

EINE DARSTELLUNGSTHEORETISCHE  
INTERPRETATION  
DER RSK-KORRESPONDENZ



**Dissertation**

zur Erlangung des  
Doktorgrades der Naturwissenschaften  
im Fachbereich C  
der Bergischen Universität Wuppertal  
vorgelegt von

**Anja Hutschenreuter**

im Juli 2011

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20120131-081225-7

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20120131-081225-7>]

# Einleitung

## Motivation

Standard- bzw. Semistandard-Young-Tableaux sind kombinatorische Objekte, die zur Parametrisierung von Basen unzerlegbarer Darstellungen der Lie-Algebren  $gl_n$  und  $sl_n$  und ihrer quantisierten Einhüllenden verwendet werden. Des Weiteren kann man mit ihrer Hilfe die Zerlegung eines Tensorproduktes irreduzibler Darstellungen dieser Algebren kombinatorisch beschreiben.

Die Robinson-Schensted-Knuth Korrespondenz (kurz: RSK-Korrespondenz) ist eine Bijektion zwischen Paaren von Semistandard-Young-Tableaux und Matrizen mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen. Eine einfache Konsequenz der Korrespondenz ist eine erzeugende Funktion, mit deren Hilfe man die Anzahl der Paare von Semistandard-Young-Tableaux gleicher Form mit vorgegebenen Einträgen bestimmen kann:

$$\prod_{i,j \in \mathbb{N}} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}} (x_i y_j)^{a_{i,j}} = \sum_{\sum d_i = \sum e_j} N(\underline{d}, \underline{e}) \prod_i x_i^{d_i} \prod_j y_j^{e_j},$$

dabei ist  $N(\underline{d}, \underline{e})$  die Anzahl der Paare  $(Q, P)$  von Semistandard-Young-Tableaux gleicher Form, wobei genau  $d_i$  bzw.  $e_i$  Einträge von  $Q$  bzw.  $P$  gleich  $i$  sind. Da man zu jedem Paar von Semistandard-Young-Tableaux gleicher Form eine sogenannte Ebenenpartition – eine zweidimensionale Partition einer natürlichen Zahl – assoziieren kann, beschreibt  $N(\underline{d}, \underline{e})$  die Anzahl der Ebenenpartitionen mit vorgegeben Diagonalsummen.

Die RSK-Korrespondenz und ihre algorithmischen Beschreibungen scheinen relativ willkürlich gewählt zu sein. Ziel dieser Arbeit ist es, eine darstellungstheoretische Interpretation der RSK-Korrespondenz zu entwickeln. Wir interpretieren die RSK-Korrespondenz dabei als Umparametrisierung eines Kristalls eines Bimoduls von Quantengruppen.

## RSK-Korrespondenz und Quantengruppe

G. de B. Robinson und C. Schensted haben unabhängig von einander verschiedene Algorithmen entwickelt, die eine Bijektion zwischen Paaren von Standard-Young-Tableaux der gleichen Form und Permutationen beschreiben [24, 25]. C. Schensted und D. E. Knuth haben Schensteds Algorithmus verallgemeinert: Schensteds Algorithmus beschreibt eine Bijektion zwischen Wörtern und Paaren  $(Q, P)$ , wobei  $P$  ein Semistandard-Young-Tableau und  $Q$  ein Standard-Young-Tableau ist [25]. Der Algorithmus nach Knuth beschreibt eine Bijektion zwischen Paaren  $(Q, P)$  von Semistandard-Young-Tableaux der gleichen Form und Matrizen mit ganzzahligen nichtnegativen Einträgen [16]; er ist als Robinson-Schensted-Knuth Algorithmus bekannt.

Es gibt zwei gut bekannte Beschreibungen der RSK-Korrespondenz: den Bumping-Algorithmus und den Matrix-Ball-Algorithmus. Beide Algorithmen werden in Kapitel 1 beschrieben. In dieser Arbeit wird hauptsächlich der Matrix-Ball-Algorithmus, wie er von W. Fulton in [8] beschrieben wird, verwendet, da er für unsere Zwecke besser geeignet ist. Der Matrix-Ball-Algorithmus ordnet einer Matrix  $A$  ein Paar von Semistandard-Young-Tableaux  $(Q, P)$  zu, indem er in jedem Schritt eine neue Matrix  $A'$  und eine neue Zeile der SSYT  $Q$  und  $P$  bestimmt.

In [16] beschreibt D. E. Knuth die nach ihm benannten Knuth-Relationen auf Wörtern. Diese ermöglichen es das SSYT  $P$  zu bestimmen, welches zu einem Wort  $\omega$  durch Schensteds Algorithmus assoziiert ist.

Der Begriff der quantisierten universellen Einhüllenden einer halbeinfachen Lie-Algebra – auch Quantengruppe genannt – wurde von V. G. Drinfeld und M. Jimbo um 1985 herum eingeführt um Probleme der statistischen Mechanik zu lösen [7, 13]. Der in der Quantengruppe  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  vorkommende Parameter  $q$  parametrisiert die Temperatur in einem zweidimensionalen Modell der statistischen Mechanik, wobei die Spezialisierung  $q = 0$  der Temperatur am absoluten Nullpunkt entspricht. Motiviert von dem Gedanken, dass die Quantengruppe am absoluten Nullpunkt eine einfache Struktur besitzen sollte, entwickelte M. Kashiwara das Konzept der Kristallbasen<sup>1</sup> und der sogenannten Kashiwara-Operatoren, welche auf den Kristallbasen operieren. Die Kristallbasen sind eine kombinatorische Invariante der Darstellungen der Quantengruppe; viele Probleme der Darstellungstheorie der Quantengruppen lassen sich durch sie in kombinatorische Probleme übersetzen. Die Kristallbasen der endlichdimensionalen  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Darstellungen lassen sich z. B. durch Semistandard-Young-Tableaux parametrisieren. In [15] gaben die Autoren die Konstruktion dieser Basen und die Wirkung der Kashiwara-Operatoren auf ihnen an. Die gleiche Operation der Kashiwara-Operatoren auf Semistandard-Young-Tableaux wird in [3] beschrieben; anders als bei Kashiwara leiten hier die Autoren die Operation mit Hilfe sogenannter „strings“ her.

In einem Artikel von E. Date, M. Jimbo und T. Miwa von 1990 [6] wurde zuerst deutlich, dass es einen Zusammenhang zwischen Schensteds Algorithmus und Quantengruppen  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$  gibt. Die Autoren betrachten in diesem Artikel die irreduziblen Darstellungen als Unterdarstellungen von Tensorprodukten von Fundamentaldarstellungen und zeigen, dass die Basis dieser Darstellungen durch Wörter  $\omega$  mit konstantem  $Q(\omega)$  indiziert wird.

Ein weiterer Zusammenhang zwischen Schensteds Algorithmus und der Darstellungstheorie von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$  wird von B. Leclerc und J. Y. Thibon in ihrem Artikel von 1996 [17] beschrieben. Die beiden Autoren betrachten die durch Semistandard-Young-Tableaux und die durch Wörter indizierten Basen des quantisierten Koordinatenringes und zeigen, dass diese beiden Basen im Limes  $q = 0$  gleich sind und die dazugehörige Abbildung durch Schensteds Algorithmus beschrieben wird.

## Zusammenfassung der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es die RSK-Korrespondenz darstellungstheoretisch zu interpretieren. Dafür betrachten wir den quantisierten Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  rechteckiger Matrizen als Darstellung der Quantengruppe  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ . Der Kristall dieser Darstellung lässt sich auf zwei verschiedene Arten parametrisieren. Durch die Realisierung des positiven Anteils  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{sl}_{m+n})$  der Quantengruppe als Hall-Algebra können wir den quantisierten Koordinatenring

<sup>1</sup>Der Begriff der (globalen) Kristallbasen stimmt mit Lusztigs Begriff der kanonischen Basis überein.

in den positiven Anteil  $\mathcal{U}_q^+(sl_{m+n})$  einbetten. Dies ermöglicht es uns die Beschreibung von Kristallen mittels K ocherdarstellungen, wie sie in [20] von M. Reineke entwickelt werden, zu benutzen, um den Kristall von  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  durch Monome in den natürlichen Koordinaten, also durch Matrizen mit nichtnegativen Einträgen zu parametrisieren. Andererseits ist der quantisierte Koordinatenring als  $\mathcal{U}_q(sl_m) - \mathcal{U}_q(sl_n)$ -Bimodul isomorph zu der Darstellung  $\bigoplus_{\lambda} V_m(\lambda) \otimes V_n(\lambda)$ , wobei die Summe über alle Partitionen läuft, deren Länge nicht größer als  $m$  und  $n$  ist, und  $V_k(\lambda)$  für  $k = m, n$  die (endlichdimensionale) irreduzible Darstellung der Quantengruppen  $\mathcal{U}_q(sl_k)$  zum Gewicht  $\lambda$  bezeichnet. Die Kristallstruktur von  $\bigoplus_{\lambda} V_m(\lambda) \otimes V_n(\lambda)$  wird durch die schon erwähnte Arbeit [15] beschrieben; sie wird durch Paare von Semistandard-Young-Tableaux gleicher Form parametrisiert.

Wir zeigen, dass die RSK-Korrespondenz die Reparametrisierung des Kristalls des quantisierten Koordinatenringes  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  beschreibt. Dafür verwenden wir eine neue Formulierung des Matrix-Ball-Algorithmus', der im Gegensatz zu dem ursprünglichen Matrix-Ball-Algorithmus nur noch eine Matrix als Datenstruktur verwendet. Kombinatorische Überlegungen, bei denen die in dieser Arbeit definierte Klassenmatrix eine wesentliche Rolle spielt, zeigen dann, dass die RSK-Korrespondenz mit den Kashiwara-Operatoren kommutiert und folglich eine Umparametrisierung des Kristalls von  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  beschreibt.

Die neue Formulierung des Matrix-Ball-Algorithmus' legt des Weiteren die Definition einer neuen Operation auf Matrizen nahe. Diese Verknüpfung wird im letzten Kapitel untersucht.

Bei der Betrachtung der Kashiwara-Operatoren auf Semistandard-Young-Tableaux bzw. Matrizen mit nicht-negativen ganzzahligen Einträgen, konnten wir außerdem zeigen, dass die in [15] definierten Kashiwara-Operatoren genauso auf den Semistandard-Young-Tableaux wirken wie die in [20] berechneten Kashiwara-Operatoren auf den Matrizen wirken, die die Semistandard-Young-Tableaux kodieren.

## Vergleich zu anderen Arbeiten

In der kombinatorischen Arbeit [4] betrachten V. I. Danilov und G. A. Koshevoy eine Bijektion zwischen Matrizen – sogenannten Arrays – und Paaren von SSYT gleicher Form, die der RSK-Korrespondenz sehr ähnlich ist: Der Array  $a$  wird auf das Paar  $(l, d)$  von Arrays abgebildet, die jeweils die SSYT  $(\bar{Q}(a), P(a))$  kodieren; dabei ist  $\bar{Q}(a)$  eine – mit der sogenannten Schützenberger Involution vergleichbare – Involution des SSYT  $Q(a)$ . Diese Bijektion wird mit Hilfe von Operatoren  $D$  und  $L$  auf den Arrays beschrieben; diese Operatoren ähneln den in dieser Arbeit auf Matrizen definierten Kashiwara-Operatoren. Es lässt sich schlussfolgern, dass die Bijektion  $a \mapsto (\bar{Q}(a), P(a))$  die Operatoren  $D$  und  $L$  respektiert. Darstellungstheoretisch betrachtet, wird also nur gezeigt, dass die RSK-Korrespondenz, die ein  $(m \times n)$ -Array  $a$  auf ein Paar von  $(m \times n)$ -Arrays  $(l, d)$  abbildet, ein Isomorphismus von  $\mathcal{U}_q(sl_n)$ -Moduln und nicht von  $\mathcal{U}_q(sl_m) - \mathcal{U}_q(sl_n)$ -Bimoduln ist.

In [18] betrachtet M. A. A. van Leeuwen eine Abbildung zwischen Matrizen, die der in [4] betrachteten Bijektion zwischen Arrays sehr ähnlich ist, und beweist, dass sie eine Bijektion ist.

K. Erdmann, J. A. Green, M. Schocker und A. Lascoux, B. Lecler, J.-Y. Thibon haben unabhängig von einander untersucht, wie sich die Knuth-Relationen und die Kashiwara-Operatoren der quantisierten Einhüllenden von  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  auf Wörtern zu einander verhalten [10, App.],

[19, §5]<sup>2</sup>. Sie zeigen, dass der Algorithmus nach Schensted, der ein Wort auf ein Paar  $(Q, P)$  von einem Semistandard-Young-Tableau  $P$  und einem Standard-Young-Tableau  $Q$  abbildet, die Kashiwara-Operatoren respektiert. Darstellungstheoretische betrachtet werden in [10, App.] Kristalle von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m)$ - bzw.  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Darstellungen untersucht; wohingegen in dieser Arbeit der Kristall einer  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Darstellung umparametrisiert wird.

## Aufbau der Arbeit

Im ersten Kapitel werden die notwendigen kombinatorischen Begriffe, wie z. B. Partition und Semistandard-Young-Tableaux, definiert. Bei der Vorstellung der gebräuchlichen algorithmischen Beschreibungen der RSK-Korrespondenz – der Bumping-Algorithmus und der Matrix-Ball-Algorithmus – orientieren wir uns an dem Buch [8].

In dem darauf folgenden Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die Darstellungstheorie der quantisierten Einhüllenden der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_n$  und in die von Kashiwara entwickelten Kristallbasen, wobei wir uns auf [12] und [15] berufen.

Nachdem wir zu Beginn des dritten Kapitels die notwendigen Begriffe über Köcheralgebren wie in [1] einführen werden, definieren wir die (verdrehten) Hall-Algebren von C. M. Ringel. Nach einigen grundlegenden Rechnungen in der Hall-Algebra über einem Köcher vom Typ  $A$  folgt ein Beweis für die bekannte Aussage, dass diese Hall-Algebra isomorph zum positiven Anteil  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{sl}_n)$  der Quantengruppe ist. Die dargestellten Argumente wurden aus [23] übernommen. In dem Abschnitt 3.7 verwenden wir die von M. Reineke in [20] berechneten Kashiwara-Operatoren auf Hall-Algebren (auf Dynkin-Köchern) und erhalten so eine Operation auf Matrizen. Da wir in dieser Arbeit das Ergebnis von M. Reineke nur für einen Spezialfall, den Dynkin-Köcher vom Typ  $A$ , benötigen, geben wir eine entsprechend vereinfachte Formulierung des Satzes an.

Zu Beginn des vierten Kapitels wird der quantisierte Koordinatenring definiert, der für  $q = 1$  der bekannte Koordinatenring des Raumes der Matrizen ist. Daraufhin wird gezeigt, dass eine Unteralgebra der Hall-Algebra, die eine durch Matrizen indizierte Basis besitzt, isomorph zu dem quantisierten Koordinatenring ist. In den Abschnitten 4.3 und 4.4 wird die Operation des positiven Anteils  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{sl}_n)$  der Quantengruppe mit Hilfe der kanonischen Operation der Universellen Einhüllenden der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_n$  kanonisch zu einer Operation der ganzen Quantengruppe  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  fortgesetzt. Die Ergebnisse der Abschnitte 4.1, 4.2 und 4.3 sind ohne Zweifel schon bekannt, wir geben hier aber der Vollständigkeit halber die Beweise an.

Das fünfte Kapitel ist das Kernstück dieser Arbeit; hier zeigen wir, dass die RSK-Korrespondenz die Kashiwara-Operatoren respektiert und somit einen Isomorphismus von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m)$ - $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Bimoduln beschreibt.

Die im vierten Kapitel bestimmte Operation der Quantengruppe auf dem quantisierten Koordinatenring definiert Kashiwara-Operatoren auf den Matrizen. An dieser Stelle ist noch – unter Benutzung geeigneter Symmetrien der Quantengruppe – eine Umindizierung notwendig.

Um den Zusammenhang zwischen der RSK-Korrespondenz und den Kashiwara-Operatoren zu untersuchen, betrachten wir die einzelnen Schritte des Matrix-Ball-Algorithmus' und ihr Verhältnis zu den Kashiwara-Operatoren. Ein wichtiges kombinatorisches Hilfsmittel ist hierbei der in dieser Arbeit eingeführte Begriff der Klassenmatrix. Einige Eigenschaften der Klassenmatrix

<sup>2</sup>Das Kapitel [19, §5] über den plaktischen Monoiden wurde von A. Lascoux, B. Lecler und J.-Y. Thibon geschrieben, es wurde in dem Buch [19] von M. Lothaire veröffentlicht.

werden in Abschnitt 5.2 untersucht, um im darauf folgenden Abschnitt die Klassenmatrizen der Matrix  $\tilde{E}A$  abhängig von der ursprünglichen Matrix  $A$  darzustellen. Unter Verwendung dieser Ergebnisse wird in Abschnitt 5.4 gezeigt, dass der erste Schritt des Matrix-Ball-Algorithmus' die Kashiwara-Operatoren unter bestimmten Bedingungen respektiert.

Um zu beweisen, dass die Kashiwara-Operatoren mit der RSK-Korrespondenz vertauschen, wird der Matrix-Ball-Algorithmus in 5.5 neu formuliert. Dabei wird die Matrix in eine größere Matrix so eingeschrieben, dass die assoziierten Semistandard-Young-Tableaux in der neuen Matrix nach entsprechend vielen Schritten des Matrix-Ball-Algorithmus' kodiert sind. Des Weiteren ist die Einschreibung in die größere Matrix so gewählt, dass die Kashiwara-Operatoren mit den entscheidenden Schritten des Matrix-Ball-Algorithmus' vertauschen. Folglich beweist dies, dass die RSK-Korrespondenz die Kashiwara-Operatoren respektiert.

Die neue Formulierung des Matrix-Ball-Algorithmus' hat des Weiteren den Vorteil, dass man nur noch eine Datenstruktur – die Matrix – benötigt. In der ursprünglichen Formulierung des Matrix-Ball-Algorithmus' muss man eine Matrix und zwei Semistandard-Young-Tableaux speichern, während man bei dem Bumping-Algorithmus ebenfalls drei Datenstrukturen hat – das Biwort und zwei Semistandard-Young-Tableaux.

Die in der neuen Formulierung des Matrix-Ball-Algorithmus' verwendete Einbettung verallgemeinern wir im letzten Kapitel und definieren so eine neue Verknüpfung auf Matrizen, welche assoziativ ist und kein neutrales Element besitzt. Für den Beweis der Aussage, dass die RSK-Korrespondenz die Kashiwara-Operatoren respektiert, ist es sinnvoll diese Operation zu definieren. Es ist zu erwarten, dass sie noch andere Anwendungen besitzt; diese bleiben aber noch zu untersuchen.

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Markus Reineke für seine Unterstützung und hervorragende Betreuung bei der Erstellung dieser Arbeit. Ich danke auch meinen Kollegen und Freunden an der Universität Wuppertal für das angenehme Arbeitsklima und die anregenden Diskussionen. Des Weiteren möchte ich mich bei meiner Familie bedanken ohne deren aufopfernde Hilfe meine Dissertation nicht möglich gewesen wäre.

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
<b>1 Robinson-Schensted-Knuth Korrespondenz</b>	<b>1</b>
1.1 Ebenenpartitionen und Semistandard-Young-Tableaux . . . . .	1
1.2 Bumping-Algorithmus . . . . .	4
1.3 Matrix-Ball-Algorithmus . . . . .	7
<b>2 Quantengruppen und kristalline Basen</b>	<b>10</b>
2.1 Notation . . . . .	10
2.2 Die Quantengruppe $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ . . . . .	11
2.3 Darstellungen der Quantengruppe $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ . . . . .	12
2.4 Kristallbasen . . . . .	14
2.5 Die Kristallbasen der $V(\lambda)$ . . . . .	18
<b>3 Hall-Algebren</b>	<b>24</b>
3.1 Darstellungsendliche Köcheralgebren . . . . .	24
3.2 Definition der Hall-Algebra . . . . .	29
3.3 Einige Rechnungen in $\mathcal{H}(Q)$ . . . . .	30
3.4 Einige Rechnungen in $\mathcal{H}(Q_{m,n})$ . . . . .	31
3.5 Zusammenhang zur Quantengruppe . . . . .	33
3.6 Der Quotient $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$ . . . . .	35
3.7 Kashiwara-Operatoren auf $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$ . . . . .	38
<b>4 Quantenmatrizen</b>	<b>42</b>
4.1 Der quantisierte Koordinatenring . . . . .	42
4.2 Zusammenhang zu dem Quotient $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$ . . . . .	43
4.3 Operation der $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_m) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$ auf dem Koordinatenring . . . . .	44
4.4 Operation der $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ auf dem quantisierten Koordinatenring . . . . .	46
<b>5 RSK-Korrespondenz und Kashiwara-Operatoren</b>	<b>54</b>
5.1 Operation der $\tilde{E}_i$ und $\tilde{F}_i$ auf Matrizen . . . . .	54
5.2 Eigenschaften der Klassenmatrix . . . . .	58
5.3 Klassenmatrizen von $A$ und $\tilde{E}_{j_0} A$ . . . . .	62
5.4 Bestimmung der Matrix $(\tilde{E}_{j_0} A)'$ . . . . .	65
5.5 Beweis der Hauptaussage . . . . .	72
5.6 Gewichtsraum der Matrix $A$ . . . . .	79

---

5.7 Vergleich mit anderen Arbeiten . . . . .	80
<b>6 Eine neue Verknüpfung zwischen ganzzahligen Matrizen</b>	<b>86</b>
6.1 Definition der Verknüpfung $\star$ . . . . .	86
6.2 Die zu $A \star B$ assoziierten SSYT . . . . .	87
6.3 Assoziativität von $\star$ . . . . .	91
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>96</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

# Kapitel 1

## Robinson-Schensted-Knuth Korrespondenz

G. de B. Robinson beschrieb 1938 in [24] einen kombinatorischen Algorithmus, der eine Bijektion zwischen Paaren von Standard-Young-Tableaux  $(\tau, \sigma)$  der gleichen Form und Permutationen  $\omega$  beschreibt. Unabhängig davon hat C. Schensted 1961 einen Algorithmus entwickelt, der die gleiche Bijektion beschreibt. Er hat ihn des Weiteren zu einer Bijektion zwischen Wörtern  $\omega$  und Paaren  $(\tau, \sigma)$  verallgemeinert, wobei  $\sigma$  ein Semistandard-Young-Tableau und  $\tau$  ein Standard-Young-Tableau der gleichen Form ist [25]. Der Algorithmus von C. Schensted beruht auf einer umkehrbaren Einfügung einer Zahl in ein Semistandard-Young-Tableau und heißt Bumping-Algorithmus. D. E. Knuth verallgemeinerte Schensteds Algorithmus so, dass er eine Bijektion zwischen Biwörtern  $\omega$  – zweizeiligen Arrays lexikographisch geordneter natürlicher Zahlen – bzw. Matrizen mit ganzzahligen nichtnegativen Einträgen und Paaren von Semistandard-Young-Tableaux gleicher Form beschreibt [16]. Im gleichen Artikel beschrieb er einen alternativen Algorithmus, der die ersten Zeilen der beiden assoziierten Semistandard-Young-Tableaux bestimmt. W. Fulton beschreibt diesen in seinem Buch [8] ebenfalls und nennt ihn den Matrix-Ball-Algorithmus. Bei diesem Algorithmus werden die Semistandard-Young-Tableaux iterativ bestimmt: Nach jedem Schritt erhält man eine neue Zeile der Semistandard-Young-Tableaux und eine neue Matrix, mit der die nächste Zeile berechnet wird. In dieser Arbeit verwenden wir den Matrix-Ball-Algorithmus, da er für unsere Zwecke besser geeignet ist.

Wenn wir in dieser Arbeit von der Robinson-Schensted-Knuth Korrespondenz sprechen, so meinen wir die Bijektion, die durch den Algorithmus nach Knuth beschrieben wird.

### 1.1 Ebenenpartitionen und Semistandard-Young-Tableaux

In dieser Arbeit bezeichnen wir die natürlichen Zahlen mit  $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{>0}$ ; die Menge der natürlichen Zahlen mit Null bezeichnen wir mit  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Eine *Partition* von  $N$  ist ein Tupel  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  nichtnegativer ganzer Zahlen, mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$  und  $|\lambda| := \sum_{i=1}^l \lambda_i = N$ . Wir schreiben kurz  $\lambda \vdash N$ . Die Länge einer Partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  sei  $l(\lambda) := l$ . Dabei ist zu beachten, dass die Länge nicht die *echte* Länge sein muss: Die letzten Einträge in  $\lambda$  dürfen durchaus Null sein. Das zu der Partition  $\lambda$

assoziierte *Young-Diagramm* ist die Teilmenge  $\Lambda = \{(i, j) : 1 \leq i \leq l(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}$  von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ; es wird üblicherweise als Kästchendiagramm dargestellt.

Wir betrachten zwei Partitionen als gleich, falls sie das gleiche Young-Diagramm besitzen. Dies gilt genau dann, wenn die eine Partition durch Hinzufügen oder Streichen von Nullen zu der anderen wird.

Für jede Partition  $\lambda$  ist das Tupel  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k)$  mit  $\lambda'_i := \#\{j : \lambda_j \geq i\}$  eine Partition. Wir nennen sie die *Transponierte* von  $\lambda$ . Das zu  $\lambda'$  assoziierte Young-Diagramm  $\Lambda'$  ist das an der Hauptdiagonale gespiegelte Young-Diagramm  $\Lambda$ .

Ein *Semistandard-Young-Tableau* (SSYT) einer Partition  $\lambda$  ist eine Abbildung  $\tau : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$ , die die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \tau(i, j) &\geq \tau(i, j+1) \text{ für } (i, j), (i, j+1) \in \Lambda \text{ und} \\ \tau(i, j) &> \tau(i+1, j) \text{ für } (i, j), (i+1, j) \in \Lambda \end{aligned}$$

erfüllt. Wir sagen, dass das SSYT  $\tau$  die Form  $\lambda$  hat und schreiben  $\text{sh}(\tau) = \lambda$ .

**Bemerkung 1.1.1.** Im Gegensatz zu der hier verwendeten Definition von SSYT werden SSYT in der Literatur oft von links nach rechts aufsteigend und von oben nach unten echt aufsteigend definiert. Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir die so definierten SSYT als *inverse* SSYT. Genauer ist ein *inverses SSYT* eine Abbildung  $P : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $P_{i,j} \leq P_{i,j+1}$  und  $P_{i,j} < P_{i+1,j}$  für  $(i, j), (i, j+1)$  und  $(i+1, j) \in \Lambda$ . (Die inversen SSYT werden wir bevorzugt mit  $P$  bzw.  $Q$  bezeichnen.) Für die Interpretation eines Paares von SSYT gleicher Form als Ebenenpartition ist unsere Definition aber geeigneter.

In dieser Arbeit betrachten wir SSYT, deren Einträge nach oben begrenzt sind. Es bietet sich daher an, diese SSYT in Form einer Matrix zu kodieren. (Diese Kodierung hat *nichts* mit der später eingeführten RSK-Korrespondenz zu tun, die eine Bijektion zwischen beliebigen Matrizen mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen und Paaren von SSYT gleicher Form beschreibt.) Es sei  $\tau$  ein SSYT der Form  $\lambda$ , dessen Einträge nicht größer als  $n$  sind; die zu  $\tau$  gehörende Matrix  $\tilde{\tau} \in \mathbb{N}_0^{l(\lambda) \times n}$  kodiert, wie oft der Eintrag  $1 \leq j \leq n$  in jeder Zeile  $i$  von  $\tau$  vorkommt:

$$\tilde{\tau}_{i,j} = \#\{k : \tau_{i,k} = j\}, 1 \leq i \leq l(\lambda).$$

Natürlich beschreibt nicht jede Matrix ein SSYT.

**Beispiel 1.1.2.** Das SSYT

$$\tau = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}$$

der Form  $(4, 2, 1)$  wird durch die Matrix

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kodiert.

Eine *Ebenenpartition*  $\pi = (\pi_{i,j})$  einer natürlichen Zahl  $N$  ist eine Matrix  $\pi$  aus  $\mathbb{N}_0^{m \times n}$ , für die die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \pi_{i,j} &\geq \pi_{i,j+1} \text{ für alle } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n, \\ \pi_{i,j} &\geq \pi_{i+1,j} \text{ für alle } 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

und  $|\pi| := \sum_{i,j=1}^{m,n} \pi_{i,j} = N$  gelten.

Es seien  $\tau$  und  $\sigma$  zwei SSYT der gleichen Form  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  mit Einträgen in  $\{1, \dots, m\}$  bzw.  $\{1, \dots, n\}$ , wobei  $l = \min\{m, n\}$  gelte. Dem Paar  $(\tau, \sigma)$  lässt sich eine Ebenenpartition  $\pi = (\pi_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  zuordnen, indem man die Transponierten der einzelnen Zeilen berechnet und ausgehend von der Hauptdiagonalen spalten- bzw. zeilenweise in die Matrix  $\pi$  einträgt:

$$\begin{aligned} \pi_{i,j} &= \#\{k : \tau_{j,k} \geq i - j + 1\} \text{ für alle } j \leq i \leq m \text{ und} \\ \pi_{i,j} &= \#\{k : \sigma_{i,k} \geq j - i + 1\} \text{ für alle } i \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Da für die Hauptdiagonale  $(\pi_{i,i})_{i=1}^l = \lambda$  gilt, ist  $\pi$  wohldefiniert. Wir sagen, dass  $\pi$  die zu dem Paar  $(\tau, \sigma)$  assoziierte Ebenenpartition ist.

**Beispiel 1.1.3.**

$$(\tau, \sigma) = \left( \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} \right), \pi = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Paar von SSYT  $(\tau, \sigma)$  der Form  $\lambda = (4, 2, 1)$  wird zu der Ebenenpartition  $\pi$  assoziiert, deren Hauptdiagonale die Partition  $\lambda$  ist.

Wie oben schon erwähnt, beschreibt die RSK-Korrespondenz eine Bijektion zwischen Matrizen mit ganzzahligen nichtnegativen Einträgen und Paaren von SSYT der gleichen Form. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} \text{Matrizen mit nicht-} \\ \text{negativen ganzzahligen} \\ \text{Einträgen} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Paare von SSYT } (\tau, \sigma) \text{ der} \\ \text{gleichen Form} \end{array} \right\} \\ &\cup \qquad \qquad \qquad \cup \\ &\mathbb{N}_0^{m \times n} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Paare von SSYT } (\tau, \sigma) \text{ der} \\ \text{gleichen Form } \lambda \text{ mit Längen} \\ \text{ge } \min(m, n) \text{ und } \tau_{i,j} \leq m, \\ \sigma_{i,j} \leq n \text{ für alle } (i, j) \in \Lambda \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Die RSK-Korrespondenz wird von mehreren Algorithmen beschrieben. Zwei bekannte Beschreibungen sind der Bumping-Algorithmus und der Matrix-Ball-Algorithmus; diese werden wir in den folgenden Abschnitten erklären. Vorher wollen wir aber noch eine kurze Bemerkung

zu den Algorithmen von G. de B. Robinson und C. Schensted, welche Vorgänger der RSK-Korrespondenz waren, und zu Knuths Relationen auf Wörtern machen.

**Bemerkung 1.1.4.** Ein *Standard-Young-Tableau* (SYT) der Form  $\lambda$  ist ein SSYT  $\tau$ , das jeden Wert in  $\{1, 2, \dots, |\lambda|\}$  genau einmal annimmt. Analog zu dem Begriff des inversen SSYT verwenden wir den Begriff des inversen SYT.

G. de B. Robinson und C. Schensted verwendeten die Notation der inversen SYT bzw. der inversen SSYT. Um nicht von unserer Notation abzuweichen und unnötig zu verwirren, beschreiben wir im Folgenden die entsprechend umformulierten Algorithmen von Robinson bzw. Schensted.

Robinsons Algorithmus beschreibt eine Bijektion zwischen Permutationen  $\omega \in S_N$  und Paaren von SYT  $(\tau, \sigma)$  der gleichen Form mit  $N$  Kästchen. Wir werden Robinsons Algorithmus hier nicht angeben, er kann in [24] nachgelesen werden. Es ist nicht offensichtlich, dass Robinsons Algorithmus ein spezieller Fall der RSK-Korrespondenz ist.

Der Algorithmus nach C. Schensted ordnet einem Wort  $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_N$  im Alphabet  $\mathbb{N}$  ein Paar  $(\tau, \sigma)$  zu, wobei  $\tau$  ein SYT und  $\sigma$  ein SSYT der gleichen Form  $\lambda$  mit  $|\lambda| = N$  sind. Schensteds Algorithmus ähnelt sehr stark den im nächsten Abschnitt dargestellten Bumping-Algorithmus [25]. Die durch Schensteds Algorithmus beschriebene Abbildung ist ebenfalls ein spezieller Fall der RSK-Korrespondenz und lässt sich folglich durch diese beschreiben. Wir betrachten die Matrix  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{N,k}$ , wobei  $k = \max\{\omega_i : 1 \leq i \leq N\}$  und

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = \omega_{N+1-i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

seien. Das zu dem Wort  $\omega$  mit Schensteds Algorithmus assoziierte Paar  $(\tau, \sigma)(\omega)$  ist genau das zu der Matrix  $A$  unter der RSK-Korrespondenz assoziierte Paar von SSYT  $(\tau, \sigma)(A)$  [8, §4.1].

D. E. Knuth definierte Relationen auf Wörtern, sogenannte Knuth-Relationen, welche einen Teil der RSK-Korrespondenz beschreiben. Genauer kann man mit ihnen das durch Schensteds Algorithmus zu einem Wort  $\omega$  assoziierte SSYT  $\sigma$  bestimmen. Zwei Wörter  $\omega, \omega'$  sind *Knuth-äquivalent*, wenn es eine endliche Folge von Wörtern  $\omega = \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s = \omega'$  gibt, so dass jedes aufeinander folgende Paar von Wörtern  $\omega^t, \omega^{t+1}$  für  $1 \leq t < s$  durch eine elementare Bewegung vom Typ  $K'$  oder  $K''$  verbunden ist. Die elementaren Bewegungen werden wie folgt definiert.

- Eine elementare Bewegung vom Typ  $K'$  macht aus dem Wort  $\omega = ubacv$  das Wort  $\omega' = ubcav$ , wobei  $u, v$  Wörter und  $a, b, c$  natürliche Zahlen mit  $a \leq b < c$  sind.
- Eine elementare Bewegung vom Typ  $K''$  macht aus dem Wort  $\omega = ucabv$  das Wort  $\omega' = uacbv$ , wobei  $u, v$  Wörter und  $a, b, c$  natürliche Zahlen mit  $a < b \leq c$  sind.

Zwei Wörter  $\omega, \omega'$  sind genau dann Knuth-äquivalent, wenn die zu ihnen durch die RSK-Korrespondenz assoziierten SSYT  $\sigma(\omega)$  und  $\sigma(\omega')$  gleich sind [16].

## 1.2 Bumping-Algorithmus

Wir orientieren uns in diesem und den folgenden Abschnitt an dem Buch von W. Fulton [8]. In [8] betrachtet der Autor inverse SSYT und formuliert die RSK-Korrespondenz und ihre Algorithmen entsprechend anders als wir es hier tun. Die in dem Buch [8] dargestellten

Argumentationen und Ergebnisse lassen sich aber sehr leicht für SSYT umformulieren. So wird durch eine Umkehrung der Ordnung  $\leq$  auf den natürlichen Zahlen ein inverses SSYT zu einem SSYT; entsprechend übertragen sich die Argumentationen in [8] auf unsere Formulierung der RSK-Korrespondenz.

Zu jeder Matrix  $A = (a_{i,j})$  mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen können wir ein Wort

$$\omega = \omega(A) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

im Alphabet  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  assoziieren, dessen Paare  $(i_l, j_l)$  für  $l = 1, \dots, k$  lexikographisch absteigend geordnet sind. Man nennt  $\omega$  auch ein *Biwort*. Wir erinnern kurz an die Definition der lexikographischen Ordnung:

$$(i, j) \geq (i', j') \iff (i > i') \text{ oder } (i = i' \text{ und } j \geq j').$$

In dem zu der Matrix  $A$  assoziierten Biwort  $\omega(A)$  tritt das Paar  $(i, j)$  genau  $a_{i,j}$ -mal auf. Das Biwort  $\omega(A)$  ist also einfach eine lexikographisch absteigend geordnete Liste der Einträge der Matrix  $A$ . Dies ist offensichtlich eine Bijektion zwischen der Menge der Matrizen mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen und der Menge der lexikographisch absteigend geordneten Wörter im Alphabet  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Falls eindeutig ist, zu welcher Matrix  $A$  das Biwort  $\omega(A)$  assoziiert ist, verwenden wir die kürzere Schreibweise  $\omega$ .

**Beispiel 1.2.1.** Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist zu dem Biwort

$$\omega = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

assoziiert.

Der *Bumping-Algorithmus* beschreibt eine Abbildung zwischen einem Biwort

$$\omega = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix},$$

dessen Paare  $(i_l, j_l)$  lexikographisch absteigend geordnet sind, und einem Paar von SSYT  $(\tau, \sigma)$  der gleichen Form.

Wir beginnen mit zwei leeren SSYT  $(\tau_0, \sigma_0) = (, )$ . Im ersten Schritt schreiben wir  $i_1$  und  $j_1$  in die SSYT  $(\tau_0, \sigma_0)$  ein und erhalten  $(\tau_1, \sigma_1) = (i_1, j_1)$ . Im  $l$ -ten Schritt fügen wir dann die Zahlen  $i_l$  und  $j_l$  so in die SSYT  $(\tau_{l-1}, \sigma_{l-1})$  ein, dass wir zwei neue SSYT  $(\tau_l, \sigma_l)$  der gleichen Form erhalten. Dabei gehen wir wie folgt vor: Falls  $j_l$  nicht größer als alle Einträge in der ersten Zeile von  $\sigma_{l-1}$  ist, schreiben wir  $j_l$  in ein neues Kästchen an das Ende der Zeile. Sollte es in der ersten Zeile Einträge geben, die echt kleiner als  $j_l$  sind, so wählen wir den am weitesten links stehenden Eintrag  $x$ , der echt kleiner als  $j_l$  ist, und ersetzen ihn durch  $j_l$ . (Die Zahl  $j_l$  „stößt“  $x$  aus seinem Kästchen, daher kommt der Name Bumping-Algorithmus.) Wir

wiederholen diesen Prozess nun mit dem hinausgeschobenen Eintrag  $x$  in der zweiten Zeile: Der Eintrag  $x$  wird entweder an das Ende der zweiten Zeile geschrieben oder schiebt einen Eintrag in die dritte Zeile. Dies wiederholen wir solange, bis wir den hinausgeschobenen Eintrag entweder an das Ende einer Zeile schreiben können oder am Ende des SSYT angekommen sind. In diesem Fall bildet der Eintrag eine neue Zeile. Wir erhalten so ein neues SSYT  $\sigma_l$ , welches genau ein Kästchen mehr als  $\sigma_{l-1}$  hat. Das SSYT  $\tau_l$  erhalten wir, indem wir das SSYT  $\tau_{l-1}$  um genau dieses Kästchen ergänzen und dort  $i_l$  eintragen. Das Paar  $(\tau_k, \sigma_k)$  ist dann das zu dem Biwort  $\omega$  assoziierte Paar von SSYT  $(\tau, \sigma) = (\tau(\omega), \sigma(\omega))$ .

**Beispiel 1.2.2.** In der Abbildung 1.1 illustrieren wir den Bumping-Algorithmus an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aus dem Beispiel 1.2.1.

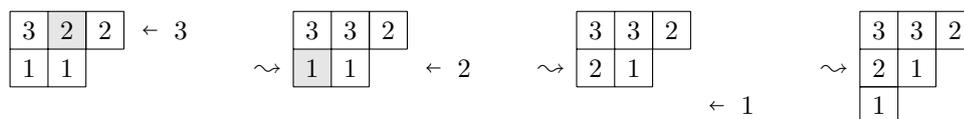
$l$	$\tau_l$	$\sigma_l$	$(i_l, j_l)$														
1	<table border="1"><tr><td>4</td></tr></table>	4	<table border="1"><tr><td>1</td></tr></table>	1	(4, 1)												
4																	
1																	
2	<table border="1"><tr><td>4</td><td>3</td></tr></table>	4	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	(3, 1)										
4	3																
1	1																
3	<table border="1"><tr><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	4	3	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	3	1	1	(2, 3)								
4	3																
2																	
3	1																
1																	
4	<table border="1"><tr><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	4	3	2	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	3	2	1	1	(2, 2)						
4	3																
2	2																
3	2																
1	1																
5	<table border="1"><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	4	3	2	2	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	3	2	2	1	1	(2, 2)				
4	3	2															
2	2																
3	2	2															
1	1																
6	<table border="1"><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	4	3	2	2	2	1	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	3	3	2	2	1	1	(1, 3)		
4	3	2															
2	2																
1																	
3	3	2															
2	1																
1																	
7	<table border="1"><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	4	3	2	1	2	2	1	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	3	3	2	1	2	1	1	(1, 1)
4	3	2	1														
2	2																
1																	
3	3	2	1														
2	1																
1																	

Abbildung 1.1: In dieser Abbildung illustrieren wir, wie der Bumping-Algorithmus das Zahlenpaar  $(i_l, j_l)$  in das Paar von SSYT  $(\tau_{l-1}, \sigma_{l-1})$  einfügt. Dabei markieren die grau unterlegten Kästchen in dem SSYT  $\sigma_l$  den Weg der herausgeschobenen Einträge; während in dem SSYT  $\tau_l$  nur die neu hinzugefügten Kästchen grau gefärbt sind.

$$\omega = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Den sechsten Schritt rechnen wir ausführlich vor, da dieser das Prinzip des Bumping-Algorithmus' am besten illustriert. In diesem Schritt wollen wir die 3 in das SSYT  $\sigma_5$  einfügen. Zuerst schieben wir die 3 in die erste Zeile, wo sie die am weitesten links stehende 2 herausschiebt. Diese 2 schiebt nun die am weitesten links stehende 1 aus der zweiten Zeile. Da die dritte Zeile noch leer ist, wird diese 1 einfach in die dritte Zeile geschrieben. Das folgende

Bild soll diesen Prozess verdeutlichen, dabei haben wir die Zahlen, die aus ihren Kästchen geschoben werden, grau unterlegt.



Man sieht leicht, dass  $(\tau_l, \sigma_l)$  immer ein Paar von SSYT mit gleicher Form ist.

**Satz 1.2.3.** Der Bumping-Algorithmus beschreibt eine Bijektion zwischen Paaren von SSYT gleicher Form und lexikographisch absteigend geordneten Wörtern in dem Alphabet  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**Beweis** Vgl. [8, §4.1]. □

Folglich beschreibt der Bumping-Algorithmus eine Bijektion zwischen Matrizen mit nicht-negativen ganzzahligen Einträgen und Paaren von SSYT gleicher Form. Da die Spalten bzw. die Zeilen die Einträge des SSYT  $\tau$  bzw.  $\sigma$  sind, folgt die Bijektion aus der Gleichung (1.1) sofort aus der allgemeinen Bijektion.

**Bemerkung 1.2.4.** Ein Element, das aus seiner Zeile gestoßen wird, wird nur direkt unter oder links von seiner alten Position in die nächste Zeile eingetragen, da der Eintrag direkt unter ihm echt kleiner ist. Der Pfad, den ein Element während des Bumping-Algorithmus' zurücklegt, geht also nur nach unten und nach links [8, §1.1].

### 1.3 Matrix-Ball-Algorithmus

Für den Matrix-Ball-Algorithmus stellen wir uns die Einträge der Matrix  $A = (a_{i,j})$  als Bälle vor: In jedem Kästchen der Matrix liegen genau  $a_{i,j}$  Bälle. Falls in einem Kästchen mehr als ein Ball liegt, sollen die Bälle diagonal von rechts unten nach links oben angeordnet werden.

Um die relative Lage der Bälle zueinander besser beschreiben zu können, benutzen wir die Himmelsrichtungen. Ein Kästchen  $(i, j)$  liege z. B. östlich von einem Kästchen  $(i', j')$ , falls  $j' \leq j$  gilt. Entsprechend verwenden wir die anderen Himmelsrichtungen und kombinieren diese. So sagen wir, dass ein Kästchen  $(i, j)$  südöstlich von dem Kästchen  $(i', j')$  liegt, falls  $i' \leq i$  und  $j' \leq j$  gelten. Des Weiteren bezeichnen wir die Koordinaten des Kästchens, in dem der Ball  $B$  liegt, mit  $(i(B), j(B))$ . Wir sagen, dass ein Ball  $B$  östlich von einem Ball  $B'$  liegt, falls er entweder in dem gleichen Kästchen wie  $B'$  und in der Anordnung der Bälle (süd-)östlich von  $B'$  liegt, oder sich in einem anderen östlich von  $(i(B'), j(B'))$  liegenden Kästchen befindet. Entsprechend verwenden wir die anderen Himmelsrichtungen.

Zur Formulierung des Algorithmus' benötigen wir den Begriff der *Klasse* eines Balles. Diesen definieren wir induktiv von Südost nach Nordwest:

**Definition 1.3.1.** Falls südöstlich von dem Ball  $B$  keine Bälle liegen, so hat der Ball  $B$  die Klasse 1 und wir schreiben  $c(B) = 1$ . Sollten südöstlich von dem Ball  $B$  andere Bälle liegen, so bestimmen wir die größte südöstlich von  $B$  auftretende Klasse  $k$ . Die Klasse von  $B$  ist dann  $c(B) = k + 1$ . Kurz gesagt, definieren wir:

$$c(B) := \max(\{0\} \cup \{c(B') : B' \text{ liegt südöstlich von } B\}) + 1.$$

Zuerst illustrieren wir die Definition der Klasse an einem Beispiel, bevor wir den Matrix-Ball-Algorithmus beschreiben.

**Beispiel 1.3.2.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{4} & & \textcircled{2} \\ \hline & \textcircled{3} & \textcircled{1} \\ & \textcircled{2} & \\ \hline \textcircled{2} & & \\ \hline \textcircled{1} & & \\ \hline \end{array},$$

Der *Matrix-Ball-Algorithmus* beschreibt, wie aus der Matrix  $A$  die assoziierten SSYT  $(\tau, \sigma)$  bestimmt werden. Er besteht aus mehreren Schritten; im  $k$ -ten Schritt bestimmen wir ausgehend von der Matrix  $A^{(k-1)}$ , wobei  $A^{(0)} := A$  sei, jeweils die  $k$ -te Zeile der SSYT  $(\tau, \sigma)$  und eine neue Matrix  $A^{(k)} := (A^{(k-1)})'$ .

Die erste Zeile von  $\tau$  können wir aus der Ball-Matrix  $A$  auslesen, indem wir die Zeilenindizes der südlichsten Bälle jeder Klasse auflisten, d. h.

$$\tau_{1,k} := \max\{i(B) : c(B) = k\} \text{ für jede auftretende Klasse } k.$$

Die erste Zeile des SSYT  $\sigma$  ist die Auflistung der Spaltenindizes der östlichsten Bälle jeder Klasse:

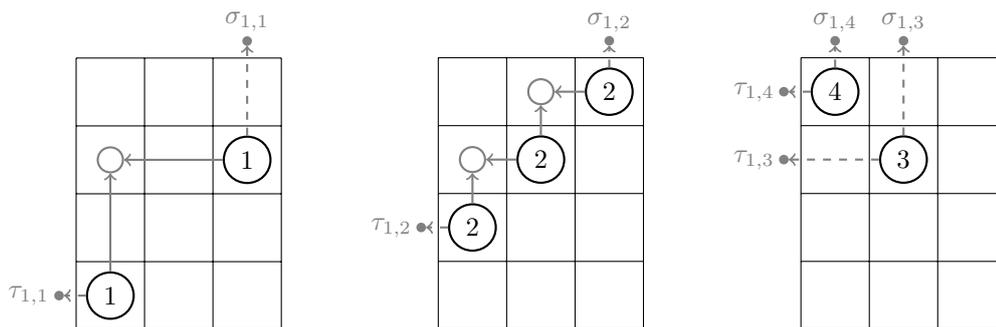
$$\sigma_{1,k} := \max\{j(B) : c(B) = k\} \text{ für jede auftretende Klasse } k.$$

Aus der Definition der Klasse folgt leicht, dass zwei Bälle einer Klasse nie in der gleichen Zeile oder Spalte liegen. Der südlichste Ball bzw. östlichste Ball einer Klasse ist damit immer eindeutig bestimmt.

Die neue Matrix  $A'$  wird ebenfalls klassenweise bestimmt. Falls  $l$  Bälle der Klasse  $k$  in der Matrix  $A$  liegen, platzieren wir  $l-1$  neue Bälle in der Matrix  $A'$  wie folgt: Wir verschieben jeden der  $l-1$  nördlichsten Bälle in seiner Zeile nach Westen, bis er genau in der Spalte über dem nächsten Ball seiner Klasse zu liegen kommt: Es seien  $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_l, j_l)$  die Positionen der Bälle der Klasse  $k$ , wobei  $i_1 > i_2 > \dots > i_l$  und  $j_1 < j_2 < \dots < j_l$  gilt. Die neuen Bälle werden dann in die Kästchen  $(i_2, j_1), (i_3, j_2), \dots, (i_l, j_{l-1})$  in die Matrix  $A'$  eingetragen.

Wir führen nun den ersten Schritt des Algorithmus' für unser Beispiel 1.3.2 durch.

**Beispiel 1.3.3.**



$$A' = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\tau_{1,\cdot}, \sigma_{1,\cdot}) = ((4, 3, 2, 1), (3, 3, 2, 1)).$$

Wir wiederholen diesen Schritt nun für die Matrix  $A'$  und erhalten so die zweiten Zeilen der SSYT  $\tau$  und  $\sigma$  und die neue Ball-Matrix  $A^{(2)} = A'' = (A')'$ . Der Algorithmus endet, wenn  $A^{(k+1)} := (A^{(k)})'$  die Nullmatrix ist. Das Paar  $(\tau, \sigma)$  ist dann das zu der Matrix  $A$  assoziierte Paar von SSYT.

**Beispiel 1.3.4.** Das zu  $A$  assoziierte Paar von SSYT ist dann:

$$(\tau, \sigma) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} \right).$$

**Satz 1.3.5.** Der Bumping-Algorithmus und der Matrix-Ball-Algorithmus beschreiben die gleiche Bijektion.

**Beweis** Vgl. [8, §4.2]. □

**Lemma 1.3.6.** Es sei  $(\tau_A, \sigma_A)$  das zu der Matrix  $A$  assoziierte Paar von SSYT. Das zu der transponierten Matrix  $A^T$  assoziierte Paar von SSYT  $(\tau_{A^T}, \sigma_{A^T})$  erhalten wir, indem wir die SSYT  $\tau_A$  und  $\sigma_A$  vertauschen:

$$(\tau_{A^T}, \sigma_{A^T}) = (\sigma_A, \tau_A).$$

**Beweis** Diese Symmetrie folgt sofort aus dem Matrix-Ball-Algorithmus. □

## Kapitel 2

# Quantengruppen und kristalline Basen

Nach einer kurzen Einführung der Notation für dieses Kapitel, definieren wir in Abschnitt 2.2 die Quantengruppe  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  und geben in Abschnitt 2.3 einen kurzen Abriss über ihre Darstellungstheorie. Ein Werkzeug, das sehr bei dem Verständnis der Darstellungen der Quantengruppe hilft, sind die Kristallbasen und die Kashiwara-Operatoren. Diese führen wir in Abschnitt 2.4 ein und skizzieren in Abschnitt 2.5 die Berechnung der Kristallbasen für die endlichdimensionalen unzerlegbaren  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Darstellungen. Für eine ausführlichere Darstellung dieser Thematik verweisen wir auf [12] und [15].

### 2.1 Notation

Um im Abschnitt 2.4 und im Kapitel 3 die Ausdrücke übersichtlicher gestalten zu können, führen wir an dieser Stelle einige Notationen ein. Es sei  $q$  ein Element eines beliebigen Körpers, welches ungleich Null und keine Einheitswurzel ist. Für  $a \in \mathbb{Z}$  sei  $[a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$ . Für  $a \in \mathbb{N}$  gilt offenbar

$$[a]_q = -[-a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} = \sum_{i=0}^{a-1} q^{2i+1-a} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$

Des Weiteren definieren wir

$$[a]_q! := \prod_{i=1}^a [i]_q \text{ und}$$
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q := \frac{[a]_q [a-1]_q \cdots [a-b+1]_q}{[1]_q [2]_q \cdots [b]_q} \text{ für } b > 0 \text{ und } \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}_q := 1$$

für alle  $a, b \in \mathbb{N}$ . Falls eindeutig ist, welches  $q$  wir betrachten, schreiben wir kurz  $[a]$ ,  $[a]!$  bzw.  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ .

**Lemma 2.1.1.** Für  $a \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\lim_{q \rightarrow 1} [a]_q = a.$$

**Beweis** Für  $a = 0$  ist die Behauptung wahr, da  $[0]_q = 0$  gilt. Für  $a \neq 0$  lässt sich dieses Lemma mit dem Satz von l'Hospital beweisen:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{aq^{a-1} + aq^{-a-1}}{1 + q^{-2}} = \frac{a + a}{1 + 1} = a.$$

□

## 2.2 Die Quantengruppe $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$

Nachdem wir einige notwendige Bezeichnungen eingeführt haben, betrachten wir in diesem Kapitel die quantisierte Einhüllende der  $\mathbb{Q}$ -Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_n$  mit  $n \geq 2$  (vom Typ  $A_{n-1}$ ). Dabei orientieren wir uns eng an [12].

Es sei  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  die Standardorthonormalbasis von  $\mathbb{Q}^n$  und  $E$  der Unterraum von  $\mathbb{Q}^n$ , der orthogonal zu dem Vektor  $\sum_{i=1}^n e_i$  ist. Das Standardskalarprodukt  $(v, w) = v^T w$  von  $\mathbb{Q}^n$  induziert ein Skalarprodukt auf dem Unterraum  $E$ . Das Wurzelsystem  $\Phi = \{e_i - e_j : i \neq j\}$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_n$  kann als Teilmenge des Gitters  $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i \cap E$  realisiert werden, wobei jede Wurzel  $\alpha \in \Phi$  die Länge  $(\alpha, \alpha) = 2$  besitzt.

Die Menge  $\Pi = \{\alpha_i := e_i - e_{i+1} : 1 \leq i < n\}$  besteht dann aus den einfachen Wurzeln,  $\Phi^+ = \{e_i - e_j : i < j\}$  aus den positiven und  $\Phi^- = \{e_i - e_j : i > j\}$  aus den negativen Wurzeln. Des Weiteren ist

$$C_{n-1} = \left( \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \right)_{i,j=1}^{n-1} = ((\alpha_i, \alpha_j))_{i,j=1}^{n-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Cartan-Matrix von  $\mathfrak{sl}_n$ . Das Gewichtegitter  $\Lambda$  ist die Menge aller  $\lambda \in E$  für die  $(\lambda, \alpha)$  für alle  $\alpha \in \Phi$  ganzzahlig ist. Die sogenannten fundamentalen Gewichte  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}\} \subset \Lambda$  bilden die zu  $\Pi$  duale Basis, d. h.  $(\omega_i, \alpha_j) = \delta_{i,j}$ . Sie erzeugen das Gewichtegitter  $\Lambda$ .

Ein Gewicht  $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \omega_i$  heißt *dominant*, falls  $(\lambda, \alpha_i) = l_i \geq 0$  für alle  $1 \leq i < n$  gilt; die fundamentalen Gewichte sind dominant. Wir können jedem dominanten Gewicht  $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \omega_i$  auf natürliche Weise die Partition  $(\sum_{i=1}^{n-1} l_i, \sum_{i=2}^{n-1} l_i, \dots, l_{n-1})$  zuordnen, deren Young-Diagramm genau  $l_i$  Spalten der Länge  $i$  besitzt. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die zu dem Gewicht  $\lambda$  assoziierte Partition ebenfalls mit  $\lambda$ . Des Weiteren können wir das dominante Gewicht  $\lambda$  mit Hilfe der transponierten Partition  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_s)$  ausdrücken:  $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \omega_i = \sum_{i=1}^s \omega_{\lambda'_i}$ .

Die universelle Einhüllende  $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_n$  ist isomorph zu der von den Elementen  $E_i, F_i, H_i$ ,  $1 \leq i < n$  erzeugte  $\mathbb{Q}$ -Algebra, wobei die sogenannten Serre-Relationen gelten:

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [E_i, F_j] &= \delta_{i,j} H_i, \\ [H_i, E_j] &= \begin{cases} 2E_i, & i = j \\ -E_j, & |i - j| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$[H_i, F_j] = \begin{cases} -2F_i, & i = j \\ F_j, & |i - j| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$[E_i, [E_i, E_j]] = 0, \text{ falls } |i - j| = 1,$$

$$[E_i, E_j] = 0, \text{ falls } |i - j| > 1,$$

$$[F_i, [F_i, F_j]] = 0, \text{ falls } |i - j| = 1,$$

$$[F_i, F_j] = 0, \text{ falls } |i - j| > 1.$$

Es sei im Folgenden  $q$  eine transzendente Zahl über  $\mathbb{Q}$ . Wir könnten auch  $q$  allgemeiner als algebraische Zahl über  $\mathbb{Q}$  wählen, solange sie ungleich Null und keine Einheitswurzel ist.

**Definition 2.2.1.** Die *quantisierte Einhüllende*  $\mathcal{U} := \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_n$  ist die  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebra mit den Erzeugenden  $E_i, F_i, K_i$  und  $K_i^{-1}$ ,  $1 \leq i < n$  und den Relationen:

$$(U1) \quad K_i K_i^{-1} = 1 = K_i^{-1} K_i, \quad K_i K_j = K_j K_i$$

$$(U2) \quad K_i E_j K_i^{-1} = q^{(\alpha_i, \alpha_j)} E_j = \begin{cases} q^2 E_i, & i = j \\ q^{-1} E_j, & |i - j| = 1 \\ E_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(U3) \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^{-(\alpha_i, \alpha_j)} F_j = \begin{cases} q^{-2} F_i, & i = j \\ q^1 F_j, & |i - j| = 1 \\ F_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(U4) \quad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{i,j} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

$$(U5) \quad E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \text{ für } |i - j| = 1 \text{ und } E_i E_j = E_j E_i \text{ für } |i - j| > 1,$$

$$(U6) \quad F_i^2 F_j - (q + q^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0 \text{ für } |i - j| = 1 \text{ und } F_i F_j = F_j F_i \text{ für } |i - j| > 1.$$

Die Algebra  $\mathcal{U}$  wird auch *Quantengruppe* genannt. Sie ist  $\mathbb{Z}\Phi$ -graduiert mit  $\deg E_i = \alpha_i$ ,  $\deg F_i = -\alpha_i$  und  $\deg K_i = 0$ . Entsprechend wählen wir die Bezeichnung der folgenden Unteralgebren von  $\mathcal{U}$ .

Es seien  $\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}_q^+(\mathfrak{sl}_n)$  bzw.  $\mathcal{U}^- = \mathcal{U}_q^-(\mathfrak{sl}_n)$  die Unteralgebren von  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ , welche von den Elementen  $E_i$ ,  $1 \leq i < n$  bzw.  $F_i$ ,  $1 \leq i < n$  erzeugt werden. Wir nennen  $\mathcal{U}^+$  den positiven und  $\mathcal{U}^-$  den negativen Anteil von  $\mathcal{U}$ . Die von den Elementen  $K_i, K_i^{-1}$ ,  $1 \leq i < n$  erzeugte Unteralgebra von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  ist der Cartan-Anteil; wir bezeichnen ihn mit  $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U}_q^0(\mathfrak{sl}_n)$ . Nach [12, §4.22] ist das Tensorprodukt  $\mathcal{U}^+ \otimes \mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{U}^-$  als Vektorraum isomorph zu  $\mathcal{U}$ .

## 2.3 Darstellungen der Quantengruppe $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$

Wir betrachten nun die endlichdimensionalen Darstellungen von  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ .

**Definition 2.3.1.** Für einen endlichdimensionalen  $\mathcal{U}$ -Modul  $M$ , ein Gewicht  $\lambda \in \Lambda$  und eine Abbildung  $\sigma : \Pi \rightarrow \{\pm 1\}$  ist der Untermodul

$$M_{\lambda, \sigma} = \{m \in M \mid K_i m = \sigma(\alpha_i) q^{(\lambda, \alpha_i)} m \text{ für alle } 1 \leq i < n\}$$

ein *Gewichtsraum* von  $M$ .

Für  $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \omega_i$  ist

$$q^{(\lambda, \alpha_i)} = q^{l_i(\omega_i, \alpha_i)} = q^{l_i} \text{ für alle } i \leq 1 < n.$$

Das Gewicht  $\lambda$  ist folglich eindeutig durch die Abbildung  $\Pi \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ ,  $\alpha_i \mapsto q^{(\lambda, \alpha_i)}$  bestimmt, da  $q$  keine Einheitswurzel ist. Die Summe der  $M_{\lambda, \sigma}$  ist also direkt.

**Lemma 2.3.2.** Jeder endlichdimensionale  $\mathcal{U}$ -Modul  $M$  ist die direkte Summe seiner Gewichtsräume  $M_{\lambda, \sigma}$ . Des Weiteren gilt für alle  $\lambda, \sigma$  wie oben:

$$E_i M_{\lambda, \sigma} \subset M_{\lambda + \alpha_i, \sigma} \text{ und } F_i M_{\lambda, \sigma} \subset M_{\lambda - \alpha_i, \sigma} \text{ für alle } 1 \leq i < n.$$

**Beweis** Siehe [12, §5.1]. □

**Definition 2.3.3.** Für einen endlichdimensionalen  $\mathcal{U}$ -Modul  $M = \bigoplus_{\lambda, \sigma} M_{\lambda, \sigma}$  definieren wir  $M^\sigma := \bigoplus_{\lambda} M_{\lambda, \sigma}$ . Wir sagen, dass  $M$  vom Typ  $\sigma$  ist, falls  $M = M^\sigma$  gilt. Falls  $\sigma$  die konstante Abbildung 1 ist, d. h.  $\sigma(\alpha_i) = 1$  für alle  $1 \leq i < n$ , sagen wir, dass  $M = M^\sigma$  vom Typ **1** ist.

Nach dem obigen Lemma ist  $M^\sigma$  für jede Abbildung  $\sigma : \Pi \rightarrow \{\pm 1\}$  ein Untermodul von  $M$ . Des Weiteren gibt es zwischen Moduln von verschiedenen Typen keine nichttrivialen Homomorphismen, da jeder Homomorphismus die Gewichtsräume ineinander abbildet.

Da die Quantengruppe  $\mathcal{U}$  eine Hopf-Algebren-Struktur besitzt [12, §4], besitzen Tensorprodukte, Dualräume und Hom-Räume von  $\mathcal{U}$ -Darstellungen eine Modulstruktur. Die Kategorie der endlichdimensionalen Moduln vom Typ **1** ist außerdem abgeschlossen unter der Bildung des Tensorprodukts, der dualen Räume und der Hom-Räume. Es genügt folglich nur die endlichdimensionalen Moduln vom Typ **1** zu untersuchen, da für jede Abbildung  $\sigma : \Pi \rightarrow \{\pm 1\}$  die Kategorie der endlichdimensionalen Moduln vom Typ  $\sigma$  äquivalent zu der Kategorie der endlichdimensionalen Moduln vom Typ **1** ist (Vgl. [12, §5.1 - 5.3]).

**Konvention 2.3.4.** Von jetzt an sind alle endlichdimensionalen  $\mathcal{U}$ -Moduln vom Typ **1**. Des Weiteren nutzen wir für Gewichtsräume die verkürzte Notation  $M_\lambda := M_{\lambda, 1}$ .

Wie wir im folgenden Satz sehen, ist für transzendente  $q \in \mathbb{C}$  die Darstellungstheorie der endlichdimensionalen  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Moduln vom Typ **1** sehr ähnlich zu der Darstellungstheorie von  $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$  bzw.  $\mathfrak{sl}_n$ .

**Satz 2.3.5.** Für jedes dominante Gewicht  $\lambda$  gibt es genau einen einfachen  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Modul  $V_n(\lambda)$  endlicher Dimension. Jeder einfache endlichdimensionale  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Modul ist zu genau einem  $V_n(\lambda)$  mit  $\lambda$  dominant isomorph.

**Beweis** Vgl. [12, §5.10]. □

**Bemerkung 2.3.6.** Falls eindeutig ist, welche Quantengruppe  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  wir betrachten, kürzen wir die Bezeichnung  $V_n(\lambda)$  mit  $V(\lambda)$  ab.

Der einfache  $\mathcal{U}$ -Modul  $V(\lambda)$  ist der eindeutige einfache Faktormodul des Moduls

$$M(\lambda) = \mathcal{U} / \left( \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{U} E_i + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{U} (K_i - q^{(\lambda, \alpha_i)}) \right).$$

Wir können  $M(\lambda)$  für jedes Gewicht  $\lambda \in \Lambda$  definieren und nennen ihn den *universellen Höchstgewichtsmodul* (oder *Verma-Modul*) zum Gewicht  $\lambda$ . Falls  $M$  ein  $\mathcal{U}$ -Modul und  $0 \neq v \in M_\lambda$  mit  $E_i v = 0$  für alle  $1 \leq i < n$  ist, so existiert ein eindeutiger Homomorphismus von  $\mathcal{U}$ -Moduln  $\varphi : M(\lambda) \rightarrow M$ , welcher die Nebenklasse der 1 auf  $v$  abbildet. Man kann zeigen, dass der Höchstgewichtsmodul  $M(\lambda)$  genau einen maximalen Untermodul und folglich auch genau einen einfachen Faktormodul  $V(\lambda)$  besitzt. Der einfache Modul  $V(\lambda)$  ist endlichdimensional genau dann, wenn  $\lambda$  dominant ist. Er hat Höchstgewicht  $\lambda$ , d. h. es gibt ein  $0 \neq v \in V(\lambda)_\lambda$ , das  $V(\lambda)$  erzeugt und für das  $E_i v = 0$  für alle  $1 \leq i < n$  gilt [12, §5.5, §5.9].

**Satz 2.3.7.** Jeder endlichdimensionale  $\mathcal{U}$ -Modul ist halbeinfach.

**Beweis** Vgl. [12, §5.17]. □

## 2.4 Kristallbasen

Es sei  $M$  ein  $\mathcal{U}$ -Modul, der als Vektorraum die Basis  $B$  besitzt. Im Allgemeinen ist die Wirkung der Operatoren  $E_i$  und  $F_i$  für  $1 \leq i < n$  bezüglich dieser Basis  $B$  sehr kompliziert und nicht leicht zu verstehen. Um die Struktur, die von den Operatoren  $E_i$  bzw.  $F_i$  für  $1 \leq i < n$  erzeugt wird, besser zu sehen, führte M. Kashiwara den Begriff der Kristallbasen ein [14]. Diese Basen haben die Eigenschaft, dass Approximationen der Operatoren  $E_i$  und  $F_i$  – die sogenannten Kashiwara-Operatoren – bei der Spezialisierung  $q = 0$  jedes Basiselement entweder auf ein anderes Basiselement oder Null abbilden. Das Durcheinander in dem  $\mathcal{U}$ -Modul  $M$  kristallisiert sozusagen zu einer schönen, klaren Struktur. Natürlich ist unsere Konstruktion der quantisierten Algebra  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  für  $q = 0$  nicht sinnvoll. Um das Verhalten von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  im Limes  $q = 0$  zu untersuchen, müssen wir passende Algebren benutzen. Wir richten uns in diesem Abschnitt nach [12] und [15].

**Lemma 2.4.1.** Es sei  $M$  ein endlichdimensionaler  $\mathcal{U}$ -Modul und  $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \omega_i$  ein Gewicht von  $M$ . Für jedes  $x \in M_\lambda$  existieren eindeutig bestimmte  $x_j \in M_{\lambda+j\alpha_i} \cap \text{Ker } E_i$  und

$$x = \sum_{j \geq \max(0, -l_i)} F_i^{(j)} x_j. \quad (2.1)$$

**Beweis** Vgl. [12, §9.1]. □

Für  $1 \leq i < n$  und  $0 < j$  seien  $F_i^{(j)} := ([j]!)^{-1} F_i^j$  und  $E_i^{(j)} := ([j]!)^{-1} E_i^j$  die Chevalley-Operatoren der Quantengruppe  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ .

**Definition 2.4.2.** Für jeden Gewichtsvektor  $x = \sum_{j \geq \max(0, -l_i)} F_i^{(j)} x_j$  wie in Gleichung (2.1), sei

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i x &:= \sum_{j \geq \max(0, -l_i)} F_i^{(j+1)} x_j, \\ \tilde{E}_i x &:= \sum_{j > 0, j \geq -l_i} F_i^{(j-1)} x_j. \end{aligned}$$

Wir setzen  $\tilde{F}_i$  und  $\tilde{E}_i$  linear auf  $M = \bigoplus_\lambda M_\lambda$  fort und nennen die so entstandenen Operatoren *Kashiwara-Operatoren*.

**Bemerkung 2.4.3.** Wegen  $\tilde{F}_i x = F_i(\sum_j [j+1]^{-1} F_i^{(j)} x_j)$  und  $F_i x = \tilde{F}_i(\sum_j [j+1] F_i^{(j)} x_j)$  sehen wir, dass  $\tilde{F}_i M_\lambda = F_i M_\lambda$  gilt.

Es sei  $\varphi : M \rightarrow N$  ein  $\mathcal{U}$ -Homomorphismus und  $x = \sum_{j \geq \max(0, -l_i)} F_i^{(j)} x_j \in M_\lambda$  ein Gewichtsvektor. Offensichtlich ist  $\varphi(x) = \sum_{j \geq \max(0, -l_i)} F_i^{(j)} \varphi(x_j)$  eine Darstellung wie in Gleichung (2.1). Wegen der Eindeutigkeit dieser Summendarstellung respektiert der  $\mathcal{U}$ -Homomorphismus  $\varphi$  die Zerlegung von  $x$ . Folglich vertauschen die Kashiwara-Operatoren mit  $\varphi$ . Insbesondere bilden die Kashiwara-Operatoren Untermoduln  $M'$  von  $M$  in sich selbst ab, da die Inklusion  $M' \subset M$  ein  $\mathcal{U}$ -Homomorphismus ist.

Der Körper  $\mathbb{Q}(q)$  ist der Quotientenkörper des Polynomringes  $\mathbb{Q}[q]$ . Da wir das Element  $q$  in  $\mathbb{Q}(q)$  nicht gleich Null setzen können, betrachten wir im Folgenden die Lokalisierung von  $\mathbb{Q}[q]$  an dem Primideal  $(q)$ :

$$\mathcal{A} = \mathbb{Q}[q]_{(q)} = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{Q}[q], g(0) \neq 0 \right\}.$$

Dies ist ein diskreter Bewertungsring, d. h. er ist ein lokaler Hauptidealring. Sein maximales Ideal wird von  $q$  erzeugt. Wir können nun  $q$  an Null spezialisieren, indem wir den Restklassenring  $\mathcal{A}/q\mathcal{A}$  mit  $\mathbb{Q}$  identifizieren. Im Folgenden bezeichnen wir für jedes  $a \in \mathcal{A}$  die Restklasse  $a + q\mathcal{A}$  mit  $\bar{a}$ . Diese Notation werden wir allgemeiner auch für Elemente  $v$  von  $\mathcal{A}$ -Moduln  $\mathcal{M}$  anwenden:  $\bar{v} = v + q\mathcal{M}$ . Natürlich können wir jeden  $\mathcal{U}$ -Modul  $M$  auch als Modul über  $\mathcal{A}$  auffassen.

**Definition 2.4.4.** Es sei  $M$  ein endlichdimensionaler  $\mathcal{U}$ -Modul. Ein *zulässiges Gitter*  $\mathcal{L}$  von  $M$  ist ein  $\mathcal{A}$ -Untermodul  $\mathcal{L}$  von  $M$ , so dass folgende Axiome gelten:

(A1)  $\mathcal{L}$  ist über  $\mathcal{A}$  endlich erzeugt und erzeugt  $M$  als Vektorraum über  $\mathbb{Q}(q)$ ,

(A2)  $\mathcal{L} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}_\lambda$  mit  $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} \cap M_\lambda$ ,

(A3)  $\tilde{F}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$  und  $\tilde{E}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$  für alle  $1 \leq i < n$ .

Es sei  $M$  ein endlichdimensionaler  $\mathcal{U}$ -Modul mit zulässigen Gitter  $\mathcal{L}$ . Die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{F}_i$  und  $\tilde{E}_i$  induzieren Abbildungen auf dem Quotienten  $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ , diese werden wir zu Gunsten der Übersichtlichkeit ebenfalls mit  $\tilde{F}_i$  bzw.  $\tilde{E}_i$  bezeichnen.

**Definition 2.4.5.** Eine *Kristallbasis* eines endlichdimensionalen  $\mathcal{U}$ -Moduls  $M$  ist ein Paar  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ , bei dem  $\mathcal{L}$  ein zulässiges Gitter und  $\mathcal{B}$  eine Basis des Vektorraumes  $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$  über  $\mathbb{Q}$  ist, so dass folgende Axiome gelten:

(C1)  $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$  mit  $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B} \cap (\mathcal{L}_\lambda/q\mathcal{L}_\lambda)$ ,

(C2)  $\tilde{F}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$  und  $\tilde{E}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$  für alle  $1 \leq i < n$ ,

(C3) Für alle  $b, b' \in \mathcal{B}$  und  $1 \leq i < n$  gilt:  $b = \tilde{E}_i b' \Leftrightarrow \tilde{F}_i b = b'$ .

Zusammen mit dem Axiom (C2) bedeutet (C3) insbesondere: Falls  $b \in \mathcal{B}$  ein Basiselement mit  $\tilde{F}_i b \neq 0$  (bzw.  $\tilde{E}_i b \neq 0$ ) ist, so gilt  $\tilde{E}_i \tilde{F}_i b = b$  (bzw.  $\tilde{F}_i \tilde{E}_i b = b$ ).

**Definition 2.4.6.** Der zu einer Kristallbasis assoziierte *gefärbte Graph* ist ein gerichteter Graph  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$  mit einer durch die Basiselemente indizierten Knotenmenge  $\mathcal{G}_0 = \{b \in \mathcal{B}\}$ . Der Pfeil  $b \xrightarrow{i} b'$  mit der „Farbe“  $i$  sei genau dann in der Pfeilmenge  $\mathcal{G}_1$  enthalten, wenn  $\tilde{E}_i b = b'$  bzw.  $\tilde{F}_i b' = b$  gilt. Wir sagen, dass  $b \xrightarrow{i} b'$  ein  $i$ -Pfeil ist.

**Bemerkung 2.4.7.** Die Kristallbasis  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$  eines endlichdimensionalen  $\mathcal{U}$ -Moduls  $M$  ist nicht eindeutig bestimmt. So ist z. B. für einen Isomorphismus  $\varphi : M \rightarrow M$  das Paar  $(\varphi(\mathcal{L}), \bar{\varphi}(\mathcal{B}))$  ebenfalls eine Kristallbasis, wobei  $\bar{\varphi}$  der induzierte Isomorphismus  $\mathcal{L}/q\mathcal{L} \rightarrow \varphi(\mathcal{L})/q\varphi(\mathcal{L})$  ist [12, §9.3, §9.4].

**Definition 2.4.8.** Wir sagen, dass zwei Kristallbasen  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$  und  $(\mathcal{L}', \mathcal{B}')$  *isomorph* sind, wenn die zugehörigen gefärbten Graphen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}'$  isomorph sind, d. h. wenn es eine Bijektion  $\bar{\varphi} : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}'_0$  gibt, mit

$$b \xrightarrow{i} b' \in \mathcal{G}_1 \Leftrightarrow \bar{\varphi}(b) \xrightarrow{i} \bar{\varphi}(b') \in \mathcal{G}'_1.$$

**Satz 2.4.9.** Zwei einfache  $\mathcal{U}$ -Moduln vom gleichen Typ sind genau dann isomorph, wenn sie zueinander isomorphe Kristallbasen besitzen.

**Beweis** Das Bild einer Kristallbasis unter einem Isomorphismus ist wieder eine Kristallbasis [12, §9.3, §9.4]. Zwei isomorphe  $\mathcal{U}$ -Moduln besitzen also isomorphe Kristallbasen.

Die Kristallbasis eines endlichdimensionalen einfachen  $\mathcal{U}$ -Moduls  $V(\lambda)$  ist bis auf einen Skalarfaktor eindeutig bestimmt [12, §9.11]; insbesondere ist der gefärbte Graph eines endlichdimensionalen einfachen  $\mathcal{U}$ -Moduls eindeutig bestimmt. Des Weiteren ist das Höchstgewicht  $\lambda = \sum_{i=1}^n l_i \omega_i$  eines endlichdimensionalen einfachen  $\mathcal{U}$ -Moduls  $V(\lambda)$  eindeutig durch seinen gefärbten Graphen bestimmt, da für den Höchstgewichtsvektor  $b \in \mathcal{B}$  mit  $\tilde{E}_i b = 0$  und  $1 \leq i < n$  die Gleichung

$$\max\{r \mid \tilde{F}_i^r b \neq 0\} = l_i = \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$$

gilt [12, §9.17]. Zwei endlichdimensionale einfache  $\mathcal{U}$ -Moduln, deren Kristallbasen isomorph sind, sind somit nach Satz 2.3.5 isomorph.  $\square$

Eine Möglichkeit neue Kristallbasen zu erhalten, ist die Bildung des Tensorproduktes.

**Satz 2.4.10.** Es sei  $(\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j)$  eine Kristallbasis eines endlichdimensionalen  $\mathcal{U}$ -Moduls  $M_j$  für  $j = 1, 2$ . Für  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes_A \mathcal{L}_2 \subset M_1 \otimes_A M_2$  und  $\mathcal{B} = \{b_1 \otimes b_2 : b_j \in \mathcal{B}_j, j = 1, 2\} \subset \mathcal{L}/q\mathcal{L}$  ist  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$  eine Kristallbasis von  $M_1 \otimes M_2$ . Dabei wirken die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_i$  (für  $1 \leq i < n$ ) wie folgt:

$$\tilde{F}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{F}_i b_1 \otimes b_2 & \text{falls } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{F}_i b_2 & \text{falls } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\tilde{E}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} b_1 \otimes \tilde{E}_i b_2 & \text{falls } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2) \\ \tilde{E}_i b_1 \otimes b_2 & \text{falls } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \end{cases},$$

wobei  $\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 : \tilde{E}_i^k(b) \neq 0\}$  und  $\varphi_i(b) = \max\{k \geq 0 : \tilde{F}_i^k(b) \neq 0\}$ .

**Beweis** Vgl. [14].  $\square$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion ist es nun möglich die Wirkung der Kashiwara-Operatoren auf dem Tensorprodukt mehrerer Kristallbasen zu beschreiben.

**Lemma 2.4.11.** Es sei  $(\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j)$  eine Kristallbasis des endlichdimensionalen  $\mathcal{U}$ -Moduls  $M_j$  für  $j = 1, 2, \dots, N$ . Für  $1 \leq i < n$  und  $b_j \in \mathcal{B}_j$  definieren wir die alternierenden Summen

$$a_k^i = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_i(b_j) - \sum_{j=1}^k \varepsilon_i(b_j) & \text{falls } 1 \leq k \leq N \\ \sum_{j=1}^N \varphi_i(b_j) - \sum_{j=1}^N \varepsilon_i(b_j) & \text{falls } k = N + 1. \end{cases}$$

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) &= -\min\{a_k^i : 1 \leq k \leq N\} \text{ und} \\ \varphi_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) &= a_{N+1}^i - \min\{a_k^i : 1 \leq k \leq N\}.\end{aligned}$$

b) Falls  $0 \leq k_0 \leq N$  das kleinste Element mit  $a_{k_0}^i = \min\{a_j^i : 0 \leq j \leq N\}$  ist, so operiert  $\tilde{E}_i$  wie folgt

$$\tilde{E}_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k_0 = 0, \\ b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k_0-1} \otimes \tilde{E}_i b_{k_0} \otimes b_{k_0+1} \otimes \cdots \otimes b_N & \text{falls } k_0 > 0. \end{cases}$$

**Beweis** Dieses Lemma ist eine für uns passende Umformulierung von [15, Prop. 2.1.1.]. Lediglich für die Aussage b) müssen wir zeigen, dass es sich tatsächlich nur um eine Umformulierung handelt; für die Aussage a) ist das offensichtlich. Die Autoren haben die Operation der  $\tilde{E}_i$  wie folgt beschrieben: Es sei  $1 \leq j_0 \leq N$  der kleinste Wert mit  $a_{j_0}^i = \min\{a_j^i : 1 \leq j \leq N\}$ , dann gilt

$$\tilde{E}_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) = b_1 \otimes \cdots \otimes b_{j_0-1} \otimes \tilde{E}_i b_{j_0} \otimes b_{j_0+1} \otimes \cdots \otimes b_N.$$

Für  $k_0 > 0$  ist offensichtlich  $k_0 = j_0$  und  $\tilde{E}_i$  operiert wie behauptet. Es genügt folglich zu zeigen, dass  $\tilde{E}_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) = 0$  ist, falls  $k_0 = 0$  gilt. Sei also  $k_0 = 0$ . Dann ist wegen

$$0 = a_0^i \leq a_1^i = -\varepsilon_i(b_1) \leq 0$$

die Summe  $a_1^i = 0$  ebenfalls minimal und wegen  $\varepsilon_i(b_1) = 0$  nach [15, Prop. 2.1.1.]

$$\tilde{E}_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) = \underbrace{\tilde{E}_i b_1}_{=0} \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_N = 0.$$

□

**Bemerkung 2.4.12.**

a) Falls  $k_0$  aus dem obigen Lemma echt größer als Null ist, so ist  $\tilde{E}_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) \neq 0$ : Wegen der Minimalität von  $k_0$  gilt

$$a_{k_0}^i = a_{k_0-1}^i + \varphi_i(b_{k_0-1}) - \varepsilon_i(b_{k_0}) < a_{k_0-1}^i,$$

wobei  $\varphi_i(b_0) = 0$  sei. Folglich ist  $\varepsilon_i(b_{k_0}) > 0$  und

$$\tilde{E}_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) = b_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{E}_i b_{k_0} \otimes \cdots \otimes b_N \neq 0.$$

b) Wegen  $a_0^i = 0 \geq -\varepsilon_i(b_1) = a_1^i$ , wird das Minimum  $\min\{a_k^i : 0 \leq k \leq N\}$  auf alle Fälle auch von einem  $a_k^i$  mit  $k > 0$  angenommen. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) &= -\min\{a_k^i : 0 \leq k \leq N\}, \\ \varphi_i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_N) &= a_{N+1}^i - \min\{a_k^i : 0 \leq k \leq N\}.\end{aligned}$$

## 2.5 Die Kristallbasen der $V(\lambda)$

Für die dominanten Gewichte  $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \omega_i$  besitzen die endlichdimensionalen unzerlegbaren  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Modul  $V(\lambda)$  Kristallbasen, welche sich durch die SSYT der Form  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$  mit  $\lambda_j = \sum_{i=j}^{n-1} l_i$  indizieren lassen. Das heißt, dass das Young-Tableaux der Form  $\lambda$  genau  $l_i$  Spalten der Länge  $i$  hat. In [15] beschreiben die Autoren die Kristallbasen, indem sie die Darstellung  $V(\lambda)$  in ein passendes Tensorprodukt einbetten. Wir richten uns im Folgenden nach [15].

Der  $n$ -dimensionale  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorraum  $V_\square$  mit der Basis  $\boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{n}$  ist ein  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Modul via

$$\begin{aligned} K_i \boxed{n+1-j} &= q^{(e_j, \alpha_i)} \boxed{n+1-j}, \\ E_i \boxed{n-j} &= \delta_{i,j} \boxed{n+1-j}, \\ F_i \boxed{n+1-j} &= \delta_{i,j} \boxed{n-j}, \end{aligned}$$

wobei  $\boxed{j} = 0$  falls  $j \leq 0$  bzw.  $j > n$  ist. Offensichtlich ist  $\boxed{n}$  der Höchstgewichtsvektor von  $V_\square$  mit Höchstgewicht  $\omega_1$ . Die unzerlegbare Darstellung  $V_\square$  ist also  $V(\omega_1) = V((1)) = V_\square$ . Eine Kristallbasis  $(\mathcal{L}(V_\square), \mathcal{B}(V_\square))$  von  $V_\square$  ist durch  $\mathcal{L}(V_\square) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{A}[\boxed{i}]$  und

$$\mathcal{B}(\omega_1) = \mathcal{B}(V_\square) = \{\boxed{i} + q\mathcal{L}(V_\square) : 1 \leq i \leq n\}$$

gegeben. Des Weiteren ist

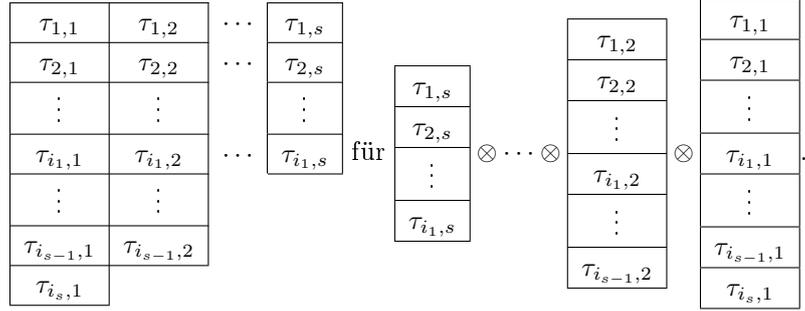
$$\boxed{1} \xrightarrow{n-1} \boxed{2} \xrightarrow{n-2} \dots \xrightarrow{i+1} \boxed{n-i} \xrightarrow{i} \boxed{n-i+1} \xrightarrow{i-1} \dots \xrightarrow{2} \boxed{n-1} \xrightarrow{1} \boxed{n}$$

der Kristallgraph von  $V_\square$ .

Der Kristallgraph jeder unzerlegbaren Darstellung  $V(\lambda)$  mit dominanten Gewicht  $\lambda$  lässt sich durch eine Einbettung in das Tensorprodukt  $V_\square^{\otimes |\lambda|}$  konstruieren. Für  $1 \leq l \leq n$  kommt die unzerlegbare Darstellung  $V(\omega_l)$  genau einmal als direkter Summand in  $V_\square^{\otimes l}$  vor. Dementsprechend ist auch  $\mathcal{B}(\omega_l) = \mathcal{B}(V(\omega_l))$  in  $\mathcal{B}(V_\square)^{\otimes l}$  enthalten: Sie besteht aus allen Tensorprodukten  $\boxed{\nu_1} \otimes \boxed{\nu_2} \otimes \dots \otimes \boxed{\nu_l}$  mit  $n \geq \nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_l \geq 1$ . Wir schreiben

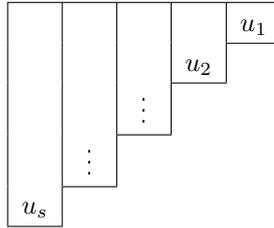
$$\begin{array}{|c|} \hline \nu_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \nu_l \\ \hline \end{array} \text{ für } \boxed{\nu_1} \otimes \dots \otimes \boxed{\nu_l} .$$

Für jedes dominante Gewicht  $\lambda = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_s}$  (mit  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s$ ) ist die unzerlegbare Darstellung  $V(\lambda)$  ein direkter Summand von  $V(\omega_{i_1}) \otimes V(\omega_{i_2}) \otimes \dots \otimes V(\omega_{i_s})$ . Ihre Basis  $\mathcal{B}(\lambda)$  ist die Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{B}(\omega_{i_1}) \otimes \mathcal{B}(\omega_{i_2}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\omega_{i_s})$ , die  $u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_s}$  enthält, wobei die  $u_j$  die Höchstgewichtsvektoren der  $V(\omega_j)$  sind. Wir schreiben



Das zu einem Tableau  $\tau$  gehörende Tensorprodukt wird also spaltenweise von rechts nach links und oben nach unten ausgelesen.

Die Basis  $\mathcal{B}(\lambda)$  besteht genau aus den Elementen  $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_s$  mit  $u_k \in \mathcal{B}(\omega_{i_k})$ , für die



ein SSYT ist. Da  $V(\lambda)$  in das Tensorprodukt  $V_{\square}^{|\lambda|}$  eingebettet ist, beschreibt Lemma 2.4.11 die Wirkung der Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_i$  und  $\tilde{F}_i$  auf der Kristallbasis  $\mathcal{B}(\lambda)$ . Für uns ist es praktikabler die Wirkung der Kashiwara-Operatoren auf den entsprechenden Matrixkodierungen  $\tilde{\tau}$  des zu dem Basiselement  $b_{\tau} \in \mathcal{B}(\lambda)$  assoziierten SSYT  $\tau$  zu beschreiben. Dies tun wir im folgenden Lemma.

**Lemma 2.5.1.** Es sei  $\lambda$  eine Partition von  $N$  der Länge  $n$ . Des Weiteren sei  $\tau$  das zu dem Basiselement  $b_{\tau} = \boxed{b_1} \otimes \dots \otimes \boxed{b_N} \in \mathcal{B}(\lambda) \subset \mathcal{B}(V_{\square})^{\otimes N}$  gehörende SSYT und  $\tilde{\tau} \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  die kodierende Matrix. Für  $1 \leq i < n$  definieren wir die alternierenden Summen  $t_k^i = t_k^i(\tau)$ :

$$t_k^i = t_k^i(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0, \\ \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\tau}_{j,n-i+1} - \sum_{j=1}^k \tilde{\tau}_{j,n-i} & \text{falls } 1 \leq k \leq n, \\ \sum_{j=1}^n \tilde{\tau}_{j,n-i+1} - \sum_{j=1}^n \tilde{\tau}_{j,n-i} & \text{falls } k = n + 1. \end{cases}$$

Des Weiteren sei  $0 \leq k_0 = k_0(\tau) \leq n$  der kleinste Wert, für welchen  $t_{k_0}^i$  minimal ist. Das zu  $\tilde{E}_i b$  gehörende SSYT  $\tilde{E}_i \tau$  wird durch  $\tilde{E}_i \tilde{\tau}$  kodiert:

$$\tilde{E}_i \tilde{\tau} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k_0 = 0, \\ \tilde{\tau} - E_{k_0, n-i} + E_{k_0, n-i+1} & \text{falls } k_0 > 0, \end{cases}$$

wobei  $E_{s,t}$  die Matrix ist, deren Eintrag an der Stelle  $(s,t)$  Eins und sonst überall Null ist. Außerdem gilt  $\min_{0 \leq k \leq n} t_k^i = \min_{0 \leq k \leq N} a_k^i$  und  $t_{n+1}^i = a_{N+1}^i$ , wobei  $a_j^i = a_j^i(\tau) := a_j^i(b_{\tau})$  für  $b_{\tau} \in \mathcal{B}(\lambda) \subset \mathcal{B}(V_{\square})^{\otimes N}$  wie in Lemma 2.4.11 definiert sind.

**Beweis** Da  $\varepsilon_i(\boxed{b}) = \delta_{b,n-i}$  und  $\varphi_i(\boxed{b}) = \delta_{b,n-i+1}$  für alle  $\boxed{b} \in \mathcal{B}(V_\square)$  gelten, berechnen sich die alternierenden Summen  $a_k^i(\tau) = a_k^i(b_\tau)$  wie folgt:

$$a_k^i(\tau) = a_k^i(b_\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \sum_{j=1}^{k-1} \delta_{b_j, n-i+1} - \sum_{j=1}^k \delta_{b_j, n-i} & \text{falls } 1 \leq k \leq N \\ \sum_{j=1}^N \delta_{b_j, n-i+1} - \sum_{j=1}^N \delta_{b_j, n-i} & \text{falls } k = N + 1. \end{cases}$$

Wir beweisen nun die Behauptung per Induktion nach der Anzahl der Spalten des Young-Tableaus  $\Lambda$ .

Es sei zuerst

$$\nu = \begin{array}{|c|} \hline \nu_1 \\ \hline \nu_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \nu_N \\ \hline \end{array}$$

ein SSYT mit einer Spalte und  $N \leq n$ . Da

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\boxed{\nu_k}) &= \delta_{\nu_k, n-i} = \tilde{\nu}_{k, n-i} \quad \text{und} \\ \varphi_i(\boxed{\nu_k}) &= \delta_{\nu_k, n-i+1} = \tilde{\nu}_{k, n-i+1} \end{aligned}$$

gilt, sind die alternierenden Summen  $t_k^i(\nu)$  und  $a_k^i(\nu)$  für alle  $0 \leq k \leq N + 1$  gleich. Des Weiteren ist  $t_k^i(\nu) = t_{N+1}^i(\nu)$  für alle  $N < k \leq n + 1$ . Nach Lemma 2.4.11 gilt die Behauptung.

Angenommen die Behauptung gilt für jedes SSYT mit  $1 \leq L$  Spalten. Es sei nun

$$\sigma = \begin{array}{|c|} \hline \nu_1 \\ \hline \nu_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \nu_M \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tau \\ \hline \end{array} = \tau \otimes \nu,$$

wobei  $M \leq n$  und  $\tau$  ein SSYT mit  $L$  Spalten und  $N$  Kästchen ist.

Wir wenden Satz 2.4.10 und Lemma 2.4.11 an und erhalten:

$$\tilde{E}_i \sigma = \begin{cases} \tau \otimes \tilde{E}_i \nu & \text{falls } \varphi_i(\tau) < \varepsilon_i(\nu) \\ \tilde{E}_i \tau \otimes \nu & \text{falls } \varphi_i(\tau) \geq \varepsilon_i(\nu) \end{cases},$$

wobei  $\varphi_i(\tau) = a_{N+1}^i(\tau) - \min_{0 \leq k \leq N} a_k^i(\tau)$  und  $\varepsilon_i(\nu) = -\min_{0 \leq k \leq M} a_k^i(\nu)$  gelten.

Wir wählen  $1 \leq l \leq M + 1$  so, dass  $\nu_{l-1} \geq n - i + 1$  und  $\nu_l \leq n - i$  gelten, falls  $\nu_{l-1}$  bzw.  $\nu_l$  existieren. Da  $\sigma$  ein SSYT ist, gibt es in  $\tau$  folglich keine  $(n - i + 1)$ -Einträge unter der  $(l - 1)$ -ten Zeile und keine  $(n - i)$ -Einträge unter der  $l$ -ten Zeile, d. h.  $\tilde{\tau}_{k, n-i+1} = 0$  für alle  $l \leq k \leq n$  und  $\tilde{\tau}_{k, n-i} = 0$  für alle  $l < k \leq n$ . Folglich ist  $t_k^i(\tau) = t_l^i(\tau)$  für alle  $l \leq k \leq n + 1$ . Insbesondere ist  $k_0(\tau) \leq l$ .

Die alternierenden Summen  $a_k^i(\sigma)$  und  $t_k^i(\sigma)$  lassen sich leicht aus den alternierenden Summen der SSYT  $\tau$  und  $\nu$  bestimmen:

$$\begin{aligned} t_k^i(\sigma) &= t_k^i(\tau) + t_k^i(\nu) && \text{für alle } 0 \leq k \leq n + 1, \\ a_k^i(\sigma) &= a_k^i(\tau) && \text{falls } 0 \leq k \leq N, \\ a_{N+k}^i(\sigma) &= a_{N+1}^i(\tau) + t_k^i(\nu) && \text{falls } 1 \leq k \leq M + 1. \end{aligned}$$

Da

$$a_k^i(\nu) = t_k^i(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq k < l \\ t_l^i(\nu) = \delta_{\nu_{l-1}, n-i+1} - \delta_{\nu_l, n-i} & \text{falls } l \leq k \leq n+1 \end{cases}$$

gilt, erhalten wir insbesondere

$$t_k^i(\sigma) = \begin{cases} t_k^i(\tau) & \text{falls } 0 \leq k < l \\ t_k^i(\tau) + t_l^i(\nu) & \text{falls } l \leq k \leq n+1 \end{cases} \quad \text{und} \quad (2.2)$$

$$a_k^i(\sigma) = \begin{cases} a_k^i(\tau) & \text{falls } 0 \leq k \leq N \\ a_{N+1}^i(\tau) & \text{falls } N < k < N+l \\ a_{N+1}^i(\tau) + t_l^i(\nu) & \text{falls } N+l \leq k \leq N+M+1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Außerdem kann die Zahl  $\varepsilon_i(\nu) = -\min_{0 \leq k \leq M} a_k^i(\nu)$  nur die Werte 1 und 0 annehmen. Wir unterscheiden also die Fälle  $\varepsilon_i(\nu) = 0$  und  $\varepsilon_i(\nu) = 1$ .

**1. Fall:** Es sei  $\varepsilon_i(\nu) = 0$ . In diesem Falle gilt immer  $\varphi_i(\tau) \geq 0 = \varepsilon_i(\nu)$ . Folglich gilt

$$\tilde{E}_i(\tau \otimes \nu) = \tilde{E}_i \tau \otimes \nu$$

und somit nach Induktionsvoraussetzung

$$\tilde{E}_i \tilde{\sigma} = \begin{cases} \tilde{\sigma} - E_{k_0, n-i} + E_{k_0, n-i+1}, & \text{falls } k_0(\tau) > 0 \\ 0, & \text{falls } k_0(\tau) = 0. \end{cases}$$

Da  $0 = \varepsilon_i(\nu) = -\min t_k^i(\nu)$  ist, so ist  $t_l^i(\nu) \in \{0, 1\}$  für  $l$  wie oben definiert. Falls  $t_l^i(\nu) = 0$  ist, so ist  $t_k^i(\sigma) = t_k^i(\tau)$  für alle  $0 \leq k \leq n+1$  und  $k_0(\sigma) = k_0(\tau)$ . Der Kashiwara-Operator  $\tilde{E}_i$  wirkt also wie wir behauptet haben. Die anderen Aussagen des Lemmas gelten offensichtlich ebenfalls.

Sei also  $t_l^i(\nu) = 1$ , folglich ist  $\nu_{l-1} = n-i+1$  und  $\nu_l < n-i$ . Insbesondere liegen in  $\tau$  in der  $l$ -ten Zeile keine Einträge  $n-i$ , daher gilt

$$t_l^i(\tau) = t_{l-1}^i(\tau) + \tilde{\tau}_{l-1, n-i+1} - \underbrace{\tilde{\tau}_{l, n-i}}_{=0} \geq t_{l-1}^i(\tau)$$

und  $k_0(\tau) \leq l-1$ . Da nach Gleichung (2.2)

$$t_k^i(\sigma) = \begin{cases} t_k^i(\tau), & \text{falls } 0 \leq k < l, \\ t_k^i(\tau) + 1, & \text{falls } l \leq k \leq n+1 \end{cases}$$

gilt, nehmen  $t_k^i(\sigma)$  und  $t_k^i(\tau)$  das gleiche Minimum für ein  $k < l$  an. Insbesondere gilt  $k_0(\sigma) = k_0(\tau)$ . Der Kashiwara-Operator  $\tilde{E}_i$  wirkt also auch in diesem Fall wie wir behauptet haben. Des Weiteren folgt aus den Gleichungen (2.2) und (2.3):

$$t_{n+1}^i(\sigma) = t_{n+1}^i(\tau) + 1 = a_{N+1}(\tau) + 1 = a_{N+M+1}(\sigma)$$

und

$$\min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\sigma) = \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq N} a_k^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq N+M} a_k^i(\sigma).$$

Für den Fall  $\varepsilon_i(\nu) = 0$  ist die Behauptung damit bewiesen.

**2. Fall:** Es sei  $\varepsilon_i(\nu) = 1$ . In diesem Falle ist  $t_l^i(\nu) = -1$  und  $\nu_l = n - i$ ,  $\nu_{l-1} > n - i + 1$ . Sei zuerst

$$\varphi_i(\tau) = a_{N+1}^i(\tau) - \min_{0 \leq k \leq N} a_k^i(\tau) = t_{n+1}^i(\tau) - \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\tau) = 0 < \varepsilon_i(\nu). \quad (2.4)$$

Dann wird das Minimum  $\min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\tau)$  von  $t_{n+1}^i(\tau)$  und wegen  $t_{n+1}^i(\tau) = t_l^i(\tau)$  auch von  $t_l^i(\tau)$  angenommen. Aus der Gleichung (2.2) folgt, dass  $l$  der kleinste Wert ist, für den  $t_l^i(\sigma) = t_l^i(\tau) - 1$  minimal ist, d. h.  $k_0(\sigma) = l$ . Außerdem wirkt nach Gleichung (2.4) der Kashiwara-Operator  $\tilde{E}_i$  auf dem zweiten Faktor des Tensorproduktes:  $\tilde{E}_i(\tau \otimes \nu) = \tau \otimes \tilde{E}_i(\nu)$ . Insbesondere gilt

$$\tilde{E}_i(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma} - E_{l, n-i} + E_{l, n-i+1}.$$

Der Kashiwara-Operator  $\tilde{E}_i$  wirkt also, wie wir behauptet haben.

Aus den Gleichung (2.2), (2.3) und

$$a_{N+1}^i(\tau) = t_{n+1}^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq N} a_k^i(\tau)$$

folgt, dass  $a_{N+M+1}^i(\sigma) = a_{N+l}^i(\sigma) = a_{N+1}^i(\tau) - 1$  und  $t_l^i(\sigma) = t_l^i(\tau) - 1 = t_{n+1}^i(\tau) - 1 = t_{n+1}^i(\sigma)$  minimal sind. Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq k \leq N+M} a_k^i(\sigma) &= a_{N+1}^i(\tau) - 1 = t_{n+1}^i(\tau) - 1 = \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\sigma) \text{ und} \\ a_{N+M+1}^i(\sigma) &= a_{N+1}^i(\tau) - 1 = t_{n+1}^i(\tau) - 1 = t_{n+1}^i(\sigma). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Fall  $\varphi_i(\tau) \geq 1 = \varepsilon_i(\nu)$ . Dann ist die Summe  $t_l^i(\tau) = t_{n+1}^i(\tau)$  wegen  $\varphi_i(\tau) = t_{n+1}^i(\tau) - \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\tau) \geq 1$  nicht minimal. Wir wenden wieder die Gleichung (2.2) an, und schlussfolgern, dass  $t_k^i(\tau)$  und  $t_k^i(\sigma)$  ihr Minimum für die gleichen  $0 \leq k < l$  annehmen, d. h.  $k_0(\tau) = k_0(\sigma) < l$  und  $\min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\sigma)$ . Wegen  $\varphi_i(\tau) \geq \varepsilon_i(\nu)$  operiert  $\tilde{E}_i$  auf dem ersten Faktor des Tensorproduktes:

$$\tilde{E}_i(\tau \otimes \nu) = \tilde{E}_i \tau \otimes \nu.$$

Folglich operiert  $\tilde{E}_i$  wie behauptet:

$$\tilde{E}_i(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} \tilde{\sigma} - E_{k_0, n-i} + E_{k_0, n-i+1} & \text{falls } k_0(\sigma) = k_0(\tau) > 0 \\ 0 & \text{falls } k_0(\sigma) = k_0(\tau) = 0. \end{cases}$$

Wie oben erhalten wir  $a_{N+M+1}^i(\sigma) = t_{n+1}^i(\sigma)$ . Aus der Gleichung (2.3) und

$$a_{N+1}^i(\tau) - 1 = t_{n+1}^i(\tau) - 1 \geq \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq N} a_k^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq N} a_k^i(\sigma)$$

folgt

$$\min_{0 \leq k \leq N+M} a_k^i(\sigma) = \min_{0 \leq k \leq N} a_k^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\tau) = \min_{0 \leq k \leq n} t_k^i(\sigma).$$

Dies beweist die Behauptung.  $\square$

**Korollar 2.5.2.** Es seien  $\lambda, b_\tau \in \mathcal{B}(\lambda)$ ,  $\tau$  und  $\tilde{\tau}$  wie im Lemma 2.5.1. Für  $1 \leq i < n$  und  $0 \leq k \leq n$  definieren wir die alternierenden Summen  $s_k^i = s_k^i(\tau)$ :

$$s_k^i = s_k^i(\tau) = \sum_{j=k}^n \tilde{\tau}_{j,n-i+1} - \sum_{j=k+1}^n \tilde{\tau}_{j,n-i},$$

wobei  $\tilde{\tau}_{n+1,n-i} = 0$  und  $\tilde{\tau}_{0,n-i+1} = 0 = \tilde{\tau}_{0,n-i}$  sind. Des Weiteren sei  $0 \leq k_0 = k_0(\tau) \leq n$  der kleinste Wert, für welchen  $s_{k_0}^i$  maximal ist. Das Basiselement  $\tilde{E}_i b$  wird dann durch  $\tilde{E}_i \tau$  mit

$$\tilde{E}_i \tau = \begin{cases} 0, & \text{falls } k_0 = 0, \\ \tilde{\tau} - E_{k_0,n-i} + E_{k_0,n-i+1}, & \text{falls } k_0 > 0, \end{cases}$$

parametrisiert.

**Beweis** Dies folgt sofort aus dem Lemma 2.5.1, da  $t_k^i = t_{n+1}^i - s_k^i$  für alle  $0 \leq k \leq n$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 2.5.3.** Die Kristallbasis von  $V_m(\lambda) \otimes V_n(\lambda)$  wird durch Paare von SSYT der Form  $\lambda$  parametrisiert. Die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_i \otimes 1$  für  $1 \leq i < m$  (bzw.  $1 \otimes \tilde{E}_j$  für  $1 \leq j < n$ ) operieren dabei auf dem Paar  $(\tau, \sigma)$  von SSYT, indem sie auf  $\tau$  (bzw. auf  $\sigma$ ) wirken.

# Kapitel 3

## Hall-Algebren

Man kann den positiven Anteil der Quantengruppe  $\mathcal{U}_q^+(sl_n)$  auch als sogenannte Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q)$  eines Köchers  $Q$  vom Typ  $A_n$  realisieren. Wir wählen den Köcher so, dass es einen Quotienten der Hall-Algebra gibt, welcher eine durch Matrizen indizierte Basis besitzt. Auf diese Weise erhalten wir eine Operation der Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_i$  auf Matrizen.

Im Abschnitt 3.1 bereiten wir die Definition der Hall-Algebra in Abschnitt 3.2 vor, indem wir die benötigten Begriffe einführen und wichtige Ergebnisse nennen. So definieren wir in 3.1 die Köcheralgebren und stellen den in dieser Arbeit verwendeten Köcher  $Q_{m,n}$  vor. In den Abschnitten 3.3 und 3.4 führen wir die notwendigen Berechnungen durch, um im Abschnitt 3.5 zu beweisen, dass der positive Anteil der Quantengruppe  $\mathcal{U}_q^+(sl_{m+n})$  zur Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  isomorph ist. In dem folgenden Abschnitt betrachten wir einen Quotienten der Hall-Algebra, dessen Basis durch  $(m \times n)$ -Matrizen mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen indiziert wird und der wiederum eine Algebra ist. Schließlich erhalten wir im Abschnitt 3.7 eine Operation der Kashiwara-Operatoren auf  $(m \times n)$ -Matrizen.

### 3.1 Darstellungsendliche Köcheralgebren

**Definition 3.1.1.** Ein Köcher  $Q = (Q_0, Q_1, h, t : Q_1 \rightarrow Q_0)$  ist ein gerichteter Graph mit  $Q_0$  Knoten und  $Q_1$  Pfeilen. Ein Pfeil  $a \in Q_1$  beginnt in dem Knoten  $t(a)$  und endet in dem Knoten  $h(a)$ ; wir schreiben  $t(a) \xrightarrow{a} h(a)$ . Ein Köcher heißt *endlich*, falls seine Knoten- und Pfeilmenge endlich sind. Den zugrundeliegenden Graph  $|Q|$  eines Köchers  $Q$  erhalten wir, indem wir die Orientierung der Pfeile in  $Q$  vergessen. Ein Köcher  $Q$  heißt *zusammenhängend*, falls der Graph  $|Q|$  zusammenhängend ist. Ein Köcher ist *azyklisch*, falls es keine Pfade in  $Q$  mit dem gleichen Start- und Endpunkt gibt.

**Bemerkung 3.1.2.** Die Bezeichnung der beiden Abbildungen  $h, t : Q_1 \rightarrow Q_0$  kommt von den englischen Begriffen „head“ und „tail“.

**Definition 3.1.3.** Ein nicht-trivialer *Pfad* oder *Weg* in  $Q$  ist eine Folge  $a = a_1 a_2 \cdots a_l$  ( $l \geq 1$ ) von Pfeilen mit  $t(a_i) = h(a_{i+1})$  für  $1 \leq i < l$ :

$$\bullet \xleftarrow{a_1} \bullet \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_l} \bullet$$

Der Pfad  $a_1 a_2 \cdots a_l$  beginnt in  $t(a) = t(a_l)$  und endet in  $h(a) = h(a_1)$ , seine *Länge* ist  $l$ . Für jeden Knoten  $i \in Q_0$  definieren wir den *trivialen Pfad*  $e_i$ , der in  $i$  beginnt und endet und dessen Länge 0 ist.

Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Die *Wegealgebra*  $\mathbb{K}Q$  ist die  $\mathbb{K}$ -Algebra, deren zugrundeliegender  $\mathbb{K}$ -Vektorraum als Basis die Wege in  $Q$  besitzt. Zwei Wege  $a = a_1 a_2 \cdots a_l$  und  $b = b_1 b_2 \cdots b_k$  werden miteinander multipliziert, indem wir sie, falls dies möglich ist, miteinander verknüpfen

$$ab = \begin{cases} a_1 a_2 \cdots a_l b_1 b_2 \cdots b_k & \text{falls } t(a) = h(b), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Lemma 3.1.4.** Es sei  $Q$  ein endlicher, azyklischer Köcher. Seine Wegealgebra  $\mathbb{K}Q$  ist dann assoziativ und endlichdimensional. Des Weiteren sind die trivialen Pfade  $\{e_i : i \in Q_0\}$  zueinander orthogonale primitive Idempotente und  $\sum_{i \in Q_0} e_i$  ist das Einselement von  $\mathbb{K}Q$ .

**Beweis** Da die Verknüpfung von Pfaden assoziativ ist, ist die Wegealgebra  $\mathbb{K}Q$  assoziativ. Offensichtlich sind die trivialen Pfade  $e_i$  für alle  $i \in Q_0$  primitive Idempotente und orthogonal zueinander. Da die Menge der Knoten  $Q_0$  endlich ist, existiert das Einselement  $\sum_{i \in Q_0} e_i$ . Da  $Q$  endlich und azyklisch ist, gibt es nur endlich viele Pfade, folglich ist  $\mathbb{K}Q$  endlichdimensional.  $\square$

Mit  $\text{Mod } \mathbb{K}Q$  bezeichnen wir die Kategorie der  $\mathbb{K}Q$ -Moduln. Die Kategorie der endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q$ -Moduln  $\text{mod } \mathbb{K}Q$  ist eine volle Unterkategorie von  $\text{Mod } \mathbb{K}Q$ . Die Kategorie  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q)$  der Darstellungen eines Köchers  $Q$  definieren wir wie folgt.

**Definition 3.1.5.** Eine ( $\mathbb{K}$ -lineare) *Darstellung*  $X = ((X_i)_{i \in Q_0}, (X_a : X_{t(a)} \rightarrow X_{h(a)})_{a \in Q_1})$  über  $\mathbb{K}$  von einem Köcher  $Q$  ist gegeben durch  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $X_i$  für jeden Knoten  $i \in Q_0$  und lineare Abbildungen  $X_a : X_{t(a)} \rightarrow X_{h(a)}$  für jeden Pfeil  $a \in Q_1$ .

Ein *Morphismus*  $\Theta : X \rightarrow X'$  ist durch lineare Abbildungen  $\Theta_i : X_i \rightarrow X'_i$  für  $i \in Q_0$  gegeben, so dass  $X'_a \Theta_{t(a)} = \Theta_{h(a)} X_a$  für alle Pfeile  $a \in Q_1$  gilt:

$$\begin{array}{ccc} X_{t(a)} & \xrightarrow{\Theta_{t(a)}} & X'_{t(a)} \\ \downarrow X_a & & \downarrow X'_a \\ X_{h(a)} & \xrightarrow{\Theta_{h(a)}} & X'_{h(a)}. \end{array}$$

Zwei Morphismen  $\Theta : X \rightarrow X'$  und  $\Theta' : X' \rightarrow X''$  werden miteinander verknüpft, indem wir die einzelnen linearen Abbildungen miteinander verknüpfen. Die so definierte Kategorie der ( $\mathbb{K}$ -linearen) Darstellungen des Köchers  $Q$  bezeichnen wir mit  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ .

**Definition 3.1.6.** Der *Dimensionsvektor* eines endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q$ -Moduls  $X$  ist der Vektor  $\underline{\dim} X = (\dim e_i X)_{i \in Q_0}$ .

Offensichtlich ist  $\dim X = \sum_{i \in Q_0} (\underline{\dim} X)_i$  die Dimension eines  $\mathbb{K}Q$ -Moduls  $X$ . Mit  $\text{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$  bezeichnen wir die volle Unterkategorie von  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ , die aus den endlichdimensionalen Darstellungen besteht.

**Lemma 3.1.7.** Es sei  $Q$  ein endlicher, azyklischer und zusammenhängender Köcher. Dann existiert eine Äquivalenz der Kategorien  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q) \cong \text{Mod } \mathbb{K}Q$ , welche sich auf die Äquivalenz  $\text{rep}_{\mathbb{K}}(Q) \cong \text{mod } \mathbb{K}Q$  einschränkt.

**Beweis** Wir beschreiben hier nur die Konstruktion der Äquivalenz. Für den Beweis verweisen wir auf [1, §III.1].

Falls  $M$  ein  $\mathbb{K}Q$ -Modul ist, so definieren wir eine Köcherdarstellung  $((M_i)_{i \in Q_0}, (\Phi_a)_{a \in Q_1})$  wie folgt:

$$\begin{aligned} M_i &:= e_i M && \text{für } i \in Q_0, \\ \Phi_a(m) &:= am = e_{h(a)} am \in M_{h(a)} && \text{für } m \in M_{t(a)}, a \in Q_1. \end{aligned}$$

Falls  $((M_i)_{i \in Q_0}, (\Phi_a)_{a \in Q_1})$  eine Darstellung des Köchers  $Q$  ist, definieren wir einen  $\mathbb{K}Q$ -Modul wie folgt:

$$\begin{aligned} M &:= \bigoplus_{i \in Q_0} M_i && \text{mit } M_i \xrightarrow{\varepsilon_i} M \xrightarrow{\pi_i} M_i, \\ am &:= \varepsilon_{h(a)} \Phi_a \pi_{t(a)}(m) && \text{für } m \in M, a \in Q_1, \\ e_i m &:= \varepsilon_i \pi_i(m) && \text{für } i \in Q_0, m \in M. \end{aligned}$$

□

**Definition 3.1.8.** Die *Euler-Form*  $R : \mathbb{Z}^{|Q_0|} \times \mathbb{Z}^{|Q_0|} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist die durch

$$R(e_i, e_j) := \begin{cases} 1 & , i = j \\ -1 & , i \rightarrow j \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Bilinearform.

$$\text{Für } x, y \in \mathbb{Z}^{|Q_0|} \text{ gilt } R(x, y) = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{a \in Q_1} x_{t(a)} y_{h(a)}.$$

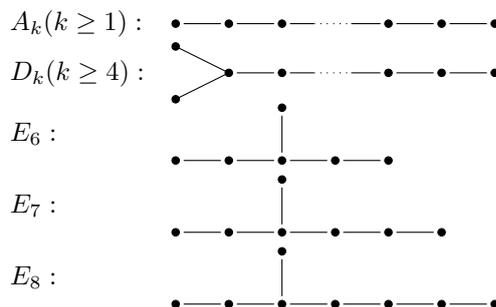
**Lemma 3.1.9.** Es sei  $Q$  ein endlicher, azyklischer und zusammenhängender Köcher. Für endlichdimensionale Darstellungen  $X$  und  $Y$  von  $\mathbb{K}Q$  gilt

$$R(\underline{\dim} X, \underline{\dim} Y) = \dim \text{Hom}(X, Y) - \dim \text{Ext}^1(X, Y).$$

**Beweis** Vgl. [21].

□

Ein Dynkindiagramm vom Typ  $A$ ,  $D$  oder  $E$  ist ein ungerichteter zusammenhängender Graph, der in der folgenden Liste enthalten ist:



Dabei gibt der Index der Dynkindiagramme immer die Anzahl der Knoten im Graph an.

**Satz 3.1.10** (Gabriel). Es sei  $Q$  ein Köcher, dessen zugrundeliegender Graph  $|Q|$  Dynkin, d. h. eine Vereinigung von Dynkindiagrammen vom Typ  $A$ ,  $D$  oder  $E$  ist. Die Abbildung  $\underline{\dim}$  induziert dann eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer  $\mathbb{K}Q$ -Moduln und den positiven Wurzeln  $\Phi^+$  der zu dem Graphen  $|Q|$  assoziierten Lie-Algebra. Insbesondere ist

die Köcheralgebra  $\mathbb{K}Q$  darstellungsendlich, d. h. es gibt nur endlich viele Isomorphieklassen endlichdimensionaler unzerlegbarer  $\mathbb{K}Q$ -Moduln.

**Beweis** Vgl. [1, §VII.5]. □

Nach dem Satz von Krull-Schmidt besitzt jeder endlichdimensionale  $\mathbb{K}Q$ -Modul eine eindeutige Zerlegung in Unzerlegbare. Zusammen mit dem Satz von Gabriel erhalten wir also eine Parametrisierung der endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q$ -Moduln durch Funktionen  $m : \Phi^+ \rightarrow \mathbb{N}_0$ , die unabhängig von dem Körper  $\mathbb{K}$  ist. Wir setzen

$$M(m, \mathbb{K}) := \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} X_\alpha^{m(\alpha)},$$

wobei  $X_\alpha$  der unzerlegbare Modul zur positiven Wurzel  $\alpha$  ist.

Wir fassen nun einige Begriffe zusammen, die wir in den folgenden Kapiteln benötigen werden.

**Definition 3.1.11.** Der *Auslander-Reiten-Köcher*  $\Gamma(\text{mod } \mathbb{K}Q)$  einer Wegealgebra  $\mathbb{K}Q$  ist ein gerichteter Graph dessen Knoten die Isomorphieklassen  $[X]$  endlichdimensionaler unzerlegbarer  $\mathbb{K}Q$ -Moduln  $X$  sind. Die Pfeile zwischen zwei Knoten  $[X]$  und  $[Y]$  stehen in Bijektion zu einer Basis des  $\mathbb{K}$ -Vektorraums der irreduziblen Homomorphismen von  $X$  nach  $Y$ . Die Auslander-Reiten-Verschiebung  $DTr$  und  $Tr$  bezeichnen wir mit  $\tau$  bzw.  $\tau^{-1}$ . (Für eine Definition der irreduziblen Homomorphismen und der Auslander-Reiten-Verschiebung siehe [1, §VI.1].)

**Beispiel 3.1.12.** In dieser Arbeit betrachten wir für  $m, n \in \mathbb{N}$  den Köcher

$$Q_{m,n} := \underset{1-m}{\bullet} \rightarrow \cdots \rightarrow \underset{-1}{\bullet} \rightarrow \underset{0}{\bullet} \leftarrow \underset{1}{\bullet} \leftarrow \cdots \leftarrow \underset{n-1}{\bullet},$$

dessen zugrundeliegender ungerichteter Graph  $|Q_{m,n}|$  ein Dynkin-Diagramm vom Typ  $A_{m+n-1}$  ist. Die endlichdimensionalen unzerlegbaren  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Darstellungen sind durch ihre Dimensionsvektoren eindeutig bestimmt; für  $-m < i \leq j < n$  bezeichnen wir mit  $[i, j]$  die unzerlegbare Darstellung mit Dimensionsvektor  $(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, \dots, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ . Für  $-m < i \leq 0 \leq j < n$  und den Körper  $\mathbb{K}$  sei z. B.

$$[i, j] = 0 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{K} \xrightarrow{id_{\mathbb{K}}} \cdots \xrightarrow{id_{\mathbb{K}}} \mathbb{K} \xleftarrow{id_{\mathbb{K}}} \cdots \xleftarrow{id_{\mathbb{K}}} \mathbb{K} \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} 0.$$

Die einfachen Wurzeln  $\Pi = \{\alpha_i : -m < i < n\}$  entsprechen hierbei den einfachen  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Darstellungen  $[i, i]$  und die positiven Wurzeln  $\Phi^+$  den unzerlegbaren Darstellungen  $[i, j]$  mit  $-m < i \leq j < n$ . Offensichtlich ist  $\mathbb{Z}\Phi \rightarrow \mathbb{Z}^{m+n-1}$ ,  $\alpha_i \mapsto e_i$  für  $-m < i < n$  eine Isomorphie abelscher Gruppen.

Den Auslander-Reiten-Köcher der Wegealgebra  $\mathbb{K}Q_{m,n}$  können wir leicht durch das sogenannte „Stricken“ (vgl. [1, §III.2, IV.3-4]) berechnen. Seine Form erinnert an die eines Fisches, wobei der „Körper des Fisches“ aus den in einer Matrix angeordneten Unzerlegbaren  $[i, j]$  mit  $-m < i \leq 0 \leq j < n$  besteht. Die Unzerlegbaren, deren Vektorraum am Knoten Null der Nullvektorraum ist, bilden die „Flossen des Fisches“. Um der Übersichtlichkeit willen, zeichnen wir in Abbildung 3.1 den Auslander-Reiten-Köcher nicht für allgemeine  $m$  und  $n$  sondern für das Beispiel  $m = 4, n = 3$ .

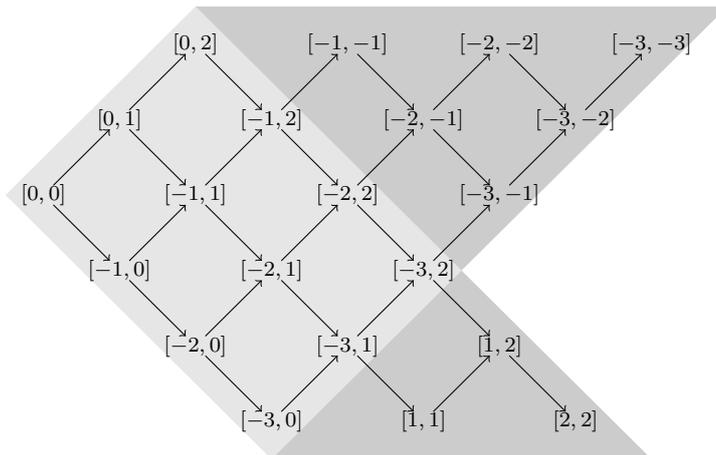


Abbildung 3.1: Auslander-Reiten-Köcher der Wegealgebra  $\mathbb{K}Q_{4,3}$ .

**Definition 3.1.13.** Eine Folge von Unzerlegbaren  $X_1, X_2, \dots, X_N$  heißt *gerichtet*, falls

$$\text{Hom}(X_i, X_j) = 0 \text{ für } i > j \text{ und } \text{Ext}^1(X_j, X_i) = 0 \text{ für } i \geq j$$

gilt. Eine gerichtete Folge, die auch ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen endlichdimensionaler unzerlegbarer Moduln ist, heißt *vollständig*.

Die Abkürzungen  $\langle X, Y \rangle := \dim \text{Hom}(X, Y)$  und  $\langle X, Y \rangle^1 := \dim \text{Ext}^1(X, Y)$  werden im Folgenden verwendet.

**Lemma 3.1.14.** Es sei  $Q$  ein endlicher, zusammenhängender und azyklischer Köcher. Für zwei endlichdimensionale unzerlegbare  $\mathbb{K}Q$ -Moduln  $X$  und  $Y$ , für die es keinen Pfad in dem Auslander-Reiten-Köcher von  $[X]$  nach  $[Y]$  gibt, gelten  $\langle X, Y \rangle = 0$  und  $\langle Y, X \rangle^1 = 0$ . Außerdem hat jeder endlichdimensionale Unzerlegbare  $X$  nur triviale Selbsterweiterungen, d. h.  $\langle X, X \rangle^1 = 0$ .

**Beweis** Da der Auslander-Reiten-Köcher von  $\mathbb{K}Q$  zusammenhängend und endlich ist, lässt sich jeder Homomorphismus zwischen zwei endlichdimensionalen Unzerlegbaren als Linearkombination von Produkten von irreduziblen Homomorphismen darstellen. Es seien  $X$  und  $Y$  zwei endlichdimensionale Unzerlegbare, so dass es keinen Pfad in dem Auslander-Reiten-Köcher von dem Knoten  $[X]$  zu  $[Y]$  gibt. Dies bedeutet, dass es keine irreduziblen Homomorphismen zwischen  $X$  und  $Y$  und insbesondere keine nicht-trivialen Homomorphismen gibt. Das gleiche Argument zeigt, dass es nur triviale Selbsterweiterungen von  $X$  und nur triviale Erweiterungen von  $Y$  mit  $X$  gibt, d. h. es gibt keine nicht-zerfallenden kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0.$$

Insbesondere ist somit  $\langle X, X \rangle^1 = 0$  und  $\langle X, Y \rangle^1 = 0$ . □

**Bemerkung 3.1.15.** Jede Folge  $X_1, X_2, \dots, X_N$  endlichdimensionaler unzerlegbarer  $\mathbb{K}Q$ -Moduln ist gerichtet, falls es für alle  $i > j$  im Auslander-Reiten-Köcher von  $\mathbb{K}Q$  keinen Pfad von  $X_i$  nach  $X_j$  gibt. Da die Algebra  $\mathbb{K}Q_{m,n}$  darstellungsgerichtet ist, d. h. in dem Auslander-Reiten-Köcher  $\Gamma(\text{mod } \mathbb{K}Q_{m,n})$  gibt es nur endlich viele Pfeile und keine Schleifen, existiert eine

vollständig gerichtete Folge unzerlegbarer  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Moduln. Des Weiteren ist auf der Menge der endlichdimensionalen unzerlegbaren  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Moduln durch

$$X \preceq Y \Leftrightarrow \text{Es existiert ein Pfad von } [X] \text{ nach } [Y]$$

eine Halbordnung definiert.

## 3.2 Definition der Hall-Algebra

Im Folgenden sei  $Q$  ein Köcher, dessen zugrundeliegender Graph  $|Q|$  Dynkin ist. Wir können auf dem Vektorraum, dessen Basis durch die Menge der Isomorphieklassen der endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q$ -Darstellungen indiziert ist, eine Algebra, die sogenannte Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q)$  definieren.

Die Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  steht im engen Zusammenhang zu der quantisierten Einhüllenden  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{m+n})$ , deren Dynkin-Diagramm bekanntlich  $|Q_{m,n}|$  ist.

**Definition 3.2.1.** Es sei  $p^k$  eine Primzahlpotenz und  $\mathbb{F}_{p^k}$  der Körper mit  $p^k$  Elementen. Für die Funktionen  $n, m, x : \Phi^+ \rightarrow \mathbb{N}_0$  und die entsprechenden Moduln  $N = M(n, \mathbb{F}_{p^k})$ ,  $M = M(m, \mathbb{F}_{p^k})$  und  $X = M(x, \mathbb{F}_{p^k})$  sei

$$F_{N,M}^X(p^k) = \#\{U \subset X \mid X/U \simeq N, U \simeq M\}$$

die Anzahl der  $\mathbb{F}_{p^k}Q$ -Untermodulfiltrierungen.

**Lemma 3.2.2.** Für beliebige  $\mathbb{K}Q$ -Moduln  $N, M, X$  ist die Funktion  $F_{N,M}^X(y)$  polynomial in  $y$  mit ganzzahligen Koeffizienten. Wir sagen, dass  $F_{N,M}^X(y) \in \mathbb{Z}[y]$  das *Hall-Polynom* zu den Moduln  $N, M$  und  $X$  ist.

**Beweis** Vgl. [22]. □

**Definition 3.2.3.** Es sei  $\mathcal{H}(Q)$  der freie  $\mathbb{Q}(q)$ -Modul mit Basis  $\{u_{[M]}\}_{[M]}$ , wobei  $[M]$  die Isomorphieklassen der endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q$ -Moduln durchläuft. Auf  $\mathcal{H}(Q)$  definieren wir eine Multiplikation:

$$u_{[N]}u_{[M]} := q^{-R(\underline{\dim}M, \underline{\dim}N)} \sum_{[X]} F_{N,M}^X(q^2)u_{[X]},$$

wobei die Summe über alle Isomorphieklassen  $[X]$  endlichdimensionaler  $\mathbb{K}Q$ -Moduln läuft.

**Bemerkung 3.2.4.** Für zwei Moduln  $N, M$  gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen von Moduln  $[X]$  mit  $\underline{\dim}X = \underline{\dim}N + \underline{\dim}M$ , da die Algebra  $\mathbb{K}Q$  darstellungsendlich ist. Folglich ist die Summe in der obigen Definition wohldefiniert.

**Bemerkung 3.2.5.** Die hier verwendete Definition unterscheidet sich von Ringels Definition der Hall-Algebra [23]:

$$u_{[N]} * u_{[M]} := q^{R(\underline{\dim}N, \underline{\dim}M)} \sum_{[X]} F_{N,M}^X(q^2)u_{[X]}.$$

Wir bezeichnen im Folgenden die Hall-Algebra nach Ringel mit  $\mathcal{H}(Q)_*$ . Wir zeigen nun, dass die beiden hier dargestellten Definitionen der Hall-Algebra äquivalent sind, da die beiden Hall-

Algebren isomorph sind. Sei  $X$  eine Erweiterung von der Darstellung  $N$  mit  $M$ . Da die Euler-Form bilinear ist und  $\underline{\dim}X = \underline{\dim}N + \underline{\dim}M$  gilt, folgt:

$$-R(\underline{\dim}M, \underline{\dim}N) - R(\underline{\dim}N, \underline{\dim}N) - R(\underline{\dim}M, \underline{\dim}M) = R(\underline{\dim}N, \underline{\dim}M) - R(\underline{\dim}X, \underline{\dim}X).$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Q)_* &\rightarrow \mathcal{H}(Q) \\ u_{[N]} &\mapsto q^{-R(\underline{\dim}N, \underline{\dim}N)} u_{[N]} \end{aligned}$$

ist somit ein Homomorphismus von Algebren und insbesondere ein Isomorphismus, da ein inverser Homomorphismus existiert.

**Lemma 3.2.6.**  $\mathcal{H}(Q)$  ist eine assoziative  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebra mit  $1 = u_{[0]}$ , sie heißt *Hall-Algebra* zum Köcher  $Q$ .

**Beweis** Vgl. [23]. □

### 3.3 Einige Rechnungen in $\mathcal{H}(Q)$

Wir berechnen nun einige Produkte in  $\mathcal{H}(Q)$ , wobei der zugrundeliegende Graph  $|Q|$  Dynkin ist. Hierbei orientieren wir uns an [23].

**Lemma 3.3.1.** Für einen endlichdimensionalen unzerlegbaren  $\mathbb{K}Q$ -Modul  $X$  und  $l \in \mathbb{N}$  gilt  $u_{[X]}^l = [l]! u_{[X^l]}$ .

**Beweis** Wir beweisen dieses Lemma mit Induktion über  $l$ . Für  $l = 1$  ist die Aussage trivial. Wir berechnen für  $l \geq 1$  das Produkt  $u_{[X^l]} u_{[X]}$ . Wegen  $\text{End}(X) \simeq \mathbb{K}$  und  $\text{Ext}^1(X, X) = 0$  ist  $R(\underline{\dim}X, \underline{\dim}X) = 1$ , folglich gilt

$$R(\underline{\dim}X, \underline{\dim}X^l) = R(\underline{\dim}X, l \underline{\dim}X) = l.$$

Des Weiteren ist wegen  $\langle X^l, X \rangle^1 = l \langle X, X \rangle^1 = 0$  der Modul  $X^{l+1}$  die einzige Erweiterung von  $X^l$  mit  $X$ .

Da  $\text{End}(X) \simeq \mathbb{K}$  gilt, haben alle Homomorphismen  $\varphi \in \text{Hom}(X, X^{l+1})$  die Form

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X^{l+1} \\ x &\mapsto (a_1x, a_2x, \dots, a_{l+1}x), \end{aligned}$$

mit  $a_i \in \mathbb{K}$ . Somit ist für  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{p^k}$  die Anzahl der zu  $X$  isomorphen Untermoduln von  $X^{l+1}$  genau die Anzahl der Punkte des projektiven Raumes  $\mathbb{P}^l(\mathbb{F}_{p^k})$ ; also  $\frac{(p^k)^{l+1} - 1}{p^k - 1}$ . Der Faktor  $X^{l+1}/X$  ist immer isomorph zu  $X^l$ , also gilt  $F_{X^l, X}^{X^{l+1}}(q) = \frac{q^{l+1} - 1}{q - 1}$ . Es folgt

$$u_{[X^l]} u_{[X]} = q^{-l} \frac{q^{2l+2} - 1}{q^2 - 1} u_{[X^{l+1}]} = [l+1] u_{[X^{l+1}]}$$

und per Induktion

$$u_{[X]}^{l+1} = u_{[X]}^l u_{[X]} = [l]! u_{[X^l]} u_{[X]} = [l+1]! u_{[X^{l+1}]}.$$

□

**Lemma 3.3.2.** Es sei  $X_1, X_2, \dots, X_s$  eine gerichtete Folge unzerlegbarer  $\mathbb{K}Q$ -Moduln und  $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für  $M = \bigoplus_{i=1}^s X_i^{a_i}$  die Gleichung

$$u_{[X_1^{a_1}]} u_{[X_2^{a_2}]} \cdots u_{[X_s^{a_s}]} = q^{\langle M, M \rangle^1} u_{[M]}.$$

**Beweis** Wir beweisen dies per Induktion über  $s$ . Die Aussage ist für  $s = 1$  wahr, da

$$\langle X_1^{a_1}, X_1^{a_1} \rangle^1 = a_1^2 \langle X_1, X_1 \rangle^1 = 0.$$

Nach Induktion gilt die Aussage für  $N = \bigoplus_{i=1}^s X_i^{a_i}$ , folglich ist

$$u_{[X_1^{a_1}]} u_{[X_2^{a_2}]} \cdots u_{[X_s^{a_s}]} u_{[X_{s+1}^{a_{s+1}}]} = q^{\langle N, N \rangle^1} u_{[N]} u_{[X_{s+1}^{a_{s+1}}]}.$$

Wir berechnen dieses letzte Produkt, dabei seien  $X := X_{s+1}^{a_{s+1}}$  und  $M := N \oplus X$ . Da  $\langle X_{s+1}, X_i \rangle = 0$  für alle  $1 \leq i \leq s$  gilt, ist  $\langle X, N \rangle = 0$  und somit  $R(\dim X, \dim N) = -\langle X, N \rangle^1$ . Wegen  $\text{Ext}^1(X_i, X_{s+1}) = 0$  für alle  $1 \leq i \leq s$ , ist  $\text{Ext}^1(N, X) = 0$  und insbesondere  $M = N \oplus X$  die einzige Erweiterung von  $N$  mit  $X$ . Da der einzige Homomorphismus zwischen  $X$  und  $N$  der Nullhomomorphismus ist, ist der direkte Summand  $X$  von  $M$  der einzige zu  $X$  isomorphe Untermodul von  $M$  und somit  $F_{N,X}^M(q^2) = 1$ . Folglich ist  $u_{[N]} u_{[X]} = q^{\langle X, N \rangle^1} u_{[N \oplus X]}$ . Wir wenden noch einmal an, dass  $\text{Ext}^1(N, X) = 0$  und  $\text{Ext}^1(X, X) = 0$  gelten, und erhalten

$$\langle N \oplus X, N \oplus X \rangle^1 = \langle N, N \rangle^1 + \langle X, N \rangle^1.$$

Dies beweist das Lemma. □

### 3.4 Einige Rechnungen in $\mathcal{H}(Q_{m,n})$

Wir wollen nun zeigen, dass die Relationen von  $U_q^+(sl_{m+n})$  auch in der Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  gelten.

**Lemma 3.4.1.** In der Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  gelten für alle  $-m < k \leq l < n$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{[l+1, l+1]} u_{[k, l]} &= u_{[k, l+1]} + q^{-1} u_{[k, l]} u_{[l+1, l+1]} \text{ für } 0 \leq l < n-1, \\ u_{[k-1, k-1]} u_{[k, l]} &= u_{[k-1, l]} + q^{-1} u_{[k, l]} u_{[k-1, k-1]} \text{ für } -m+1 < k \leq 0. \end{aligned}$$

**Beweis** Wir zeigen die erste Gleichung für  $0 \leq l < n-1$ . Jede Erweiterung  $X$  von  $[k, l]$  mit  $[l+1, l+1]$  hat den Dimensionsvektor  $e_k + \cdots + e_l + e_{l+1}$  und ist folglich isomorph zu  $[k, l+1]$  oder  $[k, l] \oplus [l+1, l+1]$ . In beiden Fällen gibt es genau einen zu  $[k, l]$  isomorphen Untermodul  $U$  von  $X$ . Da der Quotient  $X/U$  jeweils isomorph zu  $[l+1, l+1]$  ist, erhalten wir zusammen mit  $R(e_k + \cdots + e_l, e_{l+1}) = 0$  die Gleichung

$$u_{[l+1, l+1]} u_{[k, l]} = u_{[k, l+1]} + u_{[k, l] \oplus [l+1, l+1]}.$$

Da es in dem Auslander-Reiten-Köcher von  $\mathbb{K}Q_{m,n}$  keinen Pfad von dem Knoten  $[l+1, l+1]$  zu  $[k, l]$  gibt, ist die Folge  $[k, l], [l+1, l+1]$  gerichtet. Wir können also Lemma 3.3.2 anwenden.

Wegen

$$\begin{aligned} \langle [k, l] \oplus [l+1, l+1], [k, l] \oplus [l+1, l+1] \rangle^1 &= \langle [l+1, l+1], [k, l] \rangle^1 \\ &= \langle [l+1, l+1], [k, l] \rangle - R(e_{l+1}, e_k + \dots + e_l) = 1 \end{aligned}$$

ist  $u_{[k,l]}u_{[l+1,l+1]} = qu_{[k,l] \oplus [l+1,l+1]}$ . Dies beweist die Behauptung für  $0 \leq l$ . Die zweite Behauptung folgt analog.  $\square$

**Lemma 3.4.2.** Für die einfachen  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Moduln  $[i, i]$  mit  $-m < i < n$  gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} u_{[i,i]}u_{[j,j]} - u_{[j,j]}u_{[i,i]} &= 0 \text{ für } |i-j| > 1, \\ u_{[i,i]}^2u_{[j,j]} - (q+q^{-1})u_{[i,i]}u_{[j,j]}u_{[i,i]} + u_{[j,j]}u_{[i,i]}^2 &= 0 \text{ für } |i-j| = 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

**Beweis** Für alle einfachen Moduln  $[i, i]$  und  $[j, j]$  mit  $i \neq j$  gilt nach Schurs Lemma  $\langle [i, i], [j, j] \rangle = 0$ . Für  $|i-j| > 1$  ist  $R(e_i, e_j) = 0 = R(e_j, e_i)$  und somit gilt  $\langle [i, i], [j, j] \rangle^1 = 0$  und  $\langle [j, j], [i, i] \rangle^1 = 0$ . Nach Lemma 3.3.2 gilt

$$u_{[i,i]}u_{[j,j]} = u_{[i,i] \oplus [j,j]} = u_{[j,j]}u_{[i,i]}.$$

Es sei nun  $|i-j| = 1$ . Wegen der Symmetrie des Köchers  $Q_{m,n}$  können wir ohne Einschränkung  $0 \leq i, j$  annehmen. Es folgen nun einige Vorüberlegungen.

Wegen  $R(e_i, e_{i+1}) = 0$  und  $R(e_{i+1}, e_i) = -1$  gilt  $\langle [i, i], [i+1, i+1] \rangle^1 = 0$  bzw.  $\langle [i+1, i+1], [i, i] \rangle^1 = 1$ . Insbesondere ist  $[i, i], [i+1, i+1]$  gerichtet. Nach Bemerkung 3.1.15 ist auch  $[i, i], [i, i+1]$  gerichtet. Wir wenden beide Lemmata aus Abschnitt 3.3 an und erhalten:

$$u_{[i,i]}u_{[i+1,i+1]} = qu_{[i,i] \oplus [i+1,i+1]}, \quad (3.2)$$

$$u_{[i,i]}^2u_{[i+1,i+1]} = [2]u_{[i,i]}^2u_{[i+1,i+1]} = [2]q^2u_{[i,i]^2 \oplus [i+1,i+1]}, \quad (3.3)$$

$$u_{[i,i]}u_{[i,i+1]} = u_{[i,i] \oplus [i,i+1]}. \quad (3.4)$$

Für die Berechnung der Vorfaktoren haben wir Lemma 3.1.9 und die Bilinearität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle^1$  genutzt. So gilt z. B.

$$\begin{aligned} \langle [i, i] \oplus [i, i+1], [i, i] \oplus [i, i+1] \rangle^1 &= \langle [i, i+1], [i, i] \rangle^1 \\ &= \langle [i, i+1], [i, i] \rangle - R(e_i + e_{i+1}, e_i) = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma 3.4.1 gilt außerdem

$$u_{[i+1,i+1]}u_{[i,i]} = u_{[i,i+1]} + u_{[i,i] \oplus [i+1,i+1]}. \quad (3.5)$$

Wir wollen nun die Relation (3.1) für  $j = i+1$  zeigen. Mit Hilfe der Vorüberlegungen erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{[i,i]}(u_{[i+1,i+1]}u_{[i,i]}) &\stackrel{(3.5),(3.2)}{=} u_{[i,i]}(u_{[i,i+1]} + q^{-1}u_{[i,i]}u_{[i+1,i+1]}) \\ &\stackrel{(3.4),(3.3)}{=} u_{[i,i] \oplus [i,i+1]} + (q^2 + 1)u_{[i,i]^2 \oplus [i+1,i+1]}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wir berechnen nun das Produkt  $u_{[i+1,i+1]}u_{[i,i]}^2 = [2]u_{[i+1,i+1]}u_{[i,i]}^2$ . Jede Erweiterung  $X$  von  $[i+1, i+1]$  mit  $[i, i]^2$  hat die Dimension  $2e_i + e_{i+1}$  und kann folglich nur zu  $[i, i] \oplus [i, i+1]$  oder  $[i, i]^2 \oplus [i+1, i+1]$  isomorph sein. In beiden Fällen gibt es genau einen zu  $[i, i]^2$  isomorphen Untermodul  $U \subset X$ , dessen Quotient  $X/U$  zusätzlich auch isomorph zu  $[i+1, i+1]$  ist. Wegen  $R(2e_i, e_{i+1}) = 0$  gilt

$$u_{[i+1,i+1]}u_{[i,i]}^2 = [2](u_{[i,i]^2 \oplus [i+1,i+1]} + u_{[i,i] \oplus [i,i+1]}). \quad (3.7)$$

Aus den Gleichungen (3.3), (3.6) und (3.7) folgt sofort die Relation (3.1) für  $j = i + 1$ .

Als letztes beweisen wir nun, dass die Relation (3.1) für  $j = i - 1 \geq 0$  gilt. Dafür berechnen wir zuerst das Produkt  $u_{[i,i]}^2u_{[i-1,i-1]} = [2]u_{[i,i]^2}u_{[i-1,i-1]}$ . Mit dem gleichen Dimensionsargument wie oben sehen wir, dass  $[i-1, i] \oplus [i, i]$  und  $[i-1, i-1] \oplus [i, i]^2$  die einzigen Erweiterungen von  $[i-1, i-1]$  mit  $[i, i]^2$  sind. Beide Kandidaten besitzen genau einen zu  $[i-1, i-1]$  isomorphen Untermodul, dessen Quotient isomorph zu  $[i, i]^2$  ist. Wegen  $R(e_{i-1}, 2e_i) = 0$  ist somit

$$u_{[i,i]}^2u_{[i-1,i-1]} = [2](u_{[i-1,i] \oplus [i,i]} + u_{[i-1,i-1] \oplus [i,i]^2}). \quad (3.8)$$

Da  $[i-1, i-1]$ ,  $[i, i]$  und  $[i-1, i]$ ,  $[i, i]$  gerichtet sind, gelten folgende Gleichungen:

$$u_{[i-1,i-1]}u_{[i,i]}^2 = [2]u_{[i-1,i-1]}u_{[i,i]^2} = [2]q^2u_{[i-1,i-1] \oplus [i,i]^2}, \quad (3.9)$$

$$u_{[i-1,i]}u_{[i,i]} = u_{[i-1,i] \oplus [i,i]}. \quad (3.10)$$

Schließlich rechnen wir noch

$$\begin{aligned} (u_{[i,i]}u_{[i-1,i-1]}u_{[i,i]}) &\stackrel{(3.5),(3.2)}{=} (u_{[i-1,i]} + q^{-1}u_{[i-1,i-1]}u_{[i,i]})u_{[i,i]} \\ &\stackrel{(3.10),(3.9)}{=} u_{[i-1,i] \oplus [i,i]} + (q^2 + 1)u_{[i-1,i-1] \oplus [i,i]^2}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.8) und (3.9), folgt sofort die Relation (3.1) für  $j = i - 1$ .  $\square$

### 3.5 Zusammenhang zur Quantengruppe

Ringel zeigte in [23], dass der positive Anteil der Quantengruppe einer Lie-Algebra, deren Dynkin-Diagramm eine Vereinigung von Dynkin-Diagrammen vom Typ  $A$ ,  $D$  oder  $E$  ist, zu der Hall-Algebra eines entsprechenden Köchers isomorph ist. In diesem Kapitel beweisen wir Ringels Satz für unseren speziellen Fall des Köchers  $Q_{m,n}$ , dabei orientieren wir uns an der Vorgehensweise in [23].

Im Folgenden sei  $\mathcal{U}_q(sl_{m+n})$  von den Elementen  $E_i, F_i, K_i$  und  $K_i^{-1}$ ,  $-m < i < n$  erzeugt. Es gibt dann natürliche Einbettungen der Algebren  $\mathcal{U}_q(sl_m) = \langle E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} : -m < i < 0 \rangle$  und  $\mathcal{U}_q(sl_n) = \langle E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} : 0 < i < n \rangle$  in  $\mathcal{U}_q(sl_{m+n})$ .

**Lemma 3.5.1.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{U}_q^+(sl_{m+n}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(Q_{m,n}) \\ E_i &\mapsto u_{[i,i]} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebren, wobei  $[i, i]$ ,  $-m < i < n$ , die einfachen Darstellungen des K\"ochers  $Q_{m,n}$  sind. Insbesondere sind die beiden Quotienten  $\mathcal{H}(Q_{m,n}) / \sum_{i \neq 0} \mathcal{H}(Q_{m,n}) u_{[i,i]}$  und  $U_q^+(sl_{m+n}) / \sum_{i \neq 0} U_q^+(sl_{m+n}) E_i$  zueinander isomorph.

**Beweis** Wir zeigen, dass  $\eta : U_q^+(sl_{m+n}) \rightarrow \mathcal{H}(Q_{m,n})$  ein Isomorphismus ist, die Isomorphie der Quotienten folgt dann sofort.

Nach Lemma 3.4.2 ist  $\eta$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren, da die definierenden Relationen von  $U_q^+(sl_{m+n})$  in  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  erf\"ullt sind.

Im Folgenden zeigen wir, dass die Menge  $\{u_{[i,i]} : -m < i < n\}$  die Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  als Algebra erzeugt. Nach den Lemmata in Abschnitt 3.3 gen\"ugt es zu zeigen, dass jedes Element  $u_{[k,l]}$  f\"ur  $-m < k \leq l < n$  von den  $u_{[i,i]}$ ,  $-m < i < n$  erzeugt wird. Die Aussage ist f\"ur  $k = l$  trivial. Sei  $l$  o. B. d. A. nichtnegativ; nach Lemma 3.4.1 wird mit  $u_{[k,l]}$  auch das Element  $u_{[k,l+1]}$  von den  $u_{[i,i]}$  mit  $-m < i < n$  erzeugt. Da somit  $\{u_{[i,i]} : -m < i < n\}$  die Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  erzeugt, ist  $\eta$  surjektiv.

Wir beweisen die Injektivit\"at lokal, d. h. wir definieren eine Graduierung auf beiden Algebren und vergleichen die Dimensionen der homogenen Teilr\"aume dieser Graduierung. F\"ur jedes  $\underline{d} \in \mathbb{N}_0^{m+n-1}$  definieren wir die  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorr\"aume  $\mathcal{H}(Q_{m,n})_{\underline{d}} := \langle u_{[M]} : \underline{\dim} M = \underline{d} \rangle$  und  $U_{\underline{d}}^+ := \langle E_{i_1} \cdots E_{i_s} : E_j \text{ tritt } d_j\text{-mal auf} \rangle$ . Offensichtlich definieren wir dadurch eine Graduierung der Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  und des positiven Anteils der quantisierten Einh\"ullenden  $U_q^+(sl_{m+n})$ , da die definierenden Relationen (U5) aus der Definition 2.2.1 homogen bez\"uglich der Graduierung sind. Da der Epimorphismus  $\eta$  die Graduierungen respektiert, gen\"ugt es zu zeigen, dass die Dimension von  $U_{\underline{d}}^+$  als  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorraum nicht gr\"o\sser als die Dimension von  $\mathcal{H}(Q_{m,n})_{\underline{d}}$  ist. Die Dimension des  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorraumes  $\mathcal{H}(Q_{m,n})_{\underline{d}}$  ist

$$\dim_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{H}(Q_{m,n})_{\underline{d}} = \#\{[M] : \underline{\dim} M = \underline{d}\} = \#\{m : \Phi^+ \rightarrow \mathbb{N}_0 : \sum_{\alpha \in \Phi^+} m(\alpha)\alpha = \underline{d}\}.$$

Wir bestimmen nun die Dimension von  $U_{\underline{d}}^+$  indem wir die Spezialisierung von  $U_q^+(sl_{m+n})$  an  $q = 1$  beschreiben. Es sei daf\"ur  $B = \mathbb{Q}[q]_{(q-1)}$  die Lokalisierung des Ringes  $\mathbb{Q}[q]$  an dem Primideal  $(q-1)$ . Dieser ist ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenk\"orper  $\mathbb{Q}$  und Quotientenk\"orper  $\mathbb{Q}(q)$ . Es sei  $\mathcal{U}_B$  die  $B$ -Algebra mit den Erzeugenden  $E_{-m+1}, \dots, E_{-1}, E_0, E_1, \dots, E_{n-1}$  und den Relationen (U5) aus Definition 2.2.1. Offensichtlich gilt dann  $\mathbb{Q}(q) \otimes_B \mathcal{U}_B^+ \simeq U_q^+(sl_{m+n})$ . Die  $\mathbb{Q}$ -Algebra  $\mathcal{U}_1^+ := \mathbb{Q}[q]_{(q-1)} / (q-1) \otimes_B \mathcal{U}_B^+ \simeq \mathbb{Q} \otimes_B \mathcal{U}_B^+$  ist die Spezialisierung von  $U_q^+(sl_{m+n})$  an  $q = 1$ . Sie hat die Erzeugenden  $E_{-m+1}, \dots, E_{n-1}$  und die Relationen

$$\begin{aligned} E_i^2 E_j - 2E_i E_j E_i + E_j E_i^2 &= 0 \quad \text{f\"ur } |i-j| = 1 \text{ und} \\ E_i E_j &= E_j E_i \quad \text{f\"ur } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_1^+$  isomorph zu dem positiven Anteil  $U^+(sl_{m+n})$  der universellen Einh\"ullenden der komplexen Lie-Algebra  $sl_{m+n}$ . Es existiert eine Zerlegung  $sl_{m+n} = n^- \oplus \mathfrak{h} \oplus n^+$  der halbeinfachen komplexen Lie-Algebra  $sl_{m+n}$ . Die positiven Wurzeln  $\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$  indizieren eine Basis  $\{x_1, \dots, x_s\}$  des positiven Anteils  $n^+ = \bigoplus_{\beta \in \Phi^+} L_\beta$ , wobei  $L_\beta$  die eindimensionalen Wurzelr\"aume sind [11, §8]. Nach dem Satz von Poincar\'e-Birkhoff-Witt erzeugt  $\{x_1^{a_1} \cdots x_s^{a_s} : (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N}_0^s\}$  den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $U^+(sl_{m+n})$  [11, §17]. Wir definieren auf  $\mathcal{U}_1^+$  und  $U_B^+$  Graduierungen analog zu der Graduierung auf  $U_q^+(sl_{m+n})$ . Da der Isomorphismus

$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_1^+ \simeq \mathcal{U}^+(sl_{m+n})$  die Graduierung respektiert, gilt

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{1,\underline{d}}^+ \leq \#\{(a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N}_0^s : \sum_{i=1}^s a_i \beta_i = \underline{d}\} = \dim_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{H}(Q_{m,n})_{\underline{d}}.$$

Da  $\mathcal{U}_B^+$  ein endlich erzeugter  $B$ -Modul und  $B$  ein lokaler Ring sind, ist  $\mathcal{U}_B^+$  als  $B$ -Modul isomorph zu  $B^k \oplus T$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und einen Torsionsmodul  $T$ . Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\underline{d}}^+ &= \mathbb{Q}(q) \otimes_B \mathcal{U}_{B,\underline{d}}^+ \simeq (\mathbb{Q}(q) \otimes_B B^k) \oplus (\mathbb{Q}(q) \otimes_B T) \simeq \mathbb{Q}(q)^k \text{ und} \\ \mathcal{U}_{1,\underline{d}}^+ &= \mathbb{Q} \otimes_B \mathcal{U}_{B,\underline{d}}^+ \simeq (\mathbb{Q} \otimes_B B^k) \oplus (\mathbb{Q} \otimes_B T) \simeq \mathbb{Q}^l, \end{aligned}$$

wobei  $k \leq l$  sei. Somit gilt

$$\dim_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{U}_{\underline{d}}^+ = k \leq l = \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{1,\underline{d}}^+ \leq \dim_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{H}(Q_{m,n})_{\underline{d}}.$$

Folglich ist der Epimorphismus  $\eta$  injektiv und somit ein Isomorphismus.  $\square$

### 3.6 Der Quotient $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$

**Lemma 3.6.1.** Die Unteralgebra  $\langle u_{[i,j]} : -m < i \leq 0 \leq j < n \rangle$  wird als  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorraum von den Elementen  $u_{[M]}$  mit  $M = \bigoplus_{\substack{-m < i \leq 0 \\ 0 \leq j < n}} [i, j]^{a_{i,j}}$  erzeugt. Des Weiteren ist

$$\mathcal{H}(Q_{m,n}) / \sum_{i \neq 0} \mathcal{H}(Q_{m,n}) u_{[i,i]} \simeq \langle u_{[i,j]} : -m < i \leq 0 \leq j < n \rangle$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

**Beweis** Im Folgenden unterteilen wir die Menge der Isomorphieklassen von endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Moduln in

$$\mathcal{M} := \{[M] : M = \bigoplus_{i \leq 0 \leq j} [i, j]^{a_{i,j}}, a_{i,j} \geq 0\}$$

$$\mathcal{X} := \{[M] : M \simeq M' \oplus [i, j] \text{ mit } i \leq j < 0 \text{ oder } 0 < i \leq j \text{ und } M' \in \text{mod } \mathbb{K}Q_{m,n}\}.$$

Nach Bemerkung 3.1.15 können wir die Isomorphieklassen endlichdimensionaler unzerlegbarer  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Moduln so sortieren, dass die Folge

$$\underbrace{[i_1, j_1], \dots, [i_k, j_k]}_{\in \mathcal{M}}, \underbrace{[i_{k+1}, j_{k+1}], \dots, [i_N, j_N]}_{\in \mathcal{X}}$$

gerichtet ist.

Zuerst beweisen wir, dass die Unteralgebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n}) := \langle u_{[i,j]} : -m < i \leq 0 \leq j < n \rangle$  als Vektorraum über  $\mathbb{Q}(q)$  von  $\{u_{[M]} : [M] \in \mathcal{M}\}$  erzeugt wird. Nach den Lemmata 3.3.1 und 3.3.2 ist  $u_{[M]}$  für jedes  $[M] \in \mathcal{M}$  in dem Vektorraum  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  enthalten.

Es seien  $[M], [N] \in \mathcal{M}$ . Wir wollen zeigen, dass alle Erweiterungen von  $M$  und  $N$  wieder in  $\mathcal{M}$  liegen. Angenommen es gibt ein  $[X] \in \mathcal{X}$ , das eine Erweiterung von  $M$  mit  $N$  ist, d. h.

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \rightarrow 0.$$

O. B. d. A. sei  $[i, j]$  mit  $0 < i \leq j < n$  ein direkter Summand von  $X$ . Da der einzige Homomorphismus zwischen  $[i, j]$  und  $M$  der Nullhomomorphismus ist, muss  $[i, j]$  ein direkter Summand von  $N$  sein; dies ist ein Widerspruch zu  $[N] \in \mathcal{M}$ . Insbesondere ist  $u_{[M]}u_{[N]} = \sum_{[X] \in \mathcal{M}} a_{[X]}u_{[X]}$  und die Algebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  wird als  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorraum also tatsächlich von den Elementen  $\{u_{[M]} : [M] \in \mathcal{M}\}$  erzeugt.

Um den zweiten Teil des Lemmas zu beweisen, zeigen wir, dass

$$\mathcal{I}(Q_{m,n}) := \sum_{l \neq 0} \mathcal{H}(Q_{m,n})u_{[l,l]} = \left\{ \sum_{[X] \in \mathcal{X}} a_{[X]}u_{[X]} : a_{[X]} \in \mathbb{Q}(q) \right\}$$

gilt.

Wir werden jetzt induktiv beweisen, dass alle Elemente  $u_{[i,j]}$  für  $i \leq j < 0$  und  $0 < i \leq j$  in dem Ideal  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$  enthalten sind. O. B. d. A. sei  $0 < i \leq j$ . Offensichtlich ist diese Aussage für  $i = j$  wahr. Nach Lemma 3.4.1 ist mit  $u_{[i,j]}$  auch  $u_{[i,j+1]} = u_{[j+1,j+1]}u_{[i,j]} + q^{-1}u_{[i,j]}u_{[j+1,j+1]}$  in dem Ideal  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$  enthalten. Nach dem Lemma 3.3.2 ist somit  $u_{[X]}$  für alle  $[X] \in \mathcal{X}$  in dem Ideal  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$  enthalten.

Wir zeigen nun, dass alle Elemente in dem Ideal  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$  die Form  $\sum_{[Y] \in \mathcal{X}} a_{[Y]}u_{[Y]}$  haben. Dafür betrachten wir  $u_{[X]}u_{[l,l]} = \sum_{[Y]} a_{[Y]}u_{[Y]}$  für  $l \neq 0$ . Da es für alle  $[M] \in \mathcal{M}$  keine Homomorphismen zwischen  $[l, l]$  und  $M$  außer dem Nullhomomorphismus gibt, existiert keine kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow [l, l] \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow 0,$$

insbesondere ist  $a_{[M]} = 0$ . Das Ideal  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$  wird also als  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorraum von den Elementen  $u_{[X]}$  mit  $[X] \in \mathcal{X}$  erzeugt. Da  $\{u_{[Y]} : [Y] \in \mathcal{M} \cup \mathcal{X}\}$  eine Basis von  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  ist, gilt insbesondere  $\mathcal{H}(Q_{m,n}) = \mathcal{M}(Q_{m,n}) \oplus \mathcal{I}(Q_{m,n})$ . Die Algebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  ist somit als  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorraum isomorph zu dem Quotienten  $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$ .  $\square$

**Bemerkung 3.6.2.** Im Weiteren nutzen wir die Abkürzungen aus dem Beweis. Wir bezeichnen folglich die Unter algebra  $\langle u_{[i,j]} : -m < i \leq 0 \leq j < n \rangle$  mit  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  und das Ideal  $\sum_{i \neq 0} \mathcal{H}(Q_{m,n})u_{[i,i]}$  mit  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$ .

**Lemma 3.6.3.** In der Algebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  gelten die folgenden Gleichungen:

$$u_{[i,j]}u_{[i,l]} = q^{-1}u_{[i,l]}u_{[i,j]} \tag{3.11}$$

$$u_{[i,j]}u_{[k,j]} = q^{-1}u_{[k,j]}u_{[i,j]} \tag{3.12}$$

$$u_{[i,l]}u_{[k,j]} = u_{[k,j]}u_{[i,l]} \tag{3.13}$$

$$u_{[i,j]}u_{[k,l]} - u_{[k,l]}u_{[i,j]} = (q^{-1} - q)u_{[i,l]}u_{[k,j]}, \tag{3.14}$$

wobei  $-m < k < i \leq 0 \leq j < l < n$  gilt.

**Beweis** Wir beweisen zuerst, dass die Relation (3.11) gilt; die Gleichung (3.12) folgt analog.

Da die Folge  $[i, j], [i, l]$  gerichtet ist, erhalten wir

$$\langle [i, j] \oplus [i, l], [i, j] \oplus [i, l] \rangle^1 = \langle [i, l], [i, j] \rangle^1 = -R(\underline{\dim}[i, l], \underline{\dim}[i, j]) = 0$$

und

$$u_{[i,j]}u_{[i,l]} = u_{[i,j] \oplus [i,l]}.$$

Um das Produkt  $u_{[i,l]}u_{[i,j]}$  auszurechnen, müssen wir alle Erweiterungen  $X$  von  $[i, l]$  mit  $[i, j]$  bestimmen. Da jede solche Erweiterung  $X$ , wie wir im Beweis von Lemma 3.6.1 festgestellt haben, die Form  $X \simeq \bigoplus_{s \leq 0 \leq t} [s, t]^{a_{s,t}}$  mit  $a_{s,t} \in \mathbb{N}_0$  hat und außerdem die Dimension  $\underline{\dim}[i, j] + \underline{\dim}[i, l]$  besitzt, muss  $X$  isomorph zu der direkten Summe  $[i, j] \oplus [i, l]$  sein. Es sei  $p$  eine Primzahl und  $s$  eine natürliche Zahl echt größer Null. Wir bestimmen nun die Anzahl der zu  $[i, j]$  isomorphen Untermoduln  $U$  der  $\mathbb{F}_{p^s}Q_{m,n}$ -Darstellung  $[i, j] \oplus [i, l]$ , für die der Quotient  $[i, j] \oplus [i, l]/U$  isomorph zu  $[i, l]$  ist:

$$\begin{aligned} F_{[i,l],[i,j]}^{[i,j] \oplus [i,l]}(p^s) &= \#\{\iota : [i, j] \hookrightarrow [i, j] \oplus [i, l] \mid [i, j] \oplus [i, l]/\iota([i, j]) \simeq [i, l]\} \\ &= \#\{\iota : [i, j] \hookrightarrow [i, j] \oplus [i, l] \mid \iota([i, j]) \cap [i, j] \neq 0\} \\ &= \#\{\mathbb{F}_{p^s} \simeq [i, j]_t \hookrightarrow [i, j]_t \oplus [i, l]_t \simeq \mathbb{F}_{p^s}^2, i \leq t \leq j\} - 1 \\ &= \frac{(p^s)^2 - 1}{p^s - 1} - 1 = p^s. \end{aligned}$$

Die Gleichung (3.11) folgt sofort aus

$$u_{[i,l]}u_{[i,j]} = q^{-(j-i+1)+(j-i)}(q^2u_{[i,j] \oplus [i,l]}) = qu_{[i,j] \oplus [i,l]}.$$

Die Folgen  $[i, l], [k, j]$  und  $[k, j], [i, l]$  sind jeweils gerichtet, da es keinen Pfad zwischen den entsprechenden Knoten im Auslander-Reiten-Köcher gibt. Insbesondere ist

$$\langle [i, l] \oplus [k, j], [i, l] \oplus [k, j] \rangle^1 = 0.$$

Nach Lemma 3.3.2 gilt also die Gleichung

$$u_{[i,l]}u_{[k,j]} = u_{[i,l] \oplus [k,j]} = u_{[k,j]}u_{[i,l]}. \quad (3.15)$$

Um die Gleichung (3.14) zu beweisen, berechnen wir nun die Produkte  $u_{[i,j]}u_{[k,l]}$  und  $u_{[k,l]}u_{[i,j]}$ . Da die Folge  $[i, j], [k, l]$  gerichtet ist und

$$\langle [i, j] \oplus [k, l], [i, j] \oplus [k, l] \rangle^1 = \langle [k, l], [i, j] \rangle^1 = -R(\underline{\dim}[k, l], \underline{\dim}[i, j]) = 1$$

gilt, ist

$$u_{[i,j]}u_{[k,l]} = qu_{[i,j] \oplus [k,l]}.$$

Wir berechnen nun  $u_{[k,l]}u_{[i,j]}$ . Die Betrachtung der Dimensionsvektoren zeigt wieder, dass jede Erweiterung  $X$  von  $[k, l]$  mit  $[i, j]$  entweder isomorph zu  $[i, j] \oplus [k, l]$  oder zu  $[i, l] \oplus [k, j]$  ist. Der Faktor  $F_{[k,l],[i,j]}^{[i,j] \oplus [k,l]}(p^s)$  ist die Anzahl der möglichen Einbettungen von  $[i, j]$  in  $[i, j] \oplus [k, l]$ ,

so dass der Kokern isomorph zu  $[k, l]$  ist:

$$\begin{aligned} F_{[k,l],[i,j]}^{[i,j]\oplus[k,l]}(p^s) &= \#\{\iota : [i, j] \hookrightarrow [i, j] \oplus [k, l] \text{ mit } [i, j] \oplus [k, l]/\iota([i, j]) \simeq [k, l]\} \\ &= \#\{\iota : [i, j] \hookrightarrow [i, j] \oplus [k, l] \text{ mit } \iota([i, j]) \cap [i, j] \neq 0\} \\ &= \frac{(p^s)^2 - 1}{p^s - 1} - 1 = p^s. \end{aligned}$$

Den Vorfaktor  $F_{[k,l],[i,j]}^{[i,l]\oplus[k,j]}(q^2)$  berechnen wir ähnlich:

$$\begin{aligned} F_{[k,l],[i,j]}^{[i,l]\oplus[k,j]}(p^s) &= \#\{\iota : [i, j] \hookrightarrow [i, l] \oplus [k, j] \text{ mit } [i, l] \oplus [k, j]/\iota([i, j]) \simeq [k, l]\} \\ &= \#\{\iota : [i, j] \hookrightarrow [i, l] \oplus [k, j] \text{ mit } \iota([i, j]) \cap [i, l] \neq 0, \iota([i, j]) \cap [k, j] \neq 0\} \\ &= \frac{(p^s)^2 - 1}{p^s - 1} - 2 = p^s - 1. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} u_{[k,l]}u_{[i,j]} &= q^{-(j-i+1)+(j-i)}(q^2u_{[i,j]\oplus[k,l]} + (q^2 - 1)u_{[i,l]\oplus[k,j]}) \\ &= qu_{[i,j]\oplus[k,l]} + (q - q^{-1})u_{[i,l]\oplus[k,j]}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.15) beweist dies die Gleichung (3.14).  $\square$

### 3.7 Kashiwara-Operatoren auf $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$

Um Kashiwara-Operatoren auf der Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n}) \simeq \mathcal{U}_q^+(sl_{m+n})$  definieren zu können, müssen wir die Operation des positiven Anteils  $\mathcal{U}_q^+(sl_{m+n})$  auf der Hall-Algebra zu einer Operation der Quantengruppe  $\mathcal{U}_q(sl_{m+n})$  auf  $\mathcal{H}(Q_{m,n}) \simeq \mathcal{U}_q^+(sl_{m+n})$  fortsetzen. Da  $\mathcal{U}_q(sl_{m+n})$  als Vektorraum isomorph zu dem Tensorprodukt  $\mathcal{U}_q^+(sl_{m+n}) \otimes \mathcal{U}_q^0(sl_{m+n}) \otimes \mathcal{U}_q^-(sl_{m+n})$  ist, ist  $\mathcal{U}_q^+(sl_{m+n})$  als Vektorraum isomorph zu dem Quotienten

$$\mathcal{U}_q(sl_{m+n}) / \left( \sum_{-m < i < n} \mathcal{U}_q(sl_{m+n})F_i + \sum_{-m < i < n} \mathcal{U}_q(sl_{m+n})(K_i - 1) \right).$$

Der positive Anteil  $\mathcal{U}_q^+(sl_{m+n})$  der Quantengruppe und damit auch die Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  werden somit  $\mathcal{U}_q(sl_{m+n})$ -Moduln. Wir können also wie in Abschnitt 2.4 Kashiwara-Operatoren auf  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  definieren. Wir werden nun die Wirkung der Kashiwara-Operatoren auf der Hall-Algebra mit Hilfe eines Ergebnisses von M. Reineke bestimmen.

In [20] bestimmt M. Reineke für alle Köcher, deren zugrundeliegender Graph ein Dynkindiagramm vom Typ  $A$ ,  $D$  oder  $E$  ist, eine Operation der Kashiwara-Operatoren auf der Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q)$ . Der Autor definiert dafür ein zulässiges Gitter  $\mathcal{L}$  der Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q)$  und berechnet die Produkte  $u_{[i,i]}u_{[M]}$  in  $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ , wobei  $[i, i]$  eine einfache Darstellung und  $M$  eine endlichdimensionale Darstellung des Köchers  $Q$  sind. Nachdem wir dieses Ergebnis kurz für die uns interessierende Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  zitiert haben, werden wir die Wirkung der Kashiwara-Operatoren auf dem Quotienten  $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$  bestimmen. Um Verwechslungen mit später in dieser Arbeit auf Matrizen definierten Kashiwara-Operatoren zu vermeiden, bezeichnen wir die in [20] bestimmten Kashiwara-Operatoren mit  $\tilde{e}_i$  bzw.  $\tilde{f}_i$ .

**Satz 3.7.1.** Sei  $M$  ein  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Modul und  $-m < i < n$  mit  $i \neq 0$ . Für alle unzerlegbaren  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Moduln  $X$  mit  $\langle X, [i, i] \rangle \neq 0$  bestimmen wir die Summe

$$S(M, X) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{P}_i(Q_{m,n}) \\ \langle B, X \rangle \neq 0}} (\mu_B(M) - \mu_{\tau B}(M)),$$

wobei  $\mu_B(M) = \max\{k : B^k \text{ ist direkter Summand von } M\}$  ist. Es sei  $\mathcal{P}_i(Q_{m,n})$  die Menge  $\{[k, l] : \langle [k, l], [i, i] \rangle \neq 0\}$  mit der Relation  $\preceq$ . Es sei  $X_0 \in \mathcal{P}_i(Q_{m,n})$  der  $\preceq$ -maximale Modul in  $\mathcal{P}_i(Q_{m,n})$ , für den die Summe  $S(M, X)$  maximal ist. Des Weiteren sei  $Y_0 = \bigoplus \tau B$ , wobei die direkte Summe über alle  $\preceq$ -minimalen  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Moduln  $B$  in  $\mathcal{P}_i(Q_{m,n})$  mit  $\langle B, X_0 \rangle = 0$  läuft. Dann ist  $Y_0$  ein direkter Summand von  $M$ , d. h. es existiert ein  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Modul  $M'$  mit  $M = M' \oplus Y_0$ . Des Weiteren ist  $\tilde{e}_i u_{[M' \oplus Y_0]} = u_{[M' \oplus X_0]}$ .

**Beweis** Vgl. [20, Thm. 7.1.]. □

**Bemerkung 3.7.2.** In [20] verwendet der Autor M. Reineke Ringels Definition der Hall-Algebra. Da wie wir in Bemerkung 3.2.5 festgestellt haben, die von Ringel definierte Hall-Algebra zu der hier verwendeten isomorph ist, ist der Satz 3.7.1 auch für unsere Definition der Hall-Algebra gültig.

Wir erinnern daran, wie der Auslander-Reiten-Köcher für  $\mathbb{K}Q_{m,n}$  aussieht: Seine Form erinnert an die eines Fisches, wobei der „Fischkörper“ die Form einer Matrix hat. Um das folgende Korollar einfacher formulieren zu können setzen wir die Zeilen- und Spaltennummerierung dieser Matrix auf den „Flossen“ fort und erhalten so eine *erweiterte Matrix*. Dabei existieren natürlich für einige Indexpaare keine Einträge; genauer existieren die unzerlegbaren Darstellungen  $X_{i,j}$  mit  $1 \leq i \leq m + j - 1$  und  $1 \leq j \leq n + i - 1$ . Die unzerlegbare Darstellung in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalten bezeichnen wir mit  $X_{i,j}$ , falls sie existiert. Dies ermöglicht es uns die endlichdimensionalen Darstellungen mit erweiterten Matrizen zu indizieren, indem wir  $\bigoplus_{i,j} X_{i,j}^{a_{i,j}}$  durch  $A = (a_{i,j})$  indizieren, wobei die direkte Summe nur über die im Köcher existierenden Zahlenpaare läuft.

Der Auslander-Reiten-Köcher von  $\mathbb{K}Q_{4,3}$  aus dem Beispiel 3.1.12 besitzt jeweils sechs Spalten und Zeilen. Die Darstellung  $[1, 2]$  liegt in der vierten Zeile und dritten Spalte, wir bezeichnen sie folglich mit  $X_{4,3}$ . Entsprechend wird die Darstellung  $[-2, 2]^2 \oplus [1, 2] = X_{3,3}^2 \oplus X_{4,3}$  durch die erweiterte Matrix  $2E_{3,3} + E_{4,3}$  indiziert. Natürlich entspricht nicht jede erweiterte Matrix einer endlichdimensionalen Darstellung. So entspricht z. B.  $E_{4,1}$  keiner endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q_{4,3}$ -Darstellung. Das folgende Korollar zeigt, wie die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{e}_j$  auf den zu den Darstellungen assoziierten erweiterten Matrizen wirken.

**Korollar 3.7.3.** Es sei  $M = \bigoplus_{i,j} X_{i,j}^{a_{i,j}}$  eine endlichdimensionale  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Darstellung, welche durch die erweiterte Matrix  $(a_{i,j})$  indiziert wird.

Für festes  $-m < j_0 < n$ ,  $j_0 \neq 0$  berechnen wir die alternierenden Summen

$$s_l^{j_0} = \begin{cases} \sum_{k=1}^l a_{k, j_0+1} - \sum_{k=1}^{l-1} a_{k, j_0} & \text{für } 0 < j_0, 1 \leq l \leq m + j_0, \\ \sum_{k=1}^l a_{-j_0+1, k} - \sum_{k=1}^{l-1} a_{-j_0, k} & \text{für } 0 > j_0, 1 \leq l \leq n - j_0 \end{cases}.$$

Es sei  $i_0$  maximal, so dass die Summe  $s_{i_0}^{j_0}$  maximal ist. Die zu  $\tilde{e}_{j_0} u_{[M]}$  assoziierte erweiterte Matrix  $\tilde{e}_{j_0}(a_{i,j})$  berechnet sich wie folgt

$$\tilde{e}_{j_0}(a_{i,j}) = \begin{cases} (a_{i,j}) - E_{i_0,j_0} + E_{i_0,j_0+1} & \text{falls } 1 \leq i_0 < m + j_0 \\ (a_{i,j}) + E_{i_0,j_0+1} & \text{falls } i_0 = m + j_0 \end{cases}, \quad (3.16)$$

falls  $0 < j_0$  und mit

$$\tilde{e}_{j_0}(a_{i,j}) = \begin{cases} (a_{i,j}) - E_{-j_0,i_0} + E_{-j_0+1,i_0} & \text{falls } 1 \leq i_0 < n - j_0 \\ (a_{i,j}) + E_{-j_0+1,i_0} & \text{falls } i_0 = n - j_0 \end{cases},$$

falls  $j_0 < 0$  ist.

**Beweis** Wir beweisen die Behauptung für  $0 < j_0$ ; für  $j_0 < 0$  folgt die Behauptung analog.

Es sei  $1 \leq j_0 < n$  fest und  $-m < k \leq i < n$ . Offensichtlich ist  $\text{Hom}([k, i], [j_0, j_0]) = 0$ , falls  $j_0$  nicht im Intervall  $[k, i]$  liegt, da nur der Vektorraum am Knoten  $j_0$  nicht der Nullvektorraum ist. Für  $k \leq j_0 < i$  ist nach Bemerkung 3.1.15 die Folge  $[j_0, j_0], [k, i]$  gerichtet, insbesondere ist  $\text{Hom}([k, i], [j_0, j_0]) = 0$ . Für  $k \leq j_0 = i$  ist dagegen  $\Theta$  mit  $\Theta_l = \delta_{l,j_0} \text{id}_{\mathbb{K}}$  ein nichttrivialer  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Homomorphismus von  $[k, j_0]$  nach  $[j_0, j_0]$ . Somit ist

$$\mathcal{P}_{j_0}(Q_{m,n}) = \{[k, j_0] : -m < k \leq j_0\} = \{X_{l,j_0+1} : 1 \leq l \leq m + j_0\}$$

und wir berechnen die Summen  $S(M, X_{l,j_0+1})$  für  $1 \leq l \leq m + j_0$ . Da  $\langle X_{k,j_0+1}, X_{l,j_0+1} \rangle \neq 0$  für alle  $1 \leq k \leq l \leq m + j_0$  gilt,  $a_{s,t} = \mu_{X_{s,t}}(M)$  und  $\tau X_{l+1,j_0+1} = X_{l,j_0}$  für  $1 \leq l \leq m + j_0 - 1$  gilt, erhalten wir

$$S(M, X_{l,j_0+1}) = \sum_{k=1}^l a_{k,j_0+1} - \sum_{k=1}^{l-1} a_{k,j_0} = s_l^{j_0}.$$

Da  $X_{l,j_0+1} \preceq X_{k,j_0+1}$  gilt genau dann, wenn  $1 \leq l \leq k \leq m + j_0$  ist, suchen wir  $i_0$  maximal mit  $s_{i_0}^{j_0} = \max_{1 \leq l \leq m + j_0} s_l^{j_0}$ ; dann ist  $X_{i_0,j_0+1}$  der Modul  $X_0$  aus Satz 3.7.1. Da  $\langle X_{l,j_0+1}, X_{i_0,j_0+1} \rangle = 0$  für alle  $i_0 < l \leq m + j_0$  ist, ist  $\tau X_{i_0+1,j_0+1}$  der Modul  $Y_0$  aus Satz 3.7.1. Falls  $1 \leq i_0 < m + j_0$  ist, ist folglich  $M = M' \oplus \tau X_{i_0+1,j_0+1} = M' \oplus X_{i_0,j_0}$  und somit

$$\tilde{e}_{j_0} u_{[M]} = \tilde{e}_{j_0} u_{[M' \oplus X_{i_0,j_0}]} = u_{[M' \oplus X_{i_0,j_0+1}]}.$$

Falls das Maximum von  $i_0 = m + j_0$  angenommen wird, so ist  $M = M' \oplus \tau 0 = M'$  und folglich

$$\tilde{e}_{j_0} u_{[M]} = u_{[M \oplus X_{m+j_0,j_0+1}]}.$$

Dies beweist die Gleichung (3.16). □

Die Operation der Kashiwara-Operatoren auf der Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  induziert eine Operation auf dem Quotienten  $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$  und somit auch auf der Algebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$ , da  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$  nach Bemerkung 2.4.3 als Untermodul von  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  durch die Kashiwara-Operatoren auf sich selber abgebildet wird. Die Wirkung der Kashiwara-Operatoren kann folglich mit Hilfe von  $(m \times n)$ -Matrizen beschrieben werden.

**Korollar 3.7.4.** Für ein festes  $-m < j_0 < n$ ,  $j_0 \neq 0$  berechnen wir die alternierenden Summen

$$s_l^{j_0} = \begin{cases} \sum_{i=1}^l a_{i,j_0+1} - \sum_{i=1}^{l-1} a_{i,j_0} & \text{für } 0 < j_0, 1 \leq i \leq m+1, \\ \sum_{i=1}^l a_{-j_0+1,i} - \sum_{i=1}^{l-1} a_{-j_0,i} & \text{für } j_0 < 0, 1 \leq i \leq n+1, \end{cases}$$

wobei  $a_{m+1,j_0+1} := 0$  bzw.  $a_{-j_0+1,n+1} := 0$  sind. Die zu

$$\tilde{e}_{j_0} u_{\bigoplus_{k,l=1}^{m,n} [-k+1, l-1]^{a_{k,l}}} + \mathcal{I}(Q_{m,n})$$

assoziierte Matrix  $\tilde{e}_{j_0}(a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n}$  berechnet sich wie folgt.

Für  $0 < j_0$  sei  $1 \leq i_0 \leq m+1$  der größte Wert, für den die Summe  $s_{i_0}^{j_0}$  maximal ist, dann ist

$$\tilde{e}_{j_0}(a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n} = \begin{cases} (a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n} - E_{i_0,j_0} + E_{i_0,j_0+1} & \text{falls } 1 \leq i_0 \leq m \\ 0 & \text{falls } i_0 = m+1 \end{cases}.$$

Für  $j_0 < 0$  sei  $1 \leq i_0 \leq n+1$  der größte Wert, für den die Summe  $s_{i_0}^{j_0}$  maximal ist, dann ist

$$\tilde{e}_{j_0}(a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n} = \begin{cases} (a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n} - E_{-j_0,i_0} + E_{-j_0+1,i_0} & \text{falls } 1 \leq i_0 \leq n \\ 0 & \text{falls } i_0 = n+1 \end{cases}.$$

**Beweis** Wir beweisen die Aussage wieder für positive  $j_0$ ; für negative  $j_0$  folgt die Behauptung analog.

Wie wir in dem Beweis des Lemmas 3.6.1 gezeigt haben, wird das Ideal  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$  als Vektorraum von Elementen der Form  $u_{[M' \oplus [k,l]]}$  mit  $M'$  ein endlichdimensionales  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Modul und  $-m < k \leq l < 0$  bzw.  $0 < k \leq l < n$  erzeugt. Wir berechnen mit Korollar 3.7.3 das Element  $\tilde{e}_{j_0} u_{[M]}$ , wobei das Modul  $M = \bigoplus_{k,l=1}^{m,n} [-k+1, l-1]^{a_{k,l}}$  durch die (erweiterte) Matrix  $(a_{k,l})$  indiziert wird. Es sei

$$k_0 = \max\{1 \leq k \leq m+j_0 : s_k^{j_0} = \sum_{k=1}^{\tilde{i}_0} a_{k,j_0+1} - \sum_{k=1}^{\tilde{i}_0-1} a_{k,j_0} \text{ ist maximal.}\}.$$

Offenbar ist  $i_0 = m+1$  genau dann, wenn  $k_0 = m+j_0$  ist, da  $s_{m+1}^{j_0} = s_{m+l}^{j_0}$  für alle  $1 \leq l \leq j_0$  gilt. Außerdem ist  $i_0 = k_0$ , falls  $i_0 < m$  bzw.  $k_0 < m$  gelten. Dann ist nach Korollar 3.7.3  $\tilde{e}_{j_0} u_{[M]}$  genau dann ein Element von  $\mathcal{I}(Q_{m,n})$ , wenn  $m < k_0$  bzw.  $i_0 = m+1$  ist. Dies beweist die Behauptung.  $\square$

# Kapitel 4

## Quantenmatrizen

In diesem Kapitel werden wir sehen, dass die Unteralgebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  der Hall-Algebra isomorph zu dem quantisierten Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  ist. Für  $m, n \geq 2$  definiert die Operation der  $SL_m \times SL_n$  auf den  $(m \times n)$ -Matrizen eine Operation der Universellen Einhüllenden  $\mathcal{U}(sl_m \times sl_n)$  auf den  $(m \times n)$ -Matrizen. Mit Hilfe dieser Operation werden wir in diesem Kapitel die Operation des positiven Anteils der Quantengruppe zu einer Operation der gesamten Quantengruppe auf dem quantisierten Koordinatenring kanonisch fortsetzen.

Der quantisierte Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  wird somit zu einer  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$ -Darstellung; wir können ihn also mit der  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$ -Darstellung  $\bigoplus_{l(\lambda)=l} V_m(\lambda) \otimes V_n(\lambda)$  mit  $l = \min(m, n)$  vergleichen.

Im Abschnitt 4.1 definieren wir den quantisierten Koordinatenring und zeigen in Abschnitt 4.2, dass er isomorph zu der Unteralgebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  der Hall-Algebra ist. Nachdem wir im Abschnitt 4.3 die Operation der universellen Einhüllenden  $\mathcal{U}(sl_m \times sl_n)$  betrachtet haben, werden wir in Abschnitt 4.4 die Operation der  $\mathcal{U}_q^+(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(sl_n)$  kanonisch zu einer Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$  fortsetzen.

### 4.1 Der quantisierte Koordinatenring

Der sogenannte quantisierte Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  ist die Quantisierung des bekannten Polynomringes  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}] = \mathbb{Q}[Y_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ , welcher der Koordinatenring des Raums der Matrizen  $\mathbb{Q}^{m \times n}$  ist; dabei ist  $Y_{i,j}$  die Funktion  $Y_{i,j} : \mathbb{Q}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $A = (a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n} \mapsto a_{i,j}$ . Beide Ringe haben eine Basis, welche durch die  $(m \times n)$ -Matrizen mit ganzzahligen nichtnegativen Einträgen indiziert wird.

**Definition 4.1.1.**  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  ist die  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebra mit den Erzeugern  $Y_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  und den Relationen

$$Y_{i,j}Y_{i,l} = q^{-1}Y_{i,l}Y_{i,j} \quad (4.1)$$

$$Y_{i,j}Y_{k,j} = q^{-1}Y_{k,j}Y_{i,j} \quad (4.2)$$

$$Y_{i,l}Y_{k,j} = Y_{k,j}Y_{i,l} \quad (4.3)$$

$$Y_{i,j}Y_{k,l} - Y_{k,l}Y_{i,j} = (q^{-1} - q)Y_{i,l}Y_{k,j}, \quad (4.4)$$

mit  $1 \leq i < k \leq m$  und  $1 \leq j < l \leq n$ .

Hierbei können wir  $Y_{i,j}$  als die Funktion  $Y_{i,j} : \mathbb{Q}(q)^{m \times n} \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ ,  $(a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n} \mapsto a_{i,j}$  auffassen. Der Einfachheit halber führen wir keine unterschiedlichen Bezeichnungen für die Funktionen  $Y_{i,j}$  ein, die den Polynomring  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  bzw. den quantisierten Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  erzeugen.

**Lemma 4.1.2.** Die Algebra  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  wird als  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorraum von den Elementen

$$Y_{1,1}^{a_{1,1}} Y_{1,2}^{a_{1,2}} \cdots Y_{1,n}^{a_{1,n}} Y_{2,1}^{a_{2,1}} \cdots Y_{2,n}^{a_{2,n}} Y_{3,1}^{a_{3,1}} \cdots Y_{m,n}^{a_{m,n}} \text{ mit } a_{i,j} \in \mathbb{N}_0 \quad (4.5)$$

erzeugt.

**Beweis** Wir zeigen per Induktion, dass sich jedes Produkt  $Y_{i_1,j_1} \cdots Y_{i_s,j_s}$  als Linearkombination von Elementen der Form wie in Gleichung (4.5) darstellen lässt. Für  $s = 1$  ist die Aussage trivial. Angenommen die Aussage gilt für  $s \geq 1$ , wir betrachten nun  $Y_{i_1,j_1} \cdots Y_{i_s,j_s} Y_{i_{s+1},j_{s+1}}$ . Nach der Induktionsvoraussetzung sind die Paare  $(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)$  lexikographisch geordnet. Falls  $(i_s, j_s) \leq (i_{s+1}, j_{s+1})$  gilt, sind wir fertig. Es sei also  $(i_s, j_s) > (i_{s+1}, j_{s+1})$ , in diesem Fall können wir die passende Relation anwenden, um  $Y_{i_s,j_s} Y_{i_{s+1},j_{s+1}}$  umzusortieren.

Falls  $i_s > i_{s+1}$  und  $j_s > j_{s+1}$  gelten, so wenden wir die Relation (4.4) an und ersetzen  $Y_{i_s,j_s} Y_{i_{s+1},j_{s+1}}$  durch  $Y_{i_{s+1},j_{s+1}} Y_{i_s,j_s} + (q - q^{-1}) Y_{i_{s+1},j_s} Y_{i_s,j_{s+1}}$ . Nach einer nochmaligen Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf die ersten  $s$  Faktoren und eine Umbenennung aller Indizes, gilt  $i_s \leq i_{s+1}$ , wobei nicht notwendigerweise  $(i_s, j_s) \leq (i_{s+1}, j_{s+1})$  gelten muss. Wir haben diesen Fall also auf die verbleibenden Fälle zurückgeführt.

Es gelte also  $i_s = i_{s+1}, j_s > j_{s+1}$  oder  $i_s > i_{s+1}, j_s \leq j_{s+1}$ . In beiden Fällen können wir die Faktoren  $Y_{i_s,j_s}$  und  $Y_{i_{s+1},j_{s+1}}$  vertauschen und bezahlen dies eventuell mit einem Vorfaktor  $q$ . Da  $(i_s, j_s)$  außerdem größer als jedes andere als Index auftretende Paar ist, ist die Behauptung nach einer nochmaligen Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf die nun ersten  $s$ -Faktoren  $Y_{i_1,j_1} \cdots Y_{i_{s-1},j_{s-1}} Y_{i_{s+1},j_{s+1}}$  bewiesen.  $\square$

Für weitere Informationen zu dem quantisierten Koordinatenringen siehe [9].

## 4.2 Zusammenhang zu dem Quotient $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$

Der quantisierte Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  und die Unter algebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  der Hall-Algebra  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$  haben beide als  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorräume durch  $(m \times n)$ -Matrizen indizierte Basen. Wie wir gleich sehen werden, sind sie auch als Algebren zueinander isomorph.

**Lemma 4.2.1.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}] &\rightarrow \mathcal{M}(Q_{m,n}) \\ Y_{i+1,j+1} &\mapsto u_{[-i,j]} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebren.

**Beweis**  $\mathcal{M}(Q_{m,n}) = \langle u_{[i,j]} : -m < i \leq 0 \leq j < n \rangle$  ist eine Unter algebra von  $\mathcal{H}(Q_{m,n})$ . Nach Lemma 3.6.3 ist  $\Psi$  ein Homomorphismus, da die Relationen von  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  in  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  gelten.

Wir zeigen die Bijektivität von  $\Psi$  lokal, d. h. auf den homogenen Teilräumen einer Graduierung der beiden Algebren. Der quantisierte Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  ist durch

$$\deg Y_{i+1, j+1} = \left( \underset{-m+1}{0}, \dots, 0, \underset{-i}{1}, \dots, \underset{j}{1}, 0, \dots, \underset{n-1}{0} \right)$$

und die Algebra  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$  durch  $\deg u_{[i,j]} = \underline{\dim}[i,j]$  bzw.  $\deg u_{[M]} = \underline{\dim}M$  ebenfalls  $\mathbb{N}_0^{m+n-1}$ -graduiert. Wir sehen leicht, dass  $\Psi$  diese Graduierungen respektiert, d. h.  $\Psi(\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]_{\underline{d}}) \subset V_{\underline{d}}$  für  $\underline{d} \in \mathbb{N}_0^{m+n-1}$ .

Nach Lemma 4.1.2 wird der Vektorraum  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]_{\underline{d}}$  von den Elementen  $Y_{i_1, j_1}^{a_1} \cdots Y_{i_k, j_k}^{a_k}$  mit  $\underline{d} = \sum_{l=1}^k a_l \deg Y_{i_l, j_l}$  erzeugt, wobei die Folge  $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$  lexikographisch geordnet ist. Da  $[-i_1 + 1, j_1 - 1], \dots, [-i_k + 1, j_k - 1]$  eine gerichtete Folge ist, gibt es nach den Lemmata 3.3.1 und 3.3.2 einen Vorfaktor  $0 \neq m_{\underline{a}} \in \mathbb{Q}(q)$  mit

$$\Psi(Y_{i_1, j_1}^{a_1} \cdots Y_{i_k, j_k}^{a_k}) = m_{\underline{a}} u_{[-i_1+1, j_1-1]^{a_1} \oplus \cdots \oplus [-i_k+1, j_k-1]^{a_k}} = m_{\underline{a}} u_{[M]}$$

für  $M = \bigoplus_{l=1}^k [-i_l + 1, j_l - 1]^{a_l}$ . Der Homomorphismus  $\Psi$  beschreibt eine Bijektion zwischen dem erzeugenden System von  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]_{\underline{d}}$  und der Basis von  $\mathcal{M}(Q_{m,n})_{\underline{d}}$  und ist somit ein Isomorphismus. Insbesondere ist  $\{Y_{i_1, j_1}^{a_1} \cdots Y_{i_k, j_k}^{a_k} : \underline{d} = \sum_{l=1}^k a_l \deg Y_{i_l, j_l}\}$  eine Basis von  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]_{\underline{d}}$ .  $\square$

**Korollar 4.2.2.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n}) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}] \\ u_{[-i,j]} + \mathcal{I}(Q_{m,n}) &\mapsto Y_{i+1, j+1} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{Q}(q)$ -Vektorräumen, wobei  $0 \leq i < m$ ,  $0 \leq j < n$ .

**Beweis** Dies folgt sofort aus den Lemmata 4.2.1 und 3.6.1.  $\square$

### 4.3 Operation der $\mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$ auf dem Koordinatenring

Die Gruppe  $SL_m \times SL_n$  operiert auf kanonische Weise von rechts auf den  $(m \times n)$ -Matrizen:

$$A \cdot (g, h) := g^{-1}Ah, \text{ für alle } g \in SL_m, h \in SL_n, A \in \mathbb{Q}^{m \times n}.$$

Durch Differentiation wird eine Operation des Tangentialraumes  $sl_m \times sl_n$  von  $SL_m \times SL_n$  an der 1 auf dem Tangentialraum  $\mathbb{Q}^{m \times n}$  von  $\mathbb{Q}^{m \times n}$  an der 0 induziert. Wir berechnen die Ableitung in den  $\mathbb{Q}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ -wertigen Punkten der algebraischen Gruppen  $SL_m$ ,  $SL_n$  bzw. des Raums der Matrizen  $\mathbb{Q}^{m \times n}$ :

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon x)^{-1}A(1 + \varepsilon y) &= (1 - \varepsilon x)A(1 + \varepsilon y) \\ &= A + \varepsilon(Ay - xA) + 0. \end{aligned}$$

In dem Tangentialraum  $\mathbb{Q}^{m \times n}$  gilt somit

$$A \cdot (x, y) = Ay - xA, \text{ f\u00fcr alle } x \in sl_m, y \in sl_n, A \in \mathbb{Q}^{m \times n}.$$

Folglich operiert die Lie-Algebra  $sl_m \times sl_n$  und damit auch ihre universelle Einh\u00fcllende  $\mathcal{U}(sl_m \times sl_n) \simeq \mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  auf dem Koordinatenring  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  des Raums der Matrizen:

$$((x, y) \cdot \varphi)(A) = \varphi(A \cdot (x, y)) = \varphi(Ay - xA),$$

wobei  $x \in sl_m$ ,  $y \in sl_n$ ,  $\varphi \in \mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  und  $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ .

Die Lie-Algebra  $sl_n = \{g \in gl_n : \text{tr } g = 0\}$  wird als Algebra von den Elementen  $E_i = E_{i, i+1}$ ,  $F_i = E_{i+1, i}$ ,  $H_i = E_{i, i} - E_{i+1, i+1}$  mit  $1 \leq i < n$  erzeugt, wobei  $E_{i, j}$  die Matrix ist, deren Eintrag an der  $(i, j)$ -ten Stelle gleich 1 und sonst \u00fcberall Null ist. Die Erzeuger der universellen Einh\u00fcllenden  $\mathcal{U}(sl_n)$  bezeichnen wir entsprechend ebenfalls mit  $E_i, F_i$  und  $H_i$  f\u00fcr  $1 \leq i < n$  (Vgl. Kapitel 2.2).

**Lemma 4.3.1.** Die Universelle Einh\u00fcllende  $\mathcal{U}(sl_m \times sl_n) \simeq \mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  operiert wie folgt auf dem Koordinatenring  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$ :

$$\begin{aligned} (0, F_k) \cdot Y_{i, j} &= \begin{cases} Y_{i, k+1}, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ (0, E_k) \cdot Y_{i, j} &= \begin{cases} Y_{i, k}, & \text{falls } j = k + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ (0, H_k) \cdot Y_{i, j} &= \begin{cases} Y_{i, k}, & \text{falls } j = k \\ -Y_{i, k+1}, & \text{falls } j = k + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ (F_k, 0) \cdot Y_{i, j} &= \begin{cases} -Y_{k, j}, & \text{falls } i = k + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ (E_k, 0) \cdot Y_{i, j} &= \begin{cases} -Y_{k+1, j}, & \text{falls } i = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ (H_k, 0) \cdot Y_{i, j} &= \begin{cases} -Y_{k, j}, & \text{falls } i = k \\ Y_{k+1, j}, & \text{falls } i = k + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Beweis** Die Universelle Einh\u00fcllende  $\mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  operiert auf  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  wie folgt:

$$(x, y) \cdot \varphi(A) = \varphi(Ay - xA)$$

f\u00fcr  $(x, y) \in \mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$ ,  $\varphi \in \mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  und  $A = (a_{i, j}) \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ . Wir berechnen diese Operation f\u00fcr  $(0, F_k)$  und  $Y_{i, j}$ , die anderen Gleichungen folgen analog.

$$(0, F_k) \cdot Y_{i, j}(A) = Y_{i, j}(AE_{k+1, k}) = a_{i, k+1} \delta_{j, k} = Y_{i, k+1}(A) \delta_{j, k}.$$

□

## 4.4 Operation der $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$ auf dem quantisierten Koordinatenring

Im Folgenden verwenden wir die Abkürzungen  $\mathcal{U} := \mathcal{U}_q(sl_{m+n})$  und  $\mathcal{U}^+ := \mathcal{U}_q^+(sl_{m+n})$ . Um in Zukunft die Übersicht zu wahren, seien  $E_i, F_i, K_i$  und  $K_i^{-1}$  für  $-m < i < 0$  die Erzeuger der Algebra  $\mathcal{U}_q(sl_m)$ , während  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  wie gewohnt von  $E_i, F_i, K_i$  und  $K_i^{-1}$  für  $0 < i < n$  erzeugt wird. Die Algebra  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$  lässt sich kanonisch in die Algebra  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(sl_{m+n})$  einbetten:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n) &\hookrightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}_q(sl_{m+n}) \\ G_i \otimes 1 &\mapsto G_i, \quad -m < i < 0, G \in \{E, F, K, K^{-1}\} \\ 1 \otimes G_i &\mapsto G_i, \quad 0 < i < n, G \in \{E, F, K, K^{-1}\}. \end{aligned}$$

Analog können wir das Tensorprodukt der positiven Anteile  $\mathcal{U}_q^+(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(sl_n)$  in  $\mathcal{U}^+$  einbetten.

Nach Lemma 3.5.1 und Korollar 4.2.2 operiert  $\mathcal{U}^+$  auf dem quantisierten Koordinatenring

$$\mathcal{U}^+ / \sum_{i \neq 0} \mathcal{U}^+ E_i \simeq \mathcal{H}(Q_{m,n}) / \mathcal{I}(Q_{m,n}) \simeq \mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}].$$

Wir wollen nun die Operation des positiven Anteils  $\mathcal{U}_q^+(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(sl_n) \subset \mathcal{U}^+$  auf dem quantisierten Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}] \simeq \mathcal{U}^+ / \sum_{i \neq 0} \mathcal{U}^+ E_i$  zu einer Operation der ganzen Algebra  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$  fortsetzen, so dass die auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}] \simeq \mathcal{U}^+ / \sum_{i \neq 0} \mathcal{U}^+ E_i$  induzierte Operation die quantisierte Variante einer Operation der  $\mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  auf  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  ist.

**Bemerkung 4.4.1.** Wir werden gleich sehen, dass die Operation der  $\mathcal{U}_q^+(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(sl_n)$  nicht mit der kanonischen Operation der  $\mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  übereinstimmt. Deshalb müssen wir die Operation der  $\mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  entsprechend modifizieren.

Zuerst berechnen wir aber die Operation der  $\mathcal{U}_q^+(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(sl_n)$  auf  $\mathcal{H}(Q_{m,n}) / \mathcal{I}(Q_{m,n})$ ; hierbei verwenden wir den kanonischen Isomorphismus der  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebren

$$\mathcal{U}^+ \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}(Q_{m,n}), E_i \mapsto u_{[i,i]}, -m < i < n.$$

Dies induziert eine Operation der  $\mathcal{U}_q^+(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(sl_n)$  auf der  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebra

$$\mathcal{H}(Q_{m,n}) / \mathcal{I}(Q_{m,n}) \simeq \mathcal{M}(Q_{m,n}).$$

**Lemma 4.4.2.** Für  $-m < k < n$ ,  $k \neq 0$  operieren die Einfachen  $u_{[k,k]}$  wie folgt auf  $\mathcal{M}(Q_{m,n})$ :

$$u_{[k,k]} \cdot u_{[-i,j]} = \begin{cases} u_{[-i,j+1]}, & \text{falls } k = j + 1 \\ u_{[-(i+1),j]}, & \text{falls } k = -(i + 1) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beweis** Wir berechnen die Operation der Einfachen  $u_{[k,k]}$  für  $k \neq 0$  auf dem Quotienten  $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$ . Nach Lemma 3.4.1 gilt

$$\begin{aligned} u_{[j+1,j+1]}(u_{[-i,j]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})) &= u_{[-i,j+1]} + q^{-1}u_{[-i,j]}u_{[j+1,j+1]} + \mathcal{I}(Q_{m,n}) \\ &= u_{[-i,j+1]} + \mathcal{I}(Q_{m,n}), \\ u_{[-i-1,-i-1]}(u_{[-i,j]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})) &= u_{[-i-1,j]} + q^{-1}u_{[-i,j]}u_{[-i-1,-i-1]} + \mathcal{I}(Q_{m,n}) \\ &= u_{[-i-1,j]} + \mathcal{I}(Q_{m,n}). \end{aligned}$$

Für  $-i < k < j$  gibt es in dem Auslander-Reiten-Köcher zwischen den Knoten  $[-i, j]$  und  $[k, k]$  in keine Richtung einen Pfad. Die Folgen  $[k, k]$ ,  $[-i, j]$  und  $[-i, j]$ ,  $[k, k]$  sind also gerichtet. Insbesondere gilt nach Lemma 3.3.2

$$u_{[k,k]}(u_{[-i,j]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})) = u_{[-i,j]}u_{[k,k]} + \mathcal{I}(Q_{m,n}) = \mathcal{I}(Q_{m,n}).$$

Für  $k < -i - 1$  bzw.  $j + 1 < k$  ist die Folge  $[-i, j]$ ,  $[k, k]$  natürlich ebenfalls gerichtet. Des Weiteren ist offensichtlich  $\text{Hom}([-i, j], [k, k]) = 0$  und

$$\langle [k, k], [-i, j] \rangle^1 = \langle [k, k], [-i, j] \rangle - R(e_k, e_{-i} + \dots + e_j) = 0 - 0.$$

Folglich ist auch  $[-i, j]$ ,  $[k, k]$  gerichtet und wir können wie gerade argumentieren, dass  $u_{[k,k]}(u_{[-i,j]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})) = \mathcal{I}(Q_{m,n})$  gilt.

Es sei nun  $k = -i$  bzw.  $k = j$ . Die Folge  $[-i, j]$ ,  $[k, k]$  ist gerichtet. Des Weiteren gilt

$$\langle [k, k], [-i, j] \rangle^1 = \langle [k, k], [-i, j] \rangle - R(e_k, e_{-i} + \dots + e_j) = 0 - (1 - 1) = 0.$$

Folglich ist  $[-i, j] \oplus [k, k]$  die einzige Erweiterung von  $[k, k]$  mit  $[-i, j]$  und somit

$$\begin{aligned} u_{[k,k]}(u_{[-i,j]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})) &= q^{-1}u_{[-i,j] \oplus [k,k]} + \mathcal{I}(Q_{m,n}) \\ &= q^{-1}u_{[-i,j]}u_{[k,k]} + \mathcal{I}(Q_{m,n}) = \mathcal{I}(Q_{m,n}). \end{aligned}$$

□

**Korollar 4.4.3.** Die positiven Anteile der Quantengruppen  $\mathcal{U}_q^+(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(sl_n)$  operieren wie folgt auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$ :

$$E_k \cdot Y_{i,j} = \begin{cases} Y_{i,j+1}, & \text{falls } k = j \\ Y_{i+1,j}, & \text{falls } k = -i \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} = Y_{i,j+1}\delta_{k,j}. \quad (4.6)$$

dabei seien  $-m < k < n$ ,  $k \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq n$ .

**Beweis** Dies folgt sofort aus Lemma 4.4.2, da  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}] \simeq \mathcal{M}(Q_{m,n})$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebren ist. □

Ein Vergleich mit der Operation der  $\mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  auf dem Koordinatenring  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  zeigt, dass die Operatoren  $E_i \in \mathcal{U}(sl_m)$  bis auf das Vorzeichen genauso wirken wie die Operatoren  $E_i \in \mathcal{U}_q^+(sl_m)$ . Bei  $\mathcal{U}(sl_n)$  und  $\mathcal{U}_q^+(sl_n)$  ist dies nicht der Fall; hier erhöhen die

Operatoren  $F_i \in \mathcal{U}^-(sl_n)$  die Indizes und wirken damit genauso wie die  $E_i \in \mathcal{U}_q^+(sl_n)$ . Wir müssen also die Operation der  $\mathcal{U}(sl_n)$  mit einem passenden Automorphismus verdrehen.

Wir werden nun zuerst die Operation der positiven Anteile  $\mathcal{U}_q^+(sl_m)$  und  $\mathcal{U}_q^+(sl_n)$  zu einer Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_m)$  bzw.  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  fortsetzen. Dafür nehmen wir an, dass  $F_k \cdot 1 = 0$  und  $K_k \cdot 1 = q^{a_k}$ ,  $a_k \in \mathbb{Z}$  für  $-m < k < n$ ,  $k \neq 0$  gilt, und leiten ausgehend von diesen Annahmen eine mögliche Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$  her. Danach verdrehen wir die Operation der  $\mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  entsprechend.

Wir berechnen nun die Wirkung von  $K_k$  auf den Basiselementen  $Y_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Dafür erinnern wir noch einmal kurz an die Relationen zwischen  $K_k$  und  $E_i$ ,  $1 \leq k < n$ ,  $-m < i < n$ :

$$K_k E_i = \begin{cases} q^2 E_k K_k, & k = i \\ q^{-1} E_i K_k, & |k - i| = 1 \\ E_i K_k, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt  $E_0 \cdot 1 = Y_{1,1}$ , da  $E_0$  unter dem Isomorphismus

$$\mathcal{U}_q^+(sl_{m+n}) / \sum_{i \neq 0} \mathcal{U}_q^+(sl_{m+n}) E_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$$

auf  $Y_{1,1}$  abgebildet wird. Des Weiteren benutzen wir, dass nach Korollar 4.4.3 die Gleichung

$$\begin{aligned} Y_{i,j} &= E_{-(i-1)} \cdot Y_{i-1,j} = E_{-(i-1)} E_{-(i-2)} \cdots E_{-1} Y_{1,j} \\ &= E_{-(i-1)} E_{-(i-2)} \cdots E_{-1} E_{j-1} E_{j-2} \cdots E_1 E_0 \cdot 1 \end{aligned}$$

gilt. Wir berechnen also

$$K_k Y_{i,j} = K_k E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_1 E_0 \cdot 1.$$

Da  $K_k$  nur mit den Operatoren  $E_{k-1}$ ,  $E_k$  und  $E_{k+1}$  nicht trivial vertauscht, machen wir eine Fallunterscheidung. Falls  $j \geq k + 2$  gilt, rechnen wir

$$\begin{aligned} K_k \cdot Y_{i,j} &= E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_{k+2} (K_k E_{k+1} E_k E_{k-1}) E_{k-2} \cdots E_1 E_0 \cdot 1 \\ &= E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_{k+2} (q^{-1+2-1} E_{k+1} E_k E_{k-1} K_k) E_{k-2} \cdots E_1 E_0 \cdot 1 \\ &= E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_1 E_0 K_k \cdot 1 \\ &= E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_1 E_0 \cdot q^{a_k} = q^{a_k} Y_{i,j}. \end{aligned}$$

Durch ähnliche Rechnungen zeigen wir

$$K_k \cdot Y_{i,j} = \begin{cases} q^{a_k-1} Y_{i,j}, & j = k \\ q^{a_k+1} Y_{i,j}, & j = k + 1 \\ q^{a_k} Y_{i,j}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $H_k = \frac{K_k - K_k^{-1}}{q - q^{-1}}$  erhalten wir also

$$H_k \cdot Y_{i,j} = \begin{cases} [a_k - 1] Y_{i,j}, & j = k \\ [a_k + 1] Y_{i,j}, & j = k + 1 \\ [a_k] Y_{i,j}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Limes  $q = 1$  operiert  $H_k$  also wie folgt:

$$H_k Y_{i,j} = \begin{cases} (a_k - 1)Y_{i,j}, & j = k \\ (a_k + 1)Y_{i,j}, & j = k + 1 \\ a_k Y_{i,j}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

da  $\lim_{q \rightarrow 1} [a]_q = a$  gilt. Wir sehen sofort, dass diese Operation für jede Wahl der  $a_k \in \mathbb{Z}$  für  $0 < k < n$  (und selbst für  $a_k \in \mathbb{C}$ ) nicht zu der kanonischen Operation der universellen Einhüllenden  $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$  auf  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  passt. Wie wir schon festgestellt haben, müssen wir die Operation der  $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_m)$  und der  $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$  also noch mit passenden Automorphismen verdrehen. Die beste Wahl ist folglich  $a_k = 0$  für  $0 < k < n$ . Wie wir später sehen, korrigiert sich der so entstehende Vorzeichenfehler automatisch bei der notwendigen Verdrehung. Eine analoge Rechnung zeigt, dass wir für  $-m < k < 0$  ebenfalls  $a_k = 0$  die beste Wahl ist.

Wir berechnen nun die aus der Annahme resultierende Operation der  $F_k$ ,  $0 < k < n$  auf  $Y_{i,j}$ . Wir betrachten dafür die einzige Relation zwischen  $F_k$  und  $E_l$ :

$$E_i F_k - F_k E_i = \delta_{i,k} \frac{K_k - K_k^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Falls  $j > k + 1$  gilt, rechnen wir

$$\begin{aligned} F_k \cdot Y_{i,j} &= E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_{k+1} (F_k E_k) E_{k-1} \cdots E_1 E_0 \cdot 1 \\ &= E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_{k+1} \left( E_k F_k - \frac{K_k - K_k^{-1}}{q - q^{-1}} \right) E_{k-1} \cdots E_1 E_0 \cdot 1 \\ &= E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_1 E_0 F_k \cdot 1 - E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_{k+1} \frac{K_k - K_k^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot Y_{1,k} \\ &= 0 - \frac{q^{-1} - q}{q - q^{-1}} E_{-(i-1)} \cdots E_{-1} E_{j-1} \cdots E_{k+1} \cdot Y_{1,k} = 0. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir die Gleichung  $E_k \cdot Y_{i,j} = \delta_{k,j} Y_{i,j+1}$  verwendet. Durch ähnliche Rechnungen erhalten wir eine mögliche Operation der  $F_k$  auf dem quantisierten Koordinatenring:

$$F_k \cdot Y_{i,j} = \begin{cases} Y_{i,j-1}, & j = k + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie wir im nächsten Lemma sehen, setzt diese Operation der  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  die kanonische  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{sl}_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(\mathfrak{sl}_n)$ -Operation fort und ist wohldefiniert.

**Lemma 4.4.4.** Die Operation der  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  bzw.  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m)$  lässt sich wie folgt auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  fortsetzen:

a) Für alle  $1 \leq k < n$  gilt:

$$\begin{aligned} F_k \cdot Y_{i,j} &= Y_{i,j} \delta_{j,k+1} = \begin{cases} Y_{i,j-1}, & j = k + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ K_k \cdot Y_{i,j} &= Y_{i,j} \delta_{j,k+1} = \begin{cases} q^{-1} Y_{i,j}, & j = k \\ q Y_{i,j}, & j = k + 1 \\ Y_{i,j}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Für alle  $1 \leq k < m$  gilt:

$$F_{-k} \cdot Y_{i,j} = Y_{i-1,j} \delta_{i,k+1} = \begin{cases} Y_{i-1,j}, & i = k+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$K_{-k} \cdot Y_{i,j} = q^{\delta_{i,k+1} - \delta_{i,k}} Y_{i,j} = \begin{cases} q^{-1} Y_{i,j}, & i = k \\ q Y_{i,j}, & i = k+1 \\ Y_{i,j}, & \text{sonst.} \end{cases},$$

wobei  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq n$ .

**Beweis** Wir zeigen nun, dass die im Lemma definierten Operationen der  $E_k, F_k, K_k$  und  $K_k^{-1}$  für  $1 \leq k < n$  die Relationen der  $\mathcal{U}_q(sl_n)$ , wie in 2.2.1 definiert, erfüllen. Diese Operationen lassen sich dann zu einer Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  fortsetzen. Der Beweis, dass die im Lemma definierten Operationen von  $E_k, F_k, K_k$  und  $K_k^{-1}$  für  $-m < k < 0$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  sich zu einer Operation der  $\mathbb{Q}(q)$ -Algebra  $\mathcal{U}_q(sl_m)$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  fortsetzen, ist dann analog.

Offensichtlich ist die Relation (U1) erfüllt. Wir zeigen nun, dass die zweite Relation (U2) gilt, d. h. dass die Gleichung

$$K_k E_l K_k^{-1} Y_{i,j} = q^{(\alpha_k, \alpha_l)} E_l Y_{i,j}, \quad 1 \leq k, l < n, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

erfüllt ist:

$$\begin{aligned} K_k E_l K_k^{-1} Y_{i,j} &= q^{-(\delta_{j,k+1} - \delta_{j,k})} K_k E_l Y_{i,j} \\ &= q^{\delta_{l,k} - \delta_{l,k+1}} K_k Y_{i,l+1} \delta_{j,l} \\ &= q^{\delta_{l,k} - \delta_{l,k+1}} q^{\delta_{l+1,k+1} - \delta_{l+1,k}} Y_{i,l+1} \delta_{j,l} \\ &= q^{2\delta_{l,k} - \delta_{|l-k|,1}} E_l Y_{i,j} = q^{(\alpha_k, \alpha_l)} E_l Y_{i,j}. \end{aligned}$$

Analog beweist man, dass auch die Relation (U3) von der Operation erfüllt wird. Die folgende Rechnung zeigt, dass auch (U4) erfüllt ist.

$$\begin{aligned} (E_k F_l - F_l E_k) Y_{i,j} &= E_k Y_{i,j-1} \delta_{j,l+1} - F_l Y_{i,j+1} \delta_{j,k} \\ &= Y_{i,j} \delta_{j-1,k} \delta_{j,l+1} - Y_{i,j} \delta_{j+1,l+1} \delta_{j,k} \\ &= Y_{i,j} (\delta_{j,l+1} - \delta_{j,l}) \delta_{l,k} \\ &= \left( \frac{q - q^{-1}}{q - q^{-1}} Y_{i,j} \delta_{j,l+1} + \frac{q^{-1} - q}{q - q^{-1}} Y_{i,j} \delta_{j,l} \right) \delta_{l,k} \\ &= \frac{K_l - K_l^{-1}}{q - q^{-1}} \delta_{l,k} Y_{i,j}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Relation (U5)

$$\begin{aligned} (E_k^2 E_l - (q + q^{-1}) E_k E_l E_k + E_l E_k^2) Y_{i,j} &= 0 \quad \text{für } |k - l| = 1, \\ (E_k E_l - E_l E_k) Y_{i,j} &= 0 \quad \text{für } |k - l| > 1 \end{aligned}$$

indem wir zeigen, dass für alle  $1 \leq k, l < n$ ,  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} E_k E_l Y_{i,j} &= 0 \text{ falls } |k - l| > 1, \\ E_k(E_k E_l Y_{i,j}) &= 0 \text{ und } E_l(E_k E_l Y_{i,j}) = 0 \text{ falls } |k - l| = 1 \end{aligned}$$

gelten.

Für  $|k - l| > 1$  ist  $E_k E_l Y_{i,j} = Y_{i,j+2} \delta_{j,l} \delta_{j+1,k}$  offensichtlich gleich Null. Es seien nun  $k, l$  mit  $|k - l| = 1$ . Falls  $l = k + 1$  ist, ist  $E_k E_l Y_{i,j} = Y_{i,j+2} \delta_{j,k+1} \delta_{j+1,k} = 0$  und die Behauptung bewiesen. Für  $l = k - 1$  rechnen wir

$$\begin{aligned} E_k(E_k E_{k-1} Y_{i,j}) &= E_k Y_{i,j+2} \delta_{j+1,k} \delta_{j,k-1} = (Y_{i,j+3} \delta_{j+2,k}) \delta_{j+1,k} = 0 \text{ und} \\ E_{k-1}(E_k E_{k-1} Y_{i,j}) &= E_{k-1} Y_{i,j+2} \delta_{j+1,k} = (Y_{i,j+3} \delta_{j+3,k}) \delta_{j+1,k} = 0. \end{aligned}$$

Analog beweisen wir die Gültigkeit der Relation (U6).  $\square$

**Bemerkung 4.4.5.** Für  $H_k = \frac{K_k - K_k^{-1}}{q - q^{-1}}$ ,  $-m < k < n$ ,  $k \neq 0$ , operiert  $H_k$  wie folgt ( $1 \leq k < n$  bzw.  $-m < -k \leq -1$ ):

$$\begin{aligned} H_k \cdot Y_{i,j} &= \begin{cases} -Y_{i,j}, & j = k \\ Y_{i,j}, & j = k + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ H_{-k} \cdot Y_{i,j} &= \begin{cases} -Y_{i,j}, & i = k \\ X_{i,j}, & i = k + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die so definierte Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_m)$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  bis auf die Vorzeichen die kanonische Operation der  $\mathcal{U}(sl_m)$  auf dem Koordinatenring  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  quantisiert. Wir müssen die Operation der  $\mathcal{U}(sl_m)$  also mit Hilfe eines Automorphismus entsprechend modifizieren.

**Lemma 4.4.6.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varrho : \mathcal{U}(sl_m) &\rightarrow \mathcal{U}(sl_m) \\ E_{-k} &\mapsto -E_{-k} \\ F_{-k} &\mapsto -F_{-k} \\ H_{-k} &\mapsto H_{-k}, \quad 1 \leq k < m, \end{aligned}$$

ist ein Automorphismus. Er erfüllt  $\varrho^2 = 1$ .

Die mit  $u * x = \varrho(u)x$  für  $u \in \mathcal{U}(sl_m)$ ,  $x \in \mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  definierte Operation lässt sich zur quantisierten Operation  $\mathcal{U}_q(sl_m)$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  heben.

**Beweis** Man sieht leicht, dass die Abbildung  $\varrho$  ein Homomorphismus ist, da sich die Vorzeichen in den Serre-Relationen (vgl. Kapitel 2.2) wegheben. Des Weiteren ist  $\varrho$  ein Automorphismus, da  $\varrho^2 = 1$ . Mit der Bemerkung 4.4.5 sehen wir sofort, dass die von  $E_i, F_i, H_i$  für  $1 \leq i < m$  erzeugte Unteralgebra von  $\mathcal{U}_q(sl_m)$  im Limes  $q = 1$  genauso wie  $\mathcal{U}(sl_m)$  operiert. Die im Lemma definierte Operation der  $\mathcal{U}(sl_m)$  lässt sich also zu der quantisierten Operation  $\mathcal{U}_q(sl_m)$  heben.  $\square$

Die Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  auf dem quantisierten Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  passt nicht zur kanonischen Operation der  $\mathcal{U}(sl_n)$  auf dem Koordinatenring  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$ . So ist bei  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  der Operator  $E_k$  der Erhöhungoperator, während  $F_k$  für  $\mathcal{U}(sl_n)$  der Erhöhungoperator ist. Hier benötigen wir also einen anderen Automorphismus um die Operation der  $\mathcal{U}(sl_n)$  passend zu modifizieren.

**Lemma 4.4.7.** Die durch

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{U}(sl_n) &\rightarrow \mathcal{U}(sl_n) \\ E_i &\mapsto F_i \\ F_i &\mapsto E_i \\ H_i &\mapsto -H_i, \end{aligned}$$

$1 \leq i < n$  definierte Abbildung ist ein Automorphismus. Er erfüllt  $\omega^2 = 1$ .

Die mit  $u * x = \omega(u)x$  für  $u \in \mathcal{U}(sl_n)$ ,  $x \in \mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  definierte Operation lässt sich zur quantisierten Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  heben.

**Beweis** Zuerst werden wir zeigen, dass  $\omega$  ein Homomorphismus ist. Dafür müssen wir zeigen, dass die Serre-Relationen für  $\omega(E_i)$ ,  $\omega(F_i)$  und  $\omega(H_i)$ ,  $1 \leq i < n$ , gelten:

$$\begin{aligned} [\omega(H_i), \omega(H_j)] &= [-H_i, -H_j] = [H_i, H_j] = 0, \\ [\omega(E_i), \omega(F_j)] &= [F_i, E_j] = -[E_j, F_i] = -\delta_{i,j}H_i = \delta_{i,j}\omega(H_i), \\ [\omega(H_i), \omega(E_j)] &= [-H_i, F_j] = -[H_i, F_j] = a_{i,j}F_j = a_{i,j}\omega(E_j), \\ [\omega(H_i), \omega(F_j)] &= [-H_i, E_j] = -[H_i, E_j] = -a_{i,j}E_j = -a_{i,j}\omega(F_j), \\ [\omega(E_i), [\omega(E_i), \omega(E_j)]] &= [F_i, [F_i, F_j]] = 0, \text{ falls } |i-j| = 1, \\ [\omega(E_i), \omega(E_j)] &= [F_i, F_j] = 0, \text{ falls } |i-j| > 1, \\ [\omega(F_i), [\omega(F_i), \omega(F_j)]] &= [E_i, [E_i, E_j]] = 0, \text{ falls } |i-j| = 1, \\ [\omega(F_i), \omega(F_j)] &= [E_i, E_j] = 0, \text{ falls } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Dabei ist  $C_{n-1} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n-1}$  die Cartan-Matrix von  $sl_n$ . Offensichtlich gilt  $\omega^2 = 1$ , folglich ist  $\omega$  ein Automorphismus.

Mit der Bemerkung 4.4.5 sehen wir nun, dass die im Lemma definierte Operation der  $\mathcal{U}(sl_n)$  auf  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  sich zu der quantisierten Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  heben lässt.  $\square$

**Bemerkung 4.4.8.** Der Automorphismus  $\omega : \mathcal{U}(sl_n) \rightarrow \mathcal{U}(sl_n)$  lässt sich zu dem bekannten Automorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_q(sl_n) &\rightarrow \mathcal{U}_q(sl_n) \\ E_i &\mapsto F_i \\ F_i &\mapsto E_i \\ K_i &\mapsto K_i^{-1} \end{aligned}$$

heben, wobei  $1 \leq i < n$ .

**Korollar 4.4.9.** Die Operation der  $\mathcal{U}(sl_m) \otimes \mathcal{U}(sl_n)$  auf  $\mathbb{Q}[M_{m \times n}]$  via

$$(u, v) * x = (\varrho(u), \omega(v)) \cdot x$$

lässt sich zu der quantisierten Operation der  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  heben.

**Beweis** Die Behauptung folgt sofort aus den Lemmata 4.4.6 und 4.4.7.  $\square$

## Kapitel 5

# RSK-Korrespondenz und Kashiwara-Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass die RSK-Korrespondenz mit den Kashiwara-Operatoren vertauscht. Oder anders ausgedrückt, dass die Kashiwara-Operatoren – via RSK-Korrespondenz – auf den Paaren von SSYT genauso wirken, wie auf den Matrizen mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen. Dafür müssen wir die im Abschnitt 3.7 berechneten Kashiwara-Operatoren noch etwas modifizieren. Des Weiteren benötigen wir noch etwas Werkzeug, um die Operation der Kashiwara-Operatoren auf den Matrizen und auf Paaren von SSYT gleicher Form vergleichen zu können. Wir werden sehen, dass die in Abschnitt 5.2 definierte Klassenmatrix  $C$  einer Matrix  $A$  für das Verständnis des Matrix-Ball-Algorithmus' sehr nützlich ist, da sie nicht nur  $A$  sondern auch die Matrix  $A'$  kodiert. Nachdem wir im Abschnitt 5.3 die Klassenmatrix von  $\tilde{E}_{j_0}A$  mit der Klassenmatrix von  $A$  verglichen haben, berechnen wir in 5.4 die Matrix  $(\tilde{E}_{j_0}A)'$ . Im letzten Abschnitt des Kapitels werden wir beweisen, dass die Kashiwara-Operatoren die RSK-Korrespondenz respektieren, indem wir den Matrix-Ball-Algorithmus neu formulieren. Bei dieser neuen Formulierung des Matrix-Ball-Algorithmus' betten wir die Matrix  $A$  in eine größere Matrix ein.

### 5.1 Operation der $\tilde{E}_i$ und $\tilde{F}_i$ auf Matrizen

Wir haben im letzten Kapitel die Operation der  $\mathcal{U}_q^+(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q^+(sl_n)$  auf  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  zu einer Operation der  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$  fortgesetzt. Die Wirkung der dazugehörigen Kashiwara-Operatoren  $\tilde{e}_i$  auf der Kristallbasis haben wir im Kapitel 3.7 mit Hilfe der Hall-Algebra berechnet. Diese Operation passt leider nicht zu der RSK-Korrespondenz: Es sind keinerlei Regelmäßigkeiten zwischen den SSYT einer beliebigen Matrix  $A$  und der Matrix  $\tilde{e}_iA$  zu erkennen. Wenn wir die Operation der Kashiwara-Operatoren auf Matrizen aber etwas modifizieren, indem wir die endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Darstellungen anders parametrisieren, so können wir einen Zusammenhang zwischen den SSYT erkennen.

Vorher werden wir aber die Erzeuger der Quantengruppen  $\mathcal{U}_q(sl_m)$  und  $\mathcal{U}_q(sl_n)$  umnummerieren, indem wir die Automorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_q(sl_m) &\rightarrow \mathcal{U}_q(sl_m) \\ G_i &\mapsto G_{m-i} \text{ f\"ur } -m < i < 0, G \in \{E, F, K, K^{-1}\} \text{ und} \\ \mathcal{U}_q(sl_n) &\rightarrow \mathcal{U}_q(sl_n) \\ G_j &\mapsto G_{n-j} \text{ f\"ur } 0 < j < n, G \in \{E, F, K, K^{-1}\} \end{aligned}$$

anwenden. Auf diese Weise werden später die Gewichtsraume  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]_\lambda$  von der durch die RSK-Korrespondenz definierten Abbildung auf die Darstellungen  $V_m(\lambda) \otimes V_n(\lambda)$  abgebildet. Ohne diese Umnummerierung würde der Gewichtsraum  $\mathbb{Q}(q)[M_{m \times n}]_\lambda$  für  $\lambda = \sum_{i=1}^k l_i \omega_i$  auf  $V_m(\mu) \otimes V_n(\mu)$  mit  $\mu = \sum_{i=1}^k l_{k-i} \omega_i$  abgebildet werden, wobei  $k = \min(m, n)$  ist. Entsprechend werden auch die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{e}_k$  umnummeriert, so dass z. B.  $\tilde{e}_{j_0}$  für  $1 \leq j_0 < n$  auf der  $(n - j_0)$  und  $(n - j_0 + 1)$ -Spalte operiert.

Wir werden nun die Operation der Kashiwara-Operatoren auf Matrizen modifizieren, indem wir die endlichdimensionalen  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Darstellungen  $M$  umparametrisieren. In Zukunft wird die Darstellung  $M = \bigoplus_{k,l=1}^{m,n} [-k+1, l-1]^{b_{k,l}} \in \mathcal{M}(Q_{m,n})$  durch die Matrix  $A = (a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n}$  mit  $a_{k,l} := b_{m+1-k,l}$  parametrisiert.

**Korollar 5.1.1.** Für ein festes  $1 \leq j_0 < n$  definieren wir die alternierenden Summen

$$s_l^{j_0} = s_l^{j_0}(A) = \sum_{i=l}^m a_{i,n-j_0+1} - \sum_{i=l+1}^m a_{i,n-j_0},$$

wobei  $a_{0,n-j_0+1} = 0$ . Die zu

$$\tilde{e}_{j_0} u_{\bigoplus_{k,l=1}^{m,n} [-k+1, l-1]^{a_{m+1-k,l}}} + \mathcal{I}(Q_{m,n})$$

assoziierte Matrix  $\tilde{E}_{j_0}(a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n}$  berechnet sich dann wie folgt:

$$\tilde{E}_{j_0} A = \begin{cases} 0 & \text{falls } i_0 = 0 \\ A - E_{i_0, n-j_0} + E_{i_0, n-j_0+1} & \text{sonst} \end{cases}, \quad (5.1)$$

wobei  $i_0 = i_0^{j_0}(A) = \min \{0 \leq i \leq m : s_i^{j_0} = s_{\max}^{j_0}\}$  und  $s_{\max}^{j_0} = \max \{s_i^{j_0} : 0 \leq i \leq m\}$ . Dabei bezeichnen wir mit  $E_{k,l}$  die  $(m \times n)$ -Matrix, deren Eintrag an der  $(k, l)$ -ten Stelle Eins und sonst überall Null ist.

**Beweis** Die Behauptung folgt sofort aus Korollar 3.7.4.  $\square$

Falls eindeutig ist, welche Matrix  $A$  oder welchen Index  $j_0$  wir betrachten, kürzen wir die Bezeichnungen entsprechend ab: z. B. verwenden wir  $i_0(A)$ ,  $s_l^{j_0}$  und  $i_0$ .

**Bemerkung 5.1.2.** Um die Notation zu vereinfachen werden wir in Zukunft das Basiselement  $u_{[M]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})$  für  $M = \bigoplus_{k,l=1}^{m,n} [-k+1, l-1]^{a_{m+1-k,l}}$  mit der Matrix  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  bezeichnen. Entsprechend werden wir für  $1 \leq j_0 < n$  statt  $\tilde{e}_{j_0} u_{[M]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})$  die kürzere Schreibweise  $\tilde{E}_{j_0} A$  bevorzugen und von der „Operation des Kashiwara-Operators  $\tilde{E}_{j_0}$  auf der Matrix  $A$ “ sprechen. Natürlich ist dann mit 0 nicht die Nullmatrix, sondern das Nullelement des Quotienten  $\mathcal{H}(Q_{m,n})/\mathcal{I}(Q_{m,n})$  gemeint.

Die Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$ ,  $1 \leq j_0 < n$  wirken auf der Matrix  $A$ , indem sie einen Eintrag in der  $(n - j_0)$ -ten Spalte um eins verringern und den benachbarten Eintrag in der  $(n - j_0 + 1)$ -ten Spalte um eins erhöhen. Analog kann man für  $-m < j_0 < 0$  Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$  definieren, die in der  $(m + j_0)$ -ten und  $(m + j_0 + 1)$ -ten Zeile wirken, indem man die Spalten der Matrix, die die endlichdimensionale  $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Darstellung  $M$  parametrisiert, unnummeriert. Genauer bezeichnen wir für  $j_0 < 0$  und  $A = (a_{k,l})_{k,l=1}^{m,n} \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  die zu

$$\tilde{e}_{j_0} u \oplus_{k,l=1}^{m,n} [-k+1, l-1]^{a_{k,n+1-l}} + \mathcal{I}(Q_{m,n})$$

assoziierte Matrix mit  $\tilde{E}_{j_0} A$ .

Man sieht leicht, dass die Definition der Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$  für  $j_0 \neq 0$  symmetrisch ist, in dem Sinne, dass für  $j_0 < 0$  und  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix die Gleichung  $\tilde{E}_{j_0} A = (\tilde{E}_{-j_0} A^T)^T$  erfüllt ist. Dabei bezeichnet  $A^T$  wie üblich die zu  $A$  transponierte Matrix.

**Bemerkung 5.1.3.** Die in Korollar 5.1.1 beschriebene Operation der Kashiwara-Operatoren auf beliebigen Matrizen mit ganzzahligen nicht-negativen Einträgen stimmt mit der in Korollar 2.5.2 definierten Operation auf Matrizen, die SSYT kodieren, überein.

**Lemma 5.1.4.** Es sei  $1 \leq j_0 < n$  fest. Mit den obigen Bezeichnungen ist

$$i_0 = \min\{0 \leq i \leq m : s_i^{j_0} = s_{\max}^{j_0}\}$$

genau dann, wenn die Ungleichungen

$$\sum_{k=i_0+1}^l a_{k,n-j_0} \leq \sum_{k=i_0}^{l-1} a_{k,n-j_0+1} \text{ für alle } i_0 < l \leq m \text{ und} \quad (5.2)$$

$$\sum_{k=l+1}^{i_0} a_{k,n-j_0} > \sum_{k=l}^{i_0-1} a_{k,n-j_0+1} \text{ für alle } 0 \leq l < i_0 \quad (5.3)$$

gelten, wobei  $a_{0,n-j_0+1} := 0$  sei.

**Beweis** Es gilt  $i_0 = \min\{i : s_i^{j_0} = s_{\max}^{j_0}\}$  genau dann, wenn

$$\begin{aligned} s_{i_0}^{j_0} &\geq s_l^{j_0} \text{ für alle } i_0 < l \leq m \text{ und} \\ s_{i_0}^{j_0} &> s_l^{j_0} \text{ für alle } 0 \leq l < i_0 \end{aligned}$$

gilt. Mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 \leq s_{i_0}^{j_0} - s_l^{j_0} &= \sum_{i=i_0}^{l-1} a_{i,n-j_0+1} - \sum_{i=i_0+1}^l a_{i,n-j_0} \text{ für alle } i_0 < l \leq m \text{ und} \\ 0 > s_l^{j_0} - s_{i_0}^{j_0} &= \sum_{i=l}^{i_0-1} a_{i,n-j_0+1} - \sum_{i=l+1}^{i_0} a_{i,n-j_0} \text{ für alle } 0 \leq l < i_0 \end{aligned}$$

folgt die Behauptung.  $\square$

Aus der Definition 2.4.5 der Kristallbasis folgt, dass die Operation von  $\tilde{F}_{j_0}$  auf den Basiselementen durch die Wirkung von dem Kashiwara-Operator  $\tilde{E}_{j_0}$  eindeutig bestimmt

ist. Dies werden wir im folgenden Lemma ausnutzen, um eine Beschreibung des Kashiwara-Operators  $\tilde{F}_{j_0}$  zu erhalten.

**Lemma 5.1.5.** Der auf  $(m \times n)$ -Matrizen durch

$$\tilde{F}_{j_0} B = \begin{cases} B + E_{k_0, n-j_0} - E_{k_0, n-j_0+1} & \text{falls } 1 \leq k_0 \leq m \\ 0 & \text{falls } k_0 = m + 1, \end{cases}$$

definierte Operator  $\tilde{F}_{j_0}$  ist der zu  $\tilde{E}_{j_0}$  passende Kashiwara-Operator, wobei

$$k_0 = \max\{1 \leq l \leq m + 1 : \sum_{i=1}^l a_{i, n-j_0} - \sum_{i=1}^{l-1} a_{i, n-j_0+1} \text{ maximal}\}.$$

Insbesondere gilt  $\tilde{F}_{j_0} \tilde{E}_{j_0} A = A$ , falls  $\tilde{E}_{j_0}(A) \neq 0$ , und  $\tilde{E}_{j_0} \tilde{F}_{j_0} A = A$ , falls  $\tilde{F}_{j_0} A \neq 0$  erfüllt ist.

**Beweis** Wir zeigen zuerst, dass für jede  $(m \times n)$ -Matrix  $A$  mit  $\tilde{E}_{j_0} A \neq 0$  die Gleichung  $\tilde{F}_{j_0} \tilde{E}_{j_0} A = A$  gilt. Da  $\tilde{E}_{j_0} A \neq 0$  gilt, ist der oben definierte Index  $i_0 := i_0(A)$  ungleich Null und es gilt  $\tilde{E}_{j_0} A = A - E_{i_0, n-j_0} + E_{i_0, n-j_0+1}$ . Bei der Berechnung der alternierenden Summen  $t_l^{j_0}(B) := \sum_{i=1}^l b_{i, n-j_0} - \sum_{i=1}^{l-1} b_{i, n-j_0+1}$  der Matrix  $B := \tilde{E}_{j_0} A$ , verwenden wir die Tatsache, dass  $t_l^{j_0}(A) = s_l^{j_0}(A) - s_0^{j_0}(A)$  für alle  $1 \leq l \leq m$  und  $t_{m+1}^{j_0}(A) = -s_0^{j_0}(A)$  gilt.

$$t_l^{j_0}(B) = \begin{cases} t_l^{j_0}(A) & = & s_l^{j_0}(A) - s_0^{j_0}(A) & \text{falls } 1 \leq l < i_0 \\ t_l^{j_0}(A) - 1 & = & s_l^{j_0}(A) - 1 - s_0^{j_0}(A) & \text{falls } l = i_0 \\ t_l^{j_0}(A) - 2 & = & s_l^{j_0}(A) - 2 - s_0^{j_0}(A) & \text{falls } i_0 < l \leq m \\ t_l^{j_0}(A) - 2 & = & -2 - s_0^{j_0}(A) & \text{falls } l = m + 1. \end{cases}$$

Nach Lemma 5.1.4 gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} s_{i_0}^{j_0}(A) &> s_l^{j_0}(A) \text{ für alle } 0 \leq l < i_0 \text{ und} \\ s_{i_0}^{j_0}(A) &\geq s_l^{j_0}(A) \text{ für alle } i_0 \leq l \leq m. \end{aligned}$$

Zusammen mit  $s_{i_0}^{j_0}(A) \geq s_m^{j_0}(A) = a_{m, n-j_0+1} \geq 0 > -2$  folgt aus den obigen Ungleichungen

$$\begin{aligned} t_{i_0}^{j_0}(B) &\geq t_l^{j_0}(B) \text{ für alle } 1 \leq l < i_0 \text{ und} \\ t_{i_0}^{j_0}(B) &> t_l^{j_0}(B) \text{ für alle } i_0 \leq l \leq m + 1. \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $i_0 = k_0(B) = \max\{1 \leq l \leq m + 1 : t_l^{j_0}(B) \text{ maximal}\} \neq m + 1$  und folglich  $\tilde{F}_{j_0} \tilde{E}_{j_0} A = A$ .

Da die Definitionen der Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$  und  $\tilde{F}_{n-j_0}$  symmetrisch sind, kann man analog beweisen, dass  $\tilde{E}_{j_0} \tilde{F}_{j_0} A = A$  für  $\tilde{F}_{j_0} A \neq 0$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 5.1.6.** Es sei  $j_0 < 0$  und  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix. Wegen  $\tilde{E}_{j_0} A = (\tilde{E}_{-j_0} A^T)^T$  gilt offensichtlich auch  $\tilde{F}_{j_0} A = (\tilde{F}_{-j_0} A^T)^T$ . Insbesondere operiert  $\tilde{F}_{j_0}$  auf der Matrix  $A$  wie folgt:

$$\tilde{F}_{j_0} A = \begin{cases} A + E_{m+j_0, k_0} - E_{m+j_0+1, k_0} & \text{falls } 1 \leq k_0 \leq n \\ 0 & \text{falls } k_0 = n + 1, \end{cases}$$

wobei  $k_0 = \max\{1 \leq l \leq n + 1 : \sum_{i=1}^l a_{m+j_0, i} - \sum_{i=1}^{l-1} a_{m+j_0+1, i} \text{ maximal}\}$  ist.

Die Darstellung  $M = \bigoplus_{k,l=1}^{m,n} [-k+1, l-1]^{a_{m+1-k,l}}$  sei durch die Matrix  $A$  parametrisiert. Man sieht leicht, dass für  $j_0 < 0$  die Matrix  $\tilde{F}_{j_0} A$  das Element  $\tilde{e}_{j_0} u_{[M]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})$  parametrisiert. Aus den Eigenschaften der Kashiwara-Operatoren folgt somit sofort, dass die Matrix  $\tilde{E}_{j_0} A$  zu  $\tilde{f}_{j_0} u_{[M]} + \mathcal{I}(Q_{m,n})$  assoziiert ist. Die neuen Strukturen des quantisierten Koordinatenringes  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  als  $\mathcal{U}_q(sl_m)$ - bzw.  $\mathcal{U}_q(sl_n)$ -Modul, die wir durch die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_j$  für  $j \neq 0$  auf Matrizen erhalten, respektieren einander folglich; so gilt u. a.  $\tilde{E}_j \tilde{E}_i = \tilde{E}_i \tilde{E}_j$  für alle  $i < 0 < j$ . Insbesondere sind die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_j$  mit  $j \neq 0$  zu einer  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$ -Modulstruktur des quantisierten Koordinatenringes  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  assoziiert.

In den folgenden Abschnitten zeigen wir, dass die auf Matrizen und SSYT definierten Kashiwara-Operatoren die RSK-Korrespondenz respektieren. Wegen der in Lemma 1.3.6 beschriebenen Symmetrie der RSK-Korrespondenz und der in Bemerkung 5.1.2 beschriebenen Symmetrie der Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$  auf Matrizen, genügt es den Zusammenhang zwischen den Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$  mit  $j_0 > 0$  und der RSK-Korrespondenz zu untersuchen.

## 5.2 Eigenschaften der Klassenmatrix

**Definition 5.2.1.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  sei  $C(A) = (c_{i,j}(A))_{i,j=1}^{m+1,n+1}$  mit

$$\begin{aligned} c_{m+1,j}(A) &:= 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n+1, \\ c_{i,n+1}(A) &:= 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq m+1 \text{ und} \\ c_{i,j}(A) &:= \max\{c_{i,j+1}, c_{i+1,j}\} + a_{i,j} \text{ für } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned} \quad (5.4)$$

die Klassenmatrix.

Falls eindeutig ist, zu welcher Matrix die Klassenmatrix  $(c_{i,j}(A))_{i,j=1}^{m+1,n+1}$  gehört, kürzen wir die Bezeichnung mit  $(c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1,n+1}$  ab.

**Lemma 5.2.2.** Sei  $C(A) = (c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1,n+1}$  die Klassenmatrix von  $A$ . Die größte südöstlich von  $(i, j)$  auftretende Klasse ist  $c_{i,j}^1$ . Genauer gilt

$$\{c(B) : B \in (i, j)\} = \{c : \max(c_{i+1,j}, c_{i,j+1}) < c \leq c_{i,j}\}. \quad (5.5)$$

Die zur Klassenmatrix  $C(A)$  gehörende Matrix  $A$  lässt sich wie folgt rekonstruieren:

$$a_{i,j} = c_{i,j} - \max(c_{i,j+1}, c_{i+1,j}) \text{ für alle } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \quad (5.6)$$

**Beweis** Die Gleichung (5.6) folgt direkt aus der Definition der Klassenmatrix.

Wir beweisen die restlichen Aussagen des Lemmas induktiv von Südost nach Nordwest. Offensichtlich ist die Gleichung (5.5) für das Feld  $(m, n)$  wahr: Die Klassen der in dem Feld  $(m, n)$  liegenden Bälle durchlaufen die Menge  $\{1, 2, \dots, a_{m,n} = c_{m,n}\}$ . Insbesondere ist  $c_{m,n}$  die größte in dem Feld  $(m, n)$  auftretende Klasse.

Sei nun  $(i, j) < (m, n)$  und die Behauptung gelte für alle Paare  $(i, j) < (s, t) \leq (m, n)$ . Sei das Feld  $(i, j)$  nicht leer, d. h.  $a_{i,j} \neq 0$ . Die Klasse des untersten bzw. südöstlichsten Balles  $B_1$

<sup>1</sup>Wie wir in Abschnitt 1.3 vereinbart haben, liegt das Feld  $(i, j)$  südöstlich von sich selbst.

im Feld  $(i, j)$  ist folglich

$$\begin{aligned} c(B_1) &= \max\{c(B) : B \neq B_1 \text{ liegt südöstlich von } B_1\} + 1 \\ &= \max\{c(B) : B \text{ liegt südöstlich von } (i, j + 1) \text{ oder von } (i + 1, j)\} + 1 \\ &= \max(c_{i+1,j}, c_{i,j+1}) + 1. \end{aligned}$$

Die Klasse des direkt nördlich von  $B_1$  liegenden Balles  $B_2$  ist somit

$$c(B_2) = c(B_1) + 1 = \max(c_{i+1,j}, c_{i,j+1}) + 2.$$

Wir berechnen die Klassen der anderen in  $(i, j)$  enthaltenen Bälle genauso:

$$c(B_k) = \max(c_{i+1,j}, c_{i,j+1}) + k, \quad 1 \leq k \leq a_{i,j}.$$

Offensichtlich gilt die Gleichung (5.5) und  $c_{i,j}$  ist die größte südöstlich von dem Feld  $(i, j)$  auftretende Klasse.

Sei nun das Feld  $(i, j)$  leer, d. h.  $a_{i,j} = 0$ , dann ist  $c_{i,j} = \max(c_{i,j+1}, c_{i+1,j})$  und beide Mengen in (5.5) sind leer. Des Weiteren ist  $c_{i,j}$  offensichtlich die größte südöstlich von dem Feld  $(i, j)$  auftretende Klasse.  $\square$

Die Klassenmatrix  $C(A)$  einer Matrix  $A$  lässt sich also einfach berechnen und kodiert außerdem  $A$ . Wir werden sehen, dass sie auch sehr hilfreich für das Verständnis des Matrix-Ball-Algorithmus' ist.

**Korollar 5.2.3.** Sei  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  mit der Klassenmatrix  $C(A) = (c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1,n+1}$ . Für  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  tritt dann jede Klasse  $c \leq c_{i,j}$  mindestens einmal südöstlich von dem Feld  $(i, j)$  auf. D. h. für jedes  $c \leq c_{i,j}$  gibt es einen Ball  $B$ , der in einem Feld  $(i', j')$  mit  $i \leq i' \leq m$ ,  $j \leq j' \leq n$  liegt und die Klasse  $c(B) = c$  besitzt.

**Beweis** Diese Aussage folgt induktiv aus Lemma 5.2.2. Offensichtlich tritt jede Klasse  $c \leq c_{m,n}$  in dem Feld  $(m, n)$  auf. Sei  $(i, j)$  ein Feld in  $A$ . Wir nehmen an, dass die Aussage für alle Felder  $(i', j') \neq (i, j)$  südöstlich von  $(i, j)$  gilt. Nach Lemma 5.2.2 tritt jede Klasse  $c$  mit  $\max(c_{i+1,j}, c_{i,j+1}) < c \leq c_{i,j}$  in dem Feld  $(i, j)$  auf. Da jede Klasse  $c \leq c_{i+1,j}$  und  $c \leq c_{i,j+1}$  südöstlich von  $(i + 1, j)$  bzw.  $(i, j + 1)$  auftritt, gilt die Aussage auch für  $(i, j)$ .  $\square$

**Lemma 5.2.4.** Für eine  $(m \times n)$ -Matrix  $A$  mit Klassenmatrix  $C(A) = (c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1,n+1}$  können wir  $A' = (a'_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  wie folgt berechnen

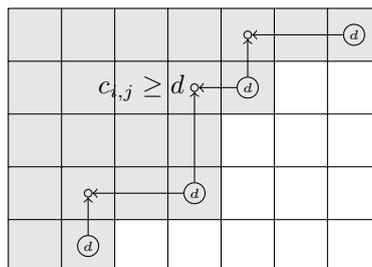
$$a'_{i,j} = \min(c_{i,j+1}, c_{i+1,j}) - c_{i+1,j+1}, \quad (5.7)$$

$$= \#\{B \text{ in } j\text{-ter Spalte} : c_{i+1,j+1} < c(B) \leq c_{i,j+1}\}. \quad (5.8)$$

**Beweis** Wir zeigen zuerst, dass genau dann für die Klasse  $d$  ein neuer Ball in das Feld  $(i, j)$  der Matrix  $A'$  gelegt wird, wenn die Ungleichungen

$$c_{i+1,j+1} < d \leq c_{i,j+1} \text{ und } c_{i+1,j+1} < d \leq c_{i+1,j} \quad (5.9)$$

gelten. Bildlich gesprochen bedeutet dies, dass die „alten“ Bälle in den spitzen  $90^\circ$ -Ecken und die „neuen“ Bälle in den stumpfen  $270^\circ$ -Ecken des Bereiches  $\{(i, j) : c_{i,j} \geq d\}$  liegen:



Wir erinnern dafür kurz an die Bildungsvorschrift für die neue Matrix  $A'$ : Für jede Klasse  $d$  sortieren wir die Felder  $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ , die jeweils einen Ball der Klasse  $d$  enthalten so, dass die Ungleichungen

$$i_1 > i_2 > \dots > i_k \text{ und } j_1 < j_2 < \dots < j_k$$

gelten. Die neuen Bälle legen wir dann in die Felder  $(i_2, j_1), (i_3, j_2), \dots, (i_k, j_{k-1})$  von  $A'$ .

Falls wir für die Klasse  $d$  einen Ball in das Feld  $(i, j)$  von  $A'$  legen, existiert also ein  $2 \leq l \leq k$  mit  $(i, j) = (i_l, j_{l-1})$ . Da in dem Bereich südöstlich des Feldes  $(i+1, j+1)$  keine Bälle der Klasse  $d$  liegen, haben alle Bälle in diesem Bereich eine Klasse, die echt kleiner als  $d$  ist. Nach Lemma 5.2.2 ist folglich  $c_{i+1, j+1} < d$ . Des Weiteren ist  $c_{i, j_l} \geq d$ . Da das Feld  $(i, j+1) = (i_l, j_{l-1} + 1)$  nordwestlich von  $(i_l, j_l)$  liegt, gilt wegen der induktiven Definition der Klassenmatrix die Ungleichung  $c_{i, j+1} \geq c_{i, j_l} \geq d$ . Analog können wir  $c_{i+1, j} \geq d$  zeigen. Falls für die Klasse  $d$  ein neuer Ball in dem Feld  $(i, j)$  der Matrix  $A'$  liegt, gelten die Ungleichungen (5.9).

Sei jetzt also  $(i, j)$  ein Feld, für das die Ungleichungen (5.9) gelten. Wir wollen zeigen, dass für die Klasse  $d$  ein Ball in das Feld  $(i, j)$  von  $A'$  eingetragen wird, d. h. dass (mit den Bezeichnungen von oben) ein  $2 \leq l \leq k$  mit  $(i, j) = (i_l, j_{l-1})$  existiert. Wegen  $d > c_{i+1, j+1}$  sind nach Lemma 5.2.2 alle südöstlich von  $(i+1, j+1)$  auftretenden Klassen echt kleiner als  $d$ . Gleichzeitig muss in dem Bereich südöstlich von  $(i, j+1)$  ein Ball mit der Klasse  $d$  in  $A$  liegen. Also liegt in der  $i$ -ten Zeile rechts neben der  $j$ -ten Spalte ein Ball mit der Klasse  $d$ . Mit dem gleichen Argument sehen wir, dass ein Ball der Klasse  $d$  unter der  $i$ -ten Zeile in der  $j$ -ten Spalte liegt. Es gibt also ein  $2 \leq l \leq k$ , so dass  $(i, j) = (i_l, j_{l-1})$  und jeweils ein Ball der Klasse  $d$  in  $(i_l, j_l)$  und  $(i_{l-1}, j_{l-1})$  liegt.

Für  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq n$  folgt sofort die Gleichung

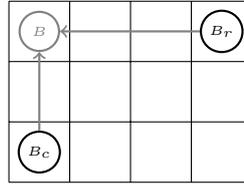
$$\begin{aligned} a'_{i,j} &= \#\{d : c_{i+1, j+1} < d \leq c_{i, j+1} \text{ und } c_{i+1, j+1} < d \leq c_{i+1, j}\} \\ &= \min(c_{i, j+1}, c_{i+1, j}) - c_{i+1, j+1}. \end{aligned}$$

Die obige Argumentation zeigt, dass genau dann ein Ball für die Klasse  $d$  in das Feld  $(i, j)$  der neuen Matrix  $A'$  gelegt wird, falls ein Ball  $B$  mit der Klasse  $d$  in der  $j$ -ten Spalte der Matrix  $A$  liegt und  $c_{i+1, j+1} < d \leq c_{i, j+1}$  gilt. Dies beweist die Gleichung (5.8).  $\square$

**Bemerkung 5.2.5.** Für jede Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  sind die letzte Zeile und die letzte Spalte von  $A'$  leer, bzw.  $a'_{m, j} = 0$  und  $a'_{i, n} = 0$  für  $1 \leq j \leq n$  und  $1 \leq i \leq m$ . Dies sehen wir schon an der Definition des Matrix-Ball-Algorithmus'; es folgt aber zusätzlich sofort aus Lemma 5.2.4.

Wir beweisen jetzt ein Lemma, das beschreibt, wie sich die Klasse während eines Schrittes des Matrix-Ball-Algorithmus' auf die neuen Bälle vererbt. Dafür benötigen wir noch einige

Bezeichnungen. Die zwei Bälle, die im Matrix-Ball-Algorithmus den Ball  $B$  erzeugen, bezeichnen wir mit  $B_c$  und  $B_r$ , wobei  $B$  in der Spalte von  $B_c$  und in der Zeile von  $B_r$  liegt; Die folgende Skizze veranschaulicht diese Begriffe. Die Indizes  $c$  und  $r$  kommen dabei von den englischen Bezeichnungen „column“ bzw. „row“.

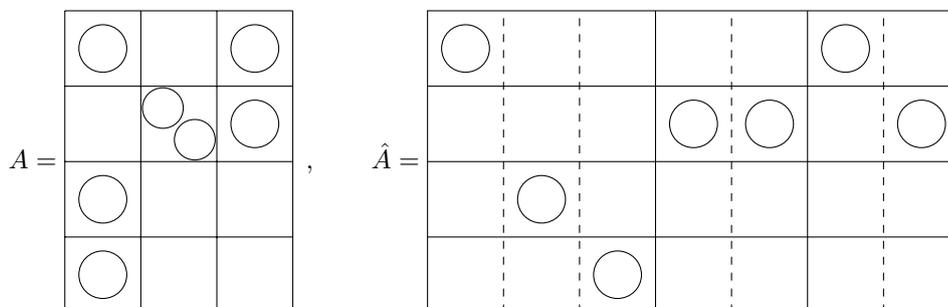


**Lemma 5.2.6.** Sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix, die in jeder Spalte höchstens einen Ball besitzt. Für jeden Ball  $B$  in  $A'$  gilt dann:  $c(B) \leq c(B_r) = c(B_c)$ .

**Bemerkung 5.2.7.** Die zusätzliche Bedingung an die Matrix  $A$  ist notwendig, um das Lemma sinnvoll formulieren zu können. Das Problem ist, dass in der von uns verwendeten Beschreibung des Matrix-Ball-Algorithmus' die Reihenfolge der Bälle nicht beibehalten wird: Für eine beliebige Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  können bei der Bildung der neuen Matrix  $A'$  mehrere Bälle in ein Feld gelegt werden. Dabei werden sie durchmischt und wir wissen nicht mehr, von welchen Bällen sie erzeugt wurden. Im Allgemeinen können die neuen Bälle durch diese Durchmischung eine beliebige Klasse erhalten, die nichts mehr mit der Klasse ihrer erzeugenden Bälle zu tun hat.

Für eine Matrix  $A$ , die in jeder Spalte höchstens einen Ball besitzt, tritt diese Durchmischung nicht auf, da nie zwei Bälle in der gleichen Spalte von  $A$  und somit die „neuen“ Bälle auch nie in dem gleichen Feld von  $A'$  liegen. (Uns genügt sogar die Bedingung, dass in keinem Feld von  $A$  und  $A'$  mehr als ein Ball liegt.)

Wir können jede Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{k \times l}$  zu einer Matrix  $\hat{A}$  mit höchstens einem Ball pro Spalte verfeinern, indem wir entsprechende Hilfsspalten einführen: Falls mehr als ein Ball in einer Spalte liegt, unterteilen wir diese Spalte in entsprechend viele Hilfsspalten. Die Bälle tragen wir so in die Spalten ein, dass sie auf einer Diagonalen von Südost nach Nordwest liegen, d. h. den südlichsten Ball legen wir in die rechteste Spalte, den zweiten Ball von unten in die zweite Hilfsspalte von rechts und so weiter. Auf diese Weise werden die Klassen der Bälle nicht verändert, tatsächlich müssen wir nur die Hilfsspalten vergessen um aus der verfeinerten neuen Ball-Matrix  $\hat{A}'$  wieder  $A'$  zu erhalten. Auf diese Weise lässt sich das obige Lemma auch auf allgemeine Matrizen anwenden.



Alternativ hätten wir auch den Matrix-Ball-Algorithmus so formulieren können, dass die Reihenfolge der Bälle bei der Bildung der neuen Ball-Matrix erhalten bleibt. Diese Formulierung wäre aber sehr umständlich gewesen.

**Beweis** Wir beweisen die Aussage von Lemma 5.2.6 induktiv von Südost nach Nordwest. Sei  $B$  ein „neuer“ Ball in  $A'$ , der von  $B_c$  und  $B_r$  erzeugt wird.  $B$  liege in dem Feld  $(i(B), j(B))$ . Falls südöstlich von  $B$  keine Bälle liegen, so ist  $c(B) = 1$ . Wegen  $c(B_c) = c(B_r) \geq 1 = c(B)$  folgt für diesen Fall die Behauptung.

Wir nehmen nun an, dass südöstlich von  $B$  Bälle liegen, für diese haben wir die Induktionsbehauptung bereits bewiesen. Sei  $B'$  solch ein Ball, der von  $B'_c$  und  $B'_r$  erzeugt wurde, d. h.  $i(B') = i(B'_r)$  und  $j(B') = j(B'_c)$ . Da  $B'$  südöstlich von  $B$  und nicht in der gleichen Spalte wie  $B$  liegt, gelten

$$\begin{aligned} i(B'_c) &> i(B') \geq i(B) \text{ und} \\ j(B'_c) &= j(B') > j(B). \end{aligned}$$

Insbesondere liegt  $B'_c$  in  $A$  südöstlich des Feldes  $(i(B) + 1, j(B) + 1)$ . Da  $B$  als neuer Ball von  $B_r$  und  $B_c$  gebildet wird, gilt nach dem Beweis von Lemma 5.2.4 die Ungleichung  $c(B_c) > c_{i(B)+1, j(B)+1}(A)$ . Folglich hat  $B'_c$  eine echt kleinere Klasse als  $B_c$ , da  $c(B'_c) \leq c_{i(B)+1, j(B)+1}(A) < c(B_c)$  gilt. Da somit für alle südöstlich von  $B$  liegenden Bälle  $B'$  die Ungleichung  $c(B'_c) < c(B_c)$  gilt, folgt nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} c(B) &= \max\{c(B') : B' \text{ liegt südöstlich von } B \text{ in } A'\} + 1 \\ &\leq \max\{c(B'_c) : B' \text{ liegt südöstlich von } B \text{ in } A'\} + 1 \\ &\leq c(B_c). \end{aligned}$$

□

### 5.3 Klassenmatrizen von $A$ und $\tilde{E}_{j_0}A$

In diesem Abschnitt werden wir nun untersuchen, in welchem Zusammenhang die Klassenmatrizen  $C(\tilde{E}_{j_0}A)$  und  $C(A)$  stehen. Dabei hilft es, uns den Eintrag  $c_{i,j}(A)$  der Klassenmatrix als die maximale Anzahl von Bällen in  $A$  vorzustellen, die auf einem Weg von dem Feld  $(m, n)$  zu dem letzten Ball des Feldes  $(i, j)$  liegen. Zuerst werden wir aber einige dazu notwendige Ungleichungen in der Klassenmatrix  $C(A)$  beweisen. Dabei konzentrieren wir uns auf den Fall  $\tilde{E}_{j_0}A \neq 0$ .

**Definition 5.3.1.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  mit  $i_0(A) \neq 0$  sei die Klassenmatrix  $C(A) = (c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1, n+1}$  wie in 5.2.1 definiert. Für  $1 \leq j_0 < n$  sei

$$i_1 = i_1^{j_0}(A) := \max\{0 \leq i < i_0 : c_{i+1, n-j_0+1} < c_{i, n-j_0+2}\}, \text{ wobei } c_{0, n-j_0+2} = \infty^2.$$

<sup>2</sup>Es genügt, wenn  $c_{0, n-j_0+2}$  echt größer als  $c_{1, n-j_0+1}$  ist. Wir können also alternativ  $c_{0, n-j_0+2} = c_{1,1} + 1$  oder  $c_{0, n-j_0+2} = c_{1, n-j_0+1} + 1$  wählen, da  $c_{1,1}$  der größte Eintrag von  $C(A)$  ist.

Falls eindeutig ist welche Matrix  $A$  oder welchen Index  $j_0$  wir betrachten, verwenden wir entsprechend kürzere Bezeichnungen, z. B.  $i_1$  oder  $i_1(A)$ .

**Lemma 5.3.2.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  mit  $i_0 \neq 0$  definieren wir die Klassenmatrix  $C(A) = (c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1, n+1}$  wie in 5.2.1. Es gelten dann die Ungleichungen

$$\begin{aligned} c_{i_0+1, n-j_0} &\leq c_{i_0, n-j_0+1} \text{ und} \\ c_{i+1, n-j_0} &> c_{i, n-j_0+1} \text{ für alle } i_1 < i < i_0. \end{aligned}$$

**Beweis** Zuerst beweisen wir die erste Ungleichung. Sei

$$\hat{i} = \min(\{m\} \cup \{i_0 < i < m : c_{i+1, n-j_0} < c_{i, n-j_0+1}\}).$$

Da die Ungleichungen  $c_{i+1, n-j_0} \geq c_{i, n-j_0+1}$  für alle  $i_0 < i < \hat{i}$  gelten, ist

$$c_{i, n-j_0} = c_{i+1, n-j_0} + a_{i, n-j_0} \text{ für alle } i_0 < i < \hat{i}$$

und  $c_{\hat{i}, n-j_0} = c_{\hat{i}, n-j_0+1} + a_{\hat{i}, n-j_0}$ . Folglich gilt  $c_{i_0+1, n-j_0} = c_{\hat{i}, n-j_0+1} + \sum_{i=i_0+1}^{\hat{i}} a_{i, n-j_0}$ . Wir wenden Lemma 5.1.4 an und erhalten die Ungleichung

$$c_{i_0+1, n-j_0} = c_{\hat{i}, n-j_0+1} + \sum_{i=i_0+1}^{\hat{i}} a_{i, n-j_0} \leq c_{\hat{i}, n-j_0+1} + \sum_{i=i_0}^{\hat{i}-1} a_{i, n-j_0+1} \leq c_{i_0, n-j_0+1}.$$

Die zweite Ungleichung folgt sofort aus der Definition der Klassenmatrix, da  $c_{i_0, n-j_0+1}$  die maximale Anzahl der Bälle ist, die auf einem Weg von  $(m, n)$  nach  $(i_0, n-j_0+1)$  liegen.

Den zweiten Teil des Lemmas beweisen wir ähnlich. Durch die Definition von  $i_1$  wissen wir, dass gilt:

$$c_{i+1, n-j_0+1} \geq c_{i, n-j_0+2} \text{ für alle } i_1 < i < i_0.$$

Folglich ist für  $i_1 < l < i_0$ :

$$\begin{aligned} c_{l, n-j_0+1} &= c_{l+1, n-j_0+1} + a_{l, n-j_0+1} \\ &= c_{i_0, n-j_0+1} + \sum_{i=l}^{i_0-1} a_{i, n-j_0+1} \\ &< c_{i_0, n-j_0+1} + \sum_{i=l+1}^{i_0} a_{i, n-j_0} \\ &\leq c_{l+1, n-j_0} \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 5.3.3.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  mit  $i_0 = 0$  gilt  $c_{2, n-j_0} \leq c_{1, n-j_0+1}$ .

Da  $s_0^{j_0} = s_1^{j_0} - a_{1, n-j_0} \leq s_1^{j_0}$  maximal ist, ist  $a_{1, n-j_0} = 0$  und folglich  $s_1^{j_0} = s_0^{j_0}$  maximal. Somit gelten die Ungleichungen (5.2), die für den Fall  $i_0 = 1$  gelten, hier ebenfalls. Da wir im Beweis des ersten Teil des Lemmas 5.3.2 nur diese Ungleichungen verwendet haben, gilt somit die entsprechende Ungleichung  $c_{2, n-j_0} \leq c_{1, n-j_0+1}$ .

Wir werden nun untersuchen, in welchem Zusammenhang  $C(\tilde{E}_{j_0}A)$  und  $C(A)$  stehen.

**Lemma 5.3.4.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  mit  $i_0 \neq 0$  und  $1 \leq j_0 < n$  definieren wir  $i_1(A)$  wie in 5.3.1. Dann gilt:

$$c(\tilde{E}_{j_0}A) = c(A) + \sum_{i=i_1+1}^{i_0} E_{i,n-j_0+1}.$$

**Beweis** Wir erinnern daran, dass  $\tilde{E}_{j_0}A = A - E_{i_0,n-j_0} + E_{i_0,n-j_0+1}$  gilt. Da die Klassenmatrix induktiv von Südost nach Nordwest definiert wird, gilt offensichtlich  $c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i,j} = c(A)$  für alle  $(i, j)$  mit  $i_0 < i$  oder  $n - j_0 + 1 < j$ . Folglich gilt

$$\begin{aligned} c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0,n-j_0+1} &= \max(c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0,n-j_0+2}, c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0+1,n-j_0+1}) + a_{i_0,n-j_0+1} + 1 \\ &= \max(c(A)_{i_0,n-j_0+2}, c(A)_{i_0+1,n-j_0+1}) + a_{i_0,n-j_0+1} + 1 \\ &= c(A)_{i_0,n-j_0+1} + 1. \end{aligned}$$

Aus der Definition von  $i_1$  folgt, dass  $c(A)_{i+1,n-j_0+1} \geq c(A)_{i,n-j_0+2}$  für alle  $i_1 < i < i_0$  gilt. So gilt z. B.

$$\begin{aligned} c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0-1,n-j_0+1} &= \max(c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0-1,n-j_0+2}, c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0,n-j_0+1}) + a_{i_0-1,n-j_0+1} \\ &= \max(c(A)_{i_0-1,n-j_0+2}, c(A)_{i_0,n-j_0+1} + 1) + a_{i_0-1,n-j_0+1} \\ &= c(A)_{i_0,n-j_0+1} + 1 + a_{i_0-1,n-j_0+1} = c(A)_{i_0-1,n-j_0+1} + 1. \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation folgt induktiv, dass  $c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i,n-j_0+1} = c(A)_{i,n-j_0+1} + 1$  für alle  $i_1 < i < i_0$  gilt. Außerdem ist

$$\begin{aligned} c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_1,n-j_0+1} &= \max(c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_1,n-j_0+2}, c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_1+1,n-j_0+1}) + a_{i_1,n-j_0+1} \\ &= \max(c(A)_{i_1,n-j_0+2}, c(A)_{i_1+1,n-j_0+1} + 1) + a_{i_1,n-j_0+1} \\ &= c(A)_{i_1,n-j_0+2} + a_{i_1,n-j_0+1} = c(A)_{i_1,n-j_0+1}, \end{aligned}$$

da die Ungleichung  $c(A)_{i_1,n-j_0+1} > c(A)_{i_1+1,n-j_0+2}$  gilt. Für alle  $i < i_1$  gilt folglich  $c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i,n-j_0+1} = c(A)_{i,n-j_0+1}$ .

Wir wenden nun Lemma 5.3.2 an, um die Einträge der  $(n - j_0)$ -ten Spalte auszurechnen. Aus dem ersten Teil des Lemmas folgt

$$c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0,n-j_0+1} = c(A)_{i_0,n-j_0+1} + 1 > c(A)_{i_0+1,n-j_0} = c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0+1,n-j_0},$$

und damit

$$c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0,n-j_0} = c(A)_{i_0,n-j_0+1} + 1 + (a_{i_0,n-j_0} - 1) = c(A)_{i_0,n-j_0}.$$

Wegen  $c(A)_{i_0,n-j_0} > c(A)_{i_0-1,n-j_0+1}$  gilt offenbar

$$\begin{aligned} c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0-1,n-j_0} &= \max(c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0,n-j_0}, c(\tilde{E}_{j_0}A)_{i_0-1,n-j_0+1}) + a_{i_0-1,n-j_0} \\ &= \max(c(A)_{i_0,n-j_0}, c(A)_{i_0-1,n-j_0+1} + 1) + a_{i_0-1,n-j_0} \\ &= c(A)_{i_0,n-j_0} + a_{i_0-1,n-j_0} = c(A)_{i_0-1,n-j_0}. \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation und den Ungleichungen

$$c(A)_{i+1, n-j_0} \geq c(A)_{i, n-j_0+1} + 1 = c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i, n-j_0+1} \text{ f\u00fcr alle } i_1 < i < i_0$$

folgt also induktiv, dass  $c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i, n-j_0} = c(A)_{i, n-j_0}$  f\u00fcr alle  $i_1 < i < i_0$  ist. Des Weiteren ist offensichtlich  $c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i, n-j_0+1} = c(A)_{i, n-j_0+1}$  f\u00fcr alle  $i \leq i_1$ , und somit  $c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i, j} = c(A)_{i, j}$  f\u00fcr alle Paare  $(i, j)$  mit  $j \leq n - j_0 + 1$ .  $\square$

**Korollar 5.3.5.** Sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix mit nichtnegativen ganzzahligen Eintr\u00e4gen und  $i_0 \neq 0$ . In der Klassenmatrix  $c(\tilde{E}_{j_0} A) = (c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i, j})_{i, j=1}^{m+1, n+1}$  gelten folgende Ungleichungen:

- a)  $c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i_0+1, n-j_0} < c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i_0, n-j_0+1}$ ,
- b)  $c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i+1, n-j_0} \geq c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i, n-j_0+1}$  f\u00fcr alle  $i_1 < i < i_0$ ,
- c)  $c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i+1, n-j_0+1} > c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i, n-j_0+2}$  f\u00fcr alle  $i_1 < i < i_0$  und
- d)  $c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i_1+1, n-j_0+1} \leq c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i_1, n-j_0+2}$ .

**Beweis** Die Ungleichungen folgen sofort aus der Definition 5.3.1 f\u00fcr  $i_1$  und Lemmata 5.3.2 und 5.3.4.  $\square$

## 5.4 Bestimmung der Matrix $(\tilde{E}_{j_0} A)'$

In diesem Abschnitt wollen wir die im ersten Schritt des Matrix-Ball-Algorithmus' entstehende Matrix  $(\tilde{E}_{j_0} A)'$  berechnen. Daf\u00fcr ben\u00f6tigen wir wieder einige Ungleichungen, die wir zuerst beweisen werden. Nat\u00fcrlich konzentrieren wir uns auch in diesem Abschnitt wieder auf den Fall  $\tilde{E}_{j_0} A \neq 0$ .

**Definition 5.4.1.** F\u00fcr einen Ball  $B$  aus der Matrix  $A$  und nat\u00fcrliche Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  definieren wir:

$$\varphi_k(c_1, c_2) = \varphi_k(c_1, c_2)(A) = \#\{\text{Ball } B \text{ mit } c_1 \leq c(B) \leq c_2 \text{ liegt in der } k\text{-ten Spalte}\}.$$

Falls eindeutig ist, welche Matrix  $A$  wir betrachten, verwenden wir wieder die k\u00fcrzere Bezeichnung  $\varphi_k(c_1, c_2)$ .

**Lemma 5.4.2.** F\u00fcr  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$ ,  $1 \leq j_0 < n$  seien  $i_0, i_1$  wie in dem Korollar 5.1.1 und der Definition 5.3.1 definiert. F\u00fcr  $i_0 > 0$  gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\varphi_{n-j_0}(d, c_{i_0, n-j_0+1}) \leq \varphi_{n-j_0+1}(d, c_{i_0, n-j_0+1}) \text{ f\u00fcr alle } 1 \leq d \leq c_{i_0, n-j_0+1}, \quad (5.10)$$

$$\varphi_{n-j_0}(d, c_{i_1+1, n-j_0+1}) = \varphi_{n-j_0+1}(d, c_{i_1+1, n-j_0+1}) \text{ f\u00fcr alle } c_{i_0, n-j_0+1} < d \leq c_{i_1+1, n-j_0+1}, \quad (5.11)$$

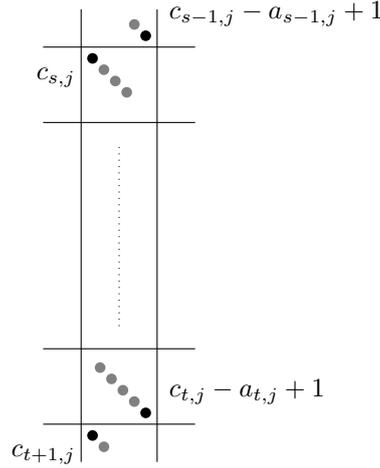
$$\varphi_{n-j_0}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, d) > \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, d) \text{ f\u00fcr alle } c_{i_1+1, n-j_0+1} < d. \quad (5.12)$$

Des Weiteren gibt es f\u00fcr jedes  $c_{i_0, n-j_0+1} < d \leq c_{i_1+1, n-j_0+1}$  genau einen Ball in den Spalten  $n - j_0$  und  $n - j_0 + 1$ , der die Klasse  $d$  besitzt.

**Beweis** Nach Lemma 5.2.2 gilt  $\varphi_j(c_{i+1,j}+1, c_{i,j}-a_{i,j}) = 0$ . Die Funktionen  $\varphi_j$  hängen folglich eng mit den alternierenden Summen der  $a_{i,j}$  zusammen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=s}^t a_{i,j} &= \varphi_j(c_{t,j} - a_{t,j} + 1, c_{s,j}) \\ &= \varphi_j(c_{t+1,j} + 1, c_{s-1,j} - a_{s-1,j}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

In der folgenden illustrierenden Skizze sind die Bälle mit den betreffenden Klassen hervorgehoben.



Des Weiteren gilt offenbar

$$\varphi_j(c, d) \leq \varphi_j(c', d'), \text{ falls } c' \leq c, d \leq d'. \quad (5.14)$$

Diese Eigenschaften der Funktionen  $\varphi_j$  werden wir in diesem Beweis oft anwenden.

**1. Teil** Wir nehmen an, dass die erste Behauptung nicht stimmt und wählen das kleinste  $1 \leq d \leq c_{i_0, n-j_0+1}$ , für welches die Ungleichung (5.10) nicht gilt. Wir rechnen leicht nach, dass für  $c = 1$  die Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_{n-j_0}(1, c_{i_0, n-j_0+1}) &= \varphi_{n-j_0}(c_{n, n-j_0} - a_{n, n-j_0} + 1, c_{i_0+1, n-j_0}) \\ &= \sum_{i_0+1}^n a_{i, n-j_0} \\ &\leq \sum_{i_0}^{n-1} a_{i, n-j_0+1} \\ &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{n-1, n-j_0+1} - a_{n-1, n-j_0+1} + 1, c_{i_0, n-j_0+1}) \\ &\leq \varphi_{n-j_0+1}(1, c_{i_0, n-j_0+1}). \end{aligned}$$

Folglich ist  $d \geq 2$ . Wegen der Minimalität von  $d$  gilt dann:

$$\varphi_{n-j_0}(d, c_{i_0, n-j_0+1}) > \varphi_{n-j_0+1}(d, c_{i_0, n-j_0+1}) \quad (5.15)$$

$$\varphi_{n-j_0}(d-1, c_{i_0, n-j_0+1}) \leq \varphi_{n-j_0+1}(d-1, c_{i_0, n-j_0+1}), \quad (5.16)$$

wobei die Gleichungen

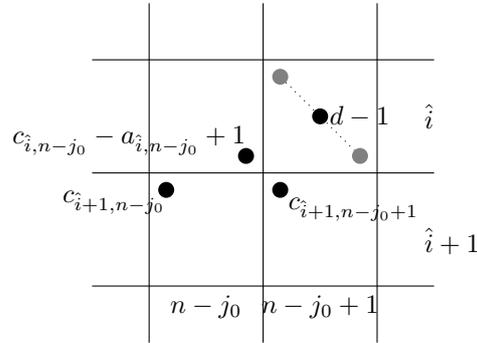
$$\begin{aligned}\varphi_{n-j_0}(d-1, c_{i_0, n-j_0+1}) &= \varphi_{n-j_0}(d, c_{i_0, n-j_0+1}) + \varphi_{n-j_0}(d-1, d-1), \\ \varphi_{n-j_0+1}(d-1, c_{i_0, n-j_0+1}) &= \varphi_{n-j_0+1}(d, c_{i_0, n-j_0+1}) + \varphi_{n-j_0+1}(d-1, d-1)\end{aligned}$$

gelten. Damit beide Ungleichungen (5.15) und (5.16) gelten, muss in der Ungleichung (5.16) die Gleichheit gelten. Des Weiteren gibt es keinen Ball der Klasse  $d-1$  in der  $(n-j_0)$ -ten Spalte, es liegt aber ein Ball mit dieser Klasse in der  $(n-j_0+1)$ -ten Spalte. Es gibt also einen „Sprung“ in der  $(n-j_0)$ -ten Spalte, d. h. es gibt eine Zeile  $\hat{i}$ , so dass gilt:

$$c_{\hat{i}, n-j_0} - a_{\hat{i}, n-j_0} + 1 > d-1 > c_{\hat{i}+1, n-j_0} \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow c_{\hat{i}, n-j_0} \geq d-1 > c_{\hat{i}+1, n-j_0}. \quad (5.18)$$

In der folgenden illustrierenden Skizze sind die Bälle mit den, in den Ungleichungen (5.17) und (5.18) vorkommenden, Klassen hervorgehoben.



Zusammen mit den (Un-)Gleichungen (5.13) und (5.14) folgt

$$\begin{aligned}\varphi_{n-j_0}(d-1, c_{i_0, n-j_0+1}) &= \varphi_{n-j_0}(c_{\hat{i}+1, n-j_0} + 1, c_{i_0, n-j_0+1}) \\ &= \sum_{i_0+1}^{\hat{i}} a_{i, n-j_0} \\ &\leq \sum_{i_0}^{\hat{i}-1} a_{i, n-j_0+1} \\ &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{\hat{i}, n-j_0+1} + 1, c_{i_0, n-j_0+1}) \\ &< \varphi_{n-j_0+1}(d-1, c_{i_0, n-j_0+1}),\end{aligned}$$

und wir erhalten einen Widerspruch zur Gleichheit in (5.16).

**2. Teil** Die Gleichung (5.11) beweisen wir, indem wir zeigen, dass es für jede Klasse  $c_{i_0, n-j_0+1} < d \leq c_{i_1+1, n-j_0+1}$  einen Ball mit dieser Klasse in beiden Spalten  $n-j_0$  und  $n-j_0+1$  gibt. Die Gleichung (5.11) ist dann eine direkte Konsequenz.

Nach dem zweiten Teil von Lemma 5.3.2 gibt es in der  $(n-j_0)$ -ten Spalte zwischen den Zeilen  $i_1+1$  und  $i_0$  keine Sprünge. Folglich treten alle Klassen  $c_{i_0, n-j_0} - a_{i_0, n-j_0} + 1 \leq d \leq c_{i_1+1, n-j_0}$  in der  $(n-j_0)$ -ten Spalte auf. Die Behauptung folgt sofort, da  $c_{i_1+1, n-j_0} \geq c_{i_1+1, n-j_0+1}$  und nach Lemma 5.3.2  $c_{i_0, n-j_0} - a_{i_0, n-j_0} + 1 = c_{i_0, n-j_0+1} + 1$  gelten.

Nach der Definition von  $i_1$  gibt es in der  $(n - j_0 + 1)$ -ten Spalte zwischen der  $(i_1 + 1)$ -ten und der  $i_0$ -ten Zeile keine Sprünge. Folglich treten alle Klassen  $c_{i_0, n-j_0+1} < d \leq c_{i_1+1, n-j_0+1}$  in der Spalte  $n - j_0 + 1$  auf.

**3. Teil** Wir werden für alle  $d > c_{i_1+1, n-j_0+1}$  die Ungleichung

$$\varphi_{n-j_0}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, d) > \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, d) \quad (5.19)$$

beweisen; zusammen mit dem zweiten Teil des Beweises folgt dann die Behauptung. Angenommen (5.19) ist falsch. Wir wählen  $d > c_{i_1+1, n-j_0+1}$  minimal, so dass  $d$  die Ungleichung nicht erfüllt.

Wir zeigen zuerst, dass  $d$  echt größer als  $c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1$  ist:

Falls  $i_1 \geq 1$  ist, so gibt es wegen  $c_{i_1, n-j_0+2} > c_{i_1+1, n-j_0+1}$  einen Sprung in der  $(n - j_0 + 1)$ -ten Spalte und keinen Ball mit der Klasse  $c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1$  in dieser Spalte. Falls  $i_1 = 0$  gilt, gibt es offensichtlich keinen Ball der Klasse  $c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1 = c_{1, n-j_0+1} + 1$  in der  $(n - j_0 + 1)$ -ten Spalte. Nach Lemma 5.3.2 gilt

$$c_{i_1+1, n-j_0} \geq c_{i_1+2, n-j_0} > c_{i_1+1, n-j_0+1} \geq c_{i_0, n-j_0+1};$$

folglich ist, wie wir im zweiten Teil des Beweises gezeigt haben, in der  $(n - j_0)$ -ten Spalte ein Ball der Klasse  $c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1$  enthalten. Wegen der Gleichung (5.11) ist somit

$$\varphi_{n-j_0}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1) > \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1).$$

Wegen der Minimalität von  $d > c_{i_0, n-j_0+1} + 1$  folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_{n-j_0}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, d) &\leq \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, d) \\ \varphi_{n-j_0}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, d - 1) &> \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, d - 1) \end{aligned}$$

Wie im ersten Teil des Beweises können wir schlussfolgern, dass es keinen Ball mit der Klasse  $d$  in der  $(n - j_0)$ -ten Spalte gibt. Sei  $\hat{i}$  die Zeile, so dass zwischen den Zeilen  $\hat{i}$  und  $\hat{i} + 1$  ein Sprung „über“ die Klasse  $d$  stattfindet, d. h.

$$\begin{aligned} c_{\hat{i}, n-j_0} - a_{\hat{i}, n-j_0} + 1 &> d > c_{\hat{i}+1, n-j_0} \quad \text{und} \\ c_{\hat{i}, n-j_0+1} = c_{\hat{i}, n-j_0} - a_{\hat{i}, n-j_0} &\geq d. \end{aligned}$$

Wir wenden wieder Lemma 5.1.4 an und erhalten:

$$\begin{aligned} \varphi_{n-j_0}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, d) &= \sum_{\hat{i}+1}^{i_0} a_{i, n-j_0} \\ &> \sum_{\hat{i}}^{i_0-1} a_{i, n-j_0+1} \\ &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, c_{\hat{i}, n-j_0+1}) \\ &\geq \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_0, n-j_0+1} + 1, d). \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Wahl von  $d$ . □

**Korollar 5.4.3.** Für eine Matrix  $A$  und ihre Klassenmatrix  $C(A) = (c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1,n+1}$  gelten insbesondere die folgenden Ungleichungen:

$$\varphi_{n-j_0}(d, c_{i_1+1, n-j_0+1}) \leq \varphi_{n-j_0+1}(d, c_{i_1+1, n-j_0+1}) \text{ für alle } 1 \leq d \leq c_{i_1+1, n-j_0+1}.$$

**Beweis** Das Korollar folgt sofort aus den Ungleichungen (5.10) und (5.11) aus Lemma 5.4.2.  $\square$

**Bemerkung 5.4.4.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  mit  $i_0 = 0$  gilt ebenfalls die Ungleichung

$$\varphi_{n-j_0}(d, c_{1, n-j_0+1}) \leq \varphi_{n-j_0+1}(d, c_{1, n-j_0+1}) \text{ für alle } 1 \leq d \leq c_{1, n-j_0+1} \quad (5.20)$$

Da  $s_0^{j_0} = s_1^{j_0} - a_{1, n-j_0} \leq s_1^{j_0}$  maximal ist, ist  $a_{1, n-j_0} = 0$  und folglich  $s_1^{j_0} = s_0^{j_0}$  maximal. Somit gelten die Ungleichungen (5.2), die für den Fall  $i_0 = 1$  gelten, hier ebenfalls. Da wir im Beweis des ersten Teils von Lemma 5.4.2 nur diese Ungleichungen und die in Bemerkung 5.3.3 bewiesene Ungleichung  $c_{2, n-j_0} \leq c_{1, n-j_0+1}$  verwendet haben, gelten die Ungleichungen (5.20).

**Satz 5.4.5.** Für  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  und  $1 \leq j_0 < n$  mit  $i_0 \neq 0$  sei  $i_1 = i_1(A)$  wie in 5.3.1 definiert, dann gilt

$$(\tilde{E}_{j_0} A)' = \begin{cases} (\tilde{E}_{j_0} A') & \text{falls } i_1 \neq 0 \\ A' & \text{falls } i_1 = 0. \end{cases}$$

Außerdem ist  $i_0(A') = i_1(A)$ , falls  $i_1(A) \neq 0$  ist.

**Beweis** Wir werden zuerst zeigen, dass

$$(\tilde{E}_{j_0} A)' = \begin{cases} A' - E_{i_1, n-j_0} + E_{i_1, n-j_0+1} & \text{falls } i_1 \neq 0 \\ A' & \text{falls } i_1 = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

gilt. Danach beweisen wir, dass  $i_1 = i_0(A') = \min\{l : s_l^{j_0}(A') \text{ maximal}\}$  ist. Wir wenden Lemma 5.2.4 auf  $\tilde{E}_{j_0} A$  an:

$$(\tilde{E}_{j_0} A)'_{i,j} = \min(c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i+1,j}, c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i,j+1}) - c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i+1,j+1} \quad (5.22)$$

und sehen, dass  $(\tilde{E}_{j_0} A)'$  sich von  $A' = (a'_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  nur in den Spalten  $n - j_0$  und  $n - j_0 + 1$  unterscheiden kann, und selbst dort nur zwischen der  $i_1$ -ten und der  $i_0$ -ten Zeile, da nach Lemma 5.3.4 die Gleichung  $C(\tilde{E}_{j_0} A) = C(A) + \sum_{i=i_1+1}^{i_0} E_{i, n-j_0+1}$  gilt.

Als erstes wollen wir  $(\tilde{E}_{j_0} A)'_{i_0, n-j_0}$  ausrechnen. Nach Lemma 5.3.2, Lemma 5.3.4 und Korollar 5.3.5 ist

$$\begin{aligned} \min(c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i_0+1, n-j_0}, c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i_0, n-j_0+1}) &= c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i_0+1, n-j_0} \\ &= c(A)_{i_0+1, n-j_0} \\ &= \min(c(A)_{i_0+1, n-j_0}, c(A)_{i_0, n-j_0+1}) \text{ und} \\ c(\tilde{E}_{j_0} A)_{i_0+1, n-j_0+1} &= c(A)_{i_0+1, n-j_0+1}; \end{aligned}$$

insbesondere ist  $(\tilde{E}_{j_0} A)'_{i_0, n-j_0} = a'_{i_0, n-j_0}$ .

Mit ähnlichen Argumentationen zeigen wir nun, dass (5.21) wahr ist. Um die Berechnungen übersichtlicher zu gestalten, werden wir die Klassenmatrizen  $C(A)$  und  $C(\tilde{E}_{j_0} A)$  und die in

ihnen nach Lemma 5.3.2 und Korollar 5.3.5 geltenden Ungleichungen in Abbildung 5.1 bildlich darstellen.

$$\begin{array}{c}
 C(\tilde{E}_{j_0} A) = \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & \begin{array}{c} n-j_0 \\ \hline n-j_0+1 \\ \hline n-j_0+2 \\ \hline \dots \\ \hline i_0-1 \\ \hline i_0 \\ \hline i_0+1 \end{array} & \\
 \hline
 \begin{array}{c} i_1 \\ \hline i_1+1 \\ \hline i_1+2 \\ \hline \dots \\ \hline i_0-1 \\ \hline i_0 \\ \hline i_0+1 \end{array} & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & \begin{array}{c} n-j_0 \\ \hline n-j_0+1 \\ \hline n-j_0+2 \\ \hline \dots \\ \hline i_0-1 \\ \hline i_0 \\ \hline i_0+1 \end{array} & \\
 \hline
 \begin{array}{c} i_1 \\ \hline i_1+1 \\ \hline i_1+2 \\ \hline \dots \\ \hline i_0-1 \\ \hline i_0 \\ \hline i_0+1 \end{array} & & \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & \begin{array}{c} n-j_0 \\ \hline n-j_0+1 \\ \hline n-j_0+2 \\ \hline \dots \\ \hline i_0-1 \\ \hline i_0 \\ \hline i_0+1 \end{array} & \\
 \hline
 \begin{array}{c} i_1 \\ \hline i_1+1 \\ \hline i_1+2 \\ \hline \dots \\ \hline i_0-1 \\ \hline i_0 \\ \hline i_0+1 \end{array} & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$C(A)$ 
 $C(\tilde{E}_{j_0} A)$

Abbildung 5.1: Ungleichungen in den Klassenmatrizen von  $\tilde{E}_{j_0} A$  und  $A$ .

Wie wir sehen, werden für die Matrizen  $B \in \{A, \tilde{E}_{j_0} A\}$  die Minima  $\min(c(B)_{i+1,j}, c(B)_{i,j+1})$  in den gleichen Feldern  $(i+1, j)$  bzw.  $(i, j+1)$  angenommen. Man rechnet nun leicht nach, dass folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{E}_{j_0} A)'_{i, n-j_0} &= c(A)_{i, n-j_0+1} + 1 - (c(A)_{i+1, n-j_0+1} + 1) \\
 &= a'_{i, n-j_0} \text{ für } i_1 < i < i_0, \\
 (\tilde{E}_{j_0} A)'_{i_1, n-j_0} &= \min(c(A)_{i_1+1, n-j_0}, c(A)_{i_1, n-j_0+1}) - (c(A)_{i_1+1, n-j_0+1} + 1) \\
 &= a'_{i_1, n-j_0} - 1 \text{ falls } i_1 \neq 0, \\
 (\tilde{E}_{j_0} A)'_{i_0, n-j_0+1} &= \min(c(A)_{i_0+1, n-j_0+1}, c(A)_{i_0, n-j_0+2}) - (c(A)_{i_0+1, n-j_0+2}) \\
 &= a'_{i_0, n-j_0+1}, \\
 (\tilde{E}_{j_0} A)'_{i, n-j_0+1} &= c(A)_{i, n-j_0+2} - c(A)_{i+1, n-j_0+2} \\
 &= a'_{i, n-j_0+1} \text{ für } i_1 < i < i_0, \\
 (\tilde{E}_{j_0} A)'_{i_1, n-j_0+1} &= c(A)_{i_1+1, n-j_0+1} + 1 - c(A)_{i_1+1, n-j_0+2} \\
 &= a'_{i_1, n-j_0+1} + 1 \text{ falls } i_1 \neq 0,
 \end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass  $C(\tilde{E}_{j_0} A) = C(A) + \sum_{i=i_1+1}^{i_0} E_{i, n-j_0+1}$  gilt. Dies beweist Gleichung (5.21). Nun müssen wir also nur noch beweisen, dass für  $i_1 \neq 0$  der Operator  $\tilde{E}_{j_0}$  die Matrix  $A'$  in der richtigen Zeile verändert, d. h. dass  $i_0(A') = i_1(A)$  gilt, falls  $i_1 \neq 0$  ist. Die Behauptung des Satzes folgt dann sofort.

Für den restlichen Beweis sei nun  $i_1 > 0$ . Nach dem Lemma 5.1.4 genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{k=i_1+1}^l a'_{k,n-j_0} \leq \sum_{k=i_1}^{l-1} a'_{k,n-j_0+1} \text{ für alle } i_1 + 1 \leq l \leq m \text{ und} \quad (5.23)$$

$$\sum_{k=l+1}^{i_1} a'_{k,n-j_0} > \sum_{k=l}^{i_1-1} a'_{k,n-j_0+1} \text{ für alle } 0 \leq l < i_1 \quad (5.24)$$

gelten. Dies werden wir erreichen indem wir für  $l_1 \leq l_2$  die Summe  $\sum_{i=l_1}^{l_2} a'_{i,j}$  durch die Funktion  $\varphi_j$  ausdrücken und dann Lemma 5.4.2 anwenden. Nach Lemma 5.2.4 gilt

$$\begin{aligned} a'_{i,j} &= \#\{B \text{ in } j\text{-ter Spalte} : c_{i+1,j+1} < c(B) \leq c_{i,j+1}\} \\ &= \varphi_j(c_{i+1,j+1} + 1, c_{i,j+1}); \end{aligned}$$

also (mit  $l_1 \leq l_2$ )

$$\begin{aligned} \sum_{i=l_1}^{l_2} a'_{i,j} &= \sum_{i=l_1}^{l_2} \varphi_j(c_{i+1,j+1} + 1, c_{i,j+1}) \\ &= \varphi_j(c_{l_2+1,j+1} + 1, c_{l_1,j+1}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Wir wenden nun (5.25) an um die Ungleichungen (5.23) und (5.24) zu zeigen. Zuerst beweisen wir die Ungleichungen (5.23) durch eine Fallunterscheidung. Für  $i_1 + 1 \leq l \leq m$  sei zuerst  $c_{l,n-j_0+2} \leq c_{l+1,n-j_0+1}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_1}^{l-1} a'_{i,n-j_0+1} &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{l,n-j_0+2} + 1, c_{i_1,n-j_0+2}) \\ &\geq \varphi_{n-j_0+1}(c_{l+1,n-j_0+1} + 1, c_{i_1+1,n-j_0+1}), \\ &\geq \varphi_{n-j_0}(c_{l+1,n-j_0+1} + 1, c_{i_1+1,n-j_0+1}), \\ &= \sum_{i=i_1+1}^l a'_{i,n-j_0}. \end{aligned}$$

Dabei folgt das erste Ungleichheitszeichen aus den Ungleichungen  $c_{l,n-j_0+2} \leq c_{l+1,n-j_0+1}$  und  $c_{i_1+1,n-j_0+1} < c_{i_1,n-j_0+2}$  und Gleichung (5.14). Das zweite  $\geq$ -Zeichen folgt aus Korollar 5.4.3. Sei nun  $c_{l,n-j_0+2} > c_{l+1,n-j_0+1}$ . Dann ist offensichtlich  $\varphi_{n-j_0+1}(c_{l+1,n-j_0+1} + 1, c_{l,n-j_0+2}) = 0$  und wir rechnen wie oben:

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_1}^{l-1} a'_{i,n-j_0+1} &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{l,n-j_0+2} + 1, c_{i_1,n-j_0+2}) \\ &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{l+1,n-j_0+1} + 1, c_{l,n-j_0+2}) + \varphi_{n-j_0+1}(c_{l,n-j_0+2} + 1, c_{i_1,n-j_0+2}) \\ &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{l+1,n-j_0+1} + 1, c_{i_1,n-j_0+2}) \\ &\geq \varphi_{n-j_0+1}(c_{l+1,n-j_0+1} + 1, c_{i_1+1,n-j_0+1}), \text{ da } c_{i_1+1,n-j_0+1} < c_{i_1,n-j_0+2} \\ &\geq \sum_{i=i_1+1}^l a'_{i,n-j_0}. \end{aligned}$$

Die Ungleichungen (5.24) für  $0 \leq l < i_1$  zeigen wir nun genauso, indem wir ausnutzen, dass wegen  $c_{i_1, n-j_0+2} > c_{i_1+1, n-j_0+1}$  die Gleichung  $\varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{i_1, n-j_0+2}) = 0$  gilt. Wir unterscheiden dafür mehrere Fälle.

Sei zuerst  $c_{l+1, n-j_0+1} \geq c_{l, n-j_0+2}$ . Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\sum_{i=l}^{i_1-1} a'_{i, n-j_0+1} &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{i_1, n-j_0+2}) + \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1, n-j_0+2} + 1, c_{l, n-j_0+2}) \\
&= \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{l, n-j_0+2}) \\
&\leq \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{l+1, n-j_0+1}) \\
&< \varphi_{n-j_0}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{l+1, n-j_0+1}), \text{ nach Lemma 5.4.2, (5.12)} \\
&= \sum_{i=l+1}^{i_1} a'_{i, n-j_0}.
\end{aligned}$$

Sei nun  $c_{l+1, n-j_0+1} < c_{l, n-j_0+2}$ , dann ist  $\varphi_{n-j_0+1}(c_{l+1, n-j_0+1} + 1, c_{l, n-j_0+2}) = 0$  und daher gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=l}^{i_1-1} a'_{i, n-j_0+1} &= \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{i_1, n-j_0+2}) + \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1, n-j_0+2} + 1, c_{l, n-j_0+2}) \\
&= \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{l, n-j_0+2}) \\
&= \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{l+1, n-j_0+1}) + \varphi_{n-j_0+1}(c_{l+1, n-j_0+1} + 1, c_{l, n-j_0+2}) \\
&= \varphi_{n-j_0+1}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{l+1, n-j_0+1}) \\
&< \varphi_{n-j_0}(c_{i_1+1, n-j_0+1} + 1, c_{l+1, n-j_0+1}) = \sum_{i=l+1}^{i_1} a'_{i, n-j_0}.
\end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung.  $\square$

## 5.5 Beweis der Hauptaussage

Um zu beweisen, dass die Operationen der  $\tilde{E}_j$  für  $1 \leq j < n$  auf den Matrizen mit den Operationen der  $\tilde{E}_j$  auf den zugehörigen Paaren von SSYT übereinstimmen, betten wir jede Matrix  $A$  in eine größere Matrix  $\tilde{A}$  ein. Wir gestalten die Einbettung so, dass das zur Matrix  $A$  gehörende Paar von SSYT  $(\tau, \sigma)$  in  $(\tilde{A})^{(l)}$  für ein bestimmtes  $l \geq 1$  kodiert ist. Wie eine solche Einbettung aussehen kann, sehen wir im folgenden Beweis.

**Lemma 5.5.1.** Sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen. Wir betten  $A$  in eine größere Matrix  $\tilde{A}$  ein:

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \min(m, n) & n & \min(m, n) \\ \min(m, n) & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & \begin{array}{c} c \\ \dots \\ c \end{array} \\ \hline \end{array} & m & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & A & 0 \\ \hline \end{array} \\ \min(m, n) & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} c \\ \dots \\ c \end{array} & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & & \end{array} \end{array},$$

dabei ist  $c := c_{1,1}$  der erste und größte Eintrag der Klassenmatrix  $C(A) = (c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1,n+1}$ . Die Matrix  $\tilde{A}^{(\min(m,n))}$  hat dann die Form:

$$\tilde{A}^{(\min(m,n))} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \min(m,n) \\ m \\ \min(m,n) \end{array} \begin{array}{c} \min(m,n) \quad n \quad \min(m,n) \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & \tilde{\sigma} & 0 \\ \hline \tilde{\tau}^T & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array},$$

wobei  $\tilde{\sigma}$  und  $\tilde{\tau}$  die kodierenden Matrizen der SSYT  $\sigma$  bzw.  $\tau$  sind. Die Untermatrix  $*$  ist im Allgemeinen nicht Null.

**Beweis** Da es in  $\tilde{A}$  keine positiven Einträge südöstlich der Untermatrix  $A$  gibt, besitzt jeder Ball in der Untermatrix  $A$  die gleiche Klasse wie in  $A$ . Die Klassen der „neuen“ Bälle in der südwestlichen bzw. nordöstlichen Untermatrix durchlaufen die Menge  $\{1, 2, \dots, c\}$ . Es ist nun leicht zu zeigen, dass gilt:

$$(\tilde{A})' = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \min(m,n) \\ m \\ \min(m,n) \end{array} \begin{array}{c} \min(m,n) \quad n \quad \min(m,n) \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & \begin{array}{c} c \ 0 \\ \dots \\ c \ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & \begin{array}{c} \tilde{\sigma}_{1,\cdot} \\ A' \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{c} c \ 0 \\ \dots \\ c \ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

Wir erinnern daran, dass der Ball der Klasse  $d$ , der am weitesten östlich (bzw. südlich) in der Matrix  $A$  liegt, beim ersten Schritt des Matrix-Ball-Algorithmus' aus der Matrix  $A$  geschoben wird. Die Spalte (bzw. Zeile), in der er lag, trägt also zu  $\tilde{\sigma}_{1,\cdot}$  (bzw.  $\tilde{\tau}_{1,\cdot}$ ) bei:

- $\tilde{\sigma}_{1,j} = \#\{B : \text{Ball } B \text{ ist der östlichste Ball seiner Klasse } c(B) \text{ und liegt in der Spalte } j\},$
- $\tilde{\tau}_{1,i} = \#\{B : \text{Ball } B \text{ ist der südlichste Ball seiner Klasse } c(B) \text{ und liegt in der Zeile } i\}.$

Bei der Anwendung des ersten Schrittes des Matrix-Ball-Algorithmus' auf  $\tilde{A}$  werden genau diese Bälle auch aus der Untermatrix  $A$  herausgeschoben, bleiben aber in  $(\tilde{A})'$  direkt über (bzw. neben) der eingebetteten Matrix liegen. Deshalb sind  $\tilde{\sigma}_{1,\cdot}$  (bzw.  $\tilde{\tau}_{1,\cdot}^T$ ) in der Zeile  $\min(m,n)$  (bzw. in der Spalte  $\min(m,n)$ ) von  $(\tilde{A})'$  enthalten.

Im zweiten Schritt des Matrix-Ball-Algorithmus' wird  $\tilde{\sigma}_{1,\cdot}$  eine Zeile nach oben und  $\tilde{\tau}_{1,\cdot}$  eine Spalte nach links verschoben. Offensichtlich wird die Untermatrix  $A'$  zu  $A''$ .

Wir wollen jetzt zeigen, dass  $\tilde{\sigma}_{2,\cdot}$  in der Zeile direkt über  $A''$  und  $\tilde{\tau}_{2,\cdot}^T$  direkt links neben  $A''$  steht. Dafür wollen wir zuerst beweisen, dass die Bälle, die in der Zeile  $\min(m, n)$  (bzw. in der Spalte  $\min(m, n)$ ) von  $(\tilde{A})'$  liegen, die Klassen  $\{1, 2, \dots, c_{1,1}(A)\}$  durchlaufen. Oder anders ausgedrückt: die Bälle, die sich im ersten Schritt des Matrix-Ball-Algorithmus' aus der Matrix  $A$  herausbewegt haben, behalten ihre Klasse.

Seien  $B_1$  und  $B_2$  die am weitesten östlich liegenden Bälle der Matrix  $A$  für die Klassen  $c_k = c(B_k)$ ,  $k = 1, 2$  mit  $c_1 < c_2$ . Da im Südosten von  $B_2$  ein Ball mit der Klasse  $c_1$  liegen muss und  $B_1$  der östlichste Ball dieser Klasse ist, muss  $B_1$  östlich von  $B_2$  liegen. Da für jede Klasse der östlichste Ball beim ersten Schritt in die Zeile direkt über die Matrix  $A$  geschoben wird, sind die herausgeschobenen Bälle nach ihrer Klasse von Ost nach West geordnet. Die neue Klasse (in  $(\tilde{A})'$ ) der herausgeschobenen Bälle ist also nicht kleiner als ihre alte Klasse (in  $\tilde{A}$ ). Da nach Lemma 5.2.6 die Klasse eines Balles nicht größer als die ihrer Erzeuger ist, gilt die Behauptung für die Bälle in der Zeile  $\min(m, n)$ . Für die Bälle in der Spalte  $\min(m, n)$  von  $(\tilde{A})'$  folgt die Behauptung analog.

Wir wollen nun zeigen, dass in der Zeile direkt über  $A''$  die zweite Zeile von  $\tilde{\sigma}$  steht. Wie wir bereits gezeigt haben, haben die Bälle in der Zeile über  $A'$  in  $(\tilde{A})'$  ihre Klasse behalten. Jede der in  $A'$  auftretenden Klassen ist also in der Zeile direkt über  $A'$  vertreten, da wegen  $c_{1,1}(A) = \lambda_1 \geq \lambda_2 = c_{1,1}(A')$  in der Matrix  $A'$  nicht mehr Klassen als in  $A$  auftreten, wobei  $\lambda$  die Form von  $\tau(A)$  und  $\sigma(A)$  sei. Folglich werden die Bälle, die im zweiten Schritt des Matrix-Ball-Algorithmus' nach oben aus der Matrix  $A'$  geschoben werden und zu  $\sigma_2$  beitragen, in der Zeile direkt über  $A''$  gestoppt. Die analoge Aussage können wir für die Spalten neben  $A''$  zeigen. Wir erhalten also:

$$(\tilde{A})'' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \min(m, n) & n & \min(m, n) \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} c \ 0 \ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \min(m, n) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \tilde{\sigma}_{1,\cdot} \\ \tilde{\sigma}_{2,\cdot} \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A'' \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \min(m, n) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} c \ 0 \ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Wie oben können wir nun zeigen, dass die Klassen der Bälle in den zwei Zeilen über  $A''$  und zwei Spalten neben  $A''$  in  $(\tilde{A})''$  die gleichen Klassen besitzen wie ihre erzeugenden Bälle in  $(\tilde{A})'$ . Folglich enthält  $(\tilde{A})^{(3)}$  die ersten drei Zeilen von  $\tilde{\sigma}$  und  $\tilde{\tau}$ .

Im  $i$ -ten Schritt werden die in den vorherigen Schritten erhaltenen  $i - 1$  Zeilen von  $\tilde{\sigma}$  und  $\tilde{\tau}$  ohne Veränderung weitergeschoben und die neue  $i$ -te Zeile wird in die Zeile (bzw. Spalte) direkt über (bzw. neben) die Untermatrix, in der vorher  $A^{(i-1)}$  stand, eingeschrieben. Bei einem dieser Schritte kann es passieren, dass neue Bälle in die nordwestliche  $\min(m, n) \times \min(m, n)$ -Untermatrix von  $\tilde{A}^{(i)}$  geschoben werden. Diese Bälle beeinflussen die Wirkung des Matrix-

Ball-Algorithmus' auf der Untermatrix  $A^{(i)}$  und den Untermatrizen, die die Zeilen von  $\tilde{\sigma}$  bzw.  $\tilde{\tau}$  enthalten, nicht.

Nach  $\min(m, n)$  Schritten ist die Untermatrix, in der am Anfang  $A$  stand, leer, da mit jeder Anwendung von  $(\cdot)'$  mindestens die östlichste Spalte und die südlichste Zeile von dieser Untermatrix geleert wird. In den Bereichen über und neben dieser Untermatrix stehen dann  $\tilde{\sigma}$  bzw.  $\tilde{\tau}^T$ . Die Behauptung ist damit bewiesen.  $\square$

Durch die im Satz beschriebene Einbettung einer Matrix in eine größere Matrix können wir den Matrix-Ball-Algorithmus so beschreiben, dass er nur noch eine „Datenstruktur“ benötigt. Bei dem ursprünglichen Matrix-Ball-Algorithmus benötigten wir zwei getrennte Datenstrukturen: Die Matrix  $A$ , welche wir in jedem Schritt veränderten, und das Zeile-für-Zeile wachsende Paar von SSYT. Bei der im Lemma 5.5.1 beschriebenen Einbettung benötigen wir nur die Matrix, um die Zwischenschritte des Matrix-Ball-Algorithmus' zu speichern. Des Weiteren besteht der Matrix-Ball-Algorithmus jetzt nur noch aus der Bildung der neuen Ball-Matrix  $(\tilde{A})'$ . Der Schritt, die Zeilen der SSYT  $\tau$  und  $\sigma$  zu bestimmen, entfällt. Diese Erkenntnisse verwenden wir um zu beweisen, dass die RSK-Korrespondenz mit den Kashiwara-Operatoren vertauscht (Vgl. 5.5.2).

Die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$ ,  $j_0 \neq 0$  wirken auf Paaren  $(\tau, \sigma)$  von SSYT gleicher Form  $\lambda$  mit  $l(\lambda) = \min(m, n)$ , indem sie für  $0 < j_0 < n$  auf dem SSYT  $\sigma$  und für  $-m < j_0 < 0$  auf dem SSYT  $\tau$  via  $\mathcal{E}_{-j_0}\tau$  wirken. Wir bezeichnen sie in Zukunft mit  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$ , um sie von den Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$  auf Matrizen zu unterscheiden.

**Satz 5.5.2.** Es sei  $(\tau, \sigma)(A)$  das zu der Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  assoziierte Paar von SSYT und  $1 \leq j_0 < n$ . Es gilt  $\tilde{E}_{j_0}A \neq 0$  genau dann, wenn  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A) \neq 0$  bzw.  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}\sigma(A) \neq 0$  gilt. Falls  $\tilde{E}_{j_0}A \neq 0$  ist, gilt die Gleichung

$$(\tau, \sigma)(\tilde{E}_{j_0}A) = \tilde{\mathcal{E}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A),$$

wobei der Kashiwara-Operator  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$  auf dem SSYT  $\sigma(A)$  operiert. Die Kashiwara-Operatoren vertauschen also mit der RSK-Korrespondenz.

**Beweis** Wir wenden den Matrix-Ball-Algorithmus nach der Beschreibung aus Lemma 5.5.1 und den Satz 5.4.5 an. Es sei  $l := \min(m, n)$ .

Zuerst beweisen wir, dass aus  $\tilde{E}_{j_0}A = 0$  die Gleichung  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}\sigma(A) = 0$  folgt. Es sei also  $i_0^{j_0}(A) = 0$  und  $\tilde{A}$  die Matrix aus dem Lemma 5.5.1, in der die Matrix  $A$  eingebettet ist. Wir zeigen induktiv, dass  $i_0^{j_0+l}(\tilde{A}^{(k)}) = 0$  für alle  $0 \leq k \leq l$  gilt. Wegen  $i_0^{j_0}(A) = 0$  ist offensichtlich  $i_0^{j_0+l}(\tilde{A}) = 0$ . Sei  $0 \leq k < l$  mit  $i_0^{j_0+l}(\tilde{A}^{(k)}) = 0$ . Wir bezeichnen  $(\tilde{A})^{(k)}$  mit  $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{m+2l, n+2l}$ , um die Übersicht zu behalten. Wir wollen zeigen, dass  $i_0^{j_0+l}(B') = 0$  ist. Nach Lemma 5.1.4 genügt es zu zeigen, dass die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^s b'_{i, n-j_0+l} \leq \sum_{i=0}^{s-1} b'_{i, n-j_0+l+1} \quad \text{für alle } 1 \leq s \leq m+2l \quad (5.26)$$

gelten, wobei  $b'_{0, n-j_0+l+1} := 0$ .

Zuerst machen wir einige notwendige Vorüberlegungen. Wie wir im Beweis von Lemma 5.5.1 gesehen haben, hat die Matrix  $B$  eine bestimmte Form, welche wir ausnutzen werden. So sind die ersten  $n+l$  Einträge in der ersten Zeile Null. Des Weiteren liegt der Ball mit der

größten in der ersten Zeile auftretenden Klasse  $c = c_{1,1}(A)$  in der ersten Zeile und rechts von der  $(n+l)$ -ten Spalte von  $B$ . Da  $c = c_{1,1}(A)$  die größte in der Matrix  $A$  vorkommende Klasse ist, ist sie nach Bemerkung 5.2.7 auch die größte Klasse der Matrix  $B$  und folglich gilt  $c_{1,n-j_0+l+2}(B) = c \geq c_{2,n-j_0+l+1}(B)$ . Mit  $s_0^{j_0+l}(B)$  ist auch

$$s_2^{j_0+l}(B) = s_0^{j_0+l}(B) + b_{1,n-j_0+l} + b_{2,n-j_0+l} - b_{1,n-j_0+l+1} = s_0^{j_0+l}(B) + b_{2,n-j_0+l}$$

maximal, da  $i_0^{j_0+l}(B) = 0$  ist. Da  $b_{2,n-j_0+l} = 0$  gilt, sehen wir mit der gleichen Argumentation wie in Bemerkung 5.3.3, dass die Ungleichung  $c_{3,n-j_0+l}(B) \leq c_{2,n-j_0+l+1}(B)$  gilt.

Wegen  $c_{3,n-j_0+l}(B) \leq c_{2,n-j_0+l+1}(B)$  ist

$$b'_{1,n-j_0+l} = \varphi_{n-j_0+l}(c_{2,n-j_0+l+1}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+1}(B)) = 0,$$

die Ungleichung (5.26) gilt also für  $s = 1$ . Es sei nun  $2 \leq s \leq m + 2l$ . Wegen  $b_{1,n-j_0+l+1} = 0$  und  $c_{1,n-j_0+l+2}(B) \geq c_{2,n-j_0+l+1}(B)$  ist  $c_{1,n-j_0+l+1}(B) = c_{1,n-j_0+l+2}(B)$ . Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s-1} b'_{i,n-j_0+l+1} &= \varphi_{n-j_0+l+1}(c_{s,n-j_0+l+2}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+2}(B)) \\ &= \varphi_{n-j_0+l+1}(c_{s,n-j_0+l+2}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+1}(B)). \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Sei zuerst  $c_{s,n-j_0+l+2}(B) \leq c_{s+1,n-j_0+l+1}(B)$ . Nach der Bemerkung 5.4.4 gilt somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s-1} b'_{i,n-j_0+l+1} &= \varphi_{n-j_0+l+1}(c_{s,n-j_0+l+2}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+1}(B)) \\ &\geq \varphi_{n-j_0+l+1}(c_{s+1,n-j_0+l+1}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+1}(B)) \\ &\geq \varphi_{n-j_0+l}(c_{s+1,n-j_0+l+1}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+1}(B)) \\ &= \sum_{i=1}^s b'_{i,n-j_0+l}. \end{aligned}$$

Sei nun  $c_{s,n-j_0+l+2}(B) > c_{s+1,n-j_0+l+1}(B)$ , dann gilt

$$\varphi_{n-j_0+l+1}(c_{s+1,n-j_0+l+1}(B) + 1, c_{s,n-j_0+l+2}(B)) = 0$$

und folglich

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s-1} b'_{i,n-j_0+l+1} &= \varphi_{n-j_0+l+1}(c_{s,n-j_0+l+2}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+1}(B)) \\ &= \varphi_{n-j_0+l+1}(c_{s+1,n-j_0+l+1}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+1}(B)) \\ &\geq \varphi_{n-j_0+l}(c_{s+1,n-j_0+l+1}(B) + 1, c_{1,n-j_0+l+1}(B)) \\ &= \sum_{i=1}^s b'_{i,n-j_0+l}. \end{aligned}$$

Dies beweist für  $0 \leq k < l$  die Behauptung  $i_0^{j_0+l}(B') = i_0^{j_0+l}((\tilde{A})^{(k+1)}) = 0$ . Da

$$0 = i_0^{j_0+l}((\tilde{A})^{(l)}) = i_0^{j_0}(\tilde{\sigma}(A)) = k_0(\sigma(A))$$

gilt, ist  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}\sigma(A) = 0$ .

Sei nun  $i_0^{j_0}(A) \neq 0$ . Zuerst zeigen wir induktiv, dass der Index  $i_0^{j_0+l}((\tilde{A})^{(k)})$  für alle  $0 \leq k \leq l$  ungleich Null ist. Offenbar gilt diese Behauptung für  $k = 0$ , da  $i_0^{j_0}(A) \neq 0$  ist.

Für  $0 \leq k < l$  gelte nun  $i_0^{j_0+l}((\tilde{A})^{(k)}) \neq 0$  und sei  $B := (\tilde{A})^{(k)}$ . Der Index  $i_1^{j_0+l}(B)$  ist per Definition echt kleiner als  $i_0^{j_0+l}(B)$ . Er kann also nur größer als Null sein, falls  $i_0^{j_0+l}(B)$  echt größer als Eins ist. Diese Voraussetzung ist erfüllt: Da nach Lemma 5.5.1 die ersten  $l - k$  Zeilen der  $(n - j_0 + l)$ -ten und  $(n - j_0 + l + 1)$ -ten Spalten von  $B$  leer sind, gilt

$$s_0^{j_0+l}(B) = s_1^{j_0+l}(B) = \dots = s_{l-k}^{j_0+l}(B) \leq s_{l-k}^{j_0+l}(B) + b_{l-k+1, n-j_0+l} = s_{l-k+1}^{j_0+l}(B).$$

Zusammen mit  $i_0^{j_0+l}(B) \neq 0$  folgt  $i_0^{j_0+l}(B) \geq l - k + 1 > 1$ . Sollte  $i_1^{j_0+l}(B) \leq 1$  sein, so folgt die Ungleichung  $c_{3, n-j_0+l}(B) > c_{2, n-j_0+l+1}(B)$  aus Lemma 5.3.2. Wir haben bereits gesehen, dass  $c_{1, n-j_0+l+2}(B) = c$  die größte in  $B$  auftretende Klasse ist, folglich gilt

$$c_{1, n-j_0+l+2}(B) \geq c_{3, n-j_0+l}(B) > c_{2, n-j_0+l+1}(B)$$

und somit  $i_1^{j_0+l}(B) \geq 1$ . Nach Satz 5.4.5 ist also

$$i_0^{j_0+l}(\tilde{A}^{(k+1)}) = i_1^{j_0+l}(\tilde{A}^{(k)}) = i_1^{j_0+l}(B) \geq 1 \neq 0 \text{ für } 0 \leq k < l.$$

Insbesondere ist  $0 \neq i_0^{j_0+l}(\tilde{A}^{(l)}) = k_0(\sigma(A))$  und  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}\sigma(A) \neq 0$ .

Sei weiterhin  $i_0(A) \neq 0$ . Wir wenden nun Satz 5.4.5 an, um zu zeigen, dass der Kashiwara-Operator mit dem Matrix-Ball-Algorithmus vertauscht. Man sieht leicht, dass  $\tilde{E}_{j_0+l}\tilde{A}$  als Untermatrix  $\tilde{E}_{j_0}A$  enthält, da  $\tilde{E}_{j_0+l}$  auf der  $(n - j_0 + l)$ -ten und der  $(n - j_0 + l + 1)$ -ten Spalte von  $\tilde{A}$  operiert. In der Matrix  $(\tilde{E}_{j_0+l}\tilde{A})^{(l)}$  ist das zu  $\tilde{E}_{j_0}A$  gehörende Paar von SSYT  $(\tau^*, \sigma^*)$  kodiert.

Da  $i_1^{j_0+l}((\tilde{A})^{(k)}) = i_0^{j_0+l}((\tilde{A})^{(k+1)}) > 0$  für alle  $0 \leq k < l$  ist, können wir nach Satz 5.4.5 die ersten  $l$ -Schritte des Matrix-Ball-Algorithmus' mit dem Operator  $\tilde{E}_{j_0+l}$  vertauschen:

$$(\tilde{E}_{j_0+l}\tilde{A}^{(k)})' = \tilde{E}_{j_0+l}(\tilde{A}^{(k)})' = \tilde{E}_{j_0+l}\tilde{A}^{(k+1)} \text{ für alle } 0 \leq k < l.$$

Insbesondere gilt:

$$(\tilde{E}_{j_0+l}\tilde{A})^{(l)} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & l & n & l \\ \hline i & * & \tilde{\sigma}^* & 0 \\ \hline m & \tilde{\tau}^* & 0 & 0 \\ \hline i & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ = \tilde{E}_{j_0+l}(\tilde{A}^{(l)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & l & n & l \\ \hline i & * & \tilde{E}_{j_0}\tilde{\sigma} & 0 \\ \hline m & \tilde{\tau}^T & 0 & 0 \\ \hline i & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} .$$

Nach Korollar 2.5.2 operiert der Operator  $\tilde{E}_{j_0}$  auf der  $l \times n$ -Matrix  $\tilde{\sigma}$  genauso wie  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$  auf dem SSYT  $\sigma$  und es gilt  $k_0(\sigma) = i_0(\tilde{\sigma})$ . Insbesondere gilt  $\tilde{E}_{j_0}\tilde{\sigma} = \tilde{\mathcal{E}}_{j_0}\sigma \neq 0$ . Dies beweist, dass die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_{j_0}$  genauso auf den Matrizen operieren, wie die Operatoren  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$  auf Paaren von SSYT.  $\square$

**Korollar 5.5.3.** Es sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen und  $-m < j_0 < n$  mit  $j_0 \neq 0$ . Es gilt  $\tilde{E}_{j_0}A \neq 0$  (bzw.  $\tilde{F}_{j_0}A \neq 0$ ) genau dann, wenn  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A) \neq 0$  (bzw.  $\tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A) \neq 0$ ) gilt.

Falls  $\tilde{E}_{j_0}A \neq 0$  (bzw.  $\tilde{F}_{j_0}A \neq 0$ ) erfüllt ist, vertauschen die Kashiwara-Operatoren mit dem Matrix-Ball-Algorithmus. Genauer gilt:

$$\begin{aligned}(\tau, \sigma)(\tilde{E}_{j_0}A) &= \tilde{\mathcal{E}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A) \text{ bzw.} \\(\tau, \sigma)(\tilde{F}_{j_0}A) &= \tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A),\end{aligned}$$

wobei der Kashiwara-Operator  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$  und  $\tilde{\mathcal{F}}_{j_0}$  für positive  $j_0$  auf dem SSYT  $\sigma(A)$  und für negative  $j_0$  auf dem SSYT  $\tau(A)$  via  $\tilde{\mathcal{E}}_{-j_0}\tau(A)$  bzw.  $\tilde{\mathcal{F}}_{-j_0}\tau(A)$  operieren.

**Beweis** Falls  $A$  eine Matrix mit  $\tilde{E}_{j_0}A \neq 0$  (bzw.  $\tilde{F}_{j_0}A \neq 0$ ) ist, so gilt  $\tilde{F}_{j_0}\tilde{E}_{j_0}A = A$  (bzw.  $\tilde{E}_{j_0}\tilde{F}_{j_0}A = A$ ). Die analoge Aussage gilt auch für die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$  und  $\tilde{\mathcal{F}}_{j_0}$ . Diese Eigenschaft der Kashiwara-Operatoren verwenden wir nun um das Korollar zu beweisen.

Sei  $0 < j_0 < n$ . Für eine Matrix  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  sei  $(\tau, \sigma)(A)$  das zu der Matrix  $A$  assoziierte Paar von SSYT.

Falls  $\tilde{F}_{j_0}A \neq 0$  ist, ist  $\tilde{E}_{j_0}\tilde{F}_{j_0}A = A$  und wir rechnen:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}(\tau, \sigma)(\tilde{F}_{j_0}A) = (\tau, \sigma)(\tilde{E}_{j_0}(\tilde{F}_{j_0}A)) = (\tau, \sigma)(A).$$

Wir wenden den Kashiwara-Operator  $\tilde{\mathcal{F}}_{j_0}$  an und erhalten:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A) = \tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}(\tau, \sigma)(\tilde{F}_{j_0}A)) = (\tau, \sigma)(\tilde{F}_{j_0}A) \neq 0.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass  $\tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A) = 0$ , falls  $\tilde{F}_{j_0}A = 0$  ist. Angenommen  $\tilde{F}_{j_0}A = 0$  und  $\tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A) \neq 0$ . Es sei  $B \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  die Matrix, so dass  $(\tau, \sigma)(B) = \tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A)$  gilt. Dann ist

$$(\tau, \sigma)(\tilde{E}_{j_0}B) = \tilde{\mathcal{E}}_{j_0}(\tau, \sigma)(B) = \tilde{\mathcal{E}}_{j_0}\tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A) = (\tau, \sigma)(A),$$

und folglich  $\tilde{E}_{j_0}B = A$ . Insbesondere ist  $\tilde{F}_{j_0}A = B \neq 0$ , dies ist ein Widerspruch. Dies beweist das Korollar für positive Indizes  $j_0$ .

Wegen der Symmetrie des Matrix-Ball-Algorithmus' (vgl. Lemma 1.3.6), gilt die Behauptung auch für negative Indizes  $-m < j_0 < 0$ : So ist für  $j_0 < 0$  nach Bemerkung 5.1.2  $(\tilde{E}_{j_0}A)^T = \tilde{E}_{-j_0}A^T$ . Aus

$$(\tau, \sigma)((\tilde{E}_{j_0}A)^T) = (\tau, \sigma)(\tilde{E}_{-j_0}A^T) = (\tau, \tilde{\mathcal{E}}_{-j_0}\sigma)(A^T)$$

folgt nach Lemma 1.3.6

$$(\tau, \sigma)(\tilde{E}_{j_0}A) = (\tilde{\mathcal{E}}_{-j_0}\tau(A), \sigma(A)) = \tilde{\mathcal{E}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A)$$

und analog  $(\tau, \sigma)(\tilde{F}_{j_0}A) = \tilde{\mathcal{F}}_{j_0}(\tau, \sigma)(A)$ . □

**Korollar 5.5.4.** Der quantisierte Koordinatenring  $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$  ist als  $\mathcal{U}_q(sl_m) \otimes \mathcal{U}_q(sl_n)$ -Darstellung isomorph zu  $\bigoplus_{\lambda: l(\lambda) \leq \min(m, n)} V_m(\lambda) \otimes V_n(\lambda)$ , wobei  $V_m(\lambda)$  und  $V_n(\lambda)$  die unzerlegbaren  $\mathcal{U}_q(sl_m)$ - bzw.  $\mathcal{U}_q(sl_n)$ -Darstellungen sind.

**Beweis** Folgt sofort aus Satz 5.5.2.  $\square$

Die Definition der RSK-Korrespondenz ist folglich aus Sicht der Darstellungstheorie nicht zufällig gewählt.

## 5.6 Gewichtsraum der Matrix $A$

Es wäre wünschenswert die Form  $\lambda$  der zu einer Matrix  $A$  assoziierten SSYT  $(\tau, \sigma)$  direkt an der Matrix  $A$  ablesen zu können. Wir beschreiben hier zumindest eine Möglichkeit die Länge  $\lambda'_1$  der Partition  $\lambda$  zu bestimmen. Dafür führen wir den Begriff der  $S$ -Klasse eines Balles ein.

**Definition 5.6.1.** Es sei  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$ . Die  $S$ -Klasse eines Balles  $B$  der Matrix  $A$  wird durch

$$s(B) := \max(\{0\} \cup \{s(B') : B' \text{ liegt streng nordöstlich von } B\}) + 1$$

definiert, wobei  $B'$  *streng nordöstlich* von  $B$  liegt, falls  $i(B') < i(B)$  und  $j(B') > j(B)$  gilt.

**Bemerkung 5.6.2.** Die  $S$ -Klasse  $s = s(B)$  eines Balles  $B$  ist so definiert, dass sie die maximale Anzahl  $s - 1$  von Bällen  $B_1, \dots, B_{s-1}$  angibt, mit

$$\begin{aligned} i(B_1) < i(B_2) < \dots < i(B_{s-1}) < i(B) \text{ und} \\ j(B_1) > j(B_2) > \dots > j(B_{s-1}) > j(B). \end{aligned}$$

Die Bälle  $B_1, B_2, \dots, B_{s-1}, B_s := B$  bilden dann eine „Kette“ von Nordost nach Südwest. (Den Begriff der  $S$ -Klasse haben wir in Anlehnung an den englischen Begriff „string“ gewählt.)

**Satz 5.6.3.** Sei  $A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  eine Matrix, deren assoziierte SSYT  $(\tau, \sigma)$  die Form  $\lambda$  haben. Dann ist  $\lambda'_1$  die größte in  $A$  auftretende  $S$ -Klasse.

**Beweis** Wir zeigen zuerst, dass die Behauptung für Matrizen  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{i,j} &\leq 1 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n, \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} &\leq 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

gilt. Sei  $A$  eine Matrix, die die Bedingungen erfüllt, und  $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  durch  $b_{i,j} = a_{m+1-i,j}$  definiert. Dann ist die  $S$ -Klasse eines Balles, der in dem Feld  $(i, j)$  der Matrix  $A$  liegt, genau die Klasse des entsprechenden Balles, der in dem Feld  $(m+1-i, j)$  der Matrix  $B$  liegt. Dies folgt leicht, da ein Ball  $b$  streng nordöstlich von dem Ball  $b'$  liegt genau dann, wenn  $b$  nordöstlich von  $b'$  liegt. Insbesondere ist die größte in  $A$  auftretende  $S$ -Klasse die größte in  $B$  auftretende Klasse  $c_{1,1}(B)$ .

Des Weiteren haben nach [8, §A.4] die zu der Matrix  $B$  assoziierten SSYT die Form  $\lambda'$ , falls  $\lambda$  die Form der zu der Matrix  $A$  assoziierten SSYT ist. Insbesondere ist  $c_{1,1}(B) = \lambda'_1$  die größte in  $A$  auftretende  $S$ -Klasse.

Sei nun  $A$  eine beliebige  $(m \times n)$ -Matrix und  $\lambda$  die Form der zu  $A$  assoziierten SSYT. Wir können die Matrix  $A$  ähnlich wie in der Bemerkung 5.2.7 zu einer Matrix  $\check{A}$  verfeinern, die

höchstens einen Eintrag in jeder Zeile und Spalte besitzt, indem wir entsprechend Hilfsspalten und Hilfszeilen einfügen. Zuerst fügen wir die Hilfsspalten wie in der Bemerkung 5.2.7 beschrieben ein und erhalten die Matrix  $\widehat{A}$ . Zwei Bälle, die streng nordöstlich voneinander lagen, liegen offensichtlich auch weiterhin streng nordöstlich voneinander. Des Weiteren liegen die Bälle, die in  $A$  in der gleichen Spalte lagen nun auf einer Diagonalen von Nordwest nach Südost. Zwei Bälle in  $A$  liegen also genau dann streng nordöstlich voneinander, wenn die entsprechenden Bälle in  $\widehat{A}$  streng nordöstlich voneinander liegen. Des Weiteren liegen zwei Bälle in  $A$  südöstlich voneinander genau dann, wenn sie in  $\widehat{A}$  südöstlich voneinander liegen.

Um in der Matrix  $\widehat{A}$  die Hilfszeilen einzufügen, wiederholen wir die in der Bemerkung 5.2.7 beschriebene Konstruktion für die Matrix  $B := \widehat{A}^T$ , genauer sei  $\check{A}^T = \widehat{B}$ . Es sei  $\check{\lambda}$  die Form der zu  $\check{A}$  assoziierten SSYT. Zwei Bälle in  $A$  liegen genau dann südöstlich voneinander, wenn sie in  $\check{A}$  südöstlich voneinander liegen. Die Klassen der Bälle bleiben folglich während der Verfeinerung erhalten. Insbesondere ist  $\lambda_1 = c_{1,1}(A) = c_{1,1}(\check{A}) = \check{\lambda}_1$ . Man sieht leicht, dass wir durch das Vergessen der Hilfsspalten und Hilfszeilen der verfeinerten Matrix  $(\check{A})'$  die Matrix  $A'$  erhalten. Folglich haben die zu  $A$  bzw.  $\check{A}$  assoziierten SSYT die gleiche Form  $\lambda = \check{\lambda}$ .

Des Weiteren liegen zwei Bälle in der Matrix  $A$  genau dann streng nordöstlich voneinander, wenn die entsprechenden Bälle in  $\check{A}$  (streng) nordöstlich voneinander liegen. Folglich bleibt die  $S$ -Klasse eines Balles während der Verfeinerung erhalten. Die größte in  $A$  auftretenden  $S$ -Klasse ist somit genau die größte in  $\check{A}$  auftretende  $S$ -Klasse  $(\check{\lambda})'_1 = \lambda'_1$ .  $\square$

Es sei  $\lambda$  die Form der zu der Matrix  $A$  assoziierten SSYT. Nach dem obigen Satz, können wir also nicht nur den ersten Eintrag  $\lambda_1 = c_{1,1}(A)$ , sondern auch die Länge

$$\lambda'_1 = \max(\{0\} \cup \{s(B) : B \text{ ist ein Ball in } A\})$$

der Partition  $\lambda$ , leicht aus der Matrix  $A$  bestimmen.

## 5.7 Vergleich mit anderen Arbeiten

Sei  $\lambda$  eine Partition und  $\Lambda$  ihr wie in Abschnitt 1.1 definiertes Young-Diagramm. Wie schon in Abschnitt 1.1.1 bemerkt, werden im Gegensatz zu der hier verwendeten Definition von SSYT diese in der Literatur oft von links nach rechts aufsteigend und von oben nach unten echt aufsteigend definiert; um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir diese als inverse SSYT, wobei wir die inversen SSYT bevorzugt mit  $P$  bzw.  $Q$  bezeichnen werden. Die entsprechende RSK-Korrespondenz  $A \mapsto (Q, P)$ , die einer Matrix ein Paar inverser SSYT gleicher Form zuordnet, wird u. a. von dem in [8] dargestellten Matrix-Ball-Algorithmus beschrieben.

### Arbeit von V. I. Danilov und G. A. Koshevoy

In [4] betrachten die Autoren eine Bijektion zwischen Matrizen – sogenannten Arrays – und Paaren von inversen SSYT gleicher Form, die der RSK-Korrespondenz sehr ähnlich ist: Der Array  $a$  wird auf das Paar  $(l, d)$  von Arrays abgebildet, die jeweils die inversen SSYT  $(\bar{Q}(a), P(a))$  kodieren; dabei ist  $\bar{Q}(a)$  die Schützenberger Involution des inversen SSYT  $Q(a)$ <sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Die Schützenberger Inversion wird in [8, §A.1] beschrieben, sie ordnet einem inversen SSYT  $Q$  ein inverses SSYT  $\bar{Q}$  der gleichen Form zu. Genauer sei für eine  $(m \times n)$ -Matrix  $A$  die Matrix  $\bar{A}$  durch  $\bar{A}_{i,j} = A_{m+1-i, n+1-j}$  definiert. Dann ist  $\bar{Q}(A) = Q(\bar{A})$ .

Diese Bijektion wird mit Hilfe von Operatoren  $D_i$ ,  $1 \leq i < m$ , und  $L_j$ ,  $1 \leq j < n$ , auf den Arrays beschrieben. Die Beschreibung dieser Operatoren ähnelt der Beschreibung der in dieser Arbeit auf Matrizen definierten Kashiwara-Operatoren. Es lässt sich schlussfolgern, dass die Bijektion  $a \mapsto (\bar{Q}(a), P(a))$  die Operatoren  $D_i$  und  $L_j$  respektiert.

Da die Nummerierung der Einträge der Arrays sich von denen der Matrizen unterscheidet, werden wir in diesem Abschnitt Arrays mit kleinen Buchstaben (z. B.  $a$ ) und Matrizen mit großen Buchstaben (z. B.  $A$ ) bezeichnen. Wir assoziieren zu einem Array  $a = (a_{j,i})_{j,i=1}^{n,m}$  die Matrix  $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ , indem wir  $A_{i,j} := a_{j,m+1-i}$  definieren. Diese Assoziation macht die ungewöhnliche Nummerierung der Einträge der Arrays rückgängig: ausgeschrieben sehen die Matrix  $A$  und das zu ihr assoziierte Array  $a$  gleich aus. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit  $A$  die zu dem Array  $a$  assoziierte Matrix. Des Weiteren sind die inversen SSYT  $Q(a)$  und  $P(a)$  genau die inversen SSYT  $(Q(A), P(A))$ , die Fultons Matrix-Ball-Algorithmus zu der Matrix  $A$  assoziiert.

Die Vorgehensweise in der Arbeit [4] ist sehr kombinatorisch: die vertikalen Operatoren  $D_i$  und  $U_i$  mit  $1 \leq i < m$  und die horizontalen Operatoren  $L_j$  und  $R_j$  mit  $1 \leq j < n$  auf den Arrays werden kombinatorisch definiert, ohne dass eine (darstellungstheoretische) Motivation angegeben wird. Interessanter Weise entsprechen die Operatoren  $D_i, U_i, L_j$  und  $R_j$  *fast* den hier hergeleiteten Kashiwara-Operatoren auf Matrizen. So ähneln sich z. B. die Beschreibungen von  $\tilde{E}_j$  für  $0 < j$  und  $R_j$  sehr: Bei  $R_j$  wird genauso wie bei dem Kashiwara-Operator ein Zeilenindex  $i_0$  bestimmt<sup>4</sup>. Falls  $i_0 \neq 0$  ist, sind die Werte von  $\tilde{E}_j A$  und  $R_j A$  gleich. Für  $i_0 = 0$  hingegen, erhalten wir unterschiedliche Werte:  $\tilde{E}_j A = 0$  und  $R_j A = A$ . Die so auf den Arrays definierten Operatoren lassen sich – entgegen der Aussage der Autoren – somit nicht als ein Kristall einer Darstellung einer Quantengruppe interpretieren.

Zu Beginn der Arbeit werden einige wichtige Eigenschaften der Operatoren  $D_i, U_i, L_j$  und  $R_j$  – so z. B. die Kommutativität von  $D_i$  und  $L_j$  – bewiesen.

Die Autoren führen den Begriff des  $L$ -engen Arrays ein; dieses Konzept entspricht dem Konzept der Höchstgewichtsvektoren. Ein Array  $l$  ist  $L$ -eng genau dann, wenn  $L_j l = l$  für alle  $1 \leq j < n$  gilt. Man kann jedem Array  $a$  ein  $L$ -enges Array  $\mathbb{L}a$  zuordnen, indem man die Operatoren  $L_j$  mit  $1 \leq j < n$  oft genug auf das Array  $a$  anwendet. Der Begriff des  $D$ -engen Arrays und die Abbildung  $\mathbb{D}$  werden analog definiert. Die Autoren zeigen, dass die Abbildung, die einem Array  $a$  das Paar  $(\mathbb{L}a, \mathbb{D}a) = (l, d)$  mit  $\mathbb{D}l = Ld$  zuordnet, eine Bijektion ist. Für ein Paar  $(l, d)$  mit  $l$  ein  $L$ -enges Array und  $d$  ein  $D$ -enges Array wird die Wirkung der Operation  $D_i, U_i, L_j$  und  $R_j$  kanonisch definiert, z. B.

$$\begin{aligned} L_j(l, d) &= (\mathbb{L}L_j l, \mathbb{D}L_j d) = (l, L_j d) \text{ und} \\ R_j(l, d) &= (\mathbb{L}R_j l, \mathbb{D}R_j d) = (l, R_j d) \text{ für } 1 \leq j < n. \end{aligned}$$

Offensichtlich respektiert die Bijektion  $(\mathbb{L}, \mathbb{D})$  die Operatoren  $D_i, U_i, L_j$  und  $R_j$ .

Durch den Vergleich der Knuth-Relationen (Bemerkung 1.1.4) mit den Operatoren  $D_i$  wird bewiesen, dass das inverse SSYT  $P(A)$  in dem Array  $\mathbb{D}a$  kodiert wird. Der  $L$ -enge Array  $\mathbb{L}a$  hingegen kodiert nicht das inverse SSYT  $Q(A)$ , sondern die Schützenberger Inversion  $\bar{Q}(A)$  desselben. Folglich respektiert auch die Abbildung  $a \mapsto (\bar{Q}(A), P(A))$  die Operatoren  $L, R, D$  und  $U$ , wenn diese entsprechend auf den inversen SSYT definiert werden, d. h.  $L_j P(A)$  das in  $L_j \mathbb{D}a$  kodierte inverse SSYT ist. Eine kurze Rechnung zeigt, dass das inverse SSYT  $Q(D_i A)$

<sup>4</sup>Man sieht leicht, dass beide Definitionen des Zeilenindex  $i_0$  gleich sind.

in dem Array  $\mathbb{L}(*D_i a) = U_{m-i}\mathbb{L}(*a)$  kodiert ist, wobei  $*a$  als eine Spiegelung des Arrays  $a$  definiert ist. Die klassische RSK-Korrespondenz  $A \mapsto (Q, P)(A)$  respektiert folglich nur die Operatoren  $L_j$  und  $R_j$ , die Operatoren  $D_i$  und  $U_i$  hingegen nicht.

Im Gegensatz zu der vorliegenden Arbeit gibt es in der Arbeit keinen Zusammenhang zur Darstellungstheorie: Die Operatoren auf den Arrays werden rein kombinatorisch definiert, ohne dass eine darstellungstheoretische Motivation oder Herleitung angegeben wird. Durch die ungewöhnliche Definition der Operatoren, die sicher stellt, dass kein Array auf Null abgebildet wird, ist der Graph, der die Wirkung der Operatoren auf den Arrays beschreibt, nicht der Kristallgraph einer Darstellung einer Quantengruppe.

In [4] wird nicht die klassische RSK-Korrespondenz, sondern eine Variante desselben betrachtet. Es gibt keine offensichtlichen Variationen des Matrix-Ball-Algorithmus' und des im Abschnitt 1.2 definierten Bumping-Algorithmus', welche die Bijektion  $A \mapsto (\overline{Q(A)}, P(A))$  beschreiben, zumindest kommt unter den zahlreichen in [8, §A.4] beschriebenen Variationen der RSK-Korrespondenz keine entsprechende Variation vor. Die klassische RSK-Korrespondenz ist somit der Variante von Danilov und Koshevoy vorzuziehen, da die beschreibenden Algorithmen die zu einer Matrix assoziierten inversen SSYT gleichzeitig bestimmt. In der Arbeit [4] wird nur gezeigt, dass die klassische RSK-Korrespondenz  $A \mapsto (Q, P)(A)$  nur die Operatoren  $L_j$  und  $R_j$  respektiert. Wenn wir  $L_j$ ,  $R_j$  und  $U_i, D_i$  ungenauer Weise als Kashiwara-Operatoren der Quantengruppe  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$  bzw.  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m)$  interpretieren, so zeigen die Autoren, dass die klassische RSK-Korrespondenz ein Isomorphismus von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Moduln ist. In der vorliegenden Arbeit können wir hingegen zeigen, dass die klassische RSK-Korrespondenz ein Isomorphismus von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m)$ - $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Bimoduln ist.

Des Weiteren werden die Operatoren auf Arrays und inversen SSYT nicht unabhängig voneinander definiert. Die Operatoren auf inversen SSYT werden als spezieller Fall der Operatoren auf Arrays definiert, indem ein inverses SSYT als  $D$ -enges Array betrachtet wird. In der vorliegenden Arbeit werden die Kashiwara-Operatoren auf SSYT und Matrizen hingegen unabhängig voneinander mit Hilfe der Darstellungstheorie hergeleitet: So werden die Kashiwara-Operatoren auf SSYT mit Hilfe der Darstellungstheorie der Quantengruppen hergeleitet, während die Definition der Kashiwara-Operatoren auf Matrizen durch die Übersetzung von Quantengruppen via Hall-Algerben zu Köcherdarstellungen motiviert wird.

Des Weiteren unterscheidet sich die Vorgehensweise in [4] grundsätzlich von der Vorgehensweise in der vorliegenden Arbeit. In [4] wird die Abbildung  $a \mapsto (\mathbb{L}a, \mathbb{D}a)$ , die einem beliebigen Array ein Paar von  $L$ -engen bzw.  $D$ -engen Arrays zuordnet, untersucht. Die Autoren untersuchen u. a. die Relationen zwischen Operatoren  $D_i, U_i, L_j$  und  $R_j$  um zu beweisen, dass diese Abbildung eine Bijektion ist. Durch einen Vergleich des Operators  $D_i$  und der Knuth-Relationen können die Autoren zeigen, dass der  $D$ -enge Array  $\mathbb{D}a$  das inverse SSYT  $P$  kodiert. In dieser Arbeit hingegen definieren wir keine neue Realisierung der RSK-Korrespondenz, sondern betrachten die bekannte Beschreibung des Matrix-Ball-Algorithmus' und verwenden eine neue Formulierung desselben. Außerdem untersuchen wir nicht die Relationen zwischen den Kashiwara-Operatoren, sondern die Beziehung zwischen dem Matrix-Ball-Algorithmus und den Kashiwara-Operatoren. Dafür betrachten wir die Wirkung der Kashiwara-Operatoren auf dem neu eingeführten Begriff der Klassenmatrix.

### Arbeit von M. A. A. van Leeuwen

In der Arbeit [18] von M. A. A. van Leeuwen wird die RSK-Korrespondenz ebenfalls wie in [4] mit kombinatorisch auf Matrizen definierten Operatoren  $e_j^{\leftarrow}, e_j^{\rightarrow}, e_i^{\uparrow}$  und  $e_i^{\downarrow}$  realisiert. Es wird eine ähnliche Bijektion wie in [4] beschrieben: einer beliebigen Matrix  $A$  wird ein Paar  $(Q_A, P_A)$  von Matrizen zugeordnet, wobei es eine Matrix  $A_z$  gibt, so dass  $P_A$  das inverse SSYT  $P(A_z)$  und  $Q_A^T$  die Schützenberger Inversion  $\overline{Q}(A_z)$  von  $Q(A_z)$  kodieren. Genauer erhält man die Matrix  $A_z$  indem man die Zeilen von  $A$  in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt. Eine mögliche Schlussfolgerung, welche von dem Autor aber nicht gezogen wird, ist, dass die Bijektion  $A \mapsto (Q_A, P_A)$  von den Operatoren  $e_j^{\leftarrow}, f_j^{\rightarrow}, e_i^{\uparrow}$  und  $f_i^{\downarrow}$  respektiert wird.

Ähnlich wie in [4] werden auch in [18] inverse SSYT mit Hilfe von Matrizen mit nicht-negativen ganzzahligen Einträgen (bzw. binären Matrizen) kodiert. Dadurch erhält man durch die Definition der kombinatorischen Operatoren  $e_j^{\leftarrow}, f_j^{\rightarrow}, e_i^{\uparrow}$  und  $f_i^{\downarrow}$  auf Matrizen ebenfalls Operatoren auf inversen SSYT<sup>5</sup>. Für eine  $(m \times n)$ -Matrix  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  ähnelt die Definition der Matrizen  $Q_A$  und  $P_A$  der Definition der Arrays  $\mathbb{L}a$  und  $\mathbb{D}a$  in [4]: Man erhält die Matrix  $P_A$  (bzw.  $Q_A$ ) indem man eine endliche Folge von Operatoren  $e_i^{\uparrow}$  (bzw.  $e_j^{\leftarrow}$ ) so auf  $A$  wirken lässt, dass jede weitere Operation der  $e_i^{\uparrow}$  (bzw.  $e_j^{\leftarrow}$ ) nicht definiert ist. Indem man das „jeu de taquin“<sup>6</sup> – eine mit dem Bumping-Algorithmus vergleichbare Prozedur – mit den Operatoren  $e_i^{\uparrow}$  vergleicht, wird gezeigt, dass die Matrix  $P_A$  das inverse SSYT  $P(A_z)$  kodiert, das zu  $A_z = (a_{m+1-i,j})_{i,j=1}^{m,n}$  assoziiert ist. Wegen der Symmetrie der RSK-Korrespondenz kodiert somit die transponierte Matrix  $Q_A^T$  das inverse SSYT  $Q(A_s) = \overline{Q}(A_z)$ , welches zu der Matrix  $A_s = (a_{i,n+1-j})_{i,j=1}^{m,n}$  assoziiert wird [18, §3.3]. Die in [18] beschriebene Bijektion  $A_z \mapsto A \mapsto (\overline{Q}(A_z), P(A_z))$  (bzw.  $A_s \mapsto A \mapsto (Q(A_s), \overline{P}(A_s))$ ) respektiert die Operatoren  $e_j^{\leftarrow}, f_j^{\rightarrow}, e_i^{\uparrow}$  und  $f_i^{\downarrow}$  nicht. Darstellungstheoretisch betrachtet kann man aus der Arbeit [18] nicht schlussfolgern, dass die RSK-Korrespondenz ein Isomorphismus von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Moduln (bzw.  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m)$ -Moduln) ist.

Insbesondere kann das in der vorliegenden Arbeit bewiesene Ergebnis, dass die RSK-Korrespondenz ein Isomorphismus von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m)\text{-}\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Bimoduln ist, nicht aus den Ergebnissen in [18] geschlossen werden. Die Vorgehensweise in [18] ist des Weiteren rein kombinatorisch; der Autor betrachtet den darstellungstheoretischen Aspekt der RSK-Korrespondenz nicht, er interessiert sich stattdessen für eine alternative Beschreibung derselben.

Wie schon in [4] werden die Operatoren auf inversen SSYT als spezieller Fall der Operatoren auf Matrizen behandelt; es wird keine darstellungstheoretische Motivation der Definition der Operatoren angegeben. Im Gegensatz dazu werden in der vorliegenden Arbeit die Kashiwara-Operatoren auf Matrizen und SSYT getrennt voneinander aus der Darstellungstheorie hergeleitet.

Die Vorgehensweise in [18], die der Vorgehensweise in der Arbeit [4] ähnelt, unterscheidet sich des Weiteren fundamental von unserer Vorgehensweise: wir versuchen nicht die RSK-Korrespondenz mit Hilfe von Operatoren darzustellen und vergleichen diese Realisierung mit dem „jeu de taquin“-Algorithmus, sondern zeigen stattdessen, dass der Matrix-Ball-Algorithmus die Kashiwara-Operatoren respektiert.

<sup>5</sup>Die in [18] definierten Operatoren, entsprechen den im Abschnitt 3.7 hergeleiteten Kashiwara-Operatoren auf Matrizen; so ist z. B.  $f_j^{\rightarrow}$  der Kashiwara-Operator  $\tilde{e}_j$ .

<sup>6</sup>Eine Definition des „jeu de taquin“-Algorithmus findet sich in [8, §1.2].

### Arbeit von K. Erdmann, J.A. Green und M. Schocker

In dem Appendix von [10] untersuchen K. Erdmann, J.A. Green und M. Schocker den Zusammenhang zwischen sogenannten Littelmann-Operatoren, die auf Wörtern in dem Alphabet  $\{1, 2, \dots, n\}$  wirken, und Schensteds Algorithmus. Schensteds Algorithmus beschreibt eine Bijektion zwischen Wörtern und Paaren  $(Q, P)$ , wobei  $P$  ein inverses SSYT und  $Q$  ein inverses Standard-Young-Tableau (SYT) der gleichen Form ist (Bemerkung 1.1.4). Die Interpretation eines inversen SSYT als Wort ermöglicht es, die Littelmann-Operatoren ebenfalls auf inversen SSYT zu definieren. Die Littelmann-Operatoren  $\tilde{f}_c, \tilde{e}_c$  entsprechen den Kashiwara-Operatoren wie sie in [15] definiert sind. Die Autoren zeigen mit Hilfe der Knuth-Relationen, dass Schensteds Algorithmus die Littelmann-Operatoren respektiert, wenn die Littelmann-Operatoren auf dem Paar  $(Q, P)$  operieren, indem sie auf dem inversen SSYT  $P$  operieren. Darstellungstheoretisch bedeutet dies, dass Schensteds Algorithmus ein  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Morphismus ist.

Im Folgenden wird die Struktur des Beweises von K. Erdmann, J. A. Green und M. Schocker beschrieben.

Die Autoren erhalten eine Definition der Littelmann-Operatoren auf inversen SSYT, indem sie zu jedem inversen SSYT  $P$  ein Wort assoziieren, welches man die Knuth-Abwicklung  $KP$  nennt. Die Knuth-Abwicklung ist so definiert, dass Schensteds Algorithmus zu dem Wort  $KP$  das inverse SSYT  $P$  und ein inverses SYT  $Q_{\text{sh}(P)}$  assoziiert, welches eindeutig durch die Form von  $P$  bestimmt ist. Es wird bewiesen, dass die Knuth-Relationen die Littelmann-Operatoren respektieren; d. h. die Bilder zweier Knuth-äquivalenter Wörter unter einem Littelmann-Operator sind wieder Knuth-äquivalent. Insbesondere werden die Littelmann-Operatoren von der Abbildung  $\omega \mapsto P(\omega)$  respektiert; bei diesem Beweis spielt die Knuth-Abwicklung eine wesentliche Rolle. Durch einen Vergleich der Berechnung der inversen SYT  $Q(\omega)$  und  $Q(\tilde{f}_c\omega)$  durch Schensted-Algorithmus' wird gezeigt, dass die inversen SYT  $Q(\omega)$  und  $Q(\tilde{f}_c)\omega$  gleich sind.

In [10, App.] wird folglich bewiesen, dass die durch Schensted Algorithmus beschriebene Abbildung  $\omega \rightarrow (Q, P)(\omega)$  die Littelmann-Operatoren respektiert, wobei diese auf dem Paar  $(Q, P)$  operieren, indem sie auf dem inversen SSYT  $P$  wirken. Wegen des engen Zusammenhangs zwischen Schensteds Algorithmus und der RSK-Korrespondenz, zeigt dies, dass die RSK-Korrespondenz einen  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Morphismus beschreibt. In der vorliegenden Arbeit wird über [10, App.] hinausgehend gezeigt, dass die RSK-Korrespondenz ein Morphismus von  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_m)$ - $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Bimoduln ist, da sie die entsprechenden Kashiwara-Operatoren respektiert (Korollar 5.5.3).

Die in dieser Arbeit verwendeten Methoden entscheiden sich des Weiteren fundamental von den in [10, App.] verwendeten Methoden. So betrachten wir nicht die Knuth-Relationen, sondern untersuchen den Zusammenhang der Kashiwara-Operatoren mit dem hier eingeführten Begriff der Klassenmatrix, welche den ersten Schritt des Matrix-Ball-Algorithmus' beschreibt. Des Weiteren werden die Kashiwara-Operatoren auf SSYT und Biwörtern bzw. Matrizen getrennt voneinander mit Hilfe der Darstellungstheorie definiert. Dagegen werden in [10, App.] die Littelmann-Operatoren auf inversen SSYT definiert, indem man diese als Wort interpretiert und die Littelmann-Operatoren entsprechend fortsetzt.

### Arbeit von A. Lascoux, B. Lecler und J.-Y. Thibon

Die Arbeit [19, §5] von A. Lascoux, B. Lecler und J.-Y. Thibon ist vergleichbar mit der Arbeit [10, App.]. Die auf Wörtern definierten linearen Operatoren  $e_i$  und  $f_i$  entsprechen

den in [15] definierten Kashiwara-Operatoren und den in [10, App.] definierten Littelmann-Operatoren. In der Arbeit [19, §5] wird u. a. der Zusammenhang zwischen Schensteds Algorithmus und den Operatoren  $e_i, f_i$  untersucht. Die Autoren zeigen, dass die (elementaren) Knuth-Bewegungen diese Operatoren respektieren. Sie zeigen auch, dass die zu den Wörtern  $\omega$  und  $f_i\omega$  (bzw.  $e_i\omega$ ) durch Schensteds Algorithmus assoziierten inversen SYT  $Q$  gleich sind. Da sie ein Young-Tableaux als Wort auffassen, kann man wie in [10, App.] schlussfolgern, dass Schensteds Algorithmus die Operatoren  $e_i, f_i$  respektiert, falls diese auf dem Paar  $(Q, P)$  operieren, indem sie auf dem inversen SSYT  $P$  operieren. Diese Schlussfolgerung ziehen sie aber nicht, sondern untersuchen stattdessen den durch die Operatoren  $e_i, f_i$  beschriebenen Graphen auf Wörtern.

Da sich die Vorgehensweisen in den für uns interessanten Teil der Arbeiten [10, App.] und [19] sehr stark ähneln, d. h. die Beweisideen gleich sind, verweisen wir für den Vergleich der Arbeit [19] mit der vorliegenden Arbeit auf die Betrachtung von [10, App.] im obigen Abschnitt.

## Kapitel 6

# Eine neue Verknüpfung zwischen ganzzahligen Matrizen

Wir haben gezeigt, dass  $\tilde{E}_{j_0}$  genauso auf  $(m \times n)$  Matrizen operieren, wie die  $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$  auf den Paaren von SSYT. Dabei haben wir  $A$  in eine größere Matrix  $\tilde{A}$  eingebettet. Auf diese Weise konnten wir das zu  $A$  gehörende Paar von SSYT  $(\tau, \sigma)$  nur auf der Matrix  $\tilde{A}$  berechnen. Diese Einbettung kann man verallgemeinern und so eine Verknüpfung  $\star$  zwischen Matrizen definieren. Wir werden hier diese Verknüpfung analysieren und feststellen, dass sie assoziativ ist. Außerdem lässt sich das zu der Matrix  $A \star B$  assoziierte Paar von SSYT sehr leicht mit Hilfe der zu  $A$  und  $B$  assoziierten Paaren von SSYT bestimmen.

### 6.1 Definition der Verknüpfung $\star$

**Definition 6.1.1.** Seien  $A, B$  zwei  $s \times t$  bzw.  $r \times u$  Matrizen, deren Einträge nichtnegative ganze Zahlen sind. Die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

hat dann die Dimension  $(s + r) \times (t + u)$ . Des Weiteren sei  $l = l(A, B)$  die kleinste Zahl, so dass die zu  $A$  und  $B$  gehörenden Untermatrizen in  $N^{(l)} = (n_{i,j}^{(l)})_{i,j}$  Null sind, d. h.  $n_{i,j}^{(l)} = 0$  falls  $i > r$  oder  $j > t$ . Wir definieren

$$N^{(l(A,B))} = \begin{pmatrix} A \star B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lemma 6.1.2.** Mit den Bezeichnungen von oben gilt

$$N^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} * & B^{(k)} \\ A^{(k)} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Beweis** Da südöstlich von den Untermatrizen  $A$  und  $B$  keine Bälle liegen, besitzen die Bälle in diesen Untermatrizen die gleichen Klassen wie in  $A$  bzw.  $B$ :

$$C(N) = \begin{pmatrix} C & C(B) \\ C(A) & 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^{r,t}$  die Matrix, mit  $c_{i,j} = \max(c_{1,j}(A), c_{i,1}(B))$  ist. Nach Lemma 5.2.4 ist

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} * & B' \\ A' & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog folgt somit

$$N^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} * & B^{(k)} \\ A^{(k)} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**Bemerkung 6.1.3.** Wir können die in 6.1.1 definierte Zahl  $l = l(A, B)$  also auch durch die Gleichung

$$l = l(A, B) = \min\{k : A^{(k)} = 0 = B^{(k)}\}$$

definieren. Seien  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  und  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  die Formen der zu  $A$  bzw.  $B$  assoziierten Paare von SSYT, wobei  $\lambda_k > 0$  und  $\mu_m > 0$  gelte. Offenbar ist die Länge  $k$  die kleinste Zahl mit  $A^{(k)} = 0$ . Folglich ist  $l(A, B) = \min(k, m)$ .

## 6.2 Die zu $A \star B$ assoziierten SSYT

Wir wollen nun sehen, wie das zu  $A \star B$  assoziierte Paar von SSYT  $(\tau, \sigma)(A \star B)$  aussieht.

**Satz 6.2.1.**  $A$  und  $B$  seien  $t \times s$  bzw.  $r \times u$ -Matrizen mit nicht-negativen ganzzahligen Einträgen. Die zu  $A$  und  $B$  assoziierten Paare von SSYT sind  $(\tau^A, \sigma^A)$  bzw.  $(\tau^B, \sigma^B)$ . Das zu der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

assoziierte Paar von SSYT  $(\tau, \sigma)$  lässt sich einfach aus  $(\tau^A, \sigma^A)$  und  $(\tau^B, \sigma^B)$  ablesen:

$$\begin{aligned} \tau_{\cdot,j}^T &= (\tau_{1,j}^A + r, \tau_{2,j}^A + r, \dots, \tau_{\mu_j,j}^A + r, \tau_{1,j}^B, \tau_{2,j}^B, \dots, \tau_{\lambda_j,j}^B) \text{ für alle } 1 \leq j \leq L, \\ \sigma_{\cdot,j}^T &= (\sigma_{1,j}^B + s, \sigma_{2,j}^B + s, \dots, \sigma_{\lambda_j,j}^B + s, \sigma_{1,j}^A, \sigma_{2,j}^A, \dots, \sigma_{\mu_j,j}^A) \text{ für alle } 1 \leq j \leq L, \end{aligned}$$

wobei  $\mu$  und  $\lambda$  die transponierten Partitionen der Formen von  $\tau^A$  bzw.  $\tau^B$  sind und  $L = \max(\mu'_1, \lambda'_1)$  die maximale Anzahl der Spalten in  $\tau^A$  und  $\tau^B$  sind. (Abbildung 6.1 zeigt eine bildliche Darstellung von  $\tau$  und  $\sigma$ .)

**Beweis** Wir beweisen die Aussage für das SSYT  $\sigma$ . Nach Lemma 1.3.6 ist damit die Aussage für  $\tau$  bewiesen.

Wir berechnen nun das Paar  $(\tau, \sigma)$  mit Hilfe des Bumping-Algorithmus' und verwenden dabei die in dem entsprechenden Abschnitt 1.2 benutzten Bezeichnungen. Wir definieren dafür

$$(\tau, \sigma) \left( \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \tau(A) + r \\ \hline \tau(B) \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|} \hline \sigma(B) + s \\ \hline \sigma(A) \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

Abbildung 6.1: Die zu  $N$  assoziierten SSYT sind eindeutig durch die zu  $A$  und  $B$  assoziierten SSYT bestimmt.

$|A| := \sum_{i,j=1}^{t,s} a_{i,j}$  und  $|B| := \sum_{i,j=1}^{r,u} b_{i,j}$ . Seien  $\omega^A$  und  $\omega^B$  die zu  $A$  bzw.  $B$  assoziierten lexikographisch absteigend geordneten Biwörter, welche die in  $A$  bzw.  $B$  auftretenden Koordinaten auflisten. Das zu  $N$  assoziierte Biwort ist somit

$$\omega = \left( \omega_{1,1}^A + r, \omega_{1,2}^A + r, \dots, \omega_{1,|A|}^A + r, \omega_{1,1}^B, \omega_{1,2}^B, \dots, \omega_{1,|B|}^B, \omega_{2,1}^A, \omega_{2,2}^A, \dots, \omega_{2,|A|}^A, \omega_{2,1}^B + s, \omega_{2,2}^B + s, \dots, \omega_{2,|B|}^B + s \right).$$

Nach den ersten  $|A|$  Schritten des Bumping-Algorithmus erhalten wir also das zu  $A$  assoziierte Paar von SSYT:  $\sigma_{|A|} = \sigma^A$  und  $(\tau_{|A|})_{i,j} = \tau_{i,j}^A + r$  für alle Kästchen  $(i, j)$  von  $\tau_{|A|}$ . Aus der Definition von  $N$  folgt sofort, dass

$$\omega_{2,j} = \omega_{2,j}^A < \omega_{2,k}^B + s = \omega_{2,k+|A|} \text{ für alle } 1 \leq j \leq |A|, 1 \leq k \leq |B|$$

gilt. Die nächsten Einträge von  $\omega$ , die wir in  $\sigma_{|A|}$  einfügen, sind alle echt größer als die schon vorhandenen Einträge. Deshalb werden während des restlichen Algorithmus' die Einträge genauso verschoben wie bei der Berechnung von  $\sigma^B$ , nur dass die Einträge jeweils um  $s$  größer sind. Das SSYT  $\sigma^B$  ist also in  $\sigma$  wie in der Behauptung eingebettet.

Es bleibt zu zeigen, dass die Einträge von  $\sigma_{|A|}$  während des Algorithmus' nicht aus ihren Spalten heraus geschoben werden. Diese Einträge nennen wir im folgenden die „alten“ Einträge. Die Einträge aus der Untermatrix  $B$  nennen wir „neue“ Einträge. Wir beweisen die Behauptung induktiv über die einzelnen Schritte des Algorithmus'. Betrachten wir zuerst den  $(|A| + 1)$ -ten Schritt. Da der Eintrag  $\omega_{2,|A|+1}$  echt größer als alle Einträge von  $\sigma^{|A|}$  ist, schiebt er den ersten Eintrag in der ersten Zeile heraus. Nach der Bemerkung 1.2.4 bleiben in diesem Schritt alle herausgeschobenen alten Einträge in ihrer Spalte.

Nehmen wir nun an, dass bis zum  $k$ -ten Schritt mit  $k > |A|$  keiner der alten Einträge aus der Spalte, in der er in  $\sigma_{|A|}$  war, herausgeschoben wurde. Falls der Bumping-Algorithmus keinen alten Eintrag bewegt, ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, dass er einen alten Eintrag herausschiebt. Sei  $x$  der alte Eintrag, der von einem neuen Eintrag  $y$  herausgeschoben wird. Vor dem Herausschieben liege  $x$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte. Da  $y$  echt größer als jeder alte Eintrag ist, müssen alle Einträge, die links von  $x$  in der  $i$ -ten Zeile liegen, neue Einträge sein. Nach der Induktionsvoraussetzung kommen die alten Einträge der  $(j - 1)$ -ten Spalte aus der  $(j - 1)$ -ten Spalte von  $\sigma_{|A|}$ . Oder anders gesagt: Die  $(j - 1)$ -te Spalte des SSYT  $\sigma_{|A|}$  wurde von Einträgen aus der Untermatrix  $B$  im ganzen Stück nach unten geschoben und liegt nun

tiefer als  $x$ . (Wir haben diesen Prozess in der Abbildung 6.2 dargestellt.) Es folgt sofort:

$$(\sigma_{k-1})_{l+1,j-1} \geq (\sigma_{k-1})_{l,j} \text{ f\u00fcr alle } l \geq i.$$

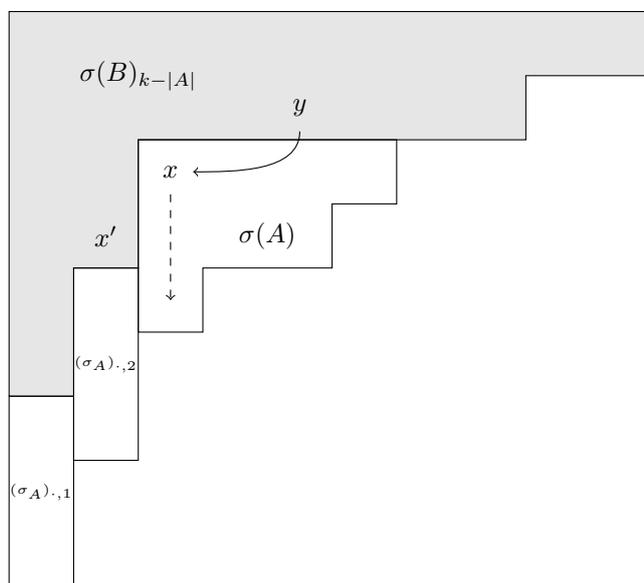


Abbildung 6.2: Das SSYT  $\sigma_{k-1}$  w\u00e4hrend des  $k$ -ten Schritts des Bumping-Algorithmus'. Der grauhinterlegte Bereich entspricht dem SSYT  $\sigma(B)_{k-|A|}$ , das nach  $k - |A|$  Schritten durch den Bumping-Algorithmus gebildet wurde.

Insbesondere ist der Eintrag  $(\sigma_{k-1})_{i+1,j-1}$  schr\u00e4g unter  $x$  nicht kleiner als  $x$ . Nach der Bemerkung 1.2.4 bleibt der Eintrag  $x$  in seiner Spalte. Die gleiche Argumentation zeigt, dass der Eintrag direkt unter  $x$  auch einfach nur eine Zeile tiefer geschoben, usw. Der neue Eintrag  $y$  schiebt also die ganze Spalte ab  $x$  einfach um ein K\u00e4stchen nach unten. Dies beweist die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 6.2.2.** Wir wollen den obigen Satz mit einem Beispiel illustrieren. Daf\u00fcr betrachten wir die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Paaren von SSYT

$$\left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} \right) \text{ bzw. } \left( \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Das zu

$$N := \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

assoziierte Paar von SSYT ist dann

$$\left( \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ \hline 5 & 5 & 2 & 2 & \\ \hline 4 & 3 & & & \\ \hline 3 & 1 & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 9 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ \hline 6 & 6 & 2 & 1 & \\ \hline 3 & 3 & & & \\ \hline 2 & 1 & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array} \right).$$

**Korollar 6.2.3.** Mit den Bezeichnungen von Satz 6.2.1 bilden die unteren  $\min(\lambda_1, \mu_1)$  Zeilen der SSYT  $(\tau(N), \sigma(N))$  das zu  $A \star B$  assoziierte Paar von SSYT. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} \tau(A \star B)_{i,j} &= \tau(B)_{\max(\lambda_1, \mu_1) - \mu_j + i, j} \\ \sigma(A \star B)_{i,j} &= \sigma(A)_{\max(\lambda_1, \mu_1) - \lambda_j + i, j} \end{aligned}$$

wobei  $1 \leq j \leq \max(\lambda'_1, \mu'_1)$  und  $1 \leq i \leq \max(0, \lambda_j + \mu_j - \max(\lambda_1, \mu_1))$  seien. Insbesondere sind die zu  $A \star B$  assoziierten SSYT eindeutig durch die SSYT  $\tau(B)$  und  $\sigma(A)$  bestimmt.

**Beweis** Aus dem vorherigen Satz und den Überlegungen aus dem Abschnitt 6.1 folgt sofort, dass

$$(\tau, \sigma)(A \star B) = (\tau(N)_{i,j}, \sigma(N)_{i,j})_{i > \max(\mu_1, \lambda_1), j \geq 1}.$$

gilt. Da für alle  $1 \leq j \leq \max(\lambda'_1, \mu'_1)$  die unteren  $\lambda_j$  (bzw.  $\mu_j$ ) Einträge in der  $j$ -ten Spalte des SSYT  $\tau(N)$  (bzw.  $\sigma(N)$ ) genau den Einträgen der  $j$ -ten Spalte von  $\tau(B)$  (bzw.  $\sigma(A)$ ) entsprechen, d. h.

$$\begin{aligned} \tau(N)_{i,j} &= \tau(B)_{i - \mu_j, j} \text{ für } 1 \leq j \leq \lambda'_1, \mu_j + 1 \leq i \leq \mu_j + \lambda_j \\ \sigma(N)_{i,j} &= \sigma(A)_{i - \lambda_j, j} \text{ für } 1 \leq j \leq \mu'_1, \lambda_j + 1 \leq i \leq \mu_j + \lambda_j \end{aligned}$$

gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

Des Weiteren ist die Form der zu der Matrix  $A \star B$  assoziierten SSYT eindeutig durch die Form der zu  $A$  bzw.  $B$  assoziierten SSYT bestimmt, daher können wir eine Verknüpfung  $\star$  auf den Partitionen definieren.

**Definition 6.2.4.** Für  $k = 1, 2$  sei die Partition  $\lambda^k$  die Form der zu der Matrix  $A_k$  assoziierten SSYT. Die Partition  $\lambda^1 \star \lambda^2$  ist dann die Form der zu der Matrix  $A_1 \star A_2$  assoziierten SSYT, d. h.  $\lambda^1 \star \lambda^2 := \text{sh}(\tau(A_1 \star A_2))$ .

**Bemerkung 6.2.5.** Für  $k = 1, 2$  sei  $\lambda^k$  eine Partition und  $\mu^k := (\lambda^k)'$  ihre Transponierte. Dann berechnet sich die Transponierte  $\nu = (\lambda^1 \star \lambda^2)'$  wie folgt:

$$\nu_i = \max(0, \mu_i^1 + \mu_i^2 - \max(\mu_1^1, \mu_1^2)) \text{ für } 1 \leq i \leq \max(\lambda_1, \lambda_2). \quad (6.1)$$

Somit ist die Verknüpfung  $\star$  auf Partitionen kommutativ, da die Rollen von  $\mu^1$  und  $\mu^2$  in der obigen Gleichung (6.1) vertauschbar sind.

Offensichtlich ist  $(\lambda^1 \star \lambda^2)_1$  nicht größer als  $\lambda_1^1$  und  $\lambda_1^2$ , da  $\nu_i = 0$  ist, falls  $\mu_i^1 = 0$  oder  $\mu_i^2 = 0$  gilt. Des Weiteren ist die Länge  $l(\lambda^1 \star \lambda^2) = \nu_1 = \min(\mu_1^1, \mu_1^2)$  nicht größer als die Längen von  $\lambda^1$  und  $\lambda^2$ .

**Korollar 6.2.6.** Sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix mit  $c = c_{1,1}(A)$  und  $l = \min(m, n)$  und sei  $C$  eine  $l \times l$ -Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} & & & c \\ & & \ddots & \\ & c & & \\ c & & & \end{pmatrix}.$$

Dann gilt  $\sigma(A) = \sigma(A \star C)$  und  $\tau(A) = \tau(C \star A)$ .

**Beweis** Sei

$$M := \begin{pmatrix} 0 & C \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Das zu  $C$  assoziierte SSYT hat die Form eines  $l \times c$  Rechtecks. Da die größte in  $A$  auftretende Klasse  $c$  ist, hat die erste Zeile von  $\sigma(A)$  genau  $c$  Kästchen. Wir erhalten  $\sigma(A)$  also indem wir die ersten  $l$ -Zeilen – also den Anteil der Untermatrix  $C$  – aus  $\sigma(M)$  streichen. Da  $A^{(l)} = 0$  gilt, hat das SSYT  $\tau(A)$  höchstens  $l = \min(m, n)$  Zeilen. Das Streichen der ersten  $l$  Zeilen von  $\sigma(M)$  liefert somit genau  $\sigma(A \star C)$ . Dies zeigt  $\sigma(A) = \sigma(A \star C)$ .

Der Beweis der Gleichung  $\tau(A) = \tau(C \star A)$  geht analog.  $\square$

**Bemerkung 6.2.7.** Man sieht leicht, dass die Verknüpfung  $\star$  auf Matrizen nicht kommutativ ist. Zum Beispiel sind für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = (1)$$

die Matrizen  $A \star B = (01)$  und  $B \star A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  verschieden.

### 6.3 Assoziativität von $\star$

Wir wollen in diesem Abschnitt die Assoziativität der Verknüpfung  $\star$  beweisen.

**Lemma 6.3.1.** Seien  $A, B$  zwei  $s \times t$  bzw.  $r \times u$  Matrizen, deren Einträge nichtnegative ganze Zahlen sind. Dann gilt

$$(A \star B)^T = B^T \star A^T.$$

**Beweis** Die Zahl  $l = l(A, B) = \min\{k : A^{(k)} = 0 \text{ und } B^{(k)} = 0\}$  wird nach Bemerkung 6.1.3 durch die Form der zu  $A$  und  $B$  assoziierten SSYT bestimmt. Offensichtlich gilt  $l = l(A^T, B^T)$ , da nach Lemma 1.3.6 die zu  $A^T$  assoziierten SSYT die gleiche Form wie die zu  $A$  assoziierten SSYT haben. Insbesondere erhalten wir

$$\begin{pmatrix} (A \star B)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}^{(l)} \right)^T \\ \left( \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ B^T & 0 \end{pmatrix}^{(l)} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T \star A^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $A \star B$  eine  $r \times t$ -Matrix und  $B^T \star A^T$  eine  $t \times r$ -Matrix ist, folgt sofort  $(A \star B)^T = B^T \star A^T$ .  $\square$

**Satz 6.3.2.** Für  $s_i \times t_i$ -Matrizen  $A_i$  mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen für  $i = 1, 2, 3$  gilt:

$$(A_1 \star A_2) \star A_3 = A_1 \star (A_2 \star A_3).$$

**Beweis** Zuerst führen wir die im Beweis verwendete Notation ein. Die zu den Matrizen  $A_i$  assoziierten Paare von SSYT  $(\tau^i, \sigma^i)$  haben die Formen  $\lambda^i$  mit den transponierten Partitionen  $\mu^i = (\lambda^i)'$ . Des Weiteren sei  $(\tau_N, \sigma_N)$  das zu der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_3 \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

assozierte Paar von SSYT mit der Form  $\lambda$ . Um die Assoziativität zu beweisen, zeigen wir, dass wir das zu  $(A_1 \star A_2) \star A_3$  assoziierte Paar von SSYT  $(\tau, \sigma)$  erhalten, indem wir die letzten  $k = \min(\mu_1^1, \mu_1^2, \mu_1^3)$  Zeilen der SSYT  $\tau_N$  und  $\sigma_N$  heraus schreiben:

$$\tau = (\tau_N)_{i,j=K-k+1,1}^{K,\lambda_i} \quad \text{und} \quad \sigma = (\sigma_N)_{i,j=K-k+1,1}^{K,\lambda_i}, \quad (6.2)$$

wobei  $K := \mu_1^1 + \mu_1^2 + \mu_1^3$  ist.

Wir wenden zweimal den Satz 6.2.1 an um die SSYT  $\tau_N$  und  $\sigma_N$  zu berechnen: Die zu  $M = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix}$  assoziierten SSYT  $\tau_M, \sigma_M$  sind

$$\begin{aligned} (\tau_M)_{r,u} &= \begin{cases} \tau(A_1)_{r,u} + s_2 & \text{falls } 1 \leq u \leq \max(\lambda_1^1, \lambda_1^2), 1 \leq r \leq \mu_u^1 \\ \tau(A_2)_{r-\mu_u^1, u} & \text{falls } 1 \leq u \leq \max(\lambda_1^1, \lambda_1^2), \mu_u^1 < r \leq \mu_u^1 + \mu_u^2 \end{cases}, \\ (\sigma_M)_{r,u} &= \begin{cases} \sigma(A_2)_{r,u} + t_1 & \text{falls } 1 \leq u \leq \max(\lambda_1^1, \lambda_1^2), 1 \leq r \leq \mu_u^2 \\ \sigma(A_1)_{r-\mu_u^2, u} & \text{falls } 1 \leq u \leq \max(\lambda_1^1, \lambda_1^2), \mu_u^2 < r \leq \mu_u^1 + \mu_u^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Folglich berechnen sich die zu  $N = \begin{pmatrix} 0 & A_3 \\ M & 0 \end{pmatrix}$  assoziierten SSYT wie folgt

$$\begin{aligned} (\tau_N)_{r,u} &= \begin{cases} \tau(A_1)_{r,u} + s_2 + s_3 & \text{falls } 1 \leq u \leq L, 1 \leq r \leq \mu_u^1 \\ \tau(A_2)_{r-\mu_u^1, u} + s_3 & \text{falls } 1 \leq u \leq L, \mu_u^1 < r \leq \mu_u^1 + \mu_u^2 \\ \tau(A_3)_{r-(\mu_u^1 + \mu_u^2), u} & \text{falls } 1 \leq u \leq L, \mu_u^1 + \mu_u^2 < r \leq \mu_u^1 + \mu_u^2 + \mu_u^3 \end{cases}, \\ (\sigma_N)_{r,u} &= \begin{cases} \sigma(A_3)_{r,u} + t_1 + t_2 & \text{falls } 1 \leq u \leq L, 1 \leq r \leq \mu_u^3 \\ \sigma(A_2)_{r-\mu_u^3, u} + t_1 & \text{falls } 1 \leq u \leq L, \mu_u^3 < r \leq \mu_u^2 + \mu_u^3 \\ \sigma(A_1)_{r-(\mu_u^2 + \mu_u^3), u} & \text{falls } 1 \leq u \leq L, \mu_u^2 + \mu_u^3 < r \leq \mu_u^1 + \mu_u^2 + \mu_u^3 \end{cases}, \end{aligned}$$

wobei  $L := \max(\lambda_1^1, \lambda_1^2, \lambda_1^3)$ . Bildlich dargestellt entspricht dies

$$\tau_N = \begin{array}{|c|} \hline \tau(A_1) + s_2 + s_3 \\ \hline \tau(A_2) + s_3 \\ \hline \tau(A_3) \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \sigma_N = \begin{array}{|c|} \hline \sigma(A_3) + t_1 + t_2 \\ \hline \sigma(A_2) + s_1 \\ \hline \sigma(A_1) \\ \hline \end{array}.$$

Offensichtlich stehen in den letzten  $k$ -Zeilen von  $\tau_N$  und  $\sigma_N$  nur Einträge aus  $\tau(A_3)$  bzw.  $\sigma(A_1)$ .

Wir bestimmen nun die zu  $(A_1 \star A_2) \star A_3$  assoziierten SSYT. Nach Korollar 6.2.3 ist das SSYT  $\tau((A_1 \star A_2) \star A_3)$  durch die Form  $(\lambda^1 \star \lambda^2) \star \lambda^3$  und den Einträgen aus  $\tau(A_3)$  eindeutig bestimmt. Da  $\sigma(A_1 \star A_2)$  nur Einträge aus  $\sigma(A_1)$  enthält, ist auch  $\sigma((A_1 \star A_2) \star A_3)$  eindeutig durch  $\sigma(A_1)$  und die Partition  $(\lambda^1 \star \lambda^2) \star \lambda^3$  bestimmt. Insbesondere genügt es zu zeigen, dass  $(\lambda_{K-k+1}, \dots, \lambda_K)$  die Form der zu  $(A_1 \star A_2) \star A_3$  assoziierten SSYT  $\tau$  und  $\sigma$  ist. Wir vergleichen die transponierten Partitionen

$$(\lambda_{K-k+1}, \dots, \lambda_K)' = (\max(0, \mu_1^1 + \mu_1^2 + \mu_1^3 - K + k), \dots, \max(0, \mu_{\lambda_1}^1 + \mu_{\lambda_1}^2 + \mu_{\lambda_1}^3 - K + k))$$

und  $\nu'$ , wobei  $\nu = (\lambda^1 \star \lambda^2) \star \lambda^3$  sei. Zuerst berechnen wir die Form  $\kappa = \lambda^1 \star \lambda^2$ :

$$\kappa'_j = \max(0, \mu_j^1 + \mu_j^2 - \max(\mu_1^1, \mu_1^2)) \text{ für } 1 \leq j \leq L.$$

Da  $\kappa'_1 = \mu_1^1 + \mu_1^2 - \max(\mu_1^1, \mu_1^2) = \min(\mu_1^1, \mu_1^2)$  ist, gilt somit

$$\nu'_j = \max(0, \kappa'_j + \mu_j^3 - \max[\min(\mu_1^1, \mu_1^2), \mu_1^3]) \text{ für } 1 \leq j \leq L.$$

Bevor wir  $\nu'$  weiter ausrechnen, wollen wir den Term  $\max(\mu_1^1, \mu_1^2) + \max[\min(\mu_1^1, \mu_1^2), \mu_1^3]$  vereinfachen. Sei o. B. d. A.  $\mu_1^1 \geq \mu_1^2$ , andernfalls benennen wir  $\mu_1^1$  und  $\mu_1^2$  einfach um. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \max(\mu_1^1, \mu_1^2) + \max[\min(\mu_1^1, \mu_1^2), \mu_1^3] &= \mu_1^1 + \max[\mu_1^2, \mu_1^3] \\ &= \max(\mu_1^1 + \mu_1^2, \mu_1^1 + \mu_1^3) \\ &= \max(\mu_1^1 + \mu_1^2, \mu_1^1 + \mu_1^3, \mu_1^2 + \mu_1^3) \\ &= \mu_1^1 + \mu_1^2 + \mu_1^3 - \min(\mu_1^1, \mu_1^2, \mu_1^3) \\ &= K - k. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dieses Ergebnis verwenden wir nun für die Berechnung von  $\nu'$

$$\nu'_j = \begin{cases} \max(0, \mu_j^1 + \mu_j^2 + \mu_j^3 - K + k) & \text{für } 1 \leq j \leq r \\ \max(0, \mu_j^3 - \max[\mu_1^3, \min(\mu_1^1, \mu_1^2)]) & \text{für } r < j \leq L \end{cases},$$

wobei  $r := \max\{j : \mu_j^1 + \mu_j^2 \geq \max(\mu_1^1, \mu_1^2)\}$  sei. Damit stimmen die Partitionen  $\nu$  und  $(\lambda_{K-k+1}, \dots, \lambda_K)$  auf den ersten  $r$  Spalten überein. Für alle  $r < j \leq L$  ist  $\nu'_j = 0$ , da  $\mu_j^3 \leq \mu_1^3 \leq \max[\min(\mu_1^1, \mu_1^2), \mu_1^3]$  gilt. Für  $r < j \leq L$  folgt außerdem aus der Gleichung (6.3)

$$\begin{aligned} (\lambda_{K-k+1}, \dots, \lambda_K)'_j &= \max(0, \mu_j^1 + \mu_j^2 + \mu_j^3 - K + k) \\ &= \max(0, \mu_j^1 + \mu_j^2 - \max(\mu_1^1, \mu_1^2) + \mu_j^3 - \max[\min(\mu_1^1, \mu_1^2), \mu_1^3]) = 0, \end{aligned}$$

da  $\mu_j^1 + \mu_j^2 < \max(\mu_1^1, \mu_1^2)$  und  $\mu_j^3 \leq \max[\mu_1^3, \min(\mu_1^1, \mu_1^2)]$  gelten. Die Partitionen  $\nu = (\lambda^1 \star \lambda^2) \star \lambda^3$  und  $(\lambda_{K-k+1}, \dots, \lambda_K)$  sind folglich gleich. Dies beweist die Gleichung (6.2).

Wir beweisen nun, dass die gleiche Aussage für  $A_1 \star (A_2 \star A_3)$  gilt. Wegen

$$[A_1 \star (A_2 \star A_3)]^T = (A_2 \star A_3)^T \star A_1^T = (A_3^T \star A_2^T) \star A_1^T$$

gilt nach Lemma 1.3.6

$$\begin{aligned}\tau(A_1 \star (A_2 \star A_3)) &= \sigma([A_1 \star (A_2 \star A_3)]^T) = \sigma((A_3^T \star A_2^T) \star A_1^T) \text{ und} \\ \sigma(A_1 \star (A_2 \star A_3)) &= \tau([A_1 \star (A_2 \star A_3)]^T) = \tau((A_3^T \star A_2^T) \star A_1^T).\end{aligned}$$

Für  $i = 1, 2, 3$  haben die zu den  $A_i^T$  assoziierten SSYT jeweils die Form  $\lambda^i$  mit  $\mu^i = (\lambda^i)'$ . Wie wir schon bewiesen haben, erhalten wir  $\tau((A_3^T \star A_2^T) \star A_1^T)$  und  $\sigma((A_3^T \star A_2^T) \star A_1^T)$  indem wir die letzten  $\min(\mu_1^1, \mu_1^2, \mu_1^3)$  Zeilen aus den zu  $N^T$  assoziierten SSYT  $\tau_{N^T} = \sigma_N$  und  $\sigma_{N^T} = \tau_N$  heraus schreiben. Insbesondere erhalten wir:

$$\begin{aligned}\tau(A_1 \star (A_2 \star A_3)) &= \sigma((A_3^T \star A_2^T) \star A_1^T) = \tau((A_1 \star A_2) \star A_3) \text{ und} \\ \sigma(A_1 \star (A_2 \star A_3)) &= \tau((A_3^T \star A_2^T) \star A_1^T) = \sigma((A_1 \star A_2) \star A_3).\end{aligned}$$

Wegen der Bijektivität der RSK-Korrespondenz beweist dies die Assoziativität.  $\square$

**Bemerkung 6.3.3.** Für  $i = 1, 2, 3$  seien  $A_i$  Matrizen mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen wie im Satz 6.3.2; wir verwenden im Folgenden die Bezeichnungen aus dem Beweis. Wie wir im Beweis des Satzes 6.3.2 gesehen haben, erhalten wir die SSYT  $\tau = \tau(A_1 \star A_2 \star A_3)$  und  $\sigma = \sigma(A_1 \star A_2 \star A_3)$  indem wir die letzten  $k$  Zeilen aus den SSYT  $\tau_N$  bzw.  $\sigma_N$  heraus schreiben. Insbesondere sind  $\tau$  und  $\sigma$  die modifizierten SSYT  $\tau(A_3)$  und  $\sigma(A_1)$ . Wir benötigen folglich für die Berechnung von  $A_1 \star A_2 \star A_3$  nur die SSYT  $\tau(A_3)$ ,  $\sigma(A_1)$  und die Form  $\lambda^2 = \text{sh}(\tau(A_2)) = \text{sh}(\sigma(A_2))$ .

Für  $3 \leq m$  und  $1 \leq i \leq m$  seien  $\lambda^i$  die Formen der zu den Matrizen  $A_i$  assoziierten SSYT. Da wir die Form der zu der Matrix  $A_2 \star \cdots \star A_{m-1}$  assoziierten SSYT mit den Partitionen  $\lambda^2, \dots, \lambda^{m-1}$  berechnen können, ist die Matrix  $A_1 \star (A_2 \star \cdots \star A_{m-1}) \star A_m$  nur von den SSYT  $\tau(A_m)$ ,  $\sigma(A_1)$  und den Partitionen  $\lambda^2, \dots, \lambda^{m-1}$  abhängig.

**Korollar 6.3.4.** Die auf den Partitionen definierte Operation  $\star$  ist assoziativ.

**Beweis** Dies folgt sofort aus der Assoziativität der Operation  $\star$  auf Matrizen.  $\square$

**Lemma 6.3.5.** Es gibt keine Matrizen  $E$  und  $F$ , so dass  $A \star E = A$  und  $F \star A = A$  für alle  $(m \times n)$ -Matrizen  $A$  gilt.

**Beweis** Es genügt zu beweisen, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } (\tau, \sigma)(A) = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \right)$$

keine Matrix  $E$  mit  $A \star E = A$  existiert. Angenommen es gibt eine Matrix  $E$  mit  $A \star E = A$ ; es seien  $(\tau(E), \sigma(E))$  mit der Form  $\nu$  die zu  $E$  assoziierten SSYT. Nach Korollar 6.2.3 gilt dann  $\nu'_1 = \nu'_2$ , des Weiteren sind  $(\tau(E)_{\nu'_1,1}, \tau(E)_{\nu'_1,2}) = (1, 2)$  die ersten Einträge der letzten Zeile von  $\tau(E)$ . Dies ist ein Widerspruch.

Außerdem existiert keine Matrix  $F$  mit  $F \star A^T = A^T$ , da sonst  $A \star F^T = (F \star A^T)^T = A$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 6.3.6.** Wie wir in Bemerkung 6.2.5 gesehen haben, ist für zwei beliebige Partitionen  $\lambda$  und  $\mu$  die Länge von  $\lambda \star \mu$  nicht größer als  $l(\lambda)$  und  $l(\mu)$ . Dem zufolge gibt es kein neutrales Element bezüglich  $\star$ . Die Menge der Partitionen ist folglich bezüglich der Operation  $\star$  keine Gruppe, sondern nur eine Halbgruppe.

Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Es sei  $\mathcal{S}_{m,n}$  der  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit der Basis  $\{X_A : A \in \mathbb{N}_0^{m \times n}\}$ . Zusammen mit der Verknüpfung  $X_A \star X_B = X_{A \star B}$  ist  $\mathcal{S}_{m,n}$  nach Lemma 6.3.5 eine assoziative  $\mathbb{K}$ -Algebra ohne Eins. Das Nullelement ist  $X_0$ , wobei  $0 \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$  die Nullmatrix ist.

Für eine Partition  $\lambda$  sei weiterhin  $\mathcal{S}_{m,n}(\lambda)$  der von

$$\{X_A : A \in \mathbb{N}_0^{m \times n} \text{ mit } \text{sh}(\tau(A)) = \lambda\}$$

erzeugte Untervektorraum von  $\mathcal{S}_{m,n}$ . Falls die Länge  $l(\lambda)$  echt größer als  $\min(m, n)$  ist, ist  $\mathcal{S}_{m,n}(\lambda)$  der Nullvektorraum. Da die Form der zu der Matrix  $A \star B$  assoziierten SSYT durch die Formen der zu  $A$  und  $B$  assoziierten SSYT bestimmt ist, gilt  $\mathcal{S}_{m,n}(\lambda) \star \mathcal{S}_{m,n}(\mu) \subset \mathcal{S}_{m,n}(\lambda \star \mu)$ . Insbesondere besitzt die Algebra  $\mathcal{S}_{m,n}$  mit  $\mathcal{S}_{m,n} = \bigoplus_{l(\lambda)=\min(m,n)} \mathcal{S}_{m,n}(\lambda)$  eine Graduierung über der Halbgruppe der Partitionen. Eine interessante Frage ist, wie diese Algebra  $\mathcal{S}_{m,n}$  aussieht.

Man kann auch der Frage nachgehen, wie sich die Kashiwara-Operatoren  $\tilde{E}_i$  und  $\tilde{F}_i$  zu der Verknüpfung  $\star : \mathcal{S}_{m,n}(\lambda) \times \mathcal{S}_{m,n}(\mu) \rightarrow \mathcal{S}_{m,n}(\lambda \star \mu)$  verhalten. Da das zu  $A \star B$  assoziierte Paar von SSYT nach Korollar 6.2.3 eindeutig durch die SSYT  $\tau(B)$  und  $\sigma(A)$  bestimmt ist, gelten nach Satz 5.5.2 die Gleichungen

$$\begin{aligned} A \star \tilde{E}_j B &= A \star B \text{ für } 0 < j < n \text{ und} \\ (\tilde{E}_i A) \star B &= A \star B \text{ für } -m < i < 0. \end{aligned}$$

Des Weiteren könnte man erwarten, dass  $\tilde{E}_j(A \star B) = (\tilde{E}_j A) \star B$  für  $j > 0$  bzw.  $\tilde{E}_i(A \star B) = A \star \tilde{E}_i B$  für  $i < 0$  gilt. Im Allgemeinen gelten diese Gleichungen aber nicht. Für

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } (\tau, \sigma)(A) = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \end{array} \right), \\ \tilde{E}_1 A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } (\tau, \sigma)(A) = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & & \end{array} \right), \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } (\tau, \sigma)(B) = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right) \text{ und} \\ \tilde{E}_1 B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } (\tau, \sigma)(B) = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

können wir z. B. nach Korollar 6.2.3 leicht sehen, dass  $\left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right)$  das zu den Matrizen  $A \star B$  und  $(\tilde{E}_1 A) \star B$  assoziierte Paar von SSYT ist. Insbesondere gilt  $A \star B = (\tilde{E}_1 A) \star B$ . Nach Satz 5.5.2 ist außerdem  $\left( \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right)$  das zu  $\tilde{E}_1(A \star B)$  assoziierte Paar von SSYT. Folglich ist  $\tilde{E}_1(A \star B)$  ungleich  $(\tilde{E}_1 A) \star B$ .

Da die Definition von  $A \star B$  eng mit dem Matrix-Ball-Algorithmus verbunden ist (vgl. Definition 6.1.1), kann man trotzdem erwarten, dass es einen Zusammenhang zwischen  $\tilde{E}_j(A \star B)$  und  $(\tilde{E}_j A) \star B$  bzw.  $A \star \tilde{E}_j B$  gibt. Diese Vermutung wird durch den Satz 5.4.5 und das Korollar 6.2.3 gestützt.

# Symbolverzeichnis

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Wurzel, Seite 11
$\Gamma(\mathbb{K}Q)$	Auslander-Reiten-Köcher von $\mathbb{K}Q$ , Seite 27
$\Lambda$	Gewichtegitter, Seite 11
$\Lambda$	Young-Diagramm der Partition $\lambda$ , Seite 2
$\lambda$	(Dominantes) Gewicht, Seite 11
$\lambda$	Partition, Seite 2
$\lambda'$	Transponierte der Partition $\lambda$ , Seite 2
$\omega$	Zu der Matrix $A$ assoziiertes Biwort $\omega$ , Seite 5
$\omega_i$	Fundamentales Gewicht, Seite 11
$\Phi$	Wurzelsystem, Seite 11
$\Phi^+, \Phi^-$	Positive bzw. negative Wurzeln, Seite 11
$\Pi$	Einfache Wurzeln, Seite 11
$\pi$	Ebenenpartition, Seite 3
$\tau, \sigma$	Semistandard-Young-Tableaux, Seite 2
$\varepsilon_i$	$\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 : \tilde{E}_i^k(b) \neq 0\}$ , Seite 16
$\varphi_i$	$\varphi_i(b) = \max\{k \geq 0 : \tilde{F}_i^k(b) \neq 0\}$ , Seite 16
$\varphi_k(c_1, c_2)$	Anzahl der Bälle $B$ in der $k$ -ten Spalte mit $c_1 \leq c(B) \leq c_2$ , Seite 64
$\tilde{\tau}$	Matrix, die das SSYT $\tau$ kodiert, Seite 2

## Kalligraphische Buchstaben

$(\mathcal{L}, \mathcal{B})$	Kristallbasis, Seite 15
$\mathcal{A}$	Ring $\mathbb{Q}[q]_{(q)}$ , Seite 15
$\mathcal{H}(Q)$	Hall-Algebra, Seite 30
$\mathcal{I}(Q_{m,n})$	Das Ideal $\sum_{i \neq 0} \mathcal{H}(Q_{m,n})u_{[i,i]}$ , Seite 36
$\mathcal{L}$	Zulässiges Gitter, Seite 15
$\mathcal{M}(Q_{m,n})$	Algebra $\langle u_{[i,j]} : -m < i \leq 0 \leq j < n \rangle$ , Seite 35
$\mathcal{M}, \mathcal{X}$	Teilmengen der Isomorphieklassen von $\text{mod } \mathbb{K}Q_{m,n}$ , Seite 35

$\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$	Quantisierte Universelle Einhüllende der $\mathfrak{sl}_n$ , Seite 12
$\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$	Universelle Einhüllende der $\mathfrak{sl}_n$ , Seite 12
$\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{m+n})$	Quantisierte Universelle Einhüllende der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_{m+n}$ , Seite 46
$\mathcal{U}^+, \mathcal{U}^-$	Positiver bzw. negativer Anteil der $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ , Seite 12
$\mathcal{U}^0$	Cartan-Anteil der $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ , Seite 12

### Lateinische Buchstaben

$\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$	Quantisierter Koordinatenring, Seite 42
$\text{sh}(\tau)$	Form des SSYT $\tau$ , Seite 2
$\tilde{F}_i, \tilde{E}_i$	Kashiwara-Operatoren, Seite 15
$A$	Zu dem Biwort $\omega$ assoziierte Matrix, Seite 5
$a_k^i$	Alternierende Summe, Seite 17
$C = (c_{i,j})_{i,j=1}^{m+1,n+1}$	Klassenmatrix, Seite 57
$C_{n-1}$	Cartan-Matrix von $\mathfrak{sl}_n$ , Seite 11
$e_i$	Trivialer Pfad in der Wegealgebra $\mathbb{K}Q$ , Seite 25
$e_i$	Vektor der Standardnormalbasis, Seite 11
$E_i, F_i, H_i$	Erzeuger der Universellen Einhüllenden $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$ , Seite 45
$E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}$	Erzeuger der quantisierten Einhüllenden $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ , Seite 12
$F_i^{(j)}, E_i^{(j)}$	Chevalley-Operatoren, Seite 14
$F_{N,M}^X$	Hall-Polynom, Seite 29
$i_0$	Minimaler Index mit $s_{i_0}^l$ maximal, Seite 54
$i_1$	Durch Klassenmatrix definierter Index, Seite 61
$k_0$	Das kleinste Element mit $a_{k_0}^i$ minimal, Seite 17
$l(\lambda)$	Länge einer Partition, Seite 2
$M_\lambda = M_{\lambda,1}$	Gewichtsraum des Moduls $M$ vom Typ <b>1</b> zum Gewicht $\lambda$ , Seite 13
$Q_{m,n}$	Köcher vom Typ $A_{m+n-1}$ , Seite 27
$R(\cdot, \cdot)$	Euler-Form, Seite 26
$S_n$	Symmetrische Gruppe auf $n$ Elementen, Seite 11
$s_l^j$	Alternierende Summe, Seite 54
$\mathfrak{sl}_n$	Lie-Algebra, Seite 11
$t, h$	Quelle und Senke eines Pfeils in einem Köcher, Seite 24
$t_k^i$	Alternierende Summe, Seite 19
$V_\square$	Einfache $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Darstellung $V((1))$ , Seite 18
$X_{i,j}$	Ein unzerlegbarer endlichdimensionaler $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Modul, Seite 39
$Y_{i,j}$	Erzeuger von $\mathbb{Q}(q)_q[M_{m \times n}]$ , Seite 42

**Symbole**

$\preceq$	Halbordnung auf endlichdimensionalen Unzerlegbaren $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Moduln, Seite 29
$[i, j]$	Unzerlegbarer endlichdimensionaler $\mathbb{K}Q_{m,n}$ -Modul, Seite 27
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle X, Y \rangle := \dim \text{Hom}(X, Y)$ , Seite 28
$\langle \cdot, \cdot \rangle^1$	$\langle X, Y \rangle^1 := \dim \text{Ext}^1(X, Y)$ , Seite 28
$\preceq$	Lexikographische Ordnung, Seite 5
$\star$	Verknüpfung zweier Matrizen, Seite 85

# Literaturverzeichnis

- [1] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1 Techniques of Representation Theory*, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press 2006.
- [2] A. Berenstein, A. Zelevinsky: *String bases for quantum groups of type  $A_r$* , Advances in Soviet Math. 16, Part 1 (1993), 51-89.
- [3] A. Berenstein, A. Zelevinsky: *Canonical bases for the quantum group of type  $A_r$  and piecewise-linear combinatorics*, Duke Mathematical Journal Vol. 82, Nr. 3 (1996) 473-502.
- [4] V. I. Danilov, G. A. Koshevoy: *Arrays and the combinatorics of Young tableaux*, Russian Math. Surveys 60, Part 2 (2005), 269-334.
- [5] V. I. Danilov, G. A. Koshevoy: *Bi-Crystals and Crystal  $(GL(V), GL(W))$  Duality*, Preprint RIMS-1458 Kyoto Univ., 2004.
- [6] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa: *Representations of  $U_q(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$  at  $q = 0$  and the Robinson-Shensted correspondence*, Physics and Mathematics of Strings, Memorial Volume of V. Khizhnik; L. Brink, P. Friedan, A. M. Polyakov eds., World Scientific, 1990, 185-211.
- [7] V. G. Drinfeld, *Hopf algebra and the Yang-Baxter equation*, Soviet. Math. Dokl. 32 (1985), 254-258.
- [8] W. Fulton: *Young Tableaux*, London Mathematical Society, Student Texts 35, Cambridge University Press 1997.
- [9] K. R. Goodearl: *Quantized Coordinate Rings and Related Noetherian Algebras* arXiv:math/0211306v1 [math.QA].
- [10] J. A. Green: *Polynomial Representations of  $GL_n$ , 2nd Corrected and Augmented Edition*, Lecture Notes in Mathematics 830, Springer 2007.
- [11] J. E. Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, GTM 9, Springer 1972.
- [12] J. C. Jantzen: *Lectures on Quantum Groups*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 6, American Mathematical Society 1996.
- [13] M. Jimbo, *A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63/69.
- [14] M. Kashiwara: *Crystallizing the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras*, Commun. Math. Phys. 133 (1990), 247-252.
- [15] M. Kashiwara, T. Nakashima: *Crystal Graphs for Representations of the  $q$ -Analogue of Classical Lie Algebras*, Journal of Algebra 165 (1994), 295-345.
- [16] D. E. Knuth: *Permutations, Matrices, and Generalized Young Tableaux*, Pacific Journal of Mathematics 34 (3) (1970), 709-727.

- 
- [17] B. Leclerc, J.-Y. Thibon: *The Robinson-Schensted Correspondence as the Quantum Straightening at “ $q = 0$ ”*, The Electronic Journal of Combinatorics 3(2) (1996), R11.
- [18] M. A. A. van Leeuwen: *Double Crystals of Binary and Integral Matrices*, The Electronic Journal of Mathematics Vol. 13(1) (2006), R86.
- [19] M. Lothaire: *Algebraic Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 90, Cambridge University Press 2002.
- [20] M. Reineke: *On the Coloured Graph Structure of Lusztig’s Canonical Basis*, Mathematische Annalen 307 (1997), 705–723.
- [21] C. M. Ringel: *Representations of  $K$ -species and bimodules*, Journal of algebra 41 (2) (1976), pp. 269–302.
- [22] C. M. Ringel: *Hall algebras*, Topics in Algebra, Banach Center Publications 26, Part 1 (1990).
- [23] C. M. Ringel: *The Hall algebra approach to quantum groups*, Preprintreihe SFB 343 93-070, Universität Bielefeld (1993).
- [24] G. de B. Robinson: *On the Representations of the Symmetric Group*, American Journal of Mathematics (The Johns Hopkins University Press) 60 (3) (1938), 745–760.
- [25] C. Schensted: *Longest Increasing and Decreasing Subsequences*, Canadian Journal of Mathematics 13 (1961), 179–191.