R} u_{L,R}^a, \quad \mathcal{M}_{e_{L,R}}^a = \mathbf{E}_{L,R} e_{L,R}^a \quad (1.45)$$

gegeben, wobei die Massen-Eigenzustände durch den Zusatz \mathcal{M} gekennzeichnet sind. Mit Hilfe der Relationen (1.45) kann nun die Lagrangedichte auf Massenzustände umgeschrieben werden. Die neutralen Ströme ändern hierbei ihre Struktur nicht, während die geladenen schwachen Ströme die Form

$$(\mathcal{M}_{\bar{u}_L^a}) \gamma^\mu (\mathcal{M}_{d_L^a}) W_\mu^+ \implies \bar{u}_L^a \gamma^\mu (\mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{D}_L)_{ab} d_L^b W_\mu^+ \quad (1.46)$$

$$(\mathcal{M}_{\bar{d}_L^a}) \gamma^\mu (\mathcal{M}_{u_L^a}) W_\mu^- \implies (\mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{U}_L)_{ab} \bar{d}_L^b \gamma^\mu u_L^a W_\mu^- \quad (1.47)$$

annehmen. Das Produkt $\mathbf{V} = \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{D}_L$ bildet die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix), deren Elemente durch flavorändernde schwache Prozesse bestimmt werden können. Die „Standard“-Parametrisierung für \mathbf{V} hat die Form [1]

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{31} & s_{12}c_{31} & s_{31} e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{31} e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{31} e^{i\delta} & s_{23}c_{31} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{31} e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{31} e^{i\delta} & c_{23}c_{31} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

und beinhaltet die drei Winkel θ_{12} , θ_{23} und θ_{31} sowie die Phase δ , wobei abkürzend c_{ij} für $\cos \theta_{ij}$ sowie s_{ij} für $\sin \theta_{ij}$ verwendet wird. Die rechtshändigen Mischungsmatrizen \mathbf{X}_R , mit $\mathbf{X} = \mathbf{D}, \mathbf{U}$ oder \mathbf{E} , sind im Rahmen des SMs experimentell nicht zugänglich.

Da die linkshändigen Neutrinos derselben Transformation \mathbf{E}_L wie die geladenen Leptonen unterzogen werden können, ändern sich die leptonischen Anteile der geladenen schwachen Ströme im Fall masseloser Neutrinos nicht.

⁹Eine beliebige Matrix \mathbf{M} kann stets in ein Produkt einer hermiteschen Matrix \mathbf{H} und einer unitären Matrix \mathbf{U} zerlegt werden: $\mathbf{M} = \mathbf{H}\mathbf{U}$. Durch eine geeignete unitäre Transformation wird \mathbf{H} diagonalisiert $\mathbf{H} = \mathbf{U}_L \mathbf{H}^{(D)} \mathbf{U}_L^\dagger$; somit ergibt sich \mathbf{U}_R als $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U}_L$.

1.3 Renormierung und laufende Kopplungen

Ein wesentliches Merkmal für eine realistische Quantenfeldtheorie ist ihre Renormierbarkeit¹⁰. Dies bedeutet, dass Divergenzen¹¹ nur in einer endlichen Anzahl von Parametern der Theorie auftreten. Durch eine Redefinition der Modellparameter wie Kopplungen und Massen können diese dann absorbiert werden. Dabei wird in zwei Schritten vorgegangen:

1. **Regularisierung:** Die divergenten Integrale werden so umgeschrieben, dass sie eine neue Größe enthalten und für einen bestimmten Wert dieses Regularisierungsparameters wieder die ursprüngliche Form annehmen. Die genaue Vorschrift zum Ersetzen der Integrale wird dabei durch das gewählte Regularisierungsverfahren vorgegeben.
2. **Renormierung:** Die so gewonnenen Ausdrücke werden in Anteile, die im Grenzwert divergieren und solche, die endlich bleiben, zerlegt. Die endlichen Anteile bilden schließlich die renormierten Größen.

Ein Regularisierungsverfahren, welches die Eichinvarianz der Theorie erhält, ist die dimensionale Regularisierung. Hierbei nutzt man die Tatsache, dass die Divergenzen nur im Fall eines vierdimensionalen Impulsraums auftreten. Indem man die Integrale statt in vier in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen berechnet, können die divergenten Anteile als $1/\varepsilon$ -Terme identifiziert werden. Bei der Renormierung werden dann die divergenten Parameter \mathcal{G}_0 durch Einführung von Renormierungskonstanten Z , welche die $1/\varepsilon$ -Terme aufnehmen, in die endlichen renormierten Größen \mathcal{G}_R umgewandelt: $\mathcal{G}_0 \equiv Z \mathcal{G}_R$.

Durch die Regularisierung wird eine freie Massenskala μ in die Theorie eingeführt. Im Fall der dimensionalen Regularisierung dient dieser zusätzliche Parameter dazu, die Massendimension der Integrale konstant zu halten. Sowohl die renormierten Größen als auch die Renormierungskonstanten hängen von dieser Skala ab. Aus diesem Grunde werden sie auch als „laufende“ Größen bezeichnet. Die Änderungen der Kopplungskonstanten und Massen (bzw. der Yukawakopplungen, die gemäß Gl. (1.42) mit den Massenmatrizen zusammenhängen) bei Variation von μ wird durch die Renormierungsgruppen-Gleichungen beschrieben. Durch die Integration dieser Differentialgleichungen ist es möglich, die Kopplungsstärken und Fermionmassen bei unterschiedlichen Energieskalen zu berechnen. Die in dieser Arbeit verwendeten Renormierungsgruppen-Gleichungen sind in Anhang D zusammengefasst. Experimentell wurde die Energieabhängigkeit der Kopplungen in Beschleuniger-

¹⁰Eine notwendige Bedingung für die Renormierbarkeit einer Theorie ist, dass sie keine Kopplungskonstanten mit negativer Massendimension enthält. Die Fermi-Theorie der schwachen WW und quantisierte Formulierungen der Allgemeinen Relativitätstheorie sind nicht renormierbar, da hier Kopplungen mit der Dimension Masse⁻² auftreten. Ein entscheidender Durchbruch in der Entwicklung realistischer Feldtheorien war der Beweis von 't Hooft und Veltman [5], in dem gezeigt wurde, dass alle Eichtheorien, speziell also die QCD und die GWS-Theorie, renormierbar sind. Für diesen Beweis wurde 't Hooft und Veltman 1999 der Physik-Nobelpreis verliehen.

¹¹Bei der Berechnung von physikalischen Prozessen in höheren Ordnungen der Störungstheorie treten divergente Impulsintegrale (Ultraviolett-Divergenzen) auf.

gerexperimenten gut bestätigt: α_{em} hat bei $\mu \approx 0$ den Wert $1/137$, bei $\mu \approx M_Z$ ¹² beträgt die Kopplungsstärke der QED dagegen nur noch etwa $1/129$ [1].

Ebenso wie die Eichkopplungen sind auch die Yukawa-Kopplungen renormierte Größen, sie hängen somit von der Massenskala μ ab. Aus (1.42) und (1.44) wird deutlich, dass damit auch die Fermionmassen und -mischungen skalenabhängige Größen sind. Die Massen der Fermionen sind für $\mu = M_Z$ in Tabelle 1.3 angegeben. Neutrinos werden im Rahmen des SMs als masselos angenommen.

Größe:	$m_u(M_Z)$	$m_d(M_Z)$	$m_s(M_Z)$
Wert:	$2.33^{+0.42}_{-0.45}$ MeV	$4.69^{+0.60}_{-0.66}$ MeV	$93.4^{+11.8}_{-13.0}$ MeV
Größe:	$m_c(M_Z)$	$m_b(M_Z)$	$m_t(M_Z)$
Wert:	677^{+56}_{-61} MeV	3.00 ± 0.11 GeV	181 ± 13 GeV
Größe:	$m_e(M_Z)$	$m_\mu(M_Z)$	$m_\tau(M_Z)$
Wert:	486.84727 ± 0.00014 keV	102.75138 ± 0.00033 MeV	1746.7 ± 0.3 MeV

Tabelle 1.3: Fermionmassen bei M_Z [13].

Die Renormierbarkeit einer Eichtheorie kann durch das Auftreten von Anomalien zerstört werden. Diese liegen vor, wenn eine Symmetrie der klassischen Lagrangedichte¹³ durch den Prozess der Quantisierung und Renormierung gebrochen wird [7, 8]. Beispielsweise kann eine Eichtheorie, die auf klassischem Niveau chiral invariant ist, bei der Quantisierung Anomalien entwickeln, aufgrund derer die axialen Ströme nicht mehr erhalten sind. Beschränkt man sich auf den leptonischen Sektor der GWS-Theorie, so treten hier divergente fermionische Dreiecks-Graphen auf, die die Slavnov-Taylor-Identitäten¹⁴ verletzen. Diese Identitäten werden essentiell benötigt, um die Renormierbarkeit sicherzustellen. Betrachtet man jedoch die Theorie unter Hinzunahme der Quarks, so treten auch im Quark-Sektor Anomalien auf, allerdings mit umgekehrten Vorzeichen. Bemerkenswerter Weise ist das SM also genau deshalb anomaliefrei, weil sich die kritischen Beiträge der Leptonen und Quarks gegenseitig aufheben.

1.4 Jenseits des Standardmodells

Phänomenologisch ist das SM ausgesprochen erfolgreich; es beschreibt die Physik der Elementarteilchen in den heute zugänglichen Energiebereichen mit hoher Präzision [16]. Die am genauesten bekannte Größe in der Teilchenphysik ist das magnetische Moment des Elektrons, dessen anomaler Teil als $a_e \equiv (g_e - 2)/2$, also der normierten Differenz zwischen

¹²Das Z -Boson hat eine Masse von 91.187 ± 0.007 GeV [1].

¹³Die in der klassischen Lagrangedichte auftretenden Felder unterliegen nicht den üblichen Kommutatorrelationen, die im Rahmen der Quantisierung zusätzlich gefordert werden.

¹⁴Hierbei handelt es sich um das nicht-abelsche Pendant der aus der QED bekannten Ward-Takahashi-Identitäten.

dem gyromagnetischen Verhältnis g_e und dem Dirac-Wert $g_e = 2$, definiert ist. Für das anomale magnetische Moment des Elektrons stimmen der experimentelle und theoretische Wert

$$a_e = \begin{cases} 0.001159652187 \pm 4 \cdot 10^{-11} & \text{Experiment} \\ 0.00115965214 \pm 28 \cdot 10^{-11} & \text{Theorie} \end{cases} \quad (1.49)$$

bis auf zehn Nachkommastellen überein [1]. Mit dem Nachweis der massiven Vektorbosonen 1983 am CERN in $p\bar{p}$ -Kollisionen bei einer Schwerpunktsenergie von 540 GeV wurde die elektroschwache Theorie eindrucksvoll untermauert. Anfang 1995 verkündeten die CDF-Arbeitsgruppe (**C**ollider **D**etector at **F**ermilab) und das Experiment D0 die Entdeckung des top-Quarks. Lediglich die sich häufenden Indizien für massive Neutrinos [66] legen nahe, dass das SM zumindest in diesem Punkt nachgebessert werden muss. Auch der Nachweis des Higgs-Bosons steht bislang noch aus.

Trotz dieser Erfolge bleibt das SM vom theoretisch konzeptionellen Standpunkt her unbefriedigend. Viele wesentliche Elemente des Modells wurden von Hand eingebaut, um eine Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen zu erzielen und werden nicht durch tiefere Prinzipien motiviert:

- Das SM beinhaltet 19 unabhängige Parameter:
 - 3 Kopplungsparameter (g_1, g_2, g_3 bzw. α_{em}, θ_W und Λ_{QCD})
 - 2 Higgs-Parameter (m_H und λ)
 - 9 Fermionmassen ($m_e, m_\mu, m_\tau, m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t$)
 - 4 CKM-Parameter ($\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}$ und δ)
 - 1 Parameter, der die Stärke des CP-verletzenden Anteils in \mathcal{L}_{QCD} bestimmt (θ_{QCD}).

Mit massiven Neutrinos und leptonischen Mischungswinkeln steigt die Zahl der Parameter auf 26 an. Von einer fundamentalen Theorie würde man jedoch erwarten, dass sie mit möglichst wenigen von außen vorgegebenen Größen auskommt.

- Warum gibt es *drei* Fermion-Generationen, die sich hinsichtlich ihrer Eichwechselwirkung völlig identisch verhalten? Warum liegen die Fermionen einer Generation in der komplizierten Darstellung (1.2)?
- Warum sind die Neutrino-Massen, wenn man sie in das SM integriert, soviel kleiner als die Massen der übrigen Fermionen?
- Die Quantisierung der elektrischen Ladung in Einheiten von $e/3$ wird im Quark-Modell vorausgesetzt und nicht erklärt.
- Warum ist der CP-verletzende Anteil der starken WW so massiv unterdrückt?

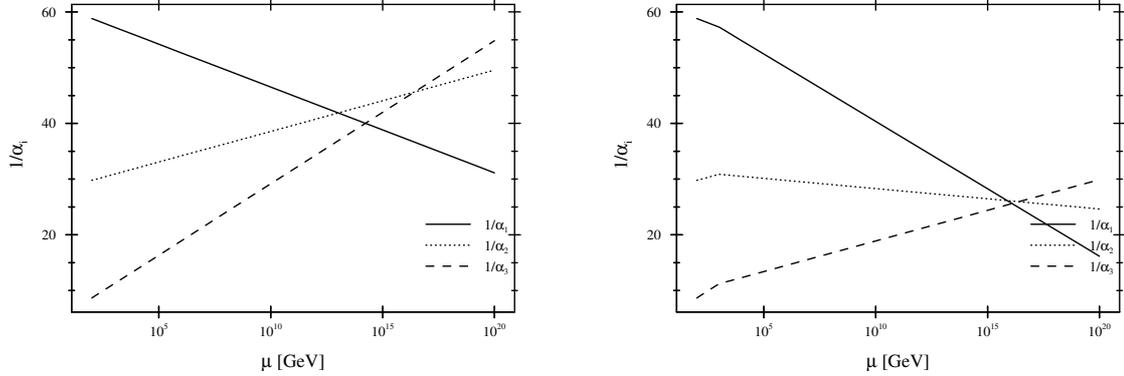


Abbildung 1.1: Laufende Kopplungen im Standardmodell (links) und im Minimal Supersymmetrischen Standardmodell (rechts) [22]. Unterhalb der Skala M_{SUSY} ist die Supersymmetrie im MSSM gebrochen, die Eichkopplungen entwickeln sich dann wie im SM und „knicken ab“.

- Die Anomalie-Freiheit des SMs durch die sich aufhebenden leptonischen und Quark-Anomalien erscheint ausgesprochen mysteriös und ist mit keinem tieferliegendem Prinzip verknüpft.

Weitere Schwachpunkte des SMs sind:

- Der Ursprung der Baryon-Asymmetrie im Universum [15] wird nicht verständlich.
- Das SM liefert keinen geeigneten Kandidaten für Dunkle Materie.
- Die vierte fundamentale Kraft der Natur, die Gravitation, ist im SM nicht enthalten.

Eine Reihe – wenn auch nicht alle – der Kritikpunkte lassen sich im Rahmen von Vereinheitlichten Theorien (GUTs) beheben. Hierbei wird die Eichgruppe G_{SM} in eine größere Symmetriegruppe G_{GUT} , die G_{SM} als Untergruppe enthält, eingebettet. Motiviert wird dieser Ansatz, wenn man die Entwicklung der Kopplungskonstanten zu höheren Energieskalen hin verfolgt: auf dem linken Teilbild der Abb. 1.1 ist zu erkennen, dass die SM-Kopplungen auf einander zulaufen. Würden sie sich genau in einem Punkt treffen, so wäre ab dieser Skala die Symmetrie der vereinheitlichten Theorie realisiert; die drei Kräfte des SMs werden auf eine einzige Kraft zurückgeführt. Durch Präzisionsmessungen der Kopplungskonstanten in Beschleunigerexperimenten ist jedoch bekannt, dass sich die Eichkopplungen im SM nicht in einem Punkt treffen, so dass eine Vereinheitlichte Theorie ohne eine intermediäre Skala, die das Verhalten der Kopplungen beeinflusst, ausgeschlossen ist. Im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) treffen sich die Eichkopplungen jedoch exakt in einem Punkt, wie der rechte Teil von Abb. 1.1 verdeutlicht. Die Vereinheitlichte Theorie wird dann ab einer Skala von $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV erreicht. Als

Erweiterung des SMs wird im Rahmen des MSSMs eine zusätzliche Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen, die Supersymmetrie (SUSY), postuliert. Hierdurch wird ad hoc das gesamte Teilchenspektrum des Modells verdoppelt, da jedes Teilchen nun durch die SUSY-Transformation einen Superpartner¹⁵ erhält. Da bisher in keinem Beschleunigerexperiment ein supersymmetrisches Teilchen nachgewiesen wurde, geht man davon aus, dass die SUSY in den heute zugänglichen Energiebereichen gebrochen ist. Damit sich die Kopplungskonstanten im MSSM in einem Punkt treffen, sollte die Skala der SUSY-Brechung M_{SUSY} zwischen $\mathcal{O}(m_Z)$ und 1 TeV liegen. Das MSSM zeichnet sich gegenüber anderen supersymmetrischen Erweiterungen des SMs dadurch aus, dass es trotz der unumgänglichen Superpartner nur fünf zusätzliche Parameter beinhaltet.

Neben der Vereinigung der Kopplungskonstanten in einem Punkt gibt es noch ein weiteres Argument, welches nahelegt, dass die Natur bei höheren Energien supersymmetrisch aufgebaut ist: durch die SUSY wird das Hierarchieproblem in natürlicher Weise gelöst.

Das Hierarchieproblem beruht auf dem immensen Unterschied von 14 Größenordnungen zwischen M_{GUT} und der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung. Die unabhängige Brechung der GUT- und $SU(2) \otimes U(1)$ -Symmetrie macht zwei verschiedene Higgs-Felder notwendig, für deren Vakuumerwartungswerte gilt

$$\begin{aligned} |\langle H \rangle| = v_H &\approx M_{\text{GUT}} & \frac{|\langle H \rangle|}{|\langle \Phi \rangle|} &\approx \mathcal{O}(10^{14} \text{ GeV}) . \\ |\langle \Phi \rangle| = v_\Phi &\approx M_Z \end{aligned} \quad (1.50)$$

Naheliegender wäre nun, zwei nicht gekoppelte Terme im Higgs-Potenzial anzusetzen

$$V(H) + V(\Phi) , \quad (1.51)$$

wobei jeder ein eigenes Minimum annehmen würde. Dies ist jedoch nicht möglich, da sich ein derartiger Ausdruck als nicht renormierbar erweist. Aus diesem Grunde müssen eichinvariante quartische Terme

$$V(H, \Phi) = \alpha \Phi^\dagger \Phi \text{Tr}(H^2) + \beta \Phi^\dagger H^2 \Phi \quad (1.52)$$

zusätzlich in das Higgs-Potenzial aufgenommen werden. Hierdurch werden die Gleichungen, die v_H und v_Φ bestimmen, miteinander gekoppelt. Als Folge müssen die Parameter dieser Gleichungen mit enormer Präzision bis auf 10^{-28} Größenordnungen aufeinander abgestimmt werden („fine tuning“), um den immensen Unterschied von (1.50) beizubehalten. Mischterme der Form (1.52) werden auch durch Strahlungskorrekturen generiert, so dass der Prozess des fine tunings in jeder Ordnung der Störungstheorie wiederholt werden muss. Es ist nur sehr schwer vorstellbar, dass während der Entwicklung des Universums tatsächlich solch ein künstlich wirkender Präzisionsabgleich zwischen den beteiligten Higgs-Parametern erfolgte.

¹⁵Beispielsweise ist der Superpartner des Elektrons das Seletron, wobei „s“ für skalar steht. Das Seletron ist also ein Spin 0-Teilchen.

Durch die SUSY wird für jedes Fermion ein bosonischer Partner erzeugt und umgekehrt. Dadurch bleiben die Higgs-Parameter stabil gegenüber Strahlungskorrekturen, denn zu jedem Diagramm mit einer bosonischen Schleife tritt nun ein zusätzliches Diagramm mit einer fermionischen Schleife des entsprechenden supersymmetrischen Partners, welches das erste kompensiert. Das fine tuning zwischen den Higgs-Parametern muss somit nur einmal durchgeführt werden und bleibt dann in allen Ordnungen der Störungstheorie erhalten.

Kapitel 2

Das Minimale Supersymmetrische Standard Modell

Das MSSM [23] ist eine supersymmetrische Erweiterung des SMs mit minimalem Teilcheninhalt, d.h. es werden nur so viele Teilchen hinzugefügt, wie nötig, um eine konsistente supersymmetrische Theorie zu formulieren. Dabei werden *globale* SUSY-Transformationen zugrunde gelegt. *Lokal* supersymmetrische Theorien enthalten Spin-2 Teilchen und schließen somit die Gravitation ein. Derartige Supergravitations-Theorien (SUGRA) werden im Rahmen des MSSMs jedoch nicht berücksichtigt, da die Gravitation auch im SM nicht enthalten ist.

Allgemein werden in SUSY-Erweiterungen des SMs durch die Superpartner eine Vielzahl neuer Parameter in die Theorie eingeführt. Im Fall des MSSMs werden diese durch zusätzliche Annahmen jedoch extrem reduziert, so dass neben dem minimalen Teilcheninhalt nur *fünf* neue von außen vorgegebene Größen in das Modell eingehen.

2.1 Supersymmetrie

Eine SUSY-Transformation wandelt Fermionen in Bosonen und umgekehrt, so dass Zustände mit unterschiedlichem Spin verknüpft werden. Hierdurch wird beispielsweise ein Spin-0 Teilchen auf ein Spin-1/2 Teilchen abgebildet. Der Generator Q einer solchen Transformation

$$Q |\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle, \quad Q |\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \quad (2.1)$$

muss also selbst Spin-1/2 tragen und liegt damit in der Spin-1/2 Darstellung der Lorentz-Gruppe. Da diese Darstellung ein unterschiedliches Transformationsverhalten für links- und rechtshändige Spinoren aufweist, ist es notwendig, im Rahmen der SUSY mit Weyl-Spinoren zu arbeiten. Mit Hilfe der Projektionsoperatoren $\mathcal{P}_{L,R} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5)$ kann man jeden Dirac-Spinor

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

in seine chiralen Komponenten

$$\mathcal{P}_L \Psi_D = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_R \Psi_D = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

zerlegen, wobei die Weyl-Spinoren ξ und $\bar{\chi}$ jeweils zwei Komponenten besitzen, die mit Hilfe des Index $\alpha = 1, 2$ gekennzeichnet werden. Um auch im Indexkalkül die Komponenten rechtshändiger Spinoren von denen der linkshändigen unterscheiden zu können, werden gepunktete Indizes $\dot{\alpha}$ für die rechtshändigen Komponenten verwendet [19, 20]. In der Darstellung durch 2-komponentige Weyl-Spinoren wird die SUSY-Algebra durch die Beziehungen

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m \quad (2.4)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.5)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_m] = [Q_\alpha, P_m] = 0 \quad (2.6)$$

$$[Q_\alpha, M^{mn}] = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^{mn\beta} Q_\beta \quad (2.7)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M^{mn}] = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^{\dot{\alpha}mn\dot{\beta}} Q_{\dot{\beta}} \quad (2.8)$$

definiert, wobei die lateinischen Indizes m und n von 0 bis 3 laufen. P_m sind die Komponenten des Viererimpulses, während M^{mn} die Generatoren der Lorentz Transformationen bezeichnen. Die σ^m sind die Pauli-Matrizen (erweitert um¹ $\sigma^0 = -$), aus denen die Matrizen σ^{mn} gebildet werden; diese sind im Anhang A definiert.

Die Relationen (2.4) bis (2.8) erweitern die Poincaré-Algebra²

$$[P^m, P^n] = 0 \quad (2.9)$$

$$[M^{mn}, P^p] = i(\eta^{np} P^m - \eta^{mp} P^n) \quad (2.10)$$

$$[M^{mn}, M^{pq}] = i(\eta^{np} M^{mq} + \eta^{mq} M^{np} - \eta^{mp} M^{nq} - \eta^{nq} M^{mp}) \quad (2.11)$$

in nichttrivialer Weise zu einer graduierten Liealgebra [21]. Dies ist möglich, weil das No-Go-Theorem³ von Coleman und Mandula [25] durch die Antikommutatorrelationen (2.4) und (2.5), denen die fermionischen Generatoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ unterliegen, umgangen wird. Dabei verkörpert die hier verwendete Darstellung die einfachste Form einer SUSY-Algebra, da sie nur eine Superladung Q enthält ($N = 1$ SUSY). Theorien mit einer höheren Zahl von Superladungen beinhalten in vier Dimensionen jedoch keine chiralen Fermionen, so dass sie sich nicht für Erweiterungen des SMs eignen.

¹Das Vorzeichen resultiert aus der Metrik $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

²Dies ist die Liealgebra der Poincaré-Gruppe, welche neben den Lorentz-Transformationen Λ_n^m auch Translationen beinhaltet.

³Coleman und Mandula zeigten, dass eine Liegruppe L , die die Poincaré-Gruppe P und eine innere Symmetriegruppe G enthält, ein direktes Produkt $L = P \otimes G$ dieser Gruppen sein muss. Aus dem No-Go-Theorem folgt nun, dass $[P^m, T^a] = [M^{mn}, T^a] = 0$ gilt (T^a sind die Generatoren von G) und die Poincaré-Gruppe somit nur in trivialer Weise mit G verknüpft wird.

Die Teilchen einer supersymmetrischen Feldtheorie bilden Darstellungen (Supermultipletts) der Supersymmetrie-Algebra (2.4) – (2.8), deren wichtigste Eigenschaften sich wie folgt zusammenfassen lassen:

- Ein Supermultiplett enthält genauso viele bosonische wie fermionische Freiheitsgrade.
- Die Massen der Zustände in einem Supermultiplett sind entartet. Insbesondere sind die Massen der Bosonen und Fermionen gleich⁴.
- Alle Teilchen eines Supermultipletts tragen bezüglich der Eichgruppe gleiche Quantenzahlen.
- Q besitzt die Massendimension $1/2$. Folglich unterscheiden sich die Dimensionen der Felder eines Supermultipletts um $1/2$.

Als irreduzible Supermultipletts sind für das supersymmetrische SM das chirale Multiplett und das Vektor-Multiplett von Bedeutung.

2.2 Das chirale Supermultiplett

Das chirale Supermultiplett Φ [26] beinhaltet die folgenden Felder:

$$\Phi = (A(x), \psi_\alpha(x), F(x)) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} A : & \text{komplexes Skalarfeld} & (\text{Spin-0}) \\ \psi_\alpha : & \text{Weyl-Fermion} & (\text{Spin-}\frac{1}{2}) \\ F : & \text{komplexes skalares Hilfsfeld} & (\text{Spin-0}) \end{cases} . \quad (2.12)$$

F bezeichnet man als Hilfsfeld, da es zum Abschluss der SUSY-Algebra benötigt wird, jedoch durch die Bewegungsgleichungen aus der Lagrangedichte eliminiert werden kann. Die SUSY-Transformationen wirken gemäß

$$\begin{aligned} \delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi && (\text{Boson} \rightarrow \text{Fermion}) \\ \delta_\xi \psi &= \sqrt{2}\xi F + i\sqrt{2}\sigma^m \bar{\xi} \partial_m A && (\text{Fermion} \rightarrow \text{Boson}) \\ \delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \partial_m \psi && (\text{Hilfsfeld} \rightarrow \text{totale Ableitung}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

auf die Felder des Supermultipletts. Dabei sind die Parameter der Transformation ξ^α konstante, komplexe antikommutierende Grassmann-Variablen, die die Bedingung

$$\xi_\alpha \xi_\beta = -\xi_\beta \xi_\alpha \quad (2.14)$$

erfüllen. Die Transformationen (2.13) werden durch den Operator

$$\delta_\xi = \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q} \quad (2.15)$$

⁴Dies folgt unmittelbar aus der Eigenschaft, dass der (Masse)²-Operator $-P^2$ zugleich auch Casimir-Operator der SUSY-Algebra ist und somit mit Q vertauscht.

generiert, wobei Q und \bar{Q} (2.4) – (2.8) unterliegen.

Für das chirale Multiplett kann eine supersymmetrische und renormierbare Lagrange-dichte der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, \psi, F) &= -i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi - \partial_m\bar{A}\partial^m A + F\bar{F} \\ &\quad + m(AF + \bar{A}\bar{F} - \frac{1}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi})) \\ &\quad + Y(A^2F + \bar{A}^2\bar{F} - A\psi\psi - \bar{A}\bar{\psi}\bar{\psi}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

konstruiert werden [19], wobei m und Y reelle Parameter sind. Hieraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{F}} = F + m\bar{A} + Y\bar{A}^2 = 0, \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F} = \bar{F} + mA + YA^2 = 0$$

für F , durch die das Hilfsfeld aus der Lagrange-dichte eliminiert werden kann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, \psi, F = -m\bar{A} - Y\bar{A}^2) &= -i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi - \partial_m\bar{A}\partial^m A \\ &\quad - \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) - Y(A\psi\psi + \bar{A}\bar{\psi}\bar{\psi}) - V(A, \bar{A}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Das skalare Potenzial ist durch

$$\begin{aligned} V(A, \bar{A}) &= |mA + YA^2|^2 \\ &= m^2A\bar{A} + mY(A\bar{A}^2 + \bar{A}A^2) + Y^2A^2\bar{A}^2 \\ &= F\bar{F} \Big|_{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{F}} = 0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

gegeben. Damit erhält man nach Beseitigen der Hilfsfelder eine renormierbare Lagrange-dichte mit den typischen Termen für ein komplexes Skalarfeld A und ein Weyl-Fermion ψ , wobei jedoch die folgenden Eigenschaften bemerkenswert sind:

- \mathcal{L} hängt nur von zwei unabhängigen Parametern, der Masse m und der dimensionslosen Yukawa-Kopplung Y , ab. Besonders die Kopplung des $(A\bar{A})^2$ -Terms wird nicht durch eine weitere Größe bestimmt, wie es in einer nicht-supersymmetrischen Theorie der Fall wäre.
- Die Massen der A - und ψ -Felder sind gleich (da beide im gleichen Supermultiplett liegen).
- V ist positiv semi-definit, d.h. $V \geq 0$.

2.3 Das Vektor-Supermultiplett

Das Vektor-Multiplett V setzt sich aus den Feldern

$$V = (v_m(x), \lambda_\alpha(x), D(x)) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} v_m : & \text{Eichboson} & (\text{Spin-1}) \\ \lambda_\alpha : & \text{Weyl-Fermion (gaugino)} & (\text{Spin-}\frac{1}{2}) \\ D : & \text{reelles skalares Hilfsfeld} & (\text{Spin-0}) \end{cases} \quad (2.19)$$

zusammen und enthält, wie auch das chirale Multiplett, vier reelle bosonische und fermionische Freiheitsgrade.

Während alle Felder eines chiralen Multipletts in der gleichen Darstellung der Eichgruppe liegen, da die Generatoren T^a einer kompakten Eichgruppe mit den SUSY-Generatoren vertauschen⁵

$$[T^a, Q_\alpha] = [T^a, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \quad (2.20)$$

transformieren sich die Komponenten eines Vektor-Multipletts wie die adjungierte Darstellung der Eichgruppe und bestehen somit aus Liealgebra-wertigen Feldern:

$$v_m = v_m^a T^a, \quad \lambda_\alpha = \lambda_\alpha^a T^a, \quad D = D^a T^a. \quad (2.21)$$

Damit haben die SUSY-Transformationen die Form

$$\begin{aligned} \delta_\xi v_m^a &= -i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^m \xi + i\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \lambda^a, \\ \delta_\xi \lambda^a &= i\xi D^a + \sigma^{mn} \xi F_{mn}^a, \\ \delta_\xi D^a &= -\xi \sigma^m D_m \bar{\lambda}^a - D_m \lambda^a \sigma^m \bar{\xi}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

wobei die Feldstärke der Vektor-Bosonen F_{mn}^a und die kovariante Ableitung $\mathcal{D}_m \lambda^a$ durch

$$\begin{aligned} F_{mn}^a &:= \partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a - g f^{abc} v_m^b v_n^c, \\ \mathcal{D}_m \lambda^a &:= \partial_m \lambda^a - g f^{abc} v_m^b \lambda^c \end{aligned} \quad (2.23)$$

definiert werden; f^{abc} sind die Strukturkonstanten der Liealgebra und g bezeichnet die Eichkopplung. Eine eichinvariante, renormierbare und supersymmetrische Lagrangedichte für das Vektormultiplett ist durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{mn}^a F^{mna} - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a \quad (2.24)$$

gegeben, mit der Bewegungsgleichung

$$D^a = 0 \quad (2.25)$$

für das Hilfsfeld.

⁵Nur (2.4) und (2.5) unterliegen *Antikommutator*-Relationen, durch die das Coleman-Mandula-Theorem umgangen wird.

2.4 Kopplung von chiralen und Vektor-Multipletts, das Superpotenzial und $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$

Die Interaktion zwischen chiralen und Vektor-Multipletts kann durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(A^i, \psi^i, F^i, v_m^a, \lambda^a, D^a) = & -\frac{1}{4}F_{mn}^a F^{mn a} - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \lambda^a + \frac{1}{2}D^a D^a \\
& - \mathcal{D}_m A^i \mathcal{D}^m \bar{A}^i - i\bar{\psi}^i \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \psi^i + \bar{F}^i F^i \\
& + i\sqrt{2}g(\bar{A}^i T_{ij}^a \psi^j \lambda^a - \bar{\lambda}^a T_{ij}^a A^i \bar{\psi}^j) \\
& + gD^a \bar{A}^i T_{ij}^a A^j - \frac{1}{2}W_{ij}\psi^i\psi^j - \frac{1}{2}\bar{W}_{ij}\bar{\psi}^i\bar{\psi}^j \\
& + F^i W_i + \bar{F}^i \bar{W}_i
\end{aligned} \tag{2.26}$$

eichinvariant und renormierbar realisiert werden [19], wobei die kovarianten Ableitungen die Form

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_m A^i & := \partial_m A^i + igv_m^a T_{ij}^a A^j, \\
\mathcal{D}_m \psi^i & := \partial_m \psi^i + igv_m^a T_{ij}^a \psi^j
\end{aligned} \tag{2.27}$$

haben. Sämtliche nicht-eich WWen werden durch das Superpotenzial

$$W(A) = \frac{1}{2}m_{ij}A^i A^j + \frac{1}{3}Y_{ijk}A^i A^j A^k \tag{2.28}$$

festgelegt, das eine holomorphe Funktion⁶ der komplexen Skalarfelder ist und als *einzigste frei wählbare Funktion* in (2.26)

- die Massen und Kopplungen der Fermionen und Bosonen
- das Potenzial der skalaren Felder

bestimmt. Indem man die Ableitungen

$$\begin{aligned}
W_i & \equiv \frac{\partial W}{\partial A^i} = m_{ij}A^j + Y_{ijk}A^j A^k, \\
W_{ij} & \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial A^i \partial A^j} = m_{ij} + 2Y_{ijk}A^k
\end{aligned} \tag{2.29}$$

in (2.26) einsetzt, wird deutlich, dass die m_{ij} Massenparameter sind und die Y_{ijk} Yukawa-Kopplungen darstellen, die durch die Eichinvarianz zusätzlichen Bedingungen genügen müssen. Wie zuvor können die Hilfsfelder durch die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta F} = 0 & \Rightarrow \bar{F}_i + W_i = 0, \\
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{F}} = 0 & \Rightarrow F_i + \bar{W}_i = 0, \\
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta D^a} = 0 & \Rightarrow D^a + g\bar{A}^i T_{ij}^a A^j = 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

⁶Um die Renormierbarkeit der Theorie sicherzustellen, darf W höchstens ein Polynom dritten Grades sein.

aus der Lagrangedichte (2.26) eliminiert werden und man erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SUSY}} \equiv & \mathcal{L}(A^i, \psi^i, v_m^a, \lambda^a, F_i = -\bar{W}_i, D^a = -g\bar{A}^i T_{ij}^a A^j) = \\ & -\frac{1}{4} F_{mn}^a F^{mn a} - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \lambda^a - \mathcal{D}_m A^i \mathcal{D}^m \bar{A}^i - i\bar{\psi}^i \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \psi^i \\ & + i\sqrt{2}g(\bar{A}^i T_{ij}^a \psi^j \lambda^a - \bar{\lambda}^a T_{ij}^a A^i \bar{\psi}^j) - \frac{1}{2} W_{ij} \psi^i \psi^j - \frac{1}{2} \bar{W}_{ij} \bar{\psi}^i \bar{\psi}^j - V(A, \bar{A}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

wobei das skalare Potenzial über

$$\begin{aligned} V(A, \bar{A}) &= W_i \bar{W}_i + \frac{1}{2} g^2 (\bar{A}^i T_{ij}^a A^j) (\bar{A}^i T_{ij}^a A^j) \\ &= (F^i \bar{F}^i + \frac{1}{2} D^a D^a) \Big|_{\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta F} = 0, \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta D^a} = 0} \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

durch das Superpotenzial W festgelegt ist. Auch hier wird deutlich, dass V positiv semi-definit ist.

2.5 Feldinhalt des MSSMs, R-Parität

Um eine supersymmetrische Erweiterung des SMs zu konstruieren, muss die Lagrangedichte des SM in eine supersymmetrische Lagrangedichte umgeschrieben werden, der ebenfalls die Eichgruppe G_{SM} zugrunde liegt:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{SM|SUSY}}. \quad (2.33)$$

Wie bereits in Abschnitt 1.4 erwähnt, werden durch die SUSY weitere Teilchen, sog. Superpartner, in die Theorie eingeführt. Diese zusätzlichen Zustände bilden zusammen mit den Teilchen des SMs Supermultipletts. Die Quarks und Leptonen liegen in chiralen SMPs, wobei die Superpartner der Fermionen den Namen des Teilchens mit vorangestelltem S übernehmen. Dieses S deutet an, dass es sich um ein skalares Teilchen handelt. Die fermionischen Partner der Eichbosonen werden durch die Endung -ino gekennzeichnet und liegen mit diesen in Vektor-SMPs. Im Gegensatz zu den Spin-1 Bosonen ist das Higgs-Boson jedoch ein Spin-0 Teilchen, so dass es zusammen mit seinem fermionischen Superpartner, dem Higgsino, ein chirales SMP bildet. Da das Higgsino in der G_{SM} -Darstellung $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$ des Higgs-Dubletts liegt, trägt es ebenfalls die Hyperladung $1/2$. Als *chirales Fermion* hat das Higgsino jedoch Einfluss auf die Bedingungen

$$\text{Tr}(\{T_a, T_b\} Y) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \text{Tr}(Y^3) \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.34)$$

die die Anomaliefreiheit der Theorie sicherstellen [8]. Während diese Forderungen im Rahmen des SMs dadurch erfüllt werden, dass sich die Beiträge der Quarks und Leptonen gegenseitig aufheben, gibt es für das Higgsino keinen kompensierenden Term und die Bedingungen (2.34) sind verletzt. Aus diesem Grunde ist man gezwungen, ein weiteres Higgs-SMP einzuführen, das die entgegengesetzte Hyperladung trägt und sich gemäß $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$

Supermultiplett	Spin-0	Spin- $\frac{1}{2}$	G_{SM}	Q
$Q_L^I = \begin{pmatrix} U_L^I \\ D_L^I \end{pmatrix}$ U_R^I D_R^I	Squarks	Quarks		
	\tilde{q}_L^I	q_L^I	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}}$	$\begin{pmatrix} +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
	\tilde{u}_R^I	u_R^I	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}$
	\tilde{d}_R^I	d_R^I	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}}$	$+\frac{1}{3}$
$L_L^I = \begin{pmatrix} N_L^I \\ E_L^I \end{pmatrix}$ E_R^I	Sleptonen	Leptonen		
	\tilde{l}_L^I	l_L^I	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	\tilde{e}_R^I	e_R^I	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1$	$+1$
$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$ $H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$	Higgsbosonen	Higgsinos		
	$\begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_u^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{h}^+ \\ \tilde{h}^0 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$	$\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} h_d^0 \\ h_d^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{h}^0 \\ \tilde{h}^- \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Tabelle 2.1: Chirale Supermultipletts des supersymmetrischen SMs. Die Indizes L und R der skalaren Teilchen kennzeichnen nicht deren Chiralität, die für Spin-0 Zustände nicht definiert ist, sondern werden von den fermionischen Partnern übernommen; I ist der Familien-Index ($I = 1, 2, 3$). Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die rechtshändigen Teilchen nicht durch die linkshändigen Komponenten der Antiteilchen (wie in Tab. 1.1) dargestellt.

Supermultiplett	Spin- $\frac{1}{2}$	Spin-1	G_{SM}	Q	
G	Gauginos	Eichbosonen			
	\tilde{G}	G	$(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0$	0	
W	$\begin{pmatrix} \tilde{W}^1 \\ \tilde{W}^2 \\ \tilde{W}^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3})_0$	$\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	
	B	\tilde{B}	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$	0

Tabelle 2.2: Vektor-Supermultipletts. Die supersymmetrischen Partner der Eichbosonen werden als Gauginos bezeichnet. Hierzu gehören die Gluinos \tilde{G} , die Winos \tilde{W} und das Bino \tilde{B} .

transformiert⁷. Damit sind alle zusätzlich benötigten Teilchen für eine supersymmetrische Erweiterung des SMs bekannt; Tab. 2.1 und 2.2 fassen den Teilcheninhalt der 17 chiralen und 12 Vektor-Multipletts zusammen.

Die Lagrange-Dichte des supersymmetrischen SMs ergibt sich durch die Kombination von (2.31) mit einem entsprechenden Superpotenzial W , das alle Interaktionen bis auf die Eich-Wechselwirkungen festlegt:

$$\mathcal{L}_{\text{SM|SUSY}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} \Big|_{\text{geeignetes } W} . \quad (2.35)$$

Dies wird durch

$$W = \sum_{IJ} \left((Y_u)_{IJ} h_u \tilde{q}_L^I \tilde{u}_R^J + (Y_d)_{IJ} h_d \tilde{q}_L^I \tilde{d}_R^J + (Y_l)_{IJ} h_l \tilde{l}_L^I \tilde{l}_R^J \right) + \mu h_u h_d \quad (2.36)$$

erreicht. Wie sich jedoch herausstellt, ist Gl. (2.36) nicht der allgemeinste renormierbare Ausdruck für W , da die Eich- und Lorentz-Invarianz auch Lepton- und Baryonzahl verletzende Anteile

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{L}} &= \sum_{IJK} \left(\lambda_{IJK} \tilde{l}_L^I \tilde{q}_L^J \tilde{d}_R^K + \lambda'_{IJK} \tilde{l}_L^I \tilde{l}_L^J \tilde{e}_R^K \right) + \sum_I \mu'_I h_u \tilde{l}_L^I \\ W_{\mathcal{B}} &= \sum_{IJK} \lambda''_{IJK} \tilde{d}_R^I \tilde{d}_R^J \tilde{u}_R^K \end{aligned} \quad (2.37)$$

zulässt. Diese Terme sind phänomenologisch problematisch, da ihre Konsequenzen nicht im Einklang mit experimentellen Resultaten stehen. Beispielsweise würde der die Baryonzahl verletzende Ausdruck $W_{\mathcal{B}}$ einen relativ schnellen Zerfall des Protons ermöglichen, der weit unter der derzeitigen Grenze von 10^{33} Jahren [1] liegt. Ebenso wurden bisher keine Prozesse beobachtet, in denen die Gesamt-Leptonzahl nicht erhalten ist. Um die unerwünschten Terme $W_{\mathcal{L}}$ und $W_{\mathcal{B}}$ im Superpotenzial zu unterdrücken, könnte nun die L - und B -Erhaltung postuliert werden. Im Rahmen einer SM-Erweiterung ist dies jedoch ausgesprochen unattraktiv, da im SM die Erhaltung dieser Größen nicht vorausgesetzt wird. Wesentlich eleganter erscheint es, die unphysikalischen Anteile im Superpotenzial durch eine zusätzliche Symmetrie – die sog. R -Parität [27] – auszuschließen. Diese ordnet jedem Teilchen die erhaltene multiplikative Quantenzahl

$$R = (-1)^{3(B-L)+2s} \quad (2.38)$$

zu, wobei s den Spin bezeichnet. Die Teilchen des SMs (einschließlich beider Higgs-Dubletts) tragen somit die R -Ladung $+1$, während alle Superpartner durch (2.38) die R -Ladung -1 erhalten. In der Lagrange-Dichte lässt man nun nur solche Terme zu, für die das Produkt der R -Ladungen der beteiligten Felder $+1$ ergibt. Die Beiträge (2.37) sind

⁷Aufgrund der Darstellung, in der dieses zusätzliche Higgs-Multiplett liegt, wäre es möglich, dass es sich hierbei um das skalare Partner-Multiplett eines linkshändigen Leptondubletts handelt; dies würde jedoch die Leptonzahl-Erhaltung verletzen [24].

damit unzulässig und (2.36) bildet das Superpotenzial des SUSY-SMs bei ungebrochener R -Parität⁸.

Mit der Wahl von W wird über die Beziehung (2.32) auch das skalare Potenzial festgelegt, wobei das Higgs-Potenzial von besonderem Interesse ist. Dieses erhält man, indem in V alle anderen skalaren W en gleich Null gesetzt werden:

$$V(h_d^0, h_u^0) = |\mu|^2 (|h_d^0|^2 + |h_u^0|^2) + \frac{1}{8} (g'^2 + g_2^2) (|h_u^0|^2 - |h_d^0|^2)^2 . \quad (2.39)$$

Hierbei ist bemerkenswert, dass die quartische Higgs-Kopplung kein unabhängiger Parameter mehr ist, sondern durch die Eichkopplungen g' und g_2 bestimmt wird. Diese Parameterreduktion gegenüber dem SM wird jedoch durch die *zwei* Vakuumerwartungswerte $\langle h_u^0 \rangle$ und $\langle h_d^0 \rangle$ wieder aufgehoben. Neben diesen Aspekten beinhaltet Gl. (2.39) jedoch eine Eigenschaft, die das bisher entwickelte SUSY-SM phänomenologisch scheitern lässt: die Brechung der elektroschwachen Symmetrie durch den Higgs-Mechanismus ist nicht realisierbar. Allgemein gilt, dass das skalare Potenzial einer SUSY-Theorie positiv semi-definit ist. Gl. (2.39) lässt somit keine negativen Werte für $|\mu|^2$ zu und die $SU(2) \otimes U(1)$ -Symmetrie bleibt ungebrochen:

$$\text{Min}(V) = \langle h_u^0 \rangle = \langle h_d^0 \rangle = 0 . \quad (2.40)$$

Andererseits ist jedoch klar, dass die SUSY im Energiebereich heutiger Beschleuniger-Experimente gebrochen sein muss und Gl. (2.39) nicht uneingeschränkt gültig ist. Ein gleich schwerer skalarer Partner des Elektrons hätte sonst schon vor geraumer Zeit entdeckt werden müssen. Wie sich in Abschnitt 2.9 allerdings zeigen wird, hängt die SUSY-Brechung eng mit der Brechung der elektroschwachen Symmetrie zusammen. Deshalb wird als nächstes auf den Mechanismus der SUSY-Brechung eingegangen.

2.6 Brechung der Supersymmetrie

Aus den Eigenschaften global supersymmetrischer Theorien, die in Abschnitt 2.6.1 diskutiert werden, folgt, dass die spontane SUSY-Brechung zu phänomenologisch unakzeptablen Konsequenzen führt. Deshalb muss die SUSY durch zusätzliche nicht-supersymmetrische Terme in der Lagrangedichte, die auf hohen Skalen vernachlässigt werden können, explizit gebrochen werden (Abschnitt 2.6.3). Die Herkunft dieser sog. weich-brechenden Terme kann durch Supergravitations-Theorien (SUGRA) motiviert werden.

⁸Obwohl in SUSY-Modellen häufig R -Parität zugrunde gelegt wird, ist diese phänomenologisch jedoch nicht zwingend notwendig: auch Modelle mit gebrochener R -Parität können durchaus brauchbare Resultate liefern. Die Konsequenzen einer erhaltenen R -Ladung beschränken sich jedoch nicht nur auf das Superpotenzial. In diesem Fall können Superpartner nur paarweise erzeugt bzw. vernichtet werden und das leichteste SUSY-Teilchen (LSP) wäre notwendigerweise stabil. Mit einer von Null verschiedenen Masse könnte dies ein geeigneter Kandidat für dunkle Materie sein.

2.6.1 Eigenschaften global supersymmetrischer Theorien

Durch Multiplikation von Gl. (2.4) mit $\bar{\sigma}^n$ kann man unter Verwendung von $\text{Tr}(\bar{\sigma}^n \sigma^m) \equiv \bar{\sigma}^{n\alpha\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m = -2\eta^{nm}$ die Beziehung

$$\bar{\sigma}^{n\alpha\dot{\alpha}} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -4P^n \quad (2.41)$$

herleiten. Weiterhin gilt $\mathcal{H} = P^0$, da der Hamiltonoperator \mathcal{H} durch die Gesamtenergie des System festgelegt ist, diese aber wiederum durch die nullte Komponente des Viererimpulses gegeben ist (sofern natürliche Einheiten verwendet werden). Damit folgt aus Gl. (2.41)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} (Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_1 Q_1 + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2) , \quad (2.42)$$

d.h. der Hamiltonoperator einer global supersymmetrischen Theorie ist durch die „Quadrate“ der Superladungskomponenten gegeben. Hieraus folgt, dass \mathcal{H} ein positiv semi-definiten Operator auf dem Hilbertraum ist:

$$\langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi . \quad (2.43)$$

Sofern die SUSY als ungebrochene Symmetrie vorliegt, annihilieren die Komponenten der Superladung das Vakuum:

$$\text{ungebrochene SUSY} \iff Q_\alpha |0\rangle = \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |0\rangle = 0 . \quad (2.44)$$

Wegen (2.42) gilt dann auch $\mathcal{H}|0\rangle = 0$ und somit $\langle \mathcal{H} \rangle = 0$. Hieraus folgt wiederum, dass das skalare Potenzial V für den Grundzustand verschwindet:

$$\langle V \rangle \equiv V(A, \bar{A}) \Big|_{\min} = 0 . \quad (2.45)$$

Wie in (2.32) gezeigt wurde, hat das skalare Potenzial die Form $V = F^i \bar{F}^i + \frac{1}{2} D^a D^a$. Da V positiv semi-definit ist, folgt unmittelbar, dass für den supersymmetrischen Grundzustand bei ungebrochener SUSY

$$\langle F^i \rangle \equiv F^i \Big|_{\min} = 0 \quad \text{und} \quad \langle D^a \rangle \equiv D^a \Big|_{\min} = 0 \quad (2.46)$$

gelten muss.

2.6.2 Spontane SUSY-Brechung

Die Umkehrung von (2.46)

$$\langle F^i \rangle \neq 0 \quad \text{oder} \quad \langle D^a \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad V \Big|_{\min} > 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\alpha |0\rangle \neq 0 \quad (2.47)$$

ist ebenfalls richtig. Somit signalisieren nichtverschwindende F - oder D -Terme, dass die SUSY spontan gebrochen wurde. In diesem Fall ist die Lagrangedichte \mathcal{L} weiterhin invariant unter SUSY-Transformationen, der Vakuumzustand jedoch nicht. Je nachdem, ob die F - oder D -Felder einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert ausbilden, unterscheidet man

- F -Term (O’Raifeartaigh) Brechung
- D -Term (Fayet-Iliopoulos) Brechung.

Erstere realisiert die SUSY-Brechung u.a. im O’Raifeartaigh-Modell [28], während die Fayet-Iliopoulos Brechung mit einem $U(1)$ -Faktor in der Eichgruppe verbunden ist [29], wie er beispielsweise in einer SUSY-Version der QED vorliegt. In beiden Fällen wird die Brechung der SUSY durch spezielle Formen des Superpotenzials induziert.

Unabhängig davon, ob die SUSY spontan gebrochen wurde oder nicht, kann für das Massenspektrum der Teilchen die Superspur-Massenrelation [30]

$$\text{STr } M^2 \equiv \sum_{s=0}^1 (-1)^{2s} (2s+1) \text{Tr } M_s^2 = -2g(\text{Tr } T^a) D^a \quad (2.48)$$

hergeleitet⁹ werden. In dieser Massenrelation bezeichnet s den Spin; M_s ist die Massenmatrix der Teilchen mit entsprechendem Spin und die Summe erstreckt sich über alle physikalischen Teilchen der Theorie. Die rechte Seite der Gl. (2.48) kann nur im Fall von D -Typ Brechung einen von Null verschiedenen Wert annehmen. Dabei liefern nicht-abelsche Faktoren der Eichgruppe keinen Beitrag, während die durch $U(1)$ -Faktoren induzierten Terme proportional zur Summe der $U(1)$ -Ladungen $\sum Q_{U(1)}$ sind. Allerdings tritt genau dann, wenn diese Summe nicht verschwindet, eine $U(1)$ -Anomalie in der Theorie auf, so dass sich Gl. (2.48) für realistische Modelle auf

$$\text{STr } M^2 = 0 \quad (2.49)$$

reduziert, was bedeutet, dass sich die Teilchenmassen im alternierend gewichteten Mittel aufheben. Damit müsste die Masse der Superpartner aber im Größenordnungsbereich der konventionellen Teilchen liegen, was jedoch durch Beschleunigerexperimente ausgeschlossen ist¹⁰.

Darüber hinaus gibt es noch einen weiteren Schwachpunkt, der die spontane Brechung der SUSY phänomenologisch scheitern lässt: Nach dem Goldstone-Theorem ist die Brechung einer globalen Symmetrie mit der Existenz eines masselosen Teilchens verbunden. Bei der globalen SUSY ist der gebrochene Generator ein Weyl-Spinor; somit müsste die Theorie ein masseloses Fermion enthalten.

Aufgrund dieser phänomenologischen Schwierigkeiten muss die SUSY-Brechung im supersymmetrischen SM durch einen anderen – d.h. nicht-spontanen – Mechanismus realisiert werden, bei dem die SUSY explizit gebrochen wird.

⁹Diese Massenrelation gilt auf dem Tree-Level, d.h. Korrekturen durch Schleifen-Diagramme, sind nicht berücksichtigt.

¹⁰Auf den ersten Blick könnte dieses Dilemma durch eine D -Term Brechung der SUSY gelöst werden, da dann die rechte Seite der Gl. (2.48) einen nichtverschwindenden Beitrag liefern kann und somit das Massenspektrum der Superpartner nach oben hin verschieben könnte. Allerdings wäre die Theorie dann nicht mehr anomaliefrei. Darüber hinaus kann für das SUSY SM das Massenproblem auf diese Art nicht behoben werden, obwohl die Eichgruppe einen $U(1)_Y$ -Faktor enthält und somit prinzipiell eine D -Term Brechung ermöglichen würde, da im SM $\text{Tr}(Y) = 0$ gilt und somit kein Offset auf der rechten Seite von Gl. (2.48) resultiert.

2.6.3 Explizite Brechung der Supersymmetrie

Um die SUSY explizit zu brechen, werden zu der Lagrangedichte des SUSY SMs nicht supersymmetrische Terme addiert, die auf hohen Skalen vernachlässigt werden können:

$$\mathcal{L}_{\text{SM|SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{brechend}} . \quad (2.50)$$

Allerdings sollen hierdurch keine quadratischen Divergenzen generiert werden, die die Higgsmasse destabilisieren und somit Einfluss auf die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung haben. Sofern die die SUSY brechenden Terme diese Eigenschaft besitzen, werden sie als *weich brechend* bezeichnet und man kann zeigen [23], dass ihre allgemeinste Form die Struktur

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & \underbrace{-m_{ij}^2 A^i \bar{A}^j}_{\text{(I)}} - \underbrace{(b_{ij} A^i A^j + a_{ijk} A^i A^j A^k + \text{h.c.})}_{\text{(II)}} \\ & \underbrace{-\frac{1}{2} \tilde{m}_{ab} \lambda^a \lambda^b + \text{h.c.}}_{\text{(III)}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

hat. Dabei haben die einzelnen Summanden folgende Bedeutung:

- (I) Massenterme für die komplexen Skalarfelder (Sfermionen und Higgs-Felder).
- (II) Terme der Skalarfelder, die proportional zu A^2 und A^3 sind (höhere Potenzen generieren quadratische Divergenzen auf dem 2-loop Level).
- (III) Massenterm für die Gauginos.

Da jetzt die Massenterme der Superpartner weitgehend willkürlich gewählt werden können, treten die phänomenologischen Schwierigkeiten der spontanen Symmetriebrechung bei der weichen expliziten Brechung der SUSY nicht mehr auf. Allerdings kann damit auch nahezu jedes Massenspektrum realisiert werden, so dass reglementierende Bedingungen notwendig sind, wenn das Modell quantitative Aussagen ermöglichen soll. Diese zusätzlichen Annahmen sind ein wesentliches Element des MSSM, da sie den Parameterraum der Theorie massiv einschränken (*Minimales SUSY SM*). Sie werden in Abschnitt 2.7 vorgestellt.

Bemerkenswerter Weise hängt die weiche explizite SUSY-Brechung in fundamentalen Theorien, die durch *lokale* SUSY auch die Gravitation einbeziehen (Supergravitation), eng mit der spontanen Symmetriebrechung zusammen. Geht man von einem Modell aus, in dem ein versteckter Sektor durch nicht-renormierbare WWen an den beobachtbaren Sektor des SUSY-SMs koppelt, so kann die SUGRA in dem versteckten Sektor durch einen supersymmetrischen Higgs-Mechanismus spontan gebrochen werden. Hierdurch erhält das Gravitino eine Masse und die Symmetriebrechung greift auf den beobachtbaren Sektor über, wobei dort im gravitationsfreien Grenzfall weich brechende Terme in der Lagrangedichte identifiziert werden können. *Die spontane Symmetriebrechung der SUGRA in einem versteckten Sektor erscheint in dem niederenergetischen Limes des observablen Sektors als eine weiche explizite Brechung der globalen SUSY.*

2.7 Das Minimale Supersymmetrische SM

Den supersymmetrischen Teil der Lagrangedichte des MSSM erhält man, indem (2.31) für die Symmetriegruppe G_{SM} ausgeschrieben wird. Ebenso ist die Struktur des Superpotenzials durch Gl. (2.36) gegeben. Für die weich brechenden Terme wird lediglich Eichinvarianz und R -Parität zugrunde gelegt, so dass diese strukturell (2.51) entsprechen und die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & - \left((a_u)_{IJ} h_u \tilde{q}_L^I \tilde{u}_R^J + (a_d)_{IJ} h_d \tilde{q}_L^I \tilde{d}_R^J + (a_e)_{IJ} h_d \tilde{l}_L^I \tilde{e}_R^J + b h_u h_d + \text{h.c.} \right) \\ & - \sum_{\text{alle Skalare}} m_{ij}^2 A^i \bar{A}^j - \left(\frac{1}{2} \sum_{(a)=1}^3 \tilde{m}_{(a)} (\lambda \lambda)_{(a)} + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

haben. Hierdurch wird jedoch eine Vielzahl an neuen Parametern in das Modell eingeführt: den 19 Parametern des SMs stehen nun 105 neue Massen, Mischungswinkel und komplexe Phasen gegenüber, so dass sich ohne zusätzliche Annahmen, die viele dieser Größen miteinander in Beziehung setzen, keine quantitativen Aussagen aus dem Modell gewinnen lassen. Ein derartiges verbindendes Prinzip lässt sich aber im Rahmen einer fundamentalen Theorie ableiten, die auch die Gravitation einbezieht. In durch Supergravitation (SUGRA) motivierten Modellen erhält man den folgenden Ansatz auf der Planck-Skala [24]:

- Alle skalaren Massen sind durch die Gravitino-Masse festgelegt: $m_{ij}^2 = m_{3/2}^2 \delta_{ij}$ („Universalität der skalaren Massen“).
- Sämtliche Gaugino-Massen sind gleich: $\tilde{m}_{1,2,3} = \tilde{m}$ („GUT-Relation“).
- Die weich brechenden trilinearen Terme (a_u) , (a_d) und (a_e) in (2.52) sind proportional zu den Yukawa-Kopplungen mit der universellen Proportionalitätskonstante a_0 („Proportionalität“).
- Der b -Parameter in Gl. (2.52) ist durch $b = b_0 m_{3/2} \mu$ gegeben.

Damit enthält das MSSM nur fünf weitere Parameter

$$(m_{3/2}, \tilde{m}, a_0, b_0, \mu) \quad (2.53)$$

gegenüber dem SM.

2.8 Elektroschwache Symmetrie-Brechung

Eine Brechung der $SU(2) \otimes U(1)$ -Symmetrie kann nur realisiert werden, sofern explizit brechende Terme in der Lagrangedichte vorhanden sind, da bei intakter oder spontan gebrochener SUSY die elektroschwache Symmetrie ungebrochen bleibt. In diesem Abschnitt soll daher der durch die weich brechenden Terme induzierte Higgs-Mechanismus im elektroschwachen Sektor vorgestellt werden [31].

Wie bereits erwähnt, enthält das MSSM zwei Higgs- $SU(2)$ -Dubletts

$$h_u = \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_u^0 \end{pmatrix}, \quad h_d = \begin{pmatrix} h_d^0 \\ h_d^- \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

deren Komponenten komplexe Skalarfelder sind; jeweils eine Komponente ist elektrisch geladen, die andere neutral. Um die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie spontan in die $U(1)_{\text{em}}$ zu brechen, müssen die Higgs-Felder h_u^0 und h_d^0 einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert annehmen und zwar so, dass die elektrische Ladung erhalten bleibt: $\langle h_u^+ \rangle = \langle h_d^- \rangle = 0$. Hierzu muss das skalare Potenzial V ein absolutes Minimum abseits vom Ursprung ausprägen. Gemäß Gl. (2.32) kann V aus dem Superpotenzial bestimmt werden, wobei jedoch die weich brechenden Terme zu berücksichtigen sind. Indem alle anderen skalaren Felder gleich Null gesetzt werden, erhält man

$$V(h_u^0, h_d^0) = m_u^2 |h_u^0|^2 + m_d^2 |h_d^0|^2 - b (h_u^0 h_d^0 + \bar{h}_u^0 \bar{h}_d^0) + \frac{1}{8} (g'^2 + g_2^2) (|h_u^0|^2 - |h_d^0|^2)^2 \quad (2.55)$$

mit

$$\begin{aligned} m_u^2 &= m_{h_u}^2 + |\mu|^2 \\ m_d^2 &= m_{h_d}^2 + |\mu|^2, \end{aligned}$$

wobei die Massenquadrate $m_{h_u}^2$ und $m_{h_d}^2$ aus dem skalaren Massenterm in (2.52) herrühren. Um das Potenzial nach unten zu beschränken, muss die Bedingung

$$m_u^2 + m_d^2 \geq 2|b| \quad (2.56)$$

erfüllt sein, da für $|h_u^0| = |h_d^0|$ der quartische Term verschwindet. Außerdem muss, damit ein die Symmetriebrechung erzeugendes Minimum vorliegt, die Determinante der Hesse-Matrix von $V(h_u^0, h_d^0)|_{h_u^0=h_d^0=0}$ negativ sein, was die Forderung

$$m_u^2 m_d^2 < b^2 \quad (2.57)$$

liefert (dies ist die Verallgemeinerung von $\mu^2 < 0$ für zwei Higgs-Dubletts). Somit stellen die Relationen (2.56) und (2.57) zusätzliche Randbedingungen für die weich brechenden Terme (2.52) dar. Die Vakuumerwartungswerte der Higgs-Felder sind schließlich durch

$$\langle h_u \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \langle h_d \rangle = \begin{pmatrix} v_d/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

gegeben, wobei v_u und v_d bei unitärer Eichung reelle Größen sind. Diese hängen über die Beziehungen

$$v_u = v \sin \beta, \quad v_d = v \cos \beta \quad (2.59)$$

mit dem aus der Fermi-Konstanten bestimmbaren Wert für $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246.22 \text{ GeV}$ zusammen, so dass das Verhältnis der beiden Vakuumerwartungswerte durch

$$\tan \beta = \frac{v_u}{v_d} \quad (2.60)$$

parametrisiert wird. Die Massen der Eichbosonen sind dann durch

$$\begin{aligned} m_W^2 &= \frac{1}{4}g_2^2(v_u^2 + v_d^2) = \frac{1}{4}g_2^2v^2 \\ m_Z^2 &= \frac{1}{4}(g'^2 + g_2^2)(v_u^2 + v_d^2) = \frac{1}{4}(g'^2 + g_2^2)v^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

gegeben, was mit (1.31) und (1.32) übereinstimmt. Durch minimieren von V erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \sin 2\beta (m_u^2 + m_d^2) \\ |\mu|^2 &= \frac{m_{h_u}^2 \tan^2 \beta - m_{h_d}^2}{1 - \tan^2 \beta} - \frac{1}{2}m_Z^2, \end{aligned} \quad (2.62)$$

welche die Parameter b , $|\mu|^2$ und $\tan \beta$ in Relation zu den Massen $m_{h_u}^2$, $m_{h_d}^2$ und m_Z^2 stellen; um die elektroschwache Symmetrie phänomenologisch richtig zu brechen, müssen diese Gleichungen erfüllt sein.

Die insgesamt vier komplexen Komponenten der Higgs-Doublets in (2.54) beinhalten acht reelle Freiheitsgrade, so dass die Massenmatrix der Higgs-Felder 8×8 -Elemente umfasst. Es zeigt sich, dass diese Matrix drei verschwindende Eigenwerte besitzt, die den drei Goldstone-Moden entsprechen, welche von dem Z und den W^\pm -Bosonen zur Massengenerierung „gefressen“ werden. Die fünf verbleibenden Freiheitsgrade entsprechen den physikalischen Higgs-Bosonen:

H^\pm	Paar geladener Higgs-Bosonen
A^0	Neutrales Higgs-Boson, CP-ungerade
H^0, h^0	Neutrale Higgs-Bosonen, CP-gerade.

Auf dem Tree-Level erhält man folgende Massen

$$\begin{aligned} m_A^2 &= m_u^2 + m_d^2 \\ m_{H^\pm}^2 &= m_A^2 + m_W^2 \\ m_{h^0}^2 &= \frac{1}{2} \left[m_A^2 + m_Z^2 - \sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta} \right] \\ m_{H^0}^2 &= \frac{1}{2} \left[m_A^2 + m_Z^2 + \sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta} \right], \end{aligned} \quad (2.63)$$

die wegen $\sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta} \geq \sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2} = \sqrt{(m_A^2 - m_Z^2)^2}$ die Relationen

$$m_{H^\pm} \geq m_W, \quad m_{H^0} \geq m_Z, \quad m_{h^0} \leq m_Z \quad (2.64)$$

erfüllen. Hierbei ist besonders die letzte Beziehung bemerkenswert, da sie ein sehr leichtes neutrales Higgs-Boson vorhersagt. Allerdings wird dessen Masse durch Strahlungskorrekturen noch deutlich vergrößert, so dass Werte bis 150 GeV möglich sind [32].

2.9 Die Skala der SUSY-Brechung

Bereits in Abschnitt 1.4 wurde angedeutet, dass die Skala der SUSY-Brechung M_{SUSY} im Größenordnungsbereich $\mathcal{O}(m_Z)$ bis etwa 1 TeV liegen sollte, damit sich die drei Koppelungsparameter im MSSM in einem Punkt treffen.

Aus Gl. (2.62) kann ein weiterer Hinweis abgeleitet werden, der diese Größenordnung für M_{SUSY} stützt:

$$m_Z^2 = \frac{2m_{h_u}^2 \tan^2 \beta - 2m_{h_d}^2}{1 - \tan^2 \beta} - 2|\mu|^2. \quad (2.65)$$

Um ein unnatürlich wirkendes Fine-Tuning der Parameter in (2.65) auszuschließen, sollten diese Größen nicht zu sehr von m_Z abweichen. Da m_{h_u} , m_{h_d} und $\tan \beta$ jedoch die entscheidenden Parameter der weich brechenden Terme sind, durch die $\mathcal{O}(M_{\text{SUSY}})$ festgelegt wird, bindet dies M_{SUSY} eng an die elektroschwache Skala. Im Gegensatz hierzu ist μ jedoch ein freier Parameter des Superpotenzials; daher ist nicht unmittelbar einzusehen, warum auch diese Größe im Bereich von m_Z liegen sollte. Diese Fragestellung wird in der Literatur als „ μ -Problem“ diskutiert [24, 33].

Mit einer Skala M_{SUSY} von der Größenordnung m_Z ist aber auch die Tatsache verbunden, dass die Masse der Superpartner dicht an der elektroschwachen Skala liegen sollte. Aus diesem Grund wurde im Rahmen von LEP-II nur wenig oberhalb von m_Z nach den Signaturen supersymmetrischer Teilchen gesucht.

Kapitel 3

Vereinheitlichte Theorien

3.1 Die Wahl der Symmetriegruppe G_{GUT}

Die grundlegende Idee Vereinheitlichter Theorien (**G**rand **U**nified **T**heories) besteht darin, die Eichgruppe des SMs $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ in eine Symmetriegruppe G_{GUT} einzubetten, so dass oberhalb einer Skala M_X nur noch eine einzige Kopplung g in Erscheinung tritt. Die Eichkopplungen des SMs g_s , g und g' werden durch spontane Symmetriebrechung bei M_X erzeugt. An der elektroschwachen Skala M_W wird schließlich die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie in der bekannten Weise in die $U(1)_{\text{em}}$ gebrochen und man erhält im einfachsten Fall das folgende Symmetrieschema:

$$G_{\text{GUT}} \xrightarrow{M_{\text{GUT}}} G_{\text{SM}} \xrightarrow{M_W} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} . \quad (3.1)$$

Alternativ hierzu könnte die Symmetrie-Brechung von G_{GUT} auch in mehreren Stufen erfolgen, so dass zwischen M_X und M_W noch verschiedene intermediäre Skalen M_R liegen würden.

Als entscheidende Randbedingung müssen die Darstellungen von G_{GUT} die bekannten Fermionen enthalten, wobei die G_{SM} -Repräsentation einer Familie durch

$$\begin{aligned} & (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 \quad (3.2) \\ & \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} \quad u_i^C \quad d_i^C \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad e^C \end{aligned}$$

gegeben ist ($i = 1, 2, 3$ kennzeichnet die Farbe der Quarks). Dabei sollte die Eingliederung der Fermionen „möglichst ökonomisch“ erfolgen; weiterhin ist zu beachten, dass die Theorie anomaliefrei ist, um ihre Renormierbarkeit sicherzustellen. Darüber hinaus sind folgende Anforderungen an die Vereinheitlichungs-Gruppe zu stellen:

1. Da G_{GUT} die Eichgruppe des SMs als Untergruppe enthält

$$G_{\text{GUT}} \supset G_{\text{SM}} ,$$

Name	Rang	Ordnung	Dim(f)	kompl. Darst.
$SU(n+1)$	n	$n(n+2)$	$n+1$	$n \geq 2$
$SO(2n)$	n	$n(2n-1)$	$2n$	$n = 5, 7, 9, \dots$
$SO(2n+1)$	n	$n(2n+1)$	$2n+1$	–
$Sp(2n)$	n	$n(2n+1)$	$2n$	–
G_2	2	14	7	–
F_4	4	52	26	–
E_6	6	78	27	✓
E_7	7	133	56	–
E_8	8	248	248	–

Tabelle 3.1: Einfache Liegruppen und ihre wichtigsten Eigenschaften. Die Ordnung gibt die Zahl der Generatoren an. Dim(f) steht für die Dimension der Fundamentaldarstellung. $Sp(2n)$ bezeichnet die Gruppe der reellen symplektischen $2n \times 2n$ -Matrizen, die die schiefsymmetrische Matrix M — mit $M_{i,i-1} = -M_{i-1,i}$, alle anderen Komponenten sind Null — invariant lassen. Die unteren fünf Einträge gehören zu den exceptionellen Gruppen; von diesen besitzt nur E_6 komplexe Darstellungen. Weitere Details sind beispielsweise in [35, 36] zu finden.

muss die Vereinheitlichungs-Gruppe mindestens Rang¹ vier haben

$$\text{Rang}(G_{\text{GUT}}) \geq 4,$$

da es zwei diagonale Generatoren für $SU(3)$, einen für $SU(2)$ und einen für $U(1)$ gibt.

2. G_{GUT} sollte komplexe² Darstellungen besitzen [37], da die Paritätsverletzung nur realisiert werden kann, wenn links- und rechtshändige Fermionen in konjugierten Darstellungen der Eichgruppe liegen und diese nicht identisch sind³.
3. Mit G_{GUT} darf nur eine einzige Kopplung verbunden sein, so dass alle nicht-gravitativen WWen in einer einzigen Kraft vereinheitlicht werden. Dies ist sichergestellt, sofern es sich um eine *einfache* Gruppe handelt (oder um ein Produkt identischer halbeinfacher Gruppen, deren Kopplungskonstanten aufgrund einer diskreten Symmetrie gleiche Werte annehmen).

¹Der Rang einer Gruppe gibt die maximale Zahl von Generatoren an, die gleichzeitig diagonalisiert werden können.

²Eine Darstellung heißt komplex, wenn sie zu ihrer komplex konjugierten Darstellung nicht äquivalent ist. Beispielsweise transformiert sich unter $SU(3)$ die $\mathbf{3}$ anders als die adjungierte $\bar{\mathbf{3}} \equiv \mathbf{3}^*$ Darstellung.

³Eine Konstruktion mit reellen Darstellungen unter Verwendung von Spiegelfermionen ist zwar möglich, induziert jedoch superschwere Massen für die SM-Fermionen [34].

Eine vollständige Liste der einfachen Liegruppen ist in Tab. 3.1 zu finden. Dabei schränken die oben angegebenen Bedingungen die Wahl von G_{GUT} massiv ein: für Rang vier kommen nur

$$SU(5) \quad \text{und} \quad [SU(3)]^2$$

in Frage. Allerdings lässt die Gruppe $[SU(3)]^2$ keine Fermion-Darstellung zu, die nach der Symmetriebrechung auf (3.2) führt, so dass lediglich $SU(5)$ mit minimalem Rang übrigbleibt.

Für nichtminimale GUTs kommen nur die Gruppen

$$\begin{aligned} SU(n+1) & \quad n \geq 2 \\ SO(2n) & \quad n = 5, 7, 9, \dots \\ E_6 & \end{aligned}$$

wegen der Forderung komplexer Darstellungen in Frage; konkret bedeutet dies

$$\text{Rang 5: } SO(10), SU(6); \quad \text{Rang 6: } E_6, SU(7).$$

Während jedoch die orthogonalen Gruppen und E_6 automatisch anomaliefrei sind, muss dies bei den unitären Gruppen durch Wahl geeigneter Darstellungen sichergestellt werden. Aus diesem Grund bieten auf $SU(6)$ - und $SU(7)$ -basierende Theorien gegenüber solchen mit $SO(10)$ oder E_6 keinerlei Vorteil und sind weitgehend unbeachtet geblieben. In den Abschnitten 3.2 und 3.3 werden exemplarisch $SU(5)$ - und $SO(10)$ -GUTs diskutiert. Die Konstruktion einer E_6 -GUT ist beispielsweise in [38] beschrieben; in dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt auf der Besonderheit, dass in E_6 -Theorien Fermionmassen durch Strahlungskorrekturen generiert werden können.

Nach Wahl der Gruppe G_{GUT} sind folgende Schritte zur Konstruktion einer Vereinheitlichten Theorie durchzuführen:

- Die Einbettung von G_{SM} in G_{GUT} sowie das Brechungsschema

$$G_{\text{GUT}} \xrightarrow{M_{\text{GUT}}} G_I \xrightarrow{M_{I_1}} \dots \xrightarrow{M_{I_n}} G_{\text{SM}} \xrightarrow{M_W} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} \quad (3.3)$$

müssen konkretisiert werden. Aufgrund der Entwicklung der Kopplungskonstanten (siehe Abb. 1.1) kann die direkte Brechung von G_{GUT} in G_{SM} nur für SUSY-GUTs realisiert werden, bei nichtsupersymmetrischen GUTs muss die Brechung über mindestens eine intermediäre Skala G_I erfolgen. Die oberhalb von M_I zusätzlich vorhandenen Higgsfelder modifizieren die Renormierungsgruppen-Gleichungen und induzieren bei der Symmetriebrechung $G_I \rightarrow G_{\text{SM}}$ Schwellenkorrekturen, so dass sich die Eichkopplungen bei M_X in einem Punkt vereinigen können. In der Literatur sind Modelle mit bis zu vier intermediären Skalen untersucht worden [40, 41], diese besitzen jedoch gegenüber solchen mit nur einer Symmetriegruppe G_I keinen unmittelbaren Vorteil. Für SUSY-GUTs muss ergänzend zu (3.3) die SUSY auf einer Skala $M_{\text{SUSY}} \geq M_W$ gebrochen werden.

- Die Darstellung, in der die Fermionen liegen, ist auszuwählen. Diese muss die korrekte Form der SM Fermionen (3.2) liefern und sollte komplex und anomaliefrei sein.
- Für jeden spontanen Brechungsschritt in (3.3) müssen geeignete Higgs-Darstellungen ausgewählt und die zugehörigen Potenziale konstruiert werden. Dabei ist sicherzustellen, dass die SM-Fermionen erst im letzten Schritt ihre Masse erhalten, während alle zusätzlichen Teilchen deutlich schwerer, d.h. $m \gtrsim \mathcal{O}(M_{I_n})$, sind („Survival Hypothesis“ [39]).

Damit sind alle theoretischen Anforderungen an eine GUT, die als niederenergetischen Limes das SM liefert, genannt. In weiteren Analysen müssen dann die weniger offensichtliche Konsequenzen, wie die Vorhersage des Weinbergwinkels, der Fermionmassen und der Protonlebensdauer, auf ihre Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen untersucht werden. Dieses Programm wird im folgenden Abschnitt am Beispiel von $SU(5)$ konkretisiert.

3.2 Der Prototyp: $SU(5)$

Das Georgi-Glashow-Modell [42] war die erste Grand Unified Theorie und wurde im Jahr 1974 veröffentlicht. Es beruht auf der Gruppe $SU(5)$ und zeichnet sich durch eine minimale Anzahl von Fermion- und Higgsdarstellungen aus. Phänomenologisch ist dieses Modell inzwischen ausgeschlossen, da aufgrund von Präzisionsmessungen heute klar ist, dass sich die Eichkopplungen im SM nicht genau in einem Punkt treffen und damit die direkte Brechung $SU(5) \rightarrow SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ nicht realisiert werden kann. Ebenso sagt die minimale $SU(5)$ -GUT eine zu kurze Lebensdauer für das Proton vorher. Demgegenüber enthält es viele Eigenschaften, die auch in anderen Großen Vereinheitlichten Theorien wiederzufinden sind und soll deshalb im folgenden kurz skizziert werden.

3.2.1 Darstellung der Fermionen und Eichbosonen

Die Gruppe $SU(5)$ ist durch ihre fundamentale Darstellung definiert; dabei werden die 24 spurlosen Generatoren λ_i so gewählt, dass sich eine $SU(3) \otimes SU(2)$ -Untergruppenstruktur ergibt, da G_{SM} eine maximale Untergruppe von $SU(5)$ ist. $SU(3)$ wirkt auf die ersten drei, $SU(2)$ auf die letzten beiden Zeilen und Spalten. Analog zu den Paulimatrizen lautet die Normierung $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ und es gilt $[\lambda_i, \lambda_j] = 2ic_{ijk}\lambda_k$, wobei die c_{ijk} die Strukturkonstanten darstellen. Eine explizite Darstellung der $SU(5)$ -Generatoren findet man in [44].

Die Fermionen des SMs können in zwei irreduziblen Darstellungen untergebracht wer-

den: einer $\bar{\mathbf{5}}$ und einer $\mathbf{10}$ dimensionalen Darstellung, mit folgendem $SU(3) \otimes SU(2)$ -Inhalt

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad}^{\bar{\mathbf{5}}} \oplus \overbrace{\quad\quad\quad}^{\mathbf{10}} \\ (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 \\ d_i^C \quad \begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} \quad u_i^C \quad e^+ \end{array} \quad (3.4)$$

($i = 1, 2, 3$ repräsentiert die Quark-Farbe), wobei unter der Bedingung⁴, dass die Gesamtladung jedes Multipletts verschwindet $\sum Q = 0$

$$Q_d = -\frac{1}{2}Q_u = \frac{1}{3}Q_{e^-} \quad (3.5)$$

gelten muss. Die Quarks tragen also drittelzahlige Ladungen, weil sie in drei Farben vorkommen. An dieser Stelle wird eine allgemeine Eigenschaft von GUTs deutlich: sie liefern eine natürliche Erklärung für die Quantisierung der elektrischen Ladung. Dies hängt damit zusammen, dass die Eigenwerte der diagonalen Generatoren einer einfachen Symmetriegruppe im Gegensatz zu den Eigenwerten der abelschen $U(1)$ stets diskret sind.

Da $SU(5)$ -Eichtheorien nicht automatisch anomaliefrei sind, müssen sich die Anomalien der $\bar{\mathbf{5}}$ und $\mathbf{10}$ Multipletts gegenseitig aufheben. Dies ist sichergestellt, sofern

$$\sum_{\bar{\mathbf{5}}, \mathbf{10}} \text{Tr} \left[(T^a T^b + T^b T^a) T^c \right] = 0 \quad (3.6)$$

gilt; hierbei genügt es, den Fall $T^a = T^b = T^c = Q$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\mathbf{5}}, \mathbf{10}} \text{Tr} (Q^3) &= \left[3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 + (-1)^3 \right] + \left[3 \left(\frac{2}{3} \right)^3 + 3 \left(-\frac{1}{3} \right)^3 + 3 \left(-\frac{2}{3} \right)^3 + 1^3 \right] \\ &= -\frac{8}{9} + \frac{8}{9} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bemerkenswerter Weise ist also die Darstellung (3.4), in der die Fermionen eingebettet sind, anomaliefrei. Diese erstaunliche Eigenschaft wird verständlich, wenn man $SU(5)$ in $SO(10)$ einbettet, da $SO(10)$ generell frei von Anomalien ist.

Die Eichbosonen liegen in der adjungierten Darstellung, d.h. sie transformieren sich wie die Generatoren der zugrunde liegenden Gruppe. Da $SU(5)$ vierundzwanzig Generatoren besitzt, können die Bosonen identifiziert werden, indem man die Dekomposition der $\mathbf{24}$ bzgl. G_{SM} analysiert:

$$\begin{array}{c} \mathbf{24} \longrightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{-\frac{5}{6}} \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{5}{6}} \\ \text{Gluonen } g \quad \underbrace{W_i \quad B}_{W^\pm, Z^0, \gamma} \quad X, Y \quad \bar{X}, \bar{Y} \end{array} \quad (3.8)$$

⁴Der Ladungsoperator Q muss in der Cartan-Unteralgebra der Eichgruppe G liegen, also eine Linearkombination der diagonalen Operatoren sein. Da die Generatoren spurfrei sind, gilt dies auch für Q . Somit muss die Summe der Ladungen der in den Darstellungen $\bar{\mathbf{5}}$ und $\mathbf{10}$ liegenden Fermionen jeweils verschwinden.

Die ersten drei Summanden enthalten die SM-Eichbosonen, während die letzten beiden Darstellungen insgesamt 12 neuen Teilchen entsprechen. Diese werden als X- und Y-Bosonen bezeichnet und besitzen die Antiteilchen \bar{X} und \bar{Y} . Da sie experimentell bisher nicht beobachtet wurden, müssen sie Massen von der Größenordnung M_{GUT} haben.

3.2.2 Spontane Symmetriebrechung und Fermionmassen

Im minimalen $SU(5)$ erfolgt die Symmetriebrechung in zwei Schritten: im ersten werden bei $\sim 10^{14}$ GeV die Massen der superschweren Eichbosonen X und Y erzeugt, bei ~ 100 GeV entstehen schließlich die Massen der W- und Z-Bosonen. Für die Brechung der GUT-Symmetrie benötigt man ein Higgs-Multiplett Φ , das ein SM-Singulett enthält; dieses bildet dann den Vakuumerwartungswert aus. Der zweite Brechungsschritt bei M_Z wird durch eine Higgs-Darstellung H induziert, in der ein SM-Dublett $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$ liegt. Am einfachsten kann dies durch die Wahl $\Phi = \mathbf{24}$ und $H = \mathbf{5}$

$$\begin{aligned} \mathbf{24} &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{-\frac{5}{6}} \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{5}{6}} \\ \mathbf{5} &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}} \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

erreicht werden, woraus das Brechungsschema

$$SU(5) \xrightarrow[\langle \Phi \rangle \sim 10^{14} \text{ GeV}]{\mathbf{24} \supset (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0} SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \xrightarrow[\langle H \rangle \sim 10^2 \text{ GeV}]{\mathbf{5} \supset (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}} SU(3) \otimes U(1)$$

resultiert. Der Vakuumerwartungswert $\langle \Phi \rangle$ generiert für alle Teilchen, die nicht zum Spektrum des SMs gehören, Massen $\sim \mathcal{O}(M_{\text{GUT}})$, während $\langle H \rangle$ die Massen der SM-Teilchen erzeugt. Allerdings zieht die Existenz zweier Brechungsskalen mit sehr unterschiedlichen Vakuumerwartungswerten auch das Hierarchie-Problem (siehe Abschnitt 1.4) nach sich. Da sich der Skalenbereich, in dem G_{SM} als ungebrochene Symmetrie vorliegt, über 10^{12} Größenordnungen erstreckt und hier keine neuen Teilchen zu erwarten sind, wird diese uninteressante Region als „Wüste“ bezeichnet.

Das Transformationsverhalten der Massenterme unter $SU(5)$ lautet:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{5}} \otimes \bar{\mathbf{5}} &= \bar{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{15} & \text{(I)} & \quad \text{(keine Majorana-Massen für Neutrinos)} \\ \bar{\mathbf{5}} \otimes \mathbf{10} &= \mathbf{5} \oplus \mathbf{45} & \text{(II)} & \quad \text{(Massen für } d\text{-artige Quarks und gel. Leptonen)} \\ \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= \bar{\mathbf{5}} \oplus \bar{\mathbf{45}} \oplus \mathbf{50} & \text{(III)} & \quad \text{(Massen für } u\text{-artige Quarks)} \end{aligned}$$

Zunächst ergeben diese Gleichungen, dass kein Fermion eine Masse von dem $\mathbf{24}$ -Higgs-Feld erhält und damit unerwünscht superschwer würde. Die rechten Seiten koppeln jedoch teilweise an die $\mathbf{5}$ -dimensionale Higgs-Darstellung, so dass sich folgende Schlussfolgerungen ziehen lassen:

- (I) Wie man aus (3.4) entnehmen kann, entspricht $\bar{\mathbf{5}} \otimes \bar{\mathbf{5}}$ einem Majorana-Massenterm für die Neutrinos. Da die rechte Seite jedoch keine $\mathbf{5}$ oder $\bar{\mathbf{5}}$ enthält und somit nicht an das SM-Higgsfeld koppelt, bleiben die Neutrinos masselos.

- (II) repräsentiert den Massenterm für die down-artigen Quarks und die geladenen Leptonen.
- (III) Der Massenterm für die up-artigen Quarks wird gruppentheoretisch durch das Tensorprodukt $\mathbf{10} \otimes \mathbf{10}$ dargestellt.

3.2.3 Yukawa-Relationen und Weinberg-Winkel

Da Gleichung (II) sowohl die Massen der down-artigen Quarks als auch der geladenen Leptonen festlegt, sind die entsprechenden Yukawa-Kopplungsmatrizen nicht mehr unabhängig von einander. Bei M_{GUT} gilt

$$\mathbf{Y}_d = \mathbf{Y}_l ; \quad (3.9)$$

für geringere Skalen können die entsprechenden Matrizen durch Integration der Renormierungsgruppen-Gleichungen (D.4) bestimmt werden, wobei die Gleichheit (3.9) wegen der unterschiedlichen Betafunktionen (D.5) – (D.10) typischerweise nicht mehr gegeben ist. An der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung werden schließlich die Fermionmassen erzeugt, und man erhält bei M_Z die Beziehungen

$$m_d \approx 3m_e \quad m_s \approx 3m_\mu \quad m_b \approx 3m_\tau ,$$

was für die dritte Fermion-Generation in etwa zutrifft. Für die anderen beiden Familien gilt statt dessen eher

$$m_d \approx 9m_e \quad m_s \approx m_\mu ,$$

so dass die Beziehung (3.9) modifiziert werden muss. Dies kann durch die Einführung von weiteren Higgs-Feldern und globalen Symmetrien erreicht werden [45].

Weiterhin ist der Weinberg-Winkel in GUTs kein freier Parameter mehr, da an der Vereinheitlichungsskala $g_1 = g_2$ gilt. Unter Berücksichtigung der Umnormierung $g' = \sqrt{3/5}g_1$ (siehe Abschnitt 1.1) ergibt sich

$$\sin^2 \theta_W \equiv \frac{g'^2}{g'^2 + g_2^2} = \frac{\frac{3}{5}g_1^2}{\frac{3}{5}g_1^2 + g_2^2} \stackrel{M_{\text{GUT}}}{=} \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + 1} = \frac{3}{8} . \quad (3.10)$$

Mit Hilfe der Renormierungsgruppen-Gleichungen für die Eichkopplungen (D.1) – (D.3) erhält man dann den entsprechenden Wert bei M_Z . Hierbei muss der experimentelle Zahlenwert [1]

$$\sin^2 \theta_W = 0.23117 \pm 0.00016$$

reproduziert werden. Im Rahmen einer genauen Berechnung [46] erhält man für das minimale $SU(5)$ -Modell jedoch einen zu kleinen Wert

$$\sin^2 \theta_W|_{\text{theor}} = 0.206 \begin{matrix} +0.016 \\ -0.004 \end{matrix} ,$$

so dass das Georgi-Glashow-Modell in seiner ursprünglichen Form nicht in der Natur realisiert sein kann.

3.2.4 Protonzerfall

Die X - und Y -Bosonen, welche die elektrischen Ladungen $+4/3$ und $+1/3$ besitzen, tragen sowohl eine Farbladung als auch schwachen Isospin und können deshalb Quarks und Leptonen ineinander überführen. Während Baryon- und Leptonzahl B, L globale $U(1)$ -Symmetrien des (perturbativen) SM sind, werden sie in der $SU(5)$ -Theorie wie auch in allen anderen GUTs verletzt; allerdings bleibt $B - L$ erhalten. Die direkte Konsequenz der Baryonzahlverletzung ist die Instabilität von Proton und (gebundenem) Neutron. Der Nukleonenzerfall ist eine wichtige und experimentell überprüfbare Vorhersage von GUTs, die über das SM klar hinausgeht [47].

Der baryonzahlverletzende Teil der Lagrangedichte für die erste Fermionfamilie (unter Vernachlässigung von Mischungen) ergibt sich zu [48]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \frac{g_U}{\sqrt{2}} \bar{X}_\mu^\alpha (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta + \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+ + \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^+) \\ &+ \frac{g_U}{\sqrt{2}} \bar{Y}_\mu^\alpha (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta - \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_{eR}^C - \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.11)$$

α, β und γ sind $SU(3)_C$ -Farbindizes. Das entspricht den in Abbildung 3.1 aufgeführten Wechselwirkungsvertizes.

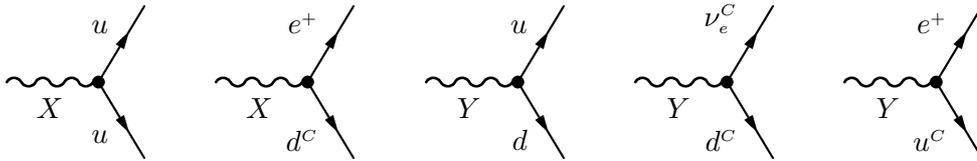


Abbildung 3.1: Baryonzahlverletzende Vertizes der X - und Y -Bosonen

Zwei typische Beispiele für Feynmandiagramme von Protonzerfallsprozessen zeigt Abbildung 3.2:

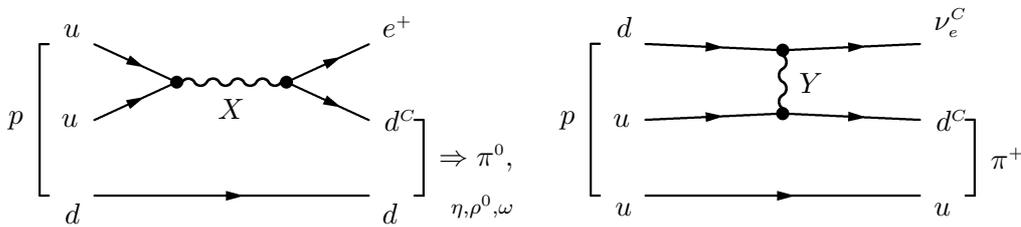


Abbildung 3.2: Beispiele für zum Protonzerfall beitragende Feynmandiagramme

Der zugrundeliegende Prozess lautet

$$\text{Quark} + \text{Quark} \rightarrow \text{Antiquark} + \text{Antilepton} \implies \text{Nukleon} \rightarrow \text{Meson} + \text{Antilepton} .$$

Alle anderen Prozesse sind aufgrund von Phasenraumeffekten unterdrückt. Unter der Annahme kleiner Mischungen ist $p \rightarrow \pi^0 e^+$ der dominante Kanal; eine qualitative Abschätzung

der Lebensdauer gemäß

$$\Gamma_p = \tau_p^{-1} \approx \alpha_{\text{GUT}}^2 \frac{m_p^5}{M_{X,Y}^4} \quad (3.12)$$

liefert mit $\alpha_{\text{GUT}} \approx 1/40$ und $M_{X,Y} \approx M_{\text{GUT}} \approx 5 \cdot 10^{14}$ GeV für τ_p den Wert $3 \cdot 10^{30}$ Jahre. Die neuesten experimentellen Grenzen liegen bei $\tau_p \geq 2.9 \cdot 10^{33}$ Jahre [49]. Die zu kurze Lebensdauer des Protons ist eine entscheidende Vorhersage des minimalen $SU(5)$ -Modells, die im eindeutigen Widerspruch zu den experimentellen Resultaten steht.

3.2.5 Diskussion des Georgi-Glashow-Modells

Obwohl das minimale $SU(5)$ -Modell experimentell inzwischen ausgeschlossen ist, besitzt es eine Reihe von bemerkenswerten Eigenschaften. Diese könnten ein Indiz dafür sein, dass die $SU(5)$ -Theorie Züge des „richtigen“ Vereinheitlichungsmodells trägt. Deshalb sollen an dieser Stelle die Vorzüge gegenüber dem SM, aber auch die Schwachpunkte, als Motivation nicht-minimaler GUTs, gegenübergestellt werden.

- Das minimale $SU(5)$ -Modell enthält die Eichgruppe des SMs als maximale Untergruppe. Durch die Anordnung der Fermionen in den kleinsten irreduziblen Darstellungen $\mathbf{\bar{5}}$ und $\mathbf{10}$ wird die Multipllettstruktur erheblich vereinfacht, ohne neue Fermionen zu postulieren. Bemerkenswerter Weise ist die Summe dieser Darstellungen anomaliefrei, was bei unitären Gruppen nicht automatisch der Fall ist.
- Die WWen des SMs sind vereinheitlicht; es gibt nur noch eine Kopplungskonstante g_{GUT} . Als unmittelbare Konsequenz ist der Weinbergwinkel über die Beziehung $\sin^2 \theta_W = 3/8$ an der Skala M_{GUT} festgelegt.
- Die Einbettung der $U(1)_Y$ in eine einfache Lie-Gruppe erklärt in naheliegender Weise die Quantisierung der elektrischen Ladung und die drittelzahligen Ladungen der Quarks.
- Die einfachste Wahl an Higgs-Darstellungen erlaubt die korrekte Brechung der GUT-Symmetrie in die Eichgruppe des SMs und liefert eine brauchbare Vorhersage für die b -Quark-Masse.

Verbesserungswürdige Elemente und problematische Aspekte sind:

- Obwohl zunächst die Anzahl der freien Größen durch Beziehungen zwischen den Yukawakopplungen scheinbar reduziert wird, enthält das Modell durch den vergrößerten Higgs-Sektor und die, durch die X- und Y-Bosonen auftretenden Phasen, in minimaler Form 23 Parameter: 1 Kopplung, 1 θ -Parameter, 9 Higgs-Parameter, 6 Quarkmassen (die die Leptonmassen festlegen) sowie 6 Mischungswinkel und \mathcal{CP} -verletzende Phasen.

- Im Hinblick auf eine möglichst umfassende Vereinheitlichung wäre es wünschenswert, wenn die Fermionen einer Generation in eine einzige irreduzible Darstellung eingebettet werden könnten.
- Neutrinos bleiben weiterhin masselos.
- Links- und rechtshändige Chiralitätszustände werden wie im SM unterschiedlich behandelt.
- Es existiert keine Erklärung für die Existenz dreier Generationen und der Massenhierarchie zwischen ihnen.
- Baryon- und Leptonzahl verletzende WWen werden unweigerlich eingeführt. Die Lebensdauer des Protons liegt im minimalen $SU(5)$ -Modell unterhalb der aktuellen experimentellen Schranke.
- Die Existenz zweier Brechungsskalen sehr unterschiedlicher Größenordnung induziert das Hierarchieproblem.
- Trotz der Nähe der Vereinheitlichungs-Skala zur Planck-Skala ($\approx 10^{19}$ GeV), bei der Gravitationseffekte relevant werden, bleibt die Gravitation unberücksichtigt.

Ein erheblicher Teil dieser Kritikpunkte kann z.B. im Szenario von supersymmetrischen $SO(10)$ -GUTs beseitigt werden.

3.3 $SO(10)$

Da $SO(10)$ den Rang fünf besitzt, gibt es eine ganze Reihe von maximalen Untergruppen, die $SU(3)_C \otimes U(1)_{em}$ enthalten:

$$SU(5) \otimes U(1), \quad SU(4) \otimes SU(2) \otimes SU(2), \quad SO(9), \quad SO(8) \otimes U(1), \quad SO(7) \otimes SU(2) .$$

Tatsächlich wurde die Vereinheitlichungsgruppe $SO(10)$ erstmals 1974 von H. Georgi vorgeschlagen [43], um ein Modell zu konstruieren, das die $SU(5)$ -GUT enthält und deren vorteilhafte Eigenschaften übernimmt, darüberhinaus jedoch einen Teil ihrer Mängel behebt.

3.3.1 $SU(5)$ als Untergruppe von $SO(10)$

Ein wesentlicher Vorteil der Gruppe $SO(10)$ gegenüber $SU(5)$ besteht darin, dass sich sämtliche Fermionen einer Generation in einer einzigen irreduziblen Darstellung unterbringen lassen. Dies wird deutlich, wenn man die Dekomposition der $\mathbf{16}$ unter $SU(5)$ betrachtet

$$\mathbf{16}_{SO(10)} \rightarrow (\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{1})_{SU(5)} \quad (3.13)$$

und mit (3.4) vergleicht⁵. Darüber hinaus enthält diese Darstellung⁶ noch ein im Rahmen des SMs nicht wechselwirkendes Singulett, das als rechtshändiges Neutrino interpretiert werden kann. Da $SO(10)$ automatisch anomaliefrei ist, erklärt Gl. (3.13) auch das „mysteriöse“ Verschwinden der $(\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10})$ -Anomalie im Georgi-Glashow-Modell.

Die Eichbosonen liegen in der adjungierten Darstellung $\mathbf{45}$, die unter $SU(5)$ die Multipllett-Struktur

$$\mathbf{45}_{SO(10)} \rightarrow (\mathbf{24} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{1})_{SU(5)} \quad (3.14)$$

besitzt. Neben den $SU(5)$ -Bosonen (3.8) sind hierin zusätzliche Austauscheteilchen enthalten, die baryon- und leptonzahlverletzende Prozesse vermitteln können (siehe Abschnitt 3.3.4).

Massenterme für die Fermionen ergeben sich aus dem Produkt

$$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16} = (\mathbf{10} \oplus \mathbf{126})_S \oplus \mathbf{120}_A, \quad (3.15)$$

wobei die $\mathbf{10}$ und $\mathbf{126}$ Kopplungen symmetrisch in den Familien-Indizes sind (und somit symmetrische Massenmatrizen generieren), während die $\mathbf{120}$ antisymmetrisch ist. Damit lassen sich die folgenden Yukawa-Kopplungen konstruieren [48]:

$$\Psi_{\mathbf{16}} \Psi_{\mathbf{16}} \Phi_{\mathbf{10}} = \Phi_{\mathbf{10}}(\mathbf{5}) (u_L^c u_L + \nu_L^c \nu_L) + \Phi_{\mathbf{10}}(\bar{\mathbf{5}}) (d_L^c d_L + e_L^c e_L) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{16}} \Psi_{\mathbf{16}} \Phi_{\mathbf{120}} &= \Phi_{\mathbf{120}}(\mathbf{5}) \nu_L^c \nu_L + \Phi_{\mathbf{120}}(\mathbf{45}) u_L^c u_L + \Phi_{\mathbf{120}}(\bar{\mathbf{5}}) (d_L^c d_L + e_L^c e_L) \\ &+ \Phi_{\mathbf{120}}(\overline{\mathbf{45}}) (d_L^c d_L - 3e_L^c e_L) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{16}} \Psi_{\mathbf{16}} \Phi_{\mathbf{126}} &= \Phi_{\mathbf{126}}(\mathbf{1}) \nu_L^c \nu_L + \Phi_{\mathbf{126}}(\mathbf{15}) \nu_L \nu_L + \Phi_{\mathbf{126}}(\mathbf{5}) (u_L^c u_L - 3\nu_L^c \nu_L) \\ &+ \Phi_{\mathbf{126}}(\overline{\mathbf{45}}) (d_L^c d_L - 3e_L^c e_L). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Multipllett-Struktur der Higgs-Felder unter $SU(5)$ ist jeweils in Klammern angegeben. Vorfaktoren mit dem Wert -3 kommen durch Clebsch-Gordan-Koeffizienten zustande.

Sofern nur eine $\mathbf{10}$ als Higgs-Darstellung verwendet wird, folgen aus Gl. (3.16) die Yukawa-Relationen

$$\mathbf{Y}_l = \mathbf{Y}_d \sim \mathbf{Y}_u = \mathbf{Y}_{\nu_{\text{dir}}}, \quad (3.19)$$

in denen die $SU(5)$ -Beziehung (3.9) enthalten ist, so dass die gleichen phänomenologischen Schwierigkeiten wie im Georgi-Glashow-Modell auftreten; darüber hinaus sind die vorhergesagten Neutrinomassen viel zu groß. Durch Hinzunahme einer $\mathbf{126}$ Higgs-Darstellung kann die Situation jedoch deutlich verbessert werden, sofern man gleichzeitig eine Familiensymmetrie postuliert. Diese bewirkt, dass die Yukawa-Kopplungen der dritten Familie weiterhin durch die Relationen (3.19) festgelegt werden, während die zweite Familie an die

⁵Die $\mathbf{16}$ enthält sowohl linkshändige Teilchen als auch Antiteilchen, deshalb ist die fermionische Darstellung unter Ladungskonjugation invariant: $\mathcal{C}(\mathbf{16}) = \mathbf{16}$. Die *rechtshändigen* Teilchen und Antiteilchen liegen in der Darstellung $\overline{\mathbf{16}} = \mathcal{P}(\mathbf{16})$.

⁶Bei der $\mathbf{16}$ handelt es sich um eine komplexe Spinordarstellung. Im Gegensatz zu den anderen Darstellungen von $SO(10)$ kann diese nicht durch Tensorprodukte aus der reellen Fundamentaldarstellung $\mathbf{10}$ konstruiert werden.

126 koppelt. Um die Massen und Mischungen der SM-Fermionen jedoch wirklich präzise beschreiben zu können, müssen weitere Higgs-Felder eingeführt werden [34]. Mit Hilfe der **126**-Darstellung kann auch der See-Saw-Mechanismus realisiert werden, der in naheliegender Weise die Kleinheit der Neutrinomassen erklärt.

3.3.2 Neutrinomassen

Gemäß Gl. (3.18) werden bei der Verwendung einer **126** Higgs-Darstellung für die Neutrinos sowohl Dirac-Massenterme ($\sim \nu_L^C \nu_L$) als auch Majorana-Massenterme ($\sim \nu_L \nu_L$) und⁷ ($\sim \nu_L^C \nu_L^C$) generiert. Da die Dirac-Massenterme an das gleiche Higgsfeld wie die up-artigen Quarks koppeln, sind die Dirac-Massen der Neutrinos von der gleichen Größenordnung wie die Quarkmassen (sofern die Yukawa-Kopplungen nicht extrem klein sind). Die *rechthändigen* Majorana-Neutrinos koppeln an ein SM-Singulett, so dass sie eine sehr große Masse annehmen können; typischerweise liegt diese im Bereich $10^{10} - 10^{14}$ GeV, der Skala der intermediären Symmetriebrechung. *Linkshändige* Majorana-Neutrinos können dagegen nur eine sehr kleine Masse besitzen, da hierdurch der ρ -Parameter der Neutrinostreuung an neutralen Strömen beeinflusst wird. Aufgrund phänomenologischer Randbedingungen gilt jedoch $\rho \approx 1$, was bedeutet, dass $m_{L_{\text{maj}}} \approx 0$ sein muss [50].

Der gesamte Massenterm für die Neutrinos hat somit die Form

$$\mathcal{L}_{\nu_{\text{mass}}} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_R^C \mathbf{M}_{L_{\text{maj}}} \nu_L - \frac{1}{2} \bar{\nu}_L^C \mathbf{M}_{R_{\text{maj}}} \nu_R - \bar{\nu}_L \mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}} \nu_R + \text{h.c.} ,$$

was abkürzend als

$$\mathcal{L}_{\nu_{\text{mass}}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_L^C \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \nu_R^C \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{L_{\text{maj}}} & \mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}} \\ \mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}}^\dagger & \mathbf{M}_{R_{\text{maj}}} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann, wobei für die hermitesche 6×6 -Matrix \mathbf{M} approximativ

$$\mathbf{M} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}} \\ \mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}}^\dagger & \mathbf{M}_{R_{\text{maj}}} \end{pmatrix}$$

gilt. Indem man \mathbf{M} auf blockdiagonale Form bringt, erhält man die hermitesche 3×3 -Massenmatrix der leichten Majorana-Neutrinos

$$\mathbf{M}_\nu \approx -\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}} \mathbf{M}_{R_{\text{maj}}}^{-1} \mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}}^\dagger , \quad (3.20)$$

der sog. See-Saw-Matrix und die 3×3 -Massenmatrix der schweren Majorana-Neutrinos:

$$\mathbf{M}_N = \mathbf{M}_{R_{\text{maj}}} + \mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}} \mathbf{M}_{R_{\text{maj}}}^{-1} \mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}}^\dagger \approx \mathbf{M}_{R_{\text{maj}}} . \quad (3.21)$$

Die Diagonalisierung von \mathbf{M}_ν und \mathbf{M}_N

$$\mathbf{N}_L^\dagger \mathbf{M}_\nu \mathbf{N}_L = \mathbf{M}_\nu^{(D)} , \quad \mathbf{N}_R^\dagger \mathbf{M}_N \mathbf{N}_R = \mathbf{M}_N^{(D)} \quad (3.22)$$

⁷Man beachte, dass zu den vollständigen Yukawa-Kopplungen auch die hermitesch konjugierten Anteile gehören.

liefert dann die Massen und Mischungen der physikalischen Neutrinos ν_e , ν_μ und ν_τ beziehungsweise N_e , N_μ und N_τ . Der Name „Seesaw“-Mechanismus erklärt sich dadurch, dass die Masse der leichten Neutrinos umso kleiner wird, je größer die Masse der schweren Neutrinos ist.

3.3.3 Brechungs-Szenarien der $SO(10)$ -Symmetrie und die Pati-Salam Gruppe

Da die Gruppe $SO(10)$ Rang fünf besitzt, der um eins größer ist als Rang (G_{SM}), gibt es eine ganze Reihe von möglichen Brechungswegen in das SM, die durch unterschiedliche Higgs-Darstellungen realisiert werden können. Beispielsweise wird die superstarke Brechung im minimalen $SO(10)$ -Modell durch die Darstellungen

$$SO(10) \xrightarrow{\mathbf{16}+\mathbf{45}} G_{\text{SM}} \xrightarrow{\mathbf{10}} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}}$$

ausgelöst [51]. Aufgrund des in Abb. 1.1 gezeigten Verhaltens der Kopplungskonstanten, kommt ein derartiges Brechungs-Szenario jedoch nur für SUSY GUTs in Frage. Nichtsupersymmetrische Modelle benötigen mindestens eine intermediäre Skala, so dass sich die Kopplungen bei M_{GUT} aufgrund von Schwellenkorrekturen, die bei der Brechung der intermediären Symmetrie entstehen, exakt in einem Punkt vereinigen. Typische Brechungswege für $SO(10)$ -Theorien mit intermediärer Symmetriegruppe sind

$$SO(10) \begin{array}{ccc} \nearrow^{\mathbf{210}} & SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R & \searrow^{\mathbf{126}} \\ \xrightarrow{\mathbf{16}} & SU(5) & \xrightarrow{\mathbf{45}} G_{\text{SM}} \xrightarrow{\mathbf{10}} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} \\ \searrow_{\mathbf{45}} & SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_R & \nearrow_{\mathbf{126}} \end{array} \quad (3.23)$$

Welche Symmetriegruppe G_I durch die Brechung mittels einer bestimmten Darstellung Φ realisiert wird, hängt von den jeweiligen Werten der Parameter im Higgs-Potenzial $V(\Phi)$ ab [52]. Besonders attraktiv ist hierbei die Gruppe $SU(4)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Sie gehört zu den maximalen Untergruppen der $SO(10)$ und ist von Pati und Salam für eine Erweiterung des SM durch eine rechts-links-symmetrische Theorie vorgeschlagen worden [53]. Der $SU(2)_L$ -Faktor ist identisch mit dem in G_{SM} , die $SU(2)_R$ ist das rechtshändige Gegenstück dazu, und die $SU(4)_C$ schließlich ist eine erweiterte Farbgruppe mit der $B-L$ -Quantenzahl als „vierter Farbe“. In $SO(10)$ -basierten Modellen ist $B-L$ bei Skalen $\mu \gtrsim M_I$ eine lokale $U(1)$ -Symmetrie, also Teil der Eichgruppe, und keine globale Symmetrie wie in der $SU(5)$ -GUT. Das hat zur Folge, dass auch Bosonen nichtverschwindendes $B-L$ besitzen können. Da die Pati-Salam Gruppe G_{PS} eine maximale Untergruppe von $SO(10)$ bildet, ist auch $SO(10)$ vollständig links-rechtsymmetrisch.

Wie in Abschnitt 3.3.1 diskutiert, besitzen Dirac-Massenterme das $SO(10)$ -Transformationsverhalten

$$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{120} \oplus \mathbf{126} . \quad (3.24)$$

Die Fermionmassen und die Symmetriebrechung $G_{\text{SM}} \xrightarrow{M_Z} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}}$ kommen also zustande, wenn die farblosen und elektrisch neutralen Komponenten von Higgs-Teilchen in den Darstellungen $\overline{\mathbf{10}}$, $\overline{\mathbf{120}}$ oder $\overline{\mathbf{126}}$ einen VEW der Größenordnung M_Z ausbilden. Diese Darstellungen verzweigen sich folgendermaßen unter G_{PS} :

$$\begin{aligned} \mathbf{10} &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ \mathbf{120} &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ \mathbf{126} &\longrightarrow (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) . \end{aligned}$$

Da die linkshändigen Teilchen in $(\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ und die linkshändigen Antiteilchen in $(\overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ liegen, wird die Erzeugung von Dirac-Massen wegen

$$(\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) = (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$$

durch die $SU(2)_L$ -Dubletts in den G_{PS} -Darstellungen $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ der $\mathbf{10}$ und $\mathbf{120}$ sowie denen in den $(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ der $\mathbf{120}$ und $\mathbf{126}$ vermittelt. Ferner können aufgrund von

$$\begin{aligned} (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus \dots\dots \\ (\overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) \otimes (\overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) \otimes (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus \dots\dots \end{aligned}$$

über den Term $\mathbf{16} \otimes \mathbf{16} \otimes \overline{\mathbf{126}}$ auch Majorana-Massen für die links- und rechtshändigen Neutrinos auftreten. Da der VEW des SM-Singulets in $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ den Symmetriebrechungsschritt $G_{\text{PS}} \xrightarrow{M_I} G_{\text{SM}}$ realisiert, sind die Majorana-Massen der rechtshändigen Neutrinos zwangsläufig von der Größenordnung M_I .

Die verschiedenen Yukawa-Kopplungen und VEW der $\mathbf{10}$, $\mathbf{120}$ und $\mathbf{126}$ sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst (die Indizes nummerieren mehrere Darstellungen einer Art, wenn vorhanden). Damit die beiden VEW, die zu jeder G_{PS} -Darstellung gehören, verschieden

Higgs-Darstellung	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{\mathbf{10}}^{(i)}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{\mathbf{120}}^{(j)}$	$(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{\mathbf{120}}^{(k)}$	$(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{\mathbf{126}}^{(l)}$
Yukawa-Kopplungsmatrix	$\mathbf{Y}_{\mathbf{10}}^{(i)}$	$\mathbf{Y}_{\mathbf{120}}^{(j)}$	$\mathbf{Y}_{\mathbf{120}}^{(k)}$	$\mathbf{Y}_{\mathbf{126}}^{(l)}$
Vakuumerwartungswerte	$v_u^{(i)}, v_d^{(i)}$	$\tilde{v}_u^{(j)}, \tilde{v}_d^{(j)}$	$\tilde{\omega}_u^{(k)}, \tilde{\omega}_d^{(k)}$	$\omega_u^{(l)}, \omega_d^{(l)}$

Tabelle 3.2: Higgs-Kopplungen und Vakuumerwartungswerte in $SO(10)$ -GUTs

sein können, muss diese komplex sein. Das lässt sich durch Kombination zweier reeller Darstellungen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ zu $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2$ erreichen.

Mit den in Tabelle 3.2 festgelegten Bezeichnungen für die Kopplungen und VEW (unter Vernachlässigung der oberen Indizes) ergeben sich für die Fermionmassenmatrizen in einer

$SO(10)$ -GUT folgende Identitäten [54]:

$$\mathbf{M}_d = v_d \mathbf{Y}_{10} + \omega_d \mathbf{Y}_{126} + (\tilde{v}_d + \tilde{\omega}_d) \mathbf{Y}_{120} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{M}_e = v_d \mathbf{Y}_{10} - 3\omega_d \mathbf{Y}_{126} + (\tilde{v}_d - 3\tilde{\omega}_d) \mathbf{Y}_{120} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M}_u = v_u \mathbf{Y}_{10} + \omega_u \mathbf{Y}_{126} + (\tilde{v}_u + \tilde{\omega}_u) \mathbf{Y}_{120} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})} = v_u \mathbf{Y}_{10} - 3\omega_u \mathbf{Y}_{126} + (\tilde{v}_u - 3\tilde{\omega}_u) \mathbf{Y}_{120} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} \sim M_I \mathbf{Y}_{126} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{M}_{\nu L}^{(\text{Maj})} \sim \frac{\omega_u^2}{M_I} \mathbf{Y}_{126} . \quad (3.30)$$

Die Beziehungen (3.25) – (3.30) sind in $SO(10)$ -Theorien mit intermediärer G_{PS} -Symmetrie im gesamten Bereich oberhalb von M_I gültig, während sie für die anderen G_I in (3.23) dargestellten Brechungs-Szenarien nur oberhalb von M_U gelten.

In (3.25) – (3.30) ist zu berücksichtigen, dass \mathbf{Y}_{10} und \mathbf{Y}_{126} symmetrisch sind, während \mathbf{Y}_{120} antisymmetrisch ist. Um Modelle mit asymmetrischen Massenmatrizen konstruieren zu können, muss also mindestens eine $\mathbf{120}$ an der Massenerzeugung beteiligt sein.

3.3.4 Protonzerfall

Die $\mathbf{45}$ er Darstellung der $SO(10)$ -Eichbosonen zerfällt unter $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ in die Komponenten

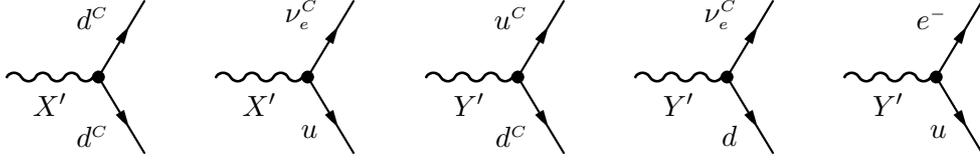
$$\mathbf{45} = (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) ,$$

$$G_\beta^\alpha \quad W_L^{\pm,0} \quad W_R^{\pm,0} \quad B' \quad \begin{pmatrix} X & \bar{Y}' \\ Y & \bar{X}' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X' & \bar{Y} \\ Y' & \bar{X} \end{pmatrix} \quad X_3 \quad \bar{X}_3$$

wobei die fünfzehn Bosonen G_β^α , $W_L^{\pm,0}$, $W_R^{\pm,0}$ und B' die Eichbosonen der Gruppe $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)'$ bilden⁸. Die anderen Teilchen sind Leptoquarks der $SO(10)$, d.h. sie können baryon- und leptonzahlverletzende Prozesse vermitteln. Dabei tragen die X' - und Y' -Bosonen die Ladungen $+2/3$ bzw. $-1/3$, während die aus der $SU(5)$ -Theorie bekannten X - und Y -Bosonen $q = +4/3$ und $q = +1/3$ besitzen. Durch direkten X_3 -Austausch können keine Nukleonenzerfälle vermittelt werden, was auch notwendig ist, da deren Massen der Größenordnung M_I zu sehr großen Zerfallsraten führen würden. Durch X_3 - X' -Mischung entstehen in höheren Ordnungen $B - L$ -verletzende Nukleonenzerfälle, die aber gegenüber den Prozessen führender Ordnung durch zusätzliche Faktoren $1/M_U$ unterdrückt sind [47].

Wechselwirkungsvertices für die X' - und Y' -Bosonen sind in Abb. 3.3 dargestellt. Der vollständige baryonzahlverletzende Teil der $SO(10)$ -Lagrangedichte für die erste Fermion-

⁸Die $U(1)'$ -Symmetrie resultiert aus $SU(4)_C \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)'$

Abbildung 3.3: Baryonzahlverletzende Vertizes der X' - und Y' -Bosonen

familie hat in der Basis der WW-Zustände die Form [48]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = & \frac{g_U}{\sqrt{2}} \bar{X}_\mu^\alpha (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta + \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+ + \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^+) \\
& + \frac{g_U}{\sqrt{2}} \bar{Y}_\mu^\alpha (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta - \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_{eR}^C - \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+) \\
& + \frac{g_U}{\sqrt{2}} X_\mu'^\alpha (-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{d}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta - \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu \nu_{eL}^C - \bar{u}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_{eR}^C) \\
& + \frac{g_U}{\sqrt{2}} Y_\mu'^\alpha (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{d}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta - \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu \nu_{eL}^C - \bar{u}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^+) \\
& + \frac{g_U}{\sqrt{2}} X_{3\mu}^\alpha (\bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^- + \bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^- + \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu \nu_{eL} + \bar{u}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_{eR}) \\
& + \text{h.c.} .
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Beim Umschreiben auf Massen-Eigenzustände treten zusätzliche Mischungswinkel und Phasen auf.

3.4 Supersymmetrische GUTs

Ebenso wie das SM supersymmetrisiert werden kann, ist dies auch mit Vereinheitlichten Theorien möglich. Hierbei sind zwei Punkte besonders attraktiv:

- Die Kopplungskonstanten des MSSMs treffen sich exakt in einem Punkt, so dass eine Vereinheitlichung ohne intermediäre Skala realisiert werden kann.
- Da das Higgs-Potenzial in SUSY-Theorien stabil gegenüber Strahlungskorrekturen ist, wird das Hierarchie-Problem in natürlicher Weise gelöst.

Im Brechungs-Schema der SUSY GUT-Symmetrie hinunter zum SM muss auch die Supersymmetrie gebrochen werden, so dass im einfachsten Fall (d.h. ohne intermediäre Skalen) das folgende Szenario resultiert:

$$\begin{aligned}
\text{GUT} \otimes \text{SUSY} & \xrightarrow{M_X} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes \text{SUSY} \\
& \xrightarrow{M_{\text{SUSY}}} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \\
& \xrightarrow{M_Z} SU(3)_C \otimes U(1)_{\text{em}} .
\end{aligned}$$

Die supersymmetrische Erweiterung der $SU(5)$ -Theorie wurde 1981 von Dimopoulos und Georgi [55] sowie Sakai [56] entwickelt. Aufgrund der höheren Vereinheitlichungsskala

ergibt sich eine verbesserte Vorhersage des Weinberg-Winkels gegenüber dem Georgi-Glashow-Modell.

In supersymmetrischen $SU(5)$ -Theorien liegen die Fermionen in den chiralen Superfeldern $\Phi_{\mathbf{5}}$ und $\Psi_{\mathbf{10}}$. Die Higgsfelder $H_1(\mathbf{5})$ und $H_2(\bar{\mathbf{5}})$ enthalten als Supermultipletts die Farbtupletts H_{1C} und H_{2C} sowie die Higgs-Bosonen H_u und H_d des MSSMs. Das Superpotenzial hat die Form

$$W_Y = \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} h_2^{ij} \Psi_i^{\alpha\beta} \Psi_j^{\gamma\delta} H_2^\epsilon + \sqrt{2} h_1^{ij} \Psi_i^{\alpha\beta} \Phi_{j\alpha} H_{1\beta} + \mu H_{1\alpha} H_2^\alpha . \quad (3.32)$$

3.5 Nukleonenzerfall in SUSY-GUTs

In nicht-supersymmetrischen Theorien wird der Protonenzerfall durch Dimension sechs Operatoren (siehe Anhang B) vermittelt, wie sie in Abb. 3.2 dargestellt sind⁹. Diese sind mit $1/M_X^2$ unterdrückt, so dass die Lebensdauer des Protons $\tau_p \propto M_X^4$ ist. Die Masse M_X ergibt sich aus dem Vereinigungspunkt der Kopplungen und liegt damit in SUSY-Theorien höher als in nicht-supersymmetrischen Modellen, wodurch sich die Protonlebensdauer zunächst deutlich verlängert. Allerdings kann in SUSY-GUTs der Nukleonenzerfall auch über Operatoren der Massendimension vier und fünf ablaufen, welche höhere Zerfallsraten induzieren. Diese Entdeckung geht auf Sakai und Yanagida [57] sowie Weinberg [58] zurück; eine ausführliche Diskussion findet man in [59].

3.5.1 Dimension-4-Operatoren

Aus der Lagrangedichte (2.31) ergeben sich unter Berücksichtigung des vollständigen Superpotenzials zunächst die Operatoren

$$L_i L_j E_k^C, \quad Q_i D_j^C L_k \quad \text{und} \quad U_i^C D_j^C D_k^C$$

die schematisch durch Abb. 3.4 dargestellt werden können und die Massendimension vier besitzen.

Da diese WWen bereits im MSSM auftreten und somit nicht durch Potenzen von $1/M_X$ unterdrückt werden, führen sie zu einem extrem rapiden Zerfall des Protons. Abbildung 3.5 (a) zeigt einen vollständigen Zerfallsprozess. Durch das Konzept der R -Parität (siehe Abschnitt 2.5) lassen sich derartige $d = 4$ Operatoren jedoch ausschließen, da die Superpartner dann nur noch paarweise in konventionelle Teilchen übergehen können. Wesentlich problematischer dagegen sind Dimension-5-Operatoren, wie sie durch Higgsino-

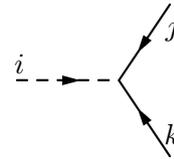


Abbildung 3.4: $d = 4$ Operator

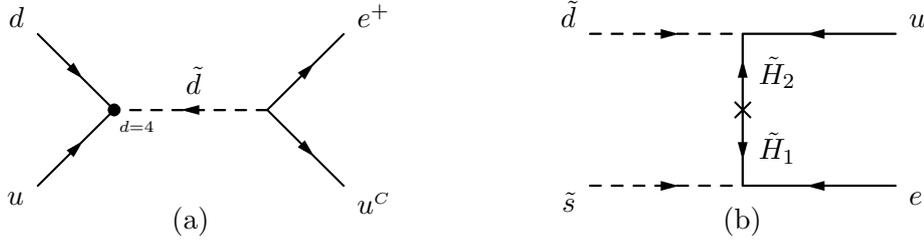


Abbildung 3.5: $B - L$ verletzende Prozesse durch (a) Austausch eines d -Squarks ($d = 4$ Operator) (b) Higgsino-Austausch ($d = 5$ Operator).

Austausch zustandekommen (siehe Abbildung 3.5 (b)), da sie auch im Fall erhaltener R -Parität möglich sind.

3.5.2 Dimension-5-Operatoren

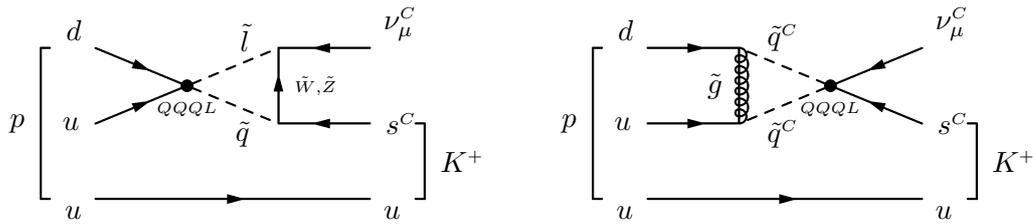


Abbildung 3.6: Protonzerfall über $d = 5$ Operatoren.

Der Protonenzerfall via $d = 5$ -Operatoren wird durch Higgsino-Austausch induziert; der eigentliche Prozess ist in Abb. 3.5 (b) dargestellt. Um einen vollständigen Zerfallsgraphen zu erhalten, muss dieses Diagramm noch durch Wino-, Zino- oder Gluino-Beiträge „beleidet“ werden¹⁰, die die skalaren Linien in SM-Teilchen überführen. Abb. 3.6 zeigt die vollständigen Graphen.

Der zugrunde liegende Dimension-5-Operator besitzt approximativ (d.h. nach Ausintegration der Higgsino-Felder) die Form

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda}{M_X} qq\tilde{q}\tilde{l}$$

und ist nur durch den Faktor $1/M_X$ unterdrückt; λ stellt eine Kopplungskonstante dar. Im Vergleich mit den $d = 6$ Operatoren, welche den Protonzerfall durch die X- und Y-Eichbosonen beschreiben (siehe Abschnitt 3.2.4) und die durch $1/M_X^2$ abgeschwächt sind,

⁹ Aufgrund der extrem hohen Massen der X- und Y-Bosonen können diese Graphen durch Vier-Fermion-WWen approximiert werden.

¹⁰ „dressed“ diagram

induzieren Dimension-5-Operatoren durch ihren kleineren Skalenfaktor einen schnelleren p -Zerfall. Diese Aussage bleibt i.a. selbst dann gültig, wenn man die Zerfallsraten eines speziellen Modells mit denen der nicht-supersymmetrischen Variante dieses Modells vergleicht: obwohl die Vereinheitlichungsskala im supersymmetrischen Fall deutlich größer ist, führt die fehlende Potenz im Skalenfaktor $1/M_X$ zu einem beschleunigten Zerfall des Protons.

Mit dem Anwachsen der unteren Schranken für die einzelnen p -Zerfallskanäle [1] als Folge der in den letzten Jahren gestiegenen experimentellen Messgenauigkeit, stellt der Higgsino-vermittelte Protonzerfall die Vorhersagen von SUSY GUTs inzwischen zunehmend auf die Probe. Verschiedene Autoren [62, 63, 64] haben daher nach natürlichen Mechanismen gesucht, die $d = 5$ Operatoren in supersymmetrischen Modellen unterdrücken.

Kapitel 4

Neutrino-Oszillationen

4.1 Grundlagen

Unter Neutrino-Oszillationen [65, 66] versteht man oszillierende Übergänge $\nu_\alpha \longleftrightarrow \nu_\beta$ ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$), in denen sich eine Neutrino-Art in eine andere mit verschiedener Leptonflavorzahl $L_\alpha \neq L_\beta$ umwandelt. Sie können auftreten, wenn die Wechselwirkungseigenzustände $|\nu_\alpha\rangle$ der Neutrinos nicht mit den Masseneigenzuständen $|\nu_k\rangle$ übereinstimmen. In diesem Fall lassen sich die $|\nu_\alpha\rangle$ als Linearkombination der $|\nu_k\rangle$ angeben, ähnlich¹ wie die Wechselwirkungszustände der (d, s, b)-Quarks für die schwache Kraft durch die CKM-Matrix beschrieben werden:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^3 \mathbf{U}_{\alpha k} |\nu_k\rangle . \quad (4.1)$$

Falls Neutrinos masselos oder in ihrer Masse entartet sind, ist es nicht möglich, zwischen den Massenzuständen zu unterscheiden. Somit liefert die schwache Wechselwirkung die einzige Möglichkeit, unterschiedliche Neutrinentypen festzulegen. Neutrinooszillationen könnten in diesem Fall nicht auftreten. Prinzipiell gibt es jedoch keinen Grund (wie etwa Eichinvarianz, aufgrund derer das Photon und die Gluonen masselos sind), der Neutrinomassen verbieten würde. Während im Standardmodell die Neutrinos als masselos angenommen werden, treten in dessen Erweiterungen typischerweise Neutrino-Massen und -Mischungswinkel auf. Der Fall einer verschwindenden Mischung der Neutrino-Arten erscheint eher als ein künstlicher Spezialfall. Im Rahmen der in dieser Arbeit untersuchten supersymmetrischen $SO(10)$ -GUT Massenmodelle ergibt sich die Mischungsmatrix \mathbf{U} aus dem See-Saw-Mechanismus, der für die leichten Majorana-Neutrinos $|\nu_\alpha\rangle$ ($\alpha = e, \mu, \tau$) eine typischerweise nichtdiagonale Massenmatrix liefert.

Experimentell verdichten sich inzwischen die Hinweise auf Neutrinooszillationen zunehmend, so dass sie eine wichtige Randbedingung für die hier untersuchten Massenmodelle

¹Dennoch sind entscheidende Unterschiede zwischen dem Mischungsverhalten der Quarks und Neutrinos möglich; siehe [90] S. 3ff. Die Mischungsmatrix im Neutrino-sektor wird häufig als PMNS-Matrix (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) bezeichnet.

darstellen.

4.1.1 Vakuumoszillationen

Mischung von zwei Neutrino flavors

Betrachtet man zunächst nur den einfachen Fall der Mischung von zwei Neutrinosorten, so wird die Mischung der Flavor- und Masseneigenzustände durch einen Parameter, den Mischungswinkel θ , beschrieben:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle \cos \theta + |\nu_2\rangle \sin \theta \\ |\nu_\mu\rangle &= -|\nu_1\rangle \sin \theta + |\nu_2\rangle \cos \theta . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dies entspricht der Mischungsmatrix²

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

Wird ein Neutrino erzeugt, wie etwa in dem Prozess $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$, so liegt es als Eigenzustand der schwachen Wechselwirkung vor. Aus der Diracgleichung folgt, dass die zeitliche Entwicklung der Masseneigenzustände durch

$$|\nu_i(t)\rangle = |\nu_i(0)\rangle \exp(-iE_i t)$$

gegeben ist. Nach einer Zeit t hat sich der Zustand $|\nu_e\rangle$ also gemäß

$$|\nu(t)\rangle = |\nu_1(0)\rangle \cos \theta \exp(-iE_1 t) + |\nu_2(0)\rangle \sin \theta \exp(-iE_2 t) \quad (4.3)$$

entwickelt, wobei die Energien durch

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p}$$

gegeben sind, sofern die Ruhmasse m_i wesentlich kleiner als der Impuls p der Neutrinos ist. Hieraus folgt, dass die Neutrinos im wesentlichen identische Energien haben, so dass die Wechselwirkungszustände durch räumlich kohärente Zustände gebildet werden. Durch Eliminieren der Masseneigenzustände aus Gl. (4.3) unter Verwendung von (4.2) erhält man

$$\begin{aligned} |\nu(t)\rangle &= |\nu_e\rangle [\cos^2 \theta \exp(-iE_1 t) + \sin^2 \theta \exp(-iE_2 t)] \\ &\quad + |\nu_\mu\rangle \sin \theta \cos \theta [\exp(-iE_2 t) - \exp(-iE_1 t)] . \end{aligned}$$

Der zeitentwickelte Wechselwirkungszustand setzt sich somit durch Überlagerung der beiden Neutrino flavors zusammen. Die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung eines Elektroneneutrinozustandes ist also

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t) = |\langle \nu_e | \nu(t) \rangle|^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) [1 - \cos((E_1 - E_2)t)] ,$$

²Weiterhin kann \mathbf{U} noch eine CP-verletzende Phase enthalten. Da die Mehrzahl der zur Zeit untersuchten Oszillationsphänomene hierauf jedoch nicht sensitiv sind, wird diese im folgenden nicht weiter berücksichtigt.

während sich für die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung eines Muonneutrinos

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, t) = |\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) [1 - \cos((E_1 - E_2)t)]$$

ergibt. Für $E_1 \approx E_2 \equiv E \gg m_i$ gilt

$$E_1 - E_2 = \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1 + E_2} \approx \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E}$$

und da die zurückgelegte Entfernung $r \approx ct$ für $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ im wesentlichen gleich ist, sofern die Zustände räumlich kohärent bleiben, ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e, r) &= 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\pi r}{L}\right) \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, r) &= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\pi r}{L}\right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

wobei L als *Oszillationslänge* bezeichnet wird:

$$L \equiv \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \hat{=} \frac{4\pi E \hbar}{\Delta m^2 c^3}.$$

L hängt sowohl von der Differenz der Massenquadrate $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ als auch von der Energie E ab. Gemäß Gl. (4.4) ändert sich die nachzuweisende Neutrino-Art mit dem Abstand r von der Neutrinoquelle und zeigt ein oszillatorisches Verhalten, sofern der Mischungswinkel $\theta \neq 0$ und $m_1 \neq m_2$ ist.

Allgemeiner Fall

Im Fall von drei oder mehr Neutrino-Arten ν_α ($\alpha = e, \mu, \tau, \dots$) gilt für die Mischung

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k} |\nu_k\rangle.$$

Die oben hergeleiteten Wahrscheinlichkeiten lassen sich zu

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}, r) = \delta_{\alpha\alpha'} - 4 \sum_{k>l} \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\alpha' k}^* \mathbf{U}_{\alpha l}^* \mathbf{U}_{\alpha' l} \sin^2\left(\frac{\pi r}{L_{kl}}\right)$$

verallgemeinern, wobei die L_{kl} durch

$$L_{kl} \equiv \frac{4\pi E}{|m_k^2 - m_l^2|} = \frac{2.48 E / [MeV]}{\Delta m_{kl}^2 / [eV]^2} [Meter]$$

gegeben sind.

4.1.2 Oszillationen in Materie

Durchlaufen Neutrinos einen Bereich mit Materie, so können zusätzliche Phasendifferenzen zwischen den einzelnen Neutrino-Flavors im Vergleich zum Vakuumfall auftreten. Dieses Verhalten wird als Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein-Effekt (MSW-Effekt) [67, 68] bezeichnet und beruht darauf, dass Elektronneutrinos auch über geladene schwache Ströme

mit den Elektronen der Materie wechselwirken können, während für alle anderen Arten die Streuung an Elektronen ausschließlich über neutrale schwache Ströme möglich ist. Hierdurch ändert sich das Propagationsverhalten der Elektron-Neutrinos relativ zu den anderen Flavours, was sich letztendlich auf die zeitliche Entwicklung des Gesamtsystems auswirkt.

Die exakte Herleitung ergibt für zwei Neutrino-Arten wieder die Beziehungen (4.4), wobei allerdings die Vakuumgrößen $\sin^2 2\theta$ und L durch die neuen Größen

$$\sin^2 2\theta_M = \frac{\sin^2 2\theta}{(L/L_0 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta} \quad \text{und} \quad (4.5)$$

$$L_M = \frac{L}{\sqrt{(L/L_0 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}} \quad (4.6)$$

mit $L_0 = 2\pi/(\sqrt{2}G_F N_e)$ zu ersetzen sind. Folgende Spezialfälle lassen sich gesondert betrachten:

- $L \ll L_0$ (geringe Elektronendichte):

$$\sin^2 2\theta_M \approx \sin^2 2\theta, \quad L_M \approx L$$

Die Materie beeinflusst das Oszillationsverhalten praktisch nicht gegenüber dem Vakuum.

- $L \gg L_0$ (hohe Elektronendichte):

$$\sin^2 2\theta_M \approx (L_0/L)^2 \sin^2 2\theta \approx 0, \quad L_M \approx L_0$$

Die Oszillationsamplitude ist im Vergleich zum Vakuum sehr stark unterdrückt und die Oszillationslänge hängt nicht mehr von L ab. Der Mischungswinkel ist durch $\theta_M \approx \pi/2$ fixiert.

- $L/L_0 = \cos 2\theta$ (Resonanzfall):

$$\sin^2 2\theta_M = 1, \quad L_M = L/\sin 2\theta$$

Die Oszillationsamplitude ist maximal, auch wenn der entsprechende Vakuumwert $\sin^2 2\theta$ sehr klein ist. Für den Mischungswinkel gilt $\theta_M = \pi/4$. Liegt die räumliche Ausdehnung der Materieverteilung in der Größenordnung von L_M , so ergibt sich mit $P \approx 1$ eine nahezu sichere Flavorkonversion. Dieses Resonanzverhalten von (4.5) wird als MSW-Effekt bezeichnet [68].

Der MSW-Effekt ist besonders für die im Inneren der Sonne erzeugten Elektron-Neutrinos von Bedeutung, da hierdurch der Fluss solarer Neutrinos maßgeblich verändert werden kann.

4.2 Experimentelle Ergebnisse

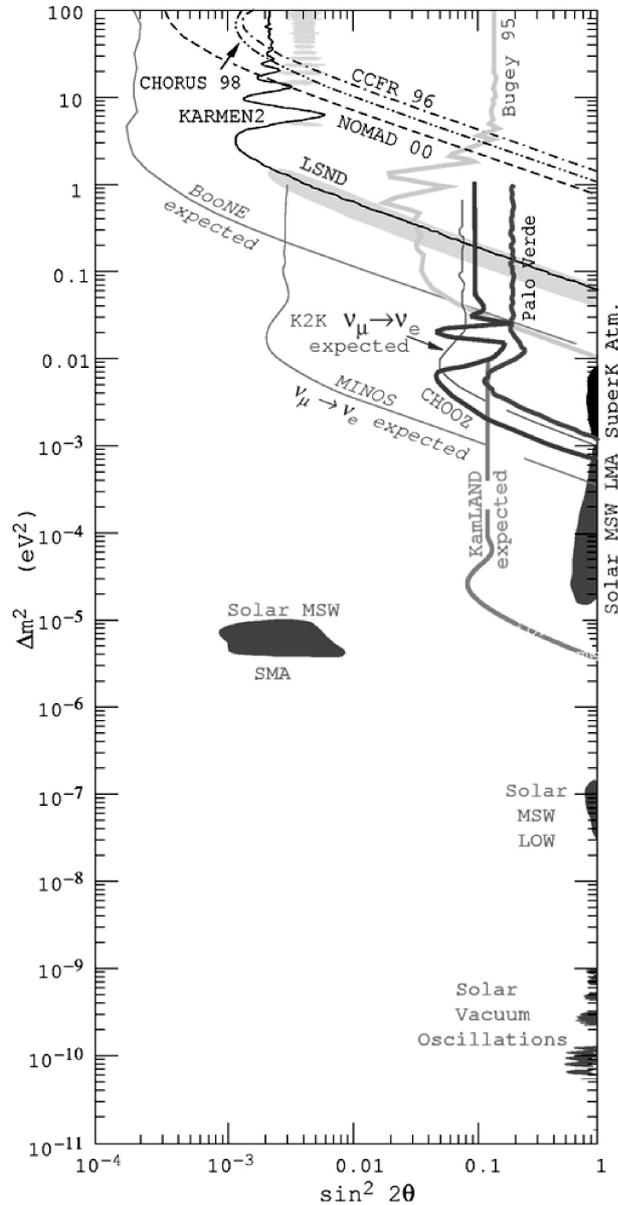


Abbildung 4.1: Übersicht über die erlaubten und ausgeschlossenen Bereiche der Oszillationsparameter Δm^2 und $\sin^2 2\theta$ [69]. Dargestellt sind sowohl Daten aus Experimenten mit Sonnen- und Atmosphärenneutrinos (SuperKamiokande) als auch mit Beschleuniger- (Chorus, Nomad, KARMEN2, LSND) und Reaktor-neutrinos (Bugey, Chooz, Palo Verde). Die markierten Flächen entsprechen erlaubten Parameterbereichen, die Linien grenzen nach rechts hin die Bereiche ab, die mit einer Vertrauensgrenze von 90% von dem jeweiligen Experiment ausgeschlossen wurden oder durch geplante Experimente aller Voraussicht nach in näherer Zukunft ausgeschlossen werden.

Experiment	$R = N_{\text{Exp}}/N_{\text{SSM}}$
Homestake	0.34 ± 0.03
GALLEX – GNO	0.58 ± 0.05
SAGE	0.60 ± 0.05
SuperKamiokande	0.459 ± 0.017
SNO	0.35 ± 0.03

Tabelle 4.1: Sonnen-Neutrinoexperimente und deren Messwerte für R [90].

Experimente, die nach Neutrinooszillationen suchen, lassen sich in zwei Kategorien unterteilen: die sogenannten *Appearance*-Experimente suchen nach dem Auftauchen einer Neutrinoart $\nu_\beta \neq \nu_\alpha$ in einem Neutrino-Strahl, der ursprünglich nur aus Neutrinos der Sorte ν_α bestand. *Disappearance*-Experimente dagegen suchen nach einer Verringerung des ν_α -Flusses in einem derartigen Strahl. Der Vorteil der Appearance-Messungen liegt in der sehr hohen Nachweisempfindlichkeit, da bereits das Registrieren von wenigen Neutrinos des „falschen“ Typs genügt. Gemessen wird typischerweise immer nur ein bestimmter Kanal (z.B. $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$). Die Disappearance-Methode ist weniger empfindlich auf die Mischungsamplituden, da Unsicherheiten im Neutrinofluss, in den Neutrinospektren und der Nachweiswahrscheinlichkeit der Detektoren die Sensitivität begrenzen. Allerdings erlaubt diese Methode den Nachweis von Übergängen in alle möglichen Endzustände, auch in sog. sterile Neutrinos, die im Rahmen des Standardmodells nicht wechselwirken. Darüberhinaus sind solche Messungen bei Verwendung von niederenergetischen Neutrinos sehr empfindlich auf kleine Massenparameter Δm_{kl}^2 .

Je nach Ursprung der Neutrinos unterscheidet man noch zwischen Reaktor- und Beschleunigerexperimenten und solchen, die natürliche Quellen, d.h. solare oder atmosphärische Neutrinos, nutzen. Die Auswertung der experimentellen Daten erfolgt bezüglich der Parameter $\sin^2 2\theta$ und Δm^2 , wobei im allgemeinen davon ausgegangen wird, dass nur zwei Neutrino flavors an dem untersuchten Oszillationsprozess beteiligt sind und somit Gl. (4.4) angewendet werden kann. Sofern Oszillationen nachgewiesen werden, führt dies zu mehr oder weniger eng begrenzten zulässigen Parameterbereichen im $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ -Diagramm, während die Nichtbeobachtung von Oszillationen abhängig von der Nachweisempfindlichkeit des Experiments bestimmte Gebiete des Parameterraums ausschließt. Abb. 4.1 fasst die derzeitigen experimentellen Ergebnisse zusammen und zeigt erste Prognosen für geplante Experimente. Erlaubte Bereiche sind hierbei als zusammenhängende Flächen dargestellt, während Ausschlussgebiete jeweils rechts von den eingezeichneten Linien liegen.

4.2.1 Sonnen-Neutrinos

Historisch gesehen ist das Sonnen-Neutrino problem [87] der am längsten bestehende Hinweis auf Neutrinooszillationen und beruht auf einem signifikanten Defizit an gemessene-

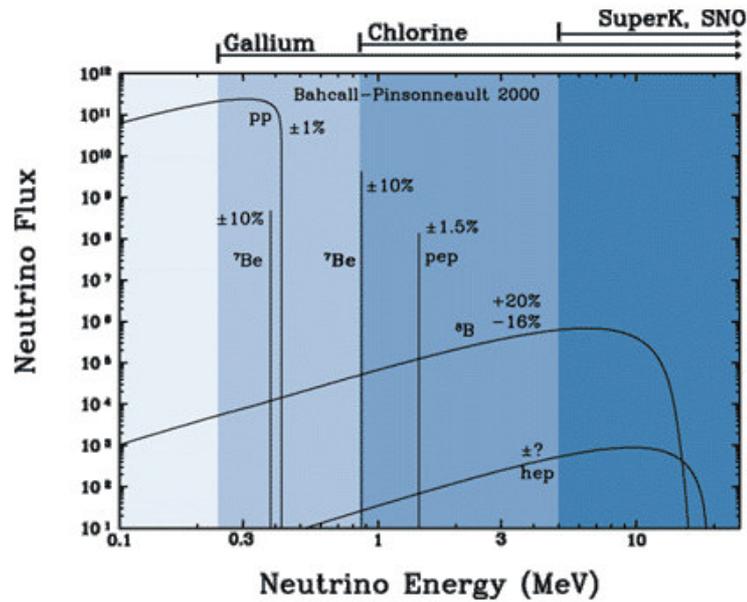


Abbildung 4.2: Energie-Spektrum der Sonnen-Neutrinos nach dem Standard-Sonnenmodell in Verbindung mit den Sensitivitätsbereichen verschiedener Detektortypen [72].

nen solaren Neutrinos (siehe Tab. 4.1) im Vergleich zu den Vorhersagen des Standard-Sonnenmodells (SSM) [88]. Das SSM beschreibt die Struktur und Dynamik der Sonne und ist durch helioseismische Untersuchungen aus neuerer Zeit sehr gut bestätigt worden [73]. Die dabei gemessenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Schallwellen in der Sonne stimmen auf 0.1 Prozent mit den Vorhersagen des Sonnenmodells überein. Andere Modelle, die einen reduzierten Neutrinofluss vorhersagen, gehen von einer geringeren Temperatur im Kern der Sonne aus. Dies steht jedoch im Widerspruch zu den seismischen Resultaten.

Die von der Sonne abgestrahlte Energie wird im Inneren durch die Fusion leichter Atomkerne erzeugt. Der Hauptanteil der Energie wird dabei im Proton-Proton-Zyklus frei, während der CNO-Zyklus eine untergeordnete Rolle spielt. Im Rahmen der zugrundeliegenden Fusionsprozesse werden auch Neutrinos erzeugt; dabei handelt es sich ausschließlich um Elektron-Neutrinos:

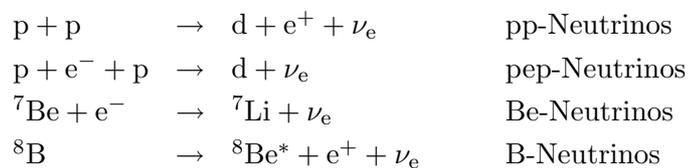


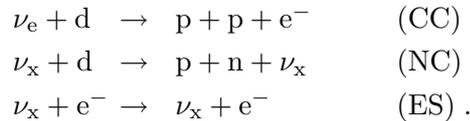
Abb. 4.2 zeigt das Spektrum der Sonnen-Neutrinos nach den Vorhersagen des SSMs. Dargestellt sind auch die Nachweisbereiche verschiedener Detektortypen. Dabei erfassen die sogenannten Galliumexperimente den größten Bereich des solaren Neutrinosppektrums. Zu dieser Klasse von Detektoren gehören das SAGE-Experiment (**S**oviet-**A**merican-**G**allium-**E**xperiment) [77] im russischen Baksan-Untergrundlaboratorium, bei welchem zum Nach-

weis der Neutrinos 57 t metallisches Gallium verwendet werden, sowie GALLEX (**G**allium-**E**xperiment) [76] bzw. das seit 1998 betriebene Nachfolge-Experiment GNO (**G**allium **N**eutrino **O**bservator) [78] im Gran Sasso-Bergmassiv in Italien. Der GALLEX-Detektor enthielt 30 t Galliumchlorid, die auch in der derzeitigen Ausbaustufe von GNO verwendet werden. Geplant ist, das GNO-Experiment in den kommenden Jahren auf 60 t und schließlich auf 100 t Galliumchlorid zu erweitern. Zur Zeit arbeitet GNO mit einem gegenüber GALLEX reduzierten totalen systematischen Fehler.

Das seit 1970 betriebene Homestake-Experiment [75] in der Homestake-Mine in Lead (South Dakota) verwendet 615 t Perchlorethylen (C_2Cl_4) als Target und kann solare Neutrinos, bedingt durch die Schwellenenergie der Nachweisreaktion $^{37}Cl + \nu_e \rightarrow ^{37}Ar + e^-$, erst ab einer Energie von 814 keV registrieren. Das Detektieren von pp-Neutrinos ist dadurch nicht möglich (vgl. Abb. 4.2).

SuperKamiokande [79] ist ein Wasser-Čerenkov-Detektor mit einer effektiven Masse von 22.5 kt reinem Wasser. Der Detektor wurde 1996 in der 1 km tiefen Kamioka-Miene in Japan in Betrieb genommen und konnte bis zum tragischen Unfall am 12. November 2001, bei dem eine große Zahl von Szintillatoren durch eine Kettenreaktion zu Bruch ging, insbesondere die B-Neutrinos mit wesentlich verbesserter Statistik gegenüber dem Vorgängerexperiment Kamiokande vermessen. Ende 2002 soll der SuperKamiokande-Detektor wieder einsatzfähig sein.

Das SNO-Experiment [74] in der Creighton-Mine bei Sudbury (Ontario) ist ein Wasser-Čerenkov-Detektor, der mit 1000 t hochreinem schweren Wasser arbeitet. Durch die Verwendung von Deuterium kommen folgende Nachweisreaktionen zum Einsatz:



Durch den Vergleich des Neutrinoflusses in (ES) mit dem in (CC) ist es möglich, die Oszillation von Elektron-Neutrinos in andere Flavours unabhängig von den Annahmen eines Sonnenmodells zu bestimmen. Die Reaktion (CC) verläuft über einen geladenen schwachen Strom, so dass ausschließlich Elektron-Neutrinos an dieser teilnehmen. Der elastische Streuprozess (ES) kann bei allen drei Neutrinotypen auftreten ($x = e, \mu, \tau$; für ν_μ und ν_τ ist die Sensitivität jedoch reduziert). Für den Fall, dass sich solare Neutrinos auf dem Weg zur Erde in andere aktive Flavours umwandeln, gilt somit: $\Phi^{CC}(\nu_e) < \Phi^{ES}(\nu_x)$. Der gesamte Neutrinofluss kann durch die Reaktion (NC) bestimmt werden, da diese über den neutralen schwachen Strom verläuft und somit für alle Neutrino Flavours auftreten kann.

Beim SNO-Experiment ist es erstmals möglich, den Untergrund direkt zu messen, indem das schwere Wasser im Detektor durch normales Wasser ersetzt wird. Hierdurch fallen die Reaktionen (CC) und (NC) weg. Die Reaktion (ES) lässt sich durch die Richtungsabhängigkeit vom Untergrund unterscheiden. Weiterhin ist die gute Statistik des SNO-Experimentes zu betonen.

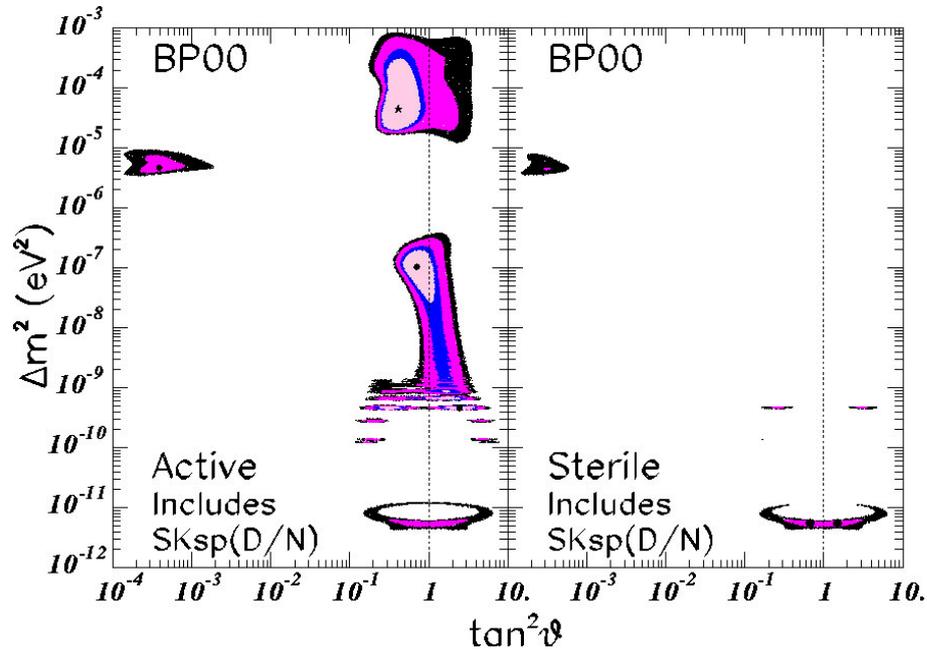


Abbildung 4.3: Dargestellt sind die globalen Lösungen für das Sonnenneutrino-Problem unter Einbeziehung aller verfügbaren Sonnen-Neutrino-Daten (SNO, Chlor- und Gallium-experimente sowie Superkamiokande) [71]. Die farblich markierten Bereiche entsprechen Konfidenzintervallen von 90%, 95%, 99% und 99.73% (3σ). Durch einen Punkt sind die Lösungen gekennzeichnet, die lokal dem besten Fit entsprechen (siehe auch Tab. 4.2). Die Resultate sind in Abhängigkeit von $\tan^2 \theta$ statt $\sin^2 2\theta$ angegeben, um auch Lösungen mit einem Mischungswinkel größer als $\pi/4$ einzubeziehen.

Lösung	Δm^2	$\tan^2 \theta$	$\sin^2 2\theta$
LMA (large mixing angle)	4.5×10^{-5}	4.1×10^{-1}	0.825
SMA (small mixing angle)	4.7×10^{-6}	3.9×10^{-4}	0.002
LOW (low Δm^2)	1.0×10^{-7}	7.1×10^{-1}	0.971
VAC (vacuum)	4.6×10^{-10}	2.4×10^0	0.830

Tabelle 4.2: Lokale Lösungen [71] für das Sonnen-Neutrino-Problem unter Berücksichtigung aller zur Verfügung stehenden experimentellen Daten.

Eine genaue Analyse [71] aller experimentellen Daten zeigt, dass sowohl Vakuumoszillationen zwischen Sonne und Erde als auch der MSW-Effekt im Sonneninneren das beobachtete Defizit an solaren Neutrinos erklären können. Neben $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ -Oszillationen sind auch solche vom Typ $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ mit den Daten verträglich. Im $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ -Parameterraum resultieren hieraus im wesentlichen vier erlaubte Bereiche, die in Abb. 4.3 farblich markiert sind:

- LMA: eine MSW-Lösung mit großem Mischungswinkel
- SMA: eine MSW-Lösung mit kleinem Mischungswinkel
- LOW: eine MSW-Lösung mit kleinem Δm^2
- VAC: eine Vakuumoszillationslösung.

Die statistisch wahrscheinlichsten Lösungen sind in Abb. 4.3 durch einen Punkt markiert; die zugehörigen Parameterwerte fasst Tab. 4.2 zusammen. Im Zusammenhang mit den SNO-Resultaten hat die SMA-Lösung deutlich an Signifikanz verloren, während der LOW-Parameterbereich statistisch stärker untermauert wurde. Favorit für die Lösung des Sonnenneutrino-Problems bleibt jedoch die LMA-Region.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Ergebnisse für die LMA- und SMA-Lösungen verglichen, da der Einfluss großer Mischungswinkel im Vergleich zu kleinen untersucht werden soll. Die LMA- und LOW-Lösungen unterscheiden sich hinsichtlich der Mischungswinkel jedoch nur geringfügig. Das VAC-Ergebnis wird nicht weiter berücksichtigt, da es eine unnatürliche Feineinstellung der zwischen dem Sonnen-Erdbestand und der Oszillationslänge erfordert.

4.2.2 Atmosphärische Neutrinos

Treffen hochenergetische Teilchen der primären kosmischen Strahlung, wie z.B. Protonen, auf die Erdatmosphäre, so entstehen komplexe hadronische Schauer. In den Kaskadenprozessen werden hauptsächlich π^- - und K^- -Mesonen erzeugt, die gemäß

$$\begin{aligned} \pi^+, K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu & \pi^-, K^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ &\hookrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu & &\hookrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \end{aligned} \quad (4.7)$$

zerfallen, sofern sie niedrige Energien besitzen und nicht ihrerseits wieder in der Atmosphäre wechselwirken. Aufgrund der Zerfallsprozesse (4.7) erwartet man, dass atmosphärische Muon- und Elektron-Neutrinos im Verhältnis 2:1 erzeugt werden. Tatsächlich nimmt der Anteil an Muon-Neutrinos für höhere Energien etwas ab, da dann immer mehr Muonen die Erde erreichen ohne zu zerfallen. Der genaue Wert dieses Verhältnisses kann durch Monte-Carlo-Simulationen für die jeweiligen experimentellen Rahmenbedingungen berechnet werden. Weicht der durch das Experiment bestimmte Wert hiervon signifikant ab, so

ist dies ein deutlicher Hinweis auf Neutrinooszillationen; die Größe

$$\mathcal{R} \equiv \frac{[N(\nu_\mu)/N(\nu_e)]_{\text{exp}}}{[N(\nu_\mu)/N(\nu_e)]_{\text{MC}}} \equiv \frac{R_{\mu/e}}{R_{\mu/e}^{\text{MC}}}$$

ist dann von eins verschieden. Abb. 4.4 zeigt \mathcal{R} für verschiedene Untergrund-Experimente, die auf atmosphärische Neutrinos sensitiv waren oder sind. Insbesondere die Wasser-

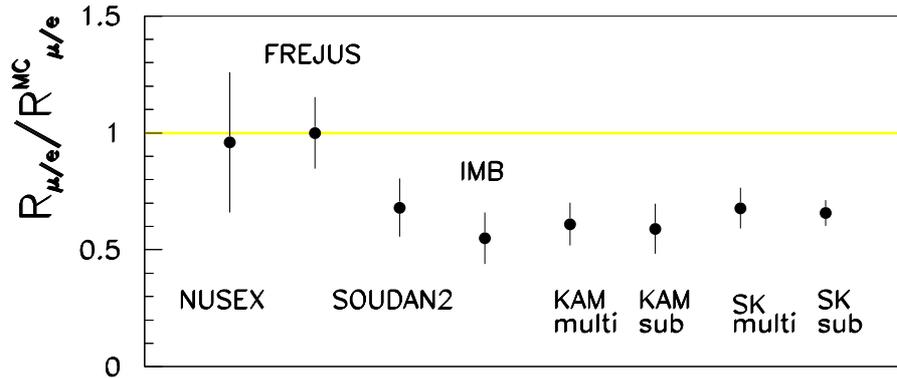


Abbildung 4.4: Das Verhältnis $R_{\mu/e}/R_{\mu/e}^{\text{MC}}$ für verschiedene Untergrund-Detektoren, die atmosphärische Neutrinos nachweisen können [66]. Die Werte für Kamiokande und SuperKamiokande sind jeweils in sub-GeV und multi-GeV Bereiche unterteilt, je nach dem, ob die ursprüngliche Neutrinoenergie einige hundert MeV oder mehrere GeV beträgt.

Čerenkov-Detektoren IMB [81], Kamiokande [82] und SuperKamiokande [79] haben eine deutliche Abweichung zu den Vorhersagen der Monte-Carlo-Simulationen festgestellt, während die beiden ältesten Eisen-Kalorimeter-Experimente NUSEX [83] und Fréjus [84] den atmosphärischen Neutrinofluss in Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen gemessen haben. Allerdings haben die neueren Experimente Soudan2 [85] und MACRO [86], die ebenfalls mit diesem Detektortyp arbeiten, die Ergebnisse der Čerenkov-Detektoren bestätigt, so dass es sich offenbar nicht um einen detektorspezifischen Effekt handelt. Ob die kleinen \mathcal{R} -Verhältnisse auf einem Defizit an ν_μ -induzierten Ereignissen bzw. einer zu großen Anzahl an Elektron-Neutrinos beruhen, oder auf einer Kombination aus beidem, bleibt hierbei jedoch erst einmal unbeantwortet. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass ein Vergleich der \mathcal{R} -Werte verschiedener Experimente mit Vorsicht betrachtet werden muss, da diese von der Energie und der Einfallsrichtung der rekonstruierten Neutrinoereignisse abhängen [95] und somit nicht unmittelbar in Beziehung gesetzt werden können.

Bei hinreichend hoher Statistik ist es jedoch möglich, im Rahmen eines einzigen Experimentes detaillierte Informationen über die Abhängigkeit des \mathcal{R} -Verhältnisses von der Einfallsrichtung der atmosphärischen Neutrinos zu sammeln. Entscheidend hierbei ist, dass sich die Wegstrecke, die die Neutrinos von ihrer Entstehung in der Atmosphäre bis

zum Detektor zurücklegen, mit dem Zenith-Winkel ändert. So müssen Neutrinos, die unter einem Winkel von 180° einfallen³ die gesamte Erde durchqueren ($\sim 10^4\text{km}$), ehe sie den Detektor erreichen, während solche, die senkrecht von oben auf den Detektor treffen, maximal die gesamte 30 km dicke Atmosphäre durchdringen mussten. Bisher ist es nur der SuperKamiokande-Kollaboration gelungen, eine genügend hohe Statistik zu erzielen, um die Zenith-Winkelabhängigkeit des atmosphärischen Neutrinoflusses im Detail untersuchen zu können. Betrachtet man die in Abb. 4.5 dargestellten Ergebnisse, so fällt

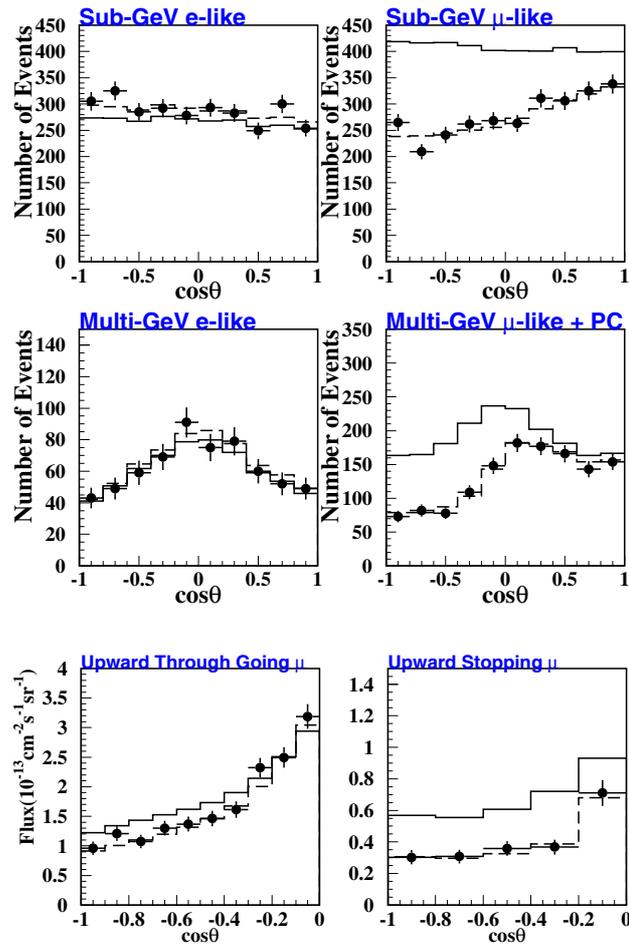


Abbildung 4.5: Zenith-Winkelabhängigkeit der SuperKamiokande Messungen über einen Zeitraum von 1289 Tagen [66]. Die Punkte entsprechen den eigentlichen Messwerten, die durchgezogenen Linien den MC-Simulationen ohne Oszillationen und die gestrichelten Linien den Simulationsergebnissen mit bestangepassten Oszillationsparametern.

³Der Zenith-Winkel wird üblicherweise durch $\cos \theta$ parametrisiert. Ein Winkel von 180° entspricht damit dem Wert -1 , während direkt von oben einfallende Neutrinos durch 1 gekennzeichnet sind. Obwohl sowohl für den Zenith-Winkel wie auch für den Mischungswinkel der Neutrinos das Symbol θ verwendet wird, sollte man sie nicht miteinander verwechseln.

auf, dass die Verteilung der Elektron-Neutrinos relativ gut mit den Simulationsergebnissen ohne Oszillationen (durchgezogene Linien) übereinstimmt, während die gemessenen Muon-Neutrinos deutliche Abweichungen zeigen. Diese wachsen mit zunehmenden Zenith-Winkel an, so dass es ein deutliches Defizit an μ -Neutrinos gibt, die den Detektor von unten erreichen. Die Verteilung der SuperKamiokande-Daten legt daher nahe, dass das Defizit mit ansteigender Entfernung zwischen Produktions- und Nachweisort zunimmt und auf Neutrinooszillationen zurückzuführen ist, da die an die Oszillationshypothese angepassten Simulationen (gestrichelte Linien) sehr gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Demnach beruht die atmosphärische Neutrinoanomalie auf einem „Verschwinden“ von ν_μ -induzierten Ereignissen und nicht auf überzähligen Elektron-Neutrinos.

4.2.3 LSND und KARMEN

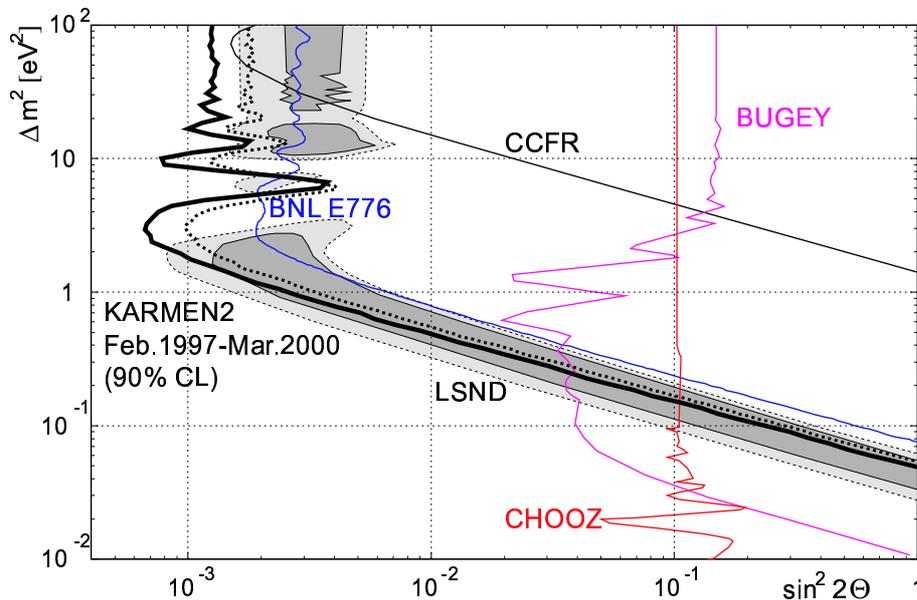


Abbildung 4.6: Vergleich der LSND-Evidenz für $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillationen (grau markierte Gebiete) mit den Ausschlussbereichen anderer Experimente [93]. Der rechts von einer durchgezogenen Linie liegende Bereich wurde für Neutrinooszillationen von dem jeweiligen Experiment mit einem Konfidenzlevel von 90% ausgeschlossen. Besonders die Ergebnisse des KARMEN2-Experiments stehen im Widerspruch zu dem LSND-Parameterbereich.

Anzeichen für eine $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oszillation wurden vom LSND-Experiment [91] in Los Alamos gefunden, das zum Nachweis einen 167 t schweren Flüssigszintillationsdetektor (Liquid Scintillator Neutrino Detector) verwendet. In diesem Experiment wird ein Pionenstrahl, der durch Protonen mit einer Energie von 800 MeV erzeugt wird, auf ein Kupfer-Target gelenkt. Die π^+ -Mesonen werden in diesem gestoppt und zerfallen gemäß $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. Die hierbei entstehenden Muonen kommen im Target zur Ruhe und

zerfallen in $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$, so dass in der gesamten Zerfallskette Muon-Neutrinos und Muon-Antineutrinos sowie Elektron-Neutrinos erzeugt werden, jedoch *keine Elektron-Antineutrinos*. Formal könnten diese in den Zerfallsprozessen entstehen, wenn neben den μ^+ auch μ^- -Muonen erzeugt würden. Praktisch würden die negativ geladenen Muonen jedoch sofort von den Atomkernen des Targets eingefangen und hätten somit keine Zeit um weiter zu zerfallen.

Um Neutrinooszillationen experimentell nachzuweisen, wurde in dem ca. 30 m vom Target entfernten LSND Neutrino-Detektor nach Elektron-Antineutrinos gesucht, die durch Wechselwirkung mit Protonen $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ über die Reaktion $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ bzw. $n + p \rightarrow d + \gamma$ durch die emittierten Gammaquanten im Szintillator registriert werden sollten. Insgesamt wurden vom LSND-Experiment $87.9 \pm 22.4 \pm 6.0$ Ereignisse im Positronen-Energiebereich zwischen 30 und 60 MeV gemessen, die durch eine $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Flavorkonversion erklärt werden können.

Der Parameterbereich für $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillationen ist durch weitere Reaktor- und Beschleunigerexperimente untersucht worden, die jedoch im Rahmen der ihnen zugrundeliegenden Messgenauigkeit keine Anzeichen für entsprechende Phänomene gefunden haben. Hieraus resultieren ausgeschlossene Regionen in der $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ -Ebene, die in Abb. 4.6 rechts von den durchgezogenen Kurven liegen, die durch die Namen der zugehörigen Experimente gekennzeichnet sind. Der größte Ausschlussbereich geht hierbei auf das in Chilton (England) durchgeführte KARMEN2 Experiment (**K**arlsruhe-**R**utherford **M**ittelenergie **N**eutrino **E**xperiment) [93] zurück, das im wesentlichen einen mit LSND vergleichbaren Aufbau (bei einem Abstand von 17,6 m zwischen Target und Detektor) besitzt. Insbesondere wird ein erheblicher Teil der LSND-Daten (grau markierte Bereiche in Abb. 4.6) durch KARMEN2 ausgeschlossen. Der Grund für diese widersprüchlichen Ergebnisse ist bis heute nicht bekannt. Um hier Klarheit zu schaffen, soll der gesamte Parameterbereich durch das am Fermilab (USA) betriebene MiniBooNE-Experiment [94] neu vermessen werden, das voraussichtlich Mitte 2002 mit der Datenaufnahme beginnen wird.

4.2.4 Zusammenfassung der experimentellen Randbedingungen

Abb. 4.7 fasst die derzeitigen Erkenntnisse über zulässige Parameterbereiche für Neutrinooszillationen auf der Basis von 2ν -Analysen zusammen.

Eine globale Analyse [66] unter Einbeziehung aller solaren, atmosphärischen und Reaktor-Daten liefert die folgenden 3σ -Bereiche für die Oszillationsparameter:

$$\begin{array}{llll}
 2.4 \times 10^{-5} < \Delta m_{21}^2 / \text{eV}^2 < 2.4 \times 10^{-4} & \text{LMA} , \\
 0.27 < \tan^2 \theta_{12} < 0.77 & \text{LMA} , \\
 1.4 \times 10^{-3} < \Delta m_{32}^2 / \text{eV}^2 < 6.0 \times 10^{-3} & \text{Atmos} , \\
 0.4 < \tan^2 \theta_{23} < 3.0 & \text{Atmos} , \\
 & \sin^2 \theta_{13} < 0.06 & \text{Fit} .
 \end{array}$$

Hieraus lassen sich die Beträge der Elemente der Mischungsmatrix \mathbf{U} unmittelbar bestim-

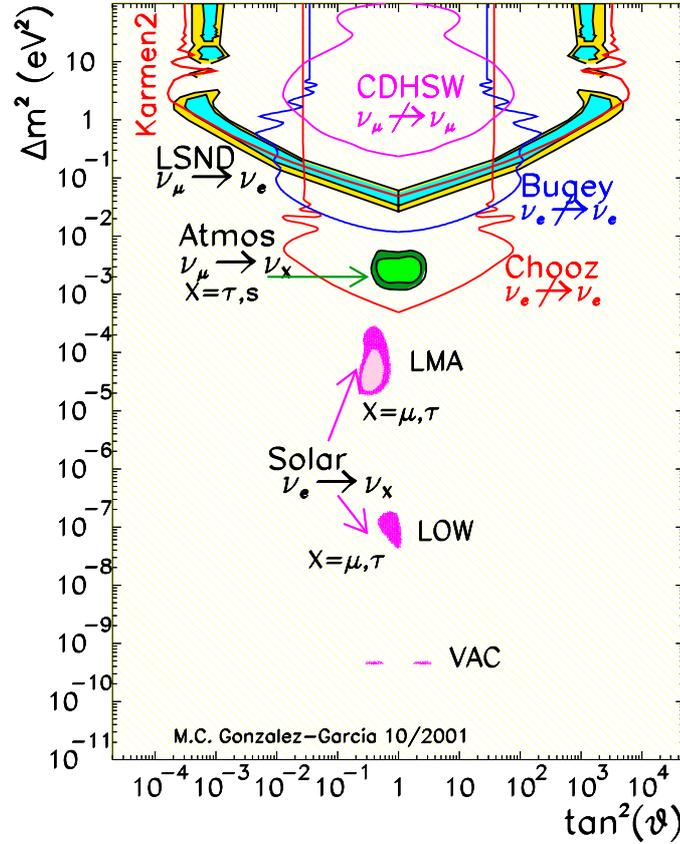


Abbildung 4.7: Zusammenfassung der zulässigen Bereiche für $\tan^2(\theta_{ij})$ und Δm_{kl}^2 auf der Basis von 2ν -Oszillationsanalysen [66]. Die farbigen Regionen entsprechen einem Konfidenzlevel von 90% bzw. 99%. Weiterhin sind die Ausschlussbereiche wichtiger Reaktor- und Beschleunigerexperimente eingezeichnet.

men:

$$|\mathbf{U}| = \begin{pmatrix} 0.73 - 0.89 & 0.45 - 0.66 & < 0.24 \\ 0.23 - 0.66 & 0.24 - 0.75 & 0.52 - 0.87 \\ 0.06 - 0.57 & 0.40 - 0.82 & 0.48 - 0.85 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Das beste Fit-Ergebnis liefern Lösungen mit großen Mischungswinkeln. Sowohl solare als auch atmosphärische Neutrinoexperimente favorisieren kleine Werte für $|\mathbf{U}_{e3}|$, ein Trend der durch aktuelle Reaktor-Experiment-Messungen gestützt wird.

Die angegebenen Parameterbereiche stellen wichtige Randbedingungen für die in dieser Arbeit formulierten Massenmodelle dar. Ein Modell mit realistischen fermionischen Massenmatrizen muss letztendlich Neutrino-Eigenschaften induzieren, welche mit den angegebenen Werten innerhalb der Grenzen konsistent sind.

Um den Einfluss großer Mischungswinkel im Vergleich zu kleinen abschätzen zu können,

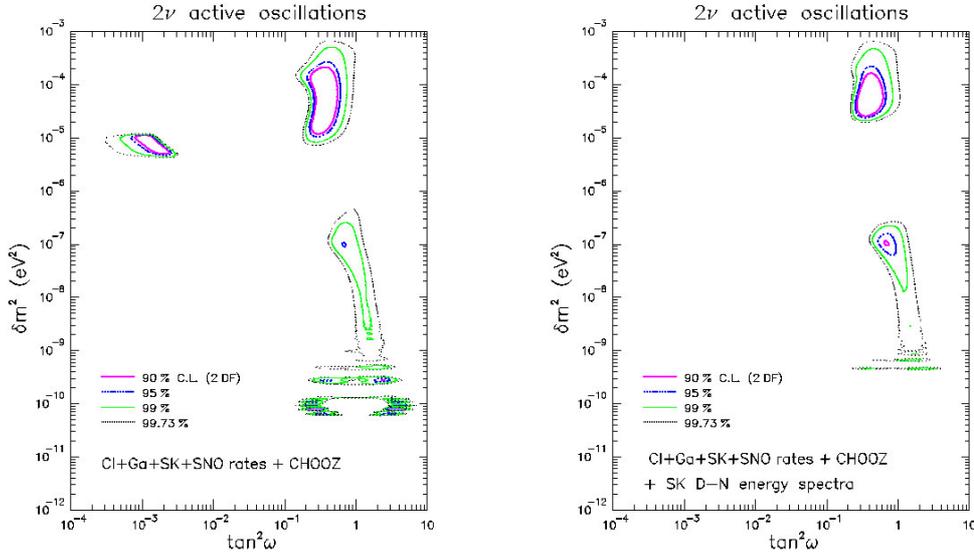


Abbildung 4.8: Die linke Abbildung zeigt die zulässigen Bereiche für Neutrinooszillationen unter Berücksichtigung der SNO-Messungen auf der Basis einer 2ν -Oszillationsanalyse. Daten des Reaktorexperimentes CHOOZ [80] wurden ebenfalls einbezogen. Schließt man das SuperKamiokande Tag/Nacht-Energiespektrum in die Analyse ein (rechts), so ist die SMA-Lösung statistisch nicht mehr signifikant, während die LOW-Region an Statistik gewinnt [70].

wird zusätzlich noch die SMA-Lösung untersucht. Hierbei steht nicht die Entwicklung eines alternativen Massenmodells im Vordergrund (wie Abb. 4.8 verdeutlicht, verliert die SMA-Lösung unter Berücksichtigung des SK Tag/Nacht-Energiespektrums deutlich an Signifikanz); statt dessen sollen die Ergebnisse eines realistischen Szenarios mit Prognosen bei kleinen Mischungswinkeln im Neutrino Sektor in Beziehung gesetzt werden. Das experimentell besser bestätigte LOW-Resultat ist hierzu ungeeignet, da die Mischungswinkel mit denen der LMA-Lösung vergleichbar sind.

Für die SMA-Region werden folgende Parameterbereiche zugrunde gelegt [89]:

$$0.4 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \lesssim \Delta m_{\text{sun}}^2 \lesssim 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (4.9)$$

$$0.4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \lesssim \Delta m_{\text{atm}}^2 \lesssim 8.0 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (4.10)$$

$$33 \lesssim \Delta m_{\text{atm}}^2 / \Delta m_{\text{sun}}^2 \lesssim 2000 \quad (4.11)$$

$$|\mathbf{U}| = \begin{pmatrix} \approx 1 & 0.03 - 0.05 & \ll 1 \\ 0.02 - 0.05 & 0.71 - 0.87 & 0.49 - 0.71 \\ 0.01 - 0.04 & 0.48 - 0.71 & 0.71 - 0.87 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Kapitel 5

Das SUSY $SO(10)$ Massenmodell

Den Ausgangspunkt für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchte $SO(10)$ -Theorie bildet das Massenmodell aus [34]. Hierbei handelt es sich um eine nichtsupersymmetrische GUT mit reellen Massenmatrizen, die eine intermediäre Pati-Salam-Symmetriegruppe besitzt. Das Modell ist in der Lage, sowohl die LMA- als auch die SMA-Neutrinoszillationen korrekt zu beschreiben; die berechneten Nukleonzerfallsraten stehen im Einklang mit den experimentellen Resultaten.

Bei der supersymmetrischen Adaption des Massenmodells ergeben sich die folgenden wesentlichen Änderungen:

- Es wird keine intermediäre Symmetrie angenommen, da sich aufgrund der RG-Gleichungen des MSSMs die Eichkopplungen bei $2 \cdot 10^{16}$ GeV treffen. Für die Skala der SUSY-Brechung wird $M_{\text{SUSY}} = M_Z$ angesetzt; ferner wird $\tan \beta = 10$ verwendet.
- Der Higgs-Sektor und die entsprechenden VEVs werden modifiziert (siehe Abschnitt 5.1).
- Um die CP-Verletzung in das Modell zu integrieren, werden auch komplexe Yukawa-Kopplungen berücksichtigt (vgl. Abschnitt 5.4).
- Es wird davon ausgegangen, dass die Masse der superschweren Eichbosonen unterhalb von M_{GUT} liegt.
- Der VEV für die rechtshändigen Majorana-Neutrinos ist wesentlich kleiner als M_{GUT} .

Der letzte Punkt ist notwendig, um den Seesaw-Mechanismus ohne intermediäre Skala realisieren zu können. Die reduzierte Masse der X - und Y -Bosonen dient dazu, die Zeitskala des Nukleonzerfalls soweit herabzusetzen, dass eine experimentelle Überprüfung der vorhergesagten Verzweungsverhältnisse innerhalb der nächsten Jahre möglich ist.

5.1 Grundlagen und Struktur des Massenmodells

Das Modell basiert auf einem Schema, das in einer Reihe von Arbeiten [97, 98, 99] angewendet wurde: alle Massenmatrizen¹ besitzen eine nicht-symmetrische Fritsch-Textur [100, 101]

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ B & 0 & C \\ 0 & D & E \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Diese Form der Matrizen und die Beiträge der Higgs-Darstellungen werden durch eine globale $U(1)$ -Familiensymmetrie induziert, wobei als Higgs-Inhalt nur renormierbare Darstellungen — wie von Harvey, Ramond und Reiss vorgeschlagen [102] — verwendet werden. Gegenüber der Methode von Froggatt und Nielsen [103], die gebrochene $U(1)$ -Familiensymmetrien und nicht-renormierbare Beiträge benutzen, hat dies den Vorteil, dass die R -Parität erhalten ist und somit die extrem schnellen $d = 4$ -Nukleon-Zerfälle ausgeschlossen sind. Aus dieser Invarianz folgt weiterhin die Stabilität des Neutralinos, das dann einen geeigneten Kandidaten für dunkle Materie darstellt. Durch die $SO(10)$ -Symmetrie und die $U(1)$ -Familiensymmetrie ergeben sich Beziehungen zwischen den verschiedenen Elementen der Massenmatrizen.

Da nur ein großer VEV der $\Phi_{\overline{126}}$ verwendet wird, um die Massen der rechtshändigen Majorana-Neutrinos zu generieren, hat die entsprechende Massenmatrix die Textur [97, 98]

$$\mathbf{M}_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Die leichten Massenmatrizen werden ebenfalls durch die $\Phi_{\overline{126}}$ und Paare von Φ_{10} und $\Phi_{\overline{120}}$ generiert². Diese Higgs-Darstellungen beinhalten verschiedene $SU(2)_L$ -Dubletts. Bei der Brechung der $SO(10)$ -Symmetrie in das MSSM bleiben jedoch nur zwei Linearkombinationen dieser Higgsfelder leicht [96, 97]. Alle anderen Kombinationen nehmen schwere Massen an und beeinflussen somit nicht die RG-Gleichungen. Die explizite Darstellung der MSSM-Higgsbosonen im Rahmen des $SO(10)$ -Higgs-Sektors ist unwesentlich, da die effektiven Vakuumerwartungswerte ohnehin freie Parameter des Modells sind. Für das Verhältnis der leichten VEVs wird der häufig verwendete Wert $\tan\beta = 10$ angenommen. Oberhalb der Vereinheitlichungsskala wird die Entwicklung der Eichkopplung sehr bald nicht-pertubativ; dies spielt aber für die folgenden Überlegungen keine Rolle, da die physikalischen Prozesse jenseits von M_{GUT} nicht Gegenstand dieser Arbeit sind.

¹Oberhalb der Skala der Elektroschwachen-Symmetriebrechung sind die Teilchen des SMs masselos, d.h. formal existieren nur noch Yukawa-Kopplungsmatrizen. Im folgenden wird daher für Energien größer als $v/\sqrt{2}$ der Begriff Massenmatrix im Sinne von „Yukawa-Matrix skaliert mit dem entsprechenden VEV“ benutzt. Neben einer einheitlichen Bezeichnungsweise hat dies auch den Vorteil, dass die Matrixelemente „handliche“ Werte annehmen.

²Um eine Brechung der SUSY bei hohen Energien zu verhindern, sind weiterhin auch Paare wie $\overline{126} + 126$ involviert. Diese sind jedoch nur teilweise für die fermionischen Massenmatrizen relevant.

Die Fermionen liegen in den drei Hexadecupletts $\mathbf{16}_i$, wobei $i = 1, 2, 3$ den Generationsindex darstellt. Unter der globalen $U(1)$ -Familiensymmetrie transformieren sich diese sowie die Higgs-Darstellungen Φ_k gemäß

$$\mathbf{16}_j \rightarrow \exp(i\alpha_j\theta)\mathbf{16}_j, \quad (5.3)$$

$$\Phi_k \rightarrow \exp(i\beta_k\theta)\Phi_k. \quad (5.4)$$

Aus der Forderung nach Invarianz der Yukawa-Kopplungen $\mathbf{16}_i\Phi_k\mathbf{16}_j$ unter $U(1)_F$ -Transformationen folgt $\alpha_i + \alpha_j = \beta_k$, so dass die allgemeinste Form der Yukawa-Matrizen durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{10}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{x}_1 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_{126}^{(h)} &= \begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{y}_1 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_{120}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & z_1 & 0 \\ -z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y}_{10}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_{126}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & y_2 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_{120}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & -z_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

gegeben ist. Diese Yukawa-Matrizen induzieren die expliziten Darstellungen für die Massenmatrizen \mathbf{M}_u , \mathbf{M}_d und \mathbf{M}_e gemäß Gl. (3.25) – (3.27)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_d &= v_d^{(1)}\mathbf{Y}_{10}^{(1)} + v_d^{(2)}\mathbf{Y}_{10}^{(2)} + \omega_d^{(1)}\mathbf{Y}_{126}^{(1)} \\ &\quad + (\tilde{v}_d^{(1)} + \tilde{\omega}_d^{(1)})\mathbf{Y}_{120}^{(1)} + (\tilde{v}_d^{(2)} + \tilde{\omega}_d^{(2)})\mathbf{Y}_{120}^{(2)} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= v_d^{(1)}\mathbf{Y}_{10}^{(1)} + v_d^{(2)}\mathbf{Y}_{10}^{(2)} - 3\omega_d^{(1)}\mathbf{Y}_{126}^{(1)} \\ &\quad + (\tilde{v}_d^{(1)} - 3\tilde{\omega}_d^{(1)})\mathbf{Y}_{120}^{(1)} + (\tilde{v}_d^{(2)} - 3\tilde{\omega}_d^{(2)})\mathbf{Y}_{120}^{(2)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{M}_u = v_u^{(1)}\mathbf{Y}_{10}^{(1)} + v_u^{(2)}\mathbf{Y}_{10}^{(2)} + \omega_u^{(1)}\mathbf{Y}_{126}^{(1)} \quad (5.8)$$

$$+ (\tilde{v}_u^{(1)} + \tilde{\omega}_u^{(1)})\mathbf{Y}_{120}^{(1)} + (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)})\mathbf{Y}_{120}^{(2)}, \quad (5.9)$$

wobei die Vakuumerwartungswerte nach Tab. 3.2 bezeichnet sind. Für die Neutrino-Matrizen gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})} &= v_u^{(1)}\mathbf{Y}_{10}^{(1)} + v_u^{(2)}\mathbf{Y}_{10}^{(2)} - 3\omega_u^{(1)}\mathbf{Y}_{126}^{(1)} \\ &\quad + (\tilde{v}_u^{(1)} - 3\tilde{\omega}_u^{(1)})\mathbf{Y}_{120}^{(1)} + (\tilde{v}_u^{(2)} - 3\tilde{\omega}_u^{(2)})\mathbf{Y}_{120}^{(2)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} \sim M_R \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{M}_{\nu L}^{(\text{Maj})} \sim \frac{(\omega_u^{(1)})^2}{M_R} \mathbf{Y}_{126}^{(1)} \equiv M_L \mathbf{Y}_{126}^{(1)}; \quad M_L \ll \omega_u^{(1)}. \quad (5.12)$$

In Analogie zu [34] wird $\tilde{\omega}_u^{(1)} = 0$ gesetzt; weiterhin wird davon ausgegangen, dass die $\mathbf{126}$ lediglich einen nichtverschwindenden VEV in Richtung von \mathbf{M}_u ausbildet und somit $\omega_d^{(1)} = 0$ erfüllt ist. Mit der oben angegebenen Form der Yukawa-Matrizen (5.5) erhält

man das Gleichungssystem

$$(\mathbf{M}_d)_{12} = x_1 v_d^{(1)} + z_1 \tilde{v}_d^{(1)} + z_1 \tilde{\omega}_d^{(1)} \quad (5.13)$$

$$(\mathbf{M}_d)_{21} = x_1 v_d^{(1)} - z_1 \tilde{v}_d^{(1)} - z_1 \tilde{\omega}_d^{(1)} \quad (5.14)$$

$$(\mathbf{M}_d)_{23} = x_2 v_d^{(2)} + z_2 \tilde{v}_d^{(2)} + z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)} \quad (5.15)$$

$$(\mathbf{M}_d)_{32} = x_2 v_d^{(2)} - z_2 \tilde{v}_d^{(2)} - z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)} \quad (5.16)$$

$$(\mathbf{M}_d)_{33} = \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_1} \right) x_1 v_d^{(1)} \quad (5.17)$$

$$(\mathbf{M}_e)_{12} = (\mathbf{M}_d)_{12} - 4 z_1 \tilde{\omega}_d^{(1)} \quad (5.18)$$

$$(\mathbf{M}_e)_{21} = (\mathbf{M}_d)_{21} + 4 z_1 \tilde{\omega}_d^{(1)} \quad (5.19)$$

$$(\mathbf{M}_e)_{23} = (\mathbf{M}_d)_{23} - 4 z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)} \quad (5.20)$$

$$(\mathbf{M}_e)_{32} = (\mathbf{M}_d)_{32} + 4 z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)} \quad (5.21)$$

$$(\mathbf{M}_e)_{33} = (\mathbf{M}_d)_{33} \quad (5.22)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{12} = x_1 v_u^{(1)} + y_1 \omega_u^{(1)} + z_1 \tilde{v}_u^{(1)} \quad (5.23)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{21} = x_1 v_u^{(1)} + y_1 \omega_u^{(1)} - z_1 \tilde{v}_u^{(1)} \quad (5.24)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{23} = x_2 v_u^{(2)} + z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)}) \quad (5.25)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{32} = x_2 v_u^{(2)} - z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)}) \quad (5.26)$$

$$(\mathbf{M}_u)_{33} = \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_1} \right) x_1 v_u^{(1)} + \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_u^{(1)} \quad (5.27)$$

für die Quark-Matrizen und \mathbf{M}_e .

5.2 Lösung des Massenmodells im Quark-Lepton-Sektor

Zur Lösung des Massenmodells wird angenommen, dass alle Größen des Gleichungssystems (5.13) – (5.27) reell sind (d.h. die CP-Verletzung bleibt zunächst unberücksichtigt). Die Berechnung der Fermionmassen bei M_{GUT} erfolgt in zwei Schritten:

1. Bei M_Z werden die Massenmatrizen diagonal angesetzt.
2. Mit Hilfe der Zweiloop-Renormierungsgruppen-Gleichungen des MSSMs erhält man die entsprechenden Massen bei $M_{\text{GUT}} = 2 \cdot 10^{16}$ GeV (in Übereinstimmung mit [13]):

$m_u(M_{\text{GUT}})$	$m_d(M_{\text{GUT}})$	$m_s(M_{\text{GUT}})$
1.04 MeV	1.33 MeV	26.5 MeV
$m_c(M_{\text{GUT}})$	$m_b(M_{\text{GUT}})$	$m_t(M_{\text{GUT}})$
302 MeV	1 GeV	129 GeV
$m_e(M_{\text{GUT}})$	$m_\mu(M_{\text{GUT}})$	$m_\tau(M_{\text{GUT}})$
0.32502032 MeV	68.59813 MeV	1171.4 MeV

Damit sind die Diagonalelemente der Massenmatrizen an der GUT-Skala bekannt. Aufgrund der Textur (5.1) enthalten die Matrizen \mathbf{M}_d , \mathbf{M}_e und \mathbf{M}_u jeweils fünf nichtverschwindende Elemente. Aus den Gleichungen (5.18) – (5.22) ist jedoch ersichtlich, dass \mathbf{M}_e durch die Modellparameter $z_1\tilde{\omega}_d^{(1)}$ und $z_2\tilde{\omega}_d^{(2)}$ aus \mathbf{M}_d hervorgeht, so dass \mathbf{M}_e nur zwei neue Größen enthält. Insgesamt beinhalten die drei Massenmatrizen also zwölf Unbekannte. Die Diagonalisierung der Quark- und Leptonmassenmatrizen

$$\mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{M}_u \mathbf{U}_R = \mathbf{M}_u^{(D)}, \quad \mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{M}_d \mathbf{D}_R = \mathbf{M}_d^{(D)}, \quad \mathbf{E}_L^\dagger \mathbf{M}_e \mathbf{E}_R = \mathbf{M}_e^{(D)}$$

liefert 27 Bestimmungsgleichungen. Weitere 3 Bestimmungsgleichungen erhält man aus der Beziehung

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{D}_L$$

für die CKM-Matrix. Hierbei werden die Elemente \mathbf{V}_{12} , \mathbf{V}_{23} und \mathbf{V}_{13} verwendet³. Insgesamt stehen damit 30 Bestimmungsgleichungen für 30 Parameter (die 12 der Massenmatrizen und 18 Winkel) zur Verfügung, so dass das nichtlineare Gleichungssystem mit Hilfe von Routinen aus [131] untersucht werden kann. Aufgrund der Tatsache, dass \mathbf{M}_e durch zwei Parameter aus \mathbf{M}_d hervorgeht, sind die sechs Diagonalelemente dieser Matrizen — und damit die Massen der physikalischen Teilchen — durch eine Relation verbunden. Numerische Untersuchungen zeigten, dass das Gleichungssystem nur für die Bedingung $m_b \approx m_\tau$ gelöst werden kann. Somit induziert das Modell implizit eine b - τ -Vereinheitlichung an der GUT-Skala. Aus diesem Grunde wird

$$m_b(M_{\text{GUT}}) = m_\tau(M_{\text{GUT}}) = 1171.4 \text{ MeV}$$

zur Lösung des Systems verwendet und m_b bei M_z durch Δ_b korrigiert.

Numerisch wurden insgesamt drei Lösungstypen gefunden, diese sind in den Tabellen 5.1, 5.2 und 5.3 angegeben. Jeder der Lösungstypen zeigt eine links-rechts-Symmetrie in der leptonischen Massenmatrix \mathbf{M}_e , so dass er in Typ a und Typ b unterteilt werden kann. Diese Symmetrie resultiert daraus, dass an die leptonischen Mischungen zunächst keine einschränkenden Bedingungen, wie im Quark-Sektor durch die CKM-Matrixelemente, gestellt werden. Durch die Suche nach realistischen Neutrino-Lösungen werden später jedoch auch hier Vorgaben entstehen. Die Tabellen 5.4, 5.5 und 5.6 enthalten die renormierten Massenmatrizen bei M_z , die Diagonalelemente sind in Tab. 5.7 zusammengefasst. Hieraus geht hervor, dass die Lösungstypen I und II die Randbedingungen bei M_z besser erfüllen als Typ III. Tab. 5.8 verdeutlicht die geringe Skalenabhängigkeit der CKM-Matrix.

Mit Hilfe dieser Lösungen können nun die 13 Modellparameter $x_1 v_d^{(1)}$, $z_1 \tilde{v}_d^{(1)}$, $z_1 \tilde{\omega}_d^{(1)}$, $x_2 v_d^{(2)}$, $z_2 \tilde{v}_d^{(2)}$, $z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)}$, \tilde{x}_1/x_1 , \tilde{y}_1/y_1 , $x_2 v_u^{(2)}$, $x_1 v_u^{(1)}$, $y_1 \omega_u^{(1)}$, $z_1 \tilde{v}_u^{(1)}$ und $z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)})$ im Gleichungssystem (5.13) – (5.27) bestimmt werden. Da die Massenmatrizen jedoch nur zwölf unabhängige Größen enthalten, tritt ein freier Parameter auf. In Analogie zu dem in [34] entwickelten Massenmodell wird hierfür \tilde{y}_1/y_1 gewählt. Diese Größe wird später bei der Suche nach Neutrino-Lösungen festgelegt.

³Die Skalenabhängigkeit der CKM-Matrix ist sehr gering. Vgl. auch Tab. 5.8.

	Typ Ia @ M_{GUT}	Typ Ib @ M_{GUT}
M_u	$\begin{pmatrix} 0 & -23.115 & 0 \\ 144.118 & 0 & -128425 \\ 0 & 302.155 & 12162.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -23.115 & 0 \\ 144.122 & 0 & -128425 \\ 0 & 302.155 & 12162.0 \end{pmatrix}$
M_d	$\begin{pmatrix} 0 & 4.087 & 0 \\ -64.710 & 0 & -1159.17 \\ 0 & 24.980 & 156.125 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4.087 & 0 \\ -64.712 & 0 & -1159.17 \\ 0 & 24.980 & 156.122 \end{pmatrix}$
M_e	$\begin{pmatrix} 0 & -63.268 & 0 \\ 2.644 & 0 & -1160.94 \\ 0 & 26.751 & 156.125 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2.644 & 0 \\ -63.269 & 0 & 26.749 \\ 0 & -1160.94 & 156.122 \end{pmatrix}$
θ_{ul12}	3.218	3.218
θ_{ul23}	1.665	1.665
θ_{ul31}	0.000	0.000
θ_{ur12}	3.097	3.097
θ_{ur23}	3.142	3.142
θ_{ur31}	0.001	0.001
θ_{dl12}	0.147	0.147
θ_{dl23}	1.704	1.704
θ_{dl31}	3.142	3.142
θ_{dr12}	2.814	2.814
θ_{dr23}	0.003	0.003
θ_{dr31}	0.055	0.055
θ_{el12}	4.316	3.140
θ_{el23}	1.705	3.145
θ_{el31}	0.000	0.002
θ_{er12}	3.140	4.316
θ_{er23}	3.145	1.705
θ_{er31}	0.002	0.000

Tabelle 5.1: Lösungstyp I bei M_{GUT} .

	Typ IIa @ M_{GUT}	Typ IIb @ M_{GUT}
M_u	$\begin{pmatrix} 0 & -23.268 & 0 \\ 78.385 & 0 & 127073 \\ 0 & -305.363 & 22214.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -23.268 & 0 \\ 78.385 & 0 & 127073 \\ 0 & -305.363 & 22214.4 \end{pmatrix}$
M_d	$\begin{pmatrix} 0 & 4.074 & 0 \\ -64.710 & 0 & 1159.11 \\ 0 & -24.974 & 156.607 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4.074 & 0 \\ -64.710 & 0 & 1159.11 \\ 0 & -24.974 & 156.608 \end{pmatrix}$
M_e	$\begin{pmatrix} 0 & -63.272 & 0 \\ 2.636 & 0 & 1160.87 \\ 0 & -26.742 & 156.607 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2.636 & 0 \\ -63.272 & 0 & -26.743 \\ 0 & 1160.88 & 156.608 \end{pmatrix}$
θ_{ul12}	0.077	0.077
θ_{ul23}	4.539	4.539
θ_{ul31}	0.000	0.000
θ_{ur12}	3.097	3.097
θ_{ur23}	6.283	6.283
θ_{ur31}	3.142	3.142
θ_{dl12}	2.996	2.996
θ_{dl23}	4.578	4.578
θ_{dl31}	0.000	0.000
θ_{dr12}	3.471	3.471
θ_{dr23}	3.139	3.139
θ_{dr31}	0.055	0.055
θ_{el12}	1.967	0.002
θ_{el23}	1.437	3.139
θ_{el31}	0.000	3.139
θ_{er12}	0.002	1.967
θ_{er23}	3.139	1.437
θ_{er31}	3.139	0.000

Tabelle 5.2: Lösungstyp II bei M_{GUT} .

	Typ IIIa @ M_{GUT}	Typ IIIb @ M_{GUT}
M_u	$\begin{pmatrix} 0 & -23.192 & 0 \\ 345.275 & 0 & 128900 \\ 0 & -301.037 & 5059.80 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -23.192 & 0 \\ 345.275 & 0 & 128900 \\ 0 & -301.037 & 5059.80 \end{pmatrix}$
M_d	$\begin{pmatrix} 0 & 4.081 & 0 \\ -1171.25 & 0 & 18.770 \\ 0 & -24.754 & 8.639 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4.081 & 0 \\ -1171.25 & 0 & 18.770 \\ 0 & -24.754 & 8.639 \end{pmatrix}$
M_e	$\begin{pmatrix} 0 & 2.584 & 0 \\ -1169.76 & 0 & 62.021 \\ 0 & -68.005 & 8.639 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1169.76 & 0 \\ 2.584 & 0 & -68.005 \\ 0 & 62.021 & 8.639 \end{pmatrix}$
θ_{ul12}	0.077	0.077
θ_{ul23}	4.673	4.673
θ_{ul31}	0.000	0.000
θ_{ur12}	3.097	3.097
θ_{ur23}	6.283	6.283
θ_{ur31}	3.144	3.144
θ_{dl12}	0.146	0.146
θ_{dl23}	1.571	1.571
θ_{dl31}	0.000	0.000
θ_{dr12}	2.813	2.813
θ_{dr23}	3.141	3.141
θ_{dr31}	4.696	4.696
θ_{el12}	0.037	3.015
θ_{el23}	1.570	3.141
θ_{el31}	0.000	4.659
θ_{er12}	3.015	0.037
θ_{er23}	3.141	1.570
θ_{er31}	4.659	0.000

Tabelle 5.3: Lösungstyp III bei M_{GUT} .

	Typ Ia @ M_Z	Typ Ib @ M_Z
M_u	$\begin{pmatrix} 4.110 \cdot 10^{-6} & -51.760 & 4.612 \cdot 10^{-3} \\ 236.163 & 25.463 & -179444.5 \\ 8.200 & 674.181 & 16993.56 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.110 \cdot 10^{-6} & -51.760 & 4.612 \cdot 10^{-3} \\ 236.163 & 25.463 & -179444.5 \\ 8.200 & 674.181 & 16993.56 \end{pmatrix}$
M_d	$\begin{pmatrix} 2.367 \cdot 10^{-7} & 14.332 & -8.311 \cdot 10^{-4} \\ -225.575 & 0.231 & -3449.682 \\ -0.181 & 87.567 & 464.624 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.367 \cdot 10^{-7} & 14.332 & -8.311 \cdot 10^{-4} \\ -225.575 & 0.231 & -3449.682 \\ -0.181 & 87.567 & 464.624 \end{pmatrix}$
M_e	$\begin{pmatrix} 2.016 \cdot 10^{-8} & -94.510 & 1.305 \cdot 10^{-3} \\ 3.932 & 2.394 \cdot 10^{-2} & -1726.359 \\ 2.366 \cdot 10^{-3} & 39.954 & 232.158 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.016 \cdot 10^{-8} & 3.932 & 2.366 \cdot 10^{-3} \\ -94.510 & 2.394 \cdot 10^{-2} & 39.954 \\ 1.305 \cdot 10^{-3} & -1726.359 & 232.158 \end{pmatrix}$
θ_{ul12}	3.218	3.218
θ_{ul23}	1.665	1.665
θ_{ul31}	0.000	0.000
θ_{ur12}	3.097	3.097
θ_{ur23}	3.142	3.142
θ_{ur31}	0.001	0.001
θ_{dl12}	0.147	0.147
θ_{dl23}	1.704	1.704
θ_{dl31}	3.142	3.142
θ_{dr12}	2.814	2.814
θ_{dr23}	0.003	0.003
θ_{dr31}	0.064	0.064
θ_{el12}	4.316	3.140
θ_{el23}	1.705	3.145
θ_{el31}	0.000	0.002
θ_{er12}	3.140	4.316
θ_{er23}	3.145	1.705
θ_{er31}	0.002	0.000

Tabelle 5.4: Lösungstyp I bei M_Z .

	Typ IIa @ M_Z	Typ IIb @ M_Z
M_u	$\begin{pmatrix} 3.139 \cdot 10^{-6} & -52.103 & -8.280 \cdot 10^{-3} \\ 144.526 & 45.074 & 177554.9 \\ -5.418 & -675.895 & 31039.34 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.139 \cdot 10^{-6} & -52.103 & -8.280 \cdot 10^{-3} \\ 144.526 & 45.074 & 177554.9 \\ -5.418 & -675.895 & 31039.34 \end{pmatrix}$
M_d	$\begin{pmatrix} 5.974 \cdot 10^{-7} & 14.286 & 1.209 \cdot 10^{-3} \\ -225.271 & 0.340 & 3449.485 \\ 0.222 & -87.531 & 466.068 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.974 \cdot 10^{-7} & 14.286 & 1.209 \cdot 10^{-3} \\ -225.271 & 0.340 & 3449.485 \\ 0.222 & -87.531 & 466.068 \end{pmatrix}$
M_e	$\begin{pmatrix} 2.015 \cdot 10^{-8} & -94.515 & -1.308 \cdot 10^{-3} \\ 3.920 & 2.400 \cdot 10^{-2} & 1726.270 \\ -2.366 \cdot 10^{-3} & -39.945 & 232.881 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.015 \cdot 10^{-8} & 3.920 & -2.366 \cdot 10^{-3} \\ -94.515 & 2.400 \cdot 10^{-2} & -39.945 \\ -1.308 \cdot 10^{-3} & 1726.270 & 232.881 \end{pmatrix}$
θ_{ul12}	0.077	0.077
θ_{ul23}	4.539	4.539
θ_{ul31}	0.000	0.000
θ_{ur12}	3.097	3.097
θ_{ur23}	6.283	6.283
θ_{ur31}	3.142	3.142
θ_{dl12}	2.996	2.996
θ_{dl23}	4.579	4.579
θ_{dl31}	0.000	0.000
θ_{dr12}	3.471	3.471
θ_{dr23}	3.138	3.138
θ_{dr31}	0.064	0.064
θ_{el12}	1.967	0.002
θ_{el23}	1.437	3.139
θ_{el31}	0.000	3.139
θ_{er12}	0.002	1.967
θ_{er23}	3.139	1.437
θ_{er31}	3.139	0.000

Tabelle 5.5: Lösungstyp II bei M_Z .

	Typ IIIa @ M_Z	Typ IIIb @ M_Z
M_u	$\begin{pmatrix} 5.077 \cdot 10^{-6} & -51.898 & -1.798 \cdot 10^{-3} \\ 491.755 & 9.984 & 180412.3 \\ -10.914 & -673.251 & 7081.854 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.077 \cdot 10^{-6} & -51.898 & -1.798 \cdot 10^{-3} \\ 491.755 & 9.984 & 180412.3 \\ -10.914 & -673.251 & 7081.854 \end{pmatrix}$
M_d	$\begin{pmatrix} -3.602 \cdot 10^{-7} & 14.280 & 2.090 \cdot 10^{-4} \\ -4053.639 & 1.064 \cdot 10^{-3} & 57.192 \\ -7.124 \cdot 10^{-3} & -86.632 & 25.888 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3.602 \cdot 10^{-7} & 14.280 & 2.090 \cdot 10^{-4} \\ -4053.639 & 1.064 \cdot 10^{-3} & 57.192 \\ -7.124 \cdot 10^{-3} & -86.632 & 25.888 \end{pmatrix}$
M_e	$\begin{pmatrix} 2.726 \cdot 10^{-9} & 3.852 & 7.523 \cdot 10^{-6} \\ -1736.000 & 1.793 \cdot 10^{-4} & 92.043 \\ 3.085 \cdot 10^{-3} & -101.382 & 12.879 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.726 \cdot 10^{-9} & -1736.000 & 3.085 \cdot 10^{-3} \\ 3.852 & 1.793 \cdot 10^{-4} & -101.382 \\ 7.523 \cdot 10^{-6} & 92.043 & 12.879 \end{pmatrix}$
θ_{ul12}	0.077	0.077
θ_{ul23}	4.673	4.673
θ_{ul31}	0.000	0.000
θ_{ur12}	3.097	3.097
θ_{ur23}	6.283	6.283
θ_{ur31}	3.144	3.144
θ_{dl12}	0.150	0.150
θ_{dl23}	1.571	1.571
θ_{dl31}	0.000	0.000
θ_{dr12}	2.858	2.858
θ_{dr23}	3.141	3.141
θ_{dr31}	4.698	4.698
θ_{el12}	0.037	3.015
θ_{el23}	1.570	3.141
θ_{el31}	0.000	4.659
θ_{er12}	3.015	0.037
θ_{er23}	3.141	1.570
θ_{er31}	4.659	0.000

Tabelle 5.6: Lösungstyp III bei M_Z .

	$m_u(M_Z)/\text{MeV}$	$m_c(M_Z)/\text{MeV}$	$m_t(M_Z)/\text{GeV}$
nach [13]	$2.33^{+0.42}_{-0.45}$	677^{+56}_{-61}	181 ± 13
Typ I	2.33	676.2	180.2
Typ II	2.33	676.2	180.2
Typ III	2.32	675.8	180.6
	$m_d(M_Z)/\text{MeV}$	$m_s(M_Z)/\text{MeV}$	$m_b(M_Z)/\text{GeV}$
nach [13]	$4.69^{+0.60}_{-0.66}$	$93.4^{+11.8}_{-13.0}$	3.00 ± 0.11
Typ I	4.66	92.9	$3.49 (\Delta_b = 1.16)$
Typ II	4.66	92.9	$3.49 (\Delta_b = 1.16)$
Typ III	4.04	91.4	$4.05 (\Delta_b = 1.35)$
	$m_e(M_Z)/\text{keV}$	$m_\mu(M_Z)/\text{MeV}$	$m_\tau(M_Z)/\text{MeV}$
nach [13]	486.84727 ± 0.00014	102.75138 ± 0.00033	1746.7 ± 0.3
Typ I	485.504	102.471425	1741.9
Typ II	485.516	102.471056	1741.9
Typ III	484.462	102.265514	1738.4

Tabelle 5.7: Diagonalelemente der drei Lösungstypen bei M_Z .

Typ I @ M_{GUT}	Typ I @ M_Z
$\begin{pmatrix} 0.975158 & 0.221496 & 0.002570 \\ 0.221427 & 0.974401 & 0.038907 \\ 0.006114 & 0.038510 & 0.999240 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.975158 & 0.221496 & 0.002570 \\ 0.221427 & 0.974401 & 0.038907 \\ 0.006114 & 0.038510 & 0.999240 \end{pmatrix}$
Typ II @ M_{GUT}	Typ II @ M_Z
$\begin{pmatrix} 0.975337 & 0.220701 & 0.002999 \\ 0.220649 & 0.974578 & 0.038875 \\ 0.005657 & 0.038578 & 0.999240 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.975337 & 0.220698 & 0.003076 \\ 0.220643 & 0.974539 & 0.039871 \\ 0.005802 & 0.039566 & 0.999200 \end{pmatrix}$
Typ III @ M_{GUT}	Typ III @ M_Z
$\begin{pmatrix} 0.975247 & 0.221097 & 0.003045 \\ 0.221043 & 0.974465 & 0.039465 \\ 0.005759 & 0.039161 & 0.999216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.974355 & 0.224996 & 0.003045 \\ 0.224939 & 0.973573 & 0.039465 \\ 0.005915 & 0.039138 & 0.999216 \end{pmatrix}$

Tabelle 5.8: Beträge der CKM-Matrixelemente bei M_{GUT} und M_Z .

5.3 Neutrino-Lösungen

Für die gefundenen Lösungen wird die Dirac-Massenmatrix der Neutrinos berechnet:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{12} &= x_1 v_u^{(1)} - 3 y_1 \omega_u^{(1)} + z_1 \tilde{v}_u^{(1)} \\ &= (\mathbf{M}_u)_{12} - 4 y_1 \omega_u^{(1)} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{21} &= x_1 v_u^{(1)} - 3 y_1 \omega_u^{(1)} - z_1 \tilde{v}_u^{(1)} \\ &= (\mathbf{M}_u)_{21} - 4 y_1 \omega_u^{(1)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{23} &= x_2 v_u^{(2)} + z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} - 3 \tilde{\omega}_u^{(2)}) \\ &= (\mathbf{M}_u)_{23} - 4 z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{32} &= x_2 v_u^{(2)} - z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} - 3 \tilde{\omega}_u^{(2)}) \\ &= (\mathbf{M}_u)_{32} + 4 z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})})_{33} &= \tilde{x}_1 v_u^{(1)} - 3 \tilde{y}_1 \omega_u^{(1)} \\ &= (\mathbf{M}_u)_{33} - 4 \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_u^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Hierbei tritt neben \tilde{y}_1/y_1 auch $4z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ als vorzugebender Parameter auf. Die Majorana-Neutrinomatrix hat die Form

$$\mathbf{M}_{\nu R}^{(\text{Maj})} = M_R \begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{y}_1 \end{pmatrix} = y_1 M_R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{y}_1/y_1 \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

so dass diese durch Vorgabe von \tilde{y}_1/y_1 bis auf einen Vorfaktor eindeutig festgelegt ist. Aufgrund der Massenhierarchie erscheint der Wertebereich $1 \lesssim |\tilde{y}_1/y_1| \lesssim 1000$ plausibel.

An die LMA-Neutrinolösungen werden die folgenden Bedingungen gestellt, die simultan erfüllt sein müssen:

$$0.27 < \tan^2 \theta_{12} < 0.77 \quad (5.34)$$

$$0.4 < \tan^2 \theta_{23} < 3.0 \quad (5.35)$$

$$\sin^2 \theta_{13} < 0.06 \quad (5.36)$$

$$13 < \frac{\Delta m_{23}^2}{\Delta m_{12}^2} < 1000. \quad (5.37)$$

Für die SMA-Region wurden folgende Parameterbereiche zugrunde gelegt:

$$8 \cdot 10^{-4} < \sin^2 2\theta_{12} < 8 \cdot 10^{-3} \quad (5.38)$$

$$0.4 < \tan^2 \theta_{23} < 3.0 \quad (5.39)$$

$$\sin^2 \theta_{13} < 0.06 \quad (5.40)$$

$$33 < \frac{\Delta m_{23}^2}{\Delta m_{12}^2} < 2000. \quad (5.41)$$

Lösung	S-MSW #1	S-MSW #2	S-MSW #3	S-MSW #4
Typ	IIb	IIIa	Ib	IIb
\tilde{y}_1/y_1	-342	60	402	803
$4z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}/\text{MeV}$	6000	126000	-116000	156000

Tabelle 5.9: Parameter ausgewählter MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel.

Lösung	LMA #1	LMA #2	LMA #3	LMA #4	LMA #5	LMA #6
Typ	Ib	Ib	Ib	IIb	IIb	IIb
\tilde{y}_1/y_1	-8	-7	-3	-3	-3	-2
$4z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}/\text{MeV}$	-15000	14000	-14000	11000	45000	25000

Tabelle 5.10: Parameter exemplarisch ausgewählter LMA-Lösungen.

Um Lösungen mit diesen Eigenschaften zu finden, wurden die freien Modellparameter $\frac{\tilde{y}_1}{y_1}$ und $4z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ folgendermaßen variiert:

- $\frac{\tilde{y}_1}{y_1}$ wurde von -1000 bis $+1000$ in Einer-Schritten vergrößert.
- für jeden dieser Werte wurde mit $4z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}$ der Bereich von -500000 bis $+500000$ in Tausender-Schritten durchlaufen.

Diejenigen Parameterregionen, die Neutrino-Lösungen liefern, welche die Bedingungen (5.34) – (5.37) bzw. (5.38) – (5.41) erfüllen, sind in den Abb. 5.1 und 5.2 dargestellt. Obwohl das Modell eine Vielzahl von MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel besitzt (vgl. Abb. 5.2), konnte unter diesen keine einzige gefunden werden, die die Mischungsmatrix (4.12) reproduziert. *Somit enthält das Modell keine SMA-Lösungen*, was insofern ganz erfreulich ist, da diese experimentell ohnehin mittlerweile deutlich an Signifikanz verloren haben. Die Parameter und Neutrinomassen exemplarisch ausgewählter MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel sind in den Tabellen 5.9 und 5.14 zusammengestellt. Die zugehörigen Neutrino-Massenmatrizen sind in Tab. 5.13 wiedergegeben.

Aus Abb. 5.1 geht hervor, dass das Massenmodell nur verhältnismäßig wenige LMA-Lösungen liefert und somit *in diesem Bereich eine sehr hohe Vorhersagekraft besitzt*. Die zugehörigen PMNS-Matrizen liegen exakt in dem durch Gl. (4.8) vorgegebenen Bereich (vgl. Anhang F). Im Rahmen dieser Arbeit wurden sechs der LMA-Lösungen exemplarisch ausgewählt und untersucht. Tabelle 5.10 zeigt die zugehörigen Parameterwerte, die Neutrino-Massen und -Massenmatrizen sind in den Tabellen 5.11 und 5.12 angegeben.

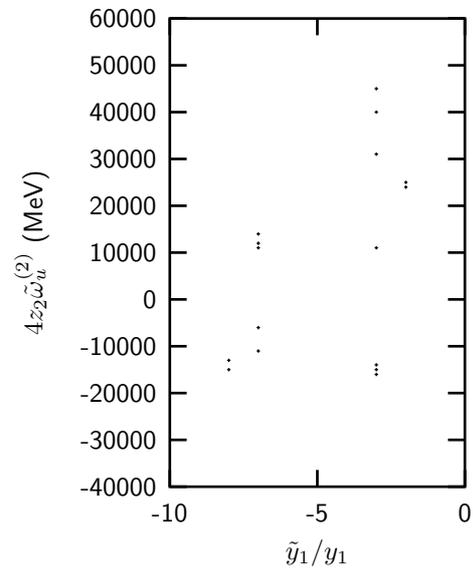


Abbildung 5.1: LMA-Lösungen

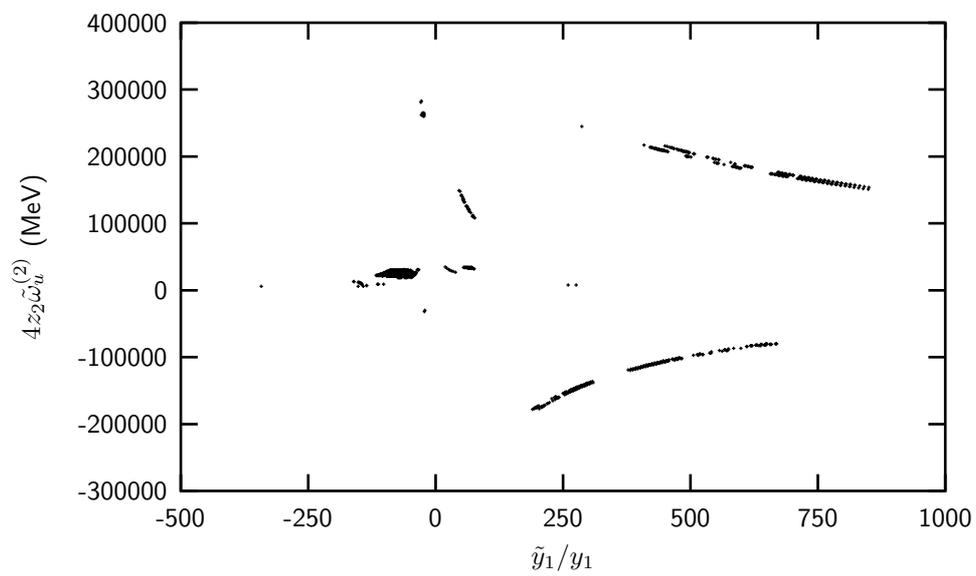


Abbildung 5.2: MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel

	LMA #1 (Typ Ib)	LMA #2 (Typ Ib)	LMA #3 (Typ Ib)
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{12}/\text{MeV}$	17486.3	26953.0	-23225.3
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{21}/\text{MeV}$	17653.5	27120.2	-23058.1
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{23}/\text{MeV}$	-113425.0	-142425.0	-114425.0
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{32}/\text{MeV}$	-14697.8	14302.2	-13697.8
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{33}/\text{MeV}$	-127913.0	-176671.0	81768.6
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{12}/10^{16}\text{MeV}$	1 · 5.2	1 · 9.1	1 · 7.5
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{21}/10^{16}\text{MeV}$	1 · 5.2	1 · 9.1	1 · 7.5
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{33}/10^{16}\text{MeV}$	-8 · 5.2	-7 · 9.1	-3 · 7.5
	LMA #4 (Typ IIb)	LMA #5 (Typ IIb)	LMA #6 (Typ IIb)
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{12}/\text{MeV}$	-41319.5	-41319.5	-28273.8
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{21}/\text{MeV}$	-41217.8	-41217.8	-28172.1
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{23}/\text{MeV}$	116073.0	82073.0	102073.0
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{32}/\text{MeV}$	10694.6	44694.6	24694.6
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{33}/\text{MeV}$	146103.0	146103.0	78715.4
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{12}/10^{16}\text{MeV}$	1 · 16	1 · 18	1 · 12
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{21}/10^{16}\text{MeV}$	1 · 16	1 · 18	1 · 12
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{33}/10^{16}\text{MeV}$	-3 · 16	-3 · 18	-2 · 12

Tabelle 5.11: Elemente der Dirac- und Majorana-Neutrinomatrizen für die sechs LMA-Lösungen.

Neutrino Lösung	LMA #1	LMA #2	LMA #3	LMA #4	LMA #5	LMA #6
$M_R/10^{13}\text{GeV}$	5.2	9.1	7.5	16	18	12
$m_1/10^{-3}\text{eV}$	1.903	3.751	1.902	5.244	3.280	1.504
$m_2/10^{-3}\text{eV}$	5.962	6.760	5.327	7.827	10.824	6.208
$m_3/10^{-2}\text{eV}$	5.921	6.045	7.248	5.953	4.835	5.909
$\Delta m_{21}^2/10^{-5}\text{eV}^2$	3.192	3.163	2.476	3.376	10.640	3.628
$\Delta m_{32}^2/10^{-3}\text{eV}^2$	3.470	3.608	5.225	3.482	2.221	3.453
$\Delta m_{32}^2/\Delta m_{21}^2$	108.697	114.082	211.025	103.142	20.871	95.173

Tabelle 5.12: Neutrinomassen ausgewählter LMA-Lösungen.

	S-MSW #1 (Typ IIb)	S-MSW #2 (Typ IIIa)	S-MSW #3 (Typ Ib)	S-MSW #4 (Typ IIb)
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{12}/\text{MeV}$	242.224	-360.587	-145.660	-133.923
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{21}/\text{MeV}$	343.877	7.879	21.576	-32.269
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{23}/\text{MeV}$	121073.000	2900.000	-12425.000	-28927.000
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{32}/\text{MeV}$	5694.640	125699.000	-115698.000	155695.000
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{33}/\text{MeV}$	-68584.000	-15183.900	-37101.300	-66641.000
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{12}/10^{13}\text{MeV}$	1 · 57	1 · 5.3	1 · 5.4	1 · 8.2
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{21}/10^{13}\text{MeV}$	1 · 57	1 · 5.3	1 · 5.4	1 · 8.2
$(\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}})_{33}/10^{13}\text{MeV}$	-342 · 57	60 · 5.3	402 · 5.4	803 · 8.2

Tabelle 5.13: Elemente der Dirac- und Majorana-Neutrinomatrizen für exemplarisch ausgewählte MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel.

Neutrino Lösung	S-MSW #1	S-MSW #2	S-MSW #3	S-MSW #4
$M_R/10^{10}\text{GeV}$	57	5.3	5.4	8.2
$m_1/10^{-7}\text{eV}$	9.857	9.593	9.615	8.746
$m_2/10^{-3}\text{eV}$	1.735	1.799	1.855	1.576
$m_3/10^{-2}\text{eV}$	5.957	5.663	5.669	6.392
$\Delta m_{21}^2/10^{-6}\text{eV}^2$	3.010	3.236	3.441	2.484
$\Delta m_{32}^2/10^{-3}\text{eV}^2$	3.546	3.204	3.210	4.083
$\Delta m_{32}^2/\Delta m_{21}^2$	1177.844	989.902	932.953	1643.982

Tabelle 5.14: Neutrinomassen ausgewählter MSW-Lösungen mit kleinem Mischungswinkel.

5.4 CP-Verletzung

CP-Verletzung wird in der Natur in K^0 - und B^0 -Zerfällen beobachtet und ist eine Voraussetzung, um die Baryonasymmetrie im Universum zu erklären. Ein realistisches Massenmodell muss daher in der Lage sein, diese Phänomene qualitativ richtig zu beschreiben. Zur Realisierung der CP-Verletzung im Rahmen des in dieser Arbeit entwickelten Massenmodells werden zwei verschiedene Ansätze verfolgt:

1. Die unmittelbare Implementierung einer Phase ϕ in die d -Massenmatrix.
2. Ein Higgs-Vakuumerwartungswert nimmt eine kleine Phase Ω an.

Beiden Zugängen ist gemeinsam, dass sie mit Hilfe einer einzigen Phase den Jarlskog-Parameter in der richtigen Größenordnung reproduzieren ohne die Eigenschaften der gefundenen Lösungen maßgeblich zu ändern. Dabei stellt die Jarlskog-Invariante

$$J = \pm \text{Im} (V_{i\alpha} V_{j\beta} V_{i\beta}^* V_{j\alpha}^*) ; \quad i \neq j, \alpha \neq \beta$$

ein Maß für die Stärke der CP-Verletzung in der CKM-Matrix \mathbf{V} dar [104]. Der zweite Zugang zeichnet sich gegenüber dem ersten dadurch aus, dass er theoretisch fundierter ist und die unterschiedlichen Typen der CP-Verletzung auf eine gemeinsame Basis zurückführt.

5.4.1 Direkte Implementierung einer Phase

Der einfachste Ansatz, eine Phase in das Massenmodell einzubauen, besteht in der Komplexifizierung eines Matrixelementes. Um eine geeignete Platzierung zu finden, werden folgende Kriterien zugrunde gelegt, wobei davon ausgegangen wird, dass die Phase in der d -Matrix auftritt:

1. Die induzierten Änderungen für die Neutrino-Lösungen sollen möglichst klein sein.
2. Der Jarlskog-Parameter J muss in der Größenordnung 10^{-5} liegen.

Numerische Untersuchungen zeigten, dass

$$(\mathbf{M}_d)_{32} \rightarrow e^{i\phi} (\mathbf{M}_d)_{32} .$$

die gestellten Forderungen mit $\phi = 0.3$ erfüllt. Hierbei ist zu beachten, dass wegen der Relation

$$(\mathbf{M}_e)_{32} = e^{i\phi} (\mathbf{M}_d)_{32} + 4 z_2 \tilde{\omega}_d^{(2)}$$

auch \mathbf{M}_e eine Phase erhält. Alle anderen Matrizen des Modells — speziell $\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}}$ und $\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}}$ — bleiben reell, so dass die Neutrino-Lösungen lediglich durch die linkshändigen \mathbf{M}_e -Mischungen beeinflusst werden. Das dies nicht für eine beliebig in \mathbf{M}_d platzierte Phase gilt, verdeutlicht die Beziehung

$$y_1 \omega_u^{(1)} = \left[\frac{1}{2} \frac{2(\mathbf{M}_d)_{33}}{(\mathbf{M}_d)_{12} + (\mathbf{M}_d)_{21}} \left((\mathbf{M}_u)_{12} + (\mathbf{M}_u)_{21} \right) - (\mathbf{M}_u)_{33} \right] / \left[\frac{2(\mathbf{M}_d)_{33}}{(\mathbf{M}_d)_{12} + (\mathbf{M}_d)_{21}} - \frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right] .$$

Die expliziten Ergebnisse der LMA-Neutrinolösungen bei M_Z für $\phi = 0.3$ können dem Anhang F entnommen werden.

5.4.2 Durch komplexen Vakuumerwartungswert induzierte CP-Verletzung

Vom theoretischen Standpunkt ist der Gedanke besonders attraktiv, dass eine einzige Phase für alle Arten der CP-Verletzung verantwortlich sein könnte. Eine geeignete Darstellung, um eine derartige Phase in das Modell zu integrieren, bietet die Φ_{126} , da dies die einzige superschwere Higgs-Darstellung ist. Weiterhin ist es recht einfach möglich, einer einzigen Darstellung einen komplexen VEV durch ein geeignetes Potenzial zu geben.

Zunächst tritt auf diese Weise in der Majorana-Neutrinomatrix eine Phase Ω auf:

$$\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}} = e^{i\Omega} M_R \begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{y}_1 \end{pmatrix} .$$

Darüber hinaus erhält der leichte VEV $\omega_u^{(1)}$ die gleiche Phase

$$\omega_u^{(1)} \rightarrow e^{i\Omega} \omega_u^{(1)} ,$$

da dieser proportional zu $\mathbf{M}_{R_{\text{maj}}}$ ist. Hierdurch entstehen Phasen in den \mathbf{M}_u - und $\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}}$ -Matrizen

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_u)_{12} &= x_1 v_u^{(1)} + y_1 \omega_u^{(1)} e^{i\Omega} + z_1 \tilde{v}_u^{(1)} \\ (\mathbf{M}_u)_{21} &= x_1 v_u^{(1)} + y_1 \omega_u^{(1)} e^{i\Omega} - z_1 \tilde{v}_u^{(1)} \\ (\mathbf{M}_u)_{23} &= x_2 v_u^{(2)} + z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)}) \\ (\mathbf{M}_u)_{32} &= x_2 v_u^{(2)} - z_2 (\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)}) \\ (\mathbf{M}_u)_{33} &= \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_1} \right) x_1 v_u^{(1)} + \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_u^{(1)} e^{i\Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})_{12} &= (\mathbf{M}_u)_{12} - 4 y_1 \omega_u^{(1)} e^{i\Omega} \\ (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})_{21} &= (\mathbf{M}_u)_{21} - 4 y_1 \omega_u^{(1)} e^{i\Omega} \\ (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})_{23} &= (\mathbf{M}_u)_{23} - 4 z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)} \\ (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})_{32} &= (\mathbf{M}_u)_{32} + 4 z_2 \tilde{\omega}_u^{(2)} \\ (\mathbf{M}_{\nu}^{(\text{Dir})})_{33} &= (\mathbf{M}_u)_{33} - 4 \left(\frac{\tilde{y}_1}{y_1} \right) y_1 \omega_u^{(1)} e^{i\Omega} , \end{aligned}$$

durch die wiederum die CP-verletzende Phase in der CKM-Matrix \mathbf{V} hervorgerufen wird:

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{D}_L .$$

Andererseits werden durch den See-Saw-Mechanismus in der Massenmatrix der leichten Neutrinos \mathbf{M}_ν „leichte“ und „schwere“ Phasen generiert, die die vorhergesagte CP-Verletzung im leptonen Sektor induzieren.

Im Rahmen der numerischen Untersuchungen dieses Szenarios zeigte sich, dass die Phase Ω nur einen sehr kleinen Wert annehmen muss, um die richtige Größenordnung

der Jarlskog-Invarianten zu reproduzieren. Dies hängt mit dem großen Wert von $y_1\omega_u^{(1)}$ in den Neutrino-Lösungen zusammen (vgl. Tab. 5.15). Tab. 5.16 enthält die Matrixelemente von \mathbf{M}_u und $\mathbf{M}_\nu^{(\text{Dir})}$ für $\Omega = 0.003$. Bemerkenswerter Weise werden aufgrund von Ω deutliche Imaginärteile in den Massenmatrizen hervorgerufen, ohne die Realteile sonderlich zu beeinflussen. Hieraus resultiert die Tatsache, dass sich die gefundenen Neutrino-Lösungen trotz der zusätzlichen Phase kaum „verbiegen“, also weiterhin Lösungen mit nahezu den ursprünglichen Eigenschaften repräsentieren. Im Hinblick auf die zugrunde liegenden nichtlinearen Gleichungen ist dies ein absolut nicht-triviales Resultat.

Die Ergebnisse der Berechnungen für $\Omega = 0.003$ an der Skala M_Z sind in Anhang F dargestellt.

	LMA #1 (Typ Ib)	LMA #2 (Typ Ib)	LMA #3 (Typ Ib)
\tilde{y}_1/y_1	-8	-7	-3
$4z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}/\text{MeV}$	-15000	14000	-14000
$x_1v_d^{(1)}/\text{MeV}$	-30.313	-30.313	-30.313
$z_1\tilde{v}_d^{(1)}/\text{MeV}$	34.038	34.038	34.038
$4z_1\tilde{\omega}_d^{(1)}/\text{MeV}$	1.442	1.442	1.442
$x_2v_d^{(2)}/\text{MeV}$	-567.095	-567.095	-567.095
$z_2\tilde{v}_d^{(2)}/\text{MeV}$	-295.595	-295.595	-295.595
$4z_2\tilde{\omega}_d^{(2)}/\text{MeV}$	-1185.920	-1185.920	-1185.920
\tilde{x}_1/x_1	-5.150	-5.150	-5.150
$z_1\tilde{v}_u^{(1)}/\text{MeV}$	-83.619	-83.619	-83.619
$x_2v_u^{(2)}/\text{MeV}$	-64061.400	-64061.400	-64061.400
$z_2(\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)})/\text{MeV}$	-64363.600	-64363.600	-64363.600
$x_1v_u^{(1)}/\text{MeV}$	4437.860	6804.540	-5740.040
$y_1\omega_u^{(1)}/\text{MeV}$	-4377.360	-6744.030	5800.550
	LMA #4 (Typ IIb)	LMA #5 (Typ IIb)	LMA #6 (Typ IIb)
\tilde{y}_1/y_1	-3	-3	-2
$4z_2\tilde{\omega}_u^{(2)}/\text{MeV}$	11000	45000	25000
$x_1v_d^{(1)}/\text{MeV}$	-30.318	-30.318	-30.318
$z_1\tilde{v}_d^{(1)}/\text{MeV}$	34.033	34.033	34.033
$4z_1\tilde{\omega}_d^{(1)}/\text{MeV}$	1.438	1.438	1.438
$x_2v_d^{(2)}/\text{MeV}$	567.068	567.068	567.068
$z_2\tilde{v}_d^{(2)}/\text{MeV}$	295.579	295.579	295.579
$4z_2\tilde{\omega}_d^{(2)}/\text{MeV}$	1185.850	1185.850	1185.850
\tilde{x}_1/x_1	-5.166	-5.166	-5.166
$z_1\tilde{v}_u^{(1)}/\text{MeV}$	-50.827	-50.827	-50.827
$x_2v_u^{(2)}/\text{MeV}$	63383.800	63383.800	63383.800
$z_2(\tilde{v}_u^{(2)} + \tilde{\omega}_u^{(2)})/\text{MeV}$	63689.200	63689.200	63689.200
$x_1v_u^{(1)}/\text{MeV}$	-10296.500	-10296.500	-7035.070
$y_1\omega_u^{(1)}/\text{MeV}$	10324.100	10324.100	7062.630

Tabelle 5.15: Modellparameter der LMA-Lösungen.

	LMA #1	LMA #2	LMA #3
$(\mathbf{M}_u)_{12}/\text{MeV}$	$-23.0988 - 13.1321i$	$-23.0782 - 20.2321i$	$-23.1346 + 17.4016i$
$(\mathbf{M}_u)_{21}/\text{MeV}$	$144.138 - 13.1321i$	$144.159 - 20.2321i$	$144.102 + 17.4016i$
$(\mathbf{M}_u)_{23}/\text{MeV}$	-128425	-128425	-128425
$(\mathbf{M}_u)_{32}/\text{MeV}$	302.2	302.2	302.2
$(\mathbf{M}_u)_{33}/\text{MeV}$	$12161.9 + 105.056i$	$12161.8 + 141.624i$	$12162 - 52.2049i$
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{12}/\text{MeV}$	$17486.3 + 39.3962i$	$26952.9 + 60.6962i$	$-23225.2 - 52.2049i$
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{21}/\text{MeV}$	$17653.5 + 39.3962i$	$27120.2 + 60.6962i$	$-23058 - 52.2049i$
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{23}/\text{MeV}$	-113425	-142425	-114425
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{32}/\text{MeV}$	-14697.8	14302.2	-13697.8
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{33}/\text{MeV}$	$-127913 - 315.169i$	$-176670 - 424.873i$	$81768.3 + 156.615i$
	LMA #4	LMA #5	LMA #6
$(\mathbf{M}_u)_{12}/\text{MeV}$	$-23.2731 + 30.9723i$	$-23.2731 + 30.9723i$	$-23.2984 + 21.1879i$
$(\mathbf{M}_u)_{21}/\text{MeV}$	$78.3801 + 30.9723i$	$78.3801 + 30.9723i$	$78.3548 + 21.1879i$
$(\mathbf{M}_u)_{23}/\text{MeV}$	127073	127073	127073
$(\mathbf{M}_u)_{32}/\text{MeV}$	-305.4	-305.4	-305.4
$(\mathbf{M}_u)_{33}/\text{MeV}$	$22214.4 - 92.9168i$	$22214.4 - 92.9168i$	$22214.5 - 42.3757i$
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{12}/\text{MeV}$	$-41319.5 - 92.9168i$	$-41319.5 - 92.9168i$	$-28273.7 - 63.5636i$
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{21}/\text{MeV}$	$-41217.8 - 92.9168i$	$-41217.8 - 92.9168i$	$-28172 - 63.5636i$
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{23}/\text{MeV}$	116073	82073	102073
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{32}/\text{MeV}$	10694.6	44694.6	24694.6
$(\mathbf{M}_{\nu_{\text{dir}}})_{33}/\text{MeV}$	$146103 + 278.75i$	$146103 + 278.75i$	$78715.2 + 127.127i$

Tabelle 5.16: Elemente der u - und Dirac-Neutrino-Matrix für $\Omega = 0.003$.

Kapitel 6

Zerfallsraten der Nukleonen

Die Instabilität der Nukleonen ist eine zentrale Vorhersage von GUTs, die deutlich über das SM hinausgeht. Aus diesem Grund sollen in diesem Kapitel die partiellen und totalen Zerfallsraten für das Proton und das gebundene Neutron bestimmt werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Zerfallsprozesse ausschließlich durch $d = 6$ -Operatoren vermittelt werden, d.h. Dimension-4- und Dimension-5-Operatoren sind ausgeschlossen. Für $d = 4$ -Operatoren wird dies durch die R -Parität sichergestellt, während die Unterdrückung der higgsinovermittelten Zerfälle analog zu den in [62, 63, 64] diskutierten Mechanismen erfolgen soll. Damit lassen sich die Zerfallsraten mit den in [34] angewandten Methoden berechnen, die in den folgenden Abschnitten kurz zusammengefasst werden. Da in dieser Arbeit, wie auch in [34], die gleichen Zerfallsprozesse zugrunde gelegt werden, ist ein unmittelbarer Vergleich zwischen beiden $SO(10)$ -Modellen möglich. Insbesondere kann hierdurch untersucht werden, inwieweit sich die Zerfallskanäle in der SUSY-Theorie von denen des nicht-supersymmetrischen Massenmodells unterscheiden.

Die Berechnung der Zerfallsraten basiert auf zwei wesentlichen Komponenten:

- **Der vollständigen effektiven Lagrangedichte \mathcal{L}_{eff}** , der durch Eichbosonenaustausch vermittelten Nukleonzefälle in der Basis der Masseneigenzustände. Diese wird auf der Basis von effektiven Vier-Fermion-Operatoren hergeleitet, in der gleichen Weise, wie die Lagrangedichte der Fermi-Theorie aus dem Lagrangian der elektroschwachen WW resultiert.
- **Den hadronischen Übergangsmatrixelementen** zwischen den Nukleonen und den Zerfallsprodukten. Zur Berechnung dieser Matrixelemente wird das sogenannte „recoil“-Modell [106] zugrunde gelegt.

6.1 Die effektive Lagrangedichte

Ausgangspunkt ist der baryonzahlverletzende Anteil der $SO(10)$ -Lagrangedichte (3.31). Dieser wird auf drei Fermiongenerationen verallgemeinert und die WW-Zustände wer-

den gemäß (1.45) durch Masseneigenzustände ersetzt. Nun können die WWen aufgrund der hohen Masse der $SO(10)$ -Bosonen durch effektive Vier-Fermion-Vertizes approximiert werden und man erhält [34]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}} = & A_1 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{e}_L^+ \gamma_\mu d_L^\alpha) + A_2 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R^\alpha) \\
& + A_3 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{\mu}_L^+ \gamma_\mu d_L^\alpha) + A_4 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{\mu}_R^+ \gamma_\mu d_R^\alpha) \\
& + A_5 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{e}_L^+ \gamma_\mu s_L^\alpha) + A_6 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{e}_R^+ \gamma_\mu s_R^\alpha) \\
& + A_7 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{\mu}_L^+ \gamma_\mu s_L^\alpha) + A_8 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{\mu}_R^+ \gamma_\mu s_R^\alpha) \\
& + A_9 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta) (\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R^\alpha) + A_{10} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta) (\bar{\nu}_{\mu R}^C \gamma_\mu d_R^\alpha) \\
& + A_{11} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta) (\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R^\alpha) + A_{12} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta) (\bar{\nu}_{\mu R}^C \gamma_\mu s_R^\alpha) \\
& + A_{13} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu s_L^\beta) (\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R^\alpha) + A_{14} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu s_L^\beta) (\bar{\nu}_{\mu R}^C \gamma_\mu d_R^\alpha) \\
& + A_{15} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta) (\bar{\nu}_{\tau R}^C \gamma_\mu d_R^\alpha) + A_{16} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu d_L^\beta) (\bar{\nu}_{\tau R}^C \gamma_\mu s_R^\alpha) \\
& + A_{17} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu s_L^\beta) (\bar{\nu}_{\tau R}^C \gamma_\mu d_R^\alpha) \\
& + \text{ (Terme mit zwei } s\text{-Quarks)} \\
& + \text{ (Terme mit } c\text{-, } b\text{- und } t\text{-Quarks)} \\
& + \text{ (Terme mit } \bar{\tau}_{L,R}^+ \text{ und } \bar{\nu}_{e,\mu,\tau L}^C \text{)} \\
& + \text{ (h.c.) .}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Die A_i -Koeffizienten sind in Anhang E.1 angegeben. Sie hängen neben den Eichbosonmassen $M_{X,Y}$ und $M_{X',Y'}$, für welche $M_{X,Y} = M_{X',Y'} \approx M_U$ angenommen wird, von g_U und den Elementen der fermionischen Mischungsmatrizen $\mathbf{U}_{R,L}$, $\mathbf{D}_{R,L}$, $\mathbf{E}_{R,L}$ und \mathbf{N}_L ab. Für das in dieser Arbeit untersuchte Massenmodell sind diese Größen bereits im vorigen Kapitel bestimmt worden, so dass die A_i unmittelbar berechnet werden können. Da keine schweren Neutrinos als Zerfallsprodukte der Nukleonen entstehen, hängen die A_i -Koeffizienten nicht von der Matrix \mathbf{N}_R ab, die die Massenmatrix der schweren Neutrinos diagonalisiert. An dieser Stelle wird deutlich, warum die Verzweigungsraten der Nukleonzfälle maßgeblich durch die Fermionmischungen beeinflusst werden.

6.2 Hadronische Übergangsmatrixelemente

Die in dieser Arbeit verwendeten Übergangsmatrixelemente wurden im Rahmen des sogenannten „recoil“-Modells [106] berechnet. Hierbei liegt die Annahme zugrunde, dass zwei statische Quarks derselben Massen m in ein relativistisches Antilepton und ein Antiquark, welches den Rückstoßimpuls $p = 3/4 m$ aufnimmt, übergehen.

Konkret handelt es sich um ein Quark-Modell mit $SU(6)$ -Spin-Flavor-Symmetrie, wobei die Quarks in drei Flavours u , d und s sowie zwei Spinzuständen \uparrow und \downarrow vorliegen. Alle sechs unabhängigen Quarkzustände haben dieselbe Masse m , was eine einheitliche Masse für die Mesonen zur Folge hat. Die $SU(6)$ -Symmetrie wird später bei der Berechnung der Zerfallsraten durch einen Phasenraumfaktor explizit gebrochen.

Die Vorgehensweise zur Berechnung der Matrixelemente soll kurz am Beispiel von $\langle e^+\pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \rangle$ skizziert werden, für Details sei auf [34] und [106] verwiesen.

1. **Die Übergangswahrscheinlichkeit wird durch die Spin-Eigenzustände des Protons dargestellt.** Dies ist aufgrund der Drehimpuls-Erhaltung möglich:

$$|\langle e^+\pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \rangle|^2 \longrightarrow |\langle e_R^+\pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle|^2 + |\langle e_L^+\pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \downarrow \rangle|^2. \quad (6.2)$$

2. **Sowohl der Zustand $|\pi^0\rangle$ als auch $|p \uparrow\rangle$ bzw. $|p \downarrow\rangle$ werden durch den Flavor-, Spin- und Farbanteil der zugehörigen Wellenfunktion ausgedrückt.** D.h. das Meson wird durch

$$|\pi^0\rangle = 1/\sqrt{12} \delta_{\rho\sigma} |u^{C\rho\uparrow} u^\sigma \downarrow - u^{C\rho\downarrow} u^\sigma \uparrow - d^{C\rho\uparrow} d^\sigma \downarrow + d^{C\rho\downarrow} d^\sigma \uparrow\rangle \quad (6.3)$$

dargestellt. Damit ergeben sich die Matrixelemente der für den Zerfall $p \rightarrow e^+\pi^0$ relevanten Elementarprozesse

$$\begin{aligned} \langle e_R^+ u^{C\uparrow} u \downarrow | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle &, \quad \langle e_R^+ u^{C\downarrow} u \uparrow | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle, \\ \langle e_R^+ d^{C\uparrow} d \downarrow | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle &, \quad \langle e_R^+ d^{C\downarrow} d \uparrow | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle, \end{aligned} \quad (6.4)$$

die mit Hilfe der Zerlegung

$$|p \uparrow\rangle = 1/\sqrt{18} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} |(u^\alpha \uparrow d^\beta \downarrow - u^\alpha \downarrow d^\beta \uparrow) u^\gamma \uparrow\rangle \quad (6.5)$$

weiter umgeformt werden können.

3. **Für die so bestimmten Matrixelemente werden die relevanten Terme aus Gl. (6.1) für \mathcal{L}_{eff} eingesetzt.** Im konkreten Fall sind dies

$$\begin{aligned} A_2 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R^\alpha) & \quad \text{für } \langle e_R^+\pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \uparrow \rangle \quad \text{sowie} \\ A_1 (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{C\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) (\bar{e}_L^+ \gamma_\mu d_L^\alpha) & \quad \text{für } \langle e_L^+\pi^0 | \mathcal{L}_{\text{eff}} | p \downarrow \rangle. \end{aligned}$$

4. **Alle Quark- und Antiquarkfelder werden durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sowie Dirac-Spinoren ausgedrückt.** Ein Quark q beziehungsweise Antiquark q^C hat dann die Form

$$q \sim \hat{a}(q)\mathbf{u} + \hat{b}^\dagger(q)\mathbf{v}, \quad q^C \sim \hat{a}(q)\mathbf{v} + \hat{b}^\dagger(q)\mathbf{u}, \quad (6.6)$$

wobei der Operator $\hat{a}(q)$ ein q -Quark vernichtet und der Operator $\hat{b}^\dagger(q)$ ein q^C -Antiquark erzeugt; die Spinoren \mathbf{u} und \mathbf{v} mit $(\not{p} - m)\mathbf{u} = 0$ bzw. $(\not{p} + m)\mathbf{v} = 0$ sind in [113] definiert. Auf diese Weise erhält man für die Matrixelemente (6.4) umfangreiche Ausdrücke, die sich jedoch erheblich vereinfachen lassen, wenn man die Vernichtungsoperatoren auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ und die Erzeugungsoperatoren auf $\langle 0|$ wirken lässt. Die nichtverschwindenden Spinor-Amplituden sind in Tab. 6.1 zusammengefasst.

Amplitude	$(\bar{\mathbf{u}} \uparrow \gamma_\mu \mathbf{u} \uparrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{u} \uparrow)$	$(\bar{\mathbf{u}} \downarrow \gamma_\mu \mathbf{u} \uparrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{u} \downarrow)$	$(\bar{\mathbf{v}} \downarrow \gamma_\mu \mathbf{v} \downarrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{u} \uparrow)$
Wert	$2/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	$2/\sqrt{5}$
Amplitude	$(\bar{\mathbf{v}} \uparrow \gamma_\mu \mathbf{v} \downarrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{u} \downarrow)$	$(\bar{\mathbf{v}} \uparrow \gamma_\mu \mathbf{u} \uparrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{v} \uparrow)$	$(\bar{\mathbf{v}} \uparrow \gamma_\mu \mathbf{u} \uparrow)(\bar{l}_R^C \gamma^\mu \mathbf{v} \downarrow)$
Wert	$-2/\sqrt{5}$	$-2/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5}$

Tabelle 6.1: Spinor-Amplituden der hadronischen Matrixelemente

Damit können die Matrixelemente (6.4) berechnet werden, aus denen sich unter Berücksichtigung der Spin-Flavor-Struktur (6.3) des Mesons wiederum die Übergangswahrscheinlichkeiten in (6.2) bestimmen lassen. Für die anderen Zerfallskanäle verfährt man analog. Tabelle E.4 fasst die Resultate für die Amplituden der elementaren Zerfallsprozesse zusammen, während Tab. E.5 die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Zerfälle mit physikalischen Endzuständen angibt. Hierbei ist zu beachten, dass die Amplituden der einzelnen Elementarprozesse gemäß (6.1) mit unterschiedlichen A_i -Koeffizienten multipliziert werden.

6.3 Berechnung der Zerfallsraten

Aus der allgemeinen Bestimmungsgleichung für Γ in Zwei-Teilchen-Zerfällen unter Berücksichtigung der spezifischen Annahmen des „recoil“-Modells erhält man die Beziehung

$$\Gamma_j = \frac{1}{16\pi} m_{\text{Nukl}}^2 \rho_j |S|^2 |\mathcal{A}|^2 \left(|\mathcal{A}_L|^2 \sum_l |A_l \mathcal{M}_l|^2 + |\mathcal{A}_R|^2 \sum_r |A_r \mathcal{M}_r|^2 \right), \quad (6.7)$$

welche die partielle Zerfallsrate für den Prozesses Nukleon \rightarrow Meson + Antilepton angibt. Diese Gleichung ist äquivalent zu dem in [107] hergeleiteten Ausdruck für Γ_j und unterscheidet sich von diesem lediglich dadurch, dass der Phasenraumfaktor und die Übergangsmatrixelemente aus [106] verwendet werden, welche direkt proportional zu denen aus [107] sind. Desweiteren beschreibt (6.7) den Einfluss der Eichbosonmassen auf die Koeffizienten A_i in (6.1) sowie die Abhängigkeit bzgl. α_{GUT} . Die verschiedenen Größen in (6.7) sind wie folgt definiert:

- \mathcal{M}_l und \mathcal{M}_r sind die für den jeweiligen Zerfallsprozess relevanten hadronischen Übergangsmatrixelemente, wobei sich die Indizes l und r auf die Chiralität des Antileptons im Endzustand beziehen. Die Summation berücksichtigt die Tatsache, dass für einige Zerfälle zwei Lagrangedichteterme verantwortlich sind. Die Berechnung der Matrixelemente erfolgt nach dem in Abschnitt 6.2 angegebenen Verfahren.
- A_l und A_r sind die zu \mathcal{M}_l beziehungsweise \mathcal{M}_r gehörenden Koeffizienten der effektiven Lagrangedichte. Nach (6.1) sind alle Matrixelemente der elementaren Zerfallsprozesse mit bestimmten A_i -Koeffizienten verknüpft. Tabelle E.5 enthält die Werte für alle unabhängigen $|A_r \mathcal{M}_r|^2$; die nicht explizit angegebenen Größen lassen sich durch Symmetrieüberlegungen aus diesen herleiten.

- \mathcal{A} , \mathcal{A}_L und \mathcal{A}_R sind Faktoren, welche aus der Renormierung der Vier-Fermion-Operatoren in der effektiven Lagrangedichte resultieren. Während die Berechnung der hadronischen Matrixelemente $\mathcal{M}_{r,l}$ für Energieskalen $\mu \approx m_p$ durchgeführt wird, tritt die eigentliche baryonzahlverletzende Wechselwirkung bei Skalen $\mu \gtrsim M_{\text{GUT}}$ auf. Das führt zu Renormierungseffekten, welche auf Strahlungskorrekturen zu den Vier-Fermion-Operatoren durch die SM-Eichbosonen beruhen. Eine formale Analyse dieses Phänomens im Rahmen einer $SU(5)$ -GUT ist in [114] zu finden, während [115] die Renormierungseffekte für den Fall einer $SO(10)$ -Theorie untersucht. Im Rahmen des in dieser Arbeit entwickelten Modells sind die Faktoren durch

$$|\mathcal{A}_L|^2 = 1.155, \quad |\mathcal{A}_R|^2 = 1.071, \quad |\mathcal{A}|^2 = 23.59 \quad (6.8)$$

gegeben [34].

- $|S|^2 = \langle \Psi_{\text{Nucel}}^s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) | \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) | \Psi_{\text{Nucel}}^s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \rangle$ steht für die Wahrscheinlichkeit, zwei Valenzquarks des Nukleons in einem Raumpunkt zu finden. Das ist erforderlich, damit der Elementarprozess $qq \rightarrow q^c l^c$ stattfinden kann, da die zugrundeliegende Wechselwirkung extrem kurzreichweitig ist. Ψ_{Nucel}^s ist der Raumanteil der Wellenfunktion des Nukleons. Der räumliche Anteil der Mesonwellenfunktion wird wie in [107] vernachlässigt; die Spin-, Flavour- und Farbanteile der Wellenfunktionen sind bereits in $\mathcal{M}_{r,l}$ enthalten. Für $|S|^2$ wird, wie in [34], der Wert 0.012 GeV^3 verwendet.
- Der Phasenraumfaktor $\rho_j \equiv (1 - \chi_j^2)(1 - \chi_j^4)$ mit $\chi_j = m_{\text{Meson}}/m_{\text{Nukl}}$, durch den die $SU(6)$ -Spin-Flavor-Symmetrie des „recoil“-Modells explizit gebrochen wird. Er realisiert die unterschiedlichen Massen der Mesonen in den Endzuständen der Zerfallsprozesse und ihren Einfluss auf die Zerfallsraten. Tabelle E.3 enthält die relevanten Werte für ρ_p und ρ_n .

Damit sind sämtliche in (6.7) auftretenden Größen bekannt und die partiellen Zerfallsraten der Nukleonen können berechnet werden. Die Resultate für die ausgewählten LMA-Lösungen sind im Anhang in den Tabellen E.8 und E.9 zusammengefasst. Ebenso sind die Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle ohne Fermionmischungen angegeben.

Speziell ist die Tendenz erkennbar, dass der Einfluss der Mischungen zu einer deutlichen Unterdrückung der Zerfallskanäle $p \rightarrow e^+ \pi^0$, $p \rightarrow e^+ \omega$ und $p \rightarrow \nu_e^c \pi^+$ sowie $n \rightarrow e^+ \pi^-$, $n \rightarrow e^+ \rho^-$ und $n \rightarrow \nu_e^c \pi^0$ führt, während die Kanäle $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$, $p \rightarrow \mu^+ \omega$ und $p \rightarrow \nu_\mu^c \pi^+$ bzw. $n \rightarrow \mu^+ \pi^-$, $n \rightarrow \mu^+ \rho^-$ und $n \rightarrow \nu_\mu^c \pi^0$ im Vergleich zum Fall verschwindender Mischungen bevorzugt werden. Insofern unterscheiden sich die hier berechneten $d = 6$ -Verzweigungsraten zum Teil beträchtlich von denen in GUT-Modellen mit kleinen Mischungen, welche eine deutliche Dominanz von $p, n \rightarrow e^+ X$ -Zerfällen vorhersagen. Beim Higgsino-vermittelten Nukleonenzerfall in SUSY-GUTs dominieren dagegen Zerfälle mit K -Mesonen im Endzustand [111]. Die Tabellen E.10 – E.13 zeigen die LMA-Verzweigungsverhältnisse im Fall der berücksichtigten CP-Verletzung, während die

Ergebnisse für die S-MSW-Lösungen in E.14 und E.15 dargestellt sind. Die in den Tabellen E.8-E.13 zusammengefassten Resultate sind Vorhersagen des in dieser Arbeit entwickelten $SO(10)$ -Massenmodells und verdeutlichen auf eindrucksvolle Weise den Einfluss der Fermionmischungen auf die Verzweigungsraten der Nukleonenzerfälle.

Bei allen Rechnungen ist stets mit den Mittelwerten der verwendeten Größen gearbeitet worden, ohne deren Fehler explizit zu berücksichtigen. Das ist insofern gerechtfertigt, als die Hauptquellen der auftretenden Unsicherheiten in den modellspezifischen Näherungen bei der Bestimmung der hadronischen Matrixelemente zu sehen sind. Gerade diese sind aber im Gegensatz zu den bekannten Messungenauigkeiten in den SM-Kopplungen und den Fermionmassen und -mischungen nur schwer abzuschätzen. Es kann allerdings davon ausgegangen werden, dass die Effekte dieser Unsicherheiten in erster Linie die totalen Zerfallsraten beeinflussen, die Verzweigungsraten dagegen deutlich weniger betreffen.

Die absoluten Zerfallsraten hängen nicht nur von dem „unbekannten“ Wert M_X ab, sondern ebenfalls von unsicheren hadronischen Matrixelementen [123], den Verstärkungsfaktoren für kurze Abstände sowie weiteren Größen. Indem man die Abschätzungen [124, 125] für die absoluten Zerfallsraten zugrunde legt und die aktuellen Gitter-Ergebnisse der JLQCD Kollaboration [126] berücksichtigt, ergibt sich für die Zerfallsraten das Resultat:

$$\frac{1}{\Gamma(p \rightarrow \mu^+\pi^0)} \approx \frac{1}{\Gamma(p \rightarrow e^+\pi^0)} = 16 \times 10^{34} \times \left(\frac{M_X}{10^{16}\text{GeV}}\right)^4 \left(\frac{0.015\text{GeV}^3}{\alpha_H}\right)^2 \text{ Jahre} .$$

Wendet man hierauf die Super-Kamiokande Grenze [119, 127]

$$\frac{1}{\Gamma(p \rightarrow e^+\pi^0)} > 4.4 \times 10^{33} \text{ Jahre (90\% CL)}$$

an, so erhält man als untere Grenze für die effektive M_X -Skala in der Theorie

$$M_X > 0.7 \times 10^{16} \text{ GeV} .$$

Um in den nächsten Jahren den eichinduzierten Protonzerfall in supersymmetrischen Theorien nachweisen zu können, ist ein X-Boson unterhalb von 10^{16} GeV notwendig. Super-Kamiokande wird die Suche nach Nukleonenzerfall wieder aufnehmen und es wird erwartet, dass innerhalb der nächsten acht Jahre die Nachweisgrenze auf 1.4×10^{34} Jahre ansteigt [128]. Vor allem die neuen Nukleonenzerfalls-Experimente ICARUS [122] und der eine halbe Megatonne umfassende UNO-Detektor [129], sind sehr gut geeignet, um den Zerfall in Muonen und Neutrinos zu registrieren. Aus diesem Grunde sollte, sofern der Higgsino-vermittelte Nukleonenzerfall unterdrückt ist, die Suche nach den $\mu^+\pi^0$ und $\mu^+\pi^-$ Moden nicht außer Acht gelassen werden.

Die Anhebung der Muon-Zerfallskanäle ist ein einzigartiges Charakteristikum des vorgestellten Modells, da der Kanal $p \rightarrow e^+\pi^0$ auch im Rahmen der $d = 5$ -induzierten Zerfälle nicht vernachlässigt werden kann [130]. Im Hinblick auf die Tatsache, dass diese Verstärkung für $d = 6$ -Zerfälle mit den beobachteten großen Mischungswinkeln im leptonen Sektor verbunden ist, stellt eine erhöhte $p \rightarrow \mu^+\pi^0$ Rate ein klares Anzeichen für den eichvermittelten Proton-Zerfall dar.

Allgemein läßt sich feststellen, dass die Verzweigungsverhältnisse des Nukleonenzerfalls konkrete Hinweise bzgl. der „fundamentalen“ Massenmatrizen liefern, da sie von allen Mischungswinkeln abhängen. Die große Freiheit im Bereich der Massenmatrizen würde dann deutlich eingeschränkt und ein besseres Verständniss des Ursprunges der fermionischen Massen wäre möglich.

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein SUSY $SO(10)$ -Massenmodell mit realistischen Massenmatrizen entwickelt und hinsichtlich der Eigenschaften im Neutrinosektor und der Verzweigungsverhältnisse beim eichvermittelten Nukleonenzerfall eingehend untersucht. Zwei unterschiedliche Ansätze zur CP-Verletzung konnten in das Modell integriert werden.

Das Modell beruht auf folgenden Annahmen:

- Die $SO(10)$ -Symmetrie wird bei $M_{\text{GUT}} = 2 \cdot 10^{16}$ GeV direkt in das MSSM gebrochen. Zur Realisierung des Seesaw-Mechanismus erhält die Massenmatrix der rechtshändigen Majorana-Neutrinos einen VEV, der deutlich kleiner als M_{GUT} ist.
- Dimension-Vier-Operatoren sind aufgrund von R -Parität unterdrückt; ebenso wird davon ausgegangen, dass der Higgsino-vermittelte ($d = 5$) Nukleonenzerfall durch eine Symmetrie ausgeschlossen ist. Somit ist nur der Eichboson-induzierte ($d = 6$) Zerfall von Nukleonen möglich. Um die absolute Lebensdauer der Nukleonen nicht außerhalb jeder experimentell zugänglichen Zeitskala anzusiedeln, wird vorausgesetzt, dass die Masse der superschweren Eichbosonen M_X unterhalb von M_{GUT} liegt.

Alle Rechnungen sind für $\tan\beta = 10$ durchgeführt worden, die Skala der SUSY-Brechung wurde bei M_Z angesetzt.

Bei der Untersuchung des Neutrino-Sektors zeigte sich, dass das Modell Lösungen im experimentell favorisierten LMA-Bereich besitzt, dagegen in der SMA-Region, die inzwischen sehr stark an Signifikanz verloren hat, keine Lösungen vorhersagt. Die berechneten Neutrinomassen stehen in Einklang mit den aktuellen experimentellen Resultaten.

Für die gefundenen Neutrinolösungen wurden die Verzweigungsverhältnisse der p - und n -Zerfallsraten berechnet, so dass eine Vorhersage der dominierenden Kanäle resultiert. Hierbei wurde festgestellt, dass die experimentell beobachteten großen Mischungen im leptonischen Sektor zu einer starken Anhebung der $\mu^+\pi^0$ und $\mu^+\pi^-$ -Zerfallsmoden führen.

Abschließend wurde untersucht, inwieweit CP-Verletzung in das Modell integriert werden kann. Dazu wurden zwei unterschiedliche Zugänge verfolgt: (i) durch direkte Implementierung einer Phase in der d -Yukawa-Matrix und (ii) indem einer der Vakuumerwartungswerte komplexwertig wird. Beide Methoden können den Jarlskog-Parameter, der ein Maß für die Stärke der CP-verletzenden Phase in der CKM-Matrix darstellt, in der richtigen Größenordnung reproduzieren. Im Rahmen des zweiten Ansatzes zeigte sich, dass

die drei üblicherweise getrennt betrachteten Arten der CP -Verletzung — die in den K - und B -Zerfällen beobachtete, jene die zur Erklärung der Baryon-Asymmetrie im Universum benötigt wird und jene, die im leptonischen Sektor vorhergesagt wurde — auf eine gemeinsame Ursache zurückgeführt werden können: eine einzige sehr kleine Phase, die der VEV der superschweren Higgsdarstellung annimmt.

Anhang A

SUSY Notation und verwendete Konventionen

In diesem Anhang wird die Notation zweikomponentiger Spinoren zusammengefasst, da diese die natürliche Darstellung der Lorentz-Gruppe für chirale Fermionen bilden, wie sie in SUSY-Theorien oder im SM vorkommen. Die zugrunde gelegte Metrik hat die Form

$$\eta_{mn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) , \quad (\text{A.1})$$

wobei Lorentz-Indizes durch lateinische Buchstaben m, n, \dots gekennzeichnet werden, die von 0 bis 3 laufen. Zweikomponentige Weyl-Spinoren transformieren sich wie die $(\frac{1}{2}, 0)$ oder komplex konjugierte $(0, \frac{1}{2})$ -Darstellung der Lorentz-Gruppe; dabei werden ungepunktete oder gepunktete griechische Indizes verwendet, um das unterschiedliche Transformationsverhalten zu verdeutlichen: so stellt ψ_α einen Spinor dar, der sich gemäß der $(\frac{1}{2}, 0)$ -Darstellung der Lorentz-Gruppe transformiert, während $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ in der $(0, \frac{1}{2})$ -Darstellung liegt. Griechische Indizes können die Werte 1 und 2 annehmen und werden durch den schief-symmetrischen $SU(2)$ -invarianten Tensor $\epsilon^{\alpha\beta}$ bzw. $\epsilon_{\alpha\beta}$ gehoben oder gesenkt

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta , \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta , \quad (\text{A.2})$$

wobei

$$\epsilon_{21} = -\epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0, \quad \epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$$

und für die gepunkteten Indizes analoge Gleichungen gelten.

Das Produkt $\epsilon^{\beta\alpha} \psi_\alpha \chi_\beta = \psi^\beta \chi_\beta$ ist ein Lorentz-Skalar. Spinoren sind antikommutierende Objekte und genügen der folgenden Summenkonvention:

$$\begin{aligned} \psi\chi &= \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\alpha \chi^\alpha = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi\psi , \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Für konjugierte Spinoren wird die Summenkonvention so gewählt, dass sie der Konjugation von Skalaren entspricht:

$$(\psi\chi)^\dagger = (\psi^\alpha \chi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi} . \quad (\text{A.4})$$

Die σ -Matrizen $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m$ sind durch

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

gegeben, wobei ihre Indizes ebenfalls durch den ϵ -Tensor gehoben und gesenkt werden können

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\beta}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m, \quad (\text{A.6})$$

hieraus ergibt sich

$$\bar{\sigma}^0 = \sigma^0, \quad \bar{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3}. \quad (\text{A.7})$$

Die Generatoren der Lorentz-Gruppe sind in der Spinordarstellung durch

$$\sigma^{nm} = \frac{1}{4}(\sigma^n\bar{\sigma}^m - \sigma^m\bar{\sigma}^n), \quad \bar{\sigma}^{nm} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^n\sigma^m - \bar{\sigma}^m\sigma^n) \quad (\text{A.8})$$

gegeben.

Die Dirac- γ -Matrizen können durch Weyl-Matrizen dargestellt werden

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

und genügen

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = -2\eta^{mn}. \quad (\text{A.10})$$

Ein vier-komponentiger Dirac Spinor setzt sich aus zwei Weyl-Spinoren zusammen

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Der konjugierte Spinor hat die Form

$$\bar{\Psi}_D = \Psi_D^\dagger \gamma^0 = (\chi^\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}). \quad (\text{A.12})$$

Damit kann die übliche Schreibweise der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^n\partial_n + m)\Psi_D = 0 \quad (\text{A.13})$$

in zwei Weyl-Gleichungen zerlegt werden

$$\begin{aligned}i\sigma^n\partial_n\bar{\chi} + m\psi &= 0, \\ i\bar{\sigma}^n\partial_n\psi + m\bar{\chi} &= 0.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Anhang B

Dimension von Operatoren

In natürlichen Einheiten wird $\hbar = c = 1$ gesetzt, so dass Energie und Masse die gleiche Dimension besitzen. Längen und Zeiten werden dann in der Einheit $(\text{Energie})^{-1}$ gemessen, d.h. es gilt $[l] = [t] = -1$. Die Wirkung S ist somit dimensionslos: $[S] = [Et] = 0$.

Aus

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}$$

folgt unmittelbar

$$[S] = [dx^4] + [\mathcal{L}] \quad \Rightarrow \quad 0 = -4 + x ,$$

so dass man für die Lagrangedichte

$$[\mathcal{L}] = 4 \tag{B.1}$$

erhält. Ein (reelles) Skalar-Feld wird durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \tag{B.2}$$

beschrieben. Für ein freies Fermion gilt

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi . \tag{B.3}$$

Die Bewegung eines geladenen Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens in einem elektromagnetischen Feld ist durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eJ^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{B.4}$$

festgelegt. Aus den Lagrangedichten (B.2) – (B.4) lassen sich über (B.1) die Dimensionen der Felder bestimmen; diese sind in Tab. B.1 zusammengefasst.

Feld	Dimension
Skalar-Feld ϕ	1
Fermion-Feld ψ	$\frac{3}{2}$
Vektor-Feld A_μ	1

Tabelle B.1: Dimensionen verschiedener Felder.

Hiermit kann die Dimension von WW-Operatoren leicht ermittelt werden: bosonische Linien tragen die Dimension eins, während Fermionen den Term $3/2$ beisteuern. Diagramme (mit zwei fermionischen Linien, da nur diese für den Nukleonzerfall relevant sind) der Dimension vier, fünf und sechs sind in Abb. B.1 dargestellt.

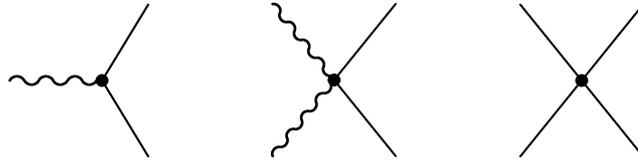


Abbildung B.1: $d = 4$, $d = 5$ und $d = 6$ Operatoren

Diese Regeln gelten jedoch nicht für Supergraphen, wie sie beispielsweise die folgende Abbildung zeigt:

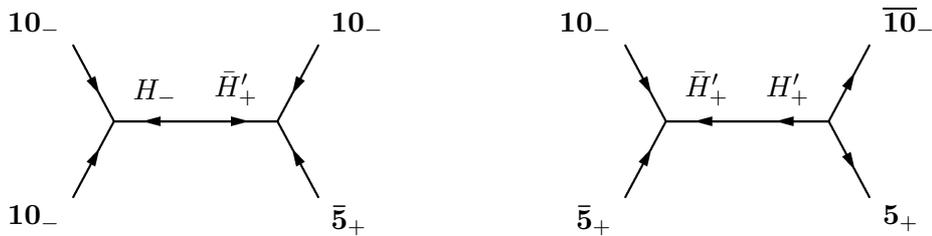


Abbildung B.2: Supergraphen der Dimension fünf und sechs im supersymmetrischen $SU(5)$ -Modell [57]. Die Chiralität der Superfelder ist durch Pfeile gekennzeichnet.

Ein chirales Superfeld Φ hat die Dimension

$$[\Phi] = 1 ,$$

während für Vektor-Superfelder $[V] = 0$ gilt [60]. Supersymmetrische Operatoren lassen sich aus chiralen Skalarfeldern Φ nur in zwei Weisen konstruieren [57]:

1. Für ein Produkt aus Feldern gleicher Chiralität wird ein Projektionsoperator $\bar{D}D$ angewandt, der die Dimension eins trägt:

$$\bar{D}D (\Phi_- \Phi'_- \dots \Phi''_-) .$$

2. Handelt es sich um ein Produkt aus Feldern entgegengesetzter Chiralität, so wird der Projektionsoperator $(\bar{D}D)^2$ verwendet, welcher die Dimension zwei besitzt:

$$(\bar{D}D)^2 (\Phi_- \dots \Phi'_+ \dots) .$$

Hieraus folgt, dass der linke Graph in Abb. B.2 die Dimension fünf besitzt, da er vier Skalarfelder gleicher Chiralität enthält und eine zusätzliche Dimension durch den Pro-

jektionsoperator $\bar{D}D$ resultiert. Der rechte Supergraph verbindet vier Skalarfelder unterschiedlicher Chiralität und enthält daher den Operator $(\bar{D}D)^2$, so dass es sich insgesamt um einen $d = 6$ -Operator handelt.

In der Literatur wird die Chiralität der beteiligten Felder zum Teil auch durch die Zusätze F (gleiche Chiralität) und D (unterschiedliche Chiralität) gekennzeichnet [58, 61, 62]. Damit lassen sich die für den Nukleonenzerfall relevanten Operatoren in supersymmetrischen Vereinheitlichten-Theorien in übersichtlicher Weise klassifizieren [60].

Dimension	Operator	ΔB	ΔL
4	$(U_R D_R D_R)_F$	-1	0
5	$(Q_L Q_L D_R)_D$	-1	0
5	$(Q_L Q_L Q_L L_L)_F$	-1	-1
5	$(U_R U_R D_R E_R)_F$	-1	-1
5	$(Q_L Q_L Q_L H'_L)_F$	-1	0
6	$(U_R D_R Q_L L_L)_D$	-1	-1
6	$(Q_L Q_L U_R E_R)_D$	-1	-1

Tabelle B.2: Baryon- bzw. leptonzahlverletzende Operatoren in SUSY GUTs.

Anhang C

Biunitäre Diagonalisierung komplexer 3×3 Matrizen

C.1 Biunitäre Diagonalisierung einer Matrix

Mit Hilfe zweier *unitärer* Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{R} kann eine beliebige komplexe quadratische Matrix \mathbf{M} auf Diagonalform \mathbf{D} gebracht werden

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R}, \quad (\text{C.1})$$

wobei die Elemente der Diagonalmatrix \mathbf{D} nichtnegative reelle Zahlen¹ sind. Diese Transformation wird im folgenden als *biunitäre Diagonalisierung* bezeichnet. Bei einer beliebigen Matrix \mathbf{M} sind \mathbf{L} und \mathbf{R} im allgemeinen von einander verschiedene unitäre Matrizen. Aus Gl. (C.1) ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für \mathbf{L} bzw. \mathbf{R}

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{L} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R} \quad (\text{C.3})$$

durch Multiplikation der adjungierten Gleichung $\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{L}$ mit der Ursprünglichen von links bzw. von rechts. Da $\mathbf{M} \mathbf{M}^\dagger$ und $\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M}$ hermitesche Matrizen sind, entspricht (C.2) sowie (C.3) der üblichen Diagonalisierung einer hermiteschen Matrix durch eine unitäre Transformation. Die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M} \mathbf{M}^\dagger$ bilden somit die Spalten der Matrix \mathbf{L} . Die Matrix \mathbf{R} kann aus den Eigenvektoren von $\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M}$ bestimmt werden.

C.2 Parametrisierung unitärer Matrizen

Eine unitäre Matrix \mathbf{U} ist durch die Angabe von 3 Winkeln und 6 Phasen eindeutig festgelegt. Eine Zuordnung zwischen diesen Größen und den einzelnen Matrixelementen

¹Im Hinblick auf die Diagonalisierung von Massenmatrizen wird weiterhin angenommen, dass alle drei Diagonalelemente unterschiedlich und die Elemente von \mathbf{D} der Größe nach geordnet sind, d.h. $\mathbf{D} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ mit $m_1 < m_2 < m_3$.

ist durch die folgende Parametrisierung [132] gegeben, wobei die mittlere Matrix so gewählt wurde, dass sie der üblichen Form der CKM-Matrix [1] entspricht²:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i(\alpha_{23}-\alpha_{13})} & \\ & & e^{i(\alpha_{33}-\alpha_{13})} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} e^{i\alpha_{11}} & & \\ & e^{i\alpha_{12}} & \\ & & e^{i\alpha_{13}} \end{pmatrix} \tag{C.4}
\end{aligned}$$

Diese Darstellung von \mathbf{U} kann in ein Produkt von Matrizen aufgebrochen werden. Hierdurch wird die Interpretation von θ_{12} , θ_{13} und θ_{23} als Rotationswinkel und der übrigen Parameter als Phasen deutlich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i(\alpha_{23}-\alpha_{13})} & \\ & & e^{i(\alpha_{33}-\alpha_{13})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13} \\ & 1 & \\ -s_{13} & & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} e^{i\alpha_{11}} & & \\ & e^{i\alpha_{12}} & \\ & & e^{i\alpha_{13}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

C.3 Freiheiten in der Wahl der Transformationsmatrizen \mathbf{L} und \mathbf{R}

Durch die Bestimmung der Matrix \mathbf{L} aus Gl. (C.2) und \mathbf{R} aus Gl. (C.3) ist die biunitäre Transformation (C.1) noch nicht eindeutig festgelegt. Vielmehr gibt es noch gewisse Freiheiten bei der Wahl der unitären Transformationsmatrizen \mathbf{L} und \mathbf{R} . Dies wird deutlich, wenn man die Zahl der Winkel und Phasen auf beiden Seiten von Gl. (C.1) miteinander vergleicht.

Eine hermitesche Matrix wie $\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger$ in Gl. (C.2) enthält 6 Winkel und 3 Phasen. Von diesen 6 reellen Parametern legen 3 die Diagonalelemente von \mathbf{D}^2 fest. Die verbleibenden 3 Winkel gehen in die Matrix \mathbf{L} ein. Da \mathbf{D}^2 eine reelle Diagonalmatrix ist, muss \mathbf{L} noch 3 Phasen beinhalten. Insgesamt werden durch Gl. (C.2) also 3 Winkel und 3 Phasen von

²Abkürzend wird s_{12} für $\sin(\theta_{12})$ verwendet. Statt $\cos(\theta_{23})$ entsprechend c_{23} , etc.

\mathbf{L} festgelegt. Drei der insgesamt 6 Phasen bleiben somit unbestimmt. Dem entspricht die Invarianz von Gl. (C.2) unter der Transformation

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & e^{i\alpha_2} & \\ & & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix}.$$

Analoges gilt für die Matrix \mathbf{R} aus Gl. (C.3).

Löst man Gl. (C.1) nach \mathbf{M} auf

$$\mathbf{M} = \mathbf{LDR}^\dagger,$$

so kann man wiederum die Anzahl der Parameter auf beiden Seiten der Gleichung zählen. Die komplexe 3×3 Matrix \mathbf{M} enthält 9 reelle Parameter (Winkel) und 9 imaginäre Parameter (Phasen). Auf der rechten Seite ergeben sich ebenfalls 9 Winkel: \mathbf{L} enthält 3 Winkel, \mathbf{D} durch die Diagonalelemente 3 reelle Parameter und schließlich \mathbf{R}^\dagger ebenfalls 3 Winkel. Wie oben erörtert, sind in den Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{R}^\dagger jedoch nur jeweils 3 Phasen festgelegt. Auf der rechten Seite ergeben sich also insgesamt nur 6 Phasen, während die Matrix \mathbf{M} auf der rechten Seite 9 enthält. *Insgesamt werden also 3 Phasen auf der rechten Seite durch \mathbf{M} nicht vorgegeben. Nur die Differenz der freien Phasen zwischen \mathbf{L} und \mathbf{R} ist festgelegt.*

Praktisch bedeutet dies folgendes: bestimmt man die Transformationsmatrizen \mathbf{L} und \mathbf{R} gemäß (C.2) bzw. (C.3) und bildet das Produkt $\mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R}$, so ergibt sich zwar eine Diagonalmatrix, im allgemeinen sind ihre Elemente jedoch nicht reell, sondern komplex. Im Rahmen der oben verwendeten Notation gilt

$$\mathbf{D} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & e^{i\varphi_2} & \\ & & e^{i\varphi_3} \end{pmatrix}}_{\Phi^\dagger} = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R}$$

oder

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R} \Phi = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R}_x.$$

Durch die Absorption dieser Phasen in die Matrix \mathbf{R} erhält man die erweiterte Matrix \mathbf{R}_x . Indem \mathbf{R}_x statt \mathbf{R} in der biunitären Transformation verwendet wird, sind sämtliche 9 Phasen nunmehr festgelegt.

Dennoch kann durch eine weitere Transformation die Zahl der Phasen in \mathbf{L} um drei reduziert werden³. Betrachtet man hierzu die Matrix

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^{-i\psi_1} & & \\ & e^{-i\psi_2} & \\ & & e^{-i\psi_3} \end{pmatrix},$$

³Natürlich ist es ebenso möglich, 3 Phasen der Matrix \mathbf{R}_x wegzutransformieren. Da sich die CKM-Matrix jedoch als $\mathbf{L}_U^\dagger \mathbf{L}_D$ ergibt und diese üblicherweise mit nur einer Phase angegeben wird, ist es naheliegend, die Zahl der Phasen in der Matrix \mathbf{L} zu verringern.

so wird deutlich, dass mit $\mathbf{D} = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R}_x$ auch

$$\mathbf{D} = \Psi^\dagger \mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R}_x \Psi$$

eine biunitäre Transformation der Matrix \mathbf{M} ist. Wählt man nun $\psi_1 = \alpha_{11}(\mathbf{L})$, $\psi_2 = \alpha_{12}(\mathbf{L})$ und ψ_3 als $\alpha_{13}(\mathbf{L})$, so sind in der neuen linkshändigen Transformationsmatrix $\mathbf{L}' = \mathbf{L} \Psi$ die entsprechenden Phasen $\alpha_{11}(\mathbf{L}')$, $\alpha_{12}(\mathbf{L}')$ und $\alpha_{13}(\mathbf{L}')$ klarerweise gleich Null.

Insgesamt ergibt sich damit die biunitäre Transformation als

$$\mathbf{D} = \Psi^\dagger \mathbf{L}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R} \Phi \Psi,$$

wobei \mathbf{L} und \mathbf{R} durch (C.2) bzw. (C.3) gegeben sind.

C.4 Numerische Verfahren

Das Problem eine vorgegebene komplexe 3×3 Matrix biunitär zu diagonalisieren lässt sich in zwei Teilaspekte zergliedern: zum einen gilt es, die Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{R} gemäß (C.2) und (C.3) zu bestimmen. Dies ist im wesentlichen ein Eigenwert- und Eigenvektorproblem und kann mit gängigen numerischen Verfahren [131] gelöst werden. Zum anderen sollen sowohl die linke als auch die rechte Transformationsmatrix durch ihre Winkel und Phasen parametrisiert werden. Hierzu ist es notwendig, zu einer vorgegebenen unitären Matrix die entsprechenden Winkel und Phasen angeben zu können. Die Aufgabe besteht also darin, Gl. (C.4) nach θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} und δ sowie α_{11} , α_{12} , α_{13} , α_{23} und α_{33} aufzulösen.

Berechnung von \mathbf{L} und \mathbf{R} : Bei der Bestimmung der Eigenvektoren und Eigenwerte ist zu beachten, dass die Routinen `tred2` und `tqli` aus [131] für reelle Matrizen entwickelt wurden. Einer hermiteschen Matrix \mathbf{A} kann jedoch die reelle 6×6 Matrix

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Re}(\mathbf{A}) & -\operatorname{Im}(\mathbf{A}) \\ \hline \operatorname{Im}(\mathbf{A}) & \operatorname{Re}(\mathbf{A}) \end{array} \right)$$

zugeordnet werden. Aufgrund der Hermitezität von \mathbf{A} ist $\tilde{\mathbf{A}}$ symmetrisch, so dass die oben genannten Routinen nunmehr eingesetzt werden können. Man muss jedoch beachten, dass die Eigenwerte und Eigenvektoren wegen der Struktur von $\tilde{\mathbf{A}}$ paarweise auftreten.

Bestimmung der Winkel und Phasen aus \mathbf{L} bzw. \mathbf{R} : Im Rahmen dieser Arbeit wurde zunächst versucht, die Parameter der unitären Matrizen durch numerisches Lösen des zugrundeliegenden nichtlinearen Gleichungssystems (C.4) zu bestimmen. Hierzu wurde die Routine `newt` aus Kapitel 9.7 in [131] eingesetzt, die es ermöglicht, n nichtlineare Gleichungen mit n Unbekannten numerisch zu lösen, indem Nullstellen dieser Gleichungen gesucht werden. Bezeichnet \mathbf{U} die unitäre Matrix, deren 3 Winkel und 6 Phasen bestimmt werden sollen und $\hat{\mathbf{U}}$ diejenige, die man nach (C.4) aus den bisher bestimmten Winkeln

erhält, so wurden die besten numerischen Ergebnisse erzielt, wenn die Beträge der Elemente der Differenzmatrix $\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}$ als die Funktionen verwendet wurden, deren Nullstellen ermittelt werden sollten.

Obwohl es sich bei dem verwendeten Verfahren um die beste in [131] angegebene Methode handelt, waren Kontrollrechnungen ernüchternd: durch Vorgabe von 3 Winkeln und 6 Phasen wurde gemäß (C.4) die unitäre Matrix \mathbf{U} konstruiert. Anschließend wurden aus dieser die zugrundeliegenden Winkel und Phasen errechnet. Typischerweise hatten die so bestimmten Winkel jedoch kaum etwas mit den Ursprünglichen zu tun. Deshalb wurde schließlich eine andere Strategie verfolgt. Durch Ausmultiplizieren von (C.4) ergibt sich:

$$\mathbf{U}_{11} = c_{13}c_{12}e^{i\alpha_{11}} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{U}_{12} = c_{13}s_{12}e^{i\alpha_{12}} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{U}_{13} = s_{13}e^{i(\alpha_{13}-\delta)} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{U}_{21} = [-s_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} - c_{23}s_{12}]e^{i(\alpha_{11}+\alpha_{23}-\alpha_{13})} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{U}_{22} = [-s_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} + c_{23}c_{12}]e^{i(\alpha_{12}+\alpha_{23}-\alpha_{13})} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{U}_{23} = c_{13}s_{23}e^{i\alpha_{23}} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{U}_{31} = [-c_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} + s_{23}s_{12}]e^{i(\alpha_{11}+\alpha_{33}-\alpha_{13})} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{U}_{32} = [-c_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} - s_{23}c_{12}]e^{i(\alpha_{12}+\alpha_{33}-\alpha_{13})} \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{U}_{33} = c_{13}c_{23}e^{i\alpha_{33}} \quad (\text{C.13})$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} und δ sowie α_{11} , α_{12} , α_{13} , α_{23} und α_{33} fast immer⁴ analytisch bestimmen, sofern man noch mögliche Variationen der Vorzeichen in Betracht zieht. Beispielsweise kann ein negatives Vorzeichen in \mathbf{U}_{11} aus $\cos(\theta_{13})$ oder $\cos(\theta_{12})$ wie auch aus dem Faktor $e^{i\alpha_{11}}$ herrühren. Letztendlich ist auch der Fall, dass alle drei Faktoren ein negatives Vorzeichen aufweisen, möglich.

Prinzipiell ist die direkte Zuordnung von Vorzeichen zu den einzelnen Termen deshalb problematisch, weil die Arcusfunktionen nur auf eingeschränkten Intervallen definiert sind. Das Auflösen von Gl. (C.5) bis (C.13) nach den gesuchten Größen liefert also erst einmal nur Kandidaten für die zu bestimmenden Parameter. Die richtige Vorzeichenkombination muss schließlich durch Probieren ermittelt werden. Bezeichnet γ den berechneten Kandidaten für einen Winkel bzw. eine Phase, so ergeben sich die möglichen Vorzeichenvariationen durch

$$\gamma, \quad \gamma + \pi, \quad -\gamma, \quad -\gamma + \pi.$$

Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Parametrisierung (C.4) nicht eindeutig ist. Die Tabelle C.1 zeigt drei Parametrisierungen, die alle die gleiche Matrix \mathbf{U} repräsentieren. Offenbar würde man jedoch den Parametersatz #1 gegenüber den anderen bevorzugen, um die Matrix \mathbf{U} zu beschreiben. Dies ist dadurch zu erklären, dass hier in der Gesamtheit

⁴Probleme entstehen, sofern sin- oder cos-Faktoren gleich Null sind. Insbesondere der Fall $\cos(\theta_{13}) = 0$ ist pathologisch.

			#1	#2	#3
\mathbf{U}_{11}	$-0.856 - 0.467i$	θ_{12}	-0.100	3.042	3.242
\mathbf{U}_{12}	$-0.081 - 0.055i$	θ_{13}	3.342	-0.200	3.342
\mathbf{U}_{13}	$-0.190 - 0.059i$	θ_{23}	0.300	3.442	3.442
\mathbf{U}_{21}	$0.110 + 0.103i$	δ	0.400	0.400	3.542
\mathbf{U}_{22}	$-0.724 - 0.607i$	α_{11}	0.500	0.500	3.642
\mathbf{U}_{23}	$-0.202 - 0.208i$	α_{12}	3.742	3.742	3.742
\mathbf{U}_{31}	$0.063 + 0.150i$	α_{13}	0.700	0.700	3.842
\mathbf{U}_{32}	$0.212 + 0.229i$	α_{23}	0.800	0.800	3.942
\mathbf{U}_{33}	$-0.582 - 0.733i$	α_{33}	0.900	0.900	4.042

Tabelle C.1: Verschiedene Parametrisierungen der Matrix \mathbf{U}

die kleinsten Winkel in die Parametrisierung eingehen. Mathematisch entspricht dies der Einführung einer Kostenfunktion⁵

$$\text{cost} = |\theta_{12}| + |\theta_{13}| + |\theta_{23}| + 2|\delta| + 2|\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + 2|\alpha_{13}| + 2|\alpha_{23}| + 2|\alpha_{33}|. \quad (\text{C.14})$$

Für jede gefundene Lösung werden die entsprechenden Kosten berechnet. Die Lösung mit den geringsten Kosten wird schließlich angegeben. Nur in den Fällen, in denen eine analytische Bestimmung der Lösungskandidaten nicht möglich ist, wird das rein numerische Verfahren eingesetzt.

⁵Wesentlich hierbei ist, dass nur die Beträge der Parameter eingehen. Die Quadrate der Beträge sind ungeeignet, da bei einer Darstellung der Parameter modulo 2π betragsmäßig sehr kleine negative Winkel oder Phasen fast 2π entsprechen und dann einen zu großen Beitrag liefern.

Anhang D

Renormierungsgruppen- Gleichungen und Schwellenkorrekturen

D.1 Renormierungsgruppen-Gleichungen des SMs

D.1.1 Renormierungsgruppen-Gleichungen für die Eichkopplungen

Die Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 gehorchen den RG-Gleichungen [133]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_1 &= g_1^3 \left(\frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{41}{10} \right] + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left[\left(\frac{199}{50}g_1^2 + \frac{9}{10}g_2^2 + \frac{11}{10}g_3^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{Tr} \left(\frac{17}{10}\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \frac{1}{2}\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \frac{3}{2}\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_2 &= g_2^3 \left(\frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{19}{6} \right] + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left[\left(\frac{27}{10}g_1^2 + \frac{35}{6}g_2^2 + \frac{9}{2}g_3^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{Tr} \left(\frac{3}{2}\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \frac{3}{2}\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \frac{1}{2}\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_3 &= g_3^3 \left(\frac{1}{16\pi^2} [-7] + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left[\left(\frac{44}{5}g_1^2 + 12g_2^2 - 26g_3^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{Tr} \left(2\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + 2\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

D.1.2 Renormierungsgruppen-Gleichungen für die Yukawa-Kopplungen

Die RG-Gleichungen für die Yukawakopplungen haben die Form [133]:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Y}_u, \mathbf{Y}_d, \mathbf{Y}_1) = (\mathbf{Y}_u, \mathbf{Y}_d, \mathbf{Y}_1) \left(\frac{1}{16\pi^2} \boldsymbol{\beta}_{Y_u, Y_d, Y_1}^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \boldsymbol{\beta}_{Y_u, Y_d, Y_1}^{(2)} \right) \quad (\text{D.4})$$

mit den Ein-Loop-Beiträgen:

$$\beta_{Y_u}^{(1)} = \frac{3}{2} (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d) + Y_2 - \left(\frac{17}{20} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8g_3^2 \right) \quad (\text{D.5})$$

$$\beta_{Y_d}^{(1)} = \frac{3}{2} (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u) + Y_2 - \left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8g_3^2 \right) \quad (\text{D.6})$$

$$\beta_{Y_1}^{(1)} = \frac{3}{2} \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 + Y_2 - \left(\frac{9}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 \right) \quad (\text{D.7})$$

Die Zwei-Loop-Betafunktionen lauten:

$$\begin{aligned} \beta_{Y_u}^{(2)} &= \frac{3}{2} (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 - \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - \frac{1}{4} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \frac{11}{4} (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 \\ &+ Y_2 \left(\frac{5}{4} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - \frac{9}{4} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \right) - \chi_4 + \frac{3}{2} \lambda^2 \\ &- 2\lambda (3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d) + \left(\frac{223}{80} g_1^2 + \frac{135}{16} g_2^2 + 16g_3^2 \right) \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \\ &- \left(\frac{43}{80} g_1^2 - \frac{9}{16} g_2^2 + 16g_3^2 \right) \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \frac{5}{2} Y_4 \\ &+ \frac{1187}{600} g_1^4 - \frac{9}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{19}{15} g_1^2 g_3^2 \\ &- \frac{23}{4} g_2^4 + 9g_2^2 g_3^2 - 108g_3^4 \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \beta_{Y_d}^{(2)} &= \frac{3}{2} (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 - \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \frac{1}{4} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \frac{11}{4} (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 \\ &+ Y_2 \left(\frac{5}{4} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \frac{9}{4} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \right) - \chi_4 + \frac{3}{2} \lambda^2 \\ &- 2\lambda (3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u) + \left(\frac{187}{80} g_1^2 + \frac{135}{16} g_2^2 + 16g_3^2 \right) \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \\ &- \left(\frac{79}{80} g_1^2 - \frac{9}{16} g_2^2 + 16g_3^2 \right) \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \frac{5}{2} Y_4 \\ &- \frac{127}{600} g_1^4 - \frac{27}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{31}{15} g_1^2 g_3^2 \\ &- \frac{23}{4} g_2^4 + 9g_2^2 g_3^2 - 108g_3^4 \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} \beta_{Y_1}^{(2)} &= \frac{3}{2} (\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1)^2 - \frac{9}{4} Y_2 \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 - \chi_4 + \frac{3}{2} \lambda^2 - 6\lambda \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 \\ &+ \left(\frac{387}{80} g_1^2 + \frac{135}{16} g_2^2 \right) \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 + \frac{5}{2} Y_4 \\ &+ \frac{1371}{200} g_1^4 + \frac{27}{20} g_1^2 g_2^2 - \frac{23}{4} g_2^4 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Die hier auftretenden Invarianten sind:

$$Y_2 = \text{Tr} \left[3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + 3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 \right] \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} Y_4 &= \left(\frac{17}{20} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8g_3^2 \right) \text{Tr}[\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u] + \left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8g_3^2 \right) \text{Tr}[\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d] \\ &+ \frac{3}{4} (g_1^2 + g_2^2) \text{Tr}[\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\chi_4 = \frac{9}{4} \text{Tr} \left[3(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 + 3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 + (\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1)^2 - \frac{2}{3} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \right] \quad (\text{D.13})$$

D.1.3 Renormierungsgruppen-Gleichung für die Higgs-Selbstkopplung

$$\frac{d}{dt} \lambda = \frac{1}{16\pi^2} \beta_\lambda^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \beta_\lambda^{(2)} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} \beta_\lambda^{(1)} = & 12 \lambda^2 - \left(\frac{9}{5} g_1^2 + 9 g_2^2 \right) \lambda + \frac{9}{4} \left(\frac{3}{25} g_1^4 + \frac{2}{5} g_1^2 g_2^2 + g_2^4 \right) + 4 Y_2 \lambda \\ & - 4 \text{Tr} \left[3(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 + 3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 + (\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned} \beta_\lambda^{(2)} = & -78 \lambda^3 + 18 \left(\frac{3}{5} g_1^2 + 3 g_2^2 \right) \lambda^2 - \left(\frac{2661}{100} g_1^4 - \frac{117}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{73}{8} g_2^4 \right) \lambda \\ & - \frac{3411}{1000} g_1^6 - \frac{1677}{200} g_1^4 g_2^2 - \frac{289}{40} g_1^2 g_2^4 + \frac{305}{8} g_2^6 - 64 g_3^2 \text{Tr} \left[(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 + (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 \right] \\ & - \frac{8}{5} g_1^2 \text{Tr} \left[2(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 - (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 + 3(\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1)^2 \right] - \frac{3}{2} g_2^4 Y_2 + 10 \lambda Y_4 \\ & + \frac{3}{5} g_1^2 \left[\left(-\frac{57}{10} g_1^2 + 21 g_2^2 \right) \text{Tr} [\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u] + \left(\frac{3}{2} g_1^2 + 9 g_2^2 \right) \text{Tr} [\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d] \right. \\ & \left. + \left(-\frac{15}{2} g_1^2 + 11 g_2^2 \right) \text{Tr} [\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1] \right] - 24 \lambda^2 Y_2 \\ & - \lambda \text{Tr} \left[3(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 + 3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 + (\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1)^2 \right] + 6 \lambda \text{Tr} [\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d] \\ & + 20 \text{Tr} \left[3(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^3 + 3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^3 + (\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1)^3 \right] \\ & - 12 \text{Tr} \left[(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \right] - 12 \text{Tr} \left[\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

D.1.4 Renormierungsgruppen-Gleichung für die Seesaw-Matrix

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \mathbf{M}_\nu = (2\lambda - 3g_2^2 + 2Y_2) \mathbf{M}_\nu - \frac{1}{2} (\mathbf{M}_\nu (\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1) + (\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1)^T \mathbf{M}_\nu) \quad (\text{D.17})$$

D.2 Renormierungsgruppen-Gleichungen des MSSMs**D.2.1 Renormierungsgruppen-Gleichungen für die Eichkopplungen**

Die RG-Gleichungen für die Eichkopplungen im supersymmetrischen Standardmodell haben die Form [134]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_1 = & g_1^3 \left(\frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{33}{5} \right] + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left[\left(\frac{199}{25} g_1^2 + \frac{27}{5} g_2^2 + \frac{88}{5} g_3^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{Tr} \left(\frac{26}{5} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \frac{14}{5} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \frac{18}{5} \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_2 = & g_2^3 \left(\frac{1}{16\pi^2} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left[\left(\frac{9}{5} g_1^2 + 25 g_2^2 + 24 g_3^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{Tr} \left(6 \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + 6 \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + 2 \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_3 = & g_3^3 \left(\frac{1}{16\pi^2} [-3] + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left[\left(\frac{11}{5} g_1^2 + 9 g_2^2 + 14 g_3^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{Tr} \left(4 \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + 4 \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

D.2.2 Renormierungsgruppen-Gleichungen für die Yukawa-Kopplungen

Auch im supersymmetrischen Fall sind die RG-Gleichungen für die Yukawa-Kopplungen durch Gl. (D.4) gegeben, wobei für die Ein- und Zwei-Loop-Betafunktionen jedoch folgende Ausdrücke resultieren [134]:

$$\beta_{Y_u}^{(1)} = 3\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u + \mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d + \text{Tr}[3\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u] - \left(\frac{13}{15}g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3}g_3^2\right) \quad (\text{D.21})$$

$$\beta_{Y_d}^{(1)} = 3\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u + \text{Tr}[3\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_1^\dagger\mathbf{Y}_1] - \left(\frac{7}{15}g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3}g_3^2\right) \quad (\text{D.22})$$

$$\beta_{Y_1}^{(1)} = 3\mathbf{Y}_1^\dagger\mathbf{Y}_1 + \text{Tr}[3\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_1^\dagger\mathbf{Y}_1] - \left(\frac{9}{5}g_1^2 + 3g_2^2\right) \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{aligned} \beta_{Y_u}^{(2)} = & -4(\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u)^2 - 2(\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d)^2 - 2\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u \\ & + \mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d \left(\frac{2}{5}g_1^2 - \text{Tr}[3\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_1^\dagger\mathbf{Y}_1]\right) \\ & + \mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u \left(\frac{2}{5}g_1^2 + 6g_2^2 - \text{Tr}[9\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u]\right) \\ & - 9\text{Tr}[\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u] - 3\text{Tr}[\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d] \\ & + \text{Tr}[\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u] \left(\frac{4}{5}g_1^2 + 16g_3^2\right) + \left(\frac{13}{15}(2n_g + \frac{3}{5}) + \frac{169}{450}\right)g_1^4 \\ & + \left(3(2n_g - 5) + \frac{9}{2}\right)g_2^4 + \left(\frac{16}{3}(2n_g - 9) + \frac{128}{9}\right)g_3^4 \\ & + g_1^2g_2^2 + \frac{136}{45}g_1^2g_3^2 + 8g_2^2g_3^2 \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} \beta_{Y_d}^{(2)} = & -4(\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d)^2 - 2(\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u)^2 - 2\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d \\ & + \mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d \left(\frac{4}{5}g_1^2 + 6g_2^2 - \text{Tr}[9\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d + 3\mathbf{Y}_1^\dagger\mathbf{Y}_1]\right) \\ & + \mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u \left(\frac{4}{5}g_1^2 - \text{Tr}[3\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u]\right) - 9\text{Tr}[\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d] \\ & - 3\text{Tr}[\mathbf{Y}_u^\dagger\mathbf{Y}_u\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d] - 3\text{Tr}[\mathbf{Y}_1^\dagger\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_1^\dagger\mathbf{Y}_1] \\ & + \text{Tr}[\mathbf{Y}_d^\dagger\mathbf{Y}_d] \left(-\frac{2}{5}g_1^2 + 16g_3^2\right) + \text{Tr}[\mathbf{Y}_1^\dagger\mathbf{Y}_1] \left(\frac{6}{5}g_1^2\right) \\ & + \left(\frac{7}{15}(2n_g + \frac{3}{5}) + \frac{49}{450}\right)g_1^4 + \left(3(2n_g - 5) + \frac{9}{2}\right)g_2^4 \\ & + \left(\frac{16}{3}(2n_g - 9) + \frac{128}{9}\right)g_3^4 + g_1^2g_2^2 + \frac{8}{9}g_1^2g_3^2 + 8g_2^2g_3^2 \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

$$\begin{aligned}
\beta_{Y_l}^{(2)} = & -4(\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1)^2 + \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 \left(6g_2^2 - \text{Tr}[9\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + 3\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1] \right) \\
& - 9\text{Tr}[\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d] - 3\text{Tr}[\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d] \\
& - 3\text{Tr}[\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1] + \text{Tr}[\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d] \left(-\frac{2}{5}g_1^2 + 16g_3^2 \right) \\
& + \text{Tr}[\mathbf{Y}_1^\dagger \mathbf{Y}_1] \left(\frac{6}{5}g_1^2 \right) + \left(\frac{9}{5}(2n_g + \frac{3}{5}) + \frac{81}{50} \right) g_1^4 \\
& + \left(3(2n_g - 5) + \frac{9}{2} \right) g_2^4 + \frac{9}{5}g_1^2 g_2^2
\end{aligned} \tag{D.26}$$

D.2.3 Renormierungsgruppen-Gleichungen der Seesaw-Matrix

Von den Autoren der Ref. [135] wird die Neutrino Seesaw-Matrix definiert als

$$\frac{1}{2}c_1^{ab} = c_{21}^{ab} = c_{22}^{ab} = \frac{1}{2}c_3^{ab} = Y_l^{ca}(M_R^{-1})^{cd}Y_l^{db}. \tag{D.27}$$

Die RG-Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}c_1^{ab} = & \frac{1}{16\pi^2} \left(\left[2g_1^2 + 2g_2^2 + 6 \text{tr} \left(Y_u Y_u^\dagger \right) \right] c_1^{ab} \right. \\
& + \left(Y_l Y_l^\dagger \right)^{bc} c_1^{ca} + \left(Y_l Y_l^\dagger \right)^{ac} c_1^{cb} \\
& - (2g_1^2 + 6g_2^2) \left(c_{21}^{ab} + c_{21}^{ba} \right) \\
& \left. - (2g_1^2 + 2g_2^2) \left(c_{22}^{ab} + c_{22}^{ba} \right) \right)
\end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}c_3^{ab} = & \frac{1}{16\pi^2} \left(\left[2g_1^2 + 2g_2^2 + 6 \text{tr} \left(Y_u Y_u^\dagger \right) \right] c_3^{ab} \right. \\
& + \left(Y_l Y_l^\dagger \right)^{bc} c_3^{ca} + \left(Y_l Y_l^\dagger \right)^{ac} c_3^{cb} \\
& - (2g_1^2 + 6g_2^2) \left(c_{21}^{ab} + c_{21}^{ba} \right) \\
& \left. - (2g_1^2 + 2g_2^2) \left(c_{22}^{ab} + c_{22}^{ba} \right) \right)
\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}c_{21}^{ab} = & \frac{1}{16\pi^2} \left(\left[4g_2^2 - 2g_1^2 + 6 \text{tr} \left(Y_u Y_u^\dagger \right) \right] c_{21}^{ab} + 2g_2^2 c_{21}^{ba} \right. \\
& + \left(Y_l Y_l^\dagger \right)^{bc} c_{21}^{ca} + \left(Y_l Y_l^\dagger \right)^{ac} c_{21}^{cb} \\
& + (g_1^2 - g_2^2) \left(c_{22}^{ab} + c_{22}^{ba} \right) \\
& \left. - \frac{1}{2} (g_1^2 + 5g_2^2) \left(c_1^{ab} + c_3^{ab} \right) \right)
\end{aligned} \tag{D.30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}c_{22}^{ab} = & \frac{1}{16\pi^2} \left(\left[-4g_2^2 - 2g_1^2 + 6 \text{tr} \left(Y_u Y_u^\dagger \right) \right] c_{22}^{ab} + 2g_2^2 c_{22}^{ba} \right. \\
& + \left(Y_l Y_l^\dagger \right)^{bc} c_{22}^{ca} + \left(Y_l Y_l^\dagger \right)^{ac} c_{22}^{cb} \\
& + (g_1^2 - g_2^2) \left(c_{21}^{ab} + c_{21}^{ba} \right) - 4g_2^2 c_{21}^{ab} \\
& \left. - \frac{1}{2} (g_1^2 - g_2^2) \left(c_1^{ab} + c_3^{ab} \right) \right)
\end{aligned} \tag{D.31}$$

D.3 Schwellen-Korrekturen

Für die Yukawakopplungen ergeben sich durch Ausintegrieren des nicht-SM Higgsdubletts die Schwellenkorrekturen [136]

$$\begin{aligned}
 g_i(M_{\text{SUSY}}^-) &= g_i(M_{\text{SUSY}}^+) \\
 \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}(M_{\text{SUSY}}^-) &= \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}(M_{\text{SUSY}}^+) \sin \beta \\
 \mathbf{Y}_{\mathbf{d}}(M_{\text{SUSY}}^-) &= \mathbf{Y}_{\mathbf{d}}(M_{\text{SUSY}}^+) \cos \beta \\
 \mathbf{Y}_{\mathbf{1}}(M_{\text{SUSY}}^-) &= \mathbf{Y}_{\mathbf{1}}(M_{\text{SUSY}}^+) \cos \beta ,
 \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{Y}(M_{\text{SUSY}}^+)$ die Yukawakopplungen für zwei Higgs und $\mathbf{Y}(M_{\text{SUSY}}^-)$ die Yukawakopplungen für ein Higgs darstellt.

Anhang E

Berechnung der Nukleonzerfallsraten

E.1 A_i -Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird die explizite Form der A_i -Koeffizienten dargestellt, welche in der effektiven Lagrangedichte (6.1) für die Nukleonzerfälle auftreten. Hierbei sind $\tilde{G} = g_U^2/2M_{X,Y}^2$ und $\tilde{G}' = g_U^2/2M_{X',Y'}^2$, wobei $M_{X,Y}^2 = M_{X',Y'}^2 \approx M_U^2$ angenommen wird.

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{E}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{E}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31}) \\ &\quad + \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{E}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{E}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ A_2 &= \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_L)_{11}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{E}_L)_{21}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{E}_L)_{31}(\mathbf{D}_R)_{31}) \\ &\quad + \tilde{G}' ((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_L)_{11}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{E}_L)_{21}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{E}_L)_{31}(\mathbf{U}_R)_{31}) \\ A_3 &= \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_R)_{12}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{E}_R)_{22}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{E}_R)_{32}(\mathbf{D}_L)_{31}) \\ &\quad + \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_R)_{12}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{E}_R)_{22}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{E}_R)_{32}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ A_4 &= \tilde{G} ((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_L)_{12}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{E}_L)_{22}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{E}_L)_{32}(\mathbf{D}_R)_{31}) \\ &\quad + \tilde{G}' ((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{U}_L)_{11} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{U}_L)_{21} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{U}_L)_{31}) \\ &\quad \cdot ((\mathbf{E}_L)_{12}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{E}_L)_{22}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{E}_L)_{32}(\mathbf{U}_R)_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{11}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{21}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{31}(\mathbf{D}_R)_{31} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{11}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{21}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{31}(\mathbf{U}_R)_{31} \right) \\
A_{14} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{12}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{22}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{32}(\mathbf{D}_R)_{31} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{12}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{22}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{32}(\mathbf{U}_R)_{31} \right) \\
A_{15} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{D}_R)_{31} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{U}_R)_{31} \right) \\
A_{16} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{31} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{D}_R)_{12} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{D}_R)_{22} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{D}_R)_{32} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{12}(\mathbf{D}_L)_{11} + (\mathbf{D}_R)_{22}(\mathbf{D}_L)_{21} + (\mathbf{D}_R)_{32}(\mathbf{D}_L)_{31} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{U}_R)_{31} \right) \\
A_{17} &= -\tilde{G} \left((\mathbf{U}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{U}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{U}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{D}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{D}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{D}_R)_{31} \right) \\
&\quad - \tilde{G}' \left((\mathbf{D}_R)_{11}(\mathbf{D}_L)_{12} + (\mathbf{D}_R)_{21}(\mathbf{D}_L)_{22} + (\mathbf{D}_R)_{31}(\mathbf{D}_L)_{32} \right) \\
&\quad \cdot \left((\mathbf{N}_L)_{13}(\mathbf{U}_R)_{11} + (\mathbf{N}_L)_{23}(\mathbf{U}_R)_{21} + (\mathbf{N}_L)_{33}(\mathbf{U}_R)_{31} \right)
\end{aligned}$$

E.2 Meson-Wellenfunktionen

Die Tabellen E.1 und E.2 geben die Spin-Flavour-Anteile der Wellenfunktionen für die pseudoskalaren beziehungsweise Vektormesonen an.

Meson	Masse (MeV)	Spin S	Wellenfunktion
π^+	139.570	0	$-1/\sqrt{2} (d^C \uparrow u \downarrow - d^C \downarrow u \uparrow)$
π^0	134.976	0	$1/2 (u^C \uparrow u \downarrow - u^C \downarrow u \uparrow - d^C \uparrow d \downarrow + d^C \downarrow d \uparrow)$
π^-	139.570	0	$1/\sqrt{2} (u^C \uparrow d \downarrow - u^C \downarrow d \uparrow)$
K^+	493.677	0	$1/\sqrt{2} (s^C \uparrow u \downarrow - s^C \downarrow u \uparrow)$
K^0	497.672	0	$1/\sqrt{2} (s^C \uparrow d \downarrow - s^C \downarrow d \uparrow)$
η	547.30	0	$1/\sqrt{12} (u^C \uparrow u \downarrow - u^C \downarrow u \uparrow + d^C \uparrow d \downarrow - d^C \downarrow d \uparrow - 2 s^C \uparrow s \downarrow + 2 s^C \downarrow s \uparrow)$

Tabelle E.1: Wellenfunktionen der pseudoskalaren Mesonen (Massenwerte aus [1])

Meson	Masse (MeV)	Spin S	S_z	Wellenfunktion
$\rho_{(+)}^+$	770.0	1	+1	$-d^C \uparrow u \uparrow$
$\rho_{(0)}^+$	770.0	1	0	$-1/\sqrt{2} (d^C \uparrow u \downarrow + d^C \downarrow u \uparrow)$
$\rho_{(-)}^+$	770.0	1	-1	$-d^C \downarrow u \downarrow$
$\rho_{(+)}^0$	770.0	1	+1	$1/\sqrt{2} (u^C \uparrow u \uparrow - d^C \uparrow d \uparrow)$
$\rho_{(0)}^0$	770.0	1	0	$1/2 (u^C \uparrow u \downarrow + u^C \downarrow u \uparrow - d^C \uparrow d \downarrow - d^C \downarrow d \uparrow)$
$\rho_{(-)}^0$	770.0	1	-1	$1/\sqrt{2} (u^C \downarrow u \downarrow - d^C \downarrow d \downarrow)$
$\rho_{(+)}^-$	770.0	1	+1	$u^C \uparrow d \uparrow$
$\rho_{(0)}^-$	770.0	1	0	$1/\sqrt{2} (u^C \uparrow d \downarrow + u^C \downarrow d \uparrow)$
$\rho_{(-)}^-$	770.0	1	-1	$u^C \downarrow d \downarrow$
$\omega_{(+)}$	781.94	1	+1	$1/\sqrt{2} (u^C \uparrow u \uparrow + d^C \uparrow d \uparrow)$
$\omega_{(0)}$	781.94	1	0	$1/2 (u^C \uparrow u \downarrow + u^C \downarrow u \uparrow + d^C \uparrow d \downarrow + d^C \downarrow d \uparrow)$
$\omega_{(-)}$	781.94	1	-1	$1/\sqrt{2} (u^C \downarrow u \downarrow + d^C \downarrow d \downarrow)$
$K_{(+)}^{*+}$	891.66	1	+1	$s^C \uparrow u \uparrow$
$K_{(0)}^{*+}$	891.66	1	0	$1/\sqrt{2} (s^C \uparrow u \downarrow + s^C \downarrow u \uparrow)$
$K_{(-)}^{*+}$	891.66	1	-1	$s^C \downarrow u \downarrow$
$K_{(+)}^{*0}$	896.1	1	+1	$s^C \uparrow d \uparrow$
$K_{(0)}^{*0}$	896.1	1	0	$1/\sqrt{2} (s^C \uparrow d \downarrow + s^C \downarrow d \uparrow)$
$K_{(-)}^{*0}$	896.1	1	-1	$s^C \downarrow d \downarrow$

Tabelle E.2: Wellenfunktionen der Vektormesonen (Massenwerte aus [1])

E.3 Phasenraumfaktoren

Die Phasenraumfaktoren, welche die $SU(6)$ -Spin-Flavour-Symmetrie des in Abschnitt 6.2 verwendeten nichtrelativistischen Quark-Modells brechen, sind durch

$$\rho_{p,n} = (1 - \chi_{p,n}^2)(1 - \chi_{p,n}^4) \quad (\text{E.1})$$

gegeben, wobei $\chi_{p,n} = m_{\text{Meson}}/m_{p,n}$ der Quotient aus Mesonmasse und Masse des Protons beziehungsweise Neutrons ist ($m_p = 938.27231$ MeV, $m_n = 939.56563$ MeV [1]). Tabelle E.3 gibt die entsprechenden Werte für die relevanten Mesonen an.

E.4 Übergangsamplituden

In diesem Abschnitt sind die Resultate für die hadronischen Übergangsamplituden und -wahrscheinlichkeiten der Nukleonenzerfälle zusammengefasst. Tabelle E.4 zeigt die Amplituden der elementaren Zerfallsprozesse des Protons und des Neutrons. Alle dort nicht aufgelisteten Amplituden lassen sich durch Symmetrieüberlegungen herleiten. So unterscheiden sich die Amplituden mit Antileptonen der zweiten und dritten Familie im Endzustand von denen mit e^+ und ν_e^C lediglich durch die Vorfaktoren A_i ; diese lassen sich

Meson	ρ_p	ρ_n	Meson	ρ_p	ρ_n
π^0	0.97889	0.97895	ρ^0	0.17842	0.18025
π^\pm	0.97739	0.97746	ρ^\pm	0.17842	0.18025
K^\pm	0.66774	0.66875	ω	0.15812	0.15993
K^0	0.66178	0.66280	$K^{*\pm}$	0.01787	0.01877
η	0.58338	0.58462	K^{*0}	0.01476	0.01560

Tabelle E.3: Phasenraumfaktoren für Proton- und Neutronzerfälle in Abhängigkeit vom Meson im Endzustand

(6.1) entnehmen. Die Übergangsamplituden mit linkshändigen Antileptonen erhält man aus denjenigen mit rechtshändigen Antileptonen, indem man \bar{l}_R^C durch \bar{l}_L^C ersetzt und die Spineinstellungen \uparrow und \downarrow der Quarks vertauscht. Auch hier ändern sich lediglich die Vorfaktoren A_i gemäß (6.1), die numerischen Werte der Amplituden in der dritten Spalte bleiben gleich. Tabelle E.5 listet die Übergangswahrscheinlichkeiten für Zerfallsprozesse mit physikalischen Teilchen in den Endzuständen auf.

Zerfallsprozess	Lagrangedichte-Term	Amplitude ($\cdot\sqrt{30}$)	Vorfaktor
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ u^C \uparrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-4	A_2
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ u^C \downarrow u\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-8	A_2
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ d^C \uparrow d\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-8	A_2
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ d^C \downarrow d\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	+2	A_2
$p\downarrow \rightarrow e_R^+ u^C \downarrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-10	A_2
$p\downarrow \rightarrow e_R^+ d^C \downarrow d\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-2	A_2
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ s^C \uparrow d\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu s_R)$	-8	A_6
$p\uparrow \rightarrow e_R^+ s^C \downarrow d\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu s_R)$	+2	A_6
$p\downarrow \rightarrow e_R^+ s^C \downarrow d\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu s_R)$	-2	A_6
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \uparrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+4	A_9
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \downarrow u\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-10	A_9
$p\downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \downarrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-8	A_9
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \uparrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	+4	A_{11}
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow u\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	+2	A_{11}
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \uparrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	0	A_{13}
$p\uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow u\uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-12	A_{13}
$p\downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	+4	A_{11}
$p\downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow u\downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-12	A_{13}

Zerfallsprozess	Lagrangedichte-Term	Amplitude ($\cdot\sqrt{30}$)	Vorfaktor
$n \uparrow \rightarrow e_R^+ u^C \uparrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	-4	A_2
$n \uparrow \rightarrow e_R^+ u^C \downarrow d \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	+10	A_2
$n \downarrow \rightarrow e_R^+ u^C \downarrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu u_L)(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R)$	+8	A_2
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C u^C \uparrow u \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+8	A_9
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C u^C \downarrow u \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	-2	A_9
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \uparrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+4	A_9
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \downarrow d \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+8	A_9
$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C u^C \downarrow u \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+2	A_9
$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C d^C \downarrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+10	A_9
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \uparrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	+4	A_{11}
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow d \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	-4	A_{11}
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \uparrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	0	A_{13}
$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow d \uparrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+12	A_{13}
$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu d_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu s_R)$	-2	A_{11}
$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C s^C \downarrow d \downarrow$	$(\bar{u}_L^C \gamma^\mu s_L)(\bar{\nu}_{eR}^C \gamma_\mu d_R)$	+12	A_{13}

Tabelle E.4: Übergangsamplituden für die Elementarprozesse der Nukleonenzerfälle

E.5 Experimentelle Grenzen für die Nukleonzerfallsraten

Tabelle E.7 zeigt die in [1] angegebenen Untergrenzen für die inversen partiellen Zerfallsraten der Nukleonen aufgrund der experimentellen Nichtbeobachtung dieser Prozesse. Die aktuellsten Resultate des Super-Kamiokande-Experiments bzgl. der Nukleonenzerfälle sind in Tabelle E.6 zu finden.

Zerfallsprozess	Amplitude · Vorfaktor ²	Zerfallsprozess	Amplitude · Vorfaktor ²
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ \pi^0$	$(49/30) A_2^2$	$n \uparrow \rightarrow e_R^+ \pi^-$	$(49/15) A_2^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ K^0$	$(5/3) A_6^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \pi^0$	$(49/30) A_9^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ \eta$	$(1/10) A_2^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C K^0$	$(4/15)(2 A_{11} - 3 A_{13})^2$
$p \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \pi^+$	$(49/15) A_9^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \eta$	$(1/10) A_9^2$
$p \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C K^+$	$(1/15)(A_{11} + 6 A_{13})^2$	$n \uparrow \rightarrow e_R^+ \rho_{(0)}^-$	$(3/5) A_2^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ \rho_{(0)}^0$	$(3/10) A_2^2$	$n \downarrow \rightarrow e_R^+ \rho_{(-)}^-$	$(32/15) A_2^2$
$p \downarrow \rightarrow e_R^+ \rho_{(-)}^0$	$(16/15) A_2^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \rho_{(0)}^0$	$(3/10) A_9^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ \omega_{(0)}$	$(27/10) A_2^2$	$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C \rho_{(-)}^0$	$(16/15) A_9^2$
$p \downarrow \rightarrow e_R^+ \omega_{(-)}$	$(12/5) A_2^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \omega_{(0)}^0$	$(27/10) A_9^2$
$p \uparrow \rightarrow e_R^+ K_{(0)}^{*0}$	$(3/5) A_6^2$	$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C \omega_{(-)}^0$	$(12/5) A_9^2$
$p \downarrow \rightarrow e_R^+ K_{(-)}^{*0}$	$(2/15) A_6^2$	$n \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C K_{(0)}^{*0}$	$(12/5) A_{13}^2$
$p \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C \rho_{(0)}^+$	$(3/5) A_9^2$	$n \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C K_{(-)}^{*0}$	$(2/15)(A_{11} - 6 A_{13})^2$
$p \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C \rho_{(-)}^+$	$(32/15) A_9^2$		
$p \uparrow \rightarrow \nu_{eR}^C K_{(0)}^{*+}$	$(3/5)(A_{11} - 2 A_{13})^2$		
$p \downarrow \rightarrow \nu_{eR}^C K_{(-)}^{*+}$	$(8/15)(A_{11} - 3 A_{13})^2$		

Tabelle E.5: Übergangswahrscheinlichkeiten für Zerfallsprozesse der Nukleonen mit physikalischen Endzuständen

Zerfallsprozess	Super-Kamiokande [49]	Part. Data Group 2000 [1]
$p \rightarrow e^+ \pi^0$	29	5.5
$p \rightarrow e^+ \eta$	11	1.4
$p \rightarrow \mu^+ \pi^0$	23	2.7
$p \rightarrow \mu^+ K^0$	4.0	1.2
$p \rightarrow \mu^+ \eta$	7.8	0.69
$p \rightarrow \nu^C K^+$	6.8	1.0
$n \rightarrow \nu^C \eta$	5.6	0.54

Tabelle E.6: Aktuelle Resultate von Super-Kamiokande für die unteren Grenzen der Nukleonlebensdauern in einigen Zerfallskanälen (alle Werte in 10^{32} Jahren).

Zerfallskanal	$1/\Gamma_i$ (10^{30} yr)	Zerfallskanal	$1/\Gamma_i$ (10^{30} yr)
$p \rightarrow e^+\pi^0$	> 550	$n \rightarrow e^+\pi^-$	> 130
$p \rightarrow e^+K^0$	> 150	$n \rightarrow \mu^+\pi^-$	> 100
$p \rightarrow e^+\eta$	> 140	$n \rightarrow e^+\rho^-$	> 58
$p \rightarrow \mu^+\pi^0$	> 270	$n \rightarrow \mu^+\rho^-$	> 23
$p \rightarrow \mu^+K^0$	> 120	$n \rightarrow \nu^C\pi^0$	> 100
$p \rightarrow \mu^+\eta$	> 69	$n \rightarrow \nu^CK^0$	> 86
$p \rightarrow e^+\rho^0$	> 75	$n \rightarrow \nu^C\eta$	> 54
$p \rightarrow e^+\omega$	> 45	$n \rightarrow \nu^C\rho^0$	> 19
$p \rightarrow e^+K^{*0}$	> 52	$n \rightarrow \nu^C\omega$	> 43
$p \rightarrow \mu^+\rho^0$	> 110	$n \rightarrow \nu^CK^{*0}$	> 22
$p \rightarrow \mu^+\omega$	> 57		
$p \rightarrow \nu^C\pi^+$	> 25		
$p \rightarrow \nu^CK^+$	> 100		
$p \rightarrow \nu^C\rho^+$	> 27		
$p \rightarrow \nu^CK^{*+}$	> 20		

Tabelle E.7: Experimentelle Grenzen für die Lebensdauern $1/\Gamma_i$ der Nukleonen [1]

Zerfallskanal des Protons	No Mix %	LMA #1 %	LMA #2 %	LMA #3 %	LMA #4 %	LMA #5 %	LMA #6 %
$p \rightarrow e^+\pi^0$	33.6	17.4	17.4	17.4	17.4	17.4	17.4
$p \rightarrow e^+K^0$	—	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6
$p \rightarrow e^+\eta$	1.2	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$p \rightarrow \mu^+\pi^0$	—	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1
$p \rightarrow \mu^+K^0$	5.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
$p \rightarrow \mu^+\eta$	—	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$p \rightarrow e^+\rho^0$	5.1	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7
$p \rightarrow e^+\omega$	16.9	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8
$p \rightarrow e^+K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \mu^+\rho^0$	—	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
$p \rightarrow \mu^+\omega$	—	8.1	8.1	8.1	8.1	8.1	8.1
$p \rightarrow \nu_e^C \pi^+$	32.3	18.9	24.2	19.6	14.4	19.9	21.7
$p \rightarrow \nu_e^C K^+$	—	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\mu^C \pi^+$	—	11.8	6.6	11.0	16.3	10.8	8.9
$p \rightarrow \nu_\mu^C K^+$	0.1	0.2	0.0	0.1	0.2	0.2	0.1
$p \rightarrow \nu_e^C \rho^+$	4.9	2.9	3.7	3.0	2.2	3.0	3.3
$p \rightarrow \nu_e^C K^{*+}$	—	0.1	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
$p \rightarrow \nu_\mu^C \rho^+$	—	1.8	1.0	1.7	2.5	1.7	1.4
$p \rightarrow \nu_\mu^C K^{*+}$	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C \pi^+$	—	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.1
$p \rightarrow \nu_\tau^C K^+$	—	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.1
$p \rightarrow \nu_\tau^C \rho^+$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C K^{*+}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle E.8: Partielle p -Zerfallsraten für die reellen LMA-Lösungen.

Zerfallskanal des Neutrons	No Mix %	LMA #1 %	LMA #2 %	LMA #3 %	LMA #4 %	LMA #5 %	LMA #6 %
$n \rightarrow e^+ \pi^-$	62.9	32.5	32.5	32.5	32.5	32.5	32.5
$n \rightarrow \mu^+ \pi^-$	—	30.1	30.1	30.1	30.1	30.0	30.1
$n \rightarrow e^+ \rho^-$	9.7	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
$n \rightarrow \mu^+ \rho^-$	—	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6
$n \rightarrow \nu_e^C \pi^0$	15.1	8.8	11.3	9.2	6.7	9.3	10.2
$n \rightarrow \nu_e^C K^0$	—	2.5	0.3	2.3	2.6	2.7	2.3
$n \rightarrow \nu_e^C \eta$	0.6	0.3	0.4	0.3	0.2	0.3	0.4
$n \rightarrow \nu_\mu^C \pi^0$	—	5.5	3.1	5.1	7.6	5.1	4.1
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^0$	1.7	0.0	2.3	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C \eta$	—	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
$n \rightarrow \nu_e^C \rho^0$	2.3	1.4	1.7	1.4	1.0	1.4	1.6
$n \rightarrow \nu_e^C \omega$	7.7	4.5	5.8	4.7	3.4	4.7	5.2
$n \rightarrow \nu_e^C K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C \rho^0$	—	0.8	0.5	0.8	1.2	0.8	0.6
$n \rightarrow \nu_\mu^C \omega$	—	2.8	1.6	2.6	3.9	2.6	2.1
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^{*0}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \pi^0$	—	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.1
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^0$	—	0.8	0.7	1.0	0.7	0.6	1.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \eta$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \rho^0$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \omega$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle E.9: Partielle n -Zerfallsraten für die reellen LMA-Lösungen.

Zerfallskanal des Protons	No Mix %	LMA #1 %	LMA #2 %	LMA #3 %	LMA #4 %	LMA #5 %	LMA #6 %
$p \rightarrow e^+\pi^0$	33.6	17.6	17.6	17.6	17.7	17.7	17.7
$p \rightarrow e^+K^0$	—	4.6	4.6	4.6	4.5	4.5	4.5
$p \rightarrow e^+\eta$	1.2	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$p \rightarrow \mu^+\pi^0$	—	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1
$p \rightarrow \mu^+K^0$	5.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
$p \rightarrow \mu^+\eta$	—	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$p \rightarrow e^+\rho^0$	5.1	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7
$p \rightarrow e^+\omega$	16.9	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9
$p \rightarrow e^+K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \mu^+\rho^0$	—	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
$p \rightarrow \mu^+\omega$	—	8.1	8.1	8.1	8.1	8.1	8.1
$p \rightarrow \nu_e^C \pi^+$	32.3	19.8	22.5	17.9	13.1	18.6	20.1
$p \rightarrow \nu_e^C K^+$	—	0.1	0.4	0.1	0.1	0.1	0.1
$p \rightarrow \nu_\mu^C \pi^+$	—	10.2	7.6	12.3	17.1	11.6	10.1
$p \rightarrow \nu_\mu^C K^+$	0.1	0.3	0.0	0.3	0.4	0.3	0.2
$p \rightarrow \nu_e^C \rho^+$	4.9	3.0	3.4	2.7	2.0	2.8	3.1
$p \rightarrow \nu_e^C K^{*+}$	—	0.1	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
$p \rightarrow \nu_\mu^C \rho^+$	—	1.6	1.2	1.9	2.6	1.8	1.5
$p \rightarrow \nu_\mu^C K^{*+}$	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C \pi^+$	—	0.2	0.1	0.1	0.0	0.1	0.1
$p \rightarrow \nu_\tau^C K^+$	—	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.1
$p \rightarrow \nu_\tau^C \rho^+$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C K^{*+}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle E.10: Partielle p -Zerfallsraten für $\phi = 0.3$.

Zerfallskanal des Neutrons	No Mix %	LMA #1 %	LMA #2 %	LMA #3 %	LMA #4 %	LMA #5 %	LMA #6 %
$n \rightarrow e^+ \pi^-$	62.9	32.7	32.7	32.7	32.7	32.7	32.7
$n \rightarrow \mu^+ \pi^-$	—	29.8	29.8	29.8	29.8	29.8	29.8
$n \rightarrow e^+ \rho^-$	9.7	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
$n \rightarrow \mu^+ \rho^-$	—	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6
$n \rightarrow \nu_e^C \pi^0$	15.1	9.2	10.5	8.3	6.1	8.6	9.3
$n \rightarrow \nu_e^C K^0$	—	3.2	0.6	2.7	2.9	3.2	2.8
$n \rightarrow \nu_e^C \eta$	0.6	0.3	0.4	0.3	0.2	0.3	0.3
$n \rightarrow \nu_\mu^C \pi^0$	—	4.7	3.5	5.7	7.9	5.4	4.7
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^0$	1.7	0.1	2.8	0.1	0.2	0.1	0.1
$n \rightarrow \nu_\mu^C \eta$	—	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
$n \rightarrow \nu_e^C \rho^0$	2.3	1.4	1.6	1.3	0.9	1.3	1.4
$n \rightarrow \nu_e^C \omega$	7.7	4.7	5.3	4.2	3.1	4.4	4.8
$n \rightarrow \nu_e^C K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C \rho^0$	—	0.7	0.5	0.9	1.2	0.8	0.7
$n \rightarrow \nu_\mu^C \omega$	—	2.4	1.8	2.9	4.0	2.7	2.4
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^{*0}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \pi^0$	—	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^0$	—	0.7	0.6	1.2	0.9	0.7	1.1
$n \rightarrow \nu_\tau^C \eta$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \rho^0$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \omega$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle E.11: Partielle n -Zerfallsraten für $\phi = 0.3$.

Zerfallskanal des Protons	No Mix %	LMA #1 %	LMA #2 %	LMA #3 %	LMA #4 %	LMA #5 %	LMA #6 %
$p \rightarrow e^+\pi^0$	33.6	17.6	17.6	17.6	17.7	17.6	17.7
$p \rightarrow e^+K^0$	—	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6
$p \rightarrow e^+\eta$	1.2	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$p \rightarrow \mu^+\pi^0$	—	16.1	16.1	16.3	16.3	16.3	16.3
$p \rightarrow \mu^+K^0$	5.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
$p \rightarrow \mu^+\eta$	—	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
$p \rightarrow e^+\rho^0$	5.1	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7
$p \rightarrow e^+\omega$	16.9	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9
$p \rightarrow e^+K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \mu^+\rho^0$	—	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
$p \rightarrow \mu^+\omega$	—	8.1	8.1	8.2	8.2	8.2	8.2
$p \rightarrow \nu_e^C \pi^+$	32.3	19.7	22.8	19.2	14.0	19.4	21.3
$p \rightarrow \nu_e^C K^+$	—	0.1	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\mu^C \pi^+$	—	10.4	7.4	10.8	16.0	10.7	8.7
$p \rightarrow \nu_\mu^C K^+$	0.1	0.3	0.0	0.1	0.2	0.2	0.1
$p \rightarrow \nu_e^C \rho^+$	4.9	3.0	3.5	2.9	2.1	3.0	3.2
$p \rightarrow \nu_e^C K^{*+}$	—	0.2	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
$p \rightarrow \nu_\mu^C \rho^+$	—	1.6	1.1	1.6	2.4	1.6	1.3
$p \rightarrow \nu_\mu^C K^{*+}$	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C \pi^+$	—	0.2	0.1	0.2	0.0	0.0	0.1
$p \rightarrow \nu_\tau^C K^+$	—	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.1
$p \rightarrow \nu_\tau^C \rho^+$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C K^{*+}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle E.12: Partielle p -Zerfallsraten für $\Omega = 0.003$.

Zerfallskanal des Neutrons	No Mix %	LMA #1 %	LMA #2 %	LMA #3 %	LMA #4 %	LMA #5 %	LMA #6 %
$n \rightarrow e^+ \pi^-$	62.9	32.6	32.6	32.6	32.7	32.7	32.7
$n \rightarrow \mu^+ \pi^-$	—	29.9	29.8	30.2	30.2	30.1	30.2
$n \rightarrow e^+ \rho^-$	9.7	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
$n \rightarrow \mu^+ \rho^-$	—	4.6	4.6	4.7	4.7	4.7	4.7
$n \rightarrow \nu_e^C \pi^0$	15.1	9.2	10.6	8.9	6.5	9.0	9.9
$n \rightarrow \nu_e^C K^0$	—	3.3	0.5	2.6	2.9	3.1	2.7
$n \rightarrow \nu_e^C \eta$	0.6	0.3	0.4	0.3	0.2	0.3	0.4
$n \rightarrow \nu_\mu^C \pi^0$	—	4.8	3.5	5.0	7.4	5.0	4.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^0$	1.7	0.0	2.9	0.0	0.1	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C \eta$	—	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1
$n \rightarrow \nu_e^C \rho^0$	2.3	1.4	1.6	1.4	1.0	1.4	1.5
$n \rightarrow \nu_e^C \omega$	7.7	4.7	5.4	4.5	3.3	4.6	5.0
$n \rightarrow \nu_e^C K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C \rho^0$	—	0.7	0.5	0.8	1.1	0.8	0.6
$n \rightarrow \nu_\mu^C \omega$	—	2.5	1.8	2.5	3.8	2.5	2.1
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^{*0}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \pi^0$	—	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.1
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^0$	—	0.7	0.7	1.0	0.7	0.6	1.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \eta$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \rho^0$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \omega$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^{*0}$	—	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle E.13: Partielle n -Zerfallsraten für $\Omega = 0.003$.

Zerfallskanal des Protons	% #1	% #2	% #3	% #4
$p \rightarrow e^+\pi^0$	21.6	4.8	17.5	21.6
$p \rightarrow e^+K^0$	0.3	0.8	4.6	0.3
$p \rightarrow e^+\eta$	0.8	0.2	0.6	0.8
$p \rightarrow \mu^+\pi^0$	13.9	21.8	16.1	13.9
$p \rightarrow \mu^+K^0$	1.3	4.6	2.8	1.3
$p \rightarrow \mu^+\eta$	0.5	0.8	0.6	0.5
$p \rightarrow e^+\rho^0$	3.3	0.7	2.7	3.3
$p \rightarrow e^+\omega$	10.9	2.4	8.8	10.9
$p \rightarrow e^+K^{*0}$	0.0	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \mu^+\rho^0$	2.1	3.3	2.5	2.1
$p \rightarrow \mu^+\omega$	7.0	11.0	8.1	7.0
$p \rightarrow \nu_e^C\pi^+$	31.9	8.2	29.8	32.3
$p \rightarrow \nu_e^CK^+$	0.1	0.2	0.1	0.1
$p \rightarrow \nu_\mu^C\pi^+$	0.5	34.1	0.9	0.5
$p \rightarrow \nu_\mu^CK^+$	0.0	0.1	0.2	0.1
$p \rightarrow \nu_e^C\rho^+$	4.9	1.3	4.6	4.9
$p \rightarrow \nu_e^CK^{*+}$	0.1	0.0	0.1	0.1
$p \rightarrow \nu_\mu^C\rho^+$	0.1	5.2	0.1	0.1
$p \rightarrow \nu_\mu^CK^{*+}$	0.0	0.3	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C\pi^+$	0.4	0.2	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^CK^+$	0.1	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^C\rho^+$	0.1	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \nu_\tau^CK^{*+}$	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle E.14: Partielle p -Zerfallsraten für die S-MSW-Lösungen.

Zerfallskanal des Neutrons	%	%	%	%
	#1	#2	#3	#4
$n \rightarrow e^+ \pi^-$	37.9	9.2	32.5	37.9
$n \rightarrow \mu^+ \pi^-$	24.5	41.7	30.0	24.5
$n \rightarrow e^+ \rho^-$	5.8	1.4	5.0	5.8
$n \rightarrow \mu^+ \rho^-$	3.8	6.4	4.6	3.8
$n \rightarrow \nu_e^C \pi^0$	14.1	4.0	13.9	14.2
$n \rightarrow \nu_e^C K^0$	2.0	0.0	2.0	1.9
$n \rightarrow \nu_e^C \eta$	0.5	0.1	0.5	0.5
$n \rightarrow \nu_\mu^C \pi^0$	0.2	16.4	0.4	0.2
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^0$	0.3	6.4	1.1	1.2
$n \rightarrow \nu_\mu^C \eta$	0.0	0.6	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_e^C \rho^0$	2.2	0.6	2.1	2.2
$n \rightarrow \nu_e^C \omega$	7.2	2.0	7.1	7.3
$n \rightarrow \nu_e^C K^{*0}$	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C \rho^0$	0.0	2.5	0.1	0.0
$n \rightarrow \nu_\mu^C \omega$	0.1	8.3	0.2	0.1
$n \rightarrow \nu_\mu^C K^{*0}$	0.0	0.1	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \pi^0$	0.2	0.1	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^0$	1.1	0.0	0.2	0.3
$n \rightarrow \nu_\tau^C \eta$	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \rho^0$	0.0	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C \omega$	0.1	0.0	0.0	0.0
$n \rightarrow \nu_\tau^C K^{*0}$	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle E.15: Partielle n -Zerfallsraten für die S-MSW-Lösungen.

Anhang F

Explizite Form der LMA-Lösungen bei M_Z

Dieser Anhang enthält eine Zusammenstellung der Massenmatrizen für die LMA-Neutrinolösungen an der Skala M_Z . Die Matrizen sind in der Form (1) angegeben, wobei die Reihenfolge der Massenmatrizen stets \mathbf{M}_u , \mathbf{M}_d , \mathbf{M}_e und \mathbf{M}_n entspricht.

Alle Matrixelemente bis auf die, der Neutrinomatrix, sind in MeV angegeben, die Einträge in \mathbf{M}_n erfolgen in eV. Entsprechend übertragen sich diese Einheiten auf die nebenstehenden Diagonalelemente der jeweiligen Matrix. Desweiteren sind die Mischungswinkel und ggf. Phasen rechts von der zugehörigen Massenmatrix in der Form (2) dargestellt.

Die Rechnungen wurden mit den vollständigen 2-Loop RG-Gleichungen für $\tan \beta = 10$ durchgeführt.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Re}(M_{11}) & \text{Im}(M_{11}) \\
 \text{Re}(M_{12}) & \text{Im}(M_{12}) \\
 \text{Re}(M_{13}) & \text{Im}(M_{13}) \\
 \text{Re}(M_{21}) & \text{Im}(M_{21}) \\
 \text{Re}(M_{22}) & \text{Im}(M_{22}) \\
 \text{Re}(M_{23}) & \text{Im}(M_{23}) \\
 \text{Re}(M_{31}) & \text{Im}(M_{31}) \\
 \text{Re}(M_{32}) & \text{Im}(M_{32}) \\
 \text{Re}(M_{33}) & \text{Im}(M_{33})
 \end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{l}
 ##### \\
 \theta_{l_{12}} | \theta_{r_{12}} \\
 \theta_{l_{13}} | \theta_{r_{13}} \\
 \theta_{l_{23}} | \theta_{r_{23}} \\
 \delta_l | \delta_r \\
 \alpha_{l_{11}} | \alpha_{r_{11}} \\
 \alpha_{l_{12}} | \alpha_{r_{12}} \\
 \alpha_{l_{13}} | \alpha_{r_{13}} \\
 \alpha_{l_{23}} | \alpha_{r_{23}} \\
 \alpha_{l_{33}} | \alpha_{r_{33}} \\
 #####
 \end{array}$$

(2)

LMA #1 @ M_Z:

=====

+4.109582E-06	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
-5.175963E+01	+0.000000E+00	2.328781	theta12 = 3.218 3.097
+4.611701E-03	+0.000000E+00	676.244897	theta13 = 0.000 0.001
+2.361631E+02	+0.000000E+00	180247.513260	theta23 = 1.665 3.142
+2.546267E+01	+0.000000E+00		#####
-1.794445E+05	+0.000000E+00		
+8.196923E+00	+0.000000E+00		
+6.741807E+02	+0.000000E+00		
+1.699356E+04	+0.000000E+00		

+2.367445E-07	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+1.433205E+01	+0.000000E+00	4.662050	theta12 = 0.147 2.814
-8.311473E-04	+0.000000E+00	92.925502	theta13 = 3.142 0.064
-2.255749E+02	+0.000000E+00	3488.019746	theta23 = 1.704 0.003
+2.313348E-01	+0.000000E+00		#####
-3.449682E+03	+0.000000E+00		
-1.814186E-01	+0.000000E+00		
+8.756722E+01	+0.000000E+00		
+4.646237E+02	+0.000000E+00		

+2.016009E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.932040E+00	+0.000000E+00	0.485504	theta12 = 3.140 4.316
+2.366102E-03	+0.000000E+00	102.471425	theta13 = 0.002 0.000
-9.451043E+01	+0.000000E+00	1741.911681	theta23 = 3.145 1.705
+2.393707E-02	+0.000000E+00		#####
+3.995410E+01	+0.000000E+00		
+1.304524E-03	+0.000000E+00		
-1.726359E+03	+0.000000E+00		
+2.321584E+02	+0.000000E+00		

```

+8.413386E-13 +0.000000E+00 D-Elemente: #####
-4.667544E-03 +0.000000E+00 0.001903 theta12 = 2.603 | 0.539
+1.228004E-07 +0.000000E+00 0.005962 theta13 = 0.053 | 3.089
-4.667544E-03 +0.000000E+00 0.059208 theta23 = 3.878 | 2.405
+2.431586E-02 +0.000000E+00 #####
+3.129905E-02 +0.000000E+00
+1.228004E-07 +0.000000E+00
+3.129905E-02 +0.000000E+00
+3.083368E-02 +0.000000E+00

```

CKM: Typ I @ M_Z

PMNS:

====

```

(0.858536, 0.510053, 0.052555)
(0.349399, 0.656955, 0.668080)
(0.375282, 0.555208, 0.742231)

```

LMA #2 @ M_Z:

=====

+4.109582E-06	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
-5.175963E+01	+0.000000E+00	2.328781	theta12 = 3.218 3.097
+4.611701E-03	+0.000000E+00	676.244897	theta13 = 0.000 0.001
+2.361631E+02	+0.000000E+00	180247.513260	theta23 = 1.665 3.142
+2.546267E+01	+0.000000E+00		#####
-1.794445E+05	+0.000000E+00		
+8.196923E+00	+0.000000E+00		
+6.741807E+02	+0.000000E+00		
+1.699356E+04	+0.000000E+00		

+2.367445E-07	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+1.433205E+01	+0.000000E+00	4.662050	theta12 = 0.147 2.814
-8.311473E-04	+0.000000E+00	92.925502	theta13 = 3.142 0.064
-2.255749E+02	+0.000000E+00	3488.019746	theta23 = 1.704 0.003
+2.313348E-01	+0.000000E+00		#####
-3.449682E+03	+0.000000E+00		
-1.814186E-01	+0.000000E+00		
+8.756722E+01	+0.000000E+00		
+4.646237E+02	+0.000000E+00		

+2.016009E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.932040E+00	+0.000000E+00	0.485504	theta12 = 3.140 4.316
+2.366102E-03	+0.000000E+00	102.471425	theta13 = 0.002 0.000
-9.451043E+01	+0.000000E+00	1741.911681	theta23 = 3.145 1.705
+2.393707E-02	+0.000000E+00		#####
+3.995410E+01	+0.000000E+00		
+1.304524E-03	+0.000000E+00		
-1.726359E+03	+0.000000E+00		
+2.321584E+02	+0.000000E+00		

```
+1.104615E-12 +0.000000E+00 D-Elemente: #####
-6.316221E-03 +0.000000E+00 0.003751 theta12 = 0.615 | 0.615
+1.555404E-07 +0.000000E+00 0.006760 theta13 = 0.065 | 3.077
-6.316221E-03 +0.000000E+00 0.060447 theta23 = 3.814 | 0.672
+2.503983E-02 +0.000000E+00 #####
+2.766822E-02 +0.000000E+00
+1.555404E-07 +0.000000E+00
+2.766822E-02 +0.000000E+00
+3.841593E-02 +0.000000E+00
```

CKM: Typ I @ M_Z

PMNS:

====

```
(0.813640, 0.577794, 0.064374)
(0.486791, 0.616550, 0.618790)
(0.317843, 0.534810, 0.782914)
```

LMA #3 @ M_Z:

=====

+4.109582E-06	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
-5.175963E+01	+0.000000E+00	2.328781	theta12 = 3.218 3.097
+4.611701E-03	+0.000000E+00	676.244897	theta13 = 0.000 0.001
+2.361631E+02	+0.000000E+00	180247.513260	theta23 = 1.665 3.142
+2.546267E+01	+0.000000E+00		#####
-1.794445E+05	+0.000000E+00		
+8.196923E+00	+0.000000E+00		
+6.741807E+02	+0.000000E+00		
+1.699356E+04	+0.000000E+00		

+2.367445E-07	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+1.433205E+01	+0.000000E+00	4.662050	theta12 = 0.147 2.814
-8.311473E-04	+0.000000E+00	92.925502	theta13 = 3.142 0.064
-2.255749E+02	+0.000000E+00	3488.019746	theta23 = 1.704 0.003
+2.313348E-01	+0.000000E+00		#####
-3.449682E+03	+0.000000E+00		
-1.814186E-01	+0.000000E+00		
+8.756722E+01	+0.000000E+00		
+4.646237E+02	+0.000000E+00		

+2.016009E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.932040E+00	+0.000000E+00	0.485504	theta12 = 3.140 4.316
+2.366102E-03	+0.000000E+00	102.471425	theta13 = 0.002 0.000
-9.451043E+01	+0.000000E+00	1741.911681	theta23 = 3.145 1.705
+2.393707E-02	+0.000000E+00		#####
+3.995410E+01	+0.000000E+00		
+1.304524E-03	+0.000000E+00		
-1.726359E+03	+0.000000E+00		
+2.321584E+02	+0.000000E+00		

```

+8.626811E-13 +0.000000E+00 D-Elemente: #####
-5.614722E-03 +0.000000E+00 0.001902 theta12 = 0.582 | 2.559
+1.023029E-07 +0.000000E+00 0.005327 theta13 = 3.079 | 0.062
-5.614722E-03 +0.000000E+00 0.072479 theta23 = 2.202 | 0.940
+4.575680E-02 +0.000000E+00 #####
-3.595648E-02 +0.000000E+00
+1.023029E-07 +0.000000E+00
-3.595648E-02 +0.000000E+00
+2.329758E-02 +0.000000E+00

```

CKM: Typ I @ M_Z

PMNS:

====

```

(0.833222, 0.549104, 0.065010)
(0.279254, 0.519366, 0.807636)
(0.477240, 0.654786, 0.586086)

```

LMA #4 @ M_Z:

=====

+3.138708E-06	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
-5.210259E+01	+0.000000E+00	2.328775	theta12 = 0.077 3.097
-8.280466E-03	+0.000000E+00	676.243829	theta13 = 0.000 3.142
+1.445259E+02	+0.000000E+00	180247.630575	theta23 = 4.539 6.283
+4.507440E+01	+0.000000E+00		#####
+1.775549E+05	+0.000000E+00		
-5.418260E+00	+0.000000E+00		
-6.758949E+02	+0.000000E+00		
+3.103934E+04	+0.000000E+00		

+5.974397E-07	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+1.428632E+01	+0.000000E+00	4.661586	theta12 = 2.996 3.471
+1.208532E-03	+0.000000E+00	92.924463	theta13 = 0.000 0.064
-2.252712E+02	+0.000000E+00	3487.996869	theta23 = 4.579 3.138
+3.397431E-01	+0.000000E+00		#####
+3.449485E+03	+0.000000E+00		
+2.221313E-01	+0.000000E+00		
-8.753109E+01	+0.000000E+00		
+4.660676E+02	+0.000000E+00		

+2.015495E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.919758E+00	+0.000000E+00	0.485516	theta12 = 0.002 1.967
-2.365930E-03	+0.000000E+00	102.471056	theta13 = 3.139 0.000
-9.451475E+01	+0.000000E+00	1741.919967	theta23 = 3.139 1.437
+2.400487E-02	+0.000000E+00		#####
-3.994497E+01	+0.000000E+00		
-1.308347E-03	+0.000000E+00		
+1.726270E+03	+0.000000E+00		
+2.328811E+02	+0.000000E+00		

```

+1.288384E-12 +0.000000E+00 D-Elemente: #####
-8.371246E-03 +0.000000E+00 0.005244 theta12 = 2.419 | 2.419
-1.531574E-07 +0.000000E+00 0.007827 theta13 = 0.089 | 3.052
-8.371246E-03 +0.000000E+00 0.059528 theta23 = 3.831 | 0.689
+2.207442E-02 +0.000000E+00 #####
+2.990786E-02 +0.000000E+00
-1.531574E-07 +0.000000E+00
+2.990786E-02 +0.000000E+00
+3.487068E-02 +0.000000E+00

```

CKM: Typ II @ M_Z

PMNS:

====

```

(0.746827, 0.658604, 0.092142)
(0.465173, 0.616376, 0.635370)
(0.475251, 0.431650, 0.766691)

```

LMA #5 @ M_Z:

=====

+3.138708E-06	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
-5.210259E+01	+0.000000E+00	2.328775	theta12 = 0.077 3.097
-8.280466E-03	+0.000000E+00	676.243829	theta13 = 0.000 3.142
+1.445259E+02	+0.000000E+00	180247.630575	theta23 = 4.539 6.283
+4.507440E+01	+0.000000E+00		#####
+1.775549E+05	+0.000000E+00		
-5.418260E+00	+0.000000E+00		
-6.758949E+02	+0.000000E+00		
+3.103934E+04	+0.000000E+00		

+5.974397E-07	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+1.428632E+01	+0.000000E+00	4.661586	theta12 = 2.996 3.471
+1.208532E-03	+0.000000E+00	92.924463	theta13 = 0.000 0.064
-2.252712E+02	+0.000000E+00	3487.996869	theta23 = 4.579 3.138
+3.397431E-01	+0.000000E+00		#####
+3.449485E+03	+0.000000E+00		
+2.221313E-01	+0.000000E+00		
-8.753109E+01	+0.000000E+00		
+4.660676E+02	+0.000000E+00		

+2.015495E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.919758E+00	+0.000000E+00	0.485516	theta12 = 0.002 1.967
-2.365930E-03	+0.000000E+00	102.471056	theta13 = 3.139 0.000
-9.451475E+01	+0.000000E+00	1741.919967	theta23 = 3.139 1.437
+2.400487E-02	+0.000000E+00		#####
-3.994497E+01	+0.000000E+00		
-1.308347E-03	+0.000000E+00		
+1.726270E+03	+0.000000E+00		
+2.328811E+02	+0.000000E+00		

```
+1.145427E-12 +0.000000E+00 D-Elemente: #####
-7.441199E-03 +0.000000E+00 0.003280 theta12 = 2.608 | 0.533
-1.361655E-07 +0.000000E+00 0.010824 theta13 = 0.086 | 3.055
-7.441199E-03 +0.000000E+00 0.048351 theta23 = 3.740 | 2.544
+9.810372E-03 +0.000000E+00 #####
+2.547505E-02 +0.000000E+00
-1.361655E-07 +0.000000E+00
+2.547505E-02 +0.000000E+00
+3.099654E-02 +0.000000E+00
```

CKM: Typ II @ M_Z

PMNS:

====

(0.857650, 0.506447, 0.089151)

(0.375970, 0.735834, 0.563201)

(0.350831, 0.449511, 0.821497)

LMA #6 @ M_Z:

=====

+3.138708E-06	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
-5.210259E+01	+0.000000E+00	2.328775	theta12 = 0.077 3.097
-8.280466E-03	+0.000000E+00	676.243829	theta13 = 0.000 3.142
+1.445259E+02	+0.000000E+00	180247.630575	theta23 = 4.539 6.283
+4.507440E+01	+0.000000E+00		#####
+1.775549E+05	+0.000000E+00		
-5.418260E+00	+0.000000E+00		
-6.758949E+02	+0.000000E+00		
+3.103934E+04	+0.000000E+00		

+5.974397E-07	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+1.428632E+01	+0.000000E+00	4.661586	theta12 = 2.996 3.471
+1.208532E-03	+0.000000E+00	92.924463	theta13 = 0.000 0.064
-2.252712E+02	+0.000000E+00	3487.996869	theta23 = 4.579 3.138
+3.397431E-01	+0.000000E+00		#####
+3.449485E+03	+0.000000E+00		
+2.221313E-01	+0.000000E+00		
-8.753109E+01	+0.000000E+00		
+4.660676E+02	+0.000000E+00		

+2.015495E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.919758E+00	+0.000000E+00	0.485516	theta12 = 0.002 1.967
-2.365930E-03	+0.000000E+00	102.471056	theta13 = 3.139 0.000
-9.451475E+01	+0.000000E+00	1741.919967	theta23 = 3.139 1.437
+2.400487E-02	+0.000000E+00		#####
-3.994497E+01	+0.000000E+00		
-1.308347E-03	+0.000000E+00		
+1.726270E+03	+0.000000E+00		
+2.328811E+02	+0.000000E+00		

```

+7.862033E-13 +0.000000E+00 D-Elemente: #####
-5.219935E-03 +0.000000E+00 0.001504 theta12 = 2.639 | 0.502
-9.043944E-08 +0.000000E+00 0.006208 theta13 = 0.069 | 3.073
-5.219935E-03 +0.000000E+00 0.059086 theta23 = 4.041 | 2.242
+3.413865E-02 +0.000000E+00 #####
+3.084016E-02 +0.000000E+00
-9.043944E-08 +0.000000E+00
+3.084016E-02 +0.000000E+00
+2.024253E-02 +0.000000E+00

```

CKM: Typ II @ M_Z

PMNS:

====

```

(0.873672, 0.481141, 0.072114)
(0.249524, 0.570385, 0.782559)
(0.417654, 0.665706, 0.618386)

```

LMA #1 @ M_Z | $\phi=0.3$:

=====

+4.113192E-06	+2.384274E-08	D-Elemente:	#####
-5.175963E+01	-2.030889E-09	2.328780	theta12 = 3.218 3.097
+4.596497E-03	-1.005632E-04	676.244929	theta13 = 0.000 0.001
+2.361629E+02	-4.378675E-08	180247.513277	theta23 = 1.665 3.142
+2.538593E+01	+5.076254E-01		delta = 0.039 0.013
-1.794445E+05	+1.128342E-05		alpha11 = 0.000 0.000
+8.196934E+00	-3.075211E-07		alpha12 = 0.000 0.000
+6.741880E+02	-4.807269E-02		alpha13 = 0.000 0.013
+1.699356E+04	+1.313475E-03		alpha23 = 0.000 0.013
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.249197E-07	-7.818770E-08	D-Elemente:	#####
+1.433201E+01	+1.096340E-09	4.662090	theta12 = 0.147 0.328
-8.140889E-04	+1.128121E-04	92.924219	theta13 = 3.142 3.206
-2.255743E+02	-7.751711E-10	3488.009690	theta23 = 1.704 3.138
+2.267097E-01	+3.058695E-02		delta = 0.006 3.138
-3.449672E+03	+3.109750E-07		alpha11 = 0.000 0.300
-1.814171E-01	-5.018051E-08		alpha12 = 0.000 3.442
+8.365410E+01	+2.588256E+01		alpha13 = 0.000 0.297
+4.646226E+02	-8.117510E-04		alpha23 = 0.300 3.138
			alpha33 = 0.300 0.300
			#####

+2.017899E-08	+1.281877E-10	D-Elemente:	#####
+3.931994E+00	-1.824419E-25	0.485034	theta12 = 6.281 1.174
+2.368332E-03	+1.504491E-05	102.471402	theta13 = 0.002 3.142
-9.451016E+01	+8.648014E-29	1743.571232	theta23 = 0.003 4.579
+2.395962E-02	-1.522043E-04		delta = 0.000 0.000
+3.995399E+01	+5.084088E-23		alpha11 = 0.000 3.135
+1.304500E-03	+2.060880E-23		alpha12 = 0.000 3.135
-1.727999E+03	+1.097717E+01		alpha13 = 0.000 3.135
+2.321557E+02	-8.167248E-21		alpha23 = 3.135 0.000
			alpha33 = 3.135 3.135
			#####

```

+8.424391E-13 +7.493116E-15 D-Elemente: #####
-4.667544E-03 +6.574216E-10 0.001903 theta12 = 2.603 | 0.539
+1.228964E-07 +6.476426E-10 0.005962 theta13 = 3.089 | 0.053
-4.667544E-03 +6.574216E-10 0.059208 theta23 = 0.736 | 2.405
+2.431586E-02 -3.210287E-15 delta = 0.000 | 0.000
+3.129896E-02 +9.789799E-11 alpha11 = 0.000 | 0.000
+1.228964E-07 +6.476426E-10 alpha12 = 0.000 | 0.000
+3.129896E-02 +9.789799E-11 alpha13 = 0.000 | 0.000
+3.083350E-02 -8.786339E-16 alpha23 = 0.000 | 3.142
alpha33 = 0.000 | 0.000
#####

```

CKM:

===

```

(0.975662, 0.219263, 0.002592)
(0.219193, 0.974905, 0.038906)
(0.006114, 0.038510, 0.999240)

```

Jarlskog Invariante = 5.311629e-06

```

(0.975657,-0.003301) (0.218126,0.022298) (-0.002437,-0.000882)
(0.214910,0.043121) (-0.930381,-0.291259) (0.037171,0.011489)
(0.005840,0.001809) (-0.036790,-0.011380) (-0.954610,-0.295295)

```

PMNS:

====

```

(0.858761, 0.509675, 0.052544)
(0.349123, 0.657118, 0.668064)
(0.375023, 0.555363, 0.742247)

(0.858761,0.000010) (-0.509675,0.000017) (0.052544,-0.000000)
(0.349116,0.002314) (0.657104,0.004325) (0.668049,0.004405)
(-0.375015,-0.002484) (-0.555351,-0.003655) (0.742230,0.004893)

```

LMA #2 @ M_Z | phi=0.3:

=====

+4.113192E-06	+2.384274E-08	D-Elemente:	#####
-5.175963E+01	-2.030889E-09	2.328780	theta12 = 3.218 3.097
+4.596497E-03	-1.005632E-04	676.244929	theta13 = 0.000 0.001
+2.361629E+02	-4.378675E-08	180247.513277	theta23 = 1.665 3.142
+2.538593E+01	+5.076254E-01		delta = 0.039 0.013
-1.794445E+05	+1.128342E-05		alpha11 = 0.000 0.000
+8.196934E+00	-3.075211E-07		alpha12 = 0.000 0.000
+6.741880E+02	-4.807269E-02		alpha13 = 0.000 0.013
+1.699356E+04	+1.313475E-03		alpha23 = 0.000 0.013
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.249197E-07	-7.818770E-08	D-Elemente:	#####
+1.433201E+01	+1.096340E-09	4.662090	theta12 = 0.147 0.328
-8.140889E-04	+1.128121E-04	92.924219	theta13 = 3.142 3.206
-2.255743E+02	-7.751711E-10	3488.009690	theta23 = 1.704 3.138
+2.267097E-01	+3.058695E-02		delta = 0.006 3.138
-3.449672E+03	+3.109750E-07		alpha11 = 0.000 0.300
-1.814171E-01	-5.018051E-08		alpha12 = 0.000 3.442
+8.365410E+01	+2.588256E+01		alpha13 = 0.000 0.297
+4.646226E+02	-8.117510E-04		alpha23 = 0.300 3.138
			alpha33 = 0.300 0.300
			#####

+2.017899E-08	+1.281877E-10	D-Elemente:	#####
+3.931994E+00	-4.791965E-24	0.485034	theta12 = 6.281 1.174
+2.368332E-03	+1.504491E-05	102.471402	theta13 = 0.002 3.142
-9.451016E+01	+2.759320E-28	1743.571232	theta23 = 0.003 4.579
+2.395962E-02	-1.522043E-04		delta = 0.000 0.000
+3.995399E+01	+1.095364E-22		alpha11 = 0.000 3.135
+1.304500E-03	+4.401710E-23		alpha12 = 0.000 3.135
-1.727999E+03	+1.097717E+01		alpha13 = 0.000 3.135
+2.321557E+02	-5.838014E-21		alpha23 = 3.135 0.000
			alpha33 = 3.135 3.135
			#####

```

+1.106040E-12 +9.704412E-15 D-Elemente: #####
-6.316221E-03 +5.822590E-10 0.003751 theta12 = 0.615 | 0.615
+1.556602E-07 +8.084361E-10 0.006760 theta13 = 3.077 | 3.077
-6.316221E-03 +5.822590E-10 0.060447 theta23 = 0.672 | 0.672
+2.503983E-02 -4.348102E-15 delta = 0.000 | 0.000
+2.766814E-02 +1.327275E-10 alpha11 = 0.000 | 3.142
+1.556602E-07 +8.084361E-10 alpha12 = 0.000 | 0.000
+2.766814E-02 +1.327275E-10 alpha13 = 0.000 | 0.000
+3.841571E-02 -1.193485E-15 alpha23 = 0.000 | 0.000
alpha33 = 0.000 | 0.000
#####

```

CKM:

===

```

(0.975662, 0.219263, 0.002592)
(0.219193, 0.974905, 0.038906)
(0.006114, 0.038510, 0.999240)

```

Jarlskog Invariante = 5.311629e-06

```

(0.975657,-0.003301) (0.218126,0.022298) (-0.002437,-0.000882)
(0.214910,0.043121) (-0.930381,-0.291259) (0.037171,0.011489)
(0.005840,0.001809) (-0.036790,-0.011380) (-0.954610,-0.295295)

```

PMNS:

====

```

(0.813373, 0.578174, 0.064334)
(0.487067, 0.616352, 0.618769)
(0.318104, 0.534626, 0.782934)

```

```

(-0.813373,0.000011) (-0.578174,-0.000016) (0.064334,-0.000001)
(0.487056,0.003199) (-0.616339,-0.004072) (0.618756,0.004080)
(-0.318097,-0.002086) (0.534614,0.003532) (0.782917,0.005161)

```

LMA #3 @ M_Z | $\phi=0.3$:

=====

+4.113192E-06	+2.384274E-08	D-Elemente:	#####
-5.175963E+01	-2.030889E-09	2.328780	theta12 = 3.218 3.097
+4.596497E-03	-1.005632E-04	676.244929	theta13 = 0.000 0.001
+2.361629E+02	-4.378675E-08	180247.513277	theta23 = 1.665 3.142
+2.538593E+01	+5.076254E-01		delta = 0.039 0.013
-1.794445E+05	+1.128342E-05		alpha11 = 0.000 0.000
+8.196934E+00	-3.075211E-07		alpha12 = 0.000 0.000
+6.741880E+02	-4.807269E-02		alpha13 = 0.000 0.013
+1.699356E+04	+1.313475E-03		alpha23 = 0.000 0.013
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.249197E-07	-7.818770E-08	D-Elemente:	#####
+1.433201E+01	+1.096340E-09	4.662090	theta12 = 0.147 0.328
-8.140889E-04	+1.128121E-04	92.924219	theta13 = 3.142 3.206
-2.255743E+02	-7.751711E-10	3488.009690	theta23 = 1.704 3.138
+2.267097E-01	+3.058695E-02		delta = 0.006 3.138
-3.449672E+03	+3.109750E-07		alpha11 = 0.000 0.300
-1.814171E-01	-5.018051E-08		alpha12 = 0.000 3.442
+8.365410E+01	+2.588256E+01		alpha13 = 0.000 0.297
+4.646226E+02	-8.117510E-04		alpha23 = 0.300 3.138
			alpha33 = 0.300 0.300
			#####

+2.017899E-08	+1.281877E-10	D-Elemente:	#####
+3.931994E+00	-3.499958E-24	0.485034	theta12 = 6.281 1.174
+2.368332E-03	+1.504491E-05	102.471402	theta13 = 0.002 3.142
-9.451016E+01	+1.827635E-28	1743.571232	theta23 = 0.003 4.579
+2.395962E-02	-1.522043E-04		delta = 0.000 0.000
+3.995399E+01	+8.125083E-23		alpha11 = 0.000 3.135
+1.304500E-03	+3.299874E-23		alpha12 = 0.000 3.135
-1.727999E+03	+1.097717E+01		alpha13 = 0.000 3.135
+2.321557E+02	-6.646260E-21		alpha23 = 3.135 0.000
			alpha33 = 3.135 3.135
			#####

```

+8.637273E-13 +7.109637E-15 D-Elemente: #####
-5.614722E-03 -7.563374E-10 0.001902 theta12 = 0.582 | 0.582
+1.023754E-07 +4.900603E-10 0.005327 theta13 = 0.062 | 3.079
-5.614722E-03 -7.563374E-10 0.072479 theta23 = 5.344 | 2.202
+4.575680E-02 -3.864189E-15 delta = 0.000 | 0.000
-3.595638E-02 +1.179259E-10 alpha11 = 0.000 | 3.142
+1.023754E-07 +4.900603E-10 alpha12 = 0.000 | 0.000
-3.595638E-02 +1.179259E-10 alpha13 = 0.000 | 0.000
+2.329745E-02 -1.059884E-15 alpha23 = 0.000 | 0.000
alpha33 = 0.000 | 0.000
#####

```

CKM:

===

```

(0.975662, 0.219263, 0.002592)
(0.219193, 0.974905, 0.038906)
(0.006114, 0.038510, 0.999240)

```

Jarlskog Invariante = 5.311629e-06

```

(0.975657,-0.003301) (0.218126,0.022298) (-0.002437,-0.000882)
(0.214910,0.043121) (-0.930381,-0.291259) (0.037171,0.011489)
(0.005840,0.001809) (-0.036790,-0.011380) (-0.954610,-0.295295)

```

PMNS:

=====

```

(0.833421, 0.548815, 0.064898)
(0.279547, 0.519962, 0.807151)
(0.476721, 0.654555, 0.586767)

```

```

(0.833421,-0.000002) (0.548815,0.000001) (0.064898,0.000019)
(0.279541,0.001855) (-0.519951,-0.003420) (0.807133,0.005322)
(0.476711,0.003132) (-0.654540,-0.004322) (-0.586754,-0.003869)

```

LMA #4 @ M_Z | $\phi=0.3$:

=====

+3.147123E-06	+5.559336E-08	D-Elemente:	#####
-5.210259E+01	-3.784446E-09	2.328775	theta12 = 0.077 3.097
-8.265115E-03	+1.015170E-04	676.243814	theta13 = 0.000 3.142
+1.445258E+02	-6.974518E-08	180247.630607	theta23 = 4.539 6.283
+4.499823E+01	+5.037066E-01		delta = 0.020 0.007
+1.775549E+05	-2.066772E-05		alpha11 = 0.000 0.000
-5.418281E+00	+7.173937E-07		alpha12 = 0.000 0.000
-6.759082E+02	+8.805591E-02		alpha13 = 0.000 0.007
+3.103934E+04	+1.328658E-03		alpha23 = 0.000 0.007
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+5.839464E-07	-8.919104E-08	D-Elemente:	#####
+1.428628E+01	+2.023042E-09	4.661663	theta12 = 2.996 0.329
+1.191476E-03	-1.127716E-04	92.922416	theta13 = 3.142 0.064
-2.252706E+02	-9.091719E-10	3487.986828	theta23 = 1.437 3.145
+3.351039E-01	+3.067203E-02		delta = 0.012 3.135
+3.449475E+03	-5.756057E-07		alpha11 = 0.000 0.300
+2.221298E-01	-5.356226E-07		alpha12 = 0.000 0.300
-8.361828E+01	-2.587552E+01		alpha13 = 0.000 3.435
+4.660665E+02	-1.498027E-03		alpha23 = 0.300 3.135
			alpha33 = 0.300 0.300
			#####

+2.017385E-08	+1.281270E-10	D-Elemente:	#####
+3.919712E+00	-1.113551E-24	0.485046	theta12 = 0.002 1.967
-2.368160E-03	-1.504052E-05	102.471035	theta13 = 0.002 6.283
-9.451448E+01	+1.891752E-28	1743.579420	theta23 = 3.139 1.705
+2.402749E-02	-1.526020E-04		delta = 0.000 0.000
-3.994486E+01	-6.879179E-23		alpha11 = 0.000 3.135
-1.308322E-03	-2.768383E-23		alpha12 = 0.000 3.135
+1.727910E+03	-1.097420E+01		alpha13 = 0.000 3.135
+2.328785E+02	-1.816753E-20		alpha23 = 3.135 0.000
			alpha33 = 3.135 3.135
			#####

```

+1.289947E-12 +1.061950E-14 D-Elemente: #####
-8.371246E-03 -6.287746E-10 0.005244 theta12 = 2.419 | 0.723
-1.532659E-07 -7.331113E-10 0.007827 theta13 = 3.052 | 0.089
-8.371246E-03 -6.287746E-10 0.059528 theta23 = 0.689 | 2.452
+2.207442E-02 -5.765932E-15 delta = 0.000 | 0.000
+2.990777E-02 -1.757307E-10 alpha11 = 0.000 | 0.000
-1.532659E-07 -7.331113E-10 alpha12 = 0.000 | 0.000
+2.990777E-02 -1.757307E-10 alpha13 = 0.000 | 0.000
+3.487048E-02 -1.588536E-15 alpha23 = 0.000 | 3.142
alpha33 = 0.000 | 0.000
#####

```

CKM:

===

```

(0.975839, 0.218462, 0.003434)
(0.218423, 0.975057, 0.039435)
(0.005340, 0.039223, 0.999216)

```

Jarlskog Invariante = 4.702375e-06

```

(0.975834,-0.003296) (-0.217303,-0.022474) (-0.003315,-0.000895)
(0.214205,0.042718) (0.930528,0.291298) (0.037671,0.011663)
(-0.005103,-0.001573) (-0.037471,-0.011592) (0.954588,0.295289)

```

PMNS:

====

```

(0.747068, 0.658311, 0.092277)
(0.465083, 0.616801, 0.635024)
(0.474960, 0.431490, 0.766962)

```

```

(0.747068,-0.000000) (-0.658311,0.000002) (0.092277,0.000018)
(-0.465073,-0.003076) (-0.616787,-0.004058) (-0.635010,-0.004188)
(0.474949,0.003121) (0.431480,0.002853) (-0.766945,-0.005057)

```

LMA #5 @ M_Z | $\phi=0.3$:

=====

+3.147123E-06	+5.559336E-08	D-Elemente:	#####
-5.210259E+01	-3.784446E-09	2.328775	theta12 = 0.077 3.097
-8.265115E-03	+1.015170E-04	676.243814	theta13 = 0.000 3.142
+1.445258E+02	-6.974518E-08	180247.630607	theta23 = 4.539 6.283
+4.499823E+01	+5.037066E-01		delta = 0.020 0.007
+1.775549E+05	-2.066772E-05		alpha11 = 0.000 0.000
-5.418281E+00	+7.173937E-07		alpha12 = 0.000 0.000
-6.759082E+02	+8.805591E-02		alpha13 = 0.000 0.007
+3.103934E+04	+1.328658E-03		alpha23 = 0.000 0.007
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+5.839464E-07	-8.919104E-08	D-Elemente:	#####
+1.428628E+01	+2.023042E-09	4.661663	theta12 = 2.996 0.329
+1.191476E-03	-1.127716E-04	92.922416	theta13 = 3.142 0.064
-2.252706E+02	-9.091719E-10	3487.986828	theta23 = 1.437 3.145
+3.351039E-01	+3.067203E-02		delta = 0.012 3.135
+3.449475E+03	-5.756057E-07		alpha11 = 0.000 0.300
+2.221298E-01	-5.356226E-07		alpha12 = 0.000 0.300
-8.361828E+01	-2.587552E+01		alpha13 = 0.000 3.435
+4.660665E+02	-1.498027E-03		alpha23 = 0.300 3.135
			alpha33 = 0.300 0.300
			#####

+2.017385E-08	+1.281270E-10	D-Elemente:	#####
+3.919712E+00	-9.041048E-24	0.485046	theta12 = 0.002 1.967
-2.368160E-03	-1.504052E-05	102.471035	theta13 = 0.002 6.283
-9.451448E+01	+5.166665E-29	1743.579420	theta23 = 3.139 1.705
+2.402749E-02	-1.526020E-04		delta = 0.000 0.000
-3.994486E+01	-1.285690E-23		alpha11 = 0.000 3.135
-1.308322E-03	-5.013864E-24		alpha12 = 0.000 3.135
+1.727910E+03	-1.097420E+01		alpha13 = 0.000 3.135
+2.328785E+02	-8.625636E-21		alpha23 = 3.135 0.000
			alpha33 = 3.135 3.135
			#####

```

+1.146817E-12 +9.441596E-15 D-Elemente: #####
-7.441199E-03 -5.356727E-10 0.003279 theta12 = 2.608 | 0.533
-1.362620E-07 -6.517771E-10 0.010824 theta13 = 3.055 | 0.086
-7.441199E-03 -5.356727E-10 0.048351 theta23 = 0.598 | 2.544
+9.810372E-03 -5.125737E-15 delta = 0.000 | 0.000
+2.547498E-02 -1.562346E-10 alpha11 = 0.000 | 0.000
-1.362620E-07 -6.517771E-10 alpha12 = 0.000 | 0.000
+2.547498E-02 -1.562346E-10 alpha13 = 0.000 | 0.000
+3.099636E-02 -1.412547E-15 alpha23 = 0.000 | 3.142
alpha33 = 0.000 | 0.000
#####

```

CKM:

===

```

(0.975839, 0.218462, 0.003434)
(0.218423, 0.975057, 0.039435)
(0.005340, 0.039223, 0.999216)

```

Jarlskog Invariante = 4.702375e-06

```

(0.975834,-0.003296) (-0.217303,-0.022474) (-0.003315,-0.000895)
(0.214205,0.042718) (0.930528,0.291298) (0.037671,0.011663)
(-0.005103,-0.001573) (-0.037471,-0.011592) (0.954588,0.295289)

```

PMNS:

====

```

(0.857813, 0.506152, 0.089254)
(0.375824, 0.736187, 0.562837)
(0.350589, 0.449265, 0.821735)

```

```

(0.857813,0.000000) (-0.506152,0.000004) (0.089254,0.000018)
(-0.375816,-0.002489) (-0.736171,-0.004847) (-0.562824,-0.003712)
(0.350581,0.002300) (0.449255,0.002969) (-0.821717,-0.005419)

```

LMA #6 @ M_Z | phi=0.3:

=====

+3.147123E-06	+5.559336E-08	D-Elemente:	#####
-5.210259E+01	-3.784446E-09	2.328775	theta12 = 0.077 3.097
-8.265115E-03	+1.015170E-04	676.243814	theta13 = 0.000 3.142
+1.445258E+02	-6.974518E-08	180247.630607	theta23 = 4.539 6.283
+4.499823E+01	+5.037066E-01		delta = 0.020 0.007
+1.775549E+05	-2.066772E-05		alpha11 = 0.000 0.000
-5.418281E+00	+7.173937E-07		alpha12 = 0.000 0.000
-6.759082E+02	+8.805591E-02		alpha13 = 0.000 0.007
+3.103934E+04	+1.328658E-03		alpha23 = 0.000 0.007
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+5.839464E-07	-8.919104E-08	D-Elemente:	#####
+1.428628E+01	+2.023042E-09	4.661663	theta12 = 2.996 0.329
+1.191476E-03	-1.127716E-04	92.922416	theta13 = 3.142 0.064
-2.252706E+02	-9.091719E-10	3487.986828	theta23 = 1.437 3.145
+3.351039E-01	+3.067203E-02		delta = 0.012 3.135
+3.449475E+03	-5.756057E-07		alpha11 = 0.000 0.300
+2.221298E-01	-5.356226E-07		alpha12 = 0.000 0.300
-8.361828E+01	-2.587552E+01		alpha13 = 0.000 3.435
+4.660665E+02	-1.498027E-03		alpha23 = 0.300 3.135
			alpha33 = 0.300 0.300
			#####

+2.017385E-08	+1.281270E-10	D-Elemente:	#####
+3.919712E+00	-1.240718E-23	0.485046	theta12 = 0.002 1.967
-2.368160E-03	-1.504052E-05	102.471035	theta13 = 0.002 6.283
-9.451448E+01	+1.417997E-28	1743.579420	theta23 = 3.139 1.705
+2.402749E-02	-1.526020E-04		delta = 0.000 0.000
-3.994486E+01	-3.753373E-23		alpha11 = 0.000 3.135
-1.308322E-03	-1.509954E-23		alpha12 = 0.000 3.135
+1.727910E+03	-1.097420E+01		alpha13 = 0.000 3.135
+2.328785E+02	-8.824741E-21		alpha23 = 3.135 0.000
			alpha33 = 3.135 3.135
			#####

```

+7.871465E-13 +6.405049E-15 D-Elemente: #####
-5.219935E-03 -6.476749E-10 0.001504 theta12 = 2.639 | 0.502
-9.050234E-08 -4.251150E-10 0.006208 theta13 = 3.073 | 0.069
-5.219935E-03 -6.476749E-10 0.059086 theta23 = 0.900 | 2.242
+3.413865E-02 -3.593601E-15 delta = 0.000 | 0.000
+3.084008E-02 -1.094583E-10 alpha11 = 0.000 | 0.000
-9.050234E-08 -4.251150E-10 alpha12 = 0.000 | 0.000
+3.084008E-02 -1.094583E-10 alpha13 = 0.000 | 0.000
+2.024242E-02 -9.883871E-16 alpha23 = 0.000 | 3.142
alpha33 = 0.000 | 0.000
#####

```

CKM:

===

```

(0.975839, 0.218462, 0.003434)
(0.218423, 0.975057, 0.039435)
(0.005340, 0.039223, 0.999216)

```

Jarlskog Invariante = 4.702375e-06

```

(0.975834,-0.003296) (-0.217303,-0.022474) (-0.003315,-0.000895)
(0.214205,0.042718) (0.930528,0.291298) (0.037671,0.011663)
(-0.005103,-0.001573) (-0.037471,-0.011592) (0.954588,0.295289)

```

PMNS:

====

```

(0.873944, 0.480762, 0.071341)
(0.249557, 0.569835, 0.782949)
(0.417064, 0.666450, 0.617982)

```

```

(0.873944,-0.000002) (-0.480762,-0.000001) (0.071341,0.000018)
(-0.249551,-0.001657) (-0.569823,-0.003750) (-0.782932,-0.005163)
(0.417055,0.002738) (0.666436,0.004400) (-0.617968,-0.004075)

```

LMA #1 @ M_Z | Omega=0.003:

=====

+4.371629E-06	+1.879567E-06	D-Elemente:	#####
-5.172335E+01	-2.940569E+01	2.685861	theta12 = 3.054 3.097
+4.587471E-03	+2.656850E-03	676.885459	theta13 = 0.000 3.140
+2.361856E+02	-1.850826E+01	180247.560794	theta23 = 1.665 0.000
+2.546247E+01	-2.051104E-01		delta = 0.001 0.013
-1.794445E+05	+3.381744E-03		alpha11 = 0.000 2.707
+8.207023E+00	-9.611519E-01		alpha12 = 3.142 2.707
+6.741805E+02	-1.405185E-03		alpha13 = 0.000 2.707
+1.699342E+04	+1.467913E+02		alpha23 = 2.616 2.625
			alpha33 = 2.625 2.616
			#####

+2.363692E-07	+4.432601E-08	D-Elemente:	#####
+1.433205E+01	+3.204666E-11	4.662051	theta12 = 0.147 2.814
-8.311436E-04	-3.881949E-06	92.925503	theta13 = 0.000 3.077
-2.255750E+02	+5.866337E-02	3488.019753	theta23 = 4.846 3.138
+2.313337E-01	-1.103479E-03		delta = 0.000 3.141
-3.449682E+03	-3.274773E-03		alpha11 = 0.000 0.000
-1.814090E-01	-7.900694E-03		alpha12 = 0.000 0.000
+8.756722E+01	+1.487183E-04		alpha13 = 0.000 3.141
+4.646237E+02	-2.247703E-05		alpha23 = 0.000 3.141
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.016009E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.932040E+00	+0.000000E+00	0.485504	theta12 = 3.140 4.316
+2.366102E-03	+0.000000E+00	102.471425	theta13 = 0.002 0.000
-9.451043E+01	+0.000000E+00	1741.911681	theta23 = 3.145 1.705
+2.393707E-02	+0.000000E+00		delta = 0.000 0.000
+3.995410E+01	+0.000000E+00		alpha11 = 0.000 0.000
+1.304524E-03	+0.000000E+00		alpha12 = 0.000 0.000
-1.726359E+03	+0.000000E+00		alpha13 = 0.000 0.000
+2.321584E+02	+0.000000E+00		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

```

+8.413417E-13 +1.398224E-15 D-Elemente: #####
-4.667560E-03 -6.929699E-06 0.001903 theta12 = 0.539 | 0.539
+1.228009E-07 +2.274634E-10 0.005962 theta13 = 0.053 | 0.053
-4.667560E-03 -6.929699E-06 0.059209 theta23 = 2.405 | 0.736
+2.431574E-02 -7.294814E-05 delta = 0.000 | 3.141
+3.129914E-02 -1.768874E-05 alpha11 = 0.000 | 6.277
+1.228009E-07 +2.274634E-10 alpha12 = 0.000 | 3.135
+3.129914E-02 -1.768874E-05 alpha13 = 0.000 | 3.135
+3.083380E-02 +5.944386E-05 alpha23 = 3.137 | 3.140
alpha33 = 6.281 | 3.137
#####

```

CKM:

===

```

(0.974311, 0.225180, 0.003448)
(0.225132, 0.973537, 0.039259)
(0.005772, 0.038985, 0.999223)

```

Jarlskog Invariante = 9.680596e-06

```

(-0.974291,0.006325) (-0.221091,-0.042718) (-0.003033,-0.001639)
(-0.213329,-0.071939) (0.843496,0.486095) (0.034548,0.018645)
(0.004930,0.003002) (-0.033299,-0.020273) (0.864411,0.501238)

```

PMNS:

====

```

(0.858328, 0.510403, 0.052555)
(0.349596, 0.656710, 0.668217)
(0.375574, 0.555176, 0.742108)

```

```

(-0.858328,0.000004) (-0.510403,-0.000007) (-0.052555,0.000002)
(-0.349592,0.001609) (0.656703,-0.003008) (-0.668210,0.003075)
(-0.375573,0.000822) (0.555175,-0.001206) (0.742106,-0.001627)

```

LMA #1 @ M_Z | Omega=0.005:

=====

+4.836525E-06	+3.141817E-06	D-Elemente:	#####
-5.164494E+01	-4.900917E+01	3.232917	theta12 = 3.036 3.096
+4.543112E-03	+4.427861E-03	678.021742	theta13 = 0.000 3.140
+2.362349E+02	-3.084691E+01	180247.528684	theta23 = 1.665 0.000
+2.546186E+01	-3.418517E-01		delta = 0.002 0.022
-1.794444E+05	+5.636203E-03		alpha11 = 0.000 2.519
+8.225410E+00	-1.601825E+00		alpha12 = 3.142 2.519
+6.741802E+02	-2.341983E-03		alpha13 = 0.000 2.519
+1.699299E+04	+2.446530E+02		alpha23 = 2.368 2.383
			alpha33 = 2.382 2.368
			#####

+2.356802E-07	+7.387320E-08	D-Elemente:	#####
+1.433205E+01	+5.341128E-11	4.662049	theta12 = 0.147 2.814
-8.311322E-04	-6.469936E-06	92.925500	theta13 = 3.142 3.077
-2.255751E+02	+9.777164E-02	3488.019760	theta23 = 1.704 3.138
+2.313305E-01	-1.839138E-03		delta = 0.000 3.141
-3.449682E+03	-5.457919E-03		alpha11 = 3.142 0.000
-1.813880E-01	-1.316774E-02		alpha12 = 3.142 0.000
+8.756722E+01	+2.478647E-04		alpha13 = 0.000 3.141
+4.646237E+02	-3.746185E-05		alpha23 = 0.000 3.141
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.016009E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.932040E+00	+0.000000E+00	0.485504	theta12 = 3.140 4.316
+2.366102E-03	+0.000000E+00	102.471425	theta13 = 0.002 0.000
-9.451043E+01	+0.000000E+00	1741.911681	theta23 = 3.145 1.705
+2.393707E-02	+0.000000E+00		delta = 0.000 0.000
+3.995410E+01	+0.000000E+00		alpha11 = 0.000 0.000
+1.304524E-03	+0.000000E+00		alpha12 = 0.000 0.000
-1.726359E+03	+0.000000E+00		alpha13 = 0.000 0.000
+2.321584E+02	+0.000000E+00		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

```

+8.413364E-13 +2.330367E-15 D-Elemente: #####
-4.667539E-03 -1.154943E-05 0.001903 theta12 = 0.539 | 0.539
+1.227999E-07 +3.791058E-10 0.005962 theta13 = 0.053 | 0.053
-4.667539E-03 -1.154943E-05 0.059208 theta23 = 2.405 | 0.736
+2.431554E-02 -1.215799E-04 delta = 0.000 | 3.141
+3.129905E-02 -2.948082E-05 alpha11 = 0.000 | 6.273
+1.227999E-07 +3.791058E-10 alpha12 = 0.000 | 3.131
+3.129905E-02 -2.948082E-05 alpha13 = 0.000 | 3.131
+3.083353E-02 +9.907322E-05 alpha23 = 3.134 | 3.139
alpha33 = 6.279 | 3.135
#####

```

CKM:

===

```

(0.972581, 0.232534, 0.003819)
(0.232485, 0.971824, 0.038836)
(0.006118, 0.038541, 0.999238)

```

Jarlskog Invariante = 1.689354e-05

```

(-0.972527,0.010227) (-0.221157,-0.071845) (-0.002670,-0.002731)
(-0.209767,-0.100234) (0.697203,0.677016) (0.029069,0.025753)
(0.004239,0.004411) (-0.026643,-0.027848) (0.714982,0.698053)

```

PMNS:

====

```

(0.858328, 0.510403, 0.052555)
(0.349596, 0.656710, 0.668217)
(0.375574, 0.555176, 0.742108)

```

```

(-0.858328,0.000007) (-0.510403,-0.000013) (-0.052555,0.000002)
(-0.349586,0.002660) (0.656691,-0.004973) (-0.668198,0.005083)
(-0.375570,0.001575) (0.555172,-0.002312) (0.742101,-0.003113)

```

LMA #1 @ M_Z | Omega=0.007:

=====

+5.533778E-06	+4.417947E-06	D-Elemente:	#####
-5.152739E+01	-6.861264E+01	3.929967	theta12 = 3.015 3.096
+4.476598E-03	+6.198601E-03	679.722480	theta13 = 0.000 3.140
+2.363097E+02	-4.318557E+01	180247.537365	theta23 = 1.665 0.000
+2.546106E+01	-4.785888E-01		delta = 0.003 0.030
-1.794443E+05	+7.890661E-03		alpha11 = 0.000 2.404
+8.253067E+00	-2.242385E+00		alpha12 = 3.142 2.404
+6.741797E+02	-3.278752E-03		alpha13 = 0.000 2.405
+1.699242E+04	+3.425118E+02		alpha23 = 2.195 2.216
			alpha33 = 2.215 2.195
			#####

+2.346447E-07	+1.034162E-07	D-Elemente:	#####
+1.433205E+01	+7.477528E-11	4.662052	theta12 = 0.147 2.814
-8.311170E-04	-9.057844E-06	92.925505	theta13 = 0.000 3.077
-2.255754E+02	+1.368798E-01	3488.018792	theta23 = 4.846 3.138
+2.313262E-01	-2.574774E-03		delta = 0.000 3.141
-3.449681E+03	-7.641062E-03		alpha11 = 0.000 0.000
-1.813561E-01	-1.843477E-02		alpha12 = 0.000 0.000
+8.756722E+01	+3.470081E-04		alpha13 = 0.000 3.141
+4.646237E+02	-5.244620E-05		alpha23 = 0.000 3.141
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.016009E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.932040E+00	+0.000000E+00	0.485504	theta12 = 3.140 4.316
+2.366102E-03	+0.000000E+00	102.471425	theta13 = 0.002 0.000
-9.451043E+01	+0.000000E+00	1741.911681	theta23 = 3.145 1.705
+2.393707E-02	+0.000000E+00		delta = 0.000 0.000
+3.995410E+01	+0.000000E+00		alpha11 = 0.000 0.000
+1.304524E-03	+0.000000E+00		alpha12 = 0.000 0.000
-1.726359E+03	+0.000000E+00		alpha13 = 0.000 0.000
+2.321584E+02	+0.000000E+00		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

```

+8.413283E-13 +3.262501E-15 D-Elemente: #####
-4.667479E-03 -1.616918E-05 0.001903 theta12 = 2.603 | 0.539
+1.227992E-07 +5.307446E-10 0.005962 theta13 = 0.053 | 0.053
-4.667479E-03 -1.616918E-05 0.059208 theta23 = 0.736 | 0.736
+2.431524E-02 -1.702110E-04 delta = 0.000 | 3.141
+3.129901E-02 -4.127338E-05 alpha11 = 0.000 | 3.127
+1.227992E-07 +5.307446E-10 alpha12 = 3.142 | 6.269
+3.129901E-02 -4.127338E-05 alpha13 = 0.000 | 3.127
+3.083338E-02 +1.387015E-04 alpha23 = 3.131 | 3.138
alpha33 = 3.136 | 3.132
#####

```

CKM:

===

```

(0.970318, 0.241781, 0.004982)
(0.241764, 0.969545, 0.039144)
(0.005780, 0.039034, 0.999221)

```

Jarlskog Invariante = 2.257963e-05

```

(-0.970205,0.014778) (-0.220222,-0.099803) (-0.003177,-0.003838)
(-0.212104,-0.116023) (0.570502,0.783930) (0.024973,0.030143)
(0.003153,0.004844) (-0.021292,-0.032716) (0.584199,0.810650)

```

PMNS:

====

```

(0.858536, 0.510053, 0.052554)
(0.349552, 0.657181, 0.667777)
(0.375140, 0.554941, 0.742503)

```

```

(0.858536,-0.000010) (0.510053,0.000225) (-0.052554,0.000003)
(0.349532,-0.003711) (-0.657147,0.006675) (-0.667740,0.007087)
(0.375134,-0.002102) (-0.554933,0.002861) (0.742492,-0.004163)

```

LMA #2 @ M_Z | Omega=0.003:

=====

+4.736725E-06	+2.893972E-06	D-Elemente:	#####
-5.167722E+01	-4.530416E+01	3.116308	theta12 = 3.040 3.096
+4.560750E-03	+4.086126E-03	677.764698	theta13 = 0.000 3.140
+2.362152E+02	-2.851493E+01	180247.596824	theta23 = 1.665 0.000
+2.546227E+01	-2.765055E-01		delta = 0.002 0.020
-1.794445E+05	+5.210053E-03		alpha11 = 0.000 2.550
+8.218202E+00	-1.494413E+00		alpha12 = 3.142 2.550
+6.741803E+02	-1.894302E-03		alpha13 = 0.000 2.550
+1.699327E+04	+1.978865E+02		alpha23 = 2.410 2.422
			alpha33 = 2.422 2.410
			#####

+2.359523E-07	+6.833650E-08	D-Elemente:	#####
+1.433205E+01	+4.320147E-11	4.662051	theta12 = 2.995 2.814
-8.311397E-04	-5.233183E-06	92.925503	theta13 = 0.000 0.064
-2.255751E+02	+9.038029E-02	3488.019760	theta23 = 1.437 6.280
+2.313326E-01	-1.487438E-03		delta = 0.000 3.141
-3.449682E+03	-5.045313E-03		alpha11 = 0.000 0.000
-1.813964E-01	-1.217228E-02		alpha12 = 3.142 0.000
+8.756722E+01	+2.004844E-04		alpha13 = 0.000 3.141
+4.646237E+02	-3.005996E-05		alpha23 = 3.142 3.141
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.016009E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.932040E+00	+0.000000E+00	0.485504	theta12 = 3.140 4.316
+2.366102E-03	+0.000000E+00	102.471425	theta13 = 0.002 0.000
-9.451043E+01	+0.000000E+00	1741.911681	theta23 = 3.145 1.705
+2.393707E-02	+0.000000E+00		delta = 0.000 0.000
+3.995410E+01	+0.000000E+00		alpha11 = 0.000 0.000
+1.304524E-03	+0.000000E+00		alpha12 = 0.000 0.000
-1.726359E+03	+0.000000E+00		alpha13 = 0.000 0.000
+2.321584E+02	+0.000000E+00		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

```

+1.104608E-12 +3.223128E-15 D-Elemente: #####
-6.316220E-03 -9.410836E-06 0.003751 theta12 = 0.615 | 2.527
+1.555385E-07 +7.083268E-10 0.006760 theta13 = 0.065 | 0.065
-6.316220E-03 -9.410836E-06 0.060447 theta23 = 0.672 | 0.672
+2.503993E-02 +1.073072E-05 delta = 0.004 | 3.137
+2.766813E-02 +9.042960E-05 alpha11 = 3.142 | 3.135
+1.555385E-07 +7.083268E-10 alpha12 = 0.000 | 6.277
+2.766813E-02 +9.042960E-05 alpha13 = 0.000 | 3.131
+3.841535E-02 +2.012356E-04 alpha23 = 3.137 | 3.136
alpha33 = 3.139 | 3.134
#####

```

CKM:

===

```

(0.973092, 0.230383, 0.004017)
(0.230345, 0.972311, 0.039402)
(0.005785, 0.039182, 0.999215)

```

Jarlskog Invariante = 1.506420e-05

```

(0.973043,-0.009758) (0.220674,0.066175) (-0.003097,-0.002558)
(0.209556,0.095631) (-0.724676,-0.648254) (0.030389,0.025080)
(-0.004189,-0.003991) (0.028357,0.027039) (0.743360,0.667718)

```

PMNS:

====

```

(0.813641, 0.577793, 0.064373)
(0.486919, 0.616768, 0.618471)
(0.317646, 0.534558, 0.783166)

```

```

(0.813640,0.000337) (-0.577793,0.000007) (-0.064373,0.000260)
(-0.486915,0.001898) (-0.616761,0.002926) (-0.618465,0.002846)
(-0.317645,0.000853) (-0.534556,0.001267) (0.783163,-0.002035)

```

LMA #3 @ M_Z | Omega=0.003:

=====

+4.594614E-06	-2.457649E-06	D-Elemente:	#####
-5.180350E+01	+3.896606E+01	2.932405	theta12 = 3.237 6.238
+4.601806E-03	-3.490164E-03	677.377284	theta13 = 0.000 3.143
+2.361349E+02	+2.452566E+01	180247.529620	theta23 = 1.665 0.000
+2.546267E+01	+1.019250E-01		delta = 0.001 3.125
-1.794445E+05	-4.480943E-03		alpha11 = 0.000 0.529
+8.201219E+00	+1.332315E+00		alpha12 = 0.000 0.529
+6.741806E+02	+6.982689E-04		alpha13 = 0.000 0.529
+1.699356E+04	-7.294422E+01		alpha23 = 0.649 0.645
			alpha33 = 0.645 0.649
			#####

+2.366008E-07	-5.893761E-08	D-Elemente:	#####
+1.433205E+01	-1.592472E-11	4.662050	theta12 = 0.147 2.814
-8.311473E-04	+1.929049E-06	92.925501	theta13 = 3.142 0.064
-2.255748E+02	-7.773601E-02	3488.019740	theta23 = 1.704 0.003
+2.313348E-01	+5.477419E-04		delta = 0.000 0.000
-3.449682E+03	+4.339475E-03		alpha11 = 0.000 0.000
-1.814306E-01	+1.046937E-02		alpha12 = 0.000 0.000
+8.756722E+01	-7.390217E-05		alpha13 = 0.000 0.000
+4.646237E+02	+1.013347E-05		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.016009E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.932040E+00	+0.000000E+00	0.485504	theta12 = 3.140 4.316
+2.366102E-03	+0.000000E+00	102.471425	theta13 = 0.002 0.000
-9.451043E+01	+0.000000E+00	1741.911681	theta23 = 3.145 1.705
+2.393707E-02	+0.000000E+00		delta = 0.000 0.000
+3.995410E+01	+0.000000E+00		alpha11 = 0.000 0.000
+1.304524E-03	+0.000000E+00		alpha12 = 0.000 0.000
-1.726359E+03	+0.000000E+00		alpha13 = 0.000 0.000
+2.321584E+02	+0.000000E+00		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

```

+8.626772E-13 +1.130537E-15 D-Elemente: #####
-5.614696E-03 -8.488171E-06 0.001902 theta12 = 0.582 | 0.582
+1.023024E-07 +1.021638E-10 0.005327 theta13 = 3.079 | 3.079
-5.614696E-03 -8.488171E-06 0.072479 theta23 = 0.940 | 2.202
+4.575660E-02 -1.372695E-04 delta = 3.141 | 0.000
-3.595639E-02 +3.784727E-05 alpha11 = 0.000 | 6.278
+1.023024E-07 +1.021638E-10 alpha12 = 0.000 | 3.136
-3.595639E-02 +3.784727E-05 alpha13 = 0.000 | 3.136
+2.329748E-02 +1.935255E-05 alpha23 = 3.137 | 3.140
alpha33 = 6.281 | 3.138
#####

```

CKM:

===

```

(0.973612, 0.228183, 0.003397)
(0.228127, 0.972856, 0.038847)
(0.006114, 0.038512, 0.999239)

```

Jarlskog Invariante = 1.338194e-05

```

(0.973576,0.008382) (0.221048,-0.056615) (-0.002584,0.002205)
(0.210642,-0.087588) (-0.772307,0.591600) (0.031278,-0.023038)
(0.004838,-0.003739) (-0.030458,0.023569) (-0.796113,0.603891)

```

PMNS:

====

```

(0.833222, 0.549104, 0.065010)
(0.279060, 0.519098, 0.807875)
(0.477354, 0.654997, 0.585757)

```

```

(0.833222,0.000000) (0.549104,0.000001) (0.065010,0.000029)
(0.279057,-0.001267) (-0.519093,0.002402) (0.807867,-0.003706)
(-0.477353,0.001060) (0.654996,-0.001426) (0.585756,-0.001274)

```

LMA #4 @ M_Z | Omega=0.003:

=====

+5.927512E-06	-2.100064E-06	D-Elemente:	#####
-5.211356E+01	+6.935372E+01	4.146604	theta12 = 0.128 3.094
-8.238017E-03	+1.105533E-02	679.887568	theta13 = 3.142 0.001
+1.445189E+02	+4.419042E+01	180247.680680	theta23 = 1.398 3.141
+4.507437E+01	+1.814070E-01		delta = 0.000 3.059
+1.775549E+05	+7.991397E-03		alpha11 = 0.000 0.554
-5.435961E+00	-4.376195E+00		alpha12 = 0.000 0.554
-6.758946E+02	-1.246343E-03		alpha13 = 0.000 0.554
+3.103933E+04	-1.298293E+02		alpha23 = 0.931 0.926
			alpha33 = 0.926 0.931
			#####

+5.967996E-07	-1.781514E-07	D-Elemente:	#####
+1.428632E+01	-2.863433E-11	4.661587	theta12 = 2.996 3.471
+1.208532E-03	-3.458809E-06	92.924464	theta13 = 0.000 0.064
-2.252712E+02	-1.368944E-01	3487.996871	theta23 = 4.579 3.138
+3.397430E-01	+9.840494E-04		delta = 0.000 0.001
+3.449485E+03	-7.642055E-03		alpha11 = 0.000 0.000
+2.221343E-01	-1.849462E-02		alpha12 = 0.000 0.000
-8.753109E+01	+1.333453E-04		alpha13 = 0.000 0.000
+4.660676E+02	+1.827596E-05		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.015495E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.919758E+00	+0.000000E+00	0.485516	theta12 = 0.002 1.967
-2.365930E-03	+0.000000E+00	102.471056	theta13 = 3.139 0.000
-9.451475E+01	+0.000000E+00	1741.919967	theta23 = 3.139 1.437
+2.400487E-02	+0.000000E+00		delta = 0.000 0.000
-3.994497E+01	+0.000000E+00		alpha11 = 0.000 0.000
-1.308347E-03	+0.000000E+00		alpha12 = 0.000 0.000
+1.726270E+03	+0.000000E+00		alpha13 = 0.000 0.000
+2.328811E+02	+0.000000E+00		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

```

+1.288388E-12 +1.674363E-15 D-Elemente: #####
-8.371276E-03 -1.258196E-05 0.005244 theta12 = 0.723 | 0.723
-1.531579E-07 -1.509441E-10 0.007827 theta13 = 3.052 | 0.089
-8.371276E-03 -1.258196E-05 0.059528 theta23 = 0.689 | 2.452
+2.207432E-02 -6.622263E-05 delta = 3.141 | 0.000
+2.990788E-02 -3.191289E-05 alpha11 = 0.000 | 3.136
-1.531579E-07 -1.509441E-10 alpha12 = 3.142 | 3.136
+2.990788E-02 -3.191289E-05 alpha13 = 0.000 | 3.136
+3.487079E-02 +2.844697E-05 alpha23 = 3.137 | 6.282
alpha33 = 3.139 | 3.138
#####

```

CKM:

===

```

(0.970317, 0.241794, 0.004626)
(0.241764, 0.969546, 0.039134)
(0.005973, 0.038951, 0.999223)

```

Jarlskog Invariante = 2.081085e-05

```

(0.970204,0.014793) (-0.219742,0.100885) (0.002695,-0.003761)
(0.212704,-0.114922) (0.570743,-0.783754) (-0.022840,0.031777)
(0.003914,-0.004511) (0.023888,-0.030766) (0.596660,-0.801526)

```

PMNS:

====

```

(0.746519, 0.658871, 0.092732)
(0.465335, 0.616612, 0.635023)
(0.475577, 0.430905, 0.766908)

```

```

(0.746519,-0.000001) (-0.658871,-0.000271) (0.092732,0.000042)
(-0.465330,0.002121) (-0.616606,0.002599) (-0.635016,0.002913)
(-0.475576,0.001261) (-0.430904,0.000922) (0.766905,-0.001986)

```

LMA #5 @ M_Z | $\Omega=0.003$:

=====

+5.927512E-06	-2.100064E-06	D-Elemente:	#####
-5.211356E+01	+6.935372E+01	4.146604	theta12 = 0.128 3.094
-8.238017E-03	+1.105533E-02	679.887568	theta13 = 3.142 0.001
+1.445189E+02	+4.419042E+01	180247.680680	theta23 = 1.398 3.141
+4.507437E+01	+1.814070E-01		delta = 0.000 3.059
+1.775549E+05	+7.991397E-03		alpha11 = 0.000 0.554
-5.435961E+00	-4.376195E+00		alpha12 = 0.000 0.554
-6.758946E+02	-1.246343E-03		alpha13 = 0.000 0.554
+3.103933E+04	-1.298293E+02		alpha23 = 0.931 0.926
			alpha33 = 0.926 0.931
			#####

+5.967996E-07	-1.781514E-07	D-Elemente:	#####
+1.428632E+01	-2.863433E-11	4.661587	theta12 = 2.996 3.471
+1.208532E-03	-3.458809E-06	92.924464	theta13 = 0.000 0.064
-2.252712E+02	-1.368944E-01	3487.996871	theta23 = 4.579 3.138
+3.397430E-01	+9.840494E-04		delta = 0.000 0.001
+3.449485E+03	-7.642055E-03		alpha11 = 0.000 0.000
+2.221343E-01	-1.849462E-02		alpha12 = 0.000 0.000
-8.753109E+01	+1.333453E-04		alpha13 = 0.000 0.000
+4.660676E+02	+1.827596E-05		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

+2.015495E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.919758E+00	+0.000000E+00	0.485516	theta12 = 0.002 1.967
-2.365930E-03	+0.000000E+00	102.471056	theta13 = 3.139 0.000
-9.451475E+01	+0.000000E+00	1741.919967	theta23 = 3.139 1.437
+2.400487E-02	+0.000000E+00		delta = 0.000 0.000
-3.994497E+01	+0.000000E+00		alpha11 = 0.000 0.000
-1.308347E-03	+0.000000E+00		alpha12 = 0.000 0.000
+1.726270E+03	+0.000000E+00		alpha13 = 0.000 0.000
+2.328811E+02	+0.000000E+00		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

```

+1.145430E-12 +1.488535E-15 D-Elemente: #####
-7.441225E-03 -1.118411E-05 0.003280 theta12 = 0.533 | 0.533
-1.361659E-07 -1.341981E-10 0.010824 theta13 = 3.055 | 0.086
-7.441225E-03 -1.118411E-05 0.048351 theta23 = 0.598 | 2.544
+9.810324E-03 -2.943059E-05 delta = 3.141 | 0.000
+2.547508E-02 -2.503723E-05 alpha11 = 0.000 | 3.136
-1.361659E-07 -1.341981E-10 alpha12 = 3.142 | 3.136
+2.547508E-02 -2.503723E-05 alpha13 = 0.000 | 3.136
+3.099662E-02 +2.528654E-05 alpha23 = 3.137 | 6.282
alpha33 = 3.139 | 3.138
#####

```

CKM:

===

```

(0.970317, 0.241794, 0.004626)
(0.241764, 0.969546, 0.039134)
(0.005973, 0.038951, 0.999223)

```

Jarlskog Invariante = 2.081085e-05

```

(0.970204,0.014793) (-0.219742,0.100885) (0.002695,-0.003761)
(0.212704,-0.114922) (0.570743,-0.783754) (-0.022840,0.031777)
(0.003914,-0.004511) (0.023888,-0.030766) (0.596660,-0.801526)

```

PMNS:

====

```

(0.857905, 0.505910, 0.089741)
(0.375388, 0.736410, 0.562836)
(0.350830, 0.449172, 0.821683)

```

```

(0.857905,-0.000001) (-0.505910,-0.000210) (0.089741,0.000041)
(-0.375385,0.001709) (-0.736403,0.003094) (-0.562830,0.002582)
(-0.350829,0.000942) (-0.449171,0.000967) (0.821680,-0.002128)

```

LMA #6 @ M_Z | Omega=0.003:

=====

+4.447261E-06	-1.424967E-06	D-Elemente:	#####
-5.217020E+01	+4.744434E+01	3.255559	theta12 = 0.104 6.237
-8.277459E-03	+7.555341E-03	677.955975	theta13 = 0.000 0.001
+1.444828E+02	+3.023032E+01	180247.666751	theta23 = 4.539 3.141
+4.507458E+01	+8.273323E-02		delta = 0.000 3.082
+1.775549E+05	+5.466786E-03		alpha11 = 0.000 0.476
-5.419734E+00	-2.998909E+00		alpha12 = 0.000 0.476
-6.758947E+02	-5.684001E-04		alpha13 = 0.000 0.476
+3.103948E+04	-5.921005E+01		alpha23 = 0.740 0.738
			alpha33 = 0.738 0.740
			#####

+5.974051E-07	-1.215907E-07	D-Elemente:	#####
+1.428632E+01	-1.305881E-11	4.661587	theta12 = 0.146 2.813
+1.208536E-03	-1.577442E-06	92.924465	theta13 = 3.142 0.064
-2.252711E+02	-9.364838E-02	3487.996863	theta23 = 1.705 0.003
+3.397441E-01	+4.481346E-04		delta = 0.000 0.000
+3.449485E+03	-5.227872E-03		alpha11 = 0.000 0.000
+2.221494E-01	-1.265203E-02		alpha12 = 3.142 3.142
-8.753109E+01	+6.081403E-05		alpha13 = 0.000 0.000
+4.660676E+02	+7.667346E-06		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 3.142 3.142
			#####

+2.015495E-08	+0.000000E+00	D-Elemente:	#####
+3.919758E+00	+0.000000E+00	0.485516	theta12 = 0.002 1.967
-2.365930E-03	+0.000000E+00	102.471056	theta13 = 3.139 0.000
-9.451475E+01	+0.000000E+00	1741.919967	theta23 = 3.139 1.437
+2.400487E-02	+0.000000E+00		delta = 0.000 0.000
-3.994497E+01	+0.000000E+00		alpha11 = 0.000 0.000
-1.308347E-03	+0.000000E+00		alpha12 = 0.000 0.000
+1.726270E+03	+0.000000E+00		alpha13 = 0.000 0.000
+2.328811E+02	+0.000000E+00		alpha23 = 0.000 0.000
			alpha33 = 0.000 0.000
			#####

```

+7.862009E-13 +9.012312E-16 D-Elemente: #####
-5.219917E-03 -7.852638E-06 0.001504 theta12 = 0.502 | 0.502
-9.043919E-08 -5.083550E-11 0.006208 theta13 = 3.073 | 0.069
-5.219917E-03 -7.852638E-06 0.059086 theta23 = 0.900 | 2.242
+3.413849E-02 -1.024153E-04 delta = 3.141 | 0.001
+3.084010E-02 -3.979376E-05 alpha11 = 0.000 | 3.136
-9.043919E-08 -5.083550E-11 alpha12 = 3.142 | 3.136
+3.084010E-02 -3.979376E-05 alpha13 = 0.000 | 3.137
+2.024248E-02 +4.656296E-06 alpha23 = 3.138 | 6.282
alpha33 = 3.139 | 3.139
#####

```

CKM:

===

```

(0.972899, 0.231191, 0.004373)
(0.231171, 0.972134, 0.038934)
(0.005297, 0.038819, 0.999232)

```

Jarlskog Invariante = 1.423205e-05

```

(-0.972846,-0.010151) (0.220675,-0.068933) (-0.003386,0.002767)
(-0.209720,0.097251) (-0.712828,0.660999) (0.028519,-0.026506)
(0.003952,-0.003527) (0.028950,-0.025861) (0.737939,-0.673729)

```

PMNS:

====

```

(0.873982, 0.480639, 0.071707)
(0.249219, 0.569984, 0.782948)
(0.417187, 0.666412, 0.617940)

```

```

(0.873982,0.000001) (-0.480639,-0.000195) (0.071707,0.000031)
(-0.249218,0.000875) (-0.569981,0.001829) (-0.782943,0.002812)
(-0.417186,0.001098) (-0.666410,0.001449) (0.617938,-0.001601)

```


Literaturverzeichnis

- [1] Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, Eur. Phys. J. **C 15** (2000) 1.
- [2] W. N. Cottingham und D. A. Greenwood, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1998.
- [3] D. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343, Phys. Rev. **D 8** (1973) 3633, Phys. Rev. **D 9** (1974) 980; H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346, Phys. Rep. **14 C** (1974) 129; H. Fritzsche, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. **47 B** (1973) 365.
- [4] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579; A. Salam und J.C. Ward, Phys. Lett. **13** (1964) 168; S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264; A. Salam in *Elementary Particle Theory*, Hrsg. N. Svartholm, Almquist & Forlag, Stockholm 1968.
- [5] G. 't Hooft und M. Veltman, Nucl. Phys. **B 44** (1972) 189; G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B 61** (1973) 455.
- [6] E.C.G. Stückelberg und A. Peterman, Helv. Phys. Acta **26** (1953) 499; M. Gell-Mann und F.E. Low, Phys. Rev. **95** (1954) 1300.
- [7] S. L. Adler, Phys. Rev. **177** (1969) 2426; J. S. Bell und R. Jackiw, Nuovo Cim. **60 A** (1969) 47.
- [8] A. Pich, hep-ph/9412274.
- [9] H. Georgi und S.L. Glashow, Phys. Rev. **D 6** (1972) 429.
- [10] D. Gross und R. Jackiw, Phys. Rev. **D 6** (1972) 477; C. Bouchiat, J. Iliopoulos und P. Meyer, Phys. Rev. Lett. **38 B** (1972) 519.
- [11] P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **12** (1964) 132, Phys. Rev. **145** (1966) 1156.
- [12] ALEPH-, DELPHI-, L3- und OPAL-Kollaborationen, CERN-EP-99-060 (1999).
- [13] H. Fusaoka und Y. Koide, Phys. Rev. **D 57** (1998) 3986.
- [14] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531; M. Kobayashi und M. Maskawa, Progr. Theor. Phys. **49** (1973) 652.

- [15] A. Riotto, CERN-TH-98-204 und hep-ph/9807454 (1998).
- [16] P. Langacker (Hrsg.), *Precision Tests of the Standard Electroweak Model*, World Scientific, Singapur 1995.
- [17] U. Baur *et al.*, Summary report of the Precision Measurement working group at Snowmass 2001, hep-ph/0202001.
- [18] W.J. Marciano, Proceedings of MuMu99-5th International Conference on Physics Potential and Development of Muon Colliders, San Francisco, CA, Dec. (1999), hep-ph/0003181.
- [19] J. Bagger und J. Wess, *Supersymmetry and Supergravity*, second ed., Princeton University Press, Princeton 1992.
- [20] D. Bailin und A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, first ed., IOP Publishing, Bristol 1994.
- [21] H. Kalka und G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner, Stuttgart 1997.
- [22] S.P. Martin, hep-ph/9709356.
- [23] J. Louis, I. Brunner und S.J. Huber, hep-th/9811341.
- [24] H.P. Nilles, Phys. Rep. **110** (1984), 1.
- [25] S. Coleman und J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.
- [26] J. Wess und B. Zumino, Nucl. Phys. **B 70** (1974) 39.
- [27] P. Fayet, Nucl. Phys. **B 90** (1975) 104; G.R. Farrar and P. Fayet, Phys. Lett. **76B** (1978) 575.
- [28] L. O’Raifeartaigh, Nucl. Phys. **B 96** (1975) 331.
- [29] P. Fayet und J. Iliopoulos, Phys. Lett. **51B** (1974) 461.
- [30] S. Ferrara, L. Girardello und F. Palumbo, Phys. Rev. **D 20** (1979) 403.
- [31] J.F. Gunion, H.E. Haber, G.L. Kane und S. Dawson, *The Higgs Hunters Guide*, Universität Californien, Juni 1989.
- [32] H.E. Haber und R. Hempfling, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1815; J. Ellis, G. Ridolfi und F. Zwirner, Phys. Lett. **262 B** (1991) 477; M. Carena, J.R. Espinosa, M. Quiros und C.E.M. Wagner, Phys. Lett. **335** (1995) 209; P.H. Chankowski und S. Pokorski, *Perspectives on Higgs Physics II*, Hrsg. G.L. Kane, World Scientific, Singapur, 1997, hep-ph/9702431; H.E. Haber, *Perspectives on Higgs Physics II*, Hrsg. G.L. Kane, World Scientific, Singapur, 1997, hep-ph/9707213; J.R. Espinosa, Surveys High Energ. Phys. **10** (1997), 279, hep-ph/9606316.

- [33] J. Kim und H.P. Nilles, Phys. Lett. **138B** (1984) 150.
- [34] C. Merten, *Nukleonenzerfall und Neutrinoeigenschaften in einem Massenmodell auf der Grundlage einer $SO(10)$ -Grand Unified-Theorie*, Dissertation Universität Wuppertal (1999), WUB-DIS 99-14.
- [35] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Benjamin-Cummings, Reading 1982.
- [36] R. Slansky, Phys. Rep. **79 B** (1981) 1.
- [37] M. Gell-Mann, P. Ramond und R. Slansky, Rev. Mod. Phys. **50** (1978) 721.
- [38] A. Lukas, *Fermionmassen und -mischungen durch Strahlungskorrekturen in einer E_6 -GUT*, Diplomarbeit Universität Wuppertal (1991), WU D 30-91.
- [39] H. Georgi, Nucl. Phys. **B 156** (1979) 126.
- [40] S. Rajpoot, Phys. Rev. **D 22** (1980) 2244; R.W. Robinett und J.L. Rosner, Phys. Rev. **D 26** (1982) 2396; Y. Tosa, G.C. Branco und R.E. Marshak, Phys. Rev. **D 28** (1983) 1731; D. Chang, R.N. Mohapatra und M.K. Parida, Phys. Rev. **D 30** (1984) 1052; J.M. Gipson und R.E. Marshak, Phys. Rev. **D 31** (1985) 1705; D. Chang, R.N. Mohapatra, J.M. Gipson, R.E. Marshak und M.K. Parida, Phys. Rev. **D 31** (1985) 1718.
- [41] N. G. Deshpande, E. Keith und P. B. Pal, Phys. Rev. **D 46** (1992) 2261, Phys. Rev. **D 47** (1993) 2892.
- [42] H. Georgi und S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **43** (1974) 438.
- [43] H. Georgi, *The state of the art – gauge theories*, Proceedings of the American Institute of Physics, Hrsg. C.E. Carlson.
- [44] P.D.B. Collins, A.D. Martin und E.J. Squires, *Particle physics and cosmology*, Wiley, New York 1989.
- [45] H. Georgi, C. Jarlskog, Phys. Lett. **86B** (1979) 297.
- [46] G.G. Ross, *Grand Unified Theories*, Benjamin-Cummings, Menlo Park 1984.
- [47] M. Machacek, Nucl. Phys. **B 159** (1979) 37; J. Ellis, M.K. Gaillard und D.V. Nanopoulos, Phys. Lett. **88 B** (1979) 320.
- [48] P. Langacker, Phys. Rep. **72 C** (1981) 185.
- [49] B. Viren für die Super-Kamiokande-Kollaboration, SBHEP-99-1 und hep-ex/9903029 (1999).

- [50] B. Kayser, F. Gibrat-Debu und F. Perrier, *The physics of massive Neutrinos*, World Scientific, Singapur 1989.
- [51] V.V. Dixit und M. Sher, Phys. Rev. **D40** (1989) 3765.
- [52] F. Acampora, G. Amelino-Camelia, F. Buccella, O. Pisanti, L. Rosa und T. Tuzi, Nuovo Cim. **108 A** (1995) 375.
- [53] J. Pati und A. Salam, Phys. Rev. **D 10** (1974) 275.
- [54] M.S. Chanowitz, J. Ellis und M.K. Gaillard, Nucl. Phys. **B 128** (1977) 506; R. Barbieri, D.V. Nanopoulos, G. Morchio und F. Strocchi, Phys. Lett. **90 B** (1980) 91.
- [55] S. Dimopoulos und H. Georgi, Nucl. Phys. **B 193** (1981) 150.
- [56] N. Sakai, Z. Phys. **C 11** (1981) 153.
- [57] N. Sakai und T. Yanagida, Nucl. Phys. **B 197** (1982) 533.
- [58] S. Weinberg, Phys. Rev. **D 26** (1982) 287.
- [59] J. Hisano, H. Murayama und T. Yanagida, Nucl. Phys. **B 402** (1993) 46.
- [60] W. Lucha, *Protonzerfall*, Dissertation Universität Wien (1983).
- [61] A.L. Macpherson, hep-ph/9512266.
- [62] K.S. Babu und S.M. Barr, Phys. Rev. **D 48** (1993) 5354.
- [63] K.S. Babu und S.M. Barr, Phys. Rev. **D 65** (2002) 095009.
- [64] Z. Chacko und R.N. Mohapatra, Phys. Rev. **D 59** (1998) 011702.
- [65] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **6** (1958) 429, Sov. Phys. JETP **7** (1958) 172.
- [66] M.C. Gonzalez-Gracia und Y. Nir, hep-ph/0202058.
- [67] L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D 17** (1978) 2369.
- [68] S. P. Mikheyev und A. Y. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42** (1985) 441, Nuovo Cim. **9 C** (1986) 17.
- [69] C. Bemporad, G. Gratta und P. Vogel, Rev. Mod. Phys. **74** (2002) 297.
- [70] G. Fogli, E. Lisi, D. Montanino und A. Palazzo, Phys. Rev. **D64** (2001) 093007, hep-ph/0106247.
- [71] J. N. Bahcall, M. C. Gonzalez-Garcia und C. Peña-Garay, JHEP **0207** (2002) 054, hep-ph/0204314.

- [72] J. N. Bahcall, [<http://www.sns.ias.edu/~jnb>].
- [73] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault und S. Basu, *Astrophys. J.* **555** (2001) 990-1012, astro-ph/0010346.
- [74] Q.R. Ahmad *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 071301.
- [75] B.T. Cleveland *et al.*, *Astrophys. J.* **496** (1998) 505.
- [76] W. Hampel *et al.* (GALLEX Kollaboration), *Phys. Lett. B* **447** (1999) 127.
- [77] J.N. Abdurashitov *et al.* (SAGE Kollaboration), *Phys. Rev. C* **60** (1999) 055801 [astro-ph/9907113]; V. Gavrin (SAGE Collaboration) in: *Neutrino 2000*, Proc. of the XIXth International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, 16–21 June 2000, Hrsg. J. Law, R.W. Ollerhead, und J.J. Simpson, *Nucl. Phys. Proc. Suppl. B* **91** (2001) 36.
- [78] M. Altmann *et al.* (GNO Kollaboration), *Phys. Lett. B* **490** (2000) 16; E. Bellotti *et al.* (GNO Collaboration) in: *Neutrino 2000*, Proc. of the XIXth International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, 16–21 June 2000, Hrsg. J. Law, R.W. Ollerhead, und J.J. Simpson, *Nucl. Phys. Proc. Suppl. B* **91** (2001) 44.
- [79] Y. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande Kollaboration), *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1158; Erratum **81** (1998) 4279; *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 1810; Y. Suzuki (Super-Kamiokande Kollaboration), in *Neutrino 2000*, Proc. of the XIXth International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, 16–21 June 2000, Hrsg. J. Law, R.W. Ollerhead, und J.J. Simpson, *Nucl. Phys. Proc. Suppl. B* **91** (2001) 29; S. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande Kollaboration), *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 5651.
- [80] M. Apollonio *et al.*, *Phys. Lett. B* **466** (1999) 415.
- [81] R. Becker-Szendy *et al.* (IMB Kollaboration), *Phys. Rev. D* **46** (1992) 3720.
- [82] Y. Fukuda *et al.* (Kamiokande Kollaboration), *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1683.
- [83] M. Aglietta *et al.* (Nusex Kollaboration), *Europhys. Lett.* **8** (1989) 611.
- [84] K. Daum *et al.* (Fréjus Kollaboration), *Z. Phys. C* **66** (1995) 417.
- [85] W.W.M. Allison *et al.* (Soudan Kollaboration), *Phys. Lett. B* **449** (1999) 137.
- [86] M. Ambrosio *et al.* (MACRO Kollaboration), *Phys. Lett. B* **517** (2001) 59.
- [87] siehe z.B. J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge 1989, Appendix; J. N. Bahcall, *Spek. d. Wiss.* **7** (1990) 76.
- [88] J.N. Bahcall und R.K. Ulrich, *Rev. Mod. Phys.* **60** (1988) 297; J.N. Bahcall und M.H. Pinsonneault, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 781.

- [89] S.M. Bilenky, C. Giunti und W. Grimus, Prog. Part. Nucl. Phys. **43** (1999) 1.
- [90] S.M. Bilenky, hep-ph/0205047.
- [91] C. Athanassopoulos *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3082; nucl-ex/9706006.
- [92] B. Armbruster *et al.*, Phys. Rev. C **57** (1998) 3414; hep-ex/0008002.
- [93] K. Eitel (KARMEN Kollaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **91** (2000) 191.
- [94] A. Bazarko (MiniBooNE Kollaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **91** (2000) 210; [<http://www-boone.fnal.gov>].
- [95] W. Rhode, *Neutrinos, Muons and Monopoles: Particle Physical Aspects of Neutrino Astronomy with Large Volume Underground Detectors*, Habilitationsschrift Universität Wuppertal (2002).
- [96] S. Raby, hep-ph/9406333.
- [97] Y. Achiman und T. Greiner, Phys. Lett. **B 324** (1994) 33; Y. Achiman und T. Greiner, Phys. Lett. **B 443**(1995) 3.
- [98] Y. Achiman und C. Merten, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B 87** (2000) 318; Y. Achiman und C. Merten, Nucl. Phys. **B 584** (2000) 46.
- [99] Y. Achiman und M. Richter, Phys. Lett. **B 523** (2001) 304.
- [100] H. Fritzsch, Phys. Lett. **B 70** (1977) 436; H. Fritzsch, Phys. Lett. **B 73** (1978) 317; H. Fritzsch, Nucl. Phys. **B 155** (1979) 189.
- [101] G.C. Branco, L. Lavoura und F. Mota, Phys. Rev. **D 39** (1989) 3443.
- [102] J.A. Harvey, D.B. Reiss und P. Ramond, Nucl. Phys. **B 199** (1982) 223.
- [103] C.D. Froggatt und H.B. Nielsen, Nucl. Phys. **B 147**(1979) 27; Ein aktueller Übersichts-Artikel findet sich in P. Ramond, hep-ph/0001006.
- [104] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1039; C. Jarlskog, Z. Phys. **C 29** (1985) 491.
- [105] C. Jarlskog und F. Ynduráin, Nucl. Phys. **B 144** (1979) 29; J.F. Donoghue und G. Karl, Phys. Rev. **D 24** (1981) 230.
- [106] G. Kane und G. Karl, Phys. Rev. **D 22** (1980) 2808.
- [107] M.B. Gavela, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène und J.C. Raynal, Phys. Rev. **D 23** (1981) 1580.
- [108] H. Din, G. Girardi und P. Sorba, Phys. Lett. **91 B** (1980) 77; J.F. Donoghue, Phys. Lett. **92 B** (1980) 99; E. Golowich, Phys. Rev. **D 22** (1980) 1148, Phys. Rev. **D 24** (1981) 2899.

- [109] Y. Tomozawa, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 463; V.S. Berezinsky B.L. Ioffe und Y.I. Kogan, Phys. Lett. **105 B** (1981) 33; L.F. Abbott, R. Blankenbecler und M.B. Wise, Phys. Rev. **D 23** (1981) 1591.
- [110] M. Isgur und M.B. Wise, Phys. Lett. **117 B** (1982) 179.
- [111] W. Lucha, Fortschr. Phys. **33** (1985) 547.
- [112] Y. Hara, Nucl. Phys. **B 214** (1983) 167.
- [113] J.D. Bjorken und S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York 1964.
- [114] L.F. Abbott und M.B. Wise, Phys. Rev. **D 22** (1980) 2208; M. Daniel und J.A. Peñarrocha, Nucl. Phys. **B 236** (1984) 467.
- [115] F. Buccella, G. Miele, L. Rosa, P. Santorelli und T. Tuzi, Phys. Lett. **B 233** (1989) 178.
- [116] A.J. Buras, TUM-HEP-316-98 und hep-ph/9806471 (1998).
- [117] P. Langacker in: *Inner Space, Outer Space*, Hrsg. E. W. Kolb, University of Chicago Press, Chicago 1986.
- [118] C. McGrew *et al.* (IMB 3-Kollaboration), Phys. Rev. **D 59** (1999) 052004.
- [119] M. Shiozawa *et al.* (Super-Kamiokande-Kollaboration), Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3319; Y. Hayato *et al.* (Super-Kamiokande-Kollaboration), Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1529.
- [120] C. Berger *et al.* (Fréjus-Kollaboration), Z. Phys. **C 50** (1991) 385, Phys. Lett. **B 269** (1991) 227.
- [121] W.W.M. Allison *et al.* (Soudan 2-Kollaboration), Phys. Lett. **B 427** (1998) 217; D. Wall *et al.* (Soudan 2-Kollaboration), hep-ex/9910026 (1999).
- [122] F. Arneodo *et al.* (ICARUS Kollaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **70** (1999) 453.
- [123] M.B. Gavela, S.F. King, C.T. Sachrajda, G. Martinelli, M. L. Paciello und B. Taglienti, Nucl. Phys. **B 312** (1989) 269.
- [124] J. Hisano, Y. Nomura und T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **98** (1997) 1385; J. Hisano, hep-ph/0004266.
- [125] H. Murayama und A. Pierce, hep-ph/0108104.
- [126] S. Aoki *et al.* (JLQCD Kollaboration), Phys. Rev. **D 62**(2000)014506.

- [127] Y. Hayato *et al.* Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1529, hep-ex/9904020; Y. Totsuka, Vortrag auf der „SUSY2K“ Konferenz, CERN, Juni 2000.
- [128] M. Shiozawa, Vortrag auf dem Int. Workshop on Next Generation Nucleon Decay and Neutrino Detector (NNN99), Stony Brook Sept. 1999.
- [129] C.K. Jung, Vortrag auf NNN99, hep-ex/0005046.
- [130] K.S. Babu, J. Pati und F. Wilczek, Nucl. Phys. **B 566** (2000) 33; Ein aktueller Übersichtsartikel sowie weitere Referenzen finden sich in: J. Pati, hep-ph/0106082 .
- [131] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling und B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C, Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [132] A. Rašin, hep-ph/9708216.
- [133] H. Arason, D.J. Castaño, B. Kesthelyi, S. Mikaelian, E.J. Piard, P. Ramond und B.D. Wright, Phys. Rev. **D46** (1992) 3945; M. Luo und Y. Xiao, hep-ph/0207271.
- [134] D.J. Castaño, E.J. Piard und P. Ramond, Phys. Rev. **D49** (1994) 4882.
- [135] K.S. Babu, C.N. Leung und J. Pantaleone, Phys. Lett. **B319** (1993) 191; P.H. Chankowski und Z. Pluciennik, Phys. Lett. **B326** (1993) 312.
- [136] V. Barger, M.S. Berger und P. Ohmann, Phys. Rev. **D47** (1993) 1093, hep-ph/9209232.

Schlusswort

In erster Linie möchte ich mich bei Prof. Dr. Yoav Achiman bedanken, der es mir ermöglicht hat, auf einem interessanten Gebiet zu arbeiten und mich hierbei in vielfältiger Weise unterstützte. Weiterhin gilt mein Dank PD. Dr. Dr. Wolfgang Rhode für die Aufnahme in die AMANDA-Arbeitsgruppe, wodurch ich neben der Mitarbeit an innovativen Projekten diese Arbeit unter sehr guten Arbeitsbedingungen zu Ende führen konnte.

Prof. Dr. Carl H. Albright (Northern Illinois University und Fermi-Lab.) war für verschiedene Fragen per E-Mail ein offener Ansprechpartner; ebenso erwies sich Dr. André Lukas (University of Sussex) als eine große Hilfe bei hartnäckigen Problemen.

Viele Kollegen und Mitarbeiter aus dem Fachbereich haben durch vielfältige Diskussionen und Anregungen einen nicht zu unterschätzenden Beitrag zu dieser Arbeit geleistet; im einzelnen sind dies: Guido Arnold, Patrik Ekström, PD. Dr. Stefan Güsken, Dr. Ulf Klei-nevoß, PD. Dr. Dr. Thomas Lippert, Dr. Carsten Merten, Boris Orth, Dr. Oliver Passon, Dr. Thorsten Struckmann und Dr. Jochen Viehoff. Zu der angenehmen Arbeitsatmosphäre innerhalb der AMANDA-Gruppe Wuppertal haben insbesondere auch die Diplomanden Matthias Deeg, Heiko Geenen, Timo Messarius und Kosta Schinarakis beigetragen. In computerbezogenen Fragen waren Dr. Norbert Eicker und Torsten Harenberg stets eine große Hilfe. Frau Ingrid Schaarwächter aus dem Sekretariat der AMANDA-Gruppe war in allen organisatorischen Dingen unschlagbar. Ebenso waren Frau Sabine Hoffmann und Frau Anita Wied in administrativen Angelegenheiten innerhalb der Theoretischen Physik eine ausgesprochene Hilfe.

Besonderer Dank gilt meiner Familie und meinem Freundeskreis. Meine Eltern haben mich während des gesamten Studiums nach besten Möglichkeiten unterstützt. Viele Freunde, insbesondere aber Katharina Nikolaus, haben durch ihre Unterstützung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Diese Dissertation wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft durch ein Stipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs „Feldtheoretische und numerische Methoden der Elementarteilchen- und Statistischen Physik“ gefördert.

Marcus Richter

Wuppertal, Dezember 2002