

Analytische Beiträge zum Raum–Zeit–Chaos: von gekoppelten Abbildungen zum Isingmodell

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades im Fach Theoretische Physik
an der Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal

WUB–DIS 99–8

vorgelegt von

Frank Schmüser

aus Velbert

Abstract

This work is a contribution to the field of high dimensional chaos, in particular spatio-temporal chaos. An interplay between concepts from nonlinear dynamics and statistical mechanics is natural in an area in which the dynamics of many interacting degrees of freedom is studied. This area poses still many challenges for our understanding, since successful concepts from low dimensional dynamical systems or equilibrium statistical mechanics are often not applicable any more.

Coupled map lattices (CMLs) are model systems for high dimensional chaotic dynamics that have been introduced in the 80s. In these systems many chaotic maps are coupled on a lattice. In contrast to many mainly numerical studies of CMLs, I here pursue an analytical approach, namely a perturbation theory in the near of an exactly solvable CML. The CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ which is studied in this work is inspired by the Miller Huse CML [24] that shows a continuous phase transition on a two dimensional lattice.

The CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ which is defined on a one dimensional lattice depends on two parameters, the deformation δ of the map on each lattice site and the coupling ϵ between neighbouring maps. Perturbation theory is valid, if $\epsilon, \delta \ll 1$. The dynamics of the CML is determined by an interplay between the two parameters. I find four regions in the (ϵ, δ) plane with different ergodic behaviour of the CML. The number and size of the coexisting attractors differ considerably in these various regions. In chapter 3 and 4 most calculational effort is spent on the determination of the bifurcation lines between the four phases.

A statistical perspective on the CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ is gained by a coarse graining procedure. At this description level the CML becomes a stochastic dynamics of spin chains. I can derive a master equation for this spin dynamics. There are three types of spin flips with different transition probabilities in perturbation theory. I can show that the CML is a kinetic (one dimensional) Ising model on the coarse grained level. Depending on the parameters ϵ and δ the coupling in the Ising Hamiltonian is ferromagnetic or anti-ferromagnetic. One can also attribute a temperature to the CML by this correspondence to the Ising model. It is possible to understand various properties of the CML by referring to the known behaviour of kinetic Ising models. Particularly, transients in the CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ can be understood as relaxation processes to the anti-ferromagnetic ground state of the Ising model.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das Modellsystem	7
2.1	Der Ausgangspunkt für die Störungstheorie	7
2.2	Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$	8
2.2.1	Die deformierte Abbildung f_δ	8
2.2.2	Das dynamische System f_δ	8
2.2.3	Die Kopplung der Abbildungen f_δ	9
2.2.4	Die Problemstellung	10
2.3	Störungstheorie für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$	11
3	Erklärung der Methode für $N = 2$	13
3.1	Das CML für $N = 2$	14
3.2	Die Überlappmengen $OV_{\alpha,\beta}$	14
3.3	Struktur der Parallelogramme P_γ	15
3.3.1	Beispiel	15
3.3.2	Notation	16
3.3.3	Eigenschaften der Parallelogramme P_γ	17
3.4	Vom Überlapp zum Übergang	21
3.4.1	Übergang von I_α : Urbilder und Fehlvolumina	21
3.4.2	Übergang nach I_β	23
3.4.3	Kurze Zusammenfassung	24
3.5	Von Übergängen zu Attraktoren	24
3.6	Symmetrien des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$	25
3.7	Die Dynamik in I_{++} und I_{--}	26
3.7.1	Attraktor in I_{++} und I_{--} für $\delta \geq 0$	26
3.7.2	Dynamik in I_{++} für $\delta < 0$	28
3.8	Die Dynamik in I_{-+} und I_{+-}	36
3.8.1	Parallelogramme und Schnittmengen	36
3.8.2	Urbildmenge der ersten Generation	38
3.8.3	Urbildmengen höherer Generation	38
3.8.4	Das Kriterium für das kritische δ	45
3.8.5	Ein Attraktor in I_{-+} für $\delta \geq \delta_c$	46
3.8.6	Bestimmung von δ_c	47
3.8.7	Überprüfung der beiden Übergangskriterien	48
3.8.8	Nachtrag zur Dynamik in I_{++} für $\delta < 0$	50
3.9	Zusammenfassung und Bifurkationsdiagramm	52
3.9.1	1. Parameterbereich: $\delta \geq 0$:	52
3.9.2	2. Parameterbereich: $-4\epsilon/3 < \delta < 0$	52

3.9.3	3. Parameterbereich: $-4\epsilon/3 < \delta < 0$	52
3.9.4	Bifurkationsdiagramm	52
4	Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für $N = 3$	55
4.1	Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für $N = 3$	55
4.2	Die Parallelepipede P_γ	56
4.2.1	Notation	56
4.2.2	Eigenschaften der Parallelepipede P_γ	57
4.3	Die Dynamik in I_{+++} und I_{---}	59
4.3.1	Attraktor in I_{+++} für $\delta \geq 0$	59
4.3.2	Dynamik in I_{+++} für $\delta < 0$	60
4.4	Die Dynamik im Würfel I_{-++}	65
4.5	Der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$	66
4.5.1	Parallelepipede und ihre Schnittmengen mit dem Kubus I_{--+}	66
4.5.2	Urbildmenge der ersten Generation von $OV_{-++,--+}$	67
4.5.3	Fehlvolumen und Urbildmengen höherer Generation	68
4.5.4	Aufstellen des Kriteriums für δ_c	71
4.5.5	Bestimmung der Höhe der Mengen $F^{(k)}$	71
4.5.6	Bestimmung von δ_c	75
4.5.7	Überprüfung der Übergangskriterien	77
4.6	Der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$	78
4.6.1	Parallelepipede und Schnittmengen mit I_{+++}	79
4.6.2	Urbildmengen der ersten Generation	80
4.6.3	Fehlvolumen und Urbildmengen höherer Generation	80
4.6.4	Bestimmung der Höhe von Σ_E^∞	83
4.6.5	Bestimmung von δ_c	84
4.6.6	Überprüfung der Übergangskriterien	85
4.7	Zusammenfassung und Bifurkationsdiagramm	86
4.7.1	Zusammenfassung der Übergänge	86
4.7.2	Die Parameterbereiche	87
5	Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für $N > 3$	89
5.1	Eigenschaften der Parallelepipede P_γ	90
5.2	Rückführung der Übergänge auf $N = 3$	90
5.2.1	Die Schnittmengen $P_\gamma \cap I_\beta$	91
5.2.2	Urbilder der Überlappmenge	93
5.2.3	Das Fehlvolumen FV_α	93
5.2.4	Die effektive Überlappmenge $EO_{\alpha,\beta}$ und ihre Teilmenge $W_{\alpha,\beta}$	95
5.3	N -dimensionale Übergänge	95
5.4	Die Attraktoren eines N -dimensionalen CMLs	97
5.5	Welchen Effekt hat die Kopplung im CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$?	102
6	Coarse graining für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$	105
6.1	Von Phasenraumpunkten zu Kuben	105
6.2	Die stochastische Dynamik der Indexvektoren	106
6.2.1	Warum die Indexvektordynamik Markovsch ist	107
6.2.2	Die Mastergleichung	108
6.3	Die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\beta \alpha)$	109
6.3.1	Die geometrische Interpretation der Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\beta \alpha)$	109

6.3.2	Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten	111
6.3.3	Numerische Überprüfung der stochastischen Dynamik	112
7	Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ als kinetisches Isingmodell	115
7.1	Die Einführung von Spinzuständen	115
7.2	Stationäre Lösungen der Mastergleichung	117
7.3	Die stationären Verteilungen in den vier Parameterbereichen	119
7.4	Kinetische Isingmodelle	121
7.5	Die Statistische Mechanik des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$	123
7.6	Die transiente Dynamik des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$	126
7.6.1	Ein exakt lösbares kinetisches Isingmodell	127
8	Zusammenfassung	131
	Anhänge	135
A	Begriffe aus der Theorie dynamischer Systeme	135
B	Der O-Kalkül	137
C	Beweis einer Aussage auf Seite 28	139
D	Beweis einer Aussage auf Seite 35	141
E	Störungstheoretische Argumentation für Gleichung (3.51)	143
F	Zur Ungleichung (3.80)	151
G	Die stationäre Verteilung im Parameterbereich 4	155

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem Problem aus dem Gebiet hochdimensionaler dynamischer Systeme bzw. mit der Dynamik vieler aneinander gekoppelter Freiheitsgrade. Dabei stehen analytische Methoden im Vordergrund. Da sowohl Konzepte aus der Nichtlinearen Dynamik wie auch aus der Statistischen Mechanik für diese Arbeit relevant werden, möchte ich zuerst kurz auf diese beiden großen Gebiete eingehen.

In der **Nichtlinearen Dynamik** (populärer: „Chaosforschung“) steht die Beschreibung der Bewegung weniger Freiheitsgrade im Vordergrund; der Phasenraum ist in diesem Fall niedrigdimensional. Schon für drei Freiheitsgrade kann die Dynamik sehr kompliziert werden. Am Ende des letzten Jahrhunderts bekam der französische Mathematiker Henri Poincaré deswegen als erster Begriffe der heutigen Nichtlinearen Dynamik ins Blickfeld, als er das Drei-Körper-Problem der Himmelsmechanik untersuchte. Seit den 60er Jahren wurde die Nichtlineare Dynamik – in der Mathematik: die Theorie dynamischer Systeme – von Mathematikern und Physikern stark ausgebaut, so daß heutzutage zur Charakterisierung niedrigdimensionaler Bewegung viele Begriffe zur Verfügung stehen, z. B. Attraktoren und ergodische Maße auf ihnen, Lyapunovexponenten, fraktale Dimensionen und (dynamische) Entropien.

Wenn man die Bewegung von vielen Freiheitsgraden erfassen möchte, sind die Begriffe der Nichtlinearen Dynamik im Prinzip zwar noch verwendbar – denn für mathematische Begriffe ist die Dimension des Phasenraums meistens beliebig –, doch ergeben sich die beiden folgenden Probleme:

- Die Transientenlänge eines dynamischen Systems ist die Zeitdauer, bis von einer Anfangsbedingung ausgehend ein Attraktor erreicht wird. Diese Zeitspanne wächst mit der Größe des Systems oft exponentiell an. In diesem Fall ist es fraglich, ob man die Langzeitdynamik eines hochdimensionalen Systems überhaupt als eine ergodische Bewegung auf einem Attraktor charakterisieren kann.
- Die Begriffe der Nichtlinearen Dynamik reichen für die Charakterisierung vieler physikalischen Phänomene wie Phasenübergänge und Ordnungsparameter nicht aus, da diese auf einer mesoskopischen („coarse grained“) Ebene formuliert werden, die von der mikroskopischen Dynamik relativ unabhängig ist. Demnach sind globale Größen wie fraktale Dimensionen, Entropien und Lyapunovexponenten oft zur Beschreibung dieser Phänomene nicht geeignet.

Der letzte Punkt läßt sich gut anhand der **Statistischen Mechanik** illustrieren, die ebenfalls Ende des 19. Jahrhunderts von Ludwig Boltzmann und Josiah Willard Gibbs entwickelt wurde und seit ca. 1950 eine wohletablierte Theorie ist. Diese Theorie

ist gerade in der Beschreibung vieler Freiheitsgrade erfolgreich, weil sie sich auf makroskopische (thermodynamische) Größen konzentriert und von der mikroskopischen Dynamik elegant abstrahiert. Denn für makroskopische Größen sind nur große Längen- und Zeitskalen des Systems relevant, so daß viele Details der mikroskopischen Dynamik vernachlässigt werden können. Dementsprechend läßt sich die Thermodynamik eines Systems über die Berechnung von Zustandssummen erhalten. Allerdings ist dieses Verfahren nur für Systeme nahe dem thermodynamischen Gleichgewicht erfolgreich.

Die Statistische Mechanik des Gleichgewichts hat im Verständnis von kontinuierlichen Phasenübergängen und den sie begleitenden kritischen Phänomenen große Fortschritte erzielt, indem die Skaleninvarianz an den kritischen Punkten mit Hilfe der Renormierungsgruppe quantitativ gemacht wird (siehe z. B. [16, 19]). Mit Hilfe der Renormierungsgruppe kann man außerdem zeigen, daß Gleichgewichtsphasenübergänge von Systemen, denen eine Hamiltonfunktion zugrunde liegt, sich in Universalitätsklassen einteilen lassen. Eine Universalitätsklasse wird nur durch die Symmetrie der Hamiltonfunktion und die Raumdimension des Systems bestimmt.

Als notorisches Problem der Statistischen Mechanik ist das sog. Ergodenproblem bekannt, das schon Boltzmann zu lösen versuchte. Dabei geht es um die Herleitung der Statistischen Mechanik aus der mikroskopischen, meist Hamiltonschen Dynamik der vielen Freiheitsgrade im thermodynamischen Limes. Trotz vieler Einzelergebnisse ist man bis heute weit von der Lösung dieses Grundlagenproblems entfernt [21, 25]. Gerade in den letzten Jahren wurde versucht, mit Hilfe von Ideen aus der Nichtlinearen Dynamik die Bewegung der mikroskopischen Freiheitsgrade als sog. „molekulares Chaos“ phänomenologisch zu beschreiben (eine Übersicht zu diesem Ansatz gibt [30]).

Ein weiteres weitgehend ungelöstes Problem ist die statistische Beschreibung von sehr vielen wechselwirkenden Freiheitsgraden, die sich weit entfernt vom thermischen Gleichgewicht befinden, so daß die lineare Antworttheorie nicht mehr gültig ist. Das entsprechende Gebiet der **Nichtgleichgewichtsstatistik** ist sehr unübersichtlich bzw. reichhaltig. Man unterscheidet zwei Arten von Nichtgleichgewichtsprozessen:

- Eine *Relaxationsdynamik* ist die Bewegung hin zum thermischen Gleichgewicht, nachdem das System in einen Zustand weit weg von diesem präpariert wurde. Beispielsweise ist das Abkühlen eines stark erhitzten Ferromagneten ein solcher Prozeß. Auf einer theoretisch idealisierten Ebene kann man die Kinetik von stochastischen Spindynamiken studieren, z. B. die Glauberdynamik [12, 18]. Weitere Beispiele für Relaxationsphänomene sind manche chemische Reaktionen, Anlagerungsmodelle und Oberflächenwachstum [26, 1, 4].
- Es gibt daneben auch *stationäre Nichtgleichgewichtszustände*, die durch einen Energiefluß durch das System aufrechterhalten werden. Ein Beispiel sind Experimente mit Flüssigkeiten, bei denen turbulentes Verhalten beobachtet wird [10]. Als idealisierte Modellsysteme studiert man stationäre Nichtgleichgewichtszustände bei Gittergasen in einem treibenden Feld [31, 33]. Die stationären Nichtgleichgewichtszustände ergeben sich oft als Lösungen von Mastergleichungen; diese Lösungen erfüllen nicht die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts. Entsprechend ist die Statistik eines Nichtgleichgewichtszustandes oft noch nicht gut verstanden.

Von einem deterministischen Standpunkt wird auch das turbulente Verhalten einer Flüssigkeit durch die dreidimensionalen Navier–Stokes–Gleichungen beschrieben, die partielle Differentialgleichungen sind. Im turbulenten Bereich wird die Bewegung

dieses dynamischen Systems allerdings sehr hochdimensional, so daß sogar das numerische Erzeugen einer Trajektorie mit der heute verfügbaren Rechenleistung ein Problem werden kann. Außerdem ergeben sich die oben angesprochenen Schwierigkeiten der Nichtlinearen Dynamik mit hochdimensionalen Systemen, so daß das Turbulenzproblem auch für die Nichtlineare Dynamik eine Herausforderung bleibt [10, 2].

Um einige Aspekte der Dynamik von vielen aneinander gekoppelten Freiheitsgraden besser zu verstehen, wurden in den 80er Jahren die **Coupled map lattices (CMLs)** als Modellsysteme eingeführt [17, 6, 2]. Diese Systeme charakterisiere ich kurz, da auch diese Arbeit die Analyse eines CMLs zum Inhalt hat. Ich betrachte ein regelmäßiges Gitter der Dimension d mit N Plätzen (für $d = 1$ ist dies eine Kette der Länge N). Auf jedem Gitterplatz iteriere ich eine skalare chaotische Abbildung f , zum Beispiel die logistische Gleichung oder die Zeltabbildung:

$$f : D \rightarrow D \quad (1.1)$$

Das CML koppelt diese Abbildungen auf den Gitterplätzen räumlich. Zum Beispiel ergibt sich bei einer Nächste–Nachbar–Kopplung in einer Raumdimension die Konfiguration $(x_1^{t+1}, x_2^{t+1}, \dots, x_N^{t+1}) \in D^N$ zum Zeitpunkt $(t + 1)$ durch

$$x_i^{t+1} := [\mathbf{T}(x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t)]_i := (1 - \epsilon) f(x_i^t) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_{i-1}^t) + f(x_{i+1}^t)] . \quad (1.2)$$

\mathbf{T} ist eine Abbildung des Raums D^N auf sich selbst; das CML ist das dynamische System mit diskreter Zeitvariable $t \in \mathbb{N}$, das sich durch beliebig häufiges Iterieren von \mathbf{T} ergibt. Im Unterschied zu partiellen Differentialgleichungen sind Raum- und Zeitvariable bei CMLs diskret. Die Kopplung des CMLs in Gleichung (1.2) kann als diskrete Version des (eindimensionalen) Diffusionsoperators aufgefaßt werden. Ein CML ist für große N und eine chaotische Einzelabbildung f oft ein sehr hochdimensionales chaotisches System. Das in dieser Arbeit studierte CML hat die Form (1.2); die entsprechende skalare chaotische Funktion f_δ wird in Abschnitt 2.2 eingeführt.

Gegenüber partiellen Differentialgleichungen haben CMLs den Vorteil, daß sich Trajektorien mit wesentlich geringerem Rechenaufwand erzeugen lassen. Außerdem läßt sich leicht die Dimension der chaotischen Bewegung vergrößern, indem man die Zahl der Gitterplätze N erhöht. Dementsprechend werden CMLs auch zur Modellierung von physikalischen Systemen benutzt [35]. CMLs sind wie partielle Differentialgleichungen Systeme, mit denen man „Raum–Zeit–Chaos“ studieren kann. Dabei wird das Wechselspiel zwischen der *zeitlichen* chaotischen Dynamik auf einem Gitterplatz (die Funktion f) und der *räumlichen* Kopplung der Gitterplätze untersucht.

Wie beim Studium von hochdimensionalen CMLs Konzepte der Statistischen Mechanik zum Tragen kommen, zeigt sich am Miller–Huse–CML, das 1993 von J. Miller und D. Huse eingeführt wurde [24]. Dieses CML ist auf einem zweidimensionalen $N \times N$ -Gitter definiert. Auf jedem Gitterplatz wirkt die antisymmetrische Funktion $\phi(x)$, die einen positiven Lyapunovexponenten hat und auf der linken Seite von Abbildung 1.1 zu sehen ist. Im Miller–Huse–CML wird jeder Gitterplatz an seine vier nächsten Nachbarn gekoppelt:

$$x_i^{t+1} := [\mathbf{T}(\mathbf{x}^t)]_i = (1 - \epsilon) \phi(x_i^t) + \frac{\epsilon}{4} \sum_j \phi(x_j^t) \quad (1.3)$$

Durch eine Grobkörnung (Coarse graining) versucht man die Fülle von Information, die das Miller–Huse–CML in jedem Iterationsschritt liefert, auf das Wesentliche zu

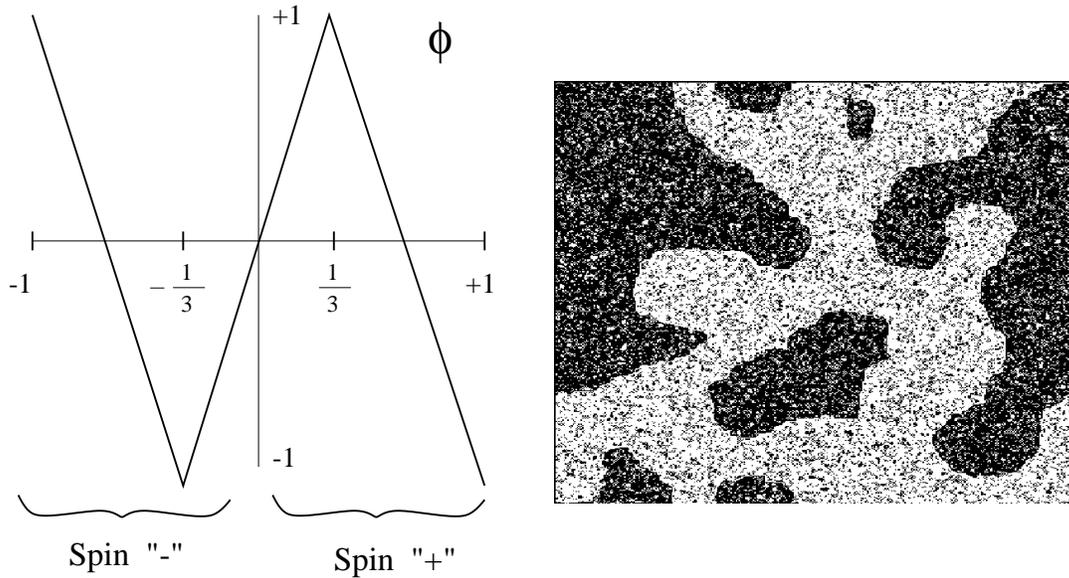


Abbildung 1.1: Links: Die von Miller und Huse verwendete Einzelabbildung $\phi(x)$. Rechts: Die Domänen, die sich für $\epsilon > \epsilon_c$ in großen CMLs ausbilden. Der Spinzustand +1 ist weiß, der Spinzustand -1 ist schwarz kodiert.

reduzieren. Dazu führt man zwei Spinzustände für jeden Gitterplatz ein:

$$s_i^t = \begin{cases} +1, & \text{falls } x_i^t \geq 0 \\ -1, & \text{falls } x_i^t < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Die resultierende stochastische Spindynamik ist für das Miller–Huse–CML nicht gut verstanden, da sich für diese bisher keine quantitative Beschreibung wie z. B. eine Mastergleichung herleiten ließ. Aus einer numerischen Simulation des CMLs auf einem großen Gitter ergibt sich das folgende interessante Phänomen [24, 22]: wenn man die Kopplung ϵ als einzigen Parameter des Miller–Huse–Modells variiert, bilden sich für $\epsilon > \epsilon_c \approx 0,82$ Domänen, in denen einer der beiden Spinzustände überwiegt (siehe rechte Seite von Abbildung 1.1). Die Spindynamik erreicht demnach für große Kopplungen einen *ferromagnetisch* geordneten Zustand, der eine spontane Magnetisierung zeigt – ähnlich wie das zweidimensionale Isingmodell unterhalb der kritischen Temperatur. Dagegen ist das Spinnmuster, das sich aus dem CML für kleinere Kopplungen als ϵ_c ergibt, völlig ungeordnet. Der Phasenübergang bei ϵ_c scheint kontinuierlich zu sein; denn mit einem „Finite size scaling“ findet man heraus, daß am kritischen Punkt die Korrelationslänge divergiert.

Aufgrund der ähnlichen Phänomenologie und der Antisymmetrie der Abbildung ϕ (siehe Abbildung 1.1) kann man vermuten, daß der Miller–Huse–Phasenübergang in die Ising–Universalitätsklasse fällt. Allerdings ist nicht klar, warum dieser Übergang im Miller–Huse–CML überhaupt etwas mit Gleichgewichtsphasenübergängen zu tun haben soll. Denn eine durch (1.3) definierte CML–Dynamik ist auf den ersten Blick sehr verschieden von einer Hamiltonschen Dynamik, in der Energien und Impulse definiert sind. Demnach könnte der Zustand des Miller–Huse–CMLs nach dem Ablauf von Transienten auch ein stationärer Nichtgleichgewichtszustand sein. Man kann bisher keine Langevingleichung für die langsamen Moden der stochastischen Spindynamik ableiten, um einen Hinweis auf die Art des Phasenübergangs zu bekommen.¹

¹Ansätze dazu gibt es in der Arbeit von J. Miller und D. Huse [24].

Um den Phasenübergang im Miller–Huse–Modell näher zu charakterisieren, wurden in [22] die kritischen Exponenten für diesen Phasenübergang numerisch bestimmt und mit den wohlbekanntesten kritischen Exponenten der Ising–Universalitätsklasse verglichen. Das Ergebnis des Vergleichs ist nicht eindeutig: die meisten kritischen Exponenten scheinen mit denen der Ising–Universalitätsklasse kompatibel zu sein, aber ein Exponent scheint es nicht zu sein. Außerdem hängen die kritischen Exponenten des Miller–Huse–Modells von der Art des Updatings im CML ab, was noch völlig unverstanden ist.

Um etwas mehr Licht auf das Miller–Huse–CML und allgemein auf Phasenübergänge zu werfen, studiere ich in dieser Arbeit ein CML analytisch. Dieses CML ist ähnlich zum Miller–Huse–Modell konstruiert, wird allerdings in der vorliegenden Arbeit nur in einer Raumdimension analysiert, da in diesem Fall der Rechenaufwand wesentlich geringer ist. Im nächsten Kapitel wird dieses CML ausführlich vorgestellt. Abschließend gebe ich einen Überblick über den Aufbau dieser Arbeit:

Kapitel 2: Das in dieser Arbeit analysierte CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$, das von zwei Parametern ϵ, δ abhängt, wird eingeführt. Außerdem wird die Problemstellung der Arbeit und störungstheoretische Zugang zu diesem CML erläutert.

Kapitel 3: Da sich die geometrische Methode dieser Arbeit in einem zweidimensionalen Phasenraum am besten veranschaulichen läßt, werden aus pädagogischen Gründen zwei gekoppelte Abbildungen ausführlich studiert. Dabei stehen Methoden und Begriffe aus der Nichtlinearen Dynamik im Vordergrund. Die Argumentation wird an einigen Stellen etwas technisch. Es werden in diesem Kapitel viele Begriffsbildungen vorgenommen, die auf den vorliegenden störungstheoretischen Zugang zum CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ zugeschnitten sind und auch für die weiteren Kapitel wichtig werden.

Kapitel 4: In diesem ebenfalls recht technischen Kapitel wird das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf drei Gitterplätzen untersucht. Dieser Fall ist besonders wichtig, da für $N = 3$ das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ schon beinahe seine volle Komplexität erreicht: im Fall $N > 3$ kann man auf viele der Ergebnisse dieses Kapitels zurückgreifen. Insbesondere bleiben die Parameterbereiche mit unterschiedlichem ergodischen Verhalten gleich. Die Hauptarbeit dieses Kapitels besteht darin, aus der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ die Bifurkationslinien zwischen den verschiedenen Parameterbereichen störungstheoretisch zu berechnen.

Kapitel 5: In diesem Kapitel wird das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für beliebige Gittergröße N untersucht. Da Ergebnisse aus Kapitel 4 benutzt werden können, ist dieses Kapitel weniger technisch. Es ergeben sich für ein N –dimensionales CML vier Parameterbereiche mit unterschiedlichem ergodischen Verhalten. Die Zahl und Größe der koexistierenden Attraktoren unterscheiden sich drastisch für die verschiedenen Parameterbereiche.

Kapitel 6 und 7: Nachdem das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ vom Standpunkt der Nichtlinearen Dynamik ausführlich untersucht wurde, wird in diesem Kapitel ein Coarse graining durchgeführt, das – ähnlich wie im Miller–Huse–Modell – zu Spinzuständen mit einer stochastischen Dynamik führt. Mit den Kenntnissen der (mikroskopischen) CML–Dynamik kann eine Mastergleichung für die Spindynamik hergeleitet werden. Es ergibt sich ein sehr enger Zusammenhang zwischen der Spindynamik und kinetischen Isingmodellen in einer Raumdimension. Diese beiden Kapitel können relativ unabhängig von den vorherigen gelesen werden.

Kapitel 2

Das Modellsystem

In diesem Kapitel stelle ich das in dieser Arbeit analysierte CML ausführlich vor. In Abschnitt 2.1 wird dazu als Ausgangspunkt der Störungstheorie ein relativ triviales CML eingeführt, das sich exakt lösen läßt. In Abschnitt 2.2 wird das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ mit seinen beiden Parametern δ und ϵ eingeführt. Zur Methode der Störungstheorie werden schließlich in Abschnitt 2.3 einige Vorbemerkungen gemacht.

2.1 Der Ausgangspunkt für die Störungstheorie

Das System, um das herum ich eine störungstheoretische Entwicklung vornehme, besteht aus N ungekoppelten antisymmetrischen Zeltabbildungen. Die *einzelne* antisymmetrische Zeltabbildung ist eine um den Ursprung antisymmetrische Funktion. Sie ist auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert, wobei der Funktionsverlauf auf dem Teilintervall $[0, 1]$ dem der viel studierten Zeltabbildung entspricht; der Funktionsverlauf auf dem Teilintervall $[-1, 0]$ ergibt sich durch antisymmetrische Fortsetzung (siehe Bild 2.1). Die antisymmetrische Zeltabbildung besitzt zwei koexistierende Attraktoren, nämlich die Intervalle $[-1, 0]$ und $[0, 1]$. Das natürliche Maß auf diesen beiden ergodischen Komponenten ist sehr einfach: es ist das Lebesguemaß auf $[-1, 0]$ bzw. $[0, 1]$.

Ich führe nun folgendes einfaches CML ein: an jedem Gitterplatz eines eindimensionalen Gitters der Größen N wirkt die gerade eingeführte antisymmetrische Zeltabbildung. Diese Abbildungen werden nicht gekoppelt. Der Phasenraum dieses CMLs ist das N -fache cartesische Produkt der Intervalle $[-1, 1]$, das ich mit $[-1, 1]^N$ bezeichne. Das CML hat 2^N koexistierende Attraktoren, je nachdem ob sich der i -te Gitterplatz im Intervall $[0, 1]$ oder $[-1, 0]$ befindet. Die Attraktoren sind die 2^N N -dimensionalen Kuben der Kantenlänge 1, aus denen der Phasenraum $[-1, 1]^N$ besteht. Da ich diese Kuben später noch oft benutzen werde, bezeichne ich sie durch einen Indexvektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ mit $\alpha_i \in \{+, -\}$:

$$\begin{aligned} I_\alpha &:= K(\alpha_1) \times K(\alpha_2) \times \dots \times K(\alpha_N), \quad \text{wobei} \\ K(-) &:= [-1, 0], \quad K(+) := [0, 1]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das natürliche Maß auf jedem der Attraktoren I_α ist das Lebesguemaß in diesem Kubus.

Die Attraktoren haben $(N - 1)$ -dimensionale Hyperflächen, auf denen $x_i = 0$ gilt, gemeinsam. Es ist leicht vorstellbar, daß eine solche Situation instabil gegenüber kleinen Veränderungen der Abbildung des CML ist, da es z. B. zu Verschmelzungen von ergodischen Komponenten kommen kann. Man sagt auch: dieses CML ist *marginal stabil* bzw. *strukturell instabil*.

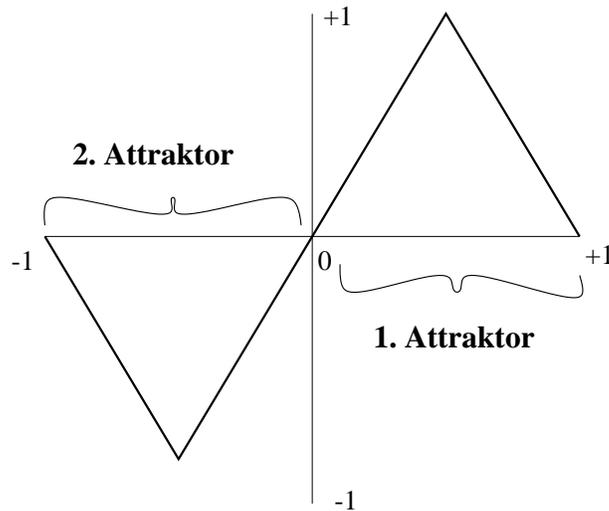


Abbildung 2.1: Die antisymmetrische Zeltabbildung und ihre zwei Attraktoren.

2.2 Das CML $T_{\epsilon, \delta}$

2.2.1 Die deformierte Abbildung f_δ

Um das CML einzuführen, das in dieser Arbeit analysiert wird, deformiere ich zuerst die einzelne antisymmetrische Zeltabbildung durch einen Parameter δ . Ich verschiebe den Funktionswert bei $x = +1$ von 0 zu $+\delta$ und den Funktionswert bei $x = -1$ von 0 zu $-\delta$:

$$f_\delta(x) := \begin{cases} -2 - x/a, & \text{falls } x \in [-1, -a] \\ x/a, & \text{falls } x \in (-a, a) \\ 2 - x/a, & \text{falls } x \in [a, 1] \end{cases}, \text{ wobei} \\ a := \frac{1}{2 - \delta} \quad (2.2)$$

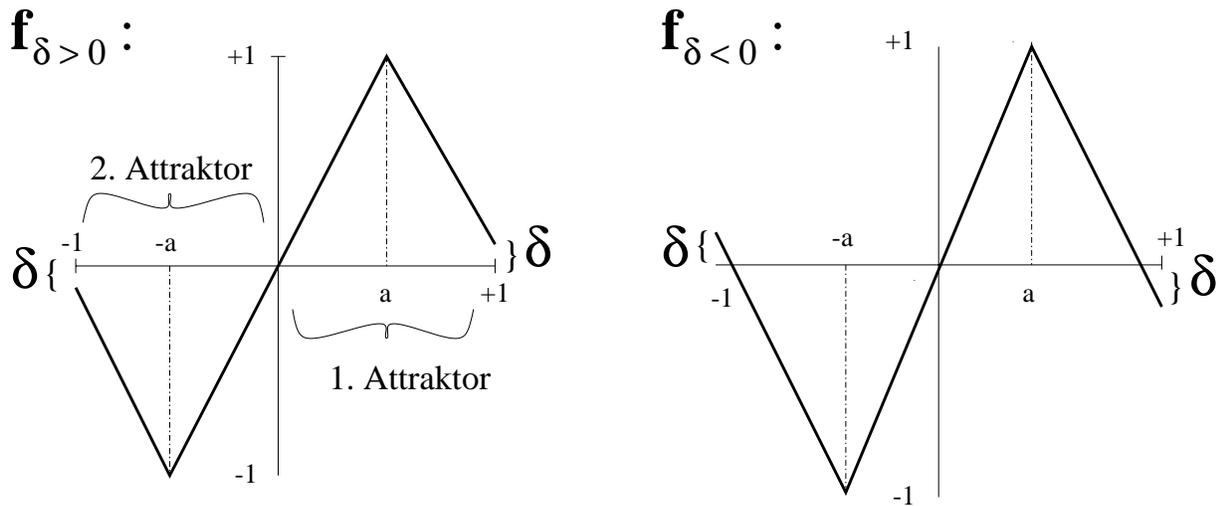
Bilder der Funktionsverläufe von $f_\delta(x)$ für $\delta > 0$ und $\delta < 0$ finden sich in Abbildung 2.2. Die antisymmetrische Zeltabbildung aus Abbildung 2.1, von der ich ausging, ist f_0 . Dagegen ist die in der Einführung vorgestellte Miller–Huse–Abbildung ϕ gleich f_δ mit $\delta = -1$ (man vergleiche die linke Seite von Abbildung 1.1 mit der rechten Seite von Abbildung 2.2). Wenn man sich – wie es in dieser Arbeit geschieht – auf den Fall $\delta \ll 1$ beschränkt, betrachtet man nur gegenüber f_0 *schwach* deformierte Abbildungen; dagegen ist die Miller–Huse–Abbildung stark deformiert.

Die Funktion f_δ hat ein Maximum bei a , ein Minimum bei $-a$ und über das gesamte Intervall $[-1, 1]$ eine im Betrag konstante Steigung. Die Funktion f_δ ist linear auf den folgenden vier Teilintervallen $J(\gamma) \subset [-1, 1]$:

$$J(-2) := [-1, -a], \quad J(-1) := [-a, 0], \quad J(1) := [0, a], \quad J(2) := [a, 1]. \quad (2.3)$$

2.2.2 Das dynamische System f_δ

Ich diskutiere in diesem Unterabschnitt kurz das ergodische Verhalten des (eindimensionalen) dynamischen Systems mit der Abbildungsvorschrift f_δ .

Abbildung 2.2: Die deformierte antisymmetrische Zeltabbildung f_δ . **$\delta > 0$**

Wie man leicht nachrechnen kann, werden für $\delta > 0$ die Intervalle $[\delta, 1]$ und $[-1, -\delta]$ durch f_δ auf sich selbst abgebildet:

$$f_\delta([\delta, 1]) = [\delta, 1] ; \quad f_\delta([-1, -\delta]) = [-1, -\delta] \quad (2.4)$$

Man kann beweisen, daß die Intervalle $[\delta, 1]$ und $[-1, -\delta]$ Attraktoren des dynamischen Systems für $\delta > 0$ sind.¹ Dabei greift man sich ein beliebiges Intervall $\subset [\delta, 1]$ heraus und zeigt, daß das iterierte Intervall unter der Abbildung f_δ solange wächst, bis es gleich $[\delta, 1]$ ist. Formal:

$$\forall [c, d] \subset [\delta, 1] \quad \exists k \in \mathbb{N} : \quad f_\delta^k([c, d]) = [\delta, 1] ,$$

wobei f_δ^k die k -fach iterierte Funktion f_δ bedeuten soll. Für Intervalle aus $[-1, -\delta]$ gilt das Entsprechende. Im Zwischenbereich $[-\delta, \delta]$ ist f_δ monoton ansteigend mit Steigung > 1 , so daß dieser Bereich keinen Attraktor enthalten kann. Der Abstand zwischen den beiden koexistierenden Attraktoren beträgt 2δ . Eine Konfiguration von 2 Attraktoren ist demnach bei positivem δ stabiler gegenüber kleinen Störungen der Abbildung als bei $\delta = 0$.

 $\delta < 0$

Eine Trajektorie des dynamischen Systems führt im Fall $\delta < 0$ in der Nähe von $x = 1$ Übergänge vom positiven ins negative Intervall bzw. nahe $x = -1$ vom negativen ins positive Intervall durch (siehe Abbildung 2.2). Man kann zeigen, daß das gesamte Intervall $[-1, 1]$ der Attraktor des dynamischen Systems ist. Denn ein beliebiges Intervall $\subset [-1, 1]$ wächst unter fortgesetzter Iteration mit f_δ zum Intervall $[-1, 1]$ an.

2.2.3 Die Kopplung der Abbildungen f_δ

Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ besteht aus der Hintereinanderschaltung der chaotischen Abbildung f_δ auf jedem Gitterplatz und einer Kopplungsfunktion. Ich definiere eine vektorwertige

¹Der von mir in dieser Arbeit verwendete Attraktorbegriff wird in Anhang A erläutert.

chaotische Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\delta &: [-1, +1]^N \rightarrow [-1, +1]^N \\ \mathbf{f}_\delta(\mathbf{x}) &:= (f_\delta(x_1), f_\delta(x_2), \dots, f_\delta(x_N)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Bilder $f_\delta(x_i)$ kopple ich über eine (symmetrische) „diffusive“ Nächste-Nachbar-Kopplung, die auch im Miller–Huse–Modell verwendet wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta} &= \mathbf{g}_\epsilon \circ \mathbf{f}_\delta : [-1, +1]^N \rightarrow [-1, +1]^N \\ [\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x})]_i &:= (1 - \epsilon) f_\delta(x_i) + \frac{\epsilon}{2} (f_\delta(x_{i-1}) + f_\delta(x_{i+1})) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ϵ ist die Kopplungsstärke. Die Art der Kopplung kann man als eine Diskretisierung des eindimensionalen Diffusionsoperators (Laplaceoperators) ansehen. Für die Kopplung verwende ich periodische Randbedingungen. Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ ist ein nichtinvertierbares diskretes dynamisches System, das von den beiden Parametern ϵ und δ abhängt. Falls $\epsilon = \delta = 0$, ist das CML $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ das in Abschnitt 2.1 betrachtete CML, das aus N ungekoppelten antisymmetrischen Zeltabbildungen besteht.

Die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ ist stückweise linear: man kann den Phasenraum $[-1, +1]^N$ als Vereinigung von Teilmengen auffassen, auf denen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ linear ist. Denn die Funktion f_δ ist linear auf den Intervallen $J(\gamma)$, $\gamma = \{-2, -1, 1, 2\}$ und das CML koppelt die Funktionen $f_\delta(x_i)$ ($i = 1, 2 \dots N$) linear (siehe Gleichung (2.6)). Folglich ist die N -dimensionale Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ auf den 4^N möglichen cartesischen Produkten der Intervalle $J(\gamma_i)$ linear. Diese Produktmengen sind quaderförmige Teilmengen eines Kubus I_α , die ich mit S_γ bezeichne:

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_N) \quad \text{mit } \gamma_i \in \{-2, -1, +1, +2\}, \\ S_\gamma &:= J(\gamma_1) \times J(\gamma_2) \cdots \times J(\gamma_N) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Jedes I_α enthält 2^N Teilquader S_γ . In Abbildung 3.1 sind die Kuben I_α und die Teilquader S_γ für $N = 2$ dargestellt. Ein bestimmter Index γ impliziert den Kubus I_α , dessen Teilmenge S_γ ist. Zwei Mengen $S_\gamma, S_{\gamma'}$ sind Teilmengen des gleichen I_α , wenn

$$\text{sign}(\gamma_i) = \text{sign}(\gamma'_i), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

2.2.4 Die Problemstellung

Das Gebiet der CMLs sehr divers; es gibt viele Fragestellungen an diese Systeme, die in der Literatur untersucht worden sind [17, 6, 2]. Ich möchte deshalb in diesem Unterabschnitt kurz erläutern, welche Fragen in dieser Arbeit in Bezug auf das CML $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ erörtert werden. Dabei beschränke ich mich an dieser Stelle auf den Standpunkt der Theorie dynamischer Systeme, der die nächsten drei Kapitel bestimmt.

Heuristisch gehe ich von folgender Überlegung aus: Variierten wir nur den Parameter δ und ließen $\epsilon = 0$, wäre das CML ziemlich langweilig. Denn aus der Betrachtung der Funktion f_δ (siehe Abbildung 2.2) folgt, daß es 2^N Attraktoren für $\delta \geq 0$ gibt. Diese verschmelzen für $\delta < 0$ zu einem Attraktor, der den gesamten Phasenraum einnimmt.

Welchen Einfluß hat nun der andere Parameter, die Kopplung ϵ , auf das Bifurkationsszenario und die Attraktoren? Sorgt die Kopplung dafür, daß es schon für δ -Werte, die größer als Null sind, zu Verschmelzungen von ergodischen Komponenten kommt? Oder verhindert die Kopplung, daß sich alle 2^N Attraktoren bei einem $\delta < 0$ zu einem Attraktor vereinen? Deswegen möchte ich die Anzahl und Natur (z. B. Größe

und Lage im Phasenraum) der koexistierenden Attraktoren bei gegebenen Parametern (ϵ, δ) berechnen. Wie wir sehen werden, gibt es verschiedene Bereiche mit unterschiedlichem Langzeitverhalten in der (ϵ, δ) -Ebene, die durch Bifurkationslinien voneinander getrennt werden.

2.3 Störungstheorie für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$

Ich möchte noch die folgenden Bemerkungen zu der von mir verwendeten Störungstheorie zur Lösung des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ machen:

- Falls man die exakte Lösung des ungestörten Systems kennt, kann man oft auch das System mit kleinen Störungen analytisch behandeln. Dabei nutzt man aus, daß sich – grob gesprochen – im gestörten System noch die Strukturen des ungestörten Systems erkennen lassen. In vorliegenden Fall des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ spielen beispielsweise die Kuben I_α , in denen sich für das ungestörte System eine ergodische Komponente befindet, auch im gestörten System eine wichtige Rolle. Denn eine Trajektorie, deren Punkte unter der Dynamik $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ iteriert werden, hält sich für $\epsilon, \delta \ll 1$ lange innerhalb eines Kubus I_α auf, bevor sie in einen benachbarten Kubus I_β weiterwandert. Ich werde erst in Abschnitt 3.4 genauer definieren, was ein Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ ist. Im Verlauf der Arbeit wird sich zeigen, daß die Dynamik des CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ – wenn man die „coarse grained“-Ebene der Kuben betrachtet – durch Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ beschrieben werden kann. Diese Beschreibungsmöglichkeit der CML-Dynamik ist nur für $\epsilon, \delta \ll 1$ durchführbar.
- Die Gültigkeit der Störungstheorie setzt die Kleinheit von ϵ und δ voraus. A priori läßt sich allerdings nicht sagen, was „klein“ ist und damit kein Gültigkeitsbereich für die Störungstheorie in der (ϵ, δ) -Ebene angeben.
- Es ist für die Durchführbarkeit dieser Arbeit auch wichtig, daß wir von einem sehr homogenen natürlichen Maß, dem Lebesguemaß, auf den Attraktoren der ungestörten Konfiguration ($\epsilon = \delta = 0$) ausgehen können. Bei eindimensionalen Zeltabbildungen ändert sich das natürliche Maß auf Attraktoren auch bei kleinen Störungen der Abbildungen nicht sehr. Dies gilt vermutlich auch bei hochdimensionalen Zeltabbildungen wie der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$.² Falls die Maße auf Attraktoren für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ relativ homogen sind, kann man sich für die Analyse der Dynamik des CML näherungsweise auf die *topologische Dynamik* beschränken. Dabei betrachtet man Bilder und Urbilder von Mengen unter der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ und geht in führender Ordnung Störungstheorie davon aus, daß das natürliche Maß auf Teilmengen von invarianten Mengen proportional zum Volumen der Teilmenge ist.
- Allgemein gilt für die Attraktoren des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ in Störungstheorie: Es gibt keine Attraktoren des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$, die kleine Teilmengen eines Kubus I_α sind. Die Ergebnisse der Arbeit zeigen vielmehr, daß Attraktoren bis auf Korrekturen vom Volumen $O(\epsilon, \delta)$ endliche Vereinigungen der I_α sind.
- Zur Abschätzung des Fehlers nach oben, den man in der Näherung der Störungstheorie macht, verwende ich in dieser Arbeit oft den O -Kalkül. Dieser drückt aus, wie schnell die vernachlässigten Beiträge höherer Ordnung für $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ klein

²Diese Aussage beruht für das hier behandelte CML bisher nur auf Numerik und Intuition

werden. Genauer ist die Bedeutung der Zeichen $O(\epsilon, \delta)$, $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$, $o(1)$ etc. in Anhang B erklärt. Die Abschätzung der Beiträge höherer Ordnung nach oben ist wichtig, um aus der Störungstheorie ein *mathematisches* Verfahren zu machen. Es ist mir aber nicht immer in dieser Arbeit gelungen, die vernachlässigten Beiträge so unter Kontrolle zu bekommen. Dann bleibt die Störungstheorie ein formales Verfahren, um einen Term „führender Ordnung“ in ϵ und δ zu berechnen.³ Meine Vorgehensweise ist demnach oft nicht mathematisch rigoros. Was und wie im CML $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ störungstheoretisch entwickelt wird, läßt sich natürlich erst anhand von konkreten Rechnungen zeigen, zu denen ich im nächsten Kapitel komme.

³Zum Beispiel könnte sich bei einer unendlichen Summation von Termen, die einzeln höherer Ordnung ist, noch ein dominierender Beitrag ergeben, wenn die Koeffizienten der Terme entsprechend sind.

Kapitel 3

Erklärung der Methode für $N = 2$

Der Fall von zwei gekoppelten Abbildungen wird so ausführlich in diesem Kapitel dargestellt, da in dieser Arbeit viele geometrische Konstruktionen im Phasenraum des CMLs vorgenommen werden, die sich bei einem zweidimensionalen Phasenraum bedeutend besser veranschaulichen lassen. Ich definiere in diesem Kapitel viele Begriffe, die zur in dieser Arbeit angewandten Lösungsmethode gehören. Meine Vorgehensweise zur Lösung des CMLs ist unabhängig von der Systemgröße N , so daß die Lösungsmethode in der Hauptsache schon in diesem Kapitel vorgestellt werden kann.

In Abschnitt 3.1 stelle ich kurz das CML mit zwei Gitterplätzen vor. Wichtig für die Lösungsmethode sind die sogenannten „Überlappmengen“. Durch diese Mengen können Punkte von einem Kubus I_α in einen anderen Kubus I_β wandern. Für die Definition der Überlappmengen brauche ich die Bildmengen der Teilquader S_γ (siehe Gleichung (2.7)), auf denen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ linear ist. Diese Bildmengen sind für $N = 2$ Parallelogramme, deren Eigenschaften in Abschnitt 3.3 ausführlich untersucht werden. In Abschnitt 3.4 wird definiert, was ein Übergang zwischen zwei Kuben I_α und I_β ist. Dabei werden zwei Kriterien aufgestellt, die die Urbildmengen bzw. die Bildmengen der Überlappmengen involvieren. Ebenfalls in diesem Abschnitt wird der Begriff des „Fehlvolomens“ eingeführt; diese Menge umfaßt die Punkte im Phasenraum, die keine Urbilder unter der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ haben. Das Fehlvolomen ist für die Dynamik des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ von entscheidender Bedeutung. In Abschnitt 3.5 erläutere ich, wie man von Übergängen zwischen Kuben auf die (evtl. koexistierenden) Attraktoren des CMLs schließen kann. Insbesondere werden die Probleme angesprochen, die sich für die Bestimmung von Attraktoren des CMLs ergeben können, wenn man das CML in einer störungstheoretischen Approximation behandelt. Die Symmetrien der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$, deren Ausnutzen die Rechnungen wesentlich erleichtern wird, stelle ich in Abschnitt 3.6 vor.

Nach diesen begrifflichen Vorarbeiten wende ich mich der Dynamik des CMLs für $N = 2$ zu. In Abschnitt 3.7 behandle ich die Dynamik in den Diagonalquadraten I_{++} und I_{--} . In Unterabschnitt 3.7.1 zeige ich, daß für $\delta \geq 0$ in diesen beiden Quadraten ein Attraktor existiert. Dagegen ergibt sich in Unterabschnitt 3.7.2, daß für $\delta < 0$ fast alle Punkte aus I_{++} und I_{--} in Überlappmengen mit anderen Quadraten gelangen. Der Dynamik in den Außerdiagonalquadraten I_{-+} und I_{+-} ist der Abschnitt 3.8 gewidmet. Hierbei ergibt sich, daß für $\delta \geq -4\epsilon/3$ ein Attraktor in diesen Quadraten liegt, dagegen für $\delta < -4\epsilon/3$ Übergänge in die Diagonalquadrate stattfinden können. Schließlich fasse ich in Abschnitt 3.9 die Ergebnisse für die Dynamik in den einzelnen Quadraten zusammen und stelle ein Bifurkationsdiagramm für das CML bei $N = 2$ auf.

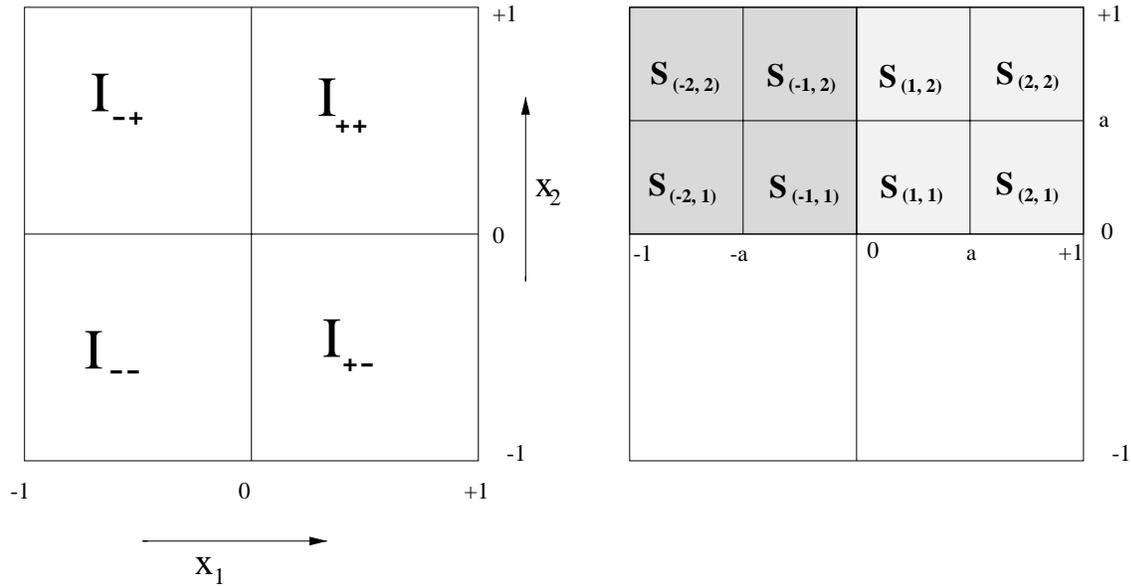


Abbildung 3.1: Die Kuben I_{α} und die Teilquader S_{γ} für $N = 2$.

3.1 Das CML für $N = 2$

Im Fall $N = 2$ sieht das CML folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x})]_1 &= (1 - \epsilon) f_{\delta}(x_1) + \epsilon f_{\delta}(x_2) \\ [\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x})]_2 &= (1 - \epsilon) f_{\delta}(x_2) + \epsilon f_{\delta}(x_1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Mit den periodischen Randbedingungen wird ein Gitterplatz zweimal mit der Stärke $\epsilon/2$ an den anderen gekoppelt, woraus der obige Kopplungsterm folgt.

Wie in Unterabschnitt 2.2.4 erläutert, interessiere ich mich für die Attraktoren des durch Gleichung (3.1) beschriebenen Systems bei gegebenen (ϵ, δ) . Um die Dynamik des CMLs zu erfassen, untersuche ich mögliche Übergänge zwischen den Quadranten I_{++} , I_{+-} , I_{-+} und I_{--} . Der gesamte Phasenraum mit seiner Aufteilung in die vier Quadrate ist auf der linken Hälfte von Abbildung 3.1 dargestellt.

3.2 Die Überlappmengen $OV_{\alpha,\beta}$

Damit Übergänge $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ möglich sind, muß es Punkte $\mathbf{x} \in I_{\alpha}$ geben, so daß $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \in I_{\beta}$. Die Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(I_{\alpha})$ und I_{β} haben dann eine nichtleere Schnittmenge. Ich definiere nun die sogenannten „Überlappmengen“. Um mich in den nächsten Kapiteln nicht wiederholen zu müssen, definiere ich Größen möglichst für allgemeines N . Um die Bildmenge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(I_{\alpha})$ auszurechnen, nutze ich die Linearität der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf den Teilquadranten $S_{\gamma} \subset I_{\alpha}$ aus, die in Gleichung (2.7) definiert wurden. Ein Bild der Teilquader für $N = 2$ findet sich in der rechten Hälfte von Abbildung 3.1.

Die Bildmenge eines N -dimensionalen Quaders unter einer (regulären) linearen Abbildung ist ein N -dimensionales Parallelepiped:

$$P_{\gamma} := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(S_{\gamma}) \quad (3.2)$$

Die Eckpunkte von P_{γ} erhalte ich als Bilder der Eckpunkte von S_{γ} . Die Bildmenge

$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(I_\alpha)$ setzt sich aus den Bildmengen der Teilquader zusammen:

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(I_\alpha) = \bigcup_{\gamma \text{ mit } S_\gamma \subset I_\alpha} \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(S_\gamma) , \quad (3.3)$$

Ich definiere eine **Überlappmenge** $OV_{\alpha,\beta}$ eines Kubus I_α mit einem anderen Kubus I_β als

$$OV_{\alpha,\beta} := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(I_\alpha) \cap I_\beta . \quad (3.4)$$

Die Überlappmenge ist gleich der Vereinigung der Schnittmengen der entsprechenden Parallelelogramme mit I_β :

$$OV_{\alpha,\beta} = \bigcup_{\gamma \text{ mit } S_\gamma \subset I_\alpha} (P_\gamma \cap I_\beta) \quad (3.5)$$

Der nächste Abschnitt ist der genaueren Untersuchung der Bildmengen P_γ gewidmet, wobei ich mich wieder auf den Spezialfall $N = 2$ beschränke.

3.3 Struktur der Parallelelogramme P_γ

3.3.1 Beispiel

Bevor ich zu allgemeinen Aussagen komme, möchte ich, damit die Diskussion verständlicher wird, zwei Parallelelogramme beispielhaft ausrechnen. Dabei handelt es sich um die Bilder der beiden rechten Teilrechtecke von I_{-+} (siehe auch Abbildung 3.1):

$$S_{(-1,1)} = [-a, 0] \times [0, a] ; \quad S_{(-1,2)} = [-a, 0] \times [a, 1] \quad (3.6)$$

Die resultierenden Parallelelogramme sind in Abbildung 3.2 gezeichnet, wobei $\delta = -\epsilon$ gewählt wurde. Es ergeben sich anhand dieser Abbildung die folgenden Beobachtungen:

1. Für beide Parallelelogramme gilt: Die Winkel zwischen den Parallelelogrammseiten sind $\pi/2 + O(\epsilon, \delta)$, die Seiten haben wegen der Expansivität der Abbildung die Länge $1 + O(\epsilon, \delta)$. Die Parallelelogramme sind demnach leicht verzerrt gegenüber dem Quadrat I_{-+} .
2. Die beiden Seiten der Parallelelogramme $P_{(-1,1)}$ und $P_{(-1,2)}$, die jeweils in der Nähe des Randes des Phasenraums liegen ($x_1 \approx -1$ bzw. $x_2 \approx 1$), haben ungefähr die gleiche Lage in I_{-+} .
3. Dagegen liegt für die Seiten der Parallelelogramme $P_{(-1,1)}$ und $P_{(-1,2)}$, die in die Nachbarquadrate hineinragen, die folgende Situation vor:
 - Die beiden Seiten, die zum größten Teil im Quadrat I_{++} liegen, stimmen innerhalb von I_{++} überein.
 - Die beiden Seiten, die sich zum größten Teil im Quadrat I_{--} befinden, sind gegeneinander um den Betrag $\approx |\delta|$ verschoben.

Diese Beobachtungen werde ich auf der Basis von allgemeinen Regeln für die Parallelelogramme erklären.¹

¹Für den Fall $N = 2$ selbst bräuchte man vielleicht keine Systematik; denn ich kann hier alle Parallelelogramme P_γ und Überlappmengen $OV_{\alpha,\beta}$ ohne größeren Aufwand ausrechnen. Aber für $N = 3$ im nächsten Kapitel hat jeder der 8 Kuben I_α wiederum 8 Teilquader S_γ , so daß dort allgemeine Beziehungen die Untersuchungen viel übersichtlicher machen werden.

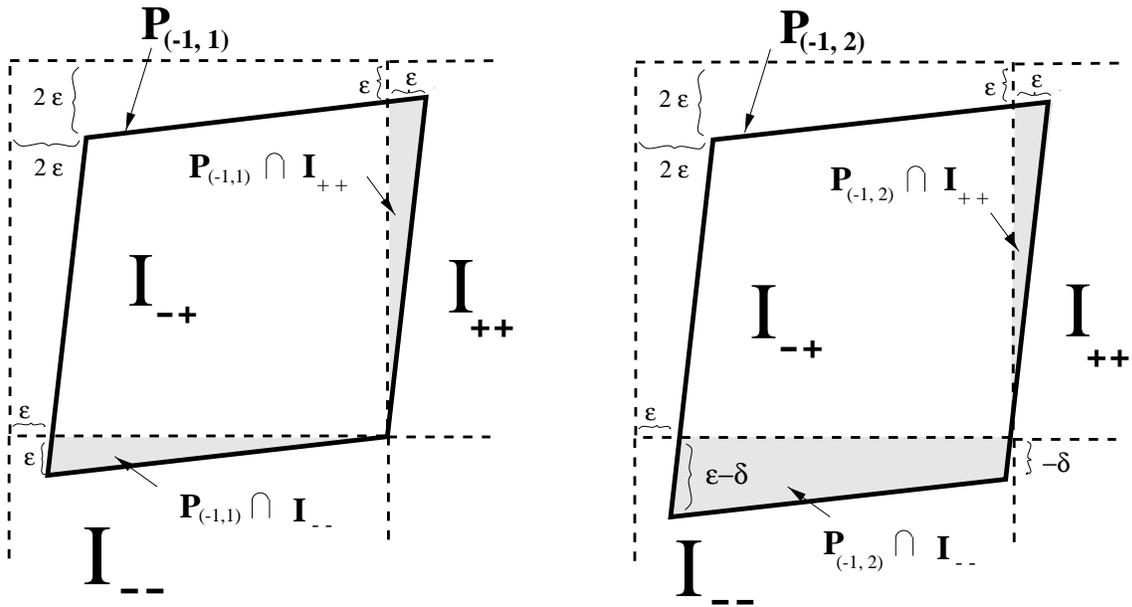


Abbildung 3.2: Die Parallelogramme $P_{(-1,1)}$ und $P_{(-1,2)}$ und ihre Schnittmengen mit den Nachbarquadraten (hellgrau unterlegt).

3.3.2 Notation

Ich notiere die beiden Einheitsvektoren durch

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1)^T.$$

Ein Parallelogramm P_γ ist das Bild eines Teilrechtecks $S_\gamma \subset I_\alpha$. Da die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf S_γ linear ist, werden Seiten von S_γ auf Seiten von P_γ abgebildet. Ich definiere die beiden Endpunkte eines Intervalls $J(\gamma_i)$, $\gamma_i \in \{-2, -1, 1, 2\}$ durch

$x_<(\gamma_i)$: der Endpunkt von $J(\gamma_i)$ mit $f_\delta(x_<(\gamma_i)) = O(\delta)$,

$x_>(\gamma_i)$: der Endpunkt von $J(\gamma_i)$ mit $|f_\delta(x_>(\gamma_i))| = 1$.

Die beiden Seiten von S_γ , auf denen der Vektor \mathbf{e}_i senkrecht steht, sind dann die Mengen

$$\begin{aligned} \tilde{K}_<(\gamma, i) &:= \{\mathbf{x} \in I_\alpha \mid x_i = x_<(\gamma_i), x_j \in J(\gamma_j), (i \neq j)\}, \\ \tilde{K}_>(\gamma, i) &:= \{\mathbf{x} \in I_\alpha \mid x_i = x_>(\gamma_i), x_j \in J(\gamma_j), (i \neq j)\} . \end{aligned} \quad (3.7)$$

In Abbildung 3.3 sind zwei Seiten des Teilrechtecks $S_{(-1,2)}$ dargestellt.

Die Seiten von P_γ sind demnach

$$\begin{aligned} K_<(\gamma, i) &:= \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\tilde{K}_<(\gamma, i)), \\ K_>(\gamma, i) &:= \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\tilde{K}_>(\gamma, i)) . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ aus zwei schwach gestörten Zeltabbildungen besteht, ist der Vektor \mathbf{e}_i nahezu senkrecht zu den Seiten $K_<(\gamma, i)$ und $K_>(\gamma, i)$. Aus Definition (3.7) und der Charakterisierung von $x_<(\gamma_i)$, $x_>(\gamma_i)$ folgt, daß $x_i = O(\epsilon, \delta)$ für alle Punkte $\mathbf{x} \in K_<(\gamma, i)$, während $|x_i| \approx 1$ für alle Punkte $\mathbf{x} \in K_>(\gamma, i)$ gilt. In Abbildung 3.3 sind zwei Seiten von $P_{(-1,2)}$ gezeichnet.

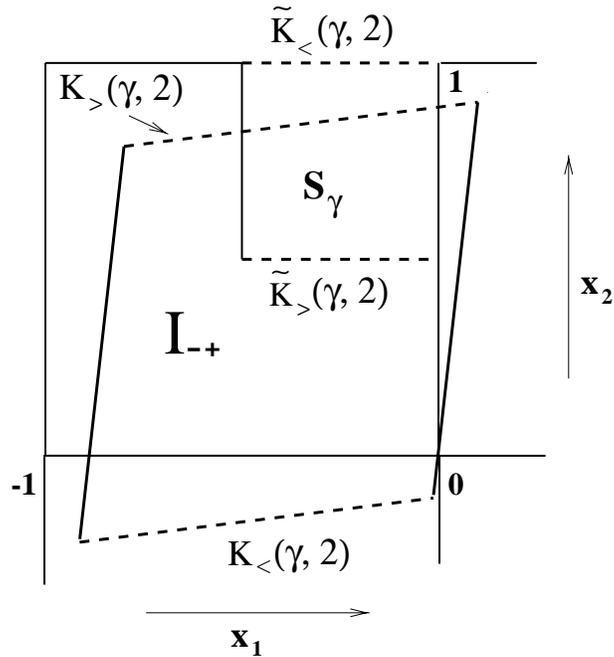


Abbildung 3.3: Hier sind zwei Seiten des Parallelogramms $P_{(-1,2)}$ und zwei Seiten des Rechtecks $S_{(-1,2)}$ eingezeichnet. In der Zeichnung gilt: $\gamma = (-1, 2)$.

3.3.3 Eigenschaften der Parallelogramme P_γ

1. Die Parallelogrammseiten $K_<(\gamma, i)$ und $K_<(\tilde{\gamma}, i)$ sind exakt parallel zueinander für zwei beliebige γ und $\tilde{\gamma}$.

Daraus folgt, daß auch die Seiten $K_>(\gamma, i)$ und $K_>(\tilde{\gamma}, i)$ parallel zueinander sind, da sie als gegenüberliegende Seiten parallel zu den Seiten $K_<(\gamma, i)$ bzw. $K_<(\tilde{\gamma}, i)$ liegen.

Begründung: Seien $\gamma, \tilde{\gamma}$ beliebig vorgegeben. Eingeschränkt auf S_γ und $S_{\tilde{\gamma}}$ ist $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ jeweils eine lineare, genauer: affine Abbildung. Diese affine Abbildung ist für unterschiedliches γ verschieden:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x}) &= A(\gamma) \mathbf{x} + \mathbf{b}(\gamma) \quad \text{für } \mathbf{x} \in S_\gamma \\ \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x}) &= A(\tilde{\gamma}) \mathbf{x} + \mathbf{b}(\tilde{\gamma}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in S_{\tilde{\gamma}} \quad , \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei $A(\gamma), A(\tilde{\gamma})$ 2×2 -Matrizen und $\mathbf{b}(\gamma), \mathbf{b}(\tilde{\gamma})$ Verschiebungsvektoren sind.

Ich möchte die Parallelität der Seiten $K_<(\gamma, i)$ und $K_<(\tilde{\gamma}, i)$ zeigen. Die Seiten $\tilde{K}_<(\gamma, i)$ und $\tilde{K}_<(\tilde{\gamma}, i)$ von S_γ bzw. $S_{\tilde{\gamma}}$, deren Bilder diese Parallelogrammseiten sind, haben beide den Richtungsvektor \mathbf{e}_j , wobei $j \neq i$. Die Parallelogrammseiten $K_<(\gamma, i)$ und $K_<(\tilde{\gamma}, i)$ sind parallel, wenn gilt:

$$A(\gamma) \mathbf{e}_j = \lambda A(\tilde{\gamma}) \mathbf{e}_j \quad \text{mit } \lambda \neq 0 \quad (3.10)$$

In diesem Fall haben die beiden Seiten ebenfalls den gleichen Richtungsvektor.

Gleichung (3.10) bedeutet, daß die j -te Spalte der Matrix $A(\gamma)$ ein Vielfaches der j -ten Spalte der Matrix $A(\tilde{\gamma})$ ist. Zur Berechnung der Matrix $A(\gamma)$ muß ich gemäß Gleichung (3.9) die in x_1 und x_2 linearen Terme der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$

bestimmen. Ich erhalte für die verschiedenen γ :

$$A(\gamma) = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} c(\gamma_1) (1 - \epsilon) & c(\gamma_2) \epsilon \\ c(\gamma_1) \epsilon & c(\gamma_2) (1 - \epsilon) \end{pmatrix}$$

mit $c(\gamma_i) := \begin{cases} +1 & \text{für } \gamma_i \in \{+1, -1\} \\ -1 & \text{für } \gamma_i \in \{+2, -2\} \end{cases} \quad (3.11)$

Denn auf den Intervallen $J(1)$ und $J(-1)$ hat f_δ die Steigung $1/a$, auf den Intervallen $J(2)$ und $J(-2)$ die Steigung $-1/a$. Wie man an der letzten Gleichung ablesen kann, sind die j -ten Spalten der Matrizen $A(\gamma)$ und $A(\tilde{\gamma})$ gleich bis auf einen Faktor $c(\gamma_j)/c(\tilde{\gamma}_j)$, der $+1$ oder -1 sein kann. Damit ist die Parallelität der Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ gezeigt.

2. Die Seiten der Parallelegramme $K_{>}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\gamma, i)$ bilden einen Winkel vom Betrag $\epsilon + O(\epsilon^2)$ mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_j ($j \neq i$).

Begründung: Da ich im letzten Punkt die Parallelität der Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\gamma, i)$ für verschiedene γ gezeigt habe, genügt es, die Behauptung anhand der beiden Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ ($i = 1, 2$) für ein spezielles γ nachzuweisen. Für das δ -unabhängige Parallelogramm $P_{(-1,1)}$ kann man leicht ausrechnen, daß die Seiten $K_{<}((-1, 1), i)$ ($i = 1, 2$) einen Winkel mit dem Einheitsvektor vom Betrag $\epsilon + O(\epsilon^2)$ haben.

3. Ich untersuche die gegenseitige Beziehung der Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ genauer, wenn die Parallelegramme P_γ und $P_{\tilde{\gamma}}$ beide deformierte Quadrate I_α sind ($S_\gamma, S_{\tilde{\gamma}} \subset I_\alpha$). Wenn jeweils eine Gerade durch die Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ gelegt wird, gilt

(a) Falls $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i$ und $\gamma_j \neq \tilde{\gamma}_j$, sind die beiden Geraden identisch. Die Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ haben einen gemeinsamen Endpunkt und liegen zum größten Teil aufeinander.

(b) Falls $\gamma_i \neq \tilde{\gamma}_i$ (γ_j kann gleich oder verschieden von $\tilde{\gamma}_j$ sein), sind die beiden Geraden um den Betrag $(1 - \epsilon)|\delta| + O(\epsilon^2 \cdot \delta)$ gegeneinander parallelverschoben.

O. B. d. A. sei $|\gamma_i| = 1$ und $|\tilde{\gamma}_i| = 2$: dann ist für $\delta < 0$ die Seite $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ gegenüber $K_{<}(\gamma, i)$ hin zum angrenzenden Quadrat I_β mit $\beta_i \neq \alpha_j$ verschoben, für $\delta > 0$ hin zum Innern von I_α .

In Abbildung 3.5 sind zwei gegeneinander verschobene Parallelogrammseiten dargestellt.

Begründung:

(a) Nach den Gleichungen (3.8) und (3.7) korrespondieren zu den Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ die beiden folgenden Seiten von S_γ bzw. $S_{\tilde{\gamma}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{<}(\gamma, i) &= \{ \mathbf{x} \in I_\alpha \mid x_i = x_{<}(\gamma_i), x_j \in J(\gamma_j), (j \neq i) \}, \\ \tilde{K}_{<}(\tilde{\gamma}, i) &= \{ \mathbf{x} \in I_\alpha \mid x_i = x_{<}(\tilde{\gamma}_i), x_j \in J(\tilde{\gamma}_j), (j \neq i) \} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Da $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i$ und außerdem die Intervalle $J(\gamma_j)$ und $J(\tilde{\gamma}_j)$ im Punkt $x_{>}(\gamma_j)$ aneinandergrenzen, ist der Punkt

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta} (x_{<}(\gamma_i) \cdot \mathbf{e}_i + x_{>}(\gamma_j) \cdot \mathbf{e}_j)$$

ein gemeinsamer Endpunkt der Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$. Da die beiden Seiten nach Punkt 1 exakt parallel zueinander sind, impliziert der gemeinsame Punkt die Identität von zwei Geraden, die durch die Seiten gelegt werden.

(b): Die Urbilder der Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ in S_γ bzw. $S_{\tilde{\gamma}}$ sind wieder durch Gleichung (3.12) gegeben. Wähle nun einen Punkt aus den jeweiligen Urbildmengen:

$$\mathbf{x} \in \tilde{K}_{<}(\gamma, i), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{K}_{<}(\tilde{\gamma}, i)$$

Ihre Bildpunkte sind

$$\mathbf{R} := \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Die x_i -Koordinate von \mathbf{x} und $\tilde{\mathbf{x}}$ ist nach Gleichung (3.12) festgelegt: $x_i = x_{<}(\gamma_i)$ bzw. $\tilde{x}_i = x_{<}(\tilde{\gamma}_i)$. Ich wähle x_j und \tilde{x}_j ($j \neq i$) so, daß in \mathbf{e}_j -Richtung die Bildpunkte \mathbf{R} und $\tilde{\mathbf{R}}$ auf gleicher Höhe liegen (siehe Abbildung 3.4):

$$[\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_j = (1 - \epsilon) (f_\delta(x_j) - f_\delta(\tilde{x}_j)) + \epsilon (f_\delta(x_{<}(\gamma_i)) - f_\delta(x_{<}(\tilde{\gamma}_i))) = 0 \quad (3.13)$$

Für den Abstand in \mathbf{e}_i -Richtung ergibt sich dann

$$[\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_i = (1 - \epsilon) (f_\delta(x_{<}(\gamma_i)) - f_\delta(x_{<}(\tilde{\gamma}_i))) + \epsilon (f_\delta(x_j) - f_\delta(\tilde{x}_j)). \quad (3.14)$$

Wenn man Gleichung (3.13) zur Berechnung von $f_\delta(x_j) - f_\delta(\tilde{x}_j)$ verwendet und das Ergebnis in die letzte Gleichung einsetzt, erhält man

$$[\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_i = \left(1 - \epsilon - \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon}\right) (f_\delta(x_{<}(\gamma_i)) - f_\delta(x_{<}(\tilde{\gamma}_i))). \quad (3.15)$$

Für $|\tilde{\gamma}_i| = 2$ gilt $|f_\delta(x_{<}(\gamma_i))| = |\delta|$, für $|\gamma_i| = 1$ gilt $|f_\delta(x_{<}(\gamma_i))| = 0$. Damit ist der Betrag der obigen Differenz

$$|[\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_i| = \left(1 - \epsilon - \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon}\right) |\delta| = (1 - \epsilon) |\delta| + O(\delta \epsilon^2). \quad (3.16)$$

Da nach Punkt 2 die Seiten der Parallelogramme einen Winkel $\approx \epsilon$ mit den Quadratseiten bilden, ergibt sich für den Betrag r der Parallelverschiebung von zwei Geraden, die durch die Parallelogrammseiten gelegt werden (siehe Abbildung 3.4):

$$r = \cos \epsilon |[\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_i| = (1 - \epsilon) |\delta| + O(\delta \epsilon^2) \quad (3.17)$$

Die Richtung der Verschiebung der Seite $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ gegenüber der Seite $K_{<}(\gamma, i)$ kann man sich leicht anhand einer Analyse des Vorzeichens der Differenz $[\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_i$ in Gleichung (3.15) überlegen. Man erhält die oben angegebene Regel für positives bzw. negatives δ .

4. Ich wende mich nun der Beziehung der Seiten $K_{>}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$ zu.

Behauptung: Für zwei beliebige $S_\gamma, S_{\tilde{\gamma}} \subset I_\alpha$ sind die durch die Seiten $K_{>}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$ gelegten Geraden identisch. Außerdem haben die beiden Parallelogrammseiten einen gemeinsamen Endpunkt.

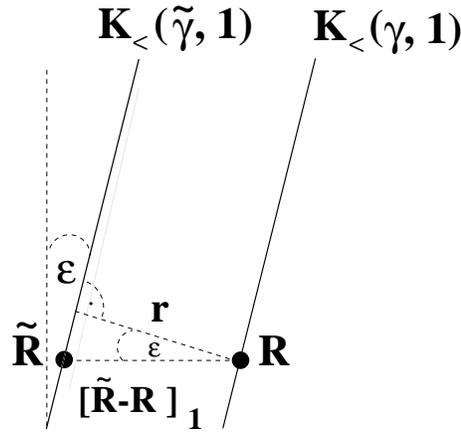


Abbildung 3.4: Zeichnung zum Beweis des Punktes 3 (b). Hier wird $i = 1$ und $j = 2$ gewählt.

Begründung: Wieder schreibe ich die beiden Urbildmengen der Parallelogrammseiten in S_γ bzw. $S_{\tilde{\gamma}}$ hin (siehe Gleichung (3.7):

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{>}(\gamma, i) &= \{ \mathbf{x} \in I_\alpha \mid x_i = x_{>}(\gamma_i), x_j \in J(\gamma_j), (j \neq i) \} \\ \tilde{K}_{>}(\tilde{\gamma}, i) &= \{ \mathbf{x} \in I_\alpha \mid x_i = x_{>}(\tilde{\gamma}_i), x_j \in J(\tilde{\gamma}_j), (j \neq i) \} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Da die Intervalle $J(\gamma_j)$ und $J(\tilde{\gamma}_j)$ beide $\subset [-1, 0]$ oder beide $\subset [0, 1]$ sind, gilt $x_{>}(\gamma_j) = x_{>}(\tilde{\gamma}_j)$. Demnach ist der Punkt

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta} (x_{>}(\gamma_i) \cdot \mathbf{e}_i + x_{>}(\gamma_j) \cdot \mathbf{e}_j)$$

ein gemeinsamer Endpunkt der Seiten $K_{>}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$. Da nach Punkt 1 die beiden Seiten exakt parallel zueinander sind, folgt die Identität der beiden Geraden.

5. In den letzten beiden Punkten habe ich die relative Lage der Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\gamma, i)$ für verschiedene γ genauer untersucht. Mit Hilfe des gewonnenen Wissens kann ich aus einem Parallelogramm $P_{\tilde{\gamma}}$ ($S_{\tilde{\gamma}} \subset I_\alpha$) die drei anderen Parallelogramme konstruieren, die ebenfalls deformierte Quadrate I_α sind.

In jedem I_α gibt es genau ein $S_{\tilde{\gamma}}$, für das gilt $|\tilde{\gamma}_1| = |\tilde{\gamma}_2| = 1$ (siehe rechte Seite von Abbildung 3.1). Die Bildmenge dieses Teilrechtecks, das Parallelogramm $P_{\tilde{\gamma}}$, hängt nicht von δ ab. Von diesem Parallelogramm gehe ich aus, um ein anderes Parallelogramm P_γ zu konstruieren. Dabei lege ich Geraden parallel zu den 4 Seiten des Parallelogramms $P_{\tilde{\gamma}}$, so daß die Schnittpunkte der Geraden die Eckpunkte des gesuchten Parallelogramms P_γ sind:

- Ich lege eine Gerade durch die Seiten $K_{>}(\tilde{\gamma}, 1)$ und $K_{>}(\tilde{\gamma}, 2)$.
- Für die Seiten $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$, $i \in \{1, 2\}$ ist zu unterscheiden:
 - Falls $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i$ (siehe Punkt 3 (a)), lege ich eine Gerade durch die Seite $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$.
 - Falls $\gamma_i \neq \tilde{\gamma}_i$ (siehe Punkt 3 (b)), lege ich eine Gerade im Abstand $(1 - \epsilon) |\delta|$ parallel zur Seite $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$, wobei die Richtung der Verschiebung durch das Vorzeichen von δ bestimmt wird.

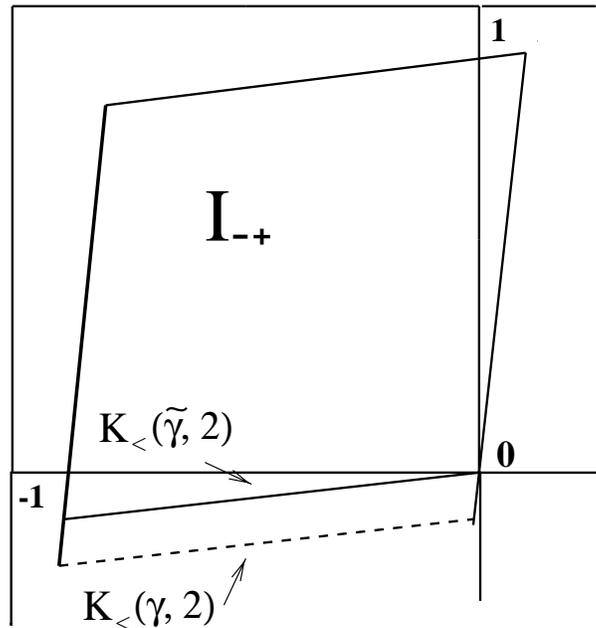


Abbildung 3.5: Das Parallelogramm $P_{(-1,2)}$ erhalte ich aus dem Parallelogramm $P_{(-1,1)}$ durch Verschieben der Seite $K_{<}(\tilde{\gamma}, 2)$ um $(1-\epsilon)|\delta|$ nach unten ($\delta < 0$). In der Zeichnung gilt: $\tilde{\gamma} = (-1, 1)$, $\gamma = (-1, 2)$.

In Abbildung 3.5 ist als Beispiel die Konstruktion des Parallelogramms $P_{(-1,2)}$ aus dem Parallelogramm $P_{(-1,1)}$ gezeigt. Ich brauche demnach nicht alle vier Parallelogramme in I_α über die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ zu berechnen, sondern die Berechnung eines Parallelogramms genügt; die anderen erhalte ich durch die geschilderte einfache geometrische Konstruktion.

3.4 Vom Überlapp zum Übergang

Die Ausführungen dieses Abschnitt sind nicht auf $N = 2$ eingeschränkt, sondern für allgemeines N gültig. Ich möchte deutlich machen, daß man aus einer nichtleeren Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ keineswegs auf einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ schließen kann. Die Überlappmenge ist nur eine notwendige Voraussetzung für den Übergang. Ich möchte in den beiden nächsten Unterabschnitten klären, was hinzukommen muß, damit eine Überlappmenge einen Übergang zur Folge hat.

3.4.1 Übergang von I_α : Urbilder und Fehlvolumenta

Für einen Übergang von I_α nach I_β fordere ich, daß „viele“ Punkte – dies wird weiter unten präzisiert – aus dem Inneren von I_α in die Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ (siehe Definition in (3.4)) gelangen können. Das **Innere von I_α** sei die Menge von Punkten in I_α , die vom Rand weiter als eine kleine, von ϵ und δ unabhängige Konstante c entfernt sind. Für diese Konstante gelte $\max\{\epsilon, |\delta|\} \ll c \ll 1$. Es soll also für viele Startpunkte \mathbf{x}_0 aus dem Inneren von I_α gelten, daß die zugehörige Trajektorie nach einer endlichen Zahl k von Iterationen die Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ erreicht:

$$\{\mathbf{x}_0, \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}_0), \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^2(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^k(\mathbf{x}_0)\} \subset I_\alpha, \quad \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{k+1}(\mathbf{x}_0) \in OV_{\alpha,\beta} \quad (3.19)$$

Die Bedingung für einen Übergang von I_α kann ich über Urbildmengen der Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ formulieren. Ich definiere rekursiv **Urbildmengen k -ter Generation** von $OV_{\alpha,\beta}$, wobei ich mit der Urbildmenge (erster Generation) $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{\alpha,\beta})$ beginne:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{\alpha,\beta}) &:= \{\mathbf{x} \in I_\alpha \mid \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \in OV_{\alpha,\beta}\} \\ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta}) &:= \{\mathbf{x} \in I_\alpha \mid \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \in \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-(k-1)}(OV_{\alpha,\beta})\}, \quad k = 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (3.20)$$

Die gerade definierten Urbildmengen enthalten nur Punkte aus I_α – und nicht aus dem gesamten Phasenraum –, die die Urbildbedingung erfüllen. Denn ich suche Punkte aus I_α , die in die Überlappmenge gelangen können. Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta})$ wird in k Iterationen in die Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ hinein abgebildet. Die Elemente der Trajektorie in Gleichung (3.19) liegen in den Urbildmengen der entsprechenden Generation.

Da ein Punkt aus I_α oft 2^N Urbilder in den verschiedenen Teilkuben S_γ von I_α hat, sind die Urbildmengen im allgemeinen nicht zusammenhängend. Ich definiere einfach zusammenhängende Mengen, die **Urbildmengenkomponenten**, rekursiv. Für die Urbildmenge der ersten Generation, sind die *nichtleeren* Teilmengen von $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{\alpha,\beta})$ in den einzelnen Teilquadern S_γ die Urbildmengenkomponenten K_γ der ersten Generation:

$$K_\gamma := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{\alpha,\beta}) \cap S_\gamma \quad (3.21)$$

Ich betrachte nun die Urbildmengen von jedem K_γ und schneide wieder mit den Teilrechtecken:

$$K_{\gamma,\tilde{\gamma}} := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(K_\gamma) \cap S_{\tilde{\gamma}} \quad (3.22)$$

Diese Mengen sind die Urbildmengenkomponenten der zweiten Urbildgeneration. Auf diese Weise erhalte ich rekursiv die Urbildmengenkomponenten der k -ten Generation, die per Konstruktion einfach zusammenhängende Mengen sind. Die Urbildmenge der ersten Generation besteht aus maximal 2^N Urbildmengenkomponenten, die Urbildmenge der zweiten Generation aus maximal $2^N \cdot 2^N = 2^{2N}$ Urbildmengenkomponenten u. s. w. .

Man kann leicht zeigen, daß alle Urbildmengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta})$ disjunkt voneinander sind:

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta}) \cap \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k'}(OV_{\alpha,\beta'}) = \emptyset, \quad k \neq k' \quad \text{oder} \quad \beta \neq \beta' \quad (3.23)$$

Die Bedingung für einen Übergang *von* I_α nach I_β lautet nun, daß für hinreichend große k die Schnittmenge der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta})$ mit dem Innern von I_α nicht leer ist. Damit dieser Übergang auch numerisch zu sehen ist und nicht nur prinzipiell möglich ist, sollte die Menge

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta})$$

ein Volumen der Größenordnung 1 in I_α einnehmen.

Für die Bestimmung der Urbildmengen ist die folgende Eigenschaft des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ relevant: Für $\mathbf{x} \in OV_{\alpha,\beta}$ hat eine Komponente x_i von \mathbf{x} Werte von der Größe $O(\epsilon, \delta)$. Aus der Struktur der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ als schwach gestörtes Gitter von ungekoppelten Zeltabbildung folgt, daß die Urbildmenge der ersten Generation von $OV_{\alpha,\beta}$ nah am

Rand von I_α liegt. Am Rand des Kubus I_α befindet sich aber auch das sog. „**Fehl-
volumen von I_α** “. Dies ist die Menge aller Punkte in I_α , die keine Urbilder in I_α haben:

$$FV_\alpha := \{ \mathbf{x} \in I_\alpha \mid \nexists \mathbf{y} \in I_\alpha \text{ mit } \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \} \quad (3.24)$$

Mit den Bildern der Teilquader S_γ , den Parallelogrammen P_γ , läßt sich das Fehlvolu-
men auch als

$$FV_\alpha = \bigcap_{\gamma \text{ mit } S_\gamma \subset I_\alpha} (I_\alpha \setminus P_\gamma) \quad (3.25)$$

schreiben. In Abbildung 3.6 auf Seite 27 ist eine Teilmenge des Fehlvolumens für das
Quadrat I_{++} als dunkelgraue Fläche eingezeichnet.

Wenn Teile der ersten Urbildgeneration im Fehlvolumen liegen, d. h.

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{\alpha,\beta}) \cap FV_\alpha \neq \emptyset, \quad (3.26)$$

so haben diese Teile keine Urbilder höherer Generation mehr. Deswegen ist für die
sukzessive Konstruktion der Urbildgenerationen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta})$ die Kenntnis des Fehlvo-
lumens FV_α sehr wichtig.

3.4.2 Übergang nach I_β

Nachdem ich die erste Bedingung für einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ erläutert habe, nämlich
was ein Übergang *von* I_α ist, definiere ich in diesem Unterabschnitt, was ein Übergang
nach I_β ist. Ich gehe davon aus, daß die erste Übergangsbedingung erfüllt ist, d. h. es
gibt Trajektorien mit Startpunkt im Innern von I_α , die die Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$
erreichen.

Dabei ist allerdings folgendes zu beachten: Betrachte alle Trajektorien der in Gleichung
(3.19) gegebenen Form, die aus I_α kommend die Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ in mehr
als einer Iteration erreichen ($k \geq 1$). Für jede dieser Trajektorien wähle ich die zeitlich
früheste Iterierte aus, die in $OV_{\alpha,\beta}$ liegt (in der Trajektorie der Gleichung (3.19) ist
dies das Element $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{k+1}(\mathbf{x}_0)$). Es ist möglich, daß die Menge dieser Übergangspunkte
nur eine echte Teilmenge von $OV_{\alpha,\beta}$ ausfüllt. Denn der Vorgängerpunkt $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^k(\mathbf{x}_0)$
des Übergangspunkt $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{k+1}(\mathbf{x}_0)$ liegt nicht im Fehlvolumen FV_α . Demnach kann kein
Übergangspunkt in Teile von $OV_{\alpha,\beta}$ gelangen, deren sämtliche Urbilder in I_α sich im
Fehlvolumen FV_α befinden. Deshalb definiere ich eine **effektive Überlappmenge**
durch

$$EO_{\alpha,\beta} := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta} [I_\alpha \setminus FV_\alpha] \cap I_\beta. \quad (3.27)$$

Im Vergleich zur Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ (siehe Gleichung (3.4)) wird hier die Bildmen-
ge von I_α ohne das Fehlvolumen benutzt. Es gilt²

$$EO_{\alpha,\beta} = OV_{\alpha,\beta} \setminus \{ \mathbf{y} \in OV_{\alpha,\beta} \mid \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(\{\mathbf{y}\}) \subset FV_\alpha \}. \quad (3.28)$$

²Man könnte auch noch Mengen $\{ \mathbf{y} \in OV_{\alpha,\beta} \mid \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(\{\mathbf{y}\}) \subset FV_\alpha \}$ für $k > 1$ von $OV_{\alpha,\beta}$ abziehen,
d. h. Punkte, deren sämtliche Urbilder der k -ten Generation im Fehlvolumen liegen. Da aber i. a. die
Anzahl der Urbilder für höhere Generationen wächst, ist es leicht möglich, daß alle diese Mengen für
 $k > 1$ leer sind. Dies ist für die von mir später behandelten Übergänge tatsächlich der Fall.

Die effektive Überlappmenge ist die Teilmenge von $OV_{\alpha,\beta}$, die wirklich von Trajektorien der in Gleichung (3.19) angegebenen Form erreicht werden kann.

Ich fordere nun für einen *Übergang nach I_β* , daß für eine Teilmenge von $EO_{\alpha,\beta}$ gilt: die Iterierten von Punkten \mathbf{x} aus dieser Teilmenge verlassen den Rand von I_β und erreichen das Innere dieses Quadrats. Für solche Punkte $\mathbf{x} \in EO_{\alpha,\beta}$ soll demnach gelten

$$\exists k \in \mathbb{N} : \quad \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^i(\mathbf{x}) \in I_\beta, \quad 0 \leq i \leq k \quad \text{und} \quad \text{dist} \left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^k(\mathbf{x}), \partial I_\beta \right) \geq c.$$

Da $c \gg \max\{\epsilon, |\delta|\}$, wandern die Punkte $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{k+1}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{k+2}(\mathbf{x}), \dots$ weiter auf die Mitte von I_β zu. Die Gesamtheit der Punkte $\mathbf{x} \in EO_{\alpha,\beta}$ mit dieser Eigenschaft nenne ich die **Übergangsmenge** $W_{\alpha,\beta}$. Die Menge $W_{\alpha,\beta}$ sollte für einen Übergang nach I_β ein endliches Lebesguemaß besitzen.

Falls I_β zum größten Teil von einem Attraktor A ausgefüllt ist³, kann ich auch die beiden folgenden Kriterien für Übergänge nach I_α aufstellen:

- Es gibt eine Teilmenge der effektiven Überlappmenge $EO_{\alpha,\beta}$ mit endlichem Lebesguemaß, so daß die Iterierten dieser Teilmenge den Attraktor A erreichen. Demnach muß die Schnittmenge von $EO_{\alpha,\beta}$ mit dem Bassin des Attraktors $B(A)$ eine endliche Fläche haben.
- Außerdem sollten Punkte eines Teils der Schnittmenge $EO_{\alpha,\beta} \cap B(A)$ den Attraktor „auf direktem Weg“ erreichen, d. h. ohne sich vorher in anderen Kuben $I_\sigma \neq I_\beta$ aufzuhalten. Diese Teilmenge von $EO_{\alpha,\beta} \cap B(A)$ sollte wieder endliches Maß besitzen.

3.4.3 Kurze Zusammenfassung

Falls eine Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ existiert, müssen für einen Übergang noch zwei Kriterien überprüft werden:

1. **Kriterium:** Urbildmengen hoher Generation der Menge $OV_{\alpha,\beta}$ sollten das Innere von I_α schneiden.
2. **Kriterium:** Es muß eine Teilmenge $W_{\alpha,\beta} \subset EO_{\alpha,\beta}$ mit endlichem Maß geben, deren Punkte bei weiterer Iteration bis ins Innere von I_β vordringen.

Bei der genaueren Formulierung der beiden Bedingungen führte ich die Begriffe „Urbilder der k -ten Generation“, „Fehlvolumen“, „effektive Überlappmenge“ und „Übergangsmenge“ ein, die für diese Arbeit sehr wichtig sind.

3.5 Von Übergängen zu Attraktoren

Wenn bei gegebenen Parametern ϵ, δ die möglichen Übergänge bestimmt sind, kann ich die Attraktoren in diesem Parameterbereich berechnen. Denn zwei aufeinanderfolgende Übergänge sind nicht korreliert; dies wird in Unterabschnitt 6.2.1 ausführlich begründet werden. Man betrachte bei vorgegebenen Parametern ϵ, δ die k möglichen Übergänge, die aus dem Kubus I_α herausführen: $I_\alpha \rightarrow I_{\beta(i)}, i = 1, 2, \dots, m$. Diesen

³Dabei kann der Attraktor A sich über mehrere Kuben erstrecken. Wie schon in Abschnitt 2.3 gesagt wurde, bestehen Attraktoren für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ im störungstheoretischen Bereich aus endlichen Vereinigungen von Kuben I_σ (bis auf Korrekturen von Mengen mit Volumen $O(\epsilon, \delta)$).

Übergängen können die l möglichen Übergänge $I_{\gamma(j)} \rightarrow I_{\alpha}$, $j = 1, 2, \dots, l$ vorangegangen sein. In einer statistischen Betrachtungsweise ist die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Übergänge $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta(i)}$ unabhängig davon, welcher Übergang $I_{\gamma(j)} \rightarrow I_{\alpha}$ vorher stattgefunden hat. Die Dynamik des CMLS hat auf der Ebene von Übergängen kein Gedächtnis.

Die Attraktoren A des CMLS sind – bis auf Mengen mit Volumen der Größe $O(\epsilon, \delta)$ – Vereinigungen von Kuben:

$$A \approx \bigcup_{i \in J} I_{\alpha(i)} \quad (3.29)$$

Umgekehrt sind Vereinigungen von Kuben der Form (3.29) dann Attraktoren des CMLS, wenn sie die kleinsten Vereinigungen von Kuben sind, aus denen kein erlaubter Übergang herausführt, d. h. es existiert kein Kubus I_{β} außerhalb von A , so daß $I_{\alpha(i)} \rightarrow I_{\beta}$, $i \in J$ ein möglicher Übergang in diesem Parameterbereich ist.

Es herrscht allerdings im Prinzip eine gewisse Spannung zwischen dem Ziel der Beschreibung des ergodischen Verhaltens des CMLS $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ und der Anwendung der Störungstheorie. Denn man kann in der Praxis oft nur die Übergänge untersuchen, die in führender Ordnung Störungstheorie dominant sind. Die Attraktoren A der Form (3.29) können dann nur unter Berücksichtigung dieser Übergänge berechnet werden; per Konstruktion führt dann kein dominanter Übergänge aus A heraus. Doch ist die Menge A damit nicht notwendig ein Attraktor im streng mathematischen Sinn (siehe die Definition in Anhang A). Denn es kann sein, daß die Übergänge, die in höherer Ordnung Störungstheorie dazukommen, aus dieser Vereinigung von Kuben herausführen. Dann wäre der eigentliche Attraktor eventuell weitaus größer als die Menge A , die sich in führender Ordnung Störungstheorie ergibt.

Man erhält mit der Menge A in Gleichung (3.29) allerdings den „Kernbereich“ dieses umfassenderen Attraktors. Denn die Übergänge, die von A wegführen, sind höherer Ordnung in Störungstheorie mit wesentlich kleineren Übergangsraten. Dagegen werden Punkte in Kuben außerhalb von A durch Übergänge, die zur führenden Ordnung Störungstheorie gehören, hin zur Menge A gebracht. Demzufolge hält sich eine Trajektorie nach der transienten Bewegung hauptsächlich im „Kernbereich“ eines dieser umfassenderen Attraktoren auf. Die Trajektorie bleibt für lange Zeitdauern im Kernbereich A aus, verläßt diesen Bereich für eine kurze Zeit in umliegende Kuben und kehrt schnell wieder zum Kernbereich zurück. Ein solches Verhalten wird in der Nichtlinearen Dynamik *intermittent* genannt. Der größte Teil des natürlichen Maßes der umfassenderen Attraktoren befindet sich im Kernbereich. Diese Kernbereiche werden im folgenden der Einfachheit halber Attraktoren genannt. Oft zeigt auch das numerische Experiment, daß die Zeitskalen, auf denen diese Mengen verlassen werden, unbeobachtbar groß sind.

3.6 Symmetrien des CMLS $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$

Bevor ich zu konkreten Berechnungen von Übergängen komme, diskutiere ich Symmetrien des N -dimensionalen CMLS $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$. Symmetrien spielen auch in dieser Arbeit eine wichtige Rolle, da ihre Kenntnis oft Rechenaufwand erspart, wenn beispielsweise zwei Übergänge zueinander äquivalent sind. Eine Symmetrie des CMLS liegt dann vor, wenn die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ mit der entsprechenden Transformation im Phasenraums vertauscht. Im weiteren Verlauf der Arbeit benutze ich die beiden folgenden Symmetrien der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$:

1. Translationsinvarianz:

Das CML ist translationsinvariant wegen der periodischen Randbedingungen und der Tatsache, daß an jedem Gitterplatz bei einer Iteration die gleiche Abbildungsvorschrift angewandt wird. Ich führe im Phasenraum die Transformation \mathbf{C}_1 ein, die jede Gitterplatzkoordinate x_i zyklisch um einen Platz nach links verschiebt:

$$\mathbf{C}_1(x_1, x_2, \dots, x_N) := (x_2, x_3, \dots, x_N, x_1) \quad (3.30)$$

\mathbf{C}_1 kommutiert mit $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$, wie man leicht nachrechnen kann:

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta} \circ \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 \circ \mathbf{T}_{\epsilon, \delta} \quad (3.31)$$

Für Übergänge zwischen den Kuben bedeutet dies:

$$I_\alpha \rightarrow I_\beta \iff I_{\mathbf{C}_1(\alpha)} \rightarrow I_{\mathbf{C}_1(\beta)} \quad (3.32)$$

Dies soll ausdrücken: Falls der Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ bei den Parametern (ϵ, δ) mit einer bestimmten Rate stattfindet, so findet auch der Übergang $I_{\mathbf{C}_1(\alpha)} \rightarrow I_{\mathbf{C}_1(\beta)}$ mit derselben Rate statt. Falls der eine Übergang bei den Parametern nicht auftreten kann, gibt es auch den anderen nicht.

2. Antisymmetrie:

Die Antisymmetrie der in Unterabschnitt 2.2.1 definierten Abbildung f_δ bedingt die Antisymmetrie des CMLs. Wenn man einen Phasenraumpunkt \mathbf{x} zu $-\mathbf{x}$ invertiert, so vertauscht diese Operation wieder mit der Abbildung:

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x}) \quad (3.33)$$

Für die Übergänge bedeutet das die folgende Äquivalenz:

$$I_\alpha \rightarrow I_\beta \iff I_{-\alpha} \rightarrow I_{-\beta}, \quad (3.34)$$

wobei $-\alpha$ der invertierte Indexvektor ist (+ zu - und - zu +).

3.7 Die Dynamik in I_{++} und I_{--}

Ich untersuche nun die Dynamik der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ in I_{++} . Dabei geht es mir vor allem um das ergodische Verhalten von Punkten aus I_{++} . Wegen der Antisymmetrie der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ (siehe Abschnitt 3.6) verhält sich das Quadrat I_{--} in der gleichen Weise, so daß ich die gewonnenen Ergebnisse auf dieses Quadrat übertragen kann.

3.7.1 Attraktor in I_{++} und I_{--} für $\delta \geq 0$

In diesem Unterabschnitt untersuche ich die Dynamik in I_{++} für $\delta \geq 0$. Ich betrachte das Quadrat $I_{++} = [0, 1] \times [0, 1]$ unter der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ und berechne zuerst das Bild des Teilrechtecks $S_{(1,1)} = [0, a] \times [0, a]$:

$$P_{(1,1)} = \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(S_{(1,1)})$$

Die Eckpunkte von $P_{(1,1)}$ sind

$$\{ (0, 0), (\epsilon, 1 - \epsilon), (1 - \epsilon, \epsilon), (1, 1) \}. \quad (3.35)$$

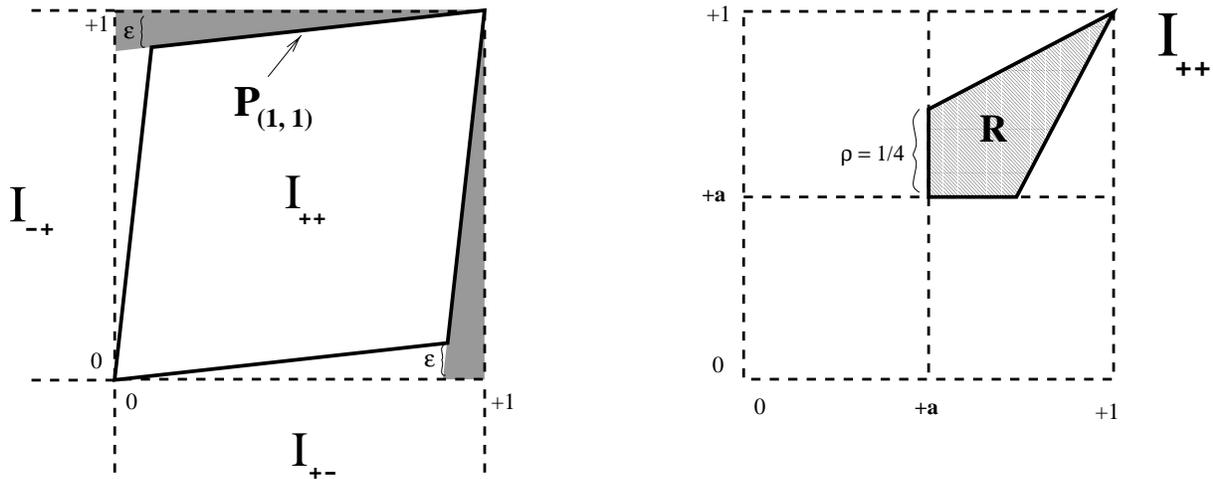


Abbildung 3.6: Links: Das Parallelogramm $P_{(1,1)}$. Dunkelgrau unterlegt ist der δ -unabhängige Teil des Fehlvolomens. Rechts: Das drachenförmige Viereck R .

Eine Zeichnung findet sich in der linken Hälfte von Abbildung 3.6. Wir sehen anhand der Eckpunkte, daß $P_{(1,1)}$ nicht von δ abhängt und außerdem $P_{(1,1)} \subset I_{++}$ gilt.

Die anderen drei Parallelogramme P_γ , die Bilder von $S_\gamma \subset I_{++}$ sind, erhalte ich durch die geometrische Konstruktion, die ich in Punkt 5 von Unterabschnitt 3.3.3 beschrieben habe. Falls $\gamma_i = 1$, liegt die Parallelogrammseite $K_<(\gamma, i)$ zum größten Teil auf der Seite $K_<((1, 1), i)$; falls $\gamma_i = 2$, ist sie für $\delta \geq 0$ relativ zur Seite $K_<((1, 1), i)$ um $(1 - \epsilon) |\delta|$ hin zum Zentrum von I_{++} verschoben. Damit gilt für $\delta \geq 0$

$$P_\gamma \subset P_{(1,1)} \subset I_{++}, \quad \forall \gamma \text{ mit } S_\gamma \subset I_{++}. \quad (3.36)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(I_{++}) = \bigcup_{\gamma} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(S_\gamma) = \bigcup_{\gamma} P_\gamma \subset I_{++}. \quad (3.37)$$

Ich definiere die Menge

$$\tilde{M} := \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^i(I_{++}). \quad (3.38)$$

Diese Menge ist eine invariante Menge bzgl. der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$:

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\tilde{M}) = \tilde{M}$$

Da $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ eine stetige Funktion ist, sind die Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^i(I_{++})$ abgeschlossen und damit auch die Menge \tilde{M} . Diese Menge wird der **bzgl. I_{++} konstruierte maximale Attraktor** genannt [27]. Damit diese Menge ein Attraktor in unserem Sinne ist (siehe die Definition in Anhang A), müßten wir noch einen auf ihr dichten Orbit nachweisen.⁴

⁴Man kann leicht zeigen, daß für $\delta > 0$ ein kleines Quadrat $Q_\delta \subset I_{++}$ mit Seitenlänge δ , wobei der instabile Fixpunkt $(0, 0)$ ein Eckpunkt ist, aus I_{++} herausgenommen werden kann, so daß noch immer $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(I_{++} \setminus Q_\delta) \subset (I_{++} \setminus Q_\delta)$ gilt. Für $\delta > 0$ gehört die Menge Q_δ deswegen nicht zum Attraktor. Folglich ist eine analog zu \tilde{M} konstruierte Menge (siehe Gleichung (3.38)) mit $I_{++} \setminus Q_\delta$ als Ausgangspunkt eher ein Kandidat für den Attraktor in I_{++} als \tilde{M} selbst.

Es erhebt sich die Frage, wie groß die Menge \tilde{M} ist, da der Attraktor eine Teilmenge von ihr ist. Meine Strategie ist es, eine Menge $R \subset I_{++}$ zu finden, für die gilt

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(R) \supset R \quad . \quad (3.39)$$

In Anhang C zeige ich, daß das drachenförmige Viereck R , das in der rechten Hälfte der Abbildung 3.6 dargestellt ist, diese Relation erfüllt. Aus Relation (3.39) folgt

$$\begin{aligned} R &\subset \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^i(I_{++}) \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \Rightarrow R &\subset \tilde{M} \quad . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Da \tilde{M} eine invariante Menge der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ ist und R enthält, gehört jede endliche Iterierte eines Punktes aus R ebenfalls zu \tilde{M} :

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^i(R) \subset \tilde{M} \quad (3.41)$$

Die Menge R hat eine Fläche der Größenordnung 1 und ist zusammenhängend. Für $\epsilon = \delta = 0$ gilt

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon=\delta=0}^i(R) = I_{++}$$

Damit ist es plausibel, daß für $\epsilon, \delta \ll 1$ die Menge

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^i(R)$$

ganz I_{++} bis auf Punkte umfaßt, deren Abstand zum Rand von der Größe $O(\epsilon, \delta)$ ist. Wegen Relation (3.41) gilt dies auch für den maximalen Attraktor \tilde{M} .

Wir haben in diesem Abschnitt gezeigt, daß für $\delta \geq 0$ je ein Attraktor in I_{++} und I_{--} existiert. Es wurde außerdem plausibel gemacht, daß dieser beinahe das ganze jeweilige Quadrat ausfüllt. Es gibt keine Übergänge $I_{++} \rightarrow I_{\beta}$ bzw. $I_{--} \rightarrow I_{\beta}$ für $\delta \geq 0$.

3.7.2 Dynamik in I_{++} für $\delta < 0$

Schnittmengen der Parallelogramme

Ich betrachte nun die vier Parallelogramme P_{γ} mit $S_{\gamma} \subset I_{++}$ im Parameterbereich $\delta < 0$. Das Parallelogramm $P_{(1,1)}$ (siehe Abbildung 3.6) bleibt unverändert gegenüber dem Fall $\delta \geq 0$, da es vom Parameter δ nicht abhängt. Bei den drei anderen Parallelogrammen ist die Seite $K_{<}(\gamma, i)$ wieder relativ zu den entsprechenden Seiten dieses Referenzparallelogramms verschoben, falls $\gamma_i = 2$. Doch im Fall $\delta < 0$ ist die Richtung der Verschiebung umgekehrt, d. h. hin zu den an I_{++} angrenzenden Quadraten. Beispielhaft zeige ich das Parallelogramm $P_{(2,2)}$ in der linken Hälfte von Abbildung 3.7. Da die Verschiebung der Parallelogrammseiten um den Betrag $(1 - \epsilon)|\delta| + O(\epsilon^2 \cdot \delta)$ erfolgt, hat das Parallelogramm $P_{(2,2)}$ nichtleere Schnittmengen mit allen drei angrenzenden Quadraten I_{β} für im Betrag beliebig kleine negative δ .⁵

Man kann leicht anhand der Konstruktion des Parallelogramms $P_{(2,2)}$ sehen, daß für $-\epsilon \leq \delta < 0$ die Schnittmenge $P_{(2,2)} \cap I_{-+}$ die Form eines Dreiecks hat, für $\delta < -\epsilon$

⁵Ein relativ zu δ großes ϵ ändert nichts daran, solange $\epsilon \ll 1$.

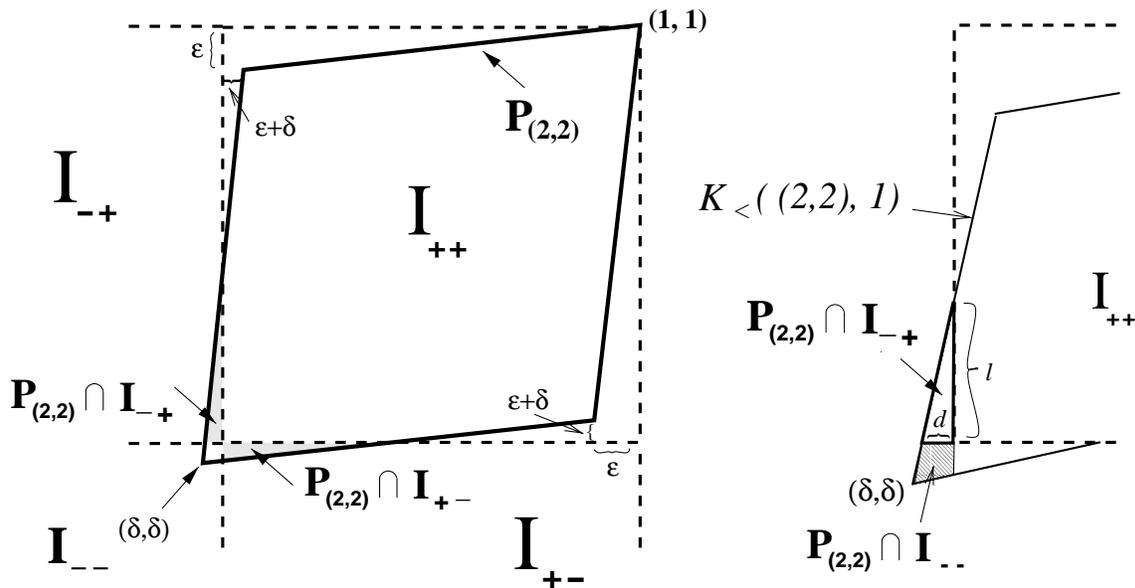


Abbildung 3.7: Links: Das Parallelogramm $P_{(2,2)}$ für $\delta < 0$ und $|\delta|/\epsilon \approx 1/2$; hellgrau unterlegt sind die beiden störungstheoretisch dominierenden Schnittmengen. Rechts: Ein Ausschnitt der linken Seite, um die Schnittmengen $P_{(2,2)} \cap I_{-+}$ und $P_{(2,2)} \cap I_{--}$ besser sichtbar zu machen.

hat sie die Form eines Vierecks. Ich beschränke mich für das Folgende auf den Bereich $-\epsilon \leq \delta < 0$, weil ich in diesem Unterabschnitt zeigen möchte, daß für betragsmäßig beliebig kleines negatives δ fast alle Punkte in I_{++} dieses Quadrat nach endlich vielen Iterationen verlassen. Für kleinere δ ändert sich das nicht mehr, da ein kleineres δ allgemein die Tendenz zu Übergängen verstärkt.

Wegen der Translationsinvarianz der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ finden die Übergänge $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ und $I_{++} \rightarrow I_{+-}$ für gleiche Parameter (ϵ, δ) mit der gleichen Stärke statt, so daß ich die Schnittmenge mit I_{+-} nicht explizit behandeln muß.

Die Größe der Menge $P_{(2,2)} \cap I_{-+}$ erhalte ich durch ein paar Umformungen im asymptotischen O -Kalkül, der im Anhang B erklärt wird: da die Parallelogrammseite $K_{<}((2,2), 1)$ nach Punkt 2 von Unterabschnitt 3.3.3 einen Winkel zum \mathbf{e}_2 -Vektor der Größe $\epsilon + O(\epsilon^2)$ hat, gilt für die Seite d der dreieckigen Menge $P_{(2,2)} \cap I_{-+}$:

$$d = -\delta + O(\epsilon \cdot \delta)$$

Die andere Seitenlänge l erfüllt die Relation

$$\begin{aligned} \frac{d}{l} &= \tan(\epsilon + O(\epsilon^2)) \\ \Rightarrow \frac{-\delta + O(\epsilon \cdot \delta)}{l} &= \epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Die Auswertung dieses Ausdrucks ergibt

$$l = \frac{-\delta}{\epsilon} + O(\delta).$$

Als Dreieck hat die Menge $P_{(2,2)} \cap I_{-+}$ die Fläche

$$\frac{d \cdot l}{2} = \frac{\delta^2}{2\epsilon} + O(\delta^2).$$

Für die Größenordnung der Schnittmenge $P_{(2,2)} \cap I_{--}$ gilt, wobei ich mich auf die Zeichnung auf der rechten Seite von Abbildung 3.7 stütze: Der Punkt $(1, 1) \in S_{(2,2)}$ wird exakt auf den Punkt (δ, δ) abgebildet. Wie man anhand der Zeichnung leicht sehen kann, besitzt deswegen die Schnittmenge $P_{(2,2)} \cap I_{--}$ nur eine Fläche der Größe $O(\delta^2)$. Die Schnittmenge $P_{(2,2)} \cap I_{--}$ ist demnach um einen Faktor der Größenordnung ϵ kleiner als die Menge $P_{(2,2)} \cap I_{-+}$. Dies bedeutet, daß in Störungstheorie ein Übergang nach I_{-+} (oder I_{+-}) gegenüber einem Übergang nach I_{--} bevorzugt ist. Im Sinne der Störungstheorie kann ich den Übergang $I_{++} \rightarrow I_{--}$ vernachlässigen.

Für zwei der vier γ mit $S_\gamma \subset I_{++}$ ist die Menge $P_\gamma \cap I_{-+}$ nicht leer, nämlich für $\gamma = (2, 1)$ und $\gamma = (2, 2)$. Die beiden Mengen $P_{(2,1)} \cap I_{-+}$ und $P_{(2,2)} \cap I_{-+}$ sind identisch: Denn nach Punkt 3(a) des Unterabschnitts 3.3.3 haben die Seiten $K_{<}((2, 2), 1)$ und $K_{<}((2, 1), 1)$, die jeweils die Schnittmengen begrenzen, einen gemeinsamen Endpunkt. Außerdem schneiden beide Seiten die x_1 -Achse im gleichen Punkt. Wie anhand der rechten Seite von Abbildung 3.7 zu sehen ist, sind dann die beiden Schnittmengen identisch. Demnach ist die Überlappmenge von I_{++} mit I_{-+}

$$OV_{++, -+} = \bigcup_{\gamma \text{ mit } S_\gamma \subset I_{++}} (P_\gamma \cap I_{-+}) = P_{(2,2)} \cap I_{-+}. \quad (3.42)$$

Die Eckpunktkoordinaten der Menge $OV_{++, -+}$ sind nach den obigen geometrischen Überlegungen für die Schnittmenge $P_{(2,2)} \cap I_{-+}$:

$$(0, 0), \quad (0, -\delta/\epsilon + O(\delta)) \quad \text{und} \quad (\delta + O(\epsilon \cdot \delta), 0). \quad (3.43)$$

Ich kann diese Eckpunkte der Überlappmenge $OV_{++, -+}$ im Sinne der Störungstheorie noch vereinfachen, indem ich überflüssige Beiträge höherer Ordnung bei den Koordinaten weglasse. Überflüssig sind Terme der Eckpunktkoordinaten dann, wenn die Überlappmenge, die sich mit den vereinfachten Eckpunkten ergibt, mit der exakten Menge eine Differenzmenge aufweist, die eine Fläche der Größe $O(\delta^2)$ hat. Dabei definiere ich die Differenzmenge von zwei Mengen A und B als

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Die Überlappmenge $OV_{++, -+}$ besitzt in \mathbf{e}_2 -Richtung eine Ausdehnung der Größenordnung $-\delta/\epsilon$ und in \mathbf{e}_1 -Richtung eine der Größenordnung $-\delta$. Deswegen kann ich für die x_2 -Komponente der Eckpunkte Terme der Größenordnung $O(\delta)$ weglassen, während ich bei der x_1 -Komponente nur Korrekturen der Größenordnung $O(\epsilon \cdot \delta)$ vernachlässigen darf. Beim Übergang zu vereinfachten Eckpunktkoordinaten kann ich demnach in Gleichung (3.43) die $O()$ -Terme streichen.

Urbilder der Überlappmenge $OV_{++, -+}$

Wie im Abschnitt 3.4 ausführlich erläutert wurde, kann ich aus einer Überlappmenge nicht auf den entsprechenden Übergang schließen. Bei einem Übergang $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ müssen nach dem ersten Übergangskriterium auch Punkte aus dem Innern von I_{++} bei wiederholter Iteration mit $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ in die Menge $OV_{++, -+}$ gelangen. Zur Überprüfung dieses Kriteriums berechne ich die verschiedenen Generationen von Urbildmengen der Überlappmenge, wobei ich mit der ersten Generation beginne (vgl. die Definition in Gleichung (3.20)).

Punkte von $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++, -+})$ liegen in den Teilrechtecken $S_{(2,1)}$ bzw. $S_{(2,2)}$, so daß es nur zwei Urbildmengenkomponenten in der ersten Urbildgeneration gibt. Wegen der

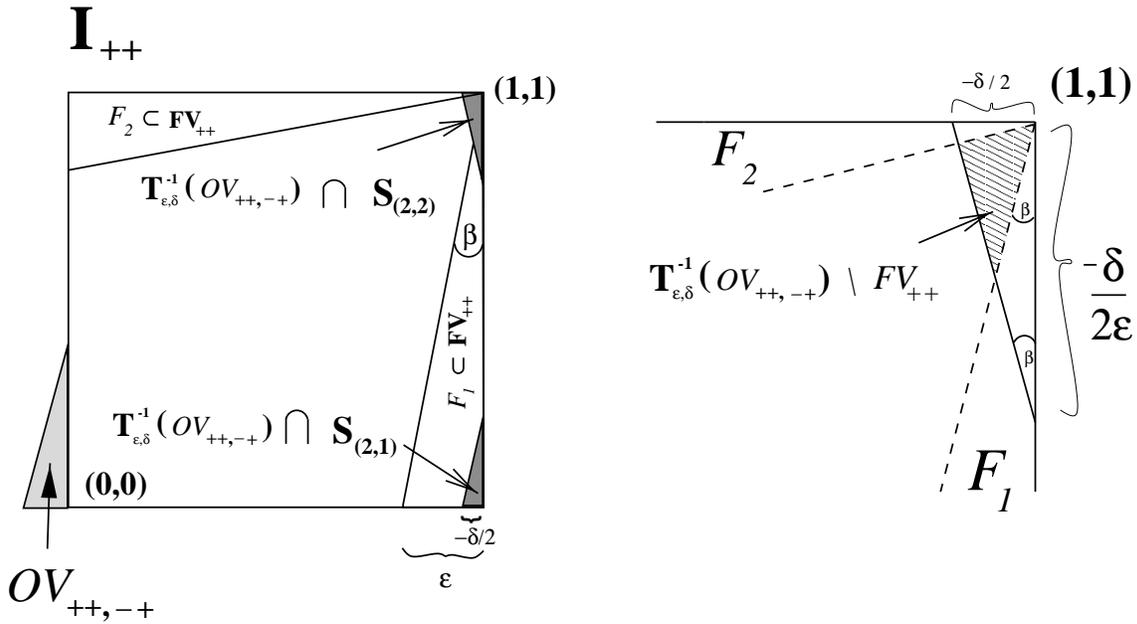


Abbildung 3.8: Links: Die Überlappmenge $OV_{++,-+}$ und ihre beiden Urbildmengenkomponenten. Rechts: Die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \setminus FV_{++}$. Die Schnittmenge von $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+})$ mit der Fehlvolumentmenge F_2 hat die vernachlässigbare Größe $O(\delta^2 \cdot \epsilon)$.

Linearität der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf den Teilrechtecken sind die beiden Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,1)}$ und $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,2)}$ ebenfalls Dreiecke. Da $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ außerdem aus schwach gestörten ungekoppelten Zeltabbildungen besteht, haben die Dreiecksseiten der beiden Urbildmengenkomponenten näherungsweise die halbe Länge gegenüber den entsprechenden Seiten der Überlappmenge: demnach haben die beiden Urbilddreiecke in x_2 -Richtung eine Ausdehnung $\approx -\delta/(2\epsilon)$, in x_1 -Richtung eine Ausdehnung $\approx -\delta/2$.

Am praktischsten ist es, die beiden Komponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,1)}$ und $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,2)}$ über ihre Eckpunkte $\tilde{\mathbf{x}}$ auszurechnen. Diese erfüllen die Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in S_\gamma, \quad (3.44)$$

wobei \mathbf{x} ein Eckpunkt der Überlappmenge ist. Für \tilde{x}_2 kann ich – wie schon bei den Koordinaten der Überlappmenge – Korrekturen der Größe $O(\delta)$ vernachlässigen, für \tilde{x}_1 Korrekturen der Größe $O(\epsilon \cdot \delta)$. Die Eckpunkte der beiden Urbildmengenkomponenten sind demnach

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,2)} &: (1, 1), (1, 1 + \delta/2\epsilon), (1 + \delta/2, 1) \\ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,1)} &: (1, 0), (1, -\delta/2\epsilon), (1 + \delta/2, 0). \end{aligned}$$

Die Lage dieser beiden Dreiecke in I_{++} ist links in Abbildung 3.8 zu sehen.

Bevor ich zur Urbildmenge der zweiten Generation für die Überlappmenge komme, muß ich zuerst die Lage der ersten Generation relativ zum Fehlvolument in I_{++} klären. Denn Punkte aus der Urbildmenge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+})$, die in FV_{++} liegen, haben selbst keine Urbilder. Hierbei ist vor allem der Teil des Fehlvolumentens FV_{++} relevant, der am rechten Rand von I_{++} liegt, da sich dort auch die beiden Urbilddreiecke befinden.

Für ein beliebiges der vier γ mit $S_\gamma \subset I_{++}$ gehören trivialerweise alle Punkte in I_{++} , die rechts von einer durch die Seite $K_{>}(\gamma, 1)$ gelegten Geraden liegen, nicht mehr zu P_γ . Diese Gerade ist nach Punkt 4 des Unterabschnitts 3.3.3 für alle vier P_γ identisch. Demnach befinden sich alle Punkte rechts der Seite $K_{>}((1, 1), 1)$ im Fehlvolumen FV_{++} (vgl. die Definition des Fehlvolumens in Gleichung (3.25)). Diese dreieckige Teilmenge des Fehlvolumens nenne ich F_1 ; sie ist in Abbildung 3.8 eingezeichnet. Eine Seite von F_1 verläuft durch die Punkte $(1, 1)$ und $(1 - \epsilon, \epsilon)$, so daß im Sinne der Störungstheorie der Winkel $\beta \approx \epsilon$.

Daneben gibt es eine dreieckige Teilmenge von FV_{++} , die sich in der Nähe der $(x_2 = 1)$ -Seite von I_{++} befindet. Diese ist in Abbildung 3.8 als Menge F_2 eingezeichnet. Die Schnittmenge der ersten Urbildgeneration $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+})$ mit F_2 hat allerdings eine vernachlässigbare Fläche der Größe $O(\delta^2 \cdot \epsilon)$ (siehe rechte Seite von Abbildung 3.8).

Wie anhand der linken Seite von Abbildung 3.8 zu sehen ist, gilt für $-\epsilon \leq \delta < 0$

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,1)} \subset F_1 \subset FV_{++} .$$

Die andere Komponente $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,2)}$ liegt so relativ zum Fehlvolumen, daß auch für im Betrag beliebig kleine δ die Menge

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \setminus FV_{++}$$

nicht leer ist (siehe rechte Seite der Abbildung 3.8). Da sowohl das Fehlvolumendreieck F_1 als auch die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,2)}$ einen spitzen Winkel β der Größe $\approx \epsilon$ haben, ist der Teil von $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,2)}$ außerhalb des Fehlvolumens ungefähr genauso groß wie der innerhalb. Deswegen gilt

$$\text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \setminus FV_{++} \right) \approx \frac{1}{2} \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \cap S_{(2,2)} \right) \approx \frac{\delta^2}{16\epsilon} . \quad (3.45)$$

Alle Punkte aus der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{--,-+}) \setminus FV_{++}$ haben vier Urbilder in I_{++} , aus denen die zweite Urbildgeneration der Überlappmenge $OV_{++,-+}$ besteht:

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++,-+}) = \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \setminus FV_{++} \right) \quad (3.46)$$

Die Fläche der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++,-+})$ ist demnach ebenfalls $\approx \delta^2/16\epsilon$. Punkte \mathbf{x} aus $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++,-+})$ liegen nicht mehr am Rand, sondern in der Mitte von I_{++} . Es gilt

$$x_1 \approx a , \quad x_2 \in [a + \delta/8\epsilon, a - \delta/8\epsilon] .$$

Für $|\delta|/\epsilon \ll 1$ befinden sich demnach alle Punkte \mathbf{x} innerhalb eines kleinen Kreises mit (a, a) als Mittelpunkt. Zur Urbildmenge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++,-+})$ gehört der Punkt (a, a) und eine hinreichend kleine Umgebung um ihn herum.⁶

Analog zur Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++,-+})$ resultiert auch aus der symmetrischen Überlappmenge $OV_{++,+}$ mit dem Quadrat I_{+-} eine Urbildmenge der zweiten Generation,

⁶Der aufmerksame Leser wundert sich vielleicht, daß der Punkt (a, a) zur Urbildmenge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++,-+})$ gehören soll; denn auf Seite 30 wurde zu Recht behauptet, daß der Punkt $(1, 1)$, der ja das Bild von (a, a) ist, selbst auf den Punkt (δ, δ) abgebildet wird, der in der Überlappmenge mit dem Quadrat I_{--} liegt. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich, wenn man bedenkt, daß ich bei den Urbildkonstruktionen Flächen der Größe $O(\delta^2)$ vernachlässigt haben. Demzufolge wurde die Urbildmenge der Überlappmenge mit I_{--} , die von der Größe $O(\delta^2)$ ist, der Urbildmenge zur Überlappmenge mit I_{+-} zugeschlagen.

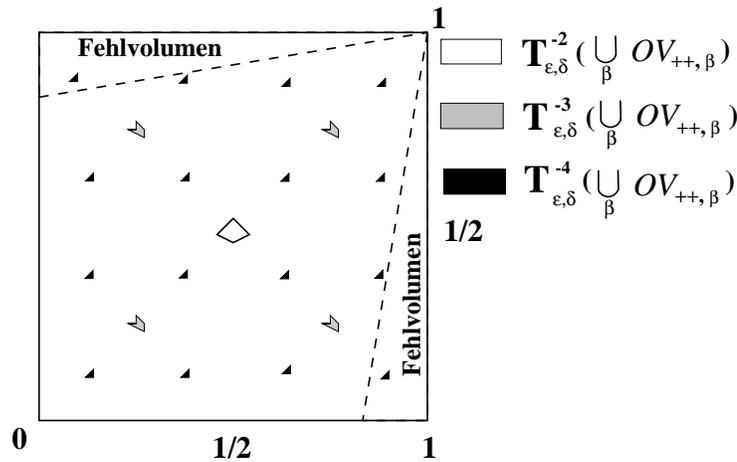


Abbildung 3.9: Die Urbildmengen der zweiten bis vierten Generation aller drei Überlappmengen sind hier schematisch dargestellt. Es wurde $|\delta|/\epsilon \ll 1$ gewählt. Das Fehlverhalten ist in dieser Zeichnung so vergrößert worden, daß schon Urbildmengenkomponenten von $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-4}(\bigcup_{\beta \neq ++} OV_{++, \beta})$ in ihm liegen.

die in der Mitte von I_{++} liegt und exakt die gleiche Fläche hat.⁷ Damit gilt für die Gesamtfläche von Punkten, die in zwei Iterationsritten I_{++} verlassen:

$$\text{Fl} \left(\bigcup_{\beta \neq ++} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++, \beta}) \right) \approx \frac{\delta^2}{8\epsilon} \quad (3.47)$$

Ich zeige in Abbildung 3.9 schematisch die Urbildmengen der zweiten bis vierten Generation, d. h. die Mengen

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k} \left(\bigcup_{\beta \neq ++} OV_{++, \beta} \right), \quad k \in \{2, 3, 4\} .$$

Hierbei wurde $|\delta|/\epsilon \ll 1$ und $\epsilon, |\delta| \ll 1$ gewählt. In diesem Fall befinden sich die Urbildmengenkomponenten der k -ten Urbildgeneration in der Nähe der Urbilder der $(k-2)$ -ten Generation von $(1/2, 1/2)$ wenn man die *ungekoppelte, nichtdeformierte* Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon=0, \delta=0}$ verwendet. Dies gilt bis zu einer Urbildgeneration k_0 . Je kleiner ϵ und δ gewählt werden, desto höher ist das k_0 , bis zu dem die Urbildmengenkomponenten diese Lage haben (bei vorgegebener Genauigkeit). Die Urbilder der k -ten Generation des Punktes $(1/2, 1/2)$ unter der ungestörten Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon=0, \delta=0}$ liegen auf den Vertizes eines regelmäßigen zweidimensionalen quadratischen Gitters mit Gitterkonstante $1/2^k$. Der Abstand zwischen jeweils zwei nächsten Nachbarn der 4^{k-1} Urbilder einer Generation ist konstant. Es ist deshalb plausibel, daß auch die Komponenten der Urbildmengen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{++, \beta})$ in guter Näherung *homogen* in I_{++} verteilt sind.

⁷Man erhält die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++, +-})$ aus der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++, -+})$ durch Vertauschen der x_1 - mit der x_2 -Koordinate. Für Punkte der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{++, +-})$ gilt: die x_2 -Koordinate ist nahe bei a , die x_1 -Koordinate liegt im Intervall $[a + \delta/8\epsilon, a - \delta/8\epsilon]$.

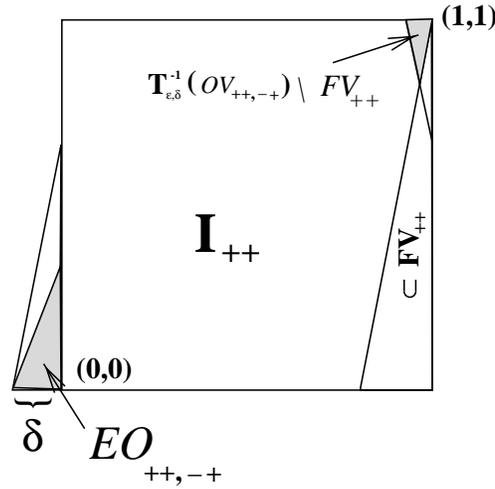


Abbildung 3.10: Die effektive Überlappmenge $EO_{++,-+}$ und die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \setminus FV_{++}$, deren Bild sie ist. Die effektive Überlappmenge ist halb so groß wie die Überlappmenge $OV_{++,-+}$.

Die effektive Überlappmenge $EO_{++,-+}$

Es wurde gezeigt, daß Punkte aus dem Innern von I_{++} in endlich vielen Iterationsschritten in die Überlappmengen mit I_{-+} bzw. mit I_{+-} abgebildet werden. Das zweite Kriterium für einen Übergang (siehe Seite 24) verwendet die effektive Überlappmenge; entsprechend berechne ich die zur Überlappmenge $OV_{++,-+}$ korrespondierende effektive Überlappmenge. Diese ist nach Definition (3.27)

$$EO_{++,-+} = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(I_{++} \setminus FV_{++}) \cap I_{-+} \quad (3.48)$$

Daraus folgt

$$EO_{++,-+} = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta} \left[\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \setminus FV_{++} \right]. \quad (3.49)$$

Die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-+}) \setminus FV_{++}$ liegt im Teilrechteck $S_{(2,2)}$ und wurde in Abbildung 3.8 dargestellt. Die effektive Überlappmenge $EO_{++,-+}$ ist als Bild dieser Menge nur halb so groß wie die Überlappmenge $OV_{++,-+}$ selbst. In Abbildung 3.10 wird die effektive Überlappmenge dargestellt. Nach dem zweiten Kriterium muß es in der effektiven Überlappmenge eine Teilmenge mit endlichem Maß geben, die sog. Übergangsmenge $W_{++,-+}$, deren Punkte bei weiterer Iteration das Innere von I_{-+} erreichen. An dieser Stelle kann die Frage, wohin sich die Punkte aus der effektiven Überlappmenge bei weiterer Iteration wandern, nicht geklärt werden. Denn dazu müßte man die Dynamik der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ innerhalb von I_{-+} besser kennen. Erst in Unterabschnitt 3.8.8 wird diese Frage geklärt.

Wieviele Punkte aus I_{++} wandern in die Überlappmengen?

Sorgt die Tatsache, daß die Urbildmengen ab der zweiten Urbildgeneration in der Mitte von I_{++} liegen, dafür, daß *alle* Punkte – abgesehen von instabilen periodischen Orbits und anderen Repelloren – nach einer endlichen Zahl von Iterationen die Überlappmengen erreichen? Oder gibt es in I_{++} eine Menge von endlichem Maß, deren Punkte für alle Zeiten in I_{++} bleiben?

Ich beweise im Anhang D die folgende Aussage: *Für $\delta < 0$ gibt es in jeder offenen Umgebung $U \subset I_{++}$ eine offene Teilmenge V , so daß alle $\mathbf{x} \in V$ in endlich vielen Iterationen I_{++} verlassen.*

Es gibt demnach keine noch so kleine offene Menge in I_{++} , deren iterierten Punkte für alle Zeiten in diesem Quadrat bleiben. Die Beweisidee besteht in folgendem: ich benutze die Tatsache, daß die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ stark expansiv ist; denn der Betrag der Jakobideterminante ist überall $4 + O(\epsilon, \delta)$. Deswegen wachsen die iterierten Bilder der offenen Umgebung U solange an, bis sie eine Umgebung des Punktes (a, a) schneiden, deren Punkte die Menge I_{++} in zwei Iterationsschritten verlassen.

Aus dieser Aussage folgt mit der Attraktordefinition aus Anhang A, daß für $\delta < 0$ keine Teilmenge von I_{++} ein Attraktor ist. Dies bedeutet aber nicht, daß sich der Attraktor, den es in I_{++} für $\delta \geq 0$ gibt, für $\delta < 0$ auflösen muß. Denn der Attraktor könnte sich bei der Parameteränderung leicht deformiert haben und für $\delta < 0$ auch Punkte umfassen, die einen Abstand der Größe $O(\epsilon, \delta)$ vom Quadrat I_{++} haben, so daß auch die (effektiven) Überlappmengen zum Attraktor gehören. Wie schon gesagt, kann ich erst nach dem besseren Verständnis der Dynamik in den anderen Quadraten das ergodische Verhalten der Punkte aus den Überlappmengen beschreiben. Demnach wird die Frage nach der Auflösung des Attraktors in I_{++} für $\delta < 0$ ebenfalls erst in Unterabschnitt 3.8.8 beantwortet.

Die obige Aussage über das Verhalten von offenen Mengen $U \subset I_{++}$ ist rein topologischer Natur und sagt nichts aus über das Maß aller Punkte $\in I_{++}$, die dieses Quadrat in endlich vielen Iterationen verlassen.⁸ Fast alle Punkte aus I_{++} verlassen dieses Quadrat in endlich vielen Iterationsschritten, wenn gilt

$$\text{Fl} \left(\bigcup_{\beta \neq ++} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{++,\beta}) \right) = \sum_{\beta \neq ++} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{++,\beta}) \right) = 1. \quad (3.50)$$

Um diese Gleichung zeigen zu können, brauche ich eine Aussage über die Flächen hoher Urbildgenerationen. Damit die unendliche Summe überhaupt konvergiert, müssen die Flächen der Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{++,\beta})$ für $k \rightarrow \infty$ verschwinden. Es gibt zwei wichtige konkurrierende Effekte, die die Fläche von Urbildgenerationen hoher Generation bestimmen:

- Wir nehmen an: Jede Urbildmengenkomponente der k -ten Urbildgeneration der Überlappmenge besitzt die maximale Anzahl von vier Urbildmengenkomponenten in I_{++} , die zur $(k+1)$ -ten Urbildgeneration gehören. Im Parameterbereich $\epsilon < \delta < 0$ ist der Betrag der Jakobideterminante $\text{Det}(J_{\epsilon,\delta})$ konstant und etwas kleiner als 4. Deswegen ist die Fläche der vier Urbildmengenkomponenten zusammen etwas größer als die Fläche der Ausgangsmenge. Wenn unsere Annahme stimmte, hätte die Urbildmenge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-(k+1)}(OV_{++,\beta})$ eine etwas größere Fläche als die Urbildmenge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{++,\beta})$. Dann aber kann die Fläche in Gleichung (3.50) nicht konvergieren.
- Die Tendenz der Jakobideterminante, die Flächen der um 1 höheren Urbildgeneration größer zu machen, wird ausgeglichen durch den Effekt des Fehlvolumens. Denn wie wir schon oben bei der Berechnung der ersten Urbildgeneration gesehen haben, können Urbildmengenkomponenten innerhalb des Fehlvolumens

⁸Es könnte in I_{++} einen Attraktor im Sinne von Milnor geben, der keine offene Umgebung anzieht, sondern nur eine Menge von Punkten mit positivem Lebesguemaß [27, 14]. Um einen solchen Attraktor in I_{++} auszuschließen, reichen topologische Methoden nicht aus.

FV_{++} liegen. Dann haben diese Komponenten keine Urbilder in der um eins höheren Urbildgeneration. Dies führt dazu, daß die um eins höhere Urbildgeneration weniger als das Vierfache an Urbildmengenkomponenten besitzt. Gerade bei größeren k -Werten liegt von den sehr vielen Urbildmengenkomponenten, die zur k -ten Generation gehören, immer ein gewisser Teil innerhalb des Fehlvolmens.

In Anhang E berechne ich mit Hilfe störungstheoretischer Methoden die Fläche aller Urbildmengen aus Gleichung (3.50) zu⁹

$$\sum_{\beta \neq ++} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{++}, \beta) \right) = 1 + o(1). \quad (3.51)$$

Dabei verwende ich die schon erwähnte Annahme, daß die Urbildmengenkomponenten einer hohen Urbildgeneration in I_{++} homogen verteilt sind. Damit kann ich den beschriebenen Absorptionseffekt des Fehlvolmens für die Komponenten von Urbildmengen quantitativ erfassen. Es zeigt sich, daß gerade eine heikle Balance zwischen den beiden konkurrierenden Effekten besteht, so daß für große k -Werte das Flächenverhältnis der $k+1$ -ten Urbildgeneration zur k -ten Generation gleich einer Konstanten knapp unterhalb von 1 ist. Die Summe in Gleichung (3.50) wird dann eine konvergente geometrische Reihe.

Damit existiert in I_{++} höchstens ein Fläche der Größe $o(1)$, deren Punkte dieses Quadrat nicht nach endlicher Zeit verlassen. Es ist plausibel, daß darüber hinaus fast alle Punkte $\in I_{++}$ nach endlich vielen Schritten die Überlappmenge erreichen; ich kann dies aber nicht streng zeigen.

3.8 Die Dynamik in I_{-+} und I_{+-}

In diesem Abschnitt behandle ich die Dynamik in I_{-+} und I_{+-} für verschiedene Parameterbereiche von ϵ und δ , insbesondere die Frage, ob bzw. bei welchen (ϵ, δ) -Größenverhältnissen es Übergänge zu anderen Quadraten geben kann. Wegen der Symmetrien der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ verhält sich die Dynamik in I_{+-} analog zu der in I_{-+} , so daß ich mich im folgenden auf das Quadrat I_{-+} beschränke.

3.8.1 Parallelogramme und Schnittmengen

Ich beginne mit der Berechnung des δ -unabhängigen Parallelogramms $P_{(-1,1)}$, welches das Bild des Teilrechtecks $S_{(-1,1)}$ ist (siehe Abbildung 3.1 zur Lage von $S_{(-1,1)}$ im Phasenraum). Dieses Parallelogramm ist auf der linken Seite von Abbildung 3.11 zu sehen. Wir sehen anhand der Abbildung, daß es Schnittmengen des Parallelogramms mit den Nachbarquadraten I_{++} und I_{--} gibt. Da das Parallelogramm spiegelsymmetrisch um die Achse ist, die durch die Punkte $(0, 0)$ und $(-1, 1)$ verläuft, sind die Flächen dieser beiden Schnittmengen gleich:

$$\text{Fl}(P_{(-1,1)} \cap I_{++}) = \text{Fl}(P_{(-1,1)} \cap I_{--}) = \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2) \quad (3.52)$$

Ich kann mich auf die Untersuchung der Möglichkeit von Übergängen nach I_{++} beschränken; denn aus der Hintereinanderschaltung von Antisymmetrie und Translationsinvarianz ergibt sich die Äquivalenz des Übergangs $I_{-+} \rightarrow I_{--}$ zum Übergang

⁹Das Symbol $o(1)$, das in Anhang B genauer erklärt wird, repräsentiert Terme, die für $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ verschwinden.

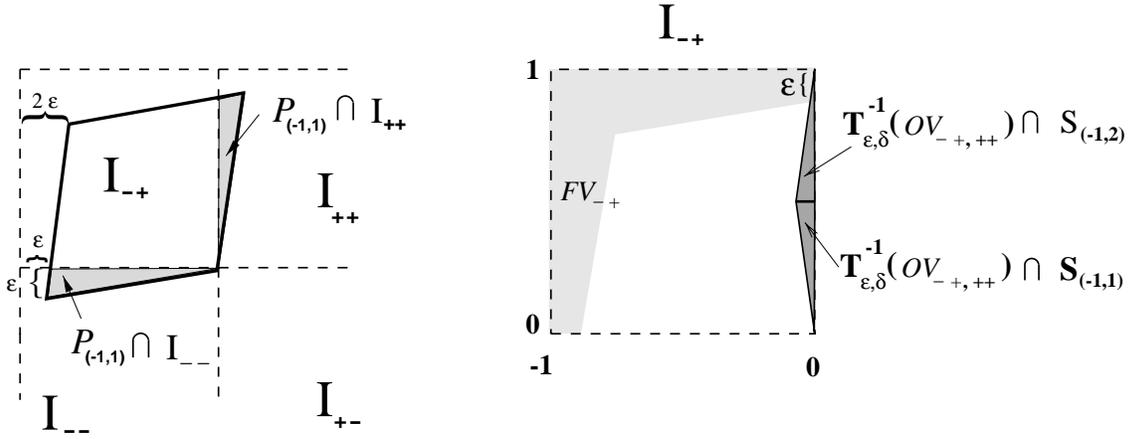


Abbildung 3.11: Links: das Parallelogramm $P_{(-1,1)}$ und seine Überlappungen. Rechts: die beiden Urbildmengenkomponenten der ersten Generation von $OV_{-,++}$, die in $S_{(-1,1)}$ und $S_{(-1,2)}$ liegen.

$I_{-+} \rightarrow I_{++}$. Deswegen brauche ich die Schnittmenge mit dem Quadrat I_{--} und ihre Urbilder nicht weiter zu behandeln.

Für die Schnittmenge eines Parallelogramms P_γ ist die $K_{<}(\gamma, 1)$ -Seite des Parallelogramms relevant, da diese Seite die Schnittmenge in e_1 -Richtung begrenzt. Für die drei anderen Parallelogramme P_γ mit $S_\gamma \subset I_{++}$ erhalte ich die folgenden Schnittmengen:

Für $\gamma = (-1, 2)$ ist die Parallelogrammseite $K_{<}((-1, 2), 1)$, die die Schnittmenge $P_{(-1,2)} \cap I_{++}$ begrenzt, bis auf ein Stück der Länge $O(\delta)$ identisch mit der entsprechenden Seite für $\gamma = (-1, 1)$. Deswegen unterscheidet sich die Menge $P_{(-1,2)} \cap I_{++}$ nur um eine Fläche der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$ von der schon behandelten Menge $P_{(-1,1)} \cap I_{++}$. Dieser Unterschied ist vernachlässigbar, da die Flächen dieser beiden Schnittmengen nach Gleichung (3.52) eine führende Ordnung der Größe $\epsilon/2$ besitzen.¹⁰

Für $\gamma = (-2, 1)$ und $\gamma = (-2, 2)$ ist die Parallelogrammseite $K_{<}(\gamma, 1)$ gemäß Punkt 3 (b) des Unterabschnitts 3.3.3 um $\approx |\delta|$ verschoben, so daß die Überlappungen $P_\gamma \cap I_{++}$ mit $\gamma_1 = -2$ signifikant δ -abhängig sind. Für $\delta > \epsilon$ sind die beiden Mengen leer, für $0 \leq \delta < \epsilon$ sind sie Dreiecke und für $\delta < 0$ Vierecke. Ich zeige die Schnittmenge $P_{(-2,2)} \cap I_{++}$ für die beiden zuletzt aufgeführten δ -Bereiche auf der rechten und linken Seite von Abbildung 3.12. Die Schnittmengen $P_{(-2,1)} \cap I_{++}$ und $P_{(-2,2)} \cap I_{++}$ sind bis auf eine Differenzmenge der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$ gleich.

Die Vereinigung aller Schnittmengen $P_\gamma \cap I_{++}$ ist die Überlappmenge von I_{-+} mit I_{++} . Für $\delta \geq 0$ gilt:

$$OV_{-,++} = P_{(-1,1)} \cap I_{++} \quad (\delta \geq 0), \quad (3.53)$$

da in diesem Parameterbereich alle anderen Schnittmenge in dieser enthalten sind. Aus dem gleichen Grund ergibt sich für $\delta < 0$

$$OV_{-,++} = P_{(-2,2)} \cap I_{++} \quad (\delta < 0). \quad (3.54)$$

Das Parallelogramm $P_{(-2,2)}$ hat für $\delta < 0$ auch eine Schnittmenge mit dem Quadrat I_{+-} , deren Fläche die Größe $O(\delta^2)$ hat. Dies ist gegenüber der Größe $\epsilon/2$ der Schnittmengen mit I_{++} bzw. I_{--} in Störungstheorie vernachlässigbar.

¹⁰Man beachte, daß im letzten Abschnitt, der der Dynamik in I_{++} gewidmet war, nur Flächen der Größe $O(\delta^2)$ unberücksichtigt bleiben konnten, da dort die Schnittmengen eine Fläche der Größenordnung δ^2/ϵ hatten.

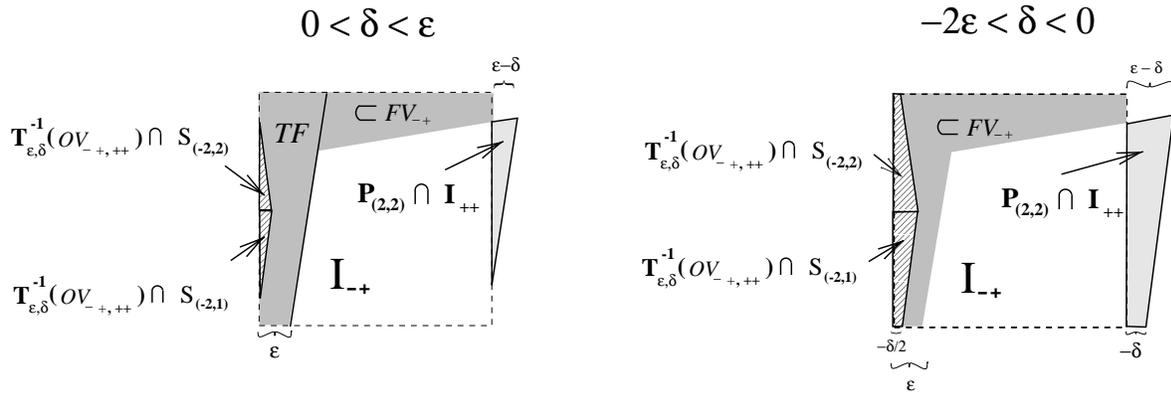


Abbildung 3.12: Die Schnittmenge $P_{(-2,2)} \cap I_{++}$ und die Urbildmengenkomponenten von $OV_{-,++}$, die in den Teilrechtecken $S_{(-2,1)}$ und $S_{(-2,2)}$ liegen. Außerdem ist das Fehlvolumen FV_{-+} eingezeichnet. Links: Es gilt $0 < \delta < \epsilon$; rechts: es gilt $-2\epsilon < \delta < 0$.

3.8.2 Urbildmenge der ersten Generation

Nach dem ersten Übergangskriterium auf Seite 24 muß ich zur Überlappmenge $OV_{-,++}$ die Urbildmengen der verschiedenen Generationen konstruieren, da bei einem Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$ diese Urbildmengen ab einer bestimmten Generation das Innere von I_{-+} schneiden müssen.

Die Urbildmengenkomponenten der ersten Generation erhalte ich, indem ich für die Eckpunkte der Schnittmenge $P_\gamma \cap I_{++}$ die Urbilder in S_γ bestimme:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in S_\gamma \subset I_{-+}, \quad (3.55)$$

wobei \mathbf{x} ein Eckpunkt von $P_\gamma \cap I_{++}$ ist.

Die Urbildmengenkomponenten haben in \mathbf{e}_2 -Richtung eine Ausdehnung der Größenordnung 1, in \mathbf{e}_1 -Richtung eine der Größenordnung ϵ oder $|\delta|$. Die Differenzmenge einer berechneten Menge mit der exakten Menge soll höchstens eine Fläche der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$ haben. Dann brauche ich die Eckpunkte $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ mit folgender Genauigkeit: für \tilde{x}_2 können Terme der Größe $O(\epsilon, \delta)$ weggelassen werden, für \tilde{x}_1 Terme der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$. Ich brauche dann Kopplung und Deformation der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ bei der Ermittlung von \tilde{x}_2 nicht zu berücksichtigen und löse die vereinfachten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= f_\delta(\tilde{x}_1) + \epsilon f_0(\tilde{x}_2), \\ x_2 &= f_0(\tilde{x}_2), \end{aligned} \quad (3.56)$$

wobei f_0 die nichtdeformierte antisymmetrische Zeltabbildung ist.

Die Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-,++}) \cap S_{(-1,1)}$ und $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-,++}) \cap S_{(-1,2)}$ sind näherungsweise vom Parameter δ unabhängig. Ich zeige diese beiden Komponenten auf der rechten Seite von Abbildung 3.11. Dagegen sind die Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-,++}) \cap S_{(-2,1)}$ und $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-,++}) \cap S_{(-2,2)}$ stark δ -abhängig. In Abbildung 3.12 zeichne ich diese beiden Mengen für die Bereiche $0 \leq \delta < \epsilon$ und $-2\epsilon < \delta < 0$ ein.

3.8.3 Urbildmengen höherer Generation

Wenn ich Urbildmengen höherer Generationen der Überlappmenge $OV_{-,++}$ berechnen will, muß ich das Fehlvolumen FV_{-+} im Quadrat I_{-+} kennen. In den Abbildungen

3.11 (rechts) und 3.12 ist das Fehlvolumen FV_{-+} mit eingezeichnet. Diese Menge ist relativ leicht zu erhalten, da die Seiten $K_{>}(\gamma, i)$ für alle γ aufeinander liegen. Demnach gehören alle Punkte oberhalb der Seite $K_{>}((1, 1), 2)$ und links der Seite $K_{>}((1, 1), 1)$ zum Fehlvolumen. Für meine Untersuchung eines möglichen Übergangs $I_{-+} \rightarrow I_{++}$ ist vor allem der zuletzt genannte Teil von FV_{-+} wichtig, die Menge

$$TF := \{\mathbf{x} \in I_{-+} \mid x_1 \leq L(x_2)\} \subset FV_{-+}, \quad (3.57)$$

die auf der linken Seite von Abbildung 3.12 eingezeichnet ist. Die lineare Funktion $L(x_2)$, die in der letzten Gleichung verwendet wird, ergibt sich aus den Eckpunkten der Parallelogrammseite $K_{>}((1, 1), 1)$ zu

$$L(x_2) = 1 - \epsilon - \epsilon x_2 + O(\epsilon^2), \quad x_2 \in [0, 1]. \quad (3.58)$$

Die Menge TF ist ein vertikaler Streifen, dessen Breite in \mathbf{e}_1 -Richtung durch

$$b_{TF}(x_2) = 1 - L(x_2) = \epsilon + \epsilon x_2 + O(\epsilon^2), \quad x_2 \in [0, 1] \quad (3.59)$$

gegeben ist.

Man kann leicht ausrechnen und sieht es in Abbildung 3.12, daß für $\delta > -2\epsilon$ die beiden Komponenten der ersten Generation in $S_{(-2,1)}$ und $S_{(-2,2)}$ Teilmengen von FV_{-+} sind. Wir werden weiter unten sehen, daß die wesentliche Veränderung für die Dynamik in I_{-+} für δ -Werte von ca. $-4\epsilon/3$ erfolgt. Deswegen reicht die Betrachtung von δ -Werten knapp oberhalb und knapp unterhalb von $-4\epsilon/3$ aus, um die qualitative Dynamik in I_{-+} zu erfassen. Aus diesem Grund kann ich mich im folgenden auf solche δ -Werte beschränken.

Hingegen sieht man anhand der Abbildung 3.11 (rechts), daß die Komponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap S_{(-1,1)}$ und $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap S_{(-1,2)}$ bis auf vernachlässigbare Mengen mit Fläche $O(\epsilon^2)$ außerhalb des Fehlvolumens liegen. Demzufolge kann ich für diese beiden Mengen Urbildmengen finden, die zur zweiten Generation gehören. Es gilt

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(OV_{-+,++}) = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1} \left[\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap (S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}) \right], \quad \delta > -2\epsilon.$$

Die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(OV_{-+,++})$ besteht für $-2\epsilon < \delta < 0$ aus acht Urbildmengenkomponenten. Die Punkte aus $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(OV_{-+,++})$ haben x_1 -Koordinaten, die entweder ≈ 0 oder ≈ -1 sind. Dementsprechend liegen vier Komponenten in den rechten Teilrechtecken $S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}$ und vier in den linken Teilrechtecken $S_{(-2,1)} \cup S_{(-2,2)}$. Je nach Größe von δ liegen die vier Komponenten, die Teilmenge von $S_{(-2,1)} \cup S_{(-2,2)}$ sind, vollständig im Fehlvolumen FV_{-+} oder nicht. Diese δ -Abhängigkeit der Situation in den linken Teilrechtecken, die – wie später deutlich werden wird – gerade für die qualitative Änderung der Dynamik in I_{-+} sorgt, macht die Analyse der sukzessiven Urbildgenerationen schwer durchschaubar, wenn man in jeder Urbildgeneration Komponenten in allen Teilrechtecken berücksichtigt.

Ich gehe deswegen so vor, daß ich zuerst nur die Urbildmengen beliebiger Generation der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap (S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)})$ betrachte, die sich ebenfalls in der Menge $S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}$ befinden. Ich definiere Mengen $G^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, die ich einfach **k -te Generation** nenne:

$$\begin{aligned} G^{(1)} &:= \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap (S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}) \\ G^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{x} \in (S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}) \mid \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \in G^{(k-1)} \right\}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

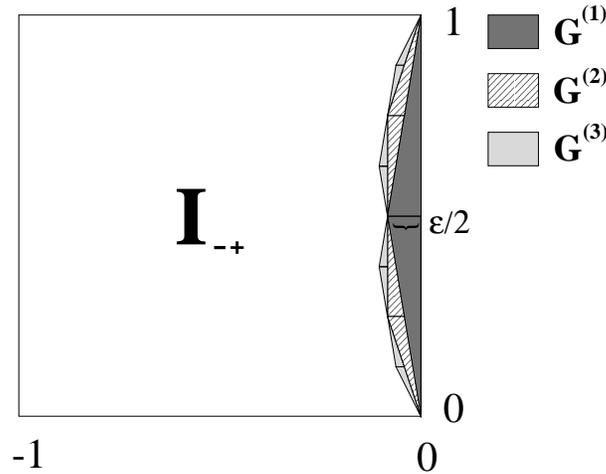


Abbildung 3.13: Die ersten drei Generationen $G^{(k)}$, wobei die hier gezeichneten Mengen die exakten Mengen bis auf eine Differenzmenge der Fläche $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$ approximieren.

Später werden die Urbildmengen der verschiedenen Generationen berechnet, für die auch die linken Teilrechtecke $S_{(-2,1)}$ und $S_{(-2,2)}$ benötigt werden.

Ich kann bei der Berechnung der $G^{(k)}$ das Fehlvolume FV_{-+} näherungsweise ignorieren, da von jeder Generation $G^{(k)}$ nur ein Anteil im Fehlvolume FV_{-+} liegt, dessen Fläche ungefähr ϵ mal der Gesamtfläche von $G^{(k)}$ ist. In Abbildung 3.13 sind die ersten drei Generationen der Mengen $G^{(k)}$ dargestellt.

Es wird für größer werdende k immer mühsamer, die Lage aller Dreiecke zu berechnen, die zu dieser Generation gehören. Glücklicherweise gibt es Regeln, die einem die Konstruktion von $G^{(k+1)}$ aus $G^{(k)}$ wesentlich erleichtern. Auf der Menge $S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}$ läßt sich Gleichung (3.56) zur Konstruktion von Eckpunkten von Urbilddreiecken weiter vereinfachen. Denn ich kann eine vereinfachte Abbildung $\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon$, die nicht mehr von δ abhängt, zur Konstruktion von Eckpunkten verwenden, wenn ich korrekt bis auf Mengen der Fläche $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$ sein will:

$$\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon : \quad \begin{aligned} x_1 &= 2\tilde{x}_1 + \epsilon f_0(\tilde{x}_2) \\ x_2 &= f_0(\tilde{x}_2) \end{aligned}, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}, \quad (3.61)$$

Ich definiere mit der Abbildung $\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon$ vereinfachte Generationen $\tilde{G}^{(k)}$ analog zu den Generationen $G^{(k)}$ in Gleichung (3.60). Die erste Generation $\tilde{G}^{(1)}$ besteht aus den δ -unabhängigen Dreiecken $D_1^{(1)}$ und $D_2^{(1)}$, die die Komponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap S_{(-1,1)}$ und $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap S_{(-1,2)}$ approximieren. Die Eckpunkte dieser beiden Dreiecke sind:

$$\begin{aligned} D_1^{(1)} : & \quad (0, 0), \quad (0, 1/2), \quad \text{und} \quad (-\epsilon/2, 1/2) \\ D_2^{(1)} : & \quad (0, 1), \quad (0, 1/2), \quad \text{und} \quad (-\epsilon/2, 1/2) \end{aligned}$$

Ich definiere anschließend

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)} &:= D_1^{(1)} \cup D_2^{(1)}, \\ \tilde{G}^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{x} \in (S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}) \mid \tilde{\mathbf{T}}_\epsilon(\mathbf{x}) \in G^{(k-1)} \right\}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.62)$$

Für die vereinfachten Generationen $\tilde{G}^{(k)}$ gelten die folgenden

Regeln

1. Alle Generationen $\tilde{G}^{(k)}$ sind δ -unabhängige Mengen. Denn die Generation $G^{(1)}$ besteht aus den beiden δ -unabhängigen Dreiecken $D_1^{(1)}$ und $D_2^{(1)}$. Außerdem ist die Abbildung $\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon$ δ -unabhängig.
2. Jede Generation $\tilde{G}^{(k)}$ besteht aus 2^k Dreiecken $D_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^k$). Die Abbildung $\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon$ hat kein Fehlvolumen. Deswegen hat jedes Dreieck der Generation $\tilde{G}^{(k-1)}$ zwei Urbilddreiecke in $S_{(-1,1)} \cup S_{(-1,2)}$, die zur Generation $\tilde{G}^{(k)}$ gehören.
3. Der Betrag der Jakobideterminante der Abbildung $\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon$ ist im ganzen Phasenraum konstant gleich 4. Außerdem wird jedes Dreieck $D_i^{(k)}$ nach $(k-1)$ Iterationen auf eines der beiden gleich großen Dreiecke $D_1^{(1)}$ abgebildet. Folglich haben die Dreiecke $D_i^{(k)}$ alle die gleiche Fläche, die um den Faktor 4 kleiner ist als die Fläche der Dreiecke $D_i^{(k-1)}$.
4. Die Eckpunkte der Dreiecke $D_i^{(k)}$ haben x_2 -Koordinaten $\in \{i/2^k, i = 0, 1, \dots, 2^k\}$. Denn in der Abbildung $\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon$ wird die x_2 -Koordinate unabhängig von der x_1 -Koordinate mit f_0 iteriert und die Eckpunkte der beiden Dreiecke der ersten Generation haben die x_2 -Koordinaten $\in \{0, 1/2, 1\}$.
Jede Generation $\tilde{G}^{(k)}$ füllt in \mathbf{e}_2 -Richtung das Intervall $[0, 1]$ aus, d. h.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x_2 \in [0, 1] \quad \exists \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{G}^{(k)}.$$

5. Zwei benachbarte Dreiecke $D_i^{(k)}$ und $D_{i+1}^{(k)}$ einer Generation liegen so zueinander, daß entweder Spitze an Spitze stößt oder sie die kurze Seite der Länge $O(\epsilon)$ gemeinsam haben (siehe Abbildung 3.13).
6. Die Generation $\tilde{G}^{(k)}$ liegt in \mathbf{e}_1 -Richtung direkt hinter der Generation $\tilde{G}^{(k-1)}$. Für festes $x_2 \in [0, 1]$ gilt

$$\sup \left\{ x_1 \mid (x_1, x_2) \in \tilde{G}^{(k)} \right\} = \inf \left\{ x_1 \mid (x_1, x_2) \in \tilde{G}^{(k-1)} \right\}$$

Es gibt also keine „Lücke“ zwischen der Generation $\tilde{G}^{(k-1)}$ und der Generation $\tilde{G}^{(k)}$.

Diese Regeln gelten näherungsweise auch für die Mengen $G^{(k)}$, da sie durch die Mengen $\tilde{G}^{(k)}$ approximiert werden können, solange k nicht zu groß wird. Das Argument der Vernachlässigung von Mengen mit $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$ -Fläche, das ich an einigen Stellen gebrauche, wird allerdings ungültig für hinreichend große k , da die Flächen der Mengen $G^{(k)}$ bzw. der Dreiecke $D_i^{(k)}$ mit k exponentiell abnehmen. Ich kann dann die Effekte des Fehlvolumens und der vollen δ -abhängigen Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf die Mengen $G^{(k)}$ nicht mehr ignorieren. Ich denke aber – und die numerischen Ergebnisse unterstützen dies –, daß das Verhalten der hohen Generationen im Sinne der Störungstheorie geringen Einfluß auf meine Ergebnisse hat, da die Gesamtfläche aller hohen Generationen sehr klein ist. Falls die hohen Generationen eine wichtige Rolle spielten, wäre meine Störungstheorie zu naiv und damit unbrauchbar.

Ich definiere nun endliche Vereinigungen von Generationen $\tilde{G}^{(k)}$, die Mengen

$$\Sigma_{\tilde{G}}^{(n)} := \bigcup_{k=1}^n \tilde{G}^{(k)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.63)$$

Insbesondere ist – wie gleich deutlich werden wird – die Menge interessant, die sich im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ergibt:

$$\Sigma_{\tilde{G}}^{\infty} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{G}^{(k)}$$

Mich interessiert vor allem die Höhe dieser Menge in \mathbf{e}_1 -Richtung:

$$h\left(\Sigma_{\tilde{G}}^{\infty}\right) := \sup \left\{ |x_1| \mid \mathbf{x} \in \Sigma_{\tilde{G}}^{\infty} \right\}$$

Zur Berechnung dieser Größe führe ich Randkurven $R^{(n)}$ der Mengen $\Sigma_{\tilde{G}}^{(n)}$ ein. Für festes $x_2 \in [0, 1]$ definiere ich

$$R^{(n)}(x_2) := \inf \left\{ x_1 \mid (x_1, x_2) \in \Sigma_{\tilde{G}}^{(n)} \right\}. \quad (3.64)$$

Die Randkurve $R^{(n)}$ begrenzt die Menge $\Sigma_{\tilde{G}}^{(n)}$ nach links. Ich leite als nächstes für die Funktion $R^{(n)}$ einen analytischen Ausdruck her. Aus der Definition der Mengen $\tilde{G}^{(k)}$ und Regel 4 und 6 folgt, daß die Randkurve von $\Sigma_{\tilde{G}}^{(n+1)}$ durch $\tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon}$ auf die Randkurve von $\Sigma_{\tilde{G}}^{(n)}$ abgebildet wird:

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon} \left(\left\{ (R^{(n+1)}(y), y) \mid y \in [0, 1] \right\} \right) = \left\{ (R^{(n)}(z), z) \mid z \in [0, 1] \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Für die Funktion $R^{(1)}$ gilt

$$\mathbf{x} = (R^{(1)}(x_2), x_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon}(\mathbf{x}) \in \left\{ (0, y) \mid y \in [0, 1] \right\}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x_1' &= 0 = 2x_1 + \epsilon f_0(x_2) \\ \Rightarrow R^{(1)}(x_2) &= x_1 = -\frac{\epsilon}{2} f_0(x_2), \quad x_2 \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Die Funktion $R^{(1)}(x_2)$ ist in der linken Zeichnung von Abbildung 3.14 dargestellt. Nach Gleichung (3.64) gilt für $R^{(2)}$

$$\mathbf{x} = (R^{(2)}(x_2), x_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon}(\mathbf{x}) \in \left\{ (R^{(1)}(y), y) \mid y \in [0, 1] \right\}.$$

Mit $R^{(1)}$ aus Gleichung (3.65) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{x_1'}{f_0(x_2')} &= \frac{2x_1 + \epsilon f_0(x_2)}{f_0(f_0(x_2))} = -\frac{\epsilon}{2}, \\ \Rightarrow R^{(2)}(x_2) &= x_1 = -\frac{\epsilon}{2} f_0(x_2) - \frac{\epsilon}{4} (f_0 \circ f_0)(x_2), \quad x_2 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Funktion $R^{(2)}(x_2)$ ist in der mittleren Zeichnung von Abbildung 3.14 dargestellt. Ich definiere die n -fache Iterierte von f_0 durch

$$\text{It}_{[f_0, n]}(x) := \underbrace{(f_0 \circ f_0 \cdots \circ f_0)}_{n \text{ mal}}(x). \quad (3.67)$$

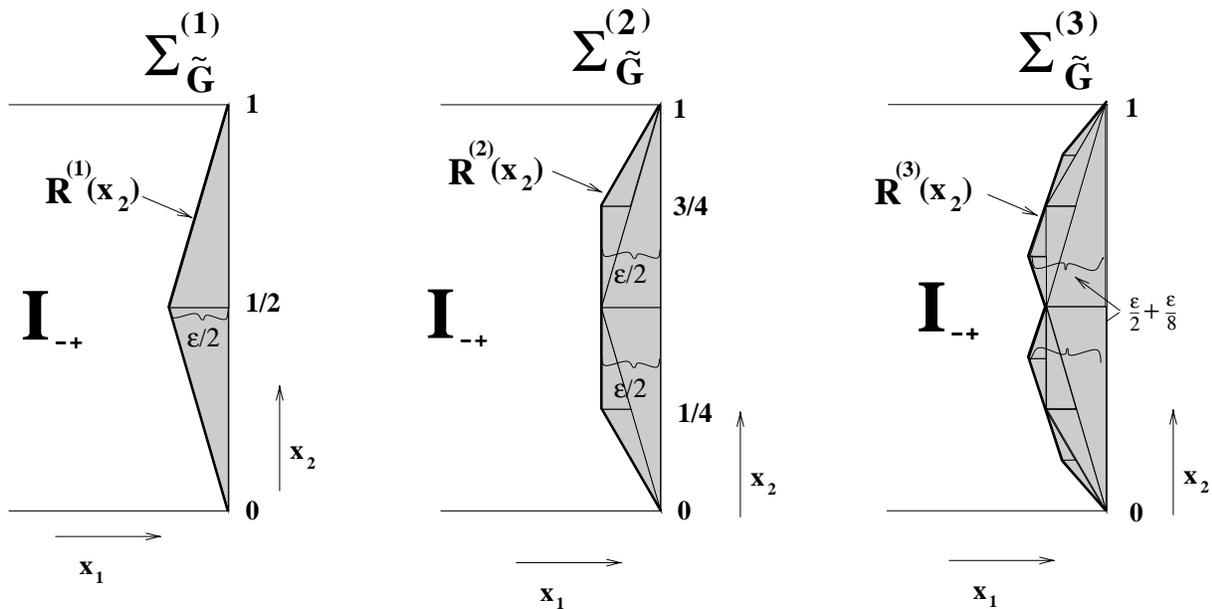


Abbildung 3.14: Zur Illustration der partiellen Selbstähnlichkeit zeige ich die Mengen $\Sigma_{\tilde{G}}^{(i)}$, ($i = 1, 2, 3$) und die Randkurven $R^{(i)}$, ($i = 1, 2, 3$).

Die Ergebnisse für $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$ in den Gleichungen (3.65) bzw. (3.66) lassen sich folgendermaßen für $R^{(n)}$ verallgemeinern:

$$R^{(n)}(x_2) = -\epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\text{It}_{[f_0, i]}(x_2)}{2^i}, \quad x_2 \in [0, 1] \quad (3.68)$$

Der Beweis ginge über Induktion und ist leicht durchführbar.

Der Ausdruck in Gleichung (3.68) ist nicht sehr transparent, wenn ich die Minima von $R^{(n)}$ bestimmen möchte, an denen ich hauptsächlich interessiert bin. Diese können wir durch eine Argumentation erhalten, die die partielle Selbstähnlichkeit der Funktionen $R^{(n)}$ für verschiedene n ausnutzt. In Abbildung 3.14 sind die ersten drei Mengen $\Sigma_{\tilde{G}}^{(i)}$ und die zugehörigen Randkurven dargestellt. Es ergeben sich für wachsendes n folgende Beobachtungen:

$R^{(1)}$: Diese Funktion hat ein Minimum der Größe $-\epsilon/2$ bei $x_2 = 1/2$.

$R^{(2)}$: Diese Funktion ist trapezförmig und wird minimal auf dem Intervall $[1/4, 3/4]$ mit dem Wert $-\epsilon/2$.

$R^{(3)}$: Für die Funktion $R^{(3)}$ besteht folgende Selbstähnlichkeit: auf das Plateau der Funktion $R^{(2)}$ zwischen $1/4$ und $3/4$ kommt die Funktion $\text{It}_{[f_0, 3]}(x)/2^3$ hinzu. Diese Funktion hat ein Viertel der Höhe des ersten Summanden $\text{It}_{[f_0, 1]}(x)/2$. Der Abstand zwischen Nullstellen ist ebenfalls vierfach kleiner. Auf die Intervalle $[1/4, 1/2]$ und $[1/2, 3/4]$ addieren sich demnach zwei Spitzen mit der Form der um den Faktor 4 verkleinerten ersten Kurve $R^{(1)}$. Der Wert von $R^{(3)}$ in den beiden Minima ist $-\epsilon/2 - \epsilon/8 = -5\epsilon/8$. Die x_2 -Koordinaten der Minima sind $x_2 = 3/8$ und $x_2 = 5/8$.

Wenn man diese Betrachtungen weiterführt, ergeben sich für die Funktion $R^{(4)}$ zwei Ebenen der Höhe $-5\epsilon/8$, auf denen sie minimal wird. Bei der darauffolgenden Funktion

$R^{(5)}$ addieren sich auf diese vier Spitzen der Höhe $\epsilon/32$, so daß diese Menge vier Minima der Höhe $-5\epsilon/8 - \epsilon/32$ besitzt.

Wir erkennen folgende Gesetzmäßigkeiten: die Funktion $R^{(n)}$ hat für *gerade* n die Zahl von $2^{(n-2)/2}$ Ebenen, auf denen die Funktionswerte minimal werden. Die Breite dieser Ebenen in \mathbf{e}_2 -Richtung nimmt zwischen n und $n+2$ um den Faktor 4 ab. Für *ungerades* n hat die Funktion $R^{(n)}$ die Zahl von $2^{(n-1)/2}$ gleich großen Spitzen/Minima, an denen

$$R^{(n)}(x_2) = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{1}{4^k}. \quad (3.69)$$

Sei $m := (n-1)/2$. Die x_2 -Koordinaten der Minima von $R^{(n)}$ bei ungeradem n unterscheide ich durch die 2^m geordneten m -Tupel von $+1$ und -1 . Es ergibt sich

$$x_2(i_1, i_2, \dots, i_m) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{i_j}{4^j} \right), \quad i_j \in \{-1, +1\}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.70)$$

Da die Funktionen $R^{(n)}$ gleichmäßig zur Randkurve $R^{(\infty)}$ von Σ_G^∞ konvergieren, ergibt sich die Höhe der Menge Σ_G^∞ als

$$h(\Sigma_G^\infty) = \sup \left\{ |R^{(\infty)}(x_2)| \mid x_2 \in [0, 1] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{1}{4^k} = \frac{2\epsilon}{3}. \quad (3.71)$$

Diese Höhe wird an unendlich vielen Punkten erreicht, die sich aus Gleichung (3.70) für $m \rightarrow \infty$ ergeben.

Die Randkurve $R^{(\infty)}$ ist ein Fraktal [8], da sie eine unendliche Länge hat. Denn das Konstruktionsprinzip der Funktion $R^{(\infty)}$ ist ganz analog zur berühmten Kochschen Kurve. Die Randkurven der Mengen $R^{(n)}$ werden in jedem Schritt von n nach $n+1$ um einen konstanten Faktor $1 + O(\epsilon) > 1$ länger. Die Randkurve $R^{(\infty)}$ hat eine fraktale Dimension, die größer als 1 ist.

Da ich die Generationen $G^{(k)}$ durch die Generationen $\tilde{G}^{(k)}$ approximieren kann, lassen sich die für die Menge Σ_G^∞ gewonnenen Ergebnisse auf die Menge

$$\Sigma_G^\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$$

übertragen. Es gilt nach Gleichung (3.71)

$$h(\Sigma_G^\infty) \approx h(\Sigma_{\tilde{G}}^\infty) = \frac{2\epsilon}{3}. \quad (3.72)$$

Die Minima der Randkurve von $\Sigma_G^{(n)}$ befinden sich in guter Näherung bei den gleichen x_2 -Koordinaten wie die von $\Sigma_{\tilde{G}}^{(n)}$ (siehe Gleichung (3.70)).¹¹

Ich wende mich nun den Urbildmengen höherer Generation (≥ 2) zu, die in den linken Teilrechtecken von I_{-+} liegen. In Unterabschnitt 3.8.2 habe ich die Urbildmengenkomponenten der ersten Generation, die Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-+, ++}) \cap S_{(-2, 1)}$ und

¹¹Abweichungen sind hier von der Größe $O(\epsilon, \delta)$; dies ist klein gegenüber den Werten in Gleichung (3.70) selbst, die von der Größenordnung 1 sind.

$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap S_{(-2,2)}$, diskutiert. Ich definiere Pendants zu den Mengen $G^{(k)}$ ($k \geq 1$) in den linken Teilrechtecken (vgl. mit Definition (3.60) für die Mengen $G^{(k)}$):

$$\begin{aligned} H^{(1)} &:= \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,++}) \cap (S_{(-2,1)} \cup S_{(-2,2)}), \\ H^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{x} \in (S_{(-2,1)} \cup S_{(-2,2)}) \mid \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \in G^{(k-1)} \right\}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.73)$$

Die Menge $H^{(k)}$ ist demnach eine Urbildmenge von $G^{(k-1)}$, für deren Punkte die x_1 -Koordinate ≈ -1 ist.

Ich kann eine Beziehung zwischen den Punkten in $G^{(k)}$ und $H^{(k)}$ für $k \geq 2$ aufstellen; denn beide Mengen enthalten Urbilder von Punkten aus der Menge $G^{(k-1)}$. Betrachte je einen Punkt aus $G^{(k)}$ und $H^{(k)}$, die Urbilder des gleichen Punktes aus $G^{(k-1)}$ sind:

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}') = \mathbf{y} \in G^{(k-1)}, \quad \mathbf{x} \in G^{(k)}, \quad \mathbf{x}' \in H^{(k)}$$

Aus der Struktur der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ folgt dann

$$f_\delta(x'_i) = f_\delta(x_i), \quad i = 1, 2.$$

Aus dem Funktionsverlauf von f_δ im Intervall $[-1, 0]$ (siehe Abbildung 2.2) ergibt sich für die x_1 -Komponenten die Beziehung

$$-\delta - 2(1 + x'_1) \approx f_\delta(x'_1) = f_\delta(x_1) \approx 2x_1.$$

Diese Näherungen für die Auswertung von f_δ gelten für Punkte \mathbf{x}, \mathbf{x}' , die sich in der Nähe von -1 bzw. 0 befinden. Aus der letzten Gleichung folgt

$$x'_1 + 1 \approx -\delta/2 - x_1. \quad (3.74)$$

Dies bedeutet: der Abstand von \mathbf{x}' vom linken Rand des Quadrats I_{-+} ist gleich der Summe aus $-\delta/2$ und dem Abstand von \mathbf{x} zum rechten Rand von I_{-+} .

Damit \mathbf{x}' überhaupt in I_{-+} liegt, muß $x'_1 \geq -1$ gelten. Aus Gleichung (3.74) folgt, daß bei vorgegebenem δ ein Punkt $\mathbf{x} \in G^{(k)}$ nur dann ein Pendant $\mathbf{x}' \in H^{(k)}$ hat, wenn

$$x_1 < -\delta/2.$$

Da $x_1 < 0$, ist diese Bedingung für $\delta \leq 0$ immer erfüllt.

Ich kann wegen Gleichung (3.74) die Mengen $H^{(k)}$ ($k = 2, 3, \dots$) auch geometrisch aus den Mengen $G^{(k)}$ konstruieren: dazu spiegele ich die Menge $G^{(k)}$ an der $x_1 = 1/2$ -Achse und verschiebe die resultierende Menge um den Betrag $|\delta|/2$. Die Verschiebungsrichtung ist $-\mathbf{e}_1$ für positives δ und $+\mathbf{e}_1$ für negatives δ . In Abbildung 3.15 zeige ich für $\delta > 0$ und $\delta < 0$ die Mengen $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ und $H^{(3)}$ (vgl. die ersten drei $G^{(k)}$ in Abbildung 3.13).

3.8.4 Das Kriterium für das kritische δ

Gibt es außer den bisher behandelten Urbildmengen $\{G^{(k)}, H^{(k)}, k \geq 1\}$ weitere Urbildmengen beliebiger Generation zur Überlappmenge $OV_{-+,++}$, die im Quadrat I_{-+} liegen? Ich habe alle Urbilder der Mengen $G^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) gefunden. Wenn nun die Mengen $H^{(k)}$ am linken Rand selbst keine Urbildmengen haben, so gibt es keine noch hinzukommenden Urbildmengen. Die Mengen $H^{(k)}$ haben keine Urbilder, wenn sie sämtlich im Fehlvolumen FV_{-+} enthalten sind.

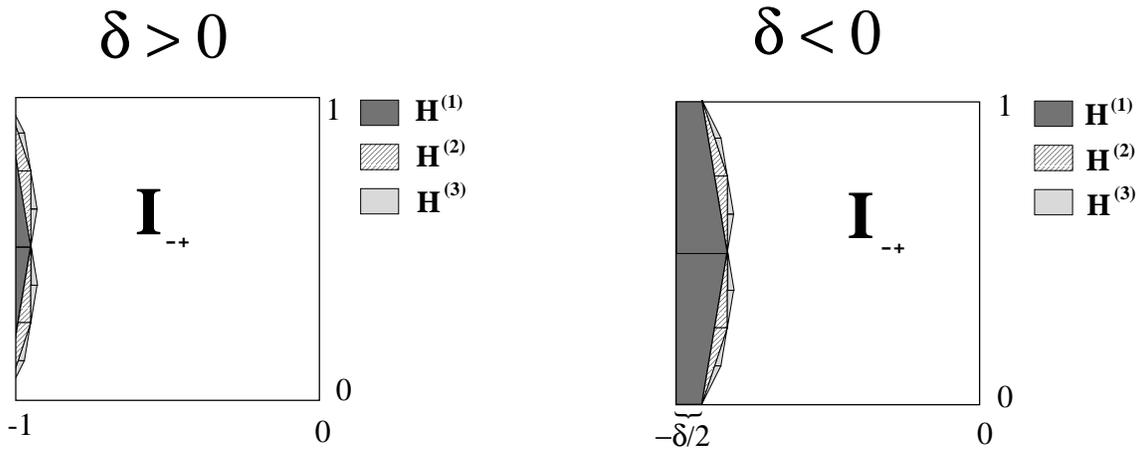


Abbildung 3.15: Die ersten drei Mengen $H^{(k)}$ im Fall $\delta < 0$ (links) und $\delta > 0$ (rechts).

Ich definiere analog zur Menge Σ_G^∞ in den rechten Teilrechtecken eine Menge Σ_H^∞ in den linken Teilrechtecken:

$$\Sigma_H^\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} H^{(k)} \quad (3.75)$$

Falls

$$\Sigma_H^\infty \subset FV_{-+}, \quad (3.76)$$

gibt es keine weiteren Urbilder der Überlappmenge $OV_{-+,++}$. Die Gültigkeit dieser Relation wird das entscheidende Kriterium zur Bestimmung von δ_c sein, dem *kritischen* δ -Wert, bei dem sich die ergodische Dynamik in I_{-+} qualitativ ändert.

3.8.5 Ein Attraktor in I_{-+} für $\delta \geq \delta_c$

Zuvor behandle ich die Konsequenzen für die Dynamik in I_{-+} , wenn Relation (3.76) gilt. Wie schon gesagt, bedeutet dies $\delta \geq \delta_c$. Alle Urbilder aller Generationen der Überlappmenge $OV_{-+,++}$ liegen dann in der Nähe des linken oder rechten Rands von I_{-+} . Für den symmetrischen Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{--}$ ist die Situation analog: von der Überlappmenge $OV_{-+,-}$ ausgehend konstruiere ich die analogen Mengen $\Sigma_{G'}^\infty$ und $\Sigma_{H'}^\infty$. Diese liegen am unteren bzw. oberen Rand von I_{-+} . Falls Relation (3.76) gilt, liegt auch $\Sigma_{H'}^\infty$ im Fehlvolumen.

Damit kann es keine Übergänge von I_{-+} zu den Quadraten I_{++} oder I_{--} geben, da kein Punkt aus dem Innern von I_{-+} in Überlappmengen gelangen kann. Ich schließe daraus, daß es im Quadrat I_{-+} einen Attraktor gibt, den ich mit A_{-+} bezeichne. Denn per Konstruktion bleiben die Iterierten aller Startpunkte $\mathbf{x}_0 \in I_{-+}$, die nicht in Σ_G^∞ , Σ_H^∞ , $\Sigma_{G'}^\infty$ oder $\Sigma_{H'}^\infty$ liegen, für alle Zeiten in I_{-+} . Damit gehören solche Punkte zum Bassin $B(A_{-+})$ des Attraktors A_{-+} (siehe die Definition des Anziehungsbereichs in Anhang A):¹²

$$I_{-+} \setminus (\Sigma_G^\infty \cup \Sigma_H^\infty \cup \Sigma_{G'}^\infty \cup \Sigma_{H'}^\infty \cup \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,+-})) \subset B(A_{-+}) \quad (3.77)$$

¹²Um ganz korrekt zu sein, muß ich auch die Menge von Punkten abziehen, die in einer Iteration in die in Störungstheorie vernachlässigbar kleine Überlappmenge $OV_{-+,+-}$ wandern. Dies ist die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,+-})$, die für $\delta > -4\epsilon$ im Fehlvolumen FV_{-+} liegt.

Die hier von I_{-+} abgezogene Menge hat nur eine Fläche der Größe $O(\epsilon, \delta)$. Analog zum Attraktor im Quadrat I_{++} für $\delta > 0$ ist zu erwarten, daß der Attraktor A_{-+} selbst eine Fläche der Größe $1 - O(\epsilon, \delta)$ hat. Dies wird auch durch numerische Simulationen nahegelegt.

3.8.6 Bestimmung von δ_c

Für die Bestimmung des Parameterbereichs, in dem Relation (3.76) gilt, brauche ich noch ein paar Eigenschaften der Menge Σ_H^∞ . Ich definiere die Höhe von Σ_H^∞ als

$$h(\Sigma_H^\infty) := \sup\{1 + x_1 \mid \mathbf{x} \in \Sigma_H^\infty\}.$$

Denn dies ist der maximale Abstand der x_1 -Koordinate eines Punktes aus Σ_H^∞ zum linken Rand von I_{-+} ($x_1 = -1$). Aus der Beziehung (3.74) zwischen Punkten aus den Mengen $G^{(k)}$ und $H^{(k)}$ und Gleichung (3.72) folgt

$$h(\Sigma_H^\infty) \approx h(\Sigma_G^\infty) - \frac{\delta}{2} \approx \frac{2\epsilon}{3} - \frac{\delta}{2}. \quad (3.78)$$

Die Menge Σ_H^∞ hat ebenfalls unendlich viele gleich hohe Maxima, deren x_2 -Werte die gleichen sind wie bei Σ_G^∞ .

Bei vorgegebenem Parameter ϵ wächst nach Gleichung (3.78) die Höhe der Menge Σ_H^∞ an, wenn δ kleiner wird. Deswegen ist Σ_H^∞ bei hinreichend kleinem δ nicht mehr im Fehlvolumen FV_{-+} bzw. in seiner Teilmenge TF (siehe Gleichung (3.59)) enthalten.

Ich bestimme nun das kritische δ_c in Abhängigkeit von ϵ , für das Relation (3.76) gerade noch erfüllt ist. Wenn $\delta = \delta_c$, gibt es einen Punkt $\mathbf{p} \in \Sigma_H^\infty$, der den rechten Rand der Fehlvolumenstreifens TF berührt (siehe linke Seite der Zeichnung in Abbildung 3.16):

$$\exists \mathbf{p} \in \Sigma_H^\infty \quad p_1 = L(p_2), \quad (\delta = \delta_c),$$

wobei die lineare Funktion L in Gleichung (3.58) gegeben ist. δ_c ist der größte δ -Wert, für den es einen solchen Punkt \mathbf{p} gibt.

Die Breite des Fehlvolumenstreifens TF nimmt nach Gleichung (3.59) für größer werdende x_2 -Werte zu. Demnach ist es plausibel, daß für kleiner werdende δ als erstes das Maximum von Σ_H^∞ mit der kleinsten x_2 -Koordinate die durch die Funktion L gegebene Linie erreicht. Nach Gleichung (3.70) ist der kleinste x_2 -Wert, an dem sich ein Maximum von Σ_H^∞ befindet:

$$x_2^{\min} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j} \right) = \frac{1}{3} \quad (3.79)$$

Da die durch L gegebene Linie aber zur x_2 -Achse den Winkel $\approx \epsilon$ aufweist, könnte auch eine Punkt, der eine kleinere x_2 -Koordinate als $1/3$ hat, zuerst mit dieser Linie zusammenstoßen. Im Anhang F zeige ich aber, daß für vorgegebenes $x_2 \in [0, 1]$ gilt:

$$\sup\{x_1 \mid (x_1, x_2) \in \Sigma_H^\infty\} \leq \sup\{x_1 \mid (x_1, 1/3) \in \Sigma_H^\infty\} + \epsilon \left(x_2 - \frac{1}{3} \right) \quad (3.80)$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung beschreibt eine Gerade, die zu der durch L gegebenen Geraden parallel ist und durch die kleinste Spitze von Σ_H^∞ bei $x_2 = 1/3$ verläuft. Die geometrische Bedeutung der Schranke in (3.80) ist: falls die Spitze von Σ_H^∞ bei

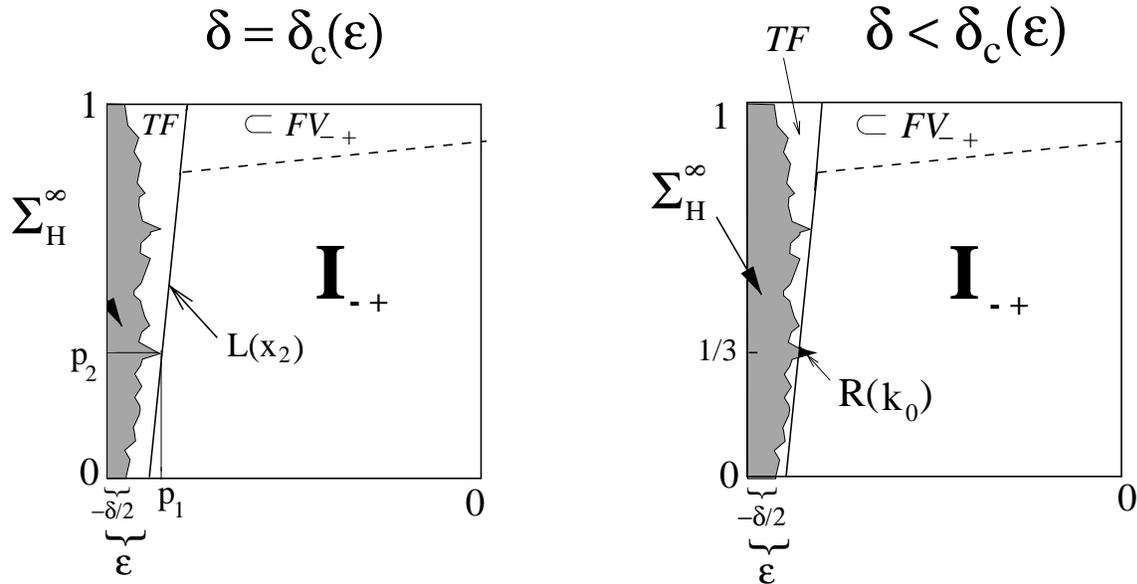


Abbildung 3.16: Schemazeichnungen zum Verhalten der Menge Σ_H^∞ bei $\delta = \delta_c(\epsilon)$ (links) und $\delta < \delta_c(\epsilon)$ (rechts).

$x_2 = 1/3$ den Rand des Fehlvolumens berührt, befindet sich die gesamte Menge Σ_H^∞ innerhalb des Fehlvolumens. Da die Menge Σ_H^∞ kaum zu zeichnen ist, zeige ich zur Veranschaulichung in Abbildung 3.17 die analoge Situation für die Menge $\Sigma_H^{(3)}$.

Für $\delta = \delta_c(\epsilon)$ ist demnach die Höhe der Maxima von Σ_H^∞ gleich der Breite der Fehlvolumenmenge TF bei $x_2 = 1/3$:

$$h(\Sigma_H^\infty) = b_{TF}(x_2 = 1/3), \quad \delta = \delta_c(\epsilon) \quad (3.81)$$

Wenn ich die Gleichungen (3.78) und (3.59) verwende, ergibt sich

$$\frac{2}{3}\epsilon - \frac{\delta_c(\epsilon)}{2} = \frac{4}{3}\epsilon. \quad (3.82)$$

Daraus folgt

$$\delta_c(\epsilon) = -\frac{4}{3}\epsilon. \quad (3.83)$$

In führender Ordnung Störungstheorie vernachlässigte Korrekturen zu dieser Funktion $\delta_c(\epsilon)$ sind im günstigsten Fall von der Größe $O(\epsilon^2)$.¹³

3.8.7 Überprüfung der beiden Übergangskriterien

Die Konsequenzen für das ergodische Verhalten, wenn $\delta > \delta_c(\epsilon) \approx -4\epsilon/3$, habe ich schon weiter oben erläutert: es gibt keine Übergänge $I_{-+} \rightarrow I_\beta$ und einen Attraktor im Quadrat I_{-+} . Was geschieht nun für $\delta < \delta_c(\epsilon)$? In diesem Fall ist die Menge

$$R(k_0) := \Sigma_H^\infty \setminus FV_{-+} \quad (3.84)$$

¹³Ich kann allerdings nicht analytisch zeigen, daß der günstigste Fall eintritt.

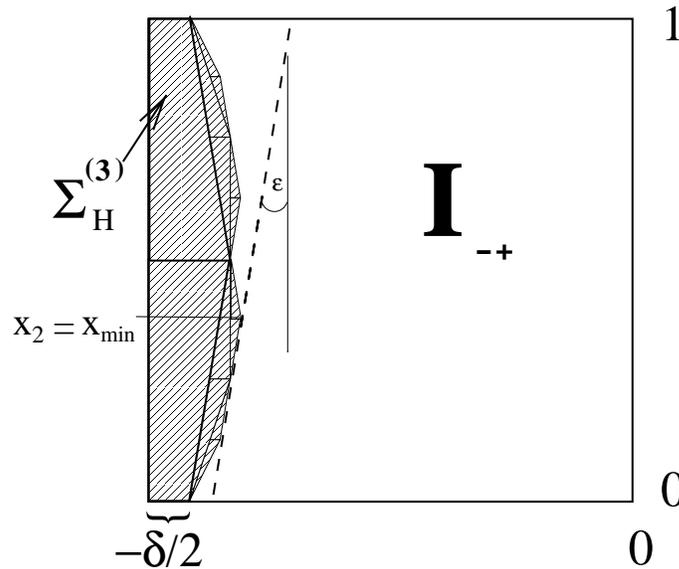


Abbildung 3.17: Die Menge $\Sigma_H^{(3)}$ liegt links von einer Geraden, die einen Winkel ϵ zur x_2 -Achse hat und durch die kleinste Spitze von $\Sigma_H^{(3)}$ verläuft (diese liegt bei $x_2 = x_{\min}$). Nach der Ungleichung (3.80) besteht für die Menge Σ_H^∞ eine analoge Situation.

nicht leer und hat eine endliche Fläche (siehe das Schema auf der rechten Seite in Abbildung 3.16). Der Index k_0 in Definition (3.84) ist der kleinste k -Wert, für den $R(k_0) \cap H^{(k)}$ nichtleer ist.¹⁴

Ich nehme nun weiter an, daß der Parameter δ nur ein wenig kleiner als $\delta_c(\epsilon)$ ist.¹⁵ Für solche δ -Werte befinden sich die Punkte der Menge $R(k_0)$ innerhalb einer kleinen Umgebung; denn für alle Punkte $\mathbf{x} \in R(k_0)$ gilt in diesem Fall

$$x_1 \approx -1, \quad x_2 \approx 1/3. \quad (3.85)$$

Alle $\mathbf{x} \in R(k_0)$ haben jeweils ein Urbild $\tilde{\mathbf{x}}$ in allen vier Teilrechtecken S_γ , für das gilt

$$\tilde{x}_1 \approx -1/2; \quad \tilde{x}_2 \approx 1/6 \quad \text{oder} \quad \tilde{x}_2 \approx 5/6. \quad (3.86)$$

Die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0))$ hat ungefähr die gleiche Fläche wie die Menge $R(k_0)$. Nach Gleichung (3.86) befindet sich die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0))$ im Innern des Quadrats I_{-+} und ist disjunkt vom Fehlvolumen FV_{-+} . Folglich haben alle Punkte aus $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0))$ wieder vier Urbilder in I_{-+} , so daß die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(R(k_0))$ ebenfalls ungefähr die gleiche Fläche wie $R(k_0)$ hat.

Wir sind in der gleichen Situation wie bei der Auflösung des Attraktors im Quadrat I_{++} für $\delta < 0$ in Unterabschnitt 3.7.2. Es findet für $\delta < \delta_c(\epsilon)$ für die Urbilder ein

¹⁴Nach den Regeln für die Generationen $\tilde{G}^{(k)}$ auf Seite 40, die sich auf die Pendantmengen $H^{(k)}$ übertragen lassen, gilt dann

$$\forall k \geq k_0 \quad R(k_0) \cap H^{(k)} \neq \emptyset.$$

Deswegen läßt sich $R(k_0)$ als eine Vereinigung von unendlich vielen nichtleeren Mengen, die zu verschiedenen Urbildgenerationen gehören, auffassen.

¹⁵Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da ich zeigen werde, daß es bei diesen δ -Werten zu Übergängen $I_{-+} \rightarrow I_\beta$ kommt. Für noch kleinere Werte von δ werden die Raten dieser Übergänge stärker, aber das ergodische Verhalten ändert sich nicht mehr qualitativ.

„Sprung in die Mitte“ des Quadrats statt, hier allerdings erst in der $(k_0 + 1)$ -ten Urbildgeneration. Es ist dann plausibel, daß für $\delta < \delta_c(\epsilon)$ im Lebesgueschen Sinne fast alle Punkte aus I_{-+} in endlich vielen Iterationsschritten dieses Quadrat verlassen. Mit störungstheoretischen Methoden kann ich wieder zeigen, daß für das Maß der I_{-+} verlassenden Punkt gilt:

$$\text{Fl} \left(\bigcup_{\beta \neq -+} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{-+, \beta}) \right) = \sum_{\beta \neq -+} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{-+, \beta}) \right) = 1 + o(1) \quad (3.87)$$

Man erhält dieses Resultat ganz analog zur Argumentation in Anhang E; dabei nutzt man wieder eine Feinabstimmung zwischen der Größe des Fehlvolumens FV_{-+} und der Jakobideterminante aus. Darüberhinaus gilt wohl, daß im Lebesgueschen Sinne fast alle Punkte aus I_{-+} nach endlich vielen Iterationen eine Überlappmenge $OV_{-+, \beta}$ erreichen, falls $\delta < \delta_c(\epsilon)$. Damit ist das erste Kriterium für den Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$ erfüllt.

Ich muß noch das zweite Kriterium für einen Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$ überprüfen (siehe Unterabschnitt 3.4.2): Gibt es eine Übergangsmenge $W_{-+, ++}$ als Teilmenge von endlichem Maß der effektiven Überlappmenge $EO_{-+, ++}$? Die Punkte von $W_{-+, ++}$ erreichen bei weiterer Iteration das Innere von I_{++} . Ich berechne zuerst die Menge $EO_{-+, ++}$ für δ -Werte $< \delta_c(\epsilon)$. Die Urbildkomponente $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-+, ++}) \cap S_{(-1, 1)}$ liegt außerhalb des Fehlvolumens, während die Komponenten in den Teilrechtecken $S_{(-2, 1)}$ und $S_{(-2, 2)}$ sich im Fehlvolumen befinden. Deswegen gilt

$$EO_{-+, ++} = \mathbf{T}_{\epsilon, \delta} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-+, ++}) \cap S_{(-1, 1)} \right) = P_{(-1, 1)} \cap I_{++} .$$

Für Punkte \mathbf{x} aus der Menge $P_{(-1, 1)} \cap I_{++}$ ist die x_1 -Koordinate von der Größe $O(\epsilon, \delta)$, während die x_2 -Koordinate Werte aus einem großen Bereich zwischen 0 und 1 annehmen kann (siehe linke Seite von Abbildung 3.11). Wir können Aussagen über die Iterierten von \mathbf{x} machen, da wir die Dynamik im Quadrat I_{++} schon ausführlich studiert haben. In dem Parameterbereich $-2\epsilon < \delta < \delta_c(\epsilon)$ können Trajektorien I_{++} nur verlassen, wenn sie in Teilmengen des Teilrechtecks $S_{(2, 2)} = [a, 1] \times [a, 1]$ gelangen. Damit bleiben die Iterierten von \mathbf{x} so lange in I_{++} , bis die x_1 -Koordinate größer als a ist. Ein großer Teil von Punkten aus der effektiven Überlappmenge $EO_{-+, ++}$ wandert demnach für $\delta < \delta_c(\epsilon)$ weiter ins Innere des Quadrats I_{++} . Für die Übergangsmenge ergibt sich

$$W_{-+, ++} \approx EO_{-+, ++} .$$

Da für $\delta < \delta_c(\epsilon)$ beide Kriterien für einen Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$ erfüllt sind, findet der Übergang in diesem Parameterbereich statt. Das gleiche gilt für den symmetrischen Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{--}$. Für die Hälfte der Startpunkte aus I_{-+} geht die iterierte Punktfolgen in das Quadrat I_{++} über, für die andere Hälfte in das Quadrat I_{--} .

Der Attraktor A_{-+} in I_{-+} wird demnach bei $\delta = \delta_c(\epsilon)$ instabil und verschwindet („Krise“). Es bleiben nur Repellen als invariante Teilmengen von I_{-+} übrig, deren Gesamtheit das Maß 0 hat. In Abschnitt 3.9 wird untersucht, welchen Attraktor es im Parameterbereich $\delta < \delta_c(\epsilon)$ für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ gibt.

3.8.8 Nachtrag zur Dynamik in I_{++} für $\delta < 0$

Für Punkte aus den Diagonalquadraten I_{++} und I_{--} mußte das ergodische Verhalten für $\delta < 0$ bisher offen bleiben. Ich habe in Unterabschnitt 3.7.2 zeigen können, daß fast

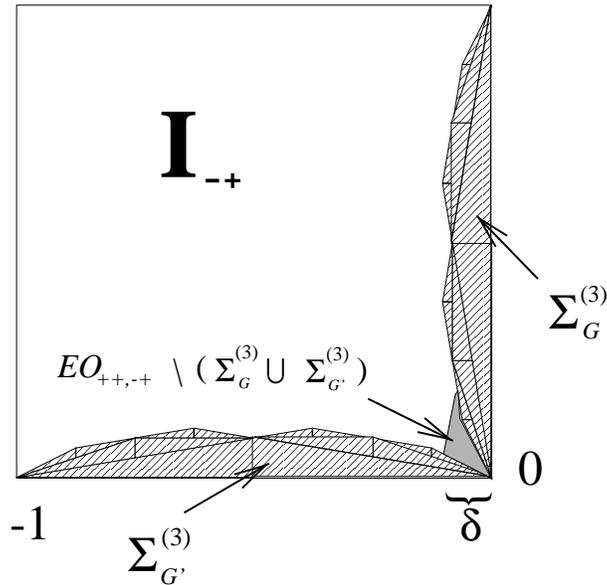


Abbildung 3.18: Die Menge $EO_{++,-+} \setminus (\Sigma_G^\infty \cup \Sigma_{G'}^\infty)$, wobei die Mengen Σ_G^∞ und $\Sigma_{G'}^\infty$ durch die ersten drei Urbildgenerationen approximiert wurden. Die Menge $EO_{++,-+}$ wurde in Abbildung 3.10 schon dargestellt.

alle Punkte aus I_{++} nach endlich vielen Iterationen in eine Überlappmenge mit den Nachbarquadraten I_β gelangen, vor allem in die Überlappmengen mit den Außerdiagonalquadraten I_{-+} und I_{+-} . Doch blieb ungeklärt, wohin die Punkte der Überlappmengen weiterwandern, d. h. das zweite Übergangskriterium ist für einen Übergang $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ noch zu überprüfen. Danach ist für einen Übergang zu zeigen, ob Punkte einer Teilmenge der effektiven Überlappmenge $EO_{++,-+}$ bei weiterer Iteration das Innere des Quadrats I_{-+} erreichen. Die Menge $EO_{++,-+}$ habe ich in Gleichung (3.49) berechnet (siehe Abbildung 3.10).

In Unterabschnitt 3.8.5 wurde gezeigt, daß im Parameterbereich $-4\epsilon/3 < \delta < 0$ die Außerdiagonalquadrate I_{-+} und I_{+-} jeweils einen Attraktor enthalten. Außerdem wurde gezeigt (siehe Gleichung (3.77)), daß die Menge

$$IN_{-+} := I_{-+} \setminus \left(\Sigma_G^\infty \cup \Sigma_H^\infty \cup \Sigma_{G'}^\infty \cup \Sigma_{H'}^\infty \cup \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-+,-+}) \right)$$

zum Bassin des Attraktors A_{-+} gehört:

$$IN_{-+} \subset B(A_{-+})$$

Für einen Übergang sollten Punkte einer Teilmenge von $EO_{++,-+}$ mit endlichem Maß den Attraktor A_{-+} erreichen. Die Schnittmenge

$$EO_{++,-+} \cap IN_{-+} = EO_{++,-+} \setminus (\Sigma_G^\infty \cup \Sigma_{G'}^\infty) \subset B(A_{-+})$$

ist nicht leer und hat sogar eine Fläche der Größenordnung δ^2/ϵ (siehe Abbildung 3.18). Alle Punkte der Menge $EO_{++,-+} \cap IN_{-+}$ gelangen zum Attraktor A_{-+} , ohne vorher das Quadrat I_{-+} zu verlassen. Damit ist auch das zweite Übergangskriterium erfüllt: die Übergänge $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ und $I_{++} \rightarrow I_{+-}$ finden statt, sobald $\delta < 0$ ist.

3.9 Zusammenfassung und Bifurkationsdiagramm

Ich fasse in diesem Abschnitt Ergebnisse aus den Abschnitten 3.7 und 3.8 zusammen. Es gibt für das zweidimensionale CML $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ drei Parameterbereiche; diese umfassen jeweils Parameterwerte (ϵ, δ) , in denen das CML $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ ein qualitativ ähnliches ergodisches Verhalten zeigt.

3.9.1 1. Parameterbereich: $\delta \geq 0$:

In Unterabschnitt 3.7.1 wurde gezeigt, daß in den Diagonalquadraten I_{++} und I_{--} für $\delta \geq 0$ ein Attraktor existiert. In Unterabschnitt 3.8.5 wurde festgestellt, daß es in den Außerdiagonalquadraten I_{-+} und I_{+-} für $\delta > -4\epsilon/3$ ebenfalls einen Attraktor gibt. Damit ergeben sich im Bereich $\delta \geq 0$ vier koexistierende Attraktoren, in jedem Quadrat I_α einer. Es gibt keine Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$.

3.9.2 2. Parameterbereich: $-4\epsilon/3 < \delta < 0$

Es gibt in den Quadraten I_{-+} und I_{+-} im Parameterbereich $-4\epsilon/3 < \delta < 0$ weiterhin jeweils einen Attraktor, den ich mit A_{-+} bzw. A_{+-} bezeichne. Dagegen lösen sich die Attraktoren in den Diagonalquadraten I_{++} und I_{--} auf, sobald $\delta < 0$ ist. Im Parameterbereich $-4\epsilon/3 < \delta < 0$ gibt es demnach zwei koexistierende Attraktoren, die in den Außerdiagonalquadraten liegen.

Für fast alle Startpunkte in I_{++} und I_{--} erreicht die Trajektorie schließlich einen der beiden Attraktoren A_{-+} oder A_{+-} . Damit liegen im vorliegenden Parameterbereich fast alle Punkte des Phasenraums im Bassin $B(A_{-+})$ oder im Bassin $B(A_{+-})$. Im Parameterbereich $-4\epsilon/3 < \delta < 0$ gibt es zwei koexistierende Attraktoren, die in den Außerdiagonalquadraten liegen.

3.9.3 3. Parameterbereich: $-4\epsilon/3 < \delta < 0$

Wie in den Unterabschnitten 3.8.6 und 3.8.7 gezeigt wurde, werden die Außerdiagonalattraktoren bei $\delta_c(\epsilon) \approx 4\epsilon/3$ instabil und verschwinden. Für $\delta < \delta_c(\epsilon)$ sind zu den Übergängen

$$I_{++} \rightarrow I_{+-}, I_{-+} \quad \text{und} \quad I_{--} \rightarrow I_{+-}, I_{-+},$$

die schon ab $\delta < 0$ möglich sind, auch die inversen Übergänge

$$I_{-+} \rightarrow I_{++}, I_{--} \quad \text{und} \quad I_{+-} \rightarrow I_{++}, I_{--}$$

erlaubt. Für fast alle Startpunkte passiert demnach eine unendlich lange Trajektorie alle vier Quadrate I_α unendlich oft. Die Trajektorie liegt dicht in einer Menge, die den gesamten Phasenraum bis auf eine Menge der Größe $O(\epsilon, \delta)$ enthält. Folglich gibt es nur noch einen Attraktor im Phasenraum, der alle vier Quadrate umfaßt und eine Fläche der Größe $4 - O(\epsilon, \delta)$ hat.

3.9.4 Bifurkationsdiagramm

Die Ergebnisse dieses Kapitels stelle ich graphisch in einem Bifurkationsdiagramm dar, das in Abbildung 3.19 zu sehen ist. Der Parameterraum ist die obere Halbebene, da ich nur $\epsilon > 0$ betrachte. Ich kann im Sinne der Störungstheorie nur Aussagen in einer kleinen Umgebung des Ursprungs $\epsilon = \delta = 0$ machen. Numerisch zeigt es sich, daß die

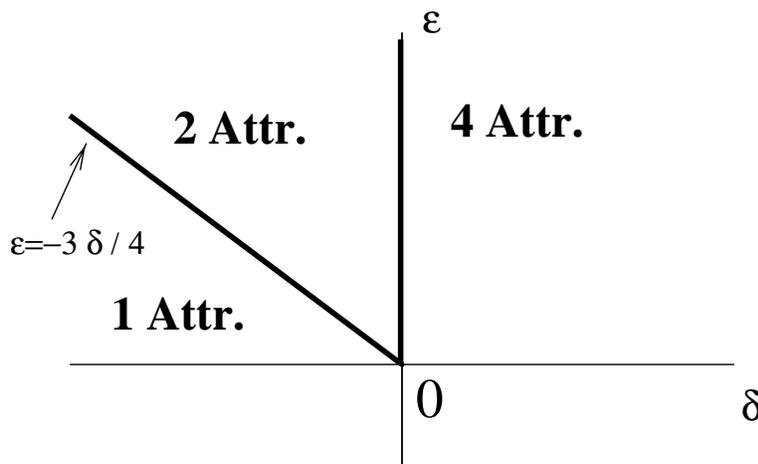


Abbildung 3.19: Bifurkationsdiagramm für $N = 2$. In die drei Parameterbereiche ist jeweils die Anzahl der Attraktoren eingetragen.

Störungstheorie bis zu ϵ , $|\delta|$ -Werten von ≈ 0.05 eine gültige Beschreibung des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ liefern kann.

Die drei Parameterbereiche mit verschiedenem ergodischen Verhalten werden durch zwei gerade Bifurkationslinien getrennt, die als Tangenten für $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ an die i. a. gekrümmten exakten Bifurkationslinien zu verstehen sind. Die Tangenten sind die kritischen δ -Werte, bei denen sich Attraktoren auflösen bzw. zusätzliche Übergänge möglich werden. Diese δ -Werte wurden in führender Ordnung Störungstheorie als Funktion von ϵ berechnet. Die Tangenten sind durch

$$\delta = 0 \quad \text{bzw.} \quad \epsilon = -\frac{3\delta}{4}$$

gegeben.

Kapitel 4

Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für $N = 3$

In diesem Kapitel untersuche ich das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf einem Gitter der Größe 3. Insbesondere studiere ich die möglichen Übergänge bei gegebenen Parametern. Es wird sich im nächsten Kapitel herausstellen, daß für $N > 3$ keine neuen Übergangstypen hinzukommen und die kritischen δ -Werte, die zu den Übergängen gehören, sich nicht ändern. Deswegen kann ich später für allgemeines N auf die Analysen dieses Kapitels zurückgreifen.

Nachdem ich in Abschnitt 4.1 kurz das CML für $N = 3$ vorgestellt habe, wende ich mich in Abschnitt 4.2 den Parallelepipeden P_γ zu, die sich als Bilder der Teilquader $S_\gamma \subset I_\alpha$ ergeben. Der Abschnitt 4.2 ist sehr ähnlich zum Abschnitt 3.3, der für $N = 2$ die Parallelogramme behandelte. Im Rest des Kapitels werden dann Übergänge untersucht, wobei ich mich auf die Übergänge führender Ordnung in Störungstheorie beschränke. Weiter folgt aus Symmetrien der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$, daß einige Übergänge zueinander äquivalent sind, so daß ich insgesamt nur drei Übergänge zu untersuchen brauche. In Abschnitt 4.3 wird der Übergang $I_{+++} \rightarrow I_{+-+}$ analysiert und der kritische δ -Wert bestimmt, ab dem dieser Übergang möglich ist. Es zeigt sich, daß dieser Übergang sehr ähnlich zum Übergang $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ für $N = 2$ ist, der in Unterabschnitt 3.7.2 behandelt wurde. In Abschnitt 4.5 geht es um den Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$ und seinen kritischen δ -Wert, während Abschnitt 4.6 dem Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$ gewidmet ist. Die Konsequenzen der Übergänge für das ergodische Verhalten des CMLs in den verschiedenen Parameterbereichen, die sich aus dem Erlaubt- bzw. Verbotensein eines bestimmten Übergangstyps ergeben, werden zusammenfassend in Abschnitt 4.7 diskutiert.

4.1 Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für $N = 3$

Die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ sieht für $N = 3$ folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\epsilon,\delta} &: [-1, +1]^3 \rightarrow [-1, +1]^3 \\ [\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x})]_1 &= (1 - \epsilon) f_\delta(x_1) + \frac{\epsilon}{2} (f_\delta(x_2) + f_\delta(x_3)) , \\ [\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x})]_2 &= (1 - \epsilon) f_\delta(x_2) + \frac{\epsilon}{2} (f_\delta(x_1) + f_\delta(x_3)) , \\ [\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x})]_3 &= (1 - \epsilon) f_\delta(x_3) + \frac{\epsilon}{2} (f_\delta(x_1) + f_\delta(x_2)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Kuben I_α , die Teilquader S_γ und die Parallelepipede P_γ wurden in Kapitel 2 und

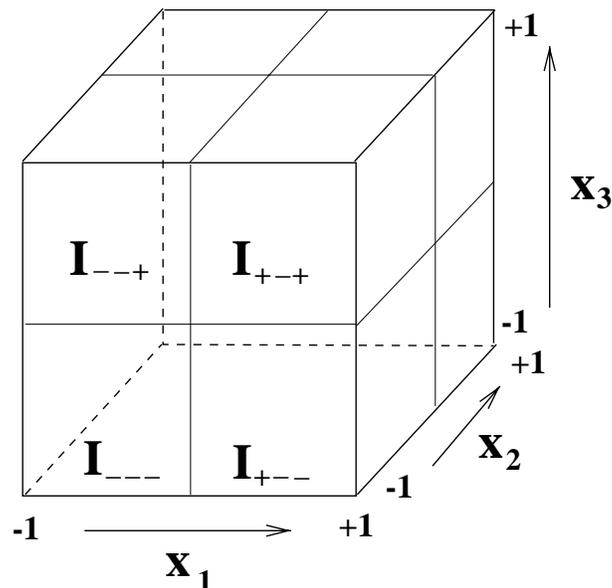


Abbildung 4.1: Die Unterteilung des Phasenraums $[-1, +1]^3$ in acht Kuben I_α . Hier sind die vier vorderen Kuben mit $\alpha_2 = -$ zu sehen.

3 für ein beliebiges N diskutiert. Der Phasenraum $[-1, +1]^3$ besteht aus 8 Kuben I_α (siehe Abbildung 4.1); ein Kubus I_α besteht aus 8 Teilquadranten S_γ .

4.2 Die Parallelepipede P_γ

Analog zum Abschnitt 3.3 im Fall $N = 2$ beginne ich mit einer genaueren Untersuchung der Parallelepipede P_γ .

4.2.1 Notation

In drei Dimensionen hat ein Parallelepiped P_γ sechs Seiten, die ich im folgenden benennen möchte. Falls $\epsilon, \delta \ll 1$ sind, steht auf jeweils zwei Seiten der Einheitsvektor \mathbf{e}_i , ($i = 1, 2, 3$) näherungsweise senkrecht. Diese beiden Seiten können nach der Größe der x_i -Koordinate unterschieden werden. Ich definiere dementsprechend

$K_{<}(\gamma, i)$: Die Seitenfläche von P_γ mit $|x_i|$ -Werten ≈ 0 , auf der der \mathbf{e}_i -Vektor näherungsweise senkrecht steht.

$K_{>}(\gamma, i)$: Die Seitenfläche von P_γ mit $|x_i|$ -Werten ≈ 1 , auf der der \mathbf{e}_i -Vektor näherungsweise senkrecht steht.

Die Seiten des Teilquadranten S_γ , deren Bilder die Seiten $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\gamma, i)$ sind, bezeichne ich wieder mit $\tilde{K}_{<}(\gamma, i)$ bzw. $\tilde{K}_{>}(\gamma, i)$. Analog zur Gleichung (3.7) für $N = 2$ gilt

$$\begin{aligned}
 K_{>}(\gamma, i) &= \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\tilde{K}_{>}(\gamma, i)) \\
 &= \{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \mid x_i = x_{>}(\gamma_i), x_j \in J(\gamma_j), x_k \in J(\gamma_k), (i \neq j \neq k) \}, \\
 K_{<}(\gamma, i) &= \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\tilde{K}_{<}(\gamma, i)) \\
 &= \{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \mid x_i = x_{<}(\gamma_i), x_j \in J(\gamma_j), x_k \in J(\gamma_k), (i \neq j \neq k) \} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

4.2.2 Eigenschaften der Parallelepipede P_γ

1. Wenn ich durch die Seitenflächen $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ jeweils eine Ebene lege, so sind diese Ebenen parallel zueinander für zwei beliebige $\gamma, \tilde{\gamma}$. Daraus folgt natürlich auch die Parallelität der Seitenflächen $K_{>}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$.

Begründung: Der Beweis geht ganz analog zum Beweis von Punkt 4 in Unterabschnitt 3.3.3. Auf S_γ und $S_{\tilde{\gamma}}$ ist die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x}) &= A(\gamma) \mathbf{x} + \mathbf{b}(\gamma), & \mathbf{x} \in S_\gamma, \\ \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x}) &= A(\tilde{\gamma}) \mathbf{x} + \mathbf{b}(\tilde{\gamma}), & \mathbf{x} \in S_{\tilde{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Ebenen durch die Seitenflächen $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ werden nach Gleichung (4.2) durch die Vektorenpaare

$$\{A(\gamma) \mathbf{e}_j, A(\gamma) \mathbf{e}_k\} \quad \text{bzw.} \quad \{A(\tilde{\gamma}) \mathbf{e}_j, A(\tilde{\gamma}) \mathbf{e}_k\}, \quad (i \neq j \neq k)$$

aufgespannt. Aus den Gleichungen (4.1) und (4.3) folgt

$$A(\gamma) = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} c(\gamma_1) (1 - \epsilon) & c(\gamma_2) \epsilon/2 & c(\gamma_3) \epsilon/2 \\ c(\gamma_1) \epsilon/2 & c(\gamma_2) (1 - \epsilon) & c(\gamma_3) \epsilon/2 \\ c(\gamma_1) \epsilon/2 & c(\gamma_2) \epsilon/2 & c(\gamma_3) (1 - \epsilon) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$c(\gamma_j) := \begin{cases} +1 & \text{für } \gamma_j \in \{+1, -1\} \\ -1 & \text{für } \gamma_j \in \{+2, -2\} \end{cases}. \quad (4.5)$$

$A(\gamma) \mathbf{e}_j$ ist die j -te Spalte der Matrix $A(\gamma)$, so daß

$$A(\gamma) \mathbf{e}_j = \frac{c(\tilde{\gamma}_j)}{c(\gamma_j)} A(\tilde{\gamma}) \mathbf{e}_j, \quad A(\gamma) \mathbf{e}_k = \frac{c(\tilde{\gamma}_k)}{c(\gamma_k)} A(\tilde{\gamma}) \mathbf{e}_k. \quad (4.6)$$

Die beiden aufspannenden Vektorenpaare sind bis auf Faktoren, die $+1$ oder -1 sein können, gleich, woraus die Parallelität der Ebenen folgt.

2. Alle Ebenen durch Seitenflächen $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$ werden durch zwei Vektoren aufgespannt. Dieses aufspannende Vektorenpaar kann unter Vernachlässigung von Beiträgen der Größe $O(\epsilon^2)$ als

$$\mathbf{v}_1(i) = \mathbf{e}_k + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}_2(i) = \mathbf{e}_j + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{e}_i \quad (i \neq j \neq k)$$

gewählt werden.¹

Der Winkel θ zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Vektor \mathbf{e}_i ist

$$\theta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} + O(\epsilon^2). \quad (4.7)$$

Begründung: nach dem letzten Punkt werden die Ebenen durch sämtliche $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$ durch das Vektorenpaar

$$\{A(\gamma) \mathbf{e}_j, A(\gamma) \mathbf{e}_k\}, \quad (i \neq j \neq k)$$

aufgespannt. Dies sind zwei Spalten der Matrix $A(\gamma)$ in Gleichung (4.5). Die beiden angegebenen Vektoren $\mathbf{v}_1(i)$ und $\mathbf{v}_2(i)$ sind Linearkombinationen dieser beiden Spalten, wenn ich Terme der Größe $O(\epsilon^2)$ vernachlässige.

¹Es gilt $\|\mathbf{v}_1(i)\| = \|\mathbf{v}_2(i)\| = 1 + O(\epsilon)$

Ebenso läßt sich der Winkel θ zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Vektor \mathbf{e}_i direkt ausrechnen, indem ich das Vektorprodukt der aufspannenden Vektoren bilde und das Skalarprodukt mit \mathbf{e}_i berechne.

3. Betrachte die Seitenflächen $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ von Parallelepipeden P_γ und $P_{\tilde{\gamma}}$, die deformierte Kuben I_α sind, d. h. $S_\gamma, S_{\tilde{\gamma}} \subset I_\alpha$. Ich lege durch die beiden Seitenflächen jeweils eine Ebene.

- (a) Falls $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i$, so sind die beiden Ebenen identisch.
 (b) Falls $\gamma_i \neq \tilde{\gamma}_i$, so sind die Ebenen um den Betrag $(1 - \epsilon)|\delta| + O(\epsilon^2 \cdot \delta)$ gegeneinander parallelverschoben.

O. B. d. A. sei $|\gamma_i| = 1$ und $|\tilde{\gamma}_i| = 2$: dann ist für $\delta < 0$ die Seite $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ gegenüber $K_{<}(\gamma, i)$ hin zum angrenzenden Kubus I_β ($\beta_i \neq \alpha_i$) verschoben, für $\delta > 0$ hin zum Innern von I_α .

Begründung: Auch hier sind die Argumentationen ganz analog zu den etwas ausführlicheren im Fall $N = 2$ (siehe Punkt 3(a) und 3(b) in Unterabschnitt 3.3.3).

- (a): Die beiden Ebenen haben den Punkt

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(x_{<}(\gamma_i) \cdot \mathbf{e}_i + x_{>}(\gamma_j) \cdot \mathbf{e}_j + x_{>}(\gamma_k) \cdot \mathbf{e}_k) \quad (i \neq j \neq k)$$

gemeinsam. Da die Ebenen nach Punkt 1 parallel sind, sind sie identisch.

- (b): Ich wähle $\mathbf{x} \in \tilde{K}_{<}(\gamma, i)$ und $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{K}_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ so, daß für die Bildpunkte

$$\mathbf{R} := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\tilde{\mathbf{x}})$$

gilt: die x_j - und die x_k -Koordinaten sind gleich. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} [\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_j = 0 &= (1 - \epsilon) [f_\delta(x_j) - f_\delta(\tilde{x}_j)] \\ &+ \frac{\epsilon}{2} [f_\delta(x_{<}(\gamma_i)) - f_\delta(x_{<}(\tilde{\gamma}_i)) + f_\delta(x_k) - f_\delta(\tilde{x}_k)], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_k = 0 &= (1 - \epsilon) [f_\delta(x_k) - f_\delta(\tilde{x}_k)] \\ &+ \frac{\epsilon}{2} [f_\delta(x_{<}(\gamma_i)) - f_\delta(x_{<}(\tilde{\gamma}_i)) + f_\delta(x_j) - f_\delta(\tilde{x}_j)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wenn man diese beiden Gleichungen verwendet, ergibt sich für die Differenz der Bildpunkte in \mathbf{e}_i -Richtung:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_i &= (1 - \epsilon) [f_\delta(x_{<}(\gamma_i)) - f_\delta(x_{<}(\tilde{\gamma}_i))] \\ &+ \frac{\epsilon}{2} [f_\delta(x_j) - f_\delta(\tilde{x}_j) + f_\delta(x_k) - f_\delta(\tilde{x}_k)] \\ &= (1 - \epsilon + O(\epsilon^2)) [f_\delta(x_{<}(\gamma_i)) - f_\delta(x_{<}(\tilde{\gamma}_i))] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Es gilt

$$|f_\delta(x_{<}(\gamma_i)) - f_\delta(x_{<}(\tilde{\gamma}_i))| = |\delta|.$$

Nach Punkt 2 bildet der Normalenvektor auf den Seitenflächen $K_{<}(\gamma, i)$ und $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ mit dem Vektor \mathbf{e}_i einen Winkel der Größe $\approx \epsilon/\sqrt{2}$. Deswegen gilt für den Betrag r der Verschiebung der beiden Ebenen gegeneinander

$$r = \cos\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right) |[\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_i| = (1 - \epsilon + O(\epsilon^2)) \cdot |\delta|. \quad (4.11)$$

Die Richtung der Verschiebung der Seite $K_{<}(\tilde{\gamma}, i)$ gegenüber der Seite $K_{<}(\gamma, i)$ ergibt sich aus dem Vorzeichen der Differenz $[\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}]_i$ in Gleichung (4.10). Man erhält die oben angegebene Regel für positives bzw. negatives δ .

4. Betrachte die Seitenflächen $K_{>}(\gamma, i)$ und $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$ von Parallelepipeden P_γ und $P_{\tilde{\gamma}}$ mit $S_\gamma, S_{\tilde{\gamma}} \subset I_\alpha$. Wenn ich durch die beiden Seitenflächen jeweils eine Ebene lege, so sind diese Ebenen identisch.

Begründung: Die beiden Ebenen haben den gemeinsamen Punkt

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta} \left(\sum_{n=1}^3 x_{>}(\gamma_n) \cdot \mathbf{e}_n \right) .$$

Zusammen mit der Parallelität der beiden Ebenen nach Punkt 1 ergibt sich daraus die Identität der Ebenen.

5. Aus den Punkten 3 und 4 ergibt sich die folgende Konstruktionsmöglichkeit von Parallelepipeden P_γ aus einem speziellen $P_{\tilde{\gamma}}$, wobei $S_\gamma, S_{\tilde{\gamma}} \subset I_\alpha$: in jedem I_α gibt es genau einen Teilquader $S_{\tilde{\gamma}}$ mit $|\tilde{\gamma}_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$, dessen Bildmenge $P_{\tilde{\gamma}}$ unabhängig von δ ist. Ich konstruiere nun folgende sechs Ebenen:

- Ich lege jeweils eine Ebene durch die drei Seiten $K_{>}(\gamma, i)$, $i = 1, 2, 3$ (siehe Punkt 4).
- Falls $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i$, lege ich eine Ebene durch die Seite $K_{<}(\gamma, i)$ (siehe Punkt 3(a)).
Falls $\gamma_i \neq \tilde{\gamma}_i$, lege ich eine Ebene im Abstand $(1 - \epsilon)|\delta|$ parallel zur Seite $K_{<}(\gamma, i)$, wobei die Verschiebungsrichtung durch das Vorzeichen von δ bestimmt wird (siehe Punkt 3(b)).

Das Parallelepiped P_γ ist die Menge von Punkten, die zwischen diesen sechs Ebenen liegen. Die acht Eckpunkte von P_γ ergeben sich als Schnittpunkte von drei Ebenen.

In jedem I_α gibt es genau einen Teilquader $S_{\gamma'}$ mit $|\gamma'_i| = 2$, $i = 1, 2, 3$. Aus der beschriebenen Konstruktion folgt für jedes $P_\gamma \subset I_\alpha$:

$$\begin{aligned} \delta \geq 0 & : P_\gamma \subset P_{\tilde{\gamma}} \\ \delta < 0 & : P_\gamma \subset P_{\gamma'} \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.3 Die Dynamik in I_{+++} und I_{---}

Ich untersuche zuerst die Dynamik in den Diagonalkuben I_{+++} und I_{---} . Da die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ antisymmetrisch ist, korrespondiert die Dynamik in I_{+++} zu der in I_{---} , so daß ich mich auf den Kubus I_{+++} beschränken kann.

4.3.1 Attraktor in I_{+++} für $\delta \geq 0$

Ich betrachte das δ -unabhängige Parallelepiped

$$P_{(1,1,1)} = \mathbf{T}_{\epsilon, \delta} ([0, a] \times [0, a] \times [0, a]) .$$

Die Seitenfläche von $P_{(1,1,1)}$, die zum Würfel I_{-++} benachbart ist, ergibt sich als

$$K_{<}((1, 1, 1), 1) = \{ \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S_{(1,1,1)} \text{ und } x_1 = 0 \} .$$

Diese Seite hat die folgenden vier Eckpunkte:

$$(0, 0, 0), \quad \left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}, 1 - \epsilon\right), \quad \left(\epsilon, 1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\epsilon}{2}, 1 - \epsilon, \frac{\epsilon}{2}\right) \quad (4.13)$$

Die Seite

$$K_{>}((1, 1, 1), 1) = \{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S_{(1,1,1)} \quad \text{und} \quad x_1 = a \}$$

liegt der Seite $K_{<}((1, 1, 1), 1)$ gegenüber und hat die Eckpunkte

$$\left(1 - \epsilon, \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right), \quad \left(1 - \frac{\epsilon}{2}, \epsilon, 1 - \frac{\epsilon}{2}\right), \quad (1, 1, 1) \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{2}, \epsilon\right). \quad (4.14)$$

Man sieht, daß alle acht Eckpunkte des Parallelepipeds $P_{(1,1,1)}$ innerhalb von I_{+++} liegen, woraus

$$P_{(1,1,1)} \subset I_{+++} \quad (4.15)$$

folgt. Für die anderen sieben Parallelepipede P_γ mit $S_\gamma \subset I_{+++}$ gilt nach Punkt 5 des Unterabschnitts 4.2.2 für $\delta \geq 0$:

$$P_\gamma \subset P_{(1,1,1)} \quad (4.16)$$

Aus den Gleichungen (4.15) und (4.16) folgt

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(I_{+++}) = \bigcup_{S_\gamma \subset I_{+++}} P_\gamma \subset I_{+++}, \quad \delta \geq 0. \quad (4.17)$$

Diese Gleichung ist analog zur Gleichung (3.37) für $N = 2$. Ich kann die folgende invariante Menge definieren:

$$\tilde{M} := \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^i(I_{+++}) \quad (4.18)$$

Diese Menge ist der **bzgl. I_{+++} konstruierte maximale Attraktor**.

Analog zur Menge $R \subset I_{++}$ in Fall $N = 2$, die in Abbildung (3.6) dargestellt ist, gibt es auch für $N = 3$ eine Teilmenge von $R \subset I_{+++}$, die von der Größenordnung 1 ist und für $\delta \geq 0$ die Relation

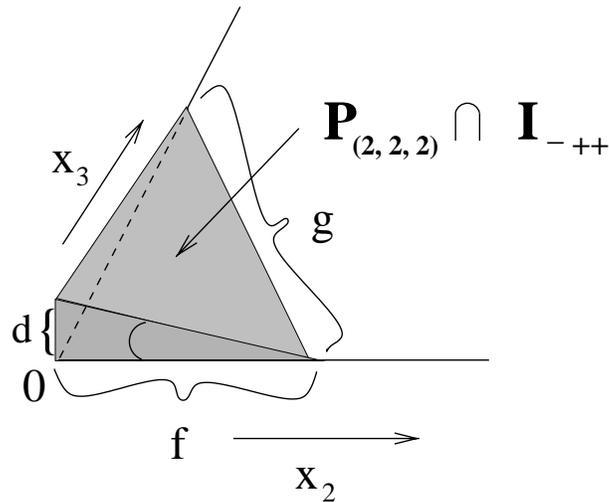
$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(R) \supset R \quad . \quad (4.19)$$

erfüllt. Mit der gleichen Argumentation wie auf Seite 28 für $N = 2$ folgt daraus, daß die Menge \tilde{M} den Würfel I_{+++} fast ausfüllt – bis eine Menge vom Volumen $O(\epsilon, \delta)$. Das gleiche gilt wohl auch für den eigentlichen Attraktor, der eine Teilmenge von \tilde{M} ist.

Es gibt demnach auch im Fall $N = 3$ für $\delta \geq 0$ Attraktoren in den Kuben I_{+++} und I_{---} .

4.3.2 Dynamik in I_{+++} für $\delta < 0$

Wegen der Analogie zum Übergang $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ ist zu vermuten, daß der Übergang $I_{+++} \rightarrow I_{-++}$ möglich wird, sobald $\delta < 0$. Dies soll in diesem Unterabschnitt gezeigt werden. Wegen der Translationsinvarianz von $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ ist der Übergang $I_{+++} \rightarrow I_{-++}$ äquivalent zu den Übergängen $I_{+++} \rightarrow I_{+-+}$ und $I_{+++} \rightarrow I_{++-}$.

Abbildung 4.2: Die Schnittmenge $P_{(2,2,2)} \cap I_{-++}$ für $\delta < 0$.

Schnittmengen der Parallelepipede

Nach Gleichung (4.13) ist $(0, 0, 0)$ ein Eckpunkt der Seite $K_{<}((1, 1, 1), 1)$. Die Seitenflächen $K_{<}(\gamma, 1)$ der Parallelepipede P_γ mit $\gamma_1 = 2$ sind gemäß Punkt 3(b) von Unterabschnitt 4.2.2 für $\delta < 0$ gegenüber der Seite $K_{<}((1, 1, 1), 1)$ um den Betrag $\approx |\delta|$ hin zum Nachbarkubus I_{-++} verschoben. Folglich besitzen die vier Parallelepipede P_γ mit $\gamma_1 = 2$ eine nichtleere Schnittmenge mit I_{-++} . Diese Schnittmengen $P_\gamma \cap I_{-++}$ mit $\gamma_1 = 2$ unterscheiden sich untereinander nur um Mengen, die ein vernachlässigbares Volumen der Größe $O(\delta^3/\epsilon)$ haben. Deshalb können sie alle in führender Ordnung Störungstheorie durch die tetraederförmige Menge $P_{(2,2,2)} \cap I_{-++}$ approximiert werden, die in Abbildung 4.2 dargestellt ist. Diese Menge hat vier dreieckige Seitenflächen und vier Eckpunkte. Dagegen haben die Parallelepipede P_γ mit $\gamma_1 = 1$ auch für $\delta < 0$ keine Schnittmenge mit I_{-++} .

Für $\delta < 0$ folgt aus Gleichung (4.12) von Unterabschnitt 4.2.2

$$P_\gamma \subset P_{(2,2,2)}, \quad \forall \gamma \quad \text{mit} \quad S_\gamma \subset I_{+++}.$$

Folglich ist die Überlappmenge zwischen I_{+++} und I_{-++}

$$OV_{+++,-++} = \bigcup_{S_\gamma \subset I_{+++}} P_\gamma \cap I_{-++} = P_{(2,2,2)} \cap I_{-++}. \quad (4.20)$$

Ich betrachte im folgenden nur den Parameterbereich $-\epsilon/2 < \delta < 0$, da ich zeigen werde, daß der Attraktor in I_{+++} sich bei im Betrag beliebig kleinem $\delta < 0$ auflöst, was sich bei kleineren δ -Werten nicht mehr ändert.

Für die Volumenberechnung der Menge $OV_{+++,-++}$ brauche ich ein paar geometrische Eigenschaften der Schnittmenge $P_{(2,2,2)} \cap I_{-++}$ (siehe Abbildung 4.2): Für den Winkel β folgt aus Punkt 2 des Unterabschnitts 4.2.2

$$\beta = \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2).$$

Die Länge der kleinen Kante d ist

$$\text{Länge}(d) = -\delta + O(\epsilon \delta).$$

Die größeren Kanten f und g haben die Längen

$$\text{Länge}(f) = \frac{-2\delta}{\epsilon} + O(\delta), \quad \text{Länge}(g) = \frac{-2\sqrt{2}\delta}{\epsilon} + O(\delta).$$

Daraus ergibt sich das Volumen der Überlappmenge zu

$$\text{Vol}(OV_{+++,-++}) = -\frac{2}{3} \frac{\delta^3}{\epsilon^2} + O\left(\frac{\delta^3}{\epsilon}\right), \quad -\epsilon/2 < \delta < 0. \quad (4.21)$$

Das Parallelogramm $P_{(2,2,2)}$ und auch andere Parallelogramme P_γ haben für $\delta < 0$ auch Schnittmengen mit Kuben I_β , deren Index β mehr als ein "–"-Symbol enthält. Diese Schnittmengen haben höchstens ein Volumen der Größenordnung δ^3/ϵ . Sie sind deswegen gegenüber den Schnittmengen mit Kuben, deren Index genau ein "–" hat, vernachlässigbar; denn diese Mengen haben nach Gleichung (4.21) ein Volumen, das um einen Faktor der Größenordnung $1/\epsilon$ größer ist. In führender Ordnung Störungstheorie kann ich mich auf die Analyse von Übergängen $I_{+++} \rightarrow I_\beta$ beschränken, für die β genau ein "–" besitzt.

Urbilder der Überlappmenge $OV_{+++,-++}$

Wie im Fall $N = 2$ berechne ich nun die Urbildmengen der verschiedenen Generationen der Überlappmenge $OV_{+++,-++}$, um das erste Übergangskriterium zu überprüfen (siehe Unterabschnitt 3.4.3).

Die Urbildmenge der ersten Generation $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-++})$ besteht aus vier Komponenten, die in den Teilquadranten S_γ mit $\gamma_1 = 2$ liegen. Die Lage dieser Urbildmengenkomponenten bestimme ich wieder, indem ich die Urbilder der Eckpunkte \mathbf{x} von $OV_{+++,-++}$ berechne, d. h. die Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in S_\gamma \quad (4.22)$$

nach $\tilde{\mathbf{x}}$ auflöse. In führender Ordnung Störungstheorie kann ich in der x_2 - und der x_3 -Koordinate Beiträge der Größe $O(\delta)$, in der x_1 -Koordinate nur Beiträge der Größe $O(\epsilon\delta)$ vernachlässigen. Demnach kann ich anstelle von Gleichung (4.22) die folgenden vereinfachten Gleichungen lösen:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_\delta(\tilde{x}_1) + \frac{\epsilon}{2} (f_0(\tilde{x}_2) + f_0(\tilde{x}_3)), \\ x_2 &= f_0(\tilde{x}_2), \quad x_3 = f_0(\tilde{x}_3) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Hierbei ist f_0 die undeformierte antisymmetrische Zeltabbildung.

Die Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-++}) \cap S_\gamma$ sind wie die Überlappmenge $OV_{+++,-++}$ tetraederförmige Mengen mit vier Eckpunkten. Ihr Volumen ist ca. $1/8$ des Volumens von $OV_{+++,-++}$. Als Beispiel – und weil diese Komponente eine besondere Rolle spielen wird – gebe ich die (approximativen) Eckpunkte der Urbildmengenkomponente $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-++}) \cap S_{(2,2,2)}$ an:

$$(1, 1, 1), \quad \left(1 + \frac{\delta}{2}, 1, 1\right), \quad \left(1, 1 + \frac{\delta}{\epsilon}, 1\right) \quad \text{und} \quad \left(1, 1, 1 + \frac{\delta}{\epsilon}\right) \quad (4.24)$$

Wie in Abbildung 4.3 zu sehen ist, liegen die anderen drei Komponenten in der Nähe der anderen drei Ecken der $(x_1 = 1)$ -Seite von I_{+++} . Alle vier Komponenten schließen direkt an diese Seite an.

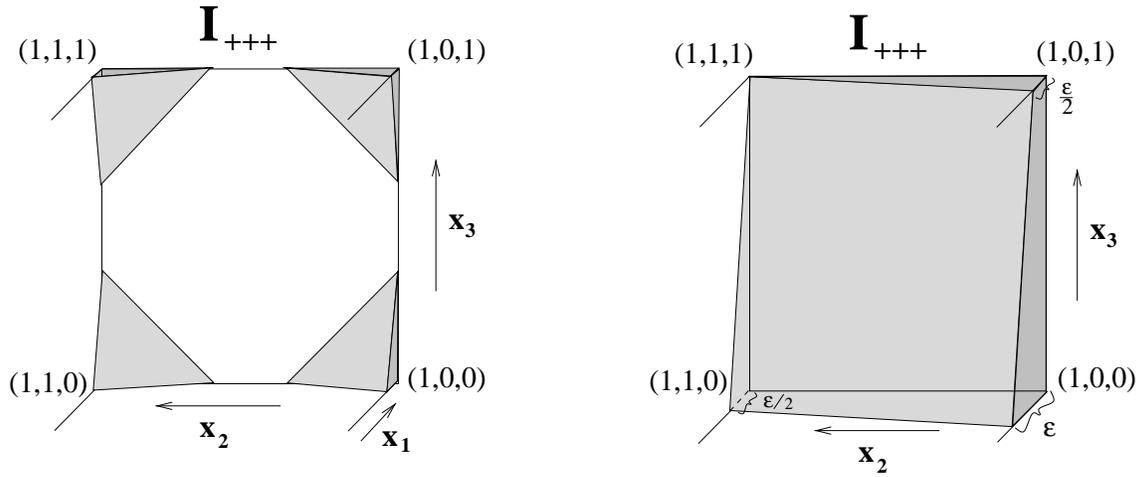


Abbildung 4.3: Links: Die Lage der vier Urbildmengenkomponenten von $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++})$ in I_{+++} für $\delta < 0$. Die Komponenten grenzen an die $(x_1 = 1)$ -Seite von I_{+++} . Rechts: Die Teilmenge des Fehlvolumens FV_{+++} aus Gleichung (4.25). Sie grenzt ebenfalls an die $(x_1 = 1)$ -Seite von I_{+++} .

Für die Berechnung der zweiten Urbildgeneration $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(OV_{+++,-+++})$ ist die Kenntnis des Fehlvolumens FV_{+++} wichtig, da geklärt werden muß, welche Teile der ersten Urbildgeneration sich in selbigem befinden. Da für alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++})$ $x_1 \approx 1$ gilt, brauche ich nur den Teil des Fehlvolumens in der Nähe der $(x_1 = 1)$ -Seitenfläche von I_{+++} zu bestimmen. Nach Punkt 4 von Unterabschnitt 4.2.2 sind die durch die Seiten $K_{>}(\gamma, 1)$ gelegten Ebenen alle identisch. Die Punkte \mathbf{y} aus dieser Ebene kann ich durch $(L(y_2, y_3), y_2, y_3)$ bezeichnen, wobei die (lineare) Funktion L die y_1 -Komponente bestimmt. Alle Punkte aus I_{+++} , die jenseits dieser Ebene liegen, gehören zum Fehlvolumen:

$$\{\mathbf{x} \in I_{+++} \mid x_1 \geq L(x_2, x_3)\} \subset FV_{+++} \quad (4.25)$$

Diese Teilmenge des Fehlvolumens ist ein degenerierter Quaderstumpf mit sieben Eckpunkten, der auf der rechten Seite von Abbildung 4.3 schematisch dargestellt ist.

Im δ -Bereich $-\epsilon/2 < \delta < 0$ sind die drei Urbildkomponenten der ersten Urbildgeneration, die in den Teilquadern $S_{(2,1,1)}$, $S_{(2,1,2)}$ und $S_{(2,2,1)}$ liegen, Teilmengen des Fehlvolumens (vgl. die Abbildung 4.3). Dagegen befindet sich die Urbildmengenkomponente $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++}) \cap S_{(2,2,2)}$ teilweise außerhalb des Fehlvolumens; denn der in Gleichung (4.24) angegebene Eckpunkt $(1 + \delta/2, 1, 1)$ dieser Komponente befindet sich nicht im Fehlvolumen-Quaderstumpf aus Gleichung (4.25) (vgl. Abbildung 4.3). Es gilt demnach

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++}) \setminus FV_{+++} = \left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++}) \cap S_{(2,2,2)} \right) \setminus FV_{+++} \neq \emptyset.$$

Tatsächlich ist das Volumen der Punkte der ersten Urbildgeneration, die außerhalb des Fehlvolumens liegen:

$$\text{Vol} \left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++}) \setminus FV_{+++} \right) = -\frac{\delta^3}{48\epsilon^2} + O\left(\frac{\delta^3}{\epsilon}\right) \quad (4.26)$$

Die Punkte der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++}) \setminus FV_{+++}$ haben acht Urbilder in I_{+++} ,

aus denen die zweite Urbildgeneration der Überlappmenge $OV_{+++,-+++}$ besteht:

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(OV_{+++,-+++}) = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1} \left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++}) \setminus FV_{+++} \right) \quad (4.27)$$

Die zweite Urbildgeneration hat acht Urbildmengenkomponenten. In dem betrachteten δ -Bereich $-\epsilon/2 < \delta < 0$ befinden sich die Punkte \mathbf{x} der zweiten Urbildgeneration in der Mitte des Würfels I_{+++} ; denn $x_1 \approx a$ und $x_2, x_3 \in [a + \delta/4\epsilon, a - \delta/4\epsilon]$. Demnach schneidet die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(OV_{+++,-+++})$ für $\epsilon, \delta \ll 1$ das Fehlvolumen nicht, so daß jede der acht Urbildmengenkomponenten wieder acht Urbildmengenkomponenten hat, die zur dritten Urbildgeneration $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-3}(OV_{+++,-+++})$ gehören.

Die Situation ist ganz analog zu der für $N = 2$ (siehe Seite 33 und Abbildung 3.9): falls $\epsilon, \delta \ll 1$, $|\delta|/\epsilon \ll 1$ und k nicht zu groß, besteht die k -te Urbildgeneration ($k \geq 2$) aus 8^{k-1} Komponenten, die in der Nähe der Vertizes eines dreidimensionalen kubischen Gitters mit Gitterkonstante $1/2^{k-2}$ lokalisiert sind.

Es ist plausibel anzunehmen, daß der „Sprung in die Mitte“ in der zweiten Urbildgeneration dazu führt, daß fast alle Punkte aus I_{+++} sich in irgendeiner Urbildgeneration einer Überlappmenge befinden. Folglich gelangen fast alle Punkte aus I_{++} in endlich vielen Iterationsschritten in eine Überlappmenge. Es gilt somit (vgl. Gleichung (3.50) für das zweidimensionale CML):

$$\text{Vol} \left(\bigcup_{\beta \neq +++} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{+++,\beta}) \right) = \sum_{\beta \neq +++} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol} \left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{+++,\beta}) \right) = 1 \quad (4.28)$$

Mit einigem Aufwand könnte man wohl eine störungstheoretische Rechnung zu diesem Volumen durchführen, die die Effekte der Jakobideterminante und der Absorption von Urbildmengenkomponenten durch das Fehlvolumen quantitativ erfaßt. Diese Rechnung wäre ganz ähnlich zu der in Anhang E für $N = 2$.

Dagegen ist der Beweis der Aussage

„Für $\delta < 0$ gibt es in jeder offenen Umgebung $U \subset I_{+++}$ eine offene Teilmenge V , so daß alle $\mathbf{x} \in V$ in endlich vielen Iterationen I_{+++} verlassen.“

leicht, da sich der Beweis der analogen Aussage für $N = 2$, der im Anhang D geführt wird, ohne Mühe auf $N = 3$ übertragen läßt.

Auflösung des Attraktors bei $\delta = 0$

Bei der Untersuchung des Übergangs $I_{+++} \rightarrow I_{-++}$ muß auch das zweite Übergangskriterium überprüft werden (siehe Unterabschnitt 3.4.3). Dabei geht es um die Frage, was bei weiterer Iteration mit den Punkten aus $OV_{+++,-+++}$ passiert. Zuerst berechne ich die *effektive* Überlappmenge $EO_{+++,-+++}$. Es gilt

$$EO_{+++,-+++} = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta} \left[\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{+++,-+++}) \setminus FV_{+++} \right].$$

In der numerischen Simulation des CML für $\delta < 0$ findet man, daß die Iterierten von vielen Punkten aus $EO_{+++,-+++}$ ins Innere von I_{-++} weiterwandern.² Demnach gibt es wohl eine Übergangsmenge $W_{+++,-+++} \subset EO_{+++,-+++}$ mit endlichem Maß, so daß auch das zweite Übergangskriterium für den Übergang $I_{+++} \rightarrow I_{-++}$ erfüllt ist. Damit ist gezeigt, daß dieser Übergang für $\delta < 0$ stattfindet.

²Man könnte an dieser Stelle auch ein analytisches Argument versuchen, wie dies für $N = 2$ geschah. Doch ist eine solche Argumentation für $N = 3$ etwas umständlich, da die Menge $EO_{+++,-+++}$ für δ knapp unterhalb von 0 sehr klein ist.

Ich werde in Abschnitt 4.4 zeigen, daß für $-2\epsilon/3 \leq \delta < 0$ in jedem der drei Kuben I_{-++} , I_{+--} und I_{++-} , die eine gemeinsame Seitenfläche mit dem Kubus I_{+++} haben, ein Attraktor existiert. Deswegen erreichen in diesem Parameterbereich die allermeisten Trajektorien mit Startpunkt in I_{+++} einen dieser drei Attraktoren.³ Für $-2\epsilon/3 \leq \delta < 0$ existiert demnach kein Attraktor in I_{+++} . $\delta = 0$ ist der kritische Wert, bei dem sich der Attraktor in I_{+++} auflöst und die ergodische Dynamik sich in diesem Kubus qualitativ verändert.

4.4 Die Dynamik im Würfel I_{-++}

Ich untersuche als nächstes die Dynamik der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ im Kubus I_{-++} . Der Indexvektor $\alpha = -++$ dieses Würfels enthält zwei „+“- und ein „-“-Symbol. Jeden Indexvektor, der mindestens ein „+“- und mindestens ein „-“-Symbol hat, nenne ich „gemischt“; im Fall $N = 3$ gibt es sechs solche Indexvektoren α . Aufgrund der Translationsinvarianz und der Antisymmetrie der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ (siehe Unterabschnitt 3.6) ist die Dynamik in den sechs Kuben mit gemischtem Index zueinander äquivalent; denn ich kann jeden gemischten Index durch zyklische Vertauschung und Inversion der Vorzeichen in einen anderen gemischten Index überführen. Demnach ist die Dynamik in I_{-++} exemplarisch für die Dynamik in allen „gemischten Kuben“.

Als Hauptziel dieses Abschnitts möchte ich die jeweiligen Parameterbereiche bestimmen, bei denen Übergänge $I_{-++} \rightarrow I_\beta$ möglich sind. In führender Ordnung Störungstheorie kann ich mich dabei auf solche I_β beschränken, die mit I_{-++} eine gemeinsame Seitenfläche haben. Denn diese Übergänge sind in der Übergangsrate dominant, da die Überlappmengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(I_{-++}) \cap I_\beta$ für solche I_β mindestens um einen Faktor der Größenordnung $1/\epsilon$ oder $1/\delta$ größer sind als Überlappmengen mit Kuben ohne gemeinsame Seitenfläche. Der Kubus I_{-++} hat eine gemeinsame Seitenfläche mit den Kuben I_{--+} , I_{+-} und I_{+++} .

Die Übergänge $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$ und $I_{-++} \rightarrow I_{+-}$ sind zueinander äquivalent, d. h. sie haben den gleichen kritischen δ -Wert und sind für Trajektorien mit zufällig gewähltem Startpunkt aus I_{-++} gleich wahrscheinlich. Denn die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ vertauscht für $N = 3$ mit der vollen Permutationsgruppe von drei Elementen \mathbf{P}_3 . Anhand der in Gleichung (4.1) gegebenen Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für $N = 3$ kann man leicht nachrechnen, daß

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta} \circ \pi(\mathbf{x}) = \pi \circ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}), \quad \forall \pi \in \mathbf{P}_3.$$

Die Permutation $\pi_{(2,3)} \in \mathbf{P}_3$ wirkt auf den dreidimensionalen Vektor \mathbf{x} wie folgt:

$$\pi_{(2,3)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$$

Es gilt

$$\mathbf{x} \in I_{--+} \iff \pi_{(2,3)}(\mathbf{x}) \in I_{+-}.$$

Der Kubus I_{--+} wird durch die Permutation $\pi_{(2,3)}$ in den Kubus I_{+-} überführt und umgekehrt. Dagegen ist der Ausgangskubus der beiden Übergänge, der Kubus I_{-++} , invariant unter der Permutation $\pi_{(2,3)}$. Folglich wird jede Trajektorie, die von I_{-++}

³Ein sehr kleiner Anteil von Punkten aus I_{+++} liegt im Anziehungsbassin der Attraktoren in I_α mit $\alpha \in \{- - +, - + -, + - -\}$.

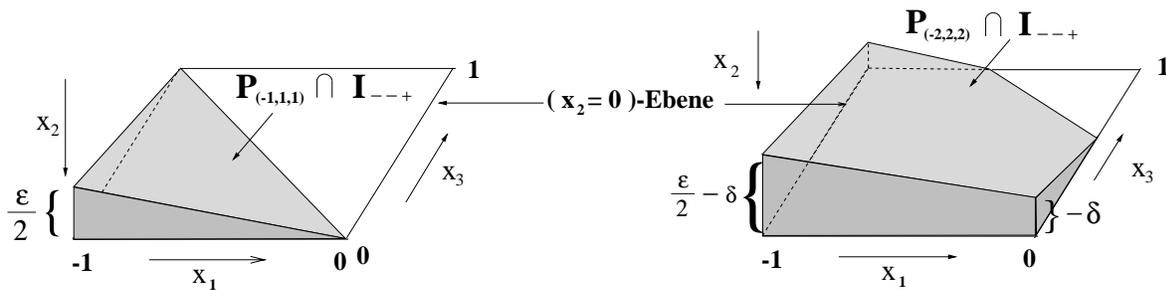


Abbildung 4.4: Links: Die Schnittmenge $P_{(-1,1,1)} \cap I_{--+}$. Die hier dargestellte Menge ist gegenüber der exakten Menge etwas vereinfacht, wobei die Differenzmenge die vernachlässigbare Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$ hat. Rechts: die vereinfachte Schnittmenge $P_{(-2,2,2)} \cap I_{--+}$ für $-\epsilon/2 < \delta < 0$.

nach I_{--+} übergeht, durch die Symmetrietransformation $\pi_{(2,3)}$ in eine Trajektorie abgebildet, die von I_{--+} nach I_{-+-} übergeht – und umgekehrt. Damit ist die Äquivalenz der beiden Übergänge gezeigt.

Deswegen brauche ich in den beiden nächsten Abschnitten nur die Übergänge $I_{--+} \rightarrow I_{-+-}$ und $I_{-+-} \rightarrow I_{-++}$ zu untersuchen, die nicht zueinander äquivalent sind.

4.5 Der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$

4.5.1 Parallelepipede und ihre Schnittmengen mit dem Kubus I_{--+}

Ich beginne mit der Berechnung des δ -unabhängigen Parallelepipeds

$$P_{(-1,1,1)} = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(S_{(-1,1,1)}) .$$

Für den betrachteten Übergang, bei dem sich die zweite Komponente des Indexvektors ändert, fasse ich die 8 Eckpunkte des Parallelepipeds zu den $2 \cdot 4$ Eckpunkten der Seitenflächen $K_{<}((-1, 1, 1), 2)$ und $K_{>}((-1, 1, 1), 2)$ zusammen:

$$\begin{aligned} &K_{<}((-1, 1, 1), 2) : \\ &(0, 0, 0), \left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}, 1 - \epsilon\right), \left(-1 + \frac{3\epsilon}{2}, 0, 1 - \frac{3\epsilon}{2}\right) \text{ und } \left(-1 + \epsilon, \frac{-\epsilon}{2}, \frac{-\epsilon}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &K_{>}((-1, 1, 1), 2) : \\ &\left(\frac{\epsilon}{2}, 1 - \epsilon, \frac{\epsilon}{2}\right), \left(\epsilon, 1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{2}\right), (-1 + 2\epsilon, 1 - \epsilon, 1 - \epsilon) \text{ und} \\ &\left(-1 + \frac{3\epsilon}{2}, 1 - \frac{3\epsilon}{2}, 0\right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aus den vier Eckpunkten der Seite $K_{<}((-1, 1, 1), 2)$ folgt eine nichtleere Schnittmenge

$$P_{(-1,1,1)} \cap I_{--+} ,$$

die in Abbildung 4.4 (links) dargestellt ist. Das Volumen der Schnittmenge ist

$$\text{Vol}(P_{(-1,1,1)} \cap I_{--+}) = \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2) .$$

Da die Schnittmengen $P_\gamma \cap I_{--+}$ jeweils durch die Seite $K_{<}(\gamma, 2)$ begrenzt werden, folgt aus Punkt 3(a) von Unterabschnitt 4.2.2, daß die drei anderen Parallelepipede

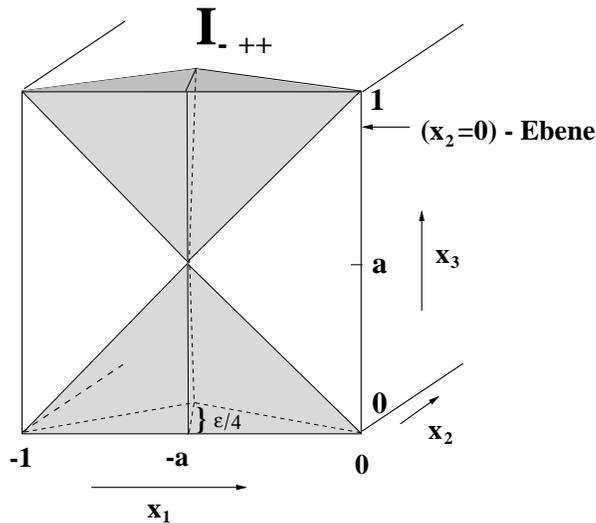


Abbildung 4.5: Die vier tetraederförmigen Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_\gamma$ mit $\gamma_2 = 1$.

$P_\gamma \subset I_{-++}$ mit $\gamma_2 = 1$ näherungsweise die gleichen Schnittmengen mit I_{--+} haben wie $P_{(-1,1,1)}$; eventuelle Differenzmengen sind von der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$. Die vier Schnittmengen $P_\gamma \cap I_{--+}$ mit $\gamma_2 = 1$ sind näherungsweise δ -unabhängig.

Für die vier Parallelepipede $P_\gamma \subset I_{-++}$ mit $\gamma_2 = 2$ sind die Schnittmengen $P_\gamma \cap I_{--+}$ signifikant δ -abhängig, da für solche γ nach Punkt 3(b) von Unterabschnitt 4.2.2 die Seite $K_<(\gamma, 2)$ um Beträge $\approx |\delta|$ verschoben ist. Näherungsweise haben alle P_γ mit $\gamma_2 = 2$ die gleiche Schnittmenge mit dem Würfel I_{-++} , d. h. eventuelle Differenzmengen haben wieder die Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$. Auf der rechten Seite von Abbildung 4.4 zeige ich die δ -abhängige Schnittmenge $P_{(-2,2,2)} \cap I_{--+}$ für $\delta < 0$. Für $\delta > \epsilon/2$ sind die Mengen $P_\gamma \cap I_{--+}$ mit $\gamma_2 = 2$ leer.

Aus Gleichung (4.12) folgt für die Überlappmenge von I_{-++} mit I_{--+} :

$$OV_{-++,-++} = \begin{cases} P_{(-1,1,1)} \cap I_{-++} & \delta \geq 0 \\ P_{(-2,2,2)} \cap I_{-++} & \delta < 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Wir werden sehen, daß der kritische δ -Wert δ_c für den Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$ bei $\delta_c \approx -2\epsilon/3$ liegt. Um den diesen Übergang zu verstehen, genügt es, δ -Werte in der Nähe dieses δ_c zu betrachten.

4.5.2 Urbildmenge der ersten Generation von $OV_{-++,-++}$

Ich berechne nun die Lage der Urbildmenge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++,-++})$ im Kubus I_{-++} . Dabei suche ich zu einem Eckpunkt \mathbf{x} der Schnittmenge $P_\gamma \cap I_{--+}$ das Urbild $\tilde{\mathbf{x}}$ im Teilquader S_γ . Wenn ich Mengen der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$ vernachlässige, kann ich bei der Berechnung $\tilde{\mathbf{x}}$ die folgenden vereinfachten Gleichungen verwenden (vgl. die Gleichungen (4.23)):

$$\begin{aligned} x_1 &= f_0(\tilde{x}_1), \\ x_2 &= f_\delta(\tilde{x}_2) + \frac{\epsilon}{2} (f_0(\tilde{x}_1) + f_0(\tilde{x}_3)), \\ x_3 &= f_0(\tilde{x}_3) \end{aligned} \quad (4.32)$$

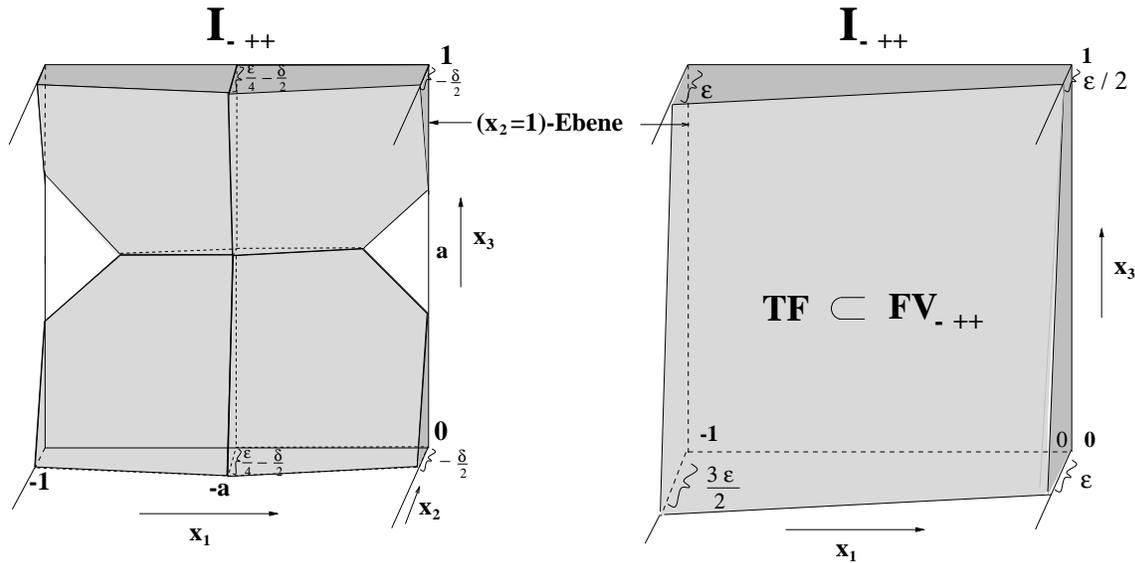


Abbildung 4.6: Links: Die vier Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_\gamma$ mit $\gamma_2 = 2$. Es gilt $-\epsilon/2 < \delta < 0$. Rechts: die Menge TF aus Gleichung (4.33), die zum Fehlvolumen gehört.

In einem Teilquader S_γ mit $\gamma_2 = 1$ liegt jeweils eine tetraederförmige Urbildmengenkomponente $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_\gamma$. Diese ist wie die entsprechende Schnittmenge $P_\gamma \cap I_{-++}$ δ -unabhängig. Diese vier Urbildmengenkomponenten schließen direkt an die $(x_2 = 0)$ -Seitenfläche des Kubus I_{-++} an (siehe Abbildung 4.5).

Für $\delta < \epsilon/2$ gibt es ebenfalls jeweils eine Komponente der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,-++})$ in den Teilquadern S_γ mit $\gamma_2 = 2$. Diese vier Komponenten sind – wie die korrespondierenden Schnittmengen – stark δ -abhängig und schließen an die $(x_2 = 1)$ -Seite des Kubus I_{-++} an (siehe linke Seite von Abbildung 4.6).

4.5.3 Fehlvolumen und Urbildmengen höherer Generation

Bevor ich zu Urbildmengen höherer Generation komme, muß ich das Fehlvolumen im Kubus I_{-++} , die Menge FV_{-++} , untersuchen. Für $\epsilon, \delta \ll 1$ liegen alle Punkte der Menge FV_{-++} nahe dem Rand von I_{-++} . Wir haben gesehen, daß für die Punkte der Urbildmenge der ersten Generation entweder $x_2 \approx 0$ oder $x_2 \approx 1$ gilt. Entsprechend sind für den Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{-+-}$ die Teilmengen von FV_{-++} relevant, für deren Punkte $x_2 \approx 0$ bzw. $x_2 \approx 1$ gilt.

Ich beginne mit der Analyse des Fehlvolumens in der Nähe der $(x_2 = 1)$ -Seitenfläche. Nach Punkt 4 von Unterabschnitt 4.2.2 liegen die Ebenen durch die Seiten $K_{>}(\gamma, 2)$ alle aufeinander. Die Punkte dieser Ebene können durch $(y_1, L(y_1, y_3), y_3)$ charakterisiert werden, wobei L eine lineare Funktion ist. Es gilt dann

$$TF := \{\mathbf{x} \in I_{-++} \mid x_2 \geq L(x_1, x_3)\} \subset FV_{-++}. \quad (4.33)$$

Aus den Eckpunkten der Seite $K_{>}((-1, 1, 1), 2)$, die in Gleichung (4.30) aufgelistet sind, ergibt sich die Funktion L unter Vernachlässigung von $O(\epsilon^2)$ -Termen als

$$L(x_1, x_3) = 1 - \epsilon + \frac{\epsilon}{2}(x_1 + x_3). \quad (4.34)$$

Die in Gleichung (4.33) definierte Menge TF ist ein Quaderstumpf mit sechs viereckigen Seitenflächen und acht Eckpunkten (siehe rechte Seite von Abbildung 4.6). TF ist eine

δ -unabhängige Menge mit einem Volumen der Größenordnung ϵ . Die Höhe der Menge TF in \mathbf{e}_2 -Richtung an der Stelle (x_1, x_3) ist

$$\begin{aligned} h_{TF}(x_1, x_3) &:= \sup \{1 - x_2 \mid (x_1, x_2, x_3) \in TF\} \\ &= 1 - L(x_1, x_3) = \epsilon - \frac{\epsilon}{2}(x_1 + x_3) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Bei vorgegebenem x_1 ist die Höhe von TF bei $x_3 = 1$ am kleinsten:

$$h_{TF}(x_1, x_3) \geq h_{TF}(x_1, 1), \quad \forall x_3 \in [0, 1] \quad (4.36)$$

Die Menge der Punkte, die zu FV_{-++} gehören und für die $x_2 \approx 0$ gilt, ist δ -abhängig. Denn die Ebene durch die vier Seiten $K_{<}(\gamma, 2)$ mit $\gamma_2 = 2$ ist um $\approx |\delta|$ parallelverschoben gegenüber der Ebene durch die Seiten $K_{<}(\gamma, 2)$ mit $\gamma_2 = 1$ (Punkt 3 (b) von Unterabschnitt 4.2.2). Für uns interessierende δ -Werte $< -\epsilon/2$ besteht die Teilmenge von FV_{-++} mit x_2 -Koordinate ≈ 0 nur aus zwei vernachlässigbar kleinen Mengen mit Volumen $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$, in denen zusätzlich $x_1 \approx -1$ bzw. $x_3 \approx 1$ gilt.

Die vier Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_\gamma$ mit $\gamma_2 = 2$ sind für $\delta > -\epsilon$ im Fehlvolumen FV_{-++} enthalten. Dies dem Vergleich der linken und rechten Seite von Abbildung 4.6 zu entnehmen. Da das Fehlvolumen bei $x_2 \approx 0$ vernachlässigbar klein ist, befinden sich die vier Komponenten $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_\gamma$ mit $\gamma_2 = 1$ näherungsweise außerhalb des Fehlvolumens. Damit besteht die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{-++,-++})$ aus den Urbildern dieser vier Komponenten.

Das explizite Ausrechnen der Lage der Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{-++,-++})$ für $k \geq 2$ ist mühsam. Um prägnant zu sein, beschränke ich mich auf allgemeine Aussagen über die Urbildmengen höherer Generation, die für das Verständnis des Übergangs $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$ relevant sind. Zuerst ist der folgende technische Punkt zu beachten, der für diesen Übergang zu einer Modifikation der Definition von Urbildmengen k -ter Generation führt: Bei der Berechnung der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{-++,-++})$ als Urbildmenge von $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++,-++})$ zeigt es sich, daß die Komponenten $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_{(-2,1,2)}$ und $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_{(-1,1,2)}$ Urbilder mit $x_2 = O(\epsilon, \delta) < 0$ besitzen, dagegen keine mit $x_2 = O(\epsilon, \delta) > 0$. Diese Urbilder befinden sich im Nachbarkubus I_{--+} und gehören deswegen nach unserer bisherigen Definition der Urbildmengen (siehe Definition in (3.20)) nicht zu $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{-++,-++})$; denn diese Menge kann nur Punkte aus I_{-++} enthalten.

Die Urbilder von $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++,-++})$ mit $x_2 = O(\epsilon, \delta) < 0$ sollten aber nicht ignoriert werden: Sei $\mathbf{x} \in I_{--+}$ mit $x_2 = O(\epsilon, \delta) < 0$. Dann können Urbilder von \mathbf{x} wieder eine positive x_2 -Koordinate haben und in I_{-++} liegen. Denn die x_2 -Koordinate wird gemäß Gleichung (4.32) iteriert:

$$x_2 = f_\delta(\tilde{x}_2) + \frac{\epsilon}{2} (f_0(\tilde{x}_1) + f_0(\tilde{x}_3))$$

Hierbei ist im Kopplungsterm $f_0(x_1)$ auf I_{-++} und I_{--+} negativ, während $f_0(x_3)$ auf diesen Kuben positiv ist. Falls

$$f_\delta(\tilde{x}_2) = x_2 - \frac{\epsilon}{2} (f_0(\tilde{x}_1) + f_0(\tilde{x}_3)) > 0,$$

ist $\tilde{x}_2 > 0$, so daß $\tilde{\mathbf{x}}$ wieder in I_{-++} liegt. Die x_2 -Koordinate hat dabei immer die Größe $O(\epsilon, \delta)$. Durch ein Weglassen von Urbildern mit $x_2 = O(\epsilon, \delta) < 0$ werden iterierte Punktfolgen, die vor ihrem Eintreffen in der Überlappmenge $OV_{-++,-++}$ mehrmals

zwischen den beiden Kuben überwechseln, von der Betrachtung ausgeschlossen. Solche Punktfolgen können aber für einen Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$ relevant sein.

Ich muß folglich meine Definition der Urbildmengen k -ter Generation für $k \geq 2$ modifizieren, wenn Urbilder k -ter Generation mit $x_2 = O(\epsilon, \delta) < 0$ ebenfalls zu den Urbildmengen gehören sollen. Ich definiere die **erweiterten Urbildmengen der k -ten Generation** für $k \geq 2$, indem ich statt der Menge I_{-++} in Gleichung (3.20) den um die vier $S_\gamma \subset I_{--+}$ mit $\gamma_2 = -1$ *erweiterten Kubus* verwende. Zur Abkürzung notiere ich diesen erweiterten Kubus mit

$$\text{Er}(I_{-++}) := I_{-++} \cup \left(\bigcup_{\substack{S_\gamma \subset I_{--+}, \\ \gamma_2 = -1}} S_\gamma \right).$$

Die erweiterten Urbildmengen definiere ich rekursiv:⁴

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) &:= \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \\ \tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{-++,-++}) &:= \left\{ \mathbf{x} \in \text{Er}(I_{-++}) \mid \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}^{-(k-1)}(OV_{-++,-++}) \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Man kann sich leicht überlegen, daß eine Komponente der k -ten Generation im erweiterten Kubus $\text{Er}(I_{-++})$ maximal acht Komponenten der $(k+1)$ -ten Generation besitzt.

Ich teile den erweiterten Kubus $\text{Er}(I_{-++})$ in zwei Teile auf und führe zur Vereinfachung der Notation Bezeichnungen für diese ein:

$$\begin{aligned} \text{Kl}(I_{-++}) &:= \bigcup_{\substack{S_\gamma \subset I_{-++}, \\ \gamma_2 = 1}} S_\gamma \cup \bigcup_{\substack{S_\gamma \subset I_{-++}, \\ \gamma_2 = -1}} S_\gamma, \\ \text{Gr}(I_{-++}) &:= \bigcup_{\substack{S_\gamma \subset I_{-++}, \\ \gamma_2 = 2}} S_\gamma \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die Urbildmengen der verschiedenen Generationen, die sich in $\text{Kl}(I_{-++})$ bzw. $\text{Gr}(I_{-++})$ befinden, haben eine x_2 -Koordinate ≈ 0 bzw. ≈ 1 . Ich bezeichne die jeweiligen Urbildmengen mit

$$\begin{aligned} F^{(k)} &:= \tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{-++,-++}) \cap \text{Kl}(I_{-++}), \quad k \geq 1, \\ G^{(k)} &:= \tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{-++,-++}) \cap \text{Gr}(I_{-++}), \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Die unendlichen Vereinigungen dieser Mengen notiere ich durch

$$\Sigma_F^\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} F^{(k)}, \quad \Sigma_G^\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} G^{(k)}. \quad (4.40)$$

Es gibt eine Beziehung zwischen Urbildern des gleichen Punktes in den Mengen $F^{(k)}$ und $G^{(k)}$: Sei $\mathbf{x} \in F^{(k)}$ ein Urbild von $\mathbf{y} \in F^{(k-1)}$. Aus der Struktur der Abbildung

⁴Diese Modifikationen der Definitionen wurden für den speziellen Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$ vorgenommen. Doch sind sie für jeden Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ nötig, bei dem die beiden Nachbarindizes des Übergangsindex verschiedenes Vorzeichen haben. Dies sind gerade die äquivalenten Übergänge zum betrachteten Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$. Dementsprechend ist es möglich, unsere neuen Definitionen auf jeden dieser Übergänge zu übertragen: ich erweitere den Kubus I_α um die vier Teilquader S_γ von I_β , die an I_α grenzen, zum erweiterten Kubus $\text{Er}(I_\alpha)$. Das weitere Vorgehen ist genauso wie für das spezielle $\alpha = -++$.

$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ folgt analog zur Rechnung auf Seite 45:

$$\text{Falls } \left(x_2 - \frac{\delta}{2}\right) \geq 0, \exists \mathbf{x}' \in G^{(k)}, \text{ so da\ss } \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}') = \mathbf{y} \text{ und } x'_2 \approx 1 - x_2 + \frac{\delta}{2}. \quad (4.41)$$

Um den Punkt \mathbf{x}' eindeutig zu machen, kann man noch $x_1 = x'_1$ und $x_3 = x'_3$ fordern. Die Bedingung für die Existenz des korrespondierenden Urbilds, $(x_2 - \delta/2) \geq 0$, ist für $\delta < 0$ bei jedem \mathbf{x} mit $x_2 > 0$ erfüllt.

4.5.4 Aufstellen des Kriteriums für δ_c

Solange $\delta \geq \delta_c$, liegen die Mengen $G^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) bzw. die Menge Σ_G^∞ in der Fehlvolumentmenge TF aus Gleichung (4.33):⁵

$$\Sigma_G^\infty \subset TF, \quad \delta \geq \delta_c$$

Dies ist ähnlich zur Situation beim Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$ in Unterabschnitt 3.8.4. Dagegen liegen die Mengen $F^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) bis auf Mengen der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$ außerhalb des Fehlvolumentens. Für $\delta = \delta_c$ liegt mindestens ein Punkt $\mathbf{p} \in \Sigma_G^\infty$ auf dem oberen Rand von TF , der durch die Funktion $L(x_1, x_3)$ in Gleichung (4.34) gegeben ist. Es gilt demnach

$$p_2 = L(p_1, p_3). \quad (4.42)$$

Zur Bestimmung von δ_c brauche ich demnach Aussagen über die Menge Σ_G^∞ .

4.5.5 Bestimmung der Höhe der Mengen $F^{(k)}$

Zunächst wende ich mich allerdings den Mengen $F^{(k)}$ zu, deren Punkte eine x_2 -Koordinate von ≈ 0 haben. Für $\delta \geq \delta_c$ und $k \geq 2$ gilt

$$F^{(k)} = \left\{ \mathbf{x} \in \text{Kl}(I_{-++}) \mid \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \in F^{(k-1)} \right\}. \quad (4.43)$$

Die Mengen $F^{(k)}$ ergeben sich demnach rekursiv aus sich selbst und sind in ihrer Größe näherungsweise unabhängig von δ . Statt der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ kann ich in Störungstheorie zur Berechnung der $F^{(k)}$ näherungsweise die folgende δ -unabhängige, vereinfachte Abbildung verwenden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_\epsilon : \quad & x_1 = f_0(\tilde{x}_1), \\ & x_2 = 2\tilde{x}_2 + \frac{\epsilon}{2} (f_0(\tilde{x}_1) + f_0(\tilde{x}_3)), \\ & x_3 = f_0(\tilde{x}_3) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die *Höhenfunktion* $H^{(k)}$ soll die Höhe in \mathbf{e}_2 -Richtung von $F^{(k)}$ am Punkt (x_1, x_3) angeben:

$$H^{(k)}(x_1, x_3) := \sup \left\{ x_2 \mid (x_1, x_2, x_3) \in F^{(k)} \right\}, \quad (x_1, x_3) \in D^{(k)}, \quad (4.45)$$

wobei der Definitionsbereich von $H^{(k)}$, die Menge $D^{(k)} \subset [-1, 0] \times [0, 1]$, gerade die Menge von (x_1, x_3) -Werten umfaßt, für die es Punkte in $F^{(k)}$ gibt:⁶

$$D^{(k)} := \left\{ (x_1, x_3) \mid \exists (x_1, x_2, x_3) \in F^{(k)} \right\}$$

⁵Dementsprechend können wir aus der Lage der ersten Urbildgeneration schon folgern: $\delta_c \geq -\epsilon$.

⁶Die Definitionsbereiche $D^{(k)}$, ($k \geq 1$) können rekursiv aus dem (x_1, x_3) -Bereich der Schnittmenge $P_{(-1,1,1)} \cap I_{--}$ berechnet werden, die auf der linken Seite von Abbildung 4.4 zu sehen ist. Es gilt

$$\begin{aligned} D^{(0)} &:= \{ (x_1, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in P_{(-1,1,1)} \cap I_{--} \} \\ &\approx \{ (x_1, x_3) \subset [-1, 0] \times [0, 1] \mid |x_1| \geq |x_3| \}. \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Höhenfunktion $H^{(k)}$ scheint schwierig, da eine Generation $F^{(k)}$ insgesamt 4^k tetraederförmige Komponenten umfaßt, die i. a. unterschiedliche Höhen in \mathbf{e}_2 -Richtung haben. Glücklicherweise muß ich – wie wir sehen werden – für die Bestimmung von δ_c die Funktion $H^{(k)}$ nicht im ganzen Definitionsbereich kennen.

Aus der vereinfachten Iterationsgleichung für die x_2 -Koordinate in Gleichung (4.44) ergibt sich ein Entwicklungsgesetz für die Höhenfunktion, wenn ich von $F^{(k)}$ zu $F^{(k+1)}$ übergehe. Dabei verwende ich die Tatsache, daß die Menge $F^{(k+1)}$ durch $\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon$ auf die Menge $F^{(k)}$ abgebildet wird:

$$\begin{aligned} H^{(k)}(x_1, x_3) &= \sup \left\{ x_2 \mid (x_1, x_2, x_3) \in G^{(k)} \right\} \\ &= \sup \left\{ 2\tilde{x}_2 + \frac{\epsilon}{2} (f_0(\tilde{x}_1) + f_0(\tilde{x}_3)) \mid \tilde{\mathbf{x}} \in F^{(k+1)}, f_0(\tilde{x}_i) = x_i \ (i = 1, 3) \right\} \end{aligned}$$

Die Supremumsbildung bringt die Höhenfunktion $H^{(k+1)}$ ins Spiel:

$$\begin{aligned} H^{(k)}(x_1, x_3) &= 2H^{(k+1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) + \frac{\epsilon}{2} (x_1 + x_3), \text{ wobei} \\ &(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) \in D^{(k+1)}, \quad f_0(\tilde{x}_i) = x_i \quad (i = 1, 3). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Wenn man nach der Höhenfunktion $H^{(k+1)}$ auflöst, erhält man

$$H^{(k+1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = \frac{H^{(k)}(x_1, x_3)}{2} - \frac{\epsilon}{4} (x_1 + x_3) \quad \text{mit} \quad f_0(\tilde{x}_i) = x_i \quad (i = 1, 3). \quad (4.47)$$

Für die Funktionen $H^{(k)}$ zeige ich die folgende Aussage per Induktion:

$$H^{(k)}(x_1, 0) = H^{(k)}(x_1, 1) \geq H^{(k)}(x_1, x_3), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, x_3) \in D^{(k)}. \quad (4.48)$$

Für die x_3 -Werte 0 und 1 wird demnach die Höhe von $F^{(k)}$ maximal.

Begründung von Gleichung (4.48):

Man sieht anhand von Abbildung 4.5, daß diese Gleichung für Funktion $H^{(1)}$ gilt, die auf der Menge $F^{(1)} = \tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,-}) \cap \text{Kl}(I_{-++})$ definiert ist (Induktionsanfang). Induktionsschritt von k nach $(k+1)$: Für die Differenz der Werte von $H^{(k+1)}$ bei gleicher x_1 - und verschiedener x_3 -Koordinate folgt aus Gleichung (4.47)

$$\begin{aligned} H^{(k+1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) - H^{(k+1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3^*) &= \frac{1}{2} \left(H^{(k)}(x_1, x_3) - H^{(k)}(x_1, x_3^*) \right) + \frac{\epsilon}{4} (x_3^* - x_3) \\ &\text{mit} \quad f_0(\tilde{x}_i) = x_i \quad (i = 1, 3), \quad f_0(\tilde{x}_3^*) = x_3^* \end{aligned} \quad (4.49)$$

Für \tilde{x}_3 den Wert 0 oder 1 annimmt, folgt aus dieser Gleichung

$$H^{(k+1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3 \in \{0, 1\}) - H^{(k+1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3^*) = \frac{H^{(k)}(x_1, 0) - H^{(k)}(x_1, x_3^*)}{2} + \frac{\epsilon}{4} x_3^* \geq 0, \quad (4.50)$$

wobei ich die Induktionsannahme (Gleichung (4.48)) auf die Höhenfunktion $H^{(k)}$ angewandt habe.

Für $\tilde{x}_3 = 0$ und $\tilde{x}_3^* = 1$ ergibt Gleichung (4.49)

$$H^{(k+1)}(\tilde{x}_1, 0) - H^{(k+1)}(\tilde{x}_1, 1) = \frac{1}{2} \left(H^{(k)}(x_1, 0) - H^{(k)}(x_1, 0) \right) = 0. \quad (4.51)$$

Aus den vereinfachten Gleichungen für die x_1 - und x_3 -Koordinate nach Gleichung (4.44) ergibt sich

$$D^{(k)} \approx \left\{ (x_1, x_3) \mid (f_0(x_1), f_0(x_3)) \in D^{(k-1)} \right\}.$$

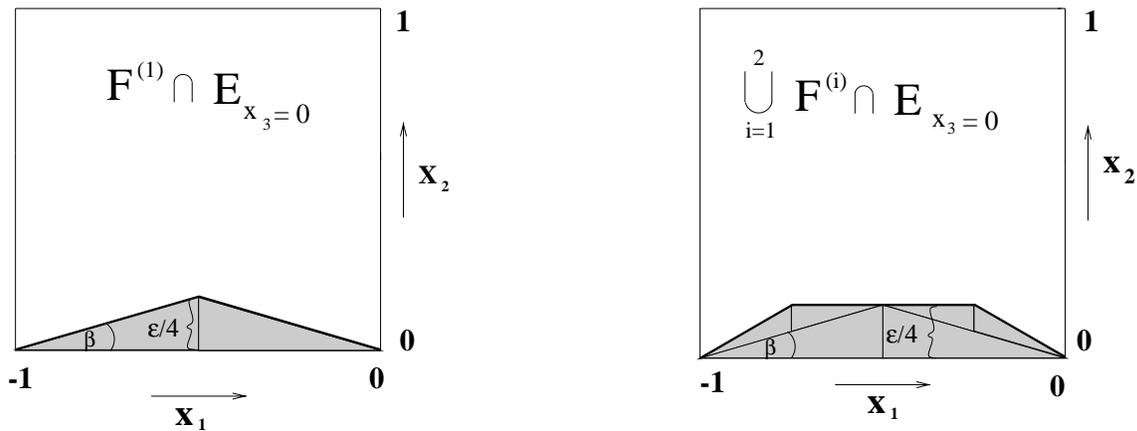


Abbildung 4.7: Hier sind die Schnitte bei $x_3 = 0$ durch die Mengen $F^{(1)}$ und $F^{(1)} \cup F^{(2)}$ dargestellt.

Damit ist die Gültigkeit von Gleichung (4.48) auch für die Höhenfunktion $H^{(k+1)}$ gezeigt und der Induktionsbeweis ist fertig.

Es wird sich später zeigen, daß es für die Bestimmung von δ_c ausreicht, die Höhe der Menge $F^{(k)}$ bei $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$ zu kennen. Denn bei diesen beiden x_3 -Werten wird die maximale Höhe erreicht. Man kann sich leicht überlegen, daß $H^{(k)}(x_1, 0)$ für alle $x_1 \in [-1, 0]$ definiert ist. Die Bestimmung von $H^{(k)}$ bei $x_3 = 0$ kann geometrisch auch folgendermaßen interpretiert werden: wenn ich Ebenen im \mathbb{R}^3 mit konstanter x_i -Koordinate durch

$$E_{x_i=y} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = y\} \quad (4.52)$$

einführe, so gilt

$$H^{(k)}(x_1, 0) = \sup \left\{ x_2 \mid (x_1, x_2, 0) \in F^{(k)} \cap E_{x_3=0} \right\}. \quad (4.53)$$

Die Mengen $F^{(k)} \cap E_{x_3=0}$, $k \in \mathbb{N}$ bestehen aus Dreiecken. Das Höhenproblem der zweidimensionalen Mengen $F^{(k)} \cap E_{x_3=0}$ ist einem Problem eng verwandt, das beim zweidimensionalen CML ($N = 2$) im letzten Kapitel schon gelöst wurde. Man beachte, daß

$$I_{-++} \cap E_{x_3=0} = I_{-+}, \quad I_{--} \cap E_{x_3=0} = I_{--}.$$

Entsprechend tritt das Problem für $N = 2$ beim Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{--}$ auf. Diesen Übergang habe ich zwar nicht explizit in Kapitel 3 behandelt, doch ist er äquivalent zum dort ausführlich diskutierten Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$.

In Abbildung 4.7 sind die beiden Mengen

$$F^{(1)} \cap E_{x_3=0}, \quad \bigcup_{i=1}^2 F^{(i)} \cap E_{x_3=0}$$

dargestellt. Diese beiden Mengen sind sehr ähnlich den Mengen $\Sigma_{\tilde{G}}^{(1)} = \tilde{G}^{(1)}$ und $\Sigma_{\tilde{G}}^{(2)} = \tilde{G}^{(1)} \cup \tilde{G}^{(2)}$, die in der linken bzw. mittleren Zeichnung von Abbildung 3.14 dargestellt sind. Allerdings ist der spitze Winkel β für die Menge $F^{(1)} \cap E_{x_3=0}$ ungefähr

$\epsilon/2$ (siehe Abbildung 4.7) und damit halb so groß wie der entsprechende Winkel in der Menge $\tilde{G}^{(1)}$.

Ich werde nun die Analogie der beiden Probleme quantitativer machen: aus den Gleichungen (4.44) folgen die vereinfachten Iterationsgleichungen für Eckpunkte der Mengen $F^{(k)} \cap E_{x_3=0}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_0(\tilde{x}_1), \\ x_2 &= 2\tilde{x}_2 + \frac{\epsilon}{2} (f_0(\tilde{x}_1) + f_0(\tilde{x}_3)) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Der Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{--}$ hat eine Überlappmenge $OV_{-+,-}$. Die Urbildmengen von $OV_{-+,-}$, deren Punkte eine x_2 -Koordinate von der Größe $O(\epsilon, \delta)$ besitzen, sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} J^{(1)} &:= \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-+,-}) \cap (S_{(-1,1)} \cup S_{(-2,1)}) \\ J^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{x} \in (S_{(-1,1)} \cup S_{(-2,1)}) \mid \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(\mathbf{x}) \in J^{(k-1)} \right\}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.55)$$

Da die x_2 -Koordinate von der Größenordnung $O(\epsilon, \delta)$ ist, sind die vereinfachten Gleichungen für die Eckpunkte der Mengen $J^{(k)}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_0(\tilde{x}_1), \\ x_2 &= 2\tilde{x}_2 + \epsilon (f_0(\tilde{x}_1) + f_0(\tilde{x}_3)) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Diese beiden Gleichungen sind identisch mit den Gleichungen (4.54), wenn man ϵ durch $\epsilon/2$ ersetzt. Außerdem ist die beim Parameter ϵ berechnete Menge $F^{(1)} \cap E_{x_3=0}$ näherungsweise gleich der Menge $J^{(1)}$, wenn man diese beim Parameter $\epsilon/2$ berechnet:

$$\left(F^{(1)} \cap E_{x_3=0} \right) [\epsilon] \approx J^{(1)}[\epsilon/2]$$

Damit gilt für allgemeines $k \in \mathbb{N}$

$$\left(F^{(k)} \cap E_{x_3=0} \right) [\epsilon] \approx J^{(k)}[\epsilon/2]. \quad (4.57)$$

Folglich kann ich die in Unterabschnitt 3.8.3 erzielten Resultate für die Mengen $\Sigma_{\tilde{G}}^{(k)}$ nutzen, um Aussagen über die Höhe der Mengen $F^{(k)} \cap E_{x_3=0}$ (k ungerade) zu bekommen:

$$\begin{aligned} \sup \left\{ x_2 \mid \mathbf{x} \in F^{(k)} \cap E_{x_3=0} \right\} &= \frac{1}{2} \sup \left\{ x_2 \mid \mathbf{x} \in J^{(k)} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \inf \left\{ x_2 \mid \mathbf{x} \in \Sigma_{\tilde{G}}^{(k)} \right\} = \epsilon \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \frac{1}{4^{i+1}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Dabei wurde Gleichung (3.69) verwendet, die die Minima von $\Sigma_{\tilde{G}}^{(k)}$ beschreibt. Nach Gleichung (4.53) folgt für die Höhenfunktion $H^{(k)}$

$$\sup \left\{ H^{(k)}(x_1, 0) \mid x_1 \in [-1, 0] \right\} = \epsilon \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \frac{1}{4^{i+1}}. \quad (4.59)$$

Es sei $m = (k-1)/2$. Der Maximalwert der Funktion $H^{(k)}$ (k ungerade) aus der letzten Gleichung wird an den 2^m x_1 -Werten der folgenden Form erreicht (vgl. Gleichung (3.70)):

$$x_1(i_1, i_2, \dots, i_m) = -\frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{i_j}{4^j} \right); \quad i_j \in \{-1, +1\}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.60)$$

Die Funktionen $H^{(k)}$ konvergieren gleichmäßig zur Funktion $H^{(\infty)}$, die die Höhe der Menge Σ_F^∞ aus Gleichung (4.40) beschreibt. Demzufolge gilt für $H^{(\infty)}$ eine zu Gleichung (4.48) analoge Gleichung:

$$H^{(\infty)}(x_1, 0) = H^{(\infty)}(x_1, 1) \geq H^{(\infty)}(x_1, x_3), \quad \forall (x_1, x_3) \in [-1, 0] \times [0, 1] \quad (4.61)$$

Es gibt unendlich viele x_1 -Werte, an denen die Funktionen $H^{(\infty)}(x_1, 0)$ und $H^{(\infty)}(x_1, 1)$ den maximalen Wert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \frac{1}{4^{i+1}} = \frac{\epsilon}{3} \quad (4.62)$$

erreichen. Diese x_1 -Werte ergeben sich aus Gleichung (4.60) für $m \rightarrow \infty$.

4.5.6 Bestimmung von δ_c

Ich führe die Höhenfunktion $\tilde{H}^{(\infty)}$ für die Menge Σ_G^∞ ein, die bei gegebenem (x_1, x_3) den maximalen Abstand von Punkten der Menge Σ_G^∞ von der $(x_2 = 1)$ -Seitenfläche des Kubus I_{-++} beschreibt:

$$\tilde{H}^{(\infty)}(x_1, x_3) := \sup \{ (1 - x_2) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma_G^\infty \} \quad (4.63)$$

Aus Gleichung (4.41) folgt

$$\tilde{H}^{(\infty)}(x_1, x_3) \approx H^{(\infty)}(x_1, x_3) - \frac{\delta}{2}. \quad (4.64)$$

Für $\delta = \delta_c$ gibt es nach Gleichung (4.42) einen Punkt $\mathbf{p} \in \Sigma_G^\infty$, so daß

$$p_2 = L(p_1, p_3). \quad (4.65)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\tilde{H}^{(\infty)}(p_1, p_3) = h_{TF}(p_1, p_3), \quad \delta = \delta_c. \quad (4.66)$$

Bei festem x_1 ist nach Gleichung (4.36) die Funktion h_{TF} minimal bei $x_3 = 1$. Außerdem ist nach den Gleichungen (4.61) und (4.64) die Funktion $\tilde{H}^{(\infty)}$ maximal bei $x_3 = 1$. Ich kann daraus $p_3 = 1$ folgern; der Punkt \mathbf{p} gehört demnach zur Menge $\Sigma_G^\infty \cap E_{x_3=1}$. Die Bedingung für δ_c in Gleichung (4.66) läßt sich dann schreiben als

$$\tilde{H}^{(\infty)}(p_1, 1) = h_{TF}(p_1, 1), \quad \delta = \delta_c. \quad (4.67)$$

Es ist noch p_1 zu bestimmen. Aus Gleichung (4.35) folgt

$$h_{TF}(x_1, 1) = \frac{\epsilon}{2} (1 - x_1), \quad x_1 \in [-1, 0]. \quad (4.68)$$

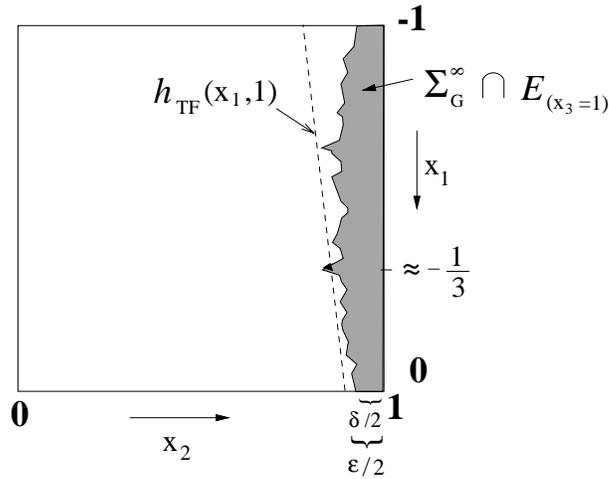


Abbildung 4.8: Hier ist ein Schnitt durch den Kubus I_{-++} bei $x_3 = 1$ zu sehen. Für kleiner werdendes δ erreicht die Menge $\Sigma_G^\infty \cap E_{x_3=1}$ als erstes bei $x_1 \approx -1/3$ den Rand der Fehlvolumenmenge TF , dessen Höhe durch die Funktion $h_{TF}(x_1, 1)$ gegeben ist.

Damit liegt es nahe, daß bei kleiner werdendem δ das Maximum von $\tilde{H}^{(\infty)}(x_1, 1)$ mit der größten x_1 -Koordinate zuerst die durch $h_{TF}(x_1, 1)$ gegebene Gerade erreicht (siehe das Schema in Abbildung 4.8).⁷

Nach Gleichung (4.60) ist diese Koordinate

$$p_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{4^j} \right) = -\frac{1}{3}.$$

Da (p_1, p_3) als $(-1/3, 1)$ festgelegt wurde, kann aus Gleichung (4.67) δ_c berechnet werden:

$$\tilde{H}^{(\infty)}(-1/3, 1) = h_{TF}(-1/3, 1), \quad \delta = \delta_c \quad (4.69)$$

Unter Benutzung der Gleichungen (4.62), (4.64) und (4.68) ergibt dies

$$\frac{\epsilon}{3} - \frac{\delta_c}{2} \approx \frac{2\epsilon}{3}.$$

Daraus folgt als Ergebnis in führender Ordnung Störungstheorie

$$\delta_c \approx -\frac{2}{3}\epsilon. \quad (4.70)$$

Eigentlich habe ich damit das Ziel dieses Unterabschnitts, die Berechnung von δ_c erreicht. Es sollte aber noch ein subtiler Punkt angesprochen werden. Bisher wurde vom Fehlvolumen FV_{-++} nur die in Gleichung (4.33) definierte Teilmenge TF berücksichtigt, die in der Nähe der $(x_2 = 1)$ -Seitenfläche von I_{-++} liegt. Aus der Lage

⁷Man kann auch – wie dies in Anhang F für die Menge Σ_G^∞ getan wurde – relativ streng zeigen, daß sich die beiden Kurven $\tilde{H}^{(\infty)}(x_1, 1)$ und $h_{TF}(x_1, 1)$ zuerst bei $x_1 = -1/3$ schneiden. Denn die Menge $\Sigma_G^\infty \cap E_{x_3=1}$ ist in der $(x_3 = 1)$ -Schnittebene gleich der Menge Σ_G^∞ , wenn man ϵ durch $\epsilon/2$ ersetzt. Da außerdem die Funktion $h_{TF}(x_1, 1)$ einen Winkel $\epsilon/2$ mit der \mathbf{e}_2 -Richtung besitzt, gilt für die Menge $\Sigma_G^\infty \cap E_{x_3=1}$ eine Schranke, die ganz analog zu der in Gleichung (3.80) ist. Aus dieser Schranke folgt, daß bei keinem größeren Wert als $-1/3$ die Gerade $h_{TF}(x_1, 1)$ von der Menge $\Sigma_G^\infty \cap E_{x_3=1}$ zuerst berührt wird, wenn δ sich δ_c von oben nähert.

der Parallelepedseiten $K_{>}(\gamma, 3)$ folgt aber, daß es im Anschluß an die $(x_3 = 1)$ -Seitenfläche von I_{-++} ebenfalls eine Menge gibt, die zum Fehlvolumen gehört. Diese Menge hat die gleiche Größe und Form wie die Menge TF und wird von mir mit TF' bezeichnet.

Die gesamte $(x_3 = 1)$ -Seitenfläche von I_{-++} ist in TF' enthalten. Folglich liegt die Menge $\Sigma_G^\infty \cap E_{x_3=1}$ für alle Parameter (ϵ, δ) im Fehlvolumen. Die oben angegebene Herleitung von δ_c ist deshalb nicht ganz korrekt; das Problem ist aber leicht zu beheben, indem ich die Menge Σ_G^∞ in der Nähe von $x_3 = 1$ betrachte.

Für die Funktion $\tilde{H}^{(\infty)}$ läßt sich zeigen:

$$\tilde{H}^{(\infty)}(x_1, 1) - \tilde{H}^{(\infty)}(x_1, 1 - 1/2^k) \leq \epsilon \frac{k}{2^k} \quad (4.71)$$

Ich wähle nun $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß

$$2\epsilon \leq \frac{1}{2^{k_0}} < 4\epsilon. \quad (4.72)$$

Statt der Menge $\Sigma_G^\infty \cap E_{x_3=1}$ betrachte ich die Menge $\Sigma_G^\infty \cap E_{x_3=1-1/2^{k_0}}$. Da nach Relation (4.72) die letztere Menge einen Abstand von mindestens 2ϵ von der $(x_3 = 1)$ -Seitenfläche hat, befindet sie sich außerhalb der Fehlvolumenmenge TF' .

Statt Gleichung (4.67) ist die Bedingungsgleichung für δ_c nun

$$\tilde{H}^{(\infty)}(p_1, 1 - 1/2^{k_0}) = h_{TF}(p_1, 1 - 1/2^{k_0}), \quad \delta = \delta_c. \quad (4.73)$$

Aus den Ungleichungen (4.71) und (4.72) folgt

$$\tilde{H}^{(\infty)}(x_1, 1) - \tilde{H}^{(\infty)}(x_1, 1 - 1/2^{k_0}) = o(\epsilon), \quad (4.74)$$

d. h. bei gleichem x_1 ist die Höhe der Menge Σ_G^∞ bei $x_3 = 1 - 1/2^{k_0}$ nur unwesentlich kleiner als bei $x_3 = 1$. Auch für die Höhenfunktion der Menge TF gilt

$$h_{TF}(x_1, 1) - h_{TF}(x_1, 1 - 1/2^{k_0}) = o(\epsilon). \quad (4.75)$$

Da die beiden $o(\epsilon)$ -Terme in den beiden letzten Gleichungen in führender Ordnung Störungstheorie vernachlässigt werden können, ergibt sich aus der modifizierten Bedingung in Gleichung (4.73) das gleiche δ_c wie das in Gleichung (4.70) angegebene.

4.5.7 Überprüfung der Übergangskriterien

Es bleibt noch die Frage zu klären, ob für $\delta < \delta_c \approx -2\epsilon/3$ der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--}$ möglich wird. Dazu sind die beiden Übergangskriterien aus Unterabschnitt 3.4.3 zu überprüfen.

Nach dem ersten Kriterium sollten die Urbilder hoher Generation der Überlappmenge $OV_{-++,-++}$ das Innere von I_{--} schneiden. Für $\delta < \delta_c$ gilt

$$R(n_0) := \Sigma_G^\infty \setminus FV_{-++} \neq \emptyset.$$

n_0 ist die kleinste natürliche Zahl, für die eine Menge $H^{(n)}$ sich teilweise außerhalb des Fehlvolumens befindet (vgl. Gleichung (3.84) in Unterabschnitt 3.8.7). Der Einfachheit halber wähle ich δ knapp unterhalb von δ_c . Alle Punkte $\mathbf{x} \in R(n_0)$ haben dann näherungsweise die folgenden Koordinaten:

$$(x_1, x_2, x_3) \approx \left(-\frac{1}{3}, 1, 1 \right)$$

Die Punkte aus $R(n_0)$ haben dann Urbilder in der Nähe von

$$\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{oder} \quad \left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(n_0))$ schneidet demnach das Innere von I_{-++} . Das erste Übergangskriterium ist erfüllt. Nach den Resultaten für das CML bei $N = 2$ ist es plausibel, daß nach diesem „Sprung in die Mitte“ die Gesamtheit der Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(R(n_0))$ einen substantiellen Volumenanteil an I_{-++} einnimmt.

Für das zweite Übergangskriterium muß überprüft werden, ob es eine Übergangsmenge $W_{-++,-++} \subset EO_{-++,-++}$ mit endlichem Maß gibt, deren Punkte bei weiterer Iteration mit $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ das Innere von I_{-++} erreichen. Zuerst berechne ich die effektive Überlappmenge $EO_{-++,-++}$. Aus der Definition (3.27) folgt für $\delta < \delta_c$:

$$EO_{-++,-++} \approx P_{(-1,1,1)} \cap I_{-++}. \quad (4.76)$$

Demn nur die Urbildkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_\gamma$ mit $\gamma_2 = 1$ liegen außerhalb des Fehlolumens.⁸ Die Schnittmenge $P_{(-1,1,1)} \cap I_{-++}$ wurde auf der linken Seite von Abbildung 4.4 gezeigt. Damit die Iterierten eines Punktes aus $EO_{-++,-++}$ ins Innere von I_{-++} gelangen, muß sich bei der Iteration mit $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ seine x_2 -Koordinate von Werten der Größe $O(\epsilon, \delta)$ zu solchen der Größenordnung -1 entwickeln. Die Iterationsgleichung für x_2 ist

$$x'_2 = (1 - \epsilon) f_\delta(x_2) + \frac{\epsilon}{2} (f_\delta(x_1) + f_\delta(x_3)). \quad (4.77)$$

Die Menge

$$I_{13} := \{\mathbf{x} \in [-1, +1]^3 \mid x_1 = -x_3\}$$

ist unter der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ invariant. Für Punkte $\mathbf{x} \in EO_{-++,-++} \cap I_{13}$ verschwindet der Kopplungsterm in der Iterationsgleichung (4.77), so daß für diese Punkte

$$x'_2 = (1 - \epsilon) f_\delta(x_2) \approx 2x_2.$$

Demnach wird für Startpunkte $\mathbf{x} \in EO_{-++,-++} \cap I_{13}$ die x_2 -Koordinate bei fortlaufender Iteration kleiner, bis die Iterierten eine x_2 -Koordinate der Größenordnung -1 haben. Da die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ stetig ist, erreichen auch die Iterierten einer offenen Umgebung von $\mathbf{x} \in EO_{-++,-++} \cap I_{13}$ das Innere von I_{-++} . Es gibt demnach eine Übergangsmenge $W_{-++,-++}$ mit endlichem Maß, so daß auch das zweite Kriterium für den Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{-++}$ erfüllt ist.

Damit habe ich gezeigt, daß der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{-++}$ für $\delta < \delta_c \approx 2\epsilon/3$ stattfindet. Das gleiche gilt für den äquivalenten Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{-++}$.

4.6 Der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$

Für eine vollständige Beschreibung der Dynamik im Kubus I_{-++} muß noch der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$ untersucht werden. Dieser Übergang ist invers zum Übergang $I_{+++} \rightarrow I_{-++}$, der in Unterabschnitt 4.3.2 untersucht wurde. Da die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$

⁸Falls δ wesentlich kleiner als δ_c ist, liegen auch die Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,-++}) \cap S_\gamma$ mit $\gamma_2 = 2$ außerhalb des Fehlolumens, so daß sich die effektive Überlappmenge $EO_{-++,-++}$ gegenüber Gleichung (4.76) vergrößert. Dies ändert aber nichts an der Gültigkeit der nachfolgenden Argumentation.

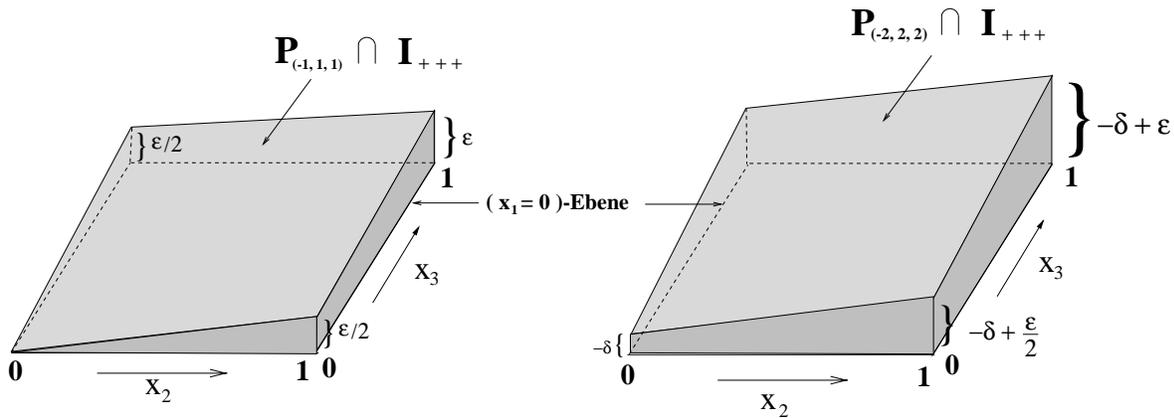


Abbildung 4.9: Links: die Schnittmenge $P_{(-1,1,1)} \cap I_{+++}$. Rechts: die δ -abhängige Schnittmenge $P_{(-2,2,2)} \cap I_{+++}$ für $\delta < 0$. Die hier dargestellten Mengen sind gegenüber den exakten Mengen etwas vereinfacht.

translationsinvariant und antisymmetrisch ist, ist der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$ exemplarisch für alle Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ des folgenden Typs: der Übergangsindex α_i wird von zwei Indizes flankiert, die das inverse Vorzeichen von α_i sind; der Indexvektor β besteht demnach aus drei gleichen Vorzeichen. Zum Beispiel gehört der Übergang $I_{-+-} \rightarrow I_{---}$ zu den äquivalenten Übergängen.

4.6.1 Parallelepipede und Schnittmengen mit I_{+++}

Die Vorgehensweise bei der Analyse des Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$ ist ganz analog zu der im letzten Abschnitt, in dem der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$ untersucht wurde. Ich beginne wieder mit dem δ -unabhängigen Parallelepiped $P_{(-1,1,1)}$. In den Gleichungen (4.29) und (4.30) wurden die Eckpunkte von $P_{(-1,1,1)}$ schon angegeben. Ich gruppier sie nun zu den Seiten $K_{<}((-1, 1, 1), 1)$ und $K_{>}((-1, 1, 1), 1)$:

$$K_{<}((-1, 1, 1), 1) : \\ (0, 0, 0), \left(\frac{\epsilon}{2}, 1 - \epsilon, \frac{\epsilon}{2}\right), \left(\epsilon, 1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}, 1 - \epsilon\right); \quad (4.78)$$

$$K_{>}((-1, 1, 1), 1) : \left(-1 + \epsilon, -\frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon}{2}\right), \left(-1 + \frac{3\epsilon}{2}, 1 - \frac{3\epsilon}{2}, 0\right), \\ (-1 + 2\epsilon, 1 - \epsilon, 1 - \epsilon) \quad \text{und} \quad \left(-1 + \frac{3\epsilon}{2}, 0, 1 - \frac{3\epsilon}{2}\right). \quad (4.79)$$

Aus den vier Eckpunkten der Seite $K_{<}((-1, 1, 1), 1)$ folgt eine nichtleere Schnittmenge

$$P_{(-1,1,1)} \cap I_{+++},$$

die auf der linken Seite der Abbildung 4.9 gezeichnet ist. Diese Menge ist ein degenerierter Quaderstumpf mit sieben Eckpunkten. Ihre Größe ist

$$\text{Vol}(P_{(-1,1,1)} \cap I_{+++}) = \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2).$$

Für die anderen Parallelepipede P_γ mit $S_\gamma \subset I_{-++}$ gilt: Falls $\gamma_1 = -1$, ist die Schnittmenge $P_\gamma \cap I_{+++}$ bis auf eine eventuelle Differenzmenge der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$ gleich der gerade behandelten Menge $P_{(-1,1,1)} \cap I_{+++}$. Die vier Schnittmengen $P_\gamma \cap I_{+++}$,

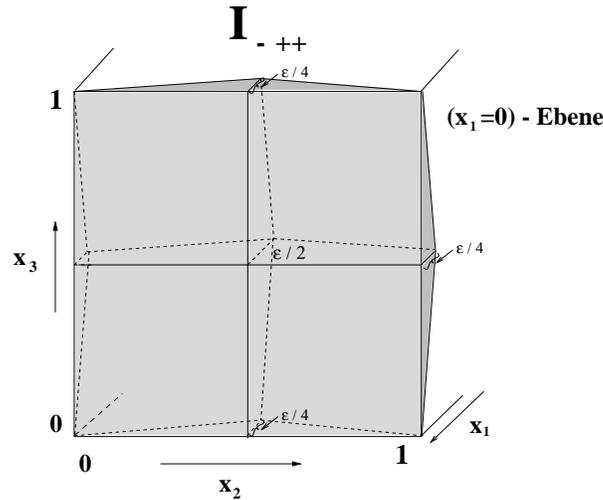


Abbildung 4.10: Die vier Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,+}) \cap S_\gamma$, die sich in den S_γ mit $\gamma_1 = -1$ befinden. Jede Komponente hat die Form eines degenerierten Quaderstumpfs.

mit $\gamma_1 = -1$ sind demnach näherungsweise δ -unabhängig. Falls $\gamma_1 = -2$ ist nach Punkt 3(b) aus Unterabschnitt 4.2.2 die Seite $K_{<}(\gamma, 1)$ um $\approx |\delta|$ verschoben, so daß die Schnittmengen $P_\gamma \cap I_{+++}$ mit $\gamma_1 = -2$ signifikant δ -abhängig werden. Auf der rechten Seite von Abbildung 4.9 ist die Schnittmenge $P_{(-2,2,2)} \cap I_{+++}$ für $\delta < 0$ zu sehen. Die vier $P_\gamma \cap I_{+++}$ mit $\gamma_1 = -2$ sind näherungsweise gleich groß. Da der kritische Wert für den Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$ bei ca. $-4\epsilon/3$ liegen wird, betrachte ich im folgenden nur negative δ . In diesem Fall sind die $P_\gamma \cap I_{+++}$ mit $\gamma_1 = -2$ größer als die Mengen $P_\gamma \cap I_{+++}$ mit $\gamma_1 = -1$.

Für die Überlappmenge $OV_{-++,+}$ folgt aus Gleichung (4.12)

$$OV_{-++,+} = P_{(-2,2,2)} \cap I_{+++}, \quad \delta < 0. \quad (4.80)$$

4.6.2 Urbildmengen der ersten Generation

Zur Überlappmenge $OV_{-++,+}$ berechne ich die Urbilder in I_{-++} , d. h. die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,+})$. Für $\delta < 0$ gibt es insgesamt acht Urbildmengenkomponenten der ersten Generation. Vier Komponenten liegen in den S_γ mit $\gamma_1 = -1$ und schließen an die $(x_1 = 0)$ -Seitenfläche von I_{-++} an (siehe Abbildung 4.10). Die anderen vier Komponenten liegen in den S_γ mit $\gamma_1 = -2$ und grenzen an die $(x_1 = -1)$ -Seitenfläche von I_{-++} (siehe linke Seite von Abbildung 4.11). Diese vier Komponenten sind wie die entsprechenden Schnittmengen in ihrer Größe δ -abhängig.

4.6.3 Fehlvolumen und Urbildmengen höherer Generation

Bevor ich zu den Urbildmengen höherer Generation komme, kläre ich die Lage der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,+})$ relativ zum Fehlvolumen FV_{-++} . Für den hier analysierten Übergang benötige ich nur die Teilmenge von FV_{-++} , deren Punkte eine x_1 -Koordinate von ≈ 0 bzw. ≈ -1 haben. Durch die Seiten $K_{>}(\gamma, 1)$ kann nach Punkt 4 von Unterabschnitt 4.2.2 eine Ebene gelegt werden. Aus den Eckpunkten von $K_{>}((-1, 1, 1), 1)$

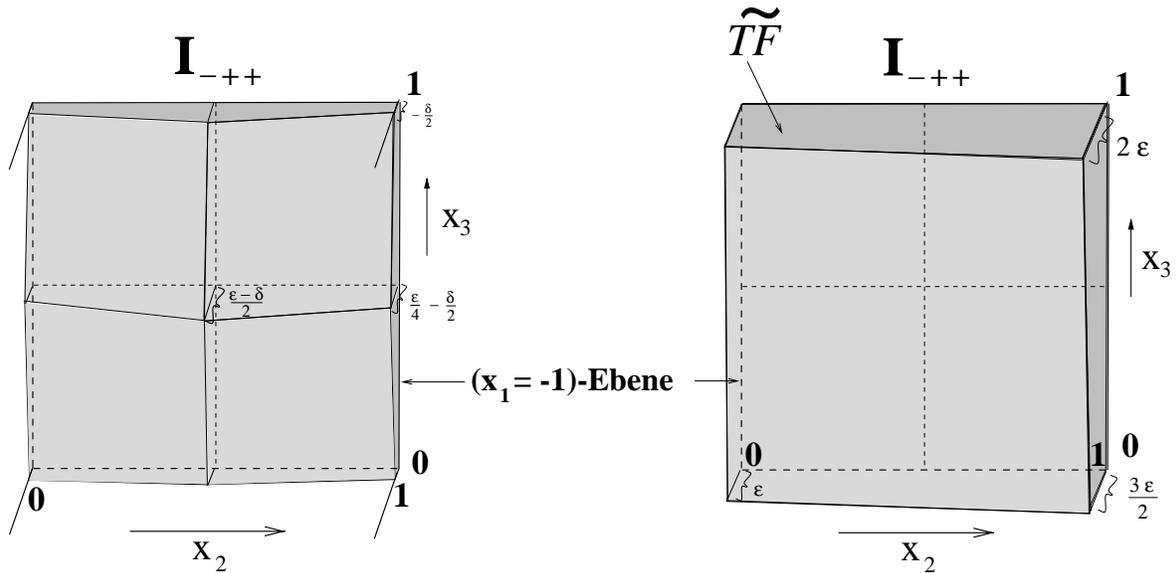


Abbildung 4.11: Links: Die vier Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++, +++}) \cap S_\gamma$, die sich in den S_γ mit $\gamma_1 = -2$ befinden, für $\delta < 0$. Jede Komponente hat die gleiche Form eines Quaderstumpfs und schließt an die $x_1 = -1$ -Ebene an. Die Stelle maximaler Höhe liegt jeweils bei $(x_2, x_2) \approx (1/2, 1/2)$. Rechts: Der Fehlvolumenteilmenge \widetilde{TF} aus Gleichung (4.81), die ebenfalls im Anschluß an die $x_1 = -1$ -Ebene liegt.

in Gleichung (4.79) folgt, daß

$$\begin{aligned} \widetilde{TF} &:= \left\{ \mathbf{x} \in I_{-++} \mid x_1 \leq \tilde{L}(x_2, x_3) \right\} \subset FV_{-++}, \text{ wobei} \\ \tilde{L}(x_2, x_3) &= -1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2}(x_2 + x_3). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Bei der linearen Funktion \tilde{L} wurden Terme der Größe $O(\epsilon^2)$ vernachlässigt. Die Menge \widetilde{TF} ist auf der rechten Seite von Abbildung 4.11 dargestellt. Ich führe eine Höhenfunktion für die Menge \widetilde{TF} in \mathbf{e}_1 -Richtung ein, die den maximalen Abstand von Punkten der Menge \widetilde{TF} mit vorgegebener (x_2, x_3) -Koordinate von der $(x_1 = -1)$ -Seite angibt:

$$\begin{aligned} h_{\widetilde{TF}}(x_2, x_3) &:= \sup \left\{ 1 + x_1 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \widetilde{TF} \right\} \\ &= \tilde{L}(x_2, x_3) + 1 = \epsilon + \frac{\epsilon}{2}(x_2 + x_3) \end{aligned} \quad (4.82)$$

Für $\delta \geq -2\epsilon$ sind die vier Komponenten von $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++, +++})$, die in den S_γ mit $\gamma_1 = -2$ liegen, in der Fehlvolumenteilmenge \widetilde{TF} enthalten. Dies sieht man am Vergleich der beiden Zeichnungen in Abbildung 4.11. Dagegen befinden sich die vier Komponenten in den S_γ mit $\gamma_1 = -1$ zum größten Teil außerhalb des Fehlvolumens. Denn in dem Bereich von I_{-++} , für den $x_1 \approx 0$ gilt, gibt es nur zwei kleine Mengen der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$, die zum Fehlvolumenteilmenge gehören. In diesen vernachlässigbaren Mengen gilt zusätzlich $x_2 \approx 1$ bzw. $x_3 \approx 1$.

Folglich ergibt sich die zweite Urbildgeneration von $OV_{-++, +++}$, falls $\delta \geq -2\epsilon$, durch

$$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(OV_{-++, +++}) = \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(OV_{-++, +++}) \cap \bigcup_{\substack{S_\gamma \subset I_{-++}, \\ \gamma_1 = -1}} S_\gamma \right).$$

Ich definiere Urbildmengen beliebiger Generation in den „vorderen“ ($\gamma_1 = -1$) und „hinteren“ ($\gamma_1 = -2$) Teilquadern S_γ auf die folgenden Weise (diese Mengen entsprechen den Mengen $F^{(k)}$ und $G^{(k)}$ aus Gleichung (4.39) beim Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{--+}$):

$$\begin{aligned} E^{(k)} &:= \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{-++}) \cap \bigcup_{\substack{S_\gamma \subset I_{-++}, \\ \gamma_1 = -1}} S_\gamma, \\ B^{(k)} &:= \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{-++}) \cap \bigcup_{\substack{S_\gamma \subset I_{-++}, \\ \gamma_1 = -2}} S_\gamma \end{aligned} \quad (4.83)$$

Ihre unendlichen Vereinigungen bezeichne ich mit

$$\Sigma_E^\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^{(k)}, \quad \Sigma_B^\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} B^{(k)}. \quad (4.84)$$

Es liegt auch bei diesem potentiellen Übergang das mittlerweile vertraute Szenario vor: die Mengen $B^{(k)}$ sind für δ -Werte oberhalb des kritischen Wertes δ_c in der Fehlvolu-
menmenge \widetilde{TF} enthalten. δ_c wird dadurch bestimmt, daß diese Enthaltenheitsrelation dann gerade nicht mehr gilt. Es gilt demnach

$$\Sigma_B^\infty \subset \widetilde{TF}, \quad \delta \geq \delta_c. \quad (4.85)$$

Für die Berechnung von δ_c ist die Bestimmung der Höhe in \mathbf{e}_1 -Richtung der Menge Σ_B^∞ wichtig.

Ich wende mich zuerst den vorderen Urbildmengen $E^{(k)}$ zu. Alle Punkte der Mengen $E^{(k)}$ haben eine x_1 -Koordinate der Größe $O(\epsilon, \delta)$. Deswegen kann ich bei der Berechnung dieser Mengen die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ durch die folgende vereinfachte Abbildung \mathbf{T}'_ϵ ersetzen, wenn ich Differenzmengen der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$ ignoriere:

$$\mathbf{T}'_\epsilon : \begin{aligned} x_1 &= 2\tilde{x}_1 + \epsilon/2 (f_0(\tilde{x}_2) + f_0(\tilde{x}_3)), \\ x_2 &= f_0(\tilde{x}_2), \\ x_3 &= f_0(\tilde{x}_3) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Die $E^{(k)}$ gehen für $\delta \geq \delta_c$ rekursiv auseinander hervor:

$$E^{(k)} = \left\{ \mathbf{x} \in \bigcup_{\substack{S_\gamma \subset I_{-++}, \\ \gamma_1 = -1}} S_\gamma \mid \mathbf{T}'_\epsilon(\mathbf{x}) = E^{(k-1)} \right\}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.87)$$

Die Mengen $E^{(k)}$ haben die folgenden Eigenschaften:

1. Jede Urbildgeneration $E^{(k)}$ besteht aus 4^k Urbildkomponenten, die alle wie die Menge $P_{(-1, 1, 1)} \cap I_{+++}$ die Form eines degenerierten Quaderstumpfs mit 7 Eckpunkten haben (siehe die Abbildungen 4.9 und 4.10). Die Projektion eines Quaderstumpfs in die (x_2, x_3) -Ebene ist ein Quadrat mit der Fläche $1/4^k$.
2. Jede Komponente, die zu $E^{(k)}$ gehört, hat als degenerierte Quaderstumpf eine Stelle maximaler Höhe in \mathbf{e}_1 -Richtung. Die (x_2, x_3) -Koordinaten dieser Stellen für die k -te Generation $E^{(k)}$ sind die Urbilder $(k-1)$ -ter Generation von $(1/2, 1/2)$. Dies ergibt sich aus der vereinfachten Abbildung \mathbf{T}'_ϵ . In Abbildung 4.10 sieht man beispielsweise, daß die maximalen Höhen der ersten Urbildgeneration $E^{(1)}$ bei $(1/2, 1/2)$ liegen.

3. Die Projektion der Menge $E^{(k)}$ auf die (x_2, x_3) -Ebene füllt die ganze Fläche $[0, 1] \times [0, 1]$ aus.
4. Die Menge $E^{(k+1)}$ lagert sich direkt an die Menge $E^{(k)}$ an; es gibt keine Lücken dazwischen.

4.6.4 Bestimmung der Höhe von Σ_E^∞

Ich definiere endlichen Vereinigungen der $E^{(k)}$:

$$\Sigma_E^n := \bigcup_{k=1}^n E^{(k)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Für jede Menge Σ_E^n definiere ich eine Rand- oder Höhenfunktion, die die x_1 -Koordinate des Randpunktes dieser Menge an der Stelle $(x_2, x_3) \in [0, 1] \times [0, 1]$ angibt:

$$\tilde{R}^{(n)}(x_2, x_3) := \inf \{x_1 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma_E^n\} \quad (4.88)$$

Aus den Eigenschaften 3 und 4 der Mengen $E^{(k)}$ und Gleichung (4.87) folgt, daß \mathbf{T}'_ϵ den Rand von Σ_E^{n+1} auf den Rand von Σ_E^n abbildet:

$$\mathbf{T}'_\epsilon \left(\left\{ (\tilde{R}^{(n+1)}(x_2, x_3), x_2, x_3) \mid (x_2, x_3) \in [0, 1] \times [0, 1] \right\} \right) = \left\{ (\tilde{R}^{(n)}(y_2, y_3), y_2, y_3) \mid (y_2, y_3) \in [0, 1] \times [0, 1] \right\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.89)$$

Aus dieser rekursiven Relation läßt sich über Induktion der folgende Ausdruck für die Randfunktionen $R^{(n)}$ herleiten:

$$\tilde{R}^{(n)}(x_2, x_3) = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} [\text{It}_{[f_0, i]}(x_2) + \text{It}_{[f_0, i]}(x_3)], \quad (4.90)$$

wobei $\text{It}_{[f_0, i]}$ nach Definition (3.67) die i -fach iterierte Zeltabbildung f_0 ist.

Ich interessiere mich für die Größe und Lage der Minima der Funktion $\tilde{R}^{(n)}(x_2, x_3)$. Hierfür kann ich Ergebnisse aus Unterabschnitt 3.8.3 benutzen, die bei der Untersuchung des Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$ im zweidimensionalen CML gewonnen wurden. Denn die dort untersuchte Randfunktion $R^{(n)}$ der zweidimensionalen Menge $\Sigma_{\mathcal{G}}^\infty$ war (siehe Gleichung (3.68))

$$R^{(n)}(x_2) = -\epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\text{It}_{[f_0, i]}(x_2)}{2^i}, \quad x_2 \in [0, 1].$$

Die Randkurve $\tilde{R}^{(n)}(x_2, x_3)$ läßt sich als

$$\tilde{R}^{(n)}(x_2, x_3) = \frac{1}{2} \left(R^{(n)}(x_2) + R^{(n)}(x_3) \right) \quad (4.91)$$

schreiben. Folglich ergeben sich für *ungerades* n die (x_2, x_3) -Koordinaten von Minima der Funktion $\tilde{R}^{(n)}$ einfach dadurch, daß die Funktion $R^{(n)}$ sowohl bei der x_2 -Koordinate als auch bei der x_3 -Koordinate ein Minimum hat. Sei $m := (n-1)/2$. Nach Gleichung (3.70) hat die Funktion $R^{(n)}(x_2)$ ein Minimum, falls

$$x_2 \in Q_n := \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{i_j}{4^j} \right) \mid i_j \in \{-1, +1\}, j = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (4.92)$$

Dann hat die Funktion $\tilde{R}^{(n)}(x_2, x_3)$ ein Minimum, falls

$$(x_2, x_3) \in Q_n \times Q_n. \quad (4.93)$$

Nach den Gleichungen (4.91) und (3.69) gilt

$$R^{(n)}(x_2, x_3) = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{1}{4^k}, \quad \text{falls } (x_2, x_3) \in Q_n \times Q_n. \quad (4.94)$$

Da die Funktionen $R^{(n)}$ gleichmäßig zur (fraktalen) Randfunktion der Menge Σ_E^∞ konvergieren, ergibt sich für diese Menge als Höhe

$$h(\Sigma_E^\infty) := \sup \{|x_1| \mid \mathbf{x} \in \Sigma_E^\infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{1}{4^k} = \frac{2}{3} \epsilon. \quad (4.95)$$

Diese Höhe wird an den unendlich vielen (x_2, x_3) -Werten erreicht, die in der Menge $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \times Q_n$ liegen.

4.6.5 Bestimmung von δ_c

Es gibt eine Beziehung für die Lage der Urbildmengen $E^{(k)}$ und $B^{(k)}$ zueinander, die analog zu der Beziehung zwischen den Mengen $F^{(k)}$ und $G^{(k)}$ in Gleichung (4.41) ist. Man betrachte für $\delta < 0$ zwei Urbilder des gleichen Punktes: ein Urbild soll in $E^{(k)}$, das andere in $B^{(k)}$ liegen. Der Abstand des Urbildes in $B^{(k)}$ von der $(x_1 = -1)$ -Seite von I_{-++} ist um $\approx -\delta/2$ größer als der Abstand des Urbildes in $E^{(k)}$ von der $(x_1 = 0)$ -Seite.

Wenn ich die Höhe der Menge Σ_B^∞ durch

$$h(\Sigma_B^\infty) := \sup \{1 + x_1 \mid \mathbf{x} \in \Sigma_B^\infty\} \quad (4.96)$$

definiere, gilt demnach

$$h(\Sigma_B^\infty) \approx h(\Sigma_E^\infty) - \frac{\delta}{2}. \quad (4.97)$$

Die (x_2, x_3) -Koordinaten, bei denen Σ_B^∞ diese Höhe erreicht, befinden sich ebenfalls in der Menge $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \times Q_n$.

Für kleiner werdendes δ wächst die Höhe der Menge Σ_B^∞ , so daß für $\delta = \delta_c$ die Teilmengenrelation (4.85) gerade noch gilt. Man kann zeigen – analog zur Rechnung im Anhang F –, daß \mathbf{p} ein Punkt ist, an dem die Menge Σ_B^∞ maximale Höhe erreicht.⁹ Dementsprechend gibt es beim kritischen Wert δ_c einen Punkt $\mathbf{p} \in \Sigma_B^\infty \cap \widetilde{TF}$, so daß

$$h(\Sigma_B^\infty) = h_{\widetilde{TF}}(p_2, p_3) = \epsilon + \frac{\epsilon}{2} (p_2 + p_3), \quad \delta = \delta_c, \quad (4.98)$$

wobei die Funktion $h_{\widetilde{TF}}$ aus Gleichung (4.82) die Höhe der Fehlvolumentmenge \widetilde{TF} beschreibt. Es gilt

$$(p_2, p_3) \in \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \times Q_n. \quad (4.99)$$

⁹Dabei benutzt man die einfache additive Form der Randfunktion $\tilde{R}^{(n)}$ (siehe Gleichung (4.91)), so daß sich die zu zeigende Ungleichung für die Randfunktionen $\tilde{R}^{(n)}$ auf die in Anhang F bewiesene Ungleichung (F.6) für die Funktionen $R^{(n)}$ zurückspielen läßt.

Da die Funktion $h_{\widetilde{TF}}$ nach Gleichung (4.98) einen Term $\epsilon(p_2 + p_3) > 0$ enthält, erreicht für kleiner werdendes δ das Maximum von Σ_B^∞ , für das $p_2 + p_3$ minimal ist, zuerst den durch die Funktion $h_{\widetilde{TF}}$ beschriebenen Rand der Menge \widetilde{TF} . Unter Benutzung der Gleichungen (4.99) und (4.92) folgt daraus

$$(p_2, p_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \quad (4.100)$$

Wenn ich diese Werte in Gleichung (4.98) einsetze und die Gleichungen (4.97) und (4.95) verwende, ergibt sich

$$\frac{2\epsilon}{3} - \frac{\delta_c}{2} \approx \frac{4\epsilon}{3}. \quad (4.101)$$

Daraus erhalte ich das kritische δ in führender Ordnung Störungstheorie:

$$\delta_c \approx -\frac{4}{3}\epsilon \quad (4.102)$$

4.6.6 Überprüfung der Übergangskriterien

Es muß noch überprüft werden, ob für $\delta < \delta_c \approx -4\epsilon/3$ der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$ möglich wird. Für einen Übergang müssen die beiden Übergangskriterien aus Unterabschnitt 3.4.3 erfüllt sein.

Nach dem ersten Kriterium müssen die Urbildmengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{-++,+++})$ für hinreichend große k das Innere von I_{-++} schneiden. Für $\delta < \delta_c$ gilt

$$\tilde{R}(k_0) := \Sigma_B^\infty \setminus FV_{-++} \neq \emptyset. \quad (4.103)$$

k_0 ist hierbei die kleinste natürliche Zahl, für die eine Menge $B^{(k)}$ sich teilweise außerhalb des Fehlvolmens befindet. Für δ knapp unterhalb von δ_c liegen die Punkte von $\tilde{R}(k_0)$ in der Nähe von

$$\left(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \quad (4.104)$$

Die Punkte der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(\tilde{R}(k_0))$ sind demnach bei

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \quad \text{oder} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right)$$

lokalisiert. Der „Sprung in das Innere“ von I_{-++} findet demnach beim Übergang von der k_0 -ten zur $(k_0 + 1)$ -ten Urbildgeneration statt. Das erste Übergangskriterium ist für $\delta < \delta_c$ erfüllt.

Damit auch das zweite Übergangskriterium erfüllt ist, sollte eine Übergangsmenge $W_{-++,+++} \subset EO_{-++,+++}$ existieren, deren Punkte bei wiederholter Iteration mit der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ das Innere von I_{+++} erreichen. Da nur die Urbildmengenkomponenten $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{-++,+++}) \cap S_\gamma$ mit $\gamma_1 = -1$ außerhalb des Fehlvolmens liegen, gilt nach der Definition (3.27)

$$EO_{-++,+++} \approx P_{(-1,1,1)} \cap I_{+++}.$$

Diese Schnittmenge ist in Abbildung 4.9 zu sehen. Die x_1 -Koordinate sollte bei wiederholter Iteration mit $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für viele Punkte $\mathbf{x} \in EO_{-++,+}$ auf Werte der Größenordnung $+1$ anwachsen. Die Iteration der x_1 -Koordinate wird durch

$$x_1' = (1 - \epsilon) f_\delta(x_1) + \frac{\epsilon}{2} (f_\delta(x_2) + f_\delta(x_3)) \quad (4.105)$$

beschrieben. Da $(x_2, x_3) \in [0, 1] \times [0, 1]$, falls $\mathbf{x} \in EO_{-++,+}$, ist für die allermeisten dieser \mathbf{x} der Kopplungsterm in der letzten Gleichung positiv. Der erste Term in Gleichung (4.105), $(1 - \epsilon) f_\delta(x_1) \approx 2x_1$, bewirkt ebenfalls eine Vergrößerung der x_1 -Koordinate. Demnach erreicht ein großer Teil der Punkte aus $EO_{-++,+}$ das Innere von I_{+++} , ohne vorher in anderen Kuben gewesen zu sein.

Für $\delta < \delta_c$ sind demnach beide Übergangskriterien erfüllt, so daß der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$ in diesem Parameterbereich stattfindet.

4.7 Zusammenfassung und Bifurkationsdiagramm

4.7.1 Zusammenfassung der Übergänge

Ich fasse die störungstheoretisch dominierenden Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$, die in diesem Kapitel untersucht wurden, zusammen. In Unterabschnitt 4.3.2 wurde der Übergang $I_{+++} \rightarrow I_{-++}$ untersucht, in den Abschnitten 4.5 und 4.6 der Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{-+-}$ bzw. $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$. Bei jedem dieser Übergänge unterscheiden sich Zielkubus I_β und Ausgangskubus I_α nur in einer Indexkomponente, dem Übergangsindex $\alpha_i \neq \beta_i$. Ich kann alle störungstheoretisch dominanten Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ in drei Typen einteilen:

Typ (a): Der Übergangsindex ist das gleiche Vorzeichen wie die beiden Nachbarindizes (der Indexvektor α ist „rein“). Ein Beispiel für diesen Übergangstyp ist der in Unterabschnitt 4.3.2 untersuchte Übergang $I_{+++} \rightarrow I_{-++}$. Dabei ergab sich, daß Übergangstyp (a) möglich wird, sobald $\delta < 0$.

Typ (b): Die beiden Nachbarindizes des Übergangsindex sind voneinander verschiedene Vorzeichen. Daraus folgt, daß bei diesem Übergangstyp α und β gemischte Indexvektoren sind. Ein Beispiel ist der in Abschnitt 4.5 untersuchte Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{-+-}$. Der kritische δ -Wert ist $-2\epsilon/3$.

Typ (c): Die beiden Nachbarindizes des Übergangsindex sind untereinander gleich, aber verschieden vom Übergangsindex. Folglich ist α ein gemischter Indexvektor und β ein reiner. Der in Abschnitt 4.6 studierte Übergang $I_{-++} \rightarrow I_{+++}$ gehört zu diesem Typ. Das kritische δ ist $-4\epsilon/3$.

Der Übergang vom Typ (b) hat kein Pendant im Fall des CMLs mit $N = 2$. Man sieht, daß um so mehr Übergänge möglich sind, je kleiner δ/ϵ ist.

Die Methode zur Bestimmung der kritischen δ -Werten war für die verschiedenen betrachteten Übergänge dieselbe. Bei einem Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ mit Übergangsindex α_i wird die Vereinigung aller Urbildmengen der Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ betrachtet, die sich in der Nähe der $|x_i| = 1$ -Seitenfläche von I_α befinden. Im Anschluß an diese Seitenfläche liegt auch eine Teilmenge des Fehlvolumens FV_α . Für $\delta \geq \delta_c$ ist die betrachtete Vereinigung der Urbildmengen in dieser Fehlvolumenteilmenge enthalten. Sobald $\delta < \delta_c$, gilt diese Teilmengenrelation nicht mehr und die Urbilder der Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ liegen auch im Innern von I_α („Sprung in die Mitte“). Erst dann wird der Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ möglich.

Die Größe von δ_c für einen Übergang hängt zum einen von der Dicke des Fehlvolumens in der Nähe der $|x_i| = 1$ -Seitenfläche ab. Dieser Teil des Fehlvolumens hängt nur von ϵ ab. Zum anderen wird δ_c durch die Höhe der Vereinigung der Urbildmengen bestimmt, die von δ über den Summanden $-\delta/2$ abhängt. Aus diesen beiden Abhängigkeiten erklärt sich, daß die kritischen δ -Werte der Übergänge linear von ϵ abhängen:

$$\delta_c(\epsilon) = c\epsilon$$

Für die verschiedenen Übergangstypen ergeben sich unterschiedliche Konstanten c .

4.7.2 Die Parameterbereiche

Aus diesen drei Übergangstypen ergeben sich vier Parameterbereiche, in denen das CML ein qualitativ verschiedenes ergodisches Verhalten zeigt. Die Grenzen zwischen zwei Parameterbereichen werden durch die kritischen δ -Werte bestimmt, bei denen einer der drei Übergangstypen möglich wird.

Wie schon mehrfach gesagt, sind die Attraktoren des CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ endliche Vereinigungen von Kuben, wenn ich von Differenzmengen mit Volumen $O(\epsilon, \delta)$ absehe. Diese Näherung wird im folgenden nicht immer wieder erwähnt, so daß ich z. B. einen Kubus als Attraktor bezeichne. Ich erläutere die einzelnen Parameterbereiche:

1. Parameterbereich: $\delta \geq 0$

Es gibt keine Übergänge zwischen Kuben. Deswegen ist jeder Kubus I_α ein Attraktor. In diesem Parameterbereich hat das CML acht koexistierende Attraktoren.

2. Parameterbereich: $-2\epsilon/3 \leq \delta < 0$

Der Übergangstyp (a) ist möglich. Aus den sechs I_α mit gemischtem Indexvektor führt kein Übergang heraus, so daß in diesen Kuben weiterhin jeweils ein Attraktor besteht. Dagegen erreichen die Trajektorien von (fast) allen Startpunkten aus I_{+++} und I_{---} schließlich durch einen Übergang vom Typ (a) einen dieser sechs Attraktoren. Die Attraktoren in den beiden Diagonalkuben haben sich aufgelöst.

Es gibt in diesem Parameterbereich sechs koexistierende Attraktoren.

3. Parameterbereich: $-4\epsilon/3 \leq \delta < -2\epsilon/3$

Übergänge vom Typ (a) und vom Typ (b) sind möglich. Durch die 12 möglichen Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$, wobei α und β gemischte Indexvektoren sind, schließen sich die sechs Kuben mit gemischtem Indexvektor zu einem Attraktor zusammen. Dieser umfaßt diese sechs Kuben und ist topologisch äquivalent zu einem Ring im dreidimensionalen Raum.

Punkte aus I_{+++} und I_{---} liegen im Anziehungsbassin dieses Attraktors. Im vorliegenden Parameterbereich existiert nur noch ein Attraktor für das CML.

4. Parameterbereich: $\delta < -4\epsilon/3$

Alle drei Übergangstypen sind möglich. Es gibt nur noch einen Attraktor, der – wie im Fall $N = 2$ – alle Kuben umfaßt. Der Attraktor des 3. Parameterbereichs vergrößert sich sprunghaft um die Kuben I_{+++} und I_{---} , sobald $\delta < -4\epsilon/3$.

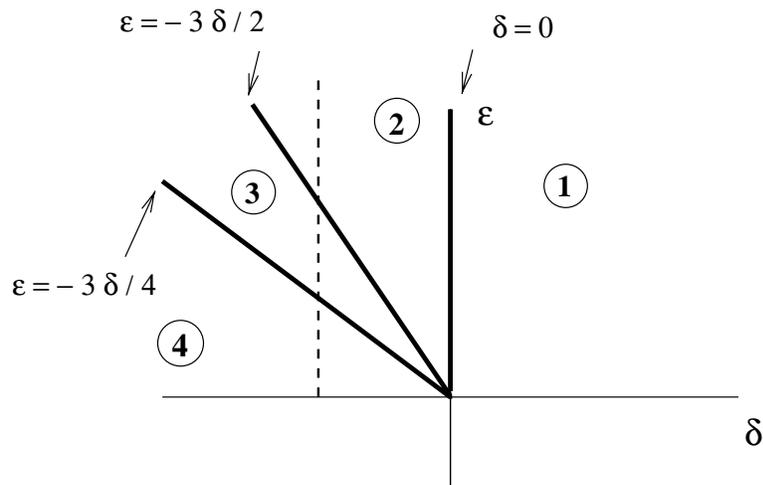


Abbildung 4.12: Das Bifurkationsdiagramm für die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ im Fall $N = 3$. Man sieht die vier Parameterbereiche zwischen den Bifurkationslinien. Die vertikale gestrichelte Linie dient nur zur Veranschaulichung für eine Argumentation in Abschnitt 5.5.

Bifurkationsdiagramm

In Abbildung 4.12 ist abschließend das Bifurkationsdiagramm (Phasendiagramm) des CMLs für $N = 3$ zu sehen. Zwischen den Bifurkationslinien des Diagramms sind die vier Parameterbereiche eingeschlossen.

Kapitel 5

Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für $N > 3$

Der Leser könnte befürchten, daß das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ nach den Fällen $N = 2$ und $N = 3$ nun der Reihe nach detailliert für $N = 4$, $N = 5$, $N = 6$ u. s. w. untersucht wird. Diese Befürchtung ist unbegründet, da ich in diesem Kapitel zeige, wie die Dynamik eines CMLs allgemein für $N > 3$ behandelt werden kann. Denn es kommt bei einem Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ nur auf drei aufeinanderfolgende Indexkomponenten α_{i-1} , α_i und α_{i+1} an. Das CML bei $N = 3$ enthält deshalb schon alle störungstheoretisch dominanten Übergangstypen. Auch die kritischen δ -Werte, bei denen diese Übergänge möglich werden, sind von N unabhängig. Im Abschnitt 5.2 werde ich diese Unabhängigkeit der Übergänge von N für $N \geq 3$, die letztlich für die störungstheoretische Lösbarkeit des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für beliebiges N sorgt, ausführlich begründen. An dieser Stelle führe ich nur die beiden folgenden Tatsachen als plausible Erklärung an:

- *Lokale Kopplung*: Die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ koppelt gemäß Gleichung (2.6) in jedem Iterationsschritt die drei Gitterplatzkoordinaten x_{i-1} , x_i , x_{i+1} zum Bildwert x'_i zusammen.
- Im störungstheoretischen Bereich ($\epsilon, \delta \ll 1$) gilt auch für endlich viele Iterationsschritte die Dominanz der Kopplung an die beiden nächsten Nachbarn. Denn Wechselwirkungen des i -ten Gitterplatzes mit Gitterplätzen, die weiter als einen Platz entfernt sind, haben einen Vorfaktor, der höchstens die Größenordnung ϵ^2 besitzt.

In diesem Kapitel kann ich die Untersuchungen des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$, was die Nichtlineare Dynamik bzw. die Theorie dynamischer Systeme betrifft, abschließen.

Ich starte in Abschnitt 5.1 wieder mit Eigenschaften der N -dimensionalen Parallelepipede P_γ , die im weiteren Verlauf des Kapitels noch gebraucht werden. Nach der Rückführung auf das CML bei $N = 3$ in Abschnitt 5.2 kann ich N -dimensionale Übergänge in Abschnitt 5.3 klassifizieren, wenn ich mich auf die in führende Ordnung beschränke. Es ergeben sich wieder die Übergänge vom Typ (a), (b) und (c) aus Abschnitt 4.7. In Abschnitt 5.4 wird dann das ergodische Verhalten des CMLs in den verschiedenen Parameterbereichen erläutert, die sich in Zahl und Größe der koexistierenden Attraktoren deutlich voneinander unterscheiden. Schließlich werden in Abschnitt 5.5 die kontraintuitiven Auswirkungen angesprochen, die sich für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ aus einer Erhöhung der Kopplung ϵ ergeben.

5.1 Eigenschaften der Parallelepipede P_γ

Wie in den beiden Kapiteln zu $N = 2$ und $N = 3$ beginne ich mit allgemeinen Eigenschaften der N -dimensionalen Parallelepipede. Diese sind durch

$$P_\gamma = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(S_\gamma)$$

gegeben, wobei die Teilkuben $S_\gamma \subset I_\alpha$ in Gleichung 2.7 definiert wurden.

Die N -dimensionalen Parallelepipede P_γ haben $2N$ Seitenflächen. Auf jeweils zwei Seiten steht der Vektor \mathbf{e}_i senkrecht. Analog zur Definition (4.2) für $N = 3$ definiere ich für allgemeines N :

$$\begin{aligned} K_>(\gamma, i) &:= \{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S_\gamma, x_i = x_>(\gamma_i) \} , \\ K_<(\gamma, i) &:= \{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S_\gamma, x_i = x_<(\gamma_i) \} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ich benötige später die folgenden Eigenschaften der Parallelepipede:

1. Wenn ich durch die Seitenflächen $K_<(\gamma, i)$ und $K_<(\tilde{\gamma}, i)$ jeweils eine $(N - 1)$ -dimensionale Hyperfläche lege, so sind diese Hyperflächen zueinander parallel für zwei beliebige $\gamma, \tilde{\gamma}$. Natürlich gilt dies auch wieder für die Seitenflächen $K_>(\gamma, i)$ und $K_>(\tilde{\gamma}, i)$.

Begründung: der Beweis für den Fall $N = 3$ auf Seite 57 kann leicht auf ein allgemeines N übertragen werden.

2. Die Parallelepipede P_γ sind im störungstheoretischen Bereich leicht deformierte Kuben I_α , wobei $S_\gamma \subset I_\alpha$. Denn jeder Eckpunkt von P_γ hat eine Distanz der Größe $O(\epsilon, \delta)$ zum nächstgelegenen Eckpunkt von I_α . Dies läßt sich leicht aus der Struktur der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ zeigen, da für $\epsilon = \delta = 0$ gilt $P_\gamma = I_\alpha$.
3. Betrachte $S_\gamma, S_{\tilde{\gamma}} \subset I_\alpha$. Ich lege durch die Seiten $K_>(\gamma, i)$ und $K_>(\tilde{\gamma}, i)$ der zugehörigen Parallelogramme jeweils eine $(N - 1)$ -dimensionale Hyperfläche. Dann sind diese beiden Hyperflächen identisch.

Begründung: Auch hier geht der Beweis ganz analog zum Fall $N = 3$ (siehe Punkt 4 von Unterabschnitt 4.2.2); denn der Punkt

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta} \left(\sum_{k=1}^N x_>(\gamma_k) \cdot \mathbf{e}_k \right)$$

gehört zu beiden Hyperflächen. Außerdem sind die beiden Hyperflächen nach Punkt 1 parallel.

5.2 Rückführung der Übergänge auf $N = 3$

In diesem Abschnitt begründe ich, warum sich die Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ für das N -dimensionale CML mit dem Wissen über das CML für $N = 3$ klassifizieren lassen.

Die störungstheoretisch dominanten Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ des N -dimensionalen CML sind solche, bei denen I_α und I_β eine gemeinsame $(N - 1)$ -dimensionale Seitenfläche haben. Denn für die I_β mit gemeinsamer Seitenfläche können die Schnittmengen $P_\gamma \cap I_\beta$, ($S_\gamma \subset I_\beta$) um eine Größenordnung $1/\epsilon$ bzw. $1/\delta$ größer werden als für die

Prisma P :

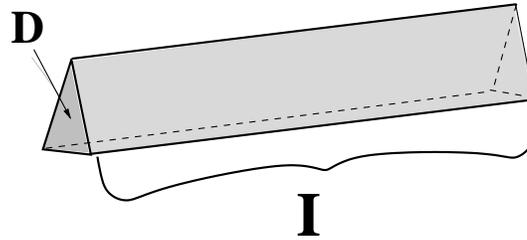


Abbildung 5.1: Das dreidimensionale Prisma P ist eine Produktmenge von einem Dreieck D und einem Intervall I .

anderen I_β . Die Indexvektoren α und β unterscheiden sich bei einer gemeinsamen Seitenfläche nur in einer Komponente :

$$\alpha_i \neq \beta_i, \quad \alpha_j = \beta_j \quad \forall j \neq i.$$

Im folgenden zeige ich, daß *in führender Ordnung Störungstheorie* für den Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ der Übergangindex α_i und seine beiden Nachbarindizes wichtig sind. Der Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ mit $\alpha_i \neq \beta_i$ verhält sich demzufolge wie der Übergang

$$I_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}} \rightarrow I_{\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1}}$$

des dreidimensionalen CMLs. Dies gilt für seinen kritischen δ -Wert und – wie erst im nächsten Kapitel gezeigt wird – auch für seine Stärke bei gegebenen Parametern ϵ, δ . Zur Begründung betrachte ich für ein allgemeines N nacheinander die Schnittmengen $P_\gamma \cap I_\beta$, das Fehlvolumen und die Urbilder der Überlappmengen. Ich zeige jedesmal, daß diese N -dimensionale Menge näherungsweise ein direktes Produkt einer dreidimensionalen Menge mit einem $(N-3)$ -dimensionalen Kubus ist. Diese Produktstruktur veranschauliche ich in Abbildung 5.1, in der ein dreidimensionales Prisma P dargestellt ist. Dieses läßt sich als Produkt eines zweidimensionalen Dreiecks D und eines Intervalls I auffassen:

$$P = D \times I$$

Die dreidimensionale Menge P ist eine (unendliche) Vereinigung von gegeneinander verschobenen Dreiecken.

5.2.1 Die Schnittmengen $P_\gamma \cap I_\beta$

In diesem Unterabschnitt zeige ich, daß *in führender Ordnung Störungstheorie* gilt:

$$P_\gamma \cap I_\beta \approx (P_{\gamma_{i-1} \gamma_i \gamma_{i+1}} \cap I_{\beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}}) \times I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N} \quad (5.2)$$

Hierbei ist $I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N}$ der $(N-3)$ -dimensionale Kubus, der sich aus I_α durch Projektion auf den $(N-3)$ -dimensionalen, zu $\text{span}\{\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}\}$ Unterraum ergibt. Gleichung (5.2) ist so zu verstehen, daß für einen N -dimensionalen Vektor $\mathbf{x} \in P_\gamma \cap I_\beta$ gilt:

$$\begin{aligned} (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) &\in P_{\gamma_{i-1} \gamma_i \gamma_{i+1}} \cap I_{\beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}}, \\ (x_1, \dots, x_{i-2}, x_{i+2}, \dots, x_N) &\in I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N} \end{aligned}$$

Begründung von Gleichung (5.2): Wenn ich das Parallelogramm P_γ als Bildmenge von S_γ unter der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ parametrisiere, läßt sich die Schnittmenge folgendermaßen schreiben:

$$P_\gamma \cap I_\beta = \{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \cap I_\beta \mid \mathbf{x} \in S_\gamma \} = \left\{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S_\gamma \wedge \prod_{j=1}^N \theta(\beta_j [\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x})]_j) \neq 0 \right\} \quad (5.3)$$

Hierbei ist $\theta(x)$ die Heaviside-Funktion. Das Produkt der N Heaviside-Funktionen in Gleichung (5.3) sorgt dafür, daß die Punkte in I_β liegen:

$$\mathbf{y} \in I_\beta \iff \prod_{j=1}^N \theta(\beta_j y_j) = 1$$

Da die P_γ leicht deformierte Kuben I_α sind (Punkt 2 von Abschnitt 5.1) und $\beta_j = \alpha_j$, falls $j \neq i$, gilt für die meisten $x_j \in J(\gamma_j)$

$$\beta_j [(1 - \epsilon) f_\delta(x_j) + \epsilon/2 (f_\delta(x_{j-1}) + f_\delta(x_{j+1}))] > 0, \quad (5.4)$$

Präziser: diese Ungleichung gilt höchstens auf zwei Randintervallen von $J(\gamma_j)$ nicht, die unabhängig von x_{j-1} und x_{j+1} gewählt werden können und eine Länge $O(\epsilon, \delta)$ besitzen. Demzufolge gilt näherungsweise

$$P_\gamma \cap I_\beta \approx \{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S_\gamma \wedge \theta(\beta_i [\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x})]_i) \neq 0 \}. \quad (5.5)$$

Die Differenz dieses approximativen zum exakten Ausdruck für $P_\gamma \cap I_\beta$ ist in führender Ordnung Störungstheorie vernachlässigbar. Die verbleibende θ -Funktion in Gleichung (5.5) ist nur abhängig von den Koordinaten x_{i-1} , x_i und x_{i+1} . Daraus folgt Gleichung (5.2).

Aus Gleichung (5.2) ergibt sich bei der Untersuchung eines Übergangs $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ mit Übergangsindex α_i eine große Vereinfachung: denn nach dieser Gleichung gibt es unter den 2^N Schnittmengen $P_\gamma \cap I_\beta$ höchstens acht verschiedene Größen, die den Kombinationen von γ_{i-1} , γ_i und γ_{i+1} entsprechen. Bei den Rechnungen im letzten Kapitel zu den Übergängen des CMLs für $N = 3$ zeigte sich für $S_{\gamma_{i-1} \gamma_i \gamma_{i+1}}$, $S_{\tilde{\gamma}_{i-1} \tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_{i+1}} \subset I_\alpha$:

$$P_{\gamma_{i-1} \gamma_i \gamma_{i+1}} \cap I_{\beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}} \approx P_{\tilde{\gamma}_{i-1} \tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_{i+1}} \cap I_{\beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}}, \quad \text{falls } \gamma_i = \tilde{\gamma}_i.$$

Somit gibt es näherungsweise nur zwei verschiedene Schnittmengen $P_\gamma \cap I_\beta$, nämlich die mit $|\gamma_i| = 1$ bzw. $|\gamma_i| = 2$.

Wenn ich in Gleichung (5.3) die Funktion $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ durch die vereinfachte Funktion

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}(i) : \quad \begin{aligned} x'_i &= (1 - \epsilon) f_\delta(x_i) + \frac{\epsilon}{2} (f_\delta(x_{i-1}) + f_\delta(x_{i+1})), \\ x'_j &= f_\delta(x_j), \quad \forall j \neq i \end{aligned} \quad (5.6)$$

ersetze, ergibt sich das Ergebnis in Gleichung (5.2) sofort. Die obige Rechnung zeigt somit, daß ich näherungsweise die Abbildung $\tilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}(i)$ bei der Berechnung der Schnittmengen $P_\gamma \cap I_\beta$ verwenden kann, wenn ich einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ mit Übergangsindex α_i betrachte.

Da die Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ nach Gleichung (3.5) eine Vereinigung von Schnittmengen ist, läßt sich auch diese Menge als Produkt schreiben:

$$OV_{\alpha,\beta} \approx OV_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}, \beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}} \times I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N} \quad (5.7)$$

5.2.2 Urbilder der Überlappmenge

Ich untersuche als nächstes die zur Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ gehörenden Urbildmengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta})$, wobei ich wieder einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ mit $\alpha_i \neq \beta_i$ betrachte.

Da $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ eine schwach gestörte Zeltabbildung ist, haben die Urbildmengen der Überlappmenge – wie diese Menge selbst – in \mathbf{e}_i -Richtung eine Ausdehnung, die um einen Faktor der Größe $O(\epsilon, \delta)$ kleiner ist als die Ausdehnungen in den $(N - 1)$ übrigen Richtungen \mathbf{e}_j , ($j \neq i$). Deswegen kann ich näherungsweise bei der Berechnung der Urbildmengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta})$ die vereinfachte Abbildung $\widetilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}(i)$ aus Gleichung (5.6) verwenden.¹ In der Abbildung $\widetilde{\mathbf{T}}_{\epsilon,\delta}(i)$ werden die x_j mit $j \neq i$ nur noch über die deformierte Zeltabbildung f_δ iteriert. Damit ergibt sich auch für die Urbildmengen die folgende Produktstruktur:

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta}) \approx \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}, \beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}}) \times I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N}, \quad k \geq 1 \quad (5.8)$$

Auf der rechten Seite steht wieder das Produkt einer dreidimensionalen Urbildmenge, in der sich die (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) -Koordinaten befinden, mit einem $(N - 3)$ -dimensionalen Würfel, in dem die restlichen Koordinaten liegen. Je kleiner ϵ und δ sind, desto höher ist die Generation k der Urbildmengen, bis zu der Gleichung (5.8) gültig ist.

5.2.3 Das Fehlvolumen FV_α

Bei der Analyse des CML für $N = 2$ und $N = 3$ haben wir gesehen, daß bei der Berechnung des kritischen δ -Wertes für einen Übergang das Fehlvolumen in I_α eine wichtige Rolle spielt. Deshalb untersuche ich nun die Menge FV_α für allgemeines N .

Bei einem Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ mit Übergangsindex α_i haben die Punkte der Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$ eine x_i -Koordinate der Größenordnung $O(\epsilon, \delta)$. Deswegen liegen Teile der Urbildmengen $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(OV_{\alpha,\beta})$ in der Nähe der Seitenfläche von I_α mit $|x_i| = 1$. Im Anschluß an diese Seitenfläche liegt auch eine Teilmenge des Fehlvolumens FV_α (siehe beispielsweise im letzten Kapitel die Mengen TF und \widetilde{TF} in Gleichung (4.33) bzw. (4.81)).

Die Teilmenge des Fehlvolumens mit $|x_i| \approx 1$ umfaßt die Punkte aus I_α , die jenseits der durch die Parallelogrammseiten $K_{>}(\gamma, i)$ gelegten Hyperebene liegen. In Punkt 3 von Abschnitt 5.1 wurde gezeigt, daß durch die Seiten $K_{>}(\gamma, i)$ eine gemeinsame Hyperebene gelegt werden kann. Die $(N - 1)$ -dimensionale Hyperebene kann durch die Gleichung

$$x_i = L_{>}^{(i)}(x_j, (j \neq i)) \quad (5.9)$$

beschrieben werden, wobei die Funktion $L_{>}^{(i)}$ von den $(N - 1)$ Variablen x_j mit $j \neq i$ linear abhängt. Die gesuchte Teilmenge von FV_α ist dann

$$TF_\alpha(i) := \left\{ \mathbf{x} \in I_\alpha \mid |x_i| \geq \left| L_{>}^{(i)}(x_j, (j \neq i)) \right| \right\} \subset FV_\alpha. \quad (5.10)$$

Um auch in der N -dimensionalen Menge $TF_\alpha(i)$ eine Produktstruktur analog zu der für die Überlappmenge und ihre Urbildmenge zu erhalten, berechne ich die Funktion $L_{>}^{(i)}$. Für jeden Kubus I_α gibt es einen Teilquader $S_{\tilde{\gamma}}$ mit $|\tilde{\gamma}_k| = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$.

¹Analoge Näherungen zur Abbildung wurden beispielsweise für verschiedene Übergänge im Fall $N = 3$ in den Gleichungen (4.23), (4.32) und (4.44) vorgenommen.

Die durch die Funktion $L_{>}^{(i)}$ beschriebene Hyperfläche enthält die Parallelepipedseite $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$. Die $\mathbf{x} \in K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$ lassen sich durch

$$\mathbf{x} = A(\tilde{\gamma}) \cdot \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad y_i = x_{>}(\tilde{\gamma}_i), \quad y_j \in J(\tilde{\gamma}_j) \quad (j \neq i) \quad (5.11)$$

parametrisieren. Dabei gilt: $x_{>}(\tilde{\gamma}_i) = +a$ für $\alpha_i = +$ und $x_{>}(\tilde{\gamma}_i) = -a$ für $\alpha_i = -$.

Die $N \times N$ -Matrix $A(\tilde{\gamma})$ ist hierbei (vgl. die Matrix $A(\gamma)$ für $N = 3$ in Gleichung (4.5)):

$$A(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} (1 - \epsilon) & \epsilon/2 & \cdots & \epsilon/2 \\ \epsilon/2 & (1 - \epsilon) & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon/2 \\ \epsilon/2 & 0 & \cdots & (1 - \epsilon) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Folglich gilt

$$x_i = (1 - \epsilon) \frac{x_{>}(\tilde{\gamma}_i)}{a} + \frac{\epsilon}{2a} (y_{i-1} + y_{i+1}) . \quad (5.13)$$

Um aus dieser Gleichung die Funktion $L_{>}^{(i)}$ zu erhalten, muß ich y_{i-1} und y_{i+1} durch den Vektor $\mathbf{x} \in K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$ ausdrücken. Aus Gleichung (5.11) folgt

$$\mathbf{y} = A^{-1}(\tilde{\gamma}) \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in K_{>}(\tilde{\gamma}, i) . \quad (5.14)$$

Zur Bestimmung der inversen Matrix $A^{-1}(\tilde{\gamma})$ schreibe ich die Matrix $A(\tilde{\gamma})$ aus Gleichung (5.12) störungstheoretisch als

$$A(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{a} Id + O(\epsilon) .$$

Hierbei ist Id die N -dimensionale Einheitsmatrix. Aus der letzten Gleichung folgt für die Inverse $A^{-1}(\tilde{\gamma})$:

$$A^{-1}(\tilde{\gamma}) = a Id + O(\epsilon) \quad (5.15)$$

Aus Gleichung (5.14) erhalte ich dann

$$y_{i-1} = a x_{i-1} + O(\epsilon), \quad y_{i+1} = a x_{i+1} + O(\epsilon) .$$

Wenn man dies in Gleichung (5.13) einsetzt, ergibt sich schließlich

$$x_i = (1 - \epsilon) \frac{x_{>}(\tilde{\gamma}_i)}{a} + \frac{\epsilon}{2} (x_{i-1} + x_{i+1}) + O(\epsilon^2) . \quad (5.16)$$

Wenn in dieser Gleichung für die Koordinaten x_j ($j \neq i$) ganz \mathbb{R} als Definitionsbereich zugelassen wird, erhalte ich die Gleichung für die Hyperebene durch die Seite $K_{>}(\tilde{\gamma}, i)$. Somit ergibt sich der folgende störungstheoretische Ausdruck für die Funktion $L_{>}^{(i)}$:

$$L_{>}^{(i)}(x_j, (j \neq i)) = \alpha_i (1 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{2} (x_{i-1} + x_{i+1}) + O(\epsilon^2) . \quad (5.17)$$

Ich vernachlässige die Korrekturen der Größe $O(\epsilon^2)$ und definiere die genäherte Funktion

$$\tilde{L}_{>}^{(i)}(x_{i-1}, x_{i+1}) := \alpha_i (1 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{2} (x_{i-1} + x_{i+1}) , \quad (5.18)$$

die nur noch von x_{i-1} und x_{i+1} abhängt.

Wenn in Gleichung (5.10) statt der Funktion $L_{>}^{(i)}$ die approximative Funktion $\tilde{L}_{>}^{(i)}$ verwendet wird, ergibt sich auch für die Menge $TF_{\alpha}(i)$ die gesuchte Produktstruktur

$$TF_{\alpha}(i) \approx \left\{ (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \in I_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}} \mid |x_i| \geq \left| \tilde{L}_{>}^{(i)}(x_{i-1}, x_{i+1}) \right| \right\} \\ \times I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N} . \quad (5.19)$$

Die erste Menge des Produkts ist eine dreidimensionale Menge, die aus (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) -Tripeln besteht.

5.2.4 Die effektive Überlappmenge $EO_{\alpha, \beta}$ und ihre Teilmenge $W_{\alpha, \beta}$

Nach Gleichung (3.28) ergibt sich die effektive Überlappmenge $EO_{\alpha, \beta}$ aus der Überlappmenge $OV_{\alpha, \beta}$, indem man die Punkte aus $OV_{\alpha, \beta}$ wegläßt, die nur Urbilder im Fehlvolumen FV_{α} haben. Da ich für die Überlappmenge und das Fehlvolumen schon eine Produktstruktur nachgewiesen habe (siehe Gleichung (5.7) bzw. (5.19)), gilt auch für die effektive Überlappmenge

$$EO_{\alpha, \beta} \approx EO_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}, \beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}} \times I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N} \quad (5.20)$$

Die Übergangsmenge $W_{\alpha, \beta} \subset EO_{\alpha, \beta}$ besteht aus den Punkten von $\mathbf{y} \in EO_{\alpha, \beta}$, die in endlich vielen Schritten das Innere von I_{β} erreichen. Dafür muß hauptsächlich die x_i -Koordinate anwachsen; denn diese ist für alle Punkte aus der Menge $EO_{\alpha, \beta}$ von der Größe $O(\epsilon, \delta)$. Bei endlich vielen Iterationen mit der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ sind für die x_i -Koordinate der Iterierten näherungsweise nur die drei Komponenten (y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) des Startpunkts $\mathbf{y} \in EO_{\alpha, \beta}$ relevant; denn die Werte der anderen $(N-3)$ Komponenten liefern nur Beiträge der Größe $O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta)$. Demnach gilt auch für die Übergangsmenge

$$W_{\alpha, \beta} \approx W_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}, \beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}} \times I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N} . \quad (5.21)$$

5.3 N -dimensionale Übergänge

Bei der Analyse eines Übergangs $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ mit Übergangsindex α_i ergibt sich dieselbe Struktur für die Mengen $OV_{\alpha, \beta}$, ihre Urbildmengen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{\alpha, \beta})$ und die Fehlvolumenmenge $TF_{\alpha}(i)$ (siehe die Gleichungen (5.7), (5.8) und (5.19)): diese Mengen sind ein direktes Produkt eines $(N-3)$ -dimensionalen Kubus mit einer dreidimensionalen Menge, die schon beim Übergang

$$I_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}} \rightarrow I_{\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1}}$$

des CMLs für $N=3$ auftritt.

Bei der Bestimmung des kritischen δ -Wertes δ_c für einen Übergang mit Übergangsindex α_i müssen – wie wir in den letzten beiden Kapiteln gesehen haben – die Urbildmengen von $OV_{\alpha, \beta}$ untersucht werden, die sich in der Nähe der $|x_i|=1$ -Seitenflächen von I_{α} befinden. Denn ob der Übergang bei gegebenen Parametern möglich ist, hängt vor allem davon ab, ob dieser Teil der Urbildmengen in der Fehlvolumenmenge $TF_{\alpha}(i)$ enthalten ist. Bei der Überprüfung dieser Teilmengenrelation spielen nur die dreidimensionalen Faktoren der Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(OV_{\alpha, \beta})$ und $TF_{\alpha}(i)$ eine Rolle, in denen die x_{i-1} -, x_i - und x_{i+1} -Koordinaten von Punkten dieser Mengen liegen. Dagegen sind

die $(N - 3)$ Indizes α_j mit $j \notin \{i - 1, i, i + 1\}$ für den Übergang unwichtig, da der Würfel $I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2} \dots \alpha_N}$ für alle Mengen der gleiche ist. Durch diesen Würfel kann sozusagen „gekürzt“ werden.

Da die dreidimensionalen Faktoren aller für den Übergang relevanten N -dimensionalen Mengen zu den Mengen des Übergangs $I_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}} \rightarrow I_{\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1}}$ korrespondieren, gilt: *Der kritische Wert δ_c für den Übergang $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ des N -dimensionalen CMLs mit Übergangsindex α_i ist in führender Ordnung Störungstheorie der gleiche wie für den Übergang $I_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}} \rightarrow I_{\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1}}$ des dreidimensionalen CMLs.*

Im letzten Kapitel wurden für das CML mit $N = 3$ die jeweiligen kritischen Werte $\delta_c(\epsilon)$ für die drei Übergangstypen (a), (b) und (c) bestimmt.

Der N -dimensionale Übergang $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ findet für $\delta < \delta_c$ statt, da – wie ich nun zeigen werde – auch das zweite Übergangskriterium erfüllt ist. Dieses Kriterium verlangt, daß die Übergangsmenge $W_{\alpha,\beta} \subset EO_{\alpha,\beta}$ nicht leer ist. Da die Menge $W_{\alpha,\beta}$ nach Gleichung (5.21) ebenfalls eine Produktstruktur hat, läßt sich die Frage nach dem Maß von $W_{\alpha,\beta}$ auf $N = 3$ zurückspielen. Für $N = 3$ ergab sich im letzten Kapitel, daß für die Übergänge vom Typ (a), (b) und (c) die dreidimensionale Übergangsmenge $W_{\alpha,\beta}$ ein endliches Maß besitzt, falls δ kleiner als das δ_c des entsprechenden Übergangs ist.

Für die N -dimensionalen Übergänge ergibt sich demnach in Störungstheorie folgendes Bild: bei einem Übergang $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ ändert sich in führender Ordnung Störungstheorie genau eine Indexkomponente. Ein Übergang $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ mit $\beta_i \neq \alpha_i$ ist bei gegebenen Parametern möglich, falls δ kleiner als der kritische Wert $\delta_c(\epsilon)$ des Übergangs $I_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}} \rightarrow I_{\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1}}$ ist. Demnach sind bei einem Übergang $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ vom Indexvektor α nur der Übergangsindex α_i und seine beiden Nachbarindizes α_{i-1} und α_{i+1} wichtig. Folglich gibt es auch für allgemeines N nur die drei Typen von Übergängen $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$, die schon in Abschnitt 4.7.1 vorgestellt wurden:

Typ (a): Der Übergangsindex α_i ist das gleiche Vorzeichen wie die beiden Nachbarindizes α_{i-1} und α_{i+1} . Der kritische δ -Wert für diesen Übergangstyp ist $\delta_c = 0$.

Typ (b): Die Nachbarindizes α_{i-1} und α_{i+1} des Übergangsindex α_i sind verschiedene Vorzeichen. Für diese Übergänge ist der kritische Wert $\approx -2 \epsilon/3$.

Typ (c): Der Übergangsindex α_i ist verschieden von beiden Nachbarindizes, für die $\alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$ gilt. Der kritische δ -Wert ist $\approx -4 \epsilon/3$. Dieser Übergangstyp ist invers zu Übergang (a), d. h. falls $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ vom Typ (a) ist, ist $I_{\beta} \rightarrow I_{\alpha}$ vom Typ (c).

Wenn man Korrekturen zur führenden Ordnung Störungstheorie berechnete, was sehr aufwendig wäre, erwarte ich die folgenden Eigenschaften der N -dimensionalen Übergänge:

- Der kritische δ -Wert eines Übergangs $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ mit Übergangsindex α_i hängt auch von den anderen Indexkomponenten $\alpha_j \notin \{\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ ab. Es gibt demnach eine Aufspaltung der δ_c -Werte, die zu den drei Übergangstypen (a), (b) und (c) gehören. Dabei ist es wahrscheinlich, daß die beiden übernächsten Nachbarn des Übergangsindex, die Indizes α_{i-2} und α_{i+2} , einen größeren Einfluß auf den δ_c -Wert haben als die Indizes der von α_i weiter entfernten Gitterplätze.
- Es werden auch Übergänge $I_{\alpha} \rightarrow I_{\beta}$ möglich, bei denen sich β in zwei oder mehr Komponenten von I_{α} unterscheidet.

5.4 Die Attraktoren eines N -dimensionalen CMLS

Wie in Abschnitt 3.5 erläutert, kann ich – wie schon im Fall $N = 2$ und $N = 3$ – aus den Übergängen auf die Attraktoren des N -dimensionalen CMLS schließen. Die Attraktoren sind Vereinigungen von Kuben, die unter den bei festen Parametern möglichen Übergängen abgeschlossen sind. Da die Möglichkeit eines Übergangs von den Parametern ϵ und δ abhängt, ändern sich die Attraktoren in den verschiedenen Parameterbereichen. Dabei berücksichtige ich nur die in Störungstheorie dominanten Übergänge vom Typ (a), (b) und (c), die im letzten Abschnitt vorgestellt wurden. Für die berechneten Attraktoren gilt demnach die Einschränkung der störungstheoretischen Betrachtung, wie es in Abschnitt 3.5 diskutiert wurde.

Die Grenzen der Parameterbereiche mit unterschiedlichem ergodischen Verhalten werden dadurch bestimmt, daß jeweils ein Übergangstyp hinzukommt. Da sich die kritischen δ -Werte für die Übergänge im Vergleich zu $N = 3$ nicht ändern, sind die Parameterbereiche die vier Bereiche, die in Abschnitt 4.7 für das dreidimensionale CML vorkamen und in Abbildung 4.12 zu sehen sind. Im folgenden identifiziere ich wieder Attraktoren mit Vereinigungen von Kuben, was bis auf Mengen der Größe $O(\epsilon, \delta)$ stimmt

1. Parameterbereich: $\delta \geq 0$

In diesem Parameterbereich gibt es keine Übergänge zwischen Kuben. Deswegen ist jeder Kubus I_α ein Attraktor. Ein N -dimensionales CML hat in diesem Parameterbereich 2^N koexistierende Attraktoren.

2. Parameterbereich: $-2\epsilon/3 \leq \delta < 0$

Nur Übergänge vom Typ (a) sind möglich. Deswegen sind die Kuben I_α Attraktoren, bei denen der Indexvektor α nicht drei aufeinanderfolgende „+“– oder drei aufeinanderfolgende „–“–Symbole enthält. Hierbei sind die periodischen Randbedingungen der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ zu beachten, die sich auf den Indexvektor α übertragen. Die Attraktoren sind weiterhin einzelne Kuben.

Die Bestimmung der Anzahl der koexistierenden Attraktoren des N -dimensionalen CMLS im vorliegenden Parameterbereich ist ein kombinatorisches Problem, da die Anzahl der entsprechenden Indexvektoren α der Länge N berechnet werden muß. Dieses Problem ist formal äquivalent zu einem Problem aus der Theorie dynamischer Systeme: der Frage nach der Anzahl periodischer Orbits der Länge N für eine Abbildung mit einer Markovpartition [28]. Denn die Einschränkung an die α , daß in ihnen keine drei „+“– oder drei „–“–Symbole hintereinander vorkommen sollen, entspricht den verbotenen Sequenzen einer symbolischen Dynamik.

Ich führe die sechs Symbole ein, die aus drei Vorzeichen bestehen und „gemischt“ sind:

$$\tau(i) \in \{++-, +-+, +--, -+ +, -+-, --+\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Zur Konstruktion der erlaubten Indexvektoren α hänge ich N dieser Symbole aneinander, wobei zwei aufeinanderfolgende Symbole $\tau(i)$ und $\tau(j)$ sich in zwei Vorzeichen überschneiden, so daß die Symbolkette durch ein hinzukommendes Symbol nur um ein Vorzeichen wächst. An den beiden Stellen, an denen sich $\tau(i)$ und $\tau(j)$ überschneiden, müssen sie jeweils das gleiche Vorzeichen haben. Dies führt zu Einschränkungen an die

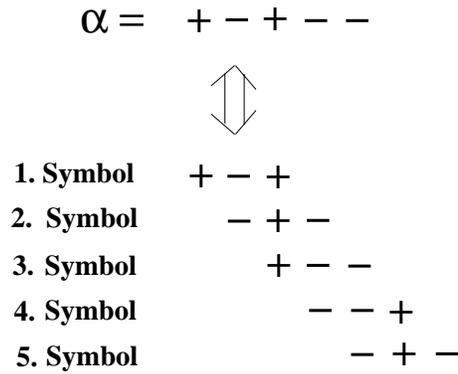


Abbildung 5.2: Der Indexvektor α setzt sich aus den fünf aufeinanderfolgenden Symbolen zusammen.

möglichen Folgesymbole eines Symbols. Ich veranschauliche die Korrespondenz zwischen einem erlaubten Indexvektor α der Länge 5 und den 5 Symbolen $\tau(i)$, aus denen er besteht, in Abbildung 5.2 (man beachte die periodischen Randbedingungen).

Welches Symbol $\tau(j)$ auf das Symbol $\tau(i)$ folgen darf, wird durch die folgende Tabelle beschrieben. Dabei werden die Vorgängersymbole $\tau(i)$ in einer Spalte durchlaufen, die Nachfolgersymbole $\tau(j)$ in einer Zeile:

	+ + -	+ - +	+ - -	- + +	- + -	- - +
+ + -	0	1	1	0	0	0
+ - +	0	0	0	1	1	0
+ - -	0	0	0	0	0	1
- + +	1	0	0	0	0	0
- + -	0	1	1	0	0	0
- - +	0	0	0	1	1	0

Ein Tabelleneintrag ist 1, wenn die Kombination $\tau(i)$, $\tau(j)$ erlaubt ist, bei einer verbotenen Kombination ist er 0. Die Tabelleneinträge können in der *Übergangsmatrix* A mit Matrixelementen $A_{\tau(i)\tau(j)}$ zusammengefaßt werden. Es gilt:

$$\text{Sp } A^N = \#\{\text{erlaubte Indexvektoren } \alpha \text{ der Länge } N\} \quad (5.22)$$

Denn es gilt

$$\text{Sp } A^N = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_N=1}^6 A_{\tau(i_0)\tau(i_1)} \cdot A_{\tau(i_1)\tau(i_2)} \cdot \dots \cdot A_{\tau(i_N)\tau(i_0)},$$

da das Produkt der N Faktoren auf der rechten Seite genau dann gleich 1 ist, wenn die Sequenz $\tau(i_0)$, $\tau(i_1)$, $\tau(i_2)$... $\tau(i_N)$ einen erlaubten Indexvektor α ergibt; sonst ist das Produkt 0.

Seien λ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ die Eigenwerte der Übergangsmatrix A , so gilt

$$\text{Sp } A^N = \sum_{i=1}^6 \lambda_i^N. \quad (5.23)$$

Wenn ich mit λ_1 den größten Eigenwert der Matrix A bezeichne, folgt aus der letzten Gleichung asymptotisch für große N :

$$\text{Sp } A^N \approx \lambda_1^N \quad (5.24)$$

Indexvektor α :	+ - - + + + - - - +
Defektvektor $\tilde{\alpha}$:	0 1 0 1 1 0 1 1 0 1

Abbildung 5.3: Dem Indexvektor α kann man einen Defektvektor $\tilde{\alpha}$ zuordnen.

Da der größte Eigenwert der Matrix A $(1 + \sqrt{5})/2$ ist, folgt schließlich für die Zahl der koexistierenden Attraktoren im vorliegenden Parameterbereich:

$$\#\{\text{koexist. Attraktoren}\} \approx \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^N. \quad (5.25)$$

Dieser asymptotische Ausdruck liefert schon für $N = 10$ gute Resultate: während es bei diesem N exakt 122 koexistierende Attraktoren gibt, liefert Gleichung (5.25) den Wert 122,99.

Die Zahl der koexistierenden Attraktoren wächst im vorliegenden Parameterbereich exponentiell mit N , allerdings nicht so schnell wie das Phasenraumvolumen 2^N .

3. Parameterbereich: $-4\epsilon/3 \leq \delta < -2\epsilon/3$

Wie ich hoffentlich deutlich machen kann, ist dieser Parameterbereich der interessanteste des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$. Für diesen Bereich sind die Übergänge (a) und (b) möglich.

Da die Übergänge zwischen Kuben I_α stattfinden und die Attraktoren Vereinigungen von Kuben sind, genügt es zum Auffinden der Attraktoren, allein die Änderung der Indexvektoren α durch Übergänge zu betrachten. Im nächsten Kapitel wird diese „Coarse graining“-Sichtweise auf das CMLs ausführlich diskutiert werden.

Ich betrachte zunächst den Fall, daß die Zahl der Gitterplätze N gerade ist. Die beiden folgenden Indexvektoren sind nur für solche N möglich:

$$\alpha_1 = + - + - + \cdots - + -, \quad \alpha_2 = - + - + - \cdots + - + \quad (5.26)$$

α_1 und α_1 gehören zu Kuben, die Attraktoren im vorliegenden Parameterbereich sind. Denn die Übergänge (a) und (b) können diese Kuben nicht als Ausgangskubus besitzen. Diese beiden Attraktoren nenne ich wegen der alternierenden Vorzeichen „Streifenattraktoren“. Wenn man „+“ und „-“ als zwei Spinzustände interpretiert, haben die Indexvektoren der Streifenattraktoren eine vollständig antiferromagnetische Ordnung. Dies zeigt, daß bei CMLs auch eine antiferromagnetische Ordnung möglich ist – im Gegensatz zur Situation im Miller–Huse–Modell.

Ich möchte nun zeigen, daß die beiden Streifenattraktoren die einzigen Attraktoren des CMLs sind, d. h. für fast alle Startpunkte \mathbf{x}_0 erreicht die iterierte Punktfolge einen dieser beiden Kuben. Dazu betrachte ich den Raum der Indexvektoren α , der 2^N Elemente besitzt. Jedem Indexvektor α ordne ich einen **Defektvektor** $\tilde{\alpha}$ auf die folgende Weise zu: Ich ordne die α_i in einem eindimensionalen Gitter an und betrachte eine Verbindung/Bond zwischen zwei benachbarten Plätzen α_i und α_{i+1} . Diesem Bond wird der Wert 1 zugewiesen, wenn $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ bzw. der Wert 0, wenn $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. In Abbildung 5.3 ist ein Beispiel eines zugeordneten Defektvektors zu sehen. Die Einsen sind die Defekte des Indexvektors α , da sie an den Stellen des Indexvektors α liegen,

an denen er von einer streifenförmigen bzw. antiferromagnetischen Ordnung abweicht. Die hier durchgeführte Definition von Defekten ist analog zu der im eindimensionalen antiferromagnetischen Isingmodell.²

Für gerades N enthält jeder Defektzustand $\tilde{\alpha}$ eine gerade Anzahl von Einsen (Defekten), für ungerades N hat ein Defektzustand immer eine ungerade Anzahl von Einsen. Denn die Zahl m der Vorzeichenwechsel im Indexvektor α von „+“ zu „-“ oder von „-“ zu „+“ ist aufgrund der periodischen Randbedingungen immer eine gerade Zahl ($0 \leq m \leq N$). Die Zahl der Defekte im Indexvektor α ist $N - m$, woraus die Gesetzmäßigkeit für gerade/ungerade N folgt. Entsprechend ist die Abbildung $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ der Indexvektoren auf die Defektzustände eine 2-zu-1-Abbildung. Zwei Spinzuständen α und β , die durch Inversion sämtlicher Vorzeichen auseinander hervorgehen, wird derselbe Defektvektor zugeordnet. Die Indexvektoren in Gleichung (5.26) sind dadurch ausgezeichnet, daß sie keine Defekte haben.

Die beiden Übergänge vom Typ (a) und (b) wirken sich auf die Defekte der Indexvektoren unterschiedlich aus:

Typ-(a)-Übergang: Für einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ vom Typ (a) muß der Indexvektor α drei aufeinanderfolgende „+“ oder „-“ enthalten. An diesen Stellen liegen im zugeordneten Defektvektor $\tilde{\alpha}$ zwei Einsen (Defekte) nebeneinander (siehe das Beispiel in Abbildung 5.3). Wenn im Indexvektor α die mittlere Indexkomponenten einer Konfiguration aus drei gleichen Vorzeichen durch einen Typ-(a)-Übergang ihr Vorzeichen wechselt, werden im Defektzustand die beiden Einsen zu Nullen:

$$\begin{aligned} \text{Indexvektor } \alpha : & \quad \cdots +, +, +, \dots \rightarrow \cdots +, -, +, \dots \\ \text{Defektvektor } \tilde{\alpha} : & \quad \dots \dots 1, 1, \dots \rightarrow \dots \dots 0, 0, \dots \end{aligned}$$

Die beiden Defekte haben sich gegenseitig annihiliert.

Typ-(b)-Übergang: Für einen Typ-(b)-Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ ergibt sich beispielsweise für die Defekte der beteiligten Indexvektoren:

$$\begin{aligned} \text{Indexvektor } \alpha : & \quad \cdots +, +, -, \dots \rightarrow \cdots +, -, -, \dots \\ \text{Defektvektor } \tilde{\alpha} : & \quad \dots \dots 1, 0, \dots \rightarrow \dots \dots 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Ein Defekt ist demnach um einen Platz gewandert bzw. die 0 und 1 haben im Defektvektor die Plätze getauscht. Allgemein gilt für einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ vom Typ (b) mit Übergangsindex α_i : der Konfiguration $\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}$ im Indexvektor entspricht im Defektvektor eine 0 und eine 1, da die Komponenten α_{i-1} und α_{i+1} verschiedene Vorzeichen sind. Wenn α_i sich beim Übergang ändert, ergibt sich für den Defektvektor des Indexvektors β : 0 und 1 haben die Plätze getauscht. Bei einem Typ-(b)-Übergang wandert ein Defekt um einen Gitterplatz. Die Anzahl der Defekte wird durch einen Typ-(b)-Übergang nicht verändert.

Bei fortlaufender Iteration eines Startpunkts \mathbf{x}_0 verändert sich durch Übergänge vom Typ (a) oder (b) der Indexvektor des Kubus, in dem sich die Trajektorie gerade aufhält. Durch Übergänge vom Typ (a) nimmt die Zahl der Defekte in Einheiten von 2 ab. Diese Annihilationen von Defekten sind irreversibel, da es im vorliegenden Parameterbereich keinen Übergang gibt, der die Zahl von Defekten vergrößert. Die Typ-(b)-Übergänge sorgen dafür, daß sich schließlich alle Defekte bis auf den Abstand 1 nahe kommen; dann

²Dieser Zusammenhang des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ zum eindimensionalen Isingmodell wird sich in Kapitel 7 als sehr tiefgreifend erweisen.

können sie sich über einen Typ-(a)-Übergang gegenseitig vernichten. Ein Indexvektor verändert sich nur dann nicht mehr, wenn es keine Defekte mehr in ihm gibt. Dies ist gerade bei den Streifenindizes aus Gleichung (5.26) der Fall. Damit habe ich gezeigt, daß für gerades N die beiden Streifenattraktoren die einzigen Attraktoren des CMLS sind.

Ich diskutiere nun den Fall, daß N ungerade ist. Hier hat jeder Indexvektor eine ungerade Zahl von Defekten. Bei fortwährender Iteration eines Startpunkts \mathbf{x}_0 durch die CML-Dynamik annihilieren sich wieder diese Defekte gegenseitig. Es bleibt aber schließlich ein Defekt übrig; dieser hat keinen anderen Defekt zum gegenseitigen Vernichten gefunden. Durch Übergänge vom Typ (b) kann dieser Defekt an die N Stellen des Defektvektors $\tilde{\alpha}$ wandern. Außerdem können im Indexvektor α zwei „+“ oder zwei „-“ zum Defekt korrespondieren. Dies ergibt $2N$ durch Typ-(b)-Übergänge verbundene Indexvektoren bzw. Kuben, deren Vereinigung für ungerades N der globale Attraktor im vorliegenden Parameterbereich ist. Für den Spezialfall $N = 3$ ist dies gerade die Menge

$$I_{++-} \cup I_{+-+} \cup I_{+--} \cup I_{-++} \cup I_{-+-} \cup I_{--+} ,$$

die in Unterabschnitt 4.7.2 schon als Attraktor dieses Parameterbereichs vorgestellt wurde.

Das Volumen der Attraktoren im 3. Parameterbereich ist sehr klein gegenüber ihrem Bassin der Anziehung. Für gerades N haben die beiden Streifenattraktoren ein Volumen von ≈ 1 , während ihr Bassin der Anziehung die Größe 2^{N-1} hat; denn aus Symmetriegründen erreicht jeweils die Hälfte aller Phasenraumpunkte einen dieser Attraktoren. Für ungerades N hat der globale Attraktor für den gesamten Phasenraum das Volumen $\approx 2N$.

4. Parameterbereich: $\delta < -4\epsilon/3$

Alle drei Typen von Übergängen sind möglich. Die einzige Vereinigung von Kuben, die unter allen drei Übergangstypen abgeschlossen ist, ist die Vereinigung aller Kuben. Demnach umfaßt der Attraktor im 4. Parameterbereich alle Kuben und hat ein Volumen von $\approx 2^N$.

Tabelle

Ich fasse die wichtigsten Merkmale der vier Parameterbereiche in der folgenden Tabelle zusammen:

Parameterbereich	erlaubte Übergänge	# der Attraktoren	Volumen der Attr.
1	keine	2^N	1
2	Typ (a)	$\approx [(1 + \sqrt{5})/2]^N$	≈ 1
3 und N gerade	Typ (a), (b)	2	≈ 1
3 und N ungerade		1	$\approx 2N$
4	Typ (a), (b), (c)	1	$\approx 2^N$

. Teilweise sind die Veränderungen bzgl. der Attraktoren des CMLS zwischen benachbarten Parameterbereichen dramatisch: Die Größe der jeweiligen Attraktoren nimmt beim Übergang von Bereich 3 zu Bereich 4 stark zu; die Zahl der Attraktoren nimmt von Bereich 2 zu Bereich 3 stark ab.

5.5 Welchen Effekt hat die Kopplung im CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$?

Abschließend möchte ich das überraschende Verhalten des CMLs, wenn man die Kopplungsstärke ϵ erhöht, zur Sprache bringen, wobei natürlich nur kleine Kopplungen betrachtet werden. Die „diffusive“ Kopplung von drei benachbarten Gitterplätzen in der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ gemäß Gleichung (2.6) wird in der Literatur über CMLs oft verwendet. Naiv wird man bei dieser Art der Kopplung erwarten, daß ein Anwachsen von ϵ Übergänge zwischen Kuben I_α begünstigt und die Attraktoren vergrößert.

Das Gegenteil ist für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ im störungstheoretischen Bereich der Fall. Wenn ich $\epsilon = 0$ und $\delta < 0$ wähle, bewirkt das negative δ durch die Deformation der Zeltabbildung f_δ , daß alle Kuben zu einem Gesamtattraktor verschmelzen. Ich erhöhe nun die Kopplung ϵ bei konstantem δ und bewege mich im Bifurkationsdiagramm in Abbildung 4.12 entlang der eingezeichneten vertikalen Linie. Dabei werden nacheinander die Parameterbereiche 4, 3 und 2 durchlaufen. Im Parameterbereich 4 sind alle Typen von Übergängen möglich. Für $\epsilon > -3\delta/4$ ist der Typ-(c)-Übergang verboten, für $\epsilon > -3\delta/2$ auch noch der Typ-(b)-Übergang. Die Vergrößerung der Kopplung ϵ verhindert demnach Übergänge. Parallel dazu werden mehr und mehr Kuben zu Attraktoren stabilisiert. Im Parameterbereich 3 die beiden Streifenattraktoren, im Bereich 2 ca. $[(1 + \sqrt{5})/2]^N$ Kuben.

Was ist der Grund für dieses kontraintuitive Verhalten des in dieser Arbeit behandelten CMLs? Die Hauptursache liegt darin, daß beim intuitiven Nachdenken über die Kopplung nicht an das Fehlvolumen in den Kuben gedacht wird. Ich beziehe mich für die folgende Argumentation auf Ergebnisse für $N = 3$, da sich der allgemeine Fall – wie in diesem Kapitel gezeigt wurde – auf diesen Spezialfall zurückführen läßt.

Für den Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ mit Übergangindex α_i ist die Teilmenge von FV_α relevant, die an die $(|x_i| = 1)$ -Seite von I_α anschließt. Diese Fehlvolumenteilmengen hängen nur von ϵ ab. Die Form dieser Mengen ist für die Übergänge vom Typ (b) und (c) jeweils ein Quaderstumpf mit acht Eckpunkten (siehe die Menge TF auf der rechten Seite von Abbildung 4.6 bzw. die Menge \widetilde{TF} in Abbildung 4.11.) Diese Fehlvolumenmengen enthalten einen Quader der Höhe $\epsilon/2$ bzw. ϵ . Die Fehlvolumenmenge hat demnach eine Höhe von mindestens $\epsilon/2$ bzw. ϵ . Je größer ϵ wird, desto höher werden die Fehlvolumenmengen.

Dagegen wächst die Höhe der Vereinigung aller Urbilder von $OV_{\alpha,\beta}$, deren $|x_i|$ -Werte ≈ 1 sind, langsamer mit ϵ an (dies sind die Mengen Σ_G^∞ aus Gleichung (4.40) bzw. Σ_B^∞ aus Gleichung (4.84)). Demzufolge enthalten die Fehlvolumenmengen die Urbildmengen von $OV_{\alpha,\beta}$ vollständig, sobald $\epsilon > -3\delta/4$ (Typ-(c)-Übergang) bzw. $\epsilon > -3\delta/2$ (Typ-(b)-Übergang). Dann finden die entsprechenden Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ nicht mehr statt.

Der Übergang vom Typ (a) ist dagegen bei konstantem negativen δ durch eine Vergrößerung von ϵ nicht zu verhindern. Denn hier ist die relevante Fehlvolumenteilmenge ein *degenerierter* Quaderstumpf mit sieben Eckpunkten (siehe die Menge auf der rechten Seite von Abbildung 4.3). An der Stelle $(|x_{i-1}|, |x_{i+1}|) \approx (1, 1)$ ist die Höhe der Fehlvolumenteilmenge gleich 0 – unabhängig von ϵ . An dieser Stelle können die Urbilder der Überlappmenge nicht im Fehlvolumen enthalten sein. Deswegen findet der Übergang vom Typ (a) statt, sobald $\delta < 0$, wobei es auf die Größe von ϵ nicht ankommt.

Diese Erklärung, warum die Kopplung so merkwürdige Effekte auf die CML-Dynamik hat, ist zugegebenermaßen recht technisch. Es wäre lehrreich, andere Realisierungen von lokalen Kopplungen in Störungstheorie zu behandeln. Man könnte vielleicht ein

Kriterium finden, das zwischen Kopplungen danach unterscheidet, ob sie Übergänge verhindern oder fördern.—

Kapitel 6

Coarse graining für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$

In den letzten Kapiteln wurde das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ als deterministisches dynamisches System ausführlich untersucht. Die Analyse der Möglichkeit von Übergängen $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ spielte eine zentrale Rolle. Der Begriff des Übergangs zwischen zwei Kuben ist schon auf einer Betrachtungsebene des CMLs angesiedelt, die „coarse grained“ (grobgekörnt) ist. Denn für einen Übergang ist von der N -dimensionalen Phasenraumdynamik nur die Tatsache des Überwechseln von dem einen in den anderen Kubus von Bedeutung. Die genaue Trajektorie $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}^0), \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^2(\mathbf{x}^0), \dots\}$ ist dagegen überflüssige/irrelevante Information. In diesem und dem nächsten Kapitel wird diese Grobkörnungsperspektive auf das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ systematisch angewendet. Dabei erweisen sich Konzepte aus der Statistischen Mechanik als fruchtbar. Wie ich hoffentlich zeigen kann, ergeben sich aus dieser Sichtweise neue Einsichten über das CML.

In Abschnitt 6.1 gebe ich das Rezept an, wie man aus der CML-Dynamik die Dynamik auf der coarse grained Ebene der Kuben erhält. In Abschnitt 6.2 dann die stochastische coarse grained Dynamik quantitativ beschrieben, indem eine einfache Mastergleichung aufgestellt wird. Die in der Mastergleichung vorkommenden Übergangswahrscheinlichkeiten können mit dem Wissen über die darunterliegende „mikroskopische“ CML-Dynamik als Volumina von Mengen im Phasenraum interpretiert werden, wie in Abschnitt 6.3 gezeigt wird. Dort werden auch weitere Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten hergeleitet.

6.1 Von Phasenraumpunkten zu Kuben

Im folgenden verwende ich in der Argumentation noch oft Trajektorien, die aus mit der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ iterierten Punkten bestehen und mit $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots\}$ bezeichnet werden, wobei immer $\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(\mathbf{x}^t)$ gelten soll. Beim Coarse graining der CML-Dynamik geht man von iterierten Punktfolgen $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots\}$ zu einer Folge von Kuben über, die die grobe Lokalisierung der Dynamik angibt. Die Kuben werden durch ihren Indexvektor $\boldsymbol{\sigma}^t$ gekennzeichnet:

$$\{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots\} \xrightarrow{\text{Coarse graining}} \{\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2, \dots\}, \quad (6.1)$$

wobei für jeden Iterationsschritt $t \in \mathbb{N}$ ein Indexvektor $\boldsymbol{\sigma}^t$ definiert ist. Wie gleich deutlich werden wird, ist der einem \mathbf{x}^t zugeordnete Kubus meistens, aber nicht immer, derjenige, in dem sich \mathbf{x}^t gerade befindet.

Die Grobkörnung des CMLs erläutere ich nun genauer: der Startpunkt der Trajektorie liege im Innern eines Kubus I_α , so daß $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\alpha}$. Da in Störungstheorie der

Phasenraumpunkt \mathbf{x}^t für viele Iterationsschritte in einem Kubus I_α bleibt, bevor er in einen anderen Kubus I_β wechselt, bleibt der Indexvektor σ^t über lange Zeiträume konstant. Der Indexvektor der Folge $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots\}$ soll sich nur bei einem Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ von α zu β verändern. Dabei gelten für einen Übergang die Kriterien, die in Abschnitt 3.4 aufgestellt wurden, d. h. die Punkte der Trajektorie wandern vom Innern von I_α in das Innere von I_β . Der Indexvektor wird in der Folge $\{\sigma^t; t \in \mathbb{N}\}$ zu dem Zeitpunkt geändert, an dem die iterierte Punktfolge das Innere von I_β erreicht.¹ Wenn dagegen eine Trajektorie den Kubus I_α nur für wenige Iterationsschritte verläßt und wieder nach I_α zurückkommt, ohne im Innern eines anderen Kubus gewesen zu sein, bleibt der Indexvektor über diesen Zeitraum konstant bei α .

6.2 Die stochastische Dynamik der Indexvektoren

Durch die deterministische CML-Dynamik ist für jeden Startpunkt \mathbf{x}^0 die Folge von Indexvektoren $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots\}$ vorherbestimmt. Wenn man allerdings eine Beschreibung der Dynamik der Indexvektoren ohne Rückgriff auf das darunterliegende CML sucht, so muß diese Dynamik ein *stochastischer Prozeß* sein. Denn allein durch die $(t+1)$ vorangegangenen Indexvektoren $\{\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^t\}$ ist der Indexvektor σ^{t+1} nicht festgelegt: denn man kann leicht zwei Folgen konstruieren, deren coarse-grained Beschreibung bis zum Zeitpunkt t identisch ist, d. h. ihre zugeordneten Folgen von Indexvektoren sind dieselben. Trotzdem können die beiden Punktfolgen zum Zeitpunkt $(t+1)$ in verschiedenen Kuben liegen, so daß ihr zugeordneter Indexvektor σ^{t+1} verschieden ist.

Daß die Beschreibung einer Dynamik auf einer grobgekörnten Ebene stochastisch ist, ist ein weitverbreitetes Phänomen in der Physik [34, 11]. Dies ist verständlich, da auf dieser Ebene die Information der darunterliegenden deterministischen Dynamik nicht mehr zur Verfügung steht – in unserem Fall ist diese Information der Phasenraumpunkt \mathbf{x}^t .

Ich möchte nun jeder Indexvektorfolge $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^t\}$ mit Länge $(t+1)$ eine Wahrscheinlichkeit $u(\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^t\})$ zuordnen. Wenn ich viele Startpunkte im Kubus I_{σ^0} betrachte, kann ich diese Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit dieser Folge im Raum aller Indexvektorfolgen mit Startindex σ^0 und Länge $(t+1)$ berechnen. Damit kann ich die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Indexvektordynamik folgendermaßen bestimmen:

$$w(\sigma^{t+1} | \sigma^t, \sigma^{t-1}, \dots, \sigma^1, \sigma^0) := \frac{u(\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^t, \sigma^{t+1}\})}{u(\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^t\})} \quad (6.2)$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit für σ^{t+1} an, wenn die Indexvektoren $\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{t-1}, \sigma^t$ vorangegangen sind.

Bei gegebenen Indexvektoren $\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{t-1}, \sigma^t$ gilt in der führenden Ordnung Störungstheorie: der nachfolgende Indexvektor σ^{t+1} ist entweder gleich σ^t oder unterscheidet sich in einer Indexvektorkomponente von diesem. Im letzteren Fall muß

¹Nach Unterabschnitt 3.4.1 ist das Innere eines Kubus I_β die Menge von Punkten, die vom Rand von I_β weiter als eine von ϵ und δ unabhängige Konstante c entfernt sind. Da die Konstante c in einem gewissen Rahmen frei wählbar ist, ist der Zeitpunkt t , an welchem sich der Indexvektor von α nach β ändert, nicht ganz genau definiert. Da der Indexvektor wegen der für $\epsilon, \delta \ll 1$ langen Aufenthaltsdauern in einem Kubus lange konstant ist, fällt diese Unbestimmtheit aber nicht ins Gewicht, wenn später eine quantitative Beschreibung der Indexvektordynamik gesucht wird.

der Übergang $I_{\sigma^t} \rightarrow I_{\sigma^{t+1}}$ bei den Parametern ϵ, δ möglich sein. Deswegen sind viele bedingte Wahrscheinlichkeiten $w(\sigma^{t+1} | \sigma^t, \sigma^{t-1}, \dots, \sigma^0)$ aus Gleichung (6.2) gleich Null.

6.2.1 Warum die Indexvektordynamik Markovsch ist

Als nächstes werde ich argumentieren, daß die Indexvektordynamik näherungsweise durch einen *Markovprozeß* beschrieben werden kann. Eine solche Dynamik hat kein Gedächtnis; für die bedingten Wahrscheinlichkeiten ist nur die Kenntnis des direkten Vorgängers σ^t wichtig. Es gilt demzufolge

$$w(\sigma^{t+1} | \sigma^t, \sigma^{t-1}, \dots, \sigma^1, \sigma^0) \approx w(\sigma^{t+1} | \sigma^t). \quad (6.3)$$

Die beiden Gründe für die Markoveigenschaft sind:

- In der deterministischen CML-Dynamik sollten in einem statistischen Sinn zwei aufeinanderfolgende Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ und $I_\beta \rightarrow I_\gamma$ unkorreliert sein.

Um dies zu zeigen, betrachte ich das Volumen von Startpunkten $\mathbf{x}^0 \in I_\alpha$, deren Trajektorie $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots\}$ den Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ als ersten Übergang durchführt. Dieses Volumen bezeichne ich mit

$$\text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\alpha | I_\alpha \rightarrow I_\beta\}).$$

Entsprechend sei $\text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\beta | I_\beta \rightarrow I_\gamma\})$ das Volumen von Startpunkten aus I_β , für deren Trajektorie $I_\beta \rightarrow I_\gamma$ der erste Übergang ist. Schließlich sei

$$\text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\alpha | I_\alpha \rightarrow I_\beta \wedge I_\beta \rightarrow I_\gamma\})$$

das Volumen von Startpunkten aus I_α , deren Trajektorie $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ und $I_\beta \rightarrow I_\gamma$ als die ersten beiden Übergänge durchführt. Wenn die beiden aufeinanderfolgenden Wechsel der Werte der Indexvektoren in der coarse grained Dynamik voneinander unabhängige Ereignisse sind, sollte für dieses Volumen die folgende Faktorisierung (näherungsweise) gelten:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\alpha | I_\alpha \rightarrow I_\beta \wedge I_\beta \rightarrow I_\gamma\}) &\approx \text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\alpha | I_\alpha \rightarrow I_\beta\}) \cdot \\ &\text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\beta | I_\beta \rightarrow I_\gamma\}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Gleichung (6.4) läßt sich als

$$\frac{\text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\alpha | I_\alpha \rightarrow I_\beta \wedge I_\beta \rightarrow I_\gamma\})}{\text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\alpha | I_\alpha \rightarrow I_\beta\})} \approx \text{Vol}(\{\mathbf{x}^0 \in I_\beta | I_\beta \rightarrow I_\gamma\}) \quad (6.5)$$

schreiben. Zur Ermittlung der rechten Seite dieser Gleichung kann ich Startpunkte mit Lebesguemaß in I_β verteilen und den Anteil von Übergängen $I_\beta \rightarrow I_\gamma$ an den nächsten Übergängen der iterierten Punktfolgen bestimmen.

Punktfolgen, die einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ machen, müssen ein Folgenglied in der Übergangsmenge $W_{\alpha,\beta}$ haben, deren iterierte Punkte das Innere von I_β erreichen. Demzufolge ist der Quotient aus der linken Seite von Gleichung (6.5) gleich dem Anteil von Übergängen $I_\beta \rightarrow I_\gamma$ an den nachfolgenden Übergängen, wenn ich die Trajektorien von Startpunkten in $W_{\alpha,\beta}$ betrachte. Im Bereich der

Störungstheorie bleiben die Punktfolgen bis zum nächsten Übergang im Mittel für viele Iterationen in I_β . Demnach enthält die Menge

$$\bigcup_{i=0}^{T_0} \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^i(W_{\alpha,\beta})$$

wegen der starken Volumenvergrößerung durch die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ einen großen Teil von I_β , wobei T_0 von der Größenordnung der mittleren Aufenthaltsdauer in I_β sein soll. Außerdem ist der maximale Lyapunovexponent der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ positiv, so daß Trajektorien mit nah benachbarten Startpunkten $\in W_{\alpha,\beta}$ schon nach wenigen Iterationen deutlich voneinander abweichen. Eine konvexe Teilmenge von $W_{\alpha,\beta}$, deren Punkte den gleichen Übergang $I_\beta \rightarrow I_\gamma$ vollführen, kann folglich nur einen sehr kleinen Durchmesser haben.

Deswegen ist es plausibel, daß der Anteil von Übergängen $I_\beta \rightarrow I_\gamma$ für iterierte Punktfolgen der gleiche ist, wenn ich die Startpunkte einmal in ganz I_β , das andere Mal in der Übergangsmenge $W_{\alpha,\beta}$ verteile. Folglich gilt Gleichung (6.4) näherungsweise.

- Ich argumentiere nun, daß auch zwischen den Wechseln der Indexvektoren die Indexvektordynamik in guter Näherung Markovsch ist. Dazu zeige ich, daß ein Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ für Punkte aus dem Inneren von I_α in jedem Iterationsschritt gleich wahrscheinlich ist. Ich verteile $K \gg 1$ Startpunkte $\mathbf{x}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, K$ gemäß Lebesguemaß in I_α und betrachte zu einem beliebigen Zeitpunkt t die Menge der Iterierten, die sich noch in I_α befinden (Iterierte, die das Innere eines anderen Kubus erreicht haben, werden nicht weiter iteriert):

$$It(t) := \left\{ \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^t(\mathbf{x}^{(i)}), i = 1, 2, \dots, K \right\} \cap I_\alpha$$

Wie ich in Unterabschnitt 6.3.1 darlegen werde, gibt es zu jedem Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ eine charakteristische Menge $U_{\alpha,\beta}$, die im Innern von I_α liegt. Punkte aus $U_{\alpha,\beta}$ befinden sich im nächsten Iterationsschritt nahe dem Rand von I_α und führen anschließend den Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ auf „direktem Wege“ durch.

Für $\epsilon = \delta = 0$ ist das Lebesguemaß das natürliche Maß der Attraktoren auf den Kuben I_α . Für $\epsilon, \delta \ll 1$ sorgen deswegen die Iterationen mit der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ weiterhin für eine homogene Verteilung der Menge $It(t)$ in I_α . Folglich liegt zu jedem Zeitpunkt t eine näherungsweise konstanter Anteil von Punkten aus $It(t)$ in der Menge $U_{\alpha,\beta}$, um anschließend den Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ durchzuführen.

Damit gilt die Markoveigenschaft der bedingten Wahrscheinlichkeiten in Gleichung 6.3 näherungsweise, so daß Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ auf der coarse grained Ebene durch eine konstante Übergangswahrscheinlichkeit $w(\beta | \alpha)$ beschrieben werden können.

6.2.2 Die Mastergleichung

Da die stochastische Indexvektordynamik Markovsch ist, kann sie durch eine Mastergleichung beschrieben werden [34], deren Aufstellung ich mich nun zuwende.

Die entscheidenden Größen für die Markovsche Dynamik sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$w(\beta | \alpha) \quad \text{mit } \alpha \neq \beta,$$

die der Wahrscheinlichkeit des Indexwechsels von α zu β pro Iterationsschritt angeben. Diese Größen nenne ich im folgenden *Übergangswahrscheinlichkeiten*. Für die Wahrscheinlichkeit $w(\alpha | \alpha)$, daß sich der Indexvektor α in einem Iterationsschritt nicht ändert, gilt

$$w(\alpha | \alpha) = 1 - \sum_{\beta \neq \alpha} w(\beta | \alpha), \quad \forall \alpha. \quad (6.6)$$

Die stochastische Variable α kann 2^N Werte annehmen, entsprechend der Anzahl der Kuben I_α . Dementsprechend gibt es für jeden Iterationsschritt t auf der coarse grained Ebene einen N -dimensionalen Vektor $\mathbf{p}(t)$, dessen Komponenten $p_\alpha(t)$ die Wahrscheinlichkeit beschreiben, daß der gegenwärtige Indexvektor $\sigma^t = \alpha$. Die Mastergleichung, die die Entwicklung von $\mathbf{p}(t)$ zu $\mathbf{p}(t+1)$ beschreibt, ist²

$$p_\alpha(t+1) = p_\alpha(t) + \sum_{\beta \neq \alpha} [w(\alpha | \beta) \cdot p_\beta(t) - w(\beta | \alpha) \cdot p_\alpha(t)]. \quad (6.7)$$

Der erste Term in der Summe über β ist der Zufluß an Wahrscheinlichkeit aus den anderen Indexvektoren nach α im Iterationsschritt t ; der zweite Term $-w(\beta | \alpha) \cdot p_\alpha(t)$ ist der Abfluß von Wahrscheinlichkeit aus α in andere Indexvektoren.

6.3 Die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\beta | \alpha)$

6.3.1 Die geometrische Interpretation der Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\beta | \alpha)$

Gemäß der Mastergleichung (6.7) bestimmen die $w(\beta | \alpha)$ die stochastische Dynamik. Es gibt einen Zusammenhang dieser Übergangswahrscheinlichkeiten mit Größen der deterministischen CML-Dynamik, den ich nun erläutere. Ich wähle eine große Anzahl von Startpunkten in I_α , die gemäß Lebesguemaß verteilt sind und betrachte ihre Iterierten unter $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ zum Zeitpunkt t . Dabei werden Iterierte, die das Innere eines anderen Kubus erreichen, nicht weiter iteriert. Es gilt für hinreichend große t :³

$$w(\beta | \alpha) \approx \frac{\# \left\{ \text{Iterierte, die im } t\text{-ten Iterationsschritt den Übergang } I_\alpha \rightarrow I_\beta \text{ beginnen} \right\}}{\# \left\{ \text{Iterierte in } I_\alpha \text{ zum Zeitpunkt } t \right\}} \quad (6.8)$$

Für eine CML-Trajektorie $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots\}$ dauert der Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ selbst mehrere Iterationsschritte; hingegen kann der Beginn eines Übergangs, wie wir sehen werden, als ein bestimmter Zeitpunkt definiert werden.

Wie schon weiter oben angesprochen, bleiben Trajektorien zwischen zwei Übergängen lange in einem Kubus I_α ; näherungsweise ist die Verteilung der entsprechenden Folgenglieder $\{\mathbf{x}^{t_0}, \mathbf{x}^{t_0+1}, \dots, \mathbf{x}^{t_0+N}\} \subset I_\alpha$ homogen im Innern von I_α (Lebesguemaß). Deswegen gilt für eine Teilmenge U des Innern von I_α , die eine Größe $O(\epsilon, \delta)$ hat, wenn ich wieder viele Startpunkte in I_α und ihre Iterierten betrachte:

$$\frac{\# \left\{ \text{Iterierte, die im } t\text{-ten Iterationsschritt } \in U \right\}}{\# \left\{ \text{Iterierte } \in I_\alpha \text{ zum Zeitpunkt } t \right\}} \approx \text{Fl}(U) \quad (6.9)$$

²In der Physikk-literatur sind Mastergleichungen meistens Differentialgleichungen mit einer kontinuierlichen Zeitvariablen t . Für eine diskrete Zeit nenne ich die Evolutionsgleichung der Wahrscheinlichkeiten ebenfalls „Mastergleichung“.

³In den ersten Iterationsschritten gibt es noch Abweichungen zu $w(\beta | \alpha)$, da ein Teil der Startpunkte im Fehlvolumen liegt.

Ich behandle nun zwei Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ des CMLs für $N = 2$ genauer, um die für den Beginn eines Übergangs charakteristische Teilmenge $U_{\alpha,\beta}$, die sich im Innern von I_α befindet, zu finden. Hierbei kann ich auf Ergebnisse aus Kapitel 3 zurückgreifen:

Der Übergang $I_{++} \rightarrow I_{-+}$: Dieser Übergang, der für $\delta < 0$ möglich wird, wurde ausführlich in Unterabschnitt 3.7.2 diskutiert. Punktfolgen, die einen Übergang $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ durchführen, erreichen die effektive Überlappmenge $EO_{++,-+}$. In Unterabschnitt 3.8.8 wurde gezeigt, daß nur Punkte aus einer Teilmenge der effektiven Überlappmenge $EO_{++,-+} \subset I_{-+}$ ins Innere des Quadrats I_{-+} weiterwandern. Diese Teilmenge ist die Übergangsmenge $W_{++,-+}$, für die im Parameterbereich $-2\epsilon < \delta < 0$ gilt:

$$W_{++,-+} = EO_{++,-+} \setminus (\Sigma_G^\infty \cup \Sigma_{G'}^\infty) \approx EO_{++,-+} \setminus \Sigma_G^\infty$$

Diese Menge ist in Abbildung 3.18 schematisch gezeichnet. Dagegen wandern Punkte der Menge $EO_{++,-+} \cap \Sigma_G^\infty$ in relativ kurzer Zeit wieder ins Innere von I_{++} zurück.⁴

Die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(W_{++,-+})$ befindet sich im Innern von I_{++} ; denn dies wurde für die Obermenge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(OV_{++,-+})$ gezeigt. Ein Übergang $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ beginnt – so definiere ich – für eine Trajektorie, sobald ein Punkt derselben in die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(W_{++,-+})$ gelangt. Aus den Gleichungen (6.8) und (6.9) folgt für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Iterationsschritt in der coarse grained Dynamik:

$$w(-+ | ++) \approx \text{Fl} \left[\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(W_{++,-+}) \right] \quad (6.10)$$

Der Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$: Dieser Übergang wurde in Abschnitt 3.8 behandelt. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß die Urbildmengen von $OV_{-+,++}$, die sich nahe der $(x_1 = -1)$ -Seite des Quadrats I_{-+} befinden, erst für $\delta < \delta_c \approx -4\epsilon/3$ teilweise das Fehlvolumen FV_{-+} verlassen. Die außerhalb von FV_{-+} liegende Menge ist nach Gleichung (3.84) (siehe auch Abbildung 3.16):

$$R(k_0) := \Sigma_H^\infty \setminus FV_{-+}$$

Diese Menge liegt am Rand von I_{-+} ; dagegen liegt die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0))$ im Innern dieses Quadrats. Alle Punkte aus $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0))$ erreichen in endlich vielen Iterationen die effektive Überlappmenge $EO_{-+,++}$.

In Unterabschnitt 3.8.7 wurde gezeigt, daß die allermeisten Punkte aus $EO_{-+,++}$ ins Innere von I_{++} weiterwandern, d. h.

$$W_{-+,++} \approx EO_{-+,++} .$$

Demzufolge beginnt für eine Trajektorie ein Übergang $I_{-+} \rightarrow I_{++}$ damit, daß ein Punkt derselben in $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0))$ zu liegen kommt.⁵ Demnach ergibt sich analog zu Gleichung (6.10) für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$w(-+ | ++) \approx \text{Fl} \left[\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0)) \right]$$

⁴Deswegen muß strenggenommen der Kubus I_{++} um die Menge $EO_{++,-+} \cap \Sigma_G^\infty$ erweitert werden, so daß die Iterierten in dieser Menge ebenfalls zu den „Iterierten in I_α zum Zeitpunkt t “ gehören (siehe die Nenner in den Gleichungen (6.8) und (6.9)).

⁵Die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0))$ setzt sich aus Punkten zusammen, die zu Urbildmengen verschiedener Generation von $W_{-+,++}$ gehören; denn die $(k_0 + 1)$ -te Urbildgeneration und alle höheren Generationen haben Punkte in dieser Menge. Dies ist anders als bei der zuvor behandelten Menge $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(W_{++,-+})$, die für den Übergang $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ relevant ist.

Damit ist für diese beiden Übergänge die jeweilige charakteristische Menge $U_{\alpha,\beta}$ gefunden worden, die den Beginn eines Übergangs definieren:

$$U_{++,--} := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(W_{++,--}) \quad , \quad U_{-+,++} := \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(R(k_0)) \quad . \quad (6.11)$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten ergab sich in beiden Fällen

$$w(\beta|\alpha) \approx \text{Fl}[U_{\alpha,\beta}] \quad .$$

Damit konnten die Übergangswahrscheinlichkeiten mit geometrischen Größen des CMLs in Beziehung gebracht werden.

Für das CML bei $N = 3$ ist es schwieriger, zu den Übergängen $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ die Mengen $U_{\alpha,\beta}$ zu bestimmen. Doch ist zu erwarten, daß es auch hier im Prinzip derartige Mengen im Innern von I_α gibt, deren Volumen gleich der Übergangswahrscheinlichkeit $w(\beta|\alpha)$ ist. Zur Konstruktion von $U_{\alpha,\beta}$ muß man die Übergangsmenge $W_{\alpha\beta} \subset EO_{\alpha,\beta}$ kennen. Über Urbildkonstruktionen erhält man schließlich die Menge $U_{\alpha,\beta}$ im Innern von I_α , deren Punkte in endlich vielen Iterationen die Übergangsmenge $W_{\alpha\beta}$ erreichen.

6.3.2 Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten

- Betrachte einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$, der in führender Ordnung Störungstheorie nicht auftritt, weil sich z. B. β in zwei Indexkomponenten von α unterscheidet. Dann ist die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit $w(\beta|\alpha)$ um einen Faktor der Größenordnung $\max\{\epsilon, |\delta|\}$ kleiner als die Übergangswahrscheinlichkeit der dominanten Übergänge.
- Aus der geometrischen Interpretation der Übergangswahrscheinlichkeiten resultiert die folgende wichtige Eigenschaft derselben. Ich betrachte die Übergangswahrscheinlichkeit $w(\beta|\alpha)$ eines störungstheoretisch dominanten Übergangs, d. h. β unterscheidet sich von α nur in einer Indexkomponente ($\beta_i \neq \alpha_i$). Dann gilt

$$w(\beta|\alpha) \approx w(\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1} | \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}) \quad . \quad (6.12)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten hängen demnach nicht von N ab, sondern nur von dem Übergangsindex und seinen beiden Nachbarn. Bei denselben Parametern ϵ, δ hat die coarse grained Dynamik von N -dimensionalen Indexvektoren die gleichen Werte für die Übergangswahrscheinlichkeiten wie die Dynamik von dreidimensionalen Indexvektoren.

Begründung: Die Übergangswahrscheinlichkeiten können auch in N Dimensionen mit dem Volumen einer Menge $U_{\alpha,\beta}$, die im Innern von I_α liegt, identifiziert werden:

$$w(\beta|\alpha) \approx \text{Vol}(U_{\alpha,\beta}) \quad (6.13)$$

Bei der Konstruktion von $U_{\alpha,\beta}$ braucht man, wie wir am Beispiel $N = 2$ gesehen haben, die Übergangsmenge $W_{\alpha\beta}$, das Fehlvolume FV_α und die Urbilder der Überlappmenge $OV_{\alpha,\beta}$. Alle diese Mengen haben für $N > 3$ die folgende Struktur (siehe die Gleichungen (5.7), (5.19) und (5.21) im letzten Kapitel): sie sind ein direktes Produkt eines $(N - 3)$ -dimensionalen Kubus mit einer Menge, die beim Übergang $I_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}} \rightarrow I_{\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1}}$ auftritt. Demnach gilt auch für $U_{\alpha,\beta}$ näherungsweise

$$U_{\alpha,\beta} \approx U_{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}, \beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1}} \times I_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_{i+2} \dots \alpha_N} \quad .$$

Mit Gleichung (6.13) folgt daraus die Unabhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten von N .

- Die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\beta|\alpha)$ und $w(\gamma|\delta)$ sind gleich, wenn die N -dimensionalen Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ und $I_\gamma \rightarrow I_\delta$ vom gleichen Übergangstyp sind (die drei Übergangstypen (a), (b) und (c) wurden in Unterabschnitt 5.2.3 des letzten Kapitels vorgestellt). Dies folgt aus dem letzten Punkt, in dem die Werte von N -dimensionalen Übergangswahrscheinlichkeiten auf die ihrer dreidimensionalen Pendant zurückgeführt werden konnten (siehe Gleichung (6.12)). Die Übergangswahrscheinlichkeiten, die zum jeweiligen Übergangstyp gehören, werden folgendermaßen bezeichnet:

$$\begin{aligned} w_a &:= w(\beta|\alpha), & \text{wobei } I_\alpha \rightarrow I_\beta \text{ vom Typ (a),} \\ w_b &:= w(\beta|\alpha), & \text{wobei } I_\alpha \rightarrow I_\beta \text{ vom Typ (b),} \\ w_c &:= w(\beta|\alpha), & \text{wobei } I_\alpha \rightarrow I_\beta \text{ vom Typ (c)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

- Alle $w(\beta|\alpha)$ hängen implizit von den Parametern (ϵ, δ) des CMLs ab. Die Übergangswahrscheinlichkeiten w_a, w_b und w_c sind jeweils gleich Null, falls δ größer als der entsprechende kritische Wert $\delta_c(\epsilon)$ des Übergangstyps ist. Je weiter unterhalb von $\delta_c(\epsilon)$ der Parameter δ liegt, desto größer wird die Übergangswahrscheinlichkeit $w(\beta|\alpha)$ dieses Übergangstyps. Denn je kleiner δ wird, desto größer wird das Volumen der für den Übergang charakteristischen Menge $U_{\alpha,\beta}$, da ein kleineres (negatives) δ tendenziell die Überlappmengen vergrößert. Bei gleichem ϵ wächst die Übergangswahrscheinlichkeit monoton, wenn man δ verkleinert:

$$w(\beta|\alpha; \text{ für } (\delta_2, \epsilon)) \geq w(\beta|\alpha; \text{ für } (\delta_1, \epsilon)), \quad \text{falls } \delta_2 < \delta_1$$

6.3.3 Numerische Überprüfung der stochastischen Dynamik

Ich überprüfe nun einige Aussagen über die stochastische Dynamik, insbesondere über die Übergangswahrscheinlichkeiten, numerisch. Für einen Indexvektor α definiere ich die *Gesamtübergangswahrscheinlichkeit* als

$$g(\alpha) := \sum_{\beta \neq \alpha} w(\beta|\alpha).$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels des Indexvektors α zu einen beliebigen anderen Indexvektor (pro Iterationsschritt). Ich kann die Größe $g(\alpha)$ auf die folgende Weise numerisch ermitteln: Ich verteile eine große Zahl N_0 von Startpunkten gleichmäßig in I_α . Jeder Startpunkt wird solange mit der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ iteriert, bis er weiter als d (z. B. $d = 0, 1$) vom Kubus I_α entfernt ist und damit das Innere eines anderen Kubus erreicht hat. Ich ermittle zu jedem Zeitpunkt t die Zahl der Punkte, die einen solchen Abstand erreichen:

$$n(t) := \# \left\{ x_{(i)} \mid \text{dist} \left[\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^t(\mathbf{x}^{(i)}), I_\alpha \right] \geq d, i = 1, 2, 3 \dots N_0 \right\}$$

Aus Gleichung (6.8) für die Übergangswahrscheinlichkeit $w(\beta|\alpha)$ folgt für den Erwartungswert der Anzahl von Iterierten, die zum Zeitpunkt t in I_α sind,

$$\langle N(t) \rangle = N_0 \cdot (1 - g(\alpha))^t.$$

Diese Zahl der Punkte in I_α nimmt demnach – wie bei einem Zerfallsprozeß – exponentiell ab. Entsprechend gilt für $n(t)$:

$$\langle n(t) \rangle \approx g(\alpha) \cdot N_0 \cdot (1 - g(\alpha))^t$$

Wenn ich $\log(n(t))$ gegen t auftrage, kann ich die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit $g(\alpha)$ bestimmen, indem ich eine Gerade durch die Punkte lege.

Überprüfung von Gleichung (6.10)

Ich kann mit diesem Verfahren Gleichung (6.10) überprüfen, die die Übergangswahrscheinlichkeit $w(-+|++)$ mit der Fläche einer Menge in Verbindung bringt. Da die Übergänge $I_{++} \rightarrow I_{-+}$ und $I_{++} \rightarrow I_{+-}$ zueinander symmetrisch sind, ist Gleichung (6.10) äquivalent zu

$$g(++) \approx w(-+|++) + w(+ - |++) \approx 2 \text{Fl} \left[\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2} (W_{++, -+}) \right] . \quad (6.15)$$

Es gilt

$$\text{Fl} \left[\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2} (W_{++, -+}) \right] \approx \frac{1}{4} \text{Fl} [W_{++, -+}] .$$

Die Fläche der Menge

$$W_{++, -+} \approx EO_{++, -+} \setminus \Sigma_G^\infty ,$$

die in Abbildung 3.18 schematisch dargestellt ist, kann numerisch berechnet werden. Denn die Grenzkurve $R^{(n)}$ der Menge $\Sigma_G^{(n)}$ ist in Gleichung (3.68) berechnet worden. Bei der Bestimmung der Fläche von $W_{++, -+}$ kann man die Menge Σ_G^∞ näherungsweise durch die Menge Σ_G^n mit $n \approx 10$ ersetzen.

Die Überprüfung ergibt, daß Gleichung (6.15) für $\epsilon, |\delta|$ -Werte der Größenordnung 10^{-2} sehr gut erfüllt ist; die Abweichung der Gesamtübergangswahrscheinlichkeit von der entsprechenden Fläche beträgt weniger als zwei Prozent, was den erwarteten Korrekturen von Termen höherer Ordnung entspricht.

Überprüfung der Unabhängigkeit von N

In 6.3.2 wurde argumentiert, daß

$$w(\beta|\alpha) \approx w(\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1} | \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}) .$$

Damit sind die Übergangswahrscheinlichkeiten insbesondere unabhängig von N . Für die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit eines Wechsels vom Indexvektor α zu einem anderen Indexvektor folgt daraus

$$g(\alpha) \approx \sum_{\beta \neq \alpha, \text{ mit } \beta_i \neq \alpha_i} w(\beta|\alpha) \approx \sum_{i=1}^N w(\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1} | \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1}) . \quad (6.16)$$

Die $w(\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1} | \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1})$ können für $N = 3$ berechnet werden und hängen nur vom Übergangstyp ab. Mit Gleichung (6.16) kann ich beispielsweise ein $g(\alpha)$ für $N = 100$ voraussagen. Die Überprüfung dieser Voraussage testet implizit die N -Unabhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\beta|\alpha)$. Das numerische Experiment zeigt, daß Gleichung (6.16) sehr gut erfüllt ist.

Kapitel 7

Das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ als kinetisches Isingmodell

In diesem Kapitel zeige ich, daß eine enge Verbindung zwischen dem CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ – genauer: seiner coarse grained Dynamik – und eindimensionalen kinetischen Isingmodellen besteht. Dieser Zusammenhang ermöglicht eine neue Perspektive auf die ergodische Dynamik in den Parameterbereichen 3 und 4 des CMLs, d. h. für $\delta < -2\epsilon/3$. Man kann dem CML bei gegebenen Parametern ϵ, δ über das korrespondierende Isingmodell eine Temperatur zuordnen.

In Abschnitt 7.1 wird die schon im letzten Kapitel eingeführte coarse grained Dynamik als stochastische Spindynamik interpretiert – analog zu dem in der Einführung behandelten Miller–Huse–Modell [24]. In Abschnitt 7.2 werden stationäre Verteilungen als zeitunabhängige Lösungen einer Mastergleichung diskutiert. Es ergibt sich ein enger Zusammenhang der stationären Verteilungen der coarse grained Spindynamik mit den Attraktoren des darunterliegenden CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$. Dementsprechend werden in Abschnitt 7.3 die stationären Verteilungen der stochastischen Spindynamik in den vier Parameterbereichen behandelt, in denen auch das CML ein unterschiedliches ergodisches Verhalten zeigte (siehe Abschnitt 5.4). Das eindimensionale Isingmodell und stochastische Dynamiken für dieses, die sog. „kinetischen Isingmodelle“, werden in Abschnitt 7.4 kurz eingeführt. Ich zeige, daß die stationären Verteilungen der CML-induzierten Spindynamik als (kanonische) Gleichgewichtsverteilungen des Isingmodells aufgefaßt werden können. Die CML-induzierte Spindynamik selbst fällt in eine Klasse kinetischer Isingmodelle, die die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts erfüllen. Schließlich wird in Abschnitt 7.6 die Verbindung zu kinetischen Isingmodellen benutzt, um das Anwachsen der Transientendauer (der Zeit, bis ein Attraktor erreicht ist) für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ zu verstehen. Es zeigt sich nämlich, daß bei diesem Problem Ergebnisse eines kinetischen Isingmodells verwendet werden können, das von R. J. Glauber exakt gelöst worden ist [12].

7.1 Die Einführung von Spinzuständen

Ich kann die Indexvektoren α auch als Spinketten der Länge N auffassen. Ich führe zwei mögliche Spinzustände $+1$ und -1 ein, die den beiden Vorzeichen $+$ und $-$ der α_i

entsprechen:

$$\begin{aligned} \text{Indexvektor } \boldsymbol{\alpha} &\Rightarrow \text{Spinkette } \mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \text{mit } s_i = [\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha})]_i &:= \begin{cases} +1 & \text{falls } \alpha_i = + \\ -1 & \text{falls } \alpha_i = - \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7.1)$$

Es gilt zum Zeitpunkt t damit (näherungsweise) die folgende Korrespondenz zwischen Spinvektor \mathbf{s}^t und Phasenraumpunkt \mathbf{x}^t :

$$s_i^t = \begin{cases} +1, & \text{falls } x_i^t \geq 0 \\ -1, & \text{falls } x_i^t < 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

Diese Einführung von Spinzuständen ist die gleiche wie beim Miller–Huse–Modell (siehe Gleichung (1.4)). Es gibt 2^N mögliche Zustände der Spinketten, die Elemente des Raums $\{-1, +1\}^N$ sind. Die Mastergleichung (6.7) der coarse grained Dynamik lautet in der Schreibweise mit Spinzuständen \mathbf{s}, \mathbf{s}' :

$$p_{\mathbf{s}}(t+1) = p_{\mathbf{s}}(t) + \sum_{\mathbf{s}' \neq \mathbf{s}} [w(\mathbf{s} | \mathbf{s}') \cdot p_{\mathbf{s}'}(t) - w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}) \cdot p_{\mathbf{s}}(t)] \quad (7.3)$$

Die stochastische Indexvektordynamik ist durch diese Interpretation eine stochastische Spindynamik geworden. Ich rekapituliere kurz die Ergebnisse der stochastischen Indexvektordynamik aus dem letzten Kapitel in der neuen Sprache der Spinzustände:

- Die Spindynamik ist Markovsch.
- In führender Ordnung Störungstheorie kann nur *ein* Spin, z. B. s_i , zu einem bestimmten Zeitpunkt flippen.
- Die Spins sind aneinander über eine Nächste–Nachbar–Wechselwirkung gekoppelt; denn die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})$ werden nach Gleichung (6.12) nur von den drei benachbarten Spins s_{i-1} , s_i und s_{i+1} bestimmt, wenn der Spin s_i flippt. Die Gründe für diese Lokalität der Wechselwirkung sind, wie wir in den beiden letzten Kapitel gesehen haben, einerseits die lokale Kopplung des CMLs, andererseits die Kleinheit der Parameter ϵ und δ .
- Zum Spinzustand \mathbf{s} gehört der Kubus $I_{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{s})}$, wobei der Indexvektor $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{s})$ sich durch die Umkehrung der Gleichung (7.1) ergibt:

$$[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{s})]_i := \begin{cases} +, & \text{falls } s_i = +1 \\ -, & \text{falls } s_i = -1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.4)$$

Es gibt demzufolge drei unterschiedliche Arten von Spinflips, die zu den drei Typen von Übergängen zwischen Kuben im CML korrespondieren. Diese drei Spinflips $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}'$ werden entsprechend als Spinflips vom Typ (a), (b) bzw. (c) bezeichnet:

Typ (a): Drei Spins nebeneinander sind gleich und der mittlere Spin wechselt sein Vorzeichen:

$$\dots \uparrow\uparrow\uparrow \dots \rightarrow \dots \uparrow\downarrow\uparrow \dots$$

Typ (b): Die beiden Nachbarspins des flippenden Spins haben verschiedenes Vorzeichen:

$$\dots \uparrow\uparrow\downarrow \dots \rightarrow \dots \uparrow\downarrow\downarrow \dots$$

Typ (c): Dies ist der inverse Spinflip zum Typ-(a)-Spinflip:

$$\dots \uparrow\downarrow \uparrow \dots \rightarrow \dots \uparrow\uparrow \uparrow \dots$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeit eines Spinflips gilt

$$w(\mathbf{s} | \mathbf{s}') = w(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{s}) | \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{s}')) ,$$

so daß die in Gleichung (6.14) eingeführten Parameter w_a , w_b bzw. w_c die Übergangswahrscheinlichkeit des jeweiligen Spinflips bezeichnen.

Im folgenden nenne ich die Spindynamik, die sich aus dem Coarse graining des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ ergibt, „CML-induzierte Spindynamik“.

7.2 Stationäre Lösungen der Mastergleichung

Ich kann die Mastergleichung (7.3) als Matrixgleichung umschreiben:

$$\mathbf{p}(t+1) = M \cdot \mathbf{p}(t) \tag{7.5}$$

Die $2^N \times 2^N$ -Matrix $M = (M_{\mathbf{s}\mathbf{s}'})$ mit $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \{+1, -1\}^N$ ergibt sich aus dem Vergleich mit Gleichung (7.3) als

$$M_{\mathbf{s}\mathbf{s}} = 1 - \sum_{\mathbf{s}' \neq \mathbf{s}} w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}), \quad M_{\mathbf{s}'\mathbf{s}} = w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \neq \mathbf{s}' .$$

Alle Matrixelemente von M sind ≥ 0 . Außerdem ist die Summe aller Matrixelemente in jeder Spalte gleich 1. Matrizen mit diesen beiden Eigenschaften werden *stochastische Matrizen* genannt. Diese Matrizen ändern die Normierung des Wahrscheinlichkeitsvektors $\mathbf{p}(t)$ nicht:

$$\sum_{\mathbf{s}} p_{\mathbf{s}}(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \tag{7.6}$$

Gleichung (7.5) beschreibt einen besonders einfachen stochastischen Prozeß, nämlich eine *Markovkette* mit diskreten Zuständen. Diese Prozesse sind in der mathematischen Literatur sehr gut dokumentiert; beispielsweise wird dort ausführlich erörtert, wie Eigenschaften der Matrix M sich auf die stochastische Dynamik auswirken [5, 13].

Was in deterministischen dynamischen Systemen die Attraktoren, sind für stochastische Systeme die *stationären Verteilungen* oder Gleichgewichtsverteilungen. Dies sind Wahrscheinlichkeitsvektoren \mathbf{q} , die sich unter der Dynamik der Mastergleichung nicht ändern. Demnach sind stationäre Verteilungen Eigenvektoren der Matrix M zum Eigenwert 1. Wie man zeigen kann, sind alle Eigenwerte einer stochastischen Matrix betragsmäßig ≤ 1 . Wenn ich mit $\mathbf{q}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1 bezeichne, gilt für einen beliebigen Anfangszustand $\mathbf{p}(0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M^t \mathbf{p}(0) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{q}^{(i)}, \tag{7.7}$$

wobei die a_i von $\mathbf{p}(0)$ abhängen. Der Endzustand eines stochastischen Systems ist demnach eine Linearkombination von stationären Verteilungen $\mathbf{q}^{(i)}$.

Die stationären Verteilungen korrespondieren zu den Attraktoren des CMLs auf die folgende Weise: Falls das CML in einem bestimmten Parameterbereich k koexistierende

Attraktoren hat, besitzt die Mastergleichung k Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Ein Attraktor A des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ ist näherungsweise eine Vereinigung von m Kuben:

$$A = \bigcup_{i=1}^m I_{\alpha_i}$$

Dann hat der zugehörige Eigenvektor \mathbf{q} zum Eigenwert 1 m nichtverschwindende Komponenten $q_{\mathbf{s}(\alpha_i)}$.

Die stationären Verteilungen können in der Betrachtungsweise der Statistischen Mechanik als Gleichgewichtszustände der stochastischen Dynamik angesehen werden. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird dieser Anschluß an die Statistische Mechanik wichtig.

Man kann die Werte $q_{\mathbf{s}}$ auch mit Eigenschaften des dynamischen Systems $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ in Verbindung bringen:

$$q_{\mathbf{s}} \approx \mu(I_{\alpha(\mathbf{s})}) \quad (7.8)$$

Hierbei ist μ das SRB-Maß (natürliche Maß) auf dem Attraktor A ; $\alpha(\mathbf{s})$ ist der dem Spinzustand \mathbf{s} nach Gleichung (7.4) zugeordnete Indexvektor.

Begründung von Gleichung (7.8): Ich nehme zur Vereinfachung der Notation an, daß es nur einen Attraktor A für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ gibt mit einem Bassin der Anziehung $B(A)$, das fast alle Punkte des Phasenraums umfaßt. Auf der Ebene der Mastergleichung (7.3) konvergiert wegen Gleichung (7.7) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsvektor \mathbf{q}_0 für $t \rightarrow \infty$ gegen die stationäre Verteilung \mathbf{q} . Da die Mastergleichung das CML auf der coarse grained Ebene von Kuben beschreibt (siehe die Beziehung (1.4)), ist $q_{\mathbf{s}}$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kubus $I_{\alpha(\mathbf{s})}$ für $t \rightarrow \infty$.

Auf der Ebene der deterministischen Dynamik gilt nach der Theorie von Sinai, Ruelle und Bowen für fast alle Startpunkte \mathbf{x}^0 aus einer kompakten Teilmenge von $B(A)$ und ihre zugehörigen Trajektorien [32, 3, 29] :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \phi(\mathbf{x}^t) = \int_A d\mu \phi(\mathbf{x}) , \quad (7.9)$$

wobei ϕ eine beliebige stetige Funktion auf dem Phasenraum ist. Wenn man

$$\phi(\mathbf{x}) = \chi_{I_{\alpha(\mathbf{s})}}(\mathbf{x})$$

wählt, die charakteristische Funktion des Kubus $I_{\alpha(\mathbf{s})}$, folgt aus Gleichung (7.9)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathbf{x}^j \in \{\mathbf{x}^t, t = 0, 1, 2 \dots T\} \cap I_{\alpha(\mathbf{s})}\}}{T} = \mu(I_{\alpha(\mathbf{s})})$$

Die linke Seite ist gleich der Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kubus $I_{\alpha(\mathbf{s})}$ für $t \rightarrow \infty$, so daß sich Gleichung (7.8) ergibt.

Man kann stationäre Verteilungen auf die folgende Weise finden: Ein minimaler invarianter Unterraum der Matrix M enthält einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 und damit eine stationäre Verteilung \mathbf{q} .

7.3 Die stationären Verteilungen in den vier Parameterbereichen

Auch für die stochastische Spindynamik sind die vier Parameterbereiche aus Unterabschnitt 5.4 die Bereiche, in denen sich die stationären Verteilungen der Mastergleichung qualitativ ändern. Denn wenn man bei festem $\epsilon > 0$ vom i -ten zum $(i + 1)$ -ten Parameterbereich übergeht, indem man eine Bifurkationslinie durchschreitet, kommt ein vorher verbotener Übergangstyp zu den erlaubten Übergängen hinzu. Entsprechend werden in der Matrix M viele Einträge $w(\beta | \alpha)$ ungleich 0, die vorher 0 waren. Dies ändert die Anzahl und/oder Dimension der invarianten Unterräume von M .

Ich führe auch für die Lösung der Mastergleichung eine störungstheoretische Analyse im Bereich $\epsilon, \delta \ll 1$ durch; denn im folgenden setze ich in der Mastergleichung $w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}) = 0$, wenn der zugehörige Übergang $I_{\alpha(\mathbf{s})} \rightarrow I_{\alpha(\mathbf{s}')}$ kein führender Übergang in Störungstheorie ist, d. h. nicht vom Typ (a), (b) oder (c) ist. Denn diese Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})$ sind mindestens eine Größenordnung kleiner. Ich betrachte demnach die Mastergleichung in der Näherung der führenden Ordnung Störungstheorie.

In diesem Abschnitt greife ich auf die Untersuchungen zu den Attraktoren des N -dimensionalen CML $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ in Unterabschnitt 5.4 zurück, da ich die zu den Attraktoren korrespondierenden stationären Verteilungen suche.

Parameterbereich 1 und 2 ($\delta \geq 0$ bzw. $-2\epsilon/3 \leq \delta < 0$)

In diesen beiden Parameterbereichen hat das CML viele Attraktoren, die aus einzelnen Kuben bestehen. Sei I_{α} ein solcher Attraktor und $\mathbf{s}(\alpha)$ der zugehörige Spinzustand. Die Spalte $s(\alpha)$ der Matrix M , die in der Mastergleichung (7.5) steht, sieht folgendermaßen aus:

$$M_{\mathbf{s}' \mathbf{s}(\alpha)} = w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}(\alpha)) = 0, \quad M_{\mathbf{s}(\alpha) \mathbf{s}(\alpha)} = 1 \quad (7.10)$$

Demnach ist der Einheitsvektor $\mathbf{e}_{\mathbf{s}(\alpha)}$ eine stationäre Verteilung der Mastergleichung. In den vorliegenden beiden Parameterbereichen sind alle stationären Verteilungen Einheitsvektoren.

Im Bereich 1 ($\delta \geq 0$) sind alle Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{\mathbf{s}}$ stationäre Verteilungen, da alle Übergangswahrscheinlichkeiten zu anderen Spinzuständen gleich Null sind.

Im Bereich 2 ist jeder Spinzustand \mathbf{s} , der nicht drei „+1“- oder drei „-1“-Spins hintereinander enthält, ein stationärer Zustand der stochastischen Dynamik. Sämtliche dieser Spinzustände sind stabil. Dies erinnert an die vielen Grundzustände in einem *Spinglas* bei tiefen Temperaturen [9].

Parameterbereich 3 ($-4\epsilon/3 < \delta < -2\epsilon/3$)

In diesem Parameterbereich ($-4\epsilon/3 < \delta < -2\epsilon/3$) ergeben sich für gerades N die beiden Einheitsvektoren $e_{\mathbf{s}_i}$ ($i = 1, 2$) als stationäre Verteilungen, wobei

$$\mathbf{s}_1 = +1 \ -1 \ +1 \ \cdots \ -1, \quad \mathbf{s}_2 = -1 \ +1 \ -1 \ \cdots \ +1. \quad (7.11)$$

Denn in Unterabschnitt 5.4 wurde gezeigt, daß die beiden Streifenattraktoren aus Gleichung (5.26) die einzigen beiden Attraktoren sind. Demnach führt die stochastische Dynamik in diesem Parameterbereich schließlich zu einer antiferromagnetischen Ordnung der Spins. Dieses Verhalten wird in Abschnitt 7.5 aufgegriffen und im Sinne der Statistischen Mechanik erklärt.

Für ungerades N ergibt sich im Parameterbereich 3 eine einzige stationäre Verteilung \mathbf{q} für die Mastergleichung. Dieser Vektor \mathbf{q} hat $2N$ nichtverschwindende Komponenten $q_{\mathbf{s}}$. Die dazugehörigen Spinzustände \mathbf{s} sind antiferromagnetische Anordnungen mit genau einem Defekt. In Abschnitt 5.4 wurden Defekte für Indexvektoren eingeführt (siehe Abbildung 5.3). Aus der Interpretation der Indexvektoren als Spinketten ergeben sich auch für die letzteren Defekte: ein Defekt liegt an einer Stelle von \mathbf{s} , an der zwei Spins mit gleichem Vorzeichen benachbart sind.

Jeder der $2N$ Spinzustände \mathbf{s} mit einem Defekt hat in der stationären Verteilung \mathbf{q} das gleiche Gewicht, wie man leicht anhand der Mastergleichung ausrechnen kann: denn in den jeweiligen Spalten gibt es jeweils zwei nichtverschwindende Übergangswahrscheinlichkeiten mit Wert w_b .

Parameterbereich 4 ($\delta < -4\epsilon/3$)

Der Parameterbereich 4 ist bezüglich der stationären Verteilungen als Lösungen der Mastergleichung am interessantesten. In diesem Parameterbereich sind alle drei Arten von Spinflips (Typ (a), (b) und (c)) möglich. Demnach umfaßt der Attraktor des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ alle Kuben bzw. der Vektor \mathbf{q} der stationären Verteilung hat 2^N nichtverschwindende Komponenten $q_{\mathbf{s}}$. Diese stationäre Verteilung \mathbf{q} berechne ich aus der Mastergleichung (7.3) in Anhang G als Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix M . Für eine beliebige Komponente $q_{\mathbf{s}}$ ist das Ergebnis:

$$q_{\mathbf{s}} = c \left(\frac{w_c}{w_a} \right)^{\frac{1}{2} \# \text{Def}(\mathbf{s})}$$

$$\text{mit } \# \text{Def}(\mathbf{s}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (s_i s_{i+1} + 1) . \quad (7.12)$$

$\# \text{Def}(\mathbf{s})$ gibt die Anzahl der Defekte im Spinzustand \mathbf{s} an. Die Konstante c wird durch die Normierungsbedingung an \mathbf{q} festgelegt. Die stationäre Verteilung \mathbf{q} hängt nach Gleichung (7.12) nur vom Verhältnis der Raten der Spinflips vom Typ (a) und (c) ab, dagegen nicht von der Übergangswahrscheinlichkeit des Typ-(b)-Spinflips.

Für die Defektanzahl eines beliebigen Spinzustands \mathbf{s} gilt

$$\# \text{Def}(\mathbf{s}) \in \{n_{\min}, n_{\min} + 2, n_{\min} + 4, \dots, N\} ,$$

wobei $n_{\min} = 0$ für gerades N und $n_{\min} = 1$ für ungerades N . Damit kann man die $q_{\mathbf{s}}$ in Gleichung (7.12) in die folgende Form bringen:

$$q_{\mathbf{s}} = \frac{1}{Z} \left(\frac{w_c}{w_a} \right)^{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}}$$

$$\text{mit } Z := \sum_{\mathbf{s}} \left(\frac{w_c}{w_a} \right)^{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}} \quad (7.13)$$

Z ist eine Art Zustandssumme. In Abschnitt 7.5 bringe ich diese stationäre Verteilung mit einer Gleichgewichtsverteilung des eindimensionalen Isingmodell in Verbindung. Ein wichtiges Indiz ist der Nachweis, daß die Verteilung in Gleichung (7.13) die Bedingung des *detaillierten Gleichgewichts* erfüllt, wozu ich nun komme. Von detailliertem Gleichgewicht spricht man, wenn gilt (siehe z. B. [34]):

$$\forall \mathbf{s}, \mathbf{s}' : \quad w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}) \cdot q_{\mathbf{s}} = w(\mathbf{s} | \mathbf{s}') \cdot q_{\mathbf{s}'} \quad (7.14)$$

In der Mastergleichung (7.3) ist demnach jeder Term innerhalb der Summe über die \mathbf{s}' einzeln Null, wenn man für $\mathbf{p}(t)$ die stationäre Verteilung einsetzt. Die Bedingung (7.14) bedeutet, daß in einer dynamischen Realisierung der stationären Verteilung die Hinreaktion $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}'$ und die Rückreaktion $\mathbf{s}' \rightarrow \mathbf{s}$ im zeitlichen Mittel gleich häufig stattfinden.

Begründung von Gleichung (7.14): In der CML-induzierten stochastischen Dynamik ist ein Spinflip $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}'$ vom Typ (a), (b) oder (c). Da die stationäre Verteilung nach Gleichung (7.12) bzw. (7.13) bekannt ist, kann ich die Bedingung (7.14) für die verschiedenen Typen von Spinflips nacheinander überprüfen. Der Wert von $q_{\mathbf{s}}$ hängt nur von der Zahl der Defekte in \mathbf{s} ab.

Falls $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}'$ ein Typ-(b)-Spinflip ist, ist auch die Rückreaktion $\mathbf{s}' \rightarrow \mathbf{s}$ von diesem Typ. Durch einen Typ-(b)-Übergang ändert sich die Zahl der Defekte nicht, so daß nach Gleichung (7.12) $q_{\mathbf{s}} = q_{\mathbf{s}'}$. Damit gilt hier die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts:

$$\frac{w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})}{w(\mathbf{s} | \mathbf{s}')} = \frac{w_b}{w_b} = 1 = \frac{q_{\mathbf{s}'}}{q_{\mathbf{s}}} \quad (7.15)$$

Die beiden Spinflips vom Typ (a) und (c) sind zueinander invers. Es sei $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}'$ vom Typ (a); dann ist $\mathbf{s}' \rightarrow \mathbf{s}$ vom Typ (c). Demnach gilt

$$\frac{w(\mathbf{s} | \mathbf{s}')}{w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})} = \frac{w_c}{w_a} . \quad (7.16)$$

Da der Spinzustand \mathbf{s} zwei Defekte mehr als der Spinzustand \mathbf{s}' hat, gilt nach Gleichung (7.12)

$$\frac{q_{\mathbf{s}}}{q_{\mathbf{s}'}} = \left(\frac{w_c}{w_a} \right)^{\frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{w_c}{w_a} \quad (7.17)$$

Aus dem Vergleich der letzten beiden Gleichungen sieht man, daß auch hier für Hin- und Rückreaktion detailliertes Gleichgewicht vorliegt.

Damit wurde nachgewiesen, daß die CML-induzierte stochastische Dynamik im Parameterbereich 4 die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts erfüllt. Im Rahmen der Statistischen Mechanik des Gleichgewichts kann man zeigen, daß Gleichgewichtsverteilungen ebenfalls diese Bedingung erfüllen. Dagegen ist es oft ein Charakteristikum von Nichtgleichgewichtszuständen, daß bei ihnen detailliertes Gleichgewicht verletzt ist. Demnach legt der Nachweis des detaillierten Gleichgewichts in der CML-induzierten stochastischen Dynamik nahe, daß sich die stationäre Verteilung \mathbf{q} aus Gleichung (7.12) als Gleichgewichtsverteilung verstehen läßt.

7.4 Kinetische Isingmodelle

Das Isingmodell ist das berühmteste Spinmodell mit zwei möglichen Zuständen der Spinvariablen. Die eindimensionale Version des Isingmodells ist im gleichen Raum definiert wie die CML-induzierte stochastische Spindynamik, nämlich auf den Spinketten \mathbf{s} der Länge N mit $s_i \in \{+1, -1\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Der Isinghamiltonian ist in einer Raumdimension (mit periodischen Randbedingungen):

$$H = \frac{J}{2} \sum_{i=1}^N s_i (s_{i-1} + s_{i+1}) = J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} , \quad (7.18)$$

wobei J die Kopplungskonstante zwischen benachbarten Spins ist. Für $J < 0$ ist das Modell ferromagnetisch, für $J > 0$ antiferromagnetisch. Im Isingmodell selbst ist keine Spindynamik definiert; der Hamiltonian (7.18) wird in Zustandssummen verwendet und bestimmt dadurch Gleichgewichtsverteilungen.

Um das Isingmodell mit einer Dynamik zu versehen, die beispielsweise Relaxation ins Gleichgewicht beschreibt, wurden die sog. *kinetischen Isingmodelle* entwickelt [26, 18]. Das erste und – da es exakt lösbar ist – auch noch heute sehr wichtige kinetische Isingmodell ist das von R. J. Glauber aus dem Jahr 1963 [12]. Auf dieses Modell komme ich in Unterabschnitt 7.6.1 noch ausführlich zurück.

Die kinetischen Isingmodelle sind stochastische Prozesse auf dem Raum der Spin-zustände \mathbf{s} , die für große Zeiten zu einer kanonischen Verteilung des Isingmodells streben sollen. Die kinetischen Isingmodelle sollen weiterhin die folgenden Eigenschaften haben:

- Die stochastische Dynamik ist ein Markovprozeß. Deswegen kann ich die stochastische Dynamik durch eine Mastergleichung (7.3) beschreiben. Oft wird die Mastergleichung eines kinetischen Isingmodells als Differentialgleichung mit kontinuierlicher Zeitvariable formuliert. Falls die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})$ in Gleichung (7.3) klein sind, sind die Formulierungen der Mastergleichung mit diskreter und kontinuierlicher Zeitvariable zueinander äquivalent.
- Die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})$ der Mastergleichung sollen gleich Null sein, wenn sich \mathbf{s} und \mathbf{s}' in mehr als einem Spin unterscheiden. In einem Zeitschritt kann in den kinetischen Isingmodellen nur *ein* Spin flippen.
- Der bei einem Spinflip sich ändernde Spin s_i wird nur von den beiden Nachbarspins beeinflusst. Damit hängt die Übergangswahrscheinlichkeit $w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})$ nur von den Spins s_{i-1} , s_i und s_{i+1} ab:

$$w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}) = g(s_{i-1}, s_i, s_{i+1})$$

Dabei sollen die beiden Nachbarspins s_{i-1} und s_{i+1} symmetrisch in die Funktion g eingehen.

- Die stochastische Dynamik soll außerdem der Bedingung des detaillierten Gleichgewichts genügen, die in Gleichung (7.14) formuliert ist. Dies macht die Konstruktion der stationären Verteilung des kinetischen Isingmodells einfach.

Diese postulierten Eigenschaften bedingen für die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})$ die folgende Form [12]:

$$w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}) = \frac{\alpha}{2} \left[1 - \frac{\gamma}{2} s_i (s_{i-1} + s_{i+1}) \right] (1 + \delta \sigma_{i-1} \sigma_{i+1}), \quad \text{wobei } s'_i = -s_i \quad (7.19)$$

Die Parameter α , γ und δ können für ein bestimmtes kinetisches Isingmodell gewählt werden, wobei γ und δ im Intervall $[-1, +1]$ liegen müssen. Der Parameter α gibt nur die Zeitskala an, auf der ein Spinflip stattfindet, hat aber keinen Einfluß darauf, welche Spinflips mit welcher Wahrscheinlichkeit aufeinander folgen.

Der Parameter γ hängt mit dem Produkt (βJ) , wobei $\beta = 1/(kT)$, zusammen, das die kanonische Gleichgewichtsverteilung des Isingmodells bestimmt. Denn die kanonische Gleichgewichtsverteilung dieses Modells ist ein Vektor \mathbf{p} mit

$$p_{\mathbf{s}} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H(\mathbf{s})) = \frac{1}{Z} \exp\left(-(\beta J) \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}\right), \quad \forall \mathbf{s} \in \{-1, +1\}^N. \quad (7.20)$$

Damit die stationäre Verteilung eines kinetischen Isingmodells dieser Gleichgewichtsverteilung entspricht, muß γ folgendermaßen gewählt werden [12]:

$$\gamma = -\tanh(2\beta J) \quad (7.21)$$

7.5 Die Statistische Mechanik des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$

Man kann leicht nachprüfen, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten (7.19) nur drei verschiedene Werte annehmen können, wenn man die Spins s_{i-1} , s_i und s_{i+1} variiert. Damit gibt es drei verschiedenen Spinflipprozesse in den kinetischen Isingmodellen. Dies sind genau die drei Prozesse vom Typ (a), (b) und (c), die sich auch für die CML-induzierte stochastische Dynamik ergeben und in Abschnitt 7.1 vorgestellt wurden.

In der CML-induzierten stochastischen Dynamik sind die Übergangswahrscheinlichkeiten w_a , w_b und w_c , die zu den jeweiligen Spinflips gehören, die gegebenen Parameter. Diese hängen mit den Parametern α , γ und δ aus Gleichung (7.19) auf die folgende Weise zusammen:

$$\begin{aligned} w_a &= \frac{\alpha}{2} (1 - \gamma) (1 + \delta) , \\ w_b &= \frac{\alpha}{2} (1 - \delta) , \\ w_c &= \frac{\alpha}{2} (1 + \gamma) (1 + \delta) \end{aligned} \quad (7.22)$$

Da ich an der CML-induzierten stochastischen Dynamik interessiert bin, ist es praktischer, bei den Übergangswahrscheinlichkeiten w_a , w_b und w_c als Parametern zu bleiben. w_a , w_b und w_c hängen implizit von den Parametern ϵ und δ des CMLs ab. In Störungstheorie sind w_a , w_b und w_c von der Größe $O(\epsilon, \delta)$.¹

Damit die CML-induzierte stochastische Dynamik als kinetisches Isingmodell interpretiert werden kann, müssen mindestens zwei der drei Übergangswahrscheinlichkeiten w_a , w_b und w_c größer als Null sein. Man kann sich nämlich leicht überlegen, daß mit nur einem erlaubten Spinflipytyp keine Gleichgewichtszustände des Isingmodells für große Zeiten erreicht werden können. Deswegen ist die CML-induzierte stochastische Dynamik nur in den Parameterbereichen 3 und 4 ein kinetisches Isingmodell.

Wenn man von einem CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ startet, dieses in Störungstheorie behandelt und dann eine coarse grained Beschreibung einführt, ist es nicht offensichtlich, daß sich ein kinetisches Isingmodell ergibt. Die Verbindung mit kinetischen Isingmodellen führt dazu, daß man anhand der Ergebnisse, die für diese stochastischen Modelle gewonnen wurden, die coarse grained Dynamik des CMLs besser verstehen kann.

Ich möchte nun noch die Parameter w_a , w_b und w_c mit dem Parameter βJ des Isingmodells in Beziehung bringen. Dazu setze ich die stationäre Verteilung \mathbf{q} der CML-induzierten stochastischen Dynamik (Gleichung (7.13)) gleich der kanonischen Gleichgewichtsverteilung in Gleichung (7.20):

$$\frac{1}{Z} \left(\frac{w_c}{w_a} \right)^{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}} = \frac{1}{Z} \exp \left(-(\beta J) \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} \right) \quad (7.23)$$

Aus diesem Gleichsetzen ergibt sich

$$\beta J = \frac{1}{4} \log \left(\frac{w_a}{w_c} \right) . \quad (7.24)$$

¹Dies ist der Grund, warum die Mastergleichung in Gleichung (7.3) entweder mit kontinuierlicher oder diskreter Zeit formuliert werden kann.

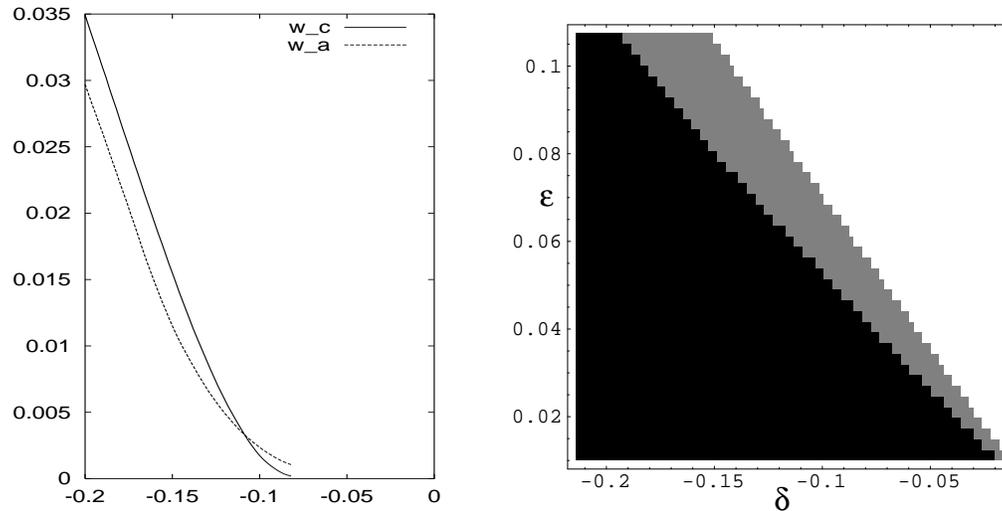


Abbildung 7.1: Links: Hier sind die Übergangswahrscheinlichkeiten w_a und w_c aufgetragen, wenn für festes $\epsilon = 0,0575$ der Parameter δ innerhalb des 4. Parameterbereichs variiert wird. Rechts: Hier sind Teilgebiete des Parameterbereichs 4 zu sehen, in denen die Kopplung ferromagnetisch (graue Fläche) bzw. antiferromagnetisch (schwarze Fläche) ist. In den numerischen Simulationen wurde ein (ϵ, δ) -Bereich von $[0; 0, 1] \times [-0, 2; 0]$ berücksichtigt.

Man sieht, daß die Übergangswahrscheinlichkeit w_b hierbei keine Rolle spielt. Sie ändert nur die Kinetik des stochastischen Modells, nicht die Gleichgewichtsverteilung.

Damit kann eine Statistische Mechanik für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf der coarse grained Ebene abgeleitet werden. Denn die stochastische Dynamik der coarse grained Ebene hat in den Parameterbereichen 3 und 4 einen Gleichgewichtszustand von Spins, der einer Boltzmannverteilung des eindimensionalen Isingmodells mit der in Gleichung (7.24) gegebenen Temperatur entspricht. Wenn man das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ als mikroskopische Dynamik von „Atomen“ auffaßt, wobei ein Atom der Abbildung $f_\delta(x_i)$ am i -ten Gitterplatz entspricht, so kann demnach für die coarse grained oder mesoskopische Ebene der Spins eine Beschreibung im Sinne der Statistischen Mechanik gewonnen werden.

Aus Gleichung (7.24) folgt, daß im Parameterbereich 3, in dem $w_c = 0$ gilt, ein antiferromagnetisches Isingmodell bei der Temperatur $T = 1/\beta = 0$ vorliegt. Bei dieser Temperatur sind die Spins im eindimensionalen Isingmodell vollständig antiferromagnetisch geordnet – unabhängig von der Systemgröße N . Dies korrespondiert zu den stationären Verteilungen e_{s_i} ($i = 1, 2$) in Gleichung (7.11). Die Kinetik bzw. die Relaxationsdynamik in diesen geordneten Zustand wird für den Parameterbereich 3 im nächsten Abschnitt untersucht.

Im Parameterbereich 4, in dem $w_a > 0$ und $w_c > 0$, ist nach Gleichung (7.24) die Temperatur endlich. Da nach dieser Gleichung nur das Produkt (βJ) bestimmt ist, wähle ich im folgenden die Kopplung J immer mit Betrag 1, so daß ich dem CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ bzw. der CML-induzierten stochastischen Dynamik eine eindeutige Temperatur für gegebene Parameter ϵ, δ zuordnen kann. Bei einer endlichen Temperatur hat das

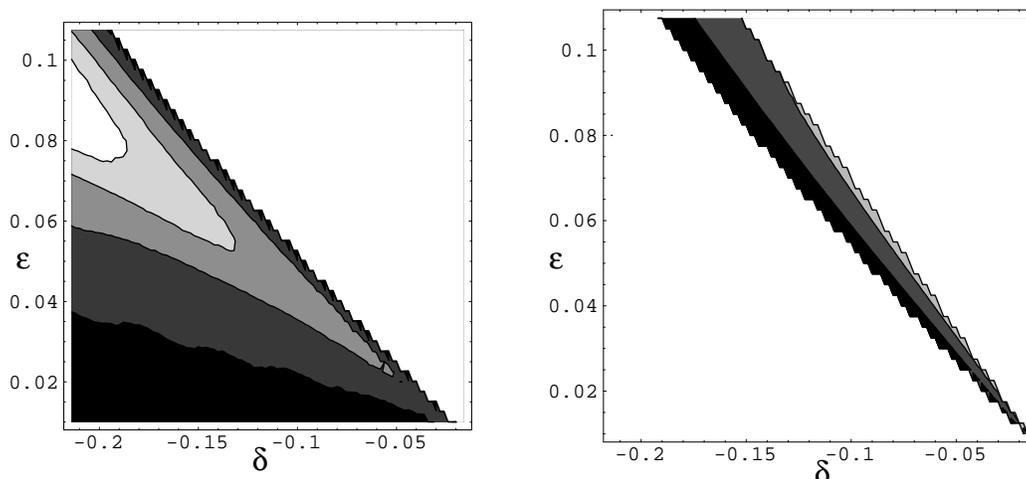


Abbildung 7.2: Links: Hier sind Isothermen im Teilbereich mit ferromagnetischer Kopplung eingezeichnet. Die vier Isothermen liegen bei (βJ) gleich 0,009, 0,04, 0,07 und 0,09. Rechts: Hier sind Isothermen im Teilbereich mit ferromagnetischer Kopplung zu sehen. Für die drei Isothermen gilt (βJ) gleich 0,1, 0,3 und 0,6. Die Temperaturen sind in diesem Bereich demnach i. a. niedriger als im Gebiet mit ferromagnetischer Kopplung.

eindimensionale Isingmodell keine langreichweitige Ordnung bzw. keinen Ordnungsparameter ungleich 0; das Isingmodell ist dann paramagnetisch.

Falls $(w_a/w_c) > 1$, ist nach Gleichung (7.24) die Kopplung positiv ($J = +1$). Dies entspricht einer antiferromagnetischen Kopplung. Falls $(w_a/w_c) < 1$, liegt eine ferromagnetische Kopplung vor ($J = -1$). Im Parameterbereich 4 kommen beide Fälle vor. In der Nähe der Bifurkationslinie $\delta = -4\epsilon/3$ gilt $w_a \gg w_c$, was zu einer antiferromagnetischen Kopplung führt. Wenn man nun bei festem ϵ den Parameter δ kleiner macht, wächst aber w_c schneller als w_a an, so daß schließlich $w_a > w_c$ gilt und eine ferromagnetische Kopplung erreicht wird (siehe linke Seite in Abbildung 7.1). Für $|\delta| \gg \epsilon$ gilt $w_a \approx w_c$; denn bei $\epsilon = 0$ und endlichem δ , haben die Übergänge vom Typ (a), (b) und (c) sämtlich die gleiche Übergangswahrscheinlichkeit, wie man sich leicht überlegen kann.

Auf der rechten Seite von Abbildung 7.1 sind Teilgebiete des Parameterbereichs 4 zu sehen, in denen eine antiferromagnetische bzw. ferromagnetische Kopplung im korrespondierenden Isingmodell herrscht. Hierbei wurden ϵ -Werte zwischen 0 und 0,1 und δ -Werte zwischen 0 und -0,2 simuliert. Der Bereich mit antiferromagnetischer Kopplung schließt direkt an den Parameterbereich 3 an. Auf der Trennungslinie zwischen den beiden Teilgebieten mit verschiedenem Vorzeichen der Kopplung gilt $\beta = 0$ bzw. $T = \infty$. Auch die $(\epsilon = 0)$ -Linie ist eine solche Hochtemperaturlinie, auf der $w_a = w_c$ gilt. Schließlich sind in Abbildung 7.2 die Isothermen des CMLS $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ im Parameterbereichs 4 zu sehen, die die Temperatur des entsprechenden Isingmodells angeben. Der Bereich mit ferromagnetischer Kopplung hat im Bereich der Störungstheorie ausschließ-

lich relativ hohe Temperaturen, da das Verhältnis w_a/w_c nicht sehr groß werden kann (siehe die linke Seite von Abbildung 7.1). Dagegen gibt es im Bereich mit antiferromagnetischer Kopplung auch tiefe Temperaturen, die in der Nähe zum Parameterbereich 3 erreicht werden.

7.6 Die transiente Dynamik des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$

In diesem Abschnitt benutze ich die hergestellte Verbindung zu kinetischen Isingmodellen, um die transiente Dynamik des CMLs besser zu verstehen. Dieser Parameterbereich ist für Transienten besonders interessant, da es hier – für gerades N – nur zwei Attraktoren gibt, deren Anteil am Phasenraumvolumen jeweils $\approx 1/2^N$ ist. Deswegen findet im allergrößten Teil des Phasenraums nur eine transiente Dynamik des CMLs statt. Die beiden Streifenattraktoren aus Gleichung (5.26) entsprechen den beiden vollständig geordneten Konfigurationen des antiferromagnetischen Isingmodells bei $T = 0$.

Die mittlere Transientenlänge $\langle T \rangle$ des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ erhalte ich folgendermaßen in einer numerischen Simulation: Für eine zufällige Anfangsbedingung berechne ich die Anzahl der Iterationen T , bis in der CML-Dynamik einer der Streifenattraktoren erreicht wird. Danach middle ich diese Iterationszeit über viele Anfangsbedingungen. Die mittlere Transientenlänge wächst mit der Systemgröße N quadratisch an (asymptotisches Verhalten):

$$\langle T \rangle \propto N^2 \quad \text{für } N \gg 1 \quad (7.25)$$

Bei anderen CMLs wird oft ein lineares oder exponentielles Anwachsen der Transientenlänge mit der Systemgröße beobachtet.

Im Parameterbereich 3 gibt es zwei Übergangstypen im CML, die Übergänge vom Typ (a) und (b). Entsprechend gibt es nur die Spinflips $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}'$ vom Typ (a) und (b) möglich. Ein intuitives Verständnis der transienten Dynamik läßt sich am besten im Raum der Defektzustände erlangen. Denn jedem Spinvektor \mathbf{s} läßt sich ein Defektvektor $\tilde{\mathbf{s}}$ zuordnen, der aus Nullen und Einsen besteht (siehe Abbildung 5.3).² Die Spinflips vom Typ (a) und (b) haben die folgenden Arten von Defektbewegungen zur Folge:

- Ein Spinflip vom Typ (a), der für drei gleiche Spins nebeneinander möglich ist, entspricht der gegenseitigen **Annihilation von zwei Defekten**, z. B.

$$\begin{aligned} \text{Spinzustand } \mathbf{s} &: \dots + 1, +1, +1, \dots \rightarrow \dots + 1, -1, +1, \dots \\ \text{Defektzustand } \tilde{\mathbf{s}} &: \dots \dots 1, \quad 1, \dots \rightarrow \dots \dots 0, \quad 0, \dots \end{aligned}$$

- Ein Spinflip vom Typ (b) führt zu einer **Diffusion von Defekten**, d. h. ein Defekt (eine „1“) wandert um einen Gitterplatz, z. B.

$$\begin{aligned} \text{Spinzustand } \mathbf{s} &: \dots + 1, +1, -1, \dots \rightarrow \dots + 1, -1, -1, \dots \\ \text{Defektzustand } \tilde{\mathbf{s}} &: \dots \dots 1, \quad 0, \dots \rightarrow \dots \dots 0, \quad 1, \dots \end{aligned}$$

Eine „1“ im Defektvektor $\tilde{\mathbf{s}}$ kann durch einen Typ-(b)-Spinflip im zugehörigen Spinvektor \mathbf{s} in die Richtungen wandern, in denen sie an eine „0“ grenzt.

²Für jemanden, der Anhang G gelesen hat, ist die Analyse der Defektbewegungen in diesem Absatz eine Wiederholung. Er kann gleich beim nächsten Absatz weiterlesen.

Die Defektannihilation geschieht mit Wahrscheinlichkeit w_a , die Defektdiffusion mit Wahrscheinlichkeit w_b .

Eine zufällige Anfangsbedingung des CMLS entspricht einer gleichmäßigen Anfangsverteilung $\mathbf{p}(t=0)$ der Defektzustände $\tilde{\mathbf{s}}$ in der Mastergleichung:

$$p_{\tilde{\mathbf{s}}}(t=0) = \frac{1}{2^{N-1}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{s}}$$

Am Ende der transienten Dynamik müssen sich alle Defekte des Anfangszustands gegenseitig vernichtet haben (für gerades N).

Eine intuitive Erklärung für das quadratische Anwachsen der Transientenlänge gemäß Gleichung (7.25) ist die folgende: Ich betrachte zwei Defekte auf dem Gitter mit Abstand Δ , die Konfiguration sieht demnach beispielsweise so aus:

$$\dots\dots 1, \underbrace{0, 0, 0, 0}_{\text{Abstand } \Delta = 4}, 1 \dots \quad (7.26)$$

Für die mittlere Zeit $\langle t \rangle$, bis die beiden Defekte durch Diffusion zusammenkommen, gilt:

$$\langle t \rangle \propto \Delta^2$$

Dies ist charakteristisch für die eindimensionale Diffusion. Die Längenskala, auf der die Abstände Δ zwischen zwei Defekten verteilt sind, ist proportional zur Systemgröße N , wenn N groß ist. Damit ist es plausibel, daß die mittlere Zeit $\langle T \rangle$, bis sich *alle* Defekte gegenseitig vernichtet haben und ein Streifenattraktor erreicht ist, proportional zu N^2 ist.

7.6.1 Ein exakt lösbares kinetisches Isingmodell

In diesem Unterabschnitt wird die Gesetzmäßigkeit in Gleichung (7.25) etwas strenger begründet. Dabei greife ich auf die Arbeit [12] von R. J. Glauber zurück, in der ein spezielles kinetisches Isingmodell exakt gelöst wurde, d. h. es wurden analytische Ausdrücke für das zeitliche Verhalten wichtiger Größen wie z. B. Korrelationsfunktionen abgeleitet.

Das von Glauber behandelte kinetische Isingmodell fällt in die Klasse der Isingmodelle, die in Abschnitt 7.4 beschrieben wurden; denn für die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\mathbf{s}' | \mathbf{s})$ der Spinflipprozesse gilt in diesem Modell

$$w(\mathbf{s}' | \mathbf{s}) = \frac{\alpha}{2} \left[1 - \frac{\gamma}{2} s_i (s_{i-1} + s_{i+1}) \right], \quad \text{wobei } s'_i = -s_i. \quad (7.27)$$

Dem Vergleich mit Gleichung (7.19) kann man entnehmen, daß in der sog. „Glauberdynamik“ der Parameter $\delta = 0$ gewählt wird; somit gibt es nur noch die beiden Parameter α und γ . Wenn man die Glauberdynamik mit den Wahrscheinlichkeiten der Spinflips ausdrückt, gilt:

$$w_a = \frac{\alpha}{2} (1 - \gamma), \quad w_b = \frac{\alpha}{2}, \quad w_c = \frac{\alpha}{2} (1 + \gamma) \quad (7.28)$$

Für $T = 0$, d. h. im Parameterbereich 3 der CML-induzierten stochastischen Dynamik, gilt nach Gleichung (7.21) $\gamma = -1$, so daß bei dieser Temperatur für die Glauberdynamik gilt

$$w_a = 2 w_b, \quad w_c = 0. \quad (7.29)$$

Daß gerade dieses Verhältnis von w_a zu w_b die exakte Lösbarkeit der Kinetik bedingt, kann man sich im Bild der Defektdynamik auf die folgende Weise klar machen: wenn Gleichung (7.29) gilt, diffundieren die Defekte in den Defektzuständen $\tilde{\mathbf{s}}$ solange ohne Wechselwirkung, bis zwei Defekte auf dem gleichen Gitterplatz landen, was zur instantanen gegenseitigen Annihilation führt. Dieses gerade beschriebene Diffusions–Annihilationsmodell der Defekte kann als eindimensionale chemische Reaktion



aufgefaßt werden. Falls die Parameter gemäß Gleichung (7.29) gewählt werden, ist dieses Reaktionsmodell ebenfalls exakt lösbar, da es mathematisch äquivalent zur Glauberdynamik eines eindimensionalen Isingmodells ist [20, 23].

Ich referiere im folgenden Resultate aus der Arbeit [12], die für das Verständnis des Anwachsens der mittleren Transientenlänge $\langle T \rangle$ relevant sind. Ich gehe von einer gleichmäßigen Anfangsverteilung der Spins zum Zeitpunkt $t = 0$ aus:

$$p_{\mathbf{s}}(t = 0) = \frac{1}{2^N} \quad (7.30)$$

Dies korrespondiert zu zufällig verteilten Anfangsbedingungen im CML. Mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{p}(t)$ zum Zeitpunkt t , die sich aus der Iteration mit der Mastergleichung ergibt, definiere ich räumliche Korrelationsfunktionen von Spins mit Abstand k durch³

$$r_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle s_i s_{i+k} \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{s}} s_i s_{i+k} p_{\mathbf{s}}(t) . \quad (7.31)$$

Bei der Mittelung gehen alle möglichen Spinzustände \mathbf{s} mit ihrer Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t ein, so daß die Korrelationsfunktion zeitabhängig ist.

Der Erwartungswert der Defektkonzentration in den Spinzuständen \mathbf{s} zum Zeitpunkt t ist nach Gleichung (7.12):

$$\begin{aligned} \langle c(t) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s}} \#\text{Def}(\mathbf{s}) \cdot p_{\mathbf{s}}(t) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s}} \sum_{i=1}^N (1 + s_i s_{i+1}) p_{\mathbf{s}}(t) = \frac{1}{2} (1 + r_1(t)) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Damit ergibt sich die Defektkonzentration aus der Abstand–1–Korrelationsfunktion. Für $N \rightarrow \infty$ konnte in [12] das folgende zeitliche Verhalten der Korrelationsfunktion $r_1(t)$ für $T = 0$ und antiferromagnetische Kopplung gezeigt werden:

$$r_1(t) = -1 - e^{-2w_b t} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l [I_{1-l}(-w_b t) - I_{1+l}(-w_b t)] \quad (7.33)$$

wobei $I_m(x)$, $m \in \mathbb{Z}$ die modifizierten Besselfunktionen erster Gattung sind. Wenn man die modifizierten Besselfunktionen asymptotisch für große t entwickelt, ergibt sich aus Gleichung (7.33):

$$\langle c(t) \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{8\pi w_b t}} \quad \text{für } t \gg 1 \quad (7.34)$$

³Die Anfangsverteilung $\mathbf{p}(t = 0)$ ist translationsinvariant; außerdem erhält die Mastergleichung die Translationsinvarianz. Für translationsinvariante Verteilungen $\mathbf{p}(t)$ kann man die Korrelationsfunktionen in der Weise definieren wie in Gleichung (7.31).

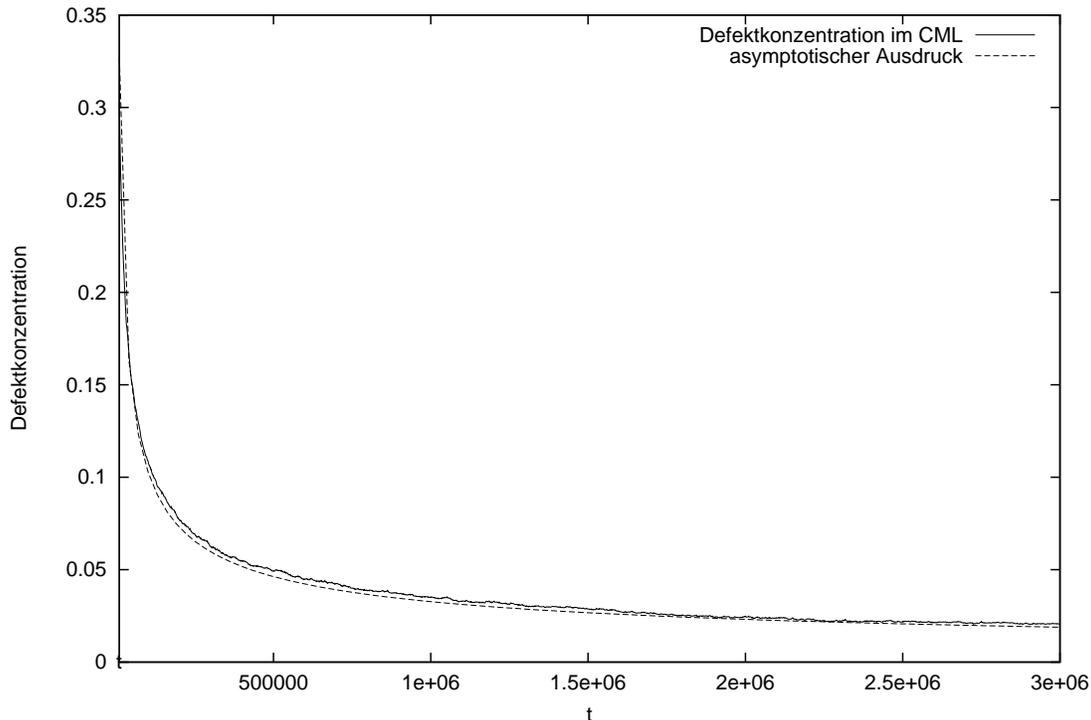


Abbildung 7.3: Für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ wird bei $N = 100$ die mittlere Defektkonzentration zum Zeitpunkt t numerisch bestimmt. Hierbei wurden die Parameter des CMLS als $(\epsilon, \delta) = (0, 01, -0, 114)$ gewählt. Denn bei diesen Parametern erfüllen die Übergangswahrscheinlichkeiten die Beziehung $w_a = 2 w_b$. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit dem asymptotischen Ausdruck (7.34) für große Zeiten t .

Das Abfallen der Defektkonzentration mit $1/\sqrt{t}$ wird dadurch verursacht, daß immer zwei Defekte durch Diffusion zusammenkommen müssen, bevor sie sich gegenseitig vernichten können.⁴

Um die Gültigkeit des Gesetzes (7.34) für die CML-induzierte stochastische Dynamik nachzuweisen, simuliere ich das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ und ermittle die Zahl der Defekte im momentanen Indexvektor σ^t , d. h. $x^t \in \sigma^t$. Es wird über viele Simulationen mit verschiedenen Anfangsbedingungen gemittelt. Die so ermittelte mittlere Defektkonzentration ist für $N = 100$ in Abbildung 7.3 zu sehen und wird mit dem asymptotischen Ausdruck in Gleichung (7.34) verglichen. Für große t ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Kurven.

Aus dem Verhalten der Defektkonzentration in Gleichung (7.34) folgt für den Erwartungswert der Defektanzahl $\langle \# \text{Def} \rangle$ aus Gleichung (7.12):

$$\langle \# \text{Def} (t) \rangle = N \langle c(t) \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{8 \pi w_b}} \frac{N}{\sqrt{t}} \quad (7.35)$$

Anhand dieser Gleichung sieht man: wenn man die Systemgröße N zu $k N$ vergrößert, muß man um den Faktor k^2 länger warten, bis die gleiche Zahl von Defekten erreicht wird. Die Größe $\langle T \rangle$ ist die gemittelte Transientenlänge, bis die Zahl von null Defekten erreicht ist. Demnach ist es höchst plausibel, daß auch diese Zeitdauer quadratische

⁴Ein solches Reaktionsverhalten nennt man diffusionslimitiert, da die Gesamtdauer der Reaktion, bis alle Defekte vernichtet sind, hauptsächlich durch die Diffusionsraten bestimmt wird [26].

mit der Systemgröße N skaliert:

$$\langle T \rangle \propto N^2 \quad (7.36)$$

Damit ist das quadratische Anwachsen der Transientenlänge für (ϵ, δ) -Werte im Parameterbereich 3 gezeigt, für die die Übergangswahrscheinlichkeiten der CML-induzierten Spindynamik die Relation

$$w_a = 2 w_b \quad (7.37)$$

erfüllen. Die (ϵ, δ) -Werte, die dieser Bedingung genügen, liegen auf einer eindimensionalen Linie im Parameterbereich 3. Aber auch wenn w_a und w_b nicht in diesem Größenverhältnis stehen, sollte das quadratische Anwachsen von $\langle T \rangle$ mit N gelten. Denn das eindimensionale Isingmodell zeigt bei $T = 0$ ein kritisches Verhalten; das Abfallen der Defektkonzentration gemäß Gleichung (7.34) ist ein dynamisches kritisches Phänomen. Das zeitlich asymptotische Verhalten der Defektkonzentration wird durch den (dynamischen) kritischen Exponenten z beschrieben:

$$\langle c(t) \rangle \sim \frac{1}{t^z}, \quad (7.38)$$

so daß in diesem Fall $z = 2$ ist. Im Rahmen der Theorie der Renormierungsgruppe wird gezeigt [15, 26], daß kritische Exponenten sehr robust gegenüber Änderungen der Systemparameter sind. Viele unterschiedliche Systeme haben das gleiche kritische Verhalten (Universalität). Für die vorliegende Situation bedeutet dies, daß auch für kinetische Isingmodelle, die nicht Relation (7.37) erfüllen, das Abfallen der Defektkonzentration ein $1/\sqrt{t}$ -Verhalten zeigen sollte. Dementsprechend wächst die Transientenlänge $\langle T \rangle$ für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ in einer größeren Teilmenge des Parameterbereichs 3 quadratisch an. Dies bestätigt sich auch bei numerischen Simulationen des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ mit verschiedenen (ϵ, δ) -Werten.

Kapitel 8

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Coupled Map Lattice (CML), das aus einer Kette von N gekoppelten chaotischen Abbildungen besteht, hauptsächlich mit analytischen Methoden untersucht. Die Konstruktion des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$, die in Kapitel 2 ausführlich beschrieben wird, ist durch die Untersuchungen zum Miller–Huse–Modell angeregt [24, 22]. Die Abbildung, die im hier studierten CML auf jedem einzelnen Gitterplatz wirkt, ist eine deformierte antisymmetrische Zeltabbildung f_δ (siehe Gleichung (2.2)). Das CML hängt von zwei Parametern ab, der Kopplung ϵ und der Deformation δ der Einzelabbildung f_δ . Die angewendete analytische Methode ist eine Störungstheorie in den beiden Parametern ϵ und δ , so daß die Gültigkeit der Analysen dieser Arbeit auf den Fall $\epsilon, \delta \ll 1$ eingeschränkt ist. Der Vergleich mit numerischen Simulationen zeigt allerdings, daß die Störungstheorie bis hin zu ϵ - und $|\delta|$ -Werten von der Größenordnung 0,01 eine sehr gute Beschreibung der CML–Dynamik liefert.

In den Kapiteln 3 bis 5 wird das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ vom Standpunkt der Nichtlinearen Dynamik analysiert, wobei die ergodische Bewegung der Trajektorien im Vordergrund steht. Somit ist es das Hauptziel in diesen Kapiteln, die Anzahl und Größe der koexistierenden Attraktoren für gegebene Parameter ϵ, δ zu bestimmen.

Für $\delta = 0$ hat die Einzelabbildung f_δ zwei zueinander symmetrische Attraktoren, die Intervalle $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ (diese entsprechen später den beiden Spinzuständen $+1$ und -1). Das CML hat für $\epsilon = \delta = 0$ demnach 2^N Attraktoren, die jeweils ein N -dimensionaler Kubus mit Kantenlänge 1 sind. Diese Kuben I_α werden durch einen Indexvektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ unterschieden, wobei $\alpha_i \in \{+, -\}$ (siehe die Definition der Kuben in (2.1) bzw. ihre Darstellung in Abbildung 3.1). Wenn $\epsilon, \delta \neq 0$, verschwinden diese Attraktoren unter Umständen. Solange aber die Parameter $\epsilon, \delta \ll 1$ sind, bleibt eine Trajektorie des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ für viele Iterationen in einem Kubus I_α , bevor sie in einen anderen Kubus I_β weiterwandert. Man kann demnach die Dynamik des CMLs in Störungstheorie durch Übergänge $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ erfassen. In Abschnitt 3.4 wird definiert, was ein Übergang genau ist; außerdem werden zwei Kriterien aufgestellt, die für einen Übergang zu überprüfen sind. Bei einem Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ muß es viele Trajektorien mit Startpunkten aus dem Innern von I_α geben (d. h. in einiger Entfernung vom Rand des Kubus I_α), die nach dem Verlassen von I_α als nächstes das Innere von I_β erreichen.

Für das Studium des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ ist es entscheidend, welche Übergänge bei gegebenen Parametern ϵ, δ erlaubt sind. Denn aus den erlaubten Übergängen kann man die koexistierenden Attraktoren des CMLs bestimmen. Im Rahmen der Störungstheorie gibt es Übergänge, die dominant sind, d. h. wesentlich häufiger stattfinden als andere. Bei einem solchen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ hat der Kubus I_α mit I_β eine $(N - 1)$ -

dimensionale Seitenfläche gemeinsam; der Indexvektor α unterscheidet sich in diesem Fall von β nur in einer Komponente, dem Übergangsindex α_i .

In Kapitel 4 wird das CML für drei Gitterplätze ($N = 3$) ausführlich untersucht, insbesondere die drei in Störungstheorie bevorzugten Übergangstypen. Es zeigt sich, daß es zu einem vorgegebenen ϵ ein kritisches δ_c der Größe $c \cdot \epsilon$ gibt, so daß für kleinere δ der Übergang stattfinden kann. Die Konstante c hängt vom Übergangstyp ab. Die Hauptarbeit des Kapitels 4 besteht in der Bestimmung von c . Hierfür werden geometrische Konstruktionen im Phasenraum durchgeführt. Eines der Kriterien für einen Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ läuft nämlich darauf hinaus, daß bestimmte Urbildmengen der Überlappmengen das sog. „Fehlvolumen“ in I_α verlassen, sobald $\delta < \delta_c$. Da die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ nicht surjektiv ist, gibt es in I_α Punkte, die keine Urbilder haben; aus diesen Punkten besteht das Fehlvolumen (siehe Definition (3.24)).

Entscheidend dafür, daß sich das CML für beliebiges N in Störungstheorie lösen läßt, ist die Reduktion von N -dimensionalen Übergängen zu effektiv dreidimensionalen Übergängen, die in Kapitel 5 gezeigt wird. Falls $\epsilon, \delta \ll 1$, sind bei einem Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ nämlich nur die beiden Nachbarindizes α_{i-1} und α_{i+1} des Übergangsindex α_i relevant. Es gibt demnach für allgemeines $N \geq 3$ nur drei unterschiedliche dominante Übergangstypen $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ mit kritischen δ -Werten 0 , $-2\epsilon/3$ bzw. $-4\epsilon/3$. Diese Übergangstypen (a), (b) und (c), die in Abschnitt 5.3 vorgestellt werden, unterscheiden sich durch die Konfiguration von α_{i-1} , α_i und α_{i+1} (einige der 8 möglichen Kombinationen sind wegen Symmetrien der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ äquivalent).

Wie in Abschnitt 5.4 gezeigt wird, gibt es für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ vier Parameterbereiche, innerhalb derer die Attraktoren und die ergodische Dynamik des CMLs qualitativ gleich sind. In Abbildung 4.12 ist das Bifurkations- bzw. Phasendiagramm für das CML gezeichnet. Die Grenzlinien zwischen den Parameterbereichen sind durch die kritischen δ -Werte der drei Übergangstypen gegeben, da in den einzelnen Parameterbereichen unterschiedlich viele Übergangstypen erlaubt sind. Die Anzahl der koexistierenden Attraktoren und ihre Größe unterscheidet sich teilweise dramatisch in den verschiedenen Parameterbereichen.

Ein überraschendes Ergebnis für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ ist, daß eine stärkere Kopplung ϵ tendenziell Übergänge verhindert und demzufolge einzelne Kuben als Attraktoren stabilisieren kann, wie in Abschnitt 5.5 erläutert wird. Dieses Verhalten zeigt sich bei festem $\delta < 0$, wenn man die Kopplung ϵ erhöht. Naiv würde man erwarten, daß eine größere Kopplung eher das Verschmelzen von Attraktoren begünstigt. Der Grund für das kontraintuitive Verhalten ist das Anwachsen des Fehlvolmens in den Kuben mit der Kopplung ϵ .

In den Kapiteln 6 und 7 wird das CML auf einer coarse grained Ebene diskutiert. In dieser grobgekörnten Perspektive wird nur noch danach gefragt, in welchem Kubus I_α sich eine Trajektorie zum Zeitpunkt t aufhält. Man erhält beim Coarse graining aus einer Trajektorie im Phasenraum eine Folge von Indexvektoren $\alpha(t)$. Die N -dimensionalen Indexvektoren α können als Spinketten der Länge N interpretiert werden, wobei auf jedem Gitterplatz die Spinzustände $+1$ und -1 möglich sind. Diese Einführung von Spins ist die gleiche wie im Miller-Huse-Modell (Gleichung (1.4)). Die Dynamik auf der coarse grained Ebene ist eine *stochastische* Spindynamik, wobei ein Übergang $I_\alpha \rightarrow I_\beta$ im CML zu einem Spinflip $\alpha \rightarrow \beta$ korrespondiert. Im Gegensatz zur Situation im Miller-Huse-Modell konnte in dieser Arbeit eine Mastergleichung für die Spindynamik hergeleitet werden (Gleichung (6.7)). Dies verdankt sich hauptsächlich der Tatsache, daß die Spindynamik im Bereich $\epsilon, \delta \ll 1$ Markovsch ist. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\beta | \alpha)$ können, wie in Unterabschnitt 6.3.1

gezeigt wird, wegen der darunterliegenden CML-Dynamik als Volumina bestimmter Mengen im Phasenraum interpretiert werden. Daraus ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten $w(\beta|\alpha)$:

- Für die störungstheoretisch dominanten Spinflips $\alpha \rightarrow \beta$ unterscheiden sich α und β nur im Spinzustand eines Gitterplatzes.
- Die Übergangswahrscheinlichkeit $w(\beta|\alpha)$ hängt nur von den drei aufeinanderfolgenden Spins s_{i-1} , s_i und s_{i+1} ab, wobei s_i der sich ändernde Spin ist. Somit gibt es im störungstheoretischen Bereich eine Nächste-Nachbar-Wechselwirkung innerhalb der Spinketten.
- Den drei in Störungstheorie bevorzugten Übergangstypen des CMLs entsprechen drei Spinflipprozesse mit i. a. verschiedenen Übergangswahrscheinlichkeiten:

Typ (a): zum Beispiel $\dots \uparrow\uparrow\uparrow \dots \rightarrow \dots \uparrow\downarrow\uparrow \dots$

Typ (b): zum Beispiel $\dots \uparrow\uparrow\downarrow \dots \rightarrow \dots \uparrow\downarrow\downarrow \dots$

Typ (c): zum Beispiel $\dots \uparrow\downarrow\uparrow \dots \rightarrow \dots \uparrow\uparrow\uparrow \dots$

Spinflips vom Typ (c) sind invers zu Spinflips vom Typ (a).

Wie man anhand der gerade dargestellten Spinflipytypen schon vermuten kann, fällt die CML-induzierte Spindynamik in eine Klasse von relativ einfachen kinetischen Isingmodellen, die die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts erfüllen und gründlich untersucht worden sind [18, 26].

In Abschnitt 7.3 werden die stationären Verteilungen für die Mastergleichung der Spindynamik berechnet, wobei sich verschiedene Lösungen in den vier Parameterbereichen des CMLs ergeben. Im Parameterbereich 3 und 4 lassen sich die stationären Verteilungen formal als kanonische Verteilungen des eindimensionalen Isingmodells auffassen. Die Temperatur wird durch das Verhältnis der Raten von Spinflip (a) und (c) bestimmt. Man kann somit den Parametern ϵ , δ eine Temperatur T zuordnen (siehe Abbildung 7.2). Dabei ist die Kopplung des Isingmodells in manchen Parameterbereichen ferromagnetisch, in manchen antiferromagnetisch, wie in Abbildung 7.1 dargestellt. Das eindimensionale Isingmodell ist demnach im Sinne der Gleichgewichtsstatistik die geeignete Beschreibung für das ergodische Verhalten des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf der coarse grained Ebene.

Nichtgleichgewichtsverhalten zeigt das CML auf den Transienten; diese entsprechen Relaxationsprozessen in den Spinketten. Hierbei ist der Parameterbereich 3 ($-4\epsilon/3 < \delta < -2\epsilon/3$) besonders interessant. In diesem Bereich hat das korrespondierende Isingmodell die Temperatur $T = 0$, so daß die Spins nach dem Ablauf der transienten Dynamik vollständig antiferromagnetisch geordnet sind. Wie in Abschnitt 7.6 geschildert, zeigt die mittlere Transientendauer $\langle T \rangle$ ein quadratisches Anwachsen mit der Systemgröße N . Dies läßt sich im Rahmen der kinetischen Isingmodelle verstehen: denn die Spindynamik besteht in diesem Bereich aus der Diffusion und gegenseitigen Vernichtung von Defekten bzw. Domängengrenzen. Defekte können sich dabei nur paarweise annihilieren, so daß zwei Defekte durch Diffusion erst zusammenkommen müssen. Dieser Diffusionseffekt führt zum quadratischen Anwachsen der Transientenlänge. Mit Hilfe des von R. J. Glauber analytisch gelösten kinetischen Isingmodells [12] kann diese Argumentation quantitativ gemacht werden. Die transiente Dynamik des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ entspricht demnach im Parameterbereich 3 einem gut verstandenen Relaxationsprozeß der Nichtgleichgewichtsstatistik.

Als weiterführende Projekte ergeben sich aus dieser Arbeit beispielsweise:

- Um näher an das Miller–Huse–Modell heranzukommen, sollte das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ auf ein zweidimensionales Gitter übertragen werden. Ein Gitterplatz wird dann mit seinen vier nächsten Nachbarn gekoppelt:

$$x_i^{t+1} := [\mathbf{T}(\mathbf{x}^t)]_i = (1 - \epsilon) f_\delta(x_i^t) + \frac{\epsilon}{4} \sum_j f_\delta(x_j^t) \quad (8.1)$$

Dieses Modell kann wahrscheinlich im störungstheoretischen Bereich $\epsilon, \delta \ll 1$ ebenfalls analytisch behandelt werden. Bei den Berechnungen der kritischen δ -Werte für die Übergänge ergeben sich wegen der vier nächsten Nachbarn Konstruktionen in einem fünfdimensionalen Raum. Bei dem eindimensionalen Gitter dieser Arbeit hat eine dreidimensionale Geometrie genügt; entsprechend ist der analytische Aufwand bei einem zweidimensionalen Gitter erheblich höher.

- In dem hier behandelten CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ entspricht die ergodische Dynamik des CMLs Gleichgewichtszuständen auf der coarse grained Ebene. Denn die stochastische Spindynamik erfüllt die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts. Wenn man – bei einem eindimensionalen Gitter – einen Gitterplatz nicht symmetrisch mit seinen beiden nächsten Nachbarn verknüpft, könnte diese Bedingung verletzt sein. Im extremen Fall wird ein sog. unidirektionales CML betrachtet:

$$x_i^{t+1} := [\mathbf{T}(\mathbf{x}^t)]_i = (1 - \epsilon) f_\delta(x_i^t) + \epsilon f_\delta(x_{i+1}^t) \quad (8.2)$$

Hier ist ein Gitterplatz nur an seinen rechten Nachbarn gekoppelt. In einem solchen CML könnten sich auf der coarse grained Ebene stationäre Nichtgleichgewichtszustände ergeben.

Während es sehr viele numerische Untersuchungen zu CMLs gibt, ist die Zahl der analytischen Studien bisher eher klein. In dieser Arbeit konnte die hochdimensionale chaotischen Dynamik eines CMLs mit analytischen Methoden verstanden werden. Insbesondere konnten vier verschiedene Parameterbereich mit unterschiedlicher ergodischer Dynamik identifiziert werden. Die Grenzlinien wurden analytisch in führender Ordnung Störungstheorie berechnet. Außerdem zeigt diese Arbeit beispielhaft, daß Konzepte aus der Statistischen Physik sehr fruchtbar für das Studium einer CML–Dynamik sein können.¹ Denn es ergibt sich ein sehr enger Zusammenhang des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ zu kinetischen Isingmodellen. Es ist für mich ein überraschendes Ergebnis, daß die CML–Dynamik, die ohne Bezug auf irgendeinen Hamiltonian definiert ist, sich auf einer coarse grained Ebene durch den Isinghamiltonian statistisch erfassen läßt. Die Anwendung von statistischen Konzepten wurde wesentlich durch die analytische Handhabbarkeit des CMLs $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ begünstigt.

¹Allerdings kann bisher kein thermodynamischer Limes $N \rightarrow \infty$ für das CML $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}$ durchgeführt werden, da dieser Limes mit demjenigen der Störungstheorie nicht kommutieren dürfte.

Anhang A

Begriffe aus der Theorie dynamischer Systeme

In diesem Anhang stelle ich ein paar Begriffe aus der mathematischen Literatur über dynamische Systeme zusammen.

Ich beginne mit dem Begriff „Attraktor“: dieser Begriff bleibt in der Physikkultur oft sehr vage. Dies ist insofern verständlich, als es in der mathematischen Literatur verschiedene Definitionen für den Begriff „Attraktor“ gibt, die jeweils ihre Vor- und Nachteile haben. Die Situation stellt sich in diesem Fall für einen, der glaubt, daß die Mathematiker sich schnell auf die „günstigste Definition“ dieses Begriffs einigen können, unbefriedigend dar. Uns genügt in dieser Arbeit eine relativ unkomplizierte Definition von Attraktoren, die mit topologischen Begriffen auskommt.

Zuerst definiere ich den Begriff anziehende Menge:

Definition 1 Eine Menge A eines dynamischen Systems, das durch die Abbildung T erzeugt wird, heißt **anziehend**, wenn eine Umgebung U von A existiert, so daß

$$\forall \mathbf{x} \in U \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(T^n(\mathbf{x}), A) = 0 . \quad (\text{A.1})$$

Definition 2 Ein **Attraktor** eines dynamischen Systems, das durch die Abbildung T erzeugt wird, ist eine kompakte Menge A mit folgenden Eigenschaften:

- (a) A ist unter der Abbildung T invariant, d. h. $T(A) = A$.
- (b) A ist eine anziehende Menge.
- (c) Es existiert ein auf A dichter Orbit des dynamischen Systems.

Die nachfolgenden beiden Begriffe charakterisieren die Punkte, die auf eine anziehende Menge bzw. einen Attraktor hinlaufen:

Definition 3 Das **Einzugsgebiet** $W(A)$ einer anziehenden Menge A ist die Menge aller Punkte \mathbf{x} des Phasenraums M , so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(T^n(\mathbf{x}), A) = 0 .$$

Definition 4 Das **Bassin der Anziehung** der anziehenden Menge A ist die größte offene Menge, die im Abschluß $\overline{W(A)}$ des Einzugsgebiet liegt.

Anhang B

Der O -Kalkül

In diesem Anhang erläutere ich, was die Zeichen $O(\dots)$ und $o(\dots)$ bedeuten, die oft bei asymptotischen Entwicklungen verwendet werden [7].

$$f(x) = O(\phi(x)) \quad x \in I$$

ist eine Abkürzung für den Sachverhalt

$$\exists A > 0 \quad |f(x)| \leq A \cdot |\phi(x)| \quad x \in I$$

Ich kann demnach die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall I nach oben abschätzen, wobei die Konstante A unbekannt bleibt.

Ich verwende den O -Kalkül in Verbindung mit einer Störungstheorie in ϵ und δ . In diesem Zusammenhang bedeutet der Ausdruck $f(\epsilon) = O(\epsilon^2)$ ohne Angabe eines Intervalls

$$\exists A, c > 0: \quad |f(\epsilon)| \leq A \cdot |\epsilon^2| \quad x \in [0, c] . \quad (\text{B.1})$$

Auf einem hinreichend kleinen Intervall $[0, c]$ ist diese Abschätzung gültig. In Störungstheorie kann $f(\epsilon)$ demnach beliebig klein gemacht werden.¹ Wenn ich eine Größe, die sowohl von ϵ als auch von δ abhängt, im O -Kalkül nach oben abschätzen möchte, so brauche ich mehr unbekannte Konstanten:

$$f(\epsilon, \delta) = O(\epsilon, \delta)$$

bedeutet zum Beispiel

$$\exists A, B, c, d: \quad |f(\epsilon, \delta)| \leq A|\epsilon| + B|\delta| \quad \epsilon \in [0, c], \delta \in [0, d] .$$

Es gibt im O -Kalkül einige Folgerungen der Art

$$f(\epsilon) = O(\epsilon^2) \Rightarrow f(\epsilon) = O(\epsilon)$$

die man leicht zeigen kann.

Das o -Symbol gibt im Gegensatz zum O -Symbol keine obere Schranke für einen Ausdruck an, sondern beschreibt die Konvergenz eines Ausdrucks gegen Null. Der Ausdruck

$$f(\epsilon) = o(\phi(\epsilon))$$

¹Um einem möglichen Mißverständnis vorzubeugen: $f(\epsilon) = O(\epsilon^2)$ sagt nicht aus, daß $|f(\epsilon)|$ für kleines ϵ von der Größenordnung $c \cdot \epsilon$ ist mit $c \neq 0$. Denn die Konstante A in Gleichung (B.1) kann auch gleich 0 sein. Es handelt sich im O -Kalkül nur um Abschätzungen *nach oben*.

bedeutet

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon)}{\phi(\epsilon)} = 0 .$$

Das o -Symbol macht keine Aussage darüber, wie schnell der Ausdruck gegen Null strebt. In der in dieser Arbeit verwendeten Störungstheorie steht beispielsweise ein $o(1)$ -Symbol für einen Term, der für $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ gegen Null tendiert.

Anhang C

Beweis einer Aussage auf Seite 28

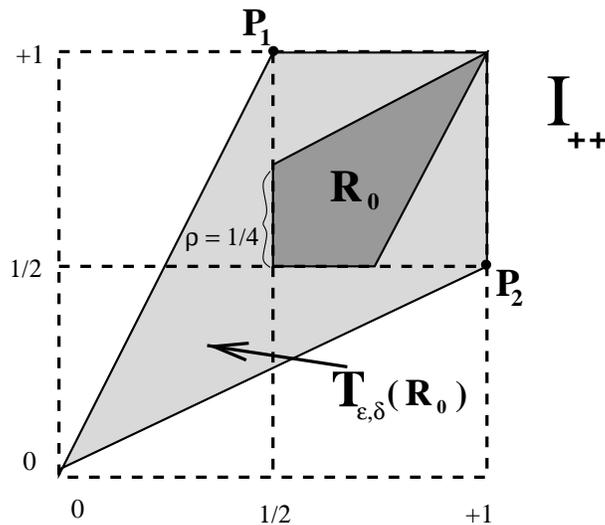


Abbildung C.1: Das Viereck R_0 und sein Bild $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(R_0)$ ($\epsilon = \delta = 0$).

Das Viereck R mit der Form eines Drachens definiere ich durch die vier Eckpunkte

$$(a, a), (a + \rho, a), (a, a + \rho) \text{ und } (1, 1),$$

wobei $\rho = 1/4$ sein soll. Für $\epsilon = \delta = 0$ entspricht dieses Viereck dem Viereck R_0 in Abbildung C.1.

Ich möchte folgende Relation in diesem Anhang zeigen:

$$\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}(R) \supset R \tag{C.1}$$

Ich betrachte zuerst den Fall $\epsilon = \delta = 0$. Da $R_0 \subset S_{(2,2)}$ werden im Fall der ungestörten Abbildung alle Strecken um den Faktor 2 gestreckt. Die resultierende Bildmenge $\mathbf{T}_{\epsilon=0,\delta=0}(R_0)$ ist ebenfalls in der Abbildung C.1 zu sehen. Es gilt offenbar

$$\mathbf{T}_{\epsilon=0,\delta=0}(R_0) \supset R_0 \quad . \tag{C.2}$$

Wichtig ist, daß die Punkte P_1 und P_2 der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon=0,\delta=0}(R_0)$ einen Abstand der Größenordnung 1 von der Menge R_0 haben.

Für $\epsilon, \delta \ll 1$ gilt:

- Die Eckpunkte eines Parallelogramms P_γ mit $S_\gamma \subset I_\alpha$ um eine Distanz der Größe $O(\epsilon, \delta)$ von den Eckpunkten des Quadrates I_α unterscheiden. In Störungstheorie unterscheiden sich die Koordinaten der vier Eckpunkte der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(R)$ um Beträge von höchstens der Größe $O(\epsilon, \delta)$ von den entsprechenden Eckpunkten der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon=0, \delta=0}(R_0)$. Insbesondere haben die beiden Eckpunkte P_1 und P_2 noch immer einen Abstand der Größenordnung 1 von der Menge R .
- Der Bildpunkt des Eckpunkts (a, a) von R ist weiterhin exakt der Punkt $(1, 1)$, so daß ein Eckpunkt der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(R)$ weiterhin die Koordinaten $(1, 1)$ hat.

Aus diesen beiden Punkten folgt, daß die Menge R in der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(R)$ enthalten ist.

Anhang D

Beweis einer Aussage auf Seite 35

Der zu beweisende Sachverhalt ist:

Für $\delta < 0$ gibt es in jeder offenen Umgebung $U \subset I_{++}$ eine offene Teilmenge V , so daß

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^n(\mathbf{x}) \notin I_{++}. \quad (\text{D.1})$$

Ich benutze beim Beweis die Eigenschaften von konvexen Mengen, so daß ich ihre Definition rekapituliere:

Definition: Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^N$ heißt **konvex**, falls

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in C$$

Ich brauche folgende elementar beweisbaren Eigenschaften von konvexen Mengen:

1. Sei $C \subset \mathbb{R}^N$ konvex und L eine lineare Abbildung auf \mathbb{R}^N ; dann ist die Bildmenge $L(C)$ ebenfalls konvex.
2. Seien C und C' zwei konvexe Menge; dann ist ihre Schnittmenge $C \cap C'$ ebenfalls konvex.

Außerdem benötige ich im Beweis die aus dem Hauptteil bekannte Tatsache, daß jede hinreichend kleine Umgebung des Punkts (a, a) in zwei Iterationsschritten das Quadrat I_{++} verläßt.

Nach diesen Vorbereitungen komme ich zum Beweis von (D.1): Ich betrachte eine beliebige Umgebung $U \subset I_{++}$. Aus U wähle ich eine offene und konvexe Teilmenge U_0 ; außerdem soll U_0 in einem Teilrechteck S_{γ_0} enthalten sein. Ich konstruiere nun eine Folge von Mengen $\{A_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$, die sämtlich offen und konvex sind. Wir werden sehen, daß die Folge nur endlich viele Elemente haben kann. Die ersten Elemente der Folge bestehen aus den k_0 Bildern der Menge U_0 unter $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$:

$$A_0 := U_0, \quad A_i := \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^i(U_0), \quad 1 \leq i \leq k_0, \quad (\text{D.2})$$

wobei gilt

$$k_0 := \max \{i \mid \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, i-1\} \exists S_\gamma : A_j \subset S_\gamma\}.$$

D. h. die Menge A_{k_0} ist die erste iterierte Bildmenge von U_0 , die nicht mehr in einem Teilrechteck $S_\gamma \subset I_{++}$ enthalten ist. Die Fläche der Menge A_i wächst gegenüber ihrem Vorgänger A_{i-1} um den Faktor $4 + O(\epsilon, \delta)$, da A_{i-1} in einem Teilrechteck liegt. Deswegen muß k_0 endlich sein.

Es gibt nun folgende Fallunterscheidung:

Falls die Menge A_{k_0} alle vier Teilrechtecke $S_\gamma \subset I_{++}$ schneidet, setze ich die Folge $\{A_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ nicht weiter fort.

Falls die Menge A_{k_0} zwei oder drei $S_\gamma \subset I_{++}$ schneidet, verlängere ich die Folge. Das Teilrechteck S_{γ_1} soll den größten Flächenanteil an der Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_0}(U_0)$ haben:

$$\text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_0}(U_0) \cap S_{\gamma_1}\right) \geq \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_0}(U_0) \cap S_\gamma\right) \quad \forall \gamma$$

Ich definiere die offene und konvexe Menge

$$U_1 := \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_0}(U_0) \cap \text{Int}(S_{\gamma_1}).$$

Ich verlängere die Mengensequenz durch die iterierten Bildmengen von U_1 (mindestens ein Element kommt hinzu):

$$\begin{aligned} A_{k_0+i} &:= \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^i(U_1), \quad 1 \leq i \leq k_1, \\ k_1 &:= \max\{i \mid \forall j \in \{0, 1, \dots, i-1\} \exists S_\gamma : A_{k_0+j} \subset S_\gamma\}. \end{aligned}$$

Die Fläche der Menge A_{k_0+1} ist mindestens um einen Faktor $4/3$ größer als die der Menge A_{k_0} , da

$$\text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(U_1)) = (4 + O(\epsilon, \delta)) \text{Fl}(U_1) \geq \frac{4 + O(\epsilon, \delta)}{3} \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_0}(U_0)\right).$$

Das Symbol $O(\epsilon, \delta)$ soll anzeigen, daß in Störungstheorie Korrekturen der asymptotischen Größe $O(\epsilon, \delta)$ hinzukommen. Falls $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}(U_1)$ Teilmenge eines S_γ ist, wächst die Fläche des nächsten Folgeelements $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^2(U_1)$ um den Faktor $4 + O(\epsilon, \delta)$.

Für die Menge $A_{k_0+k_1}$ treffe ich wieder die obige Fallunterscheidung: falls die Menge alle vier S_γ schneidet, höre ich auf; falls die Menge zwei oder drei S_γ schneidet, bilde ich

$$\begin{aligned} U_2 &:= \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_1}(U_1) \cap \text{Int}(S_{\gamma_2}), \text{ wobei} \\ \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_1}(U_1) \cap S_{\gamma_2}\right) &\geq \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_1}(U_1) \cap S_\gamma\right) \quad \forall \gamma. \end{aligned}$$

Ich setze die Mengensequenz $\{A_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ durch iterierte Bildmengen von U_2 fort u. s. w. .

Per Konstruktion ist die Fläche des n -ten Folgeelements A_n mindestens um einen Faktor $\approx (4/3)^n$ größer als die Fläche des Startelements U_0 . Da die Fläche von I_{++} begrenzt ist, hat die Folge nur endlich viele Glieder. Es muß demnach $i \in \mathbb{N}$ geben, so daß das Folgeelement

$$A_n = \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{k_i}(U_i) \quad \text{mit} \quad n = k_0 + k_1 + \dots + k_i$$

alle vier Teilrechtecke schneidet. Da A_n offen und konvex ist, enthält A_n den Punkt (a, a) und eine hinreichend kleine Umgebung dieses Punktes, deren Punkte I_{++} in zwei Iterationen verlassen. $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^n$ ist eine stetige Funktion und die Ausgangsmenge U ist offen, so daß eine offene Umgebung $V \subset U$ existiert:

$$\forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^n(\mathbf{x}) \notin I_{++}.$$

Anhang E

Störungstheoretische Argumentation für Gleichung (3.51)

In diesem Anhang möchte ich Gleichung (3.51) plausibel machen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k} \left(\bigcup_{\beta \neq ++} OV_{++, \beta} \right) \right) = 1 + o(1). \quad (\text{E.1})$$

Im folgenden verwende ich für die Gesamtüberlappmenge von I_{++} mit den anderen Quadraten I_{β} eine Abkürzung:

$$GO_{++} := \bigcup_{\beta \neq ++} OV_{++, \beta}$$

Wenn ich die Lagen der dreieckigen Urbildmengenkomponenten der i -ten Generation kenne, werden die Orte der Urbildmengenkomponenten der $(i+1)$ -ten Generation durch die *Urbilddynamik* bestimmt. Im Gegensatz zur (Vorwärts-) Dynamik mit $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ füllt die Urbilddynamik auch das Fehlvolumen in I_{++} mit Urbildern aus. In Abbildung 3.9 sind die Lagen der Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(GO_{++})$ für $k = 2, 3, 4$ im Quadrat I_{++} schematisch zu sehen.

Ich möchte zuerst zeigen, daß die Flächensumme in Gleichung (E.1) ab einem hinreichend großen \tilde{k} zu einer konvergenten geometrische Reihe wird, die sich leicht aufsummieren läßt. Demnach berechne ich das Flächenverhältnis

$$\frac{\text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-(k+1)} (GO_{++}) \right)}{\text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k} (GO_{++}) \right)}. \quad (\text{E.2})$$

für große k . Wie schon im Hauptteil erwähnt, spielen für diesen Quotienten die Größe der Jakobideterminante und die Stärke der Absorption von Urbildmengenkomponenten im Fehlvolumen die Hauptrolle.

Ich berechne zunächst das Verhältnis der Zahl $N(k+1)$ der Urbildmengenkomponenten der $(k+1)$ -ten Generation zur Zahl $N(k)$ der Urbildmengenkomponenten der k -ten Generation. Dabei gehe davon aus, daß alle Komponenten einer Urbildgeneration gleich groß sind, da sie alle durch gleich viele Abbildungen mit $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ auf die Menge

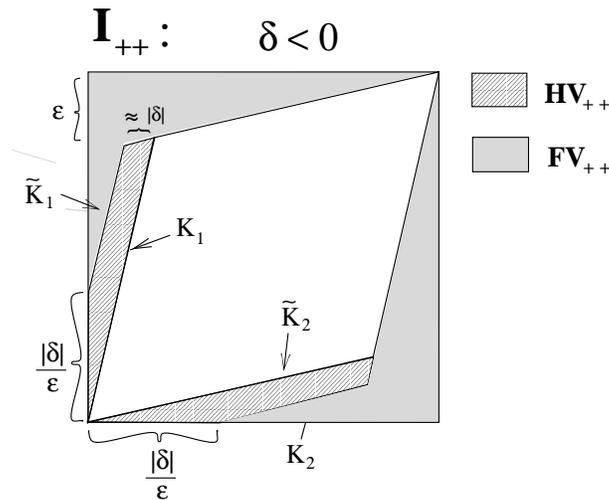


Abbildung E.1: Hier ist die Lage der Mengen HV_{++} und FV_{++} im Quadrat I_{++} für $\delta < 0$ dargestellt. Für die eingezeichneten Linien K_i bzw. \tilde{K}_i gilt: $K_i \subset K_{<}((1, 1), i)$ und $\tilde{K}_i \subset K_{<}((2, 2), i)$. Das weiß gelassene Gebiet in I_{++} entspricht dem Parallelogramm $P_{(1,1)}$. Punkte aus diesem Gebiet haben vier Urbilder.

$\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-1}(GO_{++}) \setminus FV_{++}$ abgebildet werden.¹ Eine Urbildmengenkomponente K_i der k -ten Generation kann 4, 2 oder 0 Urbildmengenkomponenten der $(k+1)$ -ten Generation als Urbilder besitzen, je nachdem in welcher Teilmenge von I_{++} die Menge K_i liegt:

- Wenn sich die Komponente K_i im Fehlvolumen FV_{++} befindet, hat sie keine Urbildmenge. Die Menge FV_{++} ist für $\delta < 0$ in Abbildung E.1 hellgrau schattiert dargestellt.
- Es gibt für $\delta < 0$ ein Gebiet in I_{++} , dessen Punkte genau zwei Urbilder haben, weil die vier Parallelogramme P_γ mit $S_\gamma \subset I_{++}$ nicht deckungsgleich sind. Denn für die beiden Parallelogramme P_γ mit $\gamma_i = 2$ ist die Seite $K_{<}(\gamma, i)$ um den Betrag $(1 - \epsilon)|\delta|$ gegenüber der entsprechenden Seite der beiden Parallelogramme mit $\gamma_i = 1$ verschoben. Punkte aus I_{++} , die zwischen den parallelverschobenen Parallelogrammseiten liegen, haben zwei Urbilder in I_{++} . In Abbildung E.1 ist diese Menge HV_{++} , die aus zwei streifenförmigen Teilmengen besteht, als schraffiertes Gebiet dargestellt. HV_{++} besteht aus zwei streifenförmigen Teilmengen. Da die beiden Parallelogrammseiten nach Punkt 3(b) von Unterabschnitt 3.3.3 um den Betrag $(1 - \epsilon)|\delta| + O(\epsilon^2 \cdot \delta)$ verschoben sind, ergibt sich die Fläche von

¹Ich vernachlässige den Effekt, daß einzelne Urbildmengenkomponenten einer i -ten Urbildgeneration teilweise innerhalb und teilweise außerhalb des Fehlvolumens liegen können. In diesem Fall hat nur die Teilmenge außerhalb des Fehlvolumens eine Urbildmenge in der $(i+1)$ -ten Generation, deren Komponenten kleiner als die übrigen Urbildmengenkomponenten dieser Generation sind. Es gibt aber wenige dieser kleineren Komponenten im Verhältnis zu allen Komponenten einer Generation: denn wie im Hauptteil dargestellt, befindet sich die zweite Urbildgeneration, die Menge $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-2}(GO_{++})$, in der Mitte von I_{++} . Da sich der Abstand zwischen den Urbildmengenkomponenten ungefähr halbiert für eine um 1 höhere Urbildgeneration und das Fehlvolumen eine Menge mit einem Abstand der Größenordnung ϵ vom Rand des Quadrats I_{++} ist, schneidet erst die k_0 -te Urbildgeneration wieder das Fehlvolumen, wobei $k_0 \approx \log_2(1/\epsilon)$. Eine Urbildmenge der Generation $i > \log_2(1/\epsilon)$ hat aber insgesamt schon sehr viele Komponenten mit einer sehr kleinen Fläche.

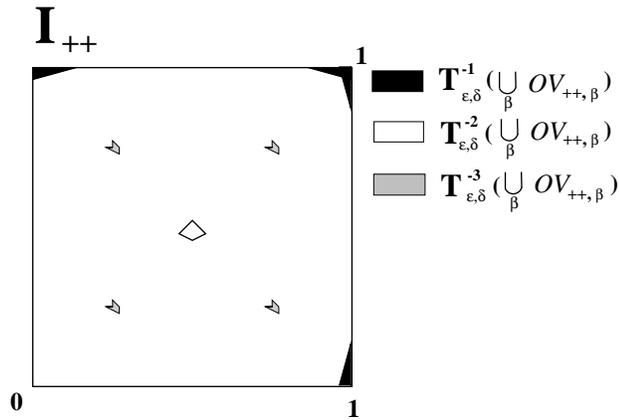


Abbildung E.2: Die ersten drei Urbildgenerationen der Überlappmenge $\cup_{\beta} OV_{++}, \beta$ sind dargestellt. Während die erste Urbildgeneration am Rand von I_{++} liegt, befinden sich die höheren Urbildmengen hauptsächlich im Innern dieses Quadrats.

HV_{++} als

$$\text{Fl}(HV_{++}) = 2(1 - \epsilon) |\delta| (1 - \epsilon) - \frac{\delta^2}{\epsilon} + O(\epsilon^2 \delta, \delta^2). \quad (\text{E.3})$$

Wenn $K_i \subset HV_{++}$, verursacht diese Komponente der k -ten Generation zwei Urbildmengenkomponenten in der $(k+1)$ -ten Generation.

- Schließlich gibt es ein großes Gebiet in I_{++} , deren Punkte vier Urbilder in I_{++} haben. Wie man sich leicht überlegen kann, ist das δ -unabhängige Parallelogramm $P_{(1,1)}$ gerade dieses Gebiet (eine Zeichnung von $P_{(1,1)}$ findet sich in Abbildung 3.6). Die Fläche von $P_{(1,1)}$ ist exakt

$$\text{Fl}(P_{(1,1)}) = 1 - 2\epsilon. \quad (\text{E.4})$$

Falls $K_i \subset P_{(1,1)}$, hat die Menge vier Urbildmengenkomponenten in der $(k+1)$ -ten Generation.

Zur Berechnung von $N(k+1)$ benötige ich den Anteil der Urbildmengenkomponenten der k -ten Generation in den Gebieten $P_{(1,1)}$, HV_{++} und FV_{++} bezogen auf die Gesamtzahl der Komponenten $N(k)$:

$$N(k+1) = (4p_4 + 2p_2 + 0p_0) N(k), \quad (k \gg 1) \quad (\text{E.5})$$

wobei

$$p_i := \frac{\#\{\text{Komp. der } k\text{-ten Generation} \subset A_i\}}{N(k)}, \quad i = 0, 2, 4$$

mit $A_0 := FV_{++}$, $A_2 := HV_{++}$, $A_4 := P_{(1,1)}$. (E.6)

Es gilt $p_0 + p_2 + p_4 = 1$.

Für die Berechnung der p_i ist der folgende Punkt wichtig. Die Mengen $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(GO_{++})$ liegen in der Menge

$$I_{++} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-i}(GO_{++}),$$

da die Urbildmengen verschiedener Generation voneinander disjunkt sind. In Abbildung E.2 ist zu sehen, daß die erste Urbildgeneration $\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(GO_{++})$ gegenüber den anderen Generationen eine besondere Lage hat, indem sie sich am Rand von I_{++} befindet. Entsprechend ist der Flächenteil von Punkte der ersten Urbildgeneration im Fehlvolumen ca. 75 %, während für die höheren Urbildgenerationen dieser Anteil – wie wir noch sehen werden – nur die Größe $O(\epsilon, \delta)$ hat. Die erste Urbildgeneration verkleinert demnach die Menge des Fehlvolumens, die von den höheren Urbildgenerationen noch gefüllt werden kann, um einen besonderes großen Betrag. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, definiere ich die Menge

$$R_{++} := I_{++} \setminus \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(GO_{++}). \quad (\text{E.7})$$

Für $\epsilon, \delta \ll 1$ sind die Urbildmengenkomponenten einer hohen Urbildgeneration ($k \gg 1$) homogen in R_{++} verteilt, d. h. die Anzahl von Komponenten, die sich beispielsweise in einem Quadrat $\subset R_{++}$ mit Seitenlänge $l \gg 1/2^k$ befinden, ist proportional zur Fläche dieses Quadrats.² Damit lassen sich die p_i in Gleichung (E.6) für eine hohe Urbildgeneration durch

$$p_i \approx \frac{\text{Fl}(A_i \cap R_{++})}{\text{Fl}(R_{++})} \quad (\text{E.8})$$

berechnen.

Ich brauche die p_i mit einer relativ hohen Genauigkeit. Vernachlässigt werden dürfen Terme der Größe $O(\delta^2)$, während ich Terme der Größenordnung $(\epsilon \delta)$ berücksichtige. Ich nehme im folgenden immer $|\delta| \leq \epsilon$ an. Folglich kann z. B. ein Term der Größenordnung δ^4/ϵ^2 durch das O -Symbol $O(\delta^2)$ repräsentiert werden.

Ich beginne mit der Berechnung von p_4 :

$$p_4 = \frac{\text{Fl}(P_{(1,1)} \cap R_{++})}{\text{Fl}(R_{++})} \quad (\text{E.9})$$

Aus der Definition von R_{++} folgt die Identität

$$P_{(1,1)} \cap R_{++} = P_{(1,1)} \setminus \mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(GO_{++}) = P_{(1,1)} \setminus \left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(GO_{++}) \setminus FV_{++} \right).$$

Damit gilt unter Benutzung von Gleichung (E.4)

$$p_4 = \frac{1 - 2\epsilon - \text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(GO_{++}) \setminus FV_{++})}{1 - \text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(GO_{++}))}.$$

Wenn im Nenner eine Taylorentwicklung vornehme, ergibt sich

$$p_4 = 1 - 2\epsilon + \text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(GO_{++}) \cap FV_{++}) + O(\delta^2) = 1 - 2\epsilon + \frac{3}{8} \frac{\delta^2}{\epsilon} + O(\delta^2), \quad (\text{E.10})$$

da nach Gleichung (3.45)

$$\text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(GO_{++}) \cap FV_{++}) = 2 \cdot \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-1}(OV_{++,-}) \cap FV_{++}\right) + O(\delta^2) = \frac{3}{8} \frac{\delta^2}{\epsilon} + O(\delta^2).$$

²Die Homogenitätsannahme ist für $\epsilon, \delta \ll 1$ plausibel, da die Anzahl der Komponenten exponentiell mit der Generation k wächst und für $\epsilon = \delta = 0$ ist die Homogenität exakt erfüllt ist, wie auf Seite 33 gezeigt wurde.

Für die Berechnung von p_2 ergibt sich nach Gleichung (E.3)

$$p_2 = \frac{\text{Fl}(HV_{++} \cap R_{++})}{\text{Fl}(R_{++})} = \frac{\text{Fl}(HV_{++})}{\text{Fl}(R_{++})} = 2|\delta| \left(1 - \frac{|\delta|}{2\epsilon} - 2\epsilon \right) + O(\epsilon^2 \delta, \delta^2). \quad (\text{E.11})$$

Mit den Ausdrücken für p_2 und p_4 aus Gleichung (E.11) bzw. (E.10) erhalte ich für Gleichung (E.5):

$$N(k+1) = 4 \left(1 - 2\epsilon + |\delta| - \frac{\delta^2}{8\epsilon} - 2\epsilon|\delta| + O(\delta^2, \epsilon^2 \delta) \right) \cdot N(k) \quad (\text{E.12})$$

Um das Flächenverhältnis zwischen den beiden Urbildgenerationen $(k+1)$ und k in Gleichung (E.2) ausrechnen zu können, muß ich noch das Flächenverhältnis zwischen einer Urbildmengenkomponente der $(k+1)$ -ten Generation und einer der k -ten Generation kennen. Dieses Flächenverhältnis wird durch die Jakobideterminante der Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ bestimmt:

$$\frac{\text{Fl}(\text{Komp}(k+1))}{\text{Fl}(\text{Komp}(k))} = \frac{1}{|\text{Det}(J_{\epsilon, \delta})|} \quad (\text{E.13})$$

Der Betrag der Jakobideterminante läßt sich leicht ausrechnen:

$$|\text{Det}(J_{\epsilon, \delta})| = (1 - 2\epsilon)(2 - \delta)^2 = 4(1 - 2\epsilon + |\delta| - 2\epsilon|\delta|) + O(\delta^2) \quad (\text{E.14})$$

Für das Flächenverhältnis von aufeinanderfolgenden Urbildgenerationen gilt

$$\frac{\text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-(k+1)}(GO_{++}))}{\text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(GO_{++}))} = \frac{N(k+1)}{N(k)} \cdot \frac{\text{Fl}(\text{Komp}(k+1))}{\text{Fl}(\text{Komp}(k))}. \quad (\text{E.15})$$

Mit den Gleichungen (E.12) und (E.14) ergibt sich³

$$\begin{aligned} \frac{\text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-(k+1)}(GO_{++}))}{\text{Fl}(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(GO_{++}))} &= \frac{4(1 - 2\epsilon + |\delta| - \delta^2/(8\epsilon) - 2\epsilon|\delta| + O(\delta^2, \epsilon^2 \delta))}{4(1 - 2\epsilon + |\delta| - 2\epsilon|\delta|) + O(\delta^2)} \\ &= 1 - \frac{\delta^2}{8\epsilon} + O(\delta^2, \epsilon^2 \delta), \quad (k > \tilde{k}). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Ich bestimme als nächstes die Größenordnung von \tilde{k} , die den Gültigkeitsbereich von Gleichung (E.16) festlegt. Betrachte eine k -te Urbildgeneration mit einer bestimmten Dichte $\rho(k)$ von Urbildmengenkomponenten in R_{++} . Für ein Polyeder P mit Fläche F soll gelten, daß die Anzahl der Urbildmengenkomponenten $\subset P$ ungefähr gleich dem Flächenanteil von P in R_{++} ist. Dann muß F größer als eine Mindestfläche F_{\min} sein. Diese Mindestfläche ist umgekehrt proportional zu $\rho(k)$:

$$F_{\min} \propto \frac{1}{\rho(k)}$$

Damit Gleichung (E.16) für die k -ten Urbildgenerationen mit $k > \tilde{k}$ gilt, müssen die Mengen $FV_{++} \cap R_{++}$ und HV_{++} , die Größenordnung ϵ bzw. $|\delta|$ haben, homogen gefüllt sein:

$$\max\{\epsilon, |\delta|\} \propto \frac{1}{\rho(k)} \quad \text{für } k > \tilde{k}$$

³Man sieht am Resultat, daß sich die Terme $-2\epsilon|\delta|$ in Zähler und Nenner kompensierten. Insofern ist es wichtig, die Fläche der Menge HV_{++} einschließlich von Termen der Größenordnung $\epsilon|\delta|$ zu berechnen.

Da die Dichte $\rho(k)$ der Urbildmengenkomponenten einer Generation aber exponentiell mit der Generation k zunimmt, gilt

$$\tilde{k} \approx c' \cdot \max\{\log(1/\epsilon), \log(1/|\delta|)\}. \quad (\text{E.17})$$

\tilde{k} wächst demnach nur logarithmisch an für $\epsilon, \delta \rightarrow 0$.⁴

Für den Beitrag der Urbildgenerationen ab \tilde{k} zur Summe in Gleichung (E.1) folgt:

$$\sum_{k=\tilde{k}}^{\infty} \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(GO_{++})\right) = \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-\tilde{k}}(GO_{++})\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta^2}{8\epsilon} + O(\delta^2, \epsilon^2 \delta)\right)^i \quad (\text{E.18})$$

Zuerst bestimme ich den Vorfaktor $\text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-\tilde{k}}(GO_{++})\right)$: da für die Urbildmengen der Generation $2 \leq k \leq \tilde{k}$ die Homogenität der Komponentenverteilung noch nicht gilt, ist das Flächenverhältnis von aufeinanderfolgenden Urbildgenerationen in diesem Bereich

$$\frac{\text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-(k+1)}(GO_{++})\right)}{\text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(GO_{++})\right)} = 1 + c_k \epsilon + d_k \delta + O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon \delta), \quad (2 \leq k \leq \tilde{k}). \quad (\text{E.19})$$

Hierbei sind die $\{|c_k|, |d_k|, (k < \tilde{k})\}$ durch eine Konstante beschränkt, die nicht von ϵ und δ abhängt. Aus der letzten Gleichung folgt

$$\text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-\tilde{k}}(GO_{++})\right) = \left(\prod_{k=2}^{\tilde{k}-1} (1 + c_k \epsilon + d_k \delta)\right) \cdot \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(GO_{++})\right). \quad (\text{E.20})$$

Da nach Gleichung (E.17) \tilde{k} für $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ logarithmisch anwächst und die c_k, d_k beschränkt sind, kann das Produkt über k in der letzten Gleichung asymptotisch durch $(1 + o(1))$ abgeschätzt werden:

$$\text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-\tilde{k}}(GO_{++})\right) = (1 + o(1)) \cdot \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-2}(GO_{++})\right) = (1 + o(1)) \cdot \frac{\delta^2}{8\epsilon} \quad (\text{E.21})$$

Mit diesem Resultat wende ich mich wieder Gleichung (E.18) zu:

$$\begin{aligned} \sum_{k=\tilde{k}}^{\infty} \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(GO_{++})\right) &= (1 + o(1)) \frac{\delta^2}{8\epsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta^2}{8\epsilon} + O(\delta^2, \epsilon^2 \delta)\right)^i \\ &= \frac{(1 + o(1)) (\delta^2/8\epsilon)}{\delta^2/8\epsilon + O(\delta^2, \epsilon^2 \delta)} = \frac{(1 + o(1))}{1 + O(\epsilon, \epsilon^3/\delta)} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Falls man an die Parameter die zusätzliche Forderung stellt, daß $c \epsilon^2 \leq |\delta|$, ergibt sich

$$\sum_{k=\tilde{k}}^{\infty} \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(GO_{++})\right) = 1 + o(1). \quad (\text{E.23})$$

Es verbleibt, den Beitrag der ersten \tilde{k} Urbildgenerationen zur Summe in Gleichung (E.1) abzuschätzen. Aus Konsistenzgründen kann dieser Beitrag nicht größer als $o(1)$ sein. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\tilde{k}} \text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(GO_{++})\right) \leq \tilde{k} \cdot \max\left\{\text{Fl}\left(\mathbf{T}_{\epsilon,\delta}^{-k}(GO_{++})\right), k \leq \tilde{k}\right\} \quad (\text{E.24})$$

⁴Der andere Grund für mögliche Inhomogenitäten, nämlich die von 0 abweichenden ϵ und δ , kann von mir nicht quantitativ erfaßt werden. Hauptsächlich deswegen ist meine Argumentation in diesem Anhang nicht mathematisch streng.

Analog wie für Gleichung (E.21) gilt

$$\max \left\{ \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(GO_{++}) \right), k \leq \tilde{k} \right\} \leq (1 + o(1)) \cdot \frac{\delta^2}{8\epsilon}. \quad (\text{E.25})$$

Mit Gleichung (E.17) ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\tilde{k}} \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(GO_{++}) \right) \leq c' \cdot \max \{ \log(1/\epsilon), \log(1/|\delta|) \} \cdot \frac{\delta^2}{\epsilon} = o(1). \quad (\text{E.26})$$

Als Endresultat dieses Anhangs erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(GO_{++}) \right) = 1 + o(1). \quad (\text{E.27})$$

Dies gilt aufgrund unserer störungstheoretischen Argumentation im Parameterbereich $-\epsilon \leq \delta \leq -c\epsilon^2 < 0$. Es ist zu vermuten, daß im ganzen Bereich $\delta < 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Fl} \left(\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}^{-k}(GO_{++}) \right) = 1. \quad (\text{E.28})$$

Anhang F

Zur Ungleichung (3.80)

Bevor ich zur Ungleichung (3.80) komme, die im Hauptteil verwendet wird, beweise ich eine analoge Ungleichung für die Menge $\Sigma_{\tilde{G}}^{\infty}$, da diese Menge einer mathematischen Analyse wesentlich leichter zugänglich ist.

Die zu beweisende Aussage ist: für festes $x_2 \in [0, 1]$ gilt

$$\inf\{x_1 \mid (x_1, x_2) \in \Sigma_{\tilde{G}}^{\infty}\} \geq \inf\{x_1 \mid (x_1, 1/3) \in \Sigma_{\tilde{G}}^{\infty}\} + \epsilon \left(\frac{1}{3} - x_2 \right). \quad (\text{F.1})$$

Der Beweis geht so vor, daß ich zuerst eine Aussage über die Randkurven $R^{(k)}$ aus Gleichung (3.68) zeige:

$$R^{(k)}(y) = -\epsilon \sum_{i=1}^k \frac{\text{It}_{[f_0, i]}(y)}{2^i}, \quad y \in [0, 1] \quad (\text{F.2})$$

Nach Gleichung (3.69) haben die Kurven $R^{(k)}$ für ungerades k die Zahl von $2^{(k-1)/2}$ Minima der Größe

$$-\frac{\epsilon}{2} \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \frac{1}{4^i}. \quad (\text{F.3})$$

Der kleinste y -Wert, an dem die Kurve $R^{(k)}$ ein solches Minimum hat, ist nach Gleichung (3.70)

$$y_{\min}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \frac{1}{4^j} \right). \quad (\text{F.4})$$

Es gilt demnach

$$R^{(k)}\left(y_{\min}^{(k)}\right) = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \frac{1}{4^i}. \quad (\text{F.5})$$

Damit komme ich zur Aussage über $R^{(k)}$, die ich für ungerades k durch Induktion beweisen möchte:

$$R^{(k)}(y) \geq R^{(k)}\left(y_{\min}^{(k)}\right) + \epsilon \left(y_{\min}^{(k)} - y \right), \quad y \in [0, 1], \quad k = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{F.6})$$

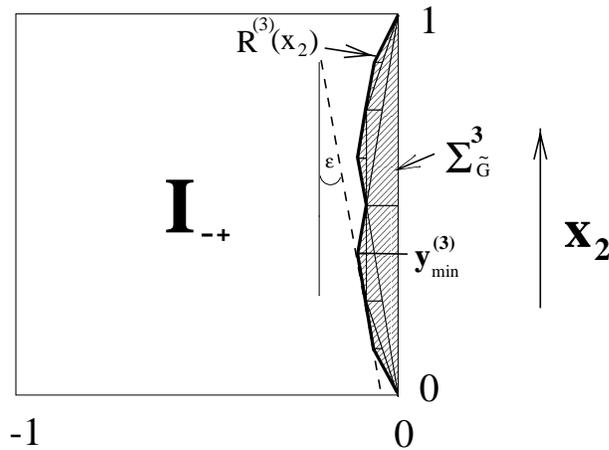


Abbildung F.1: Hier gilt $k = 3$: Die Menge $\Sigma_{\tilde{G}}^3$ liegt rechts von einer Geraden, die einen Winkel ϵ zur x_2 -Achse hat und durch das Minimum von $\Sigma_{\tilde{G}}^3$ mit der kleinsten x_2 -Koordinate verläuft.

Die geometrische Interpretation dieser Ungleichung ist: Falls eine Gerade mit Winkel ϵ zur x_2 -Achse durch das kleinste Minimum von $R^{(k)}$ verläuft, liegt die Menge $\Sigma_{\tilde{G}}^{(k)}$ zwischen dieser Geraden und der x_2 -Achse (siehe Abbildung F.1).

Beweis durch Induktion: Für $R^{(1)}$ gilt nach Gleichung (3.65)

$$R^{(1)}(y) = -\frac{\epsilon}{2} f_0(y) \geq -\epsilon y = R^{(1)}(y_{\min}^{(1)}) + (y_{\min}^{(1)} - y) .$$

Dies ist der Induktionsanfang.

Nehme an, daß Gleichung (F.6) für $R^{(k)}$ mit ungeradem k gilt. Zu zeigen ist dann

$$R^{(k+2)}(y) \geq R^{(k+2)}(y_{\min}^{(k+2)}) + \epsilon (y_{\min}^{(k+2)} - y) , \quad y \in [0, 1] . \quad (\text{F.7})$$

Die Differenz von $R^{(k)}$ und $R^{(k+2)}$ ist nach Gleichung (F.2)

$$R^{(k)}(y) - R^{(k+2)}(y) = \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \left(\text{It}_{[f_0, k+1]}(y) + \frac{1}{2} \text{It}_{[f_0, k+2]}(y) \right) . \quad (\text{F.8})$$

Die Funktion $\text{It}_{[f_0, k]}$, die k -te Iterierte der Zeltabbildung f_0 , besteht auf dem Intervall $[0, 1]$ aus 2^k periodisch fortgesetzten Dreiecken mit Grundfläche $1/2^{k-1}$ und Höhe 1 (siehe linke Seite von Abbildung F.2). Entsprechend ist die Funktion $R^{(k)}(y) - R^{(k+1)}(y)$ ein periodisch wiederholtes Trapez mit Grundfläche $g_1 = 1/2^k$ und Höhe $h = \epsilon/2^{k+1}$ (siehe rechte Seite von Abbildung F.2). Aus Gleichung (F.8) folgt dann für $R^{(k+2)}$ die Ungleichung

$$R^{(k+2)}(y) \geq R^{(k)}(y) - \frac{\epsilon}{2^{k+1}} . \quad (\text{F.9})$$

Die rechte Seite von Gleichung (F.7) läßt sich nach den Gleichungen (F.5) und (F.4) umformen zu

$$\begin{aligned} R^{(k+2)}(y_{\min}^{(k+2)}) + \epsilon (y_{\min}^{(k+2)} - y) &= R^{(k)}(y_{\min}^{(k)}) - \frac{\epsilon}{2^{k+2}} + \epsilon \left(y_{\min}^{(k)} - \frac{1}{2^{k+2}} - y \right) = \\ R^{(k)}(y_{\min}^{(k)}) + \epsilon (y_{\min}^{(k)} - y) - \frac{\epsilon}{2^{k+1}} . \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

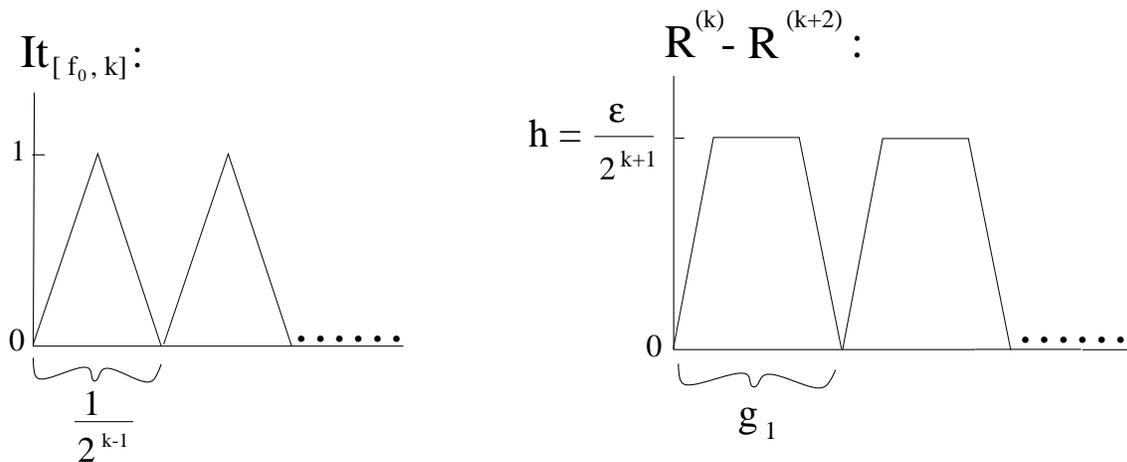


Abbildung F.2: Links: die periodische Funktion $\text{It}_{[f_0, k]}$. Rechts: die periodische Funktion $R^{(k)}(y) - R^{(k+1)}(y)$.

Unter Verwendung der Induktionsannahme für die k -te Generation (siehe Gleichung (F.6)) folgt aus Ungleichung (F.9) und der Identität (F.10) die zu zeigende Gleichung (F.7) für die $(k+2)$ -te Generation. Damit ist der Induktionsbeweis zu Ende.

Die Funktionen $R^{(k)}(y)$ konvergieren für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig zur (fraktalen) Randfunktion von $\Sigma_{\tilde{G}}^\infty$. Da außerdem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{\min}^{(k)} = \frac{1}{3},$$

gilt Ungleichung (F.1) für die Menge $\Sigma_{\tilde{G}}^\infty$.

Damit gilt für die Menge $\Sigma_{\tilde{G}}^\infty$ näherungsweise eine zu (F.1) analoge Ungleichung. Denn die Mengen $G^{(k)}$, die über die Abbildung $\mathbf{T}_{\epsilon, \delta}$ definiert sind, werden bis zu hohen k -Werten durch die Mengen $\tilde{G}^{(k)}$ approximiert.

Da sich die Menge Σ_H^∞ aus $\Sigma_{\tilde{G}}^\infty$ durch Spiegelung und Verschiebung um $|\delta|/2$ ergibt, folgt aus Ungleichung (F.1) auch die im Hauptteil verwendete Gleichung (3.80):

$$\sup\{x_1 \mid (x_1, x_2) \in \Sigma_H^\infty\} \leq \sup\{x_1 \mid (x_1, 1/3) \in \Sigma_H^\infty\} + \epsilon \left(x_2 - \frac{1}{3}\right) \quad (\text{F.11})$$

Anhang G

Die stationäre Verteilung im Parameterbereich 4

In diesem Anhang berechne ich die stationäre Verteilung \mathbf{q} der Mastergleichung im Parameterbereich 4. In diesem Parameterbereich sind alle drei Arten von Spinflips möglich. Die Mastergleichung (7.3) kann ich als Matrixgleichung schreiben:

$$\mathbf{p}(t+1) = M \mathbf{p}(t) \quad (\text{G.1})$$

Die gesuchte stationäre Verteilung \mathbf{q} ist der Eigenvektor von M zum Eigenwert 1.

Aus Gründen der Einfachheit gehe ich bei der Berechnung zuerst von den Spin-zuständen zu Defektzuständen über. In Abschnitt 5.4 wurde jedem Indexvektor α ein Defektvektor $\tilde{\alpha}$ zugeordnet. Demnach kann ich auch jedem Spinvektor einen Defektvektor $\tilde{\mathbf{s}}$ zuweisen, der aus Nullen und Einsen besteht (siehe Abbildung 5.3). Die Abbildung $\mathbf{s} \rightarrow \tilde{\mathbf{s}}$ ist 2-zu-1, so daß die Mastergleichung im Raum der Defektzustände mit einer $2^{N-1} \times 2^{N-1}$ -Matrix definiert ist:

$$\tilde{\mathbf{p}}(t+1) = \tilde{M} \tilde{\mathbf{p}}(t) \quad (\text{G.2})$$

Zu dieser Mastergleichung suche ich eine stationäre Verteilung $\tilde{\mathbf{q}}$. Zuerst untersuche ich, im Raum der Defektzustände korrespondiert zu den drei Typen von Spinflips folgende Dynamik:

Spinflip vom Typ (a): Ein Spinflip vom Typ (a), der für drei gleiche Spins nebeneinander möglich ist, entspricht der gegenseitigen **Annihilation von zwei Defekten**, z. B.

$$\begin{aligned} \text{Spinzustand } \mathbf{s} &: \dots + 1, +1, +1, \dots \rightarrow \dots + 1, -1, +1, \dots \\ \text{Defektzustand } \tilde{\mathbf{s}} &: \dots \dots 1, \quad 1, \dots \rightarrow \dots \dots 0, \quad 0, \dots \end{aligned}$$

Spinflip vom Typ (b): Diese Art von Spinflip führt zu einer **Diffusion von Defekten**, d. h. ein Defekt (eine 1) wandert um einen Gitterplatz, z. B.

$$\begin{aligned} \text{Spinzustand } \mathbf{s} &: \dots + 1, +1, -1, \dots \rightarrow \dots + 1, -1, -1, \dots \\ \text{Defektzustand } \tilde{\mathbf{s}} &: \dots \dots 1, \quad 0, \dots \rightarrow \dots \dots 0, \quad 1, \dots \end{aligned}$$

Eine „1“ im Defektvektor $\tilde{\mathbf{s}}$ kann durch einen Typ-(b)-Spinflip in die Richtungen wandern, in denen sie an eine „0“ grenzt.

Spinflip vom Typ (c): Der Spinflip vom Typ (c) ist invers zum Spinflip vom Typ(a). Demzufolge führt der Spinflip vom Typ (c) zur **Erzeugung von zwei Defekten** (Einsen) im Defektzustand $\tilde{\mathbf{s}}$, z. B.

$$\begin{aligned} \text{Spinzustand } \mathbf{s} &: \dots + 1, -1, +1, \dots \rightarrow \dots + 1, +1, +1, \dots \\ \text{Defektzustand } \tilde{\mathbf{s}} &: \dots 0, 0, \dots \rightarrow \dots 1, 1, \dots \end{aligned}$$

Es gibt demnach drei Arten von Defektbewegungen, die Annihilation, die Diffusion und die Erzeugung. Die Übergangswahrscheinlichkeit $w(\tilde{\mathbf{s}} | \tilde{\mathbf{r}})$ ist für die Defektbewegung $\tilde{\mathbf{s}} \rightarrow \tilde{\mathbf{r}}$ die gleiche wie für den entsprechenden Spinflip $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{r}$. Demnach gilt

$$\begin{aligned} \text{Defektannihilation} &: w(\tilde{\mathbf{s}} | \tilde{\mathbf{r}}) = w_a \\ \text{Defektdiffusion} &: w(\tilde{\mathbf{s}} | \tilde{\mathbf{r}}) = w_b \\ \text{Defekterzeugung} &: w(\tilde{\mathbf{s}} | \tilde{\mathbf{r}}) = w_c \end{aligned}$$

Im Raum der Defektzustände kann ich die Mastergleichung (G.2) mit den einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten formulieren:

$$p_{\tilde{\mathbf{s}}}(t+1) = p_{\tilde{\mathbf{s}}}(t) + \sum_{\tilde{\mathbf{r}} \neq \tilde{\mathbf{s}}} [w(\tilde{\mathbf{s}} | \tilde{\mathbf{r}}) \cdot p_{\tilde{\mathbf{r}}}(t) - w(\tilde{\mathbf{r}} | \tilde{\mathbf{s}}) \cdot p_{\tilde{\mathbf{s}}}(t)] . \quad (\text{G.3})$$

Für die stationäre Verteilung $\tilde{\mathbf{q}}$ gilt

$$\sum_{\tilde{\mathbf{r}} \neq \tilde{\mathbf{s}}} [w(\tilde{\mathbf{s}} | \tilde{\mathbf{r}}) \cdot \tilde{q}_{\tilde{\mathbf{r}}} - w(\tilde{\mathbf{r}} | \tilde{\mathbf{s}}) \cdot \tilde{q}_{\tilde{\mathbf{s}}}] = 0 . \quad (\text{G.4})$$

Für $\tilde{\mathbf{q}}$ setze ich an, daß das Gewicht $\tilde{q}_{\tilde{\mathbf{s}}}$ eines Defektzustands $\tilde{\mathbf{s}}$ allein von der Zahl der Einsen (Defekte) in $\tilde{\mathbf{s}}$ abhängt:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{\tilde{\mathbf{s}}} &= c f(D(\tilde{\mathbf{s}})) \\ \text{mit } D(\tilde{\mathbf{s}}) &:= \# \{ \text{Einsen in } \tilde{\mathbf{s}} \} \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Die Konstante c wird später durch die Normierungsbedingung an $\tilde{\mathbf{q}}$ festgelegt. Als nächstes zeige ich, daß mit diesem Ansatz die stationäre Mastergleichung (G.4) lösbar ist und bestimme die Funktion f . Wenn ich den Ansatz in Gleichung (G.4) einsetze, ergibt sich

$$\sum_{\tilde{\mathbf{r}} \neq \tilde{\mathbf{s}}} [w(\tilde{\mathbf{s}} | \tilde{\mathbf{r}}) \cdot f(D(\tilde{\mathbf{r}})) - w(\tilde{\mathbf{r}} | \tilde{\mathbf{s}}) \cdot f(D(\tilde{\mathbf{s}}))] = 0 . \quad (\text{G.6})$$

Dazu betrachte ich einen beliebigen Defektzustand $\tilde{\mathbf{s}}$. Dieser Zustand habe n Einsen. Wenn ich eine Eins mit der nächsten Eins zu einem Paar zusammenfasse, so haben von diesen n Paaren m den Abstand 1 und $(n-m)$ einen Abstand > 1 (siehe Abbildung G.1). Außerdem gibt es in $\tilde{\mathbf{s}}$ k Paare von Nullen im Abstand 1. Es gilt immer

$$k + m + 2(n - m) = N .$$

Für den Defektzustand $\tilde{\mathbf{s}}$ ergeben sich in Gleichung (G.6) jeweils drei verschiedene Gewinn- und Verlustterme, die den drei Defektbewegungen entsprechen. Aus den k Nullen im Abstand 1 folgt, daß es k Defektzustände $\tilde{\mathbf{r}}$ gibt, die am Ort der beiden

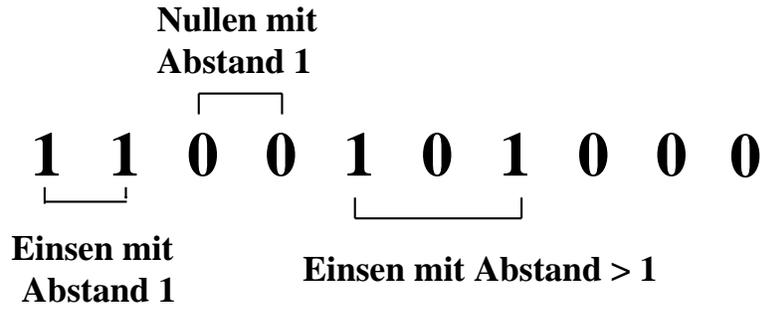


Abbildung G.1: Für diesen Defektvektor der Länge 10 gilt $n = 4$, $m = 1$ und $k = 3$.

Nullen zwei Einsen haben und nach $\tilde{\mathbf{s}}$ durch Defektannihilation mit Übergangswahrscheinlichkeit w_a übergehen können. Diese Defektzustände $\tilde{\mathbf{r}}$ haben $n + 2$ Defekte und das relative Gewicht $f(n + 2)$. Demzufolge ist ein Gewinnterm

$$G_a = k \cdot w_a \cdot f(n + 2) . \quad (\text{G.7})$$

Wegen der k Nullen im Abstand 1 kann der Defektzustand $\tilde{\mathbf{s}}$ selbst über die Erzeugung von zwei Defekten mit Übergangswahrscheinlichkeit w_c in einen Defektzustand $\tilde{\mathbf{t}}$ mit zwei Defekten mehr übergehen. Damit gibt es einen Verlustterm

$$V_c = -k \cdot w_c \cdot f(n) . \quad (\text{G.8})$$

Aus den m Paaren von benachbarten Einsen in $\tilde{\mathbf{s}}$ folgt der Gewinnterm

$$G_c = m \cdot w_c \cdot f(n - 2) \quad (\text{G.9})$$

und der Verlustterm

$$V_c = -m \cdot w_a \cdot f(n) . \quad (\text{G.10})$$

Schließlich ergibt sich aus den $(n - m)$ Paaren von Einsen im Abstand > 1 wegen der Defektdiffusion der Gewinnterm

$$G_b = 2(n - m) \cdot w_b \cdot f(n) \quad (\text{G.11})$$

und der Verlustterm

$$V_b = -2(n - m) \cdot w_b \cdot f(n) . \quad (\text{G.12})$$

Gleichung (G.6) läßt sich demnach schreiben als

$$G_a + G_b + G_c + V_a + V_b + V_c = 0 . \quad (\text{G.13})$$

Man sieht an den Gleichungen (G.11) und (G.12), daß sich G_b und V_b gegenseitig wegheben. Damit ist die Stationaritätsbedingung (G.4)

$$k \cdot w_a \cdot f(n + 2) + m \cdot w_c \cdot f(n - 2) - m \cdot w_a \cdot f(n) - k \cdot w_c \cdot f(n) = 0 . \quad (\text{G.14})$$

Diese Gleichung ist – unabhängig von den Werten von m und k – erfüllt, wenn die Funktion f der Bedingung

$$f(n + 2) = \frac{w_c}{w_a} f(n) , \quad n = n_{\min}, n_{\min} + 2, \dots, N - 2 \quad (\text{G.15})$$

genügt. Hierbei gilt $n_{min} = 0$ für gerades N , $n_{min} = 1$ für ungerades N .¹ Aus der Bedingung (G.15) folgt

$$f(D(\tilde{\mathbf{s}})) = \left(\frac{w_c}{w_a}\right)^{\frac{1}{2}D(\tilde{\mathbf{s}})}. \quad (\text{G.16})$$

Demnach gilt für die stationäre Verteilung der stochastischen Dynamik im Raum der Defektzustände

$$\tilde{q}_{\tilde{\mathbf{s}}} = c \left(\frac{w_c}{w_a}\right)^{\frac{1}{2}D(\tilde{\mathbf{s}})}. \quad (\text{G.17})$$

Ich übertrage nun das Ergebnis auf die stationäre Verteilung \mathbf{q} für die stochastische Dynamik im Raum der Spinzustände. Es gibt immer zwei Spinzustände \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_2 , die zum gleichen Defektzustand $\tilde{\mathbf{s}}$ gehören; dabei gehen \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_2 durch eine Inversion sämtlicher N Spins auseinander hervor. Da die CML-induzierte stochastische Dynamik symmetrisch unter dieser Operation ist, haben die Zustände \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_2 das gleiche Gewicht in der stationären Verteilung \mathbf{q} :

$$q_{\mathbf{s}} = \frac{\tilde{q}_{\tilde{\mathbf{s}}}}{2} = \frac{c}{2} \left(\frac{w_c}{w_a}\right)^{\frac{1}{2}D(\tilde{\mathbf{s}})}. \quad (\text{G.18})$$

Hierbei ist $\tilde{\mathbf{s}}$ der dem Spinzustand \mathbf{s} zugeordnete Defektzustand. Die letzte Gleichung läßt sich auch schreiben als

$$q_{\mathbf{s}} = c \left(\frac{w_c}{w_a}\right)^{\frac{1}{2}\#\text{Def}(\mathbf{s})}$$

mit $\#\text{Def}(\mathbf{s}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (s_i s_{i+1} + 1)$.

(G.19)

$\#\text{Def}(\mathbf{s})$ gibt die Anzahl der Defekte im Spinzustand \mathbf{s} an.

Die Eindeutigkeit der stationären Verteilung (G.19) kann nachgewiesen werden, indem man die Transitivität der Matrix M aus der Mastergleichung (G.1) zeigt, d. h. es existiert $n \in \mathbb{N}$, so daß die Matrix M^n ausschließlich strikt positive Einträge hat.

¹Es sei daran erinnert, daß jeder Defektzustand $\tilde{\mathbf{s}}$ für gerades N eine gerade Anzahl von Einsen hat, für ungerades N eine ungerade.

Literaturverzeichnis

- [1] A.-L. Barabasi und H. E. Stanley. *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press (1995).
- [2] T. Bohr, M. H. Jensen, G. Paladin, und A. Vulpiani. *Dynamical Systems Approach to Turbulence*. Cambridge University Press (1998).
- [3] R. Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer (1975).
- [4] A. J. Bray. Theory of phase-ordering kinetics. *Advances in Physics* **43**, 357 (1984).
- [5] D. R. Cox und H. D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes*. Chapman & Hall (1995).
- [6] J. P. Crutchfield und K. Kaneko. Phenomenology of spatio-temporal chaos. In Hao Bai-Lin, editor, *Directions in Chaos*, volume 1. World Scientific (1987).
- [7] N. G. de Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis*. Dover Publications (1981).
- [8] K. Falconer. *Fractal geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley (1990).
- [9] K. H. Fischer und J. A. Hertz. *Spin Glasses*. Cambridge University Press (1991).
- [10] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press (1995).
- [11] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer (1985).
- [12] R. J. Glauber. Time-dependent statistics of the Ising model. *Journ. of Math. Physics* **4**, 294 (1963).
- [13] G. R. Grimmet und D. R. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press (1992).
- [14] J. Guckenheimer und P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer (1983).
- [15] P. C. Hohenberg und B. I. Halperin. Theory of phase-ordering kinetics. *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977).
- [16] C. Itzykson und J.-M. Drouffé. *Statistical Field Theory, Vol. 1 und Vol. 2*. Cambridge University Press (1989).
- [17] K. Kaneko (Ed.). *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. Wiley (1993).

- [18] K. Kawasaki. Kinetics of Ising models. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 2, page 443. Academic Press (1972).
- [19] M. LeBellac. *Quantum and Statistical Field Theory*. Oxford University Press (1991).
- [20] A. A. Lushnikov. Binary reactions $1 + 1 \rightarrow 0$ in one dimension. *Phys. Lett. A* **120**, 134 (1987).
- [21] M. C. Mackey. *Time's Arrow: The Origins of Thermodynamic Behavior*. Springer (1992).
- [22] P. Marcq, H. Chaté, und P. Manneville. Universality in Ising-like phase transitions of lattices of coupled chaotic maps. *Phys. Rev. E* **55**, 2606 (1997).
- [23] D. C. Mattis und M. L. Glasser. The uses of quantum field theory in diffusion-limited reactions. *Rev. Mod. Phys.* **70**, 979 (1998).
- [24] J. Miller und D. A. Huse. Macroscopic equilibrium from microscopic irreversibility in a chaotic coupled map lattice. *Phys. Rev. E* **48**, 2528 (1993).
- [25] O. Penrose. Foundations of statistical mechanics. *Rep. Prog. Phys.* **42**, 1937 (1970).
- [26] V. Privman (Ed.). *Nonequilibrium Statistical Mechanics in One Dimension*. Cambridge University Press (1997).
- [27] V. Reitmann. *Reguläre and chaotische Dynamik*. Teubner (1996).
- [28] C. Robinson. *Dynamical systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press (1995).
- [29] D. Ruelle. A measure associated with Axiom A attractor. *Amer. J. Math* **98**, 619 (1976).
- [30] D. Ruelle. Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics. *chao-dyn/9812032* (1998).
- [31] B. Schmittmann und R. K. P. Zia. *Statistical Mechanics of Driven Diffusive Systems*, volume Vol. 17 of *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Academic Press (1995).
- [32] Y. Sinai. Gibbs measures in ergodic theory. *Russ. Math. Surveys* **166**, 21 (1972).
- [33] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer (1991).
- [34] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland (1992).
- [35] T. Yanagita und K. Kaneko. Rayleigh–Benard convection – patterns, chaos, spatio-temporal chaos and turbulence. *Physica D* **82**, 288 (1995).

Danksagung

Ich danke herzlich Herrn Priv. Doz. Dr. Holger Kantz für die verständnisvolle und kompetente Betreuung dieser Doktorarbeit. Er ließ mir große Freiheit in der Ausgestaltung des Themas, was mir sehr entgegenkam. Trotz seiner vielen Aufgaben nahm er sich immer wieder die Zeit für Diskussionen.

Großen Dank schulde ich Herrn Priv. Doz. Dr. Wolfram Just, dem ich wesentliche Anregungen zu dieser Arbeit verdanke. Unsere fast tägliche Diskussionen über mannigfache Themen waren einerseits sehr angenehm, andererseits konnte ich von seinem großen Wissen über Theoretische Physik und Mathematik profitieren.

Herrn Dr. Rainer Hegger danke ich für manche Hilfe und insbesondere für seine lockere Art, vielfältige Computerprobleme zu lösen.

Es war insgesamt sehr angenehm, in der Nachwuchsgruppe „Nichtlineare Zeitreihenanalyse“ zu arbeiten. Ein großer Dank an alle.

Herrn Prof. Dr. Karl-Heinz Mütter danke ich für seine Bereitschaft, das Zweitgutachten zu übernehmen.