Kriterien für $\mathrm{Tor}_\alpha^1(E, F) = 0$ für (DF)- und Fréchetträume

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik
der Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal
vorgelegt von

Oğuz Varol

Juni 2002

Inhaltsverzeichnis

Einführung iv

1 Präliminarien 1
1.1 Grundbegriffe der Kategorientheorie . . . 1
1.2 Tensorprodukte . . . 8

2 Kohomologie 14
2.1 Rechtsableitungen . . . 14
2.2 Berechnung von Rechtsableitungen . . . 22

3 Die erste Rechtsableitung der Tensorproduktfunktoren 29
3.1 Allgemeine Betrachtungen . . . 29
3.2 Notwendige Bedingungen für das Verschwinden . . . 33
3.3 Hinreichende Bedingungen für das Verschwinden . . . 42

4 Die vier Standardfälle 44
4.1 $F = \lambda^\infty(B)$ und das injektive Tensorprodukt . . . 44
4.2 E ein nuklearer (DF)-Raum . . . 45
4.3 F ein nuklearer Fréchetraum . . . 46
4.4 $E = k^1(A)$ und das projektive Tensorprodukt . . . 51

5 Über ein Theorem von A. Grothendieck 54
5.1 Tensorprodukte und induktive Limiten . . . 54
5.2 Verallgemeinerung des Theorems . . . 58

6 $\mathcal{A} - (\Omega)$-Situationen 64
6.1 Zerlegungslemma . . . 64
6.2 Anwendungen . . . 68

Anhang 71

Literatur 72

Einführung

Lokalkonvexe Tensorprodukte gehen im wesentlichen auf A. Grothendieck zurück, der sie Anfang und Mitte der 50er Jahre ausführlich studierte ([Gro]). Ihre immense Bedeutung verdanken diese u.a. der Tatsache, daß oftmals Räume von Operatoren, vektorwertigen Funktionen etc. Tensorproduktdarstellungen besitzen. Die dortigen Surjektivitätsprobleme, wie die von vektorwertigen partiellen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten, korrespondieren dann mit Exaktheitsbetrachtungen der Tensorierung, vgl. [KabVog] und [Vog9].
Anfang der 70er Jahre legte V.P. Palamodov mit seiner Arbeit [Pal] das Fundament für den Gebrauch kategorieller und homologischer Methoden in der Funktionalanalysis, ohne jedoch Tensorproduktfunktoren und deren Rechtsableitungen zu erwähnen. Während in der Folgezeit Ext^1 für Frécheträume, deren Verschwinden mit dem Zerfallen von sogenannten Erweiterungen gleichkommt, vor allem in Arbeiten von D. Vogt ([Vog1], [Vog7]) berücksichtigt wurde, wurde bei Resultaten bzgl. der Exaktheit tensorierter Sequenzen bisher ganz auf homologische Methoden verzichtet.
Jenen Rechtsableitungen von Tensorproduktfunktoren, die von der Kategorie der Frécheträume in die Kategorie der linearen Räume agieren und deren Verschwinden im engen Zusammenhang mit der Exaktheit von tensorierten Sequenzen stehen, ist diese Arbeit gewidmet.
In Kapitel 1 wird das Problem der Exaktheit, wenn man so will, in seine Grundbestandteile zerlegt: Tensorierung und Vervollständigung. Hervorzuheben sind hierbei Bedingungen an die vorgegebene exakte Sequenz bzw. an den an die Sequenz tensorierten Raum, welche zwangsläufig zu den sogenannten $\otimes$-Sequenzen von W. Kaballo und D. Vogt ([KabVog]) bzw. den π- und ε-Räumen von R. Hollstein ([Hol1, Hol2, Hol3]) führen.
In einem zweiten Kapitel wird das homologische Werkzeug aufbereitet und eines der zentralen Theoreme dieser Arbeit formuliert und bewiesen. Dieses stellt in Anwendungssituationen eine enge Verbindung zwischen der ersten Rechtsableitung von sogenannten σ-stabilen Funktoren und proj^1 her. Die Annullierung von proj^1 wurde von vielen Autoren studiert. An erster Stelle sind sicherlich die Urväter V.P. Palamodov ([Pal]) und V.S. Retakh zu nennen.
Im dritten Kapitel werden wir mit gängigen Methoden der proj^1-Theorie und unter der Langenbruch'schen Beobachtung ([Lan]), daß man bei den hinreichenden Bedingungen für $\mathrm{proj}^1 = 0$ in [BraVog] bzw. [FreWen] die Reihenfolge der Quantoren umstellen kann, notwendige und hinreichende Bedingungen für das Verschwinden von Tor^1 herleiten, die wir S_3-Bedingungen nennen wollen. Hierbei beschränken wir uns bei der Tensorierung auf die Struktur von (LB)-Räumen. Vertauschungseigenschaften von (LB)-Räumen mit Banachräumen im tensoriellen Sinne erweisen sich dabei rechentechnisch als sehr günstig.
Im darauffolgenden Kapitel werden wir die Vogt'schen vier Standardfälle der Ext-Theorie ([Vog1], [FreWen]) übertragen, sprich eine Charakterisierung für $\mathrm{Tor}^1 = 0$ in nuklearen und (Ko-)Köthe-Situationen angeben. Dabei kristallisiert sich eine gewisse Symmetrie heraus. Während die nuklearen Situationen unabhängig von der gewählten Tensornorm sind, fallen die (Ko-)Köthe-Fälle bzgl. der Betrachtung der projektiven bzw. injektiven Tensornorm auseinander.
Kapitel 5 ist einem Resultat von A. Grothendieck gewidmet, der in [Gro] die Tonneliertheit des vollständigen projektiven Tensorprodukts eines Ko-Kötheraums vom Typ eins mit einem Kötheraum vom Typ eins charakterisierte. Wir werden dieses Resultat unter milden Voraussetzungen für beliebige Frécheträume verallgemeinern, eine Verbindung zu Vogts S_2^*-Bedingung und $\mathrm{Tor}^1 = 0$ herstellen.
Abschließend wollen wir mittels einer Zerlegunsgsmethode von H.J. Petzsche ([Pet]) in $\mathcal{A}$-(Ω)-Situationen hinreichende Bedingungen für $\mathrm{Tor}^1 = 0$ angeben, was mit der Vogt-Wagner'schen Splitting-Theorie im Ext-Fall korrespondiert (vgl. [Vog1], [Vog6], [Vog7]) und als Abstraktion der Resultate in [Vog6] und [Vog8] anzusehen ist.
Sowohl theoretische als auch praktische Anwendungen sind an entsprechenden Stellen in die Arbeit eingebaut. Hierzu gehören Charakterisierungen der Eigenschaft $\mathcal{A}$, von Quojektionen etc. mittels $\mathrm{Tor}^1 = 0$ und die Betrachtung von vektorwertigen partiellen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten.

Prof. Dr. D. Vogt möchte ich vor allem für die Wahl des Themas und für die ausgezeichnete Betreuung danken. Dr. L. Frerick bin ich zu besonderem Dank verpflichtet, der mich zu jedem Zeitpunkt der Arbeit unterstützt hat. Meinem guten Freund Axel Rogat gilt mein Dank für das Auffinden der zahlreichen Kommafehler in den Vorversionen des Dokuments.

1 Präliminarien

Wir setzen voraus, daß der Leser mit den Begriffen Kategorie, Funktor und natürliche Transformation vertraut ist. Wenn wir von einem Funktor sprechen und nichts dazu schreiben, so sei dieser kovariant. Des weiteren seien die in dieser Arbeit auftretenden lokalkonvexen Räume, wenn nichts anderes gesagt wird, separiert. Ist F ein lokalkonvexer Raum, so notieren wir mit $\mathcal{U}_0(F)$ das System aller Nullumgebungen in F und mit $cs(F)$ das aller stetigen Halbnormen auf F. Eine absolutkonvexe Teilmenge B eines linearen Raumes E heißt *Banachkugel*, falls $\operatorname{Span}(B) = \bigcup_{t>0} t \cdot B$, versehen mit dem Minkowski-Funktional $p_B(x) := \inf\{t > 0 \mid x \in t \cdot B\}$, ein Banachraum ist. Für diesen Banachraum schreiben wir dann kurz E_B bzw. $[B]$. Die absolutkonvexe Hülle einer Teilmenge A eines linearen Raumes E bezeichnen wir mit $\Gamma(A)$. Mit B_X notieren wir den abgeschlossenen Einheitsball eines normierten Raumes X.
Für weitere Standardbezeichnungen lokalkonvexer Räume und die, hier teilweise nicht explizit zitierten, klassischen Sätze der Funktionalanalysis verweisen wir auf das Lehrbuch [MeiVog].

1.1 Grundbegriffe der Kategorientheorie

Wie in der Einleitung näher beschrieben, wollen wir die Exaktheit der Fortsetzung tensorierter Sequenzen zu ihrer Vervollständigung untersuchen. Dazu werden wir uns in diesem Abschnitt zunächst mit dem kategoriellen Exaktheitsbegriff beschäftigen und die dafür nötigen Definitionen aus [Pal] wiederholen. Bevor wir uns dann ganz dem Vervollständigungsfunktor zuwenden, wollen wir uns kurz mit projektiven und induktiven Limesfunktoren befassen.
Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *additiv*, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

i) Die Morphismenmengen von $\mathcal{C}$ tragen abelsche Gruppenstruktur, so daß die Verknüpfung von Morphismen bilinear ist.

ii) $\mathcal{C}$ besitzt ein *Nullobjekt* 0, d.h. für jedes $\mathcal{C}$-Objekt F sind die Morphismenmengen $\operatorname{Mor}(0, F)$ und $\operatorname{Mor}(F, 0)$ einpunktig. Wir notieren dann für $\mathcal{C}$-Objekte F, G die Komposition $F \to 0 \to G$ mit $0 := 0_{F,G}$.

iii) $\mathcal{C}$ hat *endliche Koprodukte*, d.h. zu jeder endlichen Familie $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von $\mathcal{C}$-Objekten existiert ein $\mathcal{C}$-Objekt $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ zusammen mit einer Familie $(i_\mu : F_\mu \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda)_{\mu\in\Lambda}$ von $\mathcal{C}$-Morphismen, so daß folgende universelle Eigenschaft gilt: Zu jeder Familie $(f_\mu : F_\mu \to G)_{\mu\in\Lambda}$ von $\mathcal{C}$-Morphismen existiert genau ein $\mathcal{C}$-Morphismus $f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \to G$ mit $f \circ i_\mu = f_\mu$ für alle $\mu \in \Lambda$.

Wir nennen einen Funktor $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen additiven Kategorien *additiv*, falls $R(f + g) = R(f) + R(g)$ für alle $f, g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(F, G)$ gilt $(F, G \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}))$.
Sei nun $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $f : F \to G$ ein $\mathcal{C}$-Morphismus. Wir definieren: Ein $\mathcal{C}$-Objekt $\ker(f)$ zusammen mit einem $\mathcal{C}$-Morphismus $k : \ker(f) \to F$ mit $f \circ k = 0$ heißt *Kern* von f, falls folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für jeden $\mathcal{C}$-Morphismus $g : H \to F$ mit $f \circ g = 0$ existiert genau ein $\mathcal{C}$-Morphismus $h : H \to \ker(f)$ mit $k \circ h = g$:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{=0}"] & F \arrow[r, "f"'] & G \\
& H. \arrow[ul, dashed, "\exists!\, h"] \arrow[u, "\forall g"'] \arrow[ur, "=0"'] &
\end{tikzcd}$$

Dual hierzu wird $(\operatorname{coker}(f), p)$, der *Kokern* von f, eingeführt:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\overbrace{\hspace{14em}}^{=0}"] \arrow[dr, "=0"'] & G \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "\forall"'] & \operatorname{coker}(f) \arrow[dl, dashed, "\exists !"] \\
& H. &
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{im}(f) := \ker(\operatorname{coker}(f))$ und $\operatorname{coim}(f) := \operatorname{coker}(\ker(f))$ heißen das *Bild* bzw. *Kobild* von f. Weiter nennen wir f einen *Monomorphismus* (*Epimorphismus*), falls $\ker(f) = 0$ $(\operatorname{coker}(f) = 0)$ ist. Monomorphismen, die zugleich Epimorphismen sind, heißen *Bimorphismen.*
Besitzt f Kern und Kokern, so existiert nach den universellen Eigenschaften von $\operatorname{im}(f)$ und $\operatorname{coim}(f)$ genau ein $\mathcal{C}$-Morphismus $\overline{f} : \operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \\
\operatorname{coim}(f) \arrow[r, dashed, "\exists ! \overline{f}"] & \operatorname{im}(f). \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Ist $\overline{f}$ ein Isomorphismus (d.h. es gibt einen $\mathcal{C}$-Morphismus g mit $\overline{f} \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ \overline{f} = \mathrm{id}$), so heißt f ein *Homomorphismus.* Diesen nennen wir *Monohomomorphismus* (*Epihomomorphismus*), falls er zusätzlich ein Monomorphismus (Epimorphismus) ist.
Damit können wir nun halb-abelsche Kategorien definieren, die eine besondere Rolle in der funktionalanalytischen Kategorientheorie spielen:

Definition 1.1.1 Eine additive Kategorie $\mathcal{C}$, in der jeder $\mathcal{C}$-Morphismus f Kern und Kokern besitzt und der induzierte $\mathcal{C}$-Morphismus $\overline{f}$ ein Bimorphismus ist, heißt *halb-abelsch.* Ist zudem jeder $\mathcal{C}$-Morphismus ein Homomorphismus, so nennen wir $\mathcal{C}$ *abelsch.*

Beispiel 1.1.2 Betrachten wir einige Beispiele, mit denen wir arbeiten werden:

i) Die Kategorie $\mathcal{LKR}$ der nicht notwendig separierten lokalkonvexen Räume und stetigen linearen Abbildungen ist halb-abelsch. Ist $f : F \to G$ eine stetige lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen, so werden $\ker(f)$ durch $f^{-1}(\{0\})$ versehen mit der Teilraumtopologie von F und $\operatorname{coker}(f)$ durch $G/f(F)$ versehen mit der Quotiententopologie gegeben. f ist genau dann ein Homomorphismus, falls f offen auf $\operatorname{im}(f) = f(F)$ ist. Sind F und G Fréchetr\"aume, so sieht man mittels des Satzes von der offenen Abbildung, daß f genau dann ein Homomorphismus ist, wenn $f(F)$ abgeschlossen in G ist.
Wir weisen den Leser nochmals darauf hin, daß wir in erster Linie separierte lokalkonvexe Räume betrachten. Da sich manche der eingeführten kategoriellen Begriffe wie Homomorphismus etc. der Kategorie der separierten lokalkonvexen Räume $\mathcal{LKR}^{\mathrm{sep}}$ von denen in $\mathcal{LKR}$ unterscheiden, werden wir, um im Einklang mit der gängigen Literatur zu bleiben, $\mathcal{LKR}^{\mathrm{sep}}$ als Unterkategorie von $\mathcal{LKR}$ auffassen und die entsprechenden Begriffe dort verwenden.

ii) Die Kategorie $\mathcal{FR}$ der Fréchetr\"aume und stetigen linearen Abbildungen ist halb-abelsch.

iii) Die Kategorie $\mathcal{LR}$ der linearen Räume und linearen Abbildungen ist abelsch.

iv) Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie mit Nullobjekt. Ein $\mathcal{C}$-*Kokomplex* $(A^\bullet, d)$ besteht aus einer Folge von $\mathcal{C}$-Objekten und $\mathcal{C}$-Morphismen

$$\cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

mit $d^n \circ d^{n-1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wir werden $\mathcal{C}$-Kokomplexe oft als *$\mathcal{C}$-Sequenzen* bezeichnen. Ein *Morphismus* $f : (A^\bullet, d) \to (B^\bullet, e)$ zwischen $\mathcal{C}$-Kokomplexen ist eine Folge $f^n : A^n \to B^n$ von $\mathcal{C}$-Morphismen, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d^n} & A^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^{n-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & B^{n-1} & \xrightarrow[e^{n-1}]{} & B^n & \xrightarrow[e^n]{} & B^{n+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Damit erhalten wir die Kategorie $\mathcal{C}$-$\mathcal{KK}$ der $\mathcal{C}$-Kokomplexe, wobei die Verknüpfung der Morphismen stufenweise erklärt sei. Mit $\mathcal{C}$ ist dann auch $\mathcal{C}$-$\mathcal{KK}$ halb-abelsch (abelsch).
Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ haben wir die (wohldefinierten) additiven *Kohomologie-Funktoren*

$$H^n : \mathcal{LR}\text{-}\mathcal{KK} \to \mathcal{LR},\ (A^\bullet, d) \mapsto \ker(d^n)/\mathrm{im}(d^{n-1}),\ f \mapsto ([z] \mapsto [f^n(z)]).$$

Sei nun $\mathcal{C}$ eine halb-abelsche Kategorie. Wir nennen einen Morphismus $f : (A^\bullet, d) \to (B^\bullet, e)$ in $\mathcal{C}$-$\mathcal{KK}$ *nullhomotop*, falls es eine Folge $(s^n : A^n \to B^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ von $\mathcal{C}$-Morphismen mit

$$f^n = e^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d^n$$

gibt, $n \in \mathbb{Z}$. Zwei $\mathcal{C}$-Kokomplexmorphismen $f, g : (A^\bullet, d) \to (B^\bullet, e)$ heißen *homotop*, falls $f - g$ nullhomotop ist. Ist dies in $\mathcal{LR}$-$\mathcal{KK}$ der Fall, so folgt aus obiger Zerlegung für $f - g$ sofort $H^n(f - g) = 0$ bzw. $H^n(f) = H^n(g)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Sei im folgenden $\mathcal{C}$ eine halb-abelsche Kategorie. Eine $\mathcal{C}$-Sequenz

$$\cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt an der Stelle* A^n, falls d^{n-1} und d^n Homomorphismen sind und $\mathrm{im}(d^{n-1}) = \ker(d^n)$ gilt. Wir nennen sie *exakt*, falls sie an jeder Stelle exakt ist.
Ein additiver Funktor $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen halb-abelschen Kategorien heißt

i) *linksexakt*, falls für jede exakte $\mathcal{C}$-Sequenz $0 \to F \to G \to H$ die $\mathcal{D}$-Sequenz $0 \to R(F) \to R(G) \to R(H)$ exakt ist.

ii) *exakt*, falls für jede exakte $\mathcal{C}$-Sequenz $0 \to F \to G \to H \to 0$ die $\mathcal{D}$-Sequenz $0 \to R(F) \to R(G) \to R(H) \to 0$ exakt ist.

Dual hierzu nennt man einen additiven, kontravarianten Funktor $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen halb-abelschen Kategorien linksexakt (exakt), falls $R^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ linksexakt (exakt) ist.

Beispiel 1.1.3 (Projektive und induktive Limesfunktoren) Projektive und induktive Spektren und deren Limiten spielen zum einen eine wichtige Rolle in der Strukturtheorie von Fréchet- und (DF)-Räumen und für die Anwendung von Banachraumtheorie auf letztere Räume, zum anderen entpuppt sich der projektive Limesfunktor, genauer seine erste Rechtsableitung, als eines unserer zentralen Studienobjekte. Für eine ausführlichere Darstellung überwiegender Teile des hier präsentierten Stoffes sei auf [MeiVog, §24 und §25] und [FloWlo, §26] verwiesen.
Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Unter einem (abzählbaren) *projektiven $\mathcal{C}$-Spektrum* $\mathcal{F} = (F_n, \rho^n_{n+1})$ verstehen wir eine Folge von $\mathcal{C}$-Objekten F_n und $\mathcal{C}$-Morphismen $\rho^n_{n+1} : F_{n+1} \to F_n$. Die $\mathcal{C}$-Morphismen ρ^n_{n+1} heißen auch *verbindende Abbildungen*, und für $m \geq n$ notieren wir die Verknüpfung $\rho^n_{n-1} \circ \cdots \circ \rho^{m-1}_m$ kurz mit ρ^n_m. Ein Morphismus $f : \mathcal{F} = (F_n, \rho^n_{n+1}) \to \mathcal{G} = (G_n, \phi^n_{n+1})$ zwischen projektiven $\mathcal{C}$-Spektren ist nichts anderes als eine Folge von $\mathcal{C}$-Morphismen $f_n : F_n \to G_n$

mit $f_n \circ \rho_{n+1}^n = \phi_{n+1}^n \circ f_{n+1}$ für alle n. Die Kategorie der projektiven $\mathcal{C}$-Spektren wollen wir im folgenden mit $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ bezeichnen. Mit $\mathcal{C}$ ist auch $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ halb-abelsch (abelsch).
Sei nun $\mathcal{C} = \mathcal{LR}$. Der *projektive Limes* eines projektiven $\mathcal{LR}$-Spektrums $\mathcal{F} = (F_n, \rho_{n+1}^n)$ wird gegeben durch den linearen Raum

$$\operatorname{proj}\mathcal{F} := \operatorname{proj}_n F_n := \{\, x \in \prod_{n=1}^{\infty} F_n : \rho_{n+1}^n(x_{n+1}) = x_n \text{ für alle } n \,\}.$$

Wir haben dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ natürliche Abbildungen $\rho_n : \operatorname{proj}\mathcal{F} \to F_n$. Jeder Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ projektiver $\mathcal{LR}$-Spektren induziert eine lineare Abbildung $\operatorname{proj}(f) : \operatorname{proj}\mathcal{F} \to \operatorname{proj}\mathcal{G}$, $(x_n)_n \mapsto (f_n(x_n))_n$. Wie man sich leicht überzeugt, ist dann der Funktor

$$\operatorname{proj} : \mathcal{LR}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{LR},\ \mathcal{F} \mapsto \operatorname{proj}\mathcal{F},\ f \mapsto \operatorname{proj}(f)$$

linksexakt. Ist zum Beispiel $\mathcal{F}$ ein *freies projektives $\mathcal{LR}$-Spektrum*, d.h. $\mathcal{F}$ ist isomorph zu einem projektiven $\mathcal{LR}$-Spektrum vom Typ

$$G_1 \leftarrow G_1 \times G_2 \leftarrow G_1 \times G_2 \times G_3 \leftarrow \cdots,$$

wobei die verbindenden Abbildungen die Projektionen seien, so ist $\operatorname{proj}\mathcal{F} \cong \prod_n G_n$.
Wir nennen ein projektives Spektrum $\mathcal{F} = (F_n, \rho_{n+1}^n)$ lokalkonvexer Räume (und stetiger linearer Abbildungen) bzw. seinen projektiven Limes $F := \operatorname{proj}\mathcal{F}$ *reduziert*, falls $\rho_n(F)$ dicht in F_n ist für alle n. Zum Beispiel läßt sich jeder Fréchetraum $(F, \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \ldots)$ topologisch als reduzierter projektiver Limes seiner *lokalen Banachräume*

$$F_n := \widetilde{(F/\ker\|\cdot\|_n, \|\cdot\|_n)}$$

darstellen, wobei $\operatorname{proj} F_n$ mit der Teilraumtopologie von $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$ versehen sei.
Völlig dual zum Konzept projektiver $\mathcal{C}$-Spektren sind induktive $\mathcal{C}$-Spektren, wobei wir hier nur sogenannte Einbettungsspektren betrachten wollen. Ein *induktives Spektrum*

$$\mathcal{E} = (E_N, i_N^{N+1})$$

linearer Räume besteht aus einer Folge linearer Räume E_N und Monomorphismen $i_N^{N+1} : E_N \hookrightarrow E_{N+1}$. Ein Morphismus $f : \mathcal{E} = (E_N, i_N^{N+1}) \to \mathcal{D} = (D_N, j_N^{N+1})$ induktiver Spektren linearer Räume ist eine Folge linearer Abbildungen $f_N : E_N \to D_N$, so daß $j_N^{N+1} \circ f_N = f_{N+1} \circ i_N^{N+1}$ für alle N gilt. Die abelsche Kategorie der induktiven Spektren linearer Räume notieren wir mit $\mathcal{LR}_{\mathbb{N}}$.
Unter dem *induktiven Limes* zu $\mathcal{E}$ wollen wir den linearen Raum

$$\operatorname{ind}\mathcal{E} := \operatorname{ind}_N E_N := \bigcup_N E_N$$

verstehen. Für einen Morphismus $f : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ induktiver Spektren linearer Räume setzen wir $\operatorname{ind}(f)(x) := f_N(x)$ für $x \in E_N$ und erhalten damit den exakten Funktor

$$\operatorname{ind} : \mathcal{LR}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{LR},\ \mathcal{E} \mapsto \operatorname{ind}\mathcal{E},\ f \mapsto \operatorname{ind}(f).$$

Analog definiert man nun ein induktives Spektrum $\mathcal{E}$ lokalkonvexer Räume und versieht den Limes $E := \operatorname{ind}\mathcal{E}$ mit der feinsten (evtl. nicht separierten) lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}_E$, die alle Inklusionen $i_N : E_N \hookrightarrow E$ stetig macht. Wir werden jedoch stets voraussetzen, daß $\mathcal{T}_E$ separiert ist, was in einem wichtigen Fall automatisch gewährleistet wird: Ist $\mathcal{E}$ ein induktives Spektrum lokalkonvexer Räume, das *regulär* ist, d.h. jede beschränkte Teilmenge von $(E, \mathcal{T}_E)$ ist in einer Stufe E_N enthalten und dort beschränkt, so ist $\mathcal{T}_E$ separiert, da der lineare Raum $\overline{\{0\}}^E$ beschränkt in einer separierten Stufe E_N ist.
Limiten induktiver Spektren von Banachräumen nennt man auch *(LB)-Räume*. Mittels des Grothendieckschen Faktorisierungssatzes ([MeiVog, 24.33]) sieht man leicht, daß das Spektrum $\mathcal{E}$ eines (LB)-Raumes E genau dann regulär ist, wenn E *lokal vollständig* ist, d.h. jede absolutkonvexe,

beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von E ist eine Banachkugel. Nach dem Lemma von W. Robertson ([MeiVog, Lemma 23.13 und Korollar 23.14]) sind vollständige Limiten von (LB)-Räumen lokal vollständig und damit regulär.[1]
Wir haben schon gesehen, daß sich Frécheträume als reduzierte projektive Limiten ihrer lokalen Banachräume darstellen lassen. Ist E ein bornologischer (DF)-Raum mit Fundamentalfolge $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ von absolutkonvexen, abgeschlossenen, beschränkten Mengen, so ist E der Limes des induktiven Spektrums der normierten Räumen E_{B_N}, die falls E lokal vollständig ist, sogar Banachräume sind. Umgekehrt ist jeder Limes eines induktiven Spektrums von normierten Räumen E_N ein bornologischer (DF)-Raum mit Fundamentalfolge von beschränkten Mengen $(\overline{B_{E_N}}^E)_N$.
Das Beispiel abschließend wollen wir noch mögliche Dualitäten induktiver und projektiver Spektren betrachten. Für ein induktives Spektrum $\mathcal{E}$ eines (LB)-Raumes E mit Inklusionsabbildungen $i_N : E_N \hookrightarrow E$ überlegt man sich leicht, daß durch $x' \mapsto (i_N^t(x'))_N$ ein algebraischer Isomorphismus von E'_b auf $\operatorname{proj} E'_N$ gegeben wird. Dieser ist nach dem Satz von der offenen Abbildung sogar topologisch. Ist umgekehrt F ein Fréchetraum, der Limes eines reduzierten projektiven Spektrums von Banachräumen ist, so ist F' algebraisch isomorph zum Limes des zugehörigen dualen Spektrums, welches aufgrund der dichten Verbindungsabbildungen ein induktives Spektrum in unserem Sinne ist. Um topologische Isomorphien zu erhalten, bieten sich nach obigem *distinguierte Frécheträume* an, d.h. solche Frécheträume F, für die F'_b bornologisch ist.

Wenden wir uns nun Exaktheitsbetrachtungen für den Vervollständigungsfunktor zu. Für ein $\mathcal{LKR}$-Objekt F bezeichne $j_F : F \to \widetilde{F}$ die natürliche Abbildung von F in seine Hausdorff-Vervollständigung $\widetilde{F}$, und für einen $\mathcal{LKR}$-Morphismus $f : F \to G$ sei $\widetilde{f} : \widetilde{F} \to \widetilde{G}$ die nach der universellen Eigenschaft von $j_F : F \to \widetilde{F}$ eindeutig bestimmte, stetige lineare Abbildung, die folgendes Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{F} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widetilde{G} \\ F \arrow[u, "j_F"] \arrow[r, "f"'] & G. \arrow[u, "j_G"'] \end{tikzcd}$$

Die Frage, wie sich exakte Sequenzen lokalkonvexer Räume bei ihrer Fortsetzung auf die Vervollständigung verhalten, wird durch den folgenden Satz (siehe [Pal, Proposition 10.3]) geklärt.

Satz 1.1.4 Ist $0 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 0$ eine $\mathcal{LKR}$-Sequenz, welche an den ersten beiden Stellen exakt ist, so gilt dies auch für die $\mathcal{LKR}$-Sequenz

$$0 \to \widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{f}} \widetilde{G} \xrightarrow{\widetilde{g}} \widetilde{H}.$$

Mit anderen Worten ist der Funktor

$$\widetilde{\ } : \mathcal{LKR} \longrightarrow \mathcal{LKR},\ F \mapsto \widetilde{F},\ f \mapsto \widetilde{f}$$

linksexakt. Ist g sogar ein Epihomomorphismus, so besitzt $\widetilde{g}$ dichtes Bild.

Statt eines direkten Beweises dieses Satzes, welcher mittels Bemerkung 5.1.3 ebenfalls denkbar ist, wollen wir hier V. P. Palamodov folgen und einen Beweis angeben, der die eingeführten Begriffe und ein sehr interessantes Lemma (Lemma 1.1.7) benutzt. Dafür benötigen wir ein paar Vorbereitungen, die an späterer Stelle noch verwendet werden.

Definition 1.1.5 Ein Objekt I einer halb-abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *injektiv*, falls für jeden Morphismus $h : F \to I$ und Monohomomorphismus $f : F \to G$ eine Fortsetzung $l : G \to I$ existiert,

[1]Die Frage, ob die Umkehrung dieser Aussage gilt, sprich ob reguläre (LB)-Räume vollständig sind, geht auf A. Grothendieck zurück und ist ein noch ungelöstes Problem der Funktionalanalysis.

d.h. es kommutiert das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & F \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"'] & G. \arrow[ul, dashed, "\exists\, l"'] \end{tikzcd}$$

Erfüllt ein $\mathcal{C}$-Objekt P die duale Eigenschaft hierzu, so heißt P *projektiv.*

Beispiel 1.1.6 Produkte injektiver Objekte sind wieder injektiv. Für eine nicht-leere Menge M ist der Banachraum

$$l_\infty(M) := \{\, b : M \to \mathbb{K} : \|b\| := \sup_{m\in M} |\, b(m)\,| < \infty \,\}$$

ein injektives Objekt in $\mathcal{LKR}$: Ersetzen wir I in obigem Diagramm durch $l_\infty(M)$, so existiert wegen der Stetigkeit von h ein $p \in cs(F)$ mit $\|\cdot\| \circ h \le p$. Bezeichnet nun h_m die Verknüpfung von h mit der m-ten Projektion von $l_\infty(M)$, so finden wir nach dem Hahn-Banach-Theorem ein $l_m \in G^*$ mit $l_m \circ f = h_m$ und $|\, l_m \,| \le p$. Mit $l(y)(m) := l_m(y)$ folgt die Behauptung.

Damit können wir nun die folgenden linksexakten, kontravarianten Funktoren definieren:

$$H_M : \mathcal{LKR} \longrightarrow \mathcal{LR},\ F \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{LKR}}(F, l_\infty(M)),\ f \mapsto f^* = \,\cdot \circ f.$$

Das untenstehende Lemma ([Pal, Proposition 4.2], siehe auch [Wen, Theorem 2.2.2]) zum Beweis von Satz 1.1.4 beschreibt algebraisch u.a. den – wie es V. P. Palamodov ausdrückt – „nicht-homomorphen Charakter“ von Morphismen lokalkonvexer Räume und ist daher auch von allgemeinem Interesse.

Lemma 1.1.7 Für eine $\mathcal{LKR}$-Sequenz $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $\mathrm{im}\,(f)$ ist dicht in $\ker\,(g)$, und g ist ein Homomorphismus.

b) Für jede Menge M ist die Sequenz $H_M(F) \xleftarrow{f^*} H_M(G) \xleftarrow{g^*} H_M(H)$ exakt.

c) Es gibt eine Menge M mit $|\, M\,| \ge |\,\mathrm{coim}\,(g)'\,|$, so daß die Sequenz unter b) exakt ist.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $h \in H_M(G)$ mit $h \circ f = 0$. Dann gilt $h(\ker\,(g)) = h(\overline{\mathrm{im}\,(f)}) \subseteq \overline{h(\mathrm{im}\,(f))} = \overline{\{0\}} = \{0\}$ (da $l_\infty(M)$ separiert ist), womit die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \overline{h} : \mathrm{coim}\,(g) & \to & l_\infty(M) \\ x + \ker\,(g) & \mapsto & h(x) \end{array}$$

wohldefiniert und stetig ist. Da $l_\infty(M)$ injektiv und g ein Homomorphismus ist, läßt sich $\overline{h}$ auf H fortsetzen. Bezeichnet l eine Fortsetzung, so folgt $g^*(l) = h$.
b) $\Rightarrow$ c): $\surd$
c) $\Rightarrow$ a): Man macht sich leicht klar, daß die Gültigkeit von b) für eine Menge M die für jede Teilmenge $N \subseteq M$ nach sich zieht. Wählt man N einpunktig, so folgt die (algebraische) Exaktheit der dualen Sequenz

$$F' \xleftarrow{f^t} G' \xleftarrow{g^t} H',$$

d.h. für alle $y' \in G'$ mit $y'|_{\mathrm{im}\,(f)} = 0$ existiert ein $z' \in H'$ mit $y' = z' \circ g$ und damit $y'|_{\ker\,(g)} = 0$. Es folgt $\ker\,(g) \subseteq \overline{\mathrm{im}\,(f)}$ nach einer Hahn-Banach Variante ([Jar, Corollary 7.2.2 (a)]).
Sei nun $U = \Gamma(U) \in \mathcal{U}_0(G)$. Nach obigem gilt für die Menge $M := (\frac{1}{2}\cdot U + \mathrm{im}\,(f))^\circ = (\frac{1}{2}\cdot U + \ker\,(g))^\circ$, so daß wir auf natürliche Weise M als Teilmenge von $(\mathrm{coim}\,(g))'$ betrachten können. Setzen wir

$$h(y)(y') := y'(y)$$

für $y \in G$ und $y' \in M$, so ist per Definition $h \in H_M(G)$ und $h \in \ker(f^*)$. Nach Voraussetzung finden wir ein $l \in H_M(H)$ mit $g^*(l) = l \circ g = h$. Weiter existiert ein $V \in \mathcal{U}_0(H)$ mit $l(V) \subseteq B_{l_\infty(M)}$. Damit haben wir für $y' \in M$ und $y \in g^{-1}(V)$ die Abschätzung

$$|y'(y)| = |h(y)(y')| = |(l \circ g(y))(y')| \leq 1,$$

d.h. $(\frac{1}{2} \cdot U + \operatorname{im}(f))^\circ = M \subseteq g^{-1}(V)^\circ$, womit nach dem Bipolarensatz

$$g^{-1}(V) \subseteq \left(\frac{1}{2} \cdot U + \operatorname{im}(f)\right)^{\circ\circ} = \overline{\frac{1}{2} \cdot U + \operatorname{im}(f)} \subseteq U + \operatorname{im}(f)$$

gilt. Anwendung von g impliziert, daß g ein Homomorphismus ist, was den Beweis abschließt. $\square$

Beweis von Satz 1.1.4: Wir beweisen zunächst die zusätzliche Behauptung im Satz. Ist g surjektiv, so folgt $\overline{\widetilde{g}(\widetilde{G})} = \overline{\widetilde{g}(j_G(G))} = \overline{j_H(g(G))} = \widetilde{H}$.
Da die angegebene Sequenz an den ersten beiden Stellen exakt ist, erhalten wir durch zweimalige Anwendung von Lemma 1.1.7 für jede Menge M die Exaktheit der Sequenz linearer Räume

$$0 \leftarrow H_M(F) \xleftarrow{f^*} H_M(G) \xleftarrow{g^*} H_M(H).$$

Nach der universellen Eigenschaft der Hausdorff-Vervollständigung haben wir einen funktoriellen Isomorphismus $H_M(F) \cong H_M(\widetilde{F})$, womit die Sequenz

$$0 \leftarrow H_M(\widetilde{F}) \xleftarrow{\widetilde{f}^*} H_M(\widetilde{G}) \xleftarrow{\widetilde{g}^*} H_M(\widetilde{H})$$

ebenfalls exakt ist. Wiederum nach Lemma 1.1.7 folgt wegen der Exaktheit an der Stelle $H_M(\widetilde{F})$, daß $\widetilde{f}$ ein Homomorphismus ist und $\{0\} = \overline{\{0\}} = \ker(\widetilde{f})$ gilt. Aus der Exaktheit an der Stelle $H_M(\widetilde{G})$ erhalten wir, daß $\widetilde{g}$ ein Homomorphismus und $\operatorname{im}(\widetilde{f})$ dicht in $\ker(\widetilde{g})$ ist. Nach obigem ist aber $\widetilde{f}$ ein Monohomomorphismus und daher mit $\widetilde{F}$ auch $\operatorname{im}(\widetilde{f})$ vollständig. Es folgt die Abgeschlossenheit von $\operatorname{im}(\widetilde{f})$. $\square$

Mit Lemma 1.1.7, Satz 1.1.4 und seinem Beweis folgert man nun sofort:

Korollar 1.1.8 Für $\mathcal{LKR}$-Morphismen $f : F \to G$ und $g : G \to H$ gilt:

a) Ist g ein Homomorphismus, so ist $\ker(\widetilde{g}) = \widetilde{\ker(g)}$.

b) Ist f ein Monohomomorphismus, so ist $\operatorname{im}(\widetilde{f}) = \widetilde{\operatorname{im}(f)}$.

c) g ist genau dann ein (Mono-)Homomorphismus, wenn $\widetilde{g}$ ein (Mono-)Homomorphismus ist.

Ist $E = \operatorname{ind}_N E_N$ ein nicht vollständiger (LB)-Raum, so ist die Vervollständigung des kanonischen Epihomomorphismus $g : \oplus_N E_N \to E$, $(x_N)_N \mapsto \sum x_N$ nicht mehr surjektiv und daher auch kein Epihomomorphismus. Im metrisierbaren Fall verhalten sich Epihomomorphismen jedoch gut:

Lemma 1.1.9 Ist $g : G \to H$ eine Epihomomorphismus zwischen metrisierbaren lokalkonvexen Räumen, so auch $\widetilde{g}$. Insbesondere ist also nach Satz 1.1.4 für jede exakte Sequenz metrisierbarer lokalkonvexer Räume die vervollständigte Sequenz ebenfalls (topologisch) exakt.

Beweis: Nach dem Schauder-Lemma reicht es zu zeigen, daß $\widetilde{g}$ *fast offen* ist, d.h. für jede Nullumgebung $\widetilde{U}$ von $\widetilde{G}$ ist $\overline{g(\widetilde{U})}$ eine Nullumgebung in $\widetilde{H}$. Sei dazu $\widetilde{U} \in \mathcal{U}_0(\widetilde{G})$, o.E. $\widetilde{U} = \overline{j_G(U)}$ für ein $U \in \mathcal{U}_0(G)$. Da $g(U) \in \mathcal{U}_0(H)$ ist, folgt mit $\overline{\widetilde{g}(\widetilde{U})} = \overline{\widetilde{g}(j_G(U))} = \overline{j_H(g(U))}$ das Lemma. $\square$

Abschließend wollen wir noch die Vervollständigung von Monomorphismen, sprich injektiven, stetigen linearen Abbildungen, untersuchen.

Beispiel 1.1.10 Für einen Monomorphismus $f : F \to G$ zwischen lokalkonvexen Räumen ist $\widetilde{f}$ i.A. kein Monomorphismus mehr, was man z.B. wie folgt sieht: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein beliebiger unendlich-dimensionaler Banachraum, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Elemente in X, die o.E. auf 1 normiert seien, $Y := \text{Span}(\{y_1, y_2, \ldots\})$ und Z ein algebraisches Komplement zu Y in X. Dann läßt sich jedes $x \in X$ in eindeutiger Weise schreiben als $x = y + z = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n y_n + z$ mit $y = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n y_n \in Y$, $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$ und $z \in Z$. Setzen wir

$$|||x||| := \sum_{n=1}^{N} n \cdot |\lambda_n| + \|z\|,$$

so erhalten wir eine weitere Norm auf X, für die zwar $\|\cdot\| \le |||\cdot|||$ gilt, aber welche nicht äquivalent zu $\|\cdot\|$ ist. Bezeichnet nun $f : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ die identische Abbildung, so sieht man mit Hilfe des Satzes von der offenen Abbildung, daß $\widetilde{f}$ zwar ein Epihomomorphismus, aber nicht injektiv ist.

1.2 Tensorprodukte

Viele vektorwertige Funktionenräume besitzen unter schwachen Zusatzvoraussetzungen Tensorproduktdarstellungen, so daß die Surjektivität tensorierter Abbildungen im engen Zusammenhang mit Liftingproblemen von vektorwertigen Funktionen steht (siehe [KabVog]). Wir wollen nun algebraische und lokalkonvexe Tensorprodukte einführen (siehe auch [Jar] und [DefFlo1]) und folgende Problematik näher untersuchen:

Fragestellung: Für jeden linearen Raum E und jede exakte Sequenz $0 \to F \to G \to H \to 0$ linearer Räume ist die tensorierte Sequenz $0 \to E \otimes F \to E \otimes G \to E \otimes H \to 0$ ebenfalls exakt, wie wir gleich sehen werden. Was ändert sich, wenn wir obige Situation mit lokalkonvexen Strukturen versehen und zur Vervollständigung übergehen?

Seien E, F lineare Räume. Ein linearer Raum $E \otimes F$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$\otimes : E \times F \to E \otimes F,\ (x, y) \mapsto x \otimes y$$

heißt *Tensorprodukt* von E und F, falls für jede bilineare Abbildung $\varphi : E \times F \to G$ von $E \times F$ in einen linearen Raum G genau eine lineare Abbildung $L_\varphi : E \otimes F \to G$ mit $L_\varphi \circ \otimes = \varphi$ existiert. Das Tensorprodukt zweier linearer Räume ist eindeutig bis auf Isomorphie und existiert auch stets: Bezeichnet $\mathcal{B}(E, F; \mathbb{K})$ den linearen Raum der Bilinearformen auf $E \times F$, so wird durch $E \otimes F := \text{Span}\,\text{im}\,\otimes$ und $\otimes : E \times F \to E \otimes F$, $(x, y) \mapsto \otimes(x, y)$ ein Tensorprodukt von E und F gegeben, wobei $\otimes : E \times F \to \mathcal{B}(E, F; \mathbb{K})^*$, $(x, y) \mapsto (\nu \mapsto \nu(x, y))$ sei.

Zum Beispiel ist, wie man sich leicht klar macht,

$$E^* \otimes F \cong \mathcal{F}(E, F) := \{\, f : E \to F \text{ linear} : \dim \text{im}\,(f) < \infty \,\}.$$

Für zwei lineare Abbildungen $h_1 : E_1 \to E_2$ und $h_2 : F_1 \to F_2$ sei $h_1 \otimes h_2$ die nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $E_1 \otimes F_1$ eindeutig bestimmte lineare Abbildung, welche folgendes Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times F_1 & \xrightarrow{h_1 \times h_2} & E_2 \times F_2 \\ \otimes \big\downarrow & & \big\downarrow \otimes \\ E_1 \otimes F_1 & \underset{\exists !}{\dashrightarrow} & E_2 \otimes F_2. \end{array}$$

Bezeichnet $\mathcal{LR}$ wieder die abelsche Kategorie der linearen Räume, und ist E ein linearer Raum, so ist der Funktor

$$E \otimes \cdot : \mathcal{LR} \to \mathcal{LR},\ F \mapsto E \otimes F,\ f \mapsto \text{id}_E \otimes f$$

exakt, d.h. es gilt folgendes

Lemma 1.2.1 Für jede exakte Sequenz $0 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 0$ linearer Räume ist die Sequenz $0 \to E \otimes F \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} E \otimes G \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} E \otimes H \to 0$ ebenfalls exakt.

Beweis: Sei $x \otimes z \in E \otimes H$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in G$ mit $g(y) = z$. Es folgt $(\mathrm{id} \otimes g)(x \otimes y) = x \otimes z$ und hieraus die Surjektivität von $\mathrm{id} \otimes g$. Die übrigen Exaktheitsaussagen erhalten wir aus der nützlichen Formel (siehe [DefFlo1, 2.7 (4)])

$$\ker h_1 \otimes h_2 = \ker h_1 \otimes F_1 + E_1 \otimes \ker h_2 \,(\subseteq\, E_1 \otimes F_1),$$

wobei $h_1 : E_1 \to E_2$, $h_2 : F_1 \to F_2$ zwei lineare Abbildungen seien. $\square$

Seien nun E und F lokalkonvexe Räume. Der lineare Raum $E \otimes F$ versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie π auf $E \otimes F$, welche die natürliche Abbildung $\otimes : E \times F \to E \otimes F$ stetig macht, heißt *projektives Tensorprodukt* von E und F und wird mit $E \otimes_\pi F$ notiert. Eine Nullumgebungsbasis wird gegeben durch die Familie $\Gamma(U \otimes V)$, wobei $U \in \mathcal{U}_0(E)$ und $V \in \mathcal{U}_0(F)$ seien. Für die Vervollständigung von $E \otimes_\pi F$ schreiben wir kurz $E\widetilde{\otimes}_\pi F$.
Analog zu obigem erfüllt das projektive Tensorprodukt eine entsprechende universelle Eigenschaft für lokalkonvexe Räume, m.a.W. ist das projektive Tensorprodukt *das* Tensorprodukt in der Kategorie der lokalkonvexen Räume. Für stetige lineare Abbildungen $h_1 : E_1 \to E_2$, $h_2 : F_1 \to F_2$ zwischen lokalkonvexen Räumen ist die lineare Abbildung $h_1 \otimes h_2 : E_1 \otimes_\pi F_1 \to E_2 \otimes_\pi F_2$ stetig. Diese bezeichnen wir auch mit $h_1 \otimes_\pi h_2$ und ihre Fortsetzung zur Vervollständigung mit $h_1\widetilde{\otimes}_\pi h_2$.
Das projektive Tensorprodukt respektiert Epihomomorphismen im folgenden Sinne:

Satz 1.2.2 Seien $h_1 : E_1 \to E_2$, $h_2 : F_1 \to F_2$ Epihomomorphismen zwischen lokalkonvexen Räumen. Dann ist $h_1 \otimes_\pi h_2 : E_1 \otimes_\pi F_1 \to E_2 \otimes_\pi F_2$ ebenfalls ein Epihomomorphismus. Sind alle auftretenden Räume metrisierbar, so ist auch $h_1\widetilde{\otimes}_\pi h_2$ ein Epihomomorphismus.

Beweis: Die Surjektivität von $h_1 \otimes h_2$ folgt wie im Beweis von Lemma 1.2.1. Seien $U_1 \in \mathcal{U}_0(E_1)$, $V_1 \in \mathcal{U}_0(F_1)$. Nach Voraussetzung existieren $U_2 \in \mathcal{U}_0(E_2)$, $V_2 \in \mathcal{U}_0(F_2)$ mit $h_1(U_1) \supseteq U_2$ und $h_2(V_1) \supseteq V_2$. Damit gilt $(h_1 \otimes h_2)(U_1 \otimes V_1) \supseteq U_2 \otimes V_2$, und daher ist $(h_1 \otimes h_2)(\Gamma(U_1 \otimes V_1)) \supseteq \Gamma(U_2 \otimes V_2)$. Wir schließen, daß $h_1 \otimes_\pi h_2 : E_1 \otimes_\pi F_1 \to E_2 \otimes_\pi F_2$ ein Homomorphismus ist. Nach Lemma 1.1.9 ist im metrisierbaren Fall $h_1\widetilde{\otimes}_\pi h_2$ ebenfalls ein Epihomomorphismus. $\square$

Der obige Satz gilt nicht mehr für Monohomomorphismen:

Beispiel 1.2.3 Sei im folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, F_2 ein unendlichdimensionaler, reflexiver Banachraum, der nicht isomorph zu einem Hilbertraum ist (z.B. $F_2 = l_3$). Das Theorem von Lindenstrauss-Tzafriri (siehe [MeiVog, Bemerkung nach 11.7]) garantiert uns die Existenz eines nicht komplementierten, abgeschlossenen Teilraumes F_1 von F_2. Betrachte $h : F_1 \hookrightarrow F_2$. Angenommen, $\mathrm{id}_{F_1'} \otimes_\pi h$ ist ein Monohomomorphismus. Bezeichnet $g : F_1' \otimes_\pi F_1 \to \mathbb{R}$ die stetige Linearform, welche durch die Linearisierung der Bilinearform $(y', y) \mapsto y'(y)$ gegeben wird, so können wir nach dem Hahn-Banach Theorem g zu einer stetigen Linearform $G : F_1' \otimes_\pi F_2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Mit $P : F_2 \to F_1 = F_1''$, $y \mapsto (y' \mapsto G(y' \otimes y))$ erhalten wir dann eine stetige Projektion von F_2 auf F_1. Widerspruch.

Die Situation ist wesentlich besser bei dichten bzw. komplementierten Unterräumen, da diese vom projektiven Tensorprodukt respektiert werden ([Jar, 15.2.3]). Insbesondere gilt also für zwei lokalkonvexe Räume E und F die nützliche Beziehung $E\widetilde{\otimes}_\pi F = \widetilde{E}\widetilde{\otimes}_\pi \widetilde{F}$.

Bemerkung 1.2.4 Zusammenfassend liegt mit Korollar 1.1.8 a), Lemma 1.2.1 und Satz 1.2.2 folgende Situation vor: Sei E ein lokalkonvexer Raum und $0 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 0$ eine exakte Sequenz lokalkonvexer Räume. Dann hat die Sequenz

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\pi F \xrightarrow{\mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi f} E\widetilde{\otimes}_\pi G \xrightarrow{\mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi g} E\widetilde{\otimes}_\pi H \to 0$$

die Eigenschaften, daß $\mathrm{im}\,(\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\pi f)$ dicht in $\ker\,(\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\pi g)$ und $\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\pi g$ ein Homomorphismus ist. Man vergleiche hierzu Lemma 1.1.7. Wie das Beispiel 1.2.3 zeigt, ist $\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\pi f$ i.A. kein Monohomomorphismus mehr. An späterer Stelle werden wir sehen, daß $\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\pi f$ generell noch nicht einmal injektiv ist (Bemerkung 2.1.9). Die Abbildung $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi g$ hat zwar nach Satz 1.2.2 und Satz 1.1.4 dichtes Bild, aber ist i.A. nicht surjektiv: Man betrachte dazu eine nukleare, nicht zerfallende exakte Sequenz vollständiger lokalkonvexer Räume, z.B. die Borel-Sequenz

$$0 \to J_{\{0\}} \longrightarrow \mathcal{E}([-1,1]) \xrightarrow{g} \omega \to 0$$

mit $g(f) := (f^{(n)}(0))_{n\in\mathbb{N}_0}$ (vgl. [MeiVog, Aufgabe 1, §30]). Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{id}_{H'} \widetilde{\otimes}_\pi g : H' \widetilde{\otimes}_\pi G = L(H,G) \to L(H,H) = H' \widetilde{\otimes}_\pi H$$

nicht surjektiv, da ein Lifting von id_H eine Rechtsinverse von g wäre.

Kommen wir nun zum injektiven Tensorprodukt zweier lokalkonvexer Räume E und F, das wir mittels des ϵ-Produktes einführen wollen: Das *Schwartzsche ϵ-Produkt $E\epsilon F$* ist definiert als der Raum $\mathrm{L}_e(E'_c, F)$ der stetigen linearen Abbildungen von E', versehen mit der Topologie $c = c(E', E)$ der gleichmäßigen Konvergenz auf absolutkonvexen, kompakten Teilmengen von E, nach F, wobei $\mathrm{L}(E'_c, F)$ selbst die Topologie e der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichstetigen Teilmengen von E' trage.[2] Ein Halbnormensystem für diese lokalkonvexe Topologie wird gegeben durch:

$$\epsilon_{U^\circ,p}(f) := \sup_{x'\in U^\circ} p(f(x')) \quad (U \in \mathcal{U}_0(E),\, p \in cs(F)).$$

Mittels der Linearisierung der Bilinearform

$$\begin{aligned} \chi : E \times F &\to \mathrm{L}(E'_c, F) \\ (x,y) &\mapsto (x' \mapsto (x'(x)\cdot y)) \end{aligned}$$

können wir $E \otimes F$ als linearen Unterraum von $\mathrm{L}(E'_c, F)$ auffassen. $E \otimes F$ versehen mit der Teilraumtopologie ε von $E\epsilon F$ wird als *injektives Tensoprodukt* bezeichnet und mit $E \otimes_\varepsilon F$ notiert. Für die Vervollständigung schreiben wir wieder $E \widetilde{\otimes}_\varepsilon F$. Aus der Normformel ([MeiVog, Satz 22.14]) folgt unmittelbar, daß die ε-Topologie auf $E \otimes F$ gegeben wird durch die Halbnormen

$$\varepsilon_{U,V}\Big(\sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\Big) := \sup_{\substack{x'\in U^\circ \\ y'\in V^\circ}} \Big|\sum_{j=1}^n x'(x_j)\cdot y'(y_j)\Big| \quad (U \in \mathcal{U}_0(E),\, V \in \mathcal{U}_0(F)).$$

Da die natürliche Abbildung $\otimes : E \times F \to E \otimes_\varepsilon F$ offenbar stetig ist, folgt $\varepsilon \le \pi$.
Sind $h_1 : E_1 \to E_2$, $h_2 : F_1 \to F_2$ stetige lineare Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen, so auch $h_1\epsilon h_2 : E_1\epsilon F_1 \to E_2\epsilon F_2$, $f \mapsto h_2 \circ f \circ h_1'$. Wie man leicht nachrechnet, ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} E_1\epsilon F_1 \arrow[r, "h_1\epsilon h_2"] & E_2\epsilon F_2 \\ E_1 \otimes_\varepsilon F_1 \arrow[u, hook] \arrow[r, "h_1\otimes h_2"'] & E_2 \otimes_\varepsilon F_2. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Für die stetige lineare Abbildung $h_1 \otimes h_2 : E_1 \otimes_\varepsilon F_1 \to E_2 \otimes_\varepsilon F_2$ schreiben wir auch $h_1 \otimes_\varepsilon h_2$ und für die Fortsetzung zur Vervollständigung $h_1 \widetilde{\otimes}_\varepsilon h_2$.
Wir haben mit Satz 1.2.2 gesehen, daß das projektive Tensorprodukt Epihomomorphismen respektiert. Dual hierzu ist der

Satz 1.2.5 In der Notation von oben gilt folgendes: Sind h_1 und h_2 Monomorphismen, so auch $h_1\epsilon h_2$ und $h_1 \otimes_\varepsilon h_2$. Falls zudem E_1 und F_1 vollständig sind, so ist $h_1 \widetilde{\otimes}_\varepsilon h_2$ ebenfalls ein Monomorphismus. Mit h_1 und h_2 sind auch $h_1\epsilon h_2$, $h_1 \otimes_\varepsilon h_2$ und $h_1 \widetilde{\otimes}_\varepsilon h_2$ Monohomomorphismen.

---

[2] H. Jarchow verwendet in [Jar] statt der Topologie c die feinste lokalkonvexe Topologie, die auf gleichstetigen Mengen mit der $\sigma(E', E)$-Topologie übereinstimmt. Für vollständiges E sind diese Topologien aber gleich ([MeiVog, 24.21]).

Beweis: Seien h_1 und h_2 Monomorphismen. Dann hat h_1' schwach dichtes Bild und es folgt, daß auch $h_1 \epsilon h_2$ und damit $h_1 \otimes_\varepsilon h_2$ ein Monomorphismus ist. Da mit E_1 und F_1 auch $E_1 \epsilon F_1$ vollständig ist ([Jar, 16.1.5]), erhalten wir in diesem Fall durch Übergang zur Vervollständigung in obigem kommutativen Diagramm, daß $h_1 \widetilde{\otimes}_\varepsilon h_2$ ein Monomorphismus ist.
Seien nun h_1 und h_2 Monohomomorphismen. Die Offenheit von $h_1 \epsilon h_2$ aufs Bild sieht man wie folgt: Sei $U \in \mathcal{U}_0(E_1)$ und $p \in cs(F_1)$. Da h_1 ein Monohomomorphismus ist, können wir o.E. $U = h_1^{-1}(V)$, $V \in \mathcal{U}_0(E_2)$, annehmen, und da h_2 ein Homomorphismus ist, existieren $q \in cs(F_2)$, $C \geq 0$ mit $q \circ h_2 \leq C \cdot p$, womit man nun sofort $\epsilon_{V^\circ, q} \circ (h_1 \epsilon h_2) \leq C \cdot \epsilon_{U^\circ, p}$ nachrechnet. Des weiteren folgern wir, daß $h_1 \otimes_\varepsilon h_2$ und daher nach Satz 1.1.4 auch $h_1 \widetilde{\otimes}_\varepsilon h_2$ Monohomomorphismen sind. $\square$

Wir wollen nun kurz skizzieren, daß das injektive Tensorprodukt i.A. keine Epihomomorphismen respektiert:

Beispiel 1.2.6 Da jeder separable Banachraum isomorph zu einem Quotienten von l_1 ist, existiert ein Epihomomorphismus $h : l_1 \to l_2$. Angenommen,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_{l_2'} \widetilde{\otimes}_\varepsilon h : \, l_2' \widetilde{\otimes}_\varepsilon l_1 = \overline{\mathcal{F}(l_2, l_1)}^{L(l_2, l_1)} = \mathcal{K}(l_2, l_1) & \to & l_2' \widetilde{\otimes}_\varepsilon l_2 = \mathcal{K}(l_2, l_2) \\ f & \mapsto & h \circ f \end{array}$$

wäre ein Epihomomorphismus. Dann würde jeder kompakte Operator $l_2 \to l_2$ über l_1 faktorisieren und wäre damit ein Hilbert-Schmidt-Operator ([Jar, 20.5.2]). Widerspruch.

Betrachten wir nun die zu Anfang dieses Abschnitts angedeutete Fragestellung. Stellt man lediglich Bedingungen an die vorgegebene Sequenz, so führt dies zu den sogenannten $\otimes$-Sequenzen von W. Kaballo und D. Vogt. Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [KabVog, Satz 1.1].

Definition/Satz 1.2.7 Eine exakte Sequenz $0 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 0$ lokalkonvexer Räume heißt $\otimes$-*Sequenz*, falls sie eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

a) $\mathrm{id}_E \otimes_\pi f$ ist ein Monohomomorphismus für jeden lokalkonvexen Raum (Banachraum) E.

b) $\mathrm{id}_E \otimes_\varepsilon g$ ist ein Epihomomorphismus für jeden lokalkonvexen Raum (Banachraum) E.

c) Für alle $U \in \mathcal{U}_0(F)$ existiert ein $V \in \mathcal{U}_0(G)$, so daß für alle endlich-dimensionalen Unterräume M von G eine lineare Abbildung $L_M : M \to F$ existiert mit

   i) $L_M(V \cap M) \subseteq U$,

   ii) $L_M(x) = x$ für alle $x \in M \cap F$.

In [KabVog] findet man weitere äquivalente Bedingungen, die wie c) von lokaler Natur sind. Alle diese Bedingungen reflektieren ein Resulat von A. Grothendieck, daß eine exakte Sequenz von Banachräumen genau dann eine $\otimes$-Sequenz ist, wenn die duale Sequenz zerfällt (vgl. [KabVog]). Ein für uns wichtiges Beispiel einer $\otimes$-Sequenz werden wir gleich kennenlernen. Wir wollen vorher noch kurz aufzeigen, welche Bedeutung $\otimes$-Sequenzen für unsere Fragestellung haben (siehe [KabVog, Satz 1.5]):

Korollar 1.2.8 Es gelten folgenden Aussagen:

a) Ist $0 \to F \to G \to H \to 0$ eine $\otimes$-Sequenz lokalkonvexer Räume, so sind für jeden lokalkonvexen Raum E die Sequenzen

$$0 \to E \widetilde{\otimes}_\pi F \to E \widetilde{\otimes}_\pi G \to E \widetilde{\otimes}_\pi H \quad \text{und} \quad 0 \to E \widetilde{\otimes}_\varepsilon F \to E \widetilde{\otimes}_\varepsilon G \to E \widetilde{\otimes}_\varepsilon H$$

topologisch exakt.

b) Ist $0 \to F \to G \to H \to 0$ eine exakte Sequenz von Fréchetträumen, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) $0 \to F \to G \to H \to 0$ ist eine $\otimes$-Sequenz.

ii) Die $E\widetilde{\otimes}_\pi \cdot$-tensorierte Sequenz ist exakt für jeden Fréchetraum (Banachraum) E.

iii) Die $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot$-tensorierte Sequenz ist exakt für jeden Fréchetraum (Banachraum) E.

Beweis: Zu a) Dies folgt aus Lemma 1.2.1, den Sätzen 1.2.2 bzw. 1.2.5 und Satz 1.1.4.
Zu b) Die Implikationen i) $\Rightarrow$ ii) und i) $\Rightarrow$ iii) erhält man aus a) und Korollar 1.1.9, die Rückrichtungen aus Korollar 1.1.8 c) und Lemma 1.2.1. □

Um das angekündigte Beispiel einer $\otimes$-Sequenz zu bringen, benötigen wir $\mathcal{L}_p$-Räume, die grob gesprochen Banachräume sind, welche „lokal“ l_p^m-Strukturen aufweisen:

Definition 1.2.9 (J. Lindenstrauss, A. Pelczynski) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq \lambda < \infty$. Ein Banachraum X heißt $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-Raum, falls es zu jedem endlich-dimensionalen Unterraum $N \subseteq X$ einen endlich dimensionalen Unterraum $N \subseteq M \subseteq X$ mit $\mathrm{d}(M, l_p^{\dim M}) \leq \lambda$ gibt, wobei für zwei normierte Räume X und Y

$$\mathrm{d}(X,Y) := \inf\{\, \|T\| \cdot \|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ Isomorphismus} \,\}$$

den *Banach-Mazur-Abstand* von X und Y bezeichnet und $l_p^m := (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$ ist. Wir nennen X einen $\mathcal{L}_p$*-Raum*, falls ein λ existiert, so daß X ein $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-Raum ist.

Für alle $\varepsilon > 0$ sind die Lebesgue-Räume $L_p(\mu)$ beispielsweise $\mathcal{L}_{p,1+\varepsilon}$-Räume, und $C(K)$ ist ein $\mathcal{L}_{\infty,1+\varepsilon}$-Raum für jedes Kompaktum K. Nach [LinTza, Theorem II.5.25] sind $\mathcal{L}_\infty$-Räume gerade diejenigen Banachräume, welche die kompakte Fortsetzungseigenschaft besitzen. Insbesondere sind also injektive Banachräume $\mathcal{L}_\infty$-Räume.

Satz 1.2.10 ([KabVog]) Ist $0 \to F \to G \to H \to 0$ eine exakte Sequenz von Banachräumen und F ein $\mathcal{L}_\infty$-Raum, so liegt eine $\otimes$-Sequenz vor.

Beweis: Sei F ein $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$-Raum. Wir rechnen die Bedingung c) aus Definition/Satz 1.2.7 nach. Sei dazu o.E. $U = B_G \cap F$. Wir setzen $V := \frac{1}{\lambda+1} \cdot B_G$. Weiter sei $M_2 \subseteq G$ ein endlich-dimensionaler Unterraum und $M_1 := M_2 \cap F$. Dann existiert nach Voraussetzung ein endlich-dimensionaler Unterraum $M_1 \subseteq \widetilde{M_1} \subseteq F$ und ein Isomorphismus $T_1 : \widetilde{M_1} \to l_\infty^{\dim \widetilde{M_1}}$ mit $\|T_1\| \cdot \|T_1^{-1}\| \leq \lambda + 1$. Nach komponentenweiser Hahn-Banach-Fortsetzung finden wir eine normgleiche Fortsetzung T_2 von T_1 auf G. Mit $P := T_1^{-1} \circ T_2 : G \to \widetilde{M_1}$ erhalten wir dann eine Projektion von G auf $\widetilde{M_1}$ mit $\|P\| \leq \lambda + 1$. Sei $L_{M_2} := P|_{M_2}$, so folgt die Behauptung. □

Betrachten wir nochmals die Fragestellung zu Anfang dieses Abschnitts, indem wir diesmal Bedingungen an den Raum E stellen. Dies führt dann zu den sogenannten ε- bzw. π-Räumen von R. Hollstein.

Definition 1.2.11 Ein lokalkonvexer Raum E heißt ε*-Raum* (π*-Raum*), falls für jeden Epihomomorphismus g (Monohomomorphismus f) lokalkonvexer Räume $\mathrm{id}_E \otimes_\varepsilon g$ ($\mathrm{id}_E \otimes_\pi f$) wieder ein Homomorphismus ist.

R. Hollstein zeigte, daß es genügt, obige Bedingungen für Epihomomorphismen bzw. Monohomomorphismen zwischen Banachräumen zu testen ([Hol2, Proposition 1.3 und 1.4]), und daß die ε-Banachräume (π-Banachräume) gerade die $\mathcal{L}_\infty$-Räume ($\mathcal{L}_1$-Räume) sind ([Hol2, Remarks and examples 1.5 (1)]). Da für einen nuklearen lokalkonvexen Raum projektives und injektives Tensorprodukt mit einem weiteren lokalkonvexen Raum zusammenfallen, sind nukleare Räume sowohl π- als auch ε-Räume. Weitere Beispiele werden wir an späterer Stelle noch betrachten.
Völlig analog zum Beweis von Korollar 1.2.8 erhalten wir nun:

Korollar 1.2.12 Es gelten folgende Aussagen:

a) Ist E ein ε-Raum (π-Raum), so ist der Funktor

$$E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot : \mathcal{LKR} \to \mathcal{LKR} \quad (E\widetilde{\otimes}_\pi \cdot : \mathcal{LKR} \to \mathcal{LKR})$$

linksexakt.

b) Ein Fréchetraum E ist genau dann ein ε-Fréchetraum (π-Fréchetraum), falls der Funktor

$$E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR} \quad (E\widetilde{\otimes}_\pi \cdot : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR})$$

exakt ist.

Auch wenn wir unsere ganze Aufmerksamkeit den projektiven und injektiven Tensorprodukttopologien widmen wollen, werden wir in manchen Situationen in der Lage sein, ohne großen Zusatzaufwand Resulate auf sogenannte Tensornormtopologien zu transferieren. Diese wurden von J. Harksen in seiner Dissertation (siehe [Har]) aufbauend auf den von A. Grothendieck ausführlich studierten Tensornormen eingeführt:

Definition 1.2.13 Eine *Tensornorm* α ordnet jedem Paar (E, F) normierter Räume eine Norm $\alpha = \alpha(\,\cdot\,; E, F)$ auf $E \otimes F$ zu, so daß folgendes gilt:

i) α ist *vernünftig* , d.h. $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$.

ii) α hat die *(metrische) Abbildungseigenschaft* , d.h. je zwei stetige lineare Abbildungen $T_1 : E_1 \to E_2$ und $T_2 : F_1 \to F_2$ erfüllen die Abschätzung

$$\|T_1 \otimes_\alpha T_2 : E_1 \otimes_\alpha F_1 \to E_2 \otimes_\alpha F_2\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_1\|.$$

Hierbei notieren wir wieder mit $E \otimes_\alpha F$ den Raum $E \otimes F$ versehen mit der Norm α. Es sei $E\widetilde{\otimes}_\alpha F$ seine Vervollständigung.

Sind E und F lokalkonvexe Räume, so überzeugt man sich mittels der Abbildungseigenschaft leicht, daß jede Tensornorm α eine lokalkonvexe Topologie auf $E \otimes F$ durch die Halbnormen

$$p \otimes q(z) := \alpha(\rho_p \otimes \varphi_q(z); E_p, F_q)$$

induziert, wobei $p \in cs(E)$, $q \in cs(F)$ und $\rho_p : E \to E_p$, $\varphi_q : F \to F_q$ die kanonischen Abbildungen in die lokalen Banachräume sind.

Für stetige lineare Abbildungen $h_1 : E_1 \to E_2$ und $h_2 : F_1 \to F_2$ zwischen lokalkonvexen Räumen ist dann die Abbildung $h_1 \otimes h_2 : E_1 \otimes_\alpha F_1 \to E_2 \otimes_\alpha F_2$ stetig. Wir bezeichnen diese wieder mit $h_1 \otimes_\alpha h_2$ und ihre Fortsetzung zur Vervollständigung mit $h_1\widetilde{\otimes}_\alpha h_2$.

2 Kohomologie

V.P. Palamodov führte, soweit dem Autor bekannt, als erster (ko)homologische Methoden in die Funktionalanalysis ein. Seine in der Hinsicht fundamentale Arbeit [Pal] wird auch Grundlage unserer Betrachtungen sein. Für ein Lehrbuch der homologischen Algebra verweisen wir auf [Rot] und [Wei].

2.1 Rechtsableitungen

Wir wollen an dieser Stelle zunächst kurz andeuten, welche Rolle Rechtsableitungen im Zusammenhang mit der Fragestellung aus Abschnitt 1.2 spielen. Details hierzu werden wir an späterer Stelle ausführen: Sei $\mathcal{C}$ eine „genügend schöne“ Kategorie und $R : \mathcal{C} \to \mathcal{LR}$ ein additiver Funktor. Dann kann man R die Folge seiner Rechtsableitungen $R^l : \mathcal{C} \to \mathcal{LR}$ zuordnen. Diese haben dann die Eigenschaft, daß jede exakte $\mathcal{C}$-Sequenz $0 \to F \to G \to H \to 0$ eine exakte $\mathcal{LR}$-Sequenz, die sogenannte *lange exakte Kohomologie-Sequenz*,

$$0 \to R^0(F) \to R^0(G) \to R^0(H) \to R^1(F) \to R^1(G) \to R^1(H) \to R^2(F) \to \dots$$

induziert. Falls für jedes $\mathcal{C}$-Objekt F ein Monohomomorphismus $F \hookrightarrow G$ mit $R^1(G) = 0$ existiert, gilt folgende einfache, aber zentrale

Beobachtung 2.1.1 Ist $R \simeq R^0$, so ist R genau dann exakt, falls $R^1(F) = 0$ für alle F ist.

Diese abstrakte Reformulierung der Exaktheit eines Funktors ist für uns Anlaß genug, die Annulierung der ersten Kohomologiegruppen $R^1(F)$ näher zu untersuchen bzw. Möglichkeiten aufzuzeigen, um sie berechnen zu können.

Definition 2.1.2 Sei $\mathcal{C}$ eine halb-abelsche Kategorie. Unter einer *injektiven Auflösung* eines $\mathcal{C}$-Objektes F verstehen wir eine exakte $\mathcal{C}$-Sequenz

$$0 \to F \xrightarrow{\varepsilon} F^0 \xrightarrow{i^0} F^1 \xrightarrow{i^1} \cdots$$

mit injektiven $\mathcal{C}$-Objekten F^l, $l \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen, daß $\mathcal{C}$ *genügend viele Injektive* besitzt, falls zu jedem $\mathcal{C}$-Objekt F ein Monohomomorphismus $\varepsilon : F \to F^0$ in ein injektives $\mathcal{C}$-Objekt F^0 existiert.

Bemerkung 2.1.3 Besitzt $\mathcal{C}$ genügend viele Injektive, so hat jedes Objekt eine injektive Auflösung.

Beweis: Sei $\varepsilon : F \to F^0$ ein Monohomomorphismus mit injektivem F^0. Nach Voraussetzung finden wir dann auch einen Monohomomorphismus $\operatorname{coker}(\varepsilon) \to F^1$ in ein injektives $\mathcal{C}$-Objekt F^1. Daher ist $0 \to F \to F^0 \to F^1$ eine exakte $\mathcal{C}$-Sequenz mit injektiven $\mathcal{C}$-Objekten F^l. Die Bemerkung folgt nun induktiv. □

Beispiele 2.1.4 Die folgenden Kategorien besitzen genügend viele Injektive:

a) Die Kategorie $\mathcal{FR}$ der Frécheträume.

b) Die Kategorie $\mathcal{LR}$ der linearen Räume.

c) Die Kategorie $\mathcal{LR}^{\mathbb{N}}$ der projektiven $\mathcal{LR}$-Spektren.

Beweis: Zu a) Sei F ein Fréchetraum mit Nullumgebungsbasis $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$. Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki ist U_n° $\sigma(F', F)$-kompakt und damit $\sigma(F', F)$-beschränkt. Durch

$$\varepsilon : F \to \prod_n l_\infty(U_n^\circ),\ y \mapsto (y_n' \mapsto y_n'(y))_n$$

wird dann ein Monohomomorphismus gegeben. Da $\prod_n l_\infty(U_n^\circ)$ nach Beispiel 1.1.6 ein injektives Objekt von $\mathcal{FR}$ ist, folgt a).
Zu b) Mittels Basiserweiterung sieht man sofort, daß alle Objekte von $\mathcal{LR}$ injektiv sind.

Zu c) Sei $\mathcal{F} = (F_n, \rho^n_{n+1})$ ein projektives Spektrum linearer Räume. Betrachten wir das zugehörende freie Spektrum $\mathcal{I} = (I_n, p^n_{n+1})$, d.h. $I_n = \prod_{j=1}^n F_j$ und p^n_{n+1} ist die entsprechende Projektion, so folgt sofort, daß

$$\varepsilon : \mathcal{F} \to \mathcal{I},\ \varepsilon_n : F_n \to I_n,\ y \mapsto (\rho^1_n(y), \ldots, \rho^{n-1}_n(y), y)$$

ein Monohomomorphismus ist. Da freie Spektren stets injektiv sind, folgt c). $\square$

Sei nun $\mathcal{C}$ eine halb-abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und $f : F \to G$ ein $\mathcal{C}$-Morphismus. Weiter seien

$$0 \to F \xrightarrow{\varepsilon} F^0 \xrightarrow{i^0} F^1 \xrightarrow{i^1} \cdots \quad \text{und} \quad 0 \to G \xrightarrow{\eta} G^0 \xrightarrow{j^0} G^1 \xrightarrow{j^1} \cdots$$

injektive Auflösungen von F bzw. G. Setzen wir $F^n := G^n := 0$ für $n < 0$, so folgt per Induktion unter Ausnutzung der Injektivität der G^n (siehe dualisierte Aussage zu [Rot, Theorem 6.9]), daß ein bis auf Homotopie eindeutig bestimmter $\mathcal{C}$-$\mathcal{KK}$-Morphismus $\widetilde{f} : (F^\bullet, i) \to (G^\bullet, j)$ existiert, der f *liftet*, d.h. es gilt $\widetilde{f}^0 \circ \varepsilon = \eta \circ f$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f"] & F^0 \arrow[r, "i^0"] \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}^0"] & F^1 \arrow[r, "i^1"] \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\eta"'] & G^0 \arrow[r, "j^0"'] & G^1 \arrow[r, "j^1"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Mit obiger Liftungseigenschaft und Beispiel 1.1.2 iv) folgen leicht die Wohldefiniertheiten in der folgenden

Definition 2.1.5 Sei $\mathcal{C}$ eine halb-abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und $R : \mathcal{C} \to \mathcal{LR}$ ein additiver Funktor. Dieser induziert dann kanonisch einen additiven Funktor $\mathcal{C}$-$\mathcal{KK} \to \mathcal{LR}$-$\mathcal{KK}$, welchen wir ebenfalls mit R bezeichnen.
Weiter seien F ein $\mathcal{C}$-Objekt und $f : F \to G$ ein $\mathcal{C}$-Morphismus. Für eine injektive Auflösung $0 \to F \xrightarrow{\varepsilon} F^0 \xrightarrow{i^0} F^1 \xrightarrow{i^1} \cdots$ von F und $l \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$R^l(F) := H^l(R(F^\bullet, i)) \quad (F^n := 0 \text{ für } n < 0).$$

Ist $0 \to G \xrightarrow{\eta} G^0 \xrightarrow{j^0} G^1 \xrightarrow{j^1} \cdots$ eine injektive Auflösung von G, so sei für $l \in \mathbb{N}_0$:

$$R^l(f) := H^l(R(\widetilde{f})),$$

wobei wie oben $\widetilde{f} : (F^\bullet, i) \to (G^\bullet, j)$ ein $\mathcal{C}$-$\mathcal{KK}$-Morphismus sei, der f liftet. Wir erhalten für $l \in \mathbb{N}_0$ auf diese Weise bis auf natürliche Isomorphie eindeutige, additive Funktoren

$$R^l : \mathcal{C} \to \mathcal{LR}$$

und nennen diese *Rechtsableitungen* von R.

Bemerkung 2.1.6 Unmittelbar aus der Definition leitet man ab:

a) Ist F ein injektives $\mathcal{C}$-Objekt, so ist $R^0(F) \cong R(F)$ und $R^l(F) = 0$ für alle $l \geq 1$.

b) Ist R linksexakt, so ist $R^0 \simeq R$.

Sei nun E ein lokalkonvexer Raum. Wir wollen vor allem die Rechtsableitungen der folgenden Funktoren genauer unter die Lupe nehmen:

i) Den *Hom-Funktor* $L(E, \cdot) : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR},\ F \mapsto L(E, F),\ f \mapsto f_* = f \circ \cdot$.

ii) Die *Tensorprodukt-Funktoren* $E \widetilde{\otimes}_\alpha \cdot\ : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR},\ F \mapsto E\widetilde{\otimes}_\alpha F,\ f \mapsto \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha f$. Hierbei ist $\alpha = \pi$, ε oder allgemein eine Tensornorm.

Die Rechtsableitungen obiger Funktoren bezeichnen wir wie folgt:

Definition 2.1.7 Für einen lokalkonvexen Raum E, eine Tensornorm α und $l \in \mathbb{N}_0$ seien

$$\mathrm{Ext}^l(E,\,\cdot\,) := L(E,\,\cdot\,)^l : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR} \quad \text{und} \quad \mathrm{Tor}^l_\alpha(E,\,\cdot\,) := (E\widetilde{\otimes}_\alpha \cdot\,)^l : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}.$$

Bemerkung 2.1.8 a) Das Verschwinden von $\mathrm{Ext}^1(E,F)$ wurde von D. Vogt u.a. erfolgreich für die sogenannten vier Standardfälle (siehe Theorem 2.2.13) untersucht. Wir werden diese Resultate später zitieren.

b) Für einen lokalkonvexen Raum E könnten wir natürlich auch den *ϵ-Produkt-Funktor*

$$E\epsilon\,\cdot\, : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR},\ F \mapsto E\epsilon F,\ f \mapsto \mathrm{id}_E \epsilon f = f_*$$

und seine Rechtsableitungen betrachten. Nun sind aber für einen vollständigen lokalkonvexen Raum E mit der *Approximationseigenschaft* (A.E.), d.h. für jeden lokalkonvexen Raum F ist $E \otimes F$ dicht in $E\epsilon F$, die obigen Funktoren $E\epsilon\,\cdot$ und $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot$ (und damit ihre Rechtsableitungen) natürlich isomorph, da für vollständige lokalkonvexe Räume das ϵ-Produkt vollständig ist. Weil sehr viele in der Praxis vorkommenden lokalkonvexen Räume die Approximationseigenschaft haben (siehe [Jar, Kapitel 18]), sprich obige Voraussetzungen mild sind, werden wir die Rechtsableitungen des ϵ-Produkt-Funktors im folgenden nicht betrachten. Wir halten für diese Situation fest: Ist E ein lokalkonvexer Raum mit der A.E., so gilt für alle $l \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathrm{Tor}^l_\varepsilon(E,\,\cdot\,) \simeq \mathrm{Ext}^l(E'_{c(E',\widetilde{E})},\,\cdot\,) \quad \text{und} \quad E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot\, : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR} \quad \text{ist linksexakt.}$$

Man beachte hierbei, daß mit E auch $\widetilde{E}$ die A.E. hat ([Jar, 18.1.2]) und $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot\, \simeq \widetilde{E}\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot$ gilt.

Unser nächstes Ziel wird es sein, die, am Anfang dieses Abschnitts erwähnte, lange exakte Kohomologie-Sequenz bereitzustellen. V.P. Palamodov setzt in [Pal, Proposition 2.1] hierfür die *Semi-Injektivität* des Funktors R voraus, d.h. R führt Monohomomorphismen in solche über, ohne jedoch diese Eigenschaft explizit für die Herleitung der langen exakten Kohomologie-Sequenz zu gebrauchen. Aus diesem Grund und wegen der zentralen Bedeutung der langen exakten Kohomologie-Sequenz werden wir dieses Resultat ohne diese zusätzliche Voraussetzung zeigen. Trotzdem wollen wir einige Bemerkungen zur Semi-Injektivität machen, da diese im Zusammenhang mit unseren Untersuchungen aus Abschnitt 1.2 steht:

Bemerkung 2.1.9 Der Funktor $L(E,\,\cdot\,)$ ist linksexakt und daher auch semi-injektiv. Für einen lokalkonvexen Raum E ist $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot$ ebenfalls semi-injektiv (Satz 1.2.5). Ist E ein π-Raum, so ist auch $E\widetilde{\otimes}_\pi\,\cdot$ semi-injektiv, was i.A. nicht der Fall sein wird: Sei E ein Banachraum ohne die A.E.[3] Nach A. Grothendieck ist dies äquivalent dazu, daß ein Banachraum F existiert, so daß die kanonische Abbildung $E\widetilde{\otimes}_\pi F \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F$ nicht injektiv ist (vgl. [DefFlo1, 5.6]). Man betrachte nun einen Monohomomorphismus $f : F \to G$ in einen injektiven Banachraum G. Letzterer ist ein $\mathcal{L}_\infty$-Raum und hat damit die A.E. Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
E\widetilde{\otimes}_\pi F \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\pi f"'] & E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F \arrow[d, hook, "\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\varepsilon f"] \\
E\widetilde{\otimes}_\pi G \arrow[r, hook] & E\widetilde{\otimes}_\varepsilon G
\end{tikzcd}$$

[3]Die Existenz eines solchen Banachraumes wurde erstmals von P. Enflo nachgewiesen. Da jeder Banachraum mit Basis die A.E. hat, löste P. Enflo damit das sogenannte Basisproblem von A. Grothendieck.

zeigt, daß $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi f$ nicht mehr injektiv ist. In Anlehnung an die obige Charakterisierung der A.E. für Banachräume erhalten wir jedoch eine interessante hinreichende Bedingung für die Semi--Injektivität: Ein lokalkonvexer Raum E besitze die *verallgemeinerte Approximationseigenschaft* (v.A.E.), falls für alle lokalkonvexen Räume F die kanonische Abbildung $E\widetilde{\otimes}_\pi F \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F$ injektiv ist. Ist nun E ein lokalkonvexer Raum mit der v.A.E., so folgt mit der Injektivität von $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\varepsilon f$ in obigem kommutativen Diagramm die Semi-Injektivität des Funktors $E\widetilde{\otimes}_\pi \cdot$. Die folgenden und weitere sehr interessante Aussagen rund um die v.A.E. findet man in [DefFlo2]: Die v.A.E. impliziert stets die A.E. Falls zu jedem Banachraum X und $z \in E\widetilde{\otimes}_\pi X$ ein Kompaktum $K \subseteq E$ mit

$$z \in \overline{\Gamma(K \otimes B_X)}^{E\widetilde{\otimes}_\pi X}$$

existiert, so fallen die Begriffe A.E. und v.A.E. zusammen. Insbesondere ist dies also nach einem Satz von A. Grothendieck ([Jar, 15.6.4]) für jeden Fréchetraum E der Fall. Ist $E = \mathrm{ind}_N\, E_N$ ein (LB)-Raum, so daß für alle Banachräume X

$$E\widetilde{\otimes}_\pi X = \mathrm{ind}_N\, (E_N \widetilde{\otimes}_\pi X)$$

gilt, so erfüllt E wiederum nach obigem Satz von A. Grothendieck obige Bedingung. Vertauschungseigenschaften von Tensorprodukten mit induktiven Limiten sind für uns von zentraler Bedeutung. Wir werden sie an späterer Stelle noch ausführlich studieren.

Kommen wir zurück zur Herleitung der langen exakten Kohomologie-Sequenz gemäß [Pal]. Hierfür benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Für das folgende Lemma vergleiche man auch Lemma 1.1.7:

Lemma 2.1.10 Sei $\mathcal{C}$ eine halb-abelsche Kategorie und

$$(*) \quad F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$$

eine $\mathcal{C}$-Sequenz. Dann gilt:

a) Ist $(*)$ *rechtsexakt*, d.h. $\mathrm{im}\,(f) = \ker(g)$ und g ist ein Homomorphismus, so ist für jedes injektive $\mathcal{C}$-Objekt I die folgende $\mathcal{LR}$-Sequenz ebenfalls exakt:

$$(**) \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(F, I) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(G, I) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(H, I)$$

b) Ist $(**)$ exakt für ein injektives $\mathcal{C}$-Objekt I, so daß ein Monohomomorphismus $j : \mathrm{coker}\,(f) \to I$ existiert, so gilt auch die Umkehrung in a).

Beweis: Zu a) Sei $h \in \ker(f^*)$, d.h. $h \circ f = 0$. Nach der universellen Eigenschaft von $\mathrm{coker}\,(\mathrm{im}\,(f)) = \mathrm{coker}\,(\ker(g)) = \mathrm{coim}\,(g) \cong \mathrm{im}\,(g)$ und der Injektivität von I haben wir dann das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{im}\,(f) \arrow[r] \arrow[dr, "=0"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{im}\,(g) \arrow[r, hook] \arrow[dl, dashed, "\exists!\, l"'] & H \arrow[dll, dashed, "\exists\, \widetilde{l}"] \\
 & I. & &
\end{tikzcd}$$

Wegen $g = (G \to \mathrm{im}\,(g) \hookrightarrow H)$ folgt $\widetilde{l} \circ g = h$. Also ist $h \in \mathrm{im}\,(g^*)$.
Zu b) Man betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{coker}\,(f) \arrow[r, "j"] \arrow[d, dashed, "t"'] & I \arrow[r, "s"] & \mathrm{coker}\,(j) \\
F \arrow[r, "f"'] & G \arrow[r, "r"'] \arrow[ur, "p"] & \mathrm{coim}\,(g) \arrow[r, "\overline{g}"'] & \mathrm{im}\,(g) \arrow[r, "i"'] \arrow[ul, dashed, "u"] & H. \arrow[ul, dashed, "k"]
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind $p, r, \overline{g}, i$ und s die natürlichen Morphismen. Wir wollen nun die Existenz der gestrichelten Pfeile zeigen. Mit $j \circ p \circ f = 0$ folgt $j \circ p \in \ker(f^*) = \operatorname{im}(g^*)$. Daher existiert ein Morphismus k mit $k \circ g = j \circ p$. Aus $i \circ \overline{g} \circ r \circ f = g \circ f = 0$ folgern wir $r \circ f = 0$, weil i und $\overline{g}$ Monomorphismen sind. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $p : G \to \operatorname{coker}(f)$ finden wir den in obigem Diagramm eingezeichneten Morphismus t mit $t \circ p = r$. Mit $s \circ k \circ i \circ \overline{g} \circ r = s \circ k \circ g = s \circ j \circ p = 0$ erhalten wir $s \circ k \circ i = 0$, da $\overline{g}$ und r Epimorphismen sind. Weil j der Kern von s ist, existiert wiederum nach dessen universeller Eigenschaft ein Morphismus u mit $k \circ i = j \circ u$. Weiter folgt $j \circ u \circ \overline{g} \circ r = k \circ i \circ \overline{g} \circ r = k \circ g = j \circ p$, also $u \circ \overline{g} \circ r = p$. Insgesamt erhalten wir mit einem Zyklustrick:

1) $(\mathrm{id} - t \circ u \circ \overline{g}) \circ r = r - t \circ u \circ \overline{g} \circ r = r - t \circ p = 0$, also $t \circ u \circ \overline{g} = \mathrm{id}$.

2) $(\mathrm{id} - \overline{g} \circ t \circ u) \circ \overline{g} \circ r = \overline{g} \circ r - \overline{g} \circ t \circ u \circ \overline{g} \circ r = \overline{g} \circ r - \overline{g} \circ t \circ p = 0$, also $\overline{g} \circ t \circ u = \mathrm{id}$.

3) $(\mathrm{id} - u \circ \overline{g} \circ t) \circ p = p - u \circ \overline{g} \circ t \circ p = p - u \circ \overline{g} \circ r = 0$, also $u \circ \overline{g} \circ t = \mathrm{id}$.

1) und 2) implizieren, daß $\overline{g}$ ein Isomorphismus und damit g ein Homomorphismus ist. Aus 1) und 3) folgt, daß $t : \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coim}(g)$ ein Isomorphismus und daher $\operatorname{im}(f) = \ker(\operatorname{coker}(f)) = \ker(\operatorname{coim}(g)) = \ker(g)$ ist. □

Das untenstehende Resultat, auch Hufeisenlemma genannt, dürfte aus funktionalanalytischer Sicht das Key-Lemma für die Existenz der langen exakten Kohomologie-Sequenz sein:

Lemma 2.1.11 Sei $\mathcal{C}$ eine halb-abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und

$$0 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 0$$

eine exakte $\mathcal{C}$-Sequenz. Dann existiert ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & F^1 \arrow[r] \arrow[u] & G^1 \arrow[r] \arrow[u] & H^1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^0 \arrow[r] \arrow[u] & G^0 \arrow[r] \arrow[u] & H^0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "f"'] \arrow[u] & G \arrow[r, "g"'] \arrow[u] & H \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und Spalten, wobei die F^l, G^l und H^l injektiv sind ($l \geq 0$).

Beweis: Seien $\kappa : H \to H^0$ und $\varepsilon' : G \to F^0$ Monohomomorphismen in injektive Objekte. Damit konstruieren wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{coker}(\varepsilon) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{coker}(\eta) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{coker}(\kappa) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^0 \arrow[r] \arrow[u] & F^0 \times H^0 \arrow[r] \arrow[u] & H^0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "\varepsilon:=\varepsilon'\circ f"] & G \arrow[r, "g"'] \arrow[u, "\eta:=\varepsilon'\times(\kappa\circ g)"] & H \arrow[r] \arrow[u, "\kappa"] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Die mittlere Zeile besteht aus den kanonischen Morphismen; die Morphismen der oberen Zeile erhält man aus den universellen Eigenschaften von $\operatorname{coker}(\varepsilon)$, $\operatorname{coker}(\eta)$ und der Kommutativität der beiden unteren Diagramme.
Die beiden unteren Zeilen sind exakt. Um die Exaktheit der Spalten zu zeigen, müssen wir noch nachweisen, daß ε und η Monohomomorphismen sind: Als Komposition von Monohomomorphismen ist auch ε ein solcher. Da $\varepsilon' = (G \xrightarrow{\eta} F^0 \times H^0 \longrightarrow F^0)$ ein Monohomomorphismus ist, ist auch η ein Monohomomorphismus. Sei nun I ein beliebiges injektives $\mathcal{C}$-Objekt. Mit der Exaktheit des Funktors $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,, I)$ folgt nach dem Neuner-Lemma für die Kategorie $\mathcal{LR}$ (siehe [Rot, Exercise 6.16]) die Exaktheit der $\mathcal{LR}$-Sequenz

$$0 \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\operatorname{coker}(\kappa), I) \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\operatorname{coker}(\eta), I) \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\operatorname{coker}(\varepsilon), I) \to 0.$$

Nach Voraussetzung besitzt aber $\mathcal{C}$ genügend viele Injektive, so daß nach Lemma 2.1.10, b) die Kokern-Sequenz an jeder Stelle rechts-exakt und damit exakt ist. Das Lemma folgt nun sukzessiv, indem man die untere Zeile durch die obere ersetzt. $\square$

Theorem 2.1.12 Sei $\mathcal{C}$ eine halb-abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und $R : \mathcal{C} \to \mathcal{LR}$ ein additiver Funktor. Dann induziert jede exakte $\mathcal{C}$-Sequenz

$$0 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 0$$

eine (natürliche) exakte $\mathcal{LR}$-Sequenz der folgenden Art:

$$0 \to R^0(F) \to R^0(G) \to R^0(H) \to R^1(F) \to R^1(G) \to R^1(H) \to R^2(F) \to \ldots$$

Beweis: Nach Lemma 2.1.11 existieren injektive Auflösungen $0 \to F \to F^\bullet$, $0 \to G \to G^\bullet$ und $0 \to H \to H^\bullet$ und eine exakte $\mathcal{C}$-$\mathcal{KK}$-Sequenz

$$0 \to F^\bullet \to G^\bullet \to H^\bullet \to 0 \quad (\text{mit } F^l := G^l := H^l := 0 \text{ für } l < 0).$$

Mit anderen Worten ist für jedes $l \in \mathbb{Z}$ die $\mathcal{C}$-Sequenz

$$0 \to F^l \to G^l \to H^l \to 0$$

exakt. Da alle F^l injektiv sind, *zerfallen* diese Sequenzen, d.h. es existiert eine Rechtsinverse zu $G^l \to H^l$, und wir erhalten wegen der Additivität des Funktors R die Exaktheit der $\mathcal{LR}$-Sequenzen

$$0 \to R(F^l) \to R(G^l) \to R(H^l) \to 0,$$

was äquivalent zur Exaktheit der $\mathcal{LR}$-$\mathcal{KK}$-Sequenz

$$0 \to R(F^\bullet) \to R(G^\bullet) \to R(H^\bullet) \to 0$$

ist. Das Theorem folgt nun aus den dualen Aussagen zu [Rot, Theorem 6.3 und 6.4]. $\square$

Beispiel 2.1.13 Notieren wir für den projektiven Limesfunktor $\operatorname{proj} : \mathcal{LR}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{LR}$ aus Beispiel 1.1.3 seine l-te Rechtsableitung mit $\operatorname{proj}^l : \mathcal{LR}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{LR}$, so gelten für jedes projektives $\mathcal{LR}$-Spektrum $\mathcal{F} = (F_n, \rho^n_m)$ folgende Aussagen:

$$\operatorname{proj}^0 \mathcal{F} \cong \operatorname{proj} \mathcal{F} = \ker(\sigma(\mathcal{F})), \;\; \operatorname{proj}^1 \mathcal{F} = \operatorname{coker}(\sigma(\mathcal{F})) \;\text{ und }\; \operatorname{proj}^l \mathcal{F} = 0 \text{ für } l \geq 2,$$

wobei die lineare Abbildung $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma : \prod_n F_n \to \prod_n F_n$ durch $x \mapsto \rho^n_{n+1}(x_{n+1}) - x_n$ gegeben wird. Sind $\mathcal{F} = (F_n, \rho^n_m)$ und $\mathcal{G} = (G_n, \phi^n_m)$ *äquivalente projektive $\mathcal{LR}$-Spektren*, in Zeichen $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$, d.h. es existieren Folgen natürlicher Zahlen $(k_n)_n$, $(l_n)_n$ mit $n \leq l_n \leq k_n \leq l_{n+1}$ und $\mathcal{LR}$-Morphismen u_n, v_n, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& F_{k_1} \arrow[dl, "u_1"'] & & F_{k_2} \arrow[ll, "\rho^{k_1}_{k_2}"'] \arrow[dl, "u_2"'] & & \cdots \arrow[ll, "\rho^{k_2}_{k_3}"'] \arrow[dl, "u_3"'] & \\
G_{l_1} & & G_{l_2} \arrow[ll, "\phi^{l_1}_{l_2}"] \arrow[ul, "v_2"'] & & G_{l_3} \arrow[ll, "\phi^{l_2}_{l_3}"] \arrow[ul, "v_3"'] & & \cdots \arrow[ll, "\phi^{l_3}_{l_4}"]
\end{tikzcd}$$

so gilt $\operatorname{proj}^l \mathcal{F} \cong \operatorname{proj}^l \mathcal{G}$ für alle l.

Beweis: Wir betrachten die folgende Sequenz von $\mathcal{LR}$-Spektren:

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I} \xrightarrow{i} \mathcal{J} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Hierbei ist ε der Monohomomorphismus von $\mathcal{F}$ in das zu $\mathcal{F}$ gehörende freie projektive Spektrum $\mathcal{I}$ aus dem Beweis zu Beispiel 2.1.4, c) und i wird gegeben durch

$$\begin{aligned}
i_n : I_n = \prod_{j=1}^{n} F_j \quad &\to \quad J_n := \prod_{j=1}^{n-1} F_j \\
x \quad &\mapsto \quad (\rho^1_2(x_2) - x_1, \ldots, \rho^{n-1}_n(x_n) - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß obige Sequenz exakt und damit eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$ ist. Da $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ injektiv sind, folgt aus der langen exakten Kohomologie-Sequenz die Exaktheit der $\mathcal{LR}$-Sequenz

$$0 \to \operatorname{proj}^0 \mathcal{F} \to \operatorname{proj}^0 \mathcal{I} \to \operatorname{proj}^0 \mathcal{J} \to \operatorname{proj}^1 \mathcal{F} \to 0 \to 0 \to \operatorname{proj}^2 \mathcal{F} \to 0 \to \cdots$$

und hieraus sofort $\operatorname{proj}^l \mathcal{F} = 0$ für $l \geq 2$; und mit der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{proj}^0 \mathcal{I} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \operatorname{proj}^0 \mathcal{J} \arrow[d, "\cong"'] \\
\prod_{j=1}^{\infty} F_j \arrow[r, "\sigma"'] & \prod_{j=1}^{\infty} F_j
\end{tikzcd}$$

folgt weiter $\mathrm{proj}^1\,\mathcal{F} \cong \mathrm{coker}\,(\sigma)$ und $\mathrm{proj}^0\mathcal{F} \cong \ker(\sigma) = \mathrm{proj}\,\mathcal{F}$. Letzteres kann man auch direkt aus der Linksexaktheit von proj folgern. Für $\mathrm{proj}^l\,\mathcal{F} \cong \mathrm{proj}^l\,\mathcal{G}$, falls $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ ist, sei z.B. auf [Wen, Proposition 3.1.7] verwiesen. □

Mit den üblichen Voraussetzungen können wir nun auch die Beobachtung 2.1.1 und „mehr“ zeigen:

Korollar 2.1.14 Ein linksexakter Funktor $R : \mathcal{C} \to \mathcal{LR}$ ist genau dann exakt, falls $R^l = 0$ für alle $l \geq 1$ (oder nur für $l = 1$) gilt.

Beweis: Aus der langen exakten Kohomologie-Sequenz folgt insbesondere, daß R genau dann linksexakt ist, falls $R^0 \simeq R$ gilt, womit die Rückrichtung klar ist. Sei nun R exakt und $0 \to F \to F^0 \xrightarrow{i^0} F^1 \xrightarrow{i^1} \dots$ eine injektive Auflösung eines $\mathcal{C}$-Objekts F. Wir setzen $F^{-1} := 0$, $i^{-1} := 0$ und betrachten die exakte $\mathcal{C}$-Sequenz

$$0 \to \mathrm{im}\,(i^{l-1}) \to F^l \to \mathrm{coim}\,(i^l) \to 0.$$

Mit $(F^{l-1} \to F^l) = (F^{l-1} \twoheadrightarrow \mathrm{im}\,(i^{l-1}) \hookrightarrow F^l)$ und $(F^l \to F^{l+1}) = (F^l \twoheadrightarrow \mathrm{coim}\,(i^l) \hookrightarrow F^{l+1})$ erhalten wir auch Faktorisierungen

$$(R(F^{l-1}) \to R(F^l)) = (R(F^{l-1}) \twoheadrightarrow R(\mathrm{im}\,(i^{l-1})) \hookrightarrow R(F^l))$$

und

$$(R(F^l) \to R(F^{l+1})) = (R(F^l) \twoheadrightarrow R(\mathrm{coim}\,(i^l)) \hookrightarrow R(F^{l+1})).$$

Da die Sequenz $0 \to R(\mathrm{im}\,(i^{l-1})) \to R(F^l) \to R(\mathrm{coim}\,(i^l)) \to 0$ wieder exakt ist, folgt damit

$$\begin{aligned} R^l(F) &= \ker(R(F^l) \to R(F^{l+1}))/\mathrm{im}\,(R(F^{l-1}) \to R(F^l)) \\ &= \ker(R(F^l) \twoheadrightarrow R(\mathrm{coim}\,(i^l)))/\mathrm{im}\,(R(\mathrm{im}\,(i^{l-1})) \hookrightarrow R(F^l)) \\ &= \begin{cases} R(F), & l = 0, \\ 0, & l \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Die Bemerkung in der Klammer folgt auch daraus, daß man die höheren Rechtsableitungen wie folgt auf die erste zurückführen kann: Wir betrachten die obige injektive Auflösung von F und setzen $Z^n := \ker(i^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $F \cong Z^0$ ist auch $R^{l+1}(F) \cong R^{l+1}(Z^0)$. Da

$$0 \to Z^1 \hookrightarrow F^1 \xrightarrow{i^1} \dots$$

eine injektive Auflösung von Z^1 ist, gilt $R^{l+1}(Z^0) = R^l(Z^1)$. Induktiv folgt $R^{l+1}(F) \cong R^1(Z^n)$.

Bemerkung 2.1.15 Man ist natürlich an schwächeren, aber dafür anwendungsfreundlicheren Versionen von Korollar 2.1.14 interessiert. Eine mögliche Anwendungssituation könnte die folgende sein: Wir betrachten eine exakte $\mathcal{C}$-Sequenz

$$0 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 0,$$

die mit F startet. Angenommen, der Funktor R ist darauf linksexakt, und eine Berechnung zeigt $R^1(F) = 0$. Dann kann die Frage, ob $R(g)$ wieder surjektiv ist, mittels der langen exakten Kohomologie-Sequenz beantwortet werden, sobald man $R^0(G) \cong R(G)$ und $R^0(H) \cong R(H)$ weiß. Letzteres macht aber allgemeingültige Aussagen für die Tensorproduktfunktoren $E\widetilde{\otimes}_\alpha \cdot : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ (vor allem für $\alpha = \pi$) schwierig (vgl. auch Beispiel 3.1.1).

2.2 Berechnung von Rechtsableitungen

In diesem Abschnitt wollen wir für einen additiven Funktor $R : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ und einen Fréchetraum F Methoden zur Berechnung der Gruppe $R^1(F)$ entwickeln. Unser zentrales Hilfsmittel dafür wird die lange exakte Kohomologie-Sequenz und die erste Rechtsableitung des Funktors $\operatorname{proj} : \mathcal{LR}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{LR}$ sein.

Definition 2.2.1 Ein projektives Spektrum $\mathcal{F} = (F_n, \rho_m^n)$ von Banachräumen heißt *Fundamentalsystem von Banachräumen* für den Fréchetraum $\operatorname{proj} \mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}$ äquivalent zu einem reduzierten projektiven Spektrum von Banachräumen ist.

Den essentiellen Wert obiger Definition werden wir erst an späterer Stelle sehen, vorher noch eine

Bemerkung 2.2.2 a) Jeder nukleare Fréchetraum besitzt ein Fundamentalsystem von l_p-Räumen $(1 \leq p \leq \infty)$, was man leicht mittels nuklearer Darstellungen der verbindenden Abbildungen sieht.

b) Man kann zeigen, daß ein projektives Spektrum $\mathcal{F} = (F_n, \rho_m^n)$ von Banachräumen genau dann ein Fundamentalsystem ist, falls zu jedem n ein $m \geq n$ existiert, so daß für alle $k \geq m$ die Inklusion $\rho_m^n(F_m) \subseteq \overline{\rho_k^n(F_k)}^{F_n}$ gilt (siehe z.B. [Kar, Lemma 1.11], [Pal]). Letzteres ist äquivalent dazu, daß zu jedem n ein $m \geq n$ existiert mit $\rho_m^n(F_m) \subseteq \overline{\rho_n(F)}^{\rho_m^n(F_m)}$, wobei $\rho_m^n(F_m)$ mit der Teilraumtopologie von F_n versehen sei.

Wir wollen noch ein weiteres wichtiges Beispiel für ein Fundamentalsystem von Banachräumen bringen. Dazu verweisen wir für unsere Notation von Kötheräumen auf [MeiVog, §27] und erinnern kurz an die Definition von quasinormablen Räumen: Ein lokalkonvexer Raum F heißt *quasinormabel*, falls zu jedem $U \in \mathcal{U}_0(F)$ ein $V \in \mathcal{U}_0(F)$ existiert, so daß es für alle $\varepsilon > 0$ eine beschränkte Teilmenge $B \subseteq F$ mit $V \subseteq B + \varepsilon U$ gibt. (DF)-Räume und Schwartzräume sind typische Vertreter der Klasse der quasinormablen Räume. Für das folgende Beispiel siehe [Vog1].

Beispiel 2.2.3 Der Kötheraum $\lambda^\infty(B)$ ist genau dann quasinormabel, falls $(\lambda_n^\infty(B), \rho_m^n)$ ein Fundamentalsystem von Banachräumen für $\lambda^\infty(B)$ ist. Hierbei ist

$$\lambda_n^\infty(B) := l_\infty((b_{l,n})_l) := \{\, x \in \omega : \|x\|_n := \sup_l |x_l| \cdot b_{l,n} < \infty \,\} \text{ und } \rho_m^n(x) := x.$$

Beweis: Klar ist, daß $\lambda^\infty(B) = \operatorname{proj}_n \lambda_n^\infty(B)$ gilt. Wir werden folgende Bemerkung verwenden: $\lambda^\infty(B)$ ist genau dann quasinormabel, falls zu jedem n ein $m \geq n$ existiert, so daß es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\lambda \in \lambda_+^\infty(B) := \{\, x \in \lambda^\infty(B) : x_l \geq 0 \text{ für alle } l \,\}$ gibt mit

$$(*) \quad b_{l,m}^{-1} \leq \max(\lambda_l,\, \varepsilon \cdot b_{l,n}^{-1}) \text{ für alle } l,$$

was durch Polarisation unmittelbar daraus folgt, daß die Mengen $\{\, x : |\, x_l \,| \leq \lambda_l \text{ für alle } l \,\}$ ein Fundamentalsystem von beschränkten Mengen in $\lambda^\infty(B)$ bilden ([MeiVog, 27.6]).

„ $\Longrightarrow$ “ Zu gegebenem n wählen wir ein $m \geq n$ nach der Vorbemerkung. Seien $x \in \lambda_m^\infty(B)$ mit $1 \geq \|x\|_m > 0$ und $\varepsilon > 0$. Zu $\frac{\varepsilon}{\|x\|_m}$ existiert nach der Bemerkung ein $\lambda \in \lambda_+^\infty(B)$, so daß für alle l $(*)$ gilt. Sei $J := \{\, l : |x_l| \leq \lambda_l \,\}$ und $\overline{J} := \mathbb{N} - J$. Dann gilt für alle l:

$$|x_l| \leq \|x\|_m \cdot b_{l,m}^{-1} \leq \|x\|_m \cdot \max(\lambda_l,\, \frac{\varepsilon}{\|x\|_m} \cdot b_{l,n}^{-1}),$$

woraus wir $|x_l| \leq \varepsilon \cdot b_{l,n}^{-1}$ für alle $l \in \overline{J}$ folgern. Setzen wir nun

$$y_l := \begin{cases} x_l, & l \in J, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist $y \in \lambda^\infty(B)$ und $\|x - y\|_n = \sup_{l \in \overline{J}} |\, x_l \,| \cdot b_{l,n} \leq \varepsilon$. Insgesamt existiert also zu jedem n ein $m \geq n$ mit

$$(**) \quad \rho_m^n(\lambda_m^\infty(B)) \subseteq \overline{\rho_n(\lambda^\infty(B))}^{\rho_m^n(\lambda_m^\infty(B))}.$$

„ $\Longleftarrow$ “ Zu gegebenem n wählen wir ein $m \geq n$, so daß $(**)$ erfüllt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Setzen wir

$$x_l := \begin{cases} b_{l,m}^{-1}, & \text{für } b_{l,m} > 0, , \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist $x \in \lambda_m^\infty(B)$, und wir finden ein $\lambda \in \lambda^\infty(B)$ mit $\|x - \lambda\|_n \leq \varepsilon$. Aus der Dreiecksungleichung folgt für alle l mit $b_{l,m} > 0$ die Abschätzung $b_{l,m}^{-1} - |\lambda_l| \leq \varepsilon \cdot b_{l,n}^{-1}$ bzw.

$$b_{l,m}^{-1} \leq 2 \cdot \max(|\lambda_l|, \varepsilon \cdot b_{l,n}^{-1}).$$

Für solche l mit $b_{l,m} = 0$ ist obige Ungleichung trivial erfüllt. □

Die folgende Definition erweist sich im Zusammenhang mit der Berechnung von Rechtsableitungen für unsere Situationen als sehr günstig:

Definition 2.2.4 Wir nennen einen additiven Funktor $R : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ *σ-stabil*, falls:

a) Der Funktor R vertausche mit abzählbaren Produkten im folgenden Sinne: Der durch die Folge der Projektionen $\prod_n F_n \to F_m$ induzierte Morphismus $p_{\mathcal{F}} : R(\prod_n F_n) \to \prod_n R(F_n)$ sei ein „funktorieller“ Isomorphismus, d.h. für jede Folge $f_n : F_n \to G_n$ von $\mathcal{FR}$-Morphismen gelte

$$p_{\mathcal{G}} \circ R((f_n)_n) = (R(f_n))_n \circ p_{\mathcal{F}}.$$

b) Zu jedem projektiven $\mathcal{FR}$-Spektrum $\mathcal{F} = (F_n, \rho_m^n)$ kommutiere das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R(\prod\limits_n F_n) \arrow[r, "R(\sigma(\mathcal{F}))"] \arrow[d, "p_{\mathcal{F}}"', "\cong"] & R(\prod\limits_n F_n) \arrow[d, "\cong"', "p_{\mathcal{F}}"] \\ \prod\limits_n R(F_n) \arrow[r, "\sigma(R(\mathcal{F}))"'] & \prod\limits_n R(F_n). \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.2.5 Für einen lokalkonvexen Raum E und eine Tensornorm α sind die Funktoren $L(E, \cdot)$, $E\widetilde{\otimes}_\alpha \cdot : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ σ-stabil.

Beweis: Der Funktor $L(E, \cdot)$ vertauscht mit (abzählbaren) Produkten aufgrund der universellen Eigenschaft des Produktes. Für die Tensorproduktfunktoren gilt dies nach [Har, Korollar 2.12], siehe auch [Jar, 15.4 und 16.3] für $\alpha = \pi$ bzw. ε. Wir rechnen die Eigenschaft b) nur für die Tensorproduktfunktoren nach. Die Behauptung folgt durch Berechnung auf Elementartensoren

$$\begin{tikzcd} x \otimes (y_n)_n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \otimes (\rho_{n+1}^n(y_{n+1}) - y_n)_n \arrow[d, mapsto] \\ (x \otimes y_n)_n \arrow[r, mapsto] & (x \otimes \rho_{n+1}^n(y_{n+1}) - x \otimes y_n)_n \end{tikzcd}$$

und der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
E\widetilde{\otimes}_\alpha \prod F_n \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & E\widetilde{\otimes}_\alpha \prod F_n \arrow[ddd] \\
& E \otimes_\alpha \prod F_n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul, hook, "\text{dicht}"'] & E \otimes_\alpha \prod F_n \arrow[d] \arrow[ur, hook] & \\
& \prod E \otimes_\alpha F_n \arrow[r] \arrow[dl, hook] & \prod E \otimes_\alpha F_n \arrow[dr, hook] & \\
\prod E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n \arrow[rrr] & & & \prod E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n .
\end{tikzcd}$$

Mit obiger Definition können wir nun unser Theorem zur Berechnung der Rechtsableitungen formulieren:

Theorem 2.2.6 Sei $R : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ ein σ-stabiler Funktor. Dann haben wir für jedes $l \in \mathbb{N}$ und jedes Fundamentalsystem von Banachräumen $\mathcal{F} = (F_n, \rho^n_m)$ für einen Fréchetraum F eine exakte $\mathcal{LR}$-Sequenz:

$$0 \to \operatorname{proj}^1 R^{l-1}(F_n) \to R^l(F) \to \operatorname{proj} R^l(F_n) \to 0.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß mit R auch seine Rechtsableitungen R^l σ-stabil sind. Dazu wählen wir uns jeweils injektive Auflösungen

$$0 \to F_n \xrightarrow{\varepsilon_n} F^0_n \xrightarrow{i^0_n} F^1_n \xrightarrow{i^1_n} \cdots$$

Diese induzieren dann eine injektive Auflösung

$$0 \to \prod F_n \xrightarrow{(\varepsilon_n)_n} \prod F^0_n \xrightarrow{(i^0_n)_n} \prod F^1_n \xrightarrow{(i^1_n)_n} \cdots$$

Weiter finden wir für alle $n \in \mathbb{N}$ einen (bis auf Homotopie eindeutigen) Morphismus $((\rho^n_{n+1})^l)_l$, der ρ^n_{n+1} liftet:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{n+1} \arrow[r, "\varepsilon_{n+1}"] \arrow[d, "\rho^n_{n+1}"'] & F^0_{n+1} \arrow[r, "i^0_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "(\rho^n_{n+1})^0"'] & F^1_{n+1} \arrow[r, "i^1_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "(\rho^n_{n+1})^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r, "\varepsilon_n"'] & F^0_n \arrow[r, "i^0_n"'] & F^1_n \arrow[r, "i^1_n"'] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

womit wir auch die projektiven $\mathcal{FR}$-Spektren $\mathcal{F}^l := (F^l_n, (\rho^n_{n+1})^l)$ betrachten können. Die entscheidende Beobachtung ist die folgende: Der bis auf Homotopie eindeutige Morphismus $(\sigma^l)_l$, der

$\sigma = \sigma(\mathcal{F})$ liftet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod F_n \arrow[r, "(\varepsilon_n)_n"] \arrow[d, "\sigma"'] & \prod F_n^0 \arrow[r, "(i_n^0)_n"] \arrow[d, dashed, "\sigma^0"'] & \prod F_n^1 \arrow[r, "(i_n^1)_n"] \arrow[d, dashed, "\sigma^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \prod F_n \arrow[r, "(\varepsilon_n)_n"'] & \prod F_n^0 \arrow[r, "(i_n^0)_n"'] & \prod F_n^1 \arrow[r, "(i_n^1)_n"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

wird schon durch $\sigma^l = \sigma(\mathcal{F}^l)$ gegeben, denn mit $\sigma(\mathcal{F}^{-1}) := \sigma(\mathcal{F})$, $i_n^{-1} := \varepsilon_n$, $F_n^{-1} := F_n$ gilt für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \prod F_n^{l-1}$:

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathcal{F}^l) \circ (i_n^{l-1})_n(x) &= ((\rho_{n+1}^n)^l \circ i_{n+1}^{l-1}(x_{n+1}) - i_n^{l-1}(x_n))_n \\
&= (i_n^{l-1} \circ (\rho_{n+1}^n)^{l-1}(x_{n+1}) - i_n^{l-1}(x_n))_n \\
&= (i_n^{l-1}((\rho_{n+1}^n)^{l-1}(x_{n+1}) - x_n))_n \\
&= (i_n^{l-1})_n \circ \sigma(\mathcal{F}^{l-1})(x).
\end{aligned}$$

Da R σ-stabil ist, können wir damit für alle $l \in \mathbb{N}_0$ diesmal mit $\sigma(\mathcal{F}^{-1}) := 0$, $i_n^{-1} := 0$ und $F_n^{-1} := 0$ das folgende kommutative Diagramm aufbauen:

$$\begin{tikzcd}
& \prod R(F_n^{l-1}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \prod R(F_n^l) \arrow[rr] \arrow[dd, "\sigma(R(\mathcal{F}^l))"] & & \prod R(F_n^{l+1}) \arrow[dd] \\
R(\prod F_n^{l-1}) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr] \arrow[dd] & & R(\prod F_n^l) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr] \arrow[dd, "R(\sigma(\mathcal{F}^l))"] & & R(\prod F_n^{l+1}) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dd] & \\
& \prod R(F_n^{l-1}) \arrow[rr] & & \prod R(F_n^l) \arrow[rr] & & \prod R(F_n^{l+1}) \\
R(\prod F_n^{l-1}) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr] & & R(\prod F_n^l) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr] & & R(\prod F_n^{l+1}). \arrow[ur, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

Durch Übergang zur Kohomologie erhalten wir nun damit nach Definition der Rechtsableitungen die σ-Stabilität der R^l, $l \in \mathbb{N}_0$.

Wie wir an späterer Stelle sehen werden (Theorem 2.2.11 a) und lange exakte Kohomologie-Sequenz), ist die *kanonische Sequenz*

$$0 \to F \xrightarrow{\rho} \prod F_n \xrightarrow{\sigma} \prod F_n \to 0$$

exakt, wobei $\rho(x) := (\rho_n(x))_n$ sei. Anwendung der langen exakten Kohomologie-Sequenz liefert die Exaktheit der $\mathcal{LR}$-Sequenz

$$\cdots \to R^{l-1}(\prod F_n) \xrightarrow{R^{l-1}(\sigma)} R^{l-1}(\prod F_n) \xrightarrow{\Delta} R^l(F) \xrightarrow{R^l(\rho)} R^l(\prod F_n) \xrightarrow{R^l(\sigma)} R^l(\prod F_n) \to \cdots$$

Hieraus erhalten wir mit der σ-Stabilität der Rechtsableitungen und Beispiel 2.1.13 die Isomorphismen

$$\ker R^l(\rho) = \operatorname{im} \Delta \cong \operatorname{coim} \Delta \cong \operatorname{coker} R^{l-1}(\sigma) \cong \operatorname{proj}^1 R^{l-1}(F_n)$$

und $\operatorname{im} R^l(\rho) = \ker R^l(\sigma) \cong \operatorname{proj} R^l(F_n)$. Die Exaktheit der Sequenzen

$$0 \to \ker R^l(\rho) \to R^l(F) \to \operatorname{im} R^l(\rho) \to 0$$

impliziert letztlich das Theorem. □

Bemerkung 2.2.7 Ohne näher auf alle Details einzugehen, bemerken wir, daß neben der langen exakten Kohomologie-Sequenz Spektralsequenzen zur Berechnung von Kohomologiegruppen eine wichtige Rolle spielen. Speziell die Grothendiecksche Spektralsequenz, siehe [Wei, Theorem 5.8.3] und [Pal, Proposition 2.2] für die Umsetzung auf halb-abelsche Kategorien, dient grob gesprochen dazu, die Rechtsableitungen der Komposition zweier Funktoren zu bestimmen. Wendet man diese auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{FR}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\operatorname{proj}\circ R"'] & \mathcal{LR}^{\mathbb{N}} \arrow[dl, "\operatorname{proj}"] \\ \mathcal{LR} & \end{tikzcd}$$

an, wobei der von R induzierte Funktor $\mathcal{FR}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{LR}^{\mathbb{N}}$ ebenfalls mit R bezeichnet sei, so erhält man unter der Voraussetzung der Vertauschbarkeit des Funktors R mit abzählbaren Produkten (damit gehen freie projektive Spektren in solche über) und Beachtung von $\operatorname{proj}^2 \mathcal{X} = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$ eine exakte $\mathcal{LR}$-Sequenz

$$0 \to \operatorname{proj}^1 R^{l-1}(F_n) \to (\operatorname{proj} \circ R)^l(\mathcal{F}) \to \operatorname{proj} R^l(F_n) \to 0.$$

Dieses Resultat läßt sich mit unseren Betrachtungen im Beweis von Theorem 2.2.6 auch mit [Wei, Theorem 3.5.8] erzielen, wo allerdings eine klassische Mittag-Leffler Bedingung als Voraussetzung herangezogen wird, die als hinreichende Bedingung für $\operatorname{proj}^1 \mathcal{X} = 0$ in einem gewissen Sinne mit der Eigenschaft, ein Fundamentalsystem von Banachräumen zu sein, korrespondiert. In beiden Fällen bleibt immer noch $(\operatorname{proj} \circ R)^l(\mathcal{F})$ zu berechnen.

Anwendungstauglich wird Theorem 2.2.6 erst durch die

Definition 2.2.8 Wir nennen einen Fréchetraum F

a) *R-azyklisch* , falls $R^l(F) = 0$ für alle $l \geq 1$ gilt.

b) *lokal R-azyklisch* , falls F ein Fundamentalsystem von R-azyklischen Banachräumen besitzt.

c) *lokal injektiv (lokal projektiv),* falls F ein Fundamentalsystem von injektiven (projektiven) Banachräumen besitzt.

Nach Bemerkung 2.1.6 a) sind injektive Fréchеträume R-azyklisch. Insbesondere ist also jeder lokal injektive Fréchetraum lokal R-azyklisch. Nukleare Fréchеträume und quasinormable $\lambda^\infty(B)$-Räume sind lokal injektiv nach Bemerkung 2.2.2 bzw. Beispiel 2.2.3.

Bemerkung 2.2.9 Ist F ein R-azyklischer Fréchetraum, so gilt $R^0(F) = R(F)$.

Beweis: Nach einem Resultat von A. Grothendieck kann man zur Definition von $R^l(F)$ statt injektive Auflösungen auch R-azyklische Auflösungen heranziehen (vgl. [Wei, Exercise 2.4.3]). Wendet man dieses auf $0 \to F \to F \to 0 \to 0 \to \cdots$ an, so folgt die Behauptung. □

Korollar 2.2.10 Sei $R : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ ein σ-stabiler Funktor und F ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem von Banachräumen $\mathcal{F} = (F_n, \rho_m^n)$. Dann gilt:

a) $R^1(F) = 0 \Rightarrow \operatorname{proj}^1 R^0(F_n) = 0$.

b) $R^l(F) = 0$ für $l \geq 2$ und $R^1(F) = \operatorname{proj}^1 R(F_n)$, falls F lokal R-azyklisch ist. Insbesondere gilt dies für lokal injektive Frécheträume.

Beweis: Dies folgt aus Theorem 2.2.6 und der vorigen Bemerkung, wobei man beachtet, daß proj^l invariant bzgl. äquivalenten Spektren ist (Beispiel 2.1.13). Man kann natürlich auch direkt die lange exakte Kohomologie-Sequenz auf die kanonische Auflösung von F anwenden und mit der σ-Stabilität des Funktors R argumentieren, was einem Beweis von Theorem 2.2.6 für obige Situationen gleichkommt. □

Wie das obige Korollar zeigt, ist es von immenser Bedeutung, notwendige und hinreichende Bedingungen für $\operatorname{proj}^1 \mathcal{X} = 0$ zu haben.

Theorem 2.2.11 Für ein projektives Spektrum $\mathcal{X} = (X_n, \rho_m^n)$ linearer Räume gelten folgende Aussagen:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Folge $(B_{n,N})_N$ von Banachkugeln in X_n gegeben, die X_n überdecken, so daß das Bild von $B_{n+1,N}$ unter ρ_{n+1}^n in einem $B_{n,M}$ enthalten ist. Dann gilt $\operatorname{proj}^1 \mathcal{X} = 0$ genau dann, wenn es zu jedem n eine Banachkugel $D_n \subseteq X_n$ gibt mit:

  i) $\rho_{n+1}^n(D_{n+1}) \subseteq D_n$ für alle n,

  ii) für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß für alle $k \geq m$ gilt: $\rho_m^n(X_m) \subseteq \rho_k^n(X_k) + D_n$.

  Ist $\operatorname{proj}^1 \mathcal{X} = 0$, so finden wir eine Folge $(N_j)_j$ mit $D_n = \cap_{j=1}^n (\rho_n^j)^{-1} B_{j,N_j}$. Insbesondere gibt es also für alle n ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $k \geq m$ die folgende Inklusion gilt:

$$\rho_m^n(X_m) \subseteq \rho_k^n(X_k) + B_{n,N}.$$

b) Für jedes n sei ein System $\mathcal{B}_n$ von Banachkugeln in X_n gegeben, die X_n überdecken, bzgl. der Mengeninklusion gerichtet und stabil bzgl. der Multiplikation mit Skalaren sind, so daß das Bild von jeder Banachkugel von $\mathcal{B}_{n+1}$ unter ρ_{n+1}^n in einer Banachkugel von $\mathcal{B}_n$ enthalten ist. Dann gilt $\operatorname{proj}^1\mathcal{X} = 0$, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein $B \in \mathcal{B}_n$ gibt, so daß für alle $M \in \mathcal{B}_m$ ein $K \in \mathcal{B}_k$ existiert mit:

$$\rho_m^n(M) \subseteq \rho_k^n(K) + B.$$

Teil a) des Theorems geht auf V.P. Palamodov und V.S. Retakh zurück (vgl. [Pal, Theorem 5.4]), während das Resultat unter b) in dieser Form auf einer Beobachtung von M. Langenbruch ([Lan]) beruht, daß man in den von R. Braun und D. Vogt ([BraVog]) bzw. L. Frerick und J. Wengenroth ([FreWen]) voneinander unabhängig erzielten Ergebnissen die Reihenfolge der Quantoren wie oben getrennt nach Stufen und interpolierenden Bedingungen umstellen kann. Für ein intensives Studium obiger Resultate sei auf die Habilitationsschrift von J. Wengenroth ([Wen]) verwiesen.
Abschließend wollen wir noch einige Resultate der Ext-Theorie zitieren. Wir betrachten im folgenden nur den wichtigen Fall, daß für den Funktor $L(E, \cdot\,) : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ der lokalkonvexe Raum E als Fréchetraum vorausgesetzt sei.

Bemerkung 2.2.12 Für Frécheträume E und F sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $\operatorname{Ext}^1(E, F) = 0$.

b) Der Funktor $L(E, \cdot\,)$ ist exakt auf jeder kurzen exakten $\mathcal{FR}$-Sequenz, die mit F startet.

c) Jede *Erweiterung* von (E, F), d.h. jede exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz $0 \to F \to G \to E \to 0$, zerfällt.

Beweis: Für die Äquivalenz von a) und b) siehe Korollar 2.1.14. Für b) $\Rightarrow$ c) lifte man id_E.
c) $\Rightarrow$ b): Sei dazu $0 \to F \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} H \to 0$ eine exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz und $\varphi \in L(E, H)$ vorgegeben. Dann induziert $G := \{\, (x, y) \in G_2 \times E : \, g(x) = \varphi(y) \,\}$ auf kanonische Weise eine Erweiterung von (E, F). Ist $R = (R_1, R_2)$ eine Rechtsinverse der Projektion $G \to E$, so ist $g_*(R_1) = \varphi$. □

Aufgrund obiger Bemerkung sind notwendige und hinreichende Bedingungen für $\operatorname{Ext}^1(E,F)=0$ von großem Interesse, zumindestens für Räume, die in der Praxis oft vorkommen. Dies gelang in [Vog1] und [FreWen]. Eine Analyse dieser Arbeiten und der Langenbruch'schen Beobachtung zeigt, daß in den vier Standardfällen die untenstehende Bedingung $(S_3^{K\prime})_0$ charakterisierend ist. Die Notation ist wie folgt: E ist ein *echter Fréchetraum*, d.h. kein Banachraum, mit Fundamentalfolge von Halbnormen $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \ldots$ und (F_n, ρ_m^n) ein Fundamentalsystem von Banachräumen für den Fréchetraum F, $U_n := B_{F_n}$. Weiter verwenden wir die abkürzende Notation $\|x\|_L := \|\phi_K^L(x)\|_{E_L}$ für $x \in E_K$ und $K \geq L$, wobei $\phi_K^L : E_K \to E_L$ die kanonische Abbildung zwischen den lokalen Banachräumen von E sei.

Theorem 2.2.13 (Haupttheorem Ext-Theorie) Unter einer der folgenden Voraussetzungen
i) $F=\lambda^\infty(A)$ ii) E nuklear iii) F nuklear iv) $E=\lambda^1(A)$
gilt $\operatorname{Ext}^1(E,F)=0$ genau dann, wenn das Paar (E,F) der folgenden Bedingung genügt:

$(S_3^{K\prime})_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\|x\|_M \cdot \rho_m^n(U_m) \subseteq S \cdot \|x\|_K \cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon \cdot \|x\|_N \cdot U_n$$

für alle $x \in E_K$.

Des weiteren zeigte D. Vogt in [Vog1], daß in den vier Standardfällen $\operatorname{Ext}^1(E,F)=0$ gilt, falls E die Eigenschaft (DN) und F die Eigenschaft (Ω) hat. Hierbei sind die linear topologischen Invarianten (DN) und (Ω) wie folgt definiert:

Definition 2.2.14 Seien E und F Frécheträume mit wachsenden Fundamentalfolgen von Halbnormen $(\|\cdot\|_N)_N$ bzw. $(\|\cdot\|_n)_n$.

a) Wir sagen E habe die *Eigenschaft* (DN), falls ein N existiert, so daß es für alle $M \geq N$ und $\theta \in]0,1[$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ gibt mit

$$\|x\|_M \leq S \cdot \|x\|_K^\theta \cdot \|x\|_N^{1-\theta}$$

für alle $x \in E$. Die N-te Halbnorm ist offenbar eine Norm und heißt dominierende Norm.

b) F habe die *Eigenschaft* (Ω), falls für alle n ein $m \geq n$ existiert, so daß es für alle $k \geq m$ ein $\delta \in]0,1[$ und $C > 0$ gibt mit

$$\|y'\|_m^* \leq C \cdot (\|y'\|_k^*)^\delta \cdot (\|y'\|_n^*)^{1-\delta}$$

für alle $y' \in F'$. Hierbei ist $\|y'\|_l^* := \sup_{\|x\|_l \leq 1} |y'(x)| \in [0,\infty]$.

(DN) vererbt sich auf Unterräume, (Ω) auf Quotienten. Potenzreihenräume unendlichen Typs haben (DN) und (Ω), während die von endlichem Typ stets (Ω) und niemals (DN) haben. Mit obigen Definitionen gelang D. Vogt der Durchbruch in der Strukturtheorie des Raumes s der schnell fallenden Folgen. Die Unterräume von s sind die nuklearen Frécheträume mit (DN), die Quotienten von s die nukleare Frécheträume mit (Ω) und die komplementierten Unterräume von s die nuklearen Frécheträume mit (DN) und (Ω) (siehe [MeiVog, §31]).
Eine sehr grobe Beweisskizze des Haupttheorems liest sich folgendermaßen: Nach Korollar 2.2.10 a) folgt aus $\operatorname{Ext}^1(E,F)=0$ stets $\operatorname{proj}^1 L(E,F_n)=0$. Damit geht man nun in das Theorem 2.2.11 a) und bekommt erste notwendige Bedingungen, die letztlich zu $(S_3^{K\prime})_0$ führen. Da unter milden Zusatzvoraussetzungen, welche man aus der Bedingung $(S_3^{K\prime})_0$ ableiten kann, in den vier Standardfällen $\operatorname{Ext}^1(E,F)=\operatorname{proj}^1 L(E,F_n)$ gilt (vgl. Korollar 2.2.10 b)), rechnet man schließlich mit $(S_3^{K\prime})_0$ und sogenannter Zerlegungslemmata die Voraussetzungen von Theorem 2.2.11 b) nach.
Unser Ziel wird es sein, obige Resultate unter Beachtung der Beweisskizze so gut wie möglich auf die Tor-Theorie zu übertragen. Genauer bedeutet dies, daß wir $\operatorname{Tor}_\alpha^1(E,F)=0$ für (DF)-Räume E und Frécheträume F diskutieren wollen.

3 Die erste Rechtsableitung der Tensorproduktfunktoren

Bevor wir notwendige und hinreichende Bedingungen für das Verschwinden von $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F)$ herleiten und diese im nächsten Kapitel auf die vier Standardfälle anwenden, wollen wir zunächst in einem separaten Abschnitt zum Teil sehr schlichte Beispiele angeben, die zum besseren Verständnis der Materie beitragen können.

3.1 Allgemeine Betrachtungen

Wir werden uns nun mit der Bemerkung 2.1.15 beschäftigen. Der Funktor $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ ist für jeden lokalkonvexen Raum E mit der A.E. linksexakt (Bemerkung 2.1.8 b)). Insbesondere gilt dann

$$\mathrm{Tor}^0_\varepsilon(E,F) = E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F$$

für jeden Fréchetraum F (Bemerkung 2.1.6 b)). Die Konstruktion eines Gegenbeispiels für obige Identität wird für das injektive Tensorprodukt aufgrund der nicht leichten Handhabung von lokalkonvexen Räumen ohne die A.E. komplizierter sein. Für das projektive Tensorprodukt haben wir jedoch:

Beispiel 3.1.1 Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Es gelten folgende Aussagen:

a) $l_2\widetilde{\otimes}_\pi l_2 \subsetneq \mathrm{Tor}^0_\pi(l_2,l_2)$.

b) Der Funktor $l_2 : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ ist nicht linksexakt.

Beweis: Zu a) Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & l_2 \arrow[r, hook, "\varepsilon"] & F^0 \arrow[rr, "i^0"] \arrow[dr, "q"'] & & F^1 \arrow[r, "i^1"] & \cdots \\
& & & \mathrm{coker}\,(\varepsilon) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

wobei die Zeile die gewohnte injektive Auflösung von l_2 sei, d.h. $F^0 = l_\infty(B^\circ_{l_2})$ usw. Durch Anwendung des Funktors $l_2\widetilde{\otimes}_\pi \cdot$ erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & l_2\widetilde{\otimes}_\pi l_2 \arrow[r, hook, "\mathrm{id}_{l_2}\widetilde{\otimes}_\pi\varepsilon"] & l_2\widetilde{\otimes}_\pi F^0 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{l_2}\widetilde{\otimes}_\pi i^0"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{l_2}\widetilde{\otimes}_\pi q"'] & & l_2\widetilde{\otimes}_\pi F^1 \\
& & & l_2\widetilde{\otimes}_\pi \mathrm{coker}\,(\varepsilon) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Hierbei beachte man Satz 1.2.2 und die Semi-Injektivität des Funktors $l_2\widetilde{\otimes}_\pi \cdot$ (Bemerkung 2.1.9). Nun gilt nach Korollar 1.1.8 a) und Lemma 1.2.1

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}^0_\pi(l_2,l_2) &= \ker\,(\mathrm{id}_{l_2}\widetilde{\otimes}_\pi i^0) = \ker\,(\mathrm{id}_{l_2}\widetilde{\otimes}_\pi q) = \widetilde{\big(\ker\,(\mathrm{id}_{l_2} \otimes_\pi q)\big)} = \widetilde{\big(\mathrm{im}\,(\mathrm{id}_{l_2} \otimes_\pi \varepsilon)\big)} \\
&= \overline{\mathrm{im}\,(\mathrm{id}_{l_2} \otimes_\pi \varepsilon)}^{\,l_2\widetilde{\otimes}_\pi F^0}
\end{aligned}$$

und $l_2\widetilde{\otimes}_\pi l_2 = \mathrm{im}\,(\mathrm{id}_{l_2}\widetilde{\otimes}_\pi\varepsilon)$. Folglich reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{id}_{l_2}\widetilde{\otimes}_\pi\varepsilon$ kein abgeschlossenes Bild hat bzw. in unserer Situation kein Monohomomorphismus ist. Angenommen, dies wäre doch der Fall. Bezeichnet φ die Fortsetzung der Linearisierung der Bilinearform $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ auf $l_2\widetilde{\otimes}_\pi l_2$, so finden wir aufgrund unserer Annahme nach dem Satz von Hahn-Banach eine stetige Fortsetzung ϕ von φ auf $l_2\widetilde{\otimes}_\pi F^0$. Setzen wir nun

$$\begin{aligned}
P: F^0 &\to l_2 = l_2' \\
y &\mapsto (x' \mapsto \phi(x' \otimes y)),
\end{aligned}$$

so ist nach dem Riesz'schen Darstellungssatz P eine stetige Projektion von $F^0 = l_\infty(B_{l_2}^\circ)$ auf l_2. Also ist l_2 komplementiert in einem injektiven Banachraum und daher selbst injektiv. Widerspruch. Zu b) Der Funktor $l_2\widetilde{\otimes}_\pi \cdot$ ist nicht linksexakt auf der exakten Sequenz $0 \to l_2 \to F^0 \to F^1$, wie der Beweis zu a) zeigt. $\square$

Aus Korollar 2.1.14 und Korollar 1.2.12 a) erhalten wir unmittelbar:

Beispiel 3.1.2 Sei E ein α-Raum ($\alpha = \pi$ oder ε). Dann sind äquivalent:

a) Für jede exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz $0 \to F \to G \to H \to 0$ ist die $E\widetilde{\otimes}_\alpha \cdot$ tensorierte Sequenz

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\alpha F \to E\widetilde{\otimes}_\alpha G \to E\widetilde{\otimes}_\alpha H \to 0$$

topologisch exakt.

b) $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E, F) = 0$.

Mit demselben Argument (diesmal mit Korollar 1.2.12 b)) folgert man das folgende Sätzchen zur Charakterisierung von π- bzw. ε-Fréchetträumen:

Satz 3.1.3 Ein Fréchetraum E ist genau dann ein α-Raum ($\alpha = \pi$ oder ε), falls $\mathrm{Tor}^0_\alpha(E, \cdot) \simeq E\widetilde{\otimes}_\alpha \cdot$ und $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E, \cdot) = 0$ ist.

Mit obigem Satz können wir einfach zeigen, daß die Funktoren $\mathrm{Tor}^1_\pi(E, \cdot)$ und $\mathrm{Tor}^1_\varepsilon(E, \cdot)$ i.A. voneinander verschieden sind.

Beispiel 3.1.4 Es gibt einen Fréchetraum F (sogar Banachraum) mit

$$\mathrm{Tor}^1_\pi(l_1, F) = 0 \neq \mathrm{Tor}^1_\varepsilon(l_1, F).$$

Beweis: l_1 ist ein π-Raum und damit $\mathrm{Tor}^1_\pi(l_1, F) = 0$ für jeden Fréchetraum F. Da l_1 die A.E. hat, ist der Funktor $l_1\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot$ linksexakt und daher $\mathrm{Tor}^0_\varepsilon(l_1, \cdot) \simeq l_1\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot$. Wäre nun $\mathrm{Tor}^1_\varepsilon(l_1, F) = 0$ für alle Fréchetträume F, so müßte nach Satz 3.1.3 der Banachraum l_1 ein ε-Raum sein. Diese sind aber gerade die $\mathcal{L}_\infty$-Räume. Widerspruch. $\square$

Das folgende Beispiel trennt die Funktoren $\mathrm{Tor}^0_\pi(E, \cdot)$ und $\mathrm{Tor}^0_\varepsilon(E, \cdot)$ voneinander:

Beispiel 3.1.5 Da l_1 ein π-Banachraum ist, l_∞ nicht nuklear ist und l_1 die A.E. hat, gilt

$$\mathrm{Tor}^0_\pi(l_1, l_\infty) = l_1\widetilde{\otimes}_\pi l_\infty \neq l_1\widetilde{\otimes}_\varepsilon l_\infty = \mathrm{Tor}^0_\varepsilon(l_1, l_\infty).$$

Andererseits ist aufgrund der Injektivität von l_∞: $\mathrm{Tor}^1_\pi(l_1, l_\infty) = 0 = \mathrm{Tor}^1_\varepsilon(l_1, l_\infty)$.

Daß für (DF)-Fréchetraum-Situationen eine Dualität der Tor- und Ext-Theorie im Sinne von

$$\mathrm{Tor}^1_\pi(E, \cdot) = \mathrm{Ext}^1(E'_b, \cdot)$$

gilt, ist i.A. schon für Banachräume E falsch:

Beispiel 3.1.6 Es gibt einen Fréchetraum F mit

$$\mathrm{Tor}^1_\pi(l_1, F) = 0 \neq \mathrm{Ext}^1(l_\infty, F).$$

Wäre dies nicht der Fall, so wäre der Funktor $L(l_\infty, \cdot)$ exakt und damit l_∞ projektiv. Widerspruch. Ein konkreteres Gegenbeispiel hierfür ist das folgende: Da jeder Banachraum Quotient eines $l_1(I)$-Raumes ist (I geeignet), existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to \ker(q) \xrightarrow{i} l_1(I) \xrightarrow{q} l_\infty \to 0.$$

$\mathrm{Ext}^1(l_\infty, \ker(q)) = 0$ würde implizieren, daß l_∞ komplementiert in $l_1(I)$ und daher projektiv ist. Widerspruch.

Den folgenden Satz findet man in einem allgemeineren Setting in [KabVog, 1.10].

Satz 3.1.7 Sei $E = \operatorname{ind}_N E_N$ ein *kompakt-regulärer* (LB)*-Raum* , d.h. jede kompakte Teilmenge von E sitzt in einer Stufe und ist dort kompakt. Weiter habe jedes E_N die A.E. Dann ist für jede $\otimes$-Sequenz

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} H \to 0$$

von Banachräumen die Sequenz

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon G \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon G \to 0$$

topologisch exakt.

Beweis: Wir wollen zunächst drei Vorbemerkungen machen:

a) E ist *kompakt-retraktiv*, d.h. für jedes Kompaktum $K \subseteq E$ existiert ein N mit $K \subseteq E_N$ und $\mathcal{T}_E|_K = \mathcal{T}_{E_N}|_K$, denn nach Voraussetzung finden wir ein N mit $K \subseteq E_N$, so daß $(K, \mathcal{T}_{E_N}|_K)$ kompakt ist. Da $(K, \mathcal{T}_{E_N}|_K) \to (K, \mathcal{T}_E|_K)$ eine stetige Bijektion und E separiert ist, folgt $\mathcal{T}_E|_K = \mathcal{T}_{E_N}|_K$.

b) E ist vollständig, was z.B. aus a) folgt.

c) Nach [Jar, Proposition 18.2.5] besitzt E ebenfalls die A.E.

Aus b) und c) erhalten wir $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon L = E\epsilon L$ für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum L. Da die vorgegebene Sequenz eine $\otimes$-Sequenz ist, ist nach Korollar 1.2.8 a) die Sequenz

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon G \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon H$$

topologisch exakt, so daß wir nur noch die Surjektivität von $\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\varepsilon q = \mathrm{id}_E \epsilon q$ zeigen müssen.
Sei dazu $A \in E\widetilde{\otimes}_\varepsilon H = E\epsilon H$ vorgegeben. Gesucht ist ein $B \in E\epsilon G$ mit $\mathrm{id}_E \epsilon q(B) = A$. Wir betrachten $A^t \in H\epsilon E = L_\epsilon(H'_c, E)$ und setzen $U := B_H$. Da H vollständig ist, gilt nach dem Satz von Banach-Dieudonné ([MeiVog, Lemma 24.21])

(*) $c(H', H)$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie, die auf gleichstetigen Mengen mit $\sigma(H', H)$ übereinstimmt.

Nach Alaoglu-Bourbaki ist daher U^0 sogar $c(H', H)$-kompakt und damit $A^t(U^\circ)$ kompakt in E. Nach a) existiert ein N mit $A^t(U^\circ) \subseteq E_N$ und $\mathcal{T}_E|_{A^t(U^\circ)} = \mathcal{T}_{E_N}|_{A^t(U^\circ)}$. Folglich ist die Abbildung $A^t : (U^\circ, \sigma(H', H)|_{U^\circ}) \to E_N$ stetig und nach $(*)$ ist $A^t \in L_\epsilon(H'_c, E_N) = H\epsilon E_N$. Da wir eine $\otimes$-Sequenz vorliegen haben, ist nach Korollar 1.2.8 b) iii) die Sequenz

$$0 \to F\epsilon E_N \to G\epsilon E_N \to H\epsilon E_N \to 0$$

topologisch exakt, und wir finden ein $C \in G\epsilon E_N \subseteq G\epsilon E$, das $A^t \in H\epsilon E_N$ liftet. Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} G\epsilon E \arrow[r] & H\epsilon E \\ E\epsilon G \arrow[u, "\cong"] \arrow[r] & E\epsilon H \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

folgt nun mit $B := C^t \in E\epsilon G$ die Behauptung. □

Da in obigem Satz E die A.E. besitzt, ist der Funktor $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ linksexakt. Hieraus und der langen exakten Kohomologie-Sequenz folgt mit Satz 1.2.10 sofort das

Beispiel 3.1.8 Sei $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein kompakt-regulärer (LB)-Raum, und jedes E_N habe die A.E. Dann ist $\mathrm{Tor}^1_\varepsilon(E, \mathcal{L}_\infty) = 0$.

Man könnte genauso $\mathrm{Tor}^1_\varepsilon(E, F) = 0$ folgern, falls eine $\otimes$-Sequenz von Banachräumen

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

mit injektivem G existiert. Da injektive Banachräume $\mathcal{L}_\infty$-Räume sind, kann man hieraus aber schon schließen, daß auch F ein $\mathcal{L}_\infty$-Raum sein muß ([KabVog, Satz 1.9]).
W. Kaballo zeigte in [Kab, 2.13] eine „duale"Aussage zu Satz 3.1.7: Ist $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein kompakt-regulärer (LB)-Raum, wobei jedes E_N ein $\mathcal{L}_\infty$-Raum sei, so ist für jeden Epihomomorphismus $q : G \to H$ zwischen Banachräumen die Abbildung $\mathrm{id}_E \epsilon q : E\epsilon G \to E\epsilon H$ ebenfalls surjektiv. Ist nun X ein beliebiger Banachraum und

$$0 \to X \to G \to H \to 0$$

eine exakte Sequenz von Banachräumen mit injektivem G, so folgt wegen $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot\ = E\epsilon\,\cdot$ (siehe Beweis von Satz 3.1.7) aus der langen exakten Kohomologie-Sequenz

Beispiel 3.1.9 Sei E ein kompakt-regulärer (LB)-Raum mit $\mathcal{L}_\infty$-Stufen. Dann ist

$$\mathrm{Tor}^1_\varepsilon(E, X) = 0$$

für jeden Banachraum X. Die Anmerkung direkt im Anschluß zu Korollar 2.1.14 zeigt sogar $\mathrm{Tor}^l_\varepsilon(E, X) = 0$ für alle $l \geq 1$. Jeder Banachraum ist also $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot$-azyklisch.

Nach Korollar 2.2.10 a) gilt für jedes Fundamentalsystem (F_n, ρ^n_m) für einen Fréchetraum F stets die Implikation

$$\mathrm{Tor}^1_\alpha(E, F) = 0 \Rightarrow \mathrm{proj}^1 \mathrm{Tor}^0_\alpha(E, F_n) = 0,$$

wobei E ein lokalkonvexer Raum und α eine Tensornorm ist. Rechentechnisch ist es natürlich von großem Nutzen, $\mathrm{Tor}^0_\alpha(E, F_n) = E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$ zu haben, was zum Beispiel mit lokal injektiven Frécheträumen realisierbar ist. Wir wollen letzteres leicht abschwächen:

Definition 3.1.10 Wir nennen einen Fréchetraum F einen $(FS\mathcal{L}_\infty)$-Raum, falls F ein Fundamentalsystem von $\mathcal{L}_\infty$-Räumen besitzt.

Beispiele für $(FS\mathcal{L}_\infty)$-Räume sind nukleare Frécheträume und $C(\mathbb{R}) = \mathrm{proj}_n C([-n, n])$, wobei die Verbindungsabbildungen durch die Restriktionen gegeben seien.

Satz 3.1.11 Ist E ein lokalkonvexer Raum und F ein $(FS\mathcal{L}_\infty)$-Raum, so gilt

$$\mathrm{Tor}^1_\varepsilon(E, F) = 0 \Rightarrow \mathrm{proj}^1 E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F_n = 0.$$

Hat zudem E die v.A.E., so gilt dies auch für das projektive Tensorprodukt.

Beweis: Nach Korollar 2.2.10 genügt es, $\mathrm{Tor}^0_\varepsilon(E, X) \cong E\widetilde{\otimes}_\varepsilon X$ für jeden $\mathcal{L}_\infty$-Raum X zu zeigen. Sei $0 \to X \xrightarrow{i} X^0 \xrightarrow{p} X^1 \to \ldots$ eine injektive Auflösung von X. Für die erste Behauptung reicht es, die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon X \xrightarrow{\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\varepsilon i} E\widetilde{\otimes}_\varepsilon X^0 \xrightarrow{\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\varepsilon p} E\widetilde{\otimes}_\varepsilon X^1$$

nachzuweisen. Nach Satz 1.2.10 ist $0 \to X \to X^0 \to \mathrm{im}\, p \to 0$ eine $\otimes$-Sequenz und damit

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon X \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon X^0 \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \mathrm{im}\,(p)$$

ebenfalls exakt. Da $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot$ Monohomomorphismen in solche überführt, folgt die Injektivität der Abbildung $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \mathrm{im}\,(p) \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon X^1$. Daher gilt $\ker \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\varepsilon p = \mathrm{im}\, \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\varepsilon i$, und wir erhalten das Gewünschte.

Hat E die v.A.E., so ist auch $E\widetilde{\otimes}_\pi \mathrm{im}\,(p) \to E\widetilde{\otimes}_\pi X^1$ injektiv, und der obige Beweis bleibt für das projektive Tensorprodukt gültig. □

Nach Satz 3.1.3 sind Frécheträume $\mathcal{L}_\infty\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot$-azyklisch, was man auch aus dem folgenden Beispiel herausziehen kann.

Beispiel 3.1.12 Für einen $(FS\mathcal{L}_\infty)$-Raum E gilt $\mathrm{Tor}^l_\varepsilon(E,\,\cdot\,) = 0$ für $l \geq 1$.

Beweis: Es reicht, dies für $l = 1$ zu zeigen. Nach [Kab, Satz 2.5] hat E die A.E., und für jeden Epihomomorphismus q zwischen Frécheträumen ist $\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\varepsilon q$ wieder ein Epihomomorphismus. Wenden wir die lange exakte Kohomologie-Sequenz auf eine exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

mit injektivem G an, so folgt mit $\mathrm{Tor}^0(E,\,\cdot\,) = E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot$ die Behauptung. □

3.2 Notwendige Bedingungen für das Verschwinden

Wir wollen in diesem Abschnitt notwendige Bedingungen für das Verschwinden der ersten Rechtsableitung der Tensorproduktfunktoren herleiten. Für eine Tensornorm α, einen lokalkonvexen Raum E und einen Fréchetraum F mit Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ^n_m) haben wir nach Korollar 2.2.10 a) die folgende Implikation zur Verfügung:

$$\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F) = 0 \Rightarrow \mathrm{proj}^1\,\mathrm{Tor}^0_\alpha(E,F_n) = 0.$$

Gilt nun $\mathrm{Tor}^0_\alpha(E,F_n) = E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$ für alle n, so können wir mittels des Theorems von Palamodov-Retakh (Theorem 2.2.11 a)) erste notwendige Bedingungen für $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F) = 0$ angeben, sobald wir die Voraussetzungen des Theorems zeigen können. Mit anderen Worten sind wir an geeigneten (beschränkten) Banachkugeln in $E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$ interessiert. Hierfür benötigen wir noch einige Vorbereitungen:

Definition 3.2.1 a) Ein lokalkonvexer Raum E heißt *large*,[4] falls es zu jeder beschränkten Teilmenge C von $\widetilde{E}$ eine beschränkte Teilmenge B von E mit $C \subseteq \overline{j_E(B)}$ gibt.

b) Wir sagen, daß ein lokalkonvexer Raum F die *beschränkte Approximationseigenschaft* (b.A.E.) hat, falls ein gleichstetiges Netz $(g_i : F \to F)_{i\in I}$ endlich-dimensionaler Operatoren existiert, das punktweise gegen id_F konvergiert.

Da auf gleichstetigen Mengen von $L(F,F)$ die schwache Topologie mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf absolutkonvexen kompakten Mengen übereinstimmt, impliziert die b.A.E. stets die A.E. Banachräume mit Basis und $\mathcal{L}_\infty$-Räume haben die b.A.E. Teil a) des folgenden Lemmas geht auf A. Grothendieck zurück, Teil b) findet man in [PerBon].

Lemma 3.2.2 Es gelten folgende Aussagen:

a) (DF)-Räume sind large.

b) Sind E, F vollständige, lokalkonvexe Räume, α eine Tensornorm und hat F die b.A.E., so ist $E \otimes_\alpha F$ large.

Beweis: Zu a) Sei E ein (DF)-Raum und $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ eine Fundamentalfolge von beschränkten Teilmengen in E, die o.E. absolutkonvex und abgeschlossen seien. Wir zeigen: $(\overline{B_n})_n$ ist eine Fundamentalfolge von beschränkten Teilmengen in $\widetilde{E}$, wobei wie im folgenden der Abschluß in $\widetilde{E}$ gemeint ist.

[4] Allgemein heißt ein Teilraum E eines lokalkonvexen Raumes G large, falls es für jede beschränkte Teilmenge C von G eine beschränkte Teilmenge B von E mit $C \subseteq \overline{B}$ gibt. Da wir die Eigenschaft large zu sein nur im Zusammenhang mit der Vervollständigung benötigen, lassen wir diesen Zusatz im folgenden einfach weg.

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert eine beschränkte Teilmenge C von $\widetilde{E}$, so daß es für alle n ein $x_n \in C$ mit $x_n \notin n \cdot \overline{B_n}$ gibt. Daher existieren $U_n = \Gamma(U_n) \in \mathcal{U}_0(E)$ mit

$$(x_n + 2n \cdot \overline{U_n}) \cap n \cdot \overline{B_n} = \emptyset.$$

Folglich ist $x_n \notin n \cdot \overline{B_n + U_n} \subseteq n \cdot (\overline{B_n} + 2 \cdot \overline{U_n})$. Da die Folge $(x_n)_n$ beschränkt ist, kann also $\cap_n \overline{B_n + U_n}$ und damit auch $\overline{\cap_n (B_n + U_n)}$ keine Nullumgebung in $\widetilde{E}$ sein. Andererseits ist $\cap_n (B_n + U_n)$ eine Nullumgebung in E, da E $\aleph_o$-quasi-tonneliert ist. Widerspruch.
Zu b) Nach Voraussetzung existiert ein gleichstetiges Netz $(g_i : F \to F)_{i \in I}$ endlich-dimensionaler Operatoren, das punktweise gegen id_F konvergiert. Damit konvergiert offenbar auch das Netz $(\mathrm{id}_E \otimes_\alpha g_i)_{i \in I}$ punktweise gegen $\mathrm{id}_{E \otimes_\alpha F}$ und ist wegen der metrischen Abbildungseigenschaft

$$q_1 \otimes_\alpha q_2(x \otimes y) \leq q_1(x) \cdot q_2(y) \quad (q_1 \in cs(E),\, q_2 \in cs(F),\, x \in E,\, y \in F)$$

wieder gleichstetig. Folglich ist das Netz $(\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i)_{i \in I}$ gleichstetig.
Wir wollen nun zeigen, daß $(\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i)_{i \in I}$ punktweise gegen $\mathrm{id}_{E \widetilde{\otimes}_\alpha F}$ konvergiert. Seien dazu $\widetilde{z} \in E \widetilde{\otimes}_\alpha F$ und $U \in \mathcal{U}_0(E \widetilde{\otimes}_\alpha F)$ beliebig. Wir wählen ein $V \in \mathcal{U}_0(E \widetilde{\otimes}_\alpha F)$ mit $V + V + V \subseteq U$. Weiter existiert eine kreisförmige Nullumgebung $W \subseteq V$ mit

$$\bigcup_i \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i(W) \subseteq V$$

und dazu ein $z \in E \otimes_\alpha F$ mit $j(z) - \widetilde{z} \in W$, wobei $j := j_{E \otimes_\alpha F}$ sei. Da die Zwischenbehauptung für $\widetilde{z} \in j(E \otimes_\alpha F)$ klar ist, existiert ein i_0, so daß für alle $i \geq i_0$ gilt: $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i(j(z)) - j(z) \in W$. Es folgt für alle $i \geq i_0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i(\widetilde{z}) - \widetilde{z} &= (\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i(\widetilde{z}) - \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i(j(z))) + (\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i(j(z)) - j(z)) + (j(z) - \widetilde{z}) \\ &\in V + V + V \subseteq U. \end{aligned}$$

Sei nun $B \subseteq E \widetilde{\otimes}_\alpha F$ beschränkt. Da jedes g_i endlich-dimensional ist, ist $E \otimes_\alpha g_i(F)\, (\subseteq E \otimes_\alpha F)$ vollständig. Damit faktorisiert jedes $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i$ über $E \otimes_\alpha F$. Aufgrund der Gleichstetigkeit des Netzes $(\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i)_{i \in I}$ ist dann

$$C := \bigcup_i \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha g_i(B)$$

eine beschränkte Teilmenge von $E \otimes_\alpha F$. Die punktweise Konvergenz des Netzes gegen $\mathrm{id}_{E \widetilde{\otimes}_\alpha F}$ impliziert nun $B \subseteq \overline{C}^{E \otimes_\alpha F}$. □

Kommen wir nun zurück zu notwendigen Bedingungen für $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E, F) = 0$. Für den Rest dieses Kapitels verwenden wir, wenn nichts anderes gesagt wird, das folgende:

Setting 3.2.3 Es sei stets α eine Tensornorm, $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein vollständiger (LB)-Raum mit verbindenden Abbildungen

$$i_N^{N+1} : E_N \hookrightarrow E_{N+1} \quad \text{und} \quad i_N : E_N \hookrightarrow E.$$

Dieser sei als *echter (LB)-Raum* vorausgesetzt, d.h. E ist kein Banachraum. Des weiteren nehmen wir o.E. an, daß eine Fundamentalfolge von abgeschlossenen, beschränkten Teilmengen von E durch $B_1 := B_{E_1} \subseteq B_2 := B_{E_2} \subseteq \cdots$ gegeben wird. Für einen Fréchetraum F mit Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ^n_m) notieren wir für spätere Zwecke $U_n := B_{F_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gelte

a) $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E, F) = 0 \Rightarrow \mathrm{proj}^1 E \widetilde{\otimes}_\alpha F_n = 0$

und für ein (evtl. verschiedenes) Fundamentalsystem von Banachräumen eine der Bedingungen

b1) $\mathrm{ind}_N (E_N \otimes_\alpha F_n) = E \otimes_\alpha F_n$, und jedes F_n habe die b.A.E.

b2) $\mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\alpha F_n) = E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$, und jedes E_N oder jedes F_n habe die A.E.

Man beachte hierbei, daß $\mathrm{proj}^1\,\mathcal{X}$ invariant bzgl. äquivalenter Spektren ist und wir (LB)-Räume als Einbettungsspektren vorausgesetzt haben. Für das projektive und injektive Tensorprodukt ist letzteres in obigem Setting erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt. Es sei angemerkt, daß das Lemma für endlich erzeugte Tensornormen α gültig bleibt, siehe dazu [DefFlo1, 21.7].

Lemma 3.2.4 Sei $\alpha = \pi$ oder $\alpha = \varepsilon$, X ein Banachraum. Im Falle $\alpha = \pi$ habe jedes E_N oder X die A.E. Dann sind die Abbildungen $E_N\widetilde{\otimes}_\alpha X \to E\widetilde{\otimes}_\alpha X$ und $E_N\widetilde{\otimes}_\alpha X \to E_{N+1}\widetilde{\otimes}_\alpha X$ ebenfalls injektiv. Insbesondere gilt dieses auch für $E_N \otimes_\alpha X \to E \otimes_\alpha X$ und $E_N \otimes_\alpha X \to E_{N+1} \otimes_\alpha X$.

Beweis: Wir müssen die Behauptung lediglich für das projektive Tensorprodukt zeigen. Nach Voraussetzung sind die Abbildungen $E_N\widetilde{\otimes}_\pi X \to E_N\widetilde{\otimes}_\varepsilon X$ injektiv. Die Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{tikzcd}
E_N\widetilde{\otimes}_\pi X \arrow[r] \arrow[d, hook] & E_{(N+1)}\widetilde{\otimes}_\pi X \arrow[d] \\
E_N\widetilde{\otimes}_\varepsilon X \arrow[r, hook] & E_{(N+1)}\widetilde{\otimes}_\varepsilon X
\end{tikzcd}$$

impliziert die Behauptung. □

Wir wollen noch Beispiele für das Setting 3.2.3 angeben.

Beispiel 3.2.5 1) Für einen nuklearen Fréchetraum F werden wir uns vollständig auf das projektive Tensorprodukt zurückziehen können (Satz 4.3.2). Sei in diesem Fall also $\alpha = \pi$. Da F lokal injektiv ist, gilt nach Korollar 2.2.10 sogar $\mathrm{Tor}^1_\pi(E,F) = \mathrm{proj}^1\,E\widetilde{\otimes}_\pi F_n$ für jedes Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ^n_m) für F. Andererseits besitzt F auch ein Fundamentalsystem bestehend aus l_1-Räumen. Nach einem Resultat von S. Melikhov (siehe [Mel, Theorem 5])[5] folgt

$$\mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\pi l_1) = E\widetilde{\otimes}_\pi l_1$$

für reguläre (LB)-Räume E. Folglich sind a) und b2) erfüllt.

2) Sei $\alpha = \varepsilon$ und F ein $(FS\mathcal{L}_\infty)$-Raum. Nach Satz 3.1.11 gilt Bedingung a) und nach [PerBon, 11.4.45]

$$\mathrm{ind}_N\,(E_N \otimes_\varepsilon \mathcal{L}_\infty) = E \otimes_\varepsilon \mathcal{L}_\infty.$$

Also ist b1) erfüllt. Ist E sogar kompakt-regulär, so gilt nach [Hol1, Corollary 4.4] auch entsprechendes für das vollständige injektive Tensorprodukt. In diesem Fall ist also b2) erfüllt.

3) Sei α eine Tensornorm und E besitze eine Zerlegung der Eins, so ist b1) erfüllt, da dann

$$\mathrm{ind}_N\,(E_N \otimes_\alpha X) = E \otimes_\alpha X$$

für jeden Banachraum X gilt ([Har, Korollar 2.14]).
Dabei heißt eine Folge stetiger linearer Abbildungen $(\psi_N : E \to E_N)_N$ eine *Zerlegung der Eins* für E, falls für alle N die Identität $\psi_M \circ i_N = 0$ für fast alle M und $\mathrm{id}_E = \sum_N i_N \circ \psi_N$ gilt. Abzählbare direkte Summen und der Raum $\mathcal{D}(\Omega) = \mathrm{ind}_N\,\mathcal{D}(K_N)$ der C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit kompakter Ausschöpfung $(K_N)_N$, sind kanonische Beispiele für Räume mit Zerlegung der Eins, die den Begriff rechtfertigen.

[5] S. Melikhov teilte mir während einer AG-Pause mit, daß man sein Resultat mit allgemeineren Methoden von A. Pietsch ebenfalls erzielen kann.

Weitere Beispiele werden wir in Abschnitt 5.1 kennenlernen. Die Bedingung b2) ist recht stark (dafür rechentechnisch sehr günstig), während die Vertauschungseigenschaft unter b1) für das projektive Tensorprodukt stets erfüllt ist ([Jar, 15.5.4])! Daher wollen wir notwendige Bedingungen zunächst mit dem Setting a) und b1) durchrechnen und an späterer Stelle auf b2) zurückkommen.
Nach Lemma 3.2.2 b) liegt dann für jedes n folgende Situation vor:

$$\mathrm{ind}_N\,(E_N \otimes_\alpha F_n) = E \otimes_\alpha F_n \overset{\text{large}}{\hookrightarrow} E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n.$$

Folglich ist $(\overline{B_{E_N\otimes\alpha F_n}}^{E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n})_n$ eine Fundamentalfolge von beschränkten Teilmengen in $E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$.
Sei $C_{n,1} := 1$. Da die Abbildungen $i_N^{N+1} \otimes_\alpha \mathrm{id}_{F_n}$ stetig sind, finden wir induktiv eine Folge von Konstanten $C_{n,N} \geq N$ mit

$$i_N^{N+1} \otimes_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(C_{n,N} \cdot B_{E_N\otimes_\alpha F_n}) \subseteq C_{n,N+1} \cdot B_{E_{N+1}\otimes_\alpha F_n}.$$

Wir setzen

$$B_{n,N} := C_{n,N} \cdot \overline{B_{E_N\otimes_\alpha F_n}}^{E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n}.$$

Damit gelten dann folgende Aussagen:

i) $(B_{n,N})_N$ ist eine aufsteigende Folge von beschränkten Banachkugeln in $E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$,

ii) $E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n = \bigcup_N B_{n,N}$,

iii) Für alle n, N existiert ein $\widetilde{N}$ mit $\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_{n+1}(B_{n+1,N}) \subseteq B_{n,\widetilde{N}}$.

i) erhält man nach dem Lemma von Robertson ([MeiVog, 23.13 und 23.14]) und der Definition der $B_{n,N}$. Die Aussage ii) folgt daraus, daß $(\overline{B_{E_N\otimes_\alpha F_n}}^{E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n})_n$ eine Fundamentalfolge von beschränkten Teilmengen in $E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$ und $C_{n,N} \geq N$ ist. Mit

$$\begin{aligned}
(1) \quad \mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_{n+1}(B_{n+1,N}) &\subseteq \overline{\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_{n+1}(C_{n+1,N} \cdot B_{E_N\otimes_\alpha F_{n+1}})}^{E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n} \\
&= \overline{\mathrm{id}_{E_N} \otimes_\alpha \rho^n_{n+1}(C_{n+1,N} \cdot B_{E_N\otimes_\alpha F_{n+1}})}^{E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n} \\
&\subseteq \overline{C \cdot B_{E_N\otimes_\alpha F_n}}^{E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n} \\
&\subseteq B_{n,\widetilde{N}}
\end{aligned}$$

für geeignete $C = C(N, n) > 0$ und $\widetilde{N} = \widetilde{N}(n, N)$ folgt auch iii). Nach Theorem 2.2.11 a) gilt also:

Lemma 3.2.6 Mit den obigen Bezeichnungen ist

($\tilde{S}_2$) Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $k \geq m$ gilt:

$$\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_m(E\widetilde{\otimes}_\alpha F_m) \subseteq \mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_k(E\widetilde{\otimes}_\alpha F_k) + B_{n,N}$$

eine notwendige Bedingung für $\mathrm{proj}^1\, E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n = 0$.

Wir wollen nun die Bedingung ($\tilde{S}_2$) weiter modifizieren, um einfachere Bedingungen zu erhalten. Hierzu dienen die folgenden Lemmata, die uns grob gesprochen Schritt für Schritt einer hinreichenden Bedingung für $\mathrm{proj}^1\, E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n = 0$ näher bringen. Man vergleiche hierzu zum Beispiel [Vog4, Abschnitt 2].

Lemma 3.2.7 In der Notation von oben ist

(S_2) Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$ und $k \geq m$ es ein $K \geq M$ und $S > 0$ gibt mit

$$\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_m(B_{m,M}) \subseteq S \cdot (\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_k(B_{k,K}) + B_{n,N})$$

eine notwendige Bedingung für ($\tilde{S}_2$).

Beweis: Seien n, N, m und k wie in $(\tilde{S}_2)$. Wir erinnern daran, daß es sich bei den $B_{k,K}$ um beschränkte Banachkugeln handelt. Folglich ist die Summe $G_K := [\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{k,K})] + [B_{n,N}]$ ein Banachraum mit Einheitsball $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{k,K}) + B_{n,N}$. Da $(B_{k,K})_K$ eine aufsteigende Folge ist, ist auch $(G_K)_K$ eine aufsteigende Folge von linearen Unterräumen von $E \widetilde{\otimes}_\alpha F_n$. Wir versehen den linearen Raum $G := \cup_K G_K$ mit der Teilraumtopologie von $E \widetilde{\otimes}_\alpha F_n$. Nun ist wegen $E \widetilde{\otimes}_\alpha F_k = \cup_K B_{k,K}$ die rechte Seite von $(\tilde{S}_2)$ in G enthalten. Es gilt $[\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{k,K})] \overset{stet}{\hookrightarrow} G$ und $[B_{n,N}] \overset{stet}{\hookrightarrow} G$, folglich auch $G_K \overset{stet}{\hookrightarrow} G$. Sei nun $M \geq N$ beliebig. Insgesamt haben wir nach obigem das folgende Diagramm mit stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
{[B_{m,M}]} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\exists K"'] & E \widetilde{\otimes}_\alpha F_m \arrow[r, "\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n"] & G \\
G_K \arrow[urr, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Nach dem Grothendieckschen Faktorisierungsatz finden wir ein K (und damit auch ein $K \geq M$), so daß $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n$ über G_K faktorisiert. Die Stetigkeit der gestrichelten Abbildung $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n$ impliziert nun die Existenz einer Konstanten $S > 0$ mit $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n(B_{m,M}) \subseteq S \cdot (\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{k,K}) + B_{n,N})$. □

Lemma 3.2.8 (S_2) impliziert die Bedingung

(S_2') Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$ und $k \geq m$ es ein $K \geq M$ und $S > 0$ gibt, so daß für alle $x' \in E'$ gilt:

$$\|x'\|_M^* \cdot \rho_m^n(U_m) \subseteq S \cdot (\|x'\|_K^* \cdot \rho_k^n(U_k) + \|x'\|_N^* \cdot U_n)$$

Beweis: Sei o.E. $x' \in E' - \{0\}$. Wegen $\|x'\|_M^* = \sup_{x \in B_M} |x'(x)|$ finden wir für alle $M \in \mathbb{N}$ ein $x_0 = x_0(M) \in B_M$ mit

$$\|x'\|_M^* \leq 2 \cdot x'(x_0).$$

Für $y \in U_m$ ist also $x_0 \otimes_\alpha y \in B_{E_M \otimes_\alpha F_m}$ und daher $x_0 \widetilde{\otimes}_\alpha y \in C_{m,M} \cdot \overline{B_{E_M \otimes_\alpha F_m}}^{E \widetilde{\otimes}_\alpha F_m} = B_{m,M}$. Mit (S_2) folgt damit

$$\begin{array}{llll}
(2) & \|x'\|_M^* \cdot \rho_m^n(U_m) & \subseteq & 2 \cdot x'(x_0) \cdot \rho_m^n(U_m) \\
& & \subseteq & 2 \cdot x' \widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(x_0 \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n(U_m)) \\
& & \subseteq & 2 \cdot x' \widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n(B_{m,M})) \\
& & \subseteq & 2 \cdot S \cdot x' \widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{k,K}) + B_{n,N}) \\
& & = & 2 \cdot S \cdot x' \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{k,K}) + 2 \cdot S \cdot x' \widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(B_{n,N}).
\end{array}$$

Wir zeigen nun folgende Inklusionen:

i) $x' \widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(B_{E_N \otimes_\alpha F_n}) \subseteq \|x'\|_N^* \cdot U_n$,

ii) $x' \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(\overline{B_{E_K \otimes_\alpha F_k}}^{E \widetilde{\otimes}_\alpha F_k}) \subseteq \|x'\|_K^* \cdot \rho_k^n(U_k)$.

Mit $x' \widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(B_{E_N \otimes_\alpha F_n}) = x'|_{E_N} \otimes_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(B_{E_N \otimes_\alpha F_n}) \subseteq \|x'|_{E_N} \otimes_\alpha \mathrm{id}_{F_n}\| \cdot U_n \subseteq \|x'\|_N^* \cdot 1 \cdot U_n$ folgt i). Betrachten wir die Abbildung $\rho_k^n : F_k \to F_n$ und versehen $\rho_k^n(F_k)$ mit der Quotientennorm, so ist $\rho_k^n(U_k)$ der Einheitsball in $\rho_k^n(F_k)$ und $\|\rho_k^n : F_k \to \rho_k^n(F_k)\| = 1$. Wir erhalten

$$\begin{array}{lll}
x' \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(\overline{B_{E_K \otimes_\alpha F_k}}^{E \widetilde{\otimes}_\alpha F_k}) & = & (\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n) \circ (x' \widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_k})(\overline{B_{E_K \otimes_\alpha F_k}}^{E \widetilde{\otimes}_\alpha F_k}) \\
& \subseteq & \rho_k^n(\|x'\|_K^* \cdot 1 \cdot U_k) \\
& = & \|x'\|_K^* \cdot \rho_k^n(U_k)
\end{array}$$

und damit ii). Insgesamt gilt nun mit i) und ii):

$$\begin{aligned}\|x'\|_M^* \cdot \rho_m^n(U_m) &\subseteq 2\cdot S\cdot x'\widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{k,K}) + 2\cdot S\cdot x'\widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(B_{n,N})\\ &= 2\cdot S\cdot \big(x'\widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(C_{k,K}\cdot \overline{B_{E_K\otimes_\alpha F_k}}) + x'\widetilde{\otimes}_\alpha \mathrm{id}_{F_n}(C_{n,N}\cdot \overline{B_{E_N\otimes_\alpha F_n}})\big)\\ &\subseteq 2\cdot S\cdot \big(C_{k,K}\cdot \|x'\|_K^*\cdot \rho_k^n(U_k) + C_{n,N}\cdot \|x'\|_N^*\cdot U_n\big)\\ &\subseteq \widetilde{S}\cdot \big(\|x'\|_K^*\cdot \rho_k^n(U_k) + \|x'\|_N^*\cdot U_n\big),\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{S} = \max\{2\cdot S\cdot C_{k,K},\, 2\cdot S\cdot C_{n,N}\}$ sei. Es folgt die Behauptung. □

Die folgende Bedingung $(S_2')_0$ entpuppt sich als Dreh- und Angelpunkt unserer weiteren Betrachtungen.

Lemma 3.2.9 Unter den obigen Voraussetzungen ist

$(S_2')_0$ Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$, $k \geq m$ und $\varepsilon > 0$ es ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ gibt, so daß für alle $x' \in E'$ gilt:

$$\|x'\|_M^* \cdot \rho_m^n(U_m) \subseteq S\cdot \|x'\|_K^* \cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon\cdot \|x'\|_N^*\cdot U_n$$

eine notwendige Bedingung für (S_2').

Beweis: Wir wollen aus (S_2') zunächst die folgende Bedingung folgern:

(Q) Für alle n existiert ein $\tilde{n} \geq n$, so daß es für alle $k \geq \tilde{n}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{S} > 0$ gibt mit:

$$\rho_{\tilde{n}}^n(U_{\tilde{n}}) \subseteq \tilde{S}\cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon\cdot U_n.$$

Dazu wählen wir zu n ein N und ein $m \geq n$ nach (S_2') und setzen $\tilde{n} := m$. Da E ein echter regulärer (LB)-Raum ist, ist auch E_b' ein echter Fréchetraum, womit ein $M \geq N$ mit $\|\cdot\|_M^* \not\sim \|\cdot\|_N^*$ existiert. Folglich gilt

$$\inf_{\substack{x'\in E'\\ \|x'\|_M^*\neq 0}} \frac{\|x'\|_N^*}{\|x'\|_M^*} = 0,$$

und wir finden eine Folge $(x_L')_L$ in E' mit $\|x_L'\|_M^* \neq 0$ für alle L und $\lim_{L\to\infty} \frac{\|x_L'\|_N^*}{\|x_L'\|_M^*} = 0$. Seien nun $k \geq \tilde{n}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach (S_2') existieren $K \geq M$ und $S > 0$, so daß für alle L gilt:

$$\|x_L'\|_M^* \cdot \rho_{\tilde{n}}^n(U_{\tilde{n}}) \subseteq S\cdot (\|x_L'\|_K^*\cdot \rho_k^n(U_k) + \|x_L'\|_N^*\cdot U_n).$$

Sei nun L so groß gewählt, daß $\frac{\|x_L'\|_N^*}{\|x_L'\|_M^*} < \frac{\varepsilon}{S}$ ist. Mit $\tilde{S} := S\cdot \frac{\|x_L'\|_K^*}{\|x_L'\|_M^*}$ folgt dann die Bedingung (Q). Kommen wir nun zur Bedingung $(S_2')_0$. Sei n gegeben. Wir wählen $\tilde{n} \geq n$ nach (Q) und wenden (S_2') auf $\tilde{n}$ an, was uns ein N und ein $m \geq \tilde{n}$ liefert. Seien nun $M \geq N$, $k \geq m$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus (S_2') folgt, daß es ein $K \geq M$ und ein $\hat{S} > 0$ gibt, so daß für alle $x' \in E'$ gilt:

(3) $$\|x'\|_M^*\cdot \rho_m^{\tilde{n}}(U_m) \subseteq \hat{S}\cdot (\|x'\|_K^*\cdot \rho_k^{\tilde{n}}(U_k) + \|x'\|_N^*\cdot U_{\tilde{n}}).$$

Wenden wir nun (Q) auf k und $\frac{\varepsilon}{\hat{S}}$ an, so finden wir ein $\tilde{S}$ mit

$$\rho_{\tilde{n}}^n(U_{\tilde{n}}) \subseteq \tilde{S}\cdot \rho_k^n(U_k) + \frac{\varepsilon}{\hat{S}}\cdot U_n.$$

Aus (3) erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\|x'\|_M^*\cdot \rho_m^n(U_m) &\subseteq \hat{S}\cdot (\|x'\|_K^*\cdot \rho_k^n(U_k) + \|x'\|_N^*\cdot \rho_{\tilde{n}}^n(U_{\tilde{n}}))\\ &\subseteq \hat{S}\cdot (\|x'\|_K^*\cdot \rho_k^n(U_k) + \|x'\|_N^*\cdot (\tilde{S}\cdot \rho_k^n(U_k) + \frac{\varepsilon}{\hat{S}}\cdot U_n))\\ &\subseteq \hat{S}\cdot (1+\tilde{S})\cdot \|x'\|_K^*\cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon\cdot \|x'\|_N^*\cdot U_n.\end{aligned}$$

Mit $S := \hat{S}\cdot (1+\tilde{S})$ folgt nun $(S_2')_0$. □

Der folgende Satz ist von zentraler technischer Bedeutung und bewahrt uns, wie wir später sehen werden (siehe Bemerkung 4.3.5), vor stärkeren Voraussetzungen an den Raum E, um existierende notwendige Bedingungen als hinreichend zu entlarven.

Satz 3.2.10 Besitzt F ein Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n), so daß im Setting 3.2.3 b2) erfüllt ist, so können wir statt $(S_2')_0$ die Bedingung

$(S_2^{K\prime})_0$ Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$, $k \geq m$ und $\varepsilon > 0$ es ein $K \geq M$ und $S > 0$ gibt, so daß für alle $x' \in E'_K$ gilt:

$$\|x'\|_M^* \cdot \rho_m^n(U_m) \subseteq S \cdot \|x'\|_K^* \cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \cdot U_n$$

folgern. Hierbei sei $\|x'\|_L^* := \sup_{x \in B_L} |x'(x)|$ für $L \leq K$.

Beweis: Mittels des Theorems von Retakh-Palamodov hatten wir erste notwendige Bedingungen für das Verschwinden von $\operatorname{proj}^1 E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$ erhalten. Da $\operatorname{proj}^1 \mathcal{X}$ invariant bzgl. äquivalenten Spektren ist, können wir annehmen, daß jedes F_n b2) erfüllt. Insbesondere ist $\operatorname{ind}_N E_N\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$ wieder regulär, so daß wir

$$(B_{E_N\widetilde{\otimes}_\alpha F_n})_N = (\overline{B_{E_N\otimes_\alpha F_n}}^{E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n})_N$$

als aufsteigende Fundamentalfolge von beschränkten, abgeschlossenen Mengen in $E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n$ betrachten können.
Im folgenden wollen wir die entsprechenden Modifikationen in diesem Abschnitt angeben, um in (S_2') und in $(S_2')_0$ „$x' \in E'$“ durch „$x' \in E'_K$“ ersetzen zu können.
Die Lemmata 3.2.6 und 3.2.7 können wortwörtlich mit den dort stehenden Beweisen übernommen werden. Wir wollen hervorheben, daß $\operatorname{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho_{n+1}^n(B_{n+1,N})$ in einem skalaren Vielfachen von $B_{n,N}$ enthalten ist, was man sofort an der Inklusionskette (1) sieht. Daher gilt auch

(4) $\quad \operatorname{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{k,K}) \quad \subseteq \quad \mathit{Skalar} \cdot B_{n,K}$ für alle k, n, K.

Im Beweis von Lemma 3.2.8 ersetze man $x' \in E' - \{0\}$ durch $x' \in E'_K - \{0\}$. Wegen (4) macht die Inklusionskette (2) wieder Sinn. Den Rest des Beweises kann man wiederum wortwörtlich übernehmen. Um im Beweis von Lemma 3.2.9 die Bedingung (Q) zu folgern, muß man dann natürlich $(S_2^{K\prime})$ auf die Folge $(i'_K(x'_L))_L$ statt $(x'_L)_L$ anwenden. In (3) ersetze man $x' \in E'$ durch $x' \in E'_K$. □

Auch wenn wir im allgemeinen mit $(S_2^{K\prime})_0$ als notwendige Bedingung für $\operatorname{Tor}_\alpha^1(E,F) = 0$ arbeiten werden, sei angemerkt, daß die bekanntere Bedingung $(S_2^*)_0$ ebenfalls notwendig ist:

Korollar 3.2.11 Besitzt F ein Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n), so daß im Setting 3.2.3 b2) erfüllt ist, so ist die Bedingung

$(S_2^*)_0$ Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$, $k \geq m$ und $\varepsilon > 0$ es ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ gibt, so daß für alle $x' \in E'_K$ und $y' \in F'_n$ gilt:

$$\|x'\|_M^* \|y'\|_m^* \leq \max\{S \cdot \|x'\|_K^* \|y'\|_k^*, \, \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \|y'\|_n^*\}.$$

notwendig für $\operatorname{Tor}_\alpha^1(E,F) = 0$. Hierbei ist $\|y'\|_l^* := \sup_{y \in U_l} |y'(\rho_l^n(y))|$ für $y' \in F'_n$ und $l \geq n$.

Beweis: Da die Bedingung $(S_2^{K\prime})_0$ invariant bzgl. äquivalenten Spektren von F ist, sei o.E. (F_n, ρ_m^n) reduziert, womit das duale Spektrum ein Einbettungsspektrum ist. Wir machen folgende Fallunterscheidung:

a) $\|x'\|_N^* \neq 0$. Aus $(S_2^{K\prime})_0$ folgt durch Polarisation bzgl. $\langle F_n, F'_n \rangle$ wegen $(A+B)^\circ \supseteq \frac{1}{2} \cdot (A^\circ \cap B^\circ)$ die Inklusion

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{S \cdot \|x'\|_K^*} \cdot (\rho_k^n(U_k))^\circ \cap \frac{1}{\varepsilon \cdot \|x'\|_N^*} \cdot U_n^\circ \right) \subseteq \frac{1}{\|x'\|_M^*} \cdot (\rho_m^n(U_m))^\circ.$$

Dies impliziert schon (S_2^*), denn für $y' \in F'_n - \{0\}$ gilt:

i) $\frac{y'}{\|y'\|_n^*} \in U_n^\circ$, also $\frac{1}{2} \cdot \| \frac{1}{\varepsilon \cdot \|x'\|_N^*} \cdot \frac{y'}{\|y'\|_n^*} \|_m^* \cdot \|x'\|_M^* \leq 1$,

ii) $\frac{y'}{\|y'\|_k^*} \in (\rho_k^n U_k)^\circ$, also $\frac{1}{2} \cdot \| \frac{1}{S \cdot \|x'\|_K^*} \cdot \frac{y'}{\|y'\|_k^*} \|_m^* \cdot \|x'\|_M^* \leq 1$.

b) $\|x'\|_N^* = 0$. Dies folgt wie im Fall a), indem man dort die Terme mit $\|x'\|_N^*$ wegläßt und die Fälle $\|x'\|_M^* \neq 0$ bzw. $= 0$ unterscheidet. □

Für spätere Zwecke wollen wir noch kurz untersuchen, welche Informationen über das Paar (E, F) sich aus unseren Bedingungen $(S_2^{K}{}')$ bzw. $(S_2^{K}{}')_0$ gewinnen lassen. Man siehe hierzu [Vog1].

Definition 3.2.12 Ein Fréchetraum G heißt *abzählbar normiert*, falls ein Fundamentalsystem von Halbnormen $\| \cdot \|_1 \leq \| \cdot \|_2 \leq \ldots$ für G existiert, so daß die verbindenden Abbildungen $\phi_{M+1}^M : G_{M+1} \to G_M$ zwischen den lokalen Banachräumen injektiv sind.

Bemerkung 3.2.13 Ist G abzählbar normiert, so besitzt G ein Fundamentalsystem von Normen. Insbesondere hat dann G eine stetige Norm.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein Fundamentalsystem von Halbnormen wie in der Definition. Sei N beliebig und es gelte $\|x\|_N = 0$ für ein $x \in G$. Es reicht, $\|x\|_M = 0$ für $M > N$ nachzurechnen. Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi_N"] \arrow[d, "\phi_M"'] & G_N \\ G_M . \arrow[ur, hook, "\phi_M^N"'] & \end{tikzcd}$$

und $\|\phi_N(x)\|_N = \|x\|_N$ folgt auch $\phi_M(x) = 0$. Daher ist $\|x\|_M = \|\phi_M(x)\|_M = 0$. □

Frécheträume mit der Eigenschaft (DN) sind abzählbar normiert, was man per Induktion mittels der definitorischen (DN)-Eigenschaft folgert (vgl. Beweis von Lemma 3.2.15). Ein weiteres

Beispiel 3.2.14 $\lambda^\infty(A)$ ist genau dann abzählbar normiert, falls ein N existiert mit $a_{j,N} > 0$ für alle j.

Beweis: Nach Bemerkung 3.2.13 existiert ein N, so daß auch $\|x\|_N = \sup_j a_{j,N} \cdot \mid x_j \mid$ eine Norm ist. Dies zeigt die Notwendigkeit der Bedingung. Es gelte nun $a_{j,N} > 0$ für alle j. Dann ist für alle $M \geq N$ die identische Abbildung

$$\lambda_{M+1}^\infty(A) := l_\infty((a_{j,M+1})_j) \to \lambda_M^\infty(A) := l_\infty((a_{j,M})_j)$$

injektiv, und die Behauptung folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} (\lambda^\infty(A))_{M+1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & (\lambda^\infty(A))_M \arrow[d, hook] \\ l_\infty((a_{j,M+1})_j) \arrow[r, hook] & l_\infty((a_{j,M})_j). \end{tikzcd}$$

□

Lemma 3.2.15 Sei G ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem von Banachräumen (G_N, ϕ_M^N). Ist G nicht abzählbar normiert, so finden wir zu jedem N ein $M > N$, so daß für alle $K > M$ ein $x \in G_K$ existiert mit $\phi_K^M(x) \neq 0$, aber $\phi_K^N(x) = 0$.

Beweis: Wir zeigen die Kontraposition der Behauptung. Es gilt mit verneinten Quantoren zu obigen die Implikation $\phi_K^N(x) = 0 \Rightarrow \phi_K^M(x) = 0$ für alle $x \in G_K$. Folglich ist die Abbildung $\phi_M^N : \phi_K^M(G_K) \to G_N$ injektiv. Wir setzen $K_1 := N$, $K_2 := K(N+1)$, $K_3 := K(K_2)$ usw. und erhalten so ein äquivalentes Spektrum $(G_{K_l}, \phi^{K_l}_{K_{l+1}})$ für G. Zur Vereinfachung der Notation sei o.E. $K_l = l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Die Kommutativität der Diagramme

$$\begin{tikzcd} \phi^l_{l+1}(G_{l+1}) \arrow[r, "\phi^{l-1}_l"] \arrow[d, hook] & \phi^{l-1}_l(G_l) \arrow[dl] \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

impliziert die Injektivität der Abbildungen $\phi^{l-1}_l : \phi^l_{l+1}(G_{l+1}) \to \phi^{l-1}_l(G_l)$. Wir betrachten die beschränkten Banachkugeln $\phi^l_{l+1}(B_{G_{l+1}})$ und setzen

$$\widetilde{G}_l := \phi^l_{l+1}(G_{l+1}) \subseteq G_l \text{ mit } \|\cdot\|_l^{\sim} := p_{\phi^l_{l+1}(B_{G_{l+1}})} \text{ und } \widetilde{\phi}^l_{l+1} := \phi^{l-1}_l |_{\widetilde{G}_l} .$$

Da die Diagramme

$$\begin{tikzcd} G_l & & G_{l+1} \arrow[ll] \arrow[dl, "\phi^l_{l+1}"'] & \\ & \widetilde{G}_l \arrow[ul, hook] & & \widetilde{G}_{l+1} \arrow[ul, hook] \arrow[ll, hook, "\widetilde{\phi}^l_{l+1}"] \end{tikzcd}$$

kommutieren, ist $(\widetilde{G}_l, \widetilde{\phi}^l_{l+1})$ ein äquivalentes Spektrum mit injektiven Verbindungsabbildungen. □

Die folgende Definition geht auf S. Bellenot, E. Dubinsky und A. Grothendieck zurück.

Definition 3.2.16 Ein Fréchetraum F heißt *Quojektion*, falls er isomorph zu einem projektiven Limes von Banachräumen ist, wobei die verbindenden Abbildung surjektiv sind. Äquivalent: Für jede stetige Halbnorm p auf F ist der Quotient $F/\ker(q)$ ein Banachraum.

Korollar 3.2.17 Es gelte die Bedingung

$(S_2^{K\prime})$ Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$ und $k \geq m$ es ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ gibt, so daß für alle $x' \in E'_K$ gilt:

$$\|x'\|^*_M \cdot \rho^n_m(U_m) \subseteq S \cdot (\|x'\|^*_K \cdot \rho^n_k(U_k) + \|x'\|^*_N \cdot U_n).$$

Dann ist E'_b abzählbar normiert oder F eine Quojektion.

Beweis: Ist E'_b nicht abzählbar normiert, so gilt die Bedingung aus Lemma 3.2.15 mit $G = E'_b$. Einsetzen dieser Bedingung in $(S_2^{K\prime})$ liefert für alle n ein $m \geq n$, so daß für alle $k \geq m$ eine Konstante $C_k > 0$ mit

$$\rho^n_m(U_m) \subseteq C_k \cdot \rho^n_k(U_k)$$

existiert. In Analogie zu Lemma 3.2.15 konstruiert man sich damit ein äquivalentes Spektrum für F mit surjektiven Verbindungsabbildungen. □

Bemerkung 3.2.18 Wie man leicht überprüft, kann man sämtliche Resultate dieses Abschnitts auch mittels entsprechender S_3-Bedingungen formulieren und beweisen, d.h. statt der ersten notwendigen Bedingung $(\tilde{S}_2)$ startet man mit der schwächeren Bedingung

$(\tilde{S}_3)$ Für alle n existiert $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt mit:

$$\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_m(E \widetilde{\otimes}_\alpha F_m) \subseteq \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_k(E \widetilde{\otimes}_\alpha F_k) + B_{n,N}$$

usw. Ein solches Vorgehen würde zwar die bestehende Theorie in sich geschlossener darstellen, aber wir verzichten darauf und arbeiten auf der notwendigen Seite mit den stärkeren S_2-Bedingungen, während wir für hinreichende und in der Regel auch für charakterisierende Situationen die schwächeren S_3-Bedingungen benutzen.

3.3 Hinreichende Bedingungen für das Verschwinden

Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem letzten Abschnitt, siehe Setting 3.2.3. Aufgrund von Theorem 2.2.11 b) fallen unsere Untersuchungen für hinreichende Bedingungen recht kurz aus.

Bemerkung 3.3.1 Aus $(S_2^{K\prime})_0$ folgt unmittelbar die Bedingung

$(S_3^{K\prime})_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\|x'\|_M^* \cdot \rho_m^n(U_m) \subseteq S \cdot \|x'\|_K^* \cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \cdot U_n$$

für alle $x' \in E_K'$.

Die generelle Strategie, um nun in speziellen Fällen $(S_3^{K'})_0$ als hinreichend für $\mathrm{Tor}_\alpha^1(E,F) = 0$ nachzuweisen, ist grob gesprochen wie folgt: Aus $(S_3^{K\prime})_0$ wollen wir je nachdem, ob wir genauere Informationen über E und/oder F haben, durch Polarisation Bedingungen herleiten, um dann mit diesen Elementartensoren zu zerlegen. Genauer wollen wir

$(S_3^{\otimes})_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n(B_{E_M} \otimes B_{F_m}) \subseteq S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{E_K \widetilde{\otimes}_\alpha F_k}) + \varepsilon \cdot B_{E_N \widetilde{\otimes}_\alpha F_n}$$

als notwendig für $(S_3^{K\prime})_0$ nachweisen. Eine weitere Bedingung in diesem Zusammenhang ist

$(S_3^{\widetilde{\otimes}})_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n(B_{E_M \widetilde{\otimes}_\alpha F_m}) \subseteq S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\alpha \rho_k^n(B_{E_K \widetilde{\otimes}_\alpha F_k}) + \varepsilon \cdot B_{E_N \widetilde{\otimes}_\alpha F_n}.$$

Lemma 3.3.2 Für das projektive Tensorprodukt gilt stets die Implikation

$$(S_3^{\otimes})_0 \Rightarrow (S_3^{\widetilde{\otimes}})_0.$$

Besitzt zudem F ein Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n), so daß Setting 3.2.3 b2) gilt, so folgt weiter:

$(S_3)_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und $S > 0$ existiert mit:

$$\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_m^n(B_{m,M}) \subseteq S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_k^n(B_{k,K}) + \varepsilon \cdot B_{n,N}.$$

Beweis: Dazu bemerken wir zunächst, daß für alle $z \in B_{E_M \widetilde{\otimes}_\pi F_m}$ Folgen $(\lambda_j)_j \in l_1$ mit $\|(\lambda_j)_j\|_1 \leq 2$, $(x_j)_j \in B_{E_M}$ und $(y_j)_j \in B_{F_m}$ existieren, so daß sich z schreiben läßt als $z = \sum_j \lambda_j \cdot x_j \otimes y_j$. Dies sieht man wie folgt: Nach Definition gilt

$$1 \geq \pi(z) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \|\tilde{x}_j\| \cdot \|\tilde{y}_j\| : z = \sum_{j=1}^\infty \tilde{x}_j \otimes \tilde{y}_j \right\}.$$

Folglich existiert eine Darstellung $z = \sum_{j=1}^\infty \tilde{x}_j \otimes \tilde{y}_j$ mit $\sum_{j=1}^\infty \|\tilde{x}_j\| \cdot \|\tilde{y}_j\| \leq 2$. Mit $\lambda_j := \|\tilde{x}_j\| \cdot \|\tilde{y}_j\|$, $x_j := \frac{\tilde{x}_j}{\|\tilde{x}_j\|}$ und $y_j := \frac{\tilde{y}_j}{\|\tilde{y}_j\|}$ erhalten wir die Zwischenbemerkung, wobei Summanden gleich Null nicht berücksichtigt werden.
Für $z = \sum_j \lambda_j \cdot x_j \otimes y_j \in B_{E_M \widetilde{\otimes}_\pi F_m}$ wie oben gilt nach $(S_2^{\otimes})_0$:

$$\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_m^n(z) = \sum_j \lambda_j \cdot (S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_k^n(w_j) + \varepsilon \cdot v_j)$$

mit $(w_j)_j \in B^{\mathbb{N}}_{E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k}$ und $(v_j)_j \in B^{\mathbb{N}}_{E_N \widetilde{\otimes}_\pi F_n}$. Da $(\lambda_j)_j \in l_1$ ist und die Folgen $(w_j)_j$, $(v_j)_j$ beschränkt sind, konvergieren die Reihen

$$\sum_j \lambda_j \cdot w_j \in 2 \cdot B_{E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k} \text{ und } \sum_j \lambda_j \cdot v_j \in 2 \cdot B_{E_N \widetilde{\otimes}_\pi F_n}.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_m(z) &= S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k \Big(\sum_j \lambda_j \cdot w_j \Big) + \varepsilon \cdot \sum_j \lambda_j \cdot v_j \\ &\in 2 \cdot S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k (B_{E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k}) + 2 \cdot \varepsilon \cdot B_{E_N \widetilde{\otimes}_\pi F_n}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die erste Behauptung. Wegen Setting 3.2.3 b2) können wir nun annehmen, daß $B_{m,M} = C_{m,M} \cdot B_{E_M \widetilde{\otimes}_\pi F_m}$ ist, was den Beweis abschließt. □

Der entscheidende Punkt in obiger Beweisführung ist der, daß wir für Elemente des vollständigen projektiven Tensorprodukts $E_M \widetilde{\otimes}_\pi F_m$ explizite Darstellungen besitzen. Ein möglicher Ansatz für ein entsprechendes Resultat für das injektive Tensorprodukt ist der, daß man sich auf Räume mit der A.E. zurückzieht, um dann mit Operatoren zu argumentieren. Da wir dies an keiner Stelle dieser Arbeit benötigen, verzichten wir darauf.

Satz 3.3.3 $(S_3)_0$ ist nach Theorem 2.2.11 b) eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden von $\mathrm{proj}^1 E \widetilde{\otimes}_\alpha F_n$. Ist zudem F lokal $E \widetilde{\otimes}_\alpha \cdot$-azyklisch, so gilt nach Korollar 2.2.10 sogar

$$0 = \mathrm{proj}^1 E \widetilde{\otimes}_\alpha F_n = \mathrm{Tor}^1_\alpha(E, F).$$

Für $\alpha = \pi$ kann man nach Lemma 3.3.2 für obige Aussagen die Bedingung $(S_3)_0$ durch $(S_3^{\otimes})_0$ ersetzen, sobald Setting 3.2.3 b2) gilt.

4 Die vier Standardfälle

Wir wollen uns nun der Übertragung der vier Standardfälle aus Theorem 2.2.13 auf die Tor-Theorie zuwenden. Wie wir sehen werden, liegen diese „symmetrisch“: Die nuklearen Situationen sind unabhängig von der gewählten Tensornorm, während die Ext-Fälle $F = \lambda^\infty(B)$ und $E = \lambda^1(A)$ mit $F = \lambda^\infty(B)$, $\alpha = \varepsilon$ bzw. $E = k^1(A)$, $\alpha = \pi$ korrespondieren.

4.1 $F = \lambda^\infty(B)$ und das injektive Tensorprodukt

Zunächst werden wir ein Resultat für das injektive Tensorprodukt bringen, welches wir mittels eines Arguments über äquivalente Funktoren sehr schnell auf Theorem 2.2.13 zurückführen können, und das uns damit aufzeigt, daß auch für Tor-Situationen S_3-Bedingungen die richtigen sind, die studiert werden sollten. Dazu benötigen wir

Lemma 4.1.1 Es sei E ein (DFM)-Raum mit der A.E. und F ein Fréchetraum. Dann gilt $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F = E\epsilon F = L(E'_c, F) = L(E'_b, F)$ und der durch $(x, y) \mapsto (x' \mapsto x'(x) \cdot y)$ gegebene Isomorphismus $\psi_F : E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F \to L(E'_b, F)$ ist funktoriell in F, d.h. für jeden $\mathcal{FR}$-Morphismus $f : F \to G$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L(E'_b, F) \arrow[r, "f_*"] & L(E'_b, G) \\ E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F \arrow[u, "\psi_F", "\cong"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\varepsilon f"'] & E\widetilde{\otimes}_\varepsilon G \arrow[u, "\cong", "\psi_G"'] \end{tikzcd}$$

Beweis: Die Kommutativität verifiziert man unmittelbar auf dem dichten Teilraum $E \otimes_\varepsilon F$ von $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F$. □

Als Folgerung können wir nun festhalten:

Theorem 4.1.2 Sei E ein (DFM)-Raum mit der A.E. und F ein Fréchetraum. Dann gelten folgende Aussagen:

i) $\mathrm{Tor}^l_\varepsilon(E, F) = \mathrm{Ext}^l(E'_b, F)$ für alle $l \geq 0$.

ii) $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ ist linksexakt, insbesondere gilt $\mathrm{Tor}^0_\varepsilon(E, F) = E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F$.

iii) Es gilt $\mathrm{Tor}^1_\varepsilon(E, F) = 0$ genau dann, wenn für jede exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

die $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot$-tensorierte Sequenz

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon F \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon G \to E\widetilde{\otimes}_\varepsilon H \to 0$$

(topologisch) exakt ist.

iv) $\mathrm{Tor}^l_\varepsilon(E, F) = 0$ für $F = \lambda^\infty(B)$ quasinormabel und $l \geq 2$.

v) Ist E ein echter (DFM)-Raum mit der A.E. und $F = \lambda^\infty(B)$, so gilt $\mathrm{Tor}^1_\varepsilon(E, F) = 0$ genau dann, wenn die Bedingung

$(S_3^{K'})_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\|x'\|^*_M \cdot \rho^n_m(U_m) \subseteq S \cdot \|x'\|^*_K \cdot \rho^n_k(U_k) + \varepsilon \cdot \|x'\|^*_N \cdot U_n$$

für alle $x' \in E'_K$

erfüllt ist, wobei (F_n, ρ^n_m) ein Fundamentalsystem von Banachräumen für F sei.

Beweis: Nach Lemma 4.1.1 sind die Funktoren

$$E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\, \cdot\; \simeq L(E'_b, \,\cdot\,) : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$$

natürlich äquivalent, so daß sie (bis auf natürliche Äquivalenz) dieselben Rechtsableitungen besitzen. Hieraus erhalten wir i) und ii). Für iii) verwende man die lange exakte Kohomologie-Sequenz und für iv) beachte man Beispiel 2.2.3. Ist E ein echter (DFM)-Raum, so ist sein Dualraum E'_b ein echter Fréchetraum, und nach Theorem 2.2.13 folgt auch die Behauptung unter iv). □

Abschließend noch

Bemerkung 4.1.3 a) Es wäre gerechtfertigter gewesen, diesen Abschnitt mit „E (DFM)-Raum mit der A.E. und das injektive Tensoprodukt" zu betiteln, da unter v) auch andere Fälle als $F = \lambda^\infty(B)$ denkbar sind und unsere Argumentation vor allem auf der Äquivalenz der Funktoren $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\, \cdot\; \simeq L(E'_b, \,\cdot\,)$ basiert. Für andere Fälle werden wir allerdings bessere Theoreme zeigen. Andererseits sei für $F = \lambda^\infty(B)$ folgendes angemerkt: Ist $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein kompakt-regulärer (LB)-Raum und F zudem quasinormabel (man beachte Beispiel 2.2.3 und Beispiel 3.2.5 2)), so steht man wegen $E_M\widetilde{\otimes}_\varepsilon F_m = E_M\widetilde{\otimes}_\varepsilon (l_1(b_{j,m}^{-1}))'_b = \mathcal{K}(l_1(b_{j,m}^{-1}), E_M)$ vor dem Problem, kompakte Operatoren geeignet in solche zu zerlegen! Es scheint unklar zu sein, ob dieses möglich ist.

b) Für einen (DFM)-Raum E vom Ko-Köthe-Typ $k^\infty(A)$ werden wir später sehen, daß man in obigem Theorem 4.1.2 iv) und v) ganz auf weitere Voraussetzungen an den Fréchetraum F verzichten kann (Theorem 5.2.5).

4.2 E ein nuklearer (DF)-Raum

Ähnlich wie im letzten Abschnitt liegt auch hier eine Besonderheit vor, da wir wieder mittels eines Arguments über äquivalente Funktoren uns auf Theorem 2.2.13 zurückziehen können.

Bemerkung 4.2.1 Ein lokalkonvexer Raum E ist nach A. Grothendieck genau dann nuklear, falls die Funktoren $E\widetilde{\otimes}_\pi\,\cdot$ und $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot\, : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ identisch sind. Insbesondere gilt dies dann auch für jede Tensornorm α.

An dieser Stelle können wir schon das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren und beweisen:

Theorem 4.2.2 Für einen nuklearen (DF)-Raum E, einen Fréchetraum F und eine Tensornorm α gelten folgende Aussagen:

i) $\mathrm{Tor}^l_\alpha(E, F) = \mathrm{Ext}^l(E'_b, F)$ für alle $l \geq 0$.

ii) $E\widetilde{\otimes}_\alpha\,\cdot\, : \mathcal{FR} \to \mathcal{LR}$ ist linksexakt, insbesondere gilt $\mathrm{Tor}^0_\alpha(E, F) = E\widetilde{\otimes}_\alpha F$.

iii) Es gilt $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E, F) = 0$ genau dann, wenn für jede exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

die $E\widetilde{\otimes}_\alpha\,\cdot\,$-tensorierte Sequenz

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\alpha F \to E\widetilde{\otimes}_\alpha G \to E\widetilde{\otimes}_\alpha H \to 0$$

(topologisch) exakt ist.

iv) $\mathrm{Tor}^l_\alpha(E, F) = 0$ für $l \geq 2$.

v) Ist E ein echter nuklearer (DF)-Raum, so gilt $\operatorname{Tor}^1_\alpha(E,F)=0$ genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$(S_3^{K\prime})_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\|x'\|_M^* \cdot \rho_m^n(U_m) \subseteq S \cdot \|x'\|_K^* \cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \cdot U_n$$

für alle $x' \in E'_K$.

Hierbei ist wieder (F_n, ρ_m^n) ein Fundamentalsystem von Banachräumen für F.

Beweis: Aufgrund der Nuklearität können wir o.E. $\alpha = \varepsilon$ annehmen. Bekanntermaßen haben nukleare Räume die A.E., und die starken Dualräume von nuklearen (DF)-Räume sind nukleare Fréchetträume.
Wir wollen das Theorem zunächst für vollständiges E beweisen: In diesem Fall ist E ein (DFM)-Raum mit der A.E., und nach Lemma 4.1.1 sind die Funktoren $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot$ und $L(E'_b,\,\cdot\,)$ natürlich äquivalent. Hieraus folgen mit Theorem 2.2.13 wieder sämtliche Behauptungen wie im Beweis von Theorem 4.1.2. Für ii) kann man natürlich auch Korollar 1.2.12 a) verwenden und für iv), daß jeder Banachraum $E\widetilde{\otimes}_\alpha\,\cdot$-azyklisch ist (was zum Beispiel daraus folgt, daß E'_b lokal projektiv ist).
Ist nun E ein nuklearer (DF)-Raum, so ist nach Bemerkung 4.2.1 und dem Beweis von Lemma 3.2.2 die Vervollständigung $\widetilde{E}$ wieder ein nuklearer (DF)-Raum. Nach letzterem Lemma sind (DF)-Räume large. Folglich gilt $b(\widetilde{E}',\widetilde{E}) = b(E',E)$. Insgesamt folgt also $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot\, \simeq \widetilde{E}\widetilde{\otimes}_\varepsilon\,\cdot\, \simeq L(\widetilde{E}'_b,\,\cdot\,) \simeq L(E'_b,\,\cdot\,)$, was den Beweis abschließt. □

4.3 F ein nuklearer Fréchetraum

Wir zeigen zunächst folgendes: Für einen lokalkonvexen Raum E, einen nuklearen Fréchetraum F und eine Tensornorm α können wir uns für Betrachtungen bezüglich $\operatorname{Tor}^1_\alpha(E,F)=0$ o.E. auf das projektive Tensorprodukt zurückziehen. Hierfür benötigen wir das folgende Lemma ([Jar, Proposition 17.3.8]):

Lemma 4.3.1 Sei E ein lokalkonvexer Raum und $\rho : F \to G$ eine nukleare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen. Dann ist die Abbildung $\mathrm{id}_E \otimes \rho : E \otimes_\varepsilon F \to E \otimes_\pi G$ stetig.

Beweis: Sei $\rho(y) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \cdot y'_j(y) \cdot z_j$ eine nukleare Darstellung von ρ, $\lambda \in l_1$, $\{y'_j\} \subseteq V^\circ$ mit $V = \Gamma(V) \in \mathcal{U}_0(F)$ und $\{z_j\} \subseteq G$ beschränkt. Weiter seien $U = \Gamma(U) \in \mathcal{U}_0(E)$, $W = \Gamma(W) \in \mathcal{U}_0(G)$ und $a = \sum_{l=1}^L x_l \otimes y_l \in E \otimes F$ beliebig. Da $\{z_j\} \subseteq G$ beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ mit $p_W(z_j) \leq C$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Mit der Normformel und kanonischer Schreibweise für die definierenden Halbnormensystem von $E \otimes_\pi G$ bzw. $E \otimes_\varepsilon F$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\pi_{U,W}(\mathrm{id}_E \otimes \rho(a)) &= \pi_{U,W}\Big(\sum_{l=1}^L x_l \otimes \Big(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j \cdot y'_j(y_l) \cdot z_j\Big)\Big) \\
&= \pi_{U,W}\Big(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j \cdot \Big(\sum_{l=1}^L y'_j(y_l) \cdot x_l\Big) \otimes z_j\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| \cdot \sup_{x' \in U^\circ} \Big|\sum_{l=1}^L y'_j(y_l) \cdot x'(x_l)\Big| \cdot p_W(z_j) \\
&\leq C \cdot \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| \cdot \sup_{\substack{x' \in U^\circ \\ y' \in V^\circ}} \Big|\sum_{l=1}^L y'(y_l) \cdot x'(x_l)\Big| \\
&= C \cdot \|\lambda\|_1 \cdot \varepsilon_{U,V}(a),
\end{aligned}$$

und hieraus das Lemma. □

Sei nun α eine Tensornorm, E ein lokalkonvexer Raum und (F_n, ρ_m^n) ein Fundamentalsystem von Banachräumen für den nuklearen Fréchetraum F, so daß die verbindenden Abbildungen $\rho_{n+1}^n : F_{n+1} \to F_n$ nuklear sind. Nach Lemma 4.3.1 ist die Abbildung $\mathrm{id}_E \otimes \rho_{n+1}^n : E \otimes_\varepsilon F_{n+1} \to E \otimes_\pi F_n$ stetig und damit auch $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes} \rho_{n+1}^n : E \widetilde{\otimes}_\alpha F_{n+1} \to E \widetilde{\otimes}_\pi F_n$. Wie man sofort auf Elementartensoren nachrechnet, ist daher das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& E\widetilde{\otimes}_\pi F_n \arrow[dl, "\widetilde{\mathrm{id}}"'] & & E\widetilde{\otimes}_\pi F_{n+1} \arrow[ll, "\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_{n+1}"'] \arrow[dl, "\widetilde{\mathrm{id}}"] \\
E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n & & E\widetilde{\otimes}_\alpha F_{n+1} \arrow[ll, "\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho^n_{n+1}"] \arrow[ul, "\mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}\rho^n_{n+1}"]
\end{tikzcd}$$

kommutativ, womit die projektiven Spektren $(E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n, \mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\alpha \rho_m^n)$ und $(E\widetilde{\otimes}_\pi F_n, \mathrm{id}_E\widetilde{\otimes}_\pi \rho_m^n)$ äquivalent sind. Nach Beispiel 2.1.13 gilt also

$$\mathrm{proj}^1 E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n = \mathrm{proj}^1 E\widetilde{\otimes}_\pi F_n.$$

Da F nuklear ist, besitzt F ein Fundamentalsystem von injektiven Banachräumen, und wir erhalten nach Korollar 2.2.10

$$\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F) = \mathrm{proj}^1 E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n.$$

Insgesamt können wir also festhalten:

Satz 4.3.2 Für eine Tensornorm α, einen lokalkonvexen Raum E und einen nuklearen Fréchetraum F mit Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n) gilt:

$$\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F) = \mathrm{proj}^1 E\widetilde{\otimes}_\alpha F_n = \mathrm{proj}^1 E\widetilde{\otimes}_\pi F_n = \mathrm{Tor}^1_\pi(E,F).$$

Mit einem ähnlichen Argument können wir folgendes zeigen:

Bemerkung 4.3.3 Ist α eine Tensornorm, H ein distinguierter Fréchetraum und F ein nuklearer Fréchetraum, so gilt $\mathrm{Tor}^1_\alpha(H_b', F) = \mathrm{Ext}^1(H,F)$.

Beweis: Nach Satz 4.3.2 können wir o.E. $\alpha = \pi$ annehmen. Es sei $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \cdots$ eine Fundamentalfolge von Halbnormen für H und (F_n, ρ_m^n) ein Fundamentalsystem von l_1-Räumen für F mit nuklearen Verbindungsabbildungen. Dann faktorisiert die Abbildung

$$L(H, F_{n+1}) = \mathrm{ind}_N L(H_N, F_{n+1}) \stackrel{(\rho^n_{n+1})_*}{\longrightarrow} L(H, F_n) = \mathrm{ind}_N L(H_N, F_n)$$

offenbar über $\mathrm{ind}_N \mathcal{N}(H_N, F_n) = \mathrm{ind}_N H_N' \widetilde{\otimes}_\pi F_n = H_b' \widetilde{\otimes}_\pi F_n$ (Beispiel 3.2.5 1)) und es kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& H_b'\widetilde{\otimes}_\pi F_n \arrow[dl] & & H_b'\widetilde{\otimes}_\pi F_{n+1} \arrow[ll, "\mathrm{id}_{H'}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_{n+1}"'] \arrow[dl] \\
L(H,F_n) & & L(H,F_{n+1}). \arrow[ll, "(\rho^n_{n+1})_*"] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(X,Y)$ den Raum der nuklearen Abbildungen von X nach Y, wobei X und Y Banachräume seien. Es folgt wieder $\mathrm{Tor}^1_\pi(H_b', F) = \mathrm{proj}^1 H_b'\widetilde{\otimes}_\pi F_n = \mathrm{proj}^1 L(H, F_n) = \mathrm{Ext}^1(H,F)$. $\square$

Kommen wir nun zum allgemeinen Fall. Dazu sei nach obigem o.E. $\alpha = \pi$. Des weiteren sei $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein echter, vollständiger (LB)-Raum, o.E. $B_1 = B_{E_1} \subseteq B_2 = B_{E_2} \subseteq \cdots$ eine Fundamentalfolge von abgeschlossenen, beschränkten Teilmengen von E, und F ein nuklearer Fréchetraum mit Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n), $U_n := B_{F_n}$.
Unter Beachtung von Bemerkung 3.2.10 haben wir in Kapitel 3 die Bedingung $(S_3^{K\prime})_0$ als notwendig für $\mathrm{Tor}^1_\pi(E,F) = 0$ nachgewiesen, so daß wir nun zum eigentlichen Hauptresultat dieses Abschnitts übergehen können:

Satz 4.3.4 In unserer Notation von oben impliziert $(S_3^{K\prime})_0$ die Bedingung

$(S_3^{\otimes})_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_m^n (B_{E_M} \otimes B_{F_m}) \subseteq S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_k^n (B_{E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k}) + \varepsilon \cdot B_{E_N \widetilde{\otimes}_\pi F_n}$$

Beweis: Wir wollen aus $(S_3^{K\prime})_0$ zunächst die Bedingung

(Pol) Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\|y'\|_m^* \cdot B_M \subseteq S \cdot \|y'\|_k^* \cdot B_K + \varepsilon \cdot \|y'\|_n^* \cdot B_N$$

für alle $y' \in F_n'$

folgern. Hierbei ist $\|y'\|_l^* := \sup_{y \in U_l} |y'(\rho_l^n(y))|$ für $y' \in F_n'$ und $l \geq n$.
Analog zu Korollar 3.2.11 ist auch eine entsprechende Bedingung

$(S_3^*)_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\|x'\|_M^* \|y'\|_m^* \leq \max \{S \cdot \|x'\|_K^* \|y'\|_k^*, \, \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \|y'\|_n^*\}$$

für alle $x' \in E_K'$ und $y' \in F_n'$

notwendig für $(S_3^{K\prime})_0$. Sei nun o.E. $y' \in F_n' - \{0\}$. Dann gilt $\|y'\|_j^* \neq 0$ für $j = n, m, k$. Im folgenden polarisieren wir bzgl. des Dualsystems $\langle E_K, E_K' \rangle$. Aus $(S_3^*)_0$ folgt

$$\frac{1}{S \cdot \|y'\|_k^*} \cdot B_K^\circ \cap \frac{1}{\varepsilon \cdot \|y'\|_n^*} \cdot B_N^\circ \subseteq \frac{1}{\|y'\|_m^*} \cdot B_M^\circ.$$

Eine wiederholte Polarisation liefert wegen $(A \cap B)^\circ \subseteq \overline{A^\circ + B^\circ}$ und dem Bipolarensatz:

$$\begin{aligned}
\|y'\|_m^* \cdot B_M &\subseteq \|y'\|_m^* \cdot (B_M)^{\circ\circ} \subseteq \overline{S \cdot \|y'\|_k^* \cdot B_K + \varepsilon \cdot \|y'\|_n^* \cdot \overline{B_N}^{E_K}}^{E_K} \\
&\subseteq 2 \cdot S \cdot \|y'\|_k^* \cdot B_K + \varepsilon \cdot \|y'\|_n^* \cdot \overline{B_N}^{E_K} \\
&\subseteq 2 \cdot S \cdot \|y'\|_k^* \cdot B_K + \varepsilon \cdot \|y'\|_n^* \cdot (B_N + \frac{S}{\varepsilon} \cdot \frac{\|y'\|_k^*}{\|y'\|_n^*} \cdot B_K) \\
&\subseteq 3 \cdot S \cdot \|y'\|_k^* \cdot B_K + \varepsilon \cdot \|y'\|_n^* \cdot B_N.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Implikation $(S_3^{K\prime})_0 \Rightarrow (Pol)$. Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, folgende

Bemerkung 4.3.5 Würde man $(S_3')_0$ statt $(S_3^{K\prime})_0$ zugrunde legen, so müßte man oben bzgl. des Dualsystems $\langle E, E' \rangle$ polarsieren und würde

$$\|y'\|_m^* \cdot B_M \subseteq \overline{S \cdot \|y'\|_k^* \cdot B_K + \varepsilon \cdot \|y'\|_n^* \cdot B_N}^E$$

erhalten. Um diesen Abschluß zu eliminieren, müßte man dann zum Beispiel E als Dualraum oder als *retraktiv* annehmen, d.h. für jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq E$ existiert ein N mit $B \subseteq E_N$ und $\mathcal{T}_E \mid_B = \mathcal{T}_N \mid_B$, denn $B := S \cdot \|y'\|_k^* \cdot B_K + \varepsilon \cdot \|y'\|_n^* \cdot B_N$ ist beschränkt in E, und wir finden ein $\widetilde{K} \geq K$ mit $\mathcal{T}_E \mid_B = \mathcal{T}_{\widetilde{K}} \mid_B$. Damit folgt dann

$$\overline{B}^E = \overline{B}^{E_{\widetilde{K}}} \subseteq 2 \cdot S \cdot \|y'\|_k^* \cdot B_{\widetilde{K}} + \varepsilon \cdot \|y'\|_n^* \cdot B_N.$$

Da F nuklear ist, besitzt F ein reduziertes projektives Spektrum (F_n, ρ_m^n) aus Hilberträumen und nuklearen Verbindungsabbildungen ρ_{n+1}^n. Bezeichne $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_n$ das Skalarprodukt in F_n.

Im folgenden nehmen wir stets $k \geq m \geq n+2$ an. Da $\rho_{k+1}^{n+1} : F_{k+1} \to F_{n+1}$ nuklear ist, existieren ein Orthonormalsystem $(e_j)_j$ in F_{k+1}, eine Orthonormalbasis $(f_j)_j$ in F_{n+1} und eine Folge $(a_j)_j$ positiver Zahlen, so daß für alle $y \in F_{k+1}$ gilt:

$$\rho_{k+1}^{n+1}(y) = \sum_j a_j \cdot \langle y, e_j \rangle_{k+1} \cdot f_j.$$

Um $(S_3^{\otimes})_0$ zu zeigen, benötigen wir noch ein paar allgemeine Abschätzungen bzgl. der nuklearen Verbindungsabbildungen $\rho_{\nu+1}^{\nu}$ (siehe [Vog1]). Diese sind insbesondere Hilbert-Schmidt-Operatoren. Bezeichne im folgenden ν_1 die nukleare und ν_2 die Hilbert-Schmidt-Norm. Für $\nu \in \mathbb{N}$ und jedes Orthonormalsystem $(g_j)_j$ in $F_{\nu+1}$ gilt nach der Hölderschen und Besselschen Ungleichung für alle $x \in F_{\nu+1}$:

$$\sum_j | \langle x, g_j \rangle_{\nu+1} | \cdot \|\rho_{\nu+1}^{\nu}(g_j)\|_{\nu} \leq \nu_2(\rho_{\nu+1}^{\nu}) \cdot \|x\|_{\nu+1}.$$

Also ist $\delta_{\nu+1} : F_{\nu+1} \to l_1$, $x \mapsto (\langle x, g_j \rangle_{\nu+1} \cdot \|\rho_{\nu+1}^{\nu}(g_j)\|_{\nu})_j$ ein stetiger linearer Operator und damit $\delta_{\nu+1} \circ \rho_{\nu+2}^{\nu+1}$ wieder nuklear. Da wir einen isometrischen Isomorphismus $\mathcal{N}(F_{\nu+2}, l_1) = l_1 \widetilde{\otimes}_{\pi} F'_{\nu+2} = l_1(F'_{\nu+2})$ haben, folgt weiter, daß $\nu_1(\delta_{\nu+1} \circ \rho_{\nu+2}^{\nu+1})$ gleich der l_1-Summe der Folge

$$\left(\sup_{\|x\|_{\nu+2} \leq 1} | \langle \rho_{\nu+2}^{\nu+1}(x), g_j \rangle_{\nu+1} | \cdot \|\rho_{\nu+1}^{\nu}(g_j)\|_{\nu} \right)_j$$

ist. Daher existiert eine positive Folge $(\lambda_j^{(\nu)})_j \in l_1$ mit

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} \sum_j \lambda_j^{(\nu)} &\leq 2 \cdot \nu_1(\delta_{\nu+1} \circ \rho_{\nu+2}^{\nu+1}) \leq 2 \cdot \|\delta_{\nu+1}\| \cdot \nu_1(\rho_{\nu+2}^{\nu+1}) \\ &\leq 2 \cdot \nu_2(\rho_{\nu+1}^{\nu}) \cdot \nu_1(\rho_{\nu+2}^{\nu+1}) =: L(\nu) \end{aligned}$$

und

$$\text{(6)} \qquad \sup_{\|x\|_{\nu+2} \leq 1} | \langle \rho_{\nu+2}^{\nu+1}(x), g_j \rangle_{\nu+1} | \cdot \|\rho_{\nu+1}^{\nu}(g_j)\|_{\nu} \leq \lambda_j^{(\nu)} \text{ für alle } j.$$

Wir setzen $\gamma_j^{(\nu)} := (\lambda_j^{(\nu)})^{-1} \cdot \|\rho_{\nu+1}^{\nu}(g_j)\|_{\nu}$. Aus (6) folgt für alle $x \in F_{\nu+2}$:

$$\text{(7)} \qquad \sup_j \gamma_j^{(\nu)} \cdot | \langle \rho_{\nu+2}^{\nu+1}(x), g_j \rangle_{\nu+1} | \leq \|x\|_{\nu+2}.$$

Mit der stetigen Linearform $y'_j \in F'_{n+1}$, $y'_j(y) := \langle y, f_j \rangle_{n+1}$ gilt mittels der nuklearen Darstellung von ρ_{k+1}^{n+1} für alle $x \in F_{k+2}$:

$$y'_j(\rho_{k+2}^{n+1}(x)) = \langle \rho_{k+1}^{n+1}(\rho_{k+2}^{k+1}(x)), f_j \rangle_{n+1} = a_j \cdot \langle \rho_{k+2}^{k+1}(x), e_j \rangle_{k+1}.$$

Mit $\nu = k$ und $g_j = e_j$ in (7) folgt weiter

$$\text{(8)} \qquad \sup_j \gamma_j^{(k)} \cdot a_j^{-1} \cdot \|y'_j\|_{k+2}^* = \sup_j \sup_{\|x\|_{k+2} \leq 1} \gamma_j^{(k)} \cdot | \langle \rho_{k+2}^{k+1}(x), e_j \rangle_{k+1} | \leq 1.$$

Mit $\nu = n$ und $g_j = f_j$ in (7) erhalten wir analog

$$\text{(9)} \qquad \sup_j \gamma_j^{(n)} \cdot \|y'_j\|_{n+2}^* \leq 1.$$

Kommen wir zurück zum Beweis von $(S_3^{\otimes})_0$. Sei $A \in B_{E_M} \otimes B_{F_m}$ gegeben. Für $j \in \mathbb{N}$ betrachten wir den stetigen linearen Operator $\varphi_j : E_M \otimes_{\pi} F_m \to E_M$, $x \otimes y \mapsto \langle \rho_m^{n+1}(y), f_j \rangle_{n+1} \cdot x$ und setzen $A_j := \varphi_j(A) \in E_M$. Für $x' \in E'$ mit $\|x'\|_M^* \leq 1$ gilt dann

$$|x'(A_j)| = |x'(\varphi_j(A))| \leq \|\varphi_j(A)\|_{E_M} \leq \|\varphi_j\| = \sup_{z \in B_{E_M \otimes_{\pi} F_m}} \|\varphi_j(z)\|_{E_M} \leq \|y'_j\|_m^*.$$

Also ist $A_j \in \|y'_j\|^*_m \cdot B_M$. Sei nun n in $(S_3^{\otimes})_0$ vorgegeben. Nach (*Pol*) angewandt auf $n+2$ finden wir ein $m \geq n+2$, so daß wir für vorgegebenes $k \geq m$ in $(S_3^{\otimes})_0$ bzw. für $k+2 \geq m$ in (*Pol*) ein N finden, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ in $(S_3^{\otimes})_0$ bzw. $M \geq N$ und $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{L(n)}$ in (*Pol*) ein $K \geq M$ und $\tilde{S} > 0$ existieren und sich obiges A_j schreiben läßt als $A_j = B_j + C_j$, wobei $B_j \in \tilde{S} \cdot \|y'_j\|^*_{k+2} \cdot B_K$ und $C_j \in \tilde{\varepsilon} \cdot \|y'_j\|^*_{n+2} \cdot B_N$ sind.
Wir definieren nun $B \in E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k$ und $C \in E_N \widetilde{\otimes}_\pi F_n$ durch

$$B := \frac{1}{L(k) \cdot \tilde{S}} \cdot \sum_j a_j^{-1} \cdot B_j \otimes \rho^k_{k+1}(e_j) \text{ und } C := \frac{1}{L(n) \cdot \tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_j C_j \otimes \rho^n_{n+1}(f_j).$$

Mit

$$\begin{aligned}
\pi(B) &\leq \frac{1}{L(k) \cdot \tilde{S}} \cdot \sum_j a_j^{-1} \cdot \|B_j\|_{E_K} \cdot \|\rho^k_{k+1}(e_j)\|_k \\
&\leq \frac{1}{L(k) \cdot \tilde{S}} \cdot \sum_j a_j^{-1} \cdot \tilde{S} \cdot \|y'_j\|^*_{k+2} \cdot \|\rho^k_{k+1}(e_j)\|_k \\
&\overset{(5)}{\leq} \sup_j a_j^{-1} \cdot \|y'_j\|^*_{k+2} \cdot \gamma_j^{(k)} \\
&\overset{(8)}{\leq} 1
\end{aligned}$$

folgt die absolute Konvergenz der Reihe B in $E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k$ (und damit in $E \widetilde{\otimes}_\pi F_k$) und $B \in B_{E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k}$.
Entsprechend erhält man

$$\begin{aligned}
\pi(C) &\leq \frac{1}{L(n) \cdot \tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_j \|C_j\|_{E_N} \cdot \|\rho^n_{n+1}(f_j)\|_n \\
&\leq \frac{1}{L(n) \cdot \tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_j \tilde{\varepsilon} \cdot \|y'_j\|^*_{n+2} \cdot \|\rho^n_{n+1}(f_j)\|_n \\
&\overset{(5)}{\leq} \sup_j \|y'_j\|^*_{n+2} \cdot \gamma_j^{(n)} \\
&\overset{(9)}{\leq} 1.
\end{aligned}$$

Letztlich gilt mit $S := L(k) \cdot \tilde{S}$ und $A = x \otimes y$ folgende Identität:

$$\begin{aligned}
S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k(B) + \varepsilon \cdot C &= \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k \Big(\sum_j a_j^{-1} \cdot B_j \otimes \rho^k_{k+1}(e_j) \Big) + \sum_j C_j \otimes \rho^n_{n+1}(f_j) \\
&= \sum_j a_j^{-1} \cdot B_j \otimes \rho^n_{n+1}(\rho^{n+1}_{k+1}(e_j)) + \sum_j C_j \otimes \rho^n_{n+1}(f_j) \\
&= \sum_j B_j \otimes \rho^n_{n+1}(f_j) + \sum_j C_j \otimes \rho^n_{n+1}(f_j) \\
&= \sum_j A_j \otimes \rho^n_{n+1}(f_j) \\
&= \sum_j \big(\langle \rho^{n+1}_m(y), f_j \rangle_{j+1} \cdot x \big) \otimes \rho^n_{n+1}(f_j) \\
&= x \otimes \rho^n_{n+1} \Big(\sum_j \langle \rho^{n+1}_m(y), f_j \rangle_{j+1} \cdot f_j \Big) \\
&= \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_m(A),
\end{aligned}$$

womit $(S_3^{\otimes})_0$ gezeigt wäre. □

Wir fassen unsere Resultate zusammen:

Theorem 4.3.6 Für einen lokalkonvexen Raum E, einen nuklearen Fréchetraum F und eine Tensornorm α gelten folgende Aussagen:

i) $\mathrm{Tor}^l_\alpha(E,F) = \mathrm{Tor}^l_\pi(E,F)$ für alle $l \geq 0$.

ii) Es gilt $\mathrm{Tor}^0_\alpha(E,F) = E\widetilde{\otimes}_\alpha F$.

iii) Ist $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F) = 0$, so ist für jede exakte nukleare $\mathcal{FR}$-Sequenz

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

die $E\widetilde{\otimes}_\alpha\,\cdot$-tensorierte Sequenz

$$0 \to E\widetilde{\otimes}_\alpha F \to E\widetilde{\otimes}_\alpha G \to E\widetilde{\otimes}_\alpha H \to 0$$

(topologisch) exakt ist.

iv) $\mathrm{Tor}^l_\alpha(E,F) = 0$ für $l \geq 2$.

v) Ist E ein echter vollständiger (LB)-Raum und (F_n, ρ^n_m) ein Fundamentalsystem von Banachräumen für den nuklearen Fréchetraum F, so gilt $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F) = 0$ genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$(S_3^{K}{}')_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\|x'\|^*_M \cdot \rho^n_m(U_m) \subseteq S \cdot \|x'\|^*_K \cdot \rho^n_k(U_k) + \varepsilon \cdot \|x'\|^*_N \cdot U_n$$

für alle $x' \in E'_K$.

Beweis: Zu i) Dies folgt aus Satz 4.3.2, iv) und aus ii) unter Beachtung der Nuklearität von F.
Zu ii) Sei (F_n, ρ^n_m) ein Fundamentalsystem von injektiven Banachräumen. Mit $\mathrm{Tor}^l_\alpha(E, \prod_n F_n) = \prod_n \mathrm{Tor}^l_\alpha(E, F_n) = 0$ für $l \geq 1$ folgt, daß die kanonische Auflösung

$$0 \to F \to \prod_n F_n \to \prod_n F_n \to 0$$

von F eine $E\widetilde{\otimes}_\alpha\,\cdot$-azyklische Auflösung ist. Da F nuklear ist, ist diese zugleich eine $\otimes$-Sequenz. Damit folgt ii) nach Korollar 1.2.8 a).
Zu iii) Aufgrund der Nuklearität können wir o.E. $\alpha = \pi$ annehmen. Da zum Beispiel F nuklear ist, liegt wieder eine $\otimes$-Sequenz vor, so daß nach Korollar 1.2.8 a) nur noch die Surjektivität von $E\widetilde{\otimes}_\pi G \to E\widetilde{\otimes}_\pi H$ zu zeigen ist. Diese erhalten wir aber unmittelbar aus der langen exakten Kohomologie-Sequenz unter Beachtung von ii).
Zu iv) Folgt aus Korollar 2.2.10.
Zu v) Dies folgt aus dem vorigen Satz 4.3.4, Beispiel 3.2.5 1) und Satz 3.3.3. □

An dieser Stelle sei angemerkt, daß der Leser in einem Anhang zu dieser Arbeit eine Beweisskizze zur Charakterisierung von $\mathrm{Tor}^1_\pi(E,F) = 0$ für nukleares F und eine Übersicht zu den wichtigsten S_2- und S_3-Bedingungen in Quantorschreibweise findet.

4.4 $E = k^1(A)$ und das projektive Tensorprodukt

Wir betrachten in diesem Abschnitt für eine Köthe-Matrix A den vollständigen (LB)-Raum

$$k^1(A) := c_0(A)'_b = \mathrm{ind}_N\, l_1(a^{-1}_{\bullet,N}),$$

der als echter (LB)-Raum vorausgesetzt sei (für den Banachraum-Fall siehe Satz 3.1.3). Hierbei bezeichnet $l_1(a^{-1}_{\bullet,N})$ den Banachraum $\{\, x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_N := \sum_{j=1}^\infty a^{-1}_{j,N} \cdot |x_j| < \infty \,\}$, wobei $0^{-1} \cdot |x_j| := \infty$ für $|x_j| \neq 0$ und 0 sonst sei. Analog definiert man $l_1(X; a^{-1}_{\bullet,N})$ für einen Banachraum X.
Um eine Charakterisierung von $\mathrm{Tor}^1_\pi(k^1(A), F) = 0$ zu gewinnen, benötigen wir noch den Begriff der strikten Mackey-Bedingung, der dual zur Quasinormabilität ist:

Definition 4.4.1 Ein lokalkonvexer Raum E genügt der *strikten Mackey-Bedingung* (s.M.B.), falls es zu jeder beschränkten Teilmenge B von E eine absolutkonvexe, beschränkte Teilmenge C von E mit $B \subseteq C$ gibt, so daß der normierte Raum E_C auf B die Topologie von E induziert.

Ausformuliert liest sich die Bedingung wegen der Stetigkeit von $E_C \hookrightarrow E$ wie folgt: Zu jeder beschränkten Teilmenge B von E existiert eine weitere absolutkonvexe, beschränkte Teilmenge C von E mit $B \subseteq C$, so daß wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $U \in \mathcal{U}_0(E)$ mit $U \cap B \subseteq \varepsilon \cdot C$ finden. Nach [MeiVog, Lemma 26.6 b)] erfüllen metrisierbare lokalkonvexe Räume die s.M.B. Ist E quasi-tonnelliert, so ist jede bornivore Tonne in E eine Nullumgebung. Damit folgt nun durch Polarisation und dem Bipolarensatz

Bemerkung 4.4.2 Sei E ein lokalkonvexer Raum. Ist E quasi-tonnelliert, so ist E genau dann quasinormabel, wenn E'_b der s.M.B. genügt. Erfüllt E die s.M.B., so ist E'_b quasinormabel. Für quasi-tonnellierte Räume E gilt auch die Umkehrung.

Dualräume von quasinormablen FréchetHowever räumen genügen also der s.M.B., so daß wir eine große Klasse von Beispielen zur Verfügung haben. Aus obiger Bemerkung und [MeiVog, Satz 27.20] erhalten wir

Korollar 4.4.3 $k^1(A)$ genügt der s.M.B. genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem n existiert ein m, so daß wir für alle k und $\varepsilon > 0$ eine Konstante $S > 0$ finden mit

$$a_{j,m}^{-1} \leq S \cdot a_{j,k}^{-1} + \varepsilon \cdot a_{j,n}^{-1}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

Die untenstehende Bemerkung werden wir erst im nächsten Kapitel beweisen, siehe Korollar 5.1.9 und Lemma 5.2.2:

Bemerkung 4.4.4 $k^1(A)$ erfülle die s.M.B. Dann gelten für einen Fréchetraum F mit Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n) und jeden Banachraum X die Aussagen:

a) $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi X = \operatorname{ind}_N l_1(a_{\bullet,N}^{-1})\widetilde{\otimes}_\pi X$,

b) $\operatorname{Tor}_\pi^1(k^1(A), F) = \operatorname{proj}^1 k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F_n$.

Satz 4.4.5 $k^1(A)$ genüge der s.M.B., so ist $\operatorname{Tor}_\pi^1(k^1(A), F) = 0$ genau dann, wenn die Bedingung:

$(S_2^{K\prime})_0$ Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß es für alle $M \geq N$, $k \geq m$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ gibt, so daß für alle j gilt:

$$a_{j,M} \cdot \rho_m^n(U_m) \subseteq S \cdot a_{j,K} \cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon \cdot a_{j,N} \cdot U_n.$$

erfüllt ist.

Beweis: Nach Bemerkung 4.4.4 b) genügt es, die Äquivalenz $\operatorname{proj}^1 k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F_n = 0 \Leftrightarrow (S_2^{K\prime})_0$ zu zeigen.
„ $\Longrightarrow$ “ Aus Satz 3.2.10 folgt unter Beachtung von Bemerkung 4.4.4 a) die Bedingung

$(S_2^{K\prime})_0$ Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß es für alle $M \geq N$, $k \geq m$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ gibt, so daß für alle $x' \in E'_K$ gilt:

$$\|x'\|_M^* \cdot \rho_m^n(U_m) \subseteq S \cdot \|x'\|_K^* \cdot \rho_k^n(U_k) + \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \cdot U_n.$$

Mit $x' = e_j$ erhalten die Notwendigkeit von $(S_2^{K\prime})_0$.
„ $\Longleftarrow$ “ Nach Bemerkung 4.4.4 a) und [Jar, Korollar 15.7.6] gilt für alle n:

$$X_n := k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F_n = \operatorname{ind}_N l_1(a_{\bullet,N}^{-1})\widetilde{\otimes}_\pi F_n = \operatorname{ind}_N l_1(F_n; a_{\bullet,N}^{-1}).$$

Die verbindenden Abbildungen $\operatorname{id}_{k^1(A)}\widetilde{\otimes}_\pi \rho_m^n$ korrespondieren dann mit den folgenden Abbildungen, die wir zur Vereinfachung ebenfalls mit ρ_m^n bezeichnen:

$$\begin{array}{rcl} \rho_m^n : X_m & \to & X_n \\ l_1(F_m; a_{\bullet,N}^{-1}) \ni y & \mapsto & (\rho_m^n(y_j))_j \in l_1(F_n; a_{\bullet,N}^{-1}). \end{array}$$

Wir wollen jetzt die Bedingung aus Theorem 2.2.11 b) nachrechnen, die sich in unserem Fall wie folgt liest: Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß wir für alle $k \geq m$ ein N finden, so daß für alle $M \geq N$ ein $\widetilde{K} \geq M$ existiert mit:

$$M \cdot \rho_m^n(B_{l_1(F_m;a^{-1}_{\bullet,M})}) \subseteq \widetilde{K} \cdot \rho_k^n(B_{l_1(F_k;a^{-1}_{\bullet,\widetilde{K}})}) + N \cdot B_{l_1(F_n;a^{-1}_{\bullet,N})}.$$

Es gelte nun $(S_2^{K\prime})_0$. Weiter sei $y = (y_j)_j \in B_{l_1(F_m;a^{-1}_{\bullet,M})}$ gegeben, d.h. $\sum_j a^{-1}_{j,M} \cdot \|y_j\|_{F_m} \leq 1$. Mit $\lambda_j := a^{-1}_{j,M} \cdot \|y_j\|_{F_m}$ gilt also

$$\sum_j \lambda_j \leq 1 \text{ und } y_j \in \lambda_j \cdot a_{j,M} \cdot U_m.$$

Nach $(S_2^{K\prime})_0$ finden wir $\widetilde{u}_j \in U_k$ und $\widetilde{v}_j \in U_n$ mit

$$\rho_m^n(y_j) = S \cdot \rho_k^n(\lambda_j \cdot a_{j,K} \cdot \widetilde{u}_j) + \varepsilon \cdot (\lambda_j \cdot a_{j,N} \cdot \widetilde{v}_j).$$

Mit $u = (\lambda_j \cdot a_{j,K} \cdot \widetilde{u}_j)_j$ und $v = (\lambda_j \cdot a_{j,N} \cdot \widetilde{v}_j)_j$ gilt daher

$$\sum_j a^{-1}_{j,K} \cdot \|u_j\|_{F_k} \leq \sum_j \lambda_j \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_j a^{-1}_{j,N} \cdot \|v_j\|_{F_n} \leq \sum_j \lambda_j \leq 1.$$

Folglich ist $u \in B_{l_1(F_k;a^{-1}_{\bullet,K})}$ und $v \in B_{l_1(F_n;a^{-1}_{\bullet,N})}$. Des weiteren haben wir die Zerlegung

$$\rho_m^n(y) = S \cdot \rho_k^n(u) + \varepsilon \cdot v.$$

Startet man nun mit $\varepsilon = \frac{N}{M}$ in $(S_2^{K\prime})_0$ und wählt $\widetilde{K} \geq \max(S \cdot M, K)$, so folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 4.4.6 Obiger Satz 4.4.5 wird Bestandteil eines allgemeineren Theorems sein (Theorem 5.2.1), wo wir aus historischen Gründen mit S_2-Bedingungen statt S_3-Bedingungen arbeiten werden. Wie der obige Beweis zeigt, hätten wir genausogut $(S_3^{K\prime})_0$ statt $(S_2^{K\prime})_0$ verwenden können.

5 Über ein Theorem von A. Grothendieck

A. Grothendieck bewies in seiner Dissertation 1955 folgendes (siehe [Gro, Theorem 15] und [KroVog, Theorem 3.1]):
Theorem: Es sind äquivalent:

a) $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi\lambda^1(B)$ ist bornologisch.

b) $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi\lambda^1(B)$ ist tonneliert.

c) Es gilt die Bedingung

(GB) Für alle n existiert ein N, so daß es für alle $M \geq N$ und $\lambda \in \lambda_+^\infty(A)$ ein $S > 0$ gibt, so daß für alle j, l gilt:

$$\frac{a_{j,M}}{b_{l,N}} \leq S \cdot \max\left\{\frac{1}{\lambda_j \cdot b_{l,M}}, \frac{a_{j,N}}{b_{l,n}}\right\}$$

Wie J. Krone und D. Vogt zeigten, ist Grothendiecks Bedingung (GB) äquivalent zu (S_2^*) für das Paar $(\lambda^1(A), \lambda^1(B))$. Übergeordnet ist die Frage nach topologischen Eigenschaften des (vollständigen) π-Tensorprodukts eines (DF)-Raumes mit einem Fréchetraum und des Raumes der stetigen linearen Operatoren zwischen Frécheträumen (versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Topologie auf beschränkten Mengen). Mittels (S_2^*) gelang eine Charakterisierung der Tonneliertheit von $L_b(\lambda^1(A), F)$, siehe [KroVog, Theorem 2.1] für einen Schwartz-Raum $\lambda^1(A)$ und $F = \lambda^1(B)$ und [Man, Corollary 3.1.3] für distinguiertes $\lambda^1(A)$ und beliebigen Fréchetraum F. Man vergleiche hierzu D. Vogts Arbeiten [Vog2] und [Vog4], wo die Thematik mit abstrakteren Methoden behandelt wird.
Wir werden in diesem Kapitel Grothendiecks Resultat unter der Voraussetzung der s.M.B. an $k^1(A)$ für beliebige Frécheträume F statt $\lambda^1(B)$ verallgemeinern, das Theorem um weitere Bedingungen (siehe Abschnitt 4.4) erweitern und ein entsprechendes Theorem für das injektive Tensorprodukt beweisen.

5.1 Tensorprodukte und induktive Limiten

Vorbereitend für den Beweis des Theorems werden wir in diesem Abschnitt zeigen, daß unter der Voraussetzung der s.M.B. an $k^1(A)$ für jeden Banachraum X die Vertauschungseigenschaft

$$k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi X = \operatorname{ind}_N l_1(a_{\bullet,N}^{-1})\widetilde{\otimes}_\pi X$$

gilt. Aufgrund des Settings 3.2.3 ist es für uns auch allgemein wichtig, Situationen zu untersuchen, wann vollständige (LB)-Räume $E = \operatorname{ind}_N E_N$ mit allen Banachräumen X tensoriell im folgenden Sinne vertauschen:

$$E \otimes_\alpha X = \operatorname{ind}_N (E_N \otimes_\alpha X) \quad \text{bzw.} \quad E\widetilde{\otimes}_\alpha X = \operatorname{ind}_N (E_N\widetilde{\otimes}_\alpha X) \quad (\alpha = \pi \text{ oder } \varepsilon).$$

Für das projektive Tensorprodukt gilt nach [Jar, 15.5.4] für alle Banachräume X stets

$$E \otimes_\pi X = \operatorname{ind}_N (E_N \otimes_\pi X).$$

Definition 5.1.1 Wir sagen, daß ein vollständiger (LB)-Raum E eine *lokale Zerlegung der Eins* besitzt, falls $E \otimes_\varepsilon X = \operatorname{ind}_N (E_N \otimes_\varepsilon X)$ für alle Banachräume X gilt.

Für einen Beweis des folgenden Satzes, der die Situation für das (vollständige) injektive Tensorprodukt hinreichend klärt, siehe [Hol3, 2.4 und 3.2] und [Per, Theorem 4.5] für den Zusatz.

Satz 5.1.2 Sei $E = \operatorname{ind}_N E_N$ ein vollständiger (LB)-Raum. Es sind äquivalent:

a) E hat eine lokale Zerlegung der Eins.

b) Die topologisch exakte Sequenz $0 \to \ker(q) \longrightarrow \oplus_N E_N \xrightarrow{q} E \to 0$ ist eine $\otimes$-Sequenz, wobei $q(x) = \sum_N x_N$ sei.

Genügt E der s.M.B., so ist eine weitere äquivalente Bedingung

c) $E\widetilde{\otimes}_\varepsilon X = \mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\varepsilon X)$ für alle Banachräume X.

Wie R. Hollstein weiter in [Hol3] zeigte, ist *b)* erfüllt, falls $\ker(q)$ ein ε-Raum oder jedes E_N hilbertisierbar oder E ein π-Raum ist (vgl. auch [KabVog, Satz 1.6]).
Wir wollen uns nun dem projektiven Tensorprodukt zuwenden. Die folgende einfache, aber sehr nützliche Bemerkung zum Vergleich von lokalkonvexen Topologien findet man zum Beispiel in [BMS, Lemma 1.2].

Bemerkung 5.1.3 Es sei $i : (F, \mathcal{S}) \hookrightarrow (E, \mathcal{T})$ ein Monomorphismus lokalkonvexer Räume und D eine in $(F, \mathcal{S})$ dichte Teilmenge. Ist $\mathcal{T}|_D = \mathcal{S}|_D$, so ist i ein Monohomomorphismus.

Beweis: Wegen der Stetigkeit von i gilt $\mathcal{T}|_F \leq \mathcal{S}$, und es bleibt $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}|_F$ zu zeigen. Sei dazu $U = \overline{U} \in \mathcal{U}_0(F, \mathcal{S})$. Da die Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ auf D übereinstimmen, finden wir eine offene Nullumgebung $V \in \mathcal{U}_0(E, \mathcal{T})$ mit $V \cap D \subseteq U \cap D$. Wegen der Dichtheit folgt schon $V \cap F \subseteq \overline{V \cap F} = \overline{V \cap D} \subseteq \overline{U \cap D} = U$, was den Beweis abschließt. □

Die im folgenden Satz ([Man, Proposition 1.1.1]) angegebene Bedingung d) zeigt, daß Vertauschungseigenschaften mit induktiven Limiten sehr günstig für das konkrete Rechnen sind, während c) als Kriterium dienen wird, um Vertauschungen explizit nachzuprüfen.

Satz 5.1.4 Sei $E = \mathrm{ind}_N\, E_N$ ein vollständiger (LB)-Raum, so daß jedes E_N die A.E. hat, und X ein Banachraum. Es sind äquivalent:

a) $E\widetilde{\otimes}_\pi X = \mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\pi X)$ algebraisch.

b) $E\widetilde{\otimes}_\pi X = \mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\pi X)$ topologisch.

c) $\mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\pi X)$ ist vollständig.

d) Für alle $z \in E\widetilde{\otimes}_\pi X$ existiert ein N, so daß sich z darstellen läßt als

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot x_j \otimes y_j$$

mit $\lambda \in B_{l_1}$, $\{x_j\} \subseteq E_N$ und $\{y_j\} \subseteq X$ beschränkt.

Beweis: Nach A. Grothendieck besitzt jedes Element z des vollständigen projektiven Tensorprodukts zweier metrisierbarer lokalkonvexer Räume eine Darstellung wie in d). Daher reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\pi X)$ dicht in $E\widetilde{\otimes}_\pi X$ ist. Nach Lemma 3.2.4 haben wir Monomorphismen $E_N\widetilde{\otimes}_\pi X \hookrightarrow E\widetilde{\otimes}_\pi X$ und daher auch einen Monomorphismus

$$i : \mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\pi X) \hookrightarrow E\widetilde{\otimes}_\pi X.$$

Da $E_N \otimes_\pi X$ dichter Teilraum von $E_N\widetilde{\otimes}_\pi X$ ist, ist auch $\mathrm{ind}_N\,(E_N \otimes_\pi X)$ dichter Teilraum von $\mathrm{ind}_N\,(E_N\widetilde{\otimes}_\pi X)$. Mit $\mathrm{ind}_N\,(E_N \otimes_\pi X) = E \otimes_\pi X$ ([Jar, 15.5.4]) folgt der Satz nun aus Bemerkung 5.1.3. □

A. Grothendieck stellte in seiner Dissertation 1955 u.a. die folgenden berühmten Fragen ([Gro, questions non résolues no. 2 et 10]), welche von J. Taskinen knapp 30 Jahre später im negativen Sinne beantwortet wurden:

i) *Problémes des Topologies:* Seien E und F Frécheträume. Ist jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq E\widetilde{\otimes}_\pi F$ lokalisierbar, d.h. existieren beschränkte Teilmengen $C \subseteq E$ und $D \subseteq F$ mit

$$B \subseteq \overline{\Gamma(C \otimes D)}?$$

ii) Ist $E \otimes_\varepsilon F$ für (DF)-Räume E und F wieder ein (DF)-Raum?

Wir wollen nun kurz Resultate von A. Peris bzgl. der Raumklassen (QNO) und $(QNO)'$ zitieren, die in engem Zusammenhang mit obigen Problemen stehen und Beispiele für unsere Untersuchungen hinsichtlich Vertauschungseigenschaften liefern. Diese Raumklassen führte A. Peris in seiner Dissertation in Anlehung an die Quasinormabilität bzw. die s.M.B. ein. Frécheträume mit (QNO) bzw. (DF)-Räume mit $(QNO)'$ liefern positive Antworten auf obige Fragen ([Per, Corollary 4.3]). Des weiteren erfüllt ein quasinormabler Fréchetraum E genau dann Bedingung i) mit jedem Banachraum F, falls E_b' die Eigenschaft $(QNO)'$ hat ([Per, Theorem 4.7]).

Definition 5.1.5 Sei E ein lokalkonvexer Raum.

a) E ist *quasinormabel durch Operatoren* (kurz (QNO)), falls zu jedem $U \in \mathcal{U}_0(E)$ ein $V = \Gamma(V) \in \mathcal{U}_0(E)$ existiert, so daß wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $P \in L(E, E)$ finden mit

   i) $P(V)$ ist beschränkt.

   ii) $(\mathrm{id}_E - P)(V) \subseteq \varepsilon \cdot U$.

b) E genügt der *s.M.B. durch Operatoren* (kurz $(QNO)'$), falls zu jeder beschränkten Teilmenge $B \subseteq E$ eine beschränkte Teilmenge $C = \Gamma(C) \subseteq E$ existiert, so daß wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $P \in L(E, E)$ finden mit

   i) $P^{-1}(C) \in \mathcal{U}_0(E)$.

   ii) $(\mathrm{id}_E - P)(B) \subseteq \varepsilon \cdot C$.

Umformung der jeweiligen Bedingung ii) zeigt sofort, daß (QNO) (bzw. $(QNO)'$) die Quasinormabilität (bzw. s.M.B.) impliziert. Durch Polarisation erhält man wieder:

Bemerkung 5.1.6 Genügt E der Bedingung $(QNO)'$, so hat E_b' die Eigenschaft (QNO). Ist E ein quasi-tonnelierter lokalkonvexer Raum mit (QNO), so hat E_b' die Eigenschaft $(QNO)'$.

Beispielsweise haben normierte Räume (QNO) und $(QNO)'$. Da die Raumklasse (QNO) gute Permanenzeigenschaften hat (komplementierte Unterräume, Produkte, direkte Summen, Vervollständigung und Tensorprodukte (!) ([Per, Proposition 3.3. und 3.4])), erhält man dadurch viele Beispiele. Für uns interessant ist, daß quasinormable Räume $c_0(A)$ die Eigenschaft (QNO) haben ([Per, S. 183]). Hieraus folgt nach den Bemerkungen 4.4.2 und 5.1.6:

Beispiel 5.1.7 Genügt $k^1(A)$ der s.M.B., so hat $k^1(A)$ die Eigenschaft $(QNO)'$.

Kommen wir zurück zu Vertauschungseigenschaften für das vollständige projektive Tensorprodukt mit (LB)-Räumen. Ein Banachraum X hat die *Radon-Nikodym-Eigenschaft*, falls zu jedem endlichen Maß μ jeder stetige linearer Operator $T : L_1(\mu) \to X$ *darstellbar* ist, d.h. es existiert eine μ-meßbare Funktion g mit

$$T(f) = \int f \cdot g \, d\mu.$$

Reflexive und separable Dualräume haben die Radon-Nikodym-Eigenschaft ([Jar, 17.6.3]).

Satz 5.1.8 Sei $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein vollständiger (LB)-Raum, so daß jedes E_N die A.E. hat und X ein Banachraum. Gilt eine der Bedingungen

a) E hat $(QNO)'$,

b) die E_N und X sind duale Banachräume, wobei die verbindenden Abbildungen von E transponierte seien, und jedes E_N hat die Radon-Nikodym-Eigenschaft,

so ist $\mathrm{ind}_N\, (E_N \widetilde{\otimes}_\pi X) = E \widetilde{\otimes}_\pi X$.

Beweis: Wir wollen hier nur einen Beweis von a) wiedergeben. Für b) siehe [Man, Proposition 1.2.1]. Da E insbesondere regulär ist, können wir o.E. $B_1 := B_{E_1} \subseteq B_2 := B_{E_2} \subseteq \cdots$ als Fundamentalfolge von beschränkten Teilmengen in E annehmen. $(QNO)'$ liest sich dann wie folgt: Für alle N existiert ein M, so daß wir für alle $\epsilon > 0$ ein $P \in L(E,E)$ finden mit

i) $P^{-1}(B_M) \in \mathcal{U}_0(E)$.

ii) $(\mathrm{id}_E - P)(B_N) \subseteq \varepsilon \cdot B_M$.

Sei nun $U_N := \Gamma(B_N \otimes B_X) \in \mathcal{U}_0(E_N \otimes_\pi X)$, $N \in \mathbb{N}$. Zu N wählen wir ein M nach $(QNO)'$. Ist $V \in \mathcal{U}_0(E_M \otimes_\pi X)$ beliebig, so existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta \cdot U_M \subseteq V$. Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot \delta$ und finden einen Operator P gemäß $(QNO)'$. Des weiteren existiert ein $C > 0$ mit $B_N \subseteq C \cdot P^{-1}(B_M)$. Mit $Q := P \otimes_\pi \mathrm{id}_X$ gilt dann:

i)' $Q(\Gamma(P^{-1}(B_M) \otimes B_X)) \subseteq U_M \subseteq \delta^{-1} \cdot V$.

ii)' $(\mathrm{id}_{E\otimes_\pi X} - Q)(U_N) = ((\mathrm{id}_E - P) \otimes \mathrm{id}_X)(U_N) \subseteq \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot U_M \subseteq \frac{1}{2} \cdot V$.

Mit *i)'* folgt, daß $W := Q^{-1}(\frac{1}{2} \cdot V) \in \mathcal{U}_0(E \otimes_\pi X)$ ist und es gilt mit *ii)'*:

$$W \cap U_N \subseteq Q(W \cap U_N) + (\mathrm{id}_{E\otimes_\pi X} - Q)(W \cap U_N) \subseteq \frac{1}{2} \cdot V + \frac{1}{2} \cdot V \subseteq V.$$

Insgesamt existiert also zu jedem N ein M, so daß $E \otimes_\pi X = \mathrm{ind}_N\,(E_N \otimes_\pi X)$ und $E_M \otimes_\pi X$ dieselbe Topologie auf der Nullumgebung $U_N \in \mathcal{U}_0(E_N \otimes_\pi X)$ induzieren, d.h. $\mathrm{ind}_N\,(E_N \otimes_\pi X)$ hat die Eigenschaft (M) von V.S. Retakh, und daher hat auch $\mathrm{ind}_N\,(E_N \widetilde{\otimes}_\pi X)$ diese Eigenschaft ([Man, 0.3.7]). Dies impliziert die Vollständigkeit. Die Behauptung folgt damit aus Satz 5.1.4. □

Als Folgerung aus den bisherigen Resultaten erhalten wir nun

Korollar 5.1.9 Für einen Banachraum X gilt

$$k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi X = \mathrm{ind}_N\, l_1(a_{\bullet,N}^{-1})\widetilde{\otimes}_\pi X,$$

falls $k^1(A)$ der s.M.B. genügt oder X ein Dualraum ist.

5.2 Verallgemeinerung des Theorems

Das angekündigte Theorem liest sich wie folgt:

Theorem 5.2.1 Für $k^1(A)$ mit der s.M.B. und einen Fréchetraum F mit Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n) sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F$ ist (ultra)bornologisch.

b) $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F$ ist tonneliert.

c) Es gilt Grothendiecks Bedingung:

(GB) Für alle n existiert ein N, so daß es für alle $M \geq N$ und $\lambda \in \lambda_+^\infty(A)$ ein $S > 0$ gibt, so daß für alle j und $y' \in F_n'$ gilt:

$$a_{j,M} \cdot \|y'\|_N^* \leq S \cdot \max\left\{\frac{1}{\lambda_j} \cdot \|y'\|_M^*,\, a_{j,N} \cdot \|y'\|_n^*\right\}$$

d) Es gilt die Bedingung

(S_2^*) Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$, $k \geq m$ es ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ gibt, so daß für alle j und $y' \in F_n'$ gilt:

$$a_{j,M} \cdot \|y'\|_m^* \leq S \cdot \max\{a_{j,K} \cdot \|y'\|_k^*,\, a_{j,N} \cdot \|y'\|_n^*\}.$$

e) $\operatorname{proj}^1 k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F_n = 0$.

f) $\operatorname{Tor}_\pi^1(k^1(A), F) = 0$.

g) Für jede exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz $0 \to F \longrightarrow G \xrightarrow{q} H \to 0$ ist die Sequenz

$$0 \to k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F \to k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi G \to k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi H \to 0$$

topologisch exakt.

Beweis: Wir können im folgenden annehmen, daß $k^1(A)$ ein echter (LB)-Raum ist, da im Banachraumfall obige Bedingungen trivial sind. Weil die Bedingungen unter c), d) und e) invariant bzgl. äquivalenten Spektren von F sind, werden wir des weiteren o.E. (F_n, ρ_m^n) als reduziert voraussetzen. Wir wollen uns zunächst mit den Implikationen beschäftigen, die unmittelbar aus der Literatur gefolgert werden können. Da (F_n, ρ_m^n) ein reduziertes Spektrum ist und das projektive Tensorprodukt dichte Unterräume respektiert, ist auch für $(k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F_n, \mathrm{id}_{k^1(A)}\widetilde{\otimes}_\pi \rho_m^n)$ reduziert. Letztere Räume $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F_n$ sind nach Korollar 5.1.9 vollständige (LB)-Räume. Aus der allgemeinen Theorie für $\operatorname{proj}^1 \mathcal{X} = 0$ für reduzierte Spektren von (LB)-Räumen (siehe [Vog4, Theorem 3.4]) erhalten wir mit $\operatorname{proj} k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F_n = k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F$ die Implikation **e)** $\Rightarrow$ **a)** und wegen der Vollständigkeit von $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F$ sofort **a)** $\Rightarrow$ **b)**.
Ist $P := k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F = c_0(A)_b'\widetilde{\otimes}_\pi F$ tonneliert, so ist P_b' folgenvollständig. Nach [Vog7, Proposition 4.4] folgt hieraus die dortige Bedingung (S_2^*). Einsetzen der Einheitsvektoren $x = e_j \in c_0(A)$ impliziert d). Damit ist **b)** $\Rightarrow$ **d)** gezeigt.
Aus Korollar 5.1.9 und Korollar 1.1.8 c) folgt sofort, daß $k^1(A)$ ein π-Raum ist.[6]

Lemma 5.2.2 Es gelten folgenden Aussagen:

a) $\operatorname{Tor}_\pi^0(k^1(A), F) = k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F$ für alle Fréchetträume F.

b) Hat $k^1(A)$ die s.M.B., so gilt $\operatorname{Tor}^l(k^1(A), X) = 0$ für alle Banachräume X und $l \geq 1$, d.h. jeder Banachraum ist $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi\,\cdot$-azyklisch.

[6]Nach [Hol3, Proposition 4.1 a)] ist $k^1(A)$ aufgrund einer reduzierten projektiven Darstellung von $l_1(\lambda)$-Räumen stets ein π-Raum, auch ohne die Voraussetzung der s.M.B.

Beweis: Zu a) Dies folgt aus der Vorbemerkung und Korollar 1.2.12 a).
Zu b) Sei $0 \to X \to X^0 \to X^1 \to \cdots$ eine injektive Auflösung von X mit injektiven Banachräumen X^l. Da $l_1(a_{\bullet,N}^{-1})\widetilde{\otimes}_\pi \cdot$ für alle N exakt auf dieser Sequenz und der induktive Limesfunktor algebraisch exakt ist, folgt das Lemma aus Korollar 5.1.9. □

Nach Korollar 2.2.10 b) erhalten wir aus dem Lemma 5.2.2 b) also die Äquivalenz **e)** $\Leftrightarrow$ **f)**.
Wie wir gesehen haben, ist $k^1(A)$ ein π-Raum. Daher gilt **f)** $\Leftrightarrow$ **g)** nach Beispiel 3.1.2.
Das folgende Lemma zeigt, daß **c)** $\Leftrightarrow$ **d)** ist:

Lemma 5.2.3 Die Bedingungen (GB) und (S_2^*) sind unter den Voraussetzungen des Theorems äquivalent.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß (S_2^*) zur folgenden Bedingung äquivalent ist:

$(S_2^*)^{GB}$ Für alle n' existiert ein $N' \geq n'$, so daß es für alle $M' \geq N'$ ein $K' \geq M'$ und $S' > 0$ gibt, so daß für alle j und $y' \in F'_{n'}$ gilt:

$$a_{j,M'} \cdot \|y'\|^*_{N'} \leq S' \cdot \max\{a_{j,K'} \cdot \|y'\|^*_{M'},\, a_{j,N'} \cdot \|y'\|^*_{n'}\}$$

Der Beweis hierfür ist straight-forward: Es gelte $(S_2^*)^{GB}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n' := n$. Man wähle N' nach $(S_2^*)^{GB}$, $N := N'$, $m := N'$. Seien $M \geq N$ und $k \geq m$. Wir setzen $M' := \max\{M, k\}$ und wählen $K' \geq M'$, $S' > 0$, so daß für alle j und $y' \in F'_{n'}$ die Bedingung $(S_2^*)^{GB}$ gilt. Weiter sei $K := K'$, $S := S'$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} a_{j,M} \cdot \|y'\|^*_m &\leq a_{j,M'} \cdot \|y'\|^*_{N'} \leq S' \cdot \max\{a_{j,K'} \cdot \|y'\|^*_{M'},\, a_{j,N'} \cdot \|y'\|^*_{n'}\} \\ &\leq S \cdot \max\{a_{j,K} \cdot \|y'\|^*_k,\, a_{j,N} \cdot \|y'\|^*_n\}. \end{aligned}$$

Umgekehrt gelte nun (S_2^*). Es sei $n' \in \mathbb{N}$, $n := n'$. Man wähle N, $m \geq n$ nach (S_2^*). Wir setzen $N' := \max\{N, m\}$. Es sei $M' \geq N'$, $M := M'$, $k := M'$. Weiter wähle man $K \geq M$ und $S > 0$, so daß für alle j und $y' \in F'_n$ die Bedingung (S_2^*) gilt. Mit $K' := K$, $S' := S$ folgt:

$$\begin{aligned} a_{j,M'} \cdot \|y'\|^*_{N'} &\leq a_{j,M} \cdot \|y'\|^*_m \leq S \cdot \max\{a_{j,K} \cdot \|y'\|^*_k,\, a_{j,N} \cdot \|y'\|^*_n\} \\ &\leq S' \cdot \max\{a_{j,K'} \cdot \|y'\|^*_{M'},\, a_{j,N'} \cdot \|y'\|^*_{n'}\}. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zur Äquivalenz $(GB) \Leftrightarrow (S_2^*)$.
„ $\Longleftarrow$ " Nach Voraussetzung gilt $(S_2^*)^{GB}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n' := n$. Wir wählen N' nach $(S_2^*)^{GB}$ und setzen $N := N'$. Weiter seien $M \geq N$ und $\lambda \in \lambda_+^\infty(A)$, d.h. $\sup_j a_{j,l} \cdot \lambda_j \leq C_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Wir setzen $M' := M$ und wählen $K' \geq M'$, $S' > 0$, so daß für alle j und $y' \in F'_{n'}$ die Bedingung $(S_2^*)^{GB}$ gilt. Mit $K := K'$ und $S := \max\{S', S' \cdot C_K\}$ folgt:

$$\begin{aligned} a_{j,M} \cdot \|y'\|^*_N &= a_{j,M'} \cdot \|y'\|^*_{N'} \leq S' \cdot \max\{a_{j,K'} \cdot \|y'\|^*_{M'},\, a_{j,N'} \cdot \|y'\|^*_{n'}\} \\ &\leq S' \cdot \max\left\{\frac{C_K}{\lambda_j} \cdot \|y'\|^*_{M'},\, a_{j,N'} \cdot \|y'\|^*_{n'}\right\} \\ &\leq S \cdot \max\left\{\frac{1}{\lambda_j} \cdot \|y'\|^*_M,\, a_{j,N} \cdot \|y'\|^*_n\right\}. \end{aligned}$$

„ $\Longrightarrow$ " Wir machen folgende Fallunterscheidung:

1. $k^1(A)'_b$ ist nicht abzählbar normiert, d.h. für alle N existiert ein $j = j(N)$ mit $a_{j,N} = 0$ (Beispiel 3.2.14). Wir zeigen, daß dann F schon eine Quojektion sein muß. Zu $n = 1$ wählen wir uns ein $N_1 \geq n$ gemäß (GB) und ein j_1 mit $a_{j_1,N_1} = 0$. Weiter sei $N'_1 > N_1$ mit $a_{j_1,N'_1} > 0$ und $\lambda \in \lambda_+^\infty(A)$ mit $\lambda_{j_1} > 0$. Aus (GB) folgt mit $C_M := \frac{S}{\lambda_{j_1} \cdot a_{j_1,M}}$ die Abschätzung:

$$\|y'\|^*_{N_1} \leq C_M \cdot \|y'\|^*_M$$

für alle $M \geq N_1'$ und $y' \in F_M' \, (\hookrightarrow F_n')$. Analog zu obigem wählt man sich nun zu N_1' ein $N_2 \geq N_1'$ gemäß (GB) und ein j_2 mit $a_{j_2,N_2} = 0$. Weiter sei $N_2' > N_2$ mit $a_{j_2,N_2'} > 0$ und $\lambda \in \lambda_+^\infty(A)$ mit $\lambda_{j_2} > 0$. Aus (GB) folgt nun wieder mit $C_M := \frac{S}{\lambda_{j_2} \cdot a_{j_2,M}}$ die Abschätzung

$$\|y'\|_{N_2}^* \leq C_M \cdot \|y'\|_M^*$$

für alle $M \geq N_2'$ und $y' \in F_M'$. Induktiv folgt, daß das Einbettungsspektrum $(F_{N_p}', (\rho_{N_{p+1}}^{N_p})')$ strikt und damit F eine Quojektion ist ([DieZar, Proposition 1]).

Ist nun $\rho : G \to H$ eine stetige lineare Surjektion zwischen Banachräumen, so auch $k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi \rho$ (Korollar 5.1.9). Da F eine Quojektion ist, gilt folglich

$$\text{proj}^1 \, k^1(A)\widetilde{\otimes}_\pi F_n = 0$$

für jedes Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n) für F und daher die Bedingung $(S_2^{K'})$. Durch Polarisation erhält man hieraus wie in Korollar 3.2.11 die gewünschte Bedingung (S_2^*).

2. $k^1(A)_b'$ ist abzählbar normiert, d.h. es existiert ein N mit $a_{j,N} > 0$ für alle j. Es sei o.E. $N = 1$. Wir zeigen nun $(S_2^*)^{GB}$. Dazu sei $n' \in \mathbb{N}$, $n := n'$. Wir wählen N gemäß (GB) und setzen $N' := N$. Weiter sei $M' \geq N'$, $M := M'$. Angenommen, es existieren keine $K' \geq M'$, $S' > 0$, so daß $(S_2^*)^{GB}$ gilt. Dann finden wir Folgen $j(K') \in \mathbb{N}$ und $y_{K'}' \in F_{n'}'$ mit

$$a_{j(K'),M'} \cdot \|y_{K'}'\|_{N'}^* > K' \cdot \max\left\{a_{j(K'),K'} \cdot \|y_{K'}'\|_{M'}^*, \, a_{j(K'),N'} \cdot \|y_{K'}'\|_{n'}^*\right\}.$$

Notwendigerweise ist dann schon $y_{K'}' \in F_{N'}' - \{0\}$. Es folgt:

$$a_{j(K'),M'} > K' \cdot a_{j(K'),N'} \cdot \frac{\|y_{K'}'\|_{n'}^*}{\|y_{K'}'\|_{N'}^*} \geq K' \cdot a_{j(K'),N'}.$$

Also ist $(j(K'))_{K'}$ eine unbeschränkte Folge natürlicher Zahlen. Wir wählen uns eine Teilfolge $j(K_p') \uparrow \infty$ und setzen

$$\lambda_j := \begin{cases} \frac{1}{a_{j(K_p'),K_p'}}, & j = j(K_p'), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\lambda \in \lambda_+^\infty(A)$, und mit $K_p' > S$ liegt ein Widerspruch zu (GB) vor. □

Sei jetzt (S_2^*) erfüllt. Ist $k^1(A)_b'$ nicht abzählbar normiert, so zeigen Lemma 5.2.3 und sein Beweis, daß F eine Quojektion ist, und daher e) gilt. Sei also o.E. $k^1(A)_b' = \lambda^\infty(A)$ abzählbar normiert, d.h. es existiert ein N mit $a_{j,N} > 0$ für alle j (Beispiel 3.2.14). Es sei o.E. $N = 1$. Im folgenden betrachten wir wieder das Dualsystem $\langle F_n, F_n' \rangle$. Aus (S_2^*) folgt unmittelbar mit denselben Quantoren:

$$\frac{1}{S} \cdot \left(a_{j,K}^{-1} \cdot (\rho_k^n(B_{F_k}))^\circ \cap a_{j,N}^{-1} \cdot B_{F_n}^\circ\right) \subseteq a_{j,M}^{-1} \cdot (\rho_m^n(B_{F_m}))^\circ.$$

Polarisation liefert wegen $(A \cap B)^\circ \subseteq \overline{A^\circ + B^\circ}$:

$$\begin{aligned} a_{j,M} \cdot \rho_m^n(B_{F_m}) &\subseteq S \cdot \overline{a_{j,K} \cdot (\rho_k^n(B_{F_k}))^{\circ\circ} + a_{j,N} \cdot B_{F_n}}^{F_n} \\ &\subseteq S \cdot (a_{j,K} \cdot \rho_k^n(B_{F_k}) + 3 \cdot a_{j,N} \cdot B_{F_n}). \end{aligned}$$

Also gilt $(S_2^{K'})$. Hieraus folgt wie in Lemma 3.2.9 die Bedingung $(S_2^{K'})_0$ und damit nach Satz 4.4.5 und seinem Beweis e), womit auch die Implikation **d)** $\Rightarrow$ **e)** gezeigt wäre. Dies schließt den Beweis ab. □

Bemerkung 5.2.4 Wie der Beweis und Korollar 5.1.9 zeigen, gilt Theorem 5.2.1 auch ohne die Voraussetzung der s.M.B. an $k^1(A)$, falls F ein reduziertes Fundamentalsystem von dualen Banachräumen besitzt.

Wir wollen nun aus Gründen der Vollständigkeit ein Analogon zu Theorem 5.2.1 für $k^\infty(A)$ und das injektive Tensorprodukt angeben und beweisen (vergleiche auch [Man, Corollary 3.1.3]). Hierbei notieren wir für eine Köthe-Matrix A den vollständigen (LB)-Raum

$$\mathrm{ind}_N\, l_\infty(a_{\bullet,N}^{-1})$$

mit $k^\infty(A)$, wobei $l_\infty(a_{\bullet,N}^{-1})$ den Banachraum $\{\, x \in \omega : \|x\|_N := \sup_j a_{j,N}^{-1} \cdot \mid x_j \mid < \infty \,\}$ bezeichne ($0^{-1} \cdot \mid x_j \mid := \infty$ für $\mid x_j \mid \neq 0$ und 0 sonst). Wir erinnern daran, daß $k^\infty(A)$ genau dann ein (DFM)-Raum ist, falls die Bedingungen des Satzes von Dieudonné-Gomez gelten ([MeiVog, Satz 27.9]).

Theorem 5.2.5 Ist $k^\infty(A)$ ein (DFM)-Raum und F ein Fréchetraum mit Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ_m^n), so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon F$ ist (ultra)bornologisch.

b) $k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon F$ ist tonneliert.

c) Es gilt die Bedingung

(S_2^*) Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$, $k \geq m$ es ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ gibt, so daß für alle j und $y' \in F_n'$ gilt:

$$a_{j,M} \cdot \|y'\|_m^* \leq S \cdot \max\{a_{j,K} \cdot \|y'\|_k^*,\; a_{j,N} \cdot \|y'\|_n^*\}\,.$$

d) $\mathrm{proj}^1\, k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon F_n = 0$.

e) $\mathrm{Tor}_\varepsilon^1(k^\infty(A), F) = 0$.

f) Für jede exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz $0 \to F \to G \to H \to 0$ ist

$$0 \to k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon F \to k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon G \to k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon H \to 0$$

topologisch exakt.

Ist $k^\infty(A)$ sogar ein (DFS)-Raum, so sind sämtliche Bedingungen aus Theorem 5.2.1 und diesem Theorem äquivalent.

Beweis: Es sei wieder o.E. $k^\infty(A)$ ein echter (LB)-Raum und (F_n, ρ_m^n) reduziert. Da $k^\infty(A)$ ein (DFM)-Raum mit der A.E. ist, folgt die Äquivalenz der Funktoren

$$k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot \simeq L_b(k^\infty(A)_b', \cdot) = L_b(\lambda^1(A), \cdot) \text{ und damit } \mathrm{Tor}_\varepsilon^l(k^\infty(A), \cdot) \simeq \mathrm{Ext}^l(\lambda^1(A), \cdot)$$

für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Damit können wir nun das Theorem vollständig auf die Ext-Theorie reduzieren. Nach obigem ist der Funktor $k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot$ topologisch linksexakt, und nach [Vog1, Lemma 1.4] ist jeder Banachraum $k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot$-azyklisch. Damit gelten dann wieder die Äquivalenzen **d)** $\Leftrightarrow$ **e)** $\Leftrightarrow$ **f)**. Wegen $k^\infty(A)\widetilde{\otimes}_\varepsilon \cdot \simeq L_b(\lambda^1(A), \cdot)$ folgt **d)** $\Rightarrow$ **a)**. Die Implikation **a)** $\Rightarrow$ **b)** gilt stets. Für **b)** $\Rightarrow$ **c)** wende man wieder [Vog7, Proposition 4.4] an, diesmal auf den Raum $L_b(\lambda^1(A), F)$. Die fehlende Implikation **c)** $\Rightarrow$ **d)** ist einer der vier Standardfälle der Ext-Theorie und folgt zum Beispiel aus dem Beweis von [FreWen, Theorem 3.1].
Für den Zusatz beachte man, daß für (DFS)-Räume $k^\infty(A)$ die Voraussetzungen beider Theoreme erfüllt sind (siehe [MeiVog, Satz 27.20]). □

An dieser Stelle wollen wir einige Anwendungen obiger Theoreme bringen. Wir beginnen mit der Charaktersierung von Quojektionen:

Satz 5.2.6 Sei α eine Tensornorm und F ein Fréchetraum. Es sind äquivalent:

a) F ist eine Quojektion.

b) $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F)=0$ für jeden nuklearen (DF)-Raum E.

c) $E\widetilde{\otimes}_\alpha F$ ist tonneliert für jeden nuklearen (DF)-Raum E.

d) $\varphi\widetilde{\otimes}_\alpha F$ ist tonneliert.

e) $\mathrm{Tor}^1_\alpha(\varphi,F)=0$.

Beweis: Da die auftretenden Räume nuklear sind, sei o.E. $\alpha=\pi$.
a) $\Rightarrow$ b): Es sei (F_n,ρ^n_m) ein darstellendes Spektrum für F mit surjektiven Verbindungsabbildungen. Da E nuklearer (DF)-Raum und F eine Quojektion ist, ist $\mathrm{proj}^1\, E\widetilde{\otimes}_\pi F_n=0$. Weiter ist jeder Banachraum $E\widetilde{\otimes}_\pi\,\cdot$ -azyklisch, und mit Korollar 2.2.10 folgt

$$\mathrm{Tor}^1_\pi(E,F)=\mathrm{proj}^1\, E\widetilde{\otimes}_\pi F_n.$$

b) $\Rightarrow$ c): Nach obigem erhalten wir c) wieder mit [Vog4, Theorem 4.2].
c) $\Rightarrow$ d) ist klar.
d) $\Rightarrow$ e): Dies folgt aus Theorem 5.2.1 mit $\varphi=k^1(A)$, wobei A die obere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen sei.
e) $\Rightarrow$ a): Aus $\mathrm{Tor}^1_\alpha(\varphi,F)=0$ folgt die Bedingung $(S_2^{K\prime})$. Da $\varphi'=\omega$ nicht abzählbar normiert ist, muß F eine Quojektion sein (Korollar 3.2.17). □

Dual hierzu ist, daß für einen (DFS)-Raum E und eine Tensornorm α der Dualraum E'_b genau dann abzählbar normiert ist, falls ein nuklearer Fréchetraum F nicht isomorph zu ω mit $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F)=0$ existiert. Für einen Beweis dieser Aussage siehe [Vog7, Theorem 5.8].
Wir wollen an dieser Stelle zeigen, daß sich in azyklischen Situationen die Eigenschaft $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,G)=0$ auf Quotienten von G vererbt.

Bemerkung 5.2.7 Sei α eine Tensornorm, E ein lokalkonvexer Raum und G ein Fréchetraum. Des weiteren gelte $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,G)=0$. In den folgenden Fällen ist dann auch $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,H)=0$ für jeden Quotienten H von G:

a) E ein nuklearer (DF)-Raum.

b) $F=\ker(G\to H)$ ist lokal $E\widetilde{\otimes}_\alpha\,\cdot$ -azyklisch, z. B. G nuklear.

c) $E=k^1(A)$ mit der s.M.B., $\alpha=\pi$.

d) $E=k^\infty(A)$ ein (DFM)-Raum, $\alpha=\varepsilon$.

Beweis: Nach Korollar 2.2.10 b) gilt in all unseren Situationen $\mathrm{Tor}^l_\alpha(E,F)=0$ für alle $l\geq 2$. In den Fällen a), c) und d) ist sogar jeder Banachraum $E\widetilde{\otimes}_\alpha\,\cdot$ -azyklisch. Wenden wir nun die lange exakte Kohomologie-Sequenz auf die exakte $\mathcal{FR}$-Sequenz $0\to F\to G\to H\to 0$ an, so erhalten wir die Exaktheit der $\mathcal{LR}$-Sequenz

$$\cdots\to\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,G)\to\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,H)\to\mathrm{Tor}^2_\alpha(E,F)\to\cdots$$

und hieraus $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,H)=0$. □

Leider steht uns im Gegensatz zur Ext-Situation keine lange exakte Kohomologie-Sequenz für den Funktor $\cdot\,\widetilde{\otimes}_\alpha F$ zur Verfügung, womit wir eine entsprechende Permanenzeigenschaft für Teilräume von E beweisen könnten. Die Tatsache, daß man diese für den kontravarianten Funktor $L(\,\cdot\,,F)$ trotz des Fehlens von genügend vielen Projektiven für die Kategorie $\mathcal{FR}$ bekommt, basiert vor allem auf der Exaktheit des Funktors $L(\,\cdot\,,I)$ für injektives I.
Die untenstehende Charakterisierung der Eigenschaft (Ω) für nukleare Frécheträume kann man wegen $s'\widetilde{\otimes}_\pi\,\cdot\;=L(s,\,\cdot\,)$ auch sofort ohne jeden Aufwand aus den Vogt'schen Resultaten [Vog7, Theorem 2.5 b) und 4.9] folgern.

Satz 5.2.8 Für einen nuklearen Fréchetraum F sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) F hat die Eigenschaft (Ω).

b) $s'\widetilde{\otimes}_\pi F$ ist bornologisch.

c) $\mathrm{Tor}_\pi^1(s', F) = 0$.

Beweis: Wir betrachten den nuklearen (DF)-Raum $s' = k^1(A)$ mit $A = (j^k)_{j,k}$.
a) $\Rightarrow$ b): Da $((s')', s) = (s, s) \in (DN) \times (\Omega)$ ist, gilt die Bedingung d) in Theorem 5.2.1, vgl. auch Bemerkung 6.1.5 und [Vog1, Theorem 5.1]. Also ist $s'\widetilde{\otimes}_\pi s$ bornologisch. Die Behauptung folgt damit aus der vorigen Bemerkung 5.2.7. Man kann natürlich auch Theorem 5.2.1 direkt auf das Paar (s', F) anwenden.
b) $\Rightarrow$ c) folgt aus Theorem 5.2.1.
c) $\Rightarrow$ a): Diese Implikation folgert man am besten aus [Vog1, Theorem 4.1]. $\square$

6 $\mathcal{A} - (\Omega)$-Situationen

In [Vog5] benutzt D. Vogt eine Methode von H. J. Petzsche ([Pet]) zur Zerlegung nuklearer Operatoren in (DN_φ), (Ω_ψ)-artigen Situationen, um grob gesprochen die Zerfallungsgüte von kurzen exakten Sequenzen gradierter nuklearer Frécheträume zu messen. Wir wollen uns nun dieser Methode bedienen, um in solchen Fällen Elementartensoren zu zerlegen und $\mathrm{Tor}^1_\pi(E, F) = 0$ zu charakterisieren. In einem zweiten Abschnitt werden wir dann unsere Resultate in typischen Situationen anwenden.

6.1 Zerlegungslemma

Definition 6.1.1 a) Ein (DF)-Raum E habe die *Eigenschaft* $\mathcal{A}$, falls E'_b die Eigenschaft (DN) besitzt.

b) Ein vollständiger (LB)-Raum $E = \mathrm{ind}_N E_N$ heißt *schwach-azyklisch*, falls $\mathrm{proj}^1 E'_N = 0$ gilt.

Es sei angemerkt, daß sich die (DN)-Bedingung aus der Eigenschaft $\mathcal{A}$ herauskristallisierte, und daß die Bedingung unter b) von technischer Natur ist, wie wir gleich sehen werden. Wir nehmen im folgenden wieder an, daß $B_1 = B_{E_1} \subseteq B_2 = B_{E_2} \subseteq \cdots$ eine Fundamentalfolge von beschränkten, abgeschlossenen Mengen für den regulären (LB)-Raum $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ist.

Lemma 6.1.2 Es sei E ein schwach-azyklischer (LB)-Raum mit der Eigenschaft $\mathcal{A}$. Dann gibt es ein N, so daß für alle $M \geq N$ und $\theta \in]0, 1[$ ein $K \geq M$ und $S > 0$ existieren mit

$$\|x'\|^*_M \leq S \cdot (\|x'\|^*_K)^\theta \cdot (\|x'\|^*_N)^{1-\theta}$$

für alle $x' \in E'_K$.

Beweis: Wegen $\mathrm{proj}^1 E'_N = 0$ folgt nach einer Variante des Theorems von Palamodov-Retakh, daß für alle K ein $\widetilde{K} \geq K$ existiert mit

$$(i^{\widetilde{K}}_K)' E'_{\widetilde{K}} \subseteq i'_K(E') + \varepsilon \cdot D_K$$

für alle $\varepsilon > 0$, wobei D_K eine beschränkte Banachkugel in E'_K ist ([Vog4, Bemerkung nach Theorem 2.1]). Insbesondere existiert für alle K ein $\widetilde{K} \geq K$ mit

$$(i^{\widetilde{K}}_K)' E'_{\widetilde{K}} \subseteq \overline{i'_K(E')}^{E'_K}.$$

Es gelte nun die Eigenschaft $\mathcal{A}$ mit den Quantoren wie in (DN). Zu K wählen wir ein $\widetilde{K} \geq K$ wie oben. Sei nun $x' \in E'_{\widetilde{K}}$ beliebig. Dann finden wir nach obigem eine Folge $(x'_L)_L$ in E' mit $(i^{\widetilde{K}}_K)'(x') = \lim_{L\to\infty} i'_K(x'_L)$. Insgesamt folgt mit der Eigenschaft $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\|x'\|^*_M &= \|(i^{\widetilde{K}}_M)'(x')\|^*_M \\
&= \|(i^K_M)' \circ (i^{\widetilde{K}}_K)'(x')\|^*_M \\
&= \lim_{L\to\infty} \|i'_M(x'_L)\|^*_M \\
&\leq \limsup_{L\to\infty} S \cdot (\|i'_K(x'_L)\|^*_K)^\theta \cdot (\|i'_N(x'_L)\|^*_N)^{1-\theta} \\
&= S \cdot (\|(i^{\widetilde{K}}_K)'(x')\|^*_K)^\theta \cdot (\|(i^{\widetilde{K}}_N)'(x')\|^*_N)^{1-\theta} \\
&\leq (S \cdot \|(i^{\widetilde{K}}_K)'\|)^\theta) \cdot (\|x'\|^*_{\widetilde{K}})^\theta \cdot (\|x'\|^*_N)^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Behauptung. □

Wir benötigen noch das

Lemma 6.1.3 Sei $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein schwach-azyklischer (LB)-Raum mit der Eigenschaft $\mathcal{A}$ und F ein Fréchetraum mit der Eigenschaft (Ω). Dann gilt:

α) Es gibt ein N, so daß für alle $M \geq N$ und $\theta \in]0,1[$ ein $K \geq M$ und $C_2 > 0$ existieren mit

$$\|x'\|_M^* \leq \max\left\{\frac{1}{C_2} \cdot r^{1-\frac{1}{\theta}} \cdot \|x'\|_K^*,\, r \cdot \|x'\|_N^*\right\}$$

für alle $x' \in E'_K$, $r \geq 1$.

β) Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß für alle $k \geq m$ ein $\delta \in]0,1[$ und $C_1 > 0$ existieren mit

$$\|y'\|_m^* \leq \max\left\{C_1 \cdot s^{\frac{1}{\delta}-1} \cdot \|y'\|_k^*,\, \frac{1}{s} \cdot \|y'\|_n^*\right\}$$

für alle $y' \in F'_n$, $s \geq 1$.

Beweis: Wir zeigen zunächst (β). Nach Voraussetzung haben wir die Abschätzung

$$\|y'\|_m^* \leq C \cdot (\|y'\|_k^*)^\delta \cdot (\|y'\|_n^*)^{1-\delta}$$

für alle $y' \in F'_n$. Wie man leicht nachrechnet, gilt für $a, b > 0$

$$\min_{t>0}\,(t \cdot a + t^{1-\frac{1}{\delta}} \cdot b) = \delta^{-1} \cdot (\delta^{-1} - 1)^{\delta-1} \cdot a^{1-\delta} \cdot b^\delta.$$

Daher ist obige Abschätzung äquivalent dazu, daß es eine Konstante $C' > 0$ gibt mit

$$\|y'\|_m^* \leq C' \cdot (t \cdot \|y'\|_n^* + t^{1-\frac{1}{\delta}} \cdot \|y'\|_k^*)$$

für alle $t > 0$, $y' \in F'_n$. Mit $s := \frac{1}{2 \cdot C' \cdot t}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\|y'\|_m^* &\leq \frac{1}{2 \cdot s} \cdot \|y'\|_n^* + C' \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot C' \cdot s}\right)^{1-\frac{1}{\delta}} \cdot \|y'\|_k^* \\ &\leq \max\left\{\frac{1}{s} \cdot \|y'\|_n^*,\, (2 \cdot C')^{\frac{1}{\delta}} \cdot s^{\frac{1}{\delta}-1} \cdot \|y'\|_k^*\right\}.\end{aligned}$$

Mit $C_1 := (2 \cdot C')^{\frac{1}{\delta}}$ erhalten wir (β).
Kommen wir nun zu (α). Nach Lemma 6.1.2 gilt

$$\|x'\|_M^* \leq S \cdot (\|x'\|_K^*)^\theta \cdot (\|x'\|_N^*)^{1-\theta}$$

für alle $x' \in E'_K$. Analog zu obigem finden wir ein $S' > 0$ mit

$$\|x'\|_M^* \leq S' \cdot (t \cdot \|x'\|_N^* + t^{1-\frac{1}{\theta}} \cdot \|x'\|_K^*)$$

für alle $t > 0$, $x' \in E'_K$. Es sei $C_2 := (2 \cdot S')^{-\frac{1}{\theta}}$. Mit $r := 2 \cdot S' \cdot t$ folgt auch (α). □

Die Bedingung γ) in der folgenden Bemerkung entpuppt sich als sehr günstig, um Elementartensoren zu zerlegen.

Bemerkung 6.1.4 Setzen wir in α) mit $\varphi(r) := C_2 \cdot r^{\frac{1}{\theta}-1}$ und in β) mit $\psi(s) := C_1 \cdot s^{\frac{1}{\delta}-1}$ an und wählen in α) zudem θ so klein, daß $\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\theta} + 1 < 0$ gilt, so folgt mit $r_j := 2^j \uparrow +\infty$ und $s_j := 2^{(1+\delta)\cdot j} \uparrow +\infty$:

γ) $\sum_{j=1}^\infty \frac{r_j}{s_{j-1}} < +\infty$ und $\sum_{j=1}^\infty \frac{\psi(s_j)}{\varphi(r_j)} < +\infty$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{r_j}{s_{j-1}} = 2^{j-(1+\delta)\cdot(j-1)} = 2^{1+\delta} \cdot (2^{-\delta})^j$$

und folglich $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_j}{s_{j-1}} < +\infty$. Mit $C := \frac{C_1}{C_2}$ erhalten wir wegen $\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\theta} + 1 < 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(s_j)}{\varphi(r_j)} &= C \cdot 2^{(1+\delta)\cdot j \cdot (\frac{1}{\delta}-1) - j\cdot(\frac{1}{\theta}-1)} \\
&= C \cdot 2^{j\cdot\frac{1}{\delta}+j-j-j\cdot\delta-j\cdot\frac{1}{\theta}+j} \\
&= C \cdot (2^{\frac{1}{\delta}-\delta-\frac{1}{\theta}+1})^j \\
&\leq C \cdot (2^{-\delta})^j
\end{aligned}$$

und damit $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(s_j)}{\varphi(r_j)} < +\infty$. □

Wir wollen nun zum besseren Verständnis eine Verbindung zu unseren S_2-Bedingungen herleiten:

Bemerkung 6.1.5 Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.1.3 gilt:

$(S_2^+)_0$ Für alle n existiert ein N und ein $m \geq n$, so daß für alle $M \geq N$ und $k \geq m$ es ein $K \geq M$ gibt, so daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $S > 0$ existiert, so daß für alle $x' \in E'_K$ und $y' \in F'_n$ gilt:

$$\|x'\|_M^* \|y'\|_m^* \leq \max\left\{S \cdot \|x'\|_K^* \|y'\|_k^*,\ \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \|y'\|_n^*\right\}.$$

Man beachte hierbei die Reihenfolge der Quantoren und vergleiche diese mit denen von $(S_2^*)_0$.

Beweis: Wir zeigen $(S_2^+)_0$ mittels der modifizierten dualen (DN) (Lemma 6.1.2) und der Bedingung (Ω). Sei n vorgegeben. Wir wählen uns ein N nach (DN) und $m \geq n$ nach (Ω). Seien $M \geq N$ und $k \geq m$ beliebig, $\delta \in]0,1[$ und $C > 0$ nach (Ω) gewählt. Wir setzen $\theta := \delta$ und wählen uns $K \geq M$ und $\widetilde{S} > 0$ nach (DN). Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für $x' \in E'_K$, $y' \in F'_n$ entweder

a) $\|x'\|_M^* \cdot \|y'\|_m^* \leq \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \cdot \|y'\|_n^*$ oder

b) $\|x'\|_M^* \cdot \|y'\|_m^* > \varepsilon \cdot \|x'\|_N^* \cdot \|y'\|_n^*$.

Im Fall a) sind wir fertig. Gilt b), so folgt mit (DN) und (Ω):

$$\begin{aligned}
\|x'\|_M^* \cdot \|y'\|_m^* &\leq C \cdot \widetilde{S} \cdot (\|x'\|_K^*)^\theta \cdot (\|x'\|_N^*)^{1-\theta} \cdot (\|y'\|_k^*)^\theta \cdot (\|y'\|_n^*)^{1-\theta} \\
&\leq \frac{C \cdot \widetilde{S}}{\varepsilon^{1-\theta}} \cdot (\|x'\|_K^* \cdot \|y'\|_k^*)^\theta \cdot (\|x'\|_M^* \cdot \|y'\|_m^*)^{1-\theta}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\|x'\|_M^* \cdot \|y'\|_m^* \leq \left(\frac{C \cdot \widetilde{S}}{\varepsilon^{1-\theta}}\right)^{\frac{1}{\theta}} \cdot \|x'\|_K^* \cdot \|y'\|_k^*.$$

Setzen wir $S := \left(\frac{C\cdot\widetilde{S}}{\varepsilon^{1-\theta}}\right)^{\frac{1}{\theta}}$, so schließt das den Beweis ab. □

Kommen wir zurück zum Zerlegungslemma dieses Abschnitts:

Lemma 6.1.6 Sei $E = \operatorname{ind}_N E_N$ ein schwach-azyklischer (LB)-Raum mit der Eigenschaft $\mathcal{A}$ und F ein Fréchetraum mit der Eigenschaft (Ω). Dann lassen sich Elementartensoren zerlegen, d.h. es gilt:

$(S_3^{\otimes})_0$ Für alle n existiert ein $m \geq n$, so daß es für alle $k \geq m$ ein N gibt, so daß für alle $M \geq N$ und $\varepsilon > 0$ ein $K \geq M$ und ein $S > 0$ existiert mit

$$\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_m^n (B_{E_M} \otimes B_{F_m}) \subseteq S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_k^n (B_{E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k}) + \varepsilon \cdot B_{E_N \widetilde{\otimes}_\pi F_n}.$$

Beweis: Die Quantorenreihenfolge in $(S_3^{\otimes})_0$ erlaubt es uns Bemerkung 6.1.4 anzuwenden, so daß wir α), β) und γ) voraussetzen können. Im folgenden seien φ und ψ wie in Bemerkung 6.1.4.
Durch weglassen von Summanden können wir annehmen, daß $4 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_j}{s_{j-1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt, und s_0 so klein gewählt ist, daß $\rho_m^n(U_m) \subseteq \frac{2}{s_0} \cdot U_n$ gilt, ohne die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(s_j)}{\varphi(r_j)} < +\infty$ zu gefährden. Hierbei bezeichnet U_j den abgeschlossenen Einheitsball in F_j.
Es sei $A = x \otimes y \in B_{E_M} \otimes B_{F_m}$. Aus α) folgt durch zweimaliges Polarisieren bzgl. des dualen Paares $\langle E_K, E'_K \rangle$:

$$B_M \subseteq 2 \cdot \frac{1}{\varphi(r)} \cdot B_K + r \cdot B_N$$

für alle $r \geq 1$ und aus β) erhalten wir durch zweimaliges Polarisieren bzgl. des dualen Paares $\langle F_n, F'_n \rangle$:

$$\rho_m^n(U_m) \subseteq \psi(s) \cdot \rho_k^n(U_k) + 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot U_n$$

für alle $s \geq 1$. Für $j \in \mathbb{N}$ wählen wir uns $y_j \in \psi(s_j) \cdot U_k$, so daß

$$\rho_m^n(y) - \rho_k^n(y_j) \in \frac{2}{s_j} \cdot U_n$$

gilt und setzen $z_j := y_j - y_{j-1}$. Wegen $\psi(s_{j-1}) \leq \psi(s_j)$ ist dann $z_j \in 2 \cdot \psi(s_j) \cdot U_k$. Mit $s_{j-1} \leq s_j$ folgt weiter

$$\rho_k^n(z_j) = (\rho_m^n(y) - \rho_k^n(y_{j-1})) - (\rho_m^n(y) - \rho_k^n(y_j)) \in \frac{4}{s_{j-1}} \cdot U_n.$$

Des weiteren können wir $y_0 := 0$ annehmen (wegen $\rho_m^n(y) \in \rho_m^n(U_m) \subseteq \frac{2}{s_0} \cdot U_n$ ist das okay). Mit $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s_j} < +\infty$ folgt dann

$$\rho_m^n(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_k^n(z_j).$$

Für $j \in \mathbb{N}$ seien $x_j \in r_j \cdot B_N$, so daß

$$x - x_j \in 2 \cdot \frac{1}{\varphi(r_j)} \cdot B_K$$

gilt. Wir setzen

$$\widetilde{B} := \sum_{j=1}^{\infty} (x - x_j) \otimes z_j \quad \text{und} \quad \widetilde{C} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes \rho_k^n(z_j).$$

Dann folgt $\|\widetilde{B}\|_{E_K \widetilde{\otimes}_\pi F_k} \leq 4 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(s_j)}{\varphi(r_j)} < +\infty$ und $\|\widetilde{C}\|_{E_N \widetilde{\otimes}_\pi F_n} \leq 4 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_j}{s_{j-1}} \leq \varepsilon$.
Mit $C := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \widetilde{C}$, $S := 4 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(s_j)}{\varphi(r_j)}$ und $B := \frac{1}{S} \cdot \widetilde{B}$ erhalten wir letztendlich

$$\begin{aligned}
S \cdot \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_k^n(B) + \varepsilon \cdot C &= \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_k^n(\widetilde{B}) + \widetilde{C} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (x - x_j) \otimes \rho_k^n(z_j) + \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes \rho_k^n(z_j) \\
&= x \otimes \sum_{j=1}^{\infty} \rho_k^n(z_j) \\
&= x \otimes \rho_m^n(y) \\
&= \mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi \rho_m^n(A),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Wir wollen unsere Ergebnisse zusammenfassen:

Theorem 6.1.7 Sei $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein schwach-azyklischer (LB)-Raum mit der Eigenschaft $\mathcal{A}$ und F ein Fréchetraum mit der Eigenschaft (Ω). Weiter gelte

$$\mathrm{ind}_N\, E_N \widetilde{\otimes}_\pi F_n = E \widetilde{\otimes}_\pi F_n$$

für ein Fundamentalsystem (F_n, ρ_m^n) von Banachräumen für F. Dann ist $\mathrm{proj}^1 E \widetilde{\otimes}_\pi F_n = 0$. Ist F zudem lokal $E \widetilde{\otimes}_\pi \cdot$-azyklisch, so ist $\mathrm{Tor}_\pi^1(E, F) = 0$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Lemma 6.1.6 und Satz 3.3.3. □

6.2 Anwendungen

Als unmittelbare Folgerung aus Theorem 6.1.7, Satz 4.3.2 und Beispiel 3.2.5 1) erhalten wir

Satz 6.2.1 Sei E ein schwach-azyklischer (LB)-Raum mit der Eigenschaft $\mathcal{A}$, F ein nuklearer Fréchetraum mit der Eigenschaft (Ω) und α eine Tensornorm. Dann ist $\mathrm{Tor}_\alpha^1(E, F) = 0$.

Mit Theorem 4.3.6 iii) folgt weiter das Vogtsche Resultat [Vog8, Satz 4.2], vgl. auch [Vog6, Theorem 7.5]:

Korollar 6.2.2 Die Voraussetzungen seien wie im Satz zuvor. Dann ist für jede exakte nukleare $\mathcal{FR}$-Sequenz

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

die $E \widetilde{\otimes}_\alpha \cdot$-tensorierte Sequenz

$$0 \to E \widetilde{\otimes}_\alpha F \to E \widetilde{\otimes}_\alpha G \to E \widetilde{\otimes}_\alpha H \to 0$$

topologisch exakt.

Als weitere Folgerung halten wir eine der möglichen Charakterisierungen der Eigenschaft $\mathcal{A}$ fest:

Satz 6.2.3 Für einen schwach-azyklischen (LB)-Raum E sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) E hat die Eigenschaft $\mathcal{A}$.

b) $\mathrm{Tor}_\pi^1(E, s) = 0$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) folgt aus Satz 6.2.1.
b) $\Rightarrow$ a) Nach E. Borel existiert eine exakte nukleare $\mathcal{FR}$-Sequenz

$$0 \to s \longrightarrow s \xrightarrow{q} \omega \to 0$$

([MeiVog, Lemma 31.3]). Aus der langen exakten Kohomologie-Sequenz folgt also, daß es einen Epihomomorphismus $q : s \to \omega$ gibt, so daß $\mathrm{id}_E \widetilde{\otimes}_\pi q$ surjektiv ist. Nach [Vog8, Proposition 4.5] hat dann E die Eigenschaft $\mathcal{A}$. □

Sei nun $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir wollen lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$ betrachten, welche den folgenden beiden Bedingungen genügen:

1) $P(D)$ ist surjektiv (PDO1),

2) Der Nullraum $N(\Omega) := \ker(P(D))$ hat die Eigenschaft (Ω) (PDO2).

Es ist ein offenes Problem, ob (PDO2) nicht automatisch erfüllt ist. Für einen vollständigen lokalkonvexen Raum E notieren wir mit $\mathcal{E}(\Omega; E)$ den Raum der beliebig oft differenzierbaren E-wertigen Funktionen auf Ω und beachten $\mathcal{E}(\Omega) \widetilde{\otimes}_\varepsilon E = \mathcal{E}(\Omega; E)$ ([Tre, Theorem 44.1]). Aus Korollar 6.2.1 folgt:

Korollar 6.2.4 Es gelte (PDO1) und (PDO2). Weiter sei E ein schwach-azyklischer (LB)-Raum mit der Eigenschaft $\mathcal{A}$. Dann ist die Abbildung

$$P(D)\widetilde{\otimes}_\varepsilon \mathrm{id}_E : \mathcal{E}(\Omega)\widetilde{\otimes}_\varepsilon E = \mathcal{E}(\Omega; E) \to \mathcal{E}(\Omega)\widetilde{\otimes}_\varepsilon E = \mathcal{E}(\Omega; E)$$

surjektiv, d.h. die vektorwertige Situation „$P(D)f = g$" ist für alle rechte Seiten $g \in \mathcal{E}(\Omega; E)$ lösbar.

Positive Beispiele für (PDO1) und (PDO2) sind die untenstehenden.

Beispiel 6.2.5 In den folgenden Fällen sind (PDO1) und (PDO2) erfüllt:

a) $P(D)$ ist elliptisch.

b) Ω ist konvex.

Beweis: Zu a) siehe [Vog9, Proposition 2.5 b)].
Zu b) siehe [Wie, Proposition 2.2.6]. Wir wollen den Beweis für (PDO2) für irreduzibles P ausführen. Da Ω konvex ist, gilt nach [MeiTayVog, 4.3] mit $V := \{ z \in \mathbb{C}^n : P(-z) = 0 \}$ die Dualität:

$$N(\Omega)'_b \cong \{ f \in \mathcal{H}(V) : \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } \|f\|^*_m := \sup_{z\in V} |f(z)| \exp(-H_m(Im(z)) - m\log(1 + |z|^2)) < \infty \}.$$

Hierbei ist

$$H_m(y) := \sup_{w\in\overline{\Omega}_m} \langle w, y\rangle = \sup_{w\in\overline{\Omega}_m} \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot y_j$$

das m-te Trägerfunktional zu einer konvexen Ausschöpfung $(\Omega_m)_m$ von Ω mit relativ kompakten Ω_m. Durch Translation in den Ursprung können wir o.E. $0 \in \Omega_1$ annehmen. Nach obigem müssen wir also noch folgendes nachweisen: Für alle n gibt es ein m, so daß für alle k ein $\delta \in]0, 1[$ und ein $C > 0$ existiert mit

$$\|f\|^*_m \le C \cdot (\|f\|^*_k)^\delta \cdot (\|f\|^*_n)^{1-\delta}$$

für alle $f \in \mathcal{H}(V)$. Dazu sei $n < m < k$ fest. Es reicht zu zeigen, daß es ein $\delta \in]0, 1[$ und $C > 0$ gibt mit

$$\begin{aligned}&\exp(-H_m(Im(z)) - m \cdot \log(1 + |z|^2))\\ &\le C \cdot \exp(-H_k(Im(z)) - k \cdot \log(1 + |z|^2))^\delta \cdot \exp(-H_n(Im(z)) - n \cdot \log(1 + |z|^2))^{1-\delta}\end{aligned}$$

bzw. nach äquivalenter Umformung

$$\begin{aligned}&\Big(\delta \cdot H_k(Im(z)) + (1-\delta) \cdot H_n(Im(z)\Big) + \Big(\delta \cdot k \cdot \log(1 + |z|^2) + (1-\delta) \cdot n \cdot \log(1 + |z|^2)\Big)\\ &\le H_m(Im(z)) + m \cdot \log(1 + |z|^2) + \log(C).\end{aligned}$$

Wählen wir ein δ mit $\delta \cdot k + (1-\delta) \cdot n \le m$, so bleibt nach der Definition der Trägerfunktionale H_m nur noch zu zeigen, daß ein δ (kleiner als das obige) existiert mit

$$\sup_{w\in\delta\cdot\overline{\Omega}_k} \langle w, y\rangle \quad + \sup_{w\in(1-\delta)\cdot\overline{\Omega}_n} \langle w, y\rangle \le \sup_{w\in\overline{\Omega}_m} \langle w, y\rangle$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\|_2 = 1$. Dazu sei δ_1 so klein, daß ein $r > 1$ existiert mit $r \cdot (1-\delta_1) \cdot \overline{\Omega}_n \subseteq \overline{\Omega}_m$. Für $\delta \in]0, \delta_1[$ folgt dann

$$\sup_{w\in(1-\delta)\cdot\overline{\Omega}_n} \langle w, y\rangle \le \frac{1}{r} \cdot \sup_{w\in\overline{\Omega}_m} \langle w, y\rangle$$

für alle y mit $\|y\|_2 = 1$. Als nächstes zeigen wir, daß es ein $\delta_2 \le \delta_1$ (unabhängig von y) gibt mit

$$\sup_{w \in \delta_2 \cdot \overline{\Omega}_k} \langle w, y \rangle \le (1 - \frac{1}{r}) \cdot \sup_{w \in \overline{\Omega}_m} \langle w, y \rangle,$$

was den Beweis dann mit obiger Abschätzung abschließt. Da $\overline{\Omega}_k$ beschränkt ist, reicht es dafür zu zeigen, daß

$$\inf_{\|y\|_2=1} \sup_{w \in \overline{\Omega}_m} \langle w, y \rangle > 0$$

ist. Wegen $0 \in \Omega_1$ finden wir ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \cdot B \subseteq \overline{\Omega}_m$, wobei $B = \{\, y : \|y\|_2 = 1 \,\}$ der Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ sei. Also gilt

$$\inf_{\|y\|_2=1} \sup_{w \in \overline{\Omega}_m} \langle w, y \rangle \ge \inf_{\|y\|_2=1} \sup_{w \in \varepsilon \cdot B} \langle w, y \rangle \ge \inf_{\|y\|_2=1} \langle \varepsilon \cdot y, y \rangle = \varepsilon.$$

$\square$

Anhang

Wir wollen hier kurz die Vorgehensweise, um notwendige und hinreichende Bedingungen für das Verschwinden von $\mathrm{Tor}^1_\alpha(E,F)$ zu erhalten, im Falle des projektiven Tensorprodukts $\alpha = \pi$ und der Nuklearität von F skizzieren. Gleichzeitig findet der Leser hier eine Übersicht der wichtigsten S_2- und S_3-Bedingungen in Quantorschreibweise. Im folgenden sei $E = \mathrm{ind}_N E_N$ ein echter, vollständiger (LB)-Raum mit Fundamentalfolge von beschränkten, abgeschlossenen Mengen $B_1 = B_{E_1} \subseteq B_2 = B_{E_2} \subseteq \cdots$ und F ein nuklearer Fréchetraum mit Fundamentalsystem von Banachräumen (F_n, ρ^n_m). Weiter sei $B_{n,N} := C_{n,N} \cdot \overline{B_{E_N \otimes_\pi F_n}}^{E\widetilde{\otimes}_\pi F_n}$ mit geeigneten Konstanten $C_{n,N} \geq N$ und $U_n := B_{F_n}$.

$$\mathrm{Tor}^1_\pi(E,F) \overset{F \text{ lok.inj.}}{=} \mathrm{proj}^1\, E\widetilde{\otimes}_\pi F_n = 0$$

$\Downarrow$ Palamodov-Retakh

$$(\tilde{S_2}) \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{\substack{N\\ m\geq n}}{\exists} \; \underset{k\geq m}{\forall} \; \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_m(E\widetilde{\otimes}_\pi F_m) \subseteq \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k(E\widetilde{\otimes}_\pi F_k) + B_{n,N}$$

$\Downarrow$ G.F.S.

$$(S_2) \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{\substack{N\\ m\geq n}}{\exists} \; \underset{\substack{M\geq N\\ k\geq m}}{\forall} \; \underset{\substack{K\geq M\\ S>0}}{\exists} \; \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_m(B_{m,M}) \subseteq S \cdot (\mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k(B_{k,K}) + B_{n,N})$$

$\Downarrow$ Vertauschungseigenschaft

$$(S_2^{K\prime}) \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{\substack{N\\ m\geq n}}{\exists} \; \underset{\substack{M\geq N\\ k\geq m}}{\forall} \; \underset{\substack{K\geq M\\ S>0}}{\exists} \; \underset{x'\in E'_K}{\forall} \; \|x'\|^*_M \cdot \rho^n_m(U_m) \subseteq S \cdot (\|x'\|^*_K \cdot \rho^n_k(U_k) + \|x'\|^*_N \cdot U_n)$$

$\Downarrow$ E echt

$$(S_2^{K\prime})_0 \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{\substack{N\\ m\geq n}}{\exists} \; \underset{\substack{M\geq N\\ k\geq m, \varepsilon>0}}{\forall} \; \underset{\substack{K\geq M\\ S>0}}{\exists} \; \underset{x'\in E'_K}{\forall} \; \|x'\|^*_M \cdot \rho^n_m(U_m) \subseteq S \cdot \|x'\|^*_K \cdot \rho^n_k(U_k) + \varepsilon \cdot \|x'\|^*_N \cdot U_n$$

$\Downarrow$

$$(S_3^{K\prime})_0 \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{m\geq n}{\exists} \; \underset{k\geq m}{\forall} \; \underset{N}{\exists} \; \underset{\substack{M\geq N,\\ \varepsilon>0}}{\forall} \; \underset{\substack{K\geq M,\\ S>0}}{\exists} \; \underset{x'\in E'_K}{\forall} \; \|x'\|^*_M \cdot \rho^n_m(U_m) \subseteq S \cdot \|x'\|^*_K \cdot \rho^n_k(U_k) + \varepsilon \cdot \|x'\|^*_N \cdot U_n$$

$\Downarrow$ Polarisation

$$(Pol) \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{m\geq n}{\exists} \; \underset{k\geq m}{\forall} \; \underset{N}{\exists} \; \underset{\substack{M\geq N,\\ \varepsilon>0}}{\forall} \; \underset{\substack{K\geq M,\\ S>0}}{\exists} \; \underset{y'\in F'_n}{\forall} \; \|y'\|^*_m \cdot B_M \subseteq S \cdot \|y'\|^*_k \cdot B_K + \varepsilon \cdot \|y'\|^*_n \cdot B_N$$

$\Downarrow$ Zerlegungslemma

$$(S_3^{\otimes})_0 \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{m\geq n}{\exists} \; \underset{k\geq m}{\forall} \; \underset{N}{\exists} \; \underset{\substack{M\geq N,\\ \varepsilon>0}}{\forall} \; \underset{\substack{K\geq M,\\ S>0}}{\exists} \; \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_m(B_{E_M} \otimes B_{F_m}) \subseteq S \cdot \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k(B_{E_K\widetilde{\otimes}_\pi F_k}) + \varepsilon B_{E_N\widetilde{\otimes}_\pi F_n}$$

$\Downarrow$

$$(S_3^{\widetilde{\otimes}})_0 \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{m\geq n}{\exists} \; \underset{k\geq m}{\forall} \; \underset{N}{\exists} \; \underset{\substack{M\geq N,\\ \varepsilon>0}}{\forall} \; \underset{\substack{K\geq M,\\ S>0}}{\exists} \; \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_m(B_{E_M\widetilde{\otimes}_\pi F_m}) \subseteq S \cdot \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k(B_{E_K\widetilde{\otimes}_\pi F_k}) + \varepsilon \cdot B_{E_N\widetilde{\otimes}_\pi F_n}$$

$\Downarrow$

$$(S_3)_0 \qquad \underset{n}{\forall} \; \underset{m\geq n}{\exists} \; \underset{k\geq m}{\forall} \; \underset{N}{\exists} \; \underset{\substack{M\geq N,\\ \varepsilon>0}}{\forall} \; \underset{\substack{K\geq M,\\ S>0}}{\exists} \; \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_m(B_{m,M}) \subseteq S \cdot \mathrm{id}\widetilde{\otimes}_\pi \rho^n_k(B_{k,K}) + \varepsilon \cdot B_{n,N}$$

$\Downarrow$ Hinr. Bed. für $\mathrm{proj}^1 \mathcal{X} = 0$

$$\mathrm{Tor}^1_\pi(E,F) \overset{F \text{ lok.inj.}}{=} \mathrm{proj}^1\, E\widetilde{\otimes}_\pi F_n = 0$$

Literatur

[BMS] **Bierstedt, K.D., Meise, R., Summers, W.H.:** *Köthe sets and Köthe sequence spaces.* Functional Analysis: Holomorphy and Approximation Theory, North-Holland Math. Studies 71 (1982), S. 27-91

[BraVog] **Braun, R., Vogt, D.:** *A sufficient condition for* $\mathrm{proj}^1 \mathcal{X} = 0$. Mich. Math. J. 44(1) (1997), S. 149-156

[DefFlo1] **Defant, A., Floret, K.:** *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland Mathematics Studies 176 (1993)

[DefFlo2] **Defant, A., Floret, K.:** *Topological tensor products and the approximation property of locally convex spaces.* Bull. Soc. Roy. Sci. de Liége 58.1 (1989), S. 29-51

[DieZar] **Dierolf, S., Zarnadze, D.N.:** *A note in strictly regular Fréchet spaces.* Arch. Math. 42 (1984), S. 549-556

[FloWlo] **Floret, K., Wloka, J.:** *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume.* Lecture Notes in Mathematics 56 (1968)

[FreWen] **Frerick, L., Wengenroth, J.:** *A sufficient condition for vanishing of the derived projective limit functor.* Arch. Math. 67 (1996), S. 296-301

[Gro] **Grothendieck, A.:** *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires.* Mem. Am. Math. Soc. 16, 140 p. (1955).

[Har] **Harksen, J.:** *Tensornormtopologien.* Dissertation, Kiel (1979)

[Hol1] **Hollstein, R.:** *Inductive limits and* ε*-tensor products.* J. Reine Angew. Math. 319 (1980), S. 38-62

[Hol2] **Hollstein, R.:** *Extension and lifting of continuous linear mappings in locally convex spaces.* Math. Nachr. 108 (1982), p. 275-297

[Hol3] **Hollstein, R.:** *Tensor sequences and inductive limits with local partition of unity.* Manuscripta math. 52 (1985), p. 227-249

[Jar] **Jarchow, H.:** *Locally Convex Spaces.* B.G. Teubner, Stuttgart (1981)

[Kab] **Kaballo, W.:** *Liftingsätze für Vektorfunktionen und* (εL)*-Räume.* J. reine angew. Math. 309 (1979), S. 55-85

[KabVog] **Kaballo, W., Vogt, D.:** *Lifting-Probleme für Vektorfunktionen und* $\otimes$*-Sequenzen.* Manuscripta Mathematica 32, S. 1-26 (1980)

[Kar] **Karidopoulou, X.:** *Gradierte Fréchetträume.* Diplomarbeit BUGH-Wuppertal (2000)

[KroVog] **Krone, J., Vogt, D.:** *The splitting relation for Köthe spaces.* Math. Z. 190 (1985), S. 387-400

[Lan] **Langenbruch, M.:** Characterization of Surjective Partial Differential Operators on Spaces of Real Analytic Functions. Dedicated to Professor Dr. D. Vogt on the occasion of his 60th birthday. Preprint (2002).

[LinTza] **Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.:** Classical Banach Spaces. Lecture Notes in Mathematics 338 (1973)

[Man] **Mangino, E.:** *Productos Tensoriales de Espacios* (LF), (DF) *Y de Fréchet.* Dissertation (1996)

[MeiTayVog] **Meise, R., Taylor, B.A., Vogt, D.:** *Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continious linear right inverse.* Ann. Inst. Fourier 40, No. 3 (1990), S. 619-655

[MeiVog] **Meise, R., Vogt, D.:** *Einführung in die Funktionalanalysis.* Vieweg Verlag (1992)

[Mel] **Melikhov, S.N.:** *Absolutely convergent series in the canonical inductive limits.* Math. Notes 39 (1986), S. 475-480

[Pal] **Palamodov, V.P.:** *Homological methods in the theory of locally convex spaces.* Russian Math. Surveys 26 1 (1971), S. 1-64

[PerBon] **Pérez Carreras, P., Bonet, J.:** *Barrelled Locally Convex Spaces.* North-Holland Mathematics Studies 131 (1987)

[Per] **Peris, A.:** *Quasinormable spaces and the problem of topologies of Grothendieck.* Annales Acad. Sci. Fen. A. I 19 (1994), S. 167-203

[Pet] **Petzsche, H.J.:** *Some results of Mittag-Leffler type for vector functions and spaces of class* $\mathcal{A}$. Functional Analysis: Surveys and Recent Results II, North-Holland Math. Studies 38 (1980), S. 183-204

[Rot] **Rotman, J.:** *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press, Cambridge, MA. (1979)

[Tre] **Treves, F.:** *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press, New York (1967)

[Vog1] **Vogt, D.:** *On the functors* $\mathrm{Ext}^1(E,F)$ *for Fréchet spaces.* Studia Mathematica 85 (1987), S. 163-197

[Vog2] **Vogt, D.:** *Lectures on Projective Spectra of* (DF)*-Spaces.* Seminar lectures, AG Funktionalanalysis Düsseldorf/Wuppertal (1987)

[Vog3] **Vogt, D.:** *Regularity properties of* (LF)*-spaces.* Progress in Functional Analysis, North-Holland Math. Studies 170 (1992), S. 57-84

[Vog4] **Vogt, D.:** *Topics on projective spectra of* (LB)*-spaces.* Advances in the Theory of Fréchet spaces, Kluwer Academic Publishers (1989), S. 11-27

[Vog5] **Vogt, D.:** *Tame splitting pairs of type 0 and 1.* Dierolf, Susanne (ed.) et al., Functional analysis. Proceedings of the first international workshop held at Trier University, Germany, September 26–October 1, 1994. Berlin: de Gruyter (1996), S421-448

[Vog6] **Vogt, D.:** *Subspaces and quotient spaces of* (s). Funct. Anal.: Surv. and recent Results, Proc. Conf., Paderborn 1976, S. 167- 187 (1977)

[Vog7] **Vogt, D.:** *Some results on continuous linear maps between Frechet spaces.* Functional analysis: surveys and recent results III, Proc. Conf., Paderborn/Ger. 1983, North-Holland Math. Stud. 90 (1984), S. 349-381

[Vog8] **Vogt, D.:** *Tensorprodukte von* (F)*- und* (DF)*-Räumen und ein Fortsetzungssatz.* Preprint (1978)

[Vog9] **Vogt, D.:** *On the solvability of* $P(D)f = g$ *for vector valued functions.* Preprint (1983)

[Wei] **Weibel, Ch.:** *An introduction to homological Algebra.* Cambridge University Press (1994)

[Wen] **Wengenroth, J.:** *Derived functors in functional analysis.* Habilitationsschrift, Trier (2001)

[Wie] **Wiechert, G.:** *Dualitäts- und Strukturtheorie der Kerne von linearen Differentialoperatoren.* Dissertation, Wuppertal (1982)