Kohomologie mit Schranken
und
Fortsetzung holomorpher Funktionen
durch
lineare stetige Operatoren

Dissertation
zur Erlangung eines Doktors der
Naturwissenschaften
(doctor rerum naturalium)

Dem Fachbereich Mathematik der
Bergischen Universität - Gesamthochschule Wuppertal
vorgelegt von
Dipl.-Math. M. Matthias Schmitt
aus Wuppertal

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Oktober 2001

Gutachter: 1. Prof. Dr. D. Vogt, Bergische Universität - Gesamthochschule Wuppertal
2. Prof. Dr. M. Langenbruch, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Ergebnisse

Ein häufig von verschiedenen Autoren behandeltes Problem ist die Frage nach Bedingungen oder Kriterien für die Existenz einer Rechtsinversen r zu einer surjektiven Abbildung q. Diese Fragestellung tritt oft in Form einer kurzen exakten Sequenz von Fréchetträumen

$$0 \to E \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} F \to 0$$

auf. Hier ist also $q \circ r = id_F$. F ist in diesem Fall isomorph zu einem projizierten Unterraum von G, nämlich Bild r. Man sagt auch, daß die Sequenz zerfällt.

Bekannte Beispiele für eine solche Fragestellung ergeben sich in der Komplexen Analysis in den Situationen, in denen F der Raum der holomorphen Funktionen auf einer komplexen Untermannigfaltigkeit V einer Steinschen Mannigfaltigkeit X ist.

Ist X eine Steinsche Mannigfaltigkeit, dann sei stets $H(X)$ der Raum der holomorphen Funktionen auf X. Für Definitionen und Sätze in diesem Zusammenhang sei auf das Buch von Hörmander [8], Kapitel 5, verwiesen. Sei $\mathcal{O}_X$ die Garbe von Keimen holomorpher Funktionen auf X. Es sei mit $\Gamma(X, J_V)$ der Raum der globalen Schnitte über X mit Werten in J_V bezeichnet, wobei J_V die Idealgarbe in der Garbe $\mathcal{O}_X$ der Keime holomorpher Funktionen auf X ist, die auf V verschwinden (vgl. Kapitel 7 in [8]). $\Gamma(X, J_V)$ können wir mit dem Teilraum der holomorphen Funktionen auf X identifizieren, die auf V verschwinden.

Nach der Oka-Cartan-Theorie ist die Sequenz

$$0 \to \Gamma(X, J_V) \hookrightarrow H(X) \xrightarrow{R} H(V) \to 0 \qquad (*)$$

stets exakt. R ist hierbei die Restriktionsabbildung auf V. Die Surjektivität von R bedeutet gerade die globale Fortsetzbarkeit von holomorphen Funktionen auf V zu solchen auf X (Theorem 7.4.8 in [8]).

Mityagin und Khenkin haben eine Rechtsinverse zu R in $(*)$ konstruiert für den Fall, daß X ein Gebiet in einem $\mathbb{C}^n$ ist, das sich darstellen läßt durch eine strikt plurisubharmonische Funktion u auf einer Umgebung X' von $\overline{X}$ als $X = \{z \in X' : u(z) < 0\}$, wobei zusätzlich grad $u \neq 0$ auf ∂X ist. Es wird weiter vorausgesetzt, daß V den Rand von X transversal schneidet (Theorem 4.2 in [17]).

Haupthilfsmittel in [17] ist eine Abwandlung von Hörmanders Theorem B mit Schranken (Theorem 7.6.10 in [8]), angewandt auf die Garbe J_V, die in diesem Fall durch endlich viele globale Schnitte erzeugt wird. Im allgemeinen können wir nicht erwarten, daß die Idealgarbe einer analytischen Untervarietät des $\mathbb{C}^N$ durch endlich viele globale Schnitte erzeugt wird.

Wir werden in dieser Arbeit die Technik von Mityagin und Khenkin auf Situationen übertragen, in denen keine endliche Menge von erzeugenden Schnitten für J_V existiert.

Von großer Bedeutung sind in diesem Kontext Potenzreihenräume, da für viele Räume holomorpher Funktionen Darstellungen als Potenzreihenräume bekannt sind. Ist $\alpha = (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $a_k \nearrow \infty$ für $k \to \infty$ und $r \in \{0, \infty\}$, dann sei

$$\Lambda_r(\alpha) := \{x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} : \| x \|_\varrho := \sum_{k=0}^{\infty} | x_k | e^{\varrho a_k} < \infty \text{ für alle } \varrho < r\}$$

Im Falle $r = 0$ heißt $\Lambda_r(\alpha)$ Potenzreihenraum endlichen Typs, im Falle $r = \infty$ heißt $\Lambda_r(\alpha)$ Potenzreihenraum unendlichen Typs.

Für die Charakterisierung von Frécheträumen mit aufsteigendem Fundamentalsystem von Halbnormen $(\| \ \|_n)_n$, die zu einem Potenzreihenraum isomorph sind, sind die folgenden von D. Vogt eingeführten linear topologischen Invarianten hilfreich (vgl. Kapitel 29 in [15]), wobei diese Eigenschaften auch in vielen anderen Zusammenhängen bedeutsam sind. Sei hierfür $(E, \| \ \|_n)$ ein Fréchetraum:

$(\underline{DN})$: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $K \in \mathbb{N}$, ein $C > 0$ und ein $0 < \tau < 1$ existiert mit

$$\| x \|_k \leq C \| x \|_{n_0}^{1-\tau} \| x \|_K^{\tau} \quad \text{für jedes } x \in E\,.$$

(DN): Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $K \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ existiert mit

$$\| x \|_k^2 \leq C \| x \|_{n_0} \| x \|_K \quad \text{für jedes } x \in E\,.$$

(Ω): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß zu jedem $K \in \mathbb{N}$ ein $C > 0$ und ein $0 < \tau < 1$ existiert mit

$$\| y \|_k^* \leq C \| y \|_n^{*1-\tau} \| y \|_K^{*\tau} \quad \text{für jedes } y \in E'\,.$$

$(\overline{\Omega})$: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß zu jedem $K \in \mathbb{N}$ ein $C > 0$ existiert mit

$$\| y \|_k^{*2} \leq C \| y \|_n^* \| y \|_K^* \text{ für jedes } y \in E'\,.$$

Hierbei sei $\| \ \|_k^*$ die duale Norm zu der Halbnorm $\| \ \|_k$, d.h. für ein Dualelement Φ ist $\| \Phi \|_k^* = \sup\{| \Phi(x) | : \| x \|_k \leq 1\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Wir unterscheiden die Fälle, in denen $H(X)$ isomorph zu einem Potenzreihenraum endlichen Typs ist, von den Fällen, in denen $H(X)$ isomorph zu einem Potenzreihenraum unendlichen Typs ist. Es muß nicht zwingend einer der beiden Fälle vorliegen. Wir sprechen vom endlichen bzw. unendlichen Fall.

Mityagin und Khenkin haben gezeigt, daß die Isomorphie von $H(V)$ und $\Lambda_1(\alpha)$ in dem von Ihnen betrachteten endlichen Fall hinreichend für die Existenz einer Rechtsinversen der Restriktionsabbildung ist (Proposition 4.2 in [17]). In allen endlichen Fällen ist die Isomorphie von $H(V)$ und $\Lambda_1(\alpha)$ nach einem Ergebnis von Mityagin aber auch notwendig, denn jeder unendlichdimensionale, komplementierte Unterraum eines Potenzreihenraumes endlichen Typs ist isomorph zu einem Potenzreihenraum endlichen Typs (siehe z.B. Folgerung 29.20 in [15]). Im unendlichen Fall gibt es bislang keine analoge Aussage.

Sei jetzt der unendliche Fall betrachtet, daß V eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^N$ ist (vgl. [8], Def. 5.1.4.). V ist dann lokal endlich, d.h. jeder Punkt des $\mathbb{C}^N$ besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele Zusammenhangskomponenten schneidet.

$H(\mathbb{C}^N)$ soll im folgenden stets die Fréchetraumtopologie tragen, die durch die Suprema auf einer abzählbaren kompakten Ausschöpfung des $\mathbb{C}^N$ erzeugt wird. Die Fréchetraumtopologie von $H(V)$ soll für eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit V stets durch die Spuren der kompakten Ausschöpfung des $\mathbb{C}^N$ gebildet werden.

Wir wenden uns also solchen Untermannigfaltigkeiten V des $\mathbb{C}^N$ mit Dimension d zu, für die $(*)$ zerfällt, d.h. für die es einen linearen stetigen Operator $E : H(V) \to H(\mathbb{C}^N)$ gibt mit $(Ef)\,|_V = f$ für jedes $f \in H(V)$.

Für die Existenz eines solchen Ausdehnungsoperators haben verschiedene Autoren notwendige und hinreichende Bedingungen gezeigt. Wir fassen diese in folgendem Satz zusammen und nennen die Zuordnung zu den einzelnen Autoren im Beweis:

Satz 1.1. :
Äquivalent sind:

1) *Es gibt einen linearen stetigen Operator $E : H(V) \to H(\mathbb{C}^N)$ mit $(Ef)\,|_V = f$ für jedes $f \in H(V)$.*

2) *$H(V)$ besitzt (DN).*

3) *Jede beschränkte plurisubharmonische Funktion auf V ist konstant (Stark-Liouvillesche Eigenschaft).*

4) *$H(V)$ ist isomorph zu $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}})$.*

5) *$H(V)$ ist isomorph zu $H(\mathbb{C}^d)$.*

6) Es gibt eine Basisfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $H(V)$, so daß für eine fest gewählte Folge $\varrho_n \nearrow \infty$ gilt:

a) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$, so daß

$$\| f_k \|_n \leq C \varrho_m^{(k^{\frac{1}{d}})} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 .$$

b) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$, so daß

$$\varrho_n^{(k^{\frac{1}{d}})} \leq C \| f_k \|_m \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 .$$

Beweis:

Für 2)⇔1) ist der Splittingsatz von Vogt für kurze exakte Sequenzen von Fréchet-Hilberträumen anwendbar (siehe z.B. [15], Satz 30.1). Die hier vorliegenden Frécheträume sind nuklear und daher Fréchet-Hilbert.

Der Vogtsche Splittingsatz besagt, daß $(*)$ (mit $X = \mathbb{C}^N$) spaltet, falls $H(V)$ die Eigenschaft (DN) und $\Gamma(\mathbb{C}^N, J_V)$ die Eigenschaft (Ω) besitzt. Letzteres ist für jede analytische Teilmenge des $\mathbb{C}^N$ der Fall (siehe z.B. [21]).

Wenn umgekehrt $(*)$ spaltet, dann ist $H(V)$ isomorph zu einem projizierten Teilraum von $H(\mathbb{C}^N)$. Auf abgeschlossene Teilräume vererbt sich stets die Eigenschaft (DN). Also folgt, daß $H(V)$ auch die Eigenschaft (DN) besitzt.

4)⇔5) ist elementar (siehe z.B. [2]).

3)⇔2) findet man in [2], Theorem I.12. Auch Vogt und Zaharyuta sind unabhängig zu diesem Ergebnis gekommen (siehe auch [1]; bzw. [23]).

4)⇒6) ist elementar. Man nehme als Basisfolge die Urbilder des Isomorphismus $H(V) \to \Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}})$.

Für 6)⇒4) zeigen wir, daß $T : \Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}}) \to H(V)$, $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \lambda_k f_k$ ein Isomorphismus ist.

Einerseits gibt es wegen a) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$, so daß für jedes $\lambda := (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}})$ gilt:

$$\| T\lambda \|_n \leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0} | \lambda_k | \| f_k \|_n \leq C \sum_{k\in\mathbb{N}_0} | \lambda_k | \varrho_m^{(k^{\frac{1}{d}})} = C \| \lambda \|_m .$$

Andererseits ist $H(V)$ nuklear, und daher ist $(f_k)_k$ in $H(V)$ absolut nach dem Satz von Dynin-Mityagin (siehe z.B. [15], Satz 28.12). Mit b) folgt also, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ existiert mit

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} | \lambda_k | \varrho_n^{(k^{\frac{1}{d}})} \leq C \| \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \lambda_k f_k \|_m \text{ für alle } \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \lambda_k f_k \in H(V) .$$

5)⇒2) ist klar, da $H(\mathbb{C}^d)$ die Eigenschaft (DN) besitzt.

Es verbleibt 2)⇒5) zu zeigen.

Im unendlichen Fall können wir nicht wie im endlichen Fall ein allgemeines Argument verwenden, denn es ist offen, ob jeder unendlichdimensionale, komplementierte Unterraum eines Potenzreihenraumes unendlichen Typs wieder isomorph zu einem Potenzreihenraum unendlichen Typs ist (vgl. [15] S. 354).

In ihrer Arbeit [4] konnten aber Aytuna, Krone und Terzioğlu unter Verwendung eines Ergebnisses von Vogt zeigen, daß 5) aus 2) folgt ([4], Proposition 2.1). Damit ist der Beweis vollständig □

Anmerkungen zum Beweis zu Satz 1.1:

Ist V eine Steinsche Mannigfaltigkeit, so kann man nach dem bekannten Einbettungssatz (siehe z.B. [8], Theorem 5.3.9) V als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in den $\mathbb{C}^N$ einbetten. Die Existenz des Extensionsoperators hängt nach Satz 1.1 nicht von der Art der Einbettung ab.

In Proposition 6.4 in [17] stellten Mityagin und Khenkin die These auf, daß 1) aus 5) folgt, wenn man die aus der Isomorphie in 5) herrührende Basisfolge in $H(V)$ gliedweise mit geeigneten Schranken zu einer Folge ganzer Funktionen fortsetzen kann. Dies ist exakt die Technik in [17] zur Konstruktion einer Rechtsinversen in der Situation, wo V eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in einem strikt pseudokonvexen Gebiet ist, die den Rand transversal schneidet.

Will man der Argumentation in [17] unter Verwendung von Hörmanders Theorem B mit Schranken folgen, so ergibt sich als wesentliches Hindernis, daß die Idealgarbe J_V im allgemeinen nicht durch die Keime endlich vieler globaler Schnitte über dem $\mathbb{C}^N$ erzeugt werden kann, so wie das über beschränkten pseudokonvexen Gebieten möglich ist (siehe z.B. [8] Theorem 7.2.1 in Verbindung mit Theorem 7.2.9).

Wir werden in dieser Arbeit zeigen, wie man dieses Hindernis überwinden kann. Damit wird die Konstruktion eines Ausdehnungsoperators durch Fortsetzungen von Basisfunktionen in $H(V)$ auch im unendlichen Fall möglich.

Insbesondere geht es um die Frage, ob dieser konstruktive Ansatz weiterführende Informationen über die „Qualität“ der Stetigkeit des Ausdehnungsoperators liefert. Das bedeutet für jeweils gegebene Gradierungen auf $H(V)$ und $H(X)$, zu fragen, wie groß man zu einer vorgegebenen Stufe in $H(X)$ die Stufe in $H(V)$ wählen muß, damit sich die Fortsetzungen, die der Ausdehnungsoperator liefert, gegen die Urbildfunktionen jeweils abschätzen.

Tatsächlich ermöglicht uns dieser Ansatz, eine Reihe von Kriterien und Bedingungen analog zu denjenigen aus Satz 1.1 verschiedener Autoren zu einem Satz über die Existenz eines linear zahmen Ausdehnungsoperators zusammenzufassen.

Wir werden also die Argumentation von Mityagin und Khenkin wieder aufgreifen und ein Theorem B mit Schranken für lokal endlich erzeugte Untergarben von $\mathcal{O}^p$, $p \in \mathbb{N}$, in einer Steinschen Mannigfaltigkeit Ω zeigen. Hiermit ist eben auch die Idealgarbe J_A einer beliebigen analytischen Teilmenge A von Ω erfaßt.

Der Beweis umfaßt die Kapitel 2 bis 5. Die Grundstruktur ist ein Induktionsverfahren (vgl. Beweis zu Theorem 7.6.10 in [8]).

Wir betrachten dazu das folgende kommutative Diagramm von linearen Räumen und linearen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{P_{1,2}} & F_{1,2} & \xrightarrow{P_{1,1}} & F_{1,1} & \xrightarrow{P_{1,0}} & F_{1,0} & \to & 0 \\
 & & \uparrow d_{1,2} & & \uparrow d_{1,1} & & \uparrow d_{1,0} & & \\
\cdots & \xrightarrow{P_{2,2}} & F_{2,2} & \xrightarrow{P_{2,1}} & F_{2,1} & \xrightarrow{P_{2,0}} & F_{2,0} & \to & 0 \\
 & & \uparrow d_{2,2} & & \uparrow d_{2,1} & & \uparrow d_{2,0} & & \\
\cdots & \xrightarrow{P_{3,2}} & F_{3,2} & \xrightarrow{P_{3,1}} & F_{3,1} & \xrightarrow{P_{3,0}} & F_{3,0} & \to & 0 \\
 & & \uparrow d_{3,2} & & \uparrow d_{3,1} & & \uparrow d_{3,0} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \tag{1.1.1}$$

In diesem Diagramm seien sämtliche Zeilen und Spalten exakt bis auf die erste Spalte von rechts. Diese sei lediglich ein Komplex.

Die folgende Induktion zeigt nun, daß auch die erste Spalte exakt ist. Dazu zeigen wir indukiv über aufsteigendes n, daß für jedes $k = 0, 1, \ldots$ gilt: Zu jedem $x_k \in F_{n,k}$ mit $d_{n-1,k}\, x_k = 0$ und $P_{n,k-1}\, x_k = 0$ gibt es ein $y_k \in F_{n+1,k}$ mit $d_{n,k}\, y_k = x_k$ und $P_{n+1,k-1}\, y_k = 0$ (hierbei setzen wir $P_{n,-1} := 0$).

Der Induktionsanfang ist klar, wenn wir uns vorstellen, man würde das Diagramm nach obenhin durch Nullräume und Nullabbildungen erweitern.

Um von n nach $n+1$ zu gelangen, sei $x \in F_{n+1,k}$ mit $d_{n,k}\, x = 0$ und $P_{n+1,k-1}\, x = 0$. Wegen der Exaktheit der Zeilen gibt es ein $y_1 \in F_{n+1,k+1}$, so daß $P_{n+1,k}\, y_1 = x$. Sei $y_2 = d_{n,k+1}\, y_1$, dann ist wegen der Kommutativität des Diagramms $P_{n,k}\, y_2 = d_{n,k} P_{n+1,k}\, y_1 = d_{n,k}\, x = 0$.

Da auch $d_{n-1,k+1}\, y_2 = 0$ ist, gibt es nach der Induktionsvoraussetzung ein $y_3 \in F_{n+1,k+1}$ mit $d_{n,k+1}\, y_3 = y_2$ und $P_{n+1,k}\, y_3 = 0$. Es liegt $y_4 := y_1 - y_3$ im Kern von $d_{n,k+1}$. Da $k+1 \geq 1$ ist, ist die $k+1$-te Spalte exakt. Also gibt es $y_5 \in F_{n+2,k+1}$ mit $d_{n+1,k+1}\, y_5 = y_4$. Man rechnet leicht nach, daß für $y := P_{n+2,k}\, y_5 \in F_{n+2,k}$ gilt $d_{n+1,k}\, y = x$ und $P_{n+2,k-1}\, y = 0$.

Für die Definitionen der im folgenden vorkommenden Begriffe wie dem des Kokettenraumes und des Korandoperators δ verweisen wir auf [8], Chapter 7. Durch den Korandoperator werden Koketten der Länge σ auf Koketten der Länge $\sigma + 1$ abgebildet.

Das klassische Beispiel für Koketten ist die Cousin-I-Verteilung bezüglich einer Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eines Gebietes in $\mathbb{C}$ bzw. allgemeiner einer Steinschen Mannigfaltigkeit. Die Cousin Data sind nichts anderes als eine Kokette $c = (c_{ij})_{ij}$ der Länge 1, bestehend aus holomorphen Funktionen c_{ij} auf $U_i \cap U_j$, für die $\delta c = 0$ gilt (vgl. [8], Theorem 5.5.1). Die Lösung $c' = (c_i')_i$ des Cousin-I-Problems ist eine Kokette der Länge 0, bestehend aus holomorphen Funktionen c_i auf U_i, für die $\delta c' = c$ gilt. Aus der Lösung des Cousin-I-Problems auf $\mathbb{C}$ kann man z.B. den Satz von Mittag-Leffler folgern.

Die Aussage des Theorem B von Cartan, nämlich daß die p-te Kohomologiegruppe $H^p(\Omega, \mathcal{F})$ einer Steinschen Mannigfaltigkeit Ω mit Werten in einer kohärenten analytischen Garbe $\mathcal{F}$ für jedes $p > 0$ verschwindet (siehe z.B. [8], Theorem 7.4.3), ist wesentlich allgemeiner und abstrakter, umfaßt aber die Lösbarkeit von Cousin-I-Verteilungen auf Steinschen Mannigfaltigkeiten.

Sei jetzt $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung einer Steinschen Mannigfaltigkeit Ω mit pseudokonvexen relativ kompakten Gebieten mit der Eigenschaft, daß eine feste Überdeckungsmenge von höchstens M paarweise verschiedenen Überdeckungsmengen geschnitten wird. Dann ist der Schnitt von $M + 1$ paarweise verschiedenen Überdeckungsmengen leer.

In das Diagramm (1.1.1) setzen wir für $F_{n,0}$, $n = 0, \ldots, M + 1$ jeweils den Kokettenraum $C^{M+1-n}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ von Schnitten über $U_{i_0,\ldots,i_{M+1-n}} := U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{M+1-n}}$ mit Werten in $\mathcal{F}$ ein. $d_{n,0}$ ist dann der Korandoperator δ der Stufe $M-n$. $F_{M+2,0}$ sei $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ und $d_{M+1,0} : \Gamma(\Omega, \mathcal{F}) \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definieren wir dann durch $f \mapsto (f\ |_{U_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Für $n \geq M + 3$ setzen wir $F_{n,0} := \{0\}$, wodurch die obige Induktion nach endlich vielen Schritten abgeschlossen ist.

Einen Kokettenraum von Koketten der Länge $\sigma + 1$ können wir als Teilraum von $\prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_\sigma}, \mathcal{F})$ auffassen und, wie wir im Kapitel 2 sehen werden, mit einer Fréchetraumtopologie versehen, die sich aus der Fréchetraumtopologie der Räume $\Gamma(U_{i_0,\ldots,i_\sigma}, \mathcal{F})$ herleiten läßt. Da wir stets voraussetzen, daß $\mathcal{F}$ eine Untergarbe einer p-fachen Kopie von $\mathcal{O}$ ist, können wir auf $\Gamma(U_{i_0,\ldots,i_\sigma}, \mathcal{F})$ jeweils die Fréchetraumtopologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz auf einer ausschöpfenden Folge von kompakten Teilmengen von $U_{i_0,\ldots,i_\sigma}$ für p-tupel holomorpher Funktionen auf $U_{i_0,\ldots,i_\sigma}$ induzieren.

In jedem Schritt des oben beschriebenen Induktionsverfahrens werden wir die Stetigkeits- bzw. Urbildabschätzungen nachhalten, um zu einer Lösungsabschätzung für den δ-Operator zu gelangen.

Die Hauptarbeit besteht nun darin, das Diagramm (1.1.1) mit Frécheträumen und stetigen linearen Abbildungen so aufzufüllen, daß das Diagramm kommutiert und die erforderlichen Exaktheitsbedingungen der Zeilen und Spalten erfüllt sind. Ferner sind Stetigkeits- bzw. Urbildabschätzungen zu zeigen. Dies alles geschieht in den Kapiteln 3 bis 6.

Die Exaktheit der ersten Spalte in dem Diagramm unter Berücksichtigung von Lösungsabschätzungen ist nichts anderes als das angestrebte Theorem B mit Schranken.

Wir wollen mit $\Phi_\gamma(\mathcal{U})$ die Menge der stetigen plurisubharmonischen Funktionen bezeichnen, für die $\varphi \geq 0$ und $\sup_{U_i} \varphi \leq \gamma^{\frac{1}{M}} \inf_{U_i} \varphi$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Das in Kapitel 6 gezeigte Theorem B mit Schranken ergibt dann auf der nullten Stufe den folgenden Satz, den wir hier ohne die Verwendung der Begriffe Kokette und Korandoperator formulieren wollen:

Satz 1.2. :
Sei $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Teilmengen mit $K_i \subset U_i$ für $i \in \mathbb{N}$ und ψ eine nicht negative plurisubharmonische Funktion auf Ω. Dann gibt es eine plurisubharmonische Funktion χ auf Ω, so daß folgendes gilt:

Zu jeder Doppelfolge $(c_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ mit $c_{i,j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$, $c_{i,j} = -c_{j,i}$ und $c_{i,j} + c_{j,k} + c_{k,i} = 0$ für alle $i, j, k \in \mathbb{N}$, sowie jedem $\varphi \in \Phi_\gamma(\mathcal{U})$ gibt es eine Folge $(c'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $c_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$, $c'_i - c'_j = c_{i,j}$ für jedes $i, j \in \mathbb{N}$ und eine Abschätzung

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sup_{K_i} e^{-\gamma\varphi-\psi-\chi} \sup_{K_i} | c'_i | \leq \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sup_{U_i\cap U_j} e^{-\varphi} \sup_{U_i\cap U_j} e^{-\psi} \sup_{U_i\cap U_j} | c_{i,j} | .$$

Das entscheidende an der gewonnenen Lösungsabschätzung ist, daß der Gewichtverlust χ nicht von $\varphi \in \Phi_\gamma(\mathcal{U})$ abhängt. Durch direkte Anwendung des Satzes von der offenen Abbildung auf den Korandoperator kann dieses Ergebnis nicht gezeigt werden.

Wenn wir für Ω den $\mathbb{C}^N$ und für $\mathcal{F}$ die Idealgarbe J_V der Keime der auf V verschwindenden holomorphen Funktionen einsetzen, können wir mit Hilfe von Satz 1.2 lokale Fortsetzungen einer auf V holomorphen Funktion zu einer ganzen Funktion zusammensetzen. Hierzu muß V nicht singularitätenfrei sein. Da wir aber für die lokalen Fortsetzungen die Existenz eines holomorphen Retraktes für V verwenden wollen und damit gewissermaßen optimale Daten für die Anwendung von Satz 1.2 erhalten, haben wir gefordert, daß V eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^N$, und damit Steinsch ist.

Wir erhalten aus Satz 1.2 den in Kapitel 8 gezeigten Fortsetzungssatz für holomorphe Funktionen auf einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit V des $\mathbb{C}^N$ (siehe Satz 8.4):

Satz 1.3. :
Seien $\varphi_1 > 0$ und $\varphi_2 > 0$ stetige plurisubharmonische Funktionen auf dem $\mathbb{C}^N$. Sei ferner

$\gamma > 1$ fest. Dann gibt es zu jedem Kompaktum K eine Konstante B_K, so daß zu jedem $f \in H(V)$ und jedem $\alpha > 0$ mit

$$\log \mid f(z) \mid \leq \varphi_1(z) + \alpha\varphi_2(z) \text{ für jedes } z \in V \tag{1.3.1}$$

eine ganze Funktion F existiert mit

a) $F(z) = f(z)$ *für jedes* $z \in V$,

b) $\sup_K \mid F(z) \mid \leq e^{B_K} e^{\gamma \sup_K(\varphi_1 + \alpha\varphi_2)}$ *für jedes Kompaktum* K.

Hierbei hängt B_K zwar von φ_1 und φ_2 ab, aber nicht von α.

Aus Satz 1.3 folgt nun leicht in Anlehnung an die Argumentation in [17] die Existenz eines Ausdehnungsoperators, wenn man eine Basisfolge in $H(V)$ zur Verfügung hat, die von der vorausgesetzten Isomorphie von $H(V)$ zu $H(\mathbb{C}^d)$ induziert wird.

Wir wollen hier wie angekündigt als Anwendung von Satz 1.3 die Bedingungen untersuchen, unter denen der Ausdehnungsoperator darüberhinaus linear zahmen Abschätzungen genügt.

Eine stetig lineare Abbildung $T : (E, \| \ \|_{E,n}) \to (F, \| \ \|_{F,n})$ zwischen den gradierten Fréchet-räumen E und F wird als linear zahm bezeichnet, falls es $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a \neq 0$ gibt, so daß zu jedem n ein C_n existiert mit

$$\| Tx \|_n \leq C_n \| x \|_{an+b} \text{ für alle } x \in E\,.$$

T heißt zahm, falls $a = 1$ gewählt werden kann. Gradierungen in einem Fréchetraum heißen linear zahm äquivalent, falls die Identität in der jeweiligen Richtung linear zahm ist.

Eine linear zahme Isomorphie von $H(V)$ und $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}})$ ist leicht durch Eigenschaften einer Basisfolge $(f_k)_k$ in $H(V)$ zu charakterisieren. Ist nämlich $H(V)$ zu $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}})$ linear zahm isomorph, so existiert eine Basisfolge $(f_k)_k$ in $H(V)$ mit folgenden Eigenschaften:

B1) Es existieren $a, b \in \mathbb{N}_0$, $a \geq 1$, so daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $C \geq 1$ gibt mit

$$\| f_k \|_n \leq C e^{(an+b)\, k^{\frac{1}{d}}} \text{ für alle } k\,.$$

B2) Es existieren $a, b \in \mathbb{N}_0$, $a \geq 1$, so daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $C \geq 1$ gibt mit

$$| \lambda_k | \leq \| f \|_{an+b} \, e^{-n\, k^{\frac{1}{d}}}$$

für alle $f = \sum_k \lambda_k f_k \in H(V)$ und alle k.

Besitzt andererseits $H(V)$ eine Basisfolge $(f_k)_k$ mit B1) und B2), dann ist $H(V)$ zu $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}})$ linear zahm isomorph, denn wegen B1) ist

$$\| \sum_k \lambda_k f_k \|_n \leq C \sum_k | \lambda_k | \, e^{(an+b)\, k^{\frac{1}{d}}}$$

und wegen B2) ist

$$\sum_k | \lambda_k | \, e^{n\, k^{\frac{1}{d}}} = \sum_k | \lambda_k | \, e^{(n+1)\, k^{\frac{1}{d}}} e^{-k^{\frac{1}{d}}} \leq C \, \| f \|_{a(n+1)+b} \sum_k e^{-k^{\frac{1}{d}}} = C' \, \| f \|_{a(n+1)+b} \; .$$

Für Potenzreihenräume ist der Begriff linear zahm von besonderer Bedeutung, da zueinander isomorphe Potenzreihenräume $\Lambda_\infty(a_k)$ bzw. $\Lambda_\infty(b_k)$ stets linear zahm isomorph sind, vermöge der Identität. Andererseits ist zum Beispiel bei nuklearen Potenzreihenräumen eine zahme Isomorphie sehr viel seltener zu erwarten, da dies $\lim \frac{a_k}{b_k} = \lim \frac{b_k}{a_k} = 1$ impliziert. Wir bemerken hierzu zunächst, daß der nukleare Potenzreihenraum $\Lambda_\infty(c_k)$ stets per Identität zahm isomorph zu

$$\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} : \| x \|_n := \sum_{k=0}^{\infty} | x_k |^2 \, e^{2n\, c_k} < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ist. Dann erhalten wir dem Beweis zu Proposition 29.1 in [16] folgend zu jedem $\theta > 1$ eine Konstante $D \geq 1$, so daß $a_k \leq \theta b_k + D$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist und umgekehrt.

Wir wollen durch die Suprema auf folgenden Polyzylindern des $\mathbb{C}^N$

$$\Delta_n := \{z \in \mathbb{C}^N : | z_j | \leq e^n \text{ für alle } 0 \leq j \leq N\}$$

die Standardgradierung $(\| \;\; \|_n)_n$ für $H(\mathbb{C}^N)$ festlegen.

Auf V sei die Standardgradierung $(\| \;\; \|_{H(V),n})_n$ gerade durch die Spuren $\Delta_n \cap V$ gegeben. Die Gradierung hängt also von der Einbettung von V in den $\mathbb{C}^N$ ab. Ohne Einschränkung können wir $0 \in V$ annehmen.

Wenn wir die Polyzylinder Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, durch $B_n := \{z \in \mathbb{C}^N : | z | < e^n\}$ ersetzen, erhalten wir auf $H(\mathbb{C}^N)$ bzw. auf $H(V)$ eine zahm äquivalente Gradierung. Solche zahm äquivalente Gradierungen fassen wir auch als Standardgradierungen für $H(\mathbb{C}^N)$ bzw. $H(V)$ auf.

Auf $H(V)$ ist wegen der Surjektivität der Einschränkungsabbildung $H(\mathbb{C}^N) \to H(V)$ ein Quotientenhalbnormensystem durch

$$\| f \|_n^q := \inf\{\| F \|_n : \ F \in H(\mathbb{C}^N) \, , \ \ F|_V = f\}$$

gegeben. Es gilt natürlich $\| \ \ \|_n \leq \| \ \ \|_n^q$ auf $H(V)$ für jedes n. Da der Satz von der offenen Abbildung gilt, ist $(\| \ \ \|_n^q)_n$ ein zu $(\| \ \ \|_{H(V),n})_n$ äquivalentes Halbnormensystem.

Die Monome in $H(\mathbb{C}^N)$ besitzen bezüglich der Standardgradierung die Eigenschaften B1) und B2) und zwar jeweils mit $a = 1$ und $b = 0$. Die Eigenschaft B2) ist äquivalent zu den Cauchyschen Ungleichungen für ganze Funktionen auf den Polyzylindern Δ_n (siehe z.B. [8], Theorem 2.2.7). Wir haben also gezeigt, daß $H(\mathbb{C}^N)$ sogar zahm isomorph zu einem Potenzreihenraum $\Lambda_\infty(a_k)$ ist, falls a_k gerade die Summe der Exponenten des k-ten Monoms ist.

$H(\mathbb{C}^N)$ ist daher auch linear zahm isomorph zu $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{N}})$, aber nicht zahm isomorph, falls $N \geq 2$. Um das einzusehen, sei $(z_l)_k$ eine Abzählung der Monome $z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_N^{\alpha_N}$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{N}_0$, mit der Eigenschaft, daß für $s(z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_N^{\alpha_N}) := \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ gilt $s(z_l) \leq s(z_{k+1})$.

Man zeigt leicht, daß die Anzahl der Monome z_l mit $s(z_l) \leq m$ jeweils $\binom{N+m}{m}$ beträgt. Es gilt daher

$$\frac{m}{\binom{N+m}{m}^{\frac{1}{N}}} \leq \frac{s(z_l)}{k^{\frac{1}{N}}} \leq \frac{m}{\left(\binom{N+(m-1)}{m-1} + 1\right)^{\frac{1}{N}}}$$

für alle k mit $s(z_l) = m$. Die linke und die rechte Seite der Ungleichung haben den gleichen Grenzwert für $m \to \infty$. Wenn man den linken Ausdruck ausmultipliziert, sieht man sofort, daß dieser gegen die N-te Wurzel aus $N!$ konvergiert für $m \to \infty$.

Für den angekündigten Charakterisierungssatz benötigen wir noch einige Begriffe und Definitionen.

Für einen gradierten Fréchetraum $(E, \| \ \ \|_n)$ wollen wir die Eigenschaften (DN) und (Ω) verschärfen:

Wir sagen, daß $(E, \| \ \ \|_n)$ (DN) in Standardform besitzt, falls für alle $n \geq 2$ gilt

$$\| \ \ \|_n^2 \leq C_n \| \ \ \|_{n-1} \| \ \ \|_{n+1} \ .$$

$(E, \| \ \ \|_n)$ besitze (Ω) in Standardform, falls für alle $n \geq 2$ gilt

$$\| \ \ \|_n^{*2} \leq D_n \| \ \ \|_{n-1}^* \| \ \ \|_{n+1}^*$$

Aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung besitzt $\Lambda_\infty(a_k)$ stets (DN) und (Ω) in Standardform. Die Konstanten sind alle gleich 1.

Von jetzt an wollen wir annehmen, daß V als analytische Untervarietät des $\mathbb{C}^N$ nur aus einer irreduziblen Komponente besteht. Dies ist genau dann der Fall, wenn V zusammenhängend ist. Da nach Satz 1.2 die Existenz eines Ausdehnungsoperators notwendig die Eigenschaft (DN) für $H(V)$ voraussetzt, besitzt $H(V)$ mindestens eine stetige Norm. Daher impliziert die Existenz eines Ausdehungsoperators, daß V ohnehin nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen kann.

V heißt algebraisch, falls es eine endliche Menge S von Polynomen im $\mathbb{C}^N$ gibt, so daß $V = \{z \in \mathbb{C}^N \,:\, p(z) = 0 \text{ für alle } p \in S\}$. Die Anzahl der Polynome in S kann man auf N begrenzen (siehe z.B. [14], Chapter V.1).

Das nun folgende Kriterium für eine Teilmenge einer analytischen Untervarietät des $\mathbb{C}^N$, eine Teilmenge einer algebraischen Varietät zu sein, stammt von A. Sadullaev ([19], Theorem 2.2).

Sei dazu L die Menge aller plurisubharmonischen Funktionen auf dem $\mathbb{C}^N$, für die es ein $\alpha(u) \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $u(z) \leq \log(1+ \parallel z \parallel) + \alpha(u)$ auf dem $\mathbb{C}^N$. Ist $K \subset \mathbb{C}^N$ ein Kompaktum, dann sei

$$S(z, K) := \sup\{u(z) \,:\, u \in L\,,\;\; u\,|_K \leq 0\}\,.$$

Die obere Regularisierte von $S(z, K)$ heißt Siciaksche Extremalfunktion bezüglich K.

Das Kriterium besagt nun folgendes:

Eine Teilmenge A einer analytischen Menge im $\mathbb{C}^N$ ist genau dann eine Teilmenge einer algebraischen Varietät, falls es ein Kompaktum in A gibt, so daß $S(z, K)$ lokal wesentlich beschränkt ist in A.

A. Aytuna verwendet in [3] dieses Kriterium, um für eine irreduzible Komponente V einer analytischen Varietät im $\mathbb{C}^N$ (die also auch singuläre Punkte haben darf) zu zeigen, daß V genau dann algebraisch ist, wenn ein linear zahmer Ausdehnungsoperator $H(V) \to H(\mathbb{C}^N)$ bezüglich der Standardgradierungen existiert ([3], Theorem 2).

Wir werden das Kriterium von Sadullaev in Kapitel 10 dazu verwenden, ein Kriterium für die Existenz eines linear zahmen Ausdehnungsoperators abzuleiten, das das Wachstum plurisubharmonischer Funktionen auf V relativ zu einer Standardgradierung beschreibt.

Ist φ plurisubharmonisch auf V, so sei für $r \in \mathbb{R}_0^+$

$$m_\varphi(r) := \sup\{\varphi(z) \,:\, z \in V, |\, z\,| < e^r\}\,.$$

Das Kriterium ist erfüllt, falls es $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß für jedes auf V plurisubharmonische φ, für jedes $\lambda \in [0, 1]$ und alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$ gilt

$$m_\varphi(\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2) \leq \lambda m_\varphi(a r_1 + b) + (1-\lambda) m_\varphi(a r_2 + b)\,.$$

Diese Eigenschaft ist stärker als die Stark-Liouvillesche Eigenschaft (Satz 1.1, 3)), denn ist φ plurisubharmonisch und beschränkt auf V, dann gilt für $r > b$

$$m_\varphi(r) = m_\varphi(\frac{n-1}{n}0 + \frac{1}{n}nr) \leq \frac{n-1}{n}m_\varphi(b) + \frac{1}{n}m_\varphi(anr+b) \stackrel{n\to\infty}{\to} m_\varphi(b)\,.$$

Wegen des Maximumprinzips für plurisubharmonische Funktionen auf V (siehe z.B. [19], 1.3) ist φ auf jedem Kompaktum, das in $\{\mid z \mid < e^r\}$ enthalten ist, konstant. Damit ist φ auf ganz V konstant.

Wir fassen nun alle Kriterien zusammen:

Für eine zusammenhängende abgeschlossene Untermannigfaltigkeit V des $\mathbb{C}^N$ der Dimension d gilt der folgende Satz:

Satz 1.4. :
Äquivalent sind:

1) *Es gibt einen linear zahmen Ausdehnungsoperator*

$$E : (H(V), \|\ \|_{H(V),n}) \to (H(\mathbb{C}^N), \|\ \|_{H(\mathbb{C}^N),n})$$

bezüglich der durch die Polyzylinder $(\Delta_n)_n$ *gegebenen Standardgradierungen auf* $H(V)$ *bzw.* $H(\mathbb{C}^N)$.

2) $(H(V), \|\ \|_{H(V),n})$ *ist linear zahm isomorph zu einem nuklearen gradierten Fréchetraum* $(F, \|\ \|_n)$, *der (DN) in Standardform besitzt, und die Quotientenhalbnormen* $(\|\ \|^q_n)_n$ *auf* $H(V)$ *sind linear zahm äquivalent zu* $(\|\ \|_{H(V),n})_n$.

3) *Es gibt ein Kompaktum* K *in* V, *so daß* $S(z,K)$ *in* V *lokal wesentlich beschränkt ist.*

4) *Es gibt* $a \in \mathbb{N}$ *und* $b \in \mathbb{N}_0$, *so daß für jede auf* V *plurisubharmonische Funktion* φ, *jedes* $\lambda \in [0,1]$ *und alle* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$ *gilt mit* $m_\varphi(r) := \sup\{\varphi(z) :\ z \in V, \mid z \mid < e^r\}$:

$$m_\varphi(\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \leq \lambda m_\varphi(ar_1 + b) + (1-\lambda)m_\varphi(ar_2 + b)\,.$$

5) $(H(V), \|\ \|_{H(V),n})$ *ist linear zahm isomorph zu* $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}})$.

6) $(H(V), \|\ \|_{H(V),n})$ *ist linear zahm isomorph zu* $(H(\mathbb{C}^d), \|\ \|_{H(\mathbb{C}^d),n})$.

7) *In* $H(V)$ *gibt es eine Basisfolge* $(f_k)_k$ *mit B1) und B2).*

8) V *ist algebraisch.*

Beweis:

1)⇒2) ist schlicht, denn das Bild von E ist linear zahm isomorph zu einem projizierten Teilraum von $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{N}})$, der darum (DN) in Standardform besitzt. Zum anderen ist für jedes $f \in H(V)$ die Quotientenhalbnorm $\| f \|_n^q \leq \| Ef \|_{H(\mathbb{C}^N),n}$. Also folgt auch die zweite Bedingung von 2) aus 1).

2)⇒5) ist ein Ergebnis von D. Vogt ([22], Theorem 2.3), das wir auf die wegen 2) linear zahme Sequenz $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{N}}) \to F \to 0$ anwenden. Wir erhalten eine linear zahme Isomorphie von F zu einem Potenzreihenraum $\Lambda_\infty(a_k)$, woraus 5) folgt.

5)⇒1) ist der Spezialfall $\varphi(z) := \log \mid z \mid$ von Satz 9.3. Wir zeigen in Kapitel 9, daß Satz 9.3 leicht aus dem Fortsetzungssatz 1.3 folgt.

Die Äquivalenzen 3)⇔8) und 1)⇔8) sind Spezialfälle der oben zitierten Ergebnisse von A. Sadullaev bzw. A. Aytuna. Die Äquivalenz 5)⇔6)⇔7) sind nach den obigen Ausführungen klar.

1)⇒4) folgt aus Satz 10.4. 4)⇒8) folgt aus Satz 10.5 □

Die Eigenschaft 4) aus Satz 1.4 läßt sich in einer Weise verallgemeinern, die unabhängig von der Einbettung der Steinschen Mannigfaltigkeit in einen $\mathbb{C}^N$ ist:

Eine Steinsche Mannigfaltigkeit V habe die Eigenschaft (LK), falls eine plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion ψ, sowie $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$ existieren, so daß für jede plurisubharmonische Funktion φ auf V und alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$ und jedes $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$m_\varphi^\psi(\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2) \leq \lambda m_\varphi^\psi(a r_1 + b) + (1-\lambda) m_\varphi^\psi(a r_2 + b)\,,$$

wobei

$$m_\varphi^\psi(r) := \sup\{\varphi(z) : \; z \in V\,, \;\; \psi(z) < r\} \text{ ist für jeder } r \in \mathbb{R}\,.$$

Eine in den $\mathbb{C}^N$ eingebettete abgeschlossene zusammenhängende Untermannigfaltigkeit ist also genau dann algebraisch nach Satz 1.4, falls sie (LK) mit $\psi(z) = ln \mid z \mid$ für $z \in V$ besitzt.

Ferner impliziert (LK) die Stark-Liouvillesche Eigenschaft (Satz 1.3, 3)) für zusammenhängende Steinsche Mannigfaltigkeiten.

Hieraus leiten sich zwei Fragen ab:

1) Ist jede Steinsche Mannigfaltigkeit mit (LK) biholomorph äquivalent zu einer algebraischen Varietät in einem $\mathbb{C}^N$?

2) Ist die Stark-Liouvillesche Eigenschaft auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit äquivalent zur Eigenschaft (LK)?

Wenn und nur wenn beide Fragen eine positive Antwort haben, wäre jede zusammenhängende Steinsche Mannigfaltigkeit V, für die $H(V)$ die Eigenschaft (DN) besitzt, isomorph zu einer algebraischen Varietät eines $\mathbb{C}^N$.

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Herren Dr. L. Frerick und Dr. M. Tidten sehr herzlich bedanken für die Bereitschaft zu vielen Anregungen und Gesprächen, die das Entstehen dieser Arbeit begleitet haben. Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. D. Vogt, der durch seine geduldige und stetige Anregung und Unterstützung entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

2 Der verallgemeinerte Lösungssatz für den Korandoperator δ

Wir führen in diesem Kapitel die in Kapitel 1 dargestellte Induktion in dem Diagramm (1.1.1) durch, indem wir das Diagramm mit speziellen Frécheträumen und linearen stetigen Abbildungen auffüllen. Dabei ist jede Spaltenabbildung ein Korandoperator. Wir behandeln die Kommutativität des Diagramms und die Exaktheitsbedingungen an die Zeilen und Spalten als Eigenschaften der Familie der vorkommenden Frécheträume. Wir zeigen, daß sich die Urbildabschätzungen der exakten Spalten auf die erste Spalte überträgt.

In den folgenden Kapiteln muß dann gezeigt werden, daß es ein solches Diagramm von Frécheträumen gibt, wo in der ersten Spalte die Sequenz der Korandabbildungen zwischen den Kokettenräumen mit Werten in einer lokal endlich erzeugten Untergarbe von $\mathcal{O}^p$ steht.

Sei I eine abzählbare Indexmenge. Sei für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, $\sigma \in \mathbb{N}_0$ eine Familie $S_{k,\sigma}$ von Frécheträumen gegeben, so daß zu jedem Multiindex $\alpha = i_0, \ldots, i_\sigma \in I^{\sigma+1}$, paarweise verschiedener Indizes aus I ein Fréchetraum F^k_α mit einem jeweiligen aufsteigenden Halbnormensystem $(\| \ \|^k_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ existiert. Es gelte $F^k_{\pi(i_0,\ldots,i_\sigma)} = F^k_{i_0,\ldots,i_\sigma}$ für jede Permutation π der Indizes $i_0, \ldots, i_\sigma$. Für die lokalen Banachräume von $F^k_{i_0,\ldots,i_\sigma}$ bezüglich $\| \ \|^k_{i_0,\ldots,i_\sigma,n}$ sollen die kanonischen Verbindungsabbildungen injektiv sein und dichtes Bild besitzen.

Ferner sei für jeden Multiindex $i_1, \ldots, i_\sigma \in I^\sigma$ die Anzahl der Frécheträume $F^k_{i,i_1,\ldots,i_\sigma} \in S_{k,\sigma}$, $i \in I$, die nicht der Nullraum sind, gleichmäßig für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in \mathbb{N}_0$ durch eine Schranke $M \in \mathbb{N}$ beschränkt. Die Menge solcher Indizes i zu einem Multiindex $i_1, \ldots, i_\sigma$ sei für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gleich. Wir bezeichnen sie mit $I_{i_1,\ldots,i_\sigma}$. Wir verlangen ferner, daß $I_{j,i_1,\ldots,i_\sigma} \subset I_{i_1,\ldots,i_\sigma}$ für jedes $j \in I$ und jedes $i_1, \ldots, i_\sigma \in I^\sigma$ ist.

Ist $\alpha = i_0, \ldots, i_\sigma \in I^{\sigma+1}$ ein Multiindex, dann sei mit α_j derjenige Multiindex in I^σ bezeichnet, der durch Streichung des Index i_j entsteht.

Wir führen jetzt den Begriff einer Kokette auf $S_{k,\sigma}$, $k \in N_0$, $\sigma \in \mathbb{N}_0$ ein:

Definition 2.1. :

Eine Kokette $c = (c_{i_0,\ldots,i_\sigma})_{i_0,\ldots,i_\sigma \in I^{\sigma+1}}$ der Länge σ auf der Stufe k sei ein Element aus $\prod\limits_{i_0,\ldots,i_\sigma \in I^{\sigma+1}} F^k_{i_0,\ldots,i_\sigma}$ mit der folgenden alternierenden Eigenschaft:

$$c_{i_0,\ldots,i_\sigma} = (-1)^{sign\ \pi} c_{\pi(i_0,\ldots,i_\sigma)}\ ,$$

wobei π eine Permutation der Indizes $i_0, \ldots, i_\sigma$ ist und sign π die minimale Anzahl der Transpositionen angibt, in die π zerlegt werden kann.

Man beachte, daß $c_{i_0,\dots,i_\sigma}$ und $c_{\pi(i_0,\dots,i_\sigma)}$ Elemente desselben Fréchetraumes sind.

Die Menge aller Koketten der Länge σ sei mit $\mathcal{C}(S_{k,\sigma})$ bezeichnet.

Wir wollen nun Räume gewichteter Koketten einführen und diese mit einer Fréchetraumtopologie versehen.

Ist J eine abzählbare Indexmenge und $(F_j)_{j\in J}$ eine Familie von Fréchetäumen mit aufsteigenden Halbnormensystemen $(\| \ \|_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils in dem Fréchetraum F_j, dann sei

$$l_1((F_j)_j) := \{x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} F_j \ : \ |\!|\!| \ x \ |\!|\!|_n := \sum_{j\in J} \| \ x_j \ \|_{j,n} < \infty \text{ für jedes } n\}$$

der Raum der bezüglich $(F_j)_j$ absolutsummierbaren Folgen. $l_1((F_j)_j)$ ist also ein linearer Teilraum von $\prod\limits_j F_j$. Man zeigt wie im skalaren Fall, daß $l_1((F_j)_j)$ versehen mit der durch $(|\!|\!| \ |\!|\!|_n)_n$ induzierten Topologie ein Fréchetraum ist.

Sei jetzt $C = (C_\alpha)_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$ eine Familie von Konstanten aus dem halboffenen Intervall $(0,1]$ mit $C_\alpha = C_{\pi(\alpha)}$ für jede Permutation π des Multiindex α. Dann sei

$$\mathcal{C}(S_{k,\sigma}, C) := \{c = (c_\alpha)_{\alpha\in I^{\sigma+1}} \in \mathcal{C}(S_{k,\sigma}) \ : \ C\cdot c := (C_\alpha \cdot c_\alpha)_{\alpha\in I^{\sigma+1}} \in l_1(S_{k,\sigma})\} \ .$$

Für $c \in \mathcal{C}(S_{k,\sigma}, C)$ gilt also

$$|\!|\!| \ c \ |\!|\!|^k_{n,C} := \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} C_\alpha \ \| \ c_\alpha \ \|^k_{\alpha,n} < \infty$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dasjenige Konstantensystem, das nur aus Einsen besteht, bezeichnen wir mit 1.

$\mathcal{C}(S_{k,\sigma}, C)$ ist versehen mit $(|\!|\!| \ |\!|\!|^k_{n,C})_n$ ein Fréchetraum, denn $\mathcal{C}(S_{k,\sigma}, C) = l_1((F^k_\alpha)_{\alpha\in I^{\sigma+1}})$, wobei die Halbnormen in den F^k_α jeweils mit C_α skaliert sind.

Ferner sei

$$\mathcal{C}_n(S_{k,\sigma}, C) := \{c \in \mathcal{C}(S_{k,\sigma}) \ : \ |\!|\!| \ c \ |\!|\!|^k_{n,C} < \infty\} \ .$$

Um einen Korandoperator für Koketten auf der Stufe k einführen zu können, benötigen wir für jedes $\alpha \in I^{\sigma+1}$, $\sigma \geq 1$ und $j = 0, \dots, \sigma$ lineare stetige Abbildungen

$$\iota^{k,\alpha}_{\alpha_j} : F^k_{\alpha_j} \to F^k_\alpha$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} 1) & \| \iota^{k,\alpha}_{\alpha_j} x \|^k_{\alpha,n} \leq \| x \|^k_{\alpha_j,n} \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \\ 2) & \iota^{k,\alpha}_{\alpha_j} \circ \iota^{k,\alpha_j}_{(\alpha_j)_i} = \iota^{k,\alpha}_{\alpha_i} \circ \iota^{k,\alpha_i}_{(\alpha_i)_{j-1}} \text{ für } 1 \leq i < j \leq \sigma + 1 \\ 3) & \iota^{k,\alpha}_{\alpha_j} \circ \iota^{k,\alpha_j}_{(\alpha_j)_i} = \iota^{k,\alpha}_{\alpha_{i+1}} \circ \iota^{k,\alpha_{i+1}}_{(\alpha_{i+1})_j} \text{ für } 0 \leq j \leq i \leq \sigma \\ 4) & \iota^{k,\alpha}_{\alpha_j} \text{ ist injektiv, falls } F^k_\alpha \neq \{0\} \text{ ist.} \end{array} \tag{2.1.1}$$

Falls klar ist, auf welcher Stufe k sich die Abbildungen befinden, lassen wir den Index k fort. Den Korandoperator auf der Stufe k definieren wir nun wie folgt:

Für $\sigma \geq 0$ sei

$$\begin{aligned} \delta^\sigma : \mathcal{C}(S_{k,\sigma}) \ni (c_\alpha)_{\alpha \in I^{\sigma+1}} &\mapsto ((\delta^\sigma c)_\beta)_{\beta \in I^{\sigma+2}} \in \mathcal{C}(S_{k,\sigma+1}) \\ \text{mit } (\delta^\sigma c)_\beta &:= \sum_{j=0}^{\sigma+1} (-1)^j \iota^\beta_{\beta_j} c_{\beta_j} \end{aligned}$$

Zwischen zwei Konstantensystemen $C = (C_\alpha)_{\alpha \in I^{\sigma+1}}$ und $D = (D_\beta)_{\beta \in I^{\sigma+2}}$ sei die Vergleichsrelation $C \succ D$ genau dann gegeben, falls

$$C_\alpha \geq \max_{i \in I_\alpha} D_{i,\alpha} \text{ für alle } \alpha \in I^{\sigma+1} .$$

Für den Korandoperator gilt das folgende

Lemma 2.2. :
Falls $C \succ D$, dann ist δ^σ ein stetiger linearer Operator $\mathcal{C}_n(S_{k,\sigma}, C) \to \mathcal{C}_n(S_{k,\sigma+1}, D)$. Ferner gilt

1) $\delta^\sigma \circ \delta^{\sigma-1} = 0$ *für* $\sigma = 1, 2, \ldots$.

2) $||| \delta^\sigma c |||^k_n \leq M \cdot (\sigma + 2) \cdot ||| c |||^k_n$ *für jedes* $c \in \mathcal{C}_n(S_{k,\sigma}, C)$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst $\delta^\sigma \circ \delta^{\sigma-1} c = 0$ für ein $c \in \mathcal{C}(S_{k,\sigma-1})$. Für $\alpha \in I^{\sigma+2}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(\delta^\sigma(\delta^{\sigma-1}c))_\alpha &= \sum_{j=0}^{\sigma+1}(-1)^j \iota^\alpha_{\alpha_j}\left(\sum_{i=0}^{\sigma}(-1)^i \iota^{\alpha_j}_{(\alpha_j)_i} c_{(\alpha_j)_i}\right) \\
&= \sum_{0\leq i<j\leq\sigma+1}(-1)^{i+j}\iota^\alpha_{\alpha_j}\circ\iota^{\alpha_j}_{(\alpha_j)_i}c_{(\alpha_j)_i} + \sum_{0\leq j\leq i\leq\sigma}(-1)^{i+j}\iota^\alpha_{\alpha_j}\circ\iota^{\alpha_j}_{(\alpha_j)_i}c_{(\alpha_j)_i}
\end{aligned}
$$

Wir wenden die Kommutationseigenschaften (2.1.1) an und erhalten mit $n := j$ und $m := i+1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\leq j\leq i\leq\sigma}(-1)^{i+j}\iota^\alpha_{\alpha_j}\circ\iota^{\alpha_j}_{(\alpha_j)_i}c_{(\alpha_j)_i} &= \sum_{0\leq j\leq i\leq\sigma}(-1)^{i+j}\iota^\alpha_{\alpha_{i+1}}\circ\iota^{\alpha_{i+1}}_{(\alpha_{i+1})_j}c_{(\alpha_{i+1})_j} \\
&= (-1)\cdot\sum_{0\leq n<m\leq\sigma+1}(-1)^{m+n}\iota^\alpha_{\alpha_m}\circ\iota^{\alpha_m}_{(\alpha_m)_n}c_{(\alpha_m)_n}\ .
\end{aligned}
$$

Also ist $(\delta^\sigma(\delta^{\sigma-1}c))_\alpha = 0$.

Wir zeigen nun die Stetigkeitsabschätzung:

$$
\begin{aligned}
|||\ \delta^\sigma c\ |||^k_n &= \sum_{\alpha\in I^{\sigma+2}} D_\alpha \parallel \sum_{j=0}^{\sigma+1}(-1)^j\iota^\alpha_{\alpha_j}c_{\alpha_j}\parallel^k_{\alpha,n} \\
&\leq \sum_{\alpha\in I^{\sigma+2}} D_\alpha \parallel \sum_{j=1}^{\sigma+1}(-1)^j\iota^\alpha_{\alpha_j}c_{\alpha_j}\parallel^k_{\alpha,n} + \sum_{\alpha\in I^{\sigma+2}} D_\alpha \parallel c_{\alpha_0}\parallel^k_{\alpha,n}\ .
\end{aligned}
$$

Für den zweiten Summanden der rechten Seite gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in I^{\sigma+2}} D_\alpha \parallel c_{\alpha_0}\parallel^k_{\alpha,n} &= \sum_{\beta\in I^{\sigma+1}}\sum_{i\in I^k_\beta} D_{i,\beta}\parallel c_\beta\parallel^k_{\beta,n} \\
&\leq M\sum_{\beta\in I^{\sigma+1}} C_\beta \parallel c_\beta\parallel^k_{\beta,n} \\
&= M\ |||\ c\ |||^k_n\ .
\end{aligned}
$$

Durch iteratives Abspalten der weiteren Summanden erhalten wir schließlich

$$\||| \delta^\sigma c \|||_n^k \leq (\sigma+2)M \||| c \|||_n^k \ .$$

□

Wir bemerken noch, daß für jeden Multiindex $\alpha \in I^{M+2}$ mit paarweise verschiedenen Indizes aus I der Raum F_α^k stets der Nullraum ist für alle k. Denn es gibt ein $j \in \{1, \dots, M+1\}$, so daß $F_{i_0,i_j}^k = \{0\}$ ist, sonst wäre die Anzahl der Indizes in I_{i_0} größer als M, was der Definition von M widerspräche. Ohne Einschränkung sei $j = 1$. Also ist $I_{i_0,i_1} = \emptyset$. Daher ist $I_{i_0,i_1,\dots,i_M} = \emptyset$, woraus $F_{i_0,\dots,i_{M+1}}^k = \{0\}$ folgt.

Im folgenden wollen wir unter einem System $(S_{k,\sigma})_{k,\sigma}$ stets ein System von Frécheträumen wie oben verstehen, das einen wohldefinierten Korandoperator zuläßt.

Ein Beispiel für ein solches System $S_{k,\sigma}$ mit festem k und $\sigma = 0$ wird durch die Räume holomorpher Funktionen auf jeweils einem Element einer offenen zusammenhängenden Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ einer komplexen Mannigfaltigkeit gegeben, wobei sich nicht mehr als eine feste Anzahl von Elementen der Überdeckung schneiden sollen. Für größere σ sind die Räume holomorpher Funktionen auf den Schnittmengen von jeweils $\sigma + 1$ Überdeckungsmengen zu nehmen.

Die Halbnormensysteme der einzelnen Frécheträume sind dann durch die Suprema auf kompakten Ausschöpfungen der jeweiligen Überdeckungsmengen gegeben. Auf den Schnittmengen wählt man die Schnitte der jeweiligen kompakten Ausschöpfungsmengen.

Die Abbildungen $i_{\alpha_j}^\alpha$ für ein $\alpha \in I^{\sigma+1}$ und $j \in \{0, \dots, \sigma\}$ kann man als Einschränkungen der holomorphen Funktionen jeweils auf durch den Schnitt mit U_{i_j} entstehende kleinen Menge U_α wählen. Hierdurch sind die Eigenschaften (2.1.1) sofort erfüllt.

Die Koketten werden in diesem Beispiel zu den üblichen Koketten holomorpher Funktionen einer Cousin-I-Verteilung, $\delta^1 c = 0$ ist dann exakt die Zykelbedingung.

Wir fassen weitere Voraussetzungen, die wir benötigen, zu der folgenden Eigenschaft (E) zusammen. Die Untereigenschaft (E.1) beschreibt die Bedingungen für die Kommutativität des Diagramms (1.1.1), die Exaktheit der Zeilen sowie Urbild- und Stetigkeitsabschätzungen. Die Untereigenschaft (E.2) beschreibt Urbildabschätzungen der Spaltenabbildungen.

Definition 2.3. :
Ein System $S = (S_{k,\sigma})_{k,\sigma}$ habe die Eigenschaft (E), falls die folgenden Eigenschaften (E.1) und (E.2) erfüllt sind:

(E.1): Ist $\sigma \geq 0$ fest, so gibt es für jedes $\alpha \in I^{\sigma+1}$ eine exakte Sequenz von linearen stetigen Abbildungen p_α^k, $k \geq 0$, die $\neq 0$ sind, falls $F_\alpha^{k+1} \neq \{0\}$, und die invariant unter Permutationen der Indizes in α sind

(E.1.1)

$$\dots F^3_\alpha \overset{p^2_\alpha}{\to} F^2_\alpha \overset{p^1_\alpha}{\to} F^1_\alpha \overset{p^0_\alpha}{\to} F^0_\alpha \to 0\,.$$

Es gelten ferner

(E.1.2)

$$p^k_\alpha \circ \iota^\alpha_{\alpha_j} = \iota^\alpha_{\alpha_j} \circ p^k_{\alpha_j} \text{ für } \alpha \in I^{\sigma+1}\,,\ \ j = 0,\dots,\sigma\,,\ \ k \geq 0\,,$$

sowie die folgenden Eigenschaften:

(E.1.3) *Zu $\alpha \in I^{\sigma+1}$, $k \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es $C > 0$, so daß es für jedes $x \in F^k_\alpha$ mit $p^{k-1}_\alpha x = 0$ und $\| x \|_{\alpha,n+1} \leq 1$ ein $y \in F^{k+1}_\alpha$ mit $p^k_\alpha y = x$ und $\| y \|_{\alpha,n} \leq C$ gibt. Hierbei sei $p^{-1}_\alpha : F^0_\alpha \to 0$ die Nullabbildung.*

(E.1.4) *Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in I^{\sigma+1}$ und $k \geq 0$ gibt es ein Konstantensystem $C_{n,k} = (C_{n,k,\alpha})_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$, so daß*

$$||| p^k_\alpha x |||^k_{n,C_{n,k}} \leq ||| x |||^{k+1}_{n,1} \text{ für jedes } x \in F^{k+1}_\alpha$$

(E.2): Für $k \geq 1$ gelte: Es gibt eine nicht leere Menge M_γ zu einem festen $\gamma > 1$ mit

1. *$M_\gamma \subset \{[C := (C_\alpha)_{\alpha\in I^{\sigma+1}}, C' := (C'_\alpha)_{\alpha\in I^\sigma}] : C \prec C'\}$,*
2. *aus $[C, C'] \in M_\gamma$ folgt $[C^\theta, C'^\theta] \in M_\gamma$ für jedes $\theta \geq 1$,*
3. *ist $[C, C'] \in M_\gamma$ dann gibt es $C'' \prec C$, so daß $[C'', C] \in M_\gamma$,*

für die gilt: Zu jedem Konstantensystem $C_1 = (C_{1,\alpha})_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Konstantensystem $C_2 = (C_{2,\alpha})_{\alpha\in I^\sigma}$, so daß für alle $[C, C'] \in M_\gamma$ gilt:

Ist $c \in \mathcal{C}_n(S_{k,\sigma}, C \cdot C_1)$ mit $\delta^\sigma c = 0$, dann existiert ein $c' \in \mathcal{C}_{n-1}(S_{k,\sigma-1}, C'^\gamma \cdot C_2)$ mit

$$\begin{aligned} \delta^{\sigma-1} c' &= c \text{ und} \\ ||| c' |||^k_{n-1,C'^\gamma\cdot C_2} &\leq ||| c |||^k_{n,C\cdot C_1} \end{aligned}$$

Der nun folgende Satz zeigt, daß auch auf der Stufe $k = 0$ Lösungen für den verallgemeinerten Korandoperator existieren, falls Eigenschaft (E) gilt.

Der Beweis verwendet das Induktionsverfahren, daß für den Beweis des Theorem B von Cartan auf relativ kompakten holomorph konvexen Stufen verwendet wird (vgl. Beweis von Theorem 7.4.3 bzw. 7.6.10 in [8]).

Satz 2.4. :
Sei $(S_{k,\sigma})_{k,\sigma}$ ein System von Frécheträumen, für das die Eigenschaft (E) gilt. Dann gilt für $k = 0$:

Sei $\gamma > 1$ und M_γ so gewählt wie in (E.2), dann gibt es zu jedem Konstantensystem $C_1 = (C_{1,\alpha})_{\alpha \in I^{\sigma+1}}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n > 2(M+1)$ ein Konstantensystem $C_2 = (C_{2,\alpha})_{\alpha \in I^\sigma}$, so daß für alle $[C, C'] \in M_\gamma$ gilt:

Ist $c \in \mathcal{C}_n(S_{0,\sigma}, C \cdot C_1)$ mit $\delta^\sigma c = 0$, dann existiert ein $c' \in \mathcal{C}_{n-2(M+1-\sigma)}(S_{0,\sigma-1}, C'^{\gamma^{M-\sigma}} \cdot C_2)$ mit

$$\begin{aligned} \delta^{\sigma-1} c' &= c \text{ und} \\ ||| \, c' \, |||^0_{n-2(M+1-\sigma), C'^{\gamma^{M-\sigma}} \cdot C_2} &\leq ||| \, c \, |||^0_{n, C \cdot C_1} \end{aligned}$$

Beweis:

Wir führen eine Induktion über fallende σ durch.

Wir zeigen die folgende von σ abhängige Induktionsbehauptung für festes aber beliebiges $k \geq 0$:

Zu jedem Konstantensystem $C_1 = (C_{1,\alpha})_{\alpha \in I^{\sigma+1}}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n > 2(M+1)$ gibt es ein Konstantensystem $C_2 = (C_{2,\alpha})_{\alpha \in I^\sigma}$, so daß für alle $[C, C'] \in M_\gamma$ gilt:

Ist $c \in \mathcal{C}_n(S_{k,\sigma}, C \cdot C_1)$ mit $\delta^\sigma c = 0$ und $p_\alpha^{k-1} c_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in I^{\sigma+1}$, dann existiert ein $c' \in \mathcal{C}_{n-2(M+1-\sigma)}(S_{k,\sigma-1}, C'^{\gamma^{M-\sigma}} \cdot C_2)$ mit

$$\begin{aligned} p_\alpha^{k-1} c'_\alpha &= 0 \text{ für alle } \alpha \in I^\sigma \\ \delta^{\sigma-1} c' &= c \text{ und} \\ ||| \, c' \, |||^k_{n-2(M+1-\sigma), C'^{\gamma^{M-\sigma}} \cdot C_2} &\leq ||| \, c \, |||^k_{n, C \cdot C_1} \ . \end{aligned}$$

Der Induktionsanfang $\sigma = M + 1$ ist klar, da nur Nullelemente auftauchen.

Zum Induktionschritt $\sigma + 1$ nach σ:

Sei $C_1 = (C_{1,\alpha})_{\alpha \in I^{\sigma+1}}$ ein Konstantensystem und $n > 2(M+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Sei ferner $[C = (C_\alpha)_{\alpha \in I^{\sigma+1}}, C' = (C'_\alpha)_{\alpha \in I^\sigma}] \in M_\gamma$.

Wir starten mit einem $c \in \mathcal{C}_n(S_{k,\sigma}, C \cdot C_1)$ mit $\delta^\sigma c = 0$ und $p_\alpha^{k-1} = 0$ für alle $\alpha \in I^{\sigma+1}$. Nach (E.1.3) gibt es zu $c_\alpha \in F_\alpha^k$ ein $d_\alpha \in F_\alpha^{k+1}$ mit $p_\alpha^k d_\alpha = c_\alpha$ und $\| d_\alpha \|_{\alpha,n-1} \leq \widetilde{C}_\alpha \| c_\alpha \|_{\alpha,n}$. Hierbei hängt $\widetilde{C}_\alpha$ nur von α und n ab.

Wenn wir also $\widetilde{C} := (\widetilde{C}_\alpha^{-1})_{\alpha \in I^{\sigma+1}}$ setzen, so erhalten wir ein $d = (d_\alpha)_{\alpha \in I^{\sigma+1}} \in \mathcal{C}_{n-1}(S_{k+1,\sigma}, C \cdot \widetilde{C} \cdot C_1)$ mit

$$||| d |||^{k+1}_{n-1, C \cdot \widetilde{C} \cdot C_1} \leq ||| c |||^k_{n, C \cdot C_1}$$

Wir wählen gemäß der 3. Eigenschaft von M_γ ein $C'' \prec C$, so daß $[C'', C] \in M_\gamma$. Nach Lemma 2.2 folgt dann mit $D' := \widetilde{C} \cdot C_1 \cdot (M(\sigma+3))^{-1}$, daß $d' := \delta^{\sigma+1} d \in \mathcal{C}_{n-1}(S_{k+1,\sigma+1}, C'' \cdot D')$ und

$$||| d' |||^{k+1}_{n-1, C'' \cdot D'} \leq ||| d |||^{k+1}_{n-1, C \cdot \widetilde{C} \cdot C_1}$$

Ist $\alpha \in I^{\sigma+2}$, dann folgt wegen (E.1.2)

$$\begin{aligned} p_\alpha^k d'_\alpha &= p_\alpha^k (\delta^{\sigma+1} d)_\alpha \\ &= \sum_{j=0}^{\sigma+2} (-1)^j p_\alpha^k i_{\alpha_j}^\alpha d_{\alpha_j} \\ &= \sum_{j=0}^{\sigma+2} (-1)^j i_{\alpha_j}^\alpha p_{\alpha_j}^k d_{\alpha_j} \\ &= (\delta^{\sigma+1} c)_\alpha \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir können also auf d' die Induktionsvoraussetzung auf der Stufe $k+1$ anwenden. Es gibt daher ein Konstantensystem D'', unabhängig von C, C'' und d', so daß zu d' eine Lösung der Gleichung $\delta^\sigma d'' = d'$ existiert mit d'' in $\mathcal{C}_{n-1-2(M+1-\sigma-1)}(S_{k+1,\sigma}, C^{\gamma^{M-\sigma-1}} \cdot D'')$, $p_\alpha^k d''_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in I^{\sigma+1}$ und

$$||| d'' |||^{k+1}_{n-1-2(M-\sigma), C^{\gamma^{M-\sigma-1}} \cdot D''} \leq ||| d' |||^{k+1}_{n-1, C'' D'} \ .$$

Hierbei ist ohne Einschränkung $D'' \leq \widetilde{C} \cdot C_1$.

Wir setzen nun $h := d - d'' \in \mathcal{C}(S_{k+1,\sigma})$. Dann gilt

$$\delta^\sigma h = \delta^\sigma d - \delta^\sigma d'' = d' - d' = 0 \text{ und}$$

$$\begin{aligned}
\|\| h \|\|^{k+1}_{n-1-2(M-\sigma),C^{\gamma^{M-\sigma-1}}D''} &\leq \|\| d \|\|^{k+1}_{n-1,C\cdot D''} + \|\| d' \|\|^{k+1}_{n-1,C''D'} \\
&\leq \|\| d \|\|^{k+1}_{n-1,C\cdot\widetilde{C}\cdot C_1} + \|\| c \|\|^{k}_{n,C\cdot C_1} \\
&\leq 2 \|\| c \|\|^{k}_{n,C\cdot C_1}
\end{aligned}$$

Also ist $h \in \mathcal{C}_{n-1-2(M-\sigma)}(S_{k+1,\sigma}, C^{\gamma^{M-\sigma-1}} \cdot D'')$

Wir wenden jetzt Eigenschaft (E.2) an:

Es gibt demnach ein von C und C' unabhängiges $D''' = (D'''_\alpha)_{\alpha\in I^\sigma}$, so daß für das Paar $[C^{\gamma^{M-\sigma-1}}, C'^{\gamma^{M-\sigma-1}}] \in M_\gamma$ gilt: Zu obigem $h \in \mathcal{C}_{n-1-2(M-\sigma)}(S_{k+1,\sigma}, C^{\gamma^{M-\sigma-1}} \cdot D'')$ gibt es wegen $\delta^\sigma h = 0$ ein $h' \in \mathcal{C}_{n-1-2(M-\sigma)-1}\ (S_{k+1,\sigma-1}, C'^{\gamma^{M-\sigma}} \cdot D''')$, so daß

$$\begin{aligned}
\delta^{\sigma-1}h' &= h \text{ und} \\
\|\| h' \|\|^{k+1}_{n-1-2(M-\sigma)-1,C'^{\gamma^{M-\sigma}}\cdot D'''} &\leq \|\| h \|\|^{k+1}_{n-1-2(M-\sigma),C^{\gamma^{M-\sigma-1}}\cdot D''}
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß $c' := (p^k_\alpha h'_\alpha)_{\alpha\in I^\sigma}$ die gesuchte Lösung ist.

Es ist klar, daß $p^{k-1}_\alpha c'_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in I^\sigma$ gilt. Ferner gilt für alle $\alpha \in I^{\sigma+1}$, daß

$$\begin{aligned}
(\delta^{\sigma-1}c')_\alpha &= \sum_{j=0}^{\sigma}(-1)^j \iota^\alpha_{\alpha_j} p^k_{\alpha_j} h'_{\alpha_j} \\
&\overset{(E.1.2)}{=} \sum_{j=0}^{\sigma}(-1)^j p^k_\alpha \iota^\alpha_{\alpha_j} h'_{\alpha_j} \\
&= p^k_\alpha(\delta^{\sigma-1}h')_\alpha \\
&= p^k_\alpha h_\alpha \\
&= p^k_\alpha d_\alpha - p^k_\alpha d''_\alpha \\
&= c_\alpha\,.
\end{aligned}$$

Wegen (E.1.4) gibt es zur Stufe $n-2(M+1-\sigma)$ ein Konstantensystem $\tilde{\tilde{C}} = (\tilde{\tilde{C}}_\alpha)_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$ mit

$$|||\ p_\alpha^k x\ |||^k_{n-2(M+1-\sigma),\tilde{\tilde{C}}_\alpha} \leq |||\ x\ |||^{k+1}_{n-2(M+1-\sigma),1}$$

für jedes $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$, $x_\alpha \in F_\alpha^{k+1}$. Es folgt daher

$$\begin{aligned}
|||\ c'\ |||^k_{n-2(M+1-\sigma),C'\gamma^{M-\sigma}\cdot D'''\cdot\frac{\tilde{\tilde{C}}}{2}} &\leq \frac{1}{2}\ |||\ h'\ |||^{k+1}_{n-2(M+1-\sigma),C'\gamma^{M-\sigma}\cdot D'''}\\
&\leq \frac{1}{2}\ |||\ h\ |||^{k+1}_{n-1-2(M+1-\sigma),C\gamma^{M-\sigma-1}\cdot D''}\\
&\leq |||\ c\ |||^k_{n,C\cdot C_1}
\end{aligned}$$

Wir setzen also $C_2 := D'''\cdot\frac{\tilde{\tilde{C}}}{2}$ und erhalten damit $c' \in \mathcal{C}_{n-2(M+1-\sigma)}(S_{k,\sigma-1}, C'\gamma^{M-\sigma}\cdot C_2)$. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen □

3 $\overline{\partial}$-Lösungen mit Abschätzungen auf Steinschen Mannigfaltigkeiten

Sei Ω eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n, die abzählbar gegen unendlich ist. $\mathcal{O}$ sei die Garbe von Keimen analytischer Funktionen auf Ω und $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf Ω. Wir identifizieren für eine offene Menge $\Omega' \subset \Omega$ die holomorphen Funktionen auf Ω' mit den Schnitten $\Gamma(\Omega', \mathcal{O})$.

Eine (p,q)-Form f auf Ω sei dadurch definiert, daß sie sich auf jeder Karte als (p,q)-Form in den lokalen Koordinaten schreiben läßt, d.h. auf einer Karte U existieren Koefizientenfunktionen aus $L^2(\Omega, loc)$ bezüglich eines festen Volumenelementes dV, so daß f auf U in den lokalen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ die Form hat

$$f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q}{}' f_{I,J} dz^I \wedge d\overline{z}^J,$$

wobei hier die Notation aus [Hör] verwendet wird. Das bedeutet insbesondere, daß die Summierung nur über aufsteigende Indizes der Länge p bzw. q erfolgt.

Der Raum der (p,q)-Formen auf Ω heiße $L^2_{p,q}(\Omega, loc)$.

Wir wählen eine hermitsche Metrik $< \cdot, \cdot >$, die folgende Eigenschaft hat (siehe [Hör], S. 113):

Es gibt eine Folge $(\eta_\nu)_\nu$ in $C^\infty_\circ(\Omega)$, so daß $0 \leq \eta_\nu \leq 1$ und $\eta_\nu \equiv 1$ auf einem beliebigen Kompaktum in Ω, für ν genügend groß, und

$$\mid \overline{\partial}\eta_\nu \mid^2 = < \overline{\partial}\eta_\nu, \overline{\partial}\eta_\nu > \leq 1 \text{ auf } \Omega \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Mit einer Orthonormalisierung erreicht man, daß zu jedem $z \in \Omega$ eine offene Umgebung U existiert, sowie $(1,0)$-Formen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ mit C^∞-Koeffizienten, so daß

$$< \omega_j, \omega_k > = \delta_{jk} \text{ für } z \in U$$

Eine (p,q)-Form f läßt sich in eindeutiger Weise in $\omega_1, \ldots, \omega_n$ entwickeln:

$$f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q}{}' f_{I,J}\, \omega^I \wedge \overline{\omega}^J \text{ auf } U$$

und es gilt

$$< f, f > = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q}{}' \mid f_{I,J} \mid^2 \text{ auf } U.$$

Sei $\varphi \in C^2(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega, loc)$, so daß

$$\| f \|_\varphi^2 := \int | f |^2 e^{-\varphi} dV < \infty \tag{3.0.1}$$

Der Raum dieser (p,q)-Formen sei mit $L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)$ bezeichnet.

Sei von jetzt ab Ω Steinsch.

Es gilt das folgende Lemma über unbeschränkte Operatoren zwischen Hilberträumen (siehe [8], Lemma 4.1.1).

Lemma 3.1. :

Sei $T : H_1 \to H_2$ ein linearer dicht definierter abgeschlossener Operator. Es gebe $C > 0$, so daß

$$\| f \|_{H_2} \leq C \| T^* f \|_{H_1} \quad \textit{für alle } f \in F \cap D_{T^*}, \tag{3.1.1}$$

wobei $F \subset H_2$ abgeschlossen ist und für das Bild von T gilt $R_T \subset F$.

Dann existiert zu jedem $f \in F$ ein $g \in H_1$, so daß

$$Tg = f \;\; \textit{und} \;\; \| g \|_{H_1} \leq C \| f \|_{H_2} \tag{3.1.2}$$

gilt. Hierbei kann in (3.1.2) die gleiche Konstante C gewählt werden wie in (3.1.1).

Tatsächlich beweist Hörmander die Äquivalenz von (3.1.1) und (3.1.2). Die Tatsache, daß in (3.1.2) die gleiche Konstante gilt, wie in (3.1.1), folgt unmittelbar aus der Anwendung des Satzes von Hahn-Banach im Beweis.

$\overline{\partial}$ definiert folgende lineare abgeschlossene dicht definierte Operatoren zwischen Hilberträumen:

$$\begin{aligned} T : L^2_{p,q}(\Omega, \varphi) &\to L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi) \\ S : L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi) &\to L^2_{p,q+2}(\Omega, \varphi) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Den Raum der (p,q)-Formen auf Ω mit C^∞-Koeffizienten und kompaktem Träger bezeichnen wir mit $D_{(p,q)}(\Omega)$.

Wir benötigen die folgende Aussage über die Lösungen von $\overline{\partial}$ auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit. Da die Beweisführung sich weitestgehend auf den Beweis zu Theorem 5.3.4 in [8] stützt, können wir uns hier kurz fassen.

Satz 3.2. :

Sei Ω eine Steinsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine streng plurisubharmonische Funktion $\psi \in C^2(\Omega)$, so daß für jede plurisubharmonische Funktion φ auf Ω gilt:

Zu jedem $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi)$ mit $\overline{\partial} f = 0$ existiert eine Lösung $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$ der Gleichung $\overline{\partial} u = f$, so daß

$$\int_\Omega |\, u\,|^2 \, e^{-\varphi-\psi} dV \leq \int_\Omega |\, f\,|^2 \, e^{-\varphi} dV. \tag{3.2.1}$$

Beweis:

Wir wählen eine streng plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion κ auf Ω (siehe z.B. [8], Thm. 5.2.10). Dann gibt es eine wachsende konvexe Funktion $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß für jede zweimal differenzierbare plurisubharmonische Funktion φ die sogenannte basic estimate

$$\| f \|^2_{\chi(\kappa)+\varphi} \leq \| T^* f \|^2_{\chi(\kappa)+\varphi} + \| Sf \|^2_{\chi(\kappa)+\varphi} \quad \text{für alle } f \in D_{p,q+1}(\Omega) \tag{3.2.2}$$

gilt. Die basic estimate gilt auch für alle $f \in D_{T^*} \cap D_S$, da $D_{p,q+1}(\Omega)$ bezüglich der Graphennorm

$$\| f \|^2_{\chi(\kappa)+\varphi} + \| T^* f \|^2_{\chi(\kappa)+\varphi} + \| Sf \|^2_{\chi(\kappa)+\varphi}$$

dicht in $D_{T^*} \cap D_S$ liegt.

Sei jetzt F der Kern von S, dann ist F abgeschlossen in $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \chi(\kappa) + \varphi)$, da S abgeschlossen ist. Wir erhalten also

$$\| f \|_{\chi(\kappa)+\varphi} \leq \| T^* f \|_{\chi(\kappa)+\varphi} \qquad \text{für alle } f \in F \cap D_{T^*}\,.$$

Mit Lemma 3.1 folgt hieraus, daß zu jedem $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \chi(\kappa) + \varphi)$ mit $\overline{\partial} f = 0$ ein $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \chi(\kappa) + \varphi)$ existiert mit

$$\| u \|_{\chi(\kappa)+\varphi} \leq \| f \|_{\chi(\kappa)+\varphi} \leq \| f \|_{\varphi}\ .$$

Für den Übergang zu einer beliebigen plurisubharmonischen Funktion φ verwenden wir die Standardargumentation wie z.B. im Beweis zu Theorem 4.4.2 in [8]. □

Korollar 3.3. :
Ist $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ offen und pseudokonvex, dann existiert zu jedem $f \in L^2_{(p,q+1)}(\widetilde{\Omega}, \varphi)$ mit $\overline{\partial} f = 0$ eine Lösung $u \in L^2_{(p,q)}(\widetilde{\Omega}, loc)$ der Gleichung $\overline{\partial} u = f$, so daß

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \mid u \mid^2 e^{-\varphi-\psi} dV \leq \int_{\widetilde{\Omega}} \mid f \mid^2 e^{-\varphi} dV.$$

Hier ist φ eine beliebige plurisubharmonische Funktion auf Ω und ψ aus obigem Satz.

Beweis:

Wir können auf $\widetilde{\Omega}$ das eingeführte Volumenelement für Ω eingeschränkt auf $\widetilde{\Omega}$ verwenden. Da (3.2.2) auch für alle $f \in D_{p,q+1}(\widetilde{\Omega})$ gilt, kann man wie im Beweis zu Satz 3.2 argumentieren. □

Lemma 3.4. :
Seien Ω_1, Ω_2 und Ω_3 offene pseudokonvexe Teilmengen einer komplexen Mannigfaltifkeit Ω. Sei $\Omega_1 \subset \Omega_2$ relativ kompakt und $\Omega_2 \subset \Omega_3$, ferner sei $q \geq 1$ und $\varphi \in PSH(\Omega_2)$.

Dann gibt es zu jedem $f \in L^2_{(0,q)}(\Omega_2, \varphi)$ mit $\overline{\partial} f = 0$ ein $F \in L^2_{(0,q)}(\Omega_3, loc)$ mit

$$\overline{\partial} F = 0 \text{ und } F = f \text{ auf } \Omega_1$$

Beweis: Wir wenden Satz 3.2 auf $f \in L^2_{(0,q)}(\Omega_2, \varphi)$ an und erhalten ein $u \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega_2, loc)$ mit $\overline{\partial} u = f$.

Wir wählen eine C^∞-Funktion χ mit Werten im Intervall $[0, 1]$, so daß der Träger von χ in Ω_2 liegt und $\Omega_1 \subset \chi^{-1}(1)$.

Es sei $w := \chi u$ und $F := \overline{\partial} w$. Dann ist $F \in L^2_{(0,q)}(\Omega_3, loc)$ und $\overline{\partial} F = 0$. Ferner gilt

$$F \mid_{\Omega_1} = \left[\overline{\partial} u \cdot \chi + u \cdot \overline{\partial} \chi \right] \mid_{\Omega_1} = \overline{\partial} u \mid_{\Omega_1} = f \mid_{\Omega_1} \; .$$

□

Korollar 3.5. :
Seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3$ pseudokonvexe Teilmengen von Ω aus Satz 3.2 und sei Ω_1 in Ω_2 relativ kompakt. Sei ferner $\varphi \in PSH(\Omega)$ und $q \geq 1$.

Dann gibt es zu jedem $f \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega_3, \varphi)$ mit $\overline{\partial} f = 0$ eine Lösung $u \in L^2_{(0,q)}(\Omega_3, loc)$ der Gleichung $\overline{\partial} u = f$, so daß die Abschätzung

$$\int_{\Omega_1} |\, u \,|^2 \, e^{-\varphi-\psi} dV_\Omega \leq \int_{\Omega_2} |\, f \,|^2 \, e^{-\varphi} dV_\Omega$$

mit ψ aus Satz 3.2 erfüllt wird.

Beweis: Wir wenden Korollar 3.3 auf $f \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega_3, \varphi)$ mit $\overline{\partial} f = 0$ zweifach an und erhalten $u_1 \in L^2_{(0,q)}(\Omega_2, \varphi + \psi)$ und $u_2 \in L^2_{(0,q)}(\Omega_3, \varphi + \psi)$ mit $f = \overline{\partial} u_1$ auf Ω_2 und $f = \overline{\partial} u_2$ auf Ω_3, sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |\, u_1 \,|^2 \, e^{-\varphi-\psi} dV_\Omega &\leq \int_{\Omega_2} |\, f \,|^2 \, e^{-\varphi} dV_\Omega \text{ und} \\ \int_{\Omega_3} |\, u_2 \,|^2 \, e^{-\varphi-\psi} dV_\Omega &\leq \int_{\Omega_3} |\, f \,|^2 \, e^{-\varphi} dV_\Omega \,. \end{aligned}$$

Dann erfüllt $w := u_2|_{\Omega_2} - u_1$ die Voraussetzungen von Lemma 3.4. Wir erhalten daher $W \in L^2_{(0,q)}(\Omega_3, loc)$ mit $\overline{\partial} W = 0$ und $W = w$ auf Ω_1.

Wir setzen $u := u_2 - W \in L^2_{(0,q)}(\Omega_3, loc)$. Da $\overline{\partial} u = \overline{\partial} u_2 - \overline{\partial} W = \overline{\partial} u_2 = f$ gilt auf Ω_3 und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |\, u \,|^2 \, e^{-\varphi-\psi} dV_\Omega &= \int_{\Omega_1} |\, u_2 - u_2 + u_1 \,|^2 \, e^{-\varphi-\psi} dV_\Omega \\ &\leq \int_{\Omega_2} |\, f \,|^2 \, e^{-\varphi} dV_\Omega \,, \end{aligned}$$

ist das Korollar gezeigt □

4 Beweis eines Theorem B mit Schranken für Koketten mit Werten in der Garbe $\mathcal{O}_\Omega$ von Keimen holomorpher Funktionen auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit

Im nächsten Schritt werden wir ein Theorem B mit Lösungsabschätzungen beweisen für die Garbe von Keimen holomorpher Funktionen auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit. Dies wird die Eigenschaft E.2 zeigen.

Ein ebensolches Lösungstheorem mit präzisen Angaben des Gewichtsverlustes findet sich in [8], Proposition 7.6.2. Dieses Ergebnis bezieht sich jedoch lediglich auf die Situation im $\mathbb{C}^n$. Deshalb streben wir hier an, die Situation auf Steinschen Mannigfaltigkeiten zu untersuchen. Dabei werden die Angaben des Gewichtsverlustes naturgemäß unpräziser. Der Beweisgang wird im wesentlichen gleich verlaufen und zwar als Induktion über σ, wobei in den Beweis des Induktionsanfangs $\sigma = 1$ der $\overline{\partial}$-Lösungssatz 3.2 eingehen wird.

Sei also Ω eine Steinsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Überdeckung mit Steinschen Gebieten und der Eigenschaft, daß eine feste Überdeckungsmenge von höchstens M verschiedenen Überdeckungsmengen geschnitten wird. $\mathcal{W} := (W_i)_{i\in I}$ sei eine Verfeinerung zu $\mathcal{U}$. Insbesondere gelte $W_i \subset U_i$ relativ kompakt und W_i Steinsches Gebiet für jedes $i \in I$. $(\chi_i)_i$ sei eine Teilung der Eins bezüglich $(W_i)_i$. Wir wählen ferner eine plurisubharmonische Funktion φ, die

$$\left(\sum_{i\in I} \mid \overline{\partial}\chi_i(z) \mid\right)^2 e^{-\varphi} \leq 1, \quad z \in \Omega\,,$$

erfüllt. Es sei $\mathcal{H}_q$ die Garbe von Keimen von $(0,q)$-Formen. Auf den Stufenindex des Korandoperators δ wird verzichtet, wenn sich die entsprechende Stufe aus dem Zusammenhang ergibt. Für einen Multiindex $i_0,\ldots,i_\sigma$ bezeichnen wir mit $U_{i_0,\ldots,i_\sigma}$ den Schnitt $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_\sigma}$. Dies gelte für $W_{i_0,\ldots,i_\sigma}$ entsprechend. Die Menge aller auf Ω plurisubharmonischen Funktionen bezeichnen wie im folgenden mit $\mathrm{PSH}(\Omega)$.

Poposition 4.1. :
Sei $(\widetilde{W}_i)_{i\in I}$ eine Familie von pseudokonvexen Gebieten mit $W_i \subset \widetilde{W}_i$ relativ kompakt und $\widetilde{W}_i \subset U_i$ für jedes $i \in I$. Ist $c \in C^\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$, $\delta c = 0$, $\overline{\partial} c = 0$ und

$$\sum_{i_0,\ldots,i_\sigma} \int_{\widetilde{W}_{i_0,\ldots,i_\sigma}} \mid c_{i_0,\ldots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\kappa} dV < \infty \tag{4.1.1}$$

für eine plurisubharmonische Funktion κ auf Ω, dann existiert $c' \in C^{\sigma-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$ mit $\overline{\partial} c' = 0$, so daß $\delta c' = c$ und

$$\sum_{i_1,\dots,i_\sigma} \int_{W_{i_1,\dots,i_\sigma}} \mid c'_{i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\kappa-(\varphi+\psi)\cdot\sigma} dV \leq C_\sigma \sum_{i_0,\dots,i_\sigma} \int_{\widetilde{W}_{i_0,\dots,i_\sigma}} \mid c_{i_0,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\kappa} dV, \tag{4.1.2}$$

wobei $\psi \in PSH(\Omega)$ unabhängig von κ und c gewählt werden kann.

Beweis:

Bemerkungen: Das ψ hier ist das gleiche wie in Satz 3.2. Die Konstanten C_σ hängen nicht von den Gewichtsfunktionen ab.

Sei $c \in C^\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$, $\delta c = 0$, $\overline{\partial} c = 0$. Setze

$$b_{i_1,\dots,i_\sigma} := \sum_i \chi_i c_{i,i_1,\dots,i_\sigma}$$

und $b := (b_{i_1,\dots,i_\sigma})_{i_1,\dots,i_\sigma} \in C^{\sigma-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$. Man beachte, daß die Summe jeweils endlich ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\delta^{\sigma-1} b)_{i_0,\dots,i_\sigma} &= \sum_{k=0}^{\sigma} (-1)^k \sum_i \chi_i c_{i,i_0,\dots,\widehat{i_k},\dots,i_\sigma} \\ &= \sum_i \chi_i \sum_{k=0}^{\sigma} (-1)^k c_{i,i_0,\dots,\widehat{i_k},\dots,i_\sigma} \\ &= \sum_i \chi_i c_{i_0,\dots,i_\sigma} \\ &= c_{i_0,\dots,i_\sigma}, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

denn $\delta^\sigma c = 0$.

Ist $U \subset U_{i_1,\dots,i_\sigma}$ offen, dann gilt für $\beta \in PSH(\Omega)$ wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int_U \mid b_{i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\beta} dV &\leq \int_U \sum_i \chi_i \mid c_{i,i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\beta} dV \\ &\leq \sum_i \int_{U \cap W_i} \mid c_{i,i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\beta} dV\,. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Setze $f_{i_1,\dots,i_\sigma} = (\overline{\partial} b)_{i_1,\dots,i_\sigma} := \overline{\partial} b_{i_1,\dots,i_\sigma}$. Hierdurch wird eine Kokette $f := (f_{i_1,\dots,i_\sigma})_{i_1,\dots,i_\sigma} \in C^{\sigma-1}(\mathcal{U},\mathcal{H}_{q+1})$ definiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{i_1,\dots,i_\sigma} = \overline{\partial} b_{i_1,\dots,i_\sigma} &= \sum_i \overline{\partial}(\chi_i c_{i,i_1,\dots,i_\sigma}) \\ &= \sum_i \overline{\partial}\chi_i \wedge c_{i,i_1,\dots,i_\sigma}, \end{aligned}$$

denn $\overline{\partial} c = 0$. Da $\overline{\partial}$ auf jedes einzelne lokale Element einer Kokette wirkt, vertauscht $\overline{\partial}$ mit dem Korandoperator δ auf jeder Stufe. Daher gilt

$$\delta^{\sigma-1} f = \delta^{\sigma-1}\overline{\partial} b = \overline{\partial}\delta^{\sigma-1} b = \overline{\partial} c = 0.$$

Für jedes $U \subset U_{i_1,\dots,i_\sigma}$ und jedes $\beta \in PSH(\Omega)$ gilt wegen der Wachstumseigenschaft von φ

$$\begin{aligned} \int_U \mid f_{i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\varphi-\beta} dV &\leq \int_U \left(\sum_i \mid \overline{\partial}\chi_i \mid\right)\left(\sum_i \mid \overline{\partial}\chi_i \mid\mid c_{i,i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2\right) e^{-\varphi-\beta} dV \\ &\leq \int_U \sum_i \mid \overline{\partial}\chi_i \mid\mid c_{i,i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\frac{\varphi}{2}-\beta} dV \\ &\leq \sum_i \int_{U\cap W_i} \mid \overline{\partial}\chi_i \mid\mid c_{i,i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\frac{\varphi}{2}-\beta} dV \\ &\leq \sum_i \int_{U\cap W_i} \mid c_{i,i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\beta} dV. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Wir führen nun eine Induktion über σ durch:

Für den Induktionsanfang $\sigma = 1$ sei $c \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{H}_q)$, $\delta^1 c = 0$, $\overline{\partial} c = 0$ und

$$\sum_{i,j} \int_{U_{i,j}} \mid c_{i,j} \mid^2 e^{-\kappa} dV < \infty\,.$$

b und f seien wie oben konstruiert, dann gilt $\delta^0 f = 0$ und $\overline{\partial} f = \overline{\partial}\overline{\partial} b = 0$. f definiert also eine $(0,q+1)$-Form auf Ω, die $\overline{\partial}$-geschlossen ist. Wir erhalten wegen (4.1.1) und (4.1.5)

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\ f\ |^2\ e^{-\varphi-\kappa} dV &\leq \sum_j \int_{W_j} |\ f_j\ |^2\ e^{-\varphi-\kappa} dV \\ &\leq \sum_j \sum_i \int_{W_i \cap W_j} |\ c_{i,j}\ |^2\ e^{-\kappa} dV \\ &< \infty\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Es gibt daher nach Satz 3.2 ein $g \in L^2_{(0,q)}(\Omega, loc)$ mit $\overline{\partial} g = f$ und

$$\int_\Omega |\ g\ |^2\ e^{-\varphi-\psi-\kappa} dV \leq \int_\Omega |\ f\ |^2\ e^{-\varphi-\kappa} dV, \tag{4.1.7}$$

wobei ψ unabhängig von f und $\kappa + \varphi$ gewählt werden kann.

Setze $c_i' := b_i - g$ für jedes $i \in I$. Dann wird durch $c' := (c_i')_i$ eine Kokette in $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$ definiert, für die

$$\delta^0 c' = \delta^0 b - \delta^0 g = \delta^0 b = c$$

und

$$\overline{\partial} c' = \overline{\partial} b - \overline{\partial} g = f - f = 0 \text{ gilt.}$$

Wir können wegen (4.1.6) und (4.1.7) abschätzen

$$\begin{aligned}\sum_j \int_{W_j} |\ c_j'\ |^2\ e^{-\varphi-\psi-\kappa} dV &\leq 2 \sum_j \int_{W_j} |\ b_j\ |^2\ e^{-\varphi-\psi-\kappa} dV + 2 \sum_j \int_{W_j} |\ g\ |^2\ e^{-\varphi-\psi-\kappa} dV \\ &\leq 2 \sum_j \sum_i \int_{W_i \cap W_j} |\ c_{i,j}\ |^2\ e^{-\varphi-\psi-\kappa} dV + 2M \int_\Omega |\ g\ |^2\ e^{-\varphi-\psi-\kappa} dV \\ &\leq 2 \sum_{i,j} \int_{W_{i,j}} |\ c_{i,j}\ |^2\ e^{-\kappa} dV + 2M \sum_{i,j} \int_{W_{i,j}} |\ c_{i,j}\ |^2\ e^{-\kappa} dV.\end{aligned}$$

Mit $C_1 := 2(M+1)$ ist der Induktionsanfang gezeigt.

Für den Induktionsschritt $\sigma - 1 \to \sigma$ sei $c \in C^\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$, $\delta^\sigma c = 0$, $\overline{\partial} c = 0$ und

$$\sum_{i_0,\dots,i_\sigma} \int_{\widetilde{W}_{i_0,\dots,i_\sigma}} |\ c_{i_0,\dots,i_\sigma}\ |^2\ e^{-\kappa} dV < \infty\,.$$

Wir bilden b und f wie oben. Dann ist $f \in C^{\sigma-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{q+1})$ und $\delta^{\sigma-1} f = 0$, $\overline{\partial} f = 0$.

Wir können die Induktionsvorraussetzung auf f und $\kappa+\varphi$ anwenden, denn wegen (4.1.5) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,\ldots,i_\sigma}\int_{\widetilde{W}_{i_1,\ldots,i_\sigma}} \mid f_{i_1,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\varphi-\kappa}dV &\leq \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_\sigma}\int_{\widetilde{W}_{i_0,i_1,\ldots,i_\sigma}} \mid c_{i_0,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\kappa}dV \\ &< \infty\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Es existiert also $b' \in C^{\sigma-2}(\mathcal{U},\mathcal{H}_{q+1})$, $\overline{\partial}b'=0$ mit $\delta^{\sigma-2}b'=f$ und

$$\begin{aligned}\sum_{i_2,\ldots,i_\sigma}\int_{\widetilde{\widetilde{W}}_{i_2,\ldots,i_\sigma}} &\mid b'_{i_2,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-(\kappa+\varphi)-(\varphi+\psi)(\sigma-1)}dV \\ &\leq C_{\sigma-1}\sum_{i_1,\ldots,i_\sigma}\int_{\widetilde{W}_{i_1,\ldots,i_\sigma}} \mid f_{i_1,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\kappa-\varphi}dV\ ,\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

wobei $(\widetilde{\widetilde{W}}_i)_i$ eine Verfeinerung zu $(\widetilde{W}_i)_i$ ist mit $W_i \subset \widetilde{\widetilde{W}}_i$ und $\widetilde{\widetilde{W}}_i \subset \widetilde{W}_i$ jeweils relativ kompakt für jedes $i\in I$.

Wir wenden Korollar 3.5 an auf jedes $b'_{i_2,\ldots,i_\sigma}$, $U_{i_2,\ldots,i_\sigma}$ und $\beta=(\kappa+\varphi)+(\varphi+\psi)(\sigma-1)\in PSH(\Omega)$, sowie $W_{i_2,\ldots,i_\sigma}\subset \widetilde{\widetilde{W}}_{i_2,\ldots,i_\sigma}\subset U_{i_2,\ldots,i_\sigma}$.

Es existiert also jeweils $b''_{i_2,\ldots,i_\sigma}\in L^2_{(0,q)}(U_{i_2,\ldots,i_\sigma},loc)$ mit

$$\begin{aligned}\overline{\partial}b''_{i_2,\ldots,i_\sigma} &= b'_{i_2,\ldots,i_\sigma}\ \text{und} \\ \int_{W_{i_2,\ldots,i_\sigma}} \mid b''_{i_2,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV &\leq \int_{\widetilde{\widetilde{W}}_{i_2,\ldots,i_\sigma}} \mid b'_{i_2,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta}dV\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Sei $b'':=(b''_{i_2,\ldots,i_\sigma})_{i_2,\ldots,i_\sigma}\in C^{\sigma-2}(\mathcal{U},\mathcal{H}_q)$. Mit (4.1.8), (4.1.9) und (4.1.10) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{i_2,\ldots,i_\sigma}\int_{W_{i_2,\ldots,i_\sigma}} \mid b''_{i_2,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV &\leq \sum_{i_2,\ldots,i_\sigma}\int_{\widetilde{\widetilde{W}}_{i_2,\ldots,i_\sigma}} \mid b'_{i_2,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-(\kappa+\varphi)-(\varphi+\psi)(\sigma-1)}dV \\ &\leq C_{\sigma-1}\sum_{i_1,\ldots,i_\sigma}\int_{\widetilde{W}_{i_1,\ldots,i_\sigma}} \mid f_{i_1,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\varphi-\kappa}dV \\ &\leq C_{\sigma-1}\sum_{i_0,\ldots,i_\sigma}\int_{\widetilde{W}_{i_0,\ldots,i_\sigma}} \mid c_{i_0,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\kappa}dV.\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Wir setzen $b''' := \delta^{\sigma-2}b''$. Dann ist $b''' \in C^{\sigma-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$. Schließlich setzen wir $c' := b - b''' \in C^{\sigma-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\delta^{\sigma-1}c' = \delta^{\sigma-1}b - \delta^{\sigma-1}b''' &= \delta^{\sigma-1}b - \delta^{\sigma-1}\delta^{\sigma-2}b'' \\
&= \delta^{\sigma-1}b \\
&= c.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}c' = \overline{\partial}b - \overline{\partial}b''' &= f - \overline{\partial}\delta^{\sigma-2}b'' \\
&= f - \delta^{\sigma-2}\overline{\partial}b'' \\
&= f - \delta^{\sigma-2}b' \\
&= f - f \\
&= 0
\end{aligned}$$

Es gilt $\beta + \psi = \kappa + (\varphi + \psi)\sigma$. Daher erhalten wir aus (4.1.11) und (4.1.5):

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1,\dots,i_\sigma} \int_{W_{i_1,\dots,i_\sigma}} & \mid c'_{i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\kappa-(\varphi+\psi)\sigma} dV \\
\le\ & 2 \sum_{i_1,\dots,i_\sigma} \sum_{i} \int_{W_i \cap W_{i_1,\dots,i_\sigma}} \mid c_{i,i_1,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\kappa} dV \\
+\ & 2 \sum_{i_1,\dots,i_\sigma} \int_{W_{i_1,\dots,i_\sigma}} \mid \sum_{j=1}^{\sigma} (-1)^{j-1} b''_{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\beta-\psi} dV \\
\le\ & 2 \sum_{i_0,\dots,i_\sigma} \int_{W_{i_0,\dots,i_\sigma}} \mid c_{i_0,\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\kappa} dV \\
+\ & 2 \sum_{i_1,\dots,i_\sigma} \sum_{j=1}^{\sigma} \int_{W_{i_1,\dots,i_\sigma}} \mid b''_{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_\sigma} \mid^2 e^{-\beta-\psi} dV
\end{aligned}$$

Es gilt für den letzten Summanden

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,\ldots,i_\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma}\int_{W_{i_1,\ldots,i_\sigma}} & \mid b''_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV \\ = & \sum_{i_2,\ldots,i_\sigma}\sum_{i}\int_{W_i\cap W_{i_2,\ldots,i_\sigma}}\mid b''_{i_2,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV \\ + & \sum_{i_1,\ldots,i_\sigma}\sum_{j=2}^{\sigma}\int_{W_{i_1,\ldots,i_\sigma}}\mid b''_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV \\ \leq & \sum_{i_2,\ldots,i_\sigma} M\int_{W_{i_2,\ldots,i_\sigma}}\mid b''_{i_2,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV \\ + & \sum_{i_1,\ldots,i_\sigma}\sum_{j=2}^{\sigma}\int_{W_{i_1,\ldots,i_\sigma}}\mid b''_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV,\end{aligned}$$

denn $W_{i_2,\ldots,i_\sigma}$ wird von höchstens M Mengen aus $\mathcal{W}$ geschnitten. Wenn wir diese Abschätzung für $j = 2,\ldots,\sigma$ iterativ fortsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,\ldots,i_\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma}\int_{W_{i_1,\ldots,i_\sigma}} & \mid b''_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV \\ \leq & \ \sigma M\sum_{i_2,\ldots,i_\sigma}\int_{W_{i_2,\ldots,i_\sigma}}\mid b''_{i_2,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\beta-\psi}dV \\ \leq & \ \sigma M C_{\sigma-1}\sum_{i_0,\ldots,i_\sigma}\int_{\widetilde{W}_{i_0,\ldots,i_\sigma}}\mid c_{i_0,\ldots,i_\sigma}\mid^2 e^{-\kappa}dV.\end{aligned}$$

Wir haben also mit $C_\sigma := 2(1+\sigma^2 M C_{\sigma-1})$ den Induktionsschritt gezeigt $\Box$

Bemerkung: Der Beweis zu Proposition 4.1 ist auch mit $W_i = U_i$ für jedes $i \in I$ durchzuführen. Anstelle von Korollar 3.5 ist dann Korollar 3.3 anzuwenden. Daher gilt Proposition 4.1 sinngemäß auch für $W_i = \widetilde{W}_i = U_i$ für jedes $i \in I$.

Wir schöpfen jedes U_i, $i \in I$ durch pseudokonvexe Gebiete $A_{i,n}$, $n \in \mathbb{N}$ aus, für die für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils $A_{i,n} \subset A_{i,n+1}$ relativ kompakt gilt. Ohne Einschränkung sei $\bigcup_{i\in I} A_{i,1} = \Omega$. Für $(i_0,\ldots,i_\sigma) \in I^{\sigma+1}$ sei $A_{i_0,\ldots,i_\sigma,n} := A_{i_0,n}\cap\ldots\cap A_{i_\sigma,n}$.

Für eine Kokette der Länge σ, die aus Schnitten über den Überdeckungsmengen aus der Überdeckung $\mathcal{U}$ besteht mit Werten in der Garbe von Keimen von L^2-Formen sei für $\varphi \in PSH(\Omega)$

$$\| c \|_{\varphi,n}^2 := \sum_{i_0,\dots,i_\sigma} \int_{A_{i_0,\dots,i_\sigma,n}} | c_{i_0,\dots,i_\sigma} |^2 e^{-\varphi} dV$$

bzw.

$$\| c \|_{\varphi}^2 := \sum_{i_0,\dots,i_\sigma} \int_{U_{i_0,\dots,i_\sigma}} | c_{i_0,\dots,i_\sigma} |^2 e^{-\varphi} dV$$

eingeführt. Mit $C_n^\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q, \varphi)$ bzw. $C^\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q, \varphi)$ bezeichnen wir die Koketten aus $C^\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$, für die

$$\| c \|_{\varphi,n}^2 < \infty \text{ bzw. } \| c \|_{\varphi}^2 < \infty \text{ gilt.}$$

Proposition 4.1 können wir also auch wie folgt formulieren:

Satz 4.2. :
Es gibt eine plurisubharmonische Funktion ψ, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$, eine beliebige plurisubharmonische Funktion κ und $c \in C_{n+1}^\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q, \kappa)$ mit $\delta c = 0$ und $\overline{\partial} c = 0$ ein $c' \in C_n^{\sigma-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_q)$ mit $\delta c' = c$ und $\overline{\partial} c' = 0$ existiert, so daß

$$\| c' \|_{\kappa+\psi,n}^2 \leq \| c \|_{\kappa,n+1}^2$$

erfüllt ist.

Ein wichtiger Spezialfall von Satz 4.2 ist $q = 0$, denn die $\overline{\partial}$-geschlossenen Schnitte über Ω mit Werten in $\mathcal{H}_0$ sind die holomorphen Funktionen auf Ω.

5 Konstruktion einer exakten Sequenz

Es sei Ω eine Steinsche Mannigfaltigkeit und $U \subset \Omega$ offen holomorph konvex. Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf Ω. Ist $U \subset \Omega$ relativ kompakt, dann kann auf den Schnitten $\Gamma(U, \mathcal{F})$ in der folgenden Weise eine Fréchetraumtopologie eingeführt werden:

Nach Theorem A von Cartan gibt es $F_1, \ldots, F_q \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$, die $\mathcal{F}$ in U erzeugen. In der Umgebung eines jeden Kompaktums K_p, $p \in \mathbb{N}$ einer holomorph konvexen kompakten Ausschöpfung $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ von U wird $\mathcal{F}$ von $F_1, \ldots, F_q$ erzeugt, d.h. für jeden Schnitt x von einer Umgebung von K_p in $\mathcal{F}$ gibt es auf einer Umgebung von K_p holomorphe Funktionen $c_1, \ldots, c_q$, so daß in einer Umgebung von K_p die Darstellung

$$x = \sum_{j=1}^{q} c_j F_j$$

existiert.

Es ist für jedes $p \in N$

$$\| x \|_p := \inf_{x=\sum_j c_j F_j} \sum_{j=1}^{q} \sup_{K_p} | c_j | \tag{5.0.1}$$

eine Halbnorm und $(\Gamma(U, \mathcal{F}), (\| \quad \|_p)_p)$ ein Fréchetraum (siehe z.B. [8],Cor. 7.2.6).

Der Übergang zu einem anderen Erzeugendensystem liefert ein äquivalentes Halbnormensystem. Wir bezeichnen mit $H_U(\mathcal{F})$ den Raum $\Gamma(U, \mathcal{F})$ zusammen mit erzeugenden Schnitten $F_1, \ldots, F_q \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ und einer holomorph konvexen kompakten Ausschöpfung von U. Auf dem Fréchetraum $H_U(\mathcal{F})$ ist damit eine Fréchetraumgradierung festgelegt.

$H_U(\mathcal{O})$ fällt mit dem Fréchetraum der holomorphen Funktionen in U (mit dem durch Suprema auf der kompakten Ausschöpfung gebildeten Normensystem) zusammen, falls als Erzeugendensystem die konstante Funktion 1 gewählt wird. Im folgenden werden wir $H_U(\mathcal{O})$ stets in dieser Weise auffassen, falls nichts anderes vermerkt ist.

Sei nun $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}^r$ eine lokal endlich erzeugte Untergarbe, dann ist $\mathcal{F}$ kohärent nach dem Satz von Oka (siehe z.B. [8],Theorem 7.1.5). Sei ferner $F_1, \ldots, F_q$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$ in U und $(K_p)_p$ eine holomorph konvexe kompakte Ausschöpfung. Wir wollen nun die entsprechende Gradierung $(\| \quad \|_p)_p$ auf $H_U(\mathcal{F})$ mit den Suprema auf den K_p vergleichen. Für $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}^r)$ sei $[f]_j$ die j-te Komponente von f. $\Gamma(U, \mathcal{F})$ ist als Teilraum des Raumes der r-tupel holomorpher

Funktionen in U in der kompakt gleichmäßigen Topologie abgeschlossen (siehe [8], Theorem 7.2.12), also induzieren die Supremumsnormen

$$\mid x \mid_p := \sum_{j=1}^{r} \sup_{K_p} \mid [x]_j \mid , \quad x \in \Gamma(U, \mathcal{O}^r)$$

eine Fréchetraumgradierung auf $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Es gilt das folgende

Lemma 5.1. :
Für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt

1) $\mid x \mid_p \leq C_p \parallel x \parallel_p$ *und*

2) $\parallel x \parallel_p \leq C'_p \mid x \mid_{p+1}$

für jedes $x \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ mit unabhängigen Konstanten C_p und C'_p.

Beweis:

Sei $g \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, $g = \sum_{i=1}^{q} d_j F_j$, dann ist

$$\begin{aligned}
\mid g \mid_p &= \sum_{j=1}^{r} \sup_{K_p} \mid [g]_j \mid \\
&= \sum_{j=1}^{r} \sup_{K_p} \mid [\sum_{i=1}^{q} d_i F_i]_j \mid \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{q} \sup_{K_p} \mid d_j \mid \sup_{K_p} \mid [F_i]_j \mid \\
&\leq C_p \sum_{j=1}^{r} \sup_{K_p} \mid d_j \mid
\end{aligned}$$

Durch Übergang zum Infimum über alle Darstellungen $g = \sum_{i=1}^{q} d_i F_i$ erhält man $\mid g \mid_p \leq C_p \parallel g \parallel_p$.

Sei $p \in \mathbb{N}$ fest, dann wähle eine holomorph konvexe offene Menge U' und $K_{p+1} \supset U' \supset K_p$. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von U' mit holomorph konvexen kompakten Mengen mit $A_1 = K_p$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : H_{U'}(\mathcal{O}^q) &\rightarrow \Gamma(U', \mathcal{F}) \\ c_1, \ldots, c_q &\mapsto \sum_{j=1}^{q} c_j F_j \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

ist stetig linear zwischen Frécheträumen, surjektiv und offen (Theorem 7.2.12 [8]).

Da φ offen ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ und $C_{n,m}$, so daß zu jedem $g \in \Gamma(U', \mathcal{F})$ ein Element $c = (c_1, \ldots, c_q) \in H_{U'}(\mathcal{O}^q)$ existiert mit $g = \sum_{j=1}^q c_j F_j$ und

$$\sum_{j=1}^{q} \sup_{A_n} \mid c_j \mid \leq C_{n,m} \sum_{i=1}^{r} \sup_{A_m} \mid [g]_i \mid \ .$$

Hieraus folgt

$$\inf_{g=\sum\limits_{j=1}^{q} c_j F_j} \sum_{j=1}^{q} \sup_{K_p} \mid c_j \mid \leq C \sum_{i=1}^{r} \sup_{K_{p+1}} \mid [g]_j \mid,$$

für $g \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. Also gilt $\parallel g \parallel_p \leq C'_p \mid g \mid_{p+1}$ $\square$

Wir wollen für Abbildungen wie in (5.1.1) Urbildabschätzungen zeigen, falls der Bildraum die Gradierung (5.0.1) trägt:

Lemma 5.2. :
Sei U eine Steinsche Mannigfaltigkeit und sei $(K_p)_p$ eine Ausschöpfung von U mit holomorph konvexen kompakten Mengen. Seien ferner $F_1, \ldots, F_q \in \Gamma(U, \mathcal{O}^r)$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}^r$ die von $F_1, \ldots, F_q$ erzeugte Untergarbe. Dann ist

$$\varphi : H_U(\mathcal{O}^q) \rightarrow H_U(\mathcal{F}) \ , \ \ c_1, \ldots, c_q \mapsto \sum_{j=1}^{q} c_j F_j$$

eine stetige, lineare und surjektive Abbildung und es gilt für jedes $\theta > 1$: Zu jedem $f \in H_U(\mathcal{F})$ gibt es ein $g \in H_U(\mathcal{O}^q)$ mit $\varphi(g) = f$ und $\mid g \mid_p \leq \theta \parallel f \parallel_p$.

Beweis:

Nach Theorem 7.2.12 aus [8] ist φ, aufgefaßt als Abbildung in $\Gamma(U, \mathcal{F})$, linear, stetig und surjektiv, wobei $\Gamma(U, \mathcal{F})$ die kompakt gleichmäßige Topologie von $H_U(\mathcal{O}^q)$ trägt. Wegen Lemma 5.1 ist daher φ, aufgefaßt als Abbildung in $H_U(\mathcal{F})$ ebenfalls stetig.

Sei $\theta > 1$. Sei nun $f \in H_U(\mathcal{F})$ mit $\| f \|_p \leq 1$. Dann gibt es nach der Definition von $\| f \|_p$ in einer Umgebung von K_p holomorphe Funktionen $c = c_1, \ldots, c_q$, so daß dort $f = \sum_{j=1}^q c_j F_j$ gilt und $\sum_{j=1}^q \sup_{K_p} | c_j | < \sqrt{\theta} \| f \|_p \leq \sqrt{\theta}$.

Sei $\mathcal{R} := \mathcal{R}(F_1, \ldots, F_q)$ die Relationsgarbe von $F_1, \ldots, F_q$, d.h. $\Gamma(U, \mathcal{R})$ ist der Kern von φ. $\mathcal{R}$ ist nach dem Satz von Oka kohärent in U. Ist $d = d_1, \ldots, d_q \in H_U(\mathcal{O}^q)$ und $\sum_{j=1}^q d_j F_j = f$, dann ist $c - d$ ein Schnitt in die Relationsgarbe über einer Umgebung von K_p.

Wir können eine Folge $(h_n)_n$ in $\Gamma(U, \mathcal{R})$ finden, so daß $\| h_n - (c - d) \|_p \to 0$ für $n \to \infty$ (siehe [8], Theorem 7.2.7). Nach Lemma 5.1 folgt

$$\sum_{j=1}^q \sup_{K_p} | [h_n]_j - (c_j - d_j) | \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ können wir also $h = h_1, \ldots, h_q \in \Gamma(U, \mathcal{R})$ finden, so daß $\sum_{j=1}^q \sup_{K_p} | (h_j + d_j) - c_j | < \varepsilon$. Also gilt $h + d \in \Gamma(U, \mathcal{O}^q)$, $\varphi(h + d) = \sum_{j=1}^q (h_j + d_j) F_j = \sum_{j=1}^q d_j F_j = f$ und $\sum_{j=1}^q \sup_{K_p} | h_j + d_j | < \sqrt{\theta} + \varepsilon$. Mit $\varepsilon := \theta - \sqrt{\theta}$ folgt daher $| h + d |_p \leq \theta$. Hieraus folgt die Behauptung □

Sei $\mathcal{F}$ wieder allgemein eine kohärente analytische Garbe über Ω und $F_1, \ldots, F_q \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ erzeugende Schnitte von $\mathcal{F}$ über $U \subset \Omega$ offen, holomorph konvex und relativ kompakt. Es gilt das folgende

Lemma 5.3. :
Es gibt eine exakte Sequenz

$$\ldots H_U(\mathcal{O}^{r_3}) \xrightarrow{p_2} H_U(\mathcal{O}^{r_2}) \xrightarrow{p_1} H_U(\mathcal{O}^{r_1}) \xrightarrow{p_0} H_U(\mathcal{F}) \to 0$$

Ferner gilt für $i \geq 1$*: Es gibt ein* $C > 0$*, so daß* $B^i_{p+1} \cap Kern\, p_{i-1} \subset p_i(CB^{i+1}_p)$*, wobei* $B^i_p := \{f \in H_U(\mathcal{O}^{r_i}) : \| f \|_p \leq 1\}$*,* $i \geq 1$ *und* $B^0_p := \{f \in H_U(\mathcal{F}) : \| f \|_p \leq 1\}$*.*

Für $i = 0$ *gilt sogar* $B^0_p \subset p_0(\theta B^1_p)$ *für jedes* $\theta > 1$*.*

BEWEIS: 1) $p_0 : H_U(\mathcal{O}^q) \to H_U(\mathcal{F})$, $c_1, \ldots, c_q \mapsto \sum_{j=1}^q c_j F_j$ ist eine lineare, stetige und surjektive Abbildung nach Lemma 5.2. Setze also $r_1 = q$. Es folgt sofort $B^0_p \subset p_0(\theta B^1_p)$ für jedes $\theta > 1$.

2) Sei $\mathcal{R}$ die Relationsgarbe von $F_1, \ldots, F_q$. Es gibt Schnitte $G_1, \ldots, G_{r_2} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{R})$, die $\mathcal{R}$ über U erzeugen. Wie unter 1) ist $\widetilde{p}_1 : H_U(\mathcal{O}^{r_2}) \to H_U(\mathcal{R})$, $c_1, \ldots, c_{r_2} \mapsto \sum_{j=1}^{r_2} c_j G_j$ linear, stetig und surjektiv und es gilt $\{f \in H_U(\mathcal{R}) : \| f \|_p \leq 1\} \subset \widetilde{p}_1(\theta B^2_p)$ für $\theta > 1$.

Wenn wir mit p_1 die Abbildung $\widetilde{p}_1$, aufgefaßt als Abbildung in $H_U(\mathcal{O}^{r_1})$, bezeichnen, dann gibt es nach Lemma 5.1, jetzt angewandt auf $\mathcal{R}$, ein $C' > 0$, so daß

$$\{f \in H_U(\mathcal{O}^{r_1}) : p_0 f = 0 \text{ und } | f |_{p+1} \leq \frac{1}{C'}\} \subset \{f \in H_U(\mathcal{R}) : \| f \|_p \leq 1\} \subset \widetilde{p}_1(\theta B^2_p) = p_1(\theta B^2_p)$$

Mit $C := C' \cdot \theta$ folgt die Behauptung für $i = 1$, denn $B^1_{p+1} = C' \cdot \{f \in H_U(\mathcal{O}^{r_1}) : | f |_{p+1} \leq \frac{1}{C'}\}$.

Durch Iteration des zweiten Schrittes mit den jeweiligen Relationsgarben folgt die Behauptung für alle i $\Box$

Wir betrachten für $U \subset \Omega$ offen holomorph konvex den Raum $l_1(H_U(\mathcal{F})) := \{x = (x_j)_j \in H_U(\mathcal{F})^{\mathbb{N}}, \sum_{j=1}^{\infty} \| x_j \|_p < \infty \forall p \in \mathbb{N}\}$. Dies ist wiederum ein Fréchetraum mit dem Halbnormensystem

$$\| (x_j)_j \|_p := \sum_{j=1}^{\infty} \| x_j \|_p, \quad p \in \mathbb{N},$$

wobei $\| \cdot \|_p$ die p-te Halbnorm auf $H_U(\mathcal{F})$ ist bezüglich einer holomorph konvexen kompakten Ausschöpfung $(K_p)_p$ von U.

Wir wollen eine exakte Sequenz

$$\ldots l_1(H_U(\mathcal{O})) \xrightarrow{p_2^U} l_1(H_U(\mathcal{O})) \xrightarrow{p_1^U} l_1(H_U(\mathcal{O})) \xrightarrow{p_0^U} H_U(\mathcal{F}) \to 0$$

mit stetig linearen Abbildungen konstruieren. Hierbei soll für jedes $U' \subset U \subset\subset \Omega$ jeweils

$$p_i^{U'} |_{l_1(H_U(\mathcal{O}))} = p_i^U \text{ für } i \geq 0$$

gelten. Hierzu benötigen wir zunächst die folgende

Proposition 5.4. :
Sei $\mathcal{F}$ ein kohärente analytische Garbe auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit Ω, $(K_t)_{t \geq 0}$ eine holomorph konvexe kompakte Ausschöpfung von Ω. Sei (f_j) eine Folge in $\bigoplus_{l \in \mathbb{N}} H_\Omega(\mathcal{F})$.

Sei $p_U : l_1(H_U(\mathcal{O})) \to l_1(H_U(\mathcal{F}))$, $(\lambda_j)_j \mapsto \sum_j \lambda_j f_j$ für jedes $U \subset\subset \Omega$ offen, holomorph konvex, eine wohldefinierte stetige lineare Abbildung.

Es gebe Folgen natürlicher Zahlen $(a_t)_{t \geq 0}$, $(b_t)_{t \geq 0}$ mit

$$a_t \leq b_t \leq a_{t+1},\ t \geq 0 \text{ und } b_t < b_{t+1},\ t \geq 0,$$

so daß auf einer Umgebung einer Stufe K_s es Gleichungen

$$f_{b_t+i} = \sum_{j=1}^{b_t} c_{t,i,j} f_j$$

für alle $t \geq s$ und $b_t + i \leq a_{t+1}$ gibt mit Funktionen $c_{t,i,j}$, die auf einer Umgebung von K_s holomorph sind und

$$\sup_{\substack{t\geq s\\ 1\leq i\leq a_{t+1}-b_t}} \sum_{j=1}^{b_t} \sup_{K_s} \mid c_{t,i,j} \mid < 1 \tag{5.4.1}$$

erfüllen.

Ferner gelte für eine Folge $\lambda = (\lambda_j)_j \in Kern\, p_U$, $U \subset\subset K_s$, *r beliebig, daß aus* $\lambda_{b_r+i} = 0$ *für alle* $r \geq t \geq s$, $i = 1, \ldots, a_{r+1} - b_r$ *schon*

$$\lambda_j = 0 \qquad \text{für alle } j \geq a_t + 1 \text{ folgt.} \tag{5.4.2}$$

Sind die vorstehenden Voraussetzungen erfüllt, dann gibt es eine Folge $(g_j)_j \in l_1(H_\Omega(\mathcal{O}))$, *so daß für ein* $U \subset\subset \Omega$ *offen, holomorph konvex die Abbildung*

$$\begin{aligned} q_U : l_1(H_U(\mathcal{O})) &\rightarrow l_1(H_U(\mathcal{O})) \\ \lambda = (\lambda_j)_j &\mapsto \sum_j \lambda_j g_j \end{aligned}$$

stetig linear ist und Bild $q_U = Kern\, p_U$ *ist. Ferner gelten für* $(g_j)_j$ *die Eigenschaften (5.4.1) und (5.4.2) entsprechend.*

Beweis:

Für jedes offene holomorph konvexe $U \subset\subset \Omega$ sei eine holomorph konvexe kompakte Ausschöpfung $(A_p)_p$ fest gewählt. Wir bezeichnen mit $\|\ \|_p$, $p \in \mathbb{N}$ die p-te Halbnorm des Fréchetraumes $l_1(H_U(\mathcal{O}))$.

Sei $U \subset K_s$ offen holomorph konvex. Definiere für $t \geq s+1$ eine Abbildung $P_t^{t-1} : l_1(H_U(\mathcal{O})) \rightarrow l_1(H_U(\mathcal{O}))$, $\lambda := (\lambda_l)_l \mapsto \mu := (\mu_l)_l$ durch

$$\mu_l := \begin{cases} \lambda_l + \sum_{i=1}^{a_t-b_{t-1}} \lambda_{b_{t-1}+i} c_{t-1,i,l} & ;\ l \leq b_{t-1} \\ 0 & ;\ b_{t-1}+1 \leq l \leq a_t \\ \lambda_l & ;\ \text{sonst} \end{cases} .$$

Eigenschaften von P_t^{t-1}:

1) $P_t^{t-1}(\mathrm{Kern}\, p_U) \subset \mathrm{Kern}\, p_U$.

2) $P_t^{t-1} \circ P_t^{t-1} = P_t^{t-1}$.

3) P_t^{t-1} ist stetig mit $\| P_t^{t-1}\lambda \|_p \leq \| \lambda \|_p$, $p \in \mathbb{N}$.

ad 1): Sei $\lambda = (\lambda_l)_l \in \operatorname{Kern} p_U$, das heißt $\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l f_l = 0$. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{a_t} \lambda_l f_l &= \sum_{l=1}^{b_{t-1}} \lambda_l f_l + \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \lambda_{b_{t-1}+i} f_{b_{t-1}+i} \\
&= \sum_{l=1}^{b_{t-1}} \lambda_l f_l + \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \lambda_{b_{t-1}+i} \left(\sum_{l=1}^{b_{t-1}} c_{t-1,i,l} f_l \right) \\
&= \sum_{l=1}^{b_{t-1}} \left(\lambda_l + \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \lambda_{b_{t-1}+i} c_{t-1,i,l} \right) f_l \\
&= \sum_{l=1}^{b_{t-1}} \mu_l f_l
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\sum_{l=1}^{a_t} \lambda_l f_l = - \sum_{l=a_t+1}^{\infty} \lambda_l f_l = - \sum_{l=a_t+1}^{\infty} \mu_l f_l = - \sum_{l=b_{t-1}+1}^{\infty} \mu_l f_l,$$

also ist $P_t^{t-1}(\lambda) \in \operatorname{Kern} p_U$.

Die 2. Aussage ist klar.

ad 3):

$$\begin{aligned}
\| P_t^{t-1}(\lambda) \|_p &= \sum_{l=1}^{b_{t-1}} \sup_{A_p} | \lambda_l + \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \lambda_{b_{t-1}+i} c_{t-1,i,l} | + \sum_{l=a_t+1}^{\infty} \sup_{A_p} | \lambda_l | \\
&\leq \sum_{l=1}^{b_{t-1}} \sup_{A_p} | \lambda_l | + \sum_{l=b_{t-1}+1}^{a_t} \sup_{A_p} | \lambda_l | + \sum_{l=a_t+1}^{\infty} \sup_{A_p} | \lambda_l | \\
&= \| \lambda \|_p,
\end{aligned}$$

da $\sup_{A_p} | c_{t-1,i,l} | < 1$ für $t \geq s+1$, $i = 1, \ldots, a_t - b_{t-1}$, $l = 1, \ldots, b_{t-1}$.

Definiere $C_i^t \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$ für $i = 1, \ldots, a_{t+1} - b_t$, $t \geq s+1$, durch die Komponenten

$$\left[C_i^t\right]_l := \begin{cases} c_{t,i,l} & ;\ l = 1, \ldots, b_t \\ -1 & ;\ l = b_t + i \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung: Es gilt

$$\sum_{l=1}^{b_{t+1}} [C_i^t]_l f_l = 0$$

auf einer Umgebung von K_t, denn nach Voraussetzung gilt:

$$\sum_{l=1}^{b_{t+1}} [C_i^t]_l f_l = \sum_{l=1}^{b_t} c_{t,i,l} f_l + (-1) f_{b_t+i} = 0\,.$$

Soweit die Bemerkung.

Es gilt

$$\text{Kern}\, P_t^{t-1} = \left\{ \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \alpha_i C_i^{t-1}\ :\ \alpha_i \in H_U(\mathcal{O}) \right\},$$

denn ist $\alpha \in H_U(\mathcal{O})$, dann gilt für $i = 1, \ldots, a_t - b_{t-1}$

$$\begin{aligned} \left[P_t^{t-1}(\alpha C_i^{t-1})\right]_l &= \begin{cases} \alpha c_{t-1,i,l} + \alpha(-c_{t-1,i,l}) & ;\ l \leq b_{t-1} \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Sei andererseits $P_t^{t-1}\lambda = 0$, dann folgt $\lambda_l = 0$ für $l \geq a_t + 1$. Für $l \leq b_{t-1}$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_l &= -\sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \lambda_{b_{t-1}+i} c_{t-1,i,l} \\ &= \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} (-\lambda_{b_{t-1}+i})[C_i^{t-1}]_l\,, \end{aligned}$$

und da für $l = b_{t-1} + i$, $i = 1, \dots, a_t - b_{t-1}$

$$\lambda_{b_{t-1}+i} = (-\lambda_{b_{t-1}+i})[C_i^{t-1}]_l \text{ ist },$$

folgt

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{a_t}) = \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} (-\lambda_{b_{t-1}+i}) C_i^{t-1} .$$

Setze $Q^t_{t+n} := P_t^{t-1} \circ \dots \circ P_{t+n}^{t+n-1}$. Ist $\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$ fest, dann ist $(Q^t_{t+n}\lambda)_n$ Cauchyfolge in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$:

Sei dazu $x_n := Q^t_{t+n}\lambda$, dann ist für $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - x_n \|_p &= \| P_t^{t-1} \circ \dots \circ P_{t+n}^{t+n-1} \circ P_{t+n+1}^{t+n}\lambda - P_t^{t-1} \circ \dots \circ P_{t+n}^{t+n-1}\lambda \|_p \\
&\leq \| P_{t+n+1}^{t+n}\lambda - \lambda \|_p \\
&= \sum_{l=1}^{b_{t+n}} \sup_{K_p} | \lambda_l + \sum_{i=1}^{a_{t+n+1}-b_{t+n}} \lambda_{b_{t+n}+i} c_{t+n,i,l} - \lambda_l | + \sum_{b_{t+n}+1}^{a_{t+n+1}} \sup_{K_p} | \lambda_l | \\
&\leq \sum_{i=1}^{a_{t+n+1}-b_{t+n}} \sup_{K_p} | \lambda_{b_{t+n}+i} | \sum_{l=1}^{b_{t+n}} \sup_{K_p} | c_{t+n,i,l} | + \sum_{b_{t+n}+1}^{a_{t+n+1}} \sup_{K_p} | \lambda_l | \\
&< 2 \sum_{b_{t+n}+1}^{a_{t+n+1}} \sup_{K_p} | \lambda_l | \ .
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_{n+1} - x_n \|_p \leq 2 \| \lambda \|_p \ .$$

Wir setzen also $Q_t(\lambda) := \lim_n Q^t_{t+n}(\lambda)$ für $\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$. Dann ist Q_t eine lineare Abbildung $Q_t : l_1(H_U(\mathcal{O})) \to l_1(H_U(\mathcal{O}))$. Es sei

$$F_t := \{\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O})) : \ \lambda_l = 0 \text{ für } l \geq b_{t-1} + 1\}$$

Eigenschaften von Q_t:

1) Q_t ist stetig und $\| Q_t(\lambda) \|_p \leq \| \lambda \|_p$ für $\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$, $p \in \mathbb{N}$.

2) $Q_r(\lambda) = \lambda$ für $\lambda \in F_t$, $r \geq t$.

3) $Q_t(\lambda) \to \lambda$ für $t \to \infty$ in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$.

4) $Q_t(\operatorname{Kern} p_U) \subset \operatorname{Kern} p_U$.

5) $Q_t(\lambda) \in F_t$ für alle $\lambda \in \operatorname{Kern} p_U$.

ad 1) $\| Q_t\lambda \|_p = \lim_n \| Q^t_{t+n}(\lambda) \|_p \leq \| \lambda \|_p$.

ad 2) $P_t^{t-1}\lambda = \lambda$, falls $\lambda_l = 0$ für $l \geq b_{t-1} + 1$. Daher ist $Q^r_{r+n}\lambda = \lambda$, falls $\lambda \in F_t$, $r \geq t$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

ad 3) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein t, so daß sich λ für $r \geq t$ schreiben läßt als $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ mit $\lambda_1 \in F_r$ und $\| \lambda_2 \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.
Es folgt für jedes $r \geq t$

$$\begin{aligned} \| Q_r(\lambda) - \lambda \|_p &= \| Q_r(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda \|_p \\ &= \| \lambda_1 + Q_r(\lambda_2) - \lambda \|_p \\ &= \| Q_r(\lambda_2) - \lambda_2 \|_p \\ &\leq \| \lambda_2 \|_p + \| \lambda_2 \|_p \\ &< \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Bemerkung: Da $F := \{\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O})) : \lambda \in F_r \text{ für ein } r\}$ eine in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$ totale Menge ist, folgt 3) direkt aus dem Satz von Banach-Steinhaus [Köthe Bd 2, S.142].

ad 4) Ist $\lambda \in \operatorname{Kern} p_U$, dann ist $Q^t_{t+n}(\lambda) \in \operatorname{Kern} p_U$. Da $\operatorname{Kern} p_u$ in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$ abgeschlossen ist, folgt $Q_t(\lambda) \in \operatorname{Kern} p_U$.

ad 5) Sei $r \geq t$, $t + n > r$, $\mu^n := Q^t_{t+n}\lambda$, $\lambda \in \operatorname{Kern} p_U$. Setze

$$\mu' := P^r_{r+1}(P^{r+1}_{r+2} \circ \ldots \circ P^{t+n-1}_{t+n}\lambda)\,,$$

dann ist $[\mu']_{b_r+i} = 0$ für $i = 1, \ldots, a_{r+1} - b_r$. Andererseits ist $\mu^n = P_t^{t-1} \circ \ldots \circ P_r^{r-1}\mu'$ und damit $\mu^n_l = \mu'_l$ für $l \geq a_r + 1$, also folgt $\mu^n_{b_r+i} = 0$ für $i = 1, \ldots, a_{r+1} - b_r$.
Sei $\mu := Q_t(\lambda) = \lim_n Q^t_{t+n}(\lambda) = \lim_n \mu^n$, dann gilt $\mu^n_l \to \mu_l$ für $n \to \infty$ in $H_U(\mathcal{O})$, also ist $\mu_{b_r+i} = 0$ für $r \geq t$, $i = 1, \ldots, a_{r+1} - b_r$. Nach Voraussetzung (5.4.2) gilt dann aber bereits $\mu_l = 0$ für $l \geq a_t + 1$, daher ist $\mu \in F_t$.

Wir behalten die Situation $U \subset\subset K_s$ bei und setzen für $\lambda \in \operatorname{Kern} p_U$

$$x_t := \begin{cases} Q_s(\lambda) & ;\ t = s-1 \\ Q_{t+1}(\lambda) - Q_t(\lambda) & ;\ t \geq s \end{cases} .$$

Es gilt $\sum\limits_{t=s-1}^{\infty} x_t = \lambda$ da $Q_t(\lambda) \to \lambda$ für $t \to \infty$ in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$.

Für $t \geq s$ gilt

$$\begin{aligned} P_t^{t-1} x_t &= P_t^{t-1}(\lim_n Q_{t+n}^{t+1}(\lambda) - \lim_n Q_{t+n}^{t}(\lambda)) \\ &= \lim_n (P_t^{t-1} \circ Q_{t+n}^{t+1}(\lambda) - P_t^{t-1} \circ Q_{t+n}^{t}(\lambda)) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Also ist $x_t \in \operatorname{Kern} P_t^{t-1} = \{\sum\limits_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \alpha_i C_i^{t-1}\ ,\ \ \alpha_i \in H_U(\mathcal{O})\}$.

Es gibt also $\alpha_{i,t} \in H_U(\mathcal{O})$, $i = 1, \ldots, a_{t+1} - b_t$, so daß

$$x_t = \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \alpha_{i,t} C_i^{t-1}\,.$$

Daher ist $\lambda - Q_s(\lambda) = \sum\limits_{t=s}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \alpha_{i,t} C_i^{t-1}$.

Zeige nun, daß $\sum\limits_{t=s}^{\infty} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{K_p} \mid \alpha_{i,t} \mid < \infty$ für $p \in \mathbb{N}$ ist, und damit $(\alpha_{i,t})_{i,t \geq s} \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$ gilt:

Es gibt $D_p \in \mathbb{R}^+$, so daß $\| \sum\limits_{t=s}^{n} x_t \|_p < D_p$ gleichmäßig in n ist. Sei also $n \geq s$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} D_p &> \| \sum_{t=s}^{n} x_t \|_p \\ &= \| \sum_{t=s}^{n} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} C_i^t \|_p \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sup_{K_p} | \sum_{t=s}^{n} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} d_{t,i,l} \mid \ \text{ mit} \end{aligned}$$

$$d_{t,i,l} := [C_i^t]_l = \begin{cases} c_{t,i,l} & ; \ l = 1, \ldots b_t \\ -1 & ; \ l = b_t + i \\ 0 & ; \ \text{sonst} \end{cases} .$$

Setze

$$\beta_l := \begin{cases} \alpha_{i,t} & ; \ l = b_t + i\,, \ \ 1 \leq i \leq a_{t+1} - b_t\,, \ \ s \leq t \leq n \\ 0 & ; \ \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann ist

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sup_{K_p} \mid \beta_l \mid = \sum_{t=s}^{\infty} \left(\sum_{l=b_t+1}^{a_{t+1}} \sup_{K_p} \mid \beta_l \mid + \sum_{l=a_{t+1}+1}^{b_{t+1}} \sup_{K_p} \mid \beta_l \mid \right) = \sum_{t=s}^{n} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{K_p} \mid \alpha_{i,t} \mid \ .$$

Also ist

$$\begin{aligned} D_p &> \sum_{l=1}^{\infty} \sup_{K_p} \mid \sum_{t=s}^{n} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} d_{t,i,l} \mid \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sup_{K_p} \mid \beta_l - \sum_{t=s}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ b_t+i \neq l}}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} d_{t,i,l} \mid \\ &\geq \sum_{l=1}^{\infty} \sup_{K_p} \mid \beta_l \mid - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{t=s}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ b_t+i \neq l}}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{K_p} \mid \alpha_{i,t} \mid \sup_{K_p} \mid d_{t,i,l} \mid \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sup_{K_p} \mid \beta_l \mid - \sum_{t=s}^{n} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{K_p} \mid \alpha_{i,t} \mid \sum_{l=1}^{b_t} \sup_{K_p} \mid c_{t,i,l} \mid \\ &\geq \sum_{t=s}^{n} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{K_p} \mid \alpha_{i,t} \mid - \varrho \sum_{t=s}^{n} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{K_p} \mid \alpha_{i,t} \mid \ \ \text{mit } \varrho < 1 \text{ geeignet} \\ &= (1-\varrho) \sum_{t=s}^{n} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{K_p} \mid \alpha_{i,t} \mid \ . \end{aligned}$$

Oben wurde gezeigt, daß $Q_s(\lambda) \in F_s$, da $\lambda \in$ Kern p_U. Das bedeutet, daß $\sum_{l=1}^{b_s} [Q_s(\lambda)]_l \cdot f_l = 0$.

Da $f_j \in \bigoplus_{l\in\mathbb{N}} H_\Omega(\mathcal{F})$ ist für $j = 1, 2, \ldots$, gibt es ein N_s, so daß $(f_1)_z, \ldots, (f_{b_s})_z$ einen Untermodul $(\mathcal{F}_s)_z$ von $\mathcal{F}_z^{N_s}$ erzeugen für $z \in \Omega$. Es ist $\bigcup\limits_{z\in\Omega} (\mathcal{F}_s)_z =: \mathcal{F}_s$ eine kohärente analytische Garbe ([11],Chap IV, Sec. B, Proposition 12). $\mathcal{F}_s$ wird also von $f_1, \ldots, f_{b_s}$ in Ω global erzeugt ([8], Theorem 7.2.9).

Ist $\mathcal{R}_s := \mathcal{R}(f_1, \ldots, f_{b_s})$ die Relationsgarbe von $f_1, \ldots, f_{b_s}$, dann gibt es zu jedem offenen $\omega \subset\subset \Omega$ endlich viele globale Schnitte, die $\mathcal{R}_s$ in ω erzeugen ([Grauert Fritzsche]).

Wir konstruieren eine Folge $(\overline{g}_j)_j$ in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$ wie folgt:

$\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_{m_0}$ seien die in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$ kanonisch eingebetteten globalen Schnitte, die $\mathcal{R}_0$ in $\overset{\circ}{K}_0$ erzeugen. $\overline{g}_{m_{s-1}+1}, \ldots, \overline{g}_{m_s}$ seien die in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$ kanonisch eingebetteten globalen Schnitte, die $\mathcal{R}_s$ in $\overset{\circ}{K}_s$ erzeugen für $s \geq 1$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß m_t streng monoton in t wächst.

Für jedes $\lambda \in \operatorname{Kern} p_U$ liegt $Q_s(\lambda)$ in dem Kern der Abbildung

$$\pi : H_U(\mathcal{O}^{b_s}) \to H_U(\mathcal{F}_s)\,,\;\; c_1, \ldots, c_{b_s} \mapsto \sum_j c_j f_j\,.$$

Nach Lemma 5.3 ist

$$H_U(\mathcal{O}^{m_s}) \to \operatorname{Kern} \pi\,,\;\; c_1, \ldots, c_{m_s} \mapsto \sum_j c_j \overline{g}_j$$

eine stetige lineare surjektive Abbildung.

Insgesamt folgt:

Ist $U \subset K_s$ offen holomorph konvex, dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{q}_U : H_U(\mathcal{O}^{m_s}) \times l_1(H_U(\mathcal{O})) & \to & l_1(H_U(\mathcal{O})) \\ \big((\beta_1, \ldots, \beta_{m_s}), (\alpha_{i,t})_{t\geq s\,,\;1\leq i\leq a_t - b_{t-1}}\big) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{m_s} \beta_j \overline{g}_j + \sum_{t\geq s} \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \alpha_{i,t} C_i^t \end{array}$$

stetig linear mit $\operatorname{Bild} \widetilde{q}_U = \operatorname{Kern} p_U$.

Bemerkung: Ist $\lambda \in \operatorname{Kern} p_U \cap F_r$ für ein $r \geq s$, dann gilt $Q_{t+1}(\lambda) = Q_t(\lambda) = \lambda$ für $t \geq r$. Daher gilt

$$\lambda = \sum_{t=s-1}^{\infty} x_t \quad = \quad \sum_{t=s-1}^{r-1} x_t = \sum_{j=1}^{m_s} \beta_j \overline{g}_j + \sum_{t=s}^{r-1} \sum_{i=1}^{a_t - b_{t-1}} \alpha_{i,t} C_i^{t-1}\,. \tag{5.4.3}$$

Die erzeugenden Schnitte C_i^t aus der Abbildung $\widetilde{q}_U$ haben den Nachteil, daß sie lediglich jeweils auf einer Umgebung von K_s definiert sind für $t \geq s$.

Wir zeigen im nächsten Schritt, daß es globale Schnitte G_i^t, $i = 1, \ldots, a_{t+1} - b_t$, $t \geq 0$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{q}}_U : H_U(\mathcal{O}^{m_s}) \times l_1(H_U(\mathcal{O})) &\rightarrow l_1(H_U(\mathcal{O})) \\ \left((\beta_1, \ldots, \beta_{m_s}), (\alpha_{i,t})_{t \geq s\,,\ 1 \leq i \leq a_{t+1} - b_t}\right) &\mapsto \sum_{j=1}^{m_s} \beta_j \overline{g}_j + \sum_{t \geq s} \sum_{i=1}^{a_{t+1} - b_t} \alpha_{i,t} G_i^t \end{aligned}$$

stetig linear ist mit Bild$\widetilde{\widetilde{q}}_U = \text{Kern}\, p_U$ für $U \subset\subset K_s$ offen, holomorph konvex.

Hierzu benötigen wir die folgenden zwei Lemmata:

Lemma 5.5. :
Sei E ein Fréchetraum mit einem Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen $(\|\ \|_p)_p$ und $\Phi : E \to E$ stetig linear. Ferner gelte für die Identität Id auf E, daß $\| (Id - \Phi)(x) \|_p \leq \theta_p \| x \|_p$ mit $\theta_p < 1$ für jedes $p \in \mathbb{N}$.

Dann ist Φ invertierbar in L(E) und es gilt

$$\| \Phi^{-1} x \|_p \leq \frac{1}{1 - \theta_p} \| x \|_p$$

Beweis:

Es sei

$$\Psi_n := \sum_{k=0}^{n} (Id - \Phi)^k \text{ mit } (Id - \Phi)^0 := Id$$

Dann gilt für $m \geq n$ und für alle $p \in \mathbb{N}$ und $x \in E$

$$\| \Psi_m(x) - \Psi_n(x) \|_p = \| \sum_{k=n+1}^{m} (Id - \Phi)^k(x) \|_p \leq \sum_{k=n+1}^{m} \theta_p^k \| x \|_p$$

Hieraus folgt insbesondere $\| \Psi_m(x) \|_p \leq \frac{1}{1-\theta_p} \| x \|_p$.

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (siehe z.B. [13], S39, Nr. 5) gibt es ein $\Psi \in \mathrm{L}(E)$ mit $\Psi_n \to \Psi$ punktweise. Es folgt daher wie beim von Neumannschen Lemma für jedes $x \in E$

$$\Psi \circ \Phi(x) = \lim_n \Psi_n \circ \Phi(x) = x$$

Genauso folgert man wegen der Stetigkeit von Φ, daß $\Phi \circ \Psi(x) = x$.

Wir setzen also $\Phi^{-1} := \Psi$. Für $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\| \Phi^{-1} \|_p = \lim_n \| \Psi_n(x) \|_p \leq \frac{1}{1-\theta_p} \| x \|_p \quad \square$$

Lemma 5.6. :
Sei $(E, (\| \ \|_p)_p)$ eine Fréchetalgebra mit Eins und $A = (a_{i,j})_{i,j}$ eine unendliche Matrix mit Einträgen aus E, so daß A eine Abbildung aus $L(l_1(E))$ repräsentiert. Ferner gebe es eine aufsteigende Folge positiver ganzer Zahlen $(n_m)_m \in \mathbb{N}_0$ mit $n_0 = 0$, so daß

$$a_{i,j} = 0 \text{ für } i > n_{m(j)} \ , \quad \text{falls } n_{m(j)-1} < j \leq n_{m(j)}$$

Ferner gelte für die Einheitsmatrix I bestehend aus dem Einselement der Algebra auf der Diagonalen, daß für jedes $v \in l_1(E)$

$$\| (I-A)(v) \|_p \leq \theta_p \| v \|_p \ \text{ mit } \theta_p < 1 \text{ für jedes } p \in \mathbb{N}$$

Dann ist A invertierbar auf $l_1(E)$ und für $A^{-1} = (b_{i,j})_{i,j}$ gilt

$$b_{i,j} = 0 \text{ für } i > n_{m(j)} \ , \quad \text{falls } n_{m(j)-1} < j \leq n_{m(j)}$$

Beweis:

Sei $c^k_{i,j}$ das i,j-te Element von $(I-A)^k$, dann zeigt man wie folgt induktiv über k, daß

$$c^k_{i,j} = 0 \text{ für } i > n_{m(j)} \ , \quad \text{falls } n_{m(j)-1} < j \leq n_{m(j)}$$

Der Induktionsanfang $k = 1$ ist nach der Voraussetzung an A klar. Für den Induktionsschritt $k \to k+1$ sei zu festem j ein Index $m(j)$ so gewählt, daß $n_{m(j)-1} < j \leq n_{m(j)}$ ist. Für ein festes i gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so daß $n_{l-1} < i \leq n_l$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{k+1} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{i,\nu}^{k} c_{\nu,j}^{1} \\ &= \sum_{\nu=n_{l-1}+1}^{n_{m(j)}} c_{i,\nu}^{k} c_{\nu,j}^{1} \end{aligned}$$

Damit ist $c_{i,j}^{k+1} = 0$, falls $l - 1 \geq m(j)$, was der Fall ist, wenn $i > n_{m(j)}$.

Ist $b_{i,j}^{n}$ das i, j-te Element von $A_n := \sum_{k=0}^{n}(I - A)^k$, dann folgt

$$b_{i,j}^{n} = 0 \text{ für } i > n_{m(j)} \ , \quad \text{falls } n_{m(j)-1} < j \leq n_{m(j)}$$

Sei e_j der j-te Einheitsvektor in $l_1(E)$. Dann ist das i-te Element des Vektors $A_n e_j$ gerade $b_{i,j}^{n}$. Da $(A_n e_j)_n$ eine Cauchyfolge in $l_1(E)$ ist, die gegen $A^{-1}e_j$ konvergiert, verschwindet für $i > n_{m(j)}$ auch das i-te Element des Vektors $A^{-1}e_j = b_{i,j}$ $\square$

Wir kommen zurück zum Beweis der Proposition 5.4:

Bemerkung: Ist $d \in \Gamma(\omega, \chi)$ ein Schnitt auf einer Umgebung ω von K_s in eine kohärente analytische Garbe χ, dann gibt es eine Folge $(d_j)_j \subset \Gamma(\Omega, \chi)$, so daß $\| d - d_j \|_{K_s} \to 0$, wenn $j \to \infty$, da K_s holomorph konvex ist ([8], Theorem 7.2.7).

Ist $(D_k^t)_{k=1}^{k_t}$ für $t \in \mathbb{N}_0$ eine Folge von Schnitten in χ, so daß $D_1^t, \ldots, D_{k_t}^t$ jeweils χ um K_t erzeugt, und ist für eine offene Umgebung $\widetilde{\omega}$ von K_t

$$\| x \|_{K_t} := \inf_{x=\sum_{k=1}^{k_t} h_k D_k^t} \sum_{k=1}^{k_t} \sup_{K_t} | h_k | \quad \text{für } x \in \Gamma(\widetilde{\omega}, \chi) \ ,$$

dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein J, so daß $\| d - d_j \|_{K_t} < \varepsilon$ für $j \geq J$, $0 \leq t \leq s$. Soweit die Bemerkung.

Sei $\varrho < 1$ fest. C_i^t ist ein Schnitt in $\mathcal{R}_{t+1}$ auf einer Umgebung von K_t. Wenden wir (5.4.3) auf $U = \overset{\circ}{K}_\tau$, $\tau \leq t$ an, so wird $\mathcal{R}_{t+1}$ in $\overset{\circ}{K}_\tau$ durch

$$M_\tau := \{\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_{m_\tau}, (C_i^l)_{l=\tau,\ldots,t, i=1,\ldots,a_{l+1}-b_l}\}$$

erzeugt. Nach Theorem 7.2.9 in [8], einer unmittelbaren Folgerung aus Theorem A von Cartan, wird $\mathcal{R}_{t+1}$ auch in pseudokonvexen Umgebungen von $K_{\tau-1}$, die in $\overset{\circ}{K}_\tau$ liegen, durch M_τ erzeugt. Sei für einen Schnitt x in $\mathcal{R}_{t+1}$ um K_τ

$$\| x \|_{s,\tau} := \inf\{ \sum_{j=1}^{m_{s+1}} \sup_{K_s} | \beta_j | + \sum_{l=s+1}^{t} \sum_{i=1}^{a_{l+1}-b_l} \sup_{K_s} | \alpha_{i,l} | : \ x = \sum_{j=1}^{m_{s+1}} \beta_j \overline{g}_j + \sum_{l=s+1}^{t} \sum_{i=1}^{a_{l+1}-b_l} \alpha_{i,l} C_i^l \} \ .$$

Dann gibt es entsprechend der obigen Bemerkung jeweils ein $G_i^t \in \Gamma(\Omega, \mathcal{R}_{t+1})$, so daß

$$\| C_i^t - G_i^t \|_s < \frac{\varrho}{2} \quad \text{für } 0 \leq s \leq t-1\,, \;\; i = 1, \ldots, a_{t+1} - b_t \tag{5.6.1}$$

Auf diese Weise konstruieren wir für jedes $t \geq 0$ jeweils G_i^t für $i = 1, \ldots, a_{t+1} - b_t$.

Ist s fest, dann gibt es somit für jedes $\tau \geq s$ jeweils um K_{s-1} eine Darstellung

$$G_j^\tau - C_j^\tau = \sum_{l=1}^{m_s} \beta_l^{\tau,j} \overline{g}_l + \sum_{t=s}^{\tau} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{t,i}^{\tau,j} C_i^t$$

mit

$$\sum_{l=1}^{m_s} \sup_{K_{s-1}} | \beta_l^{\tau,j} | + \sum_{t=s}^{\tau} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{K_{s-1}} | \alpha_{t,i}^{\tau,j} | < \varrho$$

Sei eine Abbildung $H : l_1(H_U(\mathcal{O}))^2 \to l_1(H_U(\mathcal{O}))^2$ durch $H(\mu^1, \mu^2) := (H_1(\mu^1, \mu^2), H_2(\mu^1, \mu^2))$ definiert, wobei wir

$$\Big[H_1(\mu^1, \mu^2)\Big]_l := \begin{cases} \mu_l^1 + \sum_{\tau=s}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \mu_{b_\tau+j}^2 \beta_l^{\tau,j} & ;\ l = 1, \ldots, m_s \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases}$$

setzen und $H_2(\mu^1, \mu^2) = A\mu^2$ mit einer Matrix $A = (a_{l,n})_{l,n}$. Hierbei seien die Matrixeinträge wie folgt definiert:

$$a_{l,n} := \begin{cases} \alpha_{t,i}^{\tau,j} & ;\ l = b_t + i\,,\ \ s \leq t \leq \tau\,,\ \ i = 1, \ldots, a_{t+1} - b_t\,,\ \ l \neq b_\tau + j\,,\ \ n = b_\tau + j \\ 1 + \alpha_{t,i}^{\tau,j} & ;\ l = n = b_\tau + j\,,\ \ t = \tau\,,\ \ i = j \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases} .$$

H hängt natürlich von s ab. Wir schreiben aus Vereinfachungsgründen H statt H_s.

Wir zeigen

1) $\| H_1(\mu^1, \mu^2) \|_p \leq \| \mu^1 \|_p + \| \mu^2 \|_p$ für alle $p \in \mathbb{N}$.

2) A ist eine Abbildung in $\mathrm{L}(l_1(H_U(\mathcal{O})))$. Es gilt $\| A\lambda \|_p \leq 2 \| \lambda \|_p$ für alle $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$. A ist eingeschränkt als Abbildung auf

$$N_s := \{\mu \in l_1(H_U(\mathcal{O})) :\ \mu_1 = \ldots \mu_{b_s} = 0\,,\ \ \mu_{a_\tau+j} = 0\,,\ \ \tau \geq 0\,,\ \ j = 1, \ldots, b_\tau - a_\tau\}$$

in sich invertierbar.

3) H ist eine stetige lineare Abbildung und $\| H(\mu^1,\mu^2) \|_p \leq 3(\| \mu^1 \|_p + \| \mu^2 \|_p)$ für $p \in \mathbb{N}$.

ad 1)

$$\begin{aligned}
\| H_1(\mu^1,\mu^2) \|_p &= \sum_{l=1}^{m_s} \sup_{A_p} | \mu_l^1 + \sum_{\tau \geq s} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \mu^2_{b_\tau+j} \beta_l^{\tau,j} | \\
&\leq \sum_{l=1}^{m_s} \sup_{A_p} | \mu_l^1 | + \sum_{\tau \geq s} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \sup_{A_p} | \mu^2_{b_\tau+j} | \sum_{l=1}^{m_s} \sup_{K_{s-1}} | \beta_l^{\tau,j} | \\
&\leq \| \mu^1 \|_p + \| \mu^2 \|_p \ .
\end{aligned}$$

ad 2) Es ist $A\mu \in N_s$ für $\mu \in N_s$. Für $\lambda \in N_s$ gilt

$$\begin{aligned}
\| (Id_{N_s} - A)\lambda \|_p &= \sum_{t=s}^{\infty} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{A_p} | \sum_{\tau=t}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j\ ,\ falls \\ t=\tau}}^{a_{\tau+1}-b_\tau} -\alpha_{t,i}^{\tau,j} \lambda_{b_\tau+j} \right) + (1-(1-\alpha_{t,i}^{t,i}))\lambda_{b_t+i} | \\
&\leq \sum_{t=s}^{\infty} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \sup_{A_p} | \alpha_{t,i}^{\tau,j} || \lambda_{b_\tau+j} | \\
&= \sum_{\tau=s}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \left(\sum_{t=s}^{\tau} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{A_p} | \alpha_{t,i}^{\tau,j} | \right) \sup_{A_p} | \lambda_{b_\tau+j} | \\
&< \varrho \cdot \| \lambda \|_p
\end{aligned}$$

Hieraus folgt einerseits $\| A\lambda \|_p = \| Id_{N_s}\lambda - (Id_{N_s} - A)\lambda \|_p \leq \| \lambda \|_p + \varrho \| \lambda \|_p \leq 2 \| \lambda \|_p$. Andererseits folgt aus Lemma 5.6, daß $A |_{N_s}$ invertierbar ist.

Wir bezeichnen mit A^{-1} die kanonische Fortsetzung von $(A |_{N_s})^{-1}$ auf $l_1(H_U(\mathcal{O}))$. Für A^{-1} gilt $\| A^{-1}\lambda \|_p \leq \frac{1}{1-\varrho} \| \lambda \|_p$ für jedes $p \in \mathbb{N}$ und jedes $\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$.

ad 3) 3) folgt direkt aus 1) und 2).

Wenn wir den Definitionsraum von $\widetilde{q}_U$ und $\widetilde{\widetilde{q}}_U$ jeweils kanonisch in $(l_1(H_U(\mathcal{O})))^2$ einbetten, dann gilt $\widetilde{q}_U(H(\mu^1,\mu^2)) = \widetilde{\widetilde{q}}_U(\mu^1,\mu^2)$.

Berechne für $\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$ mit $\lambda_{\tau,j} := [\lambda]_{b_\tau+j}$, $\tau \geq s$, $j = 1,\ldots,a_{\tau+1} - b_\tau$:

$$[A\lambda]_l = \begin{cases} \sum\limits_{\tau>t} \sum\limits_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} a_{l,b_\tau+j}\lambda_{\tau,j} & ;\ l = b_t+i\,,\ \ t\geq s\,,\ \ i=1,\dots,a_{t+1}-b_t \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{\tau>t} \sum\limits_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \alpha_{t,i}^{\tau,j}\lambda_{\tau,j} & \\ + \sum\limits_{j=1,i\neq j}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{t,i}^{t,j}\lambda_{t,i} + (1+\alpha_{t,i}^{t,i})\lambda_{t,i} & ;\ l = b_t+i\,,\ \ t\geq s\,,\ \ i=1,\dots,a_{t+1}-b_t \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\sum\limits_{\tau\geq t} \sum\limits_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \alpha_{t,i}^{\tau,j}\lambda_{\tau,j}\right) + \lambda_{t,i} & ;\ l = b_t+i\,,\ \ t\geq s\,,\ \ i=1,\dots,a_{t+1}-b_t \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases}$$

Daher ist mit $\mu^2_{\tau,j} := [\mu^2]_{b_\tau+j}$

$$\begin{aligned} \widetilde{q}_U(H(\mu^1,\mu^2)) &= \sum_{l=1}^{m_s}[H_1(\mu^1,\mu^2)]_l\overline{g}_l + \sum_{t\geq s}\sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t}[A\mu^2]_{l=b_t+i}C_i^t \\ &= \sum_{l=1}^{m_s}(\mu_l^1 + \sum_{\tau\geq s}\sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau}\mu^2_{\tau,j}\beta_l^{\tau,j})\overline{g}_l + \sum_{t\geq s}\sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t}\ (\sum_{\tau\geq t}\sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau}\alpha_{t,i}^{\tau,j}\mu^2_{\tau,j} + \mu^2_{t,i})C_i^t \\ &= \sum_{l=1}^{m_s}\mu_l^1\overline{g}_l + \sum_{\tau\geq s}\sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau}\mu^2_{\tau,j}\sum_{l=1}^{m_s}\beta_l^{\tau,j}\overline{g}_l + \sum_{\tau\geq s}\sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau}\mu^2_{\tau,j}\sum_{t=s}^{\tau}\sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t}\alpha_{t,i}^{\tau,j}C_i^t + \sum_{\tau\geq s}\sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau}\mu^2_{\tau,j}C_j^\tau \\ &= \sum_{l=1}^{m_s}\mu_l^1\overline{g}_l + \sum_{\tau\geq s}\sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau}\mu^2_{\tau,j}G_j^\tau \\ &= \widetilde{\widetilde{q}}_U(\mu^1,\mu^2) \end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{\widetilde{q}}_U : H_U(\mathcal{O}^{m_s}) \times l_1(H_U(\mathcal{O})) \to l_1(H_U(\mathcal{O}))$ stetig linear. Bleibt zu zeigen, daß $\text{Bild}\,\widetilde{\widetilde{q}}_U = \text{Kern}\, p_U$:

Sei $x \in \text{Kern}\, p_U = \text{Bild}\,\widetilde{q}_U$. Finde also $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_{m_s})$, $\xi = (\xi_j)_j \in l_1(H_U(\mathcal{O}))$, so daß

$$x = \widetilde{q}_U(\eta,\xi) = \sum_{l=1}^{m_s}\eta_l\overline{g}_l + \sum_{t\geq s}\sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau}\xi_{b_t+i}C_i^t$$

Ohne Einschränkung ist also $\xi_j = 0$ für $j \leq b_s$ und $j = a_t + i$, $t \geq s$, $i = 1, \ldots, a_{t+1} - b_t$, d.h. $\xi \in N_s$.

Setze $\lambda := A^{-1}(\xi)$ und

$$\beta_l := \eta_l - \sum_{\tau=s}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \lambda_{b_\tau+j} \beta_l^{\tau,j} \ , \ \ l = 1, \ldots, m_s \ , \ \ \beta := (\beta_1, \ldots, \beta_{m_s})$$

Dann ist $H_1(\beta, \lambda) = \eta$ und $H_2(\beta, \lambda) = A\lambda = \xi$. Also ist

$$\tilde{\tilde{q}}_U(\beta, \lambda) = \tilde{q}_U(H(\beta, \lambda)) = \tilde{q}_U(\eta, \xi) = x \, .$$

Ist umgekehrt $x \in \operatorname{Bild} \tilde{\tilde{q}}_U$, dann ist $x \in \operatorname{Bild} \tilde{q}_U = \operatorname{Kern} p_U$.

Im nächsten Schritt konstruieren wir aus den Folgen $(\overline{g}_j)_j$ und $(G_i^t)_{i,t}$ eine Folge $(g_l)_l$ aus $\bigoplus_{l \in \mathbb{N}} H_\Omega(\mathcal{O})$, die $\operatorname{Kern} p_U$ in der gewünschten Weise erzeugt und die Eigenschaften (5.4.1) und (5.4.2) erfüllt.

Wir setzen unter Verwendung der obigen Indexfolge $(m_t)_{t \geq 0}$

$$\begin{array}{lll} g_{m_t+n_{t+1}+i} & := \overline{g}_{m_t+i} \, , & i = 1, \ldots, m_{t+1} - m_t \ \ , \ t \geq -1 \\ g_{m_{t+1}+n_{t+1}+i} & := G_i^{t+1} & , \ i = 1, \ldots, n_{t+2} - n_{t+1} \, , \ t \geq -1 \, , \end{array}$$

wobei $m_{-1} := 0$ und $n_t := \sum_{\tau=1}^t a_\tau - b_{\tau-1}$ für $t \geq 1$, sowie $n_0 := 0$.

Für jedes $l \in \mathbb{N}$ ist damit g_l wohldefiniert, denn, da m_t strikt monoton wachsend ist, gibt es zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $t \geq -1$, so daß $m_t + n_{t+1} < l \leq m_{t+1} + n_{t+2}$. Ist also im einen Fall $m_t + n_{t+1} < l \leq m_{t+1} + n_{t+1}$, dann setze $i := l - (m_t + n_{t+1})$. Ist im anderen Fall $m_{t+1} + n_{t+1} < l \leq m_{t+1} + n_{t+2}$, dann setze $i := l - (m_{t+1} + n_{t+1})$.

Wir wollen Eigenschaft (5.4.1) zeigen. Sei dazu $l \in \mathbb{N}$ und es gelte $m_t + n_{t+1} < l \leq m_{t+1} + n_{t+1}$ für ein $t \geq s \geq -1$, dann gilt das folgende

Lemma 5.7. :
Es gibt für $U \subset K_{s-1}$ Funktionen $(\mu_k)_k$ aus $H_U(\mathcal{O})$, so daß

$$g_l = \sum_{k=1}^{m_t+n_{t+1}} \mu_k g_k$$

Beweis: Es ist $g_l = \overline{g}_{m_t+i}$ für ein $i \in \{1, \ldots, m_{t+1} - m_t\}$ Also ist $g_l \in \Gamma(\Omega, \mathcal{R}_{t+1})$. Ist $F_t := \{\lambda \in l_1(H_U(\mathcal{O})) \, : \, \lambda_k = 0 \text{ für } k \geq b_{t-1} + 1\}$, dann gilt natürlich auch $g_l \in \operatorname{Kern} p_U \cap F_{t+2}$. Für Elemente aus $\operatorname{Kern} p_U \cap F_{t+2}$ wurde gezeigt, daß die folgende Darstellung auf U existiert:

$$g_l = \sum_{k=1}^{m_{s-1}} \tilde{\beta}_k \overline{g}_k + \sum_{\tau=s-1}^{t+1} \sum_{j=1}^{a_\tau - b_{\tau-1}} \alpha_{j,\tau} C_j^{\tau-1}$$

Sei $\alpha = (\alpha_l)_l$ eine Folge mit $\alpha_{b_{\tau-1}+j} = \alpha_{j,\tau}$ für $\tau = s-1, \ldots, t+1$, $j = 1, \ldots, \alpha_\tau - b_{\tau-1}$ und $\alpha_l = 0$ sonst, dann ist $\alpha \in N_{s-1}$. Setze nun $\lambda := A^{-1}\alpha$ und

$$\beta_k := \widetilde{\beta}_k - \sum_{\tau=s-1}^{t+1} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \lambda_{b_\tau+j}\beta_l^{\tau,j}\ ,\ \ k = 1, \ldots, m_s\ ,\ \ \beta_k = 0 \text{ sonst.}$$

Hieraus folgt $\widetilde{\beta} = H_1(\beta, \lambda)$ und $\alpha = H_2(\beta, \lambda)$. Daher gilt

$$g_l = \widetilde{q}_U(H(\beta,\lambda) = \widetilde{\widetilde{q}}_U(\beta,\lambda) = \sum_{k=1}^{m_{s-1}} \beta_k \overline{g}_k + \sum_{\tau=s-1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_\tau - b_{\tau-1}} \lambda_{b_{\tau-1}+j} G_j^{\tau-1}$$

Da $\alpha = \sum_{\tau=s-1}^{t} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \alpha_{b_\tau+j} e_{b_\tau+j}$ ist, folgt mit Blick auf Lemma 5.6 $\lambda = A^{-1}\alpha \in F_{t+1}$. Damit haben wir

$$g_l = \sum_{k=1}^{m_{s-1}} \beta_k \overline{g}_k + \sum_{\tau=s-1}^{t+1} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \lambda_{b_\tau+j} G_j^\tau = \sum_{k=1}^{m_{s-1}+n_{s-1}} \mu_k g_k + \sum_{k=m_{s-1}+n_{s-1}+1}^{m_t+n_{t+1}} \mu_k g_k\ ,$$

denn $\{\overline{g}_k\ :\ k = 1, \ldots, m_{s-1}\} \subset \{g_k\ :\ k = 1, \ldots, m_{s-1} + n_{s-1}\}$ und $\{G_j^\tau\ :\ s-1 \leq \tau \leq t+1\ ,\ j = 1, \ldots, a_{\tau+1} - b_\tau\} \subset \{g_k\ :\ k = m_{s-1} + n_{s-1} + 1, \ldots, m_{t+1} + n_{t+2}\}$.

Hieraus folgt das Lemma □

Für $t \geq 0$ setzen wir $u_t := m_{t+1} + n_{t+1}$ und $v_t := m_{t+1} + n_{t+2}$. Dann ist $u_t \leq v_t \leq u_{t+1}$ und $v_{t+1} - v_t \geq m_{t+2} - m_{t+1} > 0$ alle $t \geq 0$. Sei $l \in \mathbb{N}$ mit $m_t + n_{t+1} < l \leq m_{t+1} + n_{t+1}$, dann ist $l = v_{t-1} + i$ mit $i \in \{1, \ldots, m_{t+1} - m_t\} = \{1, \ldots, u_t - v_{t-1}\}$.

Nach Lemma 5.7 gibt es Funktionen $\mu_{t-1,i,k}$ aus $H_U(\mathcal{O})$ für $K_{s-2} \subset U \subset K_{s-1}$ und $s \leq t$, so daß

$$g_{v_{t-1}+i} = \sum_{k=1}^{v_{t-1}} \mu_{t-1,i,k} g_k\ .$$

Wir können, ohne die Erzeugungseigenschaft der Folge $(g_l)_l$ zu verändern, die Folge $(g_l)_l$ bezüglich festem $\varrho < 1$ wie folgt induktiv skalieren:

Sei $\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_{v_s}$ bereits skaliert, dann gibt es Funktionen $\widetilde{\mu}_{s,i,k} \in H_U(\mathcal{O})$, $K_{s-1} \subset U \subset K_s$, so daß

$$g_{v_s+i} = \sum_{k=1}^{v_s} \widetilde{\mu}_{s,i,k} \widetilde{g}_k \text{ auf } U\ .$$

Sei

$$\begin{aligned} S_{s,i} &:= \sum_{k=1}^{v_s} \sup_{K_s} \mid \widetilde{\mu}_{t,i,k} \mid \qquad \text{für } i = 1, \ldots, u_{s+1} - v_s \text{ und} \\ S_s &:= \max_{i=1,\ldots,u_{s+1}-v_s} S_{s,i} \cdot \frac{1}{\varrho} \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Für $l = v_s + i$ sei $\widetilde{g}_l := \frac{g_l}{S_s}$, $i = 1, \ldots, u_{s+1} - v_s$. Für $l = u_{s+1} + i$, $i = 1, \ldots, v_{s+1} - u_{s+1}$ sei $\widetilde{g}_l = g_l$. Dann gilt für die auf diese Weise induktiv skalierte Folge $(\widetilde{g}_l)_l$ die Eigenschaft (5.4.1): Ist $l = v_t + i$, $i \in \{1, \ldots, u_{t+1} - v_t\}$, $t \geq s$, dann gibt es in einer Umgebung von K_{t-1} holomorphe Funktionen $\mu_{t,i,k}$, $k = 1, \ldots, v_t$, so daß

$$\widetilde{g}_{v_t+i} = \sum_{k=1}^{v_t} \mu_{t,i,k} \widetilde{g}_k$$

und

$$\sum_{k=1}^{v_t} \sup_{K_{s-1}} \mid \mu_{t,i,k} \mid \leq \sum_{k=1}^{v_t} \sup_{K_{t-1}} \mid \mu_{t,i,k} \mid \leq \varrho < 1 \text{ für alle } t \geq s$$

Wir benennen von hier an $(\widetilde{g}_l)_l$ in $(g_l)_l$ um und definieren für ein $U \subset\subset \Omega$ holomorph konvex

$$q_U : l_1(H_U(\mathcal{O})) \to l_1(H_U(\mathcal{O}))\,, \ \ (\mu_l)_l \mapsto \sum_l \mu_l g_l$$

Wir zeigen jetzt, daß q_U stetig ist:

Da $U \subset K_{s-1}$ gilt für alle $t \geq s$ und $1 \leq i \leq u_t - v_t$

$$g_{v_t+i} = \sum_{k=1}^{v_t} \mu_{t,i,k} g_k \quad \text{mit} \ \sum_{k=1}^{v_t} \sup_U \mid \mu_{t,i,k} \mid < 1$$

Sei $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von U, dann folgt für die p-te Halbnorm des zugehörigen Halbnormensystems in $l_1(H_U(\mathcal{O}))$ induktiv:

$$\| g_{v_t+i} \|_p \leq C_{p,s} := \max\{\| g_k \|_p :\ 1 \leq k \leq v_s\}$$

für jedes $t \geq s$ und $1 \leq i \leq u_t - v_t$.

Für $t \geq s$ und $1 \leq i \leq v_{t+1} - u_{t+1}$ gilt $g_{u_{t+1}+i} = G_i^{t+2}$. Um K_{s-1} sind C_i^{t+1} definiert für jedes $t \geq s$, $1 \leq i \leq v_{t+1} - u_{t+1} = a_{t+3} - b_{t+2}$, und es gilt $\| C_i^{t+1} \|_p \leq 2$ für alle p.

Wegen (5.6.1) in Verbindung mit Lemma 5.1 gibt es $C'_{p,s}$, so daß

$$\| G_i^{t+1} \|_p \leq C'_{p,s}$$

für alle p und alle $t \geq s$, $1 \leq i \leq v_{t+1} - u_{t+1}$ gilt.

Daher gibt es zu jedem $p \in \mathbb{N}$ eine Konstante C_p, so daß

$$\| q_U(\mu) \|_p \leq C_p \| \mu \|_p \qquad \text{für jedes } \mu \in l_1(H_U(\mathcal{O})) \tag{5.7.2}$$

Bemerkung: Es ist $g_l \in \Gamma(\Omega, \mathcal{R}_{t+1})$, für $u_t + 1 \leq l \leq u_{t+1}$.

Zum Schluß bleibt nur noch Eigenschaft (5.4.2) zu zeigen:

Sei $\mu = (\mu_l)_l \in \operatorname{Kern} q_U$ für ein $U \subset K_{s-1}$ holomorph konvex. Sei $t \geq s$ und $\mu_{v_r+i} = 0$ für alle $r \geq t$ und $i = 1, \ldots, u_{r+1} - v_r$. Also ist

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{l \geq 1} \mu_l g_l &= \sum_{l \leq u_t} \mu_l g_l + \sum_{r \geq t} \Big(\sum_{u_r < l \leq v_r} \mu_l g_l + \sum_{v_r < l \leq u_{r+1}} \mu_l g_l \Big) \\ &= \sum_{l \leq u_t} \mu_l g_l + \sum_{r \geq t} \sum_{i=1}^{a_{r+2}-b_{r+1}} \mu_{u_r+i} G_i^{r+1} , \end{aligned}$$

denn $v_r - u_r = n_{r+2} - n_{r+1} = a_{r+2} - b_{r+1}$. Da $\sum_{l \leq u_t} \mu_l g_l \in \Gamma(\Omega, \mathcal{R}_{t+1})$, folgt nach Indexverschiebung

$$0 = \sum_{r \geq t+1} \sum_{i=1}^{a_{r+1}-b_r} \widetilde{\mu}_{r,i} [G_i^r]_k \qquad \text{mit } \widetilde{\mu}_{r,i} = \mu_{u_{r-1}+i} \text{ für } k \geq b_{t+1} + 1$$

Also auch nach Umrechnung

$$0 = \sum_{r \geq t+1} \sum_{i=1}^{a_{r+1}-b_r} [A\widetilde{\mu}]_{b_r+i} [C_i^r]_k \qquad \text{für } k \geq b_t + 1 ,$$

wobei $\widetilde{\mu}$ eine Folge ist mit $\widetilde{\mu}_l = \widetilde{\mu}_{r,i}$ für $l = b_r + i$, $i = 1, \ldots, a_{r+1} - b_r$ und $r \geq t+1$ und $\widetilde{\mu}_l = 0$ in allen anderen Fällen.

Setze $\lambda = (\lambda_l)_l$ und $\lambda_l := [A\widetilde{\mu}]_{br+i}$ für $l = b_r + i$, $i = 1, \ldots, a_{r+1} - b_r$ und $r \geq t+1$ und sonst gleich Null. Da $[C_j^\tau]_{b_\tau+j} = -1$ für $\tau \geq t+1$, $j = 1, \ldots, a_{\tau+1} - b_\tau$, folgt

$$\sup_{A_p} \mid \lambda_{b_\tau+j} \mid = \sup_{A_p} \mid \sum_{r \geq t+1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, \text{falls } r=\tau}}^{a_{r+1}-b_r} \lambda_{b_r+i} [C_i^r]_{b_\tau+j} \mid$$

für alle p, wobei $(A_p)_p$ die oben fest gewählte Ausschöpfung von U ist.

Also gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \geq t+1} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \sup_{A_p} \mid \lambda_{b_\tau+j} \mid &= \sum_{\tau \geq t+1} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \sup_{A_p} \mid \sum_{r \geq t+1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, \text{falls } r=\tau}}^{a_{r+1}-b_r} \lambda_{b_r+i} [C_i^r]_{b_\tau+j} \mid \\
&\leq \sum_{r \geq t+1} \sum_{i=1}^{a_{r+1}-b_r} \sup_{A_p} \mid \lambda_{b_r+i} \mid \sum_{\tau \geq t+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \text{falls } r=\tau}}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \sup_{A_p} \mid [C_i^r]_{b_\tau+j} \mid \\
&= \sum_{r \geq t+1} \sum_{i=1}^{a_{r+1}-b_r} \sup_{A_p} \mid \lambda_{b_r+i} \mid \sum_{\tau=t+1}^{r-1} \sum_{j=1}^{a_{\tau+1}-b_\tau} \sup_{A_p} \mid c_{r,i,b_\tau+j} \mid \\
&\leq \sum_{r \geq t+1} \sum_{i=1}^{a_{r+1}-b_r} \sup_{A_p} \mid \lambda_{b_r+i} \mid \cdot \theta
\end{aligned}$$

für ein $\theta < 1$ nach Eigenschaft (5.4.1) der Voraussetzung.

Hieraus folgt $\lambda_{b_r+i} = 0$ für $r \geq t+1$, $i = 1, \ldots, a_{r+1} - b_r$.

Da $\widetilde{\mu} \in N_{t+1}$ folgt $\widetilde{\mu} = A^{-1}\lambda = 0$. Also ist $\widetilde{\mu}_{r,i} = 0$ für $r \geq t+1$, $i = 1, \ldots, a_{r+1} - b_r$. Dies bedeutet nach Rückverschiebung der Indizes $\mu_{u_r+i} = 0$ für $r \geq t$, $i = 1, \ldots, v_r - u_r$. Insgesamt ist also $\mu_l = 0$ für alle $l \geq u_t + 1$.

Hieraus folgt Eigenschaft (5.4.2) und die Proposition 5.4 ist bewiesen □

Ist $U \subset\subset \Omega$ holomorph konvex. $(A_p)_p$ eine holomorph konvexe kompakte Ausschöpfung von U. Dann sei

$$\begin{aligned}
B_p &:= \{f \in l_1(H_U(\mathcal{O})) : \parallel f \parallel_p \leq 1\} \\
B_p^0 &:= \{f \in H_U(\mathcal{F}) : \parallel f \parallel_p \leq 1\}
\end{aligned}$$

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Satz 5.8. :
Sei $\mathcal{F}$ ein kohärente analytische Garbe über Ω. $U \subset\subset \Omega$ holomorph konvex. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\ldots l_1(H_U(\mathcal{O})) \stackrel{p_2^U}{\to} l_1(H_U(\mathcal{O})) \stackrel{p_1^U}{\to} l_1(H_U(\mathcal{O})) \stackrel{p_0^U}{\to} H_U(\mathcal{F}) \to 0\,. \tag{5.8.1}$$

Hierbei können die Abbildungen p_i^U, $i = 0, 1, \ldots$, so gewählt werden, daß $p_i^U = \sum_l \lambda_l f_l^i$ mit von U unabhängigen $f_l^i \in l_1(H_\Omega(\mathcal{O}))$ für alle $i \geq 1$ bzw. $f_l^i \in H_\Omega(\mathcal{F})$ für $i = 0$.

Es gilt ferner

$$B_{p+1} \cap Kern\, p_{i-1}^U \subset p_i^U(C \cdot B_p) \qquad \text{für } i \geq 1 \tag{5.8.2}$$

und einer von p und i abhängigen Konstante C, sowie

$$B_p^0 \subset p_0^U(\theta \cdot B_p) \qquad \text{für jedes } \theta > 1\,. \tag{5.8.3}$$

Beweis:

Sei $(K_t)_t$ eine holomorph konvexe kompakte Ausschöpfung von Ω. Sei $0 < \varrho < 1$ fest. Ferner gelten die Bezeichnungen wie in der Proposition 5.4.

Wir zeigen die Exaktheit von (5.8.1) über die induktive Konstruktion der $(f_l^i)_l$:

Im Beweis werden wir i' statt i verwenden.

1) Induktionsanfang $i' = 0$:

Ist $t \in \mathbb{N}_0$, dann gibt es nach Theorem A von Cartan $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_{a_t} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$, die $\mathcal{F}$ um K_t erzeugen. Ohne Einschränkung ist $(a_t)_{t \geq 0}$ strikt monoton steigend. (Ist z.B. $\mathcal{F}$ endlich erzeugt, dann werden die Erzeuger dupliziert.)

Setze ferner $f_1^0 := \widetilde{f}_1, \ldots, f_{a_0}^0 := \widetilde{f}_{a_0}$. Es seien für $t > 0$ die Schnitte $f_1^0, \ldots, f_{a_t}^0$ durch Skalierung mit Konstanten aus $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_{a_t}$ hervorgegangen. Betrachten wir $\widetilde{f}_{a_t+i}$ in einer Umgebung von K_t

nahe genug an K_t, dann lassen sich um K_t holomorphe Funktionen $\lambda_{t,i,j}$, $j = 1, \ldots, a_t$ finden, so daß

$$\widetilde{f}_{a_t+i} = \sum_{j=1}^{a_t} \lambda_{t,i,j} f_j^0 \qquad \text{gilt.}$$

Wir setzen $C_{t,i} := \sum_{j=1}^{a_t} \sup_{K_t} \mid \lambda_{t,i,j} \mid$ und $f_{a_t+i}^0 := \widetilde{f}_{a_t+i} \cdot \frac{\varrho}{C_{t,i}}$ für $i = 1 \ldots, a_{t+1} - a_t$.

Dann erzeugen $f_1^0, \ldots, f_{a_t}^0$ die Garbe $\mathcal{F}$ um K_t. Für jedes $U \subset\subset K_s$ holomorph konvex erhalten wir eine Abbildung

$$p_0^U : l_1(H_U(\mathcal{O})) \to H_U(\mathcal{F})\,,\ \ (\lambda_l)_l \mapsto \sum_l \lambda_l f_l^0\,,$$

die surjektiv und stetig linear ist. Denn es gilt für $U \subset\subset K_s$ und eine kompakte Ausschöpfung $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ von U, sowie für $t \geq s$

$$\begin{aligned}
\sup_{A_p} \mid f_{a_t+i}^0 \mid &= \sup_{A_p} \mid \sum_{j=1}^{a_t} \lambda_{t,i,j} f_j^0 \mid \frac{\varrho}{C_{t,i}} \\
&\leq \max_{j=1}^{a_t} \sup_{A_p} \mid f_j^0 \mid \sup_{A_p} \mid \lambda_{t,i,j} \mid \frac{\varrho}{C_{t,i}} \\
&< \max_{j=1}^{a_t} \sup_{A_p} \mid f_j^0 \mid
\end{aligned}$$

Also induktiv

$$\sup_{A_p} \mid f_l^0 \mid \leq \max_{l=1}^{a_s} \sup_{A_p} \mid f_l^0 \mid =: C_{p,s} \qquad \text{für alle } l \geq a_s\,.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{A_p} \mid \sum_l \lambda_l f_l^0 \mid &\leq \sum_l \sup_{A_p} \mid \lambda_l \mid \sup_{A_p} \mid f_l^0 \mid \\
&\leq C_{p,s} \sum_l \sup_{A_p} \mid \lambda_l \mid \\
&= C_{p,s} \parallel (\lambda_l)_l \parallel_p
\end{aligned} \tag{5.8.4}$$

Wir bemerken, daß die $C_{p,s}$ eine gleichmäßige obere Schranke in p besitzen.

$(f_l^0)_l$ erfüllt die Eigenschaften (5.4.1) und (5.4.2) aus der Proposition mit $b_t := a_t$ alle t. Eigenschaft (5.4.1) ist wegen der obigen Skalierung erfüllt und Eigenschaft (5.4.2) gilt automatisch wegen $a_t = b_t$ für alle t.

2) Die Folgen $(f_l^{i'})_l$ für $i' \geq 1$ erhalten wir induktiv durch Anwenden von Proposition 5.4.

Bezogen auf die Folge $(f_l^{i'-1})_l$ ist damit

$$\begin{aligned} f_l^{i'} &= \frac{\overline{g}_{l-n_{t+1}}}{S_{t-1}} \quad \text{für } v_{t-1}+1 \leq l \leq u_t \text{ und} \\ f_l^{i'} &= G_{l-n_t}^{t+1} \quad \text{für } u_{t-1} \leq l \leq v_t, \text{ wobei} \end{aligned}$$

die S_t für $t \geq 1$ die Skalierungskonstanten aus (5.7.1) sind.

3) Es bleibt (5.8) und (5.8.3) zu zeigen. Sei $f \in H_U(\mathcal{F})$ für ein $U \subset\subset \Omega$ holomorph konvex und sei $\| f \|_p \leq 1$. Es sei s so gewählt, daß $U \subset K_s$. Da $f_1^0, \ldots, f_{a_s}^0$ globale erzeugende Schnitte von $\mathcal{F}$ über U sind, kann Lemma 5.3 angewandt werden.

Es gibt daher für $\theta > 1$ Funktionen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{a_s} \in H_U(\mathcal{O})$ mit $\sum_{l=1}^{a_s} \lambda_l f_l^0 = f$ und $\sum_{l=1}^{a_s} \sup_{A_p} \mid \lambda_l \mid \leq \theta$. Damit ist $f \in p_0^U(\theta B_p)$.

Sei jetzt $i' \geq 1$, $f \in \operatorname{Kern} p_{i'-1}^U$ und $\| f \|_{p+1} \leq 1$ mit $f = (f_k)_k$. Da $U \subset K_s$ können wir mit in U holomorphen Funktionen $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{m_s})$ und $\alpha = (\alpha_{i,t})_{t \geq s,\ i=1,\ldots,a_{t+1}-b_t}$

$$f = \sum_{l=1}^{m_s} \beta_l \overline{g}_l + \sum_{t \geq s} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} C_i^t \qquad \text{schreiben, wobei}$$

$(a_t)_t$, $(b_t)_t$, sowie $(C_i^t)_{t,i}$ etc. von der Folge $(f_l^{i'-1})_l$ herrühren gemäß Proposition 5.4.

Da $\overline{g}_l \in \Gamma(\Omega, \mathcal{R}_s)$ für $l = 1, \ldots, m_s$ ist, gilt $[\overline{g}_l]_k = 0$ für $k \geq b_s + 1$. Also gilt

$$f_k = \sum_{t \geq s} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} [C_i^t]_k \qquad \text{für } k \geq b_s + 1$$

Wie im Beweis der Proposition 5.4 gezeigt wurde, gilt

$$\begin{aligned} 1 \geq \sum_{k \geq b_s+1} \sup_{A_{p+1}} \mid f_k \mid &= \sum_{k \geq b_s+1} \sup_{A_{p+1}} \Big| \sum_{t \geq s} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} [C_i^t]_k \Big| \\ &\geq (1-\varrho) \sum_{t \geq s} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{A_{p+1}} \mid \alpha_{i,t} \mid , \end{aligned}$$

wobei $\varrho < 1$ gemäß (5.4.1) gewählt ist. Sei $\widetilde{f} := f - \sum_{t \geq s} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} C_i^t$. Dann ist

$$\begin{aligned}\| \widetilde{f} \|_{p+1} &\leq \| f \|_{p+1} + \sum_{t \geq s} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \sup_{A_{p+1}} | \alpha_{i,t} | \| C_i^t \|_{p+1} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1-\varrho} \cdot 2\end{aligned}$$

Da $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_{m_s}$ die Garbe $\mathcal{R}(f_1^{i'-1}, \ldots, f_{b_s}^{i'-1})$ um K_s erzeugt, kann in Anwendung von Lemma 5.3 und Lemma 5.1 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m_s} \in H_U(\mathcal{O})$ gefunden werden, so daß

$$\widetilde{f} = \sum_{l=1}^{m_s} \gamma_l \overline{g}_l \qquad \text{und} \qquad \sum_{l=1}^{m_s} \sup_{A_p} | \gamma_l | \leq C_{i,p} \, ,$$

wobei $C_{i,p}$ von f unabhängig ist. Wir setzen $\alpha := (\alpha_l)_l$ mit $\alpha_{b_t+i} := \alpha_{i,t}$ für $t \geq s$, $i = 1, \ldots, a_{t+1} - b_t$ und $a_l = 0$ sonst. Sei $\lambda := A^{-1}\alpha$. Dann gilt $\| \lambda \|_{p+1} \leq \frac{1}{1-\varrho} \| \alpha \|_{p+1} \leq \frac{1}{(1-\varrho)^2}$.

Wir bilden $\mu = (\mu_l)_l$ durch

$$\mu_l := \begin{cases} \gamma_{m_t+i} \cdot S_{t-1} & ; \text{ für } l = v_{t-1} + i \, , \;\; t \leq s-1 \, , \;\; i = 1, \ldots, u_t - v_{t-1} \\ \lambda_{i,t} & ; \text{ für } l = u_t + i \, , \;\; t \geq s-1 \, , \;\; i = 1, \ldots, v_t - u_t \\ 0 & ; \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} p_{i'}^U \mu &= \sum_l \mu_l f_l^{i'} \\ &= \sum_{t \leq s-1} \sum_{i=1}^{u_t - v_{t-1}} \gamma_{m_t+i} \cdot S_{t-1} f_{v_{t-1}+i}^{i'} + \sum_{t \geq s-1} \sum_{i=1}^{v_t - u_t} \lambda_{i,t} f_{u_t+i}^{i'} \\ &= \sum_{t \leq s-1} \sum_{i=1}^{u_t - v_{t-1}} \gamma_{m_t+i} \overline{g}_{m_t+1} + \sum_{t \geq s-1} \sum_{i=1}^{v_t - u_t} \lambda_{i,t} G_i^{t+1} \\ &= \sum_{l=1}^{m_s} \gamma_l \overline{g}_l + \sum_{t \geq s-1} \sum_{i=1}^{a_{t+2}-b_{t+1}} \lambda_{i,t} G_i^{t+1} \\ &= \widetilde{f} + \sum_{t \geq s} \sum_{i=1}^{a_{t+1}-b_t} \alpha_{i,t} C_i^t \\ &= f \end{aligned}$$

und $\| \mu \|_p = \| \gamma \|_p + \| \lambda \|_p \leq C_{i,p} + \frac{1}{(1-\varrho)^2} =: \widetilde{C}_{i,p}$. Also ist $f \in p_i^U(\widetilde{C}_{i,p} H_p)$ $\square$

6 Theorem B mit Schranken für lokal endlich erzeugte Untergarben von $\mathcal{O}^p_\Omega$

Wir wollen nun Satz 2.4 anwenden auf Koketten Werten in lokal endlich erzeugten Untergarben $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}^p$ für ein beliebiges natürliches p. $\mathcal{O}$ sei hier die Garbe von Keimen holomorpher Funktionen auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit Ω. Nach dem Satz von Oka (siehe z.B. [8], Theorem 6.4.1) ist $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von Ω mit relativ kompakten, Steinschen Gebieten in Ω, wobei es eine Schranke M geben soll, so daß U_i nicht von mehr als M verschiedenen Mengen aus $(U_i)_{i\in I}$ geschnitten wird.

Es sei $(A_{i,n})_{i\in I,n\in\mathbb{N}_0}$ ein System von holomorph konvexen kompakten Mengen in Ω, so daß für jedes i die Folge $(A_{i,n})_n$ eine Ausschöpfung von U_i bildet. Ohne Einschränkung sei $\Omega\subset\bigcup_{i\in I}\overset{\circ}{A}_{i,0}$ und $A_{i_1,0}\cap\ldots\cap A_{i_\sigma,0}=\emptyset$ genau dann, wenn $U_{i_1}\cap\ldots\cap U_{i_\sigma}=\emptyset$. Für $\alpha=(i_1,\ldots,i_\sigma)$ sei $A_{\alpha,n}:=A_{i_1,n}\cap\ldots\cap A_{i_\sigma,n}$.

Auf den Fréchetiräumen der holomorphen Funktionen auf $U_{i_0,\ldots,i_\sigma}:=U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_\sigma}$ ist jeweils eine Gradierung durch

$$|\, f\,|_{i_0,\ldots,i_\sigma,n}:=\sup_{A_{i_0,\ldots,i_\sigma,n}}|\, f(z)\,|$$

gegeben.

Es sei für $\alpha\in I^{\sigma+1}$, $\sigma\geq 0$, jeweils $F^k_\alpha:=l_1(H(U_\alpha))$, falls $U_\alpha\neq\emptyset$ für $k=1,2,\ldots$. Hiebei trägt F^k_α die folgende Gradierung:

$$\|\,(f_l)_{l\in\mathbb{N}}\,\|_{\alpha,n}:=\sum_{l=1}^{\infty}|\,f_l\,|_{\alpha,n}\,,\ \ n\in\mathbb{N}\,.$$

Für $k=0$ und $\alpha\in I^{\sigma+1}$, $\sigma\geq 0$ sei jeweils $F^0_\alpha=\Gamma(U_\alpha,\mathcal{F})$ versehen mit der Gradierung, die sich durch die Suprema auf $(A_{\alpha,n})_n$ ergibt.

Im Fall $U_\alpha=\emptyset$ sei $F^k_\alpha:=\{0\}$ für $k=0,1,2,\ldots$.

Sei also $S=(S_{k,\sigma})_{k,\sigma}$ mit $S_{k,\sigma}:=\{F^k_\alpha,\alpha\in I^{\sigma+1}\}$.

Für die Indexmengen I_α, α Multiindex, gilt dann $I_\alpha=\{i\in I\,:\,U_\alpha\cap U_i\neq\emptyset\}$. I_α ist also für jeden Multiindex α durch M beschränkt und es gilt $I_{\alpha,j}\subset I_\alpha$ für jeden Index $j\in I$ und jeden Multiindex α.

Für $\alpha\in I^{\sigma+1}$, $\sigma\geq 0$ mit $U_\alpha\neq\emptyset$ und $j\in\{0,\ldots,\sigma\}$ sowie $k\geq 1$ sei

$$\iota^{k,\alpha}_{\alpha_j}:l_1(H(U_{\alpha_j}))\to l_1(H(U_\alpha))$$

diejenige Abbildung, die komponentenweise $H(U_{\alpha_j})$ in $H(U_\alpha)$ einbettet. Diese Abbildung ist stetig, linear und injektiv und es gilt:

$$\| \iota^{k,\alpha}_{\alpha_j}(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \|_{\alpha,n} \leq \| (f_l)_{l\in\mathbb{N}} \|_{\alpha_j,n} \;.$$

Ist $U_\alpha = \emptyset$, dann soll $\iota^{k,\alpha}_{\alpha_j}$ komponentenweise aus der Nullabbildung bestehen.

Ist $k = 0$, dann sei für $\alpha \in I^{\sigma+1}$, $\sigma \geq 0$ mit $U_\alpha \neq \emptyset$ und $j \in \{1, \ldots, \sigma\}$

$$\iota^{0,\alpha}_{\alpha_j} : H_{U_{\alpha_j}}(\mathcal{F}) \to H_{U_\alpha}(\mathcal{F})$$

die Einschränkungsabbildung von Schnitten auf U_{α_j} zu Schnitten auf U_α. Die Topologie auf $H_U(\mathcal{F})$ für ein offenes $U \subset \Omega$ wurde in Kapitel 5 eingeführt. Diese Abbildung ist stetig linear mit

$$\| \iota^{k,\alpha}_{\alpha_j}(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \|_{\alpha,n} \leq \| (f_l)_{l\in\mathbb{N}} \|_{\alpha_j,n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. $\iota^{k,\alpha}_{\alpha_j}$ ist ebenfalls injektiv, da ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}^p$ vorausgesetzt ist.

Ist $U_\alpha = \emptyset$, dann soll auch $\iota^{0,\alpha}_{\alpha_j}$ komponentenweise aus der Nullabbildung bestehen.

Die Eigenschaften (2.1.1) sind erfüllt, da die $\iota^{k,\alpha}_{\alpha_j}$ jeweils Einschränkungsabbildungen sind.

Wir wollen zeigen, daß für S die Eigenschaft (E1) gilt:

Wir setzen dazu $p^k_\alpha := p^{U_\alpha}_k$ für jedes $k \geq 0$ und $\alpha \in I^{\sigma+1}$, $\sigma \geq 0$, mit $p^{U_\alpha}_k$ aus Satz 5.8. Der Satz besagt gerade, daß die Folge $(p^{U_\alpha}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit absteigendem k die in (E.1.1) geforderte exakte Sequenz bildet.

Es gilt für $(\lambda_l)_l \in l_1(H_{U_{\alpha_j}}(\mathcal{O}))$

$$p^k_\alpha \circ \iota^{k+1,\alpha}_{\alpha_j}((\lambda_l)_l) = \sum_l \left[\iota^{k+1,\alpha}_{\alpha_j}((\lambda_l)_l)\right]_l f^k_l \;|_{U_\alpha} = \sum_l \lambda_l \;|_{U_\alpha} f^k_l \;|_{U_\alpha} = \iota^{k+1,\alpha}_{\alpha_j} \circ p^k_\alpha((\lambda_l)_l)$$

für $\alpha \in I^{\sigma+1}$, $j = 0, \ldots, \sigma$, $k \geq 0$. Hierdurch wird (E.1.2) erfüllt.

Die Eigenschaft (E.1.3) ist wegen (5.8) bzw. (5.8.3) erfüllt. (E.1.4) folgt aus (5.7.2).

Wir zeigen nun, daß auch Eigenschaft (E.2) für S gilt.

Es sei für ein $\gamma > 1$

$$P_\gamma := \{\varphi \in PSH(\Omega) : \; \varphi \geq 0 \,, \; \sup_{U_i} \varphi \leq \gamma \inf_{U_i} \varphi \text{ für jedes } i \in I\}$$

Wir setzen

$$M_\gamma := \{[(\sup_{U_\alpha} e^{-\varphi})_{\alpha\in I^{\sigma+1}}, (\sup_{U_\alpha} e^{-\varphi})_{\alpha\in I^{\sigma}}] \,:\, \varphi \in P_\gamma\}$$

Wir behaupten, daß zu jedem $\gamma > 1$ die offensichtlich nicht leere Menge M_γ die Eigenschaften 1) bis 3) aus (E.2) besitzt:

DAZU:

1) Sei $[C, C'] \in M_\gamma$, dann gilt für alle $\alpha \in I^{\sigma+1}$ beziehungsweise $\beta \in I^\sigma$, daß $0 < C_\alpha \le 1$ und $0 < C'_\beta \le 1$. Ist ferner $\alpha \in I^\sigma$, dann gilt

$$C'_\alpha = \sup_{U_\alpha} e^{-\varphi} \ge \sup_{U_\alpha\cap U_i} e^{-\varphi}$$

für jedes $i \in I_\alpha$. Also gilt $C \prec C'$.

2) Ist $\theta > 1$ und ist $[C, C'] \in M_\gamma$, dann $[C^\theta, C'^\theta] \in M_\gamma$, denn $\theta\varphi \in P_\gamma$.

3) Sei $[C, C'] = [(\sup_{U_\alpha} e^{-\varphi})_{\alpha\in I^{\sigma+1}}, (\sup_{U_\alpha} e^{-\varphi})_{\alpha\in I^\sigma}] \in M_\gamma$. Dann gilt für $C'' := (\sup_{U_\alpha} e^{-\varphi})_{\alpha\in I^{\sigma+2}}$, daß $[C'', C] \in M_\gamma$ ist.

Es sei $C_1 := (C_{1,\alpha})_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es sei $[C, C'] \in M_\gamma$ und $c \in \mathcal{C}_n(S_{k,\sigma}, C\cdot C_1)$ mit $\delta^\sigma c = 0$.

Für festes $\alpha \in I^{\sigma+1}$ und $k \ge 1$ ist $c_\alpha = (c_{\alpha,l})_{l\in\mathbb{N}} \in l_1(H(U_\alpha))$. Wir setzen $c^l := (c_{\alpha,l})_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$. Jedes c^l ist eine Kokette der Länge σ bezüglich der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$. $\delta^\sigma c = 0$ bedeutet gerade, daß $\delta^\sigma c^l = 0$ für jedes $l \in \mathbb{N}$.

Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\infty > \||\, c \,\||^2_{n,C\cdot C_1} &= \left(\sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} C_\alpha C_{1,\alpha} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sup_{A_{\alpha,n}} |\, c_{\alpha,l} \,|\right)^2 \\
&\ge \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} C_\alpha^2 C_{1,\alpha}^2 \left(\sum_{l\in\mathbb{N}} \sup_{A_{\alpha,n}} |\, c_{\alpha,l} \,|\right)^2 \\
&\ge \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} \sum_{l\in\mathbb{N}} C_\alpha^2 C_{1,\alpha}^2 \sup_{A_{\alpha,n}} |\, c_{\alpha,l} \,|^2 \ .
\end{aligned}$$

Es sei $\varphi \in P_\gamma$ die zu C gehörige Funktion. Wir wählen eine plurisubharmonische Funktion auf Ω, so daß für jedes $\alpha \in I^{\sigma+1}$ auf U_α

$$e^{\psi_1} \ge C_{1,\alpha}^{-2} \cdot D_\alpha$$

gilt, wobei $D_\alpha := \int_{U_\alpha} d\Omega(z)$.

Also gilt

$$
\begin{aligned}
\| c^l \|^2_{2\varphi+\psi_1,n} &:= \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} \int_{A^\circ_{\alpha,n}} | c_{\alpha,l} |^2 \, e^{-2\varphi-\psi_1} d\Omega(z) \\
&\leq \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} D_\alpha \sup_{A_{\alpha,n}} | c_{\alpha,l} |^2 \sup_{A_{\alpha,n}} e^{-2\varphi-\psi_1} \\
&\leq \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} C^2_\alpha C^2_{1,\alpha} \sup_{A_{\alpha,n}} | c_{\alpha,l} |^2 < \infty
\end{aligned}
$$

Wir wenden nun das in Satz 4.2 gewonnene Theorem B mit Schranken für die Garbe $\mathcal{O} = \mathcal{H}_0$ an auf $n \in \mathbb{N}$ und die plurisubharmonische Funktion $2\varphi + \psi_1$. Danach gibt es eine von n unabhängige plurisubharmonische Funktion ψ_2, so daß zu jeder holomorphen Kokette c^l eine holomorphe Kokette c'^l existiert mit $\delta^{\sigma-1} c'^l = c^l$ und

$$
\| c'^l \|_{2\varphi+\psi_1+\psi_2,n-1} \leq \| c^l \|_{2\varphi+\psi_1,n} \; .
$$

Bezüglich des Maßes $e^{-\psi_1} d\Omega$ und einer jeweils festen offenen Umgebung $\widetilde{U}_\alpha$ von $A_{\alpha,n-2}$ mit $\widetilde{U}_\alpha \subset\subset A^\circ_{\alpha,n-1}$, $\alpha \in I^\sigma$ gibt es Konstanten $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in I^\sigma$, so daß

$$
\sup_{\widetilde{U}_\alpha} | f(z) |^2 \leq K_{\alpha,n} \int_{A^\circ_{\alpha,n-1}} | f(z) |^2 \, e^{-\psi_1} d\Omega(z)
$$

für jedes $f \in H(A^\circ_{\alpha,n-1}) \cap L_2(A^\circ_{\alpha,n-1}, e^{-\psi_1} d\Omega)$.

Es gilt daher

$$
\begin{aligned}
\| c^l \|^2_{2\varphi+\psi_1,n} &\geq \| c'^l \|^2_{2\varphi+\psi_1+\psi_2,n-1} = \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} \int_{A^\circ_{\alpha,n-1}} | c'_{\alpha,l} |^2 \, e^{-2\varphi-\psi_1-\psi_2} d\Omega \\
&\geq \sum_{\alpha\in I^\sigma} K^{-1}_{\alpha,n-1} \inf_{A_{\alpha,n-1}} e^{-\psi_2} \inf_{A_{\alpha,n-1}} e^{-2\varphi} \sup_{A_{\alpha,n-2}} | c'_{\alpha,l} |^2
\end{aligned}
$$

Wir setzen $C_{2,\alpha} := K^{-\frac{1}{2}}_{\alpha,n-1} \inf_{U_\alpha} e^{-\frac{1}{2}\psi_2} n(\alpha)^{-1}$ mit einer Funktion $n : I^\sigma \to \mathbb{R}^+$, so daß

$$
\sum_{\alpha\in I^\sigma} n(\alpha)^{-2} \leq 1 \, .
$$

Es gilt für $\alpha \in I^\sigma$

$$C'^{2\gamma}_\alpha = \sup_{U_\alpha} e^{-2\varphi\gamma} = e^{-2(\inf_{U_\alpha}\varphi)\gamma} \leq e^{-2\sup_{U_\alpha}\varphi} = \inf_{U_\alpha} e^{-2\varphi} \leq \inf_{A_{\alpha,n-1}} e^{-2\varphi} .$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
||| \; c' \; |||^2_{n-2,C'^\gamma C_2} &= \left(\sum_{\alpha\in I^\sigma} C'^\gamma_\alpha C_{2,\alpha} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sup_{A_{\alpha,n-2}} \mid c'_{\alpha,l} \mid \right)^2 \\
&\leq \left[\sum_{l\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\alpha\in I^\sigma} n(\alpha)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha\in I^\sigma} K^{-1}_{\alpha,n-1} \inf_{U_\alpha} e^{-\psi_2} C'^{2\gamma}_\alpha \sup_{A_{\alpha,n-2}} \mid c_{\alpha,l} \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&\leq \left[\sum_{l\in\mathbb{N}} (\| \; c^l \; \|^2_{2\varphi+\psi_1,n})^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&\leq \left[\sum_{l\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} C^2_\alpha C^2_{1,\alpha} \sup_{A_{\alpha,n}} \mid c_{\alpha,l} \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&\leq \left[\sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} C_\alpha C_{1,\alpha} \sup_{A_{\alpha,n}} \mid c_{\alpha,l} \mid \right]^2 \\
&= ||| \; c \; |||^2_{n,CC_1}
\end{aligned}$$

Damit ist nach Umnummerierung Eigenschaft (E.2) gezeigt.

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Abschnittes:

Sei Ω eine Steinsche Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine lokal endlich erzeugte Untergarbe von $\mathcal{O}^p$ auf Ω für irgendein natürliches p. Sei ferner $(U_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Steinsche Überdeckung von Ω, wobei höchstens M paarweise verschiedene Überdeckungsmengen eine feste Überdeckungsmenge schneiden.

Für jedes $\alpha \in I^{\sigma+1}$, $\sigma \geq 0$ wird durch erzeugende Schnitte $F_1, \ldots, F_q \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ eine Fréchetraumtopologie auf $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$ induziert. Die einzelnen Stufen werden durch eine kompakte holomorph konvexe Ausschöpfung $(A_n)_n$ von U_α gegeben:

$$\| \; f \; \|_{\alpha,n} := \inf_{f=\sum_{j=1}^q d_j F_j} \sum_{j=1}^q \sup_{A_n} \mid d_j \mid$$

für $f \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$. Es gilt der folgende

Satz 6.1. :

Sei für jedes $\alpha \in I^{\sigma+1}$, $\sigma \geq 0$, ein zu $(\| \quad \|_{\alpha,n})_n$ äquivalentes Halbnormensystem $(| \quad |_{\alpha,n})_n$ gegeben auf $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$ und sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Dann gibt es zu jedem $\sigma \geq 0$ ein Konstantensystem $(D_\alpha)_{\alpha \in I^\sigma}$, $0 < D_\alpha \leq 1$, so daß für jede auf Ω plurisubharmonische Funktion $\varphi \geq 0$, für die es ein $\gamma > 1$ gibt mit

$$\sup_{U_i} \varphi \leq \gamma \inf_{U_i} \varphi \text{ für alle } i \in I ,$$

das folgende gilt:

Zu jeder Kokette $c = (c_\alpha)_{\alpha \in I^{\sigma+1}}$, $\sigma \geq 0$, mit $c_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$, $\delta^\sigma c = 0$ und

$$\sum_{\alpha \in I^{\sigma+1}} \sup_{U_\alpha} e^{-\varphi} \sup_n | c_\alpha |_{n,\alpha} < \infty \tag{6.1.1}$$

gibt es eine Kokette $c' := (c'_\alpha)_{\alpha \in I^\sigma}$ mit $c'_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$, $\delta^{\sigma-1} c' = c$ und

$$\sum_{\alpha \in I^\sigma} D_\alpha \sup_{U_\alpha} e^{-\gamma^M \varphi} | c'_\alpha |_{\alpha,m} \leq \sum_{\alpha \in I^{\sigma+1}} \sup_{U_\alpha} e^{-\varphi} \sup_n | c_\alpha |_{n,\alpha}$$

Bemerkung: Wegen Lemma 5.1 sind die Supremumsnormen in $H(U_\alpha)$ auf einer jeweiligen kompakten Ausschöpfung von U_α ein äquivalentes Halbnormensystem zu $(\| \quad \|_{\alpha,n})_n$.

Beweis des Satzes: Für das in Kapitel 2 definierte System S von Frécheträumen ist oben die Eigenschaft (E) nachgewiesen worden. Wir wollen Satz 2.4 für S anwenden bezüglich der Überdeckung $(U_i)_i$. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Kapitel 2

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es zu einem festen m ein $n \in \mathbb{N}$ und Konstanten $(K_{1,\alpha})_{\alpha \in I^{\sigma+1}}$ gibt, so daß

$$K_{1,\alpha} | f |_{\alpha,m} \leq \| f \|_{\alpha,n-2(M+1)}$$

für jedes $f \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$ und jedes $\alpha \in I^{\sigma+1}$.

Ferner gibt es $K_{2,\alpha}$, so daß

$$K_{2,\alpha} \| f \|_{\alpha,n} \leq \sup_k | f |_{\alpha,k}$$

für jedes $f \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$, für das die rechte Seite existiert.

Da $\varphi \in P_\gamma$ ist $[C := (\sup_{U_\alpha} e^{-\varphi})_{\alpha\in I^{\sigma+1}}, C' := (\sup_{U_\alpha} e^{-\varphi})_{\alpha\in I^\sigma}] \in M_\gamma$. Es sei $C_1 := (K_{2,\alpha})_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$.

Sei also $c = (c_\alpha)_{\alpha\in I^{\sigma+1}}$ mit $\delta^\sigma c = 0$ und (6.1.1), dann folgt $c \in \mathcal{C}_n(S_{0,\sigma}, C \cdot C_1)$, denn

$$||| \, c \, |||_{n,C\cdot C_1} = \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} C_\alpha C_{1,\alpha} \parallel c_\alpha \parallel_{\alpha,n} \leq \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} \sup_{U_\alpha} e^{-\varphi} \sup_k \mid c_\alpha \mid_{\alpha,k} < \infty$$

Wir wenden Satz 2.4 an und erhalten $c' \in \mathcal{C}_{n-2(M+1-\sigma)}(S_{0,\sigma-1}, {C'}^{\gamma^{M-\sigma}} \cdot C_2)$ mit $\delta^{\sigma-1}c' = c$ und

$$||| \, c' \, |||_{n-2(M+1-\sigma), {C'}^{\gamma^{M-\sigma}} \cdot C_2} \leq ||| \, c \, |||_{n,C\cdot C_1} \quad .$$

Hierbei ist das Konstantensystem C_2 unabhängig von C, C' und c. Wir setzen $D_\alpha := C_{2,\alpha} \cdot K_{1,\alpha}$ für $\alpha \in I^\sigma$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in I^\sigma} D_\alpha \sup_{U_\alpha} e^{-\gamma^M \varphi} \mid c_\alpha \mid_{\alpha,m} \quad &\leq \quad \sum_{\alpha\in I^\sigma} C_{2,\alpha} {C'}^{\gamma^{M-\sigma}} \parallel c'_\alpha \parallel_{\alpha,n-2(M+1-\sigma)} \\
&\leq \quad \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} C_{1,\alpha} C_\alpha \parallel c_\alpha \parallel_{\alpha,n} \\
&\leq \quad \sum_{\alpha\in I^{\sigma+1}} \sup_{U_\alpha} e^{-\varphi} \sup_k \mid c_\alpha \mid_{\alpha,k} \quad .
\end{aligned}$$

Ende des Beweises □

7 Konstruktion einer Überdeckung des $\mathbb{R}^N$

Wir zeigen in diesem Kapitel, daß es spezielle Überdeckungen des $\mathbb{R}^N$ mit achsenparallelen Kuben gibt:

Proposition 7.1. :
Gegeben sei eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$, dann gibt es eine abzählbare Überdeckung $(K_i)_{i\in I}$ mit achsenparallelen offenen Kuben der Seitenlänge s_i, so daß folgendes erfüllt ist:

1) *$\varphi(x) > s_i$ für jedes $x \in K_i$ und $i \in I$.*
2) *Für jedes $i \in I$ ist die Anzahl der Elemente der Menge $\{j \in I : K_i \cap K_j \neq \emptyset\}$ durch die Zahl $4^N - 2^N$ beschränkt.*

Sei $T \subset \{f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \text{ beschränkt }\}$ durch folgendes definiert:

Ist $f \in T$, dann gibt es eine Folge $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ mit $t_k \nearrow \infty$, so daß

1) entweder

$$t_{k+1} - t_k = t_k - t_{k-1} \text{ oder } t_{k+1} - t_k = \frac{1}{2}(t_k - t_{k-1}) \text{ gilt } \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\,, \tag{7.1.1}$$

2) $f(x) = t_{k+1} - t_k$ für jedes $x \in [t_k, t_{k+1}[$ und $k = 0, 1, \ldots$.

Lemma 7.2. :
Sei $(f_k)_k$ eine Folge wie oben, dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so daß $t_k = m(t_k - t_{k-1})$ und $t_k - t_{k-1} = 2^{-n}(t_1 - t_0)$

Beweis: Wir führen eine Induktion über k durch. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist klar. Sei die Behauptung für $k > 1$ richtig. Dann gilt $m\,t_{k-1} = (m-1)t_k$. Ferner gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $t_k - t_{k-1} = 2^{-n}(t_1 - t_0)$.

Ist im 1. Fall von (7.1.1) $t_{k+1} - t_k = t_k - t_{k-1}$, dann folgt zum einen $t_{k+1} - t_k = 2^{-n}(t_1 - t_0)$, zum anderen folgt

$$mt_{k+1} = 2mt_k - mt_{k-1} = (2m - m + 1)t_k$$

also gilt

$$(m+1)t_{k+1} = (m+1)t_k + t_{k+1}\,.$$

Im 2. Fall ist $t_{k+1} - t_k = \frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})$. Dann folgt zum einen $t_{k+1} - t_k = 2^{-(n+1)}(t_1 - t_0)$, zum anderen folgt

$$2mt_{k+1} = 3mt_k - mt_{k-1} = (3m - m + 1)t_k$$

also gilt

$$(2m+1)t_{k+1} = (2m+1)t_k + t_{k+1} \;\Box$$

Lemma 7.3. :
Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $t_1 - t_0 = 2^{-n_0}$, dann gibt es zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $t_k = l$.

Beweis: Da $t_k \nearrow \infty$, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $t_{k-1} < l \leq t_k$. Nach Lemma 7.2 gibt es $n, m \in \mathbb{N}$, so daß $t_k = 2^{-n}m$, sowie $t_k - t_{k-1} = 2^{-n}$. Hieraus folgt $t_{k-1} = (m-1)2^{-n}$. Aus

$$(m-1)2^{-n} < l \cdot 2^n 2^{-n} \leq m \cdot 2^{-n}$$

folgt

$$m - 1 < l \cdot 2^n \leq m$$

Also gilt $m = l \cdot 2^n$ und damit $t_k = 2^{-n} l\, 2^n = l$ $\Box$

Lemma 7.4. :
Sei $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion, dann gibt es ein $f \in T$, mit $f < \varphi$.

Beweis: Sei $\widetilde{a}_k := \inf\{\varphi(x) \,:\, x \in [k, k+1]\}$ und $a_k := \min\{\widetilde{a}_l \,:\, l \leq k\} \cup \{1\}$ jeweils für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dann ist $(a_k)_k$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen mit $a_0 \leq 1$.

Wir konstruieren induktiv eine Folge $(t_k)_k$ mit (7.1.1) und $t_k - t_{k-1} < a_l$, falls $t_k \in]l, l+1]$.

Sei die Folge $(t_k)_k$ bereits konstruiert bis zu einem $t_K = l$ und sei $t_K - t_{K-1} < a_l$. Sei für $j \geq 1$ mit $t_{K+j} \leq l + 1$

$$t_{K+j} := \begin{cases} t_{K+j-1} + \frac{1}{2}(t_{K+j-1} - t_{K+j-2})\,, & \text{falls } t_{K+j-1} - t_{K+j-2} \geq a_{l+1} \\ t_{K+j-1} + (t_{K+j-1} - t_{K+j-2})\,, & \text{falls } t_{K+j-1} - t_{K+j-2} < a_{l+1} \end{cases} . \tag{7.4.1}$$

Dann ist (7.1.1) erfüllt. Es ist klar, daß dann

$$t_k - t_{k-1} \leq t_K - t_{K-1} < a_l \text{ für alle } k \geq K \text{ mit } t_k \leq l + 1 \text{ gilt.}$$

Es gibt ein J, so daß $t_{K+J} = l+1$. Wir zeigen, daß $t_{K+J} - t_{K+J-1} < a_{l+1}$ gilt:

Angenommen, es sei $t_{K+J} - t_{K+J-1} \geq a_{l+1}$, dann gilt für $t_{K+J-i} - t_{K+J-i-1} \geq a_{l+1}$ für jedes $1 \leq i \leq J$. Aus der Konstruktion in (7.4.1) folgt daher für $1 \leq i \leq J$

$$t_{K+J-i} - t_{K+J-i-1} = 2^{-J+i}(t_K - t_{K-1})$$

Andererseits folgt wegen

$$\begin{aligned} 1 = t_{K+J} - t_K &= \sum_{i=0}^{J-1}(t_{K+J-i} - t_{K+J-i-1}) \\ &= (t_K - t_{K-1}) \sum_{i=0}^{J-1} 2^{-J+i} \\ &< t_K - t_{K-1} < a_l \leq 1 \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Der Induktionsschritt der Konstruktion ist damit gezeigt. Für das Intervall $[0,1]$ setzen wir $t_0 = 0$ und $t_1 := 2^{-n_0}$, wobei $2^{-n_0} < a_0$ gelten soll. Wir benutzen (7.4.1), um die weiteren t_k bis zur Stelle 1 zu konstruieren.

Sei $f(x) := t_k - t_{k-1}$ für $x \in [t_{k-1}, t_k[$. f ist in T und $f(x) < \varphi(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}_0^+$ $\square$

Beweis der Proposition: Wir setzen

$$\begin{aligned} A_t &:= \{x \in \mathbb{R}^N : | x_j | \leq t \text{ für alle } 1 \leq j \leq N\} \\ R_t &:= \partial A_t \\ \psi(t) &:= \inf_{x \in R_t} \varphi(x) \,. \end{aligned}$$

Da ψ stetig ist, können wir Lemma 7.4 anwenden. Wir erhalten eine Folge $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ mit den genannten Eigenschaften. Nach Lemma 7.2 gibt es zu jedem $k \geq 1$ ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $t_k = m \cdot (t_k - t_{k-1})$. Daher läßt sich A_{t_k} durch exakt $(2m)^N$ achsenparallele abgeschlossene Kuben der Seitenlänge $(t_k - t_{k-1})$ überdecken. Die Menge dieser Kuben sei mit U_k bezeichnet.

Für $K \in U_k$ gilt

$$t_k - t_{k-1} < \varphi(x) \text{ für alle } x \in K ,$$

denn wenn t_k in $]l, l+1]$ liegt, dann folgt

$$t_k - t_{k-1} < a_l \leq \inf_{t\in[0,l+1]} \psi(t) = \inf_{x\in A_{l+1}} \varphi(x) \leq \inf_{x\in K} \varphi(x)$$

Sei $W_k := \{K \in U_k : \overset{\circ}{K} \cap A_{t_{k-1}} = \emptyset\}$. Dann sei $(L_i)_i$ eine Abzählung von $\bigcup_k W_k$. Es ist leicht zu sehen, daß $\bigcup_i L_i = \mathbb{R}^N$.

Ist l_i die Seitenlänge von L_i, dann gilt ferner, daß $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ entweder $l_i = l_j$ oder $l_i = 2l_j$ oder $l_j = 2l_i$ impliziert, denn ist $L_i \in W_k$, dann ist $L_j \in W_{k-1} \cup W_k \cup W_{k+1}$, wenn $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ ist.

Hieraus folgt wiederum, daß die Anzahl der Elemente in $J_i := \{j \in I : L_i \cap L_j \neq \emptyset\}$ durch $4^N - 2^N$ beschränkt ist.

Die gesuchte Überdeckung $(K_i)_{i\in I}$ erhalten wir durch jeweilige Vergrößerung der L_i zu einem Kubus K_i der Seitenlänge s_i mit

1) $\overset{\circ}{K}_i \supset L_i$,
2) $l_i < s_i < \inf_{x\in K_i} \varphi(x)$ und
3) $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ nur dann, wenn $L_i \cap L_j \neq \emptyset$,

für alle $i, j \in I$ $\square$

8 Ein Fortsetzungssatz für holomorphe Funktionen auf Steinschen Mannigfaltigkeiten

Als Anwendung von Satz 6.1 zeigen wir den folgenden Fortsetzungssatz für holomorphe Funktionen auf Steinschen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^N$.

Sei V eine abgeschlossene und damit Steinsche Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^N$. Dann gilt der folgende

Satz 8.1. :
Zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^N$ und jedem $\gamma > 1$ gibt es eine Konstante $B_{K,\gamma}$, so daß für alle $f \in H(V)$, und jede stetige Funktion $C_f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}_0^+$ das folgende äquivalent ist:

i) Es gibt eine plurisubharmonische Funktion $\varphi > 0$ auf dem $\mathbb{C}^N$, so daß

   a) $\log \mid f(z) \mid \leq \varphi(z)$ für jedes $z \in V$;

   b) $\sup_K \varphi(z) \leq \sup_{K\cap V} \log \mid f(z) \mid + \sup_K C_f(z)$ für jedes $K \subset \mathbb{C}^N$ kompakt mit $K \cap V \neq \emptyset$ und $K \supset\neq K_f := \{z \in V : \mid f(z) \mid \leq 1\}$.

ii) Für jedes $\gamma > 1$ gilt: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ und jedem Kompaktum $K_0 \subset \mathbb{C}^N$ mit $K_0 \cap V \neq \emptyset$ und $K_0 \supset\neq K_f$ gibt es eine ganze Funktion F_{m,K_0}, so daß

   a) $F_{m,K_0}(z) = f^m(z)$ für jedes $z \in V$;

   b) $\sup_K \mid F_{m,K_0}(z) \mid \leq e^{B_{K,\gamma}+m\gamma \sup_K C_f} \sup_{K\cap V} \mid f^m(z) \mid^\gamma$ für jede kompakte Menge $K_0 \supseteq K \supset\neq K_f$ mit $K \cap V \neq \emptyset$.

iii) Für jedes $\gamma > 1$ gilt: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es eine ganze Funktion F_m, so daß

   a) $F_m(z) = f^m(z)$ für jedes $z \in V$;

   b) $\sup_K \mid F_m(z) \mid \leq e^{B_{K,\gamma}+m\gamma \sup_K C_f} \sup_{K\cap V} \mid f^m(z) \mid^\gamma$ für jede kompakte Menge $K \supset\neq K_f$ mit $K \cap V \neq \emptyset$.

Bevor wir mit dem Beweis des Satzes beginnen, benötigen wir zwei Lemmata:

Lemma 8.2. :
Sei X ein lokalkompakter, σ-kompakter topologischer Raum. Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine kompakte Ausschöpfung von X mit $\overset{\circ}{K}_{n+1} \supset K_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Dann gibt es eine stetige positive Funktion ψ auf X, so daß für jedes $x \in X$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\psi(x) \leq \delta_n$ und $x \in K_n$.

BEWEIS:

Nach dem Lemma von Urysohn finden wir Funktionen $\varphi_n : X \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, so daß $\varphi_n(x) = 1$ für $x \in K_{n-1}$ und $\varphi_n(x) = 0$ für $x \in X\backslash K_n$ (siehe [15], Lemma 4.18). Sei $\psi_n := \max(\delta_1\varphi_1, \ldots, \delta_n\varphi_n)$. Dann gilt $\psi_n(x) \leq \delta_j$ für jedes $x \in X\backslash K_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, und $\psi_n(x) \geq \delta_n$ für jedes $x \in K_{n-1}$. Es gilt für jedes $m \geq n$ und jedes $x \in K_{n-1}$ daher $\psi_n(x) = \psi_m(x)$. Es wird also durch $\psi(x) := \lim_n \psi_n(x)$ auf X eine stetige positive Funktion definiert mit $\psi(x) = \psi_{n+1}(x) \leq \delta_n$ für jedes $x \in K_n\backslash K_{n-1}$ □

Lemma 8.3. :
Sei $\gamma > 1$, $\psi > 0$ eine stetige reellwertige Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^N$. Dann gibt es eine stetige reellwertige Funktion $\xi > 0$ auf Ω, so daß für jedes relativ kompakte, offene $U \subset \Omega$ mit $\sup\{\mid x-y \mid : \ x,y \in U\} < \inf_U \xi(z)$ folgt

$$\sup_U \psi \leq \gamma \inf_U \psi$$

Beweis:

Zu jedem $K \subset \Omega$ kompakt wählen wir $r_K > 0$, so daß $\mid \log\psi(x) - \log\psi(y) \mid < \log\gamma$ für $x, y \in K$ mit $\mid x-y \mid < r_K$. Hieraus folgt $\frac{\psi(x)}{\psi(y)} < \gamma$ für $\mid x-y \mid < r_K$.

Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Ohne Einschränkung ist $r_n := r_{K_n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Folge. Dann gibt es nach Lemma 8.2 eine stetige positive Funktion ξ auf Ω, so daß zu jedem $x \in \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\xi(x) \leq r_n$ und $x \in K_n$.

Sei $U \subset \Omega$ relativ kompakt mit $\operatorname{diam}(U) := \sup\{\mid x-y \mid : \ x,y \in U\} < \inf_U \xi(z)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $U \subset K_n$ und es gibt ein $x \in U$ mit $x \notin K_{n-1}$, dann folgt $\xi(x) \leq r_n$. Also gilt für alle $z, y \in U$, daß $\mid z-y \mid < \xi(x) \leq r_{K_n}$. Daher folgt $\sup_U \psi \leq \gamma \inf_u \psi$ □

Beweis von Satz 8.1: Wir zeigen zunächst die Äquivalenz von *ii*) und *iii*), wobei *iii*) $\Rightarrow$ *ii*) klar ist.

ii) $\Rightarrow$ *iii*): Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung des $\mathbb{C}^N$ mit $K_1 \supset\neq K_f$ und $K_1 \cap V \neq \emptyset$, dann ist $(\mid F_{m,K_n} \mid)_n$ eine gleichmäßig auf Kompakta beschränkte Folge ganzer Funktionen. Nach dem Satz von Stieltjes-Vitali in mehreren komplexen Veränderlichen (siehe z.B. [8], Corollary 2.2.5) gibt es eine ganze Funktion F_m, deren Betrag ein Häufungspunkt der obigen Folge ist. Damit erfüllt F_m die Aussagen iii), a) und iii), b).

i) $\Rightarrow$ *ii*): Wir nehmen zunächst an, daß φ stetig ist und wenden Lemma 8.3 auf φ an.

Es gibt eine offene Umgebung W von V im $\mathbb{C}^N$ und eine holomorphe Retraktionsabbildung $\pi : W \to V$ mit $\pi(z) = z$ für jedes $z \in V$ (siehe z.B. [11], Chap. VIII, Sec. C, Theorem 8).

Allgemeiner als hier benötigt zeigt Siu in [20], Corollary 1, daß für jede komplexe Untermannigfaltigkeit V einer Steinschen Mannigfaltigkeit Ω ein holomorpher Retrakt von einer in Ω offenen Umgebung von V auf V existiert.

Sei $\gamma > 1$. Wir wenden Lemma 8.3 auf φ, γ und W an und erhalten eine stetige positive Funktion ξ auf W mit den entsprechenden Eigenschaften.

Sei für ein $U \subset W$ offen und relativ kompakt in $\mathbb{C}^N$ und $x \in U$ jeweils $B_{x,U}$ die kleinste Kugel um $\pi(x)$, die U enthält.

Es sei $K \subset V$ kompakt, $x_0 \in K$ beliebig. Da ξ stetig und positiv ist auf W, gibt es daher ein ε_K, so daß für jedes $y \in K \cup (B_{2\varepsilon_K}(x_0) \cap V)$ gilt $B_{2\varepsilon_K}(y) \subset W$ und

$$\inf\{\xi(x) : x \in B_{2\varepsilon_K}(y)\} \geq \frac{1}{2}\xi(y) \geq 4\varepsilon_K .$$

Andererseits gibt es ein δ_K, so daß für jedes $x_0 \in K$ gilt

$$| \pi(x) - x | < \varepsilon_K \text{ für alle } x \in B_{\delta_K}(x_0) \text{ und}$$

$$\delta_K \leq \varepsilon_K \text{ und damit } \delta_K \leq \xi(x_0) .$$

Sei $x_0 \in K$ und η eine stetige positive Funktion auf dem $\mathbb{C}^N$ mit $\eta(x_0) \leq \delta_K$. Dann gilt für jede offene zusammenhängende Umgebung U von x_0 in W mit $\operatorname{diam}(U) < \inf_U \eta$, daß $U \subset B_{\delta_K}(x_0)$. Damit ist $| \pi(x) - x | < \varepsilon_K$ für jedes $x \in U$. Sei $y \in U$, dann ist

$$\operatorname{diam}(B_{y,U}) \leq 2(| \pi(x) - x | + \operatorname{diam}(U)) \leq 2(\varepsilon_K + \delta_K) \leq 4\varepsilon_K .$$

Da $| \pi(y) - x_0 | < 2\varepsilon_K$, gilt $4\varepsilon_K \leq \frac{\xi(\pi(y))}{2}$. Also folgt

$$\operatorname{diam}(B_{y,U}) \leq \inf\{\xi(x) : x \in B_{y,U}\} .$$

Sei nun $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine kompakte Ausschöpfung von V und $\delta_n := \delta_{K_n}$, dann gibt es nach Lemma 8.2 eine stetige positive Funktion η auf V, so daß zu jedem $x_0 \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\eta(x_0) \leq \delta_n$ und $x_0 \in K_n$. Sei $\widetilde{\eta}$ eine positive stetige Funktion auf dem $\mathbb{C}^N$ mit $\widetilde{\eta}(x) = \eta(x)$ für jedes $x \in V$ nach dem Theorem von Tietze-Urysohn (siehe z.B. [7], Theorem 2.1.8). Dann hat $\widetilde{\eta}$ die Eigenschaft, daß für eine offene zusammenhängende Menge $U \subset \mathbb{C}^N$, $U \cap V \neq \emptyset$ mit

$$\sup\{| x - y | : x, y \in U\} < \inf_U \widetilde{\eta}(z) \tag{8.3.1}$$

schon folgt $U \subset W$ und $\sup\{| z - y |: \; z, y \in B_{x,U}\} < \inf_{B_{x,U}} \xi(z)$ für jedes $x \in U$.

Wir wenden Satz 7.1 auf $\psi := \frac{1}{\sqrt{2N}}\widetilde{\eta}$ an und erhalten eine Überdeckung des $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$ mit achsenparallen Kuben $(U_i)_{i \in I}$.

Ist $M := 16^N - 4^N$, dann haben höchstens M paarweise verschiedene Überdeckungsmengen aus $(U_i)_{i\in I}$ einen nichtleeren Schnitt mit einer festen Überdeckungsmenge aus $(U_i)_{i\in I}$.

Es gilt $\sup\{| x - y |: \; x, y \in U_i\} < \inf_{U_i} \widetilde{\eta}$ für jedes $i \in I$. Hieraus folgt:

1) Ist $U_i \cap V \neq \emptyset$, dann folgt $U_i \subset W$ für alle $i \in I$.

2) Ist $x \in U_i$ für ein U_i mit $U_i \cap V \neq \emptyset$, dann folgt $\sup\{| z - y |: \; z, y \in B_{x,U_i}\} < \inf_{B_{x,U_i}} \xi$. Mit Lemma 8.3 folgt hieraus $\sup_{B_{x,U_i}} \varphi \leq \gamma \inf_{B_{x,U_i}} \varphi$ für jedes $x \in U_i$.

Sei $U_i \cap V \neq \emptyset$ und $x \in U_i$, dann folgt

$$
\begin{aligned}
\log | \, f(\pi(x)) \, | &\leq \varphi(\pi(x)) \\
&\leq \sup_{B_{x,U_i}} \varphi \\
&\leq \gamma \inf_{B_{x,U_i}} \varphi \\
&\leq \gamma \inf_{U_i} \varphi
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$
\sup_{U_i} \log | \, f(\pi(x)) \, | \leq \gamma \inf_{U_i} \varphi \tag{8.3.2}
$$

Wir setzen

$$
f_i(x) := \begin{cases} f(\pi(x)) & , \text{ falls } x \in U_i \text{ und } U_i \cap V \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .
$$

Sei ferner $f_{ij}(x) := f_i(x) - f_j(x)$ für alle $x \in U_{ij} := U_i \cap U_j$, $i, j \in I$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Sei $J := \{(i, j) \in I^2 : \; U_i \cap V \neq \emptyset$ und $U_j \cap V = \emptyset$ oder umgekehrt $\}$.

Es gilt für $(i,j) \in J$

$$\sup_{U_{ij}} \mid f_{ij} \mid \leq \begin{cases} \sup_{U_i} \mid f(\pi(x)) \mid, \text{ falls} & U_i \cap V \neq \emptyset \\ \sup_{U_j} \mid f(\pi(x)) \mid, \text{ falls} & U_j \cap V \neq \emptyset \end{cases} .$$

Ist $(i,j) \in I^2 \backslash J$, dann folgt $f_{ij} \equiv 0$.

Sei $h : I \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion mit $\sum_{i \in I} h(i) \leq 1$. Wir setzen $h_{ij} := \min(h(i), h(j))$ für $(i,j) \in I^2$.

Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i \neq j}} h_{ij} \sup_{U_{ij}} e^{-\gamma\varphi} \sup_{U_{ij}} \mid f_{ij} \mid &= \sum_{(i,j) \in J} h_{ij} \sup_{U_{ij}} e^{-\gamma\varphi} \sup_{U_{ij}} \mid f_{ij} \mid \\ &\leq \sum_{\substack{i \in I \\ U_i \cap V \neq \emptyset}} h(i) \sup_{U_i} e^{-\gamma\varphi} \sup_{U_i} \mid f(\pi(z)) \mid \\ &\leq \sum_{i \in I} h(i) \sup_{U_i} e^{-\gamma\varphi} e^{\gamma \inf_{U_i} \varphi} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{J}_V$ die Garbe von Keimen holomorpher Funktionen, die auf V verschwinden. $\mathcal{J}_V$ ist eine analytische kohärente Garbe (siehe z.B. [8], Theorem 6.5.2 i.V.m. Theorem 7.1.5).

Wir wenden nun Satz 6.1 auf die Kokette $(f_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ an. Es gilt $f_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{J}_V)$ und $\delta^1((f_{ij})_{ij}) = 0$, denn für $i,j,k \in I$ gilt $f_{ij} + f_{jk} - f_{ik} = 0$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$. (6.1.1) ist mit $\gamma\varphi$ erfüllt. Sei $V_i \subset\subset U_i$, $i \in I$ jeweils eine offene holomorph konvexe Teilmenge und es gelte $\bigcup_{i \in I} V_i = \mathbb{C}^N$.

Satz 6.1 liefert dann eine Kokette $(d_i)_{i \in I}$ mit $d_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{J}_V)$, $i \in I$ und $\delta^0((d_i)_i) = (f_{ij})_{ij}$ also $d_i - d_j = f_{ij}$ auf U_{ij} für alle $(i,j) \in I^2$.

Ferner liefert der Satz Konstanten $(D_i)_{i \in I}$ mit $0 < D_i \leq 1$, die unabhängig von φ und $(f_{ij})_{ij}$ sind, so daß die folgende Abschätzung gilt:

$$\sum_{i \in I} D_i \sup_{U_i} e^{-\gamma^{M+1}\varphi} \sup_{V_i} \mid d_i \mid \leq \sum_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i \neq j}} h_{ij} \sup_{U_{ij}} e^{-\gamma\varphi} \sup_{U_{ij}} \mid f_{ij} \mid \leq 1$$

Sei ohne Einschränkung $D_i \leq h_i$ für alle $i \in I$.

Wir erhalten zu f eine Fortsetzung F auf dem $\mathbb{C}^N$, indem wir

$$F(z) := f_i(z) - d_i(z)$$

für jedes $z \in U_i$, $i \in I$, setzen. F ist wohldefiniert und ganz, denn es gilt $f_i(z) - d_i(z) = f_j(z) - d_j(z)$ auf jeder nichtleeren Überlappungsmenge U_{ij}.

Wir untersuchen nun $\sup_K \mid F(z) \mid$ für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^N$:

Sei $I_K := \{i \in I \,:\, V_i \cap K \neq \emptyset\}$. I_K ist endlich, denn angenommen, es gebe eine Folge $(i_j)_j$ paarweise verschiedener Indizes in I_K, dann sei $(z_j)_j$ eine Folge von Punkten aus K mit $z_j \in V_{i_j}$. Sei $z \in K$ ein Häufungspunkt von $(z_j)_j$, dann gibt es ein $l \in I_K$, so daß $z \in V_l$. V_l hat dann allerdings einen nichtleeren Schnitt mit mehr als endlich vielen V_i, $i \in I_K$, was ein Widerspruch zu der endlichen Überlappungsordnung von $(V_i)_i$ ist.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sup_K \mid F(z) \mid &\leq \sup_K \mid F(z) \mid \sup_K e^{-\gamma^{M+1}\varphi} \sup_K e^{\gamma^{M+1}\varphi} (\min_{i\in I_K} D_i)(\min_{i\in I_K} D_i)^{-1} \\
&\leq \left(\sup_K e^{\gamma^{M+1}\varphi}\right) (\min_{i\in I_K} D_i)^{-1} \sum_{i\in I_K} D_i \sup_{V_i} \mid F(z) \mid \sup_{V_i} e^{-\gamma^{M+1}\varphi} .
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I_K} D_i \sup_{V_i} \mid f_i(z) - d_i(z) \mid \sup_{V_i} e^{-\gamma^{M+1}\varphi} &\leq 1 + \sum_{i\in I_K} h_i \sup_{V_i} \mid f_i(z) \mid \sup_{V_i} e^{-\gamma^{M+1}\varphi} \\
&\leq 1 + \sum_{\substack{i\in I_K \\ V_i\cap V\neq\emptyset}} h_i e^{\gamma^{M+1}\inf_{U_i}\varphi} e^{-\gamma^{M+1}\inf_{U_i}\varphi} \\
&\leq 2
\end{aligned}$$

erhalten wir mit $B_{K,\gamma} := \log(2(\min_{i\in I_K} D_i)^{-1})$

$$\sup_K \mid F(z) \mid \leq e^{B_{K,\gamma}} \sup_K e^{\gamma^{M+1}\varphi} \leq e^{B_{K,\gamma}+\gamma^{M+1}\sup_K C_f} \sup_{K\cap V} \mid f(z) \mid^{\gamma^{M+1}} . \tag{8.3.3}$$

Hierbei hängt die Konstante $B_{K,\gamma}$ nur von K, γ und der gewählten Überdeckung $(U_i)_i$ ab. M ist nur von N abhängig.

Wir betrachten nun die Potenzen f^m, $m \in \mathbb{N}$.

Es gilt für jedes Kompaktum $K \supset\neq K_f$ mit $K \cap V \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \log \mid f^m(z) \mid &\leq m \cdot \varphi \text{ für jedes } z \in V \\ \sup_K m \cdot \varphi(z) &\leq \sup_{K \cap V} \log \mid f^m(z) \mid + m \sup_K C_f(z)\,. \end{aligned}$$

Nach dem bisher Bewiesenen erhalten wir $F_m \in H(\mathbb{C}^N)$, $m \in \mathbb{N}$, mit

$$\begin{aligned} F_m &= f^m(z) \text{ für jedes } z \in V \text{ und} \\ \sup_K \mid F_m(z) \mid &\leq e^{B_{K,\gamma} + \gamma^{M+1} m \sup_K C_f} \sup_{K \cap V} \mid f^m(z) \mid^{\gamma^{M+1}} \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

für jedes Kompaktum $K \supset\neq K_f$ mit $K \cap V \neq \emptyset$.

Sei jetzt φ eine beliebige plurisubharmonische Funktion, die i) erfüllt. Dann wählen wir eine fallende Folge plurisubharmonischer C^∞-Funktionen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die punktweise gegen φ strebt (siehe z.B. [12], Theorem 2.9.2).

Es gibt also nach Lemma 8.2 stetige positive Funktionen $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf dem $\mathbb{C}^N$, so daß

$$\sup_K \varphi_k \leq \sup_{K \cap V} \log \mid f(z) \mid + \sup_K (C_f + G_k)$$

für jedes Kompaktum $K \supset\neq K_f$ mit $K \cap V \neq \emptyset$, wobei $\sup_K G_k \to 0$, falls $k \to \infty$. Wir erhalten also (8.3.4) auch mit $C_f + G_k$ an Stelle von C_f.

Wenn wir abhängig von K ein genügend großes k wählen, erhalten wir in Anwendung von (8.3.4) ein $F_{m,k}$, wobei $m \sup_K G_k$ durch ein weiteres γ abgefangen werden kann. Es gibt also für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $F_{m,K} \in H(\mathbb{C}^N)$ mit

$$\begin{aligned} F_{m,K} &= f^m(z) \text{ für jedes } z \in V \text{ und} \\ \sup_L \mid F_{m,K}(z) \mid &\leq e^{B_{L,\gamma} + \gamma^{M+2} m \sup_L C_f} \sup_{L \cap V} \mid f^m(z) \mid^{\gamma^{M+2}} \end{aligned}$$

für jedes kompakte L mit $K \supset L \supsetneq K_f$ und $L \cap V \neq \emptyset$.

Da wir den Beweis für jedes $\gamma > 1$ durchlaufen lassen können, folgt *ii*).

ii) $\Rightarrow$ *i*): Wir wählen eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $K_1 \supset K_f$ und $K_1 \cap V \neq \emptyset$. Es sei $\varphi_{m,n} := \log \mid F_{m,K_n} \mid$ für $n, m \in \mathbb{N}$, wobei das zugehörige γ in ii) jeweils $1 + \frac{1}{n}$ sein soll.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$\varphi_n(z) := \overline{\lim_{\zeta \to z}}\, \overline{\lim_{m}} \frac{\varphi_{m,n}(\zeta)}{m}$$

plurisubharmonisch, denn die $(\varphi_{n,m}/m)_m$ sind in m lokal gleichmäßig nach oben beschränkte plurisubharmonische Funktionen (vergleiche Theorem 2.9.17 in [12]).

Sei $K_n \supset K$ und $\overset{\circ}{K} \supset L$ für kompaktes L und $L \supsetneq K_f$. Ist z im Inneren von K, dann folgt

$$\varphi_n(z) \leq \overline{\lim_{m}} \sup_{\zeta \in K} \mid \varphi_{m,n}(\zeta)/m \mid \leq (1 + \frac{1}{n}) \sup_K C_f + (1 + \frac{1}{n}) \sup_{K \cap V} \mid f \mid$$

Wegen der Stetigkeit von C_f und $\mid f \mid$ folgt

$$\inf\{(1 + \frac{1}{n}) \sup_K C_f + (1 + \frac{1}{n}) \sup_{K \cap V} \mid f \mid : \ K \supset L\} = (1 + \frac{1}{n}) \sup_L C_f + (1 + \frac{1}{n}) \sup_{L \cap V} \mid f \mid$$

und damit

$$\sup_L \varphi_n \leq (1 + \frac{1}{n}) \sup_L C_f + (1 + \frac{1}{n}) \sup_{L \cap V} \mid f \mid \ .$$

Mit der gleichen Argumentation ist

$$\varphi(z) := \overline{\lim_{\zeta \to z}}\, \overline{\lim_{n}}\, \varphi_n(\zeta)$$

plurisubharmonisch und es gilt für jedes $K \subset \mathbb{C}^N$ kompakt mit $K \cap V \neq \emptyset$ und $K \supsetneq K_f$

$$\sup_K \varphi \leq \sup_K C_f + \sup_{K \cap V} \log \mid f \mid \ .$$

Ferner gilt für $z \in V$

$$\varphi_n(z) \geq \overline{\lim_{\substack{\zeta \to z \\ \zeta \in V}}}\, \overline{\lim_{m}} \frac{m \log \mid f(\zeta) \mid}{m} = \log \mid f(z) \mid \ .$$

Hieraus folgt $\varphi(z) \geq \log \mid f(z) \mid$ für jedes $z \in V$ $\Box$

Für Anwendungen ziehen wir aus dem Beweis des Satzes 8.1 folgendes Ergebnis:

Satz 8.4. :

Seien $\varphi_1 > 0$ und $\varphi_2 > 0$ stetige plurisubharmonische Funktionen auf dem $\mathbb{C}^N$. Sei ferner $\gamma > 1$ fest. Dann gibt es zu jedem Kompaktum K eine Konstante B_K, so daß zu jedem $f \in H(V)$ und jedem $\alpha > 0$ mit

$$\log \mid f(z) \mid \leq \varphi_1(z) + \alpha\varphi_2(z) \text{ für jedes } z \in V \tag{8.4.1}$$

eine ganze Funktion F existiert mit

a) $F(z) = f(z)$ *für jedes* $z \in V$,

b) $\sup_K \mid F(z) \mid \leq e^{B_K} e^{\gamma \sup_K \varphi_1 + \alpha\varphi_2}$ *für jedes Kompaktum* K.

Hierbei hängt B_K zwar von φ_1 und φ_2 ab, aber nicht von α.

BEWEIS:

Es gibt nach doppelter Anwendung von Lemma 8.3 eine Funktion ξ, so daß für jedes $U \subset \Omega$ mit

$$\sup\{\mid x - y \mid : \ x, y \in U\} < \inf_U \xi(z)$$

folgt

$$\sup_U \varphi_1 \leq \gamma \inf \varphi_1 \text{ und } \sup_U \varphi_2 \leq \gamma \inf \varphi_2 \,.$$

Für solche U gilt dann aber

$$\begin{aligned} \sup_U(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) &\leq \sup_U \varphi_1 + \sup_U \alpha\varphi_2 \\ &\leq \gamma \inf_U \varphi_1 + \alpha\gamma \inf_U \varphi_2 \\ &\leq \gamma \inf_U(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$.

In dem Beweis zu Satz 8.1 kann daher für jedes $\alpha > 0$ die gleiche Überdeckung $(U_i)_i$ gewählt werden.

Ist $f \in H(V)$ mit (8.4.1) gegeben, dann existiert nach (8.3.4) für jedes $\gamma > 1$ eine ganze Funktion F mit

$$\sup_K \mid F(z) \mid \leq e^{B_{K,\gamma}} \sup_K e^{\gamma^{M+1}(\varphi_1 + \alpha\varphi_2)},$$

wobei $B_{K,\gamma}$ unabhängig von f und α ist $\square$

9 Ein Kriterium für die Existenz eines linear zahmen Fortsetzungsoperators

Sei V eine in den $\mathbb{C}^N$ eingebettete zusammenhängende abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. φ sei eine stetige plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion des $\mathbb{C}^N$ mit $\inf_{z\in V}\varphi(z) < 1$.

Sei

$$K_n := \overline{\{z \in \mathbb{C}^N \,:\, \varphi(z) < n\}} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned} \| F \|_n &:= \sup_{z\in K_n} | F(z) | \text{ für } F \in H(\mathbb{C}^N) \text{ bzw.} \\ | f |_n &:= \sup_{z\in K_n\cap V} | f(z) | \text{ für } f \in H(V) \end{aligned}$$

Wir fixieren die Halbnormensysteme $(\| \ \|_n)_n$ und $(| \ |_n)_n$ und behandeln $(H(\mathbb{C}^N), \| \ \|_n)$ bzw. $(H(V), | \ |_n)$ von nun an als gradierte Fréchetträume.

Definition 9.1. :
Seien $(X, \| \ \|_n)$ und $(Y, | \ |_n)$ gradierte Fréchetträume, dann bezeichnen wir einen Operator $T : (X, \| \ \|_n) \to (Y, | \ |_n)$ als linear zahm, falls es Konstanten $\alpha \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $C_k > 0$ existiert mit

$$| T(x) |_k \leq C_k \| x \|_{\alpha k+\beta} \text{ für alle } x \in X .$$

Kann $\alpha = 1$ gewählt werden, so heißt der Operator zahm.

Zwei gradierte Fréchetträume X, Y heißen linear zahm bzw. zahm isomorph zueinander, falls es einen Isomorhismus $\Phi : X \to Y$ gibt, so daß Φ und Φ^{-1} linear zahm bzw. zahm sind. Zwei Gradierungen $(| \ |_n)_n$ und $(\| \ \|_n)_n$ auf X heißen linear zahm bzw. zahm äquivalent zueinander, falls die Identität $(X, | \ |_n) \to (X, \| \ \|_n)$ ein linear zahmer bzw. zahmer Isomorphismus ist.

Die Restriktionsabbildung $R : (H(\mathbb{C}^N), \| \ \|_n) \to (H(V), | \ |_n)$ ist ein zahmer Operator.

Sei $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \ldots$ eine wachsende Folge von Zahlen mit $a_k \sim k^{\frac{1}{d}}$ für ein festes $d \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\frac{1}{C} k^{\frac{1}{d}} \leq a_k \leq C k^{\frac{1}{d}} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Der Potenzreihenraum unendlichen Typs, definiert durch

$$\Lambda_\infty(a_k) := \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} : \| x \|_n^\infty := \sum_{k=0}^{\infty} | x_k | e^{na_k} < \infty\}$$

ist dann nuklear und zahm isomorph zu $\Lambda_\infty(k^{\frac{1}{d}})$ (vergleiche hierzu [15], Satz 29.6).

Bemerkung: Ist V eine Steinsche Mannigfaltigkeit der Dimension d und ist $H(V)$ isomorph zu einem Potenzreihenraum unendlichen Typs $\Lambda_\infty(a_k)$, dann ist $a_k \sim k^{\frac{1}{d}}$ (siehe hierzu z.B. [2], Proposition I.1).

Satz 9.2. :
Zu jedem linear zahmen Operator $T : (\Lambda_\infty(a_k), \| \ \|_n^\infty) \to (H(V), | \ |_n)$ *gibt es ein linear zahmes Lifting* $L : (\Lambda_\infty(a_k), \| \ \|_n^\infty) \to (H(\mathbb{C}^N), \| \ \|_n)$ *mit* $T = R \circ L$

Beweis:

Sei $f_k := Te_k$, wobei e_k der k-te Einheitsvektor in $\Lambda_\infty(a_k)$ sei, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$\sup_{K_n \cap V} | f_k | \leq C_n e^{(\alpha n + \beta)a_k}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

Wir wählen eine stetige plurisubharmonische Funktion φ_1 auf dem $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, so daß für jedes $n \geq 2$ gilt

$$\inf_{z \notin K_{n-1}} \varphi_1(z) \geq \log C_n \text{ und } \varphi_1(z) \geq \log C_1 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}^N .$$

Ferner sei eine plurisubharmonische Funktion φ_2 für jedes $z \in \mathbb{C}^N$ durch

$$\varphi_2(z) := \max(\alpha(\varphi(z) + 1) + \beta, \alpha + \beta)$$

definiert. Für diese gilt

$$\sup_{K_n} \varphi_2 \leq \alpha(n + 1) + \beta \text{ für alle } n \in \mathbb{N} .$$

Da wir Satz 8.4 anwenden wollen bei festem $\gamma > 1$, müssen wir (8.4.1) zeigen:

Sei $z \in (K_n \backslash K_{n-1}) \cap V$, $n \geq 2$, dann folgt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$\log | f_k(z) | \leq \sup_{K_n \cap V} \log | f_k | \leq \log C_n + (\alpha n + \beta)a_k .$$

Andererseits ist für jedes $z \notin K_{n-1} \cap V$

$$\varphi_1(z) \geq \log C_n \text{ und } \varphi_2(z) \geq \alpha((n-1)+1)+\beta$$

Ist $z \in K_1 \cap V$, dann folgt

$$\log \mid f_k(z) \mid \leq \sup_{K_1 \cap V} \log \mid f_k(z) \mid \leq \log C_1 + (\alpha+\beta)a_k \leq \varphi_1(z) + a_k\varphi_2(z)$$

Hieraus folgt insgesamt

$$\log \mid f_k(z) \mid \leq \varphi_1(z) + a_k\varphi_2(z) \text{ für alle } z \in V$$

Satz 8.4 liefert also für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine ganze Funktion F_k mit

a) $F_k(z) = f_k(z)$ für jedes $z \in V$, $k \in \mathbb{N}_0$,

b) $\sup_{K_n} \mid F_k(z) \mid \leq e^{B_{K_n} + \gamma \sup_{K_n}(\varphi_1 + a_k\varphi_2)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dies wenden wir für $\gamma = 2$ an und erhalten eine Folge ganzer Funktionen $(F_k)_k$ mit a) und b).

Wir setzen für eine Folge $(\lambda_k)_k \in \Lambda_\infty(a_k)$

$$L((\lambda_k)_k) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k F_k \,.$$

Durch die folgende Abschätzung wird die Wohldefiniertheit und linear Zahmheit gleichzeitig gezeigt. Die Linearität von L ist offensichtlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\| L((\lambda_k)_k) \|_n &= \sup_{K_n} \mid \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k F_k \mid \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mid \lambda_k \mid e^{B_{K_n} + 2\sup_{K_n}(\varphi_1 + a_k\varphi_2)} \\
&\leq e^{B_{K_n}} e^{2\sup_{K_n}\varphi_1} \sum_{k=0}^{\infty} \mid \lambda_k \mid e^{2(\alpha(n+1)+\beta)a_k} \\
&= D_n \| (\lambda_k)_k \|_{2\alpha n + 2(\alpha+\beta)} \,.
\end{aligned}$$

Der Satz ist bewiesen □

Wir zeigen nun das angekündigte Ergebnis:

Korollar 9.3. :
Ist $(H(V), |\ \ |_n)$ *linear zahm isomorph zu einem Potenzreihenraum unendlichen Typs* $\Lambda_\infty(a_k)$, *dann gibt es einen linear zahmen Ausdehnungsoperator* $(H(V), |\ \ |_n) \to (H(\mathbb{C}^N), \|\ \ \|_n)$.

Beweis: Sei $T : (\Lambda_\infty(a_k), \|\ \ \|_n^\infty) \to (H(V), |\ \ |_n)$ ein linear zahmer Isomorphismus.

Wir verwenden das im Beweis zu Satz 9.2 konstruierte linear zahme Lifting $L : (\Lambda_\infty(a_k), \|\ \ \|_n^\infty) \to (H(\mathbb{C}^N), \|\ \ \|_n)$ mit $T = R \circ L$. Wir setzen nun $E := L \circ T^{-1}$. E ist daher linear zahm und es gilt

$$R \circ E(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k f_k) = R \circ L((\lambda_k)_k) = R(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k F_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k f_k \,.$$

Also gilt $R \circ E = id_{H(V)}$ □

10 Konvexität plurisubharmonischer Funktionen auf abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^N$

In diesem Kapitel wollen wir die Konvexität plurisubharmonischer Funktionen auf Steinschen Untermannigfaltigkeiten V des $\mathbb{C}^N$ untersuchen und zwar relativ zu den Kugeln im $\mathbb{C}^N$ mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung.

Wir werden die Algebraizität von V in einen Zusammenhang mit der Qualität der Konvexität plurisubharmonischer Funktionen auf V bringen.

Ausgehend von der Existenz eines linear zahmen Ausdehnungsoperators verwenden wir die Argumentation von A. Aytuna in [3], um eine Konvexitätsbedingung für plurisubharmonische Funktionen auf V herzuleiten. Während A. Aytuna direkt die zur Algebraizität von V äquivalente Bedingung von A. Sadullaev (siehe [19], Theorem 2.2, bzw. Kapitel 1) zeigt, werden wir hier ferner zeigen, daß die Bedingung von A. Sadullaev äquivalent zu der angesprochenen Konvexitätsbedingung für plurisubharmonische Funktionen auf V ist.

Wir benötigen zunächst das folgende Lemma (siehe [18], Corollary 17.1.5), das direkt aus dem Satz über konvexe Hüllen von Caratheodory folgt (siehe [18], Theorem 17.1).

Hier können wir uns auf die Situation in der reellen Ebene beschränken:

Lemma 10.1. :
Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion und sei $E := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$. $ch(E)$ sei die konvexe Hülle von E. Sei ferner $h(x) := \inf\{y : (x, y) \in ch(E)\}$. Dann ist h eine konvexe Funktion und es gilt

$$h(x) = \inf\{\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\,,\ \lambda \in [0,1]\,,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+\}$$

Hieraus folgt eine Aussage über eine schwache Form von Konvexität:

Proposition 10.2. :
Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion und seien $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a \geq 1$. Dann sind äquivalent:

1) *$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(ax_1 + b) + (1-\lambda)f(ax_2 + b)$ für alle $\lambda \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$.*
2) *Es gibt ein konvexe Funktion h, so daß*

$$\begin{aligned} h(x) &\leq f(x) \text{ für alle } x \geq 0 \text{ und} \\ f(x) &\leq h(ax+b) \text{ für alle } x \geq 0\,. \end{aligned}$$

Beweis: 2)⇒1): Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ und $\lambda \in [0,1]$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq h(a(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + b) \\ &\leq \lambda h(ax_1 + b) + (1-\lambda)h(ax_2 + b) \\ &\leq \lambda f(ax_1 + b) + (1-\lambda)f(ax_2 + b)\,. \end{aligned}$$

1)⇒2): Wir wählen zu f die Funktion h aus Lemma 10.1. h ist konvex und liegt unterhalb von f. Sei $x \in \mathbb{R}_0^+$ fest. Ist $\varepsilon > 0$, dann können wir nach Lemma 10.1 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ wählen, so daß $ax + b = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ und $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq h(ax+b) + \varepsilon$. Wegen 1) ist

$$\begin{aligned} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) &\geq f(\lambda(\frac{x_1 - b}{a}) + (1-\lambda)(\frac{x_2 - b}{a})) \\ &= f(x)\,. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir $f(x) \leq h(ax+b)$. Da $x \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig gewählt war, folgt 2) □

Sei $\Phi \in PSH(\mathbb{C}^N)$, dann sei $M_\Phi(r) := \sup\{\Phi(z) : \mid z \mid = e^r\}$ für $r \in \mathbb{R}_0^+$. $M_\Phi(r)$ ist eine konvexe wachsende Funktion nach dem Hadamarschen Drei-Kreise-Satz für plurisubharmonische Funktionen (siehe z.B. [9], Theorem 4.1.13).

Sei V eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^N$ und sei durch die Spuren der Kugeln $B_r := \{z \in \mathbb{C}^N : \mid z \mid < e^r\}$, $r \in \mathbb{R}_0^+$, auf V eine Gradierung $\parallel f \parallel_n := \sup_{B_n \cap V} \mid f \mid$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in H(V)$, für $H(V)$ gegeben.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 10.3. :
Sei $E : H(V) \to H(\mathbb{C}^N)$ ein linear zahmer Ausdehnungsoperator, d.h. es gebe $a, b \in \mathbb{N}_0$, $a \geq 1$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ existiert mit

$$\sup_{B_n} \mid E(f)(z) \mid \leq C_n \parallel f \parallel_{an+b} \text{ für alle } f \in H(V)\,. \tag{10.3.1}$$

Dann gibt es zu jedem $\varphi \in PSH(V)$ ein $\Phi \in PSH(\mathbb{C}^N)$ mit

$$\begin{aligned} \sup_{B_r \cap V} \varphi(z) &\leq M_\Phi(r) \text{ und} \\ M_\Phi(r) &\leq \sup_{B_{ar+a+b} \cap V} \varphi(z) \text{ für alle } r \geq 0\,. \end{aligned}$$

Beweis:

Jedes $\psi \in PSH(\mathbb{C}^N)$ besitzt nach einem Ergebnis von Bremermann ([5], Theorem 2) eine Hartogsdarstellung auf dem $\mathbb{C}^N$

$$\psi(z) = \overline{\lim_n} \frac{\log \mid f_n(z) \mid}{c_n} \text{ mit } f_n \in H(\mathbb{C}^N) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Ohne Einschränkung gilt $c_n \nearrow \infty$. Der Fortsetzungssatz für plurisubharmonische Funktionen auf einer abgeschlossenen komplexen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^N$ von Sadullaev (siehe [6], Theorem 1.1) zeigt, daß auch jedes $\varphi \in PSH(V)$ eine Hartogsdarstellung

$$\varphi(z) = \overline{\lim_n} \frac{\log \mid f_n(z) \mid}{c_n} \text{ mit } f_n \in H(V) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \tag{10.3.2}$$

besitzt. Sei also $\varphi \in PSH(V)$ mit einer Darstellung wie in (10.3.2) gegeben.

Wir zeigen, daß $\{\frac{\log|E(f_n)|}{c_n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Familie ist.

Sei $D_r := \sup_{B_r \cap V} \varphi(z)$, $r \geq 0$. Nach dem Hartogslemma (siehe z.B. [19], Theorem 1.4) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $r' < r$ ein n_0, so daß für alle $n \geq n_0$

$$\sup_{B_{r'} \cap V} \frac{\log \mid f_n(z) \mid}{c_n} \leq D_r + \varepsilon\,.$$

Wir setzen $b' := a + b$. Für jedes $r \in \mathbb{R}_0^+$ liefert (10.3.1) für jedes $f \in H(V)$ die Abschätzung

$$\sup_{B_r} \mid E(f)(z) \mid \leq C_r \parallel f \parallel_{ar+b'}\,,$$

wobei $C_r = C_m$ für $m - 1 \leq r \leq m$ ist.

Wir erhalten zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $r' < r$ ein n_0, so daß für $n \geq n_0$ gilt

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_{r'}} \frac{\log \mid E(f_n)(z) \mid}{c_n} &\leq \frac{\log C_{r'}}{c_n} + \sup_{B_{ar'+b'} \cap V} \frac{\log \mid f_n(z) \mid}{c_n} \\
&\leq \frac{\log C_{r'}}{c_n} + D_{ar+b'} + \varepsilon \, .
\end{aligned}
$$

Also ist $\{\frac{\log|E(f_n)|}{c_n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Familie. Daher ist

$$
\Phi(z) := \overline{\lim_{\zeta \to z}} \, \overline{\lim_{n}} \frac{\log \mid E(f_n)(\zeta) \mid}{c_n}
$$

eine plurisubharmonische Funktion auf dem $\mathbb{C}^N$ (siehe z.B. [12], Theorem 2.9.17).

Für $r' < r'' < r$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
M_\Phi(r') &\leq \sup\{\Phi(z) : \mid z \mid < e^{r''}\} \\
&\leq \sup_{B_{r''}} \overline{\lim_{n}} \frac{\log \mid E(f_n)(z) \mid}{c_n} \\
&\leq \overline{\lim_{n}} \left(\frac{\log C_{r''}}{c_n} + D_{ar+b'} + \varepsilon\right) \\
&= D_{ar+b'} + \varepsilon \, .
\end{aligned}
$$

Da $M_\Phi(r)$ stetig ist in r, folgt insgesamt $M_\Phi(r) \leq \sup_{B_{ar+a+b} \cap V} \varphi(z)$.

Wegen des Maximumprinzips für plurisubharmonische Funktionen auf V gilt umgekehrt auch $\sup_{B_r \cap V} \varphi(z) \leq M_\Phi(r)$ für $r > 0$ $\square$

Man beachte, daß wegen der Regularisierung zwar $\varphi(z) \leq \Phi(z)$ für jedes $z \in V$, aber nicht notwendig $\varphi(z) = \Phi(z)$ gilt.

Sei für ein $\varphi \in PSH(V)$ eine Funktion $m_\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ durch $m_\varphi(r) := \sup_{B_r \cap V} \varphi(z)$ definiert, wobei wie oben $B_r := \{z \in \mathbb{C}^N : \mid z \mid < e^r\}$ sei.

Kombiniert mit Proposition 10.2 ergibt sich

Satz 10.4. :
Unter den Voraussetzungen von Satz 10.3 gilt für jedes $\varphi \in PSH(V)$ und jedes $\lambda \in [0, 1]$, sowie jedes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$

$$m_\varphi(\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \leq \lambda m_\varphi(ar_1 + b') + (1-\lambda)m_\varphi(ar_2 + b')\,, \tag{10.4.1}$$

wobei a, b aus Satz 10.3 sind und $b' = a + b$.

Wir zeigen nun, daß aus (10.4.1) bereits folgt, daß V algebraisch ist.

Satz 10.5. :
Sei V eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^N$ und für jede plurisubharmonische Funktion auf V gelte (10.4.1), dann ist V algebraisch.

Beweis:

Wir zeigen, daß die Siciaksche Extremalfunktion $S(z, K)$ für mindestens ein Kompaktum $K \subset V$ lokal beschränkt ist auf V. Dann können wir ein Ergebnis von Sadullaev anwenden, nach dem dann und nur dann V algebraisch ist. Sadullaevs Ergebnis ist allgemeiner als hier benötigt, es erfaßt nämlich auch Varietäten, die singuläre Punkte besitzen ([19], Theorem 2.2).

$S(z, K)$ ist für ein Kompaktum $K \subset V$ wie folgt definiert:

$$S(z, K) := \overline{\lim_{\zeta \to z}} \sup\{u(\zeta) : \ u \leq 0 \text{ auf } K\,, \ \ u \in L\}\,,$$

wobei

$$L := \{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : \ \text{ es gibt } \alpha = \alpha(u) : \ u(z) \leq \log(1+ \mid z \mid) + \alpha \text{ für alle } z \in \mathbb{C}^N\}\,.$$

Sei $u \in L$, $u \leq 0$ auf $\overline{B_0 \cap V}$. Sei $\varphi := u \mid_V$. Aus Proposition 10.2 folgt die Existenz einer konvexen Funktion h, so daß $h(r) \leq m_\varphi(r)$ und $m_\varphi(r) \leq h(ar + b)$ für alle $r \geq 0$. Also ist

$$\begin{aligned} h(r) &\leq \sup\{\log(1+ \mid z \mid) + \alpha(u) : \mid z \mid < e^r\} \\ &\leq \log(1 + e^r) + \alpha(u) \\ &\leq r + \alpha(u) + \log 2 \end{aligned}$$

für $r \geq 0$.

Damit ist h eine lineare Funktion mit Steigung kleiner oder gleich 1 auf $\mathbb{R}_0^+$ und wegen $h(0) \leq m_\varphi(0) \leq 0$ liegt h unterhalb der Identität $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.

Ist $z \in V$, dann wählen wir $r \geq 0$, so daß $z \in B_r \cap V$. Also gilt

$$u(\zeta) = \varphi(\zeta) \leq m_\varphi(r) \leq h(ar + b) \leq ar + b$$

für alle $\zeta \in V$ nahe z. Damit ist $S(z, \overline{B_0 \cap V})$ lokal beschränkt in V $\square$

Literatur

[1] Aytuna, A., *On the linear topological structure of spaces of analytic functions*, Doğa Turkish J. Math **10** (1986), 46-49.

[2] Aytuna, A., *Stein spaces for which O(M) is isomorphic to a power series space*, Advances in the theory of Fréchet spaces (ed: T. Terzioğlu), 115-154, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[3] Aytuna, A., *Linear tame extension operators from closed subvarieties of* $\mathbb{C}^d$, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 759-763.

[4] Aytuna, A., Krone, J., Terzioğlu, T., *Complemented infinite type power series subspaces of nuclear Fréchet spaces*, Math. Ann. **283** (1989), 193-202.

[5] Bremermann, H.J., *On the conjecture of equivalence of plurisubharmonic functions and Hartogs functions*, Math. Ann. **131**, 76-86.

[6] Cegrell, U., Sadullaev, A., *Approximation of plurisubharmonic functions and the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator*, Math. Scand. **71** (1992), 62-68.

[7] Engelking, R., *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1998.

[8] Hörmander, L., *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland, Amsterdam, 1990, 3rd edition.

[9] Hörmander, L., *Notions of convexity*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1994.

[10] Grauert, H., Fritzsche, K., *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[11] Gunning, R., Rossi, H., *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, 1965.

[12] Klimek, M., *Pluripotential theory*, Clarendon Press, Oxford-New York-Tokyo, 1991, London Math. Soc. Monographs N.S. 6.

[13] Köthe, G., *Topological vector spaces II*, Grundlehren der Math. Wiss. 257, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[14] Kunz, E., *Introduction to Commutativ Algebra und Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1985.

[15] Meise, R., Vogt, D., *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1992.

[16] Meise, R., Vogt, D., *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[17] Mityagin, V.S., Khenkin, G.M., *Linear problems of complex analysis*, Russian Math. Surveys **26** (1971), 99-164.

[18] Rockafellar, T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.

[19] Sadullaev, A., *An estimate for polynomials on analytic sets*, Math. USSR Izvestiya **20** (1983), 493-502.

[20] Siu, Y., *Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood*, Inv. math. **38** (1976), 89-100.

[21] Vogt, D., *On the functor* $Ext^1(E, F)$ *for Fréchet spaces*, Studia Math. **85** (1987), 163-197.

[22] Vogt, D., *Power series spaces representations of nuclear Fréchet spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 191-208.

[23] Zaharyuta, V.P., *Isomorpisms of spaces of analytic functions*, Sov. Math. Dokl. **22** (1980), 631-634.