

Nichtbeschattbarkeit durch Dimensionsvariabilität in dynamischen Systemen

WUB-DIS 2000-12

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

dem Fachbereich Physik

der Bergischen Universität, Gesamthochschule Wuppertal
am 21. Dezember 2000

von

ERIK SINDE

geboren am 21. 11. 1967 in Dresden

Abstract:

Numerical simulations of dynamical systems often rely inexplicitly on the hypothesis that the simulated pseudo-trajectory represents a true trajectory of the system in the sense that both the pseudo-trajectory and the true trajectory stay close to each other for arbitrarily long time. This is guaranteed to hold for hyperbolic systems by the shadowing lemma (Anosov 1967, Bowen 1975). However, this is not the case in general. Virtually, all real systems which physicists encounter, are nonhyperbolic, and in most systems the shadowing property does not hold. Dynamical systems with unstable dimension variability have recently gained interest as a source both of nonhyperbolicity and nonshadowability. Some recent publications[7] claim that the nonshadowability due to unstable dimension variability is particularly severe.

In this work for a very simple dynamical system driven by one out of three input systems is investigated. Numerical evidence is presented, that all the combined systems are practically unshadowable due to the same mechanism, although only two of them can have unstable dimension variability, the third being a quasiperiodic map which has no periodic orbits.

In order to show numerically for the first and second input system that both singly and doubly unstable periodic orbits are embedded into the attractor, a new method is applied to one of the systems to show that the attractor fills a region of the phase space densely. This method consists of iterating particular lines which are known to be subsets of the attractor instead of points and consecutively applying a Poincaré surface-of-section-like technique. For one of the studied maps this can reduce the dimensionality of the system by one.

For the three model systems, the probability distribution of the shadowing times is investigated through simulation. Additionally, a new deterministic measure to quantify the severeness of nonshadowability due to unstable dimension variability is introduced and applied to the model systems. This quantity estimates by how many digits the calculus precision has to exceed the required closeness to a true trajectory on average for a given trajectory length. It is argued and verified numerically that for the case of unstable dimension variability the number of additionally needed calculus precision digits is proportional to the logarithm of the trajectory length. Thereby even pseudo-trajectories with arbitrarily small one step errors cannot be shadowed by true trajectories for arbitrarily long time.

The nonshadowability can however in the same time be rigorous and very small, so that for some practical purposes this system can be regarded as almost shadowable. On the other hand, the same mechanism can produce similar results for systems where unstable dimension variability does not occur. In those systems there is an upper limit to the additionally needed calculus precision. This limit can be so large that for practical purposes this system behaves as a nonshadowable one although it is shadowable in the sense of the shadowing lemma.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Dynamische Systeme	8
2.1	Begriffe	8
2.1.1	Dynamische Systeme und Chaos	8
2.1.2	Attraktor	10
2.1.3	Ljapunovexponenten	11
2.1.4	Invariante Maße	12
2.1.5	Fraktale Dimensionen	12
2.1.6	Stabile und instabile Mannigfaltigkeit	16
2.1.7	In chaotische Attraktoren eingebettete Periodische Orbits	18
2.1.8	Chaoskontrolle	18
2.2	Hyperbolizität und Beschattbarkeit	19
2.2.1	Das Schattenbahnlemma von Anosov und Bowen	20
2.3	Dimensionsvariabilität	21
3	Untersuchungen der Modellsysteme	23
3.1	Periodische Orbits des erweiterten Bernoulli-Shifts	25
3.2	Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts	30
3.2.1	Stabilität der z-Richtung im Attraktor (Kurzzeit-Ljapunovexponenten)	37
3.3	Testen auf Dimensionsvariabilität: sind die Orbits eingebettet?	38
3.3.1	Untersuchung der punktweisen Dimension	38
3.3.2	Nachbarn in einer Referenztrajektorie	41
3.4	Iteration einer Linie im Bernoulli-Shift	42
3.4.1	Approximation des Attraktors durch Kurven	43

3.4.2	Dimensionsabschätzung des Attraktors mit Hilfe der Kurvenapproximation	46
3.4.3	Rückwärtsiteration von Linien im erweiterten Bernoulli-Shift . . .	48
3.4.4	Approximation der Menge der doppelt instabilen PP durch Rückwärtsiteration von Kurven	51
3.4.5	Dimensionsabschätzung der Menge der doppelt instabilen PP . . .	53
3.5	Die erweiterte Cat map	57
3.6	Die quasiperiodische Abbildung	58
4	Nichtbeschattbarkeit bei Dimensionsvariabilität	60
4.1	Kriterium für Nichtbeschattbarkeit der kippelnden Richtung	65
4.2	Vergleich mit Ergebnissen der Literatur	71
4.3	Eine neue Methode quantitativer Erfassung von Nichtbeschattbarkeit .	74
4.4	Vergleich der beiden vorgestellten Methoden	83
4.5	Quasiperiodische Abbildung	83
5	Zusammenfassung, Ausblick	89

Kapitel 1

Einleitung

Chaos war, der griechischen Mythologie zufolge, der erste Zustand des Universums. Das Wort bezeichnet die unendliche Ausdehnung des Universums, den unendlichen Abgrund, die unendliche Finsternis. Dabei soll es sich nach verschiedenen Quellen entweder um einen Zustand der Leere, oder um eine ungeordnete Masse von Dingen[30] gehandelt haben.

Das Wort ist heute in aller Munde. Wem immer ich erzähle, was ich mache, irgendwann sagt mein Gesprächspartner „Ach so, Chaosforschung!“, und kurz darauf „Schreibtisch“.

Ja, wir erforschen die Unordnung, aber nicht die alltägliche, sondern jene, die sogar bei Ausschließung jedweder Stochastizität noch auftritt. *Deterministisches Chaos* ist seit dem Ende des 19. Jahrhunderts ein Thema des wissenschaftlichen Interesses. H. Poincaré[33] zeigte damals mit dem Dreikörperproblem der klassischen Mechanik zum ersten Mal, daß es nichtintegrierte Systeme gibt, die kompliziertere als die bis dahin bekannten periodischen und quasiperiodischen Lösungen besitzen.

Das simpelste Beispiel dafür ist der Kuchenteig, in dem sich ursprünglich unmittelbar benachbarte Salzkrümel exponentiell auseinanderbewegen, während der Bäcker den Teig bearbeitet. Jeder Transformationsschritt besteht aus „Strecken“ (in horizontaler Richtung, Stauchen in vertikaler) und „Falten“. Oftmals können komplizierte Effekte für sehr einfach aussehende Systeme nachgewiesen und in solchen auch gut verstanden werden. Durch das Strecken wird der horizontale Abstand zweier Salzkrümel im Teig in jedem Schritt verdoppelt. Durch das Falten, das die endliche Ausdehnung des Teigs sichert, werden horizontal weit auseinanderliegende Salzkrümel auch in vertikaler Richtung verteilt. Das soeben qualitativ beschriebene Beispiel der Bäckertransformation verdeutlicht den Begriff des deterministischen Chaos. Obwohl sich der idealisierte Kuchenteig in jedem Transformationsschritt auf genau definierte Weise verändert und überhaupt kein Zufall im Spiel ist, ist eine Prise Salz nach wenigen Schritten gleichmäßig im Teig verteilt. Obwohl diese Prise Salz nahezu an einem Ort in den Teig kam, ist jedes Krümel nach einigen Schritten an einem völlig anderen Ort, der einzig und allein davon abhängt, wo *genau* es in den Teig kam. Für die Physik resultiert daraus, daß selbst vollkommen deterministische, aber chaotische Systeme nicht für lange Zeiten vorhersagbar sind, da ihr Zustand nie ganz

ohne Meßfehler bestimmt werden kann, und Fehler der Anfangsbedingung exponentiell mit der Zeit anwachsen.

Ein typisches Beispiel für ein dynamisches System mit im wesentlichen deterministischer Dynamik ist ein Laser. Sein Zustand wird durch die Zustandsvariablen, typischerweise die Photonendichte im Resonator und die Besetzungsinversion (Dichte der Atome im angeregten Zustand) beschrieben. Ist die Pumpleistung konstant oder wenigstens zu jeder Zeit bekannt, kann der Zustand des Lasers zu jedem späteren Zeitpunkt berechnet werden. Während bei der Bäckertransformation die Zeit diskret ist (Transformationsschritte), wird der Laser als System mit kontinuierlicher Zeit beschrieben.

Physiker interessieren sich für Modellierung und Vorhersage solcher Systeme und das dynamische Verhalten in Abhängigkeit von Systemparametern.

Darüber hinaus untersucht die *nichtlineare Zeitreihenanalyse*, ausgehend von beobachteten oder numerisch erzeugten Lösungen, Eigenschaften dieser Systeme, die ihre Dynamik, d. h. die zeitliche Entwicklung ihrer Zustandsvariablen, betreffen. Diese Eigenschaften sind aus den Bewegungsgleichungen selbst der physikalischen (oder in zunehmenden Maße auch biologischen) Modelle oft nicht erkennbar. Andererseits können dynamische Eigenschaften auf Grundlage gemessener Daten auch dann untersucht werden, wenn keine Modellgleichungen bekannt sind.

Zu ihnen zählen die Stabilitätseigenschaften von Trajektorien im Phasenraum (quantifiziert durch Ljapunovexponenten) oder die Unsicherheit möglicher Vorhersagen (quantifiziert durch Entropien). Mit Hilfe dieser Erkenntnisse lassen sich dann Modelle verifizieren, aber auch beispielsweise Methoden zur Chaoskontrolle entwickeln.

Viele dynamische Systeme sind so komplex, daß sie erfolgreich zu modellieren bisher schwierig bis praktisch aussichtslos ist. Die prominentesten Beispiele dafür sind das Wetter oder aber die Börsenkurse.

Von praktischem Interesse und leichter beherrschbar sind physikalische Systeme mit nur wenigen Freiheitsgraden, wie z. B. Laser. In einem an der Universität Oldenburg durchgeführten Experiment erzeugt ein Festkörperlaser grünes Licht, das für ein Laserdisplay (z. B. Projektor für Computerbildschirme) benötigt wird. Da kein geeigneter Laserübergang für grünes Licht aus einem Festkörperlaser bekannt ist, verwendet man einen Infrarotlaser, der durch Einbringen eines nichtlinearen Kristalles (z. B. Kaliumtitanylphosphat KTiPO_4) in seinen Resonator dazu gebracht werden kann, Licht der doppelten Frequenz (hier grünes) abzustrahlen. Die Dynamik des Problems wird durch die nichtlineare Kopplung der Lasermoden insoweit verkompliziert, daß in den für die Anwendung interessantesten Parameterbereichen Chaos auftritt. Da für das Laserdisplay ein konstanter Lichtstrom benötigt wird, arbeitet man an Methoden zur Chaoskontrolle. Diese haben das Ziel, die in einen chaotischen Attraktor immer eingebetteten instabilen periodischen Orbits zu stabilisieren (siehe Abschnitt 2.1.8).

Das Thema dieser Arbeit ist durch die Zusammenarbeit mit den Experimentatoren in Oldenburg wesentlich motiviert. Bei Simulationen zur Chaoskontrolle für den Oldenburger Laser waren nämlich deutliche Hinweise auf Dimensionsvariabilität zu finden, ein

Phänomen, das die Modellierbarkeit des Lasers in Frage stellen könnte.

Dimensionsvariabilität (der instabilen Mannigfaltigkeit) ist das Phänomen, daß die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit für verschiedene Punkte in einem chaotischen Attraktor variiert. Man betrachte beispielsweise ein Doppelpendel (Abb. 1.1), das neben

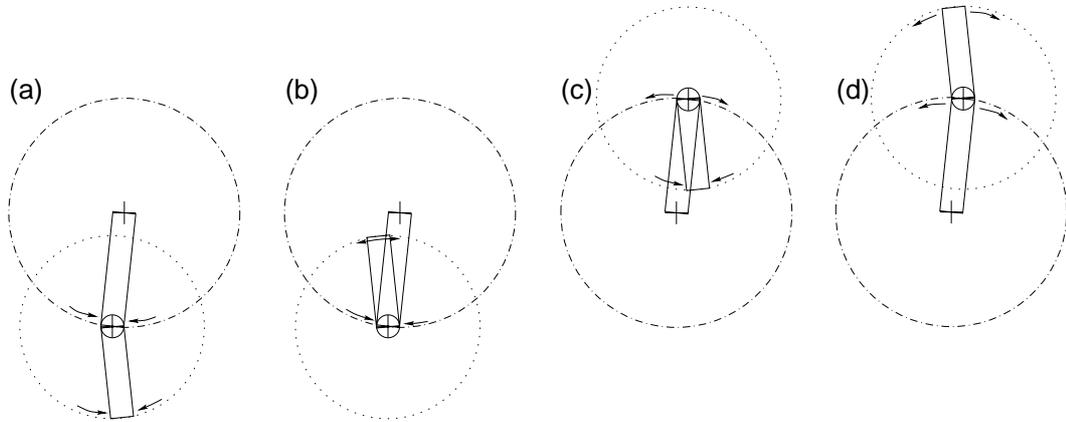


Abbildung 1.1: Doppelpendel (schematisch): (a) stabiler Fixpunkt, (b) und (c) einfach instabile Fixpunkte, (d) doppelt instabiler Fixpunkt

dem stabilen Fixpunkt zwei grundsätzlich verschiedene Arten instabiler Fixpunkte hat: zwei mit einer und einen mit zwei instabilen Richtungen. Ähnlich können auch periodische Orbits unterschiedlich viele instabile Richtungen haben.

Beim konservativen Doppelpendel gehören diese Fixpunkte zu verschiedenen Attraktoren. Ein gedämpftes und regelmäßig angestoßenes Doppelpendel dagegen besitzt (in einem bestimmten Parameterbereich) die Eigenschaft der Dimensionsvariabilität[24], d. h. alle Typen von Fixpunkten sind in den gemessenen Attraktor eingebettet.

Weitere Systeme, für die bisher Dimensionsvariabilität festgestellt wurde, schließen gekoppelte Abbildungen[23, 25] sowie retardierte Systeme (Systeme mit zeitverzögerter Rückkopplung) ein. Retardierte Systeme wurden zuerst zur Beschreibung der Dynamik der Zahl der roten Blutkörperchen eingeführt. Da zu ihrer Bildung ungefähr 6 Wochen benötigt werden, kann ein momentaner Mangel oder Überschuß nur mit dieser Verzögerung reguliert werden. Somit fließt in die aktuelle Zu- oder Abnahme auch Information aus der Vergangenheit ein. Die gesamte zukünftige Entwicklung ist demnach eine Funktion des aktuellen Zustandes, dessen von vor 6 Wochen und aller dazwischenliegenden Zustände. Durch diesen Mechanismus haben diese Systeme sehr viele Freiheitsgrade, kontinuierliche Systeme prinzipiell sogar unendlich viele[9]. In diesen sehr hochdimensionalen Attraktoren gibt es ebenfalls Dimensionsvariabilität.

Nichtbeschattbarkeit wurde bereits in vielen Arbeiten[7, 24, 40] diskutiert. Das Konzept der Beschattbarkeit verdeutlicht den Grad der Übereinstimmung zwischen den Lösungen eines mathematisch definierten Modells und einer möglichen numerischen Implementierung auf einem Computer, die zumindest durch die endliche Rechengenauigkeit vom

definierten Modell abweicht. Ist das System beschattbar, so verhalten sich die computer-generierten Trajektorien qualitativ genau so wie die Trajektorien des definierten Modells. Bei Nichtbeschattbarkeit jedoch wird der Computer zwangsläufig Trajektorien erzeugen, die für lange Zeiten keiner Trajektorie des definierten Modells entsprechen (d. h. in ihrer Nähe bleiben).

Die Frage ist von großer praktischer Bedeutung: in jedem Experiment, in jeder Art von gemessenen Daten ist immer Rauschen enthalten, das den Prozeß selbst beeinflußt (dynamisches Rauschen). Daher sind Prozesse, deren Dynamik nicht beschattbar ist, streng genommen nicht modellierbar. Für diese Systeme kann kein Modell eine Trajektorie generieren, die für beliebig lange Zeit der tatsächlichen Dynamik des realen physikalischen oder biologischen Systems folgt¹. Dadurch wird es für manche Zwecke notwendig, statt mit Modellen ausschließlich mit gemessenen Daten zu arbeiten, die zwar mit Rauschen behaftet sind, aber im Rahmen der Meßgenauigkeit die Dynamik des untersuchten Systems qualitativ richtig widerspiegeln. Das Instrumentarium hierfür liefern die Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse.

Zum Thema Beschattbarkeit gibt in der physikalischen und insbesondere in der mathematischen Literatur seit den siebziger Jahren zahlreiche Arbeiten, unter anderem widmet sich ein ganzes Buch[32] diesem Thema. Für die Klasse der hyperbolischen Systeme (erklärt in 2.2) wurde die Beschattbarkeit bereits 1967 bzw. 1975 von Anosov[2] und Bowen[5] gezeigt.

Systeme mit Dimensionsvariabilität sind nichthyperbolisch. Für diese Systeme wird allgemein erwartet, daß Trajektorien niemals beliebig lange beschattbar sind². Die Nichtbeschattbarkeit als Folge von Dimensionsvariabilität bildet das Hauptthema der vorliegenden Arbeit.

Kapitel 2 faßt die für die Untersuchung der Dimensionsvariabilität relevanten Grundlagen der Theorie der dynamischen Systeme anhand von Definitionen sowie einiger Beispiele zusammen. Im Kapitel 3 werden die Abbildungen, für die wir die Dimensionsvariabilität studiert haben, vorgestellt und die Eigenschaften ihrer invarianten Mengen erläutert. Diese Abbildungen sind für das Studium der Dimensionsvariabilität besonders geeignet, da hier die Abfolge von Stabilität und Instabilität auf *eine* Phasenraumrichtung beschränkt ist. Wir argumentieren, warum diese Abbildungen Dimensionsvariabilität aufweisen. Im Kapitel 4 wird der Mechanismus von Nichtbeschattbarkeit durch Dimensionsvariabilität herausgearbeitet und illustriert sowie mit den Modell-Abbildungen veranschaulicht. Wir geben sehr gute numerische Evidenz für die Nichtbeschattbarkeit der Beispielsysteme und definieren zwei verschiedene, zueinander komplementäre Größen, die Nichtbeschattbarkeit quantitativ erfassen. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einer Aufzählung weiterer möglicher Untersuchungen im Zusammenhang mit Dimensionsvariabilität.

¹Allerdings können statistische Größen, wie Mittelwerte von Funktionen der Phasenraumvariablen (über das invariante Maß), von den Modellen durchaus noch in guter Genauigkeit geliefert werden.

²Es gibt auch Gegenbeispiele[42].

Kapitel 2

Dynamische Systeme

In diesem Kapitel will ich die verwendeten mathematischen Begriffe und Werkzeuge sowie den bisherigen Stand der Forschung zu diesem Thema zusammenfassen. Für ausführliche Definitionen sei auf mathematische Literatur verwiesen (z. B. [37, 12]).

2.1 Begriffe

2.1.1 Dynamische Systeme und Chaos

Ein dynamisches System beschreibt mathematisch die Zeitentwicklung eines realen physikalischen, biologischen oder anderen Systems¹. Es wird charakterisiert durch seinen Phasenraum M (kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit), die Menge aller möglichen Zustände des Systems, sowie durch eine einparametrische Familie von Abbildungen $\phi^t : M \rightarrow M$ mit $\phi^t(\phi^s(x)) = \phi^{s+t}(x)$. Ist dabei der Parameter $t \in T$ (die Zeit) eine ganze Zahl ($T = \mathbb{Z}$ oder $T = \mathbb{Z}^+$), so heißt das dynamische System *zeitdiskret*, andernfalls heißt es *zeitkontinuierlich* ($T = \mathbb{R}$ oder $T = \mathbb{R}^+$). Zeitdiskrete Systeme werden durch die Abbildung $\phi^1 \equiv \phi$ eindeutig beschrieben und daher auch kurz als auch als Abbildungen bezeichnet. Es gilt $\forall n > 0$ (ϕ^0 ist die identische Abbildung):

$$\begin{aligned}\phi^n &\equiv \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{n \text{ - mal}} \\ \phi^{-n} &\equiv \underbrace{\phi^{-1} \circ \dots \circ \phi^{-1}}_{n \text{ - mal}} \quad \text{falls } \phi \text{ invertierbar ist}\end{aligned}$$

Zeitkontinuierliche Systeme werden auch als *Flüsse* bezeichnet. Durch eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in M \tag{2.1}$$

¹Ich betrachte im folgenden nur autonome dynamische Systeme

wird immer ein Fluß definiert. Um das dynamische System in die Form ϕ^t zu bringen, muß die Differentialgleichung über die Zeit t integriert werden. Ein solcher Fluß ist immer invertierbar (denn die Differentialgleichung kann ebensogut in umgekehrter Zeitrichtung integriert werden.)

Das Bild einer Bewegung mit Anfang p ist im allg. der Orbit durch p und wird mit $\gamma(p)$ bezeichnet. Es gilt also $\gamma(p) = \{\phi^t(p), t \in T\}$

Jede Menge $\zeta = \gamma(p) = \{p = \phi^t(p_0), t \in T, p_0 \in M\}$ heißt ein **Orbit** oder eine **Trajektorie** des Systems. Ist das System invertierbar, wird zwischen dem **positiven Semiorbit** durch p_0 , d. h. $\gamma^+(p_0) = \{\phi^t(p_0), t \in T, t \geq 0\}$ und dem **negativen Semiorbit** durch p , d. h. $\gamma^-(p_0) = \{\phi^t(p_0), t \in T, t \leq 0\}$ unterschieden.

Die Mengen der Häufungspunkte der Orbits des dynamischen Systems heißen α - und ω -**Grenzmengen**:

$$\begin{aligned}\alpha(p) &= \{y \in M : \exists \text{ eine Folge } \{n_i\} : n_i \rightarrow \infty, \text{ so daß } \phi^{-n_i}(p) \rightarrow y\} \\ \omega(p) &= \{y \in M : \exists \text{ eine Folge } \{n_i\} : n_i \rightarrow \infty, \text{ so daß } \phi^{n_i}(p) \rightarrow y\}\end{aligned}$$

Sie sind invariant, d. h. $\forall p \in M$ gilt $f(\alpha(p)) = \alpha(p)$ und $f(\omega(p)) = \omega(p)$. Die α -Grenzmenge ist nur für invertierbare Systeme definiert. Die Orbits können nach ihrer ω -Grenzmenge kategorisiert werden. Ein beliebiger positiver Semiorbit $\gamma^+(p_0)$ wird, sofern er nicht divergiert, nach Ablauf einer **Transiente** genannten Zeit, in der die Dynamik durch den Ausgangspunkt p_0 bestimmt ist, zu einem stationären Regime übergehen. Die Bewegung läuft dann im wesentlichen in der ω -Grenzmenge ab. Es gilt

$$\forall p_0 \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_{trans}, \text{ so daß } \forall t \geq t_{trans} \quad \exists p \in \omega(p_0) : d(f^t(p_0), p) < \varepsilon \quad (2.2)$$

Die Bewegung in der ω -Grenzmenge läßt sich daher in die folgenden 4 Bewegungsklassen einteilen:

- **Fixpunkt** ($\omega(p) = \{p\}$),
- **periodischer Orbit** der Periode T ($T > 0 \in T$), falls $\exists p \in \omega : \phi^T(p) = p$ (ein isolierter periodischer Orbit eines Flusses heißt auch **Grenzyklus**),
- **quasiperiodisch** oder
- **chaotisch**.

Dabei heißt die Bewegung chaotisch, falls sie **sensitiv bzgl. der Anfangswerte** ist, d. h. wenn es zwei anfänglich benachbarte Trajektorien gibt, die exponentiell voneinander divergieren,

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \omega \quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in \omega \cup B_\delta(x) \quad \exists t \geq 0 : \\ d(\phi^t(x), \phi^t(y)) \geq \varepsilon\end{aligned} \quad (2.3)$$

(siehe Abb. 2.1.) Dabei ist $B_\delta(x) = \{y \in M : d(x, y) < \delta\}$. Die entsprechenden Exponenten sind die Ljapunovexponenten (definiert in Abschnitt 2.1.3).

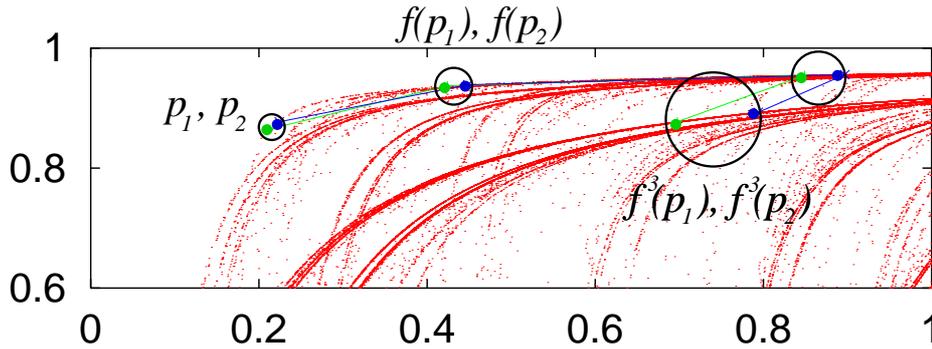


Abbildung 2.1: Beispiel für exponentielle Divergenz von Trajektorien in einer Abbildung (Ausschnitt aus dem Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts, zur Def. siehe Kap. 3). Die Bilder $f(p_1), f(p_2)$ zweier Punkte p_1, p_2 mit sehr kleinem Abstand sind weiter voneinander entfernt als die Urbilder, bei weiter Iteration wächst der Abstand exponentiell an.

Chaos kann bereits bei 1-dimensionalen nicht invertierbaren oder bei 2-dimensionalen invertierbaren Abbildungen auftreten. Flüsse können hingegen nur chaotisch sein, wenn ihr Phasenraum mindestens 3-dimensional ist (Poincaré-Bendixson-Theorem).

2.1.2 Attraktor

Ein Teilmenge Λ des Phasenraumes eines dynamischen Systems $\{\phi^t\}_{t \in T}$ auf (M, d) heißt **invariante Menge**, falls $\phi^t(\Lambda) = \Lambda \forall t \in T$. Jede ω -Grenzmenge ist eine invariante Menge. Eine abgeschlossene, bezüglich $\{\phi^t\}$ invariante Menge Λ heißt **anziehend** für das dynamische System, falls eine Umgebung U von Λ existiert, deren sämtliche Punkte unter fortgesetzter Iteration des Systems zu Λ hin abgebildet werden, d. h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi^t(p), \Lambda) = 0 \quad \forall p \in U. \quad (2.4)$$

Hat dabei **jede** Umgebung von Λ eine solche Konvergenzeigenschaft, heißt die invariante Menge Λ **global anziehend**. Das **Anziehungs- oder Einzugsgebiet** $W(\Lambda)$ einer anziehenden Menge ist die Menge aller Punkte $p \in M$, für die

$$d(\phi^t(p), \Lambda) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

gilt. Eine anziehende invariante Menge ist ein **Attraktor**, wenn sie einen dicht liegenden positiven Semiorbit hat, d. h. $\exists p_0 \in \Lambda : \overline{\gamma^+(p_0)} = \Lambda$. Ein Attraktor ist immer kompakt. Jeder Attraktor ist mit der ω -Grenzmenge jedes seiner Punkte identisch. Ein Attraktor heißt **seltsamer Attraktor**, wenn eine der in 2.1.5 definierten dimensionsartigen Charakteristika für diese Menge nicht ganzzahlig (fraktal) ist. Die in dieser Arbeit untersuchten invarianten Mengen sind seltsame Attraktoren.

2.1.3 Ljapunovexponenten

Auf $M \subset \mathbb{R}^n$ sei ein glattes dynamisches System $\{\phi^t\}_{t \in T}$ gegeben. Die **Ljapunovexponenten** beschreiben das exponentielle Auseinander- oder Zusammenlaufen der Trajektorien in den diesbezüglichen Eigenrichtungen im Phasenraum. Dafür untersucht man die Zeitentwicklung infinitesimaler Abweichungsvektoren. Diese werden durch die Vektoren $y = \frac{\delta x}{\|\delta x\|}$ in einem an einen Punkt $x \in M$ angehefteten n -dimensionalen linearen Raum (dem **Tangentialraum**) beschrieben. Die Tangentialraumvektoren werden mittels der **Tangentialraumabbildung** $DF(x)$ in der Zeit vorwärts entwickelt²:

$$y_{t+1} = DF(x_t)y_t \quad \text{bei Abbildungen vom Typ} \quad x_{t+1} = F(x_t) \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = DF(x)y \quad \text{bei Flüssen vom Typ} \quad \dot{x} = F(x) \quad (2.7)$$

Die Rate des exponentiellen Wachstums bzw. Schrumpfens ist dann (über unendlich lange Zeit gemittelt)

$$\lambda(x_0, y_0, t) = \frac{1}{t} \ln \|y_t\| \quad (2.8)$$

$$\lambda(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|y_t\| \quad (2.9)$$

Die λ heißen **Ljapunovexponenten**. Wird nur über endlich lange Zeit gemittelt, spricht man von **lokalen** oder **Kurzzeit-Ljapunovexponenten**. In einem dynamischen System auf $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es für jeden Punkt x_0 maximal n verschiedene Ljapunovexponenten, die n linear unabhängigen Richtungen im Tangentialraum entsprechen. Für den Fall einer Abbildung erhält man durch Einsetzen von (2.6) in (2.8):

$$\lambda(x_0, y_0, t) = \frac{1}{t} \ln \|DF(x_{t-1}) \cdots DF(x_0)y_0\| \quad (2.10)$$

Dieses Produkt von Tangentialraumabbildungen ist gerade $DF^t(x_0)$, die Tangentialraumabbildung der t -ten Iteration von F . Wendet man diese $n \times n$ -Matrix auf alle möglichen Einheits-Tangentialraumvektoren y_0 an, erhält man ein Ellipsoid, dessen Hauptachsen-Logarithmen die n Zeit- t -Ljapunovexponenten $\lambda_i(x_0, t)$ sind. Die Hauptrichtungen des Ellipsoids sind die Eigenvektoren der Matrix $[DF^t(x_0)] \cdot [DF^t(x_0)]^T$ und die Längen der Hauptachsen die Quadratwurzeln der Eigenwerte derselben Matrix (**Singulärwerte** von $DF^t(x_0)$). Ebenso gibt es für $t \rightarrow \infty$ n mögliche Werte des Ljapunovexponenten $\lambda_i(x_0)$. Die Indices werden so festgelegt, daß

$$\lambda_1(x_0) \geq \lambda_2(x_0) \geq \cdots \geq \lambda_n(x_0). \quad (2.11)$$

Der Satz von Oseledec (**multiplikativer Ergodensatz**) garantiert, daß, wenn der Orbit mit Anfangspunkt x_0 ein ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß (Absatz 2.1.4) erzeugt, der Grenzwert existiert und daß die Werte $\lambda_i(x_0)$ dieselben sind für fast alle x_0 entsprechend

²man betrachtet dazu die Linearisierung der Gleichung des Flusses bzw. der Abbildung

dem ergodischen Maß. Für alle in dieser Arbeit behandelten Systeme existiert ein ergodisches natürliches Maß auf dem Attraktor. Insbesondere erzeugt der Orbit mit Lebesgue-fast jedem Anfangspunkt x_0 im Einzugsgebiet³ des Attraktors das natürliche Maß. Damit sind die Ljapunovexponenten für Lebesgue-fast alle x_0 aus dem Einzugsgebiet gleich, und für diese schreibt man $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ (unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit).

Eine kurze Formulierung der Definition von Chaos aus Abschnitt 2.1.1 ist also: ein Attraktor ist chaotisch, wenn er mindestens einen positiven Ljapunovexponenten hat.

2.1.4 Invariante Maße

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer invarianten Menge Λ eines dynamischen Systems ordnet jeder Teilmenge $A \subseteq \Lambda$ eine Zahl $\mu(A) \geq 0, \mu(A) \leq \mu(\Lambda) = 1$ zu, die ein Maß dafür ist, wie häufig das dynamische System die Teilmenge A im Phasenraum besucht:

- $\mu(A) \geq 0$
- $\mu(A) \leq \mu(\Lambda) = 1$
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Ein Maß μ ist invariant, wenn $\forall A \subseteq \Lambda$

$$\mu(A) = \mu(\phi^{-1}(A)), \quad \phi^{-1}(A) = \text{Menge der Urbilder von } A. \quad (2.12)$$

Falls das dynamische System eine invariante Dichte $\rho(x)$ besitzt, ist

$$\mu_\rho(A) = \int_{x \in A} \rho(x) d^n x \quad (2.13)$$

ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß. Ein solches kann jedoch auch definiert werden, wenn, wie im Fall vieler fraktaler Mengen, keine glatte invariante Dichte existiert.

2.1.5 Fraktale Dimensionen

In diesem Abschnitt werden zwei ganze Familien (mit je einem Parameter β) dimensionsartiger Charakteristika fraktaler Mengen eingeführt. Die Notation ist dabei an Beck und Schlögl[4] angelehnt, worin dieses Thema sehr ausführlich und gut verständlich behandelt wird. Für herkömmliche Flächen, Linien und Punkte liefern alle diese Definitionen die klassischen Werte 2, 1 und 0. Die beiden Familien ergeben in den meisten interessanten Fällen[4] gleiche Werte, unterscheiden sich jedoch voneinander z. B. in der Behandlung von Mengen mit abzählbar unendlich vielen Elementen. Während die zumeist einfacher handhabbare Definition mit fester Zellengröße (Boxcounting-Algorithmus) der Menge der rationalen Zahlen die Dimension $D_0(\mathbb{Q}) = 1$ zuordnet, liefert die kompliziertere Definition mit variabler Zellengröße die aus mathematischer Sicht nützlichere Hausdorff-Dimension $D_0^H(\mathbb{Q}) = 0$.

³Das Einzugsgebiet ist bei den hier behandelten Systemen jeweils der gesamte Phasenraum.

Fraktale Dimensionen für feste Zellengröße

Hier wird ein Gitter der Gitterkonstanten ε über den Phasenraum gelegt und das Maß μ_i der Menge in jeder Zelle i ermittelt. Zunächst werden die **Rényi-Informationen** definiert. Sie messen den Informationsgehalt der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung bzgl. der Zellen. Ist das gesamte Maß in einer einzigen Zelle lokalisiert, so weiß man von jedem Punkt genau, in welcher Zelle er ist; haben jedoch alle Zellen gleiches Maß, ist der Informationsgehalt minimal. Zwischen diesen beiden Extrema bewegen sich die Rényi-Informationen:

$$I_\beta(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\beta - 1} \ln \sum_{i=1}^r \mu_i^\beta, \quad r \dots \text{Anzahl der Zellen mit } \mu_i \neq 0 \quad (2.14)$$

Der Exponent β ist dabei der Parameter der Familie. Für $\beta = 1$ ergibt sich als Spezialfall die Shannon-Information I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\ln \sum_{i=1}^r \mu_i^\beta}{\beta - 1} \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i \ln \mu_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für $\beta = 0$ ist die Information offenbar nicht davon abhängig, welches Maß eine Zelle hat, sondern nur, ob es gleich oder ungleich null ist. $I_0(\mu, \varepsilon) = -\ln r$ beschreibt den Träger des Maßes. Nach dieser Definition sind die Informationen ≤ 0 , der Referenzzustand $I_\beta = 0$ bedeutet vollständige Information (nur eine Zelle ist gefüllt). Die Beträge der Rényi-Informationen sind die **Rényi-Entropien**, ebenfalls längenskalen- (ε -) abhängige Eigenschaften von Mengen bzw. Maßen:

$$H_\beta(\mu, \varepsilon) = -I_\beta(\mu, \varepsilon) \quad (2.16)$$

Die Rényi-Informationen hängen noch von der Gitterkonstanten ε ab. Die **Rényi-Dimensionen** sind dann konstant:

$$D_\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_\beta(\mu, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (2.17)$$

sie beschreiben also das Skalierungsverhalten der Rényi-Informationen mit ε . Auch hier haben die Spezialfälle $\beta = 0$ und $\beta = 1$ besondere Bedeutung. D_0 ist die Dimension des Trägers der Menge und wird auch **Boxcounting-Dimension** oder **Kapazität** genannt. D_1 heißt auch **Informationsdefinition**, weil sie von der Shannon-Information abgeleitet ist. D_2 heißt Korrelationsdimension, da sie sich mit dem Korrelationssummenalgorithmus[10] besonders gut aus einer endlichen Zeitreihe bestimmen läßt (vgl. Abbildungen 3.22 und 3.23). Mengen mit verschiedenen Rényi-Dimensionen für verschiedene β heißen Multifraktale.

Ein Beispiel ist die Zweiskalen-Cantormenge:

Ein Intervall wird schrittweise modifiziert. Im null-ten Schritt ist es mit konstanter Dichte gefüllt. Im ersten Schritt wird das Intervall der Länge ℓ und des Gewichts (Maßes) g in drei Teile der Längen $a_1\ell$, $a_m\ell$ und $a_2\ell$ ($a_1 + a_m + a_2 = 1$) geteilt: der linke Teil erhält das Gewicht w_1g , der rechte das Gewicht w_2g , der mittlere wird herausgeschnitten ($w_1 + w_2 = 1$). In jedem folgenden Schritt wird jedes der vorhandenen Intervalle auf dieselbe Weise aufgeteilt. Diese Prozedur wird unendlich fortgesetzt. Das Ergebnis ist eine Menge vom Lebesgue-Maß null (außer wenn $a_m = 0$), die immer noch das Gewicht g hat, und deren Rényi-Dimensionen (außer bei spezieller Wahl der Parameter) von β abhängen.

Fraktale Dimensionen für variable Zellengröße

In einigen Fällen kann es vorkommen, daß der Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ für jeweils gleich große Boxen nicht existiert bzw. von der Art und Weise der Grenzwertbildung abhängt. Für diese Fälle kann eine verfeinerte Definition der Rényi-Dimensionen gegeben werden[13]. Die multifraktale Menge wird mit disjunkten Zellen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ überdeckt. μ_i ist nun wieder das Maß der multifraktalen Menge in der Zelle σ_i . Die Zellgröße ℓ_i der Zelle σ_i sei der kleinstmögliche Radius einer Kugel, die σ_i überdeckt. Sei $\ell = \max_i \{\ell_i\}$. Die Herangehensweise zur Berechnung dieser Dimensionen wird aufgrund weitreichender Analogien zur statistischen Physik „thermodynamischer Formalismus“ genannt. Man definiert eine verallgemeinerte „Zustandssumme“:

$$Z(\beta, \tau) = \inf_{\sigma} \sum_{i=1}^r \frac{p_i^\beta}{\ell_i^\tau} \quad \text{für } \beta \leq 1, \tau \leq 0 \quad (2.18)$$

$$\text{bzw. } Z(\beta, \tau) = \sup_{\sigma} \sum_{i=1}^r \frac{p_i^\beta}{\ell_i^\tau} \quad \text{für } \beta > 1, \tau > 0$$

Das Infimum bzw. Supremum wird über alle mögliche Überdeckungen gebildet. Die Rényi-Dimension

$$D_\beta^H = \frac{\tau}{\beta - 1} \quad (2.19)$$

ist dann definiert durch den Wert von τ , für den $Z(\beta, \tau)$ im $\lim_{\ell \rightarrow 0}$ weder gegen null noch noch gegen unendlich geht. D_0^H ist die Hausdorff-Dimension. Es gilt $D_\beta^H \leq D_\beta \forall \beta$.

Für die Zweiskalen-Cantormenge lassen sich die D_β^H sogar leichter berechnen als die D_β [4]. Es gilt $\ell_i^{(N)} = a_1^{N-k} a_2^k$ und $p_i^{(N)} = w_1^{N-k} w_2^k$. Die Zustandssumme

$$Z(\beta, \tau) = \left(\frac{w_1^\beta}{a_1^\tau} + \frac{w_2^\beta}{a_2^\tau} \right)^N \quad (2.20)$$

bleibt für $N \rightarrow \infty$ nur dann endlich, wenn

$$\frac{w_1^\beta}{a_1^\tau} + \frac{w_2^\beta}{a_2^\tau} = 1, \quad (2.21)$$

wodurch die Dimensionen $D_\beta^H = \tau(\beta)/(\beta - 1)$ implizit bestimmt sind.

Die punktweise Dimension

Die punktweise Dimension $D_p(x)$ ist eine Eigenschaft eines Maßes, beispielsweise eines invarianten Maßes μ eines dynamischen Systems. Sie beschreibt sein Skalierungsverhalten in der Nähe dieses Punktes[41]:

$$D_p(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B_\varepsilon(x))}{\ln \varepsilon} \quad (2.22)$$

Für ein ergodisches Maß eines dynamischen Systems kann ein numerischer Näherungswert $\alpha(x)$ bestimmt werden. Für hinreichend kleine Abstände ε gilt hier

$$\varepsilon \propto t^{-1/\alpha(x)} \quad (2.23)$$

Hierin ist t die Zeit, nach der die chaotische Trajektorie den Abstand ε zum Punkt x zum erstenmal unterschreitet[19]. Young[41] argumentiert, daß für ein ergodisches Maß μ die punktweise Dimension $D_p(x)$ für alle x außer auf einer Menge vom Maß ($\mu(\cdot) = 0$) den Wert $D_1(\mu)$, d. h. die Informationsdimension des Maßes annimmt. Die Menge der Punkte x mit punktweiser Dimension $D_p(x) = D_1(\mu)$ heißt **Kernregion** des Maßes. Interessanterweise hat die Boxcounting-Dimension der Kernregion denselben Wert $D_1(\mu)$, also $D_0(\text{Kernregion}) = D_1(\mu)$.

Die Kaplan-Yorke-Vermutung

1979 formulierten Kaplan und Yorke[21] einen Zusammenhang zwischen den Ljapunovexponenten einerseits und der Informationsdimension D_1 andererseits eines Attraktors. Er beruht auf der Überlegung, daß in einem chaotischen Attraktor alle instabilen Richtungen kontinuierlich gefüllt sein müssen. Darüberhinaus, so wird vermutet, müssen so viele stabile Richtungen ebenfalls gefüllt sein, daß die Summe aller Ljapunovexponenten für die genannten Richtungen gleich null ist. Dabei trägt eine der stabilen Richtungen nur teilweise zur Summenbildung bei, sie ist fraktal gefüllt. Es wird argumentiert, daß der aufgespannte Teilraum invariant sein muß, und daher insgesamt weder kontrahiert noch expandiert. Die **Ljapunovdimension** oder **Kaplan-Yorke-Dimension** ist wie folgt definiert:

$$D_{KY} = k + \frac{1}{|\lambda_{k+1}|} \sum_{i=1}^k \lambda_i \quad (k \text{ ist die größte ganze Zahl, so daß } \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0) \quad (2.24)$$

Die Kaplan-Yorke-Vermutung besagt, daß für „typische Attraktoren“ die Informationsdimension gleich der Ljapunovdimension ist:

$$D_1 = D_{KY}. \quad (2.25)$$

Ledrappier[26] konnte 1981 beweisen, daß

$$D_1 \leq D_{KY}. \quad (2.26)$$

2.1.6 Stabile und instabile Mannigfaltigkeit

Die d -dimensionale Abbildung $f : M \rightarrow M$ habe den Fixpunkt x^* , d. h. $f(x^*) = x^*$. Die Stabilität des Fixpunktes wird durch die Jacobimatrix der Abbildung am Fixpunkt $Df(x^*)$ beschrieben. Aus ihren Eigenwerten $\eta_i(x^*)$ ergeben sich die Ljapunovexponenten der Bewegung $\lambda_i(x^*) = \ln |\eta_i(x^*)|$. Der Fixpunkt ist **hyperbolisch**, wenn alle Ljapunovexponenten ungleich null sind. Er heißt **anziehend (abstoßend)**, wenn alle $\lambda_i(x^*) < 0$ ($\lambda_i(x^*) > 0$) sind. Sind mindestens je ein Ljapunovexponent positiv und negativ, heißt der Fixpunkt **vom Satteltyp**.

Als **Tangentialraum** $T_x M$ im Punkt x wird der lineare Raum aller Vektoren in allen möglichen Richtungen infinitesimaler Abweichungen von x in M bezeichnet. Die Jacobimatrix bildet als **Tangentialabbildung Tangentialraumvektoren** eines Punktes x auf Tangentialraumvektoren des Bildpunktes $f(x)$ ab. Die zu den positiven (negativen) Ljapunovexponenten gehörenden Eigenvektoren der Jacobimatrix am Fixpunkt spannen den **instabilen (stabilen) linearen Unterraum** des Tangentialraumes auf.

Die **globale stabile Mannigfaltigkeit** wird wie folgt definiert:

$$W_{x^*}^s = \{y : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x^*\} \quad (2.27)$$

Das ist die Menge aller Punkte im Phasenraum, die von diesem Fixpunkt angezogen werden. Die so definierte Menge ist jedoch nur dann tatsächlich eine Mannigfaltigkeit, wenn die Abbildung invertierbar ist, d. h. jeder Punkt genau ein Urbild hat. Andernfalls kann die Struktur der Menge (2.27) beliebig kompliziert sein.

Analog kann die **globale instabile Mannigfaltigkeit** definiert werden, wenn die Abbildung invertierbar ist:

$$W_{x^*}^u = \{y : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(y) = x^*\}, \quad (2.28)$$

d. h. sie enthält alle Punkte, die unter Zeitumkehr von x^* angezogen werden.

Für nicht invertierbare dynamische Systeme wird in der Literatur in der Regel keine instabile Mannigfaltigkeit definiert. Wir benötigen diese aber hier speziell für unser wichtigstes Modellsystem, den erweiterten Bernoulli-Shift (siehe Kapitel 3). Intuitiv ist die instabile Mannigfaltigkeit die Menge, die man erhält, wenn man in einer infinitesimal

kleinen Umgebung des Fixpunktes alle Punkte beliebig oft vorwärtsiteriert, die vom Fixpunkt um einen Vektor aus dem instabilen Unterraum abweichen. Wir definieren sie hier speziell auf den erweiterten Bernoulli-Shift zugeschnitten.

Sei f_0^{-1} (f_1^{-1}) als die Funktion definiert, die einem Punkt im Phasenraum $[0, 1] \times [-1, 1]$ des erweiterten Bernoulli-Shifts sein Urbild in $[0, 0.5] \times [-1, 1]$ ($[0.5, 1] \times [-1, 1]$) zuordnet, falls es existiert. Diese Funktion ist einwertig. Jeder Fixpunkt des erweiterten Bernoulli-Shifts ist auch entweder ein Fixpunkt von f_0^{-1} oder von f_1^{-1} . Jeder Periodenpunkt der Periode p des erweiterten Bernoulli-Shifts ist ein Fixpunkt einer mehrfachen Verkettung $f_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ f_{i_p}^{-1}$ von f_0^{-1} und f_1^{-1} . Die **lokale instabile Mannigfaltigkeit** $W_{x^*}^{u, \text{loc}}$ eines Fix- oder Periodenpunktes des erweiterten Bernoulli-Shifts ist die globale stabile Mannigfaltigkeit dieses Punktes bezüglich dieser Verkettung.

$$W_{x^*}^{u, \text{loc}} = \{y : \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ f_{i_p}^{-1})^n(y) = x^*\} \quad (2.29)$$

mit $i_1, \dots, i_p \in \{0, 1\}$, so daß $(f_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ f_{i_p}^{-1})(x^*) = x^*$

Diese Menge ist eine stetige, differenzierbare Kurve mit je einem Punkt für jedes $x \in [0, 1]$, daher die Bezeichnung als lokale Mannigfaltigkeit. Im Gegensatz dazu definieren wir die **globale instabile Mannigfaltigkeit** eines Fix- oder Periodenpunktes des erweiterten Bernoulli-Shifts als die Menge aller Bilder unter f^n der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit:

$$W_{x^*}^u = \{y : \exists n \in \mathbb{Z}_0, w \in W_{x^*}^{u, \text{loc}} \text{ so daß } f^n(w) = y\} \quad (2.30)$$

Auch die globale instabile Mannigfaltigkeit ist für den erweiterten Bernoulli-Shift als nicht invertierbares System eigentlich keine Mannigfaltigkeit. Hier besteht die soeben definierte Menge, wir nennen sie trotz allem globale instabile Mannigfaltigkeit, aus abzählbar unendlich vielen Kurvenstücken, die sich schneiden. Die globale instabile Mannigfaltigkeit eines in einen Attraktor eingebetteten periodischen Punktes besitzt eine wichtige Eigenschaft: ihr Abschluß ist mit dem Attraktor identisch.

Diese Mannigfaltigkeiten sind Invariante der Abbildung. Sie sind im Punkt x^* tangential zum stabilen (instabilen) linearen Unterraum des Tangentialraumes und besitzen dieselbe Dimensionalität wie dieser.

Bei Simulationen für zweidimensionale Abbildungen mit je einem positiven und negativen Ljapunovexponenten kann man eine numerische Approximation der globalen instabilen Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes mit genau einer instabilen Richtung leicht erhalten. Man iteriert dazu eine kleine Kreisscheibe bzw. Ellipse von Anfangsbedingungen rund um den Fixpunkt. Nach wenigen Iterationen hat sich die Kreisscheibe zu einer Kurve verformt, die einen Abschnitt der globalen instabilen Mannigfaltigkeit beschreibt. Die Methode ist jedoch bei Vorliegen von Dimensionsvariabilität im allgemeinen nicht anwendbar. Falls sich nämlich in der Kreisscheibe auch Punkte befinden, die über die gewählten Iterationen hinweg zwei expandierende Richtungen haben, sorgen diese dafür, daß man eine Fläche erhält. Wenn es nicht möglich ist, die Kreisscheibe hinreichend klein

zu wählen, muß zuerst (über den Eigenvektor der Jacobimatrix zum größten Eigenwert) die lokale instabile Mannigfaltigkeit berechnet werden.

Die obigen Definitionen können leicht für periodische Punkte der Periode T verallgemeinert werden. Hierfür wird in den Definitionen f durch f^T ersetzt.

Für einen beliebigen Punkt im Phasenraum definiert man[4]

$$W_x^s = \left\{ y : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|f^n(y) - f^n(x)\| < 0 \right\}, \quad (2.31)$$

d. h. alle Punkte, deren Orbits sich dem Referenzorbit exponentiell annähern, und

$$W_x^u = \left\{ y : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|f^{-n}(y) - f^{-n}(x)\| < 0 \right\}, \quad (2.32)$$

für eine invertierbare Abbildung.

2.1.7 In chaotische Attraktoren eingebettete Periodische Orbits

In einen chaotischen Attraktor sind typischerweise unendlich viele instabile periodische Orbits eingebettet. Für jede Periodenlänge T gibt es endlich viele periodische Orbits $\zeta_T \subset \Lambda$. Die Anzahl der verschiedenen periodischen Punkte $p \in \zeta_T$ der Periode T wächst exponentiell mit T . Die Vereinigung all dieser periodischen Punkte liegt dicht im Attraktor ($\overline{\{p : \exists T : \phi^T(p) = p\}} = \Lambda$). Für „periodische Punkte“ schreibe ich im folgenden die Abkürzung **PP**.

Die eingebetteten periodischen Orbits können als Skelett eines Attraktors angesehen werden, d. h. daß für immer größere Periodenlänge T der Attraktor immer besser durch die Menge der periodischen Punkte mit Periodenlänge $\leq T$ approximiert wird. Die periodischen Orbits haben gegenüber dem chaotischen Attraktor den Vorteil, daß ihre Ljapunovexponenten bei Abbildungen einerseits ohne Grenzwertbildung bestimmbar sind, andererseits aber genau die lokalen Stabilitätseigenschaften des Attraktors in der Nähe des periodischen Orbits beschreiben.

2.1.8 Chaoskontrolle

Auf den eingebetteten periodischen Orbits beruht auch das Konzept der Chaoskontrolle. Wenn ein technisches System, beispielsweise ein Laser, für eine bestimmte Anwendung bestimmte Eigenschaften haben soll, die zwar der Betrieb im chaotischen Regime nicht bietet, aber einer der eingebetteten periodischen Orbits, dann kann letzterer in manchen Fällen stabilisiert werden. Dazu werden eine oder mehrere der Messung zugängliche Funktionen der Phasenraumvariablen auf einen regelbaren Parameter zurückgekoppelt. Die Kontrollkraft (d. h. die momentane Parameterveränderung), die notwendig ist, um das

System auf dem eingebetteten instabilen periodischen Orbit zu halten, geht bei Erreichen des Orbits gegen null, da dieser Orbit ja in der Dynamik des unkontrollierten Systems enthalten ist.

Die erste Chaoskontrollmethode wurde 1990 von Ott, Grebogi und Yorke[28, 29, 39] (daher OGY-Methode genannt) vorgelegt. Hier muß der zu stabilisierende Orbit vorher durch Datenanalyse identifiziert werden. Ein im Experiment manipulierbarer Systemparameter wird so modifiziert, daß die stabile Mannigfaltigkeit des zu stabilisierenden Fix- oder periodischen Punktes möglichst nahe am aktuellen Punkt im Phasenraum liegt.

Für Systeme, deren periodische Orbits nicht genau berechenbar sind, kann die Pyragas-Methode[17, 34, 35] zum Erfolg führen. Hier muß lediglich die Periodenlänge des zu stabilisierenden periodischen Orbits vorher durch Datenanalyse geschätzt werden. Die Kontrollkraft wird dann aus dem momentanen Wert der gemessenen Phasenraumfunktion minus dem gemessenen Wert vor Ablauf der Periodendauer T bestimmt⁴. Befindet sich das System auf einem periodischen Orbit der Länge T , verschwindet die Kontrollkraft automatisch.

2.2 Hyperbolizität und Beschattbarkeit

In 2.1.6 wurden bereits hyperbolische Fixpunkte sowie für invertierbare dynamische Systeme die stabile und instabile Mannigfaltigkeit definiert. Wenn die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit eines Punktes sich schneiden, heißt ihr Schnittpunkt **homokliner Punkt**. Schneiden beide Mannigfaltigkeiten sich transversal, d. h. spannen sie gemeinsam den gesamten Tangentialraum auf, so heißt der Schnittpunkt **transversaler homokliner Punkt**.

In einem invertierbaren dynamischen System ϕ ist eine **hyperbolische Struktur** auf einer ϕ -invarianten Menge Λ eine stetige, invariante Zerlegung des Tangentialbündels $T_\Lambda M = \bigcup_{x \in \Lambda} T_x M$ als direkte Summe $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ mit der Eigenschaft, daß die Tangentialabbildung an jedem Punkt x die Tangente E_x^s (Unterraum von $T_x M$) an die stabile Mannigfaltigkeit auf die Tangente $E_{f(x)}^s$ an die stabile Mannigfaltigkeit des entsprechenden Bildpunktes $f(x)$ abbildet (und ebenso für die Tangente an die instabile Mannigfaltigkeit), d. h. es existieren Konstanten $c > 0$ und $0 < \lambda < 1$, so daß

$$Df(x) E_x^s = E_{f(x)}^s, \quad Df(x) E_x^u = E_{f(x)}^u \quad (2.33a)$$

$$\|Df^n(x) \mathbf{v}\| \leq c\lambda^{-n} \|\mathbf{v}\| \quad \text{für } \mathbf{v} \in E_x^s, n \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.33b)$$

$$\|Df^{-n}(x) \mathbf{v}\| \leq c\lambda^{-n} \|\mathbf{v}\| \quad \text{für } \mathbf{v} \in E_x^u, n \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.33c)$$

Eine hyperbolische Struktur garantiert, daß der Tangentialraum eines jeden Punktes eindeutig zerlegt werden kann in mit der Dynamik expandierende und kontrahierende Richtungen.

⁴dieser muß so lange gespeichert werden

Mengen mit hyperbolischer Struktur werden als hyperbolische Mengen bezeichnet. Jeder homokline Punkt einer hyperbolischen Menge ist ein transversaler homokliner Punkt. In einer hyperbolischen Menge ist der Winkel zwischen dem stabilen (E_x^s) und dem instabilen Unterraum (E_x^u) immer $\geq \alpha > 0$. Gibt es kein solches α , so können die beiden Unterräume in mindestens einem Punkt tangential zueinander sein. Diese Punkte heißen **homokline Tangenten**. Dieser Fall ist ein bekannter, bereits viel untersuchter [14, 15, 16] Mechanismus der Verletzung von Hyperbolizität. Dimensionsvariabilität, das Thema dieser Arbeit, ist eine weitere, noch wenig untersuchte Form der Verletzung von Hyperbolizität.

Hyperbolische Mengen und die Verletzung von Hyperbolizität spielen eine wesentliche Rolle in der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme. Für hyperbolische Systeme können viele Eigenschaften rigoros bewiesen werden. Die für Anwendungen interessanten Systeme sind zumeist nicht hyperbolisch. In vielen Fällen ist aber die Hyperbolizitätseigenschaft (2.33) für fast alle Punkte der invarianten Menge gegeben. Daher treffen die Eigenschaften hyperbolischer Systeme mit Einschränkungen auch hier zu.

2.2.1 Das Schattenbahnlemma von Anosov und Bowen

Für Simulationen stellt sich immer die Frage, inwieweit die vom Computer mit endlicher Genauigkeit generierten sogenannten Pseudotrajektorien das gegebene System beschreiben, obwohl in chaotischen Systemen kleine Abweichungen (Rundungsfehler usw.) exponentiell mit der Zeit anwachsen. Das **Schattenbahnlemma** garantiert, daß bei hyperbolischen dynamischen Systemen jeder Pseudotrajektorie eine echte Trajektorie des Systems entspricht, die für alle Zeiten in der Nähe der Pseudotrajektorie bleibt.

Die Folge $\{x_i\}_{i=a}^b$ ist ein δ -Pseudoorbit von $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$, wenn

$$d(x_{i+1}, f(x_i)) < \delta \quad \forall a \leq i < b. \quad (2.34)$$

Der Pseudoorbit $\{x_i\}_{i=a}^b$ heißt vom Punkt $y \in \Lambda$ ε -beschattet, wenn

$$d(x_i, f^i(y)) < \varepsilon \quad \forall a \leq i \leq b. \quad (2.35)$$

Satz 2.1 (Schattenbahnlemma von Anosov und Bowen [1970, 1978]) Sei Λ eine hyperbolische invariante Menge von $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß jeder δ -Pseudoorbit $\{x_i\}_{i=a}^b \subset \Lambda$ von einem Punkt $y \in \Lambda$ ε -beschattet ist.

Ist also δ der Fehler der numerischen Simulation, so bedeutet das, daß es für jede noch so kleine tolerierte Abweichung zwischen „echter“ und Pseudotrajektorie eine dafür ausreichende Rechengenauigkeit gibt.

In nichtbeschattbaren Systemen gibt es demnach bei beliebigem gegebenem ε für jedes noch so kleine δ eine Menge von Punkten im Attraktor, an denen ein Fehler der Größe δ zu einem Abstand größer als ε zwischen der Pseudotrajektorie und jeder beliebigen echten Trajektorie des dynamischen Systems führt.

2.3 Dimensionsvariabilität

Dimensionsvariabilität der instabilen Mannigfaltigkeit ist die Eigenschaft einiger nicht-hyperbolischer Systeme, daß die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit einer invarianten Menge des dynamischen Systems nicht für alle Punkte der Menge dieselbe ist. Sie wurde zuerst 1970 von Abraham und Smale[1] vorhergesagt. Danach tauchte diese Fragestellung erst 1992 (und zunächst nur am Rande) wieder auf. Romeiras et al.[38] fanden bei einer Arbeit zur Chaoskontrolle für eine das eingangs erwähnte Doppelpendel beschreibenden Abbildung, daß dieses System sowohl Fixpunkte mit einer als auch mit zwei instabilen Richtungen hat. Erst seit 1997 sind zur Dimensionsvariabilität einige Arbeiten erschienen, hauptsächlich aus der “Chaos Group” der Universität Maryland mit Celso Grebogi als einem der an den meisten Arbeiten beteiligten Autoren. 1997 wird auch erstmals der Begriff “unstable dimension variability” verwendet[22]. Die einfachsten Systeme, bei denen Dimensionsvariabilität vorkommen kann, sind nichtinvertierbare zweidimensionale Abbildungen, denn stabile Fixpunkte können in keinen Attraktor eingebettet sein, also müssen die unterschiedlichen Anzahlen instabiler Richtungen mindestens 1 und 2 sein. Bei zweidimensionalen invertierbaren Abbildungen kann Dimensionsvariabilität ebenfalls nicht auftreten. Hier können keine doppelt instabilen PP in den Attraktor eingebettet sein, da es unter Vorwärtsiteration keine Möglichkeit der Annäherung an diese Punkte gibt. Die einfachsten invertierbaren dimensionsvariablen Systeme sind dreidimensionale Abbildungen. Invertierbare Abbildungen sind von großem Interesse, weil hierfür die globale stabile Mannigfaltigkeit (2.27) eines PP tatsächlich eine Mannigfaltigkeit ist. Solche zwei- bzw. dreidimensionalen Abbildungen werden in den folgenden Kapiteln vorgestellt und ihre Dimensionsvariabilität untersucht.

Im Abschnitt 2.1.7 war bereits von den Ljapunovexponenten der in invariante Mengen eingebetteten instabilen periodischen Orbits die Rede. Die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit ist gerade die Anzahl der positiven Ljapunovexponenten einer invarianten Menge. Daher ist die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit eines periodischen Punktes genau gleich der Anzahl der positiven Ljapunovexponenten des periodischen Orbits.

Für periodische Punkte, die zu der invarianten Menge gehören, kann die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit leicht berechnet werden, wenn das dynamische System eine in analytischer Form vorliegende Abbildung ist. Dimensionsvariabilität liegt also genau dann vor, wenn die invariante Menge mindestens zwei in sie eingebettete periodische Orbits enthält, die unterschiedlich viele positive Ljapunovexponenten besitzen.

Bei hyperbolischen invarianten Mengen kann Dimensionsvariabilität nicht vorkommen. Dies wird bereits durch die Definition der hyperbolischen Menge garantiert. Für hyperbolische Mengen bildet die Tangentialraumabbildung immer die Tangente E_x^s (E_x^u) an die stabile (instabile) Mannigfaltigkeit wiederum auf die Tangente $E_{f(x)}^s$ ($E_{f(x)}^u$) an die stabile (instabile) Mannigfaltigkeit des Bildpunktes ab (vgl. (2.33)). Da die Zerlegung des Tangentialraumes $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$ stetig sein muß und da die Tangentialraumabbildung in hyperbolischen Mengen immer vollen Rang hat, ist bei hier die Dimension der stabilen

sowie der instabilen Mannigfaltigkeit immer global konstant.

Yuan und Yorke[42] gelang es 2000, Nichtbeschaubarkeit für dimensionsvariable dynamische Systeme unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen zu zeigen. Zu diesen gehört die Stetigkeit der Abbildung sowie insbesondere das Vorhandensein einer Phasenraumrichtung, die immer mehr expandierend ist als alle anderen.

Kapitel 3

Untersuchungen der Modellsysteme

Um Dimensionsvariabilität zu untersuchen, konstruieren wir Modellsysteme, die dimensionsvariabel sein können. Damit die Systeme diese Eigenschaft möglichst haben, darüber hinaus aber möglichst einfach sind, wählen wir eine sehr spezielle Form. Die in dieser Arbeit verwendeten Modellsysteme bestehen aus jeweils zwei Teilen:

- einem sehr einfachen, autonomen dynamischen System. Für dieses wählen wir jeweils eines der folgenden aus:

– *Bernoulli-Shift*:

$$x_{n+1} = 2x_n \bmod 1 \quad (3.1a)$$

1-dimensional, chaotisch, nicht invertierbar, volle Grammatik¹

– *Cat map*²:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \bmod \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1b)$$

2-dimensional, chaotisch, invertierbar, ebenfalls volle Grammatik

- Als drittes System werden wir unter manchen Fragestellungen eine *Quasiperiodische Abbildung* betrachten, die zwar nicht dimensionsvariabel ist, weil sie keine periodischen Orbits hat, aber dennoch den beiden vorhergehenden Abbildungen sehr ähnelt:

$$x_{n+1} = x_n + \omega \bmod 1 \quad (3.1c)$$

1-dimensional, quasiperiodisch, invertierbar

¹Volle Grammatik bedeutet, daß sich der Phasenraum in endlich viele Teilmengen zerlegen läßt, die mit je einem Symbol bezeichnet werden, so daß es zu jeder Symbolsequenz genau einen periodischen Orbit gibt.

²Die Abbildung verdankt ihren Namen einer Veranschaulichung durch V. I. Arnold: das Einheitsquadrat wird mit dem Bild einer Katze gefüllt. Das Bild macht alle Transformationsschritte mit, die Katze wird ordentlich deformiert und ist schon nach wenigen Schritten nicht mehr wiederzuerkennen.

Für diese Abbildung werden wir zeigen, daß sie für praktische Zwecke als ebenso nichtbeschattbar gelten kann wie die Systeme mit Dimensionsvariabilität, obwohl sie nicht chaotisch ist (keine sensitive Abhängigkeit von Anfangsbedingungen).

Diese Systeme werden häufig verwendet, ihre Eigenschaften sind gut bekannt.

- einer zusätzlichen z -Koordinate, in deren Iterationsvorschrift eine Funktion r der obigen Koordinaten sowie die z -Koordinate selbst eingehen. Für die Wahl dieser Funktion bietet sich der Arcustangens an, auf das Intervall $[-1, 1]$ umskaliert und mit einem zusätzlichen Parameter γ (maximaler Anstieg) versehen.

$$z_{n+1} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\gamma\pi}{2}(r_n + z_n) \quad (3.2)$$

Eine solche Funktion, d. h. eine skalare C^∞ -Funktion einer Variablen, die beschränkt und überall streng monoton wachsend ist und genau einen Wendepunkt besitzt, heißt **sigmoide Funktion**. Für die Funktion r wählen wir

$$\text{Bernoulli-Shift: } r_n = 2(x_{n+1} - x_n) \quad (3.3a)$$

$$\text{Cat map: } r_n = x_n - y_n \quad (3.3b)$$

$$\text{Quasiper. Abb.: } r_n = \begin{cases} x_{n+1} \leq 0.5 : & \sqrt{2x_{n+1}} - 1 \\ x_{n+1} > 0.5 : & 1 - \sqrt{2 - 2x_{n+1}} \end{cases} \quad (3.3c)$$

Alle drei Definitionen ergeben dieselbe Verteilung der r_n : das kleinste r_n ist -1 , das größte ist $+1$, der Mittelwert und ist bei $r_n = 0$; er ist auch das Maximum der Verteilung. Die Verteilungsdichte ist

$$\rho(r_n) = 1 - |r_n| \quad (-1 < r_n < 1) \quad (3.4)$$

Der erweiterte Bernoulli-Shift besitzt eine Symmetrie. Seine Bewegungsgleichungen sind invariant gegen die Operation

$$\begin{aligned} & x \rightarrow 1 - x \\ \text{und gleichzeitig } & z \rightarrow -z \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aus diesem Grund hat beim erweiterten Bernoulli-Shift jeder Punkt (x, z) einen insbesondere bezüglich Periodizität, Stabilität und invariantem Maß äquivalenten Punkt $(1 - x, -z)$.

Im folgenden Teil des Kapitels wird zunächst das den Bernoulli-Shift verwendende System ausführlich behandelt. Dieses System erfüllt für den Parameterbereich $\gamma < 2$ die Voraussetzung des Theorems von Yuan und Yorke (siehe Abschnitt 2.3, S. 22), eine Phasenraumrichtung zu besitzen, die immer mehr expandierend ist als alle anderen. Laut [36] kann die Stetigkeitsforderung ebenfalls als erfüllt gelten, da die Abbildung nur für $x \neq 0$

nicht stetig ist³. Am Ende des Kapitels werden wichtige Aspekte der beiden anderen Systeme vorgestellt.

3.1 Periodische Orbits des erweiterten Bernoulli-Shifts

Wir betrachten die periodischen Orbits (im folgenden z. T. als *PO's* abgekürzt) des erweiterten Bernoulli-Shifts in engem Zusammenhang mit seinem Attraktor. Die periodischen Orbits wollen wir als erstes behandeln. Dazu nehmen wir einige wichtige Ergebnisse, die erst im Abschnitt 3.2 behandelt werden, vorweg, weil wir uns schon in diesem Abschnitt auf sie beziehen müssen:

- Alle Aussagen zum erweiterten Bernoulli-Shift beziehen sich, falls kein Parameter oder Parameterbereich extra angegeben ist, auf $1.441 < \gamma \lesssim 1.47$ und $\gamma \gtrsim 1.53$. Für $1.47 \lesssim \gamma \lesssim 1.53$ kann ggf. eine modifizierte Version der hier angegebenen Argumentation die wesentlichsten Aussagen, insbesondere Dimensionsvariabilität und Beschattbarkeit, belegen. Die Besonderheit in diesem Parameterbereich ist eine Anomalie des Attraktors (beschrieben im Abschnitt 3.2).
- Der erweiterte Bernoulli-Shift hat für alle betrachteten Parameter einen global anziehenden Attraktor.
- Der Attraktor ist links und rechts durch die vertikalen Linien $x = 0$ und $x = 1$ sowie oben und unten durch stetige Kurven $z_R^+(x)$ und

$$z_R^-(x) = -z_R^+(1 - x) \quad (3.6)$$

berandet. Die hiermit umschriebene Fläche nennen wir die *Attraktorfläche*.

Um uns von der Dimensionsvariabilität des erweiterten Bernoulli-Shifts zu überzeugen, zeigen wir, daß für $\gamma > 1.441$ periodische Orbits sowohl mit einer als auch mit zwei instabilen Richtungen in den Attraktor eingebettet sind. Man findet diese Orbits des Gesamtsystems, indem man die PO's des Bernoulli-Shifts in die z -Dynamik der Sigmoid-Abbildung einsetzt. Für den Bernoulli-Shift ist $\{x_0 = \frac{2}{3}; x_1 = \frac{1}{3}\}$ der einzige Periode-2-Orbit. Die bei dieser periodischen x -Dynamik erzeugte Bewegung der z -Koordinate folgt in der 2. Iteration

$$z_{n+2} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\gamma\pi}{2} \left(\left[\frac{2}{\pi} \arctan \frac{\gamma\pi}{2} (z_n + x_0) \right] + x_1 \right) \quad (3.7)$$

³Im Unterschied zur mathematischen Fachliteratur wird hier der Mechanismus der Dimensionsvariabilität sowie der Nichtbeschattbarkeit ausführlich erläutert. Die Beschränkung auf $\gamma < 2$ sowie die Schwierigkeiten der Stetigkeit haben für die hier dargestellten Methoden keine Bedeutung. Zudem zeigen wir auch die praktische Nichtbeschattbarkeit nach demselben Mechanismus für ein definitiv nicht dimensionsvariables System, die quasiperiodische Abbildung (sie besitzt keine periodischen Orbits).

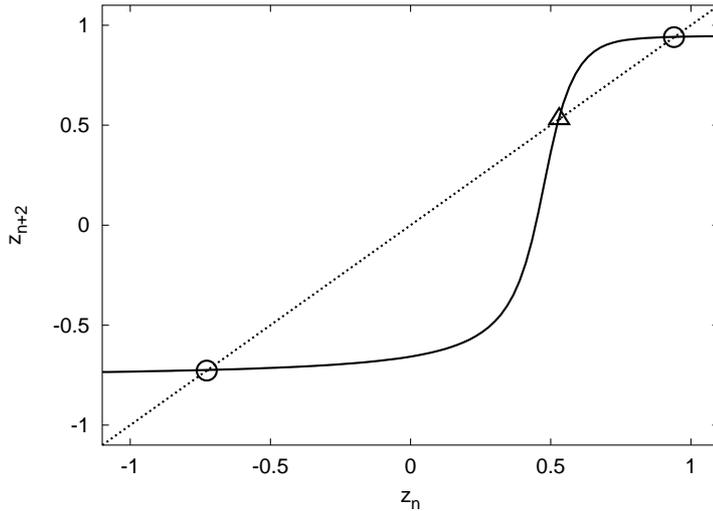


Abbildung 3.1: Zweite Iteration der z -Dynamik für einen gegebenen 2-periodischen Orbit der x -Dynamik (Bernoulli, $\gamma = 5$)

(Abb. 3.1). Die drei Schnittpunkte mit der Geraden $z_{n+2} = z_n$ sind periodische Orbits des Gesamtsystems. In dem dargestellten Fall ist am oberen und am unteren Schnittpunkt der Anstieg $\partial z_{n+2}/\partial z_n < 1$, am mittleren $\partial z_{n+2}/\partial z_n > 1$. Die ersten beiden sind **einfach instabile** periodische Orbits (im folgenden oftmals abgekürzt als **IiPO**), sie sind instabil in der x -Dynamik und stabil in der z -Dynamik. Der mittlere Punkt repräsentiert einen **doppelt instabilen** periodischen Orbit (**2iPO**, x - und z -Dynamik sind instabil). Periodische Orbits der Periode 2 werden wir als **PO2**, **IiPO2** oder **2iPO2** abkürzen, Fixpunkte als **FP**.

Um diese Orbits numerisch zu finden, bestimmt man zunächst die periodischen Punkte der x -Dynamik des Bernoulli-Shifts. Alle rationalen Zahlen sind periodische Punkte (im folgenden **PP** genannt, nach der Instabilität der Orbits in **IiPP** und **2iPP** unterschieden) bzw. werden nach endlich vielen Iterationen auf solche Punkte abgebildet. Andererseits sind alle periodischen Punkte rational. Man berechnet die PP der Periode p als die Fixpunkte der p -ten Iteration der Abbildung f :

$$x_p - f^p(x_p) = 0 \quad (3.8)$$

Sie sind durch relativ einfache analytische Ausdrücke gegeben (der Fixpunkt 0 ist jeweils periodisch $\forall p$). Für den Bernoulli-Shift gilt:

$$x_p = \frac{n}{2^p - 1}, \quad n \in \{0, 1, \dots, 2^p - 2\} \quad (3.9)$$

Doppelt instabile periodische Orbits treten nur für $\gamma \geq 1$ auf. Andernfalls kann der Anstieg $\partial z_{n+1}/\partial z_n$ nicht ≥ 1 werden.

Nachdem ein periodischer Orbit der x -Dynamik identifiziert wurde, berechnet man nach (3.3) die Folge der daraus resultierenden r und erhält

- einfach instabile PO's (d. h. vom Satteltyp) durch Vorwärtsiteration der z -Dynamik (3.2)
- doppelt instabile (d. h. abstoßende) PO's durch Rückwärtsiteration der z -Dynamik.

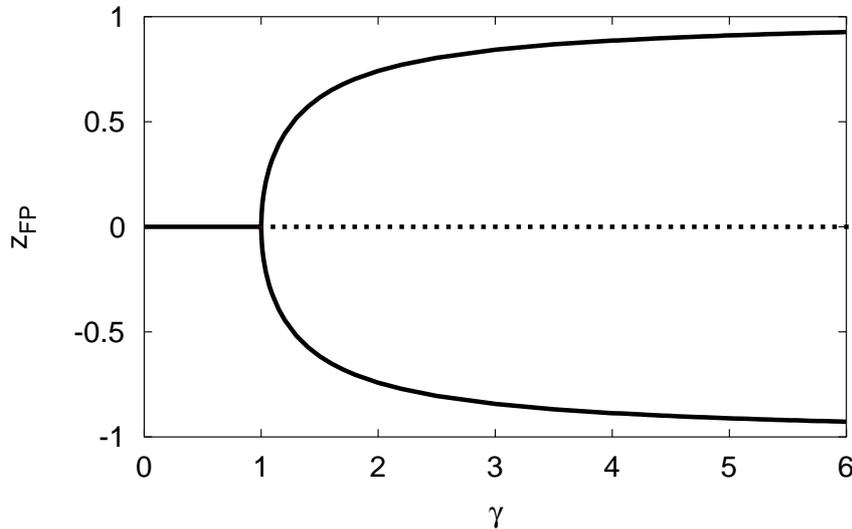


Abbildung 3.2: Pitchfork-Bifurkation des Fixpunktes $r = 0$ bei $\gamma = 1$ (Bernoulli)

Mit den Anfangsbedingungen $z_0 = +1$ bzw. $z_0 = -1$ werden so zunächst der obere und der untere einfach instabile PP aus Abb. 3.1 ermittelt. Sind sie identisch, so gibt es keinen weiteren. Sind sie unterschiedlich, so muß es noch einen doppelt instabilen PP zwischen ihnen geben, der die z -Anfangswerte voneinander trennt, die für $t \rightarrow \infty$ auf dem instabilen PO der x -Dynamik bleibend zum oberen bzw. zum unteren einfach instabilen PP gehen. Man findet ihn, indem man auf dem PO des Bernoulli-Shifts die dazugehörige z -Dynamik rückwärts iteriert (die z -Dynamik ist ja invertierbar). Als Anfangs- z wählt man einen Wert zwischen den beiden z -Koordinaten der soeben gefundenen liPP. In der Tat vermuten wir, daß für beliebige Iterationsdauern p die Funktion

$$z_p(z_0|r_0, r_1, \dots, r_{p-1}) \quad (3.10)$$

wieder von sigmoider Form ist und es daher nur entweder genau einen oder genau drei Schnittpunkte mit der Geraden $z_p = z_0$ geben kann. Für $p = 2$ konnte ich es zeigen, für $p > 2$ war immerhin kein Gegenbeispiel zu finden. Für den Fixpunkt $r = 0$ gibt es für jedes $\gamma > 1$ genau drei Fixpunkte des Gesamtsystems, für jedes $\gamma \leq 1$ genau einen. An $\gamma = 1$ liegt eine Pitchfork-Bifurkation der z -Dynamik vor, d. h. ein Fixpunkt, der für $\gamma < 1$ stabil war, wird instabil, aber zwei neue stabile Fixpunkte werden erzeugt (Abb. 3.2). Andere periodische Orbits bifurkieren bei größeren Werten von γ . Es gibt zu jedem p ein γ_p , bei dem alle p -periodischen Orbits bifurkiert sind (γ_p wächst mit p).

Der mit der sigmoiden z -Komponente erweiterte Bernoulli-Shift zeigt ein interessantes Bifurkationsverhalten. Mit größer werdendem γ wurden die folgenden doppelt instabilen PO's erzeugt:

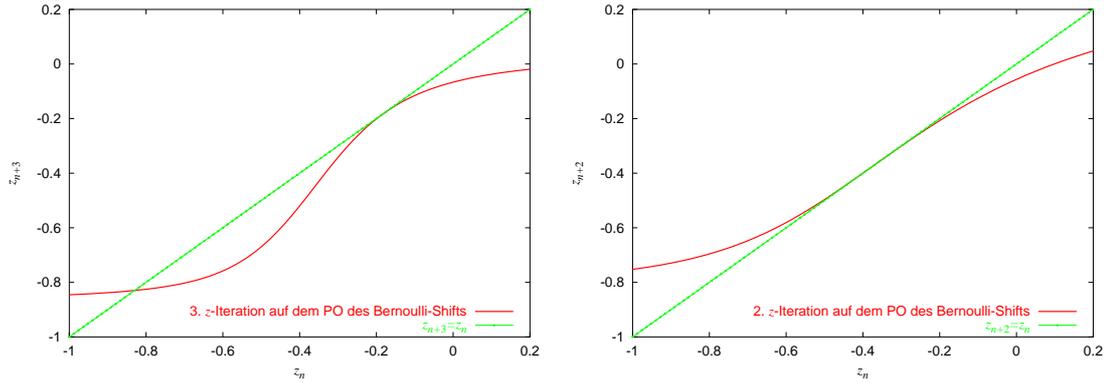


Abbildung 3.3: Tangenten-Bifurkation eines PO3 und eines PO2 (Bernoulli).

Viele doppelt instabile periodische Orbits entstehen durch Tangenten-Bifurkation. Gezeichnet ist die dritte Iterierte der z -Dynamik (3-fach verschachtelter Arcustangens) auf dem Periode-3-Orbit des Bernoulli-Shifts $\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$ ($\gamma = \gamma_3 = 2.144$, linkes Bild) sowie die zweite Iterierte auf dem Periode-2-Orbit $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ ($\gamma = \gamma_2 = 1.441$, rechtes Bild).

- $\gamma = 1$ Pitchfork-Bifurkation⁴ des Fixpunktes bei $x = 0$
- $\gamma_2 = 1.441$ Pitchfork-Bifurkation des Periode-2-Orbits $\{x_1, x_2\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ (Abbildung 3.1)
- ab γ_g ($\gamma_2 \leq \gamma_g < 1.545$) fangen Orbits großer Periode an zu bifurkieren. Beispielsweise gibt es für $\gamma = 1.545$ doppelt instabile PO's der Perioden 1, 2, 21, 23, 25, 27, ..., d. h. außer dem Periode-2-Orbit wurden nur Orbits ungerader Periode gefunden (nach Orbits mit Periodenlängen > 40 wurde nicht gesucht). Beim Betrachten der x -Werte der bifurkierten PO's der großen Perioden fällt auf, daß diese Orbits alle sehr nahe an Punkten mit $x = \frac{1}{3}$ oder $x = \frac{2}{3}$ vorbeikommen, d. h. sie folgen dem Periode-2-Orbit für lange Zeit, entfernen sich für einige Zeit und kommen dann zurück. Wir vermuten, daß $\gamma_g = \gamma_2$. Da für jedes $\gamma > \gamma_2$ der doppelt instabile Periode-2-Orbit existiert, kann man wie folgt argumentieren. Die periodischen Orbits liegen dicht im Attraktor. Wenn, so wie wir vermuten (siehe dazu Abschnitt 3.4.2), der Attraktor in diesem Bereich im Phasenraum dicht ist, so liegen die periodischen Orbits dort ebenfalls dicht. Periodische Orbits, die einen Punkt sehr nahe an einem der beiden 2iPP2 haben, haben auch Bildpunkte in der Nähe von Punkten auf dem 2iPO2. Es gibt also periodische Orbits, die dem 2iPO2 für beliebig lange Zeit sehr nahe folgen. Da die z -Instabilität nach zwei Iterationsschritten, d. h. $\frac{\partial z_{n+2}}{\partial z_n}$, eine glatte Funktion von (x_n, z_n) ist, werden diese PO's „Instabilität akkumulieren“, so lange sie dem 2iPO2 folgen, d. h. der Gesamtstreckungsfaktor wird von der Größenordnung $\left(\frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n}\right)^N$ sein⁵, worin N die Zahl der Schritte ist,

⁴Hier entstehen aus einem einfach instabilen PO am selben Ort z zwei einfach instabile und ein doppelt instabiler PO.

⁵auf dem 2iPO2 gilt wegen der Symmetrie der Abbildung $\frac{\partial z_{n+2}}{\partial z_n} = \left(\frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n}\right)^2$

die dieser Orbit dem 2iPO2 so nahe folgt, daß der Einschnitt-Streckungsfaktor sich kaum ändert. Hat der PO also genügend Instabilität akkumuliert, kann er sich eine Exkursion ins einfach instabile Gebiet „leisten“, und ist im ganzen immer noch doppelt instabil. Je weniger der Parameter γ den kritischen Wert γ_2 übersteigt, desto länger muß er dem 2iPO2 folgen, um genügend Instabilität zu akkumulieren. Das bevorzugte Auftreten von Orbits ungeradzahligiger Periode erklärt sich mit Hilfe der binären Kodierung der periodischen Punkte des Bernoulli-Shifts: „0“ steht für $x < 0.5$, „1“ steht für $x \geq 0.5$. Jede periodische Sequenz von Nullen und Einsen steht für einen PP des Bernoulli-Shifts, seine Koordinate x_n ist gerade diese Sequenz, als Binärzahl gelesen. So ist $.0101\overline{01}$ gleich $\frac{1}{3}$. Jede Zahl nahe $\frac{1}{3}$ muß mit $.0101\dots$ beginnen. Die besten (wiederum periodischen) Annäherungen an das immer abwechselnde 0-1-0-1-... werden mit solchen periodischen Sequenzen erreicht, wo in eine lange Sequenz geradzahligiger Länge gerade eine 0 oder 1 eingeschoben wird. Betrachtet man z. B. die beiden Bernoulli-PO's $0.\overline{10101010101}$ und $0.\overline{1010101011}$ der Periodenlänge 11 bzw. 10 (diese haben jeweils für ihre Periodenlänge die kürzesten Exkursionen von $0.\overline{01}$), so wird klar, daß der Periode-10-Orbit mit dem Punkt $0.\overline{1110101010}$ sich weiter vom PO2 entfernt als der Periode-11-Orbit (mit dem Punkt $0.\overline{11010101010}$).

- bei $\gamma = 1.6$ gibt es 2iPO's der Perioden 1, 2, 15, 17, 18, 19, 20, 21, ...
- bei $\gamma = 1.7$ gibt es 2iPO's der Perioden 1, 2, 9, 11, 12, 13, ...
- bei $\gamma = 1.8$ gibt es 2iPO's der Perioden 1, 2, 7, 8, 9, 10, ...
- der erste Periode-5-Orbit bifurkiert $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{\frac{5}{31}, \frac{10}{31}, \frac{20}{31}, \frac{9}{31}, \frac{18}{31}\}$ bei $\gamma_5 = 1.896$, die Periode-3-Orbits bei $\gamma_3 = 2.144$ und die Periode-4-Orbits bei $\gamma_4 = 3.282$. Alle diese Bifurkationen sind Tangenten-Bifurkationen⁶ (Abb. 3.3), und es kann vermutet werden, daß alle doppelt instabilen PP mit Periode ≥ 3 durch Tangenten-Bifurkationen entstehen. Die Tangenten-Bifurkation ist generisch, die Pitchfork-Bifurkation nicht.
- Für große γ sind noch nicht alle PO's bifurkiert. Sei γ_N der Parameter, von dem an alle PO's der Periode N bifurkiert sind. Dann ist für $N \geq 3$ γ_N eine monoton wachsende Funktion von N . Wir erwarten, daß der erweiterte Bernoulli-Shift für $\gamma \geq \gamma_g$ nicht mehr strukturell stabil sein kann, d. h. daß es oberhalb dieses Wertes kein γ -Intervall gibt, in dem keine Bifurkationen auftreten.

Auch der Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts zeigt bei Veränderung von γ eine Reihe interessanter qualitativer Veränderungen (siehe Abschnitt 3.2).

Die Existenz zweier PO's mit unterschiedlich vielen positiven Ljapunovexponenten ist also ein hinreichendes Kriterium für Dimensionsvariabilität, falls beide PO in denselben Attraktor eingebettet sind. Für den Fall des Bernoulli-Shifts gibt es außerordentlich überzeugende Evidenz dafür, daß dies zutrifft.

⁶Hier entstehen zusätzlich zum bereits vorhandenen einfach instabilen PO an einem anderen Ort z ein einfach instabiler und ein doppelt instabiler PO.

3.2 Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts

Der mit der sigmoiden z -Komponente erweiterte Bernoulli-Shift ist ein dissipatives System. Der Phasenraum wird auf eine echte Teilmenge abgebildet. Es existiert eine anziehende invariante Teilmenge (Attraktor), gegen die Lebesgue-fast jede Trajektorie strebt. In Simulationen wird ein Abbild des Attraktors erzeugt, indem ein zufällig gewählter Punkt lange vorwärts iteriert wird, wobei die ersten z. B. 1000 Punkte dieser Trajektorie als Transiente (Annäherung an den Attraktor) betrachtet und daher weggelassen werden.

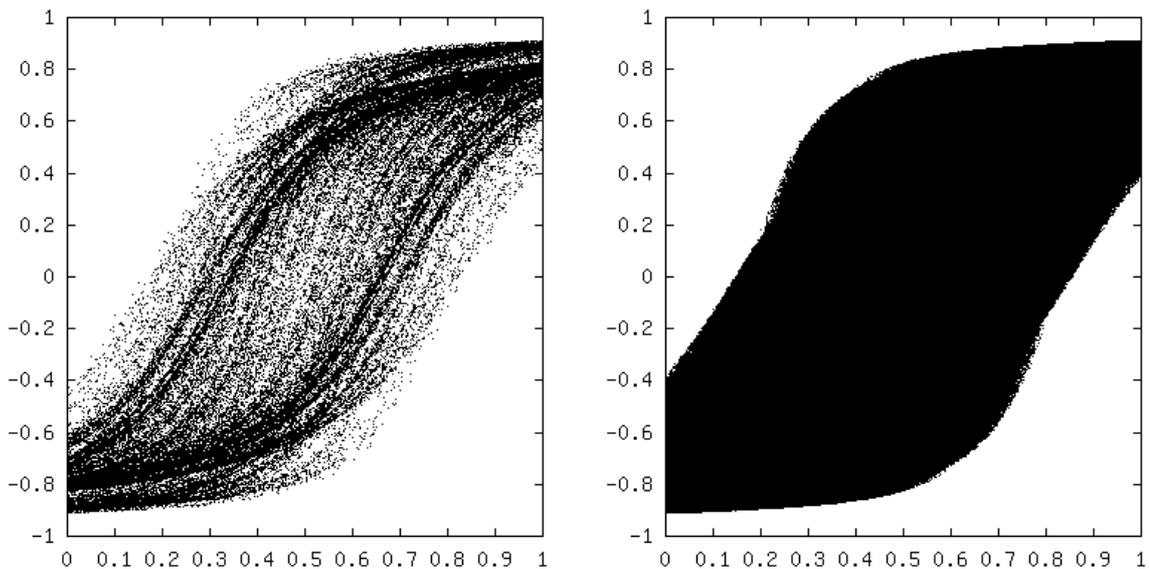


Abbildung 3.4: Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts ist für die Parameter $\gamma = 2.5$ mit 10^5 (links) bzw. 10^8 (rechts) Trajektorienpunkten.

Der Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts ist für den Parameter $\gamma = 2.5$ in Abbildungen 3.4 und 3.5 dargestellt. Bei $\gamma = 2.5$ ist die Dimension des Trägers der Menge, also die Kapazitätsdimension, augenscheinlich gleich der Raumdimension ($D_0 = 2.0$); es besteht kaum Zweifel, daß die Fläche zwischen der oberen und der unteren Attraktorbegrenzungslinie dicht gefüllt ist. Bei großen γ ($\gtrsim 10$) scheint das zunächst wenig intuitiv zu sein (vgl. Abb. 3.5), jedoch finden sich keine Anzeichen für eine qualitative Veränderung des Attraktors in diesem Parameterbereich ($\gamma > 2.5$). Ein Vergleich der Abbildungen 3.4 und 3.5 macht es plausibel, daß für größere γ nur das invariante Maß zunehmend inhomogener ist, so daß man immer mehr Iterationen brauchte, um die Fläche zu füllen.

Für *kleinere* γ als 2.5 treten allerdings (Abb. 3.6) qualitative Veränderungen des Attraktors auf, betrachtet man die Überlappung der Bildmengen der linken sowie der rechten

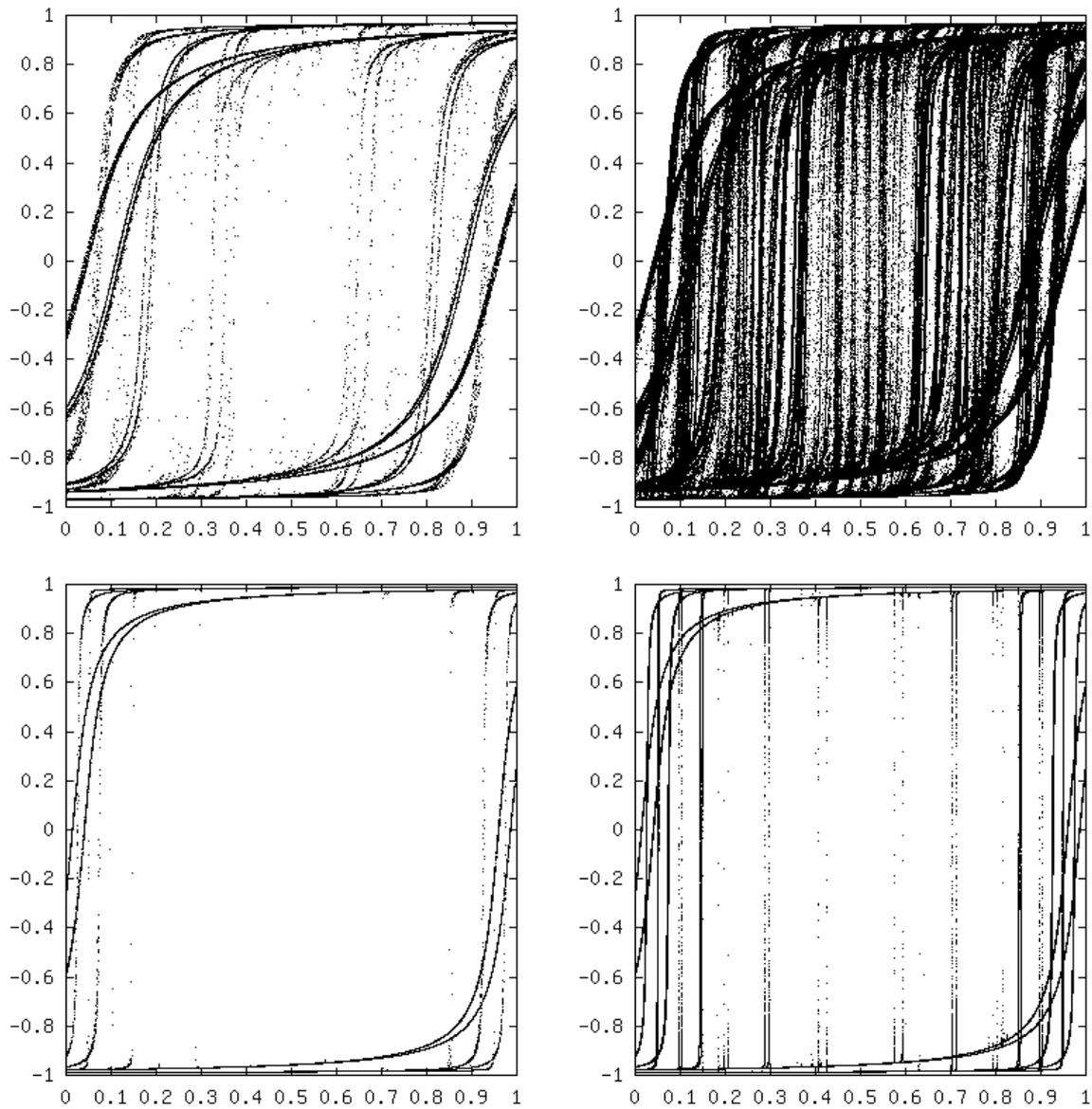


Abbildung 3.5: Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts ist für die Parameter $\gamma = 7$ (oben) sowie $\gamma = 20$ (unten) mit 10^5 (links) bzw. 10^8 (rechts) Trajektorienpunkten.

Attraktorhälfte. Dazu bezeichnen wir

- den unteren und den oberen **Attraktorrاند** mit $\{x, z_R^-(x)\}$ und $\{x, z_R^+(x)\}$,
- die Bilder der Teilmengen der Ränder links (mit $x < 0.5$) mit $f_0(\{x, z_R^-(x)\})$ und $f_0(\{x, z_R^+(x)\})$ sowie
- die Bilder der rechten Teilränder mit $f_1(\{x, z_R^-(x)\})$ und $f_1(\{x, z_R^+(x)\})$.

Für Parameter $\gamma \leq 1.48$ überlappen sich beide Bilder für jedes x so, daß gilt

$$f_{1z}(x, z_R^-(x)) < f_{0z}(x, z_R^-(x)) < f_{1z}(x, z_R^+(x)) < f_{0z}(x, z_R^+(x)), \quad (3.11)$$

also „unten rechts“ $<$ „unten links“ $<$ „oben rechts“ $<$ „oben links“. Hier schneiden sich die 4 Bildkurven der Attraktorränder nicht. Bei einem Parameter $\gamma \approx 1.484$ berühren sich die Kurven „oben rechts“ und „oben links“ sowie „unten rechts“ und „unten links“ an je einem Punkt, während für $\gamma > 1.49$ sich diese Kurven immer (zunächst an je 2 Punkten) schneiden. Da die Randkurve an den Schnittpunkten nicht differenzierbar ist und da die Bilder der Schnittpunkte zum Teil wieder auf dem Attraktorrاند liegen, kann die Randkurve stückweise differenzierbar sein oder unendlich viele nicht differenzierbare Punkte besitzen oder sogar nirgendwo differenzierbar sein.

Die nächste Attraktorbifurkation sorgt in einem sehr schmalen Parameterbereich um $\gamma = 1.50$ für eine Anomalie. Hier schneiden sich „unten links“ und „oben rechts“ bei einem sehr kleinen x_s (für $\gamma = 1.5$: $x_s \approx 0.007$) sowie symmetrisch dazu auch bei $1 - x_s$. Das bedeutet, daß in den Intervallen $[0, x_s]$ und $[1 - x_s, 1]$ endlich große Flächenstücke zwischen der oberen und der unteren Attraktorgrenze existieren, deren Punkte „über“ den Bildpunkten der rechten Attraktorhälfte, aber „unter“ den Bildpunkten der linken Attraktorhälfte liegen. Diese Punkte haben damit weder in der rechten noch in der linken Attraktorhälfte ein Urbild und können daher nicht Teil des Attraktors sein. Es zeigt sich, daß auch an Stellen, wohin diese Punkte abgebildet würden, der Attraktor „Löcher“ hat. Man kann vermuten, daß in folgenden Iterationen, in denen dieses „Loch“ in x -Richtung immer länger wird, jeweils ein Teil in Bereiche zwischen den Bildern der Attraktorränder abgebildet wird, die nur dieses eine Urbild haben, in denen also wiederum ein Loch auftritt. Falls diese Vermutung zutrifft, ist nicht nur die Fläche zwischen den Attraktorrändern nicht dicht mit Attraktorpunkten gefüllt, sondern dann ist entweder auch die Kapazitätsdimension dieses Attraktors kleiner als 2.0, oder es handelt sich um ein sogenanntes „fat fractal“ [18], d. h. eine selbstähnliche Menge, für die in jeder ε -Kugel um einen Punkt der Menge sowohl die Punkte der Menge als auch die Punkte außerhalb der Menge endliches Lebesgue-Maß besitzen [11]. Welcher dieser drei Arten diese Anomalie ist, ließ sich nicht klären.

Abgesehen von dieser Ausnahme überlappen sich für jeden anderen Parameter γ für jedes x die Bildmenge $f(A_\ell)$ der Attraktorpunkte mit $0 \leq x < 0.5$ und Bildmenge $f(A_r)$ der Attraktorpunkte mit $0.5 \leq x < 1$. Dies hat zur Konsequenz, daß jeder Punkt der Attraktorfläche wieder mindestens ein Urbild auf ihr hat. Diese Eigenschaft ist eine notwendige Voraussetzung dafür, daß der Attraktor die gesamte Fläche dicht füllt.

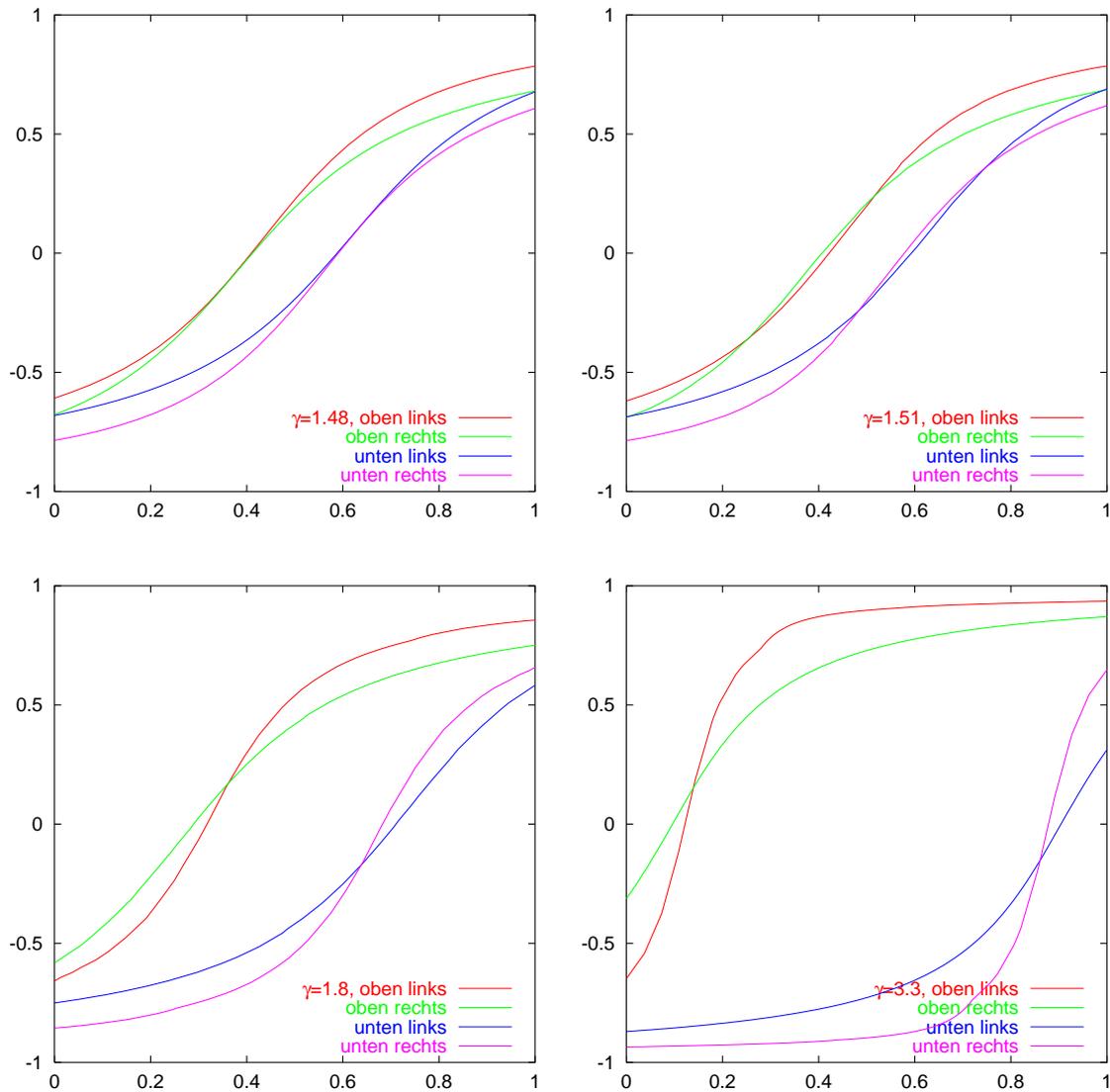


Abbildung 3.6: Bilder der linken und rechten Halfen des Attraktorrandes des erweiterten Bernoulli-Shifts fur die Parameter a) $\gamma = 1.48$, b) $\gamma = 1.51$, c) $\gamma = 1.8$ und d) $\gamma = 3.3$ (von links oben nach rechts unten)

Nachdem die Überlappung $\forall x$ wiederhergestellt ist, verschiebt sich bei weiterer Vergrößerung von γ der linke Schnittpunkt (siehe dazu die Abb. 3.6) von „oben links“ und „oben rechts“ zu $x = 0$ hin und erreicht diese beim Parameter $\gamma = 1.63$. Für $\gamma > 1.63$ schneiden sich „oben links“ und „oben rechts“ nur noch einmal. Da der Schnittpunkt bei $x_s < 0.5$ liegt, gibt es in diesem Parameterbereich nur noch die folgenden Möglichkeiten:

- im Intervall $[0, x_s]$: unten-rechts < unten-links < oben-links < oben-rechts
- im Intervall $[x_s, 1 - x_s]$: unten-rechts < unten-links < oben-links < oben-rechts
- im Intervall $[1 - x_s, 1]$: unten-links < unten-rechts < oben-rechts < oben-links.

Jede der drei Möglichkeiten sichert, daß im entsprechenden Bereich der x -Achse jeder Punkt zwischen der unteren und der oberen Attraktorberandung mindestens ein Urbild im Attraktor hat.

Eine weitere Auffälligkeit im Attraktor bei Veränderung des Parameters ist die Veränderung der Punktdichte am Attraktorrund und in der Attraktormitte. Der Attraktorrund hat eine hohe Punktdichte und ist bei bildlicher Darstellung von etwa 10^8 Punkten als scharfe Kurve zu sehen für $\gamma < 1.54$ und für $\gamma > 1.9$. Dazwischen, bei γ -Werten um 1.64 ist der Rand am dünnsten. Diese Veränderungen treten jedoch nicht bei genau definierbaren Parameterwerten auf, sondern verstärken sich nach und nach.

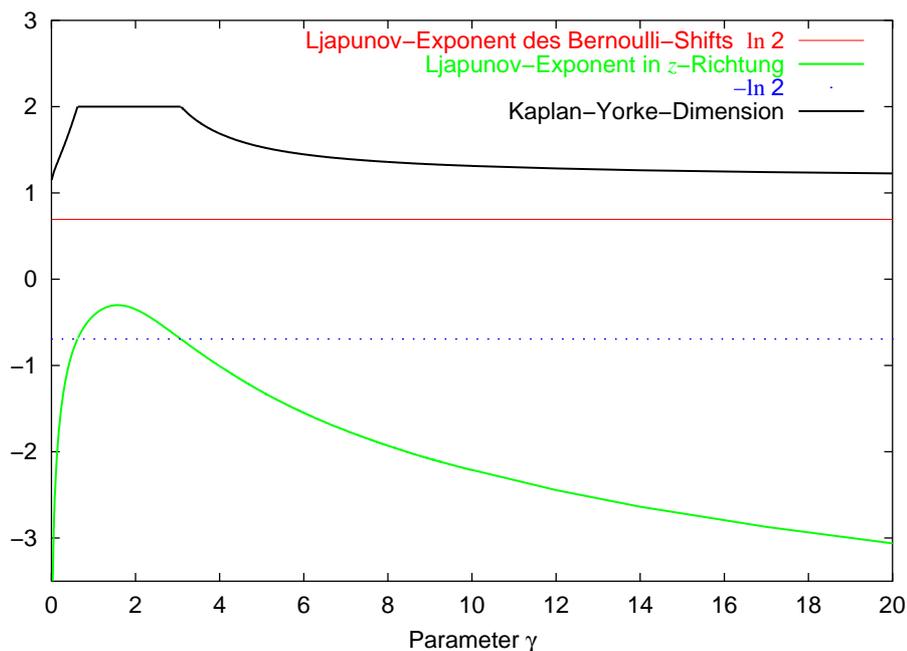


Abbildung 3.7: Ljapunovexponenten und Kaplan-Yorke-Dimension des erweiterten Bernoulli-Shifts

Die Ljapunovexponenten des erweiterten Bernoulli-Shifts sowie die daraus resultierende Kaplan-Yorke-Dimension (siehe die Abschnitte 2.1.3 und 2.1.5) sind in Abb. 3.7 in Abhängigkeit vom Parameter γ dargestellt. Sie lassen sich leicht numerisch berechnen. Einer der beiden Ljapunovexponenten ist immer gleich $\ln 2$, das ist der Ljapunovexponent

des Bernoulli-Shifts. Der andere ist aufgrund der Dreiecksform der Jacobimatrix

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

der Mittelwert des Logarithmus eines einzigen Jacobimatrix-Elements

$$\frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} = \frac{\gamma}{1 + \left\{ \frac{\gamma\pi}{2} [z_n + 2(2x_n \bmod 1 - x_n)] \right\}^2} \quad (3.13)$$

entlang einer Trajektorie; die Mittelwertberechnung konvergiert schnell. Die Ljapunov-exponenten zeigen für $0.63 < \gamma < 3.07$ ein merkwürdiges Verhalten. Obwohl es einen Attraktor gibt, der eine anziehende Menge im \mathbb{R}^2 ist, ist die Summe der Ljapunovexponenten positiv.

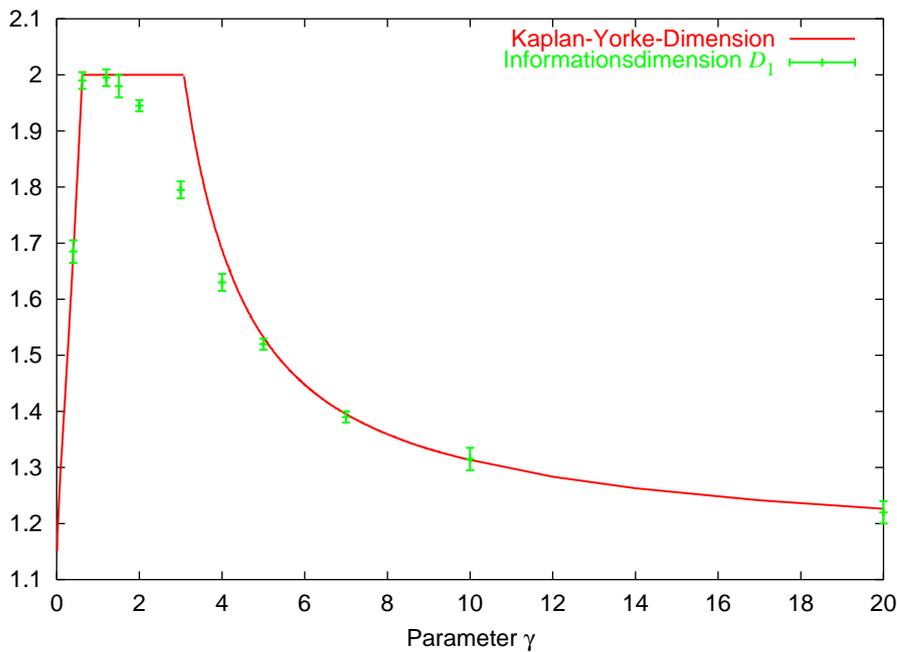


Abbildung 3.8: Kaplan-Yorke- und Informationsdimension des erweiterten Bernoulli-Shifts

Um zu überprüfen, ob die Kaplan-Yorke-Vermutung für den erweiterten Bernoulli-Shift gilt, berechnen wir die Informationsdimension D_1 nach dem Boxcounting-Algorithmus und vergleichen sie mit der Kaplan-Yorke-Dimension (Abb. 3.8). Die Abbildung zeigt, daß die Kaplan-Yorke-Vermutung (2.25) vor allem im Intervall $1 \lesssim \gamma \lesssim 4$ offenbar nicht zutrifft. Die Ungleichung (2.26) gilt.

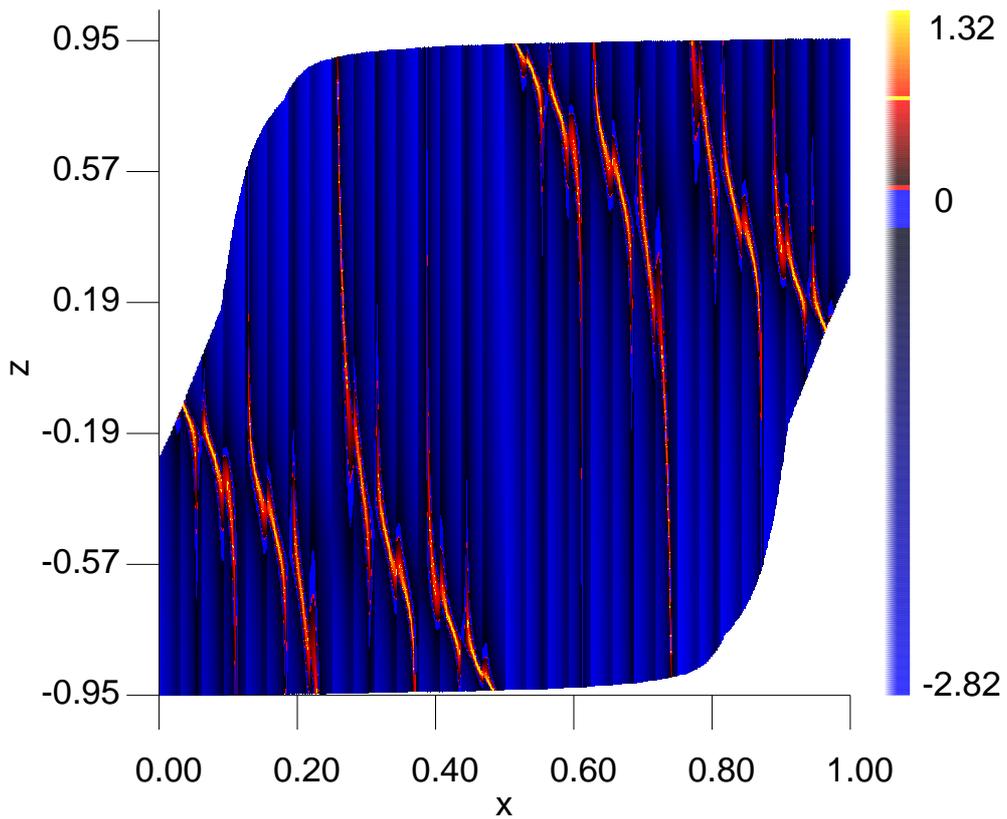


Abbildung 3.9: Stabilität der Attraktorpunkte beim Parameter $\gamma = 5$ (Bernoulli). Positive Werte (helle Farben) entsprechen Punkten, deren z -Richtung über die folgenden fünf Schritte instabil ist.

3.2.1 Stabilität der z -Richtung im Attraktor (Kurzzeit-Ljapunovexponenten)

Von den beiden Richtungen des erweiterten Bernoulli-Shifts ist die x -Richtung trivialerweise immer expandierend (nämlich um einen Faktor 2; dieser führt zum Ljapunovexponenten $\ln 2$ des Bernoulli-Shifts). Die z -Richtung ist andererseits teils expandierend, teils kontrahierend. Für die Abb. 3.9 wurde ein 1024×1024 -Punkte-Gitter über den Phasenraum gelegt und für jeden Punkt zwischen dem unteren und dem oberen Attraktorrund der Streckungsfaktor der z -Richtung für fünf Iterationen von diesem Punkt ausgehend berechnet. Die Logarithmen dieser Streckungsfaktoren (bis auf den Faktor 5 identisch mit den Kurzzeit-Ljapunovexponenten) wurden als Farbe des Pixels in die Abbildung codiert. Die hellsten Farben entsprechen den instabilsten Punkten. Die instabilen Regionen sind Umgebungen der im Abschnitt 3.1 erörterten doppelt instabilen Periodenpunkte kurzer Periode. Wie für die Periodenpunkte gilt: jeder doppelt instabile Punkt liegt in z -Richtung zwischen zwei einfach instabilen Punkten mit gleichem x . Iteriert man in Gedanken eine vertikale Linie (vom unteren bis zum oberen Attraktorrund) vorwärts, so werden sich die Punkte zunächst „in der Mitte“ voneinander entfernen (steiler Abschnitt der Arcustangensfunktion) sowie „oben“ und „unten“ sich einander nähern. Früher oder später kommt die Trajektorie aber immer auch in einen Bereich der x -Achse, in dem die Dynamik von den Singulett-artigen einfach instabilen PP dominiert wird. Dann werden sowohl die „oben“ als auch die „unten“ akkumulierten Punkte in den folgenden Iterationen zueinander hin abgebildet, d. h. es bleibt nur noch eine einzige, immer kleiner werdende Punktwolke übrig. Für diejenigen x -Werte, für welche dies über die für Abb. 3.9 betrachteten fünf Iterationen zutrifft, gibt es keine in z -Richtung expandierenden Punkte.

Beim Betrachten des Bildes kommt die Frage auf, warum es gerade die Verteilung der doppelt instabilen PP, nicht aber die der einfach instabilen PP widergespiegelt. Die Erklärung ist wiederum ein Zeitskalen-Argument: ebenso wie die Umgebungen aller doppelt instabilen PP passender Periodenlänge (≤ 5) positive Kurzzeit-Ljapunovexponenten in z -Richtung haben, haben die Umgebungen aller einfach instabilen PP dieser Periodenlängen negative Exponenten. Alle anderen Punkte werden mit überwältigender Wahrscheinlichkeit bereits vom ersten Schritt an zur Kernregion des Attraktors hin abgebildet. In dieser überwiegt z -Stabilität.

Zeichnet man dieses Bild für größere Iterationsdauern (Zeitskala des Kurzzeit-Ljapunovexponenten), werden die doppelt instabilen Gebiete schnell sehr dünn und sind dann nicht mehr zu sehen. Bereits für 20 Iterationen haben alle 1024×1024 gerechneten Punkte einen negativen Kurzzeit-Ljapunovexponenten in z -Richtung.

3.3 Testen auf Dimensionsvariabilität: sind die Orbits eingebettet?

3.3.1 Untersuchung der punktweisen Dimension

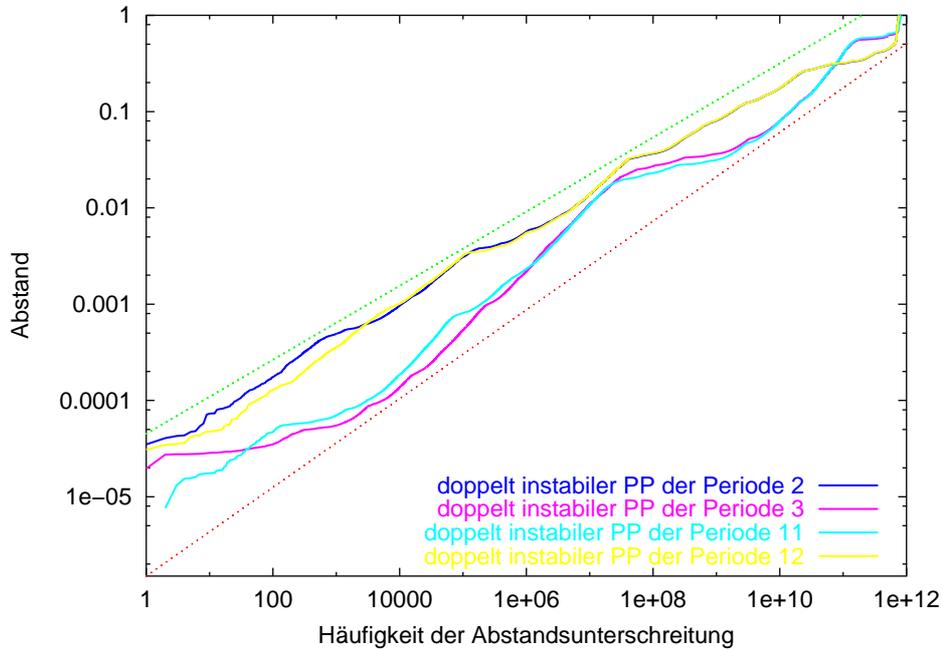


Abbildung 3.10: zur Berechnung der punktweisen Dimension des Attraktors (Bernoulli, $\gamma = 5$) für einige doppelt instabile PP.

Die gepunkteten Geraden repräsentieren punktweise Dimensionen von 2.17 und 2.6.

Eine sehr direkte Methode des Nachweises von Dimensionsvariabilität besteht darin, jeweils einen einfach und einen doppelt instabilen PP zu finden, die im Attraktor liegen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß bei immer längeren chaotischen Trajektorien immer kleinere Abstände zwischen dem betreffenden PP und den Punkten der chaotischen Trajektorie unterschritten werden. Liegt der Punkt im Attraktor, wird jeder noch so kleine Abstand unterschritten. Es gilt[4]

$$\alpha(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d \ln \mu_\varepsilon(x)}{d \ln \varepsilon} \quad (3.14)$$

Hier ist $\alpha(x)$ die *lokale* oder *punktweise Dimension* der invarianten Menge mit dem invarianten Maß μ und $\mu_\varepsilon(x)$ das Maß einer Kugel mit Radius ε um x . Praktisch kann eine zu $\mu_\varepsilon(x)$ proportionale Größe aus einer numerisch erzeugten Trajektorie einer bestimmten Länge bestimmt werden, indem jeweils ermittelt wird, wie häufig der Abstand zwischen x und dem Trajektorienpunkt kleiner als ε ist.

Die Theorie der Multifraktale[4, 13, 27] sagt aus, daß es für ein multifraktales Maß μ eine Kernregion gibt, zu der alle Punkte mit eventueller Ausnahme einer Teilmenge

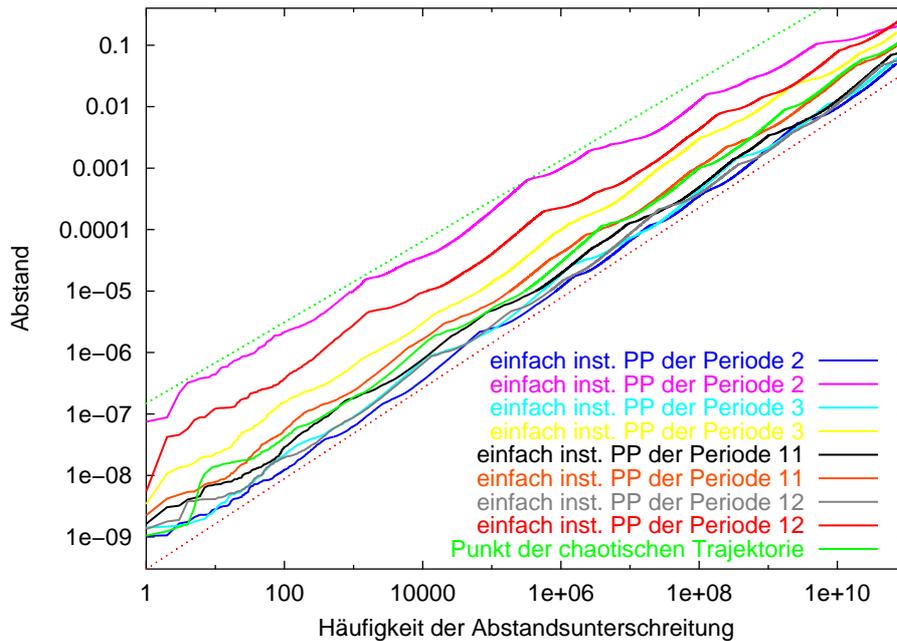


Abbildung 3.11: zur Berechnung der punktweisen Dimension des Attraktors (Bernoulli, $\gamma = 5$) für einige einfach instabile PP sowie einen Punkt aus einer chaotischen Trajektorie. Das Skalierungsverhalten entspricht punktweisen Dimensionen zwischen 1.36 und 1.52.

vom μ -Maß null gehören. Die Informationsdimension des Maßes ist identisch mit der Hausdorff-Dimension der Kernregion. Darüberhinaus sagt die Theorie, daß alle Punkte der Kernregion als punktweise Dimension ebenfalls D_1 haben. Die punktweise Dimension wurde für den Parameter $\gamma = 5$ für die folgenden Punkte numerisch ermittelt:

- einen Punkt aus einer chaotischen Trajektorie
- vier Triplets von periodischen Punkten, d. h. für jede der Perioden 2, 3, 11 und 12 wurden für einen PP des Bernoulli-Shifts, für den bei $\gamma = 5$ zwei einfach instabile und ein doppelt instabiler PP des erweiterten Bernoulli-Shifts existieren, die punktweise Dimension des Attraktors untersucht.

Dabei wurden die folgenden punktweisen Dimensionen gefunden:

	doppelt instabiler PP	erster einfach instabiler PP	zweiter einfach instabiler PP
Periode-2-Punkte	2.6	1.42	1.42
Periode-3-Punkte	2.3	1.37	1.52
Periode-11-Punkte	2.3	1.37	1.52
Periode-12-Punkte	2.5	1.36	1.44
Punkt aus der chaotischen Trajektorie	1.37		

Zum Vergleich ist in Abb. 3.12 die Berechnung der Informationsdimension nach dem Boxcounting-Algorithmus dargestellt.

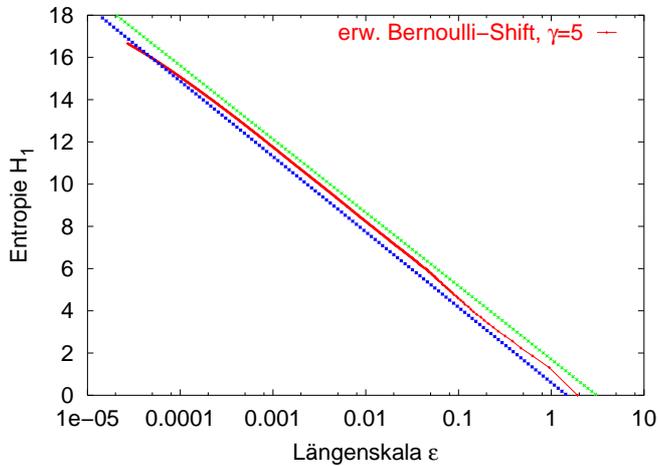


Abbildung 3.12: Entropie H_1 für Bernoulli, $\gamma = 5$, für 10^8 Punkte einer chaotischen Trajektorie.

Die gepunkteten Geraden entsprechen Dimensionen von 1.51 (grüne Linie) bzw. 1.55 (blaue Linie). Aufgrund der Abbildung schätzen wir die Informationsdimension auf $D_1 = 1.53 \pm 0.02$. Nach derselben Methode wurden die anderen in der Abb. 3.8 eingetragenen D_1 -Werte und ihre Fehlerbalken ermittelt.

Zwei der einfach instabilen periodischen Punkte gehören anscheinend zur Kernregion, die anderen nicht. Das ist auf den ersten Blick überraschend, da es die Frage aufwirft: „welche der liPP und Trajektorienpunkte sind Teil der Kernregion und welche nicht?“ Auf den zweiten Blick wird klar, daß es allerdings so sein muß. Da nach unseren numerischen Untersuchungen (siehe weiter unten) zumindest Kapazitätsdimension der einfach instabilen PP ebenso wie die des Attraktors gleich 2.0 und damit größer als D_1 ist, müssen beide Mengen auch Punkte enthalten, die nicht zur Kernregion gehören.

Die Abbildung 3.10 zeigt für $\gamma = 5$, daß bei einer Trajektorienlänge von 10^{11} keine Abweichung vom Skalenverhalten, die auf einen Mindestabstand zwischen dem doppelt instabilen PP und dem Attraktor schließen ließe, gefunden wurde und daß (3.14) mit α zwischen 2.1 und 2.7 gilt. Die punktweise Dimension ist für die doppelt instabilen Punkte größer als die Phasenraumdimension, sie ist also keine Dimension im topologischen Sinne[4, 13]. Sie drückt ein Skalenverhalten aus: das invariante Maß des Attraktors wird an diesen Stellen besonders schnell dünn. Für einfach instabile PP sowie Attraktorpunkte ist dagegen zu erwarten, daß sich sehr viele Attraktorpunkte in ihrer Nähe befinden, und daß ihre punktweise Dimension kleiner als die Raumdimension ist. Das wird durch die Rechnung bestätigt (Abb. 3.11).

3.3.2 Nachbarn in einer Referenztrajektorie

Die folgende Argumentation gilt für den erweiterten Bernoulli-Shift. Es zeigte sich, daß offenbar ein global anziehender Attraktor vorliegt. Bei einem Vergleich des Attraktors mit der Menge der einfach instabilen PP (also vom Satteltyp) einerseits und der Menge der doppelt instabilen (also der abstoßenden) PP andererseits (Abb. 3.13) stellt man mit

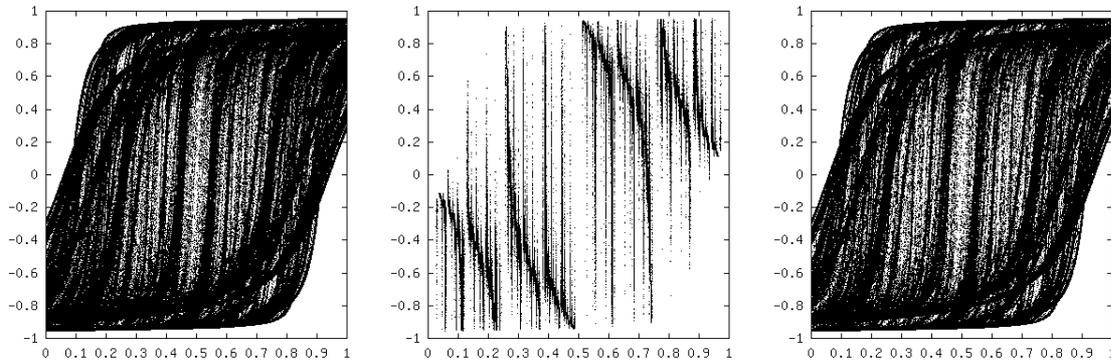


Abbildung 3.13: Vergleich der Mengen der einfach (links) und doppelt (Mitte) instabilen PP (bis Periode 23) sowie des Attraktors (ebensoviele Punkte wie einfach instabile PP, rechts) beim Parameter $\gamma = 5$ (Bernoulli).

bloßem Auge fest, daß die Verteilung der einfach instabilen PP derjenigen der Attraktorpunkte sehr ähnelt und daß die Verteilung der doppelt instabilen PP dagegen von beiden verschieden ist. Um dies quantitativ zu belegen, haben wir in Anlehnung an die Methode des Kreuzkorrelationsintegrals[20] aus allen drei Mengen für verschiedene Umgebungsdurchmesser jeweils den Anteil der Punkte bestimmt, die in dieser Umgebung Nachbarn in einer chaotischen Referenztrajektorie (40000 Punkte) haben. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist, daß die einfach instabilen PP den Attraktor deutlich besser beschreiben als die doppelt instabilen. Die einfach instabilen PP liegen ebenso klar im Attraktor wie die Attraktorpunkte selbst. Aber auch für die doppelt instabilen PP wurden innerhalb jedes der untersuchten Umgebungsdurchmesser Nachbarn in der chaotischen Referenztrajektorie gefunden (allerdings deutlich weniger, Abb. 3.14). Dieses Ergebnis ist kompatibel mit der Annahme, daß auch die doppelt instabilen PP Teilmenge des Attraktors sind, daß aber nur ein geringer Teil des invarianten Maßes des Attraktors sich in der Nähe der doppelt instabilen PP befindet. Es gibt auch doppelt instabile Punkte in der Nähe der Attraktorpunkte, das zeigt die letzte Kurve in der Abb. 3.14).

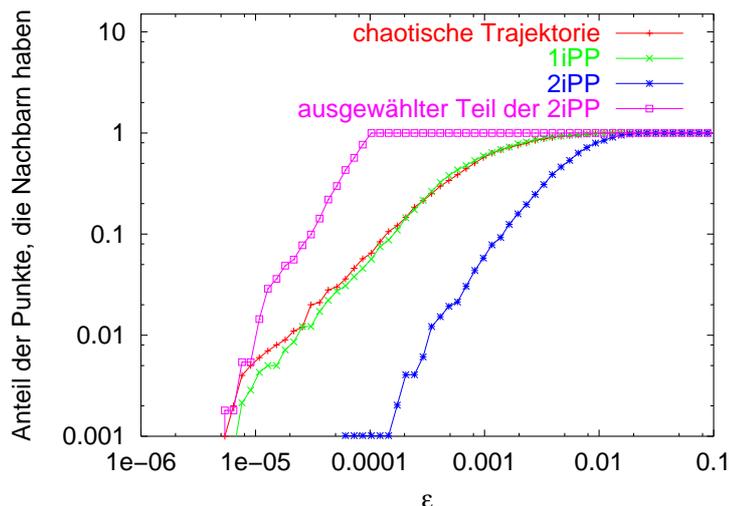


Abbildung 3.14: Anteil der Punkte, die in der Referenztrajektorie Nachbarn näher als ε haben.

Anteile in den folgenden Mengen: chaotische Trajektorie (natürlich ein von der Referenztrajektorie verschiedener Abschnitt), einfach instabile Punkte (1iPP), doppelt instabile Punkte (2iPP), und schließlich ausgewählte 2iPP, die näher als 10^{-4} an einem Punkt der Referenztrajektorie liegen (Parameter $\gamma = 3.3$).

3.4 Iteration einer Linie im Bernoulli-Shift

Die folgende Methode wurde im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und bietet sich auch allgemein als Werkzeug zur Untersuchung invarianter Mengen von Abbildungen (z. B. im Hinblick auf ihre Dimensionalität) an.

Das Bild des Attraktors wurde durch fortgesetzte Vorwärtsiteration eines beliebigen Punktes gewonnen. Man findet, daß für immer größere γ der Attraktor immer mehr wie aus fraktalen Linien bestehend aussieht, während für kleinere γ eine Fläche gefüllt zu werden scheint⁷. Diese Beobachtung führte uns zu dem Ansatz, diese Linien näherungsweise analytisch zu beschreiben.

Praktisch iterieren wir nun also viele Punkte gleichzeitig vorwärts. Diese seien anfänglich auf einer Kurve $K = \{(x, z(x)) : 0 \leq x < 1\}$ mit konstanter Dichte bezüglich der x -Richtung verteilt. Da die invariante Dichte des Bernoulli-Shifts die konstante ist, bleibt die horizontale Gleichverteilung auch bei der Iteration erhalten. Wenn im folgenden von Kurven die Rede ist, sind immer Kurven $\{(x, z(x)) : 0 \leq x < 1\}$ mit konstanter horizontaler Dichte gemeint. Durch das Strecken und Falten besteht das Bild jeder solchen Kurve

⁷Für größere γ ist die Approximation des Attraktors durch die Iterationen der Linie intuitiver, jedoch ist sie für kleinere γ ebenso gültig.

aus zwei Kurven:

$$\begin{aligned}
 f(K) &= \left\{ f(x, z(x)) : 0 \leq x < 0.5 \right\} \cup \left\{ f(x, z(x)) : 0.5 \leq x < 1 \right\} \\
 &= \left\{ \left(2x, \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\gamma\pi}{2} [z(x) + 2x] \right) : 0 \leq x < 0.5 \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ \left(2x - 1, \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\gamma\pi}{2} [z(x) + 2(x - 1)] \right) : 0.5 \leq x < 1 \right\} \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \left(x', \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\gamma\pi}{2} \left[z\left(\frac{x'}{2}\right) + x' \right] \right) : 0 \leq x' < 1 \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ \left(x', \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\gamma\pi}{2} \left[z\left(\frac{x'+1}{2}\right) + x' - 1 \right] \right) : 0 \leq x' < 1 \right\} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

$$= f_0(K) \cup f_1(K) \quad (3.17)$$

Jede weitere Iteration verdoppelt die Anzahl der Kurven. Die Ausdrücke entsprechend (3.16) sind immer weiter ineinander verschachtelte Arcustangensfunktionen und werden zunehmend komplexer. Dabei unterscheiden sich die Ausdrücke für die einzelnen Bildkurven jeweils darin, in welchen Arcustangens-Argumenten $[z(\frac{x'}{2}) + x']$ steht ($f_0(\cdot)$) und in welchen $[z(\frac{x'+1}{2}) + x' - 1]$ ($f_1(\cdot)$). Somit kann jede einzelne der 2^n Kurven des n -ten Bildes durch eine binäre Sequenz $\{a_i\}_{i=1}^n$ sowie durch die Angabe der Anfangskurve dargestellt werden. Durch die Wahl einer Anfangskurve, die Teilmenge des Attraktors ist, wird zunächst garantiert, daß auch die Bildmenge nach beliebig vielen Iterationen wiederum Teil des Attraktors ist. Durch die Transitivitätseigenschaft des Attraktors wiederum muß das aus 2^n Einzelkurven bestehende n -te Bild einer solchen Anfangskurve für $n \rightarrow \infty$ im Attraktor dicht liegen.

Wenn das Bild der Anfangskurve die Anfangskurve selbst enthält, dann enthält auch jedes $(n + 1)$ -te Bild das n -te; d. h. eine Kurve, die in einer Iteration Teilmenge des Bildes ist, wird bei jeder weiteren Iteration automatisch wieder erzeugt.

3.4.1 Approximation des Attraktors durch Kurven

Wir wählen als Anfangskurve die Kurve

$$K_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_0^n(\{(x, z(x)) : 0 \leq x < 1, z(0) = -|z_F|\}) \quad (3.18)$$

(Abb. 3.15), die sich für jedes $z_0 < 0$ als Grenzwert der Iteration mit der Indexfolge $a_i = 0 \forall i$ ergibt. Die Kurve K_0 ist die lokale instabile Mannigfaltigkeit des einfach instabilen Fixpunktes bei $x = 0$, also die Menge der Punkte, die bei Rückwärtsiteration⁸ immer näher zu diesem FP hin abgebildet werden. In der Tat ist das Urbild der Kurve ihre eigene linke Hälfte, und das n -te Urbild ist das Kurvenstück mit $0 \leq x < 2^{-n}$. Im $\lim_{n \rightarrow \infty}$ ergibt sich gerade die Menge, die den FP als einzigen Punkt enthält, als Urbild.

⁸Als Rückwärtsabbildung wird hier jedem Punkt dasjenige seiner beiden Urbilder mit $x < 0.5$ zugeordnet (da es um den FP bei $x = 0$ geht).

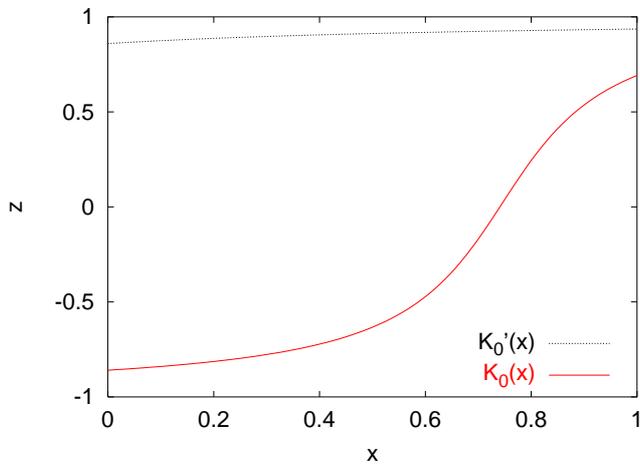


Abbildung 3.15: Die Kurven K_0 und K_0' für den Parameter $\gamma = 5$.

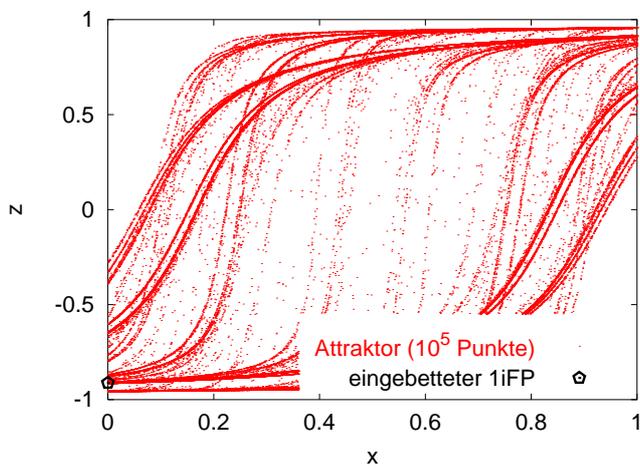


Abbildung 3.16: Der einfach instabile Fixpunkt $(0, -|z_F|)$ liegt augenscheinlich im Attraktor (Abb. für den Parameter $\gamma = 5$)

Dieser Punkt ist augenscheinlich in den Attraktor eingebettet, wie man in der Abbildung 3.16 erkennen kann. In der Tat haben noch weitere Attraktorkurven für $x = 0$ z -Werte in der Nähe von z_0 . Durch die Kontraktion in der z -Richtung wird gesichert, daß K_0 von diesen Kurven wieder „aufgefüllt“ wird; die n -ten Bilder dieser Kurven konvergieren für größere n schnell gegen K_0 .

Die in der Abb. 3.15 gepunktet dargestellte Kurve

$$K'_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_0^n(\{(x, z(x)) : 0 \leq x < 1, z(0) > -|z_F|\}) \quad (3.19)$$

kann nicht als Anfangskurve gewählt werden, denn sie liegt nicht im Attraktor. Dennoch ist sie invariant, $f(K'_0) \supset K'_0$; sie ist die lokale instabile Mannigfaltigkeit des einfach instabilen Fixpunktes bei $(0, +|z_F|)$, der ebenfalls nicht im Attraktor liegt. Vorsicht ist also geboten bei der Wahl der Anfangskurve. Beide Kurven, K_0 und K'_0 , werden durch Iteration mit der Indexsequenz $a_i = 0 \forall i$ aus anderen Kurven erzeugt. Alle Kurven mit $z(0) < 0$ erzeugen asymptotisch die Kurve K_0 und alle mit $z(0) > 0$ die Kurve K'_0 . Alle im Attraktor enthaltenen Linien haben offenbar $z(0) < 0$, daher ist K_0 Teil des Attraktors und K'_0 nicht⁹.

Für Simulationen wird im folgenden immer K_0 als Anfangskurve verwendet. Numerisch wird sie als Taylorentwicklung bis zur 10. Potenz am Punkt $(0, -|z_F|)$ und nachfolgende 3 Iterationen mit der Indexsequenz „000“ erzeugt. Das Ergebnis ist im Rahmen der double-Genauigkeit des Computers identisch mit dem Ergebnis bei weiteren Iterationen mit Index „0“. Abb. 3.17 zeigt die zehnte Iteration von K_0 für den Parameterwert $\gamma = 20$ (zum Vergleich mit dem klassisch durch Iteration eines Punktes gewonnenen Attraktor: Abb. 3.5). Das Bild 3.17 zeigt nicht perfekt die Symmetrie des Attraktors, denn K_0 (selbst nicht symmetrisch) wurde nur endlich viele Male iteriert.

Das im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ sich ergebende Linienmuster wird hier als

$$L_\infty \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(K_0) = \{(x, y) : \exists n : (x, y) \in f^n(K_0)\}$$

bezeichnet. Da K_0 die lokale instabile Mannigfaltigkeit des eingebetteten Fixpunktes ist, ist L_∞ seine globale instabile Mannigfaltigkeit. $\overline{L_\infty}$ ist daher mit dem Attraktor identisch. Die gleiche Argumentation gilt auch für jede andere im Attraktor enthaltene Kurve, die (anstelle von K_0) durch eine beliebige periodische Index-Sequenz aus Nullen und Einsen erzeugt werden kann. Für $n \rightarrow \infty$ ist jede der mit periodischen Indexsequenzen erhaltenen Kurven die instabile Mannigfaltigkeit eines einfach instabilen periodischen Punktes, der auf dieser Kurve liegt. Eine Umgebung jedes p -periodischen Punktes wird nach jeweils p Iterationen immer genauer auf die instabile Mannigfaltigkeit dieses Punktes abgebildet. Die entsprechende Indexsequenz der Iteration ergibt sich aus der x -Koordinate des PP, es ist seine binäre Darstellung. Für einen einfach instabilen PP der Periode 5 bei $x = \frac{26}{31}$ ist die binäre Darstellung der x -Koordinate gleich $0.\overline{11010}$. Der PP wird also automatisch

⁹Wie man schon in den Abben 3.4 und 3.5 sehen konnte, gibt es oftmals Zweifelsfälle, ob ein Punkt zum Attraktor gehört oder nicht, wenn der Attraktor nach der üblichen Anzahl an Iterationen (in der Größenordnung 10^6) diesem Punkt noch nicht sehr nahe kommt.

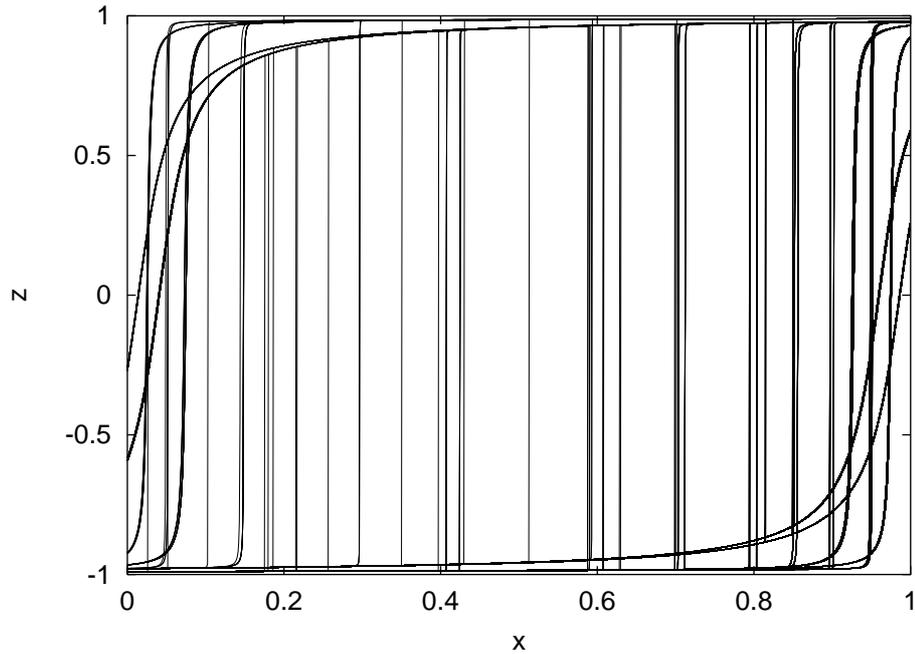


Abbildung 3.17: Zehnte Iteration der Kurve K_0 für $\gamma = 20$ (2^{10} Kurvenstücke)

mit der periodisch wiederholten Indexsequenz 11010 vorwärts iteriert. Bei der Iteration einer beliebigen Ausgangskurve zur lokalen instabilen Mannigfaltigkeit eines liPP wird durch die Wahl der Indexsequenz diejenige der 2^p Bildkurven ausgewählt, deren Urbild die x -Koordinate des PP enthält und bei denen die Modulo-Operation in denselben Iterationen wie beim PP jeweils 1 abzieht oder nicht.

Die invariante Dichte des Attraktors wird im Grenzwert großer n ebenfalls korrekt wiedergegeben, denn das System ist offensichtlich ergodisch; jeder der Punkte auf der Ausgangskurve besucht die Phasenraumregionen entsprechend der invarianten Dichte des Attraktors.

3.4.2 Dimensionsabschätzung des Attraktors mit Hilfe der Kurvenapproximation

Eine numerische Dimensionsanalyse liefert für kleine γ die Kapazitätsdimension 2.0, was auch mit unserer Intuition beim Betrachten der Abb. 3.4 übereinstimmt. Für mittlere γ werden zum Erreichen eines Skalierungsbereiches so viele Punkte benötigt, daß die Grenze der zur Verfügung stehenden Rechen- und Speicherkapazität erreicht wird.

Im folgenden soll argumentiert werden, daß der Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts selbst für so große Parameter wie $\gamma = 20$ die Dimension $D_0 = 2.0$ hat. Bereits in 3.2 (Abb.en 3.4 und 3.5) konnte man sehen, daß für $\gamma > 2.5$ die flächenfüllende Eigenschaft des Attraktors nur bei Betrachtung extrem vieler Attraktorpunkte zu Tage trat. Jetzt soll der Teil des Attraktors, der in der Abb. 3.5 noch am wenigsten gefüllt ist, genauer un-

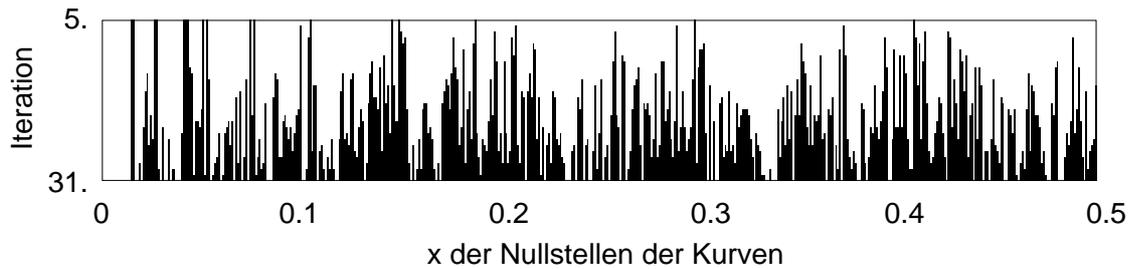


Abbildung 3.18: gefüllte Bins bei 5 bis 31 Iterationen von K_0 ($\gamma = 20$)

tersucht werden. Der Attraktor ist genau dann flächenfüllend und hat die Dimension $D_0 = 2.0$, wenn ein Schnitt des Attraktors bei $z = 0$ die Dimension 1 hat, also ein Teil der Linie dicht gefüllt ist. Hier sind die den Attraktor beschreibenden Kurven sehr vorteilhaft. Wenn jede Kurve in x -Richtung uniformes Maß trägt, dann tragen die steilsten Stellen vergleichsweise wenig zum invarianten Maß bei. Mit der oben beschriebenen Methode kann ungeachtet dessen der Schnittpunkt jeder dieser Kurven mit der x -Achse durch Einschachteln beliebig genau bestimmt werden. Damit ist es möglich, die Dimension eines Schnittes durch den Attraktor an einer Stelle zu bestimmen, wo das invariante Maß gerade besonders „dünn“ ist. Dazu wurde die folgende numerische Berechnung angestellt. Die x -Achse wird in 1024 gleich lange Abschnitte (Boxen) unterteilt. Dann werden der Reihe nach Bildkurven von K_0 erzeugt und bestimmt, in welchem Abschnitt sie die x -Achse schneiden. In der Abb. 3.18 bedeutet jede Zeile einen Iterationsschritt bei der Erzeugung von Bildkurven von K_0 . Falls in diesem Abschnitt mindestens ein Eintrag vorhanden ist, wird das Pixel schwarz dargestellt. Da das Problem symmetrisch ist, sind nur die 512 linken Abschnitte ($x < 0.5$) dargestellt. Da jede Kurve in der Bildmenge der folgenden Iteration wieder enthalten ist, ist auch ein Pixel unter einem schwarzen Pixel notwendigerweise wieder schwarz. Für diese Abbildung wurden $2^{31} = 2.1 \cdot 10^9$ Schnittpunkte eingeschachtelt. Bei Iteration von Punkten hätte man jeweils viele Punkte auf $2 \cdot 10^9$ Kurven in x -Richtung gleichverteilt erhalten. Bedingt durch die großen Anstiege der Kurven (bis Größenordnung γ^{31}) entspricht das je Kurve bis zu $2^{10} \times \gamma^{31} \approx 2 \cdot 10^{43}$ Punkten, wenn die Kurve auch an ihrem steilsten Abschnitt einen Punkt pro $\Delta z = \frac{1}{1024}$ haben soll. Von ihnen müßte man auf Grund der Symmetrie genau die Hälfte ausrechnen. Das bedeutet, um dieselbe Dimension zu sehen, wären bis zu ca. 10^{52} Iterationen nötig (abhängig von der tatsächlichen Größe des maximalen Anstieges; diese wurde nicht ermittelt). Für $\gamma = 20$ waren durch die 2^{31} Kurven

- bei einer Auflösung $\Delta x = 2^{-8}$ 125 von 125 Boxen
- bei einer Auflösung $\Delta x = 2^{-9}$ 241 von 250 Boxen
- bei einer Auflösung $\Delta x = 2^{-10}$ 423 von 499 Boxen (siehe Abb. 3.18)

im Attraktorbereich gefüllt. Das Ergebnis unterstützt die Vermutung, daß die Schnittpunkte auch für große γ auf dem zum Attraktor gehörenden Teil der x -Achse dicht liegen, d. h. daß der Attraktor flächenfüllend ist und daß seine Kapazitätsdimension $D_0 = 2$ ist.

3.4.3 Rückwärtsiteration von Linien im erweiterten Bernoulli-Shift

Wir wollen jetzt analog zu unserer Vorgehensweise im Abschnitt 3.4.1 eine Kurve rückwärts iterieren. Ebenso wie die Methode der Vorwärtsiteration ganzer Kurven es erlaubt, die instabile x -Richtung unter Kontrolle zu halten und daher die Menge der *einfach* instabilen PP bei Vorwärtsiteration von Kurven *stabil* ist, wird bei Rückwärtsiteration von Kurven das Problem, daß jeder Punkt zwei Urbilder hat, umgangen. Unter dieser Operation ist die Menge der *doppelt* instabilen PP *stabil*. Wie man die Menge der 2iPP durch Rückwärtsiteration von Kurven erhalten kann, wird in diesem und dem nächsten Abschnitt erläutert und begründet.

Bei der Rückwärtsiteration einer Kurve wie oben ergeben sich zwei Kurvenstücke, eins mit $0 \leq x < 0.5$ und eins mit $0.5 \leq x < 1$:

$$\begin{aligned} & f^{-1}(\{(x_n, z_n) : 0 \leq x_n < 1\}) \\ &= \left\{ \left(x_{n-1} = \frac{x_n}{2}, \quad z_{n-1} = \frac{2}{\gamma\pi} \tan \frac{\pi}{2} z_n - 2(x_n - x_{n-1}) \right) : 0 \leq x_n < 1 \right\} \\ & \cup \left\{ \left(x_{n-1} = \frac{x_n + 1}{2}, \quad z_{n-1} = \frac{2}{\gamma\pi} \tan \frac{\pi}{2} z_n - 2(x_n - x_{n-1}) \right) : 0 \leq x_n < 1 \right\} \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left(x_{n-1}, \quad \frac{2}{\gamma\pi} \tan \frac{\pi}{2} z_n - x_n \right) : 0 \leq x_n < 1 \right\} \\ & \cup \left\{ \left(x_{n-1}, \quad \frac{2}{\gamma\pi} \tan \frac{\pi}{2} z_n - x_n + 1 \right) : 0 \leq x_n < 1 \right\} \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$= f_0^{-1}(\{(x_n, z_n) : 0 \leq x_n < 1\}) \cup f_1^{-1}(\{(x_n, z_n) : 0 \leq x_n < 1\}) \quad (3.22)$$

Auch die rückwärts iterierte Kurve hat also selbst bei Berücksichtigung aller Urbilder nie mehrere z -Werte zum selben x . Daher ist in jedem Iterationsschritt eine kompakte Schreibweise (3.23) möglich, die jedem x_{n-1} ein z_{n-1} zuordnet, mit Ausnahme der Punkte, die durch die Rückwärtsiteration aus dem Phasenraum heraus abgebildet werden.

$$z_{n-1} = \frac{2}{\gamma\pi} \tan \frac{\pi}{2} z_n - 2(2x_{n-1} \bmod 1 - x_{n-1}) \quad (3.23)$$

$$z_{n-2} = \frac{2}{\gamma\pi} \tan \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{\gamma\pi} \tan \frac{\pi}{2} z_n - 2(4x_{n-2} \bmod 1 - 2x_{n-2} \bmod 1) \right] \quad (3.24)$$

$$-2(2x_{n-2} \bmod 1 - x_{n-2})$$

usw.

Hier ist mit Tangens eigentlich die Umkehrfunktion des Arcustangens gemeint, d. h. der Tangens eingeschränkt auf das offene Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, wodurch Punkten mit $|z| \geq 1$ kein Urbild zugeordnet wird.

In Abb. 3.19 sind für den Parameter $\gamma = 5$ 16 horizontale Linien mit verschiedenen z_0 bis zu 18-mal rückwärts iteriert. Dadurch erhält man einen Eindruck davon, wie sich der gesamte Phasenraum $[0, 1] \times [-1, 1]$ unter Rückwärtsiteration verhält. Da wir auf eine invariante Menge abzielen, wurden nur Punkte (x, z) innerhalb der Attraktorfläche lt.

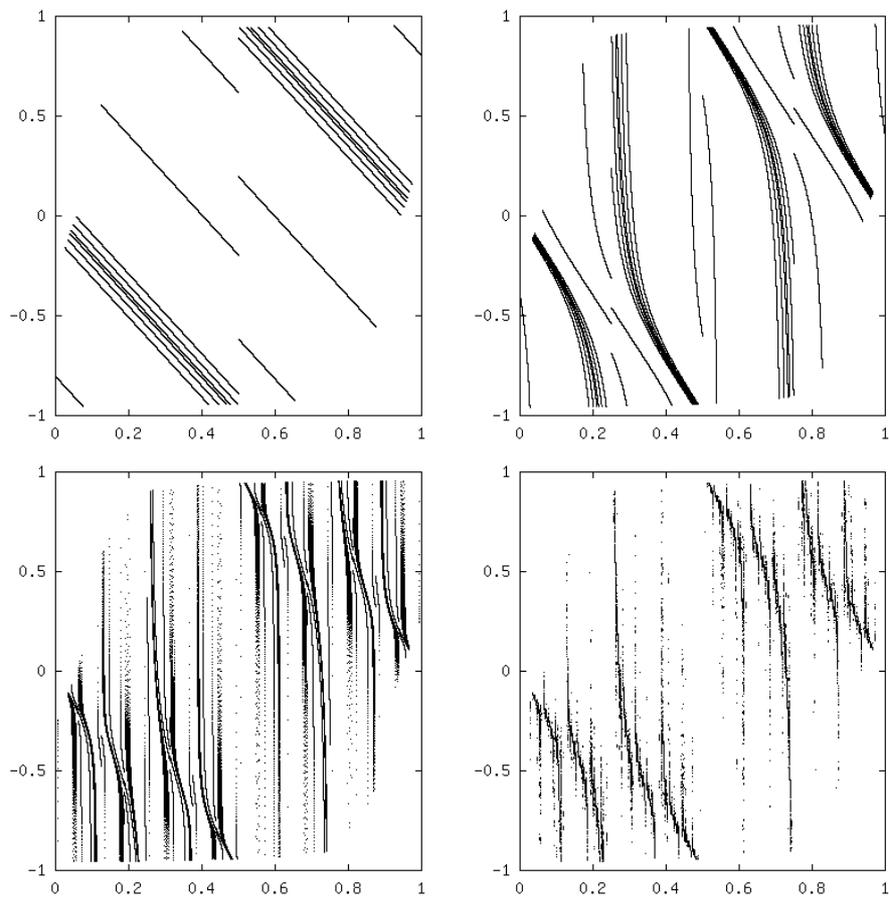


Abbildung 3.19: 1., 2., 4. und 18. Urbildgeneration von 16 verschiedenen horizontalen Linien stellvertretend für den gesamten Phasenraum $[0, 1] \times [-1, 1]$ (Bernoulli, $\gamma = 5$)

(3.6) dargestellt ($z_R^-(x) \leq z \leq z_R^+(x)$), denn nur diese Punkte haben für beliebig viele Iterationen Urbilder in $[0, 1] \times [-1, 1]$. Es wurden jeweils 100 000 Punkte berechnet und dargestellt. Bei den Urbildern der 18-ten Generation ist bereits eine recht gute Konvergenz erreicht, die Darstellung für längere Rückwärtsiteration würde sich von dem Bild unten rechts in Abb. 3.19 kaum unterscheiden. Ein Vergleich mit der Darstellung der doppelt instabilen PP (Abb. 3.13, mittleres Bild) für denselben Parameter zeigt eine starke Ähnlichkeit der beiden Punktmengen. Die Ähnlichkeit ist noch auffallender, zeichnet man für beide Fälle ungefähr gleich viele Punkte (Abb. 3.20). Die Verwendung nur *einer* horizontalen Ausgangslinie ($z = 0$) beeinflusst das Bild offenbar kaum.

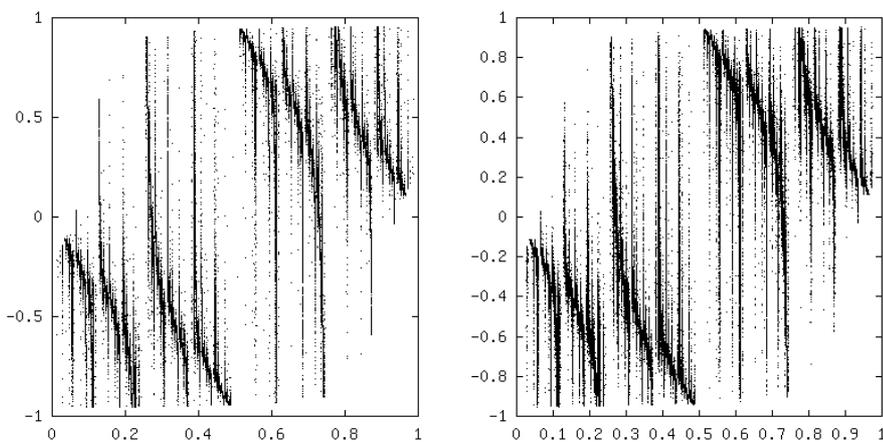


Abbildung 3.20: Vergleich der Menge $G_{Attr}^{(18)}$ (18. Urbildgeneration der Linie $z = 0$, $2.5 \cdot 10^6$ Punkte, links) und der Menge der doppelt instabilen PP (bis Periode 23; 2188723 Punkte, rechts) (Bernoulli, $\gamma = 5$).

Im Abschnitt 3.4.4 werden wir weitere Argumente liefern, warum die dargestellte Menge geeignet ist, die Menge der 2iPP zu beschreiben.

Es sei $g^{(n)}(x)$ die n -te Iteration von (3.23) bzw. (3.24), ein Ausdruck von n verschachtelten Tangensfunktionen (bei Wahl von $z_0 = 0$ als Ausgangslinie¹⁰). Die Funktion $g^{(n)}(\cdot)$ ordnet einem x_{-n} ein z_{-n} zu, so daß das n -te Bild von $(x, g^{(n)}(x))$ die z -Koordinate $z_0 = 0$ besitzt, falls $g^{(n)}(x)$ erklärt ist. Diese Funktionen werden im Abschnitt 3.4.5 dazu

¹⁰Für dieses z_0 werden die meisten (im Sinne von mehr als für andere z_0) Urbilder gefunden.

benutzt werden, um die Kapazitätsdimension der Menge der 2iPP abzuschätzen.

$$g^{(0)}(x) = 0 \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned} g^{(1)}(x) &= 2x - 2(2x \bmod 1) \\ &= \begin{cases} -2x & x < 0.5 \\ 2 - 2x & x \geq 0.5 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25b)$$

$$h^{(n+1)}(x) = \frac{2}{\gamma\pi} \tan \frac{\pi}{2} g^{(n)}(2x \bmod 1) + g^{(1)}(x) \quad (3.25c)$$

$$g^{(n+1)}(x) = \begin{cases} h^{(n+1)}(x) & -1 < h^{(n+1)}(x) < 1 \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.25d)$$

$$g^{(\infty)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{(n)}(x) \quad (3.25e)$$

Die dazugehörigen Punktmengen (für uns sind nur die Punkte mit rationalen x interessant) sind

$$G^{(n)} = \{(x, g^{(n)}(x)) : 0 \leq x < 1, x \in \mathbb{Q}, g^{(n)}(x) \text{ definiert}\} \quad (3.26a)$$

$$G^{(\infty)} = \{(x, g^{(\infty)}(x)) : 0 \leq x < 1, x \in \mathbb{Q}, g^{(\infty)}(x) \text{ definiert}\}. \quad (3.26b)$$

Von besonderem Interesse sind die Teilmengen der $G^{(n)}$ sowie von $G^{(\infty)}$ auf der Attraktorfläche:

$$G_{Attr}^{(n)} = \{(x, g^{(n)}(x)) : 0 \leq x < 1, x \in \mathbb{Q}, z_R^-(x) \leq g^{(n)}(x) \leq z_R^+(x)\} \quad (3.27a)$$

$$G_{Attr}^{(\infty)} = \{(x, g^{(\infty)}(x)) : 0 \leq x < 1, x \in \mathbb{Q}, z_R^-(x) \leq g^{(\infty)}(x) \leq z_R^+(x)\}. \quad (3.27b)$$

In der Abb. 3.20 ist also $G_{Attr}^{(18)}$ dargestellt.

3.4.4 Approximation der Menge der doppelt instabilen PP durch Rückwärtsiteration von Kurven

Wir betrachten nun das Problem der Rückwärtsiteration der Punkte einer *vertikalen* Linie, indem wir aber jetzt bei jeder Iteration genau eines der beiden Urbilder jedes Punktes auswählen. Dann erhält man wiederum Punkte gleicher x -Koordinate.

Welches x man erhält, hängt genau davon ab, in welcher Reihenfolge man mit f_0^{-1} bzw. f_1^{-1} iteriert. Schreibt man diese Nullen und Einsen von rechts nach links auf, erhält man den Anfang der Mantisse der binären Darstellung der aus dieser Iteration resultierenden x -Koordinate. Die nachfolgenden Stellen dieser Mantisse sind gerade die Mantisse des binär geschriebenen Ausgangs- x . Verfolgt man diese Rückwärtsiteration hinreichend lange, kann man, unabhängig vom Ausgangs- x zu jeder beliebigen x -Koordinate gelangen. Die x -Koordinaten periodischer Punkte erreicht man also durch Wahl der entsprechenden periodischen Abfolge von f_0^{-1} und f_1^{-1} . Das Ausgangs- x hat im Grenzwert unendlich vieler Iterationen keine Bedeutung mehr. Umgekehrt wird mit der Vorgabe von x_{-n} , so wie bei der Benutzung der Funktionen $g^{(n)}(x)$, die Abfolge von f_0^{-1} und f_1^{-1} festgelegt.

Für periodische Punkte müßte also $g^{(\infty)}(x)$ an rationalen x mit ungeraden Nennern¹¹ evaluiert werden.

Benutzt man eine solche periodische Abfolge von f_0^{-1} und f_1^{-1} , so entspricht das genau der bisherigen Methode zum numerischen Auffinden der doppelt instabilen Periodenpunkte (Abschnitt 3.1, S. 27) durch Rückwärtsiteration der z -Dynamik auf dem PO des Bernoulli-Shifts. Um einen 2iPP zu finden, falls er existiert, müßte das Anfangs- z zwischen den beiden z -Koordinaten der dann notwendigerweise existierenden 1iPP zum selben x gewählt werden. Bei Rückwärtsiteration vieler Punkte mit demselben x werden alle Punkte zwischen den beiden 1iPP für $n \rightarrow \infty$ gegen den 2iPP konvergieren, alle anderen Punkte (mit zu großem oder zu kleinem z) werden nach endlich vielen Iterationen aus dem Phasenraum heraus abgebildet; das entspricht für $z_0 = 0$ dem Fall $\exists k : \nexists g^{(n)}(x) \forall n \geq k$, woraus $\nexists g^{(\infty)}(x)$ folgt. $G^{(\infty)}$ kann daher nur eine Teilmenge der 2iPP enthalten, wir werden aber zeigen, daß diese Teilmenge in der Menge der 2iPP dicht liegt. Wir konnten in unseren theoretischen Betrachtungen nicht ausschließen, daß es zu einem PO des Bernoulli-Shifts mehr als einen 2iPP (und damit auch mehr als zwei 1iPP) der gesamten Abbildung geben könnte. Die Rückwärtsiteration für das vierte Bild in der Abb. 3.19 dient als zusätzlicher Test für unsere diesbezügliche Annahme. Es wurde für 1000 Werte von x_{-18} untersucht, welche z_{-18} für das gleiche x_{-18} für die 16 unterschiedlichen z_0 man erhält. Das Ergebnis ist, daß z_{-18} in allen Fällen nur einen einzigen Wert annahm (oder aber gar keinen; das bedeutet, daß es wahrscheinlich keinen 2iPP für dieses x_{-18} gibt), der jedoch meistens nicht mit allen 16 z_0 -Werten gefunden wurde. Das bedeutet einerseits, daß 18 Iterationen in den meisten Fällen schon ausreichten, um z_{-18} mit 5 Stellen Genauigkeit zu berechnen. Zweitens ist es eine Verifikation unserer Annahme, daß es für jeden PP x_p des Bernoulli-Shifts nur entweder keinen oder einen 2iPP der gesamten Abbildung gibt, da man im gegenteiligen Fall erwarten würde, daß wenigstens für einige Fälle auch mehrere verschiedene z_{-18} gefunden würden.

$G^{(\infty)}$ wurde zweckmäßigerweise so definiert, daß es nur Punkte mit rationalen x enthält. Dennoch sind nicht alle diese Punkte periodische Punkte. $G^{(\infty)}$ enthält außer periodischen Punkten auch deren Urbilder, d. h. Punkte mit rationalen x -Koordinaten mit geraden Nennern, soweit sie in $[0, 1] \times [-1, 1]$ liegen. Außerhalb der Attraktorfläche liegen mit Ausnahme des 2iFP bei $(0, 0)$ keine 2iPP. Alle Punkte aus $G^{(\infty)}$ außerhalb der Attraktorfläche müssen gerade Nenner haben. Wir betrachten also die Schnittmenge von $G^{(\infty)}$ mit der Attraktorfläche, $G_{Attr}^{(\infty)}$.

Jeder Urbildpunkt eines 2iPP auf der Attraktorfläche, d. h. jeder Punkt $p_G \in G_{Attr}^{(\infty)}$, ist ein Häufungspunkt der Menge der 2iPP, d. h. \exists eine Folge doppelt instabiler PP (von möglicherweise extrem langer Periode), die gegen p_G konvergiert. Diese Behauptung beruht auf der im Abschnitt 3.1 gemachten Beobachtung, daß periodische Punkte, die ja im Attraktor dicht liegen, zwangsläufig doppelt instabil sind, wenn sie nur genügend nahe an einem 2iPP kürzerer Periode liegen (dieser Orbit sei hier **Wirt** genannt). Je näher sie liegen, desto länger folgen sie dem Wirt und akkumulieren Instabilität, bevor sie ihn für einige Schritte verlassen, um schließlich über das andere, nicht auf dem Wirtsorbit

¹¹bei Darstellung als gemeiner Bruch

liegende Urbild des ursprünglichen Wirtspunktes, zu diesem zurückzukehren.

3.4.5 Dimensionsabschätzung der Menge der doppelt instabilen PP

Wir benutzen nun die gewonnenen Erkenntnisse über die $g^{(0)}$, $G^{(0)}$ und $G_{Attr}^{(0)}$, um eine Aussage über das Aussehen und insbesondere über die Kapazitätsdimension der Menge der 2iPP zu machen. Noch überraschender als für den Fall des Attraktors erhalten wir auch hier zumindest starke Indizien für $D_0(\{2iPP\}) = 2.0$, d. h. daß die doppelt instabilen PP in einem Teil des Phasenraumes dicht liegen. Dieser Teil ist genau die im Abschnitt 3.1 definierte Attraktorfläche. Außerhalb dieser Fläche gibt es offenbar genau einen 1iPP, nämlich den einfach instabilen Fixpunkt $(0, +|z_F|)$ ¹². Wie bereits weiter oben festgestellt wurde, liegt jeder doppelt instabile PP (in z -Richtung) zwischen zwei einfach instabilen PP mit identischer x -Koordinate. Daher kommen also für die doppelt instabilen PP nur zwei Klassen von Punkten in Frage:

- der doppelt instabile Fixpunkt $(0, 0)$
- Punkte der Attraktorfläche, d. h. zwischen dem unteren und dem oberen Rand des Attraktors, beschrieben durch die stetigen Funktionen $z_R^-(x)$ und $z_R^+(x)$.

Wir zeigen, daß sich die Zahl der Kurvenstücke mit jedem Iterationsschritt n verdoppelt und daß die Kurvenstücke im $\lim_{n \rightarrow \infty}$ dicht im Phasenraum $[0, 1] \times [-1, 1]$ liegen.

Der Beweis erfolgt durch iterative Konstruktion von $g^{(n)}(x)$.

Der Graph von $g^{(1)}(x)$, also $\{(x_{-1}, z_{-1})\} = G^{(1)}$, enthält 2 stetige, monoton fallende Abschnitte (Kurvenstücke) mit den Endpunkten:

- $(0, 0)$ und $(0.5, -1)$
- $(0.5, 1)$ und $(1, 0)$

Die Endpunkte werden entsprechend (3.25d) hierbei und im folgenden nicht als Teil der Kurvenstücke betrachtet, da Punkte mit $z_{-n} = \pm 1$ nicht rückwärts iteriert werden können. Im restlichen Teil der x -Achse, das ist für $n = 1$ nur der Punkt $x = 0.5$, ist $g^{(1)}(x)$ nicht definiert.

Der Graph von $g^{(2)}(x)$, also $\{(x_{-2}, z_{-2})\} = G^{(2)}$, enthält 4 stetige, monoton fallende Abschnitte (Kurvenstücke) mit den Endpunkten:

- $(0, 0)$ und $(x_{2A}, -1)$
- $(x_{2B}, 1)$ und $(0.5, -1)$
- $(0.5, 1)$ und $(1 - x_{2B}, -1)$
- $(1 - x_{2A}, 1)$ und $(1, 0)$

¹²Anstelle von $(0, +|z_F|)$ ist $(1, +|z_F|)$ ein Häufungspunkt des Attraktors, liegt aber auf Grund der Modulo-Operation nicht im Phasenraum.

In den übrigen Bereichen der x -Achse (nunmehr in $[x_{2A}, x_{2B}] \cup \{0.5\} \cup [1 - x_{2B}, 1 - x_{2A}]$) ist $g^{(2)}(x)$ wiederum nicht definiert.

Um $G^{(3)}$ sowie höhere Iterationen zu konstruieren, betrachten wir die Urbilder dieser Kurven entsprechend (3.25). Jedes Kurvenstück hat 2 Urbilder, je eines für $x_{-n-1} < 0.5$ und eines für $x_{-n-1} > 0.5$. Die Kurvenstücke werden in x -Richtung gestaucht und in z -Richtung gestreckt. Im Einzelnen ergibt sich für die Urbilder der Kurvenstücke von $g^{(2)}(x)$ und sinngemäß für weitere Iterationen folgendes:

- $(0, 0)$ wird auf $(0, 0)$ sowie $(0.5, 1)$ abgebildet.
- $(1, 0)$ wird auf $(0.5, -1)$ sowie $(1, 0)$ abgebildet. Diese 4 Kurvenendpunkte werden also in jeder Iterationsstufe reproduziert.
- Alle Punkte mit $z = +1$ bzw. $z = -1$ hätten beide Urbilder bei $z = +\infty$ bzw. $z = -\infty$. Die Kurvenstücke zwischen ihnen sind wiederum alle stetig und monoton fallend, da die beiden Ausgangskurven ($g^{(1)}(x)$) jeweils stetig und monoton fallend sind und da der Tangens als stetige, monoton wachsende Funktion im offenen Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stetige und monoton fallende Kurvenstücke wiederum auf solche abbildet. Um hieraus $g^{(n+1)}(x)$ zu erhalten, erklären wir alle Punkte mit $z \leq -1$ oder $z \geq +1$ für undefiniert. Übrig bleiben stetige, monoton fallende Kurvenstücke, die mit Ausnahme des ersten und des letzten jeweils einen Punkt mit $z = +1$ mit einem Punkt mit $z = -1$ verbinden, sowie Intervalle, in denen $g^{(n+1)}(x)$ nicht definiert ist.
- Für jedes n findet sich immer genau ein Urbild-Kurvenstück in jedem Intervall $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ ($0 \leq m < 2^n$). Diese Eigenschaft ist für $g^{(1)}(x)$ trivialerweise erfüllt und vererbt sich für $n > 1$. Jedes Kurvenstück in $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ hat 2 Urbild-Kurvenstücke, eines in $f_0^{-1}([\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]) = [\frac{m}{2^{n+1}}, \frac{m+1}{2^{n+1}}]$ und eines in $f_1^{-1}([\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]) = [\frac{m+2^n}{2^{n+1}}, \frac{m+2^n+1}{2^{n+1}}]$.

Um die Kapazitätsdimension der Menge $G^{(\infty)}$ zu bestimmen, überziehen wir den Phasenraum mit einem Gitter der Gitterkonstanten 2^{-k} , so daß die vertikalen Gitterlinien x -Koordinaten $x_m = \frac{m}{2^k}$, $0 \leq m \leq 2^k$ haben. Entsprechend der Konstruktion der Funktionen $g^{(n)}(x)$ geht durch jedes Rechteck $[x_m, x_{m+1}] \times [z_i, z_{i+1}] \subset [0, 1] \times [-1, 1]$ mindestens ein Kurvenstück von $g^{(n)}(x)$ für alle $n \geq k + 1$ ¹³. Da auf jedem Abschnitt jedes Kurvenstücks unendlich viele Punkte mit rationalen x liegen, enthält auch jedes der Rechtecke unendlich viele Punkte aus $G^{(n)}$. Falls nicht nur für jedes $G^{(n)}$ mit endlichem $n \geq k + 1$, sondern auch für $G^{(\infty)}$ immer noch mindestens ein Punkt in jedem dieser Rechtecke liegt, folgt daraus, daß $G^{(\infty)}$ im Phasenraum bzw. $G_{Attr}^{(\infty)}$ auf der Attraktorfläche dicht liegt und die Kapazitätsdimension 2.0 hat. Da nach unserer Argumentation im Abschnitt 3.4.3 alle Punkte aus $G_{Attr}^{(\infty)}$ Häufungspunkte der Menge der 2iPP sind, ist für deren Kapazitätsdimension 2.0 eine untere Schranke. Da die Phasenraumdimension eine

¹³Für $n = k$ geht durch jedes dieser Rechtecke – mit Ausnahme derjenigen mit $m = 0$, $z > 0$ sowie derjenigen mit $m = 2^{k-1}$, $z < 0$ – genau ein Kurvenstück von $g^{(n)}(x)$.

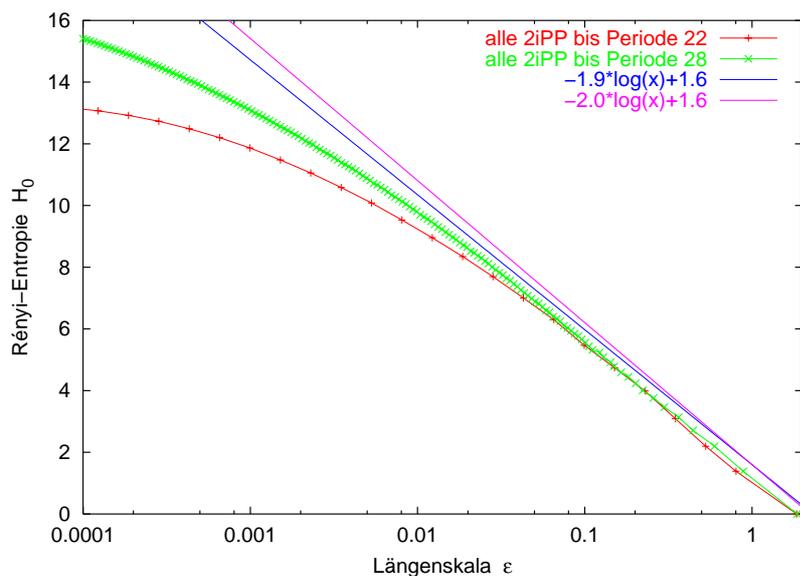


Abbildung 3.21: Die Kapazitätsdimension D_0 der Menge der doppelt instabilen Punkte des erweiterten Bernoulli-Shifts beim Parameter $\gamma = 3.3$. D_0 ist mit Werten von 1.9 bis 2.0 kompatibel.

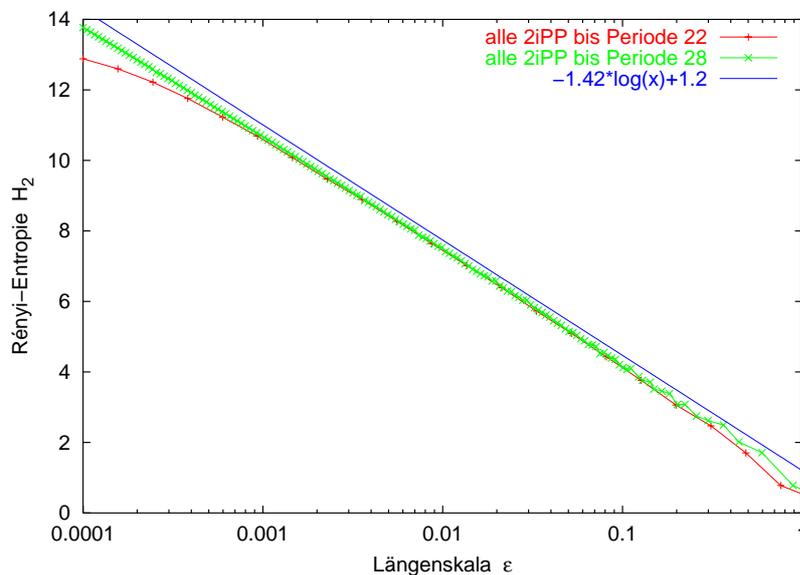


Abbildung 3.22: Die Korrelationsdimension (nach dem Boxcounting-Algorithmus) der Menge der doppelt instabilen Punkte des erweiterten Bernoulli-Shifts beim Parameter $\gamma = 3.3$: $D_2 = 1.4$

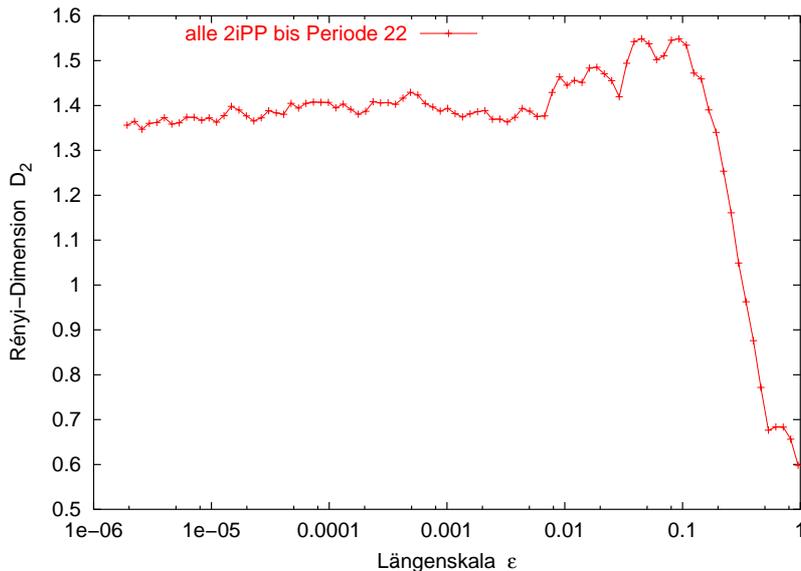


Abbildung 3.23: Die Korrelationsdimension (nach dem Korrelationssummenalgorithmus[10]) der Menge der 2iPP des erweiterten Bernoulli-Shifts beim Parameter $\gamma = 3.3$: $D_2 = 1.4$

obere Schranke für die Kapazitätsdimension jeder seiner Teilmengen ist, ist die Kapazität der Menge der 2iPP ebenfalls gleich

$$D_0(\{2iPP\}) = D(\text{Phasenraum}) = 2.0 \quad (3.28)$$

Dieses Ergebnis ist besonders überraschend, scheint doch beispielsweise eine endliche Umgebung von $x = \frac{1}{4}$ keine doppelt instabilen PP zu enthalten¹⁴. Auch bei der expliziten Berechnung aller doppelt instabilen PP bis zur Periode 20 wurden für $\gamma = 3.3$ in $[0.243338, 0.256570]$ keine doppelt instabilen PP gefunden. Sucht man jedoch genauer mit Hilfe von $g^{(n)}(x)$ (3.25), so findet man tatsächlich in jedem Intervall $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ ein solches Kurvenstück, jedoch sind die Anstiege sehr groß, und so muß man das Zeichenprogramm (z. B. gnuplot) extrem viele Stützstellen ausrechnen lassen, um diesen Effekt zu sehen. Die doppelt instabilen PP existieren auch in diesen Intervallen, aber nur bei größeren Periodenlängen als 20.

In den Abb.en 3.21 bis 3.23 sind numerische Berechnungen der Kapazitäts- und der Korrelationsdimension für $\gamma = 3.3$ dargestellt. Hierbei sind 2iPP bis zur Periode 26 (6364835 Punkte) berücksichtigt. Die Kapazitätsdimension (zwischen 1.9 und 2.0) widerspricht nicht dem theoretisch vorhergesagten Wert von 2.0. Wenn γ klein ist, d. h. nur wenig größer als der Bifurkationsparameter $\gamma_2 = 1.441$, dann haben die 2iPP in den nur einfach instabilen Regionen des Phasenraumes extrem große Periodenlängen. Die Korrelationsdimension D_2 ist deutlich kleiner als die Kapazitätsdimension. Hieran zeigt sich der

¹⁴Zwar liegen Punkte x , für die $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x)$ existiert, auch in diesem Intervall dicht, jedoch tragen sie einen so geringen Anteil am Maß auf den rationalen Zahlen in diesem Intervall, daß mit allergrößter Wahrscheinlichkeit keiner der Punkte, an denen $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x)$ zum Zwecke der Darstellung ausgerechnet wird, dabei ist.

multifraktale Charakter des invarianten Maßes des erweiterten Bernoulli-Shifts (das Maß ist „stark gepeakt“). Ein Vergleich der Abb.en 3.22 und 3.23 verdeutlicht, daß sich die Effekte der endlichen Punktzahl beim Boxcounting besonders stark bemerkbar machen, so auch für die Kapazitätsdimension D_0 (Abb. 3.21).

Wir haben im vorangehenden Teil dieses Kapitels theoretische und numerische Argumente dafür geliefert, daß der Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts für die betrachteten Parameterbereiche in einem Teilbereich des Phasenraumes dicht liegt und daß darüber hinaus auch doppelt instabile Periodenpunkte der Abbildung in demselben Teilbereich dicht liegen. Die einfach instabilen Periodenpunkte zeigen nicht nur hervorragende numerische Evidenz dafür, daß sie im Attraktor liegen, sondern es konnten auch keine wesentlichen Unterschiede beider Verteilungen festgestellt werden. Diese Ergebnisse führen uns zu der Schlußfolgerung, daß beim erweiterten Bernoulli-Shift Dimensionsvariabilität der instabilen Mannigfaltigkeit vorliegt.

3.5 Die erweiterte Cat map

Die erweiterte Cat map (Gleichungen (3.1b), (3.2) und (3.3b)) hat gegenüber dem erweiterten Bernoulli-Shift den Vorteil, invertierbar zu sein, und damit besitzen ihre Periodenpunkte wohldefinierte stabile und instabile Mannigfaltigkeiten, die auch alle Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten haben, insbesondere sich nicht schneiden. Der Nachteil ist, daß sie als drei-dimensionale Abbildung aufwendiger zu untersuchen ist als zweidimensionale Abbildungen. Insbesondere ihren Attraktor bildlich darzustellen und ihn sich vorzustellen ist deutlich schwieriger als im zweidimensionalen Fall.

Die Cat map selbst ist ein System auf einem zweidimensionalen Torus (d. h. mit zwei Raumrichtungen, in denen die Koordinate nur modulo einem bestimmten Wert definiert ist, hier geschrieben als das Einheitsquadrat). Sie ist chaotisch, ihr Attraktor ist das gesamte Einheitsquadrat. Ihre invariante Dichte ist die konstante Dichte auf dem Einheitsquadrat. Sie ist ein C^∞ -Diffeomorphismus. Sie hat eine stabile und eine instabile Richtung, die beide konstant sind und senkrecht aufeinanderstehen. Sie hat einen positiven und einen negativen Ljapunovexponenten, deren Summe null ist:

$$\lambda_{\pm} = \mp \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (3.29)$$

Sie ist flächentreu, d. h. sie bildet Flächen auf gleich große Flächen ab. Ihre periodischen Orbits sind analytisch berechenbar[6].

Einige Untersuchungen wurden für die erweiterte Cat map ebenso wie für den erweiterten Bernoulli-Shift angestellt.

Die Methode der Suche nach Nachbarn für die 1iPP und die 2iPP in der chaotischen Referenztrajektorie ergab ebenso wie beim erweiterten Bernoulli-Shift (Abb. 3.14) keine Anzeichen, daß eine der beiden Punktmengen nicht in den Attraktor eingebettet wäre, jedoch (wiederum wie beim Bernoulli) darauf, daß die Verteilung der Punkte im Raum

bei den 2iPP der Verteilung der Referenzpunkte sehr nahe kommt, während die 2iPP vor allem dort liegen, wo das invariante Maß des Attraktors sehr dünn ist.

Ebenfalls dasselbe Ergebnis wie beim erweiterten Bernoulli-Shift war bei der Untersuchung der punktweisen Dimension zu finden. Demnach sind die untersuchten 2iPP in den Attraktor eingebettet, es wurden keine Anzeichen darauf gefunden, daß ein bestimmter Mindestabstand nicht unterschritten würde. Die ermittelte punktweise Dimension des Attraktors an diesen Punkten war mit beispielsweise $D_p = 3.4$ ebenfalls größer als die Phasenraumdimension $D = 3$.

Die Iteration von Linien und die Betrachtung der Schnittpunkte ihrer Bilder mit der Ebene $z = 0$ wurde versucht, war aber wesentlich schwieriger als beim Bernoulli-Shift (wegen der Notwendigkeit, bei jeder Überquerung einer der Linien $x = 1$ oder $y = 1$ neu anzusetzen).

Es ist deshalb davon auszugehen, daß die Cat map ebenfalls dimensionsvariabel ist. Diese Schlußfolgerung wird durch die beobachtete Nichtbeschattbarkeit bestätigt.

3.6 Die quasiperiodische Abbildung

Die treibende Abbildung in der quasiperiodischen Abbildung (im folgenden als **QA** abgekürzt) ist einer (diskreten) gleichförmigen Bewegung auf einer Kreislinie der Länge eins vergleichbar (Abb. 3.24). Der Parameter ω in (3.1c) ist die Winkelgeschwindigkeit der Bewegung. Durch die Symmetrie der Kreislinie ist jeder Punkt auf ihr äquivalent,

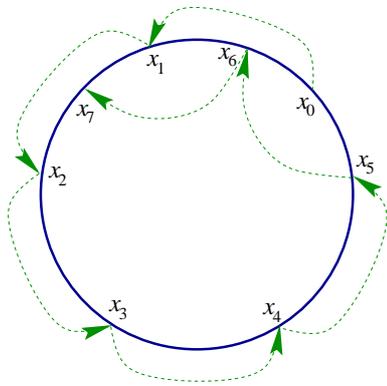


Abbildung 3.24: Quasiperiodische Bewegung auf einer Kreislinie. x ist hier eine Winkelvariable.

jeder Anfangspunkt muß daher den gleichen Bewegungstyp erzeugen. In der Simulation wurde $\omega = \sqrt{2} - 1$ verwendet. Die Bewegung ist nicht periodisch, falls ω eine Irrationalzahl ist. Sie ist dann quasiperiodisch. Die Bewegung ist ergodisch, der Orbit füllt die Kreislinie dicht. Der Ljapunovexponent ist gleich null, es gibt keine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Trotzdem ist die Bewegung nicht beschattbar. Eine Pseudotrajektorie mit zufälligem Einschrittfehler δ wird sich wie ein *random*

walker von jeder echten Trajektorie entfernen, der mittlere Abstand wächst wie \sqrt{N} (N ist die Trajektorienlänge). Da jeder Anfangspunkt den gleichen Bewegungstyp erzeugt, sind hier in die invariante Menge *keine* instabilen PO's eingebettet.

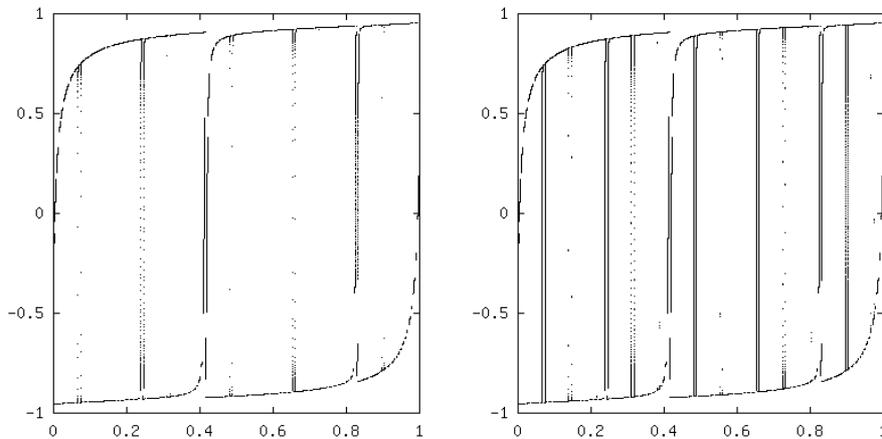


Abbildung 3.25: Attraktor der QA für den Parameter $\gamma = 5$ mit 10^5 Punkten (links) und mit 10^8 Punkten (rechts).

Diese Bewegung in die sigmoide Abbildung eingespeist ergibt eine interessante Dynamik. Die Bewegung besitzt offenbar einen global anziehenden Attraktor (Abb. 3.25). Dieser Attraktor ähnelt stark dem des erweiterten Bernoulli-Shifts. Sein invariantes Maß ist auf Linien lokalisiert, von denen einige stärker sind und einige schwächer (diese erscheinen erst nach längerer Iteration). Aus diesem Grund gehen wir davon aus, daß der Attraktor eine multifraktale Menge ist ($D_0 > D_1$). Wir gehen davon aus, daß es sich um einen nichtchaotischen seltsamen Attraktor handelt. Zu diesen Attraktoren gab es in den letzten Jahren zahlreiche Arbeiten, u. a. von Grebogi et al.[8] sowie Pikovsky und Feudel[31].

Aufgrund der fehlenden eingebetteten PO's kann die quasiperiodische Abbildung auch nicht dimensionsvariabel sein. Die im folgenden Kapitel vorgestellten numerischen Ergebnisse weisen jedoch darauf hin, daß auch Pseudotrajektorien, bei denen nur in z -Richtung dynamisches Rauschen (also kleine Abweichungen bei jedem Schritt) eingekoppelt wird, hinsichtlich ihrer Beschattbarkeit dem Bernoulli-Shift sehr ähnlich sind. Obwohl es keine eingebetteten instabilen Orbits gibt, lassen sich Regionen von z -Stabilität und z -Instabilität im Phasenraum auffinden. Stabilität ist vor allem dort zu finden, wo der Attraktor eine hohe Punktdichte hat, Instabilität an solchen Punkten, die unter Rückwärtsiteration stabil sind.

Kapitel 4

Nichtbeschattbarkeit bei Dimensionsvariabilität

In diesem Kapitel werden die vorgestellten dynamischen Systeme auf ihre Beschattbarkeit hin untersucht. Dabei werden die Mechanismen der Beschattbarkeit in hyperbolischen Systemen sowie der Nichtbeschattbarkeit bei Vorliegen von Dimensionsvariabilität erläutert. Wir betrachten Systeme, für die eine stetige Zerlegung des Tangentialraumes in

- immer expandierende,
- immer kontrahierende und evtl.
- weder kontrahierende noch expandierende Richtungen sowie
- genau eine teils kontrahierende, teils expandierende Richtung

möglich ist, wobei jede einzelne der genannten Richtungen ein Eigenvektor der entlang des gesamten Orbits aufmultiplizierten Jacobimatrizen ist und damit unter der Tangentialraumabbildung invariant ist¹. Für alle Systeme, an denen bisher Dimensionsvariabilität untersucht wurde, ist eine solche Zerlegung möglich. Die teils kontrahierende, teils expandierende Richtung spielt dabei eine zentrale Rolle. In [7] wird behauptet, daß dimensionsvariable Systeme auf dramatische Weise nicht beschattbar sind. Um das (insbesondere für die Systeme aus Kapitel 3) zu überprüfen, werden in dieser Arbeit Ansätze anderer Autoren zur Quantifizierung der Nichtbeschattbarkeit infolge von Dimensionsvariabilität diskutiert und weiterentwickelt. Man beachte, daß zu diesen Systemen ausdrücklich auch solche wie die quasiperiodische Abbildung (3.1c) gehören, die keine periodischen Orbits besitzen und daher auch nicht dimensionsvariabel sein können.

Zunächst soll die Funktionsweise der Beschattbarkeit erläutert werden. Man stelle sich ein zeitdiskretes dynamisches System mit stabilen und instabilen Richtungen sowie eine

¹Wir ignorieren hierbei den Fall eines einzelnen periodischen Orbits, für den eine solche Zerlegung u. U. nicht existiert, weil die Eigenvektoren nicht den gesamten Tangentialraum aufspannen.

Pseudotrajektorie (siehe Abschnitt 2.2.1) der Länge N Schritte vor. Ist das System hyperbolisch, wird der stabile (instabile) Unterraum des Tangentialraumes jeweils auf den stabilen (instabilen) Unterraum des Tangentialraumes des Bildpunktes abgebildet. Wählt man als Kandidat (Test-Trajektorie) für eine Beschattungstrajektorie diejenige Trajektorie durch den ersten Punkt der Pseudotrajektorie, würden die Einschrittfehler in den stabilen Richtungen ausgedämpft und in den instabilen verstärkt. In den folgenden Abbildungen ist der jeweils ungünstigste Fall dargestellt, d. h. der Fehler ist in jedem Schritt gleich dem Maximalfehler und der neue Pseudotrajektorienpunkt weicht immer nach derselben Seite des Vorgänger-Bildpunktes ab. Die Einschrittfehler überlagern sich hier immer *konstruktiv*, können sich nie teilweise auslöschen. Der letzte Punkt der Pseudotrajektorie läge in den stabilen Richtungen ziemlich genau auf der Test-Trajektorie, während in der instabilen Richtung die beiden Punkte stark voneinander abweichen würden.

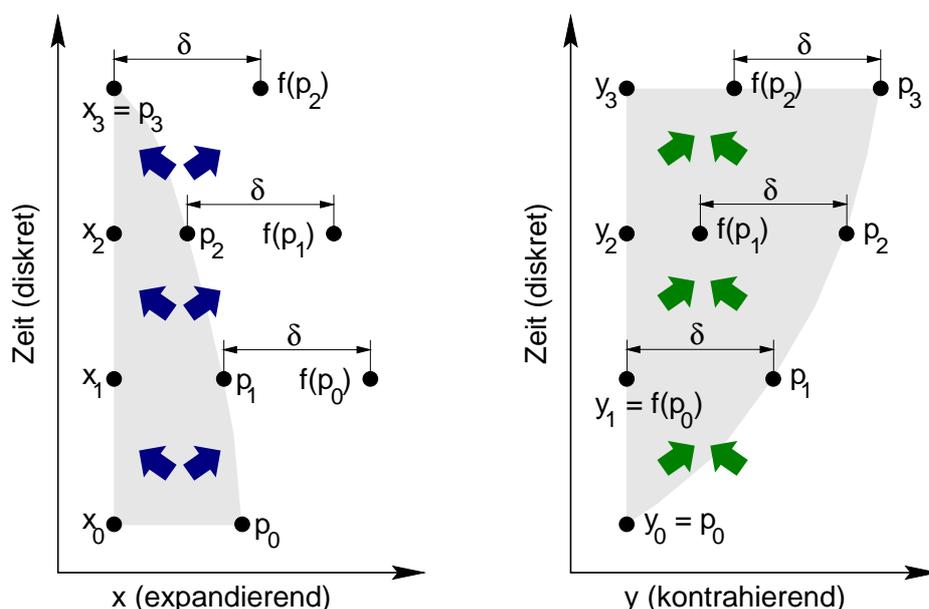


Abbildung 4.1: Der Mechanismus der Beschattbarkeit (schematisch) für kontrahierende (x) und expandierende (y) Richtungen.

Als x_i bzw. y_i sind die Punkte der beschattenden Trajektorie bezeichnet, als p_i die Punkte der Pseudotrajektorie. In der Abbildung ist der Abstand zweier Bildpunkte gerade doppelt (halb) so groß wie der der Urbildpunkte in einer expandierenden (kontrahierenden) Richtung. Die graue Fläche verdeutlicht das nur endliche Anwachsen des Beschattungsabstandes.

Jede Abweichung des Anfangspunktes der Test-Trajektorie in einer stabilen Richtung hat nur einen geringen Einfluß auf den letzten Punkt. Man muß also den Anfangspunkt in der instabilen Richtung so variieren, daß der Endpunkt in der instabilen Richtung genau auf der Pseudotrajektorie zu liegen kommt. Dadurch werden die Punkte am Anfang der Trajektorie nur wenig verschoben, denn kleine Änderungen in dieser Richtung bewirken große Änderungen nach N Iterationen.

Bei genauerer Betrachtung findet man, daß Trajektorien hyperbolischer Systeme in einer kontrahierenden bzw. expandierenden Richtung höchstens $\varepsilon = \delta/|\rho_{\max} - 1|$ (geometrische Reihe) zum Beschattungsabstand einer beliebig langen Pseudotrajektorie beitragen. ρ_{\max} ist für eine expandierende Richtung der maximale Einschnitt-Streckungsfaktor. Bei einer kontrahierenden Richtung ist ρ_{\max} der kleinste Einschnitt-Streckungsfaktor, d. h. derjenige, der der größten Kontraktion entspricht. δ ist der maximale Einschnittfehler in dieser Richtung.

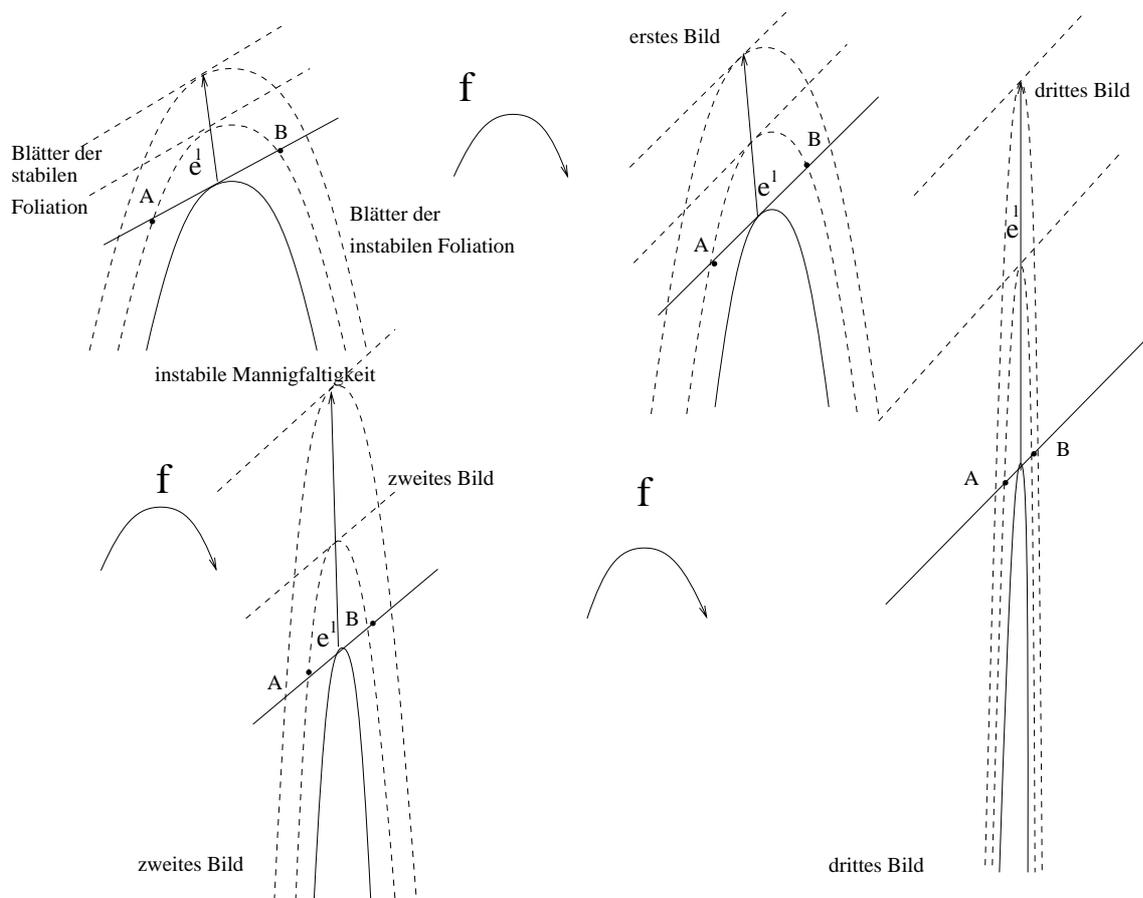
Das beschriebene Prinzip funktioniert bei hyperbolischen Abbildungen immer, bei Verletzung der Hyperbolizität ist meistens auch die Beschattbarkeit verletzt². Die bisher am häufigsten untersuchte Ursache von Nichthyperbolizität ist das Auftreten homokliner Tangenten. Pseudotrajektorien dieser Systeme sind im allgemeinen nicht beschattbar (Abb. 4.2).

Der erweiterte Bernoulli-Shift besitzt keine homoklinen Tangenten. Solche sind einerseits nur dann präzise zu definieren, wenn die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit definiert sind. Letztere ist für den erweiterten Bernoulli-Shift für beliebige Punkte nicht definierbar. Da die Punkte mehrere Urbilder haben können, kommt es dazu, daß sich die Zweige der instabilen Mannigfaltigkeit des in den Attraktor eingebetteten Fixpunktes (aus diesem wurde im Abschnitt 3.4 der Attraktor konstruiert) schneiden, so daß für den Schnittpunkt keine eindeutige instabile Richtung existiert. Genauer gesagt, eine homokline Tangente verlangt die Entartung der Eigenwerte und der Eigenvektoren der entlang einer Trajektorie aufmultiplizierten Jacobimatrizen. Aufgrund der Struktur $J = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix}$ ist ein Eigenwert immer gleich 2, bei Entartung müßte der andere ebenfalls gleich 2 sein. Das kann für einige Parameterwerte durchaus vorkommen (2iPO). Dann wäre das jedoch nur eine Tangente zweier instabiler Richtungen, nicht aber einer stabilen und einer instabilen Richtung.

Da die betrachteten Systeme nicht hyperbolisch sind, macht das Schattenbahnlemma (Abschnitt 2.2.1) für sie keine Aussage.

Dimensionsvariabilität führt ebenfalls zu Nichtbeschattbarkeit. Dafür verantwortlich ist die teils kontrahierende, teils expandierende Richtung (in den hier betrachteten Modellsystemen ist das jeweils die z -Richtung.) Wir nennen diese Richtung von hier an ***kippelnde Richtung***. Sie heißt ***beliebig stark kippelnde Richtung***, wenn sie die folgenden Eigen-

²Es gibt dafür auch Gegenbeispiele[42].



Abbildungung 4.2: Nichtbeschattbarkeit bei Vorliegen einer homoklinen Tangente (HT). Die Umgebung einer primären homoklinen Tangente mit ihrer stabilen und instabilen Foliation, d. h. stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit verschiedener Punkte einschließlich der HT selbst, die die Blätterstruktur der lokalen stabilen und instabilen Richtungen verdeutlicht; dazu die Umgebungen der ersten drei Bilder (sekundäre homoklinen Tangenten). Die instabile Foliation ist parallel zu den Attraktorblättern gekrümmt. Die stabile Foliation ist als Gerade gezeichnet. Die Punkte A und B ziehen sich auf der stabilen Foliation an, stoßen sich aber gleichzeitig entlang der instabilen Foliation ab. Die Krümmung des Attraktors muß sich daher bei jeder weiteren Iteration der primären HT verstärken. Aus demselben Grund vergrößert sich der Abstand der Blätter der instabilen Foliation in der Nähe der homoklinen Tangente. Punkte, die durch einen Einschrittfehler in Richtung e^l auf die andere Seite der stabilen Mannigfaltigkeit abgebildet werden, können den Attraktor in dieser Richtung verlassen; sie sind nicht beschattbar. Abbildung mit freundlicher Genehmigung der Autoren entnommen aus Jaeger und Kantz (1997)[16]

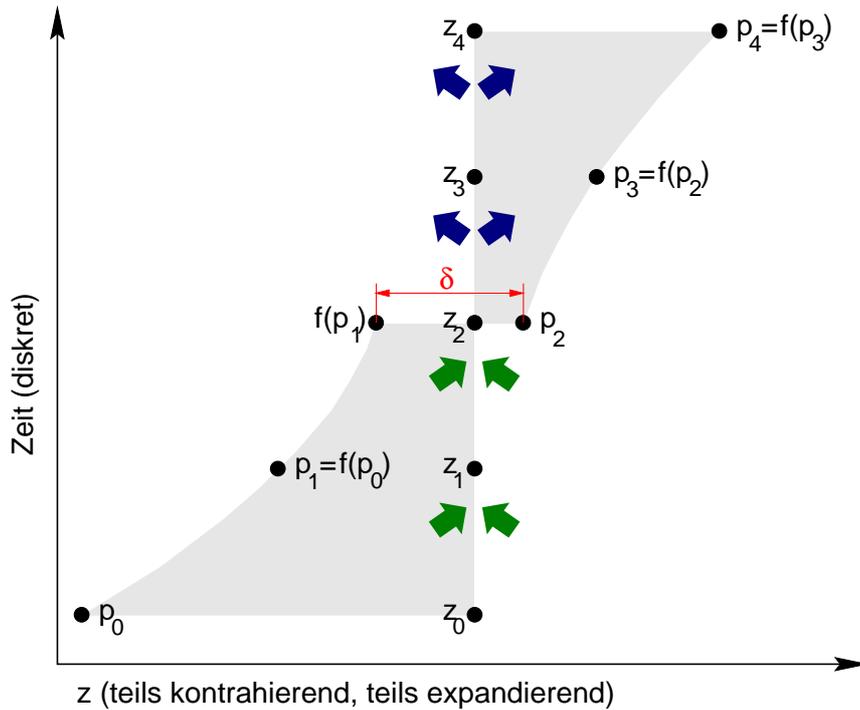


Abbildung 4.3: Trajektorien in Systemen mit abwechselnd kontrahierenden und expandierenden Richtungen sind nicht beschattbar.

schaften besitzt:

- $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \forall \mu > 1 \exists n_1 > k, n_2 > n_1$, so daß
der Betrag des Eigenwertes der von n_1 bis n_2 aufmultiplizierten Jacobimatrizen
in der kippelnden Richtung $> \mu$ ist
- $\forall k' \in \mathbb{Z}^+ \forall 0 < \mu' < 1 \exists n'_1 > k', n'_2 > n'_1$, so daß
der Betrag des Eigenwertes der von n'_1 bis n'_2 aufmultiplizierten Jacobimatrizen
in der kippelnden Richtung $< \mu'$ ist

Bei Vorliegen von Dimensionsvariabilität gibt es immer mindestens eine beliebig stark kippelnde Richtung. Die kippelnde Richtung in den hier betrachteten Systemen (die sigmoide Abbildung) ist überwiegend kontrahierend, d. h. ihr entspricht ein negativer Ljapunovexponent. In der Literatur ([25, 23, 7, 40]) wurden bisher zumeist Systeme mit überwiegend expandierender kippelnder Richtung untersucht. Die Schlußfolgerungen gelten aber jeweils ebenso wie die Beschattbarkeit *immer kontrahierender* und *immer expandierender* Richtungen für beide Spielarten. Wie die Abb. 4.3 zeigt, ist der Einschrittfehler δ an einer Stelle, wo sich die Dynamik von kontrahierend in expandierend ändert, im wesentlichen für die Nichtbeschattbarkeit verantwortlich. Um den kontrahierenden Teil mit kleinem ε zu beschatten, muß $z_0 \approx p_0$ gewählt werden. Andererseits ist aber für eine erfolgreiche Beschattung des expandierenden Teils $z_4 \approx p_4$ notwendig. Bei-

des schließt sich aus. Die beiden Anteile am Einschrittfehler $\delta = \delta_s + \delta_u$, $\delta_s = |z - f(p_1)|$ und $\delta_u = |p_2 - z_2|$ verstärken sich jeweils exponentiell in ihren Zeitrichtungen. Seien ρ_s und ρ_u die kumulierten Streckungsfaktoren in den Abschnitten s (Kontraktion, von *stable*) und u (Expansion, von *unstable*). Dann ist der Beschattungsabstand

$$\varepsilon = \inf_{z_2 \in [f(p_1), p_2]} \max \left(\frac{\delta_s}{\rho_s}, \delta_u \rho_u \right). \quad (4.1)$$

Der Beschattungsabstand ist umso größer, je länger der kürzere der beiden Abschnitte s und u (in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgend) ist.

Durch das Eingebettetsein von periodischen Orbits sowohl der Kategorie, wo diese Richtung kontrahierend ist, als auch der Kategorie, wo diese Richtung expandierend ist, durchläuft eine chaotische Trajektorie (in der Nähe der jeweiligen Orbits) jeweils *beliebig lange* Abschnitte von Kontraktion und Expansion. Die Trajektorie kommt wegen der Ergodizität jedem eingebetteten periodischen Orbit beliebig nahe und folgt jedem dieser Orbits daher für beliebig lange Zeiten N_s bzw. N_u ³. Ist λ_s bzw. λ_u (entsprechend der Stabilität dieses PO) der Ljapunovexponent des betreffenden PO in der Tangentialraumrichtung veränderlicher Stabilität, dann ist $\rho_{s,u} = N_{s,u} e^{\lambda_{s,u}}$. Da N_s und N_u beliebig groß werden, wird es letztlich auch der Beschattungsabstand, bis er in die Größenordnung der Ausdehnung des Attraktors kommt. Diese Argumentation gilt für jedes δ .

4.1 Kriterium für Nichtbeschattbarkeit der kippelnden Richtung

Das Schattenbahnlemma (Abschnitt 2.2.1) besagt, daß es für hyperbolische Systeme zu jedem (noch so kleinen) Beschattungsabstand ε einen Einschrittfehler δ gibt, so daß jeder δ -Pseudoorbit ε -beschattet ist. Das *genaue* Gegenteil davon ist offenbar, daß es einen Beschattungsabstand ε gibt, für den kein (noch so kleiner) Einschrittfehler δ die Beschattung für beliebig lange Zeiten ermöglicht. Dies ist einer numerischen Untersuchung naturgemäß nicht zugänglich. Stattdessen wählen wir ein sehr großes ε und verfolgen die numerische Beschattungsdauer für immer kleinere Werte von δ .

Die meisten (im Sinne des invarianten Maßes) Punkte des Attraktors jedes der drei Modellsysteme liegen für γ nicht zu klein ($\gamma \gtrsim 3$) entweder in der Nähe des oberen oder des unteren Randes des Attraktors (z -Richtung). Der Grund dafür ist, daß die z -Dynamik (sigmoide Abbildung mit max. Anstieg $\gamma > 1$) „oben“ und „unten“ kontrahiert und dazwischen expandiert. Das ist für den Fall des Bernoulli-Shifts auch in der Abb. 3.13 zu

³Im Falle nicht invertierbarer Abbildungen wie in dem des erweiterten Bernoulli-Shifts gilt das für die 2iPO nur für N_u , denn hier folgt der Punkt der größten Annäherung zweier sehr naher PO's unmittelbar auf den Punkt des größten Abstandes, weil durch die Abwesenheit einer stabilen Mannigfaltigkeit des 2iPP das Falten die einzige Möglichkeit der Annäherung an einen 2iPP ist, siehe die Argumentation im Abschnitt 3.1 auf Seite 28 (zur Hypothese, daß $\gamma_g = \gamma_2$).

erkennen. Wir definieren nun 3 Bereiche der z -Dynamik entsprechend diesen drei Fällen und bezeichnen sie mit „+“, „-“ und „0“, je nachdem ob der Anstieg

$$\frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} = \frac{\gamma}{1 + \left[\frac{\gamma\pi}{2}(z_n + r_n)\right]^2} \quad (4.2)$$

größer oder kleiner als 1 ist:

$$\begin{array}{ll} + & \text{wenn } \frac{\gamma\pi}{2}(z_n + r_n) > \sqrt{\gamma - 1} \\ 0 & \text{wenn } \left|\frac{\gamma\pi}{2}(z_n + r_n)\right| < \sqrt{\gamma - 1} \\ - & \text{wenn } \frac{\gamma\pi}{2}(z_n + r_n) < -\sqrt{\gamma - 1} \end{array} \quad (4.3)$$

Eine chaotische Trajektorie oder Pseudotrajektorie wird in den Bereichen „+“ und „-“ „gehalten“, während sie von dem Bereich „0“ abgestoßen wird. Sie wird sich die allermeiste Zeit entweder im Bereich „+“ oder im Bereich „-“ aufhalten. Somit ist (4.4)

$$\begin{array}{l} \text{für jede echte Trajektorie } \gamma = \{(r_n, z_n) : n \in [n_a, n_b]\} \text{ des Systems} \\ \exists k \in [n_a, n_b], \text{ so daß} \\ z_k + r_k < -\frac{2}{\gamma\pi}\sqrt{\gamma - 1} \quad \text{und} \quad \bar{z}_k + r_k > \frac{2}{\gamma\pi}\sqrt{\gamma - 1} \text{ oder} \\ \bar{z}_k + r_k < -\frac{2}{\gamma\pi}\sqrt{\gamma - 1} \quad \text{und} \quad z_k + r_k > \frac{2}{\gamma\pi}\sqrt{\gamma - 1} \end{array} \quad (4.4)$$

offenbar ein geeignetes Kriterium für die Nichtbeschattbarkeit der Pseudotrajektorie $\bar{\gamma} = \{(r_n, \bar{z}_n) : n \in [n_a, n_b]\}$ (weicht nur in z -Richtung von der echten Dynamik ab). In diesem Fall haben sowohl die Pseudotrajektorie als auch jede als beschattende infrage kommende echte Trajektorie des Systems durch die Anziehung in den Bereichen „+“ und „-“ mit großer Wahrscheinlichkeit sogar *mehrere aufeinander folgende* Punkte in voneinander räumlich getrennten Bereichen. Als Beschattbarkeitsdauer ist in den im folgenden dargestellten Berechnungen die Zahl der Iterationsschritte vom Anfang des Beschattungsversuches n_a (1000 Schritte nach dem Ende des vorhergehenden Beschattungsversuches) bis zu dem n_b bezeichnet, so daß die Negation von (4.4),

$$\begin{array}{l} \exists \text{ eine Trajektorie } \gamma = \{(r_n, z_n) : n \in [n_a, n_b]\} \text{ des Systems, so daß} \\ \forall n \in [n_a, n_b] \text{ gilt:} \\ z_n + r_n < \frac{2}{\gamma\pi}\sqrt{\gamma - 1} \quad \text{falls} \quad \bar{z}_n + r_n < -\frac{2}{\gamma\pi}\sqrt{\gamma - 1} \quad \text{und} \\ z_n + r_n > -\frac{2}{\gamma\pi}\sqrt{\gamma - 1} \quad \text{falls} \quad \bar{z}_n + r_n > \frac{2}{\gamma\pi}\sqrt{\gamma - 1} \end{array} \quad (4.5)$$

gerade noch gilt. Die im folgenden dargestellten Berechnungen ergeben, daß alle drei betrachteten Systeme für praktische Zwecke als nicht beschattbar anzusehen sind. Ebenfalls nicht beschattbar ist eine Sigmoid-Abbildung, wenn sie statt von einem dynamischen System von einem Zufallszahlengenerator angetrieben wird. Auch für diesen Fall wurden Rechnungen ausgeführt und führten zu diesem Ergebnis.

In den Rechnungen wurde eine Pseudotrajektorie mit zufälligen Einschrittfehlern δ_i nach einer Verteilung

$$\rho(\delta) = \frac{1}{\delta_{\max}} \left(1 - \frac{|\delta|}{\delta_{\max}}\right) \quad (-\delta_{\max} < \delta < \delta_{\max}) \quad (4.6)$$

iteriert⁴. Diese Verteilung entspricht gerade der Verteilung (3.4) der r_i für alle drei Modellsysteme. Da nur die Beschattung der z -Richtung untersucht wurde, konnte das Kriterium sehr einfach implementiert werden. Es wurden in jedem Iterationsschritt neben dem z -Wert der Pseudotrajektorie auch z_{\min} und z_{\max} gepflegt, d. h. diejenigen z -Werte der *am weitesten oben* und der *am weitesten unten* verlaufenden echten Trajektorie⁵, die noch mit der Symbolfolge aus „+“, „-“ und „0“ der Pseudotrajektorie lt. (4.5) kompatibel sind, d. h. die *oben* (*unten*) oder *in der Mitte* verlaufen, wo die Pseudotrajektorie *oben* (*unten*) ist. Die sigmoide Abbildung und damit auch alle ihre Iterationen sind bezüglich des z -Arguments monoton wachsend. Dadurch kann der Bereich der möglichen z -Werte beschattender Trajektorien aus den Funktionswerten der z_{\min} und z_{\max} aus der vorhergehenden Iteration, ggf. eingeschränkt durch die Bedingung (4.5) für das aktuelle n , berechnet werden. Die Pseudotrajektorie gilt so lange als beschattet, wie es noch mindestens ein z gibt, das mit allen bisherigen Bedingungen lt. (4.5) kompatibel ist, d. h. so lange $z_{\min} \leq z_{\max}$.

Die Beschattungszeiten sind im Grenzwert großer Zeiten exponentialverteilt (Abb. 4.4: Bernoulli-Shift, quasiperiodische Abbildung). Das bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit, das gewählte Nichtbeschattbarkeitskriterium gerade im nächsten Schritt zu erfüllen, wenn es in diesem noch nicht erfüllt war, konstant ist; daß sie nicht von der bisherigen Schrittzahl abhängt. Dies wurde für das Nichtbeschattbarkeitskriterium (4.4) sowie für verschiedene vorgegebene maximal zulässige Beschattungsabstände ε in allen betrachteten Systemen beobachtet. Im Abschnitt 4.3 werden wir argumentieren, daß, grob gesagt, die Exponentialverteilung ein Ausdruck von viel Zufall ist.

In der Abb. 4.4 ist zu sehen, daß die Zeiten exponentialverteilt sind. Dargestellt sind die aufsummierten Häufigkeiten, d. h. die Pseudotrajektorie ist *mindestens* über so viele Schritte beschattbar. Für die quasiperiodische Abbildung zeigt Abb. 4.4 ein Stufenverhalten, das der Exponentialverteilung aufmoduliert ist. Wir ließen die Beschattungsversuche jeweils 100 Iterationsschritte nach dem Ende des vorherigen Beschattungsversuches beginnen. Beim erweiterten Bernoulli-Shift ist durch das Strecken und Falten nach dieser Zeit der vorherige Zustand „vergessen“, der Beginn des neuen Beschattungsversuches ist zufällig. Ist aber unter der Voraussetzung der Beschattbarkeit für N Schritte die Wahrscheinlichkeit der Beschattbarkeit für $N + 1$ Schritte konstant und nicht von N abhängig, so folgt allein daraus die Exponentialverteilung der einzelnen Beschattungszeiten. Bei der quasiperiodischen Abbildung gibt es dieses Strecken nicht, deshalb kann der Beginn des neuen Beschattungsversuches auch nicht als zufällig angesehen werden. Für die Mindestbeschattungszeit existiert eine natürliche untere Schranke. Die Beschattungszeit ist in keinem Fall kleiner als die Zeit, die selbst bei maximaler lokaler Expansion und bei konstruktiver Überlagerung jeweils des maximalen Einschrittfehlers gebraucht wird, in

⁴Für einige Fälle (siehe Abschnitt 4.4, S. 83) erwies es sich als günstig, statt dieser Verteilung immer denselben Wert $+\delta_{\max}$ zu addieren (δ -Verteilung). Das entspricht dem ungünstigsten Fall, das Ergebnis ist ebenso aussagekräftig wie bei jeder anderen Verteilung und es besitzt den großen Vorteil, daß keine Zufallszahlen extra in die Berechnungen eingehen, die man am Ende wieder herauszumitteln hätte, wofür man sehr viel länger iterieren müßte.

⁵double-Genauigkeit

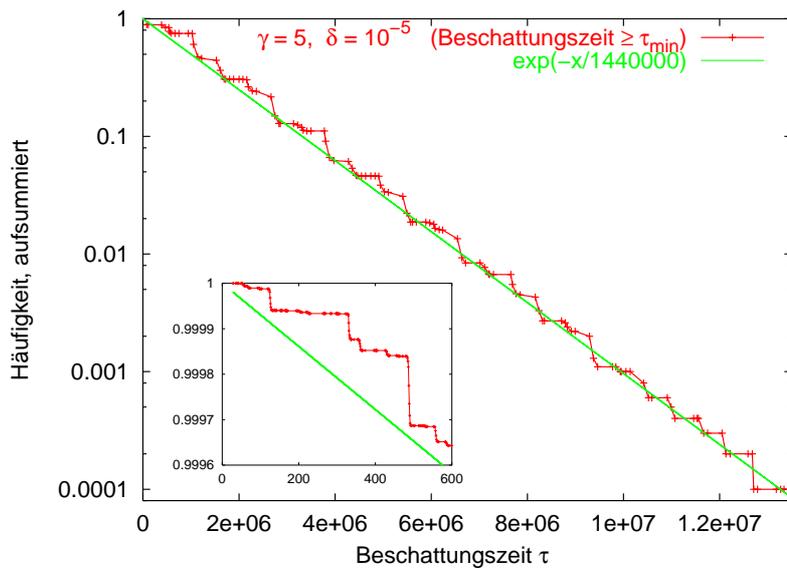
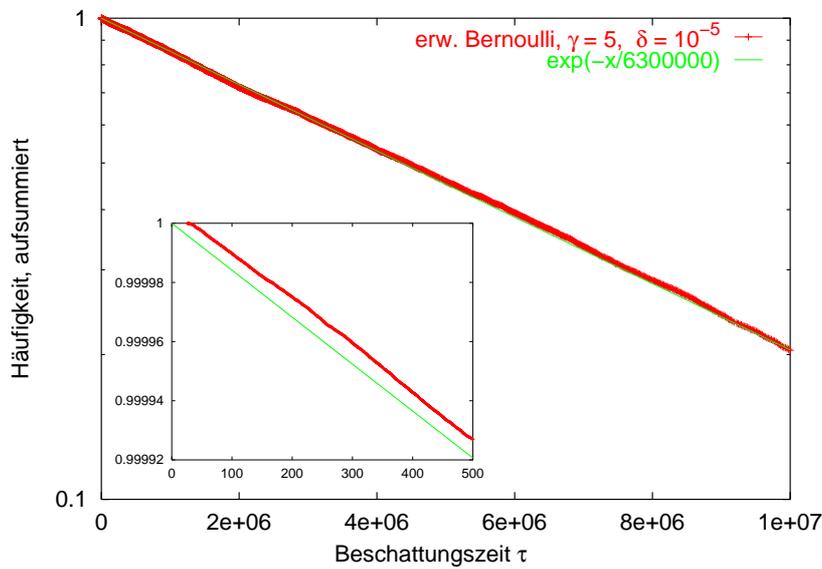


Abbildung 4.4: Verteilung der Beschattungszeiten bei Bernoulli-Shift (oben) und quasi-per. Abb. (unten).

In der Vergrößerung sieht man in beiden Fällen, daß die Beschattungszeiten einen Mindestwert nicht unterschreiten. Bereits nach wenigen Iterationen aber dominiert die Exponentialverteilung.

linearer Näherung ist das

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \delta + \delta e^{\lambda_{\max}} + \dots + \delta e^{\tau_{\min} \lambda_{\max}} \\ \tau_{\min} &= \frac{\ln(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}(e^{\lambda_{\max}} - 1))}{\lambda_{\max}} - 1\end{aligned}\tag{4.7}$$

In Abb. 4.5 sind die Ergebnisse der Simulationen mit endlichen Einschrittfehlern und dem Nichtbeschattbarkeitskriterium (4.4) für den erweiterten Bernoulli-Shift, die erweiterte Cat map sowie die von Zufallszahlen getriebene Sigmoid-Abbildung zusammengestellt. Die mittlere Beschattungszeit hängt ziemlich genau nach einem Potenzgesetz vom Einschrittfehler ab. Die erweiterte Cat map und der erweiterte Bernoulli-Shift verhalten sich ähnlich wie die von Zufallszahlen getriebene Sigmoid-Abbildung. Das Anwachsen der absoluten Beschattungszeiten für kleine Parameter γ ist einerseits eine Folge besserer Beschattbarkeit vor dem Verschwinden der 2iPO im Attraktor (das passiert beim Bernoulli schon früher als bei der Cat map). Es spielt andererseits die Tatsache eine wichtige Rolle, daß das Nichtbeschattbarkeitskriterium einen Abstand zwischen *oben* („+“) und *unten* („-“) einführt, der für kleinere δ kleiner wird. Die zusätzliche violette Gerade im linken oberen Bild ($\tau(\delta)$ für den erweiterten Bernoulli-Shift) wird im Abschnitt 4.2 diskutiert werden.

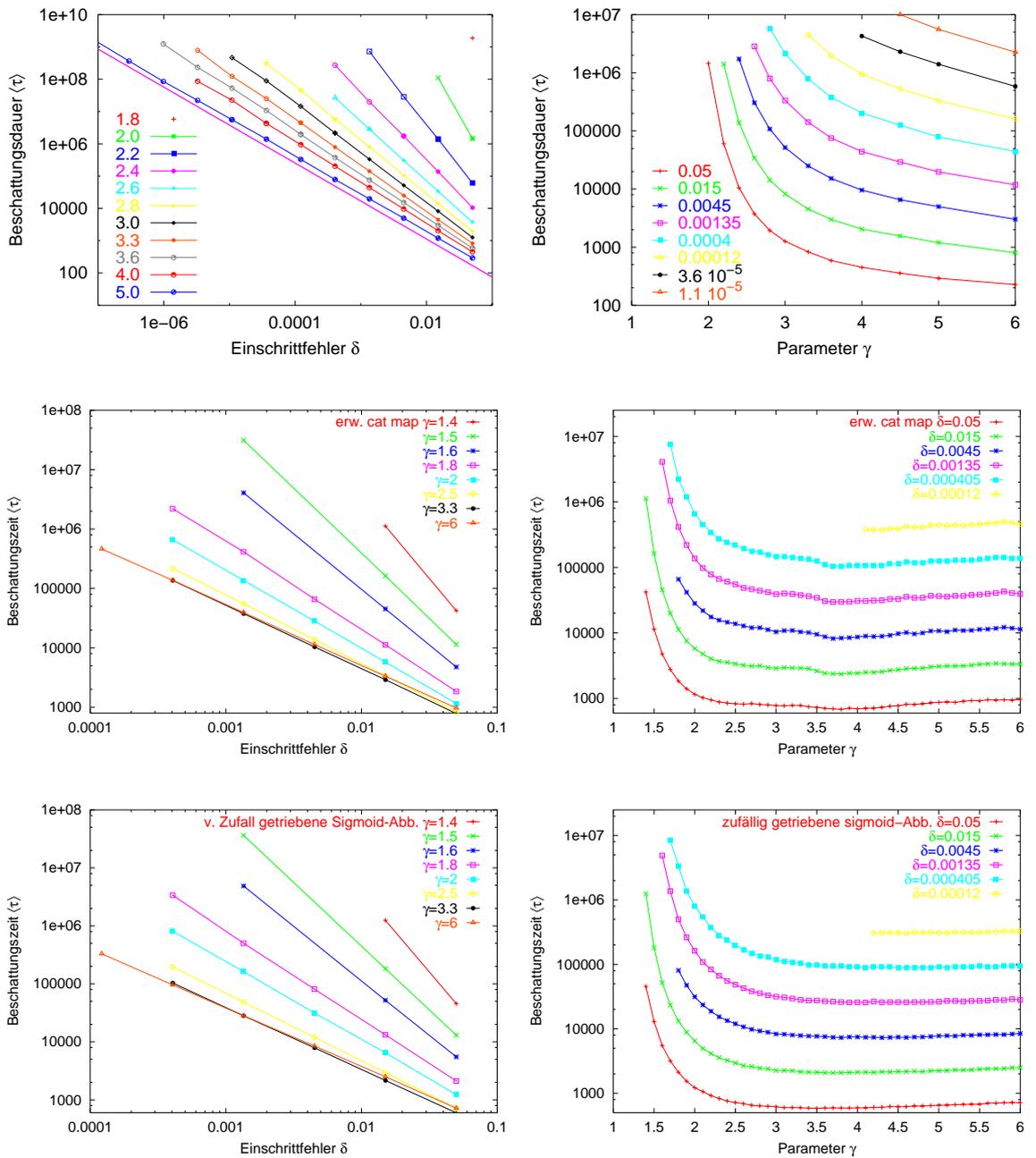


Abbildung 4.5: Links Besetzungsdauer $\tau(\delta)$ für einige Parameter γ , rechts $\tau(\gamma)$ für verschiedene Rauschniveaus δ (Bernoulli, Cat map, und von Zufallszahlen getriebene Sigmoid-Abbildung)

4.2 Vergleich mit Ergebnissen der Literatur

In bisherigen Arbeiten gab es unseres Wissens nur erste Ansätze zur quantitativen Charakterisierung von Nichtbeschattbarkeit.

Sauer et al.[40] veröffentlichten 1997 ein im Zusammenhang mit Dimensionsvariabilität seitdem häufig zitiertes *biased random walk*-Modell, in dem die mittleren Beschattungszeiten (der maximale akzeptable Beschattungsabstand ist hier die Attraktorgröße) aus den Momenten der Verteilung der n -Schritt-Ljapunovexponenten vorhergesagt werden.

$$\langle \tau \rangle = \frac{\sigma^2}{2m^2} \left(\delta^{\frac{-2|m|}{\sigma^2}} - 1 \right) - \frac{\ln \delta}{|m|} \quad (4.8)$$

bzw. für kleine δ und nicht zu kleine m

$$\langle \tau \rangle \propto \delta^{\frac{-2|m|}{\sigma^2}} \quad (4.9)$$

Hierin sind m und σ^2 der Mittelwert und die mittlere quadratische Abweichung von diesem in der Verteilung.

Ich will kurz auf einige Annahmen und Näherungen eingehen, die in dieser Formel implizit enthalten sind.

- Das Modell ist *linear*, denn die Kurzzeit-Ljapunovexponenten beschreiben die lokalen Streckungsfaktoren der kippelnden Richtung in linearer Näherung. Der Einzschrittfehler δ und der akzeptable Beschattungsabstand ε gehen nur als Quotient ein. Diese Annahme erweist sich auch für den erweiterten Bernoulli-Shift als tragfähig. Simulationen, in denen statt der „großzügigen“ Forderung (4.5) ein maximales ε vorgegeben wurde, führten ab $\varepsilon < 0.01$ für alle $\frac{\varepsilon}{\delta}$ zum selben Ergebnis. Für größere ε erhielten wir zwar nicht die gleichen Beschattungszeiten, das Skalierungsverhalten war aber identisch.
- Es berücksichtigt nur Beiträge der kippelnden Richtung zum Beschattungsabstand. Das kommt dadurch zum Ausdruck, daß nur die Verteilung des einen Ljapunovexponenten, der um null fluktuiert, in die Berechnung eingeht. Auch in dieser Arbeit wurden alle anderen Richtungen nicht mit betrachtet. Alle Aussagen gelten nur für Einzschrittfehler in der kippelnden Richtung. Für das jeweilige Gesamtsystem kann die Beschattungszeit in manchen Fällen noch kleiner sein als für die z -Richtung allein betrachtet.
- Das Modell von Sauer et al. betrachtet nur die Verteilung, nicht aber die zeitliche Abfolge der Kurzzeit-Ljapunovexponenten. Diese Abfolge kann (Abschnitt 4.3) großen Einfluß auf die Beschattungszeiten bei Dimensionsvariabilität haben.
- Eine Schwachstelle des Modells von Sauer et al. ist, daß nicht klar ist, von welcher Schrittzahl bei der Statistik der Kurzzeit-Ljapunovexponenten auszugehen ist. Der Mittelwert der Verteilung ist nicht von der Schrittzahl abhängig; er ist

gleich dem Ljapunovexponenten der Abbildung. Anders die Breite der Verteilung; sie skaliert für große Schrittzahlen N mit $N^{-\frac{1}{2}}$. Das heißt aber, daß man durch eine „zweckmäßige“ Wahl von N im Prinzip jeden Skalierungsexponenten rechtfertigen kann. In Abb. 4.6 sind die Verteilungen der Kurzzeit-Ljapunovexponenten des erweiterten Bernoulli-Shifts für die Parameterwerte $\gamma = 1.4$, $\gamma = 1.6$ und $\gamma = 5$ gezeichnet. Es besteht offenbar kein qualitativer Unterschied zwischen den Verteilungen bei $\gamma = 1.4$ und $\gamma = 1.6$. Im Abschnitt 4.3 wird ein großer Unterschied im Beschattungsverhalten bei diesen beiden Parametern zutage treten (bei $\gamma = 1.4$ gibt es noch keine 2iPP im Attraktor). In der Abb. 4.7 sind für $\gamma = 1.6$ die numerisch ermittelte Abhängigkeit der mittleren Beschattungszeit von dem Quotienten $\frac{\varepsilon}{\delta}$ und dazu einige Vorhersage-Kurven für verschiedene Schrittzahlen N lt. (4.8) gezeichnet.

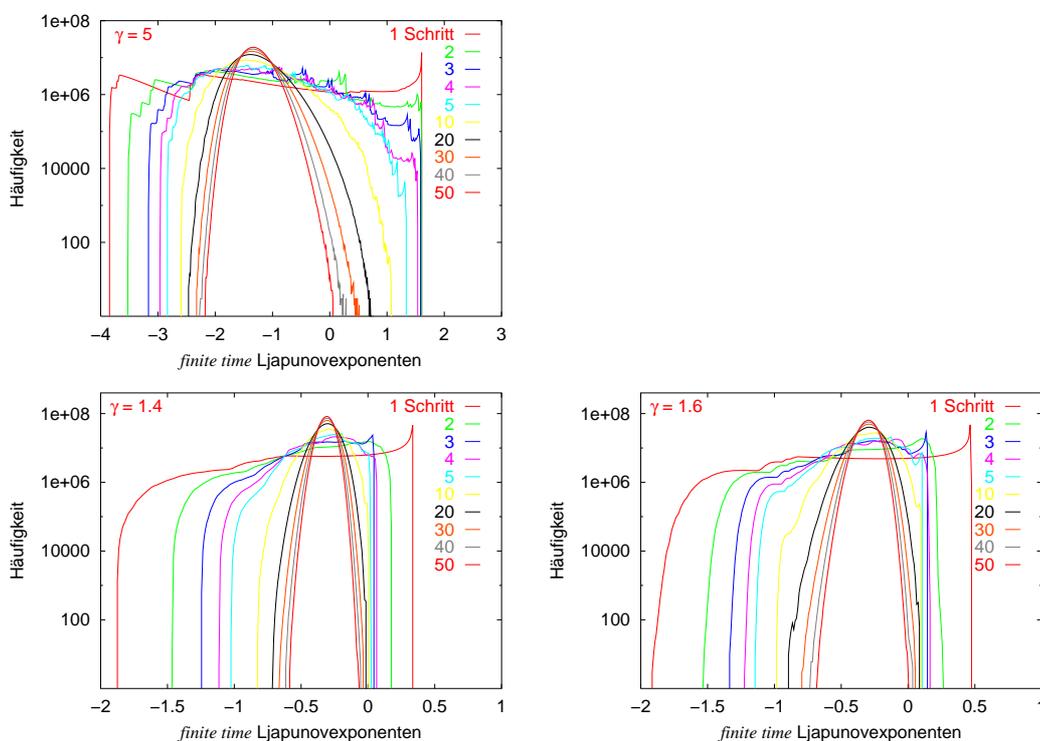


Abbildung 4.6: Kurzzeit-Ljapunovexponenten für den erweiterten Bernoulli-Shift für die Parameter $\gamma = 1.4$, $\gamma = 1.6$ und $\gamma = 5$, jeweils für 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40 und 50 Schritte.

In das linke obere Bild der Abb. 4.5, $\tau(\delta)$ beim erweiterten Bernoulli-Shift, ist eine zusätzliche violette Gerade eingezeichnet. Ihr Anstieg ist in Anlehnung an (4.9) aus der Verteilung der Kurzzeit-Ljapunovexponenten (Abb. 4.6) für $\gamma = 5$ berechnet. Hier wurde $N\sigma^2$ (mit $N = 50$) statt σ^2 verwendet. Für diesen Parameterwert liefert die auf diese Weise modifizierte Formel von Sauer et al. eine sehr gute Vorhersage für den Skalierungsexponenten. Ein möglicher Grund dafür, daß das *biased random walk*-Modell für $\gamma = 5$ ein gutes Ergebnis liefert und für $\gamma = 1.6$ nicht, wird im Abschnitt 4.3 (z. B. Abb. 4.13)

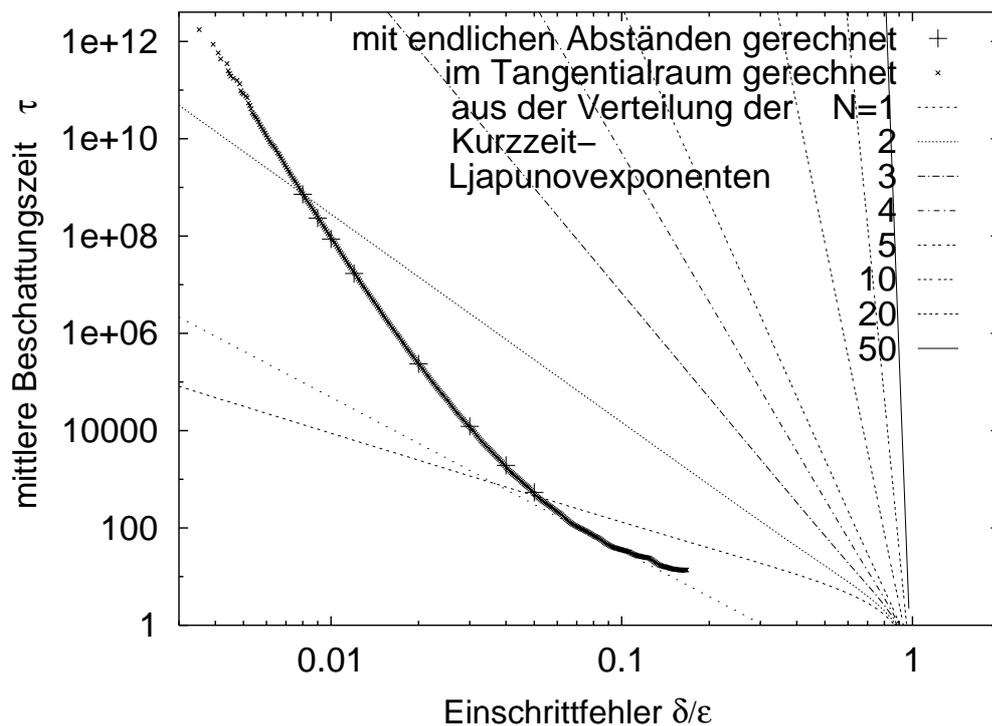


Abbildung 4.7: Abhängigkeit der mittleren Beschattungsdauer vom Quotienten Einschnittfehler/Beschattungsabstand für Bernoulli, $\gamma = 1.6$ sowie einige mögliche Vorhersage-Kurven nach (4.8) aus dem *biased random walk*-Modell[40].

Die großen Kreuze bedeuten je eine Rechnung mit fest vorgegebenen ϵ und δ . Die Daten für die kleinen liegenden Kreuzchen wurden in einer einzigen Rechnung mit der (modifizierten, siehe S. 83) im Abschnitt 4.3 erläuterten neuen Methode erzeugt. Die Übereinstimmung der großen und der kleinen Kreuze zeigt die Äquivalenz der beiden Methoden. Die zum Zweck des Vergleiches modifizierte Methode liefert allerdings die Einschnittfehler in einer willkürlichen Einheit, so daß das horizontale Plazieren dieses Teilbildes per Hand zu erfolgen hatte. In den Rechnungen für diese Abbildung ist statt der Verteilung (4.6) für die Einschnittfehler in jedem Iterationsschritt $+\delta_{\max}$ addiert worden (siehe hierzu die Fußnote 4 auf Seite 67). Die Vorhersage (4.8) läßt sich für den erweiterten Bernoulli-Shift nicht verifizieren (für keine Schrittzahl für die Kurzzeit-Ljapunovexponenten, gestrichelte Kurven im Bild). Eine andere (etwas großzügige) Interpretationsmöglichkeit der Vorhersage (4.8) besteht darin, für σ^2 das Quadrat der Breite der N -Schritt-Ljapunovexponenten, *multipliziert mit N* , zu nehmen. Diese Zahl konvergiert für große N zu einem endlichen Wert. Im Fall $\gamma = 1.6$ führt auch dieser Wert zu keiner Information über die Beschattbarkeit des erweiterten Bernoulli-Shifts. In diese Abbildung ist eine Tangente an die Nichtbeschattbarkeitskurve mit dem Anstieg entsprechend diesem Grenzwert als gepunktete Linie eingezeichnet. Für $\gamma = 5$ führt nämlich genau dieser Grenzwert zu dem richtigen Exponenten, jedoch nicht zum richtigen Vorfaktor (Bild oben links in Abb. 4.5).

deutlich. Bei $\gamma = 5$ führt die Vernachlässigung der Autokorrelation in der Zeitreihe der Einschnitt-Ljapunovexponenten (Auswertung von Surrogat-Daten) nur zu einem geringen Unterschied.

Auch in einigen Fällen, in denen andere Autoren diese Vorhersage offenbar etwas unkritisch als Faktum ansahen, ist mehr Vorsicht geboten. In einer Arbeit von Barreto und So[3] (September 2000) werden beispielsweise für ein System zweier gekoppelter quadratischer Abbildungen Beschattungszeiten vorhergesagt. Man verwendet die Verteilung der 50-Schritt-Ljapunovexponenten und behauptet, so seien die vorausgesagten Beschattungszeiten verlässlich, so sie größer als 50 Schritte sind. Für 25-Schritt-Ljapunovexponenten hätte man allerdings andere Werte erhalten (oder haben auch diese Autoren stillschweigend σ^2 mit der Anzahl der Schritte multipliziert?).

4.3 Eine neue Methode quantitativer Erfassung von Nichtbeschattbarkeit

Während die Überlegungen im vorigen Abschnitt wesentlich auf zufällig verteilten Einschnittfehlern beruhten, soll jetzt Dimensionsvariabilität als deterministisches Phänomen im Vordergrund stehen.

Unsere neue Methode wurde u.a. inspiriert von Dawson et al.[7]. Die Autoren definieren die **Brüchigkeit** (engl. brittleness) einer Pseudotrajektorie als das Verhältnis des Beschattungsabstandes ε zum Rauschniveau, d. h. zum maximalen Einschnittfehler δ . Die Brüchigkeit kann nur bei Kenntnis der echten Trajektorie ermittelt werden; daher definieren die Autoren eine Größe **Test-Brüchigkeit**, die berechnet werden kann. Dabei werden Jacobimatrizen verwendet, das Ergebnis gilt für den Grenzwert infinitesimal kleiner Einschnittfehler. Die Richtungen der Einschnittfehler sind zufällig. Das Verfahren ist recht aufwendig, so daß in [7] nur für zwei verschiedene Parameter jeweils für eine Pseudotrajektorie von 10^4 Punkten die Test-Brüchigkeit berechnet wurde.

Wir schlagen hier einige wesentliche Vereinfachungen des Verfahrens vor. Dazu identifizieren wir in unserem System die kippelnde Richtung und betrachten allein deren Beschattbarkeit.

Wie am Anfang dieses Kapitels dargelegt, sind immer kontrahierende sowie immer expandierende Richtungen beschattbar. Von ihnen erwarten wir keinen wesentlichen Beitrag zum Beschattungsabstand. Wesentlich für die Nichtbeschattbarkeit, d. h. für das Anwachsen des Beschattungsabstandes, sind die anfangs dieses Kapitels definierten **kippelnden** Richtungen. Es wird hier eine einzelne kippelnde Richtung betrachtet.

Anders als bei quasiperiodischen Abbildungen (ohne kippelnde Richtungen) ist bei einer beliebig stark kippelnden Richtung ein einzelner Einschnittfehler ausreichend, um Nichtbeschattbarkeit herbeizuführen (um den Beschattungsabstand beliebig groß zu machen). Der Effekt eines einzelnen Einschnittfehlers ist am größten, wenn er *genau* zwischen einer kontrahierenden und einer expandierenden Phase gemacht wird (Abb. 4.3). Dieser Punkt

(in der Abb. mit z_2 bezeichnet) sei von hier an **Weiche** genannt; hier trennen sich die Pseudotrajektorie und die Trajektorie. Wir wollen im folgenden die Auswirkungen eines einzelnen Einschrittfehlers an genau dieser Stelle studieren.

Wir benutzen ebenso wie Dawson et al.[7] die lineare Näherung. Wie bereits im Abschnitt 4.2 festgestellt, ist diese Näherung bereits auf Längenskalen $\leq 10^{-2}$ sehr gut. Dadurch lassen sich alle Untersuchungen anhand des Logarithmus des Einschritt-Streckungsfaktors der kippelnden Richtung (*Einschritt-Ljapunovexponent* $\lambda_n^{(1)}$) durchführen. Im Fall der im Kapitel 3 vorgestellten Beispielsysteme gilt $\lambda_n^{(1)} = \ln \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n}$ aufgrund der Struktur der Jacobimatrix. Da $\frac{\partial x_{n+1}}{\partial z_n}$ (und bei der Cat map auch $\frac{\partial y_{n+1}}{\partial z_n}$) verschwindet, ist die z -Richtung hier jeweils Eigenrichtung der Jacobimatrix. Das macht die Methode auch für wesentlich kompliziertere Probleme (d. h. mit nichttrivialer kippelnder Richtung) und ggf. auch für experimentelle Daten von Systemen zugänglich, deren Bewegungsgleichungen unbekannt sind. Falls die Messungen genau genug sind, um eine Zeitreihe des um null fluktuierenden Einschritt-Ljapunovexponenten zu bestimmen und zu verarbeiten, können alle Berechnungen damit gemacht werden.

Der gesamte Aufenthalt in der Nähe eines doppelt instabilen periodischen Orbits muß zweifellos zur Expansionsphase gezählt werden. Daher definieren wir: Ein Abschnitt $\{p_N, \dots, p_{N+k}\}$, ($k \geq 0$) einer Pseudotrajektorie oder Trajektorie heißt **Expansionsphase der kippelnden Richtung** mit der **Expansionsstärke**

$$\lambda_e = \sum_{n=N}^{N+k} \lambda_n^{(1)} > 0 \quad (4.10)$$

wenn

- (i) jeder Teilabschnitt eine kleinere Expansionsstärke hätte und wenn
- (ii) jeder Abschnitt $\{p_N, \dots, p_{N+k'}\}$, ($k' > k$) oder $\{p_{N'}, \dots, p_{N+k}\}$, ($N' < N$) entweder eine kleinere Expansionsstärke hätte oder sich in zwei oder mehr kürzere Expansionsphasen zerlegen ließe, von denen mindestens eine bereits allein eine Expansionsstärke $\geq \lambda_e$ hätte (sowie dazwischen liegende Kontraktionsphasen).

Diese Definition entspricht dem folgenden Algorithmus: man iteriert eine Pseudotrajektorie und wertet jeweils die Einschritt-Ljapunovexponenten aus. Die erste Expansionsphase beginnt mit dem ersten positiven Einschritt-Ljapunovexponenten (an der Weiche). Von hier an werden alle $\lambda_n^{(1)}$ aufsummiert, so lange, bis die Partialsumme nicht mehr positiv ist. Das Maximum der Partialsummenfolge ist dann die Expansionsstärke. Wo das Maximum erreicht wurde, endet auch die Expansionsphase. Zwischen dem Maximum der Partialsummenfolge und dem Punkt, wo sie ≤ 0 wird, kann noch eine weitere (weniger starke) Expansionsphase liegen. Der Algorithmus liefert dasselbe Ergebnis (in umgekehrter Reihenfolge), wenn die Reihenfolge der Einschritt-Ljapunovexponenten umgekehrt wird.

Wir erwarten, daß das Ergebnis für $\ln(\frac{\epsilon}{\delta})$ mit nur einem Einschrittfehler an der Weiche ein typischer, repräsentativer Wert der Verteilung von $\ln(\frac{\epsilon}{\delta})$ bei einer Simulation mit zufällig

verteilten Einschrittfehlern (insbesondere für den Fall, daß man sich auf Einschrittfehler der Länge eins mit nur zufälligem Vorzeichen beschränkt) entlang des gesamten betrachteten Abschnittes der Pseudotrajektorie ist.

In den betrachteten dynamischen Systemen ist die kippelnde Richtung überwiegend kontrahierend ($\lambda_z < 0$). Wir betrachten daher einen Abschnitt der Pseudotrajektorie, in dem (in positiver Zeitrichtung) eine längere Kontraktionsphase, eine Weiche und schließlich eine kürzere Expansionsphase aufeinanderfolgen.

Man muß hier, um eine möglichst lange Pseudotrajektorie beschatten zu können, die beschattende Trajektorie so legen, daß sie den langen, kontrahierenden Teil der Pseudotrajektorie beschattet. Im Grenzwert einer sehr langen Kontraktionsphase ist die optimale Schattentrajektorie bei nur einem Einschrittfehler an der Weiche mit dem kontrahierenden Teil der Pseudotrajektorie identisch. Das hat zur Folge, daß $\ln(\frac{\varepsilon}{\delta})$ genau die Expansionsstärke der an der Weiche beginnenden Expansionsphase ist.

Genau genommen lautet die Frage: „Über wie viele Schritte muß ich die Pseudotrajektorie iterieren, damit das Verhältnis von Beschattungsabstand zu Einschrittfehler einen bestimmten Wert überschreitet?“ Es muß also bis zu einer Expansionsphase der betreffenden Stärke iteriert werden. Einschrittfehler an einer Weiche vor einer unterwegs vorbeikommenden schwächeren Expansionsphase haben keinen Einfluß, denn sie werden gleich anschließend wieder ausgedämpft (das wird durch den Algorithmus zum Auffinden der Expansionsphasen garantiert).

In den numerischen Experimenten zeigte es sich, daß, je nach dem zu überschreitenden Beschattungsabstand $\ln(\frac{\varepsilon}{\delta})$, die Kontraktionsphase sehr viel länger ist als die Expansionsphase. Beispielsweise kommt eine über 100 Schritte andauernde Expansionsphase typischerweise höchstens einmal in 10^{10} Iterationen vor. Das aber bedeutet, daß die mittlere Beschattungsdauer für ein vorgegebenes maximales $\ln(\frac{\varepsilon}{\delta})$ fast ausschließlich davon abhängt, wie viele Schritte vor der starken Expansionsphase ich zufällig die Pseudotrajektorie zu beobachten anfangen. Die Dauer der Expansionsphase kann vernachlässigt werden.

Die Expansionsstärke λ_e an Attraktorpunkten als möglichen Weichen ist in Abb. 4.8 für den Parameterwert $\gamma = 5$ farbcodiert als Funktion von (x, z) dargestellt.

Damit kann mit relativ geringem numerischen Aufwand aus der Statistik der Expansionsstärken einer Pseudotrajektorie deren Nichtbeschattbarkeit quantifiziert werden. Die Abb. 4.9 zeigt diese Statistik für den Parameterwert $\gamma = 5$. Die Verteilung ist für große Expansionsstärken offenbar eine immer perfektere Exponentialverteilung. Bei Dimensionsvariabilität müssen tatsächlich beliebig große Expansionsstärken vorkommen, denn selbst bei nur einem in den Attraktor eingebetteten doppelt instabilen periodischen Orbit kommt die Trajektorie beliebig nahe an diesem vorbei, d. h. sie bleibt beliebig lange in seiner Nähe und akkumuliert beliebig große Streckungsfaktoren. In der Abb. 4.10 sind für 3 verschiedene Parameterwerte γ die Verteilungen der Streckungsfaktoren dargestellt. Während links die Häufigkeiten der Expansionsstärken sind, so wie sie sich aus den Einschritt-Streckungsfaktoren entlang der (numerisch erzeugten, also Pseudo-) Trajektorie ergeben, sind für die Darstellungen rechts jeweils Einschritt-Streckungsfaktoren

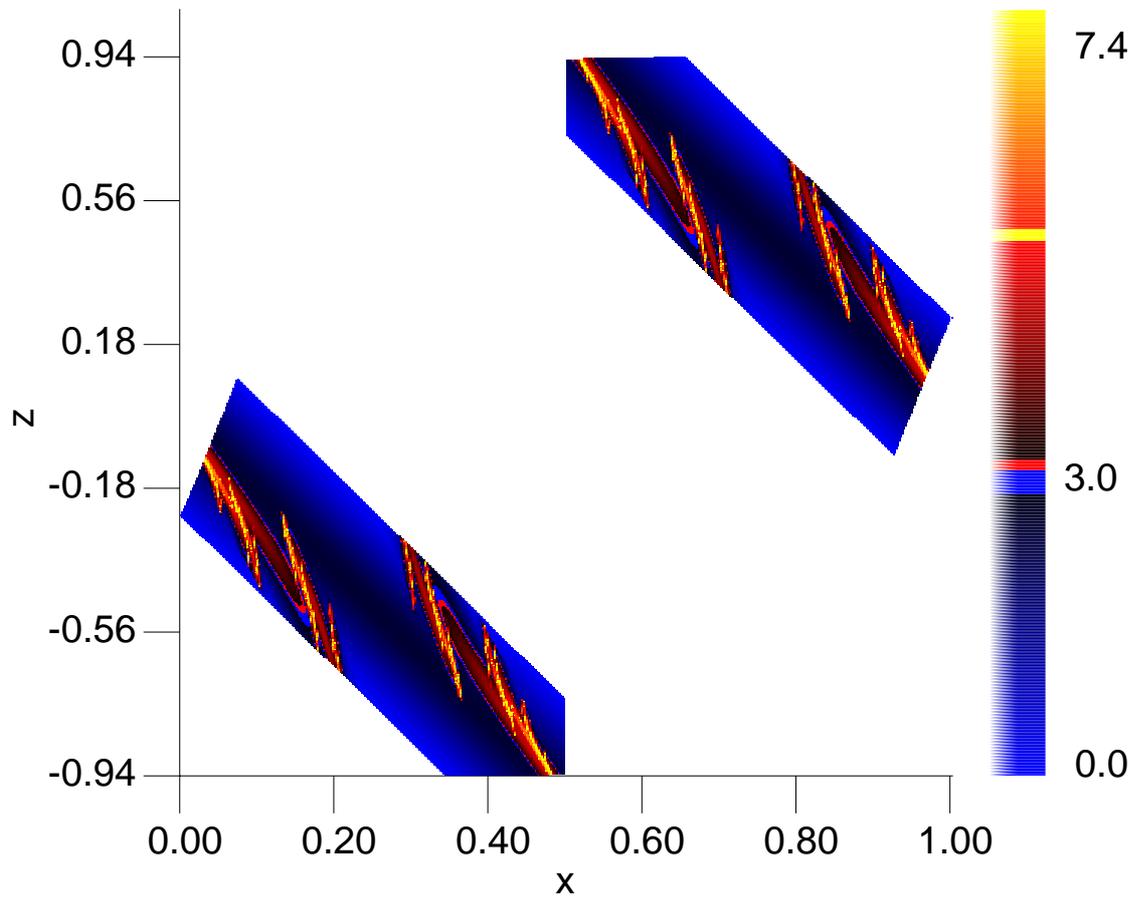


Abbildung 4.8: Punkte, an denen Expansionsphasen anfangen können und ihre Stärke λ_e für Bernoulli, $\gamma = 5$.

Diese Punkte liegen regelmäßig auf einem Gitter angeordnet, daher ist der dabei angetroffene Maximalwert 7.4 kein wirkliches Maximum (genau an den 2iPP ist der lokale Wert von λ_e unendlich).

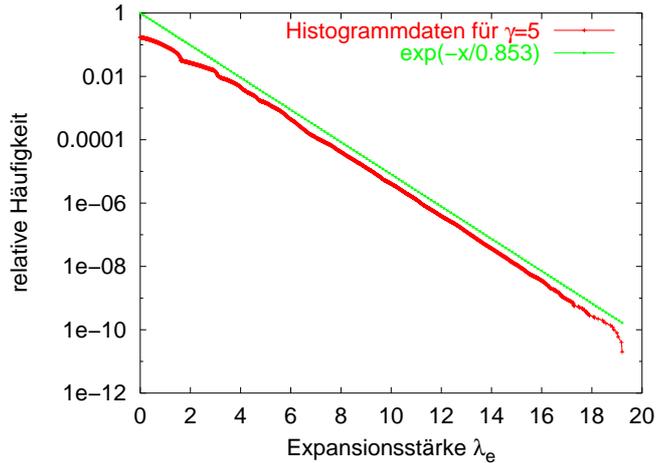


Abbildung 4.9: relative Häufigkeiten der Expansionsstärken für Bernoulli, $\gamma = 5$. Eine Weiche mit nachfolgender Expansionsstärke $\lambda_e \geq 10$ kommt offenbar in einer Trajektorie der Länge 10^6 im Mittel ca. 5 mal vor, d. h. ca. alle 200000 Iterationen.

mit zufälliger Reihenfolge, aber mit der jeweils für den Parameterwert richtigen Verteilung (*Surrogate*) benutzt worden⁶. Für große Parameterwerte, etwa $\gamma = 5$, stimmen beide Darstellungen gut überein, die Reihenfolge der Einschnitt-Streckungsfaktoren innerhalb der Verteilung ist also hinsichtlich der Expansionsstärken in guter Näherung zufällig.

Für diesen Fall sind, unabhängig von der Verteilung der Einschnitt-Streckungsfaktoren (so lange es Kontraktion und Expansion gibt und im Mittel die Kontraktion überwiegt), die Expansionsstärken exponentialverteilt (z. B. Abb. 4.11 für den extremen Fall von nur zwei möglichen Werten für $\lambda_n^{(1)}$).

Für kleinere γ sieht die aus den Surrogaten berechnete Verteilung zwar immer noch ähnlich aus, aber hier werden die Korrelationen offenbar wichtig, um das Verhalten der „echten“ Expansionsstärken zu erklären. Beispielsweise ist immer der größte Einschnitt-Streckungsfaktor gleich dem Parameter γ , d. h. die Expansionsstärke für einen Schritt (erste rote Linie) sättigt beim Wert $\ln \gamma$, jedoch besucht im Fall kleinerer γ die Trajektorie dieses Gebiet der größten Streckung niemals mehrere Male nacheinander; regelmäßige vertikale Linien mit Abstand $\ln \gamma$ gibt es hier nur bei den Surrogaten. Auch mit zwei- oder drei- schrittigen Expansionsphasen wird noch keine so große Expansion erreicht wie mit einem einzigen Schritt $\lambda_n^{(1)} = \ln \gamma$. Beispielsweise hat für das kleinste hier betrachtete $\gamma = 1.46$ der in den Attraktor eingebettete doppelt instabile PO der Periode 2 eine winzige Expansion von gerade $\lambda_n^{(1)} = 0.009$, d. h. erst nach 42 Iterationsschritten auf diesem Orbit wird $\ln \gamma = 0.38$ erreicht (man erinnere sich, daß der doppelt instabile PO $\{x_1, x_2\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ erst bei $\gamma = 1.441$ entsteht).

Hier wird ein großer Vorteil der deterministischen Methode (Statistik der Expansionsstärken) gegenüber dem Ansatz der Vorhersage der mittleren Beschattungszeiten aus der

⁶Surrogate werden in der nichtlinearen Zeitreihenanalyse häufig verwendet, um den deterministischen Gehalt von Daten zu testen.

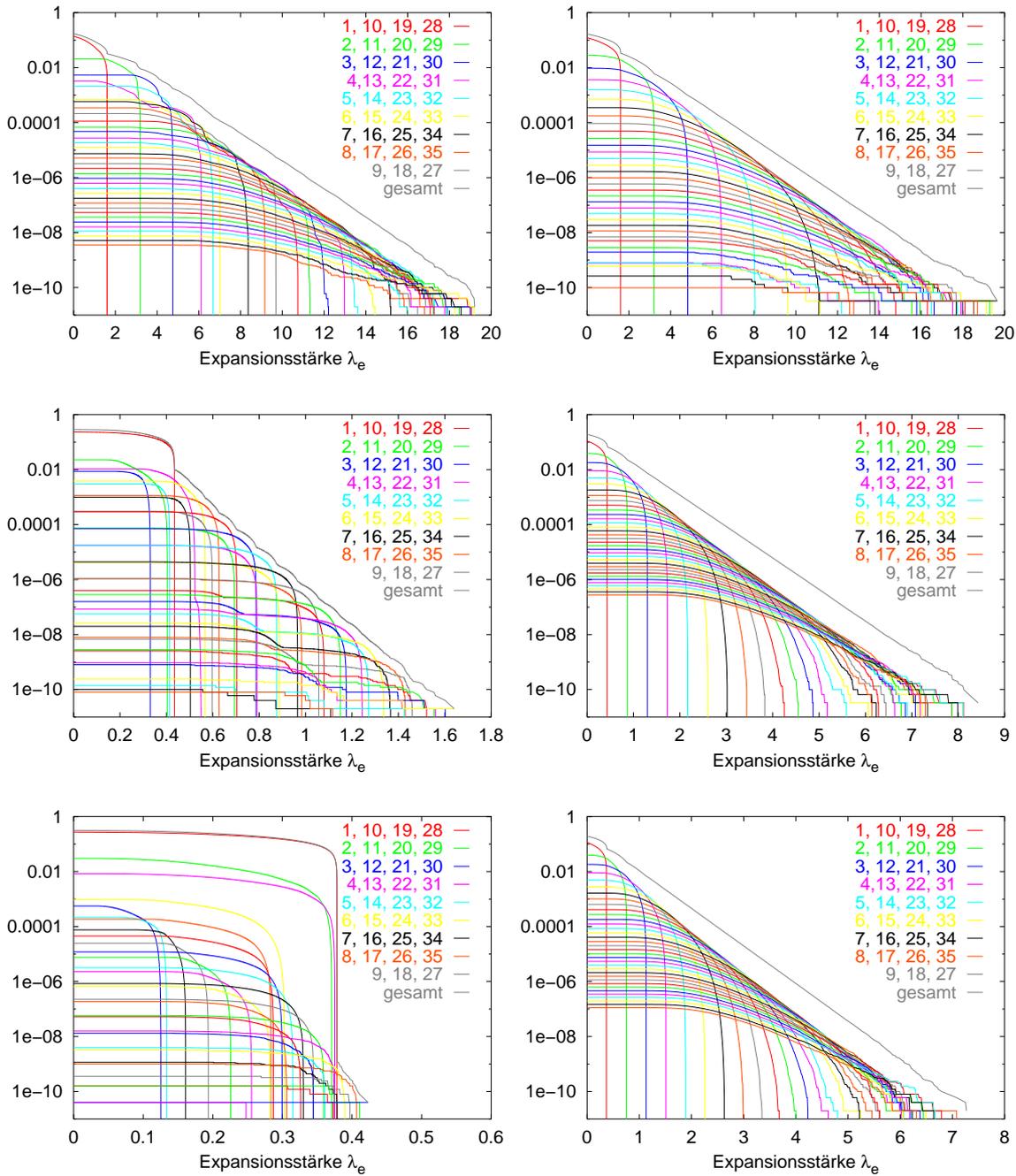


Abbildung 4.10: relative Häufigkeiten der Expansionsstärken für Bernoulli, insgesamt sowie aufgeschlüsselt auf die unterschiedlichen Längen (in Schritten) der Expansionsphase. Links die echten Verteilungen, rechts mit Surrogat (siehe Text). Von oben nach unten: $\gamma = 5$, $\gamma = 1.545$, $\gamma = 1.46$. Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen der horizontalen Achsen in den echten und in den aus den Surrogaten berechneten Verteilungen für $\gamma = 1.545$ und $\gamma = 1.46$.

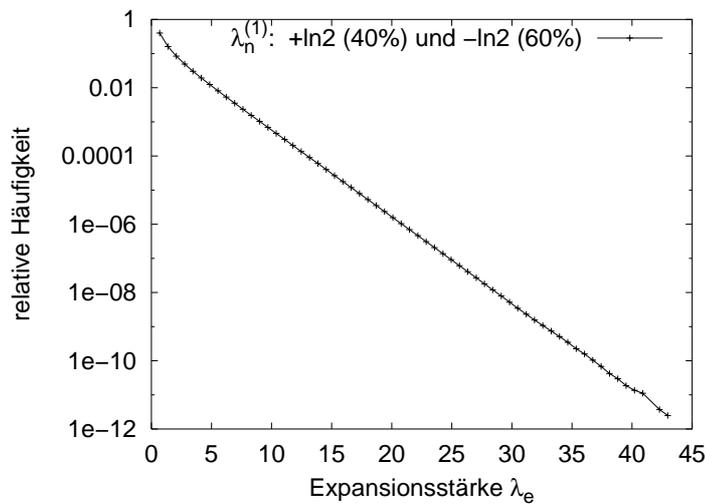


Abbildung 4.11: Verteilung der Expansionsstärken bei einer hypothetischen Verteilung der Einschnitt-Streckungsfaktoren von 40% 2, 60% $\frac{1}{2}$

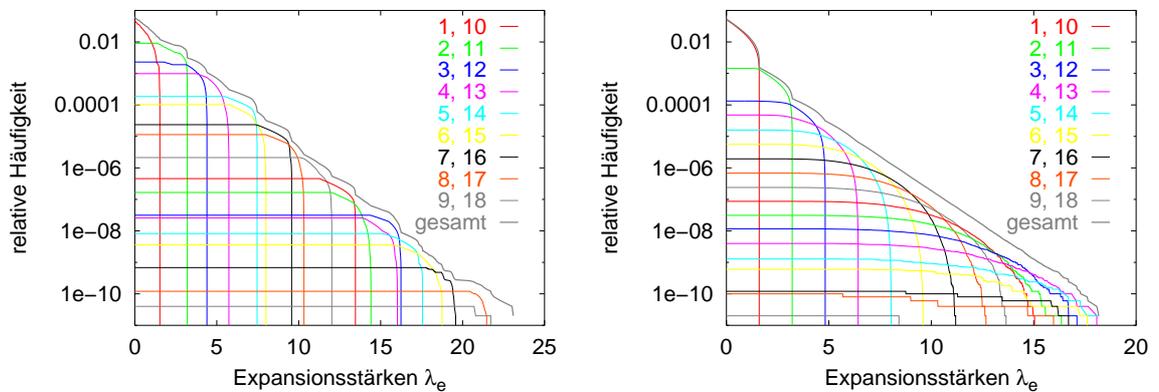


Abbildung 4.12: Verteilung der Expansionsstärken bei der quasiperiodischen Abbildung (links) und bei der von Zufallszahlen getriebenen sigmoiden Abbildung (rechts, beide mit $\gamma = 5$).

Für das rechte Bild sind nach (3.4) verteilte Zufallszahlen r_i in (3.2) eingespeist worden. Die Reihenfolge der auftretenden Einschnitt-Ljapunovexponenten ist damit nicht völlig zufällig, was den Unterschied zur Verteilung der Surrogate der Expansionsstärken (Abb. 4.10, Bild oben rechts) erklärt.

Verteilung der Kurzzeit-Ljapunovexponenten[?] deutlich. Die Verteilung der Expansionsstärken zeigt eine starke Abhängigkeit vom Parameter γ in der Nähe des Bifurkationsparameters γ_2 (Abb. 4.10, Bilder links in der Mitte und links unten), während sich die Verteilung der Kurzzeit-Ljapunovexponenten ebenso wie die Verteilung der Surrogate der Expansionsstärken in diesem Bereich kaum ändert.

Wie im Abschnitt 3.1 beschrieben, dominiert für $1.441 < \gamma \lesssim 1.6$ der doppelt instabile PO der Periode 2 (**2iPO2**) als der mit Abstand kürzeste die doppelt instabilen peridischen Orbits insgesamt. Es zeigt sich, daß es in diesem Parameterbereich (mit Ausnahme derer nahe dem doppelt instabilen PO der Periode 2) offenbar keine Punkte innerhalb der Attraktorgrenzen gibt, die

- Einschritt-expandierend sind und
- auf einem doppelt instabilen PO liegen.

Aus der Existenz des 2iPO2 folgt jedoch (siehe Abschnitt 3.1), daß \exists ein langer 2iPO, der die Instabilität in der Nähe des 2iPO2 aufammelt, indem er ihm einfach lange folgt. Da diese Orbits auch mindestens einmal durch Gebiete mit stabiler z -Dynamik kommen müssen, ist für den insgesamt positiven λ_z dieses PO ein langes Aufammeln von Instabilität notwendig (zumal für γ nicht viel größer als 1.441 nur sehr kleine $\lambda_n^{(1)}$ aufsummiert werden).

Man kann erwarten, daß die Verteilung der Expansionsstärken in jedem Fall letztlich (d. h. für sehr große λ_e bei sehr großen Iterationszeiten) von dem (oder den) 2iPO mit dem größten λ_z bestimmt wird. Die maximalen Expansionsstärken für Expansionsphasen einer bestimmten Länge in der Abb. 4.10 zeigen dies jedoch (noch) nicht: sie sind deutlich größer als die Vielfachen der $\lambda_n^{(1)}$ an den Punkten des 2iPO2 (da dieser symmetrisch ist, haben seine beiden Punkte dieselbe Instabilität).

Die Verteilungen sowohl der maximalen Expansionsstärken als auch der Surrogate lassen sich näherungsweise mit dem folgenden Ansatz beschreiben:

$$h(\lambda_e) = ae^{-\frac{\lambda_e}{b}} \quad (4.11)$$

Hierin bedeutet $h(\lambda_e)$ die relative Häufigkeit der Expansionsstärke λ_e . Der Anstieg der Fit-Geraden in der Abb. 4.10 wäre $-\frac{1}{b}$. Der Mittelwert der durch (4.11) beschriebenen Verteilung ist b . Die anschauliche Bedeutung dieses Mittelwertes ist die folgende. Das Anwachsen des Beschattungsabstandes bringt für jemanden, der eine Pseudotrajektorie numerisch erzeugt, die Notwendigkeit, genauer zu rechnen als die geforderte Ergebnisgenauigkeit. Um wieviel genauer er rechnen muß, hängt von der Zahl der Iterationen ab. Für die 10fache Anzahl von Iterationsschritten muß für eine typische Pseudotrajektorie (man kann Pech haben und in einer kurzen Pseudotrajektorie große Expansionsstärken finden) die Rechengenauigkeit um b Dezimalstellen größer sein als der geforderte Maximalabstand zwischen den Punkten der Pseudotrajektorie und der (unbekannten) beschattenden echten Trajektorie. In der Abb. 4.13 sind diese Mittelwerte b der Exponentialverteilungen der maximalen Expansionsstärken sowie der Surrogate zusammengefaßt dargestellt.

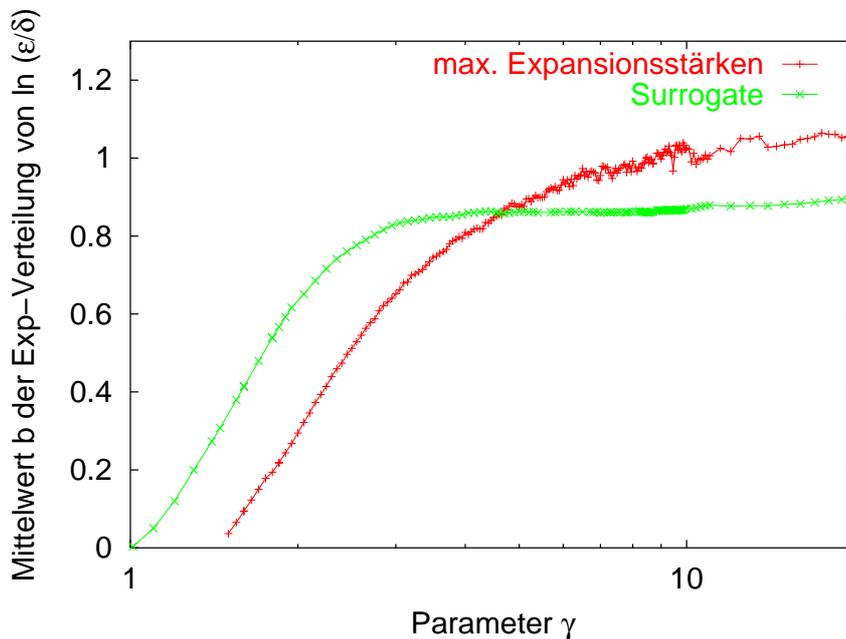


Abbildung 4.13: Mittelwerte der Exponentialverteilungen der Expansionsstärken und ihrer Surrogate als Funktion des Parameters γ im erweiterten (Bernoulli).

Für die Expansionsstärken wird der Mittelwert 0 für $\gamma \approx 1.441$ erreicht. Bei den Surrogaten ist die Information verlorengegangen, daß es für $\gamma < 1.441$ keine doppelt instabilen PO gibt. Hier wird der Mittelwert 0 für $\gamma = 1$ erreicht. Es ist zu sehen, daß für kleine γ ($1.5 \lesssim \gamma \lesssim 4$) durch die Aufhebung der deterministischen Korrelationen in der Zeitreihe der Einschnitt-Ljapunovexponenten (Verwendung der Surrogate) die Nichtbeschattbarkeit überschätzt wird. Hier unterdrücken die Korrelationen lange Folgen großer positiver Einschnitt-Ljapunovexponenten zugunsten von eher schnell abwechselnder Kontraktion und Expansion. Für $\gamma \gtrsim 1$ gibt es zwar schon positive Einschnitt-Ljapunovexponenten, aber noch keine beliebig starken Expansionsphasen. Andererseits wird für $\gamma \gtrsim 5$ die Expansionsstärke mit den Surrogaten sogar unterschätzt. Das bedeutet, daß lange Folgen stark positiver Einschnitt-Exponenten von der Dynamik bevorzugt werden. Man kann es auch so formulieren: bei den Surrogaten hängt der folgende Einschnitt-Exponent nicht von den vorhergehenden ab. Relativ dazu werden bei kleinen γ nach großen Einschnitt-Exponenten eher kleine folgen und umgekehrt (vermutlich weil es nur eine dauerhaft expandierende Phasenraumregion gibt, nämlich die um den $2iPO_2$, siehe die Argumentation in 4.3), bei großen γ folgen auf große Einschnitt-Exponenten offenbar eher wieder große und auf kleine folgen bevorzugt kleine Einschnitt-Exponenten.

4.4 Vergleich der beiden vorgestellten Methoden

Um zu überprüfen, ob beide Methoden miteinander kompatibel sind, wurden beide Programme schrittweise so modifiziert, daß sie *beide* im wesentlichen dasselbe ausrechneten. Zunächst wurde das Nichtbeschattbarkeitskriterium (4.4) durch die Bedingung „Beschattungsabstand $\varepsilon > \lambda_e \delta$ “, wobei das Kriterium λ_e und die Größe des Einschrittfehlers δ vorgegeben wurden. Für $\varepsilon \lesssim 0.01$ zeigte sich keine Abhängigkeit der Verteilung der Beschattungszeiten mehr von δ , sondern nur noch von λ_e . Das bedeutet lineares Regime. Im nächsten Schritt wurde dieselbe Methode auf Annäherung der Abweichungsvektoren durch Tangentialraumvektoren umgestellt, das Ergebnis änderte sich nicht vom vorherigen. Schwieriger war es, die Verteilung der Einschrittfehler lt. (4.6) mit der neuen Methode in Einklang zu bringen, kein Rauschen einzukoppeln, sondern nur einen am Punkt der Weiche gemachten Fehler zu verfolgen, so lange er durch lokal expandierende Dynamik verstärkt wird. Der schließlich gewählte Kompromiß bestand darin, in *jedem* Schritt *nicht zufällige* Einschrittfehler zu machen, also den ungünstigsten Fall zu verfolgen, nämlich in jedem Schritt $+\delta$ in positiver z -Richtung auf den Tangentialraumvektor zu addieren. Damit mußte aber auch das Kriterium zum Erkennen von Anfang und Ende einer Expansionsphase geändert werden. Wenn man in jedem Schritt δ addiert, kann der Einschrittfehler nie unter δ sinken, dann wäre die Expansionsphase nie zuende. Daher definieren wir einen **Pegel** ε_{\sim} als den Wert des Abstandes im Tangentialraum, der sich zwischen Trajektorie und Pseudotrajektorie einstellt, wenn in jedem Schritt ein Fehler derselben Größe δ gemacht wird und dieser durch die Multiplikation mit e^λ gerade wieder kompensiert wird:

$$\varepsilon_{\sim} = \varepsilon_{\sim} e^\lambda + \delta, \quad \varepsilon_{\sim} = \frac{\delta}{(1 - e^\lambda)} \quad (4.12)$$

Hierin ist λ der gemittelte Ljapunovexponent der kippelnden Richtung. Das Kriterium für eine Expansionsphase (siehe die Definition nach der Gleichung (4.10)) wird so modifiziert, daß der Einschritt-Ljapunovexponent $\lambda_n^{(1)}$ durch den Quotienten $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ ersetzt wird. Dieser hängt noch vom Ausgangswert ε_N ab; für diesen setzen wir ε_{\sim} . Die Häufigkeit der Expansionsphasen in einer langen Trajektorie wird korrekt berechnet, aber die so definierte Expansionsstärke stimmt nur bis auf einen konstanten Faktor mit dem Quotienten $\frac{\varepsilon}{\delta}$ überein. Siehe dazu die Abb. 4.7.

4.5 Quasiperiodische Abbildung

Die quasiperiodische Abbildung (QA) zeigt ein außerordentlich interessantes Verhalten hinsichtlich der (Nicht-) Beschattbarkeit ihrer kippelnden Richtung.

Einerseits findet man numerisch (Abb. 4.12), daß die maximalen Expansionsstärken in typischen Pseudotrajektorien ebenso wie beim erweiterten Bernoulli-Shift oder bei der von Zufallszahlen getriebenen Sigmoid-Abbildung exponentialverteilt sind.

Zusammenfassend vergleichen wir die beiden Ansätze, nämlich die Beschattungsdauer bzw. die Expansionsstärke zu ermitteln:

<p>Methode aus 4.1: Beschattungsdauer</p>	<p>Methode aus 4.3: Expansionsstärke</p>
<ul style="list-style-type: none"> • ε ist ein für allemal festgelegt (Ausdehnung des Attraktors) • Rechnung muß für jedes δ wiederholt werden 	<ul style="list-style-type: none"> • es wird $\frac{\varepsilon}{\delta}$ in linearer Näherung betrachtet
<ul style="list-style-type: none"> • Statistik der Beschattungsdauer als Summe von Wartezeit (auf eine genügend starke Expansionsphase) in einer Kontraktionsphase plus Zeit in der Expansionsphase 	<ul style="list-style-type: none"> • Statistik der Wartezeit auf eine genügend starke Expansionsphase in Abhängigkeit von der verlangten Expansionsstärke. Der Anteil der Beschattungszeit in der Expansionsphase ist vernachlässigt
<ul style="list-style-type: none"> • viel mehr Zufall: überall zufällige Einschrittfehler 	<ul style="list-style-type: none"> • viel weniger Zufall: nur am Punkt der Weiche ein definierter Einschrittfehler
<ul style="list-style-type: none"> • nach allen möglichen Schattentrajektorien gesucht 	<ul style="list-style-type: none"> • die Schattentrajektorie muß einen langen kontrahierenden Teil mit der zu beschattenden Pseudotrajektorie gemeinsam haben
<ul style="list-style-type: none"> • je Parameterwert und Rauschniveau wurde die Beschattungsdauer aus 10000 Beschattungsversuchen gemittelt (d. h. es wurde ebenfalls der Exponent einer Exponentialverteilung ermittelt) 	<ul style="list-style-type: none"> • hierfür reicht es aus, je Parameterwert eine einzige Pseudotrajektorie zu erzeugen und für jede Expansion entsprechend der Expansionsstärke einen Eintrag in ein Histogramm zu machen

Tabelle 4.1: Vergleich der Algorithmen zur Quantifizierung der Nichtbeschattbarkeit. Insgesamt ist die Methode der Statistik der Streckungsfaktoren für die gleiche Genauigkeit um ein vielfaches schneller und ist zu bevorzugen, insoweit nicht eine spezielle Fragestellung (etwa für eine vorgegebene Verteilung von Einschrittfehlern die Verteilung der Beschattungszeiten zu ermitteln) die Verwendung der anderen Methode erfordert.

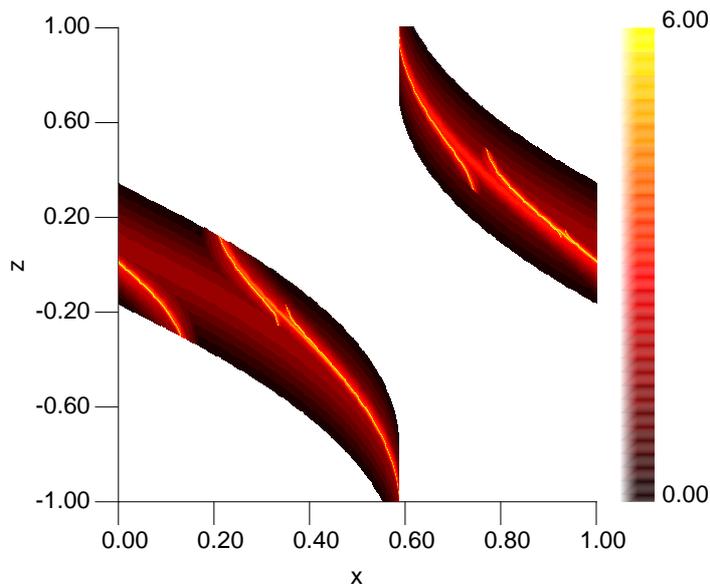


Abbildung 4.14: Punkte, an denen Expansionsphasen anfangen können und ihre Stärke λ_e für die QA, $\gamma = 5$.

Andererseits erwartet man, daß das systematische Durchlaufen des x -Bereiches und die Nichtexistenz periodischer Orbits verhindert, daß die Trajektorie beliebig lange im expandierenden Bereich bleibt. Um den expandierenden Bereich insgesamt abzutasten, unabhängig davon, wie selten eine Trajektorie ihn besucht, haben wir in der Abb. 4.14 die lokalen Expansionsstärken λ_e auf einem 512×512 -Gitter gezeichnet. Die Punkte der stärksten Instabilität sind hier auf und in der Nähe von einigen Linien verteilt. Diese Linien scheinen nicht fraktal, sondern eindimensional zu sein. Je näher der Punkt an der Linie liegt, desto instabiler ist er.

Ein weiterer Einblick in die instabilsten Regionen im Phasenraum der QA ergibt sich aus der Betrachtung von rückwärts iterierten Punkten. Unter der Rückwärtsiteration werden instabile⁷ Punkte zu stabilen und umgekehrt. Wenn es eine unter Rückwärtsiteration stabile invariante Menge im Phasenraum gäbe, würde es ausreichen, in dieser Menge eine Trajektorie vorwärts zu iterieren. Diese Trajektorie hätte eine unendliche Expansionsstärke. Wenn man zeigen könnte, daß diese Menge im Attraktor liegt, dann wäre damit die Nichtbeschattbarkeit gezeigt.

Es gibt eine Menge im Phasenraum, die unter Rückwärtsiteration stabil ist (Abb. 4.15), aber sie ist nicht invariant. In der Simulation gelang es nicht, über länger als 178 Iterationen rückwärts zu iterieren (Abb. 4.16).

In der Abb. 4.14 sieht man offenbar eine eindimensionale Menge als die Menge der in-

⁷Die QA hat, anders als die beiden anderen Modellsysteme, keine immer kontrahierende und keine immer expandierende Richtung. Sie besitzt eine Richtung (x -Richtung), die weder kontrahierend noch expandierend ist, ihr Ljapunovexponent in dieser Richtung ist immer gleich null. Daher unterscheidet die Stabilität der z -Richtung hier nicht doppelt und einfach instabil, sondern nur stabil und instabil.

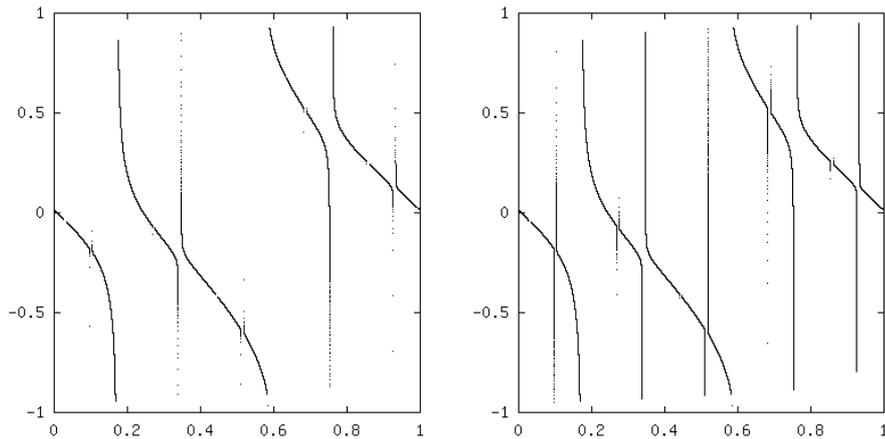


Abbildung 4.15: Unter Rückwärtsiteration stabile Punkte der QA ($\gamma = 5$)
 Links sind 10^5 , rechts 10^8 Punkte gezeichnet. Hierzu wurden jeweils zufällige Anfangsbedingungen zuerst 10 Schritte lang (Transiente) rückwärts iteriert, um auf die instabile Menge zu gelangen, danach alle weiteren Urbildpunkte gezeichnet, bis zu einem Schritt vor dem Verlassen des Phasenraumes, danach die nächste zufällige Anfangsbedingung bearbeitet, usw. bis zum Erreichen der Gesamtpunktzahl.

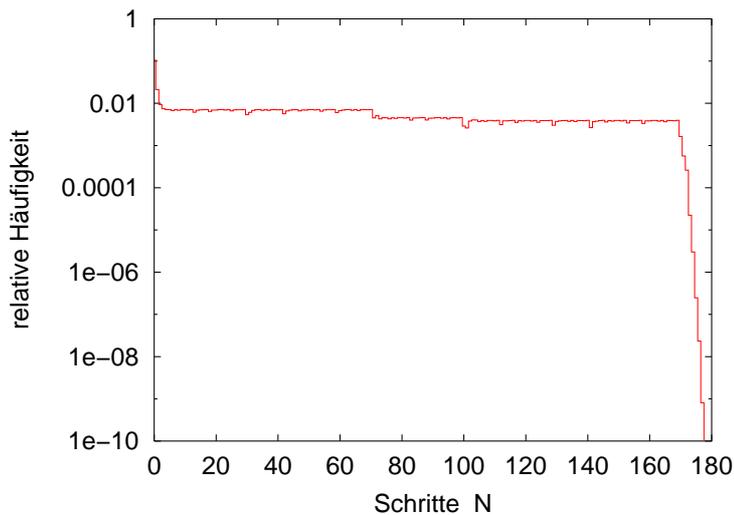


Abbildung 4.16: Histogramm der maximal möglichen Dauer der Rückwärtsiteration vor Verlassen des Phasenraumes (QA, $\gamma = 5$).

Für 1 bis 3 Schritte sind die zufälligen Anfangsbedingungen offenbar einfach außerhalb des Attraktorbereiches gewesen, diese Iterationen waren keine instabilen Punkte. Aus dem Plateau (4 bis 169 Schritte) schließen wir, daß die instabilen Punkte maximal 169 Schritte rückwärts iteriert werden können, bevor sie den Phasenraum verlassen, und daß zufällige Anfangspunkte zu jedem dieser 169 Schritte die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, auf die instabile Menge zu treffen. Die eher vereinzelt längeren Iterationsdauern muß es geben; hier fielen offenbar die Anfangspunkte zufällig sehr nahe an Attraktorpunkte.

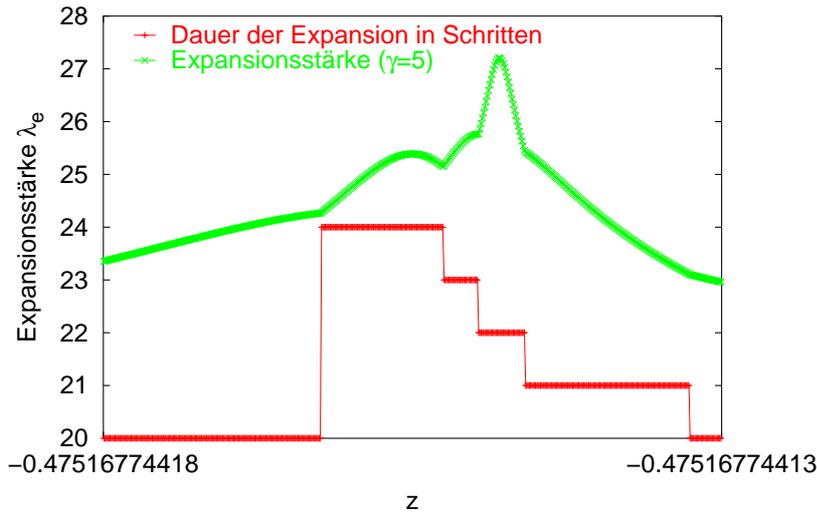


Abbildung 4.17: Schnitt entlang der z -Richtung durch das „Gebirge“ (Abb. 4.14) der lokalen Expansionsstärken der QA ($\gamma = 5$) bei $x_{33} = 0.469$.

Die maximale Expansionsstärke der quasiperiodischen Abbildung ist groß, aber dennoch endlich. Die Trajektorie hat hier bereits seit $x_0 = 0.8$ in 33 Schritten eine Expansionsstärke von $\approx +38$ akkumuliert. Damit ist die gesamte maximale Expansionsstärke von $x_0 = 0.8$ ausgehend gleich 65, bei einer maximalen Expansionsdauer von 57 Schritten.

stabilsten Punkte (im Bild gelb). Eine genauere Untersuchung dieses Grates, d. h. ein Schnitt durch das Gebirge in z -Richtung und immer weiteres Zoomen auf den Grat liefert zunächst (willkürlich ausgewählt: $x = 0.8$) immer größere Expansionsstärken bei immer feinerer Auflösung. Wenn das gezoomte z -Intervall nur noch eine Länge kleiner als 10^{-16} hat, ist eine Grenze des numerisch machbaren erreicht (dann ist die Trajektorie 30 Iterationsschritte lang in expandierendem Gebiet). Man kann aber dieselbe Untersuchung weiter fortsetzen, indem man auf den Grat an dem x -Wert des 33sten Bildes von $x = 0.8$ zoomt. Und hier findet man, daß die Expansion *doch* endlich ist. Das nicht singuläre Maximum in der Abb. 4.17 zeigt, weiter braucht man nicht zu zoomen. In Abb. 4.18 sind die Bildpunkte (erstes bis 22stes Bild) des Punktes dargestellt, der das Maximum in Abb. 4.17 erzeugt. Man kann sehen, auf welche Weise die Vorwärtsiteration im instabilen Gebiet genau auf den durch Rückwärtsiteration gefundenen instabilen Punkten viele Schritte lang hin- und herspringt. Dieses Springen ist endlich, die letzten Punkte können durch Variation der Anfangsbedingungen nicht mehr auf eine der instabilen Linien gebracht werden.

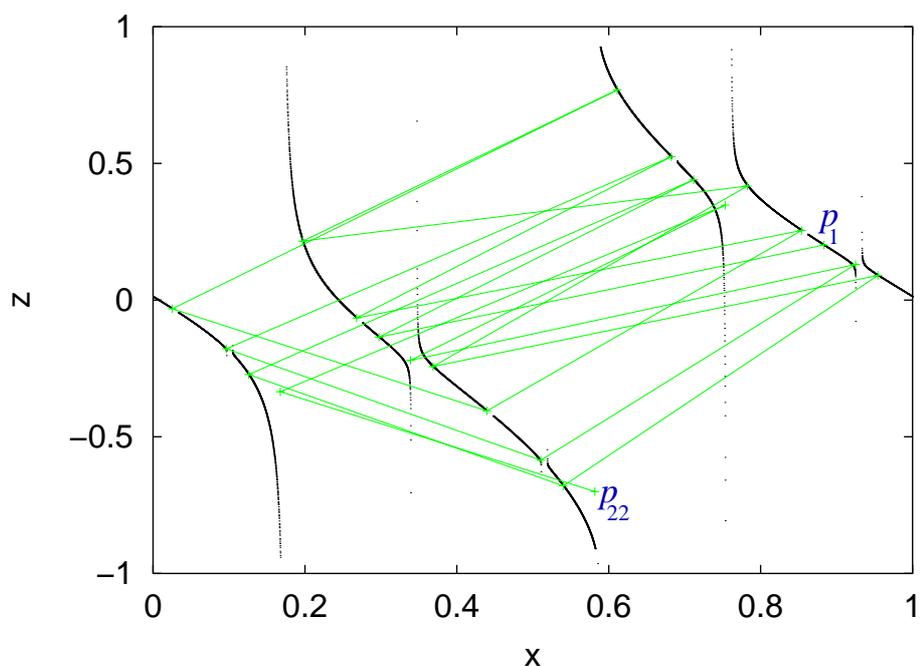


Abbildung 4.18: Vorwärtsiteration einer Trajektorie von einem Punkt großer Expansionsstärke aus (QA, $\gamma = 5$).

Die grünen Linien verdeutlichen die zeitliche Abfolge der Trajektorienpunkte von p_1 bis p_{22} . Mit eingezeichnet sind instabile Punkte wie in der Abb. 4.15. Die Trajektorie vermag nur endlich lange auf der instabilen Menge zu verbleiben. Die letzten Punkte der Trajektorie liegen nicht mehr genau auf der instabilen Menge. Durch Variation des Anfangs- z konnte keine verbesserte Übereinstimmung erreicht werden. Bei Verschiebung des Anfangs- z nach unten verschoben sich weniger die z -Werte der letzten Punkte nach unten zu den instabilen Punkten hin als vielmehr andere Punkte nach unten von „ihren“ instabilen Punkten weg.

Kapitel 5

Zusammenfassung, Ausblick

Die Untersuchungen zur Nichtbeschattbarkeit durch Dimensionsvariabilität in dieser Arbeit sind in zwei Schritte gegliedert. Zunächst mußte der Nachweis erbracht werden, daß Dimensionsvariabilität vorliegt, und danach wurde die Nichtbeschattbarkeit untersucht.

Im Kapitel 3 ist für den erweiterten Bernoulli-Shift, d. h. für die von einem Bernoulli-Shift getriebene Sigmoid-Abbildung, mit mehreren numerischen Methoden belegt, daß sowohl einfach als auch doppelt instabile Periodenpunkte in den Attraktor dieser Abbildung eingebettet sind. Ist dies tatsächlich der Fall, so zeigt diese Abbildung Dimensionsvariabilität der instabilen Mannigfaltigkeit. Insbesondere wird eine Methode vorgeschlagen, ganze Kurven auf einmal vorwärts und rückwärts zu iterieren. Die Methode ermöglicht es analog zur Methode des Poincaréschnittes für Flüsse, einen Schnitt der Codimension eins im Phasenraum festzulegen und aus der Lage der Schnittpunkte wichtige Schlüsse über das System zu ziehen. Durch die Erniedrigung der Dimension um eins kann das Gesamtproblem vereinfacht werden. Im vorliegenden Fall wurde mit dieser Methode die Dimensionalität einer Schnittfläche im Attraktor untersucht und sehr viel bessere numerische Evidenz für die Dichtheit des Attraktors entlang der Schnittlinie erhalten als mit anderen Methoden. Man kann schlußfolgern, daß der Attraktor eine Teilfläche des Phasenraumes dicht füllt. Damit sind alle Periodenpunkte auf dieser Fläche in den Attraktor eingebettet; die Dimensionsvariabilität ist (im Rahmen der Möglichkeiten numerischer Methoden) gezeigt.

Einige der Untersuchungen wurden auch auf die erweiterte Cat map (von einer Cat map getriebene Sigmoid-Abbildung) angewandt. Diese Abbildung wurde von mir ursprünglich zuerst untersucht, da sie den Vorteil besitzt, invertierbar zu sein. Deshalb schien sie zum Studium der Mannigfaltigkeitsstruktur von Abbildungen mit Dimensionsvariabilität besonders geeignet. Ihre Handhabung erwies sich jedoch als schwierig. Ihre periodischen Orbits können ebenso wie beim erweiterten Bernoulli-Shift durch Iteration numerisch ermittelt werden, da jeder periodische Orbit der kombinierten Abbildung auch ein periodischer Orbit der Antriebs-Abbildung sein muß. Die Periodenpunkte von Cat map und Bernoulli-Shift sind analytisch berechenbar. Auch für die erweiterte Cat map gibt es Hinweise, daß beide Kategorien instabiler periodischer Orbits (einfach und doppelt instabile)

in ihren Attraktor eingebettet sind. Nichtsdestoweniger findet die Frage, auf welche Weise die eindimensionale instabile Mannigfaltigkeit der einen mit der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der anderen Periodenpunkte koexistiert, eine erstaunlich einfache Antwort. Für die Cat map gibt es eine Richtung (die kippelnde, z -Richtung), die gleichzeitig zur stabilen Mannigfaltigkeit der einfach instabilen Periodenpunkte und zur instabilen Mannigfaltigkeit der doppelt instabilen Periodenpunkte gehört. Für die Cat map ebenso wie für den Bernoulli-Shift liegt jeder doppelt instabile Periodenpunkt auf der Verbindungslinie zweier einfach instabiler Periodenpunkte zwischen beiden. Jeder Punkt auf dieser Verbindungslinie zwischen einem der einfach instabilen und dem doppelt instabilen Periodenpunkt wird von ersterem angezogen und von letzterem abgestoßen; somit gehört diese Linie ebenso zur instabilen Mannigfaltigkeit des doppelt instabilen wie zur stabilen Mannigfaltigkeit des einfach instabilen Periodenpunktes.

Es wurde eine quasiperiodische Abbildung eingeführt, die keine periodischen Orbits hat und daher auch nicht dimensionsvariabel sein kann. Sie ist invertierbar. Sie besitzt ebenfalls einen global anziehenden Attraktor. Dieser ähnelt dem des erweiterten Bernoulli-Shifts. Die Rückwärtsiteration der quasiperiodischen Abbildung besitzt keinen Attraktor, vielmehr werden zufällig ausgewählte Punkte unter Rückwärtsiteration zunächst in eine Menge abgebildet, die der Menge der doppelt instabilen Periodenpunkte des erweiterten Bernoulli-Shifts ähnelt. Diese Menge ist allerdings nicht invariant; unter fortgesetzter Rückwärtsiteration werden alle ihre Punkte aus dem Phasenraum heraus abgebildet.

Nachdem die Dimensionsvariabilitäts-Eigenschaften diskutiert sind, wird im Kapitel 4 ein Überblick gegeben über bisher bekannte und neue Methoden, die Nichtbeschattbarkeit aufgrund des Vorhandenseins einer kippelnden Richtung, d. h. einer abwechselnd kontrahierenden und expandierenden Richtung identifizieren und quantifizieren. Dimensionsvariabilität ist ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer solchen Richtung. Es gibt dann in den Attraktor eingebettet periodische Orbits mit k und andere mit $k + 1$ instabilen Richtungen ($k \geq 1$). Für die drei untersuchten Modellsysteme ist $k = 1$. Die kippelnde Richtung ist die, die für die einen eingebetteten Orbits stabil und für die anderen instabil ist. Der Ljapunovexponent der kippelnden Richtung fluktuiert um null. Es gibt dann in der Zeitreihe des entsprechenden Kurzzeit-Exponenten beliebig lange Abschnitte, über die der Exponent insgesamt negativ ist, in denen die Trajektorie einem einfach instabilen periodischen Orbit folgt. Abweichungen von der Trajektorie in dieser Richtung werden hier kontrahiert. Ebenso gibt es beliebig lange Abschnitte mit positivem Kurzzeit-Exponenten, wo die Trajektorie einem doppelt instabilen periodischen Orbit folgt. Hier wachsen Abweichungen in dieser Richtung exponentiell an. Der Exponent kann jeweils beliebig viel Stabilität bzw. Instabilität akkumulieren.

Unsere erste Methode der quantitativen Charakterisierung der Nichtbeschattbarkeit besteht in der Statistik der Beschattungszeiten.

Die Beschattungszeiten sind nach Ablauf der Mindestbeschattungsdauer in sehr guter Näherung exponentialverteilt. Die Mittelwerte dieser Verteilungen skalieren mit der Größe des Einschnittfehlers im Grenzwert kleiner Fehler nach einem Potenzgesetz. Die Exponenten sind nicht universell, sondern hängen vom (von den) Parameter(n) der Abbildung

ab. Kleine Beschattungszeiten sind sehr viel häufiger als große.

In allen Betrachtungen sind nur Einschnittfehler in der kippelnden Richtung betrachtet; auch die Möglichkeit, daß durch Korrekturen in einer anderen als der kippelnden Richtung Verbesserungen der globalen Beschattbarkeit erreicht werden können, wurde nicht betrachtet.¹

Ausgangspunkt unserer zweiten Methode der Quantifizierung der Nichtbeschattbarkeit ist die Beobachtung, daß bei Vorliegen einer beliebig stark kippelnden Richtung ein einziger Einschnittfehler für die Nichtbeschattbarkeit wesentlich verantwortlich ist, nämlich einer, der nach einer Kontraktions- und vor einer Expansionsphase gemacht wird. Im in den Beispielen zutreffenden Fall einer überwiegend kontrahierenden kippelnden Richtung (für den Fall einer überwiegend expandierenden kippelnden Richtung gilt eine analoge Argumentation) wird ein solcher Einschnittfehler mit einer den (sehr langen) kontrahierenden Teil beschattenden Trajektorie optimal beschattet. Der Beschattungsabstand ist dann, in linearer Näherung und auf den Einschnittfehler normiert, gerade der größte aufmultiplizierte Streckungsfaktor, bevor die Trajektorie wieder in ein kontrahierendes Gebiet kommt. Beliebige stark kippelnde Richtungen haben beliebige große Streckungsfaktoren. Daher ist, um einen vorgegebenen Beschattungsabstand einzuhalten, kein Einschnittfehler klein genug; die Pseudotrajektorie ist nicht beschattbar.

Die numerischen Ergebnisse unterstreichen, daß die von Bernoulli-Shift und Cat map getriebenen Sigmoid-Abbildungen nicht beschattbar sind. Die Streckungsfaktoren sind ebenfalls exponentialverteilt, große Streckungsfaktoren kommen seltener vor als kleine. Das stimmt mit dem bei der ersten Methode beobachteten Skalierungsverhalten überein. Für dieses Skalierungsverhalten ist in der Literatur eine Näherungsformel angegeben, deren Gültigkeit sich beim erweiterten Bernoulli-Shift aber nicht bestätigen ließ.

Der Einfluß der Autokorrelation der Einschnitt-Streckungsfaktoren wurde studiert, indem zum Vergleich Surrogate derselben Verteilung erzeugt und mit derselben Auswertungsmethode verarbeitet wurden. Hier wird der Unterschied zwischen einer gelegentlich expandierenden Richtung mit endlicher maximaler Expansion und einer beliebig stark kippelnden Richtung deutlich. Die Vernachlässigung der Autokorrelation würde zur Verwischung des Unterschiedes zwischen Dimensionsvariabilität und gelegentlicher Expansion, so wie sie beim erweiterten Bernoulli-Shift bei Parametern $1 < \gamma < 1.441$ auftritt, führen. In diesem Parameterbereich ist der Unterschied zwischen beiden Ergebnissen daher am deutlichsten.

Die quasiperiodische Abbildung zeigt mit den beschriebenen Methoden dasselbe Verhalten wie der erweiterte Bernoulli-Shift und die erweiterte Cat map. Da sie aber anders als die beiden anderen Abbildungen keine eingebetteten periodischen Orbits besitzt und da für die untersuchten Parameter $\omega = \sqrt{2} - 1$ und $\gamma = 5$ der instabile Bereich bei Rückwärtsiteration nie für länger als 169 Schritte besucht wurde, können die Expansions-

¹Eine Beschattung kann unter Zuhilfenahme von Korrekturen in der anderen Richtung (einer wenig expandierenden Richtung) unter Umständen dennoch erreicht werden. Denn hier können kleine Korrekturen beispielsweise in der x -Richtung diese noch beschattbar lassen, auf die z -Richtung aber einen weitaus größeren Einfluß haben (weil $\partial z/\partial x$ groß ist).

stärken nicht beliebig groß werden. Tatsächlich gelang es, die Endlichkeit der scheinbar beliebig großen Expansionsstärke zumindest an ausgewählten Punkten zu zeigen. An diesen ist die Expansionsstärke in der Größenordnung 65 , was einen Streckungsfaktor von $e^{65} \approx 10^{28}$ bedeutet. Die quasiperiodische Abbildung ist demnach mathematisch gesehen beschattbar, aber für praktische Belange als nicht beschattbar anzusehen. Um sie erfolgreich zu beschatten, müßte die Rechengenauigkeit mindestens um 28 Stellen größer sein als die geforderte Genauigkeit des Ergebnisses.

Alle Untersuchungen im Kapitel 4 sind an Abbildungen mit einer überwiegend kontrahierenden kippelnden Richtung gemacht. Die Schlußfolgerungen gelten für Abbildungen mit einer überwiegend expandierenden Richtung ebenso. Anstelle der Expansionsstärke nach einer Weiche ist dann die Kontraktionsstärke vor einer Weiche die ausschlaggebende Größe.

Zusammenfassend läßt sich sagen:

- aus Dimensionsvariabilität folgt typischerweise Nichtbeschattbarkeit
- Nichtbeschattbarkeit bedeutet zusätzlich (zur Ergebnisgenauigkeit) benötigte Rechengenauigkeit. Die Zahl der zusätzlich benötigten Dezimalstellen wächst linear mit dem Logarithmus der Iterationsdauer.
- die für den erweiterten Bernoulli-Shift benötigte zusätzliche Rechengenauigkeit variiert zwischen weniger als einer (kleine γ) und mehr als 10 Dezimalstellen ($\gamma \geq 10$) für 10^{10} Iterationen
- ein ähnlicher Mechanismus wirkt in der quasiperiodischen Abbildung: obwohl formal beschattbar, zeigt sie in der Praxis dasselbe Verhalten wie der Bernoulli-Shift.

Im Laufe der Arbeit am Thema Dimensionsvariabilität haben sich weiterführende Fragen ergeben, für deren Beantwortung das in dieser Arbeit entwickelte Instrumentarium von Nutzen sein kann.

Zur Arbeit an einer dreidimensionalen, invertierbaren Abbildung bietet sich aus heutiger Sicht mehr noch als die Cat map die Bäckertransformation als die natürliche invertierbare Erweiterung des Bernoulli-Shifts an (beide Abbildungen haben die identische x -Dynamik und exakt dieselben periodischen Orbits). Als Ausgangskurve bietet sich jeweils die instabile Mannigfaltigkeit eines in den Attraktor eingebetteten einfach instabilen Periodenpunktes an. Eine außerordentlich interessante Fragestellung in diesem Zusammenhang wäre, ob sich die oben genannte Methode zur Reduktion der Dimensionalität auch in mehreren Stufen anwenden läßt. Die Methode der Iteration ganzer Kurven auf quasiperiodische Abbildungen auszudehnen, wäre ebenfalls sehr interessant.

Weiterhin sollten die Methoden auch an allen in der Literatur häufig verwendeten Beispielsystemen getestet werden. Zu diesen gehören die Torus map von Kostelich et al.[22], die gekoppelten Oszillatoren beispielsweise von Barreto und So[3] und die Doppelpendel-Abbildung[38] für Dimensionsvariabilität sowie die quasiperiodische Abbildung aus [8]. Schließlich kann auch angedacht werden, retardierte Systeme damit zu untersuchen.

Danksagung:

Diese Promotion entstand in Betreuung und enger Zusammenarbeit mit Priv.-Doz. Dr. Holger Kantz. Ihm gilt mein allergrößter Dank für die Unterstützung, das Interesse und die Zeit (auch viel Freizeit war dabei), die er in den vergangenen fast 4 Jahren meiner Arbeit widmete. Auf seine Hilfe konnte ich immer zählen. Er gab der Arbeit das Thema und wenn es nötig war, auch richtungsweisende und -ändernde Impulse, ohne mir aber etwas vorzuschreiben. Die Diskussionen mit ihm schätze ich als außerordentlich hilfreich, interessant und angenehm.

Außerdem danke ich den anderen jetzigen und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Nichtlineare Zeitreihenanalyse am Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme in Dresden, Dr. Mickael Antoni, Dr. Gianaurelio Cuniberti, Elisangela Ferretti Manfra, Dr. Rainer Hegger, Priv.-Doz. Dr. Wolfram Just, Dr. Thomas Schreiber, Dr. Frank Schmüser, Tobias Letz, Dr. Lars Jaeger, Dr. Eckehard Olbrich, Dr. Renate Wackerbauer (auch für's Keksebacken), Dr. Ralf-Peter Kapsch, Dr. Martin Bünner, Dr. Christian Rödenbeck und Lorenzo Matassini für das angenehme Arbeitsklima und viele nützliche oder einfach nur schöne Diskussionen über nichtlineare Dynamik, Physik, aber auch Fragen des täglichen Lebens wie z. B. Argentinischen Tango. Ich danke allen anderen lieben Leuten hier am Max-Planck-Institut für die wunderbare internationale Atmosphäre, in der ich auch viele nichtphysikalische Dinge kennenlernen konnte, so z. B. UNIX (danke Hubert Scherrer!) und Mate (danke Dr. Juliana Engelmann und Dr. Gilberto Corso!). Mein besonders herzlicher Dank gilt auch dem Gründungsdirektor des MPIPKS, Prof. Dr. Peter Fulde, ohne den das Institut nicht wäre, was es ist und ohne den auch ich nicht hier wäre.

Herzlichen Dank auch an Martina Hentschel und an meine Eltern für das last-minute-Korrekturlesen eines wichtigen Teils der Arbeit.

Schließlich bedanke ich mich –einfach für alles– bei meinen Eltern und bei meinen WG-Mitbewohnern Ute Seidel, Katharina Odrich und Torsten Abel.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Doppelpendel (schematisch): (a) stabiler Fixpunkt, (b) und (c) einfach instabile Fixpunkte, (d) doppelt instabiler Fixpunkt	6
2.1	Beispiel für exponentielle Divergenz von Trajektorien in einer Abbildung (Ausschnitt aus dem Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts, zur Def. siehe Kap. 3).	10
3.1	Zweite Iteration der z -Dynamik für einen gegebenen 2-periodischen Orbit der x -Dynamik (Bernoulli, $\gamma = 5$)	26
3.2	Pitchfork-Bifurkation des Fixpunktes $r = 0$ bei $\gamma = 1$ (Bernoulli)	27
3.3	Tangenten-Bifurkation eines PO3 und eines PO2 (Bernoulli).	28
3.4	Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts ist für die Parameter $\gamma = 2.5$ mit 10^5 (links) bzw. 10^8 (rechts) Trajektorienpunkten.	30
3.5	Attraktor des erweiterten Bernoulli-Shifts ist für die Parameter $\gamma = 7$ und $\gamma = 20$ mit 10^5 bzw. 10^8 Trajektorienpunkten.	31
3.6	Bilder der linken und rechten Hälften des Attraktorrandes des erweiterten Bernoulli-Shifts für die Parameter a) $\gamma = 1.48$, b) $\gamma = 1.51$, c) $\gamma = 1.8$ und d) $\gamma = 3.3$ (von links oben nach rechts unten)	33
3.7	Ljapunovexponenten und Kaplan-Yorke-Dimension des erweiterten Bernoulli-Shifts	34
3.8	Kaplan-Yorke- und Informationsdimension des erweiterten Bernoulli-Shifts	35
3.9	Stabilität der Attraktorpunkte beim Parameter $\gamma = 5$ (Bernoulli)	36
3.10	Zur Berechnung der punktweisen Dimension des Attraktors (Bernoulli, $\gamma = 5$) für einige doppelt instabile PP.	38
3.11	Zur Berechnung der punktweisen Dimension des Attraktors (Bernoulli, $\gamma = 5$) für einige einfach instabile PP sowie einen Punkt aus einer chaotischen Trajektorie.	39
3.12	Entropie H_1 für Bernoulli, $\gamma = 5$, für 10^8 Punkte einer chaotischen Trajektorie.	40

3.13	Vergleich der Mengen der einfach (links) und doppelt (Mitte) instabilen PP (bis Periode 23) sowie des Attraktors (ebensoviele Punkte wie einfach instabile PP, rechts) beim Parameter $\gamma = 5$ (Bernoulli).	41
3.14	Anteil der Punkte, die in der Referenztrajektorie Nachbarn näher als ε haben.	42
3.15	Die Kurven K_0 und K'_0 für den Parameter $\gamma = 5$.	44
3.16	Der einfach instabile Fixpunkt $(0, - z_F)$ liegt augenscheinlich im Attraktor (Abb. für den Parameter $\gamma = 5$).	44
3.17	Zehnte Iteration der Kurve K_0 für $\gamma = 20$ (2^{10} Kurvenstücke)	46
3.18	gefüllte Bins bei 5 bis 31 Iterationen von K_0 ($\gamma = 20$)	47
3.19	1., 2., 4. und 18. Urbildgeneration von 16 verschiedenen horizontalen Linien stellvertretend für den gesamten Phasenraum $[0, 1] \times [-1, 1]$ (Bernoulli, $\gamma = 5$)	49
3.20	Vergleich der Menge $G_{Attr}^{(18)}$ (18. Urbildgeneration der Linie $z = 0$, $2.5 \cdot 10^6$ Punkte, links) und der Menge der doppelt instabilen PP (bis Periode 23; 2188723 Punkte, rechts) (Bernoulli, $\gamma = 5$).	50
3.21	Die Kapazitätsdimension D_0 der Menge der doppelt instabilen Punkte des erweiterten Bernoulli-Shifts beim Parameter $\gamma = 3.3$.	55
3.22	Die Korrelationsdimension (nach dem Boxcounting-Algorithmus) der Menge der doppelt instabilen Punkte des erweiterten Bernoulli-Shifts beim Parameter $\gamma = 3.3$: $D_2 = 1.4$	55
3.23	Die Korrelationsdimension (nach dem Korrelationssummenalgorithmus) der Menge der 2iPP des erweiterten Bernoulli-Shifts beim Parameter $\gamma = 3.3$: $D_2 = 1.4$	56
3.24	Quasiperiodische Bewegung auf einer Kreislinie.	58
3.25	Attraktor der QA für den Parameter $\gamma = 5$ mit 10^5 Punkten (links) und mit 10^8 Punkten (rechts).	59
4.1	Der Mechanismus der Beschattbarkeit (schematisch) für kontrahierende (x) und expandierende (y) Richtungen.	61
4.2	Nichtbeschattbarkeit bei Vorliegen einer homoklinen Tangente (HT).	63
4.3	Trajektorien in Systemen mit abwechselnd kontrahierenden und expandierenden Richtungen sind nicht beschattbar.	64
4.4	Verteilung der Beschattungszeiten bei Bernoulli-Shift (oben) und quasiper. Abb. (unten).	68
4.5	Links Beschattungszeit $\tau(\delta)$ für einige Parameter γ , rechts $\tau(\gamma)$ für verschiedene Rauschniveaus δ (Bernoulli, Cat map, und von Zufallszahlen getriebene Sigmoid-Abbildung)	70

4.6	Kurzzeit-Ljapunovexponenten für den erweiterten Bernoulli-Shift für die Parameter $\gamma = 1.4$, $\gamma = 1.6$ und $\gamma = 5$, jeweils für 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40 und 50 Schritte.	72
4.7	Abhängigkeit der mittleren Beschattungsdauer vom Quotienten Einschnittfehler/Beschattungsabstand für Bernoulli, $\gamma = 1.6$ sowie einige mögliche Vorhersage-Kurven nach (4.8) aus dem <i>biased random walk</i> -Modell[40].	73
4.8	Punkte, an denen Expansionsphasen anfangen können und ihre Stärke λ_e für Bernoulli, $\gamma = 5$	77
4.9	Relative Häufigkeiten der Expansionsstärken für Bernoulli, $\gamma = 5$	78
4.10	Relative Häufigkeiten der Expansionsstärken für Bernoulli, insgesamt sowie aufgeschlüsselt auf die unterschiedlichen Längen (in Schritten) der Expansionsphase.	79
4.11	Verteilung der Expansionsstärken bei einer hypothetischen Verteilung der Einschnitt-Streckungsfaktoren von 40% 2, 60% $\frac{1}{2}$	80
4.12	Verteilung der Expansionsstärken bei der quasiperiodischen Abbildung (links) und bei der von Zufallszahlen getriebenen sigmoiden Abbildung (rechts, beide mit $\gamma = 5$).	80
4.13	Mittelwerte der Exponentialverteilungen der Expansionsstärken und ihrer Surrogate als Funktion des Parameters γ im erweiterten (Bernoulli).	82
4.14	Punkte, an denen Expansionsphasen anfangen können und ihre Stärke λ_e für die QA, $\gamma = 5$	85
4.15	Unter Rückwärtsiteration stabile Punkte der QA ($\gamma = 5$).	86
4.16	Histogramm der maximal möglichen Dauer der Rückwärtsiteration vor Verlassen des Phasenraumes (QA, $\gamma = 5$).	86
4.17	Schnitt entlang der z -Richtung durch das „Gebirge“ (Abb. 4.14) der lokalen Expansionsstärken der QA ($\gamma = 5$) bei $x_{33} = 0.469$	87
4.18	Vorwärtsiteration einer Trajektorie von einem Punkt großer Expansionsstärke aus (QA, $\gamma = 5$).	88

Literaturverzeichnis

- [1] R. Abraham und S. Smale. Nongenericity of Ω -stability. *Proc. Symp. Pure Math.* **14**, 5 (1970).
- [2] D. V. Anosov. *Proc. Steklov Inst. Math.* **90**, 1 (1967).
- [3] E. Barreto und P. So. Mechanisms for the development of unstable dimension variability and the breakdown of shadowing in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2490 (2000).
- [4] C. Beck und F. Schlögl. *Thermodynamics of chaotic systems*. Cambridge University Press 1993.
- [5] R. Bowen. Ω -limit sets for axiom A diffeomorphisms. *J. Differential Equations* **18**, 333 (1975).
- [6] F. Christiansen. Persönliche Mitteilung.
- [7] S. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer, und J. A. Yorke. Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1927 (1994).
- [8] M. Ding, C. Grebogi, und E. Ott. Dimensions of strange nonchaotic attractors. *Phys. Lett. A* **137**, 167 (1989).
- [9] E. Ferretti Manffra, H. Kantz, und W. Just. Periodic orbits and topological entropy of delayed maps. Eingereicht bei Phys. Rev. E.
- [10] P. Grassberger und I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D* **9**, 189 (1983).
- [11] C. Grebogi, E. Ott, und J. A. Yorke. Comment on “sensitive dependence on parameters in nonlinear dynamics” and on “fat fractals on the energy surface”. *Phys. Rev. Lett.* **56**, 266 (1986).
- [12] J. Guckenheimer und P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer (1983).
- [13] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, und B. I. Shraiman. Fractal measures and their singularities - the characterization of strange sets. *Phys. Rev. A* **33**, 1141 (1986).

- [14] S. M. Hammel, J. A. Yorke, und C. Grebogi. Do numerical orbits of chaotic processes represent true orbits? *Journal of Complexity* **3**, 136 (1987).
- [15] S. M. Hammel, J. A. Yorke, und C. Grebogi. Numerical orbits of chaotic processes represent true orbits. *Bulletin of Am. Math. Soc.* **19**, 465 (1988).
- [16] L. Jaeger und H. Kantz. Homoclinic tangencies and non-normal Jacobians — effects of noise in nonhyperbolic chaotic systems. *Physica D* **105**, 79 (1997).
- [17] W. Just, E. Reibold, H. Benner, et al. Limits of time-delayed feedback control. *Phys. Lett. A* **254**, 158 (1999).
- [18] Umberger D. K. und J. D. Farmer. Fat fractals on the energy surface. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 661 (1985).
- [19] H. Kantz. Persönliche Mitteilung.
- [20] H. Kantz. Quantifying the closeness of fractal measures. *Phys. Rev. E* **49**, 5091 (1994).
- [21] J.L. Kaplan und Y.A. Yorke. *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, Band **730** der *Lecture Notes in Mathematics*, Kapitel “Chaotic behaviour of multidimensional difference equations”, Seite 204. Springer, Berlin, (1979).
- [22] E. J. Kostelich et al. Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems. *Physica D* **109**, 81 (1997).
- [23] Y.-C. Lai und C. Grebogi. Modeling of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4803 (1999).
- [24] Y.-C. Lai, C. Grebogi, und J. Kurths. Modeling of deterministic chaotic systems. *Phys. Rev. E* **59**, 2907 (1999).
- [25] Y.-C. Lai, D. Lerner, K. Williams, und C. Grebogi. Unstable dimension variability in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E* **60**, 5445 (1999).
- [26] F. Ledrappier. Some relations between dimension and Lyapunov exponents. *Comm. Math. Phys.* **81**, 229 (1981).
- [27] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press 1993.
- [28] E. Ott, C. Grebogi, und J. A. Yorke. *Chaos*, Kapitel “Controlling Chaotic Dynamical Systems”. American Institute of Physics, New York, (1990).
- [29] E. Ott, C. Grebogi, und J. A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990).
- [30] C. Parada. Chaos, Greek mythology link.
Internet: <http://www.hsa.brown.edu/~maicar/Chaos.html>, (2000).

- [31] A. S. Pikovsky und U. Feudel. Characterizing strange nonchaotic attractors. *Chaos* **5**, 253 (1995).
- [32] S. Yu. Pilyugin. *Shadowing in Dynamical Systems*. Springer, Berlin 1999.
- [33] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume III. Gauthier-Villars, Paris 1899.
- [34] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A* **170**, 421 (1992).
- [35] K. Pyragas, F. Lange, T. Letz, et al. Stabilization of an unstable steady state in intracavity frequency-doubled lasers. *Phys. Rev. E* **61**, 3721 (2000).
- [36] V. Reitmann. Persönliche Mitteilung.
- [37] V. Reitmann. *Reguläre und chaotische Dynamik*. Teubner (1996).
- [38] F. J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott, und W. P. Dayawansa. Controlling chaotic dynamical systems. *Physica D* **58**, 165 (1992).
- [39] F. J. Romeiras, E. Ott, C. Grebogi, und W. P. Dayawansa. Controlling chaotic dynamical systems. In *Proc. Am. Control Conf.*, Seite 1113 (1991).
- [40] T. Sauer, C. Grebogi, und J. A. Yorke. How long do numerical chaotic solutions remain valid? *Phys. Rev. Lett.* **79**, 59 (1997).
- [41] L. S. Young. Dimension, entropy, and Lyapunov exponents. *Ergodic Theory and Dyn. Systems* **2**, 109 (1982).
- [42] G.-C. Yuan und J. A. Yorke. An open set of maps for which every point is absolutely nonshadowable. *Proc. Amer. Math. Soc.* **128**, 909 (2000).