

Theoretische Konzepte der Zeitreihenanalyse und Anwendungen auf die Signalklassifikation in technischen Systemen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal

vorgelegt von
Stefan Güttler
aus Konstanz
Juni 1999

WUB-DIS 99-7

Abstract

Subject of this work is the development and application of some concepts of time series analysis to technical systems. Our interest in technical systems arises from the idea to study applications of nonlinear time series analysis to fully realistic problems of “intermediate complexity“, i.e. to systems which have a limited number of (effective) degrees of freedom and limited nonstationarity. Two problems are treated here: The induction motor failure detection using stator current monitoring and the automatic quality control of sliding sunroofs by classifying structure-born sound signals.

The first part of this work is theoretical and contains some background material for the more applied second part. We give an overview over linear and quadratic time-frequency representations, which turn out to be a suitable starting point for both treated problems. From the viewpoint of signal analysis we focus on the properties of windowed Fourier- and wavelet transforms, especially the time-frequency resolution characteristics. Subsequently the relation between the continuous and discrete version of these transforms are thoroughly discussed, for which Shannon’s sampling theorem provides the connection. For the classification of feature vectors calculated from experimental time series we finally introduce estimators for the Bayes error, i.e. the smallest error which can be achieved in a classification statistics.

We present a new method for on-line induction motor failure detection, where the concept of geometrical signal separation in feature space is introduced: A set of observations from a single phase of the stator current is transformed into feature vectors in a feature space. After establishing a metric in the feature space close neighbours of the present vector are searched for in a data basis representing the allowed states of the motor. In their absence the present state is a novelty, which is considered as a failure if it persists for a certain time. Varying environmental conditions turn out to be the main problem during fault sensing. The geometric method offers a solution for that by combining the information of two feature spaces. This correction allows for our data the statistically significant separation of unknown environmental conditions and motor failures.

We next introduce a feature vector for automatic acoustic quality control. For this purpose the sliding noise of electric sunroofs was recorded. We do not explicitly search for the features of the time series which distinguish good from defective products, but take advantage of the fact that the information being relevant for failure detection can be resolved by the human ear, i.e. by experts. We approximate the time-frequency resolution of the ear by a wavelet transform and define a generalized class of wavelet transforms, which can be averaged in the time domain without losing the time-resolved information. By this averaging process statistical fluctuations and noise are reduced sufficiently to reveal the features of the signals for the aimed classification. We first study the properties of the feature vectors using artificial signals. The subsequent application to the sliding sunroof data confirms (qualitatively) these results.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Problemstellung	1
2	Darstellung und Klassifikation von Signalen	7
2.1	Zeit-Frequenz Darstellungen	8
2.1.1	Quadratische ZFDs: Die Cohen Klasse und die affine Klasse	9
2.1.2	Gefensterter Fourier- und Wavelettransformationen	11
2.1.3	Die Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik	15
2.2	Diskrete Signaldarstellungen	18
2.2.1	Das Shannonsche Samplingtheorem	18
2.2.2	Diskrete gefensterter Fouriertransformationen	21
2.2.3	Diskrete Wavelettransformationen	24
2.3	Statistische Merkmalsklassifikation	30
2.3.1	Der Bayesche Klassifikator des kleinsten Fehlers	30
2.3.2	Schätzen des Bayeschen Fehlers	33
2.3.3	Schranken des Bayeschen Fehlers: Die L- und die R- Statistik	35
3	Fehlerfrüherkennung bei Induktionsmotoren	39
3.1	Fehlererkennung durch Analyse des Statorstromes	40
3.2	Geometrische Signaltrennung	44
3.2.1	Vorprozessierung der Zeitreihen	45
3.2.2	Auswahl und Clusterung der Merkmalsvektoren	46
3.2.3	Die Struktur der Merkmalsräume	49
3.2.4	Berechnung von Umweltkorrekturen	52
3.3	Anwendungen und Ergebnisse	54
3.3.1	Signalklassifikation mit Umweltkorrekturen	56
3.3.2	Signalklassifikation ohne Umweltkorrekturen	59
3.3.3	Weitere Ergebnisse	61
4	Ein Merkmalsvektor zur akustischen Güteprüfung	63
4.1	Darstellung und Klassifikation von Schallsignalen	64
4.2	Merkmale aus Wavelet- Restklassen	67
4.2.1	Wavelettransformation der Zeitreihen	68

4.2.2	Definition der Wavelet- Restklassen	69
4.2.3	Konstruktion der Merkmalsvektoren	70
4.2.4	Eigenschaften der Merkmalsvektoren	71
4.3	Akustische Qualitätskontrolle von Schiebedächern	76
4.3.1	Klassifikation der Merkmalsvektoren	76
4.3.2	Ergebnisse	78
	Zusammenfassung	83
	Literaturverzeichnis	87

Kapitel 1

Einleitung und Problemstellung

Obwohl das Interesse an nichtlinearen dynamischen Systemen nicht neu ist und seinen Ursprung in den (nichtintegrablen) Mehrkörperproblemen der Himmelsmechanik im 19. Jahrhundert findet, hat die nichtlineare Dynamik in den letzten 30 Jahren eine immense Entwicklung erfahren, die mit dem Begriff des deterministischen Chaos verbunden ist. Zunächst kamen die Hauptimpulse hierzu aus der Mathematik, z.B. Smale, [39], jedoch zeigte sich bald, daß auch das irreguläre Verhalten von vielen physikalischen Systeme durch eine niedrigdimensionale chaotische Dynamik beschrieben werden kann. Obwohl sich die Zeitreihe einer Variablen solcher Systeme zunächst nicht von einer stochastischen Zeitreihe (etwa eines autoregressiven Modells) unterscheidet, hat doch die zugrundeliegende Dynamik die verborgene Struktur eines deterministischen Systems mit nur wenigen Freiheitsgraden.

Die Verbindung zwischen mathematischen Modellen und der „realen Welt“, also physikalischen Systemen, bilden Experimente und Beobachtungen, d.h. experimentelle Zeitreihen. An dieser Stelle beginnt die Zeitreihenanalyse. Ihre Aufgabe ist, allgemein formuliert, Methoden zur qualitativen und quantitativen Charakterisierung gemessener Zeitreihen zu entwickeln, um einerseits die Identifikation und das Verständnis der zugrundeliegenden physikalischen Systeme zu ermöglichen, wie auch andererseits um weitergehende Fragestellungen zu beantworten, wie z.B. allgemein die Vorhersage und Klassifikation von Zeitreihen.

Ausgangspunkt der Entwicklung der nichtlinearen Zeitreihenanalyse [22] ist das Einbettungstheorem von Takens [34], welches es erlaubt, aus einer skalaren Zeitreihe, die von einer Variablen eines dynamischen System gemessen wird, durch Bildung von Zeitversatz-Vektoren eine Trajektorie zu rekonstruieren, welche diffeomorph zum ursprünglichen, diskret abgetasteten Fluß des dynamischen Systems ist. Die hierauf basierenden Phasenraummethoden ermöglichen die Zeitreihenanalyse aus dem Blickwinkel des deterministischen Chaos. Hier entsteht die Aufgabe, die mögliche deterministische Struktur eines Systems anhand von gemessenen Zeitreihen zu erkennen und zu charakterisieren sowie eine solche (verborgene) Dynamik, die nur von wenigen (effektiven) Freiheitsgraden abhängt, für weitere Fragestellungen der Zeitreihenanalyse

auszunutzen. Nachdem für die Entwicklung der Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse zunächst einfache numerische Modelle intensiv studiert wurden, wendet sich das Interesse heute immer mehr praktischen Anwendungsmöglichkeiten zu.

Motivation und Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die Idee, neuere Entwicklungen im Bereich der nichtlinearen Zeitreihenanalyse auf praxisorientierte Probleme anzuwenden. Wesentlicher Teil der Aufgabenstellung ist, daß die Fragestellungen von *außen* aus einem praxisbezogenen Umfeld an uns herangetragen werden, um die Versuchung zu umgehen, nur für bereits vorhandene theoretische Lösungsmodelle nach einem passenden Problem zu suchen, dem es dann häufig an Praxisrelevanz mangelt.

Ein wichtiges Auswahlkriterium an „reale“ Probleme muß natürlich die realistische Einschätzung sein, mit dem derzeitigen Wissensstand einen Lösungsbeitrag bringen zu können. Dies leitet uns, den Blick auf Systeme von „mittlerer Komplexität“ zu lenken, d.h. auf Systeme, die in ihren Eigenschaften komplizierter als numerische „Spielmodelle“ sind, jedoch nur eine begrenzte Anzahl von Freiheitsgraden und eine begrenzte Nichtstationarität aufweisen. Systeme sehr hoher Komplexität, wie einerseits physiologische Systeme (im Extremfall das Gehirn) und andererseits Volkswirtschaften (z.B. Aktien-, Options- und Devisenmärkte) sind in ihren Zusammenhängen bis heute nicht (ausreichend) verstanden. Zeitreihen solcher Systeme zeigen häufig ein nichtstationäres, stochastisches Verhalten, das nur sehr schwer einen Zugang erlaubt, insbesondere da diese Systeme in vielen Fällen nichtautonom sind, d.h. von äußeren unvorhersehbaren Ereignissen (z.B. politischen Entscheidungen) wesentlich beeinflußt werden. Obwohl in diesen Bereichen bereits viel Forschungsarbeit geleistet wurde und eine große Zahl interessanter und relevanter Fragestellungen bestehen, scheint eine Lösung vieler praxisbezogener Probleme, wie z.B. die zuverlässige Vorhersage der Kursentwicklung an Aktienmärkten (auch ohne drastische äußere Einflüsse) oder die Vorhersage epileptischer Anfälle aus EEG- Ableitungen, (noch) nicht in Reichweite. Solche Systeme eignen sich daher für die von uns betrachtete Fragestellung kaum.

Als geeignete Systeme von „mittlerer Komplexität“ erweisen sich hingegen eine Vielzahl technischer Systeme. Die Problemstellungen sind hierbei häufig die Automatisierung von Kontroll- oder Überwachungsvorgängen für Maschinen und Fertigungsprozesse verschiedenster Art. Als wichtige Problemkreise treten zum einen die Präzisionssteuerung von Anlagen (z.B. Roboter) und zum anderen die Früherkennung von Defekten auf, da ein unerwarteter verschleiß- oder fehlerbedingter Ausfall einzelner Anlagenteile leicht ganze Fertigungsstraßen zum Erliegen bringt. Bei der Vielzahl möglicher Fehlerquellen und der relativen Zuverlässigkeit der einzelnen Systemkomponenten muß jedoch der Überwachungsaufwand für jede einzelne Maschine gering gehalten werden. Hier entsteht die Idee, die aufwendige Diagnostik technischer Anlagen mittels einer Reihe spezifischer Meßinstrumente hin zu einer Überwachung durch einfache Sensoren und einer dafür komplexen Signalverarbeitung zu verlagern, die aber auf den heutigen Rechnern relativ billig durchgeführt werden kann.

Als einem weiteren Problemfeld kommt der Automatisierung von Qualitätskon-

trollen eine immer größere Bedeutung zu. Die Forderung der Kunden nach günstigen und zuverlässigen Produkten erfordert einerseits die sichere Einhaltung von Qualitätsstandards wie auch aus Kostengründen einen möglichst kleinen Produktionsausschuß. Hieraus entsteht der Wunsch nach der Automatisierung von Güteprüfungen nicht nur zur Kostenersparnis, sondern wesentlich auch, um Qualitätsstandards objektivieren zu können, da menschliche Bewertungen häufig nicht reproduzierbar sind und größeren Schwankungen unterliegen können. Dieses Problem wird auch bei der Verifikation unserer Ergebnisse in Kap. 4 auftreten.

Beide Fragestellungen können auf ein Grundproblem der Zeitreihenanalyse, die Klassifikation von Signalen zurückgeführt werden. Da diese Probleme aus dem Bereich der Ingenieurwissenschaften nicht neu sind, ist über die Darstellung und Klassifikation technischer Signale schon viel Forschungsarbeit geleistet worden. So erwies sich die Entwicklung der linearen und quadratischen Zeit-Frequenz Darstellungen [18] seit Beginn der 60er Jahren als fruchtbar für viele Probleme der Signalerkennung und -klassifikation. Die später einsetzende Entwicklung der nichtlinearen Zeitreihenanalyse verlief zunächst weitgehend unabhängig; erst in den letzten Jahren hat sich hier ein reger Austausch entwickelt.

Heute existieren eine Reihe von Kooperationsprojekten zwischen dem Fachgebiet nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse der Physik und einerseits den Ingenieurwissenschaften, insbesondere den Bereichen Maschinenbau und Elektrotechnik, wie auch andererseits verschiedenen Industriepartnern¹. Durch Kontakte zu den Unternehmen *Siemens Corporate Research*, Princeton, USA und *Carl Schenck AG*, Darmstadt ergaben sich für uns zwei konkrete Projekte, die Fehlerfrüherkennung bei Induktionsmotoren durch Analyse des Statorstroms sowie die automatische Qualitätskontrolle von elektrischen Schiebedächern durch Klassifikation von Körperschallsignalen. Beide Probleme, die Gegenstand der Kapitel 3 und 4 dieser Arbeit sind, stehen zunächst getrennt nebeneinander.

Wie kann die Aufgabenstellung aus einem Blickwinkel der Physik hierbei aussehen? Ein technisches System mit wenigen effektiven Freiheitsgraden läßt sich als ein niedrigdimensionales dynamisches System betrachten, das an äußere stochastische Einflüsse (schwach) gekoppelt ist. Im Fall zu vieler aktiver Freiheitsgrade ist allerdings die Beschreibung durch ein stochastisches Modell meist besser geeignet, da sich dann in den gemessenen Zeitreihen im allgemeinen kein deterministischer Anteil mehr finden läßt. Die Idee dieses Ansatzes ist, die Änderung der beobachteten Dynamik mit der Variation weniger Parameter zu identifizieren um somit die Instationarität der gemessenen Zeitreihen durch entweder die kontrollierte Änderung eines Steuerparameters oder durch zufällige Parameterdrifts, welche durch Umwelteinflüsse bedingt sind, zu beschreiben. Die Parameter des Modells müssen sich hierbei aus den Zeitreihen schätzen lassen. Diese Vorgehensweise ist prinzipiell physikalisch, auch wenn das betrachtete System, wie hier, ein technisches ist.

¹Diese Arbeit entstand teilweise im Rahmen eines vom BMBF geförderten Kooperationsprojekts.

Etwas allgemeiner betrachtet können wir unsere Aufgabe darin sehen, zur Lösung technischer Problemstellungen alternative Vorgehensweisen zu jenen in ingenieurwissenschaftlichen Arbeiten zu untersuchen, welche in unserem Fall durch die nichtlineare Zeitreihenanalyse motiviert sind. Allerdings sollen die bekannten Forschungsergebnisse Bezugspunkte (*benchmarks*) für unsere Arbeit bilden, an denen wir uns orientieren wollen. Somit bieten sich die Alternativen eines eher *problemorientierten* und eines mehr *wissenschaftlich orientierten* Ansatzes. Im ersten Fall steht die Absicht im Vordergrund, mit einem neuen Zugang auch eine bessere Lösung des Problems zu finden, als sie bereits veröffentlichte Arbeiten bieten. Dies stellt natürlich eine Einschränkung an die Auswahl der Methoden dar, da auch die Weiterentwicklung von Verfahren, die auf ein gegebenes Problem zwar anwendbar sind, aber keine optimale Lösung ermöglichen, von wissenschaftlichem Interesse sein kann. So läßt sich zur Fehlerfrüherkennung bei Induktionsmotoren auch die intrinsisch nichtlineare Methode der Kreuzfehler vorhersagen anwenden, welche vom wissenschaftlichen Standpunkt interessant ist, jedoch im Sinn der praktischen Fragestellung zu keinem optimalen Ergebnis führt [43].

Wir haben uns hier für die mehr problemorientierte Sichtweise entschieden, was im Hinblick auf die Motivation der Arbeit auch konsequent ist. Unsere Lösungsansätze weichen von denen in ingenieurwissenschaftlichen Arbeiten ab und bilden eine optimale Kombination aus linearen Verfahren und geometrischen Methoden im Merkmalsraum, die den Konzepten der nichtlinearen Analyse entlehnt sind. Sie können daher als ein alternativer, physikalisch motivierter Zugang angesehen werden.

Unser Vorgehen gliedert sich prinzipiell in zwei Teilschritte: Der erste und zumeist schwierigere ist die Extraktion von geeigneten Merkmalen aus den Zeitreihen, welche die Kriterien möglichst gut repräsentieren sollen, nach denen die Klassifikation erfolgt. Hierzu werden die Zeitreihen oder Teilstücke davon in *Merkmalsvektoren* \mathbf{v} in einem Merkmalsraum V transformiert. Die Komponenten von \mathbf{v} können beliebige statistische Schätzgrößen sein, die im Hinblick auf die Aufgabenstellung sinnvoll gewählt sind. Dafür gibt es keine allgemeingültigen Kriterien. Im zweiten Schritt werden die Merkmalsvektoren klassifiziert. Hierzu wird ein Klassifikationsalgorithmus konstruiert und mit Beispieldaten trainiert, der die Wahrscheinlichkeit für Fehlklassifikationen von Merkmalsvektoren, d.h. den Bayeschen Fehler der Klassifikationsstatistik, minimiert. Die dafür benötigten Konzepte werden in Kap. 2 einführt.

Die Schwerpunkte der beiden Projekte sind unterschiedlich. Aufgrund der Quasi-periodizität des Statorstroms von Induktionsmotoren sowie theoretischer Überlegungen ist es sinnvoll, gefensterete Fourierspektren des Statorstroms als Ausgangspunkt zur Konstruktion von Merkmalsvektoren zu verwenden. Der Schwerpunkt unserer Arbeit liegt in der Entwicklung einer neuen Methode zur Auswahl geeigneter Spektralkomponenten, die sensitiv auf Fehler reagieren, sowie der Unterscheidung von unbekanntem Umwelteinflüssen und Defekten, welches sich als das eigentliche Problem herausstellen wird.

Im Unterschied dazu sind geeignete Merkmale für die Klassifikation von Schall-

signalen in akustischen Güteprüfungen nicht bereits aus der Struktur der Zeitreihen erkennbar. Wir lassen uns hier von der Eigenschaft leiten, daß die für die Fehlererkennung relevanten Informationen der Schallsignale vom menschlichen Ohrs, d.h. von Experten aufgelöst werden können. Wir versuchen daher die Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik des Gehör nachzuahmen. Dies ist für Frequenzen $\gtrsim 500\text{Hz}$ in guter Näherung durch eine Wavelettransformation möglich.

Damit zeigt sich, daß für beide Probleme Zeit-Frequenz Darstellungen einen geeigneten Ausgangspunkt bilden; im ersten Fall die gefensterten Fouriertransformationen, welche eine konstante Auflösungscharakteristik in der Zeit-Frequenz Ebene haben, sowie im zweiten Fall die Wavelettransformationen mit der Eigenschaft einer hyperbolischen Zeit-Frequenz Auflösung. Die Zusammenhänge werden in Kap. 2 ausführlich behandelt.

An dieser Stelle wollen wir zwei prinzipielle Vorgehensweisen in der Zeitreihenanalyse unterscheiden: Modellbasierte und modellfreie Ansätze. Im ersten Fall wird versucht, ein mikroskopisches oder in den meisten Fällen phänomenologisches Modell zu entwickeln, welches das untersuchte System hinreichend gut beschreibt und dessen Parameter sich durch Anfitzen von gemessenen Zeitreihen schätzen lassen. Sind die Modellannahmen gut, so ist es möglich, einen wesentlichen Teil der Informationen zu rekonstruieren, die durch das Messen einer skalaren Zeitreihe aus einem dynamischen System herausprojiziert werden. Ist das Modell zudem physikalisch motiviert, so läßt sich ein weitergehendes Verständnis des Systems gewinnen, als es nur die Informationen erlauben, welche die Zeitreihen enthalten. Die meisten Arbeiten zur Fehlererkennung bei Induktionsmotoren durch Analyse des Statorstroms basieren z.B. auf dem Modell einer idealen Induktionsmaschine.

Jedoch steht und fällt diese Vorgehensweise mit der Realitätsnähe des verwendeten Modells. Sind die gemachten Idealisierungen, wie z.B. die Vernachlässigung von Umwelteinflüssen und Produktionstoleranzen, keine guten Näherungen, so wird der Ansatz zu keiner praxisgerechten Lösung führen. In diesem Fall ist es sinnvoller, modellfrei zu arbeiten. Hierfür stehen nur die Informationen zur Verfügung, welche die gemessenen Zeitreihen enthalten. Wir werden für die beiden in dieser Arbeit untersuchten Probleme im wesentlichen modellfreie Methoden vorstellen. Im Fall der Induktionsmotoren zeigt es sich, daß Umweltbedingungen und Produktionstoleranzen erheblichen Einfluß auf den Statorstrom haben und sich nicht realitätsnah modellieren lassen. Bei der Konstruktion von Merkmalsvektoren zur akustischen Qualitätskontrolle führen einfache Modellannahmen für die Schallsignale (autoregressive Modelle) zu keinem guten Ergebnis und eine genauere Kenntnis der Schallquellen existiert nicht.

Ein weiterer wichtiger Punkt in dieser Hinsicht sind *Stationaritätsannahmen* von gemessenen Zeitreihen. Hiermit ist die (Modell-) Annahme verbunden, daß der deterministische Anteil der Zeitreihe periodisch ist und sich der stochastische Signalanteil durch einen stationären stochastischen Prozeß, d.h. meist ein autoregressives Modell (AR- Modell) beschreiben läßt. Jedoch sind gerade reale Systeme aufgrund äußerer

Einflüsse häufig nichtstationär. Wir verzichten daher auf solche Annahmen, sofern wir keine konkreten Hinweise darauf haben. Um das Spektrum eines Signals aus einem Zeitreihenabschnitt zu schätzen, gehen wir nicht von der Stationarität der Zeitreihe aus, um damit z.B. das Spektrum eines an diese Zeitreihe angefitteten AR- Modells zu verwenden, sondern approximieren eine kontinuierliche gefensterte Fouriertransformation des Signals durch eine entsprechende diskrete Transformation. Bei einem Fenster mit kompaktem Träger muß hierzu nur ein endlicher Signalausschnitt bekannt sein. Diese Konzepte werden in Kap. 2 diskutiert.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kap. 2 führen wir die theoretischen Grundlagen und Konzepte ein, die den Ausgangspunkt für den angewandten Teil der Arbeit bilden. Darüber hinaus wird der konzeptionelle und mathematische Rahmen des Gebietes der Signalanalyse vorgestellt, in das sich die speziellen, hier untersuchten Fragestellungen einordnen lassen. Wir beginnen dazu mit einem Überblick über die recht allgemeinen linearen und quadratischen Zeit-Frequenz Darstellungen, die sich als geeigneter Ausgangspunkt für unsere Arbeit erweisen. Dabei werden im Hinblick auf die Signalanalyse die Eigenschaften von gefensterten Fourier- und Wavelettransformationen, insbesondere die Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik dieser Abbildungen von Interesse sein. Im Anschluß diskutieren wir die genauen Zusammenhänge zwischen kontinuierlichen und diskreten gefensterten Fourier- und Wavelettransformationen. Unser Ziel ist es, für kontinuierliche Zeit-Frequenz Darstellungen dieses Typs mit einer hohen Informationsauflösung möglichst gute diskrete Approximationen zu finden. Die Methoden der statistischen Merkmalsklassifikation, die wir zur Klassifikation der aus experimentellen Zeitreihen berechneten Merkmalsvektoren benötigen, werden schließlich im letzten Abschnitt eingeführt.

In Kap. 3 stellen wir einen neuen Lösungsansatz für das Problem der Fehlerfrüherkennung bei Induktionsmotoren durch Analyse des Statorstromes vor, wozu die Methode der *geometrischen Signaltrennung* im Merkmalsraum eingeführt wird. In Kap. 4 wird das Konzept eines Merkmalsvektors aus *Wavelet- Restklassen* zur automatischen Klassifikation von Schallsignalen vorgestellt, das wir auf die Qualitätsendkontrolle von elektrischen Schiebedächern anwenden. Der erste Abschnitt dieser Kapitel gibt jeweils eine Einführung in die technischen Problemstellungen.

Kapitel 2

Darstellung und Klassifikation von Signalen

In diesem Kapitel wollen wir einen Überblick über einige Methoden zur Darstellung und Klassifikation von kontinuierlichen Signalen und Zeitreihen geben, auf die wir in den folgenden Kapiteln zurückgreifen werden. Darüber hinaus wird der konzeptionelle und mathematische Rahmen des Gebietes der Signalanalyse vorgestellt, in das sich der angewandte Teil unserer Arbeit einordnen läßt und von wo er seinen Ausgang nimmt. Der erste Teil der Arbeit enthält eine Darstellung dieser theoretischen Grundlagen und Konzepte.

Wir beginnen hierzu mit einem Überblick über die recht allgemeinen linearen und quadratischen Zeit-Frequenz Darstellungen, um von dort aus die von uns gewählten Ansätze zu motivieren. Dabei werden im Hinblick auf die Signalanalyse insbesondere die Eigenschaften von gefensterten Fourier- und Wavelettransformationen von Interesse sein, da sich diese Zeit-Frequenz Darstellungen als geeignete Ausgangspunkte für die in Kap. 3 und 4 untersuchten technischen Problemstellungen erweisen.

Im Anschluß diskutieren wir die genauen Zusammenhänge der kontinuierlichen und diskreten Version von gefensterten Fourier- und Wavelettransformationen, da die mathematischen Konzepte der Signaldarstellung vorwiegend in der Sprache der Funktionalanalysis formuliert sind, wir bei allen Anwendungen jedoch nur endliche, diskret abgetastete Zeitreihen zur Verfügung haben. Den Verknüpfungspunkt bildet hierfür das Shannonsche Samplingtheorem, das wir zu Beginn des zweiten Abschnitts diskutieren.

Die Klassifikation experimenteller Daten anhand von extrahierten Merkmalen erfordert insbesondere wegen des häufig recht begrenzten Datenumfangs leistungsfähige statistische Methoden. Die hierfür benötigten Konzepte der statistischen Merkmalsklassifikation werden schließlich im letzten Abschnitt eingeführt. Mathematisch formuliert, wird der Bayesche Fehler einer Klassifikationsstatistik, d.h. der minimale gesamte Klassifikationsfehler, der erzielt werden kann, geschätzt.

2.1 Zeit-Frequenz Darstellungen

Als Zeit-Frequenz Darstellung (ZFD) eines skalaren Signals $x(t)$ bezeichnet man die Transformation von $x(t)$ in eine skalare Funktion $\Phi_x(t, f)$, die von den Variablen Zeit und Frequenz abhängt. Die Grundidee hierbei ist, eine Art „zeitabhängiges Spektrum“ zu definieren, um gleichzeitig Informationen des Signals im Zeit- und im Frequenzraum (im Rahmen der Zeit-Frequenz Unschärfe) auflösen zu können. Anschaulich motiviert ist dieses Konzept durch musikalische Noten, welche eine zeitliche Abfolge von Frequenzen oder genauer, von Wellenpaketen mit Grundschwingungen definierter Frequenz, beschreiben.

Man unterscheidet zwischen Zeit-Frequenz Darstellungen, welche Linearformen, quadratische Formen oder allgemein nichtlineare Funktionale des Signals $x(t)$ sind; die quadratischen ZFDs haben hierunter die größte Bedeutung. Ein Übersichtsartikel über Zeit-Frequenz Darstellungen ist z.B. [18]. Wir wollen hier näher auf zwei wichtige ZFDs eingehen, die gefensterter (oder Kurzzeit-) Fouriertransformationen und die Wavelettransformationen. Ihre Betragsquadrate, das Spektrogramm bzw. das Skalo-gramm, sind Spezialfälle von zwei wichtigen Klassen quadratischer ZFDs, der Cohen Klasse sowie der affinen Klasse, die wir in Abschnitt 2.1.1 einführen, um den mathematischen Rahmen der allgemeinen quadratischen Zeit-Frequenz Darstellungen herzustellen.

Die wohl wichtigste Transformation in der Signalverarbeitung (und von großer Bedeutung allgemein in Physik) ist die Fouriertransformation, da sie durch Abbildung eines Signals vom Zeit- in den Frequenzraum das Konzept der Schwingung auf natürliche Weise repräsentiert. Sei $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$; dann existiert die Fouriertransformierte

$$\hat{x}(f) = \int_t x(t) e^{-i2\pi ft} dt = \langle x(t), e^{i2\pi ft} \rangle,$$

und es gilt $\hat{x}(f) \in L_2(\mathbb{R})$, siehe [2]. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet hierbei das gewöhnliche Skalarprodukt im L_2 -Raum. Damit existiert auch die inverse Transformation

$$x(t) = \int_f \hat{x}(f) e^{i2\pi ft} df, \quad (2.1)$$

welche als Entwicklung von $x(t)$ in der kontinuierlichen (überabzählbaren) Orthonormalbasis $\{e^{i2\pi ft}; f \in \mathbb{R}\}$ aufgefaßt werden kann. Betrachtet man die formale Entwicklung von $x(t)$ in der (uneigentlichen) Orthonormalbasis von Deltadistributionen

$$x(t) = \int_\tau x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau, \quad (2.2)$$

so geht (2.1) aus (2.2) durch Transformation der Zeitbasis $\{\delta(\tau - t); \tau \in \mathbb{R}\}$ in die harmonische Basis $\{e^{i2\pi ft}; f \in \mathbb{R}\}$ hervor. Bemerkenswert hierbei ist, daß die Entwicklungskoeffizienten der Vektoren $\delta(\tau - t)$ bezüglich der Basis $\{e^{i2\pi ft}; f \in \mathbb{R}\}$,

$$\langle \delta(\tau - t), e^{i2\pi ft} \rangle = e^{-i2\pi f\tau},$$

alle den Betrag 1 haben, d.h. jeder Vektor der Zeitbasis entsteht durch Superposition von allen Vektoren der harmonischen Basis mit *gleicher Gewichtung* [14]. Diese Eigenschaft bestimmt die Fouriertransformation eindeutig und begründet ihr wohlbekanntes Verhalten, im Zeitraum gut lokalisierte Darstellungen von Funktionen auf entsprechend schlecht lokalisierte Darstellungen im Frequenzraum abzubilden und umgekehrt. Die quantitative Formulierung dieser Eigenschaft ist die Zeit-Frequenz Unschärfe, auf die wir in Abschnitt 2.1.3 zurückkommen.

Wir wollen allgemein das Transformationspaar $(x(t), \hat{x}(f))$ als zwei *Darstellungen* einer Funktion betrachten, welche viele mögliche Zeit-Frequenz Darstellungen besitzt. In der Sprache der Quantenmechanik würde man von der Projektion eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ in den Zeit- oder Frequenzraum sprechen.

Aus der Orthonormalität der Basen in (2.1) und (2.2) folgt, daß die Fouriertransformation unitär ist, d.h. das Skalarprodukt wird erhalten:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle \hat{x}(f), \hat{y}(f) \rangle. \quad (2.3)$$

Gleichung (2.3) wird auch als Parsevalsches Theorem bezeichnet.

2.1.1 Quadratische ZFDs: Die Cohen Klasse und die affine Klasse

Die Zeit-Frequenz Darstellung $\Phi_x(t, f)$ eines Signals $x(t)$ ist eine Abbildung des Signals vom Zeitraum in die Zeit-Frequenz Ebene. Die geforderten Eigenschaften dieser Abbildung sind vom spezifischen Signal und den Informationen, die daraus extrahiert werden sollen, abhängig. Für eine gute Interpretierbarkeit von ZFDs ist allgemein die Forderung natürlich, daß sie reell sind. Weiterhin ist es sinnvoll, die Eigenschaft der Translationsinvarianz im Zeitraum zu fordern, d.h.

$$\tilde{x}(t) = x(t - t_0) \iff \Phi_{\tilde{x}}(t, f) = \Phi_x(t - t_0, f), \quad (2.4)$$

da somit die Zeit-Frequenz Darstellung eines periodischen Signals ebenfalls periodisch ist. Entsprechend kann auch die Eigenschaft der Translationsinvarianz im Frequenzraum gefordert werden, d.h.

$$\tilde{x}(t) = x(t)e^{i2\pi f_0 t} \iff \hat{\tilde{x}}(f) = \hat{x}(f - f_0) \iff \Phi_{\tilde{x}}(t, f) = \Phi_x(t, f - f_0). \quad (2.5)$$

Erfüllt eine ZFD die Eigenschaften (2.4) und (2.5), so wird damit ihre Auflösungscharakteristik in der Zeit-Frequenz Ebene festgelegt; wir gehen in Abschnitt 2.1.3 hierauf genauer ein. Eine weitere interessante Eigenschaft in dieser Hinsicht ist die Skalierungsinvarianz, d.h.

$$\tilde{x}(t) = \sqrt{|a_0|} x(a_0 t) \iff \Phi_{\tilde{x}}(t, f) = \Phi_x(a_0 t, \frac{f}{a_0}). \quad (2.6)$$

Der Faktor $\sqrt{|a_0|}$ dient hierbei der Erhaltung der L_2 -Norm des skalierten Signals.

Eine reelle, quadratische Zeit-Frequenz Darstellung, welche die Eigenschaften (2.4)–(2.6) erfüllt, ist die Wigner (oder Wigner-Ville) Verteilung¹

$$W_x(t, f) = \int_{\tau} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f \tau} d\tau, \quad (2.7)$$

wobei $\overline{}$ die komplexe Konjugation bezeichnet. Die Wigner-Ville Verteilung besitzt eine Vielzahl interessanter Eigenschaften [18], die bis heute zu vielfältigen Anwendungen dieser Transformation in der Quantenmechanik, Optik, Signalverarbeitung und anderen Bereichen von Physik und Ingenieurwissenschaften geführt haben [11, 28, 29].

Interessant in unserem Zusammenhang ist, daß die Darstellung (2.7) eine hohe Informationsauflösung des Signals $x(t)$ in der Zeit-Frequenz Ebene ermöglicht, welche nur durch die Zeit-Frequenz Unschärfe begrenzt wird. Der Preis dafür ist das Auftreten von Interferenztermen: Seien x und y zwei Signale, die an den Stellen (t_1, f_1) , bzw. (t_2, f_2) in der Zeit-Frequenz Ebene lokalisiert sind. Aus (2.7) folgt unmittelbar: $W_{(x+y)}(t, f) = W_x(t, f) + W_y(t, f) + W_{x,y}(t, f) + W_{y,x}(t, f)$, wobei der Interferenzterm $W_{x,y}(t, f) = \overline{W_{y,x}(t, f)}$ durch

$$W_{x,y}(t, f) = \int_{\tau} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{y}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f \tau} d\tau,$$

definiert ist. Die Funktion $W_{x,y}(t, f)$ oszilliert in der Zeit-Frequenz Ebene, wobei der Frequenzvektor der Grundschiwingung durch $(\nu_{1,2}, \tau_{1,2}) = (f_1 - f_2, t_1 - t_2)$ gegeben ist. Die zweidimensionale Fouriertransformation von $W_{x,y}(t, f)$, $\widehat{W}_{x,y}(\nu, \tau)$, ist in der ν - τ Ebene um so weiter vom Ursprung entfernt lokalisiert, je größer $\|(\nu_{1,2}, \tau_{1,2})\|_2$ ist. Hierauf beruht die Idee, die Interferenzterme der Wigner-Ville Verteilung durch Tiefpaßfiltern im ν - τ Raum oder entsprechend durch Falten im t - f Raum zu dämpfen.

Die Faltung von (2.7) mit einer Kernfunktion $\Pi(t, f)$ ist im allgemeinen nicht mehr skalierungsinvariant. Es läßt sich jedoch zeigen, daß *alle* quadratischen Zeit-Frequenz Darstellungen, welche die Bedingungen (2.4) und (2.5) erfüllen, durch Faltung von (2.7) mit einer Kernfunktion erzeugt werden können [14, 17]:

$$C_x(t, f) = \int_{\tau} \int_{\nu} W_x(\tau, \nu) \Pi(\tau - t, \nu - f) d\tau d\nu. \quad (2.8)$$

Die in der Zeit-Frequenz Ebene translationsinvarianten ZFDs (2.8) bilden die *Cohen Klasse*². Entsprechend kann gezeigt werden, daß sich die Menge aller quadratischen ZFDs, die den Gleichungen (2.4) und (2.6) genügen, aus der Wigner-Ville Verteilung durch *affine* Faltung mit einer Kernfunktion $\Pi(t, f)$ erzeugen läßt [33]:

$$\Omega_x(t, f) = \int_{\tau} \int_{\nu} W_x(\tau, \nu) \Pi\left(\frac{f}{f_0}(\tau - t), \frac{f_0}{f}\nu\right) d\tau d\nu. \quad (2.9)$$

¹Wigner fand diese Verteilung 1932 im Zusammenhang mit der Quantenmechanik [45], während sie Ville 1948 zum ersten Mal in der Signalanalyse anwendete [44], offensichtlich ohne die Arbeit Wigners zu kennen.

²Die Klasse translationsinvarianter ZFDs wurde zuerst von Cohen 1966 im Rahmen quantenmechanischer Überlegungen gefunden [3].

Die Menge (2.9) wird entsprechend als *affine Klasse* bezeichnet. In der Literatur wird die Abbildung Ω_x auch häufig als Funktion des Skalierungsparameters $a = f_0/f$ definiert. Da die Konstante $f_0 > 0$ willkürlich ist, scheint a die natürliche unabhängige Variable von skalierungsinvarianten Abbildungen zu sein. Jedoch ist hier die Interpretation von Ω_x als einer Abbildung in die Zeit-Frequenz Ebene erwünscht und somit ihre explizite Abhängigkeit von f sinnvoll.

Interessanterweise besteht die Schnittmenge von affiner und Cohen Klasse nicht nur aus der Wigner-Ville Verteilung selber, sondern aus allen Abbildungen, die durch Faltung von (2.7) mit Kernfunktionen der Form $\Pi(t, f) = \Pi(t \cdot f)$ erzeugt werden [19]. Das wichtigste Beispiel dieser sogenannten *shift-scale class* bilden Signaldarstellungen mit der Wahl $\Pi(t, f) \sim e^{-(t^2 f^2 / \sigma)}$. Diese Kernfunktion wird häufig als Choi-Williams Kern bezeichnet.

2.1.2 Gefensterte Fourier- und Wavelettransformationen

Im Vergleich zu den quadratischen ist die Menge der linearen Zeit-Frequenz Darstellungen, welche der Bedingung (2.4) sowie (2.5) oder (2.6) genügen, klein; sie besteht genau aus den Klassen der gefensterten Fouriertransformationen FT_x^g und der Wavelettransformationen WT_x^h . Diese sind definiert durch:

$$FT_x^g(t, f) = \int_{\tau} x(\tau) \overline{g(\tau - t)} e^{-i2\pi f \tau} d\tau = \langle x(\tau), g(\tau - t) e^{i2\pi f \tau} \rangle, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} WT_x^h(t, f) &= \int_{\tau} x(\tau) \sqrt{\left| \frac{f}{f_0} \right|} \overline{h\left(\frac{f}{f_0}(\tau - t)\right)} d\tau \\ &= \langle x(\tau), \sqrt{\left| \frac{f}{f_0} \right|} h\left(\frac{f}{f_0}(\tau - t)\right) \rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Wavelettransformation wird auch häufig als Funktion des Skalierungsparameters $a = f_0/f$ definiert; wir wollen sie hier jedoch als Abbildung in die Zeit-Frequenz Ebene betrachten.

Die gefensterte Fouriertransformation erfüllt die Eigenschaft (2.5), die Translationsinvarianz im Zeitraum ist dagegen nur mit der Einschränkung einer zusätzlich auftretenden Phase gegeben, vgl. (2.4):

$$\tilde{x}(t) = x(t - t_0) \iff F_{\tilde{x}}^g(t, f) = F_x^g(t - t_0, f) e^{-i2\pi f t_0}.$$

Da die gefensterte Fouriertransformation eines reellen Signals nicht reell ist³ und die Phasen meist keine auswertbaren Informationen enthalten (sie sind von den Anfangsbedingungen abhängig), betrachtet man das Spektrogramm $SP_x^g(t, f) = |FT_x^g(t, f)|^2$ oder eine monotone Funktion hiervon. Das Spektrogramm läßt sich in der Form

$$SP_x^g(t, f) = \int_{\tau} \int_{\nu} W_x(\tau, \nu) W_g(\tau - t, \nu - f) d\tau d\nu \quad (2.12)$$

³außer vielleicht für isolierte Werte von t

schreiben und ist somit ein Element der Cohen Klasse, vgl. (2.8). $W_g(\tau, \nu)$ bezeichnet hierbei die Wigner-Ville Verteilung der Fensterfunktion $g(\tau)$.

Die Wavelettransformation erfüllt die Invarianzbedingungen (2.4) und (2.6). Auch wenn das Wavelet $h(\tau)$ reell gewählt wird, geht man in in der Signalanalyse gerne zum einfacher zu interpretierenden Skalogramm $SK_x^h(t, f) = |WT_x^h(t, f)|^2$ über, welches analog zum Spektrogramm die Darstellung

$$SK_x^h(t, f) = \int_{\tau} \int_{\nu} W_x(\tau, \nu) W_h\left(\frac{f}{f_0}(\tau - t), \frac{f_0}{f}\nu\right) d\tau d\nu \quad (2.13)$$

besitzt und damit ein Element der affinen Klasse ist, vgl. (2.9). $W_h(\tau, \nu)$ bezeichnet analog die Wigner-Ville Verteilung des Wavelets $h(\tau)$.

Das Spektrogramm und das Skalogramm sind die wichtigsten Vertreter der Cohen bzw. der affinen Klasse. Anhand dieser Beispiele läßt sich ein charakteristischer Unterschied zwischen der Cohen Klasse und der wichtigsten Teilmenge der affinen Klasse zeigen: Die Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik der ZFDs dieser Mengen; wir gehen hierauf im nächsten Abschnitt ein.

Aus (2.12) und (2.13) folgt, daß Spektrogramme und Skalogramme relativ stark geglättete Wigner-Ville Verteilungen sind, da die Kerne $W_g(\tau, \nu)$ und $W_h(\tau, \nu)$ aufgrund der Zeit-Frequenz Unschärfe eine Mindestausdehnung in der Zeit-Frequenz Ebene besitzen müssen, welche eine Obergrenze für ihre mögliche Lokalisierung bildet. Es existieren Kernfunktionen, die abhängig von einem Parameter einen kontinuierlichen Übergang von (2.7) nach (2.12) bzw. von (2.7) zu (2.13) ermöglichen [33].

Wir wollen hier noch erwähnen, daß die Gleichungen (2.12) und (2.13), welche Spektrogramme und Skalogramme in den Rahmen allgemeiner quadratischer Zeit-Frequenz Darstellungen stellen, relativ einfach hergeleitet werden können unter Verwendung der Eigenschaften (2.4)–(2.6) der Wigner-Ville Verteilung sowie den Unitaritätsrelationen (2.3) und $\langle W_x, W_y \rangle = |\langle x, y \rangle|^2$.

Betrachten wir nun die Eigenschaften von gefensterten Fourier- und Wavelettransformationen genauer. Die Definition (2.10) kann als ein Ausdruck der Entwicklungskoeffizienten von $x(\tau)$ bezüglich der kontinuierlichen Basis

$$g_{t,f}(\tau) = g(\tau - t)e^{i2\pi f\tau}; \quad t, f \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

betrachtet werden, wobei $g_{t,f}(\tau)$ durch eine Translation im Zeit- und anschließend im Frequenzraum aus einer zugrundeliegenden Fensterfunktion $g_{0,0}(\tau) \equiv g(\tau)$ hervorgeht⁴, siehe hierzu Abb. 2.1. Wir können hierbei annehmen, daß $g_{0,0}(\tau)$ und $\hat{g}_{0,0}(\nu)$ im Zeit- bzw. Frequenzraum am Ursprung lokalisiert sind. Die Darstellung von $x(\tau)$ bezüglich der Basis (2.14) ergibt sich dann aus der Invertierung von (2.10):

$$x(\tau) = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_t \int_f FT_x^g(t, f) g(\tau - t) e^{i2\pi f\tau} dt df, \quad (2.15)$$

⁴Translationen im Zeit- und Frequenzraum kommutieren nicht, das Resultat unterscheidet sich um die Phase $e^{-i2\pi ft}$.

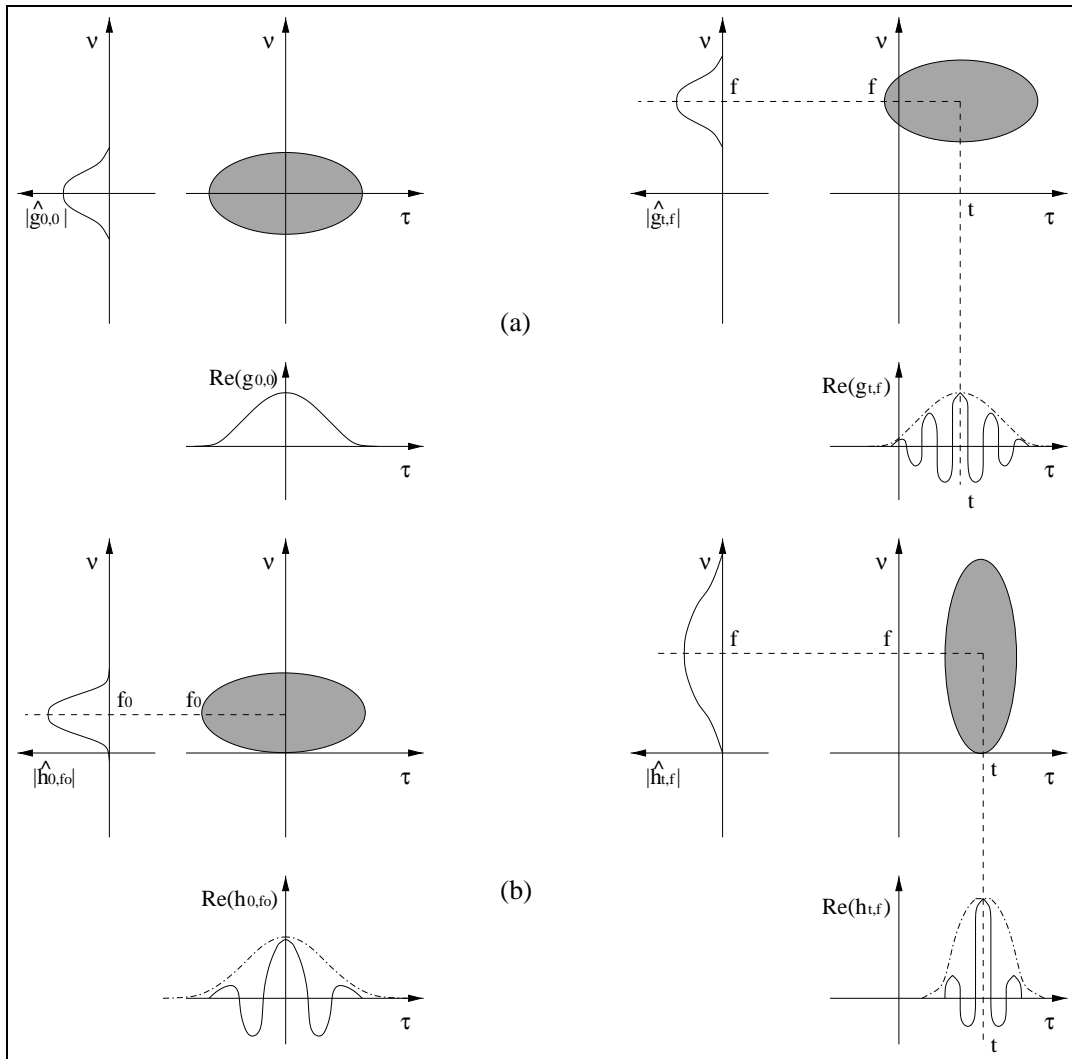


Abbildung 2.1: Die schematische Darstellung der Erzeugung der Basisfunktionen von $FT_x^g(t, f)$ und $WT_x^h(t, f)$: (a) $g_{t,f}$ geht durch eine Translation im Zeit- und anschließend im Frequenzraum aus $g_{0,0}$ hervor. (b) $h_{t,f}$ wird durch eine Translation im Zeitraum und anschließende Skalierung aus h_{0,f_0} erzeugt.

wobei Gl. (2.15) zumindest im Sinn der L_2 -Norm gilt. Ebenso läßt sich die Definition (2.11) als ein Ausdruck der Entwicklungskoeffizienten von $x(\tau)$ bezüglich der kontinuierlichen Basis

$$h_{t,f}(\tau) = \sqrt{\left| \frac{f}{f_0} \right|} h\left(\frac{f}{f_0}(\tau - t)\right); \quad t, f \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

auffassen, wobei $h_{t,f}(\tau)$ durch Translation im Zeitraum und anschließende Skalierung mit dem Faktor f/f_0 aus einem Mutterwavelet $h_{0,f_0}(\tau) \equiv h(\tau)$ erzeugt wird, siehe Abb. 2.1. Die Entwicklung von $x(\tau)$ nach den Basisfunktionen (2.16) wird dann durch

die Invertierung von (2.11):

$$x(\tau) = \frac{1}{C_h} \int_t \int_f WT_x^h(t, f) \sqrt{\left| \frac{f}{f_0} \right|} h\left(\frac{f}{f_0}(\tau - t)\right) dt df \quad (2.17)$$

mit der Normierungskonstanten $C_h = \int_f |f_0/f| |\widehat{h}(f_0/f)|^2 df = f_0 \int_a 1/|a| |\widehat{h}(a)|^2 da$ gegeben. Gleichung (2.17) ist hierbei ebenfalls im Sinn der L_2 -Norm zu verstehen. Notwendige und in allen praktischen Fällen (d.h. für „hinreichend gut lokalisierte“ Wavelets, siehe Abschnitt 2.1.3) auch hinreichende Bedingung für die Existenz von C_h und damit die Invertierbarkeit der Wavelettransformation ist $\widehat{h}(0) = 0$, siehe [4].

Eine formal analoge Darstellung von gefensterten Fourier- und Wavelettransformationen erhalten wir unter der (sinnvollen) Annahme, daß Wavelets Wellenpakete sind, durch die Schreibweise

$$h_{0,f_0}(\tau) = \tilde{h}(\tau) e^{i2\pi f_0 \tau},$$

wobei $\tilde{h}(\tau)$ und $\widehat{h}(\nu)$ im Ursprung von Zeit- bzw. Frequenzraum lokalisiert sein sollen. ($\tilde{h}(\tau)$ ist somit *kein* Wavelet.) Damit ist

$$h_{t,f}(\tau) = \sqrt{\left| \frac{f}{f_0} \right|} \tilde{h}\left(\frac{f}{f_0}(\tau - t)\right) e^{i2\pi f(\tau - t)}. \quad (2.18)$$

Unter Verwendung von (2.3) lassen sich die Definitionen (2.10) und (2.11) auch als Ausdrücke der Entwicklungskoeffizienten von $\widehat{x}(\nu)$ bezüglich der kontinuierlichen Basisfunktionen im Frequenzraum $\{\widehat{g}_{t,f}(\nu)\}$ bzw. $\{\widehat{h}_{t,f}(\nu)\}$ schreiben:

$$FT_x^g(t, f) = \langle \widehat{x}(\nu), \widehat{g}_{t,f}(\nu) \rangle = \langle \widehat{x}(\nu), \widehat{g}(\nu - f) e^{-i2\pi(\nu - f)t} \rangle, \quad (2.19)$$

$$WT_x^h(t, f) = \langle \widehat{x}(\nu), \widehat{h}_{t,f}(\nu) \rangle = \langle \widehat{x}(\nu), \sqrt{\left| \frac{f_0}{f} \right|} \widehat{h}\left(\frac{f_0}{f}(\nu - f)\right) e^{-i2\pi\nu t} \rangle. \quad (2.20)$$

Betrachten wir nun FT_x^g und WT_x^h als Funktionen von f , so haben (2.19) und (2.20) die Form eines Faltungsintegrals von $\widehat{x}(\nu)$ mit den Basisfunktionen $\widehat{g}_{t,f}(\nu)$ bzw. $\widehat{h}_{t,f}(\nu)$. Als Funktionen von t dagegen gesehen, sind die Gleichungen (2.19) und (2.20) Bandpaßtransformationen, da $\widehat{g}_{t,f}(\nu)$ und $\widehat{h}_{t,f}(\nu)$ im Frequenzraum an der Stelle f lokalisiert sind und somit, spaltet man die Phase $e^{-i2\pi\nu t}$ für die inverse Fouriertransformation ab, $\widehat{g}(\nu - f)$ und $\sqrt{|f_0/f|} \widehat{h}(f_0/f(\nu - f))$ Bandpaßfilter darstellen.

Da Falten und Filtern äquivalente Prozesse sind, die durch einander ausgedrückt werden können, haben die Darstellungen (2.10) und (2.11) von FT_x^g bzw. WT_x^h natürlich analoge Interpretationen, die aber vielleicht nicht so offensichtlich sind. In diesem Sinn können (2.10) und (2.11) als Faltungen des Signals $x(t)$ mit den Basisfunktionen (2.14) bzw. (2.18) wie auch als Bandpaßtransformationen mit den Bandpaßfiltern $g(\tau - t)$, bzw. $\sqrt{|f/f_0|} \tilde{h}(f/f_0(\tau - t))$ aufgefaßt werden, wobei wir im ersten Fall FT_x^g und WT_x^h als Funktionen von t , im zweiten abhängig von f betrachten wollen.

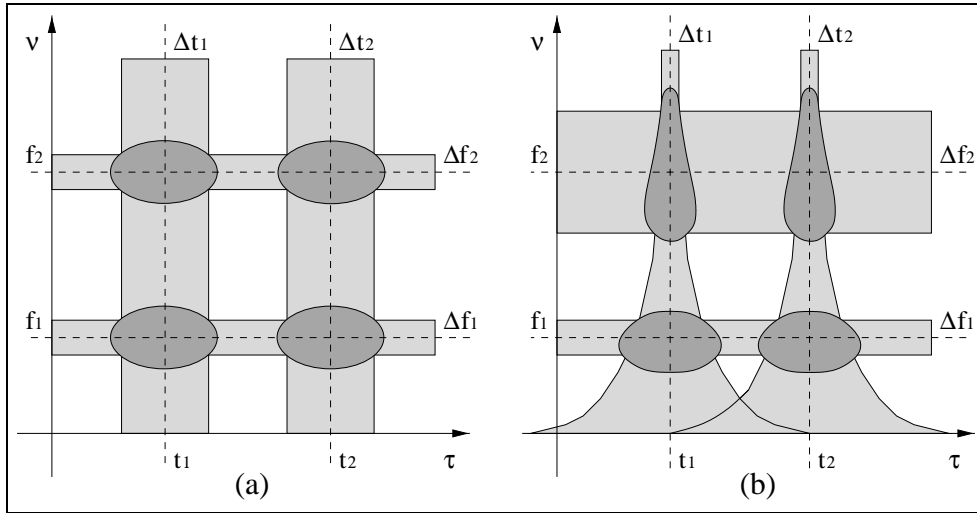


Abbildung 2.2: Die schematische Darstellung der Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik von $FT_x^g(t, f)$ und $WT_x^h(t, f)$: Lokalisierung der Basisfunktionen $g_{t,f}$ (a) und $h_{t,f}$ (b) in der Zeit-Frequenz Ebene.

2.1.3 Die Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik

Kommen wir nun zu der Auflösungscharakteristik von gefensterten Fourier- und Wavelettransformationen. Die *Bandbreite* einer L_2 -Funktion $x(\tau)$ kann im Zeit- bzw. Frequenzraum definiert werden durch

$$\Delta t^2 = \frac{\int_{\tau} |x(\tau)|^2 \tau^2 d\tau}{\int_{\tau} |x(\tau)|^2 d\tau} \quad \text{sowie} \quad \Delta f^2 = \frac{\int_{\nu} |\hat{x}(\nu)|^2 \nu^2 d\nu}{\int_{\nu} |\hat{x}(\nu)|^2 d\nu}. \quad (2.21)$$

Wir nennen eine Funktion „hinreichend gut lokalisiert“ in der Zeit-Frequenz Ebene, wenn sie $\Delta t^2 < \infty$ und $\Delta f^2 < \infty$ erfüllt. Wir können annehmen, daß diese Eigenschaft für alle Basisfunktionen $g_{t,f}$ und $h_{t,f}$ gegeben ist. Da $FT_x^g(t, f)$ und $WT_x^h(t, f)$ Bandpaßtransformationen des Signals $x(t)$ darstellen, wird die Zeit-Frequenz Auflösung von $x(t)$ durch die Lokalisierung von $g_{t,f}$ bzw. $h_{t,f}$ in der Zeit-Frequenz Ebene bestimmt. Daß es sich hierbei immer um ein Abwägen zwischen Auflösen und Ausglätten der Strukturen des Signals im Zeit- und Frequenzraum handelt, folgt aus der Zeit-Frequenz Unschärfe

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}, \quad (2.22)$$

wobei die Gleichheitsbedingung genau für Gaußverteilungen erfüllt ist, siehe [2]. In der Quantenmechanik wird (2.22) als Heisenbergsche Unschärferelation bezeichnet. Wir wollen die Zeit-Frequenz Unschärfe der Basisfunktionen $g_{t,f}$ und $h_{t,f}$ als ein (zumindest qualitatives) Maß dafür verwenden, wie gut sie in der der Zeit-Frequenz Ebene lokalisiert sind. Dies ist damit ein Maß für die *Informationsauflösung* der korrespondierenden Zeit-Frequenz Darstellung.

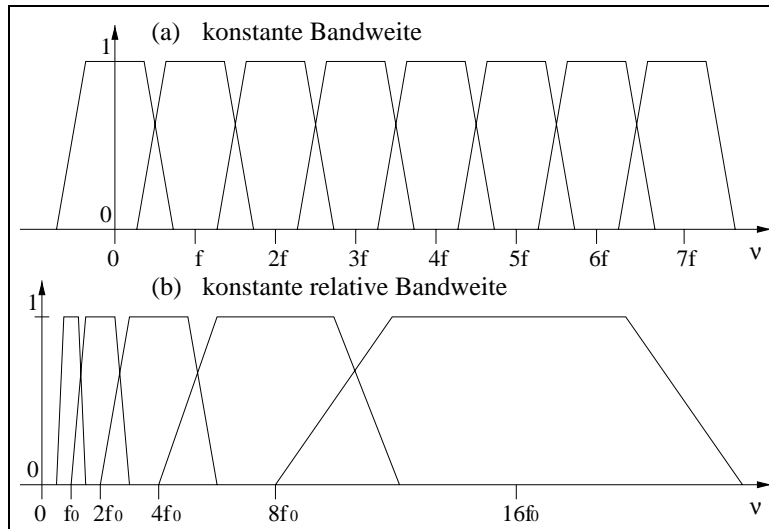


Abbildung 2.3: Der Frequenzraum wird von Wavelettransformationen logarithmisch überdeckt, d.h. in Oktaven eingeteilt (b), während gefensterete Fouriertransformationen ihn gleichförmig überdecken (a). Siehe hierzu auch Abb. 4.2

Die Bandbreite der Basisfunktionen $g_{t,f}$ hängt nicht von den Translationsfaktoren t und f ab, d.h. es ist $\Delta t = \text{const}$ und $\Delta f = \text{const}$. Dies folgt sofort durch Einsetzen von $g_{t,f}(\tau)$ und $\hat{g}_{t,f}(\nu)$ in (2.21). Dadurch ist die Auflösung eines Signals überall in der Zeit-Frequenz Ebene gleich; man spricht bei gefensterter Fouriertransformation von einer *konstanten* Auflösungscharakteristik. Anders im Fall der Wavelettransformation: Da hier die Basisfunktionen $h_{t,f}$ durch Skalierung aus einem Mutterwavelet h_{0,f_0} hervorgehen, ist ihre Bandbreite Δf proportional zur Grundfrequenz f , an der $\hat{h}_{t,f}(\nu)$ im Frequenzraum lokalisiert ist. Man erhält aus (2.21)

$$\frac{\Delta f}{f} = \text{const} \quad (2.23)$$

und damit auch $\Delta t \sim 1/f$. Die Auflösungscharakteristik von Wavelettransformationen wird aus diesem Grund *hyperbolisch* genannt. In der Literatur wird $WT_x^h(t, f)$ auch als Zeit-Frequenz Darstellung mit „konstanter relativer Bandbreite“ bezeichnet [32]. In Abb. 2.2 ist die Auflösungscharakteristik von $FT_x^g(t, f)$ und $WT_x^h(t, f)$ sowie in Abb. 2.3 die Anordnung der Bandpaßfilter im Frequenzraum illustriert. Wavelettransformationen teilen den Frequenzraum natürlich in Oktaven ein.

Das besondere Interesse an ZFDs mit hyperbolischer Zeit-Frequenz Auflösung beruht auf der Auflösungscharakteristik des menschlichen Gehörs, die für Frequenzen $\gtrsim 500\text{Hz}$ in guter Näherung die Form (2.23) hat [4, 32]. In der Schnecke im Innenohr findet eine Dispersion der vom Mittelohr übertragenen Schalldrucksignale statt mit der Charakteristik, daß die Frequenzauflösung der Schallsignale in etwa logarithmisch erfolgt, also zu einer nach Oktaven gegliederten Wahrnehmung von Tonhöhen führt.

Dies kann darauf zurückgeführt werden, daß wichtige Geräusche in unserer Umwelt, wie vor allem die Sprache, sich aus niederfrequenten und länger andauernden sowie hochfrequenten und zeitlich kürzeren Komponenten zusammensetzen. Die musikalischen Noten z.B. spiegeln die logarithmische Frequenzauflösung des menschlichen Gehörs wieder. Die Wahrnehmung stationärer Signale, d.h. die Empfindung der zeitlichen Änderung eines Schallsignals, findet auf der Zeitskala $\Delta t \gtrsim 200$ ms statt und beruht im wesentlichen auf Änderungen von Tonhöhe und Lautstärke [16].

Unsere Aufgabe in Kap. 4 ist die automatische Klassifikation von Schallsignalen, die durch menschliche Experten (prinzipiell) getrennt werden können. Der Ausgangspunkt für die Entwicklung eines hierauf angepaßten Merkmalsvektors ist aus diesem Grund eine (diskrete) Wavelettransformation. Wird dagegen die Analyse von Signalen betrachtet, die für das menschliche Gehör keine oder kaum Informationen enthalten, wie z.B. der Statorstrom von Induktionsmotoren in Kap. 3, so sind vermutlich andere Ansätze erfolgversprechender. Aufgrund der Quasiperiodizität der Motorsignale bietet sich hier eine gefensterter Fouriertransformation als Ansatzpunkt an.

Zum Schluß dieses Abschnitts möchten wir den Weg wieder zurück zu allgemeineren Zeit-Frequenz Darstellungen finden. Aus der Translationsinvarianz in der Zeit-Frequenz Ebene (2.4), (2.5) folgt unmittelbar, daß alle ZFDs der Cohen Klasse eine konstante Zeit-Frequenz Auflösung haben. Die Menge der ZFDs mit einer hyperbolischen Auflösungscharakteristik bilden dagegen eine Teilmenge (die wichtigste allerdings) der affinen Klasse. Dies ist klar, da der Schnitt von Cohen und affiner Klasse nicht leer ist. Die hyperbolische Zeit-Frequenz Auflösung der Wavelettransformation folgt aus der Eigenschaft, daß der Skalierungsparameter f_0/f der Basisfunktionen $h_{t,f}$ umgekehrt proportional zur Grundfrequenz f ist, an der $\hat{h}_{t,f}(\nu)$ im Frequenzraum lokalisiert ist, die Skalierung also an eine Translation der Grundfrequenz gekoppelt ist (2.20). Die Skalierungsinvarianz (2.6) ist hierfür nicht hinreichend, aber natürlich notwendig.

Betrachtet man die Darstellungen (2.15) und (2.17) des Signals $x(\tau)$, so stellt sich die Frage ob es auch *abzählbare* Basen oder allgemeiner, abzählbare und überall in $L_2(\mathbb{R})$ dicht liegende Mengen von Funktionen des Typs (2.14) bzw. (2.16) gibt, wie sich aus den Abb. 2.2 und 2.3 vielleicht vermuten läßt. Die Antwort ist ja, und eine Theorie dieser sogenannten Rahmen (*frames*) findet sich z.B. in [4]. Wir wollen darauf nicht eingehen, aber noch bemerken, daß sich hierbei weitere interessante Unterschiede zwischen den Basisfunktionen (2.14) und (2.16) zeigen.

2.2 Diskrete Signaldarstellungen

Während die mathematischen Konzepte der Signalverarbeitung vorwiegend in der Sprache der Funktionalanalysis formuliert sind, hat man in allen praktischen Anwendungen nur endliche, diskret abgetastete Zeitreihen zur Verfügung. Die Umsetzung der Theorie kontinuierlicher Zeit-Frequenz Darstellungen in die Sprache der linearen Algebra für die Anwendung auf Zeitreihen ist nicht nur ein technisches Problem; vielmehr muß beachtet werden, daß der Informationsgehalt kontinuierlicher Signale durch die Diskretisierung mit einer endlichen Abtastrate wesentlich reduziert werden kann und auch nur ein endlicher Ausschnitt des eigentlichen Signals bekannt ist. Damit stellt sich die Frage, inwiefern die Informationen kontinuierlicher Signale in einer gemessenen Zeitreihe noch enthalten sind oder anders formuliert, wie gut läßt sich das Signal aus der Zeitreihe rekonstruieren?

Diese Frage beantwortet das Shannonsche Samplingtheorem, auf das wir wegen seiner Bedeutung in der Zeitreihenanalyse in Abschnitt 2.2.1 eingehen. Allgemein kann ein kontinuierliches Signal nicht vollständig aus einer gemessenen Zeitreihe rekonstruiert werden. Damit stellt sich weiter die Frage, *welche* Informationen des Signals aus einer endlichen Zeitreihe extrahiert werden können oder konkreter, mit welcher Wahl der Fensterfunktion $g(\tau)$ oder des Waveletfilters $\hat{h}(\nu)$ können aus der Zeitreihe $\{x(n\Delta\tau); n = 1, \dots, N\}$ die möglichst hoch aufgelösten Zeit-Frequenz Darstellungen $FT_x^g(t, f)$ bzw. $WT_x^h(t, f)$ des Signals $x(\tau)$ so gut wie möglich rekonstruiert werden?

Eine hohe Informationsauflösung von $FT_x^g(t, f)$ oder $WT_x^h(t, f)$ erfordert offensichtlich die gute Lokalisierung, d.h. eine kleine Zeit-Frequenz Unschärfe der Basisfunktionen $g(\tau)$ bzw. $h(\tau)$ in der Zeit-Frequenz Ebene (Abschnitt 2.1.3). Darüber hinaus zeigt sich aber, daß es ebenso von der Wahl von $g(\tau)$ bzw. $h(\tau)$ abhängt, wie gut gefensterter Fourier- und Wavelettransformationen durch eine entsprechende diskrete Transformation approximiert werden können, oder anders ausgedrückt, wie vollständig sich $FT_x^g(t, f)$ oder $WT_x^h(t, f)$ aus einer Zeitreihe rekonstruieren lassen. In den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 wird dieser Zusammenhang diskutiert.

Da das Konzept der Skalierung auf diskrete Signale nicht unmittelbar übertragbar ist, lassen sich kontinuierliche Wavelettransformationen nur teilweise durch diskrete approximieren. Daher muß die Definition einer diskreten Wavelettransformation vom kontinuierlichen Vorbild etwas abweichen. In Abschnitt 2.2.3 wird eine Möglichkeit hierzu vorgestellt.

2.2.1 Das Shannonsche Samplingtheorem

Die Aussage des Shannonschen Samplingtheorems ist, daß L_2 -Funktionen, die im Frequenzraum einen kompakten Träger haben, aus einer (unendlichen) Zeitreihe *vollständig* rekonstruiert werden können. Darüber hinaus kann der Informationsverlust abgeschätzt werden, der durch die Diskretisierung eines Signals mit einer endlichen

Abtastrate entsteht, falls die Voraussetzungen des Satzes nicht erfüllt sind. Damit bildet das Shannonsche Samplingtheorem den Verknüpfungspunkt zwischen kontinuierlichen Signalen und Zeitreihen.

Betrachten wir zunächst Funktionen $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger im Frequenzraum, d.h. $\hat{x}(f) \equiv 0$ für $f \notin [-f_c, f_c]$. Damit läßt sich $\hat{x}(f)$ in die Fourierreihe

$$\hat{x}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-i \frac{2\pi}{2f_c} n f} \quad (2.24)$$

entwickeln mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2f_c} \int_{-f_c}^{f_c} \hat{x}(f) e^{i \frac{\pi}{f_c} n f} df \\ &= \frac{1}{2f_c} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{i \frac{\pi}{f_c} n f} df = \frac{1}{2f_c} x\left(\frac{n}{2f_c}\right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Es folgt, daß

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{i2\pi f t} df = \int_{-f_c}^{f_c} \left(\sum_n c_n e^{-i \frac{\pi}{f_c} n f} \right) e^{i2\pi f t} df \\ &= \sum_n c_n \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi f (t - \frac{n}{2f_c})} df = \sum_n x\left(\frac{n}{2f_c}\right) \frac{\sin(2\pi f_c (t - \frac{n}{2f_c}))}{2\pi f_c (t - \frac{n}{2f_c})} \\ &= \sum_n x(n\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_c (t - n\Delta t))}{2\pi f_c (t - n\Delta t)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aufgrund der Vertauschung von Integration und Reihenentwicklung im Schritt von der ersten zur zweiten Zeile setzen wir die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe (2.24) voraus. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit $\sum_n |c_n| < \infty$ und wird genau für stetige Funktionen $\hat{x}(f)$ erfüllt. Die betragsmäßig maximale Frequenz f_c , für die $\hat{x}(f) \neq 0$ sein kann, wird häufig als Nyquistfrequenz bezeichnet. Aus (2.26) folgt, daß $\Delta t = 1/(2f_c)$ das größte Abtastintervall im Zeitraum ist, welches ausreicht, um das kontinuierliche Signal $x(t)$ durch die Zeitreihe $\{x(n\Delta t); n \in \mathbb{Z}\}$ vollständig, d.h. ohne Informationsverlust, zu rekonstruieren.

Die Reihenentwicklung (2.26) ist nicht eindeutig. Um dies zu sehen, betrachten wir $\tilde{x}(t) = x(t - \tau)$. Da somit $\tilde{\hat{x}}(f) = \hat{x}(f) e^{-i2\pi f \tau}$ ist, haben $\tilde{\hat{x}}(f)$ und $\hat{x}(f)$ den gleichen Träger. Damit existiert für $\tilde{x}(t)$ ebenfalls die Darstellung (2.26), woraus folgt:

$$\begin{aligned} x(t - \tau) &= \sum_n x(n\Delta t - \tau) \frac{\sin(2\pi f_c (t - n\Delta t))}{2\pi f_c (t - n\Delta t)} \\ &= \sum_n x(n\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_c (t - \tau - n\Delta t))}{2\pi f_c (t - \tau - n\Delta t)}. \end{aligned}$$

Somit kann das Signal $x(t)$ aus *jeder* Zeitreihe $\{x(n\Delta t + \tau); n \in \mathbb{Z}\}$ mit $0 \leq \tau < \Delta t$ vollständig rekonstruiert werden.

Betrachteten wir nun den Fall einer höheren Samplingrate, d.h. $\Delta t < 1/(2f_c)$. In diesem Fall ist die Periode $T = 2f_c$ der Fourierreihe (2.24) größer als der Träger von $\hat{x}(f)$, den wir als das Intervall $[-\lambda f_c, \lambda f_c]$ mit $\lambda < 1$ annehmen. Wir betrachten nun stetige Funktionen $\phi(f)$ mit den Eigenschaften: $\phi(f)$ hat kompakten Träger auf dem Intervall $[-f_c, f_c]$ und $\phi(f) \equiv 1$ für $-\lambda f_c \leq f \leq \lambda f_c$. Damit folgt aus (2.26):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{i2\pi f t} df = \int_{-f_c}^{f_c} \left(\sum_n c_n e^{-i\frac{\pi}{f_c} n f} \right) \phi(f) e^{i2\pi f t} df \\ &= \sum_n x(n\Delta t) \left(\frac{1}{2f_c} \int_{-f_c}^{f_c} \phi(f) e^{i2\pi f \left(t - \frac{n}{2f_c}\right)} df \right) \\ &= \sum_n x(n\Delta t) \Phi(t - n\Delta t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Aus (2.27) folgt, daß für Zeitreihen, die mit einem Abtastintervall $\Delta t < 1/(2f_c)$ gemessen werden, viele mögliche Funktionenreihen existieren, die *gleichmäßig* gegen $x(t)$ konvergieren, falls $x(t)$ stetig ist. Insbesondere lassen sich Reihen konstruieren, die schneller als (2.26) konvergieren [4].

Da ein zeitlich begrenztes Signal keinen kompakten Träger im Frequenzraum haben kann, ist die vollständige Charakterisierung eines kontinuierlichen Signals nur durch eine unendliche Zeitreihe möglich. Darüber hinaus sind Signale mit beschränktem Frequenzband auch kein typischer Spezialfall. Wichtig in unserem Zusammenhang ist es deshalb, den Informationsverlust zu studieren wenn die Samplingrate Δt zu groß wird. In diesem Fall ist die Periode $T = 2f_c$ der Fourierreihe (2.24) kleiner als der Träger von $\hat{x}(f)$, der hier der Einfachheit halber als das Intervall $[-\lambda f_c, \lambda f_c]$ mit $\lambda > 1$ angenommen werden soll. Damit folgt aus (2.25):

$$\begin{aligned} x\left(\frac{n}{2f_c}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{i\frac{\pi}{f_c} n f} df = \int_{-\lambda f_c}^{\lambda f_c} \hat{x}(f) e^{i\frac{\pi}{f_c} n f} df \\ &= \int_{-f_c}^{f_c} df e^{i\frac{\pi}{f_c} n f} [\hat{x}(f) + \hat{x}(f - 2f_c) + \hat{x}(f + 2f_c) + \hat{x}(f - 4f_c) \\ &\quad + \hat{x}(f + 4f_c) + \cdots + \hat{x}(f - 2k_\lambda f_c) + \hat{x}(f + 2k_\lambda f_c)] \\ &= \int_{-f_c}^{f_c} \hat{x}(f) e^{i\frac{\pi}{f_c} n f} df = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{i\frac{\pi}{f_c} n f} df \\ &= \tilde{x}\left(\frac{n}{2f_c}\right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Bei der Umformung zwischen erster und zweiter Zeile haben wir ausgenutzt, daß $e^{i\pi n f / f_c}$ die Periode $2f_c$ hat. $\hat{x}(f)$ wird in der dritten Zeile durch den Ausdruck in den eckigen Klammern definiert, wobei die natürliche Zahl k_λ durch die Bedingung $2k_\lambda - 1 < \lambda \leq 2k_\lambda + 1$ gegeben ist.

Die Interpretation von (2.28) ist folgende: Wird eine Zeitreihe des Signals $x(t)$ mit dem Abtastintervall Δt gemessen, so erhält man durch die Rekonstruktion nach

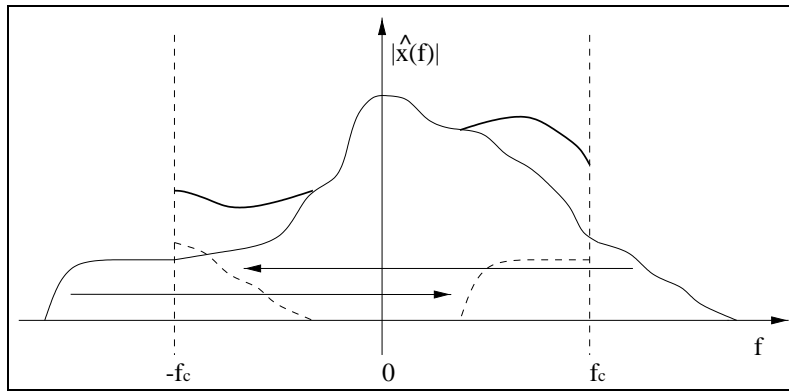


Abbildung 2.4: Illustration des Aliasing-Effekts: $\hat{x}(f)$ wird stückweise in das Intervall $[-f_c, f_c]$ hineingeschoben und addiert. Abgebildet ist der Fall $k_\lambda = 1$, siehe Gl. (2.28).

Gl. (2.26) anstatt $x(t)$ die Funktion $\tilde{x}(t)$, welche natürlich die gleichen Stützstellen besitzt ($\tilde{x}(n\Delta t) = x(n\Delta t)$), im Frequenzraum aber das kompakte Intervall $[-f_c, f_c]$ als Träger hat. $\hat{\tilde{x}}(f)$ entsteht durch die Addition der stückweise in das Intervall $[-f_c, f_c]$ hineingeschobenen Funktion $\hat{x}(f)$, siehe Abb. 2.4. Diesen Informationsverlust von $x(t)$ bezeichnet man als *Aliasing Effekt*⁵. Die Minimierung von Aliasing-Effekten ist ein wichtiger Aspekt bei der Umsetzung von Konzepten der kontinuierlichen Signalverarbeitung in die Zeitreihenanalyse.

2.2.2 Diskrete gefensterter Fouriertransformationen

Wir wollen in diesem Abschnitt den Zusammenhang von kontinuierlichen und diskreten gefensterter Fouriertransformationen insbesondere mit Blick auf die Wahl der Fensterfunktion genauer betrachten. Die diskrete Fouriertransformation einer Zeitreihe $\{x_n; n = 1, \dots, N\}$ ist definiert durch

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N} n} \quad \text{sowie} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \hat{x}_k e^{i2\pi \frac{k}{N} n}. \quad (2.29)$$

Die diskrete Fouriertransformation ist unitär bezüglich des Standardskalarprodukts im \mathbb{C}^N . Aus (2.29) folgt, daß $\{\hat{x}_k\}$ und $\{x_n\}$ periodisch im Frequenz- bzw. Zeitraum mit der Periode N sind. Die Nyquistfrequenz ergibt sich aufgrund des Samplingintervalls $\Delta t = 1$ zu $f_c = 1/2$; somit liegen die diskreten Frequenzen $f_k = k/N$ im Intervall $(-1/2, 1/2]$.

Sei nun $\{x_n; n = 1, \dots, LN\}$ die Zeitreihe eines kontinuierlichen Signalabschnitts sowie $\{g_n = g(n\Delta t); n = 1, \dots, N\}$ eine diskrete Fensterfunktion, wobei $g(t)$ kompakten Träger im Zeitraum hat und $L, N \in \mathbb{N}$ sind. Sei weiter $\{\tilde{g}_n; n = 1, \dots, LN\}$ die Fortsetzung von $\{g_n\}$ mit Null auf das Intervall $[1, LN]$. Beachtet man noch die

⁵nach alias: lat. ein anderer

Konvention, $\{g_n\}$ an der Stelle $N/2$ (statt am Ursprung) zu lokalisieren, so ergibt sich als diskretes Analogon zu (2.10) und (2.19):

$$\begin{aligned} FT_x^g(N/2 + m, j) &= \frac{1}{\sqrt{LN}} \sum_{n=1}^{LN} x_n \bar{g}_{(n-m)} e^{-i2\pi \frac{j}{LN} n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{LN}} \sum_{k=-LN/2+1}^{LN/2} \hat{x}_k \bar{\hat{g}}_{(k-j)} e^{i2\pi \frac{k-j}{LN} m}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

wobei wir bei der Umformung die periodischen Randbedingungen mit der Periode LN ausgenutzt haben.

Für die gegebene Zeitreihe eines endlichen Abschnitts des Signals $x(t)$ soll nun die Fensterfunktion $\{g_n = g(n\Delta t); n = 1, \dots, N\}$ so gewählt werden, daß die diskrete gefensterete Fouriertransformation (2.30) das kontinuierliche Analogon (2.10) möglichst gut approximiert. Wegen der endlichen Länge der Zeitreihe nehmen wir an, daß $g(t)$ kompakten Träger im Zeitraum hat. Da aus diesem Grund $\hat{g}(f)$ und somit auch die Faltung $FT_x^g(t, f) = (\hat{x} * \hat{g})(t, f)$ (Gl. (2.19)) kein beschränktes Frequenzband haben können, ist ein Aliasing Effekt unvermeidbar. Nach Abschnitt 2.2.1 ist dieser Informationsverlust jedoch um so kleiner, je *besser* $\hat{g}(f)$ bei einem gegebenen $\hat{x}(f)$ *lokalisiert* ist. Ein schnelles Abfallverhalten im Frequenzraum stellt sich damit als wichtiges Kriterium für Fensterfunktionen heraus, sowohl für die Minimierung von Aliasing Effekten als auch im Hinblick auf eine möglichst gute Informationsauflösung von $FT_x^g(t, f)$.

Minimale Zeit-Frequenz Unschärfe nehmen zwar genau Gauß-Verteilungen an, jedoch haben sie weder im Zeit- noch im Frequenzraum kompakten Träger und können deshalb nicht durch eine endliche Zeitreihe (im Sinn von Gl. (2.26)) charakterisiert werden. Die Diskretisierung des Produktes $x(t)g(t-\tau)$ mit einer endlichen Abtastrate ergibt dann die Zeitreihe $\{x_n \tilde{g}_{(n-m)}; n = 1, \dots, LN\}$.

Ein zweites Kriterium für Fensterfunktionen ergibt sich aus den periodischen Randbedingungen der diskreten Fouriertransformation. Aus diesem Grund nähert sich die diskrete Fensterfunktion $\{\tilde{g}_n; n = 1, \dots, LN\}$ erst mit wachsendem L , d.h. mit größer werdender Periode von (2.30), der Zeitreihe $\{g(n\Delta t); n \in \mathbb{Z}\}$ im Sinn von Gl. (2.26), d.h. der Fortsetzung von $\{g_n; n = 1, \dots, N\}$ mit Null bis $\pm\infty$, an. Ein Grenzübergang existiert im Rahmen der linearen Algebra natürlich nicht. Mit der Normierung $\Delta t = 1$ in (2.26) nehmen für wachsendes L entsprechend auch die diskreten Frequenzkomponenten $\{\sqrt{LN} \hat{g}_k; k = -LN/2 + 1, \dots, LN/2\}$ zunehmend weitere Punkte auf $\hat{g}(f)$, der *alias-modifizierten* kontinuierlichen Fouriertransformation von $g(t)$, an. Bereits angenommene Werte bleiben wegen $\sqrt{L} \hat{g}_{Lk} = \hat{g}_k$ erhalten. Diese Aussagen folgen aus dem Vergleich von $\{\sqrt{LN} \hat{g}_k\}$, wobei $f_k = k/(LN)$ stetig fortgesetzt wird, mit der Fourierreihe (2.24) von $\hat{g}(f)$:

$$\sqrt{LN} \hat{g}_k = \sum_{n=1}^{LN} \tilde{g}_n e^{-i2\pi \frac{k}{LN} n} \xrightarrow{\frac{k}{LN} = f_k \rightarrow f} \sum_{n=1}^N g_n e^{-i2\pi n f} = \hat{g}(f), \quad (2.31)$$

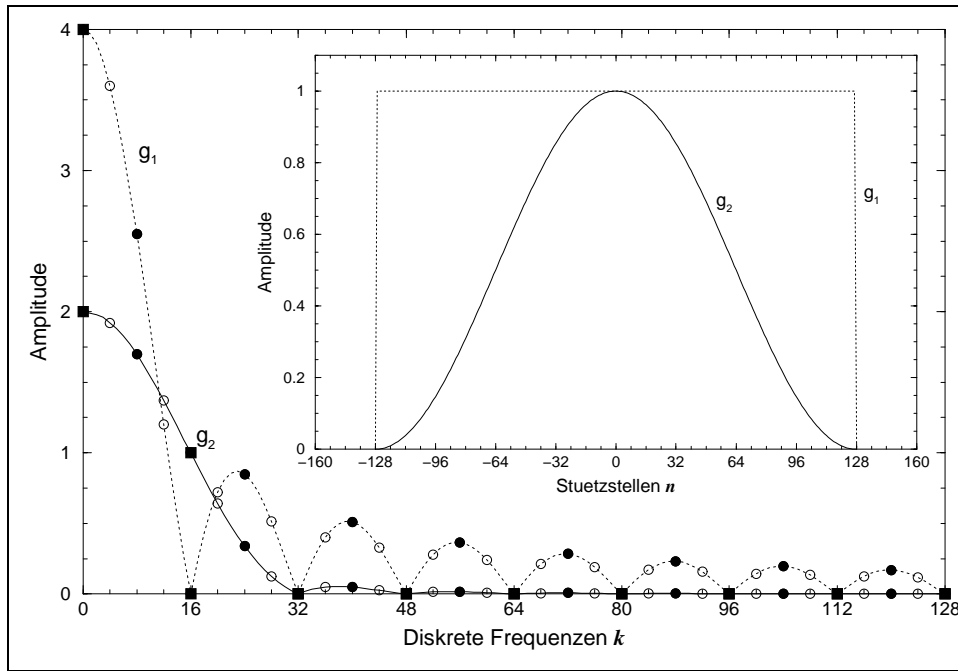


Abbildung 2.5: Die diskreten Fouriertransformationen von Rechteckfenster g_1 und Hann-Fenster g_2 für $N = 256$ und $L = 1$ (nur die Quadrate), $L = 2$ (Quadrate und gefüllte Kreise), $L = 4$ (zusätzlich die leeren Kreise) und $L = 16$ (die gepunktete bzw. durchgezogene Linie).

wobei wir verwenden, daß $\{\tilde{g}_n; n = 1, \dots, LN\}$ nur auf dem Intervall $[1, N]$ nicht verschwindet und $f_c = 1/2$ ist. Die periodischen Randbedingungen von $\{\tilde{g}_n\}$ führen zusammen mit dem Aliasing Effekt genau zur Abweichung von $FT_x^g(N/2 + m, j)$ gegenüber $FT_x^g(t, f)$ sofern das Fenster $g(t)$ vollständig innerhalb des bekannten Signalausschnitts liegt. Andernfalls machen sich auch die periodischen Randbedingungen von $\{x_n; n = 1, \dots, LN\}$ bemerkbar. Da wir keine Annahmen über die Fortsetzung der gegebenen Zeitreihe $\{x_n\}$ machen wollen, soll der Einfluß der periodischen Randbedingungen auf die Transformation (2.30) minimiert werden. Hierfür ist ebenfalls die gute Lokalisierung der Fensterfunktion $g(t)$ im Zeitraum erforderlich.

Wird üblicherweise $L = 1$ in (2.30) gewählt, so ist die Güte der Approximation von $\hat{g}(f)$ durch die diskreten Frequenzkomponenten $\{\sqrt{N} \hat{g}_k; k = -N/2 + 1, \dots, N/2\}$ vom Abfallverhalten von $\hat{g}(f)$ im Frequenzraum abhängig, da die Konvergenzgeschwindigkeit der trigonometrischen Interpolation (2.31) hierdurch bestimmt wird. Es zeigt sich, daß auch dafür ein schnelles Abfallen von $\hat{g}(f)$ gegen Null sinnvoll ist; dies wird in Abb. 2.5 illustriert. Zusammengefasst folgt damit die Bedingung der möglichst guten Lokalisierung der Fensterfunktion $g_{0,0}$ in der Zeit-Frequenz Ebene.

Wir wollen nun diese Kriterien für die Wahl von Fensterfunktionen durch den Vergleich des Rechteckfensters $g_1(t)$ und des Hann-Fensters $g_2(t)$ illustrieren. Hierbei

sind

$$g_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{N}{2} \leq t \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{sowie} \quad (2.32)$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{2\pi t}{N})) & \text{für } -\frac{N}{2} \leq t \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.33)$$

Die kontinuierlichen Fouriertransformationen der Fenster sind

$$\hat{g}_1(f) = \frac{\sin(\pi N f)}{\pi f} \quad \text{und} \quad (2.34)$$

$$\hat{g}_2(f) = \frac{\sin(\pi N f)}{2\pi f(N^2 f^2 - 1)}. \quad (2.35)$$

In Abb. 2.5 sind die diskreten Fouriertransformationen von (2.32) und (2.33) für $N = 256$ und verschiedene Werte von L eingezeichnet. Insbesondere für $L = 1$ unterscheidet sich die diskrete Fouriertransformation des Rechteckfensters grundlegend vom kontinuierlichen Fall (2.34), während das diskrete Hann-Fenster bereits eine gute Approximation von (2.35) ermöglicht. Bei dem Vergleich ist zu beachten, daß die (konventionelle) Normierung von diskreten und kontinuierlichen Fouriertransformationen nicht kompatibel ist. Der Aliasing Effekt ist in Abb. 2.5 nicht zu erkennen; er ist von der Anzahl der Stützstellen N der Fenster abhängig und wirkt sich erst für kleinere Werte von N deutlich sichtbar aus. Bei diskreten Wavelettransformationen wird sich daher der Aliasing Effekt stärker bemerkbar machen.

Zusammenfassend folgt, daß für Fensterfunktionen mit endlicher Breite ein schnelles Abfallverhalten im Frequenzraum sinnvoll ist sowohl für die gute Lokalisierung des Fensters in der Zeit-Frequenz Ebene, d.h. eine hohe Informationsauflösung von $FT_x^g(t, f)$, als auch für die Minimierung von Aliasing Effekten und den Einflüssen der periodischen Randbedingungen bei der Approximation von kontinuierlichen durch diskrete gefensterete Fouriertransformationen. Ein geeignetes Fenster in diesem Sinn, das wir auch in Kap. 3 verwenden werden, ist das Hann-Fenster (2.33), weitere Möglichkeiten werden in [31] diskutiert. Hierzu soll noch bemerkt werden, daß die praktischen Unterschiede der verschiedenen in der Literatur vorgeschlagenen Fensterfunktionen eher gering sind.

2.2.3 Diskrete Wavelettransformationen

Bei dem Versuch, kontinuierliche Wavelettransformationen für die Anwendung in der Zeitreihenanalyse in eine diskrete Theorie umzusetzen, fällt zunächst auf, daß das zentrale Konzept der Skalierung auf diskrete Signale nicht ohne weiteres übertragbar ist, da die Skalierung einer Zeitreihe im allgemeinen mit einem Informationsverlust verbunden ist. Betrachten wir der Einfachheit halber die Skalierung der Zeitreihe

$\{x_n; n = 1, \dots, N\}$ mit dem Faktor 2, so folgt dieser Informationsverlust aus

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_n &= \sqrt{2}x_{2n} = \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \hat{x}_k e^{i2\pi \frac{k}{N} 2n} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{k=-N/4+1}^{N/4} [\hat{x}_k + \hat{x}_{(k+N/2)}] e^{i2\pi \frac{k}{N/2} n} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{k=-N/4+1}^{N/4} \hat{\tilde{x}}_k e^{i2\pi \frac{k}{N/2} n},
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

wobei wir ausnutzen, daß $e^{i2\pi kn/(N/2)}$ die Periode $N/2$ hat und bei der Definition von $\{\hat{\tilde{x}}_k = \hat{x}_k + \hat{x}_{(k+N/2)}; k = -N/4 + 1, \dots, N/4\}$ die periodischen Randbedingungen von $\{\hat{x}_k\}$ verwenden. Die Fouriertransformierte $\{\hat{\tilde{x}}_k\}$ der skalierten Funktion $\{\tilde{x}_n; n = 1, \dots, N/2\}$ wird somit durch eine Überlagerung von $\{\hat{x}_k\}$ analog zu (2.28) bestimmt. Wegen dieses diskreten Aliasing Effekts kann das ursprüngliche Signal im allgemeinen nicht mehr durch eine inverse Transformation zurückgewonnen werden. Dies ist nur für den Spezialfall $\hat{\tilde{x}}_k = \hat{x}_k \forall k$ möglich, bei dem durch die Skalierung kein Informationsverlust entsteht. Aus diesem Grund definieren wir die inverse diskrete Skalierung durch eine trigonometrische Interpolation, indem das Nyquistintervall mit Null fortgesetzt wird.

Die Skalierung eines diskreten Signals hat den gleichen Effekt, als wenn das Abtastintervall Δt beim Messen der Zeitreihe um den Skalierungsfaktor größer gewählt oder das kontinuierliche Signal mit dem gleichen Faktor skaliert worden wäre. Betrachtet man analog zu (2.36) die Skalierung von $\{\hat{x}_k; k = -N/2 + 1, \dots, N/2\}$,

$$\hat{\tilde{x}}_k = \hat{x}_{2k} \iff \tilde{x}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_n + x_{(n+N/2)}), \tag{2.37}$$

so wird klar, daß die Skalierungen einer Zeitreihe im Zeit- und Frequenzraum nicht invers zueinander sind, wie dies für kontinuierliche Signale gilt. Hierdurch muß die Definition einer diskreten Wavelettransformation vom kontinuierlichen Vorbild abweichen.

Da Waveletfilter den Frequenzraum natürlich in Oktaven einteilen (Abb. 2.3), bietet sich die Möglichkeit einer rekursiven Definition der diskreten Wavelettransformation im Frequenzraum an: Im ersten Schritt wird das Signal in einen Hochpaß- und einen Tiefpaß- gefilterten Anteil zerlegt, wobei die Trennfrequenz f_t das Nyquistintervall halbiert, d.h. $f_t = 1/2f_c = 1/4$. Der Filterprozeß wird für das Tiefpaß- gefilterte Signal mit der Trennfrequenz $f_t = 1/4f_c = 1/8$ wiederholt; hierdurch entsteht ein erstes Bandpaß- gefiltertes Signal und wiederum ein Tiefpaßanteil. Im n -ten Schritt der Rekursion liegt die Trennfrequenz von Hoch- und Tiefpaßfilter entsprechend bei $f_t = 2^{-n}f_c = 2^{-(n+1)}$, bis schließlich beim Erreichen von $f_t = 1/N$ die Iteration abbricht. Diese Transformation zerlegt ein diskretes Signal in seine Bandpaß- gefilterten

Anteile, wobei eine Hochpaß- und eine Tiefpaß- gefilterte Komponente übrig bleiben. Aufgrund des Skalierungsfaktors 2 wird ein Signal der Länge N , wobei N eine Potenz von 2 sein muß, in die Matrix $WT_x^h(n, j)$ vom Format $N \times \log_2(N)$ transformiert.

Um die Skalierungseigenschaft dieser Transformation (näherungsweise) zu erhalten, werden die Hoch- und Tiefpaßfilter $\{\widehat{hp}_{k,j}, \widehat{tp}_{k,j}; k = -N/2+1, \dots, N/2\}$, wobei $j = 1, \log_2(N) - 1$ ein Parameter ist, durch diskrete Skalierung im Frequenzraum sukzessiv auseinander erzeugt. Hierbei wird $\{\widehat{tp}_{k,(j+1)}\}$ durch die Fortsetzung von $\{\widehat{tp}_{2k,j}; k = -N/4+1, \dots, N/4\}$ mit Null auf dem Intervall $[-N/2+1, N/2]$ definiert. Nach (2.36) und (2.37) ist damit im Zeitraum $\{tp_{n,(j+1)}; n = 1, \dots, N\}$ die trigonometrische Interpolation von $\{(tp_{n,j} + tp_{(n+N/2),j})/\sqrt{2}; n = 1, \dots, N/2\}$. Entsprechend werden die Hochpaßfilter $\{\widehat{hp}_{k,j}\}$ im Frequenzraum skaliert, jedoch anschließend mit 1 statt mit 0 fortgesetzt. Weiterhin fordern wir, daß (wegen der rekursiven Konstruktion der Filter) der Abfall des zugrundeliegenden Tiefpaßfilters $\{\widehat{tp}_{k,1}\}$ von 1 auf 0 innerhalb einer Oktave erfolgt, so daß die Eigenschaft

$$\widehat{tp}_{k,j}\widehat{tp}_{k,j+1} = \widehat{tp}_{k,j+1} \quad \forall k \in [-N/2+1, N/2] \quad \forall j \in [1, \log_2(N) - 1] \quad (2.38)$$

erfüllt wird. Damit haben die Bandpaßfilter $\{\widehat{h}_{k,j}; k = -N/2+1, \dots, N/2\}$, d.h. die *diskreten Waveletfilter* nach Konstruktion die Form

$$\widehat{h}_{k,j} = \widehat{tp}_{k,j-1}\widehat{hp}_{k,j}; \quad j = 2, \dots, \log_2(N) - 1 \quad (2.39)$$

und gehen durch Skalierung sowie näherungsweise durch inverse Skalierung im Frequenzraum auseinander hervor, da sich diese Eigenschaft von den Tiefpaßfiltern überträgt. Weiterhin definieren wir $\widehat{h}_{k,1} \equiv \widehat{hp}_{k,1}$ und $\widehat{h}_{k,\log_2(N)} \equiv \widehat{tp}_{k,(\log_2(N)-1)} \forall k$ um eine einheitliche Notation zu erhalten.

Die so definierte diskrete Wavelettransformation ist unitär, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\equiv \sum_{n=1}^N x_n \bar{y}_n = \sum_{j=1}^{\log_2(N)} \sum_{n=1}^N WT_x^h(n, j) \overline{WT_y^h(n, j)} \\ &\equiv \langle WT_x^h, WT_y^h \rangle, \end{aligned} \quad (2.40)$$

falls die zugrundeliegenden Filter $\{\widehat{hp}_{k,1}\}$ und $\{\widehat{tp}_{k,1}\}$ die Bedingung

$$|\widehat{hp}_{k,1}|^2 + |\widehat{tp}_{k,1}|^2 = 1 \quad \forall k \in [-N/2+1, N/2] \quad (2.41)$$

erfüllen. Aus (2.41) folgt sofort $|\widehat{hp}_{k,j}|^2 + |\widehat{tp}_{k,j}|^2 = 1 \forall k, j$ und mit der Definition (2.39) der Waveletfilter die Relation

$$\sum_{j=1}^{\log_2(N)} |\widehat{h}_{k,j}|^2 = 1 \quad \forall k \in [-N/2+1, N/2], \quad (2.42)$$

wobei der Hoch- und der Tiefpaßfilter eingeschlossen sind. Damit folgt (2.40) aus

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle = \sum_k \widehat{x}_k \overline{\widehat{y}_k} \\
&= \sum_k \widehat{x}_k \overline{\widehat{y}_k} \sum_j |\widehat{h}_{k,j}|^2 = \sum_j \sum_k (\widehat{h}_{k,j} \widehat{x}_k) \overline{(\widehat{h}_{k,j} \widehat{y}_k)} \\
&= \sum_j \sum_k \widehat{WT}_x^h(k, j) \overline{\widehat{WT}_y^h(k, j)} = \sum_j \sum_n WT_x^h(n, j) \overline{WT_y^h(n, j)} \\
&= \langle WT_x^h, WT_y^h \rangle.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Die Wavelettransformation $\widehat{WT}_x^h(k, j)$ wird durch die Multiplikation der Filter $\{\widehat{h}_{k,j}\}$ mit dem Signal im Frequenzraum definiert; die Fouriertransformation bezieht sich hierbei auf die Variable k . Diese Transformation ist nach Konstruktion auch dann unitär, wenn der rekursive Filterprozeß nicht bis zum Ende durchgeführt, sondern vorher abgebrochen wird. Es ist klar, daß wegen der Bedingung (2.38) auf diese Weise nur Waveletfilter mit beschränktem Frequenzband definiert werden können, ein Beispiel hierfür ist (4.1). Andere (weniger anschauliche) Verfahren erlauben auch die Konstruktion von Wavelets mit kompaktem Träger im Zeitraum, die es ermöglichen, die Filterprozesse durch die Multiplikation der Zeitreihe mit Bandmatrizen im Zeitraum zu beschreiben [4].

Die diskrete Wavelettransformation $WT_x^h(n, j)$ kann durch einen Filterprozeß im Frequenzraum oder alternativ als diskrete Faltung im Zeitraum definiert werden, wobei die Frequenzen $\{f_j; j = 1, \dots, \log_2(N)\}$, an denen die diskreten Filter lokalisiert sind, als Parameterwerte betrachtet werden. Eine Approximation der kontinuierlichen Wavelettransformation $WT_x^h(t, f)$ (2.11) durch $WT_x^h(n, j)$ ist nur teilweise möglich, da wegen der logarithmischen Überdeckung des Frequenzraums durch die Filter $\{\widehat{h}_{k,j}\}$ $WT_x^h(n, j)$ nicht für alle diskreten Frequenzen im Nyquistintervall definiert ist, siehe Abb. 2.6 und 4.2.

Um für die gegebene Zeitreihe $\{x_n; n = 1, \dots, N\}$ eine möglichst gute Approximation von $WT_x^h(t, f)$ an den Stellen $\{f_j\}$ zu erhalten, muß der Einfluß der endlichen Signallänge, d.h. der periodischen Randbedingungen von $\{x_n\}$ auf $WT_x^h(n, j)$, sowie der Aliasing Effekt (2.37), der mit der Skalierung der diskreten Wavelets im Frequenzraum verbunden ist, minimiert werden. Da die kontinuierlichen Waveletfilter $\widehat{h}_{t,f_j}(\nu)$ nach Konstruktion kompakten Träger im Frequenzraum haben, folgt dies auch für das gefilterte Signal $\widehat{x}(\nu) \widehat{h}_{t,f_j}(\nu)$. Somit können die Funktionen $h_{t,f_j}(\tau)$ und die Faltungen $WT_x^h(t, f_j) = (x * h)(t, f_j)$ (Gl. (2.11)) durch (unendliche) Zeitreihen vollständig charakterisiert werden. Jedoch läßt sich die Diskretisierung von $WT_x^h(t, f_j)$ mit einer endlichen Abtastrate im allgemeinen nicht durch die diskrete Faltung der Zeitreihe des Signals $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ mit einer Zeitreihe der Wavelets $\{h_{n,j}; n \in \mathbb{Z}\}$ darstellen. Die diskrete Faltung $\widehat{WT}_x^h(n, j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{(n-m)} h_{m,j}$ stellt hierfür eine Näherung dar, wobei der Informationsverlust (im Sinn des Shannonschen Samplingtheorems) durch

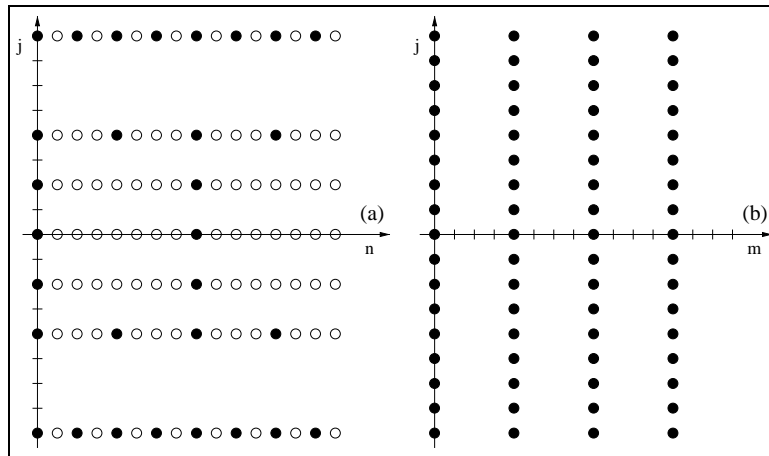


Abbildung 2.6: Die Lokalisierung der Koeffizienten der diskreten Wavelettransformation (a) und der diskreten gefensterten Fouriertransformation (b) eines Signals der Länge $N = 16$ auf dem Zeit-Frequenz Gitter. (Die Randpunkte des Nyquistintervalls sind als miteinander identifiziert zu betrachten.)

den Aliasing Effekt bestimmt wird, der mit der Diskretisierung von $x(t)$ verbunden ist. Nur im Spezialfall von Signalen mit kompaktem Träger im Frequenzraum (und einer hinreichend großen Samplingrate) enthalten beide (unendlichen) Zeitreihen die gleiche Information.

Der Fehler, der durch die Trunkierung der Zeitreihen $\{x_n, h_{n,j}; n \in \mathbb{Z}\}$ entsteht, wird jedoch minimiert, wenn das Mutterwavelet $h(\tau)$ im Zeitraum optimal lokalisiert ist, da hiermit sowohl der diskrete Aliasing Effekt (2.37) als auch der Einfluß der periodischen Randbedingungen von $\{x_n; n = 1, \dots, N\}$ auf $WT_x^h(n, j)$ so klein wie möglich bleiben. Wir wollen, wie erwähnt, keine Annahmen über die Fortsetzung der Zeitreihe $\{x_n\}$ machen. Da die Waveletfilter kompakten Träger in Frequenzraum haben, ergibt sich hieraus die Bedingung, daß das Mutterwavelet h_{0,f_0} in der Zeit-Frequenz Ebene möglichst gut lokalisiert ist.

Da mit der Skalierung der Waveletfilter die Anzahl ihrer Stützstellen im Frequenz- oder Zeitraum abnimmt, macht sich bei Wavelettransformationen der Aliasing Effekt im allgemeinen (deutlich) stärker als bei gefensterten Fouriertransformationen bemerkbar. Er ist das Maß dafür, wie gut sich diskrete Wavelets durch eine inverse Skalierung rekonstruieren lassen. Daneben bestimmt, wie bereits erwähnt, die Lokalisierung von h_{0,f_0} auch die Informationsauflösung von $WT_x^h(t, f)$. Wir wollen an dieser Stelle noch bemerken, daß bei der Konstruktion von diskreten Fourier- und Wavelettransformationen, welche die entsprechenden kontinuierlichen Transformationen approximieren, die Symmetrie zwischen Zeit- und Frequenzraum nur eingeschränkt verwendet werden kann, da die Zeitreihe des kontinuierlichen Signals nur im Zeitraum (und nicht im Frequenzraum) vorliegt.

Die soweit eingeführte diskrete Wavelettransformation bildet ein Signal der Länge N auf eine Matrix ab, die offensichtlich redundant ist. Inwiefern ist eine unitäre Transformation in einen Vektor gleicher Dimension möglich? Betrachten wir den (ungünstigen) Spezialfall rechteckiger Filter im Frequenzraum, so folgt aus Abschnitt 2.2.1, daß aufgrund der Halbierung des Nyquistintervalls bei jedem Rekursionsschritt auch die Samplingrate des Hochpaß- und des Tiefpaß- gefilterten Signals jeweils um den Faktor 2 reduziert werden kann ohne den Informationsgehalt zu ändern. Ist somit jeder Filterschritt mit dem Halbieren der Länge beider Teilsignale verbunden, so endet die Transformation mit einem Vektor gleicher Dimension wie das Ausgangssignal.

Daß solche nicht redundanten Wavelettransformationen für eine große Klasse von Filtern, insbesondere auch für Filter mit kompaktem Träger im Zeitraum, existieren, wird in der Multifrequenz-Analyse (*multiresolution analysis*) gezeigt, siehe [4]. Tatsächlich wird in der Literatur unter dem Begriff der „diskreten Wavelettransformation“ auch meistens die Multifrequenz-Analyse verstanden. Der Ausgangspunkt hierfür ist jedoch etwas anders als unserer und nicht durch Zeit-Frequenz Darstellungen motiviert. Wir wollen deshalb nicht näher hierauf eingehen, allerdings noch eine wichtige Konsequenz der schrittweisen Verkleinerung der Samplingrate zeigen.

Hierzu betrachten wir in Abb. 2.6 die Lokalisierung der Koeffizienten einer diskreten Wavelettransformation und zum Vergleich einer diskreten gefensterten Fouriertransformation auf einem Zeit-Frequenz Gitter (dem diskreten Analogon der Zeit-Frequenz Ebene). Während die oben definierten Wavelettransformationen ein Signal der Länge $N = 16$ durch die Vereinigung der schwarz und weiß symbolisierten Koeffizienten darstellen, sind es bei einer schrittweisen Verkleinerung der Samplingrate nur die schwarzen. In diesem Fall geht offenbar die Translationsinvarianz im Zeitraum verloren. Diese wichtige Eigenschaft werden wir jedoch in Kap. 4 benötigen; sie wird im ersten Fall nach Konstruktion erhalten.

Die Skalierungsinvarianz kann für diskrete Wavelettransformationen natürlich nur näherungsweise gegeben sein. Die Skalierung des Signals $\{x_n; n = 1, \dots, N\}$ wird hierbei analog zur Skalierung der Waveletfilter definiert, d.h. die im Zeit- oder Frequenzraum skalierte Zeitreihe wird mit Null bis zur ursprünglichen Periode N fortgesetzt.

Betrachten wir zum Vergleich noch einmal die diskrete gefensterte Fouriertransformation. Gl. (2.30) ist bis auf einen Phasenfaktor invariant gegenüber Translationen im Zeitraum, die ein Vielfaches des Abstands Δm benachbarter Fensterfunktionen betragen (in Abb. 2.6 ist $\Delta m = 4$). Das Verhältnis von Δm zur Breite N des Fensters bestimmt gerade die Redundanz von $FT_x^g(N/2 + m, j)$. Für $\Delta m = 1$ wird die Invertierung von (2.30) durch den zu Gl. (2.15) analogen Ausdruck gegeben. Die Translationsinvarianz im Frequenzraum wird natürlich durch die Breite des Nyquistintervalls beschränkt.

2.3 Statistische Merkmalsklassifikation

Wir wollen in diesem Abschnitt einen Schritt weiter gehen. Angenommen wir haben im Hinblick auf eine gegebene Fragestellung geeignete Merkmalsvektoren aus einem Datensatz berechnet. Inwiefern erlauben diese Merkmale eine statistisch signifikante Klassifikation der Daten? Sind die Datensätze vorklassifiziert, so kann die Trennungsleistung der extrahierten Merkmale durch den Vergleich der bekannten Voreinteilung mit der statistischen Klassifikation der Merkmalsvektoren überprüft werden. Der häufig recht kleine Umfang experimenteller Meßreihen erfordert allerdings leistungsfähige statistische Methoden um eine signifikante Aussage zu ermöglichen. Zusätzlich kann bei experimentellen Daten die Schwierigkeit auftreten, daß die Vorklassifikation nicht zuverlässig ist; dieses Problem wird uns in Kap. 4 begegnen. Eine Einführung in statistische Klassifikation und Mustererkennung findet sich z.B. in [10].

Zwei grundsätzliche Klassifikationsansätze sind möglich. Beim ersten wird der gesamte Datensatz mittels eines (Clusterbildungs-) Algorithmus in eine vorgegebene oder offene Anzahl von Klassen eingeteilt. Diese Methode wird als unüberwachtes Lernen (*unsupervised learning*) bezeichnet, da keine Informationen über die zu erwartende Einteilung der Daten und eventuell die Anzahl der Klassen in den Algorithmus eingehen. Aus dem Abweichen der erhaltenen Einteilung von der Vorklassifikation kann auf die Trennungsleistung der getesteten Merkmale geschlossen werden.

Beim zweiten Verfahren werden die Daten in eine disjunkte Trainings- und Testmenge eingeteilt. Der Trainingssatz wird zur Entwicklung eines Klassifikators verwendet, der anschließend die Testdaten klassifiziert. Die Trainingsmenge kann hierbei Beispiele aus allen oder nur aus einem Teil der Datenklassen enthalten, die durch die Voreinteilung bekannt sind; eine entsprechende Anzahl von Klassen „kennt“ der Klassifikator, nachdem er trainiert ist. Da Informationen über die zu erwartende Einteilung der Datensätze zum Trainieren des Klassifikators verwendet werden, spricht man entsprechend von überwachtem Lernen (*supervised learning*). Diese Methode hat den Vorteil, eine praktische Anwendung zu erlauben, da nur der Trainingsdatensatz komplett bekannt sein muß, die Testdaten aber in der Reihenfolge, in der sie erzeugt werden, „on-line“ klassifiziert werden können. Im Hinblick darauf haben wir in Kap. 3 und 4 solche Verfahren gewählt. Es ist natürlich zu erwarten, daß aufgrund der Informationen, die in die Entwicklung des Klassifikators einfließen, diese Methode ein besseres Ergebnis im Sinn der Fragestellung erzielt als ein unüberwachter Lernprozeß.

Wir werden uns hier auf den Spezialfall des Zwei-Klassen Klassifikationsproblems beschränken, da in den späteren Anwendungen nur die Unterscheidung von Zeitreihen zwischen „gut“ und „fehlerhaft“ von Interesse sein wird.

2.3.1 Der Bayesche Klassifikator des kleinsten Fehlers

Betrachten wir die aus einem Datensatz berechneten Merkmalsvektoren als Realisierungen x einer (zeitunabhängigen) Zufallsvariablen X (oder genauer eines Zufallsvek-

tors) mit den möglichen Ereignissen $\{\omega \in \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega\}$. Nach Voraussetzung lassen sich die Merkmalsvektoren in die Klassen Ω_1 und Ω_2 einteilen. Siehe etwa [20] für eine Einführung in die Begriffe der Statistik. Die Zuordnung der Elementarereignisse $x \in \Omega$ zu einer der beiden Klassen erfolgt nach dem Kriterium

$$P(\Omega_1|x) \underset{\Omega_1}{\overset{\Omega_2}{\gtrless}} P(\Omega_2|x), \quad (2.44)$$

d.h. x wird Ω_1 zugeordnet, wenn die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen von Ω_1 unter der Voraussetzung, daß x eingetreten ist, größer als diejenige von Ω_2 ist und umgekehrt. Mit dem Bayeschen Satz

$$\rho(x \cap \Omega_i) = P(\Omega_i|x)\rho_X(x) = \rho(x|\Omega_i)P(\Omega_i); \quad i = 1, 2$$

läßt sich das Klassifikationskriterium (2.44) umschreiben in

$$\rho(x|\Omega_1)P(\Omega_1) \underset{\Omega_1}{\overset{\Omega_2}{\gtrless}} \rho(x|\Omega_2)P(\Omega_2), \quad (2.45)$$

wobei $\rho(x|\Omega_i)$ die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte für das Eintreten von x unter der Voraussetzung des Vorliegens von Ω_i ist; $\rho_X(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X und $P(\Omega_i)$ die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen von Ω_i bezeichnet.

Da die Klassifikationsregel (2.44) im allgemeinen keine perfekte Trennung der Klassen Ω_1 und Ω_2 ermöglicht ($\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$), erhält man die bedingte Wahrscheinlichkeit für eine Fehlklassifikation von

$$R(x) = \min[P(\Omega_1|x), P(\Omega_2|x)].$$

Der kleinstmögliche gesamte Klassifikationsfehler ϵ , auch der *Bayesche Fehler* genannt, ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \epsilon &= \langle R(x) \rangle = \int_{\Omega} R(x)\rho_X(x)dx \\ &= \int_{\Omega} \min[P(\Omega_1|x)\rho_X(x), P(\Omega_2|x)\rho_X(x)]dx \\ &= \int_{\Omega} \min[\rho(x|\Omega_1)P(\Omega_1), \rho(x|\Omega_2)P(\Omega_2)]dx \\ &= P(\Omega_1) \int_{L_2} \rho(x|\Omega_1)dx + P(\Omega_2) \int_{L_1} \rho(x|\Omega_2)dx. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Der Integrationsbereich L_2 (L_1) des Fehlerintegrals in der letzten Zeile überdeckt den Bereich von Ω , in dem x nach Gl. (2.45) der Klasse Ω_2 (Ω_1) zugeordnet wird; es ist somit $\Omega = L_1 \cup L_2$ und $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Daß das Kriterium (2.44) den Klassifikationsfehler minimiert, läßt sich anhand von Abb. 2.7 leicht verstehen. Jede Verschiebung der Trennungsgrenze würde die Wahrscheinlichkeit für Fehlklassifikationen erhöhen.

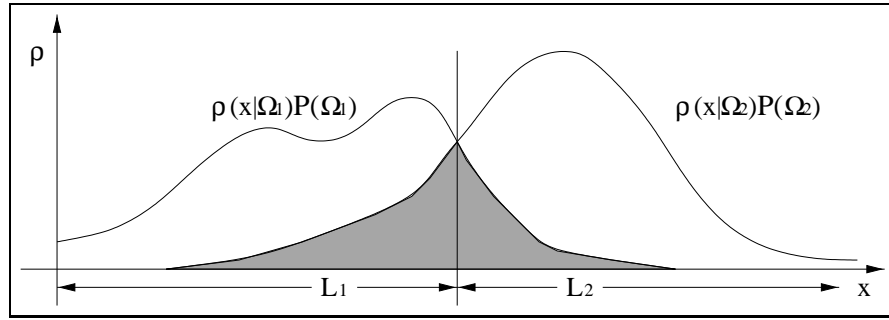


Abbildung 2.7: Das Klassifikationskriterium (2.44) oder (2.45) minimiert den Bayesischen Fehler ϵ (das schattierte Gebiet).

Ist die Fehlzuordnung (und eventuell auch die korrekte Klassifikation) von Elementen aus Ω_1 und Ω_2 mit unterschiedlichen Kosten (bzw. Gewinnen) verbunden, so kann analog zu (2.44) das Klassifikationskriterium zur Minimierung einer Kostenfunktion bestimmt werden, siehe [10].

Das einfachste Beispiel für eine Lösung von (2.44) erhält man unter der Annahme, daß $\rho(x|\Omega_1)$ und $\rho(x|\Omega_2)$ Gaußverteilungen sind, d.h.

$$\rho(x|\Omega_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(A_i)|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)^T (A_i^{-1})(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)}; \quad i = 1, 2,$$

wobei $\mathbf{m}_i = \langle \mathbf{X}_i \rangle$ der Erwartungsvektor und $A_i = \langle (\mathbf{X}_i - \mathbf{m}_i)(\mathbf{X}_i - \mathbf{m}_i)^T \rangle$ die Kovarianzmatrix der gaußverteilten Zufallsvektoren \mathbf{X}_1 bzw. \mathbf{X}_2 ist. Gl. (2.45) läßt sich in der Form

$$\ln(\rho(x|\Omega_1)) - \ln(\rho(x|\Omega_2)) \underset{\Omega_1}{\overset{\Omega_2}{\lesseqgtr}} \ln\left(\frac{P(\Omega_2)}{P(\Omega_1)}\right)$$

schreiben, woraus durch Einsetzen von $\{\rho(x|\Omega_i); i = 1, 2\}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_2)^T (A_2^{-1})(\mathbf{x} - \mathbf{m}_2) - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_1)^T (A_1^{-1})(\mathbf{x} - \mathbf{m}_1) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|\det(A_2)|}{|\det(A_1)|}\right) \\ & \underset{\Omega_1}{\overset{\Omega_2}{\lesseqgtr}} \ln\left(\frac{P(\Omega_2)}{P(\Omega_1)}\right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

entsteht. Gl. (2.47) ist eine quadratische Form in \mathbf{x} , wobei die unbekannt Parameter aus den Stichproben der Verteilungen geschätzt werden können, falls diese getrennt vorliegen. $P(\Omega_2)/P(\Omega_1)$ ist durch das Verhältnis der Stichprobengrößen gegeben. Abb. 2.8 zeigt eine Skizze der Klassifikationsgrenze im zweidimensionalen Fall. Für den illustrierten Spezialfall, daß die Eigenvektoren von A_1 und A_2 zusammenfallen, ergibt die Klassifikationskurve abhängig von den Eigenwerten (a_1^1, a_2^1) bzw. (a_2^2, a_1^2) von A_1 und A_2 eine Hyperbel ($((a_1^1 - a_1^2)/(a_2^1 - a_2^2)) < 0$), eine Ellipse ($((a_1^1 - a_1^2)/(a_2^1 - a_2^2)) > 0$), eine Parabel ($a_1^1 = a_1^2$ oder $a_2^1 = a_2^2$) oder eine Gerade ($a_1^1 = a_1^2$ und $a_2^1 = a_2^2$).

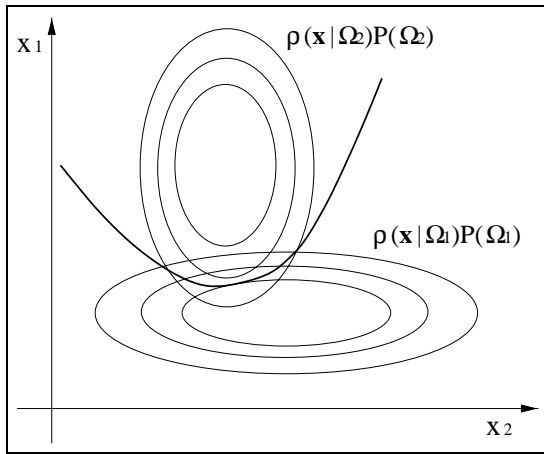


Abbildung 2.8: Die Klassifikationsgrenze (2.47) von zwei Gauß-Verteilungen nach dem Kriterium (2.45). Für den illustrierten Spezialfall ist die Klassifikationskurve eine Hyperbel.

2.3.2 Schätzen des Bayeschen Fehlers

Betrachten wir nun das allgemeine Problem, Bayesche Fehler zu schätzen. Hierzu muß der Bayesche Klassifikator, der nach Konstruktion den gesamten Klassifikationsfehler ϵ minimiert, aus dem Trainingsdatensatz geschätzt werden, um damit ϵ anhand der Testdaten schätzen zu können. Aufgrund ihrer Abhängigkeit von den Schätzern für die Klassifikatoren sind die Schätzer für den Bayeschen Fehler im allgemeinen verzerrt. Es ist jedoch (bei einer hinreichenden Stichprobengröße) möglich, eine untere und obere Schranke für den Bayeschen Fehler anzugeben.

Ein Schätzer $\hat{\epsilon}$ für den Bayeschen Fehler ϵ ist eine Funktion der unabhängigen und für gleichen Index identischen Zufallsvariablen $\mathbf{X}_T = \{X_1^1, \dots, X_1^{M_1}, X_2^1, \dots, X_2^{M_2}\}$, deren Ereignisse die Testmenge $\Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}$ bilden, wobei $\{\Omega_{T_i} \subseteq \Omega_i; i = 1, 2\}$ ist, sowie eines Schätzers \hat{F}_K für den Bayeschen Klassifikator $F_K(x)$; d.h.

$$\hat{\epsilon} = F_{\hat{\epsilon}}(\mathbf{X}_T; \hat{F}_K). \quad (2.48)$$

\hat{F}_K hängt *implizit* von den Zufallsvariablen $\mathbf{Y}_D = \{Y_1^1, \dots, Y_1^{K_1}, Y_2^1, \dots, Y_2^{K_2}\}$ ab, deren Ereignisse die Trainingsmenge $\Omega_{D_1} \cup \Omega_{D_2}$ bilden, wobei ebenfalls $\{\Omega_{D_i} \subseteq \Omega_i\}$ gilt. Unter der (einfachen) Realisierung der Zufallsvariablen $\hat{\epsilon}$ versteht man die mit Hilfe des *geschätzten* Klassifikators ermittelte Statistik der Fehlzuordnungen von Merkmalsvektoren aus der Testmenge. Diese Fehlerstatistik ist bezüglich \mathbf{X}_T , d.h. unter der Voraussetzung eines bekannten Klassifikators $F_K(x)$, erwartungstreu und konsistent. D.h., es gilt

$$\langle \hat{\epsilon} \rangle = \langle F_{\hat{\epsilon}}(\mathbf{X}_T; F_K(x)) \rangle_{\mathbf{X}_T} = \epsilon,$$

wobei der Erwartungswert bezüglich den Wahrscheinlichkeitsdichten von \mathbf{X}_T (d.h. der Testmenge) $\{\rho(x|\Omega_{T_i})P(\Omega_{T_i}); i = 1, 2\}$ gebildet wird. Darüberhinaus konvergiert die Varianz von $\hat{\epsilon}$ als Funktion der Stichprobengrößen der Testmenge, M_1 und M_2 , gegen Null. Hierdurch fällt der Schätzfehler von ϵ mit wachsender Größe der Stichproben gegen Null hin ab.

Es folgt, daß der zweifache Erwartungswert von $\hat{\epsilon}$ bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichten von \mathbf{X}_T und \mathbf{Y}_D ,

$$\langle\langle \hat{\epsilon} \rangle\rangle = \langle\langle F_\epsilon(\mathbf{X}_T; \hat{F}_K) \rangle_{\mathbf{Y}_D} \rangle_{\mathbf{X}_T},$$

den Bayeschen Fehler (2.46) ergibt, falls \hat{F}_K erwartungstreu ist, d.h. der Erwartungswert $\langle \hat{F}_K \rangle = \langle F_K(x; \hat{g}(\mathbf{Y}_D)) \rangle_{\mathbf{Y}_D}$ die Wahrscheinlichkeit für Fehlklassifikationen minimiert, und wenn die Wahrscheinlichkeitsdichten von \mathbf{Y}_D und \mathbf{X}_T übereinstimmen. Eine Verzerrung des Schätzers \hat{F}_K setzt sich hingegen auf $\hat{\epsilon}$ (2.48) fort.

Betrachten wir zunächst parametrische Schätzer für Bayesche Klassifikatoren, welche die Form $\hat{F}_K = F_K(x; \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_L)$ haben, wobei $\{\hat{\lambda}_i; i = 1, \dots, L\}$ Schätzer für die Parameter sind, durch die der Klassifikator

$$F_K(x; \lambda_1, \dots, \lambda_L) \stackrel{\Omega_2}{\underset{\Omega_1}{\approx}} \frac{P(\Omega_{D_2})}{P(\Omega_{D_1})}; \quad x \in \Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}$$

eindeutig bestimmt ist. Die Schätzer $\{\hat{\lambda}_i\}$ sind Funktionen der Zufallsvektoren \mathbf{Y}_D und wir wollen annehmen, daß sie konsistent sind. Eine Tailorentwicklung von \hat{F}_K bezüglich $\boldsymbol{\lambda}$ führt auf

$$\begin{aligned} \hat{F}_K &= F_K(x; \langle \hat{\lambda}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{\lambda}_L \rangle) + \sum_{i=1}^L \frac{\partial F_K(x; \langle \hat{\boldsymbol{\lambda}} \rangle)}{\partial \lambda_i} (\hat{\lambda}_i - \langle \hat{\lambda}_i \rangle) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \frac{\partial^2 F_K(x; \langle \hat{\boldsymbol{\lambda}} \rangle)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} (\hat{\lambda}_i - \langle \hat{\lambda}_i \rangle) (\hat{\lambda}_j - \langle \hat{\lambda}_j \rangle) + \dots \end{aligned}$$

Damit erhält man den Erwartungswert und die Varianz von \hat{F}_K in führender Ordnung von $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_K \rangle &= F_K(x; \langle \hat{\lambda}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{\lambda}_L \rangle) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \frac{\partial^2 F_K(x; \langle \hat{\boldsymbol{\lambda}} \rangle)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \text{Cov}(\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j) + \dots, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\text{Var}(\hat{F}_K) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \frac{\partial F_K(x; \langle \hat{\boldsymbol{\lambda}} \rangle)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial F_K(x; \langle \hat{\boldsymbol{\lambda}} \rangle)}{\partial \lambda_j} \text{Cov}(\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j) + \dots \quad (2.50)$$

Aus (2.49) folgt, daß Schätzer für nichtlineare Klassifikatoren auch dann verzerrt sind, wenn die Schätzer $\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_L\}$ erwartungstreu sind. Jedoch folgt aus der Konsistenz von $\{\hat{\lambda}_i; i = 1, \dots, L\}$, daß die Verzerrung von \hat{F}_K als Funktion der Stichprobengrößen der Trainingsmengen K_1, K_2 gegen Null konvergiert, sofern auch mögliche Verzerrungen der Schätzer $\{\hat{\lambda}_i\}$ verschwinden. Damit folgt weiterhin aus (2.50) die Konsistenz von \hat{F}_K . Aufgrund der Abhängigkeit der Schätzer $\hat{\epsilon}$ von \hat{F}_K (2.48) bestimmen die Varianz und Verzerrung von \hat{F}_K die Verzerrung von $\hat{\epsilon}$. Diese Größe ist neben der Varianz von $\hat{\epsilon}$ das Maß für den Schätzfehler von ϵ , d.h. für die Abweichung der einfachen Realisierung von $\hat{\epsilon}$ vom Bayeschen Fehler (2.46).

Gehen in \hat{F}_K keine Annahmen über die Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichten $\{\rho(x|\Omega_i)P(\Omega_i); i = 1, 2\}$ ein, so spricht man von einem nichtparametrischen Schätzer. Die Klassifikation der Testdaten erfolgt in diesem Fall durch das Schätzen der Dichten $\rho(y|\Omega_{D_1})$ und $\rho(y|\Omega_{D_2})$ der Trainingsmenge an den Stellen der Testvektoren x . Der Bayesche Klassifikator hat nach (2.45) die allgemeine Form

$$F_K(x) = \frac{\rho(x|\Omega_{D_1})}{\rho(x|\Omega_{D_2})} \frac{\sum_{\Omega_2} P(\Omega_{D_2})}{\sum_{\Omega_1} P(\Omega_{D_1})}; \quad x \in \Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}, \quad (2.51)$$

wobei $\{\rho(x|\Omega_{D_i}); i = 1, 2\}$ die Wahrscheinlichkeitsdichten $\{\rho(y|\Omega_{D_i}); i = 1, 2\}$ an den Stellen der Testvektoren x bezeichnen. $\rho(x|\Omega_{D_i})$ kann durch ein Suchverfahren nach nächsten Nachbarn von x in der Trainingsstichprobe geschätzt werden. Die Schätzer $\{\hat{\rho}(x|\Omega_{D_i})\}$ haben damit prinzipiell die Form

$$\hat{\rho}(x|\Omega_{D_i}) = \frac{\hat{k}(x; \mathbf{Y}_{D_i})}{N_i \nu_i} \quad \text{oder} \quad \hat{\rho}(x|\Omega_{D_i}) = \frac{k_i}{N_i \hat{\nu}(x; \mathbf{Y}_{D_i})}; \quad i = 1, 2,$$

wobei k die Anzahl der Nachbarn und ν die Umgebungsgröße des Testvektors sowie N_i den Umfang der Stichprobe aus Ω_{D_i} bezeichnet. Im linken Ausdruck wird bei der Suche die Umgebungsgröße, beim rechten hingegen die Anzahl der Nachbarn festgehalten. Die jeweils zu schätzende Größe kann dann als von \mathbf{Y}_D abhängige Zufallsvariable betrachtet werden. Verschiedene Schätzer für lokale Dichten und die daraus nach (2.51) konstruierten Schätzer für Bayesche Klassifikatoren werden in [10] diskutiert. Erwartungsgemäß ist die Verzerrung und Varianz nichtparametrischer Schätzer im allgemeinen (deutlich) größer als diejenige parametrischer, jedoch sind Annahmen über die Funktionen $\{\rho(x|\Omega_i)P(\Omega_i)\}$ häufig nicht möglich. Die oben diskutierten Folgerungen für den Schätzer $\hat{\epsilon}$ sind aber qualitativ die gleichen.

2.3.3 Schranken des Bayeschen Fehlers: Die L- und die R- Statistik

In den meisten Fällen ist es nicht möglich, erwartungstreue Schätzer für den Bayeschen Fehler zu konstruieren. Jedoch kann bei einer hinreichenden Stichprobengröße eine untere und obere Schranke für ϵ angegeben werden, da es von der Wahl der Trainings- und Testmengen abhängt, ob die Realisierung von $\hat{\epsilon}$ zu einem größeren oder kleineren Klassifikationsfehler hin abweicht.

Zunächst ist klar, daß für eine Minimierung des Schätzfehlers sowohl die Test- wie auch die Trainingsmenge möglichst groß gewählt werden sollte. Simultan ermöglicht wird dies durch die *Leave-one-out* oder L- Statistik: Alle bis auf eine der N (unabhängigen) Stichproben aus $\Omega_1 \cup \Omega_2$ werden zum Trainieren eines Klassifikators verwendet, mit welchem dann der ausgelassene Merkmalsvektor Ω_1 oder Ω_2 zugeordnet wird. Dieses Verfahren wird wiederholt, bis alle vorliegenden Daten klassifiziert sind. Damit enthält die Testmenge am Ende alle N Stichproben und die Trainingsmengen jeweils $N - 1$. Die Unabhängigkeit von Trainings- und Testmenge bleibt dennoch erhalten, da diese Eigenschaft für jeden einzelnen Test gilt und alle Testdurchläufe

unabhängig voneinander sind. Weiterhin entfällt die Schwierigkeit, eine Einteilung der Daten in eine Trainings- und Testmenge vornehmen zu müssen, was bei experimentellen Daten nicht unabhängig vom Ergebnis möglich sein muß.

Der Nachteil der L- Statistik ist, daß der Klassifikator auf allen N Trainingsmengen getrennt geschätzt werden muß. Wird statt dessen der Klassifikator nur einmal auf der gesamten Stichprobe geschätzt, so ist für parametrische Schätzer nur eine relativ kleine Abweichung zu erwarten, da lediglich ein Merkmalsvektor zu jeder Trainingsmenge des L- Schätzers hinzugenommen wird. Im Fall nichtparametrischer Schätzer können natürlich auch (unkontrollierbar) große Änderungen auftreten. Da Trainings- und Testmenge in diesem Fall nicht mehr unabhängig sind, spricht man von einer *Resubstitution* oder R- Statistik. Für einige einfache parametrische und nichtparametrische Klassifikatoren, wie z.B. (2.47), kann der L- Schätzer für den Bayeschen Fehler aus dem R- Schätzer berechnet werden; hierdurch reicht das einmalige Schätzen des Klassifikators für die Erstellung *beider* Statistiken aus, siehe [10].

Die Varianz und die Verzerrung von \hat{F}_K sind das Maß für die Überanpassung des geschätzten Klassifikators an die gegebene Stichprobe aus $\Omega_{D_1} \cup \Omega_{D_2}$. Die einfache Realisierung von \hat{F}_K kann daher den Klassifikationsfehler der Testmenge $\Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}$ nicht ideal minimieren. Sind Trainings- und Testmenge unabhängig, so ergibt die Realisierung von $\hat{\epsilon}$ einen (im allgemeinen) zu großen Schätzwert des Bayeschen Fehlers. Umgekehrt erfolgt im Fall der Abhängigkeit von Trainings- und Testmenge die Überanpassung des geschätzten Klassifikators an die Teststichprobe, wodurch die Realisierung von $\hat{\epsilon}$ einen (im allgemeinen) zu kleinen Schätzwert für ϵ liefert. Nach Konstruktion ist der aus der L- Statistik erhaltene Schätzwert des Bayeschen Fehlers immer größer als der mit Hilfe der R- Statistik berechnete, jedoch müssen beide Schätzwerte nicht notwendig eine obere bzw. untere Schranke von ϵ bilden.

Die Schätzwerte der L- und R- Statistik bilden eine (rigorose) obere bzw. untere Schranke für den Bayeschen Fehler, falls die Varianz von $\hat{\epsilon}$ (bezüglich \mathbf{X}_T) hinreichend klein ist, so daß die Überanpassung des geschätzten Klassifikators an die Trainingsstichprobe nicht durch Fluktuationen in der Statistik der Fehlzuordnungen überkompensiert werden kann. Da die Schätzer $\hat{\epsilon}$ konsistent sind, ist diese Eigenschaft bei einer hinreichenden Stichprobengröße gegeben. Da weiterhin die Trainings- und Testmengen maximal gewählt sind, bilden die nach der L- und R- Methode erhaltenen Schätzwerte auch Schranken von ϵ mit kleinstmöglichem Fehler.

Wie stark die Ergebnisse der L- und R- Statistik tatsächlich vom Bayeschen Fehler abweichen, ist neben dem Umfang des Datensatzes wesentlich von \hat{F}_K abhängig; jedoch lassen, wie bereits erwähnt, parametrische Schätzer allgemein eher kleine Abweichungen erwarten, während bei nichtparametrischen Vorsicht geboten ist. In Kap. 4 (und in modifizierter Form auch in Kap. 3) werden wir Schätzer konstruieren, in denen ein Suchverfahren nach nächsten Nachbarn parametrisch optimiert wird. Während wir aus praktischen Gründen die Parameter nur einmal auf dem gesamten Datensatz durch die gezielte Minimierung des gesamten Klassifikationsfehlers schätzen, er-

folgen die Nachbarschaftssuchen nach dem L- Verfahren mit jeweils unabhängigen Trainings- und Testmengen. Diese Mischform aus L- und R- Statistik bildet natürlich keine rigorose Schranke für ϵ mehr, jedoch ist es für die statistische Klassifikation der aus experimentellen Zeitreihen berechneten Merkmalsvektoren unsere Absicht, mit vertretbarem Aufwand einen möglichst guten Schätzwert des Bayeschen Fehlers zu erhalten.

Kapitel 3

Fehlerfrüherkennung bei Induktionsmotoren

In diesem Kapitel wollen wir einen neuen Lösungsansatz für das Problem vorstellen, den verschleiß- oder fehlerbedingten Ausfall von Induktionsmotoren (Asynchron-Drehstrommotoren) rechtzeitig vorherzusagen. Dieses Problem ist wegen des vielfältigen und weit verbreiteten Einsatzes von Induktionsmotoren in der Industrie von Interesse. Wesentlicher Teil der Problemstellung ist, daß die benötigte Überwachungsdiagnostik einfach, d.h. billig sein soll; die üblichen Verfahren der Maschinenüberwachung durch mehrere Sensoren, welche alle relevanten Größen, wie Temperatur, Vibration, etc. getrennt kontrollieren, somit nicht in Frage kommen.

Eine einfach zugängliche Meßgröße bei Induktionsmotoren ist eine Phase des Statorstromes, die an der Stromzuführung abgenommen werden kann. Der Ausgangspunkt unserer Untersuchungen war damit die Frage, inwiefern der Stromfluß durch den Stator die notwendigen Informationen für die (statistisch signifikante) Unterscheidung von guten und fehlerhaften Betriebszuständen des Motors enthält und wie sie extrahiert werden können. Die grundlegende Idee dieser Arbeit und das darüber hinausgehende Ziel ist es, allgemein die aufwendige Diagnostik technischer Anlagen mittels einer Reihe spezifischer Meßinstrumente hin zu einer Überwachung durch einfache Sensoren und einer dafür komplexen Signalverarbeitung zu verlagern, welche aber auf den heutigen Rechnern relativ billig durchgeführt werden kann.

Zur Lösung des hier untersuchten Problems führen wir die Methode der *geometrischen Signaltrennung* im Merkmalsraum ein. Skalare Zeitreihen des Statorstromes von Induktionsmotoren wurden uns von SCR (Siemens Corporate Research, Princeton, USA) zur Verfügung gestellt.

Der folgende Abschnitt gibt eine Einführung in das Problem der Fehlererkennung bei Induktionsmotoren durch Analyse des Statorstromes. In Abschnitt 3.2 stellen wir unser Konzept der geometrischen Signaltrennung vor und wenden es in Abschnitt 3.3 auf Daten an, die von vier 4-Pol Induktionsmotoren erzeugt wurden.

3.1 Fehlererkennung durch Analyse des Statorstromes

Den unerwarteten verschleiß- oder fehlerbedingten Ausfall technischer Anlagen zu vermeiden ist ein altbekanntes Anliegen in der Industrie. Das Versagen eines Elektromotors in einer Fertigungsstraße oder Paketsortieranlage z.B. kann leicht Kosten verursachen, welche die des Motors bei weitem übersteigen. Daher ist die Überwachung und Diagnose technischer Anlagen seit langem ein wichtiger Bereich der elektrotechnischen Forschung. Bei der Vielzahl möglicher Fehlerquellen und der relativen Zuverlässigkeit der Systemkomponenten muß der Überwachungsaufwand für jede einzelne Maschine jedoch gering gehalten werden. So lohnt sich eine aufwendige Sensorik nur für sehr große Induktionsmotoren, während für die weit verbreiteten Motoren mittlerer Leistung ($\approx 10 - 100\text{kW}$) nach günstigeren Alternativen gesucht wird.

Eine Reihe von Veröffentlichungen [1, 5, 12, 23, 40, 35, 36, 41] beschäftigt sich seit ca. 1982 mit dem Problem, typische Fehler von Induktionsmotoren im Spektrum des Statorstromes zu identifizieren. Hierbei wird versucht, häufigen Defekten, wie Lagerschäden, Unwuchten und Stabbrüchen im Rotor (Käfigläufer) charakteristische Frequenzen (Signaturen) im Spektrum des Statorstromes zuzuordnen, welche möglicherweise während des Betriebs detektiert werden können.

Der Rotor eines Asynchronmotors besteht aus Aluminiumstäben, in denen durch das im Stator umlaufende Magnetfeld eine Spannung induziert wird. Aufgrund des hierdurch entstehenden Magnetfeldes dreht sich der Rotor nahezu mit der Frequenz des umlaufenden Feldes mit. Die Drehfrequenz f_{rm} des Motors ist durch die Beziehung

$$f_{rm} = (1 - s) \frac{f_e}{(p/2)}$$

gegeben, wobei f_e die Netzfrequenz, p die Anzahl der Pole des Stators und s den Schlupf bezeichnet. Der Schlupf entsteht, da der Rotor aufgrund der anliegenden Last (und der Reibung) in unregelmäßigen Abständen eine viertel oder halbe Umdrehung (abhängig von der Anzahl der Pole) gegenüber dem umlaufenden Feld zurückfällt. Der Schlupf hängt von der Größe und dem Lastzustand des Motors ab und ist von der Größenordnung $s \approx 0.01$. Die Anzahl der Pole ist gewöhnlich 2 oder 4.

Aus der Theorie der idealen Induktionsmaschine lassen sich die charakteristischen Frequenzen von Unwuchten (f_{uw}) und Stabbrüchen (f_{sb}) sowie aus dem Aufbau von Kugellagern diejenige von Lagerschäden (f_{ls}^1, f_{ls}^2) ableiten. Man erhält:

$$f_{uw} = f_e \left(1 \pm m \left(\frac{1-s}{p/2} \right) \right) = f_e \pm m f_{rm}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

$$f_{sb} = f_e \left(k \left(\frac{1-s}{p/2} \right) \pm s \right) = k f_{rm} \pm s f_e; \quad k/(p/2) = 1, 5, 7, 11, \dots \quad (3.2)$$

$$f_{ls}^1 \approx 0.4 n f_{rm}, \quad f_{ls}^2 \approx 0.6 n f_{rm}, \quad (3.3)$$

wobei in (3.3) n die Anzahl der Kugeln in den Kugellagern der Motorachse bezeichnet. In den zitierten Arbeiten wird (zum Teil durch den Vergleich mit anderen Me-

thoden der Motorüberwachung) gezeigt, daß es prinzipiell möglich ist, diese Fehler im Statorstromspektrum zu detektieren. Ein Überblick über verschiedene Überwachungsverfahren bei Induktionsmotoren findet sich z.B. in [42].

Erwartungsgemäß wird der Statorstrom neben der Netzfrequenz durch Induktionseffekte, die von verschiedenen Größen verursacht werden, (unterschiedlich stark) beeinflusst. Dies sind

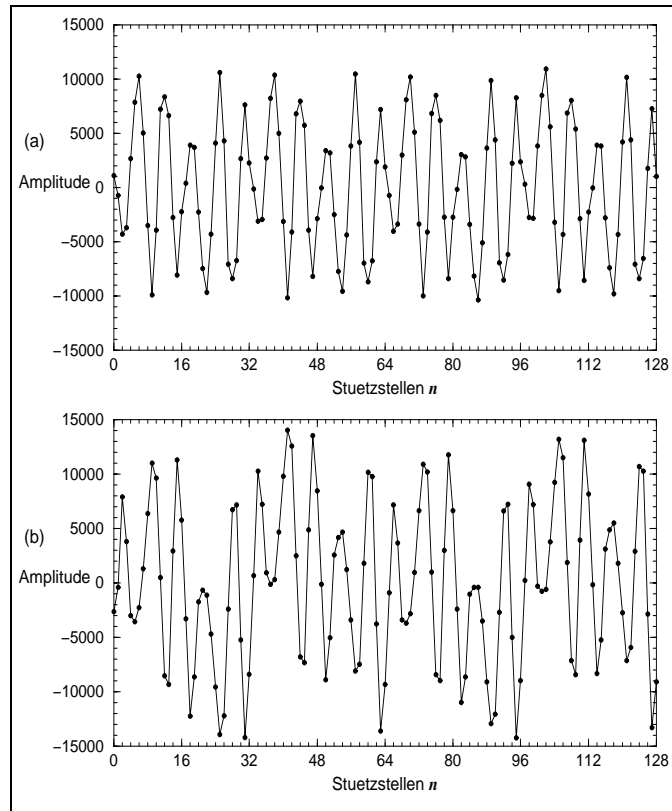
1. der Lastzustand des Motors, insbesondere im Fall oszillierender Lasten, wie sie z.B. beim Antrieb von Kompressoren auftreten, da hierdurch Drehzahlschwankungen verursacht werden,
2. die Produktionstoleranzen des Motors, insbesondere Asymmetrien des Luftspaltes zwischen Stator und Rotor und der Wicklungsverteilung des Stators,
3. die Umweltbedingungen während des Betriebs, wie die Temperatur und Luftfeuchtigkeit, da hierdurch Toleranzen bzw. die Leitfähigkeit der Luft verändert werden,
4. mögliche Defekte des Motors, wie Unwuchten, Lagerschäden, Stabbrüche im Rotor und Kurzschlüsse im Stator.

Da der Einfluß sich entwickelnder Defekte auf den Statorstrom klein im Vergleich zu den anderen Größen ist, erfordert die zuverlässige Detektierung fehlerhafter Betriebszustände eine aufwendige Signalanalyse; alleine die Überwachung der charakteristischen Frequenzen (3.1)–(3.3) im Spektrum des Statorstromes ermöglicht keine verlässliche Kontrolle des Motors.

Ausgehend von den genannten Vorarbeiten werden in [8, 26, 38] verschiedene Diagnosemethoden und in [9, 24, 30, 37] auf neuronalen Netzen basierende Algorithmen zur Überwachung von Induktionsmotoren vorgeschlagen. Hierbei wird die Überwachung der charakteristischen Frequenzen durch sogenannte Expertensysteme, d.h. empirische Regeln die auf Praxiserfahrung beruhen, ergänzt [8, 9, 26, 30, 37] oder das Spektrum des Statorstromes wird mit einer Datenbasis verglichen, die von anderen Motoren oder (und) numerisch simulierten idealen Induktionsmaschinen erzeugt wurde [9, 38]. Es zeigt sich aber, daß ein unüberwachter Lernprozeß Produktionstoleranzen und sich ändernde Lastzustände nicht von Motorfehlern unterscheiden kann, da deren Auswirkungen auf den Statorstrom um ca. ein bis zwei Größenordnungen kleiner als die der erstgenannten Einflüsse sind, sofern die Defekte noch nicht zum unmittelbaren Versagen des Motors führen sollen.

Aus diesem Grund wird in [30, 37] das Konzept des *Autoassoziators* vorgeschlagen, welches in weiteren anwendungsorientierten Arbeiten [24] übernommen wird. Hierbei werden in einem Trainingszeitraum Meßreihen von allen während des Betriebs auftretenden Lastzuständen eines neuen (fehlerfreien) Motors aufgenommen und damit ein Überwachungsalgorithmus trainiert. In der anschließenden Betriebs-

Abbildung 3.1: Zeitreihen einer Phase des (um die dominante Netzfrequenz zu dämpfen) vorgefilterten und verstärkten Statorstromes: (a) konstante Last bei halber Leistung, (b) mit halber Netzfrequenz oszillierende Last bei voller Leistung des Motors. Die Zeitreihen überdecken vier Perioden der Netzspannung (ca. zwei Umdrehungen des Motors).



phase können für diesen Motor Abweichungen des aktuellen Statorstromes von der bekannten Datenbasis detektiert werden. In [24, 30, 37] übernehmen neuronale Netze diese Überwachungsaufgabe. Auch wenn die Idee des Autoassoziators die vielversprechendste für die Motorüberwachung ist, die wir ebenfalls übernehmen werden, bleiben noch zwei Probleme zu lösen:

Zwar können während der Trainingsphase Zeitreihen von allen Lastzuständen des Motors gemessen werden, jedoch ist es kaum möglich, alle Umweltbedingungen abzudecken, die während des späteren Betriebs eintreten können. Die Temperatur des Motors z.B. hat einen erheblichen Einfluß auf den Statorstrom, d.h. es ist ein großer Unterschied, ob der Motor gerade eingeschaltet wurde oder schon länger läuft. Auch wenn man versuchen wird, alle typischen Betriebsbedingungen in die Trainingsdatenbasis aufzunehmen, bleibt es für einen praxisgerechten Betrieb unerlässlich, daß der Überwachungsalgorithmus sich entwickelnde Defekte von Betriebszuständen unterscheiden kann, die sich nur durch äußere Einflüsse von allen bekannten Trainingszuständen unterscheiden. Dies läßt sich nicht alleine dadurch erreichen, daß der Schwellenwert für das Ähnlichkeitsmaß im Merkmalsraum, mit dem Trainings- und Testdaten verglichen werden, hinreichend groß gewählt wird, da die Auswirkungen von Motorfehlern auf den Statorstrom von der gleichen Größenordnung wie Umwelteinflüsse sind. Genauso können Umweltbedingungen nicht herausgefiltert werden, indem nur zeitlich beständige Änderungen des Statorstromes, wie sie natürlich

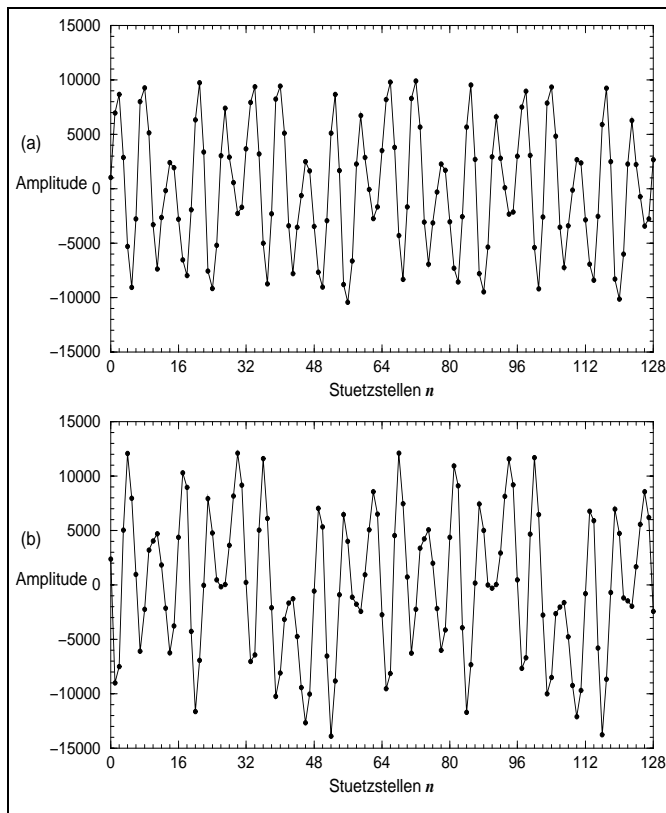


Abbildung 3.2: Zeitreihen der gleichen Betriebszustände wie in Abb. 3.1, wobei der Motor eine Unwucht hat, die durch eine exzentrische Scheibe auf der Motorachse erzeugt wird.

entstehende Defekte kennzeichnen, berücksichtigt werden.

Ein weiteres in [35, 38] behandeltes Problem ist der Einfluß oszillierender Drehmomente, wie sie z.B. beim Antrieb von Kompressoren auftreten. Erfolgt die Oszillation mit (mehrfacher) Drehfrequenz des Motors, so werden die gleichen charakteristischen Frequenzen f_{os} im Statorstrom angeregt, wie sie für Unwuchten und näherungsweise auch für Stabbrüche typisch sind; man erhält $f_{os} = f_{uw}$ [35], vgl. (3.1) und (3.2). Oszillierende Lasten können diese Fehler daher leicht überdecken. Abb. 3.1 zeigt Ausschnitte aus zwei Zeitreihen, die von Motor 1 mit verschiedenen Lasten erzeugt wurden. In Abb. 3.2 sind die gleichen Lastzustände des Motors mit einer Unwucht zu sehen, die durch eine Exzentrerscheibe auf der Motorachse erzeugt wurde. Es ist leicht zu erkennen, daß verschiedene Drehmomente des Motors zu einer qualitativen Änderung des Statorstromes führen, während der Einfluß der Unwucht nicht unmittelbar sichtbar ist.

Wir wollen im nächsten Abschnitt das Konzept eines Autoassoziators vorstellen, welches nicht auf neuronalen Netzen basiert und auch keine empirischen (Experten-) Regeln oder technische Details des zu überwachenden Motors verwendet, wie sie zur Berechnung der Signaturen (3.1)–(3.3) teilweise benötigt werden, da der Schlupf nicht genau bekannt ist. Wir werden zeigen, daß mit diesem Ansatz das wichtige Problem unbekannter Umwelteinflüsse wie auch jenes oszillierender Lastzustände zumindest teilweise behandelt werden kann.

3.2 Geometrische Signaltrennung

Bevor wir die Einzelheiten erläutern, soll die generelle Idee der geometrischen Signaltrennung im Merkmalsraum vorgestellt werden. Wir nehmen an, daß eine einfache Meßvorrichtung eine geeignete Zeitreihe der zu überwachenden Maschine (hier des Induktionsmotors) liefert. Ausreichend lange Teilstücke der Signale werden in Merkmalsvektoren \mathbf{v} in einem Merkmalsraum V transformiert. Die Komponenten von \mathbf{v} können beliebige statistische Schätzgrößen sein, die im Hinblick auf die Aufgabenstellung sinnvoll gewählt sind. Hierfür gibt es keine allgemeingültigen Kriterien. Da der Statorstrom eines Induktionsmotors bei konstanten Betriebsbedingungen quasiperiodisch ist (bei einem Schlupf $s = 0$ wäre er periodisch), wählen wir noch festzulegende Komponenten des gefensterten Fourierspektrums der Zeitreihen als Einträge der Merkmalsvektoren.

Während der Trainingsperiode wird ein Satz Merkmalsvektoren erzeugt, von denen angenommen werden kann, daß sie alle erlaubten Betriebszustände des *intakten* Motors repräsentieren. Insbesondere müssen Beispiele von allen Lastzuständen darin enthalten sein. Diese Trainingsvektoren werden in Cluster eingeteilt und für jedes Cluster wird eine lokale Metrik im Merkmalsraum V definiert, welche den Abstand eines Vektors zu dem spezifischen Cluster angibt. Die lokalen Metriken berücksichtigen die stark unterschiedliche Größe und Ausdehnung der Cluster in den verschiedenen Raumrichtungen.

Während der Überwachungsphase werden die laufend berechneten Merkmalsvektoren mit den Clustern in V verglichen. Zunächst wird der Abstand eines Testvektors zum nächstgelegenen Cluster im Merkmalsraum bestimmt und mit einem Schwellenwert verglichen. Dieses Überwachungsverfahren reagiert sehr empfindlich auf sich ändernde Betriebszustände des Motors bei einer gleichzeitigen statistischen Robustheit. In Abschnitt 3.3.2 werden wir in einem *out-of-sample* Test zeigen, daß hiermit alle Testdaten eines Motors korrekt klassifiziert werden können.

Für die Praxis ist dieses Resultat jedoch unzureichend, da, wie im letzten Abschnitt erläutert, bisher unbeobachtete Betriebszustände sowohl durch Motorfehler wie durch Umwelteinflüsse bedingt sein können. Da wir nicht annehmen können, daß alle während des Betriebs eintretenden Umweltbedingungen in der Trainingsdatenbasis enthalten sind, muß der Überwachungsalgorithmus Defekte von sonstigen Einflüssen trennen können. Die geometrische Methode bietet hierfür eine Lösung:

Wir konstruieren zwei Typen von Merkmalsvektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 in den Räumen V_1 und V_2 mit unterschiedlicher Dimension. Während die Komponenten von \mathbf{v}_1 so gewählt werden, daß sie Informationen über Motordefekte enthalten, gehen in \mathbf{v}_2 *fast ausschließlich* äußere Einflüsse ein. Daß solche Merkmalsräume V_1 und V_2 existieren, werden wir im Fall der Induktionsmotoren zeigen. In V_1 gehen natürlich Informationen über beides, Fehler und Umweltbedingungen (neben weiteren Einflüssen) ein; dieser Merkmalsraum stimmt mit dem oben eingeführten Raum V überein.

Beide Typen von Merkmalsvektoren werden jetzt aus den Trainingsdaten berechnet und in Cluster eingeteilt, wobei nach Konstruktion je ein Cluster in V_1 und V_2 zueinander korrespondieren. Die in der Überwachungsphase erzeugten Testvektorpaare $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ werden mit den Clustern in V_1 und V_2 unabhängig voneinander verglichen. Im allgemeinen gibt es kein Paar zueinander korrespondierender Cluster, welche die Abstände zu \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 simultan minimieren. Um den Testvektoren eindeutig ein Clusterpaar zuordnen zu können, muß deshalb die Summe ihrer geeignet gewichteten Abstände in V_1 und V_2 minimiert werden.

Die in V_2 beobachteten Abstände geben fast ausschließlich Abweichungen der Umweltbedingungen von den Trainingsdaten wieder. Es existiert jedoch eine Korrelation zwischen \mathbf{v}_2 und den in \mathbf{v}_1 enthaltenen Umwelteinflüssen, welche es erlaubt diese Störungen näherungsweise herauszurechnen. Die so von Umwelteinflüssen teilweise bereinigten Abstände in V_1 werden wiederum mit einem Schwellenwert verglichen, der jetzt als Klassifikationskriterium zwischen guten und fehlerhaften Betriebszuständen des Motors dient. Weiterhin nutzen wir die Eigenschaft aus, daß entstehende Defekte zeitlich beständige Änderungen des Statorstromes hervorrufen; kurzzeitige Ereignisse, die den Schwellenwert überschreiten, wie z.B. Schwankungen der Netzspannung, können daher ignoriert werden.

Geometrische Signaltrennung ist mehr als das Messen von Abständen in Merkmalsräumen, was lediglich skalare Größen sind. Als nächsten Schritt wird man daher versuchen eine *Mannigfaltigkeit* erlaubter Zustände im Merkmalsraum zu identifizieren, mit der die Testvektoren verglichen werden können. Diese Mannigfaltigkeit könnte durch Cluster aus Trainingsvektoren, die ebenfalls zur Definition der lokalen Metriken dienen, näherungsweise trianguliert werden. Damit wäre es möglich, die in den Trainingsdaten enthaltenen Informationen im Merkmalsraum zu inter- und extrapolieren. Nimmt man nun an, daß die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade der Umweltbedingungen klein ist; vielleicht nur Temperatur und Luftfeuchtigkeit umfaßt, so wäre die Mannigfaltigkeit der erlaubten Betriebszustände niedrigdimensional und würde, falls sie nicht zu stark gefaltet ist, eine präzisere Trennung von Fehlern und Umwelt erlauben als der skalare Ansatz.

Allerdings erfordert die numerische Approximation von (nichtparametrischen) Mannigfaltigkeiten eine relativ große Datenmenge. Aufgrund des begrenzten Datenumfangs, der uns von den Induktionsmotoren zur Verfügung steht, konnte dieser Ansatz nicht weiter verfolgt werden.

3.2.1 Vorprozessierung der Zeitreihen

Die uns von SCR zur Verfügung gestellten Zeitreihen sind bereits vorgefiltert und verstärkt, um die Amplitude der dominanten Netzfrequenz (um ca. 30dB) zu dämpfen. Die Abtastrate der Zeitreihen wurde nach dem Filterprozeß auf 32 pro Periode der Netzfrequenz (60Hz) reduziert, siehe Abb. 3.1 und 3.2.

Wir berechnen die Merkmalsvektoren aus Teilstücken der Zeitreihen der Länge 5120 ($\hat{=}$ 2.67s Laufzeit des Motors). Zunächst werden gefensterter Fouriertransformationen über 512 Stützstellen (16 Perioden der Netzfrequenz) mit zur Hälfte überlappenden Fenstern berechnet und die Betragsquadrate über das gesamte Teilstück gemittelt, um statistische Fluktuationen zu dämpfen. Wir verwenden das Hann-Fenster (2.33), welches bei der Wahl $L = 1$ (siehe Kap. 2.2.2) eine Breite von 3 Kanälen im diskreten Frequenzraum hat, siehe Abb. 2.5. Da aufgrund der Quasiperiodizität der Zeitreihen ihre gefensterter Fouriertransformationen nur isolierte Spitzen enthalten, die genau in die beiden benachbarten Kanäle hinein verbreitert werden, reicht es aus, nur jede zweite Frequenzkomponente zu berücksichtigen. Die hiermit verbundene Dämpfung einiger Amplituden wird später keine Rolle spielen.

Wir erhalten somit Vektoren mit 128 Spektralkomponenten, die wir während der Trainingsperiode von allen Betriebszuständen des fehlerfreien Motors sammeln.

3.2.2 Auswahl und Clusterung der Merkmalsvektoren

Nachdem diese Trainingsmenge von Frequenzvektoren erzeugt ist, kommen wir zur Auswahl der Merkmalsvektoren, die für jeden Motor individuell erfolgt. Wir verwenden folgende Auswahlkriterien:

1. Da alle betrachteten Fehler periodisch mit der Drehfrequenz des Motors sind, enthalten die Komponenten der Netzfrequenz und ihre Harmonischen keine Informationen über den Zustand des Motors, jedoch gehen die Umweltbedingungen in sie ein; diese Eigenschaft werden wir später ausnutzen.
2. Wir betrachten alle Spektralkomponenten mit einem hinreichend hohen Signal-Rausch Verhältnis als potentiell interessant für die Fehlererkennung und erwarten, daß diese Menge ausreichend viele Frequenzen enthält, die für die Detektierung von Defekten geeignet sind. Die nicht fehlersensitiven Komponenten dieser Menge werden aufgrund ihres relativ kleinen Rauschanteils nur wenig störenden Einfluß haben. Hierzu muß ein Maß zur Quantifizierung des Signal-Rausch Verhältnisses definiert werden. Die Amplituden der Spektralkomponenten alleine erachten wir nicht als wichtig, da sie im wesentlichen durch den Lastzustand des Motors bestimmt werden.
3. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, einige der physikalisch motivierten Signaturen (3.1)–(3.3) zu berücksichtigen. Wir betrachten hier die Frequenzkomponenten $f_e \pm f_{rm}$, die durch Unwuchten des Motors angeregt werden und für 4-Pol Motoren bei der verwendeten Abtastrate unabhängig vom Schlupf in die Kanäle 4 und 12 der Frequenzvektoren gefaltet werden. Auf diese Auswahlregel kann verzichtet werden, falls der Motor oszillierende Lasten antreibt, da in diesem Fall die betrachteten Frequenzen immer in der Menge der Spektralkomponenten mit hinreichend hohem Signal-Rausch Verhältnis enthalten sind.

Zur Definition eines Maßes für das Signal-Rausch Verhältnis der Spektralkomponenten teilen wir zunächst die 128-dimensionalen Frequenzvektoren in Cluster ein, die wir später auch zur Definition der lokalen Metriken in den Merkmalsräumen V_1 und V_2 benötigen werden. Die Clustereinteilung erfolgt durch einen selbstorganisierenden Clusterungsalgorithmus, der für diese Aufgabe entwickelt wurde und Standardverfahren, wie z.B. [21] überlegen ist:

Im ersten Schritt wird die Trainingsvektormenge in kleine Cluster eingeteilt, welche in einem zweiten Schritt geeignet zusammengefaßt werden. Der erste Vektor in der Reihenfolge, in der sie erzeugt wurden, bildet den Startpunkt des ersten Clusters. Falls sein Euklidischer Abstand zum zweiten Vektor in dieser Reihenfolge kleiner als ein Trennschwellenwert d_{sep} ist, gehört auch er in dieses Cluster und der gemeinsame Schwerpunkt wird bestimmt. Der folgende Vektor kann entweder ebenfalls dazugehören oder definiert, falls sein Abstand zum Schwerpunkt des Clusters größer als d_{sep} ist, ein weiteres Cluster. Im zweiten Fall wird angenommen, daß der Betriebszustand des Motors sich geändert hat und alle kommenden Vektoren werden nur noch mit dem zuletzt entstandenen Cluster verglichen bis wiederum ein neues gebildet wird. Während dieses Prozesses entsteht eine relativ große Anzahl kleiner Cluster, deren Elemente einen kleinen Euklidischen Abstand zueinander haben.

Aus statistischen Gründen ist eine minimale Clustergröße erforderlich; wir wählen als kleinstmögliche Anzahl von Vektoren 25 oder 50 abhängig von Größe des Datensatzes. Zunächst werden alle Cluster, deren Schwerpunktabstand kleiner als ein Vereinigungsschwellenwert d_{uni} ist, zusammengelegt. Die Möglichkeit von Clusterketten wird hierbei beachtet, d.h. wenn Cluster A in der Nähe von B und B nahe an C liegt, C sich jedoch nicht in einer hinreichend kleinen Umgebung von A befindet, so werden A, B und C vereinigt, um Eindeutigkeit zu erhalten. d_{uni} wird nun schrittweise erhöht und das Verfahren wiederholt, wobei jetzt allerdings Cluster, welche beide bereits die minimale Größe erreicht haben, nicht vereinigt werden. Dies ist wichtig, da für eine geeigneten Clusterung der Trainingsvektoren sowohl kleine und relativ nahe beieinander liegende wie auch sehr viel ausgedehntere Cluster entstehen müssen. Nachdem ein maximaler Wert von d_{uni} erreicht ist, werden alle Vektoren, die bis dahin noch zu keinem Cluster minimaler Größe gehören, als Ausreißer betrachtet und aus der Trainingsmenge entfernt.

Es zeigt sich, daß Vektoren, die den gleichen Lastzustand und ähnliche Umweltbedingungen repräsentieren, in jeweils einem Cluster zusammengefaßt werden. Da wir als Abstandsmaß die Euklidische Norm verwenden, dominieren allerdings wenige große Spektralkomponenten, unter ihnen die Netzfrequenz und ihre Harmonischen, die Clustereinteilung. Die erzeugten Cluster sind nicht eindeutig, jedoch sollte die Fehlererkennung mit jeder vernünftigen Einteilung der Trainingsvektoren funktionieren. Die Schwellenparameter werden durch die Euklidische Norm der Frequenzvektoren, d.h. den Verstärkungsfaktor des Statorstromes bestimmt. Damit ihre Wahl universal ist, werden die Vektoren der Trainingsmenge auf die mittlere Amplitude 1 normiert.

Für jedes Cluster und jede Spektralkomponente definieren wir nun das Signal-Rausch Verhältnis

$$r_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{\sigma_{i,j}}; \quad i = 1, \dots, 128, \quad (3.4)$$

wobei $c_{i,j}$ die i -te Komponente des Schwerpunktvektors von Cluster j und $\sigma_{i,j}$ ein Maß für die Ausdehnung dieses Clusters in der Raumrichtung i ist. Eine erste Möglichkeit $\{\sigma_{i,j}\}$ zu definieren, bieten die Standardabweichungen der Cluster, jedoch wird damit die unterschiedliche Form der Cluster zu wenig berücksichtigt. Daher stellt es sich als vorteilhaft heraus, auch den vierten Kumulanten der Verteilung der Vektoren einzubeziehen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_X(x)$ einer Zufallsvariablen X läßt sich durch ihre Kumulanten $\{\kappa_m; m = 1, 2, \dots\}$ vollständig charakterisieren, falls diese existieren [20, 31]. Es gilt

$$\rho_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} \kappa_m\right) e^{ikx} dk,$$

wobei die führenden Kumulanten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \langle X \rangle \quad (\text{Mittelwert}) \\ \kappa_2 &= \langle X - \langle X \rangle \rangle^2 = \text{var}(X) \quad (\text{Varianz}) \\ \kappa_3 &= \langle X - \langle X \rangle \rangle^3 \quad (\text{Schrägheit}) \\ \kappa_4 &= \langle X - \langle X \rangle \rangle^4 - 3\text{var}^2(X) \quad (\text{Kurtosis}) \\ &\vdots = \vdots. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Für eine Gaußverteilung verschwinden alle Kumulanten von höherer als zweiter Ordnung. Daraus folgt die Relation

$$\text{var}(X) = \sqrt{\langle X - \langle X \rangle \rangle^4 - 2\text{var}^2(X)}.$$

Definiert man nun für eine beliebige (1-dim.) Wahrscheinlichkeitsdichte die Größe

$$\sigma = \left[\max\left(\langle X - \langle X \rangle \rangle^4 - 2\text{var}^2(X); \frac{1}{16}\text{var}^2(X)\right) \right]^{1/4}, \quad (3.6)$$

so erhält man ein Maß für die räumliche Ausdehnung der Cluster, welches die Abweichung der Verteilung der Vektoren von einer Gaußverteilung in führender gerader Ordnung berücksichtigt. Das Maximum unter der Wurzel garantiert ein positiv definites Argument. Das Maß σ reagiert auf statistische Fluktuationen deutlich empfindlicher als die Standardabweichung; dies erweist sich für die Quantifizierung von Signal-Rausch Verhältnissen als sinnvoll. Als Schätzer für den vierten Kumulanten einer Wahrscheinlichkeitsdichte verwenden wir den Ausdruck

$$\hat{\kappa}_4 = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K (X_i - \hat{X}_i)^4 - 3 \left[\frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K (X_i - \hat{X}_i)^2 \right]^2,$$

wobei $\{\hat{X}_i; i = 1, \dots, K\}$ die Schätzer für die Erwartungswerte von $X_i \equiv X$ sind.

Mit der Definition (3.6) für die Größen $\{\sigma_{i,j}\}$ (3.4) läßt sich das Signal-Rausch Verhältnis der Spektralkomponenten quantifizieren. Hierzu mitteln wir $\{r_{i,j}\}$ (3.4) über alle Cluster, wobei der Signal-Rausch Vektor \mathbf{r}_j jedes Clusters auf 1 normiert wird, um alle Cluster gleich zu gewichten:

$$\mathcal{R}_i = \sum_{j=1}^M \frac{r_{i,j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{128} (r_{k,j})^2}}; \quad i = 1, \dots, 128, \quad (3.7)$$

wobei M die Anzahl der Cluster bezeichnet. Die Menge $\{\mathcal{R}_i; i = 1, \dots, 128\}$ ist von der spezifischen Clustereinteilung der Trainingsvektoren näherungsweise unabhängig und definiert eine Reihenfolge der Spektralkomponenten entsprechend ihres Signal-Rausch Verhältnisses.

Nun kann die Merkmalsauswahl vorgenommen werden. Als Einträge der Vektoren \mathbf{v}_2 betrachten wir die Spektralkomponenten der Netzfrequenz und zwei ihrer Harmonischen, welche das größte Signal-Rausch Verhältnis haben. Diese Wahl ist vom Motortyp, genauer der Windungsverteilung abhängig. Als Einträge von \mathbf{v}_1 wählen wir die 12 bis 14 Komponenten mit den höchsten Signal-Rausch Verhältnissen, wobei jetzt alle Harmonischen der Netzfrequenz ausgeschlossen sind. Zusätzlich werden, wie erwähnt, die Komponenten 4 und 12 des Frequenzvektors berücksichtigt.

Die Auswahl der Merkmale hängt nicht nur vom spezifischen Motor, sondern auch von den anliegenden Lasten ab. Für unsere Motordaten zeigt sich, daß das Merkmalssuchverfahren bei allen Lastzuständen eine ausreichende Anzahl von Frequenzen findet, die sensitiv auf die untersuchten Fehler reagieren. Eine Ausnahme bilden die charakteristischen Frequenzen $f_e \pm f_{rm}$ zur Detektierung von Unwuchten, die nur dann zuverlässig ausgewählt werden, wenn der Motor eine mit (mehrfacher) Drehfrequenz oszillierende Last treibt. Da hierdurch die gleichen Frequenzen wie im Fall einer Unwucht angeregt werden, haben diese Spektralkomponenten immer ein hinreichend hohes Signal-Rausch Verhältnis. Natürlich kann, falls erforderlich, die Menge der Merkmale um weitere physikalisch motivierte Signaturen ergänzt werden.

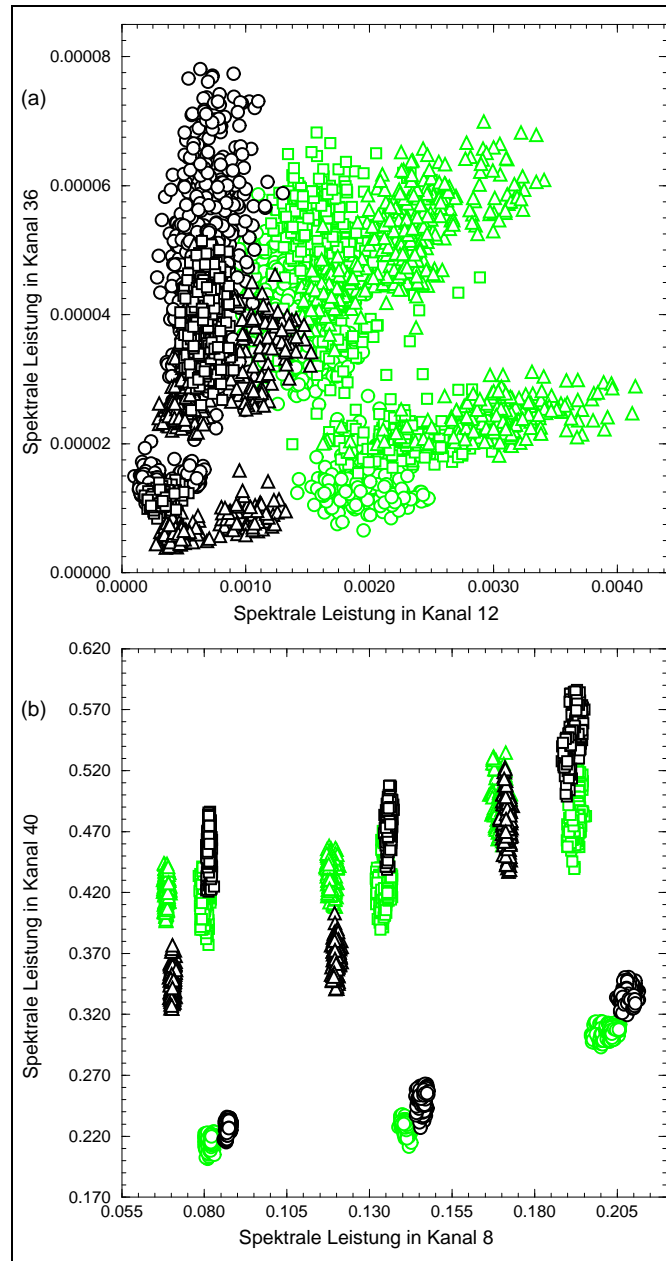
Die ausgewählten Spektralkomponenten sind im allgemeinen nicht diejenigen mit der größten Leistung; ihre Amplituden unterscheiden sich bis zu einem Faktor 10^4 voneinander, siehe Abb. 3.3 und 3.4. Umgekehrt enthalten manche Komponenten des Frequenzvektors mit wesentlich größerer spektraler Leistung fast nur Rauschen.

Für unsere Motordaten wählen wir als Dimension der Merkmalsräume V_1 und V_2 $N_1 = 14 - 16$ sowie $N_2 = 3$.

3.2.3 Die Struktur der Merkmalsräume

Kommen wir nun zur Konstruktion der Merkmalsräume V_1 und V_2 . Die Abbildungen 3.3 und 3.4 zeigen Projektionen auf zwei Komponenten von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 . Die zugehörigen Daten wurden von Motor 4 bei konstanter (Abb. 3.3) sowie bei mit der

Abbildung 3.3: Projektion auf zwei Komponenten der 128-dimensionalen Frequenzvektoren, welche in die Merkmalsvektoren $\mathbf{v}_1 \in V_1$ (a) sowie $\mathbf{v}_2 \in V_2$ (b) eingehen. Verschiedene Symbole (Kreis, Quadrat, Dreieck) kennzeichnen jeweils eine Meßreihe, zwischen denen sich die Betriebsbedingungen des Motors geändert haben. Schwarze Symbole korrespondieren zum intakten Motor während graue eine Unwucht anzeigen. Diese Daten wurden bei konstanter Last des Motors mit drei verschiedenen Drehmomenten aufgenommen.



Drehfrequenz des Motors oszillierender Last (Abb. 3.4) erzeugt, wobei jeweils halbes, drei-viertel und volles zulässiges Drehmoment am Motor anlag (siehe Abschnitt 3.3 für Einzelheiten zu den Meßreihen). Die Merkmalsvektoren, die aus Daten des intakten Motors berechnet wurden, sind schwarz markiert während graue Symbole eine (unterschiedlich starke) Unwucht anzeigen. Vektoren, die aus verschiedenen Datensätzen berechnet wurden sind mit unterschiedlichen Symbolen (Kreis, Quadrat sowie Dreieck) bezeichnet.

In den Abb. 3.3 (b) und 3.4 (b) ist deutlich zu erkennen, daß in V_2 schwarze und graue Wolken mit den jeweils gleichen Symbolen eng beieinander liegen oder sich so-

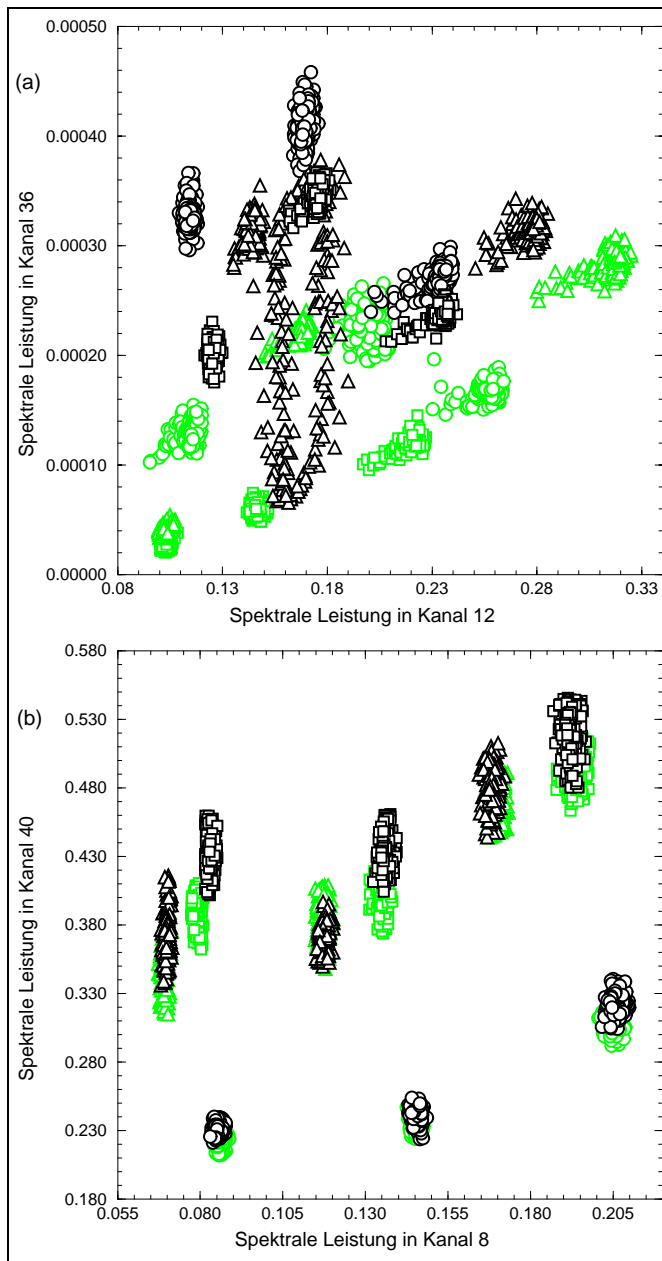


Abbildung 3.4: Projektion auf die gleichen Komponenten von $\mathbf{v}_1 \in V_1$ (a) bzw. $\mathbf{v}_2 \in V_2$ (b) wie in Abb. 3.3. Die Zeitreihen wurden bei mit der Drehfrequenz des Motors oszillierender Last mit drei verschiedenen Drehmomenten aufgenommen. Die Symbole haben die gleiche Bedeutung wie in Abb. 3.3.

gar überdecken, was die Vermutung nahe legt, daß sie unter ähnlichen Bedingungen, d.h. innerhalb einer Meßreihe aufgenommen wurden, da in V_2 keine Informationen über Motorfehler eingehen, jedoch Umwelteinflüsse und Lastzustände detektiert werden. Da Unwuchten durch das Aufstecken einer Exzentrerscheibe auf die Motorachse schnell erzeugt werden können, ist es plausibel, daß diese Zeitreihen jeweils zu einer Meßreihe gehören. Die Situation ist nicht so eindeutig in den Abb. 3.3 (a) und 3.4 (a), da in V_1 eine Mischung aus Informationen über Lastzustände, Umweltbedingungen und Defekte eingeht. Insbesondere zeigt sich in V_1 , anders als in V_2 , deutlich der Unterschied zwischen konstanten und oszillierenden Lasten.

Die Frage der Fehler(früh)erkennung bei Induktionsmotoren läßt sich nun wie folgt formulieren: Angenommen die Trainingsmenge umfaßt jeweils die Hälfte der unter zwei (von drei) unterschiedlichen Betriebsbedingungen erzeugten Merkmalsvektoren (z.B. die schwarzen Kreise und schwarzen Quadrate), während alle übrigen Vektoren in der Testphase auftreten, in der keine zusätzlichen Informationen über den Lastzustand des Motors verfügbar sind. Kann der Algorithmus dann zwischen Motorfehlern, welche durch graue Symbole gekennzeichnet sind, und den schwarz markierten erlaubten Betriebszuständen, die allerdings teilweise unter unbekanntem Umwelteinflüssen aufgenommen wurden (die schwarzen Dreiecke), statistisch signifikant unterscheiden?

Als nächsten Schritt zu einer Antwort definieren wir eine Metrik in V_1 und V_2 , indem wir *Konfidenzellipsoide* an die im letzten Abschnitt erzeugten Cluster fitten. Hierzu betrachten wir eine Singulärwertzerlegung der Cluster in V_1 und V_2 : Seien die Spalten der Matrix A die Merkmalsvektoren eines Clusters in seinem Schwerpunktsystem, d.h. $A = ((\mathbf{v}_{k,j} - \mathbf{c}_j)_k; k = 1, \dots, K)$, wobei \mathbf{c}_j den Schwerpunktvektor von Cluster j und K die Anzahl der darin enthaltenen Vektoren bezeichnet. Dann bilden die Eigenvektoren von AA^\dagger eine Orthonormalbasis des Clusters, bezüglich der alle Kovarianzen der Verteilung der Vektoren verschwinden. Definiert man nun die Ausdehnung eines Clusters in diesen Koordinaten durch $\{\sigma_{i,j}\}$ (3.6), so läßt sich der Abstand eines Vektors \mathbf{v} zu dem Cluster im Merkmalsraum angeben:

$$d(\mathbf{v}; j) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\tilde{v}_i^2}{\sigma_{i,j}^2}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{v}} = R_j(\mathbf{v} - \mathbf{c}_j), \quad (3.8)$$

wobei R_j die Drehmatrix in das lokale Koordinatensystem von Cluster j und N die Dimension des Merkmalsraums bezeichnet.

Ca. 3% der Vektoren eines Clusters, welche die größten Abstände zum Schwerpunkt haben, werden nun entfernt; für die übrigen werden R_j und die Größen $\{\sigma_{i,j}\}$ neu berechnet. Die so in V_1 und V_2 definierten Konfidenzellipsoide korrespondieren nach Konstruktion paarweise zueinander.

Jetzt können die während der Überwachungsphase erzeugten Merkmalsvektoren mit allen Clustern in V_1 und V_2 verglichen und ihr minimaler Abstand bestimmt werden. Damit kommen wir zur Berechnung der Umweltkorrekturen.

3.2.4 Berechnung von Umweltkorrekturen

Wir wollen nun die in den Merkmalsräumen V_1 und V_2 enthaltene Information kombinieren, um eine Umweltkorrektur für die in V_1 beobachteten Abstände zu berechnen. Zunächst müssen für jedes Testvektorpaar $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ zwei zueinander korrespondierende Konfidenzellipsoide bestimmt werden, mit denen die Vektoren verglichen werden sollen. Diese Ellipsoide sollen einen möglichst ähnlichen Betriebszustand des Motors repräsentieren, wie er gegenwärtig vorliegt, jedoch ist darüber keine explizite Information verfügbar. Aufgrund möglicher unbekannter Umwelteinflüsse ist das in V_1

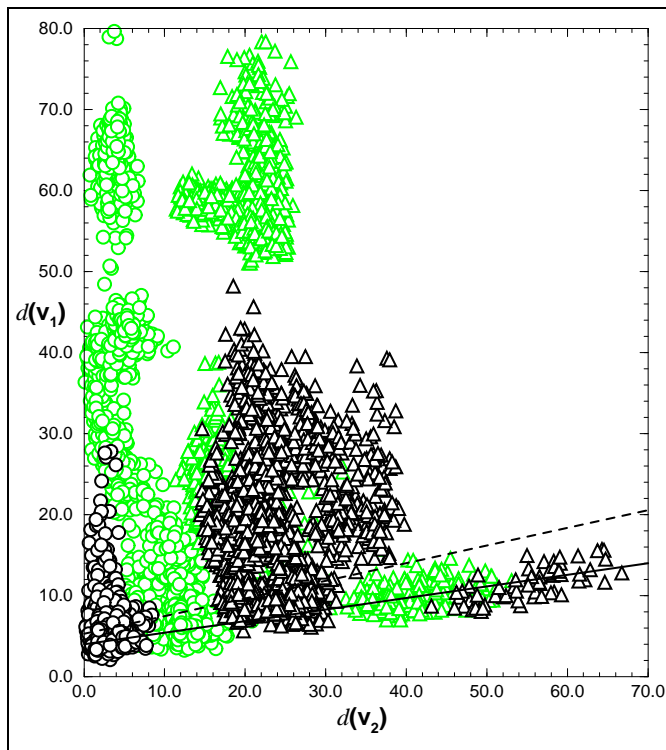


Abbildung 3.5: Die Abstände $d(\mathbf{v}_1)$ und $d(\mathbf{v}_2)$ von Testvektorpaaren $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ gegeneinander angetragen. Die Einheiten sind dimensionslos. Schwarze Symbole korrespondieren zum intakten Motor, während graue eine Unwucht anzeigen. Die zugehörigen Datensätze wurden bei konstanten und oszillierenden Lasten mit verschiedenen Drehmomenten erzeugt.

oder V_2 am nächsten gelegene Cluster nicht unbedingt die beste Wahl. Tatsächlich gibt es im allgemeinen keine zwei zueinander korrespondierenden Ellipsoide, welche die Abstände zu \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 simultan minimieren. Daher muß das Clusterpaar j , welches bezüglich Lastzustand und Umweltbedingungen am besten mit dem gegebenen Testvektorpaar $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ übereinstimmt, geschätzt werden. Die einfachste Möglichkeit hierzu ist die Minimierung der gewichteten Summe

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; j) = d(\mathbf{v}_1; j) + \alpha d(\mathbf{v}_2; j) \quad (3.9)$$

bezüglich j . Die Wichtungskonstante α hängt von der Dimension von V_1 und V_2 ab und ist von der Größenordnung $\alpha \approx 1$. Diese Wahl eines Clusterpaars berücksichtigt unbekanntes Umwelteinflüsse durch die Mittelung der in V_1 und V_2 beobachteten Abstände und definiert den Abstand eines Testvektors $d(\mathbf{v})$ in seinem Merkmalsraum eindeutig.

In Abb. 3.5 sind die Abstände $d(\mathbf{v}_1)$ und $d(\mathbf{v}_2)$ einer großen Anzahl von Testvektorpaaren gegeneinander angetragen. Wie vorher umfaßt die Trainingsmenge Beispiele aus zwei von drei Meßreihen: Kreise stehen für ähnliche Umweltbedingungen von Trainings- und Testmenge, während Dreiecke voneinander abweichende Einflüsse kennzeichnen; schwarzen Symbole korrespondieren zu Daten des intakten Motors, wogegen graue eine Unwucht anzeigen. Natürlich sind $d(\mathbf{v}_1)$ und $d(\mathbf{v}_2)$ nicht korreliert in einem strengen Sinn, jedoch existiert die *untere Schranke* einer Korrelation, welche in Abb. 3.5 durch die ausgezogene Linie verdeutlicht wird. Damit ist es möglich,

die in $d(\mathbf{v}_1)$ enthaltenen Umwelteinflüsse teilweise herauszurechnen. Der in führender Ordnung korrigierte Abstand $d(\mathbf{v}_1)$ wird gegeben durch

$$d_{korr}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = |d(\mathbf{v}_1) - \beta d(\mathbf{v}_2) - \gamma|, \quad (3.10)$$

wobei β und γ von der Dimension der Merkmalsräume abhängige Konstanten sind, welche die geschätzte Koppelung von $d(\mathbf{v}_1)$ und $d(\mathbf{v}_2)$ festlegen. Das geschätzte Verhältnis von $d(\mathbf{v}_1)$ und $d(\mathbf{v}_2)$ für $N_1 = 14$ und $N_2 = 3$ ist in Abb. 3.5 mit der gestrichelten Linie eingezeichnet.

Zur Berechnung von d_{korr} müssen die Parameter α , β und γ geschätzt werden. Dies erfolgt durch die Minimierung des gesamten Klassifikationsfehlers der Motordaten in mehreren *out-of-sample* Tests mit unterschiedlich gewählter Trainingsmenge. Jedoch werden aus praktischen Gründen die Parameter für jeden Motor nur einmal auf dem gesamten Datensatz geschätzt; hierdurch ergibt sich eine Mischform aus *in-sample* und *out-of-sample* Test (siehe Kap. 2.3.3). Da die Minimierung des Klassifikationsfehlers für verschiedene Trainingsmengen eine unterschiedliche Parameterwahl erfordert, können α , β und γ nur Mittelwerte hiervon annehmen. Unser Kriterium zum Schätzen dieser Parameter ist, daß sich für alle Trainingsmengen die Fehlklassifikationsrate bei einer Variation der Parameter nur langsam ändert, so daß wir annehmen können, uns in der Nähe des jeweiligen Minimums zu befinden.

Aus Gl. (3.10) folgt, daß die Empfindlichkeit des Fehlererkennungsalgorithmus kontinuierlich abnimmt, wenn die in V_2 beobachteten Umweltbedingungen von allen aus der Trainingsperiode bekannten abweichen. Überschreitet $d(\mathbf{v}_2)$ einen Grenzwert, so muß die Fehlerüberwachung abgeschaltet werden; dies kann z.B. bei Spannungsschwankungen des Netzes passieren. Falls die Testvektoren in V_2 für längere Zeit nicht in der Nähe der Cluster liegen, muß vermutlich der Trainingsdatensatz erneuert werden; dies kann aufgrund von Alterungserscheinungen oder nach einer Reparatur des Motors erforderlich sein.

Man könnte aus Abb. 3.5 folgern, daß die möglichen Umweltkorrekturen relativ klein sind. Aber Gl. (3.10) ist nur der zweite Schritt einer solchen Korrektur, der erste (und größere) besteht aus der richtigen Identifikation der Cluster, mit denen die Testvektoren verglichen werden. Da Defekte des Motors keine kurzzeitigen Ereignisse sind, sondern zu beständigen Änderungen des Statorstromes führen, können wir als Entscheidungskriterium bei der Fehlererkennung eine Klassifikationsstatistik verwenden. Hier jedoch können bereits kleine Verbesserungen wesentlichen Einfluß auf die Signifikanz haben, wie im nächsten Abschnitt deutlich werden wird.

3.3 Anwendungen und Ergebnisse

In diesem Abschnitt wollen wir Anwendungen unseres Fehlererkennungsalgorithmus auf Daten zeigen, die von vier 10PS 4-Pol Induktionsmotoren erzeugt wurden. Die Datensätze von Motor 1, 2 und 4 bestehen aus Zeitreihen der Länge 530.000 bis

Lastzustand	Drehmoment
konstant	halb und voll (max.)
sinusförmig mit der Drehfrequenz oszillierend	halb und voll
sinusförmig mit doppelter Drehfrequenz oszillierend	voll
periodisch mit der Drehfrequenz ein- und ausgeschaltet	voll
sinusförmig mit 28Hz oszillierend	halb und voll
sinusförmig mit 30Hz oszillierend	voll
periodisch mit 30Hz ein- und ausgeschaltet	voll

Tabelle 3.1: Lastzustände von Motor 1 und 2

Lastzustand	Drehmoment
keine Last	
konstant	halb, drei-viertel und voll
sinusförmig mit der Drehfrequenz oszillierend	halb, drei-viertel und voll
sinusförmig mit halber Drehfrequenz oszillierend	halb, drei-viertel und voll
sinusförmig mit doppelter Drehfrequenz oszillierend	halb, drei-viertel und voll

Tabelle 3.2: Lastzustände von Motor 4

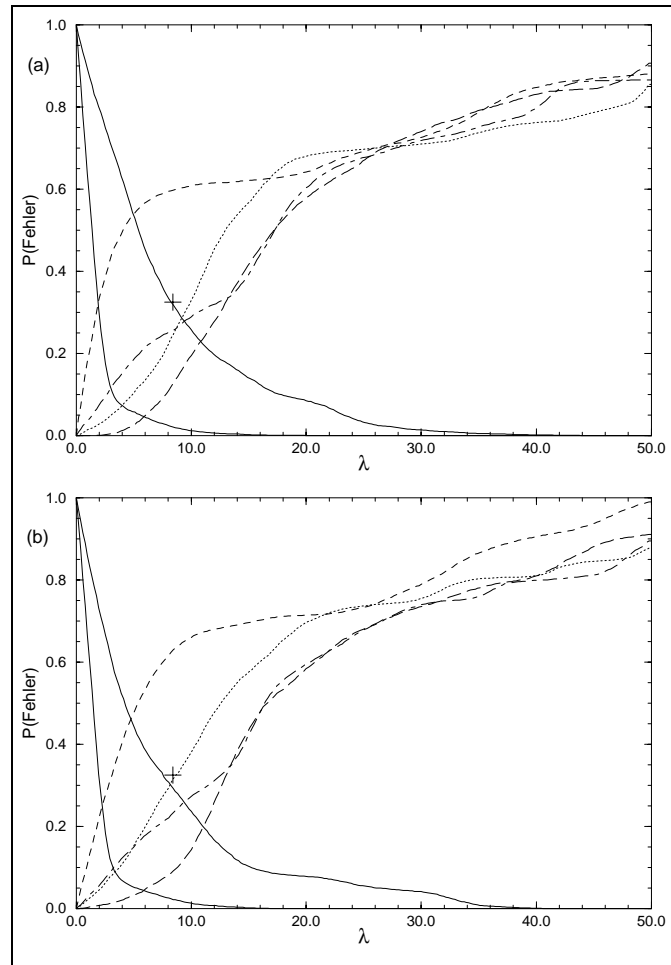
Datensatz von	Zustände des Motors
Motor 1	intakt (ausgewuchtet), Unwucht, Loch im äußeren Kugellager-ring, gebrochener Stab im Rotor
Motor 2	intakt, Unwucht
Motor 3	intakt, Unwucht
Motor 4	3×intakt, 4×Unwucht (vom Grad 1 bis 4), gebrochener Stab im Rotor, 2×repariert (in Ordnung)

Tabelle 3.3: Datensätze von Motor 1 bis 4.

1.050.000 ($\hat{=}$ 4.6 – 9.1 min Laufzeit des Motors), die jeweils mit einer einzelnen Last aufgenommen wurden. Alle untersuchten Lastzustände sind in Tabelle 3.1 und 3.2 aufgeführt. Von Motor 3 liegen zwei Zeitreihen der Länge 10.400.000 vor, wobei die Last des Motors zwischen 13 Lastzuständen zufällig wechselt. Die untersuchten Defekte der Motoren sind in Tabelle 3.3 aufgelistet.

Die Betriebsbedingungen während der Aufnahme der verschiedenen Meßreihen eines Motors weichen im allgemeinen voneinander ab. Die hierdurch bedingten Einflüsse auf den Statorstrom sind von der gleichen Größenordnung (und sogar größer) wie die durch Defekte verursachten Änderungen. Sichtbar wird dies besonders für die Daten von Motor 4: Die drei vom intakten Motor gemessenen Zeitreihensätze unterscheiden sich deutlich voneinander. Auch wenn wir keine genauen Informatio-

Abbildung 3.6: Motor 4: Wahrscheinlichkeit von Fehlklassifikationen als die Funktion eines Schwellenparameters λ . Durchgezogene Kurven: Falsche Zurückweisungen des guten Motors. Gebrochene Kurven: Falsche Akzeptanzen des Motors mit einer Unwucht (gestrichelt: Grad 1, gepunktet: Grad 2, lang gestrichelt: Grad 3, punkt-gestrichelt: Grad 4). (a) Training unter Umweltbedingung 1 und 2, (b) Training unter Umweltbedingung 2 und 3 in jeweils allen Lastzuständen.



nen darüber haben, liegt die Vermutung nahe, daß drei der vier Datensätze, die von diesem Motor mit einer Unwucht vorliegen, innerhalb der jeweils gleichen Meßreihen wie die des intakten Motors aufgenommen wurden. Dieser Schluß läßt sich aus den Abb. 3.3 und 3.4 ziehen und erlaubt den Vergleich der Einwirkungen von Umwelt und Fehlern auf den Statorstrom.

In den Abb. 3.6 bis 3.12, die im folgenden genauer diskutiert werden, ist auf der y-Achse der Anteil der Merkmalsvektoren einer Testmenge angetragen, deren Abstand d_{kor} (3.10) größer (bzw. *kleiner*) als der entlang der x-Achse aufgetragene Schwellenwert λ ist, falls die Testdaten von einem intakten (*fehlerhaften*) Motor stammen. D.h., für Testdaten guter Motoren wird der Anteil der *falschen Zurückweisungen*, für die Signale defekter Motoren hingegen der Anteil *falscher Akzeptanzen* gegen λ angetragen.

3.3.1 Signalklassifikation mit Umweltkorrekturen

Wir wählen als Trainingsmenge für Motor 4 jeweils eine Hälfte der unter zwei von drei Umweltbedingungen gemessenen Datensätze des guten Motors. Hierin sind Beispiele

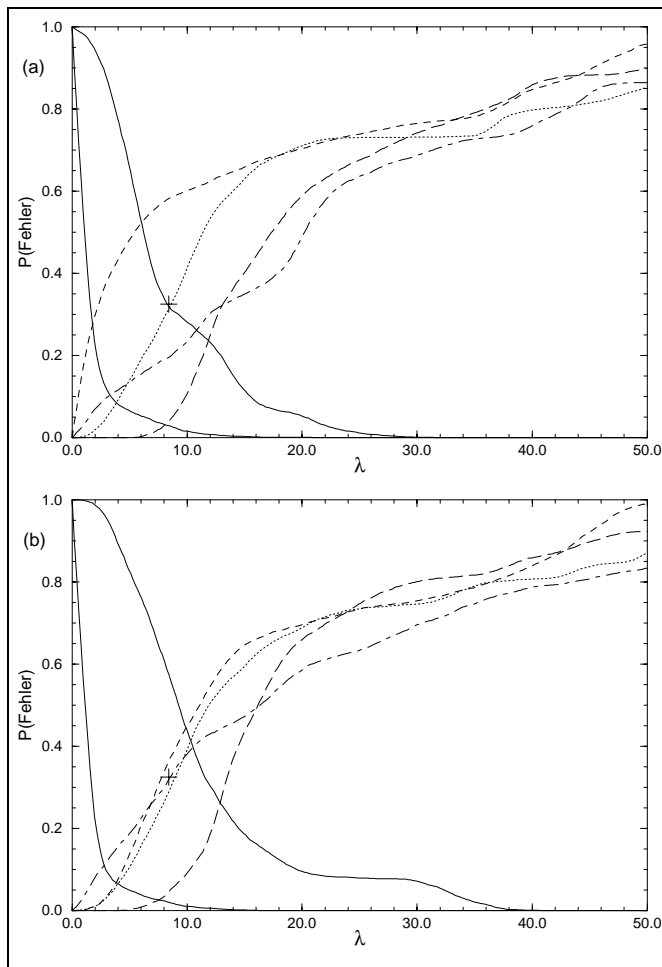
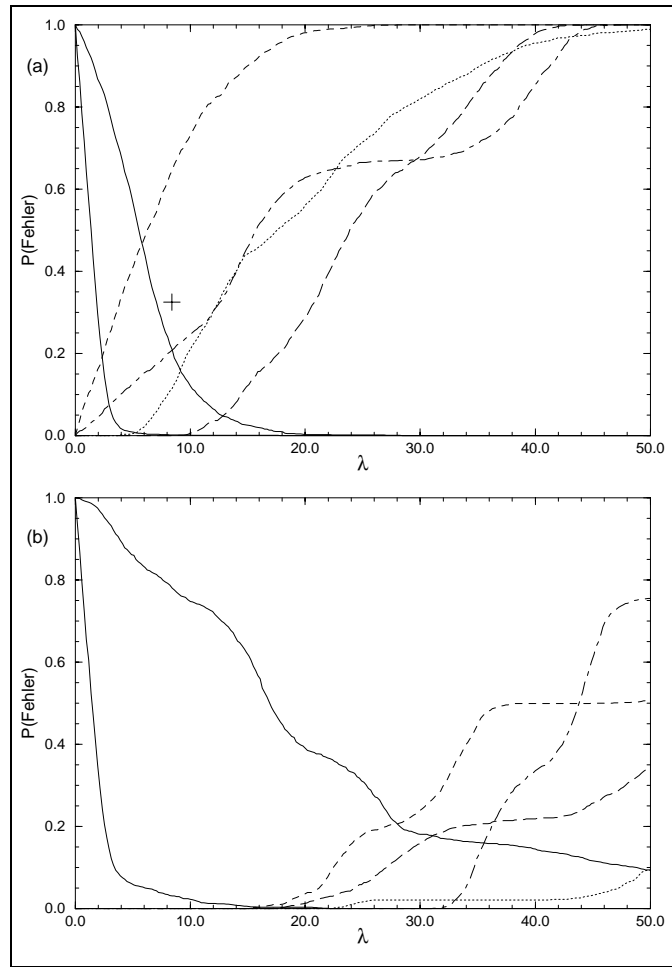


Abbildung 3.7: Signalklassifikation ohne Umweltkorrekturen bei Motor 4: (a) Training unter Umweltbedingung 1 und 2; (b) Training unter Umweltbedingung 2 und 3; vgl. Abb. 3.6. Die Symbole entsprechen denen in Abb. 3.6.

von allen Lastzuständen enthalten. Die übrigen Zeitreihen bilden die Testmenge. Alle Ergebnisse sind damit *out-of-sample* Tests (mit der erwähnten Einschränkung des Schätzens der Parameter α , β und γ), wobei keine Informationen über die zu detektierenden Fehler zum Trainieren verwendet werden. Da die einzelnen Zeitreihen nicht exakt stationär sind, sondern (unterschiedlich starke) Parameterdrifts aufweisen, kann das Testergebnis davon abhängen, ob der erste oder zweite Teil einer Zeitreihe zum Trainieren verwendet wird. Da keine dieser Möglichkeiten ausgezeichnet ist, mitteln wir jeweils über beide. Die Zeitreihen der Trainingsmenge werden vor dem Start des Algorithmus zu einer Datei verkettet.

Abb. 3.6 zeigt die Ergebnisse der Fehlererkennung bei Motor 4 für Training und Test in allen Lastzuständen. Die unteren durchgezogenen Kurven bezeichnen die falschen Zurückweisungen der Testdaten des guten Motors, die unter ähnlichen Betriebsbedingungen wie die Trainingsmenge aufgenommen wurden, während die oberen zu den Testdaten korrespondieren, welche die unbekannteren Umwelteinflüsse repräsentieren. Die Trainingsmenge ist in Abb. 3.6 (a) und (b) unterschiedlich gewählt. Es zeigt sich, daß der Statorstrom des Motors mit einer Unwucht vom Grad 2 – 4 signifikant

Abbildung 3.8: Motor 4: (a) Training und Test nur mit konstanten Lasten unter Umweltbedingung 2 und 3. (b) Training und Test nur mit oszillierenden Lasten (Drehfrequenz des Motors) unter Umweltbedingung 1 und 3. Die Symbole sind in Abb. 3.6 erklärt.



vom dem des intakten Motors unterschieden werden kann, auch wenn die Umweltbedingungen während des Betriebs zum Teil unbekannt sind. Dies wird durch das Plus-Symbol verdeutlicht, welches in allen Abbildungen die Stelle $(\lambda = 8.4, P = 0.325)$ markiert. Eine Unwucht vom Grad 1 stellt sich als zu klein zur Trennung heraus, doch wir kommen hierauf in Abb. 3.13 zurück.

Da die Merkmalsauswahl jeweils auf der Trainingsmenge erfolgt, enthalten die Merkmalsvektoren \mathbf{v}_1 bei verschiedener Wahl der Trainingsdaten im allgemeinen nicht die gleichen Spektralkomponenten. Trotzdem zeigt sich für unsere Motordaten, daß das Merkmalssuchverfahren immer eine ausreichende Anzahl von Frequenzen findet, die sensitiv auf die untersuchten Fehler reagieren. Abb. 3.8 zeigt weitere Ergebnisse von Motor 4, wobei Training und Test (und damit die Merkmalsauswahl) getrennt nur für konstante und nur für mit der Drehfrequenz des Motors oszillierende Lasten erfolgt. Die statistische Signifikanz der Signaltrennung ist vergleichbar zu der in Abb. 3.6, wobei allerdings in Abb. 3.8 (b) der Schwellenwert λ für das Ähnlichkeitsmaß im Merkmalsraum größer gewählt werden muß. Der Grund hierfür sind Oszillationen im Datensatz 2, die in Abb. 3.4 (a) deutlich sichtbar sind (die schwarzen Dreiecke).

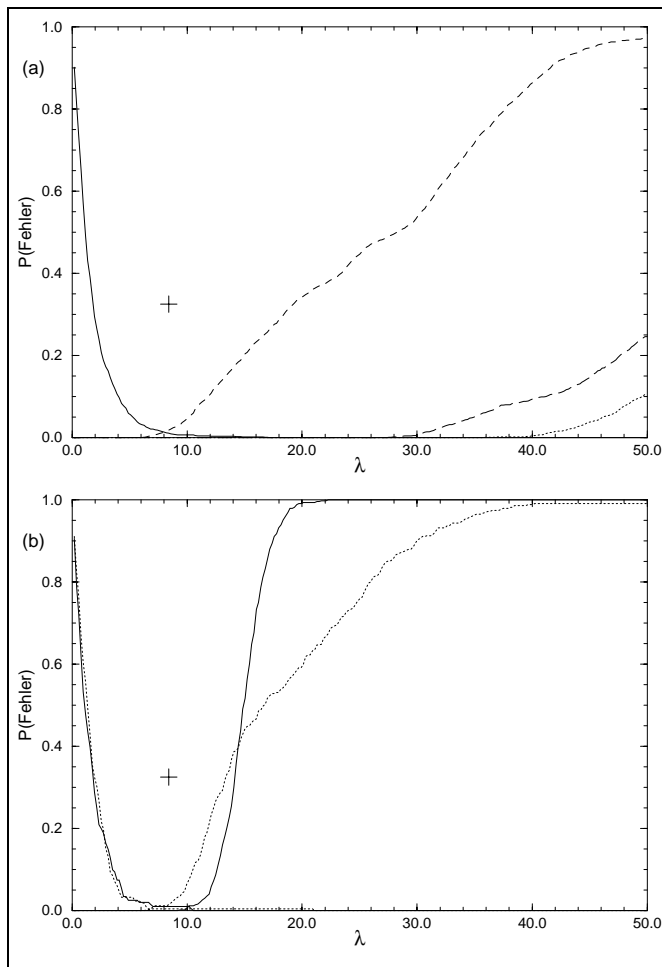


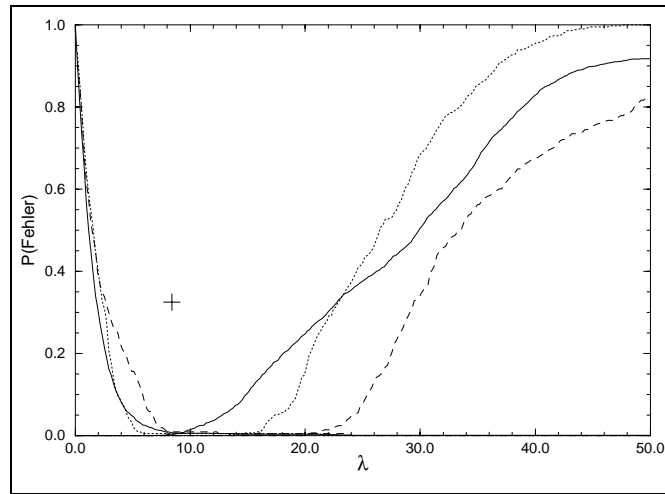
Abbildung 3.9: Motor 1: (a) Training und Test in allen Lastzuständen. Ausgezogene Kurve: intakter Motor; gestrichelt: Unwucht; gepunktet: Loch im äußeren Kugellagerring; lang gestrichelt: Stabbruch im Rotor. (b) Training und Test nur mit konstanten Lasten (ausgezogene Kurven) sowie nur mit oszillierenden Lasten (Drehfrequenz des Motors; gepunktete Kurven). Die Kurven korrespondieren jeweils zum intakten Motor sowie zum Motor mit einer Unwucht.

3.3.2 Signalklassifikation ohne Umweltkorrekturen

Um die Bedeutung der Umweltkorrekturen für die Leistungsfähigkeit des Fehlererkennungsalgorithmus abzuschätzen, betrachten wir zum Vergleich die Klassifikation der Daten von Motor 4 ohne Berücksichtigung der Umwelteinflüsse. D.h., wir beschränken uns auf den Merkmalsraum V_1 und setzen α (3.9) und β (3.10) gleich Null. Die Ergebnisse in Abb. 3.7 können nun direkt mit denen in Abb. 3.6 verglichen werden. Es fällt auf, daß beim Training unter Umweltbedingung 1 und 2 die Trennungsleistung des Verfahrens nur wenig zurückgeht, während für den Fall, daß der Algorithmus mit den Datensätzen 2 und 3 trainiert wird, die Klassifikationsleistung merklich sinkt und die Grenze zur statistischen Insignifikanz ($P(\text{Fehler}) = 0.5$) erreicht. Daraus läßt sich schließen, daß die Umweltkorrekturen den Einfluß der spezifischen Auswahl der Trainingsmenge auf die Empfindlichkeit der Fehlerüberwachung teilweise nivellieren. Im Hinblick auf eine Anwendung ist diese Eigenschaft interessant.

Von den Motoren 1, 2 und 3 ist nur jeweils ein Datensatz des fehlerfreien Motors vorhanden. Daher können wir nur die Situation berücksichtigen, in der die Test-

Abbildung 3.10: Motor 2: Ausgezogene Kurven: Training und Test in allen Lastzuständen; gestrichelt: nur konstante Lasten; gepunktet: nur mit der Drehfrequenz des Motors oszillierende Lasten. Die Kurven korrespondieren jeweils zum intakten Motor sowie zum Motor mit einer Unwucht.

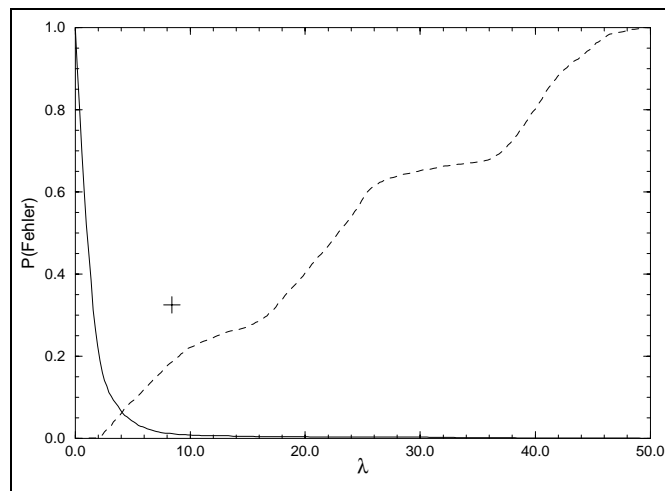


zeitreihen unter ähnlichen Betriebsbedingungen wie die Trainingsdaten aufgenommen wurden. In diesem Fall sind keine Umweltkorrekturen erforderlich und es genügt den Merkmalsraum V_1 zu betrachten. Wie zu erwarten, verbessert sich die Fehlererkennungsrate für die Signale von Motor 1, 2 und 3 deutlich, obwohl diese Motoren nicht alle vom gleichen Typ sind und die untersuchten Defekte sich teilweise unterscheiden.

In Abb. 3.9 sind die Ergebnisse der Fehlererkennung bei Motor 1 für Training und Test in allen Lastzuständen sowie getrennt nur für konstante und nur für mit der Drehfrequenz des Motors oszillierende Lasten gezeigt. In den beiden letzten Fällen ändern sich die Merkmalsvektoren aufgrund der Fehler „Loch im äußeren Kugellagering“ sowie „Stabbruch im Rotor“ so stark, daß die Kurven der falschen Akzeptanzen in Abb. 3.9 (b) nicht mehr sichtbar sind. Abb. 3.10 und 3.11 schließlich zeigen die Ergebnisse von Motor 2 und 3.

Diese Resultate zeigen, daß die Methode der geometrischen Signaltrennung verschiedene Betriebszustände eines Motors leicht trennen und gleiche Zustände mit-

Abbildung 3.11: Motor 3: Ausgezogene Kurve: intakter Motor; gestrichelt: Unwucht.



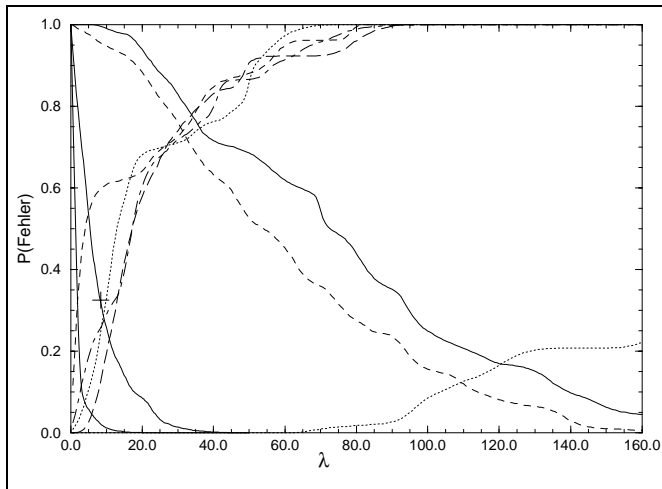


Abbildung 3.12: Motor 4: Ausgezogene und gestrichelte Kurve rechts: Falsche Zurückweisungen des zerlegten und wieder montierten guten Motors. Gepunktet: Stabbruch im Rotor; vgl. Abb. 3.6 (a).

einander identifizieren kann. Fehlklassifikationen entstehen im wesentlichen aufgrund unbekannter Umwelteinflüsse, die sich nur teilweise herausrechnen lassen.

3.3.3 Weitere Ergebnisse

Wir wollen uns weiter der Frage zuwenden, wie stark sich der Statorstrom ändert, wenn der Motor gewartet oder repariert, also zerlegt und wieder zusammengebaut wird. Abb. 3.12 stimmt mit Abb. 3.6 (a) überein, wobei die Skala von λ größer ist und zusätzlich die falschen Zurückweisungen der Testdaten des auseinander- und wieder zusammenmontierten guten Motors 4 eingezeichnet sind. Weiterhin sind die falschen Akzeptanzen des Motors mit einem Stabbruch im Rotor zu sehen. Aus Abb. 3.12 geht deutlich hervor, daß das Zerlegen eines Motors die anschließende Erneuerung der Trainingsdaten erfordert. Aus im wesentlichen dem gleichen Grund, d.h. der Änderung von Toleranzen, kann eine Trainingsmenge zur Fehlererkennung nur für den Motor verwendet werden, von dem sie erzeugt wurde.

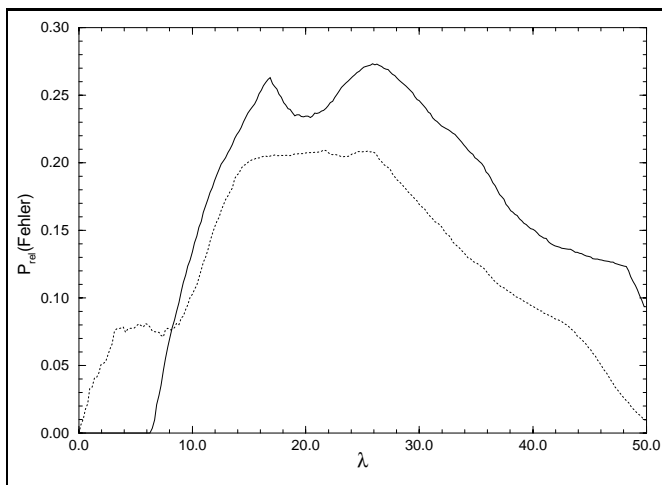


Abbildung 3.13: Motor 4: Relative Wahrscheinlichkeit eines Fehlers (3.11); vgl. Abb. 3.6.

Dieser Punkt beleuchtet ein weiteres Problem: Wenn für den Zweck der Erzeugung von Testdaten ein (künstlicher) Defekt in einen Motor eingebaut wird, wozu es meist erforderlich ist, ihn zu zerlegen, so kann alleine dieser Vorgang den Statorstrom so stark verändern, daß die Fehlererkennung daraufhin immer anspricht. Läuft ein Motor andererseits, bis sich ein Fehler durch Verschleiß von alleine einstellt, so werden vermutlich Alterungseffekte lange vor dem Versagen des Motors Einfluß auf den Statorstrom nehmen und möglicherweise die Erneuerung der Trainingsdaten erfordern. Das Erzeugen von Unwuchten ist hingegen, wie schon erwähnt, unproblematisch. Aus dem Grund wird dieser Fehlertyp auch am häufigsten untersucht.

Wir wollen nun ein weiteres Mal die Eigenschaft ausnutzen, daß sich entwickelnde Fehler zeitlich beständige Änderungen des Statorstromes hervorrufen und kurzfristige Fluktuationen daher ignoriert werden können. Dies leitet uns, in Abb. 3.6 die folgende Größe zu betrachten:

$$P_{rel}(\text{Fehler})(\lambda) = 1 - \max[P(\text{falsche Zurückweisungen})(\lambda)] - \max[P(\text{falsche Akzeptanzen})(\lambda)], \quad (3.11)$$

wobei die Maxima über alle korrespondierenden Kurven gebildet werden. P_{rel} ist die Wahrscheinlichkeit einen guten Motors als gut zu identifizieren minus der Wahrscheinlichkeit einen Defekt *nicht* zu erkennen. Abbildung 3.13 zeigt $P_{rel}(\lambda)$ für Motor 4: Die ausgezogene Kurve wurde aus Abb. 3.6 (a) und die gepunktete aus Abb. 3.6 (b) berechnet.

In Abb. 3.13 ist ersichtlich, daß es viele Möglichkeiten für eine Wahl von λ innerhalb der Plateaus beider Kurven gibt. Für alle Werte von λ in diesem Bereich ist die Wahrscheinlichkeit gute Motoren als gut zu erkennen mindestens 20% höher als die Wahrscheinlichkeit einen Fehler zu übersehen, wobei jetzt auch Unwuchten vom Grad 1 eingeschlossen sind, die wir in Abb. 3.6 noch nicht trennen konnten!

Bisher haben wir nur skalare Zeitreihen von einer Phase des Statorstromes untersucht. Jedoch wäre der technische Aufwand, vektorwertige Zeitreihen aller drei Phasen zu messen und zu verarbeiten, nur unwesentlich höher. Solche vektorwertigen Zeitreihen enthalten zusätzlich die Information über Asymmetrien des Motors. Störungen der Symmetrie werden durch Produktionstoleranzen, oszillierende Drehmomente sowie typischerweise durch Motorfehler hervorgerufen, wobei die beiden ersten Effekte während der Trainingsphase erfaßt werden können. Da Umwelteinflüsse aber keine Auswirkungen auf die Symmetrie des Motors erwarten lassen, entsteht hier eine weitere Möglichkeit, Motorfehler von unbeobachtbaren Umweltbedingungen zu trennen. Dieser Ansatz bietet in Kombination mit dem vorgestellten Verfahren der geometrischen Signaltrennung im Merkmalsraum vermutlich weitere interessante Möglichkeiten der Fehlerüberwachung, jedoch liegen uns entsprechende Zeitreihen nicht vor.

Kapitel 4

Ein Merkmalsvektor zur akustischen Güteprüfung

Während der Schwerpunkt des letzten Kapitels auf Methoden zur Auswahl und geometrischen Interpretation von Spektralkomponenten quasiperiodischer Signale lag, wollen wir uns in diesem Kapitel der Entwicklung eines Merkmalsvektors zuwenden für den geeignete Merkmale nicht bereits aus der Struktur der Zeitreihen prinzipiell erkennbar sind. Dies wird man auch als den Normalfall ansehen können.

Sowohl bei der Qualitätskontrolle einer Vielzahl von Produkten wie auch bei der Überwachung von Fertigungsvorgängen werden häufig die emmitierten Geräusche von menschlichen Experten bewertet. Bei Maschinen (z.B. Motoren) oder Fertigungsprozessen (z.B. Abspanvorgängen) sind dies meist deren Eigengeräusche; im Fall von Gegenständen, die keine Geräusche erzeugen, können Schwingungen künstlich angeregt werden, indem das zu prüfende Produkt (z.B. ein Keramikteil) mit einem Hämmerchen angeschlagen wird. In allen Fällen enthalten die emmitierten Schallsignale Informationen, die zur Unterscheidung von guten und fehlerhaften Produkten oder zur Erkennung unerlaubter Betriebszustände wesentlich beitragen können.

Da akustische Güteprüfverfahren relativ einfach durchführbar sind, besteht der Wunsch nach einer Automatisierung nicht nur aus Kostengründen, sondern wesentlich auch, um Qualitätsprüfungen objektivieren zu können, da menschliche Einschätzungen häufig nicht reproduzierbar sind und größeren Schwankungen unterliegen können. Die Schwierigkeit besteht darin, die Merkmale der Schallsignale, welche für die Beurteilung des Produktes oder Herstellungsvorgangs relevant sind, zu extrahieren sowie automatisch zu klassifizieren.

Wir untersuchen das spezielle Problem der automatischen Klassifikation von elektrischen Schiebedächern in der Qualitätsendkontrolle. Hierzu wird das Schließgeräusch, welches gewöhnlich von einem Experten bewertet wird, mit einem Körperschallmikrophon aufgenommen. Zeitreihen von als „gut“ sowie als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Schiebedächern wurden uns von Carl Schenck AG, Darmstadt, zur Verfügung gestellt.

4.1 Darstellung und Klassifikation von Schallsignalen

Die Bedeutung der Qualitätskontrolle in einer zunehmend automatisierten Fertigung hat in den letzten Jahren stetig zugenommen. Die Forderung der Kunden nach günstigen und zuverlässigen Produkten erfordert einerseits die sichere Einhaltung von Qualitätsstandards wie auch aus Kostengründen einen möglichst kleinen Produktionsausschuß. Damit entsteht das Anliegen, die Qualität eines Produktes oder bereits des Herstellungsvorgangs mit möglichst einfachen (d.h. billigen) Mitteln zuverlässig beurteilen zu können.

Daß der Klang eines angeschlagenen Keramikelements (z.B. einer Porzellantasse) mögliche Risse verrät, ist schon länger bekannt; diese Methode wird z.B. bis heute zur Qualitätskontrolle von Dachziegeln verwendet [14]. Seit Beginn der 50er Jahre hat die Analyse von Schallsignalen für die Güteprüfung von Produkten und Fertigungsvorgängen (z.B. Abspan- und Umformprozesse, Laserschweißen) eine immense Entwicklung erfahren und ihren Platz neben traditionellen Verfahren gefunden [6]. Hierbei werden die von Maschinen, Herstellungsvorgängen oder künstlich zum Schwingen angeregten Gegenständen emittierten Geräusche meist von menschlichen Experten bewertet. Obwohl neben Kostengründen insbesondere die Objektivierung von Qualitätskontrollen eine Automatisierung akustischer Güteprüfverfahren wünschenswert erscheinen läßt, hat es in diesem Bereich bisher nur langsame Fortschritte gegeben. Die Gründe sind zum einen die Schwierigkeit, geeignete Merkmale aus den Schallsignalen zu extrahieren, wofür keine allgemeine Lösung bekannt ist, und zum anderen die häufig sehr große Variabilität des Klangs von als „gut“ bewerteten Prüflingen, was eine automatische Klassifikation schwierig macht. Ein verwandtes Problem ist uns bereits im letzten Kapitel als der Einfluß unbekannter Umweltbedingungen begegnet.

Trotzdem hat es für eine Reihe speziell gestellter Probleme Lösungsvorschläge im Rahmen der Theorie der Zeit-Frequenz Darstellungen gegeben [7, 14, 15, 25]. In [7] wird gezeigt, daß aus den Luftschallsignalen, die während des Laserschweißens von Stahlplatten aufgenommen werden, die Qualität der Schweißnaht beurteilt werden kann. Hierbei können aus der Leistung des Spektrogramms $SP_x^g(t, f) = |FT_x^g(t, f)|^2$ (2.10) der Schallsignale in einem geeigneten Frequenzband Rückschlüsse auf die Tiefe der Schweißnaht und mögliche Spalte zwischen den Platten gezogen werden. Ähnliche elementare Methoden wurden bereits in [6] zur Überwachung der Schneidwerkzeuge bei Abspanprozessen, deren Zustand sich unmittelbar auf die Qualität des Werkstücks auswirkt, vorgeschlagen.

In [25] werden Wignerspektren höherer Ordnung, die als eine (nicht eindeutige) Verallgemeinerung der Wigner-Ville Verteilung (2.7) definiert sind, zur Fehlerdetektion bei rotierenden Maschinen und Getrieben untersucht. Es wird erwartet, daß sich mittels geeignet geglätteter¹ Wignerspektren vierter Ordnung impulsartige

¹durch Faltung mit einem Choi-Williams Kern, siehe Kap. 2.1.1

Signale besser detektieren lassen als mit Hilfe der quadratischen Wigner-Ville Verteilung, da hierdurch die Kurtosis (3.5) der Signale berücksichtigt wird. Weil die Interpretation hochdimensionaler Zeit-Frequenz Darstellungen jedoch schwierig ist, bleibt unklar, inwiefern auch einfachere Ansätze zum gleichen Ziel führen.

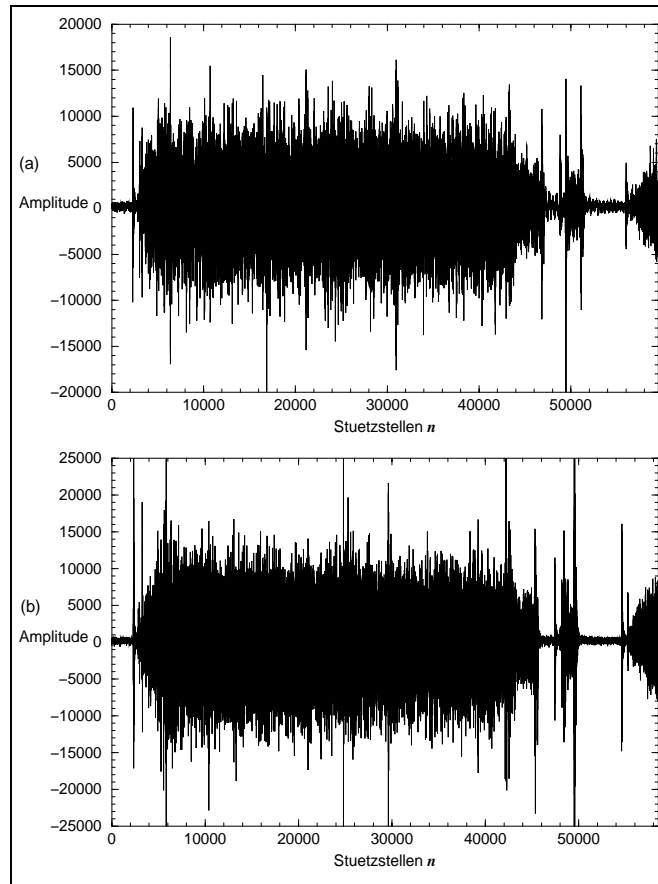
In [14, 15] wird eine Automatisierung der Qualitätsendkontrolle bei kleinen Getriebemotoren sowie bei Dachziegeln, die durch ein Holzhämmerchen zum Schwingen angeregt werden, untersucht. Die Schallsignale werden in Zeit-Frequenz Darstellungen $C_x(t, f)$ (2.8) der Cohen Klasse transformiert, wobei eine gaußförmige Kernfunktion $\Pi(t, f) \sim e^{-(t/t_0)^2} e^{-(f/f_0)^2}$ gewählt wird. Die Parameter t_0, f_0 werden hierbei auf einer Trainingsdatenmenge geschätzt. Dies geschieht durch die Definition eines Maßes $m_\Pi(t_0, f_0)$ für das Verhältnis von Abstand zu Ausdehnung von zwei Signalklassen, z.B. von als „gut“ und als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Schallsignalen, welches als Funktion der Parameter t_0, f_0 auf den Trainingsdaten maximiert werden kann.

Auch wenn der Versuch gemacht wird, Darstellungen von Schallsignalen zu finden, die sich für eine bestimmte Signalklasse automatisch optimieren lassen, ist klar, daß alle vorgeschlagenen Methoden für spezielle Signaltypen und Fragestellungen konzipiert sind und sich (mit gutem Ergebnis) nur auf ähnliche Probleme übertragen lassen. D.h., es kann automatisch nur ein lokales Optimum in der Menge aller möglichen Signaldarstellungen gefunden werden, welches vom globalen noch weit entfernt liegen kann. Jedoch ist die Hoffnung nicht unberechtigt, daß die wachsende Sammlung von speziellen Methoden zur Darstellung und Klassifikation von Schallsignalen auch für völlig neue Problemstellungen Lösungsansätze bieten kann, zumindest als einen ersten Versuch. Die Idee hierbei ist eine Art „Werkzeugkasten“ von Methoden zusammenzutragen, die geeignet kombiniert vielleicht weiter anwendbar sind als nur für die spezielle Problemklasse, für die sie entwickelt wurden. Einen Beitrag zu dieser „Werkzeugsammlung“ zu bringen erscheint dann auch als lösbare Aufgabe.

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen zur automatischen Klassifikation der Körperschallsignale von elektrischen Schiebedächern bilden die folgenden Eigenschaften der Zeitreihen, die mit einer Samplingrate von 10kHz aufgenommen wurden:

1. Die Zeitreihen zeigen einen stochastischen Charakter, ein deterministischer Anteil läßt sich nicht erkennen. Wir testen dies durch den Vergleich der Zeitreihen mit Surrogatdaten. Die Surrogate werden mit der Methode der Phasenrandomisierung und anschließenden Anpassung von Verteilung und Spektrum der Surrogate an die Zeitreihe durch iteratives, wechselweises Skalieren der Verteilung und (Wiener-) Filtern des Spektrums erzeugt [22]. Als diskriminierende Statistik verwenden wir den Mehrschritt- Vorhersagefehler durch Suche nach nächsten Nachbarn in einem rekonstruierten Phasenraum [22].
2. Die Information zur Klassifikation der Schiebedachdaten ist in dem mittleren, nahezu stationären Teil der Zeitreihen enthalten, siehe Abb. 4.1. Diese Information wurde uns von Carl Schenck AG mitgeteilt. Als (zumindest qualitatives)

Abbildung 4.1: Zeitreihen der Körperschallsignale des Schließgeräusches von zwei elektrischen Schiebedächern. Die Samplingrate beträgt 10kHz. (a) In der Qualitätsendkontrolle von einem Prüfer als „gut“ klassifiziertes Produkt, (b) als „fehlerhaft“ bewertetes Produkt.



Maß für die Stationarität der Zeitreihen verwenden wir die Übereinstimmung der Koeffizienten eines AR(10)- Modells, welches an verschiedene Teilstücke der Zeitreihen angefitet wird. Als Fitmethode benutzen wir die Minimierung der Quadrate der Einschnitt- Vorhersagefehler [22]. Hierbei zeigt sich, daß der mittlere Teil der Zeitreihen ab einer Segmentlänge von ca. 500, d.h. auf Zeitskalen $T \gtrsim 1/20s$ in guter Näherung als stationär angesehen werden kann.

3. Die für die Fehlererkennung relevanten Informationen der Schallsignale können vom menschlichen Ohr, d.h. von Experten aufgelöst werden. Da die tiefste wahrnehmbare Frequenz $\approx 20Hz$ beträgt, ist die Zeitskala zur Auflösung der klanglichen Informationen $T \lesssim 1/20s$. Änderungen auf größeren Zeitskalen werden als Signalsschwankungen wahrgenommen [16], die aber wegen der Stationarität der Zeitreihen auf Zeitskalen $T \gtrsim 1/20s$ nicht auftreten.

Die Zeitreihen eines als „gut“ und eines als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Schiebedachs sind in Abb. 4.1 gezeigt. Da die oben beschriebenen Eigenschaften vermutlich typisch für eine Reihe weiterer stationärer technischer Schallsignale sind, besteht die Hoffnung, daß der in diesem Kapitel vorgestellte Merkmalsvektor auch über das spezielle hier untersuchte Problem hinaus anwendbar ist.

4.2 Merkmale aus Wavelet- Restklassen

Wir wollen zunächst die Idee vorstellen, die der Entwicklung eines Merkmalsvektors zugrunde liegt, der auf Schallsignale mit den oben beschriebenen Eigenschaften angepaßt ist. Die Eigenschaft, daß die Informationen zur Trennung von guten und fehlerhaften Schiebedächern vom menschlichen Ohr aufgelöst werden kann, leitet uns, die Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik des Gehörs nachzuahmen. Allgemein ist die Analyse der psychoakustischen Eigenschaften von Geräuschen ein möglicher Ansatzpunkt zur Merkmalsfindung [16]. Wir betrachten hiervon nur einen Aspekt, die frequenzabhängige Auflösung von Schallsignalen durch das Gehör. Wie in Kap. 2.1.3 erläutert, kann die für Frequenzen $\gtrsim 500\text{Hz}$ in guter Näherung hyperbolische Auflösungscharakteristik durch eine Wavelettransformation approximiert werden.

Es ist klar, daß für einen Prüfer nur wenige Merkmale der Schallsignale für die Beurteilung eines Produktes von Bedeutung sind und viele weitere unabhängig davon variieren können. Wir wollen jedoch nicht nach diesen Unterschieden, d.h. den Signaturen zwischen Wavelettransformationen von Schließgeräuschen guter und fehlerhafter Schiebedächer suchen. Statt dessen nehmen wir an, daß sich alle charakteristischen Merkmale der Zeitreihen, ob sie für den Qualitätszustand zunächst bedeutsam sind oder nicht, herausbilden werden, wenn über statistische Fluktuationen und Rauschanteile geeignet gemittelt werden kann. Enthält ein Signal Informationen im oberen Frequenzbereich, wie es bei den Schiebedachdaten der Fall ist, so kann der Rauschanteil nicht durch Tiefpaßfiltern abgetrennt werden.

Natürlich ist es nicht möglich über eine Zeit-Frequenz Darstellung zu mitteln, da hierdurch die Informationen in dem Unterraum der Zeit-Frequenz Ebene, über den gemittelt würde, zerstört werden. Wir definieren daher eine *Restklasse aus Wavelettransformationen*, aus denen wir Merkmalsvektoren konstruieren. Diese Größen erlauben einen Mittelungsprozeß im Zeitraum ohne die zeitaufgelösten Informationen zu verlieren. Wir zeigen zunächst anhand künstlicher, verrauschter Signale, daß auf diese Weise Merkmalsvektoren mit einem relativ hohen Signal-Rausch Verhältnis konstruiert werden können. Die Ergebnisse werden durch die anschließende Anwendung auf die Schiebedachdaten (qualitativ) bestätigt.

Im nächsten Schritt müssen die für die Fehlererkennung relevanten Merkmale aus der Menge aller „typischen“ Eigenschaften der Signale isoliert werden. Hierzu trainieren wir einen Klassifikationsalgorithmus mit Merkmalsvektoren, die aus Trainingsdaten von guten und fehlerhaften Schiebedächern berechnet wurden. In der Trainingsmenge sollten Beispiele aus allen Fehlerklassen enthalten sein. In der anschließenden Kontrollphase werden die aus den Testdaten erzeugten Merkmalsvektoren mit den als „gut“ sowie als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Trainingsvektoren in jeweils einer Umgebung der Testvektoren verglichen. Ist die Trainingsmenge hinreichend groß, so erwarten wir, daß die gemittelten Abstände eines Testvektors zu den am nächsten gelegenen „guten“ bzw. „fehlerhaften“ Trainingsvektoren im wesentlichen die Merk-

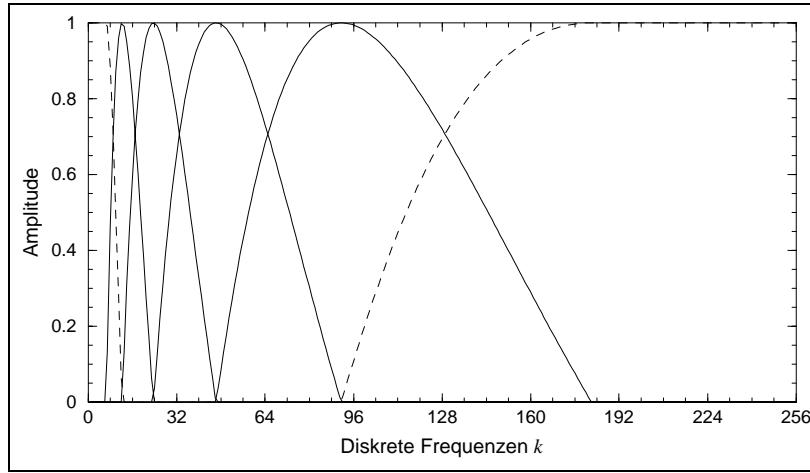


Abbildung 4.2: Die Waveletfilter (Bandpaßfilter) $\{\widehat{h}_{k,2}, \dots, \widehat{h}_{k,5}\}$ (4.1) und (2.39) im Frequenzraum (durchgezogene Linien), zusätzlich sind der Hoch- und der Tiefpaßfilter $\{\widehat{hp}_{k,1}\}$ bzw. $\{\widehat{tp}_{k,5}\}$ gestrichelt eingezeichnet.

male der Zeitreihe repräsentieren, die für die Qualität des getesteten Schiebedachs von Bedeutung sind. Die Klassifikation kann dann durch den Vergleich der Differenz der gewichteten Abstände mit einem Schwellenwert erfolgen.

4.2.1 Wavelettransformation der Zeitreihen

Wie im letzten Abschnitt erläutert, ist die relevante Zeitskala zur Auflösung der klanglichen Informationen der Schallsignale von den Schiebedächern $T \approx 1/20s$. Wir berechnen daher diskrete Wavelettransformationen (wie in Kap. 2.2.3 dargestellt) über alle Abschnitte der Länge $N = 512$ des mittleren Teils der Zeitreihen. Die verwendeten Waveletfilter sollen die Eigenschaft haben, in der Zeit-Frequenz Ebene gut lokalisiert zu sein, d.h. eine kleine Zeit-Frequenz Unschärfe zu haben, sowie die Bedingungen (2.38) und (2.41) zu erfüllen. Wir definieren damit die Hoch- und den Tiefpaßfilter $\{\widehat{hp}_{k,j}, \widehat{tp}_{k,j}; k = -N/2 + 1, \dots, N/2; j = 1, \dots, 5\}$ durch

$$\widehat{hp}_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \left| \frac{k}{N} \right| < f_j / \sqrt{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \sin[\pi \log_2(f_j^{-1} \left| \frac{k}{N} \right|)])} & \text{für } f_j / \sqrt{2} \leq \left| \frac{k}{N} \right| \leq \sqrt{2} f_j \\ 1 & \text{für } \sqrt{2} f_j < \left| \frac{k}{N} \right| \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\widehat{tp}_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \left| \frac{k}{N} \right| < f_j / \sqrt{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \sin[\pi \log_2(f_j^{-1} \left| \frac{k}{N} \right|)])} & \text{für } f_j / \sqrt{2} \leq \left| \frac{k}{N} \right| \leq \sqrt{2} f_j \\ 0 & \text{für } \sqrt{2} f_j < \left| \frac{k}{N} \right| \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

wobei $f_j = 2^{-j} f_c = 2^{-(j+1)}$ die Trennfrequenz der Filter $\{\widehat{hp}_{k,j}\}$ und $\{\widehat{tp}_{k,j}\}$ bezeichnet. Die Waveletfilter $\{\widehat{h}_{k,j}; k = -N/2 + 1, \dots, N/2; j = 1, \dots, 6\}$ werden dann

durch Gl. (2.39) definiert. Abb. 4.2 zeigt die Bandpaßfilter $\{\widehat{h}_{k,2}, \dots, \widehat{h}_{k,5}\}$ sowie den Hoch- und Tiefpaßfilter $\{\widehat{hp}_{k,1} \equiv \widehat{h}_{k,1}\}$ bzw. $\{\widehat{tp}_{k,5} \equiv \widehat{h}_{k,6}\}$.

Durch Wavelettransformation mit den in Abb. 4.2 gezeigten Filtern erhalten wir aus jedem Zeitreihenabschnitt $\{x_n; n = 1, \dots, 512\}$ eine Matrix $WT_x^h(n, j)$ vom Format 512×6 , deren Spalten die Hochpaß-, Bandpaß- und Tiefpaß- gefilterten Komponenten dieses Teilstücks der Zeitreihe enthalten. Von jeder Zeitreihe werden insgesamt 40 Matrizen dieses Typs berechnet, über die ein Mittel im Zeitraum gebildet werden soll.

4.2.2 Definition der Wavelet- Restklassen

Wir wollen nun aus den Wavelettransformationen $WT_x^h(n, j)$ ein Größe definieren, über die im Zeitraum gemittelt werden kann. Da die Zeitreihen eine näherungsweise stationäre Oszillation beschreiben, unterscheiden sich ihre Teilstücke im wesentlichen durch die Anfangsbedingungen, welche durch die Realisierung einer Zufallsvariablen beschrieben werden können. Dies leitet uns, eine Größe zu definieren, die keine Funktion der Anfangsbedingungen mehr ist: Die Menge (Restklasse) aller *zyklischen Permutationen* von $WT_x^h(n, j)$ in der Variablen n :

$$R_x^h(j) := \{P_{zyk}(WT_x^h(n, j)) \mid n = 1, \dots, N\}; \quad j = 1, \dots, \log_2(N). \quad (4.2)$$

Für die Definition der Größe R_x^h ist die Translationsinvarianz von $WT_x^h(n, j)$ im Zeitraum erforderlich. Es gilt:

$$P_{zyk}(WT_x^h(m, j))(n, j) = WT_{(P_{zyk}(x))}^h(n, j). \quad (4.3)$$

Aus diesem Grund wird, wie in Kap. 2.2.3 erläutert, die Wavelettransformation eines Vektors $\{x_n; n = 1, \dots, N\}$ durch eine (redundante) Matrix und nicht durch einen Vektor gleicher Dimension dargestellt. Weiterhin ist klar, daß die Definition (4.2) von der Anzahl der Spalten von $WT_x^h(n, j)$ unabhängig ist, die Zerlegung eines Signals in seine Bandpaß- gefilterten Anteile also nicht vollständig zu sein braucht.

Auf der Menge $\{R_x^h\}$ läßt sich eine *Metrik* wie folgt definieren:

$$d(R_x^h, R_y^h) := \min_n \|WT_x^h - P_{zyk}(WT_y^h(n, j))\|_2. \quad (4.4)$$

Hierbei wird das Minimum des Abstands

$$\|WT_x^h - WT_y^h\|_2 = \sqrt{\sum_n \sum_j (WT_x^h(n, j) - WT_y^h(n, j))^2}$$

über alle zyklischen Permutationen von $WT_y^h(n, j)$ in der Variablen n gebildet. Es ist zu zeigen, daß $d(R_x^h, R_y^h)$ die Eigenschaften einer Metrik hat. Zunächst folgt aus der Definition (4.4) sofort: $d(R_x^h, R_y^h) = d(R_y^h, R_x^h) \geq 0$ und $d(R_x^h, R_y^h) = 0 \iff R_x^h = R_y^h$.

Die Dreiecksungleichung folgt schließlich aus der Abschätzung:

$$\begin{aligned} d(R_x^h, R_y^h) &\leq \|WT_x^h - WT_y^h\|_2 \\ &= \|WT_x^h - WT_z^h + WT_z^h - WT_y^h\|_2 \\ &\leq \|WT_x^h - WT_z^h\|_2 + \|WT_z^h - WT_y^h\|_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Diese Ungleichung gilt für jede Wahl von WT_y^h und WT_z^h unabhängig voneinander. Insbesondere können für die gegebenen Signale $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ und $\{z_n\}$ die zyklischen Permutationen von $WT_x^h(n, j)$ und $WT_y^h(n, j)$ so gewählt werden, daß $\|WT_x^h - WT_z^h\|_2$ und $\|WT_z^h - WT_y^h\|_2$ minimal werden. Damit steht in der letzten Zeile von (4.5): $d(R_x^h, R_y^h) \leq d(R_x^h, R_z^h) + d(R_z^h, R_y^h)$.

Als nächsten Schritt definieren wir auf der Menge $\{R_x^h\}$ eine *Addition* durch:

$$R_x^h \oplus R_y^h := \{P_{zyk}([WT_x^h + P_{min}(WT_y^h)](n, j)) \mid n = 1, \dots, N\}; \quad (4.6)$$

$j = 1, \log_2(N)$. Die zyklische Permutation $P_{min}(WT_y^h(m, j))$ wird hierbei durch die Bedingung $\|WT_x^h - P_{min}(WT_y^h(m, j))\|_2 = \min!$, also durch die Minimumsbedingung in der Definition der Metrik (4.4) bestimmt. Die Addition (4.6) ist *kommutativ* aber aufgrund der Permutation P_{min} *nicht assoziativ*. Aus (4.3) folgt die Abgeschlossenheitsrelation

$$R_x^h \oplus R_y^h = R_{(x+P_{min}(y))}^h \in \{R_x^h\};$$

somit bildet die Menge $\{R_x^h \mid \oplus\}$ einen *Ring* mit einer Metrik. Weiterhin gilt $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$a(R_x^h \oplus R_y^h) = aR_x^h \oplus aR_y^h.$$

4.2.3 Konstruktion der Merkmalsvektoren

Wir wollen nun aus der Zeitreihe $\{x_n; n = 1, \dots, KN\}$ einen Merkmalsvektor konstruieren, indem wir über die Elemente $\{R_{x^i}^h; i = 1, \dots, K\}$ mitteln, die aus den K Segmenten $\{x_n^i; n = 1, \dots, N\}$ berechnet werden (N muß hierbei eine Potenz von 2 sein). Da die Addition (4.6) nicht assoziativ ist, muß die Summationsreihenfolge von $\{R_{x^i}^h\}$ festgelegt werden. Dies erfolgt durch einen *Clusterungsalgorithmus*:

Zunächst definiert jedes Element ein eigenes Cluster mit dem „Schwerpunktvektor“ $c_{i,1} = R_{x^i}^h$. Der Index von $c_{i,k}$ gibt hierbei an, daß das Cluster i aus k Elementen besteht. Im ersten Schritt werden die beiden Cluster mit dem kleinsten „Schwerpunkt Abstand“ $d(c_{i,1}, c_{j,1})$ zusammengelegt, indem ein gemeinsamer „Schwerpunkt“ durch $c_{i,2} = (c_{i,1} \oplus c_{j,1})/2$ definiert wird. Auf diese Weise werden in der Reihenfolge des jeweils kleinsten Abstands $d(c_{i,k}, c_{j,l})$ alle Cluster sukzessiv vereinigt, wobei der gemeinsame „Schwerpunkt“ von zwei Clustern durch $c_{i,(k+l)} = (kc_{i,k} \oplus lc_{j,l})/(k+l)$ definiert wird. Dieser Prozeß endet mit dem Element $c_{1,K}$, welches nun einen „Schwerpunkt“ oder Mittelwert für die Menge $\{R_{x^i}^h\}$ angibt. Die Eigenschaften der auf diese

Weise konstruierten Merkmalsvektoren werden wir im im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

Dieser Clusterungsalgorithmus ist nicht die einzige Möglichkeit, einen Mittelwert für die Menge $\{R_{x_i}^h\}$ zu erhalten. Das Wachstum der Cluster erfolgt bei dem Verfahren von mehreren „Bildungskeimen“ aus, d.h. es entstehen im allgemeinen verschiedene Cluster mit mehreren Elementen, die am Ende vereinigt werden. Alternativ hierzu kann man nur einen „Bildungskeim“ zulassen, d.h. ausgehend vom ersten Cluster mit zwei Elementen werden alle weiteren Ein-Elemente Cluster nur noch mit diesem größten Cluster in der Reihenfolge des jeweils kleinsten Abstands $d(\tilde{c}_{1,k}, c_{j,1})$ zum „Schwerpunkt“ $\tilde{c}_{1,k}$ des Clusters vereinigt. Es stellt sich jedoch heraus, daß die auf diese Weise konstruierten Merkmalsvektoren $\tilde{c}_{1,K}$ für alle von uns untersuchten Daten (deutlich) schlechtere Eigenschaften als $c_{1,K}$ haben.

Wir erwarten, daß sich durch diesen Mittelungsprozeß die relevanten Informationen im Zeitraum von $WT_x^h(n, j)$ herausbilden lassen, indem statistische Fluktuationen und Rauschanteile gedämpft werden. Es reicht hierbei aus, nur diejenigen Signalkomponenten (d.h. Spalten) von $WT_x^h(n, j)$ zu berücksichtigen, welche relevante Zeitinformationen enthalten können. Dies sind der Hochpaß und die folgenden $J - 1$ Bandpässe, wobei die Filterzahl J durch die Frequenz der Grundschwingung oder der langsamsten dominanten Modulation des Schallsignals bestimmt wird. Die Frequenzbänder unterhalb dieser Grundfrequenz enthalten fast keine Zeitinformation mehr. Für die Schallsignale der Schiebedächer ergibt sich $J = 5$ (Abb. 4.2).

Sei nun $\widetilde{WT}_x^h(n, j)$ die Matrix, welche aus den ersten J Spalten von $WT_x^h(n, j)$ gebildet wird. Dann folgt aus (2.43):

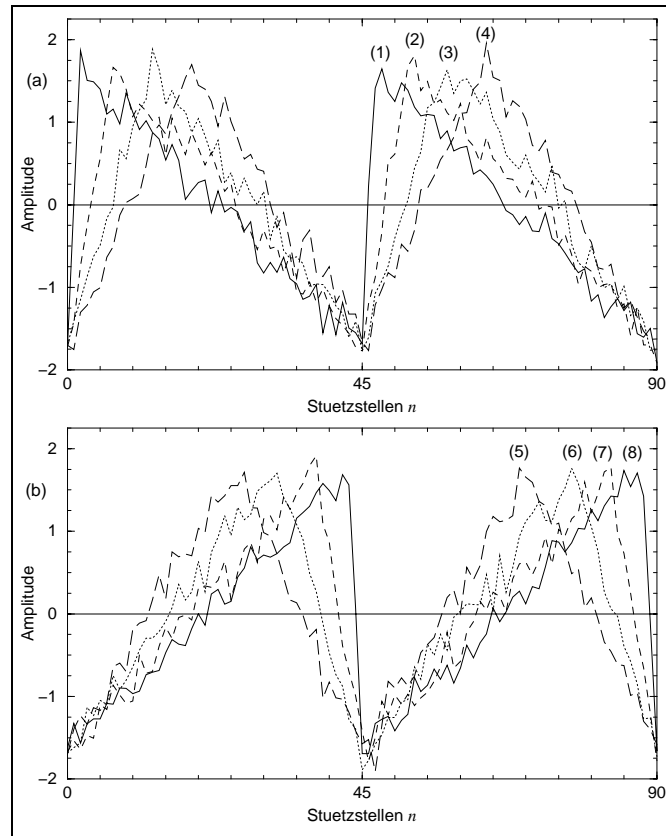
$$\begin{aligned} \|\widetilde{WT}_x^h - \widetilde{WT}_y^h\|_2^2 &= \sum_k (\hat{x}_k - \hat{y}_k)(\bar{\tilde{x}}_k - \bar{\tilde{y}}_k) \sum_{j=1}^J |\hat{h}_{k,j}|^2 \\ &= \sum_k (\hat{x}_k - \hat{y}_k)(\bar{\tilde{x}}_k - \bar{\tilde{y}}_k) |\widehat{hp}_{k,J}|^2 \\ &= \|\widehat{hp}_J \hat{x} - \widehat{hp}_J \hat{y}\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Im Schritt von der ersten zur zweiten Zeile haben wir die Eigenschaft (2.42) der Filter, d.h. $\sum_{j=1}^J |\hat{h}_{k,j}|^2 = 1 - |\hat{tp}_{k,J}|^2 = |\widehat{hp}_{k,J}|^2$ ausgenutzt. Aus (4.7) folgt, daß $d(R_x^h, R_y^h)$ (4.4) auch mit Hilfe der Hochpaß- gefilterten Signale $\{\widehat{hp}_{k,J} \hat{x}_k, \widehat{hp}_{k,J} \hat{y}_k\}$ berechnet werden kann. Damit muß nur ein eindimensionaler Vektor statt einer Matrix zyklisch durchpermutiert werden; für die numerische Implementierung ist dieser Unterschied bedeutsam.

4.2.4 Eigenschaften der Merkmalsvektoren

Wir wollen zunächst die Eigenschaften von aus Wavelet- Restklassen konstruierten Merkmalsvektoren anhand künstlicher, verrauschter Signale studieren. Hierzu betrachten wir acht Sägezahnsignale, die sich durch ihre Flankensteilheit unterschei-

Abbildung 4.3: Sägezahnsignale mit 15% weißem Rauschen. Die (unverrauschten) Signale in (a) und (b) sind paarweise symmetrisch zueinander.



den, wobei je zwei der Signale symmetrisch zueinander sind, siehe Abb. 4.3. Die Sägezahnsignale sind mit 15% weißem Rauschen überlagert. Diese Signale haben mit den Schiebedachdaten die Eigenschaft gemeinsam, daß sie oberhalb einer Zeitskala T stationär sind und sich alle Informationen, die für die Klassifikation der Zeitreihen relevant sind, unterhalb dieser Zeitskala befinden. Bei den einfachen Beispielsignalen in Abb. 4.3 ist T natürlich die Periode.

Wir wollen nun die Merkmalsvektoren $c_{1,K}$ mit der Standardmethode der Wahl von Merkmalen aus Spektralkomponenten vergleichen. Hierzu berechnen wir gefenstertere Fouriertransformationen der Sägezahnsignale über 512 Stützstellen mit zur Hälfte überlappenden Fenstern und mitteln die Betragsquadrate über eine Signallänge von $30 \cdot 512 = 15360$. In Abb. 4.4 sind die paarweisen Euklidischen Abstände dieser Merkmalsvektoren mit gestrichelten Verbindungslinien angetragen.

Zum Vergleich berechnen wir die Merkmale $\{c_{1,K}^i; i = 1, \dots, 8\}$ der Signale, wobei $K = 30$ gewählt wird. Die Wavelettransformationen $\{WT_{x_l}^h(n, j); l = 1, \dots, K\}$ überdecken jeweils 512 Stützstellen, damit ist die Länge der Zeitreihen ebenfalls 15360. Es ist wichtig zu bemerken, daß die Periode von $WT_{x_l}^h(n, j)$ kein Vielfaches (oder nahezu Vielfaches) der Periode der Sägezahnsignale $T = 45$ ist; dies könnte andernfalls die Ursache von Artefakten sein. Nach Konstruktion liegt die Frequenz der Grundschiwingung der Signale $f_1 = 1/45$ im Bereich des vierten Bandpaßes $\{\hat{h}_{k,5}\}$;

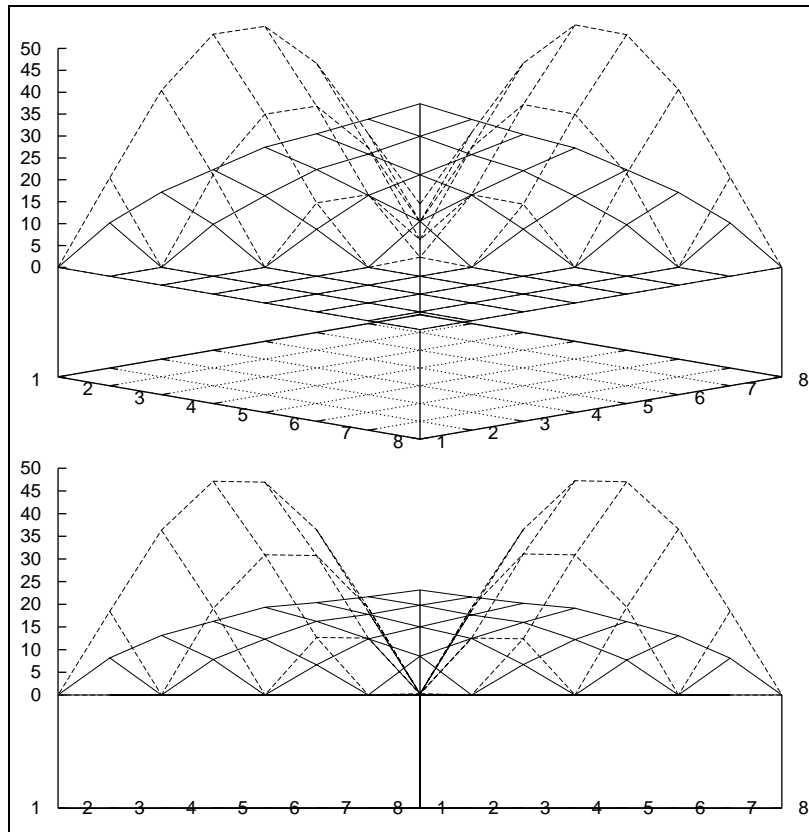


Abbildung 4.4: Vergleich der paarweisen Abstände $\{d(c_{1,30}^i, c_{1,30}^j); i, j = 1, \dots, 8\}$ (4.4) der Merkmalsvektoren aus Wavelet- Restklassen (durchgezogene Linien) und der Euklidischen Abstände der Merkmalsvektoren aus Spektralkomponenten (gestrichelte Linien), die jeweils aus den Signalen in Abb. 4.3 berechnet wurden. Die Nummerierung der Signale ist in Abb. 4.3 angegeben; der Blickwinkel beträgt 15° im oberen und 0° im unteren Bild. Die vordere Hälfte der Abbildung wäre symmetrisch zum dargestellten Teil und ist deshalb Null gesetzt.

damit reicht es aus, die ersten fünf Spalten der Matrizen $WT_{x_l}^h(n, j)$ zu berücksichtigen. Es zeigt sich, daß die Trennungsleistung der Merkmalsvektoren $\{c_{1,K}^i\}$ in den vier Bandpaßanteilen enthalten ist, der Hochpaß hingegen kaum einen Beitrag liefert. Dies ist nicht überraschend, da der Hochpaß dieser Signale starkes Rauschen enthält. Somit wäre es auch möglich, den Rauschanteil durch Tiefpaßfiltern zu reduzieren; jedoch ist dies bei realen Daten, wie z.B. den Schallsignalen der Schiebedächer, häufig nicht ohne Informationsverlust machbar.

In Abb. 4.4 sind die paarweisen Abstände $\{d(c_{1,30}^i, c_{1,30}^j); i, j = 1, \dots, 8\}$ der Merkmalsvektoren mit durchgezogenen Verbindungslinien eingezeichnet, wobei nur die vier Bandpaßanteile berücksichtigt sind. Es ist deutlich zu erkennen, daß mit Hilfe von Spektralkomponenten nur der unterschiedliche Oberschwingungsanteil der Säge-

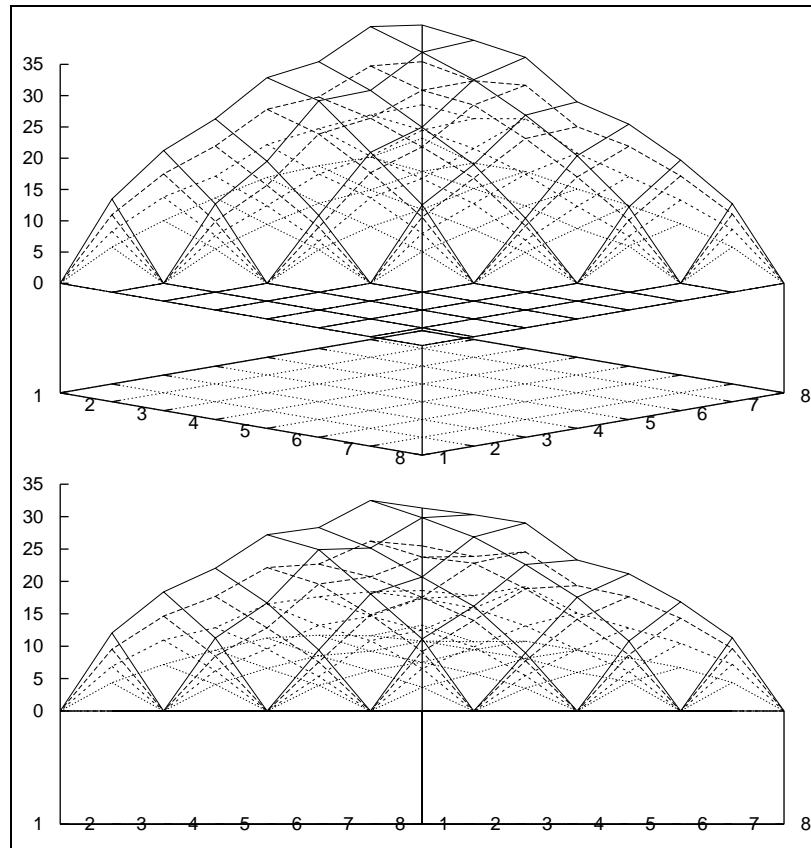


Abbildung 4.5: Die Signal-Rausch-Verhältnisse $\{r_{ij}(K); i, j = 1, \dots, 8\}$ (4.8) der Merkmalsvektoren $\{c_{1,K}^i; i = 1, \dots, 8\}$ für $K = 4, 10, 20$ und 30 (gepunktete, kurz gestrichelte, länger gestrichelte, bzw. durchgezogene Verbindungslinien). Die Nummerierung der Signale und die Blickwinkel entsprechen jenen in Abb. 4.4.

zahnsignale getrennt werden kann, die zueinander symmetrischen Signale jedoch nicht unterschieden werden können. Die Merkmalsvektoren $\{c_{1,30}^i\}$ lösen hingegen die Zeitinformation gut auf und können die symmetrischen Signale problemlos unterscheiden. Es ist zu sehen, daß der Abstand $d(c_{1,30}^i, c_{1,30}^j)$ als Funktion von $|i - j|$, dem Betrag der Differenz der Nummern in Abb. 4.3, unabhängig von der Frequenzinformation der Merkmalsvektoren monoton zunimmt.

Die interessante Frage ist nun, *wie stark* statistische Fluktuationen und Rauschanteile durch den Mittelungsprozeß, der die Merkmalsvektoren $c_{1,K}$ definiert, reduziert werden können. Bei der Mittelung über Spektralkomponenten, die aus K disjunkten Zeitreihenabschnitten berechnet werden, konvergiert der Rauschanteil mit $1/\sqrt{K}$, der Standardabweichung des Schätzers für den Erwartungswert, gegen Null. Im Fall von K zur Hälfte überlappender Fenster erfolgt die Konvergenz mit $\sqrt{11/9K}$ [31]. Für die Größen $c_{1,K}$ wird man hingegen eine langsamere Konvergenz erwarten. Wir untersuchen dies, indem wir acht identische, (nahezu) gleichschenkelige Sägezahnsignale

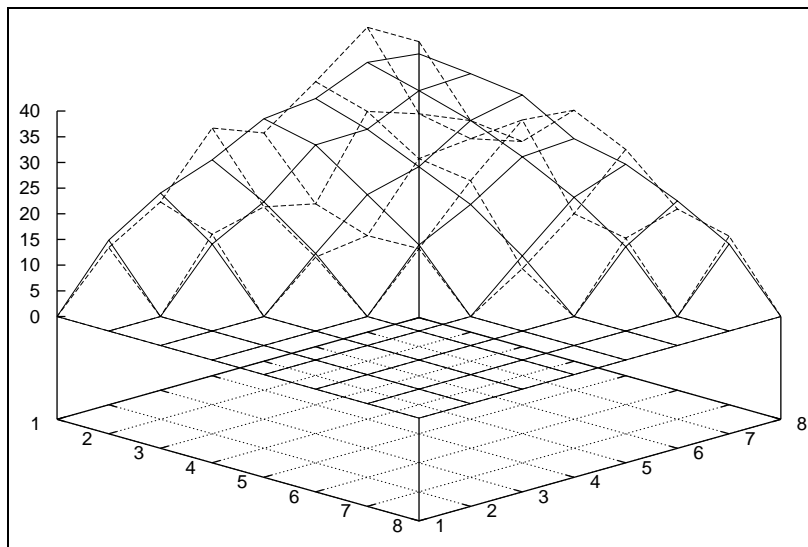


Abbildung 4.6: Die Signal-Rausch Verhältnisse $\{r_{ij}(50); i, j = 1, \dots, 8\}$ (gestrichelt) im Vergleich zu $\{r_{ij}(30)\}$ (durchgezogen) aus Abb. 4.5. Der Blickwinkel beträgt 25° .

mit 15% unterschiedlich realisiertem weißen Rauschen überlagern und die Matrix

$$r_{ij}(K) = \frac{d(c_{1,K}^i, c_{1,K}^j)}{d(\tilde{c}_{1,K}^i, \tilde{c}_{1,K}^j)}; \quad i, j = 1, \dots, 8 \quad (4.8)$$

als Funktion der Anzahl der Elemente $\{R_{xl}; l = 1, \dots, K\}$, über die gemittelt wird, betrachten. Die Merkmalsvektoren $\{\tilde{c}_{1,K}^i\}$ werden hierbei aus den (bis auf den Rauschanteil) identischen Signalen berechnet, während die Vektoren $\{c_{1,K}^i\}$ wie oben definiert sind. Die Größen $\{r_{ij}(K)\}$ definieren ein Maß für das Signal-Rausch Verhältnis der Merkmalsvektoren. In Abb. 4.5 ist $\{r_{ij}(K)\}$ für $K = 4, 10, 20$ und 30 dargestellt.

Es ist zu erkennen, daß für $K \lesssim 30$ $r_{ij}(K)$ für alle Paare i, j in ungefähr gleich großen Schritten bei jeder Verdoppelung von K anwächst. Wir vermuten daher in diesem Bereich näherungsweise $r_{ij}(K) \sim \log(K) \forall i, j$. Ein wichtiges Kriterium für die Güte der Rauschreduktion sind allerdings die Fluktuationen von $\{r_{ij}(K)\}$ bei konstantem K , d.h. wie „glatt“ die Oberflächen in Abb. 4.5 sind.

Geht man zu höheren Werten von K , so zeigt sich, daß der Mittelungsprozeß *nicht konvergiert*. Im Bereich $30 \lesssim K \lesssim 40$ stellt sich zunächst eine Sättigung ein; die Signal-Rausch Verhältnisse (4.8) ändern sich fast nicht mehr. So unterscheidet sich $\{r_{ij}(40)\}$ kaum sichtbar von $\{r_{ij}(30)\}$, wir haben diese Werte daher nicht eingezeichnet. Für $K \gtrsim 40$ wird das Mittelungsverfahren instabil, $\{r_{ij}(K)\}$ beginnt stark zu fluktuieren und verschlechtert sich für viele Paare i, j wieder deutlich. Zur Illustration ist in Abb. 4.6 $\{r_{ij}(50)\}$ im Vergleich zu $\{r_{ij}(30)\}$ eingezeichnet.

Diese Eigenschaften erinnern an das Verhalten *asymptotischer Reihen* [27], die sich für kleine Werte des Ordnungsparameters n an die Funktion annähern, deren

Entwicklung sie darstellen, bei einem endlichen Wert n_{max} die beste Approximation erzielen und danach divergieren.

Ob überhaupt, und wenn ja wie gut diese Rauschreduktion funktioniert, hängt stark vom Rauschanteil der Sägezahnsignale ab. Für einen Rauschanteil $< 15\%$ erhalten wir entsprechend höhere Signal-Rausch Verhältnisse (4.8), während das Verfahren bei einem zu großen Rauschanteil (in unserem Fall $\gtrsim 20\%$) versagt. Auch wenn wir die Merkmalsvektoren $c_{1,K}$ nur anhand der einfachen Beispielsignale in Abb. 4.3 untersucht haben, werden wir einige der Eigenschaften bei den Merkmalsvektoren, die wir im nächsten Abschnitt aus den Schiebedachdaten berechnen, wiederfinden.

4.3 Akustische Qualitätskontrolle von Schiebedächern

In diesem Abschnitt wollen wir die Merkmalsvektoren $c_{1,K}$ auf die Klassifikation der Körperschallsignale von elektrischen Schiebedächern anwenden. Uns liegen insgesamt 108 Datensätze von 13 als „gut“ und 14 als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Schiebedächern vor, wobei von jedem Schiebedach je zwei Messungen in zwei verschiedenen Sensoranordnungen ausgeführt wurden.

Hierbei treten zwei Probleme auf: Erstens ist die Datenbasis für eine statistisch signifikante Bestimmung der Trennungsleistung der Merkmalsvektoren zu klein. Darüberhinaus ist die Vorklassifikation der Datensätze auch nicht zuverlässig. Bei Nachtests anhand der aufgenommenen Schallsignale ergaben sich einige Abweichungen von den ursprünglichen Bewertungen der Prüfer. Da wir aufgrund der kleinen Datenmenge nicht die Möglichkeit haben, uns nur auf die Datensätze zuverlässig vorklassifizierter Schiebedächer zu beschränken, betrachten wir die folgende Fragestellung:

Angenommen ein Klassifikationalgorithmus wird mit Beispieldaten von als „gut“ und als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Schiebedächern trainiert. Wie gut kann dann in einem *out-of-sample* Test das Ergebnis der Vorklassifikation reproduziert werden? Wir nehmen hierbei an, daß nur die Bewertungen von Schiebedächern an der Grenze des Toleranzbereichs unsicher sind und somit die Klassifikation der Testdaten nicht nach zufälligen antrainierten Kriterien erfolgt, sondern im wesentlichen aufgrund von Merkmalen, die für die Qualität der Produkte von Bedeutung sind. Die Interpretation der Ergebnisse ist natürlich nur qualitativ möglich, indem die Trennungsleistung verschiedener Merkmalsvektoren verglichen wird.

4.3.1 Klassifikation der Merkmalsvektoren

Wir berechnen die Merkmale $\{c_{1,K}^i; i = 1, \dots, 108\}$ der Schiebedächer jeweils aus dem mittleren Teil der Zeitreihen, wobei wir $K = 20, 30$ sowie 40 wählen. Bei dem Mittelungsprozeß werden, wie erwähnt, nur der Hochpaß und die vier führenden Bandpässe der Wavelettransformationen $\{WT_{x_i}^h(n, j); l = 1, \dots, K\}$ berücksichtigt, da die übrigen Signalkomponenten keine relevante Zeitinformation enthalten.

Die Klassifikation der Daten erfolgt in einer *leave-one-out* Statistik (Kap. 2.3.3) auf dem gesamten Datensatz, der in einer Sensoranordnung aufgenommen wurde. Da von jedem Schiebedach zwei Zeitreihen vorliegen, betrachten wir genauer eine *leave-two-out* Statistik, wobei die abhängigen Zeitreihen jeweils aus der Trainingsmenge entfernt werden.

Die Klassifikation eines Testvektors erfolgt durch den Vergleich mit den Trainingsvektoren von als „gut“ sowie als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Schiebedächern, die sich jeweils in einer Umgebung (verschiedener Größe) des Testvektors befinden. Zu den Vektoren in beiden Umgebungen wird ein gemittelter Abstand bestimmt und die Differenz der gewichteten Abstände mit einem Schwellenwert verglichen.

Zunächst muß hierzu der Abstand eines Merkmalsvektors $c_{1,K}^T$ zu einer Menge Vektoren $\{c_{1,K}^i; i = 1, \dots, L\}$ eindeutig definiert werden. Es ist naheliegend, den Abstand von $c_{1,K}^T$ zu einem „Schwerpunktvektor“ dieser Menge zu betrachten, wobei die erste Möglichkeit zur Definition eines „Schwerpunkts“ \tilde{C}_L der Clusterungsalgorithmus bietet, den wir auch zur Konstruktion der Merkmalsvektoren (Abschnitt 4.2.3) verwenden. Im Unterschied zu diesem Mittelungsverfahren existiert hier jedoch eine natürliche Reihenfolge für die Addition von $\{c_{1,K}^i\}$: Ihre Abstände zum Testvektor $c_{1,K}^T$. Damit läßt sich ein weiterer „Schwerpunktvektor“ C_L durch Summation von $\{c_{1,K}^i\}$ in der Reihenfolge der Abstände $d(c_{1,K}^T, c_{1,K}^i)$, definieren, wobei mit den beiden am nächsten zum Testvektor gelegenen Elementen begonnen wird. Die Konstruktion von C_L erfolgt damit - im Unterschied zu \tilde{C}_L - von *einem* „Bildungskeim“ aus; diesen Unterschied haben wir bereits in Abschnitt 4.2.3 diskutiert. Damit ergibt sich als dritte Möglichkeit zur Definition eines „Schwerpunkts“ \check{C}_L der dort beschriebene „Einkeim“- Clusterungsprozeß.

Der Vergleich dieser drei Möglichkeiten führt im Fall der Schiebedachdaten zu dem interessanten Resultat, daß die Berechnung von „Umgebungsschwerpunkten“ nach den beiden „Einkeim“- Clusterungsverfahren, C_L und \check{C}_L , zu ungefähr gleichen Klassifikationsergebnissen führt, während die Verwendung von \tilde{C}_L (deutlich) schlechtere Resultate liefert. Damit zeigt sich, daß zur Mittelung der Restklassen- Elemente $\{R_{x,l}; l = 1, \dots, K\}$ der „Mehrkeim“- Clusterungsalgorithmus, für die Definition von „Umgebungsschwerpunkten“ hingegen ein „Einkeim“- Verfahren offenbar besser geeignet ist. Bei der Addition von Trainingsvektoren in der Reihenfolge ihrer Abstände zum Testvektor entfällt zudem die Berechnung der Abstandsmatrizen; aus numerischen Gründen ist dieses Verfahren daher vorzuziehen.

Bei der Wahl der Trainingsmenge stellt es sich als sinnvoll heraus, Ausreißer aus der Stichprobe der als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Merkmalsvektoren nicht zu berücksichtigen um nur „typische“ Fehler zu trainieren. Die Detektierung von Fehlern, die zu starken Abweichungen der Schallsignale führen, stellt ohnehin kein Problem dar. Hierzu berechnen wir die Abstände aller Trainingsvektoren von fehlerhaften Schiebedächern zum jeweils korrespondierenden „Schwerpunkt“ $C_{L=26}$ derjenigen Vektoren, welche die guten Produkte repräsentieren, und entfernen die n_1 Elemente

mit den größten Abständen. Aus der verbleibenden Trainingsmenge werden nun für jeden Testvektor $c_{1,K}^T$ die n_2 am nächsten gelegenen Elemente gesucht. Ebenso werden die n_3 als „gut“ vorklassifizierten Trainingsvektoren mit den kleinsten Abständen zu $c_{1,K}^T$ ermittelt und hieraus die Abstandsvektoren \mathbf{d}_g und \mathbf{d}_f zu den Umgebungen der „guten“ bzw. „fehlerhaften“ Trainingsvektoren berechnet. Hierbei ist

$$\mathbf{d}_{g,f} = \{d([c_{1,K}^T]_1, [C_L^{g,f}]_1), \dots, d([c_{1,K}^T]_J, [C_L^{g,f}]_J)\}. \quad (4.9)$$

Die Metrik $d([c_{1,K}^T]_j, [C_L^{g,f}]_j)$ (4.4) wird von jeweils *einer* Filterkomponente der Merkmalsvektoren (d.h. einer Spalte von $WT_x^h(n, j)$) berechnet. Bei insgesamt J Filtern erhält man damit zwei J -dimensionale Vektoren. Hierdurch wird es möglich, die Frequenzbänder der Signale individuell zu gewichten. Dies ist erforderlich, da sich sowohl die Defekte der Schiebedächer wie auch sonstige Einflüsse in den verschiedenen Frequenzbändern der Schallsignale unterschiedlich stark bemerkbar machen und daher die Abstände der Test- zu den Trainingsvektoren individuell für die Komponenten der Merkmalsvektoren $c_{1,K}$ gewichtet werden müssen. Dies erfolgt durch die Definition eines *relativen Abstands*, wobei

$$d_{rel} = \langle \mathbf{d}_g - \alpha \mathbf{d}_f, \mathbf{n} \rangle \quad \text{mit } \|\mathbf{n}\|_2 = 1 \quad (4.10)$$

ist. α bezeichnet hierbei eine vektorwertige Wichtungskonstante und \mathbf{n} definiert den Unterraum, auf den der Abstandsvektor projiziert wird. Die Abstände d_{rel} der Testvektoren können jetzt mit einem Schwellenwert verglichen werden.

Zur Berechnung von d_{rel} müssen die Konstanten α und \mathbf{n} sowie die Umgebungsgrößen n_1 , n_2 und n_3 geschätzt werden. Dies erfolgt durch die Minimierung des gesamten Klassifikationsfehlers der *leave-two-out* Statistik. Da die Parameter aus praktischen Gründen auf dem gesamten Datensatz und nicht auf jeder Trainingsmenge getrennt geschätzt werden, ergibt sich allerdings eine Mischform aus L- und R- Statistik (siehe Kap. 2.3.3), die keine rigorose Schranke für den *Bayeschen Fehler* bildet. Jedoch führt in unserem Fall die relativ große Zahl von Parametern vermutlich zu einer Überanpassung des geschätzten Klassifikators an die Stichproben. Wir untersuchen dies, indem wir die Merkmalsvektoren $c_{1,20}$ aus verschiedenen Teilstücken der Zeitreihen berechnen und die Parameter vergleichen, die sich jeweils durch die Minimierung des Klassifikationsfehlers ergeben. Wir nehmen daher an, daß die verwendete Statistik den Bayeschen Fehler unterschätzt, jedoch ist hier der qualitative Vergleich verschiedener Merkmalsvektoren unser Ziel.

4.3.2 Ergebnisse

Wir wollen nun die Merkmalsvektoren $c_{1,40}$ wiederum mit Merkmalen aus Spektralkomponenten vergleichen. Hierzu berechnen wir die gleichen Referenzvektoren wie in Abschnitt 4.2.4 über eine Signallänge von $40 \cdot 512 = 20480$. Die Klassifikation der Merkmalsvektoren aus Spektralkomponenten erfolgt analog zu dem oben beschriebe-

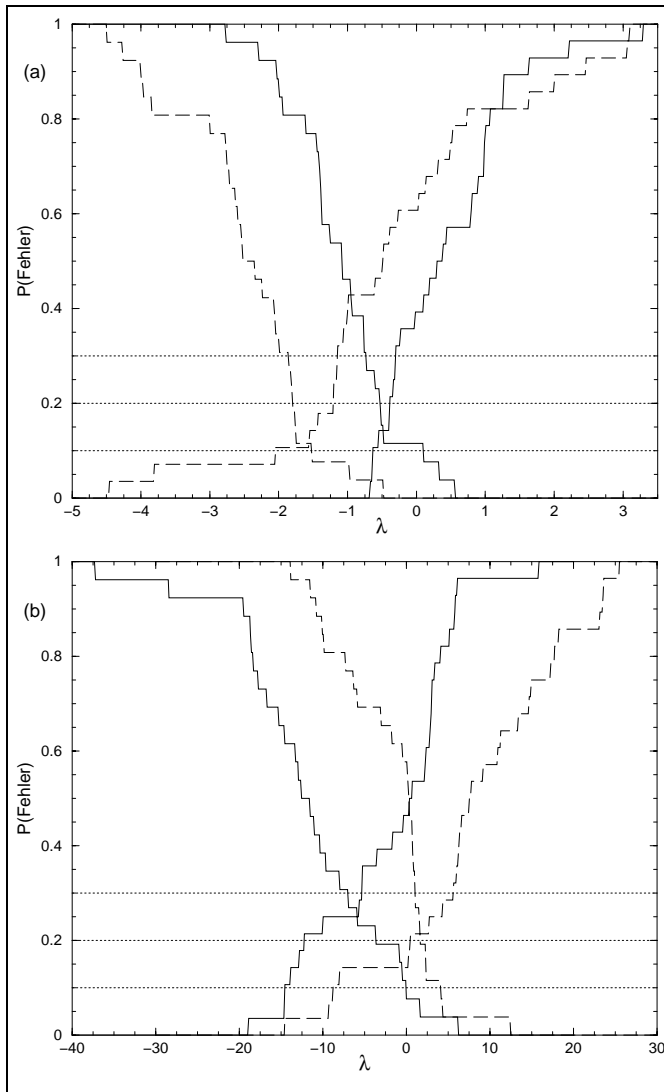


Abbildung 4.7: Klassifikation der Schiebedachsignale: Wahrscheinlichkeit von Fehlklassifikationen (falsche Akzeptanzen bzw. falsche Zurückweisungen) als die Funktion eines Schwellenparameters λ . Durchgezogene Kurven: Sensoranordnung 1, gestrichelte Kurven: Sensoranordnung 2. (a) Merkmalsvektor $c_{1,40}$ aus Wavelet-Restklassen; (b) Merkmalsvektor aus Spektralkomponenten.

nen Verfahren, wobei die Abstände d_1 und d_2 der Testvektoren zu den Umgebungsschwerpunkten der „guten“ bzw. „fehlerhaften“ Trainingsvektoren durch die Euklidische Metrik bestimmt werden und der relative Abstand durch $d_{rel} = d_1 - \alpha d_2$ mit einer skalaren Wichtungskonstante α definiert ist.

Zur Berechnung der Abstände d_{rel} (4.10) untersuchen wir zunächst, welche Filterkomponenten der Merkmalsvektoren $c_{1,K}$ Informationen zur Trennung der Schallsignale von guten und fehlerhaften Schiebedächern beitragen, d.h. genauer, mit welcher Kombination der Frequenzbänder der Signale sich der kleinste Klassifikationsfehler erzielen läßt. Hierbei zeigt sich, daß der erste Bandpaß keinen Beitrag liefert. Zur Berechnung von d_{rel} verwenden wir daher nur den Hochpaß und die Bandpässe 2 – 4 der Wavelettransformationen. Die gleiche Untersuchung für die Merkmalsvektoren aus Spektralkomponenten zeigt hingegen, daß sich durch eine Auswahl von Frequenzbändern keine Verbesserung der Klassifikationsleistung erzielen läßt.

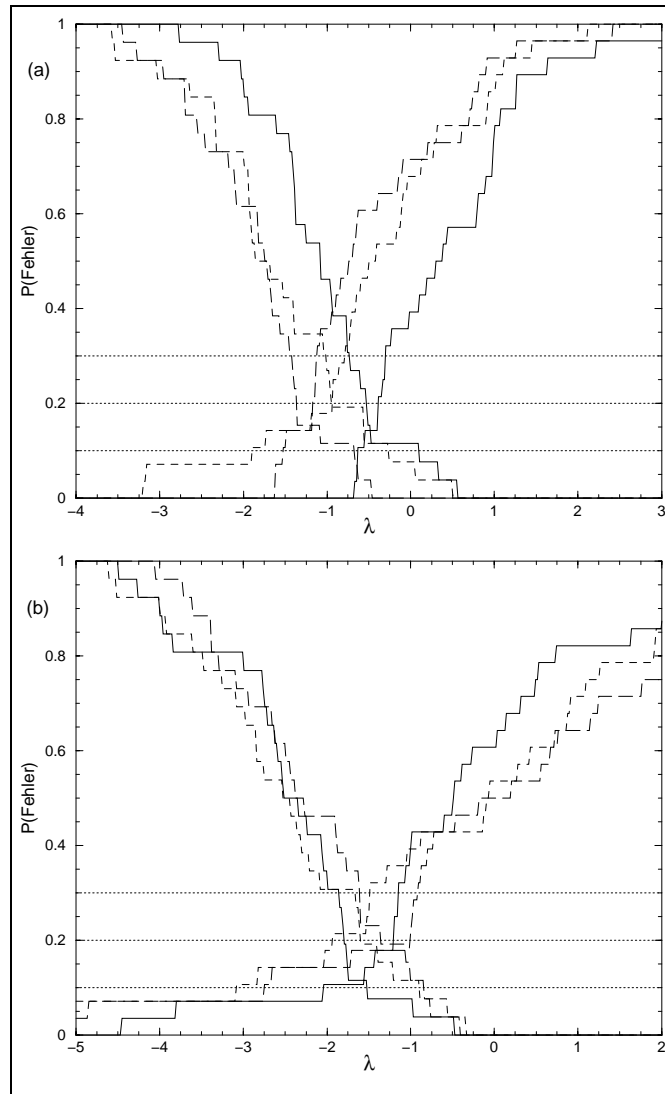


Abbildung 4.8: Vergleich der Trennungsleistung der Merkmalsvektoren $c_{1,K}$ für $K = 20$, 30 sowie 40 (kurz gestrichelte, länger gestrichelte, bzw. durchgezogene Linien). (a) Sensoranordnung 1, (b) Sensoranordnung 2.

In den Abb. 4.7 und 4.8 sind analog zu Kap. 3 für die als „gut“ vorklassifizierten Testdaten der Anteil der *falschen Zurückweisungen* und für als „fehlerhaft“ bewertete Signale der Anteil der *falschen Akzeptanzen* angetragen.

Die Klassifikation der Schiebedachdaten anhand der beiden Merkmalstypen ist in Abb. 4.7 gezeigt. Es ist zu erkennen, daß der Klassifikationsfehler bei Verwendung der Merkmalsvektoren $c_{1,40}$ in beiden Sensoranordnungen deutlich geringer als im Fall der Referenzvektoren aus Spektralkomponenten ist. Die optimale Wahl der Umgebungsgrößen ist in allen Fällen gleich, es ergibt sich $n_1 = 8$, $n_2 = 8$ (von insgesamt 26 – 28 „fehlerhaften“ Trainingsvektoren), sowie $n_3 = 18$ (von insgesamt 24 – 26 „guten“ Trainingsvektoren). Daß n_3 deutlich größer als n_2 ist, überrascht nicht, da die Merkmalsvektoren von fehlerhaften Dächern verschiedene (und verschieden stark ausgeprägte) Defekte repräsentieren. Die Komponenten der Wichtungskonstanten α liegen im Bereich zwischen 0 und 2.

Zum Schluß wollen wir noch den Einfluß der Anzahl der Restklassen- Elemente $\{R_{x^l}; l = 1, \dots, K\}$, über die pro Zeitreihe gemittelt wird, auf die Klassifikationsleistung der Merkmalsvektoren $c_{1,K}$ für die Schiebedachdaten untersuchen. In Abb. 4.8 sind die Klassifikationsergebnisse für $K = 20, 30$ sowie 40 in beiden Sensoranordnungen gezeigt. Damit bestätigen sich (zumindest qualitativ) die Resultate, die wir im letzten Abschnitt für die Sägezahnsignale gewonnen haben. Während in Sensoranordnung 1 die Trennungsleistung der Merkmalsvektoren $c_{1,30}$ und $c_{1,40}$ fast gleich ist, zeigt sich für $c_{1,20}$ eine sichtbare Verschlechterung. In Sensoranordnung 2 wird hingegen nur bei Verwendung von $c_{1,40}$ das beste Ergebnis erzielt, während sich bei der Mittelung von $\{R_{x^l}\}$ über kürzere Zeitreihenabschnitte eine stetige Abnahme der Trennungsleistung zeigt. Der Vergleich mit einem Merkmalsvektor, der aus einer größeren Anzahl Restklassen- Elemente berechnet wird, ist aufgrund der Gesamtlänge der Zeitreihen nicht möglich.

Als nächster Schritt wäre der Vergleich mit Merkmalsvektoren interessant, die aus den Restklassen- Elementen anderer Zeit-Frequenz Darstellungen konstruiert sind. Betrachtet man Filter mit konstanter Breite im Frequenzraum statt der skalierten Filter in Abb. 4.2, so erhält man eine Zeit-Frequenz Darstellung mit konstanter statt, wie in unserem Fall, hyperbolischer Zeit-Frequenz Auflösung (Kap. 2.1.3). Hieraus lassen sich Merkmalsvektoren in einer analogen Vorgehensweise konstruieren. Dieser Vergleich würde die Überprüfung der psychoakustischen Überlegungen ermöglichen, durch die unser Ansatz mit motiviert war, jedoch ist hierfür eine größere Datenbasis erforderlich, um statistisch signifikante Aussagen zu erhalten. Die prinzipielle Anwendbarkeit von Merkmalsvektoren aus Restklassen- Elementen zur Klassifikation stationärer Schallsignale konnte dennoch gezeigt werden.

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung und Anwendung von Konzepten der Zeitreihenanalyse auf technische Problemstellungen, die sich aus einem praxisbezogenen Umfeld heraus ergaben. Das Interesse an technischen Systemen entstand aus der Idee, Anwendungsmöglichkeiten der nichtlinearen Zeitreihenanalyse auf angewandte Fragestellungen bei Systemen mit „mittlerer Komplexität“ zu untersuchen, d.h. bei Systemen, die nur eine begrenzte Anzahl (effektiver) Freiheitsgrade und eine begrenzte Nichtstationarität aufweisen. Für solche Systeme scheint es mit dem heutigen Wissensstand eher möglich, einen Lösungsbeitrag im Sinn der praktischen Fragestellung zu leisten, als für Systeme mit sehr hoher Komplexität, wie z.B. physiologische Systeme oder Volkswirtschaften. Durch Industriekontakte ergaben sich für uns zwei konkrete Projekte, die Fehlerfrüherkennung bei Induktionsmotoren durch Analyse des Statorstroms sowie die automatische Qualitätsendkontrolle von elektrischen Schiebedächern durch Klassifikation von Körperschallsignalen.

Aufgrund der Quasiperiodizität des Statorstromes von Induktionsmotoren und den Eigenschaften idealer Induktionsmaschinen stellte es sich als sinnvoll heraus, gefensterter Fourierspektren des Statorstromes als Ausgangspunkt für die Konstruktion von Merkmalsvektoren zu verwenden. Die Schallsignale des Schließgeräusches von Schiebedächern zeigen ein stationär stochastisches Verhalten, wobei die für die Fehlererkennung relevanten Informationen vom menschlichen Gehör, d.h. von Experten aufgelöst werden können. Hierauf beruhte unser Ansatz, die Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik des Ohrs nachzuahmen, was für Frequenzen $\gtrsim 500\text{Hz}$ in guter Näherung durch eine Wavelettransformation möglich ist.

Damit zeigte sich, daß für beide Probleme Zeit-Frequenz Darstellungen einen geeigneten Ausgangspunkt bilden. Der erste, theoretische Teil dieser Arbeit enthält daher einen Überblick über die recht allgemeinen linearen und quadratischen Zeit-Frequenz Darstellungen, wobei im Hinblick auf die Signalanalyse die Eigenschaften gefensterter Fourier- und Wavelettransformationen, insbesondere die Zeit-Frequenz Auflösungscharakteristik dieser Abbildungen, genauer diskutiert wurden. Da wir in allen Anwendungen nur endliche, diskret abgetastete Zeitreihen zur Verfügung haben, wurde anschließend der genaue Zusammenhang zwischen kontinuierlichen und diskreten gefensterter Fourier- und Wavelettransformationen dargestellt. Den Verknüpfungspunkt hierfür bildet das Shannonsche Samplingtheorem. Unser Ziel war es,

für kontinuierliche Zeit-Frequenz Darstellungen dieses Typs mit einer hohen Informationsauflösung möglichst gute diskrete Approximationen zu finden. Da das zentrale Konzept der Skalierung auf Zeitreihen nicht unmittelbar übertragbar ist, mußte die Definition einer diskreten Wavelettransformation vom kontinuierlichen Vorbild etwas abweichen. Für die Klassifikation der aus experimentellen Zeitreihen berechneten Merkmalsvektoren wurden im letzten Abschnitt Schätzer für den Bayeschen Fehler einer Klassifikationsstatistik, d.h. für den minimalen Klassifikationsfehler, der erzielt werden kann, diskutiert.

In Kap. 3 stellten wir einen neuen Lösungsansatz für das Problem vor, den verschleiß- oder fehlerbedingten Ausfall von Induktionsmotoren durch Analyse des Statorstromes rechtzeitig vorherzusagen. Hierfür wurde das Konzept der geometrischen Signaltrennung im Merkmalsraum eingeführt: Während einer Trainingsperiode werden Abschnitte der Zeitreihen eines fehlerfreien Motors in Merkmalsvektoren \mathbf{v} transformiert, deren Einträge geeignete Spektralkomponenten des Statorstromes sind. Die Trainingsmenge muß hierbei alle erlaubten Betriebszustände des Motors repräsentieren. Diese Trainingsvektoren werden in Cluster eingeteilt und für jedes Cluster wird eine lokale Metrik im Merkmalsraum V definiert, die den Abstand eines Vektors zu dem spezifischen Cluster angibt. Das über alle Cluster gemittelte Verhältnis der Komponenten der Schwerpunktvektoren der Cluster zu ihren Ausdehnungen in den korrespondierenden Raumrichtungen definiert das Maß für das Signal-Rausch Verhältnis der Spektralkomponenten, wobei die Ausdehnung der Cluster durch Kumulanten 2. und 4. Ordnung beschrieben wird. Es zeigte sich, daß für unsere Daten die Menge der ca. 14 Spektralkomponenten mit den größten Signal-Rausch Verhältnissen immer ausreichend viele Elemente enthält, die sensitiv auf die untersuchten Motorfehler reagieren. Dieses Kriterium legt die Einträge der Merkmalsvektoren fest.

Während der Überwachungsphase kann nun der Abstand der laufend berechneten Merkmalsvektoren zum nächstgelegenen Cluster im Merkmalsraum bestimmt und mit einem Schwellenwert verglichen werden. Als Hauptproblem stellte sich die Unterscheidung von Motorfehlern und unbekanntem Umwelteinflüssen heraus, da nicht alle während des Betriebs eintretenden Umweltbedingungen in der Trainingsdatenbasis erfaßt werden können. Die geometrische Methode bietet hierfür eine Lösung: Wir konstruierten zwei Typen von Merkmalsvektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 in den Räumen V_1 und V_2 mit unterschiedlicher Dimension. Während V_1 eine Mischung aus Informationen über Lastzustände, Motorfehler und Umwelteinflüsse enthält, gehen in V_2 nach Konstruktion keine Informationen über Defekte ein. Da eine untere Schranke für die Korrelation zwischen den Vektoren \mathbf{v}_2 und den in \mathbf{v}_1 enthaltenen Umwelteinflüssen existiert, können diese Störungen teilweise herausgerechnet werden. Auch wenn diese Korrektur relativ klein ist, ermöglichte sie für unsere Motordaten die statistisch signifikante Trennung von Fehlern und unbekanntem Umwelteinflüssen. Wir zeigten dies durch die Klassifikation von Zeitreihen in *out-of-sample* Tests, die von vier 10PS 4-Pol Induktionsmotoren erzeugt wurden.

In Kap. 4 stellten wir einen neuen Merkmalsvektor für akustische Güteprüfungen vor. Hierzu wurden Merkmalsvektoren aus Wavelet- Restklassen konstruiert, welche als die Menge der zyklischen Permutationen einer diskreten Wavelettransformation in der Zeitvariablen definiert sind. Da die Schallsignale in guter Näherung als stationäre Oszillationen betrachtet werden können, unterscheiden sich die aus verschiedenen Teilstücken einer Zeitreihe berechneten Wavelettransformationen im wesentlichen durch ihre Anfangsbedingungen. Die Wavelet- Restklassen definieren eine Größe, welche von den Anfangsbedingungen unabhängig ist und über die im Zeitraum gemittelt werden kann, ohne die zeitaufgelösten Informationen zu verlieren. Auf der Menge der Restklassen wurde eine Metrik und eine Addition definiert, welche dieser Menge die Struktur eines kommutativen aber nicht-assoziativen Rings mit einer Metrik gibt. Die Additionsreihenfolge mehrerer Restklasse- Elemente wird durch einen Clusterungsalgorithmus festgelegt, wobei wir verschiedene Clusterungsmöglichkeiten diskutiert haben.

Es zeigte sich, daß sich durch diesen Mittelungsprozeß die für die Fehlererkennung relevanten Informationen der Wavelettransformationen herausbilden lassen, indem statistische Fluktuationen und Rauschen gedämpft werden. Die Eigenschaften der Merkmalsvektoren aus Wavelet- Restklassen, insbesondere die Konvergenz des Rauschreduktionsverfahrens wurden zunächst anhand verrauschter Sägezahnsignale studiert. Die anschließende Anwendung auf die Körperschallsignale der Schiebedächer bestätigte (qualitativ) diese Ergebnisse. Die Klassifikation eines Testvektors erfolgte hierbei durch den Vergleich mit den Trainingsvektoren von als „gut“ sowie als „fehlerhaft“ vorklassifizierten Schiebedächern, die sich jeweils in einer Umgebung (verschiedener Größe) des Testvektors befinden. Obwohl der Umfang der Datenbasis für die statistisch signifikante Bestimmung der Trennungsleistung der Merkmalsvektoren zu klein ist, konnte durch den Vergleich mit der Standardmethode der Wahl von Merkmalen aus Spektralkomponenten dennoch die prinzipielle Anwendbarkeit von Merkmalsvektoren aus Restklassen- Elementen zur Klassifikation stationärer Schallsignale gezeigt werden.

Zusammenfassend hat es sich gezeigt, daß die beiden in dieser Arbeit untersuchten Signaltypen zu „linear“ (quasiperiodisch bzw. stationär stochastisch) sind, um intrinsisch nichtlineare Methoden erfolgreich anwenden zu können. Als optimal erwies sich hingegen die Kombination aus linearen Methoden, d.h. aus der Wahl von Merkmalen in der Zeit-Frequenz Ebene und darauf basierender Möglichkeiten zur Konstruktion von Merkmalsvektoren, und geometrischen Trennungsverfahren, die durch die nichtlineare Analyse motiviert sind. Auch wenn die nichtlineare Zeitreihenanalyse, d.h. genauer Verfahren, welche die deterministische Struktur eines Signals explizit verwenden, auf viele Probleme nicht direkt anwendbar ist, so liefert sie doch wichtige Impulse für die Weiterentwicklung von geometrisch motivierten Ideen zur Signaldarstellung und -klassifikation. Eine weitere Anwendungsmöglichkeit von Konzepten der nichtlinearen Zeitreihenanalyse, auf die wir nicht eingegangen sind, ist die geometri-

sche Trennung nichtstationärer Zeitreihen in stationäre Teilstücke durch Einbettung in einen hochdimensionalen rekonstruierten Phasenraum. Hierfür wird keine deterministische Struktur des Signals benötigt.

Auch wenn die hier untersuchten Probleme (wie so häufig) spezieller Natur sind, hoffen wir doch, einen kleinen Beitrag zu der wachsenden Sammlung von Methoden zur Darstellung und Klassifikation (technischer) Signale gebracht zu haben. Die Kombination von Methoden aus einem solchen „Werkzeugkasten“ kann vielleicht auch für weitere Problemstellungen Lösungsmöglichkeiten bieten (zumindest als einen ersten Ansatz), als nur für diejenigen, für welche sie entwickelt wurden.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Cameron, W. Thomson und A. Dow, „Vibration and current monitoring for detecting airgap eccentricity in large induction motors“, *IEE Proc.*, **133**, **B**, **3**, S. 155-163, Mai 1986.
- [2] K. Chandrasekharan, *Classical Fourier transforms*, Springer, Heidelberg, Berlin, 1989.
- [3] L. Cohen, „Generalized phase-space distribution functions“, *J. Math. Phys.*, **7**, **5**, S. 781-786, 1966.
- [4] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [5] W. Deleroi, „Der Stabbruch im Käfigläufer eines Asynchronmotors, Teil 1: Beschreibung mittels Überlagerung eines Störfeldes“, *Arch. für Elektrotechnik*, **67**, S. 91-99, 1984.
- [6] D. Dornfeld, „Application of acoustic emission techniques in manufacturing“, *NDT & E Int.*, **25**, **6**, S. 259-269, Dez. 1992.
- [7] D. Farson, K. Hillsley, J. Sames und R. Young, „Frequency-time characteristics of air-borne signals from laser welds“, *J. Laser Applicat.*, **8**, **1**, S. 33-42, Feb. 1996.
- [8] F. Filippetti, M. Martelli, G. Franceschini und C. Tassoni, „Development of the knowledge base of an expert system to diagnose electric faults of induction motors“, *Conf. Rec. 27th Annu. IEEE Ind. Applicat. Soc. Meeting*, Houston, USA, S. 92-99, Okt. 1992.
- [9] F. Filippetti, G. Franceschini und C. Tassoni, „Neural networks aided on-line diagnostics of induction motor rotor faults“, *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, **31**, **4**, S. 892-899, Juli 1995.
- [10] K. Fukunaga, *Introduction to statistical pattern recognition*, Academic Press, San Diego, London, 1990.
- [11] M. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer, Heidelberg, Berlin, New York, 1991.

-
- [12] C. Hargis, B. Gaydon und K. Kamash, „The detection of rotor defects in induction motors“, *Int. Conf. Elec. Mach. – Design and Applicat., IEE Publication*, **213**, S. 216-220, Juli 1982.
- [13] C. Heitz, „Optimum time-frequency representations for the classification and detection of signals“, *Applied Sig. Proces.*, **3**, S. 124-143, 1995.
- [14] C. Heitz, *Optimierte Zeit-Frequenz Darstellung zur Klassifikation von Zeitreihen*, Dissertation, Universität Freiburg, 1996.
- [15] C. Heitz und J. Timmer, „Using optimized time-frequency representations for acoustic quality control of motors“, *ACUSTICA*, **83**, S. 1-12, Nov. 1997.
- [16] K. Heldmann, *Wahrnehmung, gehörgerechte Analyse und Merkmalsextraktion technischer Signale*, Fortschritt- Berichte VDI, VDI Verlag, Düsseldorf, 1994.
- [17] F. Hlawatsch, „Duality and classification of bilinear time-frequency signal representations“, *IEEE Trans. Sig. Proces.*, **39**, **7**, S. 1564-1574, Juli 1991.
- [18] F. Hlawatsch und G. Boudreaux-Bartels, „Linear and quadratic time-frequency representations“, *IEEE-SP Magazine*, S. 21-67, April 1992.
- [19] F. Hlawatsch und R. Urbanke, „Bilinear time-frequency representations of signals: The shift-scale invariant class“, *IEEE Trans. Sig. Proces.*, **42**, **2**, S. 357, Feb. 1994.
- [20] J. Honerkamp, *Statistical physics*, Springer, Heidelberg, Berlin, New York, 1998.
- [21] IMSL STAT/LIBRARY: User’s Manual Fortran subroutines for statistical analysis, Version 2.0, 1991.
- [22] H. Kantz und T. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
- [23] G. Kliman und J. Stein, „Methods of motor current signature analysis“, *Elec. Mach. Power Syst.*, **20**, **5**, S. 463-474, Sept. 1992.
- [24] G. Kliman, W. Premerlani, B. Yazici, R. Koegl und J. Mazereeuw, „Sensorless, online motor diagnostics“, *Comp. Applicat. in Power*, **10**, **2**, S. 39-43, April 1997.
- [25] S. Lee und P. White, „Higher-order time-frequency analysis and its application to fault detection in rotating machinery“, *Mech. Syst. Sig. Proces.*, **11**, **4**, S. 637-650, Juli 1997.
- [26] D. Leith und D. Rankin, „Real time expert system for identifying rotor faults and mechanical influences in induction motor phase current“, *IEE 5th Int. Conf. Elec. Machines and Drives*, London, S. 46-50, Sept. 1991.

-
- [27] A. Lichtenberg und M. Lieberman, *Regular and chaotic dynamics*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [28] W. Mecklenbräucker, Hrsg., *The Wigner distribution – theory and applications in signal processing*, North Holland Elsevier Science Publishers, 1992.
- [29] M. Mehta, *Random matrices*, Academic Press, San Diego, 1991.
- [30] T. Petsche, A. Marcantonio, C. Darken, S. Hanson, G. Kuhn und I. Santoso, „A neural network autoassociator for induction motor failure prediction“, *Advan. in Neural Inform. Proces. Syst.*, **8**, S. 924-930, Aug. 1996.
- [31] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling und B. Flannery, *Numerical recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.
- [32] O. Rioul und M. Vetterli, „Wavelets and signal processing“, *IEEE-SP Magazine*, S. 14-38, Okt. 1991.
- [33] O. Rioul und P. Flandrin, „Time-scale energy distributions: A general class extending wavelet transforms“, *IEEE Trans. Sig. Proces.*, **40**, **7**, S. 1746-1757, 1992.
- [34] T. Sauer, J. Yorke und M. Casdagli, „Embedology“, *J. Stat. Phys.*, **65**, **3-4**, S. 579-616, Nov. 1991.
- [35] R. Schoen und T. Habetler, „Effects of time-varying loads on rotor fault detection in induction machines“, *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, **31**, **4**, S. 900-906, Juli 1995.
- [36] R. Schoen, T. Habetler, F. Kamran und R. Bartheld, „Motor bearing damage detection using stator current monitoring“, *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, **31**, **6**, S. 1274-1279, Nov. 1995.
- [37] R. Schoen, B. Lin, T. Habetler, J. Schlag und S. Farag, „An unsupervised, on-line system for induction motor fault detection using stator current monitoring“, *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, **31**, **6**, S. 1280-1286, Nov. 1995.
- [38] R. Schoen und T. Habetler, „A new method of current-based condition monitoring in induction machines operating under arbitrary load conditions“, *Elec. Mach. Power Syst.*, **25**, **2**, S. 141-152, Feb. 1997.
- [39] S. Smale, „Differentiable dynamical systems“, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, S. 747-817, 1967.
- [40] M. Steele, R. Ashen und L. Knight, „An electrical method for condition monitoring of motors“, *Int. Conf. Elec. Mach. – Design and Applicat.*, *IEE Publication*, **213**, S. 231-235, Juli 1982.

- [41] P. Tavner, K. Arnim und C. Hargis, „An electrical technique for monitoring induction motor cages“, *IEE Conf. Elec. Machines and Drives, IEE Publication*, **282**, S. 43-46, 1987.
- [42] O. Thorsen und M. Dalva, „Methods of condition monitoring and fault diagnosis for induction motors“, *Europ. Trans. Elec. Power*, **8**, **5**, S. 383-395, Sep. 1998.
- [43] A. Valli, *Failure detection through cross prediction error*, Diplomarbeit, Universität Florenz, 1999.
- [44] J. Ville, „Théorie et applications de la notion de signal analytique“, *Câbles et transmission*, **2 A**, S. 61-74, 1948.
- [45] E. Wigner, „On the quantum correction for the thermodynamic equilibrium“, *Phys. Rev.*, **40**, S. 749-759, 1932.
- [46] R. Zöller, *Methoden der nichtlinearen Dynamik zur Zustandsanalyse technischer Systeme*, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1997.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen herzlich danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Meinen großen Dank möchte ich Priv. Doz. Dr. Holger Kantz für die Möglichkeit aussprechen, diese Arbeit in seiner Arbeitsgruppe „Nichtlineare Zeitreihenanalyse“ am Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme in Dresden zu schreiben. Für die kompetente Betreuung, viele Anregungen und das stetige Interesse an der Arbeit, bei der mir große Freiheit eingeräumt wurde, möchte ich besonders danken.

Mein Dank für die vielfältige Unterstützung und das gute Arbeitsklima gilt allen Mitgliedern dieser Gruppe, insbesondere Dr. Rainer Hegger und Dr. Eckehard Olbrich, der am Projekt „Fehlerfrüherkennung mit nichtlinearer Zeitreihenanalyse“ mitgearbeitet hat.

Für die vielen auch nichtwissenschaftlichen Diskussionen geht ein spezieller Dank an meine Mitdoktoranden Lars Jaeger, Frank Schmäser und Stefan Blawid.

Für die freundliche Kooperation und die uns zur Verfügung gestellten Daten möchte ich Dr. A. Jourjine und Dr. T. Petsche von Siemens Corporate Research, Princeton, USA, sowie Dr. R. Zöllner von Carl Schenck AG, Darmstadt, danken.

Für sein großes Engagement bei der Unterstützung bei den häufigen Computer- und Softwareproblemen gilt mein großer Dank Hubert Scherer.

Der Max-Planck-Gesellschaft danke ich für das Doktoranden-Stipendium und die exzellenten Arbeitsbedingungen, die mir hier zur Verfügung standen.

Zuletzt mein großes Dankeschön an Bettina Dannenmann, die die Entstehungszeit dieser Arbeit über die große Entfernung nach Stuttgart hinweg begleitet hat.

