

Monoidalgebren von Projektionsfunktoren



Dissertation

zur Erlangung des
Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich C
der Bergischen Universität Wuppertal
vorgelegt von

Anna-Louise Paasch

im August 2011

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20111018-152557-6

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20111018-152557-6>]

Einleitung

Ein klassisches Mittel der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren ist das Studium von Paaren Hom-orthogonaler Unterkategorien, wie etwa in der Kipptheorie. Das Wechseln von der Modulkategorie zu orthogonalen Unterkategorien spielt dabei eine entscheidende Rolle (siehe etwa [GL91], [Sch91]). So betrachtet man zu bestimmten Moduln T einer Algebra A sowohl den Projektionsfunktork P_T , der einem Modul seinen größten Quotienten in Kern $\text{Hom}(T, _)$ zuordnet, als auch den Orthogonalitätsfunktork in die senkrechte Kategorie $\text{Kern Hom}(T, _) \cap \text{Kern Ext}^1(T, _)$.

Eine natürliche Frage ist dann die nach den Relationen zwischen solchen Funktoren. Diese Frage ordnet sich auch ein in das allgemeine Kategorifizierungsprogramm, Lie-theoretische Objekte in Funktoren auf der Modulkategorie einer endlichdimensionalen Algebra zu realisieren (siehe [Maz10]).

Dies konkretisieren wir, indem wir uns auf die multiplikativen Relationen geeigneter Projektionsfunktoren konzentrieren. Dazu betrachten wir das Monoid π_A , das bis auf natürliche Äquivalenz von den P_S zu Einfachen S ohne Selbsterweiterungen erzeugt wird. Für zwei Projektionsfunktoren zu Einfachen S und T ohne Selbsterweiterungen mit $\text{Ext}_A^1(T, S) = 0$ weisen wir die folgenden Relationen nach (Satz 1.3):

$$\begin{aligned} P_S^2 &\sim P_S \\ P_S P_T P_S &\sim P_T P_S P_T \sim P_T P_S \\ P_S P_T &\sim P_T P_S \quad \text{falls zudem } \text{Ext}_A^1(S, T) = 0 \end{aligned}$$

(Dabei ist zu beachten, dass wir die Rechtsschreibweise für Abbildungen und Funktoren verwenden.) Unser Beweis basiert auf der natürlichen Äquivalenz von $P_S P_T$ und $P_{S \oplus T}$.

Ist A die Wegealgebra des linear orientierten Dynkin-Köchers vom Typ A_n , so ist die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_A$ über einem Körper \mathcal{K} ein Quotient der 0-Hecke Algebra vom Typ A_n (vgl.[Nor79]). Die Berechnung einer Normalform zeigt, dass die genannten

Relationen definierend sind und $\mathcal{K}\pi_A$ die Dimension

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1} = (n+1)\text{-te Catalan-Zahl}$$

hat (Satz 3.2). Die Algebra $\mathcal{K}\pi_A$ ist jedoch nicht isomorph zu der Temperley-Lieb-Algebra ([GdlHJ89]), obwohl Basen über die gleiche Menge parametrisiert werden (Korollar 3.3). Das Hauptresultat (Hauptsatz S.46 und S.103) dieser Arbeit ist:

Hauptsatz. *Die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_A$ ist isomorph zu der Inzidenzalgebra einer natürlichen partiellen Ordnung auf der Potenzmenge von $\{1, 2, \dots, n\}$.*

Wir geben einen Isomorphismus explizit an, indem wir ein System F paarweise orthogonaler Idempotente (wie bei solchen Türmen von Algebren üblich) induktiv konstruieren (Abschnitt 3.4) und ein nichttriviales Element in $f(\mathcal{K}\pi_A)f'$ mit $f \neq f' \in F$ angeben (Abschnitt 3.5).

Darüber hinaus betrachten wir für beliebige endliche, zykellose Köcher Q die Algebra \mathcal{B}_Q , die durch Erzeuger und o.g. Relationen definiert ist, so dass $\mathcal{K}\pi_{\mathcal{K}Q}$ ein Quotient ist. Unabhängig vom Darstellungstyp des Köchers entpuppt sich diese als sauber (Satz 2.10) und endlichdimensional (Korollar 2.6). Ihre Einfachen E_M korrespondieren genau zu den Teilmengen M der Punktmenge von Q . Dies ermöglicht uns, den Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_Q über eine im Ausgangsköcher liegende Kombinatorik zu beschreiben (Satz 2.13):

Satz. *Es existiert im Gabriel-Köcher genau dann exakt ein Pfeil $[E_M] \rightarrow [E_N]$, wenn es in Q einen Pfeil $m \rightarrow n$ für alle $m \in M \setminus N$ und alle $n \in N \setminus M$ gibt.*

Insbesondere gibt es keine Schleifen und Mehrfachpfeile. Ferner hat der Gabriel-Köcher genau 3 Zusammenhangskomponenten, wenn Q nicht ein linear orientierter Dynkin-Köcher vom Typ A_n ist, und genau $n+1$ andernfalls (Satz 2.16).

Diese Resultate können wir auf eine große Klasse von Köcher anwenden:

- Baumköcher mit Radikalquadrat 0 (Satz 4.6)
- Dynkin-Köcher vom Typ A_n einer beliebigen Orientierung (Korollar 4.7)
- Sternköcher (Unterabschnitt 4.1)

Wir zeigen, dass für diese die o.g. Relationen definierend sind, indem wir Normalformen von \mathcal{B}_Q bzw. $\mathcal{K}\pi_{\mathcal{K}Q}$ angeben (Kapitel 4). Unsere Methode nutzt die Wirkung der Projektionsfunktoren auf den (injektiven) Darstellungen des Ausgangsköchers, um Monome in $\mathcal{K}\pi_{\mathcal{K}Q}$ zu unterscheiden. Den genannten Klassen ist gemein, dass die Köcher an mindestens einer Senke oder Quelle verklebt sind. Dies und die Kenntnis einer expliziten Normalform zu linear orientierten Dynkin-Köchern vom Typ A_n bietet die Grundlage für eine induktive Konstruktion einer Normalform (Satz 4.6).

Vermutlich handelt es sich bei den o.g. Relationen stets um definierende. Wie die konkreten Beispiele des vierten Kapitels zeigen, ist die Monoidalgebra der Projektionsfunktoren i.A. keine Inzidenzalgebra. Offen bleibt, inwiefern sich trotzdem die induktiven Konstruktionen, wie etwa die der Idempotenten, vom Spezialfall linear orientierter Dynkin-Köcher des Typs A_n auf beliebige endliche, zykellose Köcher übertragen lassen. Des Weiteren interessiert uns die präzise Beziehung zu 0-Hecke-Algebren.

Abgesehen von diesen algebrentheoretischen Problemstellungen über die Monoidalgebra der Projektionsfunktoren, bleibt die Frage, welche Rückschlüsse die Struktur der Monoidalgebra auf die der Modulkategorie der Ausgangsalgebra erlaubt. Gibt es über die nichtkreuzenden Partitionen einen natürlichen Zusammenhang zu den endlich erzeugten Torsionsklassen der Modulkategorie von Wegealgebren (à la [IT09])? Die Orthogonalitätsfunktoren erfüllen im Fall, dass A die Wegealgebra eines linear orientierten Dynkin-Köchers vom Typ A_n ist, auch die o.g. Relationen auf den Unzerlegbaren (Abschnitt 3.7). Es ist zu erwarten, dass sich Ergebnisse dieser Arbeit auf solche Funktoren übertragen lassen.

Ich danke Markus Reineke für dieses Thema. Außerdem möchte ich die richtungsweisenden und aufmunternden Diskussionen dankend hervorheben. Des Weiteren möchte ich mich bei der Arbeitsgruppe Algebra und Zahlentheorie für die gute Atmosphäre bedanken. Magdalena Boos und Denis Skorodumov sowie Klaus Bongartz gilt mein besonderer Dank. Ich denke an meinen Verlobten Sebastian Gensing. Und ich danke meiner Familie fürs Familiensein, insbesondere meinen Eltern für die damit verbundene vielfältige Förderung und Zölkow.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1 Die Projektionsfunktoren	1
1.1 Definition der Projektionsfunktoren und grundlegende Eigenschaften . . .	2
1.2 Relationen	6
2 Die Monoidalgebren $\mathcal{K}\pi_{\mathbf{Q}}$ und $\mathcal{B}_{\mathbf{Q}}$ für Wegealgebren $\mathcal{K}\mathbf{Q}$	13
2.1 Grundlagen und Definition der Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_{\mathbf{Q}}$	13
Der Dynkin-Köcher vom Typ \mathbf{A}_2	17
2.2 Definition der Monoidalgebra $\mathcal{B}_{\mathbf{Q}}$ und grundlegende Eigenschaften . . .	18
2.3 Die Einfachen und das Radikal von $\mathcal{B}_{\mathbf{Q}}$	21
2.4 Der Gabriel-Köcher von $\mathcal{B}_{\mathbf{Q}}$	25
2.5 Spezialfälle und Eigenschaften des Gabriel-Köchers	33
Spezialfall: Der linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ \mathbf{A}_n	34
Spezialfall: Der Unterraumköcher	35
Eigenschaften	38
3 Die Monoidalgebren zu linear orientierten Dynkin Köchern vom Typ \mathbf{A}_n	43
3.1 Formulierung des Hauptresultats	43
Notationen und Relationen	43
Hauptresultat	45
3.2 Eine Normalform von \mathcal{B}_n	48
3.3 Eine Produktformel bestimmter Basiselemente	54
3.4 Idempotente der Monoidalgebra	62
Spezielle zentrale Idempotente	63
Zentrale Idempotente in $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}$	69
Ein vollständiges System zentraler, paarweise orthogonaler Idempotenter	71
Spezielle Idempotente	72
Eine alternative Beschreibung	76
	vii

	Ein vollständiges System paarweise orthogonaler Idempotente	77
3.5	Die zu den „Wegen“ der Inzidenzalgebra korrespondierenden Elemente	82
	Spezielle Monome	82
	Eine induktive Beschreibung	86
	Eigenschaften	91
	Ein Element in $f_J^{(n)} \mathcal{A}_n f_K^{(n)}$	94
3.6	Beweis des Hauptsatzes	103
3.7	Ein weiterer Funktor	104
	Definition von O_S	104
	Anwendung auf Q_n - \mathcal{K} -dar	107
4	Verallgemeinerungen	109
	Vorbemerkungen	109
4.1	Verkleben an einer Senke	113
	Unterraumköcher	116
	Sternköcher	117
	Dynkin-Köcher vom Typ D_n mit genau einer Senke	119
	Bäume mit einer speziellen Orientierung	120
	Bipartite Dynkin-Köcher vom Typ A_n	124
	Beispiel 4.1: Die Monoidalgebra zum bipartiten Dynkin-Köcher vom Typ A_4	126
4.2	Vollständig bipartite Köcher	127
	Beispiel 4.2: Die Monoidalgebra zum bipartiten Euklidischen- Köcher vom Typ \tilde{A}_3	130
4.3	Umgebungsköcher eines Punktes	131
	Beispiel 4.3: Die Monoidalgebra zum linear orientierten Dynkin-Köcher vom Typ D_4	135
	Literaturverzeichnis	139

Kapitel 1

Die Projektionsfunktoren

Ist U ein partieller Kippmodul oder ein einfacher Modul ohne nichttriviale Selbsterweiterungen über einer endlichdimensionalen Algebra A , so ist $(\text{gen-}U, \text{Kern Hom}_A(U, _))$ ein Torsionspaar der Kategorie $\text{mod-}A$ der endlichdimensionalen A -Moduln. Das zugehörige Torsionsradikal ist der Funktor $t_U: \text{mod-}A \rightarrow \text{mod-}A$, welcher einen Modul M auf seinen größten in $\text{gen-}U$ liegenden Untermodul M_U abbildet. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M_U \rightarrow M \rightarrow M/M_U \rightarrow 0$$

ist die kanonische Folge zu diesem Torsionspaar. Der Übergang zu den Kokernen definiert dann den Funktor $P_U: \text{mod-}A \rightarrow \text{Kern Hom}_A(U, _)$; einem Modul M wird also sein Quotient M/M_U zugeordnet.

Diese Funktoren sind idempotent. Wir werden weiter sehen, dass für einfache Rechtsmoduln S und T ohne nichttriviale Selbsterweiterungen die Relation $P_S P_T P_S \sim P_T P_S P_T$ gilt, falls es keine Erweiterungen von S durch T oder keine von T durch S gibt. Zudem gilt im Fall $\text{Ext}_A^1(T, S) = 0$ die Relation $P_T P_S P_T \sim P_T P_S$. Infolgedessen „kommutieren“ P_S und P_T genau dann, wenn es keine nichttrivialen Erweiterungen zwischen S und T gibt.

Im ersten Teil dieses Kapitels definieren wir Projektionsfunktoren allgemein für beliebige Moduln und erinnern an die notwendigen Details der Anfänge der klassischen Kipptheorie. Wir halten uns an die Darstellung aus dem Buch [ASS06]. Dabei nutzen wir die Gelegenheit und weisen auf die für die Relationen wichtigen Eigenschaften hin, insbesondere für den Fall, dass U einfach ist. Im zweiten Teil beweisen wir die genannten Relationen.

1.1 Definition der Projektionsfunktoren und grundlegende Eigenschaften

Es sei A eine endlichdimensionale, assoziative, unitäre Algebra über einem Körper \mathcal{K} . Die Kategorie der endlichdimensionalen A -Rechtsmoduln bezeichnen wir mit $\text{mod-}A$. Außerdem schreiben wir Abbildungen und Funktoren von rechts.

Es sei U ein endlichdimensionaler A -Rechtsmodul. Mit $\text{gen-}U$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $\text{mod-}A$ der von U endlich erzeugten Moduln; d.h. die Objekte von $\text{gen-}U$ sind bis auf Isomorphie genau die Quotienten von U^d für beliebige $d \in \mathbb{N}$. Bekanntlich ist $\text{gen-}U$ eine unter Quotienten und endlichen direkten Summen, und somit unter inneren Summen, abgeschlossene Unterkategorie. Somit ist in jedem A -Rechtsmodul M die Summe M_U all jener Untermoduln, welche in $\text{gen-}U$ liegen, wieder ein Quotient eines U^n . Der Modul M_U ist also der größte Untermodul von M , der in $\text{gen-}U$ liegt.

Insbesondere faktorisiert jeder Morphismus $U \xrightarrow{\psi} M$ über die Einbettung $M_U \xrightarrow{\iota} M$. Die induzierte Abbildung $\text{Hom}_A(U, \iota)$ ist also surjektiv. Wegen der Linksexaktheit des Hom-Funktors gilt:

$$(*) \quad \text{Hom}_A(U, M_U) \xrightarrow[\cong]{\text{Hom}_A(U, \iota_M)} \text{Hom}_A(U, M)$$

Ferner ist für jeden A -Homomorphismus $M \xrightarrow{\varphi} N$ das Bild $M_U \varphi$ schon ein Untermodul von N_U . Wir erhalten demnach das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen, wobei ι_M und ι_N die jeweiligen Einbettungen bezeichnen:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_U & \xrightarrow{\iota_M} & M \\ & & \downarrow \varphi|_{M_U} & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & N_U & \xrightarrow{\iota_N} & N \end{array}$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Funktor $t_U: \text{mod-}A \rightarrow \text{mod-}A$ mit

$$M \mapsto M_U := \sum_{X \subseteq M, X \in \text{gen-}U} X$$

und

$$M \xrightarrow{\varphi} N \mapsto M_U \xrightarrow{\varphi|_{M_U}} N_U$$

ein kovarianter Unterfunctor des Identitätsfunktors ist, der zudem idempotent ist.

Nun ist die Zuordnung $P_U: \text{mod-}A \rightarrow \text{mod-}A$, $M \mapsto M/M_U$ funktoriell: Dazu sehen wir uns den Übergang zu den Kokernen an. Es sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Homomorphismus und $\pi_M: M \rightarrow M/M_U$ sowie $\pi_N: N \rightarrow N/N_U$ die kanonischen Epimorphismen. Weil $\varphi\pi_N$ über den Kokern π_M von ι_M faktorisiert, existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\widehat{\varphi}$, so dass folgendes Diagramm ein kommutatives mit exakten Zeilen ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_U & \xrightarrow{\iota_M} & M & \xrightarrow{\pi_M} & M/M_U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi|_{M_U} & & \downarrow \varphi & & \downarrow \widehat{\varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & N_U & \xrightarrow{\iota_N} & N & \xrightarrow{\pi_N} & N/N_U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Wir setzen $\varphi P_U := \widehat{\varphi}$ und vergewissern uns, dass die (kovarianten) Funktoreigenschaften $\text{id}_M P_U = \text{id}_{M P_U}$ und $(\varphi P_U)(\psi P_U) = (\varphi\psi) P_U$ gelten, weil π_M der Kokern von ι_M ist. Aus demselben Grund ist dieser Funktor $P_U: \text{mod-}A \rightarrow \text{mod-}A$ – von uns ab jetzt Projektionsfunctor zu U genannt – \mathcal{K} -linear; P_U erhält also insbesondere endliche direkte Summen. Wir werden solch ein Diagramm „von P_U induziert und zu φ kanonisch“ nennen und die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M_{t_U} \rightarrow M \rightarrow M P_U \rightarrow 0$$

die „von P_U induzierte kanonische Sequenz zu M “.

Wir können M_U auch „berechnen“. Hierzu sehen wir uns für beliebige A -Moduln M den A -Modulhomomorphismus der Auswertung

$$\Phi_{U,M}: U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M) \rightarrow M \quad \text{mit} \quad u \otimes \varphi \mapsto u\varphi$$

mit $B := \text{End}_A(U)$ an. Dabei fassen wir U bzw. $\text{Hom}_A(U, M)$ auf die übliche Weise als Rechts- resp. Linksmodul von B auf und den \mathcal{K} -Vektorraum $U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M)$ als A -Rechtsmodul vermöge der Operation von A auf der ersten Komponente U , welche per Definition mit der von B auf U vertauscht.

Im Folgenden leiten wir her, dass $(\Phi_{U,M})_{M \in \text{mod-}A}$ als eine natürliche Transformation von dem Funktor $U \otimes_B \text{Hom}_A(U, -)$ auf den Funktor t_U aufgefasst werden kann:

1. Schritt: $M_U = \text{Bild } \Phi_{U,M}$ Nach Definition von $\Phi_{U,M}$ ist M_U stets im Bild von $\Phi_{U,M}$ enthalten: Wählen wir einen (nach Definition von M_U existierenden) A -Epimorphismus $g = (g_1, \dots, g_s)^t: U^s \rightarrow M_U$, so gilt für diesen nämlich:

$$M_U = U^s g = \sum_{i=1}^s U g_i = \sum (U \otimes g_i) \Phi_{U,M} \in \text{Bild } \Phi_{U,M}$$

Bezeichnen wir nun den zu $\Phi_{U,M}$ gehörigen Epimorphismus mit

$$\widetilde{\Phi}_{U,M}: U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M_U) \rightarrow \text{Bild } \Phi_{U,M},$$

so erhalten wir das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M_U) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{Hom}_A(U, \iota_M)} & U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M) \\ \downarrow \Phi_{U, M_U} & & \downarrow \widetilde{\Phi}_{U,M} \\ \text{Bild } \Phi_{U, M_U} = M_U & \xleftarrow{\varepsilon} & \text{Bild } \Phi_{U,M} \end{array}$$

Wie wir in (*) schon festgestellt haben, ist $\text{id} \otimes \text{Hom}_A(U, \iota_M)$ ein Isomorphismus, weswegen die Inklusion ein Epimorphismus sein muss. Dies bedeutet schließlich die Gleichheit von M_U und $\text{Bild } \Phi_{U,M}$.

2. Schritt: Nach dem ersten Schritt besichert die Definition von $\widetilde{\Phi}_{U,-}$ einem Homomorphismus $\varphi: M \rightarrow N$ das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M) & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}_{U,M}} & M t_U = M_U \\ \downarrow \text{id} \otimes \text{Hom}_A(U, \varphi) & & \downarrow \varphi t_U \\ U \otimes_B \text{Hom}_A(U, N) & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}_{U,N}} & N t_U = N_U \end{array}$$

Damit ist $\widetilde{\Phi}_{U,-}$ eine natürliche Transformation von dem Funktor $U \otimes_B \text{Hom}_A(U, -)$ auf den Funktor t_U .

Ist U zudem einfach, so ist erhalten wir:

1.1 Proposition. *Es seien A eine endlichdimensionale, assoziative, unitäre Algebra über einem Körper \mathcal{K} und U ein einfacher A -Rechtsmodul.*

- (1) *Es ist $\widetilde{\Phi}_{U,-}$ eine natürliche Äquivalenz der Funktoren t_U und $U \otimes_B \text{Hom}_A(U, -)$. Insbesondere sind die A -Moduln M_U und $U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M)$ isomorph.*
- (2) *Besitzt U keine nichttriviale Selbsterweiterungen, so ist t_U ein Torsionsradikal, d.h. für alle A -Moduln M gilt: $(M/Mt_U)t_U = 0$. Insbesondere ist das Bild des Endofunktors P_U die volle Unterkategorie von $\text{mod-}A$ mit den Objekten N , für die $\text{Hom}_A(U, N) = 0$ gilt.*

Beweis: Zu (1): Wegen der Einfachheit von U ist $M_U \cong U^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Die Injektivität von $\Phi_{U,M}$ folgt nun aus der Dimensionsgleichheit von $M_U = \text{Bild } \Phi_{U,M}$ und $U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M)$, welche sich, den A -Isomorphismus $\text{Hom}_A(U, M) \cong \text{Hom}_A(U, M_U)$ ausnutzend, wie folgt ergibt:

$$\begin{aligned} U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M) &\cong U \otimes_B \text{Hom}_A(U, M_U) \cong U \otimes_B \text{Hom}_A(U, U^d) \\ &\cong U \otimes_B B^d \cong (U \otimes_B B)^d \cong U^d \cong M_U \end{aligned}$$

Zu (2): Wieder folgt aus der Einfachheit von U die Existenz eines $d \in \mathbb{N}$ mit $U^d \cong M_U$. Insbesondere gilt dann für die erste Erweiterungsgruppe:

$$\text{Ext}_A^1(U, M_U) \cong \text{Ext}_A^1(U, U^d) \cong \text{Ext}_A^1(U, U)^d = 0$$

Wenden wir auf die von P_U induzierte kanonische Sequenz

$$0 \longrightarrow M_U \longrightarrow M \longrightarrow M/M_U \longrightarrow 0$$

nun $\text{Hom}_A(U, -)$ und eben Bewiesenes an, so erhalten wir die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(U, M_U) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_A(U, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(U, M/M_U) \longrightarrow 0 = \text{Ext}_A^1(U, M_U)$$

Daraus folgt sofort $\text{Hom}_A(U, M/M_U) = 0$, weswegen $(M/M_U)t_U$ als das Bild von $\widetilde{\Phi}_{U, M/M_U}$ gleich 0 ist. \square

Ist U ein partieller Kippmodul, hat also keine nichttrivialen Selbsterweiterungen und eine projektive Dimension von höchstens 1, so ist t_U bekanntlich auch ein Radikal: Da $M_U = Mt_U$ in $\text{gen-}U$ liegt, existiert ein Epimorphismus $\psi: U^d \rightarrow M_U$. Die Anwendung von $\text{Hom}_A(U, _)$ auf die zugehörige kurze exakte Sequenz führt zu der exakten Sequenz:

$$\eta: \text{Ext}_A^1(U, U^d) \rightarrow \text{Ext}_A^1(U, M_U) \rightarrow \text{Ext}_A^2(\text{Kern } \psi),$$

deren beiden Randterme wegen der zwei Eigenschaften eines partiellen Kippmoduls jeweils 0 sind. Wie eben gesehen, folgt daraus $(M/Mt_U)t_U = 0$.

Das zugehörige Torsionspaar ist $(\text{gen-}U, \text{Kern Hom}_A(U, _))$. Weiter ist die zu jedem Modul M gehörige kanonische Sequenz $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ mit $L \in \text{gen-}U$ und $\text{Hom}_A(U, N) = 0$ bis auf Isomorphie die von P_U induzierte kanonische Sequenz $0 \rightarrow M_U \rightarrow M \rightarrow M/M_U \rightarrow 0$. Falls U also ein partieller Kippmodul ist, so bildet der Endofunktor P_U auf die volle Unterkategorie $\text{Kern Hom}_A(U, _)$ ab.

Ist φ ein Epimorphismus so auch φP_U wegen der Definition des Kokerns. Als eine Notiz am Rande bemerken wir noch, dass P_U zudem Monomorphismen erhält, wenn U halbeinfach ist: Es sei hier U halbeinfach und $\varphi: M \rightarrow N$ ein Monomorphismus. Nach dem Schlangenlemma, angewandt auf das zu φ kanonische durch P_U induzierte kommutative Diagramm, ist die Sequenz der Kerne und Kokerne exakt:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \text{Kern}(\varphi P_U) \rightarrow \text{Kokern}(\varphi|_{M_U}) \xrightarrow{\overline{t_N}} \text{Kokern}(\varphi) \rightarrow \text{Kokern}(\varphi P_U) \rightarrow 0$$

Nun ist $\overline{t_N}$ injektiv, weil $M\varphi \cap N_U = M_U\varphi$ gilt. Dabei gilt die Inklusion \supseteq nach Definition von M_U . Da U halbeinfach ist, ist $\text{gen-}U$ auch abgeschlossen unter Bildung von Untermoduln. Insbesondere liegt $(M\varphi \cap N_U)\varphi^{-1} \cong M\varphi \cap N_U$ in $\text{gen-}U$ und ist deshalb ein Untermodul von M_U , woraus sich schließlich die andere Inklusion ergibt. Aus der Exaktheit der Kern-Kokern-Sequenz folgt nun die Injektivität von φP_U .

1.2 Relationen

Es ist leicht einzusehen, dass die Funktoren $P_U P_U$ und P_U natürlich äquivalent sind (was wir mit \sim notieren), falls t_U ein Torsionsradikal ist.

Ist U halbeinfach, so stimmen $\text{gen-}U$ und die volle Unterkategorie $\text{add-}U$ von $\text{mod-}A$, deren Objekte die direkten Summen von direkten Summanden von U sind, überein. Diese einfache Beobachtung wenden wir nun an, um die nächsten Aussagen über Relationen zwischen zwei Projektionsfunktoren zu nichtisomorphen einfachen A -Rechtsmoduln

zu beweisen. Wir erinnern daran, dass wir auch für Funktoren – insbesondere ihre Anwendung auf Homomorphismen – die Rechtsschreibweise benutzen.

1.2 Lemma. *Es seien A eine endlichdimensionale, assoziative, unitäre Algebra über einem Körper \mathcal{K} sowie S und T zwei nichtisomorphe einfache A -Rechtsmoduln. Dann sind äquivalent:*

- (i) $\text{Ext}_A^1(T, S) = 0$
- (ii) $\text{Hom}_A(T, M) \cong \text{Hom}_A(T, MP_S)$ für alle $M \in \text{mod-}A$
- (iii) $M_T \cong (MP_S)_T$ für alle $M \in \text{mod-}A$
- (iv) $P_S P_T \sim P_{S \oplus T}$

Insbesondere kommutieren die Funktoren P_S und P_T genau dann, wenn es keine Erweiterungen zwischen S und T gibt.

Beweis: (i) \implies (ii): Wenden wir $\text{Hom}_A(T, _)$ auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_S \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} MP_S \longrightarrow 0$$

an, so erhalten wir die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, M_S) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, M) \xrightarrow{\text{Hom}(T, \pi)} \text{Hom}_A(T, MP_S) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, M_S)$$

Nun liegt M_S wegen der Einfachheit von S schon in $\text{add-}S$, sagen wir $M_S \cong S^n$. Damit gilt $\text{Ext}_A^1(T, M_S) \cong \text{Ext}_A^1(T, S)^n = 0$ nach (i). Zudem gibt es keine Homomorphismen zwischen T und $M_S = S^n$, da T und S nicht isomorph sind. Deshalb folgt aus der Exaktheit, dass $\text{Hom}_A(T, \pi)$ ein Isomorphismus ist.

(ii) \implies (iii): Nach der Proposition 1.1 gelten für alle $M \in \text{mod-}A$ mit $B = \text{End}_A(T)$:

$$M_T \cong T \otimes_B \text{Hom}_A(T, M) \text{ und } (MP_S)_T \cong T \otimes_B \text{Hom}_A(T, MP_S)$$

Aus der Voraussetzung (ii) folgt daraus die Isomorphie von M_T und $(MP_S)_T$.

(iii) \implies (iv): Es sei M ein A -Modul. Wir sehen uns zum einen die von $P_{S \oplus T}$ induzierte kanonische Folge zu M an und zum anderen die von P_T induzierte zu MP_S . Weil S und T einfach und nichtisomorph sind, ist die Summe von M_T und M_S in M direkt und es gilt $M_{S \oplus T} = M_T \oplus M_S$. Deswegen ist M_T zu dem Untermodul $(M_T \oplus M_S)/M_S$

von MP_S isomorph, womit $(M_T \oplus M_S)/M_S$ nach (iii) genau $(MP_S)_T$ ist. Der kanonische Epimorphismus π von M auf M/M_S bzw. dessen Einschränkung auf $M_{S \oplus T}$ faktorisiert deshalb über die Einbettung ι_2 von $(MP_S)_T$ in MP_S . Die linke Seite im folgenden kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen kommutiert also und wir erhalten den Epimorphismus $\widehat{\pi}_M$ durch den Übergang zu den Kokernen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M_{S \oplus T} & \xrightarrow{\iota_1} & M & \xrightarrow{\pi_1} & MP_{S \oplus T} = M/M_{S \oplus T} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \pi|_{M_{S \oplus T}} & & \downarrow \pi & & \downarrow \widehat{\pi}_M \\
 0 & \longrightarrow & (MP_S)_T & \xrightarrow{\iota_2} & MP_S & \xrightarrow{\pi_2} & MP_S P_T = MP_S / (MP_S)_T \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Die nach dem Schlangenlemma existierende exakte Sequenz der Kerne und Kokerne zeigt, dass $\widehat{\pi}_M$ ein Isomorphismus ist:

$$0 \longrightarrow M_S \xrightarrow{\text{id}} M_S \longrightarrow \text{Kern } \widehat{\pi}_M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Kokern } (\widehat{\pi}_M) \longrightarrow 0$$

Des Weiteren erhalten wir für einen Homomorphismus $\varphi: M \longrightarrow N$ den folgenden Würfel, dessen rechte Seite kommutiert, weil π_1 ein Epimorphismus ist und weil alle anderen Seiten schon kommutieren u.a. nach Definition der Projektionsfunktoren:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N & \longrightarrow & NP_{S \oplus T} \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow \dots & \nearrow \varphi P_{S \oplus T} & \downarrow \widehat{\pi}_N \\
 M & \xrightarrow{\pi_1} & MP_{S \oplus T} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \widehat{\pi}_M & & \downarrow \\
 & \nearrow \varphi P_S & NP_S & \longrightarrow & NP_S P_T \\
 & \downarrow \varphi P_S & \downarrow \dots & \downarrow \varphi P_S P_T & \\
 MP_S & \longrightarrow & MP_S P_T & &
 \end{array}$$

Die Familie $(\widehat{\pi}_M)_{M \in \text{mod-}A}$ ist also eine natürliche Äquivalenz.

(iv) \implies (i): Wenn es eine Erweiterung von T durch S gäbe, also eine kurze exakte Folge $0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} X \longrightarrow T \longrightarrow 0$ existierte, die nicht zur trivialen kurzen exakten Sequenz äquivalent ist, so folgte einerseits:

$$XP_S P_T = TP_T = 0$$

und andererseits:

$$XP_{S \oplus T} = X/S f \cong T$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, dass die Funktoren $P_{S \oplus T}$ und $P_S P_T$ natürlich äquivalent sind.

Beweis der Folgerung: Mit $\text{Ext}_A^1(S, T) = 0 = \text{Ext}_A^1(T, S)$ gilt nach den eben gezeigten Äquivalenzen sowohl $P_T P_S \sim P_{S \oplus T}$ als auch $P_S P_T \sim P_{S \oplus T}$. Es gelte jetzt $P_T P_S \sim P_S P_T$. Angenommen, einer der Moduln besitzt eine nichttriviale Erweiterung durch den anderen. O.B.d.A. sei

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} X \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

eine nicht zu $0 \in \text{Ext}_A^1(T, S)$ äquivalente kurze exakte Sequenz. Dann folgt:

$$XP_S P_T = (X/S f)P_T = 0 \neq T \cong X/S f = XP_S = XP_T P_S ,$$

womit $P_T P_S$ und $P_S P_T$ nicht natürlich äquivalent sind. □

Übrigens zeigt der Beweis auch, dass P_U im allgemeinen kein exakter Funktor ist. Ist beispielsweise $U = S$ einfach, so erhält P_S zwar Monomorphismen und Epimorphismen, jedoch nicht die Exaktheit im Mittelterm, wenn $\text{Ext}_A^1(S, T) \neq 0$ gilt. Denn für eine kurze exakte Folge $\eta \neq 0$ aus $\text{Ext}_A^1(S, T)$ erhalten wir folgendes kommutative Diagramm mit offensichtlich nicht exakter zweiter Zeile:

$$\begin{array}{ccccccccc} \eta: 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & S & \longrightarrow & 0 \\ & & \pi_T \downarrow & & \pi_X \downarrow & & \pi_S \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & TP_S = T & \xrightarrow{fP_S} & XP_S = X & \xrightarrow{gP_S} & SP_S = 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

1.3 Satz. *Es seien A eine endlichdimensionale, assoziative, unitäre Algebra über einem Körper \mathcal{K} sowie S und T zwei nichtisomorphe einfache A -Rechtsmoduln. Es gelte $\text{Ext}_A^1(T, S) = 0$.*

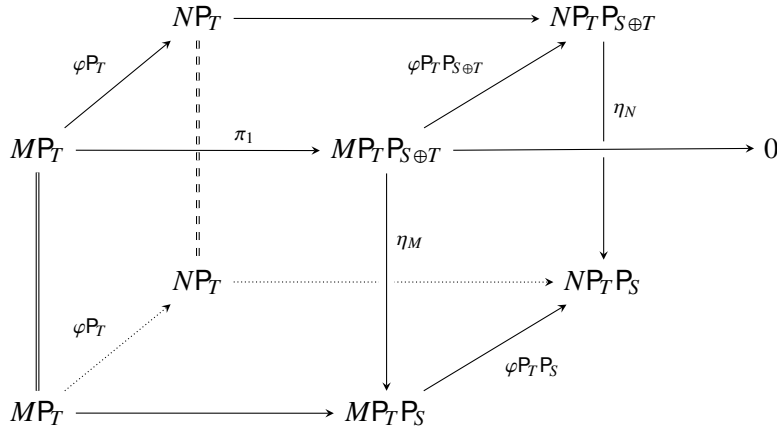
- (1) *Ist t_T ein Torsionsradikal, so sind $P_T P_S$ und $P_T P_S P_T$ natürlich äquivalent.*
- (2) *Hat S keine nichttrivialen Selbsterweiterungen, so sind $P_T P_S$ und $P_S P_T P_S$ natürlich äquivalent.*

Beweis: Nach dem vorherigen Lemma gibt es eine natürliche Äquivalenz $(\nu_M)_{M \in \text{mod-}A}: P_{S \oplus T} \rightarrow P_S P_T$. Dann sind auch $\nu_{P_S} = ((\nu_M) P_S)_{M \in \text{mod-}A}: P_{S \oplus T} P_S \rightarrow P_S P_T P_S$ und $(\nu_{(MP_T)})_{M \in \text{mod-}A}: P_T P_{S \oplus T} \rightarrow P_T P_S P_T$ natürliche Äquivalenzen. Deshalb reicht es $P_T P_S \sim P_T P_{S \oplus T}$ bzw. $P_{S \oplus T} P_S \sim P_T P_S$ unter den Voraussetzungen in (1) resp. (2) zu zeigen.

Zu $P_T P_S \sim P_T P_{S \oplus T}$: Es sei t_T ein Torsionsradikal. Insbesondere ist der T -Anteil $(MP_T)_T = (M/Mt_T)t_T = 0$ von MP_T trivial, womit der $(S \oplus T)$ -Anteil von MP_T , der gerade $(MP_T)_S \oplus (MP_T)_T$ ist, nur aus $(MP_T)_S$ besteht. Wir erhalten also das folgende kommutative Diagramm, dessen Zeilen die von $P_{S \oplus T}$ bzw. P_S induzierten kanonischen Sequenzen zu MP_T sind. Dabei ist η_M der eindeutig bestimmte Isomorphismus, der durch den Übergang zu den Kokernen gegeben ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & (MP_T)_{S \oplus T} & \xrightarrow{\iota_1} & MP_T & \xrightarrow{\pi_1} & MP_T P_{S \oplus T} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \vdots \eta_M \\
 0 & \longrightarrow & (MP_T)_S & \xrightarrow{\iota_2} & MP_T & \xrightarrow{\pi_2} & MP_T P_S \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Es sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein A -Homomorphismus. Das folgende Diagramm ist dann ein kommutatives mit exakten Zeilen und zeigt, dass die Familie $(\eta_U)_{U \in \text{mod-}A}$ eine natürliche Äquivalenz ist:



Zu $P_{S \oplus T} P_S \sim P_T P_S$: Es sei M ein beliebiger A -Modul. Wir betrachten $U := MP_T = M/M_T$ und $V := MP_{S \oplus T} = M/(M_S \oplus M_T)$ sowie den Epimorphismus α_M :

$$\begin{array}{c}
 \alpha_M \\
 \curvearrowright \\
 U := MP_T = M/M_T \longrightarrow M/M_T / (M_S \oplus M_T) / M_T \xrightarrow{\cong} M/M_S \oplus M_T =: V
 \end{array}$$

Es ist $(\alpha_U)_{U \in \text{mod-}A}$ bekanntlich eine natürliche Transformation $P_T \rightarrow P_{S \oplus T}$ und damit ist auch $(\alpha_U P_S)_{U \in \text{mod-}A} P_T P_S \rightarrow P_{S \oplus T} P_S$ eine solche. Die letztere ist genau dann eine natürliche Äquivalenz, wenn $\alpha_U P_S$ für alle A -Moduln U ein Isomorphismus ist. Nach Definition der Projektionsfunktoren ist $\alpha_U P_S$ stets ein Epimorphismus. Wir müssen also nur noch einsehen, dass $\alpha_U P_S$ injektiv ist. Dazu sehen wir uns das von P_S induzierte kommutative Diagramm zu $\alpha := \alpha_M : U \rightarrow V$ an:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & U_S & \xrightarrow{\iota_1} & U & \xrightarrow{\pi_1} & U/U_S = MP_T P_S & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha|_{U_S} = \alpha P_S & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha P_S & & \\
 0 & \longrightarrow & V_S & \xrightarrow{\iota_2} & V & \xrightarrow{\pi_2} & V/V_S = MP_{S \oplus T} P_S & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Wir knöpfen uns jetzt die durch das Schlangenlemma induzierte exakte Sequenz der

Kerne und Kokerne vor:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Kern } \alpha|_{U_S} \xrightarrow{\iota} \text{Kern } \alpha \longrightarrow \text{Kern } (\alpha P_S) \longrightarrow \text{Kokern } (\alpha|_{U_S}) \\ \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Kokern } (\alpha P_S) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Wegen $\text{Kern } \alpha \cong M_S \in \text{add-}S$ liegt der Kern von α schon in U_S und es folgt:

$$\text{Kern } \alpha = U_S \cap \text{Kern } \alpha = \text{Kern } \alpha|_{U_S}$$

Der Monomorphismus ι ist damit ein Isomorphismus. Ferner ist $\text{Kern } \alpha = S^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung hat S keine Selbsterweiterungen, weshalb $\text{Ext}_A^1(S, \text{Kern } \alpha) = \text{Ext}_A^1(S, S)^d = 0$ folgt. Dies zieht die Surjektivität von $\text{Hom}_A(S, \alpha)$ nach sich, also auch die von $id \otimes \text{Hom}_A(S, \alpha)$. Da die Funktoren t_S und $S \otimes \text{Hom}_A(S, -)$ nach der Proposition 1.1 natürlich äquivalent sind, ist auch $\alpha|_{U_S} = \alpha t_S$ ein Epimorphismus. Aus der Exaktheit der aufgeführten Kern-Kokern-Sequenz ergibt sich nun die Injektivität von αP_S . \square

Die Proposition 1.1 berücksichtigend haben wir bisher die folgenden Relationen zwischen den Projektionsfunktoren zu einfachen Moduln gefunden:

1.4 Korollar. *Es sei A eine endlichdimensionale, assoziative, unitäre Algebra über einem Körper \mathcal{K} . Es seien S und T zwei nichtisomorphe, einfache A -Rechtsmoduln ohne nichttriviale Selbsterweiterungen. Dann gelten:*

- (1) $P_S^2 \sim P_S$
- (2) $P_S P_T P_S \sim P_T P_S P_T$ falls $\text{Ext}_A^1(T, S) = 0$ oder $\text{Ext}_A^1(S, T) = 0$
- (3) $P_S P_T P_S \sim P_T P_S$ falls $\text{Ext}_A^1(T, S) = 0$
- (4) $P_S P_T \sim P_T P_S$ falls $\text{Ext}_A^1(T, S) = 0$ und $\text{Ext}_A^1(S, T) = 0$

Kapitel 2

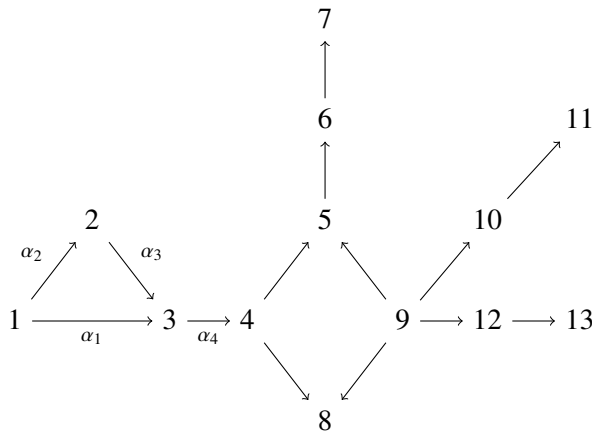
Die Monoidalgebren $\mathcal{K}\pi_Q$ und \mathcal{B}_Q für Wegealgebren $\mathcal{K}Q$

Es stellt sich die Frage, ob die im letzten Kapitel gefundenen Relationen die einzigen multiplikativen zwischen zwei Projektionsfunktoren sind. Lassen sich alle multiplikativen Relationen dreier oder mehr solcher Projektionsfunktoren aus denen zweier ableiten? Dieses Problem untersuchen wir für Wegealgebren $\mathcal{K}Q$ endlicher, zykelloser Köcher Q über einem Körper \mathcal{K} . Dazu betrachten wir das von solchen Projektionsfunktoren bezüglich der Hintereinanderausführung erzeugte Monoid π_Q . Dieses bzw. seine Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_Q$ vergleichen wir mit der passenden durch Erzeuger und Relationen gegebenen Algebra \mathcal{B}_Q . In den von uns – im dritten und vierten Kapitel – behandelten Spezialfällen für Q sind diese isomorph, weswegen die schon aufgeführten „lokalen“ Relationen bereits definierende sind. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit der Algebra \mathcal{B}_Q , von welcher $\mathcal{K}\pi_Q$ a priori nur ein Quotient ist. Diese ist stets endlichdimensional. Nach einem Satz von Gabriel (s. etwa [ASS06]) ist die Algebra \mathcal{B}_Q Morita-äquivalent zu der Wegealgebra eines Köchers, dem sogenannten Gabriel-Köcher, modulo einem zulässigen Ideal. Diesen Köcher werden wir im letzten Abschnitt 2.4 angeben. Des Weiteren werden wir im Abschnitt 2.3 sehen, dass \mathcal{B}_Q eine saubere Algebra ist, womit sogar Isomorphie gilt.

2.1 Grundlagen und Definition der Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_Q$

Wir erinnern zunächst an die nötigen Grundlagen über Wegealgebren, weisen dabei auf die Notationsbesonderheiten wegen der hier verwendeten Rechtsschreibweise hin und gehen kurz auf die Wirkung der Projektionsfunktoren ein, bevor wir $\mathcal{K}\pi_Q$ definieren.

Es sei \mathcal{K} ein Körper. Ein Köcher Q ist ein gerichteter Graph. Seine Punktmenge bezeichnen wir mit Q_0 , die Menge seiner Pfeile mit Q_1 . Zu jedem Pfeil $\bullet_x \xrightarrow{\alpha} \bullet_y$ (oder nur $\alpha: x \rightarrow y$ notiert) gehören wie die Notation schon anzeigt zwei eindeutig bestimmte Punkte: der Nock von α , in dem der Pfeil startet, und die Spitze y , in dem der Pfeil endet. Eine Senke ist ein Punkt, in dem kein Pfeil startet und dual ist eine Quelle ein Punkt, in dem kein Pfeil endet. Zudem sei der Ausgangsgrad (und dual der Eingangsgrad) eines Punktes x als die Anzahl der Pfeile, deren Nock gerade x ist, definiert. Für einen Weg $x \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} x_2 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{r-1}} x_{r-1} \xrightarrow{\alpha_r} y$ der Länge r von $x \in Q_0$ nach $y \in Q_0$ schreiben wir nur $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{r-1}\alpha_r$. Ein Köcher heißt zykellos, wenn es keinen Weg der Länge $r \geq 1$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gibt. Der folgende Köcher ist zum Beispiel ein zykelloser und sowohl $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ als auch $\alpha_1\alpha_4$ sind Wege von dem Punkt 1 zu dem Punkt 4. Sprechen wir von einer Wanderung in Q , so ignorieren wir die Pfeilrichtungen; beispielsweise gibt es zwar keinen Weg von 4 nach 9 aber eine Wanderung.



Weiter sei für jeden Punkt x der Weg der Länge 0 von x nach x mit e_x bezeichnet. Die Wegealgebra $\mathcal{K}Q$ von Q über \mathcal{K} ist dann der \mathcal{K} -Vektorraum mit der Menge der Wege von Q als Basis, auf dem eine Multiplikation durch

$$(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r)(\beta_1\beta_2 \dots \beta_s) := \begin{cases} \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r\beta_1\beta_2 \dots \beta_s & \text{falls } y = x' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für Wege $x \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} x_2 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{r-1}} x_{r-1} \xrightarrow{\alpha_r} y$ und $x' \xrightarrow{\beta_1} x'_1 \xrightarrow{\beta_2} x'_2 \xrightarrow{\beta_3} \dots \xrightarrow{\beta_{s-1}} x'_{s-1} \xrightarrow{\beta_s} z$ gegeben ist.

Ist Q zykellos, so ist $\mathcal{K}Q$ eine endlichdimensionale Algebra. Ferner hat jeder einfache $\mathcal{K}Q$ -Modul keine nichttrivialen Selbsterweiterungen. (Da $\mathcal{K}Q$ erblich ist, ist jeder einfache Modul außerdem ein partieller Kippmodul.) Jedenfalls gelten die im ersten Kapitel aufgeführten Relationen zwischen den Projektionsfunktoren zu Einfachen.

Eine endlichdimensionale Q -Darstellung über \mathcal{K} ist ein Tupel $V = ((V(q))_{q \in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha \in Q_1})$ von endlichdimensionalen \mathcal{K} -Vektorräumen $V(q)$ und \mathcal{K} -linearen Abbildungen $V(\alpha): V(x) \rightarrow V(y)$ für $\alpha: x \rightarrow y$. Währenddessen ist ein Morphismus $V \rightarrow W$ von Q -Darstellungen V und W ein Tupel $\varphi = (\varphi(q): V(q) \rightarrow W(q))_{q \in Q_0}$ von \mathcal{K} -linearen Abbildungen, so dass für jeden Pfeil $\alpha: x \rightarrow y$ gilt: $V(\alpha)\varphi_y = \varphi(x)W(\alpha)$; das folgende Diagramm ist also ein kommutatives.

$$\begin{array}{ccc} V(x) & \xrightarrow{V(\alpha)} & V(y) \\ \varphi(x) \downarrow & & \downarrow \varphi(y) \\ W(x) & \xrightarrow{W(\alpha)} & W(y) \end{array}$$

Die Kategorien $Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ der endlichdimensionalen Q -Darstellungen und $\text{mod-}\mathcal{K}Q$ der endlichdimensionalen $\mathcal{K}Q$ -Rechtsmoduln sind natürlich äquivalent. Wir unterscheiden ab jetzt nicht zwischen diesen Kategorien. Ist Q zykellos, so hat $\mathcal{K}Q$ bis auf Isomorphie $|Q_0|$ paarweise nichtisomorphe einfache $\mathcal{K}Q$ -Moduln. Für jedes $q \in Q_0$ ist die Q -Darstellung S_q mit $(S_q)(q) = \mathcal{K}$ und $(S_q)(x) = 0$ für alle Punkte $x \neq q$ sowie $(S_q)(\alpha) = 0$ für alle Pfeile α von Q einfach. Auf den Q -Darstellungen lässt sich leicht der Projektionsfunctor $P_q := P_{S_q}: Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar} \rightarrow Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ zu S_q berechnen: Ist $V = ((V(x))_{x \in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha \in Q_1})$ eine Q -Darstellung, so ist der Sockel $\text{Soc}(V)$ von V gerade die Darstellung $W = ((W(x))_{x \in Q_0}, (W(\alpha))_{\alpha \in Q_1})$ mit:

$$W(x) = \bigcap_{\alpha: x \rightarrow y} \text{Kern } V(\alpha) \quad \text{und} \quad W(\alpha) = 0$$

(Hierbei haben wir ausnahmsweise auf die Rechtsschreibweise des Funktors Soc verzichtet.) Unter dem im ersten Kapitel vorgestellten Unterfunctor $t_q = t_{S_q}: Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar} \rightarrow Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ des Identitätsfunktors wird V auf diejenige Unterdarstellung von $\text{Soc}(V) \leq V$ abgebildet, die in $\text{add-}S_q$ liegt. Deshalb gilt für alle $x \in Q_0$:

$$(Vt_q)(x) = \begin{cases} W(q) & \text{falls } x = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit ergibt sich für VP_q :

$$(VP_q)(x) = \begin{cases} V(q)/W(q) & \text{falls } x = q \\ V(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die linearen Abbildungen $(VP_q)(\alpha)$ mit $\alpha \in Q_1$ sind die von der Faktorstruktur induzierten. Insbesondere gilt für jeden Einfachen S_x :

$$(S_x P_q) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = q \\ S_x & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir wenden uns nun dem "multiplikativen Zusammenspiel" der Endofunktoren P_q mit $q \in Q_0$ zu. Allgemein ist die Hintereinanderausführung von Endofunktoren auf Q - \mathcal{K} dar eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz: Es seien \mathcal{K} -lineare Endofunktoren F, G, H und H' von Q - \mathcal{K} dar sowie natürliche Äquivalenzen $\nu: F \rightarrow G$ resp. $\mu: H \rightarrow H'$ gegeben. Für jeden Morphismus $\varphi: U \rightarrow V$ in Q - \mathcal{K} dar ist das folgende Diagramm ein kommutatives mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} UFH & \xrightarrow{\nu_U H} & UGH & \xrightarrow{\mu(UG)} & UGH' \\ \varphi FH \downarrow & & \varphi GH \downarrow & & \varphi GH' \downarrow \\ VFH & \xrightarrow{\nu_V H} & VGH & \xrightarrow{\mu(VG)} & VGH' \end{array}$$

Ferner ist mit ν_U auch $\nu_U H$ ein Isomorphismus von Q -Darstellungen und damit ist $((\nu_U H)\mu(UG))_{U \in Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}}: FH \rightarrow GH'$ eine natürliche Äquivalenz.

2.1 Definition. *Es sei \mathcal{K} ein Körper und Q ein endlicher, zykelloser Köcher. Ferner sei \mathcal{X} die volle Unterkategorie der Kategorie der kovarianten Endofunktoren auf Q - \mathcal{K} dar mit den Objekten $P_{q_1} P_{q_2} \dots P_{q_r}$ für $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $q_1, q_2, \dots, q_r \in Q_0$.*

Es sei π_Q die Menge der Isomorphieklassen von \mathcal{X} . Vermöge der von der Hintereinanderausführung von Endofunktoren auf π_Q induzierten Multiplikation ist π_Q ein Monoid.

Natürlich ist die Isomorphieklasse des Identitätsfunktors von $\text{mod-}\mathcal{K}Q$ ein Element in π_Q ; wir werden es stets mit 1 bezeichnen. Ferner unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen $P_{q_1} P_{q_2} \dots P_{q_r}$ und seiner Isomorphieklasse und schreiben deshalb

auch $P_{q_1} P_{q_2} \dots P_{q_r} = P_{x_1} P_{x_2} \dots P_{x_s}$, wenn die Funktoren $P_{q_1} P_{q_2} \dots P_{q_r}$ und $P_{x_1} P_{x_2} \dots P_{x_s}$ natürlich äquivalent sind. Dementsprechend unpräzise sprechen wir von Monomen über $\{P_q \mid q \in Q_0\}$. In diesem Sinne ist π_Q dann das von $\{P_q \mid q \in Q_0\}$ (bis auf natürliche Äquivalenz) erzeugte Monoid.

Der Dynkin-Köcher vom Typ A_2

Wir betrachten jetzt das einfachste nichttriviale Beispiel: Es sei $K = \bullet_1 \rightarrow \bullet_2$ der Dynkin-Köcher vom Typ A_2 . Dann wird das Monoid π_K von den zu den beiden Punkten korrespondierenden Projektionsfunktoren $P_1 := P_{S_1}$ und $P_2 := P_{S_2}$ erzeugt.

Da nun allgemein für zwei Punkte x und y eines endlichen, zykellosen Köcher Q die Dimension von $\text{Ext}_{\mathcal{K}Q}^1(S_x, S_y)$ mit der Anzahl der Pfeile von x nach y übereinstimmt, gilt:

Es gibt genau dann in Q keinen Pfeil von y nach x , wenn $\text{Ext}_A^1(S_y, S_x) = 0$ gilt.
In diesem Fall gilt: $P_y P_x P_y = P_y P_x = P_x P_y P_x$

Insbesondere haben wir also neben der Idempotenz von P_1 und P_2 die Relationen $P_2 P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1 P_2 P_1$, weswegen die Menge $\mathcal{B} := \{1, P_1, P_2, P_1 P_2, P_2 P_1\}$ offensichtlich multiplikativ abgeschlossen und damit ein Untermonoid von π_K ist. Weil zudem die Erzeuger P_1 und P_2 in \mathcal{B} enthalten sind, gilt $\pi_K = \mathcal{B}$. Des Weiteren sind die Elemente $1, P_1, P_2, P_1 P_2, P_2 P_1$ paarweise verschieden. Denn die ersten drei unterscheiden sich voneinander (und von den letzten beiden) auf den einfachen K -Darstellungen S_1 und S_2 . Weiter gilt für die (injektive) K -Darstellung $I_2 = \mathcal{K} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{K}$ zum einen $I_2 P_1 P_2 = I_2 P_2 = 0 \rightarrow \mathcal{K}$ und zum anderen $I_2 P_2 P_1 = (\mathcal{K} \rightarrow 0) P_1 = 0$, woraus auch $P_1 P_2 \neq P_2 P_1$ folgt. Demnach besitzt das Monoid genau fünf Elemente. Wir haben somit gezeigt, dass die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_K$ zu der \mathcal{K} -Algebra \mathcal{B}_K isomorph ist, welche durch Erzeuger X_1 und X_2 und Relationen $X_1^2 = X_1, X_2^2 = X_2$ und $X_2 X_1 X_2 = X_2 X_1 = X_1 X_2 X_1$ definiert ist. Denn die Zuordnung $X_1 \mapsto P_1$ und $X_2 \mapsto P_2$ induziert einen Epimorphismus der Algebra \mathcal{B}_K auf $\mathcal{K}\pi_K$, welcher das \mathcal{K} -lineare Erzeugendensystem $1, X_1, X_2, X_1 X_2, X_2 X_1$ von \mathcal{B}_K auf eine \mathcal{K} -Basis von $\mathcal{K}\pi_K$ abbildet.

2.2 Definition der Monoidalgebra \mathcal{B}_Q und grundlegende Eigenschaften

In diesem und in den nächsten drei Abschnitten werden wir die im Folgenden definierten Algebren \mathcal{B}_Q für endliche, zykellose Köcher Q untersuchen. Wir zeigen unter anderem, dass diese stets endlichdimensional sind, geben bis auf Isomorphie alle einfachen Moduln an, indem wir das Radikal berechnen, und können anschließend den Gabriel-Köcher sowie seine Zusammenhangskomponenten bestimmen. Es seien \mathcal{K} ein Körper und Q ein endlicher, zykelloser Köcher.

2.2 Definition. Wir definieren die \mathcal{K} -Algebra \mathcal{B}_Q durch die Erzeuger $\{X_p \mid p \in Q_0\}$ und die folgenden, durch den Köcher Q gegebenen Relationen:

- (1) $X_p X_p = X_p$ für alle $p \in Q_0$
- (2) $X_s X_t X_s = X_t X_s X_t$ für alle $s, t \in Q_0$
- (3) $X_t X_s X_t = X_t X_s$ für alle $s, t \in Q_0$, für die in Q kein Pfeil von t nach s existiert

Der Köcher Q enthält wegen seiner Zykellosigkeit insbesondere keine Zykel der Länge 2. Wenn (1) und (2) gelten, ist die Bedingung (3) deshalb äquivalent zu:

- (3a) $X_s X_t = X_t X_s$ für alle $s, t \in Q_0$, die in Q durch keinen Pfeil verbunden sind
- (3b) $X_t X_s X_t = X_t X_s$ für alle $s, t \in Q_0$, für die ein Pfeil $s \rightarrow t \in Q_1$ existiert

Nach dem ersten Kapitel ist die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_Q$ ein Quotient von \mathcal{B}_Q .

Bemerkung 1: Es sei K ein voller Unterköcher eines endlichen, zykellosten Köchers Q . Dann ist \mathcal{B}_K eine Unteralgebra von \mathcal{B}_Q .

Beweis: Wegen der Definition von \mathcal{B}_K und \mathcal{B}_Q gibt es einerseits einen Algebrenhomomorphismus $\varphi: \mathcal{B}_K \rightarrow \mathcal{B}_Q$ mit $X_p \mapsto X_p$ für alle $p \in K_0$ und andererseits einen Algebrenhomomorphismus $\psi: \mathcal{B}_Q \rightarrow \mathcal{B}_K$ mit

$$X_q \mapsto \begin{cases} X_q & \text{falls } q \in K_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $q \in Q_0$. Weil weiter $\varphi\psi = \text{id}_{\mathcal{B}_K}$ gilt, ist φ eine Einbettung. □

Die nächste (triviale) Beobachtung erlaubt eine Reduktion auf Isomorphieklassen von endlichen, zykellosen Köchern und eine Reduktion auf Köcher ohne Mehrfachpfeile. Hierzu sei „der um Mehrfachpfeile reduzierte Köcher“ von

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \bullet \vdots \bullet \quad \text{gerade} \quad \bullet \rightarrow \bullet \\ \rightarrow \end{array}$$

Dementsprechend definieren wir für einen beliebigen endlichen, zykellosen Köcher Q „den um Mehrfachpfeile reduzierten Köcher von Q “.

2.3 Proposition. *Es seien K und Q endliche, zykellose Köcher.*

(1) *Sind Q und K (anti-) isomorphe Köcher, so sind auch \mathcal{B}_Q und \mathcal{B}_K (anti-) isomorphe Algebren. Insbesondere gilt für den Gegenköcher Q^{op} von Q :*

$$\mathcal{B}_Q^{op} \cong \mathcal{B}_{Q^{op}}$$

(2) *Ist K der um Mehrfachpfeile reduzierte Köcher von Q , so sind \mathcal{B}_K und \mathcal{B}_Q isomorph.*

Beweis: Sind K und Q isomorph oder ist K der um Mehrfachpfeile reduzierte Köcher von Q , so gibt es eine Bijektion $f: Q_0 \rightarrow K_0$ zwischen den Punktengen, so dass für alle $p, q \in Q_0$ es genau dann in Q einen Pfeil $p \rightarrow q$ gibt, wenn in K ein Pfeil $pf \rightarrow qf$ existiert. Es ist $\mathcal{B}_K \rightarrow \mathcal{B}_Q$ mit $X_p \mapsto X_{pf}$ offensichtlich ein Epimorphismus von \mathcal{K} -Algebren. Dieser ist ein Isomorphismus, weil unter der Zuordnung $X_p \mapsto X_{pf}$ die \mathcal{B}_K bzw. \mathcal{B}_Q definierenden Ideale I_K und I_Q isomorph sind. Sind K und Q nun antiisomorph, so führt der dann existierende Köcherantiisomorphismus auf die gleiche Weise zur Antiisomorphie von \mathcal{B}_K und \mathcal{B}_Q . \square

Das freie Monoid über einer endlichen Menge J bezeichnen wir mit J^* , seine Elemente sind die Wörter v über J , die Multiplikation ist die Konkatenation und wird (falls notwendig) mit \cdot bezeichnet. Mit $\{v\}$ bezeichnen wir die Menge der in $v \in J^*$ auftretenden Buchstaben. Ist beispielsweise $J = \{1, 2, \dots, 15\}$ und $v = 1.5.15.7.1.5$, so gilt $\{v\} = \{1, 5, 7, 15\}$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir abkürzend \underline{n} für die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ und \underline{n}_0 für $\underline{n} \cup \{0\}$.

Weiter sei für jedes Wort $w = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k$ über Q_0 , also $w \in Q_0^*$, das Produkt $X_{q_1} X_{q_2} \dots X_{q_k}$ mit $X_w = X_{q_1 \cdot q_2 \dots q_k} = X_{q_1 q_2 \dots q_k}$ notiert. Ein \mathcal{K} -lineares Erzeugendensystem von \mathcal{B}_Q ist natürlich $\{X_v \mid v \in Q_0^*\}$.

2.4 Definition. *Es sei Q ein endlicher, zykelloser Köcher. Für eine Teilmenge M von Q_0 sei Q_M derjenige volle Unterköcher von Q , dessen Punktmenge genau M ist. Ferner schreiben wir für ein Wort v über Q_0 statt $Q_{\{v\}}$ nur Q_v .*

Damit besagt die Bedingung an $s, t \in Q_0$ in (3), dass t eine Senke in $Q_{s,t}$ ist. Die Relationen führen in \mathcal{B}_Q und damit in $\mathcal{K}\pi_Q$ zu den folgenden Verallgemeinerungen:

2.5 Lemma. *Es seien Q ein endlicher, zykelloser Köcher, $q \in Q_0$ sowie v und w Wörter über Q_0 . Dann gelten die Identitäten:*

$$X_q X_w X_q = X_q X_w \quad \text{falls } q \text{ eine Senke des Unterköchers } Q_{q,w} \text{ ist}$$

$$X_q X_w X_q = X_w X_q \quad \text{falls } q \text{ eine Quelle des Unterköchers } Q_{q,w} \text{ ist}$$

$$X_v X_w = X_w X_v \quad \text{falls kein Pfeil zwischen den Unterköchern } Q_v \text{ und } Q_w \text{ existiert}$$

Beweis: Die erste Aussage beweisen wir per Induktion nach der Länge von w : Hat w die Länge 1, so ist $w = p \in Q_0$ und q eine Senke in $Q_{q,p}$. Die Identität $X_q X_p X_q = X_q X_p$ gilt also nach Definition von \mathcal{B}_Q . Ist w ein Wort einer Länge echt größer als 1, so gibt es ein Wort u und ein $p \in Q_0$ mit $w = up$. Da q eine Senke von $Q_{q,w}$ ist, ist q auch eine Senke in jedem Unterköcher von $Q_{q,w}$, der q enthält. Damit erfüllen sowohl u als auch p die Induktionsvoraussetzung. Es folgt:

$$X_q X_w X_q = X_q X_u X_p X_q = (X_q X_u X_q) X_p X_q = X_q X_u X_q X_p = X_q X_u X_p = X_q X_w$$

Der Beweis der zweiten Aussage ist dual: Wir wenden in $\mathcal{B}_{Q^{op}}$ die erste Aussage an. Dazu sei ι der kanonische Anti-Isomorphismus zwischen \mathcal{B}_Q und $\mathcal{B}_{Q^{op}}$. Ist nun q eine Quelle in $Q_{q,w}$ und bezeichnet \tilde{w} das Wort mit der Eigenschaft $X_w \iota = X_{\tilde{w}} \in \mathcal{B}_{Q^{op}}$, so gilt:

$$X_{q w q} = X_{q w q} \iota \iota = (X_q X_{\tilde{w}} X_q) \iota = (X_q X_{\tilde{w}}) \iota = X_w X_q$$

Die dritte Aussage ergibt sich aus den beiden ersten Aussagen. □

Bemerkenswerterweise reicht dieses Lemma bzw. die erste Aussage, um die Endlichdimensionalität von \mathcal{B}_Q für endliche, zykellose Köcher Q – ohne genaue Kenntnis einer Normalform von \mathcal{B}_Q – zu zeigen: Eine einfache Induktion nach der Anzahl der Punkte in Q_0 genügt:

2.6 Korollar. *Ist Q ein endlicher, zykelloser Köcher und \mathcal{K} ein Körper, so ist die \mathcal{K} -Dimension von \mathcal{B}_Q endlich.*

Beweis: Ist $|Q_0| = 1$, so folgt aus der Idempotenz, dass \mathcal{B}_Q zweidimensional ist. Es sei nun Q ein endlicher, zykelloser Köcher mit mindestens 2 Punkten. Da Q zykellos und endlich ist, besitzt Q eine Senke s . Induktiv ist die zu dem vollen Unterköcher K von Q mit der Punktmenge $K_0 := Q_0 \setminus \{s\}$ gehörige \mathcal{K} -Algebra \mathcal{B}_K endlichdimensional. Es gibt also eine endliche Menge $C \subseteq K_0^*$, so dass $\{X_v \mid v \in C\}$ eine Basis der Algebra $\mathcal{B}_K \leq \mathcal{B}_Q$ ist. Nach dem Lemma existieren nun für jedes Wort $w \in Q_0^*$ mit $s \in \{w\}$ Wörter $u, v \in K_0^*$ mit $X_w = X_u X_s X_v \in \mathcal{B}_K X_s \mathcal{B}_K$ und damit auch Wörter $u', v' \in C$ mit $X_w = X_u X_s X_v = X_{u'} X_s X_{v'}$. Deshalb ist die endliche Menge $\{X_v \mid v \in C\} \cup \{X_u X_s X_v \mid u, v \in C\}$ schon ein \mathcal{K} -lineares Erzeugendensystem von \mathcal{B}_Q . \square

2.3 Die Einfachen und das Radikal von \mathcal{B}_Q

Es seien \mathcal{K} ein Körper und Q weiterhin ein endlicher, zykelloser Köcher.

Für jede Teilmenge M von Q_0 sei $E_M = (\mathcal{K}, \delta_M)$ der (eindimensionale) \mathcal{B}_Q -Rechtsmodul vermöge des Algebren-Homomorphismus $\delta_M: \mathcal{B}_Q \rightarrow \mathcal{K} \cong \text{End}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K})$, welcher durch die Zuordnung

$$\{X_q \mid q \in Q_0\} \rightarrow \mathcal{K}, \quad X_q \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } q \in M \\ 0 & \text{falls } q \notin M \end{cases}$$

induziert wird. Für verschiedene Teilmengen M und N sind E_M und E_N offensichtlich nicht isomorph. Die Algebra \mathcal{B}_Q hat demnach bis auf Isomorphie mindestens $2^{|Q_0|}$ einfache Moduln, welche durch die Familie $(E_M)_{M \subseteq Q_0}$ gegeben ist. Die „Berechnung“ des Jacobson-Radikals $\text{Rad}(\mathcal{B}_Q)$, der wir uns im Folgenden zuwenden, wird zeigen, dass durch diese Familie schon alle Einfachen (bis auf Isomorphie) beschrieben werden. Für ein beliebiges Monom X_v in \mathcal{B}_Q ist das Bild unter δ_M gerade:

$$X_v \delta_M = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v\} \subseteq M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Infolgedessen gilt für ein beliebiges Element $a = \sum_{v \in Q_0^*} c_v X_v$ in \mathcal{B}_Q :

$$a \delta_M = \sum_{v \in Q_0^*, \{v\} \subseteq M} c_v$$

Damit ist sofort ersichtlich, dass a genau dann im Annulator von E_M (also im Kern von δ_M) liegt, wenn die Summe jener Koeffizienten c_v mit $\{v\} \subseteq M$ gleich 0 ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} a \in \bigcap_{M \subseteq Q_0} \text{Ann}_{\mathcal{B}_Q}(E_M) &\iff \sum_{v \in Q_0^*, \{v\} \subseteq M} c_v = 0 \quad \text{für alle } M \subseteq Q_0 \\ &\iff \sum_{v \in Q_0^*, \{v\} = M} c_v = 0 \quad \text{für alle } M \subseteq Q_0 \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass das Radikal $\text{Rad}(\mathcal{B}_Q)$ als Durchschnitt der Annulatoren aller einfachen \mathcal{B}_Q -Rechtsmoduln, in dem Ideal

$$\bigoplus_{M \subseteq Q_0} \left\langle \sum_{v \in Q_0^*, \{v\} = M} d_v X_v \mid \sum_{v \in Q_0^*, \{v\} = M} d_v = 0 \right\rangle_{\mathcal{K}}$$

enthalten ist.

Wir konstruieren nun zu jeder Teilmenge M von Q_0 ein ausgezeichnetes Monom $X_M \in \mathcal{B}_Q$, welches genau aus den X_q mit $q \in M$ besteht. Dazu definieren wir zunächst induktiv die Menge der Senken $S_k M$ der Stufe $k \in \mathbb{N}$ von M :

$$\begin{aligned} S_0 M &:= \{q \in M \mid q \text{ ist Senke in } Q_M\} \\ S_1 M &:= \{q \in M \mid q \text{ ist Senke in } Q_{M \setminus S_0 M}\} \\ &\vdots \\ S_{k+1} M &:= \{q \in M \mid q \text{ ist Senke in } Q_{M \setminus (S_0 M \cup S_1 M \cup \dots \cup S_k M)}\} \end{aligned}$$

Da M endlich ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $s(M) := m$ mit $S_m M \neq \emptyset = S_{m+1} M$, womit m der Anzahl der Stufen entspricht.¹ Weiter gibt es in $Q_{S_j M}$ keine Pfeile, was insbesondere bedeutet, dass X_p und X_q für alle $p, q \in S_j M$ kommutieren. Das folgende Monom X_M in den X_q mit $q \in M$ ist also wohldefiniert:

¹Die Einteilung des Köchers in Senken k -ter Stufe mit $M = Q_0$ definiert zwar keine Rangfunktion, in dem Sinne, dass $f: Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ existiert mit: $f(q) = f(p) + 1 \iff \exists p \rightarrow q \in Q_1$, aber es definiert eine Funktion mit: $f(q) \leq f(p) + 1 \iff p \rightarrow q \in Q_1$. Nehmen wir nämlich beispielsweise den Köcher von Seite 14 und $M = \{1, 2, 3\}$, so ist $S_0 M = \{3\}$, $S_1 M = \{2\}$ sowie $S_2 M = \{1\}$; der Unterköcher Q_M erlaubt jedoch keine Rangfunktion im ersten Sinne, da dies zu dem Widerspruch $f(1) + 1 = f(3) = f(2) + 1 = f(1) + 2$ führte. Allgemein existiert eine Rangfunktion (im ersten Sinne) genau dann, wenn für je zwei Punkte x, y des zusammenhängenden Köchers, die Länge eines jeden Weges von x nach y gleich ist.

2.7 Definition.

$$X_M := \prod_{q \in S_0 M} X_q \prod_{q \in S_1 M} X_q \cdots \prod_{q \in S_m M} X_q$$

Für den Köcher von Seite 14 gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned} X_{Q_0} &= \prod_{q \in \{7,8,11,13\}} X_q \prod_{q \in \{6,10,12\}} X_q X_5 \prod_{q \in \{4,9\}} X_q X_3 X_2 X_1 \\ X_{\{1,2,3\}} &= X_3 X_2 X_1 \\ X_{\{4,5,8,13\}} &= \prod_{q \in \{5,8,13\}} X_q X_4 = X_5 X_8 X_{13} X_4 = X_8 X_{13} X_5 X_4 \\ X_{\{4,5,8,9\}} &= \prod_{q \in \{5,8\}} X_q \prod_{q \in \{4,9\}} X_q = X_5 X_8 X_4 X_9 = X_8 X_5 X_4 X_9 \end{aligned}$$

Die von diesen X_M erzeugten Hauptideale I_M in $\mathcal{B}_{Q_M} \leq \mathcal{B}_Q$ sind eindimensional. Solch ein I_M ist, wie das nächste Lemma zeigt, sogar das kleinste Ideal I in \mathcal{B}_{Q_M} bezüglich der Eigenschaft „ I wird von Monomen X_v mit $\{v\} = M$ als Ideal in \mathcal{B}_{Q_M} erzeugt“.

2.8 Lemma. *Es sei M eine Teilmenge der Punktmenge Q_0 eines endlichen, zykellosen Köchers Q . Dann gilt für jeden Punkt $y \in M$:*

$$X_y X_M = X_M = X_M X_y$$

Insbesondere ist X_M idempotent.

Ferner gilt für jedes Monom X_w in \mathcal{B}_Q mit $\{w\} = M$ und alle Zahlen $d \in \mathbb{N}$, die größer als die Länge des Wortes w sind:

$$X_w^d = X_M$$

Beweis: Da M die disjunkte Vereinigung aller $S_j M$ mit $j \in \underline{m} \setminus 0$ für $m := s(M)$ ist, liegt y in genau einem $S_k M$, ist also insbesondere eine Senke des vollen Unterköchers mit der Punktmenge $M \setminus (S_0 M \cup S_1 M \cup \dots \cup S_{k-1} M) = \bigcup_{j=k}^m S_j M$. Nach dem Lemma 2.5 gilt damit:

$$X_M X_y = \left(\prod_{q \in S_0 M} X_q \cdots \prod_{q \in S_{k-1} M} X_q \left(\prod_{q \in S_k M, q \neq y} X_q \right) X_y \prod_{q \in S_{k+1} M} X_q \cdots \prod_{q \in S_m M} X_q \right) X_y = X_M$$

Ferner ist y aber auch eine Quelle in dem vollen Unterköcher zu der Punktmenge $\bigcup_{j=0}^k S_j M$, weswegen $X_y X_M = X_M$ gilt. Die letzte Aussage beweisen wir per Induktion

nach der Länge von w . Dabei ist der Induktionsanfang trivial. Es sei also w ein Wort der Länge d größer als 2 und x eine Senke in Q_w . Nach dem Lemma 2.5 können wir annehmen, dass X_x in X_w genau einmal vorkommt, also (eventuell leere) Wörter u und v über $\{w\} \setminus \{x\}$ existieren mit $X_w = X_{u.x.v}$. Mit $N := \{u\} \cup \{v\}$ gilt dann nach dem Lemma 2.5, der Induktionsvoraussetzung und nach der Definition sowie den schon bewiesenen Eigenschaften von X_M :

$$(X_w)^d = X_{u.x.v}(X_{u.x.v})^{d-1} = X_{u.x.v}(X_{u.v})^{d-1} = X_{u.x.v}X_N = X_{u.x}X_N = X_uX_M = X_M$$

□

Es ist die Länge von w eine obere Schranke für die Menge der $d \in \mathbb{N}$ mit $X_w^d = X_w$, die nicht angenommen werden muss. Für $M = \{4, 5, 8, 9\}$ in dem Köcher von Seite 14 und $w = 4.8.5.9$ gilt auch schon $X_w^2 = X_w$:

$$X_{4.8.5.9}^2 = X_{4.8.5.9.4.8.5.9} = X_{8.5.4.8.5.9} = X_{8.5.4.9}$$

Dies gilt allgemein für bipartite Köcher, da in dem Produkt X_wX_w nach dem Lemma 2.5 alle in dem linken Faktor X_w auftretenden Quellen kürzbar sind (und dual alle in dem rechten Faktor X_w auftretenden Senken). Übrigens können wir – diese Beobachtung verallgemeinernd – die Schranke d mit $X_w^d = X_M$ noch verfeinern:

2.9 Proposition. *Es sei M eine Teilmenge der Punktmenge Q_0 eines endlichen, zykellosen Köchers Q . Für alle Wörter w über M mit $\{w\} = M$ gilt:*

$$X_w^{s(M)} = X_M$$

Beweis: Wir führen eine Induktion nach $s(M)$. Ist $s(M) = 0$, so gibt es nur ein X_w mit w über M und $\{w\} = M$, nämlich X_M . Es sei also $M \subseteq Q_0$ mit $\emptyset \neq S_1\{w\}$ und w ein Wort über M mit $\{w\} = M$. Weiter sei v dasjenige Teilwort von w , welches aus w durch Streichung aller $x \in S_0M$ entsteht. Nach dem Lemma 2.5 gilt dann: $X_wX_w = X_wX_v$ und damit $X_w^m = X_wX_v^{m-1}$. Nun ist $\{v\} = M \setminus S_0M =: N$, also $s(N) = s(M) - 1$, und damit nach Induktionsvoraussetzung $X_v^{m-1} = X_N$. Da ferner für jedes Wort u über N und jede Senke $x \in S_0M$ gerade $X_{x.u}X_N = X_xX_N = X_{\{x\} \cup N}$ nach dem ersten Teil des letzten Lemmas, sowie nach Definition von den X_N gilt, folgt induktiv schließlich $X_wX_N = X_M$. □

Wir bestimmen nun das Radikal von \mathcal{B}_Q .

2.10 Satz. *Es sei \mathcal{K} ein Körper und Q ein endlicher, zykelloser Köcher. Das Radikal von \mathcal{B}_Q ist der Durchschnitt der Annulatoren der E_M mit $M \subseteq Q_0$ und hat das \mathcal{K} -lineare Erzeugendensystem $\{X_M - X_v \mid M \subseteq Q_0, v \in Q_0^*, \{v\} = M\}$.*

Die Familie $\{E_M \mid M \subseteq Q_0\}$ ist deshalb ein Repräsentantensystem der einfachen Rechtsmoduln, womit \mathcal{B}_Q insbesondere eine saubere Algebra ist.

Beweis: Als Durchschnitt der Annulatoren aller einfachen \mathcal{B}_Q -Rechtsmoduln ist das Radikal in $\bigcap_{M \subseteq Q_0} E_M$ enthalten.

Nun ist $\bigcap_{M \subseteq Q_0} E_M$ aber genau $\langle X_M - X_v \mid M \subseteq Q_0, v \in Q_0^* \text{ mit } \{v\} = M \rangle_{\mathcal{K}}$, weil für ein beliebiges Element $a = \sum_{v \in Q_0^*} c_v X_v$ in \mathcal{B}_Q die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\begin{aligned} a \in \bigcap_{M \subseteq Q_0} E_M &\iff a \in \bigoplus_{M \subseteq Q_0} \left\langle \sum_{v \in Q_0^*, \{v\} = M} d_v X_v \mid \sum_{v \in Q_0^*, \{v\} = M} d_v = 0 \right\rangle_{\mathcal{K}} \\ &\iff a = \sum_{M \subseteq Q_0} \sum_{v \in Q_0^*, \{v\} = M} c_v (X_v - X_M) \end{aligned}$$

Des Weiteren ist nach dem vorherigen Lemma jeder Erzeuger $X_M - X_v$ von $\bigcap_{M \subseteq Q_0} E_M$ nilpotent. Denn für jedes $n \in \mathbb{N}$, welches größer als die Länge des Wortes v ist, gilt:

$$\begin{aligned} (X_M - X_v)^n &= (X_M - X_v)^2 (X_M - X_v)^{n-2} \\ &= (X_M X_M - X_M X_v - X_v X_M + X_v X_v) (X_M - X_v)^{n-2} \\ &= (-1)(X_M - X_v^2) (X_M - X_v)^{n-2} = \dots = (-1)^{n-1} (X_M - X_v^n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nach einem Satz von Wedderburn, z.B. nachzulesen in [Pie82] Kapitel 4.6, über nilpotente Algebren, folgt nun aus der Existenz einer Basis von $\bigcap_{M \subseteq Q_0} E_M$ aus nilpotenten Elementen schon die Nilpotenz von $\bigcap_{M \subseteq Q_0} E_M$. Damit enthält $\text{Rad}(\mathcal{B}_Q)$ als größtes nilpotentes Ideal das nilpotente Ideal $\bigcap_{M \subseteq Q_0} E_M$. \square

2.4 Der Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_Q

Es sei \mathcal{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper und Q ein endlicher, zykelloser Köcher. In diesem Abschnitt werden wir die \mathcal{K} -Dimensionen der Erweiterungsgruppen zweier

einfacher \mathcal{B}_Q -Rechtsmoduln E_M und E_N berechnen und erhalten damit den Gabriel-Köcher $\Gamma(\mathcal{B})$ der Algebra $\mathcal{B} := \mathcal{B}_Q$. Denn die Punkte von $\Gamma(\mathcal{B})$ sind per Definition die Isomorphieklassen der einfachen \mathcal{B} -Rechtsmoduln, entsprechen also nach vorherigem Abschnitt den $[E_M]$ mit $M \subseteq Q_0$. Währenddessen ist die Anzahl der Pfeile von $[E_M]$ nach $[E_N]$ gerade die Dimension von $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^1(E_M, E_N)$. Es ist dann \mathcal{B} zu einem Quotienten der Wegealgebra $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B})$ isomorph. Wir erinnern daran, dass wir weiter stets die Rechtsschreibweise für Abbildungen benutzen.

Es seien M und N Teilmengen von Q_0 . Da $\mathcal{B} = \mathcal{B}_Q$ eine endlichdimensionale Algebra über einem Körper ist, können wir $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^1(E_M, E_N)$ als den \mathcal{K} -Vektorraum der Äquivalenzklassen der kurzen exakten Sequenzen in $\text{mod-}\mathcal{B}$ der Form

$$0 \longrightarrow E_N \longrightarrow W \longrightarrow E_M \longrightarrow 0$$

auffassen. Dabei sind bekanntlich zwei kurze exakte Sequenzen η und η' äquivalent, wenn ein \mathcal{B} -Rechtsmodulhomomorphismus $W \xrightarrow{\alpha} W'$ existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} \eta : & 0 & \longrightarrow & E_N & \xrightarrow{\varphi} & W & \xrightarrow{\psi} & E_M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\ \eta' : & 0 & \longrightarrow & E_N & \xrightarrow{\varphi'} & W' & \xrightarrow{\psi'} & E_M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Diese kurzen exakten Sequenzen lassen sich in Abhängigkeit von M und N angeben. Dazu setzen wir zunächst für jedes $q \in Q_0$ zum einen

$$n_q := X_q \delta_N = \begin{cases} 1 \in \mathcal{K} & \text{falls } q \in N \\ 0 \in \mathcal{K} & \text{falls } q \notin N \end{cases}$$

und zum anderen

$$m_q := X_q \delta_M = \begin{cases} 1 \in \mathcal{K} & \text{falls } q \in M \\ 0 \in \mathcal{K} & \text{falls } q \notin M \end{cases}$$

und nennen $(n_q)_{q \in Q_0}$ bzw. $(m_q)_{q \in Q_0}$ das charakteristische Tupel oder auch charakteristische Funktion von N resp. M . Weiter nennen wir ein Tupel $a = (a_q)_{q \in Q_0} \in \mathcal{K}^{Q_0}$ oder

eine Funktion $a: Q_0 \rightarrow \mathcal{K}, q \mapsto a_q$ zulässig oder (M, N) -zulässig, wenn durch die Zuordnung

$$X_q \mapsto \begin{pmatrix} n_q & 0 \\ a_q & m_q \end{pmatrix} =: A_q \in \mathcal{K}^{2 \times 2}$$

ein Algebrenhomomorphismus von \mathcal{B} nach $\mathcal{K}^{2 \times 2}$ induziert wird. Den dadurch beschriebenen \mathcal{B} -Rechtsmodul \mathcal{K}^2 bezeichnen wir mit $W(a, M, N) = W(a)$; die Erzeuger X_q von \mathcal{B} operieren also via Rechtsmultiplikation mit A_q auf den Vektoren (x, y) des \mathcal{K}^2 . Da wir Abbildungen von rechts schreiben, fassen wir die Elemente von \mathcal{K}^2 als Zeilenvektoren auf.

Nun sind die kurzen exakten Sequenzen η in $\text{Ext}_A^1(E_M, E_N)$ bis auf Äquivalenz die Sequenzen η_a für zulässige Tupel $a = (a_q)_{q \in Q_0}$, welche definiert sind durch:

$$\eta_a: \quad 0 \longrightarrow E_N \xrightarrow{(10)} W(a) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} E_M \longrightarrow 0$$

Insbesondere ist die triviale kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E_N \longrightarrow E_N \oplus E_M \longrightarrow E_M \longrightarrow 0$$

zu η_0 äquivalent, wobei hier 0 für die konstante Funktion $Q_0 \rightarrow \mathcal{K}, q \mapsto 0$ steht. Die zugehörigen Matrizen $\begin{pmatrix} n_q & 0 \\ 0 & m_q \end{pmatrix}$ bezeichnen wir mit O_p . Um die Menge der (M, N) -zulässigen Tupel zu bestimmen, sehen wir uns zunächst an, wie die Matrizen A_q in Abhängigkeit von der Lage des Punktes q zu den Mengen M und N aussehen. Die Bedingungen der Zulässigkeit lassen sich durch elementare Berechnungen mit diesen Matrizentypen ermitteln. Dabei nutzen wir, dass wir die charakteristischen Tupel von M und N kennen:

- (1) Für alle $q \in M \cap N$ gilt: $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_q & 1 \end{pmatrix}$
- (2) Für alle $q \in Q_0 \setminus (M \cup N)$ gilt: $A_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_q & 0 \end{pmatrix}$
- (3) Für alle $q \in M \setminus N$ gilt: $A_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_q & 1 \end{pmatrix}$

(4) Für alle $q \in N \setminus M$ gilt: $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_q & 0 \end{pmatrix}$

Im letzten sowie im vorletzten Fall ist A_q unabhängig von a_p idempotent. In den beiden ersten Fällen hingegen ist A_q genau dann idempotent, wenn $a_q = 0$ gilt. Gilt dies, so ist A_q trivialerweise zentral und für alle idempotenten Matrizen $A \in \mathcal{K}^{2 \times 2}$ gilt:

$$A_q A A_q = A_q A = A A_q = A A_q A$$

Wir werden sehen, dass die Dimension von $\text{Ext}_{\mathcal{B}_Q}^1(E_M, E_N)$ von derjenigen Eigenschaft der Differenzmengen $M \setminus N$ und $N \setminus M$ abhängt, die wir jetzt definieren:

2.11 Definition. *Es seien Q ein endlicher, zykelloser Köcher sowie P und R disjunkte Teilmengen von Q_0 . Wir sagen „ P ist nach R stark verbunden“, wenn weder P noch R leer sind und für je zwei Punkte $p \in P$ und $r \in R$ ein Pfeil von p nach r (in Q_1) existiert, und notieren: $P \rightrightarrows R$.² Falls P nach R nicht stark verbunden ist, schreiben wir: $P \nrightarrow R$.*

Weil Q zykellos ist, sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) P ist nach R nicht stark verbunden.
- (ii) $P = \emptyset, R = \emptyset$ oder es existieren Punkte $p \in P$ und $r \in R$, so dass es in Q_1 keinen Pfeil von p nach r gibt.
- (iii) $P = \emptyset, R = \emptyset$ oder es existieren Punkte $p \in P$ und $r \in R$, so dass p eine Senke in $Q_{p,r}$ ist.
- (iv) $P = \emptyset, R = \emptyset$ oder es existieren Punkte $p \in P$ und $r \in R$, so dass es in Q_1 einen Pfeil $p \leftarrow r$ gibt oder p und r durch keinen Pfeil verbunden sind.

Für den Köcher auf Seite 14 gelten beispielsweise:

$$\{1\} \rightrightarrows \{2\} \rightrightarrows \{3\}, \quad \{1, 2\} \rightrightarrows \{3\}, \quad \{3\} \rightrightarrows \{4\} \rightrightarrows \{5, 8\}, \quad \{4, 9\} \rightrightarrows \{5, 8\}$$

aber: $\{1, 2, 3\} \nrightarrow \{2, 3\}, \quad \{3, 4\} \nrightarrow \{5\}, \quad \{9, 5\} \nrightarrow \{5, 8, 12, 10\}$

²In diesem Fall ist der Köcher mit den Punkten $P \cup R$ und nur denjenigen Pfeilen aus Q_1 , die Punkte aus P mit Punkten aus R verbinden, ein vollständig bipartiter Köcher mit bipartiter Zerlegung $P \cup R$.

2.12 Proposition. *Es sei Q ein endlicher, zykelloser Köcher. Weiter seien M und N Teilmengen von Q_0 und $a: Q_0 \rightarrow \mathcal{K}$ eine Funktion.*

(I) *Ist $M \setminus N$ nach $N \setminus M$ nicht stark verbunden, so gilt:*

$$\begin{aligned} a \text{ ist } (M, N)\text{-zulässig} &\iff a|_{M \cap N} = 0, \\ &\quad a|_{Q_0 \setminus (M \cup N)} = 0 \\ &\text{und es existiert eine Konstante } c \in \mathcal{K} \text{ mit:} \\ &\quad a|_{M \setminus N} = c \operatorname{id}_{M \setminus N} \text{ und} \\ &\quad a|_{N \setminus M} = -c \operatorname{id}_{N \setminus M} \\ &\iff (a_q)_{q \in Q_0} \in \langle (m_q - n_q)_{q \in Q_0} \rangle_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

(II) *Ist $M \setminus N$ nach $N \setminus M$ stark verbunden, so gilt:*

$$\begin{aligned} a \text{ ist } (M, N)\text{-zulässig} &\iff a|_{M \cap N} = 0, \\ &\quad a|_{Q_0 \setminus (M \cup N)} = 0 \\ &\text{und es existieren Konstanten } c_M, c_N \in \mathcal{K} \text{ mit:} \\ &\quad a|_{M \setminus N} = c_M \operatorname{id}_{M \setminus N} \text{ und} \\ &\quad a|_{N \setminus M} = c_N \operatorname{id}_{N \setminus M} \end{aligned}$$

Beweis: Es sei a zunächst (M, N) -zulässig. Aus der Idempotenzbedingung folgt dann wie schon erwähnt $a|_{M \cap N} = 0$ und $a|_{Q_0 \setminus (M \cup N)} = 0$. Wir zeigen zunächst die Existenz von c_M und c_N – also insbesondere (II) – unabhängig von den Voraussetzungen in (I) und (II). Dann schließen wir unter der Voraussetzung in (I), dass $c_N = -c_M$ gilt:

Hat $M \setminus N$ mindestens zwei Punkte p und q , so sind entweder p und q durch keinen Pfeil verbunden, oder es gilt entweder $p \rightarrow q \in Q_1$ oder $q \rightarrow p \in Q_1$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass q eine Senke in $Q_{p \cdot q}$ ist, womit insbesondere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_p & 1 \end{pmatrix} = A_q A_p = A_q A_p A_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_q & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, also $a_p = a_q =: c_M$. Genauso folgt, dass a eingeschränkt auf $N \setminus M$ eine konstante Abbildung mit Konstante c_N ist. Ist eine der beiden Mengen $M \setminus N$ oder $N \setminus M$ leer, so gilt (I) trivialerweise wegen $a|_{\emptyset} = c \operatorname{id}|_{\emptyset}$ für alle $c \in \mathcal{K}$. Also betrachten wir jetzt die nach

Voraussetzung in (I) existierenden Punkte $y \in M \setminus N$ und $x \in N \setminus M$, so dass y eine Senke in $Q_{x,y}$ ist. Für diese gilt insbesondere:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_y & 1 \end{pmatrix} = A_y A_x A_y \\ &= A_y A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_y + a_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_N + c_M & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deshalb gilt im Fall (I) zudem: $c := c_N = -c_M$, d.h. wir haben $a_p = cn_p - cm_p$ für alle $p \in Q_0$.

Um nun umgekehrt in (I) und (II) die (M, N) -Zulässigkeit von a nachzuweisen, rechnet man jeweils nach, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Matrizen A_p für alle $p \in Q_0$ idempotent sind, sowie die Bedingung (2) und (3) der Definition von \mathcal{B}_Q für je zwei Matrizen A_p und A_q gelten. Dabei ist zu beachten, dass es im Fall (II) kein $y \in M \setminus N$ und kein $x \in N \setminus M$, so dass y eine Senke in $Q_{x,y}$ ist. \square

2.13 Satz. *Es seien \mathcal{K} ein Körper, Q ein endlicher, zykelloser Köcher sowie M und N Teilmengen von Q_0 .*

(1) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $\text{Ext}_{\mathcal{B}_Q}^1(\mathbb{E}_M, \mathbb{E}_N) = 0$
- (ii) *Jede (M, N) -zulässige Abbildung liegt in $\langle\langle m_q - n_q \rangle_{q \in Q_0} \rangle_{\mathcal{K}}$.*
- (iii) *Es ist $M \setminus N$ nicht nach $N \setminus M$ stark verbunden.*

(2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $\dim_{\mathcal{K}} \text{Ext}_{\mathcal{B}_Q}^1(\mathbb{E}_M, \mathbb{E}_N) = 1$
- (ii) $\text{Ext}_{\mathcal{B}_Q}^1(\mathbb{E}_M, \mathbb{E}_N) \neq 0$
- (iii) *Es gibt eine (M, N) -zulässige Abbildung, die nicht in $\langle\langle m_q - n_q \rangle_{q \in Q_0} \rangle_{\mathcal{K}}$ liegt.*
- (iv) *Es ist $M \setminus N$ nach $N \setminus M$ stark verbunden.*

Beweis: Zu (1): Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist eine einfache Folgerung der letzten Proposition. Es liege nun jede (M, N) -zulässige Abbildung in $\langle\langle m_q - n_q \rangle_{q \in Q_0} \rangle_{\mathcal{K}}$. Ist η eine kurze exakte Sequenz aus $\text{Ext}_{\mathcal{B}_Q}^1(\mathbb{E}_M, \mathbb{E}_N)$, so ist η zu einem η_a für eine zulässige Funktion a äquivalent. Nach Voraussetzung gibt es weiter eine Konstante $c \in \mathcal{K}$, so dass

$a_p = c(n_p - m_p)$ für alle $p \in Q_0$ gilt. Es ist dann die Rechtsmultiplikation mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ein \mathcal{B}_Q -Homomorphismus von $W(a)$ nach $W(0)$, denn für alle $p \in Q_0$ gilt:

$$\begin{aligned} A_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n_p & 0 \\ cn_p - cm_p & m_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_p & 0 \\ cn_p & m_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_p & 0 \\ 0 & m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} O_p. \end{aligned}$$

Da weiter das folgende Diagramm ein kommutatives mit exakten Zeilen ist, sind η_a und η_0 äquivalent:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_N & \xrightarrow{(1,0)} & W(a) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & E_M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & E_N & \xrightarrow{(1,0)} & W(0) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & E_M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Es gelte nun $\text{Ext}_{\mathcal{B}_Q}^1(E_M, E_N) = 0$ und es sei ferner $a: Q_0 \rightarrow \mathcal{K}$ zulässig. Dann existiert $\Phi = \begin{pmatrix} e & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^{2 \times 2}$, so dass das folgende Diagramm ein kommutatives mit exakten Zeilen ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_N & \xrightarrow{(1,0)} & W(a) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & E_M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \begin{pmatrix} e & b \\ c & d \end{pmatrix} \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & E_N & \xrightarrow{(1,0)} & W(0) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & E_M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Aus der Kommutativität folgen $e = 1 = d$ und $b = 0$ sofort. Weiter ist die Rechtsmultiplikation mit Φ ein \mathcal{B}_Q -Modulhomomorphismus, weswegen für alle $p \in Q_0$ gilt:

$$\begin{pmatrix} n_p & 0 \\ a_p + cm_p & m_p \end{pmatrix} = A_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} O_p = \begin{pmatrix} n_p & 0 \\ cn_p & m_p \end{pmatrix}$$

Dies ist äquivalent zu $a_p = cn_p - cm_p$.

Dieser Beweis zeigt übrigens, dass für alle zulässigen Funktionen $a: Q_0 \rightarrow \mathcal{K}$ gilt:

$$(*) \quad \eta_a \sim \eta_0 \iff a \in \langle (m_q - n_q)_{q \in Q_0} \rangle_{\mathcal{K}}$$

Zu (2): Die Äquivalenz von (ii), (iii) und (iv) gilt nach (1), während (ii) trivialerweise aus (i) folgt. Es seien nun $\text{Ext}_{\mathcal{B}_Q}^1(E_M, E_N) \neq 0$ und η und η' kurze exakte Sequenzen aus $\text{Ext}_{\mathcal{B}_Q}^1(E_M, E_N)$, die nicht zu η_0 äquivalent sind. Dann existieren (M, N) -zulässige Funktionen a und b von Q_0 nach \mathcal{K} mit zugehörigen \mathcal{B}_Q -Moduln $W(a)$ via $X_p \mapsto \begin{pmatrix} n_p & 0 \\ a_p & m_p \end{pmatrix} =: A_p$ und $W(b)$ via $X_p \mapsto \begin{pmatrix} n_p & 0 \\ b_p & m_p \end{pmatrix} =: B_p$ und zugehörigen kurzen exakten Sequenzen η_a und η_b . Da η_a bzw. η_b nicht zu η_0 äquivalent ist, gibt es nach (*) Konstanten $c \neq c'$ resp. $d \neq d'$ in \mathcal{K} mit $a|_{M \setminus N} = c \text{id}|_{M \setminus N}$ und $a|_{N \setminus M} = c' \text{id}|_{N \setminus M}$ respektive $b|_{M \setminus N} = d \text{id}|_{M \setminus N}$ und $b|_{N \setminus M} = d' \text{id}|_{N \setminus M}$. Wir können also $k := d + d'/c + c'$ setzen. Dann ist die Rechtsmultiplikation φ mit $\begin{pmatrix} k & 0 \\ c'k - d' & 1 \end{pmatrix} =: \Phi$ ein Vektorraumisomorphismus von $W(a)$ nach $W(b)$. Um zu sehen, dass φ ein \mathcal{B}_Q -Modulisomorphismus ist, müssen wir die Gleichheit von $A_p \Phi$ und ΦB_p zeigen. Dazu sehen wir uns für ein $p \in Q_0$ diese Matrizenprodukte an:

$$A_p \Phi = \begin{pmatrix} n_p & 0 \\ a_p & m_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ c'k - d' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kn_p & 0 \\ ka_p + (c'k - d')m_p & m_p \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi B_p = \begin{pmatrix} k & 0 \\ c'k - d' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_p & 0 \\ b_p & m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kn_p & 0 \\ b_p + (c'k - d')n_p & m_p \end{pmatrix},$$

Es reicht also die Gleichung $ka_p + (c'k - d')m_p = b_p + (c'k - d')n_p$ zu verifizieren. Wie eine Fallunterscheidung nach der Lage von p zeigt, gilt diese nun für jedes $p \in Q_0$. Ist beispielsweise $p \in M \cap N$, so haben wir $ka_p + (c'k - d')m_p = k0 + c'k - d' = 0 + c'k - d' = b_p + (c'k - d')n_p$. Wir sehen uns noch den Fall, dass p in $M \setminus N$ liegt, an: $ka_p + (c'k - d')m_p = d + d'/c + c'c + (c'd + d'/c + c' - d')1 = d = b_p + 0 = b_p + (c'k - d')n_p$. Vermöge dieses Isomorphismus φ gilt:

$$\eta_a \sim k^{-1} \eta_b: 0 \rightarrow E_N \xrightarrow{(k,0)} W(b) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} E_M \rightarrow 0$$

□

In Abschnitt 2.3 haben wir festgestellt, dass die einfachen \mathcal{B}_Q -Rechtsmoduln gerade die E_M mit $M \subseteq Q_0$ sind. Die Punktmenge des Gabriel-Köchers von \mathcal{B}_Q steht also in

Bijektion zu der Potenzmenge $\wp(Q_0)$ von Q_0 . In diesem Teil haben wir die Dimension der Erweiterungsgruppe zweier beliebiger Einfacher E_M und E_N berechnet und damit die Anzahl der Pfeile zwischen $[E_M]$ und $[E_N]$ bestimmt. Insgesamt können wir nun den Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_Q angeben:

2.14 Korollar. *Es sei Q ein endlicher, zykelloser Köcher und \mathcal{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

Die Punkte des Gabriel-Köchers $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ von \mathcal{B}_Q sind die Isomorphieklassen $[E_M]$ der einfachen \mathcal{B}_Q -Rechtsmoduln mit $M \in \wp(Q_0)$.

Ferner gibt es zwischen je zwei Punkten höchstens einen Pfeil. Dabei sind zwei Punkte $[E_M]$ und $[E_N]$ genau dann durch einen Pfeil verbunden, wenn $M \setminus N$ und $N \setminus M$ stark verbunden sind. In diesem Fall gilt für die Pfeilrichtung:

$$[E_M] \rightarrow [E_N] \iff M \setminus N \rightrightarrows N \setminus M$$

Nun gibt es nach einem Satz von Gabriel ein zulässiges Ideal I von $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q)$, so dass \mathcal{B}_Q zu der Köcheralgebra $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q)/I$ isomorph ist. Die Zulässigkeit von I bedeutet hier, dass es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $\text{Rad}(\mathcal{B}_Q)^2 \subseteq I \subseteq \text{Rad}(\mathcal{B}_Q)^r$. Im dritten Kapitel werden wir dieses Ideal bestimmen für den Spezialfall, dass Q der linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_n ist. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass $I = 0$ gelten muss, wenn Q der Unterraumköcher ist. Weitere Beispiele stehen im vierten Kapitel. Zunächst interessieren wir uns jedoch für die allgemeine Struktur des Gabriel-Köchers.

2.5 Spezialfälle und Eigenschaften des Gabriel-Köchers

Es sei \mathcal{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper und Q ein endlicher, zykelloser Köcher. Wir haben bisher eingesehen, dass der Gabriel-Köcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ der \mathcal{K} -Algebra \mathcal{B}_Q genau $2^{|Q_0|}$ Punkte hat, nämlich zu jeder Teilmenge M von Q_0 einen Punkt $[E_M]$ für die Isomorphieklasse des einfachen \mathcal{B}_Q -Rechtsmoduls E_M . In diesem Abschnitt identifizieren wir $[E_M]$ mit der solch eine Isomorphieklasse eindeutig bestimmenden Menge M . Dementsprechend ist die Punktmenge des Gabriel-Köchers von \mathcal{B}_Q ab jetzt die Potenzmenge $\wp(Q_0)$ von der Punktmenge Q_0 des Ausgangsköchers Q . Mit dieser Notation gibt es in dem Gabriel-Köcher genau dann (exakt) einen Pfeil von $M \in \wp(Q_0)$ nach $N \in \wp(Q_0)$, wenn $M \setminus N$ nach $N \setminus M$ (bezüglich Q) stark verbunden ist. Dies

bedeutet insbesondere, dass der Gabriel-Köcher schleifenlos ist. Außerdem gilt für alle $p, q \in Q$:

$$\{p\} \rightrightarrows \{q\} \implies p \rightarrow q \in Q$$

Somit lässt sich Q in $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ einbetten. Ferner ist Q^{op} zu dem vollem Unterköcher K von $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ mit der Punktmenge $K_0 = \{Q_0 \setminus \{p\} \in \wp(Q_0) \mid p \in Q_0\}$ isomorph, weil $(Q_0 \setminus \{p\}) \setminus (Q_0 \setminus \{q\}) = \{q\}$ für alle $p \neq q \in Q_0$ gilt. Allgemein haben für alle M und N in $\wp(Q_0)$ wegen $(Q_0 \setminus M) \setminus (Q_0 \setminus N) = N \setminus M$:

$$\begin{aligned} M \rightarrow N \in \Gamma(\mathcal{B}_Q) &\iff M \setminus N \rightrightarrows N \setminus M \\ &\iff Q_0 \setminus N \rightarrow Q_0 \setminus M \in \Gamma(\mathcal{B}_Q) \end{aligned}$$

Deshalb induziert die Zuordnung $\wp(Q_0) \rightarrow \wp(Q_0)$, $M \mapsto Q_0 \setminus M$ einen Köcheranti-automorphismus der Ordnung 2 auf $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$. Es gilt demnach:

$$\Gamma(\mathcal{B}_Q) \cong \Gamma(\mathcal{B}_Q)^{op}$$

Insbesondere gilt für den Fall, dass \mathcal{B}_Q schon zu $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ isomorph ist:

$$\mathcal{B}_Q \cong \mathcal{B}_Q^{op} \cong \mathcal{B}_{Q^{op}}$$

Wir sehen uns zunächst zwei Spezialfälle an und schließen das Kapitel mit Beobachtungen allgemeinerer Natur.

Spezialfall: Der linear orientierte Dynkinköcher vom Typ A_n

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und Q_n der linear orientierte Dynkinköcher vom Typ A_n :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n$$

Da der Ein- und der Ausgangsgrad eines jeden Punktes in Q_n höchstens 1 ist, können nur einelementige Mengen benachbarter Punkte stark verbunden sein. Die Pfeile des Gabriel-Köchers zwischen M und N in $\wp(\underline{n})$ sind deshalb durch folgende Äquivalenz bestimmt:

Es gibt in $\Gamma(Q_n)$ genau dann einen Pfeil $M \rightarrow N$, wenn exakt ein $i \in \underline{n}$ mit $M \setminus N = \{i\}$ und $N \setminus M = \{i + 1\}$ existiert.

Damit sind in $\Gamma(\mathcal{B}_{Q_n})$ nur gleichmächtige Mengen durch einen Pfeil verbunden, weswegen der Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_{Q_n} mindestens $n + 1$ Zusammenhangskomponenten hat. Er hat genau $n + 1$ Zusammenhangskomponenten, weil es für jede k -elementige Menge $M \in \wp(Q_0)$ mit $1 < k < n$ den folgenden Weg von $\{1, 2, \dots, k\} \in \wp(Q_0)$ nach $M = m_1 < m_2 < \dots < m_k$ gibt:

$$\begin{aligned} \{1, 2, \dots, k-1, k\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, k-1, k+1\} \rightarrow \dots \rightarrow \{1, 2, \dots, k-1, m_k\} \\ &\rightarrow \{1, 2, \dots, k-2, k, m_k\} \rightarrow \dots \rightarrow \{1, 2, \dots, k-2, m_{k-1}, m_k\} \\ &\vdots \\ &\rightarrow \{m_1, m_2, \dots, m_{k-2}, m_{k-1}, m_k\} \end{aligned}$$

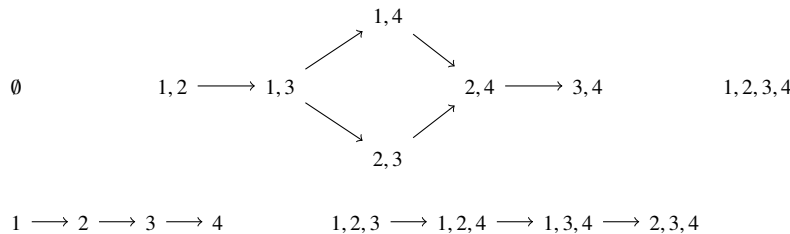
In den folgenden Beispielen für $\Gamma(\mathcal{B}_{Q_n})$ mit $n \in \{2, 3, 4\}$ notieren wir die Punkte M nur mit den in M enthaltenden Elementen von M und verzichten auf die Mengenklammern. Für $n = 2$ ergibt sich:

$$\emptyset \quad 1 \longrightarrow 2 \quad 1, 2$$

Es ist $\Gamma(\mathcal{B}_{Q_3})$ der folgende Köcher:

$$\emptyset \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \quad 1, 2 \longrightarrow 1, 3 \longrightarrow 2, 3 \quad 1, 2, 3$$

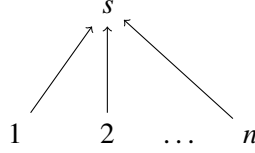
Der Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_{Q_4} sieht so aus:



Die Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_{Q_5} und \mathcal{B}_{Q_6} haben wir im im dritten Kapitel auf Seite 46 dargestellt.

Spezialfall: Der Unterraumköcher

Es sei $Q = Q(n)$ der Unterraumköcher mit $n + 1$ Punkten. Die einzige Senke bezeichnen wir mit s und die n Quellen mit $1, \dots, n$:



Jede Teilmenge von der Menge der Quellen ist nach $\{s\}$ stark verbunden, womit die Pfeile des Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_Q durch folgende Äquivalenz für M und N in $\wp(\underline{n}) \cup \{s\}$ bestimmt sind:

Es gibt in $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ genau dann einen Pfeil $M \rightarrow N$, wenn es disjunkte Teilmengen $M' \neq \emptyset$ und N' von \underline{n} mit $M = N' \cup M'$ und $N = N' \cup \{s\}$.

Wie im ersten Spezialfall sind \emptyset und Q_0 demnach isolierte Punkte im Gabriel-Köcher. Außerdem ist jeder Punkt $\emptyset \neq M \neq Q_0 \in \wp(Q_0)$ entweder eine Quelle – falls $M \subseteq \underline{n}$ gilt – oder eine Senke – falls s in M liegt. Deshalb gibt es in dem Köcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ keine Wege einer Länge ≥ 2 und folglich ist $\text{Rad}(\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q))^2 = 0$ für das Radikal $\text{Rad}(\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q))$ der Wegealgebra $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q)$, von dem bekanntlich die Wege positiver Länge eine \mathcal{K} -Basis bilden. Damit gibt es jedoch keine (von 0 verschiedenen) zulässigen Ideale in $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q)$. Demzufolge ist die Algebra \mathcal{B}_Q schon zu der Wegealgebra $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ ihres Gabriel-Köchers isomorph. Ferner bedeutet die Existenz des Antiautomorphismus des Gabriel-Köchers in diesem Fall, dass \mathcal{B}_Q zu ihrer Gegenalgebra \mathcal{B}_Q^{op} isomorph ist. Die Dimension von \mathcal{B}_Q ist somit gleich der Anzahl der Punkte und der Pfeile des Köchers $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$:

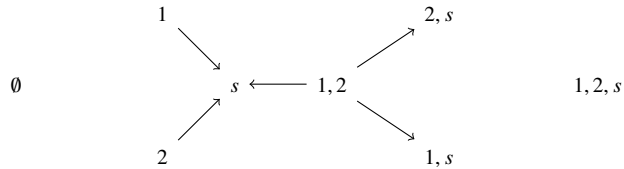
$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_Q &= 2^{n+1} + \sum_{N' \subseteq \underline{n}} \sum_{\emptyset \neq M' \subseteq \underline{n}} 1 = 2^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{n-j} \binom{n-j}{k} \\
 &= 2^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (2^{n-j} - 1) = 2^{n+1} - 1 + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^{n-j} - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} + 1 \\
 &= 2^{n+1} + 3^n - 2^n = 2^n + 3^n
 \end{aligned}$$

An dieser hübschen Algebrenfamilie ist der eingangs beschriebene Antiautomorphismus von \mathcal{B}_Q deutlich am Köcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ erkennbar. Zur Illustration zeigen wir hier die Köcher $\Gamma(\mathcal{B}_{Q_n})$ für $n \in \underline{4}$, wobei wir wieder auf die Mengenklammern verzichten. Wir beginnen

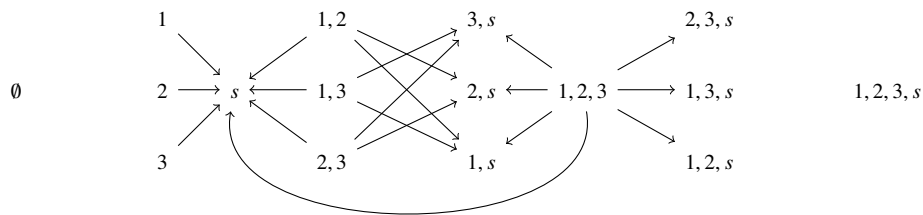
mit $n = 1$:

$$0 \quad 1 \longrightarrow s \quad 1, s$$

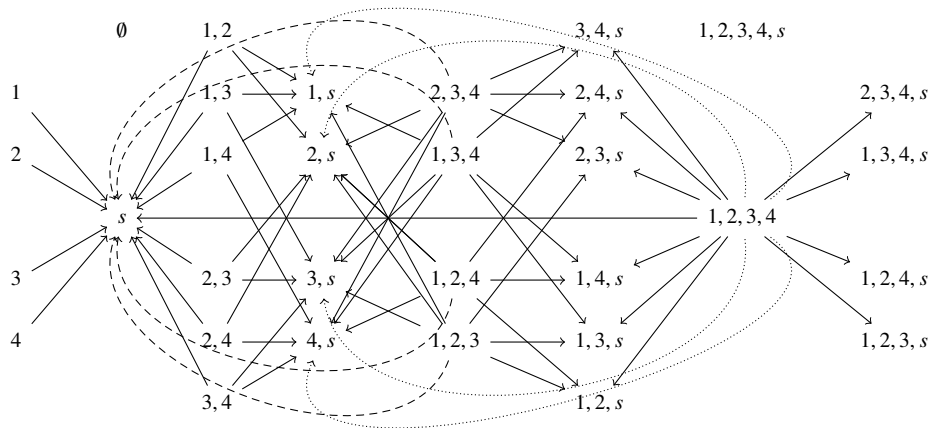
machen weiter mit $n = 2$:



und $n = 3$:



und schließen mit $n = 4$, wobei hier einige Pfeile (nur) der besseren Lesbarkeit zu Liebe gepunktet dargestellt sind:



Übrigens bleibt genau ein Pfeil unter dem Antiautomorphismus fix:

Bemerkung: Der einzige Pfeil, der unter dem Antiautomorphismus von Köchern

$\iota: \Gamma(\mathcal{B}_Q) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{B}_Q)$ mit $X \mapsto Q_0 \setminus X$ fix bleibt, ist:

$$\alpha: \underline{n] \rightarrow \{s\}$$

Beweis: Offensichtlich ist $\alpha: \underline{n] \rightarrow \{s\}$ ein Pfeil in $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$, für dessen Spitze und Nock gerade $Q_0 \setminus \underline{n] = \{s\}$ und $Q_0 \setminus \{s\} = \underline{n]$ gilt. Deshalb bildet ι den Pfeil α auf den Pfeil $Q_0 \setminus \underline{n] = \{s\} \leftarrow Q_0 \setminus \{s\} = \underline{n]$, also auf α , ab. Bleibt andererseits ein Pfeil $\beta: N' \cup M' \rightarrow N' \cup \{s\}$ unter ι fix, so muss $N' \cup M' = Q_0 \setminus (N' \cup \{s\})$ und $N' \cup \{s\} = Q_0 \setminus (N' \cup M')$ gelten. Insbesondere gilt $N' = \underline{n] \setminus (N' \cup M') \subseteq \underline{n] \setminus N'$, woraus $N' = \emptyset$ und damit $M' = \underline{n]$ folgt. Somit ist β schon der Pfeil α . \square

Eigenschaften

Die Beispiele des ersten Spezialfalles lassen erahnen, dass der Punkt $\{1, 2, \dots, k\} \in \wp(Q_0)$ für jedes $k \in \underline{n]_0$ eine Quelle ist und der Punkt $\{n, n-1, \dots, n-k+1\}$ eine Senke des Gabriel-Köchers ist. Die nächste Bemerkung zeigt, dass dies die einzigen Quellen und Senken sind. Wir nennen $p \in Q$ einen Nachfolger von q , wenn es in Q einen Weg von q nach p gibt. Die Senken des Gabriel-Köchers von \mathcal{B}_Q sind genau die (in Q) unter Nachfolgern abgeschlossenen $M \in \wp(Q_0)$:

Bemerkung 1: Es sei Q ein endlicher, zykelloser Köcher. Ein Punkt $M \in \wp(Q_0)$ ist genau dann eine Senke in $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$, wenn M als Teilmenge von Q_0 abgeschlossen unter Nachfolgern ist. Ferner gilt die duale Aussage.

Beweis: Es sei $M \in \wp(Q_0)$ abgeschlossen unter Nachfolgern. Es gibt also keinen Pfeil von einem $x \in M$ zu einem $y \in Q_0 \setminus M$. Weiter sei $N \in \wp(Q_0)$, so dass weder $M \setminus N$ noch $N \setminus M$ leer sind. Dann existieren Punkte $x \in M \setminus N$ und $y \in N \setminus M$. Wegen der Abgeschlossenheit von M unter Nachfolgern ist dann x eine Senke in $Q_{x,y}$ ist. Wie wir auf Seite 28 schon festgestellt haben, bedeutet dies, dass $M \setminus N$ nach $N \setminus M$ nicht stark verbunden ist. Folglich startet in $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ kein Pfeil in M . Es sei nun $M \in \wp(Q_0)$ nicht abgeschlossen unter Nachfolgern. Dann gibt es einen Punkt $m \in M$, der einen nicht in M liegenden direkten Nachfolger $q \leftarrow m$ hat. Dies bedeutet insbesondere, dass $\{m\}$ nach $\{q\}$ stark verbunden ist. Infolgedessen existiert im Gabriel-Köcher ein Pfeil von $M = \{m\} \cup M \setminus \{m\}$ nach $\{q\} \cup M \setminus \{m\}$. \square

Damit kennen wir nun die Projektiven und Injektiven unter den einfachen Rechtsmoduln E_M von \mathcal{B}_Q .

Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in den Spezialfällen unterscheidet sich erheblich. Nichtsdestotrotz sind in beiden Fällen jeweils diejenigen Unterköcher, deren Punkte $M \in \wp(Q_0)$ dieselbe Kardinalität haben, zusammenhängend. Allgemein gibt es nach dem nächsten Lemma für jeden Punkt $\emptyset \neq M \in \wp(Q_0)$ des Gabriel-Köchers eine Wanderung zwischen M und $M \setminus \{m\} \cup \{n\}$ mit $m \in M$ und $n \notin M$. Durch schrittweisen dementsprechenden Abbau und Aufbau der Differenzmengen zweier gleichmächtiger Mengen M und N erhalten wir eine Wanderung zwischen M und N . Im Folgenden schreiben wir $M \dashrightarrow N$, wenn die Punkte M und N durch einen Pfeil verbunden sind.

2.15 Lemma. *Es seien Q ein endlicher, zusammenhängender, zykelloser Köcher.*

Dann gibt es in dem Gabriel-Köcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ der \mathcal{K} -Algebra \mathcal{B}_Q für jedes $A \in \wp(Q_0) \setminus \{\emptyset, Q_0\}$, jedes $a \in A$ und jedes $b \in Q_0 \setminus A$ eine Wanderung zwischen A und $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$.

Beweis: Weil Q zusammenhängend ist, gibt es zwischen je zwei Punkten a und b in Q_0 eine Wanderung:

$$a = x_0 \dashrightarrow x_1 \dashrightarrow x_2 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{r-1} \dashrightarrow x_r \dashrightarrow x_{r+1} = b$$

O.B.d.A können wir annehmen, dass die Punkte a, x_1, \dots, x_r und b paarweise verschieden sind. Ausgehend von einer solchen Wanderung werden wir induktiv nach der Anzahl der Wechsel von einem $x_k \in A$ zu einem $x_{k+1} \in Q_0 \setminus A$ eine Wanderung in $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ konstruieren.

Induktionsanfang: Es seien $a \in A \in \wp(Q_0)$ und $b \in Q_0 \setminus A$, so dass in Q eine Wanderung

$$\underbrace{a \dashrightarrow x_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{k-1}}_{\in A} \dashrightarrow x_k \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_r \dashrightarrow b$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in Q_0 \setminus A}$

existiert mit genau einem Wechsel von A nach $Q_0 \setminus A$; hier zwischen den Punkten x_{k-1} und x_k .

In dem Gabriel-Köcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ sind dann A und $A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{x_k\} =: B$ durch einen Pfeil verbunden. Denn es ist $A \setminus B = \{x_{k-1}\}$ mit $B \setminus A = \{x_k\}$ stark verbunden, weil es in Q einen Pfeil zwischen x_{k-1} und x_k gibt. Nun sind B und $A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{b\}$ wie folgt verbunden:

$$\begin{aligned} B &= A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{x_k\} \dashrightarrow A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{x_{k+1}\} \dashrightarrow \dots \\ &\dots \dashrightarrow A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{x_{r-1}\} \dashrightarrow A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{x_r\} \dashrightarrow A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{b\} \end{aligned}$$

Jeder Schritt korrespondiert dabei (über die entsprechenden Differenzmengen) zu einem Schritt in dem zweiten Abschnitt $x_k \dashrightarrow x_{k+1} \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_r \dashrightarrow b$ der Wanderung von a nach b . Mit Hilfe des ersten Teils $a \dashrightarrow x_1 \dashrightarrow x_2 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{k-1}$ der Wanderung (in Q) von a nach b , können wir nun (in $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$) von $A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{b\}$ nach $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ wandern:

$$A \setminus \{x_{k-1}\} \cup \{b\} \dashrightarrow A \setminus \{x_{k-2}\} \cup \{b\} \dashrightarrow \dots \dashrightarrow A \setminus \{x_1\} \cup \{b\} \dashrightarrow A \setminus \{a\} \cup \{b\}$$

Insgesamt erhalten wir so eine Wanderung zwischen A und $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$.

Induktionsschritt: Es seien $a \in A \subseteq Q_0$ und $b \in Q_0 \setminus A$ so gewählt, dass in Q eine Wanderung über paarweise verschiedene Punkte von a nach b mit mehr als einem Wechsel zwischen A und $Q_0 \setminus A$ existiert. Solch eine Wanderung ist dann von der Art:

$$\begin{array}{c} \underbrace{a \dashrightarrow x_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{k-1}}_{\in A} \dashrightarrow \underbrace{x_k \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{l-1}}_{\in Q_0 \setminus A} \\ \dashrightarrow \underbrace{x_l \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{m-1}}_{\in A} \dashrightarrow \underbrace{x_m \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{n-1}}_{\in Q_0 \setminus A} \dashrightarrow \dots \\ \dots \dashrightarrow \underbrace{x_{n+i} \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{n+i+j-1}}_{\in A} \dashrightarrow \underbrace{x_{n+i+j} \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_r \dashrightarrow b}_{\in Q_0 \setminus A} \end{array}$$

Dabei gelten $k-1 \geq 0$ und $l-1 \geq k$ sowie $m-1 \geq l$ und $n-1 \geq m$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert dann in $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ eine Wanderung zwischen A und $A \setminus \{x_l\} \cup \{b\} =: B$. Dann liegt a in B , weil $x_l \neq a$ gilt, und x_l liegt $Q_0 \setminus B$ nach Definition von B . Weil die x_i verschieden von einander und von a und b sind, ist

$$\underbrace{a \dashrightarrow x_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{k-1}}_{\in B} \dashrightarrow \underbrace{x_k \dashrightarrow \dots \dashrightarrow x_{l-1} \dashrightarrow x_l}_{\in Q_0 \setminus B}$$

eine Wanderung von a nach x_l mit nur einem Wechsel von B nach $Q_0 \setminus B$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es deshalb eine Wanderung zwischen B und $B \setminus \{a\} \cup \{x_l\}$. Nun ist aber $B \setminus \{a\} \cup \{x_l\} = A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ und damit eine Wanderung von A nach $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ beendet. \square

2.16 Satz. *Es sei Q ein endlicher, zykelloser, zusammenhängender Köcher.*

- (1) *Ist Q der linear orientierte Dynkin Köcher vom Typ A_n , so hat der Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_Q genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten.*
- (2) *Ist Q verschieden von dem linear orientierten Dynkin Köcher vom Typ A_n , so hat der Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_Q genau 3 Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: Nach dem vorherigen Lemma ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ der volle Unterköcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_k$ des Gabriel-Köchers von \mathcal{B}_Q , dessen Punktmenge aus genau den k -elementigen Teilmengen von Q_0 besteht, zusammenhängend. Da es nur eine Menge der Mächtigkeit 0 und nur eine der Mächtigkeit $|Q_0|$ gibt, besteht $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_0$ nur aus dem Punkt \emptyset und $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_{|Q_0|}$ aus dem Punkt Q_0 .

In dem ersten Spezialfall haben wir gezeigt, dass der linear orientierte Dynkin-Köcher Q_n vom Typ A_n genau diese $n + 1$ Zusammenhangskomponenten hat. Es sei nun Q von Q_n verschieden. Es gibt deshalb mindestens einen Punkt, dessen Ein- oder Ausgangsgrad mindestens 2 ist. In Q gibt es also einen Unterköcher der Form $x_1 \rightarrow s \leftarrow x_2$ oder einen der Form $x_1 \leftarrow s \rightarrow x_2$, wobei in jedem Fall die Mengen $\{x_1, x_2\}$ und $\{s\}$ stark verbunden sind. Demzufolge gibt es in dem Gabriel-Köcher einen Pfeil zwischen $\{x_1, x_2\}$ und $\{s\}$, der $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_2$ mit $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_1$ verbindet. Der Antiautomorphismus ι spendiert nun weiter einen Pfeil zwischen $Q_0 \setminus \{x_1, x_2\}$ und $Q_0 \setminus \{s\}$, welcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_{n-2}$ mit $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_{n-1}$ verbindet. Um die restlichen Unterköcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_3, \dots, \Gamma(\mathcal{B}_Q)_{n-3}$ untereinander und mit $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_2$ bzw. $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_{n-2}$ zu verbinden, erinnern wir daran, dass es für jede Teilmenge $D \subseteq Q_0 \setminus \{x_1, x_2, s\}$ einen Pfeil zwischen $D \cup \{x_1, x_2\}$ und $D \cup \{s\}$ gibt. Dieser verbindet dann die Unterköcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_{|D|+1}$ und $\Gamma(\mathcal{B}_Q)_{|D|+2}$. \square

Kapitel 3

Die Monoidalgebren zu linear orientierten Dynkin Köchern vom Typ A_n

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass die Monoidalgebren $\mathcal{K}\pi_Q$ und \mathcal{B}_Q über einem Körper \mathcal{K} für linear orientierte Dynkin-Köcher Q vom Typ A_n isomorph zu einander sind und die Dimension $\frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1}$, die $(n+1)$ -te Catalan-Zahl, haben. Ausgehend vom schon bestimmten Gabriel-Köcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ beweisen wir unter Angabe eines expliziten Isomorphismus, dass für das von den Kommutativitätsrelationen erzeugte Ideal I von $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ gilt:

$$\mathcal{K}\pi_Q \cong \mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q)/I$$

Damit ist $\mathcal{K}\pi_Q$ die Inzidenzalgebra einer Partialordnung auf der Potenzmenge der Punkte von Q . In diesem Kapitel sei \mathcal{K} stets ein Körper.

3.1 Formulierung des Hauptresultats

Notationen und Relationen

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und Q_n der linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_n :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n$$

Bekanntlich werden die Isomorphieklassen unzerlegbarer Q_n -Darstellungen durch die Familie $\{U_{k,l} \mid 1 \leq k \leq l \leq n\}$ beschrieben. Dabei ist $U_{k,l}$ die Darstellung:

$$U_{k,l} := 0 \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \underset{k\text{-te Stelle}}{\mathcal{K}} \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} \underset{l\text{-te Stelle}}{\mathcal{K}} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} 0$$

Die zur Ecke $i \in \underline{n}$ korrespondierende einfache Q_n -Darstellung bezeichnen wir weiterhin mit S_i und für den zugehörigen Projektionsfaktor P_{S_i} schreiben wir kurz P_i . Letzterer lässt alle Unzerlegbaren $U_{k,l}$ mit $l \neq j$ fix, weil $U_{j,j}$ sich in solche $U_{k,l}$ nicht einbetten lässt. Der Einfache $U_{j,j}$ ist jedoch genau der Sockel von jedem $U_{k,j}$ mit $k \leq j$. Die Wirkung von P_j auf den Unzerlegbaren ist demnach:

$$U_{k,l}P_k = \begin{cases} U_{k,l-1}, & \text{falls } j = l \\ U_{k,l}, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq l \leq n$$

Es bezeichne π_n das Monoid π_{Q_n} , also das von den Projektionsfaktoren P_1, \dots, P_n erzeugte Untermonoid bezüglich der Hintereinanderausführung von Endofunktoren auf $Q\text{-}\mathcal{K}$ dar bis auf natürliche Äquivalenz, und \mathcal{A}_n die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_n$. Da es nicht-triviale Erweiterungen nur zwischen Einfachen zu benachbarten Punkten des Köchers geben kann, sind die im ersten Kapitel hergeleiteten Relationen der Projektionsfaktoren in diesem Fall die folgenden:

$$\begin{aligned} P_i^2 &= P_i && \text{für alle } i \in \underline{n} \\ P_{i+1}P_iP_{i+1} &= P_iP_{i+1}P_i && \text{für alle } i \in \underline{n-1} \\ P_iP_j &= P_jP_i && \text{für alle } i, j \in \underline{n} \text{ mit } |i-j| \geq 2 \\ P_{i+1}P_i &= P_{i+1}P_iP_{i+1} && \text{für alle } i \in \underline{n-1} \end{aligned}$$

Damit ist \mathcal{A}_n ein Quotient der 0-Hecke-Algebra mit n Erzeugern (s. etwa [Nor79]).

Ferner sei \mathcal{B}_n die im zweiten Kapitel über Erzeuger X_1, \dots, X_n und (genau diesen) Relationen eingeführte Algebra \mathcal{B}_{Q_n} . Diese Relationen führen nach dem Lemma 2.5 (S. 20) zu den **verallgemeinerten Relationen** in \mathcal{B}_n :

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \underline{m-1}$. Dann gilt für alle Wörter w über \underline{m} :

$$\begin{aligned} X_{n+1}X_wX_{n+1} &= X_{n+1}X_w && \text{falls } w \text{ ein Wort über } \underline{n} \text{ ist} \\ X_nX_wX_n &= X_wX_n && \text{falls } w \text{ ein Wort über } \{n+1, \dots, m\} \text{ ist} \\ X_nX_w &= X_wX_n && \text{falls } w \text{ ein Wort über } \underline{m} \setminus \{n-1, n, n+1\} \text{ ist} \end{aligned}$$

Weiterhin ist das im zweiten Kapitel zur Radikalberechnung definierte idempotente Monom X_J (s. S. 22) für eine beliebige Teilmenge $J = j_1 < \dots < j_r$ von $(Q_m)_0 = \underline{m}$ gerade:

$$X_J = X_{j_r \dots j_1}$$

Für alle $k \in J$ gilt insbesondere:

$$X_J X_k = X_J = X_k X_J$$

Ist (P, \leq) eine partielle Ordnung auf einer endlichen Menge P , so ist die Inzidenzalgebra $\text{Inz}(P)$ von P über \mathcal{K} definiert als der \mathcal{K} -Vektorraum mit Basis $\{X_{i,j} \mid i \leq j\}$, auf dem eine Multiplikation gegeben ist durch:

$$X_{i,j} X_{k,l} = \begin{cases} X_{i,l} & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Hasse-Diagramm $Q(P)$ von P ist der im Folgenden beschriebene Köcher: Die Punktmenge von $Q(P)$ ist P und zwischen je zwei Punkten $i, j \in P$ existiert genau dann (exakt) ein Pfeil $i \rightarrow j$, wenn $i < j$ gilt und es kein $k \in P$ mit $i < k < j$ gibt. Die Inzidenzalgebra $\text{Inz}(P)$ ist dann bekanntlich isomorph zu dem Quotienten $\mathcal{K}Q(P)/I$, wobei I das von den Kommutativitätsrelationen erzeugte Ideal von $\mathcal{K}Q(P)$ ist (s. [Rin84]).

Hauptresultat

3.1 Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}_n := \wp(\underline{n})$ von \underline{n} definieren wir die Relation \leq_n , indem wir für alle Teilmengen $J = \{j_1, \dots, j_s\}$ und $K = \{k_1, \dots, k_r\}$ und von \underline{n} fordern:

$$J \leq_n K \iff |J| = |K| \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccccccc} J = & j_1 & < & j_2 & < & \dots & < & j_r \\ & | \wedge & & | \wedge & & & & | \wedge \\ K = & k_1 & < & k_2 & < & \dots & < & k_r \end{array}$$

Offensichtlich ist \mathcal{P}_n eine partielle Ordnung. Sie ist nicht total, denn für $n = 4$ sind z.B. $\{1, 2\}$ und \emptyset ebensowenig vergleichbar wie $\{1, 4\}$ und $\{2, 3\}$.

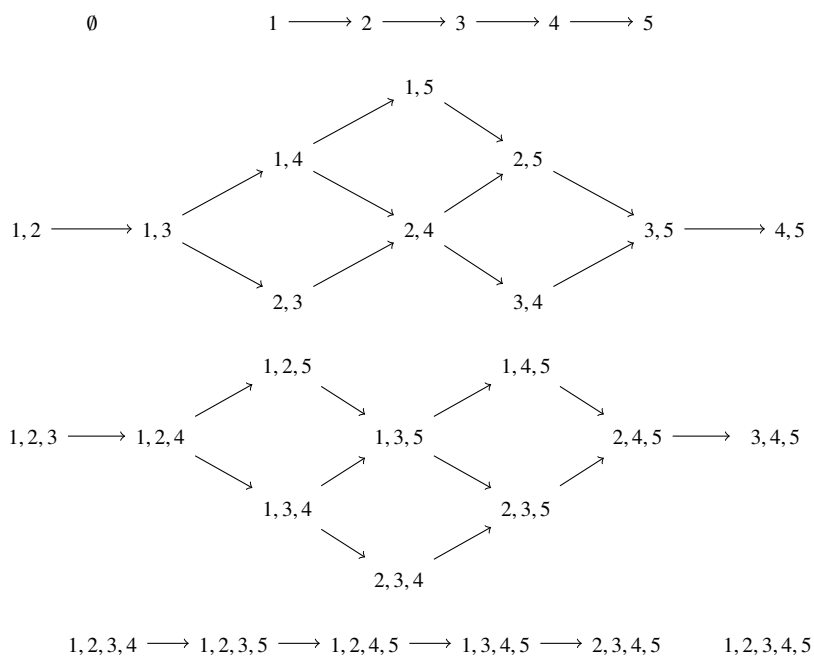
Das Hasse-Diagramm von (\mathcal{P}, \leq_n) ist dann isomorph zu dem Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_n , weil eine Teilmenge $J = j_1 < \dots < j_s$ von \underline{n} genau dann ein direkter Nachfolger einer Teilmenge $I = i_1 < \dots < i_r$ ist, wenn $r = s$ gilt und es ein $k \in \underline{n}$ gibt mit:

$$J \setminus I = \{j_k\} \quad \text{und} \quad I \setminus J = \{i_k\} = \{j_k - 1\}$$

Dieses Kapitel widmet sich dem Beweis des Hauptresultats über die Monoidalgebra zum linear orientierten Dynkinköcher vom Typ A_n :

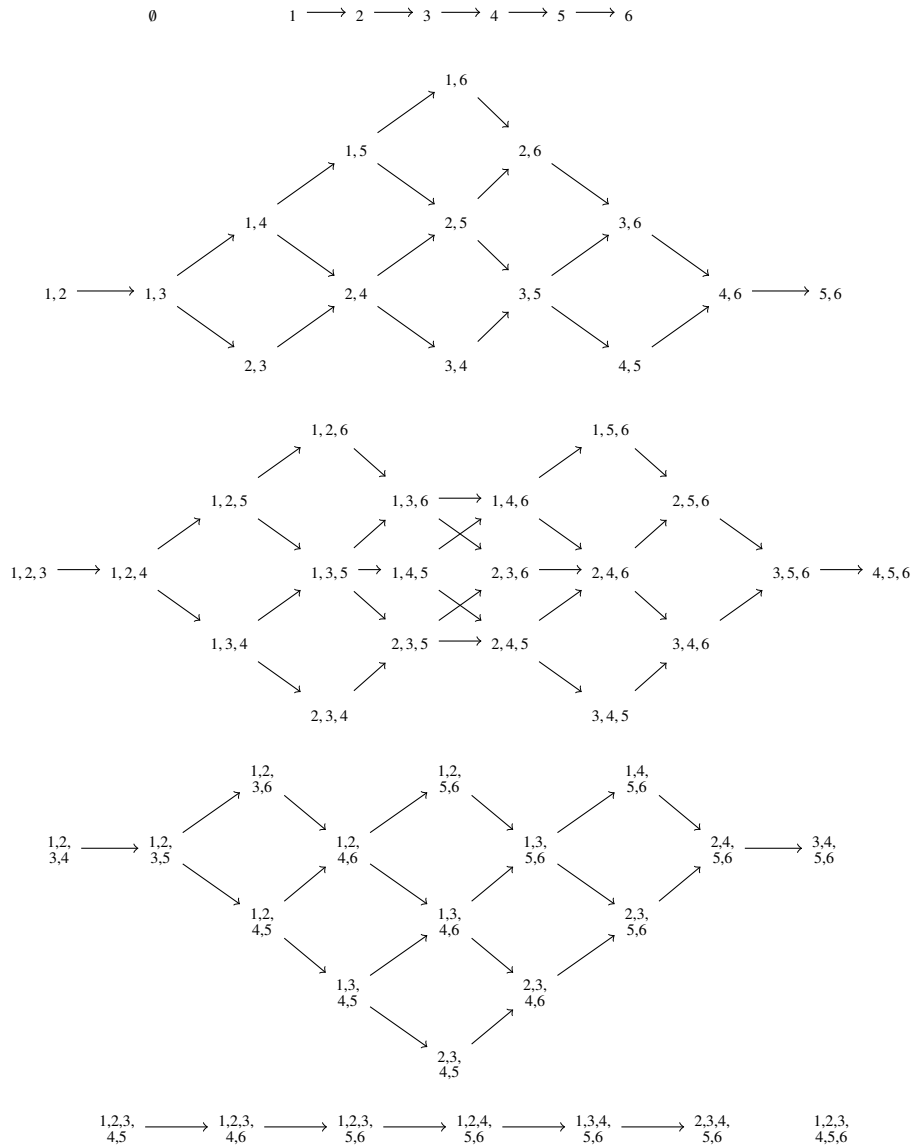
Hauptsatz. *Es sei \mathcal{K} ein Körper. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_n$ zur Indizenzalgebra $\text{Inz}(\mathcal{P}_n)$ isomorph. Dieser Isomorphismus ist explizit. Ferner ist die Dimension von $\mathcal{K}\pi_{Q_n}$ die $(n+1)$ -te Catalanzahl $\frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1}$.*

Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir den Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_n und damit das Hasse-Diagramm von \mathcal{P}_n , nach dem Hauptsatz im Prinzip also die Algebra $R\pi_n$, schon im zweiten Kapitel auf Seite 35 abgebildet. Hier stellen wir noch jene für $n = 5$ und für $n = 6$ dar und lassen (wie im zweiten Kapitel) die Mengenklammern der Menge M , die einen Punkt $[E_M]$ eindeutig bestimmt, weg. Wir beginnen mit $n = 5$:



3.1 Formulierung des Hauptresultats

und fahren mit $n = 6$ fort. Dabei haben wir die Punkte in den Zusammenhangskomponenten der vier- und fünfelementigen Teilmengen von $\underline{6}$ zweizeilig aufgelistet:



3.2 Eine Normalform von \mathcal{B}_n

Wir nennen eine \mathcal{K} -Basis von \mathcal{B}_n , die aus Monomen über X_1, \dots, X_n besteht, eine Normalform von \mathcal{B}_n . Bevor wir eine Normalform von \mathcal{B}_n bestimmen, führen wir ein paar Bezeichnungen um die partielle Ordnung auf \mathcal{P}_n ein. Der Beweis des nächsten Satzes 3.2 zeigt ferner, dass die Algebren $\mathcal{K}\pi_n$ und \mathcal{B}_n vermöge des kanonischen Epimorphismus isomorph sind. Daraus ergeben sich dann die am Ende dieses Abschnitts aufgeführten Eigenschaften der Monoidalgebra \mathcal{A}_n der Projektionsfunktoren.

Ist $J = j_1 < \dots < j_r$ eine Teilmenge von \underline{n} , so bezeichnen wir mit J auch das Wort $j_r \dots j_1$ über \underline{n} . Es sei weiter $I = i_1 < \dots < i_r$ eine Teilmenge von \underline{n} mit $I \leq_n J$. Wir identifizieren das Paar $I \leq_n J$ mit der entsprechenden Folge

$$J_1 := \{i_1, i_1 + 1, \dots, j_1\}, \dots, J_r := \{i_r, i_r + 1, \dots, j_r\}$$

von Intervallen in \underline{n} und schreiben auch $J_1 < J_2 < \dots < J_r$ oder $(J_1, \dots, J_r) \in \mathcal{P}_n$ statt $I \leq_n J$. Dabei sei \leq die Relation auf der Menge der Intervalle in \mathbb{N} mit:

Für zwei Intervalle K und L in \mathbb{N} gilt $K \leq L$ genau dann,
wenn $\min K < \min L$ und $\max K < \max L$ gelten.

Diese Ordnung ist nicht total, da ineinander liegende Intervalle unvergleichbar bleiben. Sie wird jedoch zu einer partiellen Ordnung, wenn wir die Gleichheit hinzu nehmen. Wie eine triviale Fallunterscheidung nach den Intervallanfängen von K und L zeigt, sind K und L genau dann unvergleichbar bezüglich \leq (was wir mit $K \not\leq L$ notieren), wenn K echt in L liegt oder L echt enthält.

3.2 Satz. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und \mathcal{K} ein Körper. Eine Normalform von \mathcal{B}_n wird gezählt durch die partielle Ordnung*

$$\mathcal{P}_n = \{J_1 < \dots < J_r \mid r \in \mathbb{N}, J_i \text{ Intervall in } \underline{n}\}$$

vermöge der Abbildung:

$$\begin{aligned} F: \quad \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathcal{B}_n \\ J_1 < \dots < J_r &\longmapsto X_{J_1} \dots X_{J_r} =: X_{J_1 \dots J_r} \end{aligned}$$

Damit ist die Dimension von \mathcal{B}_n gerade die $n + 1$ -te Catalanzahl $C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1}$. Außerdem sind die \mathcal{K} -Algebren \mathcal{B}_n und \mathcal{A}_n isomorph.

Beweis: Es sei $\mathcal{B}_n := \text{Bild } F = \{X_{J_1 \dots J_r} \mid J_i \subseteq \underline{n}, J_1 < \dots < J_r\}$. Weiter sei $\mathcal{P}_{J_1 \dots J_r}$ das Bild von $X_{J_1 \dots J_r}$ unter dem kanonischen Epimorphismus $\mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ mit $X_j \mapsto \mathcal{P}_j$ für alle $j \in \underline{n}$. Wir zeigen die Surjektivität und Injektivität durch:

- (I) \mathcal{B}_n ist multiplikativ abgeschlossen und enthält die Erzeuger X_1, \dots, X_n und $1 = X_\emptyset$. (Dann ist $\langle \mathcal{B}_n \rangle_{\mathcal{K}}$ schon die \mathcal{K} -Algebra \mathcal{B}_n .)
- (II) Für alle $(J_1, \dots, J_r) \neq (L_1, \dots, L_r) \in \mathcal{P}_n$ existiert eine injektiv unzerlegbare Q_n -Darstellung U mit $UP_{J_1 \dots J_r} \neq UP_{L_1 \dots L_r}$. (Daraus folgt $X_{J_1 \dots J_r} \neq X_{L_1 \dots L_r}$, also die Injektivität von F des kanonischen Epimorphismus $\mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$).

Zu (I): Es enthält \mathcal{B}_n die Erzeuger $X_j = \{j\}F$ von \mathcal{B}_n mit $j \in \underline{n}$ und $1 = \emptyset F$. Da jedes Element in \mathcal{B}_n ein Produkt in den X_i ist, ist \mathcal{B}_n genau dann multiplikativ abgeschlossen, wenn es abgeschlossen unter der Multiplikation mit X_1, \dots, X_n ist. Dies zeigen wir direkt: Es seien also $k \in \underline{n}$ und $(J_1, \dots, J_r) \in \mathcal{P}_n$. Die zugehörigen Intervallgrenzen seien $i_x \leq j_x$ für alle $x \in \underline{r}$.

1. Fall: $k-1 \in \bigcup_{x=1}^r J_x$ Es sei dann $y \in \underline{r}$ minimal mit $k-1 \in J_y$. Nun vertauscht X_k mit $X_{J_1} \dots X_{J_{y-1}}$, weil die Intervalle J_1, \dots, J_{y-1} weder $k, k-1$ noch $k+1$ enthalten. Allgemein gilt nämlich:

Bemerkung: Sind $J_1 < \dots < J_r$ Intervalle in \underline{n} und $l \in \bigcup_{x=1}^r J_x$ sowie $y \in \underline{r}$ minimal mit $l \in J_y$, so gilt: $\bigcup_{x=1}^{y-1} J_x \subseteq \underline{l-1}$.

Beweis: Selbstverständlich ist $\bigcup_{x=1}^{y-1} J_x$ eine Teilmenge von \underline{n} . Angenommen, es gibt ein $l \leq z \leq n$, welches in $\bigcup_{x=1}^{y-1} J_x$ enthalten ist. Dann liegt z also in einem $J_x < J_y$ und damit die Menge $\{i_x, i_x + 1, \dots, z\}$ in J_x , womit J_x wegen $i_x < i_y \leq l \leq z$ auch l enthält. Ein Widerspruch zur Minimalität von y . \square

Wir wenden uns nun dem Produkt von X_k, X_{J_y} und $X_{J_{y+1}}$ zu und die verallgemeinerten Relationen an:

$$X_k X_{J_y} X_{J_{y+1}} = \begin{cases} X_{k, k-1, \dots, i_y} X_{J_{y+1}} & \text{falls } k-1 = j_y \\ X_{J_y} X_{J_{y+1}} & \text{falls } k-1 < j_y \end{cases}$$

Sofern y von r und somit $X_{j_{y+1}}$ von 1 verschieden ist, fassen wir weiter zusammen:

$$X_k X_{j_y} X_{j_{y+1}} = \begin{cases} X_{\{k\} \cup J_y} & \text{falls } k-1 = j_y \text{ und } k = j_{y+1} \\ X_{\{k\} \cup J_y} X_{j_{y+1}} & \text{falls } k-1 = j_y \text{ und } k < j_{y+1} \\ X_{j_y} X_{j_{y+1}} & \text{falls } k-1 < j_y \end{cases}$$

Die letzten Ausdrücke der Umformungen des Produktes dieser drei Faktoren zeigen jeweils, dass es in B_n liegt. Leicht ist nun einzusehen, dass (in allen drei Fällen) das Produkt von X_k und $X_{J_1 \dots J_r}$ in B_n liegt:

$$\begin{aligned} X_k X_{J_1 \dots J_r} &= X_{J_1 \dots J_{y-1}} X_k X_{j_y} X_{j_{y+1}} X_{j_{y+2} \dots J_r} \\ &= \begin{cases} X_{J_1 \dots J_{y-1}} X_{\{k\} \cup J_y} X_{j_{y+2} \dots J_r} & \text{falls } k-1 = j_y \text{ und } k = j_{y+1} \\ X_{J_1 \dots J_{y-1}} X_{\{k\} \cup J_y} X_{j_{y+1}} X_{j_{y+2} \dots J_r} & \text{falls } k-1 = j_y \text{ und } k < j_{y+1} \\ X_{J_1 \dots J_{y-1}} X_{j_y} X_{j_{y+1}} X_{j_{y+2} \dots J_r} & \text{sonst, d.h. } k-1 < j_y \end{cases} \end{aligned}$$

2. Fall: $k-1 \notin \bigcup_{x=1}^r J_x$

2.1. Fall: $k \in \bigcup_{x=1}^r J_x$ Jetzt sei $y \in \underline{r}$ minimal mit $k \in J_y$. Wie im ersten Fall enthalten J_1, \dots, J_{y-1} nicht $k+1$. Da sie wegen der Minimalität von y auch k und nach der Annahme ebensowenig $k-1$ enthalten, kommutieren X_k und $X_{J_1 \dots J_{y-1}}$. Danach wird X_k von X_{j_y} getilgt:

$$X_k X_{J_1 \dots J_r} = X_{J_1 \dots J_{y-1}} X_k X_{j_y} X_{j_{y+1}} X_{j_{y+2} \dots J_r} = X_{J_1 \dots J_{y-1}} X_{j_{y+1}} X_{j_{y+2} \dots J_r} = X_{J_1 \dots J_r} \in B_n$$

2.2. Fall: $k \notin \bigcup_{x=1}^r J_x$

2.2.1. Fall: $k+1 \in \bigcup_{x=1}^r J_x$ Es sei hier $y \in \underline{r}$ minimal mit $k+1 \in J_y$. Weil k insbesondere nicht in J_y liegt, muss $k+1$ die untere Intervallgrenze von J_y sein. Da k und $k-1$ nicht in J_1, \dots, J_{y-1} liegen und $k+1$ wegen der Minimalität von y ebensowenig, kommutiert X_k mit $X_{J_1 \dots J_{y-1}}$, wird danach aber nicht von X_{j_y} getilgt:

$$X_k X_{J_1 \dots J_r} = X_{J_1 \dots J_{y-1}} X_k X_{j_y} X_{j_{y+1}} X_{j_{y+2} \dots J_r}$$

Dies liegt in B_n wegen $i_{y-1} \leq j_{y-1} < k-1 < k < k+1 = i_y \leq j_y$.

2.2.2 Fall: $k+1 \notin \bigcup_{x=1}^r J_x$ In diesem Fall kommutiert X_k mit allen X_{J_x} . Wir setzen $j_0 := 0$ und $j_{r+1} := n+1$. Wählen wir dann $y \in \underline{r}_0$ maximal mit $j_y < k$, so ist $k \leq j_{y+1}$, also $j_{y+1} > k$. Da $i_{y+1} \leq k$ im Widerspruch zur Annahme stünde, gilt also:

$$X_k X_{J_1 \dots J_r} = X_{J_1 \dots J_{y-1}} X_k X_{j_y} X_{j_{y+1}} X_{j_{y+2} \dots J_r} \in B_n$$

Zu (II): Wir bezeichnen die injektiv unzerlegbare Q_n -Darstellung an der Stelle $k \in \underline{n}$ mit I_k und mit I_0 die triviale Darstellung 0. Es ist dann $I_k = U_{1,k}$:

$$\mathcal{K} \xrightarrow{1} \mathcal{K} \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} \underset{k\text{-te Stelle}}{\mathcal{K}} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \dots \quad 0$$

Der Sockel von I_k ist genau S_k und damit gilt $I_k \mathbf{P}_k = I_k/S_k = I_{k-1}$ sowie $I_k \mathbf{P}_m = I_k$ für alle $m \in \underline{n} \setminus \{k\}$. Für ein Intervall $J = \{m, m-1, \dots, j\}$ und alle $k \in J$ verallgemeinert sich dies zu

$$I_k \mathbf{P}_J = I_k \mathbf{P}_{m \dots k+1 \cdot k \cdot k-1 \dots j} = I_k \mathbf{P}_{k \cdot k-1 \dots j} = I_{k-1} \mathbf{P}_{k-1 \dots j} = I_{k-2} \mathbf{P}_{k-2 \dots j} = \dots = I_j \mathbf{P}_j = I_{j-1},$$

während für alle $x \notin J$ wie schon erwähnt $I_x \mathbf{P}_J = I_x$ gilt.

Dies wiederum ist der Induktionsanfang einer Induktion nach r für die Berechnung von $I_k \mathbf{P}_{J_1 \dots J_r}$ für beliebige Intervalle $J_1 < \dots < J_r$ in \underline{n} mit zugehörigen Intervallgrenzen $i_x \leq j_x$ für jedes Intervall J_x :

$$I_k \mathbf{P}_{J_1 \dots J_r} = \begin{cases} I_{i_y-1} & \text{falls } k \in \bigcup_{x=1}^r J_x \text{ und } y \in \underline{r} \text{ minimal mit } k \in J_y \\ I_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere gilt $I_{j_x} \mathbf{P}_{J_1 \dots J_r} = I_{i_x-1}$ wegen $J_1 < \dots < J_{x-1} < J_x$ für jedes $x \in \underline{r}$.

Es seien nun $(J_1, \dots, J_r) \neq (L_1, \dots, L_s) \in \mathcal{P}_n$ mit den Intervallgrenzen $i_x \leq j_x$ für die J_x und $k_y \leq l_y$ für die L_y . Es sei weiter o.B.d.A. $y \in \underline{r}$ minimal, so dass J_y von L_1, \dots, L_s verschieden ist. Zunächst betrachten wir I_{j_y} und halten fest, dass $I_{j_y} \mathbf{P}_{J_1 \dots J_r} = I_{i_y-1}$ gilt. Ferner wissen wir:

$$I_{j_y} \mathbf{P}_{L_1 \dots L_s} = \begin{cases} I_{k_z-1} & \text{falls } j_y \in \bigcup_{x=1}^s L_x \text{ und } z \in \underline{s} \text{ minimal mit } j_y \in L_z \\ I_{j_y} & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $j_y \notin \bigcup_{x=1}^s L_x$, so folgt, die Ungleichung $i_y - 1 < i_y \leq j_y$ berücksichtigend, dass $\mathbf{P}_{J_1 \dots J_r} \neq \mathbf{P}_{L_1 \dots L_s}$ gilt.

Es gelte jetzt $j_y \in \bigcup_{x=1}^s L_x$. Da sich im Fall $k_z \neq i_y$ auch sofort $\mathbf{P}_{J_1 \dots J_r} \neq \mathbf{P}_{L_1 \dots L_s}$ ergibt, nehmen wir zusätzlich an, dass $k_z = i_y$ gilt. Dann muss $l_z > j_y$ gelten, da nach der Wahl von y insbesondere $L_z \neq J_y$, also $l_z \neq j_y$ gilt und die Annahme $l_z < j_y$ die der Wahl von z widersprechende Folge $j_y \notin L_z$ hätte. Nun unterscheiden sich $\mathbf{P}_{J_1 \dots J_r}$ und $\mathbf{P}_{L_1 \dots L_s}$ nicht auf I_{j_y} aber auf I_{l_z} :

$$\begin{aligned} I_{l_z} \mathbf{P}_{L_1 \dots L_s} &= I_{k_z-1} = I_{i_y-1} \\ &\neq \begin{cases} I_{i_a-1} & \text{falls } l_z \in \bigcup_{x=1}^r J_x \text{ und } a \in \underline{r} \text{ minimal mit } l_z \in J_a \\ I_{l_z} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= I_{l_z} \mathbf{P}_{J_1 \dots J_r} \end{aligned}$$

Im ersten Fall gilt die Ungleichheit, weil $J_y < J_a$ und damit insbesondere $i_y < i_a$ gilt, was aus der Vergleichbarkeit von J_y und J_a und $j_y < l_z \leq j_a$ folgt. Im zweiten gilt sie wegen $i_y - 1 = k_z - 1 < l_z$.

Zur Dimension: Eine Basis von \mathcal{B}_n wird nach (I) und (II) durch die Menge derjenigen Wörter w über \underline{n} gezählt, in denen je drei aufeinanderfolgende Buchstaben paarweise verschieden sind. Da weiter die Relation $X_i X_j = X_j X_i$ für $i, j \in \underline{n}$ mit $|i - j| > 2$ in \mathcal{B}_n gilt, hat \mathcal{B}_n nach Übungsaufgabe 6.19.aa. in [Sta99] genau C_{n+1} ($(n+1)$ -te Catalan-Zahl) viele Elemente. Es gilt deshalb:

$$\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}_n = C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1}$$

□

Es gibt noch eine weitere, prominente Algebra über \mathcal{K} der Dimension C_{n+1} , die auch ein Quotient der 0-Hecke-Algebra vom Typ A_n ist, nämlich die Temperley-Lieb-Algebra $TL_{\beta,n}$. Diese ist durch Erzeuger T_1, \dots, T_n und Relationen:

- $T_i^2 = T_i$ für alle $i \in \underline{n}$
- $\beta T_i T_j T_i = T_i$ für alle $i, j \in \underline{n}$ mit $|i - j| = 1$
- $T_i T_j = T_j T_i$ für alle $i, j \in \underline{n}$ mit $|i - j| > 1$

für einen Parameter $0 \neq \beta \in \mathcal{K}$ definiert (s. [GdlHJ89]). Es gilt jedoch:

3.3 Korollar. *Es sei \mathcal{K} ein Körper und $\beta \in \mathcal{K}$. Für alle $n \geq 2$ sind die \mathcal{K} -Algebren \mathcal{A}_n und $TL_{\beta,n}$ nicht isomorph.*

Beweis: Wären die Temperley-Lieb-Algebra $TL_{\beta,n}$ und die Monoidalgebra $\mathcal{A}_n \cong \mathcal{B}_n$ isomorph, so besäßen sie insbesondere die gleichen einfachen Rechtsmoduln. Wie man leicht nachrechnet, hat $TL_{\beta,n}$ aber nur 2 eindimensionale Rechtsmoduln, während \mathcal{B}_n genau 2^n eindimensionale Rechtsmoduln besitzt (vgl. Satz 2.10). □

Wie im zweiten Kapitel gesehen, ist für jeden vollen Unterköcher K von Q_n die Algebra \mathcal{B}_K eine Unter algebra von \mathcal{B}_Q . Der Beweis über die Normalform von \mathcal{B}_n zeigt, dass auch die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_K$ der Projektionsfunktoren \mathbb{P}_k mit $k \in K_0$ als eine Unter algebra von $\mathcal{K}\pi_{Q_n}$ aufgefasst werden kann:

3.4 Proposition. *Es sei \mathcal{K} ein Körper und Q ein endlicher Köcher mit m Zusammenhangskomponenten $Q(1), \dots, Q(m)$. Jede Zusammenhangskomponente $Q(j)$ sei ein linear orientierter Dynkin-Köcher vom Typ A_{m_j} , also $Q(j) = Q_{m_j}$. Dann sind \mathcal{B}_Q und $\mathcal{K}\pi_Q$ isomorph. Eine Normalform wird durch $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{m_1} \times \mathcal{P}_{m_2} \times \dots \times \mathcal{P}_{m_r}$ gezählt und es gilt:*

$$\mathcal{B}_Q \cong \mathcal{B}_{m_1} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_{m_2} \otimes_{\mathcal{K}} \dots \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_{m_r}$$

Beweis: Nach dem Satz 3.2 haben wir Normalformen von den Zusammenhangskomponenten. Wir bezeichnen eine Kette $J_1 < \dots < J_s \in \mathcal{P}_{m_k}$ nur mit $J^k \in \mathcal{P}_{m_k}$. Offensichtlich ist die Menge $\{X_{J^1} X_{J^2} \dots X_{J^r} \mid J^k \in \mathcal{P}_{m_k}\}$ multiplikativ abgeschlossen und enthält alle Erzeuger von \mathcal{B}_Q sowie X_\emptyset . Sind ferner (J^1, \dots, J^r) und (L^1, \dots, L^s) verschiedene Tupel in $\mathcal{P}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{m_r}$, so gibt es $k \in \underline{r}$ mit $J^k \neq L^k$, also eine $Q(j)$ -Darstellung U , auf der sich die Projektionsfunktoren P_{J^k} und P_{L^k} unterscheiden. Dann gibt es auch eine Q -Darstellung \widehat{U} , auf der sich P_{J^1, \dots, J^r} und P_{L^1, \dots, L^s} unterscheiden (Zur Definition von \widehat{U} siehe Kapitel 4, Seiten 110ff). \square

Insbesondere ist für jede Teilmenge M von \underline{n} die Algebra $\mathcal{K}\pi_{Q_M} \cong \mathcal{B}_{Q_M}$ eine Unter- algebra von \mathcal{A}_n , wobei wie im zweiten Kapitel Q_M der volle Unterköcher von Q_n mit der Punktmenge M sei. Wir bezeichnen mit \mathcal{A}_M die Algebra $\mathcal{K}\pi_{Q_M}$. Die Algebra \mathcal{A}_k ist als $\mathcal{A}_{k|}$ eine Unter- algebra von \mathcal{A}_n für alle $k \leq n$. Speziell erhalten wir eine Kette von Algebren:

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} \subset \mathcal{A}_{n+2} \dots$$

Beweisen wir Eigenschaften spezieller Elemente in \mathcal{A}_n per Induktion nach n , so führen wir die Rechnungen in der Algebra \mathcal{A}_x mit dem größten auftretenden Index x . (Im Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ ist x meistens $n + 1$.) Diese Konvention berücksichtigend schreiben wir Identitäten in den P_i ohne Angabe in welcher Algebra \mathcal{A}_k sie gelten.

Wir haben im zweiten Kapitel allgemein das Radikal von $\mathcal{B}_n \cong \mathcal{A}_n$ berechnet:

3.5 Proposition. *Es sei \mathcal{K} ein Körper. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das Radikal von \mathcal{A}_n gerade*

$$\text{Rad}(\mathcal{A}_n) = \left\{ \sum_{J_1 < \dots < J_r} c_{J_1 \dots J_r} P_{J_1 \dots J_r} \in \mathcal{A}_n \mid \forall M \subseteq \underline{n} : \sum_{\substack{L_1 < \dots < L_s \\ M = L_1 \cup \dots \cup L_s}} c_{L_1 \dots L_s} = 0 \in \mathcal{K} \right\}.$$

Damit ist etwa

$$\{P_M - P_{J_1 \dots J_r} \mid M \subseteq \underline{n}, \quad r \geq 2, \quad J_1 < \dots < J_r, \quad J_1 \cup \dots \cup J_r = M\}$$

eine \mathcal{K} -Basis des Radikals, welches damit die Dimension $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{A}_n - 2^n$ hat.

3.3 Eine Produktformel bestimmter Basiselemente

Ein Monom P_v in Normalform (was wir ab jetzt mit $P_v \in B_n$ notieren) ist nach dem letzten Unterabschnitt ein Produkt in den P_J für Intervalle J von \underline{n} . Wir sehen uns zunächst die Normalform des Produktes $P_J P_L$ für beliebige nichtleere Intervalle J und L von \underline{n} an. Danach berechnen wir das Produkt von $P_J P_v$ und beleuchten anschließend einen Teil der Idealstruktur von \mathcal{A}_n . Dieser Unterabschnitt ist für unseren Beweis des Hauptresultats nicht notwendig.

Bemerkung 1: Es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie J und L nichtleere Intervalle in \underline{n} . Dann gilt:

$$P_J P_L = \begin{cases} P_{J.L} & \text{falls } J < L \\ P_{L.J} & \text{falls } L < J \text{ sowie } J \cap (L+1) = \emptyset \\ P_{(J \cup L)} & \text{falls } L < J \text{ sowie } J \cap (L+1) \neq \emptyset \text{ oder } J \not\ll L \text{ oder } J = L \end{cases}$$

Beweis: Es sei $L < J$. Ist der Abstand zwischen den Intervallen J und L mindestens 2, gilt also zudem $J \cap (L+1) = \emptyset$, so kommutieren P_J und P_L . (Beispielsweise gilt: $P_{6543} P_1 = P_1 P_{6543}$.)

Ist hingegen der Abstand kleiner als 2 oder überschneiden sich die Intervalle, gilt also $J \cap (L+1) \neq \emptyset$, so kommutieren P_J und P_L nicht. Eine leichte Fallunterscheidung danach, ob der Durchschnitt von J und L leer ist oder nicht, zeigt dann: $P_J P_L = P_{J \cup L}$. (Beispielsweise gelten: $P_{6543} P_{4321} = P_{654321} = P_{6543} P_{21}$.)

Die Idempotenz der Monome P_J berücksichtigend erhalten wir die folgende detaillierte Fallunterscheidung für das Produkt $P_J P_L$:

$$P_J P_L = \begin{cases} P_{J.L} & \text{falls } J < L \\ P_{L.J} & \text{falls } L < J \text{ sowie } J \cap (L+1) = \emptyset \\ P_{(J \cup L)} & \text{falls } L < J \text{ sowie } J \cap (L+1) \neq \emptyset \\ P_J & \text{falls } L \subset J \\ P_L & \text{falls } J \subset L \\ P_J = P_L, & \text{falls } J = L \end{cases}$$

Weil nun J und L genau dann unvergleichbar sind, wenn L echt in J liegt oder J echt enthält, lassen sich die letzten vier Fälle der detaillierten Fallunterscheidung zum letzten Fall in der Bemerkung zusammenfassen. □

Sind nun $P_v \in \mathcal{B}_n$ und J ein nichtleeres Intervall, so gibt es für die Darstellung der Normalform des Produktes $P_J P_v$ eindeutig bestimmte Intervalle $J_1 < \dots < J_r$ in \underline{n} mit:

$$P_J P_v = P_{J_1 \dots J_r} \in \mathcal{B}_n$$

Aus der nächsten Proposition folgt, dass dann J eine Teilmenge eines J_i für ein $i \in \underline{r}$ ist.

3.6 Proposition. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle Intervalle J und $L_1 < \dots < L_s$ in \underline{n} setzen wir $L_0 := \emptyset =: L_{s+1}$ und definieren Indizes $y = y(J, L_1, \dots, L_s)$ und $z = z(J, L_1, \dots, L_s)$ in \underline{s} durch:*

$$y = \begin{cases} \max \{x \in \underline{s} \mid J > L_x \text{ und } J \cap (L_x + 1) = \emptyset\} & \text{falls } L_1 < J \text{ und } J \cap (L_1 + 1) = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$z = \begin{cases} y + 1 & \text{falls } J < L_{y+1} \\ \min \{x \in \{y + 2, \dots, s\} \mid L_{y+1} \cup J < L_x\} & \text{falls } J \not< L_{y+1} \text{ und } J \cup L_{y+1} < L_s \\ s + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für das Produkt:

$$\begin{aligned} P_J P_{L_1 \dots L_s} &= P_{L_1 \dots L_y (J \cup \bigcup_{i=y+1}^{z-1} L_i) L_z \dots L_s} \\ &= \begin{cases} P_{L_1 \dots L_y J L_{y+1} \dots L_s} & \text{falls } J < L_{y+1} \\ P_{L_1 \dots L_y (J \cup L_{y+1}) L_z \dots L_s} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Das y gibt also an, mit wievielen der ersten P_{L_i} das Monom P_J vertauscht. Dann trifft das Monom P_J auf das Monom $P_{L_{y+1}}$, mit dem es sich entweder zu einem größeren Block „verbündet“ und eventuell darauffolgende „frisst“ (wenn $z > y + 2$), oder von dem es „gefressen“ wird (wenn $z = y + 2$). Nach diesem Prozess (das gibt z vor) stößt P_J auf seine durch die Vergrößerung eventuell veränderte Grenze P_{L_z} , an der es nicht „vorbeikommt“. Die folgenden Beispiele illustrieren, was dem Monom $P_{432.54.8765} \in \mathcal{A}_9$ „passieren“

kann:

$$P_1 P_{432.54.8765} = P_{1.432.54.8765}$$

$$P_{54} P_{432.54.8765} = P_{5432.8765}$$

$$P_{76} P_{432.54.8765} = P_{432.7654.8765}$$

$$P_{98765} P_{432.54.8765} = P_{98765432}$$

Vorbemerkung: (a) Die Bedingung $L_1 < J$ und $J \cap (L_1 + 1) = \emptyset$ ist äquivalent zur Existenz des Maximums in der Definition von y .

(b) Falls $J < L_{y+1}$ gilt, so ist i.A. $J \cup L_{y+1}$ kein Intervall.

Gilt jedoch $J \not< L_{y+1}$, so folgt aus der Wahl von y im Fall $L_{y+1} < J$ gerade $J \cap (L_{y+1} + 1) \neq \emptyset$, womit die Vereinigung $J \cup L_{y+1}$ wieder ein Intervall ist. Im Fall $L_{y+1} \not< J$ ist $J \cup L_{y+1} \in \{J, L_{y+1}\}$ auch ein Intervall.

Gilt also $J \not< L_{y+1}$, so ist $J \cup L_{y+1} < L_s$ wohldefiniert und äquivalent zur Existenz des Minimums in der Definition von z .

(c) Es gilt $J < L_{y+1}$ genau dann, wenn $z = y + 1$ und $y < s$ gelten.

Beweis: Wir führen eine Induktion nach s und zeigen zusätzlich (per Induktion nach s):

$$(*) \quad J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t = \begin{cases} J & \text{falls } J < L_{y+1} \\ J \cup L_{y+1} & \text{falls } J \not< L_{y+1} \end{cases}$$

Den Beweis für $s = 1$ haben wir im Prinzip in Bemerkung 1 geführt. Es bleibt noch das y bzw. z in den einzelnen Fällen korrekt zu bestimmen und dann den Ausdruck $P_{L_1 \dots L_y (J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t) L_z \dots L_s}$ sowie $J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t$ zu berechnen.

Es seien nun $s \geq 1$, J ein nichtleeres Intervall in \underline{n}_j und $L_1 < \dots < L_s < L_{s+1}$ Intervalle in \underline{n}_j mit den Intervallgrenzen $i \leq j$ bzw. $k_x \leq l_x$. Mit $v := y(J, L_1, \dots, L_s)$ und $w := z(J, L_1, \dots, L_s)$ können wir nach der Induktionsvoraussetzung das folgende Produkt berechnen:

$$X := P_J P_{L_1 \dots L_s} = P_{L_1 \dots L_y (J \cup \bigcup_{t=v+1}^{w-1} L_t) L_w \dots L_s}$$

Ferner seien $y := y(J, L_1, \dots, L_{s+1})$ und $z := z(J, L_1, \dots, L_{s+1})$. Außerdem setzen wir noch:

$$Y := P_{L_1 \dots L_y (J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t) L_z \dots L_{s+1}}$$

Für die weitere Berechnung unterscheiden wir, ob $L_w \dots L_s$ das leere Wort \emptyset ist, also $w = s + 1$ gilt, oder nicht.

1. Fall: $L_w \dots L_s \neq \emptyset$ Das Produkt X endet also mit P_{L_s} . Aus $L_s < L_{s+1}$ folgt dann:

$$P_{L_s} P_{L_{s+1}} = P_{L_s L_{s+1}}$$

Es bleibt also $y = v$ und $z = w$ zu zeigen. Daraus folgt (*) dann nach Induktionsvoraussetzung.

Zu $y = v$: Ist $v = 0$, so existiert das Maximum (bez. J, L_1, \dots, L_s) also nicht. Das ist, wie in der Vorbemerkung aufgeführt, äquivalent zu einer Bedingung über J und L_1 und somit unabhängig von s , weshalb auch $y = 0$ gilt.

Es sei nun $v > 0$. Aus $w \leq s$ und $w \in \{v + 1, \dots, s + 1\}$ folgt insbesondere $v + 1 \leq s$, also $v < s$. Damit ist v auch maximal in $\underline{s+2}$ mit $J > L_v$ und $J \cap (L_v + 1) = \emptyset$, d.h. $v = y(J, L_1, \dots, L_{s+1})$.

Zu $z = w$: Gilt $J < L_{v+1} = L_{y+1}$, so haben wir: $z = y + 1 = v + 1 = w$.

Es gelten jetzt $J \not< L_{v+1} (= L_{y+1})$ und $J \cup L_{v+1} < L_s (< L_{s+1})$. Somit gilt für die Berechnung von z der zweite Fall. Dieser gilt aber auch für die Berechnung von w , was insbesondere bedeutet, dass das Minimum in \underline{s} liegt. Es folgt: $z = w$.

Gälte schließlich $J \not< L_{v+1} (= L_{y+1})$ und $J \cup L_{v+1} \not< L_s (< L_{s+1})$, also der dritte Fall zur Berechnung von w , so stünde $w = s + 1$ im Widerspruch zu $L_w \dots L_s \neq \emptyset$, was ja äquivalent zu $w \leq s$ ist. Also tritt dieser Fall nie ein.

2. Fall: $L_w \dots L_s = \emptyset$ Wir setzen $M_x := L_x$ für jedes $x \in \underline{s}$. Dann ist selbstverständlich $v = y(J, M_1, \dots, M_s)$ und $w = z(J, M_1, \dots, M_s)$. Unter der Berücksichtigung der Konvention $M_{s+1} = \emptyset = M_0$ erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung:

$$J \cup \bigcup_{t=v+1}^{w-1} M_t = \begin{cases} J & \text{falls } J < M_{v+1} \\ J \cup M_{v+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Teil (c) der Vorbemerkung stünden die Bedingungen $J < M_{v+1}$, $w = v + 1$ und $v < s$ im Widerspruch zu der Voraussetzung dieses Falls, dass $L_w \dots L_s$ das leere Wort ist, also $w = s + 1$ gilt. Demnach gilt jetzt stets $J \not< M_{v+1}$.

2.1. Fall: $v < s$ Insbesondere ist M_{v+1} nichtleer. Es gilt:

$$X P_{L_{s+1}} = P_{M_1 \dots M_v (J \cup \bigcup_{t=v+1}^s M_t)} P_{L_{s+1}}$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung nach (fast) den gleichen Fällen durch, wie sie für das $P_{(J \cup M_{v+1})} P_{L_{s+1}}$ nach der Bemerkung 1 (s. S. 54) sinnvoll sind und vergleichen $XP_{L_{s+1}}$ mit Y . Wir werden zeigen, dass gilt:

$$\begin{aligned} P_J P_{L_1 \dots L_{s+1}} &= P_{L_1 \dots L_v (J \cup L_{v+1})} P_{L_{s+1}} \\ &= \begin{cases} P_{L_1 \dots L_v (J \cup L_{v+1}) L_{s+1}} & \text{falls } J \cup L_{v+1} < L_{s+1} \\ P_{L_1 \dots L_v L_{s+1} (J \cup L_{v+1})} & \text{falls } J \cup L_{v+1} \not< L_{s+1}, J \cup L_{v+1} \cap L_{s+1} + 1 = \emptyset \\ P_{L_1 \dots L_v (J \cup L_{v+1} \cup L_{s+1})} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei tritt der zweite Fall nicht auf.

2.1.1 Fall: $J \cup M_{v+1} < L_{s+1}$ Dann gilt: $P_{(J \cup M_{v+1})} P_{L_{s+1}} = P_{(J \cup M_{v+1}) \cdot L_{s+1}}$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass $y = v$ und $z = s + 1$ gelten. Daraus folgt dann nämlich die Behauptung:

$$Y = P_{L_1 \dots L_v (J \cup \bigcup_{t=y+1}^s L_t) L_{s+1} \dots L_{s+1}} = XP_{L_{s+1}}$$

Außerdem folgt dann auch (*) wegen

$$J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t = J \cup \bigcup_{t=v+1}^{s=w-1} M_t$$

Ist $v = 0$, so existiert das Maximum ebensowenig bez. J, L_1, \dots, L_{s+1} , weshalb auch $y = 0$ gilt. Es sei nun $v \neq 0$. Damit existiert also das Maximum bez. J, M_1, \dots, M_s . Nun gilt $L_{s+1} \not< J$, weil für die oberen Intervallgrenzen gilt:

$$j \leq \max(J \cup M_{v+1} < l_{s+1})$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} y &= \max \left\{ x \in \underline{s+1} \mid J > L_x \text{ und } J \cap (L_x + 1) = \emptyset \right\} \\ &= \max \left\{ x \in \underline{s} \mid J > M_x \text{ und } J \cap (M_x + 1) = \emptyset \right\} \\ &= v \end{aligned}$$

Für die Berechnung von z erinnern wir daran, dass wegen $w = s + 1$ für die Berechnung von w der dritte Fall genommen werden musste. Somit existiert das Minimum bez. $J, M_1 = L_1, \dots, M_s = L_s$ nicht. Weiter ist $y + 1 = v + 1 \leq s$ nach Annahme über v , woraus $J \not< M_{v+1} = L_{v+1}$ folgt. Da ferner $J \cup L_{v+1} = J \cup M_{v+1} < L_{s+1}$ nach dem hiesigen Fall gilt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} z &= \min \left\{ x \in \{y + 2, \dots, s + 1\} \mid J \cup L_{y+1} < L_x \right\} \\ &= \min \left\{ x \in \{s + 1\} \mid L_{y+1} \cup J < L_x \right\} \\ &= s + 1 \end{aligned}$$

2.1.2 Fall: $J \cup M_{v+1} \succ L_{s+1}$ Es gilt also insbesondere für die unteren Intervallgrenzen:

$$(k_{v+1} \geq) \min(i, k_{v+1}) > k_{s+1}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $L_{v+1} < L_{s+1}$. Dieser Fall tritt also nicht auf.

2.1.3 Fall: $J \cup M_{v+1} \not\prec L_{s+1}$ oder $J \cup M_{v+1} = L_{s+1}$ Dann gilt: $\mathbf{P}_{(J \cup M_{v+1})\mathbf{P}_{L_{s+1}}} = \mathbf{P}_{(J \cup M_{v+1} \cup L_{s+1})}$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass $y = v$ und $z = s + 2$ gelten. Daraus folgt dann nämlich die Behauptung:

$$Y = \mathbf{P}_{L_1 \dots L_v (J \cup \bigcup_{t=v+1}^{s+1} L_t) L_{s+2} \dots L_{s+1}} = X \mathbf{P}_{L_{s+1}}$$

Außerdem folgt dann (*) aus

$$\begin{aligned} J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t &= J \cup L_{v+1} \cup \dots \cup L_s \cup L_{s+1} \\ &= J \cup \bigcup_{t=v+1}^{s+1} M_t \cup L_{s+1} \\ &= J \cup M_{v+1} \cup L_{s+1}. \end{aligned}$$

Zu $y = v$: Ist $v = 0$, so existiert das Maximum ebensowenig bez. J, L_1, \dots, L_{s+1} , weshalb auch $y = 0$ gilt.

Es sei nun $v \neq 0$. Damit existiert also das Maximum bez. J, M_1, \dots, M_s und somit auch bez. J, L_1, \dots, L_{s+1} . Nach Definition von y gilt $v = y$ genau dann, wenn $J \not\prec L_{s+1}$ oder $J \cap L_{s+1} + 1 \neq \emptyset$ gelten.

Im Fall $J \cup M_{v+1} \subseteq L_{s+1}$ gilt insbesondere $J \subseteq L_{s+1}$, was wiederum $J \not\prec L_{s+1}$, also $v = y$, nach sich zieht.

Andernfalls gilt $L_{s+1} \subset J \cup M_{v+1}$. Wegen $v < s$ gilt ferner $J \not\prec L_s$ oder $J \cap L_s + 1 \neq \emptyset$.

Es gelte zunächst $J \not\prec L_s$. Dann führt die Annahme $J > L_{s+1}$ direkt zu dem Widerspruch $J > L_{s+1} > L_s$. Deshalb gilt $J \not\prec L_{s+1}$, also $v = y$.

Es gelte jetzt $J > L_s$, also $J \cap L_s + 1 \neq \emptyset$. Angenommen, es gilt sowohl $J > L_{s+1}$ als auch $J \cap L_{s+1} + 1 = \emptyset$, was äquivalent zu $l_{s+1} + 1 < i$ ist. Dann folgt $l_s + 1 < l_{s+1} + 1 < i$. Dies ist wiederum äquivalent zu $J > L_s$ und $J \cap L_s + 1 = \emptyset$ und widerspricht der Voraussetzung $v < s$. Somit gilt also $v = y$.

Zu $z = s + 2$: Wegen $w = s + 1$ kommt der erste Fall für die Berechnung von z nicht in Frage. Ebensovienig wird z nach dem zweiten Fall berechnet, da $J \cup L_{y+1} = J \cup M_{v+1} \not\parallel L_{s+1}$ gilt. Also wird z nach dem dritten Fall berechnet, d.h. es gilt $z = (s + 1) + 1$.

2.2 Fall: $v = s$ Insbesondere ist $M_{v+1} = M_{s+1}$ die leere Menge und es gilt:

$$\begin{aligned} XP_{L_{s+1}} &= P_J P_{L_1 \dots L_s} P_{L_{s+1}} = P_J P_{M_1 \dots M_s} P_{L_{s+1}} \\ &= P_{M_1 \dots M_s (J \cup \bigcup_{t=s+1}^s M_t)} P_{L_{s+1}} \\ &= P_{M_1 \dots M_s J} P_{L_{s+1}} \end{aligned}$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung nach (fast) den gleichen Fällen durch, wie sie in dem Produkt von $P_J P_{L_{s+1}}$ sinnvoll sind und vergleichen wieder $XP_{L_{s+1}}$ und Y .

2.2.1 Fall: $J < L_{s+1}$ Dann gilt: $P_J P_{L_{s+1}} = P_{J L_{s+1}}$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass $y = v = s$ und $z = y + 1 = s + 1$ gelten. Daraus folgt dann nämlich:

$$Y = P_{L_1 \dots L_s (J \cup \bigcup_{t=s+1}^s L_t) L_{s+1} \dots L_{s+1}} = XP_{L_{s+1}}$$

Außerdem ergibt sich in diesem Fall (*) damit direkt:

$$J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t = J \cup \bigcup_{t=s+1}^s L_t = J$$

Wegen $v = s > 0$ existiert das Maximum auch bez. J, L_1, \dots, L_{s+1} und es gilt:

$$y = \max \{x \in \{s, s + 1\} \mid J > L_x \wedge J \cap (L_x + 1) = \emptyset\} = s$$

Nach Definition von z ergibt sich daraus $z = s + 1$.

2.2.2 Fall: $J > L_{s+1}$ und $J \cap (L_{s+1} + 1) = \emptyset$ Dann gilt: $P_J P_{L_{s+1}} = P_{L_{s+1} J}$. Die Bedingung dieses Falls besagt gerade, dass das Maximum zur Berechnung von y in $s + 1$ angenommen wird. Weiter folgt aus ihr, dass der erste und zweite Fall für die Berechnung von z nicht in Frage kommen, weswegen $z = s + 2$ gilt. Es folgt:

$$Y = P_{L_1 \dots L_{s+1} (J \cup \bigcup_{t=s+2}^{s+1} L_t) L_{s+2} \dots L_{s+1}} = XP_{L_{s+1}}$$

und

$$J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t = J \cup \bigcup_{t=s+2}^{s+1} L_t = J = J \cup L_{y+1}$$

2.2.3 Fall: $J > L_{s+1}$ sowie $J \cap (L_{s+1} + 1) \neq \emptyset$ oder $J \nparallel L_{s+1}$ oder $J = L_{s+1}$ Dann gilt:
 $P_J P_{L_{s+1}} = P_{J \cup L_{s+1}}$. Wegen $v = s > 0$ gilt weiter:

$$y = \max \{x \in \{s, s + 1\} \mid J > L_x \wedge J \cap (L_x + 1) = \emptyset\}$$

Dabei kann in allen Fällen das Maximum nicht in $s + 1$ angenommen werden. Es gilt also $y = s$. Zudem gilt dann in allen Fällen $J < L_{y+1} = L_{s+1}$ offensichtlich nicht. Zudem kommt der zweite Fall für die Berechnung von z auch nicht in Frage, weil $J \cup L_{s+1} < L_{s+1}$ nicht gilt. Damit haben wir $z = (s + 1) + 1$. Es folgt:

$$Y = P_{L_1 \dots L_s (J \cup \bigcup_{t=s+1}^{s+1} L_t) L_{s+2} \dots L_{s+1}} = X P_{L_{s+1}}$$

und

$$J \cup \bigcup_{t=y+1}^{z-1} L_t = J \cup \bigcup_{t=s+1}^{s+1} L_t = J \cup L_{y+1}$$

□

Folgerung: Es seien $n \in \mathbb{N}$, $J_1 < \dots < J_r$ und J Intervalle in \underline{n} sowie v und w Wörter über \underline{n} mit:

$$P_v P_J P_w = P_{J_1 \dots J_r}$$

Dann gibt es einen Index $k \in \underline{r}$ mit $J \subseteq J_k$.

Beweis: Stellen wir auch die Monome P_v und P_w in Normalform dar, so folgt die Behauptung aus einer sukzessiven Anwendung der letzten Proposition. □

Es sei \mathcal{J}_M das von P_M erzeugte Ideal von \mathcal{A}_n . Offensichtlich gilt dann

$$\mathcal{J}_M = \left\langle P_v P_M P_w \mid w, v \text{ Wörter über } \underline{n} \right\rangle_{\mathcal{K}}$$

Außerdem definieren wir für alle Intervalle $J_1 < \dots < J_r$ in \underline{n} den folgenden Unterraum:

$$\mathcal{J}_{J_1, \dots, J_r} := \left\langle P_{L_1 \dots L_s} \in \mathcal{B}_n \mid \exists x_1, \dots, x_r \in \underline{s} : \forall t \in \underline{r} : J_t \subseteq L_{x_t} \right\rangle_{\mathcal{K}}$$

Nach der Folgerung ist auch $\mathcal{J}_{J_1, \dots, J_r}$ ein Ideal von \mathcal{A}_n .

Für die Konstruktion von Idempotenten und den Beweis des Hauptresultats sind die im Folgenden definierten Ideale hilfreich. (Wir begegnen ihnen in den folgenden Unterabschnitten wieder.)

3.7 Definition. Es seien \mathcal{K} ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \underline{n}_0$. Das von $\{P_J \mid J \subseteq \underline{n} \text{ mit } |J| = k\}$ erzeugte Ideal in \mathcal{A}_n bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_k^{(n)}$.

Das Verhältnis dieser drei Typen von Idealen beschreibt das nächste Korollar.

3.8 Korollar. Es seien \mathcal{K} ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \underline{n}$. Es sei weiter S die Summe der Ideale \mathcal{J}_M mit $|M| = k$. Ferner sei T die Summe der Ideale $\mathcal{J}_{J_1, \dots, J_r}$ für Teilmengen $J_1 < \dots < J_r$ von \underline{n} mit $|\bigcup_{i=1}^r J_i| = k$ und $\max J_i + 1 < \min J_{i+1}$ für alle $i \in \underline{r-1}$. Dann gilt:

$$S \subseteq \mathfrak{S}_k^{(n)} \subseteq T$$

Gilt zusätzlich $n \geq 3$ und $2 \leq k \leq n-1$, so sind die Inklusionen echt.

Beweis: Da für jedes $M \subseteq \underline{n}$ das Ideal \mathcal{J}_M von P_M erzeugt wird, ist S eine Teilmenge von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$. Es sei nun $J \subseteq \underline{n}$ mit $|J| = k$, also P_J ein Erzeuger von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{N}$ und Intervalle $J_1 < \dots < J_r$ von J mit $J = \bigcup_{i=1}^r J_i$, so dass für alle $i \in \underline{r-1}$ gerade $\max J_i + 1 < \min J_{i+1}$ gilt. Insbesondere kommutieren die P_{J_i} und es folgt:

$$P_J = P_{J_r} P_{J_{r-1}} \dots P_{J_1} = P_{J_1, \dots, J_r} \in \mathcal{J}_{J_1, \dots, J_r} \subseteq T$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Inklusionen echt sind, wenn $n \geq 3$ und $2 \leq k \leq n-1$ gilt. Es ist etwa für die Menge $J := \{1, 2, \dots, k-1, n\}$ das Monom P_J ein Erzeuger von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$. Angenommen, P_J liegt in S . Dann gibt es ein Intervall M mit $|M| = k$ und ein Monom $P_v P_M P_w$ in \mathcal{J}_M , so dass $P_J = P_v P_M P_w$ gilt. Nun ist einerseits $P_J = P_n P_{\underline{k-1}} = P_{\underline{k-1}, \{n\}} \in \mathcal{B}_n$. Andererseits gibt es Intervalle $M_1 < \dots < M_s$ mit $P_v P_M P_w = P_{M_1, \dots, M_s}$. Nach der Folgerung ist das k -elementige Intervall M dann eine Teilmenge eines M_x . Währenddessen gibt es in der Normalformdarstellung von P_J kein k -elementiges Intervall, Widerspruch.

Ähnlich zeigt man, dass $P_{\underline{k-1}.k.(k+1) \dots n} \in \mathcal{J}_{\underline{k-1}, \{n\}} \subseteq T$ nicht in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ liegt. \square

3.4 Idempotente der Monoidalgebra

In diesem Abschnitt konstruieren wir induktiv ($\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$ ausnutzend) ein vollständiges System von $n+1$ paarweise orthogonalen, zentralen Idempotenten und dann ein vollständiges System von 2^n paarweise orthogonalen Idempotenten. Als Vorstufe dazu konstruieren wir jeweils „spezielle“ Idempotente, die zu einer natürlichen Idealkette von \mathcal{A}_n korrespondieren.

Spezielle zentrale Idempotente

Wir führen zunächst eine Kette von Idealen von \mathcal{A}_n ein, definieren dann die speziellen zentralen Idempotente und schließen mit der Feststellung, dass diese Idempotente die Ideale erzeugen. Sie sind jedoch weder paarweise orthogonal noch addieren sie sich zu 1.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \underline{n}_0$ bezeichnen wir weiterhin mit $\mathfrak{I}_k^{(n)}$, das von der Menge $\{P_J \mid J \subseteq \underline{n} \wedge |J| = k\}$ erzeugte Ideal in \mathcal{A}_n .

Für jedes $k \in \underline{n}_0$ gilt offensichtlich:

$$\mathfrak{I}_k^{(n)} = \langle P_v P_J P_w \mid J \subseteq \underline{n} \text{ mit } |J| = k \text{ und } P_v, P_w \in B_n \rangle_{\mathcal{K}}$$

Zur Illustration geben wir diese Ideale für $n \in \underline{3}$ an:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1^{(1)} &= (P_1) = \langle P_1 \rangle_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{I}_0^{(1)} = \mathcal{A}_1 \\ \mathfrak{I}_2^{(2)} &= (P_{21}) = \langle P_{21} \rangle_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{I}_1^{(2)} = (P_1, P_2) = \langle P_1, P_2, P_{12}, P_{21} \rangle_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{I}_0^{(2)} = \mathcal{A}_2 \\ \mathfrak{I}_3^{(3)} &= \langle P_{321} \rangle_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{I}_2^{(3)} = (P_{21}, P_{32}, P_{13}) = \langle P_{21}, P_{32}, P_{13}, P_{213}, P_{321}, P_{132}, P_{2132} \rangle_{\mathcal{K}} \\ &\subset \mathfrak{I}_1^{(3)} = (P_1, P_2, P_3) = \langle P_v \mid P_v \in B_n, P_v \neq 1 \rangle_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{I}_0^{(3)} = \mathcal{A}_3 \end{aligned}$$

An diesen Beispielen wird schon deutlich, dass wir eine echte Kette von Idealen in \mathcal{A}_n erhalten:

$$\langle P_{\underline{n}} \rangle_{\mathcal{K}} = \mathfrak{I}_n^{(n)} \subset \mathfrak{I}_{n-1}^{(n)} \subset \dots \subset \mathfrak{I}_2^{(n)} \subset \mathfrak{I}_1^{(n)} \subset \mathfrak{I}_0^{(n)} = \mathcal{A}_n$$

Die Inklusionen gelten, weil jeder Erzeuger von $\mathfrak{I}_{k+1}^{(n)}$ offensichtlich Teilfaktoren besitzt, die in $\mathfrak{I}_k^{(n)}$ liegen. Ferner sind die Inklusionen echt, weil beispielsweise die Erzeuger von $\mathfrak{I}_k^{(n)}$ nicht in $\mathfrak{I}_{k+1}^{(n)}$ enthalten sind.

3.9 Definition. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv nach n und k die Elemente $y_k^{(n)} \in \mathcal{A}_n$ durch:

$$\begin{aligned} y_0^{(1)} &:= 1 \\ y_1^{(1)} &:= P_1 \\ y_k^{(n+1)} &:= \begin{cases} y_k^{(n)}(1 - P_{n+1}) + P_{n+1}y_{k-1}^{(n)} & \text{falls } k \leq n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung listen wir die $y_k^{(n)}$ für $n \in \underline{4}$ auf:

$$y_1^{(1)} = P_1$$

$$y_1^{(2)} = y_1^{(1)}(1 - P_2) + P_2 y_0^{(1)} = P_1(1 - P_2) + P_2 1 = P_1 + P_2 - P_{12}$$

$$y_2^{(2)} = y_2^{(1)}(1 - P_2) + P_2 y_1^{(1)} = 0(1 - P_2) + P_2 P_1 = P_{21}$$

$$y_1^{(3)} = P_1 + P_2 + P_3 - P_{12} - P_{23} - P_{13} + P_{123}$$

$$y_2^{(3)} = P_{21} + P_{32} + P_{13} - P_{213} - P_{132}$$

$$y_3^{(3)} = P_{321}$$

$$y_1^{(4)} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - P_{12} - P_{23} - P_{34} - P_{13} - P_{14} - P_{24} \\ + P_{123} + P_{234} + P_{124} + P_{134} - P_{1234}$$

$$y_2^{(4)} = P_{21} + P_{32} + P_{43} + P_{13} + P_{14} + P_{24} - P_{213} - P_{132} \\ - P_{214} - P_{324} - P_{143} - P_{243} - P_{134} - P_{124} + P_{2134} + P_{1324} + P_{1243}$$

$$y_3^{(4)} = P_{321} + P_{432} + P_{214} + P_{143} - P_{3214} - P_{1432} - P_{2143}$$

$$y_4^{(4)} = P_{4321}$$

Eine leichte Induktion nach n zeigt, dass $y_n^{(n)} = P_{\underline{n}}$ gilt. Bezeichnen wir mit J^\wedge das Wort $j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_r$ für jede Teilmenge $J = j_1 < j_2 < \dots < j_r$ von \underline{n} , so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$y_1^{(n)} = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \underline{n}} (-1)^{|J|+1} P_{J^\wedge}$$

Die folgende Rechnung liefert dafür den Induktionsschritt.

$$y_1^{(n+1)} = y_1^{(n)}(1 - P_{n+1}) + P_{n+1} \\ = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \underline{n}} (-1)^{|J|+1} P_{J^\wedge} - \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \underline{n}} (-1)^{|J|+1} P_{J^\wedge} P_{n+1} + P_{n+1} \\ = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \underline{n}} (-1)^{|J|+1} P_{J^\wedge} + \sum_{n+1 \in H \subseteq \underline{n+1}} (-1)(-1)^{|H|-1+1} P_{H^\wedge} = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \underline{n+1}} (-1)^{|J|+1} P_{J^\wedge}$$

Um zu zeigen, dass $y_k^{(n)}$ das Ideal $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ erzeugt, halten wir die grundlegenden Eigenschaften dieser Elemente wie Zentralität und Idempotenz, aber auch deren Verhalten gegenüber den Erzeugern der Ideale $\mathfrak{S}_k^{(n)}$, fest:

3.10 Lemma. *Es sei $n \in \mathbb{N}$.*

- (a) *Für alle $k \in \underline{n} \setminus 0$ ist $y_k^{(n)}$ zentral in \mathcal{A}_n .*
 (b) *Für alle $0 \leq j \leq k \in \mathbb{N}$ gilt: $y_j^{(n)} y_k^{(n)} = y_k^{(n)}$. Insbesondere ist $y_k^{(n)}$ idempotent.*
 (c) *Für jede nichtleere Teilmenge J von \underline{n} gilt:*

$$y_{|J|}^{(n)} P_J = P_J$$

$$y_{|J|}^{(n)} P_{n+1} P_J = P_{n+1} P_J$$

Insbesondere ist $y_k^{(n)}$ von 0 verschieden.

3.11 Korollar. *Es seien $k \leq n \in \mathbb{N}$. Das Ideal $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ wird von dem zentralen Idempotent $y_k^{(n)}$ (als Ideal) erzeugt. Deshalb gilt:*

$$\mathfrak{S}_k^{(n)} = y_k^{(n)} \mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A}_n \mid y_k^{(n)} a = a\}$$

Wir beweisen zuerst das Korollar mit Hilfe der im Lemma formulierten Eigenschaften der $y_k^{(n)}$ und danach das Lemma.

Beweis: Weil das Element $y_k^{(n)}$ zentral ist, ist das von ihm erzeugte Ideal natürlich $y_k^{(n)} \mathcal{A}_n$. Außerdem ist $y_k^{(n)} \mathcal{A}_n$ wegen der Idempotenz des Erzeugers die Menge $\{a \in \mathcal{A}_n \mid y_k^{(n)} a = a\}$. Nach der Aussage (c) im Lemma enthält $y_k^{(n)} \mathcal{A}_n$ deshalb jeden Idealerzeuger P_J mit $J \subseteq \underline{n}$ und $|J| = k$, also auch das Ideal $\mathfrak{S}_k^{(n)}$. Wir zeigen induktiv nach n , dass für jedes $k \in \underline{n}$ das Element $y_k^{(n)}$ in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ liegt. Dabei lesen wir den Induktionsanfang an den Berechnungen der Idempotenten $y_k^{(n)}$ und der Ideale für $n \leq 3$ ab. Es seien nun $n \geq 3$ und $k \in \underline{n+1}$. Nach Definition und Induktionsvoraussetzung gilt:

$$y_k^{(n+1)} = y_k^{(n)}(1 - P_{n+1}) + P_{n+1} y_{k-1}^{(n)} \in \mathfrak{S}_k^{(n)} + \mathfrak{S}_k^{(n)} P_{n+1} + P_{n+1} \mathfrak{S}_{k-1}^{(n)}$$

Offensichtlich ist jeder Idealerzeuger von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ auch einer von $\mathfrak{S}_k^{(n+1)}$, weswegen $\mathfrak{S}_k^{(n)}(1 + P_{n+1})$ eine Teilmenge von $\mathfrak{S}_k^{(n+1)}$ ist. Nach den verallgemeinerten Relationen gilt ferner für jeden \mathcal{K} -Vektorraumzeuger $P_v P_J P_w$ von $\mathfrak{S}_{k-1}^{(n)} \subseteq \mathcal{A}_n$ (also $\{v\}, \{w\}, J \subseteq \underline{n}$ und $|J| = k-1$):

$$P_{n+1} P_v P_J P_w = P_{n+1} P_v P_{n+1} P_J P_w = P_{n+1} P_v P_{(n+1) \cup J} P_w \in \mathfrak{S}_k^{(n+1)}$$

Somit gilt auch $P_{n+1} \mathfrak{S}_{k-1}^{(n)} \subseteq P_{n+1} \mathfrak{S}_k^{(n+1)}$. Das Element $y_k^{(n+1)}$ liegt also in $\mathfrak{S}_k^{(n+1)}$. \square

Beweis des Lemmas: Wir beweisen alle Aussagen per Induktion nach n . In den Rechnungen verweisen wir nicht mehr ausdrücklich auf die jeweilig verwendete (verallgemeinerte) Relation.

Zu (a): Da P_1, \dots, P_n die Algebra \mathcal{A}_n erzeugen, reicht es zu zeigen, dass die $y_k^{(n)}$ mit allen P_j kommutieren. Den Induktionsanfang für $n = 1$ und $n = 2$ rechnet man nach. Es seien nun $n \geq 2$, $k \in \underline{n+1}$ und $j \in \underline{n+1}$.

1. Fall: $j \in \underline{n-1}$ In diesem Fall kommutieren P_{n+1} und P_j und es gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} y_k^{(n+1)} P_j &= y_k^{(n)} (1 - P_{n+1}) P_j + P_{n+1} y_{k-1}^{(n)} P_j \\ &= P_j y_n^{(k)} (1 - P_{n+1}) + P_j P_{n+1} y_n^{(k-1)} = P_j y_{n+1}^{(k)} \end{aligned}$$

2. Fall: $j = n$ Für $k = 1$ ist $y_{k-1}^{(n)} = 1$ und es gilt nach der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} y_1^{(n+1)} P_n - P_n y_1^{(n+1)} &= y_1^{(n)} (1 - P_{n+1}) P_n + P_{n+1} y_0^{(n)} P_n - P_n y_1^{(n)} (1 - P_{n+1}) - P_n P_{n+1} y_0^{(n)} \\ &= y_1^{(n)} (P_n - P_{n+1.n} - P_n + P_{n.n+1}) + (P_{n+1.n} - P_{n.n+1}) \\ &= y_1^{(n-1)} \underbrace{(1 - P_n)(-P_{n+1.n} + P_{n.n+1})}_{=0} \\ &\quad + P_n(-P_{n+1.n} + P_{n.n+1}) + (P_{n+1.n} - P_{n.n+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für $k > 1$ ergibt sich mit den verallgemeinerten Relationen und der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} y_k^{(n+1)} P_n - P_n y_k^{(n+1)} &= y_k^{(n)} (1 - P_{n+1}) P_n + P_{n+1} y_{k-1}^{(n)} P_n - P_n y_k^{(n)} (1 - P_{n+1}) - P_n P_{n+1} y_{k-1}^{(n)} \\ &= y_k^{(n)} (P_n - P_{n+1.n} - P_n + P_{n.n+1}) + (P_{n+1.n} - P_{n.n+1}) y_{k-1}^{(n)} \\ &= y_k^{(n-1)} \underbrace{(1 - P_n)(-P_{n+1.n} + P_{n.n+1})}_{=0} + P_n y_{k-1}^{(n-1)} (-P_{n+1.n} + P_{n.n+1}) \\ &\quad + (P_{n+1.n} - P_{n.n+1}) y_{k-1}^{(n-1)} (1 - P_n) + \underbrace{(P_{n+1.n} - P_{n.n+1}) P_n}_{=0} y_{k-2}^{(n-1)} \\ &= \underline{-P_n y_{k-1}^{(n-1)} P_{n+1.n}} + \underline{P_n y_{k-1}^{(n-1)} P_{n+1}} \\ &\quad + P_{n+1.n} y_{k-1}^{(n-1)} - P_{n+1.n} y_{k-1}^{(n-1)} - \underline{(P_{n.n+1} y_{k-1}^{(n-1)})} + \underline{P_{n.n+1} y_{k-1}^{(n-1)} P_n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit, weil die gleich unterstrichenen Terme wegen der Kommutativitätsrelation jeweils dasselbe Element in \mathcal{A}_{n+1} repräsentieren.

3. Fall: $j = n + 1$ Die Zentralität von $y_k^{(n)}$ folgt aus:

$$y_k^{(n+1)} P_{n+1} = y_k^{(n)} \underbrace{(1 - P_{n+1}) P_{n+1}}_{=0} + P_{n+1} y_{k-1}^{(n)} P_{n+1} = P_{n+1} y_{k-1}^{(n)}$$

$$\text{und } P_{n+1} y_k^{(n+1)} = \underbrace{P_{n+1} y_k^{(n)} - P_{n+1} y_k^{(n)} P_{n+1}}_{=0} + P_{n+1} P_{n+1} y_{k-1}^{(n)} = P_{n+1} y_{k-1}^{(n)}$$

Zu (b): Die Behauptung für $n = 1$ ist einfach nachzurechnen. Es seien nun $n \geq 1$ und $1 \leq j \leq k \leq n + 1$. Dann gilt mit der Induktionvoraussetzung:

$$\begin{aligned} y_j^{(n+1)} y_k^{(n+1)} &= (y_j^{(n)} (1 - P_{n+1}) + P_{n+1} y_{j-1}^{(n)}) (y_k^{(n)} (1 - P_{n+1}) + P_{n+1} y_{k-1}^{(n)}) \\ &= y_j^{(n)} (1 - P_{n+1}) y_k^{(n)} (1 - P_{n+1}) + y_j^{(n)} \underbrace{(1 - P_{n+1}) P_{n+1}}_{=0} y_{k-1}^{(n)} \\ &\quad + \underbrace{P_{n+1} y_{j-1}^{(n)} y_k^{(n)} (1 - P_{n+1})}_{=0} + \underbrace{P_{n+1} y_{j-1}^{(n)} P_{n+1} y_{k-1}^{(n)}}_{=P_{n+1} y_{j-1}^{(n)} y_{k-1}^{(n)}} \\ &= y_j^{(n)} y_k^{(n)} (1 - P_{n+1}) - y_j^{(n)} \underbrace{P_{n+1} y_k^{(n)} (1 - P_{n+1})}_{=0} + P_{n+1} y_{j-1}^{(n)} y_{k-1}^{(n)} \\ &= y_k^{(n)} (1 - P_{n+1}) + P_{n+1} y_{k-1}^{(n)} \\ &= y_k^{(n+1)} \end{aligned}$$

Zu (c): Wir zeigen beide Aussagen gleichzeitig in einer Induktion nach n . Wir führen hier (im Gegensatz zu den bisherigen Beweisen) den Induktionsanfang für $n = 1$ und $n = 2$ vor. Im Fall $n = 1$ entspricht die erste Aussage der Idempotenz von P_1 und die zweite der Relation $P_1 P_2 P_1 = P_2 P_1$ in \mathcal{A}_2 . Für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} P_1 &= (P_1 + P_2 - P_{12}) P_1 = P_{11} + P_{21} - P_{121} = P_1 \\ y_1^{(2)} P_2 &= (P_1 + P_2 - P_{12}) P_2 = P_{12} + P_{22} - P_{122} = P_2 \\ y_2^{(2)} P_{21} &= P_{21} P_{21} = P_{21} \\ y_1^{(2)} P_3 P_1 &= P_{131} + P_{231} - P_{1231} = P_{13} + P_{213} - P_{213} = P_{13} = P_3 P_1 \\ y_1^{(2)} P_3 P_2 &= P_{132} + P_{232} - P_{1232} = P_{132} + P_{32} - P_{132} = P_{32} = P_3 P_2 \\ y_2^{(2)} P_3 P_{21} &= P_{21} P_{321} = P_{321} = P_3 P_{21} \end{aligned}$$

Es seien nun $n \geq 2$, J eine nichtleere Teilmenge von $\underline{n+1}$ und $k := |J|$. Ist $k = n+1$, so stimmen die Idempotenten $P_J = P_{\underline{n+1}}$ und $y_{n+1}^{(n+1)}$ überein und die erste Aussage gilt trivialerweise, während die zweite aus den Eigenschaften (vergleiche Lemma 2.8) des Idempotents $P_{n+2}P_{\underline{n+1}} = P_{\underline{n+2}}$ folgt. Es sei jetzt J eine echte Teilmenge von $\underline{n+1}$.

1. Fall: $n+1 \in J$ Wir setzen $H := J \setminus \{n+1\}$. Dann ist H eine $k-1$ elementige Teilmenge von \underline{n} mit $P_{n+1}P_H = P_J$, weswegen die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist; sowohl für die erste Aussage:

$$\begin{aligned} y_k^{(n+1)}P_J &= y_k^{(n)} \underbrace{(1 - P_{n+1})P_{n+1}}_{=0} P_H + \underbrace{P_{n+1}y_{k-1}^{(n)}P_{n+1}}_{=P_{n+1}y_{k-1}^{(n)}} P_H \\ &= P_{n+1}y_{k-1}^{(n)}P_H \\ &= \begin{cases} P_{n+1}1P_H & \text{falls } k = 1 \\ P_{n+1}y_{k-1}^{(n)}P_H = P_{n+1}P_H & \text{falls } k \geq 2 \end{cases} \\ &= P_J \end{aligned}$$

als auch für die zweite:

$$\begin{aligned} y_k^{(n+1)}P_{n+2}P_J &= y_k^{(n)} \underbrace{(1 - P_{n+1})P_{n+2}P_{n+1}}_{=0} P_H + \underbrace{P_{n+1}y_{k-1}^{(n)}P_{n+2}}_{=P_{n+2}y_{k-1}^{(n)}} P_{n+1}P_H \\ &= P_{n+1}P_{n+2}y_{k-1}^{(n)}P_{n+1}P_H \\ &= \begin{cases} P_{n+1}P_{n+2}1P_{n+1}P_H & \text{falls } k = 1 \\ P_{n+1}P_{n+2}y_{k-1}^{(n)}P_{n+1}P_H & \text{falls } k \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} P_{n+2}P_{n+1}P_H & \text{falls } k = 1 \\ P_{n+1}P_{n+2}P_{n+1}P_H & \text{falls } k \geq 2 \end{cases} \\ &= P_{n+2}P_J \end{aligned}$$

2. Fall: $n+1 \notin J$ Damit ist J schon eine Teilmenge von \underline{n} . Es sei j das Minimum von J (bezüglich der üblichen Ordnung auf \mathbb{N}) und wir setzen $H := J \setminus \{j\}$, womit $P_J = P_H P_j$ gilt. Zunächst zeigen wir die erste Aussage von (c) mit Hilfe der beiden

Induktionsvoraussetzungen:

$$\begin{aligned}
 y_k^{(n+1)}P_J &= y_k^{(n)}(1 - P_{n+1})P_J + P_{n+1}y_{k-1}^{(n)}P_J \\
 &= y_k^{(n)}P_J - y_k^{(n)}P_{n+1}P_J + P_{n+1}(y_{k-1}^{(n)}P_H)P_J \\
 &= P_J - P_{n+1}P_J + P_{n+1}P_H P_J \\
 &= P_J.
 \end{aligned}$$

Die Kommutativität von P_J und P_{n+2} ausnutzend ergibt sich daraus die zweite Aussage:

$$\begin{aligned}
 y_k^{(n+1)}P_{n+2}P_J &= y_k^{(n+1)}P_J P_{n+2} \\
 &= P_J P_{n+2} \\
 &= P_{n+2}P_J.
 \end{aligned}$$

□

Folgerung: Für jede endliche Teilmenge M von \mathbb{N} , jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \underline{n}$ mit $|M \cap \underline{n}| \geq k$ gilt:

$$y_k^{(n)}P_M = P_M$$

Beweis: Nach einer Zerlegung von M in $M \cap \underline{n}$ und $N := M \setminus \underline{n}$ sind die verallgemeinerten Kommutativitätsrelationen anzuwenden sowie die zweite Aussage von (c) im Fall $n + 1 \in M_2$ bzw. die erste im Fall $n + 1 \notin M_2$, um die Gleichung zu erhalten. □

Zentrale Idempotente in \mathcal{A}_M

Wir stellen hier zentrale idempotente Elemente aus \mathcal{A}_M mit $M \subseteq \underline{n}$ vor, die in Anlehnung an $y_1^{(n)}$ definiert sind und später für spezielle Mengen gebraucht werden (s. folgende Proposition 3.20). Mit $\max M$ bezeichnen wir das Maximum von M bezüglich der üblichen Ordnung auf den natürlichen Zahlen.

3.12 Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $y(\emptyset) := 0$ und für jede nichtleere Teilmenge M von \underline{n} definieren wir induktiv nach der Mächtigkeit von M das Element $y(M) \in \mathcal{A}_M \subset \mathcal{A}_n$ durch:

$$y(M) = y(M \setminus \{\max M\})(1 - P_{\max M}) + P_{\max M}$$

Ist $M = m_1 < m_2 < \dots < m_r$, so ergibt sich $y(M)$ – wie $y_1^{(n)} = y(\underline{n})$ – durch die Berechnung der „Vorgänger“:

$$\begin{aligned} y(\{m_1\}) &= P_{m_1} \\ y(\{m_1, m_2\}) &= y(\{m_1\})(1 - P_{m_2}) + P_{m_2} \\ &\vdots \\ y(\{m_1, m_2, \dots, m_j\}) &= y(\{m_1, \dots, m_{j-1}\})(1 - P_{m_j}) + P_{m_j} \\ &\vdots \\ y(M) = y(\{m_1, \dots, m_r\}) &= y(\{m_1, \dots, m_{r-1}\})(1 - P_{m_r}) + P_{m_r} \end{aligned}$$

Analog zum Lemma 3.10 lassen sich die folgenden Eigenschaften von $y(M)$ beweisen. Dabei ist es sinnvoll, die Idempotenz aus (b) zu schließen.

3.13 Lemma. *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und M eine Teilmenge von \underline{n} .*

- (a) $y(M)$ ist ein zentrales Idempotent in \mathcal{A}_M .
- (b) Für alle $m \in M$ und jedes $x > \max M$ gilt:

$$\begin{aligned} y(M)P_m &= P_m \\ y(M)P_x P_m &= P_x P_m \end{aligned}$$

Insbesondere ist $y(M)$ von 0 verschieden.

Die zwei folgenden Beispiele veranschaulichen, dass stets

$$y(M) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq M} (-1)^{|J|+1} P_J$$

als Verallgemeinerung von $y_1^{(n)}$ gilt:

$$y(\{5, 6\}) = P_5 + P_6 - P_{56}$$

und

$$y(\{3, 4, 7\}) = P_3 + P_4 + P_7 - P_{34} - P_{37} - P_{47} + P_{347}$$

Ein vollständiges System zentraler, paarweise orthogonaler Idempotenter

Ist denn nun die Kette $\mathfrak{S}_n^{(n)} \subset \mathfrak{S}_{n-1}^{(n)} \subset \dots \subset \mathfrak{S}_1^{(n)} \subset \mathcal{A}_n$ jene, die zu den Zusammenhangskomponenten der partiellen Ordnung \mathcal{P}_n korrespondiert? Dem \mathcal{K} -linearen Erzeugendensystem von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ ist nicht unmittelbar anzusehen, ob $\mathfrak{S}_{k+1}^{(n)}$ ein direkter Summand von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ ist. Gehen wir jedoch zu den Differenzen $y_k^{(n)} - y_{k+1}^{(n)}$ über, so erhalten wir paarweise orthogonale Idempotente, deren Summe 1 ist. Diesen entsprechen die Zusammenhangskomponenten $z_k^{(n)} \mathcal{A}_n$ der Algebra \mathcal{A}_n , welche die Idealkette aufbauen.

3.14 Definition. Es sei $z_0^{(n)} := 1 - y_1^{(n)}$ und $z_k^{(n)} := y_k^{(n)} - y_{k+1}^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \underline{n}$.

Aus der Rekursionsvorschrift für die $y_k^{(n)}$ lässt sich wie folgt eine induktive Charakterisierung der $z_k^{(n)}$ herleiten: Es sei $z_0^{(1)} = 1 - y_1^{(1)} = 1 - P_1$. Dann gilt für alle $k \leq n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} z_k^{(n+1)} &= y_k^{(n+1)}(1 - P_{n+1}) - P_{n+1}y_{k-1}^{(n)} - y_{k+1}^{(n+1)}(1 - P_{n+1}) + P_{n+1}y_k^{(n)} \\ &= z_k^{(n)}(1 - P_{n+1}) + P_{n+1}z_{k-1}^{(n)} \end{aligned}$$

Bemerkung 1: Es ist $z_k^{(n)}$ von 0 verschieden für alle $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Angenommen, es gibt $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$ mit $z_k^{(n)} = 0$, also $y_k^{(n)} = y_{k+1}^{(n)}$, so folgt aus der Definition dieser Idempotenter:

$$y_k^{(n-1)}(1 - P_n) + P_n y_{k-1}^{(n-1)} = y_{k+1}^{(n-1)}(1 - P_n) + P_n y_k^{(n-1)}$$

Stellen wir beide Seiten als Linearkombinationen über $P_v \in \mathcal{B}_n$ dar, so folgt $y_k^{(n-1)} = y_{k+1}^{(n-1)}$ aus einem Koeffizientenvergleich derjenigen P_v mit $n \notin \{v\}$. Es ergibt sich dann induktiv $y_k^{(k+1)} = y_{k+1}^{(k+1)}$ und schließlich der Widerspruch $0 \neq y_k^{(k)} = y_{k+1}^{(k)} = 0$. \square

3.15 Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{z_k^{(n)} \mid k \in \underline{n}\}_0$ ein vollständiges System zentraler, paarweise orthogonaler Idempotenter in \mathcal{A}_n .

Beweis: Die Vollständigkeit ergibt sich aus der Definition der $z_k^{(n)}$:

$$\sum_{k=0}^n z_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} (y_k^{(n)} - y_{k+1}^{(n)}) + 1 - y_1^{(n)} + y_n^{(n)} - 0 = 1$$

Weil das Zentrum einer K -Algebra insbesondere ein K -Vektorraum ist, sind die $z_k^{(n)}$ offensichtlich zentral in \mathcal{A}_n . Es seien $j \leq k$. Die Idempotenz und Orthogonalität folgen aus dem Lemma 3.10(b):

$$\begin{aligned} z_j^{(n)} z_k^{(n)} &= (y_j^{(n)} - y_{j+1}^{(n)})(y_k^{(n)} - y_{k+1}^{(n)}) \\ &= y_j^{(n)} y_k^{(n)} - y_j^{(n)} y_{k+1}^{(n)} - y_{j+1}^{(n)} y_k^{(n)} + y_{j+1}^{(n)} y_{k+1}^{(n)} \\ &= \begin{cases} y_k^{(n)} - y_{k+1}^{(n)} - y_{k+1}^{(n)} + y_{k+1}^{(n)} & \text{falls } j = k \\ y_k^{(n)} - y_{k+1}^{(n)} - y_k^{(n)} + y_{k+1}^{(n)} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} z_k^{(n)} & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Wegen der eben im Beweis benutzten Eigenschaft (b) des Lemmas 3.10 gilt auch:

$$z_l^{(n)} y_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } l < k \\ z_l^{(n)} & \text{falls } l \geq k \end{cases}$$

und damit erhalten wir eine Zerlegung des Ideals $\mathfrak{I}_k^{(n)}$:

3.16 Korollar. *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \underline{n}$. Dann annulliert $z_k^{(n)}$ die Ideale $\mathfrak{I}_n^{(n)}, \dots, \mathfrak{I}_{k+1}^{(n)}$ und es gilt:*

$$\mathfrak{I}_k^{(n)} = \bigoplus_{l=k}^n z_l^{(n)} \mathcal{A}_n$$

Spezielle Idempotente

Wir beginnen mit der Definition von durch die Teilmengen von \underline{n} indizierten Idempotenten von \mathcal{A}_n . Ähnlich wie die $y_k^{(n)}$ im Vergleich zu den $z_k^{(n)}$ ist dieses System nicht vollständig. Ferner sind die Idempotenten zu gleichmächtigen Teilmengen paarweise orthogonal.

3.17 Definition. Wir definieren induktiv nach n die Elemente $g_J^{(n)} \in \mathcal{A}_n$ für jede Teilmenge J von \underline{n} durch:

$$g_{\{1\}}^{(1)} := P_1$$

$$g_J^{(n+1)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } J = \emptyset \\ g_J^{(n)}(1 - P_{n+1}) & \text{falls } J \neq \emptyset \text{ und } n+1 \notin J \\ P_{n+1}g_{J \setminus \{n+1\}}^{(n)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier führen wir alle $g_J^{(n)}$ für $n \in \{1, 2, 3\}$ auf:

$$\begin{array}{ll} g_{\emptyset}^{(1)} = 1 & g_{\emptyset}^{(3)} = 1 \\ g_{\{1\}}^{(1)} = P_1 & g_{\{1\}}^{(3)} = g_{\{1\}}^{(2)}(1 - P_3) = P_1 - P_{12} - P_{13} + P_{123} \\ & g_{\{2\}}^{(3)} = g_{\{2\}}^{(2)}(1 - P_3) = P_2 - P_{23} \\ g_{\emptyset}^{(2)} = 1 & g_{\{3\}}^{(3)} = P_3 g_{\emptyset}^{(2)} = P_3 \\ g_{\{1\}}^{(2)} = g_{\{1\}}^{(1)}(1 - P_2) = P_1 - P_{12} & g_{\{1,2\}}^{(3)} = g_{\{1,2\}}^{(2)}(1 - P_3) = P_{21} - P_{213} \\ g_{\{2\}}^{(2)} = P_2 g_{\emptyset}^{(1)} = P_2 & g_{\{1,3\}}^{(3)} = P_3 g_{\{1\}}^{(2)} = P_{13} - P_{132} \\ g_{\{1,2\}}^{(2)} = P_2 g_{\{1\}}^{(1)} = P_{21} & g_{\{2,3\}}^{(3)} = P_3 g_{\{2\}}^{(2)} = P_{32} \\ & g_{\{1,2,3\}}^{(3)} = P_3 g_{\{1,2\}}^{(2)} = P_{321} \end{array}$$

An den $g_J^{(4)}$, die wir im Folgenden auflisten, ist bereits eine alternative Beschreibung (s. folgende Proposition 3.20) der $g_J^{(n)}$ deutlicher zu erkennen:

$$\begin{array}{l} g_{\emptyset}^{(4)} = 1 \\ g_{\{1\}}^{(4)} = g_{\{1\}}^{(3)}(1 - P_4) = P_1 - P_{12} - P_{13} - P_{14} + P_{123} + P_{124} + P_{134} - P_{1234} \\ g_{\{2\}}^{(4)} = g_{\{2\}}^{(3)}(1 - P_4) = P_2 - P_{23} - P_{24} + P_{234} \\ g_{\{3\}}^{(4)} = g_{\{3\}}^{(3)}(1 - P_4) = P_3 - P_{34} \\ g_{\{4\}}^{(4)} = P_4 g_{\emptyset}^{(3)} = P_4 \end{array}$$

$$g_{\{1,2\}}^{(4)} = g_{\{1,2\}}^{(3)}(1 - P_4) = P_{21} - P_{213} - P_{214} + P_{2134} = P_{21}(1 - y(\{3, 4\}))$$

$$g_{\{1,3\}}^{(4)} = g_{\{1,3\}}^{(3)}(1 - P_4) = P_{13} - P_{132} - P_{134} + P_{1324} = P_{13}(1 - y(\{2, 4\}))$$

$$g_{\{2,3\}}^{(4)} = g_{\{2,3\}}^{(3)}(1 - P_4) = P_{32} - P_{324} = P_{32}(1 - y(\{4\}))$$

$$g_{\{1,4\}}^{(4)} = P_4 g_{\{1\}}^{(3)} = P_{14} - P_{124} - P_{143} + P_{1243} = P_{14}(1 - y(\{2, 3\}))$$

$$g_{\{2,4\}}^{(4)} = P_4 g_{\{2\}}^{(3)} = P_{24} - P_{243} = P_{24}(1 - y(\{3\}))$$

$$g_{\{3,4\}}^{(4)} = P_4 g_{\{3\}}^{(3)} = P_{43} = P_{43}(1 - y(\emptyset))$$

$$g_{\{1,2,3\}}^{(4)} = g_{\{1,2,3\}}^{(3)}(1 - P_4) = P_{321} - P_{3214} = P_{321}(1 - y(\{4\}))$$

$$g_{\{1,2,4\}}^{(4)} = P_4 g_{\{1,2\}}^{(3)} = P_{214} - P_{2143} = P_{214}(1 - y(\{3\}))$$

$$g_{\{1,3,4\}}^{(4)} = P_4 g_{\{1,3\}}^{(3)} = P_{143} - P_{1432} = P_{143}(1 - y(\{2\}))$$

$$g_{\{2,3,4\}}^{(4)} = P_4 g_{\{2,3\}}^{(3)} = P_{432} = P_{432}(1 - y(\emptyset))$$

$$g_{\{1,2,3,4\}}^{(4)} = P_4 g_{\{1,2,3\}}^{(3)} = P_{4321} = P_{4321}(1 - y(\emptyset))$$

Zwei wichtige Eigenschaften der $g_J^{(n)}$ halten wir in dem nächsten Lemma fest.

3.18 Lemma. *Es seien $n \in \mathbb{N}$, J und K nichtleere Teilmengen von \underline{n} mit $|J| = |K|$ sowie $k \in \underline{n}_0$. Dann gelten:*

$$(a) \quad g_J^{(n)} g_K^{(n)} = \begin{cases} g_J^{(n)} & \text{falls } J = K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(b) \quad y_k^{(n)} = \sum_{J \subseteq \underline{n}, |J|=k} g_J^{(n)}$$

Beweis: Zu (a): Der Induktionsanfang für $n = 1$ und $n = 2$ ist einfach nachzurechnen. Sind X, Y Teilmengen von \mathbb{N} , so sei mit dem Kronecker-Delta-Symbol $\delta_{X,Y}$ wie üblich $0 \in \mathcal{K}$ bezeichnet, falls $X \neq Y$ gilt, und $1 \in \mathcal{K}$, falls $X = Y$ gilt. Es seien nun $n \geq 2$ sowie J und K nichtleere gleichmächtige Teilmengen von $\underline{n+1}$. Um (a) zu zeigen, unterscheiden wir, ob $n+1$ in J oder in K liegt, und wenden die Induktionsvoraussetzung sowie die verallgemeinerten Relationen an.

1. Fall: $n + 1 \notin J$ und $n + 1 \notin K$ Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_J^{(n+1)} g_K^{(n+1)} &= g_J^{(n)} (1 - P_{n+1}) g_K^{(n)} (1 - P_{n+1}) \\ &= g_J^{(n)} g_K^{(n)} (1 - P_{n+1}) - g_J^{(n)} \underbrace{P_{n+1} g_K^{(n)} (1 - P_{n+1})}_{=0} \\ &= \delta_{J,K} g_J^{(n)} (1 - P_{n+1}) \\ &= \delta_{J,K} g_J^{(n+1)} \end{aligned}$$

2. Fall: $n + 1 \notin J$ und $n + 1 \in K$ Insbesondere gilt $J \neq K$ und es folgt:

$$g_J^{(n+1)} g_K^{(n+1)} = g_J^{(n)} \underbrace{(1 - P_{n+1}) P_{n+1}}_{=0} g_{K \setminus \{n+1\}}^{(n)} = 0 = \delta_{J,K} g_J^{(n+1)}$$

3. Fall: $n + 1 \in J$ und $n + 1 \notin K$ Wie im vorherigen Fall gilt $J \neq K$ und damit:

$$g_J^{(n+1)} g_K^{(n+1)} = P_{n+1} \underbrace{g_{J \setminus \{n+1\}}^{(n)} g_K^{(n)}}_{\in \mathcal{A}_n} (1 - P_{n+1}) = 0 = \delta_{J,K} g_J^{(n+1)}$$

4. Fall: $n + 1 \in J$ und $n + 1 \in K$ Wegen $\delta_{J,K} = \delta_{J \setminus \{n+1\}, K \setminus \{n+1\}}$ gilt hier:

$$g_J^{(n+1)} g_K^{(n+1)} = \underbrace{P_{n+1} g_{J \setminus \{n+1\}}^{(n)} P_{n+1}}_{= P_{n+1} g_{J \setminus \{n+1\}}^{(n)}} g_{K \setminus \{n+1\}}^{(n)} = P_{n+1} \delta_{J,K} g_J^{(n)} = \delta_{J,K} g_J^{(n+1)}$$

Zu (b): Auch hier ist der Induktionsanfang $n \in \{1, 2\}$ einfaches Nachrechnen.

Es seien $n \geq 2$ und $k \in \underline{n+1} \setminus 0$. Ist $k = 0$, so gilt nach den jeweiligen Definitionen: $y_0^{(n+1)} = 1 = g_\emptyset^{(n+1)}$. Es sei nun $k \geq 1$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt dann:

$$\begin{aligned} y_k^{(n+1)} &= y_k^{(n)} (1 - P_{n+1}) + P_{n+1} y_{k-1}^{(n)} = \sum_{\substack{J \subseteq \underline{n} \\ |J|=k}} g_J^{(n)} (1 - P_{n+1}) + P_{n+1} \sum_{\substack{K \subseteq \underline{n} \\ |K|=k-1}} g_K^{(n)} \\ &= \sum_{\substack{J \subseteq \underline{n} \\ |J|=k}} g_J^{(n+1)} + \sum_{\substack{K \subseteq \underline{n} \\ |K|=k-1}} g_{K \cup \{n+1\}}^{(n+1)} = \sum_{\substack{L \subseteq \underline{n+1} \\ |L|=k}} g_L^{(n+1)} \end{aligned}$$

□

Eine alternative Beschreibung der $g_J^{(n)}$

3.19 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jede Teilmenge K von \underline{n} definieren wir die Menge $N_K^{(n)}$ durch:

$$N_K^{(n)} := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } K = \emptyset \\ \{x \in \underline{n} \setminus K \mid x > \min K\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispielsweise gelten:

$$N_{\{1,2\}}^{(5)} = \{3, 4, 5\} = N_{\{2\}}^{(5)}, \quad N_{\{1,3\}}^{(5)} = \{2, 4, 5\}, \quad N_{\{1,3,4,5\}}^{(5)} = \{2\} \quad \text{und} \quad N_{\{4,5\}}^{(5)} = \emptyset$$

Mit diesen $N_J^{(n)}$ können wir jetzt die $g_J^{(n)}$ so beschreiben, dass sofort ersichtlich ist, wie die $g_J^{(n)}$ zu der Idealkette $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ stehen. Jetzt benötigen wir die Definition 3.12 der Idempotenten $y(M)$ für eine Menge M von \underline{n} .

3.20 Proposition. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $\emptyset \neq J \subseteq \underline{n}$ gilt:

$$g_J^{(n)} = P_J(1 - y(N_J^{(n)}))$$

Damit liegt jedes Idempotent $g_J^{(n)}$ in dem Ideal $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ mit $k = |J|$.

Beweis: Für den Induktionsanfang sehen wir uns die ersten $g_J^{(n)}$ für $n = 1$ und $n = 2$ an:

$$g_{\emptyset}^{(1)} = 1 = 1(1 - 0) = P_{\emptyset}(1 - y(\emptyset))$$

$$g_{\{1\}}^{(1)} = P_1 = P_1(1 - y(\emptyset))$$

$$g_{\emptyset}^{(2)} = 1 = P_{\emptyset}(1 - y(\emptyset))$$

$$g_{\{1\}}^{(2)} = P_1 - P_{12} = P_1(1 - P_2) = P_1(1 - y(\{2\}))$$

$$g_{\{2\}}^{(2)} = P_2 = P_2(1 - y(\emptyset))$$

$$g_{\{1,2\}}^{(2)} = P_{21}P_{21}(1 - y(\emptyset))$$

(Interessanter wird es für größere n ; einige $g_J^{(4)}$ haben wir auf Seite 73 schon so dargestellt, dass sich diese Gleichheit leicht ablesen lässt.)

Für den Induktionsschritt seien nun $n \geq 2$ und $J \subseteq \underline{n+1}$.

1. Fall: $J = \emptyset$ Für die leere Menge gilt nach den jeweiligen Definitionen:

$$\mathbf{P}_\emptyset(1 - y(N_\emptyset^{(n+1)})) = 1(1 - y(\emptyset)) = 1 = g_\emptyset^{(n+1)}$$

2. Fall: $n+1 \in J$ In diesem Fall kann $n+1$ nicht in $N_J^{(n+1)}$ liegen und es gilt:

$$N_J^{(n+1)} = N_{J \setminus \{n+1\}}^{(n)}$$

Daraus folgt mit der Induktionsvoraussetzung:

$$g_J^{(n+1)} = \mathbf{P}_{n+1} g_{J \setminus \{n+1\}}^{(n)} = \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{P}_{J \setminus \{n+1\}}(1 - y(N_{J \setminus \{n+1\}}^{(n)})) = \mathbf{P}_J(1 - y(N_J^{(n+1)}))$$

3. Fall: $n+1 \notin J \neq \emptyset$ Nun liegt $n+1$ in $N_J^{(n+1)}$ und es gilt:

$$N_J^{(n+1)} = N_J^{(n)} \cup \{n+1\}$$

Die Definition von $y(N_J^{(n+1)})$ führt dann neben der Induktionsvoraussetzung zu:

$$\begin{aligned} g_J^{(n+1)} &= g_J^{(n)}(1 - \mathbf{P}_{n+1}) \\ &= \mathbf{P}_J(1 - y(N_J^{(n)}))(1 - \mathbf{P}_{n+1}) \\ &= \mathbf{P}_J(1 - (y(N_J^{(n)})(1 - \mathbf{P}_{n+1}) + \mathbf{P}_{n+1})) \\ &= \mathbf{P}_J(1 - y(N_J^{(n+1)})) \end{aligned}$$

□

Ein vollständiges System paarweise orthogonaler Idempotente

3.21 Definition. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und J eine Teilmenge von \underline{n} . Dann setzen wir:

$$f_J^{(n)} := g_J^{(n)} z_{|J|}^{(n)}$$

Auch hier listen wir die $f_J^{(n)}$ für $n \in \{1, 2\}$ zur Veranschaulichung auf:

$$\begin{aligned} f_\emptyset^{(1)} &= z_0^{(1)} g_\emptyset^{(1)} = z_0^{(1)} = 1 - P_1 \\ f_{\{1\}}^{(1)} &= z_1^{(1)} g_{\{1\}}^{(1)} = P_1 P_1 = P_1 \\ f_\emptyset^{(2)} &= z_0^{(2)} g_\emptyset^{(2)} = z_0^{(2)} = 1 - P_1 - P_2 + P_{12} \\ f_{\{1\}}^{(2)} &= z_1^{(2)} g_{\{1\}}^{(2)} = g_{\{1\}}^{(2)} - y_2^{(2)} g_{\{1\}}^{(2)} = P_1 - P_{12} - P_{21}(P_1 - P_{12}) = P_1 - P_{12} \\ f_{\{2\}}^{(2)} &= z_1^{(2)} g_{\{2\}}^{(2)} = g_{\{2\}}^{(2)} - y_2^{(2)} g_{\{2\}}^{(2)} = P_2 - P_{21}P_2 = P_2 - P_{21} \\ f_{\{1,2\}}^{(2)} &= z_2^{(2)} g_{\{1,2\}}^{(2)} = g_{\{1,2\}}^{(2)} - y_3^{(2)} g_{\{1,2\}}^{(2)} = P_{21}P_{21} - 0 = P_{21} \end{aligned}$$

Übrigens gehorchen die $f_J^{(n)}$ denselben induktiven Vorschriften wie die $g_J^{(n)}$. So gilt zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$ trivialerweise:

$$f_\emptyset^{(n)} = z_0^{(n)}$$

Ferner zeigt dann eine leichte Induktion nach n , dass für jede Teilmenge $J \neq \emptyset$ von $\underline{n+1}$ gilt:

$$f_J^{(n+1)} := \begin{cases} f_J^{(n)}(1 - P_{n+1}) & \text{falls } n+1 \notin J \\ P_{n+1} f_{J \setminus \{n+1\}}^{(n)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese $f_J^{(n)}$ sind nun die „richtigen“ Idempotenten:

3.22 Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{f_J^{(n)} \mid J \subseteq \underline{n}\}$ ein vollständiges System paarweise orthogonaler Idempotenter von \mathcal{A}_n . Insbesondere gilt:

$$\mathcal{A}_n = \bigoplus_{J \subseteq \underline{n}} f_J^{(n)} \mathcal{A}_n$$

Beweis: Es seien J und K Teilmengen von \underline{n} . Die Orthogonalität und Zentralität der $z_k^{(n)}$ berücksichtigend sowie Teil (a) des Lemmas 3.18 anwendend, erhalten wir Idempotenz und Orthogonalität:

$$\begin{aligned} f_J^{(n)} f_K^{(n)} &= g_J^{(n)} g_K^{(n)} z_{|J|}^{(n)} z_{|K|}^{(n)} \\ &= \begin{cases} g_J^{(n)} g_K^{(n)} z_{|J|}^{(n)} & \text{falls } |J| = |K| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \delta_{J,K} f_J^{(n)} = \dots = f_K^{(n)} f_J^{(n)} \end{aligned}$$

Um die Vollständigkeit einzusehen, erinnern wir daran, dass die $g_J^{(n)}$ mit $|J| = k$ sich zu $y_k^{(n)}$ aufsummieren (s. Lemma 3.18 Teil (b)). Zudem geht hier die Eigenschaft (b) des Lemmas 3.10 ein, welche wie schon eingesehen insbesondere bedeutet, dass $z_k^{(n)}$ invariant unter der Multiplikation mit $y_k^{(n)}$ ist:

$$z_k^{(n)} = z_k^{(n)} y_k^{(n)} = z_k^{(n)} \sum_{\substack{J \subseteq \underline{n} \\ |J|=k}} g_J^{(n)} = \sum_{\substack{J \subseteq \underline{n} \\ |J|=k}} f_J^{(n)}$$

Weil ferner $\sum_{k=0}^n z_k^{(n)} = 1$ gilt (s. Satz 3.15), folgt daraus schließlich $\sum_{J \subseteq \underline{n}} f_J^{(n)} = 1$. \square

Der wesentliche Vorteil der alternativen Beschreibung der $g_J^{(n)}$ ist, dass man aus ihr folgende Gleichheit gewinnt:

3.23 Proposition. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Teilmengen J von \underline{n} gilt:*

$$f_J^{(n)} \mathbf{P}_J = \mathbf{P}_J z_{|J|}^{(n)}$$

Beweis: Für $J = \underline{n}$ gilt die Gleichheit wegen $g_{\underline{n}}^{(n)} = \mathbf{P}_{\underline{n}} = z_n^{(n)}$. Andernfalls gilt nach der Definition der $f_J^{(n)}$ und der alternativen Beschreibung der $g_J^{(n)}$ zunächst:

$$f_J^{(n)} \mathbf{P}_J = z_{|J|}^{(n)} g_J^{(n)} \mathbf{P}_J = z_{|J|}^{(n)} \mathbf{P}_J (1 - y(N_J^{(n)})) \mathbf{P}_J = z_{|J|}^{(n)} \mathbf{P}_J - z_{|J|}^{(n)} \mathbf{P}_J y(N_J^{(n)}) \mathbf{P}_J$$

Das folgende Lemma 3.24 zeigt, dass der letzte Summand verschwindet. \square

3.24 Lemma. *Es sei $n \in \mathbb{N}$, J eine echte Teilmenge von \underline{n} und $k := |J|$. Dann liegt $\mathbf{P}_J y(N_J^{(n)}) \mathbf{P}_J$ in $\mathfrak{S}_{k+1}^{(n)}$, wird also von $z_k^{(n)}$ annulliert.*

Beweis: Nach dem Korollar 3.11 reicht es per Induktion nach n die folgende Gleichheit zu zeigen:

$$y_{k+1}^{(n)} \mathbf{P}_J y(N_J^{(n)}) \mathbf{P}_J = \mathbf{P}_J y(N_J^{(n)}) \mathbf{P}_J$$

Nach Definition ist $N_{\emptyset}^{(m)} = \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $y(N_J^{(m)})$ folglich 0. Für $J = \emptyset$ oder $N_J^{(n)} = \emptyset$ gilt die Gleichheit deshalb stets trivialerweise.

Für $n = 1$ ist die leere Menge die einzige echte Teilmenge. Für $n = 2$ und $n = 3$ berechnen wir $\mathbf{P}_J y(N_J^{(n)}) \mathbf{P}_J$ und stellen fest, dass dies stets eine Summe von Monomen

der Art P_H mit $|H| = |J| + 1$ ist. Daraus folgt dann die Gleichheit mit der ersten Aussage von (c) im Lemma 3.10:

$$P_1 y(N_{\{1\}}^{(2)}) P_1 = P_1 P_2 P_1 = P_{21} \in \mathfrak{S}_2^{(2)}$$

$$P_2 y(N_{\{2\}}^{(2)}) P_2 = P_2 0 P_2 = 0 \in \mathfrak{S}_2^{(2)}$$

$$P_1 y(N_{\{1\}}^{(3)}) P_1 = P_1 y(2, 3) P_1 = P_1 (P_2 + P_3 - P_{23}) P_1 = P_{21} + P_{13} - P_{213} \in \mathfrak{S}_2^{(3)}$$

$$P_2 y(N_{\{2\}}^{(3)}) P_2 = P_2 y(3) P_2 = P_{32} \in \mathfrak{S}_2^{(3)}$$

$$P_3 y(N_{\{3\}}^{(3)}) P_3 = P_3 0 P_3 = 0 \in \mathfrak{S}_2^{(3)}$$

$$P_{21} y(N_{\{1,2\}}^{(3)}) P_{21} = P_{21} y(3) P_{21} = P_{321} \in \mathfrak{S}_3^{(3)}$$

$$P_{31} y(N_{\{1,3\}}^{(3)}) P_{31} = P_{31} P_2 P_{31} = P_{321} \in \mathfrak{S}_3^{(3)}$$

$$P_{32} y(N_{\{2,3\}}^{(3)}) P_{32} = P_{32} 0 P_{32} = 0 \in \mathfrak{S}_3^{(3)}$$

Es seien nun $n \geq 3$ und $\emptyset \neq J \subseteq \underline{n+1}$ mit $r := |J| \leq n$. Gilt $r = n$ und $1 \notin J$, so folgt $N_J^{(n)} = \emptyset$. Gilt $r = n$ und $1 \in J$, so ist

$$N_J^{(n+1)} = \underline{n+1} \setminus J =: \{k\}$$

einelementig und deshalb $y(N_J^{(n+1)}) = P_k$. Ferner gilt $y_{n+1}^{(n+1)} = P_{\underline{n+1}}$. Die zu zeigende Gleichheit folgt nun aus der Idempotenz von $P_{\underline{n+1}}$ und daraus, dass auch $P_J y(N_J^{(n)}) P_J = P_{\underline{n+1}}$ ist, weil im Fall $J = \underline{n}$ gilt:

$$P_J y(N_J^{(n)}) P_J = P_{\underline{n}} P_{n+1} P_{\underline{n}} = P_{\underline{n+1}}$$

und weil im Fall $J \neq \underline{n}$ nach den verallgemeinerten Relationen gilt:

$$\begin{aligned} P_J y(N_J^{(n)}) P_J &= P_{n+1 \dots k+1 \dots k-1 \dots 1} P_k P_{n+1 \dots k+1 \dots k-1 \dots 1} \\ &= P_{n+1 \dots k+1 \dots k-1 \dots 1} P_k P_{k-1 \dots 1} \\ &= P_{n+1 \dots k+1} P_k P_{k-1 \dots 1} = P_{\underline{n+1}} \end{aligned}$$

Es sei jetzt $r < n$.

1. Fall: $n+1 \in J$ Ist $r = 1$, so ist $N_J^{(n+1)}$ nach Definition leer. Es sei nun $1 < r < n$ und $H := J \setminus \{n+1\}$, womit $N_J^{(n+1)} = N_H^{(n)}$ und natürlich $|H| = r - 1 \leq 1$ gilt. Es folgt aus den

verallgemeinerten Relationen und der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
 y_{r+1}^{(n+1)} P_J y(N_J^{(n+1)}) P_J &= y_{r+1}^{(n)} \underbrace{(1 - P_{n+1}) P_{n+1}}_{=0} P_H y(N_H^{(n)}) P_J \\
 &\quad - P_{n+1} y_r^{(n)} P_{n+1} P_H y(N_J^{(n)}) P_{n+1} P_H \\
 &= P_{n+1} y_r^{(n)} P_H y(N_H^{(n)}) P_H \\
 &= P_{n+1} P_H y(N_H^{(n)}) P_H \\
 &= P_{n+1} \underbrace{P_H y(N_J^{(n+1)})}_{\in \mathcal{A}_n} P_{n+1} P_H \\
 &= P_J y(N_J^{(n+1)}) P_J
 \end{aligned}$$

2. Fall: $n + 1 \notin J$ Dann ist J schon eine Teilmenge von \underline{n}_J und $N_J^{(n+1)} = N_J^{(n)} \cup \{n + 1\}$. Wir nutzen zusätzlich die erste Aussage von (c) des Lemmas 3.10, um die gewünschte Gleichheit herzuleiten:

$$\begin{aligned}
 y_{r+1}^{(n+1)} P_J y(N_J^{(n+1)}) P_J &= y_{r+1}^{(n)} (1 - P_{n+1}) P_J (y(N_J^{(n)}) (1 - P_{n+1}) + P_{n+1}) P_J \\
 &\quad + \underbrace{P_{n+1} y_r^{(n)} P_J y(N_J^{(n)}) (1 - P_{n+1}) P_J}_{=0} + P_{n+1} \underbrace{y_r^{(n)} P_J P_{n+1} P_J}_{=P_J} \\
 &= y_{r+1}^{(n)} P_J (y(N_J^{(n)}) (1 - P_{n+1}) + P_{n+1}) P_J \\
 &\quad - y_{r+1}^{(n)} \underbrace{P_{n+1} P_J y(N_J^{(n)}) (1 - P_{n+1}) P_J}_{=0} \\
 &\quad - y_{r+1}^{(n)} P_{n+1} P_J P_{n+1} P_J + P_{n+1} P_J \\
 &= y_{r+1}^{(n)} P_J (y(N_J^{(n)}) (1 - P_{n+1}) + P_{n+1}) P_J - y_{r+1}^{(n)} P_{n+1} P_J + P_{n+1} P_J \\
 &= y_{r+1}^{(n)} P_J y(N_J^{(n)}) P_J - y_{r+1}^{(n)} P_J y(N_J^{(n)}) \underbrace{P_{n+1} P_J}_{=P_J P_{n+1} P_J} + y_{r+1}^{(n)} \underbrace{P_J P_{n+1} P_J}_{=P_{n+1} P_J} \\
 &\quad - y_{r+1}^{(n)} P_{n+1} P_J + P_{n+1} P_J \\
 &= P_J y(N_J^{(n)}) P_J - P_J y(N_J^{(n)}) P_{n+1} P_J + P_{n+1} P_J \\
 &= P_J y(N_J^{(n+1)}) P_J
 \end{aligned}$$

□

3.5 Die zu den „Wegen“ der Inzidenzalgebra korrespondierenden Elemente in \mathcal{A}_n

In der Inzidenzalgebra $\text{Inz}(\mathcal{P}_n)$ von \mathcal{P}_n gibt es neben den idempotenten Basiselementen $X_{J,J}$ noch die Basiselemente $X_{J,K}$ mit $J <_n K$, welche im Radikal liegen. Bisher haben wir die zu den $X_{J,J}$ korrespondierenden Idempotenten $f_J^{(n)}$ konstruiert. Nun wenden wir uns den den $X_{J,K}$ entsprechenden Elementen in \mathcal{A}_n zu. Dazu werden wir (im Gegensatz zum Beweis der Normalform von \mathcal{A}_n) mit der ursprünglichen Definition der partiellen Ordnung \mathcal{P}_n arbeiten (s. S. 45).

Spezielle Monome

In diesem Abschnitt werden wir die im Folgenden definierten Monome untersuchen und zwei äquivalente (davon eine induktive) Beschreibungen angeben.

3.25 Definition. Für alle $1 \leq i \leq j \in \mathbb{N}$ definieren wir das Wort:

$$i \rightarrow j := i \cdot (i+1) \cdot \dots \cdot (j-1) \cdot j$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie für alle Teilmengen $J = j_r > \dots > j_1$ und $K = k_r > \dots > k_1$ von \underline{n} mit $J \leq_n K$ definieren wir damit das Monom:

$$P_{(J,K)} := P_{j_r \rightarrow k_r \dots j_1 \rightarrow k_1}$$

Insbesondere ist für jede nichtleere Teilmengen J von \underline{n} das Monom $P_{(J,J)}$ das uns schon bekannte Idempotente P_J , während $P_{(\emptyset,\emptyset)} = 1$ gilt.

3.26 Definition. Es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie J und K Teilmengen von \underline{n} . Ist J ein maximaler echter Vorgänger von K bezüglich \leq_n , so sagen wir, dass J und K benachbart sind und schreiben:

$$J <_n K$$

Im Hasse-Diagramm von \mathcal{P}_n sind Nachbarn also durch einen Pfeil verbunden.

Wie schon an den Beispielen für $n \in \{4, 5, 6\}$ (s. S. 35 u. S. 46f) zu sehen ist, gibt es im Allgemeinen zwischen $J \leq_n K$ mit $J \neq K$ keine eindeutig bestimmte $<_n$ -Kette von J nach K . Aber das Monom $P_{(J,K)}$ ist nach dem folgenden Lemma eine Invariante solcher $<_n$ -Ketten.

3.27 Lemma. *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $J \leq_n K$. Für jede \leq_n -Kette $J = H_1 \leq_n \dots \leq_n H_t = K$ von J nach K gilt dann:*

$$P_{(J,K)} = P_{H_1, \dots, H_t}$$

Beweis: Wir führen eine Induktion nach n , dabei ist der Induktionsanfang für $n \in \{1, 2\}$ leicht nachzurechnen. Ist ferner eine der Mengen J oder K die leere Menge oder \underline{n} , so ist nach Definition von \leq_n die andere Menge auch leer bzw. \underline{n} . In beiden Fällen gilt die Behauptung trivialerweise.

Es seien nun $n \geq 2$ und $J \leq_{n+1} K$ nichtleere Teilmengen von $\underline{n+1}$ und $r = |J| \neq n+1$ sowie $J = H_1 \leq_{n+1} H_2 \leq_{n+1} \dots \leq_{n+1} H_t = K$ eine \leq_{n+1} -Kette von J nach K . Ist $r = 1$, so gibt es genau eine Kette von $J = \{j_1\}$ nach $K = \{k_1\}$, und zwar die folgende:

$$\{j_1\} \leq_{n+1} \{j_1 + 1\} \leq_n \dots \leq_n \{k_1 - 1\} \leq_n \{k_1\}$$

und es gilt:

$$P_{(J,K)} = P_{j_1 \rightarrow k_1}$$

Es sei nun $r > 1$. Für einen besseren Überblick über die \leq -Beziehungen der Elemente von $H_s = h_{r,s} > h_{r-1,s} > \dots > h_{1,s}$ notieren wir sie im Rechteck:

$$\begin{array}{cccccc}
 K = & H_t & = & h_{r,t} & > & h_{r-1,t} & > & \dots & > & h_{2,t} & > & h_{1,t} \\
 & \vee & & \text{IV} & & \text{IV} & & & & \text{IV} & & \text{IV} \\
 & H_{t-1} & = & h_{r,t-1} & > & h_{r-1,t-1} & > & \dots & > & h_{2,t-1} & > & h_{1,t-1} \\
 & \vee & & \text{IV} & & \text{IV} & & & & \text{IV} & & \text{IV} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & \vee & & \text{IV} & & \text{IV} & & & & \text{IV} & & \text{IV} \\
 & H_2 & = & h_{r,2} & > & h_{r-1,2} & > & \dots & > & h_{2,2} & > & h_{1,2} \\
 & \vee & & \text{IV} & & \text{IV} & & & & \text{IV} & & \text{IV} \\
 J = & H_1 & = & h_{r,1} & > & h_{r-1,1} & > & \dots & > & h_{2,1} & > & h_{1,1}
 \end{array}$$

Dabei gilt in jeder Spalte j an genau einer Stelle s eine echte Ungleichung und dort gilt: $h_{j,s} + 1 = h_{j,s+1}$. Ferner setzen wir:

$$\tilde{J} = J \setminus \{\max J\} \quad \text{und} \quad \tilde{K} = K \setminus \{\max K\}$$

und für alle $i \in \underline{t}$ zudem:

$$\tilde{H}_i := H_i \setminus \{\max H_i\}$$

Ist $n + 1$ nicht in K enthalten, so erst recht nicht in J . Deshalb gilt $J \leq_n K$ und die \leq_{n+1} -Kette ist eine \leq_n -Kette, womit die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung gilt. Es gelte jetzt $n + 1 \in K$.

1. Fall: $n + 1 \in J$ Insbesondere ist dann $j_r \rightarrow k_r = n + 1 \rightarrow n + 1 = n + 1$. Außerdem gilt in diesem Fall:

$$\widetilde{H}_i = H_i \setminus \{n + 1\}$$

Das größte Element $h_{r,i} = n + 1$ von H_i spielt also keine Rolle für die \leq_{n+1} -Kette. Wir erhalten demnach die \leq_n -Kette:

$$\widetilde{J} = J \setminus \{n + 1\} = \widetilde{H}_1 \leq_n \widetilde{H}_2 \leq_n \dots \leq_n \widetilde{H}_t = K \setminus \{n + 1\} = \widetilde{K},$$

auf welche die Induktionsvoraussetzung angewandt werden kann:

$$\begin{aligned} P_{H_1 \dots H_t} &= P_{n+1, \widetilde{H}_1, n+1, \widetilde{H}_2, \dots, n+1, \widetilde{H}_t} \\ &= P_{n+1, \widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \dots, \widetilde{H}_t} \\ &= P_{n+1} P_{(\widetilde{J}, \widetilde{K})} \\ &= P_{n+1} P_{j_{r-1} \rightarrow k_{r-1}, \dots, j_1 \rightarrow k_1} \\ &= P_{j_r \rightarrow k_r, j_{r-1} \rightarrow k_{r-1}, \dots, j_1 \rightarrow k_1} = P_{(J, K)} \end{aligned}$$

2. Fall: $n + 1 \notin J$ Dann gibt es ein $s \in \{2, \dots, t\}$ minimal mit $n + 1 \in H_s$ und es gilt:

$$n = h_{r,s-1} < n + 1 = h_{r,s} = h_{r,s+1} = \dots = h_{r,t-1} = h_{r,t}$$

Wie im ersten Fall bilden die $\widetilde{H}_i = H_i \setminus \{n + 1\}$ mit $i \in \{s, s + 1, \dots, t\}$ eine \leq_n -Kette:

$$\widetilde{H}_s \leq_n \dots \leq_n \widetilde{H}_t = \widetilde{K}$$

Währenddessen ist

$$H_1 \leq_n \dots \leq_n H_{s-1}$$

schon eine \leq_n -Kette, da $n + 1$ in keinem H_i mit $i \in \underline{s-1}$ enthalten ist. Wie im ersten Fall wenden wir auch hier die verallgemeinerten Relationen neben der Induktionsvoraussetzung an:

$$\begin{aligned} P_{H_1 \dots H_t} &= P_{H_1 \dots H_{s-1}} P_{n+1} P_{\widetilde{H}_s \dots \widetilde{H}_t} \\ &= P_{(J, H_{s-1})} P_{n+1} P_{(\widetilde{H}_s, \widetilde{K})} \\ &= P_{h_{r,1} \rightarrow h_{r,s-1}, \dots, h_{1,1} \rightarrow h_{1,s-1}} P_{n+1} P_{h_{r-1,s} \rightarrow h_{r-1,t}, \dots, h_{1,s} \rightarrow h_{1,t}} \end{aligned}$$

Wegen $n + 1 > h_{r,s-1} > h_{r-1,s-1}$ kommutiert P_{n+1} mit P_j für alle $j \leq h_{r-1,s-1}$ und wir erhalten weiter:

$$= P_{h_{r,1} \rightarrow h_{r,s-1} \cdot n+1} \underbrace{P_{h_{r-1,1} \rightarrow h_{r-1,s-1} \dots h_{1,1} \rightarrow h_{1,s-1}}}_{=P_{(\tilde{H}_1, \tilde{H}_{s-1})}} \underbrace{P_{h_{r-1,s} \rightarrow h_{r-1,t} \dots h_{1,s} \rightarrow h_{1,t}}}_{=P_{(\tilde{H}_s, \tilde{H}_t)}}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt nun für jede \leq_n -Kette $\tilde{H}_1 = L_1 \leq_n \dots \leq_n L_x = \tilde{H}_{s-1}$:

$$P_{(\tilde{H}_1, \tilde{H}_{s-1})} = P_{L_1 \dots L_x}$$

und für jede \leq_n -Kette $\tilde{H}_s = M_1 \leq_n \dots \leq_n M_y = \tilde{H}_t$:

$$P_{(\tilde{H}_s, \tilde{H}_t)} = P_{M_1 \dots M_y}$$

Weil außerdem $\tilde{H}_{s-1} = \tilde{H}_s$ gilt, können wir schließlich die Induktionsvoraussetzung noch einmal auf die zusammengesetzte \leq_n -Kette

$$\tilde{H}_1 = L_1 \leq_n \dots \leq_n L_x = M_1 \leq_n \dots \leq_n M_y = \tilde{H}_t$$

von \tilde{H}_1 nach \tilde{H}_t anwenden:

$$\begin{aligned} P_{h_{r,1} \rightarrow h_{r,s-1} \cdot n+1} P_{(\tilde{H}_1, \tilde{H}_{s-1})} P_{(\tilde{H}_s, \tilde{H}_t)} &= P_{j_r \rightarrow n \cdot n+1} P_{L_1 \dots L_x} P_{M_1 \dots M_y} \\ &= P_{j_r \rightarrow k_r} P_{(\tilde{H}_1, \tilde{H}_t)} \\ &= P_{j_r \rightarrow k_r} P_{h_{r-1,1} \rightarrow h_{r-1,t} \dots h_{1,1} \rightarrow h_{1,t}} \\ &= P_{(J,K)} \end{aligned}$$

□

Aus der Idempotenz der P_j folgt nun:

3.28 Korollar. *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $J \leq_n K$. Dann gilt:*

$$P_J P_{(J,K)} = P_{(J,K)} = P_{(J,K)} P_K$$

Insbesondere liegt $P_{(J,K)}$ in dem Ideal $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ von \mathcal{A}_n .

Eine induktive Beschreibung der $P_{(J,K)}$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes Paar $J \leq_n K$ werden wir zunächst (induktiv nach n) das Monom $m_n(J, K)$ definieren und danach zeigen, dass dieses mit $P_{(J,K)}$ übereinstimmt.

3.29 Definition. Es seien M_1, \dots, M_r Intervalle in einer endlichen Teilmenge M von \mathbb{N} . Wir nennen $\{M_1, \dots, M_r\}$ die Intervallzerlegung von M , wenn gilt:

- $M = M_1 \cup \dots \cup M_r$
- $M_1 < \dots < M_r$
- $M_i \cup M_{i+1}$ ist kein Intervall für alle $i \in \underline{r-1}$

Ferner bezeichnen wir mit M_{\max} das bezüglich $<$ größte Intervall der Intervallzerlegung von M ; es gilt also:

$$M_{\max} := M_r$$

Außerdem führen wir für die um 1 nach links verschobene Menge von M die folgende Notation ein:

$$M - 1 := \{m - 1 \mid m \in M\}$$

Dabei gehen wir von der Konvention $\emptyset - 1 = \emptyset$ aus.

Insbesondere kommutieren in einer Intervallzerlegung P_{M_i} und P_{M_j} für alle $i, j \in \underline{r}$.

Ist $J \leq_n K$ und liegt n in J , so ist n auch in K enthalten. Die Fallunterscheidung in der nächsten Bemerkung ist demnach vollständig.

Bemerkung 1: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und Teilmengen $J \neq K$ von $\underline{n+1}$ mit $J \leq_{n+1} K$ gilt:

$J \leq_n K$	falls $n + 1 \notin K$
$J \leq_n K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} - 1)$	falls $n + 1 \in K \setminus J$
$J \setminus J_{\max} \leq_n K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1)$	falls $n + 1 \in J$

Damit können wir nun die $m_n(J, K)$ definieren. Den Beweis der Bemerkung führen wir anschließend.

3.30 Definition. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede Teilmenge J von \underline{m} setzen wir:

$$m_m(J, J) := P_J$$

Insbesondere gilt dann:

$$m_1(\{1\}, \{1\}) := P_1 \quad \text{und} \quad m_m(\emptyset, \emptyset) = 1$$

Für jedes $n \geq 1$ definieren wir induktiv für alle Teilmengen $J \neq K$ von $\underline{n+1}$ mit $J \leq_{n+1} K$ das Monom $m_{n+1}(J, K)$ durch:

$$m_{n+1}(J, K) := \begin{cases} m_n(J, K) & \text{falls } n+1 \notin K \\ m_n(J, K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} - 1)) P_{K_{\max}} & \text{falls } n+1 \in K \setminus J \\ m_n(J \setminus J_{\max}, K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1)) P_{K_{\max}} & \text{falls } n+1 \in J \end{cases}$$

Bevor wir die Bemerkung beweisen – also die Wohldefiniertheit der $m_n(J, K)$ zeigen – illustrieren wir noch an Beispielen, dass das Verhältnis zwischen J_{\max} und K_{\max} kein sehr klares ist:

Es seien $J \leq_n K$ und $s, t \in \mathbb{N}$ mit:

$$J = \underbrace{j_r > j_{r-1} > \dots > j_s > \dots > j_2 > j_1}_{=J_{\max}}$$

und

$$K = \underbrace{k_r > k_{r-1} > \dots > k_t > \dots > k_2 > k_1}_{=K_{\max}}$$

Im Allgemeinen lässt sich nicht sagen ob $s \leq t$ oder $s \geq t$ gilt.

Für $J = \{7, 6, 4, 3, 2\} \leq_n \{7, 6, 5, 4, 2\} = K$ gilt etwa $r = 5$, $s = 4 > 2 = t$ und $J_{\max} \subset K_{\max}$, womit J_{\max} und K_{\max} bezüglich $<$ unvergleichbar sind.

Für $J = \{7, 6, 4, 3, 2\} \leq_n \{8, 7, 5, 3, 2\} = K$ gilt hingegen $r = 5$, $s = 4 = 4 = t$ und $J_{\max} < K_{\max}$.

Für $J = \{7, 6, 4, 3, 2\} \leq_n \{9, 7, 5, 3, 2\} = K$ haben wir $r = 5$, $s = 4 < 5 = t$ und $J_{\max} < K_{\max}$.

Allgemein gilt stets $K_{\max} \not\leq J_{\max}$, denn andernfalls stünde $\max K < \max J$ im Widerspruch zu $J \leq_n K$.

Beweis: Es seien J, K und r, s, t sowie j_r, \dots, j_1 und k_r, \dots, k_1 wie oben.

1.Fall: $n + 1 \notin K$ Dieser Fall ist nach Definition von \leq_n klar.

2.Fall: $n + 1 \in K \setminus J$ Dann ist $j \leq n$ und $k_r = n + 1$. Weil in einer Intervallzerlegung einer Menge der Abstand zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Intervallen mindestens 2 ist, gilt insbesondere $k_t - 1 \notin K$ und $k_t - 1 > k_{t-1}$. Für $H := K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} - 1)$ gilt deshalb:

$$H = \underbrace{h_r = n > \dots > h_t = k_t - 1}_{=K_{\max} - 1} > h_{t-1} = k_{t-1} > \dots > h_1 = k_1$$

Angenommen $J \not\leq_n H$. Da J und H gleichmächtig sind, gibt es dann einen Index $i \in \underline{r}$ mit $j_i > h_i$. Wegen $J \leq_{n+1} K$ gilt insbesondere $j_x \leq k_x = h_x$ für alle $x \in \underline{t-1}$, womit i in $\{t, t+1, \dots, r\}$ liegen muss. Demnach ist $k_i \geq j_i > h_i = k_i - 1$, also $j_i = k_i$. Weil $\{k_r, k_{r-1}, \dots, k_{i+1}, k_i\}$ ein Intervall ist, folgt der Widerspruch:

$$n + 1 = k_r = k_{i+r-i} = k_i + (r - i) = j_i + (r - i) \leq j_r \leq n$$

3.Fall: $n + 1 \in J$ Dann gilt $j_r = n + 1 = k_r$. Zuerst bemerken wir, dass in diesem Fall stets

$$(*) \quad J_{\max} \subseteq K_{\max}$$

gilt, denn für alle $r - i$ aus dem Intervall J_{\max} gilt:

$$j_{r-i} = j_r - i = n + 1 - i = k_r - i \geq k_{r-i} \geq j_{r-i}$$

Damit ist J_{\max} eine Teilmenge von K , die zudem ein Intervall ist und $n + 1$ enthält, und deshalb schon in K_{\max} enthalten ist.

Wäre jetzt $\tilde{J} := J \setminus J_{\max} = \emptyset$, so folgte aus $J = J_{\max} \subseteq K_{\max} \subseteq K$ wegen $|J| = |K|$ gerade der Widerspruch $J = K$. Damit ist J_{\max} eine echte Teilmenge von J und die Aussage

$$\tilde{J} \leq_n \tilde{K} := K \setminus J_{\max}$$

sinnvoll und offensichtlich wahr.

Gilt nun $K_{\max} = J_{\max}$, so ist $K_{\max} \setminus J_{\max}$ leer, also auch $(K_{\max} \setminus J_{\max}) - 1$, womit die Behauptung der schon gezeigten Aussage $\tilde{J} \leq_n \tilde{K}$ entspricht.

Gilt hingegen $J_{\max} \subset K_{\max}$, so befinden wir uns in der gleichen Situation wie im 2. Fall mit $\tilde{J} \leq_{k_s-1} \tilde{K}$ und $k_{s-1} = k_s - 1 = j_s - 1 > j_{s-1}$ an der Stelle von $J \leq_{n+1} K$ und $k_r = n + 1$. Demnach folgt:

$$\tilde{J} \leq_{(k_s-2)} \tilde{K} \setminus \tilde{K}_{\max} \cup (\tilde{K}_{\max} - 1) =: L$$

Dies entspricht der Behauptung, weil für den rechten Ausdruck L gilt:

$$L = (K \setminus J_{\max}) \setminus (K_{\max} \setminus J_{\max}) \cup (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1) = K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1)$$

□

Die ersten $m_n(J, K)$ für $n \in \{1, 2, 3\}$ sind die folgenden Monome:

$$m_1(\{\emptyset\}, \{\emptyset\}) = 1$$

$$m_1(\{1\}, \{1\}) = P_1$$

$$m_2(\{1\}, \{1\}) = P_1$$

$$m_1(\{1\}, \{2\}) = m_1(\{1\}, \{1\}) P_2 = P_{12}$$

$$m_2(\{2\}, \{2\}) = P_2$$

$$m_2(\{1, 2\}, \{1, 2\}) = P_{21}$$

Der Übersichtlichkeit wegen unterschlagen wir ab jetzt die Paare $J \leq_3 K$ mit $J = K$:

$$m_3(\{1\}, \{2\}) = m_2(\{1\}, \{2\}) = P_{12}$$

$$m_3(\{1\}, \{3\}) = m_2(\{1\}, \{2\}) P_3 = P_{123}$$

$$m_3(\{2\}, \{3\}) = m_2(\{2\}, \{2\}) P_3 = P_{23}$$

$$m_3(\{1, 2\}, \{1, 3\}) = m_2(\{1, 2\}, \{1, 2\}) P_3 = P_{213}$$

$$m_3(\{1, 2\}, \{2, 3\}) = m_2(\{1, 2\}, \{1, 2\}) P_{32} = P_{2132}$$

$$m_3(\{1, 3\}, \{2, 3\}) = m_2(\{1\}, \{1\}) P_{32} = P_{132}$$

3.31 Lemma. *Es seien $n \in \mathbb{N}$, J und K nichtleere Teilmengen von \underline{n} mit $J \leq_n K$. Dann gilt:*

$$m_n(J, K) = P_{(J,K)}$$

Beweis: Für $n \in \underline{3}$ gilt die Gleichheit nach obigen Rechnungen.

Es seien nun $n \geq 3$ und $J \leq_{n+1} K$ sowie $s, t \in \mathbb{N}$ mit:

$$J = \underbrace{j_r > j_{r-1} > \dots > j_s}_{=J_{\max}} > \dots > j_2 > j_1$$

und

$$K = \underbrace{k_r > k_{r-1} > \dots > k_t > \dots > k_2 > k_1}_{=K_{\max}}$$

1. Fall: $n + 1 \notin K$ In diesem Fall entspricht die Behauptung der Induktionsvoraussetzung.

2. Fall: $n + 1 \in K \setminus J$ Es ist dann $P_{K_{\max}} = P_{k_r, k_{r-1}, \dots, k_t}$ und es gilt:

$$K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} - 1) = k_r - 1 > \dots > k_t - 1 > k_{t-1} > \dots > k_1$$

Nach der Induktionsvoraussetzung und den verallgemeinerten Relationen – hier $k_r > k_{r-1} > k_{r-1} - 1$ usw. beachtend – ergibt sich deshalb:

$$\begin{aligned} m_{n+1}(J, K) &= m_n(J, K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} - 1)) P_{K_{\max}} \\ &= P_{(J, K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} - 1))} P_{K_{\max}} \\ &= P_{j_r \rightarrow (k_r-1) \dots \cdot j_t \rightarrow (k_t-1) \dots \cdot j_1 \rightarrow k_1} P_{k_r, (k_r-1) \dots, k_t} \\ &= P_{j_r \rightarrow (k_r-1) \cdot k_r \cdot j_{r-1} \rightarrow (k_{r-1}-1) \cdot k_{r-1} \dots \cdot j_t \rightarrow (k_t-1) \cdot k_t \cdot j_{t-1} \rightarrow k_{t-1} \dots \cdot j_1 \rightarrow k_1} \\ &= P_{(J, K)} \end{aligned}$$

3. Fall: $n + 1 \in J$ Jetzt gilt also $j_r = n + 1 = k_r$. Gilt $J_{\max} = K_{\max}$, so folgt $s = t$ sowie $k_s > k_{s-1} + 1$ und das Wort $j_i \rightarrow k_i$ ist nur k_i für alle $i \in \{s, \dots, r\}$, weshalb wir nach der Induktionsvoraussetzung und den verallgemeinerten Relationen erhalten:

$$\begin{aligned} m_{n+1}(J, K) &= m_n(J \setminus J_{\max}, K \setminus K_{\max}) P_{K_{\max}} \\ &= P_{(J \setminus J_{\max}, K \setminus K_{\max})} P_{k_r \dots \cdot k_s} \\ &= P_{j_{s-1} \rightarrow k_{s-1} \dots \cdot j_1 \rightarrow k_1} P_{k_r \dots \cdot k_s} \\ &= P_{k_r \dots \cdot k_s} P_{j_{s-1} \rightarrow k_{s-1} \dots \cdot j_1 \rightarrow k_1} \\ &= P_{(J, K)} \end{aligned}$$

Ist hingegen $J_{\max} \neq K_{\max}$, so gilt $J_{\max} \subset K_{\max}$ (vgl. (*) S. 88). Außerdem haben wir:

$$K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1) = k_{s-1} - 1 > \dots > k_t - 1 > k_{t-1} > \dots > k_1$$

Die Behauptung folgt daraus mit der Induktionsvoraussetzung und den verallgemeinerten Relationen:

$$\begin{aligned}
 m_{n+1}(J, K) &= m_n(J \setminus J_{\max}, K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1)) P_{K_{\max}} \\
 &= P_{(J \setminus J_{\max}, K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1))} P_{k_r \dots k_s \cdot k_{s-1} \dots k_t} \\
 &= P_{j_{s-1} \rightarrow (k_{s-1}-1) \dots \cdot j_t \rightarrow (k_t-1) \cdot j_{t-1} \rightarrow k_{t-1} \dots \cdot j_1 \rightarrow k_1} P_{k_r \dots k_s \cdot k_{s-1} \dots k_t} \\
 &= P_{k_r \dots k_s \cdot j_{s-1} \rightarrow (k_{s-1}-1) \cdot k_{s-1} \dots \cdot j_t \rightarrow (k_t-1) \cdot k_t \cdot j_{t-1} \rightarrow k_{t-1} \dots \cdot j_1 \rightarrow k_1} \\
 &= P_{(J, K)}
 \end{aligned}$$

□

Eigenschaften der $m_n(\mathbf{r})$

Nun wenden wir uns denjenigen $m_n(J, K)$ zu, für welche die Ketten von J nach K von maximaler Länge sind, d.h. J ist minimal und K ist maximal bezüglich \leq_n ; also $J = \underline{r}$ und $K = \{n - r + 1, \dots, n\}$ für ein $r \in \underline{n}_0$ (vgl. Bemerkung über Senken und Quellen im Gabriel-Köcher auf S. 38).

3.32 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $r \in \underline{n}_0$ setzen wir:

$$m_n(r) := P_{(\underline{r}, K = \{n-r+1, \dots, n\})}$$

Diese Monome sind die folgenden:

$$m_n(0) = P_\emptyset = 1$$

$$m_n(1) = P_{1 \rightarrow n}$$

$$m_n(2) = P_{2 \rightarrow n, 1 \rightarrow n-1} = P_{21} P_{32} \dots P_{n-1, n-2} P_{n, n-1}$$

$$m_n(3) = P_{3 \rightarrow n, 2 \rightarrow n-1, 1 \rightarrow n-2} = P_{321} P_{432} \dots P_{n, n-1, n-2}$$

Eine leichte Induktion bzw. wiederholtes Anwenden der verallgemeinerten Relationen zeigt, dass für jedes $r \in \underline{n}_0$ gilt:

$$m_n(r) = P_{r \rightarrow n, r-1 \rightarrow n-1, \dots, 1 \rightarrow n-r+1} = P_{r, \dots, 2, 1} P_{r+1, \dots, 3, 2} \dots P_{n, n-1, \dots, n-r+1}$$

Damit sind die $m_n(r)$ für $r \geq n - 2$:

$$\begin{aligned} m_n(n-2) &= P_{n-2, n-1, n, \dots, 234, 123} = P_{n-2, \dots, 2, 1} P_{n-1, \dots, 3, 2} P_{n, n-1, \dots, 3} \\ m_n(n-1) &= P_{n-1, n, \dots, 23, 12} = P_{n-1, \dots, 2, 1} P_{n, \dots, 3, 2} \\ m_n(n) &= P_{n, \dots, 2, 1} \end{aligned}$$

Wie schon gesehen liegt das Monom $m_n(r)$ in dem Ideal $\mathfrak{I}_r^{(n)}$. Es liegt jedoch nicht in dem kleinerem Ideal $\mathfrak{I}_{r+1}^{(n)}$, was aus dem nächsten Lemma folgt.

3.33 Lemma. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $r \in \underline{n} \setminus 0$ gilt:

$$m_n(r) (1 - y_{r+1}^{(n)}) \neq 0$$

Beweis: Wir führen wieder eine Induktion nach n . Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Für $n = 2$ (also $r = 1$) gilt:

$$m_2(1) (1 - y_2^{(2)}) = m_2(\{1\}, \{2\}) (1 - y_2^{(2)}) = P_{12}(1 - P_{21}) = P_{12} - P_{21} \in \text{Rad}(\mathcal{A}_2) \setminus \{0\}$$

Es seien nun $n \geq 2$ und $r \in \underline{n+1} \setminus 0$. Ist $r = 0$, so folgt

$$m_{n+1}(0) (1 - y_1^{(n+1)}) = 1 - y_1^{(n+1)} = z_0^{(n+1)} \neq 0$$

Dabei erinnern wir daran, dass wir schon eingesehen haben, dass die $z_k^{(n)}$ von 0 verschieden sind (s. Bemerkung S. 71). Ist $r = n + 1$, so gilt:

$$m_{n+1}(n+1) (1 - y_{n+2}^{(n+1)}) = P_{n+1, n, \dots, 1} (1 - 0) \neq 0$$

Ist $r = 1$, so gilt:

$$\begin{aligned} m_{n+1}(1) (1 - y_2^{(n+1)}) &= P_{1 \rightarrow n+1} (1 - y_2^{(n+1)}) \\ &= P_{1 \rightarrow n+1} - P_{1 \rightarrow n} \underbrace{P_{n+1} y_2^{(n)} (1 - P_{n+1})}_{=0} - P_{1 \rightarrow n} P_{n+1} P_{n+1} y_1^{(n)} \\ &= P_{1 \rightarrow n+1} (1 - y_1^{(n)}) \\ &= P_{1 \rightarrow n+1} z_0^{(n)} \end{aligned}$$

Für $2 \leq r \leq n$ gilt zunächst nach den Berechnungen von $m_n(r)$ vor diesem Lemma:

$$m_{n+1}(r) = P_{r \rightarrow n+1, r-1 \rightarrow n, \dots, 1 \rightarrow n+1-r+1} = P_{r \rightarrow n+1} m_n(r-1)$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt dann:

$$\begin{aligned} m_{n+1}(r) \left(1 - y_{r+1}^{(n+1)}\right) &= P_{r \rightarrow n+1} m_n(r-1) \left(1 - y_{r+1}^{(n+1)}\right) \\ &= P_{r \rightarrow n} P_{n+1} m_n(r-1) - \underbrace{P_{r \rightarrow n} P_{n+1} m_n(r-1) y_{r+1}^{(n)} \left(1 - P_{n+1}\right)}_{=0} \\ &\quad - P_{r \rightarrow n+1} m_n(r-1) P_{n+1} y_r^{(n)} \\ &= P_{r \rightarrow n+1} \underbrace{m_n(r-1) \left(1 - y_r^{(n)}\right)}_{=: X \neq 0} \end{aligned}$$

Es sind nun $z_0^{(n)}$ und X jeweils von 0 verschiedene Linearkombinationen von Monomen in den P_i mit $i \in \underline{n}$. Dass dann auch $P_{r \rightarrow n+1} z_0^{(n)}$ bzw. $P_{r \rightarrow n+1} X$ von 0 verschieden ist, folgt aus der allgemeinen Aussage, die wir in der nächsten Bemerkung formuliert haben. \square

Bemerkung: Für alle Wörter u, v über \underline{n} mit $P_u \neq P_v$ und alle $r \in \underline{n}$ gilt:

$$P_{r \rightarrow n+1} P_u \neq P_{r \rightarrow n+1} P_v$$

Beweis: Nach dem Beweis des Satzes 3.2 (s. S. 48) über eine Normalform von \mathcal{A}_n gibt es eine injektiv unzerlegbare Q_n -Darstellung I_y mit

$$I_y P_u \neq I_y P_v$$

für ein $y \in \underline{n}$. Im Fall $y < r$ ist $I_y P_{r \rightarrow n, n+1} = I_y$ (hier als Q_{n+1} -Darstellung aufgefasst) und es folgt:

$$I_y P_{r \rightarrow n, n+1} P_u = I_y P_u \neq I_y P_v = I_y P_{r \rightarrow n, n+1} P_v$$

Ist hingegen $y \geq r$, so betrachten wir die Q_{n+1} -Darstellung I_{y+1} . Für diese gilt nämlich $I_{y+1} P_{r \rightarrow n, n+1} = I_y$ und damit:

$$I_{y+1} P_{r \rightarrow n, n+1} P_u = I_y P_u \neq I_y P_v = I_{y+1} P_{r \rightarrow n, n+1} P_v$$

\square

3.34 Korollar. Für jedes $0 \leq r \leq n \in \mathbb{N}$ ist $P_{(J,K)} + \mathfrak{S}_{r+1}^{(n)}$ ein von 0 verschiedenes Element des Quotienten $\mathfrak{S}_r^{(n)} / \mathfrak{S}_{r+1}^{(n)}$.

Beweis: Läge $P_{(J,K)} = m_n(r)$ in dem Ideal $\mathfrak{S}_{r+1}^{(n)}$ für ein $r \in \underline{n} \setminus 0$, so folgte aus dem Korollar 3.11 (s. S. 65) gerade $m_n(r) y_{r+1}^{(n)} = m_n(r)$, was ein Widerspruch zu dem vorangegangenen Lemma wäre. \square

Ein Element in $f_J^{(n)} \mathcal{A}_n f_K^{(n)}$

Für den Rest dieses Unterabschnittes betrachten wir das Element

$$f_J^{(n)} P_{(J,K)} f_K^{(n)} \in f_J^{(n)} \mathcal{A}_n f_K^{(n)}$$

eingehender. Wir behaupten, dass es im Fall $J \leq_n K$ von 0 verschieden ist und somit als Kandidat für das Bild von (J, K) unter einem möglichen Isomorphismus von $\text{Inz}(\mathcal{P}_n)$ nach \mathcal{A}_n in Frage kommt. Mit den bisherigen Beobachtungen und Ergebnissen können

wir (hier sehr ausführlich) umformen und dann reduzieren: (Es sei $r := |J|$.)

$$\begin{aligned}
 & f_J^{(n)} P_{(J,K)} f_K^{(n)} \\
 = & f_J^{(n)} P_J P_{(J,K)} f_K^{(n)} \\
 & \quad \text{[Korollar 3.28 auf Seite 85]} \\
 = & P_J z_r^{(n)} P_{(J,K)} f_K^{(n)} \\
 & \quad \text{[Proposition 3.23 auf Seite 79]} \\
 = & P_J z_r^{(n)} P_{(J,K)} g_K^{(n)} z_r^{(n)} \\
 & \quad \text{[Definition von } f_K^{(n)} \text{ auf Seite 77]} \\
 = & z_r^{(n)} P_J P_{(J,K)} g_K^{(n)} \\
 & \quad \text{[Zentralität und Idempotenz von } z_r^{(n)} \text{ nach Satz 3.15 auf Seite 71]} \\
 = & y_r^{(n)} P_J P_{(J,K)} g_K^{(n)} - y_{r+1}^{(n)} P_J P_{(J,K)} g_K^{(n)} \\
 & \quad \text{[Definition von } z_r^{(n)} \text{ auf Seite 71]} \\
 = & P_J P_{(J,K)} g_K^{(n)} + \mathfrak{S}_{r+1}^{(n)} \\
 & \quad \text{[Eigenschaften von } y_r^{(n)} \text{ nach Lemma 3.10 und Korollar 3.11 auf Seite 65]} \\
 = & P_{(J,K)} (1 - y(N_K^{(n)})) + \mathfrak{S}_{r+1}^{(n)} \\
 & \quad \text{[Alternative Beschreibung von } g_K^{(n)} \text{ nach Proposition 3.20 auf Seite 76]} \\
 = & P_{(J,K)} - P_{(J,K)} y(N_K^{(n)}) + \mathfrak{S}_{r+1}^{(n)}
 \end{aligned}$$

Im nächsten Lemma 3.36 zeigen wir, dass in der Linearkombination $P_{(J,K)} y(N_K^{(n)})$ kein Summand $c_w P_w \neq 0$ linear abhängig von dem Monom $P_{(J,K)}$ ist. Weiter ist insbesondere dieses Monom $P_{(J,K)}$ nicht in $\mathfrak{S}_{r+1}^{(n)}$ enthalten. Denn läge es in $\mathfrak{S}_{r+1}^{(n)}$, so läge im Widerspruch zu dem letzten Korollar 3.34 auch $m_n(r)$ in $\mathfrak{S}_{r+1}^{(n)}$, weil nach der ersten alternativen Beschreibung der $P_{(J,K)}$ (s. Lemma 3.27 S. 83):

$$m_n(r) = P_{J_1 \dots J_s} P_{(J,K)} P_{K_1 \dots K_t}$$

für eine \llcorner_n -Kette $J_1 \llcorner_n \dots \llcorner_n J_s$ von \underline{r} nach J und eine \llcorner_n -Kette $K_1 \llcorner_n \dots \llcorner_n K_t$ von K nach $\{n - r + 1, \dots, n\}$ gilt. Somit gilt also:

$$f_J^{(n)} P_{(J,K)} f_K^{(n)} = P_{(J,K)} - P_{(J,K)} y(N_K^{(n)}) + \mathfrak{S}_{r+1}^{(n)} \neq 0 \in \mathcal{A}_n / \mathfrak{S}_{r+1}^{(n)}$$

Insgesamt haben wir (mit dem darauffolgenden Lemma 3.36) also bewiesen:

3.35 Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $J \leq_n K$ gilt:

$$f_J^{(n)} \mathcal{A}_n f_K^{(n)} \neq \{0\}$$

Präziser gilt:

$$f_J^{(n)} P_{(J,K)} f_K^{(n)} \neq 0$$

Wir schreiben jetzt auch dann $P_v \in B_n$ (vgl. Satz 3.2 S. 48), wenn P_v ein Monom in Normalform ist. Es sind also zwei Monome P_v und P_w aus B_n verschieden, wenn $v \neq w$ gilt. Ferner fassen wir B_n als Teilmenge von B_{n+1} auf.

Der Beweis des Lemmas ist eine Induktion nach n , weswegen wir jetzt die induktive Beschreibung $m_n(J, K)$ von $P_{(J,K)}$ verwenden. (s. Def. 3.30 S. 87)

3.36 Lemma. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $J \leq_n K$ gilt:

$$m_n(J, K) y(N_K^{(n)}) \in \left\langle P_v \in \mathcal{A}_n \mid P_v \neq m_n(J, K) \right\rangle_{\mathcal{K}} =: U_{J,K}^{(n)}$$

Beweis: Hinweis zu den Randfällen: Im Fall $N_K^{(n)} = \emptyset$ gilt $y(N_K^{(n)}) = 0$ nach Definition und die Behauptung deshalb trivialerweise. Es sei jetzt $J = K$ und $N_K^{(n)} \neq \emptyset$. Schreiben wir $y(N_K^{(n)})$ als \mathcal{K} -Linearkombination $\sum_{w \in B_n} c_w P_w$, so folgt:

$$m_n(K, K) y(N_K^{(n)}) = P_K y(N_K^{(n)}) = \sum_{w \in B_n} c_w P_K P_w$$

Weil nun jedes P_w mit $c_w \neq 0$ wegen $N_K^{(n)} \subseteq \underline{n} \setminus K$ ein Monom in $\underline{n} \setminus K$ ist, welches von 1 verschieden ist, unterscheiden sich die Funktoren $P_K P_w$ und P_K auf einer einfachen Q_n -Darstellung S_i mit $i \in \underline{n} \setminus K$. Damit liegt $m_n(K, K) y(N_K^{(n)})$ in $U_{K,K}^{(n)}$. Es reicht demnach, sich auf den Fall $J \leq_n K$ mit $J \neq K$ zu beschränken.

Wir beginnen jetzt die Induktion nach n mit den Berechnungen für $n \in \{2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
 m_2(\{1\}, \{2\}) y(N_{\{2\}}^{(2)}) &= 0 \in U_{\{1\}, \{2\}}^{(2)} \\
 m_3(\{1\}, \{2\}) y(N_{\{2\}}^{(3)}) &= P_{12}P_3 \in U_{\{1\}, \{2\}}^{(3)} \\
 m_3(\{1\}, \{3\}) y(N_{\{3\}}^{(3)}) &= P_{123}0 = 0 \in U_{\{1\}, \{3\}}^{(3)} \\
 m_3(\{2\}, \{3\}) y(N_{\{3\}}^{(3)}) &= 0 \in U_{\{2\}, \{3\}}^{(3)} \\
 m_3(\{1, 2\}, \{1, 3\}) y(N_{\{1,3\}}^{(3)}) &= P_{213}P_2 = P_{2132} \in U_{\{1,2\}, \{1,3\}}^{(3)} \\
 m_3(\{1, 2\}, \{2, 3\}) y(N_{\{2,3\}}^{(3)}) &= 0 \in U_{\{1,2\}, \{1,3\}}^{(3)} \\
 m_3(\{1, 3\}, \{2, 3\}) y(N_{\{2,3\}}^{(3)}) &= 0 \in U_{\{1,2\}, \{1,3\}}^{(3)}
 \end{aligned}$$

Es seien nun $n \geq 3$ und $J \leq_{n+1} K$ mit $J \neq K$ Teilmengen von $n+1$.

1. Fall: $n+1 \notin K$ Wegen $J \leq_{n+1} K$ liegt $n+1$ auch nicht in J und es gilt insbesondere $J \leq_n K$ sowie

$$m_{n+1}(J, K) = m_n(J, K)$$

Deswegen ist $U_{J,K}^{(n)}$ ein Unterraum von $U_{J,K}^{(n+1)}$. Weiterhin ist $N_K^{(n+1)}$ die Menge $N_K^{(n)} \cup \{n+1\}$ und hat das Maximum $n+1$. Es folgt mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
 m_{n+1}(J, K) y(N_K^{(n+1)}) &= m_n(J, K) \left(y(N_K^{(n)}) (1 - P_{n+1}) + P_{n+1} \right) \\
 &= \underbrace{m_n(J, K) y(N_K^{(n)})}_{\in U_{J,K}^{(n)} \subseteq U_{J,K}^{(n+1)}} - \underbrace{m_n(J, K) (1 - y(N_K^{(n)})) P_{n+1}}_{=: a}
 \end{aligned}$$

Nun endet jedes in der Linearkombination von a auftretende Monom mit P_{n+1} und stimmt deshalb nicht mit $m_{n+1}(J, K) = m_n(J, K) \in \mathcal{A}_n$ überein. Infolgedessen gilt:

$$a \in U_{J,K}^{(n+1)}$$

2. Fall: $n+1 \in K$ Wie im Hinweis zu den Randfällen bemerkt, können wir o.B.d.A. $N_K^{(n+1)} \neq \emptyset$ annehmen, woraus

$$K \neq K_{\max}$$

folgt. Es seien \tilde{J} und \tilde{K} die nach der Definition von $m_{n+1}(J, K)$ – abhängig von $n+1 \in J$ oder $n+1 \notin J$ – gegebenen Teilmengen von \underline{n} mit

$$m_{n+1}(J, K) = m_n(\tilde{J}, \tilde{K}) P_{K_{\max}}$$

Ferner haben wir in diesem Fall $N := N_K^{(n+1)} = N_{K \setminus \{n+1\}}^{(n)}$ und wegen $N \neq \emptyset$ zudem:

$$m := \max N = \min K_{\max} - 1 \neq 0$$

Wir setzen noch:

$$\tilde{N} := N \setminus \{\max N\}$$

Insbesondere liegt $y(\tilde{N})$ in $\mathcal{A}_{\min(K_{\max})-2}$ und vertauscht deshalb mit $P_{K_{\max}}$. Bis jetzt können wir soweit vereinfachen:

$$\begin{aligned} m_{n+1}(J, K) y(N_K^{(n+1)}) &= m_n(\tilde{J}, \tilde{K}) P_{K_{\max}} (y(\tilde{N})(1 - P_{\max N}) + P_{\max N}) \\ &= \underbrace{m_n(\tilde{J}, \tilde{K}) y(\tilde{N}) P_{K_{\max}}}_{=: a} + \underbrace{m_n(\tilde{J}, \tilde{K}) (1 - y(\tilde{N})) P_{K_{\max}} P_{\max N}}_{=: b} \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich also aus:

- (A) $a \in U_{J, K}^{(n+1)}$
 (B) $b \in U_{J, K}^{(n+1)}$

Es ist schnell einzusehen, dass b in $U_{J, K}^{(n+1)}$ liegt, während für (A) einige Fallunterscheidungen notwendig sind:

Zu (B): Es sei $c_w P_w P_{K_{\max}} P_{\max N} \neq 0$ ein Summand von b . Nun unterscheiden sich $P_w P_{K_{\max}} P_{\max N}$ und $m_{n+1}(J, K)$ auf der injektiv unzerlegbaren Q_{n+1} -Darstellung I_{n+1} :

$$\begin{aligned} I_{n+1} P_w P_{K_{\max}} P_{\max N} &= I_{n+1} P_{K_{\max}} P_{\max N} \\ &= I_{\min K_{\max} - 1} P_{\max N} \\ &= I_{\min K_{\max} - 2} \\ &\neq I_{\min K_{\max} - 1} \\ &= I_{n+1} P_{K_{\max}} \\ &= I_{n+1} m_n(\tilde{J}, \tilde{K}) P_{K_{\max}} \\ &= I_{n+1} m_{n+1}(J, K) \end{aligned}$$

Zu (A): Ist \tilde{N} leer, so liegt $a = 0$ in $U_{J, K}^{(n+1)}$. Es gelte jetzt $\tilde{N} \neq \emptyset$.

1. Fall: $n + 1 \notin J$ Nach Definition von $m_{n+1}(J, K)$ gelten dann:

$$\tilde{J} = J \quad \text{und} \quad \tilde{K} = K \setminus K_{\max} \cup (K_{\max} - 1)$$

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned}
 \widetilde{N} &= N_K^{(n)} \setminus \{\min K_{\max} - 1\} \\
 &= \{x \in \underline{n} \setminus K \mid x > \min K, x \neq \min(K_{\max}) - 1\} \\
 &= \{x \in \underline{n} \setminus \widetilde{K} \mid x > \min \widetilde{K}\} \\
 &= N_{\widetilde{K}}^{(n)}
 \end{aligned}$$

Infolgedessen gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$$a = m_n(\widetilde{J}, \widetilde{K}) y(\widetilde{N}) P_{K_{\max}} = \underbrace{m_n(J, \widetilde{K})}_{=: c \in U_{J, \widetilde{K}}^{(n)}} y(N_{\widetilde{K}}^{(n)}) P_{K_{\max}} = c P_{K_{\max}}$$

Es sei $c_w P_w = c_v P_v P_{K_{\max}} \neq 0$ ein Summand von $a = c P_{K_{\max}}$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist P_v von $m_n(J, \widetilde{K})$ verschieden, weswegen eine injektiv unzerlegbare Q_n -Darstellung I_j für ein $j \in \underline{n}$ und ein Index $x \in \underline{j} \setminus 0$ existieren mit:

$$I_x = I_j P_v \neq I_j m_n(J, \widetilde{K})$$

Ferner liefert die Definition von $m_n(J, \widetilde{K})$ die Existenz eines Monoms P_u in \mathcal{A}_{n-1} mit:

$$m_n(J, \widetilde{K}) = P_u P_{\widetilde{K}_{\max}}$$

Es sei weiter $y \in \underline{j}$ mit:

$$I_y = I_j P_u$$

Damit können wir nun die Wirkung der Funktoren P_w und $m_{n+1}(J, K)$ auf I_j berechnen:

$$I_j P_w = I_j P_v P_{K_{\max}} = I_x P_{K_{\max}} = \begin{cases} I_x & \text{falls } x \notin K_{\max} \\ I_{\min K_{\max} - 1} & \text{falls } x \in K_{\max} \end{cases}$$

Es gilt: $\min \widetilde{K}_{\max} = \min K_{\max} - 1$, also lässt $P_{K_{\max}}$ die Q_n -Darstellung $I_{\min \widetilde{K}_{\max} - 1}$ fix. Ferner fixiert $P_{K_{\max}}$ auch I_y , wenn y nicht in $\widetilde{K}_{\max} \supset K_{\max} \setminus \{n+1\}$ liegt. Damit erhalten

wir:

$$\begin{aligned}
 I_j m_{n+1}(J, K) &= I_j P_u P_{\tilde{K}_{\max}} P_{K_{\max}} \\
 &= I_y P_{\tilde{K}_{\max}} P_{K_{\max}} \\
 &= \begin{cases} I_y P_{K_{\max}} & \text{falls } y \notin \tilde{K}_{\max} \\ I_{\min \tilde{K}_{\max} - 1} P_{K_{\max}} & \text{falls } y \in \tilde{K}_{\max} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} I_y & \text{falls } y \notin \tilde{K}_{\max} \\ I_{\min \tilde{K}_{\max} - 1} & \text{falls } y \in \tilde{K}_{\max} \end{cases} \\
 &= I_j m_n(J, \tilde{K})
 \end{aligned}$$

Im Fall $x \notin K_{\max}$ gilt:

$$I_j P_w = I_x = I_j P_v \neq I_j m_n(J, \tilde{K}) = I_j m_{n+1}(J, K)$$

Ist nun $x \in K_{\max}$ und $y \notin \tilde{K}_{\max}$, so gilt $I_y \neq I_{\min K_{\max} - 1}$, weil $\min(K_{\max}) - 1$ in \tilde{K}_{\max} liegt.

Falls $x \in K_{\max}$ aber $y \in \tilde{K}_{\max}$ gelten, so vergewissere man sich nur, dass $I_{\min(K_{\max}) - 1}$ nicht die Darstellung 0 ist. Die Verschiedenheit von $I_{\min \tilde{K}_{\max} - 1}$ gilt dann nach der Wahl von \tilde{K} . In jedem Fall gilt: $I_j m_{n+1}(J, K) \neq I_j P_w$.

2. Fall: $n + 1 \in J$ Wir erinnern daran, dass in diesem Fall stets

$$J_{\max} \subseteq K_{\max}$$

gilt (vgl. (*) S. 88). Wie im vorherigen Fall sei $K_R := K \setminus K_{\max}$ und zusätzlich bezeichnen $K_1 < K_2 < \dots < K_{s-1} < K_s = K_{\max}$ die Intervalle der Intervallzerlegung von K . Dann gilt:

$$\tilde{J} = J \setminus J_{\max} \quad \text{und} \quad \tilde{K} = K_R \cup (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1)$$

Für \tilde{K}_{\max} gibt es in Abhängigkeit von J_{\max} und den Intervallgrenzen $k_i \leq l_i$ von K_i folgende Möglichkeiten:

$$\tilde{K}_{\max} = \begin{cases} K_{s-1} & \text{falls } J_{\max} = K_{\max} \\ (K_{\max} \setminus J_{\max} - 1) \cup K_{s-1} & \text{falls } J_{\max} \neq J_{\max} \text{ und } k_s - l_{s-1} = 2 \\ K_{\max} \setminus J_{\max} - 1 & \text{falls } J_{\max} \neq J_{\max} \text{ und } k_s - l_{s-1} > 2 \end{cases}$$

2.1 Fall: $J_{\max} = K_{\max}$ Es ist weiterhin $K_{\max} \neq K$, also $\tilde{K} = K_R \neq \emptyset$ und es gilt:

$$\tilde{N} = N \setminus \{m\} = N_{\tilde{K}}^{(m-1)}$$

Ferner liegt $m_n(\tilde{J}, \tilde{K})$ natürlich in $\mathcal{A}_{\max \tilde{K}}$. Wegen

$$m - 1 = \min(K_{\max}) - 2 \geq \max K_{s-1} = \max \tilde{K}$$

gilt also:

$$m_n(\tilde{J}, \tilde{K}) \in \mathcal{A}_{m-1}$$

Damit haben wir für a und nach der Induktionsvoraussetzung:

$$a = m_n(\tilde{J}, \tilde{K}) y(\tilde{N}) P_{K_{\max}} = \underbrace{m_{m-1}(\tilde{J}, \tilde{K}) y(N_{\tilde{K}}^{(m-1)})}_{=: d \in U_{\tilde{J}, \tilde{K}}^{(m-1)}} P_{K_{\max}} = d P_{K_{\max}}$$

Es sei nun $c_w P_w = c_w P_v P_{K_{\max}} \neq 0$ ein Summand von $a = d P_{K_{\max}}$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist P_v (aus \mathcal{A}_{m-1}) von $m_n(\tilde{J}, \tilde{K})$ verschieden, weswegen eine injektiv unzerlegbare Q_{m-1} -Darstellung I_j für ein $j \in \underline{m-1}$ und Indizes $x \neq y \in \underline{j|0}$ existieren mit:

$$I_x = I_j P_v \neq I_j m_{m-1}(\tilde{J}, \tilde{K}) = I_y$$

Weil nun weder x noch y in K_{\max} liegen, folgt zum einen:

$$I_j P_w = I_j P_v P_{K_{\max}} = I_x P_{K_{\max}} = I_x$$

und zum anderen:

$$I_j m_{n+1}(J, K) = I_j m_{m-1}(\tilde{J}, \tilde{K}) P_{K_{\max}} = I_y P_{K_{\max}} = I_y$$

Damit haben wir auch in diesem Fall gezeigt, dass a in $U_{J, K}^{(n+1)}$ liegt.

2.2 Fall: $J_{\max} \neq K_{\max}$ Dann ist also $K_{\max} \setminus J_{\max}$ nichtleer und es gilt:

$$p := \max \tilde{K} = \max(K_{\max} \setminus J_{\max}) - 1 = \min J_{\max} - 2$$

Ferner brauchen wir noch:

$$\begin{aligned} \min \tilde{K}_{\max} &= \begin{cases} \min K_{s-1} & \text{falls } k_s - l_{s-1} = 2 \\ \min K_{\max} - 1 & \text{falls } k_s - l_{s-1} > 2 \end{cases} \\ &\leq \min K_{\max} - 1 \\ &= m \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\min \tilde{K}_{\max} = \min K_{\max} - 1 - i$ für ein geeignetes $i \in \mathbb{N}_0$ ist. Weiter gilt in diesem Fall:

$$\tilde{N} = N_{\tilde{K}}^{(p)}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt somit für a :

$$a = m_n(\tilde{J}, \tilde{K}) y(\tilde{N}) P_{K_{\max}} = \underbrace{m_p(\tilde{J}, \tilde{K}) y(N_{\tilde{K}}^{(p)})}_{=: e \in U_{\tilde{J}, \tilde{K}}^{(p)}} P_{K_{\max}} = e P_{K_{\max}}$$

Es sei nun $c_w P_w = c_w P_v P_{K_{\max}} \neq 0$ ein Summand von $a = e P_{K_{\max}}$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist P_v (aus \mathcal{A}_p) von $m_n(\tilde{J}, \tilde{K})$ verschieden, weswegen eine injektiv unzerlegbare Q_p -Darstellung I_j für ein $j \in \underline{p}_1$ und ein Index $x \in \underline{j}_0$ existieren mit:

$$I_x = I_j P_v \neq I_j m_p(\tilde{J}, \tilde{K})$$

Weiter seien $m_p(\tilde{J}, \tilde{K}) = P_u P_{\tilde{K}_{\max}}$ für ein Wort u über $\underline{p-1}_1$ und $y \in \underline{j}$ mit

$$I_j P_u = I_y$$

Nun lässt sich zeigen, dass sich P_w und $m_{n+1}(J, K)$ auf I_j unterscheiden:

$$\begin{aligned} I_j P_w &= I_j P_v P_{K_{\max}} = I_x P_{K_{\max}} \\ &= \begin{cases} I_x & \text{falls } x \notin K_{\max} \\ I_{\min K_{\max}-1} & \text{falls } x \in K_{\max} \end{cases} \end{aligned}$$

Wie im ersten Fall lässt $P_{K_{\max}}$ auch hier $I_{\min \tilde{K}_{\max}-1} = I_{\min K_{\max}-2-i}$ fix. Außerdem gilt wie im ersten Fall $I_y P_{K_{\max}} = I_y$, wenn y nicht in \tilde{K}_{\max} liegt. Es folgt:

$$\begin{aligned} I_j m_{n+1}(J, K) &= I_j m_p(\tilde{J}, \tilde{K}) P_{K_{\max}} \\ &= I_j P_u P_{\tilde{K}_{\max}} P_{K_{\max}} \\ &= I_y P_{\tilde{K}_{\max}} P_{K_{\max}} \\ &= \begin{cases} I_y P_{K_{\max}} & \text{falls } y \notin \tilde{K}_{\max} \\ I_{\min \tilde{K}_{\max}-1} P_{K_{\max}} & \text{falls } y \in \tilde{K}_{\max} \end{cases} \\ &= \begin{cases} I_y & \text{falls } y \notin \tilde{K}_{\max} \\ I_{\min K_{\max}-2-i} & \text{falls } y \in \tilde{K}_{\max} \end{cases} \\ &= I_j m_p(\tilde{J}, \tilde{K}) \end{aligned}$$

Im Fall $x \notin K_{\max}$ gilt:

$$I_j P_w = I_x = I_j P_v \neq I_j m_p(\tilde{J}, \tilde{K}) = I_j m_{n+1}(J, K)$$

Ist nun $x \in K_{\max}$ und $y \notin \widetilde{K}_{\max}$, so gilt $I_y \neq I_{\min K_{\max}-1}$, weil $\min(K_{\max}) - 1$ in \widetilde{K}_{\max} liegt.

Falls $x \in K_{\max}$ und $y \in \widetilde{K}_{\max}$ gelten, so vergewissere man sich nur, dass $I_{\min(K_{\max})-1}$ nicht die Darstellung 0 ist. Die Verschiedenheit zu $I_{\min \widetilde{K}_{\max}-1}$ gilt offensichtlich. In jedem Fall gilt: $I_j m_{n+1}(J, K) \neq I_j P_w$. \square

3.6 Beweis des Hauptsatzes

Nun können wir das Hauptresultat beweisen, genauer zeigen wir:

Hauptsatz. *Es sei \mathcal{K} ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die \mathcal{K} -lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \text{Inz}(\mathcal{P}_N) &\longrightarrow \mathcal{A}_n \quad \text{mit} \\ J \leq_n K = (J, K) &\longmapsto f_J^{(n)} P_{(J,K)} f_K^{(n)} =: a_{J,K} \end{aligned}$$

ein \mathcal{K} -Algebrenisomorphismus mit $1_{\text{Inz}(\mathcal{P}_n)} \Phi = 1_{\mathcal{A}_n}$.

Beweis: Zur Bijektivität: Es ist $\{f_J^{(n)} \mid J \subseteq \underline{n}\}$ ein vollständiges System paarweise orthogonaler Idempotenter von \mathcal{A}_n , wie wir im Satz 3.22 (s. S. 78) gesehen haben. Deswegen gilt:

$$\mathcal{A}_n = \bigoplus_{J \leq_n K} f_J^{(n)} \mathcal{A}_n f_K^{(n)}$$

Ferner liegt $a_{J,K}$ in $f_J^{(n)} \mathcal{A}_n f_K^{(n)}$ und ist nach Satz 3.35 von 0 verschieden für jedes $J \leq_n K$ (s. S. 96). Somit ist $\{a_{J,K} \mid J \leq_n K\}$ linear unabhängig. Nach dem Satz 3.2 über eine Normalform von \mathcal{A}_n (s. S. 48) ist diese Menge aus Dimensionsgründen eine \mathcal{K} -Basis von \mathcal{A}_n .

Zur Multiplikativität: Es seien $J \leq_n K$ und $L \leq_n M$.

1.Fall: $K \neq L$ Dann folgt aus der Orthogonalität der $f_J^{(n)}$:

$$\begin{aligned} ((J, K)(L, M))\Phi &= 0 \\ &= f_K^{(n)} f_L^{(n)} \\ &= f_J^{(n)} P_{(J,K)} f_K^{(n)} f_L^{(n)} m_n(L, M) f_M^{(n)} \\ &= (J, K)\Phi(L, M)\Phi \end{aligned}$$

2.Fall: $K = L$ Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & (J, K)\Phi(K, M)\Phi \\
 &= f_J^{(n)} P_{(J,K)} f_K^{(n)} f_K^{(n)} P_{(K,M)} f_M^{(n)} \\
 &= f_J^{(n)} P_{(J,K)} g_K^{(n)} P_{(K,M)} f_M^{(n)} \\
 & \quad \text{[Definition von } f_K^{(n)}, \text{ Zentralität und Idempotenz von } z_{|K|}^{(n)} \text{ (S. 77 u. S. 71)]} \\
 &= f_J^{(n)} P_{(J,K)} (1 - y(N_K^{(n)})) P_{(K,M)} f_M^{(n)} \\
 & \quad \text{[alternative Beschreibung von } g_K^{(n)} \text{ (S. 76)]} \\
 &= f_J^{(n)} P_{(J,K)} P_{(K,M)} f_M^{(n)} - z_{|J|}^{(n)} f_J^{(n)} P_{(J,K)} P_K y(N_K^{(n)}) P_K P_{(K,M)} f_M^{(n)} \\
 & \quad \text{[alternative Beschreibung von } P_{(K,M)}, \text{ Korollar 3.28 (S. 85)]} \\
 &= f_J^{(n)} P_{(J,K)} P_{(K,M)} f_M^{(n)} - 0 \\
 & \quad \text{[Lemma 3.24 auf Seite 79]} \\
 &= f_J^{(n)} P_{(J,M)} f_M^{(n)} \\
 & \quad \text{[Lemma 3.27 auf Seite 83]} \\
 &= (J, M)\Phi \\
 &= ((J, K)(K, M))\Phi
 \end{aligned}$$

□

3.7 Ein weiterer Funktor

Es seien \mathcal{K} ein Körper, $A = \mathcal{K}Q$ die Wegealgebra eines endlichen, zykellosen Köchers Q und $S = S_d$ die einfache Q -Darstellung zum Punkt $d \in Q_0$. Weiterhin verstehen wir unter einer Q -Darstellung über \mathcal{K} stets eine endlichdimensionale.

Definition von O_S

Im Folgenden skizzieren wir, wie wir einer Q -Darstellung M eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Q -Darstellung $\tilde{M} =: MH_S$ mit $\text{Ext}_A^1(S, MH_S) = 0$ zuordnen. Es

seien $n := \dim_K \text{Ext}_A^1(S, M)$ und $b := (b_1, \dots, b_n)$ eine \mathcal{K} -Basis von $\text{Ext}_A^1(S, M)$. Ferner betrachten wir die folgenden Isomorphismen:

$$F_b : \text{Ext}_A^1(S, M) \otimes_K \text{Ext}_A^1(S, M) \rightarrow \text{Ext}_A^1(S, M)^n, x = \sum_{j=1}^n a_j \otimes b_j \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

und den kanonischen Isomorphismus

$$F : \text{Ext}_A^1(S, M)^n \rightarrow \text{Ext}_A^1(S^n, M)$$

sowie

$$\iota_b : S \otimes_K \text{Ext}_A^1(S, M) \rightarrow S^n \text{ mit } s \otimes b_k \mapsto (0, \dots, 0, \underset{k\text{-te Stelle}}{s}, 0, \dots, 0)$$

Es sei nun H_b die folgende Hintereinanderausführung:

$$H_b := F_b \circ F \circ \text{Ext}_A^1(\iota_b, M) : \text{Ext}_A^1(S, M) \otimes_K \text{Ext}_A^1(S, M) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_A^1(S \otimes_K \text{Ext}_A^1(S, M), M)$$

Unter diesem Isomorphismus entspricht dem Element $\sum_{i=1}^n b_i \otimes b_i$ eine eindeutig bestimmte Äquivalenzklasse einer kurzen exakten Sequenz:

$$\eta_b : 0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} \widetilde{M} \rightarrow S \otimes_K \text{Ext}_A^1(S, M) \rightarrow 0$$

in $\text{Ext}_A^1(S \otimes_K \text{Ext}_A^1(S, M), M)$.

Der Mittelterm \widetilde{M} ist dann (bis auf Isomorphie) unabhängig von der Wahl einer Basis von $\text{Ext}_A^1(S, M)$. Es liegt nun \widetilde{M} in $\text{Kern Ext}_A^1(S, -)$ und $\widetilde{M} \overline{P}_S$ in $\text{Kern Ext}_A^1(S, -) \cap \text{Kern Hom}_A(S, -)$:

Bemerkung 1:

- (a) Es gilt: $\text{Ext}_A^1(S, \widetilde{M}) = 0$.
- (b) Gilt für M zusätzlich $\text{Hom}_A(S, M) = 0$, so folgt: $\text{Hom}_A(S, \widetilde{M}) = 0$.

Beweis: Wir wenden auf η_b den Funktor $\text{Hom}_A(S, -)$ an und erhalten wegen

$$\text{Ext}_A^1(S, S \otimes_K \text{Ext}_A^1(S, M)) \cong \text{Ext}_A^1(S, S) \otimes_K \text{Ext}_A^1(S, M) = 0$$

die (lange) exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(S, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(S, \widetilde{M}) \longrightarrow \text{Hom}_A(S, S \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M)) \\ \xrightarrow{\psi} \text{Ext}_A^1(S, M) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(S, \widetilde{M}) \longrightarrow 0$$

Wir betrachten noch den Isomorphismus:

$$\chi : \text{End}_A(S) \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(S, S \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M)) \text{ mit } s((\alpha \otimes \eta)\chi) = s\alpha \otimes \eta$$

Nun ist ψ ein Epimorphismus, weil für jedes $\eta \in \text{Ext}_A^1(S, M)$ nach Definition der obigen langen Sequenz gilt:

$$(\text{id}_S \otimes \eta)\chi\psi = \eta$$

Weiter folgt aus $\text{End}_A(S) \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M) \cong \text{Ext}_A^1(S, M)$, dass ψ ein Isomorphismus ist. Aus der Exaktheit der langen Sequenz folgt daraus dann (a). Gilt nun zusätzlich $\text{Hom}_A(S, M) = 0$, so folgt $\text{Hom}_A(S, \widetilde{M}) = 0$ ebenfalls aus der Exaktheit der langen Sequenz. \square

Es sei jetzt $\varphi : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus. Außerdem gelte zusätzlich:

$$\text{Hom}_A(S, M) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Hom}_A(S, N) = 0$$

Wenden wir den Funktor $\text{Hom}_A(-, \widetilde{N})$ auf die kurze exakte Sequenz η_b an, so erhalten wir:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(S \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M), \widetilde{N}) \longrightarrow \text{Hom}_A(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \xrightarrow{\xi} \text{Hom}_A(M, \widetilde{N}) \\ \longrightarrow \underbrace{\text{Ext}_A^1(S \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M), \widetilde{N})}_{\text{Ext}_A^1(S, \widetilde{N}) \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M) = 0} \longrightarrow \dots$$

Der Epimorphismus $\xi = \text{Hom}_A(\alpha, \widetilde{N})$ ist ein Isomorphismus, weil nach der Bemerkung gilt:

$$\text{Hom}_A(S \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M), \widetilde{N}) \cong \text{Hom}_A(S, \widetilde{N}) \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S, M) = 0$$

Ist nun ferner

$$\mu : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} \widetilde{N} \longrightarrow S \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(N, M) \longrightarrow 0$$

eine \widetilde{N} definierende kurze exakte Sequenz, so sei $\widetilde{\varphi}$ der bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmte Homomorphismus $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ mit:

$$\varphi\beta = \widetilde{\varphi}\xi = \alpha\widetilde{\varphi}$$

Mit der Bemerkung erhalten wir somit den folgenden (\mathcal{K} -linearen) Orthogonalitätsfunktorkomplex (vgl. [GL91]):

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_S : \mathcal{Q}\text{-}\mathcal{K}\text{dar} &\longrightarrow \mathcal{Q}\text{-}\mathcal{K}\text{dar} \\ M &\longmapsto \widetilde{M}\widetilde{P}_S = MP_S H_S \\ \varphi &\longmapsto \widetilde{\varphi}\widetilde{P}_S \end{aligned}$$

Anwendung auf $\mathcal{Q}_n\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$

Es sei jetzt $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Für $d \in \underline{n}$ setzen wir $H_d := H_{S_d}$ und $\mathcal{O}_d := \mathcal{O}_{S_d}$. Die Unzerlegbaren bezeichnen wir weiterhin mit $U_{i,j}$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ und für alle $i > j$ setzen wir noch $U_{i,j} = 0$. Der Vorteil in $\mathcal{Q}_n\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ ist, dass $\text{Ext}_A^1(S_d, U_{i,j})$ höchstens eindimensional ist, präziser gilt:

$$\dim \text{Ext}_A^1(S_d, U_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = d + 1 \\ 0 & \text{falls } i \neq d + 1 \end{cases}$$

Insbesondere ist damit auch

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^1(S_d, U_{d+1,j}) \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S_d, U_{d+1,j}) &\cong \widetilde{\text{Ext}}_A^1(S_d \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S_d, U_{d+1,j}), U_{d+1,j}) \\ &\cong \text{Ext}_A^1(S_d, U_{d+1,j}) \end{aligned}$$

eindimensional. Da weiter die Mitteltermen von kurzen exakten Sequenzen η und η' mit $[\eta] = c[\eta']$ für ein $0 \neq c \in \mathcal{K}$ isomorph zu einander sind, reicht es für die Berechnung von $U_{d+1,j}H_d$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U_{d+1,j} \longrightarrow Y \longrightarrow U_{d,d} \longrightarrow 0$$

zu finden, die nicht trivial ist. Für $Y = U_{d,j}$ gibt es eine solche Sequenz, weswegen $U_{d+1,j}H_d = U_{d,j}$ gilt.

Für jedes $i \neq d + 1$ ist $\text{Ext}_A^1(S_d, U_{i,j}) = 0$ und folglich gilt $U_{i,j}H_d = U_{i,j}$ wegen $\text{Ext}_A^1(S_d \otimes_{\mathcal{K}} \text{Ext}_A^1(S_d, U_{d+1,j}), U_{d+1,j}) = \text{Ext}_A^1(0, U_{d+1,j})$.

Wir haben somit gezeigt:

Bemerkung 2: Für jede unzerlegbaren Q_n -Darstellung $U_{i,j}$ und jedes $d \in \underline{n}$ gilt:

$$U_{i,j}H_d = \begin{cases} U_{i-1,j} = U_{d,j} & \text{falls } i = d + 1 \\ U_{i,j} & \text{falls } i \neq d + 1 \end{cases}$$

Insbesondere gilt: $U_{i,j}H_n = U_{i,j}$. □

Damit können wir den Funktor O_d mit $d \in \underline{n}$ auf den Unzerlegbaren $U_{i,j}$ berechnen, wobei zu berücksichtigen ist, dass der Fall $j = d$ und $i = d + 1$ nicht auftritt:

$$\begin{aligned} U_{i,j}O_d = U_{i,j}P_dH_d &= \begin{cases} U_{i,j-1}H_d = U_{i,d-1}H_d & \text{falls } j = d \\ U_{i,j}H_d & \text{falls } j \neq d \end{cases} \\ &= \begin{cases} U_{i,j-1} = U_{i,d-1} & \text{falls } j = d \text{ und } i \neq d + 1 \\ U_{i-1,j} = U_{d,j} & \text{falls } j \neq d \text{ und } i = d + 1 \\ U_{i,j} & \text{falls } j \neq d \text{ und } i \neq d + 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} U_{i,j}P_d & \text{falls } j = d \\ U_{i,j}H_d & \text{falls } i = d + 1 \\ U_{i,j} = U_{i,j}P_d = U_{i,j}H_d & \text{falls } j \neq d \text{ und } i \neq d + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die injektiv unzerlegbaren Q_n -Darstellungen $U_{1,j}$:

$$(*) \quad U_{1,j}O_d = U_{1,j}P_d$$

Bemerkenswerterweise gelten nun zwischen den O_d auf den Unzerlegbaren die gleichen Relationen wie für die Projektionsfunktionen:

3.37 Proposition. Für jede unzerlegbaren Q_n -Darstellung $U_{i,j}$ und alle $d, d' \in \underline{n}$ mit $|d - d'| > 2$ und $d > 1$ gilt:

$$\begin{aligned} U_{i,j}O_{d'}O_d &\cong U_{i,j}O_d \\ U_{i,j}O_dO_{d-1} &\cong U_{i,j}O_dO_{d-1}O_d \\ &\cong U_{i,j}O_{d-1}O_dO_{d-1} \\ U_{i,j}O_dO_{d'} &\cong U_{i,j}O_{d'}O_d \end{aligned}$$

Die Frage ist nun, ob dies natürliche Äquivalenzen sind. Dann könnten wir das Monoid, das von den O_d mit $d \in \underline{n}$ bis auf natürliche Äquivalenz erzeugt wird, bilden. Die zugehörige Monoidalgebra wäre dann wegen (*) isomorph zu $\mathcal{B}_n \cong \mathcal{A}_n \cong \text{Inz}(\mathcal{P}_n)$.

Kapitel 4

Verallgemeinerungen

Wir haben bisher gesehen, dass die Monoidalgebren \mathcal{B}_Q und $\mathcal{K}\pi_Q$ über einem Körper \mathcal{K} isomorph sind, wenn Q der linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_n ist. In diesem Kapitel werden wir die Isomorphie auch noch für eine Reihe anderer endlicher, zykelloser Köcher Q einsehen, indem wir zeigen, dass eine Menge $B \subseteq \mathcal{K}\pi_Q$ von paarweise verschiedenen Monomen in den P_i multiplikativ abgeschlossen ist. Dann ist B eine \mathcal{K} -Basis von $\mathcal{K}\pi_Q$. Außerdem stellt sich heraus, dass die Existenz einer solchen Normalform ausreicht, um $\mathcal{K}\pi_Q$ in die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_K$ zu einem endlichen, zykellosen Köcher K mit $Q \subseteq K$ einzubetten. Ferner werden wir für einige Köcher einer einfachen Gestalt über einen Dimensionsvergleich zeigen, dass die Monoidalgebra zu der Wegealgebra ihres Gabriel-Köchers isomorph ist.

In diesem Kapitel sei \mathcal{K} stets ein Körper.

Vorbemerkungen

Eine Normalform der \mathcal{K} -Algebra \mathcal{B}_Q für einen endlichen, zykellosen Köcher Q ist eine \mathcal{K} -Basis aus Monomen. Um zu zeigen, dass ein Tupel $B = (X_v)_{v \in W}$ mit $W \subseteq Q_0^*$ von Monomen eine Normalform ist, bleibt einem nichts anderes übrig, als die Charakterisierung einer \mathcal{K} -Basis zu überprüfen. Hierbei entspricht der Eigenschaft, ein \mathcal{K} -lineares Erzeugendensystem zu sein, die multiplikative Abgeschlossenheit von B , wenn $1 = X_\emptyset$ und alle X_q mit $q \in Q_0^*$ in B liegen. Denn dann ist das \mathcal{K} -lineare Erzeugnis von B eine Unteralgebra, die die Algebrenerezeuger von \mathcal{B}_Q , und damit schon die Algebra \mathcal{B}_Q selbst enthält. Weiter ist B genau dann ein minimales Erzeugendensystem, wenn B exakt $|W|$ Elemente hat. Dabei sind zwei Monome X_v und X_w selbstverständlich verschieden, wenn ihre Bilder P_v und P_w unter dem kanonischen Epimorphismus $\mathcal{B}_Q \rightarrow \mathcal{K}\pi_Q$ mit $X_q \mapsto P_q$ für alle $q \in Q$ verschieden sind. In der Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_Q$ ist es leichter, zwei

Monome zu unterscheiden, weil wir die Wirkung der Monome auf den Q -Darstellungen betrachten können. Diese Methode zeigt dann insbesondere, dass \mathcal{B}_Q und $\mathcal{K}\pi_Q$ vermöge des kanonischen Epimorphismus zueinander isomorph sind.

In den von uns behandelten Spezialfällen stellt sich übrigens heraus, dass zwei verschiedene Endofunktoren P_v und P_w mit $v, w \in Q_0^*$ sich schon auf den injektiv unzerlegbaren Q -Darstellungen unterscheiden. Die Vermutung liegt nahe, dass dies für jeden endlichen, zykellosen Köcher gilt.

Im Folgenden haben wir einige Beobachtungen zusammengestellt, die wir ohne gesonderte Erwähnung verwenden werden.

Die injektiv unzerlegbaren bieten sich für die Berechnung von P_v an, weil sie einen einfachen Sockel besitzen:

Bemerkung 1: Es sei $y \in Q_0$. Da der Sockel der injektiv unzerlegbaren Q -Darstellung I_y zum Punkt y gerade der Einfache S_y ist, bleibt I_y fix unter allen P_x mit $x \neq y$ und folglich gilt für alle Wörter v über $Q_0 \setminus \{y\}$:

$$I_y P_v = I_y$$

Währenddessen ist

$$I_y P_y = I_y / S_y = \bigoplus_{x \rightarrow y} I_x$$

wieder injektiv oder 0. □

Um (induktiv) aus Normalformen zu Unterköchern von Q eine Normalform von \mathcal{B}_Q zu konstruieren, sind die nächsten Bemerkungen hilfreich:

Bemerkung 2: Es seien U eine Q -Darstellung und $M = \{x \in Q_0 \mid U(x) = 0\}$ das Komplement der Trägermenge von U . Dann bleibt U fix unter allen P_x mit $x \in M$ und es folgt für alle Wörter v über M :

$$U P_v = U$$

Insbesondere gilt für jede einfache Q -Darstellung S_y und jedes Wort v über Q_0 :

$$S_y P_v = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \in \{v\} \\ S_y & \text{sonst} \end{cases}$$

□

Im Folgenden beleuchten wir unter welchen Umständen sich die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_K$ in $\mathcal{K}\pi_Q$ einbetten lässt, wenn K ein (nicht notwendig voller) Unterkörper von Q ist. Bekanntlich lässt sich $K\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ als volle Unterkategorie von $Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ auffassen, und zwar vermöge der kanonischen Einbettung

$$F: K\text{-}\mathcal{K}\text{dar} \rightarrow Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar} \quad \text{mit} \quad U = ((U(k))_{k \in K_0}, (U(\alpha))_{\alpha \in K_1}) \mapsto UF =: \widehat{U},$$

wobei die Q -Darstellung \widehat{U} gegeben sei durch:

$$\widehat{U}(k) = \begin{cases} U(k) & \text{falls } k \in K_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \widehat{U}(\alpha) = \begin{cases} U(\alpha) & \text{falls } \alpha \in K_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Morphismus $\varphi = (\varphi(k))_{k \in K_0}: U \rightarrow V$ wird unter F auf $\widehat{\varphi}$ mit

$$\widehat{\varphi}(k) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{falls } k \in K_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

abgebildet. Dieser Funktor ist exakt.

Weiter sei $\mathbf{P}_x^{(K)}: K\text{-}\mathcal{K}\text{dar} \rightarrow K\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ mit $x \in K_0$ der Projektionsfunktor zu der einfachen K -Darstellung S_x und dementsprechend sei $\mathbf{P}_x^{(Q)}$ der Projektionsfunktor auf $Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ zu der einfachen Q -Darstellung S_x . Ebenso seien $t_x^{(K)} := t_{S_x}^{(K)}$ bzw. $t_x^{(Q)} := t_{S_x}^{(Q)}$ als die im ersten Kapitel definierten Teilfunktoren der Identitätsfunktoren auf $K\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ resp. $Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ aufzufassen.

Wenden wir F auf die von $\mathbf{P}_x^{(K)}$ induzierte kanonische Sequenz einer K -Darstellung U an, so erhalten wir in $Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ die kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow Ut_x^{(K)}F \rightarrow UF \rightarrow U\mathbf{P}_x^{(K)}F \rightarrow 0$$

Diese ist schon die von $\mathbf{P}_x^{(Q)}$ induzierte kanonische Sequenz zu UF , was aus $Ut_x^{(K)}F = UFt_x^{(Q)}$ und der Eindeutigkeit des Kokerns folgt. Dabei ergibt sich die Gleichheit aus:

$$\begin{aligned} (Ut_x^{(K)}F)(x) &= (Ut_x^{(K)})(x) = \bigcap_{\alpha: x \rightarrow y \in K} \text{Kern}(U(\alpha)) \\ &= \bigcap_{\alpha: x \rightarrow y \in K} \text{Kern}((UF)(\alpha)) \cap (UF)(x) \\ &= \bigcap_{\alpha: x \rightarrow y \in K} \text{Kern}((UF)(\alpha)) \cap \bigcap_{\beta: x \rightarrow y \in Q \setminus K} \text{Kern}((UF)(\beta)) \\ &= (UFt_x^{(Q)})(x) \end{aligned}$$

Schließlich gilt deshalb:

Bemerkung 3: Es sind $\mathbf{P}_x^{(K)}F$ und $F\mathbf{P}_x^{(Q)}$ natürlich äquivalente Funktoren von $K\text{-}\mathcal{K}$ dar nach $Q\text{-}\mathcal{K}$ dar für jedes $x \in K_0$.

Damit haben wir nun ein Kriterium für die Verschiedenheit zweier Monome in den $\mathbf{P}_i^{(Q)}$ mit $i \in K_0$.

Folgerung: Es seien v und w Wörter über K_0^* .

Gibt es eine K -Darstellung U mit $U\mathbf{P}_v^{(K)} \neq U\mathbf{P}_w^{(K)}$, so folgt: $\mathbf{P}_v^{(Q)} \neq \mathbf{P}_w^{(Q)}$.

Beweis: Solch eine K -Darstellung U liefert eine Q -Darstellung, auf der sich \mathbf{P}_v und \mathbf{P}_w unterscheiden:

$$(UF)\mathbf{P}_v^{(Q)} = U\mathbf{P}_v^{(K)}F \neq U\mathbf{P}_w^{(K)}F = (UF)\mathbf{P}_w^{(Q)}$$

□

4.1 Korollar. *Es seien K und Q endliche, zykellose Köcher.*

- (a) *Es sei K ein voller Unterköcher von Q . Es ist $\mathcal{K}\pi_K$ eine Unteralgebra von $\mathcal{K}\pi_Q$, wenn \mathcal{B}_K eine Normalform $(X_v)_{v \in W}$ mit $W \subseteq K_0^*$ besitzt, so dass für alle Wörter $v \neq w$ in W eine K -Darstellung U existiert mit $U\mathbf{P}_v^{(K)} \neq U\mathbf{P}_w^{(K)}$.*
- (b) *Es seien K und Q isomorph oder K der um Mehrfachpfeile reduzierte Köcher von Q . Besitzt \mathcal{B}_K solch eine Normalform wie in (1), so sind die zugehörigen Monoidalgebren isomorph.*

Beweis: Aus der Voraussetzung über W folgt nach den Überlegungen in den Vorbemerkungen, dass \mathcal{B}_K und $\mathcal{K}\pi_K$ isomorph sind.

Zu (a): Es gibt einen Homomorphismus von \mathcal{B}_K nach $\mathcal{K}\pi_Q$ mit $X_q \mapsto \mathbf{P}_q^{(Q)}$ für alle $q \in K_0$. Dessen Bild ist die von $\mathbf{P}_v^{(Q)}$ mit $v \in W$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{K}\pi_Q$. Diese hat nach Voraussetzung und der vorherigen Folgerung die Dimension $|W|$, ist also zu \mathcal{B}_K isomorph.

Zu (b): Dieselbe Argumentation wie in (1) zeigt, dass \mathcal{B}_K eine Unteralgebra von $\mathcal{K}\pi_Q$ ist. Weil $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K}\pi_Q \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_Q = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_K$ gilt, sind $\mathcal{K}\pi_K$ und $\mathcal{K}\pi_Q$ isomorph. □

Damit können wir uns auf Köcher ohne Mehrfachpfeile beschränken. Des Weiteren verzichten wir in diesem Kapitel auf die Nennung einer Normalform von $\mathcal{B}_{Q^{op}}$, wenn wir eine von \mathcal{B}_Q angeben haben, da diese sich dual aus $\mathcal{B}_Q^{op} \cong \mathcal{B}_{Q^{op}}$ ergibt. Lässt

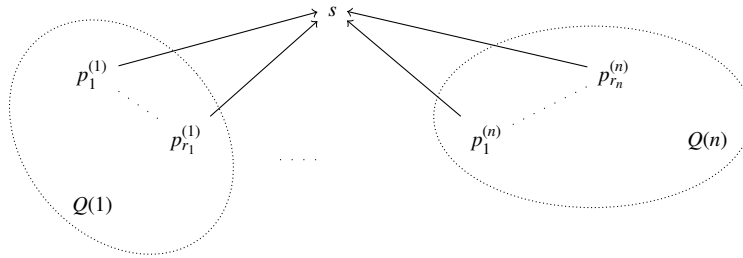
sich ferner der Beweis dual führen, um auch $\mathcal{B}_{Q^{op}} \cong \mathcal{K}\pi_{Q^{op}}$ zu erhalten, so verweisen wir nur darauf, dass die duale Aussage gilt. Außerdem werden wir die im Lemma 2.5 aufgeführten verallgemeinerten Relationen stillschweigend benutzen oder als „verallgemeinerte Relationen“ zitieren.

4.1 Verkleben an einer Senke

Es seien $Q(1), \dots, Q(n)$ endliche, zykellose, paarweise disjunkte Köcher mit ausgezeichneten Punkten $p_1^{(1)}, \dots, p_{r_1}^{(1)} \in Q(1), \dots, p_1^{(n)}, \dots, p_{r_n}^{(n)} \in Q(n)$. Wir betrachten den Köcher Q , der durch „Verkleben“ dieser Köcher an einem neuen Punkt s über neue Pfeile $\alpha_i^{(j)} : p_i^{(j)} \rightarrow s$ entsteht. Es sei also Q der Köcher mit den Punkten und Pfeilen:

$$Q_0 = \{s\} \cup \bigcup_{i \in \underline{n}} Q(i)_0 \quad \text{und} \quad Q_1 = \{\alpha_i^{(k)} : p_i^{(k)} \rightarrow s \mid k \in \underline{n}, i \in \underline{r_k}\} \cup \bigcup_{k \in \underline{n}} Q(k)_1$$

Demnach hat Q die Gestalt:



Des Weiteren sei $\tilde{Q}(k)$ für jedes $k \in \underline{n}$ der um s und die $\alpha_j^{(k)}$ erweiterten Köcher von $Q(k)$, es gilt also:

$$\tilde{Q}(k) = (Q(k)_0 \cup \{s\}, Q(k)_1 \cup \{\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{r_k}^{(k)}\})$$

4.2 Lemma. Für jedes $k \in \underline{n}$ seien $W(k) \subseteq Q(k)_0^*$ und $\tilde{W}(K) \subseteq \tilde{Q}(k)_0^*$ die Normalformen von $\mathcal{B}_{Q(k)}$ resp. $\mathcal{B}_{\tilde{Q}(k)}$ indizierenden Mengen von Wörtern, so dass gelten:

- (i) $\{\emptyset\} \cup \{q \mid q \in Q(k)_0\} \subseteq W(k)$
- (ii) $\{s\} \cup W(k) \subseteq \tilde{W}(k)$

(iii) In jedem Wort aus $\widetilde{W}(k)$ kommt s höchstens einmal vor.

(iv) Für alle $v, w \in \widetilde{W}(K)$ mit $v \neq w$ existiert eine $\widetilde{Q}(k)$ -Darstellung U mit $UP_v \neq UP_w$.

Es sei dann $W := W' \cup W_s$ mit

$$\begin{aligned} W' &:= W(1) \times W(2) \times \dots \times W(n) \\ W_s &:= \widetilde{W}(1) \setminus W(1) \times \widetilde{W}(2) \setminus W(2) \times \dots \times \widetilde{W}(n) \setminus W(n) \end{aligned}$$

Eine Normalform von \mathcal{B}_Q wird durch W gezählt und indiziert über die Abbildung:

$$\begin{aligned} f: W &\longrightarrow \mathcal{B}_Q \\ W' \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto X_{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} =: X_x \\ W_s \ni z = (y_1 s z_1, y_2 s z_2, \dots, y_n s z_n) &\mapsto X_{y_1 \cdot y_2 \dots y_n \cdot s \cdot z_1 \cdot z_2 \dots z_n} =: X_z \end{aligned}$$

Außerdem sind \mathcal{B}_Q und $\mathcal{K}\pi_Q$ isomorphe \mathcal{K} -Algebren. Ferner gilt die duale Aussage des Lemmas.

Übrigens besagt die vierte Voraussetzung an $\widetilde{W}(k)$ schon, dass $\mathcal{B}_{\widetilde{Q}(k)}$ und die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_{\widetilde{Q}(k)}$ isomorph sind.

Beweis: Für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in W'$ notieren wir mit $\{x\} := \{x_1 \cdot x_2 \dots x_n\}$ die Menge der in x auftretenden Buchstaben. Für $z \in W_s$ sei $\{z\}$ analog definiert; selbstverständlich gehört s stets zu $\{z\}$. Für ein $w \in W$ bezeichne P_w das Bild von X_w unter dem kanonischen Epimorphismus $\mathcal{B}_Q \longrightarrow \mathcal{K}\pi_Q$ mit $X_q \mapsto P_x$. Weiter sei für einen Unterköcher K von Q mit \widehat{U} stets das Bild von einer K -Darstellung U unter der kanonischen Einbettung $K\text{-}\mathcal{K}\text{dar} \longrightarrow Q\text{-}\mathcal{K}\text{dar}$ gemeint.

Die Menge $\{X_w \mid w \in W\}$ enthält offensichtlich die Erzeuger von \mathcal{B}_Q .

Zur multiplikativen Abgeschlossenheit: Es seien $w \in W$ und $x \in Q_0$. Es gelte zunächst $s \notin \{w\}$, also $w = (w_1, \dots, w_n) \in W'$. Falls $s \neq x$ gilt, so ist x ein Punkt von $Q(k)$ für ein $k \in \underline{n}$ und die Kommutativität führt zu der Normalform

$$X_w X_x = X_{w_1 \dots w_{k-1}} X_{w_k \cdot x} X_{w_{k+1} \dots w_n} = X_{w_1 \dots w_{k-1} \cdot u_k \cdot w_{k+1} \dots w_n},$$

wobei u_k das nach Voraussetzung existierende Wort in $W(k)$ sei mit $X_{w_k} X_x = X_{u_k}$. Ist $x = s$, so sei für jedes $k \in \underline{n}$ die nach Voraussetzung existierende Normalform zu $X_{w_k} X_s$ gegeben durch $X_{t_k \cdot s \cdot u_k}$. Das Produkt $X_w X_s$ gehört dann zu der Normalform:

$$X_w X_s = X_{w_1} \dots X_{w_{n-1}} X_{t_n \cdot s \cdot u_n} = X_{t_n} X_{w_1} \dots X_{w_{n-1}} X_s X_{u_n} = \dots = X_{t_1 \dots t_n \cdot s \cdot u_1 \dots u_n}$$

Nun sei $s \in \{w\}$, womit $w = (v_1 \cdot s \cdot w_1, \dots, v_n \cdot s \cdot w_n)$ und $X_w = X_{v_1 \dots v_n \cdot s \cdot w_1 \dots w_n}$ gilt. Nach den verallgemeinerten Relationen ist X_w dann invariant unter der Rechtsmultiplikation mit X_s . Für $x \in Q(k)_0$ gilt mit der Normalform $X_{t_k \cdot s \cdot u_k}$ zu $X_{v_k \cdot s \cdot w_k} X_x$:

$$\begin{aligned} X_w X_x &= X_{v_1 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n} X_{v_k s w_k} X_x X_{w_1 \dots w_{k-1} w_{k+1} \dots w_n} \\ &= X_{v_1 \dots v_{k-1} \cdot t_k \cdot v_{k+1} \dots v_n \cdot s \cdot w_1 \dots w_{k-1} \cdot u_k \cdot w_{k+1} \dots w_n} \end{aligned}$$

Zur Verschiedenheit der Monome: Es seien $v = (v_1, \dots, v_n) \neq w = (w_1, \dots, w_n) \in W$. Gilt $\{v\} \neq \{w\}$, so unterscheiden sich P_v und P_w auf jedem Einfachen S_y mit $y \in \{v\} \setminus \{w\} \cup \{w\} \setminus \{v\}$. Andernfalls gibt es ein $k \in [n]$ mit $v_k \neq w_k$. Nach Voraussetzung über $\widetilde{W}(k)$ gibt es dann eine $\widetilde{Q}(k)$ -Darstellung U , so dass $UP_{v_k} =: U_1$ und $UP_{w_k} =: U_2$ nichtisomorphe $\widetilde{Q}(k)$ -Darstellungen sind. Im Fall $s \notin \{v\}$, also auch $s \notin v_j$, gilt dann:

$$\begin{aligned} \widehat{U}P_v &= \widehat{U}P_{v_1} \dots P_{v_{k-1}} P_{v_k} P_{v_{k+1}} \dots P_{v_n} \\ &= \widehat{U}P_{v_k} P_{v_{k+1}} \dots P_{v_n} \\ &= \widehat{U}_1 P_{v_{k+1}} \dots P_{v_n} \\ &= \widehat{U}_1 \\ &\neq \widehat{U}_2 = \dots = \widehat{U}P_w \end{aligned}$$

Ist $s \in \{v\}$, so ist $v = (t_j \cdot s \cdot u_j)_{j \in [n]}$ und die Ungleichheit ergibt sich wie folgt:

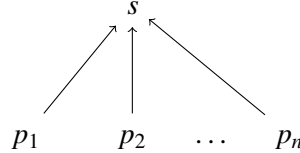
$$\begin{aligned} \widehat{U}P_v &= \widehat{U}P_{t_1 \dots t_{k-1} t_{k+1} \dots t_n} P_{t_k} P_s P_{u_k} P_{u_1 \dots u_{k-1} u_{k+1} \dots u_n} \\ &= \widehat{U}P_{t_k} P_s P_{u_k} P_{u_1 \dots u_{k-1} u_{k+1} \dots u_n} \\ &= \widehat{U}_1 P_{u_1 \dots u_{k-1} u_{k+1} \dots u_n} \\ &= \widehat{U}_1 \\ &\neq \widehat{U}_2 = \dots = \widehat{U}P_w \end{aligned}$$

In jedem Fall gilt $P_v \neq P_w$, woraus $X_v \neq X_w$ folgt. Damit sind $(X_w)_{w \in W}$ und $(P_w)_{w \in W}$ Basen von \mathcal{B}_Q resp. $\mathcal{K}\pi_Q$. \square

In den restlichen Unterabschnitten behandeln wir Spezialfälle, für die das Lemma anwendbar ist. Wir beginnen mit Unterraumköchern, fahren mit Sternköchern fort (hier erinnern wir an die Normalform für linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_n), um schließlich für jeden Baumköcher B_Q eine (dem Lemma entsprechende) Orientierung anzugeben, für die wir induktiv eine Normalform von \mathcal{B}_Q (und damit von $\mathcal{K}\pi_Q$) finden. Dies werden wir anhand von speziellen Dynkin-Köchern veranschaulichen.

Unterraumköcher

Es sei $Q = Q(n)$ der Unterraumköcher mit $n + 1 > 2$ Punkten. Die einzige Senke bezeichnen wir mit s und die n Quellen mit p_1, \dots, p_n .



Wir haben schon gesehen (vgl. S. 35 ff), dass \mathcal{B}_Q zu der Wegealgebra seines Gabriel-Köchers isomorph ist. Nun werden wir zeigen, dass die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_Q$ isomorph zu \mathcal{B}_Q ist. Für jede Teilmenge $J = j_1 < j_2 < \dots < j_r$ von \underline{n} bezeichnen wir mit $w(J)$ das Wort $p_{j_1} \cdot p_{j_2} \cdot \dots \cdot p_{j_r}$ in Q_0^* .

4.3 Proposition. Eine Normalform von \mathcal{B}_Q wird indiziert durch die Menge

$$W^{(w)} := \{w(J) \in Q_0^* \mid J \subseteq Q_0 \setminus \{s\}\} \cup \{w(J) \cdot s \cdot w(K) \in Q_0^* \mid J, K \subseteq Q_0 \setminus \{s\}, J \cap K = \emptyset\}$$

Außerdem sind die Algebren \mathcal{B}_Q und $\mathcal{K}\pi_Q$ isomorph. Ferner gilt die duale Aussage.

Infolge der Kenntnis dieser Normalform lässt sich die Dimension von $\mathcal{K}\pi_Q$ wie folgt berechnen:

$$\sum_{J \subseteq \underline{n}} 1 + \sum_{J \subseteq \underline{n}} \sum_{K \subseteq \underline{n} \setminus J} 1 = 2^n + \sum_{J \subseteq \underline{n}} 2^{n-|J|} = 2^n + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^{n-j} 1^j = 2^n + 3^n$$

Dies stimmt wie erwartet mit der Dimension der Wegealgebra $\mathcal{K}\Gamma(\mathcal{B}_Q) \cong \mathcal{B}_Q$ überein.

Beweis: Da der Unterraumköcher eine Senke mit einem Eingangsgrad von mindestens 2 ist, folgt die Proposition aus dem vorherigen Lemma, wobei $Q(k) = \bullet_{p_k}$ und $W(k) = \{\emptyset, p_k\}$ sowie $\tilde{Q}(k) = \bullet_{p_k} \rightarrow \bullet_s$ und $\tilde{W}(k) = \{\emptyset, p_k, s, sp_k, p_k s\}$ sind. Die Mengen $W(k)$ und $\tilde{W}(k)$ erfüllen also die nötigen Voraussetzungen und es gilt:

$$\begin{aligned} W' &:= \{\emptyset, p_1\} \quad \times \{\emptyset, p_2\} \quad \times \dots \quad \times \{\emptyset, p_n\} \\ W_s &:= \{s, sp_1, p_1 s\} \quad \times \{s, sp_2, p_2 s\} \quad \times \dots \quad \times \{s, sp_n, p_n s\} \end{aligned}$$

(Daran ist die Dimension von \mathcal{B}_Q übrigens am schnellsten abzulesen.) Weiter gilt für jedes $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in W'$:

$$X_x = X_{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = X_{w(J)} \text{ mit } J = \{x_i \mid x_i \neq \emptyset\} \subseteq Q_0 \setminus \{s\}$$

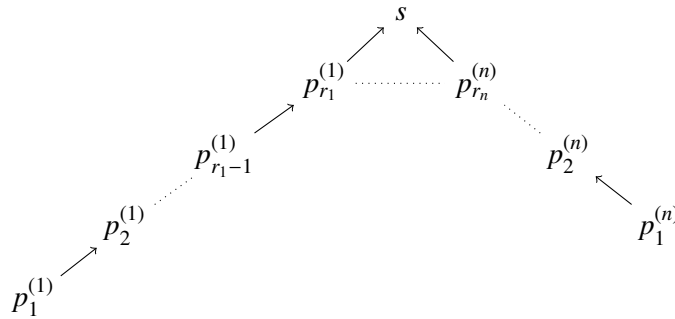
und für jedes $z = (y_1 s z_1, y_2 s z_2, \dots, y_n s z_n) \in W_s$:

$$X_z = X_{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n \cdot s \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = X_{w(J) \cdot s \cdot w(K)} \text{ mit } J = \{y_i \mid y_i \neq \emptyset\} \text{ und } K = \{z_i \mid z_i \neq \emptyset\}$$

Weil aus $y_i \neq \emptyset$ stets $y_i \cdot s \cdot z_i = p_i s$, also $z_i = \emptyset$ folgt, und auch umgekehrt mit $z_i \neq \emptyset$ stets $y_i = \emptyset$ gilt, sind J und K disjunkt. Ebenso leicht ist einzusehen, dass jedes $w \in W^{(u)}$ zu einem eindeutig bestimmten Element aus $W' \cup W_s$ gehört. \square

Sternköcher

Es seien $Q(1), \dots, Q(n)$ linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_{r_1}, \dots, A_{r_n} resp. mit den Senken $p_{r_1}^{(1)}, \dots, p_{r_n}^{(n)}$ resp. Wir betrachten den Köcher Q , der durch Verkleben der $Q(i)$ an einem Punkt s über die Pfeile $p_{r_i}^{(i)} \rightarrow s$ entsteht:



Der um s und einen Pfeil erweiterte Köcher $\tilde{Q}(k)$ von $Q(k)$ ist der linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_{r_k+1} mit der (einzigen) Senke $s =: p_{r_k+1}^{(k)}$. Eine Normalform von $\mathcal{B}_{\tilde{Q}(k)}$ wird durch die partielle Ordnung \mathcal{P}_{r_k+1} gezählt vermöge der Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{r_k+1} &\longrightarrow \mathcal{B}_{\tilde{Q}(k)} \\ J_1 < \dots < J_t &\mapsto X_{J_1}^{(k)} \dots X_{J_t}^{(k)} =: X_{J_1^{(k)} \dots J_t^{(k)}} \end{aligned}$$

wobei zu dem Intervall $J_1 = [i_1, i_1 + 1, \dots, j_1] \subseteq \underline{r_k + 1}_|$ das Wort $J_1^{(k)}$ definiert sei als $p_{j_1}^{(k)} \cdot \dots \cdot p_{i_1+1}^{(k)} \cdot p_{i_1}^{(k)}$ (vgl. Satz 3.2 auf S. 48). Dementsprechend seien auch $J_2^{(k)}, \dots, J_t^{(k)}$ als Wörter über $\widetilde{Q}(k)_0$ zu sehen. Damit gilt:

$$\widetilde{W}(k) = \{J_1^{(k)} \cdot \dots \cdot J_t^{(k)} \mid J_1 < \dots < J_t \text{ Intervalle in } \underline{r_k + 1}_|\}$$

und

$$W(k) = \{J_1^{(k)} \cdot \dots \cdot J_t^{(k)} \mid J_1 < \dots < J_t \text{ Intervalle in } \underline{r_k}_|\}$$

Nun erfüllen diese Normalformen indizierende Mengen von Wörtern die im Lemma geforderten Voraussetzungen. Dabei gehört das leere Wort zu der leeren Folge von Intervallen und $p_i^{(k)}$ zu der Intervallfolge $J_1^{(k)} = \{i\}$. Falls ferner $r_k + 1$ in der Intervallfolge $J_1 < \dots < J_t \subseteq \underline{r_k + 1}_|$ auftaucht, so muss es in J_t liegen; in dem zugehörigen Wort kommt s deshalb genau einmal vor. Zudem haben wir in dem Beweis des Satzes 3.2 gezeigt, dass sich für je zwei verschiedene Wörter die zugehörigen Monome der Projektionsfunktoren schon auf einer $\widetilde{Q}(k)$ -Darstellung unterscheiden. Nach dem Lemma wird eine Normalform von \mathcal{B}_Q – und damit auch eine der Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_Q$ – gezählt durch die Vereinigung der folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} W' &:= \mathcal{P}_{r_1} && \times \mathcal{P}_{r_2} && \times \dots && \times \mathcal{P}_{r_n} \\ W_s &:= \mathcal{P}_{r_1+1} \setminus \mathcal{P}_{r_1} && \times \mathcal{P}_{r_2+1} \setminus \mathcal{P}_{r_2} && \times \dots && \times \mathcal{P}_{r_n+1} \setminus \mathcal{P}_{r_n} \end{aligned}$$

Damit hat $\mathcal{B}_Q \cong \mathcal{K}\pi_Q$ die Dimension:

$$\begin{aligned} &C_{r_1+1} C_{r_2+1} \dots C_{r_n+1} + (C_{r_1+2} - C_{r_1+1})(C_{r_2+2} - C_{r_2+1}) \dots (C_{r_n+2} - C_{r_n+1}) \\ &= \prod_{k=1}^n C_{r_k+1} + \sum_{J \subseteq \underline{n}} (-1)^{n-|J|} \left(\prod_{j \in J} C_{r_j+2} \right) \left(\prod_{k \in \underline{n} \setminus J} C_{r_k+1} \right) \end{aligned}$$

Dabei ist $C_j = \frac{1}{(j+1)} \binom{2j}{j}$ die j -te Catalan-Zahl und die \mathcal{K} -Dimension der Algebra \mathcal{B}_K für den linear orientierten Dynkin-Köcher K vom Typ A_{j-1} .

Um die auf diese Weise erhaltene Normalform von $\mathcal{K}\pi_Q$ anzugeben, führen wir ein paar abkürzende Schreibweisen ein: Es sei $k \in \underline{n}_|$. Ist $J^{(k)} \in \mathcal{P}_{r_k}$, so existieren Intervalle J_i in $\underline{r_k}_|$ mit $J^{(k)} = J_1 < J_2 < \dots < J_t$. Ist L ein Intervall in $\underline{r_k + 1}_|$ mit $J_t < L$, so schreiben wir auch $J^{(k)} < L$. Die zu den Intervallen J_i korrespondierenden Wörter über $\widetilde{Q}(k)$ bezeichnen wir weiterhin mit $J_i^{(k)}$ und zudem setzen wir:

$$X_{J^{(k)}} := X_{J_1^{(k)}} \dots X_{J_t^{(k)}}$$

Eine Normalform von $\mathcal{K}\pi_Q$ ist dann die Vereinigung der Mengen:

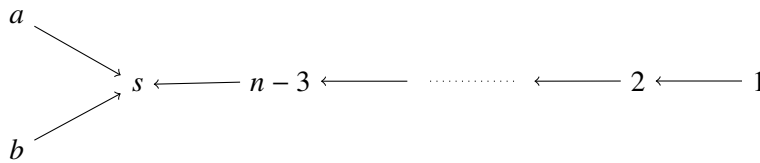
$$\{P_{J^{(1)}}P_{J^{(2)}} \dots P_{J^{(n)}} \mid \forall k \in \underline{n} : J^{(k)} \in \mathcal{P}_{r_k}\}$$

und

$$\{P_{J^{(1)}}P_{J^{(2)}} \dots P_{J^{(n)}} P_s P_{L^{(1)}}P_{L^{(2)}} \dots P_{L^{(m)}} \mid \forall k \in \underline{n} : \mathcal{P}_{r_k} \ni J^{(k)} < L^{(k)} \cup \{r_k + 1\} \subseteq \underline{r_k + 1}\}$$

Dynkin-Köcher vom Typ D_n mit genau einer Senke

Der eben diskutierte Spezialfall ist zum Beispiel auf die Dynkin-Köcher mit entsprechender Orientierung anwendbar. Wir betrachten hier nur den Dynkin-Köcher vom Typ D_n mit der folgenden Orientierung:



Dann hat das Monoid π_Q genau

$$(5 - 2)(5 - 2)(C_{n-1} - C_{n-2}) + 2(2)C_{n-2} = 9C_{n-1} - 5C_{n-2}$$

Elemente. Diese sind entweder von der Form:

$$P_J, \quad P_a P_J, \quad P_b P_J \quad \text{oder} \quad P_a P_b P_J$$

für ein Tupel $J = J_1 < J_2 < \dots < J_r$ von Intervallen in $\underline{n-3}$ oder sie sind von der Art:

$$P_J P_s P_L, \quad P_a P_J P_s P_L, \quad P_b P_J P_s P_L, \quad P_a P_b P_J P_s P_L, \quad P_a P_J P_s P_b P_L, \\ P_J P_s P_L P_a, \quad P_J P_s P_L P_b, \quad P_J P_s P_L P_a P_b \quad \text{oder} \quad P_b P_J P_s P_a P_L$$

für ein Tupel $J = J_1 < J_2 < \dots < J_r$ von Intervallen in $\underline{n-3}$ und ein Intervall L in $\underline{n-3}$ mit $J_r < L \cup \{n-2\}$.

Bäume mit einer speziellen Orientierung

Es sei Q ein endlicher, zusammenhängender Köcher, der weder orientierte noch nicht-orientierte Zyklen enthält. Der Q zugrunde liegende Graph ist also ein Baum und Q ein sogenannter Baumköcher.

4.4 Definition. Wir nennen einen Punkt eines Baumköchers eine Kreuzung, wenn sein Eingangs- oder Ausgangsgrad mindestens 2 ist. Einen Baumköcher, in dem jede Kreuzung eine Senke oder eine Quelle ist, nennen wir zulässig.

In einem zulässigen Baumköcher Q sind also die beiden linear orientierten Dynkin-Köcher vom Typ D_4 keine Unterköcher.

Jeder endliche Baumköcher kann so umorientiert werden, dass er zulässig ist. Per Induktion nach der Anzahl der Ecken eines Baumes braucht man dazu nur zu zeigen, dass es eine Orientierung der Kanten gibt, so dass jede Kreuzung eine Quelle oder Senke ist und alle benachbarten Kreuzungen einer Kreuzung x Quellen (bzw. Senken) sind, wenn x eine Senke (resp. eine Quelle) ist.

Insbesondere ist jeder Baum mit einer bipartiten Orientierung ein zulässiger Baumköcher. Dessen Wegealgebra ist dann eine Algebra mit Radikalquadrat 0.

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass die Algebren \mathcal{B}_Q und $\mathcal{K}\pi_Q$ zu einem zulässigen Baumköcher Q isomorph sind, indem wir induktiv eine Normalform von \mathcal{B}_Q konstruieren. Die Konstruktion werden wir auf das Lemma 4.2 stützen. Dazu sehen wir uns bestimmte Erweiterungen $\tilde{Q}(k)$ von $Q(k)$ um einen Punkt an (Bezeichnungen wie vor dem Lemma 4.2):

4.5 Definition. Es sei Q ein zulässiger Baumköcher. Eine Erweiterung \tilde{Q} von Q um einen Punkt heiÙe zulässig, wenn \tilde{Q} ein zusammenhängender, zulässiger Baumköcher ist.

Bemerkung 1: Ist \tilde{Q} eine zulässige Erweiterung von Q um einen Punkt e , so gibt es exakt einen Punkt y in Q , der mit e über (genau) einen Pfeil verbunden ist. Dies notieren wir wieder mit $y \dashrightarrow e$. Die Orientierung dieses Pfeils $y \dashrightarrow e$ hängt von y ab:

Ist y etwa eine Senke, so gibt es die folgenden Möglichkeiten:

1. Falls y eine Kreuzung ist, so gilt: $y \dashrightarrow e = y \leftarrow e$.
2. Falls y keine Kreuzung ist, so gibt es für $y \dashrightarrow e$ zwei Möglichkeiten:

2.1 $y \dashrightarrow e = y \leftarrow e$. In diesem Fall ist y eine Kreuzung in \tilde{Q} .

2.2 $y \dashrightarrow e = y \rightarrow e$. In diesem Fall ist y in \tilde{Q} weder eine Quelle noch eine Senke.

Ist y eine Quelle, so gilt die duale Aussage.

Ist y weder eine Quelle noch eine Senke (D.h. y liegt „in der Mitte“ eines linear orientierten Dynkin-Köchers vom Typ A_n), so gibt es keine zulässige Erweiterung von Q um einen Punkt e durch einen Pfeil $y \dashrightarrow e$. \square

Nach dem konstruktiven Beweis des folgenden Satzes können wir Normalformen von \mathcal{B}_Q für zulässige Baumköcher Q „berechnen“. Insbesondere gilt der Satz für bipartite Baumköcher.

4.6 Satz. *Es seien Q ein zulässiger Baumköcher und \tilde{Q} eine zulässige Erweiterung von Q um einen Punkt e . Dann gibt es Normalformen von \mathcal{B}_Q bzw. $\mathcal{B}_{\tilde{Q}}$ indizierende Mengen von Wörtern $W \subseteq Q_0^*$ und $\tilde{W} \subseteq \tilde{Q}_0^*$, für welche gelten:*

$$(i) \{\emptyset\} \cup \{q \mid q \in Q_0\} \subseteq W$$

$$(ii) \{e\} \cup W \subseteq \tilde{W}$$

(iii) *In jedem Wort aus \tilde{W} kommt e höchstens einmal vor.*

(iv) *Für alle $v, w \in \tilde{W}$ mit $v \neq w$ existiert eine \tilde{Q} -Darstellung U mit $UP_v \neq UP_w$.*

Insbesondere sind $\mathcal{B}_{\tilde{Q}}$ und $\mathcal{K}\pi_{\tilde{Q}}$ isomorphe \mathcal{K} -Algebren.

Beweis: Wir führen eine Induktion nach der Anzahl m der Punkte von Q .

Es sei $Q = \bullet_y$ und \tilde{Q} eine zulässige Erweiterung von Q . Dann ist entweder Q oder Q^{op} der Köcher $y \rightarrow e$. Für $W := \{\emptyset, y\}$ und $\tilde{W} := \{\emptyset, y, e, e \cdot y, y \cdot e\}$ gelten dann die Eigenschaften (i)–(iv).

Ist $Q = p \rightarrow q$ und \tilde{Q} eine zulässige Erweiterung von Q um einen Punkt e , so ist \tilde{Q} einer der folgenden Köcher:

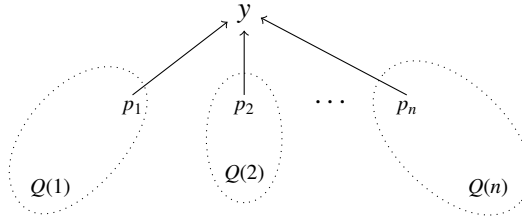
$$p \rightarrow q \rightarrow e, \quad p \rightarrow q \leftarrow e, \quad e \rightarrow p \rightarrow q \quad \text{oder} \quad e \leftarrow p \rightarrow q$$

Ist \tilde{Q} der linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_3 , so sind die nach Satz 3.2 (s. S. 48) gegebenen Normalformen von \mathcal{B}_Q bzw. $\mathcal{B}_{\tilde{Q}}$ so, dass für die sie indizierenden Mengen W resp. \tilde{W} von Wörtern die Eigenschaften (i)–(iv) gelten.

Jetzt sei \tilde{Q} (oder \tilde{Q}^{op}) der Unterraumköcher mit zwei Punkten. Die nach Proposition 4.3 bestimmte Menge \tilde{W} von Wörtern, die eine Normalform von $\mathcal{B}_{\tilde{Q}}$ indiziert, enthält dann eine Teilmenge W , welche eine Normalform von \mathcal{B}_Q indiziert, so dass (i)-(iv) gelten.

Es seien nun $m \geq 2$, Q ein zulässiger Baumköcher mit $m+1$ Punkten und \tilde{Q} eine zulässige Erweiterung um einen Punkt e durch einen Pfeil $e \leftarrow y$. Ferner sei y eine Senke. Wir führen hier nur den Beweis für diesen Fall; der Beweis für den Fall, dass y eine Quelle ist, ist dual.

1.Fall: y ist eine Kreuzung Dann gilt $y \leftarrow e = y \leftarrow e$. Es seien $p_1, \dots, p_n \in Q$ mit $n \geq 2$ die zu y benachbarten Punkte und für jedes $k \in \underline{n}$ sei $Q(k)$ die Zusammenhangskomponente von p_k in $Q_{Q_0 \setminus \{y\}}$. Somit ist Q von der Form:



Da Q ein zulässiger Baumköcher ist, ist jedes $Q(k)$ ein zulässiger Baumköcher. Außerdem ist jede Erweiterung $\tilde{Q}(k)$ von $Q(k)$ um den Punkt y (und den Pfeil $y \leftarrow p_k$) zulässig. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also Normalformen von $\mathcal{B}_{Q(k)}$ bzw. $\mathcal{B}_{\tilde{Q}(k)}$ indizierende Mengen $W(k) \subseteq Q(k)_0^*$ resp. $\tilde{W}(k) \subseteq \tilde{Q}(k)_0^*$ mit den Eigenschaften (i)-(iv). Wir setzen dann $Q(n+1) := \bullet_e$ und $\tilde{Q}(n+1) := y \leftarrow e$ sowie $W(n+1) = \{\emptyset, e\}$ und $\tilde{W}(n+1) = \{\emptyset, e, y, e \cdot y, y \cdot e\}$. Die nach dem Lemma 4.2 gewonnenen Normalformen von \mathcal{B}_Q bzw. $\mathcal{B}_{\tilde{Q}}$ mit den indizierenden Mengen

$$W = \left(W(1) \quad \times \dots \quad \times W(n) \right) \\ \cup \left(\tilde{W}(1) \setminus W(1) \quad \times \dots \quad \times \tilde{W}(n) \setminus W(n) \right)$$

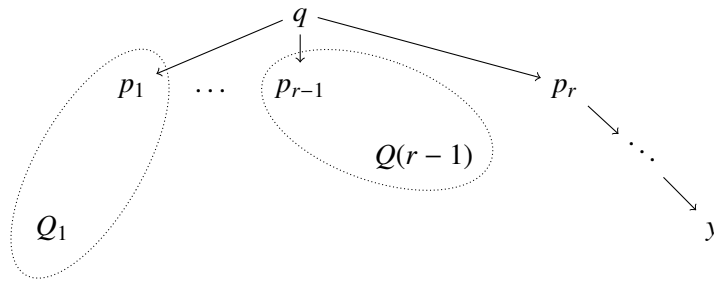
resp.

$$\tilde{W} = \left(W(1) \quad \times \dots \quad \times W(n) \quad \times W(n+1) \right) \\ \cup \left(\tilde{W}(1) \setminus W(1) \quad \times \dots \quad \times \tilde{W}(n) \setminus W(n) \quad \times \tilde{W}(n+1) \setminus W(n+1) \right)$$

erfüllen dann die Bedingungen (i)-(iv). Dabei gelten (i)-(iii) nach den Definitionen von $W(n + 1)$, W und \tilde{W} , während (iv) aus dem Beweis des Lemmas folgt.

2.Fall: y ist keine Kreuzung Falls es keine Kreuzung in Q gibt, so ist Q ein linear orientierter Dynkin-Köcher vom Typ A_{m+1} mit Senke y . Weiter ist dann \tilde{Q} entweder ein linear orientierter Dynkin-Köcher vom Typ A_{m+2} oder ein Sternköcher mit genau zwei Quellen. In jedem Fall haben wir bereits Normalformen von \mathcal{B}_Q bzw. $\mathcal{B}_{\tilde{Q}}$ mit indizierenden Mengen W resp. \tilde{W} bestimmt. Dass W und \tilde{W} die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllen, geht aus den jeweiligen Beweisen hervor (s. Satz 3.2 S. 48 u. Unterabschnitt „Sternköcher“ S. 117).

Andernfalls gibt es insbesondere eine (eindeutig bestimmte) zu y benachbarte Kreuzung q . Dann ist q eine Quelle. Es seien p_1, \dots, p_r mit $r \geq 2$ die zu q benachbarten Punkte, so dass die Zusammenhangskomponente $Q(r)$ von p_r in $Q_{Q_0 \setminus \{q\}}$ den Punkt y enthält. Weiter sei die Zusammenhangskomponente von p_k in $\tilde{Q}_{Q_0 \setminus \{q\}}$ mit $Q(k)$ bezeichnet für jedes $k \in \underline{r-1}$. Es ist Q dann von der Form:



Für jedes $k \in \underline{r}$ sei $\tilde{Q}(k)$ die Erweiterung von $Q(k)$ um q . Da jedes $Q(k)$ wieder ein zulässiger Baumköcher mit zulässiger Erweiterung $\tilde{Q}(k)$ ist, gibt es nach Induktionsvoraussetzung Normalformen von $\mathcal{B}_{Q(k)}$ bzw. $\mathcal{B}_{\tilde{Q}(k)}$ indizierende Mengen $W(k) \subseteq Q(k)_0^*$ resp. $\tilde{W}(k) \subseteq \tilde{Q}(k)_0^*$ mit den Eigenschaften (i)-(iv).

Nach der Wahl von y und q ist $Q(r)$ nun der linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_n mit Senke y und Quelle p_r und $\tilde{Q}(r)$ der (um q erweiterte) linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ A_{n+1} mit Senke y und Quelle q . Nach Satz 3.2 gibt es eine Normalform von $\mathcal{B}_{Q(r)}$, die in einer Normalform von $\mathcal{B}_{\tilde{Q}(r)}$ enthalten ist. Wir erhalten die entsprechenden Mengen $U \subseteq \tilde{U}$ von Wörtern, für die (i)-(iv) gelten. Wir betrachten noch den um e erweiterten Köcher K von $Q(r)$ (also die Zusammenhangskomponente von p_r in $\tilde{Q}_{Q_0 \setminus \{q\}}$) sowie dessen Erweiterung \tilde{K} um q .

2. 1 Fall: $y \dashrightarrow e = y \rightarrow e$ Dann ist K ein linear orientierter Dynkin-Köcher vom Typ A_{n+1} mit Senke e und Quelle p_r und \tilde{K} ein linear orientierter Dynkin-Köcher vom Typ A_{n+2} mit Senke e und Quelle q . Wieder wählen wir nach dem Satz 3.2 eine Normalform von \mathcal{B}_K , die in einer Normalform von $\mathcal{B}_{\tilde{K}}$ enthalten ist und die entsprechenden Mengen $V \subseteq \tilde{V}$ von Wörtern, so dass (i)–(iv) gelten und V die Menge U enthält. Nach dem Lemma 4.2 erhalten wir eine Normalform von \mathcal{B}_Q indizierende Menge W durch:

$$W = \left(W(1) \times \dots \times W(r-1) \times U \right) \cup \left(\tilde{W}(1) \setminus W(1) \times \dots \times \tilde{W}(r-1) \setminus W(r-1) \times \tilde{U} \setminus U \right)$$

Zudem erhalten wir nach dem Lemma auch eine Normalform von $\mathcal{B}_{\tilde{Q}}$ indizierende Menge \tilde{W} durch:

$$\tilde{W} = \left(W(1) \times \dots \times W(r-1) \times U \right) \cup \left(\tilde{W}(1) \setminus W(1) \times \dots \times \tilde{W}(r-1) \setminus W(r-1) \times \tilde{V} \setminus V \right)$$

Unter Berücksichtigung der genauen Kenntnis der Normalformen von $\mathcal{B}_{\tilde{K}}$, ist leicht einzusehen, dass (i)–(iv) für W und \tilde{W} gelten.

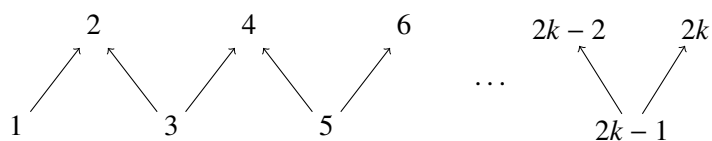
2. 2 Fall: $y \dashrightarrow e = y \leftarrow e$ In diesem Fall ist K ein Sternköcher mit der Senke y und den Quellen e und p_r . Außerdem ist auch \tilde{K} ein Sternköcher mit der Senke y und den Quellen e und q . Nach dem Unterabschnitt „Sternköcher“ (S. 117) gibt es eine Normalform von \mathcal{B}_K , die in einer Normalform von $\mathcal{B}_{\tilde{K}}$ enthalten ist, und die entsprechenden Mengen $V \subseteq \tilde{V}$ von Wörtern, so dass (i)–(iv) gelten. Auch hier enthält V die Menge U . Wie im 2.1 Fall erhalten wir nach dem Lemma 4.2 Normalformen indizierende Mengen W und \tilde{W} , für die (i)–(iv) gelten. \square

Insbesondere erhalten wir nach dem Satz zu jeder Orientierung des Dynkin-Köcher Q vom Typ A_n eine Normalform von \mathcal{B}_Q . Entscheidend ist, dass dieses Verfahren auch zeigt, dass die im ersten Kapitel gefundenen Relationen zwischen den Projektionsfunktoren auf Q - \mathcal{K} dar schon definierende sind:

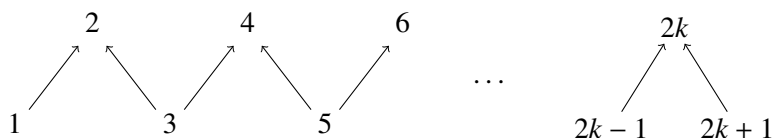
4.7 Korollar. *Für jeden Dynkin-Köcher Q vom Typ A_n sind die \mathcal{K} -Algebren \mathcal{B}_Q und $\mathcal{K}\pi_Q$ isomorph.*

Bipartite Dynkin-Köcher vom Typ A_n

Es sei Q_n ein bipartiter Dynkin-Köcher vom Typ A_n . Dann hat Q_n (bis auf Antiisomorphie) abhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist, die folgende Gestalt:



oder



Wir erhalten induktiv nach n eine Normalform B_n von $\mathcal{K}\pi_{Q_n} \cong \mathcal{B}_{Q_n}$ wie folgt:

$n \in \{1, 2\}$: Wir kennen bereits die Normalformen B_n von $\mathcal{K}\pi_{Q_n} \cong \mathcal{B}_{Q_n}$:

$$B_1 = \{P_\emptyset, P_1\} \quad \text{womit } |B_1| = 2 \text{ gilt.}$$

$$B_2 = \{P_\emptyset, P_1, P_2, P_{1.2}, P_{2.1}\} \quad \text{womit } |B_2| = 5 \text{ gilt.}$$

$n = 3$: Dann ist Q_3 der Unterraumköcher mit 2 Quellen. Eine Normalform B_3 von $\mathcal{K}\pi_{Q_3} \cong \mathcal{B}_{Q_3}$ besteht aus den 13 Elementen:

$$P_\emptyset, P_1, P_3, P_{1.3}, P_2, P_{1.2}, P_{2.1}, P_{3.2}, P_{2.3}, P_{1.2.3}, P_{3.2.1}, P_{1.3.2}, P_{2.1.3}$$

$n \geq 4$: Dann ist der Punkt $n - 1$ eine Kreuzung, welche die Unterköcher Q_{n-1} und $n - 1 \dashrightarrow n$ trennt. Zu den beiden Köchern $Q_{n-2} \subseteq Q_{n-1}$ links von $n - 1$ kennen wir induktiv Normalformen. Eine Normalform zur rechten Seite entspricht B_1 . Die Elemente einer nach dem Satz 4.6 gewonnenen Normalform B_n von \mathcal{B}_{Q_n} sind also von der Form:

$$P_v, \quad \text{oder} \quad P_v P_n$$

für ein $P_v \in B_{n-2}$ beziehungsweise:

$$P_w, \quad P_n P_w, \quad \text{oder} \quad P_w P_n$$

für ein $P_w \in B_{n-1} \setminus B_{n-2}$.

Somit kann man die Dimension $|B_n|$ von $\mathcal{K}\pi_{Q_n}$ über die Folge

$$|B_n| = 2|B_{n-2}| + 3(|B_{n-1}| - |B_{n-2}|) = 3|B_{n-1}| - |B_{n-2}|$$

mit den Startwerten $|B_1| = 2$ und $|B_2| = 5$ berechnen. Damit ist $(|B_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ die Teilfolge $(F_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ der Fibonacci-Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Anfangswerten: $F_1 = F_2 = 1$, weil für alle $k \geq 3$ induktiv gilt:

$$F_{2k+1} = F_{2k} + F_{2k-1} = F_{2k-2} + 2F_{2k-1} = F_{2k-1} - F_{2k-3} + 2F_{2k-1} = 3|B_{k-1}| - |B_{k-2}| = |B_k|$$

Beispiel 4.1: Die Monoidalgebra zum bipartiten Dynkin-Köcher vom Typ A_4

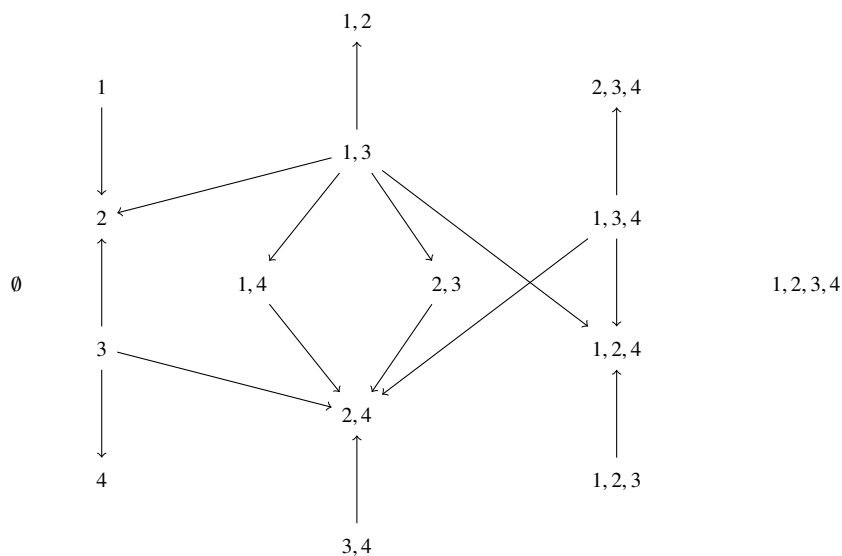
Insbesondere hat das Monoid π_{Q_4} zu dem Köcher

$$Q_4 = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4$$

genau

$$|B_4| = 3|B_3| - |B_2| = 3(13) - 5 = 34$$

Elemente. Daraus können wir folgern, dass die Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_{Q_4} \cong \mathcal{B}_{Q_4}$ schon zu der Wegealgebra ihres Gabriel-Köchers isomorph ist, weil diese schon – wie wir gleich einsehen werden – die gleichen Dimensionen besitzen. Dazu berechnen wir zunächst den Gabriel-Köcher nach der Charakterisierung aus dem zweiten Kapitel über die Stark-Verbunden-Relation der Differenzmengen (vgl. Korollar 2.14):



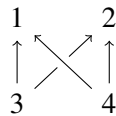
Die Dimension der Wegealgebra ist nun die Summe über die Anzahl der Punkte und der Pfeile, sowie der Wege (hier der Länge 2):

$$2^4 + 16 + 4 = 34$$

Darüber hinaus zeigt dieses Beispiel, dass der Gabriel-Köcher $\Gamma(\mathcal{B}_Q)$ im allgemeinen nicht bipartit ist, wenn Q bipartit ist.

4.2 Vollständig bipartite Köcher

Es sei $G = G(m, n)$ der endliche, vollständig bipartite Köcher mit m Quellen $Q \subseteq G_0$ und n Senken $S \subseteq G_0$, d.h. jeder Punkt in G ist entweder eine Quelle oder eine Senke und jede Quelle ist mit jeder Senke verbunden. Es gilt stets $G(m, n) \cong G(n, m)^{op}$. Außerdem ist $G(m, 1)$ der Unterraumköcher mit m Quellen und $G(1, m)$ sein dualer Köcher. Der Köcher $G(2, 2)$ ist der bipartite Euklidische Köcher vom Typ \tilde{A}_3 :



Die idempotenten Erzeuger X_q mit $q \in Q$ von \mathcal{B}_G kommutieren; ebenso kommutieren alle X_s mit $s \in S$. Weiter gelten die Relationen: $X_s X_q X_s = X_s X_q = X_q X_s X_q$ für alle $q \in Q$ und $s \in S$. Es sei \leq eine totale Ordnung auf Q (bzw. S). Ist $M = m_1 < \dots < m_r$ eine Teilmenge von Q (oder von S), so sei $w(M)$ wieder das Wort $m_1 \dots m_r$.

4.8 Proposition. Eine Normalform von \mathcal{B}_G ist indiziert mit der Menge W derjenigen Wörter

$$w = w(A_0)w(B_1)w(A_1) \dots w(B_r)w(A_r)w(B_{r+1}),$$

für die gilt:

- A_0, A_1, \dots, A_r sind paarweise disjunkte Teilmengen von Q und A_1, \dots, A_r sind nichtleer.
- B_1, \dots, B_{r+1} sind paarweise disjunkte Teilmengen von S und B_1, \dots, B_r sind nichtleer.

Außerdem sind die \mathcal{K} -Algebren \mathcal{B}_G und $\mathcal{K}\pi_G$ isomorph.

Da jeder Buchstabe höchstens einmal in einem Wort aus \mathbf{W} auftaucht, haben die längsten Wörter in \mathbf{W} genau $m + n = |G_0|$ Buchstaben. Weiter ist r höchstens das Minimum von m und n . Im folgenden leiten wir eine Dimensionsformel für $\mathcal{K}\pi_G$ her:

Es gibt genau 2^m Wörter in \mathbf{W} über Q und 2^n Wörter über S .

Nun sehen wir auf diejenigen $w \in \mathbf{W}$, in denen sowohl Quellen als auch Senken vorkommen. Es seien $\emptyset \neq A \subseteq Q$ und $\emptyset \neq B \subseteq S$ sowie $a = |A|$ und $b := |B|$. Es ist $w(A)w(B)$ das einzige Wort in \mathbf{W} mit $\{w\} = A \cup B$ und $A_0 = A$, und es ist das einzige Wort mit $B_{r+1} = B$. Wir notieren $\binom{x}{x_1, \dots, x_r}$ für den Multinomialkoeffizienten $\binom{x}{x_1} \binom{x-x_1}{x_2} \dots \binom{x-x_1-\dots-x_{r-1}}{x_r}$, der angibt, wieviele Möglichkeiten es gibt, eine Menge X mit x Elementen auf Tupel (X_1, \dots, X_r) von Teilmengen $X_i \subseteq X$ mit $|X_i| = x_i$ zu verteilen. Die Anzahl der restlichen Wörter $w \in \mathbf{W}$ mit $\{w\} = A \cup B$ ist:

$$t(a, b) := \sum_{\substack{p \in \underline{a-1} \setminus \{0\} \\ q \in \underline{b-1} \setminus \{0\}}} \binom{a}{p} \binom{b}{q} \left(\sum_{r=1}^{\min(a-p, b-q)} \sum_{\substack{p_i, q_i \neq 0, \\ p_1 + \dots + p_r = (a-p) \\ q_1 + \dots + q_r = (b-q)}} \binom{a-p}{p_1, \dots, p_r} \binom{b-q}{q_1, \dots, q_r} \right)$$

Damit ist die Dimension von \mathcal{B}_G :

$$\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_G = 2^m + 2^n + \sum_{\substack{a \in \underline{m} \\ b \in \underline{n}}} \left(\binom{m}{a} \binom{n}{b} (1 + t(a, b)) \right)$$

Beweis: Es sei $\mathbf{B} = \{X_w \mid w \in \mathbf{W}\}$ die Menge der durch \mathbf{W} indizierten Monome von \mathcal{B}_G .

Zur multiplikativen Abgeschlossenheit: Es seien $w = w(A_0) \dots w(B_{r+1}) \in \mathbf{W}$ und $x \in G_0$. Ist $x \notin \{w\}$, so liegt $X_w X_x = X_v$ wieder in \mathbf{B} , wobei die Form des Wortes $v \in \mathbf{W}$ davon abhängt, ob w mit einer Quellen- oder Senkenmenge endet und x eine Quelle oder Senke ist; mit $w' = w(A_0) \dots w(A_{r-1})$ gilt:

$$v = \begin{cases} w' w(A_r) w(\{x\}) & \text{falls } x \in S, B_{r+1} = \emptyset \\ w' w(A_r) w(B_{r+1}) w(\{x\}) & \text{falls } x \in Q, B_{r+1} \neq \emptyset \\ w' w(A_r) w(B_{r+1} \cup \{x\}) & \text{falls } x \in S, B_{r+1} \neq \emptyset \\ w' w(A_r \cup \{x\}) & \text{falls } x \in Q, B_{r+1} = \emptyset \end{cases}$$

Jetzt sei $x \in \{w\}$. Falls x eine Senke ist, so ist x natürlich auch eine in jedem Unterköcher von G und es folgt: $X_w X_x = X_w$. Ist x eine Quelle, so seien $k \in \underline{r+1}_0$ mit $x \in A_k$, $C_k := A_k \setminus \{x\}$ und u, v die Wörter mit $w = u \cdot w(A_k) \cdot v$. Dann gilt:

$$X_w X_x = X_{u \cdot w(A_k) \cdot v} X_x = X_{u \cdot w(C_k) \cdot v} X_x$$

In dem Monom $X_{u \cdot w(C_k) \cdot v}$ ist X_x kein Faktor. Nach den Überlegungen zum ersten Fall „ $x \notin \{w\}$ “ genügt es deswegen zu zeigen, dass $X_{u \cdot w(C_k) \cdot v}$ zu einer Normalform gehört. Falls A_k von $\{x\}$ verschieden ist, also $C_k \neq \emptyset$, so gilt dies offensichtlich. Andernfalls ist $A_k = \{x\}$. Ist $k = 0$, so ist $C_k = \emptyset$ erlaubt und $u \cdot w(C_k) \cdot v = w(\emptyset)v$ deshalb ein Element in W . Im Fall $k > 0$ müssen wir, um die Normalform zu erhalten, noch die zu $w(A_k)$ benachbarten Senkenwörter zusammenfassen:

$$\begin{aligned} u \cdot w(C_k) \cdot v &= w(A_0) \dots w(A_{k-1}) w(B_k) w(\emptyset) w(B_{k+1}) \dots w(B_{r+1}) \\ &= w(A_0) \dots w(A_{k-1}) w(B_k \cup B_{k+1}) \dots w(B_{r+1}), \end{aligned}$$

Zur Verschiedenheit der Monome: Es seien $v = w(A_0) \dots w(B_{r+1})$ und $w = w(C_0) \dots w(D_{s+1})$ verschiedene Elemente aus W . Sind die Mengen $\{v\}$ und $\{w\}$ verschieden, so unterscheiden sich die Monome P_v und P_w schon in ihrer Wirkung auf den einfachen G -Darstellungen. Es gelte jetzt $\{v\} = \{w\}$. Insbesondere tauchen dann in v – also auch in w – sowohl Quellen als auch Senken auf. Dann gibt es ein $0 \leq k \leq \min\{r, s\}$ minimal mit $A_k \neq C_k$ oder $B_k \neq D_k$, wobei $B_0 := \emptyset =: D_0$ sei.

1. Fall: $k = 0$ In diesem Fall gilt $A_0 \neq C_0$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass es ein $a \in A_0 \setminus C_0$ gibt. Dann liegt a auch in einem C_k für ein $0 < k \leq s$. Wir betrachten nun die injektiv unzerlegbare G -Darstellung I_x für eine Senke $x \in D_k \neq \emptyset$. In v steht a vor allen in v auftretenden Senken, also auch vor x . In w hingegen steht a nach x . Wir haben also $v = v_1 \cdot a \cdot v_2 \cdot x \cdot v_3$ und $w = w_1 \cdot x \cdot w_2 \cdot a \cdot w_3$ für Wörter $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ über G_0 , in denen weder a noch x auftreten. Ist ferner $j \in \underline{r+1}_1$ mit $x \in B_j$, also mit $\{v_3\} \cap Q = A_j \cup \dots \cup A_r$, so folgt:

$$I_x P_v = I_x P_{v_1 \cdot a \cdot v_2 \cdot x \cdot v_3} = I_x P_{x \cdot v_3} = \bigoplus_{b \in Q} S_b P_{v_3} = \bigoplus_{b \in Q \setminus \{v_3\}} S_b = \bigoplus_{b \in Q \setminus (A_j \cup \dots \cup A_r)} S_b$$

Ebenso können wir $I_x P_w$ berechnen:

$$I_x P_w = \bigoplus_{b \in Q \setminus \{w_2 a w_3\}} S_b = \bigoplus_{b \in Q \setminus (C_k \cup \dots \cup C_s)} S_b$$

Weil a in A_0 und damit nicht in $A_j \cup \dots \cup A_r$ liegt, ist S_a ein direkter Summand von $I_x P_v$. Von $I_x P_w$ ist S_a jedoch kein direkter Summand, weil a in C_k liegt. Somit sind P_v und P_w verschieden.

2.1 Fall: $k \geq 1$ und $B_k \neq D_k$ O.b.d.A. nehmen wir an, dass es eine Senke x in $B_k \setminus D_k$ gibt. Es sei dann $k < l \leq s + 1$ mit $x \in D_l$. Wegen $\{v\} = \{w\}$ und $C_{l-1} \neq \emptyset$ gilt $A_k \cup \dots \cup A_r = C_k \cup \dots \cup C_s \neq C_l \cup \dots \cup C_s$. Infolgedessen unterscheiden sich P_v und P_w auf I_x :

$$I_x P_v = \bigoplus_{b \in Q \setminus (A_k \cup \dots \cup A_r)} S_b \neq \bigoplus_{b \in Q \setminus (C_l \cup \dots \cup C_s)} S_b = I_x P_w$$

2.2 Fall: $k \geq 1$ und $B_k = D_k$ Nach dem Fall $k = 0$ unterscheiden sich $P_{w(A_k) \dots w(B_{r+1})}$ und $P_{w(C_k) \dots w(D_{s+1})}$ auf einem injektiv Unzerlegbaren I_x für eine geeignete Senke $x \in B_{k+1} \cup \dots \cup B_{r+1}$. Da diese Senke dann insbesondere nicht in $B_0 \cup \dots \cup B_{k-1} = C_0 \cup \dots \cup C_{k-1}$ liegt, ergibt sich die Verschiedenheit von P_v und P_w aus:

$$I_x P_v = I_x P_{w(A_k)w(B_{k+1}) \dots w(B_r)w(A_r)w(B_{r+1})} \neq I_x P_{w(C_k)w(D_{k+1}) \dots w(D_s)w(C_s)w(D_{s+1})} = I_x P_w$$

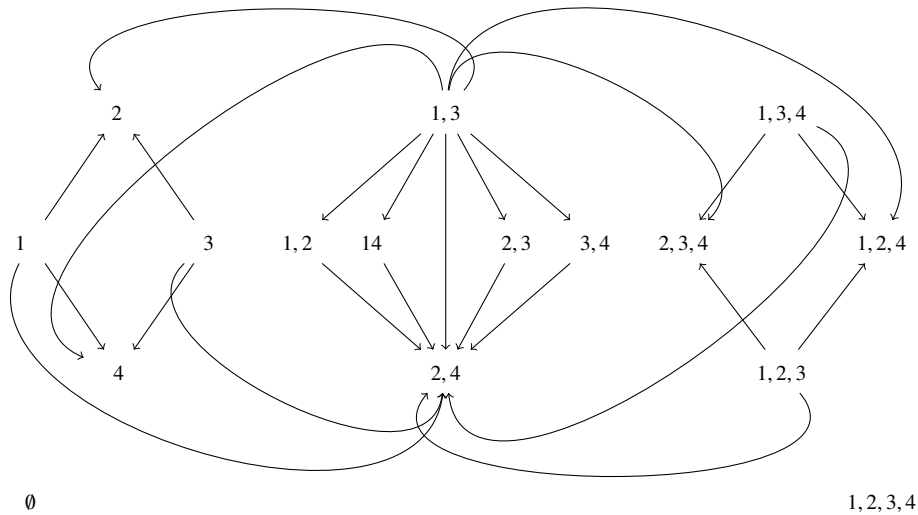
□

Beispiel 4.2: Die Monoidalgebra zum bipartiten Euklidischen-Köcher vom Typ \tilde{A}_3

Es sei $G = G(2, 2)$. Die Dimension der Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_G$ berechnet sich nach der Dimensionsformel (s. S. 128) wie folgt:

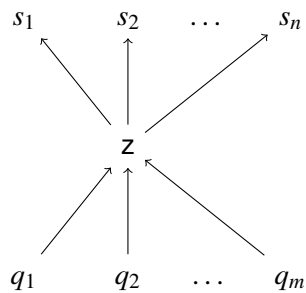
$$\begin{aligned} & 4 + 4 + \binom{2}{1} \binom{2}{1} (1 + t(1, 1)) + \binom{2}{1} \binom{2}{2} (1 + t(1, 2)) + \binom{2}{2} \binom{2}{1} (1 + t(2, 1)) + \binom{2}{2} \binom{2}{2} (1 + t(2, 2)) \\ & = 4 + 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 14 = 45 \end{aligned}$$

Der Gabriel-Köcher von $\mathcal{K}\pi_G \cong \mathcal{B}_G$ ist nach dem Korollar 2.14 der unten abgebildete. Weil die Dimension der Wegealgebra des Gabriel-Köchers nun $16 + 25 + 4 = 45$ ist, also mit der Dimension von $\mathcal{K}\pi_G$ übereinstimmt, ist die Algebra $\mathcal{K}\pi_G$ schon die Wegealgebra ihres Gabriel-Köchers:



4.3 Umgebungsköcher eines Punktes

In einem endlichen, zykellosen Köcher Q ist der Umgebungsköcher G eines Punktes z der volle Unterköcher, der alle Nachbarn von z enthält. Nach dem Korollar 4.1 ist die zugehörige Monoidalgebra $\mathcal{K}\pi_G$ stets eine Unteralgebra von $\mathcal{K}\pi_Q$, wenn wir auf dieselbe Weise wie bisher eine Normalform von G bestimmen können. Dies machen wir in diesem Unterabschnitt. Es sei G der folgende Köcher mit n Senken und m Quellen:



Somit ist $G_0 = S \cup \{z\} \cup Q$, wobei S wieder die Menge der Senken und Q die der Quellen bezeichne. Ist I eine Teilmenge von $P := S \cup Q$ und $I \cap Q = q_{m_1} < \dots < q_{m_r}$ sowie $I \cap S = s_{n_1} < \dots < s_{n_t}$, so bezeichnen wir das Wort $q_{m_1} \dots q_{m_r} \cdot s_{n_1} \dots s_{n_t}$ auch mit I (und nicht wie bisher – im Fall $M \cap S = \emptyset$ – mit $w(M)$). Dabei sei $<$ die durch die Ordnung auf den Indizes induzierte Ordnung auf S bzw. auf Q .

4.9 Proposition. *Es sei \mathfrak{S} die Menge derjenigen Tupel $(I_0, I_1, \dots, I_{r+1})$, für die gilt:*

- *Es ist $-1 \leq r$ und I_0, I_1, \dots, I_{r+1} sind paarweise disjunkte Teilmengen von $S \cup Q$.*
- *Für alle $k \in \underline{r+1}$ ist sowohl $I_k \cap Q$ als auch $I_k \cap S$ nichtleer.*

Eine Normalform von \mathcal{B}_G wird gezählt durch die Menge \mathfrak{S} vermöge der Abbildung:

$$\mathfrak{S} \longrightarrow \mathcal{B}_G$$

$$I = (I_0, I_1, \dots, I_r, I_{r+1}) \mapsto \begin{cases} X_{I_0} =: X_I & \text{falls } I = (I_0) \\ X_{I_0 z I_1 z \dots z I_r z I_{r+1}} =: X_I & \text{sonst} \end{cases}$$

Außerdem sind die Algebren \mathcal{B}_G und $\mathcal{K}\pi_G$ isomorph.

Beweis: Zur multiplikativen Abgeschlossenheit: Es sei $I = (I_0, I_1, \dots, I_{r+1}) \in \mathfrak{S}$ und $x \in G_0$. Wir setzen $I' := \cup_{k=0}^{r+1} I_k$.

1. Fall: x ist eine Senke Liegt x schon in I' , so gilt $X_I X_x = X_I$, weil x dann auch eine Senke in jedem Unterköcher von G ist. Gilt hingegen $x \notin I'$, so folgt $X_I X_x = X_J$ mit $J = (I_0, I_1, \dots, I_r, I_{r+1} \cup \{x\}) \in \mathfrak{S}$.

2. Fall: $x = z$ Ist $I = I_0$, so ist $X_I X_z = X_{I_0 z} = X_J$ mit $J = (I_0, \emptyset) \in \mathfrak{S}$. Es sei jetzt $r+1 \geq 1$. Ist $I_{r+1} = \emptyset$, so endet X_I mit z und $X_I X_z = X_I$. Ist I_{r+1} eine nichtleere Teilmenge von S (bzw. von Q), so ist z eine Quelle (resp. eine Senke) in dem Unterköcher $G_{z, I_{r+1}}$ und es folgt:

$$X_I X_z = X_{I_0 z I_1 \dots I_r X_{z I_{r+1}} X_z} = \begin{cases} X_{I_0 z I_1 \dots I_r X_{I_{r+1}} X_z} & \text{falls } I_{r+1} \subseteq S \\ X_{I_0 z I_1 \dots I_r X_z I_{r+1}} & \text{falls } I_{r+1} \subseteq Q \end{cases}$$

Damit haben wir $X_I X_z = X_J$ mit $J = (I_0, \dots, I_{r-1}, I_r \cup I_{r+1}) \in \mathfrak{S}$ falls $I_{r+1} \subseteq S$ gilt bzw. $J = I$ falls $I_{r+1} \subseteq Q$ gilt.

Es gelte jetzt $I_{r+1} \cap Q \neq \emptyset \neq I_{r+1} \cap S$. Dann gehört das Produkt $X_I X_x$ zu der Normalform X_J mit $J = (I_0, I_1, \dots, I_r, I_{r+1}, \emptyset) \in \mathfrak{S}$.

3. Fall: x ist eine Quelle Gilt $x \notin I'$, so folgt $X_I X_x = X_J$ mit:

$$J = (I_0, I_1, \dots, I_r, I_{r+1} \cup \{x\}) \in \mathfrak{S}$$

Ist $x \in I'$, so sei $k \in \underline{r+1}_0$ mit $x \in I_k$. Es folgt: $X_I X_x = X_J$ mit:

$$J = (I_0, I_1, \dots, I_{k-1}, I_k \setminus \{x\}, I_{k+1}, \dots, I_{r+1} \cup \{x\}) \in \mathfrak{S}$$

Falls x nicht die einzige Quelle in I_k oder $I_k = I_0$ ist, so ist J ein Element in \mathfrak{S} . Ist x jedoch die einzige Quelle in $I_k \neq I_0$, so gilt $X_z I_k \setminus \{x\} z = X_{I_k \setminus \{x\} z}$, weswegen in diesem Fall das Produkt $X_I X_x$ zu der Normalform $X_{J'}$ gehört mit:

$$J' = (I_0, I_1, \dots, I_{k-1} \cup I_k \setminus \{x\}, I_{k+1}, \dots, I_{r+1} \cup \{x\}) \in \mathfrak{S}$$

Zur Verschiedenheit der Monome: Es seien $I = (I_0, I_1, \dots, I_{r+1})$ und $J = (J_0, J_1, \dots, J_{t+1})$ verschiedene Elemente in \mathfrak{S} . Wie zuvor unterscheiden sich P_I und P_J auf den einfachen Darstellungen S_b mit $b \in G_0$, wenn $I' := \cup_{k=0}^{r+1} I_k \neq \cup_{k=0}^{t+1} J_k =: J'$ gilt. Jetzt gelte deshalb: $I' = J'$. Es sei weiter $k \in \underline{r+1}_1$ minimal mit $I_k \neq J_k$, wobei wir $J_{t+2} := \emptyset$ setzen.

1. Fall: $k = 0$ Insbesondere ist J dann keine Teilfolge von I und I keine von J .

1.1 Fall: Es gibt eine Quelle in $I_0 \setminus J_0 \cup J_0 \setminus I_0$ Es sei o.B.d.A. $a \in I_0 \setminus J_0$ eine Quelle. Wegen $I' = J'$ liegt $a \in J_i$ für ein $i \in \underline{t+1}_1$. Daraus folgt insbesondere $J \neq (J_0)$. Auf der injektiv unzerlegbaren G -Darstellung U_z zum Punkt z unterscheiden sich P_I und P_J . Denn im Fall $I \neq (I_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} U_z P_I &= U_z P_{I_0} P_z P_{I_1 z \dots z I_r z I_{r+1}} = U_z P_z P_{I_1 z \dots z I_r z I_{r+1}} \\ &= \bigoplus_{b \in Q} S_b P_{I_1 z \dots z I_r z I_{r+1}} = \bigoplus_{b \in Q \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{r+1})} S_b, \end{aligned}$$

womit in $U_z P_I$ der Einfache S_a ein direkter Summand ist. Währenddessen ist S_a kein direkter Summand von $U_z P_J = \bigoplus_{b \in Q \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_{t+1})} S_b$.

Im Fall $I = (I_0)$ ist $U_z P_I = U_z P_{I_0} = U_z$. In jedem Fall sind P_I und P_J verschieden.

1.2 Fall: $I_0 \cap Q = J_0 \cap Q$ Weil $I_0 \neq J_0$ gilt, gibt es o.B.d.A. eine Senke s in $I_0 \setminus J_0$ und dazu ein $0 < i \leq t+1$ mit $s \in J_i$. Damit gilt wieder $J \neq (J_0)$ und im Fall $I = (I_0)$ unterscheiden sich P_I und P_J auf U_s . Ist $i = t+1$, so gilt für die injektiv unzerlegbare G -Darstellung U_s zum Punkt s einerseits:

$$U_s P_J = U_s P_{J_0 z \dots z J_t z J_{t+1}} = U_s P_{J_{t+1}} = U_s$$

und andererseits:

$$U_s P_I = U_s P_{I_0} P_{z_{I_1} \dots z_{I_r} z_{I_{r+1}}} = U_z P_{z_{I_1} \dots z_{I_r} z_{I_{r+1}}} = \bigoplus_{b \in Q \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{r+1})} S_b$$

Es sei jetzt also $i \leq t$. Dann gibt es in J_i eine Quelle a . Weil daraus $a \notin J_0 \cap Q = I_0 \cap Q$, also $a \in I_j$ für ein $0 < j \leq r+1$ folgt, ist S_a kein direkter Summand von $U_s P_I$ aber einer von $U_s P_J$, denn es gilt:

$$U_s P_J = U_s P_{J_i z_{J_{i+1}} \dots z_{J_{r+1}}} = U_z P_{z_{J_{i+1}} z_{J_{i+2}} \dots z_{J_{r+1}}} = \bigoplus_{b \in Q \setminus (J_{i+1} \cup \dots \cup J_{r+1})} S_b$$

2. Fall: $k > 0$

2.1 Fall: Es gibt eine Quelle in $I_k \setminus J_k$ oder in $J_k \setminus I_k$: O.B.d.A. sei $a \in I_k \setminus J_k$ eine Quelle und $k < i \leq t+1$ mit $a \in J_i$.

2.1.1 Fall: I_k und J_k haben eine Senke s gemeinsam Dann unterscheiden sich P_I und P_J auf U_s . Denn falls $k \leq r$ gilt, so ist S_a ein direkter Summand von

$$U_s P_I = \bigoplus_{b \in Q \setminus (I_{k+1} \cup \dots \cup I_{r+1})} S_b$$

und im Fall $k = r+1$ gilt: $U_s P_I = U_z$. In beiden Fällen ist $U_s P_I$ nicht isomorph zu

$$U_s P_J = \bigoplus_{b \in Q \setminus (J_{k+1} \cup \dots \cup J_{r+1})} S_b$$

weil S_a ein direkter Summand von $U_s P_J$ ist.

2.1.2 Fall: I_k und J_k haben keine Senke gemeinsam Es sei dann s eine Senke von J_k . Dann liegt s zwar nicht in I_k , aber in einem I_j für ein $k < j \leq r+1$. Insbesondere folgt daraus $k < r+1$ und damit:

$$U_s P_I = \bigoplus_{b \in Q \setminus (I_{j+1} \cup \dots \cup I_{r+1})} S_b$$

Weil a nur in I_k liegt, ist S_a demnach ein direkter Summand von $U_s P_I$. Weiterhin gilt $k < i \leq t+1$, weswegen S_a kein direkter Summand von

$$U_s P_J = \bigoplus_{b \in Q \setminus (J_{k+1} \cup \dots \cup J_{r+1})} S_b$$

ist.

2.2 Fall: $I_k \cap Q = J_k \cap Q$ Dann gibt es eine Senke $s \in I_k \setminus J_k$ und einen Index $k < i \leq t + 1$ mit $s \in J_i$.

2.2.1 Fall: $i \neq t + 1$ Dann existiert in J_i auch ein Punkt a , der eine Quelle ist. Dieser kann dann nicht in J_k und damit auch nicht in I_k liegen, weshalb a in einem I_j für ein $k < j \leq r + 1$ enthalten ist. Es folgt:

$$U_s P_I = \bigoplus_{b \in Q \setminus (I_{k+1} \cup \dots \cup I_{r+1})} S_b$$

und

$$U_s P_J = \bigoplus_{b \in Q \setminus (J_{k+1} \cup \dots \cup J_{r+1})} S_b$$

Dabei ist S_a kein direkter Summand von $U_s P_I$, jedoch einer von $U_s P_J$.

2.2.2 Fall: $i = t + 1$ In diesem Fall ist $U_s P_J = U_z$ unzerlegbar und nicht einfach. Ist nun $k \neq r + 1$, so ist

$$U_s P_I = \bigoplus_{b \in Q \setminus (I_{k+1} \cup \dots \cup I_{r+1})} S_b$$

hingegen eine Summe von Einfachen und demnach nicht zu $U_s P_J$ isomorph.

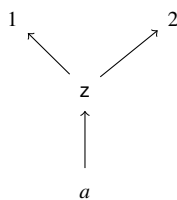
Es gelte nun $k = r + 1$. Für alle Senken $\tilde{s} \in I_k$ gilt dann $U_{\tilde{s}} P_I = U_z$. Es enthält jedoch J_k mindestens eine Senke s' wegen $k \neq t + 1$. Diese muss in I_k liegen, weil $k = r + 1$ minimal mit $I_k \neq J_k$ ist und weil $I' = J'$ gilt. Auf der injektiv unzerlegbaren Darstellung $U_{s'}$ zu dieser Senke unterscheiden sich P_I und P_J :

$$U_{s'} P_J = \bigoplus_{b \in Q \setminus (J_{k+1} \cup \dots \cup J_{r+1})} S_b \neq U_z = U_{s'} P_I$$

In allen Fällen gibt es eine injektiv unzerlegbare Darstellung, auf der P_I und P_J unterschiedlich wirken und demzufolge verschieden sind. \square

Beispiel 4.3: Die Monoidalgebra zum linear orientierten Dynkin-Köcher vom Typ D_4

Es sei G der linear orientierte Dynkin-Köcher vom Typ D_4 mit der folgenden Benennung der Punkte:



Wir listen im Folgenden die nach der letzten Proposition gewonnene Normalform \mathbf{B} von $\mathcal{K}\pi_G$ auf. Für $r = -1$, also $I = (I_0)$, liegen in \mathbf{B} die folgenden 8 Monome:

$$P_\emptyset, P_a, P_1, P_2, P_{a1}, P_{a2}, P_{12}, P_{a12}$$

Im Fall $r = 1$, also $I = (I_0, I_1)$ stellen sich keine Bedingungen an I_0 und an I_1 .

Für $I_0 = \emptyset = I_1$, also $I = (\emptyset, \emptyset)$ liegt in \mathbf{B} das folgende Monom:

$$P_z$$

Für $I_0 \neq \emptyset = I_1$, also $I = (I_0, \emptyset)$, liegen in \mathbf{B} die folgenden 7 Monome:

$$P_{az}, P_{1z}, P_{2z}, P_{a1z}, P_{a2z}, P_{12z}, P_{a12z}$$

Für $I_0 = \emptyset \neq I_1$, also $I = (\emptyset, I_1)$, liegen in \mathbf{B} die folgenden 7 Monome:

$$P_{za}, P_{z1}, P_{z2}, P_{za1}, P_{za2}, P_{z12}, P_{za12}$$

Für $I_0 \neq \emptyset \neq I_1$, also $I = (\emptyset, I_1)$, liegen in \mathbf{B} die folgenden 12 Monome:

$$P_{zaz1}, P_{zaz2}, P_{a1z2}, P_{1za}, P_{1z2}, P_{1za2}, \\ P_{2za}, P_{2z1}, P_{2za1}, P_{12za}, P_{1az2}, P_{2az1}$$

Im Fall $r = 2$, also $I = (I_0, I_1, I_2)$, stellen sich keine Bedingungen an I_0 und an I_2 . Aber in I_1 muss sowohl eine Quelle als auch eine Senke enthalten sein.

Für $I_0 = \emptyset = I_1$, also $I = (\emptyset, I_1, \emptyset)$, liegen in \mathbf{B} die folgenden 3 Monome:

$$P_{za1z}, P_{za2z}, P_{za12z},$$

Für $I_0 \neq \emptyset = I_2$, also $I = (I_0, I_1, \emptyset)$, liegen in \mathbf{B} die folgenden 2 Monome:

$$P_{1za2z}, P_{2za1z}$$

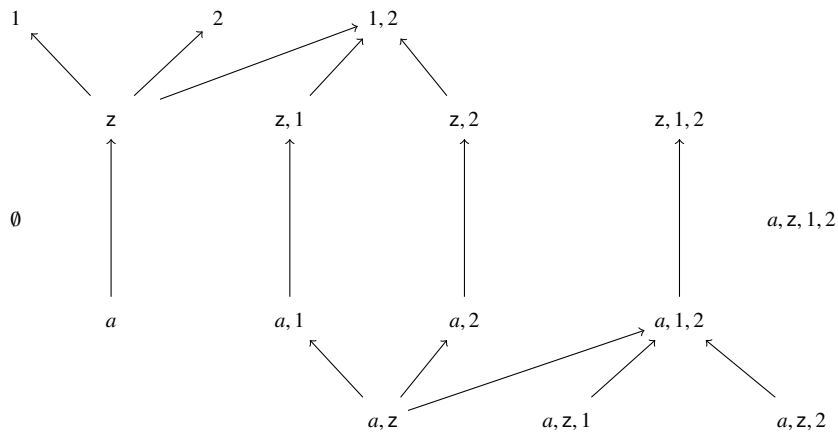
Für $I_0 = \emptyset \neq I_1$, also $I = (\emptyset, I_1, I_2)$, liegen in \mathbf{B} die folgenden 2 Monome:

$$P_{za1z2}, \quad P_{za2z1}$$

Schließlich ist $I_0 \neq \emptyset \neq I_1$ nicht möglich, da $|I_1| \geq 2$ gelten muss.

Insgesamt hat $\mathcal{K}\pi_Q \cong \mathcal{B}_G$ also die Dimension 42.

Der Gabriel-Köcher von \mathcal{B}_G ist nach dem Korollar 2.14 dieser:



Die Monoidalgebra ist also isomorph zu der Wegealgebra seines Gabriel-Köchers, denn die Dimension der Wegealgebra ist $16 + 14 + 10 + 2$, also auch:

42

Literaturverzeichnis

- [ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, Techniques of representation theory.
- [GdlHJ89] Frederick M. Goodman, Pierre de la Harpe, and Vaughan F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 14, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [GL91] Werner Geigle and Helmut Lenzing, *Perpendicular categories with applications to representations and sheaves*, Journal of Algebra **144** (1991), no. 2, 273–343.
- [IT09] Colin Ingalls and Hugh Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, Compos. Math. **145** (2009), no. 6, 1533–1562.
- [Maz10] V. Mazorchuk, *Lectures on algebraic categorification*, ArXiv e-prints (2010).
- [Nor79] P. N. Norton, *0-Hecke algebras*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **27** (1979), no. 3, 337–357.
- [Pie82] Richard S. Pierce, *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 88, Springer-Verlag, New York, 1982, Studies in the History of Modern Science, 9.
- [Rin84] Claus Michael Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Sch91] Aidan Schofield, *Semi-invariants of quivers*, J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), no. 3, 385–395.

- [Sta99] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.