

Verifizierte Einschließung der kritischen Last beim Knicken schwerer Gestänge

Vom Fachbereich Mathematik der
Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal
angenommene **D i s s e r t a t i o n**
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

von
Dipl.-Math. Olaf Schwarber
aus
Wuppertal

Tag der mündlichen Prüfung:
19. Februar 1999

Inhaltsverzeichnis

Danksagungen	4
Einleitung	5
1 Grundlagen	9
1.1 Die Theorie der Eigenwertaufgaben	9
1.2 Spezialisierung der Eigenwertprobleme	11
1.2.1 Selbstadjungierte und volldefinite Eigenwertprobleme	11
1.2.2 Die verallgemeinerte Orthogonalität	14
1.2.3 Minimaleigenschaften der Eigenwerte	15
1.2.4 Ergebnisse aus der Theorie der FOURIER-Reihen	16
1.3 Das Knicken schwerer Gestänge als Differentialgleichungseigenwertproblem	17
1.3.1 Problemstellung	17
1.3.2 Transformation	19
1.3.3 Nachweis der Selbstadjungiertheit und Volldefinitheit	21
1.3.4 Zusammenfassung	23
2 Funktionalanalytische Methoden	25
2.1 Bilinearformen und Eigenwertprobleme	25
2.2 Das Knicken schwerer Gestänge als funktionalanalytisches Eigenwertproblem	28
2.3 Einschließungen der Eigenwerte	29
2.4 Untere Schranken für die Eigenwerte	32
2.4.1 Die Theoreme von GOERISCH und LEHMANN	32
2.4.2 Die Rolle des Parameters σ im Theorem von LEHMANN	40
2.5 Obere Schranken für die Eigenwerte	41
3 Numerischer Zugang	47
3.1 Vorbereitungen	47
3.1.1 Das Verfahren von LOHNER	48

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
3.1.2 Das Verfahren von BEHNKE	49
3.1.3 Die Definition der Matrizen in den Theoremen von LEHMANN und RAYLEIGH-RITZ	60
3.1.4 Störungsrechnung	61
3.2 Das Programm	65
3.2.1 Die verwendeten Module	66
3.2.2 Verifikation der σ	69
3.2.3 Der Algorithmus	69
3.3 Numerische Resultate	71
3.3.1 Gemeinsamkeiten aller vier behandelten Eigenwertpro- bleme	72
3.3.2 Oben und unten drehbar gelagertes Gestänge	75
3.3.3 Unten drehbar gelagertes, oben eingespanntes Gestänge	81
3.3.4 Unten eingespanntes, oben drehbar gelagertes Gestänge	84
3.3.5 Oben und unten eingespanntes Gestänge	86
3.3.6 Anknüpfung an den Artikel von WILLERS	90
3.3.7 Ein Beispiel	91
Symbolverzeichnis	93
Literaturverzeichnis	94

Danksagungen

Ich danke Herrn Prof. Dr. Gerhard Heindl für die Vergabe dieses interessanten und mathematisch vielschichtigen Themas, für die vorbildliche Betreuung der Arbeit und ihre faire Begutachtung. Herrn Priv.-Doz. Dr. Ernst-Peter Beisel danke ich für die ermutigenden Diskussionen, die ich mit ihm führen konnte und für die Übernahme des Korreferates.

Diese Dissertation ist meiner Familie gewidmet, die mir stets den nötigen Rückhalt gab. Danke für alles.

Einleitung

In vielen technischen und ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen spielen Eigenwertaufgaben eine wichtige Rolle, da sie Modelle für die Beschreibung und Behandlung von Beobachtungen darstellen, die entweder durch Experimente oder natürliche Vorgänge gewonnen wurden. Ein berühmtes Beispiel ist das von LEONHARD EULER 1744 behandelte Problem, die kritische Last, die sogenannte EULERSche Knicklast, für einen auf Druck beanspruchten schlanken Stab zu bestimmen. Bei Überschreitung dieser Last knickt der Stab aus. In Abhängigkeit von den verschiedenen Lagerungsarten des Stabes ergeben sich die vier EULERSchen Knickfälle, die jeder Ingenieurstudent in den mechanischen Grundvorlesungen kennenlernt.

Bei dem Modell der EULERSchen Knickfälle wird das Eigengewicht des Stabes vernachlässigt. Bei kurzen Stäben ist diese Vernachlässigung zulässig, da das Eigengewicht in diesem Fall die Knickkraft kaum beeinflusst. Bei langen, schweren Stäben, z.B. Bohrgestängen, wirkt sich das Eigengewicht jedoch wesentlich aus. WILLERS hat daher in [32] eine Differentialgleichung hergeleitet, die das Knicken schwerer Gestänge unter Berücksichtigung des Eigengewichtes beschreibt. Sie lautet, zusammen mit den Randbedingungen für den beiderseits gelenkig gelagerten Fall

$$w^{(4)} + \frac{1}{EI} [(P - \mu gx) w']' = 0 \quad , \quad w(0) = w(l) = w''(0) = w''(l) = 0 \quad , \quad (0.1)$$

wobei l die Länge des Gestänges angibt, E , I , μ und g Konstanten sind und P den zu bestimmenden Eigenwert darstellt. Die WILLERSsche Differentialgleichung ist die Grundlage dieser Arbeit. Definiert man $\lambda := \frac{P}{EI}$, so stellt sich die Frage nach dem kleinsten positiven λ , für das (0.1) eine nichttriviale Lösung besitzt. Das zu diesem λ gehörige P mit $P = \lambda \cdot EI$ heißt *kritische Last*.

WILLERS überführt in seinem Artikel die Differentialgleichung in eine BESSELSche Differentialgleichung und behandelt sie dann unter Zuhilfenahme von BESSELfunktionen, eine Methode, die sich bei Ingenieuren großer Beliebtheit

erfreut, da es für BESSELfunktionen umfangreiche Tabellen gibt, die einen schnellen Zugang ermöglichen (s. [30]).

Spätere Untersuchungen haben ergeben, daß die numerischen Werte, die WILLERS errechnet hat, zum Teil ungenau bzw. falsch sind (vgl. [17], [22]). Alle angegebenen Korrekturen haben jedoch den Nachteil, daß sie mit herkömmlicher Gleitpunktarithmetik berechnet wurden und nur (mehr oder weniger genaue) *Näherungen* für die kritische Last liefern.

Ziel dieser Arbeit ist es daher zunächst, ein solides theoretisches Fundament für die Behandlung der WILLERSschen Differentialgleichung in Zusammenhang mit verschiedenen Randbedingungen zu schaffen. Diese Randbedingungen werden durch unterschiedliche Lagerungsarten des Gestänges gegeben, es wird die Situation des

- oben und unten drehbar gelagerten,
- unten drehbar gelagerten, oben eingespannten,
- unten eingespannten, oben drehbar gelagerten,
- oben und unten eingespannten

Gestänges betrachtet. Dies führt auf die Untersuchung von vier WILLERSschen Eigenwertproblemen. Im numerischen Teil wird dann für jedes dieser vier Eigenwertprobleme auf der Grundlage der Computerarithmetik, wie sie in [15] und [16] beschrieben ist, eine verifizierte *Einschließung* für den kleinsten Eigenwert berechnet, aus dem bei vorgegebener Biegesteifigkeit EI eine Einschließung für die kritische Last bestimmt werden kann.

Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert.

Im ersten Teil werden die für den Umgang mit Eigenwertaufgaben notwendigen grundlegenden Begriffe und Sätze bereitgestellt. In diesem Zusammenhang wird die für Eigenwertprobleme wichtige Klasse der Vergleichsfunktionen eingeführt. Hierbei handelt es sich um hinreichend oft differenzierbare Funktionen, die alle Randbedingungen der Eigenwertaufgabe erfüllen. Es wird gezeigt, daß sich die vier genannten WILLERSschen Eigenwertprobleme in die in [5] ausführlich beschriebene Klasse der *volldefiniten* und *selbstadjungierten* Eigenwertprobleme einordnen lassen. Damit ist für jeden der vier Lagerungsfälle die Existenz unendlich vieler, positiver reeller Eigenwerte sichergestellt. Um das Bild zu vervollständigen, wird auf die Minimaleigenschaften der Eigenwerte hingewiesen.

Der zweite Teil steckt einen funktionalanalytischen Rahmen ab, der es ermöglicht, die Differentialgleichungseigenwertprobleme mit Hilfe von symmetrischen Bilinearformen zu behandeln und damit Einschließungssätzen zugänglich zu machen. Ausgehend von Eigenwertproblemen der Struktur

„Finde Paare (λ, ϕ) , so daß

$$M(f, \phi) = \lambda N(f, \phi) \quad (0.2)$$

für alle $f \in D_M$ gilt.“,

wobei $M(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische und $N(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische und positiv definite Bilinearform ist, werden als zentrale Aussagen die Theoreme von GOERISCH und LEHMANN für die Bestimmung verifizierter unterer Schranken von (0.2), ein Variationsprinzip und darauf aufbauend das Theorem von RAYLEIGH-RITZ für gesicherte obere Schranken bewiesen. Ferner wird ein Vergleichssatz hergeleitet, mit dessen Hilfe sich später grobe untere Schranken für die Eigenwerte von (0.2) ermitteln lassen, die wiederum für die Bestimmung eines Parameters in den Theoremen von GOERISCH und LEHMANN benötigt werden.

Im dritten Teil werden die Ergebnisse der beiden ersten Kapitel mit der Zielsetzung zusammengeführt, daraus numerische Resultate in Form von Einschließungsintervallen zu gewinnen. Es wird darauf hingewiesen, daß die Bestimmung von Eigenwerteinschließungen bei funktionalanalytischen Eigenwertproblemen der Struktur (0.2) nach den Theoremen von GOERISCH und LEHMANN sowie RAYLEIGH-RITZ auf das Lösen von Matrixeigenwertaufgaben der Struktur

$$Ax = \lambda Bx \quad (0.3)$$

mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ und symmetrischer und positiv definiter Matrix $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ führt. Es sind zwei Matrizeneigenwertprobleme der Gestalt (0.3) zu lösen, das LEHMANN-GOERISCH-Problem für die Einschließung unterer Schranken und das RAYLEIGH-RITZ-Problem für die Einschließung oberer Schranken. Bei geeigneter Wahl der benötigten Parameter liefern die Einschließungen des LEHMANN-GOERISCH-Problems und des RAYLEIGH-RITZ-Problems garantierte untere und obere Schranken für die kritische Last.

Grundlage für die Berechnungen sind Verfahren von LOHNER und BEHNKE zur Bestimmung von Eigenwerteinschließungen für spezielle und allgemeine Matrizeneigenwertprobleme. Diese Verfahren werden modifiziert und auf die WILLERSSchen Eigenwertprobleme angepaßt. Es werden die im Programm

benutzten Module sowie der Algorithmus für die Problemlösung erläutert. Den Schluß bilden die für die einzelnen Lagerungsarten ermittelten numerischen Ergebnisse, eine Anknüpfung an den WILLERSSchen Artikel zur Verdeutlichung der Vorzüge der in dieser Arbeit durchgeführten verifizierenden Rechnungen sowie ein Beispiel mit konkreten Materialdaten.

Die für die Lösung der vier WILLERSSchen Eigenwertprobleme erforderlichen Orthogonalisierungen und Integrationen von Funktionen sowie das Auswerten von Bilinearformen wurden unter Verwendung des Computeralgebrasystems *Mathematica 3.0*, die numerischen Berechnungen mit Hilfe der Programmiersprache PASCAL-XSC auf einer *Sun*-Unix-Workstation durchgeführt.

Definitionen, Theoreme, Korollare etc. sind innerhalb eines Kapitels fortlaufend nummeriert. Aussagen, auf die an anderer Stelle in der Arbeit nochmals Bezug genommen wird, sind mit einer Zahl am rechten Rand versehen, auch hier erfolgt die Numerierung innerhalb eines Kapitels fortlaufend. Ein Kapitel ist unterteilt in Abschnitte und ggf. in Unterabschnitte, wobei das Kapitel eine einteilige, der Abschnitt eine zweiteilige und der Unterabschnitt eine dreiteilige Numerierung erhält. Das Ende eines Beweises ist durch ein ■ gekennzeichnet.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Die Theorie der Eigenwertaufgaben

Wir wollen uns im Verlauf dieser Arbeit mit Eigenwertproblemen beschäftigen, die - für unterschiedliche Lagerungsarten - das Knickverhalten von Gestängen unter Berücksichtigung des Eigengewichtes beschreiben. Daher ist es erforderlich, zunächst einige Bezeichnungen und Begriffe aus der Theorie der Eigenwertaufgaben einzuführen.

Definition 1.1 *Es sei $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ ein kompaktes Intervall, $k, m, n \in \mathbf{N}_0$ mit $m > n$. Ferner seien $f_k, g_k \in \mathcal{C}^k(I)$, $y \in \mathcal{C}^{2m}(I)$ und \mathcal{M} und \mathcal{N} lineare homogene Differentialoperatoren mit*

$$\mathcal{M}(y) = \sum_{k=0}^m (-1)^k [f_k \cdot y^{(k)}]^{(k)}, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{N}(y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k [g_k \cdot y^{(k)}]^{(k)}. \quad (1.2)$$

f_m und g_n mögen auf I nicht identisch verschwinden.

Für $l = 1, \dots, 2m$ sei

$$U_l(y) = \sum_{k=0}^{2m-1} \alpha_k^l y^{(k)}(a) + \beta_k^l y^{(k)}(b),$$

wobei die α_k^l und β_k^l gegebene reelle, nicht sämtlich verschwindende Konstanten sind. Falls $n > 0$, so nennen wir

$$\mathcal{M}(y) = \lambda \mathcal{N}(y) \quad , \quad U_l(y) = 0 \quad (l = 1, \dots, 2m) \quad (1.3)$$

ein **allgemeines Eigenwertproblem**, falls $n = 0$, sprechen wir von einem **speziellen Eigenwertproblem**. Die Gleichungen

$$U_l(y) = 0 \quad (l = 1, \dots, 2m) \quad (1.4)$$

heißen **Randbedingungen**.

Wir gehen ab jetzt davon aus, daß λ in den Randbedingungen nicht auftritt. Die Randbedingungen werden eingeteilt in wesentliche und restliche Randbedingungen:

Definition 1.2 Aus möglichst vielen der $2m$ gegebenen Randbedingungen (1.4) seien durch Linearkombination der Randbedingungen die Ableitungen m -ter und höherer Ordnung entfernt worden. Dadurch seien j Randbedingungen entstanden, die nur Ableitungen bis zur höchstens $(m - 1)$ -ten Ordnung enthalten und **wesentliche Randbedingungen** genannt werden, während sich aus keiner der $(2m - j)$ übrigen Randbedingungen alle Ableitungen m -ter und höherer Ordnung entfernen lassen; die letztgenannten heißen **restliche Randbedingungen**.

Im weiteren Verlauf verwenden wir verschiedene Funktionenklassen, die bei der Behandlung von Eigenwertproblemen eine Rolle spielen. Sie werden eingeführt durch folgende

Definition 1.3 Es sei $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ ein kompaktes Intervall. Vorgelegt sei ferner das Eigenwertproblem (1.3). Eine reelle Funktion u , die auf $[a, b]$ **nicht** identisch verschwindet, heißt

- a) **zulässige Funktion**, falls $u \in C^m(I)$ und u die wesentlichen Randbedingungen erfüllt.
- b) **Vergleichsfunktion**, falls $u \in C^{2m}(I)$ und u alle Randbedingungen erfüllt. Die Klasse aller Vergleichsfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(I)$.
- c) **Eigenfunktion**, falls $u \in C^{2m}(I)$ und u alle Randbedingungen sowie für ein (reelles oder komplexes) λ die Differentialgleichung erfüllt. Dieses λ heißt dann **Eigenwert** von (1.3). Die Klasse aller Eigenfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(I)$.

1.2 Spezialisierung der Eigenwertprobleme

Es ist zunächst einmal gar nicht klar, ob (1.3) überhaupt Eigenwerte besitzt. Im Falle der Existenz stellt sich die Frage, ob sie reell oder komplex sind. In [5], S. 44-46 finden sich Beispiele für Eigenwertaufgaben, bei denen keine bzw. nur komplexe Eigenwerte vorhanden sind.

In den Abschnitten 1.2.1 und 1.2.2 wird die Annahme getroffen, daß die dort diskutierten Eigenwertprobleme Eigenwerte besitzen. Von dieser Annahme ausgehend werden Aussagen über Art und Verteilung der Eigenwerte hergeleitet. Diese Informationen sind wichtig für die Untersuchung der WILLERSSchen Eigenwertprobleme.

Satz 1.12 sagt aus, daß für selbstadjungierte und volldefinite Eigenwertprobleme die Existenz von unendlich vielen reellen positiven Eigenwerten gewährleistet ist. Die oben genannte Annahme trifft somit für diese Klasse von Eigenwertproblemen, in die, wie in Abschnitt 1.3 gezeigt wird, auch die zu untersuchenden WILLERSSchen Eigenwertprobleme fallen, zu.

1.2.1 Selbstadjungierte und volldefinite Eigenwertprobleme

Wie bereits angedeutet, läßt sich bei Eigenwertaufgaben in Zusammenhang mit Differentialgleichungen unter gewissen Voraussetzungen sicherstellen, daß die Eigenwerte reell sind. Als Grundlage dient

Definition 1.4 *Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Vorgelegt sei wieder das Eigenwertproblem (1.3). Für $u, v \in \mathcal{V}(I)$ sei*

$$\begin{aligned} M(u, v) &:= \int_a^b u \mathcal{M}(v) dx \\ N(u, v) &:= \int_a^b u \mathcal{N}(v) dx \end{aligned}$$

- a) *Das Eigenwertproblem (1.3) heißt **selbstadjungiert**, falls $M(u, v) = M(v, u)$ und $N(u, v) = N(v, u)$ für alle $u, v \in \mathcal{V}(I)$.*
- b) *Das Eigenwertproblem (1.3) heißt **positiv definit**, falls für jeden Eigenwert λ gilt: λ ist reell und $\lambda > 0$.*
- c) *Das Eigenwertproblem (1.3) heißt **volldefinit**, falls $M(u, u) > 0$ und $N(u, u) > 0$ für alle $u \in \mathcal{V}(I)$.*

d) Ist das Eigenwertproblem (1.3) volldefinit, so definieren wir für $u \in \mathcal{V}(I)$ den **Rayleighschen Quotienten** $R(u)$ durch

$$R(u) := \frac{M(u, u)}{N(u, u)} .$$

Es läßt sich leicht folgendes einsehen:

Satz 1.5 *Ein volldefinites Eigenwertproblem der Gestalt (1.3) ist positiv definit.*

Beweis:

Es sei λ ein Eigenwert des volldefiniten Problems und y eine zugehörige Eigenfunktion, d.h. es gilt $y \in \mathcal{E}(I) \subset \mathcal{V}(I)$ und

$$\mathcal{M}(y) = \lambda \mathcal{N}(y)$$

und somit auch

$$M(y, y) = \lambda N(y, y) .$$

Da $R(u) > 0$ für alle $u \in \mathcal{V}(I)$, folgt aus der Beziehung $R(y) = \lambda$ sofort $\lambda > 0$. ■

Die folgenden Überlegungen geben Aufschluß über die Verteilung der Eigenwerte. Betrachtet werde auf dem Intervall $[a, b]$ ein allgemeines Eigenwertproblem, bestehend aus einer homogenen linearen Differentialgleichung der Ordnung $2m$, die nach Ausdrücken mit und ohne λ geordnet ist, d.h.

$$\mathcal{M}(y) = \lambda \mathcal{N}(y) \tag{1.5}$$

und den (von λ unabhängigen) Randbedingungen

$$U_l(y) = 0, \quad l = 1, \dots, 2m. \tag{1.6}$$

Es sei $\{y_1^\lambda(x), \dots, y_{2m}^\lambda(x)\}$ ein reelles Fundamentalsystem von (1.5), in dem λ als Parameter auftritt. Die allgemeine Lösung von (1.5) hat daher die Gestalt

$$y^\lambda(x) = \sum_{i=1}^{2m} C_i y_i^\lambda(x) .$$

Um die Lösung des Eigenwertproblems zu bestimmen, müssen die Unbekannten C_i , $i = 1, \dots, 2m$, an die Randbedingungen (1.6) angepaßt werden. Dies

führt auf das Lösen eines homogenen linearen Gleichungssystems mit $2m$ Gleichungen für die $2m$ Unbekannten C_i :

$$\sum_{i=1}^{2m} C_i U_l(y_i^\lambda(x)) = 0 \quad , \quad l = 1, \dots, 2m.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung $(C_1, \dots, C_{2m})^T$, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet:

$$\Delta(\lambda) := \det \begin{bmatrix} U_1(y_1^\lambda(x)) & \dots & U_1(y_{2m}^\lambda(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{2m}(y_1^\lambda(x)) & \dots & U_{2m}(y_{2m}^\lambda(x)) \end{bmatrix} = 0 . \quad (1.7)$$

Diese Determinante wird in [6], S. 133 **Frequenzdeterminante** genannt. Dieser Begriff wird auch in dieser Arbeit verwendet. Mit Hilfe der Frequenzdeterminante können Aussagen über die Verteilung der Eigenwerte gemacht werden. Geht man davon aus, daß für festes $x \in [a, b]$ die $y_i^\lambda(x)$, $i = 1, \dots, 2m$, auf dem Gebiet $G = \mathbf{C}$ oder - wie bei den Funktionen in (3.12) - auf dem Gebiet $G = \mathbf{C}^- := \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ (die „längs der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene“) holomorph in λ sind und beachtet man, daß λ nicht in den $U_l(y)$, $l = 1, \dots, 2m$, auftaucht und diese daher ebenfalls holomorph von λ abhängen, so folgt daraus, daß auf G auch $\Delta(\lambda)$ holomorph in λ ist. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ergeben sich zwei Alternativen:

1. $\Delta(\lambda) \equiv 0$. Dann ist jedes $\lambda \in G$ ein Eigenwert.
2. $\{\lambda \in G : \Delta(\lambda) = 0\}$ liegt diskret in G .

Ist ein gegebenes allgemeines Eigenwertproblem volldefinit, so scheidet nach Satz 1.5 die erste Möglichkeit aus. Falls ein volldefinites Eigenwertproblem Eigenwerte besitzt, so gibt es höchstens abzählbar viele, isoliert liegende, die sich im Endlichen nicht häufen. Diese Eigenwerte lassen sich dann der Größe nach ordnen: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$.

Bemerkung 1.6 Die Definition eines allgemeinen Eigenwertproblems kann auch in einen allgemeineren, funktionalanalytischen Rahmen gestellt werden. Wir werden darauf in Abschnitt 2.1 zurückkommen und sehen, daß für unsere Problematik die Definitionen gleichwertig sind.

1.2.2 Die verallgemeinerte Orthogonalität

Im Zusammenhang mit selbstadjungierten und volldefiniten Eigenwertaufgaben spielt der Begriff *Orthogonalität* für die Charakterisierung der Eigenfunktionen eine wichtige Rolle. Neben der kanonischen Orthogonalitätsdefinition für stetige Funktionen läßt sich mit Hilfe von $M(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ eine weitere Orthogonalitätsrelation erklären.

Definition 1.7 *Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall.*

a) $u, v \in \mathcal{C}(I)$ heißen **orthogonal**, falls

$$\int_a^b u v dx = 0 .$$

b) $u \in \mathcal{C}(I)$ und $v \in \mathcal{C}^{2m}(I)$ heißen **im verallgemeinerten Sinne orthogonal**, falls

$$N(u, v) = 0 .$$

Es gilt

Satz 1.8 *Ist die Eigenwertaufgabe (1.3) selbstadjungiert und besitzt sie zwei voneinander verschiedene Eigenwerte λ_i, λ_k mit y_i, y_k als zugehörigen Eigenfunktionen, so sind diese im verallgemeinerten Sinne orthogonal.*

Beweis:

Aus $\mathcal{M}(y_i) = \lambda_i \mathcal{N}(y_i)$ und $\mathcal{M}(y_k) = \lambda_k \mathcal{N}(y_k)$ folgt $M(y_k, y_i) = \lambda_i N(y_k, y_i)$ sowie $M(y_i, y_k) = \lambda_k N(y_i, y_k)$. Da $M(y_k, y_i) = M(y_i, y_k)$ und $N(y_k, y_i) = N(y_i, y_k)$, ergibt sich somit $(\lambda_i - \lambda_k) N(y_i, y_k) = 0$. Da $\lambda_i \neq \lambda_k$, folgt $N(y_i, y_k) = 0$. ■

Auch für den Fall, daß in Problem (1.3) ein Eigenwert mehrfach auftritt, kann man die zugehörigen Eigenfunktionen so wählen, daß sie im verallgemeinerten Sinne orthogonal sind.

Definition 1.9 *Ein Eigenwert λ heißt **r-fach** oder man sagt, er besitze die **Vielfachheit** r , wenn es genau r voneinander linear unabhängige Eigenfunktionen y_1, \dots, y_r gibt, die zu diesem Eigenwert gehören, d.h. es gilt*

$$\mathcal{M}(y_i) = \lambda \mathcal{N}(y_i) \quad , \quad U_l(y_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, 2m) .$$

Es gilt der folgende allgemeine Satz (vgl. [5], S. 84, in Verbindung mit [7], S. 41/42):

Satz 1.10 *Ist die Eigenwertaufgabe (1.3) selbstadjungiert und volldefinit, so gibt es ein im verallgemeinerten Sinne orthogonales System von Eigenfunktionen y_i , für das gilt*

$$N(y_i, y_k) = \delta_{ik} . \quad (1.8)$$

Dieses System ist also sogar orthonormiert.

Bemerkung 1.11 Die in Abschnitt 1.2.1 eingeführte Frequenzdeterminante spielt im Zusammenhang mit der Charakterisierung der Vielfachheit eines Eigenwertes eine wichtige Rolle. In einem Artikel von KAMKE ([12], Satz 5) wird gezeigt, daß für ein selbstadjungiertes und volldefinites Eigenwertproblem folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Der Eigenwert λ_j besitzt die Vielfachheit r .

(ii) Für alle $k = 0, \dots, r - 1$ gilt

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^k \Delta(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_j} = 0$$

und

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^r \Delta(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_j} \neq 0 .$$

Auf diese Tatsache wird in Abschnitt 3.3 Bezug genommen.

1.2.3 Minimaleigenschaften der Eigenwerte

Wir können jetzt Aussagen über Existenz und Art der Eigenwerte machen. Wir verzichten in diesem und in dem nächsten Abschnitt auf die Beweise der Aussagen, da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Eine ausführliche Beweisführung findet sich im 3. Kapitel von [5]. Im Unterkapitel 2.5 werden wir eine Charakterisierung der positiven Eigenwerte eines Eigenwertproblems mittels des COURANTSchen *Minimum-Maximum*-Prinzips herleiten.

Satz 1.12 *Die Eigenwertaufgabe (1.3) sei selbstadjungiert und volldefinit. Dann existieren unendlich viele reelle positive Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Für den ersten Eigenwert λ_1 und die zugehörige Eigenfunktion y_1 gilt:*

$$\lambda_1 = \min_{u \in \mathcal{V}(I)} R(u) = R(y_1) .$$

Ist $s \geq 1$ und sind y_1, \dots, y_s Eigenfunktionen zu den ersten s Eigenwerten, so gilt

$$\lambda_{s+1} = \min_{\substack{u \in \mathcal{V}(I) \\ N(u, y_i) = 0 \text{ für alle } i=1, \dots, s}} R(u) .$$

Dabei sind mehrfache Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach zu zählen.

Die Folge der Eigenwerte (λ_s) wächst unbeschränkt an: $\lambda_s \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow \infty$.

1.2.4 Ergebnisse aus der Theorie der Fourier-Reihen

Interessanterweise lassen sich für selbstadjungierte und volldefinite Eigenwertaufgaben Aussagen formulieren, die ursprünglich in der Theorie der FOURIER-Reihen zu finden sind. Es handelt sich um die PARSEVALSche Gleichung und um eine Folgerung aus der BESSELSchen Ungleichung. Diese beiden zentralen Ergebnisse werden uns auch im weiteren Verlauf der Arbeit wiederbegegnen. Wir definieren zunächst

Definition 1.13 Das Eigenwertproblem (1.3) sei selbstadjungiert und volldefinit. Es seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte von (1.3) und y_1, y_2, \dots zugehörige Eigenfunktionen. Es gelte die Beziehung (1.8). Für eine Funktion $u \in \mathcal{C}(I)$ sei

$$a_i := N(u, y_i) \quad , \quad i \in \mathbf{N} . \quad (1.9)$$

Die Glieder der Folge $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ heißen **Fourier-Koeffizienten** der Funktion u bezüglich des Eigenwertproblems (1.3).

Damit läßt sich folgender Satz zeigen, der die beiden wichtigen funktional-analytischen Aussagen enthält:

Satz 1.14 Das Eigenwertproblem (1.3) sei selbstadjungiert und volldefinit. Es seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte von (1.3), $u \in \mathcal{V}(I)$ und $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ die Folge ihrer FOURIER-Koeffizienten nach (1.9). Dann konvergieren die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2$, und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = N(u, u) \quad (\text{PARSEVALSche Gleichung}),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2 \leq M(u, u) \quad (\text{Folgerung aus der BESSELSchen Ungleichung}).$$

1.3 Das Knicken schwerer Gestänge als Differentialgleichungseigenwertproblem

Die nachfolgende Differentialgleichung ist der Kern dieser Arbeit. Sie stammt aus einem Artikel von WILLERS [32]. Zusammen mit verschiedenen Randbedingungen ergeben sich vier Eigenwertprobleme, die ausführlich untersucht werden.

WILLERS behandelt die Probleme unter Zuhilfenahme von BESSEL-Funktionen. Wir beschreiten einen anderen Weg und zeigen zunächst, daß alle vier Probleme selbstadjungiert und volldefinit sind.

1.3.1 Problemstellung

Betrachtet werde ein senkrecht hängender gerader Stab der Länge l mit konstantem Querschnitt. Der Stab werde nur durch sein Eigengewicht sowie durch eine am unteren Ende in Längsrichtung wirkende Kraft P belastet.

Ein Koordinatensystem sei so gewählt, daß die x -Achse in Richtung der unverformten Stabachse zeigt, am unteren Stabende $x = 0$ und am oberen Stabende $x = l$ ist. Von diesen Annahmen ausgehend, leitet WILLERS in seinem Artikel folgende Differentialgleichung zur Beschreibung der Stabknickung her:

$$w^{(4)} + \frac{1}{EI} [(P - \mu gx) w']' = 0 . \quad (1.10)$$

Hierbei bedeuten

$w = w(x)$:	Querausbiegung des Stabes
μ	:	Masse pro Längeneinheit des Stabes
g	:	Erdbeschleunigung
I	:	(konstantes) Flächenträgheitsmoment
E	:	Elastizitätsmodul

Wir formen die Differentialgleichung um und erhalten zunächst

$$\begin{aligned} w^{(4)} + \frac{1}{EI} [-\mu gw' + (P - \mu gx) w''] &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ w^{(4)} + \frac{1}{EI} [Pw'' - \mu g (xw')'] &= 0 , \end{aligned}$$

und daraus

$$w^{(4)} - \left(\frac{\mu g}{EI} xw' \right)' = -\frac{P}{EI} w'' .$$

Setzen wir $a := \frac{\mu g}{EI}$ (≥ 0) und $\lambda := \frac{P}{EI}$, so lautet die Differentialgleichung

$$w^{(4)} - (axw')' = -\lambda w'' .$$

Nach Auflösen der Klammer ergibt sich in Abhängigkeit von x

$$w^{(4)}(x) - axw''(x) - aw'(x) = -\lambda w''(x) .$$

Zu lösen sind folgende vier Eigenwertprobleme:

1. für den Fall des unten und oben drehbar gelagerten Gestänges:

Bestimme das kleinste $\lambda > 0$, so daß es ein $w \in \mathcal{C}^4([0, l]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$w^{(4)}(x) - axw''(x) - aw'(x) = -\lambda w''(x)$$

für alle $x \in [0, l]$ und den Randbedingungen

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0 . \quad (1.11)$$

2. für den Fall des unten drehbar gelagerten und oben eingespannten Gestänges:

Bestimme das kleinste $\lambda > 0$, so daß es ein $w \in \mathcal{C}^4([0, l]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$w^{(4)}(x) - axw''(x) - aw'(x) = -\lambda w''(x)$$

für alle $x \in [0, l]$ und den Randbedingungen

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w'(l) = 0 . \quad (1.12)$$

3. für den Fall des unten eingespannten und oben drehbar gelagerten Gestänges:

Bestimme das kleinste $\lambda > 0$, so daß es ein $w \in \mathcal{C}^4([0, l]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$w^{(4)}(x) - axw''(x) - aw'(x) = -\lambda w''(x)$$

für alle $x \in [0, l]$ und den Randbedingungen

$$w(0) = w'(0) = w(l) = w''(l) = 0 . \quad (1.13)$$

4. für den Fall des unten und oben eingespannten Gestänges:

Bestimme das kleinste $\lambda > 0$, so daß es ein $w \in C^4([0, l]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$w^{(4)}(x) - axw''(x) - aw'(x) = -\lambda w''(x)$$

für alle $x \in [0, l]$ und den Randbedingungen

$$w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0. \quad (1.14)$$

1.3.2 Transformation

Wie unten gezeigt wird, lassen sich die eben beschriebenen Eigenwertprobleme durch Transformationen auf solche zurückführen, die auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ definiert sind. Ausgangspunkt ist dann die folgende (von ξ abhängige) Differentialgleichung:

$$\tilde{w}^{(4)}(\xi) - \tilde{a}\xi\tilde{w}''(\xi) - \tilde{a}\tilde{w}'(\xi) = -\tilde{\lambda}\tilde{w}''(\xi) \quad (\tilde{a} := a \cdot l^3) \quad (1.15)$$

Die einzelnen transformierten Eigenwertaufgaben lauten:

1. für den Fall des unten und oben drehbar gelagerten Gestänges:

Bestimme das kleinste $\tilde{\lambda} > 0$, so daß es ein $\tilde{w} \in C^4([0, 1]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\tilde{w}^{(4)}(\xi) - \tilde{a}\xi\tilde{w}''(\xi) - \tilde{a}\tilde{w}'(\xi) = -\tilde{\lambda}\tilde{w}''(\xi)$$

für alle $\xi \in [0, 1]$ und den Randbedingungen

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}''(0) = \tilde{w}(1) = \tilde{w}''(1) = 0. \quad (1.16)$$

2. für den Fall des unten drehbar gelagerten und oben eingespannten Gestänges:

Bestimme das kleinste $\tilde{\lambda} > 0$, so daß es ein $\tilde{w} \in C^4([0, 1]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\tilde{w}^{(4)}(\xi) - \tilde{a}\xi\tilde{w}''(\xi) - \tilde{a}\tilde{w}'(\xi) = -\tilde{\lambda}\tilde{w}''(\xi)$$

für alle $\xi \in [0, 1]$ und den Randbedingungen

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}''(0) = \tilde{w}(1) = \tilde{w}'(1) = 0. \quad (1.17)$$

3. für den Fall des unten eingespannten und oben drehbar gelagerten Gestänges:

Bestimme das kleinste $\tilde{\lambda} > 0$, so daß es ein $\tilde{w} \in C^4([0, 1]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\tilde{w}^{(4)}(\xi) - \tilde{a}\xi\tilde{w}''(\xi) - \tilde{a}\tilde{w}'(\xi) = -\tilde{\lambda}\tilde{w}''(\xi)$$

für alle $\xi \in [0, 1]$ und den Randbedingungen

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}'(0) = \tilde{w}(1) = \tilde{w}''(1) = 0. \quad (1.18)$$

4. für den Fall des unten und oben eingespannten Gestänges:

Bestimme das kleinste $\tilde{\lambda} > 0$, so daß es ein $\tilde{w} \in C^4([0, 1]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\tilde{w}^{(4)}(\xi) - \tilde{a}\xi\tilde{w}''(\xi) - \tilde{a}\tilde{w}'(\xi) = -\tilde{\lambda}\tilde{w}''(\xi)$$

für alle $\xi \in [0, 1]$ und den Randbedingungen

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}'(0) = \tilde{w}(1) = \tilde{w}'(1) = 0. \quad (1.19)$$

Wir betrachten nun ein beliebiges der genannten untransformierten Probleme zusammen mit seinem zugehörigen transformierten Problem. Mit $U_l(w) = 0$, $l = 1, \dots, 4$, sei ein Satz Randbedingungen der Gestalt (1.11), (1.12), (1.13) oder (1.14) für das untransformierte Problem, mit $U_l(\tilde{w}) = 0$, $l = 1, \dots, 4$, sei der zugehörige Satz Randbedingungen der Gestalt (1.16), (1.17), (1.18) oder (1.19) für das entsprechende transformierte Problem bezeichnet.

Behauptung: Hat man ein Lösungspaar $(\tilde{\lambda}, \tilde{w}) \in \mathbf{R}^+ \times C^4([0, 1]) \setminus \{0\}$ gefunden, das das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(4)}(\xi) - \tilde{a}\xi\tilde{w}''(\xi) - \tilde{a}\tilde{w}'(\xi) &= -\tilde{\lambda}\tilde{w}''(\xi) \\ U_l(\tilde{w}) &= 0, l = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (1.20)$$

löst, so läßt sich daraus ein Lösungspaar $(\lambda, w) \in \mathbf{R}^+ \times C^4([0, l]) \setminus \{0\}$ bestimmen, das das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} w^{(4)}(x) - axw''(x) - aw'(x) &= -\lambda w''(x) \\ U_l(w) &= 0, l = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

löst.

Begründung: Setzt man $\tilde{w}(\xi) = w(\xi l)$ für alle $\xi \in [0, 1]$, so erhält man mit Hilfe der Kettenregel für $l \neq 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^\nu \tilde{w}(\xi) &= l^\nu \left(\frac{d}{dx}\right)^\nu w(\xi l) \quad \text{für alle } \xi \in [0, 1] , \\ \left(\frac{d}{d\xi}\right)^\nu w(\xi l) &= \frac{1}{l^\nu} \left(\frac{d}{dx}\right)^\nu \tilde{w}(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in [0, 1] . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Damit geht die Differentialgleichung (1.15) über in

$$l^4 w^{(4)}(\xi l) - \tilde{a} \xi l^2 w''(\xi l) - \tilde{a} l w'(\xi l) = -\tilde{\lambda} l^2 w''(\xi l) .$$

Da $\tilde{a} = a \cdot l^3$, folgt hieraus

$$w^{(4)}(\xi l) - a \xi l w''(\xi l) - a w'(\xi l) = -\frac{\tilde{\lambda}}{l^2} w''(\xi l) .$$

Setzt man $x = \xi l$, $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{l^2}$, so erhält man

$$w^{(4)}(x) - a x w''(x) - a w'(x) = -\lambda w''(x) . \quad (1.22)$$

Hat man also ein Lösungspaar $(\tilde{\lambda}, \tilde{w})$ von (1.20), so hat man damit auch ein Lösungspaar (λ, w) , das die Differentialgleichung (1.22) löst, wegen (1.21) sind die Randbedingungen $U_l(w) = 0$, $l = 1, \dots, 4$, erfüllt.

1.3.3 Nachweis der Selbstadjungiertheit und Volldefinitheit

Wir können uns nunmehr darauf beschränken, die auf das Einheitsintervall $[0, 1]$ transformierten Probleme zu betrachten, die rechenstechnisch einfacher handhabbar sind, wobei wir λ , w , a , x statt $\tilde{\lambda}$, \tilde{w} , \tilde{a} , ξ schreiben.

Einen Satz Randbedingungen der Gestalt (1.16), (1.17), (1.18) oder (1.19) bezeichnen wir mit $U_l(w) = 0$, $l = 1, \dots, 4$. Wir ersetzen in (1.1), (1.2) und (1.4) y durch w , setzen $m = 2$, $n = 1$ und definieren $f_0 := 0$, $f_1 := ax$, $f_2 := 1$, $g_0 := 0$, $g_1 := 1$. Dann hat für jede Wahl eines Satzes der eben genannten Randbedingungen $U_l(w) = 0$, $l = 1, \dots, 4$ das Eigenwertproblem

$$w^{(4)} - (axw')' = -\lambda w'' \quad , \quad U_l(w) = 0, \quad l = 1, \dots, 4 \quad (1.23)$$

die Gestalt des allgemeinen Eigenwertproblems (1.3).

Behauptung: (1.23) ist selbstadjungiert und volldefinit.

Beweis: Es sei $I := [0, 1]$. Für $u, v \in \mathcal{V}(I)$ sei

$$\begin{aligned} M_a(u, v) &:= \int_0^1 u \{v^{(4)} - (axv')'\} dx \\ N(u, v) &:= - \int_0^1 uv'' dx \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} M_a(u, v) &= \int_0^1 u \{v^{(4)} - (axv')'\} dx \\ &= \underbrace{[u \{v''' - axv'\}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 u' \{v''' - axv'\} dx \\ &= \int_0^1 axu'v' dx - \int_0^1 u'v''' dx \\ &= \int_0^1 axu'v' dx - \left\{ \underbrace{[u'v'']_0^1}_{=0} - \int_0^1 u''v'' dx \right\} \\ &= \int_0^1 axu'v' dx + \int_0^1 u''v'' dx . \end{aligned} \tag{1.24}$$

Da (1.24) symmetrisch in u und v ist, folgt

$$M_a(u, v) = M_a(v, u) .$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} N(u, v) &= - \int_0^1 uv'' dx \\ &= - \left\{ \underbrace{[uv']_0^1}_{=0} - \int_0^1 u'v' dx \right\} \\ &= \int_0^1 u'v' dx . \end{aligned} \tag{1.25}$$

(1.25) ist ebenfalls symmetrisch in u und v und damit

$$N(u, v) = N(v, u) .$$

Das Eigenwertproblem (1.23) ist also selbstadjungiert.

Da $a \geq 0$ und $x \geq 0$ auf I , folgt aus der Monotonie des Integrals

$$M_a(u, u) = \int_0^1 ax(u')^2 dx + \int_0^1 (u'')^2 dx \geq \int_0^1 (u'')^2 dx \geq 0.$$

Wäre $M_a(u, u) = 0$, so wäre $u'' \equiv 0$ auf $[0, 1]$, also $u = c_1x + c_0$ ein Polynom vom Grad ≤ 1 . Wegen $u(0) = u(1) = 0$ folgt $u \equiv 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $u \in \mathcal{V}(I)$. Folglich ist $M_a(u, u) > 0$.

Ferner gilt

$$N(u, u) = \int_0^1 (u')^2 dx \geq 0.$$

Wäre $N(u, u) = 0$, so wäre $u' \equiv 0$ auf $[0, 1]$, also u konstant. Wegen $u(0) = 0$ folgt $u \equiv 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $u \in \mathcal{V}(I)$. Folglich ist $N(u, u) > 0$.

Das Eigenwertproblem (1.23) ist somit auch volldefinit. ■

1.3.4 Zusammenfassung

An dieser Stelle werden die wichtigsten Erkenntnisse über die vier in Abschnitt 1.3 untersuchten WILLERSSchen Eigenwertprobleme mit den Lagerungsarten

- unten und oben drehbar gelagert,
- unten drehbar gelagert und oben eingespannt,
- unten eingespannt und oben drehbar gelagert,
- unten und oben eingespannt

noch einmal zusammengefaßt. Es gelten die Bezeichnungen aus Abschnitt 1.3.3.

1. Alle vier Eigenwertprobleme sind selbstadjungiert und volldefinit, es gilt

(a) $M_a(u, v) = M_a(v, u)$ und $M_a(u, u) > 0$ für alle

- $u, v \in D_{M_a} := \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0\}$
im Fall des unten und oben drehbar gelagerten Stabes,

- $u, v \in D_{M_a} :=$
 $\{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f(0) = f(1) = f''(0) = f'(1) = 0\}$
 im Fall des unten drehbar gelagerten und oben eingespannten Stabes,
- $u, v \in D_{M_a} :=$
 $\{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f(0) = f(1) = f'(0) = f''(1) = 0\}$
 im Fall des unten eingespannten und oben drehbar gelagerten Stabes,
- $u, v \in D_{M_a} :=$
 $\{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0\}$
 im Fall des unten und oben eingespannten Stabes,

(b) $N(u, v) = N(v, u)$ und $N(u, u) > 0$ für alle $u, v \in D_N := \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\}$ in allen vier Fällen,

d.h. in jedem der vier Fälle ist $M_a(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische und positiv definite Bilinearform auf $D_{M_a} \times D_{M_a}$ und $N(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische und positiv definite Bilinearform auf $D_N \times D_N$.

2. Aufgrund von Satz 1.12 besitzt jedes der vier Eigenwertprobleme abzählbar unendlich viele Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ und zugehörige Eigenfunktionen y_1, y_2, \dots . Wegen Satz 1.10 kann angenommen werden, daß $N(y_i, y_k) = \delta_{ik}$ für alle $i, k \in \mathbf{N}$.

3. Nach Satz 1.14 gilt $N(u, u) = \sum_{i=1}^{\infty} N(u, y_i)$ für alle $u \in \mathcal{V}(I)$.

4. Aus der Volldefinitheit jedes der vier Eigenwertprobleme und den Erläuterungen im Anschluß an Satz 1.5 folgt: Für jedes $\sigma \in \mathbf{R}$ ist $\{i \in \mathbf{N} : \lambda_i < \sigma\}$ endlich.

Kapitel 2

Funktionalanalytische Methoden

2.1 Bilinearformen und Eigenwertprobleme

Während wir uns im ersten Kapitel mit Eigenwertaufgaben beschäftigt haben, die auf der Grundlage gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert waren, stellen wir nun die Eigenwertproblematik in einen allgemeineren, funktionalanalytischen Zusammenhang. Diese Vorgehensweise bietet den Vorteil, auch andere Typen von Eigenwertaufgaben (z.B. für partielle Differentialgleichungen, Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder Matrizen) in einer einheitlichen Weise behandeln zu können.

Ein weiterer Aspekt ist die Möglichkeit des numerischen Zugangs zu den Eigenwertproblemen und damit insbesondere die verifizierte Einschließung der Eigenwerte.

Es sei D_N ein reeller Vektorraum, $D_M \subset D_N$ ein Unterraum von D_N , $M : D_M \times D_M \rightarrow \mathbf{R}$ und $N : D_N \times D_N \rightarrow \mathbf{R}$ seien Bilinearformen.

Wir betrachten nun Eigenwertprobleme der folgenden Gestalt: Gesucht sind Paare $(\lambda, \phi) \in \mathbf{R} \times D_M \setminus \{0\}$, so daß

$$M(f, \phi) = \lambda N(f, \phi) \tag{2.1}$$

für alle $f \in D_M$ gilt.

Falls (2.1) für ein $\lambda \in \mathbf{R}$ und ein $\phi \neq 0$ erfüllt ist, so heißt λ ein **Eigenwert** von Problem (2.1) und ϕ ein zum Eigenwert λ gehöriges **Eigenelement**.

Wir zeigen nun, unter welchen Voraussetzungen die Formulierung eines Eigenwertproblems mit Hilfe von linearen Operatoren gleichwertig zu der soeben eingeführten funktionalanalytischen Sprechweise ist.

Lemma 2.1 *Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Skalarproduktraum, D_M und D_N seien Unterräume von H mit $D_M \subset D_N$. $\mathcal{M} : D_M \rightarrow H$ und $\mathcal{N} : D_N \rightarrow H$ seien lineare Operatoren. Die Bilinearformen M und N seien definiert durch*

$$\begin{aligned} M(f, g) &:= \langle f, \mathcal{M}g \rangle \quad \text{für } f, g \in D_M, \\ N(f, g) &:= \langle f, \mathcal{N}g \rangle \quad \text{für } f, g \in D_N. \end{aligned}$$

Gilt dann $D_M^\perp := \{g \in H : \langle f, g \rangle = 0 \text{ für alle } f \in D_M\} = \{0\}$, so sind für $\lambda \in \mathbf{R}$ und $\phi \in D_M$ folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\mathcal{M}\phi = \lambda\mathcal{N}\phi$,
- (ii) $M(f, \phi) = \lambda N(f, \phi)$ für alle $f \in D_M$.

Beweis:

(i) \Rightarrow (ii): $M(f, \phi) = \langle f, \mathcal{M}\phi \rangle = \langle f, \lambda\mathcal{N}\phi \rangle = \lambda \langle f, \mathcal{N}\phi \rangle = \lambda N(f, \phi)$ für alle $f \in D_M$

(ii) \Rightarrow (i): Es gilt

$$\begin{aligned} M(f, \phi) &= \lambda N(f, \phi) \quad \text{für alle } f \in D_M && \Rightarrow \\ \langle f, \mathcal{M}\phi \rangle &= \lambda \langle f, \mathcal{N}\phi \rangle \quad \text{für alle } f \in D_M && \Rightarrow \\ \langle f, \mathcal{M}\phi - \lambda\mathcal{N}\phi \rangle &= 0 \quad \text{für alle } f \in D_M. \end{aligned}$$

Folglich liegt $\mathcal{M}\phi - \lambda\mathcal{N}\phi$ in D_M^\perp . Da $D_M^\perp = \{0\}$, folgt hieraus $\mathcal{M}\phi - \lambda\mathcal{N}\phi = 0$, also $\mathcal{M}\phi = \lambda\mathcal{N}\phi$. ■

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Bedingung $D_M^\perp = \{0\}$ erfüllt ist, um die Äquivalenz der beiden Eigenwertprobleme sicherzustellen. Im Hinblick auf die in dieser Arbeit behandelten Eigenwertprobleme beweisen wir zur Beantwortung dieser Frage

Lemma 2.2 *Es seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$, $n \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$ und $\alpha_k^l, \beta_k^l \in \mathbf{R}$, $k = 0, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$ (α_k^l und β_k^l nicht sämtlich verschwindend). Ferner seien definiert:*

$$U_l(f) := \sum_{k=0}^n \alpha_k^l f^{(k)}(a) + \beta_k^l f^{(k)}(b)$$

für alle $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ und $l = 1, \dots, m$ sowie

$$D := \{f \in \mathcal{C}^n([a, b]) : U_l(f) = 0, l = 1, \dots, m\} .$$

Dann gibt es kein $g \in \mathcal{C}([a, b]) \setminus \{0\}$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$$

für alle $f \in D$.

Beweis:

Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, es gibt ein $g \in \mathcal{C}([a, b]) \setminus \{0\}$, so daß

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = 0 \tag{2.2}$$

für alle $f \in D$. Da g stetig ist, gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $g(x_0) \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $g(x_0) > 0$. (Ist $g(x_0) < 0$, so betrachte man die Funktion $-g$). Aufgrund der Stetigkeit von g gibt es ein $\alpha \in (a, x_0)$ und ein $\beta \in (x_0, b)$ mit $g(x) \geq \frac{g(x_0)}{2}$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Wir definieren die Funktion

$$f : [a, b] \ni x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-1}{(x-\alpha)(\beta-x)}} & , \text{ falls } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

f ist eine \mathcal{C}^∞ -Funktion mit der Eigenschaft $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ für alle $k \in \mathbf{N}_0$ (insbesondere ist daher $f \in D$) und $f(x) > 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$. Definieren wir $\bar{\alpha} := \alpha + \frac{\beta-\alpha}{4}$ und $\bar{\beta} := \beta - \frac{\beta-\alpha}{4}$, so ist $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ und $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \subsetneq (\alpha, \beta)$. Es ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g(x) dx &= \int_\alpha^\beta f(x) g(x) dx \\ &\geq \frac{g(x_0)}{2} \int_\alpha^\beta f(x) dx \\ &\geq \frac{g(x_0)}{2} \int_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} f(x) dx \\ &> 0 , \end{aligned}$$

denn nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist $\int_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} f(x) dx = f(\xi) (\bar{\beta} - \bar{\alpha})$ mit einem $\xi \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$. Damit haben wir einen Widerspruch zu (2.2) erhalten, und das Lemma ist bewiesen. ■

2.2 Das Knicken schwerer Gestänge als funktionalanalytisches Eigenwertproblem

Wir können jetzt zeigen, daß sich die in Abschnitt 1.3.3 behandelten Eigenwertprobleme

$$\phi^{(4)} - a(x\phi')' = -\lambda\phi'' \quad , \quad U_l(w) = 0 \quad , \quad l = 1, \dots, 4,$$

wobei $U_l(w) = 0$, $l = 1, \dots, 4$ Randbedingungen der Gestalt (1.16), (1.17), (1.18) oder (1.19) sein sollen, auch mit Hilfe von Bilinearformen $M(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ formulieren lassen.

In Anlehnung an die Bezeichnungen in Lemma 2.1 seien $H := \mathcal{C}([0, 1])$ und $\langle f, g \rangle := \int_0^1 fg dx$ für $f, g \in H$. Weiterhin seien

1. für den Fall des unten und oben drehbar gelagerten Gestänges

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} \quad , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f''(0) = f''(1) = 0\} \quad , \end{aligned}$$

2. für den Fall des unten drehbar gelagerten und oben eingespannten Gestänges

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} \quad , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f''(0) = f'(1) = 0\} \quad , \end{aligned}$$

3. für den Fall des unten eingespannten und oben drehbar gelagerten Gestänges

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} \quad , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f'(0) = f''(1) = 0\} \quad , \end{aligned}$$

4. für den Fall des unten und oben eingespannten Gestänges

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} \quad , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f'(0) = f'(1) = 0\} \quad . \end{aligned}$$

Schließlich seien definiert

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\phi &:= \phi^{(4)} - a(x\phi)' , \\
 \mathcal{N}\phi &:= -\phi'' , \\
 M(f, g) &:= \int_0^1 f(g^{(4)} - a(xg')) dx \\
 &= \int_0^1 (f''g'' + axf'g') dx \quad \text{für } f, g \in D_M , \\
 N(f, g) &:= -\int_0^1 fg'' dx \\
 &= \int_0^1 f'g' dx \quad \text{für } f, g \in D_N .
 \end{aligned}$$

Die Umformungen lassen sich mit Hilfe des Beweises der Behauptung auf Seite 21 nachvollziehen. Man braucht nur $\mathcal{V}(I)$ durch D_M zu ersetzen. Aus dem Beweis ergibt sich auch, daß $M(\cdot, \cdot)$ symmetrisch und positiv definit auf $D_M \times D_M$ und $N(\cdot, \cdot)$ symmetrisch und positiv definit auf $D_N \times D_N$ ist. Aus Lemma 2.2 (mit $D = D_M$) folgt (unter Benutzung des eben eingeführten Skalarproduktes $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg dx$) $D_M^\perp = \{0\}$. Jedes der vier zu Beginn dieses Abschnitts genannten Differentialgleichungseigenwertprobleme

$$\mathcal{M}\phi = \lambda \mathcal{N}\phi \quad , \quad U_l(w) = 0 \quad , \quad l = 1, \dots, 4,$$

ist also äquivalent zu einem entsprechenden funktionalanalytischen Eigenwertproblem

$$M(f, \phi) = \lambda N(f, \phi)$$

für alle $f \in D_M$. Weitere Einzelheiten zur Behandlung der vier funktionalanalytischen Probleme finden sich in Abschnitt 3.3.

2.3 Einschließungen der Eigenwerte

Leider ist es in den seltensten Fällen möglich, Eigenwertprobleme in geschlossener Form zu lösen, so daß man für die Berechnung der Eigenwerte auf numerische Verfahren angewiesen ist. Während die meisten klassischen Methoden versuchen, die Eigenwerte zu approximieren, haben in der jüngeren Vergangenheit verschiedene Autoren vorgeschlagen, mit Hilfe von Einschließungssätzen und kontrollierter Numerik garantierte obere und untere Schranken für die Eigenwerte zu bestimmen. Für dieses Vorgehen gibt es verschiedene Gründe. In [4] und [9] finden sich z.B. folgende Argumente:

1. Die Kenntnis von Schranken für die Eigenwerte (im Gegensatz zu Näherungswerten) kann benutzt werden, um gewisse mathematische Sätze

zu beweisen. Als Beispiel dienen Existenz- und Einschließungsaussagen über die Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme (vgl. [23]).

2. Untere Schranken für die Eigenwerte sind notwendig, um Vorhersagen physikalischer Theorien mit experimentellen Ergebnissen zu vergleichen.
3. In vielen Fällen ist es möglich, mit Hilfe von bekannten Schranken für die Eigenwerte die Zuverlässigkeit von Näherungsverfahren zu überprüfen.

GOERISCH weist in seiner Habilitationsschrift ([9]) darauf hin, daß die Ermittlung oberer Schranken für die Eigenwerte im allgemeinen relativ einfach durch das RAYLEIGH-RITZ-Verfahren zu bewerkstelligen ist. Er entwickelt einen Einschließungssatz, mit dessen Hilfe die Schwierigkeit, zuverlässige untere Schranken zu bestimmen, behoben wird. Dieses Theorem bildet die Kernaussage von Abschnitt 2.4. Das Theorem von GOERISCH enthält als Spezialfall die von LEHMANN in [18] und [19] beschriebene Methode zur Bestimmung unterer Schranken. Sie kommt bei den numerischen Anwendungen zum Einsatz. Eine ausführliche Darstellung von Einschließungssätzen für Eigenwertprobleme, die auch die historische Entwicklung beleuchtet, findet sich in [10].

Zusammenfassend kann man sagen, daß sich die Verfahren von LEHMANN-GOERISCH und RAYLEIGH-RITZ hervorragend ergänzen. Verwendet man bei der Implementierung dieser Verfahren Intervallarithmetik, so bekommt man verifizierte, in der Regel sehr genaue Einschließungen für die Eigenwerte.

Wir verwenden weiter die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.1. Ausgangspunkt ist das funktionalanalytische Eigenwertproblem (2.1). Es sei $\sigma \in \mathbf{R}$ gegeben. Ferner sei X ein reeller Vektorraum, $T : D_M \rightarrow X$ eine lineare Abbildung, $b : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform (d.h. $b(f, f) \geq 0$ für alle $f \in X$). Für das gesamte Kapitel gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- A1: Die Bilinearformen $M(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ sind symmetrisch. $N(\cdot, \cdot)$ ist positiv definit (d.h. $N(f, f) > 0$ für alle $f \in D_N \setminus \{0\}$). (Man nennt (2.1) dann auch ein **rechtsdefinites** Eigenwertproblem.)
- A2: Zu $J := \{i \in \mathbf{N} : i \leq \dim D_M\}$ gibt es eine Folge $(\lambda_i)_{i \in J}$ in \mathbf{R} von Eigenwerten des Problems (2.1) und eine Folge $(\phi_i)_{i \in J}$ in $D_M \setminus \{0\}$ von zugehörigen Eigenelementen mit $M(f, \phi_i) = \lambda_i N(f, \phi_i)$ für alle $f \in D_M$, $i \in J$, so daß gilt

$$N(\phi_i, \phi_k) = \delta_{ik} \text{ für } i, k \in J,$$

$$N(f, f) = \sum_{i \in J} N(f, \phi_i)^2 \text{ für alle } f \in D_M.$$

A3: Die Menge $\{i \in J : \lambda_i < \sigma\}$ ist endlich.

A4: Es gilt $b(Tf, Tg) = N(f, g)$ für alle $f, g \in D_M$.

Bemerkung 2.3 In A2 ist $\dim D_M = \infty$ zugelassen.

Folgendes Lemma kann zunächst gezeigt werden:

Lemma 2.4

- (i) Ein Eigenelement ϕ von Problem (2.1) kann nicht zu zwei verschiedenen Eigenwerten gehören.
- (ii) Ist λ ein Eigenwert von Problem (2.1), so gibt es ein $i \in J$ mit $\lambda = \lambda_i$, d.h. die Folge $(\lambda_i)_{i \in J}$ enthält alle Eigenwerte des Problems (2.1).

Beweis:

Zu (i): Ist $\phi \in D_M \setminus \{0\}$ ein Eigenelement von Problem (2.1), das zu den Eigenwerten λ_i und λ_j gehört, so ist $M(f, \phi) = \lambda_i N(f, \phi) = \lambda_j N(f, \phi)$ für alle $f \in D_M$, also insbesondere $\lambda_i N(\phi, \phi) = \lambda_j N(\phi, \phi)$. Da $N(\cdot, \cdot)$ positiv definit ist, ist $N(\phi, \phi) \neq 0$ und daher $\lambda_i = \lambda_j$.

Zu (ii): Es sei $\lambda \in \mathbf{R}$ ein Eigenwert von Problem (2.1) und $\phi \in D_M \setminus \{0\}$ ein zugehöriges Eigenelement. Dann ist

$$M(\phi_i, \phi) = \lambda N(\phi_i, \phi) \quad \text{für alle } i \in J,$$

wegen der Symmetrie von $M(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ daher auch

$$M(\phi, \phi_i) = \lambda N(\phi, \phi_i) \quad \text{für alle } i \in J.$$

Auf der anderen Seite hat man

$$M(\phi, \phi_i) = \lambda_i N(\phi, \phi_i) \quad \text{für alle } i \in J.$$

Wäre $\lambda \neq \lambda_i$ für jedes $i \in J$, so wäre wegen (i) $\phi \neq \phi_i$, wegen A2 daher $N(\phi, \phi_i) = 0$ für jedes $i \in J$ und somit $N(\phi, \phi) = 0$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur positiven Definitheit von $N(\cdot, \cdot)$. ■

Bemerkung 2.5 Nach den Erkenntnissen in Abschnitt 1.3.4 erfüllen die dort diskutierten, in Abschnitt 2.2 funktionalanalytisch umformulierten WILLERSSchen Eigenwertprobleme die Annahmen A1, A2 und A3 (mit $D_M = \mathcal{V}([0, 1])$, $J = \mathbf{N}$).

2.4 Untere Schranken für die Eigenwerte

2.4.1 Die Theoreme von Goerisch und Lehmann

Bevor wir die beiden zentralen Aussagen dieses Abschnitts formulieren können, die die Grundlage für das LEHMANN-GOERISCH-Verfahren zur Berechnung unterer Schranken darstellen, benötigen wir zwei Lemmas. Die folgenden Ausführungen lehnen sich an [11], S. 141-145 an.

Lemma 2.6 *Es gelten die Annahmen A1, A2, A3 und A4. Ferner seien folgende Voraussetzungen erfüllt: Es seien $\tilde{\eta}, \tilde{\sigma} \in \mathbf{R}$ mit $\tilde{\eta} \leq \tilde{\sigma}$, $v \in D_M$ und $w \in X$ mit*

$$(i) \quad b(w - \tilde{\sigma}Tv, w - \tilde{\eta}Tv) \leq 0,$$

$$(ii) \quad b(Tf, w) = M(f, v) \text{ für alle } f \in D_M,$$

$$(iii) \quad N(v, \phi_i) = 0 \text{ für alle } i \in J \text{ mit } \tilde{\eta} \leq \lambda_i \leq \tilde{\sigma}.$$

Behauptung: *Dann ist $v = 0$.*

Beweis:

Die Elemente der Menge $\{T\phi_j : j \in J\}$ bilden ein abzählbares Orthonormalsystem in $(X, b(\cdot, \cdot))$, denn es gilt $b(T\phi_j, T\phi_k) = N(\phi_j, \phi_k) = \delta_{jk}$ für alle $j, k \in J$. Aufgrund der BESSELSchen Ungleichung

$$\sum_{i \in J} b(\phi, T\phi_i)^2 \leq b(\phi, \phi) \quad \text{für alle } \phi \in X$$

folgt somit für das Element $w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv \in X$:

$$\begin{aligned} & b\left(w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv, w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv\right) \\ & \geq \sum_{i \in J} b\left(w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv, T\phi_i\right)^2. \end{aligned}$$

Es ist

$$b(w - \tilde{\sigma}Tv, w - \tilde{\eta}Tv) = b(w, w) - (\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})b(Tv, w) + \tilde{\sigma}\tilde{\eta}b(Tv, Tv)$$

und

$$\begin{aligned} b\left(w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv, w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv\right) &= b(w, w) - (\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})b(Tv, w) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})^2 b(Tv, Tv). \end{aligned}$$

Da $\tilde{\sigma}\tilde{\eta} - \frac{1}{4}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})^2 = -\frac{1}{4}(\tilde{\sigma} - \tilde{\eta})^2$, folgt daher mit A4 und A2

$$\begin{aligned}
0 &\geq b(w - \tilde{\sigma}Tv, w - \tilde{\eta}Tv) \\
&= b\left(w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv, w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv\right) - \frac{1}{4}(\tilde{\sigma} - \tilde{\eta})^2 b(Tv, Tv) \\
&\geq \sum_{i \in J} b\left(w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv, T\phi_i\right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{4}(\tilde{\sigma} - \tilde{\eta})^2 \sum_{i \in J} N(v, \phi_i)^2 .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Weil $b(T\phi_i, w) = M(\phi_i, v) = \lambda_i N(\phi_i, v)$ für alle $i \in J$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
b\left(w - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})Tv, T\phi_i\right) &= b(w, T\phi_i) - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})b(Tv, T\phi_i) \\
&= \lambda_i N(\phi_i, v) - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})N(v, \phi_i) \\
&= \left(\lambda_i - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})\right)N(v, \phi_i) .
\end{aligned}$$

Da

$$\left(\lambda_i - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})\right)^2 = \lambda_i^2 - \lambda_i(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta}) + \frac{1}{4}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})^2$$

und

$$\frac{1}{4}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})^2 - \frac{1}{4}(\tilde{\sigma} - \tilde{\eta})^2 = \tilde{\sigma}\tilde{\eta} ,$$

ist

$$\begin{aligned}
\left(\lambda_i - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})\right)^2 - \frac{1}{4}(\tilde{\sigma} - \tilde{\eta})^2 &= \lambda_i^2 - \lambda_i(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta}) + \tilde{\sigma}\tilde{\eta} \\
&= (\lambda_i - \tilde{\sigma})(\lambda_i - \tilde{\eta}) .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich aus (2.3)

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sum_{i \in J} \left(\lambda_i - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma} + \tilde{\eta})\right)^2 N(v, \phi_i)^2 - \frac{1}{4}(\tilde{\sigma} - \tilde{\eta})^2 \sum_{i \in J} N(v, \phi_i)^2 \\
&= \sum_{i \in J} (\lambda_i - \tilde{\sigma})(\lambda_i - \tilde{\eta}) N(v, \phi_i)^2 \\
&= \sum_{\substack{i \in J \\ \lambda_i < \tilde{\eta} \text{ oder } \lambda_i > \tilde{\sigma}}} (\lambda_i - \tilde{\sigma})(\lambda_i - \tilde{\eta}) N(v, \phi_i)^2 ,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei Gleichung (2.4) aus Voraussetzung (iii) folgt. Wir erhalten $N(v, \phi_i) = 0$ für alle $i \in J$ mit $\lambda_i < \tilde{\eta}$ oder $\lambda_i > \tilde{\sigma}$. Wegen Voraussetzung (iii) gilt somit $N(v, \phi_i) = 0$ für alle $i \in J$. Aufgrund von A2 folgt $N(v, v) = 0$, wegen der positiven Definitheit von $N(\cdot, \cdot)$ damit $v = 0$. ■

Lemma 2.7 *Es gelten die Annahmen A1, A2, A3 und A4. Ferner seien folgende Voraussetzungen erfüllt: Es seien $\sigma \in \mathbf{R}$ wie in A3, $\eta \in \mathbf{R}$ mit $\eta < \sigma$, $v \in D_M$ und $w \in X$ mit*

$$(i) \quad b(w - \sigma Tv, w - \eta Tv) \leq 0,$$

$$(ii) \quad b(Tf, w) = M(f, v) \text{ für alle } f \in D_M,$$

$$(iii) \quad N(v, \phi_i) = 0 \text{ für alle } i \in J \text{ mit } \eta \leq \lambda_i < \sigma.$$

Behauptung: *Dann ist $b(w - \sigma Tv, w - \sigma Tv) = 0$.*

Beweis:

Gilt $\sigma \neq \lambda_i$ für alle $i \in J$, so ist (iii) äquivalent mit

$$N(v, \phi_i) = 0 \text{ für alle } i \in J \text{ mit } \eta \leq \lambda_i \leq \sigma.$$

Aus Lemma 2.6 folgt dann $v = 0$, wegen der positiven Semidefinitheit von $b(\cdot, \cdot)$ und (i) daher $b(w, w) = 0$ und somit $b(w - \sigma Tv, w - \sigma Tv) = 0$.

Falls $\sigma \neq \lambda_i$ nicht vorausgesetzt wird, kann man die Behauptung indirekt beweisen. Angenommen, es ist $b(w - \sigma Tv, w - \sigma Tv) > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &> b(w - \sigma Tv, w - \eta Tv) - b(w - \sigma Tv, w - \sigma Tv) \\ &= b(w - \sigma Tv, (\sigma - \eta) Tv) \\ &= (\sigma - \eta) b(w - \sigma Tv, Tv) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $\sigma - \eta > 0$:

$$b(w - \sigma Tv, Tv) < 0 . \quad (2.5)$$

Da nach A3 die λ_i mit $\lambda_i < \sigma$ isoliert liegen, gibt es ein $\tilde{\eta} \in \mathbf{R}$ mit $\tilde{\eta} < \eta$, so daß $\lambda_i \notin [\tilde{\eta}, \eta)$ für alle $i \in J$. Wegen (i) und (2.5) gilt

$$\begin{aligned} b(w - \sigma Tv, w - \tilde{\eta} Tv) &= b(w - \sigma Tv, w - \eta Tv) + (\eta - \tilde{\eta}) b(w - \sigma Tv, Tv) \\ &< 0 . \end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen gibt es ein $\tilde{\sigma} \in \mathbf{R}$ mit $\tilde{\eta} \leq \tilde{\sigma} < \sigma$ und

$$b(w - \tilde{\sigma} Tv, w - \tilde{\eta} Tv) \leq 0 .$$

Da $\lambda_i \notin [\tilde{\eta}, \eta)$ für alle $i \in J$, folgt aus (iii) $N(v, \phi_i) = 0$ für alle $i \in J$ mit $\tilde{\eta} \leq \lambda_i \leq \tilde{\sigma}$. Aus Lemma 2.6 folgt $v = 0$, daraus $Tv = 0$ und daher $b(w - \sigma Tv, Tv) = 0$, im Widerspruch zu (2.5).

Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Wir kommen nun zur Hauptaussage dieses Abschnitts. Wir geben sie zunächst in einer allgemeinen Form an, für unsere weiteren Zwecke werden wir im Anschluß daran eine speziellere Gestalt wählen.

Theorem 2.8 (Goerisch) *Es gelten die Annahmen A1, A2, A3 und A4. Weiterhin seien für $i = 1, \dots, n$ Elemente $v_i \in D_M$ und $w_i \in X$ gegeben, für die*

$$b(Tf, w_i) = M(f, v_i) \quad \text{für alle } f \in D_M \text{ und für jedes } i = 1, \dots, n$$

gelte.

Die Matrizen A_0, A_1, A_2, \hat{A} und \hat{B} seien durch

$$\begin{aligned} A_0 &:= [N(v_i, v_k)]_{i,k=1,\dots,n} \text{ ,} \\ A_1 &:= [M(v_i, v_k)]_{i,k=1,\dots,n} \text{ ,} \\ A_2 &:= [b(w_i, w_k)]_{i,k=1,\dots,n} \text{ ,} \\ \hat{A} &:= A_1 - \sigma A_0 \text{ ,} \\ \hat{B} &:= A_2 - 2\sigma A_1 + \sigma^2 A_0 \end{aligned}$$

definiert. \hat{B} sei positiv definit.

Die Matrixeigenwertaufgabe

$$\hat{A}x = \mu \hat{B}x$$

habe die Eigenwerte $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p < 0 \leq \dots \leq \mu_n$.

Behauptung: Für $l = 1, \dots, p$ enthält das Intervall

$$\left[\sigma + \frac{1}{\mu_l}, \sigma \right)$$

mindestens l Eigenwerte der Eigenwertaufgabe (2.1).

Beweis:

Der Beweis verläuft wieder indirekt.

Angenommen, es gibt ein $l \in \{1, \dots, p\}$, so daß die Anzahl der Eigenwerte des Problems (2.1), die das Intervall $\left[\sigma + \frac{1}{\mu_l}, \sigma \right)$ enthält, strikt kleiner als l ist.

Da \widehat{A} und \widehat{B} offensichtlich symmetrisch sind und \widehat{B} zusätzlich positiv definit, gibt es nach bekannten Sätzen aus der Linearen Algebra Vektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^n$ mit $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})^T$ für alle $k = 1, \dots, n$, so daß $\widehat{A}x_i = \mu_i \widehat{B}x_i$ und $x_i^T \widehat{B}x_k = \delta_{ik}$ für $i, k = 1, \dots, n$.

Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir \tilde{v}_i und \tilde{w}_i durch

$$\tilde{v}_i := \sum_{j=1}^n x_{i,j} v_j \quad \text{und} \quad \tilde{w}_i := \sum_{j=1}^n x_{i,j} w_j .$$

Damit ergibt sich für $i, k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} M(\tilde{v}_i, \tilde{v}_k) - \sigma N(\tilde{v}_i, \tilde{v}_k) &= M\left(\sum_{j=1}^n x_{i,j} v_j, \sum_{m=1}^n x_{k,m} v_m\right) \\ &\quad - \sigma N\left(\sum_{j=1}^n x_{i,j} v_j, \sum_{m=1}^n x_{k,m} v_m\right) \\ &= \sum_{j,m=1}^n x_{i,j} x_{k,m} M(v_j, v_m) \\ &\quad - \sigma \sum_{j,m=1}^n x_{i,j} x_{k,m} N(v_j, v_m) \\ &= x_i^T A_1 x_k - \sigma x_i^T A_0 x_k \\ &= x_i^T (A_1 - \sigma A_0) x_k \\ &= x_i^T \widehat{A} x_k \\ &= \mu_k x_i^T \widehat{B} x_k \\ &= \mu_k \delta_{ik} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} b(\tilde{w}_i, \tilde{w}_k) - 2\sigma M(\tilde{v}_i, \tilde{v}_k) + \sigma^2 N(\tilde{v}_i, \tilde{v}_k) &= x_i^T A_2 x_k - 2\sigma x_i^T A_1 x_k \\ &\quad + \sigma^2 x_i^T A_0 x_k \\ &= x_i^T \widehat{B} x_k \\ &= \delta_{ik} . \end{aligned}$$

Es sei nun L der Unterraum von D_M , der von den Eigenelementen des Problems (2.1) aufgespannt wird, die den im Intervall $\left[\sigma + \frac{1}{\mu_i}, \sigma\right)$ liegenden Eigenwerten zugeordnet sind. Aufgrund der Annahme zu Beginn des Beweises

folgt $\dim L < l$. Es gibt dann $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$ mit $(\beta_1, \dots, \beta_l) \neq (0, \dots, 0)$ und

$$\sum_{i=1}^l \beta_i N(\tilde{v}_i, g) = 0 \quad \text{für alle } g \in L. \quad (2.6)$$

Falls $L = \{0\}$, ist das klar. Im Fall $L \neq \{0\}$ sei $\{g_1, \dots, g_k\}$ eine Basis von L . Dann ist $k < l$. Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^l \beta_i N(\tilde{v}_i, g_j) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, k$$

mit $k < l$ Gleichungen für die l Unbekannten β_1, \dots, β_l besitzt daher eine nichttriviale Lösung. Da $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j g_j$, folgt daraus (2.6).

Wir definieren

$$\begin{aligned} v &:= \sum_{i=1}^l \beta_i \tilde{v}_i, \\ w &:= \sum_{i=1}^l \beta_i \tilde{w}_i \quad \text{sowie} \\ \eta &:= \sigma + \frac{1}{\mu_l}. \end{aligned}$$

Dann ist $\eta < \sigma$, $v \in D_M$, $w \in X$, und es gilt

$$\begin{aligned} b(Tf, w) &= \sum_{i=1}^l \beta_i \sum_{k=1}^n x_{i,k} b(Tf, w_k) \\ &= \sum_{i=1}^l \beta_i \sum_{k=1}^n x_{i,k} M(f, v_k) \\ &= M(f, v) \end{aligned}$$

für alle $f \in D_M$ sowie

$$N(v, \phi_k) = \sum_{i=1}^l \beta_i N(\tilde{v}_i, \phi_k) = 0$$

für alle $k \in J$ mit $\eta \leq \lambda_k < \sigma$, da $\phi_k \in L$ für diese k . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} &b(w - \sigma Tv, w - \eta Tv) \\ &= b(w, w) - (\sigma + \eta) b(w, Tv) + \sigma \eta b(Tv, Tv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= b(w, w) - \left(2\sigma + \frac{1}{\mu_l}\right) M(v, v) \\
 &\quad + \sigma \left(\sigma + \frac{1}{\mu_l}\right) N(v, v) \\
 &= b(w, w) - 2\sigma M(v, v) + \sigma^2 N(v, v) \\
 &\quad - \frac{1}{\mu_l} (M(v, v) - \sigma N(v, v)) \\
 &= \sum_{i,j=1}^l \beta_i \beta_j (b(\tilde{w}_i, \tilde{w}_j) - 2\sigma M(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) + \sigma^2 N(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j)) \\
 &\quad - \frac{1}{\mu_l} \sum_{i,j=1}^l \beta_i \beta_j (M(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) - \sigma N(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j)) \\
 &= \sum_{i=1}^l \beta_i^2 \left(1 - \frac{\mu_i}{\mu_l}\right) \\
 &\leq 0,
 \end{aligned}$$

da $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_l < 0$.

Die Voraussetzungen von Lemma 2.7 sind somit erfüllt. Eine weitere Rechnung liefert jedoch

$$\begin{aligned}
 &b(w - \sigma Tv, w - \sigma Tv) \\
 &= b(w, w) - 2\sigma b(w, Tv) + \sigma^2 b(Tv, Tv) \\
 &= b(w, w) - 2\sigma M(v, v) + \sigma^2 N(v, v) \\
 &= \sum_{i=1}^l \beta_i^2 \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Dies widerspricht der Aussage in Lemma 2.7. Damit ist Theorem 2.8 bewiesen. ■

Bemerkung 2.9 \widehat{B} ist positiv definit, wenn v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind und σ nicht Eigenwert von (2.1) ist.

Beweis:

Setzt man zu $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned}
 v(c) &:= \sum_{i=1}^n c_i v_i \quad (\in D_M) \text{ und} \\
 w(c) &:= \sum_{i=1}^n c_i w_i \quad (\in X),
 \end{aligned}$$

so folgt

$$b(Tf, w(c)) = M(f, v(c)) \quad \text{für alle } f \in D_M \quad (2.7)$$

aus $b(Tf, w_i) = M(f, v_i)$ für alle $f \in D_M$ und jedes $i = 1, \dots, n$. Insbesondere ist daher

$$b(Tv(c), w(c)) = M(v(c), v(c)) .$$

Folglich hat man

$$\begin{aligned} 0 &\leq b(w(c) - \sigma Tv(c), w(c) - \sigma Tv(c)) \\ &= b(w(c), w(c)) - 2\sigma b(Tv(c), w(c)) + \sigma^2 b(Tv(c), Tv(c)) \\ &= b(w(c), w(c)) - 2\sigma M(v(c), v(c)) + \sigma^2 N(v(c), v(c)) \\ &= c^T \widehat{B}c . \end{aligned}$$

Daher ist \widehat{B} stets positiv semidefinit.

Sei jetzt vorausgesetzt, daß v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind und daß σ kein Eigenwert von Problem (2.1) ist. Gezeigt wird (indirekt), daß dann für $c \neq 0$ auch $b(w(c) - \sigma Tv(c), w(c) - \sigma Tv(c)) \neq 0$, also $c^T \widehat{B}c \neq 0$ gilt.

Angenommen, für ein $c \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ist $b(w(c) - \sigma Tv(c), w(c) - \sigma Tv(c)) = 0$. Dann folgt (aus der für $b(\cdot, \cdot)$ gültigen CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung)

$$b(w(c) - \sigma Tv(c), x) = 0 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Insbesondere ist daher

$$b(w(c) - \sigma Tv(c), Tf) = 0 \quad \text{für alle } f \in D_M.$$

Damit hat man aber

$$b(w(c), Tf) = \sigma b(Tv(c), Tf) \quad \text{für alle } f \in D_M.$$

Mit (2.7) und $b(Tv(c), Tf) = N(v(c), f)$ für jedes $f \in D_M$ folgt schließlich

$$M(f, v(c)) = \sigma N(f, v(c)) \quad \text{für alle } f \in D_M.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von v_1, \dots, v_n und $c \neq 0$ folgt $v(c) \neq 0$. Folglich ist σ ein Eigenwert des Problems (2.1), im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Theorem 2.8 enthält als Spezialfall ein Theorem von LEHMANN, das in Zusammenhang mit Eigenwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen eine Rolle spielt. Wir werden dieses Theorem später verwenden und geben es daher hier an.

Theorem 2.10 (Lehmann) *Es gelten die Annahmen A1, A2 und A3. Weiterhin seien für $i = 1, \dots, n$ Elemente $v_i \in D_M$ und $w_i \in D_N$ gegeben, für die*

$$N(f, w_i) = M(f, v_i) \quad \text{für alle } f \in D_M \text{ und für jedes } i = 1, \dots, n$$

gelte.

Die Matrizen A_0, A_1, A_2, \hat{A} und \hat{B} seien durch

$$\begin{aligned} A_0 &:= [N(v_i, v_k)]_{i,k=1,\dots,n} , \\ A_1 &:= [M(v_i, v_k)]_{i,k=1,\dots,n} , \\ A_2 &:= [N(w_i, w_k)]_{i,k=1,\dots,n} , \\ \hat{A} &:= A_1 - \sigma A_0 , \\ \hat{B} &:= A_2 - 2\sigma A_1 + \sigma^2 A_0 \end{aligned}$$

definiert. \hat{B} sei positiv definit.

Die Matrixeigenwertaufgabe

$$\hat{A}x = \mu \hat{B}x$$

habe die Eigenwerte $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p < 0 \leq \dots \leq \mu_n$.

Behauptung: Für $l = 1, \dots, p$ enthält das Intervall

$$\left[\sigma + \frac{1}{\mu_l}, \sigma \right)$$

mindestens l Eigenwerte der Eigenwertaufgabe (2.1).

Beweis:

Die Aussage folgt sofort aus Theorem 2.8, wenn man $X := D_N, T : D_M \rightarrow D_N$ mit $Tf := f$ sowie $b(f, g) := N(f, g)$ für alle $f, g \in D_N$ setzt. ■

2.4.2 Die Rolle des Parameters σ im Theorem von Lehmann

Unser Ziel ist es, für jedes der vier WILLERSSchen Eigenwertprobleme eine Einschließung $[\lambda_1]$ für den kleinsten Eigenwert λ_1 zu bestimmen. Die Ermittlung einer genauen unteren Schranke erfolgt mit Hilfe des Theorems von LEHMANN. Hierbei stellt sich das Problem einer geeigneten Wahl des dort auftauchenden Parameters σ .

1. σ soll so gewählt sein, daß \hat{B} positiv definit ist. Um dies sicherzustellen, darf σ kein Eigenwert von (2.1) sein (vgl. Bemerkung 2.9).

2. Gelingt es, für ein $p \in \mathbf{N}$ eine Zahl σ_{p+1} zu bestimmen, die garantierte untere Schranke für den $(p+1)$ -ten Eigenwert des betrachteten WILLERSSchen Eigenwertproblems ist und die die Bedingung

$$\sigma_{p+1} > \Lambda_p \quad (2.8)$$

erfüllt, wobei Λ_p eine obere Schranke für den p -ten Eigenwert sein soll, und stellt sich für das im Theorem von LEHMANN definierte Matrixeigenwertproblem $\hat{A}x = \mu\hat{B}x$ heraus, daß p negative Eigenwerte

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p \quad (2.9)$$

vorliegen, so ist für jedes $l = 1, \dots, p$ die Zahl $\left(\sigma_{p+1} + \frac{1}{\mu_l}\right)$ eine untere Schranke für den $(p+1-l)$ -ten Eigenwert des WILLERSSchen Eigenwertproblems. σ_{p+1} wäre somit eine geeignete Wahl für σ .

3. Ist eine der Bedingungen (2.8) oder (2.9) nicht erfüllt, so läßt sich keine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert des WILLERSSchen Eigenwertproblems berechnen, da man dann die Indizes der Eigenwerte, die in den im Theorem von LEHMANN genannten Intervallen liegen, nicht genau kennt.

Die Bestimmung eines σ_{p+1} , das die in 2. beschriebenen Anforderungen erfüllt, wird im Anschluß an Theorem 2.13 geklärt.

2.5 Obere Schranken für die Eigenwerte

In diesem Abschnitt geben wir eine Beschreibung der positiven Eigenwerte durch ein bekanntes Variationsprinzip an. Aus diesem Variationsprinzip, das dem COURANTSchen *Minimum-Maximum*-Prinzip entspringt, lassen sich ein Vergleichssatz, der für die Bestimmung grober unterer Schranken des Eigenwertproblems benötigt wird sowie das Verfahren von RAYLEIGH-RITZ ableiten. Ähnliche Aussagen finden sich in [4], dort sind sie für linksdefinite Probleme bewiesen worden.

Es gelten folgende Modifikationen der Annahmen A1 und A2 aus Unterkapitel 2.3:

- A1*: Die Bilinearformen $M(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ sind symmetrisch und positiv definit.

A2*: Zu $J := \{i \in \mathbf{N} : i \leq \dim D_M\}$ gibt es eine Folge $(\lambda_i)_{i \in J}$ in \mathbf{R} von Eigenwerten des Problems (2.1) und eine Folge $(\phi_i)_{i \in J}$ in $D_M \setminus \{0\}$ von zugehörigen Eigenelementen mit $M(f, \phi_i) = \lambda_i N(f, \phi_i)$ für alle $f \in D_M, i \in J$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_i &\leq \lambda_k \text{ für alle } i, k \in J \text{ mit } i \leq k, \\ N(\phi_i, \phi_k) &= \delta_{ik} \text{ für } i, k \in J, \\ N(f, f) &= \sum_{i \in J} N(f, \phi_i)^2 \text{ für alle } f \in D_M. \end{aligned}$$

Die Aussagen aus Lemma 2.4 übertragen sich. Ferner folgt sofort

Lemma 2.11

- (i) $\lambda_1 > 0$,
- (ii) $M(f, f) \geq \sum_{i \in J} \lambda_i N(f, \phi_i)^2$ für alle $f \in D_M$.

Beweis:

Zu (i): Es ist $0 < M(\phi_1, \phi_1) = \lambda_1 N(\phi_1, \phi_1) = \lambda_1$.

Zu (ii): Setzt man $\tilde{\phi}_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \phi_i, i \in J$, so gilt

$$M(\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_k}} M(\phi_i, \phi_k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_k}} \lambda_k N(\phi_i, \phi_k) = \delta_{ik}$$

für $i, k \in J$. Da $M(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf $D_M \times D_M$ ist, gilt für jedes $f \in D_M$ die BESSELSche Ungleichung

$$M(f, f) \geq \sum_{i \in J} M(f, \tilde{\phi}_i)^2 = \sum_{i \in J} \frac{1}{\lambda_i} M(f, \phi_i)^2 = \sum_{i \in J} \lambda_i N(f, \phi_i)^2 . \quad \blacksquare$$

Die Hauptaussage dieses Abschnitts lautet

Theorem 2.12 (Charakterisierung der Eigenwerte mittels eines Variationsprinzips) Die Annahmen A1* und A2* mögen zutreffen. Dann gilt für $j \in J$:

$$\lambda_j = \min_{\substack{U \text{ ist Unterraum von } D_M \\ \dim U = j}} \max_{f \in U \setminus \{0\}} \frac{M(f, f)}{N(f, f)} . \quad (2.10)$$

Beweis:

Es sei $j \in J$. Der Beweis verläuft in drei Schritten.

1. Schritt: Es sei $f \in D_M \setminus \{0\}$ mit $N(f, \phi_k) = 0$ für $k \in J, k < j$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} M(f, f) &\geq \sum_{k \in J} \lambda_k N(f, \phi_k)^2 \\ &= \sum_{k \geq j} \lambda_k N(f, \phi_k)^2 \\ &\geq \lambda_j \sum_{k \geq j} N(f, \phi_k)^2 \\ &= \lambda_j N(f, f) \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{M(f, f)}{N(f, f)} \geq \lambda_j .$$

2. Schritt: Es sei nun U ein beliebiger Unterraum von D_M der Dimension j . Sei $W := \{0\}$, falls $j = 1$ und $W := \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_{j-1}\}$, falls $j \geq 2$. Dann gibt es ein $\hat{f} \neq 0$ in U mit $\hat{f} \perp W$ im Sinne des inneren Produkts $N(\cdot, \cdot)$. Im Fall $j = 1$ ist das klar. Falls $j \geq 2$, sei $\{u_1, \dots, u_j\}$ eine Basis von U . Die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^j c_i N(u_i, \phi_k) = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, j-1$$

bilden ein homogenes lineares Gleichungssystem mit $j-1$ Gleichungen in den j Unbekannten c_1, \dots, c_j . Dieses Gleichungssystem besitzt eine nichttriviale Lösung (c'_1, \dots, c'_j) .

Setzt man $\hat{f} := \sum_{i=1}^j c'_i u_i \in U$, so ist $\hat{f} \neq 0$ und

$N(\hat{f}, \phi_k) = 0$ für alle $k \in J$ mit $k < j$. Mit Hilfe von Schritt 1 folgt

$$\max_{0 \neq f \in U} \frac{M(f, f)}{N(f, f)} \geq \frac{M(\hat{f}, \hat{f})}{N(\hat{f}, \hat{f})} \geq \lambda_j .$$

(Das Maximum existiert, da die Abbildung $f \mapsto \frac{M(f, f)}{N(f, f)}$ auf der kompakten Menge $\{f \in U : N(f, f) = 1\}$ stetig ist.)

Also ist $\lambda_j \leq \max_{0 \neq f \in U} \frac{M(f, f)}{N(f, f)}$ für jeden j -dimensionalen Unterraum U von D_M .

3. Schritt: Es sei $\tilde{U} := \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_j\}$. Für $0 \neq f \in \tilde{U}$, $f = \sum_{k=1}^j \alpha_k \phi_k$ mit $\alpha_k \in \mathbf{R}$, $1 \leq k \leq j$, folgt:

$$N(f, f) = \sum_{k=1}^j \alpha_k^2$$

sowie wegen $f = \sum_{k=1}^j \alpha_k \sqrt{\lambda_k} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k \right)$ und $M \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \phi_i, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k \right) = \delta_{ik}$

$$\begin{aligned} M(f, f) &= \sum_{k=1}^j \alpha_k^2 \lambda_k \\ &\leq \lambda_j \sum_{k=1}^j \alpha_k^2 \\ &= \lambda_j N(f, f) \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{M(f, f)}{N(f, f)} \leq \lambda_j$$

sowie

$$\max_{0 \neq f \in \tilde{U}} \frac{M(f, f)}{N(f, f)} \leq \lambda_j. \quad (2.11)$$

Aufgrund des Ergebnisses von Schritt 2 muß in (2.11) sogar Gleichheit gelten. Damit ist (2.10) bewiesen. ■

Als erste Anwendung von Theorem 2.12 erhalten wir

Theorem 2.13 (Vergleichssatz) *Die Annahmen A1* und A2* mögen für D_M , M und N zutreffen sowie analoge Annahmen für $D_{\tilde{M}}$, \tilde{M} und \tilde{N} . Es sei $\tilde{J} := \{i \in \mathbf{N} : i \leq \dim D_{\tilde{M}}\}$ und $\{\tilde{\lambda}_i : i \in \tilde{J}\}$ die Menge der Eigenwerte des Problems*

$$\tilde{M}(f, \phi) = \lambda \tilde{N}(f, \phi) \text{ für alle } f \in D_{\tilde{M}}$$

mit $0 < \tilde{\lambda}_i \leq \tilde{\lambda}_k$, falls $i \leq k$.

Gilt $D_{\tilde{M}} \subset D_M$ und $\frac{M(f, f)}{N(f, f)} \leq \frac{\tilde{M}(f, f)}{\tilde{N}(f, f)}$ für alle $f \in D_{\tilde{M}} \setminus \{0\}$, so ist

$$\lambda_j \leq \tilde{\lambda}_j$$

für jedes $j \in \tilde{J}$.

Beweis:

Sei $j \in \tilde{J}$. Nach Theorem 2.12 gibt es einen j -dimensionalen Unterraum U von $D_{\tilde{M}}$ mit

$$\tilde{\lambda}_j = \max_{f \in U \setminus \{0\}} \frac{\tilde{M}(f, f)}{\tilde{N}(f, f)} \geq \max_{f \in U \setminus \{0\}} \frac{M(f, f)}{N(f, f)}.$$

Wegen $D_{\tilde{M}} \subset D_M$ ist U auch ein j -dimensionaler Unterraum von D_M . Nach Theorem 2.12 gilt daher

$$\lambda_j \leq \max_{f \in U \setminus \{0\}} \frac{M(f, f)}{N(f, f)}.$$

Damit ist aber $\lambda_j \leq \tilde{\lambda}_j$ gezeigt. ■

Bemerkung 2.14 Man beachte, daß mit $\{\tilde{\lambda}_i : i \in \tilde{J}\}$ die Eigenwerte des Originalproblems und mit $\{\lambda_i : i \in J\}$ die Eigenwerte des Vergleichsproblems gemeint sind.

Bemerkung 2.15 In Anknüpfung an Abschnitt 2.4.2 läßt sich der Vergleichssatz folgendermaßen bei der Lösung der WILLERSSchen Eigenwertaufgaben einsetzen: Für jedes der vier Probleme kann ein geschlossen lösbares, selbstadjungiertes und volldefinites Vergleichsproblem formuliert werden, dessen Eigenwerte untere Schranken für die Eigenwerte des WILLERSSchen Problems darstellen. (In Abschnitt 3.3 wird für jeden angesprochenen Lageungsfall das zugehörige Vergleichsproblem konstruiert und für ein $s \in \mathbf{N}$ die Lage seiner s kleinsten Eigenwerte angegeben. Mit Hilfe von Intervallarithmetik wird gezeigt, daß die Eigenwerte einfach sind.) Für jeden Eigenwert λ_i^V , $1 \leq i \leq s$, des Vergleichsproblems läßt sich eine untere Schranke σ_i , $1 \leq i \leq s$ angeben. Jedes dieser σ_i ist dann natürlich auch eine untere Schranke für den entsprechenden Eigenwert λ_i des WILLERSSchen Problems. Falls für ein $p \in \mathbf{N}$ mit $p \leq s - 1$ für σ_{p+1} die Bedingungen (2.8) und (2.9) erfüllt sind, so kann als Ausgangswert für die numerischen Berechnungen $\sigma := \sigma_{p+1}$ gesetzt werden.

Schließlich können wir den Satz formulieren, der die Grundlage für die Berechnung oberer Schranken des Problems (2.1) bildet. Man erhält ihn, indem man in Theorem 2.13 für $D_{\tilde{M}}$ einen n -dimensionalen Unterraum V von D_M wählt und $\tilde{M} := M|_{V \times V}$ sowie $\tilde{N} := N|_{V \times V}$ setzt.

Theorem 2.16 (Rayleigh-Ritz) Die Annahmen $A1^*$ und $A2^*$ mögen zutreffen. Für festes $n \in \mathbf{N}$ seien $v_1, \dots, v_n \in D_M$ linear unabhängig. Es seien

$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ die ersten n Eigenwerte (Vielfachheiten mitgezählt) von (2.1). Die symmetrischen und positiv definiten Matrizen A_0 und A_1 seien durch

$$\begin{aligned} A_0 &:= [N(v_i, v_k)]_{i,k=1,\dots,n} \text{ ,} \\ A_1 &:= [M(v_i, v_k)]_{i,k=1,\dots,n} \end{aligned}$$

definiert.

Es seien $0 < \lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_n$ die Eigenwerte des Problems

$$A_1 x = \lambda A_0 x \text{ .}$$

Dann gilt

$$\lambda_j \leq \lambda'_j$$

für alle $j = 1, \dots, n$.

Beweis:

V bezeichne den von v_1, \dots, v_n aufgespannten n -dimensionalen Unterraum von D_M . Es sei $\widetilde{M} := M|_{V \times V}$ und $\widetilde{N} := N|_{V \times V}$. (Dann ist $D_{\widetilde{M}} = D_{\widetilde{N}} = V$.) Das Eigenwertproblem

„Gesucht sind Paare $(\lambda, v) \in \mathbf{R} \times D_{\widetilde{M}} \setminus \{0\}$ mit

$$\widetilde{M}(w, v) = \lambda \widetilde{N}(w, v) \tag{2.12}$$

für alle $w \in D_{\widetilde{M}}$ “

ist äquivalent mit dem Problem

„Gesucht sind Paare $(\lambda, v) \in \mathbf{R} \times V \setminus \{0\}$ mit

$$M(v_i, v) = \lambda N(v_i, v)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ “.

Dieses Problem ist aber äquivalent mit dem Problem

„Gesucht sind Paare $(\lambda, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, mit

$$M\left(v_i, \sum_{k=1}^n x_k v_k\right) = \lambda N\left(v_i, \sum_{k=1}^n x_k v_k\right)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ “, d.h. mit

$$\sum_{k=1}^n M(v_i, v_k) x_k = \lambda \sum_{k=1}^n N(v_i, v_k) x_k$$

für alle $i = 1, \dots, n$, d.h. mit

$$A_1 x = \lambda A_0 x \text{ .}$$

Folglich sind $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ die nach wachsender Größe geordneten Eigenwerte von (2.12) und Theorem 2.16 erweist sich als Spezialfall von Theorem 2.13.

■

Kapitel 3

Numerischer Zugang

3.1 Vorbereitungen

Im gesamten Kapitel 3 sei vorausgesetzt, daß die Bilinearformen $M(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ symmetrisch und positiv definit sind.

Die Theoreme 2.10 und 2.16 stellen die Grundlage für die Bestimmung unterer und oberer Schranken für funktionalanalytische Eigenwertprobleme der Gestalt (2.1) dar. Sie führen beide auf die Aufgabe, allgemeine Matrixeigenwertprobleme der Form

$$Ax = \lambda Bx \quad , \quad A = A^T \quad , \quad B = B^T \quad , \quad B \text{ positiv definit} \quad (3.1)$$

mit Matrizen $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbf{N}$ zu lösen. Die Eigenwerte von (3.1) seien der Größe nach geordnet: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Verwendet man bei der Lösung dieser allgemeinen Matrixeigenwertprobleme Intervallarithmetik, so erhält man verifizierte Einschließungen für die unteren und oberen Schranken der ersten Eigenwerte des funktionalanalytischen Eigenwertproblems (2.1). Hierbei wird allerdings davon ausgegangen, daß die Matrizen \hat{A} und \hat{B} aus Theorem 2.10 und A_0 und A_1 aus Theorem 2.16 als Punktmatrizen vorliegen. Müssen die Matrixelemente jedoch mit Hilfe von Intervallarithmetik ausgewertet werden, so sind die numerischen Ausgangsdaten für die Anwendung der genannten Theoreme Intervallmatrizen $[\hat{A}]$, $[\hat{B}]$, $[A_0]$ und $[A_1]$, welche die exakten Punktmatrizen \hat{A} , \hat{B} , A_0 und A_1 enthalten. In diesem Fall sind zusätzliche Überlegungen nötig. Dies wird weiter unten erläutert.

In Abschnitt 3.3 werden die vier in Unterkapitel 2.2 funktionalanalytisch formulierten WILLERSSchen Eigenwertprobleme untersucht. In jedem dieser vier Fälle führt die Einschließung des kleinsten Eigenwertes des entsprechenden Problems nach den eben getroffenen Feststellungen auf zwei allgemeine

Matrixeigenwertprobleme der Struktur (3.1): nach Theorem 2.10 auf das Lösen des LEHMANN-GOERISCH-Problems, das eine garantierte untere Schranke für den kleinsten Eigenwert des betreffenden WILLERSSchen Eigenwertproblems liefert und nach Theorem 2.16 auf das RAYLEIGH-RITZ-Problem, mit dessen Hilfe eine garantierte obere Schranke berechnet werden kann.

In der jüngeren Vergangenheit wurden verschiedene Verfahren vorgeschlagen, Einschließungen für die Eigenwerte allgemeiner Matrixeigenwertprobleme der Gestalt (3.1) zu bestimmen. Zu den bekanntesten Methoden zählen die von RUMP ([24], [25]), die auf dem BROUWERSchen Fixpunktsatz basiert und die von BEHNKE ([2], [3]), die sich auf den Einschließungssatz von GOERISCH (Theorem 2.8) stützt.

Da sich das Verfahren von BEHNKE nahtlos in die in Kapitel 2 dargelegte Theorie der Einschließungssätze einreicht, sich hervorragend für die Behandlung der vier WILLERSSchen Eigenwertprobleme eignet und sehr genaue Einschließungen liefert, wird es - mit gewissen Modifikationen - in dieser Arbeit aufgegriffen. Mit Hilfe des BEHNKE-Algorithmus läßt sich eine Einschließung für einen Eigenwert λ_j eines allgemeinen Matrixeigenwertproblems (3.1) mit vorgegebenem Index j berechnen.

Für das BEHNKE-Verfahren, aber auch in allgemeinerem Zusammenhang, ist es wichtig, Aussagen über die Lage der Eigenwerte symmetrischer Matrizen machen zu können. Zu diesem Zweck wird eine von LOHNER in [20] beschriebene Methode zur genauen Einschließung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix P verwendet. Das Verfahren von LOHNER wird so modifiziert, daß auch Näherungen für Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren angegeben werden können.

Die von LOHNER und BEHNKE abgeleiteten Verfahren werden nachfolgend erläutert.

3.1.1 Das Verfahren von Lohner

Die theoretische Grundlage für den LOHNERschen Einschließungsalgorithmus findet sich in [20]. LOHNER beschreibt dort ein Verfahren zur Einschließung von Eigenwerten und Approximation von Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix P mit hoher Genauigkeit. Es handelt sich hierbei um eine Weiterentwicklung der klassischen JACOBI-Methode (s. [29]) mit der Zielsetzung, die durch das gerundete Produkt aller GIVENS-Matrizen entstehende fast orthogonale Transformationsmatrix zu verbessern.

Es wird zunächst in einer „ersten JACOBI-Methode“ eine Matrix \tilde{T} bestimmt, die die Näherungen für die Eigenvektoren von P in einfacher Länge enthält. Bei der „zweiten JACOBI-Methode“ werden die Spalten von \tilde{T} orthonormiert und das Ergebnis T im *staggered-correction*-Format (vgl. [1], [27]) als $T = T_1 + T_2$ abgespeichert. (Bei der *staggered correction* wird eine reelle Zahl a approximiert durch $a \approx a_1 + \dots + a_m$, wobei die a_i Maschinenzahlen sind und die Summe unter Verwendung eines langen Akkumulators ausgewertet wird). *staggered correction* wird auch bei der Abspeicherung der Diagonalelemente der Matrix

$$P_1 := T^{-1}PT = D + \tilde{P}_1$$

(und damit der Eigenwertapproximationen von P) eingesetzt, wobei D eine Diagonalmatrix und \tilde{P}_1 eine vollbesetzte Matrix ist. Das JACOBI-Verfahren wird mit $D + \tilde{P}_1$ fortgesetzt, wobei $\tilde{\tilde{P}}_1$ eine Näherung für \tilde{P}_1 ist. Dies liefert schließlich die endgültige Transformationsmatrix T_f im *staggered-correction*-Format als $T_f = T_{1f} + T_{2f}$. Damit lassen sich dann Einschließungen $[\lambda_i]$ für die Eigenwerte von P bestimmen.

Die Mittelpunkte der Einschließungsintervalle $mid([\lambda_i])$ bilden die gewünschten Näherungen für die Eigenwerte, die Spalten der Matrix $\# * (T_{1f} + T_{2f})$ (Rundung zur nächsten Gleitpunktmatrix) die gewünschten Näherungen für die Eigenvektoren.

Eine algorithmische Implementierung des Verfahrens findet sich in [21].

3.1.2 Das Verfahren von Behnke

Die aus dem Verfahren von BEHNKE abgeleitete Methode zur verifizierten Einschließung eines einfachen, gut vom Rest des Spektrums separierten Eigenwertes λ_j , $1 \leq j \leq n$, eines allgemeinen Eigenwertproblems der Gestalt (3.1) besteht aus drei wesentlichen Schritten, die als Motivation am Anfang dieses Abschnitts zusammengefaßt werden:¹

1. Berechnung von Näherungen

$$\tilde{\lambda}_{j-1} < \tilde{\lambda}_j < \tilde{\lambda}_{j+1}$$

($1 \leq j \leq n$) für die Eigenwerte sowie einer Näherung \tilde{x}_j für den zu λ_j gehörigen Eigenvektor.

¹Die Voraussetzung, daß λ_j einfach und gut separiert ist, ist bei den in dieser Arbeit betrachteten Matrixeigenwertproblemen erfüllt. Im Algorithmus findet eine entsprechende Überprüfung statt.

- (Falls $j = 1$, entfällt die Berechnung von $\tilde{\lambda}_{j-1}$, falls $j = n$, die von $\tilde{\lambda}_{j+1}$).
2. Bestimmung einer groben oberen Schranke ρ für λ_{j-1} mit $\lambda_{j-1} < \rho < \lambda_j$ (entfällt, falls $j = 1$), einer groben unteren Schranke σ für λ_{j+1} mit $\lambda_j < \sigma < \lambda_{j+1}$ (entfällt, falls $j = n$), einer Näherung $\tilde{\lambda}_{\min}(B)$ für $\lambda_{\min}(B)$ sowie einer Konstanten c mit $0 < c \leq \lambda_{\min}(B)$ mit Hilfe der Eigenwertnäherungen und verifizierenden Rechnungen.
 3. Berechnung genauer Schranken für λ_j mit Hilfe von Einschließungssätzen für Matrixeigenwertprobleme unter Verwendung von \tilde{x}_j , ρ , σ und c .

Die mathematische Grundlage für die einzelnen Schritte wird jetzt präzisiert.

Der erste Schritt

Die im ersten Schritt benötigten Näherungen für die Eigenwerte und Eigenvektoren werden durch Umwandlung des allgemeinen Eigenwertproblems in ein spezielles Eigenwertproblem, Anwendung des LOHNER-Verfahrens und anschließende Rücktransformation bestimmt. Obwohl das LOHNER-Verfahren sogar Einschließungen für die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix berechnet und man Einwände gegen den erhöhten Aufwand anführen könnte, kommt es bereits an dieser Stelle zur näherungsweisen Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren zum Einsatz, da die dadurch gelieferten Approximationen bereits sehr genau sind und sich der Aufwand nicht unverhältnismäßig vergrößert.

Der zweite Schritt

Für die Ermittlung der im zweiten Schritt genannten Größen ρ , σ und c spielt das folgende Lemma ([26], S. 312/313) eine wichtige Rolle:

Lemma 3.1 *Es seien $\check{A}, \check{B} \in \mathbf{R}^{q \times q}$ mit $\check{A} = \check{A}^T$, $\check{B} = \check{B}^T$, \check{B} positiv definit sowie $\gamma \in \mathbf{R}$. Die Anzahl der Eigenwerte von $\check{A}x = \lambda\check{B}x$, die kleiner, gleich oder größer als γ sind, ist gleich der Anzahl der Eigenwerte der Matrix $(\check{A} - \gamma\check{B})$, die negativ sind, verschwinden bzw. positiv sind.*

Um mit Hilfe von Lemma 3.1 eine zuverlässige Aussage über die Lage der Eigenwerte des Problems $\check{A}x = \lambda\check{B}x$ bezüglich γ machen zu können, wird eine Einschließung $[\check{A} - \gamma\check{B}]$ der Matrix $\check{A} - \gamma\check{B}$ mit Hilfe von Intervallarithmetik berechnet und die zugehörige symmetrische Mittelpunktmatrix

$mid\left(\left[\check{A} - \gamma\check{B}\right]\right)$ gebildet. Mit Hilfe des LOHNER-Verfahrens werden Einschließungen $[\lambda_{1,\gamma}^{mid}], \dots, [\lambda_{n,\gamma}^{mid}]$ für die Eigenwerte von $mid\left(\left[\check{A} - \gamma\check{B}\right]\right)$ ermittelt. Durch Anwendung des folgenden Theorems ([28], S. 203) lassen sich dann Einschließungen $[\lambda_{1,\gamma}], \dots, [\lambda_{n,\gamma}]$ für die Eigenwerte von $\check{A} - \gamma\check{B}$ bestimmen:

Theorem 3.2 *Es sei $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ und $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Störmatrix. Das (i, k) -te Element von E werde mit e_{ik} bezeichnet. Ferner sei $\tilde{A} := A + E$ eine gestörte symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\tilde{\lambda}_1 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_n$. Dann gilt*

$$\max \left\{ \left| \tilde{\lambda}_i - \lambda_i \right| \right\} \leq \|E\|_2 ,$$

wobei die Zahl $\|E\|_2 := \left(\sum_{i,k=1}^n e_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ die SCHUR-Norm von E bezeichnet.

Setzt man $\tilde{A} := \check{A} - \gamma\check{B}$, so ist $\tilde{A} \in \left[\check{A} - \gamma\check{B}\right]$. Mit $A := mid\left(\left[\check{A} - \gamma\check{B}\right]\right)$ läßt sich \tilde{A} darstellen als eine Summe aus A und einer (nicht näher spezifizierten) symmetrischen Störmatrix E :

$$\tilde{A} = A + E.$$

Es gilt

$$\lambda_i - \|E\|_2 \leq \tilde{\lambda}_i \leq \lambda_i + \|E\|_2$$

für einen beliebigen Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$. Es sei $[H] := \left[\check{A} - \gamma\check{B}\right] - mid\left(\left[\check{A} - \gamma\check{B}\right]\right)$. Das (i, k) -te Element von $[H]$ werde mit $[h]_{ik}$ bezeichnet. Kennt man die obere Intervallgrenze S von $\left(\sum_{i,k=1}^n [h]_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, so gilt wegen

$$E \in [H] \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i,k=1}^n e_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}} \in \left(\sum_{i,k=1}^n [h]_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

die Abschätzung

$$\|E\|_2 \leq S.$$

Daher ist

$$[\lambda_{i,\gamma}] := \left[\underline{[\lambda_{i,\gamma}^{mid}] - S} \quad , \quad \overline{[\lambda_{i,\gamma}^{mid}] + S} \right]$$

eine Einschließung für den i -ten Eigenwert von $\check{A} - \gamma\check{B}$.²

Die Argumentation läßt sich auch auf den Fall übertragen, daß für die Matrizen \check{A} und \check{B} nur Einschließungen $[\check{A}]$ und $[\check{B}]$ bekannt sind. Man definiert dann $A := \text{mid}([\check{A}] - \gamma[\check{B}])$, $\tilde{A} := \check{A} - \gamma\check{B}$ und beachtet, daß

$$[\check{A}] - \gamma[\check{B}] \ni \tilde{A} = A + E$$

gilt.

Wir kehren zum Matrixeigenwertproblem (3.1) zurück. Um die groben Schranken ρ , σ und c mit $\lambda_{j-1} < \rho < \lambda_j < \sigma < \lambda_{j+1}$ und $0 < c \leq \lambda_{\min}(B)$ zu bestimmen, geht man folgendermaßen vor:

- Die berechnete Näherung $\tilde{\lambda}_{j-1}$ aus Schritt 1 wird etwas vergrößert und damit eine Zahl ρ festgelegt. Durch Berechnung von Einschließungen für die Eigenwerte von $A - \rho B$ wird festgestellt, ob $j - 1$ negative und $n - (j - 1)$ positive Eigenwerte vorliegen. Falls die Null eingeschlossen wird oder nicht die genannte Anzahl an positiven und negativen Eigenwerten vorliegt, wird das Verfahren abgebrochen, da sich dann keine verlässlichen Aussagen ableiten lassen.
- Die berechnete Näherung $\tilde{\lambda}_{j+1}$ aus Schritt 1 wird etwas verkleinert und damit eine Zahl σ festgelegt. Durch Berechnung von Einschließungen für die Eigenwerte von $A - \sigma B$ wird festgestellt, ob j negative und $n - j$ positive Eigenwerte vorliegen. Falls die Null eingeschlossen wird oder nicht die genannte Anzahl an positiven und negativen Eigenwerten vorliegt, wird das Verfahren aus dem oben genannten Grund abgebrochen.
- Die berechnete Näherung $\tilde{\lambda}_{\min}(B)$ wird etwas verkleinert und damit eine Zahl c festgelegt. Durch Berechnung von Einschließungen für die Eigenwerte von $B - cI$ (I ist die Einheitsmatix) wird festgestellt, ob n positive Eigenwerte vorliegen. Falls die Null eingeschlossen wird oder nicht die genannte Anzahl an positiven Eigenwerten vorliegt, wird das Verfahren aus dem oben genannten Grund abgebrochen.

Die genaue Festlegung von ρ , σ und c folgt bei der Beschreibung des Algorithmus im Pseudocode. Nach dem Ende des zweiten Schrittes ist eine verifizierte untere Schranke ρ und eine verifizierte obere Schranke σ für den Eigenwert λ_j gefunden. Diese Schranken sind jedoch noch sehr grob. Im dritten Schritt werden schließlich genaue Schranken bestimmt.

²Für Intervalle wird die Schreibweise $[\lambda] = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ gewählt, $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ sind dann die untere bzw. obere Grenze.

Der dritte Schritt

Grundlage für den dritten Schritt ist das folgende, aus dem Theorem von GOERISCH (Theorem 2.8) abgeleitete Theorem zur Berechnung von Einschließungen für die Eigenwerte allgemeiner Matrixeigenwertprobleme der Gestalt (3.1) und sich daraus ergebender Konsequenzen. Diese Aussagen finden sich in allgemeinerer Form in [3].

Theorem 3.3 *Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

1. *Gegeben sind Matrizen $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mit $A = A^T$, $B = B^T$, B positiv definit.*
2. *Es sind $u, v \in \mathbf{R}^n$ gegeben, $u \neq 0$.³*
3. *Es ist $c \in \mathbf{R}$, $0 < c \leq \lambda_{\min}(B)$, ferner ist $\sigma \in \mathbf{R}$. Die (1×1) -Matrizen A_0, A_1, A_2, \hat{A} und \hat{B} werden definiert durch*

$$\begin{aligned} A_0 &:= u^T B u, \\ A_1 &:= u^T A u, \\ A_2 &:= u^T A v - v^T (B v - A u) \\ &\quad + \frac{1}{c} (B v - A u)^T (B v - A u), \\ \hat{A} &:= A_1 - \sigma A_0, \\ \hat{B} &:= A_2 - 2\sigma A_1 + \sigma^2 A_0. \end{aligned}$$

\hat{B} ist positiv definit.

4. *Für den Eigenwert $\check{\mu}$ des Matrixeigenwertproblems $\hat{A}x = \mu \hat{B}x$ gilt $\check{\mu} < 0$.*

Behauptung: *Unter den genannten Voraussetzungen enthält das Intervall*

$$\left[\sigma + \frac{1}{\check{\mu}}, \sigma \right)$$

mindestens einen Eigenwert der Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda Bx$.

Beweis:

Der Beweis wird auf Theorem 2.8 zurückgeführt. Es seien $D_M := \mathbf{R}^n$, $D_N := \mathbf{R}^n$, $M(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ seien definiert durch

$$M(x, y) := x^T A y \quad \text{und} \quad N(x, y) := x^T B y \quad \text{für } x, y \in \mathbf{R}^n.$$

³Im Algorithmus wird später als v eine Näherung für $B^{-1}Au$ verwendet werden.

Dann ist die Eigenwertaufgabe

$$M(y, x) = \lambda N(y, x) \quad \text{für alle } y \in \mathbf{R}^n$$

äquivalent mit der Aufgabe

$$Ax = \lambda Bx .$$

Die Bedingungen A1, A2 und A3 aus Abschnitt 2.3 sind erfüllt. (In einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum entspricht die Gültigkeit des Satzes von PYTHAGORAS der in A2 geforderten PARSEVALSchen Gleichung, vgl. [8], S. 269). Weiterhin wird das Tripel (X, b, T) definiert durch

$$X := \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n ,$$

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := x_1^T B y_1 - c x_1^T y_1 + c x_2^T y_2 \quad \text{für } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n ,$$

$$T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad T x := \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} .$$

$b(\cdot, \cdot)$ ist bilinear und symmetrisch, T ist linear.

Es sei $\{h_1, \dots, h_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von B mit $Bh_j = \lambda_j h_j$ für $j = 1, \dots, n$. Dann gilt für $x_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j h_j$ und $x_2 = \sum_{j=1}^n \beta_j h_j$

$$\begin{aligned} b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j^2 - c \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 + c \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j - c) \alpha_j^2 + c \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \\ &\geq 0 , \end{aligned}$$

da $0 < c \leq \lambda_{\min}(B)$, d.h. $b(\cdot, \cdot)$ ist positiv semidefinit.

Für alle $x, y \in \mathbf{R}^n$ hat man

$$b(Tx, Ty) = x^T B y - c x^T y + c x^T y = x^T B y = N(x, y) .$$

Es sei

$$w := \begin{pmatrix} v \\ v - \frac{1}{c}(Bv - Au) \end{pmatrix} ,$$

dann ist

$$\begin{aligned} b(Ty, w) &= y^T Bv - cy^T v + cy^T \left(v - \frac{1}{c} (Bv - Au) \right) \\ &= y^T Au \\ &= M(y, u) \end{aligned}$$

für $y \in \mathbf{R}^n$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} b(w, w) &= v^T Bv - cv^T v \\ &\quad + c \left(v - \frac{1}{c} (Bv - Au) \right)^T \left(v - \frac{1}{c} (Bv - Au) \right) \\ &= v^T Bv - cv^T v + cv^T v - v^T (Bv - Au) \\ &\quad - (Bv - Au)^T v + \frac{1}{c} (Bv - Au)^T (Bv - Au) \\ &= v^T Bv - v^T Bv + v^T Au - v^T Bv + u^T Av \\ &\quad + \frac{1}{c} (Bv - Au)^T (Bv - Au) \\ &= u^T Av - v^T (Bv - Au) + \frac{1}{c} (Bv - Au)^T (Bv - Au) \\ &= A_2 . \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Theorem 2.8. ■

Bemerkung 3.4 Analog zu Bemerkung 2.9 kann man zeigen, daß \widehat{B} positiv definit ist, falls σ kein Eigenwert der Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda Bx$ ist.

Um die Aussage von Theorem 3.3 im Einschließungsalgorithmus verwenden zu können, wird es leicht umformuliert:

Theorem 3.5 Die Voraussetzungen 1 und 2 aus Theorem 3.3 seien erfüllt, σ , c , A_0 , A_1 und A_2 seien definiert wie in Voraussetzung 3. σ sei nicht Eigenwert der Aufgabe $Ax = \lambda Bx$. Dann besitzt die Eigenwertaufgabe

$$(A_2 - \sigma A_1)x = \tau(A_1 - \sigma A_0)x$$

einen reellen Eigenwert $\check{\tau}$. Wenn $\check{\tau} < \sigma$ gilt, dann enthält das Intervall $[\check{\tau}, \sigma)$ mindestens einen Eigenwert der Aufgabe $Ax = \lambda Bx$.

Beweis:

Es läßt sich leicht einsehen, daß $A_1 - \sigma A_0 \neq 0$. Nach Voraussetzung ist σ

kein Eigenwert der Aufgabe $Ax = \lambda Bx$. Mit den Notationen aus dem Beweis von Theorem 3.3 folgt: σ ist kein Eigenwert der Aufgabe

$$M(y, x) = \lambda N(y, x) \quad \text{für alle } y \in \mathbf{R}^n ,$$

also gilt insbesondere

$$M(u, u) \neq \sigma N(u, u) . \tag{3.2}$$

Wäre $A_1 - \sigma A_0 = 0$, so wäre $u^T Au = \sigma u^T Bu$, also $M(u, u) = \sigma N(u, u)$, im Widerspruch zu (3.2). Da \hat{B} positiv definit ist, besitzt die Eigenwertaufgabe

$$\begin{aligned} \hat{A}x &= \tilde{\tau} \hat{B}x \quad \Leftrightarrow \\ (A_1 - \sigma A_0)x &= \tilde{\tau} (A_2 - 2\sigma A_1 + \sigma^2 A_0)x \end{aligned}$$

einen reellen Eigenwert μ . Da $A_1 - \sigma A_0 \neq 0$, folgt $\mu \neq 0$.

Somit gilt für eine reelle Zahl μ , $\mu \neq 0$:

μ ist Eigenwert der Aufgabe

$$(A_1 - \sigma A_0)x = \tilde{\tau} (A_2 - 2\sigma A_1 + \sigma^2 A_0)x \quad \Leftrightarrow$$

$\frac{1}{\mu}$ ist Eigenwert der Aufgabe

$$((A_2 - \sigma A_1) - \sigma (A_1 - \sigma A_0))x = \hat{\tau} (A_1 - \sigma A_0)x \quad \Leftrightarrow$$

$\sigma + \frac{1}{\mu}$ ist Eigenwert der Aufgabe

$$(A_2 - \sigma A_1)x = \tau (A_1 - \sigma A_0)x .$$

Die Behauptung folgt somit aus Theorem 3.3. ■

Es stellt sich natürlich jetzt die Frage, wie die Größen $u, v \in \mathbf{R}^n$ und $\sigma \in \mathbf{R}$ zu wählen sind, um mit Hilfe von Theorem 3.3 bzw. Theorem 3.5 eine genaue untere Schranke für λ_j zu berechnen. Naheliegenderweise greift man auf das σ aus dem zweiten Schritt mit $\lambda_j < \sigma < \lambda_{j+1}$ zurück. Ist $u \in \mathbf{R}^n$ exakter Eigenvektor zum Eigenwert λ_j des Problems (3.1), also $Au = \lambda_j Bu$ und $v := B^{-1}Au = \lambda_j B^{-1}Bu = \lambda_j u$, so ist

$$\begin{aligned} A_1 &= u^T Au = \lambda_j u^T Bu \\ A_2 &= u^T Av = (v^T A^T u)^T = (v^T Au)^T \\ &= (\lambda_j u^T \lambda_j Bu)^T = \lambda_j^2 u^T Bu . \end{aligned}$$

Ist $\check{\tau}$ ein Eigenwert von

$$(A_2 - \sigma A_1)x = \tau (A_1 - \sigma A_0)x ,$$

so folgt

$$(\lambda_j^2 u^T B u - \sigma \lambda_j u^T B u) = \check{\tau} (\lambda_j u^T B u - \sigma u^T B u) ,$$

wegen der positiven Definitheit von B somit

$$\begin{aligned} \lambda_j^2 - \sigma \lambda_j &= \check{\tau} \lambda_j - \sigma \check{\tau} \quad \Rightarrow \\ \lambda_j (\lambda_j - \sigma) &= \check{\tau} (\lambda_j - \sigma) . \end{aligned}$$

Da $\lambda_j < \sigma$, folgt hieraus $\check{\tau} = \lambda_j$, d.h. in diesem Fall stimmen $\check{\tau}$ und λ_j überein.

In der Praxis wird man jedoch im allgemeinen u und v nicht exakt zur Verfügung haben, weshalb man Näherungen für diese Vektoren benutzt. Aufgrund von Konvergenzaussagen für die LEHMANN-Schranken ([33]) kann man erwarten, daß eine gute Näherung für den j -ten Eigenvektor, wie sie z.B. vom LOHNER-Verfahren geliefert wird, eine gute untere Schranke τ ergibt. Verwendet man das im zweiten Schritt bestimmte σ mit $\lambda_j < \sigma < \lambda_{j+1}$, so läßt sich mit Hilfe von Theorem 3.5 durch Bildung des TEMPLESchen Quotienten

$$\tau(\sigma) = \frac{A_2 - \sigma A_1}{A_1 - \sigma A_0}$$

eine im allgemeinen sehr genaue untere Schranke für λ_j berechnen. Unter den genannten Voraussetzungen hat für $y \neq 0$ der RAYLEIGH-Quotient $\frac{y A_1 y}{y A_0 y} = \frac{A_1}{A_0}$ die Größenordnung von λ_j , somit gilt

$$A_1 \approx \lambda_j A_0 < \sigma A_0$$

und daher im allgemeinen

$$-(A_1 - \sigma A_0) > 0 . \quad (3.3)$$

Sollte sich während der Berechnung herausstellen, daß (3.3) nicht erfüllt ist, wird das Verfahren abgebrochen (zu diesen Ausführungen siehe auch [3]).

Falls eine untere Schranke für λ_n berechnet werden soll (also $\sigma > \lambda_n$ ist), betrachtet man anstelle des Eigenwertproblems in Theorem 3.5 das durch den Grenzübergang $\sigma \rightarrow \infty$ entstehende Problem $A_1 x = \tau A_0 x$ und bildet den Quotienten $\frac{A_1}{A_0}$ (vgl. hierzu [2], Satz 5).

Für die Bestimmung oberer Schranken legt man das Matrixeigenwertproblem $-Ax = (-\lambda) Bx$ anstelle von (3.1) zugrunde. Statt σ wählt man das im zweiten Schritt bestimmte ρ . Eine untere Schranke für $(-\lambda_j)$, d.h. eine obere Schranke für λ_j kann dann mit Hilfe von Theorem 3.5 berechnet werden. Damit ergibt sich

Theorem 3.6 Die Voraussetzungen 1 und 2 aus Theorem 3.3 seien erfüllt. Es sei $\rho \in \mathbf{R}$, c , A_0 , A_1 und A_2 seien definiert wie in Voraussetzung 3. ρ sei nicht Eigenwert der Aufgabe $Ax = \lambda Bx$. Dann besitzt die Eigenwertaufgabe

$$(A_2 - \rho A_1)x = \tau(A_1 - \rho A_0)x$$

einen reellen Eigenwert $\check{\tau}$. Wenn $\check{\tau} > \rho$ gilt, dann enthält das Intervall $(\rho, \check{\tau}]$ mindestens einen Eigenwert der Aufgabe $Ax = \lambda Bx$.

u und v werden analog zur Bestimmung unterer Schranken gewählt. Es gilt

$$A_1 \approx \lambda_j A_0 > \rho A_0$$

und daher im allgemeinen

$$A_1 - \rho A_0 > 0,$$

d.h. auch in diesem Fall ist der Nenner des TEMPLESchen Quotienten ungleich Null. Soll eine obere Schranke von λ_1 bestimmt werden, so geschieht dies mit Hilfe des Quotienten $\frac{A_1}{A_0}$.

Im Algorithmus wird zur Verbesserung der numerischen Resultate anstelle des Problems (3.1) das spektralverschobene Matrixeigenwertproblem $(A - \tilde{\lambda}_j B)x = (\lambda - \tilde{\lambda}_j) Bx$ für die Berechnung der Einschließungen im dritten Schritt des Verfahrens verwendet (vgl. [3], [4]). Durch Addition von $\tilde{\lambda}_j$ zu den ermittelten Schranken läßt sich schließlich eine Einschließung für den Eigenwert λ_j des Original-Matrixeigenwertproblems angeben. Die Auswertung der Matrizen $A - \tilde{\lambda}_j B$, B , A_0 , A_1 und A_2 sowie die Bestimmung der TEMPLESchen bzw. RAYLEIGHschen Quotienten erfolgt mit Hilfe von Intervallarithmetik.

Der Pseudocode

Nach den theoretischen Ausführungen folgt in diesem Abschnitt eine zusammenfassende Beschreibung des Algorithmus im Pseudocode.

Eingabe: A, B Matrizen aus Problem (3.1)
 n Dimension der Matrizen
 j Index des einzuschließenden Eigenwertes

Ausgabe: $[\lambda_j]$ Einschließungsintervall

1. Berechnung von Näherungseigenwerten $\tilde{\lambda}_{j-1} < \tilde{\lambda}_j < \tilde{\lambda}_{j+1}$
 und eines Näherungseigenvektors \tilde{x}_j ;
 {Falls $j = 1$, entfällt $\tilde{\lambda}_{j-1}$;
 falls $j = n$, entfällt $\tilde{\lambda}_{j+1}$;}

2. Falls $j \neq 1$, dann

- überprüfe, ob $\tilde{\lambda}_{j-1} + 0.01 \left| \tilde{\lambda}_{j-1} \right| < \tilde{\lambda}_j$;
falls nein: stop;
- setze $\rho := \tilde{\lambda}_{j-1} + 0.005 \left| \tilde{\lambda}_{j-1} \right|$;
- berechne eine Einschließung der Eigenwerte der Matrix $A - \rho B$;
prüfe, ob $j - 1$ negative und $n - (j - 1)$ positive Eigenwerte vorliegen;
falls nein: stop;

falls $j \neq n$, dann

- überprüfe, ob $\tilde{\lambda}_j < \tilde{\lambda}_{j+1} - 0.01 \left| \tilde{\lambda}_{j+1} \right|$;
falls nein: stop;
- setze $\sigma := \tilde{\lambda}_{j+1} - 0.005 \left| \tilde{\lambda}_{j+1} \right|$;
- berechne eine Einschließung der Eigenwerte der Matrix $A - \sigma B$;
prüfe, ob j negative und $n - j$ positive Eigenwerte vorliegen;
falls nein: stop;

anschließend

- setze $c := \tilde{\lambda}_{\min}(B) - 0.1 \tilde{\lambda}_{\min}(B)$;
- berechne eine Einschließung der Eigenwerte der Matrix $B - cI$;
prüfe, ob n positive Eigenwerte vorliegen;
falls nein: stop;

3. {Berechnung von Schranken für das spektralverschobene Problem}

- $[A] := A - \tilde{\lambda}_j B$;
 $[B] := B$;
 $\rho := \rho - \tilde{\lambda}_j$;
 $\sigma := \sigma - \tilde{\lambda}_j$;
 $u := \tilde{x}_j$;
- berechne v als Näherungslösung des linearen Gleichungssystems
 $\text{mid}([B])v = \text{mid}([A])u$;
- $[A_0] := u^T [B] u$;
 $[A_1] := u^T [A] u$;
 $[A_2] := u^T [A] v - v^T ([B] v - [A] u)$
 $+ \frac{1}{c} ([B] v - [A] u)^T ([B] v - [A] u)$;

obere Schranken:

- falls $j = 1$, dann
 berechne durch Quotientenbildung eine Einschließung $[\mu]$
 für den Eigenwert des Problems $[A_1] x = \mu [A_0] x$;
- sonst
 prüfe, ob die Matrix $[A_1] - \rho [A_0]$ positiv definit ist;
 falls nein: stop;
- berechne durch Quotientenbildung eine Einschließung $[\mu]$
 für den Eigenwert des Problems
 $([A_2] - \rho [A_1]) x = \mu ([A_1] - \rho [A_0]) x$;
- prüfe, ob $\rho < \underline{\mu}$;
 falls nein: stop;
- $\bar{\lambda}_j := \tilde{\lambda}_j + \bar{\mu}$;

untere Schranken:

- falls $j = n$, dann
 berechne durch Quotientenbildung eine Einschließung $[\mu]$
 für den Eigenwert des Problems $[A_1] x = \mu [A_0] x$;
- sonst
 prüfe, ob die Matrix $-([A_1] - \sigma [A_0])$ positiv definit ist;
 falls nein: stop;
- berechne durch Quotientenbildung eine Einschließung $[\mu]$
 für den Eigenwert des Problems
 $(-[A_2] + \sigma [A_1]) x = \mu (-[A_1] + \sigma [A_0]) x$;
- prüfe, ob $\bar{\mu} < \sigma$;
 falls nein: stop;
- $\underline{\lambda}_j := \tilde{\lambda}_j + \underline{\mu}$;

$$[\lambda_j] := [\underline{\lambda}_j, \bar{\lambda}_j];$$

3.1.3 Die Definition der Matrizen in den Theoremen von Lehmann und Rayleigh-Ritz

Es soll noch kurz die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Festlegung der Matrizen A_0 , A_1 , A_2 , \hat{A} und \hat{B} in den Theoremen von LEHMANN und RAY-

LEIGH-RITZ beschrieben werden. Eine ausführliche Darstellung für jeden einzelnen Lagerungsfall folgt in Abschnitt 3.3.

Mit Hilfe des Computeralgebrasystems *Mathematica 3.0* können die Elemente der Matrizen A_0 , A_1 und A_2 analytisch bestimmt werden. In vielen Fällen handelt es sich dabei jedoch nicht um Maschinenzahlen. Die für die weitere Verarbeitung erforderliche numerische Auswertung der Matrizen erfolgt unter Verwendung von Intervallarithmetik. Dies liefert Intervallmatrizen $[A_0]$, $[A_1]$ und $[A_2]$. Mit ihnen werden die aus dem Theorem von LEHMANN abgeleiteten Intervallmatrizen $[\hat{A}]$ und $[\hat{B}]$ mit $[\hat{A}] := [A_1] - \sigma [A_0]$ und $[\hat{B}] := [A_2] - 2\sigma [A_1] + \sigma^2 [A_0]$ bestimmt. Da der Einschließungsalgorithmus Punktmatrizen als Ausgangsdaten benötigt, werden zu $[A_0]$, $[A_1]$, $[\hat{A}]$ und $[\hat{B}]$ die zugehörigen Mittelpunktmatrizen gebildet, die mit A_0^M , A_1^M , \hat{A}^M und \hat{B}^M bezeichnet werden. Mit ihnen werden das RAYLEIGH-RITZ-Problem und das LEHMANN-GOERISCH-Problem für die Mittelpunktmatrizen gelöst. Mit Hilfe des RAYLEIGH-Quotienten und Anwendung der Resultate aus Abschnitt 3.1.4 auf die zugehörigen Intervallmatrix-Eigenwertprobleme läßt sich dann eine Einschließung für den kleinsten Eigenwert des betrachteten WILLERSSchen Eigenwertproblems bestimmen.

Bei der Festlegung der Dimension der Matrizen gilt es folgendes zu beachten: Einerseits sollte sie möglichst groß sein, da dies eine größere Freiheit bei der Wahl von σ läßt und sich positiv auf die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse auswirkt. Andererseits sind die Darstellungsmöglichkeiten durch die Mantissenlänge des zugrunde liegenden Gleitpunktsystems beschränkt. Alle numerischen Rechnungen wurden auf einer *Sun*-Unix-Workstation mit einer sechzehnstelligen Mantisse durchgeführt. Es hat sich herausgestellt, daß für jedes der vier WILLERSSchen Eigenwertprobleme 10 die maximale Dimension der Matrizen ist, die eine Darstellung auf der *Sun* noch gestattet.

3.1.4 Störungsrechnung

Wie im letzten Abschnitt ausgeführt, sind die mit *Mathematica* bestimmten Elemente der Matrizen A_0 , A_1 , \hat{A} und \hat{B} häufig nicht durch Maschinenzahlen darstellbar. Die Intervallmatrizen $[A_0]$, $[A_1]$, $[\hat{A}]$ und $[\hat{B}]$ enthalten die genauen Ausgangsdaten. Es ist daher wichtig, mit Hilfe der für die Mittelpunktmatrizen gelösten Eigenwertprobleme Informationen über die Lage der Eigenwerte des exakten RAYLEIGH-RITZ- und LEHMANN-GOERISCH-Problems und daraus resultierend des kleinsten Eigenwertes des exakten Ausgangsproblems zu erhalten.

Es werden zunächst zwei Lemmas bewiesen, die für die Abschätzung des Fehlers bei der Berechnung des kleinsten Eigenwertes für das exakte allgemeine Eigenwertproblem im Vergleich zu dem Eigenwertproblem für die Mittelpunktmatrizen benötigt werden. Mit $\|\cdot\|$ werde in diesem Abschnitt stets die Maximumsnorm für Vektoren $x \in \mathbf{R}^n$ bzw. Matrizen $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ bezeichnet, d.h.

$$\|x\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \quad \text{und} \quad \|A\| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| .$$

Ferner sei $\lambda_{\min}(A)$ der kleinste Eigenwert des speziellen Eigenwertproblems $Ax = \lambda x$, A symmetrisch und $\lambda_{\min}(A, B)$ der kleinste Eigenwert des allgemeinen Eigenwertproblems $Ax = \lambda Bx$, A und B symmetrisch, B positiv definit.

Als erstes beweisen wir ein Lemma für spezielle Eigenwertprobleme.

Lemma 3.7 *Es sei $[A]$ eine symmetrische Intervallmatrix, $A \in [A]$ sei symmetrisch und positiv definit. Es gelte $\lambda_{\min}(A) > \|A' - A\|$ für alle symmetrischen $A' \in [A]$.*

Dann gilt: Jedes symmetrische $A' \in [A]$ ist positiv definit und

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A') &\geq \lambda_{\min}(A) - \|A' - A\| \\ &> 0 . \end{aligned}$$

Beweis:

Es sei x ein Eigenvektor von A' zum Eigenwert $\lambda_{\min}(A')$ mit $\|x\| = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A') &= \frac{x^T A' x}{x^T x} = x^T A' x \\ &= x^T A x + x^T (A' - A) x \\ &\geq \lambda_{\min}(A) + x^T (A' - A) x . \end{aligned}$$

Aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung folgt

$$|x^T (A' - A) x| \leq \|x\| \|(A' - A) x\| \leq \|x\| \|A' - A\| \|x\| = \|A' - A\|$$

und damit

$$\lambda_{\min}(A) + x^T (A' - A) x \geq \lambda_{\min}(A) - \|A' - A\| .$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Für allgemeine Eigenwertprobleme ergibt sich:

Lemma 3.8 *Es seien $[A]$ und $[B]$ symmetrische Intervallmatrizen, $A \in [A]$, $B \in [B]$ seien symmetrisch und positiv definit. Es gelte $\lambda_{\min}(A) > \|A' - A\|$ und $\lambda_{\min}(B) > \|B' - B\|$ für alle symmetrischen $A' \in [A]$ und $B' \in [B]$. Dann gilt: Jedes symmetrische $A' \in [A]$ und $B' \in [B]$ ist positiv definit und*

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A', B') &\geq \lambda_{\min}(A, B) \frac{1 - \frac{\|A'-A\|}{\lambda_{\min}(A)}}{1 + \frac{\|B'-B\|}{\lambda_{\min}(B)}} \\ &= \lambda_{\min}(A, B) \left(1 - \frac{\frac{\|A'-A\|}{\lambda_{\min}(A)} + \frac{\|B'-B\|}{\lambda_{\min}(B)}}{1 + \frac{\|B'-B\|}{\lambda_{\min}(B)}} \right). \end{aligned}$$

Beweis:

Aus Lemma 3.7 folgt, daß jedes symmetrische $A' \in [A]$ und $B' \in [B]$ positiv definit ist. Es seien nun ein beliebiges symmetrisches $A' \in [A]$ und $B' \in [B]$ gegeben. Dann gibt es einen Eigenvektor x zu $\lambda_{\min}(A', B')$ mit $\|x\| = 1$, so daß

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A', B') &= \frac{x^T A' x}{x^T B' x} = \frac{x^T A x}{x^T B x} \frac{x^T B x}{x^T A x} \frac{x^T A' x}{x^T B' x} \\ &\geq \lambda_{\min}(A, B) \frac{x^T B x}{x^T A x} \frac{x^T A' x}{x^T B' x}. \end{aligned}$$

Der RAYLEIGHsche Quotient $\frac{x^T A x}{x^T x}$ ist eine obere Schranke für den kleinsten Eigenwert der Matrix A . Zusammen mit der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung folgt daher

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^T (A' - A) x}{x^T A x} \right| &= \frac{\left| \frac{x^T (A' - A) x}{x^T x} \right|}{\frac{x^T A x}{x^T x}} \leq \frac{\|A' - A\|}{\lambda_{\min}(A)}, \\ \left| \frac{x^T (B' - B) x}{x^T B x} \right| &= \frac{\left| \frac{x^T (B' - B) x}{x^T x} \right|}{\frac{x^T B x}{x^T x}} \leq \frac{\|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B)}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{x^T B x}{x^T A x} \frac{x^T A' x}{x^T B' x} &= \frac{x^T B x (x^T A x + x^T (A' - A) x)}{x^T A x (x^T B x + x^T (B' - B) x)} \\ &= \frac{1 + \frac{x^T (A' - A) x}{x^T A x}}{1 + \frac{x^T (B' - B) x}{x^T B x}} \quad (\text{Kürzen durch } x^T A x \cdot x^T B x) \\ &\geq \frac{1 - \frac{\|A' - A\|}{\lambda_{\min}(A)}}{1 + \frac{\|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B)}}, \end{aligned}$$

womit alles gezeigt ist. ■

Es kann jetzt der absolute Fehler abgeschätzt werden, der bei der Berechnung des kleinsten Eigenwertes für das exakte allgemeine Eigenwertproblem im Vergleich zu dem Eigenwertproblem für die Mittelpunktmatrizen entsteht.

Theorem 3.9 *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.8. Dann gilt:*

$$\lambda_{\min}(A', B') \geq \lambda_{\min}(A, B) - \frac{\lambda_{\min}(A) \|B' - B\| + \lambda_{\min}(B) \|A' - A\|}{\lambda_{\min}(B) + \|B' - B\|}. \quad (3.4)$$

Beweis:

Nach Lemma 3.8 ist

$$\lambda_{\min}(A', B') \geq \lambda_{\min}(A, B) - \lambda_{\min}(A, B) \frac{\frac{\|A' - A\|}{\lambda_{\min}(A)} + \frac{\|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B)}}{1 + \frac{\|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B)}}.$$

Es sei x ein Eigenvektor zu $\lambda_{\min}(A)$ mit $\|x\| = 1$ und $\lambda_{\min}(A) = \frac{x^T A x}{x^T x} = x^T A x$. Da der RAYLEIGHSCHE Quotient $\frac{x^T A x}{x^T B x}$ eine obere Schranke für $\lambda_{\min}(A, B)$ ist, folgt

$$\lambda_{\min}(A, B) \leq \frac{x^T A x}{x^T B x} = \frac{\lambda_{\min}(A)}{x^T B x} \leq \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\min}(B)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A, B) \frac{\frac{\|A' - A\|}{\lambda_{\min}(A)} + \frac{\|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B)}}{1 + \frac{\|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B)}} &\leq \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\min}(B)} \frac{\left(\frac{\|A' - A\|}{\lambda_{\min}(A)} + \frac{\|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B)}\right)}{1 + \frac{\|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B)}} \\ &= \frac{\|A' - A\| + \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\min}(B)} \|B' - B\|}{\lambda_{\min}(B) + \|B' - B\|}. \end{aligned}$$

Multiplikation der Ungleichung mit (-1) liefert schließlich die Behauptung. ■

Auch für den Fall, daß die positive Definitheit der symmetrischen Matrix A nicht vorausgesetzt wird, läßt sich eine Abschätzung für den kleinsten Eigenwert angeben.

Theorem 3.10 *Es seien $[A]$ und $[B]$ symmetrische Intervallmatrizen, $A \in [A]$ sei symmetrisch, $B \in [B]$ sei symmetrisch und positiv definit. Es gelte $\lambda_{\min}(B) > \|B' - B\|$ für alle symmetrischen $B' \in [B]$.*

Dann gilt: Jedes symmetrische $B' \in [B]$ ist positiv definit und

$$\lambda_{\min}(A', B') \geq \lambda_{\min}(A, B) - \frac{\|A\| \|B' - B\| + \lambda_{\min}(B) \|A' - A\|}{\lambda_{\min}(B) (\lambda_{\min}(B) - \|B' - B\|)}. \quad (3.5)$$

Beweis:

Aus Lemma 3.7 folgt wiederum, daß jedes symmetrische $B' \in [B]$ positiv definit ist. Es seien nun ein beliebiges symmetrisches $A' \in [A]$ und $B' \in [B]$ gegeben. Es sei x ein Eigenvektor zu $\lambda_{\min}(A', B')$ mit $\|x\| = 1$, so daß

$$\lambda_{\min}(A', B') = \frac{x^T A' x}{x^T B' x}$$

und

$$\lambda_{\min}(A, B) \leq \frac{x^T A x}{x^T B x} = \lambda_{\min}(A', B') + \left(\frac{x^T A x}{x^T B x} - \frac{x^T A' x}{x^T B' x} \right)$$

und somit

$$\lambda_{\min}(A', B') \geq \lambda_{\min}(A, B) - \left(\frac{x^T A x}{x^T B x} - \frac{x^T A' x}{x^T B' x} \right). \quad (3.6)$$

Es ist

$$\begin{aligned} & \frac{x^T A x}{x^T B x} - \frac{x^T A' x}{x^T B' x} \\ = & \frac{x^T B' x x^T A x - x^T A' x x^T B x}{x^T B x x^T B' x} \\ = & \frac{(x^T B x + x^T (B' - B) x) x^T A x - (x^T A x + x^T (A' - A) x) x^T B x}{x^T B x (x^T B x + x^T (B' - B) x)} \\ = & \frac{x^T (B' - B) x \frac{x^T A x}{x^T B x} - x^T (A' - A) x}{x^T B x + x^T (B' - B) x} \\ \leq & \frac{\|B' - B\| \frac{\|A\|}{\lambda_{\min}(B)} + \|A' - A\|}{\lambda_{\min}(B) - \|B' - B\|} \quad (\lambda_{\min}(B) > \|B' - B\| \text{ !}) \\ = & \frac{\|B' - B\| \|A\| + \lambda_{\min}(B) \|A' - A\|}{\lambda_{\min}(B) (\lambda_{\min}(B) - \|B' - B\|)} \end{aligned}$$

Multiplikation dieser Gleichungs-/Ungleichungskette mit (-1) liefert in Zusammenhang mit (3.6) die Behauptung. ■

Bei den numerischen Berechnungen werden für A und B die Matrizen \hat{A}_M und \hat{B}_M zur Lösung des LEHMANN-GOERISCH-Problems verwendet.

3.2 Das Programm

Wir wenden uns jetzt der Vorstellung des Programms zur Einschließung der kritischen Last für ein beliebiges der vier WILLERSschen Eigenwertprobleme zu. Es werden zunächst die im Programm verwendeten Module sowie die Prozedur zur Überprüfung des Parameters σ beschrieben. Anschließend folgt eine Erläuterung des Algorithmus.

3.2.1 Die verwendeten Module

- Die Module `i_ari`, `mv_ari` und `mvi_ari`.
Diese Module sind standardmäßig in PASCAL-XSC implementiert und stellen die benötigte Intervallarithmetik, die reelle Matrix- / Vektorarithmetik sowie die reelle Matrix- / Vektorintervallarithmetik zur Verfügung (vgl. [14]).
- Die Module `mZweiDefinition`, `mDreiDefinition`, `mVierDefinition`, `mFuenfDefinition` und `adachBdachDefinition`.
Diese Module enthalten für die Lagerungsfälle
 - unten und oben drehbar gelagert,
 - unten drehbar gelagert, oben eingespannt,
 - unten eingespannt, oben drehbar gelagert,
 - unten und oben eingespannt

die Definitionen der Intervallmatrizen $[A_0]$, $[A_1]$, $[A_2]$, $[\hat{A}]$ und $[\hat{B}]$ und der zugehörigen Mittelpunktmatrizen, die für die Formulierung des RAYLEIGH-RITZ-Problems und des LEHMANN-GOERISCH-Problems benötigt werden.

- Das Modul `willersBasis`.
Dieses Modul enthält grundlegende Prozeduren und Funktionen, die bei der Lösung der WILLERSSchen Eigenwertprobleme benötigt werden. Im einzelnen sind das
 - die Prozedur `UMWANDLUNG`,
die näherungsweise das allgemeine Matrix-Eigenwertproblem $Ax = \lambda Bx$ mit $A = A^T$, $B = B^T$, B positiv definit mit Hilfe der CHOLESKY-Zerlegung in ein spezielles Eigenwertproblem $Pz = \lambda z$ mit symmetrischer Matrix $P = L^{-1}A(L^{-1})^T$ und $B = LL^T$ überführt. Bei der Implementierung der CHOLESKY-Zerlegung wird zur Vermeidung von Rundungsfehlern der Datentyp `dotprecision`, der standardmäßig in PASCAL-XSC zur Verfügung steht, eingesetzt. Sollte die CHOLESKY-Zerlegung nicht möglich sein, weil die Matrix B nicht positiv definit ist, wird die Variable `BERECHNUNG_MOEGLICH` auf `false` gesetzt und an das aufrufende Programm zurückgeliefert (vgl. [31], S. 306/307).

- die Prozedur **RUECKTRANSFORMATION**,
die näherungsweise die Eigenvektoren des Problems $Ax = \lambda Bx$ aus den Eigenvektoren des Problems $Pz = \lambda z$ rekonstruiert (vgl. [31], S. 308/309).
- die Prozedur **POSDEFMATINVERT**,
die mit Hilfe der LU -Zerlegung eine Näherungsinverse einer positiv definiten Matrix A berechnet. Auch hier wird der Datentyp **dotprecision** eingesetzt. Falls A nicht positiv definit ist, wird die Variable **BERECHNUNG_MOEGLICH** auf false gesetzt und an das aufrufende Programm zurückgeliefert (vgl. [31], S. 16/17/24).
- die Prozedur **BUBBLESORT**,
die mit Hilfe des gleichnamigen Algorithmus sowohl die Näherungseigenwerte und zugehörigen -eigenvektoren als auch die disjunkt liegenden Einschließungsintervalle für die Eigenwerte sortiert.
- die Funktion **TRANSP**,
die die Transponierte eines **RVECTORS** bzw. **IVECTORS** bestimmt.
- die Funktionen **betragEinesIntervalls** und **betragIntervallmatrix**,
die den Betrag eines Intervalls bzw. der Komponenten einer Intervallmatrix bestimmen. Für ein Intervall $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$ wird definiert

$$|[a]| := \max \{|a| : a \in [a]\} .$$
- die Funktion **MaxNorm**,
die eine obere Schranke für die Maximumsnorm einer reellen Matrix berechnet.
- die Funktion **SchurNorm**,
mit deren Hilfe eine obere Schranke für die SCHURNorm einer Intervallmatrix angegeben werden kann.

- Das Modul **eigenwerte**.

Dieses Modul enthält alle in Zusammenhang mit der Eigenwertbestimmung relevanten Funktionen und Prozeduren:

- die Prozedur **SEIG_EV**,
die auf der Grundlage des LOHNER-Verfahrens Näherungen für die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix sowie Einschließungen für ihre Eigenwerte in unsortierter Reihenfolge berechnet (vgl. [21]).

- die Prozedur `EWSIMATRIXBER`,
die für alle in einer symmetrischen Intervallmatrix $[A]$ enthaltenen symmetrischen Punktmatrizen eine Einschließung der Eigenwerte in sortierter Reihenfolge berechnet. Dazu werden die zu $[A]$ gehörige Mittelpunktmatrix $mid([A])$ und eine obere Schranke für die SCHUR-Norm der Störmatrix bestimmt (vgl. Ausführungen nach Theorem 3.2). Ferner werden die positiven und negativen Eigenwerte gezählt. Enthält ein Einschließungsintervall die Null, wird eine Meldung ausgegeben, daß keine gesicherte Aussage über das Vorzeichen dieses Eigenwertes gemacht werden kann.
- die Prozedur `ALLEIG`,
die eine Realisierung des in Abschnitt 3.1.2 ausführlich beschriebenen, modifizierten BEHNKE-Verfahrens darstellt. Die Prozedur liefert eine Einschließung für einen mit `INDEX` indizierten Eigenwert eines allgemeinen Matrixeigenwertproblems $Ax = \lambda Bx$, $A = A^T$, $B = B^T$, B positiv definit, und eine Näherung für den zugehörigen Eigenvektor.
- die Funktion `RayleighQuotient`,
die einen `RVECTOR` x und zwei Intervallmatrizen $[A]$ und $[B]$ übergeben bekommt und eine Einschließung $\frac{x^T[A]x}{x^T[B]x}$ des RAYLEIGH-Quotienten berechnet. Damit läßt sich eine sehr genaue obere Schranke für den kleinsten Eigenwert des WILLERSSchen Eigenwertproblems berechnen, wenn man $[A] := [A_1]$, $[B] := [A_0]$ setzt und für x eine mit dem LOHNER-Verfahren berechnete Näherung für den kleinsten Eigenvektor des RAYLEIGH-RITZ-Problems nimmt.
- die Prozedur `untereSchrankeOriginalproblem`,
die mit Hilfe und unter den Voraussetzungen der Theoreme 3.9 und 3.10 jeweils eine Einschließung des Ausdrucks auf der rechten Seite der Ungleichung (3.4) bzw. (3.5) berechnet. Erwartet wird dazu die Übergabe einer Einschließung des Eigenwertes $\lambda_{\min}(A, B)$. Zusammen mit der Funktion `RayleighQuotient` läßt sich damit jeweils eine Einschließung für den kleinsten Eigenwert des Original-LEHMANN-GOERISCH-Problems mit den Intervallmatrizen $[\hat{A}]$ und $[\hat{B}]$ bestimmen. Zu Kontrollzwecken wird außerdem eine obere Schranke der Maximumsnorm von $A' - A$ und $B' - B$ (Notation aus den Theoremen 3.9 und 3.10) geliefert.

3.2.2 Verifikation der σ

Zur Bestimmung des im Theorem von LEHMANN auftauchenden Parameters σ sind für jeden Lagerungsfall die Eigenwerte eines geschlossen lösbares Vergleichsproblems zu ermitteln (vgl. Bemerkung 2.15). Diese Eigenwerte sind die Nullstellen der jeweiligen holomorphen Frequenzdeterminante. Hat die Frequenzdeterminante eine einfache Struktur, so lassen sich grobe untere Schranken für die Eigenwerte des Vergleichsproblems direkt angeben. Falls die Nullstellen und die damit verbundenen unteren Schranken nicht durch elementare Überlegungen gefunden werden können, werden sie mit Hilfe des Computeralgebrasystems *Mathematica 3.0* näherungsweise bestimmt.

In jedem Fall muß mit Hilfe von Intervallarithmetik verifiziert werden, daß es sich tatsächlich um untere Schranken für die Eigenwerte des Vergleichsproblems handelt. Dies geschieht mit Hilfe des Programms `VerifikationSigma`. Hier sind für jeden Lagerungsfall die ermittelten σ_i hinterlegt. Damit werden Intervalle $[\sigma_i, \sigma_i + 1]$ gebildet und durch Intervallauswertung gezeigt, daß die Frequenzdeterminante $\Delta(\lambda)$ auf diesem Intervall eine Nullstelle besitzt. Die Intervallauswertung der Ableitung von $\Delta(\lambda)$ auf den Intervallen ergibt, daß diese auf jedem einzelnen Intervall nullstellenfrei ist. Damit ist nachgewiesen, daß die Eigenwerte des Vergleichsproblems einfach sind (vgl. Bemerkung 1.11).

3.2.3 Der Algorithmus

Der Algorithmus zur Berechnung der Einschließungen der Eigenwerte und zur Ermittlung der kritischen Last besteht aus folgenden Einzelteilen:

1. Prozedur `wahlDerLagerungsart`.

Hier kann der Benutzer über Angabe einer Identifikations-Nummer auswählen, für welchen der vier Lagerungsfälle

- unten und oben drehbar gelagert,
- unten drehbar gelagert, oben eingespannt,
- unten eingespannt, oben drehbar gelagert,
- unten und oben eingespannt

eine Eigenwertberechnung durchgeführt werden soll.

2. Prozedur `RayleighRitz`.

Diese Prozedur besteht aus folgenden Schritten:

- (a) Eingabe des Parameters a aus der WILLERSSchen Differentialgleichung.
- (b) Definition der Intervallmatrizen $[A_0]$ und $[A_1]$ und der zugehörigen Mittelpunktmatrizen.
- (c) Übergabe der Mittelpunktmatrizen an die Prozedur `UMWANDLUNG`, welche die symmetrische Matrix P_1 liefert.
- (d) Weiterleitung von P_1 an `SEIG_EV`.
- (e) Rücktransformation und Sortierung der Eigenwerte und Eigenvektoren.
- (f) Ausgabe der Eigenwertnäherungen für das RAYLEIGH-RITZ-Problem mit den Mittelpunktmatrizen.
- (g) Übergabe des zum kleinsten Eigenwert gehörenden Näherungseigenvektors und der Matrizen $[A_0]$ und $[A_1]$ an die Funktion `RayleighQuotient`. Berechnung einer oberen Schranke für den kleinsten Eigenwert des WILLERSSchen Eigenwertproblems.

3. Prozedur `LehmannGoerisch`.

Die Bestandteile dieser Prozedur sind:

- (a) Eingabe des mit Hilfe des Vergleichsproblems bestimmten LEHMANN-Parameters σ .
- (b) Eingabe des Index USI des Eigenwertes, für den σ untere Schranke ist.
- (c) Definition der Intervallmatrizen $[A_2]$, $[\hat{A}]$ und $[\hat{B}]$ sowie der zu $[\hat{A}]$ und $[\hat{B}]$ gehörigen Mittelpunktmatrizen \hat{A}^M und \hat{B}^M .
- (d) Überprüfung, ob $\sigma > \Lambda_{USI-1}$ (obere Schranke für den Eigenwert λ_{USI-1} des WILLERSSchen Eigenwertproblems) durch Bestimmung der Anzahl der negativen Eigenwerte der Matrix $[A_1] - \sigma[A_0]$ mit Hilfe von `EWSIMATRIXBER`. Es müssen mindestens $USI - 1$ negative Eigenwerte vorliegen, denn dann hat das RAYLEIGH-RITZ-Problem $A_1x = \Lambda A_0x$ mit den exakten Ausgangsdaten A_0 und A_1 mindestens $USI - 1$ Eigenwerte, die kleiner als σ sind (Lemma 3.1). Sollte diese Bedingung nicht erfüllt sein, Abbruch.
- (e) Überprüfung, ob die Matrix $[\hat{A}]$ (d.h. alle in ihr enthaltenen symmetrischen Punktmatrizen) $(USI - 1)$ negative Eigenwerte hat, mit Hilfe von `EWSIMATRIXBER`. Wenn nein, Abbruch, dann

- kann keine verlässliche Aussage gemacht werden. Wenn ja, dann hat nach Lemma 3.1 das Original-LEHMANN-GOERISCH-Problem $\hat{A}x = \mu\hat{B}x$ ($USI - 1$) negative Eigenwerte.
- (f) Berechnung einer Einschließung $[\mu_1^M]$ für den kleinsten Eigenwert und einer Näherung für den zugehörigen Eigenvektor des Problems $\hat{A}^M x = \mu\hat{B}^M x$ mit Hilfe von `ALLEIG`.
 - (g) Berechnung einer Einschließung $[\mu_1]$ für den kleinsten Eigenwert des Problems $[\hat{A}]x = \mu[\hat{B}]x$ mit Hilfe der Prozeduren `RayleighQuotient` und `untereSchrankeOriginalproblem`.
 - (h) Berechnung des Intervalls $\sigma + \frac{1}{[\mu_1]} = \left[\sigma + \frac{1}{[\mu_1]}, \overline{\sigma + \frac{1}{[\mu_1]}} \right]$.
 - (i) Eine garantierte untere Schranke für den Eigenwert λ_{USI-1} des WILLERSSchen Eigenwertproblems ist gegeben durch $\underline{\sigma + \frac{1}{[\mu_1]}}$.
 - (j) Setze $UHS := \underline{\sigma + \frac{1}{[\mu_1]}}$, $\sigma := UHS - 1$ (falls $USI > 2$), $USI := USI - 1$.
 - (k) Falls $USI > 1$, definiere $[\hat{A}]$, $[\hat{B}]$ sowie die zu $[\hat{A}]$ und $[\hat{B}]$ gehörigen Mittelpunktmatrizen \hat{A}^M und \hat{B}^M mit neuem σ und gehe zu (3d).
Falls $USI = 1$, ist UHS eine garantierte untere Schranke für den kleinsten Eigenwert des WILLERSSchen Eigenwertproblems.

4. Prozedur `kleinsterEigenwert`

Diese Prozedur gibt den Startwert für σ und das Einschließungsintervall für den kleinsten Eigenwert des gewählten WILLERSSchen Eigenwertproblems für das eingegebene a und das zuletzt berechnete σ auf dem Bildschirm und in einer Ausgabedatei aus.

Anschließend hat der Benutzer die Möglichkeit, eine neue Berechnung anzustellen.

3.3 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt geht es darum, die Erkenntnisse aus Kapitel 1 und 2 miteinander zu verknüpfen und in eine Darstellung der daraus gewonnenen numerischen Ergebnisse münden zu lassen. Zunächst wird der für alle vier beschriebenen Eigenwertprobleme gemeinsame Kern herausgeschält. In den sich anschließenden Unterabschnitten werden die für jede der auftretenden Lagerungsarten spezifischen Einzelheiten erläutert. In Abschnitt 3.3.6 wird

ein Bezug zu dem WILLERSschen Artikel hergestellt. Den Abschluß bildet ein Beispiel, in dem anhand konkreter Daten die Knicklast eines Stabes bestimmt wird.

3.3.1 Gemeinsamkeiten aller vier behandelten Eigenwertprobleme

Ausgangspunkt ist wieder die Differentialgleichung

$$\phi^{(4)} - (ax\phi')' = -\lambda\phi'' .$$

Ferner seien definiert:

1. für den Fall des unten und oben drehbar gelagerten Gestänges die Randbedingungen

$$\phi(0) = \phi''(0) = \phi(1) = \phi''(1) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f''(0) = f''(1) = 0\} . \end{aligned}$$

2. für den Fall des unten drehbar gelagerten und oben eingespannten Gestänges die Randbedingungen

$$\phi(0) = \phi''(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f''(0) = f'(1) = 0\} . \end{aligned}$$

3. für den Fall des unten eingespannten und oben drehbar gelagerten Gestänges die Randbedingungen

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi''(1) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f'(0) = f''(1) = 0\} . \end{aligned}$$

4. für den Fall des unten und oben eingespannten Gestänges die Randbedingungen

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f'(0) = f'(1) = 0\} . \end{aligned}$$

Für jeden der genannten Fälle seien die symmetrischen Bilinearformen $M_a(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ festgelegt durch

$$\begin{aligned} M_a(f, g) &:= \int_0^1 (f''(x)g''(x) + axf'(x)g'(x)) dx , \\ N(f, g) &:= \int_0^1 f'(x)g'(x) dx . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wie bereits in Abschnitt 1.3.3 gezeigt wurde, ist in jedem Fall

$$M_a(f, g) = \int_0^1 f(x) (g^{(4)}(x) - a(g'(x) + xg''(x))) dx$$

für $f, g \in D_M$ und

$$N(f, g) = - \int_0^1 f(x) g''(x) dx$$

für $f, g \in D_N$. Nach den Ausführungen in Abschnitt 2.2 geht für jeden der oben genannten Lagerungsfälle das Differentialgleichungseigenwertproblem

$$\phi^{(4)} - (ax\phi')' = -\lambda\phi'' \quad , \quad U_l(\phi) = 0, \quad l = 1, \dots, 4 \tag{3.8}$$

über in das folgende äquivalente funktionalanalytische Eigenwertproblem: Gesucht sind Paare $(\lambda(a), \phi_a) \in \mathbf{R} \times D_M \setminus \{0\}$, so daß

$$M_a(f, \phi_a) = \lambda(a)N(f, \phi_a) \quad \text{für alle } f \in D_M . \tag{3.9}$$

Aus den Zusammenfassungen in Abschnitt 1.3.4 und Bemerkung 2.5 ergibt sich die Gültigkeit der Annahmen A1*, A2* und A3. Die Rolle des in A3 genannten Parameters σ wurde bereits in Bemerkung 2.15 diskutiert. Weiter unten wird erläutert, wie σ in jedem Einzelfall zu wählen ist.

Um mit Hilfe des Theorems von LEHMANN (Theorem 2.10) untere Schranken für die Eigenwerte bestimmen zu können, muß für jeden der vier Lagerungsfälle das Problem gelöst werden, zu gegebenem $v \in D_M$ ein $w \in D_N$ mit

$$N(f, w) = M_a(f, v)$$

für alle $f \in D_M$ zu finden. Dies ist wegen

$$N(f, w) = - \int_0^1 f(x) w''(x) dx$$

für $f \in D_M$ und $w \in D_N$ und

$$M_a(f, v) = \int_0^1 f(x) (v^{(4)}(x) - a(v'(x) + xv''(x))) dx$$

für $f \in D_M$ und $v \in D_M$ identisch mit dem Problem, zu gegebenem $v \in D_M$ ein $w \in D_N$ zu finden mit

$$\int_0^1 f(x) (w''(x) + v^{(4)}(x) - a(v'(x) + xv''(x))) dx = 0$$

für alle $f \in D_M$, was aber

$$w''(x) = -v^{(4)}(x) + a(v'(x) + xv''(x)) =: h_v(x) \quad (3.10)$$

für alle $x \in [0, 1]$ bedeutet, denn nach Lemma 2.2 ist $D_M^\perp = \{0\}$. Durch (3.10) und die Randbedingungen $w(0) = w(1) = 0$ wird aber für jeden einzelnen der vier Lagerungsfälle genau eine Lösung w des Problems festgelegt. Sie läßt sich jeweils durch zweimalige Integration von h_v und geeignete Wahl der Integrationskonstanten berechnen.

Es stellt sich nun die Frage, wie für ein vorgegebenes $n \in \mathbf{N}$ Elemente $v_i \in D_M$ und $w_i \in D_N$ konstruiert werden können, für die

$$N(f, w_i) = M_a(f, v_i) \quad \text{für alle } f \in D_M \text{ und für jedes } i = 1, \dots, n$$

gilt. Dazu werden für jeden Lagerungsfall zunächst Polynome p_1, \dots, p_n bestimmt, die alle Randbedingungen erfüllen. Unter Verwendung des Computeralgebrasystems *Mathematica 3.0* wird mit Hilfe des GRAM-SCHMIDT'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus den Polynomen p_i eine im Sinne des $\mathcal{C}([0, 1])$ -Skalarproduktes $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ orthogonale Familie $\{v_1, \dots, v_n\}$ von Vergleichsfunktionen ermittelt. Für jedes $i = 1, \dots, n$ wird die oben erwähnte Funktion h_{v_i} definiert, und durch zweimalige Integration - ebenfalls durch Anwendung von *Mathematica* - wird w_i bestimmt.

Es werden Polynome als Ansatzfunktionen verwendet, weil sich mit ihnen die notwendigen Integrationen problemlos durchführen lassen und die Elemente der in den Theoremen 2.10 und 2.16 definierten Matrizen A_0 , A_1 und A_2

analytisch bestimmt werden können. Die Polynome werden orthogonalisiert, um sicherzustellen, daß die Matrizen gut konditioniert sind.

Für eine geeignete Wahl des Parameters σ bei der Definition der Matrizen \widehat{A} und \widehat{B} im Theorem von LEHMANN betrachten wir - wie bereits in Bemerkung 2.15 angedeutet - für jeden der vier Lagerungsfälle ein Vergleichsproblem. Die genauen Einzelheiten jedes Vergleichsproblems werden in den folgenden Abschnitten beschrieben. An dieser Stelle werden die Gemeinsamkeiten herausgehoben.

In jedem Einzelfall folgt aus (3.7) offensichtlich $M_0(f, f) \leq M_a(f, f)$ für alle $a > 0$. Wir können nun Theorem 2.13 anwenden, indem wir $M(\cdot, \cdot) = M_0(\cdot, \cdot)$, $\widetilde{M}(\cdot, \cdot) = M_a(\cdot, \cdot)$ für $a > 0$, $\widetilde{N}(\cdot, \cdot) = N(\cdot, \cdot)$ und $D_{\widetilde{M}} = D_M$ setzen. Es gilt dann für jeden Lagerungsfall $\lambda_i(0) \leq \lambda_i(a)$ für alle $a > 0$ und für alle $i \in \mathbf{N}$. Die explizite Berechnung von $\lambda_i(0)$, $i = 1, 2, \dots$ erfolgt weiter unten in den einzelnen Abschnitten. Die vier Eigenwertprobleme haben die gemeinsame Eigenschaft, daß sich für $a = 0$ aus (3.8) die Differentialgleichung

$$\phi^{(4)} + \lambda\phi'' = 0 \tag{3.11}$$

ergibt. Für $\lambda > 0$ hat (3.11) als reelles Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \phi_1 &= e^{0 \cdot x} &= 1 &, \\ \phi_2 &= x \cdot e^{0 \cdot x} &= x &, \\ \phi_3 &= \cos \sqrt{\lambda}x && \text{und} \\ \phi_4 &= \sin \sqrt{\lambda}x && . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$\phi = A \cdot 1 + B \cdot x + C \cdot \cos \sqrt{\lambda}x + D \cdot \sin \sqrt{\lambda}x . \tag{3.13}$$

Zweimaliges Ableiten nach x ergibt

$$\begin{aligned} \phi' &= B - C\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + D\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x , \\ \phi'' &= -C\lambda \cos \sqrt{\lambda}x - D\lambda \sin \sqrt{\lambda}x . \end{aligned}$$

Es werden jetzt die mit Hilfe des Programms berechneten Einschließungen vorgestellt.

3.3.2 Oben und unten drehbar gelagertes Gestänge

Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$\phi^{(4)} - a(x\phi')' = -\lambda\phi'' \quad , \quad \phi(0) = \phi(1) = \phi''(0) = \phi''(1) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f''(0) = f''(1) = 0\} . \end{aligned}$$

Die symmetrischen Bilinearformen $M_a(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ seien wie in Abschnitt 3.3.1 definiert.

Wir bestimmen nun die im Theorem von LEHMANN (Theorem 2.10) benötigten Ansatzfunktionen v_i und w_i mit $N(f, w_i) = M_a(f, v_i)$ für alle $f \in D_M$ und für jedes $i = 1, \dots, 10$. Dazu wählen wir zunächst Polynome $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, die die Randbedingungen $p_i(0) = p_i(1) = p_i''(0) = p_i''(1) = 0$ erfüllen. Wir beginnen mit einem Polynom $p_1(x)$ vom Grad 4,

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_1x + a_3x^3 + a_4x^4 \quad \Rightarrow \\ p_1'(x) &= a_1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \quad \Rightarrow \\ p_1''(x) &= 6a_3x + 12a_4x^2 . \end{aligned}$$

Aus $p_1(1) = p_1''(1) = 0$ folgt $a_1 = a_4$ und $a_3 = -2a_4$. Setzt man $a_4 = 1$, $a_3 = -2$ und $a_1 = 1$, so ergibt sich

$$p_1(x) = x - 2x^3 + x^4 .$$

Als nächstes bestimmen wir ein Polynom $p_2(x)$ vom Grad 5.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_1x + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \quad \Rightarrow \\ p_2'(x) &= a_1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 \quad \Rightarrow \\ p_2''(x) &= 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 . \end{aligned}$$

Aus $p_2(1) = p_2''(1) = 0$ folgt $a_1 = a_4 + \frac{7}{3}a_5$ und $a_3 = -2a_4 - \frac{10}{3}a_5$. Setzt man $a_4 = 1$, $a_5 = 3$, $a_3 = -12$, $a_1 = 8$, so ergibt sich

$$p_2(x) = 8x - 12x^3 + x^4 + 3x^5 .$$

Als drittes ermitteln wir ein Polynom $p_3(x)$ vom Grad 6.

$$\begin{aligned} p_3(x) &= a_1x + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \quad \Rightarrow \\ p_3'(x) &= a_1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 \quad \Rightarrow \\ p_3''(x) &= 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 . \end{aligned}$$

Aus $p_3(1) = p_3''(1) = 0$ folgt $a_1 = a_4 + \frac{7}{3}a_5 + 4a_6$ und $a_3 = -2a_4 - \frac{10}{3}a_5 - 5a_6$. Setzt man $a_4 = 1$, $a_5 = 3$, $a_6 = 1$, $a_3 = -17$, $a_1 = 12$, so ergibt sich

$$p_3(x) = 12x - 17x^3 + x^4 + 3x^5 + x^6 .$$

Für $i \geq 4$ wählen wir

$$p_i(x) = (-1 + x)^4 x^{i-1} .$$

Mit Hilfe von *Mathematica* werden - wie oben beschrieben - aus den Polynomen p_i Vergleichsfunktionen v_i bestimmt. Für $i = 1, \dots, 10$ ergeben sich:

$$\begin{aligned} v_1 &= x - 2x^3 + x^4 , \\ v_2 &= x (-1 + 10x^2 - 15x^3 + 6x^4) , \\ v_3 &= x (27 - 736x^2 + 2073x^3 - 2046x^4 + 682x^5) , \\ v_4 &= x (-41 + 2360x^2 - 10365x^3 + 17796x^4 - 13650x^5 + 3900x^6) , \\ v_5 &= x (57 - 6016x^2 + 37341x^3 - 96018x^4 + 123370x^5 \\ &\quad - 78312x^6 + 19578x^7) , \\ v_6 &= x (-15 + 2648x^2 - 21861x^3 + 77448x^4 - 145530x^5 \\ &\quad + 151332x^6 - 82314x^7 + 18292x^8) , \\ v_7 &= x (133 - 36778x^2 + 387483x^3 - 1793148x^4 + 4565176x^5 \\ &\quad - 6834816x^6 + 6001374x^7 - 2861780x^8 + 572356x^9) , \\ v_8 &= x (-117 + 48226x^2 - 629157x^3 + 3664542x^4 - 12032328x^5 \\ &\quad + 24120144x^6 - 30157218x^7 + 22974344x^8 - 9763644x^9 \\ &\quad + 1775208x^{10}) , \\ v_9 &= x (47 - 27770x^2 + 438375x^3 - 3126657x^4 + 12790052x^5 \\ &\quad - 32756076x^6 + 54356055x^7 - 58480765x^8 + 39398894x^9 \\ &\quad - 15110586x^{10} + 2518431x^{11}) , \\ v_{10} &= x (-167 + 137026x^2 - 2569937x^3 + 21974787x^4 \\ &\quad - 109146108x^5 + 345536964x^6 - 727256673x^7 \\ &\quad + 1031463279x^8 - 975157634x^9 + 589344318x^{10} \\ &\quad - 206021465x^{11} + 31695610x^{12}) . \end{aligned}$$

Zweimalige Integration der v_i , $i = 1, \dots, 10$, und jeweilige Anpassung an die Randbedingungen $w_i(0) = w_i(1) = 0$ liefert die Funktionen

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{10} (-1 + x) x (-120 - 2a - 7ax - 7ax^2 + 8ax^3) , \\ w_2 &= \frac{1}{2} (-1 + x) x (120 - 240x + ax + ax^2 - 14ax^3 + 10ax^4) , \\ w_3 &= \frac{1}{70} (-1 + x) x (-309120 - 37a + 1432200x - 982ax - 1432200x^2 \\ &\quad - 982ax^2 + 37658ax^3 - 78430ax^4 + 40920ax^5) , \\ w_4 &= \frac{1}{2} (-1 + x) x (28320 - 220440x + 41ax + 491400x^2 + 41ax^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -327600x^3 - 3499ax^3 + 13085ax^4 - 16575ax^5 + 6825ax^6) , \\
w_5 &= \frac{1}{210} (-1 + x) x (-7580160 - 67a + 86519160x - 6052ax \\
& -316756440x^2 - 6052ax^2 + 460474560x^3 + 941468ax^3 \\
& -230237280x^4 - 5331820ax^4 + 11471330ax^5 - 10735270ax^6 \\
& +3654560ax^7) , \\
w_6 &= \frac{1}{10} (-1 + x) x (158880 - 2464440x + 75ax + 13025160x^2 \\
& +75ax^2 - 30633840x^3 - 19785ax^3 + 32925600x^4 + 155103ax^4 \\
& -13170240x^5 - 490297ax^5 + 757103ax^6 - 567052ax^7 \\
& +164628ax^8) , \\
w_7 &= \frac{1}{330} (-1 + x) x (-72820440 - 98a + 1461612240x - 22043ax \\
& -10373164560x^2 - 22043ax^2 + 34822077840x^3 + 9080512ax^3 \\
& -59908471920x^4 - 93215000ax^4 + 50996919600x^5 \\
& +399900700ax^5 - 16998973200x^6 - 891391940ax^6 \\
& +1082161180ax^7 - 678241860ax^8 + 171706800ax^9) , \\
w_8 &= \frac{1}{10} (-1 + x) x (2893560 - 72605280x + 585ax + 660303120x^2 \\
& +585ax^2 - 2949395280x^3 - 361110ax^3 + 7181065200x^4 \\
& +4672146ax^4 - 9706976880x^5 - 25865704ax^5 + 6834550800x^6 \\
& +77268536ax^6 - 1952728800x^7 - 133782724ax^7 + 134281436ax^8 \\
& -72487660ax^9 + 16272740ax^{10}) , \\
w_9 &= \frac{1}{6006} (-1 + x) x (-1000719720 - 302a + 30593843280x - 141443ax \\
& -344980195560x^2 - 141443ax^2 + 1959531373800x^3 \\
& +124948522ax^3 - 6303254309352x^4 - 1981355678ax^4 \\
& +11978643805128x^5 + 13667562607ax^5 - 13310310365352x^6 \\
& -52175625089ax^6 + 7986367797408x^7 + 119965743310ax^7 \\
& -1996591949352x^8 - 170223115650ax^8 + 145888811481ax^9 \\
& -69229149759ax^{10} + 13962181464ax^{11}) , \\
w_{10} &= \frac{1}{70} (-1 + x) x (57550920 - 2101196160x + 5845ax + 28663505640x^2 \\
& +5845ax^2 - 200543321160x^3 - 7188020ax^3 + 815335353000x^4 \\
& +136728452ax^4 - 2035510805160x^5 - 1145134123ax^5 \\
& +3163064121000x^6 + 5403632357ax^6 - 2980428973200x^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -15760506688ax^7 + 1557522275400x^8 + 29491019632ax^8 \\
 & -346116061200x^9 - 35491166945ax^9 + 26564318855ax^{10} \\
 & -11251941550ax^{11} + 2060214650ax^{12}) .
 \end{aligned}$$

Diese Funktionen erfüllen für alle $i = 1, \dots, 10$ die Bedingung $M_a(f, v_i) = N(f, w_i)$ für alle $f \in D_M$. Es können nun die in den Theoremen 2.10 und 2.16 definierten Matrizen A_0, A_1 und A_2 mit *Mathematica* analytisch bestimmt, mit Intervallarithmetik ausgewertet und die zugehörigen Mittelpunktmatrizen gebildet werden.

Für die Bestimmung von σ bei der Definition der Matrizen \widehat{A} und \widehat{B} betrachten wir das für $a = 0$ geschlossen lösbares Vergleichsproblem

$$\phi^{(4)} + \lambda\phi'' = 0 \quad , \quad \phi(0) = \phi(1) = \phi''(0) = \phi''(1) = 0 . \quad (3.14)$$

Aus den Ergebnissen in Abschnitt 1.3.3 folgt, daß (3.14) volldefinit und damit positiv definit ist. Die Berechnung der Frequenzdeterminante

$$\Delta(\lambda) = \det [U_i(\phi_j)]_{1 \leq i, j \leq 2m}$$

(vgl. Abschnitt 1.2.1) ergibt mit $U_1(\phi) = \phi(0)$, $U_2(\phi) = \phi''(0)$, $U_3(\phi) = \phi(1)$, $U_4(\phi) = \phi''(1)$ und $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ wie in (3.12)

$$\begin{aligned}
 \Delta(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & \cos \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 & -\lambda \cos \sqrt{\lambda} & -\lambda \sin \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\
 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda \cos \sqrt{\lambda} & -\lambda \sin \sqrt{\lambda} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= -\lambda^2 \sin \sqrt{\lambda} .
 \end{aligned}$$

$\Delta(\lambda)$ ist holomorph auf $\mathbf{C}^- := \mathbf{C} \setminus \{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \operatorname{Im} \lambda = 0\}$.

Aufgrund der positiven Definitheit des Vergleichsproblems sind dessen Eigenwerte $\lambda_i(0)$ gegeben durch die positiven Nullstellen der Frequenzdeterminante, also durch die positiven Nullstellen von $\sin \sqrt{\lambda}$, d.h.

$$\lambda_i(0) = (i \cdot \pi)^2 \quad , \quad i \in \mathbf{N} .$$

Es stellt sich jetzt die Frage, ob die Eigenwerte $\lambda_i(0)$, $i = 1, 2, \dots$ einfach sind. Um dies zu zeigen, genügt es nach Bemerkung 1.11 nachzuweisen, daß für $i = 1, 2, \dots$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_i(0)} \neq 0 .$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) &= -2\lambda \sin \sqrt{\lambda} - \lambda^2 \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\lambda} \\ &= -\frac{1}{2} \lambda \left(4 \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \right) . \end{aligned}$$

Grobe untere Schranken σ_i , $i = 1, 2, \dots$ für die Eigenwerte $\lambda_i(0)$, $i = 1, 2, \dots$ des Vergleichsproblems sind $\sigma_1 = 9.8$, $\sigma_2 = 39$, $\sigma_3 = 88$, $\sigma_4 = 157$, $\sigma_5 = 246$, $\sigma_6 = 355$, $\sigma_7 = 483$, $\sigma_8 = 631$, $\sigma_9 = 799$.

Mit diesen σ_i werden Intervalle I gebildet. Die Untergrenze von I ist jeweils σ_i , die Obergrenze von I ist $\sigma_i + 1$. Die folgende Tabelle zeigt die Intervallauswertung der Funktion $f(\lambda) := -\lambda^2 \sin \sqrt{\lambda}$ und der Funktion $g(\lambda) := -\frac{1}{2} \lambda \left(4 \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \right)$ auf I :

Intervall I	$f(I)$	$g(I)$
[9.8, 10.8]	$[-1.9E - 001, 1.9E + 001]$	$[1.5E + 001, 2.2E + 001]$
[39, 40]	$[-6.7E + 001, 6.2E + 001]$	$[-1.3E + 002, -1.1E + 002]$
[88, 89]	$[-3.5E + 002, 7.3E + 001]$	$[4.0E + 002, 4.3E + 002]$
[157, 158]	$[-8.6E + 001, 9.1E + 002]$	$[-1.0E + 003, -9.7E + 002]$
[246, 247]	$[-1.5E + 003, 5.1E + 002]$	$[1.9E + 003, 2.0E + 003]$
[355, 356]	$[-2.4E + 003, 1.1E + 003]$	$[-3.4E + 003, -3.3E + 003]$
[483, 484]	$[-3.3E + 003, 2.1E + 003]$	$[5.29E + 003, 5.34E + 003]$
[631, 632]	$[-2.8E + 003, 5.3E + 003]$	$[-7.96E + 003, -7.90E + 003]$
[799, 800]	$[-5.0E + 003, 6.4E + 003]$	$[1.12E + 004, 1.14E + 004]$

Jedes Intervall I enthält also einen Eigenwert $\lambda_i(0)$ des Vergleichsproblems. Weiterhin folgt

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_i(0)} \neq 0$$

für alle $i = 1, \dots, 9$, d.h. die Eigenwerte $\lambda_1(0), \dots, \lambda_9(0)$ des Vergleichsproblems sind einfach.

Die genannten groben unteren Schranken σ_i , $i = 1, \dots, 9$, werden noch jeweils um 1 verkleinert, um weit genug von dem jeweiligen Eigenwert entfernt zu sein. (Wie man an der obigen Tabelle erkennen kann, gerät man dadurch nicht zu nahe an den nächsten Eigenwert). Die damit erhaltenen unteren Schranken können dann als zulässige Startwerte für den Parameter σ im Theorem von LEHMANN (Theorem 2.10) verwendet werden. Mit der Vorgabe des Startwertes wird versucht, einerseits eine hohe Genauigkeit bei

der Berechnung der Einschliessung zu erzielen, andererseits den Rechenaufwand in Grenzen zu halten. Der Wert von σ , mit dem eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert λ_{\min} des WILLERSSchen Eigenwertproblems bestimmt wird, wird durch das Programm berechnet. Die nachfolgende Tabelle gibt die Einschließung des kleinsten Eigenwertes für verschiedene Werte von a wieder. Das größte a , für das eine Einschließung berechnet werden konnte, ist $a = 210$. Für größere a konnte die Bedingung $\sigma > \Lambda_{USI-1}$ (vgl. Abschnitt 3.2.3) nicht mehr für alle Schleifendurchläufe sichergestellt werden. Dies ist auch bei den anderen Lagerungsarten der Fall und wird daher dort nicht mehr explizit erwähnt.

a	σ	Einschließung von λ_{\min}
1	38	$[1.0367885399387_0^2 E + 001]$
10	38	$[1.4698340766176_0^1 E + 001]$
30	$5.415682685619988 E + 001$	$[2.3371234110_{49}^{52} E + 001]$
50	$6.516120672706572 E + 001$	$[3.09078143_{67}^{70} E + 001]$
70	$7.631387000704558 E + 001$	$[3.75658548_1^3 E + 001]$
90	$8.739573889780982 E + 001$	$[4.3569455_{46}^{51} E + 001]$
110	$9.825730695647826 E + 001$	$[4.9082336_4^6 E + 001]$
130	$1.088113123608730 E + 002$	$[5.4217636_6^8 E + 001]$
150	$1.190169738932527 E + 002$	$[5.905351_{68}^{70} E + 001]$
170	$1.288652873218742 E + 002$	$[6.364520_{38}^{41} E + 001]$
190	$1.383670964221265 E + 002$	$[6.803289_{59}^{62} E + 001]$
210	$1.475440966200623 E + 002$	$[7.224673_{89}^{94} E + 001]$

3.3.3 Unten drehbar gelagertes, oben eingespanntes Gestänge

In diesem Fall betrachten wir das Eigenwertproblem

$$\phi^{(4)} - a(x\phi')' = -\lambda\phi'' \quad , \quad \phi(0) = \phi''(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} \quad , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f''(0) = f'(1) = 0\} \quad . \end{aligned}$$

Die symmetrischen Bilinearformen $M_a(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ seien wie in Abschnitt 3.3.1 definiert.

Für die Polynome $p_i(x)$, die wieder alle Randbedingungen erfüllen, wählen wir als erstes

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_1x + a_3x^3 + a_4x^4 \quad \Rightarrow \\ p_1'(x) &= a_1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3. \end{aligned}$$

Aus $p_1(1) = p_1'(1) = 0$ folgt $a_3 = -\frac{3}{2}a_4$ und $a_1 = \frac{1}{2}a_4$, mit $a_4 = 2$, $a_3 = -3$, $a_1 = 1$ daher

$$p_1(x) = x - 3x^3 + 2x^4 .$$

Als nächstes bestimmen wir

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_1x + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \Rightarrow \\ p_2'(x) &= a_1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 . \end{aligned}$$

Aus $p_2(1) = p_2'(1) = 0$ folgt $a_1 = \frac{1}{2}a_4 + a_5$ und $a_3 = -\frac{3}{2}a_4 - 2a_5$, mit $a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $a_3 = -5$, $a_1 = 2$ daher

$$p_2(x) = 2x - 5x^3 + 2x^4 + x^5 .$$

Als drittes ermitteln wir

$$\begin{aligned} p_3(x) &= a_1x + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \Rightarrow \\ p_3'(x) &= a_1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 . \end{aligned}$$

Aus $p_3(1) = p_3'(1) = 0$ folgt $a_1 = \frac{1}{2}a_4 + a_5 + \frac{3}{2}a_6$ und $a_3 = -\frac{3}{2}a_4 - 2a_5 - \frac{5}{2}a_6$, mit $a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$, $a_1 = 5$, $a_3 = -10$ daher

$$p_3(x) = 5x - 10x^3 + 2x^4 + x^5 + 2x^6 .$$

Für $i \geq 4$ setzen wir

$$p_i(x) = (-1 + x)^4 x^{i-1} .$$

Damit werden die Funktionen v_i und w_i gebildet.

In diesem Fall lautet das für $a = 0$ geschlossen lösbares Vergleichsproblem

$$\phi^{(4)} + \lambda\phi'' = 0 \quad , \quad \phi(0) = \phi''(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0 . \quad (3.15)$$

Aus den Ergebnissen in Abschnitt 1.3.3 folgt, daß (3.15) volldefinit und damit positiv definit ist. Die Berechnung der Frequenzdeterminante $\Delta(\lambda)$ ergibt mit $U_1(\phi) = \phi(0)$, $U_2(\phi) = \phi''(0)$, $U_3(\phi) = \phi(1)$, $U_4(\phi) = \phi'(1)$ und $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ wie in (3.12)

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & \cos \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} \\ 0 & 1 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sin \sqrt{\lambda} \\ 0 & 1 & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{bmatrix} 1 & \sin \sqrt{\lambda} \\ 1 & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \left(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda} \right) \end{aligned}$$

$\Delta(\lambda)$ ist holomorph auf \mathbf{C}^- .

In diesem Fall sind die Eigenwerte $\lambda_i(0)$, $i = 1, 2, \dots$ des Vergleichsproblems die positiven Nullstellen der Funktion $\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}$. Mit Hilfe von *Mathematica* ergeben sich als grobe untere Schranken σ_i , $i = 1, 2, \dots$: $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 59$, $\sigma_3 = 118$, $\sigma_4 = 197$, $\sigma_5 = 296$, $\sigma_6 = 414$, $\sigma_7 = 553$, $\sigma_8 = 711$, $\sigma_9 = 888$.

Die Berechnung der Ableitung der Frequenzdeterminante liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) &= \left(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda} \right) \\ &\quad + \lambda \left(\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\lambda} \right) \\ &= \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} \lambda \sin \sqrt{\lambda} \\ &= \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

Mit den oben genannten σ_i werden wieder Intervalle I mit Untergrenze σ_i und Obergrenze $\sigma_i + 1$ gebildet. Die folgende Tabelle zeigt die Intervallauswertung der Funktion $f(\lambda) := \lambda \left(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda} \right)$ und der Funktion $g(\lambda) := \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \sqrt{\lambda}$ auf I :

Intervall I	$f(I)$	$g(I)$
[20, 21]	$[-2.6E + 000, 8.7E + 000]$	$[9.5E + 000, 1.1E + 001]$
[59, 60]	$[-1.0E + 001, 2.1E + 001]$	$[-3.0E + 001, -2.8E + 001]$
[118, 119]	$[-5.4E + 001, 6.5E + 000]$	$[5.8E + 001, 6.0E + 001]$
[197, 198]	$[-1.5E + 001, 8.6E + 001]$	$[-9.9E + 001, -9.7E + 001]$
[296, 297]	$[-8.3E + 001, 6.7E + 001]$	$[1.47E + 002, 1.49E + 002]$
[414, 415]	$[-2.6E + 000, 2.1E + 002]$	$[-2.08E + 002, -2.05E + 002]$
[553, 554]	$[-4.7E + 001, 2.4E + 002]$	$[2.76E + 002, 2.78E + 002]$
[711, 712]	$[-3.3E + 002, 2.9E + 001]$	$[-3.57E + 002, -3.55E + 002]$
[888, 889]	$[-3.3E + 002, 1.2E + 002]$	$[4.43E + 002, 4.45E + 002]$

Die genannten Intervalle enthalten die einfachen Eigenwerte $\lambda_1(0), \dots, \lambda_9(0)$ des Vergleichsproblems.

Die groben unteren Schranken σ_i werden wieder um 1 reduziert und als Startwerte für die Wahl des Parameters σ im Theorem von LEHMANN verwendet.

Es ergeben sich die Einschließungen

a	σ	Einschließung von λ_{\min}
1	58	$[2.0536026023041_3^6 E + 001]$
10	58	$[2.35849271536_3^4 E + 001]$
30	$7.291284759749115E + 001$	$[3.00065033988_0^3 E + 001]$
50	$8.236519977181720E + 001$	$[3.599493284_5^8 E + 001]$
70	$9.174109881170743E + 001$	$[4.1611796_{29}^{31} E + 001]$
90	$1.010091081578552E + 002$	$[4.69103290_0^5 E + 001]$
110	$1.101461189324825E + 002$	$[5.19352_{198}^{200} E + 001]$
130	$1.191363791278201E + 002$	$[5.6723478_7^9 E + 001]$
150	$1.279701831321003E + 002$	$[6.1305634_7^9 E + 001]$
170	$1.366425719745164E + 002$	$[6.570691_{18}^{21} E + 001]$
190	$1.451521857852810E + 002$	$[6.9948251_5^9 E + 001]$
210	$1.535003083523404E + 002$	$[7.404715_1^3 E + 001]$

3.3.4 Unten eingespanntes, oben drehbar gelagertes Gestänge

In diesem Fall betrachten wir das Eigenwertproblem

$$\phi^{(4)} - a(x\phi')' = -\lambda\phi'' \quad , \quad \phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi''(1) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in C^2([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\} \quad , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in C^4([0,1]) : f'(0) = f''(1) = 0\} \quad . \end{aligned}$$

Die symmetrischen Bilinearformen $M_a(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ seien wie in Abschnitt 3.3.1 definiert.

Für die Polynome $p_i(x)$ wählen wir als erstes

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad \Rightarrow \\ p_1'(x) &= 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \quad \Rightarrow \\ p_1''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 \quad . \end{aligned}$$

Aus $p_1(1) = p_1''(1) = 0$ folgt $a_2 = \frac{3}{2}a_4$ und $a_3 = -\frac{5}{2}a_4$, mit $a_4 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = -5$ daher

$$p_1(x) = 3x^2 - 5x^3 + 2x^4 \quad .$$

Als nächstes bestimmen wir

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \quad \Rightarrow \\ p_2'(x) &= 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 \quad \Rightarrow \\ p_2''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 \quad . \end{aligned}$$

Aus $p_2(1) = p_2''(1) = 0$ folgt $a_2 = \frac{3}{2}a_4 + \frac{7}{2}a_5$ und $a_3 = -\frac{5}{2}a_4 - \frac{9}{2}a_5$, mit $a_4 = a_5 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = -7$ daher

$$p_2(x) = 5x^2 - 7x^3 + x^4 + x^5 .$$

Als drittes ermitteln wir

$$\begin{aligned} p_3(x) &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \Rightarrow \\ p_3'(x) &= 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 \Rightarrow \\ p_3''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 . \end{aligned}$$

Aus $p_3(1) = p_3''(1) = 0$ folgt $a_2 = \frac{3}{2}a_4 + \frac{7}{2}a_5 + 6a_6$ und $a_3 = -\frac{5}{2}a_4 - \frac{9}{2}a_5 - 7a_6$, mit $a_4 = a_5 = a_6 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = -14$ daher

$$p_3(x) = 11x^2 - 14x^3 + x^4 + x^5 + x^6 .$$

Für $i \geq 4$ wählen wir

$$p_i(x) = (-1 + x)^4 x^{i-1} .$$

Damit werden die Funktionen v_i und w_i gebildet.

Das für $a = 0$ geschlossen lösbares Vergleichsproblem hat die Gestalt

$$\phi^{(4)} + \lambda\phi'' = 0 \quad , \quad \phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi''(1) = 0 . \quad (3.16)$$

Aus den Ergebnissen in Abschnitt 1.3.3 folgt, daß (3.16) volldefinit und damit positiv definit ist. Die Berechnung der Frequenzdeterminante $\Delta(\lambda)$ ergibt mit $U_1(\phi) = \phi(0)$, $U_2(\phi) = \phi'(0)$, $U_3(\phi) = \phi(1)$, $U_4(\phi) = \phi''(1)$ und $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ wie in (3.12)

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 1 & 1 & \cos \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 & -\lambda \cos \sqrt{\lambda} & -\lambda \sin \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & 1 & \cos \sqrt{\lambda} - 1 & \sin \sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 & -\lambda \cos \sqrt{\lambda} & -\lambda \sin \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \sqrt{\lambda} \\ 1 & \cos \sqrt{\lambda} - 1 & \sin \sqrt{\lambda} & \\ 0 & -\lambda \cos \sqrt{\lambda} & -\lambda \sin \sqrt{\lambda} & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & \cos \sqrt{\lambda} - 1 & \sin \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \\ 0 & -\lambda \cos \sqrt{\lambda} & -\lambda \sin \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\
 &= (\cos \sqrt{\lambda} - 1) (-\lambda \sin \sqrt{\lambda}) \\
 &\quad - (-\lambda \cos \sqrt{\lambda}) (\sin \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}) \\
 &= -\lambda \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + \lambda \sin \sqrt{\lambda} \\
 &\quad + \lambda \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \lambda \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \\
 &= \lambda (\sin \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda})
 \end{aligned}$$

Diese Frequenzdeterminante ist ebenfalls holomorph auf \mathbf{C}^- und unterscheidet sich von der in Abschnitt 3.3.3 nur durch das Vorzeichen. Gleiches gilt für ihre Ableitung:

$$\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) = \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) \sin \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}.$$

Es können daher die gleichen groben unteren Schranken σ_i , $i = 1, 2, \dots$ für die Eigenwerte $\lambda_i(0)$, $i = 1, 2, \dots$ des Vergleichsproblems bei der Wahl des Parameters σ im Theorem von LEHMANN benutzt werden. Für folgende Werte von a wurden Einschließungen des kleinsten Eigenwertes berechnet:

a	σ	Einschließung von λ_{\min}
1	58	$[2.0844093442_{399}^{400}E + 001]$
10	58	$[2.666278901798_2^3E + 001]$
30	$7.451740350889665E + 001$	$[3.917314296_7^9E + 001]$
50	$8.518102690404517E + 001$	$[5.10601642_4^6E + 001]$
70	$9.594754981963557E + 001$	$[6.229185_{399}^{406}E + 001]$
90	$1.068003268151742E + 002$	$[7.2869115_{15}^{26}E + 001]$
110	$1.176943176383145E + 002$	$[8.282567_{27}^{30}E + 001]$
130	$1.285669336226549E + 002$	$[9.221870_{46}^{53}E + 001]$
150	$1.393523655725106E + 002$	$[1.01115_{69}^{71}E + 002]$
170	$1.499930882777317E + 002$	$[1.09583_5^6E + 002]$
190	$1.604458633820796E + 002$	$[1.17682_1^3E + 002]$
210	$1.706829016334770E + 002$	$[1.25462_5^7E + 002]$

3.3.5 Oben und unten eingespanntes Gestänge

In diesem Fall betrachten wir das Eigenwertproblem

$$\phi^{(4)} - a(x\phi)' = -\lambda\phi'' \quad , \quad \phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} D_N &:= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\} , \\ D_M &:= D_N \cap \{f \in \mathcal{C}^4([0, 1]) : f'(0) = f'(1) = 0\} . \end{aligned}$$

Die symmetrischen Bilinearformen $M_a(\cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot)$ seien wie in Abschnitt 3.3.1 definiert.

Für die Polynome $p_i(x)$ wählen wir als erstes

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \Rightarrow \\ p_1'(x) &= 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 . \end{aligned}$$

Aus $p_1(1) = p_1'(1) = 0$ folgt $a_2 = a_4$ und $a_3 = -2a_4$, mit $a_4 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$ daher

$$p_1(x) = x^2 - 2x^3 + x^4 .$$

Als nächstes bestimmen wir

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \Rightarrow \\ p_2'(x) &= 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 . \end{aligned}$$

Aus $p_2(1) = p_2'(1) = 0$ folgt $a_2 = a_4 + 2a_5$ und $a_3 = -2a_4 - 3a_5$, mit $a_4 = a_5 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = -5$ daher

$$p_2(x) = 3x^2 - 5x^3 + x^4 + x^5 .$$

Als drittes ermitteln wir

$$\begin{aligned} p_3(x) &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \Rightarrow \\ p_3'(x) &= 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 . \end{aligned}$$

Aus $p_3(1) = p_3'(1) = 0$ folgt $a_2 = a_4 + 2a_5 + 3a_6$ und $a_3 = -2a_4 - 3a_5 - 4a_6$, mit $a_4 = a_5 = a_6 = 1$, $a_2 = 6$, $a_3 = -9$ daher

$$p_3(x) = 6x^2 - 9x^3 + x^4 + x^5 + x^6 .$$

Für $i \geq 4$ wählen wir

$$p_i(x) = (-1 + x)^4 x^{i-1} .$$

Damit werden die Funktionen v_i und w_i gebildet.

Das für $a = 0$ geschlossen lösbares Vergleichsproblem hat die Gestalt

$$\phi^{(4)} + \lambda\phi'' = 0 \quad , \quad \phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0 . \quad (3.17)$$

Aus den Ergebnissen in Abschnitt 1.3.3 folgt, daß (3.17) volldefinit und damit positiv definit ist. Die Berechnung der Frequenzdeterminante $\Delta(\lambda)$ ergibt mit $U_1(\phi) = \phi(0)$, $U_2(\phi) = \phi'(0)$, $U_3(\phi) = \phi(1)$, $U_4(\phi) = \phi'(1)$ und $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ wie in (3.12)

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 1 & 1 & \cos \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} \\ 0 & 1 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & 1 & \cos \sqrt{\lambda} - 1 & \sin \sqrt{\lambda} \\ 0 & 1 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 1 & \cos \sqrt{\lambda} - 1 & \sin \sqrt{\lambda} \\ 1 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & \cos \sqrt{\lambda} - 1 & \sin \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \\ 0 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= (\cos \sqrt{\lambda} - 1) (\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}) \\
&\quad - (-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}) (\sin \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}) \\
&= \sqrt{\lambda} \cos^2 \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \\
&\quad + \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} - \lambda \sin \sqrt{\lambda} \\
&= 2\sqrt{\lambda} - 2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \lambda \sin \sqrt{\lambda} \\
&= \sqrt{\lambda} (2 - 2 \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda})
\end{aligned}$$

$\Delta(\lambda)$ ist holomorph auf \mathbf{C}^- .

Die positiven Nullstellen des zweiten Faktors sind die Eigenwerte $\lambda_i(0)$, $i = 1, 2, \dots$ des Vergleichsproblems. Mit Hilfe von *Mathematica* ergeben sich folgende grobe untere Schranken σ_i , $i = 1, 2, \dots$ für die Eigenwerte: $\sigma_1 = 39$, $\sigma_2 = 80$, $\sigma_3 = 157$, $\sigma_4 = 238$, $\sigma_5 = 355$, $\sigma_6 = 475$, $\sigma_7 = 631$, $\sigma_8 = 791$ und $\sigma_9 = 986$.

Die Berechnung der Ableitung der Frequenzdeterminante ergibt

$$\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} (2 - 2 \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda})$$

$$\begin{aligned}
 & +\sqrt{\lambda} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\lambda} - \left(\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\lambda} \right) \right) \\
 = & \lambda^{-\frac{1}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda} + \sin \sqrt{\lambda} \\
 & - \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \\
 = & \lambda^{-\frac{1}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}
 \end{aligned}$$

Mit den oben genannten σ_i werden wieder Intervalle I mit Untergrenze σ_i und Obergrenze $\sigma_i + 1$ gebildet. Die folgende Tabelle zeigt die Intervallauswertung der Funktion $f(\lambda) := \sqrt{\lambda} (2 - 2 \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda})$ und der Funktion $g(\lambda) := \lambda^{-\frac{1}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}$ auf I :

Intervall I	$f(I)$	$g(I)$
[39, 40]	$[-1.7E + 000, 1.6E + 000]$	$[-3.2E + 000, -3.1E + 000]$
[80, 81]	$[-3.5E + 000, 1.3E + 000]$	$[4.1E + 000, 4.4E + 000]$
[157, 158]	$[-5.5E - 001, 5.8E + 000]$	$[-6.29E + 000, -6.26E + 000]$
[238, 239]	$[-5.6E + 000, 2.3E + 000]$	$[7.5E + 000, 7.7E + 000]$
[355, 356]	$[-6.6E + 000, 2.9E + 000]$	$[-9.435E + 000, -9.419E + 000]$
[475, 476]	$[-6.6E + 000, 4.5E + 000]$	$[1.07E + 001, 1.09E + 001]$
[631, 632]	$[-4.4E + 000, 8.3E + 000]$	$[-1.257E + 001, -1.255E + 001]$
[791, 792]	$[-6.2E + 000, 8.1E + 000]$	$[1.39E + 001, 1.41E + 001]$
[986, 987]	$[-6.3E - 001, 1.6E + 001]$	$[-1.571E + 001, -1.569E + 001]$

Wie man an der Tabelle erkennen kann, enthalten die genannten Intervalle die einfachen Eigenwerte $\lambda_1(0), \dots, \lambda_9(0)$ des Vergleichsproblems.

Die groben unteren Schranken σ_i werden wieder um 1 reduziert und die damit erhaltenen Ergebnisse jeweils als Startwerte für die Wahl des Parameters σ im Theorem von LEHMANN verwendet. Für folgende Werte von a wurden

Einschließungen des kleinsten Eigenwertes berechnet:

a	σ	Einschließung von λ_{\min}
1	79	$[3.997802298_4^6 E + 001]$
10	79	$[4.443896692_{69}^{73} E + 001]$
30	$9.469266805195362 E + 001$	$[5.41241700_1^3 E + 001]$
50	$1.045650580563568 E + 002$	$[6.3498807_2^4 E + 001]$
70	$1.143674349822959 E + 002$	$[7.2570970_4^8 E + 001]$
90	$1.240932029567793 E + 002$	$[8.1351950_0^5 E + 001]$
110	$1.337347908316973 E + 002$	$[8.9855407_0^5 E + 001]$
130	$1.432843757754534 E + 002$	$[9.8096514_0^9 E + 001]$
150	$1.527345090149126 E + 002$	$[1.060911_7^8 E + 002]$
170	$1.620785870606844 E + 002$	$[1.13855_3^4 E + 002]$
190	$1.713111535533835 E + 002$	$[1.21404_7^8 E + 002]$
210	$1.804280461839916 E + 002$	$[1.28754_1^2 E + 002]$

3.3.6 Anknüpfung an den Artikel von Willers

WILLERS benutzt in seinem Artikel eine Größe b , die die Länge des Teils des Gestänges angibt, der unter Druck steht und bestimmt die dimensionslose Knickkraft \bar{P} für Gestänge, deren Länge l ein Vielfaches von b ist, nämlich für $l = \frac{1}{2}b, b, \frac{3}{2}b, 2b$. Auf S. 49 des Artikels finden sich für verschiedene Lagerungsarten folgende Werte für \bar{P} :

Länge l des Gestänges	$\frac{1}{2}b$	b	$\frac{3}{2}b$	$2b$
beiderseits eingespannt	—	4.15	3.77	3.54
unten eingespannt, oben drehbar gelagert	—	3.78	3.54	3.39
unten drehbar gelagert, oben eingespannt	—	3.10	2.60	2.35
beiderseits drehbar gelagert	3.59	2.64	2.28	2.15

(3.18)

Verwendet man die Bezeichnungen aus Abschnitt 1.3.1, so ist $a = \frac{\mu g}{EI}$ und $\lambda_1 = \frac{P_1}{EI}$ und damit

$$b := \frac{P_1}{\mu g} = \frac{P_1}{EI} \cdot \frac{EI}{\mu g} = \frac{\lambda_1}{a},$$

$$\bar{P} := P_1 (EI (\mu g)^2)^{-\frac{1}{3}} = \lambda_1 EI (EI (\mu g)^2)^{-\frac{1}{3}} = \lambda_1 \left(\frac{EI}{\mu g} \right)^{\frac{2}{3}} = \lambda_1 a^{-\frac{2}{3}}.$$

Die in dieser Arbeit gewonnenen numerischen Resultate lassen sich nicht unmittelbar mit denen von WILLERS vergleichen, da mit dem dargestellten Zugang zu den Eigenwertproblemen eine Einschließung $[\lambda_1]$ für den kleinsten

Eigenwert stets ohne die Verwendung von b berechnet wurde. Dennoch können die folgenden Überlegungen als Motivation dienen, die Genauigkeit der WILLERSSchen Ergebnisse in Zweifel zu ziehen.

Wir gehen von der Situation in Abschnitt 1.3.3, also von einem Gestänge mit der Länge $l = 1$ aus und versuchen, λ_1 und a so vorzugeben, daß gilt

$$\begin{array}{|l|} \hline 1 = l = \frac{1}{2}b \Rightarrow b = \frac{\lambda_1}{a} = 2, \\ \hline 1 = l = b \Rightarrow b = \frac{\lambda_1}{a} = 1, \\ \hline 1 = l = \frac{3}{2}b \Rightarrow b = \frac{\lambda_1}{a} = \frac{2}{3}, \\ \hline 1 = l = 2b \Rightarrow b = \frac{\lambda_1}{a} = \frac{1}{2}. \\ \hline \end{array} \tag{3.19}$$

Um die Werte in der Tabelle auf S. 49 im WILLERSSchen Artikel nachvollziehen zu können, bestimmen wir ein $a > 0$ und damit eine Einschließung $[\lambda_1]$ so, daß $[b] := \frac{[\lambda_1]}{a}$ eine möglichst gute Einschließung der Zahlen in der rechten Spalte von Tabelle (3.19) liefert, im Idealfall diese Zahlen den Intervallmittelpunkt eines Intervalls mit möglichst kleinem Durchmesser darstellen. Eine Einschließung für die dimensionslose Knickkraft \bar{P} berechnet sich dann durch

$$[\bar{P}] := [\lambda_1] \exp\left(-\frac{2}{3} \ln(a)\right).$$

Als Beispiel betrachten wir den Fall $l = \frac{1}{2}b$ für das oben und unten drehbar gelagerte Gestänge. Folgende Ergebnisse wurden ermittelt:

a	:	$6.530932324510279E + 000$
σ	:	38
$[\lambda_1(a)]$:	$[1.30618646490207_4E + 001]$
$[b]$:	$[1.999999999999999E + 000,$ $2.000000000000001E + 000]$
$[\bar{P}]$:	$[3.738422571456_0^1E + 000]$
\bar{P} nach WILLERS	:	3.59

Dieses mit Hilfe von Intervallarithmetik gerechnete Beispiel kann zum Anlaß genommen werden, die Genauigkeit der Zahlen in Tabelle (3.18) in Frage zu stellen und die Vorteile einer verifizierenden Rechnung zu erkennen.

3.3.7 Ein Beispiel

Zum Abschluß betrachten wir ein praktisches Beispiel, in dem für einen Holzstab die kritische Last für eine vorgegebene Länge berechnet wird. Die Daten

für den Elastizitätsmodul und die Biegesteifigkeit sind einem Artikel von KARAS ([13]) entnommen.

Gegeben sei ein Holzstab der Länge $l = 30$ m. Der Elastizitätsmodul des Holzes wird mit $E = 100000$ kg / cm² angenommen, die Biegesteifigkeit betrage $EI = 2160$ kg·m². Der Stab habe ein laufendes Gewicht von $\mu g = 8.64$ kg / m. Er sei an beiden Enden drehbar gelagert. Es ist

$$a = \frac{\mu g}{EI} = \frac{8.64 \text{ kg/m}}{2160 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = \frac{1}{250 \text{ m}^3} .$$

Ausgehend von den Ausführungen in Abschnitt 1.3.1 lautet die Problemstellung:

Bestimme das kleinste $\lambda > 0$, so daß es ein $w \in \mathcal{C}^4([0, 30]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$w^{(4)}(x) - axw''(x) - aw'(x) = -\lambda w''(x)$$

für alle $x \in [0, 30]$ und den Randbedingungen

$$w(0) = w''(0) = w(30) = w''(30) = 0 .$$

Mit Hilfe der in Abschnitt 1.3.2 durchgeführten Transformation $\tilde{a} = a \cdot l^3$ ergibt sich $\tilde{a} = \frac{1}{250 \text{ m}^3} \cdot 27000 \text{ m}^3 = 108$. Mit diesem \tilde{a} wird das Problem

Bestimme das kleinste $\tilde{\lambda} > 0$, so daß es ein $\tilde{w} \in \mathcal{C}^4([0, 1]) \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\tilde{w}^{(4)}(\xi) - \tilde{a}\xi\tilde{w}''(\xi) - \tilde{a}\tilde{w}'(\xi) = -\tilde{\lambda}\tilde{w}''(\xi)$$

für alle $\xi \in [0, 1]$ und den Randbedingungen

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}''(0) = \tilde{w}(1) = \tilde{w}''(1) = 0.$$

gelöst. Da $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{l^2}$ (vgl. Abschnitt 1.3.2) und $P = \lambda \cdot EI$, ergeben sich die Einschließungen

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= [4.8549584_5^7 E + 001] \\ &\text{kleinster Eigenwert des transformierten Problems,} \\ \lambda &= [5.394398_{28}^{30} E - 002] \quad (\text{in } 1/\text{m}^2) \\ &\text{kleinster Eigenwert des Ausgangsproblems,} \\ P &= [1.1651900_2^4 E + 002] \quad (\text{in kg}) \\ &\text{kritische Last.} \end{aligned}$$

Symbolverzeichnis

\mathbf{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbf{N}_0	$\mathbf{N} \cup \{0\}$
\mathbf{R}	Körper der reellen Zahlen
\mathbf{R}^+	$\{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$
\mathbf{C}	Körper der komplexen Zahlen
\mathbf{C}^-	$\mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$
\mathbf{R}^n	Vektorraum der n -Tupel $(x_1, \dots, x_n)^T$ mit $x_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n$
$\mathbf{R}^{n \times n}$	Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen $[a_{ik}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ mit $a_{ik} \in \mathbf{R}, 1 \leq i, k \leq n$
A^T	Transponierte einer Matrix A
$\dim D_M$	Dimension des Vektorraums D_M
$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq k \\ 1, & \text{falls } i = k \end{cases}$	KRONECKER-Symbol
$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^k$	k -te Ableitung nach $\lambda, k \in \mathbf{N}_0$
$[a, b]$	$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$
(a, b)	$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$
$\mathcal{V}([a, b])$	Klasse der Vergleichsfunktionen auf $[a, b]$ (S. 10)
$\mathcal{E}([a, b])$	Klasse der Eigenfunktionen auf $[a, b]$ (S. 10)
$\mathcal{C}([a, b])$	$\{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ ist stetig}\}$
$\mathcal{C}^k([a, b])$	$\{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$
$\mathcal{C}^\infty([a, b])$	$\bigcap_{k \in \mathbf{N}_0} \mathcal{C}^k([a, b])$

Literaturverzeichnis

- [1] W. Auzinger and H. J. Stetter. Accurate Arithmetic Results for Decimal Data on Non-Decimal Computers. *Computing*, **35**:141-151, 1985.
- [2] H. Behnke. *Die Bestimmung von Eigenwertschranken mit Hilfe von Variationsmethoden und Intervallarithmetik*. Dissertation, Technische Universität Clausthal, 1989.
- [3] H. Behnke. The Calculation of Guaranteed Bounds for Eigenvalues Using Complementary Variational Principles. *Computing*, **47**:11-27, 1991.
- [4] H. Behnke and F. Goerisch. Inclusions for Eigenvalues of Selfadjoint Problems. In J. Herzberger, Hrsg., *Topics in Validated Computations*, S. 277-322, Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [5] L. Collatz. *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 2. Auflage, 1963.
- [6] L. Collatz. *Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 5. Auflage, 1973.
- [7] R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage, 1968.
- [8] F. R. Gantmacher. *Matrizentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.
- [9] F. Goerisch. *Eigenwertschranken und komplementäre Extremalprinzipien*. Habilitationsschrift, Technische Universität Clausthal, 1986.
- [10] F. Goerisch und J. Albrecht. Eine einheitliche Herleitung von Einschließungssätzen für Eigenwerte. In J. Albrecht, L. Collatz und W. Velte, Hrsg., *Numerische Behandlung von Eigenwertaufgaben, Band 3. International Series of Numerical Mathematics (ISNM), Vol. 69*, S. 58-88, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1984.

- [11] F. Goerisch and Z. He. The Determination of Guaranteed Bounds to Eigenvalues with the Use of Variational Methods I. In Ch. Ullrich, Hrsg., *Computer Arithmetic and Self-Validating Numerical Methods*, Academic Press, San Diego, 1990.
- [12] E. Kamke. Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. II. *Math. Zeitschr.*, **46**:231-250, 1940.
- [13] K. Karas. Über die Knickung gerader Stäbe durch Eigengewicht und Einzellasten. *Zeitschrift für Bauwesen*, **78**:246-256, 1928.
- [14] R. Klatte, U. Kulisch, M. Neaga, D. Ratz und Ch. Ullrich. *PASCAL-XSC*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.
- [15] U. Kulisch. *Grundlagen des Numerischen Rechnens - Mathematische Begründung der Rechnerarithmetik*. Reihe Informatik, Band 19. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1976.
- [16] U. Kulisch and W. L. Miranker. *Computer Arithmetic in Theory and Practice*. Academic Press, New York, 1981.
- [17] J. Kunz. Zum Knickproblem eines durch sein Eigengewicht belasteten Stabes. Verbesserung eines Resultates von Willers. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, **25**:547-550, 1974.
- [18] N. J. Lehmann. Beiträge zur Lösung linearer Eigenwertprobleme I. *Z. Angew. Math. Mech.*, **29**:341-356, 1949.
- [19] N. J. Lehmann. Beiträge zur Lösung linearer Eigenwertprobleme II. *Z. Angew. Math. Mech.*, **30**:1-16, 1950.
- [20] R. Lohner. Enclosing all Eigenvalues of Symmetric Matrices. In J. Wolff von Gudenberg und Ch. Ullrich, Hrsg., *Accurate Numerical Algorithms*, S. 87-103. Research Reports ESPRIT, Project 1072, DIAMOND, Volume 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
- [21] R. Lohner. *Verified Computing and Programs in PASCAL-XSC*. Preprint zur Habilitationsschrift, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe (TH).
- [22] A. Özdamar. *Das Knicken langer, schwerer Balken*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 1994.

- [23] M. Plum. Inclusion Methods for Elliptic Boundary Value Problems. In J. Herzberger, Hrsg., *Topics in Validated Computations*, S. 323-380, Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [24] S. M. Rump. *Kleine Fehlerschranken bei Matrixproblemen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1980.
- [25] S. M. Rump. Solving Algebraic Problems with High Accuracy. In U. Kulisch und W. L. Miranker, Hrsg., *A New Approach to Scientific Computation*, S. 51-120, Academic Press, New York, 1983.
- [26] H. R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1991.
- [27] H. J. Stetter. Sequential Defect Correction for High-Accuracy Floating-Point Algorithms. In *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1006*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.
- [28] G. W. Stewart and Ji-guang Sun. *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press, San Diego, 1990.
- [29] J. Stoer und R. Bulirsch. *Numerische Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage, 1990.
- [30] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1966.
- [31] J. H. Wilkinson and C. Reinsch. *Linear Algebra. Handbook for Automatic Computation, Volume II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [32] F. A. Willers. Das Knicken schwerer Gestänge. *Z. Angew. Math. Mech.*, **21(1)**:43-51, 1941.
- [33] S. Zimmermann. *Über die Genauigkeit von Eigenwertschranken für selbstadjungierte Operatoren*. Dissertation, Technische Universität Clausthal, 1989.