

**Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken  
unter Berücksichtigung der temperaturbedingten  
Nichtlinearitäten im Brandfall**

**Dissertation**

zur

**Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)**

der

**Abteilung Bauingenieurwesen  
im Fachbereich D an der  
Bergischen Universität Wuppertal**

von

**Thorsten Rolf Mannsfeld**

aus Leipzig

2011

Diese Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20120426-131436-1

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn:nbn:de:hbz:468-20120426-131436-1>]

Veröffentlicht als Heft 18 in der Schriftenreihe des  
Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau  
Fachbereich D, Abteilung Bauingenieurwesen  
Bergische Universität Wuppertal

### **Herausgeber**

Der Geschäftsführende Direktor  
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal

### **Fachgebiet**

Statik & Dynamik der Tragwerke  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Reinhard Harte  
Fachbereich D, Abteilung Bauingenieurwesen  
Bergische Universität Wuppertal

### **Organisation und Verwaltung**

Dipl.-Ing. W. Hammer  
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal  
Pauluskirchstraße 7  
42285 Wuppertal  
Telefon: (0202) 439-4209

© **Dr.-Ing. Thorsten Rolf Mannsfeld**  
Mittelstraße 16  
42799 Leichlingen

ISBN 978-3-940795-17-5

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

## Kurzfassung

Bei der Bemessung von Stahlbetontragstrukturen gewinnt der Brandschutz im Rahmen der zu führenden Nachweise immer mehr an Bedeutung. Mit Einführung der Eurocodes ist normativ ein ingenieurmäßiger Zugang geschaffen, um Bauteile neben der bisherigen Einstufung in eine geforderte Feuerwiderstandsklasse mit Hilfe von Tabellenwerken wirklichkeitsnäher, detaillierter, aber auch zugleich wirtschaftlicher auszulegen. Für Bauteile wie Stützen und Balken existieren neben Tabellenverfahren auch vereinfachte Rechenverfahren, die durch eine Vielzahl von Brandversuchen und numerischen Berechnungen validiert sind. Für Flächen- und Schalentragwerke aus Stahlbeton jedoch existieren in der aktuellen Normenreihe des Eurocodes DIN EN 199X-1-2 keine vereinfachten oder gar allgemeinen Regelvorschriften zur Bemessung im Brandfall.

Brandversuche sind kostenintensiv, in der Regel schwierig und daher selten durchführbar. Gleichzeitig haben sich aber Betontechnologie und Bewehrungstechnik weiterentwickelt. Die Forderung nach allgemeinen Rechenverfahren wird somit immer berechtigter. Gerade im Bezug auf das „Bauen im Bestand“ sind kaum Kenntnisse zur brandschutztechnischen Bemessung vorhanden. Aus diesen Randbedingungen folgt das Ziel dieser Arbeit: Entwicklung eines allgemeinen numerischen Verfahrens zur Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken im Brandfall.

Zur Erfüllung dieses Ziels wird für die numerische Simulation des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonflächentragwerken eine thermo-mechanische Materialformulierung aufgestellt und in eine Finite-Elemente-Formulierung überführt. Zuzüglich zur zeitinvarianten Stahlbetonmodellierung wird eine zeitvariante Multi-Level-Strategie angewendet und für den Hochtemperaturbereich erweitert.

Für die thermische Analyse wird eine Bilanzgleichung aufgestellt, bei der die Mechanismen der Leitung, der Konvektion und der Strahlung für den Hochtemperaturbereich optimiert werden. Die thermische Analyse über den Querschnitt des Flächenelementes wird auf der Gaußpunktebene durchgeführt, sodass auf Materialpunktebene eine temperatur- und zeitabhängige Formulierung der Materialgesetze erfolgen kann. Die auftretenden Verzerrungen aus Last- und Temperatureinwirkungen werden in der mechanischen Analyse getrennt berechnet und additiv zusammengeführt.

Als Entwicklungsplattform dient das modulare Programmsystem FEMAS 2000. Es wird ein vier-knotiges, isoparametrisches und schubweiches Schalenelement zugrunde gelegt.

Anhand ausgewählter Beispiele wird die Leistungsfähigkeit des neu entwickelten numerischen Verfahrens überprüft. Die nötige Validierung erfolgt zunächst getrennt hinsichtlich der thermischen und der strukturmechanischen Modellierung und anschließend als gekoppelte thermo-strukturmechanische Variante. Der Praxisbezug wird durch die Untersuchung von Deckensystemen, die einem Brandereignis ausgesetzt sind, hergestellt.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen Wege und Möglichkeiten auf, das Trag- und Verformungsverhalten von brandbeanspruchten Flächen- und Schalentragwerken aus Stahlbeton wirklichkeitsnah abzubilden. Somit sind Voraussetzungen und erste Grundlagen zur Überprüfung sowie Neuauflage vereinfachter Rechenverfahren entsprechend den Eurocodes für flächenartige Stahlbetonbauteile geschaffen.

**Abstract**

Fire protection of reinforced concrete structures gains more and more significance in the structural proof. The recent introduction of the Eurocode already allows to proving fire resistance of single structural members in more detail as well as more economically for a defined period. Prior to these Eurocodes, structures' fire resistance was proven by comparing design values with tabulated limit values. For structural members like beams or columns, validated computational procedures exist in addition to tabulated limit values. This so called simplified calculation method is validated by extensive testings (fire tests) and numerical calculations. However for reinforced concrete plate and shell structures, such simplified methods or computational approach do not exist in the present European and National codes.

Experimental fire tests of such structures are cost intensive, difficult to perform and thus has been seldom performed. At the same time, developments in concrete technology as well as reinforcing techniques have improved. Hence, a need arises for computational approaches such as a general holistic calculation method. Particularly if building in existing context is concerned, no knowledge about proving fire resistance is available. From here the aim of this thesis arises: to develop a general numeric holistic method for computation of reinforced concrete plate and shell structures exposed to fire.

In order to achieve this goal, modeling was structured into different subtasks: in order to simulate the load bearing capacity and the displacement behavior of reinforced concrete plate and shell structures, a coupled thermo-mechanical material formulation has been developed and transferred into a formulation for a finite shell element. Additionally to this time-invariant reinforced concrete model, a time-variant multi-level strategy is used and extended for the high temperature range.

For the thermal analysis a balance equation is set up and optimized for the high temperature range, with respect to the mechanisms of conduction, convection and radiation. The thermal analysis over the cross section of the shell element is accomplished on the level of point of Gauss, so that on level of point of material temperature- and time-dependent formulations of the material laws can take place. The strains from the mechanical and thermal actions are computed separately and summarized in the mechanical analysis.

For modeling the modular finite element system FEMAS 2000 serves as the numerical platform. The model itself applies 4-noded, isoparametric, REISSNER-MINDLIN type finite shell elements based on a middle surface orientated shell theory.

By means of selected examples, the efficiency of the newly developed and implemented calculation method is examined. Validation takes place first separately regarding to the thermal and the structural mechanical modeling and afterwards as coupled-thermal-mechanical application. Practical relevance is proven by experimental results from fire tests on reinforced concrete slabs constructions.

The results of this work demonstrate possibilities to predict realistically the load bearing capacity and the deformation behavior of reinforced concrete plate and shell structures exposed to fire. Pre-conditions as well as first fundamental results have been set, in order to develop computational procedures for calculating fire resistance of reinforced concrete plate and shell structures in accordance with current Eurocode procedures.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehr- und Forschungsgebiet für Statik und Dynamik der Tragwerke der Bergischen Universität Wuppertal und wurde vom dortigen Fachbereich D für Architektur, Bauingenieurwesen, Maschinenbau und Sicherheitstechnik als Dissertation anerkannt.

Mein ganz besonderer Dank gebührt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Harte für das mir entgegengebrachte Vertrauen, die Förderung und Anregung zu der für mich stets spannenden und interessanten Thematik der vorliegenden Arbeit. Ich danke vor allem für die fachliche sowie persönliche Unterstützung während meiner Tätigkeit am Lehrgebiet.

Herrn Prof. Dr.-Ing. L. Lohaus und Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Klingsch danke ich für das große Interesse an meiner Arbeit und die Bereitschaft zur Übernahme der Korreferate.

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. S. Anders für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission und die zügige Durchführung meines Promotionsverfahrens.

Meinen herzlichen Dank möchte ich dem gesamten Kollegium des Lehr- und Forschungsgebietes aussprechen, auf dessen Unterstützung im Beruflichen wie auch Privaten stets Verlass war. Besonders hervorheben möchte ich an dieser Stelle Frau Dr.-Ing. K. Stopp, Frau B. Lepine, Herrn em. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c.mult. K.-H. Laermann, Herrn Dipl.-Ing. V. Obermark und Herrn Dr.-Ing. V. Mihajlov.

Weiterhin danke ich meinen ehemaligen Lehrstuhlkollegen Herrn Dr.-Ing. M. Andres und Herrn Dr.-Ing. R. Wörmann, die durch ihre Arbeiten den Grundstein für meine Forschung legten, auf dem ich erfolgreich aufbauen konnte.

Mein aufrichtiger Dank gilt meinen Eltern Cornelia und Dr.-Ing. Rolf Mannsfeld für jegliche Unterstützung zu meiner persönlichen und beruflichen Entwicklung, meiner Schwester Dr.-Ing. Annette Pariser und ihrem Ehemann Dr.-Ing. Gerhard Pariser sowie meinen Schwiegereltern Uschi und Dipl.-Math. Peter Staier für den Ansporn und die Aufmunterungen, meine Arbeit zügig und erfolgreich voranzubringen.

Meiner Ehefrau Nicole Mannsfeld und meiner Tochter Sarah danke ich von ganzem Herzen. Sie standen mir stets verständnisvoll und hilfsbereit zur Seite, wobei es für Ihre Toleranz und Rücksichtnahme in den letzten Jahren kaum Worte des Dankes gibt. Sie waren für mich immer ein moralischer Rückhalt und damit eine unvergessene, wertvolle Unterstützung bei der Erstellung meiner Arbeit.

Leichlingen, im Dezember 2011

Thorsten Mannsfeld

Tag der Einreichung: 13. Dezember 2010

Tag der mündlichen Prüfung: 06. Mai 2011

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. R. Harte  
Prof. Dr.-Ing. L. Lohaus  
Prof. Dr.-Ing. W. Klingsch

Vorsitzender der Prüfungskommission: Prof. Dr.-Ing. S. Anders



# Inhaltsverzeichnis

|  |          |
|--|----------|
| Abbildungsverzeichnis  | XVII     |
| Tabellenverzeichnis  | XX       |
| Symbolverzeichnis  | XXI      |
| <b>1 Einleitung</b>  | <b>1</b> |
| 1.1 Einführung in die Problemstellung . . . . .                    | 1        |
| 1.2 Motivation und Zielsetzung . . . . .                           | 1        |
| 1.3 Gliederung der Arbeit . . . . .                                | 2        |
| <b>2 Allgemeine und theoretische Grundlagen</b>                    | <b>5</b> |
| 2.1 Rechtliche Grundlagen zum Brandschutz . . . . .                | 5        |
| 2.2 Sicherheitskonzept . . . . .                                   | 8        |
| 2.2.1 Zuverlässigkeitsnachweis im Bauwesen . . . . .               | 8        |
| 2.2.2 Semiprobabilistisches Sicherheitskonzept . . . . .           | 13       |
| 2.3 Bemessungsgrundlagen gemäß Eurocode . . . . .                  | 16       |
| 2.3.1 Mechanische Einwirkungen im Brandfall . . . . .              | 17       |
| 2.3.2 Thermische Einwirkungen im Brandfall . . . . .               | 18       |
| 2.3.3 Nominelle Temperaturzeitkurven . . . . .                     | 21       |
| 2.3.4 Natürliche Brandszenarien - Naturbrandmodelle . . . . .      | 22       |
| 2.3.4.1 Parametrische Realbrandkurven . . . . .                    | 23       |
| 2.3.4.2 Zonenmodelle . . . . .                                     | 24       |
| 2.3.4.3 Feldmodelle (Computational Fluid Dynamics - CFD) . . . . . | 25       |
| 2.4 Brandschutztechnische Nachweisverfahren . . . . .              | 26       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Thermische Analyse von Stahlbetonbauteilen</b>                                    | <b>31</b> |
| 3.1      | Allgemeines . . . . .  | 31        |
| 3.2      | Wärmeübertragung . . . . .   | 32        |
| 3.2.1    | Wärmeleitung . . . . .   | 33        |
| 3.2.2    | Anfangs- und Randbedingungen . . . . .   | 36        |
| 3.2.2.1  | Konvektion . . . . .   | 38        |
| 3.2.2.2  | Wärmestrahlung . . . . .   | 39        |
| 3.2.2.3  | Phasenübergänge . . . . .  | 42        |
| 3.2.3    | Zusammenfassung des Wärmehaushaltes . . . . .  | 43        |
| 3.3      | Finite-Elemente-Umsetzung des Wärmehaushaltes . . . . .                              | 44        |
| 3.4      | Temperaturabhängige Stoffkennwerte . . . . .   | 49        |
| 3.4.1    | Wärmeleitfähigkeit . . . . .   | 52        |
| 3.4.2    | Rohdichte . . . . .  | 53        |
| 3.4.3    | Wärmekapazität . . . . .   | 54        |
| 3.5      | Annahmen zur numerischen Simulation . . . . .  | 56        |
| <b>4</b> | <b>Phänomenologie und Materialmodellierung von Stahlbeton</b>                        | <b>59</b> |
| 4.1      | Einführung . . . . .   | 59        |
| 4.2      | Beton und Betonstahl bei Normaltemperaturen . . . . .                                | 60        |
| 4.2.1    | Der Werkstoff Beton . . . . .  | 60        |
| 4.2.2    | Betoncharakteristik unter einaxialer Druckbeanspruchung . . . . .                    | 61        |
| 4.2.3    | Betoncharakteristik unter einaxialer Zugbeanspruchung . . . . .                      | 62        |
| 4.2.4    | Betoncharakteristik unter mehraxialen Beanspruchungen . . . . .                      | 63        |
| 4.2.5    | Der Werkstoff Betonstahl . . . . .   | 64        |
| 4.3      | Beton und Betonstahl im Hochtemperaturbereich . . . . .                              | 66        |
| 4.3.1    | Einaxiale Betondruckfestigkeit . . . . .   | 67        |
| 4.3.2    | Einaxiale Betonzugfestigkeit . . . . .   | 68        |
| 4.3.3    | Elastizitätsmodul und Querdehnzahl . . . . .   | 69        |
| 4.3.4    | Einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton . . . . .                           | 70        |
| 4.3.5    | Betonstahl - Druck- und Zugfestigkeit . . . . .                                      | 71        |
| 4.4      | Konstitutive Modellierung von Beton . . . . .  | 72        |
| 4.4.1    | Biaxiale Betonmodellierung basierend auf dem Konzept von DARWIN & PECKNOLD . . . . . | 72        |
| 4.4.2    | Einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton . . . . .                           | 75        |



---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.4.3    | Elastizitätsmodul . . . . .  | 79         |
| 4.4.4    | Zugfestigkeit . . . . .  | 81         |
| 4.4.5    | Biaxiale Formulierung des Tragverhaltens . . . . .                                 | 84         |
| 4.4.6    | Zeitvariantes mechanisches Verhalten von Stahlbeton . . . . .                      | 86         |
| 4.5      | Konstitutives Modell für Betonstahl . . . . .                                      | 90         |
| 4.6      | Stahlbetonbauteile bei erhöhten Temperaturen . . . . .                             | 94         |
| 4.6.1    | Allgemeines Tragverhalten . . . . .  | 94         |
| 4.6.2    | Betrachtungen zum Versagen von Stahlbetonbauteilen . . . . .                       | 95         |
| 4.6.3    | Versagensmechanismen . . . . .   | 97         |
| 4.6.4    | Tragverhalten von Deckensystemen . . . . .   | 98         |
| 4.6.5    | Zusammenfassung . . . . .  | 100        |
| <b>5</b> | <b>Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>   | <b>101</b> |
| 5.1      | Einführung . . . . .   | 101        |
| 5.2      | Kinematik . . . . .  | 102        |
| 5.3      | Kräfte und Spannungen . . . . .  | 107        |
| 5.4      | Physikalische Grundlagen - Erhaltungssätze . . . . .                               | 109        |
| 5.4.1    | Satz von der Erhaltung der Masse . . . . .   | 109        |
| 5.4.2    | Satz von der Erhaltung des Impulses . . . . .                                      | 110        |
| 5.4.3    | Satz von der Erhaltung des Drehimpulses . . . . .                                  | 111        |
| 5.4.4    | Satz von der Erhaltung der kinetischen Energie . . . . .                           | 111        |
| 5.4.5    | Satz von der Erhaltung der Energie . . . . .                                       | 113        |
| 5.5      | Prinzip der Virtuellen Verschiebungen . . . . .                                    | 113        |
| 5.6      | Konstitutive Beziehungen . . . . .   | 114        |
| <b>6</b> | <b>Schalentheoretische Grundlagen und Finite-Element-Modellierung</b>              | <b>117</b> |
| 6.1      | Schalentheorie . . . . .   | 117        |
| 6.1.1    | Grundlagen . . . . .   | 117        |
| 6.1.2    | Berücksichtigung der thermischen Einwirkungen im Normaltemperaturbereich . . . . . | 126        |
| 6.1.3    | Berücksichtigung der thermischen Einwirkungen im Hochtemperaturbereich . . . . .   | 127        |
| 6.2      | Finite-Element-Modellierung . . . . .  | 128        |
| 6.2.1    | Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 128        |
| 6.2.2    | Isoparametrische Elementformulierung . . . . .                                     | 128        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.2.3    | Tangentiale Steifigkeitsbeziehung . . . . .   | 131        |
| 6.2.4    | Locking-Phänomene bei Schalenelementen . . . . .  | 132        |
| 6.2.5    | Multi-layered-Modellierung . . . . .  | 132        |
| 6.3      | Implementierung in das Programmsystem FEMAS 2000 . . . . .  | 133        |
| 6.4      | Numerische Durchführung nichtlinearer Strukturanalysen . . . . .  | 134        |
| 6.4.1    | Numerische Berücksichtigung stationärer konservativer Lasten und<br>zeitabhängiger Temperatureinwirkungen . . . . . | 136        |
| 6.4.2    | Zeitvariante thermische Verzerrungsanteile . . . . .  | 137        |
| 6.4.3    | Zeitvariante Multi-Level-Iterations Methodik . . . . .  | 139        |
| 6.4.4    | Allgemeine Rechenannahmen . . . . .   | 140        |
| <b>7</b> | <b>Validierung des numerischen Rechenmodells</b>  | <b>143</b> |
| 7.1      | Allgemeines . . . . .   | 143        |
| 7.2      | Validierung der Stahlbetonmodellierung . . . . .  | 144        |
| 7.2.1    | Benchmarktest an einer Stahlbetonscheibe . . . . .  | 144        |
| 7.2.2    | Stahlbetonbalken unter Einzellast . . . . .   | 146        |
| 7.2.3    | Stahlbetonplatte unter Punktlast . . . . .  | 149        |
| 7.2.4    | Zusammenfassung und Bewertung . . . . .   | 150        |
| 7.3      | Validierung zeitvarianter thermischer Vorgänge . . . . .  | 151        |
| 7.3.1    | Validierung der thermischen Modellkennwerte . . . . .   | 151        |
| 7.3.2    | Erwärmungsvorgänge in einem Plattenstreifen . . . . .   | 154        |
| 7.3.3    | Erwärmungs- und Abkühlungsvorgang eines Betontübbings . . . . .   | 156        |
| 7.3.4    | Zusammenfassung und Bewertung . . . . .   | 158        |
| 7.4      | Validierung thermo-mechanischer Vorgänge . . . . .  | 159        |
| 7.4.1    | Brandbeanspruchter Plattenstreifen . . . . .  | 159        |
| 7.4.2    | Brandbeanspruchte zweiachsige Stahlbetonplatte . . . . .  | 161        |
| 7.4.3    | Zusammenfassung und Bewertung . . . . .   | 164        |
| <b>8</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>   | <b>165</b> |
| 8.1      | Zusammenfassung . . . . .   | 165        |
| 8.2      | Ausblick . . . . .  | 167        |
| <b>A</b> |   | <b>169</b> |
| A.1      | Grundlagen der Statistik . . . . .  | 169        |
| A.2      | Zusätzliche Herleitungen . . . . .  | 171        |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| Inhaltsverzeichnis     | XI  |
| <hr/>                  |     |
| Literaturverzeichnis   | 173 |
| Normen und Richtlinien | 181 |
| Lebenslauf             | 183 |



# Abbildungsverzeichnis

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Schematische statistische Verteilungen der Beanspruchbarkeiten $R$ und der Beanspruchungen $E$ (links), Grenzzustandsfunktion $f_z$ (rechts) . . . . .   | 9  |
| 2.2  | Darstellung der Randverteilungsdichten $f_R(r)$ und $f_E(e)$ und der daraus resultierenden gemeinsamen Verteilungsdichte $f_{RE}$ . . . . .  | 10 |
| 2.3  | Wahrscheinlichkeitsdichte der Beanspruchung $E$ und der Beanspruchbarkeit $R$ im standardisierten Raum mit Grenzzustandsgerade sowie Zuverlässigkeitsindex $\beta$ [Braml, Fischer, Keuser & Schnell 2009] . . . . . | 12 |
| 2.4  | Normenkonformes Grenzzustandskonzept bei Normaltemperaturen . . . . .  | 14 |
| 2.5  | Reduktionsfaktor $\eta_{fi}$ als Funktion des Lastverhältnisses $Q_{k,1}/G_k$ . . . . .  | 18 |
| 2.6  | Darstellung der fünf-phasigen Aufteilung des Brandverlaufs in Räumen . . . . .   | 19 |
| 2.7  | Brandsimulationsmodelle . . . . .  | 20 |
| 2.8  | Nominelle Temperaturzeitkurven nach DIN EN 1991-1-2 (2010) . . . . .   | 21 |
| 2.9  | Darstellung von Temperaturkurven für Tunnelbauwerke . . . . .  | 22 |
| 2.10 | Qualitative Darstellung der Parametrischen Temperaturzeitkurve nach Hosser & Zehfuß (2002) . . . . .   | 24 |
| 2.11 | Schematische Darstellung eines Ein-Zonen-Modells (links) und eines Zwei-Zonen-Modells (rechts) . . . . .   | 25 |
| 2.12 | Bemessungsverfahren nach Eurocode . . . . .  | 26 |
| 2.13 | Nachweisbereiche bei einem nominellen Brand . . . . .  | 29 |
| 3.1  | Definition von Isothermen und Temperaturgradient. . . . .  | 33 |
| 3.2  | Wärmebilanz der thermischen Energie eines Volumenelementes $dV$ . . . . .  | 35 |
| 3.3  | Typisierung der Thermischen Randbedingungen (TRB) an einer Oberfläche . . . . .  | 37 |
| 3.4  | Temperaturprofil des konvektiven Wärmeübergangs mit einer Grenzschicht zwischen Umgebung und Körperoberfläche [Baehr & Stephan 1994]. . . . .  | 38 |
| 3.5  | Reflexion, Transmission und Absorption von Strahlung (links) und Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächenelementen $dA_1$ und $dA_2$ (rechts) . . . . .   | 40 |
| 3.6  | Berücksichtigung von Phasenübergängen mit der Methode der effektiven Wärmekapazitäten . . . . .  | 42 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.7  | Thermische Randbedingungen an einem Körper . . . . .  | 43 |
| 3.8  | Thermo-Mechanische Materialeigenschaften bei erhöhten Temperaturen . .  | 49 |
| 3.9  | Volumenanteile im Zementstein nach Czernin (1977) . . . . .   | 50 |
| 3.10 | Vereinfachtes Eisen-Kohlenstoff-Diagramm nach Weißbach (2007) . . . . .   | 51 |
| 3.11 | Temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit $\lambda_c(\theta)$ von Normalbeton (links)<br>und $\lambda_s(\theta)$ von Betonstahl (rechts) nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .   | 52 |
| 3.12 | Temperaturabhängige Rohdichte $\rho_c(\theta)$ von Normalbeton (links) und $\rho_s(\theta)$<br>von Betonstahl bzw. Baustahl (rechts) nach DIN EN 1994-1-2 (2006) . . .  | 53 |
| 3.13 | Temperaturabhängige Wärmekapazität $c_c(\theta)$ von Normalbeton (links) und<br>$c_s(\theta)$ von Betonstahl bzw. Baustahl (rechts) nach DIN EN 1992-1-2 (2006)   | 55 |
| 3.14 | Einfluss der Bewehrungslagen auf die Temperaturentwicklung in einem<br>Stahlbetonquerschnitt . . . . .  | 57 |
| 4.1  | Abbildungsebenen des mechanischen Verhaltens des Werkstoffs Beton [van<br>Mier 1984] . . . . .  | 60 |
| 4.2  | Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Linie von Beton unter Druckbeanspruchung  | 61 |
| 4.3  | Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Linie von Beton unter Zugbeanspruchung  | 62 |
| 4.4  | Biaxiale Versagenskurve [Kupfer 1973] (links) und Versagensmodi nach [Ne-<br>lissen 1972] (rechts) . . . . .  | 63 |
| 4.5  | Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Linie von Betonstahl unter einaxialer<br>Zugbelastung . . . . .   | 65 |
| 4.6  | Einflüsse des Betonmischungsverhältnisses (Zement:Zuschlag:Wasser) bei<br>unterschiedlichen Versuchsbeanspruchungen (links) und Einfluss der Zu-<br>schlagsart (rechts) auf das Druckverhalten von Beton in Abhängigkeit der<br>Temperatur [Schneider 1982] . . . . . | 67 |
| 4.7  | Spaltzugfestigkeit und Druckfestigkeit von Beton mit unterschiedlichen Mi-<br>schungsverhältnissen und Zuschlägen nach Schneider (1982) (links) und<br>Spaltzugfestigkeit im warmen und kalten Zustand nach Thelandersson<br>(1971) (rechts) . . . . .                | 68 |
| 4.8  | Einfluss der Temperatur und der verschiedenen Zuschlagstoffe auf den Ela-<br>stizitätsmodul [Schneider 1982] (links) und Einfluss der Temperatur auf die<br>Querdehnzahl $\nu_c$ von Normalbeton mit quarzitischen Zuschlägen [Marechal<br>1972] (rechts) . . . . .   | 69 |
| 4.9  | Normierte Spannungs-Dehnungskurven von Normalbeton bei erhöhten<br>Temperaturen in lastgesteuerten Versuchen nach Anderberg & Thelan-<br>dersson (1973) (links) und dehnungsgesteuerten Versuchen nach Schneider<br>(1982) (rechts) . . . . .                         | 70 |
| 4.10 | Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Beton bei unterschiedlichen Tem-<br>peraturstufen nach Schneider & Haksever (1976) . . . . .   | 76 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.11 | Schematische Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Normalbeton nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .   | 77  |
| 4.12 | Darstellung des Abminderungsfaktors $k_c(\theta)$ (links) und der Dehnungsansätze für $\varepsilon_{c1,\theta}$ und $\varepsilon_{cu1,\theta}$ (rechts) nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . . | 78  |
| 4.13 | Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Linien von Beton in Abhängigkeit der Temperatur nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .  | 79  |
| 4.14 | Darstellung des bezogenen temperaturabhängigen Elastizitätsmoduls . . . . .   | 80  |
| 4.15 | Abminderung der Zugfestigkeit infolge des Hochtemperatureinflusses . . . . .  | 82  |
| 4.16 | Trilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton im Zugbereich . . . . .   | 82  |
| 4.17 | Temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Linien von Beton im Zugbereich . . . . .   | 83  |
| 4.18 | Biaxiale Versagenskurven nach Kupfer & Gerstle (1973) mit Erweiterung zur Anwendung bei hohen Temperaturen nach (4.41) bis (4.43) (links) und nach Ehm (1986)(rechts) . . . . .               | 85  |
| 4.19 | Darstellung der thermischen Dehnung von Beton nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .   | 88  |
| 4.20 | Algorithmus zur Bestimmung der Verzerrungen infolge Hochtemperaturkriechen nach Anderberg (1976) . . . . .  | 89  |
| 4.21 | Schematische Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Betonstahl gemäß DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .   | 90  |
| 4.22 | Abminderungsfaktoren $k_{sy}(\theta)$ , $k_{sp}(\theta)$ und $k_{sE}(\theta)$ für warmgewalzten und kaltverformten Betonstahl der Klasse N nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .              | 92  |
| 4.23 | Temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Linien von warmgewalzten Betonstahl der Klasse N nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .   | 93  |
| 4.24 | Darstellung der thermischen Dehnung von quarzhaltigem Beton und Betonstahl nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .  | 94  |
| 4.25 | Versagensarten von Stahlbetonbauteilen nach Borgonga (1997) . . . . .   | 95  |
| 4.26 | Änderung der Momentenlinie aufgrund der Lagerungsbedingungen . . . . .  | 96  |
| 4.27 | Momentenlinie infolge einer Brandbelastung an einem Durchlaufsystem . . . . .   | 97  |
| 5.1  | Geometrie und Kinematik eines dreidimensionalen Körpers bei Verwendung krummliniger, konvektiver Koordinaten . . . . .  | 102 |
| 5.2  | Infinitesimales Linienelement . . . . .   | 105 |
| 5.3  | Schnittprinzip und Definition der mechanischen Spannungen . . . . .   | 108 |
| 6.1  | Illustration zur Beschreibung des Schalenkontinuums . . . . .   | 118 |
| 6.2  | Kinematik und Basisvektoren des Schalenkontinuums . . . . .   | 119 |
| 6.3  | Illustration der Ansatzfunktionen $N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha)$ für den Polynomgrad $p=1$ . . . . .   | 129 |
| 6.4  | Beschreibung der EULER-Winkel nach Ramm (1976) . . . . .  | 130 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 6.5  | Strukturmechanische Dickendiskretisierung des Schalenelementes ASE4 [Wörmann 2004]. . . . .  | 133 |
| 6.6  | Definition der implementierten Einwirkungs-Zeitfunktionen F1-F9 zur Beschreibung der zeitvarianten Temperatureinwirkungen infolge eines Brandes. | 135 |
| 6.7  | Typische Lastfolgedefinition bei nichtlinearen thermo-mechanischen Analysen  | 137 |
| 6.8  | Transformation zwischen thermischen und strukturmechanischen Schichtenmodellen . . . . .   | 138 |
| 6.9  | Zeitvariante Multi-Level-Iterations Strategie nach Wörmann (2004) . . . .  | 139 |
| 7.1  | Benchmarktest an einer Stahlbetonscheibe: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen des untersuchten Betonquerschnitts . . . . .                   | 145 |
| 7.2  | Benchmarktest einer Stahlbetonscheibe: Last-Verformungspfade der Stahlbetonscheibe unter Druck- und Zugbeanspruchung nach linearer Theorie .     | 145 |
| 7.3  | Benchmarktest einer Stahlbetonscheibe: Temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Kurven von Betonstahl. . . . .                                     | 146 |
| 7.4  | Benchmarktest einer Stahlbetonscheibe: Temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Linien von Normalbeton C30/37 mit quarzhaltigen Zuschlägen. .      | 147 |
| 7.5  | Stahlbetonbalken unter Einzellast: System und Bewehrung nach Bresler & Scordelis (1963) - Balken Nr. B3. . . . .                                 | 147 |
| 7.6  | Stahlbetonbalken unter Einzellast: Last-Verschiebungs-Diagramm. . . . .  | 148 |
| 7.7  | Stahlbetonplatte unter Punktlast: System und Bewehrung nach Jofriet & McNeice (1971) . . . . .   | 149 |
| 7.8  | Stahlbetonplatte unter Punktlast: Last-Verschiebungs-Kurve . . . . .   | 150 |
| 7.9  | Validierung der thermischen Betonstoffwerte: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen nach Schaumann, Kettner & Ostheer (2004) . . . . .          | 151 |
| 7.10 | Validierung der thermischen Stoffwerte: Temperaturentwicklung an den Referenzpunkten über die Zeit t. . . . .                                    | 153 |
| 7.11 | Validierung der thermischen Stoffwerte: Temperaturverläufe nach 60, 90 und 120 min Brandbeanspruchung. . . . .                                   | 153 |
| 7.12 | Validierung der thermischen Stoffwerte: Temperaturfelder nach 30, 60 und 120 min Brandbeanspruchung. . . . .                                     | 154 |
| 7.13 | Erwärmungsvorgänge in einem Plattenstreifen: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen. . . . .  | 155 |
| 7.14 | Erwärmungsvorgänge in einem Plattenstreifen: Bauteiltemperaturen des Plattenstreifens . . . . .  | 156 |
| 7.15 | Erwärmung und Abkühlung eines Betontübbings: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen nach Dahl & Schaab (2003) . . . . .                         | 157 |
| 7.16 | Erwärmung und Abkühlung eines Betontübbings: Bauteiltemperaturen an den zwei ausgewählten Punkten A und B . . . . .                              | 158 |



---

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 7.17 | Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Geometrie, Belastung, Anfangs- und Randbedingungen nach Anderberg & Forsen (1982). . . . . | 159 |
| 7.18 | Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Last-Verformungs-Kurve während der ETK Belastung aufgetragen über die Zeit $t$ . . . . .   | 160 |
| 7.19 | Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Temperaturentwicklung . . . . .  | 161 |
| 7.20 | Brandbeanspruchte zweiachsige Stahlbetonplatte: Versuchsanordnung bei dem durchgeführten Brandversuch nach Lim (2003). . . . . | 162 |
| 7.21 | Brandbeanspruchte zweiachsige Stahlbetonplatte: Geometrie und Belastung nach Lim (2003). . . . .                               | 163 |
| 7.22 | Brandbeanspruchte zweiachsige Stahlbetonplatte: Zeit-Verschiebungs-Diagramm . . . . .  | 164 |
| A.1  | Histogramm (links) und Summenhäufigkeit (rechts) . . . . .   | 169 |
| A.2  | Dichtefunktion (links) und Verteilungsfunktion (rechts) . . . . .  | 170 |



# Tabellenverzeichnis

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Beispiele für Klassifizierungs- bzw. Leistungskriterien . . . . .   | 7   |
| 2.2 | Feuerwiderstandsklassen von Bauteilen nach DIN EN 13501-2 (2008) hinsichtlich der bauaufsichtlichen Anforderungen . . . . .   | 7   |
| 2.3 | Baustoffklassifizierung hinsichtlich ihres Brandverhaltens gemäß DIN EN 13501-1 (2007) und ihrer Zuordnung hinsichtlich der bauaufsichtlichen Benennung . . . . .                     | 8   |
| 2.4 | Beziehung zwischen dem Sicherheitsindex $\beta$ und der operativen Versagenswahrscheinlichkeit $P_f$ DIN EN 1990 (2010) . . . . .   | 10  |
| 2.5 | Angestrebter Sicherheitsindex $\beta$ . . . . .   | 13  |
| 2.6 | Alternative Formate der Tragfähigkeitsanalyse im Brandfall gemäß Eurocode   | 28  |
| 3.1 | Wärmeübertragungsmechanismen nach Baehr & Stephan (1994) . . . . .  | 32  |
| 4.1 | Umwandlungs- und Zersetzungsprozesse von quarzitischem und kalzitischem Beton nach Schneider (1982) . . . . .   | 66  |
| 4.2 | Parameter der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Normalbeton mit unterschiedlichen Zuschlägen bei erhöhten Temperaturen DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . .                                | 78  |
| 4.3 | Koeffizienten für die biaxialen Bruchgrenzkurven nach Ehm (1986) . . . . .  | 85  |
| 4.4 | Zusammenstellung der mathematischen Formulierungen zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Linie von Betonstahl nach DIN EN 1992-1-2 (2010)   | 91  |
| 4.5 | Werte für die Parameter der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von warmgewalzten und kaltverformten Betonstahl der Klasse N bei erhöhten Temperaturen nach DIN EN 1992-1-2 (2010) . . . . . | 92  |
| 6.1 | Zusammenfassende Darstellung des Finiten Elementes ASE4 . . . . .   | 134 |
| 7.1 | Stahlbetonbalken unter Einzellast: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter nach Bresler & Scordelis (1963) . . . . .   | 148 |
| 7.2 | Stahlbetonplatte unter Punktlast: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter nach Jofriet & McNeice (1971) . . . . .  | 149 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 7.3 | Validierung der thermischen Stoffwerte: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter . . . . .                            | 152 |
| 7.4 | Erwärmungsvorgänge in einem Plattenstreifen: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter . . . . .                       | 155 |
| 7.5 | Erwärmung und Abkühlung eines Betontübbings: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter . . . . .                       | 157 |
| 7.6 | Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter nach Anderberg & Forsen (1982) . . . . . | 160 |
| 7.7 | Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter nach Anderberg & Forsen (1982) . . . . . | 163 |
| A.1 | Beziehung zwischen dem Fraktilenfaktor $k$ und Fraktilwert $x_p$ ausgedrückt durch $p$ % . . . . .                                | 171 |

# Symbolverzeichnis

Vektoren und Tensoren werden in Fettdruck dargestellt, wobei in einigen Fällen unterschiedliche Größen mit demselben Symbol bezeichnet sind.

## Abkürzungen

|     |                               |
|-----|-------------------------------|
| ASE | Assumed Strain Element        |
| CFD | Computational-Fluid-Dynamics  |
| DIN | Deutsche Industrienorm        |
| EC  | Eurocode                      |
| EN  | Europäische Norm              |
| ETK | Einheitstemperaturzeitkurve   |
| FEM | Finite-Elemente-Methode       |
| GD  | Grundlagendokument            |
| MBO | Musterbauordnung              |
| NAD | Nationales Anwendungsdokument |
| TRB | Thermische Randbedingungen    |

## Sicherheitstheorie

|                 |  |
|-----------------|--|
| $()_k$          | charakteristischer Wert  |
| $()_d$          | Bemessungswert, Designwert   |
| $A_d(t)$        | indirekte Einwirkungen   |
| $E$             | Einwirkung, Beanspruchung  |
| $E_d$           | Bemessungswert der maßgebenden Beanspruchung aus der Grundkombination nach EN 1990 bzw. DIN 1055-100 |
| $E_{fi,d,t}$    | Bemessungswert der maßgebenden Beanspruchung im Brandfall zum Zeitpunkt t                            |
| $f_R, f_E, f_Z$ | Verteilungsdichte  |
| $m_E$           | Mittelwert der Beanspruchungen $E_i$   |
| $m_R$           | Mittelwert der Beanspruchbarkeiten $R_i$   |
| $R$             | Widerstand, Beanspruchbarkeit  |
| $R_d$           | Bemessungswert der Tragfähigkeit bei Raumtemperatur  |
| $R_{fi,d,t}$    | Bemessungswert der Tragfähigkeit im Brandfall zum Zeitpunkt t  |
| $Z$             | Sicherheitsabstand   |
| $X_i$           | Zufallsgrößen  |
| $\beta$         | Sicherheitsindex   |

|                 |  |
|-----------------|--|
| $\gamma$        | allgemeiner Teilsicherheitsbeiwert   |
| $\gamma_F$      | Teilsicherheitsbeiwert für Einwirkungen  |
| $\gamma_G$      | Teilsicherheitsbeiwert für ständige Einwirkungen   |
| $\gamma_{GA}$   | Teilsicherheitsbeiwert für ständige Einwirkungen bei außergewöhnlichen Bemessungssituationen                     |
| $\gamma_M$      | Teilsicherheitsbeiwert für eine Bauteileigenschaft bei Raumtemperatur  |
| $\gamma_{M,fi}$ | Teilsicherheitsbeiwert für eine Bauteileigenschaft im Brandfall  |
| $\gamma_P$      | Teilsicherheitsbeiwert für Einwirkungen aus Vorspannkräften  |
| $\gamma_{PA}$   | Teilsicherheitsbeiwert für Einwirkungen aus Vorspannkräften bei außergewöhnlichen Bemessungssituationen          |
| $\gamma_Q$      | Teilsicherheitsbeiwert für veränderliche Einwirkungen  |
| $\gamma_{Q,i}$  | Teilsicherheitsbeiwert für eine veränderliche Einwirkung $Q_i$   |
| $\gamma_c$      | Teilsicherheitsbeiwert für Beton bei Raumtemperatur  |
| $\gamma_{c,fi}$ | Teilsicherheitsbeiwert für Beton im Brandfall  |
| $\gamma_s$      | Teilsicherheitsbeiwert für Betonstahl bei Raumtemperatur   |
| $\gamma_{s,fi}$ | Teilsicherheitsbeiwert für Betonstahl im Brandfall   |
| $\eta$          | globaler Abminderungsfaktor zur Bestimmung der Einwirkungen im Brandfall aus den Einwirkungen bei Raumtemperatur |
| $\psi_0$        | Beiwert für Kombinationswerte veränderlicher Einwirkungen  |
| $\psi_1$        | Beiwert für häufige Werte veränderlicher Einwirkungen  |
| $\psi_2$        | Beiwert für quasi-ständige veränderliche Einwirkungen  |
| $P$             | Bemessungspunkt  |
| $P_f$           | Versagenswahrscheinlichkeit  |
| $P_S$           | Überlebenswahrscheinlichkeit   |
| $g$             | Grenzzustandsfunktion  |
| $\Phi$          | standardisierte Normalverteilung   |
| $\beta$         | Zuverlässigkeitsindex  |
| $\sigma_X$      | Standardabweichung für X   |
| $m_X$           | Mittelwert für X   |
| $\alpha_E$      | Wichtungsfaktor nach FORM für die Einwirkungsseite   |
| $\alpha_R$      | Wichtungsfaktor nach FORM für die Widerstandsseite   |
| $\nu_E, \nu_R$  | Variationskoeffizienten  |
| $\nu_0$         | zentraler Sicherheitsfaktor  |
| $\eta_{fi}$     | Reduktionsfaktor   |

### Thermische Analyse

|                |                                     |
|----------------|-------------------------------------|
| $A$            | Grenzfläche                         |
| $B_\theta$     | Bilanzgleichung des Wärmehaushaltes |
| $C_{12}$       | Strahlungsaustauschkoeffizient      |
| $c(\theta)$    | temperaturabhängige Wärmekapazität  |
| $c_{eff}$      | effektive Wärmekapazität            |
| $\mathbf{I}$   | Einheitsmatrix                      |
| $\mathbf{K}$   | Matrix der Konvektionsanteile       |
| $\mathbf{k}_t$ | Vektor der Konvektion               |

|                      |  |
|----------------------|--|
| $L$                  | Matrix der Wärmeleitung                  |
| $l$                  | Vektor der Wärmeleitung                  |
| $N$                  | Vektor der Ansatzfunktionen              |
| $\dot{q}$            | Wärmestromdichte                         |
| $\dot{q}_e$          | spezifische Abstrahlung                  |
| $Q$                  | Wärmeenergie                             |
| $Q_L$                | latente Wärme                            |
| $Q$                  | Wärmesenke bzw. -quelle                  |
| $q_t$                | Vektor der Wärmequellen                  |
| $R$                  | Matrix der Wärmerandströme               |
| $r_t$                | Vektor der Randströme                    |
| $S$                  | Matrix der Strahlungsanteile             |
| $s_t$                | Vektor der Strahlung                     |
| $t$                  | Zeitvariable                             |
| $\Delta t$           | Zeitspanne                               |
| $U$                  | innere Energie                           |
| $V$                  | Volumen                                  |
| $W$                  | mechanische Arbeitsenergie               |
| $W$                  | Matrix der Wärmespeicherterm             |
| $w$                  | Vektor der Wärmespeicherung              |
| $X$                  | räumliche Koordinaten                    |
| $\alpha$             | Absorptionsgrad                          |
| $\alpha_c$           | konvektiver Wärmeübergangskoeffizient    |
| $\varepsilon$        | Emissionsgrad                            |
| $\Gamma$             | Rand                                     |
| $\lambda$            | Wärmeleitfähigkeit                       |
| $\lambda$            | Wärmeleitfähigkeitsmatrix                |
| $\Omega$             | Gebiet                                   |
| $\Psi$               | Wichtungsfunktion                        |
| $\Psi_A$             | Strahlungsleistungsanteil der Absorption |
| $\Psi_E$             | Strahlungsleistung                       |
| $\Psi_R$             | Strahlungsleistungsanteil der Reflexion  |
| $\phi_{12}$          | Einstrahlzahl                            |
| $\varrho(\vartheta)$ | temperaturabhängige Rohdichte            |
| $\rho$               | Reflexionsgrad                           |
| $\sigma$             | STEFAN-BOLZMANN Konstante                |
| $\tau$               | Transmissionsgrad                        |
| $\theta$             | Temperatur                               |
| $\theta_r$           | wirksame Temperatur eines Brandes        |
| $\theta_m$           | Oberflächentemperatur des Bauteils       |
| $\theta_{So}$        | Solidustemperatur                        |
| $\theta_{Li}$        | Liquidustemperatur                       |

## Materialmodellierung

|  |   |
|--|---|
| $\mathbf{C}$                                     | Materialmatrix  |
| $E_c$  | Elastizitätsmodul von Beton   |
| $E_{c0}$   | Tangentenelastizitätsmodul von Beton  |
| $E_{c0,\theta}$                                  | Tangentenelastizitätsmodul von Beton in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$  |
| $E_{cs}$   | Sekantenelastizitätsmodul von Beton   |
| $E_{c,\theta}$                                   | Elastizitätsmodul von Beton in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$   |
| $E_i$  | Elastizitätsmodul in i-Richtung   |
| $E_s$  | Elastizitätsmodul von Betonstahl  |
| $f_c$  | Betondruckfestigkeit  |
| $f_{c,\theta}$                                   | Betondruckfestigkeit in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$  |
| $f_{ct}$   | Betonzugfestigkeit  |
| $f_{ct,\theta}$                                  | Betonzugfestigkeit in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$  |
| $f_{ctm}$  | mittlere Betonzugfestigkeit   |
| $f_{ct,fl}$                                      | Biegezugfestigkeit von Beton  |
| $f_{ct,sp}$                                      | Spaltzugfestigkeit von Beton  |
| $f_{cR,\theta}$                                  | Restdruckfestigkeit von Beton in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$   |
| $f_{py}$   | Proportionalitätsgrenze von Betonstahl  |
| $f_{sy}$   | Fließspannung von Betonstahl  |
| $f_{su}$   | Bruchspannung von Betonstahl  |
| $G$  | Schubmodul  |
| $h_b, h_0$                                       | Beton-, Bezugshöhe  |
| $k_c(\theta)$                                    | Abminderungsfaktor für die Druckfestigkeit von Beton in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$                              |
| $k_{ct}(\theta)$                                 | Abminderungsfaktor für die Zugfestigkeit von Beton in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$                                |
| $k_{sy}(\theta), k_{sp}(\theta), k_{sE}(\theta)$ | Abminderungsfaktoren für die Festigkeit und Verformungseigenschaft von Betonstahl in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$ |
| $\mathbf{T}$                                     | Transformationsmatrix   |
| $\alpha_{fl}$                                    | bruchmechanisch motivierter Faktor  |
| $\alpha_T$                                       | Wärmeausdehnungskoeffizient   |
| $\alpha_T(\theta)$                               | Wärmeausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$   |
| $\varepsilon_{ic}$                               | äquivalente einaxiale Dehnung von Beton zur maximalen Druckspannung in i-Richtung   |
| $\varepsilon_{iu}$                               | äquivalente einaxiale Dehnung von Beton in i-Richtung   |
| $\varepsilon_{c,t}^{in}$                         | instantane Dehnungen von Beton  |
| $\varepsilon_{c,t}^e$                            | elastische Dehnung von Beton  |
| $\varepsilon_{c,t}^p$                            | plastische Dehnung von Beton  |
| $\varepsilon_{c,t}^{cr,fi}$                      | Dehnung von Beton infolge Kriechen im Hochtemperaturbereich   |
| $\varepsilon_{c,t}^{sh}$                         | Dehnung von Beton infolge Schwinden   |
| $\varepsilon_{c,t}^T$                            | Dehnung von Beton infolge thermischer Einwirkungen  |
| $\varepsilon_{c,t}^{th}$                         | thermische Dehnung von Beton  |
| $\varepsilon_{c,t}^{tot}$                        | Gesamtdehnungen von Beton   |



|                            |   |
|----------------------------|---|
| $\varepsilon_{c,t}^{tr}$   | transiente Dehnungen von Beton  |
| $\varepsilon_{a,\theta}$   | Dehnung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Betonstahl in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$   |
| $\varepsilon_{c,\theta}$   | Dehnung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton im Druckbereich in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$                                  |
| $\varepsilon_{c1}$         | Dehnung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton im Druckbereich bei der maximalen Spannung $f_c$   |
| $\varepsilon_{c1,\theta}$  | Dehnung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton im Druckbereich in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$ bei max. Spannung $f_{c,\theta}$ |
| $\varepsilon_{ct}$         | Dehnung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton im Zugbereich bei der maximalen Spannung $f_{ct}$  |
| $\varepsilon_{cu1}$        | rechnerische Bruchdehnung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton im Druckbereich  |
| $\varepsilon_{cu1,\theta}$ | rechnerische Bruchdehnung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton im Druckbereich in Abhängigkeit der Temperatur $\theta$                |
| $\varepsilon_{s,t}^{th}$   | thermische Dehnungen von Betonstahl   |
| $\varepsilon_{sp}$         | Dehnung von Betonstahl an der Proportionalitätsgrenze   |
| $\varepsilon_{st}$         | Dehnung von Betonstahl zum Ende der Fließgrenze   |
| $\varepsilon_{su}$         | Bruchdehnung von Betonstahl   |
| $\varepsilon_{sy}$         | Dehnung von Betonstahl zu Beginn der Fließgrenze  |
| $\gamma_{12}$              | Schubverzerrung   |
| $\nu$                      | Querdehnzahl  |
| $\tau_{12}$                | Schubspannung   |
| $\sigma_i$                 | Betonspannung in i-Richtung   |
| $\sigma_{ic}$              | maximale Druckspannung in i-Richtung  |
| $\sigma_s$                 | Betonstahlspannung  |

## Kontinuumsmechanik und Schalentheorie

|                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| $(\cdot)^{ZV}; (\cdot)_{ZV}$         | Zeitvariant  |
| $dA, da$                             | materielles und räumliches Flächenelement der Schalenmittelfläche              |
| $A$                                  | Metrikdeterminante   |
| $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_T$       | Referenzfläche im Referenz- und Momentanzustand                                |
| $\mathbf{A}_i, \mathbf{a}_i$         | kovariante Basisvektoren der unverformten und verformten Schalenmittelfläche   |
| $A_{\alpha\beta}, A^{\alpha\beta}$   | ko- und kontravariante Metrikoeffizienten der Schalenmittelfläche              |
| $\mathcal{B}_{t_0}, \mathcal{B}_t$   | Körper im Referenz- und Momentanzustand  |
| $B_{\alpha\beta}, B_\alpha^\beta$    | ko- und gemischtvariante Komponenten des Krümmungstensors                      |
| $\mathbf{C}, \mathbf{b}$             | rechter und linker CAUCHY-GREEN-Tensor   |
| $\mathbf{c}, \boldsymbol{\omega}$    | Flächenmomentenvektor und Rotationsvektor                                      |
| $\mathbf{D}, \mathbf{d}$             | Direktor der unverformten und verformten Schalenmittelfläche mit Einheitslänge |
| $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{S}}$ | materieller 2D-Verzerrungstensor und materielle 2D-Schnittgrößen               |
| $\mathbf{e}_i$                       | Basisvektoren eines orthonormierten Ortskoordinatensystems                     |
| $\mathbb{E}^3$                       | EUKLID'scher Vektorraum  |

|  |  |
|--|--|
| $\mathbf{F}$   | materieller Deformationsgradient   |
| $G, g$   | Determinante des materiellen und räumlichen Metrikensors                   |
| $\mathbf{G}, \mathbf{g}$   | materieller und räumlicher Metrikensor                                     |
| $G_{ij}, g_{ij}$   | kovariante Metrikkoeffizienten des materiellen und räumlichen Metrikensors |
| $\mathbf{G}_i, \mathbf{g}_i$   | kovariante Basisvektoren der materiellen und räumlichen Metrik             |
| $H$  | Höhe des Schalenkontinuums   |
| $H^{\alpha\beta\rho\lambda}$   | zweidimensionaler elastischer Werkstofftensor                              |
| $J$  | JACOBI-Determinante  |
| $M^{\alpha\beta}$  | Momententensor   |
| $m_0, m$   | Masse eines Körpers in der Referenz- und Momentankonfiguration             |
| $\mathbf{N}, \mathbf{n}$   | Normaleneinheitsvektor in der Referenz- und Momentankonfiguration          |
| $N^{\alpha\beta}, \tilde{N}^{\alpha\beta}$                             | Normalkraft- und Pseudo-Normalkrafttensor                                  |
| $\mathbf{n}^{\langle\alpha\rangle}, \mathbf{m}^{\langle\alpha\rangle}$ | Schnittgrößenvektoren  |
| $\mathcal{P}$  | Punkt des EUKLID'schen Raums   |
| $\mathbf{P}, \mathbf{S}$   | 1. und 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor                                  |
| $Q^\alpha, \tilde{Q}^{\alpha\beta}$                                    | Querkraft- und Pseudo-Querkrafttensor                                      |
| $\mathbf{T}, \mathbf{t}$   | Pseudo-Spannungs- und Spannungsvektor                                      |
| $\Delta T_N, \Delta T_M$   | konstante und lineare Temperaturdifferenz                                  |
| $\mathbf{u}, \mathbf{v}$   | Verschiebungs- und Geschwindigkeitsvektor                                  |
| $\mathbf{U}, \mathbf{v}$   | Rechts- und Links-Streck-Tensor  |
| $dV, dv$   | materielles und räumliches Volumenelement                                  |
| $\delta_{int}^W, \delta_{ext}^W$                                       | innere und äußere virtuelle Arbeit   |
| $X^i, x^i$   | Ortskoordinaten der Referenz- und Momentankonfiguration                    |
| $\mathbf{X}, \mathbf{x}$   | Ortsvektor der unverformten und verformten Schale                          |
| $\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{x}^{(0)}$                                   | Ortsvektor der unverformten und verformten Schalenmittelfläche             |
| $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}$                                   | Direktor der unverformten und verformten Schalenmittelfläche               |
| $\mathbf{X}, \mathbf{x}$   | Ortsvektor der Referenz- und Momentankonfiguration                         |
| $\mathbf{Z}, \mathbf{z}$   | materieller und räumlicher Schalenshifter                                  |
| $\alpha_{\alpha\beta}, \beta_{\alpha\beta}$                            | 1. und 2. Verzerrungstensor  |
| $\Gamma_0, \Gamma_T$   | Rand eines Körpers im Referenz- und Momentanzustand                        |
| $\gamma_\alpha$  | Schubverzerrungstensor   |
| $\theta^\alpha$  | krummlinige Koordinaten der Schalenmittelfläche                            |
| $\theta^3$   | Dickenkoordinate des Schalenkontinuums                                     |
| $\theta^i$   | krummlinige (Teilchen-) Koordinaten  |
| $\varrho_0, \varrho$   | Dichte eines Körpers in der Referenz- und Momentankonfiguration            |
| $\sigma$   | CAUCHY'scher Spannungsvektor   |
| $\varphi$  | Deformation  |
| $\xi^i$  | normierte Koordinaten  |
| $\Psi_\alpha, \psi_\alpha$   | EULER-Winkel der unverformten und verformten Konfiguration                 |

Hier nicht aufgeführte Größen sind im Text näher definiert. Es gilt die Vorzeichenkonvention der Strukturmechanik: Zug ist positiv.

Die Angabe von Dezimalstellen erfolgt mit einem Punkt statt mit einem Komma.

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Einführung in die Problemstellung

Bei der Errichtung bzw. bei der Sanierung eines Bauwerks spielte der Brandschutz bis Ende der 90er Jahre eine eher untergeordnete Rolle. Erst die Brandkatastrophen wie z.B. der Brand im Eurotunnel oder der Brand des Düsseldorfer Flughafens (beide im Jahre 1996) forderten in erhöhtem Maße prophylaktische aktive und passive Brandschutzmaßnahmen. Allein in Nordrhein-Westfalen kam es im Jahre 2008 zu ca. 1200 Großbränden, 4300 Mittelbränden und 35000 Kleinbränden [MIK-NRW 2009]. Diese hohe Anzahl an Brandunfällen spiegelt sich auch in der Statistik der Versagensursachen bei schweren Schäden an Baukonstruktionen wider. Schwere Schäden, die auch zum Einsturz der Gebäude führten, sind zu 90 % auf Brandereignisse zurückzuführen. Alterung, Fahrlässigkeit beim Bau oder Naturkatastrophen spielen mit den verbleibenden 10 % eine eher untergeordnete Rolle.

Erst als die Öffentlichkeit durch solche Großschadensfälle auf die Gefahren von Bränden aufmerksam wurde, ist die Forderung, wesentliche tragende Bauteile einer gesicherten Feuerwiderstandsdauer zuzuordnen, intensiver geworden. Diese Problematik ist in der Fachwelt bereits in den frühen 70er Jahren zum erklärten Forschungsthema geworden. Stellvertretend für viele Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Baustoff- und Bauteilverhaltens bei einem Brand sind die grundlegenden Arbeiten des Sonderforschungsbereiches 148 "Brandverhalten von Bauteilen" an der TU Braunschweig genannt.

### 1.2 Motivation und Zielsetzung

Das Ziel, bei einem Brandereignis gefährdete Personen zu evakuieren und dabei die Rettungsmannschaften keiner großen Gefahr auszusetzen, ist die gesicherte Gewährleistung der Tragfähigkeit eines Gebäudes für einen fest definierten Zeitraum unabdingbar. Im Vergleich zu den Bauweisen aus Stahl bzw. Holz ist Stahlbeton im Bezug auf das Verhalten im Brandfall recht vorteilhaft. Der Feuerwiderstand von Stahlbetonbauteilen kann mit Brandversuchen ermittelt werden, die allerdings oft sehr kostenintensiv sind und kaum

Spielraum für Parameterstudien lassen, damit eine wirtschaftliche Bauweise zur Anwendung kommen kann.

Im Zuge der rasant ansteigenden Rechnerleistungen moderner Computersysteme ist die Forderung nach Simulationsprogrammen immer größer geworden. Unterstützt wird dies durch die Neugestaltung der Sicherheitsphilosophie der nationalen und europäischen Normen, worin neben Tabellenverfahren (Level 1) und Vereinfachten Berechnungsmethoden (Level 2) den Allgemeinen Rechenverfahren (Level 3) eine große Bedeutung zugewiesen wird. In den letzten Jahren ist die numerische Abbildung von linienartigen Bauteilen (Balken und Stützen) intensiv untersucht worden, was sich auch in den vorhandenen Rechenvorschriften in Form der vereinfachten Verfahren widerspiegelt, die dem planenden Ingenieur eine gewisse Freiheit gegenüber dem standardisierten Tabellenverfahren eröffnen [Welsh 2001],[Mihajlov 2009],[Harte, Mihajlov & Montag 2010].

Auf dem Gebiet der flächenartigen Bauteile aus Stahlbeton gibt es dahingegen wenig Arbeiten, die sich mit der numerischen Modellierung von Systemen im Brandfall beschäftigt haben. Selbst die DIN EN 1992-1-2 (2010) gibt lediglich ein Tabellenverfahren zur Einstufung von reinen Stahlbetondecken vor und schließt in Abschnitt 1.1.2 (4) die Behandlung von Deckentragwerken mit externer Vorspannung und Schalentragwerken aus. Damit zukünftig auch flächenartige Tragwerke einer allgemeinen brandschutztechnischen Bemessung unterzogen werden können, entstand die Motivation zu der vorliegenden Arbeit. Zielstellung ist es, eine ganzheitliche Simulation mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode bei Decken- und insbesondere bei Schalentragwerken zu ermöglichen.

Mit dem vorliegenden numerischen Berechnungsverfahren wird die Möglichkeit geschaffen, das Trag- und Verformungsverhalten von flächenartigen Tragwerken während eines Brandes infolge der eintretenden nichtlinearen, hochtemperaturbedingten Materialveränderungen zu analysieren und zu bewerten. Neben den normativ vorgegebenen Brandszenarien wird die Möglichkeit zur Berücksichtigung parametrischer Brandkurven und Naturbränden gegeben. Dies führt dazu, dass auch Gebäude im Bestand untersucht werden können, die Bauteile enthalten, die nur schwer oder gar nicht einer Feuerwiderstandsklasse mit standardisierten Werten zuzuordnen sind.

### 1.3 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich neben diesem Kapitel 1 in weitere 8 Kapitel, deren Inhalte kurz zusammengefasst werden.

- Das *Kapitel 2* beschäftigt sich mit den allgemeinen Grundlagen der brandschutztechnischen Bemessung. Es werden rechtliche Grundlagen aufgezeigt, aus denen dann ein Sicherheitskonzept abgeleitet wird. Normative Bemessungsgrundlagen, wie mechanische und thermische Einwirkungen, werden definiert. Die Definition verschiedener Nachweisverfahren zur Gewährleistung des statisch-konstruktiven Brandschutzes vervollständigen die Grundlagen.
- In *Kapitel 3* sind fundamentale Erläuterungen zur thermischen Analyse, insbesondere im Hinblick auf Temperatureinwirkungen infolge eines Brandereignisses, be-

schrieben. Basierend auf den physikalischen Grundlagen werden die Wärmeübertragungsmechanismen erläutert und daraus eine instationäre Wärmebilanzgleichung formuliert, um den Temperaturhaushalt von Stahlbetonflächentragwerken numerisch erfassen zu können. Die Wärmebilanzgleichung wird durch Randbedingungen ergänzt und danach in eine Finite-Element Formulierung überführt. Es erfolgt weiterhin die Formulierung temperaturabhängiger Stoffkennwerte.

- *Kapitel 4* beinhaltet die phänomenologische Beschreibung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton. Dabei werden Beton und Betonstahl sowohl bei normalen als auch bei erhöhten Temperaturen differenziert betrachtet. Aufbauend auf den temperaturabhängigen mechanischen Eigenschaften werden die konstitutiven Materialgesetze zur Einbindung in eine Finite-Element-Formulierung aufgestellt und aufbereitet.
- In *Kapitel 5* werden grundlegende kontinuumsmechanische Zusammenhänge zur Beschreibung strukturmechanischer Problemstellungen aufgezeigt. Mit der kontinuumsmechanischen Erläuterung wird die Grundlage für die angewandte Schalentheorie und deren Umsetzung durch Finite-Element-Formulierungen geschaffen.
- *Kapitel 6* beinhaltet die verwendete schalentheoretische numerische Umsetzung und führt in eine Formulierung der Finite-Elemente, woraus das Element ASE4 mit seinen Erweiterungen hervorgeht. Weiterhin wird die Implementierung und die Erweiterung des Finite-Elemente-Programm Systems FEMAS 2000 dargestellt.
- In *Kapitel 7* findet die Validierung der neu eingebundenen temperaturabhängigen Stoffkennwerte und der neu definierten Last-Zeit-Funktionen für die Einwirkung eines Brandes an signifikanten Beispielen aus der Literatur statt. Neben Temperaturfeldberechnungen werden zusätzlich strukturmechanische Berechnungen unter Normaltemperaturen untersucht und validiert. Abschließend werden gekoppelte thermostrukturmechanische Beispiele vorgestellt.
- *Kapitel 8* schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung der wesentlichen Aspekte und Ergebnisse der vorliegenden Arbeit ab. Es wird ein Ausblick auf offene Fragen und dem sich daraus ergebenden weiteren Forschungs- und Entwicklungsbedarf gegeben.



# Kapitel 2

## Allgemeine und theoretische Grundlagen

---

*In diesem Kapitel werden zunächst die gesetzlichen Grundlagen und Rechtsvorschriften des baulichen Brandschutzes in Deutschland dargestellt. Aus diesen Vorschriften werden Anforderungen an die tragenden Bauteile bezüglich des Feuerwiderstandes definiert. Um diese Anforderungen zu gewährleisten, werden Bemessungsmethoden aufbauend auf den Brandschutzteilen des Eurocodes kurz vorgestellt. Nach der normativen Einordnung wird das zugrundeliegende Sicherheitskonzept zur Bemessung von Bauteilen nach Eurocode erörtert. Weiterhin werden die thermischen Einwirkungen infolge eines Brandereignisses und deren Modellierungsmöglichkeiten aufgezeigt.*

---

### 2.1 Rechtliche Grundlagen zum Brandschutz

Mit der Verabschiedung der Bauproduktenrichtlinie (BPR) 89/106/EWG durch die Europäische Gemeinschaft wurde u.a. der Grundstein für einheitliche harmonisierende bautechnische Regelungen gelegt. Artikel 3 der BPR definiert die wesentlichen Anforderungen hinsichtlich folgender Schwerpunkte:

- Mechanische Festigkeit und Standsicherheit
- Brandschutz
- Hygiene, Gesundheit und Umweltschutz
- Nutzungssicherheit
- Schallschutz
- Energieeinsparung und Wärmeschutz

Zu jeder der aufgeführten Anforderung wurde jeweils ein Grundlagendokument veröffentlicht, welches die maßgebenden Kriterien zur Erfüllung jener Anforderung bereitstellt. Im Speziellen wurde für den Brandschutz das Grundlagendokument 2 (GD2) veröffentlicht. Die Umsetzung in Nationales Recht erfolgte in Deutschland Anfang der 90er Jahre mit dem Bauproduktengesetz (BauPG). Die darin verankerten nationalen Regelungen sind mittlerweile durch die Musterbauordnung (MBO) veröffentlicht und an die Länder zur Aufnahme in die jeweiligen Landesbauordnungen weitergeleitet. Auf Grundlage der BPR und dem GD2 sind verschiedene technische Regelungen erarbeitet worden. Im europäischen Komitee für Normung (CEN) wurden Mandate erteilt, um harmonisierte europäische Normen für Prüfung, Bewertung und Klassifizierung von Bauprodukten zu entwickeln, welche als Vornormen (DIN V ENV) zusammen mit dem jeweils zugehörigen Nationalen Anwendungsdokument (NAD) in Deutschland bauaufsichtlich eingeführt sind. Zwischenzeitlich sind diese Vornormen überarbeitet und liegen auf europäischer Ebene als EN-Normen vor. In Deutschland sind die endgültigen Normen als DIN EN-Norm mit zugehörigem Nationalen Anhang veröffentlicht und warten auf ihre bauaufsichtliche Einführung, die am 01.07.2012 erfolgen soll. Die Grundanforderung des Brandschutzes §14 MBO lautet:

*„Bauliche Anlagen sind so anzuordnen, zu errichten, zu ändern und instand zu halten, dass der Entstehung eines Brandes und der Ausbreitung von Feuer und Rauch (Brandausbreitung) vorgebeugt wird und bei einem Brand die Rettung von Menschen und Tieren sowie wirksame Löscharbeiten möglich sind“.*

Dies wird in Deutschland bei Standardbauten (z.B. Wohngebäude bis 1600 m<sup>2</sup>) durch materielle Anforderungen der jeweiligen Landesbauordnungen, den eingeführten technischen Baubestimmungen und den Verwaltungsvorschriften mit bauaufsichtlichen Richtlinien erfüllt. Gesonderte Verordnungen existieren für Sonderbauten wie z.B. für Hochhäuser und Industriebauten in Form länderspezifischer Baubestimmungen.

Für die Tragfähigkeit eines Bauwerks müssen im Brandfall folgende außerordentliche Anforderungen gemäß GD2 erfüllt sein:

- Erhalten der Tragfähigkeit für einen bestimmten Zeitraum
- Begrenzen der Entstehung und Ausbreitung von Feuer und Rauch
- Begrenzen der Ausbreitung von Feuer auf benachbarte Bauwerke
- Sicherstellen der Evakuierung von Bewohnern
- Sicherheit der Rettungsmannschaften

Den Schwerpunkt der Untersuchungen in dieser Arbeit bildet vor allem Punkt 1 der o.g. fünf Brandschutzziele, die Erhaltung der Tragfähigkeit bzw. Standsicherheit für einen vordefinierten Zeitraum. Um diese Bedingungen zu erfüllen, muss der Tragwerksplaner bei den konstruktiven Nachweisen des Brandschutzes alle lastabtragenden Bauteile wie z.B. Wände, Decken, Dächer, Stützen, Zugglieder und Balken betrachten. Als Vorgabe werden im GD2 Leistungskriterien bzw. in der DIN EN 13501-1 (2007) Klassifizierungskriterien an tragende und nichttragende Bauteile definiert. Tabelle 2.1 enthält einen Auszug über diese Kriterien und ihre Bezeichnungen.



| Kurzzeichen | Herleitung        | Kriterium                          |
|-------------|-------------------|------------------------------------|
| R           | Résistance        | Tragfähigkeit                      |
| E           | Étanchéité        | Raumabschluss                      |
| I           | Insulation        | Wärmedämmung unter Brandeinwirkung |
| W           | Radiation         | Strahlungsdurchtritt               |
| M           | Mechanical action | Mechanische Einwirkung auf Wände   |

**Tabelle 2.1:** Beispiele für Klassifizierungs- bzw. Leistungskriterien

Aus diesen Leistungskriterien sind für die Beschreibung der Feuerwiderstandsdauer die folgenden 3 Hauptkriterien maßgebend und wurden dementsprechend auch in der Normung detaillierter definiert.

Die **Tragfähigkeit R** im Bereich des Brandschutzes ist definiert als die Fähigkeit eines Bauteils oder Tragsystems bei vorhandenen mechanischen Einwirkungen einer eintretenden Brandbeanspruchung für eine festgelegte Zeitdauer ohne Verlust der Standsicherheit zu widerstehen.

Der **Raumabschluss E** beschreibt die Fähigkeit eines raumabschließenden Bauteils, einer einseitigen Brandbeanspruchung ohne Übertragung signifikanter Mengen Flammen oder Gase zu widerstehen, sodass keine Brandentstehung bzw. Ausbreitung auf der dem Feuer abgewandten Seite eintreten kann.

Die **Wärmedämmung I** impliziert analog zum Raumabschluss E die Fähigkeit eines Bauteils, einer einseitigen Brandbeanspruchung zu widerstehen, ohne dass eine signifikante Wärmeübertragung die Auslösung eines Brandes auf der dem Feuer abgewandten Seite des Bauteils stattfinden kann.

Die Festlegung des Feuerwiderstandes eines Bauproduktes erfolgt durch Angabe der Hauptkriterien wie Tragfähigkeit (R), Raumabschluss (E) und Wärmedämmung (I) sowie Angabe der gewünschten Dauer des Feuerwiderstandes bei einer ETK-Beanspruchung in Minuten. Beispiele für die Zuordnung von Feuerwiderstandsklassen von Bauteilen sind in Tabelle 2.2 angegeben.

| Baufsichtliche Anforderung | ohne Raumabschluss | mit Raumabschluss | Nichttragende Innenwände |
|----------------------------|--------------------|-------------------|--------------------------|
| feuerhemmend               | R 30               | REI 30            | EI 30                    |
| hochfeuerhemmend           | R 60               | REI 60            | EI 60                    |
| feuerbeständig             | R 90               | REI 90            | EI 90                    |
| Feuerwiderstand 120 Min    | R 120              | REI 120           | -                        |
| Brandwand                  | R -                | REI 90-M          | EI 90-M                  |

**Tabelle 2.2:** Feuerwiderstandsklassen von Bauteilen nach DIN EN 13501-2 (2008) hinsichtlich der bauaufsichtlichen Anforderungen

Neben den Bauteilklassifizierungen gemäß DIN EN 13501-2 (2008) sind auch Baustoffe durch das GD2 und die DIN EN 13501-1 (2007) infolge ihres Brandverhaltens klassifiziert.

| Euroklasse | Brandverhalten                   | Bauaufsichtliche Anforderung |
|------------|----------------------------------|------------------------------|
| A1         | kein Beitrag z. Brand            | nicht brennbar               |
| A2         | kein Beitrag z. Brand            | nicht brennbar               |
| B          | sehr begrenzter Beitrag z. Brand | schwer entflammbar           |
| C          | begrenzter Beitrag z. Brand      | schwer entflammbar           |
| D          | hinnehmbarer Beitrag z. Brand    | normal entflammbar           |
| E          | hinnehmbares Brandverhalten      | normal entflammbar           |
| F          | keine Leistung festgestellt      | leicht entflammbar           |

**Tabelle 2.3:** Baustoffklassifizierung hinsichtlich ihres Brandverhaltens gemäß DIN EN 13501-1 (2007) und ihrer Zuordnung hinsichtlich der bauaufsichtlichen Benennung

Nach Darstellung rechtlicher Grundlagen und Anforderungen des baulichen Brandschutzes wird im folgenden Abschnitt näher auf die normative Behandlung der Gewährleistung der Sicherheit eines Tragwerks im Brandfall eingegangen.

## 2.2 Sicherheitskonzept

### 2.2.1 Zuverlässigkeitsnachweis im Bauwesen

Zur Vermeidung des Versagens einzelner Bauteile bzw. eines gesamten Tragsystems während und nach einem Brandereignis ist eine brandschutztechnische Bemessung unverzichtbar. Sie soll gewährleisten, dass die durch ein Brandereignis verursachten, gleichzeitig auftretenden thermischen und mechanischen Einwirkungen von den tragenden Bauteilen aufgenommen werden können. Mit absoluter Sicherheit kann ein Versagen allerdings nicht ausgeschlossen werden, da eine zufällige Streuung der Einflussgrößen und Ungenauigkeiten der entwickelten Grenzzustandsmodelle vorhanden sind. Um das verbleibende Restrisiko soweit wie möglich zu minimieren, wird die Bemessung von Bauwerken auf Grundlage von Sicherheitskonzepten durchgeführt, um eine größtmögliche Anzahl von Einflussgrößen zu erfassen.

Die Sicherheit bzw. die Zuverlässigkeit eines Tragwerks kann mit Hilfe der Zuverlässigkeitstheorie bewertet werden, wobei definiert wird, dass die Zuverlässigkeit eine Tragwerkeigenschaft ist, die die Erfüllung einer festgelegten Funktion unter vorgegebenen Bedingungen während einer bestimmten Zeitdauer mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit

gewährleistet. Die Zuverlässigkeit wird in der Literatur oft als Komplement zur Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  bezeichnet und als Überlebenswahrscheinlichkeit  $1 - P_f$  eingeführt [Schneider 1996] [Six 2001]. Die Zuverlässigkeit ist somit mathematisch beschreibbar und wird im Folgenden näher erläutert.

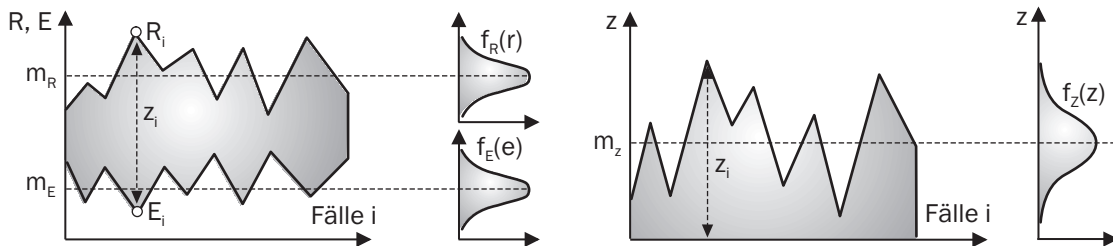
Allgemein erfolgt die Differenzierung zwischen den Beanspruchungen  $E$  und den Widerständen  $R$ . Mit Einführung dieser Variablen als Zufallsvariablen wird das Zuverlässigkeitsproblem

$$Z = g(R, E) = R - E \quad (2.1)$$

formuliert, wobei  $Z$  den Sicherheitsabstand zwischen  $E$  und  $R$  und  $g(R, E)$  die Grenzzustandsgerade beschreibt. Als sicher gilt ein Tragwerk, wenn die Beanspruchung  $E$  kleiner bzw. gleich groß des Widerstandes  $R$  ist, woraus sich die Sicherheitsmarge  $Z$  durch die Gleichung (2.1) für den sicheren Zustand formulieren lässt mit

$$Z = R - E \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad E \leq R. \quad (2.2)$$

Zur Veranschaulichung der Grenzzustandsbedingung gemäß der Gleichungen (2.1) und (2.2) sind in Bild 2.1 (links) schematisch Beanspruchbarkeiten  $R$  und Beanspruchungen  $E$  für eine Anzahl  $i$  als Grenzzustandsbetrachtungen aufgetragen. Die Auswertung gemäß Gleichung (2.2) ist im Bild 2.1 (rechts) dargestellt. Aus den realen Fällen der Anzahl  $i$  ergeben sich vereinfacht statistisch die angegebenen Verteilungsdichten  $f_R$ ,  $f_E$  und  $f_Z$ , die die unabhängigen Zufallsvariablen  $E$ ,  $R$  und  $Z$  abbilden.



**Bild 2.1:** Schematische statistische Verteilungen der Beanspruchbarkeiten  $R$  und der Beanspruchungen  $E$  (links), Grenzzustandsfunktion  $f_z$  (rechts)

Die o.g. Verteilungsdichten werden normalverteilt angenommen. Um die Zuverlässigkeit eines Tragwerks rechnerisch zu gewährleisten, ist nach Bild 2.1 die Verteilungsfunktion  $f_Z$  des Sicherheitsabstandes  $Z$  von Interesse, die durch Faltung der Zufallsvariablen  $E$  und  $R$  gebildet wird und  $Z$  somit ebenfalls als unabhängige Zufallsvariable einführt. Es ergibt sich für ihre Verteilung  $F_Z(z)$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^z f_E(e) \cdot f_R(r) dr de = \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(e) \cdot F_R(z + e) de \quad (2.3)$$

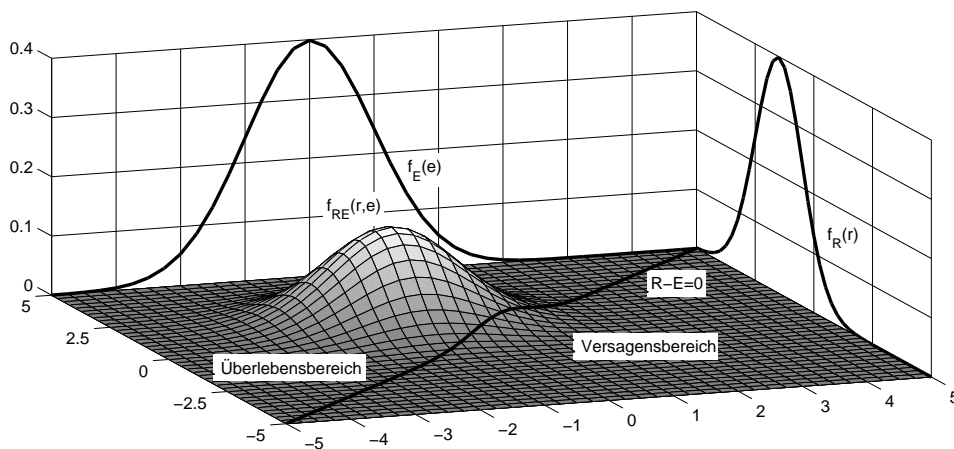
mit der Häufigkeitsverteilung  $F_R(r)$

$$F_R(r) = F_R(z + e) = \int_{-\infty}^z f_R(z + e) dr \quad \text{und} \quad r = z + e, \quad (2.4)$$

wobei  $r, e$  und  $z$  die Realisierungen der Zufallsvariablen repräsentieren. Durch Lösung des Spezialfalls  $z=0$  erhält man die theoretische Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  zu

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{r=e} f_E(e) \cdot f_R(r) dr de = \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(e) \cdot F_R(e) de. \quad (2.5)$$

Bild 2.2 veranschaulicht diesen Sachverhalt, woraus ersichtlich ist, dass die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  dem Volumen der gemeinsamen Verteilungsdichte  $f_{RE}(r, e)$  im Versagensbereich  $R - E < 0$  entspricht.



**Bild 2.2:** Darstellung der Randverteilungsdichten  $f_R(r)$  und  $f_E(e)$  und der daraus resultierenden gemeinsamen Verteilungsdichte  $f_{RE}$

In der Literatur wird oft vom R-E-Modell gesprochen, mit Hilfe dessen ein weiteres Sicherheitsmaß im konstruktiven Ingenieurbau abgeleitet werden kann. Der Sicherheitsindex  $\beta$  ist direkt mit der Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  verknüpft und wird mit

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad (2.6)$$

formuliert, wobei  $\Phi$  die Standardnormalverteilung und  $\Phi^{-1}$  deren Inverse darstellt. Zur Angabe des Sicherheits- oder Zuverlässigkeitsindex  $\beta$  stehen eine Vielzahl von Lösungsverfahren zur Verfügung. Die Beziehung zwischen dem Sicherheitsindex  $\beta$  und der Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  ist in Tabelle 2.4 angegeben.

|         |           |           |           |           |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\beta$ | 5.20      | 4.75      | 4.27      | 3.72      | 3.09      | 2.32      | 1.28      |
| $P_f$   | $10^{-7}$ | $10^{-6}$ | $10^{-5}$ | $10^{-4}$ | $10^{-3}$ | $10^{-2}$ | $10^{-1}$ |

**Tabelle 2.4:** Beziehung zwischen dem Sicherheitsindex  $\beta$  und der operativen Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  DIN EN 1990 (2010)

In dieser Arbeit soll beispielhaft ein Näherungsverfahren vorgestellt werden, das auf der Zuverlässigkeitstheorie I. Ordnung basiert. Weitere Verfahren sind u.a. in Spaethe (1992) und Klingmüller & Bourgund (1992) zu finden.

Nach der Zuverlässigkeitstheorie I. Ordnung (First Order Reliability Method FORM) müssen zunächst alle Zufallsgrößen  $X_i$  in standardisierte normalverteilte Zufallsgrößen  $Y_i$  transformiert werden. Es ergeben sich die transformierten Zufallsgrößen für die Beanspruchung  $E$  und Beanspruchbarkeit  $R$  zu

$$\tilde{R} = \frac{R - m_R}{\sigma_R} \quad \text{und} \quad \tilde{E} = \frac{E - m_E}{\sigma_E}. \quad (2.7)$$

Durch Einsetzen von (2.7) in (2.2) wird die Grenzzustandsfunktion im Standardnormalraum umgeschrieben und es ergibt sich:

$$Z = g(\tilde{R}, \tilde{E}) = \tilde{R} \cdot \sigma_R - \tilde{E} \cdot \sigma_E + m_R - m_E = 0. \quad (2.8)$$

Eine Transformation in die *Hesse'sche* Normalform führt zu

$$Z = -\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \cdot \tilde{R} + \frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \cdot \tilde{E} - \frac{m_R - m_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = 0. \quad (2.9)$$

Substituiert man in (2.9) den Sicherheitsindex

$$\beta = \frac{m_R - m_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \quad (2.10)$$

und die Wichtungsfaktoren

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \cos\Psi_R \quad \text{und} \quad \alpha_E = \frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \cos\Psi_E, \quad (2.11)$$

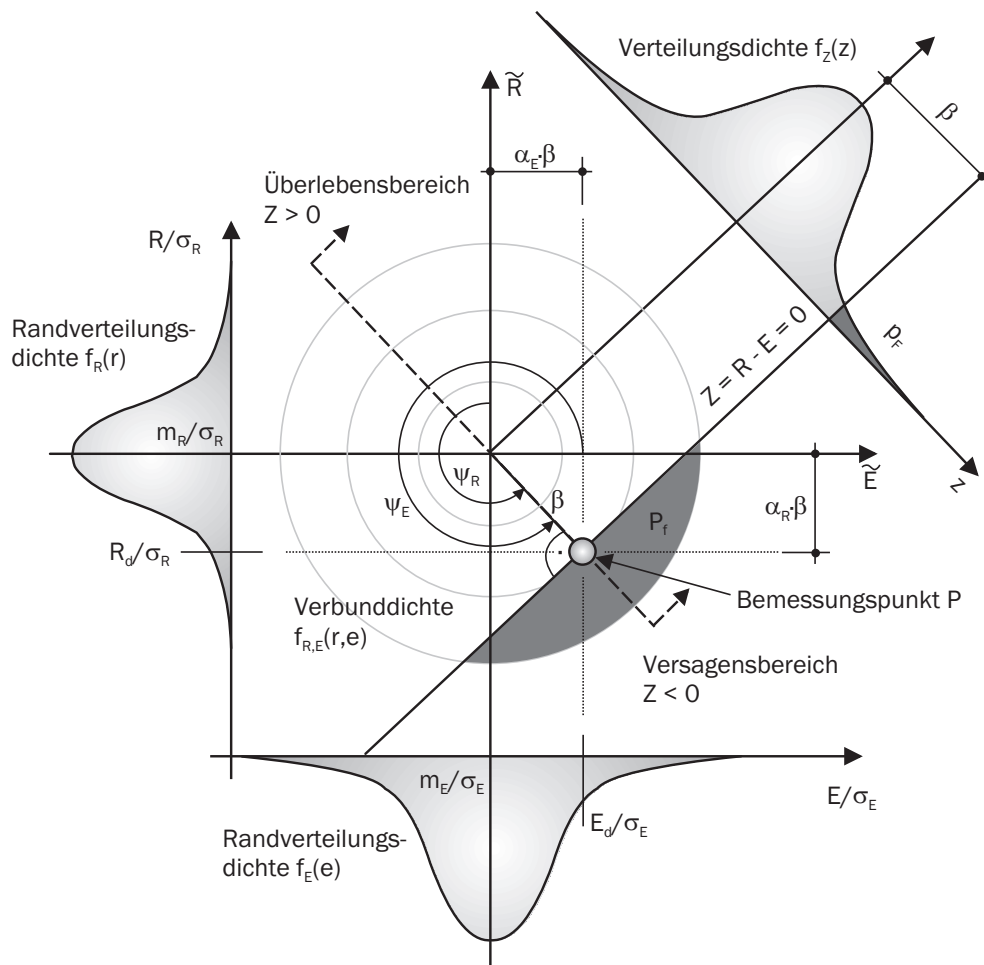
so ergibt sich für  $Z$  im Standardnormalraum die kompakte Schreibweise

$$Z = \alpha_E \cdot \tilde{E} - \alpha_R \cdot \tilde{R} - \beta = 0, \quad (2.12)$$

wobei  $\beta$  den kürzesten Abstand der Grenzzustandsgeraden zum Ursprung des Standardnormalraumes repräsentiert.

Die Sensitivitäts- bzw. Wichtungsfaktoren  $\alpha_i$  stellen den Richtungs-cosinus der Normalen auf die Grenzzustandsgerade dar. Bedingt durch die vorhandene Rotations-symmetrie der Verteilungsdichte im Standardnormalraum wird das zweidimensionale Problem in ein ein-dimensionales reduziert. Das Koordinatensystem wird dabei um den Winkel  $\Psi_E$  gedreht, sodass das neue Koordinatensystem parallel bzw. senkrecht zur Grenzzustandsgeraden entsteht. Diese Zusammenhänge sind im Bild 2.3 dargestellt und es ist zu erkennen, dass bei Realisierungen größer  $\beta$  ein Versagen eintreten kann. Des Weiteren ist hier die enge Verknüpfung gemäß Gleichung (2.6) zwischen dem Sicherheitsindex  $\beta$  und der Versagens-wahrscheinlichkeit  $P_f$  zu erkennen.

In Bild 2.3 ist der Bemessungspunkt  $P$  markiert, der sich als Lotfußpunkt auf der Grenzzustandsgeraden bildet und die Eigenschaft besitzt, der Versagenspunkt mit der größten



**Bild 2.3:** Wahrscheinlichkeitsdichte der Beanspruchung  $E$  und der Beanspruchbarkeit  $R$  im standardisierten Raum mit Grenzzustandsgerade sowie Zuverlässigkeitsindex  $\beta$  [Braml, Fischer, Keuser & Schnell 2009]

Wahrscheinlichkeitsdichte zu sein. Die Bereiche des Versagens  $Z < 0$  und der Sicherheit  $Z > 0$  werden durch den Sonderfall  $Z = R - E = 0$  und der sich ergebenden Grenzzustandsfunktion  $g(R,E) = 0$  getrennt. Diese Funktion ist hier linear angenommen, nichtlineare Grenzzustandsfunktionen sind jedoch ebenfalls denkbar.

Eine erstmalige Festlegung eines erforderlichen Sicherheitsniveaus baulicher Anlagen ist in der GruSiBau aus dem Jahre 1981 zu finden, wobei der Sicherheitsindex  $\beta$  der jeweiligen Sicherheitsklasse und einem Bezugszeitraum von 1 Jahr angegeben wurde. Erweitert wurden diese grundlegenden Einstufungen im Jahre 1995 durch die neue bauartunabhängige Formulierung des Eurocode 1, in dem der Sicherheitsindex  $\beta$  in Abhängigkeit des Grenzzustandes für eine Nutzungsdauer (im Allgemeinen von 50 Jahren) und für 1 Jahr angegeben wurde. In Tabelle 2.5 sind Sicherheitsniveaus der GruSiBau und des Eurocode 1 zusammenfassend dargestellt.

Es ist anzumerken, dass diese Zielwerte für die meisten aller auftretenden Fälle geeignet sind, eine Abstufung um  $\Delta\beta$  zwischen 0.5 - 1.0 kann gegebenenfalls sinnvoll sein.

| Grundlegendokument     | GruSiBau |        |        | DIN 1055 bzw. EN 1990 |          |
|------------------------|----------|--------|--------|-----------------------|----------|
| Sicherheitsklasse (Sk) | Sk1      | Sk2    | Sk3    | Sk2                   | Sk2      |
| Bezugszeitraum         | 1 Jahr   | 1 Jahr | 1 Jahr | 1 Jahr                | 50 Jahre |
| Grenzzustand GZT       | 4.2      | 4.7    | 5.2    | 4.7                   | 3.8      |
| Grenzzustand GZG       | 2.5      | 3.0    | 3.5    | 3.0                   | 1.5      |

**Tabelle 2.5:** Angestrebter Sicherheitsindex  $\beta$

Basierend auf den zuverlässigkeitsorientierten Grundsätzen und aus den Erfahrungen deterministischer Sicherheitskonzepte wurde das semiprobabilistische Sicherheitskonzept konzipiert, welches in den aktuellen Normen DIN 1055-100 (2001) und DIN EN 1990 (2010) implementiert ist.

## 2.2.2 Semiprobabilistisches Sicherheitskonzept

Im vorherigen Abschnitt 2.2.1 wurde ein Verfahren erläutert, mit dem eine Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$ , respektive des Sicherheitsindex  $\beta$ , von Tragwerken oder deren Einzelteilen möglich ist. Aufgrund des großen Einflusses des verwendeten stochastischen Modells sind die Ergebnisse nur operativ.

Das in diesem Abschnitt beschriebene semiprobabilistische Sicherheitskonzept, welches der Entwurfsphilosophie der Eurocodes entspricht, fordert, dass die Bemessungswerte sich aus einem charakteristischen Wert und einem Teilsicherheitsbeiwert zusammensetzen sollen, wobei der charakteristische Wert bei Lasten in der Regel der 95%-Quantile und bei Werkstoffeigenschaften der 5%-Quantile unterliegt. Die Teilsicherheitsbeiwerte auf der Einwirkungsseite  $\gamma_F$  und auf der Widerstandsseite  $\gamma_M$  bewirken einen zusätzlichen Sicherheitsabstand. Bild 2.4 zeigt das normenkonforme Grenzzustandskonzept bei Normaltemperaturen.

Die charakteristische Beanspruchung  $E_k$  wird als 95%-Quantile

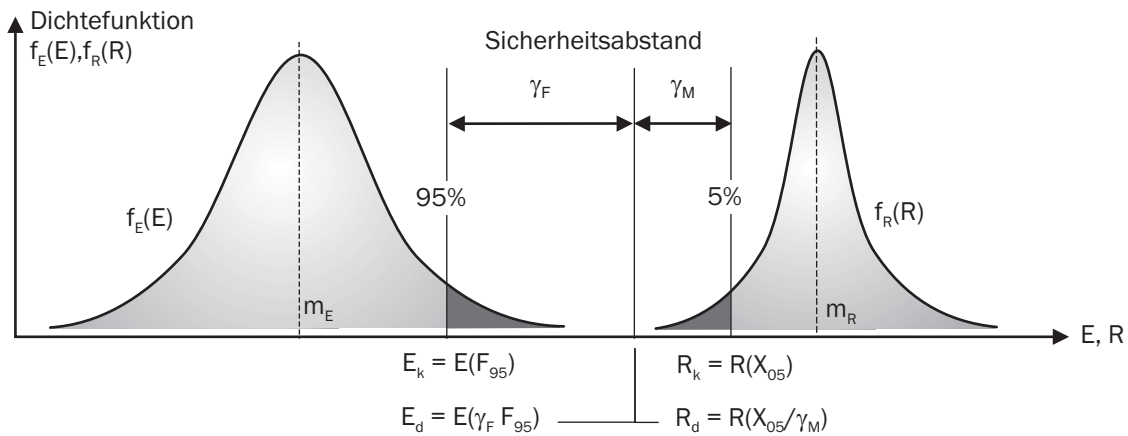
$$E_k = m_E + k_E \sigma_E = m_E (1 + k_E \nu_E) \quad (2.13)$$

und der charakteristische Wert für die Beanspruchbarkeit  $R_k$  als 5%-Quantile

$$R_k = m_R - k_R \sigma_R = m_R (1 - k_R \nu_R) \quad (2.14)$$

bestimmt, wobei  $\nu_E$  und  $\nu_R$  Variationskoeffizienten und  $k_E$  und  $k_R$  Fraktilenfaktoren sind, die im Anhang A.5 näher erläutert sind. Zwischen Beanspruchung  $E_k$  und Beanspruchbarkeit  $R_k$  ergibt sich eine globale Sicherheitszone als Abstand zwischen den Fraktilwerten gemäß Gleichungen (2.13) und (2.14) zu

$$\gamma_{global} = \frac{R_k}{E_k} = \frac{m_R (1 - k_R \nu_R)}{m_E (1 + k_E \nu_E)} = \nu_0 \frac{(1 - k_R \nu_R)}{(1 + k_E \nu_E)}. \quad (2.15)$$



**Bild 2.4:** Normenkonformes Grenzzustandskonzept bei Normaltemperaturen

Die Variable  $\nu_0$  ist dabei der zentrale Sicherheitsfaktor. Unter Berücksichtigung des unteren Grenzwertes der Sicherheit kann der zentrale Sicherheitsfaktor  $\nu_0$  angegeben werden als:

$$\nu_0 \geq \frac{m_R}{m_E} = \frac{1 + \beta \alpha_E \nu_E}{1 - \beta \alpha_R \nu_R}. \quad (2.16)$$

Setzt man (2.16) in (2.15) ein, ergibt sich das Verhältnis der Bemessungswerte  $E$  und  $R$ , wobei die Bemessungswerte als Fraktilwert und Sicherheitsfaktor ausgedrückt werden. Es ergibt sich:

$$\gamma_{global} \geq \frac{1 + \beta \alpha_E \nu_E}{1 + k_E \nu_E} \cdot \frac{1 - k_R \nu_R}{1 - \beta \alpha_R \nu_R} = \gamma_E \cdot \gamma_R. \quad (2.17)$$

Ersetzt man den linken Faktor der Gleichung (2.17) mit  $\gamma_E$  für die Einwirkungsseite und den rechten Faktor mit  $1/\gamma_R$  für die Widerstandsseite, kann die deterministische Nachweisgleichung des semiprobabilistischen Teilsicherheitskonzeptes der Eurocodes formuliert werden zu:

$$\gamma_E \cdot E_k \leq \frac{R_k}{\gamma_R}. \quad (2.18)$$

Durch die Aufteilung eines globalen Sicherheitsfaktors in Teilsicherheitsfaktoren getrennt für Einwirkungs- und Widerstandsseite, können die unterschiedlichen Einflüsse der Eigenschaften der Lasten bzw. Werkstoffe besser und differenzierter erfasst werden. Mit Beachtung der Teilsicherheitsbeiwerte mit Variationskoeffizienten werden die positiven Eigenschaften, wie. z.B. geringe Streuungen bei Materialfestigkeiten und die Art der Einwirkung, aufgespalten in ständige und veränderliche Einwirkungen, gemäß ihrer Wichtigung und ihres Auftretens in der Tragwerkssicherheit berücksichtigt.

Im Folgenden werden detailliert Angaben zur Festlegung von Teilsicherheitsfaktoren für Beton und Betonstahl gegeben.



**Teilsicherheitsbeiwerte - Allgemeines:** Handelt es sich um normalverteilte Bezugsvariablen, können Teilsicherheitsfaktoren und deren Partialfaktoren der Widerstandsseite nach Bierbrauer (2005) und Bierbrauer (2008) mit

$$\gamma = \frac{x_{5\%}}{x_d} = \frac{m_x \cdot (1 - k \cdot \nu_x)}{m_x \cdot (1 - \alpha_R \cdot \beta \cdot \nu_x)} = \frac{1 - k \cdot \nu_x}{1 - \alpha_R \cdot \beta \cdot \nu_x} \quad (2.19)$$

formuliert werden. Ist die Bezugsvariable logarithmisch normalverteilt, ergibt sich entsprechend:

$$\gamma = e^{(\alpha_R \cdot \beta \cdot \nu - k \cdot \nu)}. \quad (2.20)$$

Dabei wird für den Grenzzustand der Tragfähigkeit bei einer Einstufung in die Sicherheitsklasse 2 ein Sicherheitsfaktor  $\beta = 3.8$  angesetzt. Für den Wichtungsfaktor wird vereinfachend der linearisierte Wert  $\alpha_R = 0.8$  berücksichtigt, wie es im Eurocode bzw. der DIN 1055-100 (2001) vorgeschlagen wird. Der Fraktilefaktor  $k$  ergibt sich aufgrund der zu berücksichtigenden 5%-Quantile zu  $k = 1.645$  (siehe Tabelle A.1)

**Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_c$  für Beton bei Normaltemperatur:** Nach König, Soukhov & Jungwirth (1998) wird der Teilsicherheitsbeiwert für Beton  $\gamma_c$  in 2 Anteile aufgespalten. Berücksichtigt man mit dem Partialfaktor  $\gamma_f = 1.15$  eine evtl. vorhandene geringere Bauwerksfestigkeit  $f_B$ , bezogen auf den charakteristischen Wert der Betonfestigkeit  $f_{ck}$  und mit  $\gamma_M = 1.30$  eine Abweichung der tatsächlichen Materialfestigkeit zur charakteristischen Festigkeit  $f_{ck}$  sowie Modellunsicherheiten und Streuungen der geometrischen Abmessungen, kann der Teilsicherheitsfaktor für Beton angegeben werden mit

$$\gamma_c = \gamma_f \cdot \gamma_M = 1.15 \cdot 1.30 = 1.50. \quad (2.21)$$

Nähere Informationen bezüglich der Bestimmung der Partialfaktoren sind in König, Soukhov & Jungwirth (1998) und Bierbrauer (2008) zu finden. Auf weitere materialspezifische Abminderungsfaktoren, die z.B. das Langzeitverhalten von Beton berücksichtigen, wird hier an dieser Stelle nicht weiter eingegangen.

**Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_s$  für Betonstahl bei Normaltemperatur:** Die Aufspaltung des Teilsicherheitsbeiwertes  $\gamma_s$  kann in Anlehnung an Gleichung (2.21) durch folgende Separierung durchgeführt werden:

$$\gamma_s = \gamma_f \cdot \gamma_d \cdot \gamma_a = 1.09 \cdot 1.03 \cdot 1.03 = 1.15 \quad (2.22)$$

Dabei berücksichtigen  $\gamma_f$  die vorhandenen Abweichungen der Festigkeitswerte zur charakteristischen Festigkeit,  $\gamma_d$  die Unsicherheiten der statischen Höhe  $d$  und  $\gamma_a$  die Abweichungen der geometrischen Dimensionen der Bewehrung. Legt man die Variationskoeffizienten nach Bierbrauer (2005), JCSS (2000) und Pottharst (1977) mit

$$\nu_f = 0.06; \quad \nu_d = 0.02; \quad \nu_a = 0.02 \quad (2.23)$$

zugrunde, können die Partialfaktoren in Gleichung (2.22) unter Verwendung von (2.20) bestimmt werden.

**Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_{c,fi}$  für Beton und  $\gamma_{s,fi}$  für Betonstahl im Brandfall:** Der Bemessungswert der thermischen und mechanischen Baustoffkennwerte  $X_{d,fi}$  berechnet sich im Brandfall mit Hilfe des charakteristischen Baustoffkennwertes  $X_k$ , dem Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{M,fi}$  und dem temperaturabhängigen Reduktionsfaktor für die Festigkeits- bzw. Verformungseigenschaften. Die baustoffabhängige Reduktion der Materialeigenschaften von Beton und Betonstahl wird in Abschnitt 4 detailliert beschrieben. Die allgemeine Bestimmungsgleichung für die Widerstandsseite lautet:

$$X_{fi,d} = \frac{k(\theta) \cdot X_k}{\gamma_{M,fi}}. \quad (2.24)$$

Normenübergreifend ist für alle Baustoffe festgelegt, dass der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{M,fi} = 1.0$  gesetzt wird. So wird der Tatsache Rechnung getragen, dass ein Brand eine außergewöhnliche Bemessungssituation darstellt und eine geringe Wahrscheinlichkeit vorherrscht, dass alle für die Tragfähigkeit ungünstig wirkenden Einwirkungen zusammenwirken. Damit ergibt sich für die materialabhängigen Teilsicherheitsfaktoren für Beton und Betonstahl:

$$\gamma_{M,fi} = \gamma_{c,fi} = \gamma_{s,fi} = 1.0. \quad (2.25)$$

So wird vermieden, dass für diverse Bauweisen und Nachweisverfahren unterschiedliche Annahmen für die Teilsicherheitsbeiwerte im Brandfall getroffen werden, was die Nachweisführung vereinfacht.

Zu den mechanischen Eigenschaften kommen im Brandfall die thermischen Eigenschaften hinzu. Bei den thermischen Eigenschaften ist formal zu unterscheiden, ob eine Zunahme der Eigenschaft die Sicherheit des Bauteils erhöht oder erniedrigt. Bei einer Erhöhung der Tragwerkssicherheit ergibt sich der Materialwert  $X_{fi,d}$  zu

$$X_{fi,d} = \frac{X_k(\theta)}{\gamma_{M,fi}}, \quad (2.26)$$

dagegen bei einer Reduzierung der Tragwerkssicherheit zu

$$X_{fi,d} = X_k(\theta) \cdot \gamma_{M,fi}. \quad (2.27)$$

Die erforderliche Zuverlässigkeit bei einer Brandschutzbemessung kann also aufgrund der Tatsache, dass die Teilsicherheitsfaktoren  $\gamma_{M,fi} = 1.0$  zu setzen sind, nur durch eine konservativ angesetzte Brandeinwirkung, z.B. der ETK, gesichert werden.

## 2.3 Bemessungsgrundlagen gemäß Eurocode

Die Bemessung von Bauwerken hat sich in den letzten Jahren nicht nur in Deutschland sondern in ganz Europa maßgeblich verändert. Die Bemessungsgrundlagen wurden im kalten Zustand vom bisherigen deterministischen Sicherheitskonzept auf das semiprobabilistische umgestellt. Aufgrund dieser Umstellung mussten auch die Vorschriften zum

Nachweis im Brandfall überarbeitet werden. Der Standsicherheitsnachweis der einzelnen Bauteile erfolgt über die Klassifizierung der Bauteile in eine Feuerwiderstandsklasse und die anschließende Bemessung mit mechanischen und thermischen Beanspruchungen.

Durch Einführung der neuen Normengeneration im Bauwesen ergibt sich die Forderung zur Dimensionierung und Bemessung von Tragwerken gemäß dem semiprobabilistischen Sicherheitskonzept nach DIN 1055-100 (2001) bzw. DIN EN 1990 (2010) mittels Zuverlässigkeitsnachweisen. Diese Vorgehensweisen sind sowohl im Normaltemperaturbereich als auch im Hochtemperaturbereich anzuwenden. Das auf Grundlage von Grenzzuständen der Tragfähigkeit basierende Bemessungskonzept geht aus einem Vergleich der Bemessungswerte der Einwirkungen  $E$  und der Beanspruchbarkeiten  $R$  hervor. Es gilt für den Nachweis bei Normal- bzw. Hochtemperatur unter Berücksichtigung von (2.18)

$$E_d \leq R_d \quad \text{bzw.} \quad E_{fi,d,t} \leq R_{fi,d,t}. \quad (2.28)$$

Bei der Nachweisführung unter Berücksichtigung eines Brandes erfolgt eine zusätzliche Differenzierung bezüglich der Einwirkungen in mechanische und thermische Anteile. Die normative Berücksichtigung mechanischer Einwirkungen erfolgt in Abschnitt 2.3.1. Daran anschließend wird in den Abschnitten 2.3.2 bis 2.3.4 die Berücksichtigung zeitabhängiger thermischer Anteile durch definierte Brandgas-Temperaturzeitkurven vorgestellt.

### 2.3.1 Mechanische Einwirkungen im Brandfall

Die mechanischen Einwirkungen sind normativ geregelt und können national der Normenreihe DIN 1055 bzw. europäisch der Normenreihe DIN EN 1991 unter Berücksichtigung der nationalen Anhänge entnommen werden. Aus den vorhandenen mechanischen Einwirkungen wird der Bemessungswert der Einwirkung  $E_d$  bei Normaltemperatur für die ständige und vorübergehende Bemessungssituation wie folgt gebildet:

$$E_d = E \left\{ \sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} \oplus \gamma_{PA} \cdot P_k \oplus \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1} \oplus \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i} \right\}. \quad (2.29)$$

Gemäß DIN EN 1991-1-2/NA (2010) wird der Nachweis im Brandfall der außergewöhnlichen Bemessungssituation zugeordnet, und es folgt für den Bemessungswert der Einwirkung  $E_{fi,d,t}$  im Brandfall

$$E_{fi,d,t} = E \left\{ \gamma_{GA} \cdot G_k \oplus \gamma_{PA} \cdot P_k \oplus A_d(t) \oplus \psi_{1,1} \cdot Q_{k,1} \oplus \sum_{i > 1} \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \right\}. \quad (2.30)$$

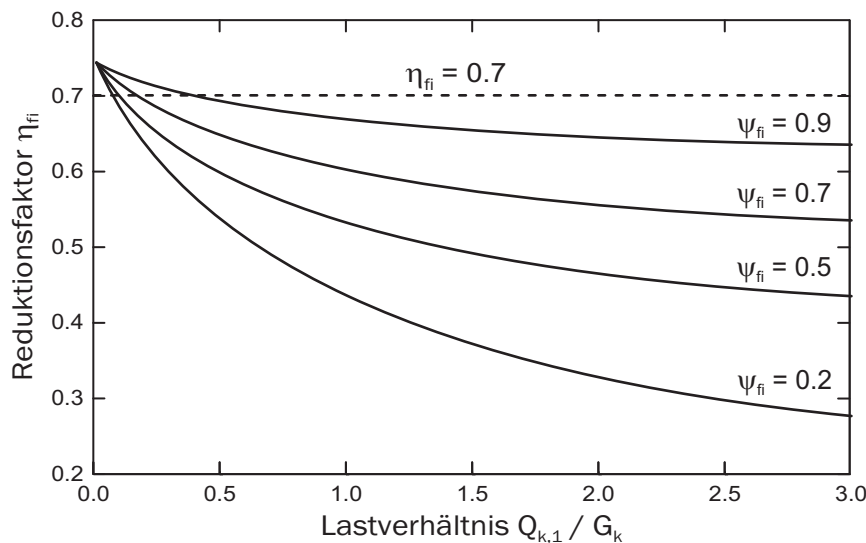
Bei Nichtberücksichtigung von indirekten Einwirkungen im Brandfall ( $A_d(t) = 0$ ), z.B. Zwang durch thermische Dehnungen, können die Beanspruchungen im Brandfall  $E_{d,fi,t}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  direkt aus den Bemessungswerten der Einwirkungen bei Normaltemperatur  $E_d$  bestimmt werden. Dabei wird dann eine konstante Annahme der Beanspruchung über die Zeit  $t$  unterstellt. Mit Hilfe eines Reduktionsfaktors  $\eta_{fi}$  ergeben sich die Einwirkungen im Brandfall und es gilt in kompakter Schreibweise:

$$E_{fi,d,t} = \eta_{fi} \cdot E_d. \quad (2.31)$$

Der Reduktionsfaktor  $\eta_{fi}$  in (2.31) kann mit der nachfolgenden Gleichung unter Berücksichtigung der ständigen Einwirkungen  $G_k$  und der vorherrschenden veränderlichen Einwirkung  $Q_{k,1}$  bestimmt werden, wobei der Zähler die Einwirkungen im Brandfall und der Nenner die Einwirkungen bei Normaltemperatur repräsentieren:

$$\eta_{fi} = \frac{\gamma_{GA} \cdot G_k + \psi_{fi} \cdot Q_{k,1}}{\gamma_G \cdot G_k + \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1}}. \quad (2.32)$$

Bild 2.5 zeigt eine Auswertung der Gleichung (2.32) bei unterschiedlichen Verhältnissen von ständigen und veränderlichen Lasten, wobei  $\gamma_{GA} = 1.0$ ,  $\gamma_G = 1.35$  und  $\gamma_Q = 1.5$  zugrundegelegt werden.



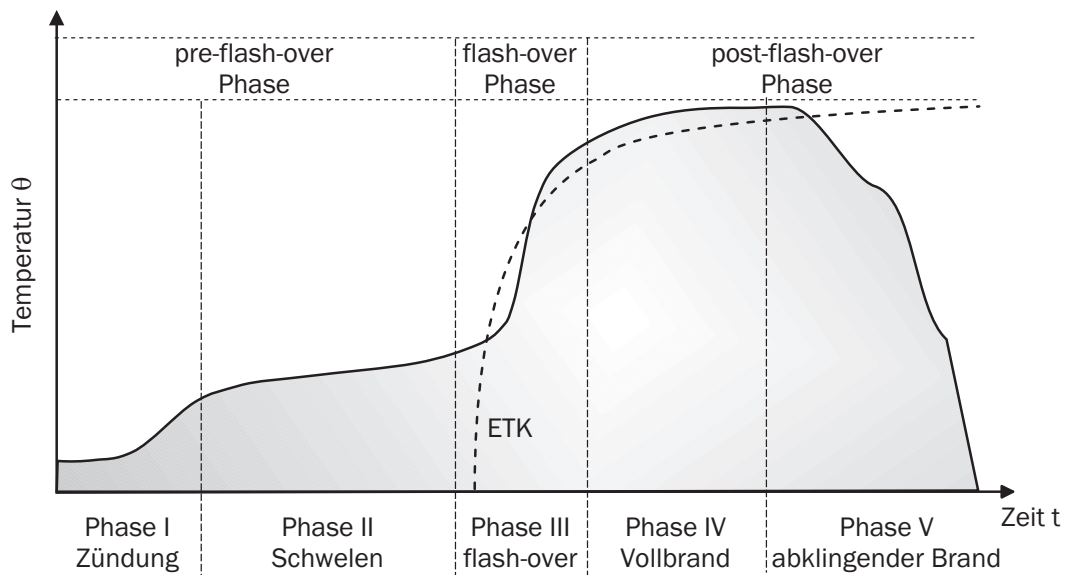
**Bild 2.5:** Reduktionsfaktor  $\eta_{fi}$  als Funktion des Lastverhältnisses  $Q_{k,1}/G_k$

Der Reduktionsfaktor darf baustoffabhängig auch vereinfachend und konservativ mit einem Wert zwischen 0.6 und 0.7 angenommen werden. Dieser ist in den jeweils gültigen Eurocodes festgesetzt. Im Entwurfsstadium eines Bauwerks sind diese Annahmen sinnvoll zu verwenden, vor allem dann, wenn noch nicht alle relevanten Lastdaten feststehen.

### 2.3.2 Thermische Einwirkungen im Brandfall

Der Brandverlauf in Räumen kann allgemein in drei große Phasen eingeteilt werden, die pre-flash-over Phase, die flash-over Phase und die post-flash-over Phase. Eine detailliertere Unterteilung ist die fünf-phasige Aufteilung des Brandverlaufs, welche durch Auftragen der Temperaturentwicklung  $\theta$  gegenüber der Zeit  $t$  erfolgt. Bild 2.6 zeigt dementsprechend den Brandausbreitungsverlauf in Räumen [Löbber, Pohl & Thomas 2004].

In Phase I findet die Zündung von leicht entflammaren Materialien durch eine niederenergetische Zündquelle statt, wobei eine exotherme Reaktion erzeugt wird. Am Brandherd kommt es durch die Zündquelle zur Pyrolyse und Zündung des Brennstoffs. Die Pyrolyse beschreibt dabei die irreversible chemische Zersetzung von Material, welche hauptsächlich



**Bild 2.6:** Darstellung der fünf-phasigen Aufteilung des Brandverlaufs in Räumen

aus einer Temperaturerhöhung hervorgeht. Durch die Wärmemechanismen Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung der Flamme wird weiterer Brennstoff aus der Umgebung in den Verbrennungsprozess einbezogen. Je nach Art, Abmessungen und Oberflächenbeschaffenheit von normalentzündbaren Stoffen nahe der Zündquelle können diese bei einem weiteren leichten Temperaturanstieg ebenfalls zünden.

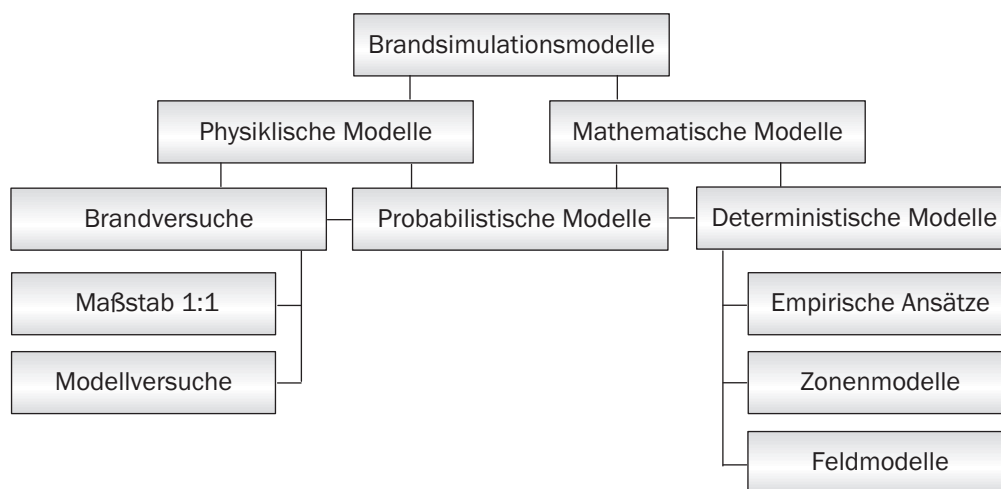
Das ist der Übergang zur Phase II, wo es zum Schwelen oder Glimmen kommen kann. Die Schwelbrandphase kann wenige Minuten oder auch mehrere Stunden dauern, bevor es zu einem voll entwickelten Brand kommt oder dieser erlischt. In dieser Zeitphase hängt es von der Art der Verbrennung des Brennstoffes, der Interaktion mit der Umgebung und dem Sauerstoffangebot ab, wie sich ein Brand entwickelt. Bei dem Verbrennungsprozess entstehen in der Flamme heiße Verbrennungsprodukte, die mit erwärmten Gasen infolge des Auftriebs aus dem Flammenbereich in den oberen Raumbereich transportiert werden. Das dabei entstehende Gemisch aus Oxiden, inerten Anteilen und Aerosolen ist toxisch und wird gemäß EN ISO 13943 (2000) als Rauch bezeichnet. Im Raum entsteht somit eine Temperatur- und Rauchsichtung, welche meist stark vereinfacht durch zwei hypothetische Zonen (2-Zonen Modell) beschrieben wird. Die aufgestiegenen Rauchgase bilden die obere Zone, die sogenannte Rauchgasschicht. Zwischen Fußbodenoberfläche und Rauchgasschicht befindet sich die raucharmer Schicht (DIN 18232-2). Die Temperatur im Brandraum erreicht in dieser Phase ca. 100 - 150 °C.

Eine zeitlich kleinere Phase ist die Phase III, die als Brandüberschlag bzw. flash-over bezeichnet wird. Diese bildet den Übergang von der Brandentwicklung zum Vollbrand. Der flash-over ist ein Phänomen, welches eng mit der thermischen Instabilität von Materialien verknüpft ist. Durch Wärmestrahlung der Flamme und der Rauchsicht können auch brennbare Materialien weiter entfernt vom Brandherd schlagartig entzündet werden, was mit einer raschen Energiefreisetzung und einer schnell ansteigenden Brandleistung verbunden ist. Der Brandüberschlag findet statt bei Raumtemperaturen zwischen 500 und

600 °C bzw. einer Strahlung des Bodens mit einem Wert zwischen 15-201 kW/m<sup>2</sup>. Die Brandausbreitung ist dabei mit 10m /min zu erwarten.

Direkt anschließend bildet sich der Vollbrand (Phase IV) aus, in dessen Zeitraum die höchste Energieabgabe des gesamten Brandablaufs zu erwarten ist. Die Energieabgabe wird einzig durch die Sauerstoffzufuhr beschränkt, wodurch dieser Teil des Brandes auch ventilationsgesteuert genannt wird. In dieser Phase steigen die Temperaturen auf 700 - 1200 °C an. Mit fortschreitendem Vollbrand verringert sich der zur Verfügung stehende Brennstoff. Es verringert sich der Reaktionsenergiestrom sowie die mittlere Gastemperatur im Raum. Es folgt die Phase V, wo der Brand langsam abklingt und vom ventilationsgesteuerten zum brandlastgesteuerten Fall wechselt. Gerade in den letzten beiden Phasen hängt der Feuerwiderstand maßgeblich vom Bauteilverhalten ab. Durch ein eventuelles Bauteilversagen kann es zum Verlust der Tragfähigkeit bzw. auch des Raumabschlusses kommen. Ergänzend sei erwähnt, dass laut Technischen Baubestimmungen auch dann ein Versagen vorliegt, wenn bei Erhaltung der Tragfähigkeit ein raumabschließendes Bauteil so durchwärmt wird, dass brennbare Stoffe auf der dem Feuer abgewandten Seite zur Entzündung gebracht werden, oder wenn Rauchgase durch Risse und Fugen durchdringen können.

Um solch einen komplexen Brandverlauf in einem Gebäude abbilden zu können, wird zwischen einer Vielzahl unterschiedlicher Modellierungen unterschieden. In Bild 2.7 sind verschiedene Brandsimulationsmodelle zusammengefasst. Die Modellart der Brandbeanspruchung in einem Gebäude bzw. in einem Raum wird unterteilt in physikalische und mathematische Modelle. Zu den physikalischen Modellen zählen vor allem Großbrandversuche im Maßstab 1:1 und Modellversuche. Auf diese Modelle wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. Zu den mathematischen Modellen zählen probabilistische und deterministische Modelle, wobei letztere näher betrachtet werden. Dabei wird zwischen nominellen und natürlichen Brandkurven unterschieden, die in empirischen Ansätzen zusammengefasst sind. Aus Zonen- und Feldmodellen lassen sich Naturbrandkurven ermitteln, die dabei aus physikalisch korrekten Simulationen berechnet werden müssen.



**Bild 2.7:** Brandsimulationsmodelle

### 2.3.3 Nominelle Temperaturzeitkurven

Die einfachste Form zur Beschreibung einer Brandlast erfolgt mit normierten Brandkurven, die das Verhältnis von Gastemperatur im Brandraum zur Zeit  $t$  wiedergeben. Normative Brandkurven sind unabhängig von Randbedingungen und Ventilation. Die Einheitstemperaturzeitkurve (ETK) lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\theta_G = \theta_0 + 345 \cdot \log_{10}(8 \cdot t + 1). \quad (2.33)$$

Diese Brandkurve ist Grundlage für sämtliche Nachweisverfahren gemäß DIN EN 1992-1-2 (2010) Level 1 und Level 2. Um nichttragende, außenliegende Bauteile untersuchen zu können, gibt es die Außenbrandkurve, die sich zu

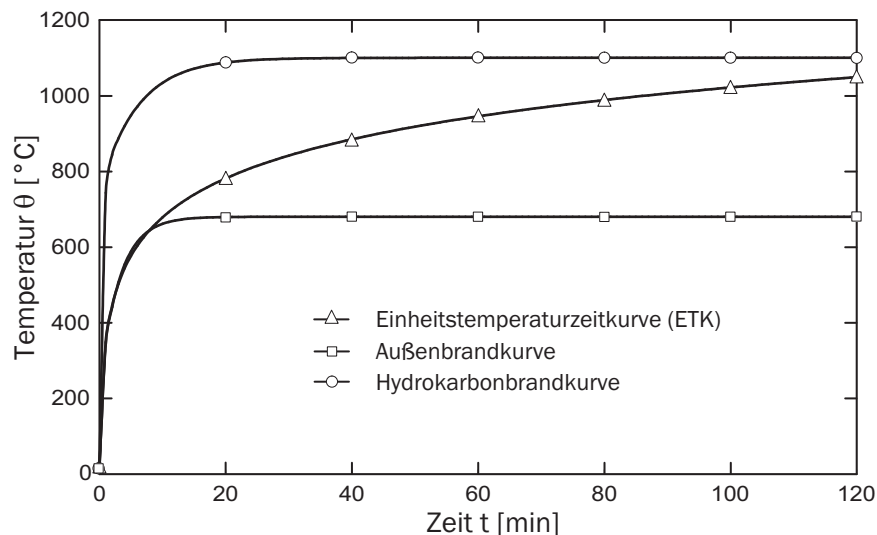
$$\theta_G = \theta_0 + 660 \cdot (1 - 0.687 \cdot e^{-0.32 \cdot t} - 0.313 \cdot e^{-3.8 \cdot t}) \quad (2.34)$$

formulieren lässt. Des Weiteren bietet die DIN EN 1991-1-2 (2010) die Hydrokarbonbrandkurve an, die sich durch

$$\theta_G = \theta_0 + 1080 \cdot (1 - 0.325 \cdot e^{-0.167 \cdot t} - 0.675 \cdot e^{-2.5 \cdot t}) \quad (2.35)$$

beschreiben lässt. Sie wird überwiegend dort angewendet, wo hohe Brandlasten bei ausreichendem Sauerstoffangebot einen schnellen Anstieg der Temperaturen bewirken.

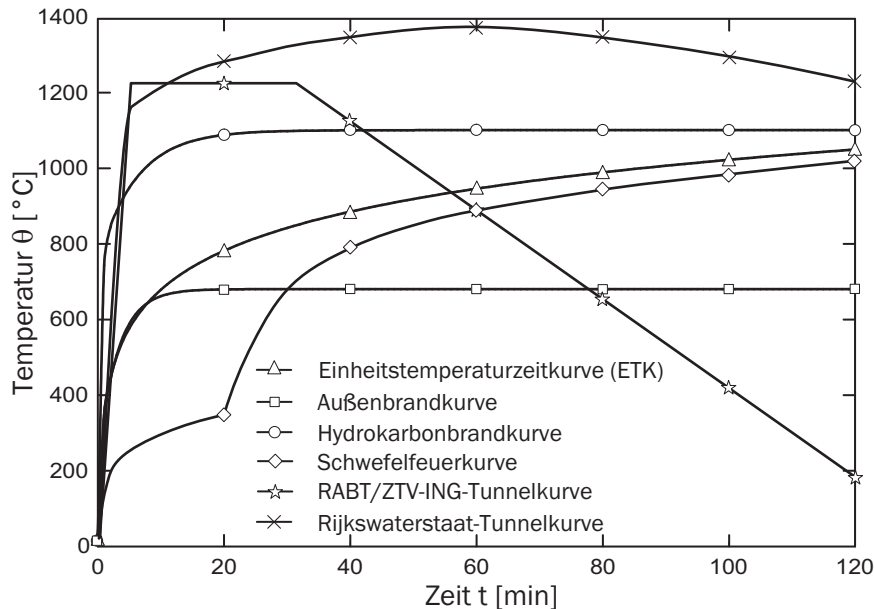
Eine grafische Darstellung dieser drei nominellen Temperaturkurven ist Bild 2.8 zu entnehmen, wobei festzuhalten ist, dass die ETK weltweit als Regelbeanspruchung zur Ermittlung der Feuerwiderstandsdauer herangezogen wird. Die anderen Kurven sind auf bestimmte Anwendungsfälle beschränkt.



**Bild 2.8:** Nominelle Temperaturzeitkurven nach DIN EN 1991-1-2 (2010)

Viel höhere Temperaturen als bei der ETK und der Hydrokarbonbrandkurve können in Verkehrstunneln auftreten. Dazu gibt das GD2 keine weiteren Hinweise, woraus eine länderspezifische Unterscheidung zur Annahme der Temperaturzeitkurven resultiert. Neben

der ETK und der Hydrokarbonbrandkurve haben sich in Deutschland die RABT/ZTV-ING-Tunnelkurve (RABT = Richtlinie für die Ausstattung und den Betrieb von Tunneln, als Grundlage der EBA-Kurve bzw. ZTV-ING-Kurve) und in den Niederlanden die Rijkswaterstaat-Tunnelkurve etabliert. Bild 2.9 zeigt exemplarisch einige Standard Temperatur-Zeit-Kurven für Tunnelbauten.



**Bild 2.9:** Darstellung von Temperaturkurven für Tunnelbauwerke

Generell ist festzustellen, dass trotz Europäisierung keine einheitliche Anwendung der Brandkurven vorgeschrieben ist und die Kurven je nach Projekt und Art festgelegt werden können. Viele Brandsimulationen haben aber gezeigt, dass die im Eurocode definierte Hydrokarbonbrandkurve den qualitativen Verlauf eines Tunnelbrandes mit brennenden Flüssigkeiten gut abbildet.

### 2.3.4 Natürliche Brandszenarien - Naturbrandmodelle

Alternativ zu den in Kapitel 2.3.3 beschriebenen nominellen Temperaturzeitkurven können die thermischen Einwirkungen im Brandfall auch durch Naturbrandmodelle simuliert werden, wodurch eine realistischere Bemessung des Tragwerks erreicht werden kann. Bei der Berücksichtigung der thermischen Einwirkungen über die ETK entstehen meist sehr unwirtschaftliche Bemessungsergebnisse, die bei Stahlbetonbauteilen zu erhöhten Betondeckungen führen und eine Erhöhung des Bewehrungsgrades im Kaltfall implizieren. Bei Stahlbauteilen werden viel zu hohe Bekleidungsstärken ermittelt. Diese Überdimensionierungen können dementsprechend negative Auswirkungen auf die ökonomischen Belange und die Ästhetik des Bauwerks zur Folge haben. Wirklichkeitsnäher sind die Realbrandkurven, die durch eine leistungsabhängige Festlegung der physikalisch bedingten thermischen Einwirkungen entsprechend den vorhandenen brandschutztechnischen Rahmenbe-



dingungen, wie z.B. durch die Brandlast, den Brandraum und die Ventilationsverhältnisse, charakterisiert sind.

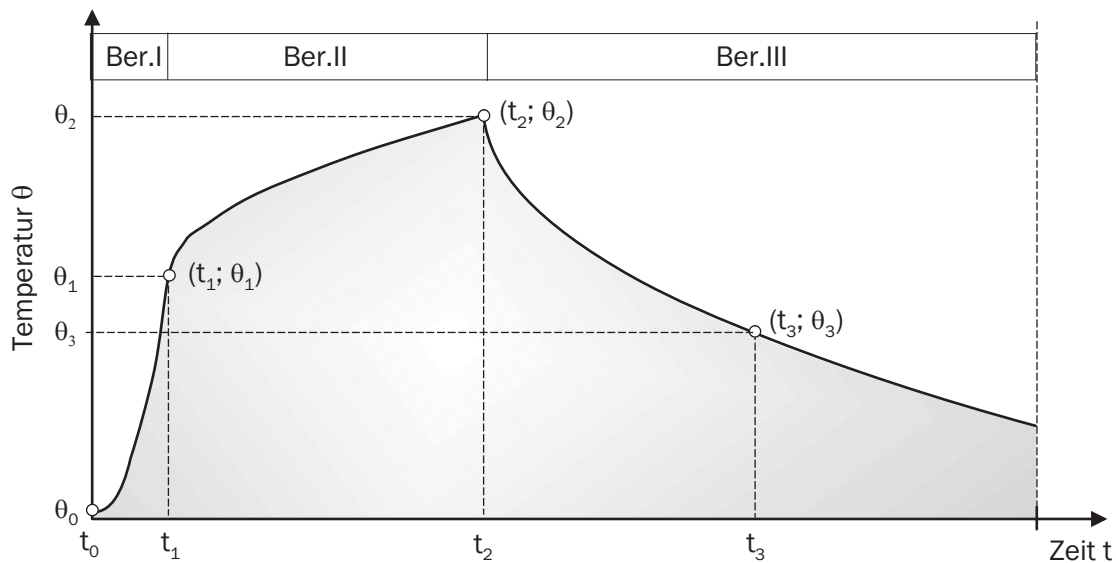
Generell werden die Naturbrandmodelle in vereinfachte und allgemeine Brandmodelle unterteilt. Zu den vereinfachten Näherungsannahmen eines Brandverlaufs zählt u.a. die parametrisierte Realbrandkurve (s. Abschnitt 2.3.4.1), die auf Grundlage eines realistischen Bemessungsbrandes anhand von umfangreichen Wärmebilanzberechnungen entwickelt worden ist DIN EN 1991-1-2/NA (2010). Die allgemeinen erweiterten Brandmodelle implizieren über iterative Verfahren die Gaseigenschaften sowie den Massen- und Energieaustausch der Kontrollvolumina. Eine Beschreibung von Naturbrandmodellierungen erfolgt in den Teilabschnitten 2.3.4.1 - 2.3.4.3.

#### 2.3.4.1 Parametrische Realbrandkurven

Um eine realitätsnahe Beschreibung der Temperaturen im Brandraum zu ermöglichen, ist im Bereich der vereinfachten Brandmodelle ein Näherungsverfahren entwickelt worden, bei dem durch einfache Berechnungen der Temperaturzeitverlauf eines natürlichen Brandes angegeben werden kann. Die Einflussparameter werden auf die wesentlichen physikalischen Eingangsgrößen wie Brandlastdichte und Ventilationsbedingungen beschränkt. Der informative Anhang A der DIN EN 1991-1-2 (2010) bietet für standardisierte Raumgrößen zwischen 10 und 200 m<sup>2</sup> die sogenannten *parametrischen Temperaturzeitkurven*, die allerdings nach deutscher Auffassung einige Defizite aufweisen [Hosser, Kampmeier & Zehfuß 2004]. Die Kritik bezieht sich zunächst auf den zeitlichen Verlauf der Temperatur, da lediglich nur die Vollbrandphase mit einer gleichförmigen Temperaturverteilung im Brandraum berücksichtigt wird, wobei Brandversuche jedoch zeigen, dass sich ein Brand in der Entstehungsphase entwickeln muss und es nicht direkt zu extrem starken Temperaturerhöhungen im gesamten Brandraum kommt. Ein weiterer Kritikpunkt ist eine Diskrepanz zwischen der parametrischen Temperaturzeitkurve und der Energiefreisetzungsrate, welche in Anhang E der DIN EN 1991-1-2 (2010) definiert ist, da sie keine zeitliche Kongruenz aufweisen und somit nicht aufeinander abgestimmt sind.

Zur Beseitigung dieser Defizite in den Parameterkurven der DIN EN 1991-1-2 (2010) entwickelten Hosser & Zehfuß (2002) ein konkurrierendes Brandmodell, welches den Temperaturzeitverlauf in der Heißgasschicht als Realbrandkurve realistisch nachbildet. Bild 2.10 zeigt die schematische Realbrandkurve, welche in die drei Brandentwicklungsbereiche unterteilt ist.

Die Hauptunterschiede zum veröffentlichten Verfahren der DIN EN 1991-1-2 (2010) beruhen auf der Annahme eines realistischen Bemessungsbrandes, der Anwendbarkeit als ventilations- sowie eines brandlastgesteuerten Brandverlaufes und der Möglichkeit, die sukzessive Brandausbreitung zu berücksichtigen. Mit diesen Realbrandkurven wird der vollständige Brandverlauf von der Entstehungsphase über den Vollbrand bis hin zur Abkühlphase abgebildet. Die funktionale Beschreibung einer parametrischen Realbrandkurve wird charakterisiert durch drei Zeitpunkte  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  und den dazugehörigen Temperaturwerten  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ . Durch die zeitliche Kongruenz von Temperaturzeitkurve und Energiefreisetzungsrate können die Zeitpunkte  $t_1$  bis  $t_3$  durch die letztgenannte bestimmt werden. Mit



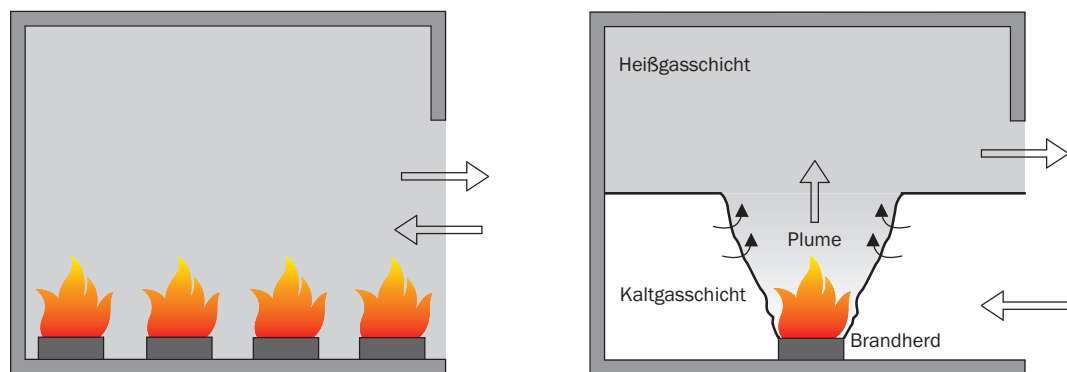
**Bild 2.10:** Qualitative Darstellung der Parametrischen Temperaturzeitkurve nach Hosser & Zehfuß (2002)

diesen Zeitpunkten lassen sich dann die erforderlichen Temperaturwerte  $\theta_1$  bis  $\theta_3$  berechnen. Durch die Möglichkeit, vereinfachte Brandmodelle im Nationalen Anhang zur DIN EN 1991-1-2 (2010) vorzugeben, wurde dieses vereinfachte Brandmodell im Nationalen Anhang DIN EN 1991-1-2/NA (2010) sowie in Hosser (2009) veröffentlicht.

### 2.3.4.2 Zonenmodelle

Die grundlegende Idee der Zonenmodelle basiert auf der Unterteilung eines Brandraumes in verschiedene Zonen, in denen gleiche Verhältnisse vorherrschen. Die Zonenmodelle fußen physikalisch auf der Erhaltung von Energie und Masse im Brandraum und berücksichtigen die Temperaturentwicklung der Materialien, den Massenstrom, die Rauchbewegung sowie die Gastemperatur. Abgeleitet werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten aus Großbrandversuchen in Brandräumen. Der Detaillierungsgrad und die Genauigkeit sind gegenüber den parametrischen Realbrandkurven deutlich höher. Bild 2.11 zeigt schematisch zwei Arten der Zonenmodellierung, die nachfolgend erläutert werden.

**Ein-Zonen-Modell:** Das Ein-Zonen-Modell (Bild 2.11 (links)) wird in der Literatur auch als Vollbrandmodell oder post-flashover-model bezeichnet, da ein voll entwickelter Brand in einem Raum vorausgesetzt wird. Grundannahme der Modellierung ist, dass im Brandraum einheitliche Rauchgastemperaturen vorherrschen, womit die stationäre Phase nach dem flashover beschrieben wird. Bei der Berechnung wird der gesamte Brandraum als eine Zone betrachtet, in der homogene Verhältnisse herrschen. Wesentliche Annahmen des Verfahrens sind die einheitliche Durchmischung von Brandgasen und Flammen im Brandraum sowie gleichbleibende Emissivität der Rauchgase und Flammen während des Brandverlaufs. Die Innenwände des zu untersuchenden Brandraumes sind graue Strahler mit konstanter Emissivität. Zwischen Brandgas und Wand existieren radiative und konvektive Wärmeaustauschprozesse, wobei die Außenseiten der Umfassung durch den



**Bild 2.11:** Schematische Darstellung eines Ein-Zonen-Modells (links) und eines Zwei-Zonen-Modells (rechts)

konvektiven Wärmeaustausch gekühlt werden. Die Berechnung basiert auf der Lösung der Differentialgleichung zur Massen- und Energieerhaltung.

**Zwei-Zonen-Modell:** Das eben beschriebene Ein-Zonen-Modell zur Brandmodellierung liefert nur bei kleinen Räumen mit vollständiger Durchzündung realitätsnahe Ergebnisse. Das Modell versagt, wenn z.B. in einem großen Raum ein kleiner Brandherd vorherrscht. Für diese Situation wird das Zwei-Zonen Modell benötigt, das nicht erst nach dem flash-over ansetzt, sondern die Entwicklung des Brandes mit berücksichtigt. Mit Zwei-Zonen Modellen (Bild 2.11 (rechts)) ist es möglich, die Brandentwicklung und lokal auftretende Brandszenarien realitätsnäher zu untersuchen. Bei einem Zwei-Zonen Modell ist der Brandraum in die obere Heißgasschicht und die untere Kaltgasschicht unterteilt. Vervollständigt wird das Modell durch den Brandherd und den Plume. Durch die erhöhte Anzahl an Schichten erhöht sich die Anzahl der vorkommenden Variablen und es erhöht sich die Komplexität der Berechnungen. Für jede einzelne Zone werden Erhaltungssätze für Masse und Energie aufgestellt und später gekoppelt aufgelöst. Auf nähere Erläuterungen der Zonenmodelle wird an dieser Stelle verzichtet und auf Drysdale (2011) hingewiesen, wo detailliertere Informationen zu finden sind.

### 2.3.4.3 Feldmodelle (Computational Fluid Dynamics - CFD)

Ein weiteres Verfahren zur Brandsimulation ist ein Berechnungsansatz mit Hilfe von Feldmodellen bzw. CFD-Modellen (Computational-Fluid-Dynamics). Es ist im Gegensatz zu den Zonenmodellen sehr viel variabler einsetzbar. Grundlage für die Berechnung ist, dass das zu untersuchende Volumen in einzelne Kontrollvolumina, auch Gitternetzzenen genannt, eingeteilt und dann die Interaktionen bezüglich Masse, Impuls und Energie zwischen den einzelnen Kontrollvolumina ermittelt werden. Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten der Feldberechnungen basieren auf der Strömungs- und Thermodynamik. Mit den Erhaltungsgleichungen für Masse, Energie und Impuls (Navier-Stokes-Gleichungen) lassen sich dreidimensionale Strömungen in Gasen und Flüssigkeiten berechnen. Der große Vorteil der Feldmodelle gegenüber den Zonenmodellen ist die Berücksichtigung dissipativer Effekte bzw. von Turbulenzen in der Strömung. Als Lösungsansätze sind die folgenden Turbulenzmodelle ohne weitere Erläuterungen genannt, die Direct-Numerical-Simulation

(DNS), die Large-Eddy-Simulation (LES) und die Reynolds Averaged by Navier-Stokes (RANS) [Pulker 2010].

Ein Beispiel für eine CFD-Simulation ist in Bild 2.12 dargestellt. Zusammenfassend ist festzuhalten, dass CFD-Modelle die komplexesten Modelle zur Beschreibung von Brandausbreitungsvorgängen darstellen. Ein entscheidender Nachteil solcher genauen und aufwendigen Simulationsverfahren sind jedoch die hohen Rechenkapazitäten gegenüber den einfacheren Zonenmodellen.

## 2.4 Brandschutztechnische Nachweisverfahren

Für den Nachweis der Tragfähigkeit im Brandfall bzw. zur Klassifizierung einzelner Bauteile stellen Brandschutzteile der baustoffbezogenen Eurocodes im Allgemeinen die drei folgenden Stufen zur Verfügung.

- Level 1: Klassifizierung von Bauteilen mit Hilfe von Tabellen
- Level 2: Nachweis mit vereinfachten Berechnungsverfahren
- Level 3: Nachweis mit allgemeinen Berechnungsverfahren

Diese Nachweisstufen unterscheiden sich bezüglich ihrer Komplexität. Mit steigender Nachweisstufe erhöht sich der Berechnungsaufwand bei der Nachweisführung und der Sicherheitsabstand  $Z = R - E$  nähert sich einem wirtschaftlichen Maß an, wohingegen die niedrigeren Nachweisstufen ein eher konservatives Bemessungsergebnis bewirken. Bild 2.12 zeigt zusammenfassend die drei Nachweisstufen mit den zu berücksichtigenden Ansätzen für die thermischen Einwirkungen.

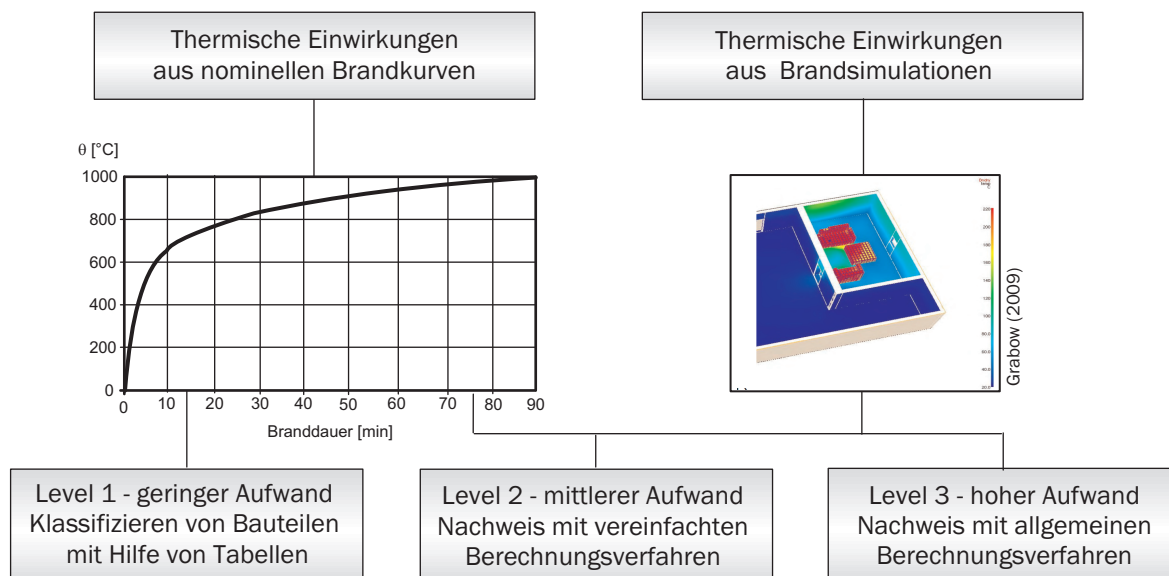


Bild 2.12: Bemessungsverfahren nach Eurocode

Während der Ansatz von nominellen Brandkurven theoretisch in allen drei Stufen möglich ist, können physikalisch begründete Brandkurven aus Brandsimulationen nur bei den höherwertigen Nachweisverfahren berücksichtigt werden. Informationen bzgl. der thermischen Einwirkungen wurden bereits im Abschnitt 2.3.2 beschrieben.

**Nachweisstufe 1:** Bei diesem Nachweisverfahren erfolgt eine Klassifizierung der Bauteile mit tabellarischen Daten, welche auf Brandversuchsergebnissen mittels der ETK basieren. Ausgehend von einer vorgegebenen Feuerwiderstandsdauer (R30 bis R240) können Mindestabmessungen, Mindestbetondeckungen und Bewehrungsverhältnisse klassifiziert werden, wobei dies auf Grundlage der Lastausnutzungen und der Querschnittsabmessungen erfolgt. Dieses Verfahren bietet sich auf Grund der vorhandenen Daten nur für einfache Bauteile an. Tabellierte Daten liegen vor allem für Stützen und Balken vor. Die Vorgehensweise entspricht weitestgehend der Bauteilbemessung nach DIN 4102 Teil 4. Der Vorteil dieser Nachweisstufe ist die einfache und mit geringem Zeitaufwand versehene Klassifizierung von Bauteilen in die erforderlichen Feuerwiderstandsklassen. Dem Zeitgewinn gegenüber steht allerdings die Beschränktheit auf einfache spezielle Bauteile, wobei diese wiederum in gewissen Anwendungsgrenzen liegen müssen. Nachteilig ist, dass nur thermische Einwirkungen in Form der ETK zugrundegelegt werden. Eine Brandentstehungs- oder Abklingphase kann so nicht berücksichtigt werden. Ebenfalls nicht nachweisbar sind nicht klassifizierte Bauteile z.B. in historischen Gebäuden.

**Nachweisstufe 2:** Die Nachweisstufe 2 beinhaltet in der Regel vereinfachte Rechenverfahren, die vorrangig bei Einzelbauteilen und evtl. auch bei einfachen Teiltragwerken angewendet werden können. Die Nachweisverfahren beruhen auf der konsequenten Umsetzung des semiprobabilistischen Nachweiskonzeptes (vgl. Abschnitt 2.2), das besagt, dass ein brandbeanspruchtes Bauteil bei vorhandener Belastung die Resttragfähigkeit nicht überschreiten darf. Vereinfachend wird die thermische Analyse im Bauteilquerschnitt weggelassen und aus tabellierten Temperaturprofilen entnommen. Die Bemessungswerte der mechanischen Einwirkungen werden mit den Teilsicherheitsbeiwerten  $\gamma_{GA} = 1.0$  und den Kombinationsfaktoren  $\psi$  nach den Gleichungen (2.30) bzw. (2.31) ermittelt. Der zugehörige Bemessungswert des Widerstands bei Brandtemperaturen wird mit  $\gamma_M = 1.0$  gebildet. Weiterhin erfolgt gemäß DIN EN 1992-1-2 (2010) eine temperaturabhängige Reduzierung des Querschnitts und eine materialbezogene Reduzierung der Materialkenngrößen (s. Kapitel 4).

Die vereinfachten Rechenverfahren der Nachweisstufe 2 zeichnen sich durch eine höhere Genauigkeit aus, welche einen leicht erhöhten Rechenaufwand erfordert. Des Weiteren wird die Beschränktheit auf einfache Bauteile etwas aufgelockert, da die Anwendungsgrenzen gegenüber dem Tabellenverfahren aufgehoben sind.

**Nachweisstufe 3:** Eine wirklichkeitsnahe Bemessung eines Tragwerks im Brandfall sollen die allgemeinen Rechenverfahren der Nachweisstufe 3 ermöglichen. Dazu werden vollständige thermische und mechanische Analysen an Einzelbauteilen, Teil- oder Gesamttragwerken mit Hilfe numerischer Simulationsmodelle durchgeführt. Um der allgemeinen Anforderung der Nachweisstufe 3 gerecht zu werden, muss das physikalische Verhalten der eingesetzten Baustoffe berücksichtigt werden. Die thermischen Einwirkungen werden dabei nominal oder physikalisch nachweislich ermittelt und zugrundegelegt. Es ergibt sich somit eine dreistufige Aufteilung der Gesamtsimulation:

1. Bestimmung der Temperaturzeitkurve gemäß Abschnitt 2.3.2.
2. Thermische Analyse: Bestimmung der Temperaturverteilung im Bauteilquerschnitt infolge der unter 1. ermittelten Heißgastemperaturen unter Berücksichtigung aller thermischen Materialeigenschaften.
3. Mechanische Analyse: Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens der brandbeanspruchten Bauteile, wobei die Einflüsse aus der vorhandenen Belastung und der behinderten thermischen Verformungen (Zwangkräfte und -momente) sowie vorhandene geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt werden. Die Berechnung der Widerstandsseite impliziert die thermo-mechanischen Eigenschaften der Baustoffe sowie die thermischen Dehnungen.

Diese drei Berechnungsschritte können separat oder parallelisiert durchgeführt werden. Der Vorteil dieser Nachweisstufe liegt in der wirklichkeitsnahen Bemessung des Tragwerks, was als Ergebnis eine wirtschaftliche Dimensionierung des Tragwerks ergibt. Mit Hilfe solcher Verfahren kann für Bauteile, die durch die Level 1- und Level 2-Verfahren nicht klassifiziert bzw. bemessen werden können, ein konstruktiver Brandschutznachweis geführt werden. So können z.B. Schwächungen des Tragwerks infolge Abplatzungen von Beton berücksichtigt oder das Tragverhalten in der Abkühlphase bzw. nach einem Brand ermittelt werden.

Zu erwähnen ist an dieser Stelle, dass die allgemeinen Rechenverfahren in Deutschland der Zustimmung im Einzelfall bedürfen und von einem qualifizierten Prüfenieur bzw. Prüfsachverständigen geprüft werden müssen. Rechenprogramme zur Berechnung von Tragwerken im Brandfall müssen zusätzlich nach DIN EN 1991-1-2/NA (2010) Anhang CC validiert sein.

In den höherrangigen Nachweisverfahren der Stufe 2 und Stufe 3 erfolgt der Tragfähigkeitsnachweis auf verschiedenen Ebenen. Gemäß DIN EN 1991-1-2 (2010) Abs. 2.5 soll der Nachweis entweder im Zeitbereich ①, im Festigkeitsbereich ② oder im Temperaturbereich ③ erfolgen, wobei letzter nur in bestimmten Fällen, z.B. im Stahlbau, möglich ist. Tabelle 2.6 zeigt die Bereiche und die zugehörigen Nachweisformate.

| Bereich        | ① Zeit                       | ② Festigkeit                 | ③ Temperatur                        |
|----------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| Nachweisformat | $t_{fi,requ} \leq t_{fi,cr}$ | $R_{fi,d,t} \geq E_{fi,d,t}$ | $\theta_{fi,t} \leq \theta_{fi,cr}$ |

**Tabelle 2.6:** Alternative Formate der Tragfähigkeitsanalyse im Brandfall gemäß Eurocode

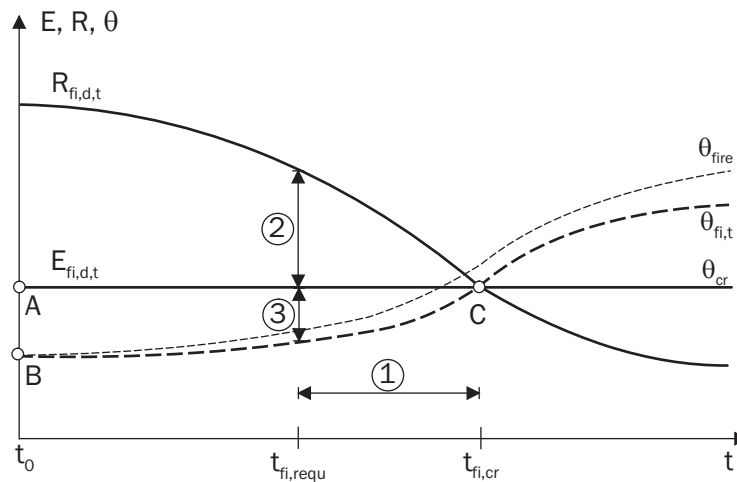
**Nachweis im Zeitbereich:** Es wird nachgewiesen, dass die Zeitdifferenz  $\Delta t$  zwischen der erforderlichen Feuerwiderstandsdauer  $t_{fi,requ}$  und dem Versagenszeitpunkt  $t_{fi,cr}$  zum Versagen eines Bauteils oder Gesamttragwerks größer Null ist.

**Nachweis im Festigkeitsbereich:** Beim Nachweis im Festigkeitsbereich wird im Brandfall der Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit zum Zeitpunkt der erforderlichen Feuerwiderstandsdauer  $t = t_{fi,requ}$  geführt. Es wird nachgewiesen, dass die Resttragfähigkeit  $R_{fi,d,t}$  auch nach der erforderlichen Feuerwiderstandsdauer  $t_{fi,requ}$  größer ist als

die mechanische Beanspruchung  $E_{fi,d,t}$  während des Brandes. Das Nachweisformat ist in Tabelle 2.6 unter dem Bereich ② Festigkeit angegeben .

**Nachweis im Temperaturbereich:** Beim Nachweis im Temperaturbereich wird nachgewiesen, dass die Temperatur  $\theta_{fi,t}$  im Bauteil niedriger ist als der Bemessungswert der kritischen Temperatur, wobei die kritische Temperatur  $\theta_{fi,cr}$  als diejenige bezeichnet wird, bei der das Bauteil oder das Tragwerk versagt. Tabelle 2.6 enthält das Nachweisformat auf der Temperaturebene im Bereich ③. Der Nachweis auf der Temperaturebene stellt einen Sonderfall des Last-Bereichs dar, da hier die Tragfähigkeit des Tragwerks von einem bestimmten Temperaturbereich abhängt, was vor allem bei Stahlbauteilen zutrifft. Bei Stahlbetonbauteilen kann dieses Nachweisformat nur dann angewendet werden, wenn die Bewehrungseisen aufgrund der Temperatureinwirkung versagen würden.

In Bild 2.13 werden anhand eines allgemeinen Beispiels die Nachweisformate schematisch dargestellt. Es wird unterstellt, dass der Bemessungswert der Einwirkungen im Brandfall  $E_{fi,d,t}$  während der Brandphase konstant bleibt sowie eine kontinuierlich ansteigende Brandtemperatur  $\theta_{fire}$  vorliegt, wodurch die Bauteiltemperatur  $\theta_{fi,t}$  ebenfalls kontinuierlich mit der Zeit ansteigt. Ausgangssituation ist im Lastbereich der Punkt A und im Temperaturbereich der Punkt B zum Zeitpunkt  $t = t_0$ . Aufgrund der ansteigenden Temperaturen reduziert sich die Tragfähigkeit  $R_{fi,d,t}$ . Das Tragwerk ist bis zum Erreichen des Versagens am Punkt C sicher. Die oben beschriebenen Nachweisformate ① - ③ sind in Bild 2.13 dargestellt und es kann festgehalten werden, dass wenn der Nachweis auf im Festigkeitsbereich erfüllt ist, gleichermaßen der Nachweises im Zeitbereich erbracht ist.



**Bild 2.13:** Nachweisbereiche bei einem nominellen Brand





# Kapitel 3

## Thermische Analyse von Stahlbetonbauteilen

---

*Zur wirklichkeitsnahen Simulation von brandbeanspruchten Stahlbetonbauteilen ist die Kenntnis über den aktuellen Temperaturhaushalt unerlässlich. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel die Grundlagen zu einer realistischen Erfassung thermischer Einwirkungen auf Betonstrukturen beschrieben und erläutert. Neben allgemeinen physikalischen Erläuterungen zum Themengebiet Wärmehaushalt, insbesondere den Mechanismen der Wärmeübertragung wie Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung, wird eine nichtlineare Bilanzgleichung zur Bestimmung eines instationären Temperaturfeldes mit Speicher- und Leitungstermen aufgestellt, sowie deren Lösung mit der Methode der Finiten-Elemente vorgestellt. Die vorhandenen temperaturabhängigen Stoffkennwerte wie Wärmeleitfähigkeit, Rohdichte und Wärmekapazität werden eingeführt. Zusätzlich werden Angaben zu auftretenden Phasenübergängen und deren Berücksichtigung in einer thermischen Modellierung gemacht.*

---

### 3.1 Allgemeines

Tragwerke sind im Laufe ihrer Lebensdauer den unterschiedlichsten Einwirkungen ausgesetzt. Hauptsächlich sind dies direkte Einwirkungen in Form von volumen-, flächen-, bzw. linienartigen Lasten. Neben direkten Einwirkungen ist ein Tragwerk aber auch sogenannten indirekten Einwirkungen ausgesetzt, z.B. der Temperatur, der Feuchte oder chemischen Angriffen. Bei der Untersuchung von Bauteilen während bzw. nach einem Brandereignis ist die Kenntnis des Temperaturhaushaltes im Bauteil von essentieller Notwendigkeit, da gerade im Hochtemperaturbereich die Temperatur im Bauteil einen großen Einfluss auf die Tragwerksantwort hat.

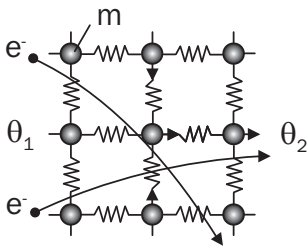
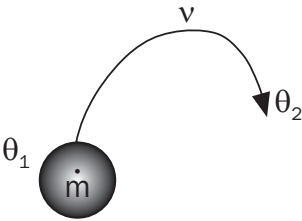
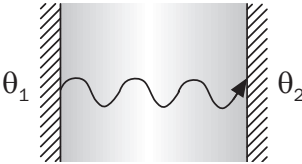
## 3.2 Wärmeübertragung

Die primäre Einteilung der Bestimmung des Wärmehaushaltes erfolgt aufgrund einer evtl. vorliegenden Zeitabhängigkeit in einen stationären oder instationären Vorgang. Die stationäre Wärmeübertragung ist zeitlich unabhängig und kann mathematisch direkt ermittelt werden. Grundlage dabei ist eine stetige Temperaturdifferenz  $\Delta\theta$  zwischen zwei Orten, in denen der Wärmehaushalt untersucht wird. Ist die Veränderung der Temperatur  $\theta$  über die Zeit  $t$  veränderlich, wie es beispielsweise bei einer Beflammung eines Bauteils mit der ETK der Fall ist, spricht man von instationärer oder auch transienter Wärmeübertragung.

Eine weitere Unterscheidung bei der Beschreibung des Wärmehaushaltes resultiert aus dem Temperaturverhalten der jeweiligen Materialien eines Körpers für den der Wärmehaushalt bestimmt werden soll. Sind die Materialeigenschaften temperaturunabhängig, liegt ein lineares Problem vor, das direkt gelöst werden kann. Bei temperaturabhängigen Materialeigenschaften hingegen liegt ein nichtlineares Problem vor, welches iterativ bzw. numerisch zu lösen ist. Eine Lösungsstrategie hierzu wird in Kapitel 3.3 erläutert.

Als Fazit gilt, dass es sich bei der Berechnung des Wärmehaushaltes infolge einer Brandbelastung immer um ein nichtlineares, instationäres Wärmeübertragungsproblem handelt.

Die Wärmeübertragung selbst ist definiert als ein temperaturbedingter Energieaustausch in einem System. Dabei findet sie immer von der wärmeren zur kälteren Seite statt. Hinsichtlich der Wärmeübertragungsmechanismen wird unterschieden zwischen Wärmeleitung (Konduktion), Wärmeströmung (Konvektion) und Wärmestrahlung (Radiation) (Tabelle 3.1).

| Wärmeleitung  | Wärmeströmung   | Wärmestrahlung   |
|---|---|--|
|    |  |  |
| Energieübertragung gekoppelter Gitterschwingungen (Phononentransport) und durch bewegliche Ladungsträger (freie Elektronenbewegung) | Wärmeübertragung aufgrund freier oder erzwungener Strömung von Materie              | Wärmeübertragung infolge elektromagnetischer Strahlung (Photonentransport)           |

**Tabelle 3.1:** Wärmeübertragungsmechanismen nach Baehr & Stephan (1994)

### 3.2.1 Wärmeleitung

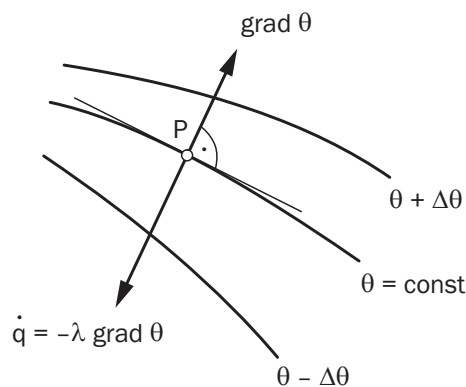
Bei einem vorhandenen Temperaturgradienten zwischen zwei benachbarten Molekülen findet ein Energietransport, die sogenannte Wärmeleitung, statt. Im folgenden wird die phänomenologische Erfassung der Wärmeleitung beschrieben. Damit es zur Wärmeleitung kommt, müssen Temperaturgradienten im Material vorhanden sein. So ergibt sich für die Betrachtung des Wärmehaushaltes als Hauptvariable die Temperatur  $\theta$ , die eine Orts- und Zeitabhängigkeit besitzt. Mit diesen Informationen wird das Temperaturfeld formuliert zu:

$$\theta = \theta(\mathbf{x}, t). \quad (3.1)$$

Infolge der auftretenden Zeitvariable  $t$  in (3.1) bezeichnet man es als instationäres Temperaturfeld, welches gerade bei steigenden Temperaturen im Bauteil während eines Brandfalls vorliegt. Werden alle Punkte eines Körpers berücksichtigt, die zu einer bestimmten Zeit  $t$  dieselbe Temperatur  $\theta$  aufweisen, spricht man von einer isothermen Fläche, kurz Isotherme. Betrachtet man nun die einzelnen Punkte im Temperaturfeld selbst, können die stärksten Isothermen durch den Temperaturgradienten als Ableitung des Temperaturfeldes in Richtung der Normalen beschrieben werden:

$$\text{grad } \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \theta}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \theta}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (3.2)$$

wobei  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  die Einheitsvektoren der drei Koordinatenrichtungen sind. Dabei steht der Temperaturgradient senkrecht auf der durch den betrachteten Punkt laufenden Isotherme. In Bild 3.1 sind verschiedene Isothermen und der Temperaturgradient dargestellt.



**Bild 3.1:** Definition von Isothermen und Temperaturgradient.

Infolge eines vorhandenen Temperaturgradienten kommt es zu einer Energieübertragung zwischen direkt benachbarten Teilchen fester Körper, die als Wärmeleitung definiert ist. Mathematisch beschrieben wird der Energietransport in einem wärmeleitenden Material durch das Vektorfeld der Wärmestromdichte

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

die dem Temperaturgradienten entgegengesetzt wirkt (s. Bild 3.1). Aus der Beziehung (3.3) wird deutlich, dass die Wärmestromdichte nicht nur orts-, stärke- und richtungsabhängig, sondern zusätzlich zeitabhängig ist. Die Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}$  beschreibt die Wärmeenergie  $Q$ , die in einer Zeitspanne  $\Delta t$  durch eine Grenzfläche  $A$  transportiert wird. Es ergibt sich somit

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\Delta Q}{A \Delta t}. \quad (3.4)$$

Wird das Gradientenfeld der Temperatur als Ursache angesehen, so kann eine Proportionalität zwischen Ursache und Wirkung angenommen werden, die durch das FOURIERSche Grundgesetz der Wärmeleitung definiert ist:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \text{grad } \theta. \quad (3.5)$$

Physikalisch gesehen verläuft der Wärmestrom  $\dot{\mathbf{q}}$  gemäß des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik, *Wärme strömt in Richtung des Temperaturgefälles*, entgegengesetzt zum Temperaturgradienten  $\text{grad } \theta$  von den wärmeren zu den kühleren Bereichen. Die in (3.5) enthaltene Proportionalitätskonstante in Form der Matrix  $\boldsymbol{\lambda}$  stellt die Beschreibung der Materialeigenschaft, der Wärmeleitfähigkeit dar. Die Wärmeleitfähigkeitsmatrix kann für isotrope Materialien aus der Multiplikation der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  mit der skalaren Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_t$  bestimmt werden. Die mathematische Darstellung der temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda_t$  erfolgt in Abschnitt 3.4.1.

Nachdem die Zusammenhänge zwischen Temperaturfeld  $\text{grad } \theta$  und Wärmestrom  $\dot{\mathbf{q}}$  sowie die Abhängigkeit der Wärmeleitung eingeführt sind, wird nun das Temperaturfeld selbst bestimmt. Dazu wird eine Bilanzgleichung der instationären Wärmeleitung aufgestellt. Anwendung findet hier der 1. Hauptsatz der Thermodynamik, der neben dem FOURIERSchen Grundgesetz der Wärmeleitung postuliert, dass in einem abgeschlossenen System der Gesamtbetrag der Energie unverändert bleibt und sich die Energie nur durch Transport von Energie über das System hinaus ändern kann. Er lautet:

$$dU = \delta Q + \delta W, \quad (3.6)$$

wobei  $dU$  die Änderung der inneren Energie,  $\delta Q$  die übertragene Wärmeenergie und  $\delta W$  die mechanische Arbeitsenergie repräsentieren. Infolge thermischer Einwirkungen während der Zeit  $dt$  erhöht sich die innere Energie  $U$  eines Körpers, und es ergibt sich für eine rein thermische Betrachtung unter Vernachlässigung der inneren Arbeitsenergie  $\delta W$  die Leistungsbilanz

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}(t). \quad (3.7)$$

Diese Bilanzgleichung beschreibt das Gleichgewicht zwischen der Änderung der inneren Energie, welche physikalisch auch als Speicherung der inneren Energie bezeichnet wird und der Summe aller zu- und abführenden Wärmeströme. Diese beiden Anteile werden nun im folgenden weiter aufgelöst, um die instationäre Wärmeleitungsgleichung aufzustellen. Der linke Term der Leistungsbilanz (3.7), also die Änderung der inneren Energie  $dU$  während

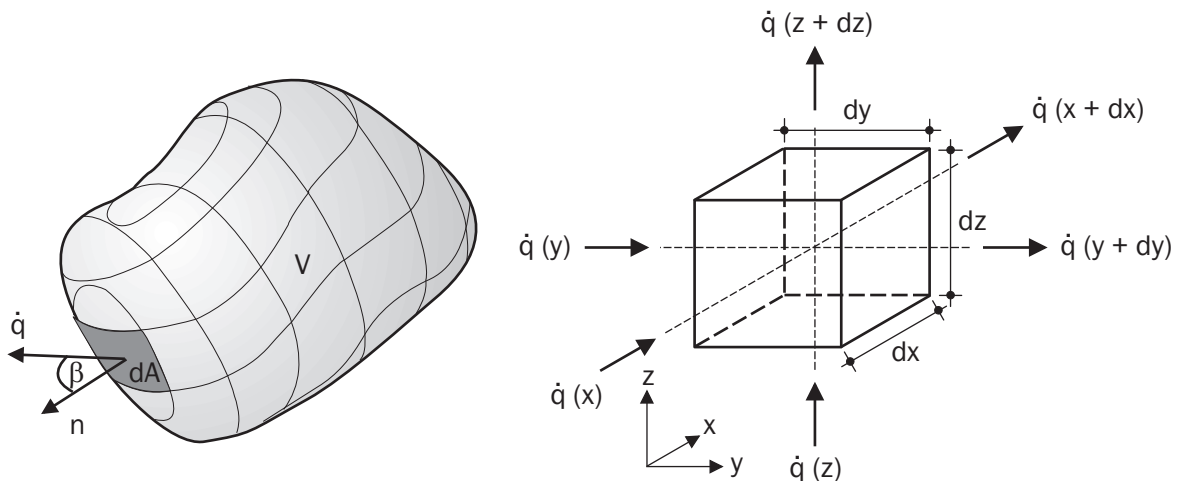
einer Zeitspanne  $dt$  in einem fiktiv angenommenen infinitesimalen Volumenelement mit dem Volumen  $dV = dx dy dz$ , kann mit den temperaturabhängigen Stoffkennwerten für Rohdichte  $\varrho(\theta)$  und Wärmekapazität  $c(\theta)$  sowie einer Temperaturänderung  $\frac{\partial\theta}{\partial t}$  beschrieben werden mit:

$$\frac{dU}{dt} = \int_{(V)} \varrho(\theta) c(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial t} dV. \quad (3.8)$$

Zur Bestimmung des Wärmestromes  $\dot{Q}$  wird zunächst ein Element  $dA$  der Oberfläche eines Körpers mit dem Volumen  $dV$  betrachtet. Bild 3.2 (links) veranschaulicht den Zusammenhang der Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}$  und des Wärmestromes  $d\dot{Q}$ , mit der nach außen gerichteten Normalen  $\mathbf{n}$

$$d\dot{Q} = -\dot{\mathbf{q}}\mathbf{n} dA, \quad (3.9)$$

wobei das Minuszeichen das Hineinfließen in den Bereich beschreibt. Somit weist der Vektor der Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}$  in den Körper hinein, der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  nach außen, woraus ein negatives Skalarprodukt resultiert. Der Wärmestrom ist am größten, wenn  $\dot{\mathbf{q}}$  senkrecht auf der Oberfläche des Körpers steht ( $\beta = 0$ ).



**Bild 3.2:** Wärmebilanz der thermischen Energie eines Volumenelementes  $dV$

Der gesamte Wärmestrom  $\dot{Q}$  resultiert aus der Integration aller Wärmeströme  $d\dot{Q}$  nach (3.9) und es gilt:

$$\dot{Q} = - \int_{(A)} \dot{\mathbf{q}}\mathbf{n} dA = - \int_{(V)} \operatorname{div}\dot{\mathbf{q}} dV, \quad (3.10)$$

wobei mit Hilfe des GAUSS'schen Integralsatzes das Oberflächenintegral in das Volumenintegral der Divergenz von  $\dot{\mathbf{q}}$  umgeformt wird. Dieses Volumenintegral kann auch unter Vernachlässigung einer inneren Wärmequelle aus der Differenz aus Ab- und Zufluss der Wärmeströme in den jeweiligen Koordinatenrichtungen gebildet werden. Es ergibt sich für die Bilanz der Wärmeströme an einem infinitesimalen Volumenelement:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{Bilanz}} = & (\dot{q}(x+dx) - \dot{q}(x)) dy dz + (\dot{q}(y+dy) - \dot{q}(y)) dx dz \\ & + (\dot{q}(z+dz) - \dot{q}(z)) dx dy. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mit einer linearisierten Taylorreihe und der ersten Stufe kann für die abfließenden Wärmestromdichten in (3.11) richtungsabhängig geschrieben werden:

$$\dot{q}(x + dx) = \dot{q}(x) + \frac{\partial \dot{q}(x)}{\partial x} dx, \quad \dot{q}(y + dy) = \dots, \quad \dot{q}(z + dz) = \dots \quad (3.12)$$

Durch Einsetzen von (3.12) in (3.11) kürzen sich die einfließenden Wärmestromdichten heraus und es verbleibt bei Berücksichtigung von  $dV = dx dy dz$  und Integration über das Volumen:

$$\dot{Q} = - \int_{(V)} \left( \frac{\partial \dot{q}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}(y)}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}(z)}{\partial z} \right) dV = - \int_{(V)} \operatorname{div} \dot{\mathbf{q}} dV. \quad (3.13)$$

Nachdem mit (3.8) der Speicherterm und mit (3.10) der Wärmeleitungsterm der Leistungsbilanz (3.7) formuliert ist, wird unter Beachtung einer bisher nicht berücksichtigten Wärmequelle  $\dot{W}(\theta, \mathbf{x}, t)$  das Gesamtvolumenintegral der Wärmeleitungsgleichung gebildet zu:

$$\int_V \left( \varrho(\theta) c(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div} \dot{\mathbf{q}} - \dot{W}(\theta, \mathbf{x}, t) \right) dV = 0. \quad (3.14)$$

Die endgültige Integration über das betrachtete Volumen führt unter der Berücksichtigung der Wärmestromdichtedefinition in Abhängigkeit des Temperaturgradienten (3.5) nach FOURIER zu der allgemeinen Bilanzgleichung des Wärmehaushaltes  $B_\theta$ :

$$B_\theta = \varrho(\theta) c(\theta) \dot{\theta} + \operatorname{div} \dot{\mathbf{q}} - \dot{W} = \varrho(\theta) c(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} [\boldsymbol{\lambda}(\theta) \cdot \operatorname{grad} \theta] - \dot{W} = 0. \quad (3.15)$$

Zur besseren Übersicht werden mit  $\varrho(\theta) = \varrho$ ,  $c(\theta) = c$ , und  $\dot{W}(\theta, \mathbf{x}, t) = \dot{W}$  vereinfachte Schreibweisen eingeführt, die im weiteren Verlauf der Ausführungen verwendet werden.

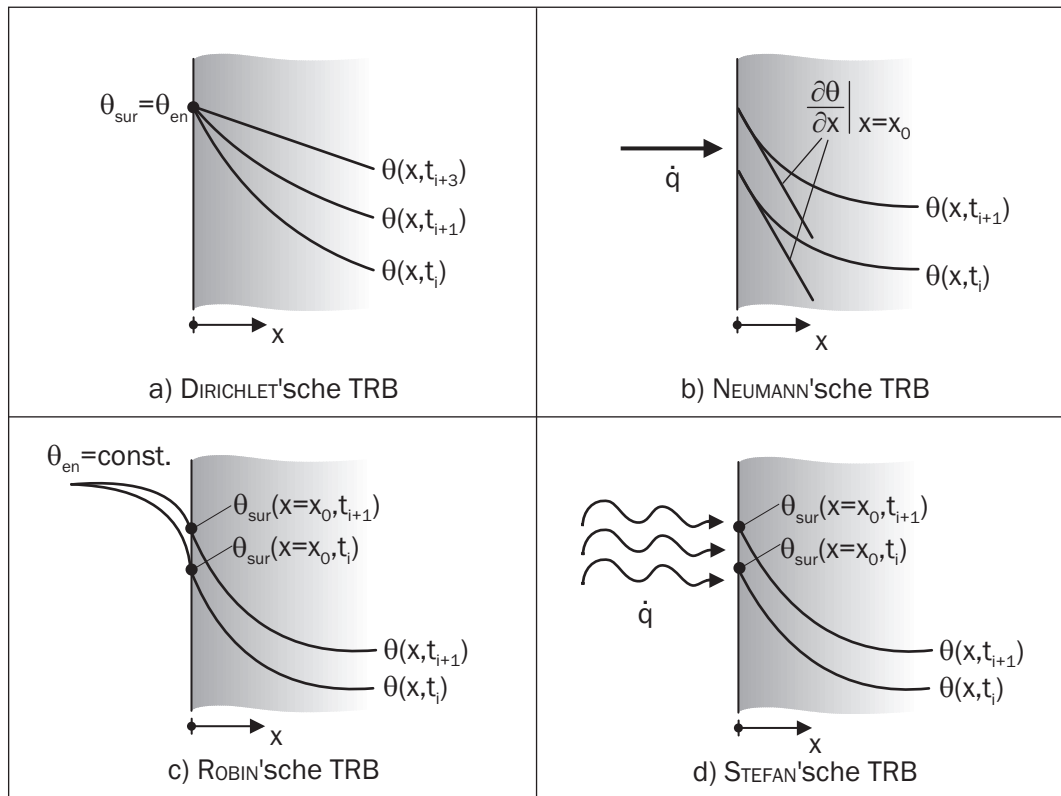
### 3.2.2 Anfangs- und Randbedingungen

Zur Lösung der Differentialgleichung (3.15), die den instationären Temperaturhaushalt in festen Körpern orts- und zeitabhängig beschreibt und die Temperaturabhängigkeit der Stoffkennwerte berücksichtigt, werden für eine komplette physikalische Formulierung thermische Anfangs- und Randbedingungen benötigt, die sich mit den Anfangstemperaturen, vorgegebenen Randtemperaturen und der Definition von Wärmeübergängen an den Rändern des Körpers infolge von Konvektion und Strahlung angeben lassen.

Als **Anfangsbedingung** bei einer instationären Temperaturfeldberechnung werden zu Beginn der thermischen Einwirkung die Temperaturen an jeder Stelle zur Zeit  $t = t_0$  vorgegeben. Es gilt:

$$\theta(x, y, z, t = t_0) = \theta_0(x, y, z) = \text{const.} \quad (3.16)$$

Neben der zeitabhängigen Anfangsbedingung (3.16) lassen sich **Thermische Randbedingungen** (TRB) definieren, die eine Änderung des Temperaturhaushaltes ermöglichen. Sie lassen sich in vier Gruppen kategorisieren und werden im folgenden speziell im Hinblick auf Temperatureinwirkungen erläutert. In Bild 3.3 werden vier Arten von Randbedingungen, mit den sich einstellenden Temperaturentwicklungen  $\theta(x, t)$ , beispielhaft an einer Wandoberfläche vorgestellt.



**Bild 3.3:** Typisierung der Thermischen Randbedingungen (TRB) an einer Oberfläche

Die Randbedingungen in Bild 3.3 sind folgendermaßen definiert.

- **DIRICHLET'sche TRB:** Diese 1. Art der Randbedingung ist charakterisiert durch Vorgabe der Temperatur  $\theta$  als Funktion der Zeit  $t$  und des Ortes  $x = x_0$  auf der Oberfläche des zu untersuchenden Körpers bzw. Bauteils (Bild 3.3 a)). Es gilt, dass die Oberflächentemperatur  $\theta_{sur}$  am Rand bei  $x = x_0$  mit der Umgebungstemperatur  $\theta_{en}$  im Gleichgewicht steht:

$$\theta_{sur}(x = x_0, t) = \theta_{en}(x = x_0, t). \quad (3.17)$$

Diese TRB stellt physikalisch das größte Wärmeübertragungsmodell dar, allerdings ist es mathematisch am einfachsten zu berücksichtigen.

- **NEUMANN'sche TRB:** Randbedingungen 2. Art liegen vor, wenn konstante Wärmeströme  $\dot{q}$  normal zur Oberfläche als Funktion, abhängig von Ort  $x$  und Zeit  $t$ , vorgegeben werden. Bedingt durch das FOURIER'sche Gesetz bzgl. der Wärmestromdichte (3.5) wird indirekt der Temperaturgradient angesetzt (Bild 3.3 b)). Angesichts der Möglichkeit, Wärmeströme gleich Null zu setzen, können mit dieser Art der Formulierung von Randbedingungen Symmetriebedingungen und adiabate Verhältnisse erfasst werden.
- **ROBIN'sche TRB:** Die 3. Art der Randbedingungen (Bild 3.3 c)) ist dadurch charakterisiert, dass der Wärmeaustausch zwischen Bauteiloberfläche und Umgebung

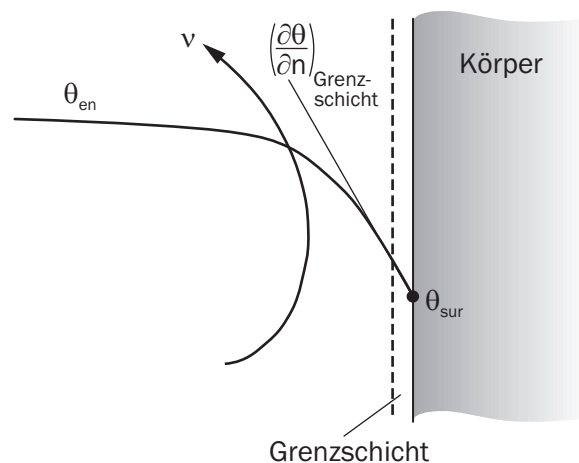
durch eine Grenzschicht erfolgt. Um diese Grenzschicht zu berücksichtigen, ist ein Übergangskoeffizient einzuführen, wie es bei der Berücksichtigung der Konvektion geschieht. Nähere Erläuterungen werden in Kapitel 3.2.2.1 gegeben.

- **STEFAN'sche TRB:** In der Literatur wird die Berücksichtigung der Wärmestrahlung oft in die Kategorie der NEUMANN/ROBIN-TRB eingestuft. Aufgrund des großen Einflusses der Wärmestrahlung besonders bei Temperaturen infolge eines Brandereignisses wird in Anlehnung an Marek & Nitsche (2007) diese 4. Art der TRB eingeführt (Bild 3.3 d)). Die Berücksichtigung der Wärmestrahlung bei der Wärmeübertragung zwischen Körperoberfläche und Umgebung basiert dementsprechend auf den TRB der 2. und 3. Art und wird in Kapitel 3.2.2.2 erläutert.

In den folgenden 2 Kapiteln werden die Wärmeübertragungsmechanismen der Wärmeströmung (Konvektion) und der Wärmestrahlung (Radiation) detailliert beschrieben.

### 3.2.2.1 Konvektion

Die Wärmeübertragung durch Konvektion (auch Wärmeströmung genannt) ist ein makroskopisches strömungstechnisches Problem, bei dem Wärme über Fluidteilchen in Form von innerer Energie von einem Ort zum andern übertragen wird. Bei der Konvektion wird zwischen freier und erzwungener Konvektion unterschieden, wobei letztere durch einen erzwungenen Materietransport in Form einer Zwangströmung unter Einwirkung äußerer Kräfte, wie beispielsweise durch Wind, entsteht und im folgenden nicht weiter betrachtet wird. Freie Konvektion dagegen entsteht allein durch ein Dichtegefälle im Fluid, hervorgerufen durch Temperaturveränderungen, wodurch Auftriebskräfte entstehen. Nach Bild 3.4 bildet sich zwischen Festkörper und Fluid aufgrund von Adhäsionskräften eine Grenzschicht, in der die Strömungsgeschwindigkeit der Fluidmoleküle gleich Null ist.



**Bild 3.4:** Temperaturprofil des konvektiven Wärmeübergangs mit einer Grenzschicht zwischen Umgebung und Körperoberfläche [Baehr & Stephan 1994].



Deshalb wird die Wärme in diesem Bereich nur durch Wärmeleitung transportiert, sodass für die Grenzschicht das FOURIERSche Grundgesetz (3.5)

$$\dot{q} = -\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_{\text{Grenzschicht}} \quad (3.18)$$

gilt, wobei  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $\partial\theta/\partial n$  der Temperaturgradient in der Grenzschicht normal zur Körperoberfläche sind.

Aufgrund der komplexen und inhomogenen Temperatur im Fluid ist es sehr kompliziert, die Fluidtemperatur zu bestimmen. Um den Wärmestrom dennoch mathematisch zu erfassen, wird der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_c$  als Proportionalitätskonstante zwischen der auf die wärmeübertragende Oberfläche  $A$  bezogenen Wärmestromdichte  $q_t^{Kon}$  und dem Temperaturgefälle zwischen Fluid und Körperoberfläche eingeführt. Die Definition erfolgt mit dem Abkühlungsgesetz nach NEWTON zu:

$$q_t^{Kon} = \alpha_c (\theta_{en} - \theta_{sur}). \quad (3.19)$$

Im Zuge einer Temperaturfeldberechnung infolge eines Brandes wird normativ gemäß DIN EN 1992-1-2 (2010) der konvektive Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_c$  auf der beflamten Seite mit  $25\text{W}/\text{m}^2\text{K}$  und auf der brandabgewandten Seite mit  $4\text{W}/\text{m}^2\text{K}$  angenommen, da die Wärmestrahlung separat berücksichtigt wird.

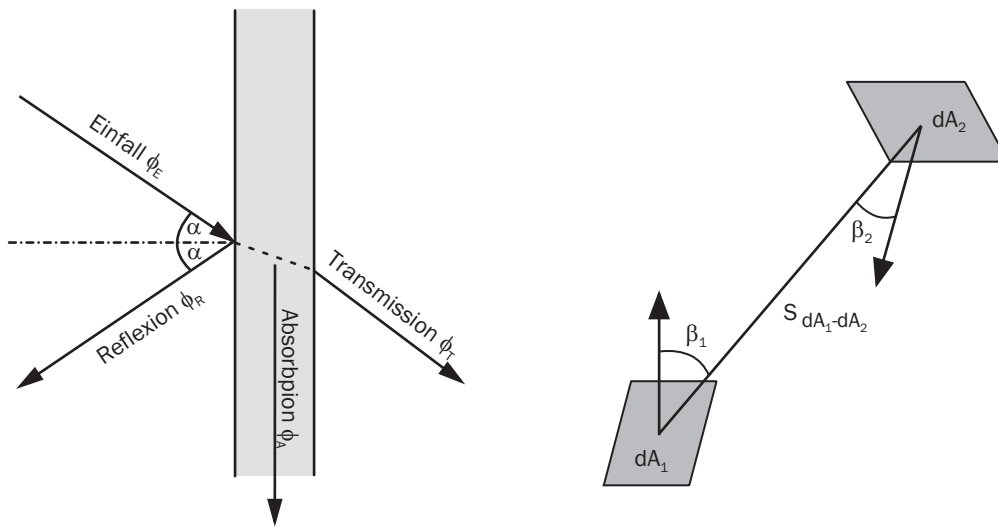
### 3.2.2.2 Wärmestrahlung

Die Wärmestrahlung zeichnet sich durch andere physikalische Gesetzmäßigkeiten gegenüber den schon beschriebenen Wärmeübertragungsmechanismen Wärmeleitung und Konvektion aus. Der Strahlungstransport ist nicht an die Materie gebunden, da die Energie durch elektromagnetische Wellen übertragen wird. Die Wärmestrahlung hängt nicht vom Temperaturgradienten ab, sondern von Unterschieden in der vierten Potenz der thermodynamischen (absoluten) Temperaturen der Körper, die den Strahlungsaustausch vollziehen. Weitere physikalische Eigenschaften sind die Emissivität, die Oberflächenbeschaffenheit und die geometrische Anordnung von Sender und Empfänger. Die auf die Oberfläche eines Körpers auftreffende Strahlung in Form der Strahlungsleistung  $\Phi_E$  spaltet sich in die Strahlungsleistungsanteile der Reflexion  $\Phi_R$ , der Transmission  $\Phi_T$  und der Absorption  $\Phi_A$  auf [Bild 3.5 (links)].

Es wird zwischen spiegelnder und diffuser Reflexion unterschieden. Die spiegelnde Reflexion besitzt die Eigenschaft, dass Ein- und Ausfallwinkel der Strahlung im Vergleich zur Flächennormalen identisch sind, wohingegen sich bei der diffusen Reflexion die zurückgeworfene Strahlung gleichmäßig über den Raum verteilt. Mit Einführung des Reflexionsgrades  $\rho$ , des Absorptionsgrades  $\alpha$  und des Transmissionsgrades  $\tau$  gilt entsprechend dem Energieerhaltungssatz:

$$\rho + \alpha + \tau = 1; \quad \text{wobei} \quad \rho = \frac{\Phi_R}{\Phi_E}, \quad \alpha = \frac{\Phi_A}{\Phi_E} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\Phi_T}{\Phi_E}. \quad (3.20)$$

Eine reine Transmission ist nur bei transparenten Stoffen möglich. Bei undurchsichtigen Stahlbetonbauteilen, wird daher der Transmissionsgrad  $\tau = 0$  gesetzt. Bei der Betrachtung



**Bild 3.5:** Reflexion, Transmission und Absorption von Strahlung (links) und Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächenelementen  $dA_1$  und  $dA_2$  (rechts)

von Strahlungseigenschaften ist zwischen zwei theoretischen Grenzfällen zu unterscheiden. Man spricht von einem schwarzen Körper, wenn die gesamte einfallende Strahlung vom Körper absorbiert und in Wärme umgewandelt wird, wobei der Absorptionsgrad  $\alpha = 1$  und der Reflexionsgrad  $\rho = 0$  ist. Im Regelfall absorbieren Körper die Strahlung aller Wellenlängen mit dem gleichen Anteil ( $\alpha < 1$ ) und werden als graue Körper bezeichnet. Die sogenannten farbigen Körper absorbieren dagegen die Strahlung verschiedener Wellenlängen unterschiedlich stark. Aufgrund der Tatsache, dass Temperaturstrahler Strahlung sowohl absorbieren als auch emittieren können, führt die Einführung des Emissionsgrades  $\varepsilon$ , der das Verhältnis eines grauen Körpers emittierender spezifischer Ausstrahlung zu der eines schwarzen Körpers weitergibt, und des Absorptionsgrades  $\alpha$  nach Gleichung (3.20), der das Verhältnis der absorbierten Strahlungsleistungen des grauen Körpers zu dem des schwarzen bildet, zum KIRCHOFF'schen Strahlungsgesetz. Es besagt, dass der Emissionsgrad  $\varepsilon$  und der Absorptionsgrad  $\alpha$  immer gleich sind:

$$\varepsilon = \alpha. \quad (3.21)$$

Die bisherigen Erläuterungen bezogen sich immer auf die Strahlung einer einzelnen Fläche. Im folgenden soll nun der Strahlungsaustausch zwischen zwei grauen Oberflächen beschrieben werden. Für das Ziel, den Wärmestrom infolge Wärmestrahlung zu ermitteln, wird zunächst die geometrische Lage der zwei Oberflächen zueinander durch die Einführung der dimensionslosen Einstrahlzahl  $\varphi_{12}$  berücksichtigt. Mathematisch ergibt sich gemäß Bild 3.5 (rechts) für die Einstrahlzahl:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{s^2} dA_1 dA_2. \quad (3.22)$$

Mit Hilfe des STEFAN-BOLTZMANN Gesetzes kann die spezifische Abstrahlung  $\dot{q}_e$  eines grauen Körpers bestimmt werden zu

$$\dot{q}_e = \varepsilon \sigma \theta^4, \quad (3.23)$$

wobei  $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  die sogenannte STEFAN-BOLTZMANN Konstante ist. Mit den eingeführten Größen und Beziehungen kann nun der Wärmeaustausch zwischen zwei Oberflächen  $dA_1$  und  $dA_2$  bestimmt werden. Ein grauer Temperaturstrahler mit der Fläche  $dA_1$ , der Temperatur  $\theta_1$  und der Emissivität  $\varepsilon_1$  strahlt an eine Fläche  $dA_2$  die Strahlungsleistung  $\Phi_{e1}$  ab:

$$\Phi_{e1} = A_1 \varepsilon_1 \varphi_{12} \theta_1^4. \quad (3.24)$$

Aufgrund dessen, dass ein grauer Temperaturstrahler mit der Fläche  $dA_1$  nicht nur die Strahlungsleistung  $\Phi_{e1}$  an die Fläche  $dA_2$  emittiert, sondern von dieser auch eine Strahlungsleistung  $\Phi_{e2}$  empfängt, resultiert ein Wärmestrom  $\dot{q}_{12}$  durch Radiation von der Fläche  $dA_1$  mit der höheren absoluten Temperatur  $\theta_1$  zu einer Fläche  $dA_2$  mit der niedrigeren Temperatur  $\theta_2$  zu

$$\dot{q}_{12} = C_{12} (\theta_1^4 - \theta_2^4). \quad (3.25)$$

In Gleichung (3.25) ist  $C_{12}$  der Strahlungsaustauschkoeffizient, der sich aus der Bilanzierung der ausgetauschten Strahlungsleistungen zwischen zwei grauen Körpern mit  $\theta_1 \neq \theta_2$  berechnen lässt. Es ergibt sich:

$$C_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma \varphi_{12}}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \frac{A_1}{A_2} \varphi_{12}^2}. \quad (3.26)$$

Bei der Untersuchung von Stahlbetonbauteilen infolge einer Brandbeanspruchung kann das umgebende Brandgas als grauer Strahler angesehen werden, der das Bauteil in relativ geringem Abstand völlig umgibt. Daher können Brandgas und Bauteil als zwei weit ausgehende Körper mit  $dA_1 = dA_2$  angesehen werden, dessen Oberflächen parallel zueinander sind. Mit der Annahme von  $\varphi_{12} = 1.0$  vereinfacht sich die Gleichung (3.26) zu:

$$C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \quad (3.27)$$

Gemäß DIN EN 1991-1-2 (2010) wird die Gleichung (3.26) weiter vereinfacht, wobei anstatt der Definition mit den Indizes 1 und 2 für die grauen Körper nun die Beflammung mit dem Index f und die beflamnte Bauteiloberfläche mit dem Index m bezeichnet wird. Es ergibt sich:

$$C_{12} = \varepsilon_f \varepsilon_m \sigma. \quad (3.28)$$

Zusammenfassend kann der Nettowärmestrom für die Strahlung durch Einsetzen von (3.28) in (3.25) angegeben werden zu:

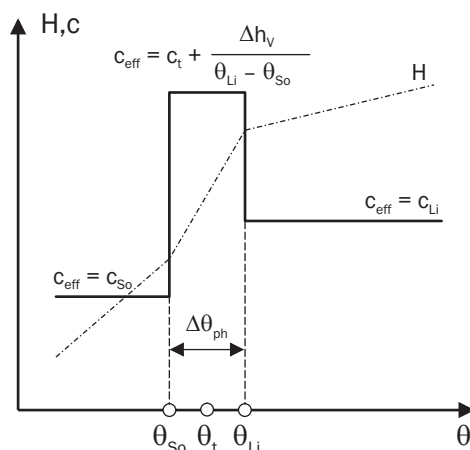
$$\dot{q}_t^{Str} = \varepsilon_f \varepsilon_m \sigma (\theta_r^4 - \theta_m^4) = \varepsilon_{res} \sigma (\theta_r^4 - \theta_m^4), \quad (3.29)$$

wobei  $\theta_r$  die wirksame Temperatur des Brandes und  $\theta_m$  die Oberflächentemperatur des Bauteils jeweils in K beschreibt.

### 3.2.2.3 Phasenübergänge

Stoffe und Materialien besitzen aufgrund ihrer temperatur- und druckabhängigen physikalischen Zustände unterschiedliche Aggregatzustände. Es werden feste, flüssige und gasförmige Zustände unterschieden. Zwischen diesen Aggregatzuständen kann es durch eine Änderung des Wärmehaushaltes infolge von Wärmezufuhr z.B. bei einer Brandeinwirkung zu Phasenübergängen kommen, wobei sich der Aggregatzustand eines Stoffes (z.B. Wasser) vom flüssigen zum gasförmigen Zustand ändert. Die zugeführte Wärme, die den Phasenübergang erzeugt, ruft keine Temperaturerhöhung hervor. Sie wird deshalb als latente Wärme  $Q_L$  bezeichnet.

Phasenübergänge sind dadurch gekennzeichnet, dass sie bei einer konstanten Temperatur  $\theta_t$  bzw. innerhalb eines Temperaturintervalls  $\Delta\theta_{Ph} = \theta_{Li} - \theta_{So}$  stattfinden. Ein Temperaturintervall  $\Delta\theta_{Ph}$  wird dabei am Anfang von der Liquidustemperatur  $\theta_{Li}$  und am Ende des Phasenübergangs von der Solidustemperatur  $\theta_{So}$  begrenzt. Die Wärmekapazitäten  $c_{So}$  und  $c_{Li}$  sind der Solidus- und der Liquidustemperatur zugeordnet. Zur Verdeutlichung zeigt Bild 3.6 die eben beschriebenen Parameter, die zur Beschreibung eines Phasenübergangs nötig sind. Gleichlaufend wird zur weiteren numerischen Berücksichtigung von Phasenübergängen die "Methode der äquivalenten effektiven Wärmekapazität" eingeführt.



Definition der effektiven Wärmekapazität  $c_{eff}$ :

| Temperatur $\theta$                        | Wärmekapazität $c_{eff}$                                       |
|--|--|
| $\theta < \theta_{So}$                     | $c_{eff} = c_{So}$   |
| $\theta_{So} \leq \theta \leq \theta_{Li}$ | $c_{eff} = c_t + \frac{\Delta h_v}{\theta_{Li} - \theta_{So}}$ |
| $\theta > \theta_{Li}$                     | $c_{eff} = c_{Li}$   |

**Bild 3.6:** Berücksichtigung von Phasenübergängen mit der Methode der effektiven Wärmekapazitäten

Bei der Berechnung des Wärmehaushaltes brandbeanspruchter Stahlbetonbauteile finden Phasenübergänge bei der Verdampfung von Wasser im Beton sowie bei der Modifikationsänderung von Betonstahl von  $\alpha$ - zu  $\gamma$ -Eisen statt. Bei diesen Vorgängen wird die dafür benötigte Energie als Verdampfungsenthalpie  $\Delta h_V$  bzw. Modifikationenthalpie  $\Delta h_M$  definiert. Die massenspezifische Verdampfungsenthalpie von Wasser bei einem Druck von  $p=1023$  hPa wird nach Hering, Martin & Stohrer (2007) zu  $\Delta h_V = 2257 \cdot 10^3$  J/kg angegeben. Somit kann beispielsweise die latente Wärme  $Q_L$  in einem Betonbauteil mit dem Volumen  $V$ , der Massendichte  $\rho$  des Betons und dem Wassergehalt  $u$  des Betons berechnet werden mit:

$$Q_L = V \rho \Delta h_V \frac{u}{100}. \quad (3.30)$$

Da die Erfassung von Phasenübergängen einen numerisch hohen Rechenaufwand erfordert, werden die Phasenübergänge nicht in der direkten Formulierung des Wärmehaushaltes, sondern allein bei der Stoffmodellierung der Wärmekapazitäten von Beton und Betonstahl im Abschnitt 3.4.3 berücksichtigt.

### 3.2.3 Zusammenfassung des Wärmehaushaltes

Nachdem die einzelnen Komponenten zur Beschreibung des Wärmehaushaltes eines Körpers eingeführt sind, werden diese nun zusammenfassend dargestellt, damit sie für die numerische Umsetzung in einer kompakten Form vorliegen. Für die Wärmebilanzgleichung nach (3.15) ergibt sich:

$$B_\theta = \rho c \dot{\theta} - \operatorname{div}[\boldsymbol{\ell}_\theta] - Q_t = 0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\ell}_\theta = \boldsymbol{\lambda}(\theta) \cdot \operatorname{grad} \theta. \quad (3.31)$$

Für die DIRICHLET'sche Randbedingung ergibt sich aus (3.17)

$$R_t^\theta = \theta_{en} - \theta_{sur} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_t \times [t_0, T] \quad (3.32)$$

und aus den NEUMANN-ROBIN- und STEFAN- Randbedingungen resultiert zusammenfassend aus den Randleitungstermen, den Wärmeströmen, den Anteilen aus Konvektion (3.19) und Strahlung (3.29)

$$R_t^q = \boldsymbol{\ell}_\theta \cdot \mathbf{n} - q_{nt} - q_t^{Kon} - q_t^{Str} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_{qt} \times [t_0, T]. \quad (3.33)$$

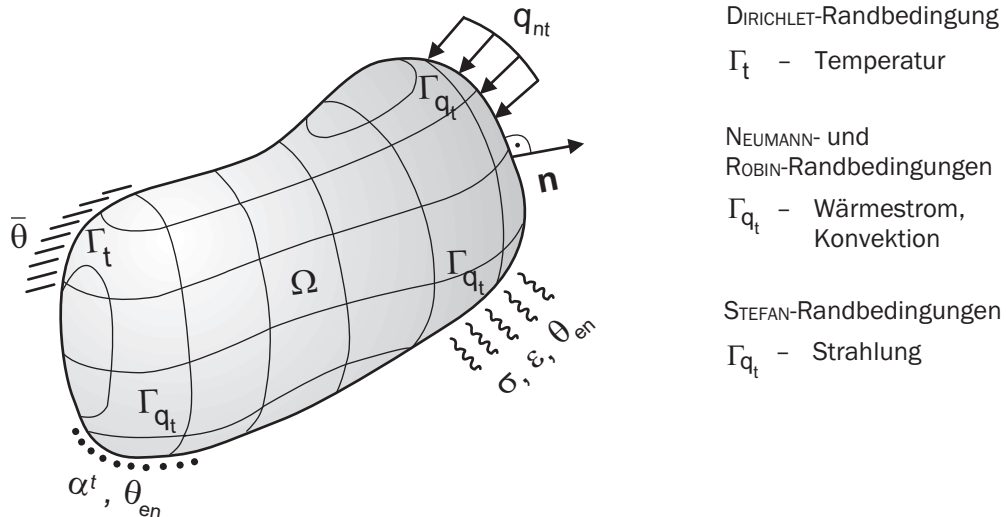


Bild 3.7: Thermische Randbedingungen an einem Körper

### 3.3 Finite-Elemente-Umsetzung des Wärmehaushaltes

In Abschnitt 3.2 wurde das für poröse Medien physikalisch hinreichend genau beschriebene Modell für den Wärmehaushalt mit thermischen Transport- und Speicherphänomenen vorgestellt. Der Wärmehaushalt in porösen Medien wird aufgrund der Materialnichtlinearitäten durch ein nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem beschrieben, welches aufgrund der gleichzeitigen Berücksichtigung der räumlichen Koordinaten  $\mathbf{X}$  und der zeitlichen Koordinate  $t$  ein Anfangsrandwertproblem darstellt. Eine direkte analytische Lösung ist nur unter stark vereinfachten Annahmen möglich. Um die inhärenten Nichtlinearitäten zu berücksichtigen, ist eine Lösung mit numerischen Lösungswegen notwendig. Das Differentialgleichungssystem wird dazu in die schwache integrale Form überführt und konsistent linearisiert mit dem Ziel, das resultierende algebraische Gleichungssystem mit einer räumlichen und zeitlichen Diskretisierung aufzustellen und somit die unabhängige Variable der Temperatur zu bestimmen.

Die äquivalente integrale Form der differentiellen Formulierung wird mit dem Verfahren *der gewichteten Residuen* formuliert. Sie stellt eine der gebräuchlichsten Verfahren dar, wobei das resultierende Residuum einer Näherungslösung minimiert wird. Das Residuum wird mit Hilfe einer noch zu wählenden Wichtungsfunktion  $\Psi$  gewichtet, sodass der gewichtete Mittelwert des Residuums verschwindet. Durch Multiplikation des Residuums erhält man mit (3.31), (3.32) und (3.33) die integrale Formulierung

$$\int_{\Omega} \Psi B_{\theta} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{qt}} \Psi R_t^q \, d\Gamma_{qt} + \int_{\Gamma_t} \Psi R_t \, d\Gamma_t^{\theta} = 0. \quad (3.34)$$

Unter Berücksichtigung von (3.31) spaltet sich das Gebietsintegral in (3.34) in drei Anteile

$$\int_{\Omega} \Psi B_{\theta} \, d\Omega = \int_{\Omega} \Psi \rho c \dot{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} \Psi Q_t \, d\Omega - \int_{\Omega} \Psi \operatorname{div} \boldsymbol{\ell}_{\theta} \, d\Omega \quad (3.35)$$

auf, wobei das letzte Gebietsintegral nun näher betrachtet wird. Mit Anwendung des Divergenztheorems

$$\operatorname{div} [\Psi \boldsymbol{\ell}_{\theta}] = \Psi \operatorname{div} \boldsymbol{\ell}_{\theta} + [\operatorname{grad} \Psi] \cdot \boldsymbol{\ell}_{\theta} \quad \Rightarrow \quad \Psi \operatorname{div} \boldsymbol{\ell}_{\theta} = \operatorname{div} [\Psi \boldsymbol{\ell}_{\theta}] - [\operatorname{grad} \Psi] \cdot \boldsymbol{\ell}_{\theta} \quad (3.36)$$

und der Anwendung des 2. Integralsatzes von GAUSS/GREEN auf (3.36)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} [\Psi \boldsymbol{\ell}_{\theta}] \, d\Omega = \int_{\Gamma} \Psi \boldsymbol{\ell}_{\theta} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.37)$$

kann das letzte Integral in Gleichung (3.35) in

$$\int_{\Omega} \Psi \operatorname{div} \boldsymbol{\ell}_{\theta} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \Psi \boldsymbol{\ell}_{\theta} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \Psi \boldsymbol{\ell}_{\theta} \, d\Omega \quad (3.38)$$

überführt werden, wobei eine Ableitungsordnung auf die Wichtungsfunktion  $\Psi$  übertragen wird. Dadurch wird die notwendige Differenzierbarkeit der Ansatzfunktion für  $\theta$  verringert. Durch Einsetzen von (3.38) in (3.35) ergibt sich bei gleichzeitiger Rücksubstitution von

(3.33), dass sich die Randleitungsterme aus Gleichung (3.33) und dem Anteil aus (3.38) aufheben. Werden zudem Wichtungsfunktionen  $\Psi$  gewählt, die die Eigenschaft besitzen, auf  $\Gamma_t$  zu verschwinden, so entfallen auch die Randterme der wesentlichen Randbedingungen und es resultiert aus (3.34) die reduzierte äquivalente Integralform

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Psi \varrho c \dot{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} \Psi Q_t \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{grad } \Psi \cdot \boldsymbol{\lambda} \text{ grad } \theta \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{qt}} \Psi q_{nt} \, d\Gamma_{qt} - \int_{\Gamma_{qt}} \Psi \alpha_c (\theta_{en} - \theta_{sur}) \, d\Gamma_{qt} - \int_{\Gamma_{qt}} \Psi \sigma \varepsilon (\theta_{en}^4 - \theta_{sur}^4) \, d\Gamma_{qt} = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

**Konsistente Linearisierung:** Nachdem das Anfangsrandwertproblem in schwacher Form (3.39) vorliegt, ist nun wegen der vorhandenen Nichtlinearitäten eine Linearisierung vorzunehmen. Gemäß der Erläuterungen im Anhang A.2, insbesondere Gleichung (A.9), ergibt sich für die Zustandsvariable der Temperatur  $\theta$  die allgemeine Gleichung

$$DG(\theta) \cdot \Delta\theta = -G(\theta). \quad (3.40)$$

Durch eine konsistente Linearisierung kann die linke Seite von (3.40) bei Berücksichtigung der einzelnen Anteile aus (3.39) angegeben werden mit:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Psi \left( \frac{\partial(\varrho c)}{\partial\theta} \dot{\theta} \Delta\theta + \left( (\varrho c) \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta\theta \right) \, d\Omega - \int_{\Omega} \Psi \frac{\partial Q_t}{\partial\theta} \Delta\theta \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \text{grad } \Psi \cdot \left( \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial\theta} \text{ grad } \theta \Delta\theta + (\boldsymbol{\lambda} \text{ grad}) \Delta\theta \right) \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{qt}} \Psi \frac{\partial q_{nt}}{\partial\theta} \Delta\theta \, d\Gamma_{qt} - \int_{\Gamma_{qt}} \Psi \left( \frac{\partial \alpha_c}{\partial\theta} (\theta_{en} - \theta) \Delta\theta + \alpha_c \frac{\partial \theta_{en}}{\partial\theta} \Delta\theta - \alpha_c \Delta\theta \right) \, d\Gamma_{qt} \\ & - \int_{\Gamma_{qt}} \Psi \left( \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial\theta} (\theta_{en}^4 - \theta^4) \Delta\theta + 4 \sigma \varepsilon \theta_{en}^3 \frac{\partial \theta_{en}}{\partial\theta} \Delta\theta + 4 \sigma \varepsilon \theta^3 \Delta\theta \right) \, d\Gamma_{qt}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Um die Gleichung (3.40) vollständig zu erfüllen, kann auf der rechten Seite die Formulierung gemäß (3.39) eingesetzt werden, da diese den bereits bekannten Zustand beschreibt.

**Finite Übersetzung in Raum und Zeit:** Um das nichtlineare parabolische Anfangsrandwertproblem des formulierten Wärmehaushaltes in (3.41) lösen zu können, ist eine Integration durchzuführen, die sinnvoller Weise numerisch erfolgt. Dies geschieht durch eine simultane Raum-Zeit-Diskretisierung, bei der, basierend auf dem Konzept der Finiten Elemente, das Raum-Zeit Kontinuum in endliche Raum-Zeit-Elemente unterteilt und jeweils getrennt für Raum- und Zeit ein FE Ansatz verwendet wird. Für die äußere Zustandsgröße, im vorliegenden Fall ist dies die Temperatur  $\theta$ , ergibt sie sich durch einen Produktansatz aus Raum und Zeit

$$\theta(\mathbf{X}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\theta}_e(t). \quad (3.42)$$

Bei der Diskretisierung des räumlichen Gebietes  $\Omega$  wird an dieser Stelle die dreidimensionale Formulierung des Wärmehaushaltes in eine für flächenhafte Stahlbetonbauteile ausreichende eindimensionale Beschreibung reduziert. Das räumliche Gebiet  $\Omega$  wird dazu mit einem 2-knotiges Linienelement diskretisiert, welches die linearen Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}(\xi) = [N^1(\xi) \quad N^2(\xi)] = [1 - \xi \quad \xi] \quad \text{mit} \quad \xi \in [0, 1] \quad (3.43)$$

besitzt, wobei  $\xi$  die normierte natürliche Koordinate repräsentiert. Wie bereits erwähnt, wird bei der Zeitintegration der zu berücksichtigende Zeitbereich  $\mathcal{Z} \in [t_0, T]$  in eine endliche Anzahl von Teilzeitintervallen  $\mathcal{Z}_i \in [t_i, t_{i+1}]$  unterteilt, die nicht zwingend notwendig konstant sein müssen. Die Zeitschrittweite zwischen zwei diskreten Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$  ergibt sich aus der Differenz

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i. \quad (3.44)$$

Aufgrund des maximal einfachen Auftretens der Zeitableitungen in (3.41) ist ein linearer Ansatz für die FE-Diskretisierung im Zeitbereich ausreichend. Es ergeben sich entsprechend der Raumdiskretisierung nach (3.43) die Ansatzfunktionen:

$$\mathbf{Z}(\zeta) = [Z^1(\zeta) \quad Z^2(\zeta)] = [1 - \zeta \quad \zeta] \quad \text{mit} \quad \zeta \in [0, 1]. \quad (3.45)$$

Für die Temperatur  $\theta^{i+\zeta}$  an einem Punkt  $\zeta$  im Zeitinkrement ergibt sich in einer inkrementell formulierten Betrachtungsweise somit

$$\theta^{i+\zeta}(\zeta) = Z^i(\zeta) \theta^i + Z^{i+1}(\zeta) \theta^{i+1} = \theta^i + \zeta \Delta \theta^{i+1}, \quad (3.46)$$

wobei  $\Delta \theta^{i+1} = \theta^{i+1} - \theta^i$  gilt. Die erforderliche Rate der Temperatur zum Zeitpunkt  $\zeta$  im Zeitschritt wird daraus folgend zu:

$$\dot{\theta}^{i+\zeta}(\zeta) = \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \Delta \theta^{i+1}. \quad (3.47)$$

Zusammenfassend kann so für die elementvektorielle Darstellung formuliert werden:

$$\boldsymbol{\theta}_e^{i+\zeta}(\zeta) = \boldsymbol{\theta}_e^i + \zeta \Delta \boldsymbol{\theta}_e^{i+1} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_e^{i+\zeta}(\zeta) = \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \Delta \boldsymbol{\theta}_e^{i+1}. \quad (3.48)$$

Durch Einsetzen der räumlichen Diskretisierung (3.43) und der zeitlichen Diskretisierung (3.48) in den Produktansatz für Raum und Zeit (3.42) ergeben sich für die Temperatur und den Temperaturgradienten:

$$\theta_e^h(\xi, \zeta) = \mathbf{N}(\xi) \boldsymbol{\theta}_e^{i+\zeta}(\zeta) \quad \text{bzw.} \quad \text{grad} \theta_e^h(\xi, \zeta) = \mathbf{B}(\xi) \boldsymbol{\theta}_e^{i+\zeta}(\zeta). \quad (3.49)$$

In Gleichung (3.49) stellt neben dem Vektor der räumlichen Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$  eine Matrix dar, die durch  $\mathbf{B} = \text{grad} \mathbf{N}^T$  gebildet wird. Damit ist die Semidiskretisierung der Raum-Zeit-Diskretisierung abgeschlossen und es folgt die Wahl der in (3.41) verbleibenden unbekanntem Wichtungsfunktion  $\Psi$ .

**Wichtungsfunktion:** Die Ansatzfunktionen für Raum (3.43) und Zeit (3.45) bilden nur in Sonderfällen den exakten Lösungsverlauf ab. Infolge der gewählten Ansatzfunktionen treten bei der Berechnung einer Näherungslösung eines Anfangsrandwertproblems Fehler in Raum und Zeit auf. Eine Verteilung des Fehlers kann durch eine Wichtung in Raum und Zeit erfolgen. Es existieren viele verschiedene Arten von Wichtungskonzepten, wobei in dieser Arbeit zum einen auf das GALERKIN-Verfahren und zum anderen auf die Punktkollokation näher eingegangen wird. Die FEM benutzt das Wichtungskonzept im Raum nach GALERKIN, wobei die Wichtungsfunktion die erste Variation der



Ansatzfunktion ist. Bei symmetrisierbaren Problemstellungen führt dieses Vorgehen zu symmetrischen Gleichungssystemen. Bei zeitlichen Problemstellungen hingegen wird oft von der Bereichs- bzw. Punktkollokation Gebrauch gemacht. Als Wichtungsfunktion im Zeitbereich erzwingt die DIRAC-Funktion  $\delta$  als Wichtungsfunktion mit

$$\zeta_w := \delta|\zeta - \gamma| = \begin{cases} 0 & \text{für } \zeta \neq \gamma \\ \infty & \text{für } \zeta = \gamma \end{cases}, \quad (3.50)$$

dass der Fehler an diskreten Zeitpunkten zu Null wird. Aufgrund der Tatsache, dass die Integration von (3.50) über den Zeitbereich den Wert 1 liefert, ergibt sich, dass durch Multiplikation einer Funktion  $f$  mit der DIRAC-Funktion  $\delta$  eine punktuelle Auswertung des Zeitintegrals an der Stelle  $\gamma$  vorgenommen werden kann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \delta|\zeta - \gamma| d\zeta = f(\gamma). \quad (3.51)$$

Die vorkommenden Freiwerte in (3.49) bzw. (3.48) sind die gesuchten inkrementellen Zuwächse  $\Delta\theta_e^{i+1}$ . Damit kann die Wichtungsfunktion  $\Psi$  durch die eben beschriebenen Wichtungskonzepte kombiniert, ersetzt werden zu:

$$\Psi = \delta\theta = \mathbf{N}\zeta_w\delta\Delta\theta^{i+1}. \quad (3.52)$$

Unter Beachtung der neuen Kollokationsstelle  $\gamma$  statt  $\zeta$ , den Raum-Zeit-Ansätzen (3.49), der Wichtungsfunktion (3.52), der linearisierten Form des ARWPs (3.41) mit (3.39) und (3.40) wird das zu lösende algebraische Gleichungssystem aufgestellt.

**Linearisierte Form des ARWPs:** Geordnet nach Anteilen bzgl. der Integrationen über das Elementgebiet  $\Omega_e$  ergibt sich die zusammengefasste Matrix  $\mathbf{K}^\Omega$  über das Elementgebiet zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^\Omega = & \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \mathbf{B} \theta_e \right]^{i+\gamma} \mathbf{N} d\Omega_e}_{\mathbf{L}_{,t}} + \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T [\lambda]^{i+\gamma} \mathbf{B} d\Omega_e}_{\mathbf{L}} \\ & \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_t}{\partial \theta} \right]^{i+\gamma} \mathbf{N} d\Omega_e}_{\mathbf{Q}_{,t}} + \underbrace{\frac{1}{\Delta t_{i+1}} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \left[ \frac{\partial (\varrho_c c_c)}{\partial \theta} \right]^{i+\gamma} \mathbf{N} \Delta \theta_{\gamma,e}^{i+1} \mathbf{N} d\Omega_e}_{\mathbf{W}_{,t}} + \\ & \underbrace{\frac{1}{\Delta t_{i+1}} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T [\varrho_c c_c]^{i+\gamma} \mathbf{N} d\Omega_e}_{\mathbf{W}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Es wird eine neue Sortierung der Anteile vorgenommen, um die Übersichtlichkeit zu verbessern. Zur weiteren Vereinfachung ergibt sich (3.53) in matrizieller Schreibweise zu:

$$\mathbf{K}^\Omega = \mathbf{L}_{,t} + \mathbf{L} + \mathbf{Q}_{,t} + \mathbf{W}_{,t} + \mathbf{W}, \quad (3.54)$$

wobei die Matrizenbezeichnungen  $\mathbf{L}$  für die Leiterterme,  $\mathbf{W}$  für die Speicherterme und  $\mathbf{Q}$  für die Wärmesenke bzw. -quelle stehen. Analog ergibt sich für die Integration über den Rand des Elementes  $\Gamma_e$  die Matrix

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^\Gamma = & \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[ \frac{\partial \alpha_{ii}^t}{\partial \theta} (\theta_{en} - \mathbf{N}\theta_e) + \alpha_{ii}^t \frac{\partial \theta_{en}}{\partial \theta} \right]^{i+\gamma} \mathbf{N}_t d\Gamma_e}_{\mathbf{K}_{,t}} + \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [\alpha_{ii}^t]^{i+\gamma} \mathbf{N} d\Gamma_e}_{\mathbf{K}} + \\
& \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[ \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} (\theta_{en}^4 - \mathbf{N}\theta_e^4) + 4\sigma\varepsilon\theta_{en}^3 \frac{\partial \theta_{en}}{\partial \theta} \right]^{i+\gamma} \mathbf{N}_t d\Gamma_e}_{\mathbf{S}_{,t}} + \\
& \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [4\sigma\varepsilon (\mathbf{N}\theta_e)^3]^{i+\gamma} \mathbf{N} d\Gamma_e}_{\mathbf{S}} + \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_{nt}}{\partial \theta} \right]^{i+\gamma} \mathbf{N} d\Gamma_e}_{\mathbf{R}_{,t}}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Damit kann analog zum Gebiet  $\Omega$  eine matrizielle Form der Randintegrale angegeben werden, wobei für die Anteile aus Konvektion die Matrizen  $\mathbf{K}$ , für die Anteile aus Strahlung die Matrizen  $\mathbf{S}$  und für die Wärmerandströme die Matrix  $\mathbf{R}$  stehen. Es ergibt sich aus (3.55)

$$\mathbf{K}^\Gamma = \mathbf{K}_{,t} + \mathbf{K} + \mathbf{S}_{,t} + \mathbf{S} + \mathbf{R}_{,t}. \tag{3.56}$$

Nachdem die Matrizen über das Elementgebiet  $\Omega_e$  und den Elementrand  $\Gamma_e$  aufgestellt sind, kann aus der Diskretisierung der rechten Seite von (3.40), repräsentiert durch (3.39), die Diskretisierung der Elementvektoren erfolgen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = & - \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T [\lambda]^{i+\gamma} \mathbf{B} d\Omega_e \Delta\theta_e^{i+1}}_{\mathbf{l}} - \underbrace{\frac{1}{\Delta t_{i+1}} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T [\varrho_c c_c]^{i+\gamma} \mathbf{N} d\Omega_e \theta_e^{i+\gamma}}_{\mathbf{w}} + \\
& \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T [\mathbf{Q}_t]^{i+\gamma} d\Omega_e}_{\mathbf{q}_t} + \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [\mathbf{q}_{nt}]^{i+\gamma} d\Gamma_e}_{\mathbf{r}_t} + \\
& \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [\alpha_c (\theta_{en} - \theta)]^{i+\gamma} d\Gamma_e}_{\mathbf{k}_t} + \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T [\sigma \varepsilon (\theta_{en}^4 - \theta^4)]^{i+\gamma} d\Gamma_e}_{\mathbf{s}_t}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Gleichlaufend zu den Matrizen kann der Vektor der rechten Seite mit den Anteilen aus Speicherung  $\mathbf{w}$ , Leitung  $\mathbf{l}$ , Wärmequellen  $\mathbf{q}_t$ , Randströme  $\mathbf{r}_t$ , Konvektionsanteile  $\mathbf{k}_t$  und Strahlungsanteile  $\mathbf{s}_t$  zusammengefasst werden zu:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{w} - \mathbf{l} + \mathbf{q}_t + \mathbf{r}_t + \mathbf{k}_t + \mathbf{s}_t. \tag{3.58}$$

Daraus folgt das zu lösende algebraische Gleichungssystem zur Lösung des Wärmehaushaltes mit Hilfe der Finiten Elemente in kompakter Schreibweise zu:

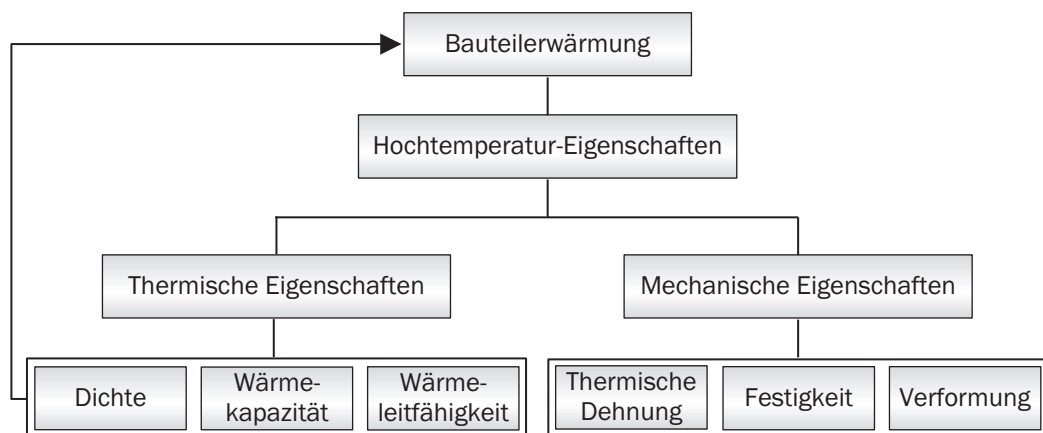
$$[\mathbf{K}^\Omega + \mathbf{K}^\Gamma] \cdot [\Delta\theta_e^{i+1}] = [\mathbf{F}]. \tag{3.59}$$

### 3.4 Temperaturabhängige Stoffkennwerte

Um instationäre nichtlineare Temperaturfeldberechnungen durchführen zu können, müssen temperaturabhängige Materialkennwerte definiert werden. Bei der Untersuchung von Stahlbetonbauteilen werden diese für Beton und Betonstahl benötigt. Die Materialeigenschaften der Baustoffe bei erhöhten Temperaturen werden dabei in thermische und mechanische Eigenschaften differenziert.

Zu den thermischen Eigenschaften zählen die Rohdichte  $\rho$ , die Wärmekapazität  $c$  und die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , die zum einen selbst Temperaturabhängigkeiten aufweisen und zum anderen das Bauteilerwärmungsverhalten ihrerseits beeinflussen.

In die Gruppe der mechanischen Eigenschaften sind die temperaturabhängigen Festigkeiten, Verformungen und die thermischen Dehnungen einzuordnen, die alle keinen Beitrag für die Bauteilerwärmung liefern. In der Literatur werden die thermischen Dehnungen oft den thermischen Eigenschaften zugeordnet, was nach Auffassung des Autors nicht zutreffend ist, denn die Nichtbeteiligung an der Bauteilerwärmung unterstreicht die Zuordnung zu den mechanischen Eigenschaften. In Bild 3.8 sind die thermo-mechanischen Materialeigenschaften dargestellt.

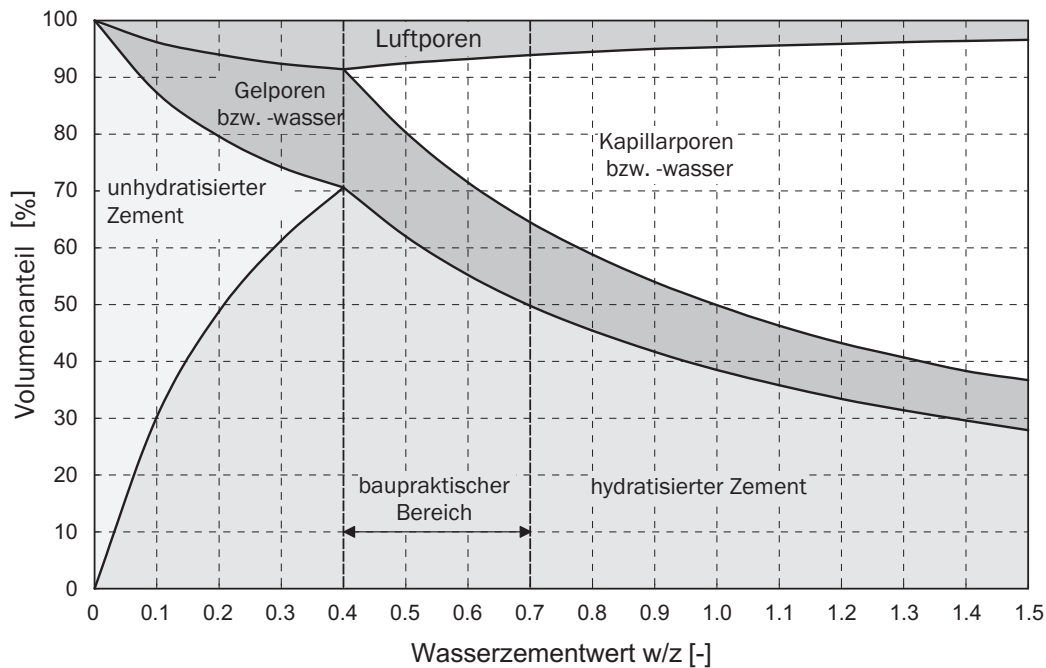


**Bild 3.8:** Thermo-Mechanische Materialeigenschaften bei erhöhten Temperaturen

Bevor nachfolgend die thermischen Eigenschaften, getrennt nach Werkstoffen, näher dargestellt werden, werden zunächst grundlegende Eigenschaften von Beton und Betonstahl erläutert, die zur Beschreibung der thermischen Eigenschaften notwendig sind. Mechanische Eigenschaften werden erst im Zuge der phänomenologischen Beschreibung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton in Kapitel 4 vorgenommen.

**Beton:** Bei erhöhten Temperaturen wird das Verhalten von Beton maßgeblich vom Porengehalt, Zementgehalt, der Art der Zuschlagstoffe und dem Wassergehalt beeinflusst, wobei der Wassergehalt in Hinblick auf die thermischen Eigenschaften eine Sonderrolle einnimmt. Beim Herstellen von Beton wird in der Regel mehr Wasser als zur vollständigen Hydratation notwendig zugegeben. Somit werden beim Erhärtungsprozess wassergefüllte Poren im Zementstein gebildet. Um eine vollständige Hydratation des Zements zu gewährleisten, ist ein Wasserzementwert von  $w/z \approx 0.40$  notwendig. Dabei werden ca. 25

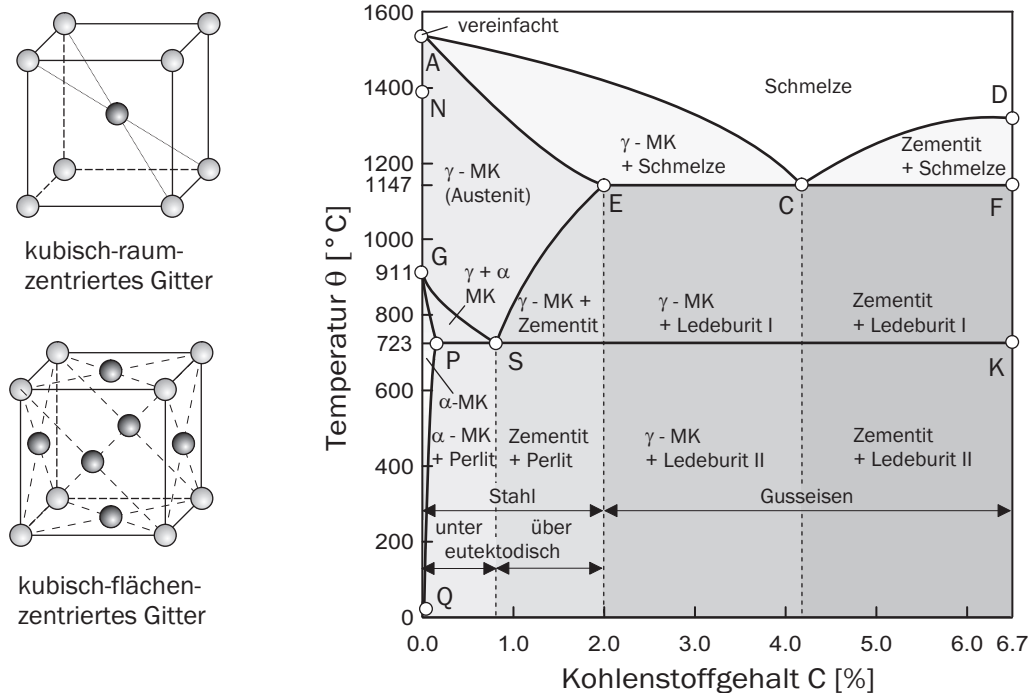
% chemisch gebunden und 15 % physikalisch durch Adsorptionskräfte an das Zementgel angelagert. Das chemisch gebundene Wasser wird auch als nichtverdampfbares Wasser bezeichnet. Bei höheren Wasserzementwerten bilden sich Kapillarporen im Zementstein, in denen das Überschusswasser gespeichert wird. Eine Darstellung über die Volumenverteilung im Zementstein ist in Bild 3.9 zu sehen. Es ist eindeutig erkennbar, wie der Anteil an Kapillarwasser mit höherem Wasserzementwert steigt und das Gelporenwasser relativ konstant bleibt.



**Bild 3.9:** Volumenanteile im Zementstein nach Czernin (1977)

Findet eine Erwärmung des Betonbauteils über  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  statt, verdampft das nicht chemisch gebundene Gelporenwasser. Es ändert dabei seinen Aggregatzustand mit einem Phasenübergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand. Bis zum endgültigen Verdampfen bleibt die Temperatur lokal im Bauteil konstant, was eine verzögerte Erwärmung zur Folge hat. Diese Eigenschaften werden hauptsächlich bei der Formulierung der Wärmekapazität des Betons berücksichtigt. Schlussfolgernd wird konstatiert, dass der Wassergehalt des Betons einen maßgebenden Einfluss auf die temperaturabhängigen Eigenschaften hat.

**Betonstahl:** Um das Verhalten von Betonstahl unter erhöhten Temperaturen besser zu verdeutlichen, werden basierend auf dem Eisen-Kohlenstoffdiagramm signifikante Merkmale vorgestellt. Zunächst einige Aussagen zum atomaren Gitteraufbau von Stahl. Eisen ist grundsätzlich ein polymorphes Material, da unterschiedliche kristalline Strukturen in Abhängigkeit von der Temperatur auftreten. Eisen besitzt bei Raumtemperatur ein kubisch-raumzentriertes Gitter, wobei dieses Eisen auch als  $\alpha$ -Eisen bezeichnet wird. In Abhängigkeit vom Kohlenstoffgehalt und bei Erreichen von einer Temperatur von  $911\text{ }^{\circ}\text{C}$  wandelt sich die vorhandene Gitterstruktur in ein kubisch-flächenzentriertes Gitter um (s. Bild 3.10). Eine weitere Umwandlung von flächen- zu raumzentrierten Gittern findet bei einer Temperatur von  $1392\text{ }^{\circ}\text{C}$  statt.



**Bild 3.10:** Vereinfachtes Eisen-Kohlenstoff-Diagramm nach Weißbach (2007)

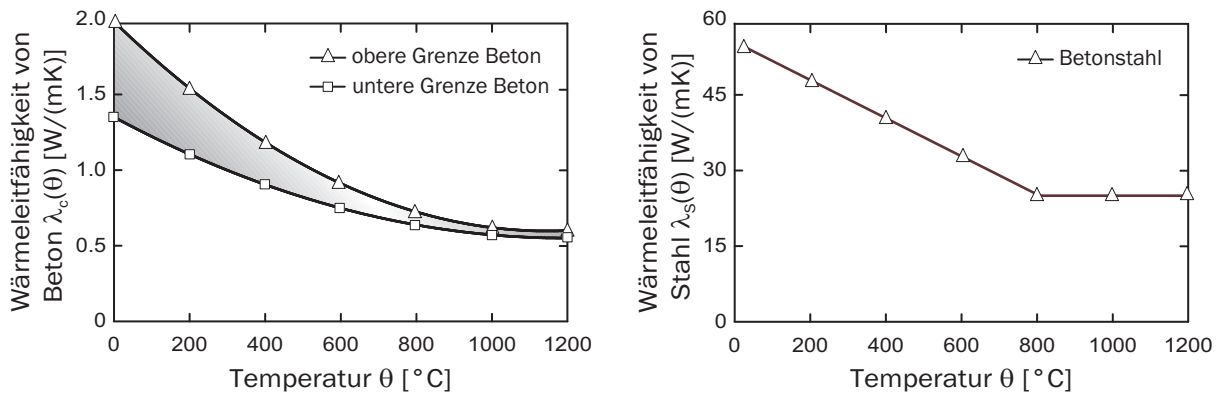
Neben Veränderungen im Gitteraufbau und Aggregatzustand ist für den Einfluss auf das thermische Verhalten von Eisen der Umschlag bei  $769^{\circ}\text{C}$  vom ferromagnetischen zum unmagnetischen Eisen von Interesse. Nach Richter (1973) wird dieser Umwandlung im Hinblick auf die Wärmekapazität große Bedeutung zugewiesen. In einer Eisenlegierung ist Kohlenstoff der Hauptparameter und wird als Eisenkarbid  $\text{FeC}_3$  in gebundener Form und als Zementit als Gefügebestandteil bezeichnet. Als Gefügebestandteil lagert es sich in das Ferrit ein. Kommt es zu einer langsamen Abkühlung der Schmelze und liegt der Kohlenstoffgehalt unter  $0.8\%$  gilt die Verbindung als unter-eutektoidisch (Punkt S im Bild 3.10). Der eutektoidische Gefügebestandteil des Stahls wird Perlit genannt.

Mit einer Reduktion des Kohlenstoffgehaltes werden keine Zementitplättchen mehr in die Eisenkristalle eingelagert. Es entsteht ein Gemisch aus Ferrit und Perlit. Eindeutig erkennbar ist, dass mit sinkendem Kohlenstoffgehalt der Anteil an Ferrit steigt. Dementsprechend liegt bei Kohlenstoffgehalten über  $0.8\%$  ein über-perlitisches Gefüge vor. Es lagern sich nun die Zementitplättchen schalenförmig zwischen den perlitischen Kristallen ab. In beiden Bereichen existieren  $\alpha$ -Mischkristalle (MK). Generell bezeichnet man Legierungen bis  $2.06\%$  Kohlenstoff als Stahl und darüber als Gusseisen.

Infolge einer Erwärmung des Perlits auf eine Temperatur von  $723^{\circ}\text{C}$  kommt es zu einer Auflösung der Eisenkarbidverbindung. Die  $\alpha$ -MK klappen in  $\gamma$ -MK um, wobei sich der Kohlenstoff in den leeren Gitterraum des FE-Gitters hineinlöst. Es bildet sich Austenit. Der Umwandlungspunkt der Kristallstruktur sinkt bei der Legierung Stahl auf  $723^{\circ}\text{C}$  (Punkt P) gegenüber reinem Eisen bei  $911^{\circ}\text{C}$  (Punkt G).

### 3.4.1 Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  ist eine temperaturabhängige Stoffkenngröße und beschreibt die Wärmemenge, die innerhalb einer Stunde durch einen Quadratmeter einer ein Meter dicken Baustoffschicht bei einer vorhandenen Temperaturdifferenz von  $\Delta\theta = 1$  K zwischen den Bauteiloberflächen ausgetauscht wird.



**Bild 3.11:** Temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_c(\theta)$  von Normalbeton (links) und  $\lambda_s(\theta)$  von Betonstahl (rechts) nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

**Beton:** Bei Beton hängt die Wärmeleitfähigkeit hauptsächlich von der Porigkeit, der Zuschlagsart (quarzhaltig, kalkhaltig, Leichtzuschlag) und dem Wassergehalt ab. Mit zunehmendem Wassergehalt und steigender Temperatur nimmt die Wärmeleitfähigkeit ab. In der europäischen Norm DIN EN 1992-1-2 (2010) wird für den Temperaturbereich  $20^\circ\text{C} \leq \theta_c \leq 1200^\circ\text{C}$  die Wärmeleitfähigkeit durch die obere Grenzfunktion

$$\lambda_c(\theta_c) = 2.00 - 0.2451 \cdot \frac{\theta_c}{100} + 0.0107 \cdot \left(\frac{\theta_c}{100}\right)^2 \quad (3.60)$$

und die untere Grenzfunktion

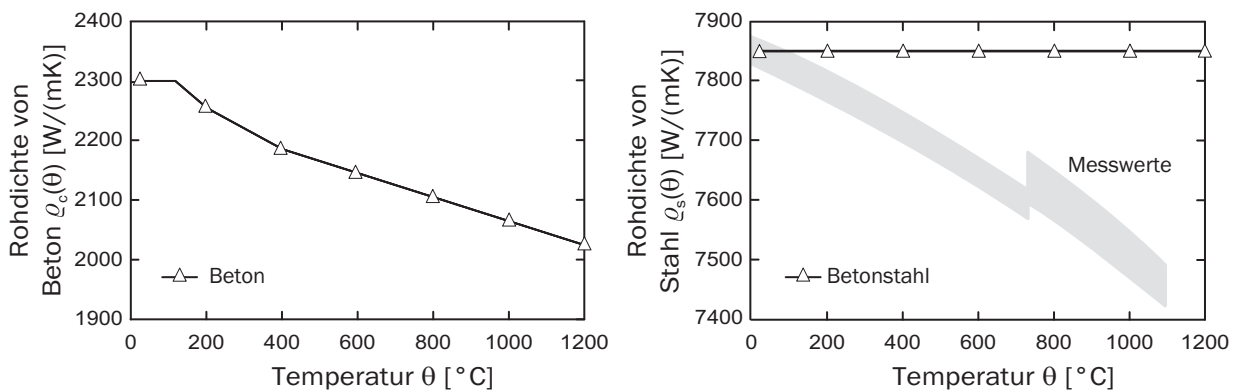
$$\lambda_c(\theta_c) = 1.36 - 0.1360 \cdot \frac{\theta_c}{100} + 0.0057 \cdot \left(\frac{\theta_c}{100}\right)^2 \quad (3.61)$$

beschrieben. Die entsprechend zu verwendende Grenzfunktion ist im Nationalen Anhang DIN EN 1992-1-2/NA (2010) geregelt.

**Betonstahl:** Die Wärmeleitfähigkeit von Betonstahl bzw. Baustahl wird in den Normen DIN EN 1993-1-2 (2010) und DIN EN 1994-1-2 (2010) durch eine bilineare Rechenwertkurve beschrieben, welche im Temperaturbereich zwischen  $20^\circ\text{C} \leq \theta_s \leq 800^\circ\text{C}$  von  $53.3$  W/(mK) auf einen Wert von  $27.3$  W/(mK) linear abfällt und dann bis  $1200^\circ\text{C}$  konstant verläuft (s. Bild 3.11 (rechts)).

### 3.4.2 Rohdichte

Als Rohdichte wird die auf das Volumen bezogene Masse eines Körpers bezeichnet. In Bild 3.12 sind die Verläufe für die Rohdichten von Normalbeton und Betonstahl in Abhängigkeit der Temperatur grafisch dargestellt. Für den Betonstahl sind zusätzlich Messergebnisse aus Richter (1973) angegeben. Eine detaillierte Beschreibung des Verhaltens unter erhöhten Temperaturen und der daraus resultierenden mathematischen Formulierungen nach DIN EN 1992-1-2 (2010) erfolgt getrennt für die Materialien Beton und Betonstahl.



**Bild 3.12:** Temperaturabhängige Rohdichte  $\rho_c(\theta)$  von Normalbeton (links) und  $\rho_s(\theta)$  von Betonstahl bzw. Baustahl (rechts) nach DIN EN 1994-1-2 (2006)

**Beton:** Bedingt durch Umwandlungsprozesse infolge thermischer Einwirkungen kann die Dichte von Beton nicht als konstant angesetzt werden, wie es bei Berechnungen im Temperaturbereich bis ca. 80 °C der Fall ist. In früheren Normen konnte für die Rohdichte bei normalen quarzhaltigen oder kalksteinhaltigen Beton eine Temperaturunabhängigkeit angenommen werden. Lediglich ab Temperaturen oberhalb von 100 °C wurde aufgrund der Verdampfung von freiem Wasser die Rohdichte um 100 kg/m<sup>3</sup> reduziert [Borgonga 1997], [Reick 2001].

In der aktuellen Novellierung der europäischen Normen ist dies nicht mehr so einfach möglich, da jetzt die kontinuierliche Veränderung der Dichte mit zunehmender Temperatur berücksichtigt wird. Die Rohdichte ändert sich nach Schneider (1982) in einem Temperaturbereich  $20\text{ °C} \leq \theta_c \leq 150\text{ °C}$  je nach Zuschlagart (kalkstein- oder silikathaltig) unterschiedlich stark. Die Dichtereduzierung in diesem Temperaturbereich ist hauptsächlich auf die Verdampfung bzw. Verdunstung des Wassers zurückzuführen. Somit ist der Einfluss der Zuschlagstoffumwandlung größer. Bis 600 °C erfolgt bei kalksteinhaltigen Betonen nur eine geringfügige Abnahme der Dichte. Erst im Bereich zwischen 600 °C und 900 °C führt die Kalksteinentsäuerung zu einer Reduzierung der Dichte und so zu einem hochporösen Beton. Silikathaltige Betone hingegen verändern ihre Dichte hauptsächlich durch die thermischen Dehnungen der Zuschläge. Als Fazit ist festzuhalten, dass die Rohdichte unter erhöhten Temperaturen hauptsächlich durch den Feuchtigkeitsverlust abnimmt.

Die funktionale Beschreibung der temperaturabhängigen Rohdichte von Beton in einem

Temperaturbereich von  $20\text{ °C} \leq \theta_c \leq 1200\text{ °C}$  erfolgt gemäß DIN EN 1992-1-2 (2010).

| Betontemperatur $\theta_c$                      | Rohdichte $\rho_c(\theta_c)$                                      |
|---|---|
| $20\text{ °C} \leq \theta_c \leq 115\text{ °C}$ | $\rho_c(20\text{ °C})$  |
| $115\text{ °C} < \theta_c \leq 200\text{ °C}$   | $\rho_c(20\text{ °C}) \cdot (1.00 - 0.02 (\theta_c - 115) / 85)$  |
| $200\text{ °C} < \theta_c \leq 400\text{ °C}$   | $\rho_c(20\text{ °C}) \cdot (0.98 - 0.03 (\theta_c - 200) / 200)$ |
| $400\text{ °C} < \theta_c \leq 1200\text{ °C}$  | $\rho_c(20\text{ °C}) \cdot (0.95 - 0.07 (\theta_c - 400) / 800)$ |

(3.62)

**Betonstahl:** Im Allgemeinen darf die Rohdichte für Beton- und Baustahl mit  $\rho_s = 7850\text{ kg/m}^3$  konstant angenommen werden. Betrachtet man allerdings Messwerte zur Rohdichte von Stahl in Abhängigkeit der Temperatur nach Richter (1973), ist ein leichter linearer Abfall mit steigenden Temperaturen festzustellen.

Gegenüber der temperaturunabhängigen Annahme gemäß DIN EN 1994-1-2 (2010) entspricht dies einer Fehlerquote von 4 – 5% bei  $1000\text{ °C}$ . Der sprunghafte Anstieg der Dichte bei  $723\text{ °C}$  wird nach Kapitel 3.4 und nach Richter (1973) auf die Umwandlung der kubisch-raumzentrierten Gitteranordnung ( $\alpha$ -Eisen) zur dichteren kubisch-flächenzentrierten Gitterstruktur der Atome ( $\gamma$ -Eisen) zurückgeführt.

### 3.4.3 Wärmekapazität

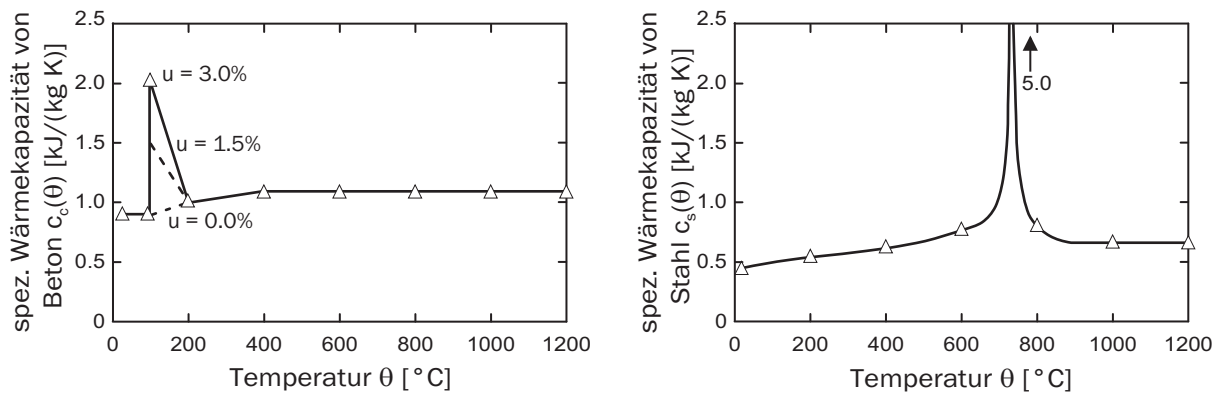
Neben dem Wärmetransport ist bei der Beschreibung des Temperaturhaushaltes die Wärmespeicherung, insbesondere bei instationären Temperaturproblemen, zu berücksichtigen. Je nach Temperaturgradienten findet eine Zu- bzw. Abnahme der thermischen Energie im Inneren des zu untersuchenden Bauteils statt. Darin ist auch jene latente Wärme enthalten, die benötigt wird, um z.B. das Kristallgefüge von Betonstahl bei bestimmten Temperaturen umzuwandeln oder im Beton das vorhandene Wasser zu verdampfen.

Das Wärmespeichervermögen ist materialabhängig und wird durch die Materialkonstante der spezifischen Wärmekapazität  $c$  definiert, wobei sie die Wärmemenge ist, die für einen Stoff notwendig ist, um ihn um 1 Kelvin aufzuheizen.

Im folgenden werden für Beton und Betonstahl die jeweiligen temperaturabhängigen Eigenschaften der effektiven Wärmekapazität  $c_{eff}$  (s. Abschnitt 3.2.2.3) beschrieben, wobei Phasenübergänge in dieser Stoffmodellierung vereinfachend berücksichtigt werden, ohne beispielsweise den hygrischen oder chemischen Zustand im Bauteil zu bestimmen, um daraus evtl. Phasenumwandlungen abzuleiten.

Bild 3.13 zeigt die Verläufe der funktionalen Beschreibung nach DIN EN 1992-1-2 (2010), wobei die Temperaturbereiche, in denen eine Phasenumwandlung stattfindet, deutlich durch eine stark ansteigende Wärmekapazität charakterisiert sind.





**Bild 3.13:** Temperaturabhängige Wärmekapazität  $c_c(\theta)$  von Normalbeton (links) und  $c_s(\theta)$  von Betonstahl bzw. Baustahl (rechts) nach DIN EN 1992-1-2 (2006)

**Beton:** Bei dem Werkstoff Beton wird die Wärmekapazität hauptsächlich durch den Wasser- bzw. Feuchtegehalt  $u$  beeinflusst, weniger durch den Zementgehalt und das Mischungsverhältnis. Der Wassergehalt wirkt sich vor allem zwischen 100 °C und 200 °C aus, da zur Verdampfung des Wassers mehr Energie benötigt wird. In der Literatur und in den Normen werden Wassergehalte  $u$  zwischen 0 und 10% berücksichtigt [Borgonga 1997]. Die spezifische Wärmekapazität  $c_c(\theta)$  von trockenem Beton ist nach DIN EN 1992-1-2 (2010) wie folgt zu ermitteln:

| Betontemperatur $\theta_c$                              | spezifische Wärmekapazität $c_c(\theta)$ $\left[ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$ |
|---|--|
| $20^\circ\text{C} \leq \theta_c \leq 100^\circ\text{C}$ | 900  |
| $100^\circ\text{C} < \theta_c \leq 200^\circ\text{C}$   | $900 + (\theta_c - 100)$   |
| $200^\circ\text{C} < \theta_c \leq 400^\circ\text{C}$   | $1000 + (\theta_c - 200) / 2$  |
| $400^\circ\text{C} < \theta_c \leq 1200^\circ\text{C}$  | 1100   |

(3.63)

Eine Berücksichtigung des Feuchtegehaltes  $u$  erfolgt durch Modifizierung der in (3.63) angegebenen Funktionen. In Abhängigkeit des Feuchtegehaltes  $u$  ergibt sich in dem Bereich von 100 °C bis 115 °C, in dem das Wasser verdampft, der konstante Wert der spezifischen Wärme  $c_{p,peak}$  wie folgt:

| Feuchtegehalt $u$ [ % ]   | 0.0 | 1.5  | 2.0  | 3.0  | 4.0  | 8.0  | 10.0 |
|---------------------------|-----|------|------|------|------|------|------|
| $c_{p,peak}$ [(J/(kg K))] | 900 | 1470 | 1875 | 2020 | 2750 | 4577 | 5600 |

(3.64)

**Betonstahl:** Die Wärmekapazität von Bau- bzw. Betonstahl unterteilt sich in die wahre und in die mittlere spezifische Wärmekapazität. Die wahre spezifische Wärmekapazität, die im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit berücksichtigt wird, enthält gegenüber der mittleren auch latente Wärmemengen, die z.B. aus der  $\alpha - \gamma$ -Umwandlung und der ferromagnetischen Umwandlung resultieren.

Gemäß DIN EN 1994-1-2 (2010) kann die spezifische Wärmekapazität  $c_s(\theta)$  wie folgt ermittelt werden:

| Stahltemperatur $\theta_s$                              | spezifische Wärmekapazität $c_s(\theta_s)$ $\left[ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$         |
|---|--|
| $20^\circ\text{C} \leq \theta_s \leq 600^\circ\text{C}$ | $425 + 7.73 \cdot 10^{-1}\theta_s - 1.69 \cdot 10^{-3}\theta_s^2 + 2.22 \cdot 10^{-6}\theta_s^3$ |
| $600^\circ\text{C} < \theta_s \leq 735^\circ\text{C}$   | $666 - 13002 / (\theta_s - 738)$   |
| $735^\circ\text{C} < \theta_s \leq 900^\circ\text{C}$   | $545 + 17820 / (\theta_s - 731)$   |
| $900^\circ\text{C} < \theta_s \leq 1200^\circ\text{C}$  | 650  |

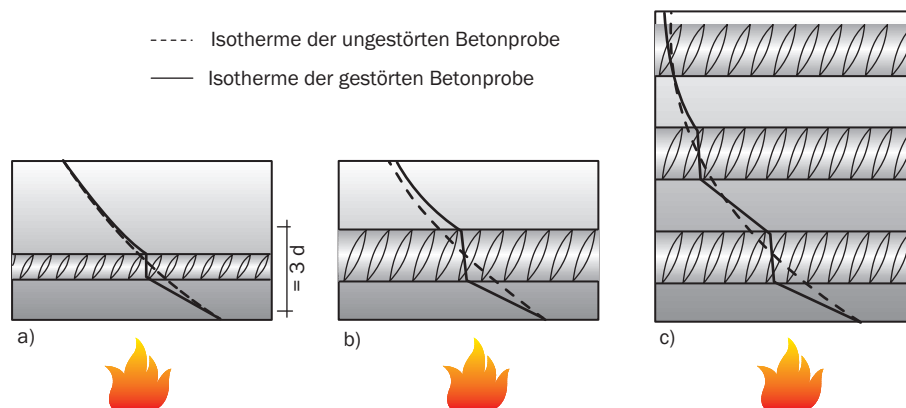
Bild 3.13 (rechts) zeigt den Verlauf der Wärmekapazität in Abhängigkeit der Temperatur  $\theta_s$ . Bei  $735^\circ\text{C}$  weist die Kurve ein spitz ausgeprägtes Maximum auf, das auf den Wert  $5000 \text{ J}/(\text{kgK})$  ansteigt.

### 3.5 Annahmen zur numerischen Simulation

Die bisher aufgeführten Herleitungen zur Beschreibung des Wärmehaushaltes sind allgemein für eine dreidimensionale Betrachtungsweise gültig. Für die Berechnung von Flächentragwerken wird eine reduzierte eindimensionale Formulierung gewählt. Eine weitere Vereinfachung bei der Berechnung des Wärmehaushaltes ist materialbezogen und wird im folgenden näher erläutert.

Stahlbeton ist ein Verbundwerkstoff aus Beton und Bewehrungsstahl. Aufgrund des unterschiedlichen Wärmeleitvermögens der beiden Materialien wäre bei einer detaillierten wirklichkeitsnahen Untersuchung diese Eigenschaft zu berücksichtigen. Der Betonstahl besitzt gegenüber seinem Verbundpartner Beton eine wesentlich höhere Wärmeleitfähigkeit. In Bild 3.14 sind Temperaturverläufe über die Querschnittshöhe von Stahlbetonflächen-tragwerken mit jeweils unterschiedlichen Bewehrungsgehalten für eine Branddauer von 60 min angegeben.

Die dargestellten Temperaturverläufe zeigen, dass durch die Stahleinlagen eine sprunghafte Änderung der Temperaturverlaufslinie entsteht. Dabei hat der Durchmesser des Bewehrungsstabes zunächst keinen Einfluss (vgl. Bild 3.14 a) und b)). Bei allen dargestellten drei Fällen wird festgestellt, dass auf der aufgeheizten Seite des Bewehrungsstahls ein Absinken der Temperaturlinie zu verzeichnen ist und es auf der brandabgewandten Seite des Bewehrungsstahls zu einer Temperaturerhöhung gegenüber der Betontemperatur kommt. Diese Phänomene wurden beispielsweise von Ehm (1967) untersucht. Er stellte fest, dass sich dieser lokale Störeinfluss in einem Bereich des dreifachen Stabdurchmessers



**Bild 3.14:** Einfluss der Bewehrungslagen auf die Temperaturentwicklung in einem Stahlbetonquerschnitt

befindet. Weiterhin wurde festgestellt, dass der Störbereich besonders bei der Randbewehrung entsteht. Die innenliegende Bewehrung weist so gut wie keinen Störbereich mehr auf (vgl. Bild 3.14 c)).

Führt man dagegen Temperaturfeldberechnungen für ungestörte Betonquerschnitte durch, erhält man eine kontinuierliche Temperaturisotherme über die Querschnittshöhe.

Wie bereits erwähnt, besitzt der Betonstahl eine sehr hohe Wärmeleitfähigkeit, was direkten Temperaturengleich über den Querschnitt bedingt und sich in einer flachen Temperaturgradienten widerspiegelt. Vergleicht man nun die berechneten Temperaturen in den Mittelachsen der Bewehrungsstäbe, ist eine gute Näherung mit der Isotherme des ungestörten Betonquerschnittes zu erkennen. Daher wird nach Ehm (1967) diese mittlere Stahltemperatur als diejenige festgelegt, die das mechanische Verhalten des Stahls beeinflusst.

Daraus ergibt sich, dass bei thermischen Analysen von Stahlbetonflächentragwerken von den jeweils ungestörten Betonquerschnitten ausgegangen werden kann. Die Stahltemperaturen werden dann in den jeweiligen Höhenlagen durch eine Interpolation bestimmt.



# Kapitel 4

## Phänomenologie und Materialmodellierung von Stahlbeton

---

*Zu Beginn des Kapitels werden die phänomenologischen Grundlagen der Werkstoffe Beton und Betonstahl sowohl bei Normal- als auch bei Hochtemperaturbedingungen erläutert, wobei einaxiales und mehraxiales Verhalten berücksichtigt werden. Des Weiteren werden die konstitutiven Modelle für Beton und Betonstahl vorgestellt, die in die numerische Modellierung einfließen. Dabei werden verschiedene Ansätze diskutiert und deren Vor- und Nachteile erörtert. Im Bereich der zeitvarianten mechanischen Beschreibung werden erste Berechnungsalgorithmen angegeben, die für die spätere Finite-Element-Umsetzung notwendig sind. Zum Schluss des Kapitels werden das allgemeine Tragverhalten von Stahlbetontragwerken und deren Versagensmechanismen vorgestellt.*

---

### 4.1 Einführung

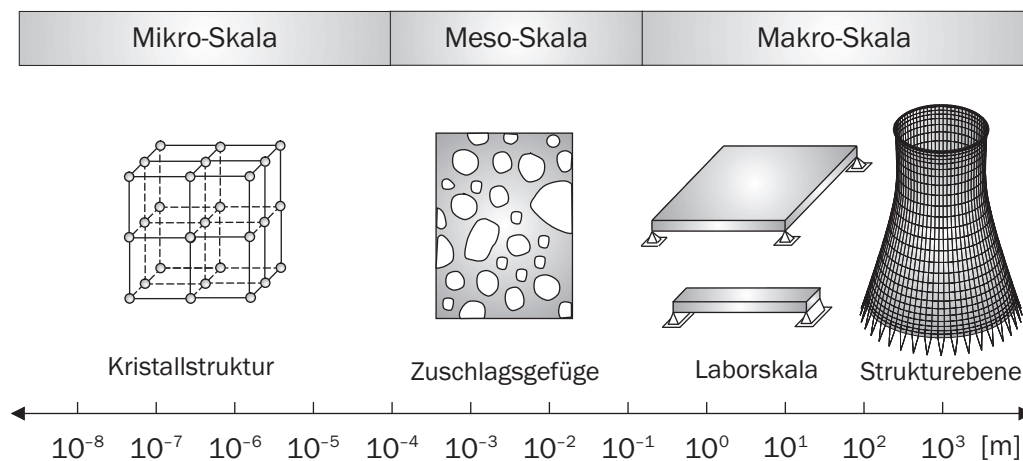
Um numerische Simulationen von Stahlbetonflächentragwerken durchführen zu können, ist die Kenntnis der Charakteristika der verwendeten Materialien, im vorliegenden Fall Beton und Betonstahl, von essentieller Notwendigkeit. Damit später mathematische Modellgleichungen zur Beschreibung des physikalischen und strukturmechanischen Verhaltens formuliert werden können, werden die Merkmale der eingesetzten Werkstoffe mit Hilfe von Versuchsergebnissen charakterisiert. Es werden, getrennt für die Materialien Beton und Betonstahl, Ergebnisse aus verschiedenen Materialprüfverfahren und deren Erkenntnisse dargestellt, die als Ausgangspunkt für die konstitutive Modellierung von Beton und Betonstahl dienen.

## 4.2 Beton und Betonstahl bei Normaltemperaturen

### 4.2.1 Der Werkstoff Beton

Beton ist ein heterogenes Material, welches aus einem Konglomerat aus hydraulischen Bindemitteln, Wasser und körnigen Zuschlagstoffen unterschiedlicher Korngröße besteht. In Abhängigkeit des Mischungsverhältnisses und der Eigenschaften der Zuschlagstoffe werden Eigenschaften und Festigkeit des ausgehärteten Betons beeinflusst. Das Verhalten von Beton hängt im Wesentlichen von der Interaktion zwischen der Zementsteinmatrix und den Zuschlagstoffen ab. Bereits im unbelasteten Zustand, wie z.B. während der Hydratationsphase beim Abbinden des frischen Betons und dem Schwinden infolge von Austrocknung oder dem last- und zeitabhängigen Kriechen, entstehen Eigenspannungszustände, die das Ausbilden erster Mikrorisse zur Folge haben. Bei einer steigenden Belastung ergibt sich daraus eine fortschreitende Rissevolution, wobei sich aus den Mikrorissen Makrorisse bilden, die zum Versagen der Konstruktion führen können.

Je nach Problemstellung wird das Werkstoffverhalten durch konstitutive Materialmodelle auf der Mikro-, Meso- oder Makroebene beschrieben. Die drei Skalen und die zugehörigen Anwendungsgebiete aus dem Bereich des Stahlbetonbaus sind in Bild 4.1 dargestellt.



**Bild 4.1:** Abbildungsebenen des mechanischen Verhaltens des Werkstoffs Beton [van Mier 1984]

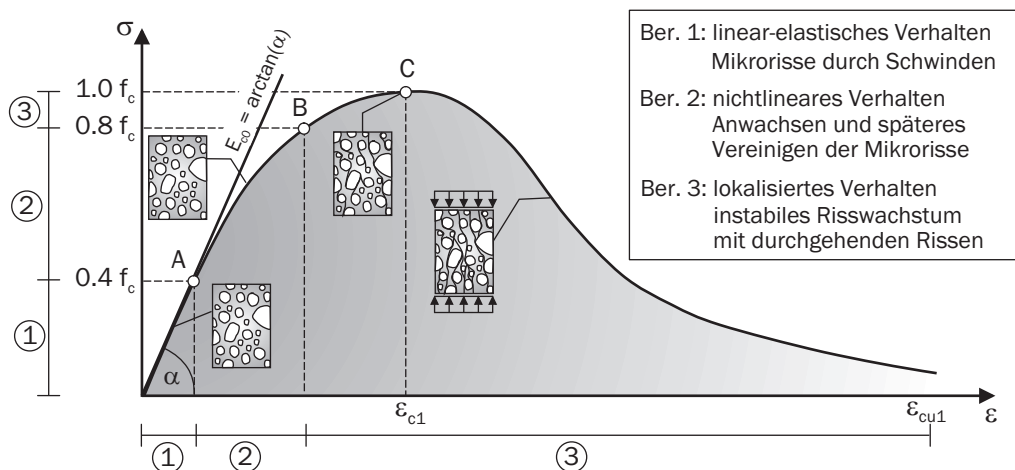
Die *mikroskopische Ebene* gibt Aufschluss über das Zusammenwirken der einzelnen Moleküle und Kristalle. Sie wird hauptsächlich zur Untersuchung von chemischen Prozessen innerhalb des Werkstoffs eingesetzt. Die nächst gröbere Ebene ist die *Mesoebene*, in der Wechselwirkungen einzelner Bestandteile des Betons untersucht werden können. Beispielsweise ist eine detaillierte Modellierung von zeitabhängigen Prozessen wie Zustandsänderungen durch Wärme- und Feuchteeinwirkungen möglich. Die Mehrzahl aller strukturmechanischen Betonmodellierungen findet allerdings auf der *Makroebene* statt. Materialmodelle zur Analyse von Bauteilen mit Laborversuchsgrößen oder großen realen Strukturen sind hier angesiedelt und sind meistens durch eine Homogenisierung des heterogenen Materials Beton charakterisiert.

In jüngster Zeit befassen sich einige Forschungsarbeiten auch mit der gleichzeitigen Modellierung über mehrere Abbildungsebenen, den sogenannten Mehrskalmodellen [Lackner & Mang 2007]. Mit diesen Modellen kann komplexes Materialverhalten auf der Ebene beschrieben werden, auf der die Einflussnahme geschieht. Nachteilig ist allerdings, dass erhebliche Rechenzeiten notwendig sind, wenn für das Ergebnis einer Strukturanalyse die Eingangsberechnungen in der Mikroebene beginnen. Für die Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken im Brandfall kann bei Berücksichtigung von Querschnittsschwächungen infolge des Abplatzens von Beton eine gemischte Materialformulierung auf der Meso- und Makroebene sinnvoll sein. Da das Abplatzverhalten nicht Inhalt dieser Arbeit ist, werden die konstitutiven Modellierungen in der Makroebene durchgeführt.

Trotz der vereinfachenden Annahme der Homogenisierung von Beton ist das Verhalten im Druck- und Zugbereich getrennt zu beschreiben. Es wird zwischen ein- und mehraxialen Beanspruchungen im Hinblick auf die Untersuchung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonflächentragwerken unterschieden.

### 4.2.2 Betoncharakteristik unter einaxialer Druckbeanspruchung

Beton verhält sich unter einer einaxialen Druckbeanspruchung bis zum Erreichen von ca. 40% der Druckfestigkeit  $f_c$  linear-elastisch (s. Punkt A). Bei einer weiteren Laststeigerung entstehen Verzerrungslokalisierungen an bereits existierenden Schadstellen (z.B. Mikrorisse aus dem unbelasteten Zustand). Die vorhandenen Mikrorisse vergrößern sich parallel zur Richtung der eingepprägten Belastung. Bei etwa 80 % der Druckfestigkeit  $f_c$  (s. Punkt B) vereinigen sich Mikrorisse und es beginnt eine kontinuierliche Gefügezerstörung. In diesem nichtlinearen Vorbruchbereich können die Risse bis zum Erreichen der Bruchstauchung  $\varepsilon_{c1}$  anwachsen und sich neu verästeln. In diesem Bereich findet eine leichte Verfestigung des Betons statt.



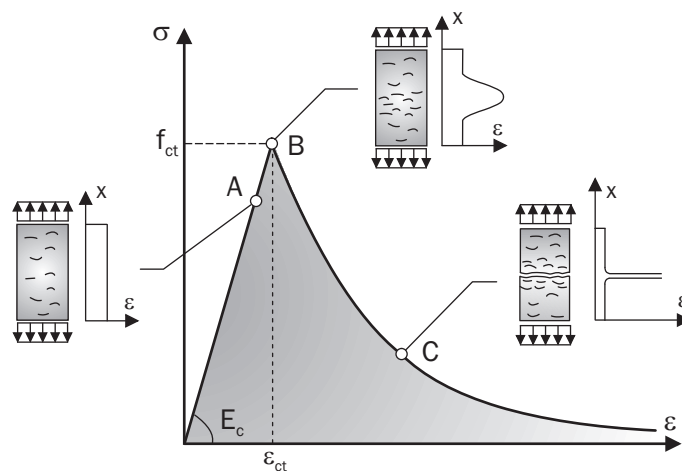
**Bild 4.2:** Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Linie von Beton unter Druckbeanspruchung

Die Steigung der Tangente an der Spannungs-Dehnungs-Linie nimmt ausgehend vom linearen Bereich bei  $0.4 f_c$  kontinuierlich ab und hat ihren Nulldurchgang beim Erreichen

der maximalen Druckfestigkeit  $f_c$  (s. Punkt C). Ab diesem Punkt kann es bei lastgesteuerten Versuchen zum plötzlichen Versagen durch Betonbruch, bei verformungsgesteuerten Versuchen zu einer Reduktion der Spannung und einer gleichlaufenden Dehnungszunahme kommen, wobei dann der Entfestigungspfad durchfahren werden kann. Dieser Bereich wird als Nachbruchbereich bezeichnet, in dem nun eine große Rissentwicklung parallel zur Belastungsrichtung in der Zementmatrix stattfindet.

### 4.2.3 Betoncharakteristik unter einaxialer Zugbeanspruchung

Unter einer konstanten Zugbeanspruchung verhält sich Beton bis ca. 80 % der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  weitestgehend linear elastisch. Dieser Bereich ist dadurch charakterisiert, dass die Anzahl an Mikrorissen hier kaum zunimmt (s. Bild 4.3 Punkt A). Bei weiterer Belastungssteigerung entwickelt sich eine stark lokalisierte Rissprozesszone von parallel verlaufenden Mikrorissen, die sich zu Makrorissen orthogonal zur Belastungsrichtung vereinigen (Punkt B) und zum Versagen führen (Punkt C). Dieser Bereich ist nichtlinear und wird durch die Grenzschicht der Mörtelmatrix und des Zuschlags maßgeblich beeinflusst, da in diesem Bereich die Verbundfestigkeit kleiner ist als die jeweilige Zugfestigkeit. Das Nachbruchverhalten ist auch hier nur bei verformungsgesteuerten Versuchen zu ermitteln, welches durch hohe Verformungen geprägt ist.



**Bild 4.3:** Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Linie von Beton unter Zugbeanspruchung

Da eine versuchstechnische Bestimmung der Zugfestigkeit mit Betonzugproben sehr schwierig ist, wird sie indirekt über einfach durchzuführende Biege- oder Spaltzugversuche ermittelt. Zwischen der mittleren Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  und der Spaltzugfestigkeit  $f_{ct,sp}$  wird folgende Transformation vom Model Code 90 (1993) zugrundegelegt:

$$f_{ctm} = 0.9 f_{ct,sp}. \quad (4.1)$$

Bei der Transformation der Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  in die mittlere Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  werden die Probenhöhe  $h_b$ , die Bezugshöhe  $h_0$  und der bruchmechanisch motivierte Faktor



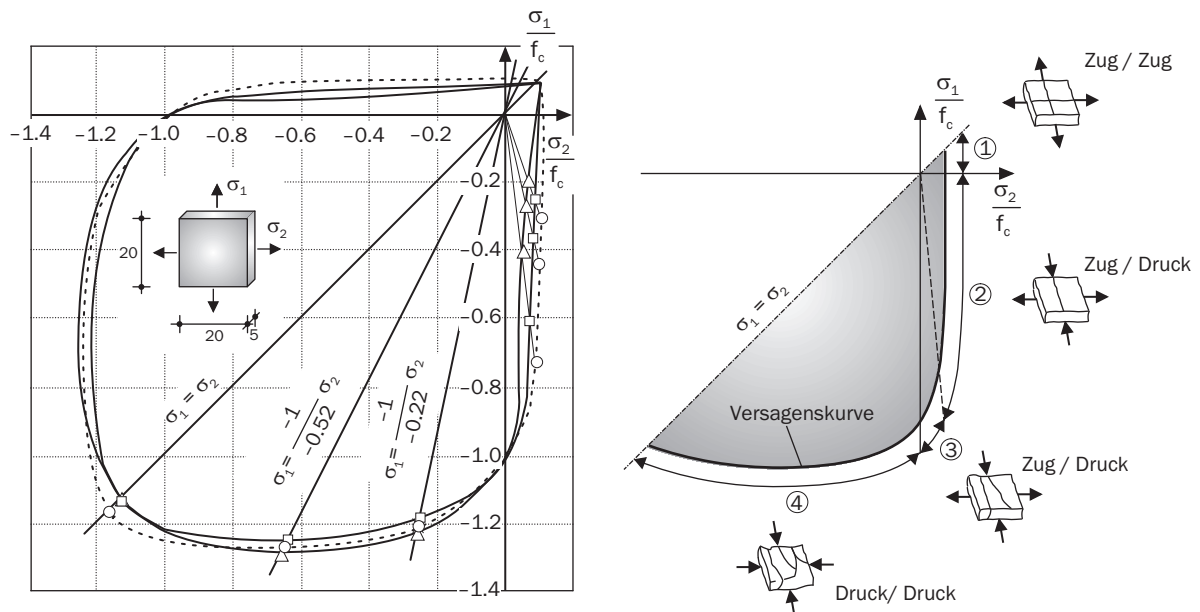
$\alpha_{fl} = 1.5$  berücksichtigt und es ergibt sich:

$$f_{ctm} = f_{ct,fl} \frac{\alpha_{fl}(h_b/h_0)^{0.7}}{1 + \alpha_{fl}(h_b/h_0)^{0.7}}. \quad (4.2)$$

#### 4.2.4 Betoncharakteristik unter mehraxialen Beanspruchungen

Beton- bzw. Stahlbetonstrukturen besitzen infolge einer Belastung dreidimensionale Spannungszustände. Bei der Untersuchung von flächenartigen Bauteilen ist allerdings eine Reduzierung des dreidimensionalen Zustandes auf einen biaxialen Spannungszustand ( $\sigma_3 = 0$ ) vertretbar und hinreichend genau. Im Vergleich zur einaxialen Beanspruchung ändert sich das Verformungsverhalten infolge mehraxialen Beanspruchungen wesentlich. Während bei der Beschreibung des einaxialen Materialverhaltens eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung genügt, kommt bei der Betrachtung des zweiaxialen Materialverhaltens eine Versagenskurve hinzu, die im Hauptspannungsraum aufgetragen angibt, ab wann ein Materialversagen eintritt.

Eine eindeutige Angabe einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den zweiaxialen Fall ist nicht möglich. Die ersten Versuche zur Bestimmung der Versagenskurven unter biaxialer Beanspruchung wurden von Kupfer (1973) durchgeführt, deren Kernaussage ist, dass eine Festigkeitssteigerung beim Auftreten einer zweiten Hauptdruckspannung erfolgt. Dabei wurde bei unterschiedlichen Spannungsverhältnissen ( $\sigma_1/\sigma_2$ ) die besagte Versagenskurve ermittelt, die dabei alle möglichen Spannungszustände verbindet, die ein Beton maximal unter biaxialen Beanspruchungen aufnehmen kann (Bild 4.4).



**Bild 4.4:** Biaxiale Versagenskurve [Kupfer 1973] (links) und Versagensmodi nach [Nelissen 1972] (rechts)

Die Versagenskurve wird so bestimmt, dass achsbezogen die einaxialen Festigkeiten je

Spannungsrichtung aufgetragen werden, woraus sich stets eine geschlossene, zur Winkelhalbierenden symmetrische Kurve ergibt. Alle zulässigen Spannungsverhältnisse  $\sigma_1/\sigma_2$  liegen somit innerhalb dieser Hüllkurve. Diese Festigkeitserhöhung resultiert aus der Druckbelastung infolge einer behinderten i-Querdehnung in der zweiten Belastungsrichtung. Es ist zu erkennen, dass bei einem Druckspannungsverhältnis  $\sigma_1/\sigma_2 = 0.5$  bzw.  $2.0$  die maximale biaxiale Druckfestigkeit um 20 - 25 Prozent über der einaxialen Festigkeit liegt. Dagegen wirkt sich bereits ein geringer Querzug stark festigkeitsmindernd aus. Bei einem Spannungsverhältnis  $\sigma_1/\sigma_2 = 1.0$  bei biaxialem Zug ist die Versagenszugfestigkeit immer die eindimensionale Zugfestigkeit  $f_{ctm}$ . Bei gemischten Spannungsverhältnissen wird schon aufgrund kleiner Zugspannungen die Druckfestigkeit reduziert. Daher entstehen bei einer biaxialen Betrachtungsweise unterschiedliche Versagensmodi.

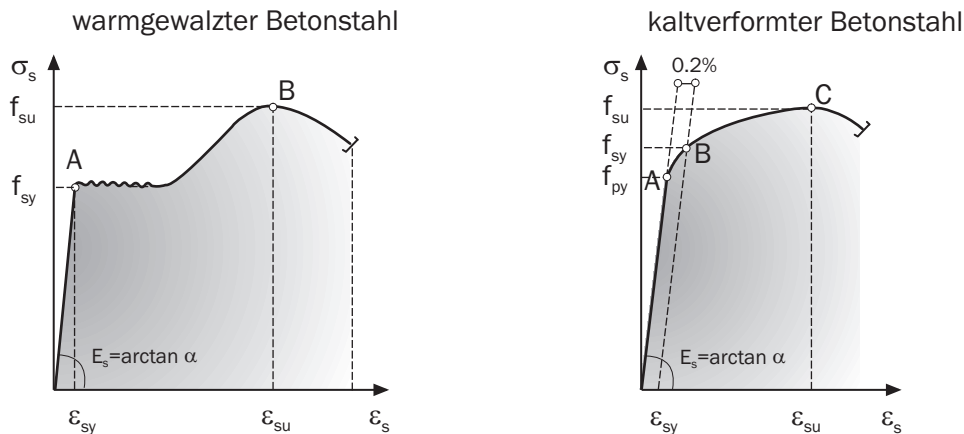
Bild 4.4 (rechts) zeigt die verschiedenen Modi entsprechend des vorherrschenden Spannungsverhältnisses. Im Bereich ① liegt ein reines Zugversagen in beiden Richtungen vor, im Bereich ② dagegen nur in Richtung der größten Zugspannung. Ab hier beginnt der Bereich ③ mit kombinierten Beanspruchungen durch Druck und Zug. Bei kompletter biaxialer Druckbeanspruchung treten Risse parallel zur größeren Druckspannungsrichtung im Bereich ④ auf.

Aufgrund der Tatsache, dass in dieser Arbeit flächenartige Stahlbetonkonstruktionen untersucht werden, wird an dieser Stelle das triaxiale Verhalten von Beton nicht weiter verfolgt. Eine biaxiale Beschreibung ist völlig ausreichend.

### 4.2.5 Der Werkstoff Betonstahl

Betonstahl ist neben modernen Bewehrungstechniken, wie Vorspannung (verbundlos oder im Verbund) oder der Betonfasertechnik mit Stahlfasern, Kunststofffasern oder Glasfasern, das klassische Material zur Bewehrung von Betonbauteilen. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Schwerpunkt auf Bauteile mit schlaffer Bewehrung gelegt. Der Betonstahl ist charakterisiert durch ein linear-elastisches Materialverhalten bis zur Fließgrenze  $f_{sy}$ , wobei der Elastizitätsmodul bei ca.  $200000\text{N/mm}^2$  liegt. Allgemein wird Betonstahl hinsichtlich seines Herstellungsprozesses differenziert in kalt- und warmverformten Stahl, wobei sich beide Stahlsorten erheblich im Kraft- und Verformungsverhalten unterscheiden. Bild 4.5 illustriert schematisch die Spannungs-Dehnungs-Kurven von Betonstählen unterschiedlicher Herstellung mit den charakteristischen Punkten unter einaxialer Zugbeanspruchung.

Bei warmgewalztem Bewehrungsstahl ist ein ausgeprägtes Fließplateau ab der Fließgrenze  $f_{sy}$  (Punkt A in Bild 4.5 (links)) mit einer Verfestigung bis zur Bruchspannung  $f_{su}$  (Punkt B) vorhanden. Bei gleichbleibendem Spannungsniveau nehmen dann die Verzerrungen stark zu, d.h. die Bruchspannung  $f_{su}$  impliziert eine hohe Bruchdehnung  $\varepsilon_{su}$ , die bei ca. 20 % liegt. Der Zug- und Druckbereich ist bei Betonstahl nahezu identisch. Während die Fließspannungen  $f_{sy}$  bei Werten zwischen  $220$  und  $420\text{N/mm}^2$  liegen, erreichen die Bruchspannungen  $f_{su}$  Werte zwischen  $340$  und  $500\text{N/mm}^2$ . Bei kaltverformten Stählen ist dagegen eine kontinuierliche Spannungs-Dehnungs-Kurve vorhanden, wobei nur eine geringe Verfestigung ab der Fließgrenze  $f_{sy}$  stattfindet (Punkt B in Bild 4.5 (rechts)).



**Bild 4.5:** Idealierte Spannungs-Dehnungs-Linie von Betonstahl unter einaxialer Zugbelastung

Bei einer zyklischen Belastung des Bewehrungsstahls tritt der sogenannte BAUSCHINGER-Effekt auf, der besagt, dass aufgrund mikroskopischer Eigenspannungen nach der Verfestigung des Betonstahls bei Umkehrung der Belastungsrichtung die Fließgrenze betragsmäßig niedriger ist als die ursprüngliche Fließgrenze.

In den deutschen und europäischen Normen wird Betonstahl allgemein durch seine Verformungseigenschaften zum einen durch die Elastizitätsmodul und zum anderen hinsichtlich seiner Duktilität definiert. Die Duktilität wird dabei in die drei Klassen A, B und C eingestuft. Der Klasse A sind normalduktiler Stähle zugeordnet, die ein Verhältnis der Zugfestigkeit  $f_{st}$  zur Fließgrenze  $f_{sy}$  von mindestens 1.05 und eine Stahldehnung unter maximaler Last von 2,5 % zulassen. Die Klasse B beinhaltet hochduktiler Stähle mit einem Verhältnis von  $f_{st}/f_{sy} \geq 1.08$  und einer maximalen Stahldehnung von 5.0 %. Die dritte Duktilitätsklasse C steht für hochduktiler Erdbebenstahl, der ein Verhältnis  $f_{st}/f_{sy} \geq 1.15$  und eine maximale Dehnung von 8 % aufweist. Allerdings besitzt diese Stahlsorte eine reduzierte Fließdehnung von  $f_{sy} = 450\text{N/mm}^2$ . Nach Schwarzkopf (2001) können alle warmgewalzten Stähle, also auch Bewehrungsstahl, der Duktilitätsklasse B zugeordnet werden.

Neben dieser Unterteilung der Betonstähle hinsichtlich ihres Verformungsverhaltens werden im Eurocode DIN EN 1991-1-2 (2010) sowie im Nationalen Anhang DIN EN 1991-1-2/NA (2010) für das Verhalten unter erhöhten Temperaturen die Klasse N und X definiert. Aufgrund fehlender Versuchsergebnisse ist durch den Nationalen Anhang DIN EN 1991-1-2/NA (2010) die Klasse X in Deutschland nicht zugelassen. Daher werden bei der späteren Beschreibung des Betonstahls im Hochtemperaturbereich lediglich Angaben von Betonstählen der Klasse N berücksichtigt. Da die Beanspruchungen auf den Bewehrungsstahl vorwiegend einaxial sind, sind auch nur einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Interesse.

### 4.3 Beton und Betonstahl im Hochtemperaturbereich

Einwirkungen infolge erhöhter Temperaturen haben einen signifikanten Einfluss auf das Betonverhalten. Wie schon in Kapitel 4.2.1 beschrieben, ist Beton ein inhomogener Werkstoff, der sich hauptsächlich aus Zuschlag, Zement und Wasser zusammensetzt. Diese drei Hauptbestandteile beeinflussen das Hochtemperaturverhalten von Beton maßgeblich und reagieren unterschiedlich stark. Generell ist feststellen, dass Beton unter Einwirkungen durch hohe Temperaturen duktiler bzw. weicher wird. Hohe Temperaturen induzieren physikalische und chemische Veränderungen in der Mikrostruktur des Betons.

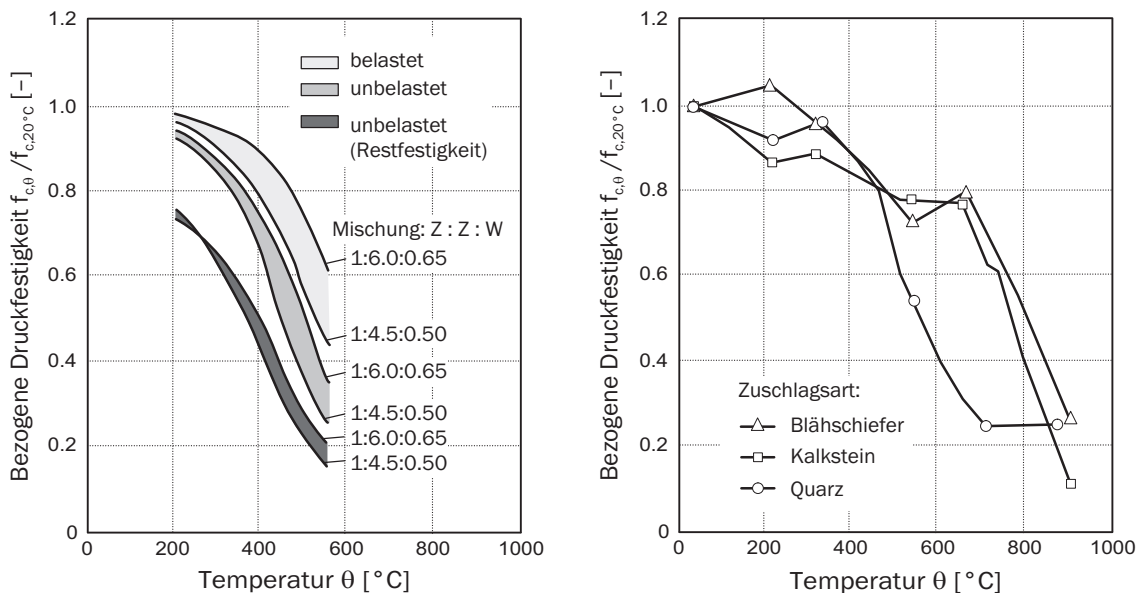
Durch die hohe Temperaturbelastung infolge eines Brandereignisses entstehen temperaturbedingte, materialabhängige, spezifische Zersetzungs- und Umwandlungsvorgänge. Nach Schneider (1982) verdunstet bzw. verdampft zunächst das physikalisch gebundene Wasser in den Poren des Betons, wobei die Verdunstung bereits ab 30°C und die Verdampfung verstärkt erst ab 100°C eintritt. Parallel dazu findet zwischen 30°C und 300°C die Dehydration des Zementsteins statt. Dieser Vorgang überlagert sich mit der Abgabe des chemisch gebundenen Wassers bei 120 - 600°C. Diese Prozesse verlaufen immer in Verbindung mit Wasser und führen primär zu einem deutlichen Festigkeitsverlust des Zementsteins. Ab 450°C findet ein direkter Festigkeitsverlust des Zementsteins statt, da zwischen 450°C und 550°C eine Zersetzung von Portlandit eintritt. Oberhalb von 600°C setzt der Abbau der CSH (Calcium-Silikat-Hydrat)-Phasen ein und reduziert somit weiter den Zementstein. In Tabelle 4.1 sind die wichtigsten Umwandlungsprozesse noch einmal zusammengefasst.

| Temperatur [°C] | Reaktion im Beton   |
|-----------------|---|
| 30 - 120        | Verdunstung bzw. Verdampfung von physikalisch gebundenem Wasser                 |
| 30 - 300        | Gelabbau: Dehydration, 1. Stufe   |
| 120 - 600       | Abgabe von chemisorbiertem bzw. zeolitisch gebundenem Wasser                    |
| 450 - 550       | Zersetzung von Portlandit $Ca(OH)_2 \rightarrow CaO + H_2O$                     |
| 570             | Quarzumwandlung $\alpha \rightarrow \beta SiO_2$                                |
| 600 - 700       | Zersetzung der CSH-Phasen; Bildung von $\beta - C_2S$                           |
| 600 - 900       | nur bei Kalkstein:<br>Entsäuerung von Kalkstein $CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$ |
| 1100 - 1200     | Schmelzen von Beton; Bildung glasartiger Substanzen                             |

**Tabelle 4.1:** Umwandlungs- und Zersetzungsprozesse von quarzitischem und kalzitischem Beton nach Schneider (1982)

### 4.3.1 Einaxiale Betondruckfestigkeit

Die wesentlichen Einflussparameter auf die Druckfestigkeit des Betons unter erhöhten Temperaturen sind die Zuschlagsart und das Mischungsverhältnis zwischen Zuschlag und Zement. Bei mageren Betonmischungen ist eine proportional geringere Festigkeitsreduzierung vorhanden. Für den Zuschlag gilt, dass aufgrund von Umwandlungsprozessen bei Betonen mit quarzitischen Zuschlägen deutlich früher merkliche Festigkeitsverluste eintreten als bei Beton mit kalzitischen Zuschlägen. Die Zementart selbst hat nur einen sehr geringen Anteil am Festigkeitsverlust. Bereits bei 100°C beginnt die physikalische Zerstörung des Zementsteins, was folglich zu Verlusten der Betonfestigkeit führt. Allerdings werden diese teilweise durch Grenzflächenreaktionen mit den Zuschlägen kompensiert. In Bild 4.6 sind Einflüsse unterschiedlicher Versuchsbeanspruchungen und verschiedener Zuschlagsarten auf die Hochtemperaturdruckfestigkeit von Beton dargestellt.



**Bild 4.6:** Einflüsse des Betonmischungsverhältnisses (Zement:Zuschlag:Wasser) bei unterschiedlichen Versuchsbeanspruchungen (links) und Einfluss der Zuschlagsart (rechts) auf das Druckverhalten von Beton in Abhängigkeit der Temperatur [Schneider 1982]

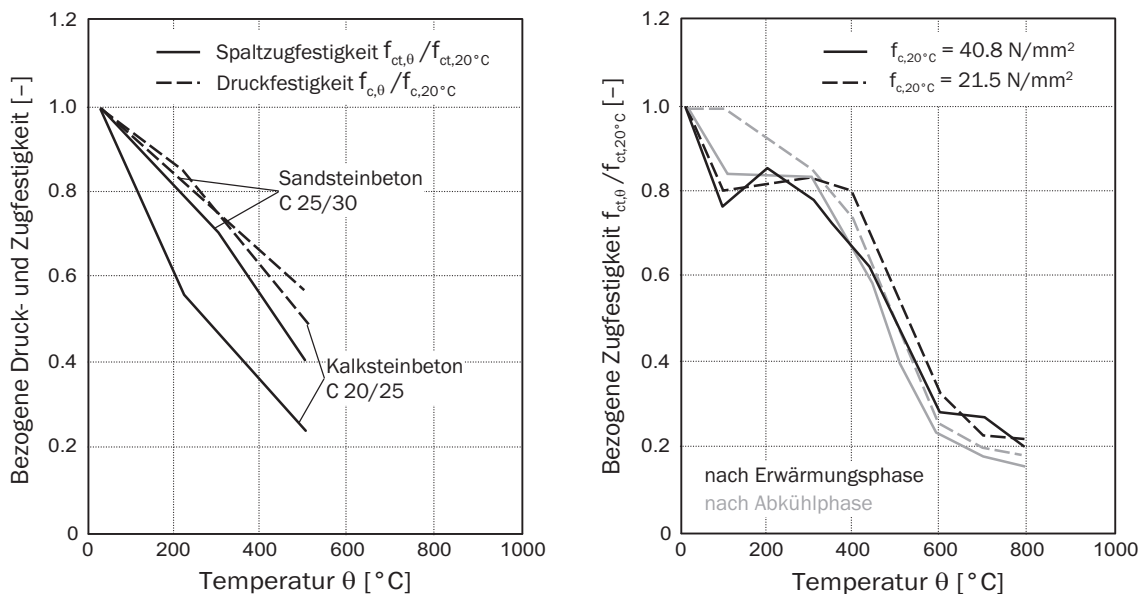
Aus Bild 4.6 sind folgende Tendenzen der Druckfestigkeit bei erhöhten Temperaturen erkennbar. Bis zu einer Temperatur von ca. 200°C sind keine signifikanten Verluste der Hochtemperaturdruckfestigkeit festzustellen. In dem Bereich zwischen 200 und 400°C beginnt eine leichte Abnahme der Festigkeit, wobei hier die Zuschlagsart noch keine großen Einflüsse zeigt. Bei Temperaturen über 400°C muss eine Unterscheidung bezüglich der Zuschlagsart vorgenommen werden. Gemäß Bild 4.6 (links) ist ein positiver Effekt des Festigkeitsverlustes zu erkennen. Er tritt bei einer vorhandenen Belastung (Vorspannung oder Behinderung der thermischen Dehnungen) während der Erwärmungsphase auf. Angaben zur rechnerischen Modellerfassung der Betondruckfestigkeit folgen im Kapitel 4.4.2.

### 4.3.2 Einaxiale Betonzugfestigkeit

Während für die Druckfestigkeit bei erhöhten Temperaturen eine Vielzahl an Versuchsdaten in der Literatur zu finden sind, trifft dies für die Zugfestigkeit nicht zu, da sie meist als vernachlässigbar klein angesehen wird. Nach Schneider (1982) können für die Zugfestigkeit unter erhöhten Temperaturen die nachstehenden Aussagen getroffen werden.

Die Hochtemperaturfestigkeit im Zugbereich  $f_{ct,\theta}$  wird maßgeblich durch das Mischungsverhältnis Zement/Zuschlag des Betons bestimmt, wobei magere Betone geringere Festigkeitsverluste aufweisen. Den größten Einfluss auf die Zugfestigkeit hat der Betonzuschlag, wobei es bei quarzitäen Zuschlägen zu einer geringeren Reduktion der Zugfestigkeit kommt als bei kalzitischen Zuschlägen [Harada, Takeda, Yamane & Furumura 1972]. Diese Aussagen sind in Bild 4.7 (links) dargestellt. Es ist erkennbar, dass der Verlust der Zugfestigkeit bei kalzitischen Zuschlägen fast doppelt so groß ist wie bei quarzitäen Zuschlägen.

Die relative Reduktion der Hochtemperaturzugfestigkeit  $f_{ct,\theta}$  im Vergleich zur Abnahme der Druckfestigkeit bei erhöhten Temperaturen  $f_{c,\theta}$  ist tendenziell größer (Bild 4.7 (links)).

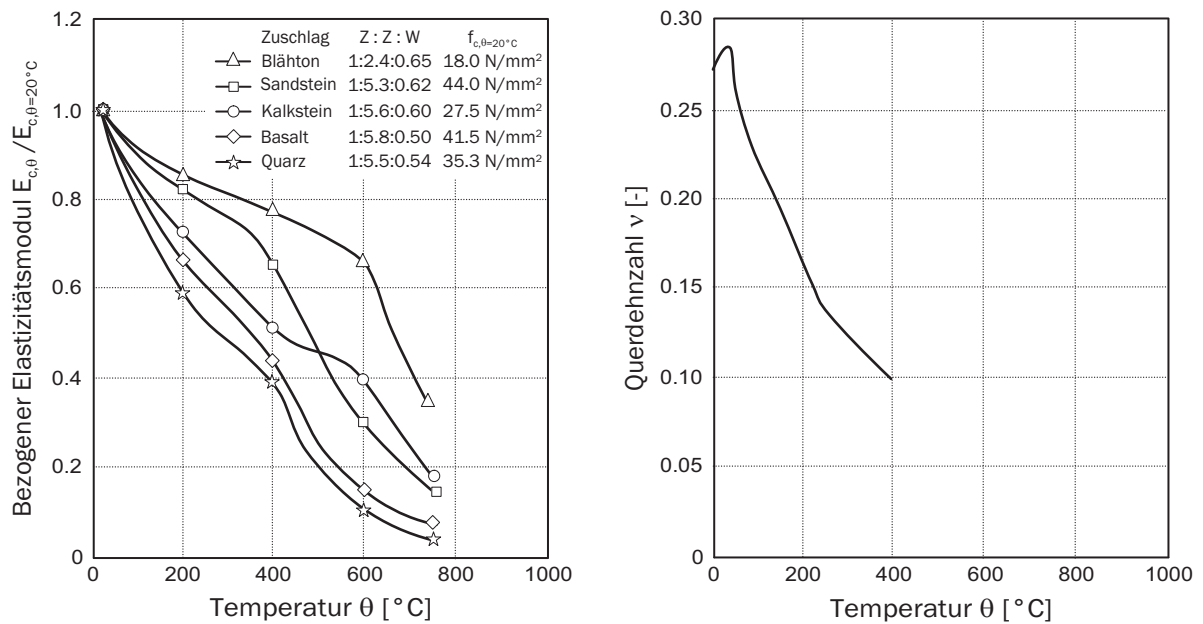


**Bild 4.7:** Spaltzugfestigkeit und Druckfestigkeit von Beton mit unterschiedlichen Mischungsverhältnissen und Zuschlägen nach Schneider (1982) (links) und Spaltzugfestigkeit im warmen und kalten Zustand nach Thelandersson (1971) (rechts)

In Bild 4.7 (rechts) ist erkennbar, dass sich das Verhalten der Spaltzugfestigkeit zwischen dem erwärmten und abgekühlten Zustand kaum unterscheidet, das besagt, dass die Spaltzugversuche meistens im abgekühlten Zustand durchgeführt wurden. Ab einer Temperatur von 600°C ist praktisch keine Zugfestigkeit mehr messbar. Angaben zur rechnerischen Modellerfassung folgen im Kapitel 4.4.4.

### 4.3.3 Elastizitätsmodul und Querdehnzahl

Mit steigender Temperatur ist eine deutliche Abnahme des Elastizitätsmoduls festzustellen (Bild 4.8 (links)). Den größten Einfluss für die Reduzierung hat wiederum die Art des Zuschlags. Die Verluste bei kalksteinhaltigen Zuschlägen sind geringer als bei quarzitischen bzw. basaltischen Zuschlägen. Nach Zhang & Bicanic (2002) wird die Abnahme des Elastizitätsmoduls im Niedrigtemperaturbereich bis 300°C hauptsächlich durch die Volumenabnahme des verdampften Kapillarwassers und ab 300 °C durch den Abbau der strukturellen Eigenschaften der einzelnen Komponenten verursacht.



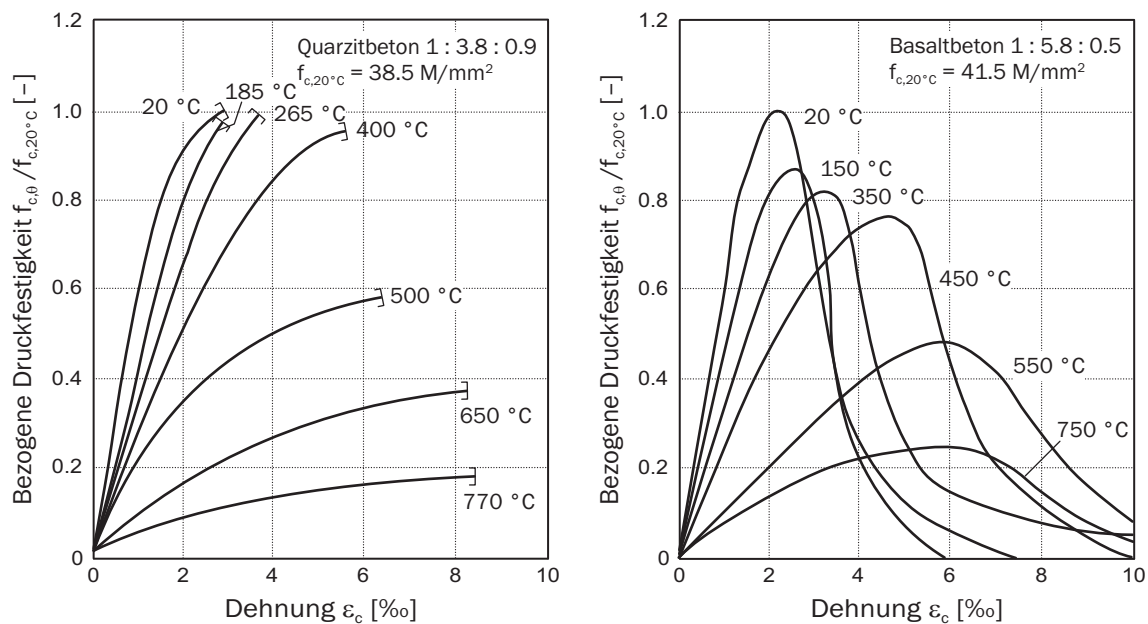
**Bild 4.8:** Einfluss der Temperatur und der verschiedenen Zuschlagstoffe auf den Elastizitätsmodul [Schneider 1982] (links) und Einfluss der Temperatur auf die Querdehnzahl  $\nu_c$  von Normalbeton mit quarzitischen Zuschlägen [Marechal 1972] (rechts)

Für die Temperaturabhängigkeit der Querdehnzahl von Normalbeton werden in der Literatur verschiedene gegenläufige Aussagen getroffen. In Marechal (1972) wird für die Querdehnzahl  $\nu_c$  zunächst eine leichte Erhöhung bis zu einer Temperatur von 50°C vorgeschlagen, bevor eine kontinuierliche Reduzierung bei stetig steigenden Temperaturen bis 400°C einsetzt (Bild 4.8 (rechts)). Angaben über das Verhalten ab 400°C werden nicht getroffen. Dahingegen wird in Wu, Yuan & Wang (2000) von einem stetigen Ansteigen der Querdehnzahl bis 400°C ausgegangen.

Aufgrund der vorliegenden gegensätzlichen Aussagen wird vom Autor eine temperaturabhängige Querdehnzahl angenommen, wie es in anderen Forschungsarbeiten ebenfalls durchgeführt wurde [Hothan 2004]. Der Wert  $\nu$  für Normalbeton liegt bei 0.15 und 0.2.

#### 4.3.4 Einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton

Zur Ermittlung von Druckfestigkeit, Elastizitätsmodul und Bruchdehnung wurden in früheren Jahren meistens lastgesteuerte Versuche durchgeführt. Moderne Prüfmaschinen ermöglichen auch dehnungsgesteuerte Versuche, um die Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton unter erhöhten Temperaturen zu ermitteln. Der Vorteil dehnungsgesteuerter Versuche liegt im Messen der gesamten Spannungs-Dehnungs-Beziehung inklusive dem abfallenden Zweig. Zusätzlich ist so die Möglichkeit gegeben, die Dissipationsenergie der Probe festzustellen. Bild 4.9 zeigt links die Auswertung für die Spannungs-Dehnungs-Linien aus einem lastgesteuerten und rechts die eines dehnungsgesteuerten Versuchs.



**Bild 4.9:** Normierte Spannungs-Dehnungskurven von Normalbeton bei erhöhten Temperaturen in lastgesteuerten Versuchen nach Anderberg & Thelandersson (1973) (links) und dehnungsgesteuerten Versuchen nach Schneider (1982) (rechts)

In diesen Versuchen wurden viele Einflussparameter berücksichtigt. Dazu zählen u.a. das Mischungsverhältnis, die Zuschlagart, die Zementart sowie Lagerungs- und Versuchsbedingungen. Korrespondierend mit den bisherigen Materialveränderungen im Hochtemperaturbereich spiegeln sich die einzelnen Effekte der Festigkeitsreduktion und des Dehnungswachstums folgerichtig in der Spannungs-Dehnungs-Linie wider.

Es wird konstatiert, dass die Anfangsfestigkeit und der WZ-Wert keinen Einfluss auf die Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton haben, bedeutsam ist die Art des Zuschlagstoffes. Betone mit basaltischen und quarzischen Zuschlägen weisen einen stärkeren Abfall der Anfangsfestigkeit als Beton mit Leichtzuschlägen auf. Die Bruchdehnung ist nahezu unabhängig von der Art des Zuschlages. Ein weiterer wichtiger Einflussparameter ist eine Vorbelastung. Vorbelastete Proben zeigen im allgemeinen eine Festigkeits- und Elastizitätszunahme gegenüber unbelasteten Proben [Schneider 1982].



### 4.3.5 Betonstahl - Druck- und Zugfestigkeit

Wie im Normaltemperaturbereich weist Stahl auch im Hochtemperaturbereich eine hohe Druck- und Zugkraft auf. Im Verbund mit Beton übernimmt er hauptsächlich die Zugkräfte. Wie schon in Abschnitt 4.2.5 beschrieben, wird zwischen warmgewalztem- und kaltverformtem Stahl unterschieden.

Die warmgewalzten Stähle verdanken ihre Festigkeit dem Zuzischen von Kohlenstoff bei der Eisenschmelze. Bei einer Temperaturbeanspruchung lockern sich die Verbindungen zwischen den einzelnen Kristallen und die Festigkeit fällt ab einer Temperatur von 200°C langsam ab. Mit Beginn dieser Entfestigung ist ein kontinuierlicher Festigkeitsverlust festzustellen. Ab einer Temperatur von 600 °C ist nur noch ca. 20 % der Ausgangsfestigkeit vorhanden. Die Zugfestigkeit steigt bis 200 °C leicht an bevor sie rapide abfällt. Reserven sind ab diesem Zeitpunkt keine mehr vorhanden.

Das Verhalten von kaltverformtem Betonstahl ist dem des warmgewalzten entsprechend. Auch hier werden die Kristalle durch die thermischen Einwirkungen aufgelockert und es findet eine Kristallumwandlung statt.

## 4.4 Konstitutive Modellierung von Beton

Nachdem die grundlegenden Verhaltensmerkmale der Materialien Beton und Betonstahl bei Normaltemperaturbedingungen und bei erhöhten Temperaturen erläutert wurden, werden nun im folgenden Abschnitt die notwendigen konstitutiven Materialmodellierungen für die numerische Umsetzung aufgezeigt.

### 4.4.1 Biaxiale Betonmodellierung basierend auf dem Konzept von DARWIN & PECKNOLD

Zur numerischen Beschreibung von Beton für einen mehraxialen Spannungszustand sind in den letzten Jahren eine Reihe von Materialmodellen entwickelt worden. Im Prinzip ist bei Beton kein plastisches Verhalten festzustellen, da sich merkliche Verformungen vor dem Versagen nicht ausbilden können, wohingegen die Rissausbreitung in Betonstrukturen schon bei kleinen Dehnungen erfolgt und der Beton zerstört wird. Somit wird er der Gruppe der spröden Materialien zugeordnet.

Der Beton erreicht seine Bruchfestigkeit nach der Ausbildung von bleibenden Dehnungen, die absolut gesehen recht klein sind, jedoch erheblich größer als elastische Dehnungen sind. Der Hauptgrund für die bleibenden Verformungen ist das Öffnen und Schließen von Rissen. Um dieses Verhalten realitätsnah abzubilden, sind diverse Plastizitätsmodelle und Schädigungsmodelle sowie deren Kombinationen entwickelt worden.

Zur Untersuchung flächenartiger Betonstrukturen wird eine biaxiale Betonmodellierung benötigt, welche trotz zugrundegelegten Vereinfachungen das globale Tragverhalten richtig abbildet und die Schwächung des Betons durch eine etwaige Rissbildung adäquat erfasst. Gewählt wird eine Variante der Beschreibung des ebenen Spannungszustandes im Beton, wobei der biaxiale Spannungszustand durch zwei entkoppelte äquivalente Spannungs-Dehnungs-Beziehungen in Richtung der Hauptspannungen beschrieben wird. Diese Vorgehensweise wird oft als *Equivalent-Uniaxial-Strain-Konzept* bezeichnet. Es hat sich bei vielen numerischen Berechnungen von Schalenstrukturen bewährt und zeichnet sich durch seine einfache Modellierbarkeit und Integration normativer Regelungen aus.

Das Konzept wurde von Darwin & Pecknold (1977a) und Darwin & Pecknold (1977b) entwickelt und wird in der vorliegenden Arbeit in Anlehnung an aktuelle Arbeiten wie Noh (2001), Andres (2004), Wörmann (2004) verwendet und um das Verhalten unter erhöhten Temperaturen erweitert. Mit Hilfe einer inkrementellen Formulierung wird eine lastgeschichtsabhängige Formulierung angestrebt, wodurch Be- und Entlastungspfade richtig abgebildet werden.

**Biaxiale konstitutive Beziehung.** Das biaxiale Spannungs-Dehnungs-Gesetz für Beton basiert auf dem Konzept von Darwin & Pecknold (1974), welches ein inkrementell linear-orthotropes Materialverhalten des Betons unterstellt. Für den ebenen Spannungszustand kann so die inkrementelle Stoffgleichung für die orthogonal zueinander stehenden Hauptrichtungen 1 und 2 entkoppelt formuliert werden. Die Spannungsraten  $d\sigma_i$  ergeben

sich zu

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1\nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 \\ \nu_1 E_2 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

wobei die tangentialen Elastizitätsmoduli  $E_i$  und die Querdehnzahlen  $\nu_i$  spannungsabhängige Materialkonstanten repräsentieren. Aufgrund der mechanischen Gesetzmäßigkeiten für orthotrope Materialien gilt aus einer Energiebetrachtung

$$\nu_1 \cdot E_2 = \nu_2 \cdot E_1. \quad (4.4)$$

Zur Vermeidung einer Richtungsbevorzugung sowie zur einfacheren Formulierung der Stoffgleichung wird eine äquivalente Querdehnung

$$\nu^2 = \nu_1 \cdot \nu_2 \quad (4.5)$$

eingeführt. Aus Gleichung (4.3) ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.5) und Einführung des Schubterms die vollständige konstitutive Beziehung  $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix}}_{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 - \nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2)G \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}}_{d\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.6)$$

wobei für den Schubmodul  $G$  weiterhin eine Richtungsunabhängigkeit gefordert wird. Aufgrund dieser Annahme muss die Schubsteifigkeit auch bei einer um den Winkel  $\theta$  gedrehten Hauptspannungsrichtung unverändert bleiben. Transformiert man (4.6) mit Hilfe der orthogonalen Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

so berechnet sich die Materialmatrix  $\mathbf{C}'$  in Richtung der konvektiven Koordinaten

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T}. \quad (4.8)$$

Die invariante Schubsteifigkeit  $G$  lässt sich nun durch Gleichsetzen von  $\mathbf{C}$  aus (4.6) und  $\mathbf{C}'$  gemäß (4.8) zu

$$(1 - \nu^2) G = \frac{1}{4} \left( E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1 E_2} \right) \quad (4.9)$$

bestimmen. Durch Einsetzen von (4.9) in (4.6) ergibt sich die vollständige konstitutive Beziehung abhängig von  $E_1, E_2$  und  $\nu$  zu:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} (E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1 E_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

**Equivalent-Uniaxial-Strain-Konzept (Äquivalente einachsige Dehnungen).**

Nachdem die biaxiale konstitutive Beziehung formuliert ist, wird nun auf die grundlegende Idee von Darwin & Pecknold (1977b) zurückgegriffen, den zweiachsialen Spannungszustand durch zwei entkoppelte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen in Hauptspannungsrichtung abzubilden, um sie dann separat mit einfach formulierten einaxialen Beziehungen betrachten zu können. Dazu werden sogenannte äquivalente einaxiale Dehnungen  $\varepsilon_{iu}$  eingeführt und es ergibt sich aus den gekoppelten Beziehungen (4.6) bzw. (4.10) die entkoppelte Form zu:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Die äquivalenten einachsigen inkrementellen Verzerrungen  $d\varepsilon_{iu}$  werden entweder durch Gleichsetzen von (4.6) und (4.11) durch die Verzerrungsinkremente in Hauptrichtung  $d\varepsilon_i$  bestimmt

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu\sqrt{E_2/E_1} \\ \nu\sqrt{E_1/E_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

oder können direkt aus der entkoppelten Formulierung (4.11) zu

$$d\varepsilon_{1u} = \frac{d\sigma_1}{E_1} \quad \text{bzw.} \quad d\varepsilon_{2u} = \frac{d\sigma_2}{E_2} \quad (4.13)$$

berechnet werden. Die gesamten äquivalenten Verzerrungen  $\varepsilon_{iu}$  werden unter der Annahme eines nichtlinearen Materialverhaltens wie folgt ermittelt:

$$\varepsilon_{iu} = \int d\varepsilon_{iu} = \int \frac{d\sigma_i}{E_i}. \quad (4.14)$$

Bei einer vorhandenen inkrementellen Betrachtungsweise ergeben sie sich durch Aufsummierung der einzelnen Verzerrungsinkremente zu:

$$\varepsilon_{iu} \approx \sum_k \Delta\varepsilon_i = \sum_k \frac{\Delta\sigma_i}{E_i}, \quad (k = 1, \dots, \text{Anzahl der Lastinkremente}). \quad (4.15)$$

Die äquivalenten einaxialen Dehnungen  $\varepsilon_{iu}$  sind fiktive Größen. Ihre Addition vollzieht sich stetig in den sich kontinuierlich ändernden Hauptspannungsrichtungen. Dies kann zu einem Überschätzen der vorherigen Belastungen verglichen mit den aktuellen Beanspruchungen führen. Eliminiert wird dieser Defekt durch die Definition von  $90^\circ$ -Sektoren, bei der die Belastungsgeschichte der anderen Hauptspannungsrichtung angesetzt wird, wenn durch Drehung der Hauptspannungsrichtungen ein Sektor verlassen wird.

Mit Einführung der einaxialen äquivalenten Dehnungen besteht nun die Möglichkeit, mit einfach formulierten einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen das mechanische Verhalten von Betonstrukturen zu beschreiben.

### 4.4.2 Einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton

Auf Grundlage experimentell ermittelter Daten bezüglich des Hochtemperaturverhaltens von Beton finden sich in der Literatur zahlreiche numerische Beschreibungen der Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei erhöhten Temperaturen. Einige maßgebende, die auch normativen Einfluss haben, sind im folgenden kurz vorgestellt.

In der Arbeit von Schneider & Haksever (1976) wird eine leicht modifizierte Beschreibung der grundlegenden Formulierung von Ritter (1899) und Hognestad (1951) vorgeschlagen, welche das Hochtemperaturkriechen des Betons mit berücksichtigt, das transiente Kriechen allerdings ignoriert. Die Formulierung ist in zwei Bereiche unterteilt. Den ansteigenden Ast (Bild 4.10) beschreibt die Gleichung (4.16) mit

$$\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c1,\theta} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{c,\theta} = f_{c,\theta} \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_{c1,\theta} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,\theta}} \right)^2 \right] \quad (4.16)$$

und den abfallenden Ast die Gleichung (4.17) mit

$$\varepsilon_c > \varepsilon_{c1,\theta} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{c,\theta} = f_{c,\theta} \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{cu1,\theta}}{3 \varepsilon_{c1,\theta}} \right)^2 \right]. \quad (4.17)$$

Infolge der erhöhten Temperatur  $\theta$  korrespondiert die temperaturabhängige Dehnung  $\varepsilon_{c1,\theta}$  zur maximalen Druckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  und ist definiert durch:

$$\varepsilon_{c1,\theta} = 0.0025 + (6.0 \cdot \theta + 0.04 \cdot \theta^2) \cdot 10^{-6}. \quad (4.18)$$

Der Einfluss des Abfallens der Betondruckfestigkeit wird bei dieser Beschreibung erst ab einer Temperatur höher als 450 °C Rechnung getragen. Die Formulierung der temperaturabhängigen Betondruckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  wird daher wie folgt definiert:

$$\theta < 450 \text{ °C} \quad \Rightarrow \quad f_{c,\theta} = f_{c,20 \text{ °C}} \quad (4.19)$$

$$\theta \geq 450 \text{ °C} \quad \Rightarrow \quad f_{c,\theta} = f_{c,20 \text{ °C}} \left[ 2.011 - 2.353 \left( \frac{\theta - 20}{1000} \right) \right]. \quad (4.20)$$

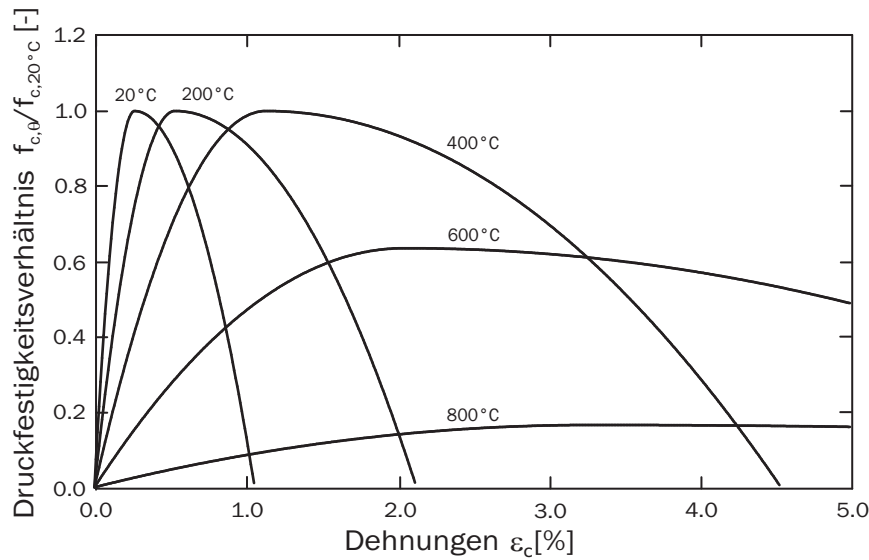
Vorteil dieser Formulierung ist, dass sie ebenfalls für die Abkühlphase verwendet werden kann. In Lie, Rowe & Lin (1986) und Lin, Cheng & Yang (1995) wird vorgeschlagen, die Restdruckfestigkeit  $f_{cR,\theta}$  anstatt der Druckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  zu verwenden. Sie berechnet sich mit:

$$\theta \leq 500 \text{ °C} \quad \Rightarrow \quad f_{cR,\theta} = f_{c,20 \text{ °C}} \cdot (1.000 - 0.001 \cdot \theta) \quad (4.21)$$

$$500 \text{ °C} < \theta < 700 \text{ °C} \quad \Rightarrow \quad f_{cR,\theta} = f_{c,20 \text{ °C}} \cdot (1.375 - 0.00175 \cdot \theta) \quad (4.22)$$

$$\theta > 700 \text{ °C} \quad \Rightarrow \quad f_{cR,\theta} = 0.0 \quad (4.23)$$

Diese Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Beton ist so auch im Model Code 90 (1993) wiederzufinden. Bild 4.10 zeigt die Verläufe der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen gemäß den Gleichungen (4.16) bis (4.20).



**Bild 4.10:** Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Beton bei unterschiedlichen Temperaturstufen nach Schneider & Haksever (1976)

Nach Iding, Bresler & Nizamuddin (1977) kann für den ansteigenden Ast bei der Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton auf eine Formulierung nach Saenz (1964) zurückgegriffen werden. Mit dem Tangentenelastizitätsmodul  $E_{c0}$  und dem Sekantenelastizitätsmodul  $E_{cS}$  ergibt sich:

$$\sigma_{c,\theta} = \frac{E_{c0} \cdot \varepsilon_c}{1 + \left( \frac{E_{c0}}{E_{cS}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,\theta}} + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,\theta}} \right)^2} \quad (4.24)$$

Für den abfallenden Ast erfolgt dann die lineare Beschreibung bis zum angenommenen Druckbruch des Betons bei  $\varepsilon_{cu1,\theta}$ .

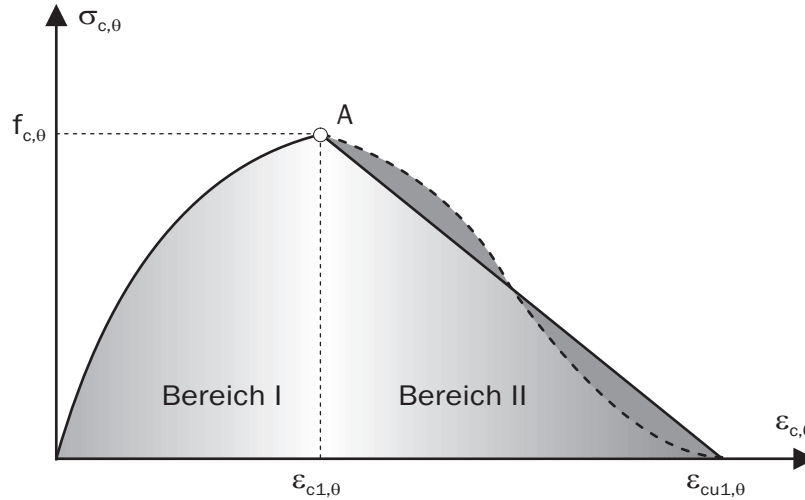
Eine ähnliche Formulierung, welche die Grundlage für die Formulierung der DIN EN 1992-1-2 (2010) darstellt, ist die mathematische Beschreibung nach Popovic (1973). Danach ist

$$\sigma_{c,\theta} = f_{c,\theta} \cdot \frac{n \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,\theta} \left( n - 1 + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,\theta}} \right)^n \right)} \quad \text{mit} \quad n = 1 - \frac{\varepsilon_{c1,\theta}}{f_{c,\theta}} \cdot E_{c,\theta}. \quad (4.25)$$

Während durch Popovic (1973) der Faktor  $n$  allein in Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit angegeben wird, ergaben experimentelle Untersuchungen anderer Autoren, dass Einflüsse der Zuschlagsgröße und des WZ - Wertes ebenso entscheidend sind. Daher wird mit dem Faktor  $n$  der nichtlineare Effekt der Spannungs-Dehnungs-Linie berücksichtigt. Der Faktor  $n$  kann also als ein Maß für die Nichtlinearität in der Spannungs-Dehnungs-Linie angesehen werden, welcher auf Zuschlag, WZ-Wert und die daraus resultierende Druckfestigkeit zurückzuführen ist [Hughes & Chapman 1966].

Grundsätzlich erfolgt die Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton bei erhöhten Temperaturen durch Einteilung in zwei Bereiche, dem ansteigenden Ast

bis zur maximalen Druckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  als Bereich I und dem abfallenden Ast bis zur Bruchdehnung  $\varepsilon_{cu1,\theta}$  als Bereich II. Bild 4.11 zeigt beispielhaft den schematischen Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linie für Normalbeton.



**Bild 4.11:** Schematische Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Normalbeton nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

Gleichung (4.25) bildet, wie schon erwähnt, die Grundlage für die in der Norm DIN EN 1992-1-2 (2010) verwendete Formulierung für die einaxiale Druckfestigkeit von Normalbeton bei erhöhten Temperaturen. Nach Popovic (1973) wird der Wert  $n = 3$  gesetzt und es ergibt sich für den ansteigenden Ast (Bereich I):

$$0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c1,\theta} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{c,\theta} = f_{c,\theta} \cdot \frac{3 \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,\theta} \left( 2 + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,\theta}} \right)^3 \right)}. \quad (4.26)$$

Der abfallende Ast (Bereich II) kann mit linearen oder nichtlinearen Modellen beschrieben werden, wobei eine lineare Beschreibung meist ausreicht und numerisch einfacher und stabiler umzusetzen ist. Für eine lineare Beschreibung gilt:

$$\varepsilon_{c1,\theta} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu1,\theta} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{c,\theta} = f_{c,\theta} \cdot \frac{\varepsilon_{cu1,\theta} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu1,\theta} - \varepsilon_{c1,\theta}}. \quad (4.27)$$

Definiert wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung (4.26) durch die zwei Parameter Betondruckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  und korrespondierende Dehnung  $\varepsilon_{c1,\theta}$ . Die einaxiale Betondruckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  wird in Abhängigkeit der Temperatur durch Multiplikation der Festigkeit bei Normaltemperaturen  $f_{c,20^\circ\text{C}}$  mit einem Abminderungsfaktor  $k_c(\theta)$  bestimmt. Es gilt nach Gleichung (2.24):

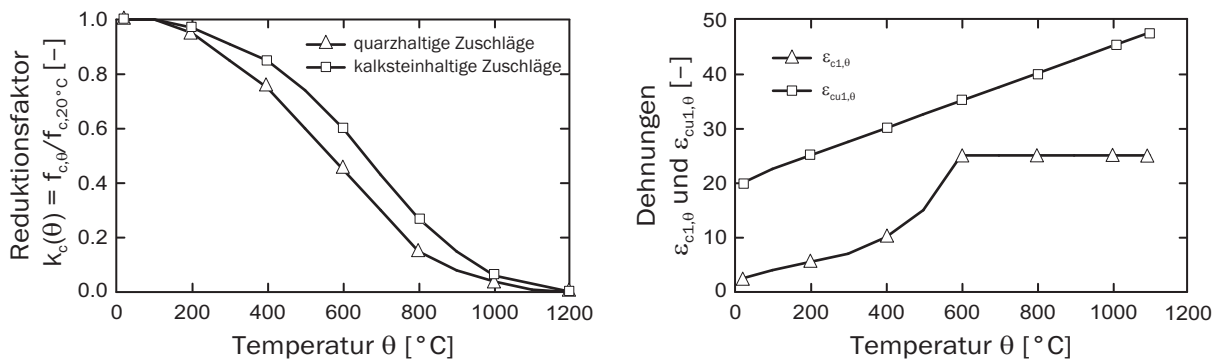
$$f_{c,\theta} = k_c(\theta) \cdot f_{c,20^\circ\text{C}}. \quad (4.28)$$

Für den Abminderungsfaktor  $k_c(\theta) = f_{c,\theta}/f_{c,20^\circ\text{C}}$  in Gleichung (4.28) gibt die DIN EN 1992-1-2 (2010) Werte in Abhängigkeit der Temperatur  $\theta$  vor, differenziert nach der Zuschlagsart, die linear interpoliert werden können (siehe Tabelle 4.2).

| Beton-<br>temperatur | quarzhaltige Zuschläge                |                           |                            | kalksteinhaltige Zuschläge            |                           |                            |
|----------------------|---------------------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------|----------------------------|
|                      | $f_{c,\theta}/f_{c,20^\circ\text{C}}$ | $\varepsilon_{c1,\theta}$ | $\varepsilon_{cu1,\theta}$ | $f_{c,\theta}/f_{c,20^\circ\text{C}}$ | $\varepsilon_{c1,\theta}$ | $\varepsilon_{cu1,\theta}$ |
| $^\circ\text{C}$     | [-]                                   | [-]                       | [-]                        | [-]                                   | [-]                       | [-]                        |
| 20                   | 1.00                                  | 0.0025                    | 0.0200                     | 1.00                                  | 0.0025                    | 0.0200                     |
| 100                  | 1.00                                  | 0.0040                    | 0.0225                     | 1.00                                  | 0.0040                    | 0.0225                     |
| 200                  | 0.95                                  | 0.0055                    | 0.0250                     | 0.97                                  | 0.0055                    | 0.0250                     |
| 300                  | 0.85                                  | 0.0070                    | 0.0275                     | 0.91                                  | 0.0070                    | 0.0275                     |
| 400                  | 0.75                                  | 0.0100                    | 0.0300                     | 0.85                                  | 0.0100                    | 0.0300                     |
| 500                  | 0.60                                  | 0.0150                    | 0.0325                     | 0.74                                  | 0.0150                    | 0.0325                     |
| 600                  | 0.45                                  | 0.0250                    | 0.0350                     | 0.60                                  | 0.0250                    | 0.0350                     |
| 700                  | 0.30                                  | 0.0250                    | 0.0375                     | 0.43                                  | 0.0250                    | 0.0375                     |
| 800                  | 0.15                                  | 0.0250                    | 0.0400                     | 0.27                                  | 0.0250                    | 0.0400                     |
| 900                  | 0.08                                  | 0.0250                    | 0.0425                     | 0.15                                  | 0.0250                    | 0.0425                     |
| 1000                 | 0.04                                  | 0.0250                    | 0.0450                     | 0.06                                  | 0.0250                    | 0.0450                     |
| 1100                 | 0.01                                  | 0.0250                    | 0.0475                     | 0.02                                  | 0.0250                    | 0.0475                     |
| 1200                 | 0.00                                  | -                         | -                          | 0.00                                  | -                         | -                          |

**Tabelle 4.2:** Parameter der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Normalbeton mit unterschiedlichen Zuschlägen bei erhöhten Temperaturen DIN EN 1992-1-2 (2010)

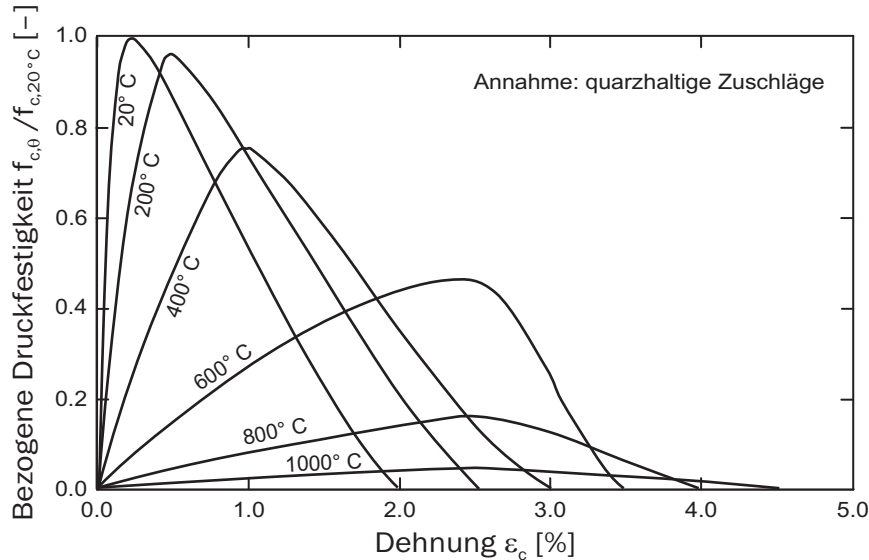
Im Gegensatz zur Festigkeitsabminderung bei steigenden Temperaturen vergrößern sich die Dehnungen. Die Werte für die Betondehnung  $\varepsilon_{c1,\theta}$  zum Zeitpunkt der maximalen Druckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  und der rechnerischen Bruchdehnung  $\varepsilon_{cu1,\theta}$  sind ebenfalls in Tabelle 4.2 zu finden. Dem unterschiedlichen Verhalten aufgrund der Zuschlagart wird ebenfalls durch eine Differenzierung in quarzhaltige und kalksteinhaltige Zuschläge Rechnung getragen. Die grafische Darstellung erfolgt in Bild 4.12.



**Bild 4.12:** Darstellung des Abminderungsfaktors  $k_c(\theta)$  (links) und der Dehnungsansätze für  $\varepsilon_{c1,\theta}$  und  $\varepsilon_{cu1,\theta}$  (rechts) nach DIN EN 1992-1-2 (2010)



Die resultierenden Spannungs-Dehnungs-Linien in Abhängigkeit der Temperatur sind in Bild 4.13 dargestellt. Der signifikante Abfall der Druckfestigkeit ab 400 °C ist deutlich zu erkennen.



**Bild 4.13:** Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Linien von Beton in Abhängigkeit der Temperatur nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

### 4.4.3 Elastizitätsmodul

Eine sehr einfache Formulierung zur Beschreibung des temperaturabhängigen Elastizitätsmoduls  $E_{c,\theta}$  schlagen Ozbolt, Kozar, Eligehausen & Periskic (2005) vor, die eine Reduktion des Elastizitätsmoduls bei Normaltemperatur allein durch Multiplikation mit einer quadratischen Temperaturfunktion durchführen. Die Formulierung lautet:

$$E_{c,\theta} = (1 - 0.2 \theta_{E_c} - 0.01 \theta_{E_c}^2) \cdot E_{c,20^\circ\text{C}} \quad \text{mit} \quad \theta_{E_c} = \frac{\theta - 20}{100}. \quad (4.29)$$

Eine weitere Rechenfunktion zur Beschreibung des temperaturabhängigen Elastizitätsmoduls von Beton mit quarzhaltigem Zuschlag schlagen Schneider, Diederichs, Rosenberger & Weiss (1980) aufgrund von Versuchsergebnissen nach Thienel (1993) vor.

| Betontemperatur $\theta$                            | Bezogener Elastizitätsmodul $E_{c,\theta}/E_{c,20^\circ\text{C}}[-]$        |
|---|---|
| $20^\circ\text{C} < \theta \leq 325^\circ\text{C}$  | $100 - 0.3(\theta - 20) + 4.085 \cdot 10^{-4}(\theta - 20)^2$               |
| $325^\circ\text{C} < \theta \leq 450^\circ\text{C}$ | $89.406 - 0.32445\theta + 0.0010081\theta^2 - 1.2801 \cdot 10^{-6}\theta^3$ |
| $450^\circ\text{C} < \theta \leq 600^\circ\text{C}$ | $1045.3 \cdot \exp[-7.8 \cdot 10^{-3}\theta]$                               |
| $\theta > 600^\circ\text{C}$                        | $1000 \cdot \exp[-4 \cdot 10^{-3}(\theta - 20)]$                            |

(4.30)

Auf der Grundlage von Warmkriechversuchen stellt Kiel (1987) eine Rechenfunktion in Form eines Polynoms 3. Grades zur Beschreibung des temperaturabhängigen Elastizitätsmoduls  $E_{c,\theta}$  in einem Temperaturbereich von 20 - 1000 °C auf. Es gilt:

$$E_{c,\theta} = (a + b \cdot \theta + c \cdot \theta^2 + d \cdot \theta^3) \cdot E_{c,20^\circ\text{C}}, \quad (4.31)$$

mit den Koeffizienten

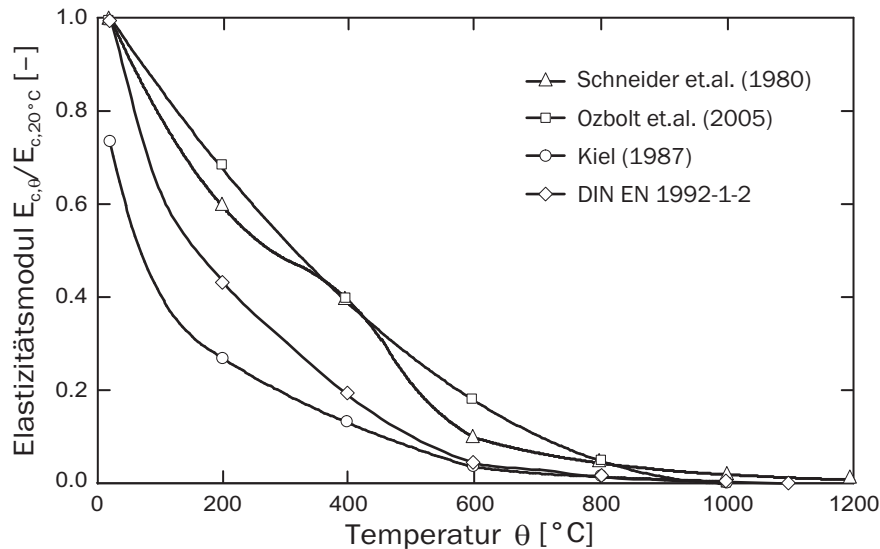
| Betontemperatur $\theta$                             | a            | b               | c               | d               |
|--|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $20^\circ\text{C} < \theta \leq 200^\circ\text{C}$   | 0.8694419    | -7.434811       | 3.3511840       | -56.848250      |
| $200^\circ\text{C} < \theta \leq 590^\circ\text{C}$  | 0.4799169    | -1.290412       | 0.1282263       | -0.6198921      |
| $590^\circ\text{C} < \theta \leq 1000^\circ\text{C}$ | 0.4040421    | -1.237232       | 0.1341404       | -0.5034635      |
|  | $\cdot 10^0$ | $\cdot 10^{-3}$ | $\cdot 10^{-5}$ | $\cdot 10^{-9}$ |

(4.32)

Generell lassen sich die temperaturabhängigen Elastizitätsmoduli von Beton  $E_{c,\theta}$  und  $E_{c0,\theta}$  aus der 1. Ableitung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung aus (4.26) bestimmen zu:

$$E_{c,\theta} = \frac{\partial \sigma_{c,\theta}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{6 \cdot f_{c,\theta} \cdot \varepsilon_{c1,\theta}}{(2 \cdot \varepsilon_{c1,\theta} + \varepsilon_c)^2} \quad \text{und} \quad E_{c0,\theta} = \left. \frac{\partial \sigma_{c,\theta}}{\partial \varepsilon_c} \right|_{\varepsilon_c=0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{f_{c,\theta}}{\varepsilon_{c1,\theta}}. \quad (4.33)$$

In Bild 4.14 sind die Formulierungen (4.29) - (4.33) zusammenfassend dargestellt.



**Bild 4.14:** Darstellung des bezogenen temperaturabhängigen Elastizitätsmoduls

#### 4.4.4 Zugfestigkeit

Neben der konstitutiven Beschreibung der Spannung-Dehnungs-Beziehung im Druckbereich ist die Zugfestigkeit bei der Berechnung von Stahlbetontragwerken eine weitere einflussreiche Komponente bei einer ganzheitlichen strukturmechanischen Betrachtung. Gemäß DIN EN 1992-1-2 (2010) soll die Zugfestigkeit von Beton allgemein nicht berücksichtigt werden. Für detailliertere Berechnungen schlägt der Eurocode jedoch vor, eine temperaturbedingte reduzierte Zugfestigkeit des Betons anzusetzen. Die temperaturabhängige Zugfestigkeit  $f_{ct,\theta}$  berechnet sich nach DIN EN 1992-1-2 (2010) zu:

$$f_{ct,\theta} = k_{ct}(\theta) \cdot f_{ct,20^\circ\text{C}} \quad (4.34)$$

mit dem Reduktionsfaktor  $k_{ct,\theta}$ , der wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} 20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 100^\circ\text{C} &\Rightarrow k_{ct}(\theta) = 1.0 \\ 100^\circ\text{C} < \theta < 600^\circ\text{C} &\Rightarrow k_{ct}(\theta) = 1.0 - (\theta - 100) / 500 \\ \theta > 600^\circ\text{C} &\Rightarrow k_{ct}(\theta) = 0.0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dieser normative Ansatz deckt sich sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen aus Kapitel 4.3.2. Dort ist der steile Abfall der Zugfestigkeit nach Harada, Takeda, Yamane & Furumura (1972) durch den Einfluss der Zuschlagsart bestimmt. Numerisch bereitet diese Formulierung allerdings in manchen Fällen Schwierigkeiten, da hier unterstellt wird, dass die Zugfestigkeit durch Auftreten einer Temperatur über  $600^\circ\text{C}$  komplett verschwindet. Ein Überschreiten der Zugfestigkeit  $f_{ct,\theta}$  und die damit resultierende schlagartige Rissbildung ist somit unvermeidlich, was allerdings dem real beobachteten Verhalten nicht entspricht.

Neben der Definition der temperaturabhängigen Zugfestigkeit  $f_{ct,\theta}$  nach DIN EN 1992-1-2 (2010) führt eine Berechnungsvariante von Nilson & Bazant (1983) auf eine durchgängige Modellierung der Zugfestigkeit für den gesamten zu untersuchenden Temperaturbereich von  $20 - 1200^\circ\text{C}$ . Es folgt eine Beschreibung unter Einbeziehung der temperaturabhängigen Druckfestigkeit des Betons mit:

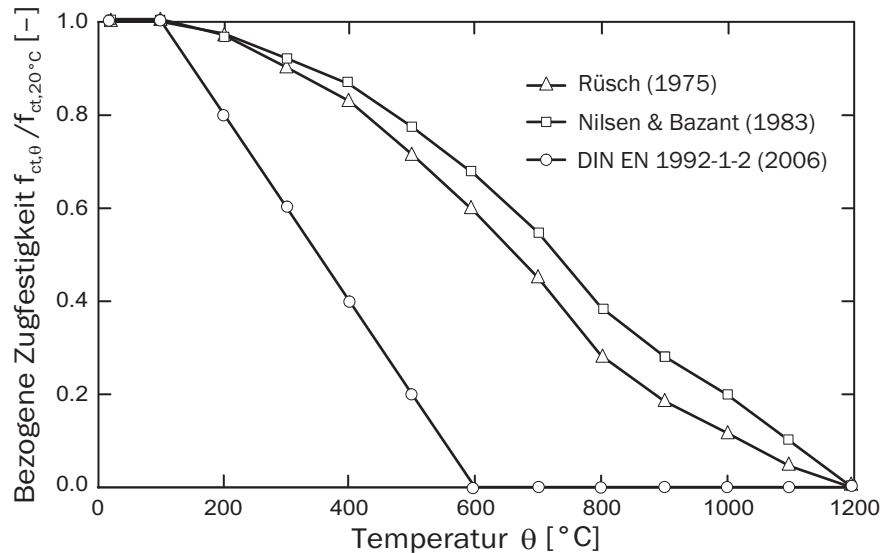
$$f_{ct,\theta} = 0.3321 \cdot \sqrt{k_c(\theta) \cdot f_{c,20^\circ\text{C}}}. \quad (4.36)$$

Ähnlich formuliert Rüsç (1975) die Zugfestigkeit für den kalten Zustand als Funktion in Abhängigkeit der Druckfestigkeit  $f_{c,20^\circ\text{C}}$ . Im Gegensatz zur Formulierung nach Nilson & Bazant (1983) wird im niedrigeren Temperaturbereich bis ca.  $200^\circ\text{C}$  eine etwas höhere Zugfestigkeit aus der Druckfestigkeit ermittelt, die sich allerdings bei Temperaturen ab dieser Grenze der Reduzierung nach Nilson & Bazant (1983) nähert. Unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Druckfestigkeit  $f_{c,20^\circ\text{C}}$  kann so mit Hilfe des Reduktionsfaktors  $k_c(\theta)$  die temperaturabhängige Zugfestigkeit berechnet werden mit:

$$f_{ct,\theta} = 0.241 \cdot \sqrt[3]{(1.05 \cdot k_c(\theta) \cdot f_{c,20^\circ\text{C}})^2}. \quad (4.37)$$

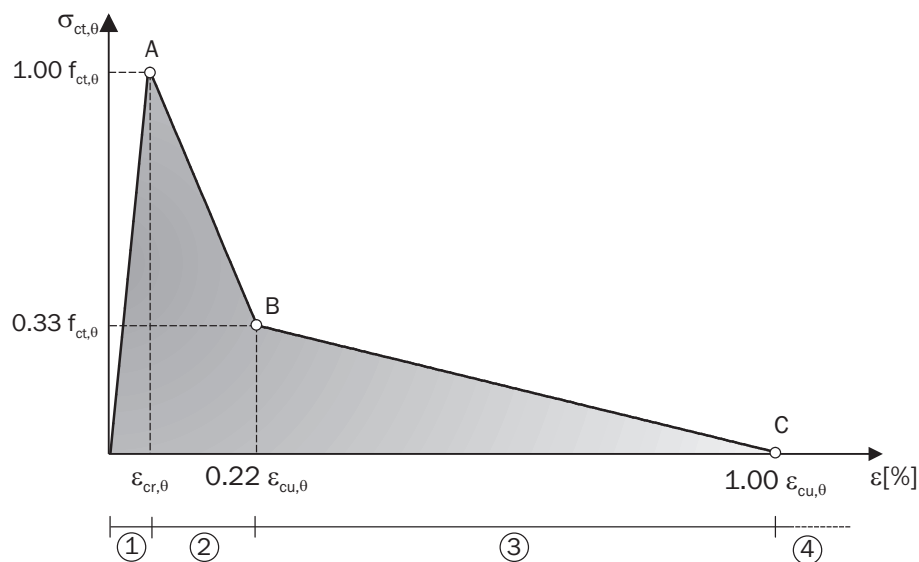
Die Vorteile der Formulierungen (4.36) und (4.37) sind die einfache numerische Umsetzung der Gleichungen und die Kontinuität bei der Bestimmung der Zugfestigkeit.

In Bild 4.15 sind die verschiedenen Modellierungen zur Reduzierung der Betonzugfestigkeit in Abhängigkeit der Temperatur  $\theta$ , jeweils bezogen auf die ermittelte Zugfestigkeit  $f_{ct,20^\circ\text{C}}$ , dargestellt.



**Bild 4.15:** Abminderung der Zugfestigkeit infolge des Hochtemperatureinflusses

Durch die Reduzierung der Zugfestigkeit von Beton bei hohen Temperaturen ist dies auch in der Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Zugbereich zu berücksichtigen. Hierfür wird eine Modellierung nach Rots (1984) verwendet. Bild 4.16 zeigt den schematischen Verlauf der angenommenen Spannungs-Dehnungs-Beziehung mit den charakteristischen Punkten.



**Bild 4.16:** Trilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton im Zugbereich

Die Formulierung erfolgt durch Aufteilung in vier Bereiche und mündet in eine trilineare

Beschreibung. Bei Annahme eines linear-elastischen Verhaltens von Beton bis zu seiner maximalen Zugfestigkeit  $f_{ct,\theta}$  (Bild 4.16 Punkt A) entstehen ab diesem Punkt Zugrisse im Beton. Die Zugspannung fällt bei zunehmenden Dehnungen schlagartig ab. Die zur maximalen Zugspannung  $f_{ct,\theta}$  korrespondierende Größe der Dehnung  $\varepsilon_{cr,\theta}$  kann, bedingt durch ein angenommenes linear-elastisches Verhalten des Betons im Bereich 1, mit

$$\varepsilon_{cr,\theta} = f_{ct,\theta} / E_{c0,\theta} \quad (4.38)$$

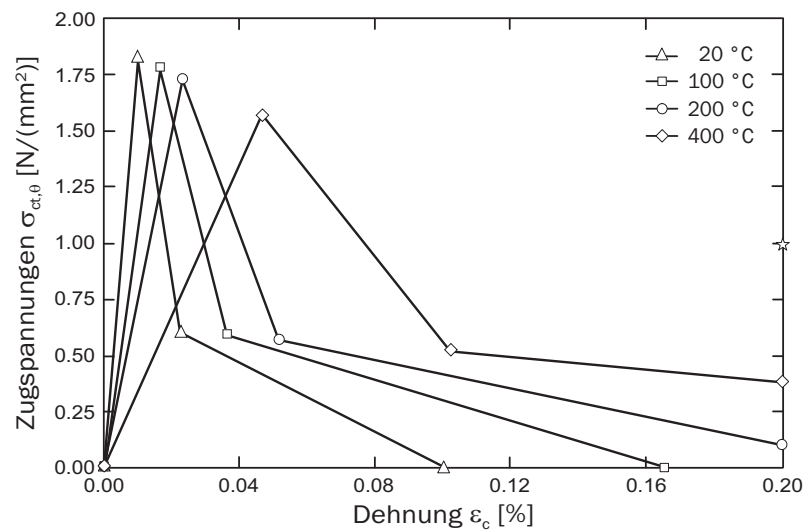
bestimmt werden. Der zweite charakteristische Punkt B des Modells befindet sich bei  $0.33 \cdot f_{ct,\theta}$  und der zugehörigen Dehnung  $0.22 \cdot \varepsilon_{cu,\theta}$ , wobei  $\varepsilon_{cu,\theta}$  die maximale Zugdehnung bei einer vorhandenen Temperatur  $\theta$  repräsentiert (Punkt C). Sie wird bestimmt durch:

$$\varepsilon_{cu,\theta} = \alpha_3 \cdot \varepsilon_{cr,\theta}, \quad (4.39)$$

wobei für  $\alpha_3$  nach Barzegar-Jamshidi (1987) ein Wert zwischen 10 und 25 angenommen wird. Die mathematische Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Linie erfolgt durch:

| Ber. | Dehnungsbereich   | Zugspannungen $\sigma_{ct,\theta} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$  |
|------|---|---|
| 1    | $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cr,\theta}$                               | $E_{c0,\theta} \cdot \varepsilon_c$   |
| 2    | $\varepsilon_{cr,\theta} < \varepsilon_c \leq 0.22 \cdot \varepsilon_{cu,\theta}$ | $f_{ct,\theta} + \frac{0.33 \cdot f_{ct,\theta} - f_{ct,\theta}}{0.22 \cdot \varepsilon_{cu,\theta} - \varepsilon_{cr,\theta}} (\varepsilon_c - \varepsilon_{cr,\theta})$             |
| 3    | $0.22 \cdot \varepsilon_{cu,\theta} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu,\theta}$ | $0.33 \cdot f_{ct,\theta} + \frac{0.33 \cdot f_{ct,\theta} \cdot (\varepsilon_c - 0.22 \cdot \varepsilon_{cu,\theta})}{\varepsilon_{cu,\theta} - 0.22 \cdot \varepsilon_{cu,\theta}}$ |
| 4    | $\varepsilon_c > \varepsilon_{cu,\theta}$   | 0   |

Exemplarisch für den Beton C30/37 mit quarzhaltigen Zuschlägen sind die aus (4.40) resultierenden temperaturabhängigen Spannungs-Dehnungs-Linien angegeben.



**Bild 4.17:** Temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Linien von Beton im Zugbereich

#### 4.4.5 Biaxiale Formulierung des Tragverhaltens

Für die in dieser Arbeit zu untersuchenden Strukturen ist eine Berücksichtigung des biaxialen Tragverhaltens unverzichtbar. Je nach Verhältnis der vorhandenen Hauptspannungen ist das Verhalten des Betons wesentlich anders als im einaxialen Fall. Bei der Untersuchung von flächenartigen Tragstrukturen ist eine Trennung zwischen Versagenskurven bzw. -flächen und den eigentlichen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen sinnvoll. An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass auf neuere Formulierungen für höherfeste Betone verzichtet wird.

Als biaxiales Versagenskriterium werden zunächst die analytischen Beziehungen und klassischen Konzepte für Beton unter Normaltemperatur nach Kupfer & Gerstle (1973) verwendet und auf das Hochtemperaturverhalten erweitert. Bei der Beschreibung der Versagensfläche wird zwischen dem Druck-Druck-Bereich, dem Druck-Zug-Bereich und dem Zug-Zug-Bereich unterschieden. Im folgenden sind für die drei Bereiche Bestimmungsgleichungen für die Versagenshüllkurven angegeben, wobei  $\alpha$  als das Verhältnis  $\sigma_1/\sigma_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ) der beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  definiert ist:

- Druck-Druck-Bereich ( $\sigma_1 \leq 0 \wedge \sigma_2 \leq 0$ ):

$$\sigma_{c,1,\theta} = \alpha \sigma_{c,2,\theta}, \quad \sigma_{c,2,\theta} = \frac{1 + 3.65 \alpha}{(1 + \alpha)^2} f_{c,\theta}, \quad (4.41)$$

- Zug-Druck-Bereich ( $\sigma_1 > 0 \wedge \sigma_2 < 0$ ):

$$\sigma_{ct,1,\theta} = f_{ct,\theta}, \quad \sigma_{c,2,\theta} = \frac{1 + 3.28 \alpha}{(1 + \alpha)^2} f_{c,\theta}, \quad (4.42)$$

- Zug-Zug-Bereich ( $\sigma_1 > 0 \wedge \sigma_2 > 0$ ):

$$\sigma_{ct,1,\theta} = f_{ct,\theta}, \quad \sigma_{ct,2,\theta} = f_{ct,\theta}. \quad (4.43)$$

Die Gleichungen (4.41) bis (4.43) sind für eine Temperatur von 20 °C als Ursprungsgleichungen nach Kupfer & Gerstle (1973) zu identifizieren. Die Erweiterung besteht in der Einbindung der temperaturabhängigen Festigkeiten für den Betondruck  $f_{c,\theta}$  und den Betonzug  $f_{ct,\theta}$ .

Eine andere Formulierung hauptsächlich für den Druck-Druck-Bereich, ebenfalls aufbauend auf den Versagensbereichen, ist den Arbeiten Ehm (1986) und Thienel (1994) zu entnehmen. Diese Arbeiten befassen sich mit dem Verhalten von Betonstrukturen bei biaxialen Beanspruchungen unter hohen Temperaturen. Der analytischen Formulierung der Bruchgrenzkurve liegt die quadratische Polynomgleichung

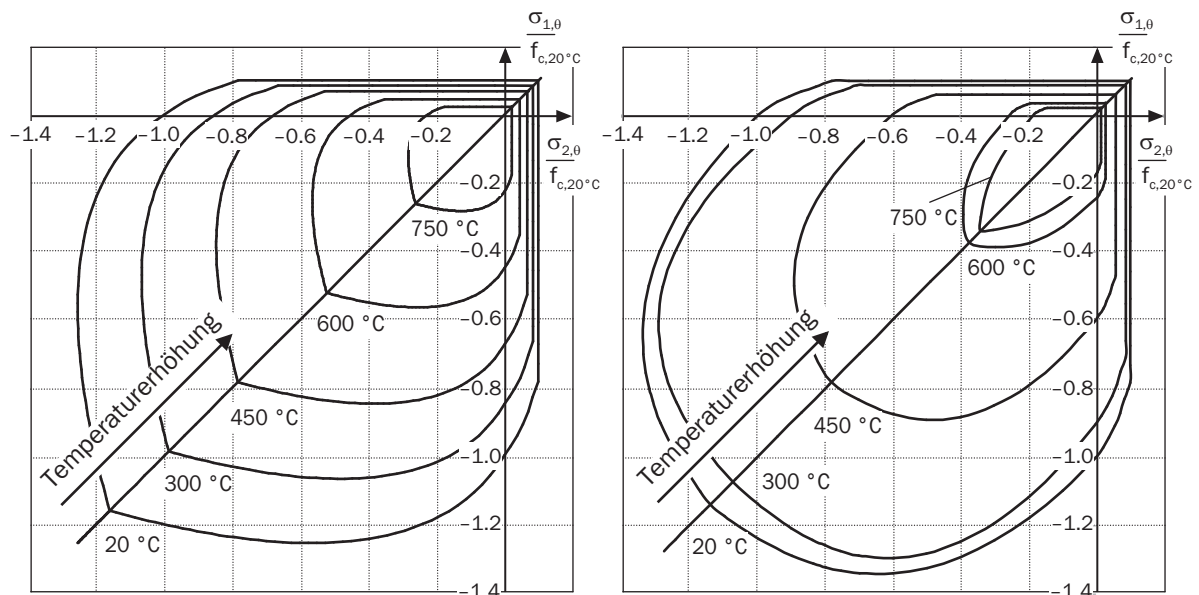
$$\sigma_{c,2,\theta} = \alpha(\theta) \left( \frac{\sigma_{c,1,\theta}}{f_{c,20^\circ\text{C}}} \right)^2 + \beta(\theta) \left( \frac{\sigma_{c,1,\theta}}{f_{c,20^\circ\text{C}}} \right) + \gamma(\theta) \quad (4.44)$$

zugrunde. Die erforderlichen Koeffizienten lassen sich mit Hilfe linearer Interpolation aus den Stützwerten in Tabelle 4.3 für die jeweilige Temperaturstufe bilden.

| Temperatur $\theta$ | $\alpha(\theta)$ | $\beta(\theta)$ | $\gamma(\theta)$ |
|---------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 20 ° C              | -0.820           | 1.058           | 1.000            |
| 300 ° C             | -1.050           | 1.283           | 0.900            |
| 450 ° C             | -1.254           | 1.209           | 0.600            |
| 600 ° C             | -1.801           | 1.026           | 0.250            |
| 750 ° C             | -1.383           | 0.941           | 0.180            |

**Tabelle 4.3:** Koeffizienten für die biaxialen Bruchgrenzkurven nach Ehm (1986)

Zum Vergleich der beiden Modellierungen sind die entsprechenden temperaturabhängigen Versagenskurven in Bild 4.18 für ausgewählte Temperaturstufen dargestellt. Die Temperaturstufen entsprechen denen der Tabelle 4.3, um einen etwaigen Einfluss einer Interpolation ausschließen zu können.



**Bild 4.18:** Biaxiale Versagenskurven nach Kupfer & Gerstle (1973) mit Erweiterung zur Anwendung bei hohen Temperaturen nach (4.41) bis (4.43) (links) und nach Ehm (1986) (rechts)

Bei beiden Varianten ist zunächst eine drastische Reduzierung der Materialfestigkeiten durch die erhöhten Temperaturen im Material zu verzeichnen. Während im erweiterten Modell nach Kupfer & Gerstle (1973) die Temperaturabhängigkeit allein durch die reduzierte Betondruckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  berücksichtigt wird, erfolgt dies bei der zweiten Variante durch die Koeffizienten der Gleichung (4.44). Die Abnahme der biaxialen Druckfestigkeit in Abhängigkeit der Temperatur ist bei beiden Modellen unterschiedlich stark ausgeprägt. Während die Variante nach Kupfer & Gerstle (1973) eine recht stetige Abnahme zu verzeichnen hat, ist bei der Modellierung nach Ehm (1986) bis 300 °C eine verzögerte

Reduktion festzustellen, danach eine größere Reduktion. Da das Modell nach Ehm (1986) und Thienel (1994) aus Versuchen an biaxial belasteten Bauteilen entwickelt wurde, bildet diese Beschreibung das Tragverhalten im Hochtemperaturbereich wirklichkeitsnäher ab.

Zur vollständigen Beschreibung des *Equivalent-Uniaxial-Strain-Konzeptes* sind zu den bisher definierten Druckfestigkeiten  $\sigma_{c,i,\theta}$ , die zugehörigen einaxialen Dehnungen  $\varepsilon_{c,i,\theta}$  zu bestimmen. In Anlehnung an Darwin & Pecknold (1977a) werden sie in Abhängigkeit der berechneten Druckfestigkeiten ermittelt mit:

- Bereich 1:  $|\sigma_{c,i,\theta}| \geq |f_{c,\theta}|$ :

$$\varepsilon_{c,i,\theta} = \varepsilon_{c1,\theta} \cdot \left( -1.60 \left( \frac{\sigma_{c,i,\theta}}{f_{c,\theta}} \right)^3 + 2.25 \left( \frac{\sigma_{c,i,\theta}}{f_{c,\theta}} \right)^2 + 0.35 \left( \frac{\sigma_{c,i,\theta}}{f_{c,\theta}} \right) \right), \quad (4.45)$$

- Bereich 2:  $|\sigma_{c,i,\theta}| < |f_{c,\theta}|$ :

$$\varepsilon_{c,i,\theta} = \varepsilon_{c1,\theta} \cdot \left( 3 \cdot \frac{\sigma_{c,i,\theta}}{f_{c,\theta}} - 2 \right). \quad (4.46)$$

Während von Hothan (2004) und Tesar (2007) die Querdehnzahl  $\nu$  von Beton als konstant und temperaturunabhängig mit einem Wert zwischen 0.15 und 0.20 angenommen wurde, ist in der hier beschriebenen Modellierung eine temperaturabhängige erweiterte Variante auf Grundlage von Darwin & Pecknold (1977a) gewählt worden. In den reinen Druck-Druck und Zug-Zug Bereichen wird mit  $\nu = \nu_0$  ein konstanter Wert angenommen. Im einaxialen Druck und biaxialen Zug-Druck Bereich wird die Querdehnzahl  $\nu$  berechnet aus:

$$\nu = \nu_0 + 0.6 \left( \frac{\sigma_{c,2,\theta}}{f_{c,\theta}} \right)^4 + 0.4 \left( \frac{\sigma_{c,1,\theta}}{\sigma_{ct,1,\theta}} \right)^4. \quad (4.47)$$

#### 4.4.6 Zeitvariantes mechanisches Verhalten von Stahlbeton

Das Verformungsverhalten von Beton unter erhöhten instationären Temperaturen ist sehr komplex. Daher werden die sich einstellenden Gesamtverzerrungen  $\varepsilon_{c,t}^{tot}$  additiv in einzelne Komponenten aufgeteilt. Unter Normaltemperaturen ergibt sich nach Hofstetter & Mang (1995) die Separierung:

$$\varepsilon_{c,t}^{tot} = \varepsilon_{c,t}^e + \varepsilon_{c,t}^p + \varepsilon_{c,t}^{cr} + \varepsilon_{c,t}^{sh} + \varepsilon_{c,t}^T. \quad (4.48)$$

Die allgemeine Formulierung (4.48) der Verzerrungssummation kann zunächst reduziert für die in dieser Arbeit vorherrschende Problematik des Hochtemperatureinflusses mit Hilfe der instantanen Verzerrungen, bestehend aus den elastischen und plastischen Anteilen,

$$\varepsilon_{c,t}^{in} = \varepsilon_{c,t}^e + \varepsilon_{c,t}^p \quad (4.49)$$



und dem Vernachlässigen der Anteile aus Kriechen  $\varepsilon_{c,t}^{cr}$  und Schwinden  $\varepsilon_{c,t}^{sh}$  zu

$$\varepsilon_{c,t}^{tot} = \varepsilon_{c,t}^{in} + \varepsilon_{c,t}^T \quad (4.50)$$

angegeben werden. Die instantanen Anteile  $\varepsilon_{c,t}^{in}$  sind bereits in den vorherigen Abschnitten erläutert worden. Der verbleibende Verzerrungsanteil infolge thermischer Einwirkung  $\varepsilon_{c,t}^T$  wird bei der Betrachtung unter Hochtemperaturen weiter unterteilt. Er setzt sich aus den Anteilen der reinen thermischen Dehnungen  $\varepsilon_{c,t}^{th}$ , der transienten Dehnungen  $\varepsilon_{c,t}^{tr}$  und der Kriechdehnungen im Hochtemperaturbereich  $\varepsilon_{c,t}^{cr,fi}$  zusammen. Somit ergibt sich aus (4.50) als ausgeschriebene Gesamtverzerrungsformulierung für Beton im Hochtemperaturbereich:

$$\varepsilon_{c,t}^{tot} = \varepsilon_{c,t}^{in} + \varepsilon_{c,t}^{th} + \varepsilon_{c,t}^{tr} + \varepsilon_{c,t}^{cr,fi}. \quad (4.51)$$

Die Modellierung der einzelnen Verzerrungsanteile wird nun detaillierter erläutert.

**Thermische Dehnung von Beton.** Die thermische Dehnung  $\varepsilon_{c,t}^{th}$  entsteht bei zwängungsfrei gelagerten Betonbauteilen durch eine reine Dilatation des Betons. Etwaige deviatorische Anteile treten nicht auf und können somit vernachlässigt werden. Somit kann die thermische Dehnung bei einem temperaturunabhängigen Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_T$  und der Temperaturdifferenz  $\Delta\theta$  mit

$$\varepsilon_{c,t}^{th} = \alpha_T \cdot \Delta\theta \quad (4.52)$$

berechnet werden. Für den Hochtemperaturbereich haben aber Untersuchungen gezeigt, dass die thermischen Dehnungen einen stark nichtlinearen Verlauf aufweisen [Schneider 1982]. Aus diesem Grund ist  $\alpha_T$  nicht mehr konstant, sondern von der zeitabhängigen Temperaturdifferenz  $\Delta\theta$  abhängig. Damit ergibt sich aus (4.52)

$$\varepsilon_{c,t}^{th} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \alpha_T(\theta) d\theta. \quad (4.53)$$

Die thermische Dehnung  $\varepsilon_{c,t}^{th}$  weist schon im Niedrigtemperaturbereich ein nichtlineares Verhalten infolge der Temperatur  $\theta$  auf. Sie wird von den einzelnen Bestandteilen des Betons beeinflusst, maßgeblich jedoch von der Zuschlagsart. Die thermischen Dehnungen sind im Niedrigtemperaturbereich bis 200 °C irreversibel, da sie hier neben der Art des Zuschlages auch von dem vorhandenen Wassergehalt abhängen.

In dem Temperaturbereich von 600 °C und 800 °C dehnt sich der Beton nicht weiter aus, und es verbleibt eine reduzierte thermische Dehnungsänderung. Falls in diesem Temperaturbereich thermische Dehnungen auftreten, ist dies auf chemische oder physikalische Reaktionen im Zuschlag zurückzuführen. Anzumerken ist, dass bei Messungen von thermischen Dehnungen das Schwinden immer mit enthalten ist. Da der Schwindanteil jedoch klein ist, kann er für praktische Untersuchungen vernachlässigt werden.

Nach DIN EN 1992-1-2 (2010) wird die thermische Dehnung von Normalbeton  $\varepsilon_{c,t}^{th}$  für quarzhaltige Zuschläge mit

$$20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 700^\circ\text{C} \Rightarrow \varepsilon_{c,t}^{th} = -1.8 \cdot 10^{-4} + 9.0 \cdot 10^{-6} \cdot \theta + 2.3 \cdot 10^{-11} \cdot \theta^3 \quad (4.54)$$

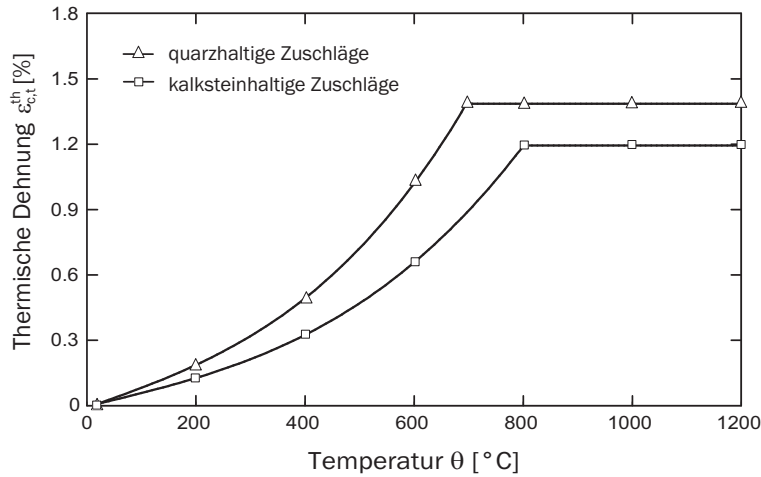
$$700^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C} \Rightarrow \varepsilon_{c,t}^{th} = 14 \cdot 10^{-3} \quad (4.55)$$

und für kalksteinhaltige Zuschläge mit

$$20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 805^\circ\text{C} \Rightarrow \varepsilon_{c,t}^{th} = -1.2 \cdot 10^{-4} + 6.0 \cdot 10^{-6} \cdot \theta + 1.4 \cdot 10^{-11} \cdot \theta^3 \quad (4.56)$$

$$805^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C} \Rightarrow \varepsilon_{c,t}^{th} = 12 \cdot 10^{-3} \quad (4.57)$$

beschrieben. Eine grafische Darstellung der temperaturabhängigen thermischen Dehnung  $\varepsilon_{c,t}^{th}$  von Normalbeton nach DIN EN 1992-1-2 (2010) erfolgt in Bild 4.19.



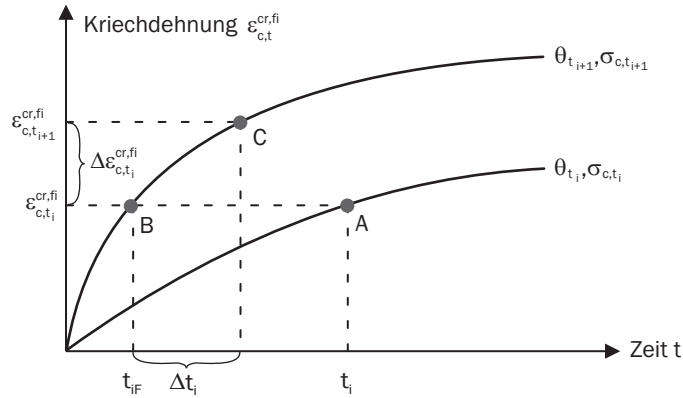
**Bild 4.19:** Darstellung der thermischen Dehnung von Beton nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

**Kriechdehnung.** Weitreichende Untersuchungen bezüglich des Kriechverhaltens von Beton unter erhöhten Temperaturen wurden u.a. von Anderberg & Thelandersson (1976), Schneider (1977) durchgeführt. Es zeigt sich übereinstimmend ein Ansteigen der Kriechdehnungen bei steigender Temperatur  $\theta$ . Die Kriechdehnung  $\varepsilon_{c,t}^{cr,fi}$  bei einer konstanten Spannung  $\sigma_{c,\theta}$  und der Temperatur  $\theta$  ergibt sich nach Anderberg & Thelandersson (1976) zu:

$$\varepsilon_{c,t}^{cr,fi} = -5.3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\sigma_{c,\theta}}{f_{c,\theta}} \cdot \sqrt{\frac{t[h]}{3}} \cdot e^{3.04 \cdot 10^{-3}(\theta-20)}. \quad (4.58)$$

Durch eine Brandeinwirkung über die Zeit  $t$  ist keine konstante Temperatur bzw. keine konstante Spannung vorhanden. Bedingt durch die variierenden Temperaturen und die sich daraus ergebenden ständigen Änderungen der Spannungszustände von einem Zeitpunkt  $t_i$  zum nächsten Zeitpunkt  $t_{i+1}$  ist eine inkrementelle Berechnung der Kriechdehnungen innerhalb eines Zeitschrittes  $\Delta t_i$  notwendig. Bild 4.20 veranschaulicht den Algorithmus zur Bestimmung der Kriechdehnung  $\varepsilon_{c,t}^{cr,fi}$ . Die inkrementelle Ermittlung der Kriechdehnungen kann mit dem Prinzip der Verfestigung erfolgen. Dazu ist die Einführung einer neu zu definierenden fiktiven Zeit  $t_{iF}$  erforderlich. Sie berechnet sich mit den bekannten Zuständen des vorherigen Zeitschrittes  $\varepsilon_{c,t_i}^{cr,fi}$  und den aktuellen Spannungs- und Temperaturzuständen zu:

$$t_{iF} = 3h \cdot \left( \frac{\varepsilon_{c,t_i}^{cr,fi} \cdot f_{c,\theta,t_{i+1}}}{-5.3 \cdot 10^{-4} \cdot e^{3.04 \cdot 10^{-3}(\theta_{t_{i+1}}-20)} \cdot \sigma_{c,\theta,t_{i+1}}} \right)^2. \quad (4.59)$$



**Bild 4.20:** Algorithmus zur Bestimmung der Verzerrungen infolge Hochtemperaturkriechen nach Anderberg (1976)

Zum Zeitpunkt  $t = t_{iF}$  wird somit die Kriechdehnung  $\varepsilon_{c,t_i}^{cr,fi}$  (Punkt A) aus dem bekannten Zeitpunkt  $t_i$ , in den neuen Materialzustand zum Zeitpunkt  $t = t_{i+1}$  (Punkt B) transformiert. Die erhöhte Kriechdehnung  $\varepsilon_{c,t_{i+1}}^{cr,fi}$  (Punkt C) zum Zeitpunkt  $t = t_{iF} + \Delta t_i$  kann nun mit (4.58) bestimmt werden. Aus diesen beiden Zuständen ergibt sich das Kriechdehnungsinkrement:

$$\Delta \varepsilon_{c,t_i}^{cr,fi} = \varepsilon_{c,t_{i+1}}^{cr,fi} - \varepsilon_{c,t_i}^{cr,fi} . \quad (4.60)$$

Durch Addition der einzelnen Kriechverzerrungsinkremente kann so die akkumulierte Kriechdehnung zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  bestimmt werden. Es gilt:

$$\varepsilon_{c,t_{i+1}}^{cr,fi} = \sum_{n=1}^i \Delta \varepsilon_{c,t_n}^{cr,fi} \quad (4.61)$$

**Transiente Dehnung.** Transiente Dehnungsanteile entstehen beim Aufheizen des belasteten Betons einmalig durch Spannungumlagerungen, die aufgrund thermischer Unverträglichkeit zwischen Zuschlag und Zement entstehen. Transiente Dehnungen können nicht gemessen, sondern nur analytisch berechnet werden. Sie sind nicht direkt zeitabhängig, sondern hängen von den thermischen Dehnungen ab. Die inkrementelle Form zur Bestimmung der transienten Dehnungen nach Anderberg & Thelandersson (1976) lautet:

$$20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 500^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad \Delta \varepsilon_{c,t_i}^{tr} = -2.35 \cdot \frac{\sigma_{c,\theta,t_{i-1}}}{f_{c,20^\circ\text{C}}} \cdot \Delta \varepsilon_{c,t_i}^{th}, \quad (4.62)$$

$$500^\circ\text{C} \leq \theta \leq 800^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad \Delta \varepsilon_{c,t_i}^{tr} = 10^{-4} \cdot \Delta \theta_{t_i} \cdot \frac{\sigma_{c,\theta,t_{i-1}}}{f_{c,20^\circ\text{C}}}, \quad (4.63)$$

wobei gilt:

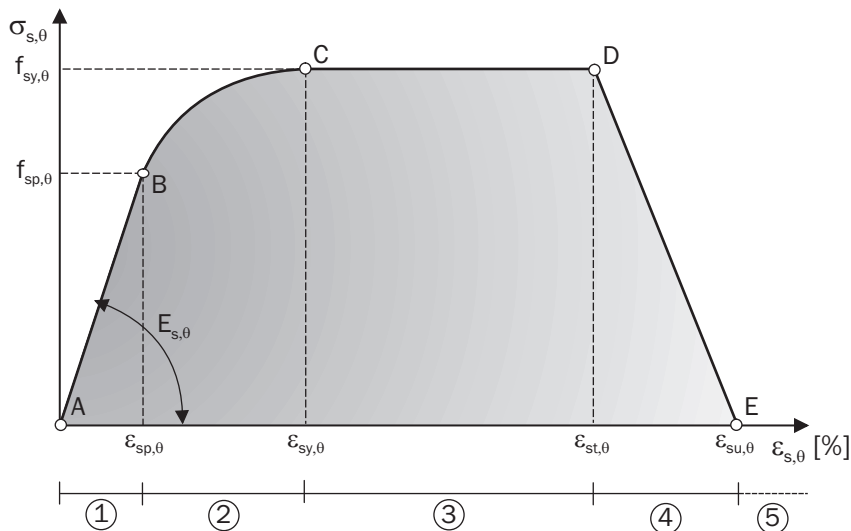
$$\Delta \varepsilon_{c,t_i}^{th} = \varepsilon_{c,t_i}^{th} - \varepsilon_{c,t_{i-1}}^{th} \quad \text{und} \quad \Delta \theta_{t_i} = \theta_{t_i} - \theta_{t_{i-1}}. \quad (4.64)$$

## 4.5 Konstitutives Modell für Betonstahl

Während die Beschreibung des Materialverhaltens von Beton für den biaxialen Fall erfolgt, genügt für den Betonstahl eine einaxiale Beschreibung. Die nachfolgenden Zusammenhänge gelten für Betonstahl und Baustahl gleichermaßen. Die Bezeichnungen beziehen sich allerdings hauptsächlich auf den Betonstahl.

### Einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Betonstahl

Die Formulierung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Betonstahl erfolgt in Anlehnung an DIN EN 1992-1-2 (2010) durch Einteilung in fünf Bereiche. Das Stoffgesetz wird durch die Parameter des Elastizitätsmoduls  $E_{s,\theta}$ , der Proportionalitätsgrenze  $f_{sp,\theta}$ , der Fließgrenze  $f_{sy,\theta}$  und den jeweils zugehörigen Dehnungen definiert. Bild 4.21 zeigt schematisch das Spannungs-Dehnungs-Diagramm.



**Bild 4.21:** Schematische Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Betonstahl gemäß DIN EN 1992-1-2 (2010)

Der Bereich 1 (Bild 4.21 Punkte A - B) ist der elastische Bereich. Er wird durch den temperaturabhängigen Elastizitätsmodul  $E_{s,\theta}$  und die Dehnung  $\epsilon_{s,\theta}$  mit dem HOOK'schen Gesetz beschrieben. Ab der Proportionalitätsgrenze im Punkt B beginnt der Bereich 2, der nichtlinear plastisch ist und einen elliptischen Verlauf aufweist. Dieser Bereich endet bei dem maximalen Spannungsniveau  $f_{sy,\theta}$  (Punkt C). Ab hier verläuft die Spannungs-Dehnungs-Linie parallel zur Dehnungsachse, d.h. die Stahlspannungen steigen nicht mehr an, lediglich erhöhen sich die Stahldehnungen. Ab Punkt C beginnt das Fließen des Betonstahls. Der Fließbereich verläuft bis zum Beginn des absteigenden Astes (Punkt D) und wird als ideal-plastisch bezeichnet. Der abfallende Ast bis zur Bruchdehnung  $\epsilon_{su,\theta}$  (Punkte D - E) kann linear oder nichtlinear beschrieben werden. Für die numerische Einbindung des Stoffgesetzes für den Betonstahl wird ein linearer Abfall berücksichtigt. Die mathematischen Formulierungen sind in Tabelle 4.4 zusammengestellt.

| Nr. | Bereich  | Spannung $\sigma_{s,\theta}$   | Tangentenmodul  |
|-----|--|--|---|
| ①   | $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{sp,\theta}$                           | $\varepsilon_s \cdot E_{s,\theta}$   | $E_{s,\theta}$  |
| ②   | $\varepsilon_{sp,\theta} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy,\theta}$ | $f_{sp,\theta} - c + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (\varepsilon_{sy,\theta} - \varepsilon_s)^2}$   | $\frac{b(\varepsilon_{sy,\theta} - \varepsilon_s)}{a \sqrt{a^2 - (\varepsilon_s - \varepsilon_{sy,\theta})^2}}$ |
| ③   | $\varepsilon_{sy,\theta} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{st,\theta}$ | $f_{sy,\theta}$  | 0   |
| ④   | $\varepsilon_{st,\theta} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su,\theta}$ | $f_{sy,\theta} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{st,\theta}}{\varepsilon_{su,\theta} - \varepsilon_{st,\theta}} \right]$ | -   |
| ⑤   | $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{su,\theta}$                           | 0  | -   |

**Tabelle 4.4:** Zusammenstellung der mathematischen Formulierungen zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Linie von Betonstahl nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

Die Hilfsbeiwerte a, b und c des nichtlinearen Bereiches 2 werden wie folgt ermittelt:

$$a = \sqrt{(\varepsilon_{sy,\theta} - \varepsilon_{sp,\theta}) \cdot (\varepsilon_{sy,\theta} - \varepsilon_{sp,\theta} + c/E_{s,\theta})} \quad (4.65)$$

$$b = \sqrt{c \cdot (\varepsilon_{sy,\theta} - \varepsilon_{sp,\theta}) \cdot E_{s,\theta} + c^2} \quad (4.66)$$

$$c = \frac{(f_{sy,\theta} - f_{sp,\theta})^2}{(\varepsilon_{sy,\theta} - \varepsilon_{sp,\theta}) \cdot E_{s,\theta} - 2 \cdot (f_{sy,\theta} - f_{sp,\theta})}. \quad (4.67)$$

Als Dehnungsgrenzen ist nach DIN EN 1992-1-2 (2010) festgelegt, dass der Beginn des Fließbereiches (Punkt C) mit  $\varepsilon_{sy,\theta} = 0.02$ , das Ende des Fließbereiches (Punkt D) mit  $\varepsilon_{st,\theta} = 0.15$  und die Bruchdehnung (Punkt E) mit  $\varepsilon_{su,\theta} = 0.20$  zu setzen ist. Für Spannstähle gelten andere Grenzen.

Um die hochtemperaturbedingten Reduktionen der Materialeigenschaften des Stahls zu berücksichtigen, sind in der DIN EN 1992-1-2 (2010) Reduktionsfaktoren angegeben. Generell läßt sich die temperaturabhängige Festigkeit des Stahls mit:

$$f_{sy,\theta} = k_{sy}(\theta) \cdot f_{sy,20^\circ\text{C}} \quad \text{mit} \quad k_{sy}(\theta) = f_{sy,\theta}/f_{sy,20^\circ\text{C}} \quad (4.68)$$

berechnen. Entsprechend ergeben sich die Festigkeiten bei der Proportionalitätsgrenze mit

$$f_{sp,\theta} = k_{sp}(\theta) \cdot f_{sp,20^\circ\text{C}} \quad \text{mit} \quad k_{sp}(\theta) = f_{sp,\theta}/f_{sp,20^\circ\text{C}} \quad (4.69)$$

und der Elastizitätsmodul mit

$$E_{s,\theta} = k_{sE}(\theta) \cdot E_{s,20^\circ\text{C}} \quad \text{mit} \quad k_{sE}(\theta) = E_{s,\theta}/E_{s,20^\circ\text{C}}. \quad (4.70)$$

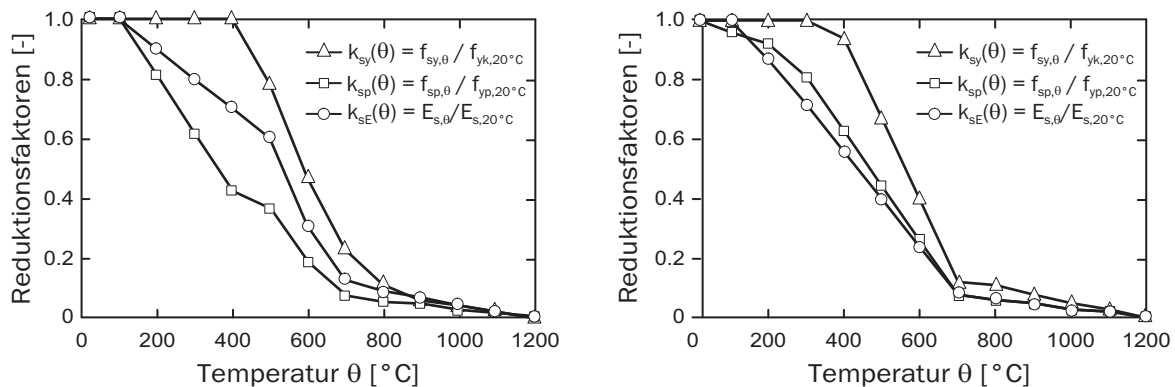
Die in den Gleichungen (4.68) bis (4.70) aufgeführten Abminderungsfaktoren sind in Tabelle 4.5 für Betonstahl der Klasse N angegeben.

In dieser Stoffmodellierung sind die Verzerrungsanteile infolge des instationären Hochtemperaturkriechens näherungsweise enthalten, was die numerische Umsetzung erleichtert.

| Stahl<br>Temperatur | warmgewalzt            |                        |                    | kaltverformt           |                        |                    |
|---------------------|------------------------|------------------------|--------------------|------------------------|------------------------|--------------------|
|                     | $f_{sy,\theta}/f_{yk}$ | $f_{sp,\theta}/f_{yk}$ | $E_{s,\theta}/E_s$ | $f_{sy,\theta}/f_{yk}$ | $f_{sp,\theta}/f_{yk}$ | $E_{s,\theta}/E_s$ |
| $\theta$ [°C]       | -                      | -                      | -                  | -                      | -                      | -                  |
| 20                  | 1.00                   | 1.00                   | 1.00               | 1.00                   | 1.00                   | 1.00               |
| 100                 | 1.00                   | 1.00                   | 1.00               | 0.96                   | 1.00                   | 1.00               |
| 200                 | 1.00                   | 1.00                   | 0.81               | 0.92                   | 0.90                   | 0.87               |
| 300                 | 1.00                   | 1.00                   | 0.61               | 0.81                   | 0.80                   | 0.72               |
| 400                 | 1.00                   | 0.94                   | 0.42               | 0.63                   | 0.70                   | 0.56               |
| 500                 | 0.78                   | 0.67                   | 0.36               | 0.44                   | 0.60                   | 0.40               |
| 600                 | 0.47                   | 0.40                   | 0.18               | 0.26                   | 0.31                   | 0.24               |
| 700                 | 0.23                   | 0.12                   | 0.07               | 0.08                   | 0.13                   | 0.08               |
| 800                 | 0.11                   | 0.11                   | 0.05               | 0.06                   | 0.09                   | 0.06               |
| 900                 | 0.06                   | 0.08                   | 0.04               | 0.05                   | 0.07                   | 0.05               |
| 1000                | 0.04                   | 0.05                   | 0.02               | 0.03                   | 0.04                   | 0.03               |
| 1100                | 0.02                   | 0.03                   | 0.01               | 0.02                   | 0.02                   | 0.02               |
| 1200                | 0.00                   | 0.00                   | 0.00               | 0.00                   | 0.00                   | 0.00               |

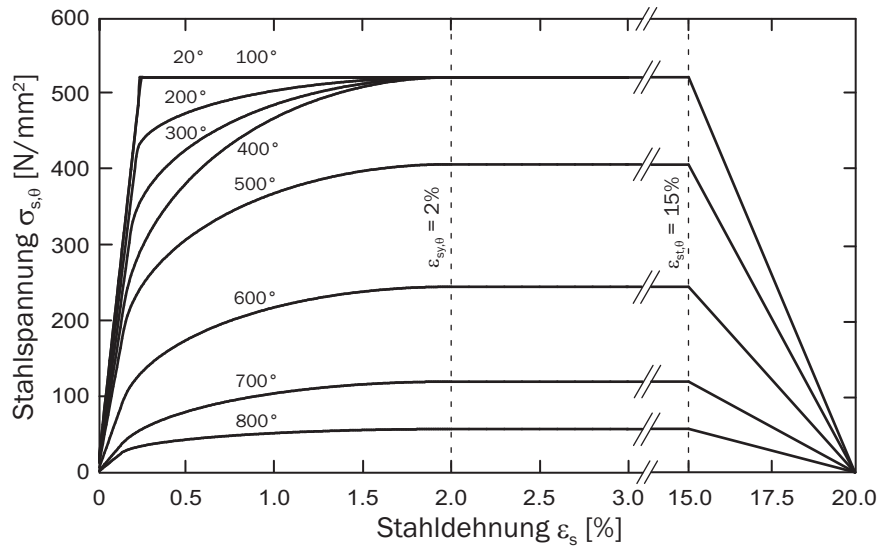
**Tabelle 4.5:** Werte für die Parameter der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von warmgewalzten und kaltverformten Betonstahl der Klasse N bei erhöhten Temperaturen nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

Der rapide Abfall der Stahlfestigkeiten ab einer Temperatur von 500 °C wird durch die grafische Darstellung von warmgewalztem und kaltverformtem Bewehrungsstahl in Bild 4.22 deutlich.



**Bild 4.22:** Abminderungsfaktoren  $k_{sy}(\theta)$ ,  $k_{sp}(\theta)$  und  $k_{sE}(\theta)$  für warmgewalzten und kaltverformten Betonstahl der Klasse N nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

Die sich ergebenden resultierenden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bei erhöhten Temperaturen sind in Bild 4.23 für ausgewählte Temperaturstufen dargestellt.



**Bild 4.23:** Temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Linien von warmgewalzten Betonstahl der Klasse N nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

**Thermische Dehnung von Betonstahl.** Die thermische Dehnung von Betonstahl  $\epsilon_s^{th}$  wird weitestgehend von den Legierungszusätzen bestimmt. Bedingt durch die Materialveränderungen von  $\alpha$  in  $\gamma$ -Mischkristalle im Temperaturbereich zwischen 750 und 860 °C ist in diesem Bereich keine Zunahme der thermischen Dehnung vorhanden. Für numerische Berechnungen wird die einfache Formulierung gemäß DIN EN 1992-1-2 (2010) gewählt. Es gilt:

$$20\text{ °C} \leq \theta \leq 750\text{ °C} \Rightarrow \epsilon_{s,t}^{th} = -2.416 \cdot 10^{-4} + 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot \theta + 4 \cdot 10^{-9} \cdot \theta^2 \quad (4.71)$$

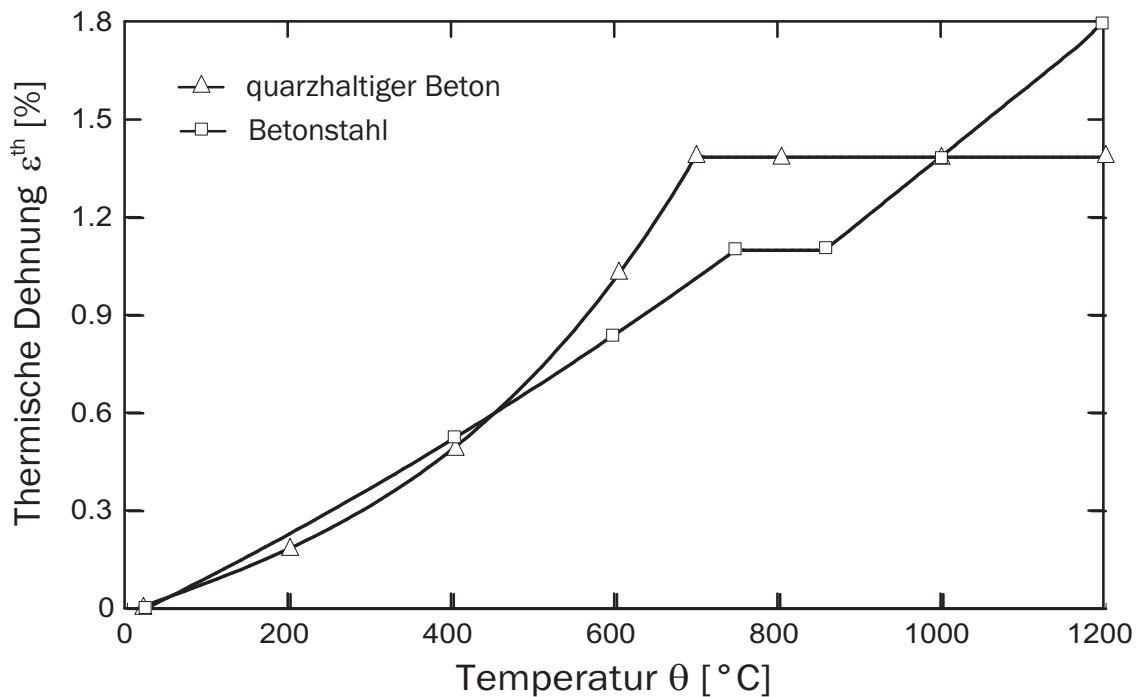
$$750\text{ °C} < \theta \leq 860\text{ °C} \Rightarrow \epsilon_{s,t}^{th} = 1.1 \cdot 10^{-2} \quad (4.72)$$

$$860\text{ °C} < \theta \leq 1200\text{ °C} \Rightarrow \epsilon_{s,t}^{th} = -6.2 \cdot 10^{-3} + 2.0 \cdot 10^{-5} \cdot \theta. \quad (4.73)$$

Entsprechend der mathematischen Formulierung ergibt sich die Darstellung der thermischen Dehnung von Betonstahl in Bild 4.24. Zusätzlich zur Kennlinie der thermischen Dehnungen von Betonstahl ist die Linie für quarzhaltigen Beton dargestellt. Daran ist zu erkennen, dass die thermischen Dehnungen leicht differieren. Die auftretenden thermischen Dehnungen jeder einzelnen Komponente von Stahlbeton haben auf dessen Verbundwirkung zwischen Beton und Betonstahl noch keine Wirkung. Maßgeblichen Anteil für die Erzeugung inneren Zwangs zwischen Beton und Bewehrungsstahl haben dabei die Differenzen der thermischen Dehnungen

$$\Delta\epsilon_t^{th} = \epsilon_{c,t}^{th} - \epsilon_{s,t}^{th}. \quad (4.74)$$

Bis zu einer Temperatur  $\theta = 400\text{ °C}$  sind die Differenzen  $\Delta\epsilon_t^{th}$  recht klein und daher bis zu diesem Punkt vernachlässigbar. Ab 400 °C nehmen die Differenzdehnungen erheblich zu und der Bewehrungsstahl erhält einen größeren Anteil der Dehnungen zugeordnet. Diese Zwangdehnungen können unter der Annahme eines vollständigen Verbundes bei hohen Temperaturen zu plastischen Verformungen führen.



**Bild 4.24:** Darstellung der thermischen Dehnung von quarzhaltigem Beton und Betonstahl nach DIN EN 1992-1-2 (2010)

## 4.6 Stahlbetonbauteile bei erhöhten Temperaturen

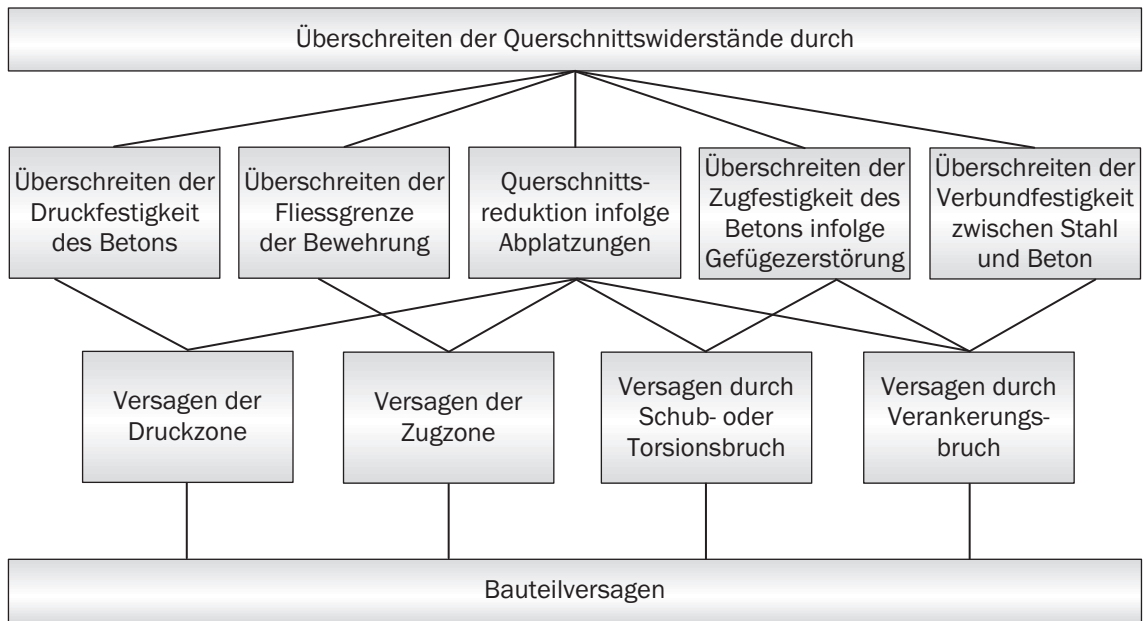
### 4.6.1 Allgemeines Tragverhalten

Das Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken wird durch eine Brandlast massiv beeinflusst. Durch die Reduzierung der Materialfestigkeiten von Beton und Stahl können die Bauteile weniger Lasten aufnehmen, als dies im Kaltfall möglich wäre. Zu diesem Festigkeitsabfall addieren sich ein abnehmender Elastizitätsmodul und thermische Dehnungen, die große Verformungen hervorrufen, aus denen wiederum zusätzliche Lasten in Form von Zwang entstehen. In der Fachliteratur wird das Tragverhalten von Stahlbetonbauteilen durch Brandprüfungen ausführlich dargestellt.

Im folgenden werden fünf Hauptversagensmechanismen vorgestellt, die bei Stahlbetonbauteilen durch eine Brandbelastung entstehen können. Fakt ist, dass mit den reduzierten Materialeigenschaften die Tragreserven abgebaut werden, die ein Bauteil aufgrund seiner Bemessung, bedingt durch die gültigen Sicherheitskonzepte aus der Kaltbemessung, mit sich bringt.

Normativ werden die Versagensmechanismen nur in den Tabellenverfahren berücksichtigt. Bei vereinfachten und allgemeinen Berechnungsverfahren müssen diese in den Berechnungsannahmen kritisch mit einfließen, sodass ein Versagen ausgeschlossen werden kann.





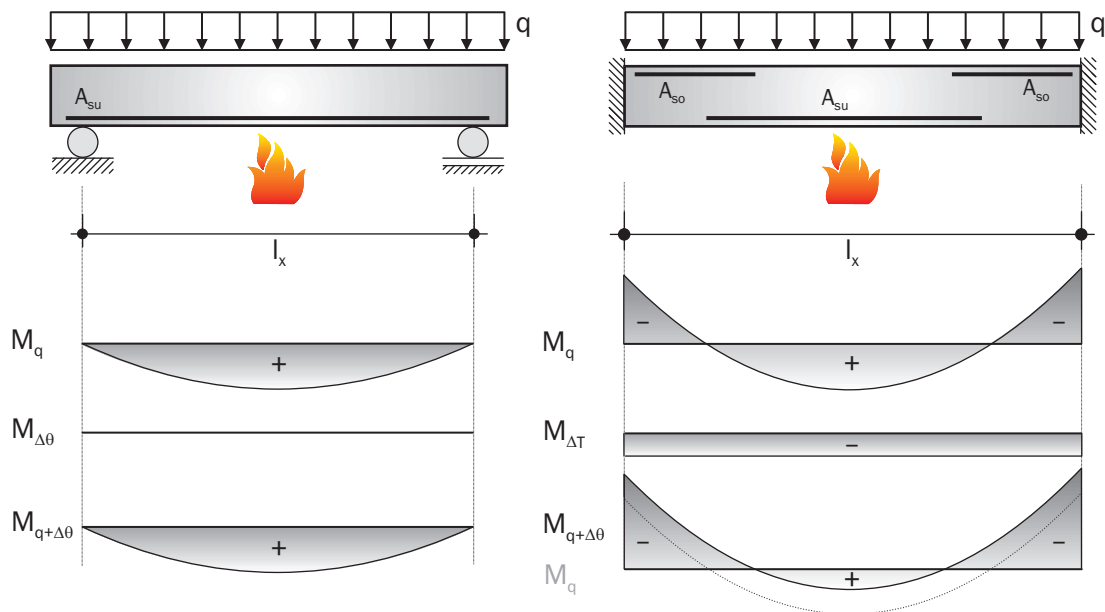
**Bild 4.25:** Versagensarten von Stahlbetonbauteilen nach Borgonga (1997)

#### 4.6.2 Betrachtungen zum Versagen von Stahlbetonbauteilen

Zur Darstellung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonbauteilen im Brandfall und der damit verbundenen geänderten Bemessungssituationen werden Änderungen der Schnittgrößen an einem Einfeld- und einem Durchlaufträgersystem veranschaulicht. Untersucht wird zunächst ein statisch bestimmt gelagerter Balken mit der Feldlänge  $l_x$  (s. Bild 4.26 links). Aufgrund der einwirkenden konstanten Linienlast  $q$  und den vorgegebenen Lagerungsbedingungen entstehen keine axialen Kräfte, sondern nur reine Biegemomente  $M_q$ . Es ergibt sich rechnerisch aus dem maximalen Moment  $M_{(max)}$  eine untere Bewehrung  $A_{su}$  und eine konstruktive obere Bewehrung  $A_{so}$ , die über die gesamte Trägerlänge gleich verteilt wird. Damit ist die Tragfähigkeit im Kaltfall gewährleistet. Infolge der Temperatureinwirkung am unteren Rand ändert sich die sich ergebende Gesamtmomentenlinie  $M_{tot} = M_q + M_{\Delta\theta}$  nicht, da sich der Balken frei verformen kann und infolge der Temperaturbelastung keine Schnittgrößen entstehen. Allerdings verringert sich im unteren Bereich des Trägers die Tragfähigkeit der Bewehrung, da durch Erwärmung ihre Festigkeit reduziert wird. Eine Bemessung in diesem Fall muss also mit reduzierten Materialkennwerten erfolgen. Dabei ist die vorhandene Belastung im Brandfall zu berücksichtigen und die außergewöhnliche Bemessungssituation gemäß DIN 1055-100 (2001) bzw. DIN EN 1990 (2010) zu bilden.

Bild 4.26 rechts zeigt einen beidseitig eingespannten statisch unbestimmten Einfeldträger. Aufgrund der Belastung  $q$  bei Raumtemperatur ergeben sich ein positives Feldmoment und in den Auflagerbereichen negative Stützmente. Bedingt durch die dadurch vorhandenen Zugbereiche ist eine statisch erforderliche Bewehrung  $A_{so}$  neben der Feldbewehrung  $A_{su}$  anteilmäßig notwendig.

Durch eine Brandbelastung entsteht aufgrund der horizontalen Zwangshaltung ein kon-



**Bild 4.26:** Änderung der Momentenlinie aufgrund der Lagerungsbedingungen

stantes Temperaturmoment  $M_{\Delta\theta}$ , das sich additiv zu der vorhandenen Momentenlinie kombiniert und so eine Vergrößerung des Zugbereiches über den Lagerungen und eine Verkleinerung im Feldbereich verursacht. Die Zugbereiche lagern sich somit um. Aufgrund der statischen Bemessung im Kaltfall kann es dazu kommen, dass die obere Bewehrung nicht weit genug ins Feld hineinreicht und so keine ausreichende Bewehrung vorhanden ist, um alle Zugkräfte aufzunehmen. Das Feld wird zwar entlastet, allerdings kann der Bewehrungsstahl bedingt durch die Reduzierung seiner Festigkeit infolge der Temperatureinwirkung nicht mehr so viel Lasten aufnehmen, sodass es trotzdem zu einem Zugversagen der unteren Bewehrung kommen kann.

Dieses Verhalten ist auch bei Durchlaufträgern zu erkennen (s. Bild 4.27). Durch die Temperaturdifferenz  $\Delta\theta$  zwischen beflammt und unbeflammter Seite entsteht ein Temperaturmoment  $M_{\Delta\theta}$ , das die resultierende Momentenlinie nach oben verschiebt. Dabei werden die Feldmomente kleiner, wohingegen die Stützmomente zunehmen. Wie auch schon beim statisch unbestimmten Einfeldträger nimmt die Tragfähigkeit des Bewehrungsstahls infolge der thermischen Belastung ab, was das Aufnehmen von positiven Momenten im Feld sowie die negativen Momente im Lager- und Stützbereich erschwert.

Es ist erkennbar, dass es, bedingt durch die Bemessung im Kaltfall, zu Defiziten bei der Bewehrungsanordnung sowie der Bewehrungsmenge im Fall eines Brandes kommen kann und Bereiche in denen Zugspannungen auftreten evtl. nicht durch Bewehrung abgedeckt sind. Ein Versagen der Konstruktion ist somit evtl. unausweichlich. Welche Mechanismen, die zu einem Versagen der Konstruktion führen, werden im folgenden Abschnitt näher erläutert.

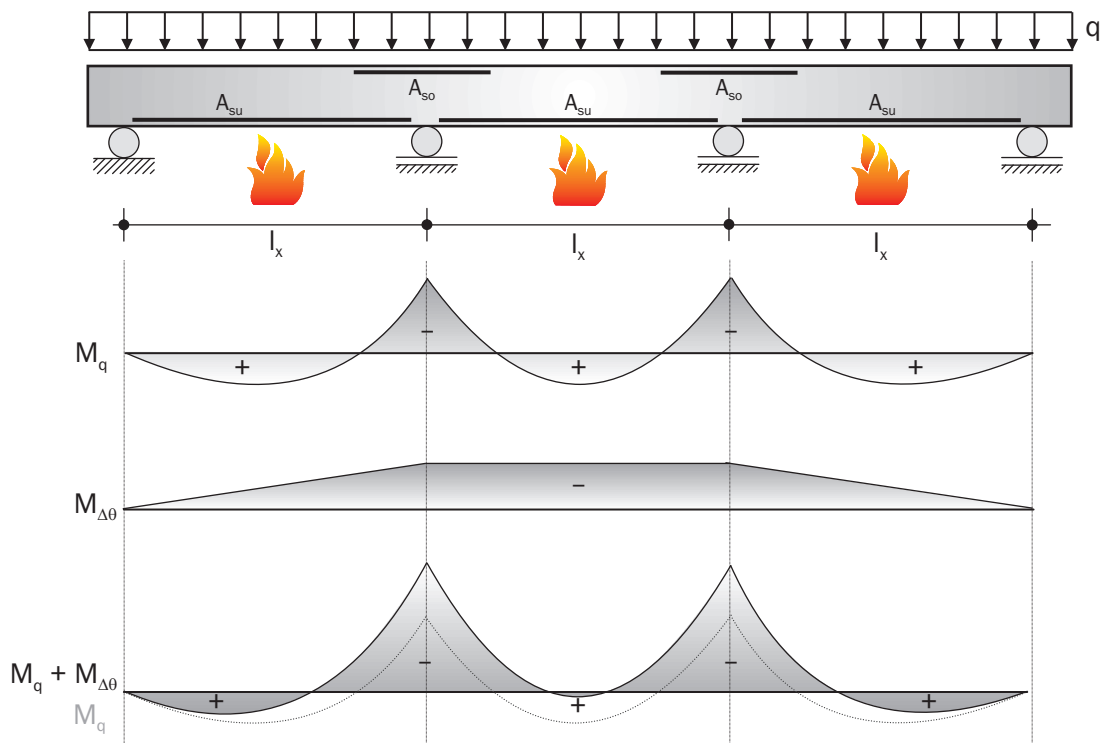


Bild 4.27: Momentenlinie infolge einer Brandbelastung an einem Durchlaufsystem

### 4.6.3 Versagensmechanismen

**Versagen der Zugzone:** Ein Versagen der Zugzone tritt überwiegend in biegebeanspruchten Bauteilen wie Balken und Platten auf. Haupteinflußparameter ist dabei die vorhandene Bewehrung, da der Beton allein in der Zugzone kaum oder gar nicht tragfähig ist. Aufgrund der thermischen Durchwärmung des Bewehrungsstahls infolge eines Brandes nimmt die Stahlfestigkeit immer weiter ab und die Verformungen nehmen zu. Wenn die Streckgrenze auf das Niveau der mechanischen Lasteinwirkung abgefallen ist, fließt der Stahl und das Bauteil versagt.

Neben dem Versagen auf der brandbelasteten Zugseite entstehen Risse auf der brandabgewandten Seite im Bereich der Stützungen. Dies geschieht dadurch, dass die Verformungen im Feld zunehmen bei gleichzeitiger Abnahme der Festigkeiten und das Stützmoment  $\Delta M_{ST}$  anwächst. Dadurch entstehen erhöhte Zugspannungen im Zwischenauflegerbereich und in der Feldbewehrung. Erreicht die Biegezugbewehrung durch die Spannungszuwächse ihre maximal aufnehmbare Größe, kann bei Durchlaufträgern ein Versagen der Zugzone auf der brandabgewandten Seite eintreten. Ähnliche Vorgänge sind auch bei vierseitig gelagerten Platten und Durchlaufplatten zu erwarten.

**Versagen der Druckzone:** Der Versagensmechanismus im Druckbereich ist hauptsächlich bei Stützen vorzufinden und bei Balken und Platten eher selten zu beobachten. Das Versagen tritt durch die abgeminderte Betondruckfestigkeit in der Druckzone ein. Bei einem hohen Bewehrungsgrad trägt der Stahl bis zu einem gewissen Grad die Druckbeanspruchungen mit. Er kann diese aber aufgrund der Erwärmung nur begrenzt aufnehmen.

Kommt es dann zu Abplatzungen und zu gewissen Gefügeauflockerungen, knicken die Bewehrungsstäbe aus und es kommt zum Versagen. Bei Balken tritt eine Zerstörung der Druckzone normalerweise erst nach dem Versagen der Zugzone ein. Versagt zuerst die Druckzone, so ist dies auf großflächige Abplatzungen bzw. Ausführungsfehler beim Herstellen des Balkens zurückzuführen.

**Versagen infolge Torsions- oder Schubbruch:** Da bei torsionsbeanspruchten Bauteilen meist keine Feuerwiderstandsdauer nachzuweisen ist, sind solche Bauteile in der Fachliteratur bezüglich ihres Verhaltens bei Brand kaum erwähnt. Ein Versagen infolge eines Torsionsbruches wird dementsprechend in der vorliegenden Arbeit auch nicht weiter verfolgt.

Ebenso unkritisch wird das Schubbruchversagen gesehen. Laut Kordina & Meyer-Ottens (1998) wird das Schubbruchversagen hauptsächlich von der Zugfestigkeit des Betons mitbestimmt. Entstehen kann ein Schubbruchversagen, wenn Balkenteile sich sehr schnell erwärmen. Dass ein Schubbruch eher unkritisch ist, ist auch im Inhalt der Normen ersichtlich, die zwar Mindestgrenzen vorschreiben, jedoch keine Angaben für eine genauere Untersuchung machen.

**Versagen durch Lösen des Verbundes:** Generell gilt, dass sich die Verbundfestigkeit mit steigender Temperatur stark mindert. Diese Art des Versagens ist hauptsächlich im Bereich von Übergreifungsstößen vorzufinden, da sich durch den Verbundverlust zwischen den einzelnen Bewehrungsstäben der Beton den Zug wieder aufnehmen muss und somit das Versagen in der Zugzone eingeleitet wird. Ein reines Verbundversagen liegt jedoch selten vor. Kommt es zu einer Lockerung des Verbundes, müssen die Lasten über ein Bogen-Zugband zu den Auflagerpunkten übertragen werden. Dies funktioniert nur im Auflagerbereich solange noch Verbund besteht. Versagt auch der Auflagerbereich, kommt es zu einem Versagen durch Verankerungsbruch.

**Versagen durch Abplatzungen:** Das Abplatzen von Beton reduziert zunächst einmal den Querschnitt, was die Durchwärmung des Querschnitts begünstigt, wobei dementsprechend auch die Bewehrung einbezogen wird. Aus diesen schneller eintretenden thermischen Einwirkungen werden die andern Versagensmechanismen beschleunigt aktiviert. Plötzliches Versagen infolge von Abplatzungen ist vor allem bei Stützen und in der Druckzone von Stahlbetonbauteilen möglich.

#### 4.6.4 Tragverhalten von Deckensystemen

Plattensysteme werden gemäß ihrer Lagerungsbedingungen in statisch bestimmte und statisch unbestimmte Systeme unterteilt. Bei statisch bestimmt gelagerten Stahlbetonplatten handelt es sich, bedingt durch den meist einachsigen Lastabtrag, um Einfeldsysteme, wobei ein Versagen der Biegezugbewehrung im Feld eintritt [Kordina & Bornemann 1966]. Der Versagenspunkt hängt hauptsächlich mit der Durchwärmung des Bewehrungsstahls und der damit verbundenen Reduzierung der Stahlfestigkeit zusammen. Das Versagen durch einen Bruch in der Biegezugzone tritt ein, sobald die Stahlzugfestigkeit kleiner ist als die zur Lastaufnahme erforderliche.

Statisch unbestimmte Plattensysteme bzw. Durchlaufplatten besitzen gegenüber den statisch bestimmt gelagerten Platten Umlagerungskapazitäten und somit Tragreserven. Der Versagenszeitpunkt hängt vom plastischen Versagen ab. Werden die Felder bei Durchlaufplatten an der Unterseite durch einen Brand beansprucht, verformt sich das Feld aufgrund der Reduzierung der Festigkeiten und der einsetzenden thermischen Dehnungen nach unten. Diese Verformung wird allerdings durch Einspannungen bzw. am Mittenaufleger behindert, wodurch an diesen Stellen Eigenspannungen und Zwangmomente entstehen. Diese Zwangmomente entlasten nach Kordina & Krampf (1984) das Deckenfeld und führen zu Zugbeanspruchungen der oberen Bewehrung z.B. über dem Mittelaufleger. Begrenzt wird diese Momentenumlagerung durch das Fließen der Bewehrung, es bilden sich plastische Gelenke an den Stützstellen aus. Die Tragfähigkeit ist aber erst dann verloren, wenn sich auch im Feld plastische Momente ausbilden (siehe Bild 4.27).

Anzumerken ist, dass durch die evtl. Berücksichtigung einer Momentenumlagerung nach Abschnitt 8.3 und 8.4 der DIN 1045-1 (2008) bei der Bemessung im Kaltfall kaum Traglastreserven im Bereich der Mittelaufleger vorhanden sind, um mögliche Zwangmomente aufzunehmen [Kordina 1997]. Daher sollte nach Kordina (1997) bei der Bemessung im Brandfall der Effekt der Momentenumlagerung nicht berücksichtigt werden. Im Allgemeinen sind statisch unbestimmte Tragwerke günstiger auf ihr Brandverhalten hin zu beurteilen, da sie wie schon erwähnt, Tragreserven aufweisen.

Während bei linienartig gelagerten Deckensystemen das brandbeanspruchte Deckenfeld meist durch die als Auflager dienenden Stahlbetonwände begrenzt ist, ist die Ausbreitung eines Feuers bei punktgestützten Flachdecken in benachbarte Deckenfelder möglich. Daher ist eine allgemeine Aussage hinsichtlich des Tragverhaltens bei punktgestützten Deckensystemen kaum möglich. In Kordina (1997) sind diesbezüglich Versuche durchgeführt worden. Beobachtet werden konnte, dass die Entlastung der Feldmomente durch Umlagerung der Momente in die Stützenbereiche durch den Aufbau von Zwangmomenten ähnlich wie bei linienartig gelagerten Deckensystemen der Fall ist. Die Momentenumlagerung wird allerdings aufgrund des Fehlens der Feldstreifenauflagerung begrenzt.

Neben den bisher beschriebenen Reduzierungen der Tragfähigkeit von brandgefährdeten Deckensystemen erhöht sich die Tragfähigkeit nach Kordina (1997) durch den Aufbau von Membran-Druckkräften. Sie bilden sich aufgrund der behinderten Längenänderung und üben quasi eine Vorspannwirkung auf das brandbeanspruchte Deckenfeld aus. Es kommt zu einer Erhöhung der Biegebruchmomente und zur Vermeidung der den Durchstanzbruch einleitenden Rissbildung. Nach Kordina (1997) wird aber vom Ansatz dieser Membran-Druckkräfte abgeraten, da sie sich aufgrund der großen Verformungen und durch Kriechen abbauen. Werden die Membran-Druckkräfte zu groß, können sie auch zu einem Versagen des brandbeanspruchten Deckenfeldes führen.

Bezüglich des Durchstanzens bei punktgestützten Platten im Brandfall wird in Kordina (1997) auf die Reduzierung der Tragfähigkeit durch Abplatzungen im Stützenkopfbereich hingewiesen. Dadurch entsteht hier ein geschwächter Querschnitt, der schneller erwärmt wird und somit Festigkeitsreduzierungen zur Folge hat, was den Durchstanzwiderstand verringert. Weiterhin verkleinert sich auch der Stützenquerschnitt durch Abplatzungen, was zu einer Reduzierung des Lasteinleitungsbereiches führt.

### **4.6.5 Zusammenfassung**

Durch die in diesem Kapitel dargestellten Sachverhalte bezüglich des Material- und Konstruktionsverhaltens von Stahlbetonbauteilen bei hohen Temperaturen wird deutlich, wie komplex eine wirklichkeitsnahe Simulation des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonbauteilen bei flächenartigen Bauteilen ist. Daher wird hier noch einmal das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Entwicklung eines allgemeinen numerischen Verfahrens zur Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken im Brandfall, verdeutlicht. Zur weiteren Umsetzung des angestrebten allgemeinen Verfahrens, werden in den kommenden Kapiteln die Grundlagen für eine numerische Analyse von Flächentragwerken mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode dargelegt.

# Kapitel 5

## Grundlagen der Kontinuumsmechanik

---

*Dieses Kapitel befasst sich mit den Grundlagen der Kontinuumsmechanik, die zur Beschreibung der verwendeten Schalentheorie nötig sind. Zunächst werden für das Kontinuum die kinematischen Beziehungen zur Beschreibung der Geometrie und der Bewegung im Kontinuum bereitgestellt. Danach wird der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor und der 2. PIOLA-KIRCHOFF'sche Spannungstensor eingeführt. Mit Angabe der Erhaltungssätze für Masse, Impuls, Drehimpuls und kinetische Energie werden die materialunabhängigen Bilanz- und Erhaltungsgleichungen der Mechanik vorgestellt. Unter Angaben von Stoffgleichungen, Anfangs- und Randbedingungen wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen und dessen Linearisierung zur Lösung der nichtlinearen Energiebilanz angegeben. Den Abschluss bildet die Angabe der konstitutiven Beziehungen, die die eingeführten Verzerrungen und Spannungen verknüpfen.*

---

### 5.1 Einführung

Eine genaue Beschreibung strukturmechanischer Problemstellungen ist nur mit Hilfe kontinuumsmechanischer Zusammenhänge möglich. Diese stellen die Basis für die spätere Implementierung der temperaturabhängigen Gesetzmäßigkeiten. Um dies möglichst allgemein zu halten, wird der mechanische Rahmen im dreidimensionalen Raum dargestellt. Die Darstellung orientiert sich an den Lehrbüchern Altenbach & Altenbach (1994) und Greve (2003) sowie an den Dissertationen von Menzel (1996), Montag (1997), Eckstein (1999) und Wörmann (2004). Als Variablenkonvention wird festgesetzt, dass Variablen der Referenzkonfiguration mit Großbuchstaben und Variablen der Momentankonfiguration mit Kleinschreibung bezeichnet werden. Vektoren, Matrizen und Tensoren werden fett gedruckt angegeben.

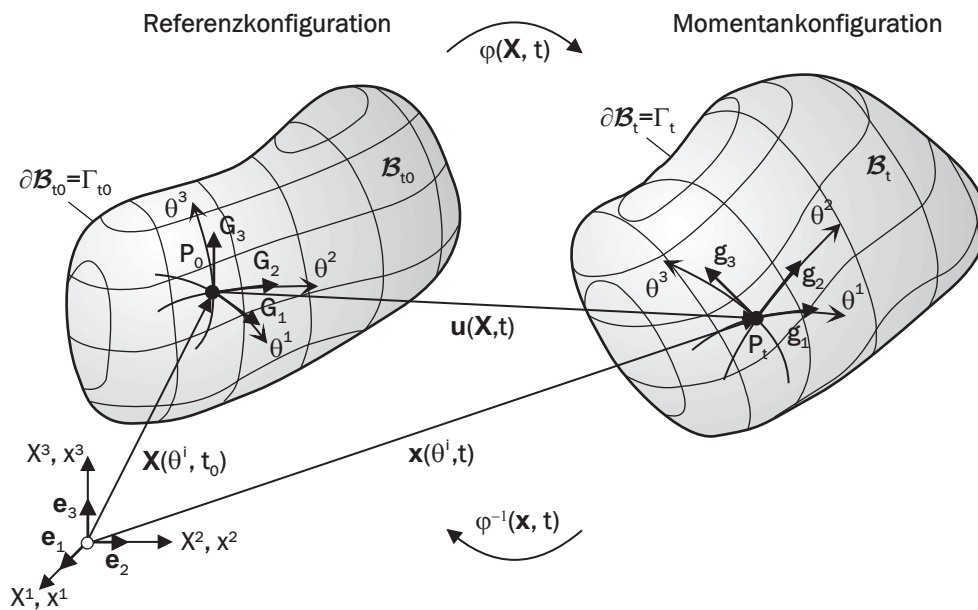
## 5.2 Kinematik

Die Kinematik wird definiert als die Bewegung von Punkten und Körpern im Raum ohne Berücksichtigung der Ursache ihrer Bewegung, der Masse der Körper oder der einwirkenden Kräfte. Die Beschreibung erfolgt rein geometrisch. Zunächst erfolgt die Darstellung der Konfiguration, Lage und Deformation.

**Konfiguration, Lage und Deformation:** Im dreidimensionalen EUKLID'schen Raum  $\mathbb{E}^3$  ist die Lage jedes materiellen Punktes  $\mathcal{P}$  eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  durch seine Ortskoordinaten

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^i, t_0) = x^i(\theta^i) \mathbf{e}_i = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \quad (5.1)$$

beschrieben, wobei  $\theta_i$  die konvektiven, krummlinigen Koordinaten,  $x^i$  die Komponenten und  $\mathbf{e}_i$  die Basisvektoren im orthonormierten kartesischen Koordinatensystem repräsentieren (Bild 5.1).



**Bild 5.1:** Geometrie und Kinematik eines dreidimensionalen Körpers bei Verwendung krummliniger, konvektiver Koordinaten

Der initiale, unverformte Ausgangszustand aller materiellen Punkte  $\mathcal{P}$  eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  zum Zeitpunkt  $t = t_0$  wird als Referenzkonfiguration bzw. materielle Konfiguration  $\mathcal{B}_{t_0}$  bezeichnet. Für den Ortsvektor der Referenzkonfiguration ergibt sich:

$$\mathbf{X}(\theta^i) = \mathbf{x}(\theta^i, t_0) = X^i(\theta^i) \mathbf{e}_i = X^1 \mathbf{e}_1 + X^2 \mathbf{e}_2 + X^3 \mathbf{e}_3. \quad (5.2)$$

Die Lage der materiellen Punkte in einem Raum ändert sich durch angreifende äußere Belastungen bzw. Einwirkungen ständig. Die dadurch veränderte Konfiguration zum Zeitpunkt  $t > t_0$  wird als Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$  definiert. Die Oberflächen der Körper



werden bei der Referenzkonfiguration mit  $\partial\mathcal{B}_{t_0} = \Gamma_{t_0}$  und bei der Momentankonfiguration mit  $\partial\mathcal{B}_t = \Gamma_t$  bezeichnet. Mathematisch wird die Bewegung eines Körpers als eine aufeinanderfolgende zeitliche Addition von Konfigurationsänderungen beschrieben.

In der Literatur sind viele unterschiedliche Betrachtungsweisen zu finden, wobei sich die EULER'sche und die LAGRANGE'sche Formulierung durchgesetzt haben. Die erstere räumliche Betrachtungsweise definiert die zeitliche Veränderung tensorieller Variablen an einem festen Ort zu einem Zeitpunkt  $t$ , wohingegen die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise oder auch die materielle Betrachtungsweise die zeitliche Änderung eines Materialpunktes in Relation zur Referenzkonfiguration beschreibt. Hierin liegt auch der Vorteil gegenüber der EULER'schen Betrachtungsweise, da die Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt  $t_0$  vorliegt und die Momentankonfiguration bestimmt werden soll. Daher wird die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise bei strukturmechanischen Berechnungen bevorzugt.

Mit der stetigen bijektiven Abbildung der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration wird mit der Deformationsfunktion  $\varphi$  folgender Zusammenhang definiert:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (5.3)$$

Mit dieser LAGRANGE'schen Betrachtungsweise kann dementsprechend die Momentankonfiguration auf die Referenzkonfiguration abgebildet werden mit:

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t_0). \quad (5.4)$$

Die Ortsvektoren der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}$  werden auch als LAGRANGE'sche oder materielle Koordinaten, die Ortsvektoren der Momentankonfiguration  $\mathbf{x}$  als EULER'sche oder räumliche Koordinaten bezeichnet. Die Verschiebung  $\mathbf{u}$  eines Materialpunktes  $\mathcal{P}$  des Kontinuums ergibt sich als Differenz der Ortsvektoren bei verschiedenen Zeitpunkten zu:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \varphi(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (5.5)$$

Die Änderung der Verschiebung in der Zeit, also dessen Rate, ist als Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  definiert:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (5.6)$$

**Basisvektoren und Metrik:** Um in einem dreidimensionalen EUKLID'schen Raum  $\mathbb{E}^3$  die Lage eines Punktes sowie Verzerrungsmaße beschreiben zu können, werden körperfeste, konvektive Koordinaten  $\theta_i$  eingeführt. Für jeden Punkt der Referenz- und Momentankonfiguration lassen sich dann die kovarianten Basisvektoren als Tangentenvektoren bezogen auf die Koordinatenlinien  $\theta_i$  festlegen (Bild 5.1):

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} = \mathbf{X}_{,i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{x}_{,i}. \quad (5.7)$$

Im weiteren werden mit

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (5.8)$$

zwei zu den kovarianten Basisvektoren duale kontravariante Basissysteme

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.9)$$

eingeführt. Mit Hilfe des Skalarproduktes der Basisvektoren (5.7) und (5.9) werden die kovarianten bzw. kontravarianten Metrikkoeffizienten gebildet.

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \\ G^{ij} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \\ g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Der Metriktensor der Referenzkonfiguration  $\mathbf{G}$ , der dem Einheitstensor 2. Stufe  $\mathbf{I}$  entspricht, wird wie folgt angegeben:

$$\mathbf{I} = \mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (5.11)$$

Da die Metriktensoren  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{g}$  mit dem Einheitstensor 2. Stufe  $\mathbf{I}$  identisch sind, ergibt sich analog für den Metriktensor  $\mathbf{g}$  der Momentankonfiguration:

$$\mathbf{I} = \mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (5.12)$$

Der Einheitstensor 2. Stufe  $\mathbf{I}$  bildet einen beliebigen Tensor erster und zweiter Stufe auf sich selbst ab und wird deshalb auch Fundamentaltensor genannt. Die Determinanten der Metriktensoren (5.11) und (5.12) sind für die Integration über ein finites Element notwendig und sind definiert mit

$$\det \mathbf{G} = \det[G_{ij}] = G \quad \text{bzw.} \quad \det \mathbf{g} = \det[g_{ij}] = g. \quad (5.13)$$

Eine Verknüpfung mit den kontravarianten Metrikkoeffizienten besteht mit

$$\frac{1}{G} = [G_{ij}] \quad \text{und} \quad \frac{1}{g} = [g_{ij}]. \quad (5.14)$$

Des Weiteren sind noch die differentiellen Volumenelemente  $dV$  und  $dv$  erforderlich, welche sich durch das Spatprodukt der Linienelemente der Referenzkonfiguration  $d\mathbf{X}$  und der Momentankonfiguration  $d\mathbf{x}$  ergeben:

$$\begin{aligned} dV &= (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 & dv &= (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 \\ &= (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3 \quad \text{bzw.} & &= (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3 \\ &= \sqrt{G} \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3 & &= \sqrt{g} \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3 \end{aligned} \quad (5.15)$$

**Deformations- und Verzerrungstensoren:** Mit den bisher eingeführten Definitionen kann die Lage und Deformation eines Körpers im Raum angegeben werden. Um die Auswirkungen auf den inneren Zustand im Kontinuum infolge einer kontinuierlichen Bewegung abzubilden, wird das Verhalten eines differentiellen Linienelementes  $d\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration mit den differentiell entfernten Punkten  $P_{t_0,1}$  und  $P_{t_0,2}$  betrachtet (Bild 5.2).

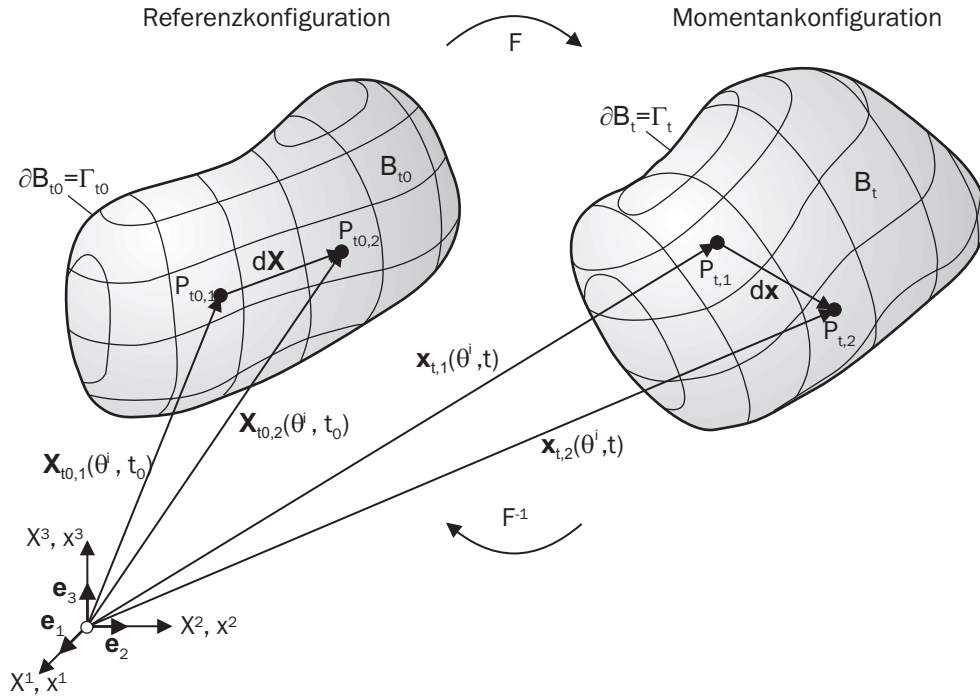


Bild 5.2: Infinitesimales Linienelement

Mit einer linearen TAYLOR-Entwicklung eines infinitesimalen Linienelementes ergibt sich in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}, \quad (5.16)$$

woraus sich das Linienelement  $d\mathbf{x}$  nach Umstellen der Gleichung (5.16) und unter Berücksichtigung der Verschiebungsdefinition in Gleichung (5.5) bilden lässt zu:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{X}] d\mathbf{X} = \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{I} \right)}_{\mathbf{F}} d\mathbf{X}. \quad (5.17)$$

Dabei wird  $\mathbf{F}$  allgemein als materieller Deformationsgradient bezeichnet. Der Tensor  $\mathbf{F}$  transformiert demnach die Basisvektoren  $\mathbf{G}^i$  der Referenzkonfiguration in die Basisvektoren  $\mathbf{g}^i$  der Momentankonfiguration, womit das Linienelement  $d\mathbf{X}$  von der Referenzkonfiguration in das Linienelement  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration überführt wird.  $\mathbf{F}$  stellt einen Tensor 2. Stufe mit der ersten Basis in der Referenz- und der zweiten Basis in der Momentankonfiguration dar. Für den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  sowie seiner inversen, transponierten und transponiert-inversen Abbildung gilt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i. \quad (5.18)$$

So können die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren ineinander überführt werden und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}_i \\ \mathbf{G}^i &= \mathbf{F}^T \mathbf{g}^i \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \mathbf{F} \mathbf{G}_i \\ \mathbf{g}^i &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G}^i. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Es ist zu beachten, dass im Allgemeinen der Deformationsgradient nicht symmetrisch ist ( $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}^T$ ), da sonst keine Starrkörperbewegungen auftreten würden. Allerdings muss eine Umkehrabbildung von  $\mathbf{F}$  durch den Tensor  $\mathbf{F}^{-1}$  gewährleistet werden, wenn ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den materiellen Punkten vorhanden sein soll. Ein notwendiges Kriterium hierfür ist, dass die JACOBI-Determinante  $J$  des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  positiv ist, womit gilt:

$$J := \det \mathbf{F} > 0. \quad (5.20)$$

Die in (5.20) aufgestellte Forderung, dass  $J$  positiv sein soll, dient der physikalischen Grundforderung, die Durchdringungen infolge einer Deformation auszuschließen. Mit (5.15) und der JACOBI-Determinante (5.20) kann nun die Transformationsvorschrift (Satz von EULER) für differentielle Volumenelemente angegeben werden zu:

$$dv = \sqrt{\frac{g}{G}} dV = \det \mathbf{F} dV = J dV. \quad (5.21)$$

Für die Transformation eines Flächenelementes gilt dementsprechend (Satz von NANSON):

$$da = \sqrt{\frac{g}{G}} \mathbf{F}^{-1} dA = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} dA = J \mathbf{F}^{-1} dA. \quad (5.22)$$

Der materielle Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  beschreibt die vollständige Bewegung eines Körpers im Raum. Da diese Bewegung sowohl Starrkörpertranslationen als auch Starrkörperrotationen beinhaltet, ist er als Verzerrungsmaß ungeeignet. Dies liegt an der tensoriellen Antisymmetrie und in der Tatsache, dass  $\mathbf{F}$  sich bei Rotations- bzw. Starrkörperbewegungen nicht zu Null ergibt. Um ein objektives Verzerrungsmaß zu erhalten, muss eine Abspaltung der lokalen Starrkörperanteile erfolgen. Da  $\mathbf{F}$  nach Gleichung (5.20) regulär ist, kann eine polare Zerlegung von  $\mathbf{F}$  in einen Rotations- und einen Strecktensor erfolgen. Die multiplikative Zerlegung von  $\mathbf{F}$  kann mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{v} \mathbf{R} \quad (5.23)$$

in positiv definite, symmetrische Tensoren  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{v}$  in Kombination mit dem orthogonalen Tensor  $\mathbf{R}$  erfolgen. In der Kontinuumsmechanik wird  $\mathbf{U}$  als materieller Rechtsstrecktensor,  $\mathbf{v}$  als räumlicher Linksstrecktensor und  $\mathbf{R}$  als Dreh- bzw. Rotationstensor bezeichnet. Aus Gleichung (5.23) kann die quadratische Form der Strecktensoren gebildet werden. Damit ergeben sich der materielle Rechts-CAUCHY-GREEN-Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{g}_i)(\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (5.24)$$

und der räumliche Links-CAUCHY-GREEN-Tensor

$$\mathbf{b} = \mathbf{v}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{G}^i)(\mathbf{G}^j \otimes \mathbf{g}_j) = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (5.25)$$

Zur Veranschaulichung der CAUCHY-GREEN-Tensoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{b}$  werden die Quadrate des Linienelementes  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}. \quad (5.26)$$

und der inversen Beziehung des Linienelementes  $d\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{x}. \quad (5.27)$$

eingeführt. Da bei einer reinen Starrkörperbewegung keine Verzerrungen auftreten und somit das Verzerrungsmaß Null sein sollte, wird als absolutes Verzerrungsmaß, die Differenz der Quadrate der Linienelemente (5.26) und (5.27) gebildet und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{G}) d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Hieraus kann nach Umstellen der Beziehungen der sogenannte GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  definiert werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}). \quad (5.29)$$

Der Verzerrungstensor in (5.29) ist in der Basis der Referenzkonfiguration definiert. Mit kovarianten Komponenten bezüglich eines konvektiven Koordinatensystems ergibt sich aus (5.29):

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (5.30)$$

Die Komponenten  $E_{ij}$  des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors ergeben sich durch Einsetzen der Gleichungen (5.11) und (5.24) in die Gleichung(5.29), sodass folgt:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}). \quad (5.31)$$

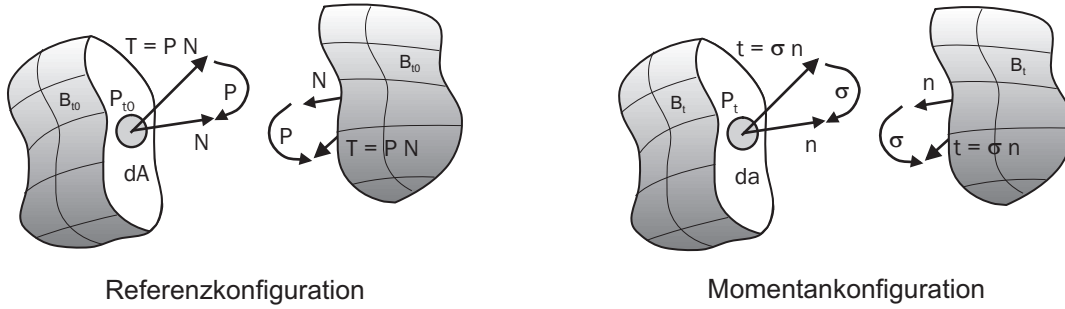
Es zeigt sich, dass die Komponenten  $E_{ij}$  als halbe Differenz der kovarianten Metrikkoeffizienten der Momentan- und Referenzkonfiguration beschrieben werden können. Mit  $\mathbf{E}$  ist nun ein mögliches Verzerrungsmaß definiert, welches häufig bei nichtlinearen Ingenieur Anwendungen zum Einsatz kommt, insbesondere bei Problemen mit großen Verformungen und kleinen Verzerrungen, wie es z.B. in Platten- bzw. Schalentheorien der Fall ist. Vorteil dieses Verzerrungsmaßes  $\mathbf{E}$  gegenüber dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  ist die Eigenschaft der Symmetrie, die Richtungsabhängigkeit sowie die Invarianz gegenüber Starrkörperbewegungen. Weitere Definitionen anderer Verzerrungsmaße sind der Literatur zu entnehmen [Betten 1993; Altenbach & Altenbach 1994; Stein & Barthold 1997].

Die dargestellte Beschreibung der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum erfolgte bisher ohne Berücksichtigung der Ursache. Dies soll nun im Folgenden ergänzt werden, indem Kräfte und resultierenden Spannungen eingeführt werden.

## 5.3 Kräfte und Spannungen

Um konstitutive Materialgesetze zu formulieren, ist neben den kinematischen Größen die Kenntnis vom inneren Kräftezustand eines Körpers infolge angreifender äußerer Lasten notwendig. Als Maß für die Beanspruchung wird die in einem lokalen Materialpunkt

herrschende Spannung definiert. Grundlage eines Spannungszustandes ist das EULER'sche Schnittprinzip, wobei ein Körper  $\mathcal{B}_t$  gedanklich durch eine Schnittfläche  $\Delta a$  getrennt wird. Bild 5.3 stellt das Schnittprinzip mit den entsprechenden Spannungsbezeichnungen in der Referenz- und der Momentankonfiguration dar.



**Bild 5.3:** Schnittprinzip und Definition der mechanischen Spannungen

Aufgrund einer angreifenden Last  $\Delta \mathbf{f}$  innerhalb dieser Schnittfläche in einem Punkt  $\mathcal{P}_t$  wird der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  über die Grenzwertbetrachtung

$$\mathbf{t} := \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (5.32)$$

definiert. Bezugnehmend auf das Theorem von CAUCHY besteht die Notwendigkeit, dass zum Vektorfeld  $\mathbf{t}$  ein Tensorfeld  $\boldsymbol{\sigma}$  vorherrscht, das durch eine lineare Abbildung mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  gebildet wird

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}. \quad (5.33)$$

Der symmetrische CAUCHY'sche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  definiert aufgrund des Bezugs der aktuellen Kraft auf eine Schnittfläche in der aktuellen Konfiguration den wahren Spannungszustand. Seine Komponenten sind

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (5.34)$$

wobei der Index  $i$  die Krafrichtung und  $j$  die Normale des belasteten Flächenstücks angibt.

Für die Formulierung von Bilanz- und Erhaltungssätzen in der Referenzkonfiguration wird eine Formulierung analog zu Gleichung (5.33) eingeführt. Dazu wird der Normalenvektor  $\mathbf{N}$  der undeformierten Lage mit Hilfe des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\mathbf{P}$  auf den Pseudo-Spannungsvektor  $\mathbf{T}$  abgebildet:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N}. \quad (5.35)$$

Zwischen der Momentan- und der Referenzkonfiguration werden somit folgende Beziehungen formuliert:

$$\mathbf{t} da = \mathbf{T} dA = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da = \mathbf{P}\mathbf{N} dA = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA. \quad (5.36)$$

Mit der JACOBI-Determinante (5.20) ergibt sich aus (5.36) der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Tensors  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j = P^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (5.37)$$

Der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{P}$  ist ein Zweifeldtensor, der je eine Basis in Referenz- und Momentankonfiguration besitzt. Er ist aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes (5.4.3) ein unsymmetrischer Tensor. Er beschreibt keinen physikalisch deutbaren Spannungszustand und ist somit für die Modellierung nicht geeignet. Dagegen ist der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}$ , den man durch eine vollständige Transformation auf die Referenzkonfiguration erhält, symmetrisch und stellt somit einen vollständigen Spannungstensor in der Referenzkonfiguration dar. Es ergibt sich:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (5.38)$$

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  besitzt ebenfalls keine direkte physikalische Bedeutung, erfüllt aber aufgrund der vorhandenen Symmetrie und der energetischen Konjugation zum GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  die Vorgaben eines Spannungsmaßes zur Aufstellung von Schalengleichungen in LANGRANGE'scher Ansatzweise.

## 5.4 Physikalische Grundlagen - Erhaltungssätze

Bilanz- und Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik sind fundamentale Postulate und bilden die physikalische Grundlage zur Darstellung mechanischer Problemstellungen. Beschrieben werden, ausgehend von grundlegenden Naturgesetzen, Gleichgewichtszustände zwischen der zeitlichen Änderung einer extensiven physikalischen Größe und der Zufuhr über die Oberfläche  $dA$  oder durch das Innere eines betrachteten Volumens  $dV$ .

Die Bilanz- und Erhaltungssätze werden als stoff- und materialunabhängige Gleichungen aufgestellt und gelten sowohl für das betrachtete Volumen, als auch für jeden lokalen materiellen Punkt  $\mathcal{P}$ . Aus einer Bilanzgleichung wird unter der Forderung, dass die zu bilanzierenden Größen unverändert bleiben, ein Erhaltungssatz. Es werden die Erhaltungssätze der Masse, des Impulses, des Drehimpulses und der Energie wiedergegeben.

### 5.4.1 Satz von der Erhaltung der Masse

Der Massenerhaltungssatz postuliert, dass sich die Masse  $m$  eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  während eines Deformationsprozesses nicht ändert. Damit ergibt sich:

$$m = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} dV = \int_{\mathcal{B}_t} \varrho dv = \text{konst.} \quad (5.39)$$

und folglich, da sich die Masse  $m$  auch zeitlich nicht verändert, für die Rate der Masse

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \varrho dv = 0. \quad (5.40)$$

Da Gleichung (5.39) für jeden beliebigen Integrationsbereich erfüllt sein soll, folgt unter Berücksichtigung von (5.21) die 1. lokale Form der Massenerhaltung

$$m = \varrho_{t_0} dV = \varrho dv. \quad (5.41)$$

Unter Berücksichtigung von (5.21) gelangt man zu der Formulierung

$$\varrho_{t_0} = \det \mathbf{F} \varrho = J \varrho. \quad (5.42)$$

Der Deformationsgradient bzw. die JACOBI-Determinante transformiert die Massendichte von der Referenz in die Momentankonfiguration. Mit (5.42), (5.6) sowie der zeitlichen Ableitung der JACOBI-Determinante  $J$  (5.20) wird mit (5.40) die 2. lokale Form der Massenerhaltung formuliert:

$$\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.43)$$

Diese Gleichung wird als Kontinuitätsgleichung bezeichnet. Anzumerken ist, dass es bei der Berechnung von Stahlbetonbauteilen im Brandfall zu einem geringen Massenverlust kommt, der aufgrund von Wasserverdampfung resultiert. Mit einer Abschätzung von ca. 5% Massenverlust ist dies jedoch vernachlässigbar.

### 5.4.2 Satz von der Erhaltung des Impulses

Das physikalische Axiom des Impulserhaltungssatzes sagt aus, dass die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses eines Körpers  $\mathcal{B}_t$  gleich der Summe der am Körper von außen angreifenden Kräfte ist. Definiert man den Impuls  $\mathbf{i}$  mit

$$\mathbf{i} = \int_{\mathcal{B}_t} \varrho \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \varrho \mathbf{v} dv \quad (5.44)$$

und die auf den Körper wirkenden Kräfte  $\mathbf{p}$ , die sich aus massenbezogenen Volumenanteilen  $\mathbf{f}$  und Oberflächenanteilen  $\bar{\mathbf{t}}$  zusammensetzen mit

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{B}_t} \varrho \mathbf{f} dv + \int_{\mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{t}} da, \quad (5.45)$$

so kann der integrale Impulssatz, der dem 2. NEWTON'schen Hauptsatz entspricht, wie folgt angegeben werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \varrho \mathbf{v} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \varrho \mathbf{f} dv + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} da. \quad (5.46)$$

Mit (5.41) ergibt sich äquivalent für den Impulssatz der unverformten Lage

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} dV + \int_{\Gamma_{t_0}} \bar{\mathbf{T}} dA. \quad (5.47)$$



Mit Hilfe des GAUSS'schen Integralsatzes kann der Oberflächenanteil aus obiger Gleichung mit  $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N}$  auf  $\Gamma_{t_0}$  angegeben werden zu:

$$\int_{\Gamma_{t_0}} \bar{\mathbf{T}} \, dA = \int_{\Gamma_{t_0}} \mathbf{P}\mathbf{N} \, dA = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \text{Div} \mathbf{P} \, dV \quad (5.48)$$

und es ergibt sich mit zusätzlichem Vertauschen der Differentiationen auf der linken Seite von (5.47)

$$\int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} \dot{\mathbf{v}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} \, dV + \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \text{Div} \mathbf{P} \, dV. \quad (5.49)$$

Da diese Formulierung für den gesamten Körper als auch für beliebige Teilintegrationsbereiche Gültigkeit haben soll, ergibt sich die lokale starke Form in materieller sowie räumlicher Darstellung als Bewegungsgleichung zu:

$$\varrho_{t_0} \dot{\mathbf{v}} = \text{Div} \mathbf{P} + \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} \quad \text{bzw.} \quad \varrho \dot{\mathbf{v}} = \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{f}. \quad (5.50)$$

Unter der Vernachlässigung des Beschleunigungsterms ( $\varrho_{t_0} \dot{\mathbf{v}} \equiv 0$  bzw.  $\varrho \dot{\mathbf{v}} \equiv 0$ ) in Gleichung (5.50) können die statischen Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden:

$$\text{Div} \mathbf{P} + \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{f} = 0. \quad (5.51)$$

### 5.4.3 Satz von der Erhaltung des Drehimpulses

Ein Impuls  $l$  eines mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten Körpers bezogen auf einen Punkt  $x_0$  ergibt sich mit  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  zu:

$$l := \int_{\mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{x}} \times \varrho \mathbf{v} \, dv. \quad (5.52)$$

Der Erhaltungssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses (5.52) im Gleichgewicht mit dem Gesamtmoment aller auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte stehen muss. Der Drehimpulssatz ergibt sich für die Momentankonfiguration zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{x}} \times \varrho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{x}} \times \varrho \mathbf{f} \, dv + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{t}} \, da \quad (5.53)$$

und für die Referenzkonfiguration zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \bar{\mathbf{x}} \times \varrho_0 \mathbf{v} \, dV = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \bar{\mathbf{x}} \times \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} \, dV + \int_{\Gamma_{t_0}} \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{T}} \, dA. \quad (5.54)$$

### 5.4.4 Satz von der Erhaltung der kinetischen Energie

Während die bisher eingeführten Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Drehimpuls von axiomatischer Gestalt sind, ist der Erhaltungssatz der kinetischen Energie formulierbar

aus der skalaren Multiplikation der lokalen Form der Impulsbilanz (5.50) mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  und anschließender Integration über den Körper  $\mathcal{B}_t$ :

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dv. \quad (5.55)$$

Mit der Identität nach de Boer & Prediger (1978)

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} \quad (5.56)$$

und Gleichung (5.48) kann das 2. Integral in (5.55) angegeben werden zu:

$$\int_{\mathcal{B}_t} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\Gamma_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, da - \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} \, dv. \quad (5.57)$$

Mit Berücksichtigung von (5.36) und (5.57) läßt sich somit (5.55) wie folgt umschreiben:

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, da - \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} \, dv. \quad (5.58)$$

Per Definition ist die kinetische Energie  $E_{kin}$  eines mechanischen Systems mit

$$E_{kin} = \int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv \quad (5.59)$$

vorgegeben, und man erkennt, dass das linke Integral in (5.58) die zeitliche Ableitung der Energie  $K$  repräsentiert. Damit ergibt sich der Erhaltungssatz der Energie  $K$  als Differenz zwischen den Oberflächen- bzw. Volumenkräften  $P_{ext}$  und der Spannungsleistung  $P_{int}$  zu:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv}_{E_{kinK}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dv}_{P_{ext}} + \underbrace{\int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, da}_{P_{int}} - \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} \, dv, \quad (5.60)$$

wobei das Skalarprodukt  $\boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v}$  als spezifische Elementarleistung definiert wird. Die materielle Formulierung erhält man entsprechend, wenn als Ausgangspunkt die materielle Formulierung des Impulssatzes dient:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dV}_{E_{kin}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_{t_0}} \rho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} \cdot \mathbf{v} \, dV}_{P_{ext}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{t_0}} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{T}} \, dA}_{P_{int}} - \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \mathbf{P} : \operatorname{Grad} \mathbf{v} \, dV, \quad (5.61)$$

Mit der Spannungsleistung  $P_{int}$  aus (5.61) soll die energetische Konjugation des 1. PIOLA-KIRCHOFF-Spannungstensors  $\mathbf{P}$  und des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  weiter betrachtet werden. Die beiden Tensoren sind unsymmetrisch, wodurch sie für eine allgemeine Formulierung konstitutiver Gesetze ungeeignet sind. Daher ergibt sich durch Umformen der Spannungsleistung mit Hilfe des 2. PIOLA-KIRCHOFF-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  und des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{P} : \operatorname{Grad} \mathbf{v} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \left( \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right). \quad (5.62)$$

### 5.4.5 Satz von der Erhaltung der Energie

Der Energieerhaltungssatz, auch 1. Hauptsatz der Thermodynamik genannt, postuliert, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie  $E_{tot}$ , die sich aus kinetischer Energie  $E_{kin}$  (5.60) und innerer Energie

$$E_u = \int_{\mathcal{B}_t} \varrho \cdot u \, dv \quad (5.63)$$

zusammensetzt, im Gleichgewicht mit den äußeren Lasten  $P_{ext}$  und der äußeren thermischen Leistung

$$q = \int_{\mathcal{B}_t} \varrho \cdot r \, dv - \int_{\Gamma_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (5.64)$$

stehen muss. Dabei bezeichnet  $u$  die innere Energiedichte,  $r$  den Wärmezufuss über das Volumen und  $\mathbf{q}$  den Wärmezufuss über die Oberfläche. Als Energieerhaltungssatz ergibt sich mit (5.60) unter Einbeziehung von (5.63) und (5.64) somit

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{B}_t} \varrho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) \, dv}_{E_{tot} = E_{kin} + E_u} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_t} \varrho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r) \, dv + \int_{\Gamma_t} (\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da}_{P_{ext} + q}. \quad (5.65)$$

## 5.5 Prinzip der Virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der Virtuellen Verschiebungen ist die Grundlage der Finite-Elemente-Methode (FEM) [Bathe 1990; Krätzig & Bařar 1997; Zienkiewicz & Taylor 2000]. Kinematische und statische Randbedingungen ergänzen die lokale Impulsbilanz (5.51) zur sogenannten starken Form des Gleichgewichts. Das hier vorgestellte Prinzip der Virtuellen Verschiebungen soll dagegen die schwache Form des Gleichgewichts repräsentieren und wird durch die skalare Multiplikation des Impulssatzes (5.51) mit den virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  in materieller Form hergeleitet. Es ergibt sich als Ausgangspunkt der Betrachtungen:

$$\text{Div} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} + \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} \cdot \delta \mathbf{u} = 0. \quad (5.66)$$

Die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  sind beliebig und infinitesimal klein und müssen nur die kinematischen Randbedingungen erfüllen. Um dies zu gewährleisten, sind auf der Oberfläche  $\Gamma_{t_0}$  eines Körpers  $\mathcal{B}_{t_0}$  die kinematischen und statischen Randbedingungen zu definieren. Die Randbedingungen  $\Gamma_{t_0}$  werden in den Teil der kinematischen Randbedingungen  $\Gamma_{t_0,u}$  und in den Teil der statischen Randbedingungen  $\Gamma_{t_0,\sigma}$  aufgespalten und müssen, um Überlappungen am Gesamtrand  $\Gamma_{t_0}$  ausschließen zu können, folgende Bedingung erfüllen:

$$\Gamma_{t_0} = \Gamma_{t_0,u} \cup \Gamma_{t_0,\sigma} \quad \text{und} \quad \Gamma_{t_0,u} \cap \Gamma_{t_0,\sigma} = \emptyset. \quad (5.67)$$

Des Weiteren gilt für die Randbedingungen bezogen auf die Referenzkonfiguration:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{t_0,\sigma} \quad , \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{t_0,u}. \quad (5.68)$$

Mit der Identität (5.56) und dem GAUSS'schen Integralsatz (5.48) kann nun die Integration der durch die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  gewichteten Impulsbilanz (5.66) unter Beachtung der Randbedingungen (5.68) durchgeführt werden. Die virtuelle Arbeit ergibt sich danach zu:

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, dV - \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma_{t_0, \sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0. \quad (5.69)$$

In Abhängigkeit der energetisch konjugierten Größen (5.62) des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  und des 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors  $\mathbf{S}$  kann (5.69) in äquivalenter Form geschrieben werden:

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_{t_0}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV}_{\delta W_{int}} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV}_{\delta W_{ext}} - \int_{\Gamma_{t_0, \sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0. \quad (5.70)$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \text{ mit } \delta \mathbf{u} = 0 \text{ auf } \Gamma_{t_0, \sigma} \quad (5.71)$$

Somit ist eine integrale Form der Bedingungsgleichung für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  gegeben, wobei sich zusammenfassend die innere Arbeit  $\delta W_{int}$  und die äußere Arbeit  $\delta W_{ext}$  identifizieren lassen. Damit befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, wenn die Summe der Arbeit  $\delta W$ , die sich aus äußeren Lasten  $\delta W_{ext}$  und inneren Spannungen  $\delta W_{int}$  zusammensetzt, entlang einer virtuellen Verschiebung  $\delta \mathbf{u}$  verschwindet. Eine äquidistante Herleitung des Prinzips der Virtuellen Verschiebungen in räumlicher Darstellung ist analog möglich.

**Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen:** Eine direkte analytische Lösung der Gleichung (5.70) ist nur bei sehr einfachen Problemstellungen möglich. Begründet ist dies in den nichtlinearen Abhängigkeiten der virtuellen Arbeiten der Verschiebungen. Daher ist eine inkrementell-iterative Lösungsstrategie notwendig, um eine Näherungslösung zu erhalten. Diese Verfahren erfordern als Grundlage eine Linearisierung des Variationsprinzips, was durch die Anwendung der GATEAUX-Ableitung auf das Variationsfunktional durchgeführt wird.

Aufgrund der Beschränkung auf konservative Lasten (unabhängig von der Verformung des Kontinuums), genügt es, die Ableitung der inneren virtuellen Arbeit  $\delta W_{int}$  zu bestimmen. Es folgt mit den definierten Regeln im Anhang A.2 aus (5.70) das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in linearisierter Form zu

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{Lin}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \varrho_{t_0} \mathbf{f}_{t_0} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma_{t_0, \sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \\ &+ \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \Delta \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} + \mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E} \, dV = 0. \end{aligned} \quad (5.72)$$

## 5.6 Konstitutive Beziehungen

Neben der Definition von Verzerrungen und Spannungen müssen diese, um eine vollständige Beschreibung eines Problems zu erhalten, verknüpft werden. In der Kontinuumsmechanik geschieht dies im Allgemeinen durch konstitutive Gleichungen. Zwischen

Verzerrungen und Spannungen wird dementsprechend mit Hilfe eines vierstufigen Materialensors ein Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen hergestellt. Im Bezug auf den in dieser Arbeit verwendeten Werkstoff Stahlbeton kann von kleinen Verzerrungen ausgegangen werden. Das Stoffgesetz beruht auf dem ST.-VENANT-KIRCHHOFF Modell, was große Verschiebungen zulässt. Es gilt somit für den Zusammenhang zwischen dem 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und dem GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E}, \quad (5.73)$$

wobei  $\mathbb{C}$  in der Referenzkonfiguration mit

$$\mathbb{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad (5.74)$$

geschrieben wird.

Die Reduktion der vorgestellten kontinuumsmechanischen Formulierungen auf eine 2-dimensionale Schalentheorie und die Beschreibung der finiten Elementformulierung erfolgen im nächsten Kapitel.



# Kapitel 6

## Schalentheoretische Grundlagen und Finite-Element-Modellierung

---

*Unter Beachtung bestimmter kinematischer Zusammenhänge aus der Kontinuumsmechanik wird die verwendete Schalentheorie eingeführt, welche als mittelflächenorientierte, rotationsvariablenbehaftete Theorie finiter Rotationen, bei Berücksichtigung konstanter Schubverzerrungen, charakterisiert ist. Das Prinzip der virtuellen Verschiebung wird dann mit den eingeführten Schalenkenngrößen formuliert und linearisiert. Nachdem die kontinuumsmechanischen Grundlagen bis hin zur Schalentheorie vorliegen, wird im 2. Abschnitt dieses Kapitels die numerische Umsetzung beschrieben, um die in den Kapiteln 4.4 und 4.5 dargestellten Modellvorstellungen und Materialbeziehungen in das Programmsystem Femas 2000 einzugliedern und somit dieses um den Baustein der Heissbemessung im Brandfall zu erweitern. Dazu wird das verwendete Schalenelement ASE4 kurz erläutert, bevor die maßgeblichen Änderungen beschrieben werden.*

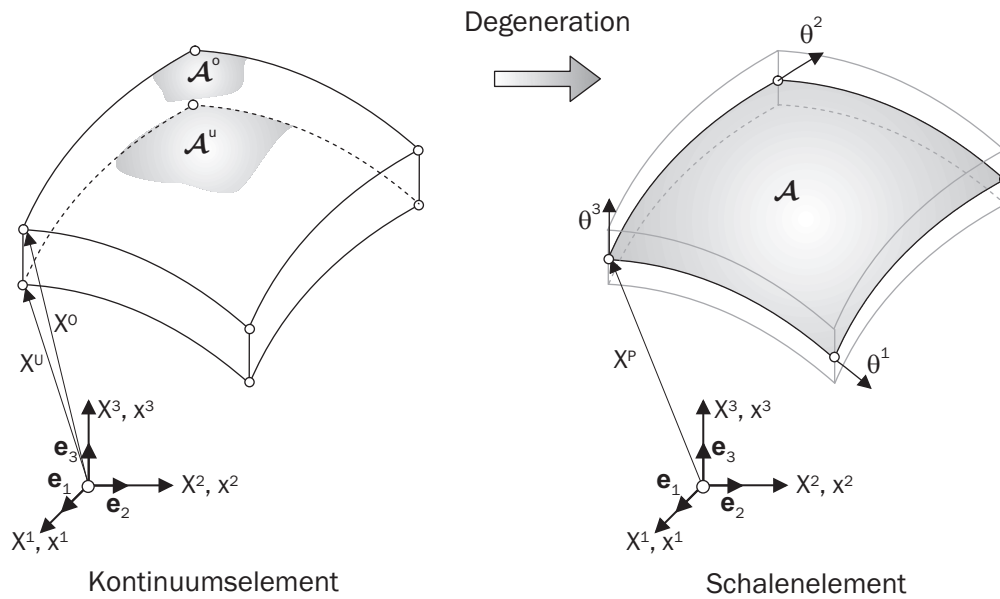
---

### 6.1 Schalentheorie

#### 6.1.1 Grundlagen

Aufbauend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen aus den Abschnitten 5.1 - 5.5 wird die Schalentheorie beschrieben, auf der das verwendete finite Element beruht. Grundsätzlich gibt es mehrere Möglichkeiten, aus der Kontinuumsmechanik ein Schalenelement zu entwickeln. Genannt werden hier zwei zur Verfügung stehende Verfahren, um ein kontinuumbasiertes Element durch eine Degeneration in ein flächenorientiertes Element zu überführen. In Bild 6.1 sind Möglichkeiten der Beschreibung des Schalenkontinuums dargestellt.

Es kann die Formulierung der Schalentheorie mit einem oberflächenorientierten Ansatz erfolgen, wobei  $\mathbf{X}_u$  und  $\mathbf{X}_o$  als primäre Variablen zur Beschreibung des Schalenraumes



**Bild 6.1:** Illustration zur Beschreibung des Schalenkontinuums

herangezogen werden. Demgegenüber steht der Mittelflächen-Direktor-Ansatz, bei dem die Beschreibung des Schalenraumes nur von der sogenannten Schalenmittelfläche  $\mathcal{A}$  abhängt. Zur Definition des Ortes eines beliebigen Punktes  $\mathcal{P}$  im Schalenraum dienen der Ortsvektor  $\mathbf{x}_0$  sowie je nach Ansatzparametrisierung die Direktoren  $\mathbf{x}^n$ ,  $n = 1, \dots, \infty$ , die mit dem vektoriellen Polynomansatz, bezogen auf die ausgezeichnete Koordinate  $\theta^3$ ,

$$\mathbf{x}(\theta^i) = \sum_{n=0}^m (\theta^3)^n \mathbf{x}^{(n)}(\theta^\alpha) \quad (6.1)$$

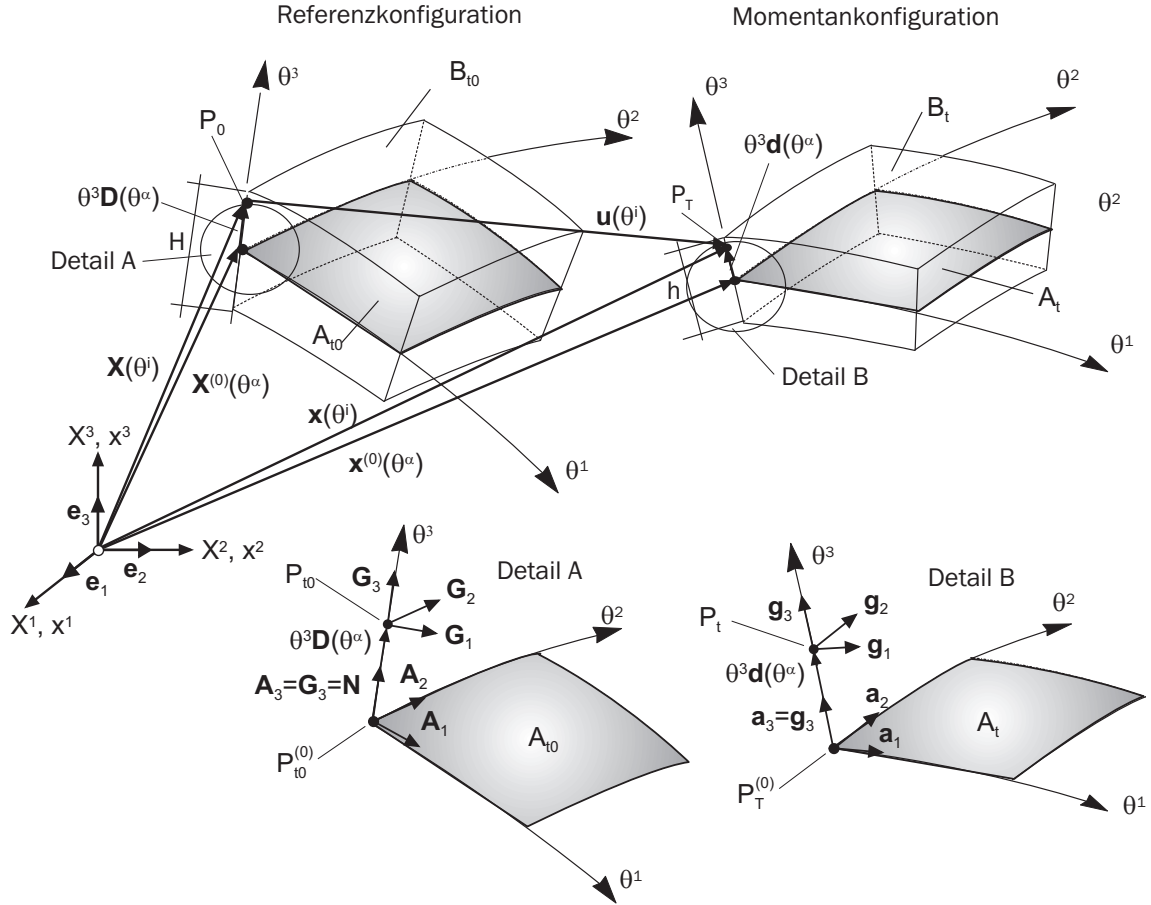
beschrieben sind. Die Direktoren sind dabei von endlicher Anzahl, wobei die Lösung im Falle der Grenzwertbildung mit  $m = \infty$  zur dreidimensionalen Theorie konvergiert und für  $n = 0$  die klassische Membrantheorie beschrieben werden kann [Krätzig 1968; Krätzig 1971; Naghdi 1972]. Die in dieser Arbeit verwendete Theorie konstanter Schubverzerrungen erhält man, indem man nach dem linearen veränderlichen Anteil in  $\theta^3$  Richtung abbricht. Diese Theorie ist von Reissner (1945) und Mindlin (1951) für Platten entwickelt worden und unter dem Namen REISSNER-MINDLIN-Theorie bekannt. Eine spätere Erweiterung bezüglich Schalen führten Green & Zerna (1968) durch. Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich der Ansatz einer Mittelflächen-Multidirektor-Schalentheorie verwendet.

**Geometrie und Kinematik:** Zur Beschreibung der Geometrie und der Kinematik dient die Schalenmittelfläche  $\mathcal{A}$ , welche sich exakt zwischen der unteren Schalenlaibung  $\mathcal{A}^u$  und der oberen Schalenlaibung  $\mathcal{A}^o$  befindet. Sie wird in der unverformten Ausgangssituation durch den Ortsvektor  $\mathbf{X}^0$  und in der Momentansituation mit  $\mathbf{x}^0$  beschrieben. Mit dem gewählten linearen Ansatz in Richtung der konvektiven Koordinate  $\theta^3$  mit  $m=1$  in (6.1) ist die Lage jedes beliebigen Punktes  $\mathcal{P}$  im Schalenraum mit dem linearen Mittelflächendifektoransatz durch die Ortsvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration definiert



mit:

$$\mathbf{X}(\theta^i) = \mathbf{X}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{X}^{(1)}(\theta^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}(\theta^i) = \mathbf{x}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{x}^{(1)}(\theta^\alpha). \quad (6.2)$$



**Bild 6.2:** Kinematik und Basisvektoren des Schalenkontinuums

Einer klassischen Schalentheorie entsprechend wird die Annahme der Inextensibilität getroffen (keine Dehnungen in Richtung von  $\theta^3$ ) und eine konstante Schalendicke  $H$  innerhalb des Elementes angenommen. Der aufgespannte Schalenraum, repräsentiert durch die konvektive Koordinate  $\theta^3 \in [-H/2, H/2]$ , kann deshalb, anstatt mit den Direktoren  $\mathbf{X}^{(1)}$  und  $\mathbf{x}^{(1)}$  in (6.2), mit Normaleneinheitsvektoren beschrieben werden und es ergibt sich für die Referenzkonfiguration

$$\mathbf{X}(\theta^i) = \mathbf{X}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{D}(\theta^\alpha) \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{D}\| = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 1 \quad (6.3)$$

und für die Momentankonfiguration

$$\mathbf{x}(\theta^i) = \mathbf{x}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{d}(\theta^\alpha) \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{d}\| = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1. \quad (6.4)$$

Nach (5.7) sind die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}_\alpha$  und  $\mathbf{g}_\alpha$  als Tangentenvektoren der krummlinigen Koordinaten  $\theta^i$  definiert und können demnach im unverformten Kontinuum

zu

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \Rightarrow \mathbf{G}_\alpha = \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} + \theta^3 \mathbf{D}_{,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{D} \quad (6.5)$$

und im verformten Kontinuum zu

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \Rightarrow \mathbf{g}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} + \theta^3 \mathbf{d}_{,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{d} \quad (6.6)$$

berechnet werden. Die dazugehörigen kontravarianten Basisvektoren sowie die Metrikoeffizienten werden entsprechend ermittelt. Bedingt durch die Degeneration vom dreidimensionalen Kontinuum auf die zweidimensionale Mittelflächenformulierung können Verzerrungen, Spannungen und Schnittgrößen auf die ausgezeichnete Schalenmittelfläche  $\mathcal{A}$  bezogen werden. Mit  $\theta^3 = 0$  ergeben sich die kovarianten Basisvektoren der Schalenmittelfläche  $\mathbf{A}_i$  und  $\mathbf{a}_i$  zu:

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{D} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{d}. \quad (6.7)$$

Nachdem die ko- und kontravarianten Basisvektoren des Schalenkontinuums und der Schalenmittelfläche definiert sind, werden diese mittels räumlichem Shifter  $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{Z}^T = \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{Z}^{-T} = \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{G}_i \quad (6.8)$$

und materiellem Shifter  $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{z}^T = \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{z}^{-1} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{z}^{-T} = \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad (6.9)$$

miteinander verknüpft. Es ergibt sich für den unverformten und den verformten Zustand:

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{Z} \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{G}^i = \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{A}^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{z} \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{z}^{-T} \mathbf{a}^i. \quad (6.10)$$

Somit ist der Zusammenhang zwischen dem Schalenraum und der Schalenmittelfläche definiert. Als weitere notwendige Schalenkenngröße gilt für den Flächeninhalt  $dA$  der Schalenmittelfläche  $\mathcal{A}$ :

$$dA = \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 \quad \text{mit} \quad \sqrt{A} = \sqrt{\det \mathbf{A}} = \sqrt{\det [A_{ij}]} = (d\mathbf{A}_1 \times d\mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{A}_3. \quad (6.11)$$

Ein weiterer Vorteil einer klassischen Schalentheorie, ausgehend von der Schalenmittelfläche, ist die postulierte Forderung eines orthogonal zur Mittelfläche stehenden Direktors  $\mathbf{D}$ , was zu einer vereinfachten Definition der Metrikdeterminante

$$A = \det [A_{\alpha\beta}] = A_{11} A_{22} - (A_{12})^2 \quad (6.12)$$

führt. Auf Grundlage von Kapitel 5.1 ergeben sich für die ko- und kontravarianten Metrikoeffizienten der Schalenmittelfläche

$$A_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \quad \text{und} \quad A^{\alpha\beta} = \mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}^\beta, \quad (6.13)$$

und für die ko- und gemischtvarianten Komponenten des Krümmungstensors

$$B_{\alpha\beta} = -\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} \quad \text{und} \quad B_\alpha^\beta = B_{\alpha\rho} A^{\rho\beta}. \quad (6.14)$$

Die Verschiebungen des Schalenraumes ergeben sich aus der Differenz der Ortsvektoren der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration gemäß Gleichung (5.5) bei Berücksichtigung von (6.2) zu:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{X}^{(0)}) + \theta^3(\mathbf{d} - \mathbf{D}). \quad (6.15)$$

Bezüglich der Referenzfläche mit  $(\theta_3 = 0)$  ergibt sich vereinfacht

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{X}^{(0)}. \quad (6.16)$$

**Verzerrungsmaße:** Der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  aus (5.29) ist die Grundlage für die Herleitung äquivalenter Verzerrungsmaße bezogen auf die Schalenmittelfläche  $\mathcal{A}$ . Um die Vorteile des Degenerationskonzeptes weiter auszunutzen, wird der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  bezüglich der Dickenkoordinate  $\theta_3$  und eines gewählten quadratischen Ansatzes in konstante, lineare und quadratische Anteile aufgespalten. Zunächst werden dazu allerdings die kovarianten Basisvektoren des Schalenraumes der Referenz- bzw. Momentankonfiguration gemäß Gleichung (5.10) als Ableitung der Ortsvektoren nach den konvektiven Koordinaten ermittelt. Für einen quadratischen Ansatz im Schalenraum lauten die durch Skalarmultiplikation der Basisvektoren entstehenden Metrikkomponenten der Referenzkonfiguration

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta \\ &= \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} + \theta^3 \left( \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} + \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right) + (\theta^3)^2 (\mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}), \\ G_{\alpha 3} &= \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_3 = \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D} + \theta^3 \left( \mathbf{D}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D} \right), \\ G_{33} &= \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{G}_3 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \quad (6.17)$$

und der Momentankonfiguration

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \theta^3 \left( \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right) + (\theta^3)^2 (\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta}), \\ g_{\alpha 3} &= \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d} + \theta^3 \left( \mathbf{d}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d} \right), \\ g_{33} &= \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Unter Berücksichtigung der Metrikoeffizienten der Referenzkonfiguration (6.17) und der Momentankonfiguration (6.18) kann der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  (5.29) nun als Summation der oben genannten Anteile geschrieben werden:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} \quad \text{mit} \quad E_{ij} = E_{ij}^{(0)} + \theta^3 E_{ij}^{(1)} + (\theta^3)^2 E_{ij}^{(2)}. \quad (6.19)$$

Folgend der Definition des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  in (5.29) und (5.31) mit

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (6.20)$$

ergeben sich die kovarianten Komponenten  $E_{ij}$  bei Beachten der Summation (6.19) und den Metrikkomponenten (6.17) und (6.18) zu:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) & \frac{1}{2}(g_{\alpha 3} - G_{\alpha 3}) \\ \hline \frac{1}{2}(g_{\alpha 3} - G_{\alpha 3}) & \frac{1}{2}(g_{33} - G_{33}) \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} E_{\alpha\beta} & E_{\alpha 3} \\ \hline E_{3\alpha} & E_{33} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} E_{\alpha\beta}^{(0)} + \theta^3 E_{\alpha\beta}^{(1)} + (\theta^3)^2 E_{\alpha\beta}^{(2)} & E_{\alpha 3}^{(0)} + \theta^3 E_{\alpha 3}^{(1)} \\ \hline E_{\alpha 3}^{(0)} + \theta^3 E_{\alpha 3}^{(1)} & E_{33}^{(0)} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die einzelnen Summanden in (6.21) werden der Vollständigkeit halber angegeben und lauten:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right), \\ E_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right), \\ E_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} \right), \\ E_{\alpha 3}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D} \right), \\ E_{\alpha 3}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} \right), \\ E_{33}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Durch Anwenden des materiellen Shifters  $\mathbf{Z}$  (6.8) auf den GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  aus (5.29) erfolgt die Transformation auf die Schalenmittelfläche  $\mathcal{A}$  und es ergibt sich:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}^{-T} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}^{-T} \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{G}}) \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}^{-T} \underbrace{E_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j}_{\hat{\mathbf{E}}} \mathbf{Z}^{-1}. \quad (6.23)$$

Bei Vernachlässigen der quadratischen Anteile der Tangentialverzerrungen, der linearen Anteile der Schubverzerrungen und unter Berücksichtigung von (6.3) und (6.4) sowie der Orthogonalitätsanforderung an  $\mathbf{D}$  reduzieren sich die Komponenten  $E_{ij}$ . Mit Einführen einer für die Schalentheorie typischen kompakten Schreibweise in Anlehnung an Basar & Krätzig (1985) und Montag (1997) ergeben sich für die Dehn- bzw Membranverzerrungen

$$\alpha_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right), \quad (6.24)$$

die Biege- bzw. Krümmungsverzerrungen

$$\beta_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} - \mathbf{X}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}^{(0)} \right) \quad (6.25)$$

sowie die Schubverzerrungen

$$\gamma_{\alpha} = 2E_{\alpha 3}^{(0)} = \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}. \quad (6.26)$$

Demnach lauten die Komponenten  $E_{ij}$  aus Gleichung (6.21)

$$E_{ij} = \left[ \begin{array}{c|c} \alpha_{\alpha\beta} + \theta^3 \beta_{\alpha\beta} & \frac{1}{2} \gamma_\alpha \\ \hline \frac{1}{2} \gamma_\alpha & 0. \end{array} \right]. \quad (6.27)$$

**Schnittgrößen und Anteile der inneren Arbeit:** In Analogie zur Transformation der Verzerrungen  $\mathbf{E}$  auf die Schalenmittelfläche (6.23) kann der 2. PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor  $\mathbf{S}$  aus (5.38) durch Einführung eines neuen Spannungstensors  $\hat{\mathbf{S}}$  ebenfalls auf die Schalenmittelfläche bezogen werden. Es gilt demnach:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}^{-T} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{Z}^{-1} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{S}} = S^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \quad \text{und} \quad S^{ij} = \hat{S}^{ij}. \quad (6.28)$$

Im Rahmen der Schalentheorie läßt sich mit den eingeführten Tensoren  $\hat{\mathbf{S}}$  und  $\hat{\mathbf{E}}$ , deren Komponenten sich auf die Basen der unverformten Schalenmittelfläche  $\mathcal{A}$  beziehen, die innere virtuelle Arbeit aus (5.70) umformen zu:

$$\int_{\mathcal{B}_{t_0}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \hat{\mathbf{S}} : \delta \hat{\mathbf{E}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} \hat{S}^{ij} \delta \hat{E}^{ij} \, dV = \int_{\mathcal{B}_{t_0}} S^{ij} \delta E^{ij} \, dV. \quad (6.29)$$

Zur vollständigen transformatorischen Beschreibung kann die Integration des differentiellen Volumens  $dV$  (5.15) in eine Integration entlang der Dickenkoordinate  $\theta^3$  über das Flächenelement  $dA$  (6.11) überführt werden:

$$dV = \sqrt{\frac{G}{A}} \, d\theta^3 \, dA = \det \mathbf{Z} \, d\theta^3 \, dA. \quad (6.30)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (6.30) und der Summation der Verzerrungen gemäß (6.19) wird die innere virtuelle Arbeit aus (6.29) angegeben zu:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_{\mathcal{A}_{t_0}} \left( \mathbf{S}_0 : \delta \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{S}_1 : \delta \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{S}_2 : \delta \mathbf{E}^{(2)} \right) dA \\ &= \int_{\mathcal{A}_{t_0}} \left( S_0^{ij} \delta E_{ij}^{(0)} + S_1^{ij} \delta E_{ij}^{(1)} + S_2^{ij} \delta E_{ij}^{(2)} \right) dA. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Die Komponenten des Spannungstensors  $\mathbf{S}$  aus Gleichung (6.31) sind dabei definiert als:

$$S_{(n)}^{ij} = \int_{-H/2}^{H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} (\theta^3)^n S^{ij} \, d\theta^3 \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2. \quad (6.32)$$

Ausgehend vom 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor  $\mathbf{S}$ , der mit dem GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  konsistent ist, ergeben sich die Komponenten

des Pseudo-Normalkrafttensors  $\tilde{N}^{(\alpha\beta)}$ , des Momententensors  $M^{(\alpha\beta)}$  und des Pseudo-Querkrafttensors  $\tilde{Q}^{(\alpha)}$  bei Berücksichtigung arbeitskonformer Größen nach (6.27) zu:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}^{(\alpha\beta)} \\ M^{(\alpha\beta)} \\ \tilde{Q}^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{(0)}^{\alpha\beta} \\ S_{(1)}^{\alpha\beta} \\ S_{(0)}^{\alpha 3} \end{bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} \begin{bmatrix} S^{\alpha\beta} \\ S^{\alpha\beta}\theta^3 \\ S^{\alpha 3} \end{bmatrix} d\theta^3. \quad (6.33)$$

Es liegt somit eine Variationsformulierung vor, die nach erfolgter Dickenintegration der inneren Kraftgrößen nur noch abhängig von zweidimensionalen Größen bezogen auf die Schalenmittelfläche ist und so die Grundlage für die Finite-Elemente Implementierung darstellt. Die nichtphysikalischen Schnittgrößenvektoren müssen in physikalisch interpretierbare Größen transformiert werden. Detaillierte Herleitungen sind in Menzel (1996) und Basar & Krätzig (1985) zu finden, die letztendlich auf die bemessungsrelevanten Größen führen. Es ergeben sich als physikalische Schnittgrößen:

$$\begin{bmatrix} N^{<\alpha\beta>} \\ M^{<\alpha\beta>} \\ Q^{<\alpha>} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{A}{a}} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a^{\alpha\alpha}}} \\ \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a^{\alpha\alpha}}} \\ \frac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & M^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & Q^\alpha \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

**Prinzip der virtuellen Arbeit:** Mit dem Aufspalten der inneren Arbeit gemäß Gleichung (6.31) bezogen auf die Schalenmittelfläche ist eine neue Grundlage für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen definiert. Durch Substitution der nichtphysikalischen Schnittgrößen aus Gleichung (6.33) und den Verzerrungsanteilen in (6.24), (6.25) sowie (6.26) ergibt sich, in Anlehnung an Montag (1997), für die virtuelle Arbeit  $\delta W_{int}$  unter Vernachlässigung von Dickenverzerrungen:

$$\delta W_{int} = \int_{\mathcal{A}_{t_0}} \left( \tilde{N}^{(\alpha\beta)} \delta\alpha_{(\alpha\beta)} + M^{(\alpha\beta)} \delta\beta_{(\alpha\beta)} + \tilde{Q}^\alpha \delta\gamma_\alpha \right) dA. \quad (6.35)$$

Mit Neueinführung eines Materialtensors  $\hat{\mathbb{C}}$  vierter Stufe auf Basis der Schalenmittelfläche nach (5.73) und (5.74)

$$\hat{\mathbb{C}} = C^{ijkl} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{A}_l \quad (6.36)$$

und der sich daraus ergebenden Definition der Materialtensoren

$${}^m D^{ijkl} = \int_{-H/2}^{H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} C^{ijkl} (\theta^3)^m d\theta^3, \quad m = 0, 1, 2 \quad (6.37)$$

können mit Hilfe der kinematischen Beziehung (6.27) die Komponenten der Spannungsergebnierenden wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ M^{\alpha\beta} \\ \tilde{Q}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0 D^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^1 D^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^0 D^{\alpha 3\rho\lambda} \end{bmatrix} \alpha_{(\rho\lambda)} + \begin{bmatrix} {}^1 D^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^2 D^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^1 D^{\alpha 3\rho\lambda} \end{bmatrix} \beta_{(\rho\lambda)} + \begin{bmatrix} {}^0 D^{\alpha\beta\rho 3} \\ {}^1 D^{\alpha\beta\rho 3} \\ {}^0 D^{\alpha 3\rho 3} \end{bmatrix} \gamma_{(\rho 3)}. \quad (6.38)$$

Zur Vervollständigung der virtuellen Arbeit werden für die äußere virtuelle Arbeit  $\delta W_{ext}$  Last- und Momentenvektoren auf der Elementmittelfläche und des Elementrandes berücksichtigt. Es ergibt sich gemäß Montag (1997):

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} &= \int_{\mathcal{A}_t} (\mathbf{p} \delta \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{c} \delta \boldsymbol{\omega}) da + \int_{\mathcal{C}_t} (\mathbf{n} \delta \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{m} \delta \boldsymbol{\omega}) ds \\ &= \int_{\mathcal{A}_{t_0}} p^i \delta x^{(0)i} dA + \int_{\mathcal{C}_{t_0}} \left( n^i \delta x^{(0)i} + \frac{1}{1+w^3} m^i \delta \omega_i \right) dS.\end{aligned}\quad (6.39)$$

Mit den Anteilen der Gleichungen (6.35) und (6.39) wird so die schwache Form des Gleichgewichts formuliert.

**Linearisierung:** Nachdem das Variationsprinzip der inneren Arbeit zur Verfügung steht, erfolgt die erforderliche Linearisierung. Da bei der Betrachtung wie schon in Kapitel 5.5 von konservativen Lasten ausgegangen wird, genügt es auch hier, nur die innere Arbeit  $\delta W_{int}$  zu linearisieren. Es gilt entsprechend der Linearisierung nach Anhang A.2 für die schalentheoretische Beschreibung:

$$\begin{aligned}\delta W_{int}^{Lin} &= \delta W_{int} + D\delta W_{int} \cdot \Delta \mathbf{u} \\ &= \int_{\mathcal{A}_{t_0}} \left( \tilde{N}^{(\alpha\beta)} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + M^{(\alpha\beta)} \delta \beta_{(\alpha\beta)} + \tilde{Q}^\alpha \delta \gamma_\alpha \right) dA \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}_{t_0}} \left( \Delta \tilde{N}^{(\alpha\beta)} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + \Delta M^{(\alpha\beta)} \delta \beta_{(\alpha\beta)} + \Delta \tilde{Q}^\alpha \delta \gamma_\alpha \right) dA \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}_{t_0}} \left( \tilde{N}^{(\alpha\beta)} \Delta \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + M^{(\alpha\beta)} \Delta \delta \beta_{(\alpha\beta)} + \tilde{Q}^\alpha \Delta \delta \gamma_\alpha \right) dA.\end{aligned}\quad (6.40)$$

Die Verzerrungsgrößen lauten im Einzelnen:

$$\begin{aligned}\delta \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right], \\ \delta \beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} + \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right], \\ \delta \gamma_\alpha &= \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta \mathbf{d} + \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}\end{aligned}\quad (6.41)$$

und

$$\begin{aligned}\Delta \delta \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \Delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta \delta \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \Delta \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right], \\ \Delta \delta \beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \Delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta \delta \mathbf{d}_{,\beta} + \Delta \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta \mathbf{d}_{,\beta} \right. \\ &\quad \left. + \Delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \Delta \delta \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \Delta \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} + \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \Delta \mathbf{x}_{,\beta}^{(0)} \right], \\ \Delta \delta \gamma_\alpha &= \Delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \delta \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta \delta \mathbf{d} + \Delta \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \mathbf{d} + \delta \mathbf{x}_{,\alpha}^{(0)} \cdot \Delta \mathbf{d}.\end{aligned}\quad (6.42)$$

Wie schon bei Beschreibung im Kontinuum wird die inkrementelle Änderung der Spannungsergebenden  $\Delta \hat{\mathbf{S}}$  benötigt. Mit Einführung des tangentialen Werkstoffensors  $\hat{\mathbf{C}}_T$  und der inkrementellen Verzerrungen  $\Delta \hat{\mathbf{E}}$  ergibt sich gemäß (5.73)

$$\Delta \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{C}}_T : \Delta \hat{\mathbf{E}}.\quad (6.43)$$

Die Gleichung (6.38) wird in die Form einer inkrementellen Änderung der Spannungsergebenden transformiert. Es gilt:

$$\begin{bmatrix} \Delta \tilde{N}^{(\alpha\beta)} \\ \Delta M^{(\alpha\beta)} \\ \Delta \tilde{Q}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0 D_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^1 D_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^0 D_T^{\alpha^3\rho\lambda} \end{bmatrix} \Delta\alpha_{(\rho\lambda)} + \begin{bmatrix} {}^1 D_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^2 D_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^1 D_T^{\alpha^3\rho\lambda} \end{bmatrix} \Delta\beta_{(\rho\lambda)} + \begin{bmatrix} {}^0 D_T^{\alpha\beta\rho^3} \\ {}^1 D_T^{\alpha\beta\rho^3} \\ {}^0 D_T^{\alpha^3\rho^3} \end{bmatrix} \Delta\gamma_{\rho^3}. \quad (6.44)$$

Damit sind die schalentheoretischen Grundlagen für eine Finite-Elemente-Formulierung gegeben.

### 6.1.2 Berücksichtigung der thermischen Einwirkungen im Normaltemperaturbereich

Bei Flächentragwerken werden die Einwirkungen  $\Delta T_N$  und  $\Delta T_M$  infolge von Temperaturen als konstant oder linear veränderliche Temperaturen über die Schalendicke  $h$  verteilt angesetzt [Basar & Krätzig 1985]. Dies entspricht der allgemeinen Einbindung passend zur Schalentheorie nach REISSNER-MINDLIN. Nachteilig an dieser Berücksichtigung ist, dass vorhandene nichtlineare instationäre Temperaturverteilungen über die Schalendicke nicht erfasst werden können. Bei thermischen Einwirkungen im Normaltemperaturbereich ist diese Einbindung durchaus gerechtfertigt, da sich recht schnell stationäre Zustände im Bauteil einstellen. Zur vollständigen Beschreibung der Berücksichtigung von thermischen Einwirkungen wird zunächst an dieser Stelle auch die Einbindung von thermischen Einwirkungen im Normaltemperaturbereich vorgestellt.

Infolge temperaturbedingter Einwirkungen entstehen nur dilatatorische Verzerrungsanteile. Deviatorische Anteile treten nicht auf. Aufgrund dieser Tatsache ergeben sich in der tensoriellen Schalentheorie die thermischen Verzerrungen zu:

$$E_{(\alpha\beta)}^T = \alpha_{(\alpha\beta)}^T + \theta^3 \beta_{(\alpha\beta)}^T. \quad (6.45)$$

In Gleichung (6.45) beschreiben  $\alpha_{(\alpha\beta)}^T$  die thermischen Dehnungen und  $\beta_{(\alpha\beta)}^T$  die thermischen Verkrümmungen durch:

$$\alpha_{(\alpha\beta)}^T = \alpha_t \Delta T_N A_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \beta_{(\alpha\beta)}^T = \alpha_t \frac{\Delta T_M}{H} A_{\alpha\beta}. \quad (6.46)$$

Unter Berücksichtigung der thermischen Einwirkungen ergibt sich aus den Beziehungen der Gleichung (6.38) für den Pseudo-Normalkrafttensor  $\tilde{N}^{(\alpha\beta)}$  und den Biegemomententensor  $M^{(\alpha\beta)}$  die erweiterte Formulierung zu:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}^{(\alpha\beta)} \\ M^{(\alpha\beta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0 D^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^1 D^{\alpha\beta\rho\lambda} \end{bmatrix} (\alpha_{(\rho\lambda)} - \alpha_{(\rho\lambda)}^T) + \begin{bmatrix} {}^1 D^{\alpha\beta\rho\lambda} \\ {}^2 D^{\alpha\beta\rho\lambda} \end{bmatrix} (\beta_{(\rho\lambda)} - \beta_{(\rho\lambda)}^T) + \begin{bmatrix} {}^0 D^{\alpha\beta\rho^3} \gamma_{\rho^3} \\ {}^1 D^{\alpha\beta\rho^3} \gamma_{\rho^3} \end{bmatrix}. \quad (6.47)$$

Unterstellt man ein linear-elastisches Materialverhalten, gewinnt man unter Berücksichtigung der Dehn- und Biegesteifigkeiten

$$D = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (6.48)$$



aus (6.47) die reduzierte Form:

$$\begin{aligned}\tilde{N}^{(\alpha\beta)} &= D \cdot [H^{\alpha\beta\rho\lambda}\alpha_{\rho\lambda} - (1 + \nu)(\alpha_{(\alpha\beta)}^T)], \\ M^{(\alpha\beta)} &= B \cdot [H^{\alpha\beta\rho\lambda}\beta_{\rho\lambda} - (1 + \nu)(\beta_{(\alpha\beta)}^T)].\end{aligned}\quad (6.49)$$

In dieser Formulierung ist zusätzlich der Elastizitätstensor  $H^{\alpha\beta\rho\lambda}$  vorhanden, welcher nach Bařar & Krätzig (2000) nur durch die Metrik der Mittelfläche und die Querdehnungszahl  $\nu$  beeinflusst wird. Er lautet:

$$H^{\alpha\beta\rho\lambda} = \frac{1 - \nu}{2} \left( a^{\alpha\rho}a^{\beta\lambda} + a^{\alpha\lambda}a^{\beta\rho} + \frac{2\nu}{1 - \nu}a^{\alpha\beta}a^{\rho\lambda} \right). \quad (6.50)$$

In Bezug auf thermische Einwirkungen infolge eines Brandes ist diese vereinfachte Berücksichtigung allerdings unbefriedigend, da im Verlauf der zu untersuchenden Branddauer sich die Temperaturen im Bauteil extrem schnell ändern und es nicht zu einem stationären Zustand kommt, zumindest nicht in den ersten Minuten der Erwärmungsphase.

### 6.1.3 Berücksichtigung der thermischen Einwirkungen im Hochtemperaturbereich

Infolge instationärer Temperatureinwirkungen, wie sie infolge eines Brandes entstehen, stellen sich nichtlineare Temperaturverteilungen über die Schalendicke  $h$  ein. Diese zeitabhängigen Einwirkungen können bei flächenhaften Tragwerken durch eine Mehrschichtendiskretisierung in  $\theta^3$ -Richtung berücksichtigt werden. Die detaillierte Beschreibung dieser Methodik erfolgt in Abschnitt 6.2.5 und 6.4.2.

Das in dieser Arbeit entwickelte Modell sieht vor, dass die sich einstellende nichtlineare Temperaturverteilung über die Schalendicke  $h$  nicht wie in Abschnitt 6.1.2 dargestellt durch ein linear verteiltes Temperaturfeld approximiert angenommen wird, sondern die Entwicklung der Temperatur über die Querschnittshöhe  $H$  exakt berechnet und zwischengespeichert wird.

Daran anschließend werden die thermischen Verzerrungen an einer Anzahl  $n_{lay}$  Stützstellen über die Querschnittshöhe ausgewertet. Dabei wird die stoffliche und zeitabhängige Temperaturabhängigkeit nach Abschnitt 4.4.6 berücksichtigt.

Im Vergleich zur Bestimmung des Verzerrungszustandes bei stationären Normaltemperatureinwirkungen, bei denen sich die Verzerrungs- und Verkrümmungsanteile mit Hilfe eines konstanten Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_t$  bestimmen lassen, sind bei hochtemperaturbedingten instationären Einwirkungen die stofflichen Änderungen zu berücksichtigen, was durch die funktionale Beschreibung der thermischen Verzerrungen gemäß Abschnitt 4.4.6 erfolgt.

## 6.2 Finite-Element-Modellierung

### 6.2.1 Allgemeine Grundlagen

Bei der Finiten-Elemente-Methode wird das Kontinuum  $\mathcal{B}$  der zu untersuchenden Struktur in  $N_{el}$  endliche Teile unterteilt. Die bei der Unterteilung entstehenden Elemente  $\tilde{\mathcal{B}}_e$  werden finite Elemente genannt. Sie approximieren das zu untersuchende Gebiet und besitzen folgende Eigenschaft:

$$\mathcal{B} \approx \tilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \tilde{\mathcal{B}}_e \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathcal{B}}_i \cap \tilde{\mathcal{B}}_j = \emptyset. \quad (6.51)$$

Dabei ist zu beachten, dass diese sich nicht überlappen und die assemblierten Elemente keine Zwischenräume in dem Gebiet  $\mathcal{B}$  aufweisen. Für den Rand  $\Gamma$  des Kontinuums  $\mathcal{B}$  gilt entsprechend:

$$\Gamma \approx \tilde{\Gamma} = \bigcup_{e=1}^{N_{rel}} \tilde{\Gamma}_e \quad \text{mit} \quad \tilde{\Gamma}_i \cap \tilde{\Gamma}_j = \emptyset, \quad (6.52)$$

dass dieser durch  $N_{rel}$  Randelemente  $\tilde{\Gamma}_e$  approximiert wird.

### 6.2.2 Isoparametrische Elementformulierung

Wie schon erläutert, wird bei einer Berechnung mit finiten Elementen im Elementgebiet eine möglichst genaue Approximation der Momentan- und Referenzkonfiguration angestrebt. Im Verlauf der Entwicklung der Finite-Element-Methode sind zahlreiche Möglichkeiten zur Interpolation der Elementgeometrie und der Feldvariablen entstanden, woraus sich in Bezug auf Anwendbarkeit und Flexibilität das sogenannte isoparametrische Konzept durchgesetzt hat.

Die Notwendigkeit einer isoparametrischen Elementformulierung ist in der Tatsache begründet, dass die zu beschreibenden Geometrien, gerade im Bereich der Schalentragwerke, immer komplexer werden und eine exakte Geometriebeschreibung nicht mehr möglich ist. Bei der in dieser Arbeit verwendeten generellen Elementformulierung des eingesetzten Schalenelementes wird auf das isoparametrische Konzept zurückgegriffen, wobei die Struktur und die Feldvariablen mit Ansatzfunktionen gleicher Ordnung beschrieben werden.

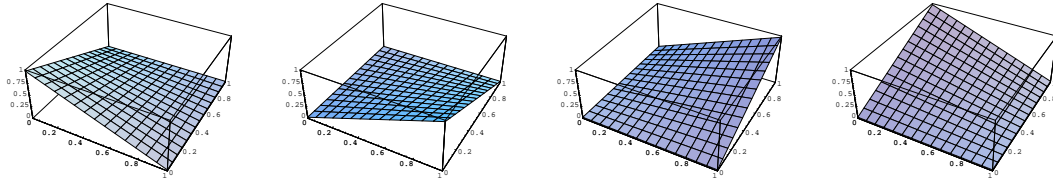
Neben der isoparametrischen Elementformulierung gibt es die Superparametrischen Beschreibungen, bei denen der Geometrieansatz mehr Stützstellen als der Verschiebungsansatz aufweist und die Subparametrischer Ansätze bei denen der Geometrieansatz weniger Stützstellen als die Feldvariablen aufweisen. Beide Formulierungsarten wären für die Elementformulierung nicht zielführend [Willner 2009].

**Approximation mit Ansatzfunktionen.** Unter Verwendung eines mittelflächenorientierten vier knotigen Schalenelementes ergeben sich die bilinearen Ansatzfunktionen im

jeweiligen  $i$ -ten Knoten zu:

$$N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) = \begin{bmatrix} (1 - \xi^1) \cdot (1 - \xi^2) \\ \xi^1 \cdot (1 - \xi^2) \\ \xi^1 \cdot \xi^2 \\ (1 - \xi^1) \cdot \xi^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathcal{K} = 1, 2, 3, 4, \quad (6.53)$$

wobei anstelle der konvektiven Koordinaten  $\theta_\alpha$  nun die normierten natürlichen Koordinaten  $\xi_\alpha$  mit  $(\xi^1, \xi^2) \in [0, 1] \times [0, 1]$  eingeführt und verwendet werden. Die Ansatzfunktionen in (6.53) besitzen die Eigenschaft, dass  $N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) = 1$  im Knoten  $\mathcal{K}$  ist, in den übrigen drei Knoten die Ansatzfunktionen den Wert 0 annehmen. In Bild 6.3 sind die Ansatzfunktionen grafisch dargestellt.



**Bild 6.3:** Illustration der Ansatzfunktionen  $N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha)$  für den Polynomgrad  $p=1$

**Approximation der Geometrie.** Zur Beschreibung der Geometrie lassen sich mit den Ansatzfunktionen (6.53) die Ortsvektoren der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration mit:

$$\mathbf{X}_e^{(0)}(\theta^\alpha) \approx \widetilde{\mathbf{X}}_e^{(0)}(\xi^\alpha) = \sum_{\mathcal{K}=1}^4 N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) \mathbf{X}_e^{(0)\mathcal{K}} \quad (6.54)$$

und in der Momentankonfiguration mit:

$$\mathbf{x}_e^{(0)}(\theta^\alpha) \approx \widetilde{\mathbf{x}}_e^{(0)}(\xi^\alpha) = \sum_{\mathcal{K}=1}^4 N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) \mathbf{x}_e^{(0)\mathcal{K}} \quad (6.55)$$

approximieren. Zur vollständigen Approximation der Geometrie werden die Komponenten des Direktors  $\mathbf{X}^{(1)}$  bzw.  $\mathbf{D}$  nach einem Vorschlag von Başar (1987) nicht selbst interpoliert. Nach Ramm (1976) können die Direktoren durch die unabhängigen EULER-Winkel  $\Psi_\alpha$  in der Referenzkonfiguration und  $\psi_\alpha$  in der Momentankonfiguration substituiert werden.

Aus Bild 6.4 kann die mathematische Formulierung wie folgt abgelesen werden:

$$\mathbf{D}^i = \Psi_\alpha \mathbf{e}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{d}^i = \psi_\alpha \mathbf{e}_i. \quad (6.56)$$

Durch Ersetzen der Direktoren durch EULER-Winkel wird die Geometrie, ausgehend von exakten Knotenwerten, mittels der Formfunktionen angenähert. Es ergibt sich für die

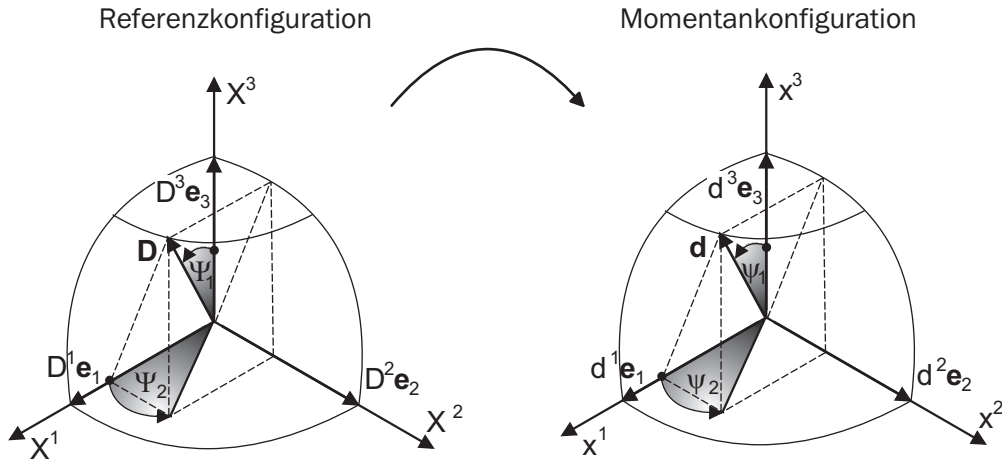


Bild 6.4: Beschreibung der EULER-Winkel nach Ramm (1976)

Referenzkonfiguration unter Berücksichtigung von (6.3)

$$\mathbf{D} \approx \tilde{\mathbf{D}}_e(\xi^\alpha) = \begin{bmatrix} \sin \tilde{\Psi}_{1e} \cos \tilde{\Psi}_{2e} \\ \sin \tilde{\Psi}_{1e} \sin \tilde{\Psi}_{2e} \\ \cos \tilde{\Psi}_{1e} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Psi}_{\alpha e}(\xi^\alpha) = \sum_{\mathcal{K}=1}^4 N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) \Psi_{\alpha e}^{\mathcal{K}} \quad (6.57)$$

und entsprechend für die Momentankonfiguration

$$\mathbf{d} \approx \tilde{\mathbf{d}}_e(\xi^\alpha) = \begin{bmatrix} \sin \tilde{\psi}_{1e} \cos \tilde{\psi}_{2e} \\ \sin \tilde{\psi}_{1e} \sin \tilde{\psi}_{2e} \\ \cos \tilde{\psi}_{1e} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\psi}_{\alpha e}(\xi^\alpha) = \sum_{\mathcal{K}=1}^4 N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) \psi_{\alpha e}^{\mathcal{K}}. \quad (6.58)$$

**Approximation der Verschiebung.** Neben den geometrischen Approximationen (6.54) - (6.58) kann nun die Verschiebung nach (6.15)

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{X}^{(0)}) + \theta^3 (\mathbf{d} - \mathbf{D}) \quad (6.59)$$

wie folgt approximiert werden:

$$\mathbf{u} \approx \tilde{\mathbf{u}}_e(\xi^\alpha) = \left( \tilde{\mathbf{x}}_e^{(0)}(\xi^\alpha) - \tilde{\mathbf{X}}_e^{(0)}(\xi^\alpha) \right) + \theta^3 \left( \tilde{\mathbf{d}}_e(\xi^\alpha) - \tilde{\mathbf{D}}_e(\xi^\alpha) \right). \quad (6.60)$$

Eine andere Darstellung von (6.60) ergibt sich für die Verschiebung  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$

$$\mathbf{u} \approx \tilde{\mathbf{u}}_e(\xi^\alpha) = \sum_{\mathcal{K}=1}^4 N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) \mathbf{u}_e^{\mathcal{K}}, \quad (6.61)$$

womit sich die Variationen

$$\delta \tilde{\mathbf{u}}_e^{(0)}(\xi^\alpha) = \sum_{\mathcal{K}=1}^4 N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) \delta \mathbf{u}_e^{(0)\mathcal{K}} \quad (6.62)$$

und die Inkremente

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_e^{(0)}(\xi^\alpha) = \sum_{\mathcal{K}=1}^4 N_{\mathcal{K}}(\xi^\alpha) \Delta \mathbf{u}_e^{(0)\mathcal{K}} \quad (6.63)$$

der Knotenverschiebungen angeben lassen. Auf die Darstellung weiterer Variationen und Inkremente wird verzichtet, da sie sich in ähnlicher Weise bilden lassen.

### 6.2.3 Tangentiale Steifigkeitsbeziehung

Für eine approximative Lösung mit Hilfe der finiten Elemente muss die diskrete Form der Gleichung (6.40) vorliegen. Mit Hilfe der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix  $\mathbf{B}$ , die die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den natürlichen Koordinaten sowie die inverse Ableitung der physikalischen nach den natürlichen Koordinaten beinhaltet, und der ersten Variation  $\mathbf{G}$  der Matrix  $\mathbf{B}$  ist der Zusammenhang zwischen den variierten und inkrementierten Verzerrungen und den Knotenverschiebungen gegeben durch:

$$\delta \tilde{\mathbf{E}}_e = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e^{\mathcal{K}}, \quad \Delta \tilde{\mathbf{E}}_e = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_e^{\mathcal{K}}, \quad \Delta \delta \tilde{\mathbf{E}}_e = (\Delta \tilde{\mathbf{u}}_e)^T \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e^{\mathcal{K}}. \quad (6.64)$$

Da nun alle Variablen in approximierter Form vorliegen, kann nun der innere Anteil der diskreten linearisierten Form des Prinzips der Virtuellen Verschiebungen auf Elementebene angegeben werden:

$$\begin{aligned} \text{L}\delta W^{\text{Lin}} = & \underbrace{\int_{\mathcal{A}_e^0} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{S}} \delta \mathbf{u}^{\mathcal{K}} \sqrt{A} \, d\xi^1 \, d\xi^2}_{\mathbf{f}_{\text{int},e}} \\ & + \underbrace{\int_{\mathcal{A}_e^0} (\Delta \mathbf{u}^{\mathcal{K}})^T \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{\mathcal{K}} \sqrt{A} \, d\xi^1 \, d\xi^2}_{\mathbf{k}_{U,e}} + \underbrace{\int_{\mathcal{A}_e^0} (\Delta \mathbf{u}^{\mathcal{K}})^T \mathbf{G} \hat{\mathbf{S}} \delta \mathbf{u}^{\mathcal{K}} \sqrt{A} \, d\xi^1 \, d\xi^2}_{\mathbf{k}_{G,e}}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

**Tangentiale Elementsteifigkeitsbeziehung.** Vorausgesetzt, dass (6.65) für beliebige Variationen  $\delta \mathbf{u}_e^{\mathcal{K}}$  gilt, kann so die tangentielle Elementsteifigkeitsbeziehung

$$\mathbf{k}_{T,e} \cdot \Delta \mathbf{u}_e^{\mathcal{K}} = \lambda \mathbf{f}_{\text{ext},e} - \mathbf{f}_{\text{int},e} \quad (6.66)$$

formuliert werden, wobei sich die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_{T,e}$  aus der Summe der Verformungsmatrix  $\mathbf{k}_{U,e}$  und der Anfangsspannungsmatrix  $\mathbf{k}_{G,e}$  aus (6.65) zusammensetzt. Der Vektor der inneren Kräfte  $\mathbf{f}_{\text{int},e}$  und der Vektor der äußeren Lasten  $\mathbf{f}_{\text{ext},e}$ , der nach (6.39) approximiert wird, bilden zusammen das Residuum der Ungleichgewichtskräfte. Die Integration der Gebietsintegrale erfolgt mit der bekannten GAUSS-Quadratur.

**Tangentiale Gesamtsteifigkeitsbeziehung.** Liegt die Elementsteifigkeitsbeziehung vor, ergibt sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen und der Assemblierung der einzelnen Elementanteile

$$\mathbf{K}_T = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}_{T,e}, \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{\text{ext},e}, \quad \mathbf{F}_{\text{int}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{\text{int},e} \quad (6.67)$$

die tangential globale Gesamtsteifigkeitsbeziehung:

$$\mathbf{K}_T \cdot \Delta \mathbf{u}^K = \lambda \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}. \quad (6.68)$$

### 6.2.4 Locking-Phänomene bei Schalenelementen

Bei der Formulierung verschiebungsbasierter finiter Elemente entstehen bei einer existierenden niedrigen Approximationsgüte verschiedene Versteifungseffekte, die mit dem Oberbegriff *Locking* bezeichnet werden. Locking-Effekte sind von rein numerischer Natur und können somit physikalisch auch nicht interpretiert werden. Zu den Locking-Phänomenen zählen z.B. das Membranlocking, das Dickenlocking, das Volumenlocking oder das Krümmungslocking. Für eine Diskussion möglicher Lösungswege dieser Effekte sei auf die Literatur verwiesen [Bischoff 1999], [Eckstein 1999] und [Jun 2002].

Ein Phänomen, das näher betrachtet wird, ist das sogenannte *Shear-Locking*, welches durch eine irrtümliche Überschätzung der Schubenergie charakterisiert ist und gerade bei dünnen Schalen immer größeren Einfluss auf die Verformungen hat. Diese Überschätzung liefert zu steife Ergebnisse. Das Shear-Locking tritt ebenfalls auf, wenn Ansatzfunktionen niedrigerer Ordnung verwendet werden. Die wohl attraktivste Möglichkeit das Shear-Locking zu beseitigen, ist die sogenannte *Assumed-Natural-Strain-Method*, welche grundlegend aus den Arbeiten Hughes & Tezduyar (1981) und Dvorkin & Bathe (1984) hervorging.

Die Beseitigung des Shear-Locking-Verhaltens geschieht durch Neuinterpolation der konstanten Schubverzerrungsanteile  $\gamma_\alpha$  in den sogenannten Kollokationspunkten (A - D), die sich jeweils als Mittelpunkt zwischen zwei Eckknoten des finiten Elementes beschreiben lassen. Die Darstellung der Lage dieser vier Mittelpunkte ist in Tabelle 6.1 dargestellt. Für das bisher beschriebene Element ergibt sich für die neuen Schubverzerrungsanteile:

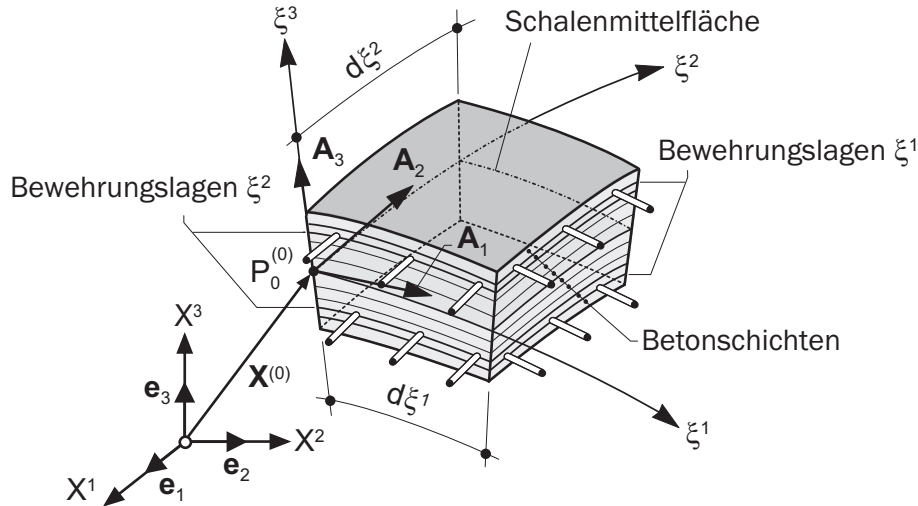
$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^2 \gamma_1^A + (1 - \xi^2) \gamma_1^C \\ \xi^1 \gamma_2^D + (1 - \xi^1) \gamma_2^B \end{bmatrix}. \quad (6.69)$$

### 6.2.5 Multi-layered-Modellierung

Die Berücksichtigung des physikalisch-nichtlinearen Materialverhaltens auf das Verhalten von Stahlbetonstrukturen wird mit Hilfe einer Multi-layered Modellierung, also einer zusätzlichen Diskretisierung in Dickenrichtung, Rechnung getragen. Diese Vorgehensweise wurde bereits mehrfach auf dem Gebiet der physikalisch und geometrisch nichtlinearen finite Elementanalysen eingesetzt [Zahlten 1990; Montag 1997; Krätzig 1997; Andres 2003].

Dabei wird auf Integrationspunktebene eine endliche Anzahl von Layern eingeführt, wodurch eine Berechnung des Werkstoffverhaltens auf der so entstandenen Materialpunktebene möglich wird. Dabei wird die vorhandene 2D-Schalenmittelfläche in Dickenrichtung voluminisiert, wobei die Komponenten der einzelnen Schichten separat Beton und Bewehrung zugeordnet sind. Bei der Bewehrung werden einzelne Bewehrungsstäbe gleichmäßig über die Fläche verteilt und in unidirektionale Bewehrungsschichten überführt. Die

verschmierten Bewehrungsschichten können dabei unabhängig von der Lage der Betonschichten sein. Bild 6.5 zeigt das Layered-Schalenelement ASE4 mit seinen Beton- und Bewehrungsschichten.



**Bild 6.5:** Strukturmechanische Dickendiskretisierung des Schalenelementes ASE4 [Wörmann 2004].

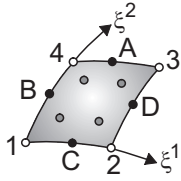
Die resultierenden Querschnittsgrößen über den Querschnitt ergeben sich additiv aus den einzelnen Layern. Darausfolgend wird der definierte Werkstofftensor (6.37) durch eine Summe über alle Layer ersetzt und lautet somit:

$$D_T^{ijkl} = \sum_{n=1}^{n_{lay}} C_{T,n}^{ijkl} (\xi^3)^m \Delta \xi^3, \quad m = 0, 1, 2. \quad (6.70)$$

## 6.3 Implementierung in das Programmsystem FEMAS 2000

Die Entwicklungsplattform, die dieser Arbeit zugrunde liegt, ist das modular aufgebaute Finite-Element-Programmsystem FEMAS 2000. Die Ursprünge des Systems reichen bis Anfang der achtziger Jahre zurück, als die ersten Routinen an der Ruhr-Universität Bochum entstanden. Das Programmsystem ist kontinuierlich weiterentwickelt worden und bietet eine Vielzahl von Berechnungsbausteinen zur numerischen Analyse von Tragwerken [H. Beem & Zahlten 1996]. In jüngster Zeit sind vor allem auch durch die steigenden Rechnerkapazitäten die Entwicklungen hinsichtlich der nichtlinearen Strukturanalysen vorangegangen. Den Grundstein für die notwendige im Rahmen der vorliegenden Arbeit numerische Weiterentwicklung des Programmsystems legten die Arbeiten von Andres (2004) und Wörmann (2004).

Um das Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken infolge eines Brandes analysieren zu können, ist zunächst die thermische Analyse durchzuführen. Wie bereits erläutert, ist

|   |   |
|---|---|
|  | Isoparametrisches, mittelflächenorientiertes 4-knotiges Assumed-Strain Element mit finiten Rotationen             |
| Bezeichnung   | ASE4  |
| Schalentheorie  | REISSNER-MINDLIN-Theorie  |
| Freiheitsgrade  | $\mathbf{x}(\xi^i) = \mathbf{x}^0(\xi^\alpha) + \xi^3 \mathbf{d}(\xi^\alpha)$                                     |
| Rotation  | $\Delta x^{(0)i}, \Delta \Psi_\alpha$ (4 x 5)   |
| Formfunktion  | rotationsvariablenbehaftete Direktordefinition mit EULER-Winkel und Inextensibilitätsbedingung $\ \mathbf{D}\ =1$ |
| Integrationspunkte  | bilineare Polynome  |
| Interpolation von $\gamma_\alpha$   | 2 x 2   |
| Dickendiskretisierung   | Assumed-Natural-Strain-Method (ANSM)<br>multi-layered Konzept   |

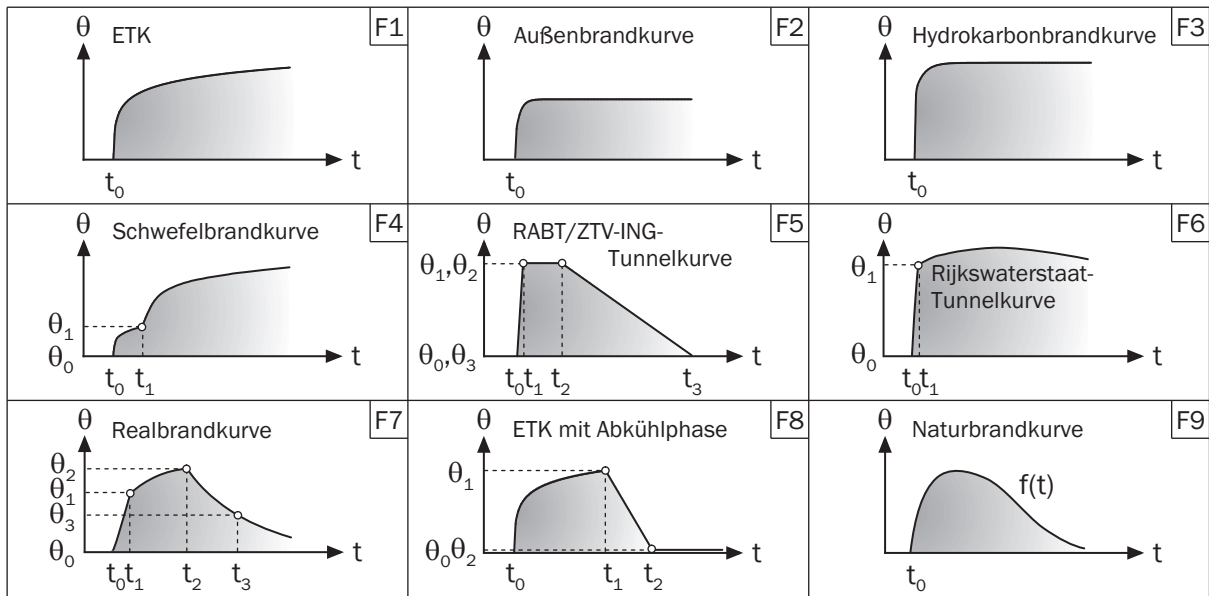
**Tabelle 6.1:** Zusammenfassende Darstellung des Finiten Elementes ASE4

dazu ein instationäres nichtlineares Differentialgleichungssystem zu lösen. Bedingt durch das verwendete Schalenelement ASE4 wird eine eindimensionale Wärmehaushaltsbeschreibung in  $\xi^3$ -Richtung als ausreichend genau betrachtet. Die Lösung der Temperaturgleichung kann losgelöst vom strukturelmechanischen Problem gelöst werden. Die Ermittlung der Temperaturen erfolgt auf Integrationspunktebene. Somit kann der thermische Zustand im Querschnitt im jeweiligen Zeitschritt innerhalb einer gekoppelten und kombinierten Simulation erfasst werden. Die Eingabe der thermischen Berechnungsansätze wird über einen Eingabeblock in der Schalenelementierung geregelt. An dieser Stelle können dann die in dieser Arbeit vorgestellten konstitutiven Stoffgesetze ausgewählt werden. Die Definition der Brandszenarien erfolgt über derzeit neun verschiedene Brandlast-Zeit-Funktionen. In Bild 6.6 sind die möglichen Temperaturzeitkurven dargestellt. Somit können die Einwirkungen in Form von zeitlich veränderlichen Temperaturen vorgegeben werden. Es besteht zusätzlich die Möglichkeit Daten einer externen Brandsimulation einzulesen und diese dann als thermische Belastung zu berücksichtigen.

## 6.4 Numerische Durchführung nichtlinearer Strukturanalysen

Um das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonflächentragwerken zu untersuchen, werden in Forschung und Praxis immer häufiger nichtlineare Verfahren verwendet. Infolge hoher Temperatureinwirkungen weisen Stahlbetonbauteile durch eine einsetzende





**Bild 6.6:** Definition der implementierten Einwirkungs-Zeitfunktionen F1-F9 zur Beschreibung der zeitvarianten Temperatureinwirkungen infolge eines Brandes.

Rissbildung des Betons, ein verändertes Betondruckverhalten oder ein Plastifizieren des Bewehrungsstahls ein extrem nichtlineares Geometrie- und Materialverhalten auf. Daher können diese Effekte nur durch nichtlineare Traglastanalysen erfasst werden, um den resultierenden Schnittgrößenzustand und die sich ergebenden Verformungen wirklichkeitsnah zu ermitteln. Diese Simulationsmethodik in Form einer nichtlinearen Strukturanalyse findet daher auch in der vorliegenden Arbeit ihre Anwendung.

Bei der Untersuchung der Tragfähigkeit von Stahlbetonstrukturen unter erhöhten Temperaturen kann zwischen zwei Traglaststrategien unterschieden werden. Es ergeben sich folgende Fragestellungen:

**1. stationäres Temperaturfeld - instationäre konservative Lasten.** Durch eine allgemeine Traglastanalyse wird die äußere Last so lange durch einen Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  gesteigert, bis das System versagt. Durch den ermittelten maximalen Laststeigerungsfaktor kann somit die maximale Beanspruchung  $E_d$  bei einem stationären Temperaturzustand bestimmt werden, bis die Beanspruchbarkeit  $R_d$  erreicht ist. Bei dieser Art der Simulation wird zwar ein temperaturabhängiges Materialverhalten berücksichtigt, allerdings ein stationäres.

**2. instationäres Temperaturfeld - stationäre konservative Lasten.** Hierbei werden bei einer Traglastanalyse die äußeren Lasten als stationär wirkend aufgebracht und anschließend mit der instationären Temperaturbelastung begonnen. Die Temperatureinwirkungen ändern sich mit zunehmender Zeit und verändern somit das Temperaturfeld im Querschnitt zu jedem diskreten Zeitpunkt  $t_i$ . Daraus resultieren auch ständige Veränderungen der Materialeigenschaften von Beton und Betonstahl. Es wird somit der Widerstand des Systems mit steigender Temperatur stetig abgebaut, bis es zum Versagen zum Zeitpunkt  $t_{Versagen}$  des Systems kommt.

In der vorliegenden Arbeit wird hauptsächlich die zweite Strategie zur Ermittlung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonflächentragwerken im Brandfall bzw. unter erhöhten Temperaturen verfolgt. Dies entspricht auch den in der Praxis vorliegenden Problemstellungen, wie lange ein ausreichender Widerstand eines Tragwerks im Fall eines Brandes gewährleistet ist.

### 6.4.1 Numerische Berücksichtigung stationärer konservativer Lasten und zeitabhängiger Temperatureinwirkungen

Um kombinierte thermo-mechanische Traglastanalysen an Stahlbetontragstrukturen durchzuführen, sind zunächst sämtliche einwirkenden Lasten separat in Einzellastfällen (ELF) zu definieren. Anschließend können diese zu Lastfallkombinationen (LFK) zusammengefasst werden. Werden statisch lineare Berechnungen durchgeführt, können auch alle Lastfälle getrennt voneinander berechnet werden, um sie später in Lastfallkombinationen zu superponieren. Bei nichtlinearen Berechnungen geht dies nicht. Dabei kann nur eine Einwirkung bzw. eine gesamte Einwirkungskombination inkrementell gesteigert werden.

Im Falle der zeitvarianten thermo-mechanischen Analyse hat sich die folgende Definition der Lastaufbringung als geeignet erwiesen. Zuerst werden alle konservativen Lasten, wie Eigen- und Verkehrslasten auf das System aufgebracht. Um das Tragverhalten gut abzubilden, werden diese Lasten nicht in einem einzelnen Berechnungsschritt angesetzt, sondern als eine inkrementelle Lastfallkombination gesteigert. So können Nichtlinearitäten, wie z.B. erste Rissbildung, vom System berücksichtigt werden. Bis zu diesem Zeitpunkt werden die Materialkennwerte bei einer Raumtemperatur von 20 °C angesetzt. Erst wenn diese vollständig (Lastfaktor  $\lambda_1 = 1.0$ ) auf das System wirken, wird der zeitvariable Temperaturlastfall (TLF) inkrementell auf den Querschnitt aufgebracht. Es ergibt sich somit folgende Gesamtlastfallkombination (GLFK) für die nichtlineare Simulationsrechnung:

$$\text{GLFK} = \lambda_1 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \text{ELF}_i}_{\text{LFK}_1} + \lambda_{ZV} \cdot \text{TLF}. \quad (6.71)$$

Bild 6.7 gibt die Lastfolgedefinition entsprechend Gleichung (6.71) wieder, wobei die konservativen Lasten in dem Zeitraum  $t_0 - t_{0,fi}$  und die zeitlich veränderlichen Temperatureinwirkungen vom Zeitpunkt  $t_{0,fi} - t_{n,fi}$  gesteigert werden.

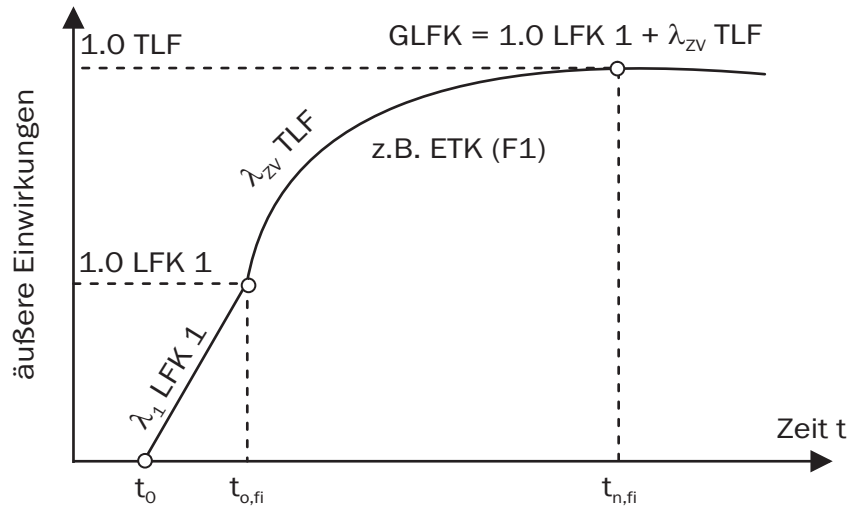
Die Lastinkremente ergeben sich aus der Angabe des Anfangslastfaktors  $\lambda_1^A = 0$ , des Endlastfaktors  $\lambda_1^E = 1.0$  und der gewünschten Anzahl an Laststeigerungen  $n$  mit:

$$\Delta\lambda_1 = \frac{(\lambda_1^E = 1.0) - (\lambda_1^A = 0.0)}{n}. \quad (6.72)$$

Damit ergibt sich der aktuelle Laststeigerungsfaktor zu:

$$\lambda_1^{(i+1)} = \lambda_1^{(i)} + \Delta\lambda_1. \quad (6.73)$$

Untersuchungen haben gezeigt, dass das Aufbringen der Lasten durch eine 10%-ige bis 25%-ige Steigerung der Last völlig ausreichend ist. Nachdem die Last komplett aufgebracht



**Bild 6.7:** Typische Lastfolgedefinition bei nichtlinearen thermo-mechanischen Analysen

ist, wird die resultierende Tragwerksantwort in einer Datenbank abgespeichert, um daraus folgend die nichtlineare Traglastanalyse für den Zeitbereich  $t_{0,fi} - t_{n,fi}$  anzuschließen. Dabei dient der Faktor  $\lambda_{zV}$  quasi als Zeitfaktor. Somit berechnet sich das Zeitinkrement mit:

$$\Delta\lambda_{zV} = \frac{(\lambda_{zV}^E = 1.0) - (\lambda_{zV}^A = 0.0)}{n} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{t_{n,fi} - t_{0,fi}}{n}. \quad (6.74)$$

Entsprechend ergibt sich im Zuge der Zeitsteuerung:

$$\lambda_{zV}^{(i+1)} = \lambda_{zV}^{(i)} + \Delta\lambda_{zV}. \quad (6.75)$$

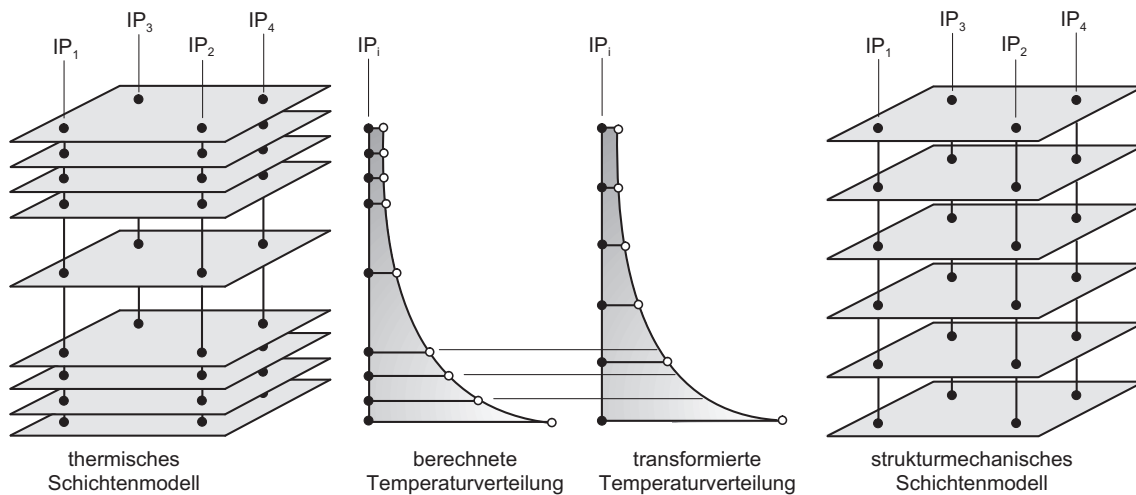
Die bisherige Betrachtungsweise ging von konstanten Last- und Zeitsteigerungsincrementen aus. Aufgrund der extrem hohen Temperatureinwirkungen auf den zu untersuchenden Querschnitt kommt es gerade in den ersten Minuten zu numerischen Schwierigkeiten beim Berechnen des Temperaturgradienten über die Querschnittshöhe. Um eine Steigerung der Genauigkeit und eine Verbesserung der numerischen Berechnung zu erhalten, ist eine automatische Schrittweitensteuerung in das System implementiert, bei der die Zeitschritte automatisch verkleinert werden, wenn das Zeitinkrement zu groß vorgewählt wurde. Die Überprüfung, ob eine Schrittweitenanpassung erforderlich ist, geschieht über eine Genauigkeitsabfrage. Details zur Schrittweitensteuerung sind Wörmann (2004) und Mannsfeld (2003) zu entnehmen.

### 6.4.2 Zeitvariante thermische Verzerrungsanteile

Bei der verwendeten Multi-layered Modellierung in Dickenrichtung des verwendeten Schalelementes ASE4 steigt der numerische Rechenaufwand mit steigender Layeranzahl im strukturmechanischen Modell erheblich. Zur Minimierung des numerischen Rechenaufwandes empfiehlt es sich bei nichtlinearen Strukturanalysen eine möglichst geringe Anzahl an äquidistante Schichten vorzugeben. Für nichtlineare instationäre thermischen Analysen

ist jedoch eine weitaus höhere Anzahl von Layern erforderlich, um die Temperaturverteilung über die Querschnittshöhe berechnen zu können. Es ist dennoch nicht sinnvoll, die gleiche Subdiskretisierung in Dickenrichtung für die thermische Analyse und die strukturelle Analyse zu verwenden.

Somit wird intern, parallel zu dem vorhandenen mechanischen Schichtenmodell, ein der thermischen Situation angepasstes Schichtenmodell erzeugt. Dieses besteht in den meisten Fällen aus einer erhöhten Anzahl an Layern. Die thermischen Layerdicken sind dabei optimalerweise an den Rändern kleiner, um Ungenauigkeiten in der Temperaturverlaufsberechnung in  $\xi^3$ -Richtung zu minimieren. Vorteil einer zur Wärmequelle hin feiner werdenden Diskretisierung ist, dass die angesetzte Zeitschrittweite  $\Delta t$  zum Aufbringen der Temperaturlast nicht zu klein gewählt werden muss. Bild 6.8 zeigt die unterschiedlichen Modellierungen und ihre Kopplung.



**Bild 6.8:** Transformation zwischen thermischen und strukturellen Schichtenmodellen

Demnach erfolgt die thermische Analyse analog dem beschriebenen Vorgehen in Kapitel 3.3 eindimensional auf Integrationspunktebene. Es kann gewählt werden, ob jeder Integrationspunkt berechnet werden soll oder ob die ermittelten Werte im ersten Integrationspunkt  $IP_1$  auf die verbleibenden Integrationspunkte  $IP_2 - IP_4$  übertragen werden können. Dies bedingt eine erhebliche Einsparung an Rechenzeit. Dieses Vorgehen kann erweitert werden, indem der ermittelte Temperaturverlauf nicht nur auf Integrationspunktebene, sondern sogar auf Elementebene weitergegeben wird. Besonders wirkungsvoll ist diese Methode, wenn die gesamte Struktur derselben äußeren thermischen Belastung ausgesetzt ist.

Liegen die Temperaturen in den Knoten der thermischen Modellierung vor, werden diese auf die Ebene der strukturellen Multi-layered Modellierung unter Verwendung einer quadratischen Funktion transformiert. Sind die Temperaturen im strukturellen Modell bekannt, werden damit die Verzerrungsanteile, wie im Abschnitt 4.4.6, im jeweiligen Materialpunkt bestimmt. Aufgrund der zugrundeliegenden Schalentheorie werden Verzerrungen in Dickenrichtung vernachlässigt. Gleichzeitig wird die Reduktion der Rechenwerte der Materialien Beton und Betonstahl vorgenommen.

### 6.4.3 Zeitvariante Multi-Level-Iterations Methodik

Um Stahlbetonflächentragwerke geometrisch und physikalisch nichtlinear analysieren zu können, wird von Krätzig (1997) die Multi-Level-Strategie verwendet. Sie findet sich in vielen wissenschaftlichen Arbeiten als zeitunabhängige Lösungsstrategie wieder [Montag 1997], [Pölling 2000]. Mit der Arbeit nach Wörmann (2004) wurde das Manko der zeitunabhängigen Beschreibung beseitigt, eine erweiterte zeitabhängige Variante erarbeitet und erfolgreich in das System FEMAS 2000 implementiert. Es basiert auf der Unterscheidung zwischen Last- und Zeitschritten, die getrennt oder in kombinierter Weise ablaufen können. Für die in dieser Arbeit notwendigen zeitabhängigen thermischen Einwirkungen ist die Möglichkeit, Zeitschritte in dieser Modellierung zu verwenden, essentiell. An dieser Stelle soll ein kurzer Überblick über die erweiterte Variante der Multi-Level-Iterations-Strategie gegeben werden. Genauere Details sind der Arbeit Wörmann (2004) zu entnehmen. In Bild 6.9 ist die Strategie, die auf vier Berechnungsebenen beruht, für den Last-Zeit-Schritt dargestellt.

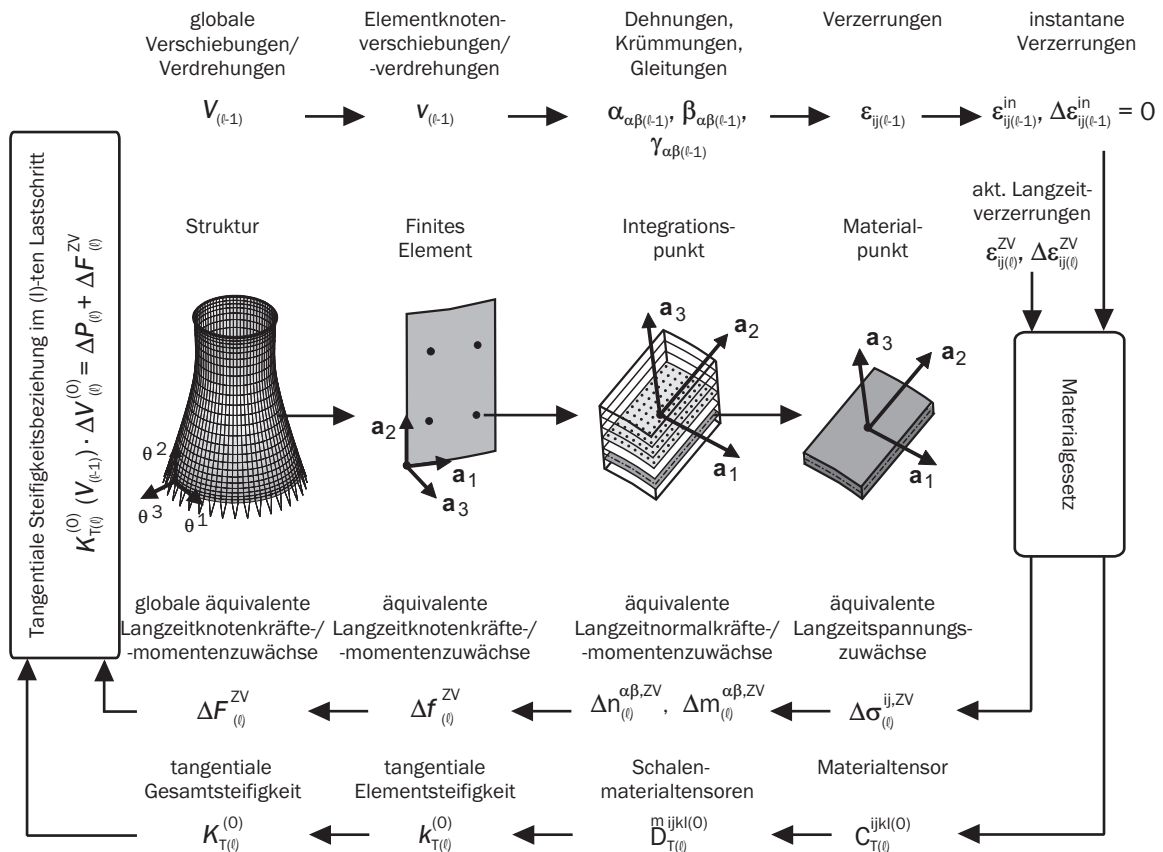


Bild 6.9: Zeitvariante Multi-Level-Iterations Strategie nach Wörmann (2004)

Die Berechnungsschleife beginnt in Bild 6.9 oben links auf Strukturebene. Zur Berechnung des aktuellen Lastschrittes sind auf Strukturebene die globalen Verschiebungen  $V_{l-1}$  des letzten ausiterierten Lastschrittes als Startwerte vorhanden. Durch eine Inzidenztransformation können die Verschiebungen auf Elementebene zu  $v_{l-1}$  transformiert werden.

Mit Hilfe der definierten Kinematik und der Ansatzfunktionen können nun auf Integrationspunktebene die Gesamtverzerrungen  $\gamma_{ij(l-1)}$  und daraus wiederum auf Materialpunktebene die resultierenden Gesamtverzerrungen  $\varepsilon_{ij(l-1)}$  pro Schicht berechnet werden. Zur weiteren Berechnung werden nun die instantanen Verzerrungen des letzten Lastschrittes  $\varepsilon_{ij(l-1)}^{in}$  als Differenz zwischen den zeitvarianten Verzerrungen  $\varepsilon_{ij(l-1)}^{ZV}$  und den Gesamtverzerrungen  $\varepsilon_{ij(l-1)}$  ermittelt. An diesem Punkt des Algorithmus findet die Berücksichtigung der aktuellen zeitvarianten Verzerrungen  $\varepsilon_{ij(l)}^{ZV}$  statt. Als inkrementelle Zuwächse zum vorherigen Lastschritt (l-1) ergeben sich:

$$\Delta\varepsilon_{ij(l)}^{ZV} = \varepsilon_{ij(l)}^{ZV} - \varepsilon_{ij(l-1)}^{ZV}. \quad (6.76)$$

Durch die Verknüpfung der Verzerrungen mit dem Materialgesetz auf Materialpunktebene resultiert der tangential Materialsteifigkeitstensor  $C_{T(l)}^{ijkl(i)}$ , der wiederum durch Integration über die Schalendicke H in den Schalenmaterialtensor  $\overset{m}{D}^{ijkl}$  mündet. Dieser dient dann zur Formulierung der tangentialen Steifigkeitsmatrix auf Elementebene  $k_{T(l)}^{(0)}$  und schließlich durch eine weitere Inzidenztransformation auf die tangential Steifigkeitsmatrix  $K_{T(l)}^{(0)}$ . Aus den vorhandenen zeitvarianten inkrementellen Zuwächsen  $\Delta\varepsilon_{ij(l)}^{ZV}$  aus (6.76) werden die äquivalenten Langzeitspannungszuwächse durch Multiplikation mit dem entsprechenden Elastizitätsmodul ermittelt. Nach weiterer Integration über die Schalenhöhe H werden die Langzeitschnittgrößen und dann die Vektoren  $\Delta\mathbf{f}_{(l)}^{ZV}$  auf Element- und  $\Delta\mathbf{F}_{(l)}^{ZV}$  auf Strukturebene ermittelt. Somit ergibt sich die tangential Steifigkeitsbeziehung zu:

$$\mathbf{K}_{T(l)}^0(\mathbf{V}_{(l-1)}) \cdot \Delta\mathbf{V}_{(l)}^{(0)} = \Delta\mathbf{P}_{(l)} + \Delta\mathbf{F}_{(l)}^{ZV}. \quad (6.77)$$

Als Lösung erhält man so die noch nicht ausiterierten Verschiebungen im aktuellen Lastfall l mit:

$$\mathbf{V}_{(l)}^{(0)} = \mathbf{V}_{(l-1)} + \Delta\mathbf{V}_{(l)}^{(0)}. \quad (6.78)$$

Zur weiteren iterativen Vorgehensweise wird auf Wörmann (2004) verwiesen.

#### 6.4.4 Allgemeine Rechenannahmen

Der Grenzzustand der Tragfähigkeit gilt als erreicht, wenn in dem Querschnitt die kritische Stahldehnung, die kritische Betondehnung oder der kritische Zustand des indifferenten Gleichgewichts eintritt.

Wie bereits in Kapitel 2.2.2 beschrieben, lautet die allgemeine Nachweisgleichung des semi-probabilistischen Konzeptes:

$$\gamma_E \cdot E_k \leq \frac{R_k}{\gamma_R}. \quad (6.79)$$

Auf der Lastseite werden die konservativen Lasten mit dem Teilsicherheitsfaktor  $\gamma_E = 1.0$  multipliziert, so dass sich die Analysen immer auf eine außergewöhnliche Bemessungssituation gemäß (2.30) beziehen.

Bedingt durch die Zuordnung des Teilsicherheitsbeiwertes

$$\gamma_R \Rightarrow \gamma_{M,fi} = \gamma_{c,fi} = \gamma_{s,fi} = 1.0 \quad (6.80)$$

werden auf der Widerstandsseite von (6.79) auch die Materialeigenschaften zu Beginn bei der nichtlinearen Traglastanalyse nicht erhöht oder abgemindert.

Es wird zunächst mit den charakteristischen Materialeigenschaften von Beton und Betonstahl gerechnet. Erst wenn die Temperaturentwicklung am Integrationspunkt im betrachteten Element Materialveränderungen hervorrufen würde, werden die Materialkennwerte direkt am Materialpunkt temperaturbedingt angepasst. Somit können auftretende temperaturbedingte physikalische Nichtlinearitäten berücksichtigt werden.

Programmtechnisch besteht mit dem neu entwickelten Modul STRGW-Fire für das Finite-Element System FEMAS 2000 die Möglichkeit, sämtliche temperaturbedingte Materialnichtlinearitäten getrennt bzw. kombiniert anzusteuern, um so deren Einfluss auf die Tragfähigkeit von Konstruktionen zu analysieren.





# Kapitel 7

## Validierung des numerischen Rechenmodells

---

*Zur Leistungsbeurteilung werden Referenzbeispiele kritisch herangezogen und unter verschiedenen Fragestellungen untersucht. Um die Validierung zu erreichen, werden getrennt für die einzelnen Komponenten der thermo-mechanischen Stahlbetonmodellierung separate Benchmarktests durchgeführt. Als Grundlage dienen experimentell ermittelte Versuchsdaten und numerisch berechnete Referenzdaten verschiedener Autoren. Im Rahmen der Neu- und Weiterentwicklung von FEMAS 2000 sind vielfältige numerische Untersuchungen zur Sicherstellung der einzelnen Parameter durchgeführt worden. In dieser Arbeit wird eine Auswahl an signifikanten Beispielen dargestellt.*

---

### 7.1 Allgemeines

Der Validierungsprozess umfasst drei Stufen, in denen jeweils signifikante Beispiele untersucht werden. Zunächst wird in der ersten Stufe die Stahlbetonmodellierung bei Normaltemperatur betrachtet. Dabei wird das einaxiale und biaxiale Tragverhalten von Stahlbetonstrukturen untersucht. Nach der mechanischen Verifizierung der einzelnen Komponenten Beton und Bewehrung werden zwei Stahlbetonsysteme mit dem Verfahren einer nichtlinearen Traglastanalyse betrachtet, wobei die neuen Stoffgesetze nach Abschnitt 4.4 mit vorhandenen Stoffgesetzen, wie z.B. denen der DIN 1045-1 (2008), verglichen werden.

In der zweiten Stufe werden Beispiele vorgestellt, die zur Validierung der thermischen Analyse unter Hochtemperaturbedingungen dienen. Dabei wird vornehmlich eine eindimensionale Temperaturverteilung ermittelt. Als Systeme stehen massige und dünne flächenhafte Strukturen zur Verfügung. Verglichen werden die eigenen Berechnungen an experimentell und numerisch ermittelten Temperaturfeldern.

In Stufe drei werden gekoppelte thermo-mechanische Referenzbeispiele betrachtet, die eine

korrekte Funktionsweise des neu entwickelten Programmmoduls STRGW-Fire bestätigen sollen. Es handelt sich dabei um Balken und Plattensysteme.

Da es sich in dieser Arbeit hauptsächlich um Flächen- und Schalentragwerke aus Stahlbeton handelt, können die Verifizierungsbeispiele der Norm DIN EN 1991-1-2/NA (2010) nicht herangezogen werden, da sich diese entweder im thermischen Bereich auf zweidimensionale Temperaturfelder stützen oder im thermo-mechanischen Bereich vorrangig Stützen betrachten.

## 7.2 Validierung der Stahlbetonmodellierung

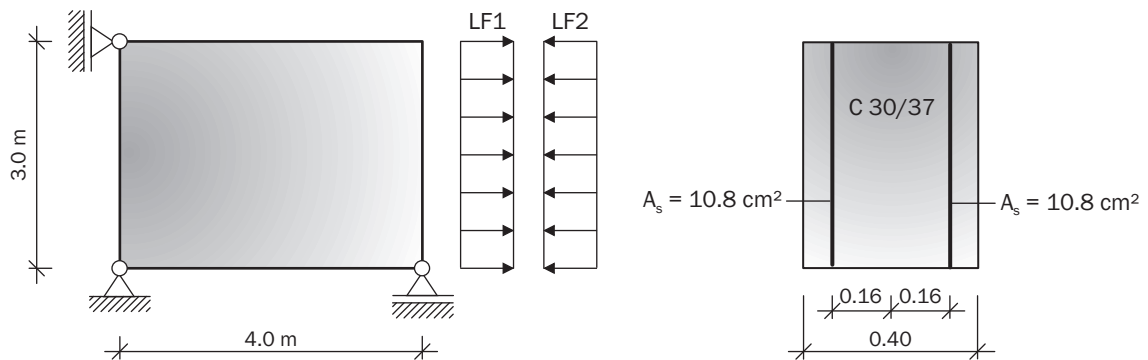
Das Programmsystem FEMAS 2000 bewährt sich seit vielen Jahren als wissenschaftliches und praxistaugliches modulares Programmsystem zur Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken mit finiten Elementen. Aufgrund der umfangreichen Neuentwicklungen im Hinblick auf die temperaturabhängigen Materialgesetze für Beton und Stahl sowie die Erweiterung zur Erfassung zeitlich veränderlicher hochtemperaturbedingter Einflüsse, ist eine erneute Verifizierung der Stahlbetonmodellierung unabdingbar. Es werden dazu bewusst Beispiele aus neueren Arbeiten, wie beispielsweise Andres (2004) und Wörmann (2004) verwendet, um den vorhandenen Bestand zu sichern und die Erweiterungen miteinander vergleichen zu können. Als Umgebungstemperatur wird bei diesen Beispielen stets 20 °C zugrundegelegt.

### 7.2.1 Benchmarktest an einer Stahlbetonscheibe

Als erstes Beispiel wird eine symmetrisch bewehrte Stahlbetonscheibe betrachtet, die getrennt durch axialen Zug (LF1) und Druck (LF2) belastet wird. Mit diesem Benchmarktest werden die einzelnen Komponenten Beton und Betonstahl bis zum Versagen belastet. Um die Materialien Beton und Betonstahl getrennt zu verifizieren, wird die Steifigkeit des jeweils nicht untersuchten Materials zu Null gesetzt. Bild 7.1 zeigt die Berechnungsgrundlagen zu diesem Beispiel. Die Modellierung der Betonscheibe erfolgt durch unterschiedliche Einteilungen durch ASE4 Elemente in den Rastergrößen 1 x 1, 2 x 2, 4 x 4 und 8 x 6. In Dickenrichtung wird das System durch 10 Betonlayer und 2 symmetrisch angeordnete Bewehrungsschichten diskretisiert.

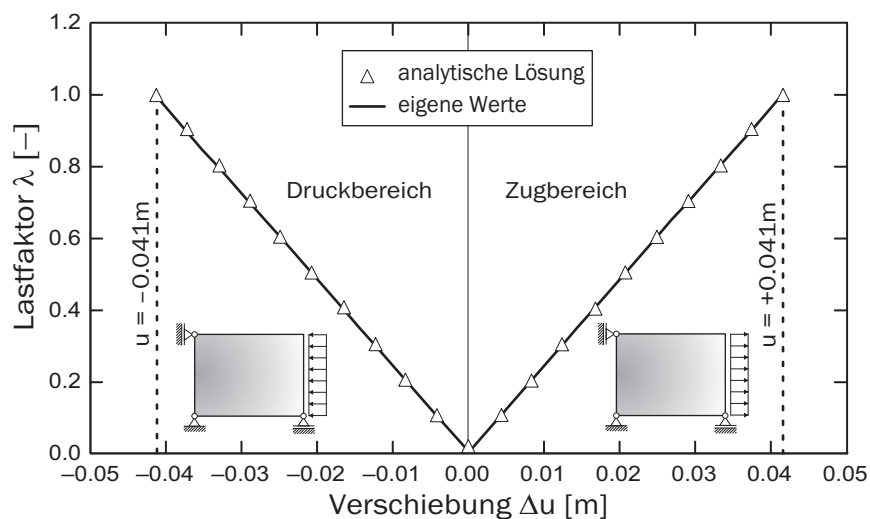
Als Validierungsgrundlage sollen analytische Lösungen der Längenänderungen  $\Delta l$  bzw. Längendehnungen  $\Delta \epsilon$  des Querschnitt dienen. Für den Betonstahl ist nach dem Plastifizieren das Reißen des Betonstahls beim Überschreiten der Zugfestigkeit  $f_{yk}$  der Versagensgrund. Die zu erwartenden Versagensmechanismen für den Beton sind unter der reinen Druckbelastung (LF2) der Betonbruch und unter Zug (LF1) ein Versagen durch Rissbildung des Betons bei der maximalen Zugfestigkeit  $f_{ct}$ .

Zunächst wird der Werkstoff Betonstahl untersucht. In einem ersten Schritt wird das System in Bild 7.1 durch axialen Druck (LF2) und einaxialen Zug (LF1) belastet. Dabei wird die Last inkrementell durch den Lastfaktor  $\lambda$  gesteigert. Als 1.0-fache Last werden 10000 kN/m verteilt auf die Scheibenhöhe  $h = 3\text{m}$  aufgebracht. Um einen Vergleich mit



**Bild 7.1:** Benchmarktest an einer Stahlbetonscheibe: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen des untersuchten Betonquerschnitts

der linearen analytischen Lösung durchführen zu können, wird dieses Beispiel mit linearer Kinematik berechnet. Bild 7.2 zeigt die Last-Verformungspfade für den Druck- und Zugbereich.



**Bild 7.2:** Benchmarktest einer Stahlbetonscheibe: Last-Verformungspfade der Stahlbetonscheibe unter Druck- und Zugbeanspruchung nach linearer Theorie

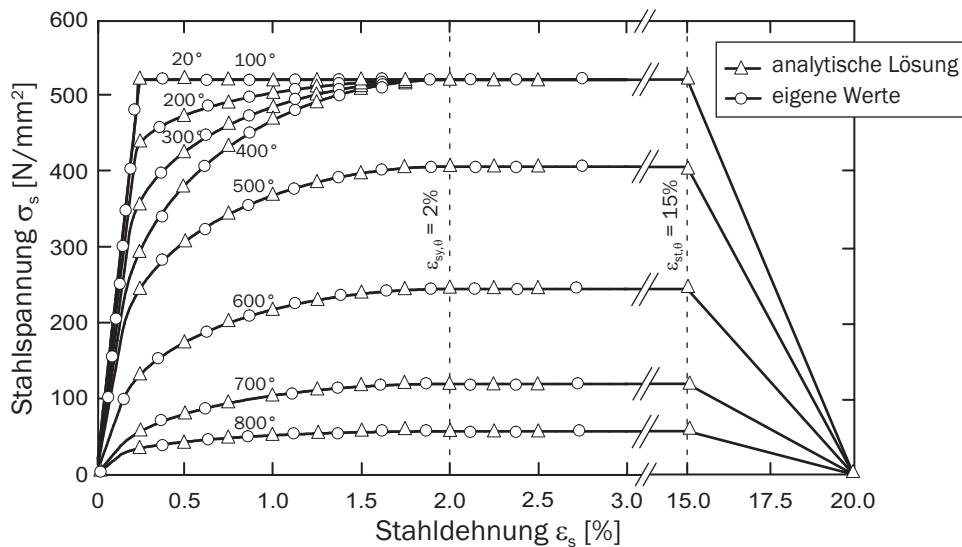
Es ist eine exakte Übereinstimmung mit der analytischen Lösung zu erkennen, was ein Zeichen dafür ist, dass der Werkstoff Stahl durch seine verschmierte Layerschicht richtig abgebildet wird. Für den Lastfaktor  $\lambda = 1.0$  ergibt sich demnach als resultierende Stahlspannung  $\sigma_s$  nach linearer Theorie:

$$\sigma_s = \frac{\pm q}{A_{s,tot}} = \frac{\pm 10000 \text{ kN/m}}{2 \cdot 0.0023 \text{ m}^2/\text{m}} = \pm 2.173913 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2. \quad (7.1)$$

Hieraus ergibt sich für die Längenänderung  $\Delta u$  in der jeweiligen Kraftrichtung:

$$\Delta u = \frac{\pm \sigma_s}{E_s} \cdot L_x = \frac{2.173913 \cdot 10^6 \text{ kN/m}}{2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2} \cdot 4.0 \text{ m} = \pm 41.40 \text{ mm} \quad (7.2)$$

Zur weiteren Validierung der einzelnen Stoffgesetze im erweiterten Temperaturbereich von 20 bis 1200 °C wird dem kompletten Querschnitt des Systems eine fest vorgegebene konstante Temperatur zugeordnet. Der Querschnitt gilt damit als stationär durchwärmt. Anschließend folgt eine nichtlineare Traglastanalyse, wobei zur Validierung der Bewehrung eine Zugkraft und für den Beton die Druckkraft bis zum Versagen gesteigert wird. Der untersuchte Temperaturbereich beträgt 20 °C bis 800 °C.



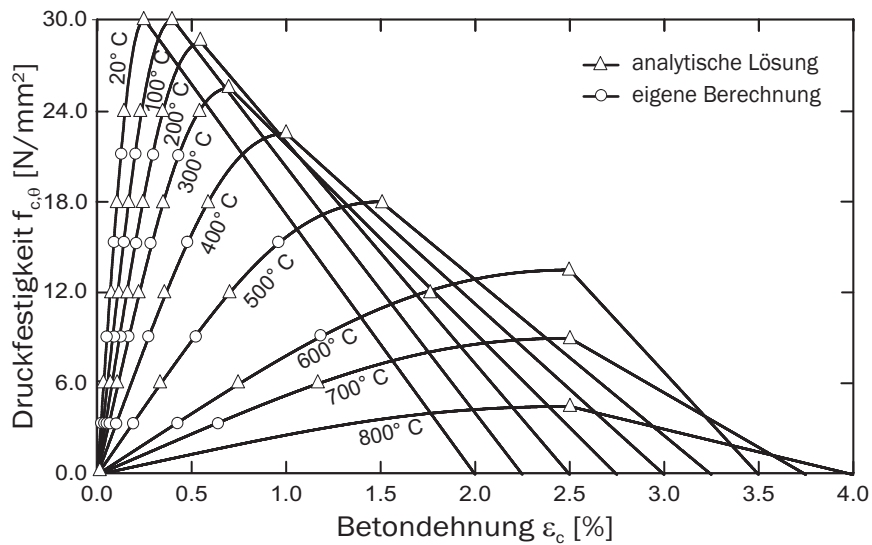
**Bild 7.3:** Benchmarktest einer Stahlbetonscheibe: Temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Kurven von Betonstahl.

Für den Betonstahl zeigt sich im Bild 7.3 eine exakte Übereinstimmung mit der temperaturabhängigen Spannungs-Dehnungs-Linie aus der analytischen Bestimmung und der eigenen Berechnung. Lediglich im abfallenden Ast kommt es zum frühzeitigeren Abbruch der Berechnung, da der Betonstahl im darauffolgenden Laststeigerungsschritt reißt.

Zu ähnlich gut übereinstimmenden Beobachtungen gelangt man bei Betrachtung des reinen Betonquerschnittes (Bild 7.4). Auch hier ist die gute Deckung der temperaturabhängigen Spannungs-Dehnungs-Beziehung ein Maß dafür, dass die Stoffgesetze für Beton in korrekter Weise in das Programmsystem FEMAS 2000 implementiert worden sind. Die Berechnung endet mit dem Versagen des Betons bei Erreichen der maximalen Druckfestigkeit  $f_{c,\theta}$  durch einen Betonbruch. Der abfallende Ast konnte aufgrund der lastgesteuerten Traglastanalyse nicht abgebildet werden. Die Validierung des Betonmodells für den Zugbereich konnte ebenfalls erfolgreich durchgeführt werden.

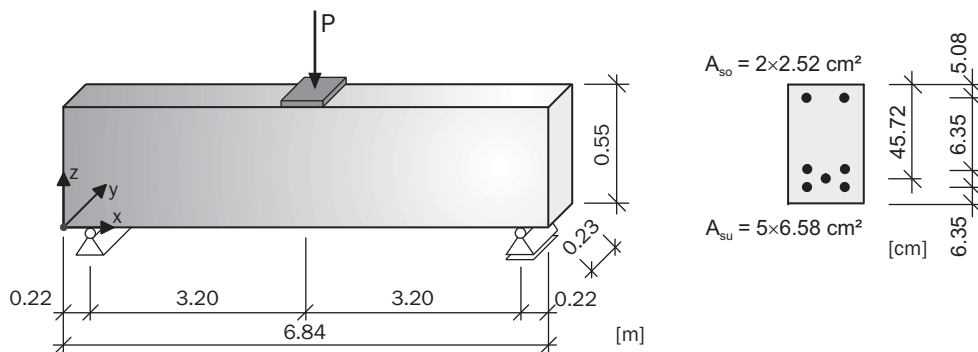
## 7.2.2 Stahlbetonbalken unter Einzellast

Um das Verhalten und das Zusammenspiel von Beton und Betonstahl im Verbund zu untersuchen, wird ein Beispiel aus einer experimentellen Versuchsreihe aus den 60er Jahren von Bresler & Scordelis (1963) herangezogen. Sie führten experimentelle Versuche zum Tragverhalten von Stahlbetonbalken insbesondere im Hinblick auf die Bestimmung



**Bild 7.4:** Benchmarktest einer Stahlbetonscheibe: Temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Linien von Normalbeton C30/37 mit quarzhaltigen Zuschlägen.

der Schubsteifigkeit durch. Anhand von zwölf verschieden bewehrten Balken sollten Erkenntnisse über das Tragverhalten, die Rissentwicklung und die jeweiligen Festigkeiten gewonnen werden. In der vorliegenden Arbeit wird der Balken B3 aus dieser Versuchsreihe gewählt, der einen hohen Bewehrungsgrad, sowohl Zug- als auch Druckbewehrung, besitzt. In Bild 7.5 sind die Daten zur Geometrie und zur Bewehrung des zu untersuchenden Balkens angegeben.



**Bild 7.5:** Stahlbetonbalken unter Einzellast: System und Bewehrung nach Bresler & Scordelis (1963) - Balken Nr. B3.

Durch die Einfachheit des Systems als Einfeldträger mit einer Einzellast erwies sich diese Versuchsreihe schon bei etlichen Autoren als Validierung sehr gut. Mit diesem System ist ein guter Vergleich zwischen experimentell ermittelten Ergebnissen und einer Vielzahl numerischer Analysen möglich. In Tabelle 7.1 sind die angesetzten Materialkennwerte angegeben, die aus Bresler & Scordelis (1963) entnommen sind.

Der Balken wird mit 20 ASE4 Elementen in Längsrichtung diskretisiert, wobei  $\theta_1$  und  $\theta_2$  die x-y-Ebene aufspannen und die  $\theta_3$  Richtung in die z-Richtung zeigt. Jedes einzelne Ele-

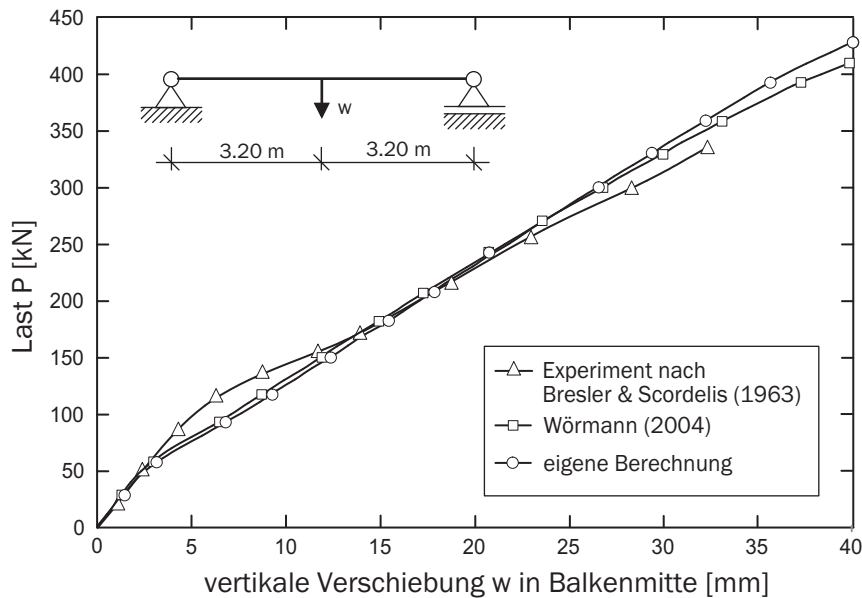
ment wiederum ist in 10 Betonschichten unterteilt. Die Bewehrung wird verschmiert durch 4 Stahllayer berücksichtigt, wobei die Materialien für die entsprechende Bewehrungslage gemäß Tabelle 7.1 angenommen werden.

| Materialparameter Beton: |                 |                         | Materialparameter Betonstahl: |                 |                          |
|--------------------------|-----------------|-------------------------|-------------------------------|-----------------|--------------------------|
| Druckfestigkeit          | $f_c$           | 38.75 N/mm <sup>2</sup> | Streckgrenze $A_{so}$         | $f_y$           | 345.40 N/mm <sup>2</sup> |
| Zugfestigkeit            | $f_{ct}$        | 4.21 N/mm <sup>2</sup>  | Elastizitätsmodul             | $E_{s0}^{so}$   | 201300 N/mm <sup>2</sup> |
| Elastizitätsmodul        | $E_{c0}$        | 31992 N/mm <sup>2</sup> | Streckgrenze $A_{su}$         | $f_y$           | 552.40 N/mm <sup>2</sup> |
| max. Dehnung             | $\varepsilon_c$ | 2.20 %                  | Elastizitätsmodul             | $E_{s0}^{su}$   | 205500 N/mm <sup>2</sup> |
| Querkontraktion          | $\nu$           | 0.15                    | max Stahldehnung              | $\varepsilon_s$ | 5 %                      |

**Tabelle 7.1:** Stahlbetonbalken unter Einzellast: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter nach Bresler & Scordelis (1963)

Eine Parameterstudie zur Element- und Schichtenanzahl je Element ergab keine nennenswerten Änderungen der Lösung, sodass die gewählte Diskretisierung als konvergierend angesehen wird.

In Bild 7.6 ist die Last-Verschiebungskurve dargestellt. Aufgetragen ist die mittige Durchbiegung beim Lastangriffspunkt bei  $x = 3.20\text{m}$ . Es ist zu erkennen, dass die rechnerisch ermittelte Versagenslast die experimentell ermittelte übersteigt. Dieses Ergebnis erzielen auch andere Autoren mit ihren numerischen Lösungen [Noh 2001], [Wörmann 2004].



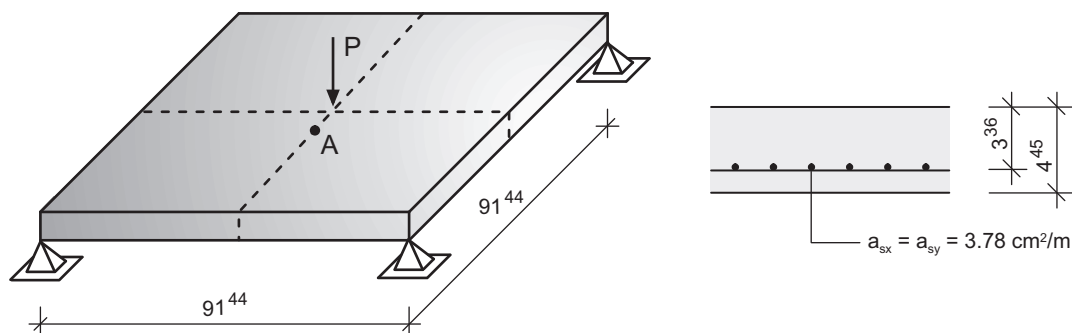
**Bild 7.6:** Stahlbetonbalken unter Einzellast: Last-Verschiebungs-Diagramm.

Bei allen Berechnungen ergibt sich ein Versagen durch einen Bruch der Betondruckzone im Lasteinleitungsbereich. Im direkten Vergleich mit der Lösung aus Wörmann (2004) ist anfänglich ein etwas weiches Verhalten zu erkennen, was auf die neu implementierten hochtemperaturbedingten Materialmodellierungen gemäß Abschnitt 4.4 zurückzuführen

ist. Damit sind die vertikalen Verformungen aufgrund der eingepprägten Last bis zu einer Größe von ca. 200 kN etwas größer, ab diesem Punkt sind sie geringer. Am Berechnungsende ist die maximale aufzunehmende Last etwas größer als bei der numerischen Berechnung nach Wörmann (2004). Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach DIN EN 1992-1-2 (2010) beschreibt gegenüber der Formulierung nach DIN 1045-1 (2008) ein geringfügig flacheres Ansteigen bis zur maximalen Druckfestigkeit, was sich im Berechnungsergebnis widerspiegelt. Mit diesem Validierungsbeispiel konnte somit erfolgreich die Implementierung der einaxialen Betonmodellierung in Verbindung mit der Betonstahlformulierung nachgewiesen werden.

### 7.2.3 Stahlbetonplatte unter Punktlast

Nachdem die einaxiale Betonmodellierung korrekt validiert werden konnte, wird nun das biaxiale Tragverhalten untersucht. Dazu wird eine punktgestützte quadratische Platte von Jofriet & McNeice (1971) als Referenzbeispiel herangezogen. Die extrem dünne Platte besitzt ein orthogonales Bewehrungsnetz zur Aufnahme der Zugbeanspruchungen, die durch eine mittig angreifende Einzellast  $P$  verursacht werden. Die Angaben zum System und der Bewehrungsanordnung sind Bild 7.7 zu entnehmen.



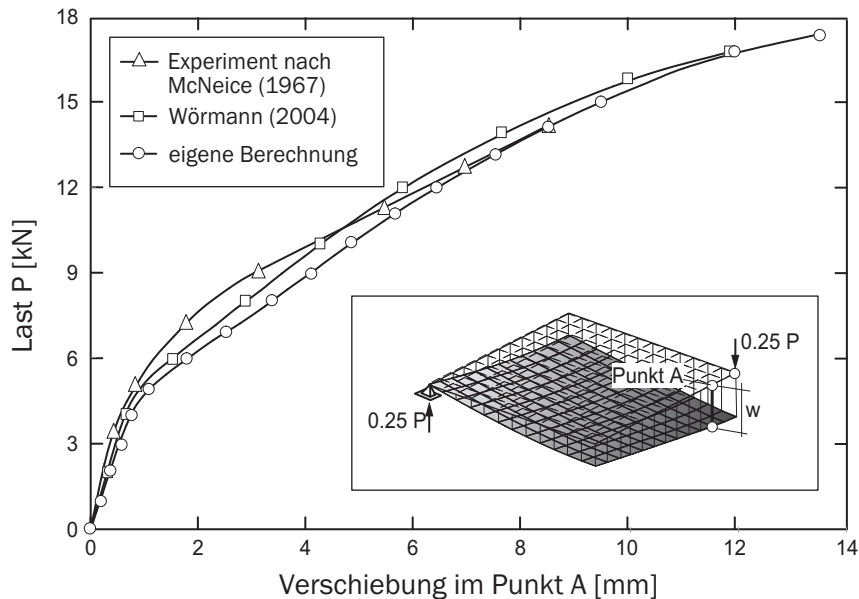
**Bild 7.7:** Stahlbetonplatte unter Punktlast: System und Bewehrung nach Jofriet & McNeice (1971)

| Materialparameter Beton: |                 |                         | Materialparameter Betonstahl: |                 |                          |
|--------------------------|-----------------|-------------------------|-------------------------------|-----------------|--------------------------|
| Druckfestigkeit          | $f_c$           | 37.92 N/mm <sup>2</sup> | Streckgrenze                  | $f_y$           | 345.40 N/mm <sup>2</sup> |
| Zugfestigkeit            | $f_{ct}$        | 2.89 N/mm <sup>2</sup>  | Elastizitätsmodul             | $E_{s0}$        | 201300 N/mm <sup>2</sup> |
| Elastizitätsmodul        | $E_{c0}$        | 28613 N/mm <sup>2</sup> | max. Dehnung                  | $\varepsilon_s$ | 5 %                      |
| max. Dehnung             | $\varepsilon_c$ | 2.20                    |                               |                 |                          |
| Querkontraktion          | $\nu$           | 0.15                    |                               |                 |                          |

**Tabelle 7.2:** Stahlbetonplatte unter Punktlast: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter nach Jofriet & McNeice (1971)

Für die numerische Abbildung wird nur ein Viertel der doppelsymmetrischen Platte mit 12 x 12 Elementen mit jeweils 10 Schichten diskretisiert. In Bild 7.8 sind die eigenen Berechnungsergebnisse vergleichend mit den experimentell ermittelten Werten nach Jofriet

& McNeice (1971) und dem numerisch ermittelten Verlauf der Last-Verschiebungs-Kurve nach Wörmann (2004) dargestellt. Dabei ist jeweils die vertikale Verschiebung im Punkt A gegenüber der Last P aufgetragen. Wegen der Übersichtlichkeit sind weitere numerische Ergebnisse anderer Autoren in der Darstellung in Bild 7.8 vernachlässigt worden. Qualitativ verlaufen die Kurven identisch, wohingegen quantitativ die eigene Lösung etwas weicher ausfällt als die Berechnung von Wörmann (2004). Erklärt werden kann dies mit einer etwas früher einsetzenden Rissentwicklung auf der Unterseite der Platte.



**Bild 7.8:** Stahlbetonplatte unter Punktlast: Last-Verschiebungs-Kurve

Im Ergebnis ist bei diesem Beispiel erkennbar, dass mit den neuen temperaturbedingten Materialformulierungen eine gute Konvergenz auch im Falle eines biaxialen Tragverhaltens numerisch erreicht werden kann.

#### 7.2.4 Zusammenfassung und Bewertung

Zur Validierung der Stahlbetonmodellierung wurden drei Systeme untersucht. Mit dem ersten Benchmarktest konnten die in das Programmsystem FEMAS 2000 neu implementierten einaxialen konstitutiven Materialgesetze für Beton und Betonstahl erfolgreich validiert werden. Gleichlaufend wurde eine unterstellte Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften getestet.

Mit der Simulation eines Stahlbetonbalkens unter einer Einzellast konnte der Verbundwerkstoff Stahlbeton wirklichkeitsnah bis zum Versagen berechnet werden, was ein realistisches Zusammenspiel zwischen Beton und Bewehrungsstahl aufzeigt. Das dritte Beispiel diente zur Absicherung der biaxialen Materialformulierung des Betons.

Zusammenfassend ist zu bemerken, dass mit der vorliegenden biaxialen Stahlbetonmodellierung zeitinvariante Berechnungen wirklichkeitsnah durchgeführt werden können.

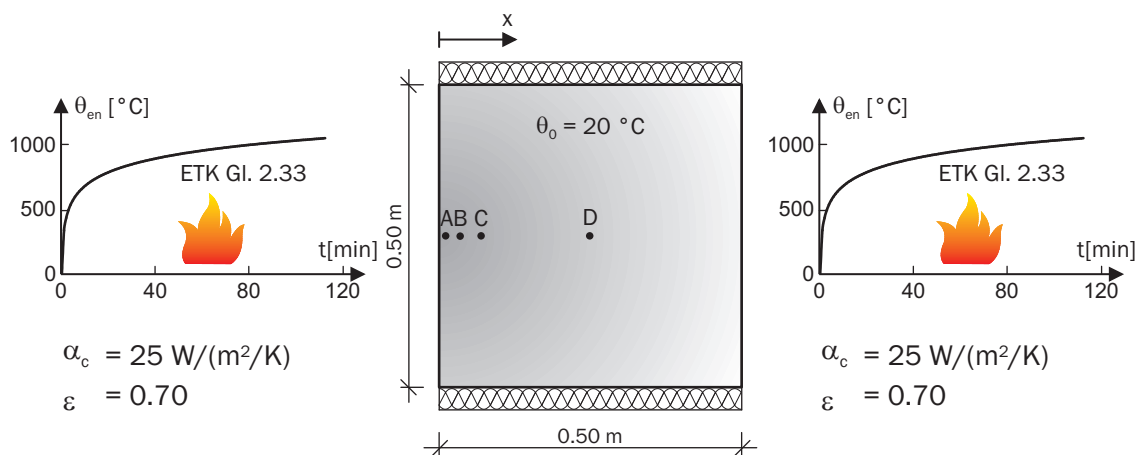


## 7.3 Validierung zeitvarianter thermischer Vorgänge

Die folgenden Beispiele dienen zur Validierung der thermischen Analyse von Stahlbetonbauteilen. Dabei werden die in Kapitel 3.4 dargestellten Stoffgesetze für Beton und Betonstahl angewendet. Die durchgeführten thermischen Analysen können abgekoppelt von einer strukturmechanischen Berechnung oder gekoppelt und damit parallel ablaufen. Der Vorteil einer getrennten Berechnung liegt darin, dass so auf gespeicherte Temperaturdaten zurückgegriffen werden kann, sobald Neuberechnungen der zu untersuchenden Systeme notwendig werden und sich die thermischen Anfangs- und Randbedingungen nicht geändert haben. Parallel ablaufende thermische Analysen haben dagegen den Vorteil, dass nur die benötigten Temperaturverläufe berechnet werden. Eine etwaige Querschnittsschwächung durch Abplatzen des Betons könnte somit immer in der aktuellen thermischen Analyse berücksichtigt werden, was in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht worden ist.

### 7.3.1 Validierung der thermischen Modellkennwerte

Als Referenz für das erste Beispiel dient ein Vergleichssystem aus dem Forschungsbericht von Schaumann, Kettner & Ostheer (2004), mit dem die Regelvorschlage der DIN EN 1992-1-2 (2010) überprüft wurden. Dazu wird ein reiner Betonquerschnitt unter zweiseitiger ETK-Brandbeanspruchung betrachtet. Während das Beispiel den Autoren dieses Beitrages ein Vergleich zwischen verschiedenen Normenentwurfen diente, soll hier gezeigt werden, dass die Stoffparameter für den Temperaturbereich zwischen 20 und 1200 °C korrekt in das Programmsystem FEMAS 2000 implementiert sind. Bild 7.9 zeigt die Geometrie und die thermischen Anfangs- und Randbedingungen sowie die Einwirkungen des untersuchten Betonquerschnittes.



**Bild 7.9:** Validierung der thermischen Betonstoffwerte: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen nach Schaumann, Kettner & Ostheer (2004)

Zur Validierung wird numerisch ein eindimensionaler Wärmedurchgang infolge einer Brandbeanspruchung repräsentiert und durch die ETK nach Gl. (2.33) simuliert. Dazu

ist der quadratische Betonquerschnitt an der Ober- und Unterseite als thermisch isoliert definiert und in x-Richtung in 50 thermische Layerelemente unterteilt. Als ausgewählte Auswertungspunkte sind vorgesehen der Punkt A bei  $x = 0.01$  m, Punkt B bei  $x = 0.03$  m, Punkt C bei  $0.07$  m und Punkt D bei  $0.25$  m. Weitere Angaben zur Definition der Materialparameter sind in Tabelle 7.3 angegeben.

| <b>Materialparameter:</b>  |                                    |                           |
|----------------------------|------------------------------------|---------------------------|
| Trockenrohdichte           | $\rho_{c,\theta=20^\circ\text{C}}$ | 2200kg/m <sup>3</sup>     |
| Betonfeuchtegehalt         | u                                  | 0.0%                      |
| spezifische Wärmekapazität | $c_{c,\theta=20^\circ\text{C}}$    | 900 J/(kg K)              |
| Wärmeleitfähigkeit         | $\lambda$                          | obere Kurve n. Gl. (3.60) |

**Tabelle 7.3:** Validierung der thermischen Stoffwerte: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter

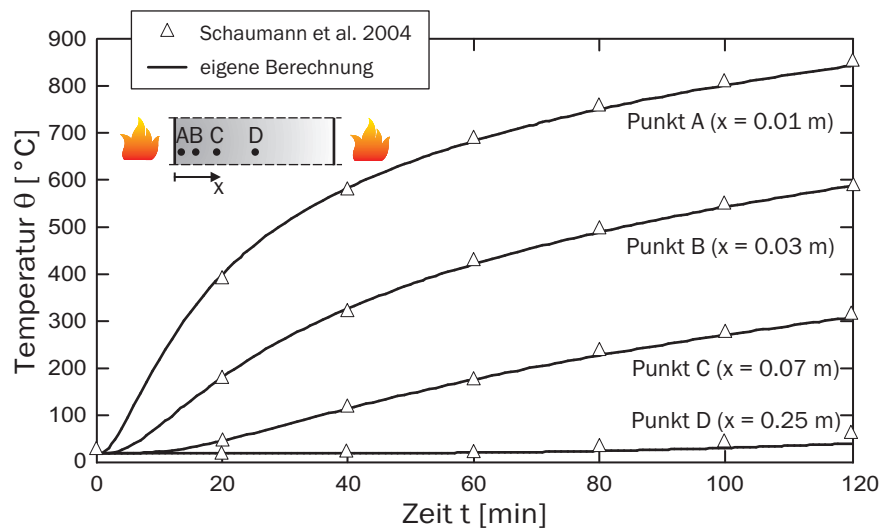
Die Dauer der Simulation wird auf 120 min begrenzt. Aufgrund der großen Dimensionen des betrachteten Querschnitts erübrigt sich die Auswertung der Temperaturen an den thermisch isolierten brandabgewandten Seiten, da die Wärme während der Simulation in 120 Minuten nicht durch den gesamten Querschnitt hindurchdringt. Die thermische Einwirkung der ETK wird mit Hilfe der Last-Zeit-Funktion nach (2.33) angesetzt. Als Zeitintervall  $\Delta t$  wird 1 min vorgegeben. Kommt es in den Temperaturberechnungen zu Oszillationen der Lösungen, werden die Zeitschritte durch die implementierte Schrittweitensteuerung verkleinert, bis eine konvergente Lösung gefunden wird. Dies ist aufgrund der großen Temperaturunterschiede gerade in den ersten Minuten notwendig.

Die Ergebnisse der Finiten-Element Berechnung für den reinen thermischen Zustand sind in Bild 7.10 für die ausgewiesenen Punkte A - D dargestellt und werden mit den Ergebnissen des Forschungsberichtes von Schaumann, Kettner & Ostheer (2004) verglichen.

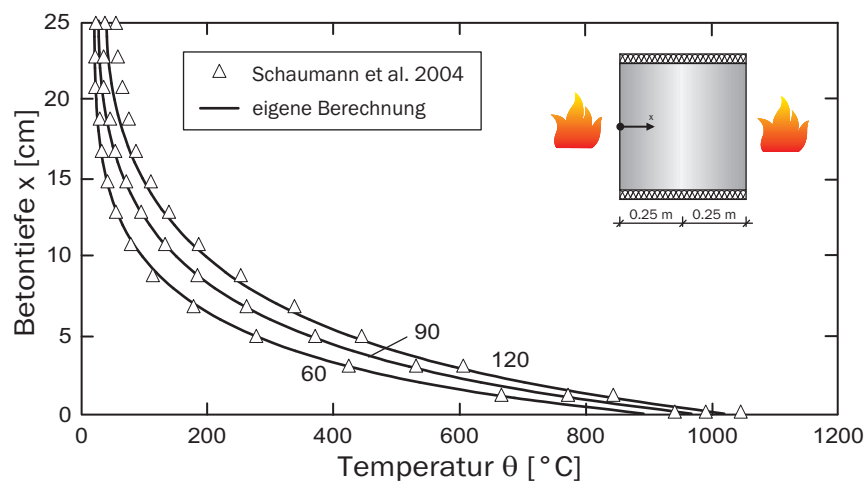
Es ist eine sehr gute Übereinstimmung mit den berechneten Temperaturverläufen aus Schaumann, Kettner & Ostheer (2004) festzustellen, was auf die korrekte Einbindung der temperaturabhängigen Stoffkennwerte zur Berechnung von Temperaturfeldern infolge einer Brandbeanspruchung hindeutet. Sowohl die Einwirkung in Form der ETK als auch der Wärmetransport und die Wärmespeicherung in ihrer Finiten-Element-Umsetzung sind somit richtig in das Programmsystem FEMAS 2000 implementiert.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Validierung liegt in der Überprüfung, ob lineare oder nichtlineare Temperaturgradienten entstehen und diese später in einer gekoppelten thermo-mechanischen Berechnung berücksichtigt werden müssen. Dazu sind die Temperaturverläufe in dem untersuchten Querschnitt über die Bauteiltiefe in Bild 7.11 aufgetragen. Aufgrund der symmetrischen thermischen Einwirkung sind nur 0.25m dargestellt.

Es ist deutlich zu erkennen, dass sich in den untersuchten 120 min kein stationärer Zustand einstellt. Während sich im brandbeanspruchten Bereich starke nichtlineare Temperaturgradienten entwickeln, ist das Innere des Querschnitts nahezu unbeeinflusst. Dieses Ergebnis deutet somit darauf hin, dass eine vereinfachte Linearisierung der nichtlinearen Temperaturgradienten zu negativen Ergebnissen bzgl. der Betrachtung des Trag- und



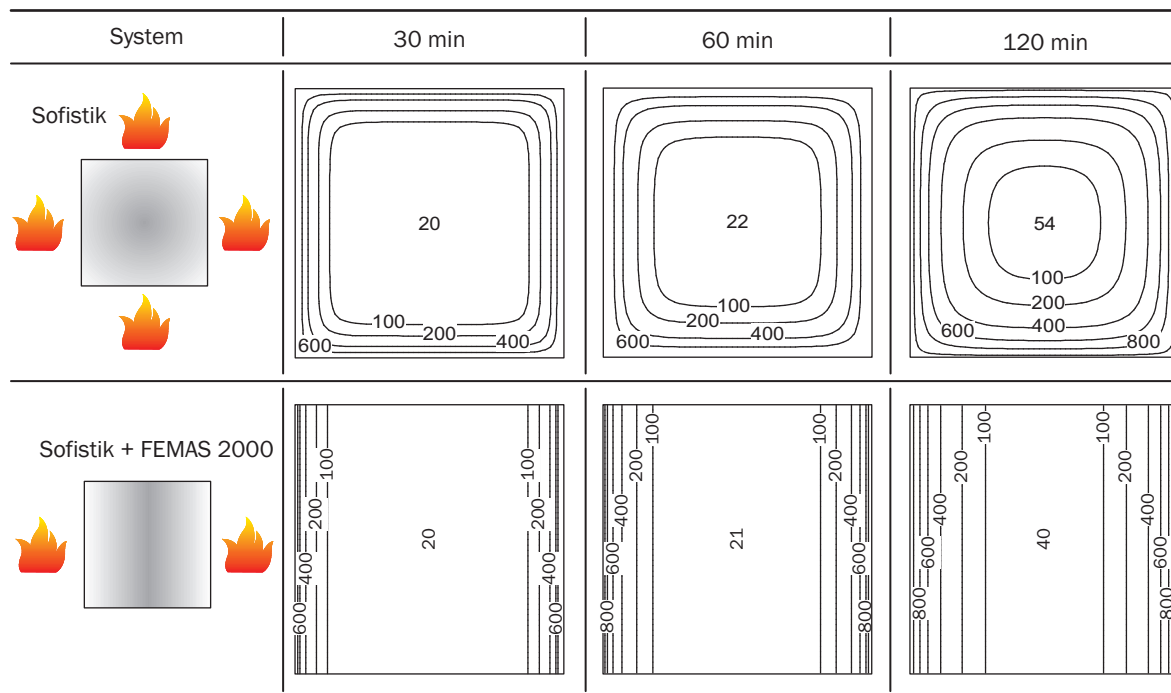
**Bild 7.10:** Validierung der thermischen Stoffwerte: Temperaturentwicklung an den Referenzpunkten über die Zeit  $t$ .



**Bild 7.11:** Validierung der thermischen Stoffwerte: Temperaturverläufe nach 60, 90 und 120 min Brandbeanspruchung.

Verformungsverhaltens führen würde. Während die Ergebnisse für 60 und 90 min sehr gut mit den berechneten von Schaumann, Kettner & Ostheer (2004) übereinstimmen, ist dies bei 120 min Branddauer nur bis ca.  $x = 10$  cm gegeben. Von da an ist eine leicht geringere Temperatur im Querschnitt ermittelt worden. Erklärt werden kann dies dadurch, dass die Rechenannahmen in Schaumann, Kettner & Ostheer (2004) auf einer vierseitigen Brandbeanspruchung beruhen und zweidimensionale finite Elemente bei der Simulation verwendet wurden.

Um diese Aussage zu stützen, wurden Vergleichsberechnungen mit dem Programmsystem Sofistik an einem vierseitig beflammt Querschnitt durchgeführt. Die sich einstellenden Temperaturfelder nach 30, 60 und 120 min sind in Bild 7.12 dargestellt.



**Bild 7.12:** Validierung der thermischen Stoffwerte: Temperaturfelder nach 30, 60 und 120 min Brandbeanspruchung.

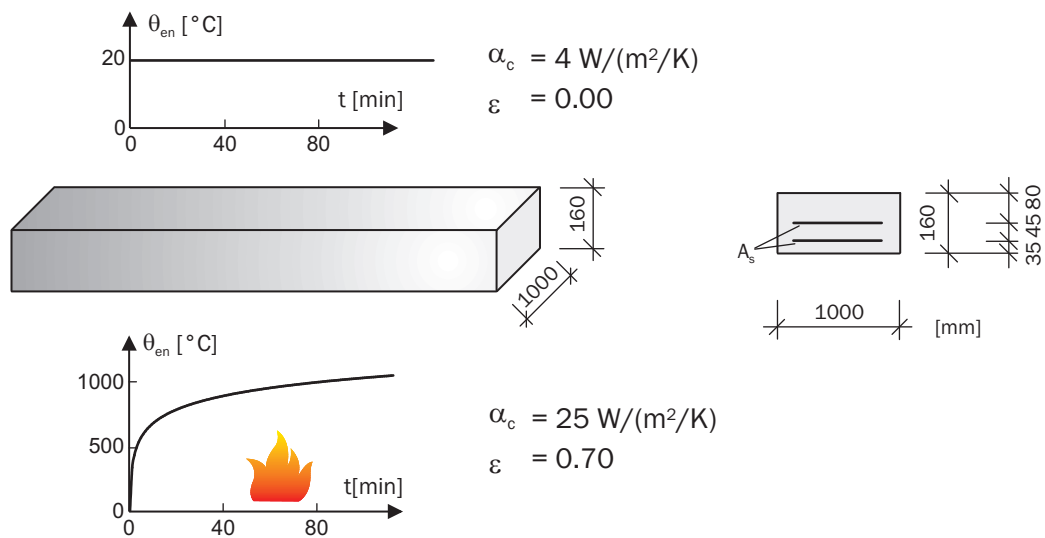
An der Kerntemperatur von  $54^{\circ}\text{C}$  bei der vierseitigen Beflammung im Gegensatz zu  $40^{\circ}\text{C}$  bei einer zweiseitigen Beflammung ist zu erkennen, dass das Eindringen der Wärme in den Querschnitt bei vierseitiger Beanspruchung schneller erfolgt als bei zweiseitiger Beanspruchung. Dies erklärt den Temperaturunterschied von 14 K hinsichtlich der Betrachtung des Temperaturgradienten bei 120 min in Bild 7.11. Die Ergebnisse der Vergleichsrechnung mit Sofistik zeigen generell eine sehr gute Übereinstimmung zur eigenen thermischen Analyse.

Allerdings sind dies nur geringe Unterschiede, die gerade im Hinblick auf die Betrachtung von flächenartigen Bauteilen vernachlässigbar klein sind und somit eine eindimensionale Temperaturberechnung in Querschnittsdicke rechtfertigen.

### 7.3.2 Erwärmungsvorgänge in einem Plattenstreifen

Bei dem folgenden Validierungsbeispiel handelt es sich um einen Vergleich zwischen experimentell ermittelten Temperaturwerten und den berechneten Temperaturen aus der eigenen Finiten-Elemente-Berechnung. Als System dient der Balken PLS 79/1 aus einer Brandversuchsreihe an Stahlbetonplattenstreifen von Haksever & Walter (1980).

Da es sich bei diesem Balken um einen nicht vorgetrockneten Beton handelt, wird eine Betonfeuchte  $u=3\%$  bei Laborbedingungen unterstellt. Dadurch können gleichlaufend numerisch auch die vereinfachten Annahmen einer Betonfeuchte größer 0% validiert werden. In Bild 7.13 sind die Systemdaten sowie die Anfangs- und Randbedingungen dargestellt.



**Bild 7.13:** Erwärmungsvorgänge in einem Plattenstreifen: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen.

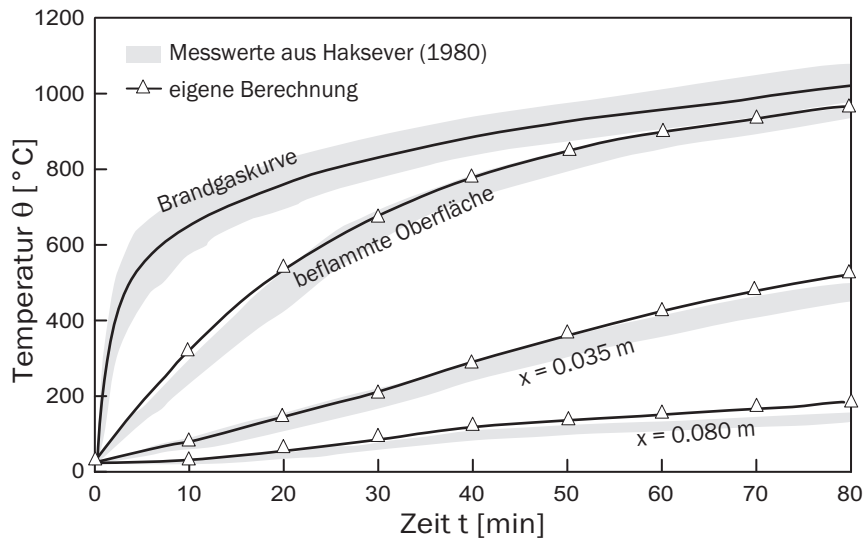
Der 160 mm dicke Betonquerschnitt wird mit 32 thermischen Layern diskretisiert. In der Höhe bei 35 mm und bei 80 mm ist jeweils eine Bewehrungsschicht angeordnet. Diese dienen im Versuch als Aufnehmer der Temperaturmessgeber. Die materialspezifischen Annahmen sind Tabelle 7.4 zu entnehmen.

| <b>Materialparameter:</b>  |                             |           |  |
|----------------------------|-----------------------------|-----------|--|
| Beton- und Zuschlagsart    |                             |           | Normalbeton mit quarzitischem Zuschlag |
| Trockenrohichte            | $\rho_{c,20^\circ\text{C}}$ |           | 2200kg/m <sup>3</sup>                  |
| Betonfeuchtegehalt         |                             | u         | 3.0%                                   |
| spezifische Wärmekapazität | $c_{c,20^\circ\text{C}}$    |           | 900 J/(kg K)                           |
| Wärmeleitfähigkeit         |                             | $\lambda$ | obere Kurve n. Gl. (3.60)              |

**Tabelle 7.4:** Erwärmungsvorgänge in einem Plattenstreifen: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter

Da es sich hier um die Nachrechnung eines Versuches handelt, wurden für die numerische Simulation nicht die versuchstechnisch angestrebte ETK Kurve, sondern die Temperaturen angesetzt, die im Versuchsbrandraum gemessen wurden. Die gemessenen Temperaturen unterliegen einem Streubereich, daher wird der Mittelwert ermittelt und angesetzt. Anhand solcher Versuchsergebnisse wird deutlich, dass es sehr schwierig ist, die experimentell ermittelten Temperaturkurven exakt abzubilden. In Bild 7.14 sind die Ergebnisse der thermischen Analyse dargestellt.

Es liegt bei dem Vergleich zwischen experimentell ermittelten Temperaturganglinien und der eigenen Berechnung eine gute Übereinstimmung vor. Generell liegen die Temperaturen etwas über den Messdaten. Eine durchgeführte Parameterstudie bezüglich des Ansatzes unterschiedlicher Emissionswerte hat gezeigt, dass zwischen dem normativen Vorschlag



**Bild 7.14:** Erwärmungsvorgänge in einem Plattenstreifen: Bauteiltemperaturen des Plattenstreifens

der DIN V ENV 1992-1-2 (1997) von  $\varepsilon_{res} = 0.56$ , der Erhöhung auf 0.72 in der DIN EN 1992-1-2 (2010) und dem zukünftig anzusetzenden Wert von 0.7 kaum Unterschiede im Temperaturfeld bestehen.

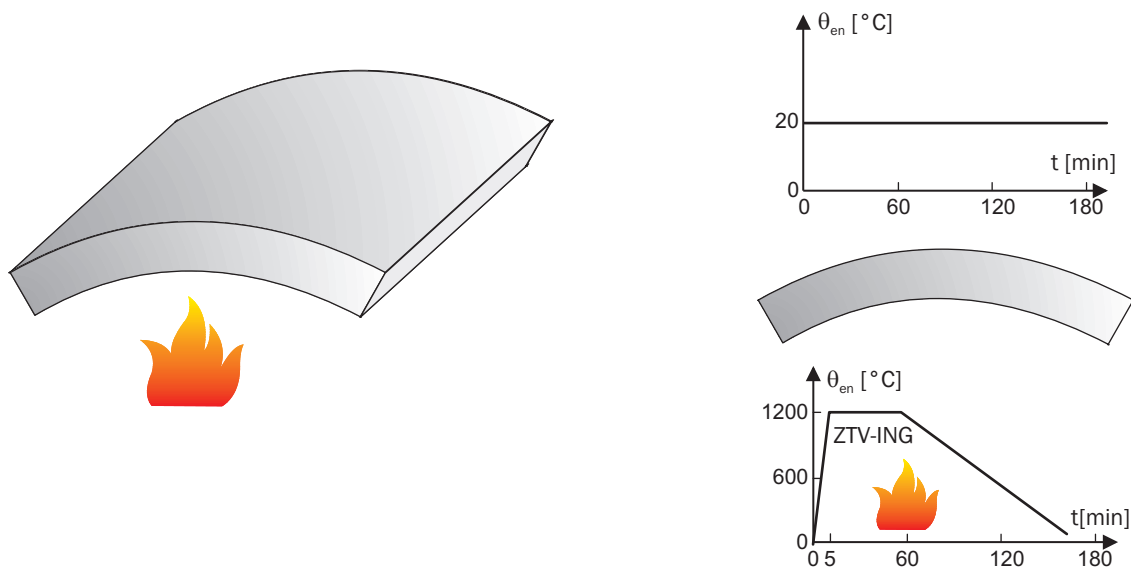
Wie schon in der Nettowärmestromgleichung (3.29) angegeben, wird die resultierende Emissivität  $\varepsilon_{res}$  aus dem Produkt der Emissivitäten des Materials  $\varepsilon_m$  und der Flamme  $\varepsilon_f$  gebildet.

### 7.3.3 Erwärmungs- und Abkühlungsvorgang eines Betontübbings

Nachdem die konstitutiven Gesetze zur Durchführung einer thermischen Analyse an numerischen Berechnungsergebnissen anderer Autoren erfolgreich validiert sind, folgt nun die Verifizierung der Annahmen im Bezug auf die Wahl der Wärmeleitfähigkeitsformulierung. Wie in Abschnitt 3.4.1 beschrieben, stehen durch die DIN EN 1992-1-2 (2010) zwei Grenzfunktionen zur Beschreibung der temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit zur Verfügung. Deren Einfluss soll nun an einem experimentell untersuchten Betontübbing unter einer Brandbeanspruchung gemäß der ZTV-ING-Tunnelbrandkurve verifiziert werden. Die Untersuchungsergebnisse sind in Dahl & Schaab (2003) zusammengefasst.

Als numerisches System wird der Tübbing mit 51 thermischen Schichten in Dickenrichtung diskretisiert. Die Brandbelastung am unteren Rand des Tübbing wird mit der EBA Brandkurve beschrieben, wobei sich die Temperatur in den ersten fünf Minuten extrem schnell auf 1200 °C erhöht, dann bis zur 60. Minute konstant bleibt und bis zur 170. Minute wieder auf die Ausgangstemperatur von 20 °C abfällt.

Die Angaben zum System und den thermischen Anfangs- und Randbedingungen sind Bild 7.15 und Tabelle 7.5 zu entnehmen.



**Bild 7.15:** Erwärmung und Abkühlung eines Betontübbings: Geometrie, Anfangs- und Randbedingungen nach Dahl & Schaab (2003)

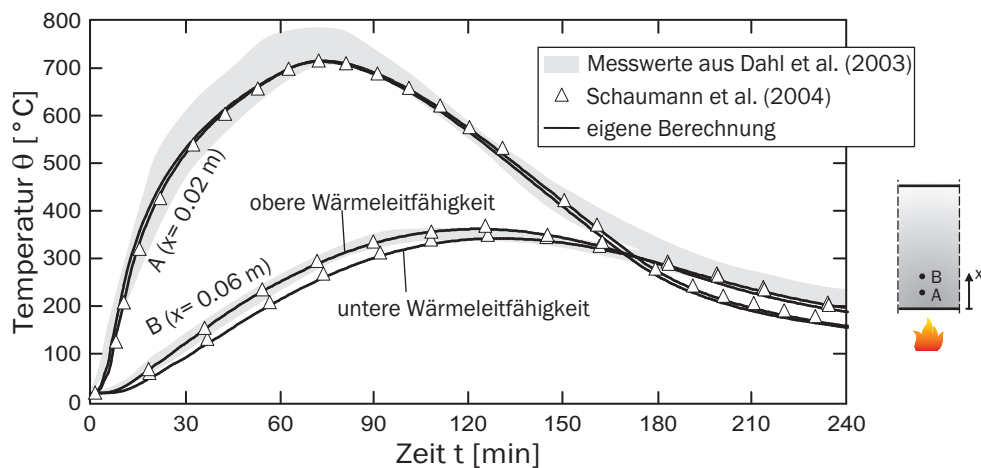
#### Materialparameter:

|                            |                             |  |
|----------------------------|-----------------------------|--|
| Beton- und Zuschlagsart    |                             | Normalbeton mit quarzitischem Zuschlag |
| Trockenrohdichte           | $\rho_{c,20^\circ\text{C}}$ | 2200 kg/m <sup>3</sup>                 |
| Betonfeuchtegehalt         | u                           | 3.0%                                   |
| spezifische Wärmekapazität | $c_{c,20^\circ\text{C}}$    | 900 J/(kg K)                           |
| Wärmeleitfähigkeit         | $\lambda$                   | Kurven n. Gl. (3.60) und (3.61)        |

**Tabelle 7.5:** Erwärmung und Abkühlung eines Betontübbings: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter

Die Besonderheit dieses Beispiels wird damit begründet, dass ein Abkühlprozess simuliert wird. Ist dies ebenfalls validiert, können später auch Analysen zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonflächentragwerken nach einem Brandereignis untersucht werden. Die berechneten Ergebnisse sind vergleichend mit den ermittelten Messwerten aus Dahl & Schaab (2003) und den numerischen Berechnungen nach Schaumann, Kettner & Ostheer (2004) in Bild 7.16 dargestellt. Die Streuung der Messwerte ist durch die grau hinterlegte Fläche dargestellt.

Im Zuge der Verifikation ist die Berechnung mit oberer und unterer Grenzfunktion der Wärmeleitfähigkeit (Gln. (3.60) und (3.61)) durchgeführt worden. Mit beiden Annahmen werden jeweils gute Übereinstimmungen mit den Ergebnissen der Berechnungen von Hothan (2004) erzielt. Betrachtet man die Auswertungsstellen in den Punkten A bei  $x = 2$  cm und B bei  $x = 6$  cm, befinden sich die Berechnungsergebnisse in dem Streubereich der Versuchsdaten. Lediglich in der Abkühlphase sinken die berechneten Temperaturen schneller als die gemessenen. Dies ist auf höhere Brandraumtemperaturen gegenüber der angenommenen ZTV-ING-Tunnelbrandkurve in der Abkühlphase zurückzuführen.



**Bild 7.16:** Erwärmung und Abkühlung eines Betontübbings: Bauteiltemperaturen an den zwei ausgewählten Punkten A und B

Temperaturunterschiede aufgrund oberer oder unterer Grenzwerte der Wärmeleitfähigkeit treten erst in größeren Tiefen des Betonquerschnitts auf, da sich erst hier der Einfluss der Wärmeleitung entfaltet. Benutzt man die untere Grenze, werden generell niedrigere Temperaturen im Querschnitt ermittelt. Dies entspricht dann nicht ganz den Versuchsdaten. Dagegen kann festgehalten werden, dass die Ergebnisse mit oberer Wärmeleitgleichung generell im Streubereich der gemessenen Ergebnisse liegen und somit auf der sicheren Seite liegen.

Darin spiegelt sich die Empfehlung des Nationalen Anhangs DIN EN 1992-1-2/NA (2010) wieder, die obere Grenzfunktion der Wärmeleitung für die Ermittlung von Temperaturfeldern zur Bemessung im Brandfall zu nutzen.

### 7.3.4 Zusammenfassung und Bewertung

Zusammenfassend wird konstatiert, dass eine thermische Analyse im Hochtemperaturbereich mit dem Programmsystem FEMAS 2000 STRGW-Fire, unter Annahme materialspezifischer Parameter, wirklichkeitsnah durchgeführt werden kann. Die Berechnungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Werten sowie mit numerischen Ergebnissen anderer Autoren.

Für die Emissivität wird bestätigt, dass eine Annahme gemäß DIN EN 1992-1-2/NA (2010) von  $\varepsilon = 0.70$  auf der beflamten und  $\varepsilon = 0.0$  auf der unbeflammten Seite zu korrekten Ergebnissen bei einer Temperaturfeldberechnung infolge einer Brandbeanspruchung führt.

Weiterhin ist eine erfolgreiche Implementierung unterschiedlicher Temperaturzeitkurven zur Beschreibung diverser Brandszenarien festzustellen. Neben Erwärmungsvorgängen können auch thermische Abkühlprozesse wirklichkeitsnah simuliert werden.

Aus den gewonnenen Ergebnissen werden für die weiteren numerischen Simulationen in dieser Arbeit folgende thermische Annahmen festgelegt.



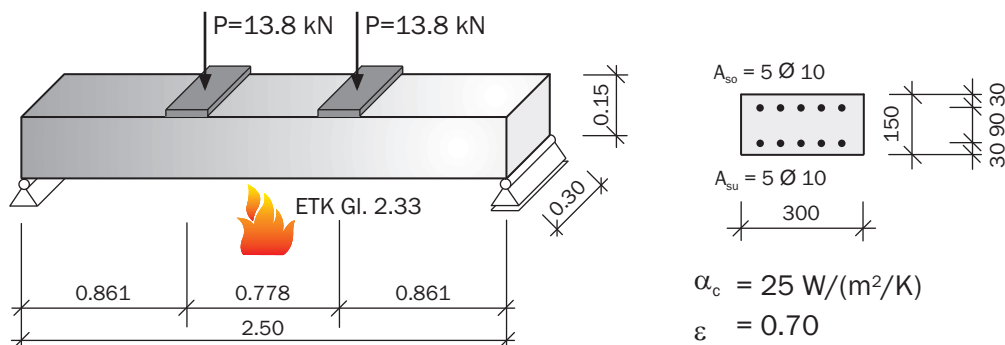
Für die Wärmeleitfähigkeit wird generell die Grenzfunktion gemäß Gleichung (3.60) verwendet. Auf der beflamnten Seite werden der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_c = 25 \text{ W}/(\text{m}^2/\text{K})$  und die Emissivität von  $\varepsilon = 0.70$  angesetzt. Die unbeflammte Seite erhält aufgrund der Annahme einer konstanten Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  den Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_c = 4 \text{ W}/(\text{m}^2/\text{K})$  und die Emissivität von  $\varepsilon = 0.00$ .

## 7.4 Validierung thermo-mechanischer Vorgänge

Die letzte Stufe der Validierung des neu entwickelten Programmmoduls STRGW-Fire führt nun die thermische und mechanische Strukturanalyse zusammen. Es werden zwei Referenzbeispiele vorgestellt, bei denen mit Hilfe einer nichtlinearen-physikalischen Traglastanalyse das Tragverhalten numerisch simuliert wird. Generell werden in einem ersten Laststeigerungsschritt die konservativen Lasten inkrementell auf das System aufgebracht. Danach folgt die zeitvariante Simulation mit der ETK als thermische Einwirkung.

### 7.4.1 Brandbeanspruchter Plattenstreifen

Im folgenden wird ein Plattenstreifen betrachtet, der durch zwei einzelne Punktlasten belastet ist. Entnommen ist dieses System einem Forschungsbericht von Anderberg & Forsen (1982), in dem drei Systemfälle untersucht werden. In der vorliegenden Arbeit wird der Plattenstreifen mit Bewehrung gewählt. Die verbleibenden anderen Balken sind vorgespannte Systeme, die hier nicht als Verifikation herangezogen werden.



**Bild 7.17:** Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Geometrie, Belastung, Anfangs- und Randbedingungen nach Anderberg & Forsen (1982).

Die Materialparameter sind Anderberg & Forsen (1982) und Harmathy & Stanzak (1970) entnommen und in der Tabelle 7.6 zusammengefasst.

Die angesetzten Einzellasten  $P = 13.8 \text{ kN}$  entsprechen 65% der maximalen Traglast des Plattenstreifens bei Raumtemperatur. Es können von dem Plattenstreifen demnach noch zusätzliche Lasten aufgenommen werden. Nachdem die konservativen Belastungen auf das System wirken, wird in einer weiteren nichtlinearen physikalischen Traglastanalyse

**Materialparameter von Beton bei  $\theta = 20^\circ\text{C}$ :**

|                   |                          |                         |                    |                   |                        |
|-------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------|-------------------|------------------------|
| Druckfestigkeit   | $f_{c,\theta}$           | 20.00 N/mm <sup>2</sup> | Zuschlagsart       |                   | quarzitisch            |
| Zugfestigkeit     | $f_{ct,\theta}$          | 2.00 N/mm <sup>2</sup>  | Trockenrohdichte   | $\rho_{c,\theta}$ | 2200 kg/m <sup>3</sup> |
| Elastizitätsmodul | $E_{c0,\theta}$          | 28800 N/mm <sup>2</sup> | Feuchtegehalt      | $u$               | 3.00 %                 |
| max. Dehnung      | $\varepsilon_{c,\theta}$ | 2.50 ‰                  | Wärmekapazität     | $c_{c,\theta}$    | 900 J/(kgK)            |
|                   |                          |                         | Wärmeleitfähigkeit | $\lambda$         | n. Gl. (3.60)          |

**Materialparameter von Betonstahl bei  $\theta = 20^\circ\text{C}$ :**

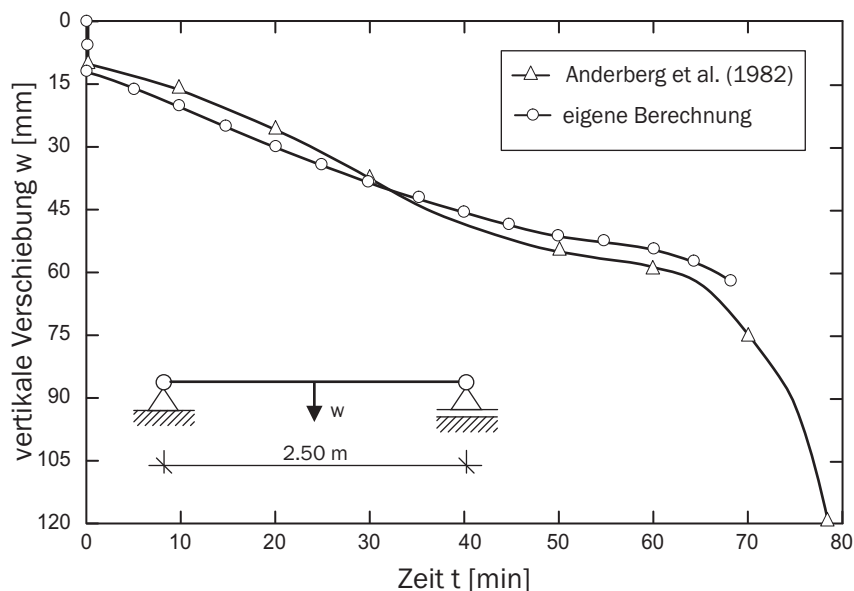
|                    |                          |                          |  |  |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|--|--|
| Streckgrenze $A_s$ | $f_{y,\theta}$           | 450.00 N/mm <sup>2</sup> |  |  |
| Elastizitätsmodul  | $E_{s0,\theta}$          | 210000 N/mm <sup>2</sup> |  |  |
| max. Dehnung       | $\varepsilon_{s,\theta}$ | 5 ‰                      |  |  |

**Tabelle 7.6:** Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter nach Anderberg & Forsen (1982)

das Verhalten des Balkens unter der thermischen Einwirkung infolge der ETK n. Gl. (2.33) untersucht.

Die finite Elementberechnung erfolgt mit 20 ASE4 Elementen, die jeweils 10 Beton- und 2 verschmierte Stahlschichten aufweisen. Für die thermische Analyse wird jedes Element in 15 thermische Schichten unterteilt. Unter Ausnutzung der Symmetrie kann dieses System als halbes System berechnet werden, was den numerischen Aufwand verringert.

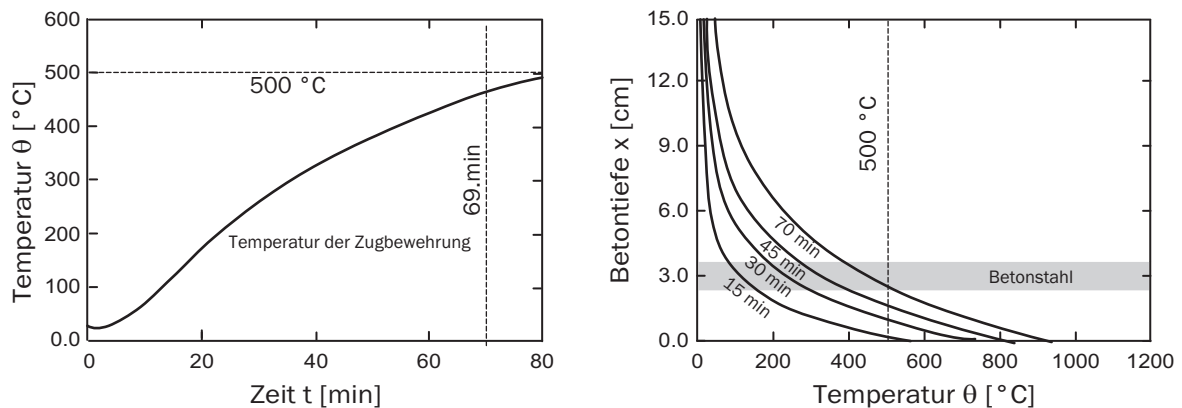
In Bild 7.18 sind die Berechnungsergebnisse für die Mittendurchbiegung des Balkens den Vorhersagen von Anderberg & Forsen (1982) gegenübergestellt.



**Bild 7.18:** Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Last-Verformungs-Kurve während der ETK Belastung aufgetragen über die Zeit t

Bis zum rechnerischen Versagenszeitpunkt in der 69. Minute ist eine gute Übereinstimmung festzustellen. Während die Analyse mit FEMAS 2000 nach der 69. Minute ein Versagen der Konstruktion ermittelt, wachsen in den Ergebnissen von Anderberg & Forsen (1982) die Verformungen ab diesem Zeitpunkt so stark an, dass von einem realistischen Verformungsverhalten des Balkens nicht mehr ausgegangen werden kann. Daher ist nach Anderberg & Forsen (1982) der Versagenszeitpunkt auch auf die 74. Minute festgelegt worden, da hier die vorgeschriebene maximale Durchbiegung erreicht worden war. Nach den eigenen Berechnungen ist dieser Balken demnach in die Feuerwiderstandsklasse R60 einzuordnen.

Zur weiteren Diskussion der Ergebnisse sind in Bild 7.19 Ergebnisse der thermischen Analyse in Form von Temperaturlinien zum einen in der Höhe der Zugbewehrung und zum anderen über den gesamten Betonquerschnitt angegeben.



**Bild 7.19:** Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Temperaturentwicklung

Auf dem linken Teilbild des Bildes 7.19 ist die Temperaturentwicklung im Bewehrungsstahl der Zugzone dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die kritische Temperatur des Bewehrungsstahls von 500 °C bei dem Versagenszeitpunkt 69. Minute fast erreicht worden ist. Ab dieser Temperaturgrenze entstehen signifikante Reduktionen des Bewehrungsstahls die zunehmend zu einer Traglastminderung führen.

Die Temperatur im Bewehrungsstahl bestätigt sich auch, wenn die Temperaturisothermen über die Querschnittshöhe betrachtet werden (rechtes Teilbild des Bildes 7.19). Es ist sehr gut zu erkennen, dass sich die Temperatur extrem nichtlinear über die Querschnittshöhe einstellt, was aufgrund der zeitvarianten Temperatureinwirkung auch zu erwarten ist. Eine vereinfachende Linearisierung der Temperaturverläufe würde danach zu keiner wirklichkeitsnahen Berechnung führen.

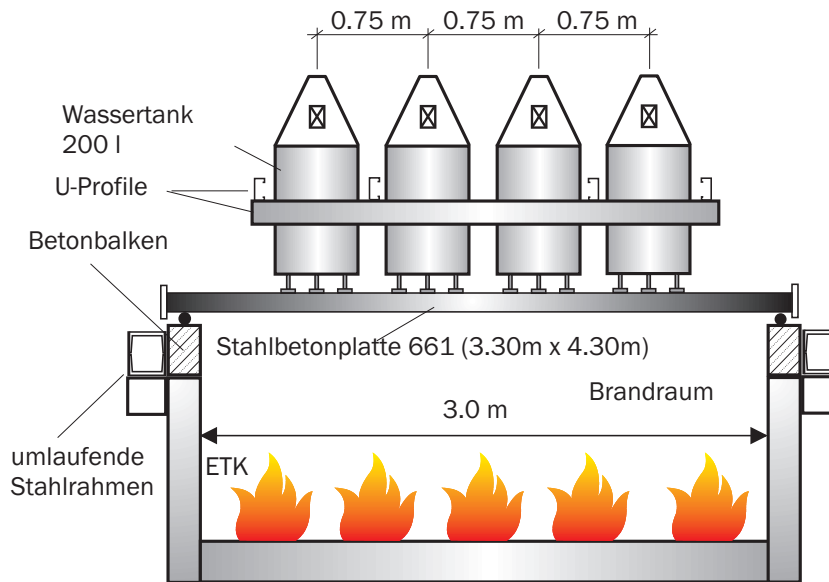
## 7.4.2 Brandbeanspruchte zweiachsige Stahlbetonplatte

Im folgenden Validierungsbeispiel wird eine zweiachsige Stahlbetonplatte untersucht. Diese zweiachsig abtragende Stahlbetonplatte wurde in einer großen Brandversuchsreihe im Rahmen der Forschungsarbeiten von Lim (2003) und Lim, Buchanan, Moss & Franssen

(2004) experimentell untersucht. Die Brandversuche wurden durchgeführt, um Erkenntnisse über das Trag- und Verformungsverhalten von frei ausdehnbaren einfach gelagerten Plattensystemen unter Laborbedingungen zu erhalten. Die vorliegenden Testdaten sollen nun als abschließendes Beispiel das neu entwickelte Modul STRGW-Fire validieren.

In der Versuchsserie wurden 6 verschiedenen Plattensysteme untersucht, wobei es sich um drei reine Stahlbetonplatten und drei Verbundplattensysteme handelte. Die Platten besitzen die äußere Abmessungen von 3.30 m x 4.30 m. Dies entspricht der maximalen Größe des verfügbaren Brandraumes.

Der Versuchsaufbau ist in Bild 7.20 dargestellt. Dabei liegt die Stahlbetonplatte auf Rollenauflagern, die wiederum auf einem fest installierten umlaufenden Betonbalken aufliegen.

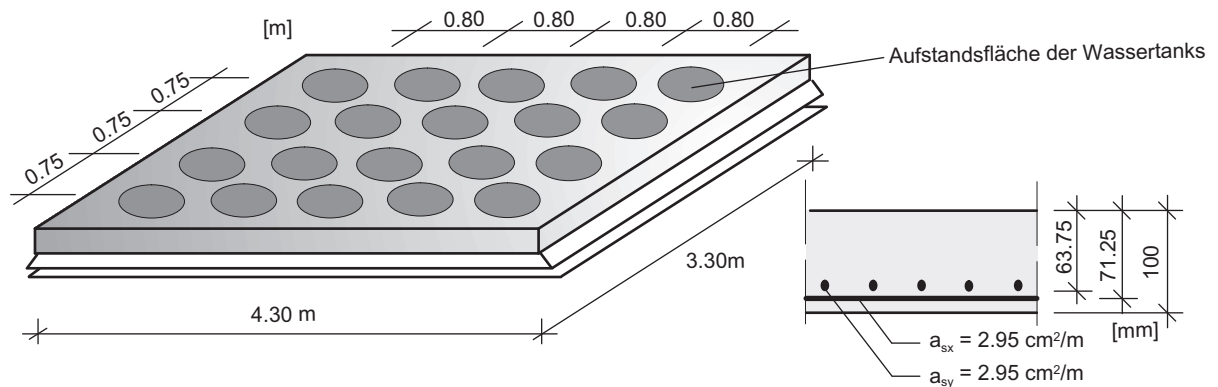


**Bild 7.20:** Brandbeanspruchte zweiachsige Stahlbetonplatte: Versuchsanordnung bei dem durchgeführten Brandversuch nach Lim (2003).

Als Referenzplatte wurde die Platte mit der Bezeichnung “661 flat slab” gewählt. Im Versuchsstand ist die Platte in vertikaler Richtung vierseitig gelagert, sodass horizontale Verschiebungen möglich sind. Die Platte liegt auf Rollen auf, was einer gelenkigen Lagerung entspricht. Die Ecken der Platte werden nicht gegen Abheben gesichert, sodass eine Verformung nach oben möglich ist. In Bild 7.21 ist die untersuchte Platte dargestellt.

Für die numerische Berechnung wird die Platte mit einem Raster von 28 x 20 Elementen diskretisiert. Die Elemente werden jeweils mit 10 Beton-, 2 Stahl- und 20 thermischen Schichten modelliert. Die Materialparameter sind Lim (2003) entnommen und in der Tabelle 7.7 zusammengefasst.

Bevor die Stahlbetonplatte einer Brandbelastung in Form der ETK ausgesetzt wurde, sind zwanzig Wassertanks als äußere Belastung auf das System aufgebracht worden. Es ergibt sich mit Berücksichtigung von ständigen und veränderlichen Lasten für die numerische



**Bild 7.21:** Brandbeanspruchte zweiachsige Stahlbetonplatte: Geometrie und Belastung nach Lim (2003).

#### Materialparameter von Beton bei $\theta = 20\text{ }^\circ\text{C}$ :

|                   |                          |                         |                    |  |
|-------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------|--|
| Druckfestigkeit   | $f_{c,\theta}$           | 36.60 N/mm <sup>2</sup> | Zuschlagsart       | quarzitisch                              |
| Zugfestigkeit     | $f_{ct,\theta}$          | 3.60 N/mm <sup>2</sup>  | Trockenrohdichte   | $\rho_{c,\theta}$ 2200 kg/m <sup>3</sup> |
| Elastizitätsmodul | $E_{c0,\theta}$          | 34000 N/mm <sup>2</sup> | Feuchtegehalt      | $u$ 3.00 %                               |
| max. Dehnung      | $\varepsilon_{c,\theta}$ | 2.50 ‰                  | Wärmekapazität     | $c_{c,\theta}$ 900 J/(kgK)               |
|                   |                          |                         | Wärmeleitfähigkeit | $\lambda$ n. Gl. (3.60)                  |

#### Materialparameter von Betonstahl bei $\theta = 20\text{ }^\circ\text{C}$ :

|                    |                          |                          |  |  |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|--|--|
| Streckgrenze $A_s$ | $f_{y,\theta}$           | 568.00 N/mm <sup>2</sup> |  |  |
| Elastizitätsmodul  | $E_{s0,\theta}$          | 210000 N/mm <sup>2</sup> |  |  |
| max. Dehnung       | $\varepsilon_{s,\theta}$ | 3.2 ‰                    |  |  |

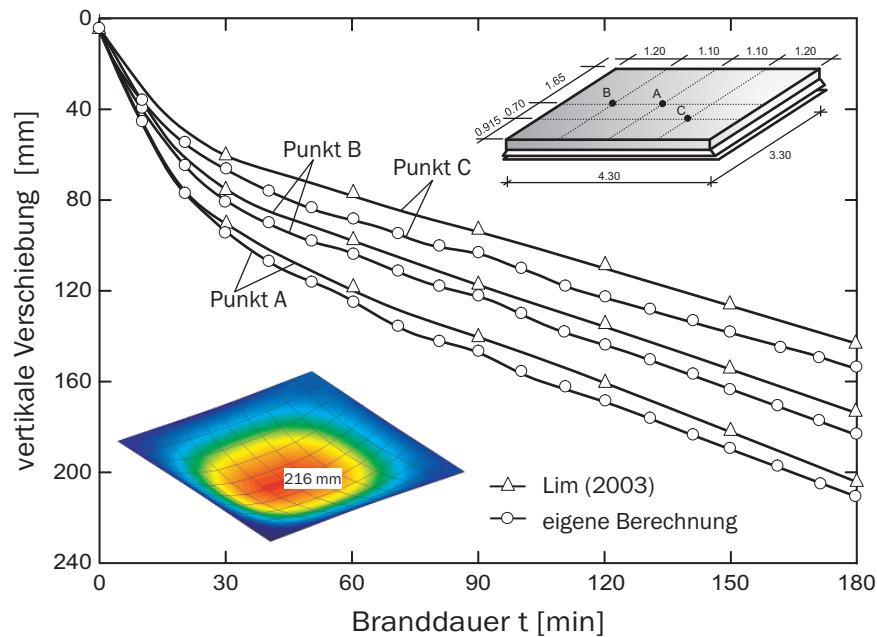
**Tabelle 7.7:** Brandbeanspruchter Plattenstreifen: Zusammenfassung der verwendeten Berechnungsparameter nach Anderberg & Forsen (1982)

Simulation eine Belastung von:

$$p = 1.0 \cdot G + 1.0 \cdot Q = 1.0 \cdot 2.4\text{kN/m}^2 + 1.0 \cdot 3.0\text{kN/m}^2 = 5.4\text{kN/m}^2. \quad (7.3)$$

Diese Einwirkung wird in einem ersten Berechnungsschritt inkrementell aufgebracht, bevor dann die zeitvariante Simulation im Brandfall für 180 Minuten Brandbeanspruchung durchgeführt wird. Die Ergebnisse in Form eines Zeit-Verschiebungs-Diagramms ist in Bild 7.22 dargestellt. Es werden die ausgewählten Punkte A - C verglichen. In dem Experiment sind diese und weitere 6 Punkte mit Dehnungsmessstreifen ausgestattet worden, um die Verformungen messen zu können.

Für die dargestellten Verformungen ist eine qualitative gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten vertikalen Durchbiegungen zu erkennen. Die berechneten Verformungen sind leicht höher als die gemessenen. In Schuster (2009) wurden zahlreiche Parameterstudien mit dieser Stahlbetonplatte durchgeführt. Demnach haben die nume-



**Bild 7.22:** Brandbeanspruchte zweiachsige Stahlbetonplatte: Zeit-Verschiebungs-Diagramm

rischen Annahmen zur Lagerung der Platte einen erheblichen Einfluss auf das Berechnungsergebnis und damit auf eine evtl. Feuerwiderstandsklasse.

Dieses Beispiel zeigt das komplette Leistungsspektrum des neu entwickelten Programmmoduls STRGW-Fire. Es ist somit möglich, Stahlbetonflächentragwerke numerisch zu untersuchen und die durch einen Brand verursachten Nichtlinearitäten korrekt abzubilden und zu berücksichtigen.

### 7.4.3 Zusammenfassung und Bewertung

Mit diesen beiden Beispielen wurde die gekoppelte thermo-strukturmechanische Simulation im Hochtemperaturbereich von Stahlbetonflächentragwerken vorgestellt. Es hat sich gezeigt, dass das entwickelte Modell die Möglichkeit bietet, flächenhafte Tragwerke infolge eines Brandereignisses wirklichkeitsnah zu berechnen. Diese Berechnungsmethode eröffnet eine Vielzahl neuer Anwendungsgebiete wie beispielsweise die Untersuchung von Deckensystemen in Bestandsgebäuden.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war, ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken infolge einer Brandbelastung zu entwickeln. Um das Trag- und Verformungsverhalten solcher Bauteile zu charakterisieren, ist eine gekoppelte thermo-mechanische physikalisch-nichtlineare Berechnungsmethode notwendig.

Zur Erfüllung dieses Ziels wurde das Finite-Element-Programmsystem FEMAS 2000 verwendet. Die darin vorhandenen Module für nichtlinear-physikalische Strukturanalysen dienten als Grundlage für die Neu- und Weiterentwicklungen. Da die bisherigen implementierten Materialformulierungen nur für Normaltemperaturen Gültigkeit besaßen, wurden umfangreiche Erweiterungen bezüglich der Materialdefinition für den Hochtemperaturbereich durchgeführt.

Für die Finite-Element-Berechnung wurde auf das bereits existierende Finite-Element ASE4 aufgebaut. Es ist ein isoparametrisches, vier-knotiges, rotationsvariablenbehaftetes, assumed-strain Schalenelement, das geeignet ist, die physikalischen und geometrischen Nichtlinearitäten abzubilden. Im Rahmen der Neuentwicklung ist zwischen thermischer und strukturmechanischer Analyse unterschieden worden.

Für die thermische Analyse wurde zunächst eine Energiebilanz aufgestellt. Die thermischen Einwirkungen durch hochtemperaturbedingte lastunabhängige Einwirkungen infolge eines Brandes wurden dabei zeitlich sowie örtlich veränderlich beschrieben.

Daraus resultierte ein nichtlineares Differentialgleichungssystem, das zusammen mit den Anfangs- und Randbedingungen in eine Finite-Element-Formulierung überführt wurde. Dabei lag schwerpunktmäßig der Wert auf den Wärmeübertragungsmechanismen Leitung, Konvektion und Strahlung im Hochtemperaturbereich. Bedingt durch die hohen Temperaturen wurden auftretende Phasenübergänge vereinfacht erfasst. Die Formulierung erfolgte dimensionslos und wurde für die vorliegende Problemstellung auf eine eindimensionale Beschreibung in Dickenrichtung reduziert.

Die Einbindung der thermischen Analyse in eine ganzheitliche Finite-Elemente-Berechnung erfolgt in jedem Integrationspunkt des verwendeten Finiten-Elementes ASE4.

Somit liegt eine temperaturabhängige Materialdefinition in jedem Materialpunkt vor. Die Berechnung der Temperaturen findet dabei auf der Ebene der thermischen Modellierung statt, die parallel zur Diskretisierung im strukturmechanischen Bereich erfolgt. Zwischen diesen beiden Diskretisierungen in Dickenrichtung können die Temperaturen transformiert werden, was eine unabhängige Layerdiskretisierung in beiden Modellebenen ermöglicht. Die Berücksichtigung von Brandszenarien wurde durch die Einführung von zeitabhängigen Einwirkungs-Zeit-Funktionen realisiert.

Neben der thermischen Analyse sind auch die strukturmechanischen Eigenschaften des Verbundwerkstoffes Stahlbeton für den Hochtemperaturbereich erweitert worden. Grundlage bildet dabei die zeitvariante Stahlbetonmodellierung im Normaltemperaturbereich. Die Erfassung der im Brandfall auftretenden Nichtlinearitäten wie beispielsweise die Rissbildung im Beton oder das Betondruckversagen werden dabei wirklichkeitsnah erfasst.

Bedingt durch die nichtlinearen Temperaturverteilungen über die Querschnittshöhe resultieren nichtlineare Verzerrungszustände. Um diese zu erfassen, wurde auf Materialpunktebene eine Addition der entstehenden Verzerrungsanteile, bedingt durch die Temperatur im jeweiligen Materialpunkt, durchgeführt. Die einzelnen Verzerrungen auf Materialpunktebene wurden, bezogen auf das vorhandene Multi-layered Konzept, in die zeitvariante Multi-Level-Iterations Strategie überführt, um die erforderlichen Gleichungen für eine inkrementelle Lösung des Problems aufzustellen. Mit Hilfe dieser Techniken ist neben der üblichen linearen Berücksichtigung lastunabhängiger Einwirkungen in Dickenrichtung die Möglichkeit gegeben, auch Nichtlinearitäten über die Querschnittshöhe zu erfassen.

Für die konstitutiven Materialgesetze für Beton und Betonstahl wurden normative Vorgaben und Ansätze aus Forschungs- und Entwicklungsarbeiten berücksichtigt und in das Programmsystem FEMAS 2000 implementiert.

Die Leistungsfähigkeit der neu eingebunden Routinen wird durch aussagekräftige Validierungsbeispiele belegt. Dabei wurden die eigenen Berechnungen mit experimentellen Messergebnissen mit analytischen Lösungen und numerischen Nachrechnungen anderer Autoren verglichen. Es wurde dabei zwischen thermischen, strukturmechanischen sowie gekoppelten thermo-strukturmechanischen Validierungen unterschieden.

Zusammenfassend wird konstatiert, dass die Zielstellung der Arbeit, die Entwicklung eines numerischen Berechnungsverfahrens zur Berücksichtigung der Nichtlinearitäten im Brandfall bei Stahlbetonflächentragwerken, erfüllt wurde. Gleichzeitig konnten Grundlagen erarbeitet werden für weitere Forschungs- und Entwicklungsvorhaben auf dem Gebiet der brandschutztechnischen Bemessung von Stahlbetonflächentragwerken.



## 8.2 Ausblick

Unter Nutzung der vorliegenden Ergebnisse dieser Arbeit müssen folgende Forschungs- und Entwicklungsansätze zukünftig in Angriff genommen und gelöst werden:

- Zur Erhöhung der Genauigkeit in der Beschreibung des Materialverhaltens müssen neben den thermischen auch die hygrischen Zustände in Stahlbetonbauteilen simuliert werden. Für den Normaltemperaturbereich ist dies bereits möglich, für den Temperaturbereich über 80 °C ist eine Erweiterung notwendig. Dadurch ist eine bessere Berücksichtigung der Phasenübergänge, z.B. das Verdampfen von Wasser im Beton zwischen 100 und 115 °C und die damit verbundene Gewichtsabnahme, möglich.
- Trotz leistungsfähiger Rechensysteme ist die Zeitdauer für komplexe Traglastanalysen immer noch sehr groß. Daher ist es erstrebenswert, parallelisierte Berechnungen durchzuführen. Dabei könnte dann die thermische Berechnung auf einem anderen Rechnerkern als die mechanische Analyse vollzogen werden.
- Nachdem bisher nur Flächentragwerke mit normaler Bewehrung untersucht worden sind, ist in einem weiteren Schritt das Tragverhalten von vorgespannten Stahlbetonflächentragwerken zu analysieren.
- Für eine ganzheitliche wirklichkeitsnahe Simulation des Tragverhaltens im Brandfall entspricht die Annahme von genormten Temperaturzeitkurven nicht der Realität. Daher ist es gerade bei allgemeinen Verfahren wichtig, die real auftretenden Brandzenarien zu simulieren und daraus die temperaturbedingten Beanspruchungen abzuleiten. Dies kann durch eine Vorschaltung von Computational-Fluid-Dynamics Simulationen erfolgen.
- Um das vorliegende numerische Berechnungsverfahren besser validieren zu können, sind Brandversuche an Stahlbetonplatten notwendig.
- Neben der Untersuchung von Systemen, die vollständig einem Brand ausgesetzt sind, müssen noch weitreichende Untersuchungen bezüglich partiell wirkender Brände durchgeführt werden, da dies der Regelfall in der Praxis ist.



# Anhang A

## A.1 Grundlagen der Statistik

Zur besseren Verständlichkeit werden an dieser Stelle einige wichtige statistische Begriffe und Definitionen aufgeführt.

### Häufigkeit und Summenhäufigkeit

Werden aus einer Datenmenge alle gleichen Werte identifiziert und dann auf Grund ihrer Häufigkeit in ein Diagramm aufgetragen, entsteht ein Histogramm bzw. ein Diagramm der Häufigkeit. Die Häufigkeit kann dabei absolut oder relativ zur Gesamtheit aufgetragen werden. Im Allgemeinen werden Histogramme als Balkendiagramme dargestellt. Bild A.1 zeigt links die Häufigkeitsverteilung einer willkürlich angenommenen Datenmenge. Addiert man, beginnend mit dem kleinsten Wert, die Häufigkeiten auf und ordnet jedem Merkmalswert die bis dahin erreichte Summe zu, so ergibt sich die Verteilungssumme, die für jeden Merkmalswert angibt, wie groß der Anteil der Werte kleiner oder gleich dem zugehörigen Merkmalswert ist. Grafisch dargestellt ergibt sich eine schwach streng monoton steigende Kurve.

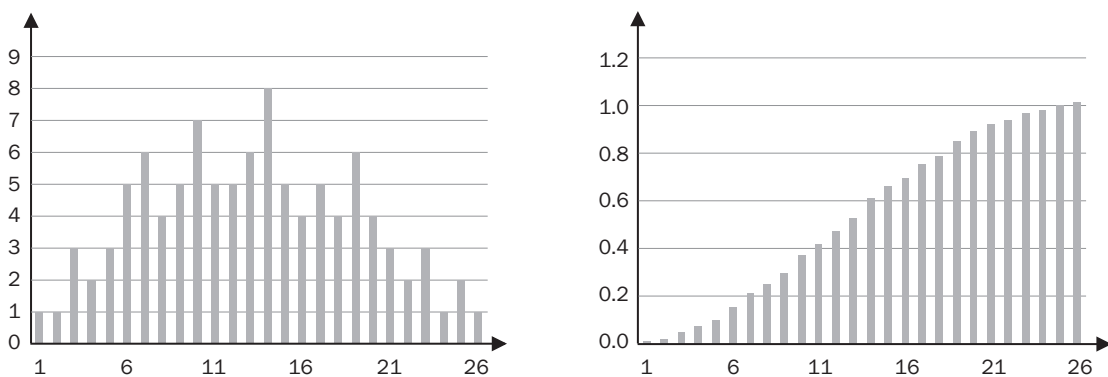


Bild A.1: Histogramm (links) und Summenhäufigkeit (rechts)

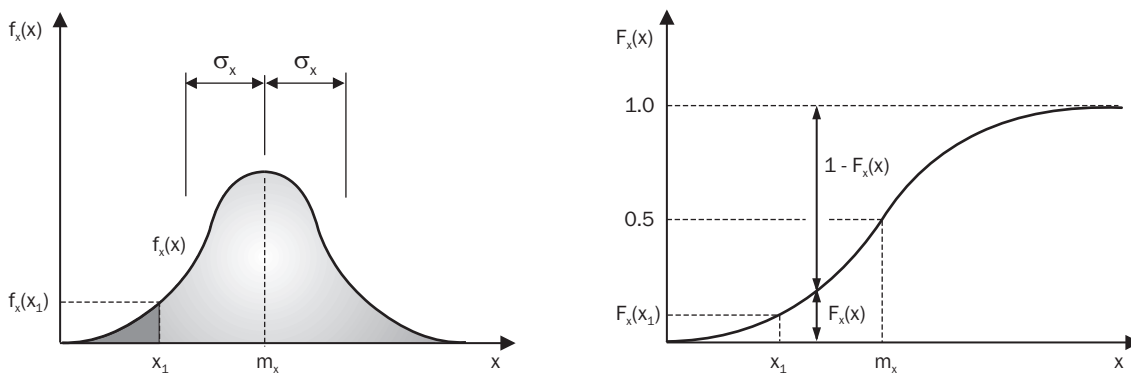
## Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

Die Dichtefunktion  $f_x(x)$  kann als Verschmierung einer großen Anzahl von Datenmengen angesehen werden und das Histogramm in Bild A.2 geht in eine kontinuierliche Kurve über, die durch Funktionen mathematisch beschreibbar ist. Dementsprechend entsteht aus der Summenhäufigkeit die Verteilungsfunktion  $F_x(x)$ , die mit der Verteilungsdichte durch

$$F_x(x_1) = \int_{x=-\infty}^{x_1} f_x(x_1) dx \quad (\text{A.1})$$

verknüpft ist. Der Funktionswert  $F_x(x_1)$  gibt die Wahrscheinlichkeit  $p$  an, mit der Ereignisse  $x$  kleiner oder gleich  $x_1$  eintreten. Es gilt:

$$p(x \leq x_1) = F_x(x_1) \quad \text{bzw.} \quad p(x < x_1) = 1 - F_x(x_1). \quad (\text{A.2})$$



**Bild A.2:** Dichtefunktion (links) und Verteilungsfunktion (rechts)

## GAUSS'sche Normalverteilung

Die GAUSS'sche Normalverteilung ist definiert mit:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2 \cdot \pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.3})$$

## Variationskoeffizient

Der Variationskoeffizient  $\nu$  wird aus dem Quotienten der Standardabweichung  $\sigma$  und dem Mittelwert  $m$  berechnet. Für eine dimensionslose Darstellung ergibt sich allgemein:

$$\nu_X = \frac{\sigma_X}{m_X}. \quad (\text{A.4})$$

### Fraktile

Ein Wert, der mit einer  $p\%$  Wahrscheinlichkeit unterschritten oder höchstens erreicht wird, wird als  $p\%$  Fraktile  $x_p$  bezeichnet. Allgemein gilt

$$x_p = m_X \pm k \cdot \sigma_X, \quad (\text{A.5})$$

wobei  $k$  als Fraktilenfaktor bezeichnet wird. In Tabelle A.1 sind verschiedene Beispiele für den Zusammenhang zwischen  $p\%$  und  $k$  dargestellt.

|       |    |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $p\%$ | 50 | 20    | 10    | 5     | 2.50  | 1.25  | 1.00  | 0.50  | 0.10  |
| $k$   | 0  | 0.842 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.210 | 2.326 | 2.576 | 3.090 |

**Tabelle A.1:** Beziehung zwischen dem Fraktilenfaktor  $k$  und Fraktilwert  $x_p$  ausgedrückt durch  $p\%$

## A.2 Zusätzliche Herleitungen

**Konsistente Linearisierung** Mit einem Vektor  $\mathbf{u}$  im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  hat jede Differentialgleichung die allgemeine Form einer nichtlinearen Nullstellenaufgabe, sodass gilt:

$$G(\mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Um die Gleichung (A.6) lösen zu können, sind Verfahren nach Newton basierend auf einer TAYLOR-Reihenentwicklung notwendig. Zur Wahrung einer quadratischen Konvergenz des Newton Verfahrens sollte im Rahmen einer iterativen Vorgehensweise eine konsistente Linearisierung erfolgen. Allgemein ist bei einer konsistenten Linearisierung einer reellwertigen, stetig differenzierbaren ( $C^0$  - Stetigkeit) Funktion  $G(\mathbf{u})$  an einer bekannten Stelle  $\bar{\mathbf{u}}$  eine Abbildung durch eine TAYLOR-Reihenentwicklung vorzunehmen. Es ergibt sich für die Reihenentwicklung von (A.6) bei Abbruch nach dem ersten Glied

$$G(\mathbf{u}) = G(\bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}) = G(\bar{\mathbf{u}}) + DG(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \Delta\mathbf{u} + R(\Delta\mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A.7})$$

wobei  $G(\bar{\mathbf{u}})$  den Funktionswert an der bekannten Stelle  $\bar{\mathbf{u}}$  und

$$DG(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \Delta\mathbf{u} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{G(\bar{\mathbf{u}} + \alpha\Delta\mathbf{u}) - G(\bar{\mathbf{u}})}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} [G(\bar{\mathbf{u}} + \alpha\Delta\mathbf{u})]_{\alpha=0} \quad (\text{A.8})$$

die Richtungs- oder auch GATEAUXableitung in Richtung von  $\Delta\mathbf{u}$  repräsentiert. Aufgrund der Tatsache, dass das Restglied  $R(\Delta\mathbf{u})$  in (A.7) schneller gegen 0 konvergiert als die ersten Reihenglieder, kann das Restglied vernachlässigt werden, und es ergibt sich zusammenfassend für den linearisierten Anteil der Abbildung an der Stelle  $\mathbf{u}$

$$G_{Lin}(\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}) = G(\bar{\mathbf{u}}) + DG(\bar{\mathbf{u}})\Delta\mathbf{u}. \quad (\text{A.9})$$



# Literaturverzeichnis

- ALTENBACH, J. & H. ALTENBACH (1994). *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher.
- ANDERBERG, Y. (1976). *Fire-Exposed hyperstatic concrete structures - an experimental and theoretical study*. Technischer Bericht, Lund Institute of Technology Lund Sweden.
- ANDERBERG, Y. & N.E. FORSEN (1982). *Fire resistance of concrete structures*. Technischer Bericht, Lund Institute of Technology Lund Sweden.
- ANDERBERG, Y. & S. THELANDERSSON (1973). *Stress and Deformation characteristics of concrete at high temperatures - 1. General discussion and critical review of literature*. Technischer Bericht, Lund Institute of Technology Lund Sweden.
- ANDERBERG, Y. & S. THELANDERSSON (1976). *Stress and Deformation characteristics of concrete at high temperatures - 2. Experimental Investigation and Material behaviour model*. Technischer Bericht, Lund Institute of Technology Lund Sweden.
- ANDRES, M. (2003). *Grundsatzuntersuchungen zum Stabilitätsverhalten von Schalenskonstruktionen aus Hochleistungsbeton*. Dissertation, Bergische Universität Wuppertal.
- ANDRES, M. (2004). *Zum Stabilitätsnachweis von Schalentragerwerken aus Hochleistungsbeton*. Dissertation, Abteilung Bauingenieurwesen, Bergische Universität Wuppertal.
- BAŞAR, Y. (1987). A consistent theory of geometrically non-linear shells with an independent rotation vector. *International Journal of Solids and Structures* 23(10), 1401–1415.
- BAŞAR, Y. & W.B. KRÄTZIG (2000). *Theory of Shell Structures*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 258. Düsseldorf: VDI Verlag.
- BAEHR, H.D. & K. STEPHAN (1994). *Wärme- und Stoffübertragung*. Berlin: Springer-Verlag.
- BARZEGAR-JAMSHIDI, F. (1987). *Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete under short term monotonic loading*. Dissertation, University of Illinois at Urban Champaign.
- BASAR, Y. & W.B. KRÄTZIG (1985). *Mechanik der Flächenträgerwerke*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg Verlag.
- BATHE, K.-J. (1990). *Finite-Elemente-Methoden*. Deutsche Übersetzung von P. Zimmermann. Berlin: Springer-Verlag.
- BETTEN, J. (1993). *Kontinuumsmechanik. Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Heidelberg: Springer-Verlag.

- BIERBRAUER, K. (2005). Zur Ermittlung der Tragfähigkeit bestehender Brücken aus Stahlbeton - Abschätzung der Bewehrungsmengen. In *45. Forschungskolloquium des DAfStb*, Beton- und Stahlbetonbau, 13–16.
- BIERBRAUER, K. (2008). *Ein Beitrag zur Bestimmung der Biegetragfähigkeit bestehender Stahlbetonbauteile*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau.
- BISCHOFF, M. (1999). *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- BORGONGA, W. (1997). *Tragverhalten von Slim-Floor Decken mit Betonhohlplatten bei Raumtemperatur und Brandeinwirkungen*. Dissertation, Institut für Baustatik und Konstruktion, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- BRAML, T., A. FISCHER, M. KEUSER & J. SCHNELL (2009). Beurteilung der Zuverlässigkeit von Bestandstragwerken hinsichtlich einer Querkraftbeanspruchung. *Beton- und Stahlbetonbau* 104, 798–812.
- BRESLER, B. & A.C. SCORDELIS (1963). Shear strength of reinforced concrete beams. *ACI Journal* 60(1), 51–72.
- CZERNIN, W. (1977). *Zementchemie für Bauingenieure*. Wiesbaden: Bauverlag.
- DAHL, L. & A. SCHAAB (2003). *Brandversuche zur Optimierung und Überprüfung von Schutzkonzepten für einschalige Tunnelauskleidungen*. Braunschweiger Brandschutztag 2003, 10. Fachseminar Brandschutz - Forschung und Praxis, Technische Universität Braunschweig, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz.
- DARWIN, D. & D.A.W. PECKNOLD (1974). *Inelastic model for cyclic biaxial loading of reinforced concrete*. Technischer Bericht, University of Illinois.
- DARWIN, D. & D.A. PECKNOLD (1977a). Analysis of cyclic loading of plane R/C structures. *Computers and Structures* 7, 137–146.
- DARWIN, D. & D.A. PECKNOLD (1977b). Nonlinear Biaxial Stress-strain law for concrete. *Journal of the engineering mechanics division/ASCE* 103(EM2), 229–241.
- DE BOER, R. & H. PREDIGER (1978). *Tensorrechnung - Grundlagen für Ingenieurwissenschaften*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 5, Universität - GH Essen.
- DRYSDALE, D. (2011). *An Introduction to Fire Dynamics - Third Edition*. New York: Wiley-Interscience.
- DVORKIN, E. N. & K.-J. BATHE (1984). A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations* 1, 77–88.
- ECKSTEIN, A. (1999). *Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 99-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- EHM, C. (1986). *Versuche zur Festigkeit und Verformung von Beton unter zweiaxialer Beanspruchung und hohen Temperaturen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig.



- EHM, H. (1967). *Ein Beitrag zur rechnerischen Bemessung von brandbeanspruchten balkenartigen Stahlbetonbauteilen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig.
- GREEN, A.E. & W. ZERNA (1968). *Theoretical Elasticity* (2. Aufl.). Oxford: Clarendon Press.
- GREVE, R. (2003). *Kontinuumsmechanik - Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Springer - Verlag.
- H. BEEM, C. KÖNKE, U. MONTAG & W. ZAHLTEN (1996). *FEMAS 2000 - Finite Element Moduls of Arbitrary Structures - User's Manual*. Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum.
- HAKSEVER, A. & R. WALTER (1980). *Dehnbehinderte Stahlbetonplatten und TT-Platten im Brandfall - Versuchsergebnisse und numerische Analyse*. Sonderforschungsbereich 148, Brandverhalten von Bauteilen, Arbeitsbericht 1978 - 1980 Teil 1 T3060, Technische Universität Braunschweig.
- HARADA, T., J. TAKEDA, S. YAMANE & F. FURUMURA (1972). Strength elasticity and thermal properties of concrete subjected to elevated temperatures. *Concrete for Nuclear Reactors ACI SP-34* (1), 377–406.
- HARMATHY, T. & W.W. STANZAK (1970). *Elevated Temperatures Tensile and Creep Properties of Some Structural and Prestressing Steels*. Technischer Bericht Research Paper No. 424, National Research Council of Canada, Ottawa.
- HARTE, R., V. MIHAJLOV & U. MONTAG (2010). Zur Bemessung von Stahlbeton- und Verbundbauteilen im Brandfall. *Bauingenieur - VDI Bautechnik* (Jahresausgabe 2010/2011), 126–135.
- HERING, E., R. MARTIN & M. STOHRER (2007). *Physik für Ingenieure*. Springer Verlag.
- HOFSTETTER, G. & H.A. MANG (1995). *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*. Braunschweig: Vieweg & Sohn.
- HOGNESTAD, E.A. (1951). *A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members*. Technischer Bericht.
- HOSSER, D. (2009). *Leitfaden Ingenieurmethoden des Brandschutzes*. Technischer Bericht Technischer Bericht vfdb TB 04-01, Vereinigung zur Förderung des Deutschen Brandschutzes e. V. (vfdb).
- HOSSER, D., B. KAMPMEIER & J. ZEHFUSS (2004). *Überprüfung der Anwendbarkeit von alternativen Ansätzen nach Eurocode 1 Teil 1-2 zur Festlegung von Brandschutzanforderungen bei Gebäuden*. Technischer Bericht T3108, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, Technische Universität Braunschweig, Fraunhofer IRB Verlag.
- HOSSER, D. & J. ZEHFUSS (2002). *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum erforderlichen Brandschutz bei mehrgeschossigen Gebäuden in Stahlbauweise, Forschungsvorhaben S 503 im Auftrag der Stiftung Industrieforschung Köln*. Technischer Bericht, Technische Universität Braunschweig, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz.
- HOTHAN, S. (2004). *Zur dreidimensionalen Simulation von Deckentragwerken im Brandfall*. Dissertation, Institut für Stahlbau, Universität Hannover.

- HUGHES, B.P. & G.P. CHAPMAN (1966). The complete stress strain curves for concrete in direct tension. *RILEM Bulletin No. 30*, 95–97.
- HUGHES, T.J.R. & T.E. TEZDUYAR (1981). Finite elements based upon Mindlin plate theory, with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. *Journal of Applied Mechanics*.
- IDING, R. H., B. BRESLER & Z. NIZAMUDDIN (1977). *Fires-RC II A Computer Program for the Fire Response of Structures Reinforced Concrete Frames*. Technischer Bericht, University of California, Berkeley.
- JCSS (2000). *Probabilistic Model Code*. Technischer Bericht, Joint Committee for Structural Safety.
- JOFRIET, J.A. & G.M. MCNEICE (1971). Finite element analysis of reinforced concrete slabs. *Journal of the Structural Division (ASCE) 97*(ST3), 785–806.
- JUN, D. (2002). *Adaptive Strategien für nichtlineare Finite-Element-Simulationen von Schalentragwerken*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4, Nr. 187. Düsseldorf: VDI Verlag.
- KIEL, M. (1987). *Nichtlineare Berechnung ebener Stahlbetonflächentragwerke unter Einschluss von Brandbeanspruchung*. Dissertation, Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Hochschule Braunschweig.
- KLINGMÜLLER, O. & U. BOURGUND (1992). *Sicherheit und Risiko im Konstruktiven Ingenieurbau*. Vieweg Verlag.
- KÖNIG, G., D. SOUKHOV & F. JUNGWIRTH (1998). *Sichere Betonproduktion für Stahlbetontragwerke*. Technischer Bericht, Fraunhofer.
- KORDINA & MEYER-OTTENS (1998). *Beton Brandschutz-Handbuch*. Verlag Bau+Technik.
- KORDINA, K. (1997). *Über das Brandverhalten von punktgestützten Stahlbetonplatten*. Heft 479, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- KORDINA, K. & P. BORNEMANN (1966). *Brandverhalten von Stahlbetonplatten - Einflüsse von Schutzschichten*. Heft 181, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- KORDINA, K. & L. KRAMPF (1984). *Empfehlungen für brandschutztechnisch richtiges Konstruieren von Betonbauwerken*. Heft 352, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- KRÄTZIG, W.B. (1968). *Beitrag zu einer linearen Approximation der Stabilitätstheorie elastischer Flächentragwerke*. Technischer Bericht, Habilitationsschrift Technischer Universität Hannover.
- KRÄTZIG, W.B. (1971). *Thermodynamics of deformations and shells*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 71-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- KRÄTZIG, W.B. (1997). Multi-level modeling techniques for elasto-plastic structural responses. In D.R.J. Owen, E. Oñate, & E. Hinton (Hrsg.), *Computational Plasticity - Fundamentals and Applications*, 457–468. Barcelona: CIMNE.

- KRÄTZIG, W.B. & Y. BAŞAR (1997). *Tragwerke 3 - Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. Berlin: Springer-Verlag.
- KUPFER, H.B. (1973). *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. Heft 229, S. 1-105, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin.
- KUPFER, H.B. & K.H. GERSTLE (1973). Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of Engineering Mechanics Division (ASCE) 99 (EM4)*, 852-866.
- LACKNER, R. & H.A. MANG (2007). *Betonkalender 2007*, Kapitel VIII Mehrskalennmodelle für die Berechnung von Flächentragwerken, 21-68. Ernst & Sohn Berlin.
- LÖBBERT, A., K.D. POHL & K.-W. THOMAS (2004). *Brandschutzplanung für Architekten und Ingenieure*. Verlagsgesellschaft Rudolf Müller GmbH und Co. KG, Köln.
- LIE, T.T., T.J. ROWE & T.D. LIN (1986). Residual Strength of Fire-Exposed Reinforced Concrete Columns. *ACI (SP 92-9)*, 153-174.
- LIM, L.C.S. (2003). *Membrane action in fire exposed concrete floor systems*. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Canterbury.
- LIM, L., A. BUCHANAN, P. MOSS & J.-M. FRANSSSEN (2004). Computer Modeling of Restrained Reinforced Concrete Slabs in Fire Conditions. *Journal of Structural Engineering*, 1964-1971.
- LIN, C.H., S.T. CHENG & C.A. YANG (1995). Repair of fire damaged reinforced concrete columns. *ACI Structural Journal* (4).
- MANNFELD, TH. (2003). *Wirklichkeitsnahe Simulation hygrischer und thermischer Dehnungsverteilungen in Stahlbetonquerschnitten*. Diplomarbeit, Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- MARECHAL, J.C. (1972). Variations of the modulus of elasticity and Poisson's ratio with temperature. *Concrete for Nuclear Reactors ACI SP-34 (1)*, 495-503.
- MAREK, R. & K. NITSCHKE (2007). *Praxis der Wärmeübertragung*. Carl Hanser Verlag Leipzig.
- MENZEL, W. (1996). *Gemischt-hybride Elementformulierungen für komplexe Schalensstrukturen unter endlichen Rotationen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 96-4, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- MIHAJLOV, V.M. (2009). *Numerical Model for Spatial Steel and Composite Frame-Structures Exposed to Fire and Elevated Temperatures*. Dissertation, Statik & Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- MIK-NRW (2009). *Gefahrenabwehr in Nordrhein Westfalen - Jahresbericht 2009*. Technischer Bericht, Ministerium für Inneres und Kommunales des Landes Nordrhein Westfalen.
- MINDLIN, R.D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 18, 31-38.

- MONTAG, U. (1997). *Konzepte zur Effizienzsteigerung numerischer Simulationsalgorithmen für elastoplastische Deformationsprozesse*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 97-6, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- NAGHDI, P.M. (1972). The theory of shells and plates. In S. Flügge (Hrsg.), *Handbuch der Physik*, Volume VI, 425–640. Berlin: Springer-Verlag.
- NELISSEN, L.J.M. (1972). Biaxial testing of normal concrete. *Heron* 18(1), 1–90.
- NILSON, A.H. & Z.P. BAZANT (1983). State of the art report - Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. *ASCE*, 1–545.
- NOH, S.-Y. (2001). *Beitrag zur Erklärung der Schädigungsmechanismen von Naturzugkühltürmen*. Dissertation, RWTH Aachen.
- OZBOLT, J., I. KOZAR, R. ELIGEHAUSEN & G. PERISKIC (2005). Instationäres 3D Thermo-mechanisches Modell für Beton. *Beton- und Stahlbetonbau* 100, 39–51.
- PÖLLING, R. (2000). *Ein praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. Dissertation, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum.
- POPOVIC, S. (1973). A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research* 3(5), 583–599.
- POTTHARST, R. (1977). *Zur Wahl eines einheitlichen Sicherheitskonzeptes für den konstruktiven Ingenieurbau*. Dissertation, Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt.
- PULKER, M. (2010). *Anwendung von Brandsimulationsmodellen zur Rekonstruktion von Brandverläufen*. Masterthesis, Zentrum für praxisorientierte Informatik, Donau-Universität Krems.
- RAMM, E. (1976). *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- REICK, M. (2001). *Brandverhalten von Befestigungen mit großem Randabstand in Beton bei zentrischer Zugbeanspruchung*. Dissertation, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart.
- REISSNER, E. (1945). The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 12, 69–77.
- RICHTER, F. (1973). *Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen*. Stahleisen - Sonderberichte Heft 8, Forschungsinstitut der Mannesmann AD, Düsseldorf: Verlag Stahleisen m.b.H.
- RITTER, W. (1899). Die Bauweise Hennebique. *Schweizerische Bauzeitung*.
- ROTS, J.G. (1984). The need for fracture mechanics options in finite element models for concrete structures. In *Proc., International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, Part 1, 19–32.
- RÜSCH, H. (1975). Die Ableitung der charakteristischen Werte der Betonzugfestigkeit. *Beton*, 55–58.

- SAENZ, L. P. (1964). Discussion of „Equation for the stress-strain curve of concrete“ by Desayi and Krishnan. *ACI Journal* 61(9), 1229–1235.
- SCHAUMANN, P., F. KETTNER & S. OSTHEER (2004). *Bestimmung der thermischen Materialkennwerte von Normalbeton für die brandschutztechnische Bemessung von Verbundbauteilen nach EC 4 Teil 1-2*. Technischer Bericht T3060, Universität Hannover, Institut für Stahlbau, Fraunhofer IRB Verlag, Stuttgart.
- SCHNEIDER, J. (1996). *Sicherheit und Zuverlässigkeit im Bauwesen - Grundwissen für Ingenieure*. Teubner Verlag.
- SCHNEIDER, U. (1977). Festigkeits- und Verformungsverhalten von Beton unter stationärer und instationärer Temperaturbeanspruchung. *Bautechnik*, 123–132.
- SCHNEIDER, U. (1982). *Verhalten von Beton bei hohen Temperaturen*. Heft 337, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- SCHNEIDER, U., U. DIEDERICH, W. ROSENBERGER & R. WEISS (1980). *Hochtemperaturverhalten von Festbeton*. Technischer Bericht.
- SCHNEIDER, U. & A. HAKSEVER (1976). *Bestimmung der äquivalenten Branddauer von statisch bestimmt gelagerten Stahlbetonbalken bei natürlichen Bränden*. Technischer Bericht.
- SCHUSTER, B. (2009). *Numerische Simulation des Verhaltens von Stahlbetonflächentragwerken unter Berücksichtigung brandbedingter Materialveränderungen*. Diplomarbeit, Statik und Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- SCHWARZKOPF, M. (2001). BSt 500 MA das neue Mattenprogramm im Einklang mit DIN 1045-1: 2001-07. *Bauingenieur* 76(12), 557–562.
- SIX, M. (2001). *Sicherheitskonzept für nichtlineare Traglastverfahren im Betonbau*. Dissertation, Institut für Massivbau, Technische Universität Darmstadt.
- SPAETHE, G. (1992). *Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen*. Springer Verlag Wien New York.
- STEIN, E. & F.J. BARTHOLD (1997). *Elastizitätstheorie*. Vorlesungsskriptum, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- TESAR, C. N. (2007). *Zum Tragverhalten von Verbunddeckensystemen im Brandfall*. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- THELANDERSSON, S. (1971). *Effekt of high temperatures on tensile strength of concrete*. Technischer Bericht, Lund Institute of Technology Lund Sweden.
- THIENEL, K.-C. (1993). *Betontechnologische und mechanische Einflüsse auf Festigkeit und Verformung von Beton bei hoher Temperatur und biaxialer Belastung*. Technischer Bericht, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz.
- THIENEL, K.-C. (1994). *Festigkeit und Verformung von Beton bei hoher Temperatur und biaxialer Beanspruchung*. Heft 437, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag, Berlin.
- VAN MIER, J.G.M. (1984). *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*. Dissertation, Delft University of Technology.

- WEISSBACH, W. (2007). *Werkstoffkunde*. Wiesbaden: Vieweg Verlag.
- WELSH, R. (2001). *2-D Analysis of composite steel - concrete beams in fire*. Dissertation, Departement of Civil Engineering, University of Canterbury.
- WILLNER, K. (2009). *Die Methode der finiten Elemente*.
- WÖRMANN, R. (2004). *Zur Erfassung hygrothermischer Einflüsse auf das nichtlineare Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken*. Dissertation, Statik & Dynamik der Tragwerke, Bergische Universität Wuppertal.
- WU, B., J. YUAN & G. Y. WANG (2000). Experimental Study on the Mechanical Properties of HSC After High Temperature. *Chinese J. Civil Engineering* 33(2), 8–15.
- ZAHLTEN, W. (1990). *Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computeranalyse allgemeiner Stahlbetonschalen*. Technisch Wissenschaftliche Mitteilung Nr. 90-2, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- ZHANG, B. & N. BICANIC (2002). Residual Fracture Toughness of Normal- and High-Strength Gravel Concrete after Heating to 600°C. *ACI Materials Journal* 99, 217–226.
- ZIENKIEWICZ, O.C. & R.L. TAYLOR (2000). *Finite Element Method* (5. Aufl.), Volume 1-3. London: Butterworth Heinemann.

# Normen und Richtlinien

- DIN 1045-1 (2008, Mai). Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN 1055-100 (2001, März). Einwirkungen auf Tragwerke Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 13501-1 (2007, Mai). Klassifizierung von Bauprodukten und Bauarten zu ihrem Brandverhalten - Teil 1: Klassifizierung mit den Ergebnissen aus den Prüfungen zum Brandverhalten von Bauprodukten. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 13501-2 (2008, Januar). Klassifizierung von Bauprodukten und Bauarten zu ihrem Brandverhalten - Teil 2: Klassifizierung mit den Ergebnissen aus den Feuerwiderstandsprüfungen, mit Ausnahme von Lüftungsanlagen. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 1990 (2010, Dezember). Eurocode - Grundlagen der Tragwerksplanung. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 1991-1-2 (2010, Dezember). Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 1-2: Allgemeine Einwirkungen - Brandeinwirkung auf Tragwerke. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 1991-1-2/NA (2010, Dezember). Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter - Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 1-2: Allgemeine Einwirkungen - Brandeinwirkungen auf Tragwerke. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 1992-1-2 (2010, Dezember). Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-2: Allgemeine Regeln - Tragwerksbemessung für den Brandfall. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 1992-1-2/NA (2010, Dezember). Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter - Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-2: Allgemeine Regeln - Tragwerksbemessung für den Brandfall. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 1993-1-2 (2010, Dezember). Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 1-2: Allgemeine Regeln - Tragwerksbemessung für den Brandfall. Beuth-Verlag, Berlin.
- DIN EN 1994-1-2 (2010, Dezember). Eurocode 4: Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton - Teil 1-2: Allgemeine Regeln - Tragwerksbemessung für den Brandfall. Beuth-Verlag, Berlin.

DIN V ENV 1992-1-2 (1997, Mai). Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-2: Allgemeine Regeln - Tragwerksbemessung für den Brandfall. Beuth-Verlag, Berlin.

MODEL CODE 90 (1993). CEB-FIP Model Code 1990. Thomas Telford, London.





**Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau  
Bergische Universität Wuppertal**

- Heft 1                    Andres, M.: Zum Stabilitätsnachweis von Schalentragsystemen aus Hochleistungsbeton, 2004; ISBN 978-3-940795-00-7
- Heft 2                    Wörmann, R.: Zur Erfassung hygrothermischer Einflüsse auf das nicht-lineare Trag- und Schädigungsverhalten von Stahlbetonflächentragsystemen, 2004; ISBN 978-3-940795-01-4
- Heft 3                    Piel, W.: Zur Erhöhung der Durchstanztragfähigkeit von Flachdecken mit Stahlverbundsystemen, 2004; ISBN 978-3-940795-02-1
- Heft 4                    Mahran, E.: Finite-Infinite-Elemente-Modellierung zur Simulation der Boden-Bauwerk-Flüssigkeit-Interaktion unter dynamischer Anregung, 2004; ISBN 978-3-940795-03-8
- Heft 5                    Eusani, R.: Zur numerischen Zeitbereichssimulation der Aeroelastischen Instabilität bei Seilbrücken, 2005; ISBN 978-3-940795-04-5
- Heft 6                    Stracke, J.: Flachdecken aus Konstruktions - Leichtbeton, 2005; ISBN 978-3-940795-05-2
- Heft 7                    Hanswille, G., Porsch, M., Üstündağ, C.: Versuchsbericht SFB 398 -Projekt C8 -Teil 1, 2007; ISBN 978-3-940795-06-9
- Heft 8                    Schäfer, M.: Zum Tragverhalten von Flachdecken mit integrierten hohlkastenförmigen Stahlprofilen, 2007; ISBN 978-3-940795-07-6
- Heft 9                    Üstündağ, C.: Beitrag zur Bemessung von Verbundträgern unter ermüdungswirksamen Beanspruchungen, 2007; ISBN 978-3-940795-08-3
- Heft 10                   Hanswille, G., Porsch, M.: Versuchsbericht über die Durchführung von 36 Push-Out-Versuchen; ISBN 978-3-940795-09-0
- Heft 11                   Hanswille, G., Porsch, M.: Metallurgische Untersuchungen an Schweißnahtverbindungen, 2008; ISBN 978-3-940795-10-6
- Heft 12                   Jamali, N.: On the Numerical Simulation of Friction-Isolated Structures, 2008; ISBN 978-3-940795-11-3
- Heft 13                   Lippes, M.: Zur Bemessung von Hohlprofil - Verbundstützen aus hochfesten Stählen und Betonen, 2008; ISBN 978-3-940795-12-0

- Heft 14                    Mihajlov, Viktor: Numerical Model for Spatial Steel and Composite Frame-Structures Exposed to Fire and Elevated Temperatures, 2009; ISBN 978-3-940795-13-7
- Heft 15                    Neuhaus, Christian: Zur Identifikation selbsterregter aeroelastischer Kräfte im Zeitbereich, 2010; ISBN 978-3-940795-14-4
- Heft 16                    Stopp, Kirsten: Trag- und Verformungsverhalten großflächig gegründeter Stahlbetontragwerke unter Berücksichtigung der Boden-Bauwerk-Interaktion, 2010; ISBN 978-3-940795-15-1
- Heft 17                    Porsch, Markus: Modellierung von Schädigungsmechanismen zur Beurteilung der Lebensdauer von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, 2010; ISBN 978-3-940795-16-8
- Heft 18                    Mannsfeld, Thorsten Rolf: Tragverhalten von Stahlbetonflächentragwerken unter Berücksichtigung der temperaturbedingten Nichtlinearitäten im Brandfall, 2011; ISBN 978-3-940795-17-5
- Heft 19                    Gelien, Marion: Ein Beitrag zur Bemessung von Stahlbetonstützen im Brandfall, 2011; ISBN 978-3-940795-18-2
- Heft 20                    Festschrift Gerhard Hanswille, 2011; ISBN 978-3-940795-19-9