Lokale Fortsetzbarkeit holomorpher Abbildungen im nicht-pseudokonvexen Fall

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

am Fachbereich 7 - Mathematik der
Bergischen Universität - Gesamthochschule Wuppertal

von Thorsten Hübschen

unter der Betreuung von

Prof. Dr. Klas Diederich

27. Mai 2002

Referent:	Prof. Dr. Klas Diederich, BUGH Wuppertal
Korreferent:	Prof. Dr. Dr. h.c. Alan Huckleberry, Ruhr-Universität Bochum
Tag der mündlichen Prüfung:	24. Mai 2002

Es gibt in dieser Welt einen einzigen Weg, auf welchem niemand gehen kann außer dir: Wohin er führt? Frage nicht, gehe ihn!

Friedrich Nietzsche

Once you have learned that even in the darkest times unconditional fighting always leads to a chance, you can take on life's challenges with much more courage.

José Carreras

Für
Hartmut, Evi
und
Franziska

Inhaltsverzeichnis

Wenn der Künstler aus metaphysischen Sphären in die Bereiche der konkreten Ursachen und zu den Realitäten der Formen herabsteigt, begegnet er auf halben Wege den Wissenschaftlern, die auf der Suche nach Ursachen, die sie in ihren Formen einzufangen gedenken, sich in die metaphysischen Sphären begeben.

Alexander Archipenko

Teil I
Vorbemerkungen

1 Einführung

1.1 Problemstellung

Eine der grundlegenden Problemstellungen der komplexen Analysis ist die Frage nach der Existenz von biholomorphen Abbildungen zwischen zwei gegebenen Gebieten D und D' im $\mathbb{C}^n$. Gibt es eine solche Abbildung $f : D \to D'$, so heißen D und D' biholomorph äquivalent. Zu der Lösung des obigen Problems gleichbedeutend ist daher eine Charakterisierung der Äquivalenzklassen von biholomorph äquivalenten Gebieten im $\mathbb{C}^n$.
Im Falle $n = 1$ wird das Abbildungsproblem für eine große Klasse von Gebieten durch den Riemannschen Abbildungssatz gelöst: Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $D \subsetneq \mathbb{C}$ ist biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe. Für $n > 1$ ist die Situation völlig anders. Nach einem Theorem von Poincaré und Reinhardt sind die beiden natürlichsten einfach zusammenhängenden Gebiete des $\mathbb{C}^2$, der Einheitsball B und der Einheitspolyzylinder Δ_2, *nicht* biholomorph äquivalent. Die Menge der biholomorphen Äquivalenzklassen derjenigen Gebiete, die in einer passenden Topologie 'nahe' am Einheitsball liegen, ist sogar überabzählbar.
Damit ist klar, daß zur Charakterisierung von biholomorphen Äquivalenzklassen nicht nur topologische Eigenschaften betrachtet werden können, sondern daß nach geeigneten geometrischen und analytischen Invarianten gesucht werden muß.
Ist von den betrachteten Gebieten D und D' bekannt, daß jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ auf Umgebungen $U = U(\overline{D})$ und $U' = U'(\overline{D'})$ zu einer biholomorphen Abbildung $\hat{f} : U \to U'$ fortsetzbar ist, so läßt sich die Untersuchung der (inneren) biholomorphen Äquivalenz von D und D' auf das Problem der (äußeren) biholomorphen Äquivalenz der Ränder ∂D und $\partial D'$ zurückführen. Die Untersuchung von Rändern, also von reellen Hyperflächen im $\mathbb{C}^n$, bietet den großen Vorteil, daß diese lokale geometrische Eigenschaften besitzen, die unter biholomorphen Abbildungen invariant sind. Daher ist die Frage nach der Fortsetzbarkeit biholomorpher Abbildungen ein zentraler

Aspekt des Abbildungsproblems. Im Fall $n = 1$ stehen die folgenden beiden zentralen Theoreme zur Verfügung:

Theorem I.1 (Carathéodory) *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete, deren Ränder Jordankurven sind. Dann läßt sich jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ zu einem Homöomorphismus $\hat{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ fortsetzen.*

Theorem I.2 [1] *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}$ reell-analytische Gebiete. Dann läßt sich jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ zu einer biholomorphen Abbildung $\hat{f} : U \to U'$ für passende Umgebungen $U = U(\overline{D})$ und $U' = U'(\overline{D'})$ fortsetzen.*

Zum Beweis von Theorem 1 wird im ersten Schritt mit dem Theorem von Carathéodory die stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung f festgestellt und danach mit dem Schwarzschen Reflexionsprinzip die holomorphe Fortsetzbarkeit von f gezeigt. Bei der Verallgemeinerung dieses Theorems auf den Fall $n > 1$ ergeben sich zwei Probleme:
Zum einen gilt das Theorem von Carathéodory nicht mehr in seiner allgemeinen Form, wie das folgende Resultat[2] von B.L.Fridman aus [32] zeigt:

Es gibt zwei biholomorph äquivalente, einfach zusammenhängende, stückweise glatte Gebiete $D, D \subset\subset \mathbb{C}^2$, für die sich keine biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ stetig nach $\overline{D}$ fortsetzen läßt.

Zum anderen gibt es aufgrund der komplizierteren geometrischen Verhältnisse für $n > 1$ kein einfaches Analogon zum Schwarzschen Reflexionsprinzip. Es war daher bis Anfang der 80er Jahre völlig unklar, wie eine Lösung zu den folgenden Fortsetzungsproblemen zu erzielen sei:

Globales Fortsetzungsproblem *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete. Unter welchen Voraussetzungen an D und D' läßt sich jede eigentliche holomorphe Abbildung $f : D \to D'$ holomorph auf eine Umgebung von $\overline{D}$ fortsetzen?*

Lokales stetiges Fortsetzungsproblem *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0) \subset \partial D'$ Randpunkte. Ferner seien $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ geeignete kleine offene Umgebungen. Unter welchen Voraussetzungen an $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ gibt es eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß sich f stetig auf $D \cup (\partial D \cap U)$ fortsetzen läßt?*

Lokales holomorphes Fortsetzungsproblem *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0) \subset \partial D'$ Randpunkte. Ferner seien $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ geeignete kleine offene Umgebungen. Unter welchen Voraussetzungen an $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ gibt es eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß sich f holomorph auf $D \cup (\partial D \cap U)$ fortsetzen läßt?*

---
[1] siehe beispielsweise [29], Satz 2.3

[2] siehe Seite 31, Beispiel 2

Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit sind die beiden lokalen Fortsetzungsprobleme.

1.2 Stand der Forschung

Mit den überraschenden Resultaten von G.M.Henkin [33] und C.Feffermann [28] begann 1974 eine intensive Forschungsarbeit an der Lösung der Fortsetzungsprobleme:

Theorem I.3 (Henkin) *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ streng pseudokonvexe Gebiete. Dann läßt sich jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ zu einer Hölder-stetigen Abbildung $\hat{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ fortsetzen.*

Theorem I.4 (Feffermann) *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ streng pseudokonvexe $\mathcal{C}^\infty$-glatte Gebiete. Dann läßt sich jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ zu einem $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus $\hat{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ fortsetzen.*

Ein Jahr später veröffentlichte S.Pinchuk [38] die erste Lösung des globalen Fortsetzungsproblems für streng pseudokonvexe Gebiete:

Theorem I.5 (Pinchuk) *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ streng pseudokonvexe reell-analytische Gebiete. Dann läßt sich jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ biholomorph auf passende Umgebungen von $\overline{D}$ und $\overline{D'}$ fortsetzen.*

Die Verallgemeinerung dieses Resultats auf den schwach pseudokonvexen Fall kann für zu stark entartete Leviformen, insbesondere für Levi-flache Ränder, nicht erwartet werden. Die passende geometrische Bedingung an die Ränder der betrachteten Gebiete fand J. D'Angelo [17] mit dem Konzept des endlichen Typs. Anschaulich bezeichnet der D'Angelo-Typ eines Randpunktes die maximale Berührungsordnung, die komplex-analytische Varietäten mit der betrachteten Hyperfläche haben können. Der D'Angelo-Typ ist somit eine quantitative Abstufung zwischen streng pseudokonvexen Randpunkten (Typ $= 2$) und Levi-flachen Randpunkten (Typ $= \infty$).
Für glatte Gebiete von endlichem D'Angelo-Typ haben K.Diederich, J.E.Fornæss, S.Catlin, S.Cho und andere in einer Reihe von Arbeiten positive Resultate im Sinne des Theorems von Carathéodory, also (Hölder-)stetige Fortsetzbarkeit von eigentlichen holomorphen Abbildungen, erzielt. Das erste allgemeine Fortsetzungsresultat für pseudokonvexe Gebiete endlichen Typs wurde dabei von K.Diederich/J.E.Fornæss in [21] durch eine Weiterentwicklung der Methoden von G.M.Henkin erzielt.
Um nun die holomorphe Fortsetzbarkeit zu zeigen, schien lange Zeit die erfolgversprechendste Methode die Benutzung von gewissen Regularitätseigenschaften der Bergmann-Projektionen von D und D' zu sein, die von S.Bell [6], [7] unter dem Namen Bedingung R und Q eingeführt wurden. Mit dieser Methode konnten von S.Baouendi/H.Jacobowitz/F.Treves [2], S.Baouendi/S.Bell/L.Rothschild [1] und S.Baouendi/L.Rothschild [3] einige Teilresultate erzielt werden, bis 1988 von K.Diederich/J.E.Fornæss [23] das allgemeine Resultat im schwach pseudokonvexen Fall für $n \geq 2$ mit Hilfe des Reflexionsprinzips bewiesen wurde:

Theorem I.6 *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvexe reell-analytische Gebiete. Dann läßt sich jede eigentliche holomorphe Abbildung $f : D \to D'$ holomorph auf eine Umgebung von $\overline{D}$ fortsetzen.*

Für einige spezielle Gebietsklassen konnten entsprechende Theoreme auch im nicht-pseudokonvexen Fall gezeigt werden, insbesondere von K.Diederich/J.E.Fornæss [20], [23] und S.Bell [8]. Als 1984 von D.Barrett [4] ein reell-analytisches (nicht-pseudokonvexes) Gebiet $D \subset\subset \mathbb{C}^2$ konstruiert wurde, welches *nicht* die Bedingungen R und Q erfüllt, wurde klar, daß für die allgemeine Lösung der Fortsetzungsprobleme im nicht-pseudokonvexen Fall nach anderen Methoden gesucht werden mußte.
Mit Methoden, die gänzlich auf die Betrachtung von Konvexitätseigenschaften verzichten, konnte L.Lempert 1986 in [35] folgendes Resultat zeigen:

Theorem I.7 (Lempert 1986) *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein strikt sternförmiges $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet und sei $D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ reell-analytisch. Dann läßt sich jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ Hölder-stetig auf $\overline{D}$ fortsetzen.*

Mit dem Konzept der Segre-Varietäten, welches von S.Webster [41], K.Diederich/S.Webster [27] und K.Diederich/J.E.Fornæss [23], [22] als eine Verallgemeinerung des Schwarzschen Reflexionsprinzips entwickelt worden ist, konnten K.Diederich/S.Pinchuk 1995 in [25] aufbauend auf den Ergebnissen von K.Diederich/J.E.Fornæss/S.Ye [24] das globale Fortsetzungsproblem im Fall $n = 2$ mit dem folgenden Ergebnis lösen:

Theorem I.8 (Diederich/Pinchuk 1995) *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^2$ reell-analytische Gebiete. Dann läßt sich jede eigentliche holomorphe Abbildung $f : D \to D'$ holomorph auf eine Umgebung von $\overline{D}$ fortsetzen.*

Die lokalen Fortsetzungsprobleme sind im nicht-pseudokonvexen Fall in ihrer allgemeinen Form bisher noch offen, wobei aber insbesondere in [25] grundlegende Methoden und Ergebnisse auch für den lokalen Fall bereitgestellt werden. Mit der vorliegenden Arbeit wird nun darauf aufbauend ein weiterer Beitrag zur Lösung der lokalen Fortsetzungsprobleme gegeben.

1.3 Übersicht und Ergebnisse

Die vorliegende Arbeit ist in vier Teile gegliedert. Nachdem im ersten Teil eine kurze Einführung in die betrachteten Problemstellungen gegeben worden ist, werden im Teil II die für diese Arbeit relevanten Begriffe und Notationen eingeführt. Als Hauptteile folgen dann die Teile III und IV. In Teil III wird das Problem der lokalen stetigen Fortsetzbarkeit untersucht und dort als Hauptresultat dieser Studie folgendes Theorem gezeigt:

Theorem A *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Für $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ gebe es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$, so daß $\partial D \cap W$ eine $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperfläche und $\partial D' \cap W'$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist. Ferner gebe es Umgebungen $U = U(z^0)$ und*

$U' = U'(z^{0'})$ sowie Konstanten $C > 0$ und $0 < \mu \leq 1$, so daß gilt

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D') < C \operatorname{dist}(z, \partial D)^{\mu} \quad \forall\, z \in U \cap f^{-1}(f(D \cap U) \cap U'). \tag{I.1}$$

Dann gibt es eine Umgebung $V = V(z^0)$, so daß sich f Hölder-stetig auf $D \cup (\partial D \cap V)$ fortsetzen läßt.

Anschließend wird in Teil IV das Problem der lokalen holomorphen Fortsetzbarkeit untersucht. Es wird durch eine Anwendung der Methoden aus [25] auf die betrachtete lokale Situation das folgende Ergebnis gezeigt:

Theorem B *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^2$ zwei Gebiete und es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Weiter seien $M_1 \subset M_2 \subset \partial D$ relativ offene Teilmengen von ∂D und sei $M_1' \subset \partial D'$ eine relativ offene Teilmenge von $\partial D'$, so daß gilt:*

a) Es gibt eine Umgebung $W = W(\overline{M_2}) \subset \mathbb{C}^2$, so daß $M := \partial D \cap W$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist.

b) Es gibt eine Umgebung $W' = W'(\overline{M_1'}) \subset \mathbb{C}^2$, so daß $M' := \partial D' \cap W'$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist.

c) Es gilt $\operatorname{cl}_f(M_1) \subset M_1'$.

d) Für $g := (f^{-1})_{|D' \cap W'}$ gilt $\operatorname{cl}_g(M_1') \subset M_2$.

Dann gibt es eine Umgebung $U = U(M_1) \subset \mathbb{C}^2$, so daß sich f holomorph auf $D \cup U$ fortsetzen läßt.

2 Danksagungen

Ich möchte an dieser Stelle zuerst meinem Doktorvater Prof. Dr. Klas Diederich danken für die Betreuung dieser Dissertation und dafür, daß er mich gelehrt hat, die richtigen Prioritäten zu setzen.
Ich danke der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle und ideelle Förderung, die sie mir in den vergangenen Studienjahren hat zukommen lassen.
Ich danke weiter meinem Freund und Kollegen Dr. Peter Feuerstein, der mir in den vergangenen Jahren immer zur Seite stand, mathematisch und menschlich.
Schließlich gilt mein großer Dank meinen Eltern, die es mir ermöglicht haben, meinen Weg zu gehen.

München, im August 2001

Thorsten Hübschen

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.

BERTRAND RUSSELL

Teil II
Begriffe und Hilfsmittel

In diesem Teil werden für diese Arbeit relevante Begriffe und Notationen eingeführt.

3 Elementares

3.1 Notationen

Häufig wird in dieser Arbeit die Situation einer Abbildung $f : D \to D'$ zwischen zwei Gebieten $D, D' \subset \mathbb{C}^n$ betrachtet. Dabei werden oft analoge Objekte (Randpunkte, Teilmengen, etc.) sowohl in D als auch in D' untersucht. Meist werden dann die Definitionen der betreffenden Objekte nur für das Urbildgebiet D gegeben und die analogen Definitionen im Bildgebiet D' als gegeben betrachtet, die jeweiligen Objekte im Bildgebiet werden dabei stets mit dem gleichen Buchstaben oder Symbol, bezeichnet wie die Objekte im Urbildgebiet, zusätzlich aber noch mit einem rechts angestellten Apostroph $'$ versehen.

In dieser Arbeit wird der Begriff *Umgebung* stets im Sinne von *offener Umgebung* verwendet, auch dann, wenn der Zusatz *offen* nicht explizit angegeben ist.

In einigen Situationen wird der $\mathbb{C}^n$ dargestellt als $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, welches eine Zerlegung der kanonischen Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_n)$ in $z = ('z, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ induziert. Diese Zerlegung eines Objekts $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^n$ in $('\mathcal{Z}, \mathcal{Z}_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ wird stets ohne besondere Erwähnung als gegeben angesehen.

Weiter sei zu einer beliebigen Menge $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ die komplex konjugierte Menge $\mathcal{U}^*$ definiert als

$$\mathcal{U}^* := \{z \in \mathbb{C}^n : \overline{z} \in \mathcal{U}\}. \tag{II.1}$$

Um die Einführung unnötig vieler Konstanten zu vermeiden, wird, wenn es sich anbietet, die folgende abkürzende Schreibweise verwendet: Sind $A(x)$ und $B(x)$ zwei reellwertige Funktionen, die von einer Variablen $x \in \mathcal{X}$ aus einer beliebigen Parametermenge $\mathcal{X}$ abhängen, so sei definiert:

$$\begin{aligned} A(x) \lesssim (\gtrsim) B(x) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists\, C > 0 \ : \ A(x) \ \leq (\geq)\ C \cdot B(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{X}. \\ A(x) \approx B(x) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists\, c, C > 0 \ : \ c \cdot A(x) \leq B(x) \leq C \cdot A(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Mit Δ wird stets die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bezeichnet, ferner sei

$$\Delta(z,r) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}\,. \tag{II.2}$$

Weiter sei der offene Ball mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ stets mit

$$B_r(z) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w-z| < r\} \tag{II.3}$$

bezeichnet und es sei $B_r := B_r(0)$. Schließlich sei mit

$$\Delta_n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| < 1 \; \forall\, 1 \le k \le n\} \tag{II.4}$$

der offene Einheitspolyzylinder im $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

3.2 Gebiete, Hyperflächen und Tangentialräume

Für ein Gebiet $D \subsetneq \mathbb{C}^n$ sei die signierte Randdistanz eines Punktes $z \in \mathbb{C}^n$ zu D definiert als

$$\delta_D(z) := \begin{cases} -\;\; \operatorname{dist}(z,\partial D) & , \text{ für } z \in D \\ \quad\;\; \operatorname{dist}(z,\partial D) & , \text{ für } z \notin D. \end{cases} \tag{II.5}$$

Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $z^0 \in \partial D$. Dann heißt ∂D nahe z^0 $\mathcal{C}^k$-glatt für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wenn es eine Umgebung $U = U(z^0)$ und eine $\mathcal{C}^k$-Funktion $r : U \to \mathbb{R}$ mit $\nabla r \neq 0$ auf U gibt, so daß gilt

$$D \cap U = \{z \in U : r(z) < 0\}\,. \tag{II.6}$$

Eine solche Funktion r heißt lokale definierende Funktion für D nahe z^0. D heißt $\mathcal{C}^k$-glatt, wenn D nahe jedes Punktes $z^0 \in \partial D$ $\mathcal{C}^k$-glatt ist. Eine Funktion $r : U = U(\partial D) \to \mathbb{R}$ heißt (globale) definierende Funktion für D, wenn r nahe jedes Punktes $z^0 \in \partial D$ lokale definierende Funktion für D ist. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma II.1 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^k$-glattes Gebiet und es seien $r_1, r_2 : U \to \mathbb{R}$ zwei definierende Funktionen für D. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(\partial D)$ und eine Funktion $h \in \mathcal{C}^{k-1}(U)$ mit $h > 0$, so daß gilt*

$$r_1(z) = h(z) \cdot r_2(z) \quad \forall\, z \in U. \tag{II.7}$$

Ist $D \subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^k$-glattes Gebiet, so gibt es insbesondere eine Umgebung $U = U(\partial D)$, so daß δ_D eine definierende $\mathcal{C}^k$-Funktion für D auf U ist.

Eine zusammenhängende Menge $M \subset \mathbb{C}^n$ heißt $\mathcal{C}^k$-glatte Hyperfläche, wenn es ein $\mathcal{C}^k$-glattes Gebiet D gibt, so daß $M \subset \partial D$ gilt und M relativ offen in ∂D ist.

Für ein Gebiet D wird mit $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{D})$ der Teilraum der Funktionen aus $\mathcal{C}^\infty(D)$ bezeichnet, die auf ∂D von unendlicher Ordnung verschwinden.

Ein komplexer Tangentialvektor X in einem Punkt $z \in \mathbb{C}^n$ ist ein linearer Differentialoperator 1. Ordnung der Form

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial z_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k},$$

mit Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. Der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Tangentialvektoren X in z heißt komplexer Tangentialraum in z und wird mit $T_z\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Es ist $T_z\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$ vermöge des kanonischen Isomorphismus

$$\Psi : T_z\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{2n}, X \mapsto \Psi(X) := (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n).$$

Damit wird auf $T_z\mathbb{C}^n$ die hermitesche Metrik

$$|\cdot| : T_z\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_0^+ : X \mapsto |X| := |\Psi(X)| \tag{II.8}$$

und die Konjugation

$$\overline{} : T_z\mathbb{C}^n \to T_z\mathbb{C}^n : X \mapsto \overline{X} := \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \overline{a}_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \tag{II.9}$$

induziert. Die Auswertung eines Tangentialvektors $X \in T_z\mathbb{C}^n$ an einer Funktion $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U = U(z)$, ist definiert als

$$Xf := (Xf)(z^0) := \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(z^0) + b_k \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}(z^0).$$

Sind bei einem $X \in T_z\mathbb{C}^n$ alle Koeffizienten b_k gleich Null, so wird X als holomorpher oder (1,0)-Tangentialvektor bezeichnet. Entsprechend heißt X antiholomorpher oder (0,1)-Tangentialvektor, wenn $a_k = 0$ für alle k gilt. Der Untervektorraum aller holomorphen bzw. antiholomorphen Tangentialvektoren in z wird mit $T_z^{10}\mathbb{C}^n$ bzw. $T_z^{01}\mathbb{C}^n$ bezeichnet und heißt holomorpher bzw. antiholomorpher Tangentialraum in z.

Es sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-glatte Hyperfläche und sei $z \in M$. Ferner sei r eine definierende Funktion für M nahe z. Ein $X \in T_z\mathbb{C}^n$ heißt Tangentialvektor an M in z, wenn $Xr = 0$ gilt. Der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Tangentialvektoren an M in z wird mit T_zM bezeichnet. Analog wird $T_z^{10}M$ und $T_z^{01}M$ definiert.
Für eine $\mathcal{C}^1$-glatte Hyperfläche $M \subset \mathbb{C}^2$ heißt ein Punkt $z \in M$ total reell, wenn $\dim T_z^{10}M = 0$ gilt.

Eine für die Untersuchungen im Abschnitt III wichtige Klasse von Gebieten ist die der strikt sternförmigen Gebiete. Dabei heißt ein $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ strikt sternförmig, wenn für eine $\mathcal{C}^2$-glatte definierende Funktion r von D gilt

$$\operatorname{Re} Xr(z) > 0 \quad \forall\, z \in \partial D, \tag{II.10}$$

wobei X das folgende Vektorfeld sei

$$X := \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}. \tag{II.11}$$

Es sei bemerkt, daß jedes beliebige glatte Gebiet *lokal* stets strikt sternförmig ist, im Sinne des folgenden Lemmas, welches direkt aus der obigen Definition folgt:

Lemma II.2 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und es gebe für einen Randpunkt $z^0 \in \partial D$ eine Umgebung $W = W(z^0)$, so daß $\partial D \cap W$ eine $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperfläche ist. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(z^0) \subset\subset W$, so daß $U \cap D$ ein strikt sternförmiges $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet ist.*

Abschließend sei noch für die spätere Verwendung der Begriff der Pluripolarität erinnert: Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt eine Teilmenge $A \subset U$ pluripolar, wenn es eine plurisubharmonische Funktion $\psi : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ gibt, so daß gilt

$$A \subset \{z \in U : \psi(z) = -\infty\}. \tag{II.12}$$

3.3 Endlicher Typ

Es sei $U = U(z^0)$ eine offene Umgebung von $z^0 \in \mathbb{C}^n$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$v(f, z^0) := \sup \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \lim_{U \ni z \to z^0} \frac{f(z) - f(z^0)}{|z - z^0|^\alpha} \text{ existiert }^3 \right\} \tag{II.13}$$

die Ordnung von f in z^0. Ist $f(z^0) = 0$, so heißt $v(f, z^0)$ auch Verschwindungsordnung von f in z^0. Für eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{C}^n$ wird die Ordnung von f in z^0 definiert als

$$v(f, z^0) := \min_{1 \le k \le n} v(f_k, z^0). \tag{II.14}$$

Eine nichtkonstante holomorphe Abbildung $c : \Delta(0, r) \to \mathbb{C}^n$, $r > 0$ wird als holomorphe Kurve im $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Damit wird für jedes $z^0 \in \mathbb{C}^n$ definiert:

$$\mathcal{C}_n(z^0) := \left\{ c : \Delta(0, r) \to \mathbb{C}^n \text{ holomorphe Kurve mit } c(0) = z^0 \right\}. \tag{II.15}$$

Es sei nun $D \subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes Gebiet und sei r eine definierende $\mathcal{C}^\infty$-Funktion für D. Für $z^0 \in \partial D$ und $c \in \mathcal{C}_n(z^0)$ wird die Zahl

$$\Delta(\partial D, z^0, c) := \frac{v(r \circ c, z^0)}{v(c - z^0, z^0)} \tag{II.16}$$

als die Kontaktordnung von c an ∂D im Punkte z^0 bezeichnet. Es sei jetzt

$$\Delta_1(\partial D, z^0) := \sup_{c \in \mathcal{C}_n(z^0)} \Delta(\partial D, z^0, c). \tag{II.17}$$

Dann heißt $\Delta_1(\partial D, z^0)$ der D'Angelo-Typ von z^0 oder kurz Typ von z^0. In [17] konnte D'Angelo zeigen, daß die Endlichkeit des Typs eine offene Eigenschaft ist:

[3] d.h. der Grenzwert ist eindeutig und endlich

Theorem II.1 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes Gebiet und sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt mit $\Delta_1(\partial D, z^0) < \infty$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß gilt*

$$\Delta_1(\partial D, z) < \infty \quad \forall\, z \in \partial D \cap U. \tag{II.18}$$

Die folgenden beiden Lemmata geben den D'Angelo-Typ in zwei Extremfällen an:

Lemma II.3 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes pseudokonvexes Gebiet und sei $z^0 \in \partial D$. Dann ist z^0 genau dann ein streng pseudokonvexer Randpunkt, wenn $\Delta_1(\partial D, z^0) = 2$ ist.*

Lemma II.4 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes Gebiet und sei $z^0 \in \partial D$. Es gebe eine holomorphe Kurve $c : \Delta(0, r) \to \mathbb{C}^n$ mit $c(0) = z^0$ und $c(\Delta(0, r)) \subset \partial D$. Dann gilt $\Delta_1(\partial D, z^0) = \infty$.*

In [19] wurde insbesondere folgendes wichtige Resultat gezeigt:

Theorem II.2 *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes reell-analytisches Gebiet. Dann gibt es eine Konstante $L < +\infty$, so daß gilt*

$$\Delta_1(\partial D, z) < L \quad \forall\, z \in \partial D. \tag{II.19}$$

Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes Gebiet, sei $z^0 \in \partial D$ und sei r eine definierende Funktion von D auf einer Umgebung $U = U(z^0)$. Ferner sei für jedes $\delta < 0$ definiert

$$D_\delta := \{z \in U : r(z) \leq \delta\}\,. \tag{II.20}$$

Damit kann schließlich definiert werden

$$\Delta_1(r, z) := \Delta_1(\partial D_{r(z)}, z) \quad \forall\, z \in U. \tag{II.21}$$

Aus [19] folgt dann insbesondere (siehe auch [35], Theorem 3.3):

Theorem II.3 *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes reell-analytisches Gebiet, sei r eine definierende Funktion von D auf einer Umgebung von ∂D und sei $z^0 \in \partial D$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(z^0)$ und eine Konstante $L < +\infty$, so daß gilt*

$$\Delta_1(r, z) < L \quad \forall\, z \in U. \tag{II.22}$$

3.4 Eigentliche Abbildungen und Clustermengen

Es seien $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete, es sei $f : D \to D'$ eine stetige Abbildung und es sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt. Dann heißt

$$\mathrm{cl}_f(z^0) := \left\{ z' \in \overline{D'} : \exists\, (z_k)_k \subset D \text{ mit } \lim_{k\to\infty} z_k = z^0 \text{ und } \lim_{k\to\infty} f(z_k) = z' \right\} \tag{II.23}$$

die Clustermenge von z^0 unter der Abbildung f. Für eine beliebige Menge $K \subset \partial D$ wird

$$\mathrm{cl}_f(K) := \bigcup_{z\in K} \mathrm{cl}_f(z) \tag{II.24}$$

als Clustermenge von K unter f definiert.

Definition II.1 *Eine stetige Abbildung $f : D \to D'$ zwischen zwei Gebieten $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ heißt* eigentlich*, wenn für jedes Kompaktum $K' \subset D'$ auch das Urbild $f^{-1}(K') \subset D$ kompakt ist.*

Es sei bemerkt, daß insbesondere jede homöomorphe Abbildung eigentlich ist.

Die folgende elementare Eigenschaft von eigentlichen Abbildung macht diese zum geeigneten Untersuchungsobjekt im Rahmen der Fortsetzungsprobleme:

Satz II.1 *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $D' \subset\subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche Abbildung. Ferner sei $(x_k)_k \subset D$ eine Folge in D. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(x_k, \partial D) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(f(x_k), \partial D') = 0. \tag{II.25}$$

Ist die betrachtete eigentliche Abbildung sogar holomorph, so besitzt sie insbesondere folgende Eigenschaften[4]:

Satz II.2 *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Dann gilt*

a) $\# f^{-1}(z')$ *ist endlich für alle* $z' \in D'$.

b) f *ist eine abgeschlossene Abbildung.*

c) Die Menge der regulären Werte R_f von f ist eine zusammenhängende, offene und in D' dichte Menge.

d) f *ist surjektiv.*

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Verpflanzbarkeit von plurisubharmonischen Funktionen durch eigentliche holomorphe Abbildungen, siehe dazu auch [20], [37]:

Satz II.3 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es sei weiter $\varphi : D \to \mathbb{R}$ eine negative stetige plurisubharmonische Funktion auf D. Dann ist die Funktion $\tau : D' \to \mathbb{R}$ mit*

$$\tau(z') := \sup \left\{ \varphi(z) : z \in D, f(z) = z' \right\} \tag{II.26}$$

ebenfalls negativ, stetig und plurisubharmonisch.

Für ein beliebiges Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ sei mit $\widehat{D}$ die Holomorphiehülle von D bezeichnet. Es sei ferner für ein Kompaktum $K \subset D$ mit $\widehat{K}$ die holomorph-konvexe Hülle von K bezüglich $\mathcal{O}(D)$ als kompakte Teilmenge von $\widehat{D}$ bezeichnet.

Folgendes Lemma aus [25] gibt Aufschluß über das Verhalten von Holomorphiehüllen unter eigentlichen holomorphen Abbildungen und wird in Teil IV dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen:

[4] siehe beispielsweise [37], Satz 4.9

Lemma II.5 *Es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung zwischen zwei Gebieten $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$, sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt und sei $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$. Dann gilt*

$$z^{0'} \in \widehat{D'} \ \Rightarrow\ z^0 \in \widehat{D}. \tag{II.27}$$

Beweis: Angenommen, es ist $z^0 \notin \widehat{D}$. Dann gilt $\mathrm{dist}(\widehat{K}, z^0) > 0$ für jedes Kompaktum $K \subset\subset D$. Es sei nun eine Folge $(z_k)_k \subset D$ mit $z_k \to z^0$ und $z_k{}' := f(z_k) \to z^{0'}$ ausgewählt und sei ferner $h \in \mathcal{O}(D)$ eine holomorphe Funktion mit $h(z_k) \to \infty$. Da f eigentlich ist, gibt es eine algebroide Funktion h' auf D', die durch die folgende Relation gegeben wird

$$h'(w') := h \circ f^{-1}(w'). \tag{II.28}$$

Es gibt also Funktionen $a_\mu \in \mathcal{O}(D')$ für $\mu = 1, \ldots, m$, so daß für jedes $w' \in D'$ und $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$w \in h'(w') \iff w^m + a_1(w')w^{m-1} + \cdots + a_m(w') = 0. \tag{II.29}$$

Da $z^{0'} \in \widehat{D'}$ ist und sich alle a_μ holomorph auf $\widehat{D'}$ fortsetzen lassen, besitzt h' eine algebroide Fortsetzung auf eine Umgebung U' von $z^{0'}$. Daher ist h' gleichmäßig beschränkt nahe $z^{0'}$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Tatsache, daß nach Konstruktion $h(z_\nu) \to \infty$ gilt.

□

4 Bergmann-Projektion

Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Dann heißt die bezüglich des $L^2(D)$-Skalarprodukts orthogonale Projektion

$$P_D : L^2(D) \to L^2(D) \cap \mathcal{O}(D) \tag{II.30}$$

die Bergmann-Projektion von D oder der Bergmann-Projektor von D.

Für die Bergmann-Projektion gilt folgende Transformationsformel[5]:

Lemma II.6 *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Dann gilt*

$$P_D(\det[f'] \cdot (\varphi \circ f)) = \det[f'] \cdot ((P_{D'}\varphi) \circ f) \quad \forall \varphi \in L^2(D'). \tag{II.31}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß in dieser Arbeit mit $\det[f']$ immer die *komplexe* Funktionaldeterminate bezeichnet wird. Ist die *reelle* Funktionaldeterminante gemeint, so wird dieses durch die Notation $\det_{\mathbb{R}}[f']$ kenntlich gemacht.

In [5] wurde folgendes Ergebnis über das Verhalten des Bergmann-Projektors auf strikt sternförmigen Gebieten gezeigt:

[5]siehe dazu [6]

Theorem II.4 ([5], Theorem 2) *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein strikt sternförmiges $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet. Dann bildet der Bergmann-Projektor P_D den Sobolev-Raum $W^{1/2}(D)$ auf sich ab.*

Dabei wird der Sobolev-Raum $W^{1/2}(D)$ wie üblich[6] definiert durch

$$W^{1/2}(D) := \left\{ f \in L^2(D) : \int_D \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 \left(1 + |\xi|^2 \right)^{1/2} dV(\xi) < \infty \right\}. \tag{II.32}$$

5 Bekannte Fortsetzungssätze

Mit Blick auf die folgenden Teilen dieser Arbeit seien hier einige bekannte Fortsetzungssätze in der jeweils benötigen Form angegeben:

Theorem II.5 ([21], [11], [37]) *Es seien $D \subset \mathbb{C}^n$, $D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ zwei Randpunkte, für die es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ $\mathcal{C}^\infty$-glatte pseudokonvexe Hyperflächen endlichen Typs sind. Dann gibt es eine offene Umgebung $U = U(z^0)$, so daß sich f Hölder-stetig auf $D \cup (\partial D \cap U)$ fortsetzen läßt.*

Theorem II.6 ([39]) *Es sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperfläche und es sei $z^0 \in M$. Nahe z^0 unterteilt M den Raum in zwei Halbräume D_- und D_+. Es sei nun angenommen, daß in M bei z^0 keine Keime von komplex-analytischen Hyperflächen enthalten sind. Dann besitzt D_j für entweder $j = +$ oder $j = -$ die folgende Fortsetzungseigenschaft: Es gibt eine Umgebungsbasis U_n von z^0, so daß sich jede auf $U_n \cap D_j$ holomorphe Funktion holomorph auf U_n fortsetzen läßt.*

Theorem II.7 ([10]) *Es sei $f : M \to M'$ eine endliche stetige CR-Abbildung zwischen $\mathcal{C}^\infty$-glatten pseudokonvexen Hyperflächen im $\mathbb{C}^n$. Ferner sei M von endlichem Typ und M' enthalte keine eindimensionalen komplex-analytischen Varietäten. Es sei $z^0 \in M$. Ist $f(z^0) =: z^{0'} \in M'$, dann ist f $\mathcal{C}^\infty$-glatt in einer Umgebung von z^0.*

Theorem II.8 ([23]) *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete, es seien $M \subset \partial D$, $M' \subset \partial D'$ relativ offene Teilmengen reell-analytischer pseudokonvexr Hyperflächen und es seien $z^0 \in M$, $z^{0'} \in M'$. Es sei weiter $f : D \cup M \to D' \cup M'$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, welche auf D eigentlich holomorph ist, und für die $f(D) \subset D'$, $f(M) \subset M'$ und $f(z^0) = z^{0'}$ gilt. Dann läßt sich f holomorph auf eine Umgebung von z^0 fortsetzen.*

[6] siehe beispielsweise [34], Seite 198

6 Analytische Mengen

Definition II.2 *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Teilmenge $A \subset D$ heißt reell-analytische Menge in D, wenn es für alle $x \in D$ eine Umgebung $U = U(x)$ sowie auf U reell-analytische Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ gibt, so daß gilt*

$$A \cap U = Z(f_1) \cap \ldots \cap Z(f_r), \tag{II.33}$$

wobei $Z(f_k) := \{x \in U : f_k(x) = 0\}$ für $1 \leq k \leq r$ sei. Ist $D \subset \mathbb{C}^n$ und können die f_k als holomorphe Funktionen gewählt werden, dann heißt A komplex-analytische Menge in D.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Konstruktion der holomorphen Fortsetzung in Teil IV dieser Arbeit ist das folgende Lemma von Bishop [13]. Wegen seiner wichtigen Rolle sei hier der Vollständigkeit halber sein Beweis angegeben, siehe dazu auch [14].

Lemma II.7 *Es sei E eine abgeschlossene pluripolare Teilmenge eines beschränkten Gebietes $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n$, mit $U_1 \subset \mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, und es sei A eine rein p-dimensionale abgeschlossene komplex-analytische Teilmenge in $U \setminus E$ ohne Häufungspunkte in $U_1 \times \partial U_2$. Angenommen, U_1 enthalte ein nichtleeres Teilgebiet V_1, so daß $\overline{A} \cap (V_1 \times U_2)$ eine abschlossene komplex-analytische Menge ist. Dann ist auch $\overline{A} \cap U$ eine analytische Teilmenge in U.*

Beweis: Da E pluripolar ist, gibt es eine auf U plurisubharmonische Funktion φ mit $E \subset \{z \in U : \varphi(z) = -\infty\}$. Da die Behauptung des Lemmas rein lokaler Natur ist, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß φ auch noch auf einer Umgebung von $\overline{U}$ plurisubharmonisch, also insbesondere nach oben beschränkt auf U ist.
Zuerst wird nun gezeigt, daß $A \cap (V_1 \times U_2)$ nicht leer ist. Dazu sei W_1 die maximale Teilmenge von U_1, die V_1 enthält und für die $\overline{A} \cap (W_1 \times U_2)$ eine analytische Menge ist. Dann ist die Projektion $\pi : \overline{A} \cap (W_1 \times U_2) \to W_1$ eine analytische Überlagerung. Daher reicht es zu zeigen, daß $\overline{A} \cap (W_1 \times U_2)$ nicht leer ist. Sei dazu jetzt angenommen, daß $\overline{A} \cap (W_1 \times U_2) = \emptyset$ ist. Da A wegen $\dim A = p > 0$ nicht leer ist und W_1 maximal gewählt ist, gibt es eine Kugel $B_1 = B_r(a)$ mit Mittelpunkt $a = (a_1, \ldots, a_p) \in W_1$, so daß $A \cap (B_1 \times U_2)$ nichtleer ist. Somit muß für eine komplexe Gerade $L_1 \ni a$ die Menge $A_1 := A \cap (L_1 \times U_2)$ auch nichtleer sein. Ohne Einschränkung kann $L_1 = \mathbb{C}_1$ angenommen werden. Der Rand der analytischen Menge A_1 besteht aus zwei Teilen: $E_1 := \overline{A}_1 \cap E$ und $E_2 := (\overline{A}_1 \setminus A_1) \setminus E_1$. Die Funktion φ ist plurisubharmonisch und nach oben beschränkt auf $\overline{A}_1$ und ist identisch $-\infty$ auf E_1. Daher kann nach dem Maximumsprinzip die Funktion $\frac{1}{|z_1 - a_1|}$ nicht in allen Punkten von A_1 größer sein als $\frac{1}{r}$. Aber wegen $A_1 \subset B_1 \times U_2$ gilt für jeden Punkt $z \in A_1$ $|z_1 - a_1| < r$. Widerspruch. Also kann $\overline{A} \cap (W_1 \times U_2)$ nicht leer gewesen sein.
Sei nun $W := W_1 \times U_2$. Die Projektion $\pi : \overline{A} \cap W \to W_1$ ist eine k-fache Überlagerung, mit $1 \leq k < \infty$. Für jedes $z \in W_1$ seien die Punkte der Faser $\pi^{-1}(z) \cap A$ mit Vielfachheiten bezeichnet als $\alpha^1(z), \ldots, \alpha^k(z)$. Damit sei auf W die Funktion ψ definiert

als

$$\psi(z) := \sum_{j=1}^{k} \varphi(\alpha^j(z)). \tag{II.34}$$

Wird nun mit $\sigma \subset W_1$ die kritische analytische Menge der Überlagerung $\pi : \overline{A} \cap W \to W_1$ bezeichnet, dann können die Funktionen $\alpha^j(z)$ auf $W_1 \setminus \sigma$ als lokal holomorph gewählt werden. Damit ist ψ entweder plurisubharmonisch oder identisch gleich $-\infty$ auf $W_1 \setminus \sigma$. Da A die Menge E nicht schneidet und da $A \cap W$ überall dicht in $\overline{A} \cap W$ ist, muß die Menge $E \cap \overline{A} \cap W$ $2p$-Maß Null haben. Folglich hat auch $\pi(E \cap \overline{A} \cap W)$ verschwindendes $2p$-Maß und somit kann ψ nicht identisch $-\infty$ auf $W_1 \setminus \sigma$ sein. Da ψ gleichmäßig von oben beschränkt und oberhalbstetig auf W_1 ist, folgt, daß ψ plurisubharmonisch auf ganz W' ist.
Als nächstes sei nun gezeigt, daß alle Randwerte von ψ auf $(\partial W_1) \cap U_1$ gleich $-\infty$ sind. Dazu sei $a' \in (\partial W_1) \cap U_1$. Da W' maximal gewählt worden ist, muß es einen Punkt $a \in \overline{A} \cap E$ geben, so daß $\pi(a) = a'$ gilt. Nach Voraussetzung ist $A \cap (U_1 \times \partial U_2)$ leer, so daß alle Randpunkte der analytischen Menge $\pi^{-1}(a') \cap A$ in E liegen und damit ist nach dem Maximumprinzip die Menge $\pi^{-1}(a') \cap A$ nulldimensional. Wenn a^ι ein Punkt in $\pi^{-1}(a') \cap A$ ist, dann gibt es eine Umgebung $U^\iota \ni a^\iota$ in U, so daß $\pi : A \cap U^\iota \to \pi(U^\iota)$ eine analytische Überlagerung ist. Da W_1 ein Gebiet, also insbesondere zusammenhängend, und a' ein Häufungspunkt von W_1 ist, folgt, daß die Anzahl der Punkte in der Faser $\pi^{-1}(a') \cap A$ höchstens gleich $k < \infty$ ist. Folglich gibt es eine Umgebung $U^0 \ni a$, so daß $\pi^{-1}(a') \cap A \cap U^0$ leer ist und daß $\pi : \overline{A} \cap U^0 \to \pi(U^0)$ eine eigentliche Abbildung ist. Die Mengen U^0, $E \cap U^0$ und $W_1 \cap \pi(U^0)$ erfüllen die Voraussetzung des zu beweisenden Lemmas und somit können die Argumente des ersten Teils dieses Beweises angewandt werden, um zu zeigen, daß $A \cap U^0 \cap W$ nichtleer ist. Da

$$\pi^{-1}(a') \cap \overline{A} \cap U^0 \subset E \tag{II.35}$$

gilt, streben für $z \to a'$, $z \in W$ alle Punkte der (nichtleeren) Fasern $\pi^{-1}(z) \cap A \cap U^0$ nach E. Da aber $\varphi_{|E} = -\infty$ gilt, folgt sofort $\psi(z) \to \infty$.
Nun kann eine oberhalbstetige Funktion Ψ auf U' definiert werden durch

$$\Psi(z) := \begin{cases} \psi(z) & , z \in W_1 \\ -\infty & , z \in U_1 \setminus W_1. \end{cases} \tag{II.36}$$

Damit ist Ψ eine plurisubharmonische Funktion auf U_1 und insbesondere ist $E' := U_1 \setminus W_1$ pluripolar in U_1.
Es seien nun Φ_I, $|I| = k$, kanonische definierende Funktionen der analytischen Überlagerung $\pi : \overline{A} \cap W \to W_1$ mit

$$\Phi_I(z_1, z_2) = \sum_{|J| \le k} \varphi_{IJ}(z_1) z_2^J. \tag{II.37}$$

Dann sind die φ_{IJ} beschränkte holomorphe Funktionen auf W_1 und lassen sich somit holomorph nach U_1 fortsetzen. Die nach U_1 fortgesetzten Funktionen $\tilde{\Phi}_I$, $|I| = k$ definieren eine analytische Teilmenge $\tilde{A}$ in U_1, welche in W_1 mit A übereinstimmt. Da $A_{|W}$ dicht in A und $\tilde{A}_{|W}$ dicht in $\tilde{A}$ ist, gilt $\tilde{A} = \overline{A} \cap U$, womit das Lemma bewiesen ist.

□

7 Segre-Varietäten

In [27] wurde von K.Diederich und S.Webster der Begriff der Segre-Varietäten als ein zentrales Hilfsmittel für die Untersuchung der Fortsetzungsprobleme eingeführt. Im folgenden seien dazu nach [27] die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften dieser Objekte eingeführt.

7.1 Definitionen

Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, es sei $z^0 = 0 \in \partial D$ ein Randpunkt und sei $U = U(z^0)$ eine Umgebung von z^0, so daß $M := \partial D \cap U$ eine reell-analytische Hyperfläche ist. Ferner sei $r : U \to \mathbb{R}$ eine reell-analytische definierende Funktion von D auf U. Als reell-analytische Funktion ist r auf U, nach eventueller Verkleinerung von U, durch eine Potenzreihe der Form

$$r(z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} a_{\alpha\beta} z^{\alpha} \overline{z}^{\beta} \tag{II.38}$$

gegeben. Es sei nun die Komplexifizierung

$$r(z,w) := \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} a_{\alpha\beta} z^{\alpha} \overline{w}^{\beta}, \tag{II.39}$$

betrachtet, welche nach dem Abel-Lemma auf einer geeigneten Umgebung $V = V(\Gamma) \subset \mathbb{C}^{2n}$ der Diagonalen $\Gamma := \left\{(z,\xi) \in \mathbb{C}^{2n} : z \in U, \xi = z\right\}$ definiert ist. Damit ist $r(z,w)$ holomorph in z und antiholomorph in w.

Es können für M durch einen biholomorphen Koordinatenwechsel lokale Koordinaten nahe z^0 so gewählt werden, daß r die folgende Normalform annimmt

$$\begin{aligned} r(z) &= z_n + \overline{z}_n + \sum_{j=0}^{\infty} r_j('z,'\overline{z})(-i)^j (z_n - \overline{z}_n)^j \\ &= 2x_n + \sum_{j=0}^{\infty} r_j('z,'\overline{z})(2y_n)^j, \end{aligned} \tag{II.40}$$

mit reell-analytischen Funktionen r_j, die in 0 verschwinden und keine reinen holomorphen oder antiholomorphen Terme in ihrer Taylordarstellung um 0 enthalten. Die Komplexifizierung von r kann in diesen Normalkoordinaten dann geschrieben werden als

$$r(z,w) = z_n + \overline{w}_n + \sum_{j=0}^{\infty} r_j('z,'\overline{w})(-i)^j (z_n - \overline{w}_n)^j. \tag{II.41}$$

Aus dieser Darstellung folgt die Beziehung

$$r(z,w) = 0 \iff z_n + \overline{w}_n + \sum_{|k|>0} \overline{\lambda_k(w)}'z^k = 0, \tag{II.42}$$

wobei die Summation über Multiindizes $k = (k_1, \ldots, k_{n-1})$ mit $k_j \geq 0$ erfolgt und die λ_k holomorphe Funktionen auf U sind. Damit ergibt sich folgende weitere wichtige Darstellung für $r(z, w)$

$$r(z,w) = (1 + \alpha(z,w)) \left(z_n + \overline{w}_n + \sum_{|k|>0} \overline{\lambda_k(w)}'z^k \right), \tag{II.43}$$

mit einer $\mathcal{C}^\omega$-Funktion $\alpha(z, w)$, die holomorph in z und antiholomorph in w ist sowie in 0 verschwindet.

Mit diesen Vorbereitungen kann nun der Begriff der Segre-Varietät eingeführt werden:

Definition II.3 *Ein Paar $U_1 \subset\subset U_2 \subset U$ von offenen Umgebungen heißt ein Standardumgebungspaar für einen Punkt $z^0 \in M$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

a) Bezüglich eines passenden Normalkoordinatensystems für z^0 gilt $U_2 = {}'U_2 \times U_{2n}$, wobei ${}'U_2$ eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ und U_{2n} eine offene Umgebung von 0 auf der z_n-Achse ist.

b) Die Komplexifizierung $r(z, w)$ ist auf $U_2 \times U_1$ wohldefiniert, so daß für jedes $w \in U_1$ die Menge

$$Q_w := \{z \in U_2 : r(z,w) = 0\} \tag{II.44}$$

eine abgeschlossene, glatte komplex-analytische Hyperfläche ist. Q_w heißt die zu w assoziierte Segre-Varietät.

c) Die Hyperfläche Q_w kann als Graph dargestellt werden, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $h_w('z)$ auf ${}'U_2$, so daß gilt

$$Q_w = \left\{ ('z, z_n) \in U_2 : z_n = h_w('z) \right\}. \tag{II.45}$$

Für jedes $\zeta \in Q_w$ sei der Keim von Q_w (als komplex-analytischer Mengenkeim) in ζ mit ${}_\zeta Q_w$ bezeichnet.

7.2 Elementare Eigenschaften

Zu jeden Punkt $z \in M$ gibt es eine Familie (U_{1i}, U_{2i}) von Standardumgebungspaaren für z, so daß die U_{2i} eine Umgebungsbasis für z bilden. Ferner sind die zu einem Punkt z assoziierten Segre-Varietäten Q_w unabhängig von der Wahl des Umgebungspaares U_1, U_2 und der definierenden Funktion r, in folgendem Sinn: Sind (U_1, U_2, r) und $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{r})$ Standardumgebungspaare zu z mit zugehörigen definierenden Funktionen r und $\tilde{r}$ und sind $Q_w \subset U_2$ und $\tilde{Q}_w \subset \tilde{U}_2$ die entsprechenden Segre-Varietäten zu einem Punkt $w \in U_1 \cap \tilde{U}_1$, dann gilt

$$Q_w \cap (U_2 \cap \tilde{U}_2) \equiv \tilde{Q}_w \cap (U_2 \cap \tilde{U}_2). \tag{II.46}$$

In dem folgenden Lemma werden nun die wichtigsten elementaren Eigenschaften der Segre-Varietäten zusammengestellt:

Lemma II.8 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt mit einem Standardumgebungspaar (U_1, U_2), so daß $M := \partial D \cap U_2$ eine reell-analytische Hyperfläche ist. Dann folgt:*

a) Für $z, w \in U_1$ gilt

$$z \in Q_w \Longleftrightarrow w \in Q_z. \tag{II.47}$$

b) Es gilt

$$z \in Q_z \Longleftrightarrow z \in M. \tag{II.48}$$

c) Für jedes $w \in U_1$ ist die Menge

$$A_w := \{z \in U_1 : Q_z = Q_w\} \tag{II.49}$$

eine abgeschlossene komplex-analytische Untervarietät von U_1. Insbesondere ist $\dim_{\mathbb{C}} A_w$ oberhalbstetig als eine Funktion von $w \in U_1$.

d) Es gilt

$$z \in A_w \Longleftrightarrow A_z = A_w. \tag{II.50}$$

e) Für jedes $w \in M$ gilt $A_w \subset M$.

f) Es gilt

$$A_w = \bigcap \{Q_z : z \in Q_w\} \cap U_1. \tag{II.51}$$

g) Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und es seien $z^0 \in \partial D$, $z^{0'} \in \partial D'$ Randpunkte, so daß ∂D nahe z^0 und $\partial D'$ nahe $z^{0'}$ reell-analytisch ist. Ferner seien (U_1, U_2) und (U_1', U_2') Standardumgebungspaare von z^0 und $z^{0'}$. Es sei nun $f : U_2 \cap D \to U_2' \cap D'$ eine holomorphe Abbildung, die sich lokal biholomorph auf eine Umgebung $V = V(z^0) \subset U_1$ fortsetzen läßt, so daß $z^{0'} = f(z^0)$ gilt. Dann gilt

$$f(Q_w \cap V) = Q'_{f(w)} \cap f(V) \quad \forall\, w \in V. \tag{II.52}$$

Beweis:
zu a) Die Behauptung ist äquivalent zu $r(z, w) = r(w, z)$ und dies folgt sofort aus der Reellwertigkeit der Funktion $r(z, z)$.

zu b) $z \in Q_z$ ist gleichbedeutend mit $r(z, z) = 0$ und dies gilt genau für die Punkte $z \in M$.

zu c) siehe [23] und [24].

zu d) Sei $z \in A_w$. Dann gilt $Q_z = Q_w$ nach Definition von A_w. Also gilt

$$A_w = \{u \in U_1 : Q_u = Q_w\} = \{u \in U_1 : Q_u = Q_z\} = A_z. \tag{II.53}$$

Sei nun $A_w = A_z$. Es gilt aber immer $z \in A_z$ und damit folgt $z \in A_w$.

zu e) Sei $w \in \partial D$ und $z \in A_w$. Nach b) gilt $w \in Q_w$ und nach Definition von A_w gilt $Q_z = Q_w$, womit sofort $w \in Q_z$ folgt. Nach a) gilt daher $z \in Q_w = Q_z$ und mit b) folgt die Behauptung.

zu f) Sei $p \in A_w$ und $z \in Q_w$ beliebig. Dann gilt $Q_p = Q_w$ und damit ist $z \in Q_p$. Nach a) gilt dann $p \in Q_z$. Sei andererseits $p \in Q_z \; \forall z \in Q_w$, dann gilt $z \in Q_p \; \forall z \in Q_w$, womit sofort $Q_w \subset Q_p$ folgt. Da Q_w und Q_p komplex-analytische abgeschlossene Hyperflächen sind, folgt $Q_w = Q_p$, woraus sofort die Behauptung $p \in A_w$ folgt.

zu g) Es sei r eine definierende Funktion von ∂D auf V. Dann ist $r' := r \circ f^{-1}$ eine definierende Funktion von $\partial D'$ auf V'. Da die Segre-Varietäten unabhängig von der Wahl der definierenden Funktionen sind, folgt nun für jedes $w \in V$

$$\begin{aligned} z' \in f(Q_w \cap V) &\iff r(f^{-1}(z'), w) = 0 \wedge z' \in V' && \text{(II.54)} \\ &\iff r(f^{-1}(z'), f^{-1} \circ f(w)) = 0 \wedge z' \in V' && \text{(II.55)} \\ &\iff r'(z', f(w)) = 0 \wedge z' \in V' && \text{(II.56)} \\ &\iff z' \in Q'_{f(w)} \cap V'. && \text{(II.57)} \end{aligned}$$

Damit ist auch g) gezeigt.

□

Die in Lemma II.8, Teil c) definierte Menge A_w ist von entscheidender Bedeutung für die weiteren Betrachtungen. In [27] und [2] wurde folgende Begrifflichkeit eingeführt:

Definition II.4 *Ist in der Situation von Lemma II.8 zu einem Punkt $w \in M$ die Menge A_w null-dimensional, gilt also $A_w = \{w\}$ nach entsprechender Verkleinerung von U_1, so heißt M im Punkte w essentiell endlich. Ist M in jedem Punkt $w \in M$ essentiell endlich, so heißt M essentiell endlich.*

Damit ist M insbesondere in jedem Punkt endlichen Typs auch essentiell endlich. Es sei nun angenommen, daß M essentiell endlich ist. Mit den Notationen von Definition II.3 können die Funktionen $h('z, w) := h_w('z)$ in der Form

$$h('z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(w)\, 'z^j \tag{II.58}$$

mit antiholomorphen Funktionen $\lambda_j(w)$ auf U_1 geschrieben werden. Es wurde in [27] gezeigt, daß es eine natürliche Zahl N gibt, so daß die Hyperfläche Q_w für jedes $z \in M$ und für jedes Standardumgebungspaar U_1, U_2 von z eindeutig durch die Koeffizienten $\{\lambda_j : |j| \leq N\}$ bestimmt wird (siehe hierzu insbesondere [23]). Diese Tatsache ermöglicht es, auf der Familie aller Segre-Varietäten die Struktur einer endlich-dimensionalen komplex-analytischen Varietät zu definieren, so daß die Abbildungen

$$\lambda : U_1 \in w \mapsto Q_w \tag{II.59}$$

endlich-verzweigte antiholomorphe Überlagerungen sind. Für einen festen Punkt $z^0 \in M$ und ein Standardumgebungspaar U_1, U_2 von z^0 wird die Familie der Segre-Varietäten, versehen mit dieser Struktur, mit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(U_1, U_2)$ bezeichnet.

Es sei ferner noch folgendes Lemma aus [24] angeführt:

Lemma II.9 ([24], Lemma 2.4) *Es sei für einen beliebigen Punkt $z^0 \in M$ ein Standardumgebungspaar $U_1 = {}'U_1 \times U_{1n}$, $U_2 = {}'U_2 \times U_{2n}$ gewählt. Für jedes $w = ('w, w_n) \in U_1 \setminus \overline{D}$ sei die Menge Ω_w definiert als*

$$\Omega_w := \left\{ 'z \in {}'U_2 : ('z, h_w('z)) \in D \right\}. \tag{II.60}$$

Dann gilt:

a) Für je zwei Punkte $w^1, w^2 \in U_1 \setminus \overline{D}$ mit den gleichen $(\operatorname{Im} w_n)$-Koordinaten und den gleichen $('w)$-Koordinaten, aber mit $\operatorname{Re} w_n^1 < \operatorname{Re} w_n^2$, gilt die Relation $\Omega_{w^1} \subset \Omega_{w^2}$.

b) Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für jedes $'w \in {}'U_1$ gilt

$$U_1^\delta := U_1 \cap \left\{ w = ('w, w_n) \notin \overline{D} : \operatorname{Re} w_n > \delta \right\} \neq \emptyset \tag{II.61}$$

und ferner die Menge Ω_w zusammenhängend ist für jedes $w \in U_1^\delta$.

Eine der technischen Schwierigkeiten bei der Anwendung der Segre-Varietäten für die Untersuchung der Fortsetzungsprobleme ist die Tatsache, daß im allgemeinen die Menge $Q_w \cap D$ aus mehreren Zusammenhangskomponenten bestehen kann. Um diese Schwierigkeiten zu bewältigen, kann in einigen Fällen die Behauptung b) von Lemma II.9 benutzt werden, während in anderen Fällen eine spezielle Zusammenhangskomponente von $Q_w \cap D$ auswählt werden muß. Dieses kann wie folgt geschehen:

Definition II.5 *Nach eventueller Verkleinerung von U gilt für jedes $w \in U$ das folgende: Die komplexe Gerade l_w durch w, welche die reelle Gerade enthält, die durch w geht und orthogonal zu M ist, schneidet die Segre-Varietät Q_w in genau einem Punkt ${}^s w \in D$, welcher als symmetrischer Punkt zu w bezeichnet wird. Die Zusammenhangskomponente von $Q_w \cap D$, welche ${}^s w$ enthält, wird mit ${}^s Q_w$ bezeichnet und heißt die symmetrische Komponente von Q_w.*

Die folgende Abschätzung folgt direkt:

Lemma II.10 *Es gibt eine Umgebung $U = U(M)$, so daß für jede Folge $(w_k)_k \subset U$ mit $\operatorname{dist}(w_k, M) \to 0$ gilt*

$$\operatorname{dist}(w_k, M) \approx \operatorname{dist}({}^s w_k, M). \tag{II.62}$$

Auf ähnliche Weise wie die symmetrischen Punkte seien jetzt noch die reflektierten Punkte wie folgt definiert:

Definition II.6 *Es sei ein Standardkoordinatensystem wie oben gewählt. Für jedes $w \in U_1$ sei der bezüglich M und der gewählten Koordinaten reflektierte Punkt ${}^\kappa w$ durch die folgenden Bedingungen definiert:*

(i) ${}^\kappa w = ({}'w, {}^\kappa w_n)$.

(ii) $r({}^\kappa w, w) = 0$.

Diese beiden definierenden Bedingungen für ${}^\kappa w$ sind äquivalent zu der Bedingung

$$r(({}'w, {}^\kappa w_n), ({}'w, w_n)) = 0. \tag{II.63}$$

Damit ist die Abbildung $\kappa : w \to {}^\kappa w$ ein reell-analytischer Diffeomorphismus, welcher hochgradig von der Wahl des lokalen Koordinatensystems abhängt. Insbesondere gilt $(\kappa \circ \kappa)(w) \equiv w$, da r reellwertig ist.

8 Holomorphe Korrespondenzen

In diesem Abschnitt wird der Begriff der holomorphen Korrespondenz als eine geeignete Verallgemeinerung des Begriffs der holomorphen Abbildung eingeführt.

8.1 Definitionen

Definition II.7 *Es seien $U, U' \subset \mathbb{C}^n$ offene Mengen. Eine abgeschlossene, rein n-dimensionale komplex-analytische Menge $F \subset U \times U'$, für welche die Projektion $\pi : F \to U$ eigentlich ist, heißt eigentliche holomorphe Korrespondenz. Insbesondere heißt F irreduzibel, wenn $F \subset U \times U'$ als analytische Menge irreduzibel ist.*

Eine holomorphe Korrespondenz F ordnet jedem Punkt $z \in U$ eine endliche Anzahl von Bildpunkten zu, nämlich die Punkte der Menge $\hat{F}(z) := \pi'(\pi^{-1}(z)) \subset U'$, wobei π' die Projektion von F auf U' bezeichne. Mit Vielfachheiten gezählt ist die Anzahl dieser Bildpunkte genau gleich der Blätterzahl m der verzweigten Überlagerung $\pi : F \to U$. Diese Blätterzahl wird auch als Grad von F bezeichnet. Nach einer beliebig kleinen Perturbation des gewählten Standardkoordinatensystems im Bildbereich kann immer von der folgenden Situation ausgegangen werden:

Generische Situation: Es gibt eine abgeschlossene, niederdimensionale komplex-analytische Teilmenge $B \subset U$, so daß für jedes $z \in U \setminus B$ gilt: Sind $z^{1'}, z^{2'} \in \widehat{F}(z)$ zwei Punkte mit $z^{1'} \neq z^{2'}$, so gilt

$$z^{1'}_k \neq z^{2'}_k \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{II.64}$$

Die Punkte $z \in U \setminus B$ heißen generische Punkte von F. Für generische Punkte z ist die Zahl $\#\hat{F}(z)$ konstant und gleich dem Grad der Korrespondenz F.

In dieser Arbeit wird stets davon ausgegangen, daß das jeweilige Standardkoordinatensystem so gewählt ist, daß diese generische Situation hergestellt ist.

Die Komponenten der Bildpunkte von $\hat{F}(z)$, geschrieben als $z'_k = f_k(z)$ für $k = 1, \dots, n$, sind algebroide Funktionen auf U, d.h. sie erfüllen Gleichungen der Form

$$z'^m_k + a_{k1}(z) z'^{m-1}_k + \cdots + a_{km}(z) = 0 \qquad \text{(II.65)}$$

mit holomorphen Koeffizienten $a_{kj} \in \mathcal{O}(U)$. Aufgrund der vorausgesetzten generischen Situation und da F als irreduzibel angenommen wurde, sind diese Polynome irreduzibel über $\mathcal{O}(U)$.

8.2 Fortsetzende Korrespondenzen

Für die Anwendung des Begriffs der Korrespondenzen auf das Fortsetzungsproblem sei nun folgendes definiert:

Definition II.8 *Eine eigentliche holomorphe Abbildung $f : D \to D'$ von zwei Gebieten $D, D' \subset \mathbb{C}^n$ heißt fortsetzbar als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung U eines Randpunktes $z^0 \in \partial D$, wenn es eine offene Menge $U' \subset \mathbb{C}^n$ und eine irreduzible holomorphe Korrespondenz $F \subset U \times U'$ gibt, so daß gilt*

$$F \supset \Gamma_f \cap \big((D \cap U) \times D'\big)\,, \qquad \text{(II.66)}$$

wobei mit Γ_f der Graph von f bezeichnet sei. Die gleiche Sprechweise wird im folgenden auch für mehrwertige Abbildungen $\hat{F}$ verwendet.

Angenommen, nahe eines Punktes $z^0 \in \partial D$ ist ∂D reell-analytisch und von endlichem Typ. Dann gibt es nach Theorem II.6 nur zwei mögliche Situationen: Alle auf D nahe z^0 holomorphen Funktionen lassen sich holomorph auf eine Umgebung von z^0 fortsetzen oder alle außerhalb von $\overline{D}$ nahe z^0 holomorphen Funktionen haben diese Fortsetzbarkeitseigenschaft. Im ersten Fall muß jede Fortsetzung von f als eine irreduzible holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von z^0 notwendig schon eine holomorphe Abbildung nahe z^0 sein, wenn U genügend klein gewählt wird. Nur im zweiten Fall kann die Blätterzahl m der Fortsetzung größer als 1 sein.

Es sei hier die folgende elementare Beobachtung [7] gemacht:

Lemma II.11 *Wenn f sich als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung U eines Punktes $z^0 \in \partial D$ fortsetzen läßt, dann setzt sich f Hölder-stetig auf $\overline{D} \cap U$ fort.*

[7] siehe auch [22]

Beweis: Da sich die Abbildung f als eigentliche holomorphe Korrespondenz F fortsetzen läßt, gilt insbesondere für jeden Punkt $z \in \partial D$

$$\mathrm{cl}_f(z) \subset \widehat{F}(z). \tag{II.67}$$

Nach Lemma III.4 ist die Clustermenge $\mathrm{cl}_f(z)$ jedes Punktes $z \in \partial D$ unter der Abbildung f zusammenhängend. Da $\hat{F}(z)$ aber eine endliche Menge ist, kann $\mathrm{cl}_f(z)$ nur aus einem einzelnen Punkt bestehen, woraus sofort die stetige Fortsetzbarkeit von f auf $\overline{D} \cap U$ folgt. Weiter folgt die Hölder-Stetigkeit der Fortsetzung direkt aus der Darstellung (II.65) von F.

□

Wenn $f : D \to D'$ sich nahe $z \in \partial D$ als eigentliche holomorphe Korrespondenz $F \subset U \times U'$ fortsetzen läßt, dann ist $z' := f(z)$ nach Lemma (II.11) wohldefiniert und es gilt $(z, z') \in F$. Daher kann der Keim der Korrespondenz F bei (z, z') betrachtet werden. Es kann im weiteren immer angenommen werden, daß dieser Keim irreduzibel ist.

Abschließend sei jetzt noch das folgende Lemma aufgeführt:

Lemma II.12 *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, sei U eine Umgebung eines Punktes $z^0 \in \partial D$, so daß $\partial D \cap U$ eine $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperfläche endlichen Typs ist und es sei $F \subset U \times U'$ eine irreduzible eigentliche holomorphe Korrespondenz. Ferner sei*

$$F_c := F \cap ((U \setminus \overline{D}) \times U'). \tag{II.68}$$

Ist $z^0 \notin \widehat{D}$ und ist U genügend klein gewählt, so ist F_c irreduzibel.

Beweis: Es sei die Blätterzahl von $\pi : F \to U$ mit m bezeichnet. Ferner kann, wie oben schon erwähnt, angenommen werden, daß die Koordinaten in U' so gewählt sind, daß eine generische Situation vorliegt. Dann werden, wie in (II.65), die Komponenten von $\hat{F}$ gegeben durch irreduzible Pseudopolynome über $\mathcal{O}(U)$ der Form

$$z_k'^{\,m} + a_{k1}(z) z_k'^{\,m-1} + \cdots + a_{km}(z) = 0. \tag{II.69}$$

Es sei nun angenommen, daß F_c reduzibel ist. Dann hat F_c eine irreduzible Komponente $\tilde{F} \subset (U \setminus \overline{D}) \times U'$, so daß die Blätterzahl von $\pi : \tilde{F} \to U \setminus \overline{D}$ kleiner als m ist. Daher sind die Polynome aus (II.69) reduzibel über $\mathcal{O}(U \setminus \overline{D})$. Da $z^0 \notin \widehat{D}$ ist, lassen sich nach Theorem II.6 die holomorphen Koeffizienten dieser Zerlegung von $U \setminus \overline{D}$ nach ganz U holomorph fortsetzen. Damit ergibt sich, nach eventueller Verkleinerung von U, insbesondere eine Zerlegung von (II.69) über $\mathcal{O}(U)$, was aber ein Widerspruch zur Voraussetzung der Irreduzibilität von F ist. Also muß F_c irreduzibel gewesen sein.

□

8.3 Inverse von eigentlichen holomorphen Korrespondenzen

Im vorherigen Teilabschnitt wurden nur (lokale) eigentliche holomorphe Fortsetzungen F der eigentlichen holomorphen Abbildung $f : D \to D'$ und deren Inverse betrachtet. Für den späteren Gebrauch muß dieses nun noch verallgemeinert werden auf eigentliche holomorphe Korrespondenzen als Fortsetzung von Inversen eigentlicher holomorpher Abbildungen. Es sei dazu zuerst präzise definiert, was mit diesem Begriff genau gemeint sein soll, wozu jetzt zwischen der rein lokalen Fortsetzung der Inversen von f und einer etwas globaleren Situation unterschieden werden muß. Hier zunächst die Definition der globaleren Fortsetzung:

Definition II.9 *Die globale Inverse $g := f^{-1}$ der Abbildung f setzt sich als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf die zusammenhängende Umgebung U' von $z^{0'}$ fort, wenn es eine offene Menge $\hat{U} \subset \mathbb{C}^n$ und eine abgeschlossene, rein n-dimensionale komplex-analytische Teilmenge $G \subset \hat{U} \times U'$ gibt (G kann dabei möglicherweise reduzibel sein), so daß gilt:*

i) $\Gamma_f \cap (D \times (U' \cap D')) \subset G$.

ii) $\pi' : G \to U'$ *ist eigentlich.*

Ausgehend von dieser globaleren Fortsetzung der Inversen g sei nun mit der folgenden Definition die rein lokale Fortsetzung von g hervorgehoben:

Definition II.10 *Die globale Inverse $g := f^{-1}$ setzt sich als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung des Paares $(z^0, z^{0'})$ fort (oder die lokale Inverse von f bei $(z^0, z^{0'})$ setzt sich als eigentliche holomorphe Korrespondenz fort), wenn es offene Umgebungen $U = U(z^0)$ und $U' = U'(z^{0'})$ sowie eine irreduzible abgeschlossene, rein n-dimensionale komplex-analytische Menge $F \subset U \times U'$ gibt, so daß gilt:*

i) $\Gamma_f \cap ((U \cap D) \times (U' \cap D')) \subset F$.

ii) $\pi' : F \to U'$ *ist eigentlich.*

Veranschaulichend kann gesagt werden, daß die Definition II.9 die Fortsetzung von allen Zweigen von $g = f^{-1}$ als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von $z^{0'}$ behandelt, während sich Definition II.10 auf die Fortsetzung einer lokal irreduziblen Komponente von g nahe dem Paar $(z^0, z^{0'})$ beschränkt.

Illusion, daß etwas erkannt sei, wo wir eine mathematische Formel für das Geschehene haben: Es ist nur bezeichnet: Nichts mehr!

Friedrich Nietzsche

Teil III
Stetige Fortsetzbarkeit

Untersuchungsgegenstand dieses Teils ist die folgende Fragestellung:

Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Für Randpunkte $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ seien $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ geeignete kleine offene Umgebungen. Unter welchen Voraussetzungen an $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ gibt es dann eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß sich f Hölder-stetig auf $D \cup (\partial D \cap U)$ fortsetzen läßt?

Die im folgenden verwendeten Methoden beruhen in weiten Teilen auf [35]. Dort wurde insbesondere das folgende globale Theorem bewiesen:

Theorem III.1 ([35], Theorem 6.1) *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein strikt sternförmiges $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet und sei $D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ reell-analytisch. Dann läßt sich jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ Hölder-stetig auf $\overline{D}$ fortsetzen.*

In der vorliegenden Arbeit kann nun ausgehend von [35] insbesondere das folgende lokale Theorem gezeigt werden:

Theorem A *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Für $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ gebe es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$, so daß $\partial D \cap W$ eine $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperfläche und $\partial D' \cap W'$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist. Ferner gebe es Umgebungen $U = U(z^0)$ und $U' = U'(z^{0'})$ sowie Konstanten $C > 0$ und $\mu > 0$, so daß gilt*

$$\mathrm{dist}(f(z), \partial D') < C\,\mathrm{dist}(z, \partial D)^{\mu} \qquad \forall\, z \in U \cap f^{-1}(f(D \cap U) \cap U'). \tag{III.1}$$

Dann gibt es eine Umgebung $V = V(z^0)$, so daß $f_{|D\cap V}$ sich Hölder-stetig auf $\overline{D} \cap V$ fortsetzen läßt.

Mit den vorliegenden Resultaten ergibt sich unter anderem auch direkt die folgende Verallgemeinerung von Theorem III.1:

Satz III.1 *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein strikt sternförmiges $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet und sei $D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes Gebiet. Es sei $f : D \to D'$ eine biholomorphe Abbildung und seien*

$z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \partial D'$ Randpunkte, so daß es eine Umgebung $W' = W'(z^{0'})$ gibt, für die $\partial D' \cap W'$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß sich f Hölder-stetig auf $D \cup (\partial D \cap U)$ fortsetzen läßt.

Es seien jetzt als einführende Betrachtungen zum Problem der lokalen stetigen Fortsetzbarkeit einige zentrale Eigenschaften der Clustermengen von Randpunkten unter eigentlichen Abbildungen aufgezeigt:

Lemma III.1 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ zwei Gebiete, sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt und es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche stetige Abbildung. Dann gibt es für jede offene Menge U' mit $\mathrm{cl}_f(z^0) \subset\subset U'$ eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß gilt*

$$f(D \cap U) \subset D' \cap U'. \tag{III.2}$$

Beweis: Es sei U' eine beliebige offene Menge mit $\mathrm{cl}_f(z^0) \subset\subset U'$. Angenommen, die Aussage des Lemmas wäre falsch. Dann gibt es eine Umgebungsbasis $(U_k)_k$ von z^0, so daß gilt

$$f(D \cap U_k) \cap (D' \setminus U') \neq \emptyset \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{III.3}$$

Damit gibt es insbesondere eine Folge $(z_k)_k \subset D$ mit $z_k \to z^0$, für die gilt

$$f(z_k) \in D' \setminus U' \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{III.4}$$

Da f eigentlich ist, kann $(z_k)_k$ insbesondere so gewählt werden, daß die Folge $(f(z_k))_k$ gegen einen Punkt $w' \in \partial D$ konvergiert. Wegen (III.4) muß dann auch $w' \in D' \setminus U'$ gelten. Nach Definition gilt aber auch $w' \in \mathrm{cl}_f(z^0)$, was ein Widerspruch zu $\mathrm{cl}_f(z^0) \subset\subset U'$ ist.

$\square$

Damit ergibt sich als Spezialfall direkt das folgende Lemma:

Lemma III.2 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ zwei Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche stetige Abbildung. Weiter seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \partial D'$ zwei Randpunkte, für die $\mathrm{cl}_f(z^0) = \left\{z^{0'}\right\}$ gilt. Dann gibt es für jede Umgebung $U' = U'(z^{0'})$ eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß gilt*

$$\mathrm{cl}_f(z) \subset \partial D' \cap U' \quad \forall\, z \in \partial D \cap U. \tag{III.5}$$

Beweis: Es sei $U' = U'(z^{0'})$ eine Umgebung von $z^{0'}$. Nach Lemma III.1 gibt es für $V' = V'(z^{0'}) \subset\subset U'$ eine Umgebung $V = V(z^0)$, so daß $f(D \cap V) \subset D' \cap V'$ gilt. Es sei nun $U = U(z^0) \subset\subset V$ eine weitere Umgebung. Dann gilt nach (II.23)

$$\mathrm{cl}_f(z) \subset \overline{f(D \cap U)} \quad \forall\, z \in \partial D \cap U, \tag{III.6}$$

womit, da f eigentlich ist, sofort die Behauptung folgt.

$\square$

Lemma III.3 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ zwei Gebiete, es sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt und es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche stetige Abbildung. Dann ist $\mathrm{cl}_f(z^0) \subset \partial D'$ abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $(w'_k)_k \subset \mathrm{cl}_f(z^0)$ eine Folge mit $w'_k \to w' \in \partial D'$. Zu zeigen ist $w' \in \mathrm{cl}_f(z^0)$. Da $w'_k \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ ist, gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(z^k_j)_j \subset D$ mit

$$\lim_{j\to\infty} z^k_j \to z^0 \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} f(z^k_j) \to w'_k. \tag{III.7}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $k_n \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$\left|w'_{k_n} - w'\right| \leq \frac{1}{n}. \tag{III.8}$$

Weiter gibt es zu diesem k_n ein $j_n \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$\left|z^{k_n}_{j_n} - z^0\right| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \left|f(z^{k_n}_{j_n}) - w'_{k_n}\right| < \frac{1}{n}. \tag{III.9}$$

Damit kann nun eine Folge $(\tilde{z}_n)_n \subset D$ definiert werden durch

$$\tilde{z}_n := z^{k_n}_{j_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{III.10}$$

Dann folgt nach Konstruktion sofort

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{z}_n = z^0 \quad \text{und} \lim_{n\to\infty} f(\tilde{z}_n) = w'. \tag{III.11}$$

Damit ist $w' \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ gezeigt.

□

Lemma III.4 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ zwei Gebiete und es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche stetige Abbildung. Es sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt, für den es eine Umgebung $W = W(z^0)$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ $\mathcal{C}^1$-glatt ist. Dann ist $\mathrm{cl}_f(z^0)$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\partial D'$.*

Beweis: Angenommen $\mathrm{cl}_f(z^0)$ ist nicht zusammenhängend. Da $\mathrm{cl}_f(z^0)$ nach Lemma III.3 abgeschlossen ist, gibt es dann eine Darstellung

$$\mathrm{cl}_f(z^0) = A'_1 \,\dot{\cup}\, A'_2, \tag{III.12}$$

mit disjunkten abgeschlossenen nichtleeren Mengen A'_1 und A'_2. Da $\mathbb{R}^n$ insbesondere Hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen $U'_1 = U'_1(A'_1)$ und $U'_2 = U'_2(A'_2)$ mit

$$\overline{U'_1} \cap \overline{U'_2} = \emptyset. \tag{III.13}$$

Insbesondere ist $U' := U'_1 \cup U'_2$ eine offene Umgebung von $\mathrm{cl}_f(z^0)$. Nach Lemma III.1 gibt es dann eine offene Umgebung $U = U(z^0)$ mit

$$f(D \cap U) \subset D' \cap U'. \tag{III.14}$$

Da $\partial D \cap W$ nach Voraussetzung $\mathcal{C}^1$-glatt ist, gibt es eine Umgebung $V = V(z^0) \subset U$, so daß $D \cap V$ zusammenhängend ist. Damit ist aber auch $f(D \cap V)$ als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend. Es gilt aber nach (III.14) $f(D \cap V) \subset U'$ und nach Definition von $\mathrm{cl}_f(z^0)$ muß, da A'_1 und A'_2 beide nicht leer sind, ferner gelten

$$f(D \cap V) \cap U'_1 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad f(D \cap V) \cap U'_2 \neq \emptyset. \tag{III.15}$$

Dies ist aber nach (III.13) nicht möglich, wenn $f(D \cap V)$ zusammenhängend ist. Widerspruch! Also muß $\mathrm{cl}_f(z^0)$ zusammenhängend sein.

□

Im Fall von nicht-glatten Randpunkten ist die Aussage des obigen Lemmas im allgemeinen falsch, wie das folgende einfache Beispiel sofort zeigt:

Beispiel: Es seien in $\mathbb{C}$ die folgenden beiden Gebiete betrachtet

$$D := \Delta \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z = 0\}, \tag{III.16}$$
$$D' := \Delta \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}. \tag{III.17}$$

Dann ist

$$f : D \to D', z =: re^{i\theta} \mapsto f(z) := re^{i\theta/2} \tag{III.18}$$

eine biholomorphe Abbildung. Für jedes $z \in \partial D$ mit $\operatorname{Im}(z) = 0$ und $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ gilt

$$\mathrm{cl}_f(z) = \{z, -z\}, \tag{III.19}$$

was offenbar eine nicht zusammenhängende Menge ist. Insbesondere läßt sich damit f nicht stetig auf $\overline{D}$ fortsetzen.

Aus Lemma III.4 ergibt sich insbesondere folgendes Korollar:

Korollar III.1 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete, es sei $f : D \to D'$ eine stetige eigentliche Abbildung und es sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt, für den es eine Umgebung $W = W(z^0)$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ $\mathcal{C}^1$-glatt ist. Es gebe ferner für einen Punkt $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ eine Umgebung $U' = U'(z^{0'})$, so daß gilt*

$$\mathrm{cl}_f(z^0) \cap U' = \left\{ z^{0'} \right\}. \tag{III.20}$$

Dann gilt sogar

$$\mathrm{cl}_f(z^0) = \left\{ z^{0'} \right\}. \tag{III.21}$$

Es seien jetzt noch einige Beispiele aufgeführt, die verdeutlichen, welche Pathologien bei der Frage nach stetiger Fortsetzbarkeit im Fall $n > 1$ auftreten können. Damit wird insbesondere klar, welche Regularitätsbedingungen an ∂D und $\partial D'$ notwendig gestellt werden müssen, um in der betrachteten Situation die stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung f zeigen zu können.

Beispiel 1 Es sei $D := \Delta \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$. Damit ist D ein unbeschränktes, reell-analytisches glattes pseudokonvexes Gebiet. Es sei $g : \Delta \to \mathbb{C}$ eine beliebige holomorphe Funktion mit einer Polstelle in $1 \in \partial\Delta$, beispielsweise $g(z) := (z-1)^{-1}$. Es sei nun $f : D \to D$ definiert durch

$$f(z_1, z_2) := (z_1, z_2 - g(z_1)). \tag{III.22}$$

Dann ist f ein Automorphismus von D, die Inverse von f ist gegeben durch

$$f^{-1}(w_1, w_2) = (w_1, w_2 + g(w_1)). \tag{III.23}$$

Da g sich aber nicht stetig nach 1 fortsetzen läßt, kann sich auch f nicht stetig nach $(1,0) \in \partial D$ fortsetzen lassen.

Beispiel 2 Das folgende Beispiel aus [32] zeigt, daß im Falle von beschränkten Gebieten $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^2$ mit irregulären Randpunkten die Situation auftreten kann, daß sich *keine* biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ stetig auf $\overline{D}$ fortsetzen läßt.

Die beiden Gebiete D, D' werden wie folgt konstruiert: Es seien zwei Mengen von Punkten $(\zeta_k)_k, (\zeta'_k)_k \subset \mathbb{C}$ für $k = 1, \ldots, 4$ mit den folgenden Eigenschaften gewählt:

- Es gilt $|\zeta_k| = |\zeta'_k| = 1$ für alle $k \in \{1, \ldots, 4\}$.
- Es existiert kein biholomorpher Automorphismus $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$, für den gilt

$$g\left(\bigcup_{k=1}^{4} \zeta_k\right) = \bigcup_{k=1}^{4} \zeta'_k. \tag{III.24}$$

Es seien nun zwei Abbildungen $F, F' : \Delta_2 \to \mathbb{C}^2$ definiert durch

$$F(z_1, z_2) := \left(z_1, z_2 \prod_{k=1}^{4} (\zeta_k - z_1)\right) \tag{III.25}$$

$$F'(z_1, z_2) := \left(z_1, z_2 \prod_{k=1}^{4} (\zeta'_k - z_1)\right), \tag{III.26}$$

und es sei schließlich $D := F(\Delta_2)$ und $D' := F'(\Delta_2)$. Dann haben die beiden Gebiete D, D' die folgenden Eigenschaften:

- D und D' haben stückweise glatte Ränder, die homöomorph zur Einheitssphäre sind.
- D und D' sind beide biholomorph äquivalent zum Dizylinder Δ_2.
- Es gibt eine bijektive $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $h : \overline{D} \to \overline{D'}$.

- Für jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ läßt sich weder f noch f^{-1} stetig auf $\overline{D}$ bzw. $\overline{D'}$ fortsetzen.

Beispiel 3 Wie dieses abschließende Beispiel jetzt zeigen wird, können die obigen Pathologien selbst noch bei Automorphismen eines beschränkten Gebiets auftreten, welches mit Ausnahme eines Punktes global reell-analytisch und streng pseudokonvex ist:

Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^2$ definiert durch

$$\Omega := \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_2|^{-2} - 3 =: r(z) < 0\right\}. \tag{III.27}$$

Dann ist Ω ein beschränktes reell-analytisches Gebiet. Die Leviform von r auf $\partial\Omega$ ergibt sich zu

$$\mathcal{L}_r(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{|z_2|^4} \end{pmatrix} \quad \forall\, z \in \partial\Omega. \tag{III.28}$$

Damit ist Ω insbesondere streng pseudokonvex. Die Abbildung $F : \Omega \to \mathbb{C}^2$ mit

$$F(z_1, z_2) := (z_1, (1 - z_1)z_2) \tag{III.29}$$

ist eine biholomorphe Abbildung von Ω nach $D := F(\Omega)$. Insbesondere läßt sich F auch noch biholomorph auf eine Umgebung von $\partial\Omega \setminus \{z_1 = 1\}$ fortsetzen. Damit ist auch $F(\partial\Omega \setminus \{z_1 = 1\}) = \partial D \setminus (1, 0)$ reell-analytisch und streng pseudokonvex. Explizit hat D die Darstellung

$$D = \left\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : |w_1|^2 + \left|\frac{w_2}{1 - w_1}\right|^2 + \left|\frac{w_2}{1 - w_1}\right|^{-2} < 3\right\}. \tag{III.30}$$

Für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$\Phi_\theta(z_1, z_2) := (e^{i\theta} z_1, z_2) \tag{III.31}$$

ein Automorphismus von Ω. Daher ist die Abbildung f_θ mit

$$f_\theta(w_1, w_2) := F \circ \Phi_\theta \circ F^{-1}(w_1, w_2) \tag{III.32}$$

$$= \left(e^{i\theta} w_1, \frac{1 - e^{i\theta} w_1}{1 - w_1} w_2\right) \tag{III.33}$$

ein Automorphismus von D. Wenn $\theta \neq 2\pi k$ ist, d.h. wenn $e^{i\theta} \neq 1$ ist, läßt sich f_θ nicht stetig nach $p := (1, 0)$ fortsetzen, da in diesem Fall f_θ eine nicht hebbare Singularität in p hat. Die Clustermenge $\mathrm{cl}_{f_\theta}(p)$ ist enthalten in den Kreisringen

$$D \cap \left\{z_1 = e^{i\theta}\right\} = \left\{(e^{i\theta}, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_2|^2 + |z_2|^{-2} < 2 \cdot \left|1 - e^{i\theta}\right|\right\}. \tag{III.34}$$

Andererseits lassen sich aber die Automorphismen $F \circ \Psi_\theta \circ F^{-1}$ von D, mit

$$\Psi_\theta(z_1, z_2) := \left(z_1, e^{i\theta} z_2\right) \tag{III.35}$$

alle stetig nach $\overline{D}$ fortsetzen und es gilt $\Psi_\theta(p) = p$.

9 Lokalisierung

Es sei zuerst das folgende elementare Lemma angegeben, welches sich direkt aus den Cauchy-Abschätzungen ergibt:

Lemma III.5 *Es seien $D \subset \mathbb{C}^n$, $D' \subset\subset \mathbb{C}^m$ Gebiete und es sei $f : D \to D'$ eine holomorphe Abbildung. Dann gibt es für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ eine Konstante $C_\alpha > 0$, so daß gilt*

$$\left| \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^\alpha f(z) \right] \cdot X \right| < C_\alpha \frac{|X|}{\operatorname{dist}(z, \partial D)^{|\alpha|}} \quad \forall\, z \in D\; \forall\, X \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}\,. \tag{III.36}$$

Beweis: Da D' beschränkt ist, gilt

$$M := \sup \{|f(z)| : z \in D\} < \infty. \tag{III.37}$$

Weiter ist für $z \in D$ der abgeschlossene Polyzylinder um z mit Polyradius r für jedes $r < 4^{-n} \operatorname{dist}(z, \partial D)$ vollständig in D enthalten. Daher gilt nach den Cauchy-Abschätzungen

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^\alpha f(z) \right| \leq \frac{4^n M \cdot \alpha!}{\operatorname{dist}(z, \partial D)^{|\alpha|}} \quad \forall\, z \in D. \tag{III.38}$$

Damit folgt sofort die Behauptung des Lemmas.

□

Das folgende Lemma gibt nun eine Lokalisierungsaussage über das Verhalten von Kugeln unter der Abbildung f, deren Radien mit einer Potenz des Randabstandes ihrer Zentren kleiner werden. Dieses Lemma wird sich in den weiteren Betrachtungen als ein zentrales Hilfsmittel erweisen.

Lemma III.6 *Es seien $D \subset \mathbb{C}^n, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \operatorname{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, für die es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperflächen sind. Es seien $V' = V'(z^{0'})$ und $U' = U'(z^{0'})$ offene Umgebungen von $z^{0'}$ mit $V' \subset\subset U' \subset\subset W'$. Ferner sei $\alpha > 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(z^0) \subset\subset W$ so daß gilt*

$$f(B_{\operatorname{dist}(z,\partial D)^{1+\alpha}}(z)) \subset U' \quad \forall\, z \in U \cap f^{-1}(D' \cap V'). \tag{III.39}$$

Beweis: Falls $\operatorname{cl}_f(z^0) \subset U'$ ist, dann gibt es nach Lemma III.1 eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß $f(U \cap D) \subset U' \cap D'$ ist. Damit folgt sofort (III.39). Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, in welchem

$$\operatorname{cl}_f(z^0) \setminus U' \neq \emptyset \tag{III.40}$$

gilt. Da $\operatorname{cl}_f(z^0)$ nach Lemma III.4 zusammenhängend ist, gilt dann insbesondere auch

$$\operatorname{cl}_f(z^0) \cap \partial V' \neq \emptyset. \tag{III.41}$$

Es sei nun angenommen, die Behauptung des Lemmas wäre in dieser Situation falsch. Zur Abkürzung der Notation sei $B^\alpha(z) := B_{\mathrm{dist}(z,\partial D)^{1+\alpha}}(z)$. Dann gibt es für jede Umgebung $U = U(z^0) \subset\subset W$ ein $z \in U \cap f^{-1}(D' \cap V')$, so daß gilt

$$f(B^\alpha(z)) \cap \partial U' \neq \emptyset. \tag{III.42}$$

Daher muß es auch eine Folge $(z_k)_k \subset D \cap W$ mit

$$\lim z_k = z^0 \quad \text{und} \quad f(z_k) \in V' \tag{III.43}$$

geben, so daß gilt

$$f(B^\alpha(z_k)) \cap \partial U' \neq \emptyset \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{III.44}$$

Somit gibt es insbesondere eine Folge $(w_k)_k \subset D \cap W$ mit

$$|w_k - z_k| < \mathrm{dist}(z_k, \partial D)^{1+\alpha} \quad \text{und} \quad f(w_k) \in \partial U'. \tag{III.45}$$

Es sei nun der Weg $\gamma_k \subset B^\alpha(z_k)$ definiert durch

$$\gamma_k(t) = z_k + t(w_k - z_k) \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{III.46}$$

Dann gilt insbesondere, für genügend große k,

$$\mathrm{dist}(\gamma_k(t), \partial D) \geq \mathrm{dist}(z_k, \partial D) - \mathrm{dist}(z_k, \partial D)^{1+\alpha} > 0 \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{III.47}$$

Weiter gibt es für jedes k ein $t_k \in]0,1]$, so daß gilt

$$f(\gamma_k([0,t_k[)) \subset U' \quad \text{und} \quad f(\gamma_k(t_k)) \in \partial U'. \tag{III.48}$$

Es sei nun $\tilde{w}_k := \gamma_k(t_k)$. Dann gilt auch für $\tilde{w}_k$

$$|\tilde{w}_k - z_k| < \mathrm{dist}(z_k, \partial D)^{1+\alpha} \quad \text{und} \quad f(\tilde{w}_k) \in \partial U'. \tag{III.49}$$

Es gilt ferner

$$f(\tilde{w}_k) - f(z_k) = \int_0^{t_k} f'(\gamma_k(t)) \cdot \gamma_k'(t)\, dt. \tag{III.50}$$

Damit ergibt sich aber mit (III.47), (III.45) und Lemma III.5

$$
\begin{aligned}
|f(\tilde{w}_k) - f(z_k)| &\leq \int_0^{t_k} \left|f'(\gamma_k(t)) \cdot \gamma_k'(t)\right| \, dt && \text{(III.51)} \\
&\leq \int_0^{t_k} \left|f'(\gamma_k(t))\right| |w_k - z_k| \, dt && \text{(III.52)} \\
&\leq \int_0^{t_k} \frac{C\,|w_k - z_k|}{\operatorname{dist}(\gamma_k(t), \partial D)} \, dt && \text{(III.53)} \\
&\leq \int_0^{1} \frac{C\,|w_k - z_k|}{\operatorname{dist}(z_k, \partial D) - \operatorname{dist}(z_k, \partial D)^{1+\alpha}} \, dt && \text{(III.54)} \\
&\leq C \frac{\operatorname{dist}(z_k, \partial D)^{1+\alpha}}{\operatorname{dist}(z_k, \partial D) - \operatorname{dist}(z_k, \partial D)^{1+\alpha}}, && \text{(III.55)} \\
& && \text{(III.56)}
\end{aligned}
$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten $C > 0$. Ist k genügend groß, dann gilt $\frac{1}{2}\operatorname{dist}(z_k, \partial D) > \operatorname{dist}(z_k, \partial D)^{1+\alpha}$, so daß schließlich folgt

$$
\begin{aligned}
|f(\tilde{w}_k) - f(z_k)| &\leq C \frac{\operatorname{dist}(z_k, \partial D)^{1+\alpha}}{\frac{1}{2}\operatorname{dist}(z_k, \partial D)} && \text{(III.57)} \\
&\leq 2C \operatorname{dist}(z_k, \partial D)^{\alpha}. && \text{(III.58)}
\end{aligned}
$$

Damit folgt aber sofort

$$\lim_{k\to\infty} |f(\tilde{w}_k) - f(z_k)| \leq \lim_{k\to\infty} 2C \operatorname{dist}(z_k, \partial D)^{\alpha} = 0. \tag{III.59}$$

Andererseits gilt aber nach (III.43) und (III.49)

$$\lim_{k\to\infty} |f(\tilde{w}_k) - f(z_k)| \geq \operatorname{dist}(\partial U', \partial V') > 0. \tag{III.60}$$

Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

□

10 Verhalten des Randabstandes unter f

In diesem Abschnitt wird nun untersucht, unter welchen Voraussetzungen eine Abschätzung der Form

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D') < \operatorname{dist}(z, \partial D)^{\mu} \tag{III.61}$$

erhalten werden kann. Dazu sei zuerst aufbauend auf den Ideen aus [35] das folgende Lemma gezeigt:

Lemma III.7 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine biholomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, für die es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperflächen sind. Es gebe weiter Umgebungen $U = U(z^0)$ und $U' = U'(z^{0'})$, so daß gilt:*

i) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt

$$P_{D\cap U}(W^{1/2}(D \cap U)) \subset L^{2+\varepsilon}(D \cap U). \tag{III.62}$$

ii) Es gibt eine Funktion[8] $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{f(D \cap U)})$ und eine Konstante $\delta > 0$, so daß gilt

$$\left|[P_{f(D\cap U)}\varphi](z')\right| > \delta \quad \forall\, z' \in f(D \cap U) \cap U'. \tag{III.63}$$

Dann gibt es Umgebungen $V = V(z^0)$ und $V' = V'(z^{0'})$ sowie Konstanten $N > 0$ und $C > 0$, so daß für $g := f^{-1}$ gilt

$$\left|\det[g'](z')\right| > C\,\mathrm{dist}(z', \partial D')^N \quad \forall\, z' \in f(D \cap V) \cap V'. \tag{III.64}$$

Beweis: Es sei $\tilde{D}' := f(D \cap U)$. Weiter gelte ohne Einschränkung $\varepsilon < 1$ und $\delta < 1$. Da φ insbesondere in $L^2(\tilde{D}')$ liegt, gilt nach der Transformationsformel für die Bergmann-Projektion aus Lemma II.6 nun

$$P_{D\cap U}(\det[f'] \cdot (\varphi \circ f)) = \det[f'] \cdot ((P_{\tilde{D}'}\varphi) \circ f). \tag{III.65}$$

Wegen $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\tilde{D}'})$ gilt insbesondere

$$\det[f'] \cdot (\varphi \circ f) \in W^{1/2}(D \cap U), \tag{III.66}$$

so daß aus (III.62) sofort folgt

$$P_{D\cap U}(\det[f'] \cdot (\varphi \circ f)) \in L^{2+\varepsilon}(D \cap U). \tag{III.67}$$

Es sei nun $h := P_{\tilde{D}'}\varphi \in \mathcal{O}(\tilde{D}')$. Damit folgt mit (III.65) weiter

$$\det[f'] \cdot (h \circ f) \in L^{2+\varepsilon}(D \cap U). \tag{III.68}$$

Somit gilt

$$\int\limits_{D\cap U} \left|\det[f'](z)\right|^{2+\varepsilon} \left|[h \circ f](z)\right|^{2+\varepsilon} \, d\,z =: M < \infty. \tag{III.69}$$

[8] siehe Seite 8

Nach der Transformationsformel gilt aber

$$\int_{D\cap U} \left|\det[f'](z)\right|^{2+\varepsilon} |[h\circ f](z)|^{2+\varepsilon}\ d\,z \tag{III.70}$$

$$= \int_{\tilde{D}'} \left|\det[f'](g(z'))\right|^{2+\varepsilon} \left|[h\circ f\circ g](z')\right|^{2+\varepsilon} \left|\det_{\mathbb{R}}[g'](z')\right|\ d\,z' \tag{III.71}$$

$$= \int_{\tilde{D}'} \frac{1}{|\det[g'](f(g(z')))|^{2+\varepsilon}} \left|h(z')\right|^{2+\varepsilon} \left|\det[g'](z')\right|^{2}\ d\,z' \tag{III.72}$$

$$= \int_{\tilde{D}'} \left|\det[g'](z')\right|^{-\varepsilon} \left|h(z')\right|^{2+\varepsilon}\ d\,z'. \tag{III.73}$$

Zusammen mit (III.69) folgt daher

$$\int_{\tilde{D}'} \left|\det[g'](z')\right|^{-\varepsilon} \left|h(z')\right|^{2+\varepsilon}\ d\,z' \leq M. \tag{III.74}$$

Nach (III.63) gilt weiter

$$M \geq \int_{\tilde{D}'\cap U'} \left|\det[g'](z')\right|^{-\varepsilon} \left|h(z')\right|^{2+\varepsilon} > \int_{\tilde{D}'\cap U'} \left|\det[g'](z')\right|^{-\varepsilon} \delta^{3}. \tag{III.75}$$

Nun ist $\det[g'] \in \mathcal{O}(D')$, und damit ist insbesondere $|\det[g']|^{-\varepsilon}$ plurisubharmonisch auf D'. Daher gilt nach der Mittelwertungleichung für plurisubharmonische Funktionen

$$\left|\det[g'](z')\right|^{-\varepsilon} \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}_{2n}(B_r(z'))} \int_{B_r(z')} \left|\det[g'](\xi)\right|^{-\varepsilon}\ d\,\xi, \tag{III.76}$$

für jedes $z' \in D'$ und jeden Radius $0 < r < \mathrm{dist}(z', \partial D')$. Es sei nun $\alpha > 0$. Ferner sei $V = V(z^0) \subset\subset U$. Nach Lemma III.6, angewendet auf g, gibt es dann eine Umgebung $\tilde{V}' = \tilde{V}'(z^{0'}) \subset U'$, so daß gilt

$$g(B_{\mathrm{dist}(z',\partial D')^{1+\alpha}}(z')) \subset D\cap U \quad \forall\, z' \in \tilde{V}' \cap g^{-1}(D\cap V). \tag{III.77}$$

Damit folgt sofort

$$B_{\mathrm{dist}(z',\partial D')^{1+\alpha}}(z') \subset \tilde{D}' \quad \forall\, z' \in \tilde{V}' \cap f(D\cap V). \tag{III.78}$$

Es sei nun $V' = V'(z^0) \subset\subset \tilde{V}'$ eine Umgebung von $z^{0'}$, so daß gilt

$$\mathrm{dist}(\partial V', \partial U') > \sup\left\{\mathrm{dist}(z', \partial D')^{1+\alpha} : z' \in D' \cap V'\right\}. \tag{III.79}$$

Dann folgt aus (III.78) sogar

$$B_{\mathrm{dist}(z',\partial D')^{1+\alpha}}(z') \subset \tilde{D}' \cap U' \quad \forall\, z' \in f(D\cap V) \cap V'. \tag{III.80}$$

Mit (III.75) gilt daher

$$\int\limits_{B_{\operatorname{dist}(z',\partial D')^{1+\alpha}}(z')} \left|\det[g'](z')\right|^{-\varepsilon}\, d\, z' < M\delta^{-3} \quad \forall\, z' \in f(D\cap V)\cap V'. \tag{III.81}$$

Damit folgt aus (III.76) sofort

$$\left|\det[g'](z')\right|^{-\varepsilon} < \frac{\operatorname{dist}(z',\partial D')^{-2n(1+\alpha)}}{\operatorname{Vol}_{2n}(B_1(0))} M\delta^{-3} \quad \forall\, z' \in f(D\cap V)\cap V'. \tag{III.82}$$

Somit gilt schließlich

$$\left|\det[g'](z')\right| \gtrsim \operatorname{dist}(z',\partial D')^{\frac{2n(1+\alpha)}{\varepsilon}} \quad \forall\, z' \in f(D\cap V)\cap V'. \tag{III.83}$$

Damit ist Abschätzung (III.64) gezeigt.

□

Satz III.2 *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine biholomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \operatorname{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, für die es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ gibt, so daß $\partial D\cap W$ und $\partial D'\cap W'$ $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperflächen sind. Es gebe weiter Umgebungen $U = U(z^0)$ und $U' = U'(z^{0'})$ sowie Konstanten $N > 0$ und $C' > 0$, so daß für $g := f^{-1}$ gilt*

$$\left|\det[g'](z')\right| > C' \operatorname{dist}(z',\partial D')^N \quad \forall\, z' \in f(D\cap U)\cap U'. \tag{III.84}$$

Dann gibt es Konstanten $\mu > 0$ und $C > 0$, so daß gilt

$$\operatorname{dist}(f(z),\partial D') < C \operatorname{dist}(z,\partial D)^\mu \quad \forall\, z \in U\cap f^{-1}(f(D\cap U)\cap U') \tag{III.85}$$

Beweis: Es sei ein Punkt $z' \in f(D\cap U)\cap U'$ beliebig, aber fest gewählt. Es sei bemerkt, daß alle im weiteren auftretenden Konstanten stets unabhängig von der Wahl von z' sind. Nach Lemma III.5 gibt es eine Konstante $C_1 > 0$, so daß gilt

$$\left|g'(z')X\right| < \frac{C_1\,|X|}{\operatorname{dist}(z',\partial D')} \quad \forall\, z' \in D'\ \forall\, X \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\}\,. \tag{III.86}$$

Es sei nun ein beliebiger Einheitsvektor $X_1 \in \mathbb{C}^n$ gewählt und sei dieser dann weiter zu einer Orthonormalbasis $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des $\mathbb{C}^n$ ergänzt. Dann gilt nach (III.84) und (III.86)

$$\begin{aligned}
C' \operatorname{dist}(z',\partial D')^N &< \left|\det[g'](z')\right| && \text{(III.87)}\\
&\le n! \prod_{j=1}^n \left|g'(z')X_j\right| && \text{(III.88)}\\
&< n! \left|g'(z')X_1\right| \cdot C_1^{n-1} \operatorname{dist}(z',\partial D')^{1-n}, && \text{(III.89)}
\end{aligned}$$

so daß nun für $M := N + n - 1 > 0$ und $C_2 := C'(n!)^{-1} C_1^{1-n}$ schließlich gilt

$$\left| g'(z') X_1 \right| > C_2 \operatorname{dist}(z', \partial D')^M. \tag{III.90}$$

Es sei nun $z := g(z')$ und sei $w \in \partial D$ der, bei genügend kleiner Wahl von W, eindeutig bestimmte Punkt mit $\operatorname{dist}(z, \partial D) = |z - w|$. Es sei weiter $X \in \mathbb{C}^n$ ein Einheitsvektor, für welchen $g'(z')X$ dieselbe reelle Richtung hat wie der Vektor $v := w - z$. Weiter sei die Halbgerade l definiert durch

$$l := \left\{ z + tv : t \in \mathbb{R}_0^+ \right\} \tag{III.91}$$

und schließlich sei noch

$$h(t) := g(z' + tX) \qquad \forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D') \right]. \tag{III.92}$$

Damit gilt jetzt für alle $t \in \left[0, \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D') \right]$

$$\int_0^t h''(\tau)(t - \tau)\, d\tau \;=\; \int_0^t h'(\tau)\, d\tau + \left[h'(\tau)(t - \tau) \right]_0^t \tag{III.93}$$

$$= \; h(t) - h(0) - h'(0)t. \tag{III.94}$$

Nach Lemma III.5 gibt es eine Konstante $C_3 > 0$, so daß gilt

$$\left| h''(t) \right| < \frac{C_3}{\operatorname{dist}(z' + tv, \partial D')^2} \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D') \right]. \tag{III.95}$$

Es gilt nach Konstruktion ferner

$$\frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D') \le \operatorname{dist}(z' + tv, \partial D') \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D') \right], \tag{III.96}$$

so daß jetzt insgesamt folgt

$$\left| h(t) - h(0) + h'(0)t \right| < \frac{4 C_3 t^2}{\operatorname{dist}(z', \partial D')^2} \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D') \right]. \tag{III.97}$$

Es sei nun

$$p(t) := h(0) + h'(0)t = z + g'(z')Xt \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_0^+. \tag{III.98}$$

Dann gilt $p(t) \in l$ für jedes $t \in R_0^+$ und nach (III.90) gilt insbesondere

$$|z - p(t)| > C_2 t \operatorname{dist}(z', \partial D')^M \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_0^+. \tag{III.99}$$

Es sei nun $t_0 > 0$ so gewählt, daß gilt

$$|z - p(t_0)| = 2\,|w - z| = 2 \operatorname{dist}(z, \partial D). \tag{III.100}$$

Dann gilt nach (III.99)

$$t_0 < \frac{2}{C_2} |w - z| \operatorname{dist}(z', \partial D')^{-M} \tag{III.101}$$

und es ist $p(t_0) \in \mathbb{C}^n \setminus D$. Ferner gilt

$$\operatorname{dist}(p(t_0), \partial D) = |w - z| = \operatorname{dist}(z, \partial D). \tag{III.102}$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder gilt $t_0 < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D')$ oder es gilt $t_0 \geq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D')$. Im ersten Fall gilt nach (III.97) die Abschätzung

$$|h(t_0) - p(t_0)| < \frac{4C_3 t_0^2}{\operatorname{dist}(z', \partial D')^2}. \tag{III.103}$$

Da $h(t_0) \in D$ und $p(t_0) \in \mathbb{C}^n \setminus D$ ist, gilt insbesondere

$$|h(t_0) - p(t_0)| > \operatorname{dist}(p(t_0), \partial D). \tag{III.104}$$

Zusammen mit (III.101), (III.102) und (III.103) folgt dann direkt

$$\operatorname{dist}(z, \partial D) < 16 C_3 C_2^{-2} \operatorname{dist}(z, \partial D)^2 \operatorname{dist}(z', \partial D')^{-2M-2}. \tag{III.105}$$

Es ist aber $z' = f(z)$, so daß damit sofort die gewünschte Abschätzung

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D') < \left(\frac{16 C_3}{C_2^2} \right)^{\frac{1}{2M+2}} \operatorname{dist}(z, \partial D)^{\frac{1}{2M+2}} \tag{III.106}$$

folgt. Im zweiten Fall folgt andererseits nach (III.101) die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \operatorname{dist}(z', \partial D') < 2 C_2^{-1} \operatorname{dist}(z, \partial D) \operatorname{dist}(z', \partial D')^{-M}, \tag{III.107}$$

woraus wieder sofort folgt

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D') < \left(\frac{4}{C_2} \right)^{\frac{1}{M+1}} \operatorname{dist}(z, \partial D)^{\frac{1}{M+1}}. \tag{III.108}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

□

Es werden nun einige Situationen angegeben, in denen die Voraussetzungen von Lemma III.7 erfüllt sind.

In [9] wurde folgender Satz gezeigt, welcher eine hinreichende Bedingung für die Erfülltheit von Voraussetzung ii) aus Lemma III.7 angibt:

Satz III.3 *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes Gebiet. Dann gibt es eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{D})$, so daß gilt*

$$P_D \varphi \equiv 1. \tag{III.109}$$

Damit ergeben sich die folgenden Korollare:

Korollar III.2 *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine biholomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, für die es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperflächen sind. Es gebe weiter eine Umgebung $U = U(z^0)$, so daß $D \cap U$ ein strikt sternförmiges $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet und $f(D \cap U)$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes Gebiet ist. Dann gibt es Umgebungen $V = V(z^0)$ und $V' = V'(z^{0'})$ sowie Konstanten $N > 0$ und $C > 0$, so daß für $g := f^{-1}$ gilt*

$$\left|\det[g'](z')\right| > C \operatorname{dist}(z', \partial D')^N \quad \forall\, z' \in f(D \cap V) \cap V'. \tag{III.110}$$

Korollar III.3 *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein strikt sternförmiges $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet, sei $D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glattes Gebiet und sei $f : D \to D'$ eine biholomorphe Abbildung. Dann gibt es Konstanten $N > 0$ und $C > 0$, so daß für $g := f^{-1}$ gilt*

$$\left|\det[g'](z')\right| > C \operatorname{dist}(z', \partial D')^N \quad \forall\, z' \in D'. \tag{III.111}$$

Ein anderer Zugang zum Beweis der gewünschten Aussage über das Verhalten des Randabstandes unter der Abbildung f bietet sich nach [20] in der Situation an, wenn die Existenz geeigneter plurisubharmonischer Funktionen im Urbildgebiet bekannt ist. Ein wichtiges Hilfsmittel hierbei ist der folgende bekannte Satz:

Satz III.4 (Hopf-Lemma) *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit $\mathcal{C}^2$-glattem Rand. Ferner sei $\varphi : D \to \mathbb{R}^-$ eine negative plurisubharmonische Funktion. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß gilt*

$$\varphi(z) < -C \operatorname{dist}(z, \partial D) \quad \forall\, z \in D. \tag{III.112}$$

Damit läßt sich nun folgendes Lemma zeigen:

Lemma III.8 *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, für die es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperflächen sind. Es gebe eine negative plurisubharmonische $\mathcal{C}^2$-Funktion φ auf D sowie Konstanten $C > 0$ und $\mu > 0$, so daß für eine Teilmenge $K \subset \partial D \cap W$ und für eine Umgebung $U = U(z^0)$ gilt*

$$\varphi(z) > -C \operatorname{dist}(z, K)^\mu \quad \forall\, z \in D \cap U. \tag{III.113}$$

Dann gibt es eine Umgebung $U' = U'(z^{0'})$ sowie eine Konstante $C' > 0$, so daß gilt

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D') < C' \operatorname{dist}(z, K)^\mu \quad \forall\, z \in U \cap f^{-1}(D' \cap U'). \tag{III.114}$$

Beweis: Mit der gegebenen Funktion φ sei definiert

$$\tau : D' \to \mathbb{R},\ \tau(z') := \sup\left\{\varphi(z) : z \in D, f(z) = z'\right\}. \tag{III.115}$$

Dann ist τ nach Satz II.3 eine negative stetige plurisubharmonische Funktion auf D'. Da $\partial D' \cap W'$ $\mathcal{C}^2$-glatt ist, gibt es eine Umgebung $U' = U'(z^{0'}) \subset\subset W'$, so daß $U' \cap D'$ ein $\mathcal{C}^2$-glatt berandetes beschränktes Gebiet ist. Nach Satz III.4 gibt es nun eine Konstante $C_1 > 0$, so daß gilt

$$\tau(z') < -C_1 \operatorname{dist}(z', \partial D') \quad \forall\, z' \in D' \cap U'. \tag{III.116}$$

Damit folgt weiter

$$\tau(f(z)) < -C_1 \operatorname{dist}(f(z), \partial D') \quad \forall\, z \in D \cap f^{-1}(D' \cap U'). \tag{III.117}$$

Aus der Definition von τ in (III.115) folgt sofort

$$\tau(f(z)) \geq \varphi(z) \ \ \forall\, z \in D. \tag{III.118}$$

Daraus folgt zusammen mit (III.117)

$$\varphi(z) < -C_1 \operatorname{dist}(f(z), \partial D') \quad \forall\, z \in D \cap f^{-1}(D' \cap U') \tag{III.119}$$

Damit folgt schließlich aus (III.113) und (III.117)

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D') < \frac{C}{C_1} \operatorname{dist}(z, K)^{\mu} \quad \forall\, z \in U \cap f^{-1}(D' \cap U') \tag{III.120}$$

womit das Lemma bewiesen ist.

□

Mit diesem Lemma ergibt sich nun direkt auch die gewünschte Aussage über das Verhalten des Randabstandes für eine bestimmte Menge von Punkten. Dazu sei zuerst definiert:

Definition III.1 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und es sei $K \subset \partial D$. Für $\nu \in \mathbb{R}^+$ sei die Menge $\Gamma_\nu(K) \subset D$ definiert als*

$$\Gamma_\nu(K) := \{z \in D : \operatorname{dist}(z, K) < \operatorname{dist}(z, \partial D)^\nu\}\,. \tag{III.121}$$

Es seien hier kurz folgende Eigenschaften von $\Gamma_\nu(K)$ bemerkt:

Lemma III.9 *Es sei $U = U(K) \subset \mathbb{C}^n$ eine genügend kleine offene Umgebung von K. Dann gilt*

- $\Gamma_\nu(K) \cap U = \emptyset \quad \forall\, \nu \geq 1.$
- $(\overline{\Gamma_\nu(K)} \cap U) \cap \partial D = K \quad \forall\, 0 < \nu < 1.$
- $\nu_1 > \nu_2 \ \Rightarrow\ \Gamma_{\nu_1}(K) \subset \Gamma_{\nu_2}(K).$
- $D \cap U \subset \bigcup_{\nu \in (0,1]} \Gamma_\nu(K).$

Mit der Definition der Mengen $\Gamma_\nu(K)$ ergibt sich nun aus Lemma III.8 unmittelbar das folgende Korollar:

Korollar III.4 *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, für die es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ und $\partial D' \cap W'$ $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperflächen sind. Es gebe eine negative plurisubharmonische $\mathcal{C}^2$-Funktion φ auf D sowie Konstanten $C > 0$ und $\mu > 0$, so daß für eine Teilmenge $K \subset \partial D \cap W$ und für eine Umgebung $U = U(z^0)$ gilt*

$$\varphi(z) > -C \operatorname{dist}(z, K)^\mu \quad \forall\, z \in D \cap U. \tag{III.122}$$

Dann gibt es eine Umgebung $U' = U'(z^{0'})$ sowie eine Konstante $C' > 0$, so daß für jedes $\nu > 0$ gilt

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D') < C' \operatorname{dist}(z, \partial D)^{\mu\nu} \qquad \forall\, z \in \Gamma_\nu(K) \cap U \cap f^{-1}(D' \cap U'). \tag{III.123}$$

Es seien jetzt noch Bedingungen angegeben, unter denen die Existenz der in Korollar III.4 benötigten Funktion φ gesichert ist. Zuerst sei dazu das folgende Lemma bemerkt, welches sich direkt aus der Definition der Segre-Varietäten und den Globalisierungstechniken aus [20], [36] ergibt:

Lemma III.10 *Es sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt, für den es eine Umgebung $W = W(z^0)$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist und so daß ferner gilt*

$$Q_{z^0} \cap (\overline{D} \cap W) = \left\{z^0\right\}. \tag{III.124}$$

Dann gibt es eine negative plurisubharmonische $\mathcal{C}^2$-Funktion φ auf D sowie ein $\mu > 0$, so daß für eine Umgebung $U = U(z^0)$ gilt

$$\varphi(z) \gtrsim -\operatorname{dist}(z, z^0)^\mu \quad \forall\, z \in D \cap U. \tag{III.125}$$

In dem Fall, wo $\partial D \cap W$ ein $\mathcal{C}^\infty$-glatte pseudokonvexe Hyperfläche endlichen Typs ist, ist die Existenz des benötigten φ durch das folgende Theorem gesichert:

Theorem III.2 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt, für den es eine Umgebung $W = W(z^0)$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ eine $\mathcal{C}^\infty$-glatte pseudokonvexe Hyperfläche endlichen Typs ist. Dann gibt es eine negative beschränkte plurisubharmonische Funktion φ auf D, so daß für eine Konstante $\mu > 0$ und eine Umgebung $U = U(z^0)$ gilt*

$$\varphi(z) \gtrsim -\operatorname{dist}(z, \partial D)^\mu \quad \forall\, z \in D \cap U. \tag{III.126}$$

Damit ergibt sich insbesondere das folgende Korollar:

Korollar III.5 *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt, für den es eine Umgebung $W = W(z^0)$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ eine $\mathcal{C}^\infty$-glatte Hyperfläche ist. Es sei $\tilde{D} \supset D$ ein Gebiet mit $z^0 \in \partial\tilde{D}$, so daß $\partial\tilde{D} \cap W$ eine $\mathcal{C}^\infty$-glatte pseudokonvexe Hyperfläche endlichen Typs ist. Es sei ferner $K := \partial D \cap \partial\tilde{D} \cap W$. Dann gibt es eine negative beschränkte plurisubharmonische Funktion φ auf D, so daß für eine Konstante $\mu > 0$ und eine Umgebung $U = U(z^0)$ gilt*

$$\varphi(z) \gtrsim -\operatorname{dist}(z, K)^\mu \quad \forall\, z \in D \cap U. \tag{III.127}$$

11 Hölder-Stetigkeit von $r \circ f$

Lemma III.11 *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, und es sei $W' = W'(z^0)$ eine Umgebung, so daß $\partial D' \cap W'$ eine $\mathcal{C}^2$-glatte Hyperfläche ist. Ferner sei $r : W' \to \mathbb{R}$ eine definierende Funktion von D' auf W'. Es gebe Umgebungen $U = U(z^0)$ und $U' = U'(z^{0'}) \subset W'$, sowie Konstanten $\mu > 0$ und $C > 0$ so daß gilt*

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D') < C \operatorname{dist}(z, \partial D)^\mu \quad \forall\, z \in U \cap f^{-1}(f(U \cap D) \cap U') =: D_0. \tag{III.128}$$

Dann gibt es eine Konstante $C' > 0$, so daß für alle Punkte $z^1, z^2 \in D_0$ mit $\left|z^1 - z^2\right| < 1$, für welche gilt

$$\left\{z^1 + t(z^2 - z^1) : t \in [0,1]\right\} =: \gamma \subset D_0, \tag{III.129}$$

die folgende Abschätzung mit $\varepsilon := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}\right\}$ gilt

$$\left|r(f(z^1)) - r(f(z^2))\right| < C' \left|z^1 - z^2\right|^\varepsilon. \tag{III.130}$$

Beweis: Es seien zwei beliebige Punkte $z_1, z_2 \in D_0$ gewählt, die die Voraussetzungen des Lemmas erfüllen. Es können nun folgende zwei Fälle auftreten:

Fall 1: Es ist $\left|z^1 - z^2\right|^{\frac{1}{2}} < \max(\operatorname{dist}(z^1, \partial D), \operatorname{dist}(z^2, \partial D))$.

In diesem Fall gilt insbesondere

$$\left|z^1 - z^2\right|^{\frac{1}{2}} < 2 \operatorname{dist}(z, \partial D) \quad \forall\, z \in \gamma. \tag{III.131}$$

Da $r \in \mathcal{C}^2(W')$ ist, gibt es eine von z^1, z^2 unabhängige Konstante $C_1 > 0$, so daß gilt

$$\left|r(f(z^1)) - r(f(z^2))\right| \le C_1 \left|f(z^1) - f(z^2)\right|. \tag{III.132}$$

Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} \left|r(f(z^1)) - r(f(z^2))\right| &\le C_1 \left|z^1 - z^2\right| \sup\left\{\left|f'(z)\right| : z \in \gamma\right\} && \text{(III.133)}\\ &\le C_1 \left|z^1 - z^2\right| \sup\left\{\frac{C_2}{\operatorname{dist}(z, \partial D)} : z \in \gamma\right\} && \text{(III.134)}\\ &\le 2C_1C_2 \left|z^1 - z^2\right| \frac{1}{\left|z^1 - z^2\right|^{\frac{1}{2}}} && \text{(III.135)}\\ &= 2C_1C_2 \left|z^1 - z^2\right|^{\frac{1}{2}}. && \text{(III.136)} \end{aligned}$$

Damit ist (III.130) im Fall 1 gezeigt.

FALL 2: Es ist $\left|z^1 - z^2\right|^{\frac{1}{2}} \geq \max(\mathrm{dist}(z^1, \partial D), \mathrm{dist}(z^2, \partial D))$.

In diesem Fall gilt mit (III.128)

$$\begin{aligned}
\left|r(f(z^1)) - r(f(z^2))\right| &\leq \left|r(f(z^1))\right| + \left|r(f(z^2))\right| && \text{(III.137)}\\
&\leq C_3\left(\mathrm{dist}(f(z^1), \partial D') + \mathrm{dist}(f(z^2), \partial D')\right) && \text{(III.138)}\\
&\leq C_3 C\left(\mathrm{dist}(z^1, \partial D)^\mu + \mathrm{dist}(z^2, \partial D)^\mu\right) && \text{(III.139)}\\
&\leq 2C_3C\left|z^1 - z^2\right|^{\frac{\mu}{2}}. && \text{(III.140)}
\end{aligned}$$

Damit ist (III.130) auch im Fall 2 gezeigt.

□

12 Stetige Fortsetzung von f

Für den Beweis von Theorem A werden noch einige technische Lemmata aus [35] benötigt, die hier jetzt explizit angegeben seien:

Lemma III.12 ([35], Lemma 4.1) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen, sei $K \subset G$ eine kompakte Teilmenge von G und sei $P : G \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^+$ eine positive reell-analytische Funktion, so daß für jedes $x \in G$ die Funktion $P_x : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}, y \mapsto P(x,y)$ ein Polynom vom Grade d oder niedriger ist. Dann gibt es Konstanten $a > 0$ und $b > 0$, so daß gilt*

$$P(x,y) > \frac{a}{(1 + |y|^2)^b} \quad \forall\,(x,y) \in K \times \mathbb{R}^M. \tag{III.141}$$

Es sei hier darauf hingewiesen, daß die Aussage dieses Lemmas falsch ist, wenn die Funktion P nur als $\mathcal{C}^\infty$-glatt und nicht als reell-analytisch vorausgesetzt wird, selbst im Falle $N = M = 1$. Es sei dazu $e(x) := e^{-x^{-2}}$ für $x \neq 0$ und $e(0) := 0$ betrachtet. Dann erfüllt

$$P(x,y) := (1 - xy)^2 + e(x) \tag{III.142}$$

nicht die Abschätzung des Lemmas, wenn K eine Umgebung von 0 enthält, da gilt

$$\min_{x \in K} P(x,y) \leq P(y^{-1}, y) = e^{-y^2}. \tag{III.143}$$

Die Verwendung von Lemma III.12 im Beweis von Theorem A ist der einzige Grund, warum in Theorem A die Analytizität von $\partial D' \cap W'$ gefordert wird.

Lemma III.13 ([35], Lemma 4.2) *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt, für den es eine Umgebung $W = W(z^0)$ gibt, so daß $\partial D \cap W$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist. Weiter sei $r : W \to \mathbb{R}$ eine reell-analytische definierende Funktion für D auf W. Es sei ferner $k \in \mathbb{N}$ so groß, daß für alle $z \in W$ gilt $\Delta_1(r, z) \leq k$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(z^0) \subset W$ sowie Konstanten $a > 0$*

und $b > 0$, so daß folgendes gilt: Ist $h : \Delta(0,\varepsilon) \to U \cap D$ eine auf einer kleinen Kreisscheibe $\Delta(0,\varepsilon) \subset \mathbb{C}$ definierte holomorphe Abbildung mit $|h'(0)| = 1$, dann gilt

$$\sum_{0<i+j\leq k} \left| \frac{\partial^{i+j}(r \circ h)}{\partial z^i \partial \overline{z}^j}(0) \right|^2 \geq a \left(\sum_{0<i\leq k} \left| \frac{\partial^i h}{\partial z^i}(0) \right| \right)^{-b}. \tag{III.144}$$

Lemma III.14 ([35], Lemma 5.1) *Für jedes gegebene $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $C = C(k) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit*

$$q(\zeta) = \sum_{0\leq i+j\leq k^2} \frac{q_{ij}}{i!j!} \zeta^i \overline{\zeta}^j \tag{III.145}$$

ein Polynom vom Grade k^2 oder niedriger, für welches gilt

$$\sum_{0<i+j\leq k^2} |q_{ij}|^2 \geq 1, \tag{III.146}$$

dann gilt

$$\max_{|\zeta|\leq 1} |q(\zeta)| - \min_{|\zeta|\leq 1} |q(\zeta)| > C. \tag{III.147}$$

Damit stehen nun alle Hilfsmittel bereit, um Theorem A mit einer Kombination der Ideen aus [21], [11] und [35] beweisen zu können:

Beweis (von Theorem A): Es sei $r : W' \to \mathbb{R}$ eine reell-analytische definierende Funktion von D' auf W'. Weiter sei

$$k := \sup \left\{ \Delta_1(r, z') : z' \in W' \right\} < \infty. \tag{III.148}$$

Nach Lemma III.13 gibt es Konstanten $a > 0$ und $b > 0$, so daß die Abschätzung (III.144) mit diesem k auf W', nach eventueller Verkleinerung von W', erfüllt ist. Ohne Einschränkung kann dabei $a < 1$ angenommen werden. Weiter sei $\varepsilon := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}\right\}$ und es sei schließlich

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4(k+1)k(b+1)}, \tag{III.149}$$

$$\alpha := 2\delta k(b+1). \tag{III.150}$$

Es ist nun zunächst $\mathrm{cl}_f(z^0) = \left\{ z^{0'} \right\}$ zu zeigen. Angenommen, es wäre

$$\mathrm{cl}_f(z^0) \setminus \left\{ z^{0'} \right\} \neq \emptyset. \tag{III.151}$$

Dann muß es eine Kugel

$$B_2' := B_{r_2}'(z^{0'}) \subset\subset U' \tag{III.152}$$

geben, für die gilt

$$\mathrm{cl}_f(z^0) \setminus \overline{B_2'} \neq \emptyset. \tag{III.153}$$

Nach Lemma III.6 gibt es eine Umgebung $V \subset U$, so daß gilt

$$f(B_{\mathrm{dist}(z,\partial D)^{1+\alpha/2}}(z)) \subset U' \cap D' \quad \forall\, z \in V \cap f^{-1}(D' \cap B_2'). \tag{III.154}$$

Wegen (III.153) muß es insbesondere eine Umgebungsbasis $(U_j)_j$ von $\mathcal{C}^\infty$-glatten Gebieten $U_j = U_j(z^0) \subset\subset V$ geben, so daß gilt

$$f(U_j \cap D) \setminus B_2' \neq \emptyset \quad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{III.155}$$

Da $M := \partial D \cap W$ insbesondere $\mathcal{C}^2$-glatt ist, ist $U_j \cap D$, nach eventueller Verkleinerung von U, für jedes j zusammenhängend. Damit ist $f(U_j \cap D)$ ebenfalls zusammenhängend für jedes j. Da $\mathrm{cl}_f(z^0)$ nach Lemma III.4 zusammenhängend ist, kann nach (III.155) nun eine Folge $(w_j)_j \subset D \cap V$ gewählt werden, für die mit $M' := \partial D' \cap W'$ gilt

$$w_j \in U_j \;\;,\;\; f(w_j) \in \partial B_2' \quad \text{sowie} \quad \lim_{j\to\infty} f(w_j) =: w^{0'} \in \partial B_2' \cap M'. \tag{III.156}$$

Wieder aufgrund der Tatsache, daß $\mathrm{cl}_f(z^0)$ zusammenhängend ist, kann nun weiter zu einem Radius $0 < r_1 < r_2$ eine Folge $(z_j)_j \in D \cap V$ gewählt werden, so daß mit $B_1' := B_{r_1}(z^{0'})$ gilt

$$z_j \in U_j \;\;,\;\; f(z_j) \in \partial B_1' \quad \text{sowie} \quad \lim_{j\to\infty} f(z_j) =: z^{1'} \in \partial B_1' \cap M'. \tag{III.157}$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei nun mit

$$l_j := |z_j - w_j| \tag{III.158}$$

ein stückweise stetig differenzierbarer Weg

$$\gamma_j : [0, 3l_j] \to D \cap W \tag{III.159}$$

von z_j nach w_j gewählt, für den gilt

- $\mathrm{dist}(\gamma_j(t), \partial D) \geq t \quad \forall\, t \in [0, l_j]$,
- $\mathrm{dist}(\gamma_j(t), \partial D) \geq l_j \quad \forall\, t \in [l_j, 2l_j]$,
- $\mathrm{dist}(\gamma_j(t), \partial D) \geq 3l_j - t \quad \forall\, [2l_j, 3l_j]$,
- $0 < |\gamma'(t)| < C_1 \quad \forall\, t \in [0, 3l_j]$, mit einer von j unabhängigen Konstanten $C_1 > 0$.

Wegen $f(\gamma_j(0)) \in B_2'$ und $f(\gamma_j(3l_j)) \in \partial B_2'$ gibt es für jedes $j \in \mathbb{N}$ mindestens ein $t_j \in]0, 3l_j]$ mit

$$f(\gamma_j([0, t_j[)) \subset B_2' \;\text{ und }\; f(\gamma_j(t_j)) \in \partial B_2'. \tag{III.160}$$

Es ist jetzt die folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\eta > 0$, so daß gilt

$$\left| f'(\gamma_j(t)) \cdot \gamma_j'(t) \right| < \frac{\left|\gamma_j'(t)\right|}{\mathrm{dist}(\gamma_j(t), \partial D)^{1-\eta}} \quad \forall\, t \in [0, t_j] \;\; \forall\, j \geq N. \tag{III.161}$$

Angenommen, die Behauptung ist nicht wahr. Dann muß es eine Folge $(j_\nu)_\nu \subset \mathbb{N}$ mit $j_\nu \to \infty$ geben, so daß es insbesondere für das in (III.149) gewählte $\delta > 0$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{t}_\nu \in [0, t_{j_\nu}]$ sowie einen Einheitsvektor $\tilde{X}_\nu \in \mathbb{C}^n$ gibt, so daß für $z_\nu := \gamma_{j_\nu}(\tilde{t}_\nu)$ gilt

$$\left| f'(z_\nu)\tilde{X}_\nu \right| > \frac{1}{\operatorname{dist}(z_\nu, \partial D)^{1-\delta}} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}. \tag{III.162}$$

Es wird nun gezeigt, daß dies nicht möglich ist. Dazu sei ein $\nu \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt und es sei $t := \tilde{t}_\nu$, $X := \tilde{X}_\nu$ sowie $z := z_\nu$. Weiter sei zur Vereinfachung der Notation folgendes definiert

$$\lambda := \frac{1}{|f'(z)X|} \quad , \quad \Delta := \operatorname{dist}(z, \partial D). \tag{III.163}$$

Es sei hier darauf hingewiesen, daß alle im weiteren Beweis auftretenden Konstanten stets von ν unabhängig sind. Aus (III.162) folgt nun mit Lemma III.5, daß für ein $0 < C_1 \leq 1$ gilt

$$C_1 \Delta < \lambda \leq \Delta^{1-\delta}. \tag{III.164}$$

Für $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| < \Delta\lambda^{-1}$ ist $z + \lambda\xi X \in D$. Damit sei definiert

$$h(\xi) := f(z + \lambda \xi X) \quad \forall\, |\xi| < \Delta\lambda^{-1}. \tag{III.165}$$

Dann gilt nach (III.163)

$$\left|h'(0)\right| = \left|f'(z)X\right| \lambda = \left|f'(z)X\right| \left|f'(z)X\right|^{-1} = 1, \tag{III.166}$$

und nach Lemma III.5 und (III.164) gilt ferner

$$\left| \frac{\partial^j h}{\partial z^j}(0) \right| < \frac{C_j \lambda^j}{\operatorname{dist}(z, \partial D)^j} \leq C_j \Delta^{-j\delta}, \tag{III.167}$$

mit Konstanten $C_j > 0$ für $j \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Es sei nun weiter mit H das k-te Taylorpolynom von h um 0 und mit R das k-te Taylorpolynom von r um $z' := h(0) = f(z)$ bezeichnet. Schließlich sei

$$Q(\xi) := R(H(\xi)) = \sum_{0 \leq i+j \leq k^2} \frac{Q_{ij}}{i!j!} \xi^i \overline{\xi}^j \quad \forall\, |\xi| < \Delta\lambda^{-1}. \tag{III.168}$$

Dann stimmen $r \circ h$ und Q in 0 von Ordnung k überein. Daher gilt nach Lemma III.13 und (III.167)

$$\sum_{0 < i+j \leq k} |Q_{ij}|^2 \geq a \Delta^{2bk\delta}. \tag{III.169}$$

Es sei nun

$$q(\zeta) := \sum_{0 \leq i+j \leq k^2} \frac{q_{ij}}{i!j!} \zeta^i \overline{\zeta}^j := \frac{1}{a\Delta^{bk\delta}} \left(\lambda \Delta^{-(1+\alpha)}\right)^k Q\left(\zeta \Delta^{1+\alpha} \lambda^{-1}\right) \quad \forall\, |\zeta| \leq 1. \tag{III.170}$$

Dann folgt mit (III.169) sofort

$$\sum_{0<i+j\le k^2} |q_{ij}|^2 \ \ge\ \frac{1}{a^2\Delta^{2bk\delta}}\left(\lambda\Delta^{-(1+\alpha)}\right)^{2k} \sum_{0<i+j\le k} |Q_{ij}|^2 \left(\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}\right)^{2(i+j)} \tag{III.171}$$

$$\ge\ \frac{1}{a^2\Delta^{2bk\delta}}\left(\lambda\Delta^{-(1+\alpha)}\right)^{2k}\left(\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}\right)^{2k} \sum_{0<i+j\le k} |Q_{ij}|^2 \tag{III.172}$$

$$\ge\ \frac{1}{a} > 1. \tag{III.173}$$

Damit kann Lemma III.14 angewendet werden, wonach es eine Konstante $C_2 > 0$ gibt, so daß gilt

$$\max_{|\zeta|\le 1} q(\zeta) - \min_{|\zeta|\le 1} q(\zeta) > C_2. \tag{III.174}$$

Mit (III.170), (III.164) und (III.150) ergibt sich daraus nun

$$\max_{|\xi|\le\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}} Q(\xi) - \min_{|\xi|\le\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}} Q(\xi) \ >\ C_2\Delta^{k(1+\alpha+b\delta)}\lambda^{-k} \tag{III.175}$$

$$\ge\ C_2\Delta^{k(\alpha+b\delta+\delta)} \tag{III.176}$$

$$\ge\ C_2\Delta^{\alpha(k+2^{-1})}. \tag{III.177}$$

Es muß als nächster Schritt gezeigt werden, daß eine entsprechende Abschätzung auch für $r\circ h$ anstelle von $Q = R\circ H$ gilt. Dazu sei bemerkt, daß gilt

$$|h(\xi) - H(\xi)| \le \max_{|\zeta|\le\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}} \frac{\left(\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}\right)^{k+1}}{(k+1)!}\left|\frac{\partial^{k+1}h}{\partial z^{k+1}}(\zeta)\right| \quad \forall\, \xi \le \Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}. \tag{III.178}$$

Da h auf der Kreisscheibe $|\xi| < \Delta\lambda^{-1}$ beschränkt ist, gibt es eine Konstante $C_3 > 0$, so daß gilt

$$\left|\frac{\partial^{k+1}h}{\partial z^{k+1}}(\zeta)\right| < C_3\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^{-(k+1)} \qquad \forall\, |\zeta| \le \Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}. \tag{III.179}$$

Daher folgt mit (III.178) jetzt

$$|h(\xi) - H(\xi)| \lesssim \Delta^{\alpha(k+1)} \quad \forall\, |\xi| \le \Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1} \tag{III.180}$$

und damit folgt sofort

$$|r(h(\xi)) - r(H(\xi))| \lesssim \Delta^{\alpha(k+1)} \quad \forall\, |\xi| \le \Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}. \tag{III.181}$$

Da aber ferner nach (III.166) und (III.167) gilt

$$|H(\xi) - H(0)| \le \sum_{j=2}^{k} C_j\Delta^{-j}\lambda^j\frac{\left(\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}\right)^j}{j!} \lesssim \Delta^{\alpha} \quad \forall\, |\xi| \le \Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}, \tag{III.182}$$

folgt weiter

$$|r(H(\xi)) - R(H(\xi))| \lesssim |H(\xi) - H(0)|^{k+1} \lesssim \Delta^{\alpha(k+1)} \quad \forall\, |\xi| \le \Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}. \tag{III.183}$$

Damit folgt nun zusammen mit (III.181)

$$|r(h(\xi)) - R(H(\xi))| \lesssim \Delta^{\alpha(k+1)} \quad \forall\, |\xi| \le \Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}, \tag{III.184}$$

so daß mit (III.177) insgesamt folgt

$$\max_{|\xi|\le\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}} r(h(\xi)) - \min_{|\xi|\le\Delta^{1+\alpha}\lambda^{-1}} r(h(\xi)) \gtrsim \Delta^{\alpha(k+2^{-1})}. \tag{III.185}$$

Es sei jetzt ξ^1 ein Punkt, an dem das obige Maximum, und ξ^2 ein Punkt, an dem das obige Minimum angenommen wird. Weiter sei

$$z^1 := z + \lambda\xi^1 X \quad , \quad z^2 := z + \lambda\xi^2 X. \tag{III.186}$$

Da nach (III.154) gilt

$$f(B_{\Delta^{1+\alpha/2}}(z)) \subset U' \cap D', \tag{III.187}$$

gilt insbesondere auch $f(z^1), f(z^2) \in U' \cap D'$. Aus (III.185) folgt nun

$$r(f(z^1)) - r(f(z^2)) \gtrsim \Delta^{\alpha(k+1/2)}. \tag{III.188}$$

Andererseits gilt aber nach (III.186)

$$\left|z^1 - z^2\right| \le 2\Delta^{1+\alpha}. \tag{III.189}$$

Wegen (III.187) erfüllen z^1, z^2 die Voraussetzungen von Lemma III.11, so daß folgt

$$r(f(z^1)) - r(f(z^2)) \lesssim \Delta^{\varepsilon(1+\alpha)}. \tag{III.190}$$

Zusammen mit (III.188) folgt daraus

$$\Delta^{\varepsilon(1+\alpha)} \gtrsim \Delta^{\alpha(k+1/2)}. \tag{III.191}$$

Da alle aufgetretenen Konstanten stets unabhängig von ν waren, ist damit also gezeigt, daß mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ gilt

$$\operatorname{dist}(z_\nu, \partial D)^{\varepsilon(1+\alpha)} > \tilde{C} \operatorname{dist}(z_\nu, \partial D)^{\alpha(k+1/2)} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}. \tag{III.192}$$

Dieses ist wegen $\operatorname{dist}(z_\nu, \partial D) \to 0$ aber nur möglich, wenn $\alpha > \varepsilon(k+1)^{-1}$ gilt. Damit folgt

$$\delta > \frac{\varepsilon}{2(k+1)k(b+1)}. \tag{III.193}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von δ in (III.149). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Mit der nun bewiesenen Abschätzung (III.161) folgt jetzt für alle $j \geq N$

$$\begin{aligned}
|f(\gamma_j(0)) - f(\gamma_j(t_j))| &= \left| \int_0^{t_j} f'(\gamma_j(t)) \cdot \gamma_j'(t)\, dt \right| && \text{(III.194)}\\
&\leq \int_0^{t_j} \left| f'(\gamma_j(t)) \cdot \gamma_j'(t)\, dt \right| && \text{(III.195)}\\
&< C_2 \int_0^{t_j} \frac{\left|\gamma_j'(t)\right|}{\operatorname{dist}(\gamma_j(t), \partial D)^{1-\delta}}\, dt && \text{(III.196)}\\
&\leq C_1 C_2 \int_0^{3l_j} \frac{1}{\operatorname{dist}(\gamma_j(t), \partial D)^{1-\delta}}\, dt && \text{(III.197)}\\
&\leq C_1 C_2 \left(\int_0^{l_j} \frac{1}{t^{1-\delta}}\, dt + \int_{l_j}^{2l_j} \frac{1}{l_j^{1-\delta}}\, dt + \right.\\
&\qquad \left. \int_{2l_j}^{3l_j} \frac{1}{(3l_j - t)^{1-\delta}}\, dt \right) && \text{(III.198)}\\
&= C_1 C_2 \left(\frac{l_j^\delta}{\delta} + l_j^\delta + \frac{l_j^\delta}{\delta} \right) && \text{(III.199)}\\
&= C_1 C_2 \left(1 + \frac{2}{\delta} \right) l_j^\delta. && \text{(III.200)}
\end{aligned}$$

Damit folgt wegen $\delta > 0$ und $\lim l_j = 0$ sofort mit $C_3 := C_1 C_2 \left(1 + 2\delta^{-1}\right)$

$$\lim_{j\to\infty} |f(\gamma_j(0)) - f(\gamma_j(t_j))| \leq \lim_{j\to\infty} C_3 l_j^\delta = 0. \qquad \text{(III.201)}$$

Andererseits gilt aber

$$\lim_{j\to\infty} |f(\gamma_j(0)) - f(\gamma_j(t_j))| \geq r_2 - r_1 > 0. \qquad \text{(III.202)}$$

Widerspruch. Also muß $\operatorname{cl}_f(z^0) = \left\{ z^{0\prime} \right\}$ gelten.

Nach Lemma III.2 gibt es nun eine Umgebung $\tilde{V} = \tilde{V}(z^0) \subset\subset U$, so daß gilt

$$\operatorname{cl}_f(z) \cap U' \neq \emptyset \quad \forall\, z \in \partial D \cap \tilde{V}. \qquad \text{(III.203)}$$

Damit gibt es zu jedem Punkt $z \in \partial D \cap \tilde{V}$ einen Punkt $z' \in \operatorname{cl}_f(z^0)$, so daß U' eine offene Umgebung von z' ist. Dann folgt mit den obigen Argumenten sofort $\operatorname{cl}_f(z) = \{z'\}$.

Damit ist gezeigt, daß f sich stetig auf $D \cup (\partial D \cap \tilde{V})$ fortsetzen läßt. Dann folgt aber aus den obigen Beweisschritten direkt, daß mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ auch

$$\left| f(z^1) - f(z^2) \right| \leq C \left| z^1 - z^2 \right|^{\delta} \quad \forall\, z^1, z^2 \in \overline{D} \cap \tilde{V} \tag{III.204}$$

gelten muß. Damit ist Theorem A bewiesen.

$\square$

Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für häßliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.

Godfrey Harold Hardy

Teil IV
Holomorphe Fortsetzbarkeit

Nachdem in Teil III das Problem der lokalen stetigen Fortsetzbarkeit untersucht worden ist, wird nun in diesem Teil IV mit den Methoden aus [25] und [26] die lokale holomorphe Fortsetzbarkeit der Abbildung f unter bestimmten Voraussetzungen an die Lokalisierbarkeit von cl_f und $\mathrm{cl}_{f^{-1}}$ gezeigt.
Das Hauptresultat dieses Teils ist das folgende Theorem B, wobei hier darauf hingewiesen sei, daß dieses Ergebnis in einer allgemeineren Form für holomorphe Korrespondenzen unabhängig von der vorliegenden Arbeit bereits in [40] veröffentlicht worden ist.

Theorem B *Es seien $D, D' \subset\subset \mathbb{C}^2$ zwei Gebiete und es sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Weiter seien $M_1 \subset M_2 \subset \partial D$ relativ offene Teilmengen von ∂D und sei $M_1' \subset \partial D'$ eine relativ offene Teilmenge von $\partial D'$, so daß gilt:*

a) Es gibt eine Umgebung $W = W(\overline{M}_2) \subset \mathbb{C}^2$, so daß $M := \partial D \cap W$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist.

b) Es gibt eine Umgebung $W' = W'(\overline{M_1'}) \subset \mathbb{C}^2$, so daß $M' := \partial D' \cap W'$ eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist.

c) Es gilt $\mathrm{cl}_f(M_1) \subset M_1'$.

d) Für $g := (f^{-1})_{|D' \cap W'}$ gilt $\mathrm{cl}_g(M_1') \subset M_2$.

Dann gibt es eine Umgebung $U = U(M_1) \subset \mathbb{C}^2$, so daß sich f holomorph auf $D \cup U$ fortsetzen läßt.

Der Beweis von Theorem B erfolgt in mehreren Schritten: Als Vorbereitung wird das Verhalten von Segre-Varietäten unter holomorphen Korrespondenzen untersucht, dabei werden weitgehende Invarianzeigenschaften der Segre-Varietäten nachgewiesen. Anschließend wird gezeigt, daß sich die Abbildung f, falls sie sich schon als eigentliche holomorphe Korrespondenz im Sinne von Definition 8.2 fortsetzen läßt, sogar auch als eigentliche holomorphe Abbildung fortsetzt. Schließlich wird im letzten Schritt die Segre-Korrespondenz von f konstruiert, welche sich später als der Graph der fortgesetzten Abbildung f herausstellen wird, und es wird in mehreren Teilschritten gezeigt, daß die Segre-Korrespondenz die Abbildung f als Korrespondenz fortsetzt.

13 Invarianzeigenschaften von Segre-Varietäten

Um die Segre-Varietäten als Hilfsmittel für die Konstruktion einer holomorphen Fortsetzung benutzen zu können, muß zuerst die Invarianz der Segre-Varietäten unter holomorphen Abbildungen und Korrespondenzen gezeigt werden. Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind gültig für den allgemeinen Fall $n \geq 2$. In den meisten Fällen wird die folgende Situation betrachtet, die zur Vereinfachung der Notation hier mit einem Namen versehen sei:

SITUATION 1 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{C}^n$ zwei Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt, für den es eine Umgebung $W = W(z^0)$ gibt, so daß $M := W \cap \partial D$ reell-analytisch und von endlichem Typ ist. Nach einem geeigneten biholomorphen Koordinatenwechsel sei (U_1, U_2) mit $U_2 \subset W$ ein Standardkoordinatensystem für M um z^0. Ferner gebe es eine eigentliche holomorphe Korrespondenz F auf U_2, welche die Abbildung f als Korrespondenz fortsetzt. Für den Bildpunkt [9] $\widehat{F}(z^0) =: z^{0'}$ gebe es eine Umgebung $W' = W'(z^{0'})$, so daß $M' := W' \cap \partial D'$ reell-analytisch und von endlichem Typ ist. Nach einem geeigneten biholomorphen Koordinatenwechsel und eventueller Verkleinerung von (U_1, U_2) sei (U_1', U_2') ein Standardumgebungspaar für M' um $z^{0'}$, so daß $\widehat{F}(U_1) \subset U_1'$ und $\widehat{F}(U_2) \subset U_2'$ gilt.*

13.1 Invarianz von Segre-Varietäten unter Korrespondenzen

Zuerst sei hier nach [25] folgende grundlegende Invarianzeigenschaft der Segre-Varietäten gezeigt, welche garantiert, daß die später konstruierte Segre-Korrespondenz überhaupt ein Graph einer mehrwertigen holomorphen Abbildung sein kann.

Theorem IV.1 (siehe [25], Theorem 4.1) *Es liege Situation 1 vor. Dann gilt*

$$\widehat{F}(Q_w) \subset Q'_{w'} \quad \forall\, (w, w') \in F \cap (U_1 \times U_1') \tag{IV.1}$$

Vor dem Beweis sei zuerst kurz motiviert, warum dieses Theorem richtig sein sollte: Dazu sei

$$L := \left\{(z, z', w, w') \in U_2 \times U_2' \times U_1^* \times U_1'^* : (z, z') \in F, (w, w') \in F^*, \rho(z, w) = 0\right\} \tag{IV.2}$$

für $\rho(z, w) := r(z, \overline{w})$ mit r wie in (II.39). Es reicht nun zu zeigen, daß die holomorphe Funktion $\rho'(z', w')$ auf L verschwindet. In einer genügend kleinen Umgebung V eines Punktes a, in dem sich die Abbildung f biholomorph fortsetzen läßt, gibt es eine Darstellung

$$r'(f(z)) = h(z) r(z) \tag{IV.3}$$

mit einer nichtverschwindenden reell-analytischen Funktion h. Nach Komplexifizierung dieser Darstellung folgt

$$\rho'(f(z), f^*(w)) = h(z, w) \rho(z, w) \tag{IV.4}$$

[9] welcher eindeutig bestimmt ist, siehe Lemma II.11

mit $f^*(w) = \overline{f(\overline{w})}$. Es sei nun bemerkt, daß gilt

$$(z, f(z), w, f^*(w)) \in L \ \ \forall z \in V, w \in V^*. \tag{IV.5}$$

Daher verschwindet $\rho'(z', w')$ auf einer offenen nichtleeren Teilmenge der komplex-analytischen Varietät L. Ist L nun irreduzibel, folgt damit sofort die gewünschte Aussage $\rho'_{|L} \equiv 0$.
Nach diesen Vorüberlegungen sei nun der vollständige Beweis des Theorems angegeben:

Beweis (von Theorem IV.1): Wie in Lemma II.12 sei $F_c := F \cap \big((U_1 \setminus \overline{D}) \times U_1'\big)$.

Schritt 1: Es sei zunächst der Fall $(w, w') \in F_c$ betrachten. Es muß gezeigt werden, daß $f(Q_w \cap D) \subset Q'_{w'} \cap D'$ gilt. Nahe eines Punktes $a \in \partial D \cap U_1$, in dessen Umgebung sich f biholomorph fortsetzen läßt, gilt offenbar

$$f({}_{s_w}Q_w) \subset Q'_{f(w)} \cap D'. \tag{IV.6}$$

Nach Lemma II.9, Teil b) gibt es einen Punkt $w_\delta \in U_1 \setminus \overline{D}$, so daß die Verbindungsstrecke von w nach w_δ in $U_1 \setminus \overline{D}$ enthalten ist und daß $Q_{w_\delta} \cap D$ zusammenhängend ist. Dann gilt wegen (IV.6) sogar

$$f(Q_{w_\delta} \cap D) \subset Q'_{w'_\delta} \cap D' \tag{IV.7}$$

für jedes[10] w'_δ mit $(w_\delta, w'_\delta) \in F_c$. Diese Relation bleibt aber für alle Punkte auf der Verbindungsstrecke von w_δ nach w erhalten, da F_c nach Lemma II.12 irreduzibel ist. Somit gilt auch

$$f(Q_w \cap D) \subset Q'_{w'} \cap D'. \tag{IV.8}$$

Schritt 2: Als nächstes wird gezeigt werden, daß für je zwei Punkte in F der Form $(w, w^{1'})$ und $(w, w^{2'})$ notwendig gilt

$$Q'_{w^{1'}} = Q'_{w^{2'}}. \tag{IV.9}$$

Für $(w, w^{1'}), (w, w^{2'}) \in F_c$ folgt aus (IV.8) sofort $Q'_{w^{1'}} = Q'_{w^{2'}}$. Für die restlichen Punkte $(w, w^{1'}), (w, w^{2'})$ folgt die Behauptung wieder durch analytische Fortsetzung aufgrund der Irreduzibilität von F.

Schritt 3: Es sei die mengenwertige Abbildung $\widehat{F}$ in der Form $\widehat{F} = \big\{f^1, \ldots, f^m\big\}$ geschrieben und es sei $w^{j'} := f^j(w)$. Es muß nun gezeigt werden, daß gilt

$$f^k(Q_w) \subset Q'_{w^{j'}} \ \ \forall 1 \leq k, j \leq m. \tag{IV.10}$$

Zuerst sei der Fall $w \in U_1 \setminus \overline{D}$ betrachtet. Aus Schritt 1 folgt dann

$$f(z) \in Q'_{w^{j'}} \ \ \forall z \in D \cap Q_w. \tag{IV.11}$$

[10] Für jedes $w_\delta \in U_1 \setminus \overline{D}$ gibt es immer mindestens ein $w'_\delta \in U'_1$ mit $(w_\delta, w'_\delta) \in F_c$, da nach Annahme $\pi : F_c \to (U_1 \setminus \overline{D})$ eigentlich und damit insbesondere surjektiv ist.

Damit gilt insbesondere

$$f^j(w) = w^{j'} \in Q'_{f(z)} \;\; \forall\, z \in D \cap Q_w \tag{IV.12}$$

und zusammen mit Schritt 2 folgt weiter

$$w^{j'} \in Q'_{f^k(z)} \;\; \forall\, z \in D \cap Q_w. \tag{IV.13}$$

Damit gilt $f^k(z) \in Q'_{w^{j'}}\; \forall\, z \in D \cap Q_w$ und damit ist insgesamt

$$f^k(Q_w) \subset Q'_{w^{j'}} \;\; \forall\, w \in U_1 \setminus \overline{D}. \tag{IV.14}$$

gezeigt. Durch analytische Fortsetzung folgt, daß (IV.10) für alle $w \in U_1$ und alle $1 \leq k, j \leq m$ gilt. Damit ist Theorem IV.1 bewiesen.

□

13.2 Invarianz unter Inversen von Korrespondenzen

Es muß jetzt auch die Invarianz der Segre-Varitäten unter der inversen mehrwertigen Abbildung $\widehat{G} := \widehat{F}^{-1} : U' \to U$ gezeigt werden. Dies ist im Prinzip schon in Theorem IV.1 geschehen, nur kann im jetzt betrachteten Fall die fortzusetzende Abbildung $(f|U)^{-1}$ selber schon mehrwertig sein.
Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Theorems, welches die gewünschten allgemeinen Invarianzeigenschaften der Segre-Varietäten zusichert:

Theorem IV.2 (siehe [25], Theorem 5.3) *Es liege Situation 1 vor. Weiter sei $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$ ein weiteres Standardumgebungspaar von $z^0 = 0 \in M$, so daß für $\widehat{G} := \widehat{F}^{-1} : U_2' \to U_2$ gilt*

$$\widehat{G}(U_1') \subset \tilde{U}_1 \;\; \textit{und} \;\; \widehat{G}(U_2') \subset \tilde{U}_2. \tag{IV.15}$$

Dann gilt für alle $(w, w') \in F \cap (\tilde{U}_1 \times U_1')$

$$\widehat{G}(Q'_{w'}) \subset Q_w. \tag{IV.16}$$

Das zentrale Hilfsmittel zum Beweis von Theorem IV.2 ist das folgende Lemma:

Lemma IV.1 *Für alle $(w, w') \in F'_c := F \cap (\tilde{U}_1 \times (U_1' \setminus \overline{D'}))$ gilt*

$$g({}_{s_{w'}}Q'_{w'}) \subset Q_w. \tag{IV.17}$$

Für den Beweis dieses Lemmas werden zunächst noch folgendes Hilfslemma und einige weitere Definitionen benötigt, die im Anschluß aufgeführt werden:

Lemma IV.2 *Es sei $E \subset U_2$ eine rein (n-1)-dimensionale komplex-analytische Menge. Dann existiert ein Standardkoordinatensystem nahe* 0 *und eine offene dichte Teilmenge $\tilde{E} \subset E$, so daß gilt*

$$\kappa(\tilde{E}) \cap E = \emptyset. \tag{IV.18}$$

Dabei bezeichne $\kappa(\tilde{E})$ die Menge der reflektierten Punkte von $\tilde{E}$ gemäß Definition II.6.

Beweis: Es sei

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{q} E_\nu \tag{IV.19}$$

eine Zerlegung von E in irreduzible Komponenten. Aus jeder Komponente E_ν sei nun ein Punkt $w^\nu \in E_\nu$ ausgewählt. Durch eine beliebig kleine Deformation der gewählten Koordinaten kann erreicht werden, daß $\kappa(w^1) \notin E$ gilt, da $\dim E = n-1$ ist. Nach endlich oft wiederholter Anwendung dieses Arguments gilt

$$\kappa(w^\nu) \notin E \ \ \forall\, \nu = 1, \ldots, q. \tag{IV.20}$$

Damit folgt

$$\dim(\kappa(E_\nu) \cap E) < n-1 \ \ \forall\, \nu = 1, \ldots, q \tag{IV.21}$$

und somit gilt $\dim(\kappa(E) \cap E) < n-1$.

□

Damit können nun, ausgehend von der Situation des Theorems IV.2, folgende Definitionen gemacht werden: Es sei m bzw. m' die Blätterzahl von $\pi : F \cap (U_1 \times U_1') \to U_1$ bzw. von $\pi' : F \cap (\tilde{U}_1 \times U_1') \to U_1'$ und es sei $\hat{m}$ die Blätterzahl von $f : D \cap U_1 \to D' \cap U_1'$, also

$$\hat{m} := \# \left(f^{-1}(w') \cap \tilde{U}_1 \right) \tag{IV.22}$$

für generisches $w' \in D' \cap U_1'$. Ferner seien

$$\begin{aligned} E &:= \left\{ w \in U_1 : \# \pi^{-1}(w) < m \right\} && \text{(IV.23)}\\ E' &:= \left\{ w' \in U_1' : \# \pi'^{-1}(w') < m' \right\} && \text{(IV.24)}\\ \tilde{F} &:= F \setminus \pi'^{-1}(E') && \text{(IV.25)}\\ \tilde{F}_c' &:= F_c' \cap F. && \text{(IV.26)} \end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen kann jetzt Lemma IV.1 bewiesen werden:

Beweis (von Lemma IV.1): Zum Beweis des Lemmas seien folgende zwei Fälle betrachtet:

Fall 1: Es ist $z^{0'} \notin \widehat{D}$.

Es sei bemerkt, daß die Verzweigungsmenge E_g', also die Menge der Punkte $w' \in D'$, in denen $\#(g(w'))$ kleiner ist als im generischen Fall, enthalten ist in E'. Es seien nun Koordinaten wie in Lemma IV.2 gewählt.

Schritt 1: Es ist zu zeigen, daß für alle $(w^1, w^{1'}) \in \tilde{F}_c'$ ein Zweig g^1 von g in einer Umgebung von $z^{1'} := \kappa(w^{1'})$ existiert, so daß für $z' := \kappa(w')$ gilt

$$g^1 \left({}_{z'}Q'_{w'} \right) \subset Q_w, \tag{IV.27}$$

für alle $(w, w') \in F$ nahe $(w^1, w^{1'})$. Diese Behauptung ist wahr in der Nähe jedes Punktes $(a, a') \in F$ mit $a' \in M'$, wo ein Zweig g^1 von g sich biholomorph fortsetzt und $a = g(a')$ gilt. Es seien nun (a, a') und $(w^1, w^{1'})$ mit einer Kurve in $\tilde{F}'_c \cup \{(a, a')\}$ verbunden. Dieses ist möglich, da F'_c nach Lemma II.12 irreduzibel und damit, als analytische Menge, wegzusammenhängend ist. Durch analytische Fortsetzung folgt dann (IV.27).

Schritt 2: Es seien nun $g^1, \ldots, g^k$ alle Zweige von g nahe $z^{1'}$, für die gilt

$$g^\nu \left({}_{z'}Q_{w'}\right) \subset Q_w, \tag{IV.28}$$

für alle $(w, w') \subset F$ in der Nähe von $(w^1, w^{1'})$. Es muß nun gezeigt werden, daß die Zahl k nicht von der Wahl von $(w^1, w^{1'})$ abhängt. Dazu sei ein weiterer Punkt $(w^2, w^{2'}) \in \tilde{F}'_c$ betrachtet. Dieser wird nun verbunden mit $(w^1, w^{1'})$ durch eine Kurve $(w(t), w'(t))$, $t \in [0, 1]$ in $\tilde{F}'_c$, so daß gilt

$$z'(t) := \kappa(w'(t)) \notin E'. \tag{IV.29}$$

Dieses kann erreicht werden, da die reelle Codimension von $\kappa(E')$ in U'_2 größer als 1 ist und daher $\tilde{F}'_c \setminus \pi'^{-1}(\kappa(E'))$ zusammenhängend ist.
Es sei nun $\tilde{g}^\nu$ eine analytische Fortsetzung von g^ν entlang $z'(t)$. Da $\tilde{g}^\nu$ wieder analytisch ist, folgt

$$\tilde{g}^\nu \left({}_{\kappa(w')}Q'_{w'}\right) \subset Q_w \;\; \forall \, \nu = 1, \ldots, k, \tag{IV.30}$$

für alle $(w, w') \in F$ in einer kleinen Umgebung von $(w^2, w^{2'})$. Wenn k_1 die Anzahl aller Zweige von g nahe $w^{2'}$ bezeichnet, die (IV.30) erfüllen, so gilt $k_1 \geq k$. Durch Vertauschung von $(w^1, w^{1'})$ und $(w^2, w^{2'})$ ergibt sich aber genauso $k_1 \leq k$. Damit folgt sofort $k_1 = k$ und die Behauptung von Schritt 2 ist gezeigt.

Schritt 3: Abschließend muß noch $k = \hat{m}$ gezeigt werden. Dazu sei $k < \hat{m}$ angenommen. Ferner sei

$$E'_g = \bigcup_{\nu=1}^{q} E'^{\nu}_g \tag{IV.31}$$

die Zerlegung von E'_g in irreduzible Komponenten. Dann gibt es ein $\nu \in \{1, \ldots, q\}$, einen Punkt $b' \in E'^{\nu}_g$, einen Punkt

$$z^{1'} := \kappa(w^{1'}) \in (U_1 \cap D') \setminus E', \tag{IV.32}$$

beliebig nahe bei b' und einen Punkt $w^1 \in g(w^{1'})$, so daß gilt:

(i) Es seien mit $g^1, \ldots, g^k$ die Zweige von g nahe $z^{1'}$ bezeichnet, welche die zu (IV.27) analoge Relation nahe $(w^1, w^{1'})$ erfüllen. Dann geht einer dieser Zweige, ohne Einschränkung sei dies g^1, durch analytische Fortsetzung entlang einer kleinen Kurve $z'(t)$, $t \in [0, 1]$ in E'^{ν}_g nahe b' über in einen Zweig g^ν von g mit $\nu > k$.

(ii) $\kappa(b') \notin E'$ (nach Lemma IV.2).

Dabei kann die Bedingung (i) erfüllt werden, da der Graph von g als analytische Menge betrachtet mit dem Graph von f übereinstimmt und daher irreduzibel ist.
Es sei $w'(t) := \kappa(z'(t))$ und sei ferner mit $(w(t), w'(t))$ die Liftung von $w'(t)$ nach $\tilde{F}'_c$ mit $w(0) = w^1$ bezeichnet. Wegen (ii) folgt dann $w(1) = w^1$, d.h. diese Liftung endet an ihrem Anfangspunkt, nämlich bei $(w^1, w^{1'}) \in \tilde{F}'_c$. Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß der Zweig g^ν durch analytische Fortsetzung entlang $z'(t)$ verschieden von allen Zweigen $g^1, \ldots, g^k$ gewonnen wurde. Damit ist sowohl Lemma IV.1 als auch Theorem IV.2 für den betrachteten Fall $z^{0'} \notin \widehat{D'}$ bewiesen.
Darauf aufbauend sei jetzt der zweite noch zu zeigene Fall betrachtet:

Fall 2: Es ist $z^{0'} \in \widehat{D'}$.

Es reicht aus, die folgende Reduktion auf den schon gezeigten Fall 1 zu zeigen: Nach Lemma II.5 ist für $z^{0'} \in \widehat{D'}$ auch $z^0 \in \widehat{D}$. Daher läßt sich f als eigentliche holomorphe Abbildung auf eine Umgebung $U_0 \subset U_1$ von 0 fortsetzen. Es sei erinnert, daß die Koordinaten so gewählt sind, daß $z^0 = 0 = z^{0'}$ gilt. Die Menge $U'_0 := f(U_0)$ ist offen und $f : U_0 \to U'_0$ ist eigentlich für eine passende Wahl von U_0 und U_1. Es sei $g := (f_{|U_0})^{-1}$ als mengenwertige Abbildung definiert. Dann folgt

$$g(U'_0 \cap D') \subset (U_0 \cap D) \tag{IV.33}$$

und ebenso folgt leicht

$$g(U'_0 \setminus \overline{D'}) \subset (U_0 \setminus \overline{D}). \tag{IV.34}$$

Denn angenommen, es gäbe einen Punkt $z' \in (U'_0 \setminus \overline{D'})$ so daß es ein $z \in g(z') \cap (U_0 \cap D)$ gibt. Dann wäre

$$[f \circ g](z') = z' \in U'_0 \cap D', \tag{IV.35}$$

was aber ein Widerspruch zur Wahl von z' ist. Mit dieser Beobachtung ist der betrachtete Fall 2 auf den bereits gezeigten Fall 1 zurückgeführt. Denn nach Theorem II.6 liegt $z^{0'}$ nun in der Holomorphiehülle von $U'_0 \setminus \overline{D'}$, so daß sowohl das Lemma IV.1 als auch das Theorem IV.2 sofort folgt, wenn die Rollen des Inneren und des Äußeren von D bzw. D' vertauscht werden. Damit ist Lemma IV.1 bewiesen.

□

Damit ergibt sich nun auch der gewünschte Beweis von Theorem IV.2:

Beweis (von Theorem IV.2): Mit Lemma IV.1 verläuft der Beweis von Theorem IV.2 völlig analog zu dem Beweis von Theorem IV.1.

□

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die zugrundeliegende Situation in Theorem IV.2 und in Lemma IV.1 zwar die durch Situation 1 gegebene ist, daß aber in den obigen Beweisen *nicht* davon Gebrauch gemacht wird, daß, wie in Definition II.7 gefordert, die Projektion $\pi : F \to U$ eigentlich ist, d.h. die Aussagen des Theorems und des Lemmas bleiben auch dann wahr, wenn a priori nicht bekannt ist, daß F diese Bedingung erfüllt.

13.3 Fortsetzung der inversen Korrespondenz

Mit den Ergebnissen der vorherigen Abschnitte läßt sich nun zeigen, daß sich in Situation 1 die inverse Korrespondenz $g := f^{-1}$ als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von $(z^0, z^{0'})$ fortsetzen läßt im Sinne von Definition II.10. Es gilt das folgende Theorem:

Theorem IV.3 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, in deren Nähe ∂D und $\partial D'$ reell-analytisch und von endlichem Typ sind. Wenn sich die Abbildung $f : D \to D'$ als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von z^0 fortsetzen läßt, dann läßt sich $g := f^{-1}$ als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von $(z^0, z^{0'})$ fortsetzen.*

Nach Definition ist die Aussage des Theorems offenbar genau gleichbedeutend damit, daß für geeignete Wahl von U_2 und U_2' auch die Projektion $\pi' : F \to U_2'$ eigentlich ist.

Beweis (von Theorem IV.3): Es genügt zu zeigen, daß die Menge $E := \widehat{F}^{-1}(0)$ diskret ist, denn dann können U_2 und U_2' so gewählt werden, daß π' eigentlich wird. Zuerst sei bemerkt, daß E komplex-analytisch ist. Für jeden Punkt $z \in E \cap D$ gilt nach Theorem IV.1

$$Q'_{f(z)} = Q'_0. \tag{IV.36}$$

Also muß $E \cap D$ diskret sein, da f^{-1} für jeden Punkt $z' \in U_2'$ nur endlich viele Punkte enthält. Es gilt aber auch

$$\dim(E \cap (U \setminus \overline{D})) = 0, \tag{IV.37}$$

da, wieder nach Theorem IV.1, gilt

$$f(Q_w \cap D) \subset Q'_0 \cap D' \quad \forall\, w \in E \setminus \overline{D}. \tag{IV.38}$$

Schließlich muß für $M := \partial D \cap U_2$ auch $\dim(E \cap M) = 0$ sein, denn andernfalls müßte wegen $\dim(E \setminus M) = 0$ eine ganze offene Teilmenge von E von positiver komplexer Dimension in M enthalten sein, was aber nicht sein kann, da M von endlichem Typ ist.

□

Zusammengefasst liefern die Beweise aus diesem Abschnitt die folgende, etwas allgemeinere Invarianzaussage:

Theorem IV.4 *Es seien $D, D' \subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \mathrm{cl}_f(z^0)$ Randpunkte, in deren Nähe ∂D und $\partial D'$ reell-analytisch und von endlichem Typ sind. Es lasse sich $g := f^{-1}$ als eigentliche holomorphe Korrespondenz $G \subset U \times U'$ auf eine Umgebung von $(z^0, z^{0'})$ fortsetzen. Dann gilt für alle $(w, w') \in G$*

$$\widehat{G}(Q'_{w'} \cap U') \subset Q_w \cap U. \tag{IV.39}$$

Dieselben Argumente wie im Beweis von Theorem IV.3 liefern nun weiter das folgende Resultat:

Theorem IV.5 *In der Situation von Theorem IV.4 läßt sich die Abbildung f als eine eigentliche holomorphe Korrespondenz F auf eine Umgebung des Punktes $z^0 \in \partial D$ fortsetzen. Es kann dazu $F := G$ (als komplex-analytische Mengen) gewählt werden.*

Abschließend führen die Ergebnisse dieses Abschnitts zu der folgenden Aussage über die Beziehung der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ der Segre-Varietäten in Bild und Urbild unter holomorphen Korrespondenzen:

Korollar IV.1 *Es existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, so daß das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{S}' \\ \lambda \Big\uparrow & & \Big\uparrow \lambda' \\ U_1 & \xrightarrow{\widehat{F}} & U_1' \end{array} \tag{IV.40}$$

Insbesondere ist die Abbildung φ nach Theorem IV.2 bijektiv.

Damit ergibt sich unmittelbar das folgende Lemma:

Lemma IV.3 *In der Situation von Korollar IV.1 besteht für jeden Multiindex $k = (k_1, \ldots, k_{n-1})$, $|k| > 0$, die Menge $\lambda'_k(\widehat{F}(z))$ aus genau einer komplexen Zahl für jedes $z \in U_1$ und definiert dadurch eine holomorphe Funktion auf U_1.*

14 Fortsetzende Korrespondenzen sind Abbildungen

Bevor im nachfolgenden abschließenden Schritt die Fortsetzbarkeit der Abbildung f als eigentliche holomorphe Korrespondenz gezeigt werden kann, muß zuerst nachgewiesen werden, daß diese Fortsetzung als Korrespondenz direkt die Fortsetzbarkeit auch als Abbildung impliziert. Diese Tatsache wird in den Überlegungen des nachfolgenden Abschnitts direkt verwendet.

Für den Fall $n = 2$ wurde das entsprechende Ergebnis von K.Diederich/S.Pinchuk in [25] gezeigt, in [26] wurde von denselben Autoren auch der allgemeine Fall $n \geq 2$ durch das folgende Theorem gelöst:

Theorem IV.6 ([26], Theorem 3.1) *Es seien $D, D \subset\subset \mathbb{C}^n$ Gebiete und sei $f : D \to D'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Es seien $z^0 \in \partial D$ und $z^{0'} \in \partial D'$ Randpunkte, für die es Umgebungen $W = W(z^0)$ und $W' = W'(z^{0'})$ gibt, so daß $M := \partial D \cap W$ und $M' := \partial D' \cap W'$ reell-analytische Hyperflächen endlichen Typs sind. Ferner lasse sich die Abbildung f als eine eigentliche holomorphe Korrespondenz F auf eine Umgebung $U_2 = U_2(z^0) \subset W$ fortsetzen, so daß $\widehat{F}(z^0) = z^{0'}$ gilt. Dann läßt sich f als holomorphe Abbildung auf eine Umgebung $U_1 = U_1(z^0) \subset U_2$ fortsetzen.*

Zur Vollständigkeit der Darstellung sei jetzt der Beweis dieses Theorems aus [26] hier in einer an die Notationen dieser Arbeit angepaßten Form aufgeführt:

Beweis (von Theorem IV.6): Zunächst seien, nach eventueller Verkleinerung von W und W', Normalkoordinaten für M und M' gemäß (II.40) gewählt. Ferner sei W so klein gewählt, daß $W = U_2$ gilt. Es seien nun die Koordinaten so umskaliert, daß es Polyzylinder $U \subset W$ und $U' \subset W'$ um 0 mit Radius 2 gibt, so daß

$$\widehat{F}(U) \subset U' \tag{IV.41}$$

gilt und weiter die folgende Bedingung erfüllt ist: Alle Funktionen $r(z, w)$, $r_j('z,' w)$, $\lambda_k(w)$, $\sum_k \lambda_k(w)' z^k$ und die entsprechenden Funktionen im Bildgebiet sind holomorph auf Polyzylindern geeigneter Dimension um 0 mit Radius 2. Insbesondere konvergieren die Reihen

$$\sum_{|k| \geq 0} |\lambda_k(w)| \quad , \quad \sum_{|k| \geq 0} \left| \frac{\partial \lambda_k}{\partial w_n}(w) \right| \tag{IV.42}$$

und die entsprechenden Reihen im Bildgebiet kompakt gleichmäßig auf U bzw. U'.

Durch die Wahl der Normalkoordinaten gilt für alle Multiindizes k

$$\lambda'_k(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \lambda'_k}{\partial w'_n}(0) = 0, \tag{IV.43}$$

so daß folgt

$$\sum_{|k| \geq 0} \left|\lambda'_k(0)\right| = 0 \quad , \quad \sum_{|k| \geq 0} \left| \frac{\partial \lambda'_k}{\partial w'_n}(0) \right| = 0. \tag{IV.44}$$

Mit diesen Bezeichnungen und Koordinaten seien nun zunächst die folgenden Propositionen bewiesen:

Proposition IV.1 *In der vorliegenden Situation gelten die folgenden Relationen:*

a) $\widehat{F}(M \cap U) \subset M' \cap U'$.

b) $\widehat{F}(U \setminus \overline{D}) \subset U' \setminus \overline{D'}$.

c) $\widehat{F}(U \cap D) \subset U' \cap D'$.

Beweis:
zu a) Es seien $w \in M \cap U$ und $w' \in \widehat{F}(w)$ beliebig gewählt. Dann gilt nach Theorem IV.1

$$Q'_{w'} = Q'_{f(w)}. \tag{IV.45}$$

Da $f(w) \in M'$ gilt, folgt mit (IV.41) sofort $w' \in M' \cap U'$.

zu b) Es sei $w \in U \setminus \overline{D}$ ein beliebiger Punkt und es sei $a \in M \cap U$ ein Punkt biholomorpher Fortsetzbarkeit von f. Ferner sei $\gamma(t)$ eine Kurve in $(U \setminus \overline{D}) \cup \{a\}$, welche a und w verbindet. Ist nun

$$\widehat{F}(w) \ni w' \notin (U' \setminus \overline{D'}), \tag{IV.46}$$

dann gibt es einen Punkt $w^0 = \gamma(t_0) \in U \setminus \overline{D}$, so daß gilt

$$\widehat{F}(w^0) \ni w^{0\prime} \in M' \quad , \quad w^{0\prime} = f(w^1), \tag{IV.47}$$

mit $w^1 \in M$. Nach Theorem IV.2 gilt dann aber $Q_{w^0} = Q_{w^1}$. Dies ist ein Widerspruch zu $w^0 \in U \setminus \overline{D}$.

zu c) Der Beweis von Teil c) folgt aus den Teilen a) und b), zusammen mit der Irreduzibilität von F_c'. Es sei zunächst der Fall

$$(w^0, w^{0\prime}) \in F \cap \big((U \cap D) \times (U' \setminus \overline{D'})\big) \tag{IV.48}$$

betrachtet. Nach b) existiert ein Punkt

$$(w^1, w^{1\prime}) \in F \cap \big((U \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})\big)\,. \tag{IV.49}$$

Dieser Punkt wird nun durch eine Kurve in F_c' mit dem Punkt $(w^0, w^{0\prime})$ verbunden. Auf dieser Kurve gibt es einen Punkt

$$(w^2, w^{2\prime}) \in F \cap \big((U \cap M) \times (U' \setminus \overline{D'})\big)\,. \tag{IV.50}$$

Dieses widerspricht aber a). Der zweite Fall, in welchem es einen Punkt

$$(w^0, w^{0\prime}) \in F \cap \big((U \cap D) \times (U' \cap M')\big) \tag{IV.51}$$

geben könnte, führt auf einem analogen Weg zum Widerspruch.

□

Proposition IV.2 *Es seien mit f_n, g_n, $\widehat{F}_n$, $\widehat{G}_n$ die n-ten Komponenten der mengenwertigen Abbildungen f, g, $\widehat{F}$, $\widehat{G}$ bezeichnet. Dann gilt, nach eventueller Verkleinerung von U und U':*

a) Die Komponenten $\widehat{F}_n$ und $\widehat{G}_n$ sind eindeutige Abbildungen auf U bzw. auf U' und es ist $f_n \in \mathcal{O}(U)$ und $g_n \in \mathcal{O}(U')$.

b) Es gibt Funktionen $h \in \mathcal{O}(U)$ und $h' \in \mathcal{O}(U')$ mit $h(0) \neq 0$ und $h'(0) \neq 0$, so daß gilt

$$f_n('z, z_n) = z_n h(z) \ \ \forall\, z \in U \quad \textit{und} \quad g_n('z', z_n') = z_n' h'(z') \ \ \forall\, z' \in U'. \tag{IV.52}$$

Beweis:
zu a) Nach dem Theorem über implizite Funktionen sind die Segre-Varietäten $Q_{\overline{w}}$ und $Q'_{\overline{w}'}$ in den Normalkoordinaten gegeben durch Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} z_n &= -w_n + \sum_{|\nu|>0} b_\nu(w)\,'z^\nu \\ z'_n &= -w'_n + \sum_{|\nu|>0} b'_\nu(w')('z')^\nu. \end{aligned} \tag{IV.53}$$

Daher gilt

$$Q_{w^1} = Q_{w^2} \;\Rightarrow\; w_n^1 = w_n^2 \quad \text{sowie} \quad Q'_{w^{1\prime}} = Q'_{w^{2\prime}} \;\Rightarrow\; w_n^{1\prime} = w_n^{2\prime}. \tag{IV.54}$$

Nach Theorem IV.1 heißt dies aber, daß für jedes $w \in U$, wobei U eine genügend kleine Nullumgebung ist, sowie für je zwei Punkte $w^{1\prime}, w^{2\prime} \in \widehat{F}(w)$, gilt

$$\widehat{F}(Q_w) \subset Q'_{w^{1\prime}} \quad \text{und} \quad \widehat{F}(Q_w) \subset Q'_{w^{2\prime}}. \tag{IV.55}$$

Daraus folgt aber sofort $Q'_{w^{1\prime}} = Q'_{w^{2\prime}}$ und daher gilt wegen (IV.54) auch $w_n^{1\prime} = w_n^{2\prime}$. Damit ist gezeigt, daß $\widehat{F}_n$ auf U eindeutig bestimmt, also eine wohldefinierte Funktion ist. Insbesondere wird durch $\widehat{F}_n$ die gewünschte holomorphe Fortsetzung von f_n auf U gegeben. Mit Theorem IV.2 folgen sofort die entsprechenden Aussagen für $\widehat{G}_n$ und g_n.

zu b) Wegen (IV.53) gilt

$$Q_0 = \{z_n = 0\} \quad \text{und} \quad Q'_0 = \left\{z'_n = 0\right\}. \tag{IV.56}$$

Zusammen mit den Theoremen IV.1 und IV.2 folgt damit

$$f_n('z, z_n) = 0 \iff z_n = 0 \tag{IV.57}$$
$$g_n('z', z'_n) = 0 \iff z'_n = 0. \tag{IV.58}$$

Daher muß gelten

$$f_n('z, z_n) = z_n^p \tilde{f}_n('z, z_n) \tag{IV.59}$$
$$g_n('z', z'_n) = z_n'^q \tilde{g}_n('z', z'_n), \tag{IV.60}$$

wobei $p, q \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}_n(0) \neq 0$ und $\tilde{g}_n(0) \neq 0$ gilt. Aus $f \circ \widehat{G} = \mathrm{id}$ ergibt sich nun

$$z'_n = z_n^p \tilde{f}_n('z, z_n) \tag{IV.61}$$
$$= \left[z_n'^q \tilde{g}_n('z', z'_n)\right]^p \tilde{f}_n('g(z'), g_n(z')) \tag{IV.62}$$
$$= z_n'^{pq} \tilde{g}_n('z', z'_n)^p \tilde{f}_n(g(z')). \tag{IV.63}$$

Da $\tilde{g}_n(0) \neq 0$ und $\tilde{f}_n(0) \neq 0$, folgt $pq = 1$ und damit $p = 1$ und $q = 1$. Damit ist auch b) gezeigt.

□

Gemäß Proposition IV.2 kann nun ein neuerlicher biholomorpher Koordinatenwechsel durchgeführt werden, welcher z_n durch $z_n h(z)$ ersetzt. Es muß dabei allerdings beachtet werden, daß die neuen Koordinaten nun im allgemeinen *keine* Normalkoordinaten für M mehr sind.

Es konvergiert nun die Reihe

$$\sum_{|k|\geq 0} \lambda'_k(w')\overline{\lambda'_k(\overline{\zeta}')} \tag{IV.64}$$

auf $U' \times U'$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Mit $\zeta' = \overline{w}'$ und $w' \in \widehat{F}(z)$ folgt nach Lemma IV.3

$$\sum_{|k|\geq 0} \left|\lambda'_k(w')\right|^2 \in \mathcal{C}^\omega(U') \tag{IV.65}$$

und

$$\sum_{|k|\geq 0} \left|\lambda'_k(\widehat{F}(z))\right|^2 \in \mathcal{C}^\omega(U). \tag{IV.66}$$

Da M' als Hyperfläche endlichen Typs vorausgesetzt ist, folgt, daß für alle $a' \in U'$ die Menge

$$A'_{a'} := \left\{('w', w'_n) \in U' : w'_n = a'_n, \lambda'_k(w') = \lambda'_k(a') \ \ \forall\ |k| > 0\right\} \tag{IV.67}$$

endlich ist. Für eine genügend große feste Zahl $N > 1$ und für alle $\varepsilon \in (-\frac{1}{N}, 0]$ seien nun die folgenden Mengenfamilien eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(N,\varepsilon) &:= \left\{ z' \in U' : 2\operatorname{Re} z'_n + N\left|z'_n\right|^2 + N\sum_{|k|\geq 0}\left|\lambda'_k(z')\right|^2 < \varepsilon \right\} && \text{(IV.68)} \\ \mathcal{D}(N,\varepsilon) &:= \left\{ z \in U : 2\operatorname{Re} z_n + N\left|z_n\right|^2 + N\sum_{|k|\geq 0}\left|\lambda'_k\left(\widehat{F}(z)\right)\right|^2 < \varepsilon \right\}. && \text{(IV.69)} \end{aligned}$$

Das folgende Lemma gibt Auskunft über einige wichtige Eigenschaften dieser Hilfsmengen:

Lemma IV.4 *$\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ und $\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ sind pseudokonvexe reell-analytische offene Mengen. Ferner ist jeder glatte Punkt in $\partial\mathcal{D}(N,\varepsilon) \cap U$ bzw. $\partial\mathcal{D}'(N,\varepsilon) \cap U'$ von endlichem Typ.*

Beweis: Beide Mengen sind nach Konstruktion offensichtlich offen und in den Polyzylindern U bzw. U' enthalten. Da die $\lambda'_k(w')$ holomorph sind und nach Lemma IV.3 die $\lambda'_k(\widehat{F}(z))$ ebenfalls holomorph sind, folgt unmittelbar, daß $\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ und $\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ als Subniveaumengen von plurisubharmonischen Funktionen pseudokonvex sind. Nach

(IV.65) und (IV.66) sind $\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ und $\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ ferner reell-analytisch.
Als nächstes sei bemerkt, daß eine definierende Funktion von $\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ geschrieben werden kann als

$$r'_{N,\varepsilon}(w',\overline{w}') := N\left|w'_n + \frac{1}{N}\right|^2 + N\sum_{|k|\geq 0}\left|\lambda'_k(w')\right|^2 - \varepsilon - \frac{1}{N}. \tag{IV.70}$$

Wenn $\partial\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ in der Nähe eines Punktes $w^{0\prime} \in \partial\mathcal{D}'(N,\varepsilon)\cap U'$ glatt ist, dann ist $w^{0\prime}$ genau dann von endlichem Typ, wenn jede holomorphe Abbildung $h : \Delta \to \mathbb{C}^n$ mit $h(0) = w^{0\prime}$ und $h(\Delta) \subset \partial\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ konstant ist. Daher sei jetzt eine beliebige solche Abbildung h gewählt. Nach (IV.70) gilt dann

$$N\left|h(\zeta)_n + \frac{1}{N}\right|^2 + N\sum_{|k|\geq 0}\left|\lambda'_k(h(\zeta))\right|^2 - \varepsilon - \frac{1}{N} = 0 \quad \forall\,\zeta\in\Delta. \tag{IV.71}$$

Daher müssen h_n und $\lambda'_k \circ h$ konstant sein für alle k. Da für alle $\zeta \in \Delta$ die Menge $A'_{h(\zeta)}$ endlich ist, muß h selber schon konstant gewesen sein. Damit ist gezeigt, daß $w^{0\prime}$ von endlichem Typ ist. Auf analoge Weise kann jetzt die entsprechende Aussage für $\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ gezeigt werden.

□

Im allgemeinen gilt

$$\mathcal{D}'(N,\varepsilon)\setminus D' \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(N,\varepsilon)\setminus D \neq \emptyset. \tag{IV.72}$$

Es gilt aber stets die folgende wichtige Aussage:

Lemma IV.5 *Wenn $N > 1$ genügend groß gewählt ist, dann gilt für jedes $\varepsilon \in (-\frac{1}{N}, 0]$*

a) Der nicht-glatte Teil von $\partial\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ liegt vollständig in D'.

b) Der nicht-glatte Teil von $\partial\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ liegt vollständig in D.

Beweis:
zu a) Da $\varepsilon \leq 0$ ist, folgt für $w' \in \partial\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ aus (IV.70) die Abschätzung

$$N\left|w'_n + \frac{1}{N}\right|^2 + N\sum_{|k|\geq 0}\left|\lambda'_k(w')\right|^2 \;\leq\; \frac{1}{N}. \tag{IV.73}$$

Da alle Terme in der obigen Ungleichung nichtnegativ sind, folgen sofort die nächsten drei Abschätzungen

$$-\frac{2}{N} \leq \operatorname{Re} w'_n \leq 0\;, \quad \left|w'_n\right|^2 \leq \frac{4}{N^2}\;, \quad \sum_{|k|\geq 0}\left|\lambda'_k(w')\right|^2 \leq \frac{1}{N^2}. \tag{IV.74}$$

Da $\xi' = 0$ die einzige Lösung des Gleichungssystems

$$\xi'_n = 0 \quad \lambda'_k(\xi') = 0, \quad \forall\ |k| > 0 \tag{IV.75}$$

ist, ziehen sich $\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ und $\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ für $N \to \infty$ auf den Nullpunkt zusammen. Insbesondere gilt

$$w' \to 0 \quad \text{für} \quad N \to \infty. \tag{IV.76}$$

Es sei nun $\partial\mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ nicht-glatt in w'. Dann gilt $\nabla r'_{N,\varepsilon}(w',\overline{w}') = 0$. Damit ist

$$\frac{\partial r'_{N,\varepsilon}}{\partial w'_n}(w',\overline{w}') = 0, \tag{IV.77}$$

woraus folgt, daß gilt

$$\frac{1}{N} + \operatorname{Re} w'_n + \operatorname{Re} \sum_{|k|\geq 0} \frac{\partial \lambda'_k}{\partial w'_n}(w')\overline{\lambda_k(w')} = 0. \tag{IV.78}$$

Nach der dritten Abschätzung aus (IV.74) gilt insbesondere $|\lambda'_k(w')| \leq \frac{1}{N}$, so daß folgt

$$\left| \sum_{|k|\geq 0} \frac{\partial \lambda'_k}{\partial w'_n}(w')\overline{\lambda'_k(w')} \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{|k|\geq 0} \left| \frac{\partial \lambda'_k}{\partial w'_n}(w') \right|. \tag{IV.79}$$

Wegen (IV.44) gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle z' mit $|z'| < \delta$ gilt

$$\sum_{|k|\geq 0} \left| \frac{\partial \lambda'_k}{\partial z'_n}(z') \right| < \frac{1}{2}, \tag{IV.80}$$

insbesondere ist dieses δ unabhängig von ε. Es sei insbesondere darauf hingewiesen, daß diese Gleichmäßigkeit in $\varepsilon \in (-\frac{1}{N}, 0]$ auch in allen folgenden Abschätzungen gilt. Wegen (IV.76) gilt bei genügend großer Wahl von N die Abschätzung (IV.80) auch für w'. Aus (IV.80) folgt nun

$$\left| \sum_{|k|\geq 0} \frac{\partial \lambda'_k}{\partial w'_n}(w')\overline{\lambda'_k(w')} \right| < \frac{1}{2N}. \tag{IV.81}$$

Zusammen mit (IV.78) ergibt sich daraus

$$\left|\operatorname{Re} w'_n\right| < -\frac{1}{N} + \frac{1}{2N} = -\frac{1}{2N}. \tag{IV.82}$$

Unter nochmaliger Benutzung von $|\lambda'_k(w')| \leq \frac{1}{N}$ folgt ferner

$$\sum_{|k|\geq 0} \overline{\lambda'_k(w')}' w'^k \leq \frac{1}{N} \sum_{|k|\geq 0} {}' w'^k \tag{IV.83}$$

und da wegen (IV.76) für genügend großes N gilt

$$\left| \sum_{|k|\geq 0} {}' w'^k \right| < \frac{1}{4} \tag{IV.84}$$

folgt schließlich

$$\sum_{|k|\geq 0} \overline{\lambda'_k(w')'} w'^k \leq \frac{1}{4N}. \tag{IV.85}$$

Nach Einsetzen von (IV.82) und (IV.85) in (II.43) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} r'_{N,\varepsilon}(w', \overline{w}') &= (1-\alpha'(w',\overline{w}')) \left(2\operatorname{Re} w'_n + \sum_{|k|\geq 0} \overline{\lambda'_k(w')'} w'^k \right) && \text{(IV.86)} \\ &< -\frac{1}{2N} + \frac{1}{4N} && \text{(IV.87)} \\ &< 0, && \text{(IV.88)} \end{aligned}$$

für genügend großes N und gleichmäßig in $\varepsilon \in (-\frac{1}{N}, 0]$. Folglich gilt $w' \in D'$, womit Behauptung a) gezeigt ist.

zu b) Es sei zuerst die folgende definierende Funktion von $\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ betrachtet

$$r_{N,\varepsilon}(z,\overline{z}) := 2\operatorname{Re} z_n + N\,|z_n|^2 + N \sum_{|k|\geq 0} \left| \lambda'_k \left(\widehat{F}(z) \right) \right|^2 - \varepsilon. \tag{IV.89}$$

Weiter sei erinnert, daß die Koordinaten so gewählt worden sind, daß $f_n(z) = z_n$ gilt. Es sei nun $z \in \partial\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ ein nicht-glatter Randpunkt. Analog zu den Abschätzungen (IV.74) in a) folgt dann hier

$$-\frac{2}{N} \leq \operatorname{Re} z_n \leq 0\ ,\quad |z_n|^2 \leq \frac{4}{N^2}\ ,\quad \sum_{|k|\geq 0} \left| \lambda'_k \left(\widehat{F}(z) \right) \right|^2 \leq \frac{1}{N^2}. \tag{IV.90}$$

Da analog zu (IV.76) hier

$$\widehat{F}(z) \to \{0\} \quad \text{für} \quad z \to 0 \tag{IV.91}$$

gilt, folgt wie in (IV.81) jetzt für genügend großes N

$$\sum_{|k|\geq 0} \overline{\lambda'_k \left(\widehat{F}(z) \right)} \left({}'\widehat{F}(z) \right)^k < \mu(N) \frac{1}{N} \tag{IV.92}$$

mit einer Funktion $\mu(N) \to 0$ für $N \to \infty$. Weil aber $\frac{\partial \lambda'_k(\widehat{F}(z))}{\partial z_n}$ nicht unbedingt in 0 verschwindet, muß die zu (IV.82) analoge Abschätzung hier nicht gelten. Aber es gibt wenigstens ein $c > 0$, so daß für große $N > 1$ gilt

$$\operatorname{Re} z_n \leq -\frac{c}{N}. \tag{IV.93}$$

Denn, falls im Gegensatz dazu $\operatorname{Re} z_n > -\nu_1(N)\frac{1}{N}$ mit $\nu_1(N) \to 0$ für $N \to \infty$ gelten würde, dann folgte aus (IV.90)

$$\left|\lambda_k'(\widehat{F}(z))\right| < \frac{\nu_2(N)}{N}, \tag{IV.94}$$

mit einem $\nu_2(N) \to 0$ für $N \to \infty$ und daher würde gelten

$$\left|\sum_{|k|\geq 0} \frac{\partial \lambda_k'}{\partial z_n}\left(\widehat{F}(z)\right)\overline{\lambda_k'\left(\widehat{F}(z)\right)}\right| < \frac{\nu_3(N)}{N}, \tag{IV.95}$$

wieder mit einem $\nu_3(N) \to 0$ für $N \to \infty$. Dies wäre aber offenbar ein Widerspruch zu

$$\frac{1}{N} + \operatorname{Re} z_n + \operatorname{Re} \sum_{|k|\geq 0} \frac{\partial \lambda_k'}{\partial z_n}\left(\widehat{F}(z)\right)\overline{\lambda_k'\left(\widehat{F}(z)\right)} = 0, \tag{IV.96}$$

welches in Analogie zu (IV.78) gilt. Damit muß (IV.93) wahr sein. Um nun zu zeigen, daß $z \in D$ ist, sei zuerst bemerkt, daß nach Proposition IV.1 für ein festes $z \in U$ alle Werte der mehrwertigen Funktion $r'(\widehat{F}(z), \overline{\widehat{F}(z)})$ das selbe Vorzeichen haben, daß also unter $\widehat{F}$ das Innere von D auf das Innere von D' abgebildet wird und das Äußere auf das Äußere.
Nach (II.42) folgt nun

$$r'\left(\widehat{F}(z), \overline{\widehat{F}(z)}\right) = \left(1 + \alpha'\left(\widehat{F}(z), \overline{\widehat{F}(z)}\right)\right)\left(2\operatorname{Re} z_n + \sum_{|k|\geq 0} \overline{\lambda_k'\left(\widehat{F}(z)\right)}\left({}'\widehat{F}(z)\right)^k\right), \tag{IV.97}$$

mit $\alpha'(0,0) = 0$. Es sei nun N so groß gewählt, daß für μ aus (IV.92) gilt $\mu(N) < 2c$. Dann folgt mit (IV.92) und (IV.93) nun zusammen

$$r'\left(\widehat{F}(z), \overline{\widehat{F}(z)}\right) \leq -\frac{2c}{N} + \frac{\mu(N)}{N} < 0. \tag{IV.98}$$

Damit gilt $z \in D$ und das Lemma ist bewiesen.

□

Zum abschließenden Beweis von Theorem IV.6 wird jetzt noch das folgende Lemma benötigt:

Lemma IV.6 *Wenn $N > 1$ wie in Lemma IV.5 genügend groß gewählt ist, dann läßt sich f durch eine eigentliche holomorphe Abbildung $\hat{f} : \mathcal{D}(N,0) \to \mathcal{D}'(N,0)$ auf $\mathcal{D}(N,0)$ fortsetzen.*

Beweis: Für ein solches N wie in Lemma IV.5 und ein ε nahe $-\frac{1}{N}$ ist $\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ eine kleine Umgebung der Menge

$$\mathcal{A} := \left\{z \in U : z_n = -\frac{1}{N},\ \lambda_k'\left(\widehat{F}(z)\right) = 0\ \ \forall\ |k| > 0\right\}. \tag{IV.99}$$

Wegen (II.42) gilt für jedes $z \in \mathcal{A}$

$$r'\left(\widehat{F}(z), \overline{\widehat{F}(z)}\right) = \left(1 + \alpha'\left(\widehat{F}(z), \overline{\widehat{F}(z)}\right)\right) \cdot 2\,\mathrm{Re}\, z_n \;<\; 0. \tag{IV.100}$$

Somit ist $\mathcal{D}(N,\varepsilon) \subset D$ und $\mathcal{D}'(N,\varepsilon) \subset D'$, wenn $\varepsilon \in (-\frac{1}{N}, 0]$ nahe bei $-\frac{1}{N}$ ist. Es gilt insbesondere $f(\mathcal{D}(N,\varepsilon)) = \mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ und $f : \mathcal{D}(N,\varepsilon) \to \mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ ist eine eigentliche holomorphe Abbildung.
Es sei nun das größte $\varepsilon \in (-\frac{1}{N}, 0]$ gewählt, für das sich f als eigentliche holomorphe Abbildung $\hat{f} : \mathcal{D}(N,\varepsilon) \to \mathcal{D}'(N,\varepsilon)$ fortsetzen läßt. Diese Abbildung $\hat{f}$ läßt sich nach Voraussetzung dann als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf $\overline{\mathcal{D}(N,\varepsilon)} \cap U$ durch F fortsetzen. Damit wird $\hat{f}$ aber insbesondere auch stetig auf $(\partial\mathcal{D}(N,\varepsilon)) \cap U$ fortgesetzt. Da $(\partial\mathcal{D}(N,\varepsilon)) \cap U$ aber glatt, pseudokonvex und von endlichem Typ ist, läßt sich $\hat{f}$ nach den Theoremen II.7 und II.8 für ein $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$ als eigentliche holomorphe Abbildung auf $\mathcal{D}(N,\tilde{\varepsilon})$ fortsetzen, solange $\varepsilon < 0$ ist. Folglich muß $\varepsilon = 0$ sein und das Lemma ist bewiesen.

$\square$

Damit kann nun Theorem IV.6 sofort bewiesen werden: Nach Lemma IV.6 läßt sich f als eine eigentliche holomorphe Abbildung $\hat{f} : \mathcal{D}(N,0) \to \mathcal{D}'(N,0)$ fortsetzen. Nach Konstruktion von $\mathcal{D}(N,\varepsilon)$ gilt aber $0 \in \partial\mathcal{D}(N,0)$. Wie im Beweis von Lemma IV.6 wird nun $\hat{f}$ durch F stetig auf $\partial\mathcal{D}(N,0)$ fortgesetzt und da $\partial\mathcal{D}(N,0)$ nahe 0 eine glatte reell-analytische pseudokonvexe Hyperfläche endlichen Typs ist, läßt sich $\hat{f}$ nach den Theoremen II.7 und II.8 als eigentliche holomorphe Abbildung auf eine Umgebung von 0 fortsetzen. Damit ist der Beweis von Theorem IV.6 abgeschlossen.

$\square$

15 Die Fortsetzung von f als Korrespondenz

In diesem abschließenden Schritt des Beweises von Theorem B wird nun die lokale Fortsetzung der Abbildung f als holomorphe Korrespondenz konstruiert. Dazu werden die Ergebnisse aus [25], Abschnitt 8 - 12, für die betrachtete lokale Situation formuliert. Dieser Teil des Beweises ist der einzige, wo nur der Fall $n = 2$ betrachtet werden kann. Der Grund dafür ist, daß hier spezielle Eigenschaften der Randgeometrie von M und M' ausgenutzt werden, welche im Fall $n > 2$ in der benötigten Form nicht zur Verfügung stehen.

Es seien in diesem Abschnitt stets die Situation von Theorem B und die dort eingeführten Notationen betrachtet.

15.1 Die lokale Segre-Korrespondenz von f

Aus den Voraussetzungen c) und d) von Theorem B ergibt sich mit Lemma III.1 direkt das folgende Korollar:

Korollar IV.2 *Unter den Voraussetzungen von Theorem B gilt:*

a) Zu jedem Punkt $z^0 \in M_1$ und jeder Umgebung $U' = U'(\overline{M_1'})$ gibt es eine Umgebung $U = U(z^0) \subset\subset W$ von z^0 mit $U \cap \partial D \subset\subset M_1$, so daß gilt

$$f(U \cap D) \subset\subset U'. \tag{IV.101}$$

b) Analog gibt es zu jedem Punkt $z^{0'} \in M_1'$ und jeder Umgebung $U = U(\overline{M}_2)$ eine Umgebung $U' = U'(z^{0'}) \subset\subset W'$ von $z^{0'}$ mit $U' \cap \partial D' \subset\subset M_1'$, so daß gilt

$$f^{-1}(U' \cap D') \subset\subset U. \tag{IV.102}$$

Die Aussagen von Korollar IV.2 lokalisieren die Abbildung f weitgehend genug, um damit im folgenden die lokale Segre-Korrespondenz von f sinnvoll definieren zu können.

Definition IV.1 *Es seien $U = U(M_2) \subset\subset W$ und $U' = U'(M_1') \subset\subset W'$ offene Umgebungen.*

a) Für jeden Punkt $z^0 \in M_1$ kann nach Korollar IV.2 ein Standardumgebungspaar (U_1, U_2) von z^0 so klein gewählt werden, daß $f(U_2 \cap D) \subset\subset W'$ gilt. Dann sei die lokale Segre-Korrespondenz V_{z^0} von f in z^0 definiert als

$$V_{z^0} := \left\{(w, w') \in (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'}) : f(Q_w \cap D) \supset {}_{{}^s w'}Q'_{w'}\right\}. \tag{IV.103}$$

Desweiteren sei

$$E_{z^0} := \left\{z \in U_2 \cap D : \exists\, (w, w') \in V_{z^0} \;:\; z \in Q_w \cap f^{-1}({}^s w')\right\}. \tag{IV.104}$$

b) Für jeden Punkt $z^{0'} \in M_1'$ kann nach Korollar IV.2 ein Standardumgebungspaar (U_1', U_2') so klein gewählt werden, daß $f^{-1}(U_2' \cap D') \subset\subset U$ gilt. Dann ist die Inverse $g := f^{-1}$ eine wohldefinierte mengenwertige Abbildung von $U_2' \cap D'$ nach $U \cap D$ und es kann die lokale Segre-Korrespondenz von g in $z^{0'}$ definiert werden als

$$V'_{z^{0'}} := \left\{(w, w') \in (U \setminus \overline{D}) \times (U_1' \setminus \overline{D'}) : g\left(Q'_{w'} \cap D'\right) \supset {}_{{}^s w}Q_w\right\}. \tag{IV.105}$$

Schließlich sei noch

$$E'_{z^{0'}} := \left\{z' \in U_2' \cap D' : \exists\, (w, w') \in V'_{z^{0'}} \;:\; z' = f({}^s w)\right\}. \tag{IV.106}$$

Zu den obigen Definitionen seien zuerst folgende Bemerkungen angeführt:

- Diese Definition von V_{z^0} bzw. $V'_{z^{0'}}$ ist eine Verallgemeinerung des klassischen Reflexionsprinzips in einer Veränderlichen. Im Fall $n = 1$ können die Gebiete D, D' durch einen globalen biholomorphen Koordinatenwechsel in die untere Halbebene $H^- = \{\operatorname{Im} z < 0\}$ abgebildet werden, so daß $M = M' = \{\operatorname{Im} z = 0\}$ gilt und sich die Segre-Varietäten zu

$$Q_w = \{\overline{w}\} \quad \forall\, w \in \mathbb{C} \tag{IV.107}$$

ergeben. Damit folgt sofort

$$V_z \subset \left\{(w, w') \in H^+ \times H^+ : f(\overline{w}) = \overline{w}'\right\} \quad \forall\, z \in M. \tag{IV.108}$$

- Die definierende Bedingung (IV.105) für $V'_{z^{0\prime}}$ ist äquivalent zu der folgenden Bedingung
$$f\left({}_{s_w}Q_w\right) \subset Q'_w. \tag{IV.109}$$
- Die Definition von $V'_{z^{0\prime}}$ in (IV.105) ist symmetrisch zu der Definition von V_{z^0} in (IV.103). Im folgenden wird es oftmals notwendig sein, solche symmetrischen Situationen zu betrachten und symmetrische Behauptungen zu beweisen. Wird nur der spezielle Fall einer biholomorphen Abbildung $f : D \to D'$ betrachtet, so kann der jeweilige zweite Fall immer ignoriert werden, da in dieser Situation die Inverse f^{-1} wieder eine Abbildung ist und nicht wie im hier betrachteten allgemeinen Fall nur eine Korrespondenz.

Definition IV.2 *Es sei mit $\Sigma \subset M$ die Menge der Punkte von M bezeichnet, in deren Umgebung sich f als eigentliche holomorphe Korrespondenz fortsetzen läßt. Analog sei mit $\Sigma' \subset M'$ die Menge der Punkte von M' bezeichnet, in deren Umgebung sich die lokale Inverse $g := f^{-1}$ als eigentliche holomorphe Korrespondenz fortsetzen läßt.*

Nach Theorem IV.6 läßt sich f für jeden Punkt $z \in \Sigma$ sogar als eigentliche holomorphe Abbildung auf eine Umgebung $U = U(z)$ fortsetzen. Damit ist die Aussage des zu beweisenden Theorems B äquivalent zu der Aussage $M_1 \subset \Sigma$. Das folgende Lemma ist nun das zentrale Hilfsmittel zum Beweis dieser Aussage.

Lemma IV.7 *Es sei $z^0 \in M_1$ und es sei $V_{z^0} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in z^0. Es sei*
$$\overline{V_{z^0}} \cap \left((U_1 \setminus \overline{D}) \times U'\right) =: \widehat{V}_{z^0} \tag{IV.110}$$
eine abgeschlossene komplex-analytische rein 2-dimensionale Teilmenge von $(U_1 \setminus \overline{D}) \times U'$ ohne Häufungspunkte in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times \partial U'$. Dann ist $z^0 \in \Sigma$.

Beweis: Da $\widehat{V}_{z^0}$ keine Häufungspunkte in $(U_1 \setminus \overline{D})$ hat, ist die Projektion $\pi : \widehat{V}_{z^0} \to U_1 \setminus \overline{D}$ eine eigentliche holomorphe Abbildung und damit eine endlich verzweigte Überlagerung, deren Blätterzahl mit m bezeichnet sei. Es gibt daher zwei Pseudopolynome P_1, P_2 der Form
$$P_k(z, z'_k) = z_k'^m + a_{k1}(z) z_k'^{m-1} + \cdots + a_{km}(z) \quad \forall\, (z, z'_k) \in (U_1 \setminus \overline{D}) \times \mathbb{C} \;\; \forall\, k \in \{1, 2\} \tag{IV.111}$$
mit holomorphen Koeffizienten $a_{kj} \in \mathcal{O}(U_1 \setminus \overline{D})$, so daß gilt
$$\widehat{V}_{z^0} \subset \tilde{F} := \left\{(z, z') \in (U_1 \setminus \overline{D}) \times U' : P_1(z, z'_1) = P_2(z, z'_2) = 0\right\}. \tag{IV.112}$$

Nach Theorem II.6 gibt es nun eine Umgebung $U = U(z^0) \subset U_1$, so daß sich entweder alle Funktionen aus $\mathcal{O}(U \cap D)$ holomorph nach U fortsetzen lassen, oder alle Funktionen aus $\mathcal{O}(U \setminus \overline{D})$ besitzen diese Eigenschaft. Im ersten Fall folgt direkt $z^0 \in \Sigma$, so daß ohne Einschränkung angenommen werden kann, daß der zweite Fall vorliegt. Damit lassen sich insbesondere alle Koeffizienten a_{kj} zu holomorphen Funktionen $\hat{a}_{kj} \in \mathcal{O}(U)$ fortsetzen, so daß $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ mit

$$\hat{P}_k(z, z'_k) := z_k'^m + \hat{a}_{k1}(z) z_k'^{m-1} + \cdots + \hat{a}_{km}(z) \quad \forall\, (z, z_k) \in U \times \mathbb{C} \ \ \forall\, k \in \{1, 2\} \tag{IV.113}$$

Pseudopolynome auf $U \times \mathbb{C}$ sind. Es sei nun

$$\hat{F} := \Big\{ (z, z') \in U \times U' : \hat{P}_1(z, z'_1) = \hat{P}_2(z, z'_2) = 0 \Big\}. \tag{IV.114}$$

Dann gilt $\widehat{V}_{z^0} \subset \hat{F}$ und $\hat{F}$ ist eine komplex-analytische Teilmenge von $U \times U'$, welche $\Gamma_{f|D \cap U}$ enthält. Die irreduzible Komponente F von $\hat{F}$, die $\Gamma_{f|D \cap U}$ enthält, liefert schließlich eine eigentliche holomorphe Korrespondenz, welche f nach U fortsetzt. Damit ist $z^0 \in \Sigma$ gezeigt.

□

Vollkommen analog ergibt sich auch die entsprechende symmetrische Aussage:

Lemma IV.8 *Es sei $z^{0'} \in M'_1$ und es sei $V'_{z^{0'}} \subset (U \setminus \overline{D}) \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f^{-1} in $z^{0'}$. Es sei*

$$\overline{V'_{z^{0'}}} \cap \big(U \times (U'_1 \setminus \overline{D'}) \big) =: \widehat{V}'_{z^{0'}} \tag{IV.115}$$

eine abgeschlossene komplex-analytische rein 2-dimensionale Teilmenge von $U \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$ ohne Häufungspunkte auf $\partial U \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$. Dann ist $z^{0'} \in \Sigma'$.

Eine zentrale Tatsache für den Gebrauch der Segre-Korrespondenzen zur Fortsetzung von Γ_f wird jetzt in den folgenden beiden Lemmata formuliert.

Lemma IV.9 *Es sei $V_{z^0} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in $z^0 \in M_1$. Ist die Menge E_{z^0} relativ kompakt in U_2, dann gilt:*

a) V_{z^0} ist eine abgeschlossene, komplex-analytische Teilmenge von $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$.

b) V_{z^0} hat keine Häufungspunkte in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times \partial U'$.

c) V_{z^0} hat keine Häufungspunkte in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times \Sigma'$.

Beweis:
zu a) Es sei $(w^0, w^{0'}) \in V_{z^0}$. Nach Lemma II.9 ist für eine genügend kleine Umgebung $W_0 \subset \mathbb{C}^4$ von $(w^0, w^{0'})$, ein passendes Standardumgebungspaar $U'_1 \subset\subset U'_2$ mit $w^{0'} \in U'_1$ und jedes $(w, w') \in W_0$, die Bedingung

$$f(Q_w \cap D) \supset {}_{s_{w'}}Q'_{w'} \tag{IV.116}$$

äquivalent zu der Bedingung

$$f(Q_w \cap D) \supset {}_{\tilde{w}'}Q'_{w'}, \tag{IV.117}$$

wobei $\tilde{w}'$ der eindeutig bestimmte Punkt auf $Q'_{w'}$ mit $\tilde{w}'_1 = {}^s w_1^{0'}$ sei. Offenbar entspricht die Bedingung (IV.117) einem System holomorpher Gleichungen, so daß V_{z^0} als Nullstellengebilde dieses Systems lokal komplex-analytisch ist.
Zum Beweis von a) muß nun noch gezeigt werden, daß V_{z^0} abgeschlossen ist in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$. Dazu sei $(w^\nu, w^{\nu\prime}) \in V_{z^0}$ eine Folge, die gegen einen Punkt $(w^0, w^{0\prime}) \in (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ konvergiert. Es ist jetzt zu zeigen, daß $(w^0, w^{0\prime}) \in V_{z^0}$ gilt. Da $w^{\nu\prime} \to w^{0\prime} \in U' \setminus \overline{D'}$ strebt, konvergiert wegen der Stetigkeit der Familie der Segre-Varietäten $Q'_{w^{\nu\prime}}$ auch ${}^s w^{\nu\prime}$ gegen einen Punkt ${}^s w^{0\prime}$, für welchen nach Lemma II.10 ${}^s w^{0\prime} \in D'$ gelten muß. Nach Definition von V_{z^0} existieren nun Punkte ζ^ν mit

$$\zeta^\nu \in f^{-1}\left({}^s w^{\nu\prime}\right) \cap Q_{w^\nu}, \tag{IV.118}$$

so daß gilt

$$\zeta^\nu \to \zeta^0 \in f^{-1}({}^s w^{0\prime}) \subset D. \tag{IV.119}$$

Aus der Stetigkeit der Familie der Segre-Varietäten Q_{w^ν} und der Kompaktheitsannahme über E_{z^0} folgt nun $\zeta^0 \in Q_{w^0} \cap U_2$ und daher gilt

$$f(Q_{w^0} \cap D) \supset {}_{{}^s w^{0\prime}}Q'_{w^{0\prime}}. \tag{IV.120}$$

Daraus folgt sofort $(w^0, w^{0\prime}) \in V_{z^0}$, womit a) gezeigt ist.

zu b) Für jedes $\delta > 0$ sei die Umgebung U'_δ von M'_1 definiert durch

$$U'_\delta = \left\{ z \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{dist}(z, M'_1) < \delta \right\}. \tag{IV.121}$$

Es sei weiter $\delta := \operatorname{dist}(\partial U', M'_1) > 0$. Nach Lemma II.10 gibt es ein $\delta_1 > 0$, so daß gilt

$${}^s w \in U'_{\delta_1} \;\Rightarrow\; w' \in U'_{\frac{\delta}{2}}. \tag{IV.122}$$

Nach Lemma IV.2 kann das Umgebungspaar $U_1 \subset\subset U_2$ so klein gewählt werden, daß gilt

$$f(U_2 \cap D) \subset U'_{\delta_1} \cap D'. \tag{IV.123}$$

Dann ergibt sich aus der Definition von V_{z^0}

$$(w, w') \in V_{z^0} \;\Rightarrow\; {}^s w' \in f(U_2 \cap D) \tag{IV.124}$$

und nach (IV.122) und (IV.123) folgt daraus sofort

$$(w, w') \in V_{z^0} \;\Rightarrow\; \operatorname{dist}(w', \partial U') > \frac{\delta}{2}. \tag{IV.125}$$

Damit ist auch b) gezeigt.

zu c) Es sei angenommen, daß es eine Folge $(w^\nu, w^{\nu\prime}) \in V_{z^0}$ gibt, die gegen einen Punkt

$$(w^0, w^{0\prime}) \in (U_1 \setminus \overline{D}) \times \Sigma'$$

konvergiert und es sei $\zeta^\nu \in Q_{w^\nu}$ eine Folge, so daß $f(\zeta^\nu) = {}^s w^{\nu\prime}$ ist. Da $w^{\nu\prime} \to w^{0\prime} \in \partial D'$ konvergiert, gilt nach Lemma II.10 auch

$$ {}^s w^{\nu\prime} \to {}^s w^{0\prime} = w^{0\prime} \tag{IV.126}$$

und $\operatorname{dist}(\zeta^\nu, \partial D) \to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge kann angenommen werden, daß die Folge ζ^ν gegen einen Punkt ζ^0 konvergiert, für den notwendigerweise $\zeta^0 \in \partial D$ gilt. Die Kompaktheit von E_{z^0} impliziert insbesondere $\zeta^0 \in U_2$. Daher folgt nach Theorem IV.5, da $w^{0\prime} \in \Sigma'$ ist, auch $\zeta^0 \in \Sigma$ und $f(\zeta^0) = w^{0\prime}$. Das bedeutet, daß es nach Theorem IV.6 Umgebungen $\tilde{U}$ von ζ^0 und $\tilde{U}'$ von $w^{0\prime}$ gibt, so daß f sich holomorph nach $D \cup \tilde{U}$ fortsetzt und $f_{|\tilde{U}} : \tilde{U} \to \tilde{U}'$ eigentlich ist. Es sei nun

$$\tilde{g} := \left(f_{|\tilde{U}}\right)^{-1}. \tag{IV.127}$$

Dann können Punkte $z^\nu \in \tilde{g}(w^{\nu\prime})$ so gewählt werden, daß $z^\nu \to \zeta^0$ gilt. Damit gilt notwendigerweise

$$f(Q_{z^\nu} \cap \tilde{U}) \subset Q'_{w^{\nu\prime}} \cap U'_2. \tag{IV.128}$$

Daher folgt nun

$$Q_{z^\nu} = Q_{w^\nu}, \tag{IV.129}$$

so daß aus Stetigkeitsgründen gilt

$$Q_{\zeta^0} = Q_{w^0}. \tag{IV.130}$$

Da jedoch $\zeta^0 \in \partial D$ gilt, folgt, nach Lemma II.8 e), daß $A_{\zeta^0} \subset \partial D$ gilt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme $w^0 \notin \partial D$.

□

Auf analogem Wege folgt sofort die entsprechende symmetrische Aussage:

Lemma IV.10 *Es sei $V'_{z^{0\prime}} \subset (U \setminus \overline{D}) \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in $z^{0\prime} \in M'_1$. Ist die Menge $E'_{z^{0\prime}}$ relativ kompakt in U'_2, dann gilt:*

a) $V'_{z^{0\prime}}$ ist eine abgeschlossene, komplex-analytische Teilmenge von $(U \setminus \overline{D}) \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$.

b) $V'_{z^{0\prime}}$ hat keine Häufungspunkte in $\partial U \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$.

c) $V'_{z^{0\prime}}$ hat keine Häufungspunkte in $\Sigma \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$.

Die entscheidende Voraussetzung in den beiden vorangegangenen Lemmata ist die relative Kompaktheit der Mengen E_{z^0} und $E'_{z^{0\prime}}$. Ein einfaches geometrisches Kriterium für die Erfülltheit dieser Voraussetzung wird durch das folgende Lemma gegeben:

Lemma IV.11 *Es sei $z^0 \in M_1$ und es sei $V_{z^0} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in z^0. Es gelte ferner $Q_{z^0} \cap \overline{D} \cap U_2 = \left\{z^0\right\}$. Dann ist die Menge E_{z^0}, nach eventueller Verkleinerung von U_1, relativ kompakt in U_2. Insbesondere ist dies der Fall, wenn z^0 ein streng pseudokonvexer Randpunkt ist.*

Beweis: Zuerst sei bemerkt, daß nach (IV.104) immer gilt

$$E_{z^0} \subset \bigcup_{w \in U_1 \setminus \overline{D}} Q_w \cap D. \tag{IV.131}$$

Es sei nun eine Umgebung $\tilde{U} = \tilde{U}(z^0) \subset\subset U_2$ von z^0 gewählt. Da nach Voraussetzung $Q_{z^0} \cap \overline{D} \cap U_2 = \{z^0\}$ gilt, folgt für eine passende Konstante $c > 0$

$$\operatorname{dist}\left(Q_{z^0} \cap (U_2 \setminus \tilde{U}), \overline{D}\right) \geq 2c. \tag{IV.132}$$

Daher gilt, wenn die Umgebung $U_1 \subset\subset \tilde{U}$ genügend klein gewählt worden ist, auch

$$\operatorname{dist}\left(Q_w \cap (U_2 \setminus \tilde{U}), \overline{D}\right) \geq c \;\; \forall\, w \in U_1, \tag{IV.133}$$

aufgrund der Stetigkeit der Familie der Segre-Varietäten. Damit folgt

$$\bigcup_{w \in U_1 \setminus \overline{D}} Q_w \cap D \subset\subset \tilde{U} \subset\subset U_2 \tag{IV.134}$$

und somit ist wegen (IV.131) das Lemma bewiesen.

□

15.2 Die Struktur des Randes

Es wird nun zunächst die geometrische Struktur der betrachteten Ränder genauer untersucht werden, um danach für die verschiedenen Klassen von Randpunkten die holomorphe Fortsetzbarkeit zu zeigen. Die hier vorgenommene Einteilung ist in wesentlichen Teilen nur im Falle $n = 2$ möglich. Alle Betrachtungen und Definitionen werden hier nur für M durchgeführt, die jeweils analogen Aussagen gelten stets auch für M'.

In dem betrachteten Fall $n = 2$ kann, nach eventueller Verkleinerung von W, ein reell-analytisches Vektorfeld Ψ auf M mit Werten in $T^{10}M$ gewählt werden, welches in keinem Punkt von M verschwindet. Damit sei für eine beliebige reell-analytische definierende Funktion r von D auf W definiert

$$\mathcal{L}_M(z) := \mathcal{L}_r(z; \Psi(z)) \quad \forall\, z \in M. \tag{IV.135}$$

Somit gilt folgende Beziehung

$$\operatorname{sign} \mathcal{L}_M(z) = \operatorname{sign} \mathcal{L}_r(z; X) \quad \forall\, z \in M \;\; \forall\, X \in T^{10}M. \tag{IV.136}$$

Damit zerfällt M in genau drei Teilmengen

$$M = M_s^+ \cup M_s^- \cup T \quad \text{mit} \quad \begin{cases} M_s^+ & := \{z \in M : \mathcal{L}_M(z) > 0\} \\ M_s^- & := \{z \in M : \mathcal{L}_M(z) < 0\} \\ T & := \{z \in M : \mathcal{L}_M(z) = 0\}, \end{cases} \tag{IV.137}$$

die streng pseudokonvexen Punkte M_s^+, die streng pseudokonkaven Punkte M_s^- und die Nullstellenmenge T der Levi-Form $\mathcal{L}_M$.

Weiter wird die Menge

$$M^+ := \overline{\overset{\circ}{M_s^+}} \tag{IV.138}$$

als der pseudokonvexe Bereich von M und die Menge

$$M^- := \overline{\overset{\circ}{M_s^-}} \tag{IV.139}$$

als der pseudokonkave Bereich von M bezeichnet. Es sei ferner noch

$$T^+ := T \cap M^+ \tag{IV.140}$$

als die Menge der schwach pseudokonvexen Punkte in M und

$$T^- := T \cap M^- \tag{IV.141}$$

als die Menge der schwach pseudokonkaven Punkte in M bezeichnet.

Es ist bekannt, daß $M^- \subset \widehat{D}$ gelten muß. Es sei aber beachtet, daß im allgemeinen $\widehat{D} \setminus M^- \neq \emptyset$ ist, es können sogar relativ offene Teilmengen von M_s^+ in der globalen Holomorphiehülle von D liegen.

Da M eine reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist, kann insbesondere $\mathcal{L}_M$ auf keiner relativ offenen Teilmenge von M identisch verschwinden. Daher ist T eine kompakte reell-analytische Teilmenge von M der reellen Dimension ≤ 2. Es sei nun

$$T^{reg} := \{z \in T : \nabla \mathcal{L}_M(z) \neq 0\}. \tag{IV.142}$$

Dann gibt es für jeden Punkt $z \in T^{reg}$ eine Umgebung $U = U(z)$, so daß $T^{reg} \cap U$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Es sei weiter

$$T^{sing} := \{z \in T : \nabla \mathcal{L}_M(z) = 0\} = T \setminus T^{reg}. \tag{IV.143}$$

Da $\nabla \mathcal{L}_M$ reell-analytisch ist und nicht identisch auf T verschwindet, gilt insbesondere

$$\dim_{\mathbb{R}} T^{sing} \leq 1. \tag{IV.144}$$

Es sei nun weiter

$$T^{tr} := \left\{z \in T^{reg} : \dim T_z^{10} T^{reg} = 0\right\} \tag{IV.145}$$

die Menge der Punkte $z \in T^{reg}$, in denen T^{reg} total reell ist. Da T^{tr} eine durch reell-analytische Gleichungen definierte Teilmenge der reell-analytischen Menge T^{reg} ist, ist T^{tr} selber reell-analytisch. Für die Menge

$$T^h := \left\{z \in T^{reg} : \dim T_z^{10} T^{reg} = 1\right\} = T^{reg} \setminus T^{tr} \tag{IV.146}$$

gilt weiter

$$\dim_{\mathbb{R}} T^h \leq 1. \tag{IV.147}$$

Denn gäbe es einen Punkt $z \in T^h$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(T^h)_z = 2$, dann gäbe es auch einen 1-dimensionalen komplexen Mengenkeim Y_z mit $Y_z \subset (T^h)_z \subset M_z$. Da M aber nach Voraussetzung von endlichem Typ ist, kann dieser Fall nicht auftreten.

Damit ist T^{tr} eine endliche Familie von 2-dimensionalen irreduziblen total-reellen reell-analytischen Mannigfaltigkeiten.

Es sei nun weiter mit $o_{\mathcal{L}}(z)$ die Verschwindungsordnung der Levi-Form $\mathcal{L}_M$ im Punkte $z \in M$ bezeichnet. Dann ist die Menge

$$T^d := \left\{ z \in T : \liminf_{T \ni \zeta \to z} o_{\mathcal{L}}(\zeta) < o_{\mathcal{L}}(z) \right\} \tag{IV.148}$$

reell-analytisch und hat reelle Dimension ≤ 1.

Damit sei nun definiert

$$\begin{aligned} T_2 &:= T^{tr} \setminus T^d, && \text{(IV.149)} \\ T^e &:= T^{sing} \cup T^h \cup T^d, && \text{(IV.150)} \\ T_1 &:= \left\{ z \in T^e : \dim_{\mathbb{R},z} T^e = 1 \right\}, && \text{(IV.151)} \\ T_0 &:= \left\{ z \in T^e : \dim_{\mathbb{R},z} T^e = 0 \right\}, && \text{(IV.152)} \end{aligned}$$

sowie ferner

$$T_2^+ := T_2 \cap M^+ \quad , \quad T_1^+ := T_1 \cap M^+ \quad , \quad T_0^+ := T_0 \cap M^+. \tag{IV.153}$$

Die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnitts werden jetzt in dem folgenden Lemma zusammengefaßt:

Lemma IV.12 *Die Nullstellenmenge T der Leviform $\mathcal{L}_M$ kann in der Form*

$$T = T_2 \,\dot\cup\, T_1 \,\dot\cup\, T_0 \tag{IV.154}$$

dargestellt werden, wobei gilt:

i) T_2 ist eine endliche Familie reell 2-dimensionaler irreduzibler total reeller reell-analytischer Mannigfaltigkeiten.

ii) T_1 ist eine endliche Familie irreduzibler glatter reell-analytischer Kurven.

iii) T_0 besteht aus einer endlichen Anzahl von Punkten.

Insbesondere ist $T_1 \cup T_0$ als endliche Vereinigung von analytischen Kurven und Punkten pluripolar.

Für die weitere Untersuchung von zentraler Bedeutung ist die Menge

$$R := M \setminus (M^+ \cup M^-), \tag{IV.155}$$

welche als Border in M bezeichnet wird.

Die Border R trennt auf M den pseudokonvexen Bereich vom pseudokonkaven Bereich, genauer gilt

$$M \setminus R = M_1 \cup \ldots \cup M_{n_m}, \tag{IV.156}$$

wobei M_k irreduzibel ist für jedes $k = 1, \ldots, n_m$ und es gilt insbesondere

$$(M_k \subset M^+ \quad \vee \quad M_k \subset M^-) \quad \forall\, k = 1, \ldots, n_m. \tag{IV.157}$$

Weiter gilt offenbar $R \subset T$. Falls $R \neq \emptyset$ ist, ist R immer eine abgeschlossene semianalytische Teilmenge der reinen Dimension 2 in T. Es gilt insbesondere

$$M = M_s^+ \,\dot\cup\, M_s^- \,\dot\cup\, T^+ \,\dot\cup\, T^- \,\dot\cup\, R. \tag{IV.158}$$

Es muß nun die Menge R genauer untersucht werden. Dazu sei R^{reg} die Menge aller Punkte $z \in R$, für die es eine Umgebung $U = U(z)$ gibt, so daß $R \cap U$ eine glatte reell-analytische Mannigfaltigkeit der reellen Dimension 2 ist. Es sei bemerkt, daß zwar

$$T^{reg} \cap R \subset R^{reg} \tag{IV.159}$$

gilt, es muß hier aber im allgemeinen nicht Gleichheit gelten.

Analog zu den Überlegungen im vorherigen Abschnitt sei nun definiert

$$R^{sing} := R \setminus R^{reg}, \tag{IV.160}$$

$$R^{tr} := \left\{ z \in R^{reg} : \dim T_z^{10} R^{reg} = 0 \right\}, \tag{IV.161}$$

$$R^h := \left\{ z \in R^{reg} : \dim T_z^{10} R^{reg} = 1 \right\} = R^{reg} \setminus R^{tr}. \tag{IV.162}$$

In [20] wurde gezeigt, daß es eine Teilmenge $R^d \subset (T^d \cap R)$ gibt, so daß für

$$R^e := R^{sing} \cup R^h \cup R^d \tag{IV.163}$$

gilt

$$R \setminus R^e \subset \widehat{D}. \tag{IV.164}$$

Damit ergibt sich insgesamt das folgende Theorem:

Theorem IV.7 (siehe [25]) *Es sei $D \subset \mathbb{C}^2$ ein Gebiet und sei $z^0 \in \partial D$ ein Randpunkt, für den es eine Umgebung $W = W(z^0)$ gibt, so daß $M := \partial D \cap W$ eine glatte reell-analytische Hyperfläche endlichen Typs ist. Dann gibt es eine biholomorph invariante abgeschlossene reell-analytische Teilmenge $R^e \subset R$, welche aus einer endlichen Anzahl irreduzibler reell-analytischer Kurven und einer endlichen Menge von Punkten besteht, so daß gilt*

$$R \setminus R^e \subset \widehat{D}. \tag{IV.165}$$

15.3 Fortsetzung durch eine dichte Teilmenge

Als Ausgangspunkt für die angestrebte Fortsetzung der gegebenen Abbildung $f : D \to D'$ als eine eigentliche holomorphe Korrespondenz wird nun nach [25] zunächst gezeigt, daß sich f lokal biholomorph durch eine offene dichte Teilmenge von M_1 fortsetzen läßt.

Theorem IV.8 *Es existiert eine offene dichte Teilmenge $\hat{\Sigma} \subset M_1$ mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $z \in \hat{\Sigma}$ eine Umgebung $U = U(z)$ gibt, so daß sich f lokal biholomorph auf U fortsetzen läßt.*

Beweis: Die Menge $M_s^+ \cup M_s^- \subset M$ ist eine dichte Teilmenge von M. Daher genügt es, $\hat{\Sigma}$ als dichte Teilmenge von $(M_s^+ \cup M_s^-) \cap M_1$ nachzuweisen. Da $M_s^- \subset \widehat{D}$ gilt, läßt sich f als eine eigentliche holomorphe Abbildung durch M_s^- hindurch fortsetzen. Diese Fortsetzung ist insbesondere fast überall in M_s^- lokal biholomorph. Daher ist nur noch zu zeigen, daß $\hat{\Sigma}$ eine dichte Teilmenge von $M_s^+ \cap M_1$ ist. Es sei dazu jetzt angenommen, daß es einen Punkt $a \in M_s^+ \cap M_1$ mit einer relativ offenen Umgebung $S \subset M_s^+ \cap M_1$ von a gibt, so daß f sich für keinen Punkt $z \in S$ biholomorph auf eine Umgebung von z fortsetzen läßt. In dieser Situation sei zuerst die folgende Aussage gezeigt:

Zwischenbehauptung: Für jedes $z \in S$ gilt $\mathrm{cl}_f(z) \subset R^{e'}$.

Nach Korollar IV.2 gilt $\mathrm{cl}_f(z) \subset\subset M_1'$. Wenn $\mathrm{cl}_f(z)$ nun einen Punkt $z' \in \widehat{D'}$ enthalten würde, dann wäre nach Lemma II.5 auch $z \in \widehat{D}$. Daher gilt $\mathrm{cl}_f(z) \cap \widehat{D'} = \emptyset$. Wenn nun andererseits $\mathrm{cl}_f(z)$ einen Punkt $z' \in M^{+'}$ enthält, dann setzt sich f nach Theorem II.5 für eine Umgebung $V = V(z)$ stetig nach $M \cap V$ fort. Das Bild von $S \cap V$ unter dieser Fortsetzung liegt nun aber notwendigerweise in $M^{+'}$ und daher läßt sich f nach Theorem II.7 und II.8 nach eventueller Verkleinerung holomorph nach V fortsetzen. Somit gibt es aber insbesondere Punkte $w \in S \cap V$, in denen f sich lokal biholomorph fortsetzen läßt. Dieses kann aber nach Voraussetzung nicht sein. Somit gilt auch $\mathrm{cl}_f(z) \cap M^{+'} = \emptyset$. Wegen $M_1 = (\widehat{D'} \cup M^{+'} \cup R^{e'}) \cap M_1$ folgt damit sofort $\mathrm{cl}_f(z) \subset R^{e'}$.

Nun sei bemerkt, daß nach Theorem IV.7 die Menge $R^{e'}$ pluripolar ist. Demnach kann eine auf $\mathbb{C}^2$ plurisubharmonische Funktion $\varphi \not\equiv -\infty$ mit $\varphi_{|R^{e'}} \equiv -\infty$ gewählt werden. Die Funktion $\psi := \varphi \circ f$ ist plurisubharmonisch auf D und wenn $D \ni z \to z^0 \in S$ strebt, dann strebt $\psi(z) \to -\infty$. Da aber $S \subset M$ relativ offen ist, folgt $\psi \equiv -\infty$, so daß φ auch identisch $-\infty$ auf ganz D sein muß. Widerspruch. Also kann S nicht relativ offen gewesen sein.

$\square$

Es sei bemerkt, daß damit natürlich auch gezeigt ist, daß $\Sigma \subset M_1$ eine dichte Teilmenge von M_1 ist. Es muß jetzt noch die entsprechende symmetrische Aussage gezeigt werden:

Theorem IV.9 *Es gibt eine offene dichte Teilmenge $\hat{\Sigma}' \subset M_1'$ mit der Eigenschaft, daß es für jeden Punkt $z' \in \hat{\Sigma}'$ eine Umgebung $U' = U'(z')$ gibt, so daß sich die lokale Inverse $g := f^{-1}$ als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf U' fortsetzen läßt.*

Beweis: Wie im vorherigen Beweis genügt es zu zeigen, daß g sich als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung jedes Punktes einer offenen dichten Teilmenge von $M_s^{+'} \cap M_1'$ fortsetzen läßt. Es sei dazu wieder angenommen, daß dieses nicht wahr ist. Dann gibt es einen Punkt $a' \in M_s^{+'} \cap M_1'$ und eine relativ offene Umgebung $S' \subset M_s^{+'} \cap M_1'$ von a', so daß sich g für jedes $z' \in S'$ nicht als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von z' fortsetzen läßt. Es wird nun zuerst folgendes gezeigt:

Zwischenbehauptung: Angenommen, für einen Punkt $z^{1'} \in S'$ existiert ein Punkt $z^1 \in \mathrm{cl}_g(z^{1'}) \cap \widehat{D} \cap M_2$ oder ein Punkt $z^1 \in \mathrm{cl}_g(z^{1'}) \cap M^+ \cap M_2$. Dann setzt sich g als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von $(z^1, z^{1'})$ im Sinne von Definition II.10 fort.

Dazu sei bemerkt, daß $z^{1'} \in \mathrm{cl}_f(z^1)$ gilt. Wenn $z^1 \in \widehat{D}$ ist, dann läßt sich f holomorph auf eine Umgebung von z^1 fortsetzen und nach Theorem IV.3 folgt sofort die Behauptung. Wenn dagegen $z^1 \in \mathrm{cl}_g(z^{1'}) \cap M^+$ ist, dann läßt sich f, wieder nach Theorem II.5, stetig auf eine Umgebung von z^1 fortsetzen. Das Theorem II.7 liefert dann die $\mathcal{C}^\infty$-Fortsetzbarkeit von f auf eine Umgebung von z^1 und nach Theorem II.8 folgt dann schließlich, daß sich f als eigentliche holomorphe Abbildung auf eine Umgebung von z^1 fortsetzen läßt. Daher läßt sich g, wieder nach Theorem IV.3, als eine eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von $(z^1, z^{1'})$ fortsetzen. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Als nächstes sei nun bemerkt, daß sich, wann immer sich g als eine eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von $(z^1, z^{1'})$ fortsetzen läßt, die Einschränkung

$$\Gamma_g(U') := \Gamma_{g|\{D \times (U' \cap D')\}} \tag{IV.166}$$

für eine passende Umgebung U' von $z^{1'}$ darstellen läßt in der Form

$$\Gamma_g(U') = \Gamma_1(U') \cup \Gamma_2(U'), \tag{IV.167}$$

wobei $\Gamma_1(U')$ und $\Gamma_2(U')$ abgeschlossene analytische Teilmengen von $D \times (U' \cap D')$ mit eigentlichen Projektionen auf $U \cap D'$ sind und wobei ferner die Menge $\Gamma_1(U)$ mit den Punkten aus $\mathrm{cl}_g(z^{1'}) \cap (M^+ \cup \widehat{D})$ korrespondiert. $\Gamma_1(U')$ läßt sich, nach eventueller Verkleinerung von U', zu einer eigentlichen holomorphen Korrespondenz auf U' fortsetzen. Die Menge $\Gamma_2(U')$ ist der Rest des Graphen $\Gamma_g(U')$ und korrespondiert mit den Punkten aus $\mathrm{cl}_g(z^{1'}) \cap R^e$. Präziser formuliert, ist $\Gamma_2(U')$ der Graph einer als mengenwertige Abbildung interpretierten eigentlichen holomorphen Korrespondenz $g_2 : U' \cap D' \to D$ mit der Eigenschaft $\mathrm{cl}_{g_2}(z^{1'}) \subset R^e$. Wenn nun $\Gamma_1(U') \neq \emptyset$ gilt, dann erfüllt der Grad

m_2 von g_2 die Ungleichung $m_2 < m$, wobei mit m die Blätterzahl von f bezeichnet sei. Es sei nun angenommen, daß es einen Punkt $z^{2'} \in S' \cap U'$ gibt, so daß

$$\mathrm{cl}_{g_2}(z^{2'}) \not\subseteq R^e \cap M_2 \tag{IV.168}$$

gilt. Dann kann die obige Prozedur erneut durchgeführt werden, wodurch von $\Gamma_{g^2}(U'')$, mit $U'' = U''(z^{2'})$, ein weiterer Rest noch niedrigeren Grades abgespalten wird. Nach einer endlichen Anzahl solcher Schritte endet dieses Verfahren mit einem Punkt $a' \in S'$, einer Umgebung $\tilde{U}' = \tilde{U}'(a')$ und einer eigentlichen holomorphen Korrespondenz $\tilde{g} : D' \cap \tilde{U}' \to D$, so daß $f \circ \tilde{g} = \mathrm{id}$ ist und

$$\mathrm{cl}_{\tilde{g}}(S' \cap \tilde{U}') \subset R^e \cap M_2 \tag{IV.169}$$

gilt. Nun sei wieder φ eine auf $\mathbb{C}^2$ plurisubharmonische Funktion, so daß $\varphi_{|R^e} \equiv -\infty$ ist. Die Funktion

$$\psi(z') := \max\left\{\varphi(z) : z \in \tilde{g}(z')\right\} \tag{IV.170}$$

ist plurisubharmonisch auf $U' \cap D'$ und es gilt $\psi(z') \to -\infty$, wenn $z' \to z^{1'} \in S' \cap \tilde{U}'$ strebt. Daher folgt $\psi \equiv -\infty$. Widerspruch.

Dieser Widerspruch zeigt, daß es eine relativ offene Teilmenge $\hat{U} \subset S'$ geben muß, so daß gilt

$$\mathrm{cl}_g(z') \subset (M^+ \cup \widehat{D}) \cap M_2 \ \ \forall\, z' \in \hat{U}'. \tag{IV.171}$$

Daher folgt aus der Zwischenbehauptung, daß sich die Inverse g als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung jedes Punktes $z' \in \hat{U}'$ fortsetzen läßt. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Annahme über die Menge S', womit das Theorem bewiesen ist.

□

Da nun gezeigt ist, daß sich die betrachtete Abbildung f biholomorph durch eine offene dichte Teilmenge von M_1 fortsetzen läßt, kann die Definition IV.1 der lokalen Segre-Korrespondenzen V_{z^0} verfeinert werden. Denn nach dieser ersten Definition kann V_{z^0} nutzlose Komponenten enthalten. Es sei daher V_{z^0} wie folgt durch eine spezielle Zusammenhangskomponente von V_{z^0} ersetzt:

Definition IV.3 *Es sei $V_{z^0} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in $z^0 \in M_1$. Es sei ein beliebiger Punkt $a \in M_1 \cap U_1$ ausgewählt, in welchem sich f biholomorph fortsetzen läßt, und es sei ferner $E_{z^0} \subset\subset U_2$ angenommen. Dann wird ab jetzt mit V_{z^0} die irreduzible Komponente von V_{z^0} in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$, welche den Graphen der fortgesetzten Abbildung f nahe a enthält, bezeichnet.*

Es sei insbesondere bemerkt, daß nach Lemma IV.9 die so neu definierte Segre-Korrespondenz V_{z^0} tatsächlich wieder eine abgeschlossene komplex-analytische Varietät ist. Wie sich später noch herausstellen wird, ist ferner V_{z^0} nicht von der Wahl von a abhängig.

15.4 Fortsetzung durch alle streng pseudokonvexen Punkte

Als nächster Schritt im Beweis von Theorem B kann nun das folgende Lemma gezeigt werden:

Lemma IV.13 *Es ist* $M_s^+ \cap M_1 \subset \Sigma$.

Beweis: Es sei $z^0 \in M_s^+ \cap M_1$ ein beliebiger Punkt. Nach Theorem IV.6 muß nur gezeigt werden, daß sich f als eigentliche holomorphe Korrespondenz auf eine Umgebung von z^0 fortsetzen läßt. Es sei $V_{z^0} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in z^0. Nach den Lemmata IV.11 und IV.9 ist V_{z^0} dann eine abgeschlossene komplex-analytische Untervarietät der Menge $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$. Es sei darauf hingewiesen, daß mit V_{z^0} der in Definition IV.3 ausgezeichnete Teil der lokalen Segre-Korrespondenz bezeichnet wird.
Es ist nun zu zeigen, daß V_{z^0} die Voraussetzungen von Lemma IV.7 erfüllt. Dazu sei zuerst das folgende gezeigt:

ZWISCHENBEHAUPTUNG: V_{z^0} hat keine Häufungspunkte in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (\partial U' \cup (M' \setminus R^{e'}))$.

Nach Teil b) von Lemma IV.9 hat die Menge V_{z^0} keine Häufungspunkte in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times \partial U'$ und nach Teil c) dieses Lemmas hat V_{z^0} auch keine Häufungspunkte in der Menge

$$(U_1 \setminus \overline{D}) \times (M' \cap \widehat{D'}). \tag{IV.172}$$

Daher sei jetzt angenommen, daß V_{z^0} einen Häufungspunkt

$$(w^0, w^{0'}) \in (U_1 \setminus \overline{D}) \times M^{+'} \tag{IV.173}$$

besitzt. Dann gibt es eine Folge $(w^k, w^{k'}) \in V_{z^0}$ mit $(w^k, w^{k'}) \to (w^0, w^{0'})$. Es sei $z^k \in Q_{w^k}$ so gewählt, daß $f(z^k) = {}^s w^{k'}$ gilt. Da ${}^s w^{k'} \to w^{0'} \in M^{+'}$ strebt, kann wegen (IV.103), eventuell nach Übergang zu einer passenden Teilfolge, angenommen werden, daß die Folge der z^k gegen einen Punkt $\tilde{z}$ konvergiert, welcher notwendigerweise in $M \cap \overline{U}_2$ liegt. Nach Lemma IV.11 kann $\tilde{z}$ jedoch nicht auf ∂U_2 liegen. Daher folgt $\tilde{z} \in M_s^+ \cap U_2$. Somit ist gezeigt, daß die Menge $\mathrm{cl}_f(\tilde{z})$ einen Punkt $w^{0'} \in M^{+'}$ enthält. Wieder impliziert nun Theorem II.5, daß f sich Hölder-stetig auf $\overline{D} \cap U$ für eine geeignete Umgebung U von $\tilde{z}$ fortsetzen läßt. Daher folgt aus Theorem II.7, daß f sich sogar $\mathcal{C}^\infty$-glatt auf $\overline{D} \cap U$ fortsetzen läßt, woraus schließlich nach Theorem II.8 folgt, daß sich f, nach eventueller Verkleinerung von U, lokal biholomorph auf U fortsetzen läßt. Wegen der Stetigkeit der Familie der Segre-Varietäten folgt weiter ${}_{\tilde{z}}Q_{w^0} = {}_{\tilde{z}}Q_{\tilde{z}}$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Lemma II.8, Teil e). Damit ist die Zwischenbehauptung gezeigt.

Die jetzt noch unberücksichtigte Situation ist die, daß V_{z^0} Häufungspunkte in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times R^{e'}$ besitzt. In diesem Fall ist V_{z^0} aber zumindest abgeschlossen und komplex-analytisch in $((U_1 \setminus \overline{D}) \times U') \setminus E'$, wobei

$$E' := (U_1 \setminus \overline{D}) \times R^{e'} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times U' \tag{IV.174}$$

sei. Nach Lemma IV.12 und Theorem IV.7 ist E' aber pluripolar. Somit existiert eine plurisubharmonische Funktion $\varphi \not\equiv -\infty$ auf $(U_1 \setminus \overline{D}) \times U'$, so daß gilt

$$E' \subset \left\{(z,z') \in (U_1 \setminus \overline{D}) \times U' : \varphi(z,z') = -\infty\right\} =: \tilde{E}'. \tag{IV.175}$$

Es sei nun

$$\tilde{V}_{z^0} := V_{z^0} \cap \left[\left((U_1 \setminus \overline{D}) \times U'\right) \setminus \tilde{E}'\right]. \tag{IV.176}$$

Dann ist $\tilde{V}_{z^0}$ eine abgeschlossene komplex-analytische Teilmenge von $\big((U_1 \setminus \overline{D}) \times U'\big) \setminus \tilde{E}'$. Es gilt insbesondere $\dim \tilde{V}_{z^0} = 2$. Nach Theorem IV.8 gibt es nun Punkte $z \in U_1 \cap M$, so daß sich die Abbildung f biholomorph auf eine Umgebung $\tilde{U}$ von z fortsetzen läßt. Daher ist auf $(\tilde{U} \setminus \overline{D}) \times U'$ die lokale Segre-Korrespondenz V_{z^0} gerade der Graph einer holomorphen Abbildung. Um dies zu sehen, sei $(w, w') \in V_{z^0}$ mit $w \in \tilde{U} \setminus \overline{D}$. Ist $\tilde{U}$ klein genug gewählt, so sind auch $Q_w \cap D$ und $f(Q_w \cap D)$ klein und liegen in der Nähe von z bzw. $f(z)$. Daher ist auch ${}^s w' \in f(Q_w \cap D)$ nahe bei $f(z)$. Da $f(z) \in M_s^+$ gilt, ist die Abbildung λ' lokal injektiv nahe $f(z)$. Daher folgt, daß w' eindeutig bestimmt ist und damit gilt $w' = f(w)$.
Diese Betrachtungen zeigen, daß die Voraussetzungen des Lemmas II.7 erfüllt sind, so daß aus diesem Lemma in der vorliegenden Situation nun folgt, daß

$$\hat{V}_{z^0} := \overline{\tilde{V}_{z^0}} \tag{IV.177}$$

eine abgeschlossene komplex-analytische, rein zweidimensionale Teilmenge von $(U_1 \setminus \overline{D}) \times U'$ ohne Häufungspunkte auf $(U_1 \setminus \overline{D}) \times \partial U'$ ist. Nach Lemma IV.7 folgt damit $z^0 \in \Sigma$.

$\square$

Mit vollkommen analogen Argumenten folgt sofort auch die entsprechende symmetrische Aussage:

Lemma IV.14 *Es ist $M_s^{+'} \cap M_1' \subset \Sigma'$.*

15.5 Fortsetzung durch die übrigen Randpunkte

Es bleibt noch zu zeigen, daß $(T^+ \cup R^e) \cap M_1 \subset \Sigma$ gilt. Dazu sei zuerst ein weiteres Resultat über das Verhalten der Segre-Varietäten gezeigt:

Lemma IV.15 *Für jeden Punkt $z^0 \in T_2^+ \cap M_1$ gilt, nach eventueller Verkleinerung von U_2,*

$$(Q_{z^0} \cap M_1) \setminus \left\{z^0\right\} \subset M_s^+. \tag{IV.178}$$

Beweis: Es sei $z^0 \in T_2^+ \cap M_1$ ein beliebiger Punkt. Es ist zu zeigen, daß für eine genügend kleine Umgebung $U = U(z^0)$ gilt

$$Q_{z^0} \cap T_2^+ \cap U = \left\{z^0\right\}. \tag{IV.179}$$

Nach einem passenden lokalen biholomorphen Koordinatenwechsel kann angenommen werden, daß $z^0 = 0$ gilt und daß die total-reelle zweidimensionale Untermannigfaltigkeit T_2^+ nahe z^0 gerade die reelle Ebene $i\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ ist. Daher kann eine reell-analytische lokale definierende Funktion r von M nahe 0 in der Form

$$r(z) = 2x_2 + (2x_1)^{2m} a(z_1, y_2) \tag{IV.180}$$

gewählt werden, mit $m > 1$ und einer reell-analytischen Funktion $a(z_1, y_2) > 0$ in einer Umgebung von 0. Die Komplexifizierung von r hat dann die Form

$$r(z, w) = z_2 + \overline{w}_2 + (z_1 + \overline{w}_1)^{2m} \, \tilde{a}(z, w), \tag{IV.181}$$

mit $\tilde{a}(0,0) > 0$. Daher wird Q_0 lokal gegeben durch die Gleichung

$$z_2 + z_1^{2m} \tilde{a}(z, 0) = 0. \tag{IV.182}$$

Die Einschränkung dieser Gleichung auf T_2^+ ist

$$iy_2 + (-1)^m y_1^{2m} \tilde{a}(iy, 0) = 0. \tag{IV.183}$$

Da $\operatorname{Re} \tilde{a}(iy, 0) > 0$ ist, schneidet die Segre-Varietät Q_0 die Ebene T_2^+ nur im Ursprung. □

Lemma IV.16 *Es sei* $V_{z^0} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ *die lokale Segre-Korrespondenz von* f *in* $z^0 \in M_1$*. Gilt nun, nach eventueller Verkleinerung von* U_2,

$$\big((Q_{z^0} \cap M_1) \setminus \{z^0\}\big) \subset \Sigma, \tag{IV.184}$$

so ist V_{z^0} *eine abgeschlossene komplex-analytische Teilmenge von* $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ *ohne Häufungspunkte in* $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (\partial U' \cup \Sigma')$.

Beweis: Nach eventueller Verkleinerung von U_2 kann angenommen werden, daß

$$Q_{z^0} \cap M_1 \cap \partial U_2 \subset \Sigma \tag{IV.185}$$

gilt und daß es einen Radius $\tau_1 > 0$ gibt, so daß sich die Abbildung f für alle $w \in Q_{z^0} \cap \partial U_2 \cap \overline{D}$ holomorph auf die Kugel um w mit Radius τ_1 fortsetzen läßt. Es sei nun

$$R'(z^0) := \left\{ w' \in U' \setminus \overline{D'} : f(Q_{z^0} \cap D) \supset {}_{{}^s w'}Q'_{w'} \right\}. \tag{IV.186}$$

Dann ist $R'(z^0)$ diskret in $U' \setminus \overline{D'}$, da die Abbildung λ' endlich ist. Daher ist auch die Menge

$$R(z^0) := \left\{ w \in Q_{z^0} \cap D \cap \overline{U}_2 : f(w) = {}^s w' \text{ für ein } w' \in R'(z^0) \right\} \tag{IV.187}$$

diskret in D. Nach nochmaliger Verkleinerung von U_2 und U_1 kann weiter angenommen werden, daß

$$R(z^0) \cap \partial U_2 = \emptyset \tag{IV.188}$$

gilt und daß darüber hinaus ein Radius $\tau_2 > 0$ existiert, so daß für alle $w \in U_1 \setminus \overline{D}$ die Menge $R(w)$ sich nicht mit der Umgebung der Breite $\tau_2/2$ der Menge $Q_w \cap D \cap \partial U_2$ schneidet[11]. Damit ist die Voraussetzung $E_{z^0} \subset\subset U_2$ von Lemma IV.9 hergestellt, so daß folgt, daß V_{z^0} eine abgeschlossene komplex-analytische Teilmenge von $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ ohne Häufungspunkt in $(U \setminus \overline{D}) \times (\partial U' \cup \Sigma')$ ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

□

Mit analogen Argumenten folgt sofort das entsprechende symmetrische Resultat:

Lemma IV.17 *Es sei $V'_{z^{0\prime}} \subset (U \setminus \overline{D}) \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in $z^{0\prime} \in M'_1$. Gilt nun, nach eventueller Verkleinerung von U'_2,*

$$\left((Q'_{z^{0\prime}} \cap M'_1) \setminus \left\{z^{0\prime}\right\}\right) \subset \Sigma', \tag{IV.189}$$

so ist $V'_{z^{0\prime}}$ eine abgeschlossene komplex-analytische Teilmenge von $(U \setminus \overline{D}) \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$ ohne Häufungspunkt in $(\partial U \cup \Sigma) \times (U'_1 \setminus \overline{D'})$.

Mit diesen Hilfsmitteln kann jetzt das folgende Lemma gezeigt werden:

Lemma IV.18 *Es gilt $T_2^+ \cap M_1 \subset \Sigma$.*

Beweis: Es sei ein beliebiger Punkt $z^0 \in T_2^+ \cap M_2$ betrachtet. Nach Lemma IV.15 gilt, nach eventueller Verkleinerung von U_2,

$$(Q_{z^0} \cap M_1) \setminus \left\{z^0\right\} \subset M_s^+ \cap M_1. \tag{IV.190}$$

Nach Lemma IV.13 folgt daraus

$$(Q_{z^0} \cap M_1) \setminus \left\{z^0\right\} \subset \Sigma. \tag{IV.191}$$

Für den Fall $\mathrm{cl}_f(z^0) \cap \Sigma' \neq \emptyset$ folgt nun nach Theorem IV.5 zusammen mit Theorem IV.6 sofort $z^0 \in \Sigma$. Nach Theorem II.5, II.7 und II.8 bedeutet dies insbesondere, daß im Fall $\mathrm{cl}_f(z^0) \cap M^{+\prime} \neq \emptyset$ das Lemma direkt bewiesen ist. Da ferner auch $M^{-\prime} \cap M'_1 \subset \Sigma'$ gilt, ist jetzt zum Beweis des Lemmas nur noch der Fall

$$\mathrm{cl}_f(z^0) \subset ((T'_1 \cup T'_0) \cap M'_1) \setminus M^{-\prime} \tag{IV.192}$$

zu betrachten. Nach Lemma IV.12 ist die Menge $T'_1 \cup T'_0$ jedoch pluripolar, was ermöglicht, wie im Beweis von Lemma IV.13 das Lemma II.7 anzuwenden, wenn folgendes gezeigt ist:

Zwischenbehauptung: Es sei $V_{z^0} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in z^0. Für eine passende Wahl von U_1 gibt es eine nichtleere offene Menge $\tilde{U} \subset U_1 \setminus \overline{D}$, so daß $V_{z^0} \cap (\tilde{U} \times (U' \setminus \overline{D'}))$ eine abgeschlossene komplex-analytische

[11] wobei eine solche Umgebung der leeren Menge als leere Menge gesetzt wird

Teilmenge von $\tilde{U} \times U'$ ist.

Um dieses nun nachzuweisen, müssen zuerst die Umgebungen $U_1 \subset\subset U_2$ passend gewählt werden. Dazu sei bemerkt, daß Q_{z^0} eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und daß λ eine offene Abbildung ist. Daher ist für jedes kleine $\delta > 0$ und $U_0 := \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \left|z - z^0\right| < \delta\right\}$ die Menge

$$W_1 := \bigcup_{w \in U_0} Q_w \tag{IV.193}$$

eine beliebig kleine Umgebung von Q_{z^0}. Es sei jetzt mit $T_{2\delta}^+$ die $\delta/2$-Umgebung von T_2^+ bezeichnet. Dann sei nun U_1 so gewählt, daß $U_1 \cap T_{2\delta}^+ \subset U_0$ gilt, aber daß es auch eine nichtleere offene Menge

$$\tilde{U} \subset\subset U_1 \setminus (\overline{W_1} \cup \overline{D}) \tag{IV.194}$$

gibt. Es folgt dann notwendigerweise

$$Q_z \cap U_0 = \emptyset \quad \forall\, z \in \tilde{U}. \tag{IV.195}$$

Daher gilt weiter

$$Q_z \cap M_1 \subset M_s^+ \cap M_1 \subset \Sigma \quad \forall\, z \in \ \tilde{U}. \tag{IV.196}$$

Dieses impliziert, daß f auf $Q_z \cap M_1$ wohldefiniert ist und es gilt

$$f(Q_z \cap M_1) \subset M_s^{+'} \cap M_1 \subset \Sigma'. \tag{IV.197}$$

Die Menge $V_{z^0} \cap \left(\tilde{U} \times (U' \setminus \overline{D'})\right)$ hat keinen Häufungspunkt in $\tilde{U} \times \partial D'$. Denn sonst würden für einen Punkt

$$(\tilde{z}, \tilde{z}') \in \overline{V_{z^0}} \cap (\tilde{U} \times M') \tag{IV.198}$$

wie in Teil c) des Beweises von Lemma IV.9 folgen, daß gilt

$$\tilde{z}' \in f(Q_{z^0} \cap M_1') \subset \Sigma'. \tag{IV.199}$$

Dies wäre aber ein Widerspruch zu Lemma IV.16, womit die Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Damit kann nun Lemma II.7 angewandt werden und es folgt, daß $\overline{V_{z^0}}$ eine analytische Teilmenge von $(U_1 \setminus \overline{D}) \times U'$ ist. Da $\overline{V_{z^0}}$ keine Häufungspunkte in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times \partial U'$ hat, folgt aus Lemma IV.7 nun sofort $z^0 \in \Sigma$.

□

Es folgt hier wieder die folgende symmetrische Aussage zu Lemma IV.18 durch analoge Argumente, da bereits alle symmetrischen Resultate zu den im Beweis von Lemma IV.18 benötigten Hilfsmitteln gezeigt worden sind:

Lemma IV.19 *Es gilt* $T_2^{+'} \cap M_1' \subset \Sigma'$.

Um den Beweis von Theorem B abzuschließen, müssen jetzt noch die Punkte aus $((T_1 \cup T_0) \cap M_1) \setminus M^-$ betrachtet werden. Dafür sei zuerst der folgende Fall betrachtet:

Lemma IV.20 *Es sei $z^0 \in ((T_1 \cup T_0) \cap M_1) \setminus M^-$ und es gelte, nach eventueller Verkleinerung von U_2,*

$$(Q_{z^0} \cap M) \setminus \left\{z^0\right\} \subset \Sigma. \tag{IV.200}$$

Dann gilt $z^0 \in \Sigma$.

Beweis: Es sei $V_{z^0} \subset (U_1 \setminus \overline{D}) \times (U' \setminus \overline{D'})$ die lokale Segre-Korrespondenz von f in z^0. Da bereits bekannt ist, daß

$$M_1' \setminus (T_1' \cup T_0') \subset \Sigma' \tag{IV.201}$$

gilt, folgt aus Lemma IV.16, daß V_{z^0} Häufungspunkte weder in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times (M_1' \setminus (T_1' \cup T_0'))$ noch in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times \partial U'$ besitzt. Genau wie im vorherigen Beweis erlaubt es diese Tatsache, wieder Lemma II.7 anzuwenden, um zu zeigen, daß $\overline{V_{z^0}}$ eine analytische Menge in $(U_1 \setminus \overline{D}) \times U'$ ist. Mit Lemma IV.7 folgt dann wieder sofort $z^0 \in \Sigma$.

□

Jetzt verbleibt nur noch die Situation, in der für einen Punkt $z^0 \in ((T_1 \cup T_0) \cap M_1) \setminus M^-$ gilt

$$(Q_{z^0} \cap (T_1 \cup T_0) \cap M_1) \setminus \left\{z^0\right\} \neq \emptyset. \tag{IV.202}$$

Wenn in diesem Fall $Q_{z^0} \cap (T_1 \cup T_0) \cap M_1$ diskret ist, brauchen nur U_1 und U_2 verkleinert zu werden, um in die Situation von Lemma IV.20 zu gelangen. Daher genügt es jetzt, das folgende zu zeigen:

Lemma IV.21 *Es sei $z^0 \in ((T_1 \cup T_0) \cap M_1) \setminus M^-$ und es enthalte $Q_{z^0} \cap (T_1 \cup T_0) \cap M_1$ eine eindimensionale reell-analytische Menge nahe z^0. Dann gilt $z^0 \in \Sigma$.*

Beweis: Wenn $U_1 = U_1(z^0)$ genügend klein gewählt ist, dann hat jede der endlich vielen in der Menge $(T_1 \cup T_0) \cap U_1$ enthaltenen glatten Kurven eine Komplexifizierung $\hat{T}$. In diesem Fall ist die folgende Feststellung wahr:

Feststellung: Wenn für einen Punkt $z \in (T_1 \cup T_0) \cap U_1$ die Menge ${}_zQ_z \cap (T_1 \cup T_0)$ der Keim einer glatten reellen Kurve ist, dann gibt es eine wie oben definierte Komponente $\hat{T}$, so daß ${}_z\hat{T} = {}_zQ_z$ gilt.

Da jedoch die Mengen A_z, da M insbesondere essentiell endlich ist, diskret sind, kann die Voraussetzung der obigen Feststellung nur für eine endliche Anzahl von Punkten $z \in U_1 \cap (T_1 \cup T_0)$ erfüllt sein. Damit ist insgesamt gezeigt, daß f sich holomorph fortsetzen läßt durch alle Punkte von $U_1 \cap M_1$, mit der möglichen Ausnahme von endlich vielen Punkten. Nach einer weiteren Verkleinerung von U_2 und U_1 kann daher angenommen werden, daß gilt

$$(Q_{z^0} \cap M_1) \setminus \left\{z^0\right\} \subset \Sigma. \tag{IV.203}$$

Aus Lemma IV.20 folgt damit auch hier $z^0 \in \Sigma$.

$\square$

Mit den Lemmata IV.13, IV.18, IV.20 und IV.21 ist nun insgesamt $M_1 \subset \Sigma$ gezeigt. Damit ist Theorem B bewiesen.

So kann die Mathematik definiert werden als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen, über das wir sprechen, und niemals wissen, ob das, was wir sagen, wahr ist.

Bertrand Russell

Anhang

Literatur

[1] M.S.Baoundi, S.Bell and L.P.Rothschild, *Mappings of three-dimensional CR-manifolds and their holomorphic extension*, Duke Math. J. **56**, 503-530, (1988)

[2] M.S.Baoundi, H.Jacobowitz and F.Treves, *On the analyticity of CR mappings*, Ann. Math. **122**, 365-400, (1985)

[3] M.S.Baoundi and L.P.Rothschild, *Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent. Math. **93**, 481-500, (1988)

[4] D.Barrett, *Irregularity of the Bergmann projection on a smooth bounded domain in* $\mathbb{C}^2$, Ann. Math. **119**, 431-436, (1984)

[5] D.Barrett, *Regularity of the Bergmann projection and local geometry of domains*, Duke Math. Jour. **53**, 333-343 (1986)

[6] S.Bell, *Analytic hypoellipticity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem and extendability of holomorphic mappings*, Acta Math. **147**, 109-116, (1981)

[7] S.Bell, *Biholomorphic mappings and the* $\overline{\partial}$*-problem*, Ann. Math. **114**, 103-133, (1981)

[8] S.Bell, *Proper holomorphic correspondences between circular domains*, Comment. Math. Helv. **57**, 532-538, (1982)

[9] S.Bell and D.Catlin, *Boundary regularity of proper holomorphic mappings*, Duke Math. Jour. **49**, 385-395, (1982)

[10] S.Bell and D.Catlin, *Regularity of CR mappings*, Math. Z. **199**, 357-368 (1988)

[11] F.Berteloot, *A remark on local continuous extension of proper holomorphic mappings*, Cont. Math. **137**, 79-83, (1992)

[12] E.Bierstone, P.Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Inst. Hautes Etudes Sci. Pub. **67**, 79-83 (1988)

[13] Bishop, *Conditions for the analycity of certain sets*, Mich. Math. J., 289-304 (1964)

[14] E.M.Chirka, *Complex analytic sets*, Kluwer, Dordrecht, 1990

[15] S.Y.Chern, J.Moser, *Real hypersurfaces in complexe manifolds.* Acta Math. **133**, 219-271 (1974)

[16] M.Conrad, *Lokalisationssätze und untere Abschätzungen für die Kobayashi-Metrik*, Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1997

[17] J.D'Angelo, *Real hypersurfaces, order of contact and applications*, Annals of Math. **115**, 615-637, (1982)

[18] K.Diederich, J.E.Fornæss, *Pseudoconvex domains: Bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, Invent. Math. **39**, 129-141 (1977)

[19] K.Diederich, J.E.Fornæss, *Pseudoconvex domains with real analytic boundary*, Ann. Math. **107**, 371-384, (1978)

[20] K.Diederich, J.E.Fornæss, *Biholomorphic Mappings Between Certain Real Analytic Domains in* $\mathbb{C}^2$, Math. Ann. **245**, 255-272, (1979)

[21] K.Diederich, J.E.Fornæss, *Proper Holomorphic Maps onto Pseudoconvex Domains with Real-analytic Boundary*, Ann. Math. **110**, 575-592, (1979)

[22] K.Diederich, J.E.Fornæss, *Applications holomorphes propres entre domaines a bord analytique réel*, C. R. Acad. Sci. Paris **307**, 321-324, (1988)

[23] K.Diederich, J.E.Fornæss, *Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. **282**, 681-700, (1988)

[24] K.Diederich, J.E.Fornæss and Z.Ye, *Biholomorphisms in dimension 2*, J. Geom. Analysis **4**, 539-552, (1994)

[25] K.Diederich, S.Pinchuk, *Proper Holomorphic Maps in Dimension 2 Extend*, Indiana Univ. Math. Jour. **44**, No. 4, 1089-1126, (1995)

[26] K.Diederich, S.Pinchuk, *Reflection Principle in Higher Dimensions*, Doc. Math., Extra Vol. ICM 1998, II, 703-712

[27] K.Diederich, S.Webster, *A reflection principle for degenerate real hypersurfaces*, Duke Math. J. **47**, 835-845 (1980)

[28] C.Feffermann, *The Bergmann kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26**, 1-65, (1974)

[29] W.Fischer and I.Lieb, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, Vieweg, (1988)

[30] F.Forstneric and J.P.Rosay, *Localization of the Kobayashi Metric and the Boundary Continuity of Proper Holomorphic Mappings*, Math. Ann. **279**, 239-252, (1987)

[31] F.Forstneric, *A survey on proper holomorphic mappings*, Proceedings of the Special Year in SCV's at the Mittag-Leffler Institute (Princeton, N.J.) (Fornæss, J.E., ed.), Math. Notes, vol. **38**, Princeton University Press

[32] B.L.Fridman, *One Example of the Boundary Behavior of Biholomorphic Transformations*, (1980)

[33] G.M.Henkin, *An analytic polyhedron is not biholomorphically equivalent to a strictly pseudoconvex domain*, Math. USSR. Dkl. **14**, 858-862, (1973)

[34] S.G.Krantz, *Function theory of several complex variables - 2nd ed.*, Wadsworth & Brooks/Cole, (1992)

[35] L.Lempert, *On the Boundary Behavior of Holomorphic Mappings*, Contributions of several complex variables, Hon. W. Stoll, Proc. Conf. Complex Analysis, Notre Dame/Indiana 1984, Aspects Math. E9, 193-215, (1986)

[36] Th.Hübschen, *Bumping-Theoreme und Globalisierung plurisubharmonischer Funktionen*, Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1997

[37] M.Klein-Reesink, *Lokale stetige Fortsetzbarkeit von eigentlichen holomorphen Abbildungen*, Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1997

[38] S.Pinchuk, *On the analytic continuation of holomorphic mappings*, Math. USSR Sbornik **140**, 375-392, (1975)

[39] J.M.Trepreau, *Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR definies sur une hypersurface reele de classes $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n$*, Invent. Math. **83**, 583-592, (1986)

[40] K.Verma, *Boundary regularity of correspondences in $\mathbb{C}^2$*, Math. Zeit. **231**, 253-299, (1999)

[41] S.Webster, *On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces*, Invent. Math. **43**, 53-68, (1977)