



Bergische Universität Wuppertal  
Fachbereich C - Mathematik und  
Naturwissenschaften  
Fachgruppe Physik

**Berechnung der Korrelationsfunktionen des  
Heisenberg-Modells bei endlicher Temperatur  
mittels Funktionalgleichungen**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften  
im Fachbereich C  
der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

**Britta Aufgebauer**

im April 2011

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20120622-093736-2

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn:nbn:de:hbz:468-20120622-093736-2>]

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Das Heisenberg-Modell</b>	<b>7</b>
2.1. XXX- und XXZ-Kette . . . . .	7
2.2. $R$ -Matrix und Integrabilität . . . . .	9
2.2.1. Eigenschaften der $R$ -Matrix . . . . .	12
2.2.2. Integrabilität des Heisenberg-Modells . . . . .	16
2.3. Konstruktion des Dichteoperators für endliche Temperatur . . . . .	18
2.3.1. Der inhomogene Dichteoperator . . . . .	20
<b>3. Charakterisierende Eigenschaften des inhomogenen Dichteoperators</b>	<b>23</b>
3.1. Eigenschaften des inhomogenen Dichteoperators . . . . .	23
3.1.1. Herleitung der diskreten Funktionalgleichung in acht Bildern . . . . .	26
3.2. Eindeutigkeitssatz . . . . .	33
3.2.1. Beweis für die XXX-Kette . . . . .	33
3.2.2. Beweis für die XXZ-Kette . . . . .	38
<b>4. Der Dichteoperator der XXX-Kette bei endlicher Temperatur</b>	<b>41</b>
4.1. Der $n$ -Platz-Dichteoperator für $n = 1, 2$ und $3$ . . . . .	41
4.2. Der $n$ -Platz-Dichteoperator . . . . .	45
4.2.1. Konstruktion der Operatoren . . . . .	45
4.2.2. Das Ergebnis für endliche Temperatur . . . . .	49
4.3. Die 2-Punkt-Funktion $\omega$ . . . . .	53
<b>5. Der Dichteoperator der XXZ-Kette bei endlicher Temperatur</b>	<b>59</b>
5.1. Der $n$ -Platz-Dichteoperator für $n = 1, 2$ . . . . .	60
5.2. Der $n$ -Platz-Dichteoperator . . . . .	63
5.2.1. Konstruktion der Operatoren . . . . .	63
5.2.2. Das Resultat für endliche Temperatur . . . . .	64
<b>6. Der 2-Platz-Dichteoperator der XXZ-Kette mit Magnetfeld und Alpha-Parameter</b>	<b>67</b>
6.1. Eigenschaften des Dichteoperators . . . . .	67
6.2. Der $n$ -Platz-Dichteoperator für $n = 1, 2$ . . . . .	69
6.2.1. Konstruktion der Operator-Basis für $n = 2$ . . . . .	69
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>75</b>
<b>A. Die verallgemeinerten Spurfunktionale</b>	<b>79</b>
A.1. Das Spurfunktional für die XXX-Kette . . . . .	79

A.2. Das Spurfunktional für die XXZ-Kette . . . . .	80
<b>B. Eigenschaften der <math>X</math>-Operatoren</b>	<b>81</b>
<b>C. Details zu Kapitel 6</b>	<b>85</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>87</b>

# 1. Einleitung

Die Statistische Mechanik untersucht die Eigenschaften von Vielteilchensystemen. Das Ziel ist es, ausgehend von den mikroskopischen Wechselwirkungen der einzelnen Teilchen untereinander die makroskopischen Eigenschaften des gesamten Systems zu bestimmen. Dies führt im Allgemeinen jedoch schon auf unüberwindliche Schwierigkeiten bei der Bestimmung des Spektrums des Hamiltonoperators und der thermodynamischen Eigenschaften des Systems.

Um physikalische Systeme zu beschreiben, werden diese daher oft durch ein geeignetes Modell approximiert. Dabei werden die mikroskopischen Wechselwirkungen der Teilchen idealisiert. Für ein Kristallgitter wird zum Beispiel angenommen, dass jedes Atom nur mit den nächsten Nachbaratomen wechselwirkt, was sich physikalisch im Fall einer geringen Reichweite der Wechselwirkung rechtfertigen lässt.

Auch auf diese Art vereinfachte Modelle sind im Allgemeinen noch zu kompliziert, um einer direkten Lösung zugänglich zu sein. Es gibt jetzt zwei Möglichkeiten, Aussagen über Größen wie die Anregungsspektren und thermodynamischen Eigenschaften eines Modells zu erhalten. Eine Methode besteht darin, ein Näherungsverfahren zu verwenden. Dazu gibt es verschiedene etablierte Verfahren. Diese haben jedoch alle gemeinsam, dass langreichweitige Korrelationen zwischen den Teilchen vernachlässigt werden. Das führt zum Beispiel dazu, dass das Verhalten des Modells in der Nähe kritischer Punkte nicht korrekt beschrieben wird.

Die andere Methode besteht darin, das Modell so lange weiter zu vereinfachen, bis es exakt lösbar ist. Für quantenmechanische Modelle endet man so zumeist bei effektiven Ein-Teilchen-Modellen, wie z. B. dem Bändermodell der Festkörperphysik. Nur im eindimensionalen Fall sind echte Vielteilchensysteme bekannt, die sich exakt lösen lassen. Ein wichtiges Beispiel für ein solches Modell ist das Heisenberg-Modell [31]. Es beschreibt eine eindimensionale Kette von Spins mit Austausch-Wechselwirkung. Materialien mit effektiv eindimensionaler Substruktur, welche die Eigenschaften des Materials bestimmt, kommen in der Natur vor. So sind z. B. die Materialien Kupfer-Pyrimidin-Dinitrat und Kupfer-Benzoat Realisierungen des eindimensionalen antiferromagnetischen Heisenberg-Modells in einem gestagerten Magnetfeld, siehe dazu die Darstellung in [27] und Referenzen darin.

Zur Berechnung des Energiespektrums des isotropen Spin-1/2-Heisenberg-Modells leitete Bethe 1931 ein System gekoppelter nichtlinearer Gleichungen her [5]. Seine Methode wurde später als Bethe-Ansatz berühmt. Ungeachtet der Tatsache, dass die Erweiterung auf das zwei- und dreidimensionale Heisenberg-Modell - entgegen seiner eigenen Erwartung - nicht gelang, legte seine Arbeit die Grundlage für einen neuen Zweig der theoretischen Physik.

Allgemein lassen sich mit Hilfe der sogenannten Trotter-Suzuki-Abbildung eindimensionale Quantenketten auf zweidimensionale klassische Vertexmodelle abbilden [46, 48, 51]. Dieser

tiefe Zusammenhang lag noch im Dunkeln, als Onsager 1944 das zweidimensionale Isingmodell mit Hilfe der sogenannten Stern-Dreiecks-Relation löste [43]. Es war Baxter, der diese Relation für die Boltzmann-Gewichte des 8-Vertex-Modells wiederfand. Er entdeckte, dass sie zu einer Familie spektralparameterabhängiger, kommutierender Transfermatrizen führt [1–3]. Dieselbe Relation hatte zuvor C. N. Yang als Selbstkonsistenzgleichung für die Faktorisierung des eindimensionalen quantenmechanischen  $N$ -Teilchen-Streuproblems mit Delta-Funktions-Potential in 2-Teilchen-Streuprozesse gefunden [53]. Die Identifikation der Yang-Baxter-Gleichung für die  $R$ -Matrizen als der allen integrablen quantenmechanischen Modellen zugrunde liegenden Struktur führte zur Entwicklung des algebraischen Bethe-Ansatzes [24]. Im Zuge der Suche nach neuen Lösungen der Yang-Baxter-Gleichung wurden die Quantengruppen eingeführt [22, 33]. Diese treten u. a. als  $q$ -deformierte Universelle Einhüllende von Lie- bzw. Kac-Moody-Algebren auf. In der Darstellungstheorie der affinen Quantengruppen spielen  $R$ -Matrizen die Rolle von Intertwinern zwischen den sogenannten Evaluationsdarstellungen. Die Theorie der Quantengruppen hat zur Entdeckung von Verbindungen zwischen so unterschiedlichen Zweigen der Mathematik wie Knoteninvarianten und der Darstellungstheorie algebraischer Gruppen in von null verschiedener Charakteristik geführt, siehe zu diesem Thema z. B. die Darstellung in [21].

Die kanonische Zustandssumme des Heisenberg-Modells lässt sich nicht unmittelbar aus den Bethe-Ansatz-Gleichungen gewinnen, da diese im Allgemeinen nicht direkt gelöst werden können und somit die Eigenwerte und Eigenzustände - anders als z. B. für den Fall idealer Quantengase - nicht explizit bekannt sind. Man ist deshalb auf geschickte Verfahren angewiesen, die die benötigten Informationen aus den Bethe-Ansatz-Gleichungen zur Verfügung stellen. Meist besteht nur Interesse an den Eigenschaften eines Systems im sogenannten thermodynamischen Limes, in welchem die Systemgröße bei konstanter Teilchendichte ins Unendliche ausgedehnt wird. Dadurch haben die Randbedingungen keinen Einfluss auf das Systemverhalten.

Die Kenntnis des Verhaltens für endliche - „endlich“ bedeutet in diesem Kontext „von null verschieden“ - Temperatur ist besonders interessant, da der absolute Nullpunkt aus theoretischen Gründen nicht experimentell zugänglich ist. Die erste Herleitung der Thermodynamik aus den Bethe-Ansatz-Gleichungen gelang Yang und Yang 1969 für den Fall des eindimensionalen Bose-Gases mit Delta-Funktions-Potential [54]. Ihre Methode, der sogenannte Thermodynamische Bethe-Ansatz, wurde unabhängig voneinander von Gaudin [26] und Takahashi [49] auf das Heisenberg-Modell erweitert. Dabei führten sie die sogenannte String-Hypothese ein, welche die Verteilung der Bethe-Ansatz-Zahlen betrifft. Die freie Energie im thermodynamischen Limes ergibt sich in diesem Zugang mit Hilfe unendlich vieler nichtlinearer Integralgleichungen. Eine alternative Methode, die ohne die String-Hypothese auskommt, wurde von Klümper gefunden [39, 40]. Seine Methode benutzt die Trotter-Suzuki-Abbildung auf ein inhomenes 6-Vertex-Modell, dessen Zustandssumme sich im thermodynamischen Limes mit Hilfe des größten Eigenwertes der Quantentransfermatrix berechnen lässt. Das Ergebnis ist die Beschreibung des führenden Eigenwertes durch endlich viele gekoppelte nichtlineare Integralgleichungen, welche sich darüber hinaus auch numerisch gut auswerten lassen.

Aus der Zustandssumme lassen sich die globalen thermodynamischen Eigenschaften eines Modells berechnen, für die lokalen Eigenschaften hingegen benötigt man im Allgemeinen

---

Korrelationsfunktionen. Insbesondere werden experimentelle Messergebnisse oft durch Korrelationsfunktionen ausgedrückt, z. B. solche, die die magnetischen Eigenschaften betreffen. Eine beliebige  $n$ -Platz-Korrelationsfunktion<sup>1</sup> lässt sich mit Hilfe des  $n$ -Platz-Dichteoperators berechnen.

Hulthén berechnete 1938 die Grundzustands-Korrelationsfunktionen benachbarter Spins des Heisenberg-Modells im thermodynamischen Limes [32]. Das nächste wichtige Resultat auf diesem Gebiet erzielte Takahashi 1977 mit der Berechnung des Ergebnisses für übernächste Nachbarn, welches er bei der Untersuchung des Hubbard-Modells fand [50]. In seine Formel geht der Wert der Riemannschen Zeta-Funktion an der Stelle 3 ein. Es war lange Zeit eine spannende Frage, ob sich dieses Resultat für größere Abstände verallgemeinern lässt.

Im Rahmen der konformen Feldtheorie fanden Knizhnik und Zamolodchikov eine lineare Differentialgleichung für die  $n$ -Punkt-Korrelationsfunktionen der primären Felder der Wess-Zumino-Witten-Modelle [42], welche als Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung bekannt wurde. Die Korrelationsfunktionen in zweidimensionalen konformen Feldtheorien erfüllen allgemein ein System von (partiellen) linearen Differentialgleichungen [4]. Die Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung folgt aus der zusätzlichen Symmetrie der Wirkung der Wess-Zumino-Witten-Modelle unter einer affinen Lie- bzw. Kac-Moody-Algebra. Die Korrelationsfunktionen sind durch die Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung und die Crossing-Symmetrie für 4-Punkt-Funktionen eindeutig bestimmt. Tsuchia und Kanie führten die Vertex-Operatoren als Intertwiner zwischen Höchstgewichtsdarstellungen in die konforme Feldtheorie ein [52]. Smirnov leitete 1992 Funktionalgleichungen vom Differenztyp für die Formfaktoren integrierbarer zweidimensionaler Quantenfeldtheorien her. Durch die Lösung dieser Funktionalgleichungen gewann er eine Integralformel für die Solitonen-Formfaktoren des Sine-Gordon-Modells [45]. Kurze Zeit später führten Frenkel und Reshetikhin die sogenannte  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung ein [25]. Diese Funktionalgleichung vom Differenztyp ist auf der Ebene der Darstellungstheorie das Analogon der Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung für den Fall affiner Quantengruppen. Diese entspricht für Darstellungen vom Level 0 den Gleichungen von Smirnov.

Einen neuen Zugang zu den Korrelationsfunktionen des Heisenbergmodells fanden Jimbo, Miki, Miwa und Nakayashiki 1992 mit der Herleitung einer Vielfachintegraldarstellung für die Matrixelemente des  $n$ -Platz-Dichteoperators der XXZ-Kette im antiferroelektrischen Regime im Grundzustand [34]. Die Darstellung durch Vielfachintegrale ergibt sich dabei aus der Berechnung der Korrelationsfunktionen als Spur über Produkte von Vertexoperatoren, welche in natürlicher Weise spektralparameterabhängig sind. Die Einführung dieser zusätzlichen Spektralparameter erwies sich als fruchtbar, da sie zu zusätzlichen Funktionalgleichungen für den  $n$ -Platz-Dichteoperator führt. So entsprechen die Korrelationsfunktionen des inhomogenen Modells speziellen Lösungen der  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung, wobei bei letzteren die Hälfte der Spektralparameter geeignet zu spezialisieren ist [35]. Die entsprechende Funktionalgleichung für die spezialisierten Spektralparameterwerte wird in späteren Arbeiten „reduzierte“  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung genannt [9, 12]. Die Verbindung zur  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung führte zur Verallgemeinerung der Vielfachintegraldarstellung auf das kritische Regime [36].

---

<sup>1</sup> Im Folgenden ist stets die Rede von statischen Korrelationsfunktionen.

Eine unabhängige Herleitung der Vielfachintegraldarstellung mit Hilfe des algebraischen Bethe-Ansatzes gelang Kitanine, Maillet und Terras [38]. Ihr Zugang bestätigt insbesondere die Ergebnisse für das kritische Regime aus [36] und bezieht darüberhinaus ein äußeres Magnetfeld ein.

Die Vielfachintegrale für die XXX-Kette im feldfreien Fall wurden von Boos und Korepin bis  $n = 4$  explizit berechnet [15]. Es zeigte sich, dass sich die Korrelationsfunktionen durch Produkte von Zeta-Funktionen mit ungeraden positiven Argumenten und rationalen Vorfaktoren schreiben lassen [16, 17].

Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov und Takeyama gelang 2004 die Konstruktion des inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperators der XXX-Kette im Grundzustand [9]. Sie benutzten eine rekursive Konstruktion auf Basis der reduzierten  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung. Das Ergebnis drückt den inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperator durch eine einzige 2-Punkt-Funktion, sowie Operatoren aus, deren Matrixeinträge rationale Funktionen der Spektralparameter sind. Letztere ergeben sich aus einer rein darstellungstheoretischen Konstruktion und werden daher auch „algebraischer“ Anteil genannt. Die physikalischen Parameter gehen allein über die 2-Punkt-Funktion ein. Die Konstruktion des  $n$ -Platz-Dichteoperators wurde anschließend auf die XXZ-Kette verallgemeinert [12]. In diesem Fall werden zwei 2-Punkt-Funktionen benötigt, um das Ergebnis anzugeben. Der Umstand, dass sich beliebige Korrelationsfunktionen durch wenige Funktionen ausdrücken lassen, wird Faktorisierung der Korrelationsfunktionen genannt.

Das erste Resultat für endliche Temperatur erzielten Göhmann, Klümper und Seel mit der Herleitung einer Vielfachintegraldarstellung einer erzeugenden Funktion der  $zz$ -Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette [29]. Darauf aufbauend wurden Vielfachintegraldarstellungen für 2-Punkt-Funktionen [28] sowie allgemein für die Matrixelemente des  $n$ -Platz-Dichteoperators bei endlicher Temperatur und endlichem Magnetfeld gefunden [30]. In [7] wurde gezeigt, dass sich die Vielfachintegrale für kleines  $n$  als Summen über Produkte von einfachen Integralen ausdrücken lassen. Dieses Phänomen wird Faktorisierung der Vielfachintegrale genannt. Mit Hilfe des sogenannten Alpha-Parameters, eines in [13] zur Vereinfachung der Darstellung der Korrelationsfunktionen eingeführten Regularisierungsparameters, wurde in [8] auch die Faktorisierung der Vielfachintegrale für die XXZ-Kette gefunden. Auf der Basis dieser Ergebnisse wurde in [7, 8] die Vermutung aufgestellt, dass der „algebraische“ Anteil der Konstruktion unabhängig von physikalischen Parametern, wie Temperatur und Magnetfeld, ist.

Mit Hilfe der in [13, 14] konstruierten Basis aus fermionischen Operatoren wurde von Jimbo, Miwa und Smirnov gezeigt, dass sich beliebige Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette in einem äußeren Magnetfeld bei endlicher Temperatur durch zwei Funktionen, die die physikalischen Parameter enthalten, ausdrücken lassen: einer 1-Punkt-Funktion und einer speziellen 2-Punkt-Funktion [37]. Boos und Göhmann leiteten eine Beschreibung dieser beiden sogenannten physikalischen Funktionen durch Integralgleichungen her [6].



---

## Aufbau der Arbeit

Das wesentliche Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen einfachen Beweis für die Faktorisierung der Korrelationsfunktionen des Heisenberg-Modells bei endlicher Temperatur zu liefern. Genauer gesagt, soll gezeigt werden, dass der inhomogene  $n$ -Platz-Dichteoperator des Heisenberg-Modells (im feldfreien Fall) auch bei endlicher Temperatur durch die Formeln in [9,12] gegeben ist, wobei die in die Konstruktion eingehenden 2-Punkt-Funktionen durch die entsprechenden Funktionen bei endlicher Temperatur zu ersetzen sind, die zugrunde liegende algebraische Konstruktion aber von physikalischen Parametern unabhängig ist.

Kapitel 2 dient der Einordnung des Themas in den Kontext des Heisenberg-Modells und seiner Spezialfälle, der XXX- und der XXZ-Kette. Es werden ausführlich die Eigenschaften der zugehörigen  $R$ -Matrizen diskutiert. Anschließend wird die Konstruktion des Dichteoperators für endliche Temperatur mit Hilfe der sogenannten Trotter-Suzuki-Abbildung [46, 48, 51] auf ein Sechs-Vertex-Modell erläutert. Es wird eine geeignete inhomogenisierte Version des  $n$ -Platz-Dichteoperators bei endlicher Temperatur und im thermodynamischen Limes eingeführt.

In Kapitel 3 werden die Eigenschaften dieses inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperators diskutiert. Das zentrale Ergebnis ist die Herleitung einer diskreten Funktionalgleichung und der Beweis, dass diese den inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperator zusammen mit dessen asymptotischen Verhalten eindeutig charakterisiert. Diese Funktionalgleichung ist eine diskrete Version der reduzierten  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung [9, 12].

In den Kapiteln 4 und 5 wird die gefundene Charakterisierung verwendet, um den allgemeinen  $n$ -Platz-Dichteoperator der XXX- bzw. der XXZ-Kette ohne äußeres Magnetfeld zu konstruieren. Aufgrund des Zusammenhangs mit dem  $n$ -Platz-Dichteoperator des Heisenbergmodells im Grundzustand über die reduzierte  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung, kann dabei auf die Konstruktion der Lösungen in den Arbeiten [9] und [12] zurückgegriffen werden. Es zeigt sich, dass die in die Konstruktion eingehenden 2-Punkt-Funktionen, welche den sogenannten „physikalischen“ Anteil der Konstruktion ausmachen, durch die entsprechenden Funktionen bei endlicher Temperatur zu ersetzen sind.

Das letzte Kapitel ist der Konstruktion des inhomogenen 2-Platz-Dichteoperators der XXZ-Kette mit Magnetfeld und zusätzlichem Alpha-Parameter gewidmet. Dies geschieht neben dem Ausnutzen der elementaren Eigenschaften des 2-Platz-Operators durch Verallgemeinerung der Operatorkonstruktion aus [12] auf den Fall der Abhängigkeit vom Alpha-Parameter. Die Reduktion der Anzahl der zur Beschreibung benötigten 2-Punkt-Funktionen von zwei auf eins durch die Einführung des Regularisierungsparameters wird im Lichte der reduzierten  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung deutlich. Das Ergebnis entspricht dem in [6] mit Hilfe der Vielfachintegraldarstellung hergeleiteten Ausdruck.



## 2. Das Heisenberg-Modell

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem eindimensionalen Spin-1/2-Heisenberg-Modell [31] in seinen Spezialfällen, der XXX- und der XXZ-Kette. In diesem einführenden Kapitel werden zunächst die entsprechenden Hamiltonoperatoren eingeführt und die Eigenschaften der zugrunde liegenden  $R$ -Matrizen diskutiert. Anschließend wird die Konstruktion des Dichteoperators bei endlicher Temperatur erläutert und das Ziel dieser Arbeit formuliert. Für Details sei auf die Lehrbücher [35] und [23] und Referenzen darin verwiesen.

### 2.1. XXX- und XXZ-Kette

Der Hamiltonoperator des isotropen Spin-1/2-Heisenberg-Modells, der sogenannten XXX-Kette,

$$H_{XXX} = 4 \sum_{i=1}^L \left( \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} \right) = \sum_{i=1}^L \left( \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right) \quad (2.1)$$

beschreibt eine lineare Kette von  $L$  Atomen, die ausschließlich über ihre Spins und nur mit ihren nächsten Nachbarn wechselwirken. Für Spin-1/2-Teilchen ist der Ein-Teilchen-Zustandsraum an jedem Kettenplatz zweidimensional. Der globale Hilbertraum  $\mathcal{H}_L$  des Systems entspricht dem  $L$ -fachen Tensorprodukt der Ein-Teilchen-Zustandsräume.

$$\mathcal{H}_L := \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_L$$

Wählt man in jedem Ein-Teilchen-Zustandsraum die normierten Eigenvektoren der  $z$ -Komponente des Ein-Teilchen-Spinoperators  $\vec{S}$  als Basis, so sind die Komponenten des Spinoperators am  $i$ -ten Kettenplatz gegeben durch

$$S_i^\alpha = \frac{1}{2} \sigma_i^\alpha := \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}_{(i-1)} \otimes \sigma^\alpha \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}_{(L-i)} \quad \text{für } \alpha = x, y, z$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie } \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für eine periodisch geschlossene Spinkette definiert man  $\vec{S}_{L+1} := \vec{S}_1$ , eine Kette der Länge  $L$  mit offenen Randbedingungen erhält man durch die Definition  $\vec{S}_{L+1} := \vec{0}$ .

Im Vergleich zum XXX-Modell ist beim XXZ-Modell die Wechselwirkung der Spins in  $z$ -Richtung durch einen Anisotropieparameter  $\Delta$  modifiziert. Der Hamiltonoperator lautet

$$H_{XXZ} = \sum_{i=1}^L \left( \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right). \quad (2.2)$$

## 2. Das Heisenberg-Modell

---

Beide quantenmechanischen Systeme sind durch den Bethe-Ansatz lösbar [3]. Dabei wird die Symmetrie des Modells unter dem Operator  $J^z := 2 \sum_{i=1}^L S_i^z$  ausgenutzt. Der Bethe-Ansatz drückt die Eigenwerte und Eigenvektoren des Hamiltonoperators im Eigenraum des Operators  $J^z$  zum Eigenwert  $0 \leq k \leq L/2$  durch  $k$  Parameter aus, welche durch gekoppelte algebraische Gleichungen, die sogenannten Bethe-Ansatz-Gleichungen, bestimmt sind. Für eine ausführliche Einführung in den Bethe-Ansatz sei z. B. auf das Lehrbuch [23] verwiesen.

Der Hamiltonoperator des XXX-Modells kommutiert mit den Operatoren

$$J^\alpha = \sum_{k=1}^L \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \sigma_k^\alpha \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}, \quad \alpha = x, y, z,$$

welche die Kommutatorrelationen der Lie-Algebra  $sl_2$  (bzw. die Relationen der Algebra  $U(sl_2)$ )

$$[J^z, J^\pm] = \pm 2J^\pm, \quad [J^+, J^-] = J^z$$

mit der Definition

$$J^\pm := \frac{1}{2}(J^x \pm iJ^y)$$

erfüllen.

Für offene Randbedingungen kommutiert der XXZ-Hamiltonoperator zur Kettenlänge  $L$  mit speziellem Randterm [44]

$$\sum_{i=1}^{L-1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) + \frac{q - q^{-1}}{2} (\sigma_1^z - \sigma_L^z) \quad (2.3)$$

mit den Operatoren ( $\sigma^\pm := \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$ )

$$\begin{aligned} J^+ &= \sum_{k=1}^L q^{\sigma^z} \otimes \cdots \otimes q^{\sigma^z} \otimes \sigma_k^+ \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}, \\ J^- &= \sum_{k=1}^L \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_k^- \otimes q^{-\sigma^z} \otimes \cdots \otimes q^{-\sigma^z}, \\ \text{sowie } J^z &= \sum_{k=1}^L \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_k^z \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Diese genügen den Relationen von  $U_q(sl_2)$ :

$$[q^{J^z}, J^\pm] = q^{\pm 2} J^\pm, \quad [J^+, J^-] = \frac{q^{J^z} - q^{-J^z}}{q - q^{-1}}.$$

Üblicherweise wird  $U_q(sl_2)$  als assoziative Algebra mit Eins über  $\mathbb{C}$  in den Chevalley-Erzeugern  $E, F, K^{\pm 1}$  mit den Relationen

$$KE = q^2 EK, \quad KF = q^{-2} FK, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad KK^{-1} = K^{-1}K = 1$$

definiert. Die Formeln (2.4) ergeben sich aus der Ersetzung

$$J^+ \leftrightarrow \Delta^{(L)}(E), \quad J^- \leftrightarrow \Delta^{(L)}(F) \quad \text{und} \quad q^{J^z} \leftrightarrow \Delta^{(L)}(K)$$

mit der Iteration

$$\Delta^{(2)} := \Delta, \quad \text{und} \quad \Delta^{(n)} := \left( id^{\otimes(n-2)} \otimes \Delta \right) \Delta^{(n-1)}$$

des Koproduktes:

$$\begin{aligned} \Delta : U_q(sl_2) &\rightarrow U_q(sl_2) \otimes U_q(sl_2), & \Delta(E) &= E \otimes 1 + K \otimes E, \\ & & \Delta(F) &= F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \\ & & \Delta(K) &= K \otimes K. \end{aligned}$$

## 2.2. *R-Matrix und Integrabilität*

Die Integrabilität des XXX- und XXZ-Modells beruht darauf, dass der Hamiltonoperator eingebettet ist in eine Familie unendlich vieler, paarweise kommutierender Operatoren. Diese ergeben sich mit Hilfe der Transfermatrix eines 6-Vertex-Modells. Die Boltzmann-Gewichte des 6-Vertex-Modells entsprechen jeweils den Matrixelementen der *R*-Matrix des Heisenberg-Modells. Diese hat eine natürliche Interpretation im Rahmen der Darstellungstheorie der affinen Quantengruppe  $U_q(\widehat{sl}_2)$  [20].

$U_q(\widehat{sl}_2)$  ist definiert als die assoziative Algebra mit Eins über  $\mathbb{C}$  mit den Erzeugern  $E_i, F_i$  und  $K_i^{\pm 1}$  für  $i = 0, 1$  und den Relationen

$$\begin{aligned} K_i E_i &= q^2 E_i K_i, & K_i F_i &= q^{-2} F_i K_i, \\ K_i E_j &= q^{-2} E_j K_i, & K_i F_j &= q^2 F_j K_i \quad \text{für } i \neq j, \\ [E_i, F_i] &= \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, & [E_i, F_j] &= 0, \quad \text{für } i \neq j, \\ K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, & K_0 K_1 &= K_1 K_0, \\ (E_i)^3 E_j - [3]_q (E_i)^2 E_j E_i + [3]_q E_i E_j (E_i)^2 - E_j (E_i)^3 &= 0, \\ (F_i)^3 F_j - [3]_q (F_i)^2 F_j F_i + [3]_q F_i F_j (F_i)^2 - F_j (F_i)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Die sogenannten *q*-Zahlen sind definiert durch

$$[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

$U_q(\widehat{sl}_2)$  besitzt die Zerlegung

$$U_q(\widehat{sl}_2) = U_q(L(sl_2)) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}\rho.$$

Diese enthält die quantisierte Universelle Einhüllende der Loop-Algebra von  $sl_2$ ,  $L(sl_2) = sl_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ . ( $\rho$  ist eine Derivation,  $c$  ein zentrales Element.) Dies wird anhand der obigen

## 2. Das Heisenberg-Modell

---

Definition über die Chevalley-Erzeuger nicht deutlich, ist aber die Grundlage für eine Familie von Algebra-Homomorphismen, die sogenannten Evaluations-Homomorphismen

$$ev_\lambda : U_q(\widehat{sl}_2) \rightarrow U_q(sl_2), \quad (2.6)$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} E_0 &\mapsto q^{2\lambda}F, & F_0 &\mapsto q^{-2\lambda}E, & K_0^{\pm 1} &\mapsto K^{\mp 1} \\ E_1 &\mapsto E, & F_1 &\mapsto F, & K_1^{\pm 1} &\mapsto K^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Ist  $\rho : U_q(sl_2) \rightarrow \text{End}(V)$  eine Darstellung von  $U_q(sl_2)$ , so ist  $\rho_\lambda := \rho ev_\lambda$  eine  $U_q(\widehat{sl}_2)$ -Darstellung. Für Spin 1/2 ist die zugrunde liegende Darstellung  $\rho$  eine 2-dimensionale irreduzible Höchstgewichtsdarstellung. In Modulschreibweise operieren die Erzeuger auf der Eigenbasis von  $K$  wie

$$\begin{aligned} Ev_+ &= 0, & Fv_+ &= v_-, & K^\pm v_+ &= q^{\pm 1}v_+, \\ Ev_- &= v_+, & Fv_- &= 0, & K^\pm v_- &= q^{\mp 1}v_-. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Man spricht vom Evaluationsmodul des Moduls  $V$  zum Parameter  $\lambda$  und bezeichnet diesen mit  $V_\lambda$ . Diese Bezeichnung wird im Folgenden dort, wo es der Übersichtlichkeit dient, übernommen, obwohl der zugrundeliegende Darstellungsraum stets  $\mathbb{C}^2$  ist.

Die Komultiplikation  $\Delta : U_q(\widehat{sl}_2) \rightarrow U_q(\widehat{sl}_2) \otimes U_q(\widehat{sl}_2)$  ist auf den Erzeugern definiert durch

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \quad \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad (2.8)$$

die Koeins  $\epsilon : U_q(\widehat{sl}_2) \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\epsilon(E_i) = 0, \quad \epsilon(F_i) = 0, \quad \epsilon(K_i) = 1 \quad (2.9)$$

und die Antipode  $S : U_q(\widehat{sl}_2) \rightarrow U_q(\widehat{sl}_2)$  durch

$$S(E_i) = -K_i^{-1}E_i, \quad S(F_i) = -F_iK_i, \quad S(K_i) = K_i^{-1}. \quad (2.10)$$

Bei den Abbildungen  $\Delta$  und  $\epsilon$  handelt es sich um Algebrahomomorphismen,  $S$  ist ein Antialgebrahomomorphismus.  $\Delta$ ,  $\epsilon$  und  $S$  erfüllen zusammen mit der Multiplikation und der Eins der Algebrastruktur die Axiome einer Hopf-Algebra, siehe z. B. [21].

Über die Komultiplikation lässt sich das Tensorprodukt zweier  $U_q(\widehat{sl}_2)$ -Darstellungen wieder als eine solche auffassen. Dabei sind Tensorprodukte von Darstellungen mit vertauschter Reihenfolge der Darstellungsräume äquivalent zueinander. In diesem Zusammenhang tritt die  $R$ -Matrix  $\check{R}(\lambda_1, \lambda_2)$  auf. Diese spielt die Rolle des Intertwiners auf dem Tensorprodukt zweier Evaluationsdarstellungen,

$$\check{R}(\lambda_1, \lambda_2) : V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \rightarrow V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_1}, \quad (2.11)$$

das bedeutet, es gilt

$$\check{R}(\lambda_1, \lambda_2) (\rho_{\lambda_1} \otimes \rho_{\lambda_2}) (\Delta(A)) = (\rho_{\lambda_2} \otimes \rho_{\lambda_1}) (\Delta(A)) \check{R}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (2.12)$$

für alle  $A \in U_q(\widehat{sl}_2)$ .

In dieser Arbeit werden lineare Abbildungen zwischen Tensorprodukträumen (von  $\mathbb{C}^2$ ) eine tragende Rolle spielen. Es ist nützlich, für die Verkettung dieser linearen Abbildungen eine graphische Notation zu verwenden. Insbesondere, da viele dieser Abbildungen nur lokal nichttrivial wirken. Zu diesem Zweck wird ein linearer Operator vom Vektorraum  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$  in den Vektorraum  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes m}$  allgemein durch ein Symbol mit  $n$  vielen von oben einlaufenden Linien und  $m$  vielen auslaufenden Linien dargestellt, welches diesem fest zugeordnet ist.

Die  $R$ -Matrix  $\check{R}(\lambda_1, \lambda_2)$ , als Grundbaustein eines integrablen Modells, bekommt das suggestive Symbol, welches in Abbildung 2.1 zu sehen ist. Die Pfeile sind dabei als Teil des Symbols zu verstehen, sie zeigen insbesondere nicht die Abbildungsrichtung an; sie sind nötig, um bei Transposition Eindeutigkeit der Notation zu garantieren, bzw. um in diesem Fall nicht ein neues Symbol einführen zu müssen.

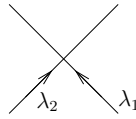


Abbildung 2.1.: Graphische Notation der Abbildung  $\check{R}(\lambda_1, \lambda_2)$

Die Verkettung zweier Abbildungen wird kodiert durch das Aneinanderhängen der entsprechenden Symbole, die Bildung von Tensorprodukten durch das Nebeneinandersetzen. Skalare Faktoren werden vor das Abbildungssymbol geschrieben. Regeln wie die Assoziativität der Verkettung und die Bilinearität des Tensorproduktes sind in diese Notation in natürlicher Weise implementiert. Gleiches gilt für die Eigenschaften der Identität. Die Identität auf  $\mathbb{C}^2$  wird im Folgenden mit  $I$  bezeichnet und graphisch durch eine senkrechte Linie dargestellt. (Siehe dazu auch den Zusammenhang mit Abbildung 2.2.) Beispiele für die genannten Regeln finden sich auf den folgenden Seiten.

Um Transposition und Spurbildung formulieren zu können, führen wir noch den Vektor

$$i := v_+ \otimes v_+ + v_- \otimes v_- \quad (2.13)$$

ein. Ein Vektor lässt sich als lineare Abbildung von  $\mathbb{C}$  in den entsprechenden Vektorraum auffassen. Das Symbol von  $|i\rangle$  besitzt aus diesem Grund keine einlaufenden Linien und zwei auslaufende Linien, siehe Abbildung 2.2 a). Die graphische Darstellung der Transposition



Abbildung 2.2.: Graphische Notation der Vektoren  $|i\rangle \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$  und  $\langle i| \in (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^*$

von  $\check{R}(\lambda_1, \lambda_2)$  bezüglich des Raumes  $V_{\lambda_1}$  ist im ersten Bild der Abbildung 2.7 zu sehen. Sie benutzt die Vektoren  $|i\rangle \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$  und  $\langle i| \in (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^*$ .

(Teil-)Spurbildung lässt sich mit Hilfe der Vektoren  $|i\rangle$  und  $\langle i|$  als Verkettung von linearen Abbildungen schreiben. So lässt sich die Teilspurbildung über den Raum  $V_1$  der Abbildung  $\varphi : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$  (unter Einführen eines Hilfsraums  $V_0$ ) schreiben als

$$\text{Spur}_{V_1}(\varphi) = \left( \langle i|_{0,1} \otimes I_2 \right) \left( I_0 \otimes \varphi_{1,2} \right) \left( |i\rangle_{0,1} \otimes I_2 \right). \quad (2.14)$$

$$\text{Spur}_{V_1}(\varphi) = \text{Diagram}$$

Abbildung 2.3.: Graphische Notation der Teilspurbildung (Gleichung (2.14))

Das 2-Platz- $U(sl_2)$ - bzw.  $U_q(sl_2)$ -Singulett

$$s(q) := q^{-1/2} v^+ \otimes v^- - q^{1/2} v^- \otimes v^+ \quad (2.15)$$

spielt im Folgenden eine wichtige Rolle und wird durch das in Abbildung 2.4 a) dargestellte Symbol kodiert. Der zugehörige Bra-Vektor bekommt das Symbol in Abbildung 2.4 b).



Abbildung 2.4.: Graphische Notation der Singulett  $|s(q)\rangle \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$  und  $\langle s(q)| \in (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^*$

Die graphischen Darstellungen und Rechnungen auf den folgenden Seiten sind im Sinne dieser Regeln zu verstehen. Teilweise kommen auch horizontale Linien vor, um nach erfolgter Teilspurbildung Platz zu sparen. Jeder Ausdruck lässt sich aber durch geeignetes „Kippen“ im obigen Sinne als Verkettung linearer Abbildungen verstehen.

### 2.2.1. Eigenschaften der $R$ -Matrix

Die  $R$ -Matrix des Heisenbergmodells ist eindeutig durch die Bedingung (2.12) bestimmt [33]. Sie lässt sich als Linearkombination der Identität und des (nicht normierten) Projektors

$$Pr_s := |s(q)\rangle \langle s(q)| \quad (2.16)$$

auf das 2-Platz- $U_q(sl_2)$ -Singulett (2.15) ausdrücken:

$$\check{R}(\lambda_1, \lambda_2) = a(\lambda_1, \lambda_2) I \otimes I - b(\lambda_1, \lambda_2) Pr_s. \quad (2.17)$$

Für die XXX-Kette ist  $q = 1$  zu wählen und die Funktionen  $a$  und  $b$  sind gegeben durch

$$a(\lambda_1, \lambda_2) = 1 + \lambda_1 - \lambda_2 \quad \text{und} \quad b(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 - \lambda_2. \quad (2.18)$$

Für die XXZ-Kette lauten die Funktionen

$$a(\lambda_1, \lambda_2) = \text{sh}(\eta(1 + \lambda_1 - \lambda_2)) \quad \text{und} \quad b(\lambda_1, \lambda_2) = \text{sh}(\eta(\lambda_1 - \lambda_2)). \quad (2.19)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Anisotropieparameter  $\Delta$  der XXZ-Kette und  $q$  bzw.  $\eta$  lautet

$$\Delta = \frac{q + q^{-1}}{2} = \text{ch}(\eta) \quad \text{und} \quad q = e^\eta. \quad (2.20)$$



Durch Umeichen, siehe dazu Kapitel 5, erhält man die geläufigere *R*-Matrix des XXZ-Modells<sup>1</sup>

$$\check{\mathcal{R}}(\lambda_1, \lambda_2) := \begin{pmatrix} a(\lambda_1, \lambda_2) & & & \\ & \text{sh}(\eta) & b(\lambda_1, \lambda_2) & \\ & b(\lambda_1, \lambda_2) & \text{sh}(\eta) & \\ & & & a(\lambda_1, \lambda_2) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Im Folgenden werden die wichtigen Eigenschaften der *R*-Matrix diskutiert. Sie haben jeweils eine natürliche darstellungstheoretische Interpretation, lassen sich aber auch leicht nachrechnen.

Die im Hinblick auf integrable Modelle wichtigste Eigenschaft der *R*-Matrix ist die Yang-Baxter-Gleichung, welche besagt, dass es bei der Vertauschung der Moduln eines 3-fach Tensorproduktes nicht auf die Reihenfolge der 2-er Vertauschungen ankommt.

**Yang-Baxter-Gleichung:** In  $\text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$  gilt

$$\check{R}_{1,2}(\lambda_2, \lambda_3) \check{R}_{2,3}(\lambda_1, \lambda_3) \check{R}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = \check{R}_{2,3}(\lambda_2, \lambda_3) \check{R}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_3) \check{R}_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2), \quad (2.22)$$

mit der Definition

$$\check{R}_{1,2}(\lambda, \mu) := \check{R}(\lambda, \mu) \otimes I \quad \text{und} \quad \check{R}_{2,3}(\lambda, \mu) := I \otimes \check{R}(\lambda, \mu).$$

Die graphische Notation der Yang-Baxter-Gleichung findet sich in Abbildung 2.5.

Zur Herleitung der Yang-Baxter-Gleichung betrachtet man die beiden Intertwiner

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3} &\xrightarrow{\check{R}(\lambda_1, \lambda_2) \otimes I} V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_3} \\ &\xrightarrow{I \otimes \check{R}(\lambda_1, \lambda_3)} V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3} \otimes V_{\lambda_1} \xrightarrow{\check{R}(\lambda_2, \lambda_3) \otimes I} V_{\lambda_3} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3} &\xrightarrow{I \otimes \check{R}(\lambda_2, \lambda_3)} V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_3} \otimes V_{\lambda_2} \\ &\xrightarrow{\check{R}(\lambda_1, \lambda_3) \otimes I} V_{\lambda_3} \otimes V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \xrightarrow{I \otimes \check{R}(\lambda_1, \lambda_2)} V_{\lambda_3} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Da Evaluationsdarstellungen zu irreduziblen  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -Darstellungen und Tensorprodukte von solchen generisch irreduzibel sind [20], folgt (im generischen Fall) aus Schurs Lemma, dass die beiden Intertwiner proportional zueinander sind. Der Proportionalitätsfaktor im Fall der Yang-Baxter-Gleichung ist unabhängig von der Normierung der *R*-Matrix gleich eins.

Da die Identität als Intertwiner zwischen identischen Darstellungen fungiert, folgt sowohl, dass  $\check{R}(\lambda, \lambda)$  ein Vielfaches der Identität ist, als auch, dass  $\check{R}^{-1}(\lambda_1, \lambda_2)$  ein skalares Vielfaches von  $\check{R}(\lambda_2, \lambda_1)$  ist. Diese beiden Eigenschaften werden als Anfangsbedingung bzw. als Unitarität bezeichnet. Die Normierung der *R*-Matrix bestimmt die auftretenden Proportionalitätsfaktoren.

<sup>1</sup> Bezüglich der Basis  $(v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-)$ .

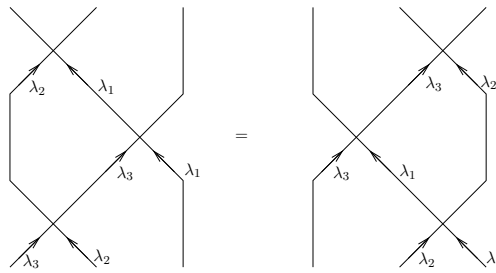


Abbildung 2.5.: Yang-Baxter-Gleichung

**Anfangsbedingung:**

$$\check{R}(\lambda, \lambda) = C_a I \otimes I \quad (2.23)$$

mit

$$C_a = a(\lambda, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } XXX, \\ \sinh(\eta) & \text{für } XXZ. \end{cases} \quad (2.24)$$

Die graphische Notation ist in Abbildung 2.6 a) zu sehen.

**Unitarität:**

$$\check{R}(\lambda_2, \lambda_1) \check{R}(\lambda_1, \lambda_2) = C_b I \otimes I \quad (2.25)$$

mit

$$C_b = a(\lambda_1, \lambda_2)a(\lambda_2, \lambda_1) = \begin{cases} 1 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 & \text{für } XXX, \\ \sinh^2(\eta) - \sinh^2(\eta(\lambda_1 - \lambda_2)) & \text{für } XXZ. \end{cases} \quad (2.26)$$

Die graphische Notation ist in Abbildung 2.6 b) zu sehen.

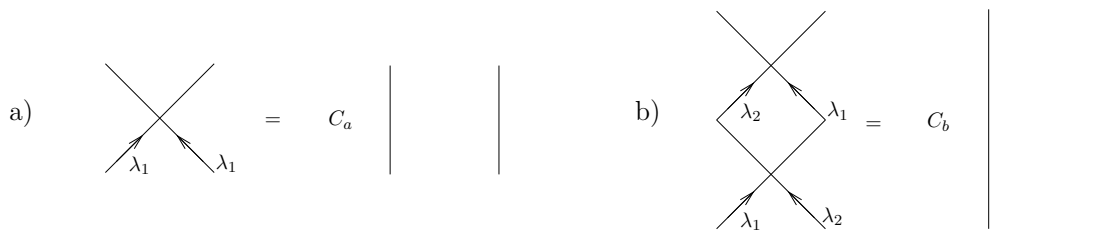


Abbildung 2.6.: Graphische Notation für a) Anfangsbedingung und b) Unitarität. Beide Relationen führen zum „Entkoppeln der Linien“.

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die sogenannte Crossing-Symmetrie. Diese ist mit einer speziellen Eigenschaft von  $U_q(sl_2)$ -Darstellungen verknüpft und gilt somit - anders als die drei vorhergehenden Eigenschaften - nicht unbedingt für die  $R$ -Matrizen anderer integrierbarer Modelle.

Dazu wird die  $R$ -Matrix

$$R(\lambda_1, \lambda_2) := P \check{R}(\lambda_1, \lambda_2) \in \text{End}(V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}) \quad (2.27)$$

definiert, wobei  $P$  den 2-Platz-Permutationsoperator bezeichnet. Mit Hilfe geeigneter Operatoren  $\varphi_i \in \text{End}(V_{\lambda_1})$  und  $\psi_i \in \text{End}(V_{\lambda_2})$  für  $i = 1, \dots, 4$  lässt sich diese in der Form

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i,j=1}^4 (\varphi_i \otimes \psi_j).$$

schreiben.

**Crossing-Symmetrie:** Für die Transponierte von  $R(\lambda_1, \lambda_2)$  bezüglich des Raumes  $V_{\lambda_2}$  gilt

$$\sum_{i,j} (\varphi_i \otimes \psi_j^t) = (\sigma \otimes I) R(\lambda_2 - 1, \lambda_1) (\sigma \otimes I), \quad (2.28)$$

mit

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & -q^{1/2} \\ q^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Die graphische Darstellung der Crossing-Symmetrie (dargestellt mit Hilfe von  $\check{R}$ ) findet sich in Abbildung 2.7.

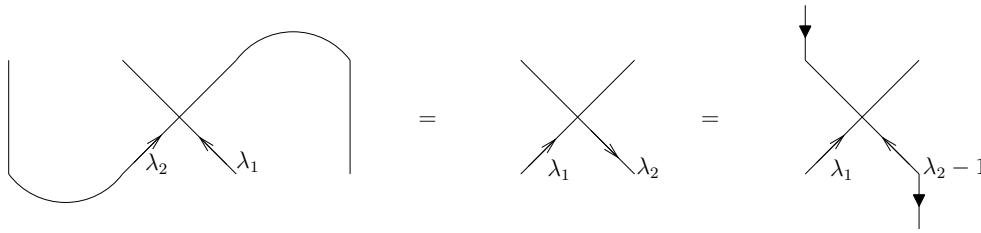


Abbildung 2.7.: Crossing-Symmetrie

Die erste Abbildung beschreibt die Transposition bezüglich des Raums  $V_{\lambda_2}$ . Der Dualraum von  $\mathbb{C}^2$  wird mit Hilfe des üblichen Skalarprodukts kanonisch mit  $\mathbb{C}^2$  identifiziert. Die Crossing-Symmetrie folgt aus der Tatsache, dass für  $U_q(\widehat{sl}_2)$ -Darstellungen die duale Darstellung der Evaluationsdarstellung zum Parameter  $\lambda$  äquivalent ist zur entsprechenden Evaluationsdarstellung zum Parameter  $\lambda - 1$ .

Mittels der Antipode  $S$  erhält man aus jeder endlichdimensionalen Darstellung  $\rho : A \rightarrow \text{End}(V)$  einer Hopfalgebra  $A$  eine Darstellung von  $A$  auf dem zugehörigen Dualraum  $V^*$  durch

$$(X \cdot \alpha)(v) = \alpha(S(X) \cdot v), \quad \text{für } X \in A, v \in V, \alpha \in V^*.$$

Mit Hilfe der Definitionen (2.6) und (2.10) überzeugt man sich leicht, dass für die Chevalley-Erzeuger von  $U_q(\widehat{sl}_2)$  die Gleichung

$$S_{U_q(sl_2)} ev_{\lambda-1} = ev_{\lambda} S_{U_q(\widehat{sl}_2)}$$

gilt [20]. Daraus folgt die oben behauptete Äquivalenz der Darstellungen.

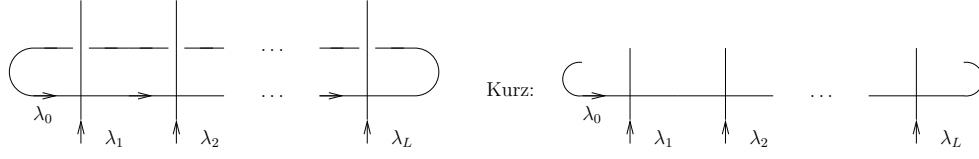


Abbildung 2.8.: Graphische Notation der Transfermatrix  $T_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda_0)$

### 2.2.2. Integrität des Heisenberg-Modells

Mit Hilfe der  $R$ -Matrix lässt sich eine (inhomogene) Transfermatrix auf  $L$  Gitterplätzen definieren. Zu diesem Zweck wird als Operator auf einem  $(L + 1)$ -fachen Tensorprodukt die Abbildung

$$\check{R}_{i,i+1}(\lambda, \mu) := I^{\otimes(i-1)} \otimes \check{R}(\lambda, \mu) \otimes I^{\otimes(L-i-1)}$$

definiert. Die Monodromiematrix zum Parameter  $\lambda_0$  ist als lineare Abbildung

$$\mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda_0) : V_0 \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_L \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_L \otimes V_0$$

definiert durch

$$\mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda_0) := \check{R}_{0,1}(\lambda_1, \lambda_0) \check{R}_{1,2}(\lambda_2, \lambda_0) \dots \check{R}_{L-1,L}(\lambda_L, \lambda_0).$$

Die Transfermatrix zum Parameter  $\lambda_0$  erhält man aus der Monodromiematrix durch Spurbildung über den Hilfsraum  $V_0$ :

$$T_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda_0) := \text{Spur}_{V_0}(\mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda_0)) \in \text{End}(V_1 \otimes \dots \otimes V_L).$$

Transfermatrizen zu verschiedenen Spektralparametern kommutieren miteinander:

$$[T_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda), T_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\mu)] = 0.$$

Der Beweis dieser wichtigen Aussage folgt aus der Yang-Baxter-Gleichung und der Unitarität der  $R$ -Matrix. Er ist in graphischer Form in Abbildung 2.9 geführt.

Aus dem Kommutieren der Transfermatrizen folgt, dass diese eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren besitzen. Insbesondere sind die Eigenvektoren der Transfermatrix  $T_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda)$  unabhängig vom Spektralparameter  $\lambda$ . Mit ein wenig Phantasie lässt sich außerdem aus Abbildung 2.9 ablesen, dass die  $R$ -Matrix als Intertwiner der Monodromiematrizen bzgl. der Hilfsräume fungiert:<sup>2</sup>

$$\check{R}_{V_\lambda, V_\mu}(\lambda, \mu) (\mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda) \circ \mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\mu)) = (\mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\mu) \circ \mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}(\lambda)) \check{R}_{V_\lambda, V_\mu}(\lambda, \mu). \quad (2.30)$$

Für die spezielle Wahl  $\lambda_1 = \dots = \lambda_L = 0$  ergibt sich der Hamiltonoperator des Heisenberg-Modells für periodische Randbedingungen durch

$$H_L = \frac{d}{d\lambda} \ln(T_{0, \dots, 0}(\lambda))|_{\lambda=0},$$

<sup>2</sup> Die Verkettung der Monodromiematrizen bzgl. des Tensorproduktes  $V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_L}$  wurde hier mit „ $\circ$ “ bezeichnet.

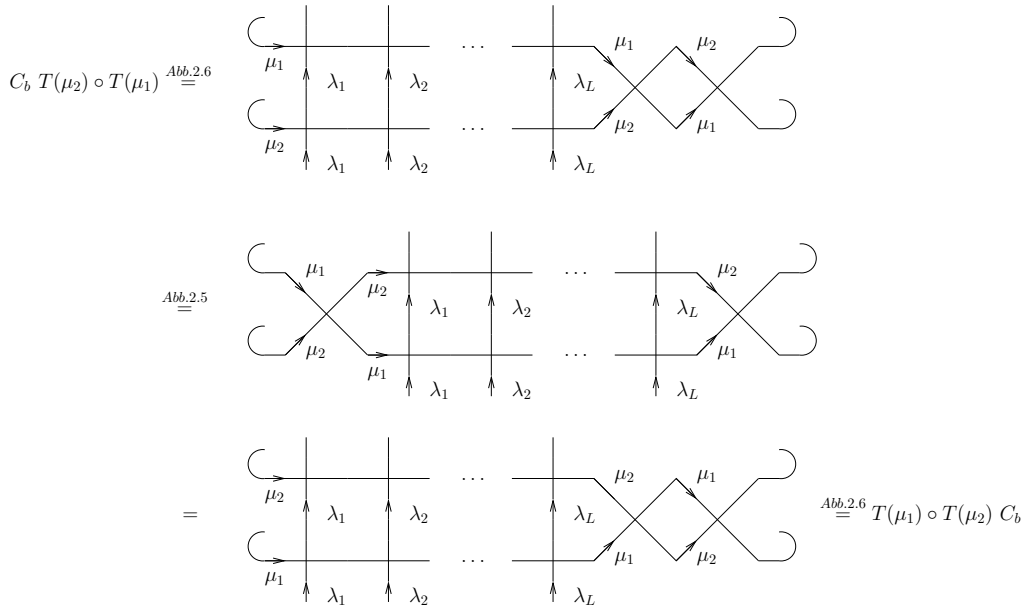


Abbildung 2.9.: Graphischer Beweis des Kommutierens der Transfermatrizen

eingebettet in die Familie unendlich vieler, kommutierender Operatoren  $I^n$ , definiert durch

$$I^n := \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^n \ln(T_{0,\dots,0}(\lambda))|_{\lambda=0} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Existenz dieser unendlich vielen Erhaltungsgrößen ist der Grund für die Integrabilität des Heisenbergmodells.<sup>3</sup> In der hier gewählten Normierung lautet der genaue Zusammenhang von  $H_L$  mit den Hamiltonoperatoren (2.1) bzw. (2.2):

$$H_L = \begin{cases} -\frac{1}{2}(H_{XXX} + L) & : \quad \Delta = 1 \\ -\frac{\eta}{2\text{sh}(\eta)}(H_{XXZ} + \Delta L) & : \quad \Delta \neq 1 \end{cases}$$

Es sei noch angemerkt, dass die Interpretation im Rahmen der Darstellungstheorie einer affinen Quantengruppe keineswegs relevant für die Integrabilität ist. Der Einstieg erfolgt darüber hinaus meist über Gleichung (2.30), wobei die Dimension des Hilfsraums  $V_0$  in der Definition der Monodromiematrix von der Dimension der Räume  $V_1, \dots, V_L$  verschieden sein kann.

Die Zustandssumme eines allgemeinen inhomogenen 6-Vertex-Modells der Größe  $L \times N$  ergibt sich durch  $N$ -fache Verkettung von Transfermatrizen  $T_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}$  zu verschiedenen Spektralparametern und anschließende Spurbildung über den Raum  $V_1 \otimes \dots \otimes V_L$ .

<sup>3</sup> Für  $n = 0$  ergibt sich der Impulsoperator  $p$ .

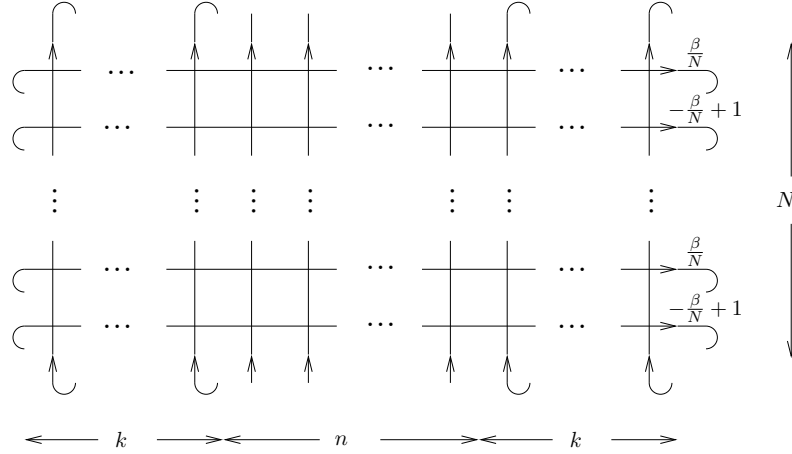


Abbildung 2.10.: Graphische Notation des Operators  $(D_n)_{L,N} \in \text{End}((\mathbb{C}^2)^{\otimes n})$ , multipliziert mit der zugehörigen Zustandssumme  $(Z)_{L,N}$ . Es gilt  $L = 2k + n$ .

### 2.3. Konstruktion des Dichteoperators für endliche Temperatur

Der Dichteoperator  $D \in \text{End}(\mathcal{H}_L)$  des Heisenberg-Modells mit Kettenlänge  $L$  im kanonischen Ensemble ist durch die allgemeine Formel

$$D := \frac{1}{Z_L} e^{-\beta H_L} \quad \text{mit} \quad \beta := \frac{1}{kT}$$

definiert. Darin bezeichnet  $Z_L$  die Zustandssumme des Systems, definiert durch

$$Z_L := \text{Spur}_{\mathcal{H}_L} e^{-\beta H_L}.$$

Für einen beliebigen Operator  $F \in \text{End}(\mathcal{H}_L)$  ist die zugeordnete Korrelationsfunktion gegeben durch

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z_L} \text{Spur}_{\mathcal{H}_L} (F e^{-\beta H_L}).$$

Im Folgenden werden periodische Randbedingungen für den Hamiltonoperator vorausgesetzt. Zur Konstruktion des Dichteoperators betrachtet man die beiden Transfermatrizen (mit  $\lambda_i = 0 \forall i$ )

$$T(\tau) = e^{-ip - \tau H_L + \mathcal{O}(\tau^2)} \quad \text{und} \quad T(-\tau + 1) = e^{ip - \tau H_L + \mathcal{O}(\tau^2)}.$$

und den daraus konstruierten Operator

$$Z_{L,N} D_{L,N} := [T(\tau) T(-\tau + 1)]^{N/2} = \left( e^{-\tau H_L + \mathcal{O}(\tau^2)} \right)^N.$$

Die Zustandssumme des zugehörigen  $(L \times N)$ -Vertexmodells wurde mit  $Z_{L,N}$  bezeichnet. Im sogenannten Trotter-Limes,  $N \rightarrow \infty$ , folgt

$$e^{-\beta H_L} = \lim_{N \rightarrow \infty} [T(\tau) T(-\tau + 1)]^{N/2} \quad \text{für} \quad \tau = \frac{\beta}{N}. \quad (2.31)$$

Um Korrelationsfunktionen zwischen Spins, die höchstens  $n$  viele Plätze voneinander entfernt sind, berechnen zu können, reicht es, den sogenannten  $n$ -Platz-Dichteoperator zu kennen. Dieser ergibt sich aus dem Operator  $D_{L,N}$  durch Bildung der Teilspur über alle Ein-Teilchen-Räume mit Ausnahme von  $n$  benachbarten:

$$(D_n)_{L,N} := \text{Spur}_{\mathbb{C}_{-k+1}^2, \dots, \mathbb{C}_0^2, \mathbb{C}_{n+1}^2, \dots, \mathbb{C}_{n+k}^2} (D)_{L,N} \quad (2.32)$$

Die Räume wurden von links nach rechts wie folgt unnummeriert:

$$\mathcal{H}_L = \mathbb{C}_{-k+1}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}_0^2 \otimes \mathbb{C}_1^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}_n^2 \otimes \mathbb{C}_{n+1}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}_{n+k}^2.$$

Abbildung 2.10 zeigt den Operator  $(D_n)_{L,N}$ , multipliziert mit der zugehörigen Zustandssumme  $Z_{L,N}$ . Die Abbildung verdeutlicht die Konstruktion des Objektes. Statt durch horizontale Transfermatrizen, lässt sich der Operator auch durch vertikale Transfer- und Monodromiematrizen aufbauen:

$$\mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}^v(\lambda_0) := \check{R}_{N, N+1}(\lambda_0, \lambda_N) \dots \check{R}_{2,3}(\lambda_0, \lambda_2) \check{R}_{1,2}(\lambda_0, \lambda_1).$$

Die Transfermatrix zum Parameter  $\lambda_0$  erhält man aus der Monodromiematrix durch Spurbildung über den Hilfsraum  $V_{N+1}$ :

$$T_{\lambda_1, \dots, \lambda_L}^v(\lambda_0) := \text{Spur}_{V_{N+1}} (\mathcal{T}_{\nu_1, \dots, \nu_N}^v(\lambda_0)) \in \text{End}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N).$$

Da im Folgenden nur noch vertikale Monodromie- bzw. Transfermatrizen vorkommen, wird der obere Index „ $v$ “ direkt wieder fortgelassen. Es gilt

$$(D_n)_{L,N} = \frac{\text{Spur} (T^k(0) \mathcal{T}^n(0) T^k(0))}{\text{Spur} (T^{2k+n}(0))}, \quad (2.33)$$

wobei die Verkettung der Transfer- und Monodromiematrizen als Verkettung bzgl. der horizontalen Räume zu verstehen ist. Zur Berechnung der Spur in Gleichung (2.33) wählt man eine Basis aus Eigenvektoren der vertikalen Transfermatrizen. Im thermodynamischen Limes, d.h. für  $L \rightarrow \infty$  ( bzw. für  $k \rightarrow \infty$ ), vereinfacht sich die Berechnung, da in diesem Fall nur der betragsgrößte Eigenwert zur Spur beiträgt:

$$(D_n)_{L,N} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}^n(0) | \Phi_0 \rangle}{(\Lambda_0(0))^n}. \quad (2.34)$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass dieser vom nächstgrößeren durch eine endliche Energielücke getrennt ist. Diese bleibt auch im Trotter-Limes bestehen. Die Bezeichnungen  $\Lambda_0$  und  $|\Phi_0\rangle$  stehen für den betragsgrößten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor der vertikalen Transfermatrizen.

Die Bildung des Trotter-Limes und die des thermodynamischen Limes vertauschen miteinander [47, 48], d.h. es gilt

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} (D_n)_{L,N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} (D_n)_{L,N}.$$

Anstelle der vertikalen Transfermatrix steht im allgemeinen Zugang die Quantentransfermatrix. Auf deren Einführung konnte hier wegen der Crossing-Symmetrie verzichtet werden.

### 2.3.1. Der inhomogene Dichteoperator

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung einer inhomogenen Version des Operators

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (D_n)_{L,N}.$$

Diese ergibt sich in natürlicher Weise aus der soeben erläuterten Konstruktion, indem man für die Argumente der  $n$  Monodromiematrizen die Parameter  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  einführt und außerdem für die  $N$  „horizontalen“ Spektralparameter die Werte  $\nu_1, \dots, \nu_N$  zulässt.

$$\begin{aligned} D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{Spur} (T^k(0) \mathcal{T}(\lambda_1) \mathcal{T}(\lambda_2) \cdots \mathcal{T}(\lambda_n) T^k(0))}{\text{Spur} (T^k(0) T(\lambda_1) T(\lambda_2) \cdots T(\lambda_n) T^k(0))} \\ &= \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}(\lambda_1) \mathcal{T}(\lambda_2) \cdots \mathcal{T}(\lambda_n) | \Phi_0 \rangle}{\Lambda_0(\lambda_1) \Lambda_0(\lambda_2) \cdots \Lambda_0(\lambda_n)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Der Operator  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  wird im Folgenden *der inhomogene  $n$ -Platz-Dichteoperator* oder auch nur *der  $n$ -Platz-Dichteoperator* genannt. Die graphische Darstellung der Konstruktion des Operators  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ist in Abbildung 2.11 gezeigt.

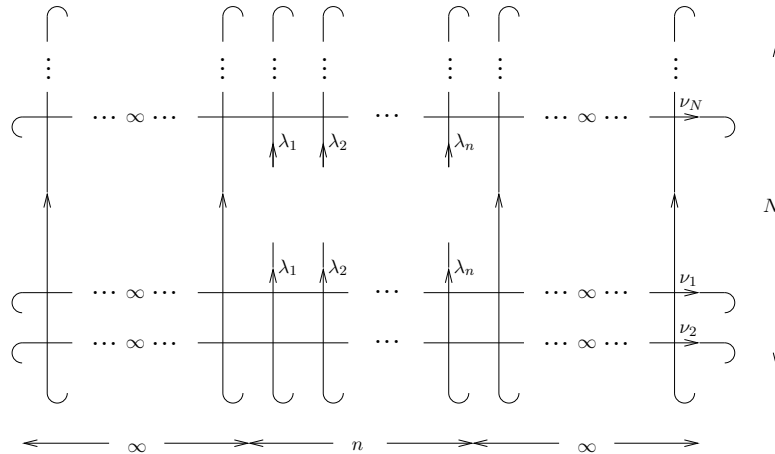


Abbildung 2.11.: Graphische Notation des inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperators  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , multipliziert mit der zugehörigen Zustandssumme  $Z(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Im Vergleich zu Abbildung 2.10 wurde die graphische Periodizität des Objektes in vertikaler Richtung ausgenutzt. Es gibt insgesamt  $N$  viele, periodisch geschlossene horizontale Linien,  $n$  viele „offene“ Linien in vertikaler Richtung, sowie zu deren linker und rechter Seite jeweils unendlich viele geschlossene vertikale Linien.

Im Vergleich zu dem eigentlich physikalisch interessanten Objekt ist dieser Dichteoperator gleich in zweifacher Hinsicht inhomogenisiert. Die Idee dahinter ist, Funktionalgleichungen in den neu eingeführten Parametern zu bekommen, welche die Berechnung dieses auf den ersten Blick komplizierteren Objektes erlauben. Anschließend ist für die Lösung zu zeigen, dass der Grenzwert auf die physikalischen Werte existiert.



Wie in Abschnitt 2.3 dargelegt ergibt sich für den Fall gerader Trotter-Zahl  $N$  durch Spezialisierung der horizontalen Spektralparameter auf die Werte

$$\nu_{2k-1} = \frac{\beta}{N}, \quad \nu_{2k} = -\frac{\beta}{N} + 1 \quad \text{für } k = 1, \dots, N/2 \quad (2.36)$$

und  $\lambda_i = 0$  für  $i = 1, \dots, n$  im Trotter-Limes  $N \rightarrow \infty$  der  $n$ -Platz-Dichteoperator des Heisenberg-Modells für Temperatur  $T$  im thermodynamischen Limes.

Die Einführung der Spektralparameter  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  zur Berechnung der Korrelationsfunktionen der XXZ-Kette bei Temperatur null geht auf die Arbeit [34] von Jimbo, Miki, Miwa und Nakayashiki zurück. Sie führte sowohl zur Entwicklung der Vielfachintegraldarstellung für die Matrixelemente des  $n$ -Platz-Dichteoperators, als auch zu der Beobachtung, dass dieser die reduzierte  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung erfüllt.

Die Bedeutung der Inhomogenisierung in horizontaler Richtung für die Behandlung des Falls endlicher Temperatur wird im nächsten Kapitel klar werden.



### 3. Charakterisierende Eigenschaften des inhomogenen Dichteoperators

Dieses Kapitel bildet das inhaltliche Zentrum der vorliegenden Arbeit. Es werden die charakterisierenden Eigenschaften des inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperators  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  untersucht. Dieser wird als operatorwertige Funktion in den vertikalen Spektralparametern  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  betrachtet, während die horizontalen Spektralparametern  $\nu_1, \dots, \nu_N$  als äußere Parameter aufgefasst werden.

Es zeigt sich, dass es zur eindeutigen Charakterisierung des Operators  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  genügt, diesen als Funktion nur eines der vertikalen Spektralparameter zu betrachten. Das zentrale Ergebnis ist die Herleitung einer diskreten Funktionalgleichung in Abschnitt 3.1.1 sowie der Beweis in Abschnitt 3.2, dass diese Funktionalgleichung für generische Werte der horizontalen Spektralparameter den Dichteoperator - im Zusammenspiel mit dessen übrigen funktionalen Eigenschaften - eindeutig festlegt.

#### 3.1. Eigenschaften des inhomogenen Dichteoperators

Die erste wichtige Eigenschaft von  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  betrifft die Form der Abhängigkeit von den vertikalen Spektralparametern.

**Polynomialitätseigenschaft:** a) Für die XXX-Kette ist der Operator

$$\Lambda_0(\lambda_n)D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \tag{3.1}$$

ein Polynom  $N$ -ten Grades in  $\lambda_n$ . Damit ist gemeint, dass sich der Operator als Polynom in  $\lambda_n$  schreiben lässt, dessen höchste Potenz nicht größer als  $N$  ist und dessen operatorwertige Koeffizienten unabhängig von  $\lambda_n$  sind.

b) Für die XXZ-Kette handelt es sich bei (3.1) um ein Polynom  $N$ -ten Grades in  $q^{2\lambda_n}$ , welches mit  $q^{-N\lambda_n}$  multipliziert ist.

(Die analoge Aussage gilt jeweils für die übrigen vertikalen Spektralparameter.)

Die  $R$ -Matrix der XXX-Kette,

$$\check{R}(\lambda_1, \lambda_2) = (1 + \lambda_1 - \lambda_2)I \otimes I - (\lambda_1 - \lambda_2)Pr_s,$$

ist ein Polynom ersten Grades in  $\lambda_1$ . (Die analoge Aussage gilt auch für  $\lambda_2$ , bzw für die Differenz  $\lambda_1 - \lambda_2$ .) Daraus folgt, dass die Monodromiematrix  $\mathcal{T}(\lambda_n)$  zur Trotterzahl  $N$  ein Polynom  $N$ -ten Grades in  $\lambda_n$  ist. Da der Spektralparameter  $\lambda_n$  in den Operator

$$\Lambda_0(\lambda_n)D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}(\lambda_1) \cdots \mathcal{T}(\lambda_n) | \Phi_0 \rangle}{\prod_{i=1}^{n-1} \Lambda_0(\lambda_i)}$$

### 3. Charakterisierende Eigenschaften des inhomogenen Dichteoperators

---

nur über die Monodromiematrix  $\mathcal{T}(\lambda_n)$  eingeht, besitzt dieser ebenfalls diese Eigenschaft.

Im Falle der XXZ-Kette sind die Funktionen  $a(\lambda_1, \lambda_2)$  und  $b(\lambda_1, \lambda_2)$  Laurentpolynome ersten Grades in  $q^{\lambda_1}$ , deren konstanter Koeffizient verschwindet. Anders ausgedrückt sind sie das Produkt aus  $q^{-\lambda_1}$  und einem Polynom ersten Grades in  $q^{2\lambda_1}$ :

$$\begin{aligned}\check{R}(\lambda_1, \lambda_2) &= \text{sh}(\eta(1 + \lambda_1 - \lambda_2))I \otimes I - \text{sh}(\eta(\lambda_1 - \lambda_2))Pr_s \\ &= q^{-\lambda_1} \left[ \frac{1}{2} \left( q^{2\lambda_1} q^{-\lambda_2+1} - q^{\lambda_2-1} \right) I \otimes I - \frac{1}{2} \left( q^{2\lambda_1} q^{-\lambda_2} - q^{\lambda_2} \right) Pr_s \right].\end{aligned}$$

Insgesamt folgt die angegebene Polynomialitätseigenschaft.

**Asymptotik:** Für die Asymptotik bzgl.  $\lambda_n$  gilt

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{2} D_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \otimes I. \quad (3.2)$$

(Die analoge Aussage gilt für den Spektralparameter  $\lambda_1$ .)

Für die in der Konstruktion der Monodromiematrix  $\mathcal{T}_{\nu_1, \dots, \nu_N}(\lambda_n)$  vorkommenden  $R$ -Matrizen gilt

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} a^{-1}(\lambda_n, \nu_i) \check{R}(\lambda_n, \nu_i) = I \otimes I - Pr_s = P_{V_{\lambda_n}, V_{\nu_i}}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} \Lambda_0(\lambda_n)^{-1} \mathcal{T}_{\nu_1, \dots, \nu_N}(\lambda_n) = \frac{1}{2} P_{V_{\nu_1} \otimes \dots \otimes V_{\nu_N}, V_{\lambda_n}}, \quad (3.3)$$

woraus die Behauptung folgt. Für beliebige Vektorräume sei der Permutationsoperator  $P_{V_a, V_b} : V_a \otimes V_b \rightarrow V_b \otimes V_a$  definiert durch

$$P_{V_a, V_b}(x_a \otimes x_b) = x_b \otimes x_a \quad \forall x_a \in V_a, x_b \in V_b.$$

**Reduktionsbedingung:** Durch Teilspurbildung über den Raum  $V_n$  erhält man aus dem  $n$ -Platz-Dichteoperator den  $(n-1)$ -Platz-Dichteoperator:

$$\text{Spur}_{V_n}(D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = D_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).$$

(Die Aussage gilt ebenso für Teilspurbildung über den Raum  $V_{\lambda_1}$ .)

Die Reduktionsbedingung folgt unmittelbar aus Gleichung (2.35):

$$\begin{aligned}\text{Spur}_{V_n}(D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) &= \text{Spur}_{V_n} \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}(\lambda_1) \cdots \mathcal{T}(\lambda_n) | \Phi_0 \rangle}{\prod_{i=1}^n \Lambda_0(\lambda_i)} \\ &= \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}(\lambda_1) \cdots \mathcal{T}(\lambda_{n-1}) \mathcal{T}(\lambda_n) | \Phi_0 \rangle}{\prod_{i=1}^n \Lambda_0(\lambda_i)} = \frac{\langle \Phi_0 | \mathcal{T}(\lambda_1) \cdots \mathcal{T}(\lambda_{n-1}) | \Phi_0 \rangle}{\prod_{i=1}^{n-1} \Lambda_0(\lambda_i)} \\ &= D_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).\end{aligned} \quad (3.4)$$

**Intertwining-Relation:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \check{R}_{i,i+1}(\lambda_i, \lambda_{i+1}) D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \check{R}_{i,i+1}(\lambda_{i+1}, \lambda_i) \\ = C_b(\lambda_i, \lambda_{i+1}) D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \dots, \lambda_n) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Aussage folgt aus Gleichung (2.30), welche besagt, dass die  $R$ -Matrix als Intertwiner auf den Monodromiematrizen operiert.

**$U(\mathfrak{sl}_2)$ -Invarianz:** Der  $n$ -Platz-Dichteoperator der XXX-Kette kommutiert mit der  $U(\mathfrak{sl}_2)$ -Operation auf dem  $n$ -fachen Tensorprodukt:

$$D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Delta^{(n)}(\pi(A)) = \Delta^{(n)}(\pi(A)) D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit  $A \in U(\mathfrak{sl}_2)$  und  $\pi$  der Spin-1/2 Darstellung.

Die Monodromiematrizen kommutieren per Konstruktion mit der  $U(\mathfrak{sl}_2)$ -Operation. Bei der Konstruktion der Transfermatrizen durch Teilspurbildung bleibt diese Eigenschaft erhalten, da der 2-Platz-Permutationsoperator  $U(\mathfrak{sl}_2)$ -invariant ist<sup>1</sup>.

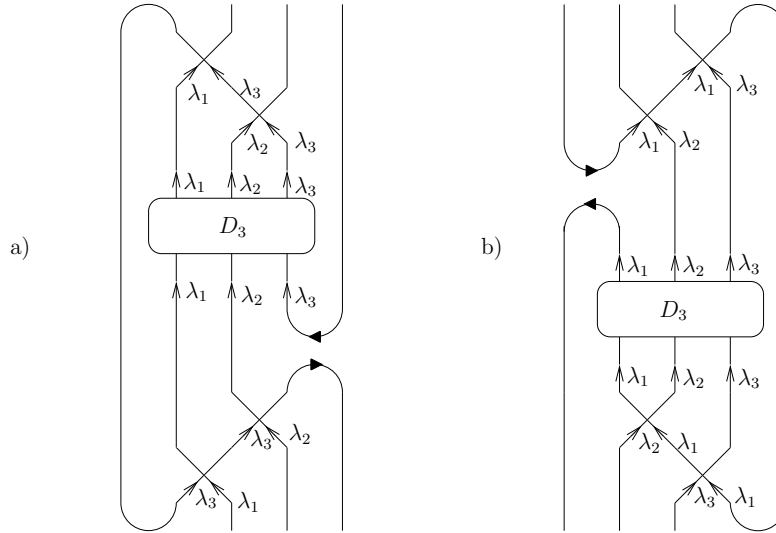


Abbildung 3.1.: Graphische Notation des Bildes von  $D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  unter a)  $(C_A^{(3)})^{-1} A_3^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  bzw. b)  $(C_A^{(1)})^{-1} A_3^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

**Diskrete Funktionalgleichung:** An den Stellen  $\lambda_n = \nu_1, \dots, \nu_N$  gilt die Funktionalgleichung

$$A_n^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) (D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)) = D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n - 1). \quad (3.6)$$

<sup>1</sup> Für den inhomogenen Dichteoperator der XXZ-Kette, wie er im vorherigen Kapitel definiert wurde, gilt keine  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -Invarianz. Zum  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -invarianten Fall siehe [10, 18]

Das Bild eines Endomorphismus'  $B \in \text{End}((\mathbb{C}^2)^{\otimes n})$  unter

$$A_n^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \text{End}((\mathbb{C}^2)^{\otimes n}) \rightarrow \text{End}((\mathbb{C}^2)^{\otimes n})$$

ist dabei definiert durch

$$A_n^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(B) := - \left( \prod_{l=1}^{n-1} C_b^{-1}(\lambda_n, \lambda_l) \right) \text{Spur}_{V_n} \left[ \check{R}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_n) \cdots \check{R}_{n-1,n}(\lambda_{n-1}, \lambda_n) \right. \\ \left. (|s(q)\rangle \langle s^t(q)|)_{n,n+1} (B \otimes I_{V_{n+1}}) \check{R}_{n-1,n}(\lambda_n, \lambda_{n-1}) \cdots \check{R}_{2,3}(\lambda_n, \lambda_2) \check{R}_{1,2}(\lambda_n, \lambda_1) \right]. \quad (3.7)$$

Zur Formulierung der Definition wurde rechts das Tensorprodukt mit einem Hilfsraum  $V_{n+1}$  gebildet. Die Funktionalgleichung (3.6) ist eine diskrete Version der reduzierten q-Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung [9, 12]. Sie wird im folgenden Abschnitt für einen etwas allgemeineren Fall hergeleitet. Die graphische Konstruktion des Operators  $A_n^{(n)}$  findet sich in Abbildung 3.1 a). Dargestellt ist dort das Bild von  $D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

Die Funktionalgleichung lässt sich bezüglich eines jeden der  $n$  vertikalen Spektralparameter formulieren. Angegeben ist in Abbildung 3.1 b) zusätzlich der Operator  $A_n^{(1)}$  bezüglich des ersten Spektralparameters, da dieser in der Literatur (und daher auch in den späteren Kapiteln dieser Arbeit) verwendet wird.

### 3.1.1. Herleitung der diskreten Funktionalgleichung in acht Bildern

Die Symmetrie

$$[\check{R}(\lambda_1, \lambda_2), e^{\kappa S_z} \otimes e^{\kappa S_z}] = 0 \quad \text{für beliebiges } \kappa \in \mathbb{C} \quad (3.8)$$

der  $R$ -Matrix erlaubt das Einschleiben des Operators

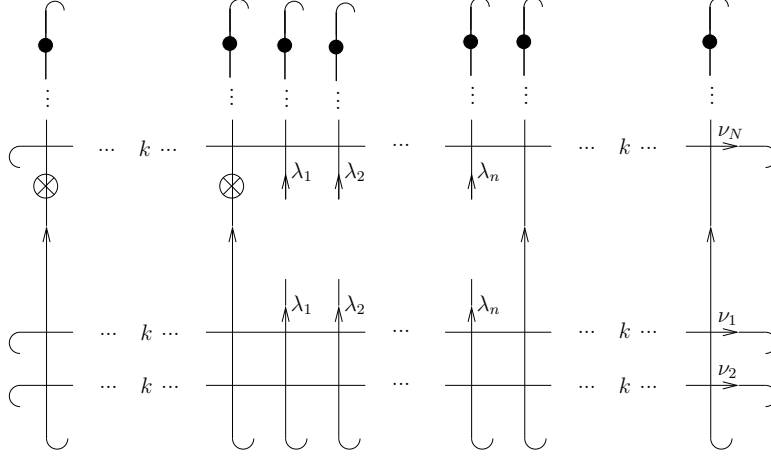
$$e^{\kappa S_z} \otimes \cdots \otimes e^{\kappa S_z} \in \text{End}((\mathbb{C}^2)^{\otimes L}) \quad (3.9)$$

in die Konstruktion von  $(D_n)_{L,N}$ . Auf der Ebene des Hamiltonoperators entspricht dies für den Wert  $\kappa = \beta h$  der Betrachtung des Heisenberg-Modells in einem homogenen Magnetfeld in  $z$ -Richtung. Die Modifikation ist auch „einseitig“ durch das Einschleiben des Operators

$$(e^{\eta \alpha 2 S_z})^{\otimes k} \otimes I^{\otimes (n+k)} \quad \text{mit } L = 2k + n \quad (3.10)$$

möglich. Der Parameter  $\alpha$  in (3.10), im Folgenden Alpha-Parameter genannt, entspricht dem in [13] für die XXZ-Kette eingeführten Regularisierungsparameter. Wegen  $e^\eta = q$  entspricht der zweite Einschub im Fall der XXX-Kette der Identität. Abbildung 3.3 zeigt den Operator  $Z_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (D_n)_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit den zusätzlichen Einschüben (3.9) und (3.10). Gleichung (3.6) gilt auch bei Abhängigkeit des Operators  $D_n$  vom Magnetfeld und vom Alpha-Parameter, wobei die Definition von  $A_n$  zu ändern ist zu:

$$A_n^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(B) := C_A \text{Spur}_{V_n} \left[ (e^{\eta \alpha 2 S_z})_1 \check{R}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_n) \cdots \check{R}_{n-1,n}(\lambda_{n-1}, \lambda_n) \right]$$


 Abbildung 3.2.: Graphische Notation der Zusatzoperatoren  $e^{\eta\alpha 2S_z}$  (links) und  $e^{\beta h S_z}$ 

 Abbildung 3.3.: Konstruktion des Operators  $Z_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(D_n)_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit zusätzlichem Magnetfeld  $h$  und Alpha-Parameter  $\alpha$ . Abbildung 3.2 definiert die graphischen Notationen der Zusatzoperatoren. Es gilt  $L = 2k + n$ .

$$(|s\rangle\langle s^t|)_{n,n+1} (B \otimes I_{V_{n+1}}) \check{R}_{n-1,n}(\lambda_n, \lambda_{n-1}) \cdots \check{R}_{2,3}(\lambda_n, \lambda_2) \check{R}_{1,2}(\lambda_n, \lambda_1) \quad (3.11)$$

mit der Konstanten

$$C_A := -\frac{\Lambda_0^\alpha(\lambda_n - 1)}{\Lambda_0(\lambda_n - 1)} \prod_{l=1}^{n-1} C_b^{-1}(\lambda_n, \lambda_l). \quad (3.12)$$

Die Operation von  $A_n$  vertauscht mit der Bildung des thermodynamischen Limes:

$$A_n(D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = A_n \left( \lim_{L \rightarrow \infty} (D_n)_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right) = \lim_{L \rightarrow \infty} A_n((D_n)_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)).$$

Zur Herleitung von Gleichung (3.6) wird daher der Ausdruck

$$C_A^{-1} Z_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left( (D_n)_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right)$$

betrachtet. Dieser wird in den Abbildungen 3.4-3.11 mit Hilfe der in Kapitel 2.2.1 erläuterten Eigenschaften der  $R$ -Matrix umgeformt. O. B. d. A. wird der Fall  $\lambda_n = \nu_1$  betrachtet. Bis auf skalare Vorfaktoren zeigen die Abbildungen 3.4-3.11 jeweils denselben Operator.

Anschließend wird durch die Zustandssumme dividiert und der thermodynamische Limes gebildet.

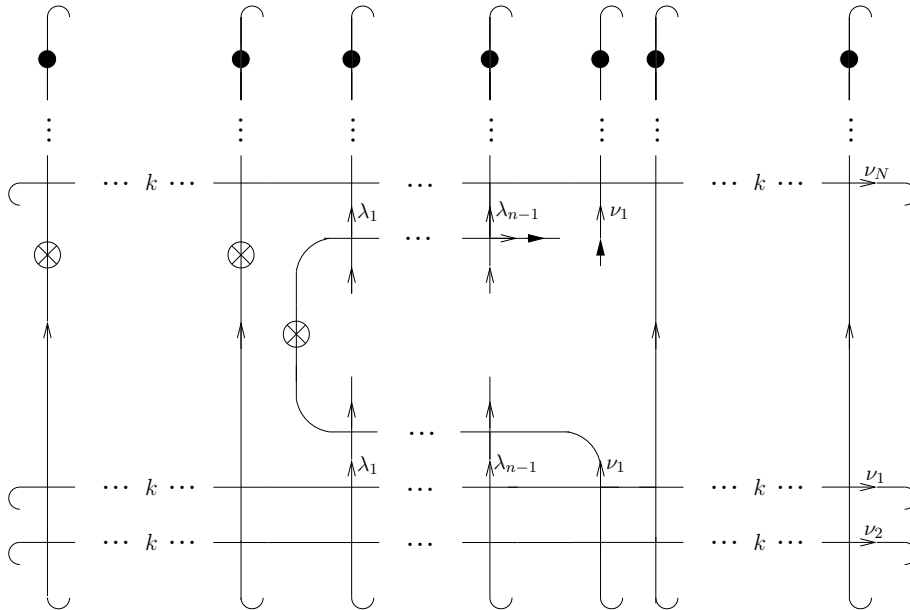


Abbildung 3.4.: Bild des Operators  $Z_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \nu_1)(D_n)_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \nu_1)$  unter  $C_A^{-1} A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

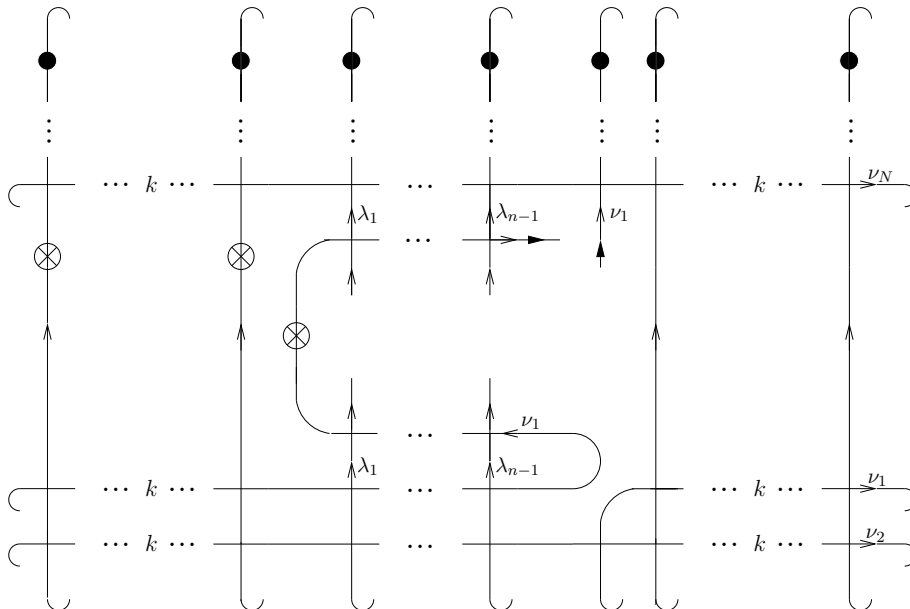


Abbildung 3.5.: Es wurde die Anfangsbedingung, siehe Abbildung 2.6 a), benutzt. Dabei tritt ein Faktor  $a(\nu_1, \nu_1)$  auf.



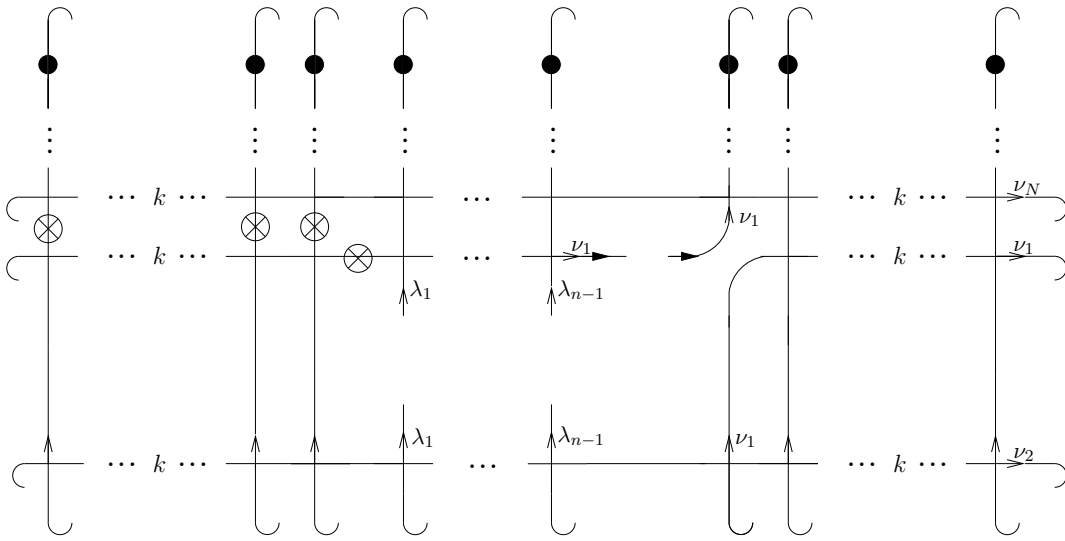


Abbildung 3.6.: Es wurde die Unitarität benutzt (siehe Abbildung 2.6 b). Dabei tritt ein Faktor  $\prod_{l=1}^{n-1} C_b(\nu_1, \lambda_l)$  auf. Auf der rechten Seite formiert sich eine vertikale Transfermatrix  $T(\nu_1)$ .

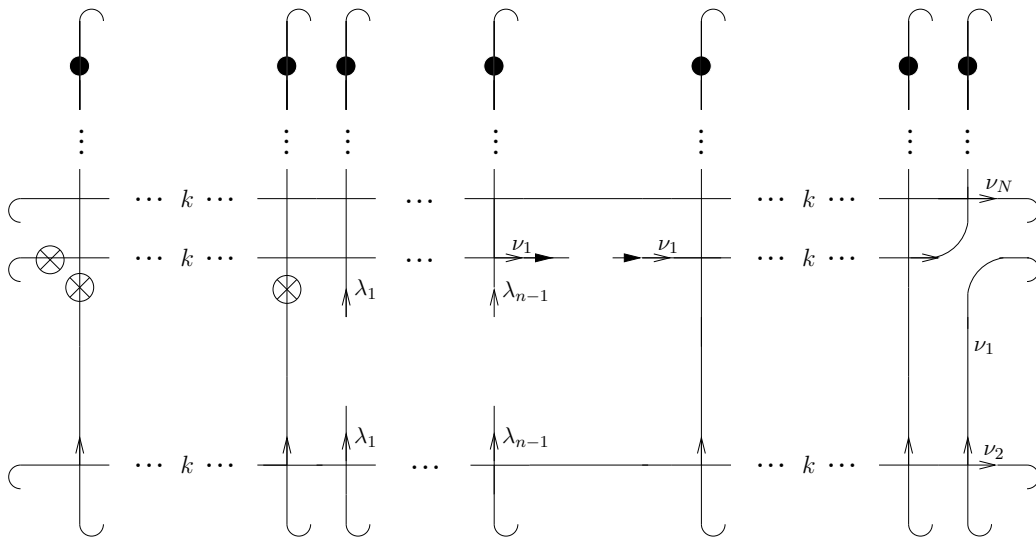


Abbildung 3.7.: Auf der linken Seite wurde  $k$ -mal die Kommutatorrelation (3.8) angewendet, um den aus der Definition von  $A_n$  stammenden Operator  $e^{\eta\alpha 2S_z}$  nach links zu bringen. Rechts wurde das Kommutieren der vertikalen Transfermatrizen ausgenutzt, um die Transfermatrix  $T(\nu_1)$  um  $k$  Plätze nach rechts zu bringen.



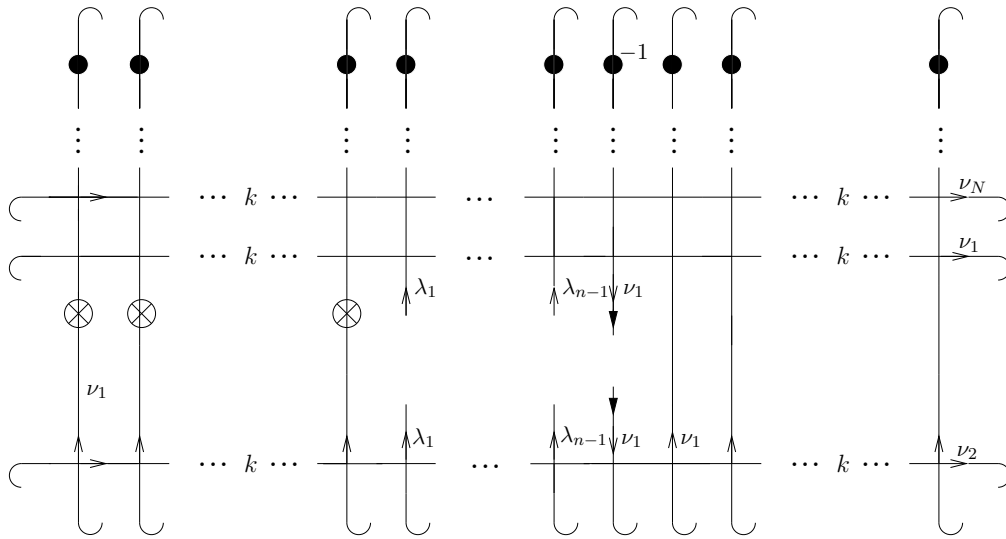


Abbildung 3.10.: Mit Hilfe der Anfangsbedingung wurden die Linien im Mittelfeld geschlossen. Es kommt ein Faktor  $a(\nu_1, \nu_1)^{-2}$  hinzu. Auf der rechten Seite ist erneut eine Transfermatrix  $T(\nu_1)$  entstanden.

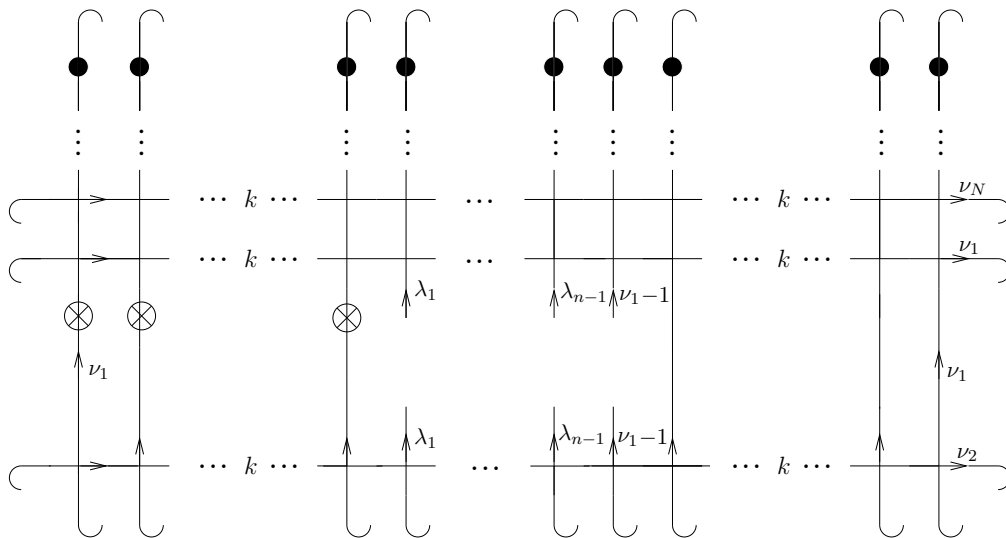


Abbildung 3.11.: Durch die Anwendung der Crossing-Symmetrie, siehe Abbildung 2.7, ergibt sich die Monodromiematrix  $\mathcal{T}(\nu_1 - 1)$ . Es kommt ein Faktor  $(-1)^{N-1}$  hinzu. Desweiteren wurde auf der rechten Seite die Transfermatrix  $T(\nu_1)$  um  $k$  Plätze nach rechts kommutiert. Die horizontale Transfermatrix zum Spektralparameter  $\nu_1$  kann abschließend an ihren Ausgangsplatz kommutiert werden.

### 3. Charakterisierende Eigenschaften des inhomogenen Dichteoperators

---

Im Vergleich zum Urbildoperator - siehe Abbildung 3.3 - weist der Bildoperator in Abbildung 3.11 eine zusätzliche Transfermatrix  $T_{\nu_1, \dots, \nu_N}^\alpha(\nu_1)$  auf der linken und eine zusätzliche Transfermatrix  $T_{\nu_1, \dots, \nu_N}(\nu_1)$  auf der rechten Seite auf. Außerdem ist die im Urbild vorkommende Monodromiematrix  $\mathcal{T}_{\nu_1, \dots, \nu_N}(\nu_1)$  im Bild durch die Monodromiematrix zum Spektralparameter  $\nu_1 - 1$  ersetzt worden. Insgesamt ist ein skalarer Faktor

$$(-1)^{N-1} \frac{\prod_{l=1}^{n-1} C_b(\nu_1, \lambda_l)}{\prod_{l=1}^N C_b(\nu_1, \nu_l)}.$$

bei den Umformungen aufgetreten.

Der nächste Schritt besteht in der Bildung des thermodynamischen Limes. Dies ist wegen der beiden zusätzlich entstandenen vertikalen Transfermatrizen nötig, da der Bildoperator 3.11 ein skalares Vielfaches des Urbildoperators (mit verschobenem Spektralparameter) sein soll. Vorher wird durch die Zustandssumme  $Z_{L,N}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \nu_1)$  geteilt. Die Verallgemeinerung von Gleichung (2.35) für den  $n$ -Platz-Dichteoperator mit Alpha-Parameter lautet<sup>2</sup>

$$D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left( \prod_{i=1}^n \Lambda_0(\lambda_i) \right)^{-1} \langle \Phi_0^\alpha | \mathcal{T}(\lambda_1) \cdots \mathcal{T}(\lambda_n) | \Phi_0 \rangle. \quad (3.13)$$

Es sei  $\Lambda_0^\alpha(\lambda)$  der betragsgrößte Eigenwert der  $\alpha$ -abhängigen Transfermatrix  $T_{\nu_1, \dots, \nu_N}^\alpha(\lambda)$  und  $|\Phi_0^\alpha\rangle$  der zugehörige (auf eins normierte) Eigenvektor.

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} & D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \nu_1) \xrightarrow{A_n^{(n)}(\nu_1)} \\ & C_A (-1)^{N-1} \frac{\prod_{l=1}^{n-1} C_b(\nu_1, \lambda_l)}{\prod_{l=1}^N C_b(\nu_1, \nu_l)} \Lambda_0^\alpha(\nu_1) \Lambda_0(\nu_1) \frac{\Lambda_0(\nu_1 - 1)}{\Lambda_0(\nu_1)} D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \nu_1 - 1) \\ & = -C_A \prod_{l=1}^{n-1} C_b(\nu_1, \lambda_l) \frac{\Lambda_0(\nu_1 - 1)}{\Lambda_0^\alpha(\nu_1 - 1)} D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \nu_1 - 1) \\ & = D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \nu_1 - 1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dies entspricht Gleichung (3.6).

Im letzten Schritt in Gleichung (3.14) wurde die Inversionsrelation

$$\Lambda_0^\alpha(\nu_1 - 1) \Lambda_0^\alpha(\nu_1) = (-1)^N \prod_{l=1}^N C_b(\nu_1, \nu_l) \quad (3.15)$$

benutzt. Diese ergibt sich aus der Eigenschaft

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_N}^\alpha(\nu_i) T_{\nu_1, \dots, \nu_N}^\alpha(\nu_i - 1) = (-1)^N \left( \prod_{l=1}^N C_b(\nu_i, \nu_l) \right) I^{\otimes N} \quad \text{für } i = 1, \dots, N$$

der Transfermatrizen, welche aus den Eigenschaften der  $R$ -Matrix folgt.

<sup>2</sup> Unter der Bedingung, dass  $\langle \Phi_0^\alpha | \Phi_0 \rangle \neq 0$  gilt.

## 3.2. Eindeutigkeitsatz

**Eindeutigkeitsatz:** Für generische Werte der horizontalen Spektralparameter  $\nu_1, \dots, \nu_N$  ist der  $n$ -Platz-Dichteoperator  $D_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  durch die Funktionalgleichung (3.6) für die  $N$  Werte  $\lambda_n \in \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}$  zusammen mit der Bedingung (3.2) für die Asymptotik eindeutig bestimmt.

Der Beweis beruht auf der zu Anfang dieses Kapitels erläuterten Polynomialitätseigenschaft des  $n$ -Platz-Dichteoperators. Zu zeigen ist, dass die insgesamt  $(N + 1)$  im Eindeutigkeitsatz genannten Bedingungen das jeweilige Polynom  $N$ -ten Grades eindeutig festlegen.

### 3.2.1. Beweis für die XXX-Kette

Die Funktionalgleichung (3.6) für den  $n$ -Platz-Dichteoperator bezieht sich nur auf dessen Abhängigkeit vom  $n$ -ten Spektralparameter. Im Folgenden steht daher die Abkürzung  $D_n(\lambda_n)$  für den Operator  $D_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

Der mit dem größten Eigenwert der Transfermatrix zum Spektralparameter  $\lambda_n$  multiplizierte Dichteoperator (3.1) ist ein Polynom  $N$ -ten Grades in  $\lambda_n$ , dessen operatorwertige Koeffizienten von  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , sowie von  $\nu_1, \dots, \nu_N$  abhängen.

Die horizontalen Spektralparameter seien paarweise verschieden. In diesem Fall bilden die Polynome  $p_j$ , definiert durch

$$p_0(x) := \prod_{i=1}^N (x - \nu_i) \quad \text{und} \quad p_j(x) := \frac{\prod_{k \neq j} (x - \nu_k)}{\prod_{k \neq j} (\nu_j - \nu_k)} \quad \text{für } j = 1, \dots, N,$$

eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad  $N$  in einer Variablen über  $\mathbb{C}$ . Ebenso bilden die Polynome  $\tilde{p}_j$ , definiert durch

$$\tilde{p}_j(x) := p_j(x + 1) \quad \text{für } j = 0, \dots, N,$$

eine Basis desselben Raumes. Die Tupel  $(p_1, \dots, p_N)$  und  $(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N)$  sind dabei Basen des Unterraums der Polynome vom Grad  $(N - 1)$ . Die Transformationsmatrix  $W_N$  in diesem Unterraum, definiert durch

$$\tilde{p}_i = \sum_{j=1}^N (W_N)_{ji} p_j,$$

besitzt die Matrixelemente

$$(W_N)_{kl} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \frac{(1 + \nu_k - \nu_j)}{(\nu_l - \nu_j)} \quad \text{für } k, l = 1, \dots, N.$$

Die Matrix  $W_N$  ist ähnlich zu einem Jordanblock der Länge  $N$  zum Eigenwert 1. Für  $N = 1, 2, 3$  ergeben sich die Transformationsmatrizen:

$$W_1 = (1), \quad W_2 = \begin{pmatrix} \frac{1+\nu_1-\nu_2}{\nu_1-\nu_2} & \frac{1}{\nu_2-\nu_1} \\ \frac{1}{\nu_1-\nu_2} & \frac{1+\nu_2-\nu_1}{\nu_2-\nu_1} \end{pmatrix}$$

und

$$W_3 = \begin{pmatrix} \frac{(1+\nu_1-\nu_2)(1+\nu_1-\nu_3)}{(\nu_1-\nu_2)(\nu_1-\nu_3)} & \frac{(1+\nu_1-\nu_3)}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_2-\nu_3)} & \frac{(1+\nu_1-\nu_2)}{(\nu_3-\nu_1)(\nu_3-\nu_2)} \\ \frac{(1+\nu_2-\nu_3)}{(\nu_1-\nu_2)(\nu_1-\nu_3)} & \frac{(1+\nu_2-\nu_1)(1+\nu_2-\nu_3)}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_2-\nu_3)} & \frac{1+(\nu_2-\nu_1)}{(\nu_3-\nu_1)(\nu_3-\nu_2)} \\ \frac{1+\nu_3-\nu_2}{(\nu_1-\nu_2)(\nu_1-\nu_3)} & \frac{(1+\nu_3-\nu_1)}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_2-\nu_3)} & \frac{(1+\nu_3-\nu_2)}{(\nu_3-\nu_1)(\nu_3-\nu_2)} \end{pmatrix}.$$

Die volle Transformationsmatrix  $V_N$  zwischen den Basen  $(p_0, p_1, \dots, p_N)$  und  $(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N)$  erhält man durch Erweiterung der Matrix  $W_N$  um eine 0-te Zeile und Spalte mit den Einträgen

$$(V_N)_{0,l} = \delta_{l,0} \quad \text{für } l = 0, \dots, N$$

und  $(V_N)_{k,0} = \prod_{j=1}^N (1 + \nu_k - \nu_j) \quad \text{für } k = 1, \dots, N.$

Für die Entwicklung des Operators (3.1) nach den beiden Polynombasen,

$$\Lambda_0(\lambda_n) D_n(\lambda_n) = \sum_{i=0}^N D_i p_i(\lambda_n) \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_0(\lambda_n) D_n(\lambda_n) = \sum_{i=0}^N \tilde{D}_i \tilde{p}_i(\lambda_n), \quad (3.16)$$

gilt per Konstruktion für die Entwicklungskoeffizienten

$$D_i = \Lambda_0(\nu_i) D(\nu_i) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{D}_i = \Lambda_0(\nu_i - 1) D(\nu_i - 1)$$

für  $i = 1, \dots, N$ . Die diskrete Funktionalgleichung (3.6),

$$A_n(\nu_i) (D(\nu_i)) = D(\nu_i - 1) \quad \text{für } i = 1, \dots, N,$$

ist äquivalent zur Gleichung

$$A_n(\nu_i) (D_i) = \frac{\Lambda_0(\nu_i)}{\Lambda_0(\nu_i - 1)} \tilde{D}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, N. \quad (3.17)$$

für die Entwicklungskoeffizienten. Aus der Asymptotik-Bedingung von (3.2) folgt für die 0-ten Koeffizienten

$$D_0 = \tilde{D}_0 = D_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \otimes \text{id}. \quad (3.18)$$

Sie sind also durch den  $(n-1)$ -Platz-Dichteoperator bestimmt.

An dieser Stelle wird eine Basis im Vektorraum  $\text{End}((\mathbb{C}^2)^{\otimes n})$  gewählt. Für  $i = 0, \dots, N$  sei  $\mathbb{D}_i$  der Koordinatenvektor des Operators  $D_i$ ,  $\tilde{\mathbb{D}}_i$  der Koordinatenvektor des Operators  $\tilde{D}_i$  und  $\mathbb{A}(\nu_i)$  die beschreibende Matrix der Abbildung  $A_n^{(n)}(\nu_i)$  bezüglich der gewählten Basis.

Die  $(N+1)$  Gleichungen

$$\mathbb{D}_0 = \tilde{\mathbb{D}}_0 \quad \text{und} \quad \mathbb{A}(\nu_i) [\mathbb{D}_i] = \frac{\Lambda_0(\nu_i)}{\Lambda_0(\nu_i - 1)} \tilde{\mathbb{D}}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, N$$

lassen sich als lineare Abbildung der Größen  $\mathbb{D}_0, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_N$  auf die Größen  $\tilde{\mathbb{D}}_0, \tilde{\mathbb{D}}_1, \dots, \tilde{\mathbb{D}}_N$  auffassen.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{D}}_0 \\ \tilde{\mathbb{D}}_1 \\ \tilde{\mathbb{D}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbb{D}}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_1-1)}{\Lambda_0(\nu_1)} \mathbb{A}(\nu_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_2-1)}{\Lambda_0(\nu_2)} \mathbb{A}(\nu_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_N-1)}{\Lambda_0(\nu_N)} \mathbb{A}(\nu_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{D}_0 \\ \mathbb{D}_1 \\ \mathbb{D}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{D}_N \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Die Koordinatenvektoren transformieren sich gemäß

$$\tilde{\mathbb{D}}_i = \sum_{j=0}^N V_{ij} \mathbb{D}_j.$$

In Matrixschreibweise entspricht die zugehörige Transformationsmatrix der  $(N+1) \times (N+1)$ -Blockmatrix  $\mathbb{V}_N$  mit Block-Einträgen  $(\mathbb{V}_N)_{i,j} := (V_N)_{i,j} \mathbf{1}$  für  $i, j = 0, \dots, N$ . Durch Linksmultiplikation von Gleichung (3.19) mit  $\mathbb{V}_N$  erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbb{D}_0 \\ \mathbb{D}_1 \\ \mathbb{D}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{D}_N \end{pmatrix} = \mathbb{V}_N \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_1-1)}{\Lambda_0(\nu_1)} \mathbb{A}(\nu_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_2-1)}{\Lambda_0(\nu_2)} \mathbb{A}(\nu_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_N-1)}{\Lambda_0(\nu_N)} \mathbb{A}(\nu_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{D}_0 \\ \mathbb{D}_1 \\ \mathbb{D}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{D}_N \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

für die Größen  $\mathbb{D}_0, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_N$ . Die letzten  $N$  Zeilen von Gleichung (3.20) liefern ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für die Größen  $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \dots, \mathbb{D}_N$ , dessen Inhomogenitätsterm durch  $\mathbb{D}_0$  bestimmt ist. Im Prinzip lassen sich  $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \dots, \mathbb{D}_N$  aus Gleichung (3.20) berechnen. Da sich  $\mathbb{D}_0$  nach Gleichung (3.18) aus der Kenntnis des  $(n-1)$ -Platz-Dichteoperators ergibt, entspricht dies einer rekursiven Konstruktion des  $n$ -Platz-Dichteoperators. Praktisch stellt allerdings das Invertieren der Matrix ein Problem dar, insofern scheidet dieses Verfahren als Konstruktionsmechanismus aus.

An dieser Stelle genügt es aber zu zeigen, dass die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.20) eindeutig ist. Dazu wird das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbb{D}_1 \\ \mathbb{D}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{D}_N \end{pmatrix} = \mathbb{W}_N \begin{pmatrix} \frac{\Lambda_0(\nu_1-1)}{\Lambda_0(\nu_1)} \mathbb{A}(\nu_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_2-1)}{\Lambda_0(\nu_2)} \mathbb{A}(\nu_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_N-1)}{\Lambda_0(\nu_N)} \mathbb{A}(\nu_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{D}_1 \\ \mathbb{D}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{D}_N \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

### 3. Charakterisierende Eigenschaften des inhomogenen Dichteoperators

---

betrachtet. Die Matrix  $\mathbb{W}_N$  ist definiert als die  $(N \times N)$ -Blockmatrix mit den Einträgen

$$(\mathbb{W}_N)_{i,j} := (W_N)_{i,j} \mathbb{1} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, N.$$

Außerdem definieren wir die Diagonalmatrix  $L_N$  durch

$$(L_N)_{i,j} := \frac{\Lambda_0(\nu_i - 1)}{\Lambda_0(\nu_i)} \delta_{i,j} \mathbb{1} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, N$$

und die Blockdiagonalmatrizen  $\mathbb{L}_N$  mit den Einträgen

$$(\mathbb{L}_N)_{i,j} := (L_N)_{i,j} \mathbb{1} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, N$$

und  $\mathbb{A}_N$  mit den Einträgen

$$(\mathbb{A}_N)_{i,j} := \delta_{i,j} \mathbb{A}(\nu_i) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, N.$$

Das lineare Gleichungssystem (3.21) besitzt eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$K_N := \mathbb{W}_N \mathbb{L}_N \mathbb{A}_N - \mathbb{1} \tag{3.22}$$

von null verschieden ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix  $\mathbb{W}_N \mathbb{L}_N \mathbb{A}_N$  nicht den Eigenwert 1 besitzt. Die Matrizen  $W_N$  und  $L_N$  kommutieren im Allgemeinen nicht, daher lassen sich schon Aussagen über die Eigenwerte des Produktes dieser beiden Matrizen - ungeachtet der symmetrischen Struktur - nur schwer gewinnen. Hinzu kommt, dass durch die Matrix  $L_N$  der größte Eigenwert der vertikalen Transfermatrix eingeht. Dieser ist in Abhängigkeit von den horizontalen Spektralparametern nicht explizit bekannt, sondern nur über die diskrete Funktionalgleichung (3.15) oder die Bethe-Ansatz-Gleichungen zugänglich. Daher liegt die Betrachtung eines geschickten Grenzwerts für die horizontalen Spektralparameter nahe.

Für den größten Eigenwert der vertikalen Transfermatrix folgt aus dem Bethe-Ansatz die Darstellung

$$\Lambda_0(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \nu_j + 1) \prod_{l=1}^{[N/2]} \frac{(n_l - \lambda + 1)}{(n_l - \lambda)} + \prod_{j=1}^N (\lambda - \nu_j) \prod_{l=1}^{[N/2]} \frac{(\lambda - n_l + 1)}{(\lambda - n_l)}. \tag{3.23}$$

Diese ist abhängig von den Bethe-Ansatz-Zahlen  $\{n_l; l = 1, \dots, [N/2]\}$  mit

$$[N/2] := \begin{cases} N/2 & \text{für } N \text{ gerade,} \\ (N-1)/2 & \text{für } N \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Bethe-Ansatz-Zahlen sind bestimmt durch die Bethe-Ansatz-Gleichungen

$$\prod_{j=1}^N \frac{(n_l - \nu_j + 1)}{(n_l - \nu_j)} = (-1) \prod_{k=1}^{[N/2]} \frac{n_l - n_k + 1}{n_l - n_k - 1} \quad \text{für } l = 1, \dots, [N/2]. \tag{3.24}$$



Sie sind daher Funktionen der horizontalen Spektralparameter. Für die Diagonalelemente der Matrix  $L_N$  ergibt sich die Darstellung

$$\frac{\Lambda_0(\nu_i - 1)}{\Lambda_0(\nu_i)} = (-1)^N \prod_{j=1}^N \frac{(\nu_j - \nu_i + 1)}{(\nu_i - \nu_j + 1)} \prod_{l=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{(n_l - \nu_i)^2}{(n_l - \nu_i + 1)^2}.$$

Der Ansatz

$$\nu_{2l-1} = n_l + d + \frac{1}{2}, \quad \nu_{2l} = n_l - d + \frac{1}{2} \quad \text{für } l = 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor \quad (3.25)$$

mit freiem Parameter  $d$  erfüllt die Bethe-Ansatz-Gleichungen im Limes

$$n_l \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad |n_l - n_k|_{l \neq k} \rightarrow \infty \quad \forall l, k. \quad (3.26)$$

In diesem Limes gilt

$$\frac{\Lambda_0(\nu_{2l-1} - 1)}{\Lambda_0(\nu_{2l-1})} = \frac{(1 + 2d)}{(1 - 2d)} \quad \text{und} \quad \frac{\Lambda_0(\nu_{2l} - 1)}{\Lambda_0(\nu_{2l})} = \frac{(1 - 2d)}{(1 + 2d)}$$

sowie

$$\begin{aligned} (W_N)_{2l-1, 2l-1} &= 1 + \frac{1}{2d} & (W_N)_{2l-1, 2l} &= -\frac{1}{2d} \\ (W_N)_{2l, 2l-1} &= \frac{1}{2d} & (W_N)_{2l, 2l} &= 1 - \frac{1}{2d} \end{aligned}$$

für  $l = 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$ . Die übrigen Einträge der Matrix  $W_N$  verschwinden. Für gerade Werte von  $N$  vereinfacht sich die Matrix  $W_N L_N$  daher zu einer  $(2 \times 2)$ -Block-Diagonalmatrix mit konstanten Blöcken

$$\begin{pmatrix} \frac{(1+2d)^2}{2d(1-2d)} & -\frac{(1-2d)}{2d(1+2d)} \\ \frac{1+2d}{2d(1-2d)} & -\frac{(1-2d)^2}{2d(1+2d)} \end{pmatrix}$$

auf der Diagonalen, deren Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = -\frac{4d^2 + 3}{4d^2 - 1} \pm 2 \frac{\sqrt{8d^2 + 2}}{4d^2 - 1}$$

generisch von  $\pm 1$  verschieden sind. Im betrachteten Limes entspricht jeder Block auf der Diagonalen von  $\mathbb{A}_N$  der beschreibenden Matrix der Transposition im  $n$ -ten Raum gefolgt von einem durch die Singulettts erzeugten Basiswechsel (modulo Vorzeichen). Da die Transposition nur die Eigenwerte  $\pm 1$  besitzt, sind dies auch die Eigenwerte der Blockmatrix  $\mathbb{A}_N$ . Da die Blöcke von  $\mathbb{A}_N$  im betrachteten Limes konstant sind, folgt, dass die beiden Matrizen  $\mathbb{W}_N \mathbb{L}_N$  und  $\mathbb{A}_N$  kommutieren. Die Beträge der Eigenwerte der Matrix  $\mathbb{W}_N \mathbb{L}_N \mathbb{A}_N$  entsprechen also denen der Matrix  $\mathbb{W}_N \mathbb{L}_N$  und sind damit von eins verschieden.

Für ungerades  $N$  sei  $\nu_N$  ein fester (endlicher) Parameter. Es wird der gleiche Limes betrachtet, wie für gerades  $N$ . Von der Matrix  $\mathbb{W}_{N-1} \mathbb{L}_{N-1} \mathbb{A}_{N-1}$  ist bekannt, dass die Eigenwerte von eins verschieden sind. Desweiteren gilt im betrachteten Limes

$$(\mathbb{W}_N)_{i,N} = \delta_{i,N} \mathbb{1} \quad \text{für } i = 1, \dots, N$$

sowie

$$\frac{\Lambda_0(\nu_N - 1)}{\Lambda_0(\nu_N)} = -1.$$

Daher reicht es,  $\nu_N$  so zu wählen, dass die Eigenwerte der Matrix  $\mathbb{A}(\nu_N)$  von  $\pm 1$  verschieden sind. Dies ist problemlos möglich. Zusätzlich hat man die Option, die Spektralparameter  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  geeignet zu wählen, da nur zu zeigen ist, dass  $\text{Det}(K_N)$  als Funktion dieser Spektralparameter nicht die Nullfunktion ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

### Die 2-Punkt-Funktion $\omega$

Im folgenden Kapitel wird die 2-Punkt-Funktion  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  eingeführt. Es wird gezeigt, dass diese, als Funktion von  $\lambda_2$  betrachtet, die Funktionalgleichung

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2 - 1) = \frac{\lambda_{21}(\lambda_{21} - 2)}{1 - \lambda_{21}^2} \omega(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{3}{2(1 - \lambda_{21}^2)} \quad \text{für } \lambda_2 = \nu_1, \dots, \nu_N$$

erfüllt. Es wurde  $\lambda_{21} := \lambda_2 - \lambda_1$  gesetzt. Für die Asymptotik bezüglich  $\lambda_2$  gilt

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) \xrightarrow{\lambda_2 \rightarrow \infty} 0.$$

Die Funktion  $\Lambda_0(\lambda_2)\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  ist ein Polynom vom Grad  $N$  in  $\lambda_2$  und lässt sich nach den oben eingeführten Polynombasen entwickeln. Für die Koeffizienten der Entwicklung

$$\Lambda_0(\lambda_2)\omega(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=0}^N \omega_i p_i(\lambda_2)$$

ergibt sich das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix} = V_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_1-1)}{\Lambda_0(\nu_1)} \frac{(\nu_1-\lambda_1)(\nu_1-\lambda_1-2)}{(1-(\nu_1-\lambda_1)^2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Lambda_0(\nu_N-1)}{\Lambda_0(\nu_N)} \frac{(\nu_N-\lambda_1)(\nu_N-\lambda_1-2)}{(1-(\nu_N-\lambda_1)^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix} \\ - V_N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \frac{1}{(1-(\nu_1-\lambda_1)^2)} \Lambda_0(\nu_1 - 1) \\ \vdots \\ \frac{3}{2} \frac{1}{(1-(\nu_N-\lambda_1)^2)} \Lambda_0(\nu_N - 1) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega_0 = 0.$$

Die eindeutige Lösbarkeit lässt sich analog wie oben zeigen.

### 3.2.2. Beweis für die XXZ-Kette

Der Beweis für die XXZ-Kette erfolgt analog, basierend auf der entsprechenden Polynomitalitätseigenschaft des Operators (3.1) für diesen Fall.

Eine Basis des Raumes der Funktionen der Gestalt

$$q^{-Nx} p(q^{2x}) \quad \text{mit einem Polynom } p \text{ vom Grad } N$$

ist gegeben durch  $(p_0, \dots, p_N)$ , definiert durch

$$p_0(x) := \prod_{i=1}^N \sinh(\eta(x - \nu_i))$$

und

$$p_j(x) := q^{-(x-\nu_j)} \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{[x - \nu_k]_q}{[\nu_j - \nu_k]_q} \quad \text{für } j = 1, \dots, N.$$

Dabei wurde die Definition der  $q$ -Zahlen,

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} = \frac{\sinh(\eta x)}{\sinh(\eta)},$$

benutzt. Ebenso bilden die Funktionen  $\tilde{p}$ , definiert durch

$$\tilde{p}_j(x) := p_j(x + 1) \quad \text{für } j = 0, \dots, N$$

eine Basis. Die Einträge der analog zu Abschnitt (3.2.1) definierten Basiswechselformen lauten in diesem Fall

$$(W_N)_{kl} = q^{-(1+\nu_k-\nu_l)} \prod_{j=1, j \neq l}^N \frac{[1 + \nu_k - \nu_j]_q}{[\nu_l - \nu_j]_q} \quad \text{für } k, l = 1, \dots, N$$

sowie

$$(V_N)_{0l} = e^\eta \delta_{l,0} \quad , \quad (V_N)_{k,0} = \prod_{j=1}^N \sinh(\eta(1 + \nu_k - \nu_j)) \quad \text{für } k \neq 0.$$

Es seien  $D_i$  bzw.  $\tilde{D}_i$  für  $i = 0, \dots, N$  die Entwicklungskoeffizienten von  $\Lambda_0(\lambda_n) D_n(\lambda_n)$  bezüglich der oben definierten Basen. Die Funktionalgleichungen haben (auch für den Fall mit Magnetfeld und Alpha-Parameter) dieselbe Gestalt wie im XXX-Fall (Gleichung (3.17)). Die Abhängigkeit von Magnetfeld geht in den Eigenwert  $\Lambda_0$  ein. Dieser lautet<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\lambda) &= e^{\beta h/2} \prod_{j=1}^N \sinh(\eta(1 + \lambda - \nu_j)) \prod_{l=1}^{[N/2]} \frac{[n_l - \lambda + 1]_q}{[n_l - \lambda]_q} \\ &\quad + e^{-\beta h/2} \prod_{j=1}^N \sinh(\eta(\lambda - \nu_j)) \prod_{l=1}^{[N/2]} \frac{[\lambda - n_l + 1]_q}{[\lambda - n_l]_q} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die zugehörigen Bethe-Ansatz-Gleichungen haben die Form

$$e^{\beta h} \prod_{j=1}^N \frac{[n_l - \nu_j + 1]_q}{[n_l - \nu_j]_q} = (-1) \prod_{k=1}^{[N/2]} \frac{[n_l - n_k + 1]_q}{[n_l - n_k - 1]_q} \quad \text{für } l = 1, \dots, [N/2]. \quad (3.28)$$

<sup>3</sup> Transfermatrix mit zusätzlichem Operator  $e^{\beta h S_z}$

**Für**  $h = 0$

Für den Fall ohne globales Magnetfeld erfüllt der Ansatz (3.25) im Limes (3.26) die Bethansatz-Gleichungen. Für die Diagonalelemente der Matrix  $L_N$  liefert der Limes

$$\frac{\Lambda_0(\nu_{2l-1} - 1)}{\Lambda_0(\nu_{2l-1})} = \frac{[1 + 2d]_q}{[1 - 2d]_q} \quad \text{und} \quad \frac{\Lambda_0(\nu_{2l} - 1)}{\Lambda_0(\nu_{2l})} = \frac{[1 - 2d]_q}{[1 + 2d]_q},$$

für die Matrix  $W_N$  folgt

$$\begin{aligned} (W_N)_{2l-1,2l-1} &= \frac{[1 + 2d]_q}{[2d]_q} q^{-1} & (W_N)_{2l-1,2l} &= -\frac{1}{[2d]_q} q^{-1} q^{-2d} \\ (W_N)_{2l,2l-1} &= \frac{1}{[2d]_q} q^{-1} q^{2d} & (W_N)_{2l,2l} &= -\frac{[1 - 2d]_q}{[2d]_q} q^{-1} \end{aligned}$$

für  $l = 1, \dots, [N/2]$ , während die übrigen Einträge verschwinden. Die weitere Argumentation ist analog zu Abschnitt 3.2.1. Die Diagonalblöcke der Matrix  $W_N L_N$  haben die Gestalt

$$q^{-1} \begin{pmatrix} \frac{[1+2d]_q^2}{[2d]_q [1-2d]_q} & -\frac{[1-2d]_q q^{-2d}}{[2d]_q [1+2d]_q} \\ \frac{[1+2d]_q q^{2d}}{[2d]_q [1-2d]_q} & -\frac{[1-2d]_q^2}{[2d]_q [1+2d]_q} \end{pmatrix}.$$

**Für**  $h \neq 0$

Für den Fall eines nichtverschwindenden globalen Magnetfeldes ist der Ansatz für die horizontalen Spektralparameter zu modifizieren, damit die Bethe-Ansatz-Gleichungen im Limes (3.26) erfüllt sind. Die Wahl

$$\nu_{2l-1} = n_l + 2d + \frac{1}{2}, \quad \nu_{2l} = n_l + \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad 1 \leq l \leq [N/2] \quad (3.29)$$

mit

$$d = \frac{1}{4\eta} \ln \left( \frac{\text{ch}((\beta h + 1)/2)}{\text{ch}((\beta h - 1)/2)} \right) - \frac{1}{2}$$

führt zum Ziel. Die Matrix  $W_N$  hat dieselbe Gestalt wie in der Betrachtung des feldfreien Falls, da die Differenzen der horizontalen Spektralparameter unverändert bleiben.

Für die Diagonalelemente der Matrix  $L_N$ ,

$$\frac{\Lambda_0(\nu_i - 1)}{\Lambda_0(\nu_i)} = (-1)^N e^{-\beta h} \prod_{j=1}^N \frac{[\nu_j - \nu_i + 1]_q}{[\nu_i - \nu_j + 1]_q} \prod_{l=1}^{[N/2]} \frac{[n_l - \nu_i]_q^2}{[n_l - \nu_i + 1]_q^2},$$

ergibt die Limesbildung

$$\frac{\Lambda_0(\nu_{2l-1} - 1)}{\Lambda_0(\nu_{2l-1})} = e^{\beta h} \frac{[1 - 2d]_q}{[1 + 2d]_q} q^{[N+1]-2} \quad \text{und} \quad \frac{\Lambda_0(\nu_{2l} - 1)}{\Lambda_0(\nu_{2l})} = e^{-\beta h} \frac{[1 + 2d]_q}{[1 - 2d]_q} q^{[N+1]-2}.$$

Ist der Operator  $A_n^{(n)}$  vom Alpha-Parameter abhängig, so hat er im betrachteten Limes die Eigenwerte  $q^{-\alpha} q^{\pm\alpha}$ . Insgesamt folgt, dass die Matrix  $K_N$  nur von eins verschiedene Eigenwerte besitzt. Die Spezialisierung von  $d$  ist unproblematisch.

## 4. Der Dichteoperator der XXX-Kette bei endlicher Temperatur

Mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3 wird der inhomogene  $n$ -Platz-Dichteoperator der XXX-Kette bei endlicher Temperatur (ohne Magnetfeld) konstruiert. Dabei wird auf die Konstruktion dieses Operators für Temperatur null in der Arbeit [9] von Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov und Takeyama zurückgegriffen.

Das Ergebnis

$$D_n^{T=0}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{I, J} \left( \prod_{p=1}^m \omega^{T=0}(\lambda_{i_p} - \lambda_{j_p}) \right) f_{n, I, J}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (4.1)$$

aus [9] drückt den  $n$ -Platz-Dichteoperator durch eine 2-Punkt-Funktion  $\omega^{T=0}$  („physikalischer Anteil“) sowie Operatoren  $f_{n, I, J}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \text{End}(V^{\otimes n})$  aus, deren Matrixeinträge rationale Funktionen in den Spektralparametern  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sind („algebraischer Anteil“). Die innere Summation läuft über Paare von  $m$ -Tupeln  $I$  und  $J$  mit  $I \cap J = \emptyset$  und  $i_1 < \dots < i_m, 1 \leq i_p < j_p \leq n$ .

In Abschnitt 4.2 wird gezeigt, dass sich der  $n$ -Platz-Dichteoperator  $D_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  ebenfalls in der Form (4.1) schreiben lässt. Genauer gesagt ist dazu die 2-Punkt-Funktion  $\omega^{T=0}$  durch die entsprechende 2-Punkt-Funktion  $\omega$  von  $D_n$  zu ersetzen, während die Operatoren  $f_{n, I, J}$  unverändert bleiben. Die Abhängigkeit des Dichteoperators von den horizontalen Spektralparametern  $\nu_1, \dots, \nu_N$  geht ausschließlich über die Funktion  $\omega$  ein. Der Beweis dieser Aussage folgt aus dem Eindeutigkeitssatz aus Kapitel 3 zusammen mit den in [9] bewiesenen algebraischen und analytischen Eigenschaften der Operatoren  $f_{n, I, J}$ .

In Abschnitt 4.3 wird für die in die Beschreibung eingehende 2-Punkt-Funktion eine Integralformel hergeleitet, die durch die Lösung einer linearen und einer nichtlinearen Integralgleichung bestimmt ist. Damit ist der inhomogene Dichteoperator  $D_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  eindeutig bestimmt und das Kapitel abgeschlossen.

Die Integralgleichungen erlauben die Wahl der physikalischen Parameter für die horizontalen Spektralparameter und die anschließende Durchführung des thermodynamischen Limes. Für die so gewonnene physikalische 2-Punkt-Funktion folgt, analog wie für den Fall  $T = 0$  in [10, 11] gezeigt, dass der homogene Limes existiert.

### 4.1. Der $n$ -Platz-Dichteoperator für $n = 1, 2$ und $3$

Für  $n = 1, 2$  und  $3$  gewinnt man den Operator  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  einfach und schnell durch den Ansatz einer Linearkombination aus  $U(\mathfrak{sl}_2)$ -invarianten Operatoren (Temperley-Lieb-

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \lambda_2 \lambda_1 \end{array} = (1 + \lambda_2 - \lambda_1) \curvearrowright \quad ; \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \lambda_1 \lambda_2 \end{array} = (1 + \lambda_1 - \lambda_2) \curvearrowright$$

Abbildung 4.1.: Verkettung von  $R$ -Matrizen und Singulett

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \boxed{D_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \curvearrowright \end{array} = C_b^{-1} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \boxed{D_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \curvearrowright \\ \lambda_2 \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \curvearrowright \end{array} = C_b^{-1} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \lambda_2 \lambda_1 \\ \boxed{D_2} \\ \lambda_2 \lambda_1 \\ \curvearrowright \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_2 \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \curvearrowright \end{array} = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \lambda_2 \lambda_1 \\ \boxed{D_2} \\ \lambda_2 \lambda_1 \\ \curvearrowright \end{array}$$

Abbildung 4.2.: Symmetrie des Erwartungswerts des Singulettprojektors unter Vertauschung der Argumente

Algebra), deren Linearfaktoren sich durch die Kombination von Intertwining-Relation (3.5) und Reduktionsbedingung (3.4) als Funktion der vertikalen Spektralparameter ergeben. Das Ergebnis für  $n = 1$  lautet

$$D_1(\lambda_1) = \frac{1}{2} I.$$

Für  $n = 2$  geht der Erwartungswert des Singulettprojektors,

$$\frac{1}{2} \langle s(1) | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(1) \rangle = \frac{1}{2} \text{Spur} (D_2(\lambda_1, \lambda_2) Pr_s), \quad (4.2)$$

in die Beschreibung ein. Der Operator  $Pr_s$  bezeichnet den nicht normierten Projektor auf das 2-Platz  $U(sl_2)$ -Singulett  $s(1)$ , definiert in Gleichung (2.16). Für das Singulett

$$s(1) = v^+ \otimes v^- - v^- \otimes v^+ \quad \text{gilt} \quad \langle s(1) | s(1) \rangle = 2. \quad (4.3)$$

Die zugehörige Korrelationsfunktion ist symmetrisch unter Vertauschung der Argumente:

$$\langle s(1) | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(1) \rangle = \langle s(1) | D_2(\lambda_2, \lambda_1) | s(1) \rangle \quad \forall \lambda_1, \lambda_2. \quad (4.4)$$

Diese Symmetrieeigenschaft folgt zusammen mit der in Abbildung 4.1 dargestellten Operation der  $R$ -Matrizen auf dem Singulett bzw. dessen dualem Vektor aus der Intertwining-Relation für den 2-Platz-Dichteoperator, siehe Abbildung 4.2.

Ausgedrückt mit Hilfe der 2-Punkt-Funktion  $\omega$ , definiert analog zu der in [9] verwendeten Funktion durch

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) := \frac{1}{2} - \langle s(1) | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(1) \rangle,$$

lautet der 2-Platz-Dichteoperator:

$$D_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4} I \otimes I + \frac{1}{3} \omega(\lambda_1, \lambda_2) \left( \frac{1}{2} I \otimes I - Pr_s \right).$$

Gleichung (4.4) gibt die Symmetrie

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) = \omega(\lambda_2, \lambda_1). \quad (4.5)$$

Für die Asymptotik folgt mit Gleichung (3.3)

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) \xrightarrow{\lambda_2 \rightarrow \infty} 0. \quad (4.6)$$

Aus der diskreten Funktionalgleichung (3.6) für  $D_2(\lambda_1, \lambda_2)$  folgt eine solche für die Funktion  $\omega$ . Dazu wird der Operator  $A_2^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2)$  auf die Basis aus  $U(sl_2)$ -invarianten Operatoren

$$I \otimes I \quad \text{und} \quad K := \frac{1}{2} I \otimes I - Pr_s$$

angewendet. Dies führt auf

$$\begin{aligned} I \otimes I &\mapsto I \otimes I - \frac{2}{(1 - \lambda_{21}^2)} K, \\ K &\mapsto \frac{\lambda_{21}(\lambda_{21} - 2)}{(1 - \lambda_{21}^2)} K. \end{aligned}$$

Für die Funktion  $\omega$  folgt die Funktionalgleichung

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2 - 1) = \frac{\lambda_{21}(\lambda_{21} - 2)}{1 - \lambda_{21}^2} \omega(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{3}{2(1 - \lambda_{21}^2)} \quad \text{für} \quad \lambda_2 = \nu_1, \dots, \nu_N. \quad (4.7)$$

Durch Gleichung (4.7) zusammen mit der Asymptotik-Bedingung (4.6) ist die Funktion  $\omega$  eindeutig bestimmt. (Siehe dazu auch Kapitel 3.2.1.)

Das Ergebnis für den 3-Platz-Dichteoperator lautet

$$\begin{aligned} D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{1}{8} I^{\otimes 3} + \frac{1}{6} \omega(\lambda_1, \lambda_3) f_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \frac{1}{6} \omega(\lambda_2, \lambda_3) f_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ &\quad + \frac{1}{6} \omega(\lambda_1, \lambda_2) f_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \end{aligned} \quad (4.8)$$

mit den Operatoren [9]

$$\begin{aligned} f_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{1}{2} I^{\otimes 3} - e_3 - \frac{1}{\lambda_{32}\lambda_{21}} \left( \frac{1}{2} I^{\otimes 3} - e_3 \right) + \frac{1}{2} \frac{\lambda_{32} - \lambda_{21}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} (e_1 e_2 - e_2 e_1), \\ f_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{1}{2} I^{\otimes 3} - e_2 + \frac{1}{\lambda_{31}\lambda_{21}} \left( \frac{1}{2} I^{\otimes 3} - e_3 \right) - \frac{1}{2} \frac{\lambda_{31} - \lambda_{21}}{\lambda_{31}\lambda_{21}} (e_1 e_2 - e_2 e_1), \\ f_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{1}{2} I^{\otimes 3} - e_1 + \frac{1}{\lambda_{31}\lambda_{32}} \left( \frac{1}{2} I^{\otimes 3} - e_3 \right) + \frac{1}{2} \frac{\lambda_{31} - \lambda_{32}}{\lambda_{31}\lambda_{32}} (e_1 e_2 - e_2 e_1), \end{aligned}$$

und der Abkürzung  $\lambda_{ij} := \lambda_i - \lambda_j$ . Der Operator  $e_1$  operiert als (nicht normierter) Projektor auf das  $U(sl_2)$ -Singulett in den ersten beiden lokalen Spin-Zustandsräumen und als die Identität auf dem dritten.

$$e_1 := (Pr_s)_{1,2}, \quad e_2 := (Pr_s)_{2,3}, \quad e_3 := (Pr_s)_{3,1}$$

#### 4. Der Dichteoperator der XXX-Kette bei endlicher Temperatur

---

$$e_1 = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ | \\ \curvearrowleft \end{array} \quad ; \quad e_2 = \begin{array}{c} | \\ \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$$

Abbildung 4.3.: Graphische Darstellung der Temperley-Lieb Generatoren auf 3 Plätzen

$e_2$  projiziert im zweiten und dritten Raum auf das Singulett und  $e_3$  im ersten und dritten. Der Operator  $e_3$  wurde nur der Übersichtlichkeit halber eingeführt, er lässt sich durch  $e_1$  und  $e_2$  ausdrücken:

$$e_3 = e_1 + e_2 - e_1 e_2 - e_2 e_1.$$

Für die Operation von  $A_3^{(3)}$  gilt:

$$\begin{aligned} f_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\mapsto \frac{\lambda_{31}(\lambda_{31} - 2)}{(1 - \lambda_{31}^2)} f_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - 1), \\ f_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\mapsto \frac{\lambda_{32}(\lambda_{32} - 2)}{(1 - \lambda_{32}^2)} f_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - 1), \\ f_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\mapsto f_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - 1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

und

$$I^{\otimes 3} \mapsto I^{\otimes 3} - \frac{2}{(1 - \lambda_{31}^2)} f_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - 1) - \frac{2}{(1 - \lambda_{32}^2)} f_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - 1).$$

Zusammen mit Gleichung (4.7) folgt daraus

$$A_3^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \nu_i) D_3(\lambda_1, \lambda_2, \nu_i) = D_3(\lambda_1, \lambda_2, \nu_i - 1) \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Für das asymptotische Verhalten verifiziert man mit Gleichung (4.6)

$$D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \xrightarrow{\lambda_3 \rightarrow \infty} \frac{1}{2} D_2(\lambda_1, \lambda_2) \otimes I.$$

Der Vollständigkeit halber seien noch die Intertwining-Relationen angegeben:

$$\begin{aligned} \check{R}_{12} f_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \check{R}_{12}^{-1} &= f_{1,3}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) \\ \check{R}_{12} f_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \check{R}_{12}^{-1} &= f_{2,3}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) \\ \check{R}_{12} f_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \check{R}_{12}^{-1} &= f_{1,2}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) \end{aligned}$$

Abschließend soll noch verifiziert werden, dass der Operator  $\Lambda_0(\lambda_3) D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\lambda_3) D_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \Lambda_0(\lambda_3) \frac{1}{8} I_3 + \frac{1}{6} \Lambda_0(\lambda_3) \omega(\lambda_1, \lambda_3) f_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ &\quad + \frac{1}{6} \Lambda_0(\lambda_3) \omega(\lambda_2, \lambda_3) f_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ &\quad + \frac{1}{6} \Lambda_0(\lambda_3) \omega(\lambda_1, \lambda_2) f_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \end{aligned} \quad (4.10)$$

ein Polynom  $N$ -ten Grades in  $\lambda_3$  ist. Sowohl der Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda_3)$  als auch die Funktionen  $\Lambda_0(\lambda_3) \omega(\lambda_i, \lambda_j)$  sind Polynome  $N$ -ten Grades in  $\lambda_3$ . Die Operatoren  $f_{1,2}$ ,  $f_{1,3}$  und  $f_{2,3}$  sind



rationale Funktionen in  $\lambda_3$  mit der Eigenschaft, dass sich durch Multiplikation mit  $\lambda_3\lambda_{31}$  jeweils ein Polynom 2-ten Grades in  $\lambda_3$  ergibt. Es reicht also zu zeigen, dass die Residuen der rechten Seite des Ausdrucks (4.8) an den Stellen  $\lambda_3 = \lambda_2$  und  $\lambda_3 = \lambda_1$  verschwinden. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{res}(f_{1,3})|_{\lambda_3=\lambda_2} &= -\frac{1}{\lambda_{21}} \left( \frac{1}{2} I^{\otimes 3} - e_3 \right) - \frac{1}{2} (e_1 e_2 - e_2 e_1) \\ \text{res}(f_{2,3})|_{\lambda_3=\lambda_2} &= 0 \\ \text{res}(f_{1,2})|_{\lambda_3=\lambda_2} &= \frac{1}{\lambda_{21}} \left( \frac{1}{2} I^{\otimes 3} - e_3 \right) + \frac{1}{2} (e_1 e_2 - e_2 e_1). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Symmetrieeigenschaft der Funktion  $\omega$ , siehe Gleichung (4.4), folgt

$$\text{res}(D_3)|_{\lambda_3=\lambda_2} = 0.$$

Gleiches gilt für  $\lambda_3 = \lambda_1$ . Daher ist der Ausdruck (4.10) ein Polynom  $N$ -ten Grades in  $\lambda_3$ . Mit Hilfe eines Ansatzes, der die Form (4.1) berücksichtigt, werden in [19] die Operatoren  $f_{n,I,J}$  für  $n = 4$  explizit konstruiert.

## 4.2. Der $n$ -Platz-Dichteoperator

Um das Resultat für allgemeines  $n$  formulieren zu können, wird zunächst die in [9,12] geleistete Konstruktion der benötigten Operatoren erläutert. Die Notation und die Normierung der Operatoren entspricht der Darstellung in [12].

### 4.2.1. Konstruktion der Operatoren

Anstelle des Operators  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{End}(V^{\otimes n})$  wird der Vektor  $h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V^{\otimes 2n}$ , definiert durch

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := (D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \otimes I^{\otimes n})(\mathbf{s}_n), \quad (4.11)$$

betrachtet. Die  $2n$  Räume sind dabei wie folgt durchnummeriert:

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \otimes V_{\bar{n}} \otimes \dots \otimes V_{\bar{2}} \otimes V_{\bar{1}} \quad (4.12)$$

und der Vektor  $\mathbf{s}_n \in V^{\otimes 2n}$  ist definiert als Verschachtelung von 2-Platz-Singulettis:

$$\mathbf{s}_n := \prod_{i=1}^n s(1)_{i,\bar{i}}. \quad (4.13)$$

Durch die Dualitätstransformation (4.11) werden  $U(\mathfrak{sl}_2)$ -invariante Operatoren auf  $U(\mathfrak{sl}_2)$ -Singulettis abgebildet.

Aufgrund der Nummerierung (4.12) empfiehlt sich die Wahl des Operators  $A_n^{(1)}$ . Durch die Dualitätstransformation wird dieser zu einem Element aus  $\text{End}(V^{\otimes 2n})$ . Mit Hilfe der

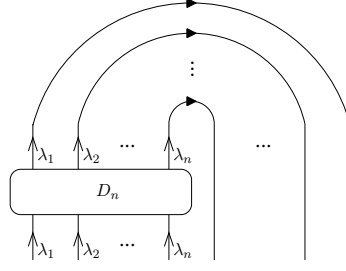


Abbildung 4.4.: Konstruktion des Vektors  $h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  aus dem Dichteoperator  $D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Crossing-Symmetrie und der Definition (2.27) erhält man die Darstellung<sup>1</sup>

$$A_n^{(1)} = \left( \prod_{l=2}^n C_b^{-1}(\lambda_1, \lambda_l) \right) (-1)^n R_{\bar{1}, \bar{2}}(\lambda_{1,2} - 1) \cdots R_{\bar{1}, \bar{n}}(\lambda_{1,n} - 1) P_{\bar{1}, \bar{1}} R_{1,n}(\lambda_{1,n}) \cdots R_{1,2}(\lambda_{1,2}). \quad (4.14)$$

Die Operatoren  $f_{n,I,J}$  werden in [9] rekursiv mit Hilfe von Transfermatrizen mit von den Spektralparametern abhängiger Dimension des Hilfsraumes konstruiert. Dazu wird zunächst der  $L$ -Operator

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 1/2 + H/2 & F \\ E & \lambda + 1/2 - H/2 \end{pmatrix} \in U(sl_2) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^2)$$

eingeführt. Für die Spin-1/2 Darstellung  $\pi^{(1)}$  erhält man

$$\left( \pi^{(1)} \otimes I \right) L(\lambda_{1,2}) = R(\lambda_1, \lambda_2).$$

Der  $L$ -Operator erfüllt

$$\check{R}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) L_2(\lambda - \lambda_2) L_1(\lambda - \lambda_1) = L_2(\lambda - \lambda_1) L_1(\lambda - \lambda_2) \check{R}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Mit Hilfe des  $L$ -Operators wird eine Monodromiematrix

$$T_n^{[1]}(\lambda) \in U(sl_2) \otimes \text{End}(V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \otimes V_{\bar{n}} \otimes \cdots \otimes V_{\bar{2}})$$

durch

$$T_n^{[1]}(\lambda) := L_{\bar{2}}(\lambda - \lambda_2 - 1) \cdots L_{\bar{n}}(\lambda - \lambda_n - 1) L_n(\lambda - \lambda_n) \cdots L_2(\lambda - \lambda_2) \quad (4.15)$$

definiert. In deren Definition nimmt die Algebra  $U(sl_2)$  sozusagen die Rolle des Hilfsraums ein. Die Darstellung im Hilfsraum ist somit noch frei wählbar. Zur Konstruktion der zugehörigen Transfermatrix wird in [9] das Spurfunktional

$$\text{Tr}_x : U(sl_2) \otimes \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x] \quad (4.16)$$

---

<sup>1</sup> Gleichung (4.14) entspricht Gleichung (2.7) in [12].

eingeführt. Dieses ist  $\mathbb{C}[x]$ -linear und entspricht bei Wahl der  $(k+1)$ -dimensionalen irreduziblen  $U(\mathfrak{sl}_2)$ -Darstellung  $\pi^{(k)}$  der gewöhnlichen Spur, d. h. es gilt

$$\mathrm{Tr}_{k+1}(A) = \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}^{(k+1)}} \left( \pi^{(k)}(A) \right) \quad \text{für alle } A \in U(\mathfrak{sl}_2).$$

Die in [9] geführte Diskussion der Eigenschaften des Spurfunktionalen wird in Anhang A bereitgestellt.

Die Abbildung  $\mathrm{Tr}_x$  erlaubt die Definition der Transfermatrix

$$\mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} \left[ T_n^{[1]} \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right]$$

auf dem Teilraum  $V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \otimes V_{\bar{n}} \otimes \cdots \otimes V_{\bar{2}}$ . Mit deren Hilfe wird der  $X$ -Operator

$${}_n X_{n-2}^{(1,2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{Hom} \left( V^{\otimes 2(n-2)}, V^{\otimes 2n} \right)$$

definiert: Das Bild eines beliebigen Vektors  $u \in V^{\otimes 2(n-2)}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & {}_n X_{n-2}^{(1,2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(u) \\ & := \frac{1}{\lambda_{12} \prod_{p=3}^n \lambda_{1p} \lambda_{2p}} \mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} \left[ T_n^{[1]} \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right] (s_{1,\bar{2}} s_{\bar{1},2} u_{3,\dots,n,\bar{n},\dots,3}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die obige Definition wird verallgemeinert zu:

$${}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \mathbb{R}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}_n X_{n-2}^{(1,2)}(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_n). \quad (4.18)$$

Durch  $\hat{\lambda}_i$  und  $\hat{\lambda}_j$  wird das Fehlen der Spektralparameter  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$  in der Folge  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  angezeigt. Der Operator  $\mathbb{R}^{(i,j)}$  ist definiert als die folgende Verkettung von  $R$ -Matrizen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) & := \check{R}_{i,i-1}(\lambda_{i,i-1}) \cdots \check{R}_{2,1}(\lambda_{i,1}) \\ & \quad \check{R}_{j,j-1}(\lambda_{j,j-1}) \cdots \check{R}_{i+2,i+1}(\lambda_{j,i+1}) \check{R}_{i+1,i}(\lambda_{j,i-1}) \cdots \check{R}_{3,2}(\lambda_{j,1}) \\ & \quad \check{R}_{i-1,i}^{-1}(\lambda_{i,i-1}) \cdots \check{R}_{1,2}^{-1}(\lambda_{i,1}) \\ & \quad \check{R}_{j-1,j}^{-1}(\lambda_{j,j-1}) \cdots \check{R}_{i+1,i+2}^{-1}(\lambda_{j,i+1}) \check{R}_{i,i+1}^{-1}(\lambda_{j,i-1}) \cdots \check{R}_{2,3}^{-1}(\lambda_{j,1}), \end{aligned}$$

er vertauscht daher die Reihenfolge der vertikalen Spektralparameter.

Da die Definition der  $X$ -Operatoren in Gleichung (4.17) der Normierung in [12] entspricht,  $\omega$  jedoch der in [9], ist es günstig, eine entsprechend umskalierte 2-Punkt-Funktion einzuführen:

$$\omega^{XXX}(\lambda_1, \lambda_2) := \frac{1}{(\lambda_{12}^2 - 1)} \omega(\lambda_1, \lambda_2).$$

Diese erfüllt die Funktionalgleichung

$$\omega^{XXX}(\lambda_1 - 1, \lambda_2) = -\omega^{XXX}(\lambda_1, \lambda_2) - p(\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{für } \lambda_1 = \nu_1, \dots, \nu_N. \quad (4.19)$$

Der Koeffizient ist gegeben durch

$$p(\lambda_1, \lambda_2) := \frac{3}{2} \frac{1}{(1 - \lambda_{21}^2) \lambda_{21} (\lambda_{21} - 2)}. \quad (4.20)$$

Die  $X$ -Operatoren besitzen per Konstruktion einige wichtige Eigenschaften. Sie erfüllen bezüglich der Operation von  $A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  die Funktionalgleichung:

**Gleichungen (4.2) und (4.3) in [12]**

$$A_n^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) {}_n X_{n-2}^{(1,j)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = -{}_n X_{n-2}^{(1,j)}(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (4.21)$$

Für  $i \neq 1$  gilt

$$A_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = {}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) A_{n-2}^{(1)}(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_n). \quad (4.22)$$

Der Beweis aus [12] ist in Anhang B wiedergegeben. Außerdem gilt die folgende Kommutatorrelation:

**Gleichung (4.4) in [12]** Für paarweise verschiedene Indizes  $i, j, k, l$  gilt

$$\begin{aligned} & {}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}_{n-2} X_{n-4}^{(k',l')}(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_n) \\ &= {}_n X_{n-2}^{(k,l)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}_{n-2} X_{n-4}^{(i',j')}(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_k, \dots, \hat{\lambda}_l, \dots, \lambda_n), \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei mit  $k'$  und  $l'$  die Positionen von  $\lambda_k$  und  $\lambda_l$  in der Folge  $\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_n$  bezeichnet sind.

Für das Bild des Vektors  $\mathbf{s}_n$  unter  $A_n^{(1)}$  gilt:

**Gleichung (4.5) in [12]**

$$\begin{aligned} & A_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbf{s}_n) \\ &= \mathbf{s}_n - 4 A_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left( \sum_{j=2}^n p(\lambda_1, \lambda_j) {}_n X_{n-2}^{(1,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbf{s}_{n-2}) \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Funktion  $p$  entspricht dem Koeffizienten (4.20).

Aus den  $X$ -Operatoren und der Funktion  $\omega^{XXX}$  werden die  $\Omega$ -Operatoren definiert:

$${}_n \Omega_{n-2}^{(i,j)} := \omega^{XXX}(\lambda_i, \lambda_j) {}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Für ein  $m$ -Tupel  $K = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$  wird außerdem die Notation

$$\Omega_{K,(k_i,k_j)} := {}_m \Omega_{m-2}^{(i,j)}(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_m})$$

eingeführt.

### 4.2.2. Das Ergebnis für endliche Temperatur

**Satz 1** Der Vektor  $h_n$ , definiert in Gleichung (4.11), ist gegeben durch

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{2^{n-2m}} \sum_{I,J} \Omega_{K_1, (i_1, j_1)} \Omega_{K_2, (i_2, j_2)} \dots \Omega_{K_m, (i_m, j_m)}(\mathbf{s}_{n-2m}). \quad (4.25)$$

Die innere Summe läuft über Paare von  $m$ -Tupeln,  $I = (i_1, \dots, i_m)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_m)$  verschiedener Elemente der Menge  $K_1 = \{1, 2, \dots, n\}$  unter der Bedingung  $i_1 < \dots < i_m$  und  $i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m$ . Es gilt  $K_{p+1} := K_p \setminus \{i_p, j_p\}$  für  $p \geq 1$ .

Im Vergleich zum Ergebnis für Temperatur null ist in Gleichung (4.25) nur die 2-Punkt-Funktion  $\omega^{T=0}$  durch  $\omega$  ersetzt worden. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich das Ergebnis in der Form (4.1).

Wir fassen Gleichung (4.25) als Ansatz für  $h_n$  auf und zeigen die folgenden drei Punkte:

- 1) Für  $\lambda_1 = \nu_1, \dots, \nu_N$  gilt die Funktionalgleichung

$$A_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = h_n(\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n). \quad (4.26)$$

- 2) Für die Asymptotik gilt

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \xrightarrow{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2} s_{1, \bar{1}} h_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (4.27)$$

- 3) Der Ausdruck besitzt die Polynomialitätseigenschaft, d. h. der Vektor

$$\Lambda_0(\lambda_1) h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (4.28)$$

ist ein Polynom  $N$ -ten Grades in  $\lambda_1$ .

Dann folgt der Beweis aus dem Eindeigkeitssatz aus Kapitel 3.

**zu 1)** Mit Hilfe der Kommutatorrelation für die  $X$ -Operatoren, siehe Gleichung (4.23), lassen sich die  $\Omega$ -Operatoren mit Index  $i = 1$  im Ausdruck (4.25) nach rechts bringen und in der Definition des Vektors

$$\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \mathbf{s}_n - 4 \sum_{j=2}^n n \Omega_{n-2}^{(1, j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbf{s}_{n-2})$$

zusammenfassen, so dass der Ausdruck für  $h_n$  die Gestalt

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{2^{n-2m}} \sum \tilde{\Omega}_{K_1, (i_1, j_1)} \Omega_{K_2, (i_2, j_2)} \dots \Omega_{K_m, (i_m, j_m)}(\phi_{n-2m}) \quad (4.29)$$

annimmt. Die Summe  $\tilde{\sum}$  ist dabei auf Tupel mit  $i_1 \neq 1$  eingeschränkt. (Daraus folgt  $j_1 \neq 1, 2$ .)

Aus Gleichung (4.22) folgt

$$\begin{aligned} A_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \\ = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{2^{n-2m}} \sum_{\tilde{\omega}} \Omega_{K_1, (i_1, j_1)} \Omega_{K_2, (i_2, j_2)} \dots \Omega_{K_m, (i_m, j_m)} A_{n-2m}^{(1)}(\phi_{n-2m}). \end{aligned}$$

Für den Vektor  $\phi_n$  ergibt sich aus den Gleichungen (4.19) und (4.24) die Funktionalgleichung

$$A_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \phi_n(\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n) \quad \text{für } \lambda_1 = \nu_1, \dots, \nu_N.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (4.29) folgt Gleichung (4.26).

(Der Unterschied zum Fall  $T = 0$  besteht lediglich darin, dass die Funktionalgleichung für  $\omega$  nur für endlich viele Spektralparameterwerte gilt, während es für  $T = 0$  diese Einschränkung nicht gibt.)

**zu 2)** Es gilt

$$\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \xrightarrow{\lambda_1 \rightarrow \infty} \mathbf{s}_n, \quad (4.30)$$

da die Vektoren

$${}_n \Omega_{n-2}^{(1,j)}(\mathbf{s}_{n-2}) = \omega(\lambda_1, \lambda_j) \frac{1}{(\lambda_{1j}^2 - 1)} {}_n X_{n-2}^{(1,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbf{s}_{n-2})$$

in diesem Limes verschwinden. Letzteres folgt aus der Asymptotik-Bedingung (4.6) der Funktion  $\omega$  zusammen mit dem folgenden Lemma aus [9]:

**Lemma 4.5 in [9]** Für jeden  $U(sl_2)$ -Singulett-Vektor  $v \in V^{\otimes 2(n-2)}$  gilt

$$\lim_{\lambda_k \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda_{ij}^2 - 1)} {}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(v) = \text{konst.} \quad \forall k. \quad (4.31)$$

Aus der Crossing-Symmetrie erhält man<sup>2</sup>

$$\text{Tr}_\lambda \left( AL_1 \left( \frac{\mu}{2} \right) L_{\bar{1}} \left( \frac{\mu}{2} - 1 \right) \right) s_{1, \bar{1}} = \frac{(\mu - \lambda)}{2} \frac{(\mu + \lambda)}{2} \text{Tr}_\lambda (A) s_{1, \bar{1}} \quad \forall A \in U(sl_2).$$

Daraus folgt für  $i \neq 1$  ( $j \neq 1, 2$ ) durch Einsetzen von  $\lambda = \lambda_{ij}$  und  $\mu = \lambda_{i1} + \lambda_{j1}$ :

$${}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(s_{n-2}) \xrightarrow{\lambda_1 \rightarrow \infty} s_{1, \bar{1}} {}_{n-2} X_{n-4}^{(i,j)}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)(s_{n-4}). \quad (4.32)$$

Die Gleichungen (4.30) und (4.32) ergeben die Asymptotikbedingung (4.27).

**zu 3)** Die Transfermatrix

$$\text{Tr}_{\lambda_{12}} \left[ T_n^{[1]} \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right] \quad (4.33)$$

ist zunächst per Konstruktion in jedem der ersten beiden Spektralparameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ein Polynom vom Grad  $2(n-1) + 1$  und in jedem der Spektralparameter  $\lambda_3, \dots, \lambda_n$  ein

---

<sup>2</sup> Gleichung (5.7) in [12]

Polynom vom Grad 2. Dies folgt aus der Gestalt des  $L$ -Operators zusammen mit Gleichung (A.3) für den Grad des Bildes unter  $Tr_\lambda$  als Polynom in  $\lambda$ . Der Vektor (4.28) ist also per Konstruktion ein Polynom in  $\lambda_1$ , zu zeigen ist noch, dass dieses nur vom Grad  $N$  ist. Der erste Schritt ist die Beobachtung, dass der Operator

$$\frac{1}{(\lambda_{ij}^2 - 1)} {}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (4.34)$$

für  $\lambda_{ij} = -1, 0, 1$  keine Polstellen besitzt. Dies folgt direkt aus Lemma 4.4 in [9].

**Lemma 4.4 in [9]** *Der Operator*

$$\left( \prod_{p \neq i, j} \lambda_{ip} \lambda_{jp} \right) \frac{1}{(\lambda_{ij}^2 - 1)} {}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ist ein Polynom in den Spektralparametern.

Insbesondere ist der Zähler des Ausdrucks (4.34) in  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$  vom Grad  $2(n-2)$ , während der Nenner durch  $\prod_{p \neq i, j} \lambda_{ip} \lambda_{jp}$  gegeben ist und somit in diesen beiden Spektralparametern den Grad  $(n-2)$  hat. In den übrigen Spektralparametern haben Zähler und Nenner jeweils den Grad 2.

Zur Kontruktion von  $h_n$  wird der Operator (4.34) auf einen  $U(sl_2)$ -Singulettvektor angewendet. Dadurch halbiert sich nach Lemma 4.5 in [9] der Zählergrad. Da die  $X$ -Operatoren auch  $U(sl_2)$ -invariant sind, folgt insgesamt, dass Zähler und Nenner der Vektoren  $f_{n,I,J}$  in allen Spektralparametern denselben Grad haben. Darüberhinaus folgt, dass die einzigen möglichen Polstellen des Vektors (4.28) als Funktion von  $\lambda_1$  an den Stellen  $\lambda_1 = \lambda_2, \dots, \lambda_n$  liegen. Das Produkt der in jedem Summanden von (4.25) auftretenden  $\omega$ -Funktionen,

$$\Lambda_0(\lambda_1) \prod_{p=1}^m \omega(\lambda_{ip}, \lambda_{jp}),$$

ist ein Polynom  $N$ -ten Grades in  $\lambda_1$ . Um zu zeigen, dass der gesamte Ausdruck diese Eigenschaft hat, reicht es nach dem oben Gesagten zu zeigen, dass die Residuen an den Stellen  $\lambda_1 = \lambda_2, \dots, \lambda_n$  verschwinden. Wie im Beispiel für  $n = 3$  sind die Residuen der Summanden identisch null oder es heben sich jeweils die Residuen zweier Summanden des Ausdrucks (4.25) weg. Dies ist anhand der obigen Darstellung jedoch schwer zu erkennen. Mit Hilfe der in [12] konstruierten exponentiellen Form wird dies allerdings unmittelbar klar. Diese wird mit Hilfe der Operatoren

$$\hat{\Omega}_n^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{End}(V^{2n}),$$

definiert durch

$$\hat{\Omega}_n^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := 4_n \Omega_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}_{n-2} \Pi_n \mathbb{R}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1},$$

formuliert. Der Operator  ${}_{n-2} \Pi_n \in \text{Hom}(V^{\otimes 2n}, V^{\otimes 2(n-2)})$  ist das Analogon der Teilspurbildung in den ersten beiden Räumen unter der oben erläuterten Dualität. Die wichtigsten Eigenschaften der Operatoren  $\hat{\Omega}_n^{(i,j)}$  ergeben sich unmittelbar aus denen der  $\Omega$ -Operatoren:

**Lemma 12.3 in [12]** *Es gilt*

$$\hat{\Omega}_n^{(i,j)} \hat{\Omega}_n^{(k,l)} = \hat{\Omega}_n^{(k,l)} \hat{\Omega}_n^{(i,j)} \quad \text{für alle } i < j, k < l.$$

Für Verkettungen findet man

**Gleichung (12.5) in [12]**

$$\begin{aligned} & \hat{\Omega}_n^{(i_1, j_1)} \hat{\Omega}_n^{(i_2, j_2)} \dots \hat{\Omega}_n^{(i_m, j_m)} \mathbf{s}_n \\ &= \begin{cases} (-4)^m \Omega_{K_1, (i_1, j_1)} \dots \Omega_{K_m, (i_m, j_m)}(\mathbf{s}_{n-2m}) & \text{für paarweise verschiedene Indizes} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

daraus folgt, dass der Operator

$$\hat{\Omega}_n := \sum_{i < j} \hat{\Omega}_n^{(i,j)} \tag{4.35}$$

nilpotent ist, genauer gesagt gilt

$$\left( \hat{\Omega}_n \right)^m = 0 \quad \text{für } m > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Damit lässt sich der Vektor  $h_n$  in exponentieller Form schreiben:

**Theorem 12.4 in [12]**

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 2^{-n} e^{\hat{\Omega}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \mathbf{s}_n.$$

Dass  $h_n$  bei  $\lambda_1 = \lambda_2, \dots, \lambda_n$  keine Pole besitzt, wird durch das folgende Lemma geliefert:

**Lemma 12.5. in [12]** *Der Operator  $\hat{\Omega}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  hat für  $\lambda_k = \lambda_j$  keinen Pol.*

Der Beweis beruht darauf zu zeigen, dass sich für festes  $i$  die Residuen der Operatoren  $\hat{\Omega}_n^{(k,i)}$  und  $\hat{\Omega}_n^{(j,i)}$  für  $\lambda_k = \lambda_j$  gegeneinander wegheben. Dazu wird die Symmetrieeigenschaft  $\omega^{T=0}(\lambda) = \omega^{T=0}(-\lambda)$  benötigt, welche durch Gleichung (4.5) ersetzt wird. Von den übrigen Summanden in (4.35) ist klar, dass sie für  $\lambda_k = \lambda_j$  keinen Pol haben.

Damit ist der Beweis von Satz 1 abgeschlossen.



### 4.3. Die 2-Punkt-Funktion $\omega$

In [7] wurde von Boos, Göhmann, Klümper und Suzuki mit Hilfe der Vielfachintegraldarstellung eine effiziente Beschreibung der 2-Punkt-Funktion  $\omega$  durch Integralgleichungen hergeleitet. Im Folgenden wird die Herleitung dieses Resultats mit Hilfe der freien Energie eines geeignet modifizierten Vertex-Modells gegeben.

Dazu wird die modifizierte vertikale Transfermatrix

$$T(\lambda; \mu) := \text{Spur}_{V_\lambda} (\check{R}_{N+2, N+3}(\lambda, \mu + 1 + \varepsilon) \check{R}_{N+1, N+2}(\lambda, \mu) \check{R}_{N, N+1}(\lambda, \nu_N) \cdots \check{R}_{1, 2}(\lambda, \nu_1))$$

eingeführt. Diese entspricht der Transfermatrix  $T(\lambda)$  zur Trotter-Zahl  $N + 2$  mit den Inhomogenitäten  $\nu_1, \dots, \nu_N, \mu$  und  $\mu + 1 + \varepsilon$ . Die graphische Darstellung von  $T(\lambda; \mu)$  findet sich in Abbildung 4.5.

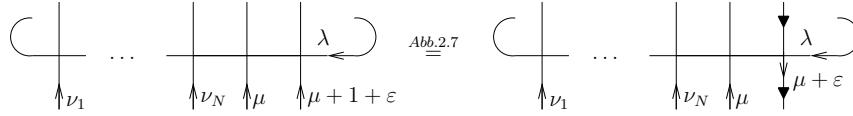


Abbildung 4.5.: Modifizierte Transfermatrix  $T(\lambda; \mu)$ . Die rechte Seite ergibt sich durch Anwendung der Crossing-Symmetrie am letzten Platz.

Für  $\varepsilon = 0$  ergibt sich für einen beliebigen Eigenvektor  $|\Psi\rangle$  von  $T_{\nu_1, \dots, \nu_N}(\lambda)$  mit

$$T(\lambda) |\Psi\rangle = \Lambda(\lambda) |\Psi\rangle$$

durch Bildung des Tensorproduktes mit dem 2-Platz-Singulett ein Eigenvektor von  $T(\lambda; \mu)|_{\varepsilon=0}$ :

$$T(\lambda; \mu)|_{\varepsilon=0} (|\Psi\rangle \otimes |s(1)\rangle) = (-1) C_b(\lambda - \mu) \Lambda(\lambda) (|\Psi\rangle \otimes |s(1)\rangle). \quad (4.36)$$

Dabei gehen die Crossing-Symmetrie und die Unitarität der  $R$ -Matrix ein.

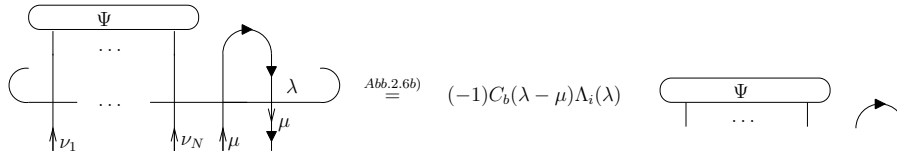


Abbildung 4.6.: Eigenvektoren der modifizierten Transfermatrix

$\Lambda_0(\lambda; \mu)$  sei der betragsgrößte Eigenwert der modifizierten Transfermatrix  $T(\lambda; \mu)$  und  $|\Phi_0\rangle$  der zugehörige, auf eins normierte Eigenvektor. Dann folgt

$$\frac{d}{d\varepsilon} \ln(\Lambda_0(\lambda; \mu))|_{\varepsilon=0} = \frac{\langle \Phi_0 | \left( \frac{d}{d\varepsilon} T(\lambda; \mu) \right) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | T(\lambda; \mu) | \Phi_0 \rangle} |_{\varepsilon=0}.$$

Der Bruch auf der rechten Seite wird erweitert zu

$$\frac{\langle \Phi_0 | T^k(0; \mu) T(\mu; \mu) \left( \frac{d}{d\varepsilon} T(\lambda; \mu) \right) T^k(0; \mu) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | T^k(0; \mu) T(\mu; \mu) T(\lambda; \mu) T^k(0; \mu) | \Phi_0 \rangle} |_{\varepsilon=0}. \quad (4.37)$$

Nach Gleichung (4.36) ist  $|\Phi_0\rangle$  gegeben durch

$$|\Phi_0\rangle = |\tilde{\Phi}_0\rangle \otimes |s(1)\rangle, \quad (4.38)$$

wobei  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$  den Eigenvektor der nicht modifizierten Transfermatrix zum führenden Eigenwert bezeichne. Im thermodynamischen Limes  $k \rightarrow \infty$  kann im Ausdruck (4.37) die Projek-

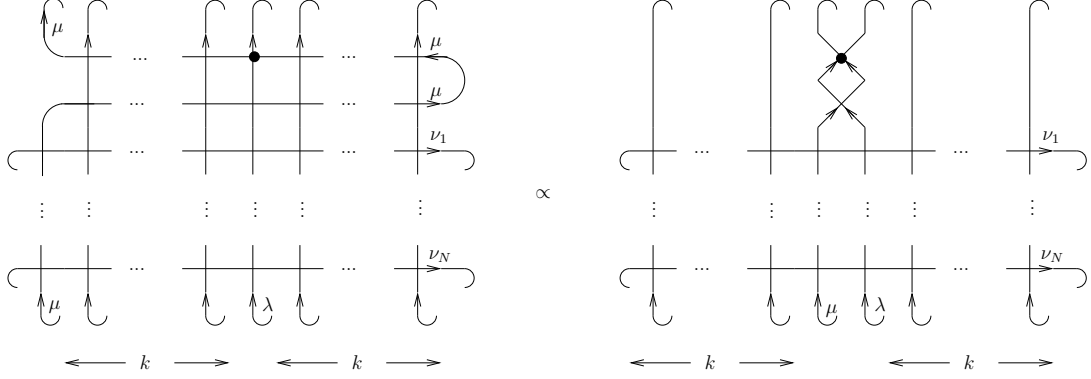


Abbildung 4.7.: Spur  $[T(\mu; \mu)T^k(0; \mu) (\frac{d}{d\varepsilon}T(\lambda; \mu)) T^k(0; \mu)]$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es wurde die Crossing-Symmetrie benutzt. Da die Anzahl der Transfermatrizen gerade ist, tritt kein relatives Vorzeichen auf.

tion auf  $|\Phi_0\rangle$  durch die Spurbildung ersetzt werden. Die graphische Darstellung des Zählers findet sich in Abbildung 4.7. Der Punkt steht dabei für die Ableitung der entsprechenden  $R$ -Matrix nach  $\varepsilon$ . Unter Verwendung der Unitarität und der Yang-Baxter-Gleichung ergibt sich für  $\varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \ln(\Lambda_0(\lambda; \mu))|_{\varepsilon=0} &= \frac{\text{Spur} (D_2(\mu, \lambda) \check{R}(\lambda, \mu) \frac{d}{d\varepsilon} \check{R}(\mu + \varepsilon, \lambda)|_{\varepsilon=0})}{\text{Spur} (D_2(\mu, \lambda) \check{R}(\lambda, \mu) \check{R}(\mu, \lambda))} \\ &= \frac{1}{a(\lambda, \mu)a(\mu, \lambda)} \text{Spur} \left( D_2(\mu, \lambda) \check{R}(\lambda, \mu) \frac{d}{d\varepsilon} \check{R}(\mu + \varepsilon, \lambda)|_{\varepsilon=0} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Gleichung (4.39) gilt für jede Normierung der  $R$ -Matrix. Für  $a(\lambda, \mu) = 1 + \lambda - \mu$  ergibt sich

$$\check{R}(\lambda, \mu) \frac{d}{d\varepsilon} \check{R}(\mu + \varepsilon, \lambda)|_{\varepsilon=0} = (1 + \lambda - \mu) I^{\otimes 2} - Pr_s.$$

Mit

$$\text{Spur} (D_2(\mu, \lambda)) = 1 \quad \text{und} \quad \text{Spur} (D_2(\mu, \lambda) Pr_s) = \frac{1}{2} - \omega(\mu, \lambda)$$

folgt der Zusammenhang

$$\frac{d}{d\varepsilon} \ln(\Lambda_0(\lambda; \mu))|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{1 - (\lambda - \mu)^2} \left( (1 + \lambda - \mu) - \frac{1}{2} + \omega(\mu, \lambda) \right). \quad (4.40)$$

Der größte Eigenwert der modifizierten Transfermatrix lässt sich mit Hilfe von Integralgleichungen beschreiben. Anschließend gewinnt man mit Hilfe von Gleichung (4.40) eine Beschreibung der 2-Punkt-Funktion  $\omega$ . Die Herleitung der Integralgleichung für den führenden Eigenwert folgt der Darstellung in [41].

Für  $\Lambda_0(\lambda; \mu)$  folgt aus dem Bethe-Ansatz die Darstellung (vgl. Gleichung (3.23))

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\lambda; \mu) = & (\lambda - \mu - \varepsilon)(\lambda - \mu + 1) \prod_{j=1}^N (\lambda - \nu_j + 1) \prod_{l=0}^{[N/2]} \frac{(n_l - \lambda + 1)}{(n_l - \lambda)} \\ & + (\lambda - \mu - 1 - \varepsilon)(\lambda - \mu) \prod_{j=1}^N (\lambda - \nu_j) \prod_{l=0}^{[N/2]} \frac{(\lambda - n_l + 1)}{(\lambda - n_l)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Mit Hilfe der beiden Funktionen

$$\Phi(\lambda) := (\lambda - \mu - \varepsilon - 1/2)(\lambda - \mu + 1/2) \prod_{k=1}^N (\lambda - \nu_k + 1/2)$$

und

$$q(\lambda) := \prod_{l=0}^{[N/2]} (\lambda - n_l)$$

lässt sich Gleichung (4.41) umschreiben in

$$\Lambda_0(\lambda; \mu) = \Phi(\lambda + 1/2) \frac{q(\lambda - 1)}{q(\lambda)} + \Phi(\lambda - 1/2) \frac{q(\lambda + 1)}{q(\lambda)}.$$

Die Anzahl der zu  $\Lambda_0(\lambda; \mu)$  gehörenden Bethe-Ansatz-Zahlen  $\{n_l; l = 0, \dots, [N/2]\}$  ist gegenüber der Anzahl für den Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda)$  um eins größer.

Die Bethe-Ansatz-Gleichungen sind äquivalent zur Forderung der Analytizität des Ausdrucks für den Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda; \mu)$  als Funktion von  $\lambda$  in der gesamten komplexen Ebene. Die Residuen an den Stellen  $\lambda = n_l$  verschwinden genau dann, wenn für die Hilfsfunktion  $a$ , definiert durch

$$a(\lambda; \mu) := \frac{\Phi(\lambda + 1/2) q(\lambda - 1)}{\Phi(\lambda - 1/2) q(\lambda + 1)},$$

die Bedingung

$$a(n_l; \mu) = -1 \quad \text{für } l = 0, \dots, [N/2] \quad (4.42)$$

gilt. Die Hilfsfunktion  $a$  ist per Definition eine meromorphe Funktion mit einfachen Polstellen bei

$$\nu_1, \dots, \nu_N, \mu \quad \text{und} \quad \mu + \varepsilon + 1$$

sowie

$$n_j - 1 \quad \text{für } j = 0, \dots, [N/2]$$

und einfachen Nullstellen bei

$$\nu_1 - 1, \dots, \nu_N - 1, \mu - 1 \quad \text{und} \quad \mu + \varepsilon$$

sowie

$$n_j + 1 \quad \text{für } j = 0, \dots, [N/2].$$

Zur Herleitung einer Integralgleichung für die Funktion  $a$  wird die Hilfsfunktion

$$A(\lambda; \mu) := 1 + a(\lambda; \mu)$$

definiert. Diese besitzt dieselben Polstellen wie die Funktion  $a$ . Nullstellen von  $A$  sind aufgrund von Gleichung (4.42) die Bethe-Ansatz-Zahlen  $n_l$ ,  $l = 0, \dots, [N/2]$ , die sich auf der imaginären Achse befinden. Darüber hinaus besitzt  $A$  noch die  $N + 2$  Nullstellen des Eigenwerts  $\Lambda_0(\lambda; \mu)$ , deren Realteil bei  $\pm 1$  liegt [41]. Im Hinblick auf die spätere Spezialisierung der horizontalen Spektralparameter auf die physikalischen Werte (2.36) seien diese so gewählt, dass  $0 < \nu_1, \dots, \nu_{[N/2]} < 1/2$  und  $1/2 < \nu_{[N/2]+1}, \dots, \nu_N < 1$  gilt. Außerdem gelte  $0 < \mu < 1/2$ . Die Null- und Polstellenstruktur der Funktion  $A$  für diese Wahl der Inhomogenitätsparameter ist in Abbildung 4.8 skizziert. Analog zum Vorgehen in [41] leitet

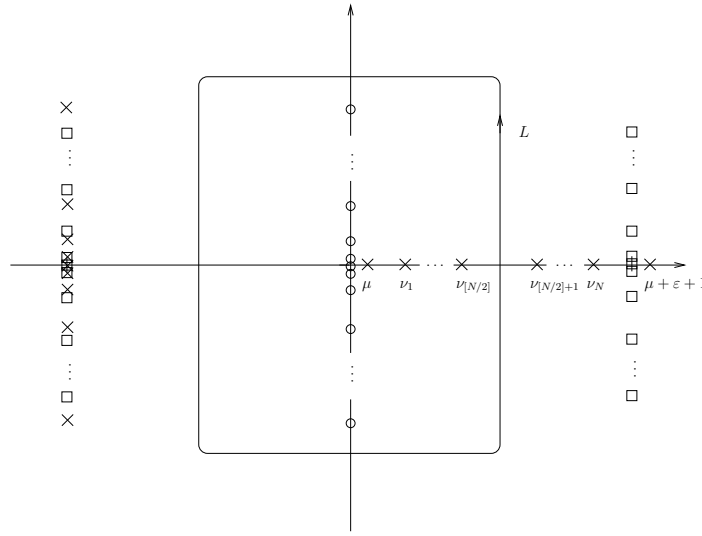


Abbildung 4.8.: Null- und Polstellenverteilung der Funktion  $A(\lambda; \mu)$ . Die Kontur  $L$  umschließt die Bethe-Ansatz-Zahlen  $n_0, \dots, n_{[N/2]}$  auf der imaginären Achse, diese sind einfache Nullstellen von  $A$ ; außerdem umschließt  $L$  die einfachen reellen Polstellen bei  $\mu$  und  $\nu_1, \dots, \nu_{[N/2]}$ .

man für  $\lambda$  innerhalb der Kontur  $L$  die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \ln(a(\lambda; \mu)) &= \ln\left(\frac{\lambda - \mu - 1}{\lambda - \mu}\right) + \ln\left(\frac{\lambda - \mu - \varepsilon}{\lambda - \mu - \varepsilon - 1}\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{[N/2]} \ln\left(\frac{\lambda - \nu_k - 1}{\lambda - \nu_k}\right) + \sum_{k'=[N/2]+1}^N \ln\left(\frac{\lambda - \nu_{k'} + 1}{\lambda - \nu_{k'}}\right) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2}{((\lambda - \omega)^2 - 1)} \ln(1 + a(\omega; \mu)) d\omega \quad (4.43) \end{aligned}$$

her. Durch Einsetzen von  $\ln(1 + a) = \ln(1 + a^{-1}) + \ln(a)$  im Integranden und Berechnung des zweiten Summanden mittels partieller Integration ergibt sich die Integralgleichung in der alternativen Form

$$\begin{aligned} \ln(a^{-1}(\lambda; \mu)) &= \ln\left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu + 1}\right) + \ln\left(\frac{\lambda - \mu - \varepsilon + 1}{\lambda - \mu - \varepsilon}\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{[N/2]} \ln\left(\frac{\lambda - \nu_k}{\lambda - \nu_k + 1}\right) + \sum_{k'=[N/2]+1}^N \ln\left(\frac{\lambda - \nu_{k'} + 2}{\lambda - \nu_{k'} + 1}\right) \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2}{((\lambda - \omega)^2 - 1)} \ln(1 + a^{-1}(\omega; \mu)) d\omega. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Für den größten Eigenwert ergibt sich der Integralausdruck<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \ln(\Lambda_0(\lambda; \mu)) &= \sum_{k=1}^{[N/2]} \ln(\lambda - \nu_k + 1) + \ln(\lambda - \mu + 1) \\ &+ \sum_{k'=[N/2]+1}^N \ln(\lambda - \nu_{k'}) + \ln(\lambda - \mu - \varepsilon - 1) \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\lambda - \omega)(\lambda - \omega + 1)} \ln(A(\omega; \mu)) d\omega. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Anwenden von Gleichung (4.36) für die Eigenwerte  $\Lambda_0(\lambda; \mu)$  und  $\Lambda_0(\lambda)$  liefert

$$a(\lambda; \mu)|_{\varepsilon=0} = a(\lambda),$$

wobei die Funktion auf der rechten Seite die zum größten Eigenwert der nicht modifizierten Transfermatrix  $T(\lambda)$  gehörende Hilfsfunktion sei. Gleichung (4.45) liefert für  $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} \ln(\Lambda_0(\lambda)) &= \sum_{k=1}^{[N/2]} \ln(\lambda - \nu_k + 1) + \sum_{k'=[N/2]+1}^N \ln(\lambda - \nu_{k'}) \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\lambda - \omega)(\lambda - \omega + 1)} \ln(1 + a(\omega)) d\omega. \end{aligned}$$

Alternativ erhält man die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \ln(\Lambda_0(\lambda; \mu)) &= \sum_{k=1}^{[N/2]} \ln(\lambda - \nu_k + 1) + \ln(\lambda - \mu + 1) \\ &+ \sum_{k'=[N/2]+1}^N \ln(\lambda - \nu_{k'}) + \ln(\lambda - \mu - \varepsilon - 1) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\lambda - \omega)(\lambda - \omega - 1)} \ln(1 + a^{-1}(\omega; \mu)) d\omega \end{aligned} \quad (4.46)$$

<sup>3</sup> Der Driving-Term in Gleichung (4.45) verschwindet, wenn man zur Konstruktion der Transfermatrix die  $R$ -Matrix  $a^{-1}(\lambda_1, \lambda_2) \tilde{R}(\lambda_1, \lambda_2)$  verwendet und die zu den außerhalb der Kontur liegenden horizontalen Spektralparametern gehörenden Linien mittels Crossing-Symmetrie umdreht. Die Hilfsfunktion  $a$  bleibt dabei unverändert.

und

$$\begin{aligned} \ln(\Lambda_0(\lambda)) &= \sum_{k=1}^{[N/2]} \ln(\lambda - \nu_k + 1) + \sum_{k'=[N/2]+1}^N \ln(\lambda - \nu_{k'}) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\lambda - \omega)(\lambda - \omega - 1)} \ln(1 + a^{-1}(\omega)) d\omega. \end{aligned}$$

Für die Funktion  $G$ , definiert durch

$$G(\lambda; \mu) := \frac{d}{d\varepsilon} \ln(a(\lambda; \mu))|_{\varepsilon=0},$$

folgt aus Gleichung (4.43) die in [29] gefundene lineare Integralgleichung

$$G(\lambda; \mu) = \frac{1}{(\lambda - \mu)(\lambda - \mu - 1)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2}{((\lambda - \omega)^2 - 1)} \frac{G(\omega; \mu)}{1 + a^{-1}(\omega)} d\omega$$

bzw. aus Gleichung (4.44)

$$G(\lambda; \mu) = \frac{-1}{(\lambda - \mu)(\lambda - \mu + 1)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2}{((\lambda - \omega)^2 - 1)} \frac{G(\omega; \mu)}{1 + a(\omega)} d\omega.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \ln(\Lambda_0(\lambda; \mu))|_{\varepsilon=0} &= \frac{-1}{(\lambda - \mu - 1)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\lambda - \omega)(\lambda - \omega + 1)} \frac{G(\omega; \mu)}{1 + a^{-1}(\omega)} d\omega \\ \frac{d}{d\varepsilon} \ln(\Lambda_0(\lambda; \mu))|_{\varepsilon=0} &= \frac{-1}{(\lambda - \mu - 1)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\lambda - \omega)(\lambda - \omega - 1)} \frac{G(\omega; \mu)}{1 + a(\omega)} d\omega \end{aligned}$$

Aus der Beschreibung der 2-Punkt-Funktion  $\omega$  durch die freie Energie des modifizierten Vertex-Modells, Gleichung (4.40), ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (4.45) der Integralausdruck

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \omega(\mu, \lambda) &= \frac{(1 - (\lambda - \mu)^2)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\lambda - \omega)(\lambda - \omega + 1)} \frac{G(\omega; \mu)}{1 + a^{-1}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{(1 - (\lambda - \mu)^2)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\lambda - \omega)(\lambda - \omega - 1)} \frac{G(\omega; \mu)}{1 + a(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Damit ist die 2-Punkt-Funktion  $\omega$  gegeben durch die Lösung der nichtlinearen Integralgleichung für die Hilfsfunktion  $a$  und der linearen Integralgleichung für die Funktion  $G$ . Diese lassen sich numerisch gut berechnen. Sie erlauben die Wahl der physikalisch relevanten Werte für die horizontalen Spektralparameter, siehe Gleichung (2.36), und anschließend die Bildung des Trotter-Limes.

Der Ausdruck für  $\omega$  mit den physikalischen Parametern im Trotter-Limes wird in die Formel (4.25) eingesetzt. Durch eine geeignete Umschreibung des gesamten Ausdrucks, siehe dazu [10, 11], folgt, analog zum Fall  $T = 0$ , ein expliziter Ausdruck für den  $n$ -Platz-Dichteoperator im homogenen Limes.

## 5. Der Dichteoperator der XXZ-Kette bei endlicher Temperatur

Der Ausdruck (4.1) für den inhomogenen Dichteoperator bei Temperatur null wird in [12] auf den Fall der XXZ-Kette zu

$$D_n^{T=0}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{I,J} \tilde{\omega}_I^{T=0} \omega_J^{T=0} f_{I,J} \quad (5.1)$$

verallgemeinert. Die Operatoren  $f_{I,J}$  sind in diesem Fall rationale Funktionen in den Variablen  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , definiert durch  $\zeta_k := q^{\lambda_k}$ . Im Unterschied zur Formel für die XXX-Kette werden zur Beschreibung des  $n$ -Platz-Dichteoperators zwei Funktionen,  $\omega^{T=0}$  und  $\tilde{\omega}^{T=0}$ , benötigt. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass sich das Ergebnis (5.1) auf den Fall endlicher Temperatur verallgemeinern lässt. Wie in Kapitel 4 wird gezeigt, dass ein entsprechender Ansatz für  $D_n$  die eindeutigen Charakteristika aus Kapitel 3 besitzt.

Die Konstruktion in [12] beruht auf der  $R$ -Matrix <sup>1</sup>

$$\check{R}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} a(\lambda_1, \lambda_2) & & & \\ & \text{sh}(\eta) & b(\lambda_1, \lambda_2) & \\ & b(\lambda_1, \lambda_2) & \text{sh}(\eta) & \\ & & & a(\lambda_1, \lambda_2) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

mit den in Gleichung (2.19) angegebenen Funktionen  $a$  und  $b$ . In dieser Arbeit wurde hingegen bis jetzt die  $R$ -Matrix (2.17), gegeben durch

$$\check{R}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} a(\lambda_1, \lambda_2) & & & \\ & \text{sh}(\eta)e^{\eta(\lambda_1-\lambda_2)} & b(\lambda_1, \lambda_2) & \\ & b(\lambda_1, \lambda_2) & \text{sh}(\eta)e^{-\eta(\lambda_1-\lambda_2)} & \\ & & & a(\lambda_1, \lambda_2) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

verwendet. Der Grund dafür ist die in Kapitel 3 als „Polynomialitätseigenschaft“ bezeichnete Eigenschaft des inhomogenen Dichteoperators. Diese besagt, dass jedes seiner Matrixelemente, multipliziert mit dem Eigenwert  $\Lambda_0(\lambda_i)$ , das Produkt von  $\zeta_i^{-N}$  mit einem Polynom  $N$ -ten Grades in  $\zeta_i^2$  ist <sup>2</sup>. Dies war günstig für die Beschreibung der eindeutigen Charakterisierung.

In diesem Kapitel wird das Ergebnis für den Vektor

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := (\mathcal{D}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \otimes I^{\otimes n})(\mathbf{s}_n) \quad (5.4)$$

<sup>1</sup> Alle  $4 \times 4$ -Matrizen sind bezüglich der Basis  $(v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-)$  angegeben.

<sup>2</sup> Gemeint ist auch hier wieder „höchstens“  $N$ -ten Grades.

formuliert, wobei  $\mathcal{D}_n$  den auf Basis von  $\tilde{\mathcal{R}}$  konstruierten, inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperator bezeichne. Der Vektor  $\mathbf{s}_n$  in Gleichung (5.4) ist die Verschachtelung von  $U(sl_2)$ -Singulettts, definiert in Gleichung (4.13).<sup>3</sup>

Zwischen den beiden  $R$ -Matrizen (5.2) und (5.3) besteht der einfache Zusammenhang

$$\tilde{\mathcal{R}}(\lambda_1, \lambda_2) = (\tau_{\lambda_2} \otimes \tau_{\lambda_1}) \tilde{R}(\lambda_1, \lambda_2) (\tau_{-\lambda_1} \otimes \tau_{-\lambda_2}).$$

Die Bijektion  $\tau_\lambda$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_\lambda : V_\lambda &\rightarrow V_\lambda; & v_+ &\mapsto e^{\frac{n\lambda}{2}} v_+, \\ & & v_- &\mapsto e^{-\frac{n\lambda}{2}} v_- \end{aligned}$$

und besitzt die Eigenschaft  $(\tau_\lambda)^{-1} = \tau_{-\lambda}$ .

Für die zugeordneten Dichteoperatoren folgt

$$\mathcal{D}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\tau_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \tau_{\lambda_n}) \mathcal{D}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (\tau_{-\lambda_1} \otimes \dots \otimes \tau_{-\lambda_n}). \quad (5.5)$$

Die für  $D_n$  formulierten charakterisierenden Eigenschaften lassen sich leicht umformulieren. So besitzt der Operator  $\mathcal{D}_n$  dieselbe Asymptotik wie  $D_n$  und erfüllt die diskrete Funktionalgleichung:

$$\mathcal{A}_n^{(n)}(\mathcal{D}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathcal{D}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n - 1) \quad \text{für } \lambda_1 = \nu_1, \dots, \nu_N.$$

Der Operator  $\mathcal{A}_n^{(n)}$  ist durch Definition (3.7) unter der Ersetzung der  $R$ -Matrizen durch  $\mathcal{R}$  sowie der  $U_q(sl_2)$ -Singulettts durch  $U(sl_2)$ -Singulettts gegeben.

## 5.1. Der $n$ -Platz-Dichteoperator für $n = 1, 2$

Für  $n = 1$  gilt

$$\mathcal{D}_1(\lambda_1) = \frac{1}{2} I.$$

Für den 2-Platz-Dichteoperator erhält man durch einen Ansatz der Form

$$\mathcal{D}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{++}^{++} & & & \\ & \mathcal{D}_{+-}^{+-} & \mathcal{D}_{+-}^{-+} & \\ & \mathcal{D}_{-+}^{+-} & \mathcal{D}_{-+}^{-+} & \\ & & & \mathcal{D}_{--}^{--} \end{pmatrix}$$

durch Kombination von Intertwining-Bedingung und Teilspurbildung die Bedingungen

$$\mathcal{D}_{--}^{--} = \mathcal{D}_{++}^{++}, \quad \mathcal{D}_{+-}^{+-} = \mathcal{D}_{-+}^{-+}, \quad \mathcal{D}_{-+}^{+-} = \mathcal{D}_{+-}^{-+} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_{++}^{++} + \mathcal{D}_{+-}^{+-} = \frac{1}{2}.$$

---

<sup>3</sup> Aufgrund der Umeichung der  $R$ -Matrizen wird im Falle der  $R$ -Matrix  $\mathcal{R}$  die Rolle des  $U_q(sl_2)$ -Singulettts in der Crossing-Symmetrie (2.28) vom  $U(sl_2)$ -Singulett übernommen.



Der 2-Platz-Dichteoperator ist daher durch

$$\mathcal{D}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{++}^{++} & & & \\ & 1/2 - \mathcal{D}_{++}^{++} & \mathcal{D}_{-+}^{+-} & \\ & \mathcal{D}_{-+}^{+-} & 1/2 - \mathcal{D}_{++}^{++} & \\ & & & \mathcal{D}_{++}^{++} \end{pmatrix}$$

bzw. durch

$$D_2(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{++}^{++} & & & \\ & 1/2 - \mathcal{D}_{++}^{++} & q^{-\lambda_{12}} \mathcal{D}_{-+}^{+-} & \\ & q^{\lambda_{12}} \mathcal{D}_{-+}^{+-} & 1/2 - \mathcal{D}_{++}^{++} & \\ & & & \mathcal{D}_{++}^{++} \end{pmatrix}$$

gegeben. Zur Beschreibung durch Funktionalgleichungen sind die Korrelationsfunktionen  $\mathcal{D}_{++}^{++}$  und  $\mathcal{D}_{-+}^{+-}$  allerdings unpraktisch, da man gekoppelte Funktionalgleichungen erhält. Geschickter ist es, den 2-Platz-Dichteoperator in der Form

$$\mathcal{D}_2(\lambda_1, \lambda_2) = -\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) {}_2\tilde{G}_0(1) - \omega(\lambda_1, \lambda_2) {}_2G_0(1) + \frac{1}{4}I \otimes I$$

mit den Operatoren

$${}_2\tilde{G}_0(1) = \frac{\text{ch}(\eta\lambda_{12})}{2\text{sh}(\eta\lambda_{12})\text{sh}(\eta)} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \frac{\text{ch}(\eta)}{2\text{sh}(\eta)\text{sh}(\eta\lambda_{12})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

und

$${}_2G_0(1) = \frac{\text{ch}(\eta)}{2\text{sh}^2(\eta)} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \frac{\text{ch}(\eta\lambda_{12})}{2\text{sh}^2(\eta)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

auszudrücken [12]. Für die Bilder der Operatoren  ${}_2\tilde{G}_0(1)$  und  ${}_2G_0(1)$  unter  $\mathcal{A}_2^{(2)}$  gilt

$$\begin{aligned} {}_2G_0(\lambda_1, \lambda_2)(1) &\mapsto {}_2G_0(\lambda_1, \lambda_2 - 1)(1) + {}_2\tilde{G}_0(\lambda_1, \lambda_2 - 1)(1), \\ {}_2\tilde{G}_0(\lambda_1, \lambda_2)(1) &\mapsto {}_2\tilde{G}_0(\lambda_1, \lambda_2 - 1)(1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}I \otimes I &\mapsto \frac{1}{4}I \otimes I - \left( \tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2) + p(\lambda_1, \lambda_2) \right) {}_2\tilde{G}_0(\lambda_1, \lambda_2 - 1)(1) \\ &\quad - p(\lambda_1, \lambda_2) {}_2G_0(\lambda_1, \lambda_2 - 1)(1) \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Funktionen  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$  das Funktionalgleichungssystem <sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \omega(\lambda_1, \lambda_2 - 1) &= \omega(\lambda_1, \lambda_2) + p(\lambda_1, \lambda_2) \\ \tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2 - 1) &= \tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) + \omega(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2) + p(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned} \tag{5.6}$$

<sup>4</sup> Gleichung (5.6) ist eine diskrete Version von Gleichung (2.12) in [12].

an den Stellen  $\lambda_2 = u_1, \dots, u_N$ . Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2} \frac{1}{[\lambda_{12} - 1]_q [\lambda_{12} - 2]_q} - \frac{1}{4} \frac{[2]_q}{[\lambda_{12} - 1]_q [\lambda_{12} + 1]_q}, \\ p(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{3}{4} \frac{1}{[\lambda_{12}]_q [\lambda_{12} - 1]_q} - \frac{1}{4} \frac{[3]_q}{[\lambda_{12} - 2]_q [\lambda_{12} + 1]_q}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Zur Diskussion der Eigenschaften von  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$  ist es günstig, diese durch Korrelationsfunktionen des Operators  $D_2(\lambda_1, \lambda_2)$  auszudrücken. Die Funktion  $\omega$  ist das Analogon der Funktion  $\omega^{XXX}$ , sie ist durch den Erwartungswert des Singulettprojektors gegeben:

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) := \frac{1}{[\lambda_{12} - 1]_q [\lambda_{12} + 1]_q} \left( \frac{1}{2} \text{ch}(\eta) - \langle s(q) | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(q) \rangle \right).\tag{5.8}$$

Analog zu Kapitel 4 folgt für den Erwartungswert des Singulettprojektors

$$\langle s(q) | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(q) \rangle = \langle s(q) | D_2(\lambda_2, \lambda_1) | s(q) \rangle, \quad \text{d. h.} \quad \omega(\lambda_1, \lambda_2) = \omega(\lambda_2, \lambda_1).$$

Für die Asymptotik ergibt sich

$$\langle s(q) | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(q) \rangle \xrightarrow{\lambda_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \text{ch}(\eta).$$

Die Funktion  $\tilde{\omega}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) &:= \frac{1}{2 \text{ch}(\eta)} \left( \langle s(q) | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(q)^t \rangle - \langle s(q)^t | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(q) \rangle \right) \\ &\quad - \omega(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\text{ch}(\eta \lambda_{12}) \text{sh}(\eta \lambda_{12})}{\text{ch}(\eta) \text{sh}(\eta)}\end{aligned}\tag{5.9}$$

mit

$$s(q)^t := q^{-1/2} v_- \otimes v_+ - q^{1/2} v_+ \otimes v_-.$$

Aus

$$\langle s(q) | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(q)^t \rangle \xrightarrow{\lambda_2 \rightarrow \infty} -1, \quad \text{und} \quad \langle s(q)^t | D_2(\lambda_1, \lambda_2) | s(q) \rangle \xrightarrow{\lambda_2 \rightarrow \infty} -1$$

folgt

$$\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) \xrightarrow{\lambda_2 \rightarrow \infty} 0.$$

Außerdem lassen sich aus Gleichung (5.9) die Beziehungen

$$\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) = -\tilde{\omega}(\lambda_2, \lambda_1)\tag{5.10}$$

und

$$[\lambda_{12} \pm 1]_q \tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) = \pm [\lambda_{12} \pm 1]_q \omega(\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{für} \quad \lambda_{12} = \mp 1\tag{5.11}$$

ablesen. Für den für  $D_2$  umgerechneten  $\Omega$ -Operator

$$\begin{aligned} {}_2\Omega_0^{D_2}(\lambda_1, \lambda_2) &:= \omega(\lambda_1, \lambda_2) \left( \frac{\text{ch}(\eta)}{2 \text{sh}^2(\eta)} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \frac{\text{ch}(\eta\lambda_{12})}{2 \text{sh}^2(\eta)} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & q^{-\lambda_{12}} \\ & q^{\lambda_{12}} & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &+ \tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) \left( \frac{\text{ch}(\eta\lambda_{12})}{2 \text{sh}(\eta\lambda_{12}) \text{sh}(\eta)} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \frac{\text{ch}(\eta)}{2 \text{sh}(\eta) \text{sh}(\eta\lambda_{12})} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & q^{-\lambda_{12}} \\ & q^{\lambda_{12}} & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

folgt aus (5.10) und (5.11)

$$[\lambda_{12}]_q {}_2\Omega_0^{D_2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \quad \text{für } \lambda_{12} = 0$$

und

$$[\lambda_{12} \pm 1]_q {}_2\Omega_0^{D_2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \quad \text{für } \lambda_{12} = \mp 1.$$

Damit ist verifiziert, dass die Residuen des Ausdrucks für  $D_2(\lambda_1, \lambda_2)$  an den Stellen  $\lambda_{12} = -1, 0, 1$  gleich null sind. Eine kurze Gradanalyse zeigt, dass dieser die Polynomialitätseigenschaft besitzt.

## 5.2. Der $n$ -Platz-Dichteoperator

Da die Konstruktion der Operatoren, die den sogenannten „algebraischen“ Anteil des  $n$ -Platz-Dichteoperators ausmachen, im vorigen Kapitel schon in der Sprache des XXZ-Artikels [12] angegeben wurde, können die meisten Formeln aus Kapitel 4 übernommen werden.

### 5.2.1. Konstruktion der Operatoren

Der  $L$ -Operator zur  $R$ -Matrix  $\check{\mathcal{R}}$  lautet

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} [\lambda + \frac{1+H}{2}]_q & Fq^{(H-1)/2} \\ q^{-(H-1)/2} E & [\lambda + \frac{1-H}{2}]_q \end{pmatrix} \in U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes \text{End}(V). \quad (5.12)$$

In der Definition der Transfermatrix wird die Rolle der Spurfunktion durch die  $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ -lineare Abbildung

$$\text{Tr}_{\lambda, \zeta} : U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] \rightarrow \lambda \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] \oplus \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] \quad \text{mit } \zeta = q^\lambda \quad (5.13)$$

übernommen, deren Eigenschaften in Anhang A zusammengestellt sind.

Die  $X$ -Operatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} &{}_n X_{n-2}^{(1,2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(u) \\ &:= \frac{1}{[\lambda_{12}]_q \prod_{p=3}^n [\lambda_{1p}]_q [\lambda_{2p}]_q} \text{Tr}_{\lambda_{12}, q^{\lambda_{12}}} \left[ T_n^{[1]} \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right] (s_{1,2} s_{1,2} u_3, \dots, n, \bar{n}, \dots, 3) \end{aligned} \quad (5.14)$$

und für beliebige obere Indizes analog zu Gleichung (4.18). Sie lassen sich schreiben als

$${}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -\lambda_{ij} {}_n \tilde{G}_{n-2}^{(i,j)}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) + {}_n G_{n-2}^{(i,j)}(\zeta_1, \dots, \zeta_n), \quad (5.15)$$

wobei  ${}_n \tilde{G}_{n-2}^{(i,j)}$  und  ${}_n G_{n-2}^{(i,j)}$  per Konstruktion rationale Funktionen in den Variablen  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  sind.

### 5.2.2. Das Resultat für endliche Temperatur

Mit Hilfe der beiden Funktionen  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$ , gegeben durch (5.8) bzw. (5.9), werden die  $\Omega$ -Operatoren definiert durch

$${}_n \Omega_{n-2}^{(i,j)} := \tilde{\omega}(\lambda_i, \lambda_j) {}_n \tilde{G}_{n-2}^{(i,j)}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) + \omega(\lambda_i, \lambda_j) {}_n G_{n-2}^{(i,j)}(\zeta_1, \dots, \zeta_n).$$

**Satz 2** Der Vektor  $h_n$ , definiert in Gleichung (5.4), ist gegeben durch

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{2^{n-2m}} \sum_{I,J} \Omega_{K_1, (i_1, j_1)} \Omega_{K_2, (i_2, j_2)} \cdots \Omega_{K_m, (i_m, j_m)}(\mathbf{s}_{n-2m}). \quad (5.16)$$

Die innere Summe läuft über Paare von  $m$ -Tupeln,  $I = (i_1, \dots, i_m)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_m)$  verschiedener Elemente der Menge  $K_1 = \{1, 2, \dots, n\}$  unter der Bedingung  $i_1 < \dots < i_m$  und  $i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m$ . Es gilt  $K_{p+1} := K_p \setminus \{i_p, j_p\}$  für  $p > 0$ .

Wir fassen Gleichung (5.16) als Ansatz für  $h_n$  auf und zeigen die folgenden drei Punkte:

- 1) Für  $\lambda_1 = \nu_1, \dots, \nu_N$  gilt die Funktionalgleichung

$$\mathcal{A}_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = h_n(\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n). \quad (5.17)$$

- 2) Für die Asymptotik gilt

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \xrightarrow{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2} s_{1, \bar{1}} h_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (5.18)$$

- 3) Der mit Hilfe von Gleichung (5.5) aus Gleichung (5.16) erhaltene Ausdruck

$$\Lambda_0(\lambda_1) h_n^{D_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (5.19)$$

ist das Produkt von  $\zeta_1^{-N}$  mit einem Polynom  $N$ -ten Grades in  $\zeta_1^2$  (Polynomialitätseigenschaft).

Dann folgt der Beweis aus dem Eindeutigkeitssatz aus Kapitel 3.

**zu 1)** Die in Kapitel 4.2.1 zitierten Gleichungen (4.2)-(4.4) aus [12] gelten in der dort angegebenen Form. Im Zitat von Gleichung (4.5) aus [12] ist Gleichung (4.24) durch

$$\mathcal{A}_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbf{s}_n) = \mathbf{s}_n - 4 \mathcal{A}_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left( \sum_{j=2}^n p(\lambda_1, \lambda_j) {}_n G_{n-2}^{(1,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbf{s}_{n-2}) \right)$$

$$+\tilde{p}(\lambda_1, \lambda_j)_n \tilde{G}_{n-2}^{(1,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbf{s}_{n-2}) \Big). \quad (5.20)$$

mit den in Gleichung (5.7) angegebenen Koeffizienten zu ersetzen.

Die Behauptung folgt dann mit Hilfe der diskreten Funktionalgleichung (5.6), wie in Kapitel 4 erläutert.

**zu 2)** Die Behauptung folgt analog zu Kapitel 4 aus dem asymptotischen Verhalten der Funktionen  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$ :

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2), \tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) \xrightarrow{\lambda_1 \rightarrow \infty} 0.$$

**zu 3)** Es wird das folgende Resultat benötigt:

**Lemma 5.1 in [12]** *Die Matrixelemente bezüglich der aus  $v_+, v_-$  gebildeten Tensorproduktbasis haben als Funktion von  $\zeta_1$  die Gestalt*

$$Tr_{\lambda_{1,2}} \left( T_n^{[1]} \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right)_{\substack{\bar{\epsilon}'_2, \dots, \bar{\epsilon}'_n, \epsilon'_n, \dots, \epsilon'_2 \\ \bar{\epsilon}_2, \dots, \bar{\epsilon}_n, \epsilon_n, \dots, \epsilon_2}} = \begin{cases} \zeta_1^{-(n-1+|l|/2)} (\lambda_{1,2} \tilde{g}(\zeta_1^2) + g(\zeta_1^2)) & : l = l' \\ 0 & : l \neq l' \end{cases}$$

wobei  $\tilde{g}$  und  $g$  Polynome vom Grad höchstens  $n - 1 + |l|/2$  sind mit  $l := \sum_{p=2}^n (\bar{\epsilon}_p + \epsilon_p)$ ,  $l' := \sum_{p=2}^n (\bar{\epsilon}'_p + \epsilon'_p)$  und  $\epsilon \in \{1, -1\}$ .

Setzt man für den Vektor  $u \in V^{\otimes 2(n-2)}$  in Gleichung (5.14) die verschachtelten Singulettis  $\mathbf{s}_{n-2}$  ein, so gehen nur Matrixelemente mit  $l = l' = \sum_{p=2}^n (\bar{\epsilon}'_p + \epsilon'_p) = \bar{\epsilon}'_2 + \epsilon'_2 \in \{-2, 0, 2\}$  in

$$Tr_{\lambda_{1,2}} \left[ T_n^{[1]} \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right] (s_{1,2} s_{\bar{1},2} (\mathbf{s}_{n-2})_{3, \dots, n, \bar{n}, \dots, 3})$$

ein. Es kommen also für den Grad  $n - 1 + |l|/2$  nur die Werte  $n - 1$  und  $n$  vor. (Das gilt auch für die bei der Konstruktion von  $h_n$  auftretenden Verkettungen.) Rechnet man die Vektoren  ${}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbf{s}_{n-2})$  in Operatoren um, so tritt der Grad  $n$  nur für Nichtdiagonalelemente auf. Umeichung auf den  $D_n$ -Fall gemäß Gleichung (5.5) erhöht bzw. erniedrigt deren Grad darüberhinaus um eins. Für diesen Fall kommt als Grad also  $n - 1$  für Diagonalelemente und  $n \pm 1$  für Nichtdiagonalelemente vor. Der nächste Schritt zum Beweis, dass der Ausdruck (5.19) die Polynomialitätseigenschaft erfüllt, besteht wie im XXX-Fall darin zu zeigen, dass der Operator

$${}_n \Omega_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

für  $\lambda_{ij} = 0, \pm 1$  jeweils keinen Pol besitzt. Nach Lemma 5.3 in [12] gilt

$${}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_{ij} = \pm 1.$$

Daraus folgt mit Gleichung (5.11)

$$[\lambda_{ij} \pm 1]_q {}_n \Omega_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_{ij} = \mp 1.$$

Nach Lemma 5.4 in [12] hat  ${}_n X_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  bei  $\lambda_i = \lambda_j$  keine Polstelle. Zusammen mit den Gleichungen (5.10) und (5.15) folgt

$$[\lambda_{ij}]_q {}_n \Omega_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_{ij} = 0.$$

Der Grad des Normierungsfaktors bezüglich des ersten Spektralparameters in der Definition (5.14) ist  $n - 1$ . Durch die Definition von  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$  erhöht sich dieser effektiv um zwei.

Insgesamt wurde durch Kombination der Eigenschaften der  $X$ -Operatoren und der Funktionen  $\omega, \tilde{\omega}$  gezeigt, dass die Operatoren  ${}_n\Omega_{n-2}^{(i,j)}$ , wie im XXX-Fall, an der Stelle  $\lambda_{ij} = 0, \pm 1$  jeweils keinen Pol besitzen und dass der Zählergrad der Matrixelemente der auf den Fall  $h_n^{(D_n)}$  umgerechneten Operatoren nicht größer ist als deren Nennergrad. Zu zeigen bleibt noch, dass die bei  $\lambda_1 = \lambda_i$  für  $i = 2, \dots, n$  potentiell noch vorhandenen Polstellen nicht vorhanden sind. Die Operatoren

$$\hat{\Omega}_n^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := 4_n \Omega_{n-2}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}_{n-2}\Pi_n \mathbb{R}^{(i,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1}$$

haben die bereits in Kapitel 4 genannten Eigenschaften und man erhält die zu (5.16) äquivalente Darstellung

$$h_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 2^{-n} e^{\hat{\Omega}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \mathbf{s}_n \quad \text{mit} \quad \hat{\Omega}_n := \sum_{i < j} \hat{\Omega}_n^{(i,j)}. \quad (5.21)$$

Aus Theorem 12.4 in [12] folgt, dass bei  $\lambda_i = \lambda_j$  keine Pole vorhanden sind. Zusammen mit obiger Gradanalyse folgt die Polynomialitätseigenschaft für den Ausdruck (5.19).

## 6. Der 2-Platz-Dichteoperator der XXZ-Kette mit Magnetfeld und Alpha-Parameter

In diesem Kapitel wird der inhomogene 2-Platz-Dichteoperator der XXZ-Kette bei endlicher Temperatur in einem äußeren Magnetfeld und mit zusätzlichem Alpha-Parameter untersucht. Ein Ausdruck für den allgemeinen  $n$ -Platz-Fall wurde von Jimbo, Miwa und Smirnov hergeleitet [37]. In die dort gefundene Beschreibung gehen nur zwei Korrelationsfunktionen, eine Ein- und eine Zwei-Punkt-Funktion, ein. Boos und Göhmann lieferten in [6] eine Beschreibung dieser beiden „physikalischen“ Funktionen durch Integralgleichungen.

Der Beitrag der vorliegenden Arbeit besteht im Wesentlichen in der in Kapitel 3 gefundenen Charakterisierung des inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperators - auch in der verallgemeinerten Form - durch den Eindeutigkeitssatz. Zusätzlich wird in diesem letzten Kapitel der 2-Platz-Dichteoperator konstruiert. Durch geeignete Modifikation des  $X$ -Operators für  $n = 2$ , siehe Gleichung (5.14), wird deutlich, dass sich im Vergleich zum feldfreien Fall - wie erwartet [13] - die Anzahl der in die Konstruktion eingehenden 2-Punkt-Funktionen von zwei auf eins reduziert. Zusätzlich tritt in der Beschreibung des 2-Platz-Operators eine nichttriviale Ein-Punkt-Funktion auf. Insgesamt entspricht das Ergebnis dem in [6] mit Hilfe der Vielfachintegraldarstellung hergeleiteten Ausdruck.

Die Verallgemeinerung der Konstruktion der  $X$ -Operatoren auf den Fall der Abhängigkeit des Operators  $\mathcal{A}_n$  vom Alpha-Parameter ist für beliebiges  $n$  gültig.

### 6.1. Eigenschaften des Dichteoperators

Zur Konstruktion des Dichteoperators wird, wie schon in Kapitel 5, die  $R$ -Matrix  $\check{\mathcal{R}}(\lambda_1, \lambda_2)$ , gegeben in Gleichung (5.2), verwendet. Das Magnetfeld und der Alpha-Parameter sind, wie in der Herleitung der Funktionalgleichung in Kapitel 3 erläutert, in die Konstruktion eingefügt. Dies macht sich in den folgenden Punkten bemerkbar:

**Reduktionsbedingung:** *Teilspurbildung über den Raum  $V_1$  liefert das Ergebnis*

$$\text{Spur}_{V_1} \left( D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left( q^{\alpha 2S_z} \otimes I^{\otimes(n-1)} \right) \right) = \frac{\Lambda_0^\alpha(\lambda_1)}{\Lambda_0(\lambda_1)} D_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

*Durch Teilspurbildung über den Raum  $V_n$  erhält man wie im feldfreien Fall*

$$\text{Spur}_{V_n} (D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = D_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).$$

Für den Quotienten der Eigenwerte wird die Bezeichnung

$$\rho(\lambda) := \frac{\Lambda_0^\alpha(\lambda)}{\Lambda_0(\lambda)}$$

verwendet. Die Funktion  $\rho$  erfüllt aufgrund von Gleichung (3.15) die Funktionalgleichung

$$\rho(\lambda)\rho(\lambda - 1) = 1 \quad \text{für } \lambda = \nu_1, \dots, \nu_N.$$

Diese Beziehung wurde auch schon in [6] hergeleitet.

**Invarianz:** Der Dichteoperator kommutiert mit  $\sum_{i=1}^n (S_z)_i$ .

**Asymptotik:** Für die Asymptotik bzgl.  $\lambda_1$  gilt:

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\beta h/2)} \left( e^{\beta h S_z} \otimes D_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n) \right). \quad (6.1)$$

Die analoge Gleichung gilt für  $\lambda_n \rightarrow \infty$ .

Die Herleitung folgt durch Einfügen des Operators  $e^{\beta h S_z}$  in die Herleitung in Kapitel 3.1. Die Intertwining-Relation bleibt gleich:

**Intertwining-Relation:** Für den Dichteoperator gilt:

$$\begin{aligned} \check{R}_{i,i+1}(\lambda_i, \lambda_{i+1}) D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \check{R}_{i,i+1}(\lambda_{i+1}, \lambda_i) \\ = C_b(\lambda_i, \lambda_{i+1}) D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \dots, \lambda_n) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

**Diskrete Funktionalgleichung:** An den Stellen  $\lambda_1 = \nu_1, \dots, \nu_N$  gilt die Funktionalgleichung

$$\mathcal{A}_n^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) (\mathcal{D}_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \mathcal{D}_n(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (6.2)$$

Der Operator  $\mathcal{A}_n^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(B) &:= C_A^{(1)} \operatorname{Spur}_{V_1} \left( \check{\mathcal{R}}_{n-1,n}(\lambda_1, \lambda_n) \cdots \check{\mathcal{R}}_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) (I \otimes B) \right. \\ &\left. \left( I \otimes q^{\alpha 2 S_z} \otimes I^{\otimes(n-1)} \right) \left( (|s(1)^t\rangle \langle s(1)|) \otimes I^{\otimes(n-1)} \right) \check{\mathcal{R}}_{1,2}(\lambda_2, \lambda_1) \cdots \check{\mathcal{R}}_{n-1,n}(\lambda_n, \lambda_1) \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

für  $B \in \operatorname{End}(V^{\otimes n})$ . Die Konstante ist gegeben durch

$$C_A^{(1)} := -\frac{\Lambda_0^\alpha(\lambda_1 - 1)}{\Lambda_0(\lambda_1 - 1)} \prod_{l=2}^n C_b^{-1}(\lambda_1, \lambda_l) = -\rho(\lambda_1 - 1) \prod_{l=2}^n C_b^{-1}(\lambda_1, \lambda_l).$$



## 6.2. Der $n$ -Platz-Dichteoperator für $n = 1, 2$

Aus der Invarianz des Dichteoperators unter der  $z$ -Komponente des Gesamtspins folgt zusammen mit der Reduktionsbedingung<sup>1</sup>

$$\mathcal{D}_1(\lambda_1) = \frac{1}{2} I + m(\lambda_1) 2S_z.$$

Die Funktion  $m$  entspricht der Magnetisierung und ist gegeben durch

$$m(\lambda_1) = \frac{1}{\text{sh}(\alpha\eta)} \frac{\Lambda_0^\alpha(\lambda_1)}{\Lambda_0(\lambda_1)} - \frac{\text{ch}(\alpha\eta)}{\text{sh}(\alpha\eta)}.$$

Der Ausdruck für  $\mathcal{D}_2(\lambda_1, \lambda_2)$  enthält nach Ausnutzen der Invarianz und der Kombination aus Intertwining-Relation und Reduktionsbedingung - wie in Kapitel 5 - noch zwei unabhängige Korrelationsfunktionen. Um für diese entkoppelte Funktionalgleichungen zu bekommen, ist eine geeignete Basis aus Operatoren zu wählen. Zu diesem Zweck wird die Konstruktion des Operators  ${}_2X_0^{(1,2)}(\lambda_1, \lambda_2)$  an die  $\alpha$ -Abhängigkeit von  $\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)$  angepasst.

### 6.2.1. Konstruktion der Operator-Basis für $n = 2$

Der  $L$ -Operator sei durch Gleichung (5.12) gegeben. Die Konstruktion der Monodromiematrix, gegeben in Gleichung (4.15), wird modifiziert zu

$$\begin{aligned} T_2^{[1]} \left( \alpha; \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) &:= L_{\bar{2}} \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - 1 \right) (q^{\alpha H} I_{\bar{2}} \otimes I_2) L_2 \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right) = \\ &\left( \begin{array}{cc} \left[ \frac{\lambda_{12}-1}{2} + \frac{H}{2} \right]_q & Fq^{\frac{H-1}{2}} \\ q^{-\frac{(H-1)}{2}} E & \left[ \frac{\lambda_{12}-1}{2} - \frac{H}{2} \right]_q \end{array} \right)_{\bar{2}} q^{\alpha H} \left( \begin{array}{cc} \left[ \frac{\lambda_{12}+1}{2} + \frac{H}{2} \right]_q & Fq^{\frac{H-1}{2}} \\ q^{-\frac{(H-1)}{2}} E & \left[ \frac{\lambda_{12}+1}{2} - \frac{H}{2} \right]_q \end{array} \right)_2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Der nächste Schritt besteht in der Berechnung des Operators

$$\frac{1}{[\lambda_{12}]_q} \text{Tr}_{\lambda_{12}} \left( T_2^{[1]} \left( \alpha; \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right) \in \text{End}(V_2 \otimes V_{\bar{2}}) \quad (6.5)$$

mit Hilfe des Spurfunktionals (5.13). Nach den Regeln in Anhang A.2 gilt:

$$\begin{aligned} &\text{Tr}_{\lambda_{12}} \left( \left[ \frac{\lambda_{12} - 1 + H}{2} \right]_q q^{\alpha H} \left[ \frac{\lambda_{12} + 1 + H}{2} \right]_q \right) \\ &= \text{Tr}_{\lambda_{12}} \left( \left[ \frac{\lambda_{12} - 1 - H}{2} \right]_q q^{\alpha H} \left[ \frac{\lambda_{12} + 1 - H}{2} \right]_q \right), \\ &\text{Tr}_{\lambda_{12}} \left( \left[ \frac{\lambda_{12} - 1 + H}{2} \right]_q q^{\alpha H} \left[ \frac{\lambda_{12} + 1 - H}{2} \right]_q \right) = \text{Tr}_{\lambda_{12}} (q^{\alpha H} EF), \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Alternativ gewinnt man das Ergebnis aus dem Eindeutigkeitsatz.

$$\mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} \left( \left[ \frac{\lambda_{12} - 1 - H}{2} \right]_q q^{\alpha H} \left[ \frac{\lambda_{12} + 1 + H}{2} \right]_q \right) = \mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} (q^{\alpha H} F E),$$

$$\mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} \left( q^{-\frac{(H-1)}{2}} E q^{\alpha H} F q^{\frac{(H-1)}{2}} \right) = \mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} (q^{\alpha H} F E),$$

und

$$\mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} \left( F q^{\frac{(H-1)}{2}} q^{\alpha H} q^{-\frac{(H-1)}{2}} E \right) = \mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} (q^{\alpha H} E F).$$

Die restlichen Kombinationen verschwinden. Daraus folgt

$$\mathrm{Tr}_{\lambda_{12}} \left( T_2^{[1]} \left( \alpha; \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr} (q^{\alpha H} N) & & & \\ & \mathrm{Tr} (q^{\alpha H} E F) & \mathrm{Tr} (q^{\alpha H} F E) & \\ & \mathrm{Tr} (q^{\alpha H} E F) & \mathrm{Tr} (q^{\alpha H} F E) & \\ & & & \mathrm{Tr} (q^{\alpha H} N) \end{pmatrix}$$

mit der Abkürzung  $N := \left[ \frac{\lambda_{12} + 1 + H}{2} \right]_q \left[ \frac{\lambda_{12} - 1 + H}{2} \right]_q$ .

Mit Hilfe von Gleichung (A.5) für den Casimir-Operator  $C$  folgt

$$\mathrm{Tr}_{\lambda} (q^{\alpha H} C) = \frac{q^{\lambda} + q^{-\lambda}}{(q - q^{-1})^2} \mathrm{Tr} (q^{\alpha H}).$$

Einsetzen des expliziten Ausdrucks für  $C$ , gegeben in Gleichung (A.6), liefert

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\lambda} (q^{\alpha H} C) &= \mathrm{Tr}_{\lambda} \left( q^{\alpha H} \frac{q^{-1+H} + q^{1-H}}{(q - q^{-1})^2} + q^{\alpha H} E F \right) \\ &= \frac{1}{(q - q^{-1})^2} \left( q^{-1} \frac{q^{(\alpha+1)\lambda} - q^{-(\alpha+1)\lambda}}{q^{(\alpha+1)} - q^{-(\alpha+1)}} + q \frac{q^{(\alpha-1)\lambda} - q^{-(\alpha-1)\lambda}}{q^{(\alpha-1)} - q^{-(\alpha-1)}} \right) + \mathrm{Tr}_{\lambda} (q^{\alpha H} E F). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\lambda} (q^{\alpha H} E F) &= \frac{q^{\lambda} + q^{-\lambda}}{(q - q^{-1})^2} \frac{q^{\alpha\lambda} - q^{-\alpha\lambda}}{(q^{\alpha} - q^{-\alpha})} \\ &\quad - \frac{1}{(q - q^{-1})^2} \left( q^{-1} \frac{q^{(\alpha+1)\lambda} - q^{-(\alpha+1)\lambda}}{q^{(\alpha+1)} - q^{-(\alpha+1)}} + q \frac{q^{(\alpha-1)\lambda} - q^{-(\alpha-1)\lambda}}{q^{(\alpha-1)} - q^{-(\alpha-1)}} \right). \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\lambda} (q^{\alpha H} F E) &= \frac{q^{\lambda} + q^{-\lambda}}{(q - q^{-1})^2} \frac{q^{\alpha\lambda} - q^{-\alpha\lambda}}{(q^{\alpha} - q^{-\alpha})} \\ &\quad - \frac{1}{(q - q^{-1})^2} \left( q \frac{q^{(\alpha+1)\lambda} - q^{-(\alpha+1)\lambda}}{q^{(\alpha+1)} - q^{-(\alpha+1)}} + q^{-1} \frac{q^{(\alpha-1)\lambda} - q^{-(\alpha-1)\lambda}}{q^{(\alpha-1)} - q^{-(\alpha-1)}} \right). \end{aligned}$$

Für den noch fehlenden Wert findet man

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\lambda} (q^{\alpha H} N) &= - \frac{q + q^{-1}}{(q - q^{-1})^2} \frac{q^{\alpha\lambda} - q^{-\alpha\lambda}}{q^{\alpha} - q^{-\alpha}} \\ &\quad + \frac{1}{(q - q^{-1})^2} \left( q^{\lambda} \frac{q^{(\alpha+1)\lambda} - q^{-(\alpha+1)\lambda}}{q^{(\alpha+1)} - q^{-(\alpha+1)}} + q^{-\lambda} \frac{q^{(\alpha-1)\lambda} - q^{-(\alpha-1)\lambda}}{q^{(\alpha-1)} - q^{-(\alpha-1)}} \right). \end{aligned}$$

Damit ist der Operator (6.5) explizit bekannt. Anwenden auf die gekreuzten  $U(sl_2)$ -Singulettts  $s_{1,2}s_{\bar{1},2}$  liefert den Operator  ${}_2X_0^{(1,2)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha)$ , der in diesem speziellen Fall ein Element aus  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_2 \otimes V_{\bar{1}}$  ist. Nach Anwenden der Vektor-Operator-Dualität, siehe Gleichung (5.4), ergibt sich (bei gleicher Bezeichnung),

$${}_2X_0^{(1,2)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha) := \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\lambda\eta)} \begin{pmatrix} -\text{Tr}(q^{\alpha H} FE) & & & & \\ & \text{Tr}(q^{\alpha H} FE) & \text{Tr}(q^{\alpha H} N) & & \\ & \text{Tr}(q^{\alpha H} N) & \text{Tr}(q^{\alpha H} EF) & & \\ & & & & -\text{Tr}(q^{\alpha H} EF) \end{pmatrix}.$$

Dieser Operator erfüllt per Konstruktion die Funktionalgleichung

$$\mathcal{A}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha) {}_2X_0^{(1,2)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha) = -\rho(\lambda_1 - 1) {}_2X_0^{(1,2)}(\lambda_1 - 1, \lambda_2; \alpha). \quad (6.6)$$

Dies folgt aus dem in Anhang B zitierten Beweis der Funktionalgleichung für den Fall  $\alpha = 0$ . Dieser beruht darauf, für natürliche Dimension des Hilfsraumes der Transfermatrix in der Konstruktion des  $X$ -Operators (5.14), die Spurbildung über diesen Hilfsraum nach Anwendung von  $\mathcal{A}_n^{(1)}$  mit der in der Konstruktion von  $\mathcal{A}_n^{(1)}$  vorkommenden Spurbildung, zu fusionieren. Auf diese Weise ergibt sich wieder ein Operator vom Typ (5.14), dessen Konstruktion - verglichen mit dem Urbild - ein Hilfsraum mit um eins erhöhter Dimension zugrunde liegt. Man verifiziert leicht, dass dies für Abhängigkeit des Operators  $\mathcal{A}_n^{(1)}$  vom Alpha-Parameter immer noch funktioniert, wenn analog zur  $\alpha$ -Abhängigkeit des Operators  $\mathcal{A}_n^{(1)}$  in die Definition der  $X$ -Operatoren  $\alpha$ -Abhängigkeit eingebaut wird, wie in Gleichung (6.4) geschehen.

Per Konstruktion lässt sich  ${}_2X_0^{(1,2)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha)$  als Linearkombination

$${}_2X_0^{(1,2)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha) = \text{sh}(\alpha\eta\lambda_{12})X(\lambda_1, \lambda_2) + \text{ch}(\alpha\eta\lambda_{12})Y(\lambda_1, \lambda_2)$$

mit von  $\alpha$  unabhängigen Operatoren  $X$  und  $Y$  schreiben. Für die beiden Operatoren

$$E_\alpha(\lambda_1, \lambda_2) := 4 \text{sh}(\eta) (X(\lambda_1, \lambda_2) - Y(\lambda_1, \lambda_2))$$

und

$$E_{-\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) := 4 \text{sh}(\eta) (X(\lambda_1, \lambda_2) + Y(\lambda_1, \lambda_2))$$

folgt aus Gleichung (6.6) die Funktionalgleichung

$$\mathcal{A}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha)(E_\alpha(\lambda_1, \lambda_2)) = -e^{\alpha\eta}\rho(\lambda_1 - 1) E_\alpha(\lambda_1 - 1, \lambda_2)$$

bzw.

$$\mathcal{A}_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha)(E_{-\alpha}(\lambda_1, \lambda_2)) = -e^{-\alpha\eta}\rho(\lambda_1 - 1) E_{-\alpha}(\lambda_1 - 1, \lambda_2).$$

Die sechs auf der folgenden Seite definierten Operatoren  $A - F$  bilden eine Basis der  $\sum_{i=1}^2 (S_z)_i$ -invarianten Operatoren auf  $\text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ .

$$\begin{aligned}
 A(\lambda_1, \lambda_2) &:= 2 \operatorname{sh}(\eta) \operatorname{ch}(\eta) \begin{pmatrix} e^{-\alpha\eta} & & & \\ & -e^{-\alpha\eta} & & \\ & & -e^{\alpha\eta} & \\ & & & e^{\alpha\eta} \end{pmatrix} \\
 &+ 2 \operatorname{sh}(\eta\lambda_{12}) \operatorname{ch}(\eta) \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \operatorname{sh}(\alpha\eta) & \\ & -\operatorname{sh}(\alpha\eta) & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - 2 \operatorname{ch}(\eta\lambda_{12}) \operatorname{sh}(\eta) \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \operatorname{ch}(\alpha\eta) & \\ & \operatorname{ch}(\alpha\eta) & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
 B(\lambda_1, \lambda_2) &:= 2 \operatorname{ch}^2(\eta) \operatorname{sh}(\alpha\eta) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - 2 \operatorname{sh}^2(\eta) \operatorname{ch}(\alpha\eta) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\
 &- 2 \operatorname{ch}(\eta\lambda_{12}) \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{sh}(\alpha\eta) \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + 2 \operatorname{sh}(\eta\lambda_{12}) \operatorname{sh}(\eta) \operatorname{ch}(\alpha\eta) \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
 C(\lambda_1, \lambda_2) &:= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & -\frac{\operatorname{ch}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})} & \\ & -\frac{\operatorname{ch}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})} & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad D(\lambda_1, \lambda_2) := \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & \frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} & \\ & -\frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
 E(\lambda_1, \lambda_2) &:= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad F(\lambda_1, \lambda_2) := \begin{pmatrix} -e^{-\alpha\eta} & & & \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & & & e^{\alpha\eta} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 E_{-\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) &= -\frac{1}{\operatorname{sh}(\eta(\alpha+1)) \operatorname{sh}(\eta(\alpha-1))} \left( A(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} B(\lambda_1, \lambda_2) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12}) \operatorname{sh}(\eta(\alpha+1)) \operatorname{sh}(\eta(\alpha-1))}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12}) \operatorname{sh}(\alpha\eta)} C(\lambda_1, \lambda_2) \right)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) &= -\frac{1}{\operatorname{sh}(\eta(\alpha+1)) \operatorname{sh}(\eta(\alpha-1))} \left( -A(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} B(\lambda_1, \lambda_2) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12}) \operatorname{sh}(\eta(\alpha+1)) \operatorname{sh}(\eta(\alpha-1))}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12}) \operatorname{sh}(\alpha\eta)} C(\lambda_1, \lambda_2) \right).
 \end{aligned}$$

Die Operatoren  $E_{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $E_{-\alpha}(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $C(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $D(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $E(\lambda_1, \lambda_2)$  und  $F(\lambda_1, \lambda_2)$  werden als Basis des Raumes der  $\sum_{i=1}^2 (S_z)_i$ -invarianten Operatoren gewählt. Bezüglich dieser Basis wird der Ansatz

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_2(\lambda_1, \lambda_2) &= e_{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) E_{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) + e_{-\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) E_{-\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) + c(\lambda_1, \lambda_2) C(\lambda_1, \lambda_2) \\
 &\quad + d(\lambda_1, \lambda_2) D(\lambda_1, \lambda_2) + e(\lambda_1, \lambda_2) E(\lambda_1, \lambda_2) + f(\lambda_1, \lambda_2) F(\lambda_1, \lambda_2)
 \end{aligned}$$

für den Dichteoperator gemacht. Die Koeffizienten  $c, d, e$  und  $f$  ergeben sich durch Kombination von Intertwining-Relation und Reduktionsbedingung zu

$$\begin{aligned}
 c(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2(\alpha\eta)} (1 + \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2) - \operatorname{ch}(\alpha\eta) (\rho(\lambda_1) + \rho(\lambda_2))), \\
 d(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{4 \operatorname{sh}(\alpha\eta)} (\rho(\lambda_1) - \rho(\lambda_2)), \\
 e(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{4 \operatorname{sh}(\alpha\eta)} (\rho(\lambda_1) + \rho(\lambda_2)), \\
 f(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2 \operatorname{sh}(\alpha\eta)}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Aus Gleichung (6.2) folgen diskrete Funktionalgleichungen für die Koeffizienten  $e_\alpha$  und  $e_{-\alpha}$ . Die Bilder der Operatoren  $C, D, E$  und  $F$  unter  $\mathcal{A}_2^{(1)}$  finden sich im Anhang C, Gleichung (C.1). Aus Gleichung (6.2) folgen durch Koeffizientenvergleich die entkoppelten Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned}
 \rho(\lambda_1)e_\alpha(\lambda_1 - 1, \lambda_2) &= -e^{\alpha\eta}e_\alpha(\lambda_1, \lambda_2) \\
 &+ \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh}(\alpha\eta)}{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})} \frac{(\operatorname{sh}(\eta) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{ch}(\alpha\eta) - \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\alpha\eta))}{\operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))} c(\lambda_1, \lambda_2) \\
 &- \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh}(\alpha\eta)}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} \frac{(\operatorname{sh}(\eta) \operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{ch}(\alpha\eta) - \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\alpha\eta))}{\operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))} e(\lambda_1, \lambda_2)
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

und

$$\begin{aligned}
 \rho(\lambda_1)e_{-\alpha}(\lambda_1 - 1, \lambda_2) &= -e^{-\alpha\eta}e_{-\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) \\
 &+ \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh}(\alpha\eta)}{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})} \frac{(\operatorname{sh}(\eta) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{ch}(\alpha\eta) + \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\alpha\eta))}{\operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))} c(\lambda_1, \lambda_2) \\
 &+ \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh}(\alpha\eta)}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} \frac{(\operatorname{sh}(\eta) \operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{ch}(\alpha\eta) + \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\alpha\eta))}{\operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))} e(\lambda_1, \lambda_2).
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

für  $\lambda_1 \in \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$ . Für die übrigen vier Funktionen folgt in diesem Fall das durch die Gleichungen (6.10) gegebene System von gekoppelten Funktionalgleichungen.

$$\begin{aligned}
 \rho(\lambda_1)c(\lambda_1 - 1, \lambda_2) &= -\operatorname{ch}(\alpha\eta)c(\lambda_1, \lambda_2) \\
 \rho(\lambda_1)d(\lambda_1 - 1, \lambda_2) &= -\operatorname{sh}(\alpha\eta)c(\lambda_1, \lambda_2) + f(\lambda_1, \lambda_2) - \operatorname{ch}(\alpha\eta)e(\lambda_1, \lambda_2) \\
 \rho(\lambda_1)e(\lambda_1 - 1, \lambda_2) &= \operatorname{sh}(\alpha\eta)c(\lambda_1, \lambda_2) + \operatorname{ch}(\alpha\eta)e(\lambda_1, \lambda_2) \\
 \rho(\lambda_1)f(\lambda_1 - 1, \lambda_2) &= d(\lambda_1, \lambda_2) + e(\lambda_1, \lambda_2)
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Man verifiziert leicht, dass die Funktionen (6.7) diesen Gleichungen genügen.

Zwischen  $e_{\pm\alpha}(\lambda_1, \lambda_2)$  und den Funktionen  $\psi_{\pm\alpha}(q^{\lambda_1}, q^{\lambda_2})$  aus [6] besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
 e_{\pm\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) &= \pm \frac{1}{8} \psi_{\pm\alpha}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}) + \frac{1}{16 \operatorname{sh}(\alpha\eta)} \frac{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})}{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})} \left(1 + \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2)\right) \\
 &\pm \frac{1}{16} \frac{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} \left(\rho(\lambda_1) - \rho(\lambda_2)\right) - \frac{1}{16} \frac{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})}{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})} \frac{\operatorname{ch}(\alpha\eta)}{\operatorname{sh}(\alpha\eta)} \left(\rho(\lambda_1) + \rho(\lambda_2)\right).
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Einsetzen von (6.11) in (6.8) und (6.9) führt auf die diskrete Funktionalgleichung

$$e^{\alpha\eta}\psi_\alpha(q^{\lambda_1}, q^{\lambda_2}) + \rho(\lambda_1)\psi_\alpha(q^{\lambda_1-1}, q^{\lambda_2}) = \frac{\text{ch}(\eta\lambda_{12})}{\text{sh}(\eta\lambda_{12})}e^{\alpha\eta}\rho(\lambda_2) - \frac{\text{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1))}{\text{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))}, \quad (6.12)$$

aus [6].

Der nächste Schritt bestünde darin, das Analogon des Operators  $\hat{\Omega}_n$  in Gleichung (5.21) anzugeben, so dass sowohl die diskrete Funktionalgleichung (3.6) bezüglich des Operators (3.11) als auch die Asymptotik-Bedingung (6.1) erfüllt ist. Eine solche Verallgemeinerung wurde in [8] für den Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$  gefunden. Nach den Ergebnissen der Arbeiten [6, 37] ist dies auch für allgemeines  $\alpha$  möglich. Es ist aber anhand der jeweiligen Ausdrücke nicht offensichtlich, dass Gleichung (3.6) erfüllt ist.

## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war, einen möglichst einfachen Beweis für die Faktorisierung der Korrelationsfunktionen des Heisenberg-Modells im thermodynamischen Limes bei endlicher Temperatur (im feldfreien Fall) zu finden. Dieser sollte möglichst das Potential zur Verallgemeinerung auf andere Modelle haben.

Dies ist gelungen. Der erste Schritt bestand in der Betrachtung der Trotter-Suzuki-Abbildung der Spin-1/2-Heisenberg-Kette auf ein Sechs-Vertex-Modell. Dieses wurde durch die Einführung von sowohl vertikalen als auch horizontalen Spektralparametern inhomogenisiert. Zur Konstruktion des  $n$ -Platz-Dichteoperators im thermodynamischen Limes genügen für endliche Temperatur - im Gegensatz zum Fall für Temperatur null - endlich viele Transfermatrizen in horizontaler Richtung.<sup>1</sup> Es folgt, dass die Korrelationsfunktionen für endliche Temperatur rationale Funktionen der vertikalen Spektralparameter sind, wobei der Nenner bekannt und der zugehörige Zähler polynomial und von beschränktem Grad in jedem der Spektralparameter ist.

Darauf aufbauend wurde in Kapitel 3 eine Charakterisierung des inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperators des Heisenberg-Modells bei endlicher Temperatur im thermodynamischen Limes gefunden. Es zeigte sich, dass es genügt, diesen als Funktion eines der  $n$  vielen vertikalen Spektralparameter zu betrachten. Mit Hilfe der Konstruktion über das Sechs-Vertex-Modell wurde eine Funktionalgleichung vom Differenztyp hergeleitet, die für eine endliche Menge von Spektralparameterwerten erfüllt ist. Die erlaubten Werte entsprechen gerade den Werten der horizontalen Spektralparameter. Die Herleitung dieser diskreten Funktionalgleichung beruht auf den Eigenschaften der  $R$ -Matrix des Heisenberg-Modells sowie der Betrachtung des thermodynamischen Limes. Die gefundene Funktionalgleichung entspricht einer diskreten Version der sogenannten reduzierten  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung, welche der inhomogene  $n$ -Platz-Dichteoperator des Heisenberg-Modells im Grundzustand erfüllt. Das Ergebnis von Kapitel 3 war der Beweis, dass die diskrete Funktionalgleichung - zusammen mit der Asymptotik - den inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperator für endliche Temperatur eindeutig bestimmt (Eindeutigkeitssatz). Die Asymptotik-Bedingung besitzt dabei rekursiven Charakter, da sie den  $n$ -Platz- mit dem  $(n - 1)$ -Platz-Dichteoperator in Beziehung setzt.

Die Herleitung der diskreten  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung und der Beweis des Eindeutigkeitssatzes erlauben außerdem die Einbeziehung eines homogenen äußeren Magnetfeldes sowie eines in [13] eingeführten weiteren Regularisierungsparameters (Alpha-Parameter), der einem „einseitigen“ Magnetfeld entspricht.

Aus dem Eindeutigkeitssatz lässt sich die Struktur der  $n$ -Platz-Korrelationsfunktionen

---

<sup>1</sup> Genauer gesagt liefert diese Konstruktion eine Approximation des  $n$ -Platz-Dichteoperators und es ist noch der Trotter-Limes durchzuführen (siehe Kapitel 2.3).

nicht unmittelbar ablesen. Seine Bedeutung liegt vielmehr darin, von einem Ansatz, den man für den Dichteoperator konstruiert hat, zu zeigen, dass er diesen wirklich liefert. Auf diese Weise wird in Kapitel 4 der inhomogene  $n$ -Platz-Dichteoperator der XXX-Kette konstruiert. Die Konstruktion einer Lösung der reduzierten  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung, welche die analytischen Eigenschaften der Grundzustands-Korrelationsfunktionen besitzt, wurde in [9] erreicht. Die analytischen Eigenschaften der Lösung werden dabei von einer einzigen 2-Punkt-Funktion bestimmt. Diese wird daher als „physikalischer“ Anteil der Konstruktion bezeichnet. Die Vermutung aus der Berechnung der Korrelationsfunktionen mittels der Vielfachintegraldarstellung [7] war, dass im Ausdruck für den  $n$ -Platz-Dichteoperator für Temperatur null lediglich diese 2-Punkt-Funktion durch die entsprechende Funktion bei endlicher Temperatur ersetzt werden muss, um den  $n$ -Platz-Dichteoperator bei endlicher Temperatur zu erhalten. Dies wurde in Kapitel 4 durch den Nachweis bewiesen, dass besagter Ausdruck die charakterisierenden Eigenschaften des Eindeutigkeitssatzes besitzt. Dazu wurden die Eigenschaften der in [9] konstruierten Operatoren, des sogenannten „algebraischen“ Anteils, benötigt. Es wurde deutlich, dass die beiden Fälle parallel behandelbar sind: dieselbe algebraische Konstruktion plus ein physikalischer Anteil, der die analytischen Eigenschaften bestimmt.

Zur Berechnung der (inhomogenen) 2-Punkt-Funktion wurde eine Integralformel hergeleitet. Diese ist durch die Lösung einer linearen und einer nichtlinearen Integralgleichung bestimmt. Der inhomogene  $n$ -Platz-Dichteoperator für endliche Temperatur ist damit vollständig angegeben. Die Integralformel erlaubt die Spezialisierung der Inhomogenitäten auf die physikalischen Werte sowie die Bildung des Trotter-Limes. Dies führt auf die Integralgleichungen für die wirkliche physikalische 2-Punkt-Funktion bei endlicher Temperatur. Eingesetzt in den Ausdruck für den inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperator folgt wie für Temperatur null [11], dass der homogene Limes des Ausdrucks existiert.

In Kapitel 5 wurde für den Fall der XXZ-Kette der inhomogene  $n$ -Platz-Dichteoperator bei endlicher Temperatur im thermodynamischen Limes konstruiert. Im Unterschied zum isotropen Fall wurden zwei 2-Punkt-Funktionen zur Beschreibung des Ergebnisses benötigt [12]. Die Argumentation war analog zur Behandlung des isotropen Falls mit Hilfe der Konstruktion des „algebraischen“ Anteils aus [12] möglich.

Mittlerweile existiert ein Beweis für die Faktorisierung der Korrelationsfunktionen bei endlicher Temperatur für den allgemeinen Fall der XXZ-Kette in einem äußeren Magnetfeld und mit zusätzlichem Alpha-Parameter [37]. Dieser beruht auf der in [13, 14] entwickelten Konstruktion der sogenannten fermionischen Operatoren. Der in der vorliegenden Arbeit beschriebene Zugang mit Hilfe der in Kapitel 3 beschriebenen Charakterisierung wurde davon unabhängig entwickelt. Er beruht - wie oben erläutert - auf der Beschreibung des physikalisch interessanten Objektes durch einen vollständigen Satz von Funktionalgleichungen. Die Erwartung ist, dass dieser Zugang Potential für Verallgemeinerungen auf andere Modelle besitzt.

Im letzten Kapitel wurde der soeben angesprochene Fall der XXZ-Kette in einem homogenen äußeren Magnetfeld und mit zusätzlichem Alpha-Parameter behandelt. Es wurden der 1- und der 2-Platz-Dichteoperator explizit konstruiert. Dazu war insbesondere die Konstruktion des „algebraischen“ Anteils aus [12] an die Abhängigkeit vom Alpha-Parameter anzupassen. Wie in [13] erläutert, vereinfacht sich die Beschreibung durch die Einführung



---

dieses Parameters, so dass hier nur eine 2-Punkt-Funktion in die Beschreibung des 2-Platz-Dichteoperators eingang<sup>2</sup>. Dieser Fall wird auch durch den in Kapitel 3 bewiesenen Eindeutigkeitssatz abgedeckt. Der Nachweis, dass die bereits gefundenen Formeln [6, 37] für den  $n$ -Platz-Fall die Bedingungen des Eindeutigkeitssatzes, insbesondere die diskrete Funktionalgleichung, erfüllen bzw. die Herleitung eines entsprechenden Ausdrucks bleibt als Projekt für die Zukunft.

Ein weiteres Zukunftsprojekt ist die Untersuchung der oben schon kurz angesprochenen Frage, inwieweit der hier vorgestellte Zugang auf andere Modelle verallgemeinert werden kann. Dazu ist zunächst festzustellen, dass für die Herleitung der Funktionalgleichung die Crossing-Symmetrie der  $R$ -Matrix des Heisenberg-Modells benutzt wurde. Diese folgt aus einer bestimmten Eigenschaft der  $U_q(\widehat{sl}_2)$ -Evaluationsdarstellungen. Daher besteht das größte Verallgemeinerungspotential für Modelle, die auf  $U_q(\widehat{sl}_2)$  basieren. Darunter fallen entsprechende Modelle zu höherem Spin. Unter diesen nehmen die Temperley-Lieb-Modelle eine besondere Stellung ein, da sie eine höhere Symmetrie besitzen und daher eine einfachere Gestalt des Dichteoperators zu erwarten ist, ähnlich wie dies für den  $U_q(sl_2)$ -invarianten XXZ-Hamiltonian im Vergleich zum generischen XXZ-Modell der Fall ist [18]. Der Schritt zu höherer Dimension der Ein-Teilchen-Zustandsräume bzw. zu höherem Spin ist aber nichttrivial. Der wesentliche Punkt der in Kapitel 3 gefundenen Charakterisierung bestand nämlich darin, für den inhomogenen  $n$ -Platz-Dichteoperator ein geschlossenes System von (Funktional-)Gleichungen herzuleiten, dass diesen eindeutig festlegt. Dabei gingen die analytischen Eigenschaften bezüglich der Spektralparameter wesentlich ein. Für höheren Spin werden diese komplizierter, so dass zusätzliche charakterisierende Bedingungen berücksichtigt werden müssen. Für den Fall der Modelle zu höherem Rang besteht wegen der fehlenden Crossing-Symmetrie der zugrunde liegenden  $R$ -Matrizen zusätzlich die Herausforderung, zunächst ein geschlossenes System von Funktionalgleichungen herzuleiten. Es besteht aber die Hoffnung, dass diese Schwierigkeiten überwunden werden können.

---

<sup>2</sup> Letztere ist in diesem Fall abhängig von einem diskreten Parameter, der zwei Werte annehmen kann.



# A. Die verallgemeinerten Spurfunktionale

Dieser Anhang stellt die Eigenschaften der beiden verallgemeinerten Spurfunktionale aus [9, 12] zusammen.

## A.1. Das Spurfunktional für die XXX-Kette

Es wird in [9] eine verallgemeinerte Spurfunktion benötigt. Diese ist definiert als die  $\mathbb{C}[x]$ -lineare Abbildung

$$\mathrm{Tr}_x : U(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x],$$

die bei Wahl der  $(k+1)$ -dimensionalen Darstellung  $\pi^{(k)}$  für  $U(\mathfrak{sl}_2)$  der gewöhnlichen  $\mathbb{C}$ -linearen Spur entspricht, d.h.

$$\mathrm{Tr}_{k+1}(A) = \mathrm{Spur}_{V^{(k)}}\left(\pi^{(k)}(A)\right) \quad \text{für alle } A \in U(\mathfrak{sl}_2).$$

Dies legt die Abbildung eindeutig fest. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\mathrm{Tr}_x(AB) = \mathrm{Tr}_x(BA)$$

$$\mathrm{Tr}_x(1) = x$$

Für die Spur über die Elemente der Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis von  $U(\mathfrak{sl}_2)$ ,

$$\left\{ E^a H^b F^c; \quad a, b, c \in \mathbb{N} \right\}, \tag{A.1}$$

gilt

$$\mathrm{Tr}_x(E^a H^b F^c) = 0 \quad \text{für } a \neq c.$$

Die Spuren der übrigen Elemente von (A.1) ergeben sich mit Hilfe der Gleichung

$$\mathrm{Tr}_x(e^{zH}) = \frac{\sinh(xz)}{\sinh(z)}$$

und der Bedingung

$$\mathrm{Tr}_x(CA) = \frac{x^2 - 1}{2} \mathrm{Tr}_x(A), \quad A \in U(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[x] \tag{A.2}$$

für den Casimiroperator  $C$ .

Die Funktion  $\mathrm{Tr}_x$  besitzt ferner die Eigenschaften:

$$\mathrm{Tr}_x(A) = \mathrm{Tr}_x(A') \quad \text{falls } \bar{\omega}_x(A) = \bar{\omega}_x(A'),$$

wobei

$$\bar{\omega}_x : U(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[x] \rightarrow (U(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[x]) / I_x$$

ist.  $I_x$  ist das 2-seitige Ideal in  $U(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[x]$ , das von  $C - \frac{x^2-1}{2}$  erzeugt wird.

Ferner gelten

$$\mathrm{Tr}_{-x}(A) = -\mathrm{Tr}_x(A)$$

und

$$\mathrm{Tr}_x(A) - x\epsilon(A) \in x(x^2 - 1)\mathbb{C}[x]$$

für die  $\mathbb{C}[x]$ -lineare Coeins  $\epsilon : U(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ . Für den Grad  $Deg$  im Polynomring  $\mathbb{C}[x]$  gilt

$$Deg\left(\mathrm{Tr}_x(H^a E^b F^c)\right) \leq \begin{cases} m+1; & m = a+b+c \text{ even} \\ m; & m = a+b+c \text{ odd} \end{cases}. \quad (\text{A.3})$$

## A.2. Das Spurfunktional für die XXZ-Kette

Für das XXZ-Modell mit Anisotropieparameter  $\Delta = (q + q^{-1})/2$  wird die verallgemeinerte Spur definiert als die  $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ -lineare Abbildung (mit  $\zeta = q^\lambda$ )

$$\mathrm{Tr}_{\lambda, \zeta} : U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] \rightarrow \lambda \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] \oplus \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$$

mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Tr}_{\lambda, \zeta}(AB) = \mathrm{Tr}_{\lambda, \zeta}(BA).$$

Eine Basis von Typ Poincaré-Birkhoff-Witt für  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  ist gegeben durch

$$\left\{ E^a q^{bH} F^c; \quad a, c \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Es gelten

$$\mathrm{Tr}_{\lambda, \zeta}(E^a q^{bH} F^c) = 0 \quad \text{für } a \neq c$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\lambda, \zeta}(q^{mH}) &= \begin{cases} \lambda; & m = 0 \\ \frac{\zeta^m - \zeta^{-m}}{q^m - q^{-m}}; & m \neq 0 \end{cases} \\ \mathrm{Tr}_{\lambda, \zeta}(CA) &= \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{(q - q^{-1})^2} \mathrm{Tr}_{\lambda, \zeta}(A) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

für den Casimiroperator

$$C = \frac{q^{-1+H} + q^{1-H}}{(q - q^{-1})^2} + EF \quad (\text{A.6})$$

und beliebige Elemente  $A, B \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

Für ganze Zahlen  $k \geq 0$  gilt

$$\mathrm{Tr}_{k+1, q^{k+1}}(A) = \mathrm{tr}_{V^{(k)}}(\pi^{(k)}(A)) \quad (\text{A.7})$$

für die gewöhnliche  $\mathbb{C}$ -lineare Spur  $\mathrm{tr}_{V^{(k)}}$  über die  $(k+1)$ -dimensionale generisch irreduzible  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -Darstellung

$$\pi^{(k)} : U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \mathrm{End}(V^{(k)}). \quad (\text{A.8})$$

## B. Eigenschaften der $X$ -Operatoren

Dieser Anhang zitiert den Beweis aus [12] bezüglich des Bildes der  $X$ -Operatoren mit oberem Index 1 unter dem Operator  $\mathcal{A}_n^{(1)}$  für den Fall der XXZ-Kette.

**Gleichung (4.2) in [12]**

$${}_n X_{n-2}^{(1,j)}(\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n) = -\mathcal{A}_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}_n X_{n-2}^{(1,j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (\text{B.1})$$

Es reicht, den Fall  $j = 2$  zu betrachten. Der Operator  $\mathcal{A}_n^{(1)}$  lässt sich in folgender Weise als Spur über einen 2-dimensionalen Hilfsraum  $V_a \cong \mathbb{C}^2$  ausdrücken:

$$-\left( \prod_{p=2}^n [\lambda_{1,p} - 1]_q [\lambda_{1,p} + 1]_q \right) \mathcal{A}_n^{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Tr}_{V_a^{(1)}} \left( \pi_a^{(1)} \left( T_n^{[1]}(\lambda_1) \right) P_{a,\bar{1}} \right) P_{1,\bar{1}}$$

Es reicht, Gleichung (B.1) für den Fall  $\lambda_2 - \lambda_1 = k + 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  zu beweisen (Lemma 7.1 in [12]). Mit Hilfe der Gleichungen (A.7) und (A.8) wird dazu die Spur über  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  in der Konstruktion des Operators  ${}_n X_{n-2}^{(1,2)}$  durch die Spur über den  $(k+1)$ -dimensionalen Raum  $V_b^{(k)}$  ersetzt.

Zu zeigen ist also folgende Identität:

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{p=2}^n [\lambda_{2,p} - k - 1]_q [\lambda_{2,p} - k]_q \right) \text{Tr}_{V_c^{(k+1)}} \left( \pi_c^{(k+1)} \left( T_n^{[1]} \left( \lambda_2 - \frac{k+2}{2} \right) \right) \right) s_{1,\bar{2}} s_{\bar{1},2} \\ &= \text{Tr}_{V_a^{(1)}} \left( \pi_a^{(1)} \left( T_n^{[1]}(\lambda_2 - k - 1) \right) P_{a,\bar{1}} \right) P_{1,\bar{1}} \text{Tr}_{V_b^{(k)}} \left( \pi_b^{(k)} \left( T_n^{[1]} \left( \lambda_2 - \frac{k+1}{2} \right) \right) \right) s_{1,\bar{2}} s_{\bar{1},2}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Es wird die Notation

$$r^{(k,1)}(\lambda) := \left( \pi^{(k)} \otimes I \right) (L(\lambda))$$

eingeführt. Für  $k = 1$  ergibt sich

$$r(\lambda_{1,2}) := r^{(1,1)}(\lambda_{1,2}) = \begin{cases} R(\lambda_1, \lambda_2) & : \text{für } q = 1 \\ \text{sh}(\eta)^{-1} \mathcal{R}(\lambda_1, \lambda_2) & : \text{für } q \neq 1. \end{cases}$$

Um die beiden auf der rechten Seite von Gleichung (B.2) auftretenden Spuren als Spur über das Tensorprodukt der beiden Hilfsräume schreiben zu können, stört der Operator  $P_{1,\bar{1}} = I \otimes I + r_{1,\bar{1}}(-1)$  in der Mitte. Der Operator  $r_{1,\bar{1}}(-1)$  ist proportional zum Projektor auf das 2-Platz- $U(\mathfrak{sl}_2)$ -Singulett und es gilt

$$r_{1,\bar{1}}(-1) \text{Tr}_{V_b^{(k)}} \left( \pi_b^{(k)} \left( T_n^{[1]} \left( \lambda_2 - \frac{k+1}{2} \right) \right) \right) s_{1,\bar{2}} s_{\bar{1},2} = 0, \quad (\text{B.3})$$

denn die Operation von  $r_{1,\bar{1}}(-1)$  auf  $s_{1,\bar{2}}s_{\bar{1},2}$  produziert ein Singulett  $s_{2,\bar{2}}$  und die Spur über  $V_b^{(k)}$  enthält das Produkt

$$r_{b,2}^{(k,1)} \left( \frac{\lambda_{1,2}}{2} \right) r_{b,\bar{2}}^{(k,1)} \left( \frac{\lambda_{1,2}}{2} - 1 \right).$$

Mit Hilfe von

$$L_1 \left( \frac{\mu}{2} \right) L_2 \left( \frac{\mu}{2} - 1 \right) s_{1,2} = \left( \frac{q^\mu + q^{-\mu}}{(q - q^{-1})^2} - C \right) s_{1,2}$$

woraus für jedes  $A \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$

$$\mathrm{Tr}_\lambda \left( A L_1 \left( \frac{\mu}{2} \right) L_2 \left( \frac{\mu}{2} - 1 \right) \right) s_{1,2} = \left[ \frac{\mu - \lambda}{2} \right]_q \left[ \frac{\mu + \lambda}{2} \right]_q \mathrm{Tr}_\lambda (A) s_{1,2}. \quad (\text{B.4})$$

folgt, erhält man für den Spezialfall  $\lambda = \mu = \lambda_{1,2}$  Gleichung (B.3). Der Operator  $P_{1,\bar{1}}$  auf der rechten Seite von Gleichung (B.2) kann daher durch  $(I \otimes I)_{1,\bar{1}}$  ersetzt werden. Die rechte Seite von Gleichung (B.2) lässt sich dann als Spur über das Tensorprodukt der Hilfsräume umschreiben:

$$\mathrm{Tr}_{V_a^{(1)} \otimes V_b^{(k)}} (A B)_{s_{1,\bar{2}}s_{\bar{1},2}} \quad (\text{B.5})$$

mit den Operatoren

$$A = r_{a,\bar{2}}(-k-2) r_{b,\bar{2}}^{(k,1)} \left( -\frac{k+3}{2} \right) \pi_a^{(1)} \left( T_n^{[1,2]}(\lambda_2 - k - 1) \right) \pi_b^{(k)} \left( T_n^{[1,2]} \left( \lambda_2 - \frac{k+1}{2} \right) \right)$$

und

$$B = r_{a,2}(-k-1) r_{b,2}^{(k,1)} \left( -\frac{k+1}{2} \right) P_{a,\bar{1}}.$$

Hierbei wurde die Definition

$$T_n^{[1,2]}(\lambda) := L_{\bar{3}}(\lambda - \lambda_3 - 1) \cdots L_{\bar{n}}(\lambda - \lambda_n - 1) L_n(\lambda - \lambda_n) \cdots L_3(\lambda - \lambda_3)$$

benutzt. Der Raum  $V^{(k)}$  lässt sich mit dem symmetrischen Unterraum des  $k$ -fachen Tensorproduktes  $(V^{(1)})^{\otimes k}$  identifizieren. Es gilt

$$V^{(k)} \simeq \bigcap_{i=1}^{k-1} \mathrm{Kern} (r_{b_{i+1},b_i}(-1)) \subset V_{b_k}^{(1)} \otimes \cdots \otimes V_{b_1}^{(1)} \quad (\text{B.6})$$

und der Operator  $r_{b,2}^{(k,1)}(\lambda)$  ist gegeben durch

$$r_{b,2}^{(k,1)}(\lambda) \prod_{j=0}^{k-2} \left[ \lambda + \frac{k-1}{2} - j \right]_q = r_{b_{k,2}} \left( \lambda - \frac{k-1}{2} \right) \cdots r_{b_{1,2}} \left( \lambda + \frac{k-1}{2} \right). \quad (\text{B.7})$$

Für  $\lambda = \lambda_{1,2}/2 = -(k+1)/2$  ist der Faktor auf der linken Seite von Gleichung (B.7) von null verschieden. Als nächster Schritt soll gezeigt werden, dass die Spurbildung über

das Tensorprodukt in Gleichung (B.5) durch Spurbildung über den zu  $V^{(k+1)}$  isomorphen symmetrischen Unterraum ersetzt werden kann. Dazu ist zu zeigen, dass

$$B \left( V_a^{(1)} \otimes V_b^{(k)} \right) \subset V^{(k+1)}$$

gilt. Es genügt, die Relation

$$r_{a,b_k}(-1)B s_{\bar{1},2} = 0$$

zu zeigen. Mit Hilfe der Yang-Baxter-Gleichung folgt

$$\begin{aligned} & r_{a,b_k}(-1)B s_{\bar{1},2} \\ &= r_{b_k,2}(-k)r_{a,2}(-k-1)r_{b_{k-1},2}(-k+1) \cdots r_{b_2,2}(-2)r_{a,b_k}(-1)r_{b_1,2}(-1)P_{a,\bar{1}}s_{\bar{1},2}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Durch Ausnutzen der Crossing-Symmetrie, welche für die  $L$ -Operatoren die Gestalt

$$L_a(\lambda)s_{a,b} = -L_b(-\lambda-1)s_{a,b} \quad (\text{B.9})$$

annimmt, erhält man

$$\begin{aligned} r_{b_1,2}(-1)P_{a,\bar{1}}s_{\bar{1},2} &= r_{b_1,2}(-1)r_{a,\bar{1}}(0)s_{\bar{1},2} = -r_{b_1,2}(-1)r_{2,a}(-1)s_{\bar{1},2} \\ &= r_{a,b_1}(0)r_{2,a}(-1)s_{\bar{1},2}. \end{aligned}$$

Die letzten 4 Terme von Gleichung (B.8) lassen sich daher umformen zu

$$\begin{aligned} r_{a,b_k}(-1)r_{b_1,2}(-1)P_{a,\bar{1}}s_{\bar{1},2} &= r_{a,b_k}(-1)r_{a,b_1}(0)r_{2,a}(-1)s_{\bar{1},2} \\ &= r_{a,b_1}(0)r_{b_1,b_k}(-1)r_{2,a}(-1)s_{\bar{1},2}. \end{aligned}$$

Angewendet auf einen Vektor aus  $V_a^{(1)} \otimes V_b^{(k)}$  gibt der Singulettprojektor  $r_{b_1,b_k}(-1)$  null. Es folgt

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{V_a^{(1)} \otimes V_b^{(k)}} (AB) s_{1,\bar{2}} s_{\bar{1},2} &= \text{Tr}_{V^{(k+1)}} (AB) s_{1,\bar{2}} s_{\bar{1},2} \\ &= \text{Tr}_{V^{(k+1)}} \left( A r_{a,2}(-k-1) P_{a,\bar{1}} r_{b,\bar{1}}^{(k,1)} \left( \frac{k-1}{2} \right) \right) s_{1,\bar{2}} s_{\bar{1},2}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

wobei im letzten Schritt die Crossing-Relation (B.9) benutzt wurde. Der Operator  $P_{a,\bar{1}}$  in (B.10) kann aufgrund der Relation

$$r_{a,\bar{1}}(-1)r_{b,\bar{1}}^{(k,1)} \left( \frac{k-1}{2} \right) r_{b,a}^{(k,1)} \left( \frac{k+1}{2} \right) = 0.$$

durch die Identität ersetzt werden. Mit Hilfe der Fusionsrelation<sup>1</sup>

$$r_{b,a}^{(1,1)} \left( \lambda - \frac{k}{2} \right) r_{(b_1, \dots, b_k), a}^{(k,1)} \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \Big|_{V^{(k+1)}} = \left[ \lambda - \frac{k}{2} + 1 \right]_q r_{(b, b_1, \dots, b_k), a}^{(k+1,1)}(\lambda)$$

folgt schließlich Gleichung (B.2). Damit ist der Beweis von Gleichung (B.1) abgeschlossen.

<sup>1</sup> Der Index  $(b_1, \dots, b_k)$  steht für den symmetrischen Unterraum, siehe Gleichung (B.6).





## C. Details zu Kapitel 6

Die Bilder der Elementarmatrizen unter dem Operator

$$\left(C_A^{(1)}\right)^{-1} A_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha) = \frac{1}{\rho(\lambda_1 - 1)} \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} + 1)) A_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha)$$

lauten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} &\mapsto e^{\alpha\eta \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} + 1))} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & \operatorname{sh}(\eta) & \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} &\mapsto e^{-\alpha\eta \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} + 1))} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) & \operatorname{sh}(\eta) & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} &\mapsto e^{\alpha\eta} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & -\operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))\operatorname{sh}(\eta) & -\operatorname{sh}^2(\eta) & \\ & & & \operatorname{sh}^2(\eta\lambda_{12}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} &\mapsto e^{-\alpha\eta} \begin{pmatrix} \operatorname{sh}^2(\eta\lambda_{12}) & & & \\ & -\operatorname{sh}^2(\eta) & -\operatorname{sh}(\eta)\operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} &\mapsto e^{\alpha\eta \operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & -\operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) & -\operatorname{sh}(\eta) & \\ & & & \operatorname{sh}(\eta) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} &\mapsto e^{-\alpha\eta \operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(\eta) & & & \\ & -\operatorname{sh}(\eta) & -\operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{C.1}$$

Die Bilder der in Abschnitt 6.2.1 eingeführten Operatoren  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$  unter

$$\frac{1}{\rho(\lambda_1 - 1)} A_2^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2; \alpha)$$

sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 & C(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \\
 & - \operatorname{ch}(\alpha\eta)C(\lambda_1 - 1, \lambda_2) - \operatorname{sh}(\alpha\eta)D(\lambda_1 - 1, \lambda_2) + \operatorname{sh}(\alpha\eta)E(\lambda_1 - 1, \lambda_2) \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh}(\alpha\eta)}{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})} \frac{(\operatorname{sh}(\eta) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{ch}(\alpha\eta) - \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\alpha\eta))}{\operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))} E_\alpha(\lambda_1 - 1, \lambda_2) \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh}(\alpha\eta)}{\operatorname{ch}(\eta\lambda_{12})} \frac{(\operatorname{sh}(\eta) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{ch}(\alpha\eta) + \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\alpha\eta))}{\operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))} E_{-\alpha}(\lambda_1 - 1, \lambda_2), \\
 & E(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \\
 & - \operatorname{sh}(\alpha\eta)C(\lambda_1 - 1, \lambda_2) - \operatorname{ch}(\alpha\eta)D(\lambda_1 - 1, \lambda_2) \\
 & + \operatorname{ch}(\alpha\eta)E(\lambda_1 - 1, \lambda_2) + F(\lambda_1 - 1, \lambda_2) \\
 & - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh}(\alpha\eta)}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} \frac{(\operatorname{sh}(\eta) \operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{ch}(\alpha\eta) - \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\alpha\eta))}{\operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))} E_\alpha(\lambda_1 - 1, \lambda_2) \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh}(\alpha\eta)}{\operatorname{sh}(\eta\lambda_{12})} \frac{(\operatorname{sh}(\eta) \operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{ch}(\alpha\eta) + \operatorname{ch}(\eta) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\alpha\eta))}{\operatorname{ch}(\eta(\lambda_{12} - 1)) \operatorname{sh}(\eta(\lambda_{12} - 1))} E_{-\alpha}(\lambda_1 - 1, \lambda_2), \\
 & D(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto F(\lambda_1 - 1, \lambda_2), \\
 & F(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto D(\lambda_1 - 1, \lambda_2).
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] R. J. Baxter, *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Phys. (N.Y.) **70** (1972), 193.
- [2] ———, *Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice*, Phil. Trans. Roy. Soc. **289** (1978), 315.
- [3] ———, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [4] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B **241** (1984), 333.
- [5] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Z. Phys. **71** (1931), 205.
- [6] H. Boos and F. Göhmann, *On the physical part of the factorized correlation functions of the XXZ chain*, J. Phys. A **41** (2009), 315001.
- [7] H. Boos, F. Göhmann, A. Klümper, and J. Suzuki, *Factorization of multiple integrals representing the density matrix of a finite segment of the Heisenberg spin chain*, J. Stat. Mech. (2006), P04001.
- [8] ———, *Factorization of the finite temperature correlation functions of the XXZ chain in a magnetic field*, J. Phys. A **40** (2007), 10699.
- [9] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *A recursion formula for the correlation functions of an inhomogeneous XXX model*, Algebra and Analysis **17** (2005), 115.
- [10] ———, *Algebraic representation of correlation functions in integrable spin chains*, Ann. Henri Poincaré **7** (2006), 1395.
- [11] ———, *Density matrix of a finite sub-chain of the Heisenberg anti-ferromagnet*, Lett. Math. Phys. **75** (2006), 201–208.
- [12] ———, *Reduced  $q$ KZ equation and correlation functions of the XXZ model*, Comm. Math. Phys. **261** (2006), 245.
- [13] ———, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 263.
- [14] ———, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model II: creation operators*, Comm. Math. Phys. **286** (2009), no. 3, 875.
- [15] H. E. Boos and V. E. Korepin, *Quantum spin chains and Riemann zeta function with odd arguments*, J. Phys. A **34** (2001), 5311.
- [16] H. E. Boos, V. E. Korepin, and F. A. Smirnov, *Emptiness formation probability and*

- quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation*, Nucl. Phys. B **658** (2003), 417.
- [17] ———, *New formulae for solutions to quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations of level  $-4$  and correlation functions*, Moscow Math. J. **4** (2004), 593.
- [18] ———, *Connecting lattice and relativistic models via conformal field theory*, Progress in Mathematics **237** (2005), 157.
- [19] H. E. Boos, M. Shiroishi, and M. Takahashi, *First principle approach to correlation functions of spin-1/2 Heisenberg chain: fourth-neighbor correlators*, Nucl. Phys. B **712** (2005), 573.
- [20] V. Chari and A. Pressley, *Quantum Affine Algebras*, Comm. Math. Phys. **142** (1991), 261.
- [21] ———, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, 1994.
- [22] V. G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Dokl. Acad. Nauk SSSR **283** (1985), 1060.
- [23] F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, and V. E. Korepin, *The One-Dimensional Hubbard Model*, Cambridge University Press, 2005.
- [24] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Spectrum and scattering of excitations in the one-dimensional isotropic Heisenberg model*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **109** (1981), 134, translated in J. Soviet Math. **24** (1984) 241.
- [25] I. B. Frenkel and N. Yu. Reshetikhin, *Quantum affine algebras and holonomic difference equations*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 1.
- [26] M. Gaudin, *Thermodynamics of the Heisenberg-Ising Ring for  $\Delta \geq 1$* , Phys. Rev. Lett. **26** (1971), no. 21, 1301–1304.
- [27] S. Glocke, *Untersuchung der Thermodynamik eindimensionaler Quatensysteme mittels Transfermatrix-Renormierungsgruppe*, Ph.D. thesis, Bergische Universität Wuppertal, 2007.
- [28] F. Göhmann, N. P. Hasenclever, and A. Seel, *The finite temperature density matrix and two-point correlations in the antiferromagnetic XXZ chain*, J. Stat. Mech. (2005), P10015.
- [29] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature*, J. Phys. A **37** (2004), 7625.
- [30] ———, *Integral representation of the density matrix of the XXZ chain at finite temperature*, J. Phys. A **38** (2005), 1833.
- [31] W. Heisenberg, *Zur Theorie des Ferromagnetismus*, Z. Phys. **49** (1928), 619.
- [32] L. Hulthén, Ark. Math. Astro. Fys. **26 A** (1938).
- [33] M. Jimbo, *A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63.
- [34] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, and A. Nakayashiki, *Correlation functions of the XXZ model for  $\Delta < -1$* , Phys. Lett. A **168** (1992), 256.

- 
- [35] M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, American Mathematical Society, 1995.
- [36] ———, *Quantum KZ equation with  $|q| = 1$  and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime*, J. Phys. A **29** (1996), 2923.
- [37] M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model III: introducing Matsubara direction*, J. Phys. A **42** (2009), 304018.
- [38] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin- $\frac{1}{2}$  chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **567** (2000), 554.
- [39] A. Klümper, *Free energy and correlation lengths of quantum chains related to restricted solid-on-solid lattice models*, Ann. Physik **1** (1992), 540.
- [40] ———, *Thermodynamics of the anisotropic spin-1/2 Heisenberg chain and related quantum chains*, Z. Phys. B **91** (1993), 507.
- [41] ———, *Integrability of quantum chains: theory and applications to the spin-1/2 XXZ chain*, Lecture Notes in Physics 645, Springer Verlag, Berlin, 2004, p. 349.
- [42] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. B **247** (1984), 83.
- [43] L. Onsager, *Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition*, Phys. Rev. **65** (1944), no. 3-4, 117–149.
- [44] V. Pasquier and H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nucl. Phys. B **330** (1990), 523.
- [45] F. A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [46] M. Suzuki, *Relationship among exactly soluble models of critical phenomena I*, Prog. Theor. Phys. **46** (1971), 1337.
- [47] ———, *Transfer-matrix method and Monte Carlo simulation in quantum spin systems*, Phys. Rev. B **31** (1985), 2957.
- [48] M. Suzuki and M. Inoue, *The ST-transformation approach to analytic solutions of quantum systems. I. General formulations and basic limit theorems*, Prog. Theor. Phys. **78** (1987), 787.
- [49] M. Takahashi, *One-dimensional Heisenberg model at finite temperature*, Prog. Theor. Phys. **46** (1971), 401.
- [50] ———, *Half-filled Hubbard model at low temperature*, J. Phys. C **10** (1977), 1289.
- [51] H. F. Trotter, *On the product of semigroups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 545.
- [52] A. Tsuchiya and Y. Kanie, *Vertex operators in conformal field theory on  $\mathbb{P}^1$  and monodromy representations of braid group*, Adv. Stud. in Pure Math. **16** (1988), 297.
- [53] C. N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312.

- [54] C. N. Yang and C. P. Yang, *Thermodynamics of a one-dimensional system of Bosons with repulsive delta-function interaction*, J. Math. Phys. **10** (1969), 1115.

# Danksagung

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Andreas Klümper dafür, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, an diesem faszinierenden Thema zu arbeiten und mich bei dieser Arbeit begleitet hat.

Herr Prof. Hermann Boos, Herr Priv.-Doz. Dr. Frank Göhmann und Herr Priv.-Doz. Dr. Khazretali Nirov haben meine Arbeit stets mit Interesse verfolgt und durch Diskussionen zu deren Gelingen beigetragen.

Ich möchte mich bei allen Dozenten des Graduiertenkollegs „Darstellungstheorie und ihre Anwendungen in Mathematik und Physik“ herzlich für die vielen interessanten Vorlesungen und Seminare bedanken, die ich während meiner Promotionszeit besuchen durfte. Sie waren stets eine Quelle der Freude und Inspiration und haben diese Zeit wesentlich mitgeprägt.

Darüber hinaus danke ich allen Mitgliedern des Graduiertenkollegs und der beteiligten Arbeitsgruppen für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre. Unter ihnen möchte ich mich besonders herzlich bei Herrn Dipl.-Phys. Michael Brockmann, Herrn Dipl.-Phys. Win Nuding und Herrn Dr. Christian Trippe für viele fachliche Diskussionen bedanken.

Herr Dr. Henning Hörstermann, Herr Dr. Christian Trippe und Herr Dr. Klaus Wiele haben mir durch sorgfältiges Korrekturlesen des Manuskripts sehr geholfen. Sollten sich wider Erwarten dennoch Tippfehler oder Formulierungsschwächen finden, so sind diese auf die unvermeidlichen Last-Minute-Korrekturen der Autorin zurückzuführen.

Besonders danke ich meiner Familie und meinen Freunden für ihre liebevolle Unterstützung und Geduld.

Für die Finanzierung meiner Arbeit bedanke ich mich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft sowie der VolksWagen-Stiftung.