



FACHBEREICH PHYSIK  
BERGISCHE UNIVERSITÄT  
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

# Bestimmung der Newtonschen Gravitationskonstanten $G$

Ulf Kleinevoß

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
des Fachbereiches Physik  
der Universität Wuppertal

Januar 2002  
WUB-DIS 2002-2

## Abstract

The value of the Newtonian Gravitational constant  $G$  has interested physicists for more than 200 years and except for the speed of light, it has the longest history of measurements. But although  $G$  is the aim of experimentalists for such a long time, it is the least well known fundamental constant. At the end of 1998 the CODATA even decided to increase the uncertainty of the accepted value for the gravitational constant from 128 ppm to 1500 ppm. This remarkable step of increasing the uncertainty instead of decreasing was made to reflect the discrepancies between recent experiments, which span a wide range of more than 0.7 %. Motivated by this fact and the uniqueness of the Wuppertaler experiment concerning distance range and method, strong efforts were performed in order to minimize the uncertainties and to determine a realistic estimate for the Newtonian constant and the remaining errors.

The heart of the experiment is an open Fabry-Pérot resonator, which is formed by two reflectors. On each outer side of the reflectors a 576 kg brass mass is placed, coinciding with the axis of the resonator. The two masses are moved symmetrically and simultaneously from a reference to a measuring position near the reflectors. This causes the distance between the reflectors of the cavity to change due to the change in gravitational force acting on them. The measured quantity is the change in the resonant frequency of the resonator arising from the change in its length of approximately 13 nm. Because the resulting shift in the resonance frequency is measured as a function of the field masses position, Newton's inverse-square law can be tested between the ranges of 0.7 m and 2.1 m.

This thesis describes the results of a search for further systematical errors and the reduction of known uncertainties. A correction function for the tilt of the experiment due to deformation of the ground by the brass masses was determined, which enabled us to reanalyse the results of older measurements. Also, the dependence on the alignment between the resonator and the waveguides was reduced and an active temperature stabilization was installed. Therefore, systematic uncertainty could be reduced by more than an order of magnitude compared to the previous measurements. As a result, the Newtonian Gravitational constant has been determined with a relative accuracy of 147 ppm to be

$$\langle G \rangle = (6.67422 \pm 0.00049 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]. \quad (1)$$

In addition it puts new constraints on the excluded regions for non-Newtonian gravity in the range between 0.1 m to 1 m. The value itself is in good agreement with the latest measurements of other groups.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Newtons Gesetz</b>	<b>5</b>
2.1	Experimentelle Verfahren zur Bestimmung von $G$	6
2.2	Ziel der Arbeit	14
<b>3</b>	<b>Grundprinzip des Fabry-Pérot Gravimeters</b>	<b>19</b>
3.1	Physikalisches Prinzip	19
3.2	Fabry-Pérot Resonator	23
3.2.1	Mikrowellenresonator	23
3.2.2	Hochfrequenzkenngrößen	27
3.2.3	Umrechnungsfaktor und Längenauflösungsvermögen	29
3.2.4	Ausrichtung des Experimentes	30
3.3	Begrenzende Effekte	33
<b>4</b>	<b>Aufbau des Gravitationsexperimentes</b>	<b>35</b>
4.1	Resonatormeißsystem	35
4.1.1	Fabry-Pérot Resonator	36
4.1.2	Drähte der Aufhängung	40
4.1.3	Kryostateinsatz mit Aufhängung	42
4.2	Feldmassen und ihr Positionierungssystem	47
4.2.1	Feldmassen	47
4.2.2	Bewegungsmechanismus	49
4.2.3	Meißsystem zur Bestimmung der Position der Massen	50
4.3	Vakuumgefäß mit Stützgerüst	53
4.4	Mikrowellensystem	55
<b>5</b>	<b>Apparative Meßgrößen</b>	<b>59</b>
5.1	Positionierung der Feldmassen	59
5.2	Positionierung des Resonators	62
5.3	Eigenfrequenzen der Pendel	65
5.4	Massen und Volumina	66
5.5	Modenspektrum	68

5.6	Numerische Berechnungen . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Systematische Unsicherheiten</b>	<b>71</b>
6.1	Seismik . . . . .	71
6.1.1	Mikroseismik . . . . .	71
6.1.2	Makroseismik . . . . .	74
6.2	Aktive Temperaturregelung . . . . .	76
6.2.1	Variation der Position des Stützgerüsts . . . . .	78
6.2.2	Temperaturverhalten der Resonanzfrequenz . . . . .	80
6.3	Neigung des Stützgerüsts . . . . .	83
6.4	Choke-Effekt . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Bestimmung der Konstanten <math>G</math></b>	<b>97</b>
7.1	Analyse . . . . .	97
7.2	Gravitationskonstante $G$ . . . . .	102
7.3	Reanalyse alter Meßwerte . . . . .	106
7.4	Einordnung der Ergebnisse . . . . .	108
7.5	Ist Newtons Konstante konstant? . . . . .	110
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Kryostat</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Gemessene Erdbeben</b>	<b>121</b>
<b>C</b>	<b>Verwendete Meßreihen</b>	<b>125</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Vergleich der relativen Genauigkeiten von $c$ und $G$ . . . . .	2
1.2	Aktuelle Meßergebnisse für die Gravitationskonstante . . . . .	2
2.1	Prinzip eines „Large Scale Experiments“ . . . . .	7
2.2	Bild des Cavendish Experimentes . . . . .	8
2.3	Prinzip einer Torsionswaage . . . . .	9
2.4	Prinzip einer Balkenwaage . . . . .	12
2.5	Veröffentlichte Werte für $G$ seit 1970 . . . . .	15
3.1	Das Prinzip des Fabry-Pérot Gravimeters . . . . .	20
3.2	Das Prinzip des Fabry-Pérot Gravimeters mit zwei Feldmassen . . . . .	21
3.3	Das Verhältnis der Auslenkung für Punkt- und ausgedehnte Massen . . . . .	22
3.4	Feldverteilung in einem offenen Resonator . . . . .	25
3.5	Ersatzschaltbild für einen zweifach gekoppelten Hohlraumresonator . . . . .	27
3.6	Verschiedene Neigungsmöglichkeiten des Resonators . . . . .	30
4.1	Schematische Darstellung des Wuppertaler Experimentes . . . . .	36
4.2	Schematische Darstellung des Fabry-Pérot Resonators . . . . .	37
4.3	Fotos der Resonatorspiegel . . . . .	38
4.4	Schematische Zeichnung der Komponenten zur induktiven Ankopplung . . . . .	39
4.5	Spannungs-Dehnungs-Diagramm des verwendeten Wolframdrahtes . . . . .	41
4.6	Skizze des Deckelflansches des Vakuumtanks . . . . .	43
4.7	Eine Prinzipzeichnung der Aufhängung . . . . .	44
4.8	Foto der Aufhängung . . . . .	45
4.9	Foto des Resonators mit der Wirbelstrombremse . . . . .	45
4.10	Foto einer Feldmasse . . . . .	47
4.11	Radiales Dichteprofil einer der beiden Feldmassen . . . . .	48
4.12	Der Bewegungsmechanismus der Feldmassen . . . . .	49
4.13	Skizze des Positionierungssystems für die Feldmassen . . . . .	51
4.14	Foto der optischen Bank . . . . .	52
4.15	Foto des Relativ-Meßsystems . . . . .	53
4.16	Skizze des Stützgerüsts für den Vakuumtank . . . . .	54
4.17	Schematische Darstellung des Mikrowellensystems . . . . .	56

5.1	Positionsabweichung des Spindelantriebes . . . . .	60
5.2	Häufigkeit der benötigten Iterationen zur Positionierung der Massen . . . . .	61
5.3	Alte Form der Ausrichtung des Vakuumtanks . . . . .	62
5.4	Neue Form der Ausrichtung des Vakuumtanks . . . . .	63
5.5	Die relative Abweichung des gemessenen Pendelabstandes . . . . .	64
5.6	Variation der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit des Neigungswinkels . . . . .	66
6.1	Unruhe der Resonanzfrequenz . . . . .	72
6.2	Unruhe der Resonanzfrequenz als Funktion der Wellenhöhe in der Biskaya . . . . .	73
6.3	Verlauf der Resonanzfrequenz während eines Erdbebens . . . . .	75
6.4	Variation der Resonanzfrequenz durch Temperaturschwankungen . . . . .	76
6.5	Mit der Heizung erreichte Temperaturverteilungen . . . . .	77
6.6	Neigung des Stützgerüsts durch Temperaturvariationen . . . . .	79
6.7	Verhalten der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Temperatur . . . . .	80
6.8	Änderung der Frequenz durch Temperatureinflüsse . . . . .	81
6.9	Hystereseschleife der Resonanzfrequenz als Funktion der Temperatur . . . . .	82
6.10	Skizze zum Verhalten des Resonators bei Neigung . . . . .	84
6.11	Abstandsänderung der Spiegel in Abhängigkeit von der Position einer Masse . . . . .	85
6.12	Abstandsänderung der Spiegel in Abhängigkeit von der Position beider Massen . . . . .	86
6.13	Neigungswerte als Funktion des Abstandes . . . . .	87
6.14	Der Choke-Effekt aus [Sch99] . . . . .	90
6.15	Verschiedene geometrischen Kombinationen für die Kopplung . . . . .	91
6.16	Der Choke-Effekt bei Abstandsänderung des Hohlleiters . . . . .	94
6.17	Der Choke-Effekt bei Verschiebung des Hohlleiters . . . . .	95
7.1	Modulation der Resonanzfrequenz durch die Gravitation der Feldmassen . . . . .	98
7.2	Driftkorrektur der Frequenzen . . . . .	99
7.3	Projektion der Frequenzhübe auf die Frequenzachse. . . . .	100
7.4	Eine der beiden in Abbildung 7.3 gezeigten Verteilungen . . . . .	100
7.5	Anpassung eines Polynoms an die Meßwerte . . . . .	101
7.6	Die im Rahmen dieser Arbeit gemessenen Werte für die Gravitationskonstante $G$ . . . . .	105
7.7	Meßergebnisse aus [Wal95] ohne Neigungskorrektur . . . . .	107
7.8	Meßergebnisse aus [Wal95] mit Neigungskorrektur . . . . .	107
7.9	Gravitationskonstanten als Funktion der jeweiligen Schwerpunktabstände . . . . .	109
7.10	Ausschlußbereiche für die Kopplungskonstante $\alpha$ . . . . .	110
7.11	Exponentielle Entfernungsabhängigkeit des Experimentes . . . . .	112
7.12	Ausschlußbereiche für eine zusätzliche anziehende fünfte Kraft . . . . .	114
7.13	Ausschlußbereiche für eine zusätzliche abstoßende fünfte Kraft . . . . .	114
A.1	Konstruktionszeichnung des Vakuumtanks . . . . .	119
B.1	Laufzeitkurve der gemessenen Erdbeben . . . . .	122

# Tabellenverzeichnis

5.1	Resonanzfrequenzen des Fabry-Pérot Resonators . . . . .	69
7.1	Unsicherheiten der Korrekturwerte für die Neigung . . . . .	103
7.2	Auflistung der systematischen Unsicherheiten . . . . .	103
7.3	Summe der systematischen Unsicherheiten . . . . .	103
7.4	Die gemessenen Werte für die Gravitationskonstante . . . . .	104
7.5	Die neusten Meßergebnisse für $G$ . . . . .	108
B.1	Statistische Häufigkeit von Erdbeben pro Jahr . . . . .	123



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Gravitation ist als erste der vier heute bekannten Fundamentalkräfte entdeckt und mathematisch exakt beschrieben worden — durch I. Newtons Gravitationstheorie, die er 1687 veröffentlichte. Daraus ergibt sich die Beschreibung der Kraft  $F$  zwischen zwei massebehafteten Objekten mit dem Schwerpunktabstand  $r$  gemäß

$$F = G \frac{m M}{r^2}, \quad (1.1)$$

wobei  $G$  die Newtonsche Gravitationskonstante bezeichnet. Betrachtet man 300 Jahre später die moderne Physik, so scheint die Gravitation unter den Naturkräften einen Sonderstatus einzunehmen. Andere Kräfte, wie der Elektromagnetismus wirken in der Raum-Zeit; die physikalischen Ereignisse sind in dieses Kontinuum eingebettet. Die Gravitation dagegen ist dem passiven Hintergrund von Raum und Zeit nicht aufgeprägt, sondern vielmehr eine Verzerrung der Raum-Zeit selbst. Dieser qualitative Unterschied zwischen der Gravitation und anderen Kräften wird deutlich, wenn man versucht, eine Theorie der Gravitation zu formulieren, die mit allen Regeln der Quantenmechanik verträglich ist. Denn die Welt der Quanten befindet sich nie in Ruhe, womit in der Quantentheorie der Gravitation das Raum-Zeit-Kontinuum ständigen Fluktuationen unterworfen ist [Ehl96]. Diese Phänomene — falls sie überhaupt auftreten — sind aber nur auf ein äußerst kleines Raumgebiet beschränkt. Es war Max Planck, der diesem Raumgebiet als einer der ersten seine Aufmerksamkeit schenkte. Aus Anlaß des Versuches, das Strahlungsspektrum eines schwarzen Körpers zu verstehen, führte Planck die nach ihm benannte Konstante  $h$  ein [Pla99]. Dabei stellte er fest, daß die Konstante  $h$  zusammen mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  und der Newtonschen Gravitationskonstanten  $G$  ein absolutes Einheitensystem bilden: die Planckzeit  $t_P$ , -länge  $l_P$  und -masse  $m_P$ , wobei

$$t_P = \sqrt{\frac{G \cdot h}{c^5}}, \quad l_P = \sqrt{\frac{G \cdot h}{c^3}} \quad \text{und} \quad m_P = \sqrt{\frac{h \cdot c}{G}}. \quad (1.2)$$

Diese Einheiten legten später die Raum-Zeit-Skala für die Quantentheorie der Gravitation fest. Betrachtet man weitere Gravitationstheorien, so zeigt sich, daß das genaue Wissen um den Wert der Gravitationskonstanten auch helfen könnte bei der Festlegung der Kopplungskonstante

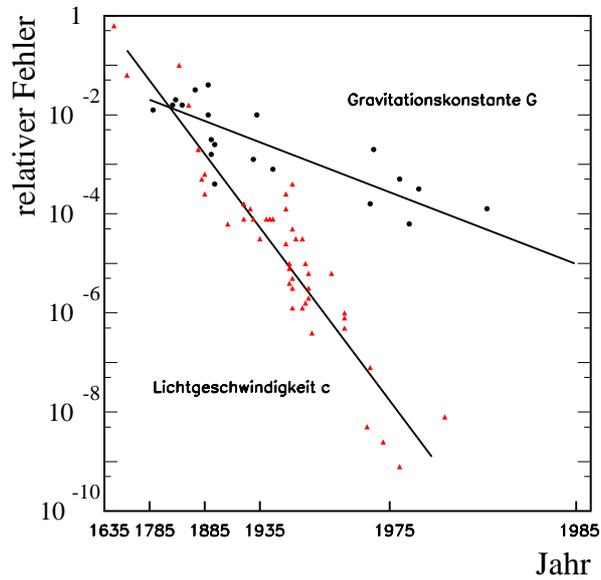


Abbildung 1.1: Ein Vergleich der relativen Genauigkeiten mit denen die Lichtgeschwindigkeit und die Gravitationskonstante  $G$  im Verlauf der Jahrhunderte bestimmt wurden (aus [Spe87]).

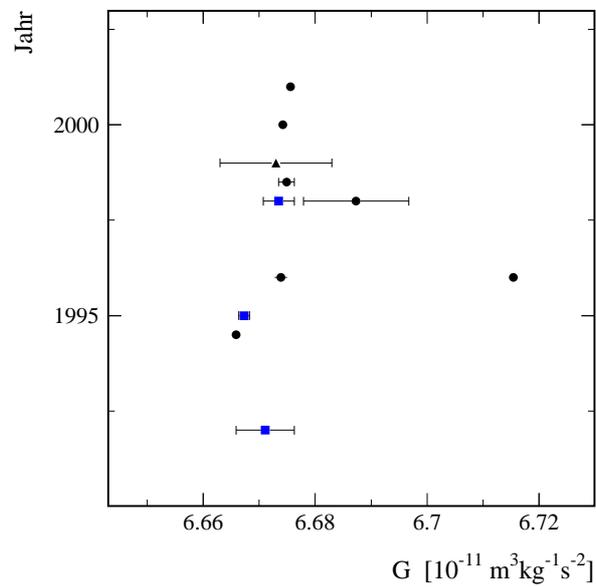


Abbildung 1.2: Aufgetragen sind die Messergebnisse für die Newtonsche Gravitationskonstante von verschiedenen Gruppen weltweit seit 1990 (vgl. auch Abb. 2.5).

in der String-Theorie [Dam95][Dam99] oder dem Prüfen der Existenz einzelner zusätzlicher Dimensionen im Submillimeterbereich [Ark98].

Die Bestimmung der Gravitationskonstanten  $G$  wird seit über 200 Jahren mit wachsender Präzision vorangetrieben, allerdings nur mit eingeschränktem Erfolg. Denn die Gravitation ist die schwächste der vier bekannten Wechselwirkungen und läßt sich nicht abschirmen [Haw87]. Aus diesen Schwierigkeiten resultiert, daß die Ergebnisse aller Experimente zur Bestimmung der Newtonschen Gravitationskonstante mit relativ großen Fehlern behaftet sind. Eine Tatsache die Abbildung 1.1 verdeutlicht. Aufgetragen ist die relative Genauigkeit mit der die Gravitationskonstante und die Lichtgeschwindigkeit im Laufe der Jahrhunderte bestimmt wurden. Offensichtlich sank die Unsicherheit mit der die Lichtgeschwindigkeit vermessen wurde erheblich schneller als jene der Newtonschen Konstante. Die aktuelle Situation der Meßergebnisse der Gravitationskonstante zeigt Abbildung 1.2. Aufgetragen sind die veröffentlichten Meßergebnisse verschiedener Experimente seit 1990. Man erkennt die große Streuung der Werte weit über die angegebenen Fehlertoleranzen der einzelnen Experimente hinaus. Diese Problematik fand ihren Ausdruck in dem Fehler des Literaturwertes der Newtonschen Konstante. So entschied die CODATA-Kommission<sup>1</sup> Ende 1999 die Unsicherheit des Literaturwertes von 128 ppm auf 1500 ppm anzuheben. Der Fehler symbolisiert dabei jenes Maß, mit dem das CODATA-Komitee glaubt den wirklich Betrag der Konstanten zu kennen [Moh98]. Dieser bis dahin einmalige Schritt sollte die starke Diskrepanz zwischen den verschiedenen Meßergebnissen unterschiedlicher Gruppen in der Welt reflektieren, die um mehr als 0.7 % variierten. Zur Zeit besitzt somit die Gravitationskonstante die größte Unsicherheit aller Literaturwerte. Augenscheinlich kann man die aktuelle Situation als Aufforderung verstehen, die Ergebnisse der einzelnen Experimente einer kritischen Überprüfung zu unterziehen. Dabei tritt die Bestimmung des Fehlers der Messungen gleichberechtigt neben die Bestimmung des Wertes der Konstanten.

Da das Experiment zur Bestimmung der Newtonschen Gravitationskonstanten an der Bergischen Universität in Wuppertal sowohl in seinem Meßprinzip als auch in seinem Meßbereich einzigartig ist, wurden alle Anstrengungen unternommen die bestehenden Fehlerbeiträge soweit wie möglich zu reduzieren [Kle89][Sch92][Wal95][Sch99]. Die dazu notwendige Hinterfragung aller Abschätzungen half beim Ermitteln eines genauen Meßwertes für die Konstante  $G$  und einer realistischen Bestimmung der verbleibenden Unsicherheit.

In der vorliegenden Arbeit werden die führenden Fehlerquellen des Experimentes analysiert und neue Meßergebnisse beschrieben. Die gewonnen Erkenntnisse über neue Unsicherheitsquellen werden ebenfalls aufgeführt. Die dabei bestimmte Korrekturfunktion, die die Einflüsse der Neigungen des Experimentes beschreibt, ließ sich auch auf ältere Messungen des Jahres 1995 anwenden.

Aufgrund der jetzt erreichten Genauigkeit, mit der die Gravitationskonstante bestimmt wurde, und des einzigartigen Abstandsbereichs des Experimentes erlauben die Resultate eine zusätzliche Einschränkung einer möglichen Stärke einer „fünften Kraft“ in Abstandsbereichen zwischen 0.1 und 1 m.

---

<sup>1</sup>Committee on Data for Science and Technology, Task Group on Fundamental Constants



## Kapitel 2

# Newton's Gesetz

Als eine der ältesten Naturkonstanten besitzt die Gravitationskonstante  $G$  und die Theorie, aus der sie entstammt, eine lange Geschichte. Dieses Kapitel soll eine kurze Beschreibung der Entwicklung des Verständnisses der Gravitation sowie einen Überblick über die verschiedenen Meßmethoden zur Bestimmung der Konstanten  $G$  liefern.

Einer der Höhepunkte der wissenschaftlichen Revolution, aus der die neuzeitliche Physik hervorging, war Isaac Newtons (1642–1727) Entdeckung des Gravitationsgesetzes. In seinem Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaft) [New63] das 1686 erschien, zeigt er, daß alle Objekte einander anziehen mit einer Kraft  $F$ , die direkt proportional zum Produkt ihrer Massen ( $m, M$ ) und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes  $r$  ist:

$$F \propto \frac{m M}{r^2} . \quad (2.1)$$

Mit seiner mathematischen Formulierung dieses Naturgesetzes konnte I. Newton die wichtigsten damals bekannten Erscheinungen im Universum beschreiben und zeigen, daß die Physik der Bewegungsabläufe auf der Erde und die Physik der Planetenbewegungen ein und dieselbe sind. Mit der Vorstellung einer allgemeinen Massenanziehung ließen sich die wichtigsten physikalischen Probleme jener Zeit in einem Zuge lösen: so wurde deutlich, welche Ursachen die drei Gesetze haben, die Johannes Kepler für die Planetenbewegung aufgestellt hatte, wie die Gezeiten entstehen, und wie Galileo Galileis Beobachtung zu erklären ist, daß die Strecke, die ein freifallendes Objekt pro Zeiteinheit zurücklegt, nicht vom seinem Gewicht abhängt. Mit seiner einheitlichen Beschreibung dieser Phänomene, hatte er das Ziel erreicht, eine Physik zu entwickeln, die von den Ursachen der beobachteten Gesetzmäßigkeiten ausgeht [Ehl96].

In Newtons *Prinzipia* selbst findet man allerdings kein generelles Kraftgesetz wie in 2.1 aufgetragen. Am nächsten kommt man einem Gesetz in der *Prinzipia* in Buch III, Aussage XLII, wo Newton ausführt, das die Gravitation wirkt

*gemäß der Menge der festen Materie welche sie (die Sonne und die Planeten) enthalten, und seine Wirkung sich bis in ungeheure Entfernungen in alle Richtungen ausbreitet, wobei diese immer wie das Quadrat der Entfernungen abnimmt.*

Denn um die Himmelsmechanik zu beschreiben reicht das Wissen um die Verhältnisse von Massen. Aus eben diesem Grund findet man auch nicht den Begriff „Gravitationskonstante“. Ihr Wert ist für die Newtonsche Theorie der Planetenbewegung nicht relevant. Vielmehr spielt immer nur das Produkt aus der Konstanten  $G$  mal der Sonnenmasse oder der unbekanntenen Planetenmasse eine Rolle. Erst weit im 18. Jahrhundert findet man die Konstante  $G$  in der Literatur etwa in Laplace *Mécanique Céleste* und später in Poissons *Traité de Mécanique* [Haw87]. In dem Zusammenhang, in dem wir die Größe  $G$  — damals noch mit  $f$  bezeichnet — heute benutzen, als Faktor zur Bestimmung der Kraft, wurde sie erst von A. Cornu und B. Baille 1873 [Cor73] eingeführt [Gil99].

## 2.1 Experimentelle Verfahren zur Bestimmung von $G$

Von jeher leiden alle Versuche, die Gravitationskonstante zu messen, unter denselben Problemen: dem Bestimmen einer sehr kleinen Kraft in einer verrauschten Umgebung und das präzise Vermessen der absoluten Abstände von Test- und Feldmassen zueinander. Der folgende Abschnitt soll einen Überblick über die verschiedenen experimentellen Verfahren geben, welche bei der Bestimmung der Newtonschen Konstante Verwendung fanden und finden.

Eines der Ziele der Forschungsgemeinschaften vor rund 200 Jahre — wie der englischen Royal Society — war die Einordnung der Erde im Universum: ihre Form, die Länge eines Breitengrades, die Anziehung eines Berges oder anderer Planeten sowie die Präzession der Tagundnachtgleiche. Aber auch die mittlere Dichte der Erde war Teil des Interesses und jene ersten Messungen, welche heute als Bestimmungen der Gravitationskonstante interpretiert werden, hatten zum Ziel diese Dichte zu messen. Dabei wurden die Erde und Berge oder andere Teile der Erdkruste als Reaktionsmassen verwendet, weshalb diese Art der Experimente auch als **Large Scale Experiments** (LSE) bezeichnet werden. Eine Möglichkeit ist die Bestimmung der Abweichung der Richtung der Fallbeschleunigung von der Radialrichtung der Erde an zwei Seiten eines Berges, dessen Geometrie und Dichte bekannte sein muß (vgl. Abb. 2.1). Der Tangens des Auslenkungswinkels eines Lotes beschreibt dann das Verhältnis der Anziehung des Berges zu jener der gesamten Erde [Boe84]. Messungen dieser Art wurden zuerst von Bouguer und de la Condamine um 1740 an einem geeignet geformten Berg in Peru durchgeführt, ohne allerdings ein akkurates Ergebnis zu erzielen. Mit höherem Aufwand, aber derselben Vorgehensweise, ermittelte N. Maskelyne [Mas75] im Jahre 1774 am Schehallien, einem isoliert stehenden Berg in den Highlands von Schottland, die Gravitationskonstante mit

$$G = (7.8) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]. \quad (2.2)$$

Die Schwäche dieser Experimente besteht allerdings in den Annahmen über die Massenverteilungen sowie die Grenzen der Berge. Schon früh erkannte man die systematischen Unzulänglichkeiten des Meßverfahrens, nichts desto weniger wurden im Laufe der Zeit weitere LSE durchgeführt. So vermaß man die Gravitationskonstante  $G$ , indem man die Fallbeschleunigung in verschiedenen Tiefen des Pazifiks [Zum91] oder eines Bergwerkes [And89] bestimmte. Zur Berechnung der Konstanten wird dann die Masse der Kugelschalen ins Verhältnis zur gesamten Masse der Erde

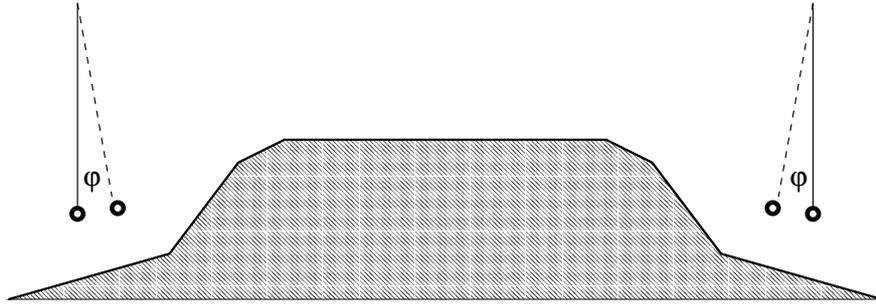


Abbildung 2.1: Die ersten Messungen zur Bestimmung der mittleren Dichte der Erde geschahen mittels sogenannter „Large Scale Experiments“. Dabei wurde die Auslenkung  $\varphi$  eines Lotes durch einen Berg bekannter Masse bestimmt.

gesetzt. Mit dieser Methode konnte 1984 der wohl genaueste so gemessene Wert in einer Mine in Australien mit

$$G = (6.712 \pm 0.0037) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] \quad (2.3)$$

bestimmt werden [Sta84]. In einer Abwandlung dieses Ansatzes durch Verwendung von Labormassen maß die Gruppe um Prof. J. E. Faller die Newtonsche Konstante mittels eines Absolut-Gravimeters, über bzw. unter dem ein Torus aus Wolfram mit einem Gewicht von 500 kg positioniert werden konnte [Sch99a]. Als problematisch hat sich bei all diesen Messungen die sehr hohe Streuung sowohl zwischen den unterschiedlichen Experimenten, als auch innerhalb der verschiedenen Meßreihen erwiesen [Sch98a].

Schon zur Zeit der Expedition zum Schehallien zeigte sich, daß die Messungen in der Natur von den äußeren Einflüssen limitiert wurden. Der nächste Schritt zur Verbesserung der Genauigkeit bestand deshalb im Übergang zu Versuchen in Laboratorien. Die treibende Kraft hinter dieser Entwicklung war für die Gravitationskonstante Sir Henry Cavendish (\* 10.10.1731, † 24.02.1810). Er verwendete eine **Torsionswaage**, welche von dem Geistlichen John Mitchell um 1790 entworfen, und nach dessen Tode dem Studienkollegen übergeben worden war. Der Aufbau des Experimentes ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Es besteht aus einem Waagebalken an dessen Enden Massenstücke befestigt sind und welcher an einem Torsionsfaden aufgehängt ist, so daß die Fadenrichtung mit der Richtung der Fallbeschleunigung zusammenfällt. Die äußeren Reaktionsmassen sind so angeordnet, daß die gegenseitige Anziehungskraft in die Ebene senkrecht zur Fallbeschleunigung zeigt. Diese Art der Messung der Newtonschen Konstante  $G$  mit Hilfe des Auslenkungswinkel der Torsionswaage wird als die statische Methode bezeichnet. Um die Gravitationskonstante zu berechnen, muß das Torsionsmoment des Fadens bekannt sein, welches man aus der Schwingungsdauermessung bei bekanntem Trägheitsmoment bestimmt.

Der von Cavendish ermittelte Wert für die mittlere Dichte der Erde beträgt „5,48 mal der Dichte von Wasser“ [Cav98], was einem Betrag für die Gravitationskonstante von

$$G = (6.75 \pm 0.05) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] \quad (2.4)$$

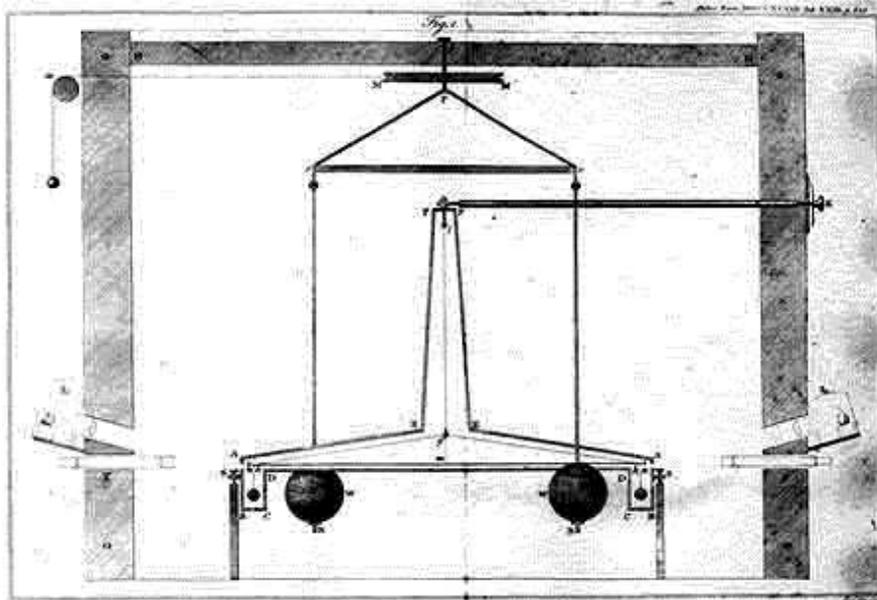


Abbildung 2.2: Der Originalpublikation entnommene Zeichnung des von Henry Cavendish verwendeten Experimentes zu Bestimmung der mittleren Dichte der Erde [Cav98]. Man erkennt die beiden Feldmassen und den Waagebalken mit den Testmassen.

entspricht. Der Sorgfalt des Ergebnisses kam dabei sicher die auffallende Menschenscheu Cavendishs zugute. Wohl auch aus diesem Grund — er haßte es, Vorträge in der Royal Society halten zu müssen — entwickelte er eine sehr moderne Form der Veröffentlichung, welche als Vorreiter für die heutige Art angesehen werden kann. So verwendete er nur 2 1/2 Seiten des 57 seitigen Artikels [Cav98], um den Aufbau und die Theorie des Experimentes zu beschreiben, der gesamte Rest fand Verwendung für die Fehlerbetrachtungen und Korrekturen. Er nahm dabei an, daß der Leser mit der Newtonschen Mechanik vertraut war, was zu einer Zeit, als Experimente zum Beweis noch vor „einer Anzahl ehrenwerter Männer“ [Fal99a] durchgeführt wurden, nicht selbstverständlich war. Die Veröffentlichung Cavendishs wurde sofort ins Deutsche übersetzt [Cav99] und, etwas später, auch ins Französische [Cav15]. Dabei ist es interessant, daß in der französischen Version, verzögert und beeinflusst durch die französische Revolution, keinerlei Erwähnungen der kirchlichen oder weltlichen Titel von Mitchell oder Cavendish zu finden sind.

Alle folgenden mit Torsionswaagen durchgeführten Experimente zur Bestimmungen der Gravitationskonstanten arbeiteten mit Umgebungsdruck in Luft, so daß sie stark von Luftzirkulationen beeinflusst waren. Erste Ende des 19. Jahrhunderts erzielten C. V. Boys (1895) und Braun (1897) zwei wichtige experimentelle Fortschritte. Ersterer führte die Verwendung von Quarz als Torsionsdraht ein. Dabei stand neben der kleinen rücktreibenden Kraft vor allem die Stabilität des Ruhepunktes des Waagebalkens in Vordergrund. Braun hingegen betrieb sein Experiment im Vakuum. Zusätzlich maß er als erster nicht die Auslenkung seiner Waage, sondern die Änderung in der Schwingungsperiode [Haw87]. Diese auch als dynamisch bezeichnete Art der Messung ist heute die am weitesten verbreitete Methode und wird mit Hilfe von Abbildung

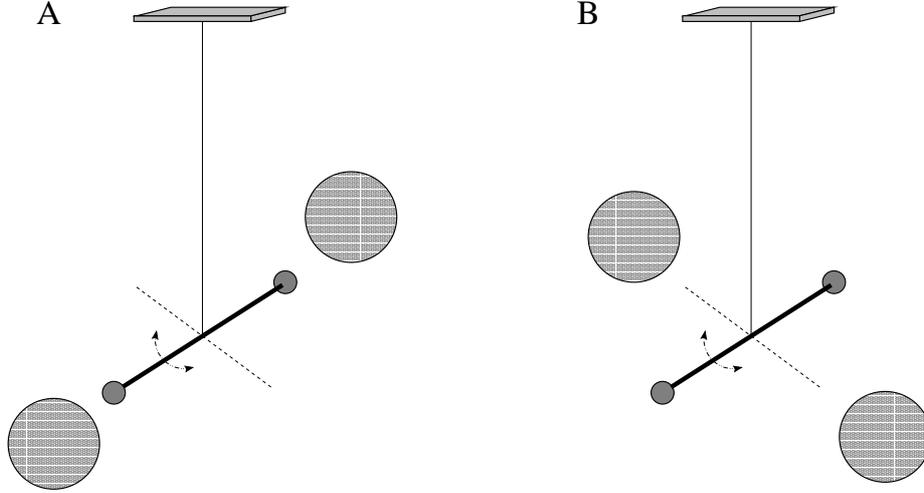


Abbildung 2.3: Die dynamische Meßmethode einer Torsionswaage zur Bestimmung der Gravitationskonstanten. Dabei werden die Schwingungsdauern eines Waagebalkens vermessen, wenn das Gravitationspotential zwei große Massen die rücktreibende Kraft des Drahtes verstärkt (A) oder reduziert (B).

2.3 verdeutlicht. So bestimmt man die Newtonsche Konstante  $G$  durch zwei Schwingungsdauermessungen der Torsionswaage, wobei die großen Massen einmal in einer Achse mit der Ruhelage des Waagebalkens ausgerichtet sind (A in Abb. 2.3) und einmal orthogonal dazu (B in Abb. 2.3). In der ersten Anordnung verstärkt das gravitative Potential der Massen mit einer „fiktiven“ Torsionskonstante  $K_G$  die Federkonstante  $K_f$  des Torsionsdrahtes, so daß die Schwingungsdauer proportional zur Summe der Federkonstanten ist

$$\omega_{f+G}^2 \propto K_f + K_G . \quad (2.5)$$

Sind die Massen in einer Position orthogonal zur Ruhelage des Waagebalkens, so reduziert die Gravitationskraft die effektive Federkonstante des Drahtes, womit die Schwingungsdauer

$$\omega_{f-G}^2 \propto K_f - K_G \quad (2.6)$$

ist. Aus der Differenz der beiden Schwingungsdauern läßt sich die Gravitationskonstante berechnen

$$G \propto \omega_{f+G}^2 - \omega_{f-G}^2 . \quad (2.7)$$

Alle von der CODATA<sup>1</sup> veröffentlichten Literaturwerte für die Gravitationskonstante beruhen auf dynamischen Messungen mittels Torsionswaagen. So diente der von P. Heyl und P. Chrzanowski 1942 [Hey42] gemessene Wert als Grundlage für den 1973 akzeptierten Literaturwert vom

$$G = (6.6720 \pm 0.0041) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] , \quad (2.8)$$

<sup>1</sup>Committee on Data for Science and Technology, Task Group on Fundamental Constants

welcher seine Gültigkeit bis 1986 behielt. Der in jenem Jahre akzeptierte neue Literaturwert fußt auf der Messung von G. G. Luther aus dem Jahre 1982 [Lut82], welche einen Wert von

$$G = (6.6726 \pm 0.0005) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] \quad (2.9)$$

ergeben hatte. Allerdings wurde der systematische Fehler willkürlich auf 126 ppm verdoppelt.

Grundlage aller Messungen mit Torsionswaagen von jeher war die Unabhängigkeit der Federkonstanten von der Frequenz mit der der Torsionsfaden verdrillt wird. Im Jahre 1995 veröffentlichte K. Kuroda [Kur95] allerdings seine Untersuchungen bezüglich des Verhaltens der Elastizität von Materialien bei sehr kleinen Frequenzen, wie sie in den Aufhängungen von Testmassen in Gravitationswellendetektoren Verwendung finden. Dabei hatte sich herausgestellt, daß die Federkonstante eben nicht das war was sie vorgab zu sein — konstant. Vielmehr stieg sie mit der Frequenz an, was auch in weiteren Untersuchungen bestätigt werden konnte [Sau90][Qui95]. Es ergab sich, daß die Federkonstante  $k$  eines Drahtes eine Funktion der Frequenz  $\omega$  und der mechanischen Güte  $Q$  ist [Mat98]

$$k \propto \frac{\omega^\alpha}{\pi \alpha}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \frac{2}{\pi Q}. \quad (2.10)$$

Dieser empirisch begründete Ansatz ergibt sich aus der Annahme, daß die Federkonstante einen real und imaginär Teil besitzt. Unter der Voraussetzung das letzterer keine Funktion der Frequenz ist kann man mittels der Kramers-König Relation den oben aufgeführten Zusammenhang herleiten [Kur99]. Dieses Verhalten beeinflußt die systematischen Unsicherheiten bei den Torsionswaagenexperimenten stark. Bei den üblicherweise erreichten Güten der Torsionsdrähte von  $2.5 \cdot 10^3$  bis  $1.6 \cdot 10^4$  ([Kur95]) ergeben sich systematische Fehler in der Bestimmung von  $G$  im Bereich von 20 bis 130 ppm, was bei zurückliegenden Experimenten häufig größer ist als der jeweils angegebene Gesamtfehler des Ergebnisses. Die dadurch motivierten Messungen von G. G. Luther zeigen, daß dieser Effekt den in 2.9 aufgeführten Wert um  $\approx 200$  ppm erhöht ( $(G=6.6740 \pm 0.0007) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]$ ) [Bag97]. Dieser Befund beweist, daß alle bis dahin mit Torsionswaagen gemessenen Werte systematisch zu niedrig lagen.

Im Jahre 1996 veröffentlichte die Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig den von Ihr bestimmten Wert für die Gravitationskonstante mit [Mic96]

$$G = (6.71540 \pm 0.00056) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]. \quad (2.11)$$

Dieser lag mehr als 50 Standardabweichungen vom damaligen Literaturwert entfernt. Der prinzipielle Aufbau des Experimentes entsprach dem einer statischen Torsionswaage, nur daß hier das gravitative Drehmoment durch ein elektro-statisches Drehmoment ausgeglichen wurde. Der Waagebalken mit den 120 g Zerodur Testmassen war auf einem Quecksilberschwimmer gelagert, und wurde durch zwei je 1 kg schwere Wolframzylinder ausgelenkt. Die auffallend stark abweichende Messung der PTB, sowie die noch nicht völlig verstandenen Einflüsse der Frequenzabhängigkeiten der Torsionsdrähte führte zu einer Neubewertung der bis dahin veröffentlichten Meßergebnisse [Moh98]. Zwar besteht immer die Möglichkeit einer Fehlmessung, aber bis zu jenem Zeitpunkt stimmten keine zwei unterschiedliche Meßverfahren innerhalb ihrer jeweiligen

Fehler überein. Weiterhin zeichnete sich gerade die PTB Auswertung durch eine sehr umfassende Analyse aller zu jener Zeit bekannten Unsicherheiten aus. Daher beschloß die CODATA 1998 die Unsicherheit des Literaturwertes der Gravitationskonstanten um einen Faktor zwölf auf 1500 ppm hochzusetzen [Moh98]. Diese bis dahin einmalige Erhöhung der Unsicherheit des Literaturwertes einer Naturkonstanten sollte die Ungewißheit zum Ausdruck bringen, mit denen man alte Messungen betrachtete. Als Wert blieb weiter jener von G. G. Luther bestimmte erhalten, nur gerundet auf der dritten Stelle

$$G = (6.673 \pm 0.010) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]. \quad (2.12)$$

Motiviert durch dieses Ergebnis, sowie der Erkenntnisse bezüglich des Torsionsdrahtes, wurde viel Arbeit in die Entwicklung neuer Varianten der Torsionswaage investiert. Umgesetzt wurden davon bis zum jetzigen Zeitpunkt zwei. Zum einen eine quasistatische Messung der Gravitationskonstanten und zum anderen eine Messung mit einem Federband anstelle des Federdrahtes.

Der erste Ansatz besteht in einer quasistatische Messung, wozu eine Torsionswaage auf einem, sich langsam drehenden, Tisch montiert wird [Gun00]. Durch die gravitative Anziehung der Massen wird der Torsionsdraht verdreht. Diese Verdrillung wird vermessen und über eine Rückkopplung als Steuersignal für die Beschleunigung des Montagetisches verwendet. Eingeschwungen ist somit die gravitative Winkelbeschleunigung der Testmasse immer gleich der Winkelbeschleunigung des Montagetisches, weshalb es zu fast keiner Verdrehung des Torsionsdrahtes kommt. Eine weitere Besonderheit dieses Experimentes besteht darin, daß die Testmasse — eine goldbedampfte Glasscheibe von nur 1.5 mm Dicke — als ein zweidimensionaler Körper betrachtet werden kann, womit die Unsicherheit bezüglich seiner Massenverteilung entfällt [Gun99]. Der so bestimmte Wert für die Gravitationskonstante beträgt

$$G = (6.674\,215 \pm 0.000\,092) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]. \quad (2.13)$$

Die erreichte Unsicherheit von 14 ppm ist, verglichen mit den bis dato ausgeführten Messungen, ein Schritt von über einer halben Größenordnung und stellt zur Zeit die präziseste Bestimmung von  $G$  dar.

Der zweite, von T. Quinn, dem Vorsitzenden des BIPM<sup>2</sup> in Paris, entwickelte Ansatz besteht in der Verwendung eines Torsions-Streifens anstelle eines Drahtes [Qui01]. Dieser Ansatz wurde nach umfangreichen Messungen bezüglich des Verhaltens von Cu-Be Torsions-Streifen gewählt [Spe99] und in der ansonsten konventionellen Torsionswaage umgesetzt. Ermittelt wurde so ein Wert von

$$G = (6.675\,59 \pm 0.000\,27) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]. \quad (2.14)$$

Die Besonderheit dieses Ergebnisses liegt darin, daß es das Mittel aus zwei Meßreihen ist, wobei einmal die statische und einmal die dynamische Meßmethode verwendet wurde. Beide so ermittelten Werte sind in sehr gutem Einklang miteinander, liegen allerdings etwa 200 ppm oberhalb des in 2.13 angegebenen Ergebnisses von J. Gundlach, also außerhalb der Unsicherheitsbereiche.

---

<sup>2</sup>Bureau International des Poids et Mesures

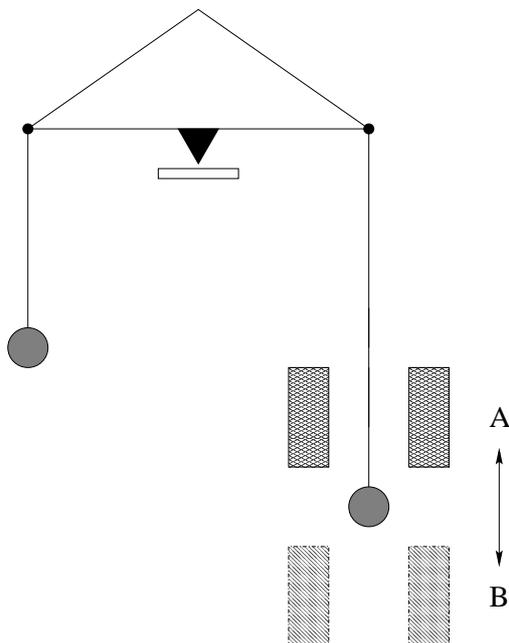


Abbildung 2.4: Die Skizze verdeutlicht die Funktionsweise eines Experimentes zur Messung der Gravitationskonstanten mittels einer Balkenwaage.

Die beiden zuletzt aufgeführten Torsionswaagen stellen die zur Zeit präzisesten Experimente zur Bestimmung der Gravitationskonstanten dar. Einzig ein Experiment in der Schweiz versucht mittels einer **Balkenwaage** in diese Phalanx einzubrechen. Deren Verwendung zur Messung der Newtonschen Konstante  $G$  geht hauptsächlich zurück auf die Experimente von J. H. Poynting (1879) und parallel von P. von Jolly (1881). Das Prinzip der Messung der Gravitationskonstante mittels einer Balkenwaage wird mit Hilfe von Abbildung 2.4 verdeutlicht. So vergleicht man mit der Waage das Gewicht zweier Testmassen. Positioniert man die Feldmassen periodisch über (A) oder unter (B) einer der Testmassen, so beeinflusst das gravitative Potential der Feldmassen das Gewicht der Testmassen. Die sich so ergebende Gewichts-differenz wird gemessen und daraus  $G$  berechnet. J. H. Poynting, bekannt durch dem nach Ihm benannten Stromvektor, arbeitete mehr als 13 Jahre an der Messung der mittleren Dichte der Erde [Fal99b], und veröffentlichte ein Ergebnis von

$$\Delta = 5.4934 \cdot \text{Dichte von Wasser} \quad (2.15)$$

was einem Wert von  $G = 6.6984 \cdot 10^{-11}$  in den bekannten Einheiten entspricht. Seine Arbeiten umfaßten auch Entwicklungen und Verbesserungen an Balkenwaagen, was schon zur damaligen Zeit große Beachtung fand. So wandte sich J. H. Poynting 1879 an die Royal Society um weitere Fördermittel für sein Experiment zu erhalten, welche Clark Maxwell als Gutachter einsetzte. Dieser formulierte über das Experiment und Poynting [Max67]:

*Es ist selten, ... die erforderliche mathematische Fähigkeit zu finden, kombiniert mit der mechanischen Genialität für eine so empfindliche und langwierige Forschungsarbeit, welche noch höhere Anforderung an Geduld und konstante Ausdauer stellt.*

und genehmigte ihm weiter Forschungsmöglichkeiten im Cavendish Laboratorium an der Universität Cambridge [Fal99b].

Eine weiteres Gravitationsexperiment wurde von Richardz und Krigar-Menzel [Ric98] in der Zitadelle in Spandau durchgeführt. Dabei fand eine Wand aus Bleiziegeln ( $\simeq 2941$  Stück) als Attraktor Verwendung, welche ein Gewicht von  $\simeq 100$  Tonnen besaß und womit sich ein Wert für die Gravitationskonstante von

$$G = (6.683 \pm 0.011) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] \quad (2.16)$$

ergab. Noch 1984 glaubte man mit den Ergebnissen von Richards und Krigar-Menzel die Grenzen dieser Meßmethode erreicht zu haben [Boe84]. Das diesem nicht so war, bewies die Gruppe um Prof. Kündig an der Universität Zürich. Bei ihrem Experiment fand ein Massenkomparator Verwendung, welcher in die Staumauer des Gigerwald-Stausees moniert war [Hub95]. Aufgebaut in der Dammkrone verglich er die Massen zweier 1 kg Testkörper, wobei einer davon direkt an der Waage und einer  $\simeq 100$  m tiefer im Fundament des Dammes, unterhalb des sich ändernden Wasserspiegels, positioniert war. Somit fungierte das Wasser des Sees als Attraktormasse. Eine Änderung des Wasserspiegels um bis zu 44 m erzeugte dabei eine Variation der Gewichts-differenz von  $\simeq 1390 \mu\text{g}$ , was mit einer Auflösung von  $0.5 \mu\text{g}$  vermessen wurde. Mit diesem Aufbau konnte die Gravitationskonstante bis zu einer effektiven Entfernung von etwa 100 m [Nol98] bestimmt werden. Als Ergebnis veröffentlichte man einen Wert für die Gravitationskonstante von [Cor94]

$$G = (6.670 \pm 0.0054) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]. \quad (2.17)$$

Die Hauptfehlerquelle dieser Messung war die Ungenauigkeit bei der Beschreibung der Konturen des Sees. Um dieses Problem zu überwinden entstand im Jahre 1995 ein neuer Experimentaufbau, welcher als Attraktormassen zwei Behälter mit einem Volumen von je 500 l verwendet [Sch98]. Gefüllt mit insgesamt einer Tonne Wasser oder 13.6 Tonnen Quecksilber kann der Gewichtsunterschied zweier 1 kg Testkörper mit einer relativen Empfindlichkeit von  $10^{-11}$  gemessen werden, was bei einer Gewichts-differenz von etwa 0.7 mg einigen Nanogramm entspricht. Aus je einer Meßreihe mit Wasser und Quecksilber als Feldmassen ergab sich 1998/99 ein Mittelwert von

$$G = (6.6749 \pm 0.0014) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right]. \quad (2.18)$$

Die größte Quelle der Unsicherheit bei Experimenten mit Waagen war und ist die Waage selbst. So verwendet die Gruppe um Prof. Kündig mit einem verbesserten „Mettler Toledo“ Massenkomparator eine der genauesten Waagen der Welt, welche speziell für den Vergleich von Norm-Ein-Kilogramm Gewichten entwickelt wurde. Dennoch sind Nichtlinearitäten zwischen dem Gewicht der Testmassen und dem Signal der Waage die bestimmende Fehlerquelle. Um diese genauer einzugrenzen finden zur Zeit umfangreiche Meßreihen statt. Man benutzt dabei

kleinste Zusatzgewichte, die neben der eigentlichen Masse mitgewogen werden, um so die Waage an jeweils leicht unterschiedlichen Arbeitspunkten zu betreiben. Durch diese Vorgehensweise wird über die Nichtlinearitäten gemittelt. Auf Dauer erhofft man damit eine Unsicherheit bei der Bestimmung der Gravitationskonstanten von 30 ppm zu erreichen [Sch01].

Im Jahre 1986 führte eine Reanalyse der Daten des Eötvös Experimentes [Fis86] durch E. Fischbach zu der Annahme, daß es neben den bekannten Kräften noch ein „fünfte Kraft“ gibt, welche sich in einer Verletzung des  $1/r^2$  Verhaltens der Gravitationskraft manifestiert. Dadurch motiviert, sowie durch die große Streuung der Meßwerte der Newtonschen Konstante  $G$ , wurde an der Bergischen Universität ein Experiment aufgebaut dessen Bezeichnung — **Fabry-Pérot Gravimeter** — sich auf das Herz des Experimentes, ein Fabry-Pérot Resonator, bezieht. Das, in den folgenden Kapiteln noch ausführlich beschriebene Funktionsprinzip des Aufbaus besteht in der Vermessung der Auslenkung zweier Pendel durch das gravitative Potential zweier 576 kg schwerer Massen, welche periodisch in der Nähe der Pendel hin und her gefahren werden.

Nach Messungen mit einem Prototypen-Aufbau [Sch88][Sch92] mit einer nur Feldmasse entstand im Jahre 1991 der noch heute verwendete Experimentaufbau. Erste Messungen ergaben dabei für die Gravitationskonstante einen Wert von [Sch92]

$$G = (6.6711 \pm 0.0027 \pm 0.0045) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right], \quad (2.19)$$

welcher innerhalb seiner Fehler mit dem damaligen CODATA-Wert übereinstimmte. Zum Erreichen einer höheren Präzision fanden im Laufe der Jahre viele Veränderungen am Experiment statt. Besonders erwähnenswert ist die Benutzung einer zweiten Feldmasse, da mit dieser die systematischen Anforderungen an verschiedene metrologische Größen deutlich reduziert wurden. Mit dem Meßaufbau gelang es 1995 den Wert der Gravitationskonstante mit [Wal95]

$$G = (6.66730 \pm 0.00094) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] \quad (2.20)$$

zu bestimmen, wobei sich der Gesamtfehler von 142 ppm zu jener Zeit mit denen der besten Torsionswaagen messen konnte. Allerdings zeigte eine etwas später, am unveränderten Meßaufbau, aufgenommene Messung mit [Sch95]

$$G = (6.65809 \pm 0.00075 \pm 0.0067) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] \quad (2.21)$$

eine deutlich Abweichung, welche zur damaligen Zeit mit Problemen in der Positionierung der Massen begründet wurde. Zur Beseitigung dieser Unsicherheit folgten in den Jahren 1997/98 umfangreiche Umbauten am Experiment. Allerdings ergab sich in den ersten beiden folgenden Meßreihen (1998/99) aufgrund von Problemen bei der Ankopplung des Resonators an die Mikrowellenquelle ein so großer Fehler — 7000 ppm —, daß kein Wert für die Gravitationskonstante veröffentlicht wurde [Sch99].

## 2.2 Ziel der Arbeit

Trägt man die seit 1970 veröffentlichten Werte der Gravitationskonstante gegen das jeweilige Jahr der Veröffentlichung auf, erhält man Abbildung 2.5. Zum besseren Verständnis sind zusätz-

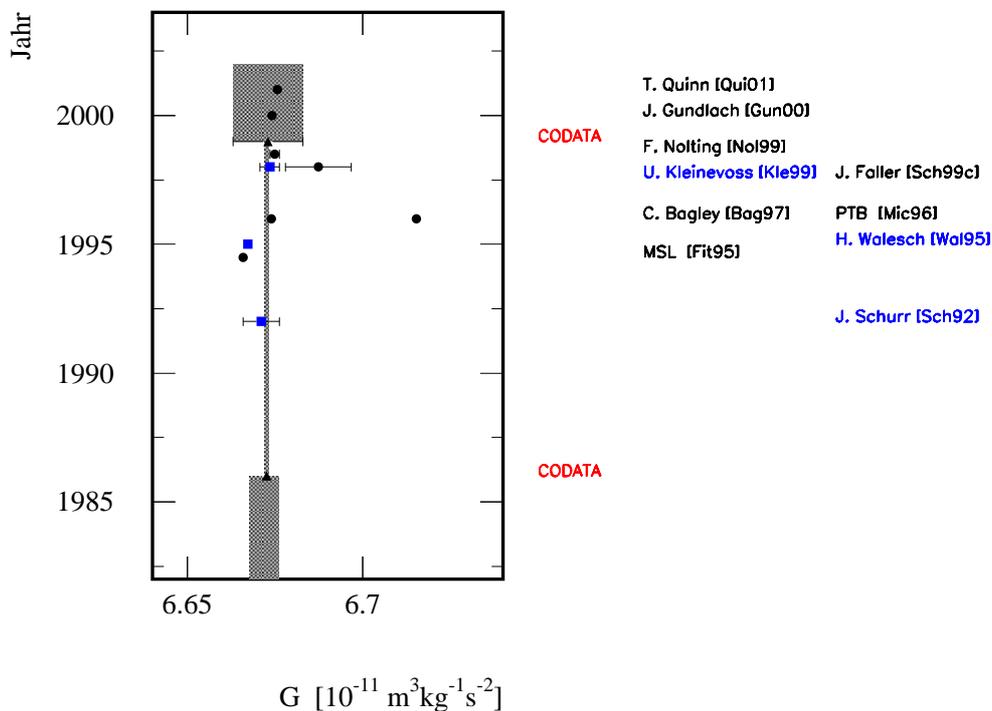


Abbildung 2.5: Eine Auswahl der veröffentlichten Meßwerte für die Gravitationskonstante  $G$  seit 1970. Ebenfalls eingetragen sind die jeweiligen Literaturwerte — mit CODATA gekennzeichnet — sowie deren Fehlerbreite für den entsprechenden Gültigkeitszeitraum.

lich die CODATA-Werte eingezeichnet, deren Fehlerbereiche für den Zeitraum ihrer Gültigkeit als Band dargestellt sind. Offensichtlich ist die starke Streuung der verschiedenen Meßmethoden und Einzelwerte, was ein kritisches Hinterfragen der bis zu jenem Zeitpunkt veröffentlichten Ergebnisse der einzelnen Experimente motivierte. Dabei zeigte die Diskussion, daß neben dem eigentlich zu bestimmenden Wert der Konstanten  $G$  mindestens gleichberechtigt die Überprüfung der angegebenen Unsicherheiten bestand. Für das Wuppertaler Gravimeter wurden deshalb im Rahmen dieser Arbeit folgende Arbeiten durchgeführt:

- Die erneute Betrachtung der Unsicherheiten unter Berücksichtigung neuer Erkenntnisse.
- Die Suche nach neuen Unsicherheitsquellen am Experimentaufbau.
- Die Bestimmung des Wertes der Newtonschen Gravitationskonstante  $G$ .

Die im Rahmen dieser Arbeit erreichten Verbesserungen der führenden Unsicherheiten dieses Experimentes sind in der folgenden Tabelle aufgetragen. Der Leser kann ihr jeweils den nach den neuen Untersuchungen und Messungen errechneten Fehler der alten Meßreihen, sowie die jetzt erreichten Unsicherheiten entnehmen.

Effekt	frühere Unsicherheiten			jetzige Unsicherheiten		
Choke-Effekt	7000	ppm	⇒	Kopplung	⇒	39 ppm
Neigung	700	ppm	⇒	Korrektur	⇒	87 ppm
Position Massen	535	ppm	⇒	Neues Meßsystem	⇒	27 ppm
Größe Massen	36	ppm	⇒	Messungen	⇒	8 ppm
Größe Pendel	28	ppm	⇒	Messungen	⇒	6 ppm
Massen	13	ppm	⇒	Abrieb	⇒	22 ppm

Wie man sieht konnten die Größen der führenden Unsicherheiten in dieser Meßreihe erheblich reduziert werden. Durch diese Reduktion ist es nun möglich den Wert der Gravitationskonstanten mit einer angestrebten relativen Gesamtunsicherheit von  $\simeq 1 \cdot 10^{-4}$  zu bestimmen. Im Zusammenhang mit den in der Tabelle aufgeführten Änderungen am Aufbau sei der geneigte Leser auf folgende Kapitel aufmerksam gemacht: die Beschreibung der Korrektur der durch die Feldmassen ausgelösten Neigung des gesamten Experimentaufbaus ist in Abschnitt 6.3 zu finden. Im anschließenden Abschnitt 6.4 wird die Reduzierung der Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Position der Hohlleiter beschrieben. Das neue Meßsystem zur Positionierung der Feldmassen ist Thema von Abschnitt 4.2.3 bzw. 5.1. Die metrologischen Verbesserungen bei der Bestimmung der Volumina der Massen und Resonatorpendel werden in Abschnitt 5.4 dargestellt.

Um eine bessere Einordnung der neuen wie der alten Werte der Gravitationskonstanten zu ermöglichen, ist auf den nächsten Seiten eine Tabelle mit den wichtigsten Größen für eine Anzahl von Messungen aufgeführt. Die jeweils verwendeten Meßmethoden sind dabei wie folgt abgekürzt (vgl. [Ste58] und [Boe84]):

Meßmethode	Bezeichnung
Large Scale Experiments	LSE
Balkenwaage	BW
Torsionswaage, statisch	Ts
Torsionswaage, dynamisch	Td
Messung der lokalen Gravitation	Mg
Wuppertaler Fabry-Pérot Resonator	FPR

Autor, Jahr der Veröffentlichung	Ort Literatur	Balken- länge L (cm)	Material u. Gewicht der angezogenen Testmasse	Material u. Gewicht der anziehenden Testmasse	Material u. Durch- messer des Auf- hängedrahtes	Luftdruck (mm Hg)	Technik	G $10^{-11} [m^3 kg^{-1} s^{-2}]$
N. Maskelyne, 1774	Schehallian, [Mas75] England			Berg Schehallian		760	LSE	7.8
H. Cavendish, 1798	London, [Cav98] England	182	Blei, 730 g	Bleikugeln, 158 kg	versilbertes Kupfer	760	Ts	$6.75 \pm 0.05$
Fr. Reich, 1838/52	Freiburg [Boy95] Deutschland	202	Blei, Zink, Wismut, Eisen, 484 g	Bleikugeln je 45 kg Gußeisenkugeln je 39 kg	Eisen u. andere	760	Ts	$6.64 \pm 0.06$
F. Bailey, 1843	Tavistock Place, England, [Bai43]	196	Platin, Blei, Zink, Glas, Messing, Elfenbein, 116–1538 g	Bleikugeln, je 172.4 kg	Eisen, Messing, Kupfer, Seide,	760	Ts/d	$6.63 \pm 0.07$
A. Cornu, J. Baillie, 1872	Paris, [Cor73][Cor78] Frankreich	50	Kupfer, 109 g	Quecksilber in kugelförmigen Gefäßen, 12 kg	gegühtes Silber	760	Ts	$6.64 \pm 0.017$
P. v. Jolly, 1873	München, [Jol78] Deutschland	60	Quecksilber in kugelförmigen Glasgefäßen, je 5 kg	Bleikugel, 5775.2 kg		760	BW	$6.447 \pm 0.11$
J. H. Poynting, 1881	Birmingham, [Poy79] England	123.2	Blei-Antimon-Legierung, kugelförmig, je 21.6 kg	Blei-Antimon-Legierung, kugelförmig, 153.4 und 76.5 kg		760	BW	$6.70 \pm 0.04$
F. Richarz, O. Krüger-Menzel, 1888	Spandau, [Ric98] Deutschland	23.32	Blei, kugelförmig, je 0.67 kg	Blei, quaderförmig 211-211-209.5 cm, 100536.8 kg		760	BW	$6.683 \pm 0.011$
J. Wilsing, 1889	Potsdam, [Wil98] Deutschland	100	Kupfer und Blei-Antimon Legierung, je 540 g	Bleizylinder, je 325 kg		760	BW	$6.594 \pm 0.15$
C. v. Boys, 1895	Oxford, [Boy95] England	2.3	Gold 1.32 g, 2.65 g, 3.98 g	Bleikugeln 7.4 kg	Quarz	760; n. erfolgr. m. $H_2$	Ts	$6.658 \pm 0.007$
R. Eötvös, 1886	Budapest, [Eöt96] Ungarn			Blei, quaderförmig 600 kg		760	Td	$6.657 \pm 0.013$
C. Braun, 1897	Marienstein, [Bra97] Österreich	24.6	Messing, 54 g	Quecksilber in kugelförmigen Gefäßen, 9 kg	Messing	4 o. 17	Ts/d	$6.658 \pm 0.002$
G. Burgees, 1902	Paris, [Bur99][Bur02] Frankreich	24	Blei, 2 kg	Bleikugeln 10 kg	Quarz	760	Ts	6.64
P. Heyl, 1930	Washington, [Hey30] USA	20.6	Gold, Platin	Stahlzylinder, 66 kg	Wolfram, 25 $\mu m$	2	Td	$6.670 \pm 0.005$
J. Zahradnicek, 1933	Brünn, [Zah33] Tschechoslowakei	40.6	Blei, 94 g	Bleikugeln, 11.3 kg	Platin-Iridium, 18 $\mu m$	760	Td	$6.66 \pm 0.04$
P. Heyl, P. Chrzanowski 1942	Washington, [Hey42] USA	20	Platin	Stahlzylinder, 66 kg	Wolfram, gegüht 35 $\mu m$ , hartgezogen, 30 $\mu m$	0.5	Td	$6.673 \pm 0.003$
R.D. Rose, R.A. Lowry, 1969/76	Charlottesville, USA, [Ros69] NBS	3.8	Zylinder, hantelförmig, Platinlegierung	Wolframkugeln, 10 kg	Quarz, 25 $\mu m$	Helium	Kompens- ation	$6.6699 \pm 0.0014$
L. Facy, C. Pontikis, 1972	Yveline, [Far72] Frankreich,	6.0	Kugeln: Silber, Kupfer, Messing 4.6 g	Kugeln: Silber, Kupfer, Messing, Quecksilber, Blei, Bronze	Platin, 20 $\mu m$ Wolfram	$1 \cdot 10^{-7}$	Reso- nanz	$6.6714 \pm 0.0006$
J. Renner, 1973	Budapest, Ungarn, [Ren73]		Kugeln: Kupfer 16.0 g	4 Hohlzylinder, 2 mit Quecksilber gefüllt, 17.4 kg	Wolfram, Platin-Iridium	1 bis 2	Td	$6.670 \pm 0.008$

Autor, Jahr der Veröffentlichung	Ort Literatur	Balkenlänge L (cm)	Material u. Gewicht der angezogenen Testmasse	Material u. Gewicht der anziehenden Testmasse	Material u. Durchmesser des aufgehängten Drahtes	Luftdruck (mm Hg)	Technik	$G$ in $10^{-11} [m^3 kg^{-1} s^{-2}]$
O. V. Karagioz, 1976	Moskau, [Kar76] UdSSR	15.6	Kugeln: Kupfer, 0.3 g	Kugeln: Stahl, Messing, Kupfer, 4.2 kg	Wolfram, 5 $\mu m$	$1 \cdot 10^{-8}$	Td	$6.668 \pm 0.002$
M. U. Sagitov, 1977	Moskau, [Sag71] UdSSR	37.0	Zylinder: Kupfer, 29 g	Stahlzylinder 39.7 kg	Wolfram, 35 $\mu m$	$5 \cdot 10^{-5}$	Td	$6.6745 \pm 0.003$
O. V. Karagioz, 1976/81	Moskau, [Kar81] UdSSR	11.5	2.0.94 g	Messingkugel 8 kg Bronzekugel 4.8 kg	Wolfram 25 $\mu m$	$8 \cdot 10^{-7}$	Td	$6.6364 \pm 0.0015$
G. G. Luther, 1982	Washington, USA, [Lut82]	2.8	Wolfram-Hantel, 7 g	Wolfram-Kugeln, 2.10 kg	Quarz, 12 $\mu m$	$10^{-6}$	Td	$6.6726 \pm 0.0005$
M. A. Zumberge, 1991	San Diego, [Zum91] USA		Absolut-Gravimeter	Unterschiedliche Tiefen im Ozean			Mg	$6.677 \pm 0.013$
J. Schurr, 1992	Wuppertal, [Sch92] Deutschland		Kupferspiegel, 2.5.4 kg	Messingzylinder, 2.576 kg	Wolfram, 200 $\mu m$	$6 \cdot 10^{-5}$ mbar	FPR	$6.6711 \pm 0.0052$
B. Hubler, 1995	Zürich, [Hub95] Schweiz		Zylinder 1 kg	Gigerwald Stausee			BW	$6.678 \pm 0.007$ $6.669 \pm 0.005$
H. Walesch, 1995	Wuppertal, [Wal95] Deutschland		Kupferspiegel, 2.5.4 kg	Messingzylinder, 2.576 kg	Wolfram, 200 $\mu m$	$6 \cdot 10^{-5}$ mbar	FPR	$6.6673 \pm 0.00094$
M. P. Fitzgerald, 1995	Lower Hutt, [Fit95] Neuseeland	22	Kupferzylinder, 96 g	Edelstahlzylinder, 4.27 kg	Wolfram, 50 $\mu m$	$8 \cdot 10^{-7}$	Ts	$6.6656 \pm 0.0006$
W. Michaelis, 1996	Braunschweig, [Mic96] Deutschland		Zerodurzylinder, 120 g	Wolframzylinder, 4.900g	Quecksilber-Schwimmer	75 Helium	Ts	$6.71540 \pm 0.00036$
C. H. Bagley, 1997	Los Alamos, USA, [Bag97]	2.8	Wolfram-Hantel, 7 g	Wolfram-Kugeln, 2.10 kg	Wolfram, 12 $\mu m$	$10^{-7}$	Td	$6.6740 \pm 0.0007$
O. V. Karagioz, 1998	Moskau, [Kar98] Russland	23	2.1.6 g	Messingkugel, 2.8 kg Bronzekugel 2.4.8 kg	Wolfram, 25 $\mu m$	$8 \cdot 10^{-7}$	Td	$6.6729 \pm 0.0005$
J. P. Schwarz, 1998/99	Boulder, [Sch99a] USA		Spiegel eines Absolut-Gravimeters	Wolfram, 500 kg			Mg	$6.6873 \pm 0.0094$
Jun Luo, 1999	Wuhan, [Luo99] China	40	Kupferkugel, 2.32 g	Stahlzylinder, 2.6.2 kg	Wolfram, 25 $\mu m$	$2 \cdot 10^{-7}$	Td	$6.6699 \pm 0.0007$
M. P. Fitzgerald, 1999	Lower Hutt, [Fit99] Neuseeland	22	Kupferzylinder 531 g	Edelstahlzylinder, 4.27 kg	Wolfram, 17.340 $\mu m$	$8 \cdot 10^{-7}$	Ts	$6.6742 \pm 0.0007$
U. Kleinevoß, 1999	Wuppertal, [Kle99] Deutschland		Kupferspiegel, 2.3.3 kg	Messingzylinder, 2.576 kg	Wolfram, 200 $\mu m$	$2 \cdot 10^{-5}$	FPR	$6.6735 \pm 0.0029$
S. J. Richman, 1999	Paris, [Ric99] Frankreich	12	Cu-Te Legierung, 4.1.2 kg	Cu-Te Legierung 4.15.5 kg	Kupfer-Beryllium, 2.5-30 $\mu m$		Ts	$6.683 \pm 0.011$
F. Nolting, 1999	Zürich, [Nol99] Schweiz		Zylinder 1 kg	Quecksilber 13 to Wasser 0.5 to		$8 \cdot 10^{-7}$	BW	$6.6749 \pm 0.0014$ $6.6754 \pm 0.0015$
J. Gundlach, 2000	Washington, [Gum00] USA		vergoldete Glasplatte 76.42 mm	Edelstahlzylinder 8.8kg	Wolfram, 17 $\mu m$	$10^{-7}$	Ts	$6.674215 \pm 0.000092$
T. Quinn, 2001	Paris, [Qui01] Frankreich	12	Cu-Te Legierung 4.1.2 kg	Cu-Te Legierung 4.1.2 kg	Kupfer-Beryllium, 30 $\mu m$ · 2.5mm · 160mm		Ts/d	$6.67559 \pm 0.00027$

## Kapitel 3

# Grundprinzip des Fabry-Pérot Gravimeters

Nachfolgend werden die konzeptionellen Grundlagen des Fabry-Pérot Gravimeters erläutert. Dabei beschäftigt sich der erste Teil dieses Kapitels mit dem Prinzip des Experimentes. Anschließend folgt eine Beschreibung der Eigenschaften offener Fabry-Pérot Mikrowellenresonatoren. Im letzten Teil des Kapitels werden verschiedene Anforderungen an die Realisation und begrenzende Effekte diskutiert.

### 3.1 Physikalisches Prinzip

Prinzipiell wird im Wuppertaler Experiment die Auswirkung der gravitativen Kraft zweier, 576 kg schwerer, Feldmassen auf zwei Pendel vermessen. Durch periodische Variation des Ortes der Massen wird die Gleichgewichtslage dieser Pendel durch das sich ändernde Gravitationspotential moduliert. Um die daraus resultierende Änderung des Abstandes zwischen ihnen zu bestimmen, bilden beide einen offenen Fabry-Pérot Mikrowellenresonator. Dieser setzt die Variation des Pendelabstandes um in eine Frequenzänderung, welche mit hoher Genauigkeit bestimmt werden kann. Mit diesem Aufbau ist es möglich sowohl den Absolutwert der Gravitationskonstanten als auch das  $1/r^2$ -Gesetz der Gravitation zu verifizieren.

Das Konzept des Experimentes besteht in der Modulation der Ruhelage eines Pendels durch die gravitative Kraft einer äußeren Feldmasse. Zum besseren Verständnis sei auf Abbildung 3.1 verwiesen. Idealiert sei ein mathematisches Pendel mit der Masse  $m$  gegeben, aufgehängt an einem Draht der Länge  $l$ . Bringt man aus dem Unendlichen eine Masse  $M$  in seine Nähe, so wird es um den Winkel  $\varphi$  ausgelenkt. Der Betrag der Auslenkung  $z$  aus der gestrichelt eingezeichneten Ruhelage ergibt sich gemäß dem zweiten Newtonschen Gesetz als

$$\begin{aligned} F_{\text{auslenkend}} &= F_{\text{rücktreibend}} & (3.1) \\ m a &= m g \sin \varphi \\ z &= \frac{a}{\omega^2} \end{aligned}$$

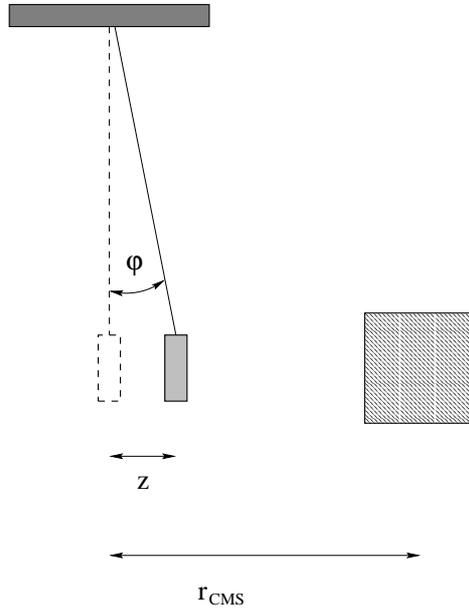


Abbildung 3.1: Das Prinzip des Fabry-Pérot Gravimeters. Dargestellt ist die Auslenkung  $z$  eines mathematischen Pendels aus seiner Ruhelage durch die gravitative Kraft einer, aus dem Unendlichen bis auf den Abstand  $r_{\text{CMS}}$  herangebrachten, Masse  $M$ .

wobei  $a$  die Gravitationsbeschleunigung und  $\omega = \sqrt{g/l}$  die Eigenfrequenz des Pendels ist. Sie ist das Maß für die rücktreibende Kraft und bestimmt die mögliche Auslenkung des Pendels aus der Gleichgewichtslage. In dieser Näherung sind die Abmessungen des Pendelkörpers und der Feldmasse klein im Vergleich zu ihren Abständen, und ferner der Draht der Aufhängung masselos und ideal elastisch. Durch Einbeziehung der Newtonschen Kraftgleichung erhält man für die gravitative Auslenkung des Pendels durch eine Masse im Abstand  $r_{\text{CMS}}$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\omega^2} \frac{F}{m} \\ &= \frac{GM}{\omega^2} \frac{1}{r_{\text{CMS}}^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

unter der Annahme, daß der Schwerpunktabstand sehr viel größer ist als die Auslenkung ( $z \ll r_{\text{CMS}}$ ). Offensichtlich wird deren Amplitude nur von der Größe der äußeren Masse bestimmt, während die Masse des Pendels selbst keine Rolle spielt.

Die bisherigen Betrachtungen gelten, wenn die Masse aus dem Unendlichen auf eine Meßposition in der Nähe des Experimentes gebracht wird. Da dieses nur eingeschränkt möglich ist — in diesem Aufbau ist die Position „unendlich“  $r_{\text{Ref}} \simeq 2.3$  m vom Schwerpunkt des Pendels entfernt — muß bei der Berechnung der Auslenkung des Pendels berücksichtigt werden. Dazu bildet man die Differenz der Auslenkungen für die Meßposition nahe am Pendel und für die weit entfernte Referenzposition

$$\Delta z = z_{\text{Meßposition}} - z_{\text{Referenzposition}} \quad (3.3)$$

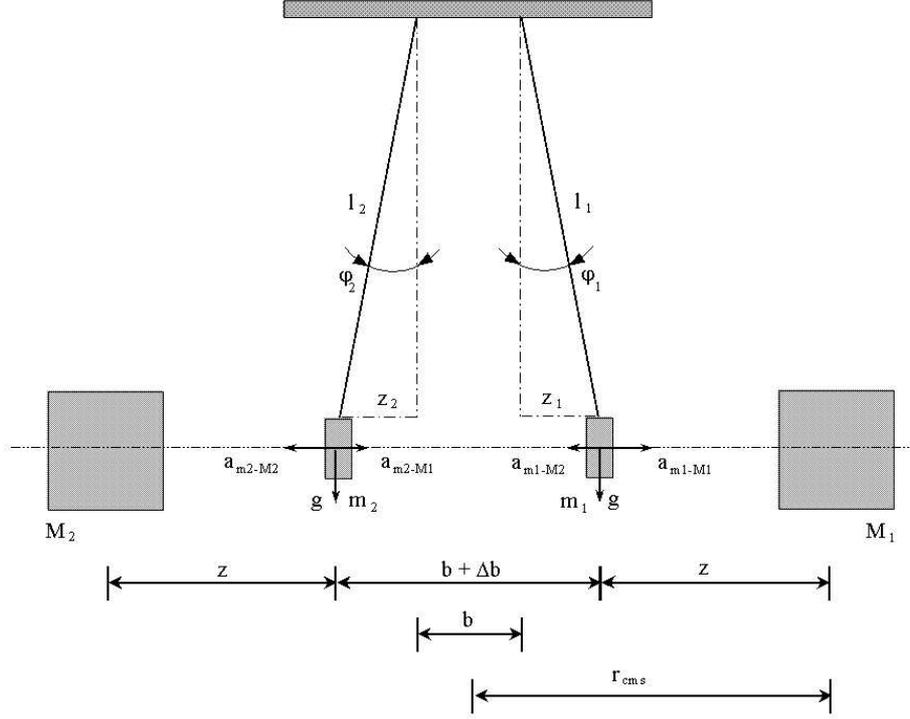


Abbildung 3.2: Der prinzipielle Aufbau des Fabry-Pérot Gravimeters mit zwei Feldmassen. Durch die Variation der Position zweier äußerer Feldmassen  $M_i$  verändert sich der Abstand  $b$  der beiden Pendel  $m_i$  um den Betrag  $\Delta b$ .

$$= \frac{GM}{\omega^2} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_{Ref}^2} \right].$$

In diesem Experiment werden also die Differenzen von Kräften gemessen, da die Auslenkung des Pendels für die Referenzposition von Null verschieden ist. Um jene Differenz der Ruhelagen des Pendels genau berechnen zu können, muß man allerdings die Ausdehnung des Pendelkörpers und der Feldmasse berücksichtigen. Bei dem Übergang von Punktmassen zu ausgedehnten Massen erhält man aus Gleichung 3.3 folgende Integrale

$$\Delta z = \frac{G\rho_M\rho_m}{m\omega^2} \left[ \int_v dv \int_V dV \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{r^3} - \int_v dv \int_V dV \frac{\vec{r}_{Ref} \cdot \vec{e}}{r_{Ref}^3} \right]. \quad (3.4)$$

Mit ihnen berechnet man die Auslenkung einer Masse  $m$  mit dem Volumen  $v$  durch eine Masse  $M$  des Volumens  $V$ , mit den jeweiligen Dichten  $\rho_i$ .

In Abweichung zu der prinzipiellen Idee besteht das eigentliche Experiment aus zwei Pendeln und zwei Feldmassen, so wie es in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Skizziert sind die beiden Pendel, welche an einer gemeinsamen Aufhängung fixiert sind. Auf einer Symmetrieachse mit den Pendeln sind die beiden Feldmassen  $M_1$  und  $M_2$ . Die Entfernungsvariable  $r_{cms}$  beschreibt

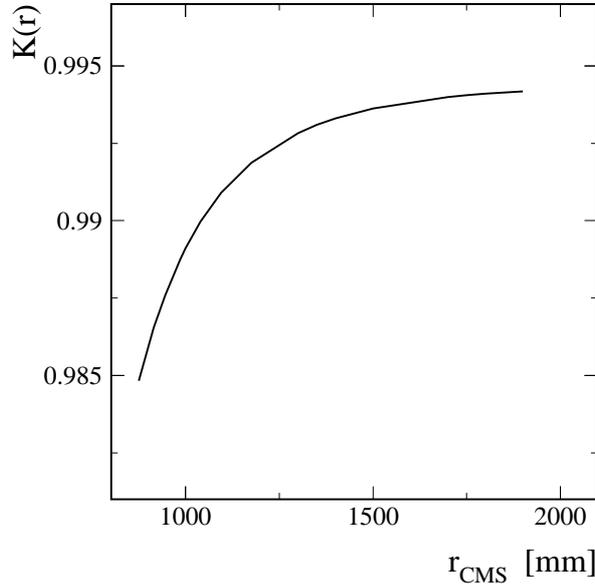


Abbildung 3.3: Das Verhältnis der Auslenkung zweier Pendel durch zwei Feldmassen für Punkt- und ausgedehnte Massen. Dieses beträgt durch geeignete Wahl von Abmessung und Geometrie der Massen für kurze Entfernungen maximal 2 % und konvergiert schnell für weiter entfernt liegende Meßpositionen.

dabei den Abstand des Schwerpunktes jeder der einzelnen Feldmassen zum Schwerpunkt des gesamten Resonators. Die Anordnung des Experimentes aus zwei Pendeln und zwei Feldmassen reduziert die systematischen Anforderungen. So haben zwei Pendel den Vorteil, daß sich Störeffekte wie Mikroseismik auf beide gleich auswirken und somit der Abstand zwischen beiden in erster Näherung unbeeinflusst bleibt. Weitere Einflüsse wie Neigungseffekte des Bodens, Gezeiten oder Drifteffekte werden gegenüber den Auswirkungen auf ein einzelnes Pendel um mehrere Größenordnungen unterdrückt. Außerdem erzeugen zwei Feldmassen ein flaches Gravitationspotential im Bereich der Pendel, womit an deren Positionierung geringere Anforderungen gestellt werden. Durch diesen Aufbau des Experimentes wirkt jede der beiden Feldmassen auf jedes der beiden Pendel, so daß die resultierende Änderung des Abstandes der beiden Pendel zueinander aus vier Beiträgen besteht

$$\Delta b(r) = z_{\text{Pendel}1}^{\text{FM}1} - z_{\text{Pendel}2}^{\text{FM}1} + z_{\text{Pendel}2}^{\text{FM}2} - z_{\text{Pendel}1}^{\text{FM}2}. \quad (3.5)$$

Berücksichtigt man, daß die Referenzposition nur endlich ist, ergibt sich für die Änderung im Abstand der beiden Resonatorpendel zueinander

$$\Delta b = \Delta b(r_{\text{Meßposition}}) - \Delta b(r_{\text{Referenzposition}}), \quad (3.6)$$

wenn man die Feldmassen periodisch zwischen der Meßposition und der Referenzposition bewegt.

Interessant ist in diesem Zusammenhang der Vergleich der Ergebnisse für ausgedehnte Massen und Punktmassen. Definiert man das Verhältnis der berechneten Pendelabstandsänderung für

ausgedehnte Massen und für gleich schwere Punktmassen als  $K(r)$  — hier analog zu Gleichung 3.4 notiert —

$$\Delta z = \frac{GM}{\omega^2} \left[ \frac{1}{r^2} K(r) - \frac{1}{r_{Ref}^2} K(r_{Ref}) \right] \quad (3.7)$$

so erhält man den in Abbildung 3.3 dargestellten funktionalen Verlauf. In diesem Experiment wurden die Abmessungen der Feldmassen so gewählt, daß der zu messende Gravitationseffekt auch für kleinere Distanzen möglichst wenig von dem zweier gleich schwerer Punktmassen abweicht. Es zeigt sich, daß für die kleinste in dieser Meßreihe verwendeten Entfernung (915 mm) die Abweichung von eins kleiner als 2 % ist. Für größere Entfernungen zwischen Resonator und Feldmassen konvergiert diese Funktion schnell gegen eins. Die Abweichungen ergeben sich aus Quadrupol- und Oktupolmomenten der Massenverteilung. Bei sehr kleinen Entfernungen ist die Ausdehnung der Massen nicht mehr zu vernachlässigen. Das Verhältnis weicht dann wesentlich von eins ab und läßt sich durch eine Multipolentwicklung mit wenigen Momenten nicht mehr ausreichend genau beschreiben. Die numerische Integration des  $1/r^2$ -Gesetzes über die Massenverteilung kann hingegen ausreichend genau ausgeführt werden.

Um eine Abschätzung der zu messenden Abstandsänderung der beiden Pendel zu erhalten, sei die Annahme von Punktmassen zulässig. Die beiden Pendel der Massen  $m \simeq 3.3$  kg hängen in Wolframdrahtschlaufen der Länge  $l \simeq 2.7$  m. Die Feldmassen wiegen  $M \simeq 576$  kg und ihr Schwerpunkt ist vom Schwerpunkt beider Pendel in der vordersten Position  $r_{CMS}^{Meß} \simeq 0.915$  m und in der Referenzposition  $r_{CMS}^{Ref} \simeq 2.26$  m entfernt. Bei einem Pendelabstand von  $b \simeq 0.24$  m ergibt sich damit eine Änderung des Abstandes von

$$\Delta b(r) \simeq 13 \text{ nm}.$$

## 3.2 Fabry-Pérot Resonator

Um eine Abstandsänderung von  $\Delta b \simeq 10$  nm mit einer Genauigkeit von  $10^{-5}$  aufzulösen, muß das Meßsystem in der Lage sein, Änderungen im Abstand der Pendel von 1 pm zu registrieren. Zu diesem Zweck formen die beiden Pendel die Spiegel eines offenen Fabry-Pérot Resonators. Dieser Mikrowellenresonator setzt die Änderung  $\Delta b$  des Abstandes der beiden Spiegel in eine Variation der Resonanzfrequenz  $\Delta f$  um. In diesem Abschnitt wird der mathematische Formalismus für die Berechnung der Eigenschwingungen im Resonator hergeleitet. Daran schließen sich Erklärungen zum Proportionalitätsfaktor zwischen der Frequenzänderung und der Abstandsänderung sowie weiteren Mikrowellenkenngrößen an.

### 3.2.1 Mikrowellenresonator

Schließt man einen Hohlleiter durch eine leitende Wand senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ab, so überlagern sich die hinlaufenden und reflektierten Wellen zu stehenden Wellen. Es verschwinden an dieser Wand und in Abständen von  $\lambda/2$  die tangentialen elektrischen und normalen magnetischen Feldstärken. Ohne Feldstörung kann in einer solchen Knotenebene eine zweite Metallwand angebracht werden und man gelangt so zu einem Hohlraumresonator [Peh88]. Bei

einer Anregung des Resonators wird die Stärke, des sich in ihm aufbauenden Feldes maximal, wenn die Länge  $b$  des Resonators  $\lambda/2$  oder ein ganzes Vielfaches davon beträgt. Somit erhält man für die Resonanzfrequenz

$$f_{Reso} = (q + 1) \frac{c}{2b} \quad \text{mit } q = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Diese, streng nur für Resonator mit planparallelen Spiegeln geltende, Formel gibt die im Experiment gemessenen Resonanzen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}((k\omega_0)^{-2})$  wieder. Resonatoren mit ebenen Spiegeln haben zwei Nachteile: die erforderliche Justiergenauigkeit von wenigen Bogensekunden ist schwer realisierbar und die Beugungsverluste sind relativ hoch. Daher werden in der Praxis zum Erreichen hoher Güten meist sphärische Spiegel verwendet. Die Frequenzverschiebungen aufgrund der endlichen Krümmung der Spiegel führt die skalare Theorie Gaußscher Elementarmoden ein [Cul72]. Mit ihr ist es möglich sowohl die Resonanzfrequenzen als auch die Feldverteilung für einen Resonator mit zwei Spiegeln zu berechnen, welche voneinander verschiedene Krümmungsradien besitzen. Außerdem können Stabilitätskriterien für die Wahl der Krümmung der Resonatorspiegel sowie deren Abstand bestimmt werden.

In dieser skalaren Theorie ist der Ausgangspunkt die Helmholtzsche Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad (3.9)$$

wobei  $u(x, y, z)$  eine der beiden möglichen Komponenten des elektromagnetischen Feldes ist und  $k$  die Wellenzahl einer in  $z$ -Richtung laufenden Welle. Als Lösungsansatz wählt man

$$u(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{-ikz} \quad (3.10)$$

unter der Nebenbedingung, daß die Amplitude  $\psi$  sich nur langsam mit  $z$  verändert [Cul72]. Dadurch ist es möglich  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  zu vernachlässigen, womit sich Gleichung 3.9 reduziert auf

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (3.11)$$

Diese Gleichung ähnelt in ihrer Form der zeitabhängigen Schrödingergleichung, wobei die  $z$ -Koordinate die Rolle der Zeit spielt. Ü bernimmt man die bekannte Lösung und interpretiert sie in diesem Kontext, erhält man

$$u(x, y, z) = \frac{\omega_0}{\omega} H_m \left( \frac{\sqrt{2} x}{\omega} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2} y}{\omega} \right) \exp \left( \frac{-\rho^2}{\omega^2} \right) \exp \left[ -i(kz - \phi) - \frac{ik\rho^2}{2R} \right] \quad (3.12)$$

für die  $(m, n)$  Moden der Wellenfunktion  $u$ . Ihre Eigenmoden werden dabei in kartesischen Koordinaten durch die Gauß-Hermiteischen Funktionen und in Zylinderkoordinaten durch Gauß-Laguerresche Funktionen beschrieben. Dabei sind die Variablen wie folgt definiert:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + z^2/z_0^2 \right) \quad (3.13)$$

$$R = z \left( 1 + z_0^2/z^2 \right) \quad (3.14)$$

$$\phi = (m + n + 1) \tan^{-1}(z/z_0) \quad (3.15)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (3.16)$$

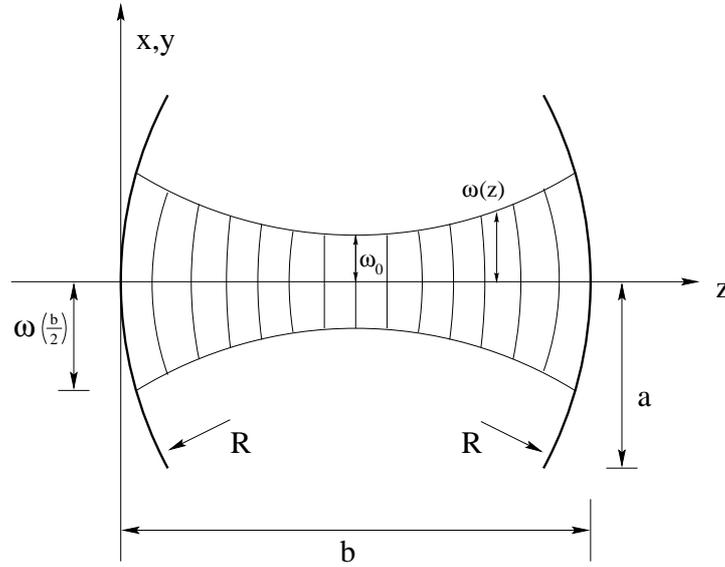


Abbildung 3.4: Die Feldverteilung eines offenen Resonators mit sphärischen Spiegeln.

Die Größe  $\omega$  gibt an, bei welchem Radius die Intensität auf den Faktor  $1/e^2$ , bezogen auf das Strahlzentrum, abgefallen ist. Der minimale Strahldurchmesser  $\omega_0$  wird auch als Strahltaille bezeichnet. Die charakteristische Rayleigh-Länge ist in diesen Formeln mit  $z_0$  bezeichnet

$$z_0 = (k\omega_0^2) / 2. \quad (3.17)$$

Sie beschreibt den Abstand von der Strahltaille, bei der sich die „beleuchtete“ Fläche verdoppelt hat. Die durch Gleichung 3.12 beschriebenen Feldverteilungen sind näherungsweise gleich mit jenen von  $TEM_{mn}$  Moden, wobei die Zahlen  $m$  und  $n$  die Anzahl der Knoten der Feldverteilung angeben. Die radiale Intensitätsverteilung der Grundmode ( $m=n=0$ ) besitzt ein gaußförmiges Profil, weshalb diese Mode auch als sogenannter Gaußscher Strahl bezeichnet wird. In Abbildung 3.4 ist das Feld für die Gaußschen Elementarmoden innerhalb eines offenen Resonators mit sphärischen Spiegeln dargestellt. Mit Hilfe der Randbedingungen erhält man so für die Resonanzfrequenz

$$f_{pmq} = \frac{c}{2b} \left[ (q+1) + \left( \frac{1+2p+m}{\pi} \right) \arccos \left( 1 - \frac{b}{R} \right) \right]. \quad (3.18)$$

Das Spektrum besteht also aus Grundmoden im Abstand von  $(c/2b)$ , sowie einer Anzahl von Obermoden, welche zusätzlich noch  $(1+2p+m)$  fach entartet sind.

Allerdings beschreibt die skalare Theorie das gemessene Modenspektrum des Resonators nicht vollständig. Dazu benötigt man eine vektorielle Lösung der Maxwell Gleichungen unter Berücksichtigung der durch die sphärische Spiegel gegebenen Randbedingungen. Dieses geschieht mit Hilfe der sogenannten Complex-Source-Point Theorie [Cul79]. Ausgangspunkt ist dabei ein elek-

trischer Dipol, welcher auf einer komplexen Position

$$r = \left( x^2 + y^2 + (z - iz_0)^2 \right)^{1/2} \quad (3.19)$$

steht. Durch diesen, zunächst rein formalen Schritt bleiben das Herzsche Potential weiterhin Lösung der Maxwell Gleichungen [Luk85]. Überlagert man dazu das Feld eines magnetischen Dipoles, welcher ebenfalls auf einer komplexen Position ruht, so ergeben sich die Feldgleichungen eines offenen Resonators [Cla82]. Mittels der Randbedingungen ergibt sich daraus für die Eigenfrequenzen eines Resonators der Größe  $b$  mit Spiegeln des Krümmungsradius  $R$

$$f_{plq}^{A,B} = \frac{c}{2b} \cdot \left\{ q + \frac{n}{\pi} \arccos \left( 1 - \frac{b}{R} \right) + \frac{m}{4\pi Rk} + \mathcal{O} \left( (k\omega_0)^{-6} \right) \right\} \quad (3.20)$$

mit

$p = 0,1,2,\dots$ radiale Knotenzahl	$m = 2p^2 + 2pl - l^2 + 2p + l - 2 \pm 4l$
$q = 1,2,3,\dots$ axiale Knotenzahl	$\pm$ für A/B-Serie
$l = 0,1,2,\dots$ azimutale Knotenzahl	$n = 2p+1+1$
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl	$c =$ Lichtgeschwindigkeit
$\omega_0 = (b/k)^{1/2} ((2R/b) - 1)^{1/4}$ Strahltaille	

Für die Fundamentalmoden erhält man eine linear polarisierte Welle, welche allerdings nicht rein transversal elektromagnetisch ist. Neben diesen weist die Feldverteilung noch zusätzliche Obermoden auf, welche durch die Indizes  $p$  und  $l$  charakterisiert werden. Sie sind ein Maß für die Zahl der Stehwellen in radialer und azimutaler Richtung und können zu der transversalen Ordnung  $n$  zusammengefaßt werden [Kog66]. Die Obermoden weisen zusätzlich verschiedene Polarisationsmuster auf [Kle89] und eine Aufspaltung in  $A$ - und  $B$ -Moden, welche die Korrekturen höherer Ordnung unterscheiden.

Die komplexe Theorie sagt über die skalare Theorie hinaus eine Verschiebung der Frequenzen aufgrund des Einflusses der endlichen Wellenlänge voraus, sowie eine Aufspaltung der Moden  $n$ -ter Ordnung in  $n$  einzelne Moden. Mittels der Frequenzformel 3.20 ist es möglich, die Eigenmoden des Resonators mit einer Genauigkeit in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(k\omega_0^{-6})$  zu bestimmen. Für die im Experiment verwendeten Größen ( $R \approx 0.58$  cm und  $b \approx 0.24$  cm) ergibt sich somit eine Abweichung von  $\approx 2$  kHz bei 23 GHz.

Die Frequenzen der in den Meßreihen verwendeten Resonanzen betragen zwischen 20 GHz und 24 GHz. Hingegen liegen die Variationen der Resonanzfrequenzen durch die Änderung der Größe des Resonators in der Größenordnung von kHz. Aus diesem Grund werden in den meisten Abbildungen nicht die Resonanzfrequenz selbst sondern eine Frequenzdifferenz aufgetragen.

$$\begin{aligned} \text{Frequenzdifferenz} &= \text{Resonanzfrequenz} - \text{willkürlicher Offset} \\ \Delta f &= f_{Reso} - f_0 \end{aligned}$$

Dieser willkürliche Offset ist eine beliebige, aber feste Frequenz. Im weiteren wird die Frequenzdifferenz häufig auch als Resonanzfrequenz bezeichnet. Dieses stimmt zwar nicht absolut, aber differentiell.

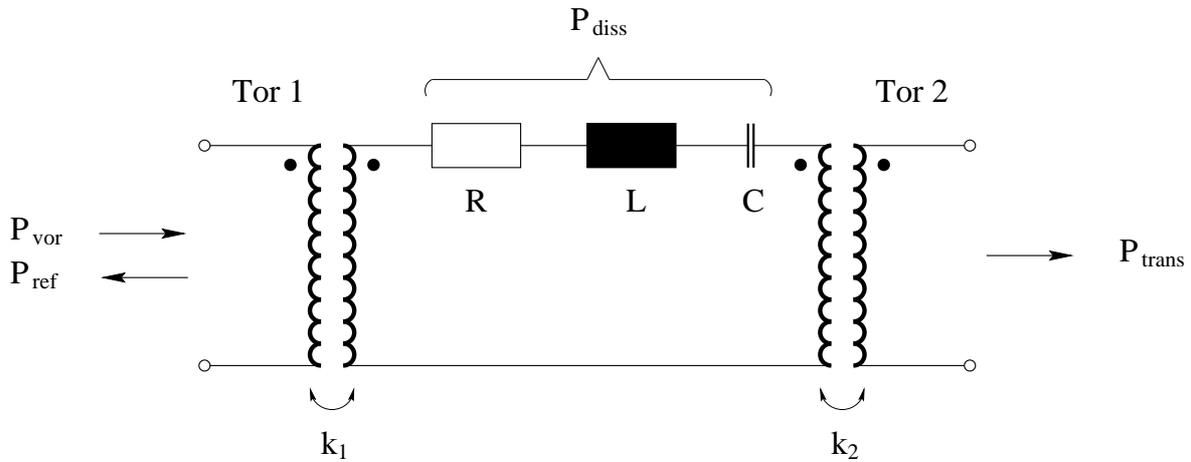


Abbildung 3.5: Ersatzschaltbild für einen zweifach gekoppelten Hohlraumresonator.

### 3.2.2 Hochfrequenzkenngrößen

In diesem Experiment wird der Fabry-Pérot Resonator in Transmission betrieben. Aus diesem Grund sind Vorrichtungen zur Ein- und Auskopplung der Mikrowellen notwendig. Es handelt sich dabei um zwei magnetische Lochkopplungen, deren Aufbau für Ein- und Auskopplung identisch sind. Zur Verdeutlichung der Funktionsweise des Resonators ist in Abbildung 3.5 sein Ersatzschaltbild aufgetragen. Die von der Hochfrequenzquelle aus vorlaufende Leistung  $P_{vor}$  wird an der Einkopplung teilweise reflektiert ( $P_{ref}$ ) oder durch den Resonator transmittiert ( $P_{trans}$ ). Im Resonator selbst wird dann ein Teil der eingekoppelten Leistung durch verschiedene Verlustsysteme dissipiert ( $P_{diss}$ ).

Die Güte einer Mode ist gegeben durch das Verhältnis der im Resonator gespeicherten Feldenergie zur Verlustleistung normiert auf eine Schwingungsperiode [Bäc99]

$$Q = \omega \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust/Zeiteinheit}} \quad (3.21)$$

Jedem Verlustmechanismus kann somit eine Güte zugeordnet werden. Den Verlusten im Resonator ( $P_{diss}$ ) wird gemäß oberem Ansatz die sogenannte unbelastete Güte  $Q_0$  zugeordnet.

$$Q_0 = \frac{\omega W}{P_{diss}} \quad (3.22)$$

Sie wird dominiert durch die ohmschen Verluste des Skineffekts in den Resonatorspiegeln und ist somit ein Maß für den Anteil der vom Spiegel wieder reflektierten Leistung und wird deshalb auch als Reflexionsgüte bezeichnet. Nach [Mül83][Wal95] läßt sich ihr Wert über das Verhältnis der Länge  $b$  der energiespeichernden Feldverteilung (=Resonatorlänge) zur Verlustlänge (=Eindringtiefe des Skineffektes  $d$ ) berechnen

$$Q_0 = \frac{b}{2d}, \quad (3.23)$$

womit sich bei einem Spiegelabstand  $b \simeq 240$  mm Reflexionsgüten von  $2.5 \cdot 10^5$  bis  $3 \cdot 10^5$  im Frequenzband von 20 bis 26 GHz ergeben.

Die Koppelgüte  $Q_k$  beschreibt das Verhältnis der Leistung, welche an der Einkopplung reflektiert wird zur vorlaufenden Leistung, wenn der Resonator in Resonanz betrieben wird. Sie ist somit ein Maß für die am Resonator selbst auftretenden Verluste, welche sich unter anderem aus Streu-, Beugungs- oder dielektrischen Verlusten zusammensetzen. Die Koppelgüte, oder auch externe Güte, wird beschrieben über den Anteil der eingekoppelten Leistung  $P_{ein}$

$$Q_K = \frac{\omega W}{P_{ein}} \quad . \quad (3.24)$$

Steigt der Anteil dieser Leistung, steigt also die Kopplung, so sinkt die Koppelgüte. Errechnen läßt sie sich aus der transmittierten und vorlaufenden Leistung gemäß folgendem Zusammenhang

$$\frac{P_{trans}}{P_{vor}} = \frac{4 Q_L^2}{Q_{k_1} Q_{k_2}} = \frac{4 Q_L^2}{Q_k^2} \quad (3.25)$$

wobei angenommen wird, daß die Güten der Ein- und Auskopplung gleich sind [Kai95].

Die unbelastete Güte und die externen Güten überlagern sich zur belasteten Güte  $Q_L$ . Unter der Annahme, daß die Ein- und die Auskopplung gleich groß sind ergibt sich

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{2}{Q_k} \quad . \quad (3.26)$$

Offensichtlich reduziert die notwendige Ankopplung des Resonators die gemessene Güte. Um aber eine hohe Auflösung zu erreichen, sollte die belastete Güte möglichst wenig von der Leerlaufgüte des Resonators abweichen. Somit darf bei einem offenen Resonator immer nur eine schwache Kopplung realisiert werden, um eine hohe Koppelgüte zu erreichen.

Der Koppelfaktor  $\beta$ , er ist ein Maß für die in den Resonator ein- bzw. ausgekoppelten Leistung, ist definiert als

$$\beta = \frac{Q_0}{Q_k} \quad . \quad (3.27)$$

Er läßt sich für die Einkopplung aus den gemessenen Leistungen gemäß

$$\beta = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{P_{ref}}{P_{vor}}} \right) \left( \sqrt{\frac{P_{ref}}{P_{vor}}} \right)^{-1} \quad (3.28)$$

berechnen. Unter der Annahme einer symmetrischen Kopplung, also  $\beta = \beta_1 = \beta_2$ , kann dann die Leerlaufgüte  $Q_0$  aus der belasteten Güte  $Q_L$  berechnet werden

$$Q_0 = Q_L (1 + 2\beta) \quad . \quad (3.29)$$

Für die verwendete schwache Kopplung ( $\beta \ll 1$ ) tragen die Koppelverluste nur wenig zu den Gesamtverlusten bei. Die Transmission des Resonators, daß Verhältnis von durchgekoppelter und vorlaufender Leistung, beträgt dann  $4 \cdot \beta^2$  und ist typisch zwischen  $10^{-2}$  und  $10^{-3}$ .

### 3.2.3 Umrechnungsfaktor und Längenauflösungsvermögen

Den Korrelationsfaktor  $\beta$  zwischen der Auslenkung der Resonatorspiegel und der Änderung der Resonanzfrequenz erhält man durch Ableiten der Frequenzformel des Resonators 3.20 nach  $b$  als

$$\beta = -\frac{b}{f} \left( 1 - \frac{nc}{2\pi f} \sqrt{\frac{1}{2Rb - b^2}} - \frac{c}{8\pi^2 Rqf} + \mathcal{O}(10^{-8}) \right)^{-1}. \quad (3.30)$$

Dieser Faktor ermöglicht das Umrechnen der modenabhängigen Änderungen der Resonanzfrequenz in die Auslenkungen der Spiegel

$$\Delta b = \beta \cdot \Delta f \quad (3.31)$$

weshalb  $\beta$  auch als Umrechnungsfaktor bezeichnet wird. Je nach gewählter Mode besitzt der Faktor eine Größe von etwa  $\beta \simeq 10$  nm/kHz. Die theoretische Genauigkeit mit der der Faktor berechenbar ist beträgt  $\mathcal{O}(10^{-8})$ . Da der Faktor aber proportional zum Spiegelabstand  $b$  ist, und dieser im Meßbetrieb nur mit einer Genauigkeit von etwa 8 ppm aus dem Modenspektrum bestimmt werden kann, besitzt auch der Umrechnungsfaktor diese Unsicherheit.

Um eine Abschätzung für das Auflösungsvermögen des Experimentes zu erhalten, kann man in erster Näherung den Umrechnungsfaktor gleich eins setzen, so das sich Änderungen des Abstandes direkt proportional in Frequenzänderungen umsetzen. Unter diesem Ansatz leitet man die kleinste aufzulösende Länge  $\delta(\Delta b)$  aus

$$\delta(\Delta b) \simeq b \cdot \frac{\delta(\Delta f)}{f} \quad (3.32)$$

her, wobei  $\delta(\Delta f)$  die kleinste aufzulösende Frequenzänderung bezeichnet. Definiert man  $\alpha := \delta(\Delta f)/f_{1/2}$  so kann man, unter Verwendung der Güte  $Q = f/f_{1/2}$ , Gleichung 3.32 umwandeln in

$$\delta(\Delta b) \simeq \alpha \cdot \frac{b}{Q}. \quad (3.33)$$

Die Größe  $\alpha$ , die kleinste aufzulösende Frequenzänderung in Einheiten der Halbwertsbreite, ist nur durch das Meßverfahren bestimmt und erreicht in diesem Experiment eine Größe von  $1 \cdot 10^{-6}$ . Somit wird das Auflösungsvermögen des Resonators nur noch von der belasteten Güte bestimmt, welche im optimalen Fall gleich der Reflexionsgüte ist. Mit dieser kann die theoretisch maximale Auslösung des Experimentes berechnet werden. Sie beträgt mit Hilfe des in [Wal95] hergeleiteten Geometriefaktors sowie der Skintiefe  $d$  in Abhängigkeit von der Frequenz

$$\delta(\Delta b) = 1 \cdot 10^{-12} \text{ m} \sqrt{\frac{17}{f [\text{GHz}]}}. \quad (3.34)$$

Damit erhält man für die kleinste aufzulösende Längenänderung bei 23 GHz 0.9 pm. Die Auflösung ist somit hoch genug den Gravitationseffekt einer Feldmassen auf etwa  $1 \cdot 10^{-4}$  zu vermessen, woraus sich dann die Gravitationskonstante mit einer relativen Genauigkeit von  $5 \cdot 10^{-5}$

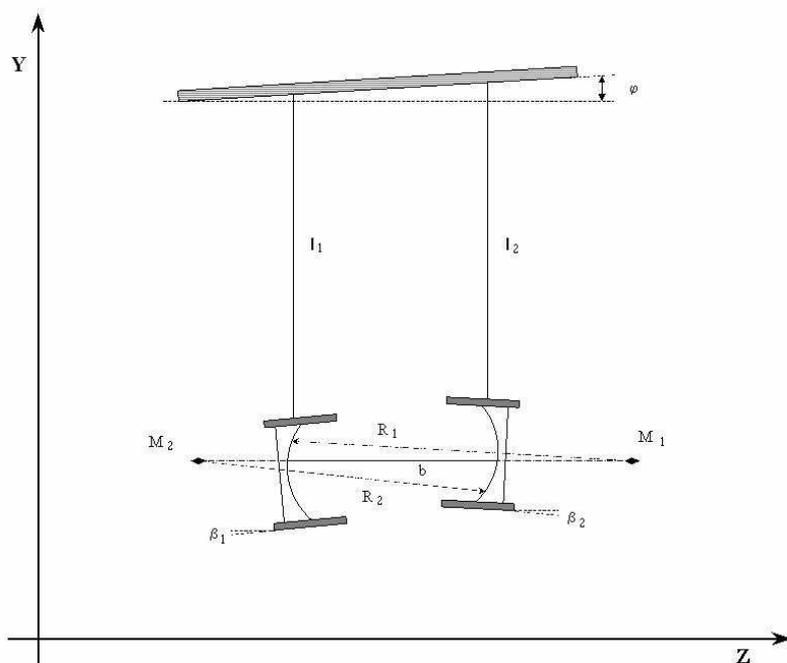


Abbildung 3.6: Die verschiedenen möglichen Neigungswinkel des Experimentes, welche Einfluß auf die Größe des Resonators haben.

bestimmen läßt. Diese theoretisch erreichbare Auflösung begrenzt nicht die Meßpräzision, da die Gesamtunsicherheit zur Zeit noch von systematischen Unsicherheiten dominiert wird.

Falls allerdings eines Tages das Auflösungsvermögen die Präzision der Messungen beschränken sollte, müßte die Güte des Resonators erhöht werden. Dazu bietet sich der Übergang zu einem supraleitenden Resonator ( $Q \sim 10^7$ ) oder zu einem optischen Resonator ( $Q \sim 10^{10}$ ) an. Weltweit gibt es bereits zwei Experimente zur Bestimmung der Gravitationskonstante, die auf dem Wuppertaler Design aufbauen, aber optische Resonatoren verwenden [Par00][Ni99].

### 3.2.4 Ausrichtung des Experimentes

Einer der dominierenden Unsicherheiten ist die Neigung des Experimentes durch die Deformation des Bodens aufgrund des hohen Gewichtes der Feldmassen. In diesem Abschnitt wird der mathematische Zusammenhang zwischen einer Neigung des Resonators und der daraus entstehenden Änderung des Abstandes der beiden Resonatorspiegel hergeleitet. Es ergeben sich dabei auch Grenzwerte für die erlaubten Justiergenauigkeiten innerhalb der angestrebten Gesamtunsicherheit.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes ist in Abbildung 3.6 der Resonator schematisch dargestellt. Eingezeichnet sind auch die möglichen Neigungswinkel des Experimentes. Der Winkel  $\alpha_i$  beschreibt eine Neigung jedes der beiden Pendel ( $i=1,2$ ) aus der Zeichenebene heraus, während

der Winkel  $\beta_i$  für eine Verkippung der Spiegel innerhalb dieser Ebene steht. Eine Neigung der Gesamtapparatur führt zu einer Änderung des Winkels  $\varphi$ . Die Länge der Pendelseile ist mit  $l_i$  bezeichnet und deren Differenz mit  $\Delta l$ . Mit  $R_i$  wird der Krümmungsradius der beiden Spiegel und deren Krümmungsmittelpunkte mit  $M_i$  benannt.

Die Grundlage aller weiteren Betrachtungen ist, daß sich der Gauß-Strahl zwischen den Resonatorspiegeln immer in Richtung der Verbindungslinie  $\overline{M_1 M_2}$  zwischen den beiden Krümmungsmittelpunkten der Spiegel ausrichtet. Für einen ideal ausgerichteten Resonator beträgt somit der Abstand zwischen beiden Spiegel [Wal95]

$$b = (-1) \left( \overline{M_1 M_2} - R_1 - R_2 \right) \cong (-1) \left( \overline{M_1 M_2} - 2R \right). \quad (3.35)$$

Da diese ideale Ausrichtung nur bedingt realisierbar ist, ergibt sich der Abstand der Krümmungsmittelpunkte gemäß folgendem Zusammenhang:

$$\overline{M_1 M_2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.36)$$

wobei

$$(x, y, z) := (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (3.37)$$

ist und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ \sin \beta_1 \\ \cos \beta_1 \end{pmatrix} + R_2 \begin{pmatrix} -\sin \alpha_2 \\ -\sin \beta_2 \\ \cos \beta_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} + \Delta l \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

die Einflüsse der einzelnen Winkel und Positionen der beiden Spiegel beschreibt. Da die Krümmungsradien der beiden Spiegel als konstant und auch als gleich angesehen werden, ergeben sich Variationen der eigentlichen Meßlänge  $b$  aus den Änderungen der Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte

$$\Delta \overline{M_1 M_2} = -\Delta b. \quad (3.39)$$

Eine vertikale Veränderung  $\Delta y_1$  der Position eines Resonatorspiegels, wie sie durch Temperaturgradienten oder unterschiedliche Ausdehnungskoeffizienten der Wolframdrähte verursacht werden, ergibt eine Variation der Länge des Gauß-Strahles gemäß

$$\begin{aligned} \Delta b &= \left. \frac{\partial \overline{M_1 M_2}}{\partial y_1} \right|_0 \Delta y_1 \\ &\cong -\frac{y}{2R - b} \Delta y_1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Offensichtlich ist die Auswirkung möglicher vertikaler Variationen auf den Pendelabstand direkt skaliert über den Unterschied in der Position  $y_i$  der beiden Pendel.

Für Auslenkungen der Spiegel in der horizontalen Ebene, zum Beispiel durch die gravitative Wechselwirkung der Feldmassen, ergibt sich eine Änderung der Länge des Gauß-Strahles gemäß folgendem Zusammenhang

$$\begin{aligned}\Delta b &= \left. \frac{\partial \overline{M_1 M_2}}{\partial z_1} \right|_0 \Delta z_1 \\ &\cong \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right) \Delta z_1 ,\end{aligned}\quad (3.41)$$

wobei hier eine Taylor Entwicklung der Wurzel des Nenners einfloß. Man erkennt, daß die Längenänderung  $\Delta b$  des Gauß-Strahles mit einer Genauigkeit von 10 ppm der Auslenkung der Spiegel  $\Delta z$  entspricht, wenn alle Neigungswinkel unter  $0.1^\circ$  liegen. Dies ist von großer Bedeutung, da bei der Bestimmung der Gravitationskonstanten die Gleichheit von  $\Delta z = \Delta b$  vorausgesetzt wird.

Die weitreichenste Auswirkung hat allerdings eine Neigung des gesamten Resonatorsystems um den Winkel  $\Delta\varphi$ . Wählt man als Ausgangspunkt Gleichung 3.36 und nähert die Kosinusterme durch eine 1 und die Sinusterme durch ihr Argument, so ergibt sich

$$\Delta b = \left. \frac{\partial \overline{M_1 M_2}}{\partial \varphi} \right|_0 \Delta\varphi \quad (3.42)$$

$$\cong \frac{b}{2R - b} [R(\beta_1 - \beta_2 - 2\varphi) - \Delta l] \Delta\varphi . \quad (3.43)$$

Allerdings sind in dem Experiment die Pendel nicht mittels eines einfachen Drahtes aufgehängt, sondern bifilar. Dabei ruht jeder der beiden Pendelkörper in zwei Drahtschlaufen. Bei der Berücksichtigung dieser Tatsache spielen die Unterschiede im Abstand der Drähte an der Aufhängung ( $O$ ) zum Abstand der Drähte auf den Pendeln ( $U$ ) eine wichtige Rolle, da  $U \cdot d\beta = O \cdot d\varphi$  ist. Mittels dieser Nebenbedingung erhält man für die Änderung des Spiegelabstandes durch eine Neigung

$$\Delta b = \frac{1}{2R - b} [\gamma R b (\beta_1 - \beta_2 - 2\varphi) + (2RO/U - b) \Delta l] \Delta\varphi , \quad (3.44)$$

wobei  $\gamma = 1 - O/U$  bezeichnet. Während des Experimentes läßt es sich leicht sicherstellen, daß diese Größe klein ist. So beträgt  $\gamma \approx 10^{-2}$  wenn die Abstände der Drahtschlaufen an der Aufhängung und am Pendel innerhalb eines halben Millimeters übereinstimmen. Deshalb kann der erste Term in Gleichung 3.44 vernachlässigt werden und es folgt

$$\Delta b = \Delta l \cdot \varphi . \quad (3.45)$$

Offensichtlich ist die Auswirkung einer Neigung des Stützgerüsts auf den Abstand der beiden Resonatorspiegel abhängig von der Größe der Längendifferenz der beiden Pendellängen. Dabei können schon sehr kleine Neigungswinkel von  $0.1 \mu\text{rad}$  zu einem Fehler von über 1000 ppm führen.

### 3.3 Begrenzende Effekte

Im Rahmen dieses Abschnittes werden die Begrenzungen und Beeinflussungen einiger physikalischer Effekte auf das Experiment dargestellt. Weitere Größen — magnetische Kräfte, thermische Längenausdehnungen etc. — sind ausführlich in [Sch88], [Sch92] und [Wal95] beschrieben.

- Brownsche Molekularbewegung

Durch die zufälligen Stöße der Moleküle des Restgases im Kryostaten auf die Pendel wird auf diese ein Impuls übertragen. Nach [Sch92] ist die mittlere Auslenkung gegeben durch

$$\Delta b = \left( \frac{kT}{m\omega^2} \right)^{1/2}. \quad (3.46)$$

Bei einer Pendeleigenfrequenz von  $\omega \simeq 1.9$  Hz, einer Masse von  $m \simeq 3.3$  kg und einer Temperatur von  $27^\circ\text{C}$  ergibt sich eine Auslenkung von  $\Delta b \simeq 18$  pm. Diese wird allerdings durch die Wirbelstrombremse stark reduziert, so daß die Brownsche Molekularbewegung keine Begrenzung für das Experiment darstellt.

- Strahlungsdruck

Durch die elektromagnetische Strahlung wird Impuls von der Strahlungsquelle auf den Absorber übertragen. In diesem Fall sind das die Spiegel des Resonators, welche dadurch auseinandergedrückt werden. Für die Auslenkung beider Spiegel ergibt sich [Sch92]

$$\Delta b = \frac{2F_{\text{Flux}}}{m\omega^2} \quad \text{mit} \quad F_{\text{Flux}} = \frac{4}{\pi} \frac{\text{Q}_{\text{ref}}}{\text{b f}} P_{\text{ref}}. \quad (3.47)$$

Bei einer typischen reflektierten Leistung von  $P_{\text{ref}} \simeq 0.06$  mW erhält man mit den oben aufgeführten Werten für  $m$  und  $\omega$  eine Auslenkung von  $\Delta b \simeq 0.7$  nm. Der Strahlungsdruck sorgt somit für eine nachweisbare Änderung des Abstandes der beiden Resonatorspiegel. Solange allerdings die Feldamplitude im Resonator zeitlich konstant ist und Schwankungen der Mikrowellenleistung nicht mit den Feldmassen korrelieren, bedeutet er keine Limitierung der Meßgenauigkeit.

- Dielektrische Effekte

Eine Änderung der Dielektrizitätszahl  $\varepsilon$  im Raum des offenen Resonators führt zu einer Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Mikrowellen und damit zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenz, die proportional zu  $1/\sqrt{\varepsilon}$  ist. Zum Erreichen der angestrebten Frequenzstabilität von  $\Delta f/f = 10^{-11}$  muß man die durch Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht und lokalen Dichteschwankungen erzeugten dielektrischen Effekte begrenzen. Die Dielektrizitätskonstante für ein Gas läßt sich nach [Lan52] mittels der Beziehung

$$(\varepsilon - 1)_{p,T} = (\varepsilon - 1)_0 \left( \frac{p [\text{mbar}]}{1013} \frac{273}{T [\text{K}]} \right) \quad (3.48)$$

berechnen, wobei  $(\varepsilon - 1)_0 = 5.36 \cdot 10^{-4}$  [Lid00] für trockene Luft ist. Die geforderte Frequenzstabilität erreicht man mit einem Druck von  $1 \cdot 10^{-4}$  mbar im Vakuumgefäß, welcher um nicht mehr als  $\Delta p < 3 \cdot 10^{-6}$  mbar schwanken sollte. Dann brauchen auch Temperaturschwankungen  $\Delta T > 20$  °C nicht mehr berücksichtigt werden. Diese Grenzen konnten während des Experimentes im Kryostaten mit ein Druck von  $2 \cdot 10^{-5}$  mbar und Temperaturschwankungen von weniger als 0.1 °C deutlich unterschritten werden. Somit sind dielektrische Effekte ebenfalls keine Begrenzung der Meßgenauigkeit.

- Gravitationsfelder der Umgebung

Durch die zyklische Änderung der Feldmassenposition ist es möglich den Betrag der Auslenkung von anderen Drifteffekten zu trennen. Werden allerdings in der Umgebung des Experimentes Massen verschoben, führt dieses zu einer Modulation des Umgebungsfeldes. Diese zusätzlich Kraft kann von der zu messenden teilweise separiert werde, allerdings nicht vollständig.

Gezeiteneffekte infolge der Bewegung der Erde um die Sonne werden durch möglichst gleiche Pendellängen stark unterdrückt [Sch88]. Sie wirken dann auf beide Pendel gleich, so daß sie nicht weiter berücksichtigt werden müssen. Gleiches gilt für die zeitliche Variation der lokalen Erdbeschleunigung. Sie fließt zwar über die Eigenfrequenz der Pendel in den Fehler der Gravitationskonstanten ein, ist mit einer relativen Änderung von weniger als  $1 \cdot 10^{-7}$  aber vernachlässigbar [Bon67].

## Kapitel 4

# Aufbau des Gravitationsexperimentes

Nach der Beschreibung des Konzeptes des Experimentes, beschäftigt sich dieses Kapitel mit der Realisierung. Der Aufbau des Fabry-Pérot Gravimeters läßt sich dabei in drei Hauptbereiche unterteilen:

1. den offenen Mikrowellenresonator,
2. die Feldmassen und ihren Bewegungsmechanismen sowie
3. das Vakuumgefäß mit dem es tragenden Stützgerüst,

wobei jeder dieser Bereiche wieder aus mehreren Elementen besteht. Zum besseren Verständnis ist in Abbildung 4.1 der Experimentaufbau skizziert. Dargestellt ist der offene Fabry-Pérot Resonator (1), dessen transmittierte Leistung gemessen wird (2). Die einzelnen Resonatorelemente werden in Wolframdraht Schlaufen (3) gehalten, welche an einer Aufhängung (4) unterhalb des Deckels des Vakuumgefäßes (5) fixiert sind. Dieser Vakuumtank wird durch ein Stützgerüst (6) in Position gehalten. Um mikroseismisch induzierte Schwingungen zu reduzieren, befindet sich unterhalb des Resonators eine Wirbelstrombremse (8). Auf zwei Schienenpaaren (8) lagern die beiden Feldmassen (9), deren Positionen mittels zweier Meßsysteme (10) aus Glasmaßstäben ermittelt werden. Auf die verschiedenen Komponenten wird in den folgenden Abschnitten eingegangen.

### 4.1 Resonatormeißsystem

Um die Variation des Abstandes der beiden Pendel zu bestimmen, formen sie einen offenen Fabry-Pérot Mikrowellenresonator. Seine einzelnen Komponenten werden in diesem Unterkapitel beschrieben. So beschäftigt sich der folgende Abschnitt mit dem Aufbau des Resonators als solchen, woran sich Ausführungen zu den Aufhängungsdrähten aus Wolfram sowie der Aufhängung anschließen. Abschließend folgt eine Beschreibung der weiteren Bauteile, die innerhalb des Vakuumtanks angebracht sind.

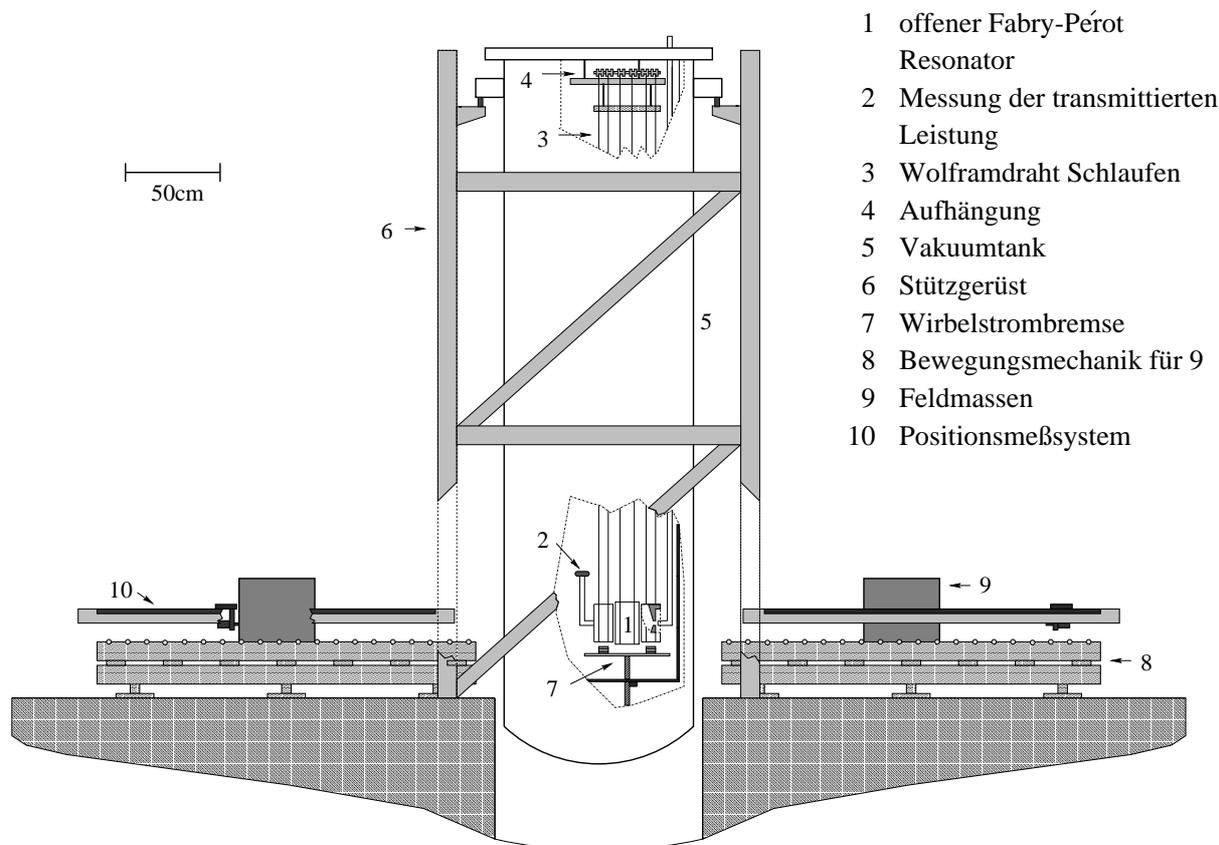


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Wuppertaler Gravitations-Experimentes.

#### 4.1.1 Fabry-Pérot Resonator

Die beiden Spiegel des offenen Fabry-Pérot Resonators fungieren als Testmassen für die gravitative Kraft der Feldmassen. Bei einer Änderung  $\Delta b$  des Abstandes der beiden Spiegel kommt es zu einer proportionalen Änderung  $\Delta f$  der Resonanzfrequenz. Aufgebaut ist der Resonator im wesentlichen aus zwei Teilen:

- zwei sich gegenüberstehenden sphärischen Spiegeln und
- einem dazwischen positionierten Obermodenfilter,

sowie je einem Ein- und Auskoppelhohlleiter für die Mikrowellen. In Abbildung 4.2 ist eine Schnittzeichnung des Resonators dargestellt, welche die Anordnung der einzelnen Elemente zueinander verdeutlicht. Die Spiegel sind aus OFHC-Kupfer hergestellt (Fa. Spectron Optik, Oestrich-Winkel; überarbeitet im Optikzentrum Bochum) und haben eine zirkulare, sphärische Form. Ihre diamantgefrästen und vergoldeten Oberflächen weisen optische Qualität auf und besitzen eine interferometrisch bestimmte Abweichung von der idealen sphärischen Form von unter  $0.5 \mu\text{m}$  bei einer Oberflächenrauigkeit von kleiner als  $50 \text{ nm}$ . Der Durchmesser der

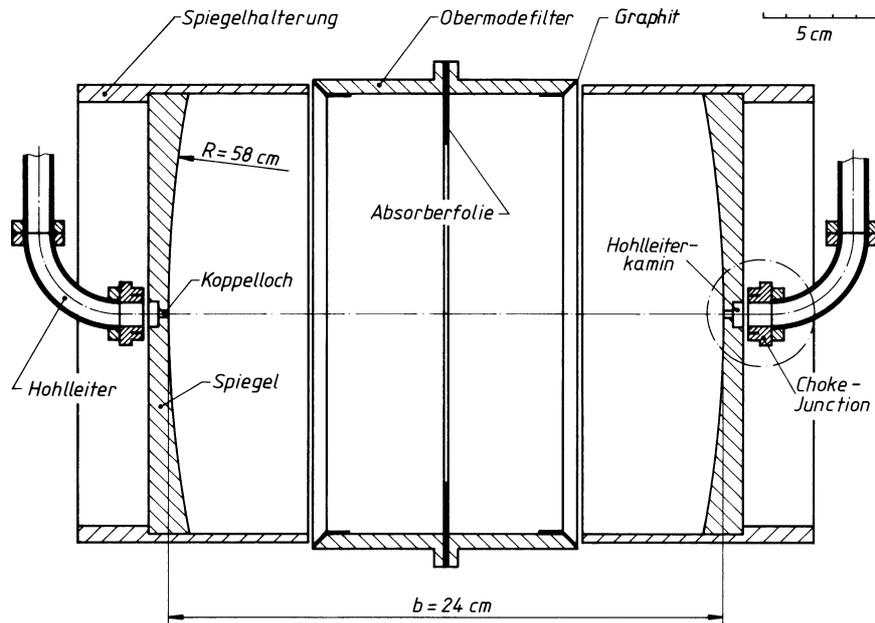


Abbildung 4.2: Eine schematische Darstellung des Fabry-Pérot Resonators. Aufgetragen sind die beiden Spiegel mit den jeweiligen Fassungen und der Obermodenfilter. Gleichfalls eingezeichnet sind der Ein- und Auskoppelhohlleiter (aus [Wal91]).

Spiegel beträgt etwa 198 mm und sichert in Verbindung mit dem gewählten Abstand ( $b \approx 0.24 \text{ m}$ ) und Krümmungsradien ( $R \approx 0.58 \text{ m}$ ) eine stabile Feldverteilung im Resonator. Der Spiegelradius ( $a \approx 96 \text{ mm}$ ) ist um etwa einen Faktor drei größer als der Strahlradius auf seiner Oberfläche, so daß die Beugungsverluste bei Moden niedriger transversaler Ordnung gegenüber den Reflexionsverlusten vernachlässigbar sind. Betrieben wird der Resonator im Frequenzband zwischen 20 und 26 GHz (K-Band).

Jeder der beiden Spiegel sitzt in einer zylinderförmigen Fassung aus Aluminium, in welche sie eingeklebt sind. Diese Halterungen für die Spiegel dienen auch als Abschirmung gegen äußere elektromagnetische Strahlung und als Bremskörper für die Wirbelstrombremse. Die Fassungen besitzen eine Länge von etwa 100 mm bei einem Durchmesser von etwa 200 mm. In Abbildung 4.3 sind Fotos der Vorder- und der Rückseite eines der Pendelkörper zu sehen. Im linken Teil ist die vergoldete, sphärisch gekrümmte Spiegeloberfläche mit dem zentralen Koppelloch zu erkennen, während der rechte Teil der Abbildung die Rückseite des Spiegels mit dem Hohlleiterkamin zeigt.

Die Geometrie der Spiegel sowie der Spiegelhalterungen wurde so gewählt, daß der Schwerpunkt genau im Zentrum der Spiegeloberfläche liegt, so daß der, aus der Resonanzfrequenz errechnete, Abstand der Spiegel gleich dem Schwerpunktabstand ist. Aufgehängt werden die Resonatorpendel in jeweils zwei Schlaufen aus  $\varnothing = 200 \mu\text{m}$  starkem Wolframdraht, die in kleinen Nuten in der Fassung liegen. Deren Positionen sind so gewählt, daß ihr Abstand vom Schwerpunkt identisch ist, was verhindert, daß sich bei einer thermischen Ausdehnung der Spiegel und

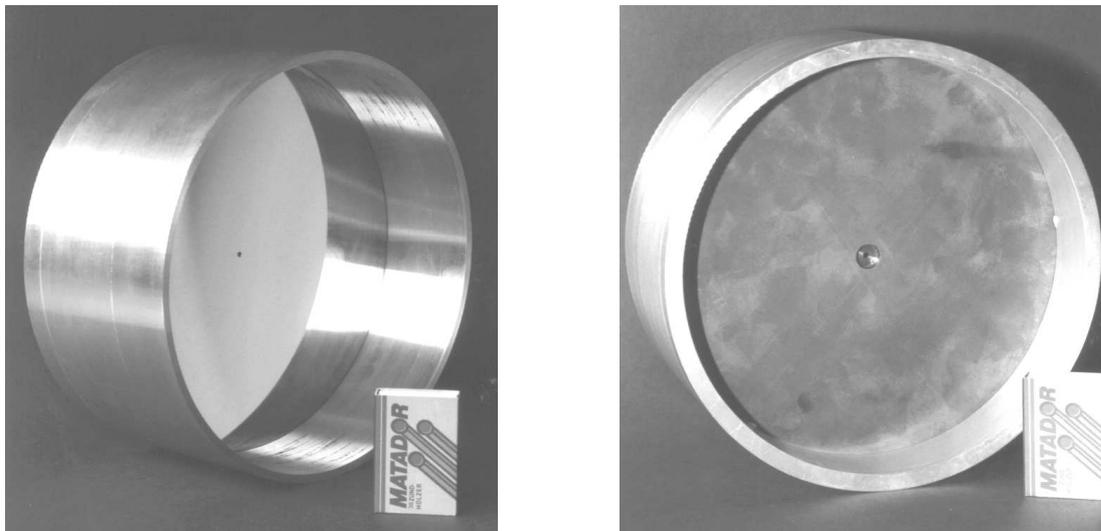


Abbildung 4.3: Fotos der Spiegel in ihren Fassungen. Im rechten Foto ist die Rückseite des Spiegels mit dem Hohlleiterkamin zu erkennen. Er leitet die Mikrowellen auf das mit  $LaAlO_3$  dielektrisch aufgeweitete Koppelloch. Dieses ist auch in der Mitte der Spiegelfläche in der linken Abbildung zu erkennen.

der Fassung die Größe des Resonators ändert.

Um den Resonator gegen unerwünschte elektromagnetische Einstrahlungen von außen zu schützen, wurde zwischen die beiden Spiegelhalterungen ein Obermodenfilter eingehängt. Dieser Hohlzylinder ist ebenso wie die Spiegel bifilar aufgehängt, besteht aus Aluminium und ragt bis auf einen Spalt von 1–2 mm an jene heran. Mikrowellen, die aus dem Vakuumtank in den Resonator oder auch umgekehrt eingestrahlt werden unterdrückt dieser metallische Filter. Im Inneren ist der Obermodenfilter mit mikrowellenabsorbierender Folie<sup>1</sup> ausgelegt. Aus diesem Material wurde ebenfalls eine Ringblende in den Aluminiumzylinder eingebaut, die unerwünschte Obermoden unterdrückt, ohne dabei die Grundmoden zu stören. Zusätzlich ist der Resonator noch mit Absorberplatten umgeben, welche die abgestrahlte Leistung des Resonators oder des Hohlleitersystems aufnehmen.

Die Speisung des Resonators mit Mikrowellen geschieht mittels magnetischer Lochkopplung an das noch zu beschreibende Mikrowellensystem (Abschnitt 4.4). Dazu sind rechts und links von dem Resonator Hohlleiter montiert, welche die Hochfrequenz zum bzw. vom Resonator führen. Wie auch in Abbildung 4.2 zu erkennen ist, sind die Hohlleiter mechanisch nicht mit den Spiegeln verbunden, vielmehr ist zwischen beiden ein Spalt von etwa 1 mm. Somit beeinflussen die Hohlleiter nicht gravitative Auslenkung der Resonatorspiegel.

Diese Art der induktiven Kopplung erfordert besondere Maßnahmen zur Reduzierung möglicher Strahlungsverluste am Spalt, da diese das Meßsignal über zwei Mechanismen verfälschen [Sch92]. Zum einen kann die abgestrahlte Mikrowellenleistung von der metallischen Umgebung reflektiert werden und in den Hohlleiter mit der transmittierten Leistung ankoppeln. Sie überla-

<sup>1</sup>Eccosorb VF, Fa. EMC-Technik

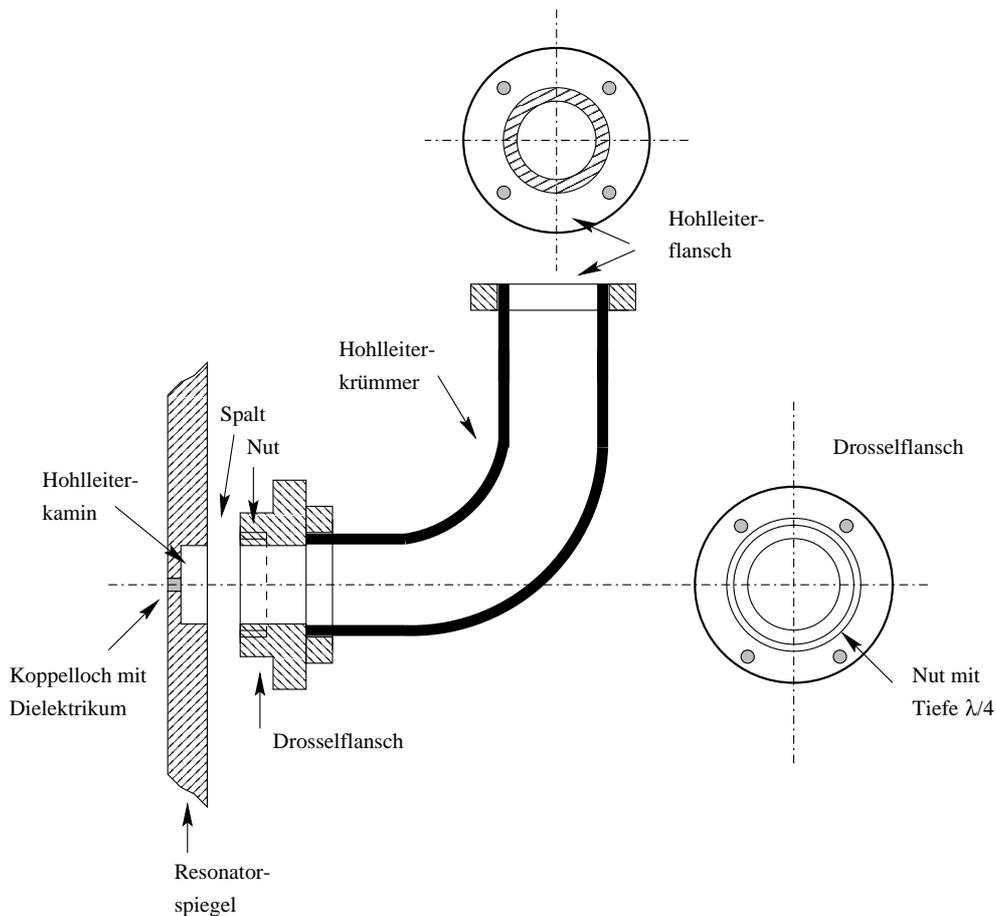


Abbildung 4.4: Schematische Zeichnung der Komponenten zur induktiven Ankopplung des Resonators an das Mikrowellensystem.

gert sich dann mit der zu bestimmenden Resonanzkurve als ein welliges, quasi-kontinuierliches Störsignal. Zum anderen können die Strahlungsverluste von außen in den Resonator koppeln. Dort regen sie dann weitere Resonanzen schwach an, was die zu messende Resonanzkurve verzerrt. Da diese parasitären Verluste die Auflösung des Meßsystemes begrenzen, werden zur Minimierung der Abstrahlungsverluste zum einen ein  $\lambda/4$  tiefer Hohlleiterkamin in der Rückseite der Spiegel verwendet und zum anderen enden die Hohlleiter in Drosselflänschen (auch Sperrfilterflansche) [Rag48]. Abbildung 4.4 verdeutlicht die Geometrien und das Zusammenwirken der einzelnen Komponenten. Aufgezeichnet ist der letzte Abschnitt des Hohlleiters mit dem Drosselflansch sowie eine Ausschnitt aus einem der Spiegel.

Der Drosselflansch kann aufgefaßt werden als eine Parallelplattenleitung der Länge  $\lambda/2$ , welche an ihrem Ende kurzgeschlossen ist. Realisiert wird er durch eine ringförmige, konzentrische Nut der Tiefe  $\lambda/4$ , die  $\lambda/4$  von der Hohlleiterinnenwand entfernt eingelassen ist. Die Geometrie verdeutlicht der rechts neben dem Hohlleiterkrümmer skizzierte Aufblick auf den Drosselflansch in Abbildung 4.4. Der Kurzschluß am Boden der Nut transformiert sich in eine hohe Impedanz

an ihrer Oberkante. Der Abstand der Außenkante der Flanschverbindung von dem Verzweigungspunkt muß ein ungradzahliges Vielfaches von  $\lambda/4$  betragen, da sich beide Impedanzen an der Oberkante der Nut addieren. Im Idealfall transformieren sich diese dann über die Entfernung von  $\lambda/4$  an den Übergang zwischen Hohlleiter und Spiegel in einen Kurzschluß, so daß dieser als ideal leitende Verbindung wirkt. Somit tritt keine Reflexion und Abstrahlung in den Spalt auf, obwohl kein metallischer Kontakt besteht. Wegen des Frequenzganges dieser Transformation ist die Anwendung nur in einem beschränkten Bereich des Hohlleiterbandes reflexionsarm [Har63].

In die Rückseite des Fabry-Pérot Spiegels ist ein Hohlleiterkamin eingedreht. Er besitzt denselben Durchmesser wie der zuführende Hohlleiter und ist  $\approx \lambda/4$  (3.9 mm) tief. Da der Anteil der Strahlungsverluste und der in den Resonator transmittierten Leistung klein ist, entsteht in dem Kamin ein ausgeprägtes Stehwellenmuster. Seine Länge ergibt, daß das erste Minimum des Mikrowellenfeldes genau auf dem Ort des Spaltes zwischen Hohlleiter und Spiegel fällt. Der Kamin dient dazu die Mikrowellen in den eigentlichen Koppelleiter zu führen, welcher auch leicht irreführend als Koppelloch bezeichnet wird. Dabei handelt es sich um einen in das Zentrum des Spiegels gefrästen Zylinder mit einem Durchmesser von 2.5 mm bei einer Länge von 1.8 mm. In diesem Hohlleiter wäre eine elektromagnetische Welle der verwendeten Frequenz allerdings nicht ausbreitungsfähig, weshalb er mit einem Dielektrikum, Lanthanaluminat  $\text{LaAlO}_3$ , ausgefüllt ist. Es sorgt für eine dielektrische Aufweitung ( $\epsilon_r=24.5$ ) des Hohlleiters, so daß die cut-off Frequenz dieses Abschnittes unter die benutzte Frequenz sinkt. Für die Messungen der Jahre 1998/99 und 2000/2001 wurde die Geometrie der Hohlleiter variiert. Die sich dabei ergebenden Veränderungen und Schwierigkeiten werden in Abschnitt 6.4 diskutiert. Der prinzipielle Aufbau der Kopplung blieb aber unverändert.

#### 4.1.2 Drähte der Aufhängung

Gehalten werden die einzelnen Teile des Resonators mittels  $\approx 5$  m langen Wolframdrähten. Die genauen Untersuchung dieser Drähte ist relevant, da in einer früheren Meßreihe einer der Drähte riß, was zum Verlust eines der Spiegel führte.

Die Aufhängungsdrähte bestehen aus Wolfram, da dieses eine sehr hohe Zugfestigkeit besitzt, kombiniert mit einer geringen Ausdehnung bei Wärme. Wolframdrähte bestehen — mikroskopisch gesehen — aus einer Vielzahl von sehr feinen langgezogenen Kristallen — vergleichbar mit einem Tau. Diese individuellen Kristalle können unter Last durch leichte Vibrationen, wie z.B. Mikroseismik, zum gleiten gebracht werden. Das führt nicht nur zu einer Änderung der Ruhelage der Resonatorpendel, sondern auch zu Variationen der Torsionskonstante. G. G. Luther [Lut99] fand bei seinen Messungen heraus, daß die Standfestigkeit der Drähte um so höher ist, je größer deren Zugfestigkeit, die für Drähte desselben Durchmessers um 10 bis 15 % variieren kann. Um eine Abschätzung für den verwendeten Draht zu erhalten, wurden im Fachbereich Werkstofftechnik Untersuchungen zur Reißfestigkeit an mehreren Proben durchgeführt. In der Literatur [Lan52] findet man für die Bruchspannung von gezogenem Wolframdraht:  $\sigma = 250 \text{ kp/mm}^2$ , womit sich bei 200  $\mu\text{m}$  dickem Draht eine maximale Belastung von:

$$\begin{aligned} F_{lit} &= \pi \cdot r^2 \cdot \sigma \\ &= 77 \text{ N} \end{aligned} \tag{4.1}$$

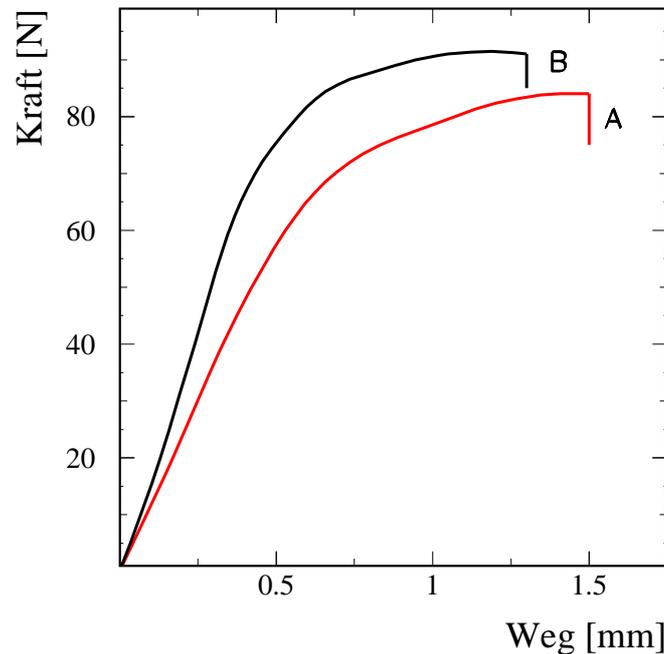


Abbildung 4.5: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für eine 50 mm lange Probe des verwendeten, 200  $\mu\text{m}$  starken, Wolframdrahtes. Die mit A bezeichnete Kurve ist vor einer Belastung mit 49 N vermessen worden, die mit B bezeichnete danach. Aufgetragen ist die Zugkraft als Funktion des Weges.

ergibt. Insgesamt wurden 10 Proben mit einer freien Meßlänge von jeweils 50 mm in einer Prüfmaschine bis zum Bruch belastet, bei gleichzeitiger Aufzeichnung von Kraft und Weg (=Zunahme der Meßlänge). Ein typisches Meßergebnis zeigt die mit A bezeichnete Kurve im Spannungs-Dehnungs-Diagramm 4.5. Es unterteilt sich in drei Bereiche. Der erste wird als elastischer oder auch Hookscher Bereich bezeichnet. In diesem Abschnitt ist die Verformung bis zur Proportionalitätsgrenze rein elastisch, Spannung und Dehnung sind proportional und die Spannungs-Dehnungs-Kurve eine Gerade. Diesem Bereich schließt sich der inelastische Bereich an, in welchem eine irreversible plastische Verformung des Werkstoffes stattfindet. Dabei beginnt das Fließen des Metalls, d.h. ganze Bereiche im Polykristall verschieben sich gegeneinander. Bei einigen Metallen tritt dann wieder eine Verfestigung ein, die durch die Gleitmöglichkeit des Stoffes festgelegt ist. Bei weiterer Belastung nimmt dann die elastische Spannung bis zu einem maximalen Wert wieder zu.

Der im Experiment verwendete Draht wurde von der Firma Negele Hartmetall-Technik GmbH bezogen und besitzt eine Reinheit von 99.95 %. Die mit ihm ermittelte maximale Belastung bzw. Bruchspannung betrug:

$$F_{mess} = 84 \text{ N} \Rightarrow \sigma_{mess} = 270 \text{ kp/mm}^2. \quad (4.2)$$

Er besitzt damit eine um 9 % über dem Literaturwert liegende Belastbarkeit.

Vor dem Einbau in die Aufhängung fand zunächst eine optische Untersuchung jedes der 5 m

langen Abschnitte statt, um Knicke und Bruchstellen frühzeitig zu entdecken. Danach wurde jedes Seilende mit einer Endöse versehen. Dazu schleift man den Draht durch eine Kabelendhülse (Messing versilbert, 6 mm lang,  $0.75 \text{ mm}^2$  Innenfläche) und wieder zurück, so daß sich eine Öse bildet und füllt die Endhülse mit Lotzinn. Auf diese Art kann der Draht aufgehängt werden und muß nicht, wie es in den vorherigen Meßreihen der Fall war, geklemmt werden. Nach diesem Schritt folgte ein Belastungstest für Draht und Endöse, bei dem sie kurzzeitig einer definierten Zugkraft von  $F_{test}=49 \text{ N}$  ausgesetzt wurden. Diese Belastung des Drahtes führt zu einer Härtung des Metalles. Sie ist deutlich im Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung 4.5 zu sehen, wo die mit  $B$  bezeichnete Kurve die Werte für den belasteten Draht darstellt. Es ergab sich eine erhöhte maximale Belastung bzw. Bruchspannung von

$$F_{max} = 91 \text{ N} \Rightarrow \sigma_{max} = 295 \text{ kp/mm}^2. \quad (4.3)$$

Diese um 8.3 % erhöhte Festigkeit führt dazu, daß das Material spröder wird und somit der noch mögliche Dehnungsweg um 13 % kleiner. Außerdem treten bei so gehärteten Materialien Brüche schlagartiger auf. Da bei dieser Meßreihe, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, für die Pendel keine dynamischen Belastungen beim Schließen des Vakuumtanks auftreten, überwiegen in diesem Fall die positiven Aspekte — größere Zugfestigkeit sowie bessere Einbaufähigkeit — gegenüber den negativen — spröderes Verhalten.

### 4.1.3 Kryostateinsatz mit Aufhängung

Wie in den vorherigen Abschnitten beschrieben, sind die Resonatorspiegel und der Obermodenfilter bifilar in jeweils zwei etwa 5 m lange Wolframdrahtschlaufen eingehängt. Fixiert sind diese in einer Aufhängung, die unterhalb des Deckelflansches des Kryostaten montiert ist (vgl. Nr. 4 in Abb. 4.1). Diese Aufhängung, sowie die weiteren Elemente, welche im Inneren des Vakuumgefäßes aufgebaut sind, werden im Rahmen dieses Abschnittes beschrieben.

In Abbildung 4.6 ist die Aufsicht auf den Deckel des Vakuumgefäßes dargestellt. Skizziert sind die einzelnen Teile der Aufhängung der Pendel (1 bis 6), die Zerodurplatte (7) als auch die Montagepunkte des Kryostateinsatzes (9). Aus historischen Gründen sind die Aufhängung sowie alle weiteren Komponenten nicht symmetrisch im Vakuumtank angeordnet, was auch aus der Zeichnung hervorgeht.

- Die Aufhängung der Pendel

Eine die Position des Mikrowellen Resonators unmittelbar beeinflussende Komponente ist die Aufhängung, auf welcher die Wolframdrähte fixiert sind. Wie oben beschrieben, ist Wolfram ein sehr sprödes Material, so daß sichergestellt werden muß, daß in den eigentlichen Aufhängepunkten der Draht nicht geknickt wird. Weiterhin spielt die Ausrichtung der Spiegel zueinander eine wichtige Rolle bei der Güte der Messung. Deshalb müssen die Positionen der einzelnen Aufhängepunkte in der Phase des Ausrichtens leicht und präzise zu verändern, aber bei einer Messung dauerhaft stabil sein. Um einige Schwachpunkte der bis dato verwendeten Aufhängung zu beseitigen, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine neue Aufhängung entwickelt.

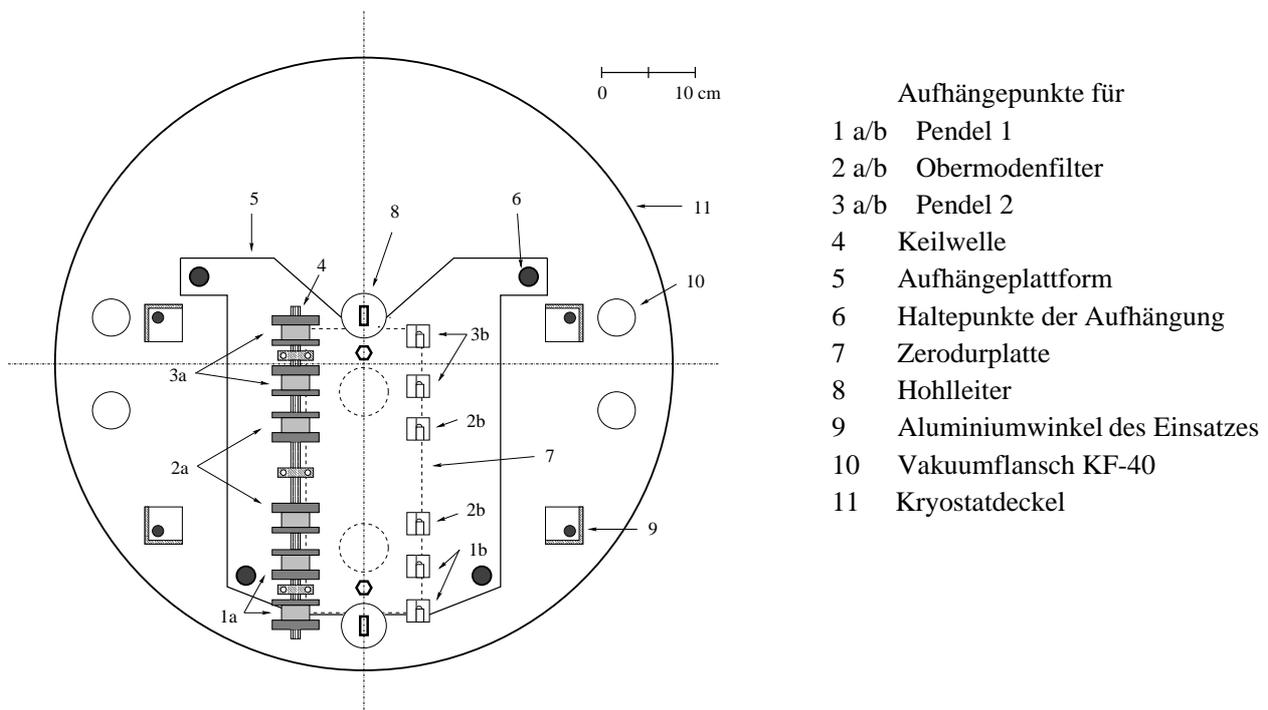


Abbildung 4.6: Aufsicht auf den Deckelflansch des Vakuumtanks.

Als Basis für die Aufhängung dient eine 15 mm starke Aluminiumplatte, die die zwei Hauptkomponenten trägt. Zum einen je sechs Keilnarben als Lager für sechs Messingtrommeln auf einer gemeinsamen Keilwelle. Dem gegenüber sechs dreh- und höhenverstellbare Winkelstücke. Die Schnittzeichnungen in Abbildung 4.7 verdeutlicht die Funktionsweise der einzelnen Komponenten. Auf der linken Seite der Zeichnung sind Teile der Keilwelle, der Keilnarbe und der Trommeln dargestellt. Der Wolframdraht ist etwa 3–4 mal um diese Messingtrommeln gewickelt, so daß durch die Haftreibung des Drahtes die Endösen nicht das ganze Gewicht der Pendel tragen müssen. Fixiert wird jede Trommel einzeln durch einen Klemmring. Durch unterschiedlichen Andruck ermöglicht er es, den Draht vertikal zu fixieren, aber die Trommel immer noch auf der Horizontalen zu verschieben. Somit kann die Höhe der Pendel getrennt von deren Position eingestellt werden. Durch die Art des Aufbaus ist garantiert, daß der Ablösepunkt des Wolframdrahtes von der Trommel immer konstant bleibt und sich bei Variation der Pendellänge nicht verändert. Gleichfalls ist der Anpreßdruck des Drahtes auf die Zerodurplatte immer konstant und für alle sechs Drähte gleich.

Das jeweilige Gegenstück zu einer Trommel ist in Abbildung 4.7 auf der rechten Seite dargestellt. Es handelt sich dabei um Winkel aus Aluminium, auf welche eine Trommel gefräst wurde. Zu sehen ist der Winkel sowohl in der Aufsicht als auch im Profil. Auch hier ist der Wolframdraht 2–3 mal um die Trommel gewickelt, um den eigentlichen Haltepunkt zu entlasten. Die Füße der Winkelstücke sind hohl und sitzen in Messingbüchsen. Auf diese ist ein Feingewinde geschnitten um eine Höhenverstellung jedes Pendels zu ermöglichen. Außerdem kann das Win-

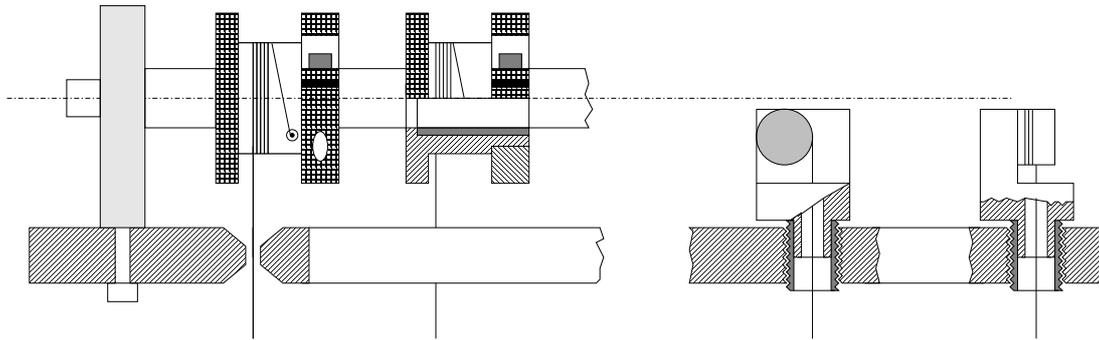


Abbildung 4.7: Eine Prinzipzeichnung der beiden maßgeblichen Komponenten der Aufhängung. Auf der linken Seite der Skizze ist ein Teil der Keilwelle zu sehen. Auf dieser sind Keilnarben aufgeschoben, die die Messingzylinder tragen, auf denen der Wolframdraht aufgewickelt ist. Die rechte Seite der Zeichnung stellt jene Winkelstücke dar, welche als zweiter Haltepunkt dienen. Um die Position der Komponenten zueinander zu verdeutlichen sei auf Abbildung 4.6 verwiesen.

kelstück selbst innerhalb des Messingzylinders gedreht werden, um eventuelle Verdrillungen des Aufhängungsdrahtes auszugleichen. Die Gewinde für die Messingzylinder sind in die Aufhängeplattform geschnitten und besitzen den Abstand den die Pendel im Idealfall besitzen sollen. In Abbildung 4.8 ist ein Foto der fertigen Aufhängung zu sehen.

Unterhalb der Aufhängung ist eine Platte aus Zerodur angebracht. Ihre Breite ist etwas größer als jene der Aufhängung, so daß die Pendelseile unter einem kleinen Winkel an ihrer Längsseite entlanglaufen. Dadurch werden die Drähte in die Oberfläche der Platte gedrückt und durch deren Rauigkeit in Position gehalten. Dieses soll verhindern, daß sich Temperaturänderungen der Aufhängung auf die Länge des Resonators auswirken. Vielmehr soll die Temperaturabhängigkeit des Resonators durch die Zerodurplatte bestimmt werden [Sch99].

- Das Gestell des Einsatzes

Ebenfalls unter den Deckel montiert ist ein etwa 3.5 m langes Gestell. Es besteht aus Aluminium Winkелеlementen, welche durch Streben untereinander verbunden sind. An und in dieses Gestell sind die justierbare Wirbelstrombremse sowie die Verstellmechanismen der Hohlleiter montiert. In Abbildung 4.6 sind die vier Montagepunkte des Gestelles auf dem Deckel eingezeichnet. Durch seine Verstrebung besitzt das System die nötige Stabilität und erreicht eine Eigenfrequenz (etwa 3 Hz) die deutlich größer ist als jene der Pendel. Weiter Beschreibungen sind in [Sch92] zu finden.

- Die Wirbelstrombremse

Zur Dämpfung der mikroseismisch induzierten Schwingung der Pendel wird eine Wirbelstrombremse verwendet. Sie ist an das Ende des oben beschriebenen Gestells montiert (vgl. Nr. 7 in Abb. 4.1). Aufgebaut ist die Bremse aus zwei Magnetpaketen, jeweils eines pro Pendel. Die beiden Pakete bestehen aus einer Anzahl von Permanentmagneten, die durch ihre Anordnung mit

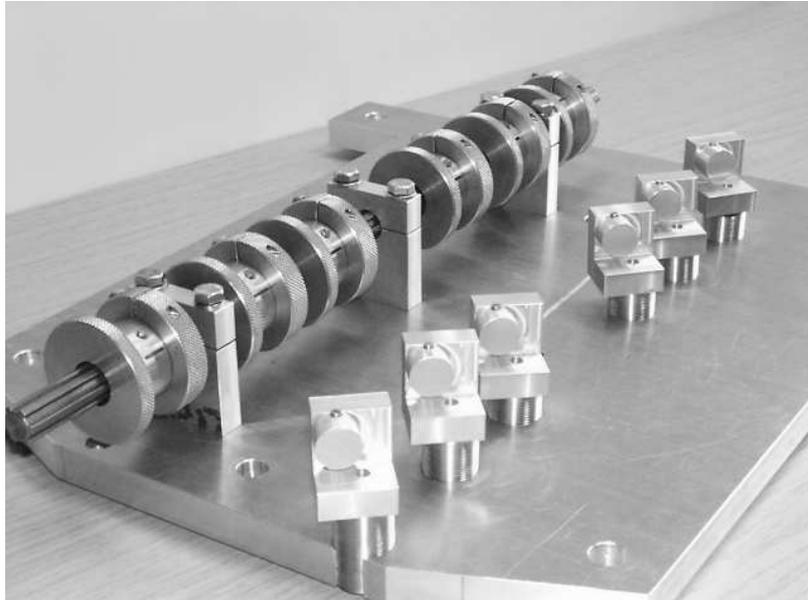


Abbildung 4.8: Ein Foto der fertigen Aufhängung. Man erkennt die Keilwelle mit den sechs aufgesteckten Trommeln, die die Wolframdrähte halten. Ihnen gegenüber sieht man die sechs Winkelstücke.

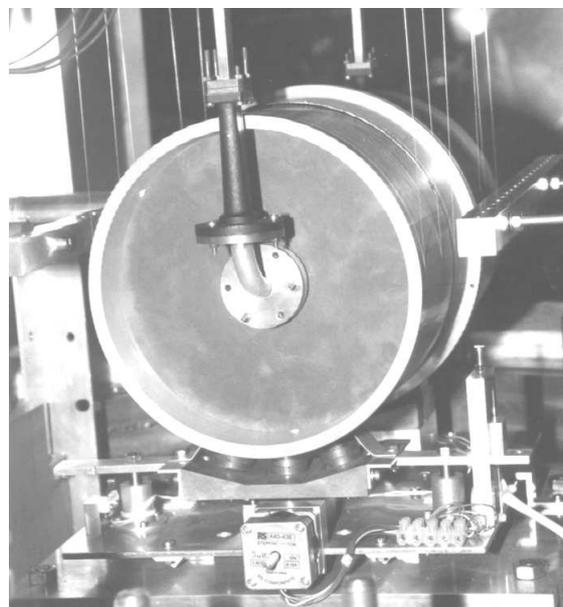


Abbildung 4.9: Ein Foto des Resonators mit der darunterliegenden Wirbelstrombremse. Man erkennt die Pendel und den Obermodenfilter, welche bifilar in Wolframdrahtschlaufen aufgehängt sind.

alternierender Magnetisierung, ein inhomogenes und stark abfallendes Magnetfeld bilden. Montiert ist die Wirbelstrombremse auf einer Metallplatte, deren Abstand von den Pendelkörpern mit Hilfe eines Schrittmotors verstellt werden kann. Damit ist es möglich die Bremse so weit von den Pendeln weg zu fahren, daß der Einfluß der Magnete praktisch verschwindet und die Pendel unbeeinflußt schwingen können. Diese Möglichkeit findet Verwendung um die Eigenfrequenz der Pendel zu bestimmen. In Abbildung 4.9 ist ein Foto der Pendel und der Wirbelstrombremse dargestellt. Man sieht zum einen die beiden bifilar aufgehängten Pendel und den Obermodenfilter, welche zusammen den Resonator bilden. Ebenfalls zu erkennen ist eines der Magnetpakete unter dem vorderen Pendel. Es verfügt über einen eigenen Schrittmotor, um seine Position und damit seine Dämpfung auf das Pendel variieren zu können. Damit ist es möglich die Pendelbewegung durch Feineinstellung der Dämpfungskonstanten zu synchronisieren und somit die Unruhe des Pendelabstandes zu minimieren. Für weitere Beschreibungen der Wirbelstrombremse sei auf [Sch92], [Wal95] oder [Sch99] verwiesen.

- Das Hohlleitersystem

Zum Transport der Mikrowellen werden in diesem Experiment über 3 m lange Hohlleiter verwendet, da sich die Mikrowellenquelle außerhalb des Vakuumtanks befindet. Der genaue Aufbau des Systems wird in Abschnitt 4.4 beschrieben. Um die Position der Hohlleiter relativ zu den Pendelkörpern während der Messung verändern zu können, wurde ein aus zwei kombinierten x-y-Verstelleinheiten bestehender Mechanismus aufgebaut [Sch95]. Dieser ermöglicht es die Positionierung der Hohlleiter auf wenige Mikrometer genau vorzunehmen. Das ist vor allem für die Messungen der Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Position des Hohlleiters bzw. Drosselflansches von entscheidender Bedeutung. Die Verstelleinheiten selbst sind oberhalb der Pendel an das Gestell montiert. Für weitere Einzelheiten sei auf [Sch95] verwiesen.

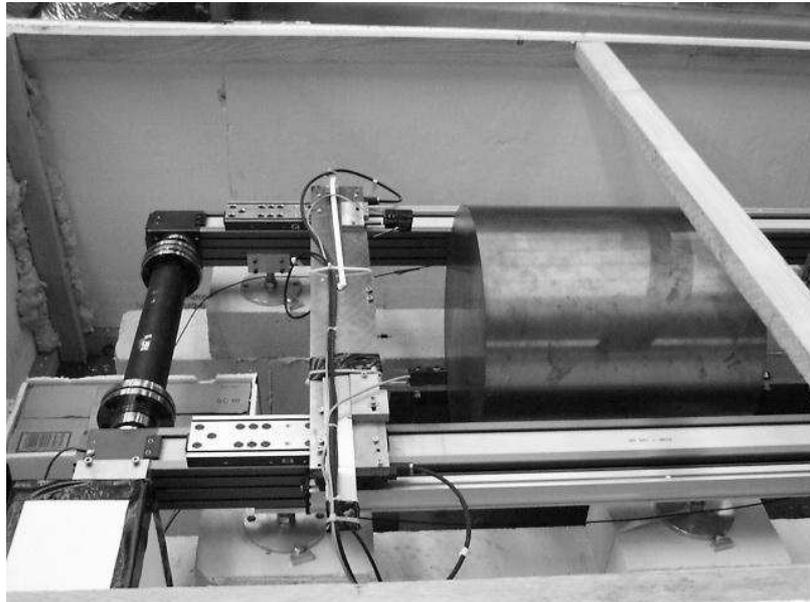


Abbildung 4.10: Ein Foto, welches eine der beiden Feldmassen zeigt. Die parallel dazu montierten Maßstäbe sind Teile des Meßsystems zur Bestimmung ihrer Position.

## 4.2 Feldmassen und ihr Positionierungssystem

Möchte man den Betrag der Gravitationskraft  $F = G(mM/r^2)$  möglichst präzise ermitteln, so ergeben sich — neben anderen — zwei metrologische Problemstellungen. Zum einen die Bestimmung der Beträge der Massen und zum anderen das Vermessen ihrer absoluten Abstände und Positionen relativ zum Resonator. Zusätzlich ist dieser Abstand nicht statisch, da die Massen bei den Messungen periodisch bewegt werden. Das in diesem Experiment verwendete System bestehen aus drei Teilen:

1. den eigentlichen etwa 576 kg schweren Feldmassen (Nr. 9 in Abb. 4.1),
2. dem Schienensystem, auf welchem diese bewegt werden (Nr. 8 in Abb. 4.1) und
3. dem Meßsystem zur Bestimmung der Position der Massen (Nr. 10 in Abb. 4.1).

### 4.2.1 Feldmassen

Bei den Massen, die das Gravitationspotential am Ort der Pendel modulieren, handelt es sich um Messingzylinder mit einem Durchmesser von 440 mm, einer Länge von 430 mm bei einem Gewicht von etwa 576 kg. Als Material für sie wurde Messing gewählt, da dieses einerseits eine hohe Dichte aufweist, sich andererseits aber leicht bearbeiten läßt. Das verwendete Material (MS90) zeichnet sich durch eine Kupferanteil von 90 % aus. Es ist weitgehend frei von ferromagnetischen Verunreinigungen und besitzt somit eine geringe magnetische Suszeptibilität

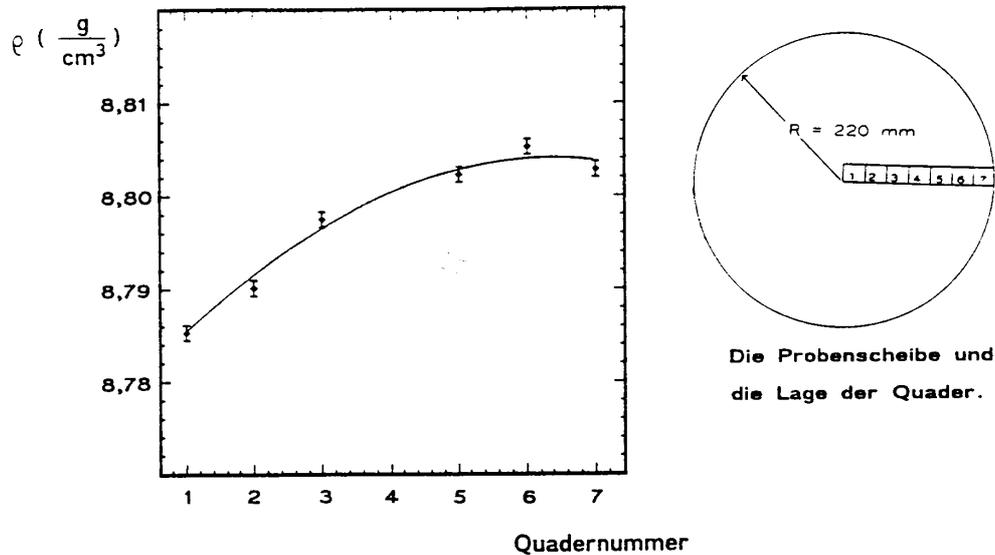


Abbildung 4.11: Radiales Dichteprofil einer der beiden Feldmassen (aus [Lan92]). Man erkennt den Anstieg der Dichte von der Mitte zu beiden Endflächen um 2 Promille aufgrund der Art der Herstellung.

( $\chi \leq 4 \cdot 10^{-5}$ ), wodurch direkte magnetische Kräfte zwischen Feldmassen und Resonator minimiert werden.

Aufgrund der Art der Herstellung — nach dem Gießen wurden die Massen in Richtung der Zylinderachse gewalzt und dann auf Maß gedreht — sind axiale Dichtegradien sehr unwahrscheinlich. Allerdings ergeben sich radiale Änderungen der Dichte. Dieses wurde durch Messungen an einer, nach der Produktion der Zylinder abgeschnittenen Probenscheibe, verifiziert [Lan92]. Die dabei ermittelten Dichtewerte sind in Abbildung 4.11 als Funktion des Radius dargestellt. Deutlich ist der parabelförmige Dichtezuwachs zum Rand hin um etwa 2 Promille zu sehen. Berücksichtigt man diesen Dichteverlauf in den Feldmassen bei der numerischen Integration, so ändert sich die berechnete Auslenkung der Resonatorspiegel um etwa 10 bis 50 ppm in Abhängigkeit von der Meßposition. Somit reicht eine Genauigkeit von etwa 10 % bei der Bestimmung des funktionalen Verlaufes des Dichteprofiles aus, um den Fehler dieser Korrektur auf unter 5 ppm abzuschätzen.

Wesentlich stärkere Auswirkungen auf das zu messende Signal hätte ein longitudinaler Dichtegradient innerhalb der Massen. Dieser ist zwar aufgrund des beschriebenen Herstellungsverfahrens sehr unwahrscheinlich, aber nicht ausgeschlossen. Einige Rechnungen sollen hier eine Abschätzung für mögliche Fehler aufzeigen. Im Rahmen der Berechnungen wurden die Feldmassen in jeweils 10 Scheiben unterteilt und die sich ergebenden Spiegelabstandsänderungen der einzelnen Scheiben aufaddiert. Für Feldmassen mit einem Dichtegradienten, der von der Mitte zu beiden Endflächen linear um 2 Promille ansteigt, ergibt sich eine Vergrößerung der Auslenkung der Resonatorspiegel um 20 bis 75 ppm je nach Meßposition. Ein erheblich größeren Effekt hat ein Dichtegradient der von einer Endfläche zur anderen Endfläche hin linear ansteigt oder abfällt. Legt man einen Anstieg der Dichte um 2 Promille in den Feldmassen zugrunde, so

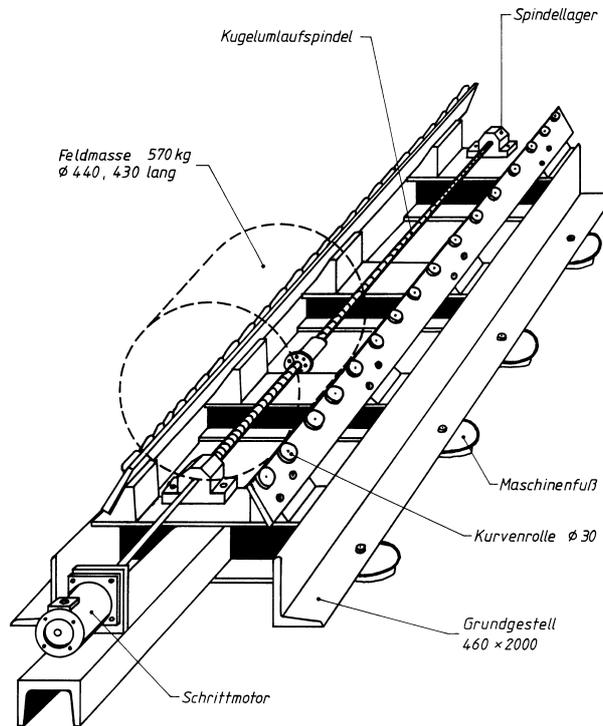


Abbildung 4.12: Der Bewegungsmechanismus der Feldmassen (aus [Wal91]).

ergibt sich eine Verringerung der Auslenkung um 150 bis 280 ppm je nach Meßposition.

Da es zur Zeit aber keine zerstörungsfreie Möglichkeit der Dichtebestimmung für ein so großes Volumen gibt, kann an dieser Stelle kein Fehler für einen longitudinalen Dichtegradienten angegeben werden. Auf Dauer ist es allerdings unumgänglich diese mögliche Fehlerquelle genauer zu untersuchen. In diesem Zusammenhang wäre auch ein Tausch der Massen gegen zwei, mit einer Flüssigkeit z.B. Quecksilber gefüllten, Behälter möglich. Bei dieser Art der Feldmassen ist das Dichteprofile leicht zu berechnen [Nol99].

#### 4.2.2 Bewegungsmechanismus

Um eine Positionsänderung der Feldmassen zu ermöglichen, befinden sich diese auf zwei Bewegungsmechanismen, deren Mechanik in Abbildung 4.12 skizziert ist. Die Massen ruhen mit ihren Mantelflächen auf zwei Schienen, an welche insgesamt 40 Kugelrollen montiert sind, und können so axial verschoben werden. Die Schienen sind Teil eines Grundgestells, daß auf Maschinenfüßen gelagert ist um eine horizontale Ausrichtung zu erlauben.

Im Meßbetrieb wird die Position der Feldmasse mittels einer Schrittmotor angetriebenen Kugelumlaufspindel variiert. Deren Kugelumlaufmutter ist über ein Verbindungselement mit der Masse verbunden. Dadurch wird eine reproduzierbare Positionierung relativ zum Gestell erreicht. Diese Art des Bewegungsmechanismus wurde gewählt, da sich außer der eigentlichen Feldmasse nur die Spindelmuttern und das Verbindungselement mitbewegt [Wal95]. Alle ande-

ren Komponenten führen dagegen nur eine Drehbewegung aus und verändern nicht ihre Position, wodurch sie nicht zur Änderung des Gravitationsfeldes beitragen. Die Gesamtmasse von Spindelmutter und Verbindungselement beträgt etwa 500 g und wird bei den numerischen Berechnungen der Pendelauslenkungen mit hinreichender Präzision berücksichtigt. Gleiches gilt für den erkennbaren Massenabrieb an den Feldmassen. Er ergibt sich aus der Tatsache, daß die zylinderförmigen Mantelflächen der Massen über die zylinderförmigen Ring der Kugelrollen laufen und sich somit zwei orthogonal zueinander stehende Kreisbögen in einem Punkt treffen. Kombiniert mit der langen Betriebszeit dieses Bewegungsmechanismus ergab sich der Massena-brieb.

### 4.2.3 Meßsystem zur Bestimmung der Position der Massen

Im Meßbetrieb ist der Vakuumtank auf der Sichtlinie zwischen den Feldmassen positioniert, so daß es nicht möglich ist eine direkte Abstandsbestimmung zwischen beiden durchzuführen. Deshalb wurde ein parallel zur Symmetrieachse des Experimentes stehendes Meßsystem entwickelt, auf welches die Position der Massen abgebildet wird. Dessen beiden Komponenten sind

1. eine optische Bank zur Bestimmung des absoluten Abstandes der Feldmassen und
2. je Masse ein Meßsystem zur Bestimmung der relativen Position bezogen auf einen Eichpunkt.

Die Anordnung der einzelnen Elemente des Positionierungssystems sind in Abbildung 4.13 skizziert. Dargestellt ist eine Aufsicht auf das Experiment. Die verschiedenen Komponenten werden im folgenden beschrieben.

Zu 1.) Da eine direkte Messung des Abstandes der beiden Feldmassen nicht möglich ist, befindet sich etwa 70 cm vor dem Stützgerüst die optische Bank. Auf dieses Längenmeßsystem wird die Position der Feldmassen und der Resonatorpendel projiziert. Seine Basis bildet eine 500x40x2100 mm große Edelstahlplatte (1 in Abb. 4.13) die auf einem Gasbetonfundament ruht. Auf dieser Platte verlaufen längs zwei Führungsschienen für zwei Kugelumlaufwagen, welche über eine Brücke (3) verbunden sind. Als einer der dominierenden Fehler bei der Bestimmung des absoluten Abstandes der Feldmassen in den Meßreihen bis 1997 stellte sich die Änderung des Blickwinkels des Fernrohres in Abhängigkeit von der Meßposition bei der damals verwendeten optischen Bank heraus [Sch99][Wal95]. Um diese Variation des Blickwinkels nachzuweisen und korrigieren zu können, besitzt die neue optische Bank zwei Längenmeßsysteme (2), welche an jeder Längsseite montiert sind und deren Aufnehmer über besagte Brücke (3) verbunden sind. An diese ist ein Fernrohr (4) montiert, mit welchem die eigentliche Bestimmung des Massenortes stattfindet. Dazu wird auf die Stirnflächen der Feldmassen (5a/b) ein Endmaß angesetzt, dessen Kante dann mit dem Fernrohr anvisiert wird. Auf diese Art erhält man die Eichpunkte für die Positionierung der Massen. Genauso lassen sich auch die Positionen der beiden Pendel bestimmen, allerdings nur wenn der Vakuumtank in einer dafür vorgesehenen Vertiefung im Boden versenkt ist.

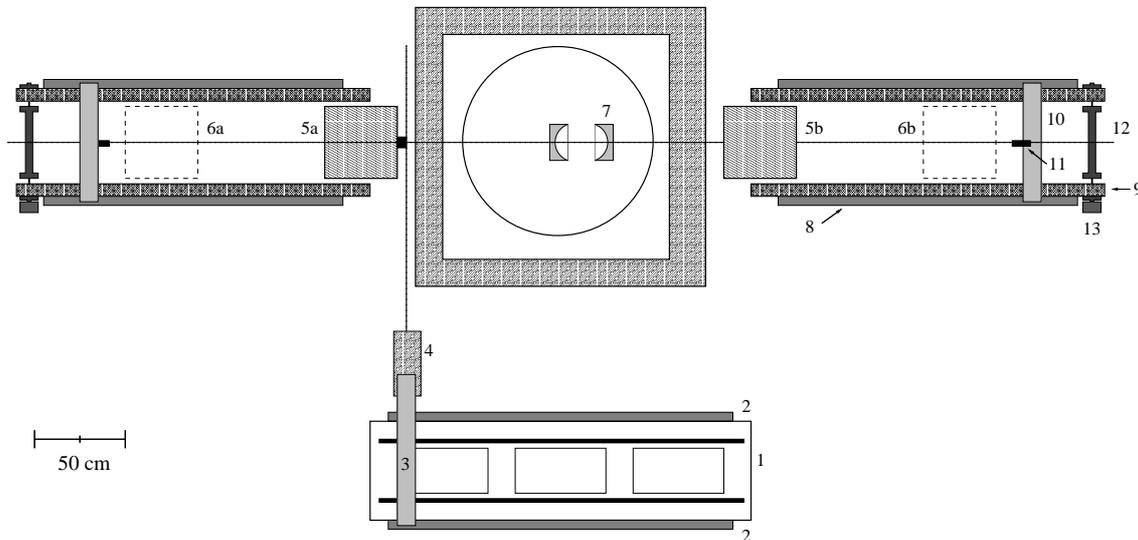


Abbildung 4.13: Skizziert ist die Aufsicht auf das Experiment. Zu erkennen ist die Anordnung des Relativ-Meßsystems parallel zum Bewegungsmechanismus der Feldmassen (5 o. 6a/b). Ebenso ist die optische Bank (1) eingezeichnet, mit der der absolute Abstand der Massen und die Position der Resonatorpendel (7) bestimmt wird.

In Abbildung 4.14 ist ein Foto der optischen Bank dargestellt. Zu sehen ist sowohl die Basisplatte mit dem Steinfundament, als auch die, über eine Brücke verbundenen, Längenmeßsysteme. Diese Brücke kann mittels einer Kugelumlaufspindel positioniert werden, welche längs über die Trägerplatte läuft. Ebenfalls zu erkennen ist, daß das Fernrohr an einem Ausleger vor der Längsseite des Meßtisches montiert ist, so daß die Bildmitte auf der Höhe der Längenmeßsysteme ist. Dadurch wird verhindert, daß etwaige Verbiegungen der Grundplatte in Längsrichtung zu einem systematischen Fehler führen.

Bestimmend für die Präzision der Messung sind zum einen das Fernrohr und zum anderen die Längenmeßsysteme. Das verwendete Fernrohr ist ein Spiegelteleskop mit einer Auflösung von besser als  $3 \mu\text{m}$  [Sch99]. Um sie voll nutzen zu können wird eine Videokamera zur Betrachtung des Okularbildes verwendet, so daß keinerlei Vibrationen durch den Betrachter auf das Fernrohr übertragen werden. Alle in diesem Experiment verwendeten Längenmeßsysteme arbeiten nach dem Prinzip der photoelektrischen Abtastung feiner Gitter. Dabei wird die Änderung von Lichtintensitäten mittels Photoelementen vermessen. Je feiner die Teilungsperiode einer Maßverkörperung, um so mehr beeinflussen Beugungserscheinungen die photoelektrische Abtastung. Daher kommen, in Abhängigkeit von der Feinheit der Teilung, zwei Abtastprinzipien zum Einsatz. Für Teilungsperioden bis  $4 \mu\text{m}$  verwendet man das interferentielle Meßprinzip, für Teilungsperioden bis  $20 \mu\text{m}$  das abbildende Meßprinzip [Hei96]. Bei letzterem wird ein Maßstab mit einem Strichgitter relativ zu einem Gegengitter gleicher Struktur bewegt. Somit kommen die Strichgitter der Maßverkörperung abwechselnd mit denen des Abtastgitters zur Deckung. Die so erzeugten Hell-Dunkel-Modulationen werden von Photoelementen detektiert. Das interferentiel-



Abbildung 4.14: Ein Foto der optischen Bank. Zu erkennen ist die Grundplatte mit den beiden seitlich montierten Längenmeßsystem, sowie das Fernrohr in seiner Halterung.

le Prinzip nutzt die Beugungserscheinungen am Gitter zur Erzeugung des Meßsignals. Bei einer Bewegung des Maßstabes entstehen in den abgelenkten Beugungsordnungen Phasenverschiebungen der Lichtwellen, die proportional zu Weglänge sind. Um diese Phasenverschiebungen auswerten zu können, werden die unterschiedlichen Beugungsordnungen überlagert und zur Interferenz gebracht. Für weitere Ausführungen bezüglich der Funktionsweise der Maßstäbe und Auslese der VME-Zählerkarten sei auf [Sch99] und [Hei96] verwiesen.

Zu 2.) In den Meßreihen bis 1997 wurde die Position der Massen ausschließlich über die Anzahl der vom Motor des Bewegungsmechanismus gefahrenen Schritte und der Spindelsteigung berechnet. Dieses Verfahren hat sich allerdings als unpräzise und fehleranfällig herausgestellt. Da im Meßbetrieb die Vermessung der Position der Feldmassen mit der optischen Bank vergleichsweise aufwendig ist, wurde das Relativ-Meßsystem aufgebaut. Dieses bestimmt die Position der Massen relativ zu einem, mit der optischen Bank bestimmten, willkürlichen aber festen Eichpunkt.

Basis des Relativ-Meßsystems sind je zwei Längenmeßsysteme, welche parallel zur Symmetrieachse aufgebaut sind (8 in Abb. 4.13). Als Träger dient jeweils das Gehäuse eines Linearmodules (9), welches auf einer Gasbeton-Mauer montiert ist. In Abbildung 4.15 ist ein Foto des Meßsystems abgebildet um den Aufbau zu verdeutlichen. Zu sehen sind rechts und links neben der Feldmasse die Längenmeßsysteme, welche jeweils an ein Linearmodul befestigt sind. Bei diesem handelt es sich um einen gekapselten Kugelumlaufwagen, der auf einer Schiene mittels eines Zahnriemens bewegt werden kann. Die Zahnriemenantriebe beider Module sind über eine Verbindungswelle (12) starr aneinander gekoppelt und werden mit einem Motor (13) bewegt.

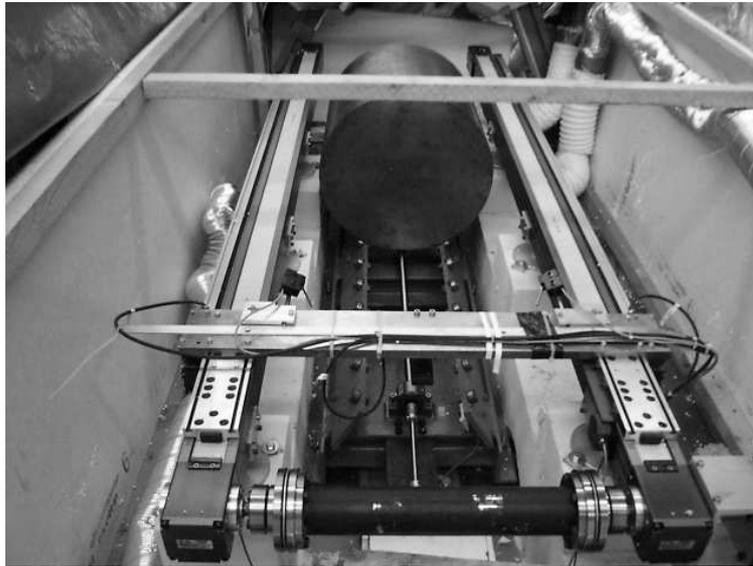


Abbildung 4.15: Die Abbildung zeigt ein Foto des Relativ-Meßsystems, welches parallel zum Bewegungsmechanismus der Feldmassen aufgebaut ist. Zu erkennen sind die beiden Linearmodule, mit welchen die Aufnehmer der Meßsysteme zur Position der Massen bewegt werden.

Beide Wagen sind zudem über eine Edelstahlplatte (10) verbunden, an deren Längsseite die Aufnehmer für die Längenmeßsysteme angebracht sind. An diesen Querträger ist ebenfalls ein Meßtaster (11) montiert, welcher seinen Meßpunkt auf der Mitte der Stirnfläche der Masse hat. Dieser Aufbau ermöglicht es den Querträger mit dem Meßtaster frei über die gesamte Länge des Linearmoduls (1600 mm) mit Hilfe des Schrittmotors zu verfahren

Im laufenden Meßbetrieb positioniert der Bewegungsmechanismus die Feldmasse auf den gewünschten Meßort. Danach fährt der Meßtisch aus einer Ruheposition bis an die Masse und aus der Summe der Positionswerte der drei Längenmeßsysteme ergibt sich der aktuelle Ort. Falls nötig wird dieser so lange iterativ verändert, bis die gemessene und die gewählte Position innerhalb von  $\pm 4 \mu\text{m}$  übereinstimmen. In Anschluß bewegt sich der Meßtisch wieder in seine Ruheposition am hinteren Ende des Bewegungsmechanismus. Dadurch ist sichergestellt, daß neben den Feldmassen keine mitbewegten Massen an der gravitativen Auslenkung der Resonatorpendel beteiligt sind. Auch hier sei für weitere Beschreibungen der Funktionsweise der Linearmodule etc. auf [Sch99] verwiesen.

### 4.3 Vakuumgefäß mit Stützgerüst

Der dritte Teil des Experimentaufbaus unterteilt sich in einen Vakuumtank (Nr. 5 in Abb. 4.1), in welchem der Resonator aufgehängt ist, sowie ein stählernes Stützgerüst (Nr. 6 in Abb. 4.1), welches das Vakuumgefäß in Position hält. Auf beide wird im Folgenden eingegangen.

Um die Beeinflussung des Experimentes durch dielektrische Effekte, Temperaturschwankungen

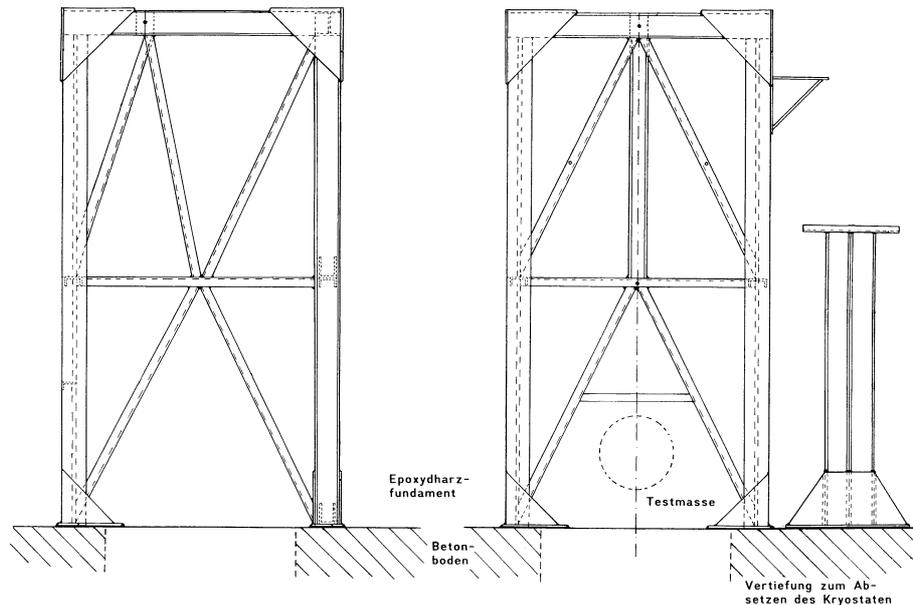


Abbildung 4.16: Das Stützgerüst des Vakuumtanks. Eingezeichnet ist ebenfalls der Pumpstand für das Vakuumsystem (aus [Wal95]).

und Luftströmungen zu reduzieren, wird es in einem metallischen Vakuumgefäß betrieben. Der dazu verwendete Kryostat ist im Anhang in Abbildung A.1 dargestellt. Es handelt sich dabei aus historischen Gründen um einen Helium-Badkryostat, der bei einer Länge von fast 4 m und einem Außendurchmesser von  $\simeq 1.1$  m ein Gewicht von annähernd 1.8 Tonnen besitzt.

Obwohl das Experiment bei Raumtemperatur betrieben wird, eignet sich dieser für Tieftemperaturexperimente konzipierte Behälter gut für die thermische Isolierung des Resonators. So ist in dem äußeren Tank ein zweiter Behälter mit einem Durchmesser von 0.66 m eingebaut, welcher das Experiment aufnimmt. Der Raum zwischen beiden wird aus Isolationszwecken evakuiert und reduziert so die Auswirkungen von Temperaturschwankungen in der Umgebungstemperatur. Verschluss wird der Vakuumtank mittels eines Edelstahlflansches. Evakuiert mittels einer Turbomolekularpumpe erreicht man einen Enddruck von etwa  $2 \cdot 10^{-5}$  mbar.

Um das Vakuumgefäß in einer Position zu halten, in der die Symmetrieachsen von Resonator und Feldmassen übereinstimmen, benutzt man ein stählernes Stützgerüst. Abbildung 4.16 zeigt den Aufbau und die Verstreibungen des Tragesystems. Bei einer Höhe von 3.75 m besitzt dieser Aufbau einen rechteckigen Grundriß mit einer Seitenlänge von 1.60 m in Richtung der Feldmassen und 1.53 m orthogonal dazu. Weitere Einzelheiten über den Aufbau und die verwendeten Materialien lassen sich [Sch92] entnehmen.

Als Lagerpunkte für die drei Halteösen des Kryostaten dienen drei, jeweils um  $120^\circ$  versetzte, Auflager am oberen Ende des Gerüsts. Jeder dieser drei Punkte ist zusätzlich mit Stahlträgern unterstützt, welche schräg nach innen verlaufen, um Torsions- und Biegeschwingungen zu vermeiden (vgl. Abb. 4.16). In die drei Lagerpunkte ist jeweils eine Gewindestange montiert, auf der ein frei drehbarer Maschinenfuß sitzt, um die Höhe und Neigung des Vakuumtanks ein-

zustellen. Die Maschinenfüße dienen als Plattform für rollengelagerte Taschen, in den jeweils eine der Halteösen des Kryostaten aufliegt. Um eine horizontale Änderung der Position des Vakuumentanks um etwa  $\pm 1^\circ$  zu ermöglichen können die Taschen mittels Schrauben verschoben werden [Wal95]. Zusammen mit den Pendeln bilden die Maschinenfüße (Grenzfrequenz 9 Hz) ein Tiefpaßfiltersystem. Hochfrequente Vibrationen sind somit in diesem Experiment zu vernachlässigen.

Um die Einflüsse von Luftströmungen und Wärmestrahlung auf den Kryostaten zu reduzieren, ist das Stützgerüst von außen mit Aluminiumblechen verkleidet. Durch eine Abdeckhaube auf dem Stützgerüst entsteht ein von den Einflüssen der Umgebung abgeschlossener Raum für das Experiment.

## 4.4 Mikrowellensystem

Die typische Variation der Frequenz des Resonators in den Meßreihen beträgt etwa 1 kHz. Da die Halbwertsbreite der Resonanzen aber größenordnungsmäßig 100 kHz beträgt, muß sowohl für die Erzeugung der Mikrowellen, als auch für die Bestimmung der Resonanzfrequenz besondere Aufmerksamkeit gelten. In Abbildung 4.17 ist der schematische Aufbau des gesamten Systems zum Speisen des Resonators mit Mikrowellen und zur Bestimmung der Resonanzfrequenz dargestellt. Dabei repräsentieren breite Linien Hohlleiter und dünne Linien Koaxialkabel bzw. GPIB<sup>2</sup> Verbindungen. Als Quelle für die elektromagnetischen Wellen dient ein Mikrowellengenerator (HP 8340B), der auf einem Frequenzintervall von 0.01 bis 26.5 GHz mit einem intern temperaturstabilisierten Quarzoszillator eine Stabilität von 4 Hz erreicht. Um die Meßfehler weiter zu minimieren findet zusätzlich ein Rubidium Standard, dessen Langzeitstabilität mittels einer DCF-77 Uhr sichergestellt ist, Verwendung. Die so erreichte Genauigkeit beträgt 0.02 Hz bei 23 GHz ( $\approx 1 \cdot 10^{-12}$ ), was einer Längenaufösung von 0.2 pm entspricht.

Die im Mikrowellengenerator mit einer typischen Ausgangsleistung von -15 dBm erzeugten elektromagnetischen Wellen werden in einem rauscharmen Kleinsignalverstärker um 32 dB verstärkt und dann mittels Hohlleitern zum Resonator geführt. Die von diesem transmittierte Leistung ( $P_{trans}$ ) wird mittels einer empfindlichen Gleichrichterdiode in ein proportionales Gleichspannungssignal umgewandelt. Diese Spannung ist das eigentliche Meßsignal, daß mit einem Digitalvoltmeter (HP 8765A) ausgelesen wird. Vor und hinter dem Resonator sind Isolatoren in das Mikrowellensystem integriert um unerwünschte Reflexionen zu reduzieren, die zu Stehwellen führen und somit die Messung beeinträchtigen könnten. Weiterhin sorgen Kapton-Fenster für einen vakuumdichten Abschluß der Hohlleiter.

In den Speise-Hohlleiter sind zwei Richtkoppler integriert um sowohl die vorlaufende als auch die am Resonator reflektierte Leistung zu bestimmen. Die so gemessene vorlaufende Leistung ( $P_{vor}$ ) wird als Regelsignal für die Ausgangsleistung zum Mikrowellengenerator zurückgeführt um eine möglichst konstante Mikrowellenleistung zu erhalten (Automatic Level Control). Die reflektierte Leistung ( $P_{ref}$ ) findet Verwendung zur Bestimmung der Koppelfaktoren. Die Steuerung des Frequenzgenerators als auch die Auslese des Digitalvoltmeters geschieht mit Hilfe eines

---

<sup>2</sup>General Purpose Industry Bus; auch IEEE 488

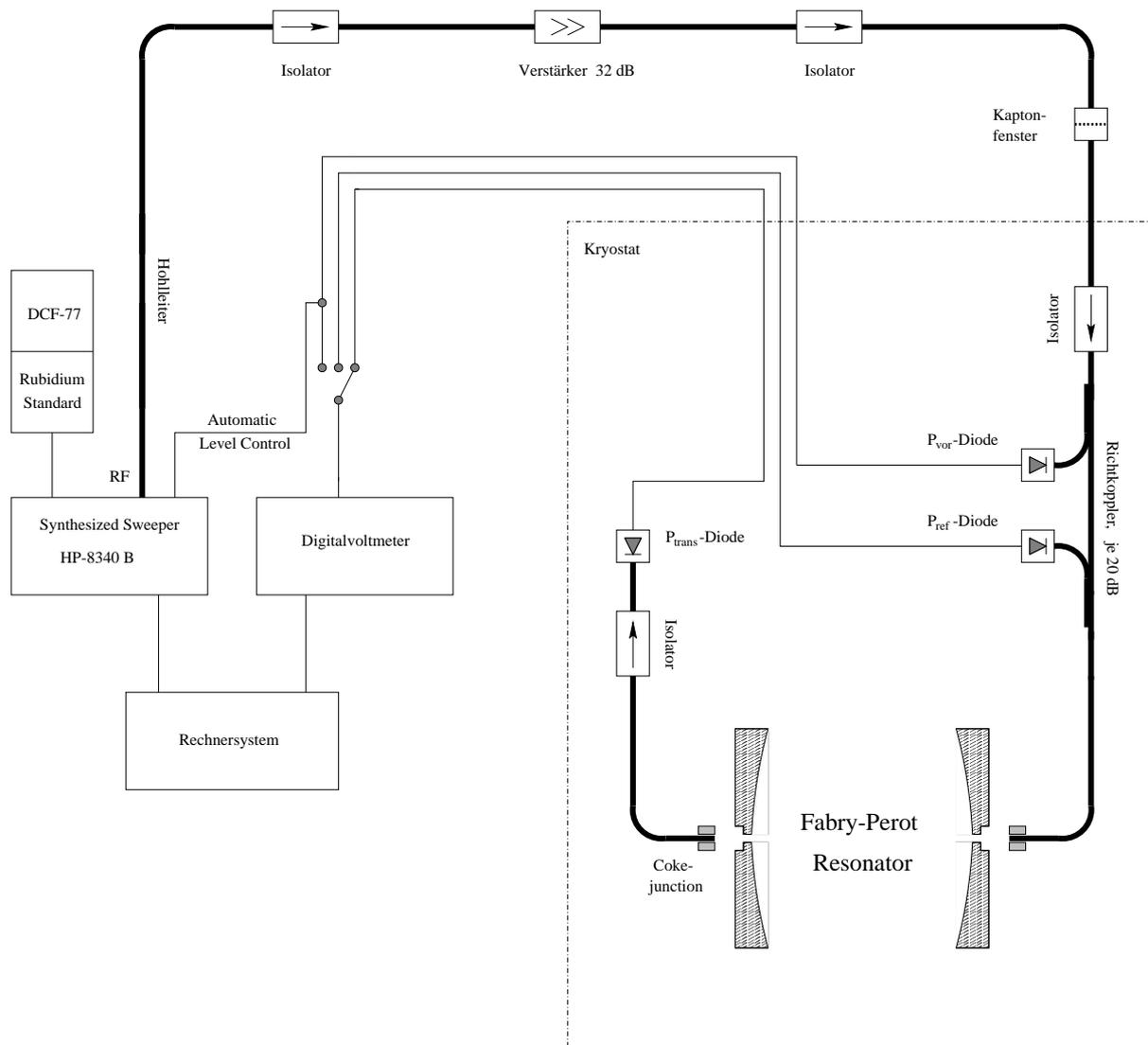


Abbildung 4.17: Schematische Darstellung des Mikrowellensystems. Breite Linien verkörpern dabei Hohlleiter und dünne Linien Koaxialkabel bzw. GPIB Verbindungen.

Single-Board Computers (MVME-162) auf dem das echtzeitfähige Betriebssystem OS-9 läuft. Für ausführlichere Informationen bezüglich des Rechnersystems sowie der verwendeten Software sei auf [Sch99] verwiesen.

Die Form der Resonanzkurve des Fabry-Pérot Resonators sollte idealerweise einer Lorentzkurve entsprechen, bei der sich die zu messende Spannung  $U$  als Funktion der Frequenz  $f$  gemäß

folgendem Zusammenhang ergibt

$$U(f) = U_0 \left( 1 + 4 \left( \frac{f - f_0}{f_{1/2}} \right)^2 \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Dabei bezeichnet  $f_0$  die Resonanzfrequenz,  $f_{1/2}$  die Halbwertsbreite und  $U_0$  die maximale Amplitude. Im laufenden Betrieb wird allerdings nicht die gesamte Kurve vermessen, sondern nur die jeweiligen Spannungen  $U(f)$  für eine diskrete Anzahl von äquidistanten Frequenzen — es hat sich eine Zahl von vier als optimal erwiesen. An die so ermittelten Werte wird danach ein Lorentzprofil angepaßt um die eigentliche Resonanzfrequenz zu berechnen. Die gesamte Dauer für die Bestimmung eines Wertes der Resonanzfrequenz beträgt  $\simeq 500$  ms, entsprechend einer Rate von 2 Hz. Diese Zeitdauer ergibt sich einerseits aus der möglichst langen Einschwingzeit der Mikrowellenquelle und andererseits aus der Anforderung, daß der Zeitraum kurz genug ist, um die Schwingungen der Pendel ( $T \approx 3$  sec) mit ausreichender Genauigkeit zu digitalisieren.



## Kapitel 5

# Apparative Meßgrößen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den metrologischen Größen, welche zur Bestimmung der Gravitationskonstanten benötigt werden, sowie ihren Unsicherheiten. Der erste Teil behandelt die Genauigkeit des Relativ-Meßsystems bei der Bestimmung des Ortes der Feldmassen. Daran anschließend werden die Fehler bei der Positionierung des Resonators dargelegt. Die Meßwerte und -methoden für die Eigenfrequenzen der Pendel, die Absolutwerte der Massen und die Spektralparameter der Resonanzfrequenzen schließen das Kapitel ab.

### 5.1 Positionierung der Feldmassen

Die genaue und reproduzierbare Positionierung der halb-tonnen schweren Massen stellt eine der Herausforderungen in diesem Experiment dar. Wie in den vorherigen Abschnitten geschildert, wurde deren Position bis 1997 über die Steigung der Transportspindel und der Anzahl der gefahrenen Schritte des Motors berechnet. Allerdings war diese Art der Positionierung mit großen systematischen Fehlern behaftet. Zur Verbesserung des Aufbaus wurde deshalb das Relativ-Meßsystem errichtet. Damit kann die Abweichung der mittels des Motors angefahrenen Position zu gewünschter Position leicht bestimmt werden. Die so ermittelten Ergebnisse sind in Abbildung 5.1 aufgetragen, wo man deutlich ein Sägezahnprofil erkennt, welches von den Kugelumlaufrollen herrührt, auf denen die Massen axial bewegt werden. Diese Rollen haben einen Abstand von 10 cm, so daß die Feldmassen nur auf maximal sechs bis acht Rollen aufliegen. Werden sie bewegt, so „fallen“ sie auf das nächste Rollenpaar zu und werden von diesem wieder „angehoben“.

Betrachtet man die asymptotische Abstandsabhängigkeit dieses Experimentes, zeigt sich die Bedeutung der Abstandsbestimmung. Nähert man die Abstandsänderung für zwei Pendel durch eine äußere Masse für große Entfernungen  $r \gg b$ , so erhält man

$$\Delta b \sim \frac{2b}{r^3}. \quad (5.1)$$

Offensichtlich geht die Entfernung der Feldmassen mit der dritten Potenz bei der Bestimmung der Änderung des Spiegelabstandes ein. Entsprechend gilt für die relative Ungenauigkeit der

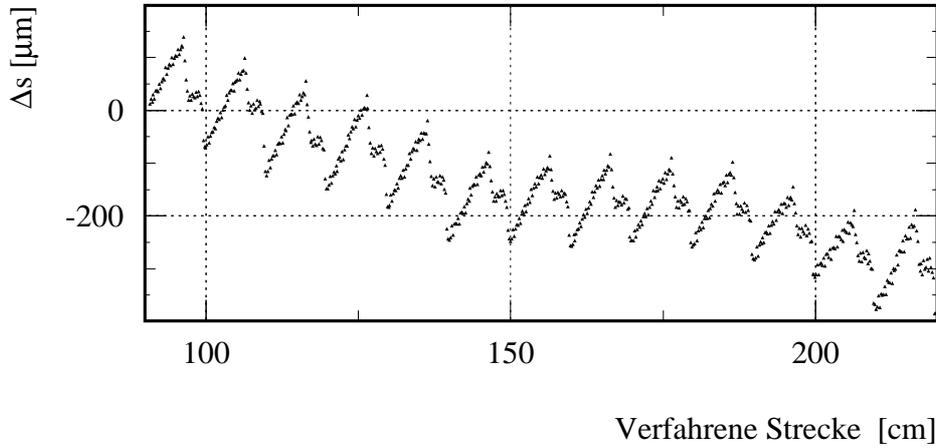


Abbildung 5.1: Die relative Abweichung der mit dem Relativ-Meßsystem vermessenen Position von jener über die Anzahl der Schritte des Motors berechneten als Funktion der Entfernung vom Kryostaten für die erste Masse.

Gravitationskonstanten

$$\frac{\delta G}{G} \sim 3 \frac{\delta r}{r}. \quad (5.2)$$

Im Meßbetrieb geschieht die Positionierung der Feldmassen mittels des Relativ-Meßsystems. Sollte die angefahrne Position nicht mit der Sollposition übereinstimmen, wird die Masse so lange iterativ bewegt, bis Soll- und Istposition innerhalb von  $\delta r_{Intervall} = \pm 4 \mu\text{m}$  übereinstimmen. Die Häufigkeit der dazu benötigten Iterationen ist in Abbildung 5.2 aufgetragen. Die Werte sind dabei aus verschiedenen Meßreihen mit jeweils unterschiedlichen Meßpositionen ermittelt worden.

Für jeden der vier Maßstäbe, welche im Relativ-Meßsystem Verwendung finden, wird vom Hersteller eine pauschale Meßgenauigkeit von  $\pm 3 \mu\text{m}$  je Meter Meßlänge angegeben [Hei96], was bei den verwendeten 1.6 m Systemen eine Ungenauigkeit von  $\pm 4.8 \mu\text{m}$  ergibt. Zusätzlich ist aber für jeden dieser Maßstäbe ein individuelles Protokoll beigelegt, welches den Vergleich zu einem PTB-Normal enthält. Die darin aufgeführten Werte liegen teilweise über einen Faktor zwei [ $\pm 2.9 \mu\text{m}$  bis  $\pm 1.4 \mu\text{m}$  auf der gesamten Meßlänge] unter den pauschalen Werten. Der systematische Fehler der Maßstäbe wurde deshalb mit  $\delta r_{Maßstab} = \pm 3 \mu\text{m}$  auf der gesamten Meßlänge abgeschätzt. Für die ebenfalls zum Meßsystem gehörenden Taster wurde der angegebene Fehler von  $\delta r_{Taster} = \pm 0.5 \mu\text{m}$  verwendet, obwohl auch hier die Meßprotokolle einen geringeren Fehler nahelegen. Somit ergibt sich durch die Positionierung der Feldmassen mit dem Relativ-Meßsystem eine Ungenauigkeit von

$$\delta r_{Relativ} = \left( 2 \cdot \delta r_{Maßstab}^2 + \delta r_{Taster}^2 + \delta r_{Intervall}^2 \right)^{1/2} = 6 \mu\text{m}. \quad (5.3)$$

Die Maßstäbe der optischen Bank gehören der Genauigkeitsklassen von  $\pm 2 \mu\text{m}$  pro Meter Meßlänge an [Hei96]. Aber auch hier zeigt sich, daß die angegebene Unsicherheit um mindestens

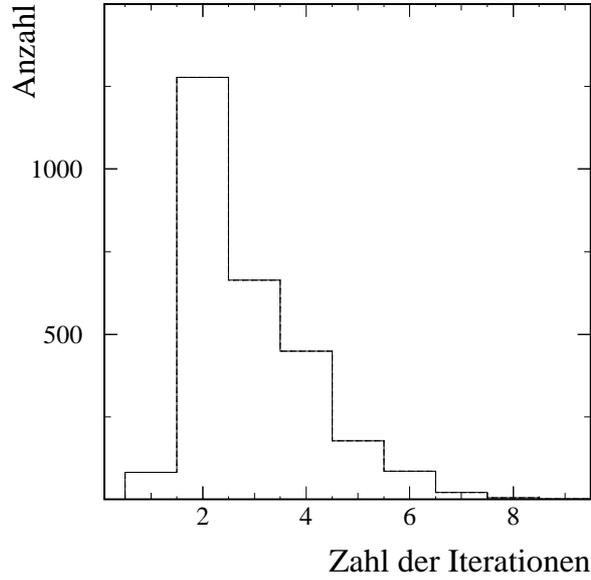


Abbildung 5.2: Aufgetragen ist die Häufigkeit der Iterationen, die benötigt wurden um die Feldmassen innerhalb eines Intervalls von  $\pm 4 \mu\text{m}$  mit den Relativ-Meßsystem zu positionieren.

einen Faktor zwei über der vermessenen Unsicherheit liegt. Aus diesem Grund wird hier eine Unsicherheit von  $\delta r_{opt.} = \pm 2 \mu\text{m}$  auf der gesamten Meßlänge von 1.84 m angesetzt. Mit Hilfe des in [Sch99] hergeleiteten Zusammenhangs zwischen dem Abstand der optischen Bank zu den Feldmassen ( $a=1.527 \text{ m}$ ) und dem Abstand der beiden Maßstäbe zueinander ( $b=0.6 \text{ m}$ ) ergibt sich eine Unsicherheit für die optische Bank von

$$\delta r = \sqrt{\delta r_{opt.}^2 + \left( \frac{a+b}{b} \sqrt{2 \cdot \delta r_{opt.}^2} \right)^2} = 11 \mu\text{m} . \quad (5.4)$$

Zusätzlich muß noch das Auflösungsvermögen des Fernrohres ( $\delta r_{Fern} = 3 \mu\text{m}$ ) berücksichtigt werden, so daß sich eine Unsicherheit von

$$\delta r_{Bank} = \left( \delta r_{opt.}^2 + 2 \cdot \delta r_{Fern}^2 \right)^{1/2} = 12 \mu\text{m} \quad (5.5)$$

für die optische Bank ergibt. Bei einer typischen Meßdistanz zwischen den beiden Eichpunkten der Feldmassen von 1.72 m ergibt sich für das Gesamtsystem aus der optischen Bank und den zwei Relativ-Meßsystemen eine relative Ungenauigkeit von 9 ppm, welche sich dreifach in der Unsicherheit der Gravitationskonstanten niederschlägt (27 ppm).

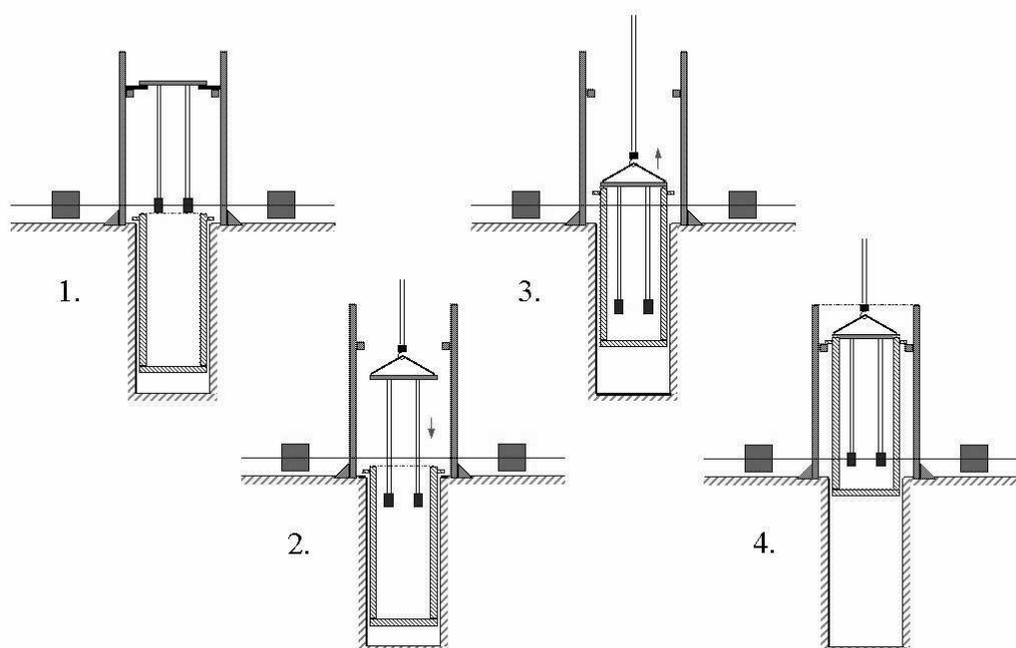


Abbildung 5.3: Die alte Form der Ausrichtung bestand aus insgesamt vier Schritten. Zuerst wurde der Resonator ausgerichtet, dann in den Vakuumbehälter abgesenkt. Danach wurden Behälter und Resonator zusammen wieder in das Haltegerüst gehoben, wonach die Ausrichtung des Kryostaten relativ zu den Feldmassen erfolgte.

## 5.2 Positionierung des Resonators

Eines der metrologisch aufwendigsten Probleme bei diesem Experiment besteht in der Bestimmung der Position des Resonators im Raum relativ zu den Feldmassen. Da die Feldmassen frei zugänglich sind, ist ihre Positionsbestimmung mit Hilfe der optischen Bank leicht und auch im Meßbetrieb durchführbar. Die Bestimmung der Lage der Resonatorpendel im Raum mittels der optischen Bank ist während des Meßbetriebes nicht möglich, da sie innerhalb des Vakuumtanks aufgehängt sind. Diese Möglichkeit besteht nur, wenn der Kryostat für Arbeiten an den Resonatorpendeln oder der Aufhängung in einer Vertiefung im Hallenboden versenkt ist, was auch der einzige Zeitpunkt mit direkter Sichtverbindung zwischen den Massen und den Pendeln ist, um diese auf die Symmetrieachse des Experimentes auszurichten. Somit kann nach dem Verschließen des Vakuumgefäßes nur noch der Deckel als Anhaltspunkt für weiteres Ausrichten verwendet werden. Gerade diese Tatsache führte in der Vergangenheit zu einer erhöhten Unsicherheit bei der Bestimmung der absoluten Position der Resonatorspiegel im Raum.

Vor dem Jahre 2000 bestand das Ausrichten des Resonators gekoppelt mit dem Verschließen des Vakuumgefäßes aus vier Schritten, welche Abbildung 5.3 verdeutlicht. Zunächst wurde dabei der Deckel mit der Aufhängung mittels einer hochauflösenden Wasserwaage ausgerichtet

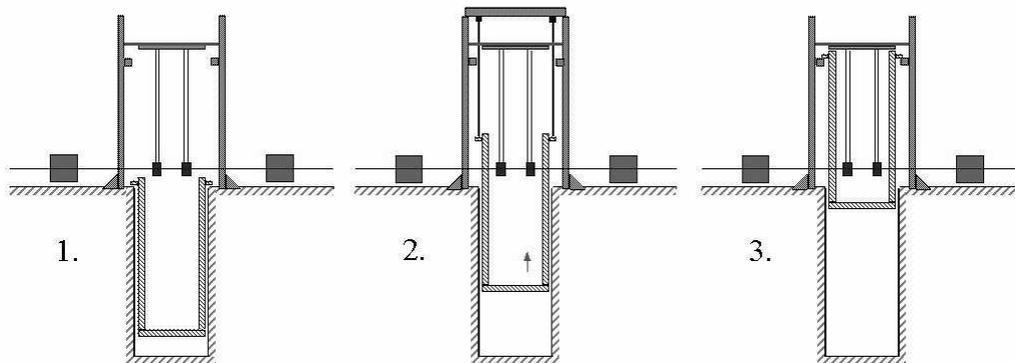


Abbildung 5.4: Die neue Realisierung des Verschießens des Vakuumbehälters: 1.) Ausgerichtet 2) Anheben des Vakuumbehälters mittels dreier Flaschenzüge 3.) Da sich die Position des Deckels und somit des Resonators nicht verändert hat, muß keine erneute Positionierung des Kryostaten vorgenommen werden.

und in Flucht mit den Massen gebracht, wonach sich das Ausrichten des Resonators mittels eines Stahllineals anschloß (1. in Abb. 5.3). Danach wurde der Kryostatdeckel mitsamt Einsatz in den Kryostaten abgesetzt, anschließend beides wieder hochgezogen und im Stützgerüst befestigt (2. u. 3. in Abb. 5.3). Das Heben und Senken des Kryostateinsatzes mittels des Haltenkrans führt, aufgrund der nur quasikontinuierlichen Schritte des Kranmotors, zu leichten Schwingungen des fast 2 Tonnen schweren Vakuumbehälters. Durch die dabei auftretenden dynamischen Lasten für die Pendelseile ist die Gefahr eines Seilrißes hoch. Sehr wahrscheinlich sind auch Längungen der Drähte, so daß sich die Ausrichtung der Spiegel zueinander verschlechtert. Nach dem Anheben des Kryostaten besteht die Problematik in der Ausrichtung des Vakuumbehälters relativ zu den Feldmassen (4. in Abb. 5.3). Die sich dabei ergebende Unsicherheit ist aus Gründen, die in [Sch99] beschrieben sind, sicher größer als die angegebenen  $8 \mu\text{m}$ .

Um diese Probleme zu beseitigen wurde im Rahmen dieser Arbeit eine feste Montage des Deckels an das Haltegerüst vorgenommen. Somit ist es nicht mehr nötig den Resonator mittels des Krans abzusenken, sondern statt dessen wird der Vakuumbehälter einfach von unten über den Resonator gezogen. Die einzelnen Schritte zum Ausrichten und Verschießen des Vakuumbehälters verdeutlicht Abbildung 5.4. Im ersten Schritt muß der Resonator auf die Symmetrieachse der Feldmassen ausgerichtet werden. Dazu findet ein Laser Verwendung, welcher zu diesem Zweck vor eine der Feldmassen montiert wird und die Symmetrieachse der beiden Massen anzeigt

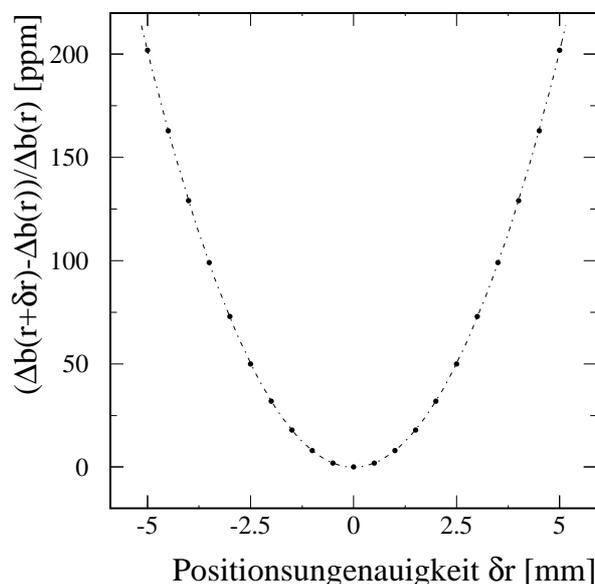


Abbildung 5.5: Die relative Abweichung des gemessenen Pendelabstandes, falls die Resonatorposition zwischen den Feldmassen variiert wird. Der Abstand der Feldmassen bleibt dabei konstant.

(1. in Abb. 5.4). Mittels des Laserlichtes, welches durch die Koppellöcher in und durch den Resonator läuft, ist es möglich sowohl die Position der Spiegel auf der Symmetrieachse zu gewährleisten, als auch sicherzustellen, daß die Verkippung der Spiegel gegeneinander kleiner als 0.4 mrad ist. Zum Anheben des im Boden versenkten Kryostaten werden dann drei Flaschenzüge verwendet (2. in Abb. 5.4). Damit die Halterung für den Deckel nicht das ganze Gewicht des fast 2 Tonnen schweren Kryostaten trägt, wurde dieser, wie bei den vorherigen Messungen, auf die Lagerpunkte des Stützgerüsts abgesetzt. Während der Zeit des Einfädelns der Gewindestangen in die Schraubenlöcher des Deckels überwacht ein System aus vier Laserdioden dessen Position im Raum. Eingebaut in eine kreuzförmig Montage auf dem Deckel des Vakuumgefäßes, lassen sich mittels Zielscheiben an den Wänden der Experimentierhalle Variationen in der Position feststellen. Somit konnten mögliche Änderungen der Deckelposition durch die hohe Massen des Kryostaten sofort beobachtet und behoben werden (3. in Abb. 5.4). Durch diese Art des Schließens des Vakuumgefäßes ist sichergestellt, daß es zum einen zu keiner Veränderung der Resonatorposition kommt und zum anderen keine dynamischen Lasten die Position und das Verhalten der Wolframdrähte beeinflussen.

Da die Ungenauigkeit der Positionierung nicht die Meßgenauigkeit des Experimentes begrenzt liegt an der Verwendung zweier Feldmassen, welche im Bereich der Pendel ein relativ flaches Gravitationspotential erzeugen, analog zu dem Feld zweier Helmholtzspulen. Rechnet man die Auswirkung einer Fehlpositionierung des Resonators relativ zu den Feldmassen, so ergibt sich der in Abbildung 5.5 dargestellte parabelförmige Zusammenhang. Aufgetragen ist die relative Änderung der Auslenkung der Pendel bezogen auf eine symmetrische Anordnung in Abhängigkeit von der Verschiebung des Resonators zwischen den beiden Feldmassen. Deren

Abstand bleibt allerdings immer konstant. So führt eine Fehlpositionierung des Resonators um 1 mm zu einem systematischen Fehler von weniger als 10 ppm. Findet allerdings nur eine Masse Verwendung, so führt ein Positionierungsfehler derselben Größe zu einem systematischen Fehler von über 4000 ppm. Mittels der aufgezeigten Methode zur Positionierung des Resonators im Raum liegt der Fehler des Ortes unter  $\pm 1$  mm, was sich in einem Fehler von 10 ppm ausdrückt.

### 5.3 Eigenfrequenzen der Pendel

Wie in der Beschreibung des Grundprinzipes des Experimentes hergeleitet, benötigt man die Eigenfrequenz  $\omega$  der beiden Pendel als Maß für die rücktreibende Kraft. Die Eigenfrequenz läßt sich direkt über die Schwingungsdauer  $T$  der Pendel bestimmen. Zu diesem Zweck wird die Wirbelstrombremse in eine etwa 25 cm unterhalb der Pendel liegende Position gefahren. Diese Entfernung stellt sicher, daß nur noch ein vernachlässigbarer Einfluß der Bremse auf die Schwingungen der Pendel besteht. Danach ermittelt man durch Abzählen die Schwingungsdauer. Dieses Meßverfahren hat sich als das präziseste und einfachste herausgestellt. Mißt man die Schwingungsdauer für einen Zeitraum von etwa einer Stunde auf 0.1 s genau, so erreicht man einen Fehler von  $3 \cdot 10^{-5}$ , welcher sich durch messen mehrerer Reihen weiter reduzieren läßt. Damit ergeben in dieser Messung folgende Werte:

$$\begin{aligned} T_1 &= 3.284374 \pm 0.000026 \text{ s} \\ T_2 &= 3.284892 \pm 0.000026 \text{ s} . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die relative Genauigkeit der Zeiten beläuft sich auf  $8 \cdot 10^{-6}$ . Da die Schwingungsdauer der beiden Pendel jeweils quadratisch in die Berechnung der Abstandsänderung der Pendel eingeht, ergibt sich für dem Fehler der Gravitationskonstante

$$\frac{\delta G}{G} \sim 2 \frac{\delta T}{T} . \quad (5.7)$$

Somit tragen die Fehler bei der Bestimmung der Schwingungsdauer mit 23 ppm zum Gesamtfehler bei.

Berechnet man die Länge der Pendel gemäß folgender Beziehung

$$l = \sqrt{\frac{g}{\omega^2}} \quad (5.8)$$

so ergibt sich eine Differenz zwischen beiden Pendeln von  $\Delta l = 0.845$  mm. Dieser Unterschied kann nicht mittels Unsicherheiten bei der Positionierung des Resonators und des Deckelflansches begründet werden, vielmehr müßten die Längen mit hoher Präzision gleich sein. Ebenfalls läßt sich rechnerisch zeigen, daß die Unterschiede in den Abmessungen der Pendel bei identischer Pendellänge nur zu einer relativen Differenz der Schwingungsdauern im Bereich von  $10^{-8}$  führt, wenn man die Trägheitsmomente mit Hilfe eines Zylinders abschätzt. Möglich ist allerdings, daß die Längendifferenz der Pendel begründet ist in unterschiedlichen Lagepunkten der Wolframdrähte an der Zerodurplatte.

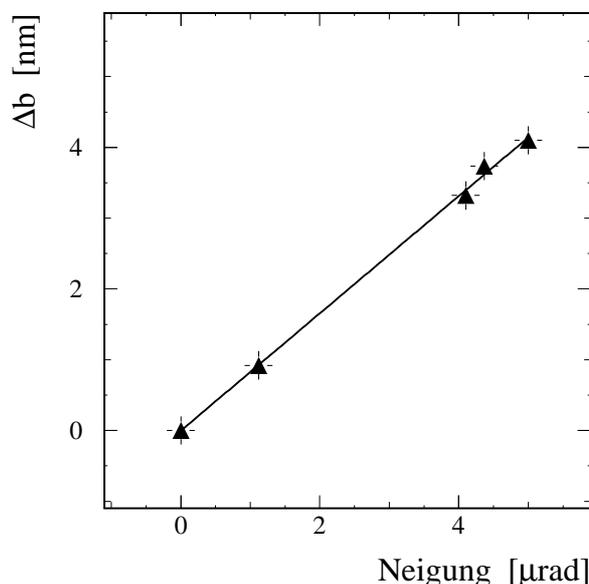


Abbildung 5.6: Die Variation der Resonanzfrequenz als Funktion des Neigungswinkels des Vakuumtanks. Gemäß Gleichung 3.45 gibt die Steigung die Differenz der Pendellängen an.

Da bei der Korrektur der Neigung des Stützgerüsts, sowohl die Längendifferenz  $\Delta l$  der beiden Pendel als auch das Vorzeichen der Differenz ( $\Delta l = l_1 - l_2$ ) von entscheidender Bedeutung sind, wurde das oben aufgeführte Ergebnis mit einer weiteren Messung verifiziert. Mittels eines Flaschenzuges wurde das Stützgerüst in Richtung des Bewegungsmechanismus von Feldmasse 1 gezogen und dabei die Änderung des Abstandes der beiden Pendel zueinander vermessen. Gemäß dem Zusammenhang 3.45 zwischen Neigungswinkel des Resonators  $\varphi$  und Abstandsänderung der Pendel  $\Delta b$

$$\Delta b = \Delta l \cdot \varphi$$

kann aus den Daten die Längendifferenz der Pendel bestimmt werden. Um den Neigungswinkel des Vakuumtanks zu bestimmen, fand eine Neigungsmesser<sup>1</sup> Verwendung, welcher eine Variation der Neigung von  $< 0.1 \mu\text{rad}$  auflöst. Die Änderungen des Abstandes der beiden Resonatorspiegel sind als Funktion des Neigungswinkels in Abbildung 5.6 dargestellt. Die Längendifferenz läßt sich aus der Steigung der an die Daten angepaßten Geraden mit  $\Delta l = 0.83 \pm 0.05 \text{ mm}$  bestimmen, was innerhalb der Fehler gut mit dem Wert aus den Schwingungsdauern übereinstimmt. Weiterhin zeigt sich auch hier, das die Länge des Pendels 2 größer ist als jene von Pendel 1.

## 5.4 Massen und Volumina

Bei der numerischen Berechnung der Vergleichswerte für die Auslenkung der Pendel spielen die metrologischen Größen für die Massen und die Volumina der das Gravitationspotential

<sup>1</sup>Applied Geomechanics 755

erzeugenden Messingzylinder eine wichtige Rolle. Um die longitudinale Ausdehnung der Massen zu ermitteln, wurden zwei unabhängige Meßverfahren verwendet. Im ersten wurde mittels eines Fluchtfernrohres, welches auf eine optische Bank montiert war (vgl. [Wal95]), die Stirnseiten der Massen anvisiert. Die absolute Länge des Zylinders ergab sich mittels eines geeichten Quarzglasmaßstabes an der optischen Bank. Im zweiten Verfahren fand das Relativ-Meßsystem Verwendung, welches die Wegstrecke ermittelte die die Masse unter der optischen Achse des Fluchfernrohres bewegt werden mußte, um mit letzterem beide Endkanten der Masse anvisieren zu können. Durch iteratives ändern der Länge der Fahrstrecke konnte die Länge der Masse bestimmt werden. Die Werte aus beiden Messungen stimmen innerhalb der Fehler gut überein. Es ergeben sich somit die folgenden Werte für die longitudinale Ausdehnung der Massen

Feldmasse	Länge (mm)	Fehler ( $\mu\text{m}$ )
1	430.050	10
2	429.885	10

Die angegebenen Fehler sind jeweils die Summe aus systematischem und statistischem Fehler. Mit diesen Meßverfahren ist der Fehler in der Bestimmung der Längenausdehnung der Feldmassen um einen Faktor fünf kleiner als bei vorhergegangenen Messungen, womit sich auch die Unsicherheit bei der Berechnung der Gravitationskonstanten auf einen Betrag von 8 ppm reduziert.

Allerdings ist es auch mit diesen Meßwerten nicht möglich die genaue Masse der Zylinder aus ihrem Volumen zu berechnen, da der Verlauf des Dichtegradienten nur mit Prozent-Genauigkeit bestimmt ist [Lan92]. Deshalb wurde der Absolutbetrag der Masse mit einer relativen Genauigkeit von  $9 \cdot 10^{-6}$  bei der PTB<sup>2</sup> in Braunschweig ermittelt. Aufgrund der langen Benutzungsdauer hat sich allerdings ein zusätzlicher Massenabrieb von 4 g je Masse ergeben, welcher bei der Fehlerberechnung berücksichtigt werden muß.

Feldmasse	Gewicht (kg)	Fehler (g)
1	574.325	5 + 4
2	574.142	5 + 4

Der Fehler der Feldmassen geht linear in den Gesamtfehler der Gravitationskonstante ein und beläuft sich auf 22 ppm.

Eine weitere Fehlerquelle bei der Bestimmung der Gravitationskonstanten ist die Unsicherheit in den Maßen der Resonatorpendel. Um Anforderungen für deren Präzision bei der Herstellung zu erhalten, wurde in Zusammenarbeit mit dem Fachbereich Mathematik der Universität Wuppertal ein Integrationsprogramm entwickelt. Damit ergibt sich eine Änderung in dem berechneten Pendelabstand von  $< 3.8$  ppm bei einer gleichmäßigen Volumenänderung beider Pendelkörper um  $1 \mu\text{m}$ . Die Vermessung der Resonatorpendel fand bei der Firma DIMETEC GmbH (Gevelsberg), einem durch die PTB akkreditierten Prüflabor, statt. Die Genauigkeit der 3-D Koordinatenmeßmaschine beträgt  $1.2 \mu\text{m} + L/300$ , wobei  $L$  die Länge des Werkstückes in mm angibt. Bei einer Ausdehnung der Pendel von  $L \simeq 100$  mm erhält man eine Meßgenauigkeit von  $1.5 \mu\text{m}$ , was sich in einem Fehler für die Gravitationskonstante von 6 ppm umsetzt.

<sup>2</sup>Physikalisch-Technische Bundesanstalt

## 5.5 Modenspektrum

Die Messung der verschiedenen Moden des Fabry-Pérot Resonators geschah mittels des beschriebenen Mikrowellensystems, allerdings unter Verwendung eines Oszilloskops, womit eine Bestimmung der Resonanzfrequenz, der Halbwertsbreite und der Amplitude für die einzelnen Moden möglich war. Bei der Untersuchung des Spektrums zeigte sich, daß jede von der CSP<sup>3</sup>-Theorie vorhergesagte Mode im Bereich zwischen 19 und 26 GHz mit transversaler Ordnung  $n \leq 4$  auch nachzuweisen ist. In den Meßreihen unterdrückt der verwendete Obermodenfilter allerdings die Obermoden  $n \geq 3$ . Zusätzlich koppeln die Moden mit transversaler Ordnung  $n=2$  nur sehr schwach, da aufgrund der zentralen Lochkopplung eine Anregung dieser Moden so gut wie ausgeschlossen ist [Wal95]. Das verbleibende Spektrum besteht deshalb praktisch nur aus Grundmoden  $f_{00q}$  und den entarteten Obermoden dritter transversaler Ordnung  $f_{10q}$ . Einige der gemessenen Resonanzfrequenzen des Fabry-Pérot Resonators sind in Tabelle 5.1 aufgetragen.

Gemäß der in Abschnitt 3.2.1 hergeleiteten Formel für die Resonanzfrequenz der CSP-Theorie läßt sich das Spektrum eindeutig durch die drei Spektralparameter  $p, l$  und  $q$  und dem Spiegelabstand  $b$  und -radius  $R$  identifizieren. Allerdings ist die Bestimmung der drei Parameter aus einer großen Zahl von Resonanzfrequenzen nicht eindeutig. Ein Ausweg besteht in der geeigneten Kombination der Resonanzfrequenzen unterschiedlicher Moden, so daß sich alle Terme bis auf den jeweils gewünschten für einen Spektralparameter gegenseitig aufheben. Bei der Zuordnung hilft, daß die Grundmoden stärker koppeln. Für diesen Ansatz teilt man die Frequenzformel der CSP-Theorie auf in

$$f_{plq}^{A,B} = q \cdot f_q + n \cdot f_n + m \cdot f_m \quad (5.9)$$

wobei

$$\begin{aligned} f_q &= \frac{c}{2b}, \\ f_n &= \frac{c}{2b} \frac{1}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{b}{R}\right) \quad \text{und} \\ f_m &= \frac{c}{2b} \frac{1}{4\pi Rk}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Mit der so modifizierte Frequenzformel kann man die Spektralparameter durch Verwendung von Linearkombinationen verschiedener Resonanzen berechnen.

$$\begin{aligned} f_q &= \frac{1}{2} (3 f_{00q} - f_{01q}) - f_m \left( \frac{3}{q + \frac{2bf_n}{c}} + \frac{1}{q + \frac{2bf_n}{3c}} \right) \\ f_n &= \frac{1}{8} (3 f_{01q}^A + f_{01q}^B - f_q) \\ f_m &= \frac{1}{8} (f_{01q}^A - f_{01q}^B) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Weitere Kombinationen verschiedener Moden sind in [Sch92] und [Wal95] zu finden. Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Spektralparameter besteht in dem Vergleich berechneter

---

<sup>3</sup>Complex-Source-Point

Resonanz $f_{00q}$ [GHz]	Resonanz $f_{10q}$ [GHz]	q
19.985 715	20.360 550	32
20.604 995	20.980 191	33
21.225 115	21.599 859	34
21.842 979	22.218 154	35
22.461 500	22.836 824	36
23.080 136	23.455 452	37
23.698 795	24.074 096	38
24.317 458	24.692 773	39
24.936 120	25.311 395	40
25.554 730	25.929 982	41

Tabelle 5.1: *Einige Resonanzfrequenzen des Fabry-Pérot Resonators.*

und gemessener Resonanzen, wobei der Spiegelabstand und  $r$ -radius als freie Parameter benutzt werden [Wal95]. Ein Vergleich zwischen den gemessenen und den mit den Spektralparametern gerechneten Resonanzfrequenzen zeigt eine gute Übereinstimmung beider Spektren innerhalb der Fehler. Die Spektralparameter erlauben es, den Spiegelabstand  $b$  und den  $r$ -radius  $R$  ebenfalls aus dem Frequenzspektrum gemäß

$$b = \frac{c}{2f_q} \quad \text{und} \quad R = \frac{b}{1 - \cos(\pi f_n/f_q)} . \quad (5.12)$$

zu berechnen. Man erhält damit die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} b &= (242.2617 \pm 0.0020) \text{ mm} \\ R &= (579.55 \pm 0.1) \text{ mm} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Der Betrag für den Krümmungsradius stimmt innerhalb seines Fehlers mit denen vom Hersteller angegebenen Werten für beide Spiegel überein. Die relative Ungenauigkeit mit welcher der Spiegelabstandes ermittelt werden konnte beträgt 8 ppm. Mit diesen Größen ist es möglich den Umrechnungsfaktor gemäß Gleichung 3.30 zu bestimmen. Für jene Resonanzen, welche in den Gravitationsmessungen verwendet wurden beträgt er

$$\begin{aligned} \beta_{22.46 \text{ GHz}} &= (10.834 563 \pm 0.000 086) \text{ [nm/kHz]} \\ \beta_{23.08 \text{ GHz}} &= (10.542 874 \pm 0.000 084) \text{ [nm/kHz]} . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der Fehler des Umrechnungsfaktors beträgt ebenfalls 8 ppm, da er vom Fehler des Spiegelabstandes  $b$  dominiert wird.

## 5.6 Numerische Berechnungen

Die in Abschnitt 3.1 hergeleiteten Integrale zur Berechnung der Abstandsänderung der beiden Pendel sind nicht vollständig analytisch lösbar, so daß die Beträge numerisch berechnet wer-

den müssen. Das dazu verwendete Programm basiert auf dem Verfahren der Gauß-Quadratur [Wal95][Str66]. Zur Überprüfung der Auswirkungen von Fehlpositionierungen wurde im Jahre 1995 in Zusammenarbeit mit dem Fachbereich Mathematik ein Programm entwickelt, welches mittels Intervall-Arithmetik arbeitet [Lan97]. Mit diesem können Toleranzintervalle für mögliche Unsicherheiten in den verschiedenen metrologischen Größen angegeben werden [Hol96]. Der sich aus den numerischen Rechnungen ergebende Fehler bei der Bestimmung der Gravitationskonstanten liegt unter 1 ppm.

Bei der Bestimmung der Gravitationskonstanten aus den gemessenen und gerechneten Werten muß der Einfluß der Pendelseile auf die Auslenkung der Pendel berücksichtigt werden. Deren Betrag ergibt sich aus der Gleichgewichtslage des auslenkenden Drehmomentes, erzeugt durch die gravitative Wechselwirkung von Pendel und Massen, sowie dem rücktreibenden Drehmoment der Schwerkraft. Die ausführliche Herleitung der verwendeten Gleichungen ist in [Wal95] aufgeführt. Der mit ihnen berechnete Effekt besitzt eine Größe von etwa  $5 \cdot 10^{-4}$  und eine Unsicherheit von insgesamt 14 ppm.

## Kapitel 6

# Systematische Unsicherheiten

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den verschiedenen systematischen Fehlerquellen des Experimentes. So werden die seismischen Einflüsse auf das Experiment sowie die starke Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Temperatur beschrieben. Weiterhin wird eine Korrektur der Neigung des Experimentes, hervorgerufen durch die Deformation des Fundamentes aufgrund des Gewichtes der Feldmassen, dargelegt. Abschließend beschäftigt sich das Kapitel mit der erfolgreichen Reduzierung der Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Position der Hohlleiter, was die dominierende Unsicherheitsquelle der Meßreihen von 1998/99 war [Sch99].

### 6.1 Seismik

Heutzutage ist die seismische Bodenbewegung eine Quelle von Störsignalen für Präzisionsexperimente. Je nach Periodendauer  $T_\omega$  und Beschleunigung unterteilt man die Seismik in [Sch75]:

- Makroseismik  $T_\omega=0.1\text{--}20$  sec;  $a \leq 1 \mu\text{m/s}^2$
- Mikroseismik  $T_\omega=0.1\text{--}10$  sec;  $a \leq 0.1 \mu\text{m/s}^2$

Diese beiden Arten der Seismik und ihre Einflüsse auf das Gravitationsexperiment werden im folgenden beschrieben.

#### 6.1.1 Mikroseismik

Die hauptsächliche Quelle der Unruhe der Pendel, welche zu einem „Rauschen“ der Resonanzfrequenz führt, besteht in der Bewegung der Aufhängeplattform. Da an ihr beide Pendel befestigt sind, werden diese gleich angeregt, so daß sich in erster Näherung keine Änderungen des Spiegelabstandes ergeben sollte. Allerdings sind beide Pendel nicht identisch, was zu Unterschieden in den Schwingungsamplituden und -phasen führt. Ursache für die Bewegungen der Aufhängung sind hauptsächlich horizontale Bewegung des Bodens, vertikale Bewegungen hingegen führen zu keiner meßbaren Unruhe der Resonanzfrequenz. Die kontinuierliche und quasi periodische Bewegung des Bodens ist ein stochastischer Prozeß ohne Richtungsabhängigkeit [Sch92], dessen

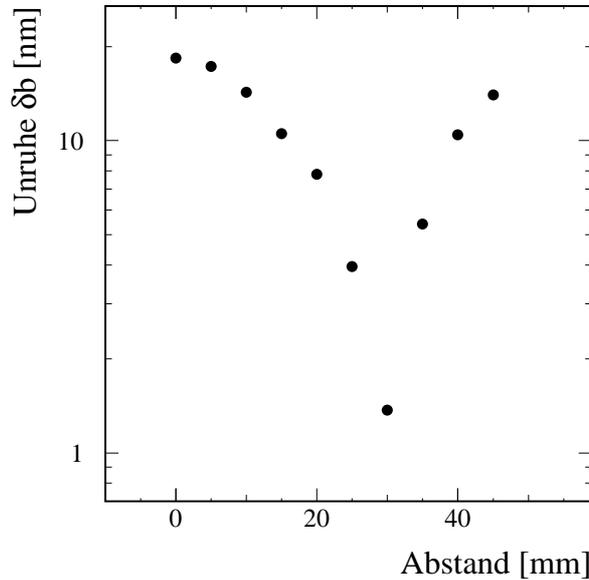


Abbildung 6.1: Dargestellt ist die Unruhe der Resonanzfrequenz als Funktion des Abstandes eines der beiden Magnetpakete der Wirbelstrombremse.

Quelle hauptsächlich seegangserzeugte Mikroseismik ist. Mathematisch kann man die Bewegungsgleichung der Pendel mit einer gedämpften harmonischen Schwingung beschreiben, welche durch die periodische Bewegung des Bodens mit einer konstanten Amplitude  $A$  angeregt wird

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A \cos(\omega t) . \quad (6.1)$$

wobei  $\omega_0$  die Eigenfrequenz und  $\gamma$  die Dämpfung bezeichnet. Für diese Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators ist die Lösung bekannt. Dabei zeigt sich ein Bandpaßverhalten der beiden Pendel, da sehr niederfrequente Bodenschwingungen von beiden Pendeln gleich aufgenommen werden, wohingegen hochfrequente Schwankungen aufgrund der Trägheit der Pendel unterdrückt werden. Schwingungen im Frequenzbereich der Eigenfrequenz der Pendel führen allerdings zu einer resonant überhöhten Anregung der Schwingungsamplitude. Die Periode mikroseismischer Unruhe liegt hauptsächlich zwischen 2 und 10 s [Har62] und schließt somit die Schwingungsdauer der Pendel ( $T \simeq 3.28$  s) ein. Aus diesem Grund muß die mikroseismische Anregung der Pendel aktiv unterdrückt werden. Als aktive Dämpfungseinheit wird in diesem Experiment eine Wirbelstrombremse verwendet, was die einzige kontaktlose Möglichkeit der Dämpfung ist, ohne das Haltekräfte die Gleichgewichtslage der Pendel beeinflussen. Die dämpfende Kraft auf einen metallischen Körper in einem inhomogenen Magnetfeld ist proportional der Geschwindigkeit und dem Gradienten des Magnetfeldes.

Zur Minimierung der Unruhe muß die Dämpfung für beide Pendel möglichst gleich sein, was dadurch ermöglicht wird, daß eines der beiden Magnetpakete auf der Wirbelstrombremse mittels eines Schrittmotors verfahrbar ist. Als indirektes Maß für die Dämpfung dient die Höhe der Wirbelstrommagnete, da die Dämpfung mit dem Abstand der Magnete vom Resonator

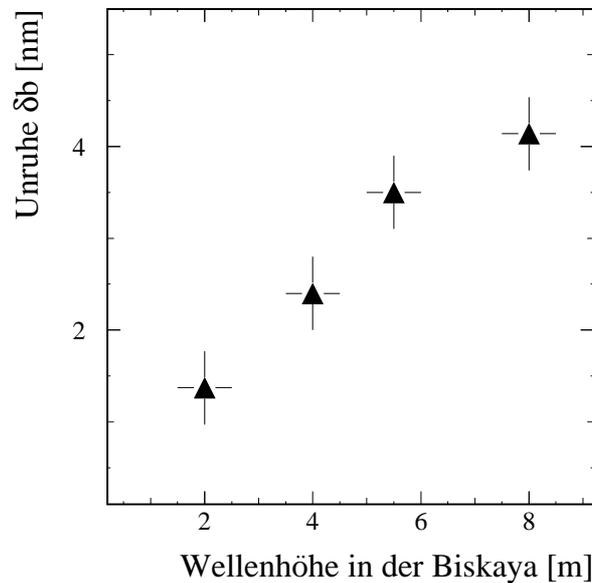


Abbildung 6.2: Aufgetragen ist der Anstieg der mittleren Unruhe der Resonanzfrequenz als Funktion der Wellenhöhe in der Biskaya. Als Quelle dafür diente der deutsche Wetterdienst ([www.dwd.de](http://www.dwd.de)). Offensichtlich wird die mikroseismische Unruhe in diesen Breitengraden durch seegangserzeugte Mikroseismik aus der Biskaya dominiert [Har62].

abnimmt. In einer Meßreihe wurde jeweils die Position eines der beiden Magnetpakete variiert, während die Position des anderen Paketes konstant gehalten wurde. Die dabei ermittelte mittlere Unruhe der Resonanzfrequenz ist definiert als

$$\delta f := \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2} = \delta b \cdot \beta^{-1} \quad (6.2)$$

und in Abbildung 6.1 aufgetragen. Es zeigt sich, daß die Unruhe im Abstand der beiden Resonatorspiegel ein Minimum hat, falls die Dämpfung beider Pendel gleich groß ist. Deutlich ist das Minimum der Unruhe mit 1.3 nm für diese im Dezember aufgenommenen Daten zu erkennen. Es beträgt nicht exakt Null, da stets gekoppelte Schwingungen die Pendel schwach anregen [Sch92]. Die Größe des Minimums ist starken jahreszeitlichen Schwankungen unterworfen.

Der dominierende Beitrag zur Unruhe der Resonanzfrequenz ist die mikroseismische Bodenunruhe, deren Ursachen recht vielfältiger Natur sind. Eine Zusammenstellung [Sch75] nennt unter anderem folgende Ursachen: Bewegung des Bodens durch Industrie und Verkehr, durch vulkanische Vorgänge, durch direkte Wirkungen von lokalen Stürmen und Böen auf hohe Gegenstände und durch Reibung der Luft am Erdboden. Die Hauptquelle der Mikroseismik im engeren Sinne ist allerdings im Küstenbereich der Kontinente zu suchen: die Brandung. Ihre Energiequelle ist die Luftströmung, da bei stärkeren und länger anhaltenden Winden an der Meeresoberfläche die Wellentätigkeit angeregt wird. Ein Teil der Wellenenergie überträgt sich auf die Erdkruste und pflanzt sich in Form von seismischen Oberflächenwellen, im wesentlichen vom Typ Rayleighwellen [Bri90], über ganze Kontinente hinweg fort. Die Mikroseismik-Perioden verhalten

sich dabei zu den Meereswellenperioden wie 1:2 [Has63]. In Europa sind vor allem die Küsten der Biskaya, Norwegens und der Britischen Inseln als Ursprung der Mikroseismik zu nennen. Da die Mikroseismik von der Aktivität der Meereswellen und diese wiederum vom Wettergeschehen abhängig ist, läßt sich auch ein deutlicher jahreszeitlicher Gang verfolgen. Während die Monate April bis September als mikroseismischer „Sommer“ mit Bodenunruhen zwischen 200 nm bis 400 nm aufwarten, ergeben sich im „Winter“ Werte zwischen 1  $\mu\text{m}$  bis 10  $\mu\text{m}$  [Sch75].

Eine Bestätigung der These, daß die mikroseismische Unruhe in diesen Breitengraden durch seegangserzeugte Mikroseismik aus der Biskaya dominiert wird [Har62], sowie die starke Abhängigkeit der Unruhe vom Wetter, demonstrieren mehrere Meßreihen, die bei unterschiedlichen Wetterlagen im Dezember 1999 durchgeführt wurden. Aufgetragen gegen die Wellenhöhe in der Biskaya — ermittelt vom Deutschen Wetterdienst ([www.dwd.de](http://www.dwd.de)) — ergibt sich für die minimale Unruhe das in Abbildung 6.2 dargestellt Bild. Wie zu erwarten, sind beide Größen deutlich korreliert.

Obwohl die Unruhe des Bodens nur stark abgeschwächt den Pendelabstand beeinflusst, so ist diese doch eine große Beeinflussung für die Messung und muß aus den Frequenzdaten mittels eines Filters herausgemittelt werden. Voraussetzung dafür ist, daß die Bodenunruhe harmonische Schwingungen der Pendel um die Nullage herum anregt, so daß die Unruhe im Mittel stets Null ist. Weiterhin sollte die Bodenbewegung als Summe von harmonischen Schwingungen aufgefaßt werden können und die Integrationszeit des Filters groß gegenüber der Periodendauer der erzwungenen Schwingungen sein [Sch92]. Im Experiment wird bei der Bestimmung der Frequenzdaten ein digitaler Tiefpaßfilter mit einer Sperrfrequenz von etwa 16 mHz verwendet, der praktisch die gesamte Unruhe im Sperrbereich unterdrückt. Dabei handelt es sich um einen nicht-rekursiven Filter mit einer Zeitkonstante von etwa einer Minute. Diese Zeit ist größer als die Schwingungsdauer der Pendel um eine gute Sperrwirkung der Unruhe zu erreichen. Die theoretischen Übertragungsfunktionen des Filters sind in [Sch92] aufgeführt.

### 6.1.2 Makroseismik

Die von der Makroseismik erzeugte wellenförmige Bewegung der Erdkruste induziert eine große Amplitude in den Schwingungen der Resonatorpendel, was zu kurzzeitigen, starken Schwankung der Resonanzfrequenz führt. Dieses Verhalten ist in Abbildung 6.3 über einen Zeitraum von etwa einer Stunde aufgetragen. Deutlich ist die plötzliche Erhöhung der Schwankung der Resonanzfrequenz um einen Faktor 8–10 zu sehen. Das Beben konnte eindeutig als jenes identifiziert werden, welches am 9. Juli 1998 in der Nähe der Azoren mit einer Stärke von 5.8 auf der Richter-Skala stattfand. Bei der aufgetragenen Frequenz handelt es sich um die ungefilterte Resonanzfrequenz, so daß alle mikroseismisch induzierten Änderungen zu erkennen sind. Daneben sieht man die Variation der Resonanzfrequenz alle 15 Minuten durch die periodische Bewegung der Feldmassen.

Betrachtet man die gesamte Erdoberfläche hinsichtlich der seismischen Aktivität so zeigt sich, daß der größte Teil der Aktivität auf relativ schmale Zonen großer Längserstreckung konzentriert ist. Es lassen sich dabei aus der Gesamtheit der Erdbebengebiete die folgenden vier Bereiche [Sch75] ableiten:

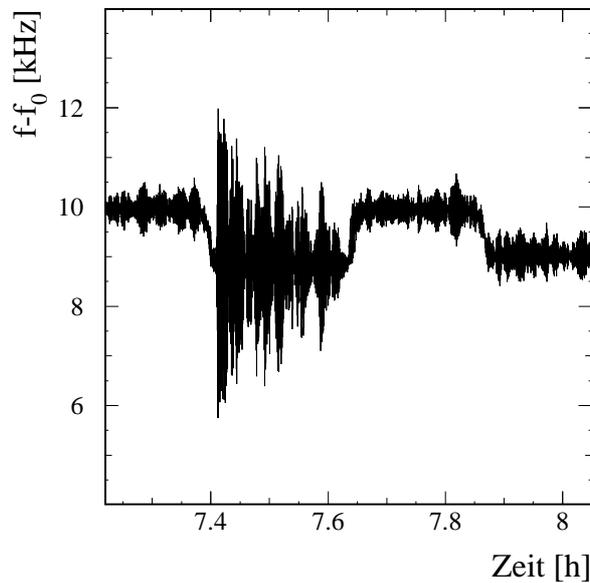


Abbildung 6.3: Die gemessene Resonanzfrequenz als Funktion der Zeit während eines Erdbebens. Es fand am 9. Juli 1998 in der Nähe der Azoren mit einer Stärke von 5.8 auf der Richter-Skala statt.

1. *Die Umrandung des Pazifiks:* Hier werden etwa 75–80% der gesamten seismischen Energie freigesetzt.
2. *Die eurasischen Faltengebirge:* Dieser Europa und Asien durchziehende Erdbebenbereich trägt etwa 15–20% zur seismischen Energiesumme bei.
3. *Die mittelozeanischen Schwellen:* Hier werden etwa 3–7% der Energie frei.
4. *Die kontinentalen Gräben:* Der Restbetrag, der etwa 1% der Energiesumme ausmacht.

Diese Bereiche wurden auch als Quellbereiche der meisten Beben identifiziert, welche mit dem Meßsystem nachgewiesen werden konnten. Erwähnenswert ist, daß innerhalb von 3 Jahren an diesem Experiment insgesamt nur 26 Erdbeben registriert wurden. Es ließen sich keine Korrelationen zwischen dieser geringen Ausbeute und einer möglichen Richtungs- oder Amplitudenabhängigkeit erkennen (vgl. auch Anhang B).<sup>1</sup>

Durch die größere statistische Streuung der Frequenzen sind die Daten mit einem erhöhten Fehler behaftet. Da aber nur sehr selten Erdbeben mit unserer Apparatur nachgewiesen werden, und diese im Allgemeinen kürzer als 15 Minuten — einem halben Meßzyklus — sind, ist der sich so ergebende Fehler zu vernachlässigen.

<sup>1</sup>Das Experiment steht bei N 51°14.232' und E 007°09.261' auf einer Höhe von 315 m.

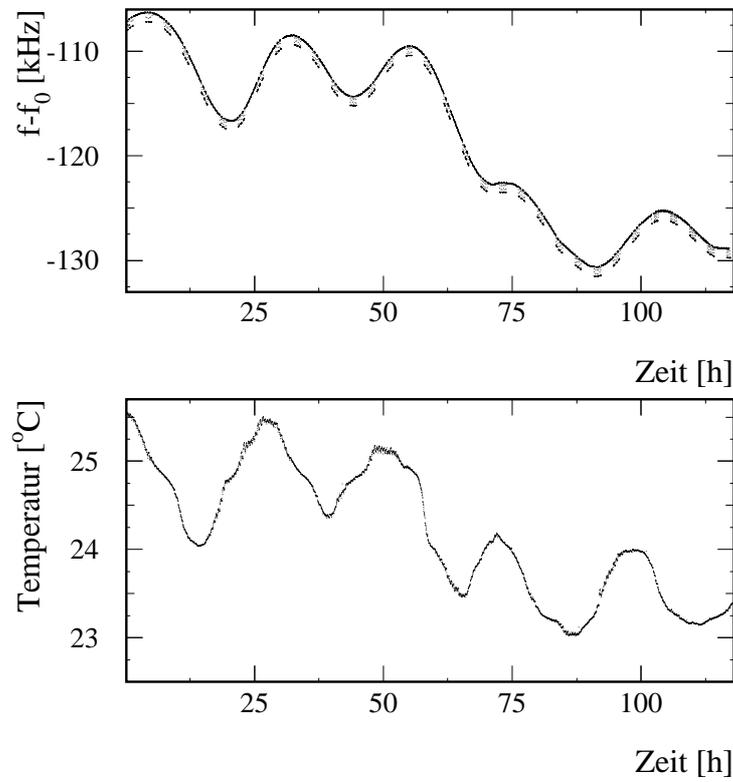


Abbildung 6.4: Dargestellt ist im oberen Teil des Bildes die Resonanzfrequenz als Funktion der Zeit. Deutlich ist eine langzeitliche Variation zu erkennen. Im unteren Teil des Bildes ist der Verlauf der Temperatur im Bereich des Stützgerüsts im selben Zeitraum aufgetragen.

## 6.2 Aktive Temperaturregelung

Ein den statistischen Fehler des Meßwertes beeinflussender Faktor war in den vorherigen Meßreihen die Variation der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der sich ändernden Umgebungstemperatur. Durch thermisch bedingte Ausdehnung oder Kontraktion der Aufhängung, variierte der Abstand der beiden Resonatorpendel. Ein Beispiel für diesen Zusammenhang ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Im oberen Diagramm ist die Resonanzfrequenz als Funktion der Zeit über einen Abschnitt von fünf Tagen aufgetragen. Man erkennt einerseits die etwa 1 kHz großen Frequenzmodulationen, welche durch die Änderungen der Feldmassenpositionen hervorgerufen werden. Andererseits zeigen die Daten auch Variationen mit einer Zeitdauer von mehreren Stunden. Im unteren Teil der Abbildung ist die Temperatur im Bereich des Stützgerüsts für denselben Zeitraum aufgetragen. Deutlich ist das korrelierte Verhalten dieser beiden Größen zu erkennen, allerdings mit einer Verzögerung der Auswirkungen der Temperaturschwankungen auf die Resonatorgröße von  $\tau \simeq 5.4$  Stunden.

Aus dieser Variation der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur

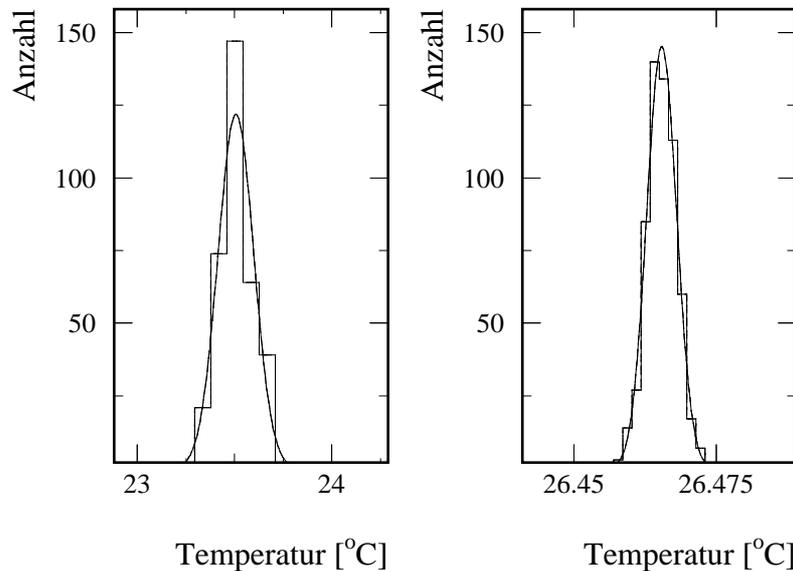


Abbildung 6.5: Dargestellt sind die mit der Heizung erreichten Temperaturverteilungen. Auf der linken Seite für den Bereich der Feldmassen ( $\sigma \leq 0.1$  °C) und auf der rechten innerhalb des Kryostaten ( $\sigma \leq 0.03$  °C).

ergaben sich mehrere Fehlerquellen bei der Bestimmung der Gravitationskonstanten  $G$ . Zum einen ein systematischer Fehler durch die jeweilige Änderung der Größe des Resonators und damit der Schwerpunktabstände zwischen den Resonatorspiegeln und Feldmassen. Allerdings ist der Fehler von  $< 1$  ppm vernachlässigbar. Signifikanter ist die Beeinflussung der Frequenzmodulation, welche sich im statistischen Fehler ausdrückt. Weiterhin bestand die Möglichkeit, daß die Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz einen weiteren systematischen Fehler überdeckte. Um sowohl dieses zu überprüfen, als auch um den statistischen Fehler zu reduzieren, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine aktive Temperaturstabilisierung für das Experiment entwickelt und aufgebaut [Kle00]. Dabei findet eine Heizung Anwendung, mit dem Ziel die Temperatur des Experimentes immer über der Umgebungstemperatur zu halten. Die Halle der Naturwissenschaften der Universität Wuppertal wird ebenfalls mit einer reinen Heizungsanlage temperiert. So wird die Temperatur am Tage auf etwa 21 °C geregelt, außer die angesaugte Außenluft ist wärmer. In diesem Fall wird die Außenluft direkt in die Halle geleitet. Da dieses aber nur innerhalb weniger Wochen im Sommer vorkommt, war man sicher, daß eine reine Heizungsanlage für das Experiment ausreicht. Die Temperatur im Bereich des Stützgerüsts wurde während der Messungen auf etwa 27 °C reguliert.

Bei der Heizung handelt es sich um ein geschlossenes Umluftsystem. Dabei wird die im Experimentaufbau zirkulierende Luft mittels einer Erhitzereinheit auf eine gewählte Temperatur erwärmt. Durch die 2 kW starke Erhitzereinheit wird ein Volumenstrom von etwa 400 m<sup>3</sup>/h geblasen und somit die im Experiment befindliche Luft etwa 60 mal pro Stunde umgewälzt. In einem Winkel des Stützgerüsts befindet sich ein Fühler für die Regulierung der Heizung. Um die thermische Isolierung sowie den Schutz vor störenden Luftströmungen sicherzustellen

ist das Stützgerüst mit Aluminiumblechen verkleidet. Ebenso sind die Bewegungsmechaniken der Feldmassen thermisch isoliert. Im Rahmen dieser Arbeit wurde für beide Bereiche jeweils eine Abdeckung aus Gipskartonplatten gebaut, auf welche 10 mm Schaumstoff aufgeklebt ist. Nicht isoliert ist der gesamte Aufbau allerdings gegenüber dem Fußboden der Experimentierhalle. Mit Hilfe der Heizung ist es nun möglich die Temperatur des Meßaufbaus konstant zu halten. Die dabei erreichten Schwankungen der Temperatur sind Abbildung 6.5 zu entnehmen. Im linken Teil sind die Temperaturwerte für den Bereich der Feldmassen aufgetragen. Innerhalb des Vakuumtanks — das rechte Diagramm — konnte eine Temperaturstabilität von  $\sigma \leq 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$  erreicht werden.

### 6.2.1 Variation der Position des Stützgerüsts

Bei der Suche nach weiteren systematischen Fehlerquellen wurde ein Neigungsmesser<sup>2</sup> für die Untersuchung der Neigung des Stützgerüsts verwendet. Dieses Meßgerät kann Variationen der Neigung von  $\varphi < 0.1 \mu\text{rad}$  innerhalb eines Intervalls von  $\pm 850 \mu\text{rad}$  für zwei orthogonale Achsen auflösen. Der Sensor wurde auf den Deckel des Vakuumgefäßes montiert und über einen Zeitraum von zwei Wochen betrieben. Während dieser Zeit lief keine weitere Messung und die Feldmassen verblieben über den gesamten Zeitraum in der Referenzposition. Allerdings wurde der Experimentaufbau aktiv temperaturstabilisiert, um eine identische Umgebung wie bei den Gravitations-Meßreihen zu erreichen. Dadurch war auch sichergestellt, daß keine Temperaturschwankungen den Neigungsmesser beeinflussen.

Die so gemessenen Werte sind in Abbildung 6.6 aufgetragen. Dargestellt ist im oberen und mittleren Diagramm die gemittelte Neigung als Funktion der Tageszeit. Dabei zeigt der obere Teil der Abbildung die Bewegung des Vakuumgefäßes in Richtung der Feldmassenachse, während die mittlere Darstellung die orthogonale Bewegung dazu aufzeigt. Im unteren Teil der Abbildung ist der gemittelte Verlauf der Umgebungstemperatur des Experimentes in der Halle der Naturwissenschaften über einen vergleichbaren Zeitraum ebenfalls als Funktion der Tageszeit aufgetragen. Man erkennt, daß sich das Stützgerüst im Verlaufe eines Tages im Mittel um  $\langle \phi_x \rangle \simeq 4 \mu\text{rad}$  bzw.  $\langle \phi_y \rangle \simeq 4 \mu\text{rad}$  bewegt. Unter der Verwendung des in Abschnitt 3.2.4 hergeleiteten Zusammenhanges zwischen der Änderung der Resonatorgröße  $\Delta b$ , des Neigungswinkels  $\phi$  und des Längenunterschiedes der Pendel  $\Delta l$

$$\Delta b = \Delta l \cdot \phi \tag{6.3}$$

ergibt sich bei separater Betrachtung der Auslenkung in Richtung der Feldmassenachse eine Frequenzvariation über einen Tag von etwa  $\langle f \rangle \simeq 400 \text{ Hz}$ . Variationen der Resonanzfrequenz in dieser Größenordnung sind deutlich auf allen Daten der Meßreihen zu sehen. Der Ansatz dieser Rechnung nur die Auslenkung  $\phi_x$  in Richtung der Feldmassen zu betrachten, ergibt sich aus der Tatsache, daß Neigungen orthogonal zur Resonatorachse gegenüber solchen parallel dazu um mindestens einen Faktor 10 geringere Auswirkungen auf die Resonatorgröße haben [Sch92][Wal95].

---

<sup>2</sup>Applied Geomechanics; Modell 755

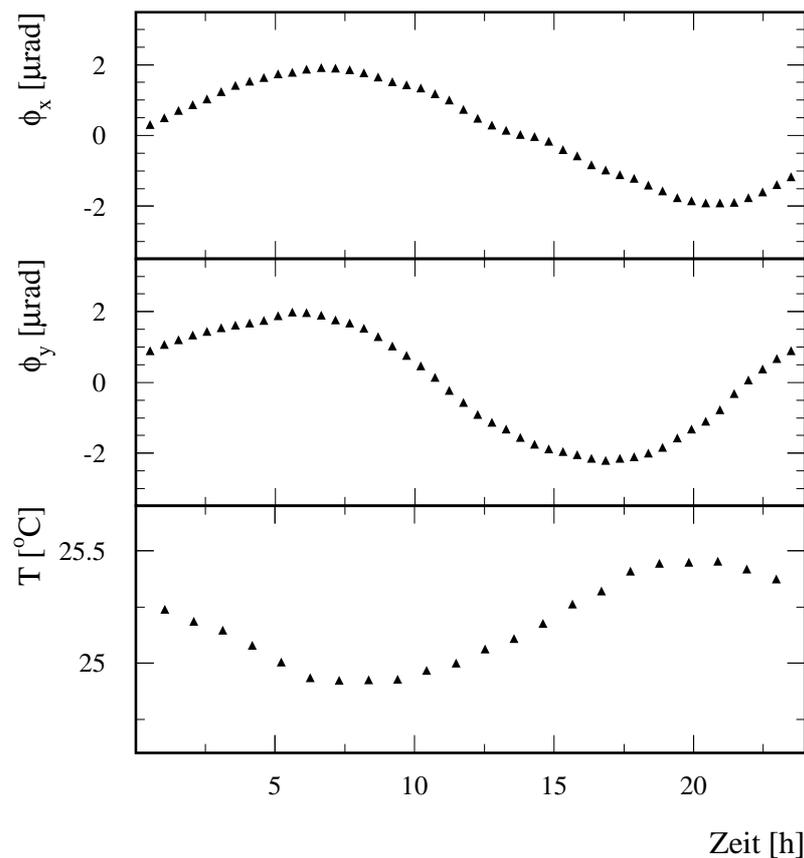


Abbildung 6.6: Die Neigung des Stützgerüsts des Vakuumgefäßes ohne Variation der Feldmassenposition. Das obere und das mittlere Diagramm zeigen die über zwei Wochen gemittelte Neigung als Funktion der Tageszeit. Im obersten Teil ist dabei die Neigung in Richtung der Feldmassen und im mittleren Teil jene orthogonal dazu aufgetragen. Das untere Diagramm zeigt die gemittelte Temperatur der Halle der Naturwissenschaften als Funktion der Tageszeit.

Auffällig ist der ähnliche funktionale Zusammenhang der Neigungswinkel und der Temperatur als Funktion der Zeit. Das offensichtlich korrelierte Verhalten könnte sich ergeben aus der Beeinflussung des Stützgerüsts durch die Änderung der Umgebungstemperatur des Experimentes. Zwar wird das Vakuumgefäß mit dem Resonator aktiv temperaturstabilisiert. Schwankungen der Umgebungstemperatur können aber von außen auf die Stahlträger des Stützgerüsts einwirken.

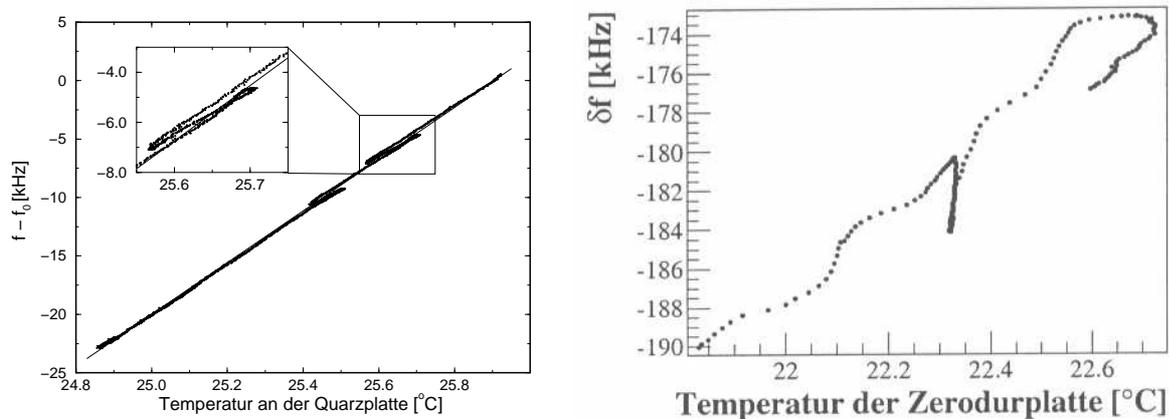


Abbildung 6.7: Hier dargestellt ist das Verhalten der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Temperatur im Kryostaten. Im linken Teil der Abbildung sind Daten aus dem Jahre 1995 (aus [Sch95]) aufgetragen, im rechten aus den Jahren 1998/99 (aus [Sch99]).

Bei einer typischen mittleren Temperaturschwankung am Tag von  $\langle T \rangle \simeq 3 \text{ }^\circ\text{C}$  dehnt sich ein 3 m Stahlträger um etwa  $110 \text{ } \mu\text{m}$  aus. Da die Verstrebungen innerhalb des Stützgerüsts nicht symmetrisch sind, erscheint die Annahme, daß die zusätzliche Neigung des Kryostaten durch die thermische Ausdehnung der Stahlträger herrührt, wahrscheinlich. Für zukünftige Messungen könnte es somit nötig sein, auch die Umgebungstemperatur des Experimentes aktiv zu regeln, z.B. durch eine weitere separate Abschirmung des gesamten Experimentes.

Auswirkungen auf den Gesamtfehler der Messung haben diese Variation der Neigung des Resonators nicht, da sie im Vergleich zu den Meßreihen ein langsames und stetiges Verhalten besitzen.

### 6.2.2 Temperaturverhalten der Resonanzfrequenz

Einer der Gründe für den Bau einer aktiven Temperaturregulierung war die starke Korrelation der Resonanzfrequenz mit der Temperatur. Dieses seit langem beobachtete Verhalten läßt sich begründen mit der Änderung des Abstandes der beiden Resonatorspiegel durch die Ausdehnung oder das Zusammenziehen der Aufhängung der Pendel aufgrund von Temperaturschwankungen. Nach den ersten Meßreihen wurde deshalb eine Quarzplatte unterhalb der Aufhängung angebracht [Sch92], an welcher die Pendelseile entlanglaufen. Da die Breite der Quarzplatte größer ist als jene der Aufhängungspunkte, werden die Wolframdrähte durch das Gewicht der Pendel gegen die Randflächen der Quarzplatte gedrückt und durch deren Oberflächenrauigkeit in Position gehalten. Durch diese Art der Fixierung der Wolframdrähte, sollte die Länge des Resonators in erster Ordnung unabhängig von Temperaturverhalten der eigentlichen Aufhängung sein und nur vom Ausdehnungskoeffizient der Quarzplatte bestimmt werden. Die so erreichte Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Temperatur ist für eine Meßreihe des Jahres 1995 beispielhaft im linken Teil der Abbildung 6.7 dargestellt [Sch95]. Aufgetragen ist die Resonanzfrequenz

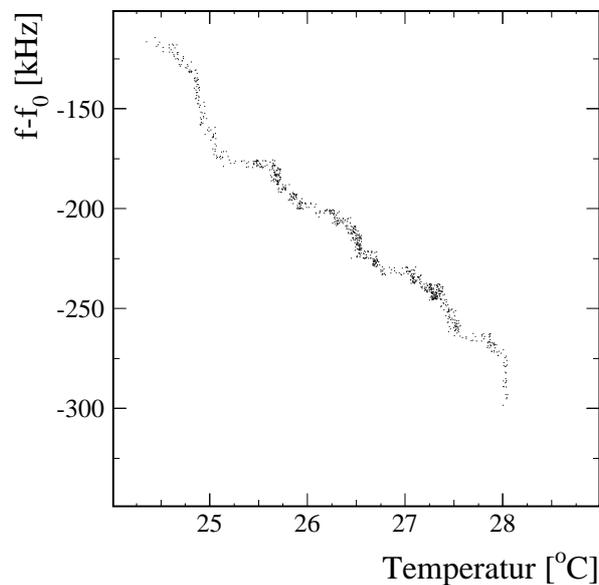


Abbildung 6.8: Aufgetragen ist die Resonanzfrequenz als Funktion der Temperatur der Zerodurplatte. Die Daten wurden in den Jahren 2000/01 aufgenommen.

als Funktion der Temperatur der Quarzplatte. Deutlich ist das korrelierte Verhalten der beiden Größen zu erkennen. Der errechnete Ausdehnungskoeffizient beträgt  $\alpha = (-0.9 \pm 0.2) \cdot 10^{-6} K^{-1}$ , wobei der Literaturwert für Quarzglas hingegen mit  $0.6 \cdot 10^{-6} K^{-1}$  angegeben ist [Stö98].

In den Meßreihen der Jahre 1998/99 wurde die Aufhängung für die Resonatorpendel weiterverwendet, nicht aber die Quarzplatte. Um eine geringere Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Temperatur zu erlangen wurde statt dessen eine Platte aus Zerodur benutzt. Es besteht aus einer Mischung von zwei verschiedenen Sorten Glas, wobei die eine einen positiven und die andere einen negativen Ausdehnungskoeffizienten besitzt, so daß sich das Produkt durch einen Ausdehnungskoeffizienten von  $\alpha = \pm 0.02 \cdot 10^{-6} K^{-1}$  auszeichnet. Dieses sollte zu einer Verringerung der Frequenzvariationen um einen Faktor 40 führen. Tatsächlich ergab sich aber bei den Messungen wieder ein Ausdehnungskoeffizient von  $\alpha = (-0.9 \pm 0.25) \cdot 10^{-6} K^{-1}$ . Der rechte Teil von Abbildung 6.7 zeigt beispielhaft Daten aus dieser Meßperiode [Sch99], wobei auch hier die Resonanzfrequenz ( $\delta f \equiv f - f_0$ ) als Funktion der Temperatur der Zerodurplatte aufgetragen ist. Wieder ist ein klar korreliertes Verhalten der beiden Größen zu erkennen. Trotz des großen Unterschiedes im Ausdehnungskoeffizienten zwischen der Quarz- und der Zerodurplatte, änderte sich weder der Betrag noch das Vorzeichen des Korrelationsfaktors.

Wie in Abschnitt 4.1.3 beschrieben, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine neue Aufhängung konstruiert. Deren Grundplatte ist nicht mehr aus Stahl sondern aus Aluminium. Jenes besitzt mit  $\alpha = 23 \cdot 10^{-6} K^{-1}$  einen etwa doppelt so großen Ausdehnungskoeffizienten (Stahl  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ ). Beibehalten wurde allerdings die Zerodurplatte. Mit dieser Anordnung gemessene Daten aus dem Jahre 2001 sind in Abbildung 6.8 dargestellt. Aufgetragen ist die Resonanzfrequenz als Funktion der Temperatur über einen Bereich von etwa 4 °C. Der sich aus

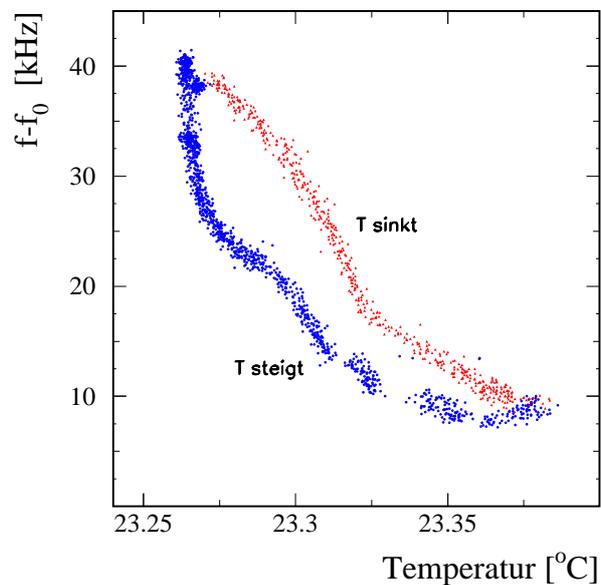


Abbildung 6.9: Dargestellt ist die Resonanzfrequenz als Funktion der Temperatur auf der Zerodurplatte. Für diese Daten wurde die Heizung über einen Zeitraum von vier Stunden ausgestellt und später wieder angestellt. Dadurch ergab sich eine Hystereseschleife für die Frequenz.

diesen Werten berechnete Ausdehnungskoeffizient beträgt  $(1.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-6} K^{-1}$  und liegt somit betragsmäßig um etwa einen Faktor zwei über denen der vorherigen Meßreihe. Auffallend ist, daß sich der funktionale Zusammenhang zwischen Resonanzfrequenz und Temperatur geändert hat. So besteht nun ein antikorreliertes Verhalten, wo vorher ein korreliertes auftrat. Dieses Verhalten wurde auch während einer Messung bestätigt, die für systematische Untersuchungen an der Heizung diente. In Abbildung 6.9 ist die Resonanzfrequenz als Funktion der Temperatur im Vakuumtank aufgetragen. Dabei war die Heizung über einen Zeitraum von etwa vier Stunden ausgestellt und später wieder in Betrieb genommen worden. In dieser Zeit sank die Temperatur der Zerodurplatte um etwa  $0.1 \text{ }^\circ\text{C}$  und es ergab sich für die Resonanzfrequenz eine Hystereseschleife aus der Trägheit des Systems gegenüber den Temperaturschwankungen.

Offensichtlich zeigt sich durch den Vergleich dieser drei Meßreihen, daß der Versuch den Resonator von der thermischen Ausdehnung der Aufhängeplattform mittels einer Quarzglasplatte zu entkoppeln, nicht gelungen ist. Der funktionale Zusammenhang zwischen Frequenz und Temperatur ändert sich nicht durch den Austausch einer Quarz- gegen eine Zerodurplatte. Gleichwohl führt ein Wechsel der Aufhängeplattform nicht nur zu einer betragsmäßigen Verdopplung, sondern auch zu einer Veränderung im Vorzeichen des Korrelationskoeffizienten. Mehreren Meßreihen in den Jahren 1992 bis 1996 wurden mit unveränderter Aufhängung und Quarzplatte durchgeführt. Während dieser Zeit war der funktionale Zusammenhang zwischen Resonanzfrequenz und Temperatur immer gleich, welcher sich auch nicht in den beiden Meßreihen der Jahre 1998/1999 unter Verwendung einer Zerodurplatte änderte. Somit ist davon auszugehen, daß die Variation des Abstandes der Resonatorspiegel nicht etwa durch zufällige temperatur-

bedingte Verspannungen des Deckels des Vakuumgefäßes entsteht. Vielmehr deuten die Daten daraufhin, daß die Aufhängung für das thermische Verhalten des Resonators verantwortlich ist. Zwar wird das thermische Ausdehnungsverhalten der Aufhängung um etwa eine Größenordnung verringert, aber Änderungen in ihrer Beschaffenheit ergeben Variationen im thermischen Verhalten der Resonatorgröße. Möglicherweise ist die Haftreibung der Wolframdrähte an der Quarz-/Zerodurplatte nicht groß genug, so daß jene auf der Kante der Platte abrollen, wenn sich die Aufhängung ausdehnt oder zusammenzieht.

### 6.3 Neigung des Stützgerüsts

Wie in Abschnitt 3.2.4 vorgestellt führt eine Neigung des Fabry-Pérot Resonators zu einer Änderung des Abstandes der Resonatorspiegel. Wird nun die Neigung des Meßaufbaus durch die Messung selbst beeinflußt, so besteht die gemessene Abstandsänderung der Pendel nicht nur aus dem rein gravitativen Teil, sondern besitzt auch einen Beitrag, der durch die Neigung hervorgerufen wird:

$$\Delta b_{\text{Messung}} = \Delta b_{\text{Gravitation}} \pm \Delta b_{\text{Neigung}}. \quad (6.4)$$

Als Grund für eine Neigung des Experimentes ergab sich die Deformation des Fundamentes im Bereich des Stützgerüsts, ausgelöst durch die hohe Belastung des Bodens aufgrund der Feldmassen. Da diese Deformation des Fundamentes abhängig von der Feldmassenposition ist, täuscht sie eine entfernungsabhängige Abweichung vom Gravitationsgesetz vor. Diese Abweichung der Meßwerte vom reinen  $1/r$  Potential ist in den älteren Arbeiten an diesem Meßaufbau schon beobachtet [Sch99][Wal95][Sch95], aber nie explizit vermessen worden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde deshalb der funktionale Zusammenhang zwischen Neigung und Feldmassenposition ermittelt, so daß die gemessenen Auslenkungen der Spiegel entsprechend korrigiert werden können.

Da die Neigung der Apparatur zwar für die Gravitationsmessungen signifikant ist, aber absolut betrachtet sehr klein ( $< 0.1 \mu\text{rad}$ ), war es nicht möglich die Neigung direkt mit einem Neigungsmesser aufzulösen. Statt dessen fand der Resonator als Meßsystem Verwendung. Abbildung 6.10 soll die Wirkungsweise der verschiedenen Komponenten aufzeigen. So blockiert einer der Hohlleiter eines der Pendel, während das andere Pendel weiterhin frei schwingt. Neigt sich die Aufhängung des Resonators aus der Waagerechten um den Winkel  $\varphi$  in Richtung des fixierten Pendels, so behält der Hohlleiter seinen Winkel relativ zum Deckel des Vakuumtanks bei und sorgt dafür, daß auch die Position des fixierten Pendels relativ zum Deckel konstant bleibt. Dadurch wird aber dieses in Richtung des freien Pendel gedrückt, so daß sich die Größe des Resonators verringert. Bei kleinen Auslenkungen ist also die Reduktion des Abstandes der Pendel zueinander ein direktes Maß für den Winkel

$$\Delta b = l \cdot \varphi, \quad (6.5)$$

wobei  $l$  die Pendellänge und  $\varphi$  den Neigungswinkel der Apparatur bezeichnet. Somit ist die Angabe einer Abstandsänderung hier gleichbedeutend mit einem Winkel ( $\Delta b \propto \varphi$ ).

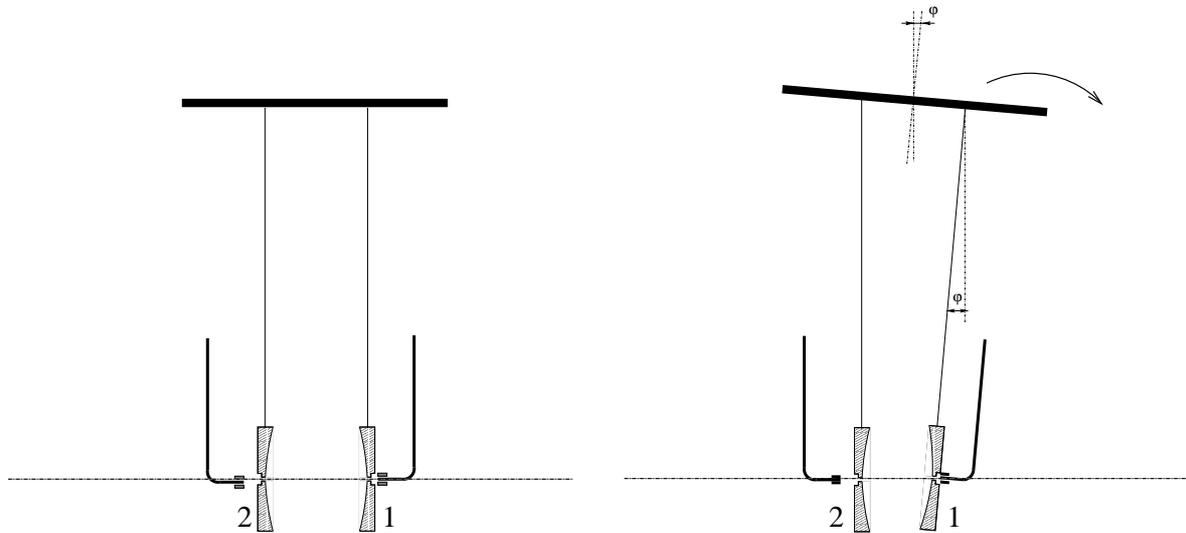


Abbildung 6.10: Die Skizze verdeutlicht das Verhalten der Pendel, falls der Resonator sich um den Winkel  $\varphi$  neigt und eines der Pendel durch einen Hohlleiter fixiert ist.

Um die Änderungen des Abstandes  $\Delta b$  für unterschiedliche Positionen der Feldmassen und in Abhängigkeit des jeweils blockierten Pendels unterscheiden zu können, wird an dieser Stelle folgende Nomenklatur eingeführt: in der ersten hochgestellten Klammer ist die jeweilige Position der Massen mit

$$\begin{aligned} \text{Referenzposition} &:= \text{R oder} \\ \text{Meßposition} &:= \text{M} \end{aligned}$$

angegeben. In der zweiten Klammer wird aufgeführt welches der beiden Pendel

$$\begin{aligned} \text{frei schwingt} &:= - \text{ oder} \\ \text{durch den Hohlleiter fixiert ist} &:= f . \end{aligned}$$

Somit bezeichnet  $\Delta b^{(R,M)(-,f)}$  die Abstandsänderung wie sie in Abbildung 6.10 dargestellt ist, wenn sich die Masse auf der rechten Seite in einer Meßposition und die auf der linken Seite in der Referenzposition befindet. Zusätzlich ist in den weiteren Ausführungen tiefgestellt noch aufgetragen, ob die Auslenkung der Pendel bei einer *Messung* bestimmt wurde, und ob der Anteil von der *Gravitation* oder der *Neigung* des Turmes herrührt.

In zwei Meßreihen wurde jeweils eines der Pendel blockiert und nur jene Masse verfahren, welche auf der Seite des festen Pendels stand, wobei die andere Masse in der Referenzposition blieb. Die so bestimmten Auslenkungen der Pendel sind in Abbildung 6.11 als Funktion der Meßposition der Feldmassen aufgetragen, wobei

$$\triangle = \Delta b^{(R,M)(-,f)} \quad \text{und} \quad \square = \Delta b^{(M,R)(f,-)} \quad (6.6)$$

entspricht. An der Ordinate des Diagramms ist zusätzlich der nach Gleichung 6.5 berechnete Auslenkungswinkel  $\varphi$  des Kryostaten bei einer Pendellänge von  $l = 2.68$  m aufgeführt. Im

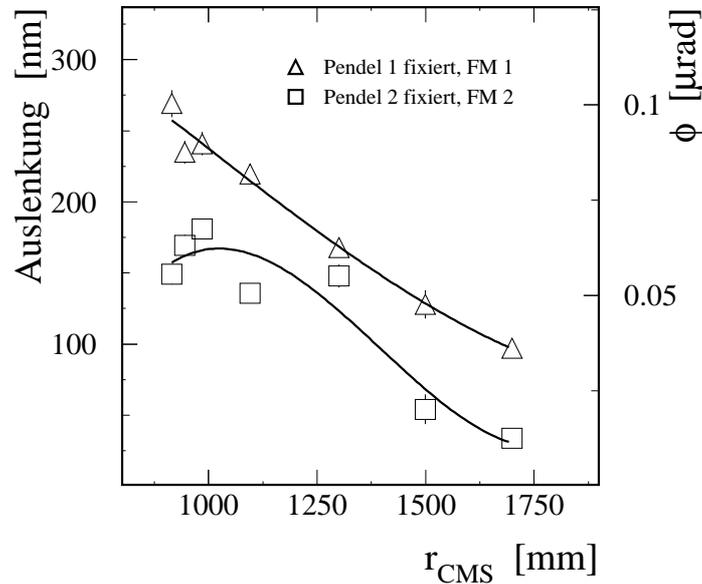


Abbildung 6.11: Dargestellt ist die Abstandsänderung der Spiegel des Resonators in Abhängigkeit von der Meßposition einer Feldmasse. Die jeweils andere Masse blieb in der Referenzposition. Bei dieser Meßreihe wurde eines der Pendel mit einem Hohlleiter fixiert.

Rahmen dieser Messungen wurden jeweils sieben Orte mit je 30 Zyklen angefahren. Deutlich ist zu sehen, daß die von Feldmasse 1 hervorgerufene Neigung des Experimentes größer ist als jene von Feldmasse 2. Außerdem unterscheidet sich der funktionale Zusammenhang zwischen Auslenkung und Position der Massen. So zeigt Masse 1 einen fast linearen Verlauf, während die Werte für Masse 2 stark schwanken. In beiden Fällen allerdings sind die Auslenkungen um mehr als eine Größenordnung größer als theoretisch rein gravitativ erwartet. Offensichtlich führt die starke Belastung des Fundamentes durch die Feldmassen zu einer Neigung des Turmes und somit zu einer zusätzlichen Auslenkung der Pendel. Da die eigentliche Messung der Gravitationskonstanten mit beiden Feldmassen durchgeführt wird, hätte die Korrektur der Neigung aus der Superposition der beiden Meßreihen ermittelt werden müssen. Diese Möglichkeit sollte durch eine weitere Messung verifiziert werden, bei der, analog zu den Meßreihen zur Bestimmung der Gravitationskonstanten, beide Feldmassen synchron und symmetrisch zum Resonator verfahren wurden. Die so erlangten Ergebnisse sind in Abbildung 6.12 aufgeführt. Dargestellt ist die Abstandsänderung der Pendel gegen die Meßposition der Feldmassen, deren Positionen von der Mitte der Abbildung zu den Rändern hin ansteigend aufgetragen sind. Im linken Teil des Diagramms sind dabei jene Werte zu sehen, bei denen Pendel Nr. 2 fixiert war und im rechten Teil jene als Pendel Nr. 1 fixiert war. Der funktionale Verlauf der gemessenen Neigung ist stetig und besitzt eine annähernd quadratische Abhängigkeit von der Position der Massen. Allerdings zeigt der Vorzeichenwechsel in der Auslenkung der Pendel eine Änderung der Richtung der Neigung des Stützgerüstes. Im Bereich der Meßpositionen nahe am Resonator dominiert die Neigung in Richtung der Masse 2 bis etwa zu einer Position von etwa  $r_{cms} \simeq 1100\text{--}1200$  mm.

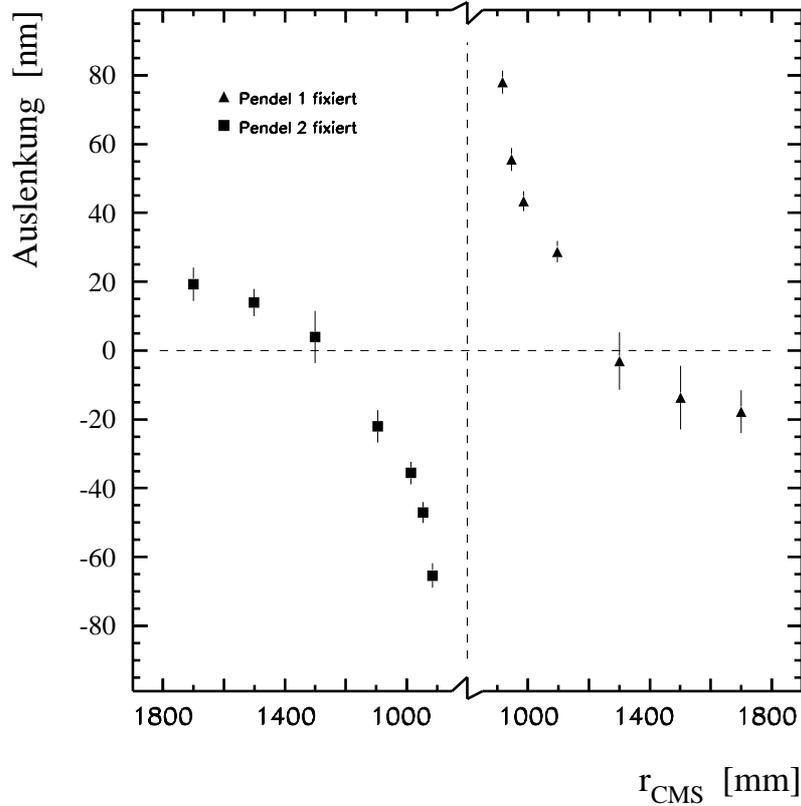


Abbildung 6.12: Dargestellt ist die Abstandsänderung der Spiegel des Resonators als Funktion der Meßposition beider Feldmassen. Bei diesen Meßreihen wurden ebenfalls eines der Pendel mit einem Hohlleiter fixiert aber beide Massen synchron und symmetrisch bewegt. Deren Positionen sind von der Mitte der Abbildung zu den Rändern hin ansteigend aufgetragen.

Danach ändert sich das Vorzeichen der Abstandsänderungen, was bedeutet, daß der Vakuumtank stärker in Richtung der ersten Masse kippt. Um diese Werte zu messen, wurde jeder der insgesamt 14 Positionen mit bis zu 240 Zyklen angefahren. Betrachtet man die einzelnen Werte, so erkennt man, daß bei einer erwarteten Auslenkung von  $\Delta b \simeq 0.65$  nm in der vordersten Feldmassenposition, die gemessenen Werte für Pendel 1 zu groß ( $\Delta b \simeq 78$  nm) und für Pendel 2 zu klein ( $\Delta b \simeq -65$  nm) sind. Somit ergibt sich mit dem Ansatz gemäß Gleichung 6.4, für die gemessene Abstandsänderungen:

$$\begin{aligned} \Delta b_{\text{Messung}}^{(M,M)(-,f)} &= \Delta b_{\text{Gravitation}}^{(M,M)(-,f)} + \Delta b_{\text{Neigung}} \\ \Delta b_{\text{Messung}}^{(M,M)(f,-)} &= \Delta b_{\text{Gravitation}}^{(M,M)(f,-)} - \Delta b_{\text{Neigung}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Bildet man nun die Differenz beider Messungen unter der Annahme, daß der gravitative Anteil in beiden Meßreihen gleich ist

$$\Delta b_{\text{Differenz}} = \Delta b_{\text{Messung}}^{(M,M)(-,f)} - \Delta b_{\text{Messung}}^{(M,M)(f,-)} \quad (6.8)$$

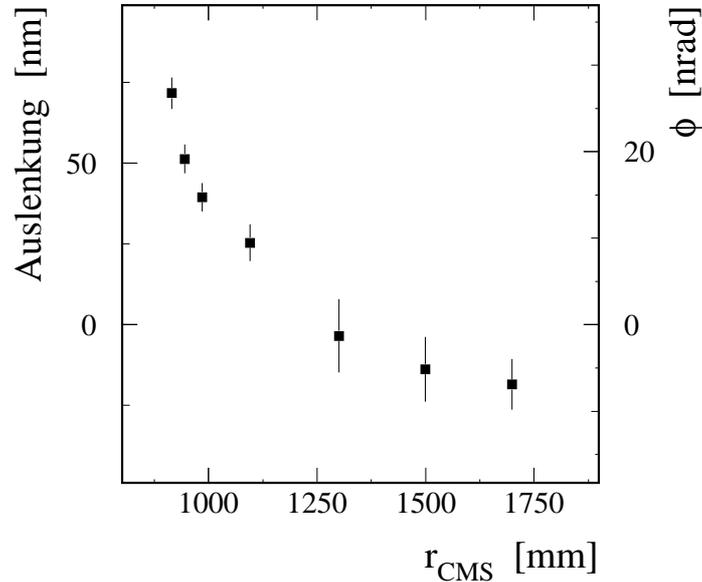


Abbildung 6.13: Die aus der Differenz der in Abbildung 6.12 errechneten Werte für die durch Neigung hervorgerufene Abstandsänderung der Pendel. An der Ordinate des Diagramms ist zusätzlich der nach Gleichung 6.5 berechnete Auslenkungswinkel  $\varphi$  des Kryostaten bei einer Pendellänge von  $l = 2.68$  m aufgeführt.

so erhält man den reinen Anteil der Neigung  $\Delta b_{\text{Neigung}}$  dieser beiden Meßreihen

$$\Delta b_{\text{Neigung}} = \frac{1}{2} \Delta b_{\text{Differenz}} . \quad (6.9)$$

Die so errechneten Werte für  $\Delta b_{\text{Neigung}}$  sind in Abbildung 6.13 als Funktion der Meßposition der Feldmassen dargestellt und zusätzlich in der folgenden Tabelle aufgetragen.

CMS-Ort	[mm]	915	945	985	1095	1300	1500	1700
$\Delta b_{\text{Messung}}^{(M,M)(-,f)}$	[nm]	78.01	55.57	43.38	28.74	-3.08	-13.66	-17.76
$\Delta b_{\text{Messung}}^{(M,M)(f,-)}$	[nm]	-65.36	-47.09	-35.58	-21.98	3.90	13.95	19.31
$\Delta b_{\text{Neigung}}$	[nm]	71.69	51.33	39.48	25.36	-3.49	-13.80	-18.54
Fehler	[nm]	3.46	3.16	3.08	4.01	7.99	7.11	5.55

Auch hier wechselt das Vorzeichen des Neigungsanteiles in Abhängigkeit vom Ort der Massen. Offensichtlich ist dieses Verhalten nicht mit jenen Daten verträglich, die mit nur einer Feldmasse ermittelt wurden. Dort ist immer die Auswirkung von Masse Nr. 1 dominant, so daß die Differenzwerte immer dasselbe Vorzeichen besitzen. Daraus folgt, daß das Superpositionsgesetz nicht für die von den Feldmassen erzeugte Deformation des Hallenbodens gilt:

$$\text{Neigung}_{\text{FM1}} - \text{Neigung}_{\text{FM2}} \neq \text{Neigung}_{\text{FM1+FM2}} .$$

Mit den so ermittelten Werten für die Neigung ist es möglich Korrekturwerte für diesen Anteil bei einer Gravitationsmessung zu errechnen. In Messungen bei denen ein Pendel fixiert ist,

ergibt sich durch die Neigung des Stützgerüsts eine Änderung des Pendelabstandes gemäß

$$\Delta b_{\text{fixiert}} = l \cdot \varphi_{\text{fixiert}} , \quad (6.10)$$

wobei  $l$  die Pendellänge und  $\varphi$  den Winkel der Neigung bezeichnet. Schwingen beide Pendel frei, so überträgt sich die Neigung des Vakuumtanks auf den Abstand zwischen beiden Pendel nach

$$\Delta b_{\text{frei}} = \Delta l \cdot \varphi_{\text{frei}} , \quad (6.11)$$

wie in Abschnitt 3.2.4 hergeleitet. Dabei ist der Skalierungsfaktor zwischen Neigungswinkel und Auslenkung der Pendel die Differenz der beiden Pendellängen  $\Delta l$ . Unter der Annahme, daß die Neigung des Stützgerüsts nicht davon beeinflußt wird, ob ein Pendel fixiert ist oder nicht, muß der Neigungswinkel  $\varphi$  für beide Meßarten gleich sein

$$\varphi_{\text{fixiert}} \equiv \varphi_{\text{frei}} . \quad (6.12)$$

Mit Hilfe dieser Annahme und den Gleichungen 6.10 und 6.11 kann der Neigungsanteil  $\Delta b_{\text{frei}}$  in einer Messung der Gravitationskonstanten ermitteln werden:

$$\Delta b_{\text{frei}} = \frac{\Delta l}{l} \Delta b_{\text{fixiert}} . \quad (6.13)$$

Der Neigungsanteil bei einer beliebigen Gravitationsmessung ergibt sich also aus der gemessenen Auslenkung bei fixierten Pendeln skaliert über den Längenunterschied der Pendel relativ zur Pendellänge.

Um zu bestimmen, ob die Neigung die gemessene Abstandsänderung vergrößert oder verkleinert, benötigt man das Vorzeichen der Differenz der beiden Pendellängen ( $\Delta l = l_1 - l_2$ ). Gemäß Abbildung 6.12 ist die Neigung des Experimentaufbaus positionsabhängig. Falls  $\Delta l < 0$  führt eine Neigung des Apparates in Richtung der ersten Masse zu einer Verringerung der Länge des Gaußstrahles, also zu einem Anstieg der Resonanzfrequenz. Mißt man parallel dazu die Gravitationskonstante ist die bestimmte Frequenzänderung zu groß. Neigt sich hingegen der Vakuumtank in Richtung der zweiten Feldmasse, so vergrößert dieses den Abstand der beiden Pendel, der Frequenzhub wird kleiner als erwartet. Also muß man die Korrekturwerte von den gemessenen Werten abziehen, um den rein gravitativen Anteil zu erhalten. Dieses Verhalten dreht sich um, falls die Pendellängen wechseln, so daß sich in Abhängigkeit von deren Differenz ergibt

$$\begin{aligned} \Delta l < 0 & \rightarrow \Delta b_{\text{Gravitation}} = \Delta b_{\text{Messung}} - \Delta b_{\text{Neigung}} \\ \Delta l > 0 & \rightarrow \Delta b_{\text{Gravitation}} = \Delta b_{\text{Messung}} + \Delta b_{\text{Neigung}} . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Um ein Maß für die Präzision und Übereinstimmung der in Abbildung 6.12 aufgetragenen Daten zu erhalten, kann man den mittels Differenzbildung bestimmten Neigungsanteil auch mit Hilfe von numerischen Rechnungen ( $=\Delta b_{\text{Rechnung}}$ ) verifizieren. Dazu gilt als Ausgangspunkt,

daß das fixierte Pendel weder durch die Gravitation der Feldmassen noch durch sonstige Einflüsse ausgelenkt wird. Eingesetzt in den oben ausgeführten Zusammenhang

$$|\Delta b_{Neigung}| = |\Delta b_{Messung}^{fixiert} \pm \Delta b_{Rechnung}^{Gravitation}| \quad (6.15)$$

ergibt sich für beide Meßreihen ein unabhängiger Betrag für die Neigung des Apparates. Vergleicht man die so errechneten Werte, ergibt sich, daß beide innerhalb der Unsicherheiten gut übereinstimmen.

Die Ungenauigkeit bei der Bestimmung der Auslenkung der Pendel im Falle eines fixierten Pendels ( $\delta f_{Neigung}$ ) fließt — skaliert mit dem Längenunterschied — linear in den systematischen Fehler der Gravitationskonstanten ein

$$\frac{\delta G}{G} = \frac{\delta(\delta f_{Neigung}^{skaliert})}{f_{Messung}}. \quad (6.16)$$

In dieser Meßreihe betragen die so erreichten relativen Genauigkeiten für die vorderen Meßpositionen etwa 87 ppm. Damit ist dieser Fehler der zur Zeit dominierende systematische Beitrag und begrenzt die Genauigkeit der Messung der Gravitationskonstante  $G$ .

## 6.4 Choke-Effekt

Den größten Anteil an der Unsicherheit der Ergebnisse in den Meßreihen der Jahre 1998/99 ergab sich durch den sogenannten Choke-Effekt. Dabei führen Variationen des Abstandes zwischen dem Resonatorspiegel und dem Drosselflansch zu Änderungen der Resonanzfrequenz. Dieser Abstand ist aber zum einen durch die gravitative Auslenkung der Pendelkörper und zum anderen durch die Neigungen des Stützgerüsts Veränderungen von  $\simeq 80\mu\text{m}$  unterworfen. Das zu jener Zeit gemessene Verhalten der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Abstand der Koppelhohlleiter zur Rückseite der Resonatorspiegel ist in Abbildung 6.14 aufgetragen (aus [Sch99]). Dabei verdeutlicht das obere Diagramm das Verhalten der Frequenz bei Positionsvariationen für den Einkoppelhohlleiter und das untere Diagramm das Verhalten für den Auskoppelhohlleiter. Offensichtlich ändert sich die Resonanzfrequenz über einen Bereich von mehr als 25 kHz, mit Schwankungen von bis zu 100 Hz/ $\mu\text{m}$ . Da die exakte Position des Hohlleiters während der Meßreihen unbekannt war, mußte die maximal mögliche Steigung berücksichtigt werden, welche zu einer Unsicherheit von 7000 ppm führte.

Zusätzlich war die belastete Güte des Resonators mit maximal 40 % der unbelasteten Güte geringer als in den vorherigen Meßreihen. Bei jenen waren Werte von  $\leq 94$  % der unbelasteten Güte [Wal95] erreicht worden. Außerdem waren in den Meßreihen vor 1998 die Schwankungen der Resonanzfrequenz aufgrund dieses Einflusses erheblich geringer. Die Abhängigkeiten lagen im Bereich von  $\approx 1.5$  Hz/ $\mu\text{m}$ , bei Verwendung von Obermoden um  $\approx 20$  Hz/ $\mu\text{m}$  [Sch99]. Da in der damaligen Abschätzung des Fehlers der genaue Betrag der Neigung nicht bekannt war, führten die gravitativen Auslenkungen zu einer Unsicherheit in der Größenordnung von etwa 10 ppm, die zu jenem Zeitpunkt vernachlässigt wurden. Erst Messungen von [Sch95] im Jahre 1995 beschreiben die möglichen Fehler für die in [Wal95] aufgeführten Daten mit etwa 260 ppm.

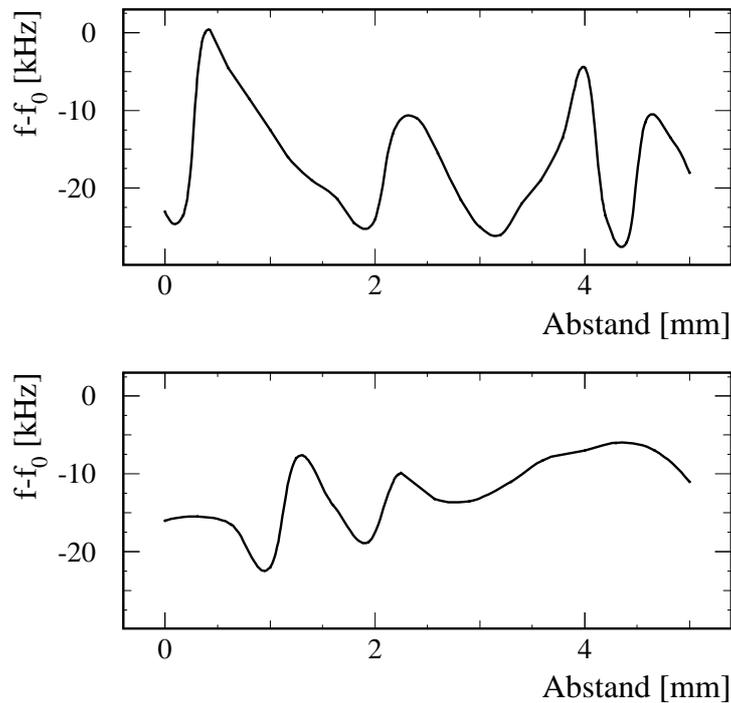


Abbildung 6.14: Die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom Abstand des Drosselflansches zur Rückseite des Spiegels. Das obere Diagramm verdeutlicht das Verhalten der Frequenz bei Positionsvariationen für den Einkoppelhohlleiter, der untere Teil das Verhalten für den Auskoppelhohlleiter. Die [Sch99] entnommenen Werte gelten für die mit **B** gekennzeichnete Geometrie in Abbildung 6.15.

Die signifikante Verstärkung des Choke-Effektes und Reduzierung der belasteten Güte in den Jahren 1998/99 ergibt sich aus der Überarbeitung beider Pendel [Sch99] mit dem Ziel eine komplette Zylindersymmetrie des Resonators, sowie eine stärkere Kopplung zu erreichen. Zur Verdeutlichung der vorgenommenen Arbeiten sei auf die Skizzen in Abbildung 6.15 verwiesen. Aufgetragen ist jeweils im linken Teil der Zeichnung die Rückseite des Spiegels in der Aufsicht und im Schnitt, während der rechte Teil die jeweils verwendeten Hohlleiter und Drosselflansche darstellt. Die einzelnen Schnittzeichnungen verdeutlichen die Geometrie der Hohlleiterkammine sowie die Änderung in der Länge des Koppelhohlleiters. Die 1997 durchgeführten Veränderungen können in Abbildung 6.15 mit dem Schritt von **A** nach **B** nachvollzogen werden. Die Geometrie des Koppelhohlleiters wurde von rechteckig auf rund überarbeitet und die Dicke des Spiegels reduziert, was zu einer Verkürzung des Koppelloches von 4,5 mm auf 1,8 mm Länge führte (vgl. auch in Abschnitt 4.1.1 Abbildung 4.4). Da in diesem Koppelleiter eine elektromagnetische Welle nicht ausbreitungsfähig wäre, ist er mit dem Dielektrikum Lanthanaluminat aufgeweitet. Dadurch wird die „cut-off“ Frequenz überschritten und der noch wirksame Dämpfungsbelag

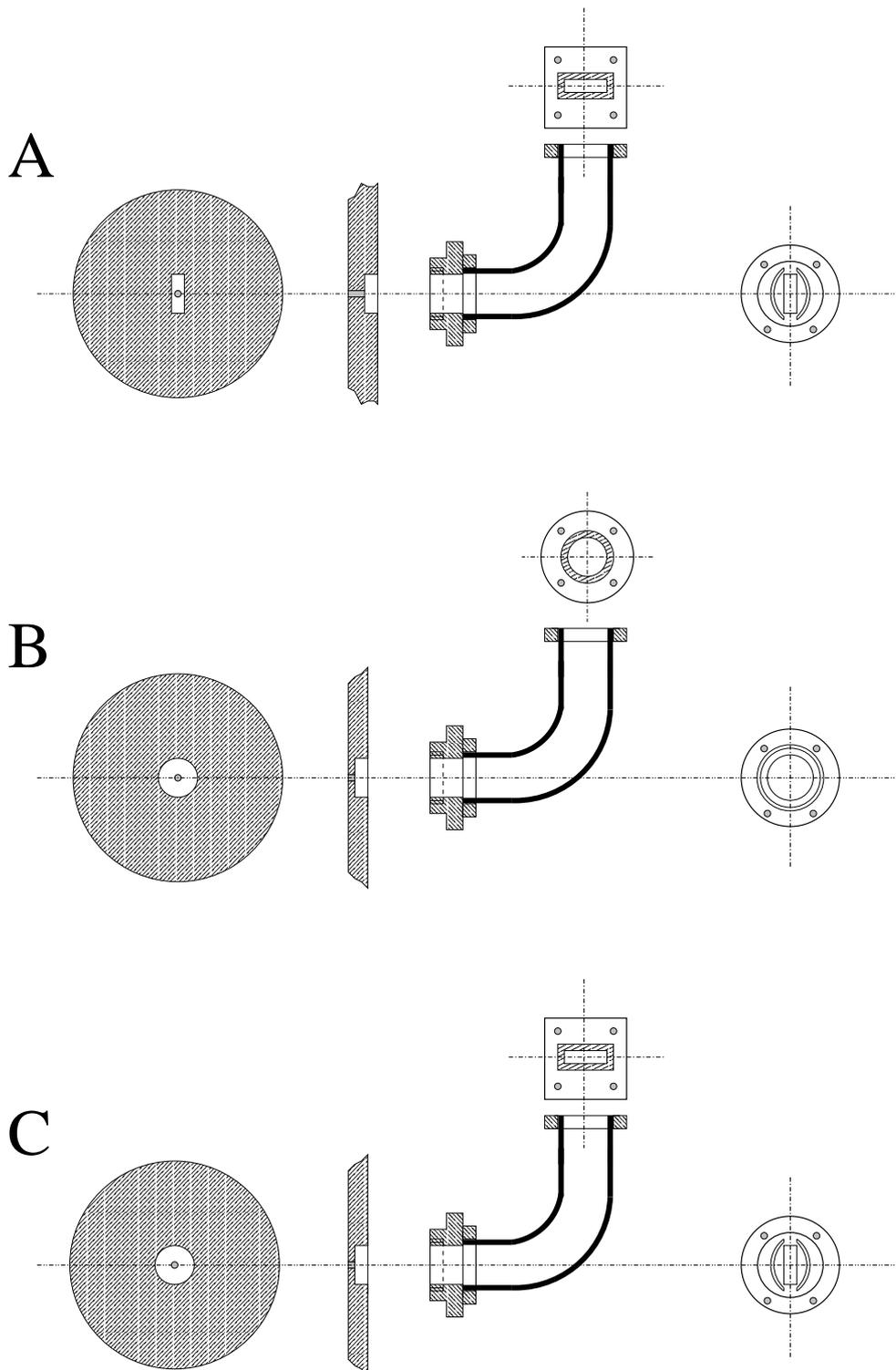


Abbildung 6.15: Schematische Darstellung der verschiedenen geometrischen Kombinationen von Hohlleiter und Hohlleiterkamin. Aufgetragen ist jeweils im linken Teil der Zeichnungen die Rückseite des Spiegels in der Aufsicht und im Schnitt, während der rechte Teil die jeweils verwendeten Hohlleiter und Drosselflansche darstellt.

infolge der dielektrischen Verlust ergibt sich zu [Peh88]

$$\alpha = \sqrt{\varepsilon_r} \frac{\pi}{\lambda_0} \tan \delta_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_G}\right)^2}} \quad , \quad (6.17)$$

wobei  $\lambda_0$  die Wellenlänge,  $\lambda_G$  die Grenzwellenlänge,  $\tan \delta_\varepsilon$  den Verlustwinkel ( $\tan \delta_\varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-5}$ ) und  $\varepsilon_r$  die Dielektrizitätskonstante ( $\varepsilon_r=24.5$ ) bezeichnen. Damit führt die Verringerung der Länge des Koppeloches nur zu einer Erhöhung der durchgekoppelten Leistung um  $\simeq 0.5$  %. Diese Steigerung ist aber faktisch vernachlässigbar, so daß mit ihr nicht die gemessene starke Reduzierung der belasteten Güte  $Q_L$  begründet werden kann.

Um diesen Sachverhalt zu klären betrachtet man das Koppeloch als aufgeweiteten Zirkularhohlleiter, der sich zwischen dem Kamin und dem Resonator befindet. Die Impedanzen der Leitungen sind nicht aufeinander angepaßt, so daß Teile der Feldstärke reflektiert werden. Berechnet man aus den Impedanzen des Kamins und des Koppeloches den Reflexionsfaktor  $r$ , so ergeben sich Werte von  $r \approx 5$  % [Mei92]. Um eine Abschätzung der sonstigen Reflexionsfaktoren zu erhalten, ist es aufschlußreich, die verschiedenen Querschnittsflächen an den einzelnen Übergangsstellen zu betrachten. Mittels des Zusammenhanges, daß für einen lastseitigen Reflexionsfaktor näherungsweise

$$|r| \approx \frac{\text{Blendenfläche}}{\text{Querschnittsfläche}} \quad (6.18)$$

gilt [Mon48], kann man weitere Reflexionsfaktoren bestimmen. Dabei soll der Begriff „Blendenfläche“ verdeutlichen, daß an den Übergängen zwischen verschiedenen Hohlleitergeometrien auch Änderungen der Hohlleiterquerschnittsflächen bestehen, die wie Blenden wirken können. Die sich so ergebenden Reflexionsfaktoren haben sicher mehr qualitativen als quantitativen Charakter, genauere Werte ließen sich nur durch Simulationsrechnungen des Gesamtsystems bestimmen. Unter diesem Ansatz ergibt die Änderung der Querschnittsfläche am Übergang Kamin-Koppeloch im Falle **A** einen Reflexionsfaktor von  $|r| \approx 60$  %, wobei für den dielektrisch aufgeweiteten Koppelleiter der Querschnitt eines Leiters mit derselben Grenzfrequenz aber ohne Dielektrikum angesetzt wurde. Im Falle einer reinen Zylindersymmetrie (**B**) führt der Übergang nur zu einem Reflexionsfaktor von  $|r| \approx 20$  %, weshalb mehr Leistung in den Resonator gekoppelt wird. Die schlechtere Koppelgüte kann somit über den kleineren Reflexionsfaktor an dem Übergang Koppelkamin auf Koppelleiter erklärt werden.

Die Koppellöcher wirken im Resonator wie Störvolumina und führen zu einer Frequenzverschiebung. Diese kann mittels des Slater Theorems [Sla69] berechnet werden, welches den Zusammenhang zwischen der Frequenzverschiebung  $\Delta f$  und einem Störvolumen  $V$  beschreibt

$$\frac{\Delta f}{f} = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 - \mu_0 \mu_r H^2}{4U} dv \quad . \quad (6.19)$$

Dabei bezeichnet  $f$  die Frequenz,  $\varepsilon$  die Permittivität,  $\mu$  die Permeabilität,  $E$  das elektrische Feld,  $H$  das magnetische Feld und  $U$  die im Resonator gespeicherte Energie. Die hier gewählte magnetische Lochkopplung führt zu einer Reduktion der Resonanzfrequenz gegenüber jener des

nichtangekoppelten Resonators. Durch die stärkere Kopplung im Falle **B** steigt die dem Resonator angebotene Amplitude der magnetischen Feldstärke, womit die Frequenzverschiebung weiter wächst. Diese Feldstärke wird aber bei Variation der Leitungslänge zwischen Kamin und Koppelhohlleiter verändert, woraus die Schwankungen in der Resonanzfrequenz resultieren. Somit führt die verstärkte Ankopplung des Resonators zu einer stärkeren Schwankung der Resonanzfrequenz bei Änderungen der Positionen der Koppelhohlleiter.

Aufgrund begrenzter finanzieller Mittel konnten im Rahmen dieser Arbeit keine neuen Spiegel erworben werden. Somit wurde versucht durch Änderungen auf der Seite der Hohlleiter die starke Kopplung des Mikrowellensystems an den Resonator zu reduzieren. Als Lösung ergab sich die unter **C** dargestellte Anordnung. Der Resonator wird dabei mittels rechteckiger Hohlleiter gespeist, so daß ein Geometriewechsel im Spalt zwischen Spiegel und Hohlleiter stattfindet. An dieser Stellen ergibt sich ein Impedanzsprung, der gemäß 6.18 zu einem Reflexionsfaktor von  $|r| \approx 50\%$  führt. Der folgende Übergang vom Kamin auf das Dielektrikum erzeugt, wie oben beschrieben, danach einen weiteren Reflexionsfaktor von  $|r| \approx 20\%$ . Durch den höheren Anteil an gestreuter und reflektierter Leistung ist die am Koppelloch bereitstehende Feldstärke geringer, wodurch die Ankopplung sinkt und die Koppelgüte steigt.

Messungen der Koppelfaktoren bestätigen diese Überlegungen. Dabei ergaben sich Werte von  $\beta_1 \approx 15\%$ , jeweils in Abhängigkeit von der verwendeten Mode. Unter der Annahme einer symmetrischen Kopplung ( $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ) erhält man somit für die unbelastete Güte gemäß

$$Q_0 = Q_L (1 + 2\beta) \quad (6.20)$$

Werte um  $Q_0 \simeq 250 - 260 \cdot 10^3$ . Diese liegen etwas unter jenen, welche in den ersten Jahren des Experimentes bestimmt wurden [Wal01]. Der Rückgang ist möglicherweise auf Oxidationen der Spiegeloberflächen zurückzuführen.

Unter der Annahme, daß sich die unbelastete Güte nicht verändert hat, lassen sich die Koppelfaktoren und die Koppelgüten für den Zeitraum 1998/99 berechnen. Diese Werte sind zusammen mit den entsprechenden Beträgen aus der aktuellen Meßreihe und jenen aus [Wal95] in der folgenden Tabelle aufgetragen.

Koppelfaktor	$Q_L$	$Q_K$	Jahre
$\beta \simeq 1\%$	max. $274 \cdot 10^3$	$\rightarrow \approx 25 \cdot 10^6$	bis 1998
$\beta \simeq 90\%$	max. $100 \cdot 10^3$	$\rightarrow \approx 0.3 \cdot 10^6$	1998/99
$\beta \simeq 15\%$	max. $210 \cdot 10^3$	$\rightarrow \approx 2.2 \cdot 10^6$	ab 2000

Offensichtlich konnte durch die Änderung der Geometrie der Koppelhohlleiter die Kopplung um einen Faktor sechs reduziert und damit die belastete Güte verdoppelt werden.

In den neuen Meßreihen des Jahres 2000 fanden hauptsächlich zwei Resonanzen mit den Frequenzen

$$f=22.46 \text{ GHz und } f=23.08 \text{ GHz}$$

Verwendung. Für jede dieser Moden ist die Abhängigkeit der Resonanzen von der Position der Hohlleiter vermessen worden. In Abbildung 6.16 sind die Auswirkungen von Änderungen

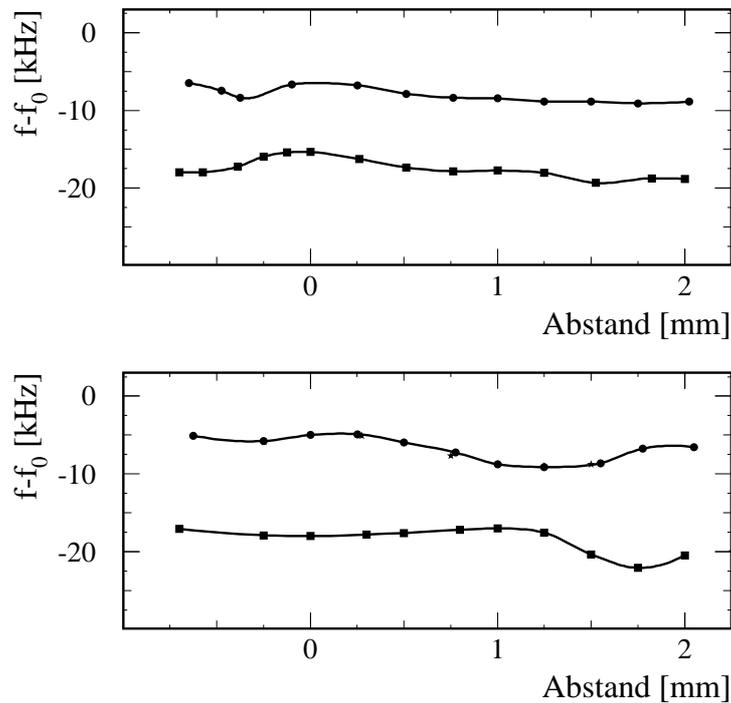


Abbildung 6.16: Die Variation der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Abstand des Hohlleiters zur Spiegelrückseite. Im oberen Teil sind die Auswirkungen für 23 GHz aufgetragen und im unteren Teil für 22 GHz. Die mit  $\circ$  bzw.  $\star$  markierten Werte sind für den Ein-, die mit  $\square$  für den Auskoppelhohlleiter bestimmt worden. Der Wert „Null“ bezeichnet jeweils jenen Ort, der in den Meßreihen Verwendung fand.

des Abstandes der Hohlleiter auf die Resonanzfrequenz dargestellt. Im oberen Teil sind die Ergebnisse für die 23 GHz Resonanz aufgetragen, wobei die Werte für die Einkopplung mit  $\circ$  und die für die Auskopplung mit  $\square$  markiert sind. In der unteren Darstellung sind die Werte für die 22 GHz Resonanz aufgetragen, wobei auch hier  $\circ$  aber auch  $\star$  die Werte für die Einkopplung und  $\square$  die Werte für die Auskopplung markieren. Der Wert „Null“ bezeichnet jeweils jenen Ort, der in den Meßreihen Verwendung fand. Deutlich ist die geringere Schwankungsbreite der Frequenzen bei beiden Moden zu erkennen. Die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse läßt sich anhand der zwei Meßsätze erkennen, welche im unteren Teil der Abbildung eingetragen sind. Die in Abbildung 6.17 dargestellten Werte für die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der seitlichen Verschiebung der Hohlleiter sind sehr flach und stetig. Durch Anpassen einer linearen oder quadratischen Funktion an die Ergebnisse ergeben sich für die Abhängigkeiten der Resonanzfrequenz von der Variation des Abstandes der Hohlleiter zu den Spiegeln die folgenden Werte

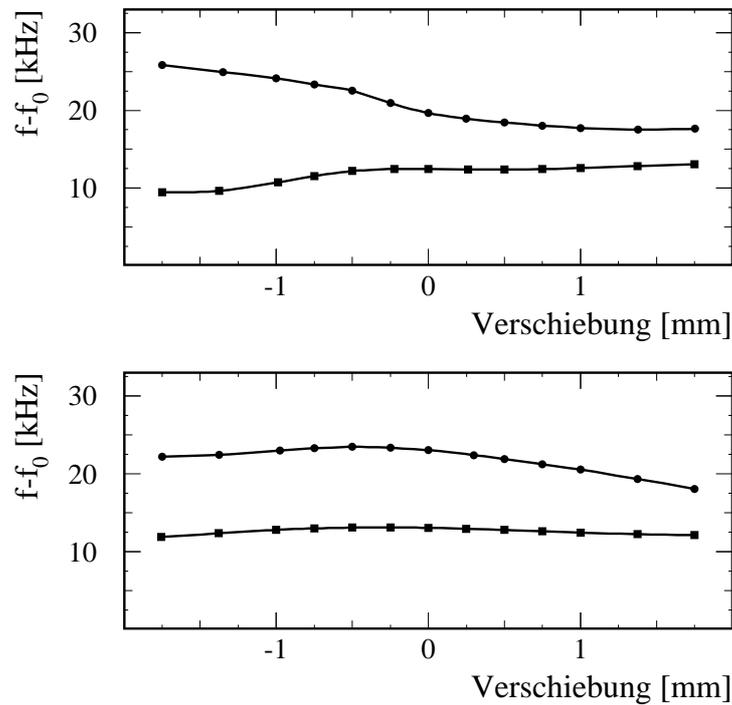


Abbildung 6.17: Die Variation der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von einer seitlichen Verschiebung des Hohlleiters bezogen auf die Resonatorachse. Im oberen Teil sind die Auswirkungen für 23 GHz aufgetragen und im unteren Teil für 22 GHz. Die mit  $\circ$  markierten Werte sind für den Ein-, die mit  $\square$  für den Auskoppelhohleiter bestimmt worden.

	Einkopplung [Hz/ $\mu\text{m}$ ]	Auskopplung [Hz/ $\mu\text{m}$ ]
23 GHz	0.28	0.48
22 GHz	0.48	0.40

Bei einer Auslenkung der Pendel durch die Neigung von bis zu 72 nm plus jeweils maximal 6.5 nm durch die Gravitation führt dieses zu einer Unsicherheit für die Gravitationskonstante von

$$\delta G/G=41 \text{ ppm für } 22.46 \text{ GHz und } \delta G/G=36 \text{ ppm für } 23.08 \text{ GHz.}$$



## Kapitel 7

# Bestimmung der Konstanten $G$

Das Ziel dieser Arbeit ist die präzise Bestimmung der Newtonschen Gravitationskonstanten  $G$ . Die Art ihrer Ermittlung aus den Meßreihen sowie die dabei erhaltenen Werte sind Thema dieses Kapitels. Weiterhin wird die in Abschnitt 6.3 dargelegte Korrektur auf zurückliegende Meßreihen angewendet, sowie Gültigkeitsbereiche für eine Abweichung der Gravitationskraft vom  $1/r^2$  Gesetz und für zeitliche Änderungen der Gravitationskonstanten angegeben.

### 7.1 Analyse

Werden die Massen aus der Referenzposition in die, näher am Resonator gelegenen, Meßpositionen bewegt, so zieht die gravitative Kraft die beiden Resonatorpendel auseinander. Eine Vergrößerung des Abstandes führt zu einer Verkleinerung der Resonanzfrequenz. Aus dem Betrag der Frequenzänderung ( $\Delta f$ ) läßt sich bei genauer Kenntnis der metrologischen Größen die Newtonsche Konstante berechnen. Das Ziel muß also das präzise Ermitteln dieser Frequenzvariation sein. Theoretisch genügt dazu ein einmaliges Verfahren der Massen, solange man die Resonanzfrequenz und damit den Abstand der Pendel vor und nach der Bewegung der Massen mit ausreichender Genauigkeit kennt. Allerdings erleichtert eine regelmäßige Variation der Feldmassenpositionen die Trennung des Signals von anderen statischen Feldern sowie Fluktuationen jeglicher Art.

In den Meßreihen an diesem Experiment hat es sich als sinnvoll erwiesen die Position der Feldmassen alle 15 Minuten zu wechseln. Dieser Wert ist größer als die zur Bewegung der Massen benötigte Zeit und viel größer als die Zeitkonstante des digitalen Tiefpaßfilters ( $\approx 1$  Minute), welche wiederum viel größer als die Schwingungsdauer der Pendel ist. Diese Abstufung der Zeitkonstanten führt zu einer Modulation der Resonanzfrequenz mit einer Form, welche nur wenig von einem idealen Rechteck abweicht. Das Zeitintervall ist weiterhin lang genug, um hochfrequentes Rauschen durch hohe Statistik zu unterdrücken. Andererseits zeigen die Frequenzdaten stetige, zeitlich langsame Änderungen, welche hauptsächlich auf äußere Temperatureinflüsse zurückzuführen sind und auch als Drift bezeichnet werden. Für diese ist die Zeitspanne zu kurz um die Daten signifikant zu beeinflussen. Die Länge eines Meßzyklus, der kleinsten Einheit um eine Frequenzvariation zu messen, beträgt somit 30 Minuten, zuzüglich der Zeit, die die

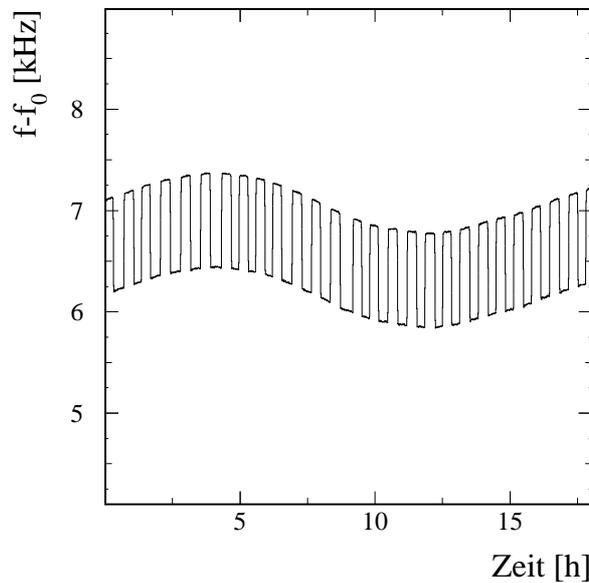


Abbildung 7.1: Die Resonanzfrequenz als Funktion der Zeit über einen Zeitraum von etwa 18 Stunden. Deutlich sind die etwa 0.95 kHz großen Änderungen der Frequenz alle 15 Minuten durch die Variation der Feldmassenpositionen zu erkennen.

Feldmassen brauchen um von der Referenz- in die Meßposition bzw. umgekehrt zu gelangen. Der sich damit ergebende Verlauf der Resonanzfrequenz ist beispielhaft in Abbildung 7.1 über einen Zeitraum von 18 Stunden dargestellt. Man erkennt die Variation der Frequenz um ungefähr 0.95 kHz alle 15 Minuten, wobei diese Zweitspanne leicht variiert, insofern als die Anzahl der Iterationen, die das Relativ-Meßsystem benötigt um die Massen zu positionieren, leicht schwanken kann. Ist die Position erreicht beginnt die Netto-Meßzeit von 15 Minuten.

So gesehen ist der gesamte Meßvorgang sehr periodisch und resultiert in einer Zeitreihe von Frequenzänderungen, erzeugt durch die gravitative Kraft der Feldmassen. Der zeitliche Verlauf der Resonanzfrequenz läßt sich deshalb gemäß folgendem Ausdruck darstellen

$$f(t) = A \cdot R(t)/2 + \text{Rauschen}(t, \tau \ll T) + \text{Drifteffekte}(t, \tau \gg T) + f_0 . \quad (7.1)$$

Die Funktion  $R(t)$  beschreibt dabei eine Stufenfunktion, welche die Werte +1 und -1 annimmt, jeweils für einen Zeitraum von  $T/2$ , wobei  $T$  die Dauer eines Meßzyklus darstellt. Mit  $A$  wird die zu bestimmende Amplitude der Änderung bezeichnet. Unter dem Begriff „Rauschen“ sollen alle hochfrequenten Fluktuationen wie Elektronikrauschen oder Mikroseismik zusammengefaßt werden, deren Zeitkonstanten  $\tau$  viel kleiner sind als  $T$ . Niederfrequente Fluktuationen, mit Zeitkonstanten  $\tau \gg T$ , umfaßt der Begriff „Drifteffekte“. So erkennt man in Abbildung 7.1 eine zeitlich langsame Änderung der Resonanzfrequenz von etwa 0.4 kHz über den gezeigten Zeitraum. Dabei handelt es sich um die Auswirkungen der Neigung des Stützgerüsts, ausgelöst durch die äußeren Temperaturschwankungen, wie in Abschnitt 6.2.1 dargelegt. Variationen der Resonanzfrequenz aufgrund von Schwankungen in der Temperatur der Aufhängung sind in

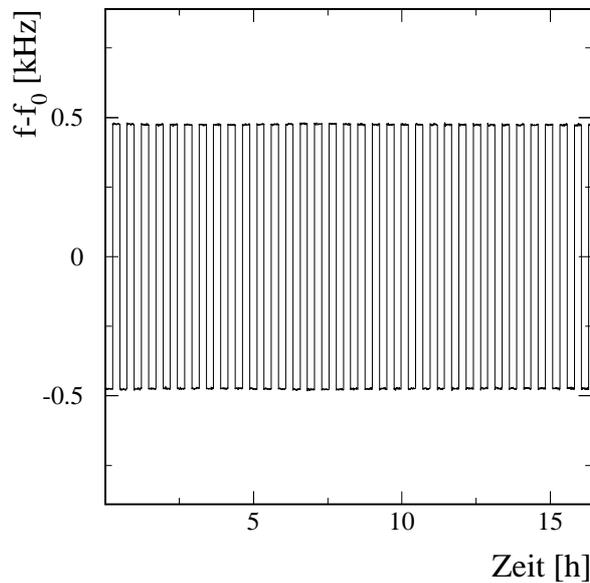


Abbildung 7.2: Die Daten aus der vorherigen Abbildung 7.1 nach der Korrektur der Drifteffekte mittels des im Text beschriebenen Faltungsverfahrens.

dieser Meßreihe zu vernachlässigen, da die aktive Temperaturstabilisierung lief.

Zur Bestimmung der Amplitude  $A$  der Frequenzänderung gibt es verschiedene Auswertemethoden, welche mathematisch zwar gleichwertig sind, sich aber in spezifischen Eigenschaften unterscheiden. So kann man Fourier-Reihen, Bandpaß-Filter oder Korrelationsverfahren verwenden [Sch92]. Weiterhin ist es möglich im Spektrum der Resonanzfrequenz die Fourier Komponenten der, durch das periodische Bewegen der Massen, eingefalteten Rechteckfunktion zu erkennen. Die Amplitude der Modulation ergibt sich dann aus dem Flächeninhalt einer, der Fourier Komponenten zugehörigen Linie der spektralen Dichte [Sch92]. Diese Art der Analyse bietet sich hauptsächlich bei kleinen Amplituden an.

In diesem Experiment fand eine äquivalente Methode Anwendung, bei welcher leicht Informationen über mögliche systematische Einflüsse gewonnen werden können. Der erste Schritt besteht dabei in einer Driftkorrektur der Daten. Dazu findet das Faltungsverfahren aus [Wal95] Verwendung, bei dem durch Subtraktion der Meßdaten von sich selbst, die sich nur langsam ändernden äußeren Einflüsse herausfallen, ohne die eigentliche Meßgröße  $A$  zu beeinträchtigen

$$\bar{f}(t) = [f(t) - f(t + T/2)] / 2 . \quad (7.2)$$

Dieser iterative Algorithmus eliminiert die niederfrequenten Fluktuationen um mehr als eine Größenordnung. Die Auswirkung dieses Vorgehens auf die Daten zeigt sich in Abbildung 7.2, in der jene Zeitreihe aus der vorherigen Abbildung verwendet wurde. Der zweite Analyseschritt besteht in der Betrachtung der Projektion der Zeitreihen  $\bar{f}(t)$  auf die Frequenzachse, was Abbildung 7.3 verdeutlicht. Dort sind die beiden Verteilungen um  $\pm < \bar{f}(t) / 2 >$  aufgetragen, welche sich durch die Projektion der Daten aus Abbildung 7.2 ergeben. Eine dieser beiden Ver-

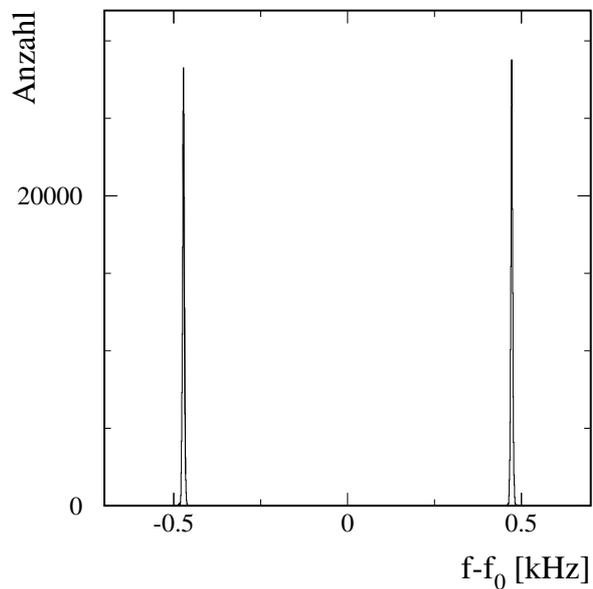


Abbildung 7.3: Die Projektion der Daten aus Abbildung 7.2 auf die Frequenzachse erzeugt zwei Verteilungen um  $\pm \langle \Delta f/2 \rangle$ .

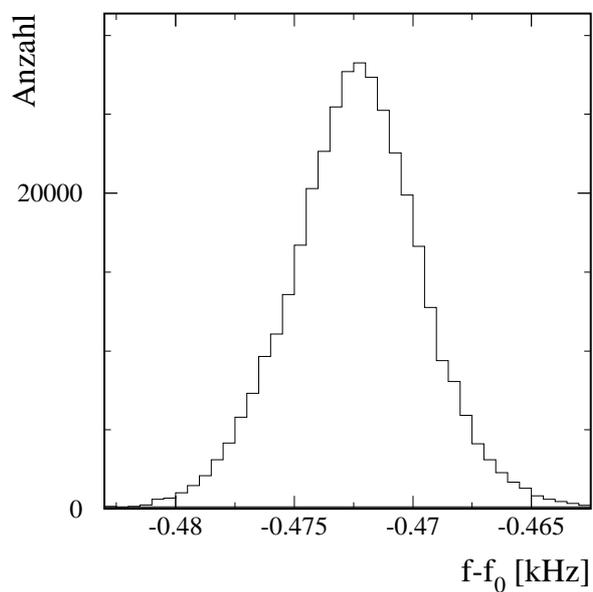


Abbildung 7.4: Ein der beiden aus der Projektion der Frequenzdaten entstandenen Verteilungen um  $\langle \Delta f/2 \rangle$ .

teilungen ist zusätzlich in Abbildung 7.4 aufgetragen, wo man die Gaußverteilung der einzelnen Frequenzwerte um den mittleren Frequenzhub erkennt. Abweichungen von dieser Form wären ein deutlicher Hinweis für einen systematischen Fehler. Durch anpassen einer Gaußfunktion an diese Verteilungen und Subtraktion der Mittelwerte ergibt sich dann die mittlere Amplitude des Frequenzhubes. Entscheidend für die statistische Unsicherheit, mit der die Amplitude  $A$  der Frequenzmodulation bestimmt werden kann, ist die Anzahl der gemessenen Zyklen. Das verwendete Verfahren zur Bestimmung der Modulationsamplitude ermöglicht eine absolute Auflösung von etwa 0.1 Hz, entsprechend etwa 1 pm.

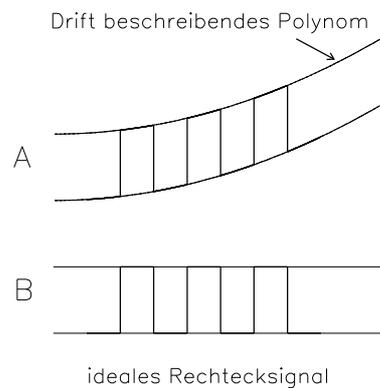


Abbildung 7.5: *Subtraktion der mittels eines Polynoms beschriebenen Drifteffekte auf den Meßwerten (A) ergibt das reine Rechtecksignal (B) aufgrund der Bewegung der Massen.*

Eine weitere, im Rahmen dieser Arbeit verwendete, Methode der Auswertung besteht in der Anpassung eines Polynoms an die Frequenzdaten [Sch95][Sch99]. Nach Subtraktion von Daten und Polynom erhält man eine Rechteckfunktion, deren Sprunghöhe dem Frequenzhub entspricht. Die Abbildung 7.5 soll dieses Vorgehen verdeutlichen, in der unter **A** ein Ausschnitt aus einer Meßreihe zu sehen ist. Um diesen Teil auszuwerten, paßt man an die vier Intervalle in denen die Feldmassen in der Referenzposition standen, ein Polynom vierten Grades an. Es beschreibt die niederfrequenten Schwankungen der Frequenz, unter der Annahme, daß diese nicht mit den periodischen Bewegungen der Feldmassen korreliert sind. Subtraktion des funktionalen Zusammenhanges von den gemessenen Daten ergibt das mit **B** bezeichnete reine Rechtecksignal aufgrund der Bewegung der Massen. Anschließend kann man die so erhaltenen Daten abschnittsweise mit einer Geraden beschreiben und den Frequenzhub ermitteln. Zur Bestimmung der nächsten Frequenzänderung verschiebt man die Analyse um einen Zyklus, so daß für jedes Intervall ein individueller Wert berechnet wird. Die dabei vor und hinter dem eigentlich betrachteten Hub mit einbezogenen Intervallabschnitte dienen als Stützstellen für die Anpassung des Polynoms. Die Auswertung verschiedener Meßreihen zeigt allerdings, daß diese Vorgehensweise eine schlechtere intrinsische Auflösung besitzt, als jene weiter oben beschriebene. Die Methode erwies sich aber als sehr robust bei der Auswertung von Datensätzen mit einem höheren Rauschanteil, wie solchen, bei denen eines der Pendel durch einen Hohlleiter blockiert ist.

Nach erfolgreicher Bestimmung der mittleren Frequenzänderung  $\langle \Delta f \rangle$  des Resonators kann man diesen Wert mit Hilfe des Umrechnungsfaktors  $\beta$  in den modenunabhängigen Betrag für die mittlere Abstandsänderung  $\langle \Delta b \rangle$  umrechnen

$$\langle \Delta b \rangle = \beta \langle \Delta f \rangle . \quad (7.3)$$

Dieser Wert ist Grundlage für die weiteren Vergleiche mit den numerisch ermittelten Werten. Sie ergeben sich aus dem Integrationsprogramm, mit der ihm zu Grunde liegenden genauen Kenntnis der metrologischen Größen für Spiegel, Feldmassen und deren Positionen, ebenso wie dem zur Zeit gültigen Literaturwert  $G_{Literatur}$ . Auf diesen Wert werden Korrekturen bezüglich der Neigung des Stützgerüsts, sowie der Auswirkungen der Pendelseile angewendet. Den Betrag des gemessenen Wertes für die Newtonsche Gravitationskonstante  $G$  erhält man dann über die relative Abweichung bezogen auf den Literaturwert

$$G_{Ergebnis} = G_{Literatur} \left( 1 + \frac{\Delta b_{Ergebnis} - \Delta b_{Rechnung}}{\Delta b_{Rechnung}} \right) . \quad (7.4)$$

## 7.2 Gravitationskonstante $G$

Die in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Untersuchungen dienten als Vorbereitungen für die Messung der Gravitationskonstanten  $G$ . Dabei wurde zum einen die Konstante selbst bestimmt, aber auch das Newtonsche Gravitationsgesetz auf einem Entfernungsbereich zwischen 0.7 und 2.1 m verifiziert. Weiterhin sind Messungen mit unterschiedlichen Moden des Resonators vorgenommen worden, motiviert durch differierende Ergebnisse zweier zurückliegender Arbeiten ([Wal95][Sch95]), die jeweils unterschiedliche Resonatormoden verwendet hatten.

Für die Bestimmung der Gravitationskonstanten gingen im Rahmen dieser Arbeit insgesamt zwölf Meßreihen für sechs verschiedene Meßpositionen zwischen  $r_{cms}=0.915$  m und 1.5 m ein, mit bis zu 250 Meßzyklen (vgl. Anhang tabellemessungen). Der statistische Fehler ergab sich aus der Anzahl der gemessenen Frequenzen in den Verteilungen unter Berücksichtigung der statistischen Abhängigkeit durch den rekursiven Filter.

Die systematische Gesamtunsicherheit setzt sich aus unterschiedlichen Komponenten zusammen. In dieser Meßreihe ist der dominante Anteil jener, welcher sich aus der Unsicherheit der Neigungskorrektur ergibt. Der Einfluß dieser Korrektur skaliert mit dem Unterschied der Längen der beiden Pendel. Für diese Meßreihe ergibt sich ein Faktor von

$$\frac{\Delta l}{l} \simeq 3.15 \cdot 10^{-4} . \quad (7.5)$$

Meßposition $r_{CMS}$ [mm]	915	945	985	1095	1300	1500
Unsicherheit $\Delta G/G$ [ppm]	87	88	98	182	668	1047

Tabelle 7.1: Die Unsicherheiten der Korrekturwerte für die Neigung in dieser Meßreihe.

Meßgröße	Unsicherheit $\Delta G/G$ [ppm]
Position der Massen	27
Feldmassen Geometrie	8
Absolute Masse der Massen	22
long. Dichteänderungen	5
Position Resonator	10
Pendelgeometrie	6
Größe der Cavity	8
Pendelseil Korrektur	14
Spindelmutter	14
Luft FM	14
Schwingungsdauer der Pendel	23
Mag. Kräfte	10
Choke-Effekt ( $\Delta f/\Delta d$ )	41 (22 GHz) / 36 (23 GHz)
Integration	1
Umrechnungsfaktor	8
total	67 (22 GHz) / 64 (23 GHz)

Tabelle 7.2: Alle weiteren systematischen Unsicherheiten mit Ausnahme der Neigung.

Meßposition $r_{CMS}$ [mm]	915	945	985	1095	1300	1500
systematische Unsicherheit (23 GHz) [ppm]	108	109	117	193	671	1049
systematische Unsicherheit (22 GHz) [ppm]	110	111	119	194	672	1050

Tabelle 7.3: Summe der systematischen Unsicherheiten in Abhängigkeit von der Meßposition und der verwendeten Resonatormode.

Meßposition $r_{cm.s}$ [mm]	$G_{23\text{ GHz}}$	$G_{22\text{ GHz}}$
915	$6.67444 \pm 0.00099$	$6.67485 \pm 0.0021$
	$6.67461 \pm 0.00340$	
945	$6.67299 \pm 0.00150$	$6.67422 \pm 0.0026$
	$6.67318 \pm 0.00150$	
985	$6.67430 \pm 0.00095$	$6.67490 \pm 0.0019$ $6.67519 \pm 0.0049$
1095	$6.67536 \pm 0.00140$	
1300	$6.67264 \pm 0.00380$	
1500	$6.67332 \pm 0.00720$	

Tabelle 7.4: Aufgelistet sind die Werte für die Gravitationskonstanten der verschiedenen Meßreihen in Einheiten von  $1 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\text{]}$ . Sie sind aufgetragen in Abhängigkeit von der Meßposition und der Resonanzfrequenz unter Angabe der jeweiligen statistischen Unsicherheit.

Dieser überträgt sich auch auf die Unsicherheiten der Korrektur gemäß Gleichung 6.16. Die sich so ergebenden Beträge der Unsicherheiten in Abhängigkeit von der jeweiligen Meßposition sind in Tabelle 7.1 notiert. Sie steigen mit größer werdendem Abstand vom Resonator stark an, und verbleiben nur für die vordersten drei Meßpositionen unterhalb von  $10^{-4}$ . Die weiteren Unsicherheitsquellen sind in den vorherigen Kapiteln ausführlich beschrieben worden und ihre Beiträge sind in Tabelle 7.2 zusammengefaßt. Zusätzlich aufgeführt ist noch eine Unsicherheit von 14 ppm, die sich aus der Berechnung des Gravitationseffektes der von den Feldmassen verdrängten Luft ergibt. Alle Unsicherheiten sind unabhängig von der verwendeten Resonatormode, ausgenommen jene des Choke-Effektes. Diese sind für beide verwendeten Resonanzen (22 und 23 GHz) getrennt aufgelistet, was zu leicht unterschiedlichen Beträgen in der jeweiligen Gesamtunsicherheit führt. Durch quadratische Summation der systematischen Unsicherheiten erhält man den Wert der Gesamtunsicherheit der einzelnen Meßreihen in Abhängigkeit von der jeweiligen Meßposition und Resonatormode. Die sich so ergebenden Werte sind in Tabelle 7.3 aufgeführt.

Die im Rahmen der verschiedenen Meßreihen ermittelten Beträge für die Gravitationskonstante sind in Tabelle 7.4 in Einheiten von  $1 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\text{]}$  angegeben. Sie sind dabei jeweils unter Angabe der Meßposition und der Resonanzfrequenz sowie dem statistischen Fehler aufgeführt. Für die Meßergebnisse, die auf gleichen Positionen mit identischer Resonatormode gemessen wurden, beträgt die Streuung zwischen 30 und 45 ppm, was eine Verbesserung der Reproduzierbarkeit um einen Faktor vier gegenüber den Messungen aus [Wal95] darstellt. Innerhalb der Meßreihen, welche mit unterschiedlichen Resonanzfrequenzen durchgeführt wurden, lagen die Messungen, welche bei 22 GHz aufgenommen waren zwischen 70 bis 185 ppm systematisch höher als jene mit 23 GHz, aber immer noch innerhalb der jeweiligen statistischen Fehler. Der Grund für diese Diskrepanz konnte nicht bestimmt werden.

Zur besseren Darstellung der geringen Streuung der Einzelwerte, sind diese als Funktion der Meßposition in Abbildung 7.6 mit den jeweiligen statistischen Fehlern aufgetragen. Deutlich

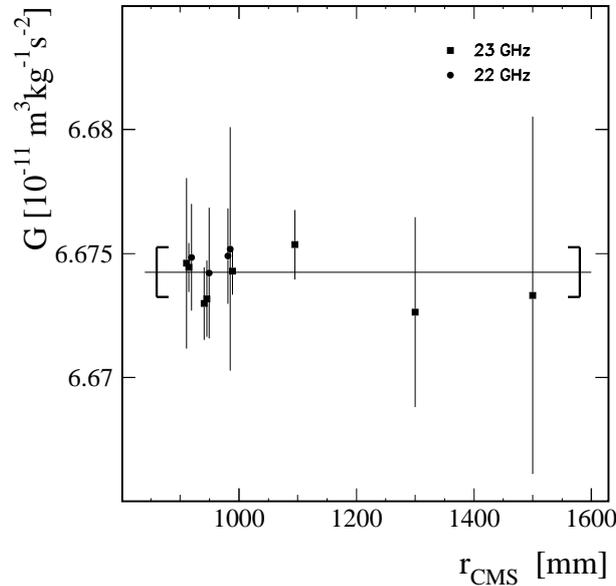


Abbildung 7.6: Die im Rahmen dieser Arbeit gemessenen Werte für die Gravitationskonstante  $G$  in Abhängigkeit von der Meßposition. Die eingezeichnete Linie repräsentiert den Mittelwert und seine Unsicherheit zeigen die beiden Klammern, die die Meßwerte einschließen.

ist die geringe Variation der Werte untereinander sowie deren Übereinstimmung innerhalb der statistischen Fehler zu erkennen. Da für jede der systematisch signifikanten Positionen nahe am Resonator (915, 945 und 985 mm) je drei Meßreihen durchgeführt wurden, sind die Ergebnisse in Abbildung 7.6 leicht gegeneinander verschoben aufgetragen. Der aus diesen Werten mittels Fehlerwichtung errechnete Mittelwert ergibt sich als

$$\langle G \rangle = (6.67422 \pm 0.00049 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] \quad (7.6)$$

wobei sich die Gesamtunsicherheit von 147 ppm zusammensetzt aus einem statistischen Anteil von 73 ppm und einem systematischen Anteil von 128 ppm. Als Wichtungsparameter fand die quadratischen Summen der jeweiligen statistischen und systematischen Fehler Verwendung [Bra92]. Der Mittelwert ist in Abbildung 7.6 durch die eingezeichnete Linie repräsentiert und seine Gesamtunsicherheit durch die beiden Klammern, die die einzelnen Meßwerte einschließen.

Mittels des in dieser Arbeit ermittelten Wertes für die Gravitationskonstante läßt sich das Gewicht der Erde berechnen. Verwendung findet dazu das mit dem LAGEOS Satelliten [Rie92] über Bahndaten von Mond und Erde (auf  $\Delta x \sim 1 \text{ mm}$ ) bestimmte Produkt aus der Masse der Erde mal dem Wert der Gravitationskonstanten

$$G \cdot M_{\text{Erde}} = 398\,600.4418 \pm 0.0008 \text{ km}^3 \text{s}^{-2} . \quad (7.7)$$

Setzt man in diesen Ergebnis den in 7.6 aufgeführten Betrag für  $G$  ein, so erhält man für die Masse der Erde

$$5.972.240.079.000.000.000.000.000 \text{ kg} . \quad (7.8)$$

plus minus etwa 12 milliardstel davon.

### 7.3 Reanalyse alter Meßwerte

Die in Abschnitt 6.3 vorgestellten Korrekturen lassen sich auch auf ältere Meßreihen anwenden, was hier anhand von Daten aus [Wal95] gezeigt wird. In Abbildung 7.7 sind die in der Dissertation veröffentlichten Werte als Funktion des Abstandes aufgetragen. Man erkennt deutlich einen funktionalen Zusammenhang zwischen dem Betrag der Gravitationskonstanten und der Position der Feldmassen, welcher in erster Näherung linear mit der Entfernung skaliert. Offensichtlich sind die gemessenen Werte der Gravitationskonstanten im vorderen Abstandsbereich kleiner als der Literaturwert, um dann im weiteren Verlauf über diesen hinaus anzusteigen. Der sich so ergebende Zusammenhang zwischen Position und Betrag der Gravitationskonstanten legt eine mögliche Abweichung von der  $1/r^2$  Gesetzmäßigkeit der Gravitation nahe. Aus den Daten erhält man einen mittleren Wert für die Gravitationskonstante von

$$G = (6.66730 \pm 0.00094) \cdot 10^{-11} \left[ m^3 kg^{-1} s^{-2} \right]. \quad (7.9)$$

Der angegebene Fehler von 142 ppm setzt sich dabei aus einer statistischen Komponente von 75 ppm und einer systematischen Komponente von 120 ppm zusammen. Letztere muß allerdings, unter dem Blickwinkel der gefundenen Fehlerquellen, neu bewertet werden.

Zur Beseitigung der entfernungsabhängigen Abweichung mit Hilfe der Korrekturfunktion 6.13 benötigt man die Differenz der Pendellängen. Sie ergibt sich über die in [Wal95] angegebenen Eigenfrequenzen der Pendel

$$\omega_A = 1.939509 \text{ Hz} \quad \text{und} \quad \omega_B = 1.939399 \text{ Hz} \quad (7.10)$$

zu  $|\Delta l| = (0.30 \pm 0.03)$  mm. Bei der damaligen Analyse spielte allerdings die Zuordnung der beiden Schwingungsdauern nur eine untergeordnete Rolle, so daß sie nicht mit Sicherheit fest steht [Wal01]. Bei der Korrektur der Neigung spielt das Vorzeichen der Längendifferenz der beiden Aufhängungsdrähte, und somit die Zuordnung, aber eine wichtige Rolle. Es ergeben sich daher zwei Möglichkeiten. Ordnet man die Pendellängen so zu, daß die Differenz  $\Delta l = l_1 - l_2$  negativ ist, verstärken die Korrekturwerte den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Betrag der Gravitationskonstanten und der Position der Feldmassen. Im anderen Fall, also einer Zuordnung, die zu einer positiven Längendifferenz führt, eliminieren die Korrekturwerte den funktionalen Zusammenhang. Unter dieser Nebenbedingung ergeben sich die in Abbildung 7.8 aufgetragenen Werte für die Gravitationskonstanten. Offensichtlich ist die vorher zu erkennende Abweichung von der räumlichen Konstanz verschwunden. Der Betrag der angebrachten Korrekturen liegt dabei in Bereich um 700 ppm je nach Meßposition. Bei der Bewertung der Ergebnisse ist allerdings zu berücksichtigen, daß sich zwischen den damaligen und jetzigen Meßreihen das Bezugssystem für die Positionierung der Feldmassen geändert hat, so daß die Korrekturterme nicht optimal auf die Meßpositionen abgestimmt sind und sich daraus erhöhte Unsicherheiten ergeben. Zieht man bei der Neubewertung der Ergebnisse auch in Betracht, daß die damals verwendete optische Bank einen Fehler von etwa 535 ppm besaß und die Ungenauigkeit durch die

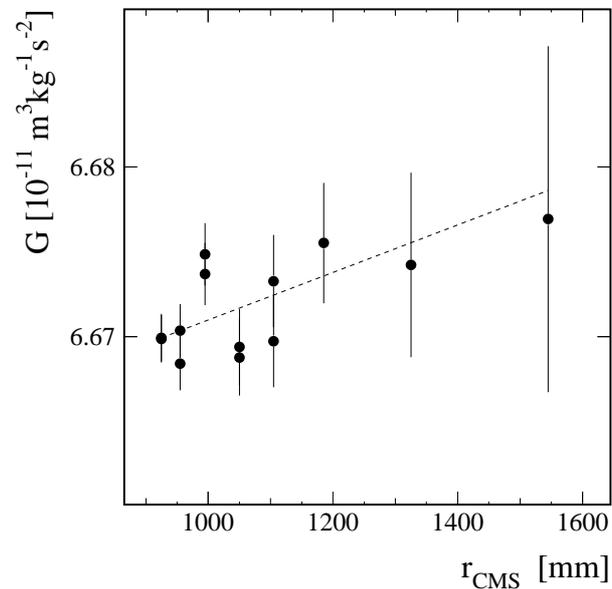


Abbildung 7.7: In [Wal95] veröffentlichte Werte für die Gravitationskonstante als Funktion der Meßposition (1995). Man erkennt einen funktionalen Zusammenhang zwischen dem Betrag der Konstanten und der Position der Feldmasse.

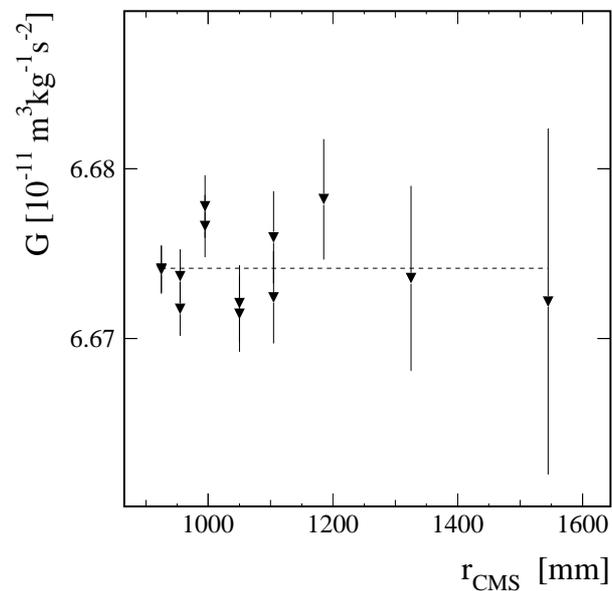


Abbildung 7.8: Die Werte aus der obigen Abbildung, korrigiert bezüglich der Neigung des Stützgerüsts.

Frequenzvariationen der Drosselflansche aus den Aufzeichnungen mit etwa 260 ppm abgeschätzt werden konnten (siehe auch [Sch95]), ergibt sich eine systematische Gesamtungenauigkeit von etwa 600 ppm. Hierbei wurden mögliche Unsicherheiten bezüglich der Positionierung der Feldmassen nicht berücksichtigt, so daß der angegebene systematische Fehler mehr ein Richtwert als ein endgültiger Betrag ist. Es ergibt sich damit für den gemittelten Wert der Gravitationskonstanten aus den korrigierten Meßwerten des Jahre 1995 folgender Betrag

$$G = (6.67413 \pm 0.00056 \pm 0.004) \cdot 10^{-11} \left[ m^3 kg^{-1} s^{-2} \right]. \quad (7.11)$$

Dieser Wert besitzt eine Abweichung von dem im Rahmen dieser Arbeit ermittelten Wert von etwa 15 ppm.

## 7.4 Einordnung der Ergebnisse

Der Vergleich des in dieser Arbeit bestimmten Wertes für die Gravitationskonstante mit dem Literaturwert zeigt, daß das Wuppertaler Ergebnis fast 200 ppm über jenem liegt, aber noch innerhalb dessen Fehlerbereiches. Bei der Bewertung dieser Differenz muß berücksichtigt werden, daß der Literaturwert auf einer einzigen Messung beruht ([Lut82]), bei welcher der Einfluß der Frequenzabhängigkeit der Torsionskonstanten noch nicht bekannt war. Mit Rücksichtnahme auf diesen Effekt erhielt C. H. Bagley [Bag97] ein um 200 ppm höheres Resultat an der nur leicht veränderten Meßapparatur. Die generelle Tendenz der verschiedenen Experimente Werte zu bestimmen, deren Betrag größer ist als jener des Literaturwertes spiegelt sich auch im fehlergewichteten Mittel der seit 1997 veröffentlichten Werte wieder

$$\langle G_{world} \rangle = (6.67425 \pm 0.000084) \cdot 10^{-11} \left[ m^3 kg^{-1} s^{-2} \right]. \quad (7.12)$$

Experiment	$G$ [ $10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ]	Literatur
Literaturwert	6.673 ± 0.01	[Moh98]
NIST (G. G. Luther)	6.67259 ± 0.0005	[Lut82]
Los Alamos (C. H. Bagley)	6.6740 ± 0.0007	[Bag97]
MSL (M. Fitzgerald)	6.6742 ± 0.0007	[Fit99]
Uni-Zürich (F. Nolting)	6.6754 ± 0.0015	[Nol99]
“	6.6749 ± 0.0014	[Nol99]
Uni-Washington (J. Gundlach)	6.674215 ± 0.000092	[Gun00]
BIPM (T. Quinn)	6.67565 ± 0.00045	[Qui01]
“	6.67553 ± 0.00040	[Qui01]
Uni-Wuppertal (Reanalyse 1995)	6.67413 ± 0.004	
Uni-Wuppertal (2001)	6.67422 ± 0.00098	

Tabelle 7.5: Vergleich der Ergebnisse der zur Zeit modernsten Experimente.

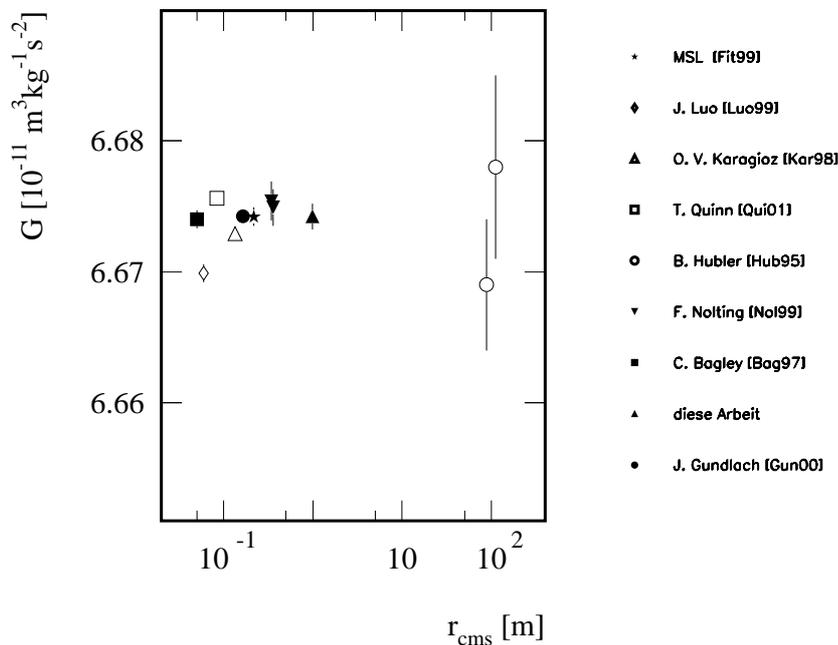


Abbildung 7.9: Verschiedene veröffentlichte Werte der Gravitationskonstanten  $G$  unterschiedlicher Experimente als Funktion der Schwerpunktabstände zwischen Test- und Feldmassen. Das Wuppertaler Experiment ist zur Zeit das einzige, welches in einem Massenabstand von 0.7 bis 2.1 m mißt. Bei kleineren Abständen dominieren Torsionswaagen, während für größere Abstände hauptsächlich mit Gravimetern und geophysikalischen Massen gearbeitet wird.

Dadurch bestärkt gilt die allgemeine Erwartung, daß der Wert des nächsten Literaturwertes signifikant über jenen der Jahre 1986/98 liegt. Zur besseren Einordnung des Ergebnisses sind in Tabelle 7.4 die letzten veröffentlichten Messungen für die Gravitationskonstante der zur Zeit modernsten Experimente aufgeführt. Allgemein ist der Trend zu Werten deutlich oberhalb des Literaturwertes zu erkennen. Die Abweichung des Wuppertaler Wertes zum zur Zeit präzisesten Meßwert, ermittelt an der Universität Washington, beträgt nur einige ppm. Etwa 200 ppm über jenem Ergebnis liegen die am BIPM bestimmten Beträge für die Newtonsche Konstante. Ähnlich weit entfernt sind die an der Universität Zürich bestimmten Meßwerte (172 ppm) zu finden. Diese gelten allerdings nur unter Vorbehalt, da sie noch von starken Nichtlinearitäten der Waage beeinflusst sein können. Man erkennt, daß trotz neuer Erkenntnissen es weiterhin noch nicht gelungen ist, mehrere systematisch unterschiedliche Experimente innerhalb ihres Fehlers zur Übereinstimmung zu bringen.

Der Beitrag des Wuppertaler Experimentes wird weiterhin eine wichtige Rolle spielen, was Abbildung 7.9 verdeutlicht. Aufgetragen sind die an verschiedenen Experimenten bestimmten Werte der Gravitationskonstanten als Funktion der jeweiligen Schwerpunktabstände zwischen den Test- und den Feldmassen. Man erkennt, daß einzig das Wuppertaler Ergebnis den Entfernungsbereich zwischen 0.7 m bis 2.1 m überdeckt. Für die Meßwerte bei kleineren Schwer-

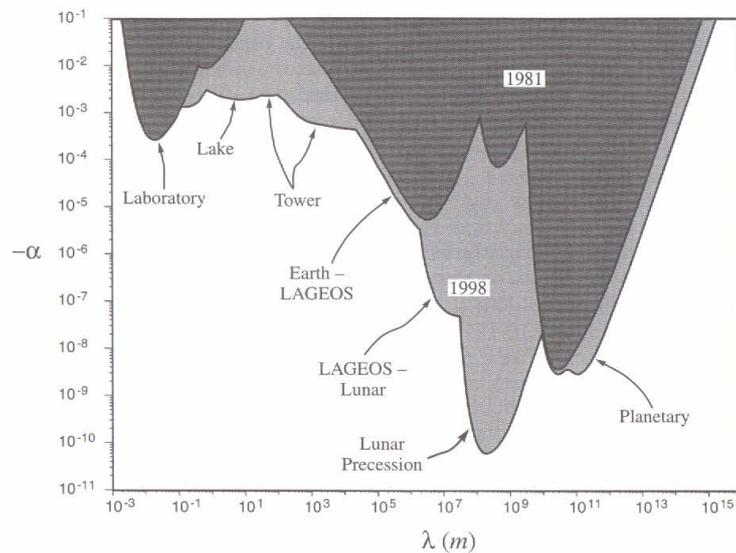


Abbildung 7.10: Die Obergrenzen für die Kopplungskonstante  $\alpha$  als Funktion des Massenabstandes  $\lambda$  auf dem  $2\sigma$  Niveau. Die dunkleren Regionen geben den Status von 1981, die helleren jenen von 1998 an (aus [Fis98]).

punktabständen fanden hier hauptsächlich mit Torsionswaagen gemessene Werte Berücksichtigung. Die beiden Meßpunkte über 50 m Abstand sind mit einer Balkenwaage an einem Stausee bestimmt worden [Hub95]. Die meisten der aufgetragenen Meßwerte fanden bei der Festlegung des Literaturwertes 1998 [Moh98] Berücksichtigung. Offensichtlich schließt das Wuppertaler Gravitationsexperiment die Lücke zwischen Laborexperimenten und solchen die geophysikalische Massen verwenden.

## 7.5 Ist Newtons Konstante konstant?

### Ist $G$ eine Funktion des Orts?

Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) wird die Gravitation durch eine Raum-Zeit-Metrik beschrieben. Allgemeinere Theorien der Gravitation, wie sie aus jedem Versuch der Quantisierung oder der Vereinheitlichung hervorgehen, müssen häufig zusätzliche Gravitationsfelder einführen. Da aber die ART durch alle bisherigen Versuche bestätigt wurde, müssen diese hypothetischen Felder sehr klein sein. Damit wäre jedwede Messung einer Abweichung von der bisherigen Gravitationsphysik beim Aufbau einer Quantengravitation von großer Bedeutung. So führen Kaluza-Klein, String und Supergravitationstheorien zu zeitabhängigen Gravitations- und Feinstrukturkonstanten [Mis70]; aber auch zu Verletzungen des  $1/r$ -Potentials der Gravitation [Dit99]. Alle Abweichungen von diesem werden unter dem Begriff der „fünften Kraft“ geführt. Jene „neue“ Wechselwirkung findet ihren Ausdruck meistens als zusätzlicher Term eines Yukawa

Potentials, welches dem Newtonschen Potential überlagert wird

$$V(r) = - \frac{G_\infty m_1 m_2}{r} \left( 1 + \alpha e^{-r/\lambda} \right), \quad (7.13)$$

wobei

- $m_i$  die beiden Massen,
- $\alpha$  die Stärke der neuen Kraft bezogen auf die Gravitation,
- $\lambda$  deren Reichweite und
- $G_\infty$  den Betrag der Newtonschen Gravitationskonstante im Unendlichen ( $r \rightarrow \infty$ )

bezeichnet [Fis98]. Solche ein Potential würde bedeuten, daß neben dem „normalen“ masselosen Wechselwirkungsteilchen der Gravitation noch ein zusätzliches massives, die gravitative Wechselwirkung vermittelndes Teilchen existiert. Durch Bildung des Gradienten erhält man ein „neues“ Newtonsches Gesetz

$$F(r) = - G(r) \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (7.14)$$

wobei die Gravitationskonstante entfernungsabhängig wird.

$$G(r) = G_\infty \left[ 1 + \alpha e^{-r/\lambda} (1 + r/\lambda) \right]. \quad (7.15)$$

Ein Möglichkeit das  $1/r^2$  Verhalten der Gravitation speziell in diesem Experiment zu untersuchen, besteht im Vergleich der exponentiellen Entfernungsabhängigkeit der gemessenen und gerechneten Werte

$$\begin{aligned} \Delta f_{\text{theo}} &\propto \frac{1}{r^n} \\ \Leftrightarrow \log(\Delta f_{\text{theo}}) &\propto n \log(r). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Betrachtet man die theoretischen Frequenzänderungen, so beschreibt der Wert  $n$  das asymptotische Verhalten des Experimentes und sollte nahe bei drei liegen, wie in Gleichung 5.1 hergeleitet wurde. Für die gemessenen Frequenzhübe

$$\begin{aligned} \Delta f_{\text{mess}} &\propto \frac{1}{r^{(n+\delta)}} \\ \Leftrightarrow \log(\Delta f_{\text{mess}}) &\propto (n + \delta) \log(r) \end{aligned} \quad (7.17)$$

zeigt jegliche Abweichung  $\delta$  von diesem Wert eine möglich Verletzung des  $1/r^2$ -Gesetzes an. In der doppellogarithmischen Darstellung in Abbildung 7.11 sind die Wert des Frequenzhubes gegen die Schwerpunktposition aufgetragen. Die Fehler der verschiedenen Werte sind dabei sehr viel kleiner als die eingezeichneten Punkte. Die gemessenen Frequenzen sind jeweils korrigiert um den Gravitationseffekt in der Referenzposition, um die asymptotische Entfernungsabhängigkeit zu ermitteln. An die Daten wurde die eingezeichnete Gerade angepaßt. Aus der Differenz der Steigungen der experimentellen und theoretischen Ergebnisse erhält man für den Parameter  $\delta$ , welcher die Abweichung von Newtonschen Kraftgesetz beschreibt, einen Betrag von

$$\delta = 0.0011 \pm 0.0024. \quad (7.18)$$

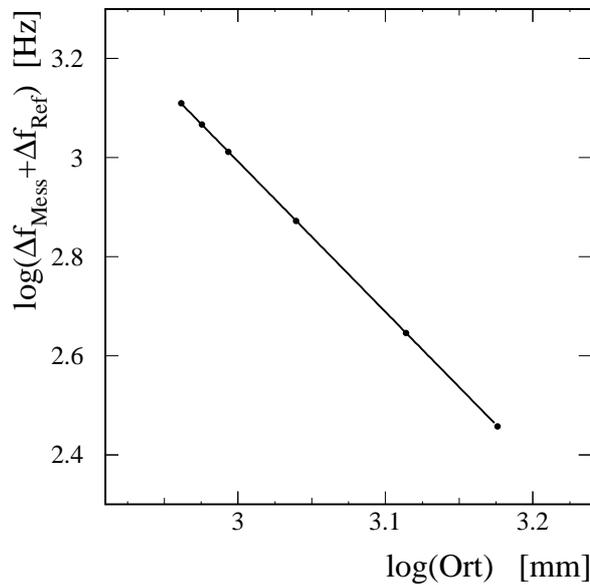


Abbildung 7.11: Die doppellogarithmische Darstellung der gemessenen Frequenzhübe gegen die Schwerpunktentfernungen. Die Frequenzen wurden jeweils um den Gravitationseffekt in der Referenzposition korrigiert, um die asymptotische Entfernungsabhängigkeit zu ermitteln.

Dieser ist gut mit Null verträglich und eine mögliche Abweichung des Exponenten ist kleiner als  $\delta \simeq 0.0047$  für ein 90 % Konfidenzintervall [Hel83].

Da das Newtonsche Gesetz alle gravitativ determinierten Bewegungen beeinflusst, gibt es sehr verschiedene Arten es zu testen. Auf astronomischen Entfernungen kann die Newtonsche Konstante  $G$  selbst nur sehr eingeschränkt ermittelt werden aufgrund der unbekannt oder nur mit großen Unsicherheiten bestimmten Masse der Objekte. Allerdings läßt sich das Newtonsche Gesetz selbst mit hoher Genauigkeit verifizieren. So ergeben sich gute Meßmöglichkeiten auf einer Wechselwirkungslänge von  $10^{11}$  m aus der Präzession des Perihels von Merkur und Mars. Eine weitere Möglichkeit besteht im Vergleich des Effektivwertes von  $GM_{\odot}$  für verschiedene Planeten mittels Keplers drittem Gesetz. Im Bereich zwischen  $10^4$  m und  $10^9$  m kann man das  $1/r^2$  Verhalten mittels Laserentfernungsmessungen des Mondes und der Erde mit Hilfe des LAGEOS-Satelitten<sup>1</sup> bestätigen. Auf Geophysikalischen Entfernungen (10 m bis 10 km) finden hauptsächlich Gravimeter Verwendung, mit welchen der Gravitationsgradient in Richtung des Erdmittelpunktes gemessen wird. Dazu wurden Experimente auf Türmen, in Bohrlöchern oder mit Unterseebooten in Ozeanen durchgeführt [Zum91]. Aber auch in einer direkten Messung der Gravitationskonstante mittels einer Balkenwaage im Gigerwald-Stausee Experiment konnten Obergrenzen für räumliche Variationen von  $G$  im Bereich zwischen 88 m und 112 m angegeben werden [Hub95]. Auf Laborentfernungen (1 cm bis 1 m) finden hauptsächlich die mit-

<sup>1</sup>Laser Geodynamics Satellite

tels Torsionswaagen bestimmten Messungen Verwendung, welche heutzutage aber auch schon in den Submillimeter-Bereich vordringen [Hoy01]. Der Entfernungsbereich zwischen 1 m und 2 m wird zur Zeit nur mit dem Experiment in Wuppertal untersucht. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse all dieser Messungen ist in Abbildung 7.10 aufgetragen. Dargestellt sind die Ausschlußbereiche für die Kopplungskonstante  $\alpha$  als Funktion der Reichweite  $\lambda$  auf dem  $2\sigma$  Niveau. Die dunklen Bereiche geben dabei den Status des Jahre 1981 wieder und die helleren Bereiche jenen des Jahres 1998 [Fis98].

Um in diesem Experiment Gültigkeitsbereiche für die Größe der Kopplungskonstante  $\alpha(\lambda)$  für eine fünfte Kraft anzugeben, betrachtet man das Verhältnis von gemessenen Gravitationswerten bei verschiedenen Schwerpunktabständen  $r_i$

$$\beta = \frac{G(r_2)}{G(r_1)} . \quad (7.19)$$

Durch Variation von  $\beta$  innerhalb der experimentellen Fehler ergeben sich dann die Obergrenzen für die Stärke der Kraft gemäß [Gib81] über folgenden Zusammenhang

$$\alpha(\lambda) = \frac{(\beta - 1)}{[(1 + r_2/\lambda)e^{-r_2/\lambda} - \beta(1 + r_1/\lambda)e^{-r_1/\lambda}]} . \quad (7.20)$$

Für die Auswertung fand als Vergleichswert der Meßwert der Universität Washington [Gun00] Verwendung, da er bei einem wesentlich geringeren Schwerpunktabstand gemessen ( $r_1 \simeq 16.5$  cm) wurde. Die so gerechneten Ausschlußbereiche für eine anziehende ( $\alpha < 0$ ) oder abstoßende ( $\alpha > 0$ ) fünfte Kraft sind in den Abbildungen 7.12 und 7.13 aufgetragen. Ebenfalls dargestellt sind die Ausschlußbereiche aus Rechnungen gegen den Wert der Universität Zürich [Hub95], der bei erheblich größerem Abstand bestimmt ( $r_1 \simeq 112$  m) wurde. Gezeigt sind innerhalb der  $(\alpha, \lambda)$ -Ebene die Grenzlinien, welche die Bereiche oberhalb auf dem  $1\sigma$  Niveau ausschließen. Die für die Rechnungen verwendeten Werte des Wuppertaler Experimentes ergaben sich aus den fehlergewichteten Beträgen der Meßergebnisse für jede einzelne der sechs verschiedenen Meßpositionen. Eingezeichnet wurden immer nur die beiden besten Ausschlußbereiche, wobei die Schwerpunktabstände dieser Meßwerte in der Abbildung mit angegeben werden. Mit den dargestellten Ausschlußbereichen ist das Wuppertaler Gravitationsexperiment zur Zeit um etwa eine halbe Größenordnung besser als alle anderen Experimente auf diesem Abstandsbereich [Hos85].

### Ist $G$ eine Funktion der Zeit?

Neben der räumlichen Abhängigkeit der Gravitationskonstanten spielt auch immer die Frage einer zeitlichen Abhängigkeit in verschiedenen vereinheitlichenden Theorien eine Rolle [Wei72]. Historisch war die vorherrschende Meinung, daß das Universum außerhalb des Sonnensystems statisch ist, und es somit auch kein Bedürfnis zur Änderung der Gravitationskonstanten gab. Aus der Entdeckung der Expansion des Universums erwachsen dann allerdings viele Ansätze für eine zeitlich variable Konstante  $G$ . Angefangen bei Diracs [Dir38] heuristischem Ansatz

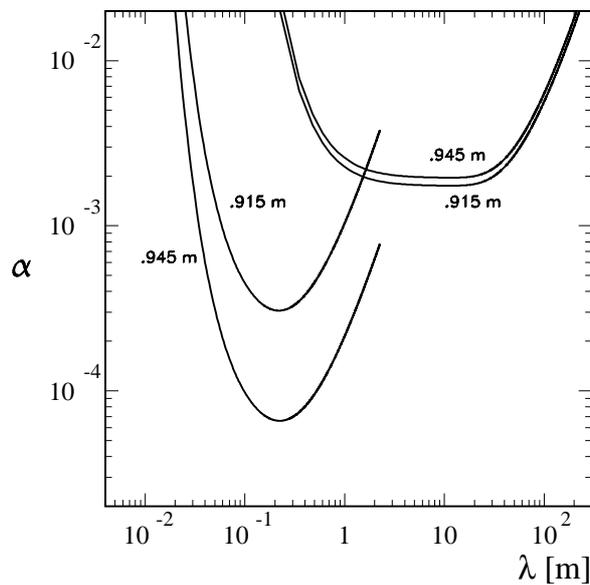


Abbildung 7.12: Die Ausschlußbereiche für die Kopplungskonstante  $\alpha$  und deren Reichweite  $\lambda$  einer anziehenden fünften Kraft. Die Bereiche oberhalb der Linien werden auf dem  $1\sigma$  Niveau ausgeschlossen. Die Zahlen an den Kurven geben die Schwerpunktentfernung an, bei denen die Gravitationskonstanten vermessen wurden.

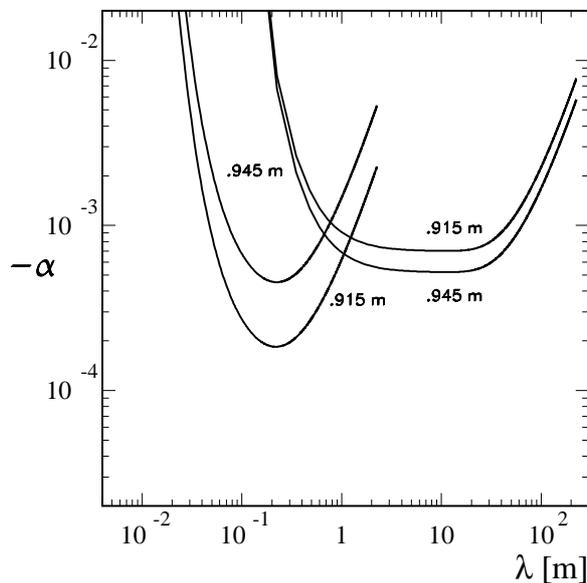


Abbildung 7.13: Die Ausschlußbereiche für die Kopplungskonstante  $\alpha$  und deren Reichweite  $\lambda$  einer abstoßenden fünften Kraft. Die Bereiche oberhalb der Linien werden auf dem  $1\sigma$  Niveau ausgeschlossen. Für den Vergleichswert bei kurzen Entfernungen fand der Meßwert aus [Gun00] Verwendung, für die größeren Entfernungen der Wert aus [Hub95].

der großen Zahlen bis hin zu Skalar-Tensor Theorien [Haw87]. Heutzutage gibt es verschiedene Methoden um eine zeitliche Variation der Gravitationskonstanten nachzuweisen. Die zur Zeit präzisesten Messungen ergeben sich aus Modellen zur Big-Bang Nukleosynthese, welche einen Überschuß an leichten Elementen voraussagen [Acc90]. Aus Vergleichen mit gemessenen Verteilungen ergeben sich dann Grenzen für eine zeitliche Variation. Wie bei der Bestimmung einer Entfernungsabhängigkeit von  $G$  kann man auch für eine mögliche Zeitabhängigkeit Messungen der Himmelsmechanik zu Grunde legen. Beispiele sind Entfernungsmessungen des Mondes mittels Laserinterferometrie [Mül91] oder des Mars mittels Radar [Sha90], die Ausschlußwerte von  $|\dot{G}/G| \leq 10 \cdot 10^{-12}/\text{Jahr}$  erreichen. Andere Methoden, wie die Nutzung von Neutron-Stern Massen, dem Alter von kugelförmigen Sternenhaufen, Zeitnahmen von binären Pulsar Systemen [Chi01] und Helioseismologie [Gue98] erbringen ähnliche Werte.

Im Rahmen dieser Arbeit konnte aus zwei Meßreihen, zwischen denen ein Zeitraum von über 3 Monaten lag, ein Wert für die zeitliche Änderung der Gravitationskonstante mit

$$\left| \dot{G}/G \right| \leq (2.0 \pm 12.0) \cdot 10^{-4} \text{ Jahr}^{-1} \quad (7.21)$$

berechnet werden. Daraus läßt sich eine obere Schranke von  $|\dot{G}/G| \leq 20.0 \cdot 10^{-4} \text{ Jahr}^{-1}$  für das 90 % Konfidenzintervall bestimmen. Ein Vergleich des gemittelten Gravitationswertes dieser Meßreihe mit dem korrigierten des Jahres 1995 ergibt eine zeitliche Änderung von

$$\left| \dot{G}/G \right| \leq (2.2 \pm 103.0) \cdot 10^{-6} \text{ Jahr}^{-1} \quad (7.22)$$

was sich in einen Wert von  $|\dot{G}/G| \leq 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ Jahr}^{-1}$  für das 90 % Konfidenzintervall umrechnet.

Abschießend sei gesagt, daß in mehr als 800 Experimenten seit 1986 nur sehr selten eine Abweichung, aber fast immer eine Übereinstimmung mit dem  $1/r^2$ -Gesetz ermittelt wurde. Mittlerweile gibt es sogar eine zusammenfassende Abhandlung über „The Search for Non-Newtonian Gravity“ von E. Fischbach [Fis98]. Weiter geschichtliche Details möge der interessierte Leser [Fra93] entnehmen.



## Kapitel 8

# Zusammenfassung

Motiviert durch die Erhöhung der Unsicherheit des Literaturwertes, fanden am Fabry-Pérot Gravimeter der Bergischen Universität Wuppertal nach umfangreichen Untersuchungen der Meßapparatur neue Messungen der Newtonschen Gravitationskonstanten statt. Der bis dahin einmalige Vorgang, den Fehler eines Literaturwertes zu erhöhen, statt durch neue Messungen bestärkt, zu reduzieren, spiegelt die Unsicherheit aufgrund der großen Streuung der Meßergebnisse verschiedener Experimente sowie die Erkenntnis um neue systematische Fehlerquellen wider [Moh98]. Durch diesen Vorgang mußten sich die Ergebnisse der Experimente einer kritischen Hinterfragung stellen. Für das Wuppertaler Gravimeter wurden deshalb im Rahmen dieser Arbeit folgende Arbeiten durchgeführt:

- *Die erneute Betrachtung der Unsicherheiten unter Berücksichtigung neuer Erkenntnisse.*
- *Die Suche nach neuen Unsicherheitsquellen am Experimentaufbau.*
- *Die Bestimmung des Wertes der Newtonschen Gravitationskonstanten  $G$ .*

Um den Einfluß der führenden Unsicherheit der vorhergehenden Meßreihe zu studieren, wurden Untersuchungen am Mikrowellensystem des Fabry-Pérot Resonators vorgenommen. Diese ermöglichten es, den Einfluß der Position der Koppelhohlleiter auf die Resonanzfrequenz deutlich zu reduzieren. Die Umsetzung beruht dabei hauptsächlich auf den Abschätzungen von Reflexionsfaktoren an verschiedenen Hohlleiterübergängen. Der zweite starke Einfluß auf die Messungen des Experimentes ergab sich aus der Neigung des Stützgerüsts aufgrund der Deformation des Fundamentes durch die Feldmassen. Aufgrund der Variation ihrer Position in unterschiedlichen Meßreihen führt die Neigung zu einer entfernungsabhängigen Abweichung vom  $1/r^2$ -Verhalten des Gravitationsgesetzes. Um die Ergebnisse auf diese Auswirkungen der Feldmassen zu korrigieren, wurde im Rahmen dieser Arbeit der funktionale Zusammenhang zwischen Neigung und Feldmassenposition ermittelt. Damit konnte der entsprechende Anteil sowohl in dieser als auch einer zurückliegenden Messungen berechnet werden. Auch für zukünftige Meßreihen eröffnet sich die Möglichkeit den Neigungsbeitrag mittels der Korrektur zu ermitteln. Dennoch bleibt die Verkippung des Stützgerüsts in dieser Meßreihe der dominierende Fehler. Der dritte große Unsicherheitsfaktor, die Positionierung der Feldmassen, konnte mit Hilfe des

Relativ-Meßsystems in Verbindung mit der optischen Bank erheblich reduziert werden. Dieses fand seinen Ausdruck in der deutlich verringerten Streuung vergleichbarer Einzelmessungen gegenüber den Ergebnissen in vorherigen Meßreihen.

Durch die Umsetzung dieser, sowie weiterer Untersuchungen, konnten die Einflüsse vieler Fehlerquellen deutlich reduziert werden, was anhand der folgenden Tabelle für die führenden Unsicherheiten verdeutlicht wird.

Effekt	frühere Unsicherheiten			jetzige Unsicherheiten		
Choke-Effekt	7000	ppm	⇒	Kopplung	⇒	39 ppm
Neigung	700	ppm	⇒	Korrektur	⇒	87 ppm
Position Massen	535	ppm	⇒	Neues Meßsystem	⇒	27 ppm

Somit ist es nun möglich, an diesem Aufbau die Gravitationskonstante bei Schwerpunktabständen zwischen 0.7 und 2.1 m mit einer Unsicherheit um 100 ppm zu bestimmen.

Mit den so gemachten Veränderungen wurden mehrere Messungen zur Bestimmung des eigentlichen Wertes der Newtonschen Gravitationskonstanten durchgeführt. Dieses geschah zum einen bei verschiedenen Schwerpunktentfernungen und zum anderen bei unterschiedlichen Moden des Fabry-Pérot Resonators. Die jeweiligen Ergebnisse sind innerhalb der Fehler im Einklang und führen zu einem Mittelwert von

$$\langle G \rangle = (6.67422 \pm 0.00049 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \left[ \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \right] \quad (8.1)$$

mit einer statistischen Unsicherheit von 73 ppm und einer systematischen Unsicherheit von 128 ppm. Ein Vergleich mit dem Literaturwert zeigt zwar, daß der Betrag dieses Wertes etwa 200 ppm höher liegt. Allerdings folgt er damit der Tendenz anderer Experimente, Werte zu bestimmen, die deutlich über dem gültigen Betrag des Literaturwertes liegen. Denn unter dem Einfluß des von K. Kuroda [Kur95] entdeckten Frequenzverhaltens von Torsionsdrähten ergeben sich zur Zeit allgemein Ergebnisse, deren Beträge zwischen 200 bis 400 ppm größer sind als der des Literaturwertes. Hervorzuheben ist, daß der hier aufgeführte Meßwert und Resultate einer sechs Jahre zurückliegenden Meßreihe nach Korrektur des Neigungsanteiles in guter Übereinstimmung liegen. Mit den so gewonnenen Ergebnissen können neue Einschränkungen für die Größe einer fünften Kraft berechnet werden. Dabei übertreffen die Resultate die Messungen anderer Experimente um fast eine Größenordnung im Bereich zwischen 0.1 und 1 m [Hos85].

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß durch die vielfältigen Veränderungen am Experiment dessen Unsicherheit um über eine Größenordnung reduziert werden konnte. Es ist anzunehmen, daß der Meßwert Eingang in die Bestimmung des nächsten Literaturwertes findet.

# Anhang A

# Kryostat

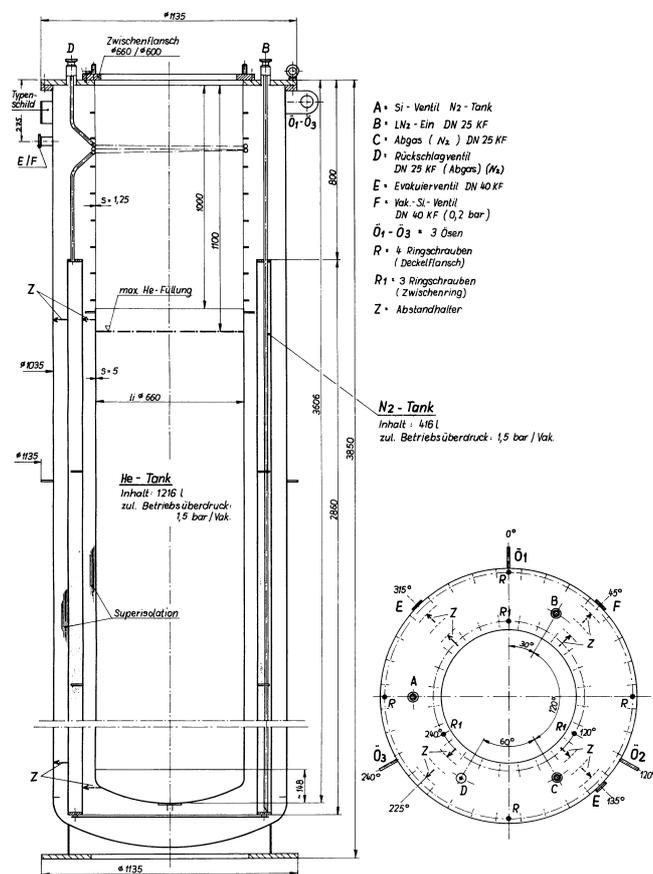


Abbildung A.1: Konstruktionszeichnung des Vakuumentanks.

In Abbildung A.1 ist eine Skizze des Helium-Badkryostat aufgetragen, welcher für die Messungen der Gravitationskonstanten als Vakuumentank benutzt wurde. Er ist der Universität Wuppertal freundlicherweise von der Firma Siemens (Bensberg) überlassen worden.



## Anhang B

# Gemessene Erdbeben

NR	Tag	Ortszeit	Beben UTC	Ort Lat.	Ort Long.	Magnitude
1	27.06.1998	13.58'32.5"	13.55'52"	36,88	35,31	6,60
2	09.07.1998	05.24'	05.19'11"	38,65	-28,60	6,60
3	"	14.25'	14.19'18"	38,72	48,51	6,00
4	"	16.33'	16.23'41"	-1,37	-15,93	5,40
5	16.07.1998	17.37'44"	17.29'17"	38,91	20,52	4,80
6	17.07.1998	05.03'40.5"	?			
7	22.07.1998	19.51'53"	19.51'47"	51,61	7,88	3,10
8	27.07.1998	09.11'48"	09.04'05"	-33,68	-71,97	3,00
9	28.07.1998	05.17'16"	05.01'32"	-7,20	120,40	5,10
10	"	14.13'17.5"	13.47'04"	-31,84	-71,28	4,50
11	25.02.1999	20.09'32.5"	19.45'12"	38,94	27,64	2,90
12	"	20.28.36"	20.18'04"	57,92	-156,84	3,70
13	07.12.1999	00.26'28.5"	00.19'49"	57,36	-154,51	6,50
14	"	00.35'33.5"	00.26'17"	57,45	-154,66	4,80
15	"	01.33'32"	01.25'36"	56,83	-154,38	3,10
16	"	01.42'37"	01.29'33"	57,03	-154,43	3,30
17	29.12.1999	21.47'28"	21.36'37"	-10,94	165,26	5,70
18	01.01.2000	02.29'53"	02.12'13"	-11,34	164,56	4,30
19	08.01.2000	16.58'57"	16.47'20"	-16,92	-174,24	7,20
20	28.01.2000	14.25'48"	?			
21	"	14.35'19.5"	14.21'07"	43,04	146,83	6,80
22	23.04.2000	07.37'47.5"	?			
23	"	07.43'14"	?			
24	11.07.2000	00.37'43"	00.27'36"	32,04	-116,3	2,50
25	"	01.46'43.5"	?			
26	"	01.47'8.5"	01.21'27"	57,51	-154,34	6,80

In der hier aufgeführten Tabelle sind alle mit dem Experiment registrierten Erdbeben aufgelistet. Jeweils mit angegeben sind die Orte der Epizentren, welche anhand von Vergleichen mit Erdbebenkatalogen<sup>1</sup> bestimmt wurden. Beben, die mit „?“ gekennzeichnet sind konnten nicht

<sup>1</sup>National Earthquake Information Center ([www.USGS.gov](http://www.USGS.gov))

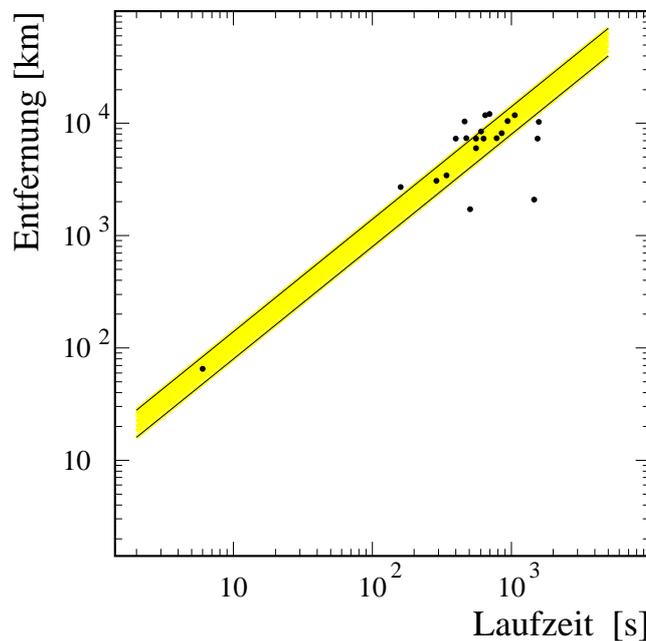


Abbildung B.1: Laufzeitkurve der gemessenen Erdbeben. Eingezeichnet ist ebenfalls eine Band um die Ausbreitungsgeschwindigkeit von P-Wellen (8–14 km/s) zu verdeutlichen.

eindeutig zugeordnet werden. Die Nachweiszeiten der Ereignisse mit dem Gravimeter sind unter „Ortszeit“ aufgetragen, so daß man aus der Differenz mit den Ausbruchzeiten der Beben (Beben UTC) die Laufzeit berechnen kann. Mit diesen Werten ist es möglich die Laufzeitverteilung darzustellen. In Abbildung B.1 sind die Entfernungen der Epizentren der Beben vom Standort des Experimentes als Funktion der Laufzeit aufgetragen. Die sich ergebenden Geschwindigkeiten helfen bei der Zuordnung des hauptsächlich nachgewiesenen Typs der Erdbebenwellen, da sich diese in ihren Geschwindigkeiten unterscheiden. In der Hauptsache unterteilt man die Wellen in folgende Wellenarten [Bri90]:

- P-Wellen (Verdichtungswellen oder erster Vorläufer): Es sind longitudinale Raumwellen, die ihren Weg mit hoher Geschwindigkeit (8–14 km/s) quer durch den Erdkörper nehmen.
- S-Wellen (Scherwellen oder zweiter Vorläufer): Es sind transversale Raumwellen, die den ersten Vorläufern mit etwa der halben Geschwindigkeit auf demselben Weg folgen.
- Raleigh- oder Love-Wellen: Sie kommen als letzte an, da sie sich mit verhältnismäßig geringer Geschwindigkeit als Interferenzwellen längs der Erdoberfläche ausbreiten.

Zusätzlich ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Erdbebenwellen noch material- und dichteabhängig. Betrachtet man mit diesem Wissen Abbildung B.1, so erkennt man, daß mit dem Gravimeter hauptsächlich P-Wellen registriert wurden. Zur Verdeutlichung ist deshalb ein Geschwindigkeitsband (8–14 km/s) mit in die Abbildung eingetragen. Der fast ausschließliche

Magnitude	Anzahl
3	rund 50000 oder mehr
4	rund 6000 oder mehr
5	rund 700-800
6	rund 20-50
7	rund 10
8	0-1

Tabelle B.1: *Statistische Häufigkeit von Erdbeben pro Jahr.*

Nachweis von P-Wellen erklärt allerdings nicht, warum nur eine so kleine Anzahl von Beben mit dem Gravimeter nachgewiesen wurden. Da die jährliche Zahl der Beben mit Magnituden über drei auf etwa 60000 geschätzt wird, ist die mit dem Experiment nachgewiesene Zahl von 26 Beben äußerst gering. In Tabelle B.1 ist zum besseren Vergleich die statistische Häufigkeit von Erdbeben pro Jahr in Abhängigkeit von ihren Magnituden aufgetragen [Bri90].



## Anhang C

### Verwendete Meßreihen

Mess-NR	Tag	Temperatur [ $^{\circ}C$ ]	Frequenz [GHz]	Position [mm]	Anzahl Zyklen
612	12.01.-14.01.2001	27	23.08	945	60
614	14.01.-17.01.2001	27	23.08	945	96
615	17.01.-18.01.2001	27	23.08	915	20
618	22.01.-28.01.2001	27	23.08	915	171
622	07.02.-13.02.2001	27	23.08	985	229
623	14.02.-20.02.2001	27	23.08	1095	232
625	20.02.-24.02.2001	27	23.08	1300	140
633	02.03.-05.03.2001	27	22.46	985	100
634	06.03.-07.03.2001	27	22.46	985	30
684	11.05.-12.05.2001	27	22.46	945	28
686	15.05.-18.05.2001	27	22.46	915	123
694	25.06.-29.06.2001	27	23.08	1500	167



# Literaturverzeichnis

- [Acc90] F. S. Accetta et. al.; Phys. Lett. B **248**, 146 (1990)
- [And89] M. Ander et. al.; Phys. Rev. Lett. **62**, 985 (1989)
- [Ark98] N. Arkani-Hamed et. al.; *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*; hep-ph/9803315
- [Bäc99] W. Bächtold; *Mikrowellentechnik*; Vieweg Verlag, (1999)
- [Bag97] C. H. Bagley et. al.; *Phys. Rev. Lett.*; Vol **78** (16), 3047–3050,(1997)
- [Bai43] F. Bailey; Mem. Astron. Soc. **14**, 1 (1843)
- [Bra92] L. S. Braun et. al.; *Physical Review D, Particles and Fields*; Am. Phys. Soc. (1992)
- [Bra97] C. Braun; *Die Gravitationskonstante, die Masse und die Mittlere Dichte der Erde*; Denschr. Akad. Wiss. (Wien), Math. naturwiss. Kl., **64**, 187–258 (1897)
- [Bri90] R. Brinkmann; *Abriss der Geologie*; Enke-Verlag (1990)
- [Boe84] H. de Boer; *Gravity and Relativity*; Precision Measurement and Fundamental Constants II, Nat. Bur. Stand. (U.S.), Spec. Publ. 617 (1984)
- [Bon67] M. Bonatz; *Der Gravitationseinfluß der Bodenfeuchtigkeit*; Zeitschrift für Vermessungswesen, **52**, 515, (1967)
- [Boy95] C. V. Boys; *On the Newtonian Constant of Gravitation*, Phil. Trans. R. Soc. London; A **182**, 1–72 (1895)
- [Bur99] G. K. Burgess; C. R. Hebd. Seances Acad. Sci **129**, 407 (1899)
- [Bur02] G. K. Burgess; Phys. Rev. **14**, 247(1902)
- [Cav98] H. Cavendish; *Phil. Trans. R. Soc.*; **88**, 469–526 (1798)
- [Cav99] H. Cavendish; *Ann. Phys., Lpz.*; **2B**, 1S, 1–69 (1799)
- [Cav15] H. Cavendish; *J. Ecole Polytech.*; **10**, 263–320 (1815)
- [Chi01] T. Chiba; *Constancy of the Constants of Nature*; gr-qc/0110118 (2001)

- [Cla82] R. N. Clarke et.al.; *Fabry-Pérot and open resonators at microwave and millimetre wave frequencies, 2–300 GHz*; J. Phys. E: Sci. Instrum., Vol. 15, (1982)
- [Cor94] A. Cornaz et. al.; *Determination of the gravitational constant at an effective Interaction distance of 112 m*; Rhys. Rev. Lett. **72**, 8 (1994)
- [Cor73] A. Cornu u. J. Baille; C. R. Hebd. Seances Acad. Sci **76**, 954 (1873)
- [Cor78] A. Cornu u. J. Baille; C. R. Hebd. Seances Acad. Sci **86**, 699 (1878)
- [Cul72] A. Cullen et al.; *A variational approach to the theory of the open resonator*; Proc. R. Soc. London, **A329**, 153–169 (1972)
- [Cul79] A. Cullen et al.; *Complex source-point theory of the electromagnetic open resonator*; Proc. R. Soc. London, **A366**, 155 (1979)
- [Dam95] T. Damour; *Gravitation, Experiment and Cosmology*; gr-qc/9606079, (1996)
- [Dam99] T. Damour; *The theoretical significance of G*; Meas. Sci. Techn. **10**, 467–469, (1999)
- [Dir38] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc., London **A165**, 198 (1938)
- [Dit99] H. Dittus; *Die Gravitation im Test*; Physikalische Blätter, Heft 11 (1999)
- [Ehl96] J. Ehlers u. G. Börner; *Gravitation*; Spektrum, Akad. Verlag (1996)
- [Eöt96] R. v. Eötvös, Ann. Phys. Chem. (Leipzig), **59**, 354 (1896)
- [Fal99a] I. Falconer; *Henry Cavendish: the man and the measurement*; Meas. Sci. Techn. **10** 470–477 (1999)
- [Fal99b] I. Falconer; *A purely local experiment – Poynting and the mean density of the Earth*; Meas. Sci. Techn. **10** 525–530 (1999)
- [Far72] L. Facy u. C. Pontikis; C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. Ser B: **274**, 437 (1972)
- [Fis86] E. Fischbach et. al.; *Reanalysis of the Eötvös Experiment*; Rhys. Rev. Lett. **56**, 3 (1986)
- [Fis98] E. Fischbach u. C. L. Talmadge; *The Search for Non-Newtonian Gravity*; Springer Verlag (1998)
- [Fit95] M. P. Fitzgerald et. al.; *Newton's Gravitational Constant with Uncertainty Less Than 100 ppm*; IEEE Trans. Instr. Measur. **44**, Issue 2, (1995)
- [Fit99] M. P. Fitzgerald et. al.; *The measurement of G using the MSL torsion balance*; Meas. Sci. Technol. **10** (6), 439–444 (1999)
- [Fra93] A. Franklin; *The Rise and Fall of the Fifth Force*; American Institute of Physics, New York (1993)

- [Gib81] G. W. Gibbons u. B. F. Whiting; *Newtonian gravity measurements impose constraints on unification theories*; Nature **291**, 636–638, (1981)
- [Gil97] G. T. Gillies; *The Newtonian gravitational constant: recent measurements and related studies*; Rep. Prog. Phys. **60**, 151–225, (1997)
- [Gil99] G. T. Gillies; *Some background on the measurement of the Newtonian gravitational constant, G*; Meas. Sci. Techn. **10**, 421–425, (1999)
- [Gue98] D. B. Guenther et. al.; *Testing the constancy of the gravitational constant using helioseismology*; The Astrophys. J., 498 (2), 871–876, (1998)
- [Gun99] J. Gundlach; *A rotating torsion balance experiment to measure Newton's constant*; Meas. Sci. Techn. **10**, 454–459, (1999)
- [Gun00] J. Gundlach; gr-qc/0006043, (2000)
- [Har62] E. Hardtwig; *Theorien zur mikroseismischen Bodenunruhe*; In W. Buchheim et. al., Geophysikalische Monographien, Band 3, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig KG, Leipzig (1962)
- [Har63] A. F. Harvey; *Microwave engineering*; New York Academic Press, (1963)
- [Haw87] S. Hawking u. W. Israel; *300 Years of Gravitation*; Cambridge University Press (1987)
- [Has63] K. Hasselmann; *A Statistical Analysis of the Generation of Microseisms*; Rev. of Geophysics, Vol. 1, No. 2 (1963)
- [Hei96] Firma Heidenhain; *NC-Längenmeßsysteme, Produktkatalog*
- [Hel83] O. Helene; *Upper limit of peak area*; Nuc. Inst. and Meth. **212**, 319–322 (1983)
- [Hey30] P. R. Heyl; J. Res. Natl. Bur. Stand. **5**, 1243 (1930)
- [Hey42] P. R. Heyl et. al.; J. Res. Natl. Bur. Stand. **29**, 1 (1942)
- [Hol96] O. Holzmann, B. Lang and H. Schütt; *Journal Reliable Computing*, **2**, (3), 229–239 (1996)
- [Hos85] J. K. Hoskins et. al.; *Experimental tests of the gravitational inverse-square law for mass separations from 2 to 105 cm*; Rhys. Rev. D, **32**, Nr. 12 (1985)
- [Hoy01] C. D. Hoyle et. al.; *Submillimeter Test of the Gravitational Inverse-Square Law: A Search for "Large" Extra Dimensions*; Rhys. Rev. Lett., **86**, 8 (2001)
- [Hub95] B. Hubler et. al.; *Determination of the gravitational constant with a lake experiment: New constraints for non-Newtonian gravity*; Rhys. Rev. D **51**, 8 (1995)

- [Jol78] P. v. Jolly; *Ann. Phys. Chem.*; Leipzig, **5**, 112 (1878)
- [Jun96] C. Jungnickel u. R. McCormach; *Cavendish*; American Philosophical Society (1996)
- [Kai95] T. Kaiser; *Aufbau eines Meßsystems zur Untersuchung des Oberflächenwiderstandes von HTSL-Filmen bei 86 GHz mittels Cokeflansch-Resonatoren*, Externer Bericht, **WUB 95–18** (1995)
- [Kar76] O. V. Karagioz et. al.; *Phys. Solid Earth* **12**, 351 (1976)
- [Kar81] O. V. Karagioz et. al.; *Izv. Acad. Sci. UdSSR, Phys. Solid Earth* **17**, 66 (1981)
- [Kar98] O. V. Karagioz et. al.; *Gravitational constant measurement using a four-position procedure*, *Grav. a. Cosmol.* **4**, Nr. 3 (15), 239–245, (1998)
- [Kle89] N. Klein, *Supraleitende Mikrowellenresonatoren für Anwendungen in physikalischen Grundlagenexperimenten*; Dissertation, Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal, **WUB 89–3** (1989)
- [Kle99] U. Kleinevoß et. al.; *Absolute measurement of the Newtonian Force and a determination of G*, *Meas. Sci. Techn.* **10**, 492-494, (1999)
- [Kle00] U. Kleinevoß et. al.; *Absolute Measurement of the Newtonian Gravitational Constant G*, *Proceedings of the CPEM 2000*
- [Kog67] H. Kogelnik u. T. Li; *Proc. IEEE* **54**, 1312–1329
- [Kog66] H. Kogelnik u. T. Li; *Laser Beams and Resonators*, *Appl. Opt.* **5**, 1550 (1966)
- [Kur95] K. Kuroda; *Does the Time-of-Swing Method Give a Correct Value of the Newtonian Gravitational Constant*, *Phys. Rev. Lett.*, **75** 2796 (1995)
- [Kur99] K. Kuroda; *Anelasticity in G experiments*; *Meas. Sci. Techn.* **10**, 435–438, (1999)
- [Lan52] Landold-Börnstein; *Zahlenwerte und Funktionen*, II. Band, 6. Teil, Elektrische Eigenschaften I, Springer Verlag, (1959)
- [Lan97] B. Lang; *Verified Quadrature in Determining Newton's Constant of Gravitation*, Preprint BUGHW-SC 97/01 (1997)
- [Lan92] B. Langensiepen; *Bestimmung der Newtonschen Gravitationskonstanten mit einer Fabry-Pérot-Gravitationwaage*; **WUB 92–25** (1992)
- [Lid00] D. R. Lide; *CRC Handbook of Chemistry and Physics*; CRC Press, (2000)
- [Luk85] K. M. Luk; *Complex source-point theory of Gaussian beams and resonators*; *Proc. IEEE* **132**, 105 (1985)

- [Luo99] J. Luo et. al.; Phys. Rev. D **59**, No. 4,6 pp. (1999)
- [Lut82] G. G. Luther et. al.; Phys. Rev. Lett. **48** (3), 121 (1982)
- [Lut99] G. G. Luther, private Mitteilung
- [Mas75] N. Maskelyne; Phil. Trans. R. Soc., **65**, 500–42, (1775)
- [Mat98] S. Matsumura et. al.; *A measurement of the frequency dependence of the spring constant*; Phys. Lett. A, 244, 4–8 (1998)
- [Max67] J. C. Maxwell, *The electrical researches of the honourable Henry Cavendish*; London, Cass, (1967)
- [Mei92] H. Meinke u. F. W. Gundlach; *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*, Springer-Verlag, (1992)
- [Mic96] W. Michaelis et. al.; Metrologia **32** (4), 267–276, (1996)
- [Mis70] C. W. Misner, K. S. Thorne u. J. A. Wheeler; *Gravitation*, (1970)
- [Moh98] P. J. Mohr u. B. T. Taylor; *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998*; J. Phys. Chem. Ref. Data **28**(6), 1713–1852 (1999)
- [Mon48] C. G. Montgomery; *Principles of microwave circuits*; McGraw-Hill Book Company, New York (1948)
- [Mül83] G. Müller, *Supraleitende Niobresonatoren im Millimeterwellenbereich.*, Doktorarbeit, Universität Wuppertal, **WUB 83–1** (1983)
- [Mül91] J. Müller et. al.; Ap. J., 382, L101 (1991)
- [New63] I. Newton; *Mathematische Prinzipien der Naturlehre*; Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt (1963)
- [Ni99] Wei-Tou Ni et. al.; *The application of laser metrology and resonant optical cavity techniques to the measurement of G*; Meas. Sci. Technol. **10**, (6), 495–498 (1999)
- [Nol98] F. Nolting; *Determination of the Gravitational Constant by Means of a Beam Balance*; Dissertation, Universität Zürich, (1998)
- [Nol99] F. Nolting; *A value of G from beam-balance experiments*; Meas. Sci. Techn. **10**, 487–491, (1999)
- [Par00] H. V. Parks et. al.; *A suspended laser interferometer for determining the newtonian constant of gravitation*; Proceedings of the CPEM (2000)
- [Peh88] E. Pehl; *Mikrowellentechnik*; Dr. A. Hüthig Verlag, (1988)

- [Pla99] M. Planck; *Über irreversible Strahlungsphänomene*; Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wissensch., S. 440, 1899
- [Pon72] C. Pontikis; C. R. Acad. Sci. bf 274, 437 (1972)
- [Poy79] J. H. Poynting; *Proc. R. Soc. London*; A **29**, (1879)
- [Qui92] T. J. Quinn et. al.; *The beam balance as an instrument for very precise weighing*, Meas. Sci. Techn. **3** 141–159 (1992)
- [Qui95] T. J. Quinn et. al.; *Stress-dependent damping in Cu-Be torsion and flexure suspensions at stresses up to 1.1 GPa*; Phys. Lett. A. **197**, 197–208 (1995)
- [Qui01] T. J. Quinn et. al.; *A New Determination of G Using Two Methods*; Phys. Rev. Lett. **87**, 11 (2001)
- [Rag48] G. L. Ragan; *Microwave Transmission Circuits*; McGraw-Hill Company Inc., New York 1948
- [Ren73] J. Renner; *Determination of the gravitational constant in Budapest* in Determination of Gravity Constants and measurement of Certain Fine Gravity Effects, Ed. by Y. D. Boulanger and M. U. Sagitov, Nauka Press, Moskau (1973)
- [Ric98] F. Richarz; *Abhl. K. Akad. Wiss.*; Berlin (1898)
- [Ric99] S. J. Richman et. al.; Meas. Sci. Technol. **10**, (6), 460–466 (1999)
- [Rie92] J. C. Ries et.al.; Geophys. Rev. Lett. **19**, 529 (1992)
- [Ros69] R. D. Rose et.al.; Phys. Rev. Lett. **23**, 655 (1969)
- [Sag71] M. U. Sagitov et. al.; Vermessungstechnik **19**, Heft 2, 59 (1971)
- [Sla69] J. C. Slater; *Microwave Electronics*; Dover Pub. Inc., New York, 1969
- [Sau90] P. R. Saulson; *Thermal noise in mechanical experiments*, Phys. Rev. D, Vol. **42**, Nr. 8 (1990)
- [Sch01] S. Schlamminger; Dissertation in Vorbereitung, ETH-Zürich
- [Sch75] G. Schneider; *Erdbeben*; Ferdinand Enke Verlag (1975)
- [Sch98a] J. P. Schwarz et. al.; Science **282** (5397), 2230–2234, (1998)
- [Sch99a] J. P. Schwarz et. al. *A new determination of the Newtonian constant of gravity using the free fall method*; Meas. Sci. Techn. **10**, 478–486 (1999)
- [Sch99] A. Schumacher, *Systematische Untersuchungen zur Messung der Newtonschen Gravitationskonstanten mit einem Pendelresonator*, Dissertation, Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal, **WUB 99–13** (1999)

- [Sch88] J. Schurr, *Ein Fabry-Pérot-Mikrowellenresonator als Gravitationwaage*, Externer Bericht, Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal, **WUB 88–11** (1988)
- [Sch92] J. Schurr; *Eine neue Methode zum Test des Newtonschen Gravitationsgesetzes — erste Ergebnisse von zwei Laborexperimenten*, Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal, **WUB 92–8** (1992)
- [Sch98] J. Schurr et. al.; *Measurement of the gravitational constant  $G$  by means of a beam balance*, Physics Letters A **248**, 295–308 (1998)
- [Sch95] H. Schütt; *Präzise Bestimmung der Newtonschen Gravitationskonstanten mit einem Fabry-Pérot-Pendelresonator*, Diplomarbeit, Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal, **WUB 95–45** (1995)
- [Sha90] I. I. Shapiro; in *General Relativity and Gravitation*, ed N. Ashby (Cambridge: Cambridge Univ. Press) 313, (1990)
- [Spe87] C. Speakes u. G. T. Gillies; *Why is  $G$  the Least Precisely Known Physical Constant?*; Z. Naturforsch., **42 a**, 663–669 (1997)
- [Spe99] C. Speakes et. al. *Experiment and theory in anelasticity*; Meas. Sci. Techn. **10**, 430–434 (1999)
- [Sta84] F. D. Stacey u. G. J. Tuck; Natl. Bur. Stand. (US) Spec. Publ. 617, 597 (1984)
- [Ste58] L. Stegena und M. Sagitov; *The Constant of Gravitation*, Lorand Eötvös Universität, (1979)
- [Ste74] M. Steinwachs; *Geologisches Jahrbuch*; Reihe E, Heft 3 (1974)
- [Stö98] H. Stöcker; *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, (1998)
- [Str66] A. H. Stroud und D. Secrest; *Gaussian quadrature formulas*; Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (1966)
- [Wal91] H. Walesch; *Aufbau einer Apparatur zur Messung der Gravitationskraft im Entfernungsbereich 0,5–2 m mit einem normalleitenden Fabry-Pérot Mikrowellenresonator*, Diplomarbeit, Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal, **WUD 91–25** (1991)
- [Wal95] H. Walesch; *Test des Newtonschen Gravitationsgesetzes und die präzise Bestimmung von  $G$* , Dissertation, Bergische Universität Gesamthochschule Wuppertal, **WUB 95–4** (1995)
- [Wal01] H. Walesch; private Mitteilung
- [Wei72] S. Weinberg ; *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*; New York, J. Wiley & Sons (1972)

- [Wil98] J. Wilsing; *Abhl. K. Akad. Wiss.*; Berlin **13** (1885)
- [Zah33] J. Zahradnicek; *Phys. Z.* **34**, 126 (1933)
- [Zum91] M. Zumberge et al.; *Submarine measurement of the newtonian gravitational constant*; *Phys. Rev. Lett.*, Vol. **67**, Nr. 22, (1991)

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die direkt oder indirekt zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein Dank gilt:

- Herrn Prof. Dr. H. Meyer für die von ihm geschaffenen großzügigen Arbeitsbedingungen sowie die vielen engagierten und motivierenden Diskussionen, welche mir einen äußerst interessanten und lehrreichen Einblick in das weite Spektrum der Physik erbrachten. Außerdem für die von Ihm ermöglichten Reisen zu Konferenzen und Sommerschulen auf mehreren Kontinenten.
- Herrn Prof. Dr. H. Piel für die Möglichkeit, von seinen langjährigen Erfahrungen an diesem Experiment zu profitieren.
- Herrn S. Hartmann, für die Unterstützung und Hilfe beim Verstehen und Aufbauen vieler Komponenten des Experimentes.
- meinen Mitstreitern Frau H. Bojahr und Herrn F. Schröder für die gute Zusammenarbeit in den fast fünf Jahren unserer Promotion. Besonders meinem Zimmergenossen Herrn F. Schröder gilt mein Dank für die allzeit offene und diskursive Atmosphäre. Seine Hilfe bei viele physikalischen und privaten Fragestellungen („...*nicht der Weg — das Ziel ist das Ziel.*“) waren eine Bereicherung für mich.
- den anderen Kollegen des Lehrstuhles von Prof. Dr. H. Meyer:  
K. H. Becker, J. Budischewski, Dr. B. Funk, H. Hohl, C. Iserlohe, PD Dr. N. Magnussen, S. Ommer, Dr. D. Petry, Dr. Dr. W. Rhode, I. Schaarwächter und Dr. B. Wiebel Sooth.
- meinen Vorgängern an diesem Experiment Dr. J. Schurr, Dr. H. Walesch und Dr. A. Schumacher.
- meinen Freunden Dr. T. A. Hartz, Dr. T. Odeh, Dr. A. Schüttauf, B. Stadtmann, Dr. J. Volmer und Dr. A. Wörner.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern Vera und Klaus Kleinevoß. Denn ohne Ihre permanente Unterstützung hätte ich weder die Möglichkeit gehabt, noch es in Ansätzen geschafft zu diplomieren, geschweige denn zu promovieren; ausdrücklich auch der Mühe meines Vaters, sich mit mir vor mein Experiment zu setzen und mechanische Probleme zu diskutieren.

