Eine Präsentation des Invariantenrings bezüglich simultaner Konjugation von Matrizen

Dissertation

zur Erlangung
des Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich C
der Bergischen Universität Wuppertal
vorgelegt von

Torsten Hoge

im September 2010

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20110211-155430-7
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20110211-155430-7]

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die reduktive algebraische Gruppe $GL_n(\mathbb{C})$ operiert auf d Kopien von $n \times n$ Matrizen durch simultane Konjugation, das heißt für $g \in GL_n(\mathbb{C})$ und $(A_1, \dots, A_d) \in M_n(\mathbb{C})^d$ sei die Aktion durch

$$g.(A_1, \dots, A_d) = (gA_1g^{-1}, \dots, gA_dg^{-1})$$

gegeben. Der Raum $M_n(\mathbb{C})^d$ ist auf natürliche Weise eine affine Varietät. Hier ist der Ring der regulären Funktionen $\mathbb{C}[M_n(\mathbb{C})^d]$ isomorph zum Polynomring in dn^2 Variablen. Er wird erzeugt von den Koordinatenfunktionen

$$\begin{array}{rcl} x_{i,j}^{(k)} : M_n(\mathbb{C})^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (A_1, \dots, A_d) & \longmapsto & (A_k)_{i,j}, \end{array}$$

wobei $(A_k)_{i,j}$ der (i, j)-te Eintrag der Matrix A_k sei. Die GL_n-Aktion setzt sich auf $\mathbb{C}[M_n(\mathbb{C})^d]$ durch

$$(g.x_{i,j}^{(k)})(A_1, \dots, A_d) = x_{i,j}^{(k)}(g^{-1}A_1g, \dots, g^{-1}A_dg)$$

fort. Der Invariantenring ist der durch

$$C_{nd} := \{f \in C[M_n^d] \mid g.f = f \text{ für alle } g \in GL_n\}.$$

gegebene Unterring. Nach dem Endlichkeitssatz von Hilbert ([Kra84] S. 72) ist dieser endlich erzeugt, korrespondiert also zu einer affinen Varietät. Somit stellt sich die Frage, wie diese Erzeuger aussehen. Dies hat Procesi in [Pro76] beantwortet. Die Erzeuger sind Spuren von generischen Matrizen, d.h.

$$C_{nd} = \{tr(X_{i_1} \cdots X_{i_k}) \mid i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}, k \in \mathbb{N}\}, \tag{1.1}$$

wobei die generische Matrix $X_k = (x_{i,j}^{(k)})_{i,j}$ die Matrix der zugehörigen Koordinatenfunktionen ist. Offensichtlich ist das in (1.1) angegebene Erzeugendensystem nicht endlich. Abhilfe schafft hier ein Zusatz von Procesi, der eine Gradschranke für die benötigten Erzeuger angibt.

Damit stellt sich natürlich die Frage, wie ein minimales Erzeugendensystem von C_{nd} genau aussieht. Der Invariantenring C_{nd} ist eine positiv graduierte endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra. Somit lässt sich ein minimales homogenes Erzeugendensystem Grad für Grad bestimmen. Insbesondere haben alle minimalen homogenen Erzeugendensysteme von C_{nd} die gleiche Anzahl von Elementen und deren Grade stimmen, bis auf eine Permutation, überein. Sei nun $t_1, \ldots, t_k$ ein solches minimales homogenes Erzeugendensystem von C_{nd} und $R := \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_k]$ der Polynomring in k Variablen. Die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_k] &\longrightarrow C_{nd} \\ T_i &\longmapsto t_i \end{aligned}$$

ist ein graduierter $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus, sofern der Grad von T_i dem Grad von t_i entspricht. Insbesondere ist $I := \ker(\varphi)$ ein homogenes Ideal in R.

Die Ziel dieser Arbeit ist die Bestimmung der notwendigen Erzeuger des Ideals I für $n = d = 3$. Das Ergebnis fasst Theorem 7.0.8 zusammen. Das Ideal I hängt von der Wahl des minimalen Erzeugendensystems von C_{nd} ab. Glücklicherweise gilt dies aber nicht für die Anzahl und die Grade der notwendigen Erzeuger von I, da diese nach [BH93, Kap 1.5] durch die minimale freie (=projektive) graduierte Auflösung

$$0 \to \bigoplus_j R[-j]^{\beta_{kj}} \to \ldots \to \bigoplus_j R[-j]^{\beta_{1j}} \to R \to C_{nd} \to 0$$

von C_{nd} als R-Modul gegeben sind. Dabei ist β_{1j} die Anzahl der notwendigen Erzeuger von I im Grad j. Setze hier

$$N^i(n,d) := max_j\{\beta_{ij} \neq 0\}.$$

Die Relationen bezüglich eines minimalen Erzeugendensystems von C_{nd} lassen sich Grad für Grad bestimmen, da φ graduierte Abbildung ist, was in 6.2.1 vorgestellt wird. Um Theorem 7.0.8 zu beweisen und zu formulieren sind zwei Probleme zu lösen.

1. Wieviele Grade müssen untersucht werden? Dies ist äquivalent zur Bestimmung von $N^1(3,3)$.
2. Ein minimales Erzeugendensystem von C_{33} hat 48 Erzeuger (siehe 5.5.1). Das Relationenideal I hat 365 Elemente, deren Darstellung teilweise mehrere Seiten in Anspruch nehmen. Wie kann man diese kompakt aufschreiben?

Das folgende Beispiel verdeutlicht das erste Problem.

Beispiel 1.0.1. *Betrachte die reguläre Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \mathbb{A}^3 \\ t &\longmapsto (t^3, t^4, t^5). \end{aligned}$$

Die Koordinaten des affinen Raums $\mathbb{A}^3$ seien mit X, Y, Z bezeichnet. Das Bild dieser Abbildung ist das Nullstellengebilde $N(X^5 - Z^3, X^4 - Y^3, Y^5 - Z^4)$, somit ist das Bild abgeschlossen. Wie sieht das Verschwindungsideal

$$V(Im\,\varphi) := \{f \in \mathbb{C}[X,Y,Z] \mid f(t^3,t^4,t^5) = 0\,\forall t \in \mathbb{C}\}$$

aus? Gesucht wird offenbar der Kern der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[X,Y,Z] & \to & \mathbb{C}[t] \\ f & \mapsto & f(t^3,t^4,t^5). \end{array}$$

Setzt man $\deg X := 3$, $\deg Y := 4$, $\deg Z := 5$, *so ist dies eine graduierte Abbildung, die man Grad für Grad untersuchen kann. Sei*

$$f = \sum_{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$$

gegeben. In Grad 0 *ergibt sich somit* $a_{0,0,0} = 0$. *Dies entspricht der trivialen Relation, d.h. dem Polynom* 0 *in* $C[X,Y,Z]$. *Die interessanten Relationen ergeben sich ab Grad* 8.

Grad	*Koeffizienten*	*Relation*
8	$a_{1,0,1} + a_{0,2,0} = 0$	$XZ - Y^2$
9	$a_{3,0,0} + a_{0,1,1} = 0$	$X^3 - YZ$
10	$a_{2,1,0} + a_{0,0,2} = 0$	$X^2Y - Z^2$
11	$a_{2,0,1} + a_{1,2,0} = 0$	$X^2Z - XY^2$

Dabei folgt die Relation in Grad 11 *schon aus der Relation vom Grad* 8, *da*

$$X(XZ - Y^2) = X^2Z - XY^2$$

gilt. Die Frage ist nun, wieviele Grade man hier untersuchen muss, um ein Erzeugendensystem für das Verschwindungsideal zu bestimmen.

Dieses Beispiel hat mehr als nur die Graduierung mit C_{nd} gemein. Der Invariantenring C_{nd} ist der Koordinatenring des algebraischen Quotienten von M_n^d bezüglich der GL_n-Aktion durch simultane Konjugation. Ein solcher ist gegeben durch einen GL_n-invarianten Morphismus $\pi\colon M_n^d \to Y$ von Varietäten, so dass jeder GL_n-invariante Morphismus $M_n^d \to Z$ eindeutig über π faktorisiert. Damit ist ein algebraischer Quotient bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Die Anzahl k der Elemente des minimalen Erzeugendensystems entspricht hier dem kleinsten affinen Raum, in dem der Quotient V_{nd} realisiert werden kann. Bilden die Elemente $f_1,\ldots,f_k$ ein minimales Erzeugendensystem von C_{nd}, so lässt sich der Morphismus π durch

$$\begin{array}{rcl} \pi\colon M_n^d = \mathbb{A}^{dn^2} & \twoheadrightarrow & V_{nd} \hookrightarrow \mathbb{A}^k \\ x & \mapsto & (f_1(x),\ldots,f_k(x)) \end{array}$$

definieren. Dabei ist $V_{nd} := Im\,\pi$. Das Verschwindungsideal $V(Im\,\pi)$ entspricht dem Relationenideal I bezüglich des gewählten minimalen homogenen Erzeugendensystem von C_{nd}. Insbesondere ist hier I stets ein Primideal, denn mit M_n^d ist auch V_{nd} irreduzibel.

Bei der Lösung des ersten Problems spielt die Cohen-Macaulay-Eigenschaft des Invariantenrings die entscheidende Rolle. Daher wird die zugrundeliegende Theorie in Kapitel 3 ausgearbeitet. Dies beginnt mit einer grundlegenden Einführung nach dem Artikel [Spr89]. Hier ist insbesondere die Darstellung der homogenen Parametersysteme überarbeitet worden, da dort, neben einigen Tippfehlern, die Beweisabfolge etwas ungünstig war. Ferner wurden noch einige grundlegende Beweise, zum Beispiel von 3.1.23 und 3.1.8 hinzugefügt, da diese in den angegebenen Quellen nur teilweise vorhanden waren. Der Abschnitt über die Hilbertreihen wurde hier noch um einige Beispiele und eine alternative Berechnungsmethode erweitert. Diese Methode bildet zusammen mit der Cohen-Macaulay-Eigenschaft von C_{33} die Grundlage des Beweis von Theorem 7.0.8. Die dort angewandte Methode wird in Abschnitt 6.4.2 beschrieben.

Mit einer etwas theoretischeren Methode beschäftigt sich ein Theorem von Harm Derksen 3.3.11, das eine obere Abschätzung für die $N^i(n,d)$ liefert. Da im Beweis die Koszulauflösung eine wesentliche Abschätzung ermöglicht, wird diese hier zuvor erläutert. Im hier angegebenen Beweis wird zusätzlich noch der Zusammenhang des Tor-Funktors und der freien graduierten Auflösung diskutiert. Der Nutzen dieses Theorems wird an Beispiel 1.0.1 illustriert. In 6.4.1 wird mit dieser Methode eine allgemeine Abschätzung für $N^1(n,d)$ gewonnen. Diese ist allerdings sehr grob. Daher wird hier eine Möglichkeit entwickelt, diese Abschätzung zu verbessern, falls ein "gutes" homogenes Parametersystem existiert. Dieses mündet in Satz 6.4.4, woraus $N^1(3,3) \leq 27$ folgt.

Dass die Invariantenringe C_{nd} die Cohen-Macaulay Eigenschaft besitzen ist ein Spezialfall des Theorems von Hochster-Roberts 3.2.21. Der hier angegebene Beweis dieses Theorems beruht auf Kapitel 6.5 in [BH93]. Hier werden zunächst die notwendigen Grundlagen (treuflache Moduln, Jacobsonringe) kurz erläutert. Im Gegensatz zum Beweis in [BH93] wird das Theorem zuerst für endliche Körper bewiesen. In diesem Fall wurde auch ein überflüssiger Index entfernt. Ferner wird die Vorgehensweise bei der Reduktion genauer erläutert und der gesamte Beweis etwas übersichtlicher dargestellt.

Das zweite Problem lässt sich durch das zweite Fundamentaltheorem 2.3.10 lösen. Dieses beschreibt die Relationen zwischen den kanonischen Erzeugern aus (1.1). Dabei lassen sich dort die Relationen durch Tupel von Monomen beschreiben. Die Summe der Länge dieser Tupel entspricht gerade dem Grad der zugehörigen Relation. Um diese kurze Notation zu übernehmen, müssen die gegebenen Relationen als Ausdrücke des gewählten minimalen Erzeugendensystems geschrieben werden. Dazu wird in 6.2.3 der Relationenbrüter eingeführt und sehr ausführlich erläutert. Dieser ermöglicht mit den zugehörigen Algorithmen einen eindeutigen Weg die Relationen aus dem zweiten Fundamentaltheorem als Ausdrücke des minimalen Erzeugendensystems zu schreiben.

Da das zweite Fundamentaltheorem eine so wesentliche Rolle spielt, wird der Beweis nach [Pro76] nachvollzogen. Hier wird die Notation im Beweis vom ersten Fundamentaltheorem benötigt, so dass auch dessen Beweis ausgeführt wird. Das erste Fundamentaltheorem wurde schon in [Hog06] behandelt. Der hier angeführte Beweis beinhaltet eine etwas schwächere Form des Doppelzentralisatorsatzes und im Beweis von Theorem 2.2.31 wurde ein Fehler verbessert. Ferner werden einige in der Orginalliteratur nicht angegebene Beweisschritte nachvollzogen. Insbesondere wird im Beweis von Korollar 2.3.10 bei der Reduktion auf multilineare Relationen etwas genauer argumentiert.

Auf M_n^d operiert neben der GL_n auch die GL_d durch lineare Transformationen, das heißt für $h \in GL_d$ gilt

$$h.(A_1, \ldots, A_d) = (\sum_{i=1}^{d} h_{i1} A_i, \ldots, \sum_{i=1}^{d} h_{id} A_i).$$

Diese Operation vertauscht mit der simultanen Konjugation und setzt sich somit auf den Invariantenring C_{nd} fort. Somit lassen sich die Methoden der Darstellungstheorie der GL_d auf C_{nd} anwenden. Diese Tatsache wird insbesondere in 6.2.2 und an einigen Stellen in Kapitel 7 benutzt.

Nach dem Haupttheorem 7.0.8 wird noch kurz eine Anwendung des Ergebnisses auf die Berechnung von Fasern bezüglich homogener Parametersysteme erläutert.

In Kapitel 8 werden einige Vermutungen aufgestellt, die sich aus den bisher berechneten Fällen ergeben. Ferner wird dort ein Ausblick auf die Anwendbarkeit der hier angeführten Methoden auf weitere Fälle gegeben.

2 Die Fundamentaltheoreme für Matrixinvarianten

Für den Beweis des zweiten Fundamentaltheorems wird die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe benötigt. Diese wird im nächsten Abschnitt behandelt. Danach wird der Beweis des ersten Fundamentaltheorems und die Gradschranke für (minimale) Erzeugendensysteme behandelt. Die Ausführungen basieren auf dem ursprünglichen Artikel von Procesi [Pro76] und den darauf aufbauenden Ausführungen von Le Bruyn [LeB05]. Die folgende kurze Einführung in die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe beruht auf [FH91].

2.1 Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe

Die Gruppenalgebra der symmetrischen Gruppe S_d ist über $\mathbb{C}$ vollstandig reduzibel. Ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten lässt sich durch Young-Symmetrisierer darstellen. Diese sind bis auf einen skalaren Faktor idempotent. Das folgende Lemma liefert die Existenz einer solchen Zerlegung.

Lemma 2.1.1. *Sei A eine unitäre halbeinfache Algebra. Dann wird jedes Linksideal W von einem idempotenten Element $\omega \in W$ erzeugt.*

Beweis. A ist halbeinfach. Damit ergibt sich eine direkte Zerlegung $A = W \oplus Y$ mit einem Linksideal Y von A. Da A unitär ist, existiert eine Zerlegung der Eins

$$1 = \omega + y$$

mit $\omega \in W$ und $y \in Y$. Damit folgt für jedes $x \in W$

$$x - x\omega = xy \in W \cap Y$$

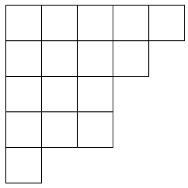
und damit $xy = 0$ sowie $x = x\omega$ aufgrund der direkten Summe. Insbesondere also $\omega^2 = \omega$ und $A\omega = W$. □

Bemerkung 2.1.2. *Ist W isotypische Komponente von A, so ist ω eindeutig durch $\omega^2 = \omega$ und $A\omega = W$ bestimmt.*

2.1.1 Tableaux

Definition 2.1.3. *Ein Youngdiagramm mit d Kästchen ist eine linksbündig angeordnete Menge von d Kästchen, wobei die Anzahl der Kästchen in den Zeilen schwach absteigend ist.*

Beispiel 2.1.4.



ist ein Youngdiagramm, aber

ist keines, da in der zweiten Zeile mehr Kästchen als in der ersten Zeile sind.

Bemerkung 2.1.5. *Die Menge der Youngdiagramme steht in Bijektion zu den Partitionen $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0)$, indem man die Anzahl der Kästchen in den Zeilen als Einträge der Partition identifiziert. Im obigen zulässigen Beispiel entspricht das Youngdiagramm der Partition $(5, 4, 3, 3, 1)$.*

Definition 2.1.6. *Ein Youngtableau ist ein Youngdiagramm versehen mit einer Nummerierung von natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Jede Zeile enthält eine schwach wachsende Folge (von links nach rechts).*
2. *Jede Spalte enthält eine streng wachsende Folge (von oben nach unten).*

Sei ein Youngdiagramm mit d Kästchen gegeben. Ein Standardtableau zu diesem Youngdiagramm ist ein Youngtableau, in dem die Einträge von 1 bis d genau einmal vorkommen. Es gibt stets eine kanonische Weise, ein solches Standardtableau zu erhalten, indem man die Zeilen von oben nach unten mit den entsprechenden Einträgen füllt. Dieses Youngtableau wird auch mit λ bezeichnet, falls λ die Partition des zugehörigen Youngdiagramms ist.

Definition 2.1.7. *Sei T ein Standardtableau mit d Kästchen. Setze*

$$\begin{aligned} P &:= P_T := \{\sigma \in S_d \mid \textit{Für alle } i \textit{ sind } i \textit{ und } \sigma(i) \textit{ in der gleichen Zeile von } T\}, \\ Q &:= Q_T := \{\tau \in S_d \mid \textit{Für alle } j \textit{ sind } j \textit{ und } \tau(j) \textit{ in der gleichen Spalte von } T\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.8. *P und Q sind Untergruppen von S_d. Die Untergruppe P ist das direkte Produkt der Permutationsgruppen der Zeilen und Q ist das direkte Produkt der Permutationsgruppen der Spalten.*

Beispiel 2.1.9. *Ist T das folgende Youngtableau*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 7 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

so sind

$$\begin{aligned} P &= S_{\{1,2,3,4\}} \times S_{\{5,6\}} \times S_{\{7,8\}} \times S_{\{9\}} \\ Q &= S_{\{1,5,7,9\}} \times S_{\{2,6,8\}} \times S_{\{3\}} \times S_{\{4\}}. \end{aligned}$$

P und Q lassen sich also direkt aus dem Youngtableau ablesen.

Definition 2.1.10. *Sei T ein Youngtableau von d. Dann fasse*

$$a_T := \sum_{\sigma \in P} \sigma, \qquad b_T := \sum_{\tau \in Q} sgn(\tau)\tau$$

als Elemente der Gruppenalgebra $\mathbb{C}S_d$ auf. Das Produkt $c_T = a_T b_T$ heißt Youngsymmetrisierer zu T.

Beispiel 2.1.11. *Ist T das folgende Standardtableau*

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

so ist $c_T = 1 + (12) - (13) - (132)$, wobei die Permutationen als Zyklen dargestellt sind.

Bemerkung 2.1.12. *Für jedes Standardtableau T ist $c_T \neq 0$, denn der Koeffizient von $()$, des neutralen Elements, ist 1.*

Lemma 2.1.13. *Sei T ein Standardtableau von d. Dann gilt*

1. *Für $p \in P$ ist $p \cdot a_T = a_T = a_T \cdot p$.*
2. *Für $q \in Q$ ist $q \cdot b_T = sgn(q) \cdot b_T = b_T \cdot q$.*
3. *Für alle $p \in P$, $q \in Q$ gilt: $p \cdot c_T \cdot sgn(q) \cdot q = c_T$. Ferner ist c_T, bis auf Multiplikation mit einem Skalar, das einzige Element mit dieser Eigenschaft.*
4. *Für alle $x \in \mathbb{C}S_d$ gilt $c_T x c_T \in \mathbb{C}c_T$.*

Beweis.

1. p verschiebt nur die Elemente von P.
2. Bis auf das Vorzeichen bewirkt q lediglich eine Verschiebung der Elemente von Q.
3. $p \cdot c_T \cdot sgn(q)q = \underbrace{p \cdot a_T}_{=a_T} \cdot \underbrace{b_T \cdot sgn(q) \cdot q}_{=b_T} = c_T$. Für den Beweis der Eindeutigkeit siehe [FH91, Seite 53].

4. Sind $p \in P$, $q \in Q$, so gilt

$$p \cdot c_T \cdot x \cdot c_T \cdot sgn(q) \cdot q = (p \cdot c_T \cdot id) \cdot x \cdot (id \cdot c_T \cdot sgn(q) \cdot q) = c_T \cdot x \cdot c_T.$$

Da dies für alle $p \in P$ und $q \in Q$ gilt, muss nach aufgrund der Eindeutigkeit $c_T \cdot x \cdot c_T$ ein skalares Vielfaches von c_T sein.

□

Lemma 2.1.14. *Sei A eine Algebra über einem Körper K und $x \in A$ ein von Null verschiedenes Element mit $xax \subseteq Kx$ für alle $a \in A$. Dann ist Ax minimales Linksideal von A.*

Beweis. Es gilt $xAx \subseteq Kx$. Sei $W \subsetneq Ax$ ein Ideal von A. Auch hier gilt $xW \subseteq Kx$. Da xW ein K-Vektorraum ist und $\dim Kx = 1$ ist, bleiben nur die Möglichkeiten $xW = Kx$ oder $xW = \{0\}$. Im ersten Fall gilt

$$Ax = AKx = AW = W,$$

was ausgeschlossen war. Im zweiten Fall folgt

$$WW \subseteq A \underbrace{xW}_{=0} = 0$$

und somit $W = 0$, da es sonst nach Lemma 2.1.1 ein nicht triviales idempotentes Element in W gäbe. □

Korollar 2.1.15. *Für jedes Standardtableau T ist $\mathbb{C}S_d c_T$ irreduzible Darstellung von $\mathbb{C}S_d$.*

Lemma 2.1.16. *Sind T und T' Standardtableaux zur gleichen Partition, so sind die Darstellungen $\mathbb{C}S_d c_T \cong \mathbb{C}S_d c_{T'}$ isomorph, da c_T und $c_{T'}$ zueinander konjugierte Elemente in S_d sind.*

Bemerkung 2.1.17. *Die $\mathbb{C}S_d c_T$ sind alle irreduziblen Darstellungen von S_d, denn es gilt*

$$\mathbb{C}S_d \cong \bigoplus_{V \text{ irred.}} V^{\dim V}$$

und alle irreduziblen Darstellungen kommen in der regulären Darstellung vor.

2.2 Das erste Fundamentaltheorem

Die Erzeuger von C_{nd} haben die folgende Form:

Theorem 2.2.1. *[Pro76] Der Invariantenring C_{nd} wird durch die Spuren der Form*

$$tr(X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_k})$$

erzeugt, wobei X_i generische $n \times n$ Matrix und $i_j \in \{1, \dots, d\}$ sowie $k \in \mathbb{N}$. Ein solches Element ist als polynomiale Funktion gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) \times \ldots \times M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (A_1, \dots, A_d) & \longmapsto & tr(A_{i_1} \cdots A_{i_k}). \end{array}$$

Der hier angegebene Beweis führt die einzelnen Schritte in dem oben angeführten Artikel aus. Dabei besteht der Beweis hauptsächlich aus Übersetzungen, der Schur-Weyl Dualität und einigen Rückübersetzungen. Hier spielt die Graduierung von C_{nd} eine wesentliche Rolle. Der Invariantenring C_{nd} ist Teilring des standardgraduierten Polynomringes $\mathbb{C}[M_n^d]$, d.h. jede Variable $x_{i,j}^{(k)}$ hat Grad 1. Da sich die GL_n-Aktion linear auf diesen Koordinatenring fortsetzt, ist die Aktion dort graderhaltend. Insbesondere sind die homogenen Bestandteile einer Invariante ebenfalls Invarianten und C_{nd} damit ein graduierter Teilring von $\mathbb{C}[M_n^d]$. Weist man den Koordinatenfunktionen der i-ten Matrix den i-ten Einheitsvektor zu, so ist aufgrund der Diagonalaktion C_{nd} bezüglich dieser Graduierung $\mathbb{N}^d$-graduiert.

Die Übersetzung richtet sich nach folgendem Schema:

$$\begin{tikzcd}
C_{nd} \arrow[d, "\text{wird erzeugt von}"] & \\
\text{homogene Elemente von } C_{nd} & \supset \text{ Elemente vom Multigrad } k = (k_1, \dots, k_d) \arrow[d, "\mathcal{P}\text{olarisation}"] \\
\bar{d} := k_1 + k_2 + \ldots + k_d & \text{multilineare Elemente von } C_{n\bar{d}} \arrow[d, "\text{univ. Eig. Tensorprodukt}"] \\
V := \mathbb{C}^n & \text{lineare Invarianten } M_n^{\otimes \bar{d}} \to \mathbb{C} \arrow[d, "M_n \cong V \otimes V^*"] \\
& \text{lineare Invarianten } V^{\otimes \bar{d}} \otimes (V^*)^{\otimes \bar{d}} \to \mathbb{C} \arrow[d] \\
& End_{GL_n}(V^{\otimes \bar{d}}) \arrow[d, "\text{Schur-Weyl Dualität}"] \\
& \langle S_{\bar{d}} \rangle
\end{tikzcd}$$

Polarisation

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum auf dem eine Gruppe G linear operiert, sowie $f \in K[V]$ ein homogenes Polynom vom Totalgrad k. Hier soll f in ein multilineares Polynom $F \in K[V^k]$ "polarisiert werden". Dabei bedeutet multilinear, dass $F(v_1, \ldots, v_k)$ linear in jeder Komponente ist. In der folgenden Definition wird ein Monom als reguläre Abbildung aufgefasst.

Definition 2.2.2. *Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $m \in K[V]$ mit $m(v) = \varepsilon_{i_1}(v) \cdots \varepsilon_{i_k}(v)$ ein Monom vom Grad k in den Koeffizienten von v. Dabei ist ε_i die Projektion auf die i-te Komponente. Die Polarisation $\mathcal{P}(m) \in K[V^k]$ ist die Abbildung:*

$$\mathcal{P}(m)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdots \varepsilon_{i_k}(v_{\sigma(k)})$$

Für homogene $f \in K[V]$ vom Grad k setze $\mathcal{P}$ linear fort.

Beispiel 2.2.3. *Sei $V = \mathbb{C}^2$ und $f(v) = f(\binom{v_1}{v_2}) = v_1^2 v_2$, also $i_1 = 1, i_2 = 1, i_3 = 2, k = 3$. Dann ist*

$$\mathcal{P}(f)(x, y, z) = 2x_1 y_1 z_2 + 2x_1 z_1 y_2 + 2y_1 z_1 x_2$$

Lemma 2.2.4. *Der Operator $\mathcal{P}\colon K[V]_k \to K[V^k]_{\text{multilin.}}$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *$\mathcal{P}$ ist linear.*
2. *Für jedes $f \in K[V]_k$ ist $\mathcal{P}(f)$ symmetrisch, d.h.*

   $$\mathcal{P}(f)(v_1, \ldots, v_k) = \mathcal{P}(f)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)})$$

   für alle $\tau \in S_k$.
3. *$\mathcal{P}(f)(v, \ldots, v) = k! f(v)$ für alle $v \in V$.*
4. *$\mathcal{P}$ ist G-äquivariant, d.h. $g \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ g$ für alle $g \in GL(V)$.*

Beweis.
1. Folgt direkt aus der Definition. Damit genügt es die folgenden Behauptungen für Monome zu zeigen. Sei im Folgenden stets $m \in K[V]_k$ ein Monom.
2. Es gilt

   $$\begin{aligned} \mathcal{P}(m)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_{i_1}(v_{\tau\sigma(1)}) \cdots \varepsilon_{i_k}(v_{\tau\sigma(k)}) \\ &\overset{\sigma' = \tau\sigma}{=} \sum_{\sigma' \in S_k} \varepsilon_{i_1}(v_{\sigma'(1)}) \cdots \varepsilon_{i_k}(v_{\sigma'(k)}) \\ &= \mathcal{P}(m)(v_1, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

3. $\mathcal{P}(m)(v, \ldots, v) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_{i_1}(v) \cdots \varepsilon_{i_k}(v) = \sum_{\sigma \in S_k} m(v) = k!\, m(v)$.

4. Die G-Aktion ist linear auf V. Durch die G-Aktion erhält man folgende homogene Funktion:

$$(g^{-1}.m)(v) = \sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} g_{1,j_1}\cdots g_{k,j_k}\varepsilon_{j_1}(v)\cdots\varepsilon_{j_k}(v),$$

also

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(g^{-1}.m)(v_1,\ldots,v_k) \\ = & \sum_{\sigma\in S_k}\sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} g_{1,j_1}\cdots g_{k,j_k}\varepsilon_{j_1}(v_{\sigma(1)})\cdots\varepsilon_{j_k}(v_{\sigma(k)}) \\ = & \sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon_{i_1}(g.v_{\sigma(1)})\cdots\varepsilon_{i_k}(g.v_{\sigma(k)}) \\ = & \mathcal{P}(m)(g.v_1,\ldots,g.v_k) \\ = & (g^{-1}.\mathcal{P}(m))(v_1,\ldots,v_k). \end{aligned}$$

□

Restitution

Definition 2.2.5. *Sei $K[V^k]_{multilin}$ die Menge der multilinearen polynomialen Abbildungen in $K[V^k]$ und $F \in K[V^k]_{multilin}$. Bezeichne mit $\mathcal{R}F \in K[V]$ die Abbildung $(\mathcal{R}F)(v) := F(v,\ldots,v)$. Diese wird Restitution von F genannt.*

Lemma 2.2.6. *Der Operator $\mathcal{R}$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *$\mathcal{R}$ ist linear.*
2. *Für eine lineare G-Aktion auf V ist $\mathcal{R}$ eine G-äquivariante Abbildung.*
3. *Für $f \in K[V]_k$ ist $\mathcal{R}\mathcal{P}f = k!f$.*

Beweis. Seien $F, H \in K[V^k], \alpha, \beta \in K, v \in V$ und $g \in G$. Dann gilt:

1. $\mathcal{R}(\alpha F + \beta H)(v) = \alpha F(v,\ldots,v) + \beta H(v,\ldots,v) = (\alpha\mathcal{R}F + \beta\mathcal{R}(H))(v)$.
2. $(g^{-1}.\mathcal{R}(F))(v) = F(g.v,\ldots,g.v) = \mathcal{R}(g^{-1}.F)(v)$.
3. Siehe Lemma 2.2.4.

□

Spezialisierung von Restitution und Polarisation

Seien $V_1, \dots, V_d$ K-Vektorräume. Hier sollen Polarisation und Restitution auf $K[V_1 \oplus \dots \oplus V_d]$ so definiert werden, dass lediglich in den einzelnen V_i linearisiert wird. Dazu betrachte den Isomorphismus

$$\begin{aligned} K[V_1] \otimes \cdots \otimes K[V_d] &\cong K[V_1 \oplus \cdots \oplus V_d] \\ f_1 \otimes \cdots \otimes f_d &\longmapsto ((v_1, \dots, v_d) \mapsto f_1(v_1) \cdots f_d(v_d)). \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich damit die folgende Definition.

Definition 2.2.7. *Sei $f \in K[V_1 \oplus \cdots \oplus V_d]$ multihomogen vom Grade $(k_1, \dots, k_d)$. Sei $\mathcal{P}_i$ die Polarisation in V_i. Dann setze*

$$\mathcal{P}f := \mathcal{P}_d \mathcal{P}_{d-1} \dots \mathcal{P}_1 f \in K[V_1^{k_1} \oplus \cdots \oplus V_d^{k_d}].$$

$\mathcal{P}f$ wird ebenfalls Polarisation von f gennant.

$\mathcal{P}f$ ist multilinear. Analog wird die Restitution definiert.

Definition 2.2.8. *Sei $F \in K[V_1^{k_1} \oplus \dots \oplus V_d^{k_d}]$ multilinear. Dann sei*

$$\mathcal{R}F(v_1, \dots, v_d) := F(\underbrace{v_1, \dots, v_1}_{k_1 \text{ mal}}, \underbrace{v_2, \dots, v_2}_{k_2 \text{ mal}}, \dots, \underbrace{v_d, \dots, v_d}_{k_d \text{ mal}})$$

für $v_i \in V_i$. Bezeichne $\mathcal{R}F$ auch als Restitution von F.

Die letzten zwei Abschnitte liefern folgendes Lemma:

Lemma 2.2.9. *Die Operatoren*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\colon K[V_1 \oplus \dots \oplus V_d]_{(k_1,\dots,k_d)} &\longrightarrow K[V_1^{k_1} \oplus \dots \oplus V_d^{k_d}]_{multilin} \\ \mathcal{R}\colon K[V_1^{k_1} \oplus \dots \oplus V_d^{k_d}]_{multilin} &\longrightarrow K[V_1 \oplus \dots \oplus V_d]_{(k_1,\dots,k_d)} \end{aligned}$$

sind $GL(V_1) \times \dots \times GL(V_d)$-äquivariant und haben folgende Eigenschaften:

1. *$\mathcal{P}$ und $\mathcal{R}$ sind linear.*
2. *$\mathcal{R}\mathcal{P}f = k_1!k_2! \cdots k_d!f$.*

Insbesondere sind in Charakteristik 0 Polarisation und Restitution bis auf einen positiven Skalar zueinander invers.

Gegeben sei jetzt eine multihomogene Invariante $f \in \mathbb{C}[M_n^d]_{(k_1,\dots,k_d)}$. Dann liefert die Polarisation

$$\mathcal{P}f \in \mathbb{C}[M_n^{k_1} \oplus \dots \oplus M_n^{k_d}]^{GL_n}$$

eine multilineare GL_n-invariante Abbildung nach Lemma 2.2.9. Diese wird im folgenden Abschnitt untersucht.

Die multilinearen invarianten Abbildungen

Gegeben sei eine multilineare Invarianten $M_n^d \to \mathbb{C}$. Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes liefert eine lineare Invariante $M_n^{\otimes d} \to \mathbb{C}$. Betrachtet man diese nur auf den reinen Tensoren, so erhält man die ursprüngliche multilineare Invariante zurück. Somit genügt es, diese lineare Invariante zu betrachten. Im nächsten Schritt wird M_n aufgespalten. Da dies GL_n-kompatibel geschehen soll, werden nun geignete GL_n-Aktionen auf den einzelnen Teilen definiert.

Lemma 2.2.10. *$V = \mathbb{C}^n$ ist GL_n-Darstellung via Linksmultiplikation. Sei ferner V^* der Dualraum mit der zugehörigen GL_n-Darstellnung, d.h. für $\varphi \in V^*$ ist $(g.\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$ für alle $v \in V$. Damit ist*

$$V \otimes V^* \cong M_n$$

ein GL_n-Isomorphismus, wobei die GL_n auf M_n wie gehabt durch Konjugation operiert.

Beweis. Für beliebige endlich dimensionale K-Vektorräume V und W ist

$$\begin{array}{rcl} V^* \otimes W & \longrightarrow & Hom(V, W) \\ \varphi \otimes w & \longmapsto & (v \mapsto \varphi(v) \cdot w) \end{array}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. Für $V = W = \mathbb{C}^n$ ergibt sich damit

$$V^* \otimes V \cong End(V) \cong M_n.$$

Die GL_n-Äquivarianz folgt direkt aus dem oben angegebenen Isomorphismus. □

Bemerkung 2.2.11. *Spurbildung und Matrixmultiplikation übertragen sich mit obigem Isomorphismus auf $V \otimes V^*$.*

1. *Dabei entspricht der Spurabbbildung die Auswertungsfunktion $v \otimes f \mapsto f(v)$, da beide linear sind und auf der Standardbasis die gleichen Werte annehmen.*

2. *Bezeichne die auf $V \otimes V^*$ durch die Matrixmultiplikation induzierte Multiplikation durch*

$$\begin{array}{rcl} *\colon V \otimes V^* \times V \otimes V^* & \longrightarrow & V \otimes V^* \\ v \otimes f * v' \otimes f' & \longmapsto & f(v')v \otimes f'. \end{array}$$

Dieses lässt sich ebenfalls auf Standardbasen von $V \otimes V^* \otimes V \otimes V^*$ nachprüfen, da die obige Multiplikation bilinear ist.

Das folgende Lemma bereitet die Definition einer GL_n-Aktion auf $End\,(V^{\otimes d})$ vor.

Lemma 2.2.12. *Sei V endlichdimensionaler Vektorraum und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{rcl} End\,(V)^{\otimes d} & \cong & End(V^{\otimes d}) \quad \text{via} \\ \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_d & \longmapsto & (v_1 \otimes \ldots v_d \mapsto \varphi_1(v_1) \otimes \ldots \otimes \varphi_d(v_d)) \end{array}$$

Beweis. Der Isomorphismus ergibt sich aus Lemma 2.2.10, indem man die folgenden Identifikationen nachvollzieht.

$$\begin{aligned} End(V)^{\otimes d} &\cong (V^* \otimes V)^{\otimes d} \\ &\cong \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{d\text{-mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{d\text{-mal}} \\ &\cong (V^{\otimes d})^* \otimes V^{\otimes d} \\ &\cong End(V^{\otimes d}). \end{aligned}$$

□

Definition 2.2.13. *Mit obigen Isomorphismus ergibt sich*

1. $GL_n \cong GL(V) : End\,(V^{\otimes d}) \cong End\,(V)^{\otimes d}$ *via*

$$g.(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_d) = g \circ \varphi_1 \circ g^{-1} \otimes \ldots \otimes g \circ \varphi_d \circ g^{-1}$$

   durch simultane Konjugation.

2. *Für* $f_1, \ldots, f_d \in V^*$ *schreibe* $(f_1 \otimes \ldots \otimes f_d) \in (V^{\otimes d})^*$ *für die Abbildung*

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_d)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) := f_1(v_1) \cdots f_d(v_d).$$

3. *Für* $\lambda \in End\,(V^{\otimes d})$ *setze*

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda \colon (V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f_1 \otimes \ldots \otimes f_d \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_d &\mapsto f_1 \otimes \ldots \otimes f_d(\lambda(v_1 \otimes \ldots \otimes v_d)). \end{aligned}$$

Der dritte Teil des folgenden Lemmas liefert den nächsten Übersetzungsschritt.

Lemma 2.2.14. *Sei* $\lambda \in End\,(V^{\otimes d})$. *Dann gilt:*

1. φ_λ *ist wohldefiniert und linear.*

2. $$\begin{aligned} End\,(V^{\otimes d}) &\cong ((V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d})^* \\ \lambda &\mapsto \varphi_\lambda \end{aligned}$$

3. λ *ist genau dann* GL_n*-linear, wenn* φ_λ GL_n*-invariant ist. Insbesondere gilt also*

$$End_{\,GL_n}(V^{\otimes d}) \cong [((V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d})^*]^{GL_n}$$

Beweis. 1. Wohldefiniertheit und Linearität folgen wiederum durch die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts.

2. Da beide Seiten gleiche Dimension haben, reicht es die Injektivität der Abbildung nachzuweisen. Sei also $0 \neq \lambda \in End\,(V^{\otimes d})$. Dann gibt es ein $v := v_1 \otimes \ldots \otimes v_d \in V^{\otimes d}$ mit $\lambda(v) \neq 0$ und auch ein $f \in (V^*)^{\otimes d} \cong (V^{\otimes d})^*$ mit $f(\lambda(v)) \neq 0$. Insbesondere ist $\varphi_\lambda(f \otimes v) \neq 0$ und die obige Abbildung injektiv.

3. Sei $g \in GL_n$. Die Behauptung folgt, falls $\varphi_\lambda \circ g = \varphi_{g^{-1}.\lambda}$ gilt, denn dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda \circ g = \varphi_{g^{-1}.\lambda} = \varphi_\lambda &\overset{2)}{\Leftrightarrow} \lambda = g^{-1}.\lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda = g^{-1} \circ \lambda \circ g \\ &\Leftrightarrow g \circ \lambda = \lambda \circ g \end{aligned}$$

wobei $\circ$ andeutet, dass hier die GL_n-Aktion auf $V^{\otimes d}$ (bzw. $(V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d}$ oben) gemeint ist. Da hier alles linear ist, genügt es die Behauptung auf reinen Tensoren zu zeigen. Mit der gleichen Begründung kann auch

$$\lambda = \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_d \in End\,(V)^{\otimes d}$$

als reiner Tensor angenommen werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \varphi_\lambda \circ g(f_1 \otimes \ldots \otimes f_d \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) \\ = \; & \varphi_\lambda(f_1 g^{-1} \otimes \ldots \otimes f_d g^{-1} \otimes g v_1 \otimes \ldots \otimes g v_d) \\ = \; & f_1 g^{-1} \otimes \ldots \otimes f_d g^{-1}(\lambda_1(g v_1) \otimes \ldots \otimes \lambda_d(g v_d)) \\ = \; & f_1((g^{-1} \circ \lambda_1)(g v_1)) \cdots f_d((g^{-1} \circ \lambda_d)(g v_d)) \\ = \; & f_1((g^{-1} \circ \lambda_1 \circ g)(v_1)) \cdots f_d((g^{-1} \circ \lambda_d \circ g)(v_d)) \\ = \; & f_1 \otimes \ldots \otimes f_d((g^{-1} \circ \lambda_1 \circ g)(v_1) \otimes \ldots \otimes (g^{-1} \circ \lambda_d \circ g)(v_d)) \\ = \; & \varphi_{g^{-1}.\lambda}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_d \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) \end{aligned}$$

□

Schur-Weyl-Dualität

Definition 2.2.15. *Betrachte die folgenden zwei Aktionen.*

1. $GL_n : V^{\otimes d}$ *via* $\quad g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = g v_1 \otimes \cdots \otimes g v_d,$
2. $S_d : V^{\otimes d}$ *via* $\quad \sigma.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}.$

Diese liefern Abbildungen $GL_n \to End(V^{\otimes d})$ bzw. $S_d \to End(V^{\otimes d})$. Bezeichne die Vektorraumerzeugnisse der Bilder mit $\langle GL_n \rangle$ und $\langle S_d \rangle$.

Die Schur-Weyl-Dualität beschreibt folgendes Theorem:

Theorem 2.2.16. *Seien $n, d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

1. $\langle GL_n \rangle = End_{\,S_d}(V^{\otimes d})$.

2. $\langle S_d\rangle = End_{GL_n}(V^{\otimes d})$.

Für den Beweis des zweiten Teils des Theorems werden folgende Lemmata aus der Strukturtheorie einfacher und halbeinfacher Algebren benötigt.

Lemma 2.2.17 ([Lor90] §28 F5)**.** *Für jede Algebra A und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\begin{array}{rcl} A & \cong & End_{End_A(A^n)}(A^n) \\ a & \longmapsto & (v \mapsto av) \end{array}$$

Lemma 2.2.18 ([Lor90] §29 F2)**.** *Alle einfachen Moduln einer einfachen und halbeinfachen Algebra $A \neq 0$ sind isomorph.*

Lemma 2.2.19 ([Lor90] §29 Satz 1)**.** *Jede halbeinfache Algebra $A \neq 0$ besitzt nur endlich viele minimale Ideale $A_1, \ldots, A_n$. Jedes der A_i ist bezüglich der von A gegebenen Addition und Mulitplikation eine einfache Algebra und es gilt*

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n.$$

Lemma 2.2.20. *Sei B eine endlichdimensionale halbeinfache K-Algebra, V ein B-Modul mit $\dim_K(V) < \infty$ und $A := End_B(V)$. Dann ist*

$$End_A(V) = \langle B\rangle,$$

wobei $\langle B\rangle$ das Bild von

$$\begin{array}{rcl} B & \longrightarrow & End_K(V) \\ b & \longmapsto & (v \mapsto bv) \end{array}$$

sei.

Beweis. Da B halbeinfach ist, ist B nach 2.2.19 isomorph zu

$$B \cong B_1 \times \ldots \times B_n,$$

wobei die B_i einfache K-Algebren sind. Als Ideal von B entsprechen die B_i den n Isomorphieklassen von einfachen B-Moduln. Da V als B-Modul halbeinfach ist, erhält man eine Zerlegung $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, wobei B komponentenweise auf V operiert und die $V_i = B_i^{l_i}$ direkte Summe der B_i sind. Insbesondere gilt $End_B(V) = \prod End_{B_i}(V_i)$. Sei nun $\varphi \in End_{End_B(V)}(V)$ und $\psi = \epsilon_i \circ id_{V_i} \circ \pi_i \in End_B(V)$, wobei ϵ_i die Einbettung von V_i in V und π_i die Projektion von V auf V_i sei. Wegen der Zerlegung von V kann man $\varphi = \sum_{i,j} \epsilon_i \varphi_{i.j} \pi_j$ ebenfalls als $n \times n$-Matrix schreiben. Die $End_B(V)$- Linearität von φ mit ψ ergibt dann $\varphi_{i,j} = 0$ für $i \neq j$. Insbesondere gilt:

$$\begin{array}{rcl} End_A(V) & = & End_{End_B(V)}(V) \\ & = & \prod End_{End_{B_i}(V_i)}(V_i) \\ & = & \prod End_{End_{B_i}(B_i^{l_i})}(B_i^{l_i}) \\ & \overset{2.2.17}{=} & \langle B_1\rangle \times \ldots \times \langle B_n\rangle = \langle B\rangle \end{array}$$

□

Nun folgt der Beweis von Theorem 2.2.16. Der Beweis des ersten Teils beruht auf folgender Idee:

Feststellung 2.2.21. *Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Gilt für jede lineare Abbildung $f\colon V \to K$ mit $f|_U = 0$ schon $f = 0$, so ist $U = V$.*

Beweis. von 2.2.16.

1. $\langle GL_n \rangle \subseteq End_{S_d}(V^{\otimes d})$ ist klar, da $g \otimes \ldots \otimes g$ offenbar permutationsinvariant ist. Betrachte das Bild S der Einbettung von $End_{S_d}(V^{\otimes d})$ in den $End(V)^{\otimes d}$. Nach Feststellung 2.2.21 folgt nun die Behauptung, falls gilt:
   Jede lineare Abbildung
   $$\lambda\colon S \to \mathbb{C}$$
   die auf den $g \otimes \ldots \otimes g$ verschwindet ist die Nullabbildung.
   Sei nun λ eine solche Abbildung. Bestimme zunächst eine Basis von S. Sei dazu $\{e_1, \ldots, e_{n^2}\}$ Basis von $End(V)$. Dann ist
   $$B := \{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_d} \mid i_1, \ldots, i_d \in \{1, \ldots, n^2\}\}$$
   eine S_d-stabile Basis von $End(V)^{\otimes d}$. Somit operiert S_d auf B. Jeder Orbit enthält genau ein Element der Form
   $$e_1^{\otimes h_1} \otimes \ldots \otimes e_{n^2}^{\otimes h_{n^2}}$$
   mit $h_1 + \ldots + h_{n^2} = d$. Sei $r(h_1, \ldots, h_{n^2})$ die Summe aller Elemente in dem entsprechenden Orbit. Diese $r(h_1, \ldots, h_{n^2})$ bilden eine Basis von S. Betrachte $e = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i e_i \in End(V)$. Dann gilt
   $$\lambda(e \otimes \ldots \otimes e) = \sum_{h_1+\ldots+h_{n^2}=d} \alpha_1^{h_1} \cdots \alpha_{n^2}^{h_{n^2}} \lambda(r(h_1, \ldots, h_{n^2})).$$
   Man erhält also ein Polynom $f \in \mathbb{C}[End(V)]$ mit
   $$f(X_1, \ldots, X_{n^2}) = \sum_{h_1+\ldots+h_{n^2}=d} X_1^{h_1} \cdots X_{n^2}^{h_{n^2}} \lambda(r(h_1, \ldots, h_{n^2})).$$
   Dieses verschwindet für alle $g \in GL_n$ nach Voraussetzung. Da die GL_n dicht in der irreduziblen affinen Varietät $End(V)$ liegt, muss f schon das Nullpolynom sein. Der Koeffizientenvergleich liefert
   $$\lambda(r(h_1, \ldots, h_{n^2})) = 0$$
   für alle Basiselemente von S. Somit ist $\lambda = 0$.

2. Die Gruppenalgebra $\mathbb{C}S_d$ ist eine halbeinfache Algebra ([Pie82] S. 42) nach Maschke. Da jedes homomorphe Bild einer halbeinfachen Algebra wieder halbeinfach ist (siehe [Pie82] S. 42), ist $\langle S_d \rangle$ eine halbeinfache Unteralgebra der Matrixalgebra $End\,(V^{\otimes d}) \cong M_n$. Aus Lemma 2.2.20 folgt nun:

$$\begin{aligned}\langle S_d \rangle &\overset{2.2.20)}{=} End_{End_{S_d}(V^{\otimes d})}(V^{\otimes d}) \\ &\overset{1)}{=} End_{GL_n}(V^{\otimes d}).\end{aligned}$$

□

Die $\sigma \in S_d$ bilden damit ein Erzeugendensystem für $\langle S_d \rangle$. Der erste Schritt ergibt sich direkt aus Lemma 2.2.14.

Proposition 2.2.22. *Jede lineare GL_n-invariante Abbildung*

$$(V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist eine Linearkombination der Invarianten μ_σ mit

$$\mu_\sigma(f_1 \otimes \ldots \otimes f_d \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) = \prod_i f_i(v_{\sigma(i)}),$$

wobei $\sigma \in S_d$ durchläuft.

Der nächste Schritt macht den Isomorphismus $M_n \cong V \otimes V^*$ rückgängig.

Proposition 2.2.23. *Sei $\sigma = (i_1 i_2 \ldots i_\alpha)(j_1 j_2 \ldots j_\beta) \ldots (z_1 z_2 \ldots z_\zeta)$ die Zyklenzerlegung von $\sigma \in S_d$ (inklusive Zykel der Länge 1). Dann gilt die Identität:*

$$\mu_\sigma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_d) = tr(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_\alpha}) tr(A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_\beta}) \ldots tr(A_{z_1} A_{2_2} \cdots A_{z_\zeta}).$$

Beweis. Beide Seiten sind multilinear. Also genügt es die Gleichung für Matrizen vom Rang 1 zu zeigen. Schreibe $A_i = v_i \cdot f_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mu_\sigma(A_1 \otimes \ldots \otimes A_d) &= \mu_\sigma(f_1 \otimes \ldots \otimes f_d \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) \\ &= \prod_i f_i(v_{\sigma(i)}).\end{aligned}$$

Betrachte nun das Teilprodukt

$$f_{i_1}(v_{i_2}) f_{i_2}(v_{i_3}) \cdots f_{i_{\alpha-1}}(v_{i_\alpha}) =: S.$$

Das Matrixprodukt

$$A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_\alpha} \hat{=} v_{i_1} \otimes f_{i_1} * v_{i_2} \otimes f_{i_2} * \cdots * v_{i_\alpha} \otimes f_{i_\alpha}$$

ist nach Produktregel 2.2.11 gerade

$$(f_{i_1}(v_{i_2}) f_{i_2}(v_{i_3}) \cdots f_{i_{\alpha-1}}(v_{i_\alpha}) v_{i_1}) \otimes f_{i_\alpha},$$

und mit der Spurregel 2.2.11 folgt

$$tr(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_\alpha}) = \prod_{j=1}^{\alpha} f_{i_j}(v_{\sigma(i_j)}) = S.$$

□

Bemerkung 2.2.24. *Um nun zu den multilinearen Invarianten zurückzukehren muss lediglich der Tensor durch ein Tupel ersetzt werden. Setze also*

$$Tr_\sigma(A_1, \dots, A_d) := \mu_\sigma(A_1 \otimes \dots \otimes A_d).$$

Anwendung der Restitution

Die multilinearen Invarianten vom Grad $\bar{d}$ lassen sich also als Linearkombinationen von Produkten von Spuren schreiben. Es gilt nach Proposition 2.2.23, dass $\mathcal{P}f$ die Form

$$\mathcal{P}f(A_1, \dots, A_{\bar{d}}) = \sum_{\sigma \in S_{\bar{d}}} \alpha_\sigma Tr_\sigma(A_1, \dots, A_{\bar{d}})$$

mit $\bar{d} = k_1 + \dots + k_d$ und $\alpha_\sigma \in \mathbb{C}$ für $\sigma \in S_d$ hat. Nun liefert Lemma 2.2.9

$$\begin{aligned} k_1! \cdots k_d! f(A_1, \dots, A_d) &= \mathcal{RP}f(A_1, \dots, A_d) \\ &= \sum_{\sigma \in S_D} \alpha_\sigma Tr_\sigma(A_1, \dots, A_1, A_2, \dots, A_2, \dots, A_d, \dots, A_d) \end{aligned}$$

und somit ist $C_{nd} = \mathbb{C}[tr(X_{i_1} \cdots X_{i_k}) \mid i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}]$, wobei X_i die generischen Matrizen bezeichne.

2.2.1 Eine Gradschranke für die Erzeuger

Das erste Fundamentaltheorem gibt nur ein unendliches Erzeugendensystem für C_{nd} an. Hier wird eine Schranke für den Grad der benötigten Erzeuger hergeleitet. Diese wird nur von der Matrixdimension n abhängen und ist für großes d scharf. Die letzte Eigenschaft wird hier aber nicht behandelt, man kann einen Beweis dazu z.B. in [Pro76] finden. Dieser Abschnitt dient in dieser Arbeit dazu, später eine Vermutung zwischen der Gradschranke der Erzeuger und der Gradschranke der Relationen zu formulieren. Die Ausführungen hier beruhen natürlich auch auf der Arbeit von Procesi [Pro76].

Das Nagata-Higman Theorem

Das Nagata-Higman Theorem gibt eine obere Schranke für den Grad der Nilpotenz einer (nichtunitären) K-Algebra an, in der alle Elemente nilpotent von festen Grad sind. Im Beweis wird folgendes Lemma benötigt.

Lemma 2.2.25. *Sei V ein K-Vektorraum. Seien ferner $n \in \mathbb{N}$ und $v_0, \ldots, v_n \in V$ gegeben. Man betrachte die Abbildung*

$$p\colon K \longrightarrow V,$$

$$p(c) = \sum_{i=0}^{n} c^i v_i.$$

Hat nun p mehr als n Nullstellen, so sind notwendigerweise alle $v_i = 0$.

Beweis. Sei $U := \langle v_0, \ldots, v_n \rangle$ der von den v_i erzeugte Unterraum von V. Sei ferner $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von U. Schreibe die v_i als Linearkombination dieser Basis:

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} e_j$$

mit $\alpha_{ij} \in K$. Für jede Nullstelle c von p erhält man

$$0 = \sum_{i=0}^{n} c^i v_i = \sum_{i=0}^{n} c^i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} c^i \right) e_j.$$

Da die e_j linear unabhängig sind, gilt für jede Nullstelle c von p:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} c^i = 0$$

für alle j. Hier müssen notwendigerweise alle $\alpha_{ij} = 0$ sein, denn sonst hätten die Polynome $\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} X^i \in K[X]$ mehr als n Nullstellen. Damit sind aber insbesondere alle $v_i = 0$. $\square$

Bemerkung 2.2.26. *Beschränkt man sich auf Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$, so sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, falls $p(K) = 0$ gilt. Dies wird im Folgenden stets vorausgesetzt.*

Die folgenden Ausführungen stammen aus [DF04] § 6.

Theorem 2.2.27 (Nagata-Higman)**.** *Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und R eine assoziative K-Algebra (ohne 1).Ferner gebe es ein festes $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ für alle $x \in R$. Dann gilt $R^{2^n - 1} = 0$.*

Beweis. Das Theorem wird durch Induktion über n bewiesen. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei nun $n > 1$. Definiere

$$\begin{aligned} f\colon R \times R &\longrightarrow R \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k y x^{(n-1)-k}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $c \in K$, $x, y \in R$:

$$0 = (y + cx)^n = c^n x^n + c^{n-1} f(x, y) + \ldots + y^n$$

und nach Lemma 2.2.25 ist $f(x, y) = 0$. Für $x, y, z \in R$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, z)y^{n-1} + f(x, zy)y^{n-2} + f(x, zy^2)y^{n-3} + \ldots + f(x, zy^{n-1}) \\ &= nx^{n-1}zy^{n-1} + zf(y, x^{n-1}) + xzf(y, x^{n-2}) + \\ &+ x^2 zf(y, x^{n-3}) + \ldots + x^{n-2}zf(y, x). \end{aligned}$$

und da alle anderen Terme verschwinden, folgt $x^{n-1}zy^{n-1} = 0$. Sei I das von allen x^{n-1} erzeugte zweiseitige Ideal von R. Es gilt $IRI = 0$. In der Quotientenalgebra $\overline{R} = R/I$ gilt $\overline{x}^{n-1} = 0$ für alle $x \in R$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\overline{R}^{2^{n-1}-1} = 0$, d.h. $R^{2^{n-1}-1} \subseteq I$. Damit gilt

$$R^{2^n-1} = R^{2(2^{n-1}-1)+1} = R^{2^{n-1}-1}RR^{2^{n-1}-1} \subseteq IRI = 0.$$

□

Die hier angegebene Schranke ist nicht optimal. Aber sie gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 2.2.28. *Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und für festes $n \in N$ sei $\mathcal{M}_n$ die Klasse aller assoziativen K-Algebren R mit $x^n = 0$ für alle $x \in R$. Aufgrund des Nagata-Higman Theorems ist*

$$\begin{aligned} N \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \min(\{m \in \mathbb{N} \mid R^m = 0 \text{ für alle } R \in \mathcal{M}_n\}) \end{aligned}$$

wohldefiniert.

Diese Funktion wird die Schranke für den Grad der Erzeuger von C_{nd} sein. Allerdings ist N nicht ganz so leicht zu berechnen. Die folgende kurze Übersicht über die erreichten Resultate stammt aus [DF04] Kapitel 6.2. Dort findet sich auch ein Beweis, dass $N(n) \geq n(n+1)/2$, was ursprünglich von Kuzmin in [Kuz75] bewiesen wurde.

Dubnov [Dub35] zeigte 1935:

$$N(1) = 1, \quad N(2) = 3, \quad N(3) = 6.$$

Vaughan-Lee [VL93] hat 1993 den Wert

$$N(4) = 10$$

berechnet. Razmyslov [Raz74] hat gezeigt, dass $N(n) \leq n^2$ gilt. Insgesamt ergibt dies

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq N(n) \leq n^2.$$

Dies legt die folgende, immer noch nicht bewiesene oder widerlegte Vermutung nahe:

Vermutung 2.2.29 (Kuzmin [Kuz75]). *Der exakte Wert von $N(n)$ ist*

$$N(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bisher ist noch nicht klar geworden, was diese Ausführungen mit C_{nd} zu tun haben. C_{nd} ist der Ring der polynomialen GL_n-invarianten Abbildungen $M_n^d \to \mathbb{C}$; falls man auf $\mathbb{C}$ die GL_n trivial operieren lässt, so kann man auch von polynomialen GL_n-äquivarianten Abbildungen sprechen. Ebenso kann man den Ring T_{nd} der GL_n-äquivarianten polynomialen Abbildungen $M_n^d \to M_n$ betrachten, wobei die GL_n auf der rechten Seite durch Konjugation operiere. C_{nd} und T_{nd} stehen in engem Zusammenhang. Insbesondere ist T_{nd} eine C_{nd}-Algebra, wobei ein Element $\lambda \in C_{nd}$ durch

$$\begin{array}{rcl} \hat{\lambda}\colon M_n^d & \longrightarrow & M_n \\ (A_1, \dots, A_n) & \longmapsto & \lambda(A_1, \dots, A_n) \cdot E_n \end{array}$$

in T_{nd} einbettet, wobei E_n die $n \times n$ Einheitsmatrix sei.

Das nächste Theorem vertieft den Zusammenhang zwischen C_{nd} und T_{nd}. Man beachte, dass die Projektion auf die i-te Komponente

$$X_i\colon (A_1, \dots, A_d) \mapsto A_i$$

in T_{nd} enthalten ist.

Theorem 2.2.30. *[Pro76, Theorem 2.1] Der Ring T_{nd} wird als Algebra über C_{nd} von den Elementen $X_1, \dots, X_d$ erzeugt.*

Beweis. Gegeben sei ein $(f\colon M_n^d \to M_n) \in T_{nd}$. Ordne f die Invariante

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}\colon M_n^{d+1} & \to & \mathbb{C} \\ (A_1, \dots, A_{d+1}) & \mapsto & tr(f(A_1, \dots, A_d) \cdot A_{d+1}) \end{array}$$

zu. $\overline{f}$ ist aufgrund der GL_n-Äquivarianz von f eine Invariante. Ferner ist diese Zuordnung injektiv, da die Spur eine nicht ausgeartete Bilinearform ist. $\overline{f}$ ist linear in A_{d+1}, lässt sich also nach dem ersten Fundamentaltheorem als

$$\overline{f} = \sum \lambda_{i_1,\dots,i_j} tr(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_j} A_{i+1}) = tr\left(\left(\sum \lambda_{i_1,\dots,i_j} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_j}\right) A_{i+1}\right)$$

schreiben, wobei $\lambda_{i_1,\dots,i_j} \in C_{nd}$ und $i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, d\}$. Aufgrund der Invarianz der Spur bzgl. zyklischer Vertauschung kann hier A_{i+1} ans Ende der Spur geschoben werden. Da die Zuordnung injektiv war, folgt

$$f = \sum \lambda_{i_1,\dots,i_j} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_j} \in C_{nd}[X_1, \dots, X_n].$$

□

Ein Element aus $f \in T_{nd}$ ist durch seine n^2 Koordinatenfunktionen gegeben. Jede solche Koordinatenfunktion von f ist eine polynomiale Abbildung $M_n^d \to \mathbb{C}$. Insbesondere lässt sich damit

$$T_{nd} \subset M_n(\mathbb{C}[M_n^d]),$$

als Teilalgebra der $n \times n$ Matrixalgebra über dem Ring der regulären Funktionen von M_n^d auffassen. Für jedes solche Element in $M_n(\mathbb{C}[M_n^d])$ gilt der Satz von Cayley-Hamilton (siehe z.B. [Eis95] S. 120). Insbesondere existiert zu f ein Polynom

$$0 \neq p_f = T^n + c_1 T^{n-1} + \ldots + c_n \in \mathbb{C}[M_n^d][T]$$

mit $p_f(f) = 0$. Dieses ist gegeben durch $p_f(X) = det(f - X \cdot id)$. Insbesondere sind die Koeffizienten GL_n-invariant, da $p_f = p_{gfg^{-1}}$. Aufgrund der GL_n-Äquivarianz von f folgt

$$c_i(gA_1g^{-1}, \ldots, gA_dg^{-1}) = c_i(A_1, \ldots, A_d) \quad \forall g \in GL_n,$$

das heißt die Koeffizienten von p_f liegen in C_{nd}. Diese Überlegung bildet das wesentliche Argument im folgenden Theorem, welches die Nagata-Higman Schranke wieder ins Spiel bringt.

Theorem 2.2.31. *Die C_{nd}-Algebra T_{nd} wird durch die Monome in den generischen Matrizen $X_1, \ldots, X_d$ vom Grad $\leq N(n) - 1$ erzeugt.*

Beweis. Betrachte nur die positiven Anteile T_+ und C_+ von T_{nd} bzw. C_{nd}. Nach der Vorüberlegung erfüllt jedes $t \in T_+$ eine Gleichung der Form

$$t^n + c_1 t^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

mit $c_i \in C_+$. Sei $R := T_+/C_+T_+$. Für alle $x \in R$ folgt damit $x^n = 0$ und aus dem Nagata-Higman Theorem folgt $R^{N(n)} = 0$. Insbesondere wird R von den Restklassen aller Monome vom Grad $\leq N(n) - 1$ erzeugt. Bezeichne die Menge dieser Monome mit $Mon_{\leq N(n)-1}$. Nun gilt

$$T_{nd} = C_{nd} Mon_{\leq N(n)-1} + C_+ T_{nd},$$

und damit $T_{nd} = C_{nd} Mon_{\leq N(n)-1}$ nach dem Lemma von Nakayama 2.2.32. □

Lemma 2.2.32 (Nakayamas Lemma)**.** *Sei $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ eine $\mathbb{N}$-graduierte Algebra über einem Körper $K = A_0$ und $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ ein graduierter A-Modul. Ferner sei N ein graduierter Untermodul von M. Gilt dann $M = N + A_+ M$, so ist $M = N$.*

Beweis. Wäre $M \neq N$, so gäbe es ein homogenes Element minimalen Grades $m \in M - N$. Nach Voraussetzung gibt es homogene Elemente $a \in A_+, m' \in M$ und $n \in N$ mit $m = n + am'$. Insbesondere wäre $\deg m' < \deg m$ und $m' \notin N$, was der Minimalität des Grades von m widerspricht. □

Theorem 2.2.33. *Der Invariantenring C_{nd} wird von den Spuren vom Grad $\leq N(n)$ erzeugt.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}_k$ die Menge aller Monome in $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d] \subset T_{nd}$ vom Grad $\leq k$ und $\mathcal{M}_k^+ := \mathcal{M}_k - \{1\}$. Die Behauptung folgt mit Nakayamas Lemma 2.2.32 und folgenden Definitionen.

$$\begin{aligned} A &:= \mathbb{C}[tr(\mathcal{M}_{N(n)})] =: N \\ M &:= C_{nd}. \end{aligned}$$

Dazu muss natürlich noch die Voraussetzung $M = N + A_+M$ überprüft werden. Die Inklusion $M \supseteq N + A_+M$ ist klar. Für die andere Inklusion genügt es $M_+ \subseteq A_+M$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} M_+ &\subseteq tr(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]_+) \\ &= tr(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d](\mathbb{C}X_1 + \ldots + \mathbb{C}X_d)) \\ &\overset{2.2.31}{\subseteq} tr(C_{nd}\mathcal{M}_{N(n)-1}(\mathbb{C}X_1 + \ldots + \mathbb{C}X_d)) \\ &\subseteq C_{nd}\, tr(\mathcal{M}_{N(n)}^+) \\ &\subseteq M\, A_+ = A_+M, \end{aligned}$$

denn C_{nd} ist kommutative Algebra. □

2.3 Das zweite Fundamentaltheorem

Der Invariantenring C_{nd} wird also von von Spuren von Produkten generischer Matrizen erzeugt. Das zweite Fundamentaltheorem beschreibt die Relationen zwischen diesen Erzeugern. Es gibt stets die trivialen Relationen, die durch zyklisches Vertauschen der Faktoren in den Spuren entstehen. Die nicht-trivialen Relationen findet man also in der folgenden Algebra.

Definition 2.3.1. *Bezeichne mit C_∞ die kommutative $\mathbb{C}$-Algebra der formalen Spuren, die von den Symbolen*

$$Tr(X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k})$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ erzeugt wird. Für die Erzeuger gilt

$$Tr(M) = Tr(N) \Leftrightarrow M \text{ ist zyklische Vertauschung von } N,$$

wobei M und N Worte in den X_i sind. Das heißt C_∞ ist die freie $\mathbb{C}$-Algebra in abzählbar unendlich vielen Variablen modulo obiger Relationen.

Bemerkung 2.3.2. *Durch die zyklische Vertauschung des Wortes hat eine solche formale Spur mehrere Darstellungen. Die Normalform einer solchen formalen Spur ist gegeben durch das Wort, dessen Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ lexikografisch minimal ist. Zum Beispiel ist $Tr(X_1X_2)$ die Normalform von $Tr(X_2X_1)$.*

Die obige Definition deutet schon an, dass hier unendlich viele generische Matrizen betrachtet werden sollen. Die folgende Definition konkretisiert dies.

Definition 2.3.3. *Sei M_n^∞ der Raum der geordneten Folgen $(A_1, A_2, \ldots)$ mit $A_i \in M_n(\mathbb{C})$, wobei nur endlich viele $A_i \neq 0$ seien. Auch hier operiert die GL_n durch simultane Konjugation und $C_{n\infty}$ bezeichne die Algebra der polynomialen GL_n-invarianten Funktionen $M_n^\infty \to \mathbb{C}$.*

Bemerkung 2.3.4. *Da polynomiale Funktionen betrachtet werden hängt jedes Element in $C_{n\infty}$ nur von endlich vielen Matrizen ab. Somit lässt sich ein solches als Element eines geeigneten Invariantenringes C_{nd} auffassen. Damit gilt analog zum ersten Fundamentaltheorem*

$$C_{n\infty} = \{tr(X_{i_1} \cdots X_{i_k}) \mid i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}\}.$$

Definition 2.3.5. *Sei*

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_{n\infty} \\ Tr(X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}) &\longmapsto tr(X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}) \end{aligned}$$

der kanonische $\mathbb{C}$-Algebraepimorphismus, der die Buchstaben X_i durch die entsprechenden generischen Matrizen ersetzt. Bezeichne $\ker \Phi$ *als das Ideal der Spurrelationen (von $n \times n$ Matrizen). Die Elemente dieses Ideals heißen Spurrelationen (von $n \times n$ Matrizen).*

Bemerkung 2.3.6. *Beschränkt man sich auf Spurrelationen, die nur von den ersten d Buchstaben abhängen, so erhält man die Relationen zwischen den kanonischen Erzeugern von C_{nd}. Diese heißen auch Spurrelationen (von C_{nd}). Aus dem Kontext sollte stets klar sein, welche Spurrelationen gemeint sind.*

In diesem Kapitel werden die Spurrelationen von $n \times n$ Matrizen betrachtet. Die multilinearen Invarianten vom Grad d lassen sich nach 2.2.16 durch Elemente von $\mathbb{C}S_d$ beschreiben. Ein Element $\sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma \sigma \in \mathbb{C}S_d$ liefert nach Bemerkung 2.2.24 die Invariante

$$\sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma Tr_\sigma(x_1, \ldots, x_d).$$

Diese ist nach Theorem 2.2.16 genau dann eine Spurrelation, falls

$$0 = Im\,(\sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma \sigma) \in End_{GL_n}(V^{\otimes d})$$

gilt, denn dieses Element entspricht genau der trivialen multilinearen Invariante

$$\begin{aligned} M_n^d &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (A_1, \ldots, A_d) &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

Fasst man $V^{\otimes d}$ als $\mathbb{C}S_d$-Modul auf, so entsprechen die multilinearen Spurrelationen gerade $Ann_{\mathbb{C}S_d}(V^{\otimes d})$. Nun gilt für die Gruppenalgebra

$$\mathbb{C}S_d = \bigoplus_{T \text{ Standardtableau}} \mathbb{C}S_d c_T.$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}S_d & \longrightarrow & End(V^{\otimes d}) \\ x & \longmapsto & (v \mapsto v.x) \end{array}$$

ist ein Ringhomomorphismus (Die S_d-Aktion ist eine Aktion von rechts). Somit ist $Ann_{\mathbb{C}S_d}(V^{\otimes d})$ ein Ideal in $\mathbb{C}S_d$ und zerlegt sich in irreduzible Komponenten, da $\mathbb{C}S_d$ halbeinfach ist. Jede irreduzible Komponente ist isomorph zu $\mathbb{C}S_d c_\lambda$, wobei die Partition λ geignet gewählt sei. Die c_T erzeugen nach 2.1.16 eine isomorphe Darstellung, falls das Standardtableu T die Form λ besitzt. Ein minimales Linksideal in $Ann_{\mathbb{C}S_d}(V^{\otimes d})$ wird also von einer $\mathbb{C}S_d$ Linearkombination solcher c_T erzeugt. Aufgrund der direkten Summe gibt es eine (Links-)Zerlegung der Eins, so dass das Ideal von gewissen $x_T c_T$ mit $x_T \in \mathbb{C}S_d$ erzeugt wird. Gilt $0 \neq x_T c_T$, so liegt auch c_T in der davon erzeugten Darstellung, da diese ja als irreduzibel gegeben war. Somit wird $Ann_{\mathbb{C}S_d}(V^{\otimes d})$ von den Youngsymmetrisierern c_T erzeugt. Es genügt nun zu zeigen, wann diese c_T in $Ann_{\mathbb{C}S_d}(V^{\otimes d})$ liegen. Dieses macht das folgende Theorem. Das Theorem selbst steht schon in der Arbeit von Procesi [Pro76]. Auf den Beweis wird dort allerdings nicht weiter eingegangen. Der erste Teil des hier angegebenen Beweises stammt aus [LeB05]. Dort wird die Aussage durch die Untersuchung der Aktion von b_T gefolgert. Allerdings muss noch sichergestellt werden, dass a_T die Aussage nicht verfälscht. Dies geschieht hier im 2. Teil des Beweises durch Konstruktion eines geeigneten w.

Theorem 2.3.7. *Ein Element der Form*

$$\sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma Tr_\sigma(x_1, \ldots, x_d)$$

ist genau dann eine Spuridentität von $n \times n$ Matrizen, falls

$$\sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma \sigma \in \mathbb{C}S_d$$

zum Ideal der Youngsymmetrisierer c_T gehört, deren Standard-Youngtableau T zu d mehr als n Zeilen hat.

Beweis. Nach den Vorüberlegungen ist lediglich zu prüfen, wann $c_T \in Ann\,(V^{\otimes d})$ liegt. Sei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ die Partition zum Tableau T und $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ die konjugierte Partition zu λ (Spiegelung des Youngdiagramms). Damit ergeben sich

$$\begin{array}{rcl} P_T & \cong & S_{\lambda_1} \times \ldots \times S_{\lambda_k} \\ Q_T & \cong & S_{\mu_1} \times \ldots \times S_{\mu_l}. \end{array}$$

Da

$$a_T := \sum_{\sigma \in P_T} \sigma, \qquad b_T := \sum_{\tau \in Q_T} sgn(\tau)\tau,$$

gilt

$$Im\,(b_\lambda) = \bigwedge^{\mu_1} V \otimes \ldots \otimes \bigwedge^{\mu_l} V \subseteq V^{\otimes d}.$$

Insbesondere gilt $Im\,(b_\lambda) = 0$ genau dann, wenn ein i mit $\mu_i > n$ existiert, da

$$\bigwedge^k V = 0 \Leftrightarrow k > \dim V.$$

Dies entspricht gerade dem Kriterium des Theorems, da $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_l$ und μ_1 ist die Anzahl der Zeilen in T. Es genügt nun zu zeigen, dass a_T sich wohlverhält. Dazu ist für den Fall $k \leq n$ ein Element zu finden, welches nicht von c_λ annuliert wird. Zur Illustration betrachte das folgende Beispiel. Sei $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ und sei

$$\mathrm{T} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 7 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \text{und } w = \quad \begin{array}{l} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes \\ e_2 \otimes e_2 \otimes \\ e_3 \otimes e_3 \otimes \\ e_4 \end{array}$$

zeilenweise gelesen. Dabei sind die e_i linear unabhängige Vektoren in V. Nun ist die Aktion der S_d auf $V^{\otimes d}$ nach 2.2.15 glücklicherweise eine Aktion von rechts. Es gilt

$$w.a_\lambda = \#P \cdot w,$$

da P offensichtlich lediglich die Zeilen permutiert, was in diesem Fall trivial ist. Da in keiner Spalte zwei Einträge doppelt vorkommen erhält man durch Anwenden von b_λ auf w eine Summe von verschiedenen Basisvektoren von $V^{\otimes d}$, also $w.b_\lambda \neq 0$. Insgesamt gilt

$$v := w.c_\lambda = (w.a_\lambda).b_\lambda = \#P \cdot w.b_\lambda \neq 0.$$

Analog wählt man w im allgemeinen Fall. □

Korollar 2.3.8. *Jede multilineare Spuridentität vom Grad $n+1$ ist ein skalares Vielfaches von $F(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma) Tr_\sigma(X_1, \ldots, X_{n+1})$.*

Beweis. Theorem 2.3.7 besagt, wie die multilinearen Spuridentitäten vom Grad d aussehen. Ist $d = n+1$, so gibt es genau ein Standardtableau mit mehr als n Zeilen, nämlich das Tableau zur Partition $\lambda = (1, \ldots, 1)$. In diesem Falle ist P_λ trivial und $Q_\lambda = S_d = S_{n+1}$. Insbesondere gilt

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma)\sigma.$$

Mit der Übersetzung aus dem Beweis vom 1. Fundamentaltheorem folgt, dass

$$\sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma) Tr_\sigma(X_1, \ldots, X_{n+1})$$

alle solche Relationen erzeugt. □

Definition 2.3.9. *Bezeichne obiges F als die fundamentale Spuridentität für $n \times n$ Matrizen.*

Korollar 2.3.10. *Das Ideal der Spuridentitäten ist das zweiseitige Ideal von C_∞ erzeugt von den Elementen*

$$F(M_1, \dots, M_{n+1}),$$

wobei die M_i über alle Monome in den Variablen $\{X_1, X_2, \dots\}$ laufen.

Aus der im Beweis vom ersten Fundamentaltheorem gewonnenen Zuordnung $\mathbb{C}S_d \to C_{nd}$ ergibt sich eine Zuordnung $\mathbb{C}S_d \to C_\infty$. Diese ist additiv, aber nur auf disjunkten Zyklen multiplikativ (siehe 2.2.23). Da im Beweis von Korollar 2.3.10 auch Produkte von Permutationen eine gewisse Rolle spielen, wird in den folgenden Lemmata diese "Multiplikativität" genauer untersucht.

Lemma 2.3.11. *Sei $\sigma \in S_d$. Entspricht $x \in \mathbb{C}S_d$ dem Spurpolynom $f(X_1, \dots, X_d) \in C_\infty$, so entspricht $\sigma x \sigma^{-1} \in \mathbb{C}S_d$ dem Spurpolynom $f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(d)}) \in C_\infty$.*

Lemma 2.3.12. *Gegeben seien die Zyklen $\sigma = (i\ i_1 i_2 \dots i_k)$ und $\theta = (i\ j_1 j_2 \dots j_l)$, wobei $i, i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ verschieden seien. Dann entspricht $\sigma\theta$ mit der obigen Korrespondenz*

$$tr(X_i X_{j_1} \cdots X_{j_l} X_{i_1} \cdots X_{i_k}),$$

d.h. in $tr(X_i X_{i_1} \cdots X_{i_k})(\hat{=}\sigma)$ wird X_i durch $X_i X_{j_1} \cdots X_{j_l}$ ersetzt.

Beweis. Folgt aus $\sigma\theta = (i\ i_1 i_2 \dots i_k)(i\ j_1 j_2 \dots j_l) = (i\ j_1 j_2 \dots j_l i_1 i_2 \dots i_k)$ mit 2.2.23. □

Lemma 2.3.13. *Sei $d \in \mathbb{N}$, $n \leq d$ und $\sigma \in S_d$. Dann existieren $\sigma' \in S_n$ und $\theta \in S_d$ mit $\sigma = \sigma'\theta$, so dass in jedem Zykel der Zykelzerlegung von θ höchstens ein Element aus $\{1, \dots, n\}$ vorkommt.*

Beweis. Für $n = 1$ ist offenbar nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 2$. Enthält ein Zykel von σ mehr als 2 Elemente aus $\{1, \dots, n\}$, etwa der Zykel $(1 i_1 \dots i_k 2 j_1 \dots j_l)$, so lässt sich dieser wie folgt aufspalten

$$(1 i_1 \dots i_k 2 j_1 \dots j_l) = \underbrace{(12)}_{\in S_n}(1 i_1 \dots i_k)(2 j_1 \dots j_l).$$

Da die Zykel in der Zykelzerlegung untereinander vertauschen, lässt sich σ mit diesem Verfahren in die geeignete Form bringen. □

Lemma 2.3.14. *Sei $d \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq t \leq d$ setze $c_t := \sum_{\sigma \in S_t} sgn(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}S_d$. Dann liegt c_d in dem von c_t erzeugten zweiseitigem Ideal.*

Beweis. Es genügt die Behauptung für $t = d-1$ zu zeigen. Dort gilt

$$\begin{aligned}
c_d &= \sum_{\sigma \in S_d} sgn(\sigma)\sigma \\
&= c_{d-1} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{\substack{\sigma \in S_d \\ \sigma(i)=d}} sgn(\sigma)\sigma \\
&= c_{d-1} - \sum_{i=1}^{d-1} \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_d \\ \sigma(i)=d}} sgn(\sigma(i\ d))\, \underbrace{\sigma\ (i\ d)}_{\in S_d} \right) (i\ d) \\
&= c_{d-1} - \sum_{i=1}^{d-1} c_{d-1}\ (i\ d)
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.3.15. *Sei T ein Standardyoungtableau zu d mit mehr als n Zeilen. Dann liegt c_T in dem von $c_{n+1} = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma)\sigma$ erzeugten zweiseitigem Ideal in $\mathbb{C}S_d$.*

Beweis. Sei k die Anzahl der Zeilen von T und seien $I = i_1, \ldots, i_k$ die Menge der Einträge der ersten Zeile. Es gilt also $Q_T = Q_I \times Q'$ und $b_T = b_I b'$ mit $b_I \in \mathbb{C}Q_i$ und $b' \in \mathbb{C}Q'$. Nach Lemma 2.3.14 genügt es zu zeigen, dass c_T in dem von c_k erzeugten zweiseitigem Ideal liegt. Es gilt

$$\begin{aligned}
c_T &= a_T b_T \\
&= a_T b_I b' \\
&= a_T \sum_{\sigma \in S_I} sgn(\sigma)\ \sigma\ b' \\
&= a_T\ \tau \left(\sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)\sigma \right) \tau^{-1}\ b',
\end{aligned}$$

wobei $\tau \in S_k$ die Partition mit $\tau(x) = i_x$ für alle $x \in \{1, \ldots, k\}$ ist. □

Beweis. von 2.3.10. Da C_∞ multigraduiert ist, genügt es die multihomogene Spurrelation zu betrachten. Sei f eine solche multihomogene Spurrelation vom Grad d. Da die Multigraduierung von C_∞ und $C_{n\infty}$ kompatibel sind, genügt es sich auf multihomogene f zu beschränken, die genau von d Matrizen abhängig sind. Der Beweis ist in zwei Schritte unterteilt.

1.) Es genügt multilineare Spurrelationen in genau d Variablen zu betrachten.

2.) Theorem 2.3.7 liefert eine Darstellung von f, wobei hier die Multiplikation in S_d nach C_∞ übersetzt werden muss.

1. Schritt: Die Übersetzung geschieht durch Polarisation. Dieses wurde schon in 2.2 behandelt. Das Verfahren dort ist aber auf den sehr speziellen Fall $K[V]$ eingeschränkt. Daher wird hier noch einmal genauer darauf eingegangen. Seien $v = (X_1, \ldots, X_d)$ die Buchstaben in f, die den Matrizen entsprechen. Ferner seien $v_1, \ldots, v_d$ weitere Buchstabensätze mit $v_i = (X_1^{(i)}, \ldots, X_d^{(i)})$. Betrachte

$$f(t_1 v_1 + \ldots + t_d v_d) = \sum_{s_1+\ldots+s_d=d} t_1^{s_1} \cdots t_d^{s_d} f_{s_1,\ldots,s_d}(v_1, \ldots, v_d) \in C_\infty[t_1, \ldots, t_d]. \tag{2.1}$$

wobei $f_{s_1,\ldots,s_d}$ der multihomogene Anteil vom Grad s_i in t_i ist. Die linke Seite ist eine Spurrelation von C_{nd}, und somit auch die rechte Seite. Die Graduierung durch die t_i ist etwas gröber als die Multigraduierung von C_∞ (Mehrere Matrizen werden zusammengefasst). Somit sind die $f_{s_1,\ldots,s_d}$ ebenfalls Spurrelationen. Die Komponente $f_{1,\ldots,1}$ ist multilinear in den v_i und heißt die Polarisation von f. Durch Einsetzen von v in (2.1) folgt $d!f(v) = f_{1,\ldots,1}(v, \ldots, v)$ mit Koeffizientenvergleich in den t_i. Da die Restitution nur ein Ersetzen von Variablen ist, genügt es die multilineare Spurrelation $f_{1,\ldots,1}$ zu untersuchen. Diese hat Grad d und erhält üblicherweise mehr als d Variablen. Aufgrund der Multigraduierung von C_∞ genügt es aber die multilinearen Anteile in genau d Variablen zu betrachten.

2. Schritt: Nach Theorem 2.3.7 liegt das zu f gehörende Element in $\mathbb{C}S_d$ zum Ideal der Youngsymmetrisierer mit mehr als n Zeilen. Diese liegen nach Lemma 2.3.15 im von

$$\sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma)\sigma$$

erzeugten zweiseitigem Ideal in S_d. Zu betrachten sind damit Elemente der Form

$$\sum_{\tau_i, \tau_j \in S_d} \alpha_{i,j} \tau_i \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma)\sigma \right)}_{=:c_{n+1}} \tau_j.$$

mit $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$. Es genügt natürlich, die Behauptung für die Summanden zu zeigen. Für $\tau, \tau' \in S_d$ existieren $\sigma' \in S_{n+1}$ und $\theta \in S_d$ mit $\tau'\tau = \sigma'\theta$, so dass in jedem Zykel von θ maximal ein Element aus $\{1, \ldots, n+1\}$ vorkommt (Lemma 2.3.13). Damit folgt

$$\begin{aligned} \tau c_{n+1} \tau' &= \tau(c_{n+1}\tau'\tau)\tau^{-1} \\ &= \tau(c_{n+1}\sigma'\theta)\tau^{-1} \\ &= \tau(c_{n+1}\theta)\tau^{-1}. \end{aligned}$$

Insbesondere entspricht dies einem Element der gewünschten Form, denn $c_{n+1} = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}S_d$ entspricht gerade

$$F(X_1, \ldots, X_{n+1}) tr(X_{n+2}) \cdots tr(X_d),$$

und nach Lemma 2.3.12 bewirkt θ nur das Einsetzen von Monomen in die X_i. Ferner vertauscht die Konjugation mit τ nach Lemma 2.3.11 lediglich die X_i.

□

3 Die Cohen-Macaulay Eigenschaft

Der Koordinatenring von C_{nd} ist ein kommutativer Ring. Oft ist es zweckmäßig, einen solchen Ring modulo geeigneter Elemente zu reduzieren. Da hier Ideale untersucht werden, sollten diese Elemente keine Nullteiler sein. Gibt es nun "genügend gute" Nichtnullteiler, so hat ein solcher Ring die Cohen-Macaulay Eigenschaft. Der erste Abschnitt dieses Kapitels konkretisiert diese "Definition". Grundsätzlich lässt sich diese Eigenschaft für kommutative Ringe und ihre Moduln definieren, siehe z.B. [BH93]. Hier wird diese Eigenschaft nur für eine spezielle Klasse eingeführt, nämlich endlich-erzeugte positiv graduierte zusammenhängende k-Algebren und endlich-erzeugte positiv-graduierte Moduln über solchen Algebren. Praktischerweise liegen alle C_{nd} in dieser Klasse.

Die Invariantenringe C_{nd} besitzen die Cohen-Macaulay Eigenschaft. Dieses, und noch ein wenig mehr, ist die Aussage des Theorems von Hochster-Roberts. Da dies, in dieser Arbeit, die enscheidende Eigenschaft von C_{33} ist, wird der Beweis im zweiten Abschnitt behandelt.

Der dritte Abschnitt behandelt ein Theorem von Harm Derksen, welches eine Abschätzung der notwendigen Relationen zulässt.

3.1 Graduierte Ringe und Moduln

Die folgenden Ausführungen stammen aus [Spr89]. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $char\ k = 0$. Insbesondere hat das Polynom $(1 - T^d)$ nur eine einfache Nullstelle in 1.

Definition 3.1.1. 1. *Eine positiv-graduierte k-Algebra A ist eine k-Algebra mit einer k-Vektorraumzerlegung*

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$$

in endlichdimensionale Vektorräume A_n, so dass $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Gilt $A_0 = k$, so heißt A zusammenhängend.

2. *Der (echt) positive Anteil von A ist $A^+ := \bigoplus_{n>0} A_n$.*

3. *Ein graduierter A-Modul M ist ein A-Modul versehen mit einer Zerlegung*

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$$

als k-Vektorraum in endlichdimensionale M_n, so dass $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$ für alle i und j gilt.

4. *Für einen graduierten A-Modul M und $k \in \mathbb{Z}$ sei $M[k]$ der um k verschobene graduierte A-Modul, d.h.*
$$(M[k])_n := M_{n+k}.$$

5. *Ein graduierter Modul M heißt positiv-graduiert (oder $\mathbb{N}$-graduiert), falls $M_n = 0$ für alle $n < 0$*

6. *Ist $m \in M_n$, so wird m homogen genannt. Ist $m \neq 0$ so setze $\deg m = n$. Für nichthomogenes $m \in M$ zerlege M in homogene Komponenten*
$$m = m_n + m_{n-1} + \ldots + m_0$$
mit $m_i \in M_i$ und setze $\deg m = n$.

7. *Ein Morphismus $\varphi\colon M \to N$ von graduierten A-Moduln ist ein Morphismus von A-Moduln, so dass*
$$\varphi(M_n) \subseteq N_n$$
für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Bemerkung 3.1.2. *Ist $k < 0$ und M ein $\mathbb{N}$-graduierter Modul, so ist auch $M[k]$ ein $\mathbb{N}$-graduierter Modul.*

Bemerkung 3.1.3. *Sei M ein $\mathbb{N}$-graduierter A-Modul. Um zu zeigen, dass M endlichdimensional ist, genügt es zu zeigen, dass $M_n = 0$ ab einem gewissen Index ist. Ist A endlichdimensional und M als A-Modul endlich erzeugt, so ist M endlichdimensional.*

3.1.1 Hilbertreihen

Definition 3.1.4. *Sei A eine positiv-graduierte k-Algebra und M ein graduierter A-Modul. Die Hilbertreihe von M ist die formale Laurentreihe*
$$H(M,T) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim_k(M_n)\, T^n \in k[[T,T^{-1}]].$$

Bemerkung 3.1.5. *Für einen um $d \in \mathbb{Z}$ verschobenen graduierten A-Modul gilt*
$$H(M[d],T) = T^{-d} H(M,T).$$

Lemma 3.1.6. *Sei A eine positiv-graduierte k-Algebra. Dann gilt:*

1. *Für jede exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von graduierten A-Moduln gilt:*
$$H(M,T) = H(M',T) + H(M'',T).$$

2. *Sei M ein graduierter A-Modul. Für ein homogenes Element $a \in A^+$ vom Grad d setze*
$$_aM := \{m \in M \mid am = 0\}.$$
Dann gilt
$$(1 - T^d)H(M,T) = H(M/aM,T) - T^d H(_aM,T).$$

Beweis. 1. Aus der exakten Sequenz ergibt sich in jedem Grad eine exakte Sequenz von k-Vektorräumen
$$0 \longrightarrow M'_n \longrightarrow M_n \longrightarrow M''_n \longrightarrow 0,$$
und somit gilt $\dim_k M_n = \dim_k M'_n + \dim_k M''_n$.

2. Die Gleichung folgt aus der vorhergehenden Beobachtung mit den folgenden zwei exakten Sequenzen von graduierten A-Moduln:
$$0 \longrightarrow aM \longrightarrow M \longrightarrow M/aM \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow {_aM}[-d] \longrightarrow M[-d] \longrightarrow aM \longrightarrow 0$$
Diese liefern
$$H(aM,T) + H(M/aM,T) = H(M,T)$$
$$T^d H(_aM,T) + H(aM,T) = T^d H(M,T)$$
Zieht man die zweite von der ersten ab, so erhält man die Behauptung.

□

Bemerkung 3.1.7. *Ab hier werden nur noch endlich erzeugte $\mathbb{N}$-graduierte zusammenhängende k-Algebren A betrachtet. Ferner sei auch M stets ein $\mathbb{N}$-graduierter Modul, der über A endlich erzeugt sei. Diese Festlegung gilt für den Rest dieses Abschnittes.*

Lemma 3.1.8. *Sei $A = k[a_1, \ldots, a_n]$ der Polynomring in n Variablen von positiven Grad. Ferner sei K der Quotientenkörper von A. Ist M ein $\mathbb{N}$-graduierter A-Modul und als solcher endlich erzeugt, so gilt*
$$H(M,T) = \frac{F(T)}{(1 - T^{d_1}) \cdots (1 - T^{d_n})}$$
mit $F \in \mathbb{Z}[T]$ und $F(1) = \dim_K(K \otimes_A M)$.

Beweis. Im Falle $n = 0$ ist M endlichdimensionaler k-Vektorraum. Somit ist $H(M,T)$ ein Polynom, da M positiv graduiert ist. Insbesondere gilt
$$F(1) = H(M,1) = \dim_k(k \otimes_k M).$$
Sei nun $n > 0$. Nach Lemma 3.1.6 gilt
$$(1 - T^{d_n})H(M,T) = H(M/a_nM,T) - T^{d_n} H(_{a_n}M,T).$$

Da M/a_nM und ${}_{a_n}M$ endlich erzeugt über $k[a_1, \ldots, a_{n-1}]$ sind, folgt per Induktion

$$H(M/a_nM, T) = \frac{F_1(T)}{(1-T^{d_1})\cdots(1-T^{d_{n-1}})}$$

und

$$H({}_{a_n}M, T) = \frac{F_2(T)}{(1-T^{d_1})\cdots(1-T^{d_{n-1}})}$$

mit $F_1(T), F_2(T) \in \mathbb{Z}[T]$. Ferner folgt

$$F_1(1) = \dim_{K'}(K' \otimes_{A'} M/a_nM), \quad F_2(1) = \dim_{K'}(K' \otimes_{A'} {}_{a_n}M)$$

wobei $A' = k[a_1, \ldots, a_{n-1}]$ und $K' = k(a_1, \ldots, a_{n-1})$ sind. Damit folgt die Darstellung

$$H(M, T) = \frac{F_1(T) - T^{d_n}F_2(T)}{(1-T^{d_1})\cdots(1-T^{d_n})}$$

und für den Zähler gilt $F_1(T) - T^{d_n}F_2(T) \in \mathbb{Z}[T]$. Bleibt

$$F_1(1) - F_2(1) = \dim_K(K \otimes_A M) = \dim_K(K \otimes_A (K' \otimes_{A'} M))$$

zu zeigen. Dies ist aber gerade die Aussage von Lemma 3.1.9. □

Lemma 3.1.9. *Sei $k[x]$ der Polynomring in einer Variable und $k(x)$ sein Quotientenkörper. Sei ferner* $\deg x > 0$ *und M ein $\mathbb{N}$-graduierter endlich erzeugter $k[x]$-Modul. Dann gilt*

$$\dim_{k(x)}(k(x) \otimes_{k[x]} M) = \dim_k(M/xM) - \dim_k({}_xM).$$

Beweis. Aufgrund der endlichen Erzeugtheit von M über $k[x]$ sind hier alle Dimensionen endlich. Sei $\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n \in M/xM$ eine k-Basis von M/xM. Da M/xM ebenfalls graduiert ist, können die m_i als homogen vorausgesetzt werden. Insbesondere ist $m_1, \ldots, m_n$ ein minimales $k[x]$-Erzeugendensystem von M, d.h. für die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow K \longrightarrow k[x]^n & \xrightarrow{\phi} & M \longrightarrow 0 \\ e_i & \longmapsto & m_i \end{array}$$

gilt $K \subseteq xk[x]^n$. Dies ist eine minimale homogene freie Auflösung von M, da die globale Dimension von $k[x]$ gerade 1 ist. Insbesondere ist K freier $k[x]$-Modul. Bilden nun die Bilder der $v^{(1)}, \ldots, v^{(l)} \in k[x]^n$ eine k-Basis von ${}_xM$, so ist $xv^{(1)}, \ldots, xv^{(l)}$ ein $k[x]$ Erzeugendensystem von K. Dieses ist auch frei, denn falls $\sum_{i=1}^{l} p_i(x)Xv^i = 0$ gilt, so lässt sich eine maximale x-Potenz ausklammern. Da x kein Nullteiler auf $k[x]^n$ ist, kann man diese x-Potenz vernachlässigen. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{l} p_i(x)\phi(v^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{l} p_i(0)\phi(v^{(i)}) \end{aligned}$$

und da die $\phi(v^{(i)})$ eine k-Basis von ${}_xM$ bilden sind die $p_i(0) = 0$. Da eine maximale x-Potenz ausgeklammert wurde, waren die $p_i(x) = 0$. Da Lokalisieren exakt ist, ist

$$0 \longrightarrow k(x)^{dim_k({}_xM)} \longrightarrow k(x)^{dim_k(M/xM)} \xrightarrow{\phi} k(x) \otimes_{k[x]} M \longrightarrow 0$$

exakt, und damit $dim_{k(x)}(M) = dim_k(M/xM) - dim_k({}_xM)$. □

Bemerkung 3.1.10. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.1.8 lässt sich*

$$H(M,T) = \frac{f(T)}{(1-T)^{d(M)}}$$

mit eindeutigem $f \in \mathbb{Q}(T)$ schreiben. Falls $M \neq 0$ ist, gilt $f(1) > 0$, da $H(M,1) > 0$ ist.

Beispiel 3.1.11. $H(k[x,y]/(x^2,xy)) = 1 + 2T + T^2 + T^3 + \ldots = \frac{-T^2+T+1}{1-T}$.

Beispiel 3.1.12. $H(k[x,y,z]/(xz,yz),T) = \frac{-T^2+T+1}{(1-T)^2}$.

Beweis. Es gilt $(xz,zy) \subset (z) \subset k[x,y,z]$. Hier gilt $H((z),T) = \frac{T}{(1-T)^3}$. Ferner ist $(z) = (xz,yz) \oplus \langle z^n \mid n \geq 1\rangle_k$. Also gilt

$$H((xz,yz),T) = \frac{T}{(1-T)^3} - T - T^2 - \ldots = \frac{T}{(1-T)^3} - \frac{T}{1-T} = \frac{-T^3+2T^2}{(1-T)^3}.$$

Insbesondere folgt

$$H(k[x,y,z]/(xz,yz),T) = \frac{1+T^3-2T^2}{(1-T)^3} = \frac{-T^2+T+1}{(1-T)^2}.$$

□

Bemerkung 3.1.13. *Im letzten Beispiel hat der Zähler keine Nullstelle mehr in* 1. *Trotzdem können die Koeffizienten negativ sein.*

Beweis. Einfacher: $x - z$ ist kein Nullteiler. Wende Lemma 3.1.6 auf obiges Beispiel an. □

In den obigen Beispielen wurde die Hilbertreihe eines Polynomringes modulo eines Ideals berechnet. Dies kann zwar grundsätzlich mit Lemma 3.1.6 geschehen, ist aber fehleranfällig aufgrund der vielen Schreibarbeit (Brüche). Das folgende Lemma liefert eine einfachere Berechnungsweise.

Lemma 3.1.14 ([GP08] 5.2.2)**.** *Sei $I \subset k[X] := k[X_1,\ldots,X_r]$ ein homogenes Ideal und sei $a \in k[X]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Dann gilt*

$$H(k[X]/I,T) = H(k[X]/(I,a),T) + T^d H(k[X]/(I:(a)),T).$$

Dabei ist

$$I:(a) := \{x \in k[X] \mid xa \in I\}.$$

Beweis. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \to (k[X]/(I:(a)))[-d] \xrightarrow{\cdot a} k[X]/I \to k[X]/(I,a) \to 0$$

mit Lemma 3.1.6. □

Beispiel 3.1.15. *Obige Methode mit $a = z$.*

$$\begin{aligned} H(k[x,y,z]/xz,yz,T) &= H(k[x,y,z]/z,T) + TH(k[x,y,z]/(x,y),T) \\ &= \frac{1}{(1-T)^2} + \frac{T(1-T)}{(1-T)^2} \\ &= \frac{-T^2+T+1}{(1-T)^2}. \end{aligned}$$

Die in 3.1.14 ist insbesondere bei Idealen hilfreich, die von Monomen erzeugt werden, da die in jedem Schritt erzeugten neuen Ideale ebenfalls durch Monome erzeugt werden. Im Gegensatz zu Lemma 3.1.6 kann es hier aber passieren, dass man über die gleiche Variable mehrmals reduziert.

Beispiel 3.1.16. *In diesem Beispiel wird immer über $a = X$ reduziert.*

$$\begin{aligned} H(k[x]/x^3,T) &= H(k[x]/x,T) + TH(k[x]/x^2,T) \\ &= 1 + T(H(k[x]/x,T) + T^2H(k[x]/x,T)) \\ &= 1 + T + T^2. \end{aligned}$$

Bei einem monomialen Ideal ist es einfach, ein minimales Erzeugendensystem zu bestimmen. Daher lässt sich die Hilbertreihe wie folgt berechnen. Reduziert man nach einer Variable, die in einem echten Monom (keine Variable) vorkommt, so verringert sich der Grad dieses Erzeugers in den neuen Erzeugendensystemen. Diese sind ebenfalls monomial. Insbesondere ist die Hilbertreihe einfach zu berechnen, sobald nur noch Variablen im Erzeugendensystem stehen (siehe 3.1.20). Nun wird nicht jedes homogene Ideal von Monomen erzeugt. Dieser Fall wird später in Kapitel 4 behandelt.

Definition 3.1.17. *Die Krulldimension $d(M)$ von M ist die Ordnung des Poles bei $T = 1$ der rationalen Funktion $H(M,T)$. Für $M = 0$ setze $d(M) = -\infty$.*

Bemerkung 3.1.18. *Es gilt $H(M,1) = \dim_k(M)$. Insbesondere ist $M = 0$, falls $H(M,1) = 0$ gilt.*

Definition 3.1.19. *Sei $a \in A$. Ist a kein Nullteiler von M, d.h. ${}_aM = 0$, so wird a M-regulär genannt.*

Lemma 3.1.20. *Seien A und M wie in 3.1.7.*

1. *Ist $a \in A^+$ homogen und a M-regulär, so gilt*
$$d(M) = d(M/aM) + 1.$$

2. *Sind $a_1, \ldots, a_s$ algebraisch unabhängige homogene Elemente,wobei a_i Grad $d_i > 0$ habe, so gilt*
$$H(k[a_1, \ldots, a_s], T) = \frac{1}{(1 - T^{d_1}) \cdots (1 - T^{d_s})}.$$

3. *Ist A ganz über einer Teilalgebra $k[a_1, \ldots, a_s]$ mit homogenen algebraisch unabhängigen Elementen über k, so gilt $d(A) = s$.*

Beweis. 1. Es gilt $(1 - T^d)H(M, T) = H(M/aM)$, da $(1 - T^d)$ genau eine Nullstele in 1 besitzt. Insbesondere erhöht sich die Polordnung um Eins, falls $H(M/aM, T)$ keine Nullstelle in 1 besitzt. Andernfalls gilt $M/aM = 0$ nach Bemerkung 3.1.18. Es würde also $aM = M$ gelten. Das geht allerdings nur, falls $M = 0$ ist, da $\deg a > 0$ ist (Lemma von Nakayama). Da $d(0) = -\infty$ ist, folgt auch hier die Behauptung.

2. Folgt direkt aus Lemma 3.1.6, da $(1 - T^d)H(A, T)) = H(A/aA, T)$ gilt.

3. A ist endlich erzeugt über k. Da A ganz über $k[a_1, \ldots, a_s]$ ist, ist A auch endlich erzeugt über $k[a_1, \ldots, a_s]$. Es gilt also
$$H(A, T) = \frac{F(T)}{(1 - T^{d_1}) \cdots (1 - T^{d_s})}$$
mit $F \in \mathbb{Z}[T]$ und $F(1) = \dim_K(K \otimes_{A'} A)$, wobei $A' = k[a_1, \ldots, a_s]$ und $K = k(a_1, \ldots, a_s)$. Es gilt $K \otimes_{A'} A \neq 0$, denn dies ist gerade die Lokalisierung nach $S = (a_1, \ldots, a_s)A' - \{0\}$, und $1 \in A$ wird von keinem Element aus S annuliert. Damit ist $F(1) \neq 0$ und $d(A) = s$.

□

3.1.2 Homogene Parametersysteme

Homogene Parametersysteme sind die erste Anäherung an die "genügend guten" Nichtnullteiler, die im Vorwort dieses Kapitel genannt wurden. Tatsächlich werden sich die Elemente von homogenen Parametersystemen im Cohen-Macaulay-Fall als geeignet herausstellen.

Definition 3.1.21. *Sei M ein graduierter A-Modul. Ein homogenes Parametersystem für M ist eine endliche Folge von homogenen Elementen $(a_1, \ldots, a_t) \in A^+$, so dass $M/(a_1M + \cdots + a_tM)$ endlichdimensional über k ist und t minimal mit dieser Eigenschaft ist.*

Bemerkung 3.1.22. *M ist nicht nur ein A-Modul, sondern auch ein $A/\mathrm{Ann}\,(M)$-Modul. Da ein Element a eines homogenen Parametersystems niemals in $\mathrm{Ann}\,(M)$ liegen kann, stehen die homogenen Parametersystemen für M über A und $A/\mathrm{Ann}\,(M)$ in Bijektion zueinander, dass heißt durch Übergang zu $A/\mathrm{Ann}\,(M)$ kann M als treuer Modul vorausgesetzt werden.*

Der nächste Satz liefert eine Konstruktion von homogenen Parametersystemen für $M = A$.

Satz 3.1.23 (graduierte Noethernormalisierung)**.** *Sei $A = k[a_1, \dots, a_s]$ eine graduierte k-Algebra mit homogenen a_i. Es gibt homogene Elemente $b_1, \dots, b_t \in A^+$, die algebraisch unabhängig über k sind, so dass A ganz über $k[b_1, \dots, b_t]$ ist. Sind die a_i algebraisch abhängig, so gilt $t < s$.*

Beweis. Ein Beweis in einer etwas konkreteren Situation findet sich in [GP08]. Hier folgt ein Beweis für den obigem Fall. A ist ganz über $A' = k[a_1^{n_1}, \dots, a_s^{n_s}]$ für alle $n_i \in \mathbb{N}_{>0}$. Wählt man die n_i so, dass die Potenzen der a_i den gleichen Grad haben, so genügt es die Behauptung für A' statt A zu zeigen. Seien also oBdA die Erzeuger homogen vom gleichen Grad. Sind die a_i algebraisch unabhängig über k, so ist nichts zu tun. Andernfalls gibt es ein nichttriviales Polynom

$$p \in k[T_1, \dots, T_s] \text{ mit } p(a_1, \dots, a_s) = 0.$$

Für $i = 1, \dots, s-1$ setze $b_i := a_i - \lambda_i a_s$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(a_1, \dots, a_s) &= p(b_1 + \lambda_1 a_s, b_2 + \lambda_2 a_s \dots, b_{s-1} + \lambda_{s-1} a_s, a_s) \\ &= q(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}) a_s^{\deg p} + \sum_{i=1}^{s} q_i(b_1, \dots, b_{s-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}) a_s^{\deg p - i} \end{aligned}$$

mit den Polynomen $q \in k[T_1, \dots, T_{s-1}]$, $q_i \in k[T_1, \dots, T_{s-1}, S_1, \dots, S_{s-1}]$ für alle i. Da $q \neq 0$ gilt und k unendlich viele Elemente besitzt, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}$ mit

$$q(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}) \neq 0.$$

Insbesondere ist a_s ganz über $k[b_1, \dots, b_{s-1}]$. Aus der Definition der b_i folgt

$$k[a_1, \dots, a_s] = k[b_1, \dots, b_{s-1}, a_s].$$

Sind nun die $b_1, \dots, b_{s-1}$ algebraisch unabhängig über k, so folgt die Behauptung. Andernfalls führe man dieses Verfahren mit $k[b_1, \dots, b_{s-1}]$ statt A fort. Man erhält so nach spätestens s Schritten die angegebenen Elemente $b_1, \dots, b_t$. Nach dem hier angegebenen Verfahren ist klar, dass $t < s$ ist, sobald die a_i algebraisch abhängig sind. □

Bemerkung 3.1.24. *Die b_i im Satz 3.1.23 sind ein homogenes Parametersystem von A, denn $A/(b_1, \dots, b_t)A$ ist endlichdimensional über k, da A über $k[b_1, \dots, b_t]$ ganz ist. Ferner ist t minimal aufgrund von Lemma 3.1.20, denn $d(A) = t$. Der Beweis liefert* *insbesondere einen Algorithmus zur Bestimmung eines solchen homogenen Parametersystems, falls genug Relationen zwischen den Erzeugern gefunden werden können. Für C_{nd} wird in Kapitel 6 beschrieben, wie man diese Relationen finden kann. Somit liefert Satz 3.1.23 ein relativ effektives Verfahren, um ein homogenes Parametersystem von C_{nd} zu bestimmen. Ferner kann auf die Homogenisierung der a_i verzichtet werden, solange die λ_i so gewählt werden können, dass die b_i homogen bleiben.*

Für die Charakterisierung der homogenen Parametersysteme endlich erzeugter A-Moduln werden die folgenden zwei Lemmata benötigt.

Lemma 3.1.25. *Sei A eine Algebra über der kommutativen Algebra R mit Eins. Sei ferner M ein A-Modul, der als R-Modul endlich erzeugt ist. Gelte ferner $Ann_A(M) = 0$ .Dann ist A ganz über R.*

Beweis. Sei $m_1, \ldots, m_r$ ein endliches Erzeugendensystem von M als R-Modul. Dann lässt sich die Multiplikation mit einem Element $a \in A$

$$am_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} m_j$$

als $n \times n$-Matrix mit Einträgen in R beschreiben. Bezeichne $X = (\delta_{ij} a - b_{ij})_{i,j}$ die $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus A. Dann gilt $0 = X \in End_A(M)$. Multipliziert man diese Gleichung mit der adjugierten Matrix von X so ergibt sich

$$0 = \det X E_n \in End_A(M).$$

Da der Annulator von M in A aber trivial ist, muss $\det X = 0$ gelten. Nach Determinantenformel ist a dann ganz über R. □

Bemerkung 3.1.26. *Ganzheit lässt sich über geigneten Moduln prüfen.*

Lemma 3.1.27. *Sei A eine endlich-erzeugte $\mathbb{N}$-graduierte k-Algebra mit $A_0 = k$ und R eine graduierte Teilalgebra. Dann sind äquivalent:*

1. *A ist ganz über R.*
2. *A/R^+A ist endlichdimensional über k.*

Beweis. Die Rückrichtung ist einfach. Sei $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ eine k-Basis von A/R^+A und M der von den Urbildern erzeugte R-Modul. Dann gilt $A = M + R^+A$ gilt und nach Nakayama ist damit $A = M$ endlich erzeugt. Das vorige Lemma zeigt, dass A ganz über R ist.
Sei nun A ganz über R gegeben. Da A endlich erzeugt ist, ist $A = R[a_1, \ldots, a_n]$ eine ganze Ringerweiterung und damit ist A ein endlich erzeugter R-Modul (die a_i erfüllen ja gewisse Ganzheitsrelationen). Dann ist A/R^+A ein endlich erzeugter $R/R^+ = k$-Modul, also endlichdimensionaler k-Vektorraum. □

Satz 3.1.28. *Es seien $(a_1, \ldots, a_s)$ ein s-Tupel homogener Elemente aus A^+.*

1. *Es ist $(a_1, \ldots, a_s)$ genau dann ein Parametersystem für M, wenn die zwei folgenden Bedingungen erfüllt sind.*
   a) *$A/Ann\,(M)$ ist ganz über $k[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_s}]$.*
   b) *Die Bilder der a_i in $A/Ann\,(M)$ sind algebraisch unabhängig.*
2. *$d(M)$ ist die Anzahl der Elemente eines homogenen Parametersystems.*

Beweis. 1. Bemerkung 3.1.22 erlaubt es $Ann\,(M) = 0$ anzunehmen, da alle hier durchgeführten Überlegungen in $A/Ann\,(M)$ ablaufen. Um die Notation zu vereinfachen schreibe a_i statt $\overline{a_i}$. Setze $R = k[a_1, \ldots, a_s]$. Zunächst wird

$$\dim_k(M/a_1M + \ldots + a_sM) < \infty \Rightarrow A \text{ ganz über } k[a_1, \ldots, a_s]$$

bewiesen. Nach Anwendung von Lemma 3.1.25 genügt es zu zeigen, dass M endlich erzeugter R-Modul ist. Sei dazu $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}$ ein endliches homogenes Erzeugendensystem von $M/a_1M + \ldots + a_sM$ (ein solches existiert immer, man nehme z.B. die homogenen Komponenten einer endlichen Basis). Es gilt nun

$$M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i + (a_1M + \ldots + a_sM) = \sum_{i=1}^{n} Rm_i + R^+M,$$

da die rechte Seite eine größere Teilmenge von M ist, als die mittlere Menge. Nun folgt nach Nakayamas Lemma 2.2.32 schon $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$. Also ist M endlich erzeugter R-Modul.
Nun folgt der Beweis von

$$\dim_k(M/a_1M + \ldots + a_sM) < \infty \Leftarrow A \text{ ganz über } k[a_1, \ldots, a_s].$$

Mit Lemma 3.1.27 folgt, dass $A/(a_1, \ldots, a_s)A$ endlichdimensional ist. Da

$$M/a_1M + \ldots + a_sM$$

endlich erzeugter $A/(a_1, \ldots, a_s)A$-Modul ist, ist $M/(a_1M + \ldots + a_sM)$ nach Bemerkung 3.1.3 endlichdimensional. Im dritten Schritt wird

$$(a_1, \ldots, a_s) \text{ homogenes Parametersystem } \Rightarrow (a_1, \ldots, a_s) \text{ alg. unabh. über } k$$

gezeigt.
Wären die a_i nicht algebraisch unabhängig über k, so gäbe es nach Satz 3.1.23 algebraisch unabhängige Elemente $b_1, \ldots, b_t \in R$, so dass $R = k[a_1, \ldots, a_s]$ ganz über $k[b_1, \ldots, b_t]$ wäre und $t < s$ wäre. Insbesondere wäre auch A ganz über $k[b_1, \ldots, b_t]$ und damit wäre $(b_1, \ldots, b_t)$ ein besserer Kandidat für ein homogenes Parametersystem, da $t < s$, und somit ist s nicht minimal. Zuletzt wird

$$(a_1, \ldots, a_s) \text{ erfüllen die beiden Bedingungen des Lemmas } \Rightarrow s \text{ minimal}$$

gezeigt.
Nach Satz 3.1.8 gilt $s = d(M)$, denn $k[a_1, \ldots, a_s] \cap Ann\,(M) = 0$, womit $F(1) \neq 0$ ist. Da jedes homogene Parametersystem von M diese Eigenschaften erfüllt ist s minimal.

□

Somit ist die Existenz eines solchen homogenen Parametersystems nach Satz 3.1.28 und Satz 3.1.23 gesichert.

Korollar 3.1.29. *Es seien $a_1, \ldots, a_s$ homogene Elemente aus A^+. Dann ist*

$$d(M/(a_1M + \ldots + a_sM)) \geq d(M) - h.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $(a_1, \ldots, a_s)$ Teil eines homogenen Parametersystems ist.

Beweis. Es genügt die Behauptung für $s = 1$ zu zeigen. Sei a homogen vom Grad d. Dann gilt nach Lemma 3.1.6:

$$(1 - T^d)H(M, T) = H(M/aM, T) - T^d H({}_aM, T).$$

Hier lassen sich $H(M, T)$, $H(M/aM, T)$ und $H({}_aM, T)$ wie in Lemma 3.1.8 ausdrücken. Dabei seien $F(T)$, $F_1(T)$ und $F_2(T)$ die entsprechenden Zähler. Wählt man dort die a_i als homogenes Parametersystem von M, so gilt sogar $F(1) > 0$. Insbesondere folgt

$$(1 - T^d)F(T) = F_1(T) - T^d F_2(T). \tag{3.1}$$

und durch Einsetzen von Eins erhält man

$$0 = F_1(1) - F_2(1).$$

Gilt nun $F_1(1) \neq 0$, so ist $d(M/aM) = d(M)$. Andernfalls ist $F_2(1) = 0$. Seien $F_1'(T)(1 - T) = F_1(T)$ und $F_2'(T)(1 - T) = F_2(T)$. Kürzen von $(1 - T)$ in Gleichung (3.1) ergibt dann

$$d \cdot F(1) = F_1'(1) - F_2'(1).$$

Hier ist $F_1'(1) \neq 0$, denn sonst wäre

$$0 > d \cdot F(1) = -F_2'(1) \leq 0,$$

und die letzte Ungleichung folgt aus Bemerkung 3.1.10. Es folgt $d(M/aM) \geq d(M) - 1$. Der Zusatz über die Gleichheit ergibt sich direkt aus dieser Überlegung. □

3.1.3 Reguläre Folgen

Definition 3.1.30. *Sei M ein graduierter A-Modul über der graduierten k-Algebra A. Eine Folge $(a_1, \dots, a_s)$ von homogenen Elementen aus A^+ wird M-reguläre Folge oder auch M-Sequenz genannt, wenn a_i kein Nullteiler auf $M/(a_1M + \dots a_{i-1}M)$ für $1 \leq i \leq s$ ist.*

Lemma 3.1.31. *Jede M-reguläre Folge ist in einem homogenen Parametersystem enthalten.*

Beweis. Nach Lemma 3.1.20 gilt

$$d(M/(a_1M + \dots a_sM)) = d(M) - s.$$

Nach Korollar 3.1.29 ist damit $(a_1, \dots, a_s)$ Teil eines homogenen Parametersystems. □

Satz 3.1.32. *Eine Folge $(a_1, \dots, a_s)$ von homogenen Elementen aus A^+ ist genau dann eine M-Sequenz, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$a_1, \dots, a_s$ sind algebraisch unabhängig über k.*
2. *M ist ein freier $k[a_1, \dots, a_s]$-Modul mit einer Basis aus homogenen Elementen.*

Beweis. 1. Sei $(a_1, \dots, a_s)$ eine M-Sequenz. Setze $S := k[a_1, \dots, a_s]$. Die Elemente $a_1, \dots, a_s$ sind in einem homogenen Parametersystem enthalten. Insbesondere sind $(a_1, \dots, a_s)$ damit nach Satz 3.1.28 algebraisch unabhängig über k. Ferner ist M ein $k[a_1, \dots, a_s]$-Modul. Damit ist $M/(a_1, \dots, a_s)M$ ein k-Vektorraum. Sei $\bar{B}$ eine (evtl. unendliche) k-Basis von diesem k-Vektorraum. Diese kann offensichtlich aus Bildern von homogenen Elementen aus M gewählt werden. Sei B eine Menge von Urbildern dieser Basis. Ferner sei K der Kern der kanonischen Abbildung

$$\begin{array}{rcl} 0 \longrightarrow K \longrightarrow S^B & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ e_b & \longmapsto & e_b b \end{array}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da aus

$$M = \sum_{b \in B} Sb + S^+M$$

mit dem Lemma 2.2.32 $M = \sum_{b \in B} Sb$ folgt. Sei nun ein Element aus dem Kern K gegeben. Dies ist eine endliche Linearkombination der $b \in B$. Bezeichne diese mit $b_1, \dots, b_n$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} s_i b_i = 0,$$

wobei $s_i \in S$. Da M und die b_i graduiert sind, genügt es $s_i = 0$ für alle i für homogene $s_i \in S$ zu zeigen. Ziel ist es nun, diese Gleichung in $M/(a_1, \dots, a_s)M$

zu betrachten, da dort die lineare Unabhängigkeit der $\bar{b}_i$ ausgenutzt werden kann. Zunächst klammere die maximale a_1-Potenz aus den s_i aus. Dann folgt

$$a_1^m \sum_{i=1}^{n} \bar{s}_i b_i = 0$$

mit geeigneten $\bar{s}_i \in S$. Da a_1 kein Nullteiler auf M ist, folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{s}_i b_i = 0.$$

Das geht mit den anderen a_i genauso. Man erhält also gewisse $\bar{s}_i \in k$, die Faktoren der ursprünglichen s_i sind und obige Gleichung in $M/(a_1, \ldots, a_s)M$ erfüllen. Somit sind die $\bar{s}_i = 0$ und damit auch $s_i = 0$.

2. Seien nun die zwei Bedingungen gegeben. Es genügt zu zeigen, dass a_1 M-regulär ist, da beide Bedingungen auch für M/a_1M und $a_2, \ldots, a_s$ erfüllt sind. Gelte nun $a_1 m = 0$ für ein $m \in M$. Offensichtlich kann man m homogen wählen. M ist freier S-Modul. Es gilt also

$$a_1 m = a_1 \sum_{i=1}^{n} s_i m_i = \sum_{i=1}^{n} (a_1 s_i) m_i.$$

mit $s_i \in k[a_1, \ldots, a_s]$ und $m_i \in M$. Dabei können die m_i nach Voraussetzung homogen gewählt werden. Da dies eine freie Zerlegung ist, folgt $a_1 s_i = 0$ für alle i. Da $a_1, \ldots, a_s$ algebraisch unabhängig sind, folgt $s_i = 0$ für alle i. Damit ist insbesondere $m = 0$ und a_1 ist M-regulär.

□

Definition 3.1.33. *Die Tiefe depth (M) eines Moduls M ist die maximale Länge von M-regulären Folgen. Nach dem vorigem Lemma gilt stets depth $(M) \leq d(M)$. Ein Modul M besitzt die Cohen-Macaulay Eigenschaft, falls depth $(M) = d(M)$.*

Satz 3.1.34. *Es sei M ein Cohen-Macaulay-Modul, M noethersch. Jedes homogene Parametersystem für M ist in einer maximalen M-Sequenz enthalten.*

Beweis. Sei $(a_1, \ldots, a_s)$ eine maximale M-reguläre Folge und $(b_1, \ldots, b_s)$ ein homogenes Parametersystem für M. Induktion über s:
$\underline{s = 1:}$ Setze $N_i := \{m \in M \mid b_1^i m = 0\}$. Da M noethersch ist, wird die Folge der Untermoduln $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$. stationär. Somit gilt $N = \bigoplus N_i = N_h$ für ein $h \in \mathbb{N}$. Per Definition gilt $N \cap b_1 M = b_1 N$. Hier ist b_1 ein Parametersystem für M, also ist M/b_1M endlichdimensional und damit auch N/b_1N endlichdimensional, da $N/b_1N \subseteq M/b_1M$. Da $N/bN \to bN/b^2N$ surjektiv ist, ist auch $b^{h-1}N$ endlichdimensional und damit dann auch N. Insbesondere exisitiert ein $l \geq 0$ mit $a_1^l N = 0$. Da a_1 aber Nichtnullteiler auf M war, muss $N = 0$ sein. Insbesondere ist damit b_1 auch kein Nullteiler auf M.
$\underline{s > 1:}$ Die Folge $(b_1, \ldots, b_s)$ enthält ein Parametersystem für M/a_1M. Sei dies gegeben

durch $(b_1, \dots, b_{s-1})$. Nach Induktion ist dann $(b_1, \dots, b_{s-1}, a_1)$ M-Sequenz, und somit $\dim M/a_1M = s-1$. In $M/(b_1M + \dots b_{s-1}M)$ ist a_1 kein Nullteiler und b_s Parametersystem. Nach Induktion ist b_s ein $M/(b_1M+\dots+b_{s-1}M)$-reguläres Element, insbesondere ist $(b_1, \dots, b_s)$ M-Sequenz. □

Bemerkung 3.1.35. *Somit entsprechen sich homogene Parametersysteme und maximale reguläre Folgen im Cohen-Macaulay-Fall. Dies gilt nicht allgemein, denn zum Beispiel ist $(x-z, y)$ ein homogenes Parametersystem für $M = k[x, y, z]/(xz, yz)$, aber y ist ein Nullteiler von M.*

3.2 Das Theorem von Hochster-Roberts

In diesem Kapitel wird der Beweis von Hochster Roberts nach den Ausführungen in [BH93] geführt. Dazu werden zunächst einige Grundlagen über treuflache Moduln und Jacobsonringe erläutert. Beim Beweis spielt der folgende Satz von der generischen Freiheit eine kleine, aber wesentliche Rolle. Auf den Beweis dieses Satzes wird hier verzichtet.

Satz 3.2.1 (Satz von der generischen Freiheit, [BH93] 6.5.6)**.** *Sei $R = S[t_1, \dots, t_n]$ eine endlich erzeugte Algebra über einem Integritätsbereich S. Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann existiert ein $0 \neq g \in S$, so dass M_g ein freier S_g-Modul ist.*

3.2.1 Flache und treuflache Moduln

Diese kurze Einführung beruht auf den Ausführungen in [AM69]. Dabei wurden die dort in die Aufgaben ausgelagerten Teile um die Beweise ergänzt.

Definition 3.2.2.
1. *Sei A ein kommutativer Ring mit Eins und N ein A-Modul. N heißt flacher A-Modul, falls für jeden injektiven Homomorphismus $f\colon M' \to M$ auch die induzierte Abbildung $M' \otimes_A N \to M' \otimes_A M$ injektiv ist.*
2. *Ein Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ heißt flach, falls B als A-Modul flach ist.*
3. *Für einen Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ und einen A-Modul N setze $N_B := B \otimes_A N$.*

Lemma 3.2.3 ([AM69] Ex. 13 S.32)**.** *Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und N ein A-Modul. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} g\colon N &\longrightarrow B \otimes_A N = N_B \\ x &\longmapsto 1 \otimes x \end{aligned}$$

injektiv und $g(N)$ ist ein direkter Summand von N_B.

Beweis. Sei $p\colon N_B \to N$, $p(s \otimes y) = sy$. Hier sind p und g offenbar A-lineare Abbildungen mit $p \circ g = id_N$. Also ist g ein Schnitt, insbesondere $N_B = g(N) \oplus \ker(p)$. □

Definition 3.2.4. *Für einen Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ setze*

1. $I^e := Bf(I)$ *für jedes Ideal I von A. Dies wird als Expansion von I bezeichnet.*
2. $J^c := f^{-1}(J)$ *für jedes Ideal J von B. Dies nennt man die Kontraktion von J.*

Bemerkung 3.2.5. *Kontraktion und Expansion sind inklusionserhaltend.*

Proposition 3.2.6. *Für Ideale I von A und J von B gilt:*

1. $I^{ec} \supseteq I$,
2. $J^{ce} \subseteq J$,
3. $I^{ece} = I^e$,
4. $J^{cec} = J^c$.

Beweis. Die ersten zwei Aussagen sind trivial. Die letzten zwei Aussagen folgen durch geeignetes Umklammern.

$$I^e \overset{1.}{\subseteq} (I^{ec})^e = I^{ece} = (I^e)^{ce} \overset{2.}{\subseteq} I^e$$

$$J^c \overset{1.}{\subseteq} (J^c)^{ec} = J^{cec} = (J^{ce})^c \overset{2.}{\subseteq} J^c$$

□

Proposition 3.2.7 ([AM69] 3.16)**.** *Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und sei $\mathbf{p}$ ein Primideal von A. Dann ist $\mathbf{p}$ genau dann die Kontraktion eines Primideals von B, wenn $\mathbf{p}^{ec} = \mathbf{p}$.*

Beweis. Sei zunächst $\mathbf{p}$ die Kontraktion eines Primideals von B, d.h. $\mathbf{p} = \mathbf{q}^c$ mit $\mathbf{q} \in Spec\,(B)$. Dann ist $\mathbf{p}^{ec} = \mathbf{q}^{cec} = \mathbf{q}^c = \mathbf{p}$.
Sei nun $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{ec}$ gegeben. Es genügt ein Primideal $\mathbf{q} \in Spec\,B$ mit

i) $\mathbf{p}^e \subseteq \mathbf{q}$,

ii) $\mathbf{q} \cap Im\,(A - \mathbf{p}) = \emptyset$

zu finden, denn dann gilt

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^{ec} \overset{i)}{\subseteq} \mathbf{q}^c \overset{ii)}{\subseteq} \mathbf{p}$$

und damit $\mathbf{p} = \mathbf{q}^c$. Die Menge $S := Im\,(A - \mathbf{p})$ ist multiplikativ abgeschlossen und wegen $p^{ec} = f^{-1}(\mathbf{p}^e) = \mathbf{p}$ und $f^{-1}(B) \subseteq A - \mathbf{p}$ gilt $\mathbf{p}^e \cap S = \emptyset$. Somit lässt sich $\mathbf{p}^e$ zu einem echten Ideal in $S^{-1}B$ erweitern. Dieses liegt in einem maximalen Ideal $\mathbf{m}$ von $S^{-1}B$. Die Kontraktion von $\mathbf{m}$ in B ist ein Primideal und erfüllt die beiden Eigenschaften. □

Proposition 3.2.8 ([AM69] Ex 2 S.31)**.** *Sei A ein Ring, I ein Ideal und M ein A-Modul. Dann gilt $(A/I) \otimes_A M \cong M/IM$.*

Beweis. Die Sequenz $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ ist exakt. Da $\_ \otimes_A M$ rechtsexakt ist, ist

$$I \otimes_A M \to \underbrace{A \otimes_A M}_{\cong M} \to A/I \otimes_A M \to 0$$

exakt, und das Bild von $I \otimes_A M$ in M ist gerade IM. □

Bemerkung 3.2.9. *Im Gegensatz zu obigen Isomorphismus gilt i.A. nicht* $I \otimes_A M = IM$. *Zum Beispiel für* $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *und* $I = 2\mathbb{Z}$.

Lemma 3.2.10. *Sei B eine flache A-Algebra. Dann sind äquivalent:*

1. $I^{ec} = I$ *für alle Ideale* I *von* A
2. $\mathbf{p}^{ec} = \mathbf{p}$ *für alle Primideale* $\mathbf{p}$ *von* A
3. *Spec*$(B) \to$ *Spec*(A) *ist surjektiv.*
4. *Für jedes maximale Ideal* $\mathbf{m}$ *von* A *gilt* $\mathbf{m}^e \neq B$.
5. *Falls* M *ein von Null verschiedener* A*-Modul ist, so gilt* $M_B \neq 0$.
6. *Für jeden* A*-Modul* M *ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & B \otimes_A M \\ m & \longmapsto & 1 \otimes m \end{array}$$

   injektiv.

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, so nennt man B treuflach über A.

Beweis. $1) \Rightarrow 2)$: trivial.
$2) \Leftrightarrow 3)$: Proposition 3.2.7.
$3) \Rightarrow 4)$: trivial.
$4) \Rightarrow 5)$: Sei $x \neq 0$ in M. Es genügt nach Lemma 3.2.3 zu zeigen: Für den Untermodul $M' = Ax$ gilt $M'_B \neq 0$. Es gilt $M' = A/I$ für ein Ideal $I \neq A$. Damit ist nach Proposition 3.2.8 $M'_B \cong B/I^e$. Da I in einem maximalen Ideal $\mathbf{m}$ liegt, gilt $I^e \subseteq \mathbf{m}^e \neq B$, also $M'_B \neq 0$.
$5) \Rightarrow 6)$: Sei $M' = \ker(M \to M_B)$. Da B flach über A ist, ist

$$0 \to M'_B \to M_B \to (M_B)_B$$

exakt. Nach 3.2.3 ist die Abbildung $M_B \to (M_B)_B$ injektiv, also $M'_B = 0$ und damit nach Voraussetzung $M' = 0$.
$6) \Rightarrow 1)$: Setze $M := A/I$. Aus der Voraussetzung ergibt sich die Injektion

$$\hat{f} \colon A/I \to B/I^e.$$

Insbesondere gilt also $I^{ec} = f^{-1}(I^e) \subseteq I$. Die andere Inklusion gilt nach 3.2.6. □

Korollar 3.2.11. *Sei B ein freier A-Modul. Dann ist B treuflach über A.*

Beweis. Sei $\mathbf{m}$ ein maximales Ideal von A. Dann ist

$$\mathbf{m}^e = \mathbf{m}B = \bigoplus \mathbf{m}A = \bigoplus \mathbf{m} \neq B.$$

□

3.2.2 Jacobsonringe

Definition 3.2.12. *Sei A ein kommutativer Ring mit Eins.*

1. *Das Nilradikal $\sqrt{A}$ ist der Schnitt über alle Primideale von A.*
2. *Das Jacobsonradikal $J(A)$ ist der Schnitt über alle maximalen Ideale von A.*

Lemma 3.2.13 ([AM69]S. 71, Ex 23)**.** *Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Es sind äquivalent:*

1. *Jedes Primideal von A ist Durchschnitt von maximalen Idealen .*
2. *Für jedes Primideal $\mathbf{p}$ von A gilt $J(A/\mathbf{p}) = 0$.*
3. *Für jedes homomorphe Bild von A ist das Nilradikal gleich dem Jacobsonradikal.*
4. *Jedes nicht maximale Primideal $\mathbf{p}$ von A ist Durchschnitt aller Primideale, die $\mathbf{p}$ echt enthalten.*

Beweis. Sei $f\colon A \to B$ ein Homomorphismus von Ringen. Dann entsprechen die Primideale von $f(A)$ gerade den Primidealen von $A/\ker f$. Mit dieser Überlegung folgt 1) ⇔ 2) sofort. 3) ⇒ 1) folgt mit der Projektion $\pi\colon A \to A/\mathbf{p}$.
1) ⇒ 3) Jedes homomorphe Bild von A hat die Form A/I mit einem Ideal I von A. Es gilt:

$$\sqrt{A/I} = \bigcap_{\mathbf{p}\subseteq A \text{ prim}} \mathbf{p} \overset{\text{Vor.}}{=} \bigcap_{\mathbf{p}\supseteq I \text{ prim}} \bigcap_{\mathbf{m}\supseteq \mathbf{p} \text{ max.}} \mathbf{m} = \bigcap_{m\supseteq I \text{ max.}} \mathbf{m} = J(A/I).$$

1) ⇒ 4) folgt auch direkt. Bleibt also 4) ⇒ 1) zu zeigen. Angenommen, 1) gilt nicht. Dann gibt es ein Primideal $\mathbf{p}$ in A, mit

$$\mathbf{p} \neq \bigcap_{\mathbf{m} \text{ maximales Ideal}} \mathbf{m}.$$

Es genügt ein Primideal konstruieren, dass 3) nicht erfüllt. In $A/\mathbf{p}$ gilt $J(A/\mathbf{p}) \neq \sqrt{A/\mathbf{p}} = 0$. Sei also *oBdA* A integer und $J(A) \neq 0$. Wähle $f \neq 0$ in $J(A)$. A_f enthält ein maximales Ideal $\mathbf{m}_f$. $\mathbf{q} = A \cap \mathbf{m}_f$ ist ein Primideal und nicht maximal, da es f nicht enthält. Ferner ist es maximal unter den Primidealen, die f nicht enthalten. Damit erfüllt $\mathbf{q}$ 3) nicht. □

Definition 3.2.14. *Ein Ring der eine der obigen äquivalenten Bedingungen erfüllt, heißt Jacobsonring.*

Beispiel 3.2.15. *$\mathbb{Z}$ ist ein Jacobsonring, jeder Körper ist ein Jacobsonring.*

Theorem 3.2.16 ([BH93] A 17)**.** *Sei A ein Jacobsonring und B eine endlich erzeugte A-Algebra. Dann gilt:*

1. *B ist Jacobsonring.*
2. *Für jedes maximale Ideal $\mathbf{m}$ von B ist auch $\mathbf{m} \cap A$ maximales Ideal von A.*

Der Beweis dieses Theorems folgt nach dem nächsten Korollar. Dieses spielt im Beweis des Theorems von Hochster-Roberts eine entscheidende Rolle.

Korollar 3.2.17 ([BH93] A 18)**.** *Sei R eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra und $\mathbf{m}$ ein maximales Ideal von R. Dann ist $R/\mathbf{m}$ ein endlicher Körper.*

Beweis. [[Bos09] Kap 3.4 Korollar 8 und 9] Nach 3.2.16 ist $\mathbb{Z} \cap \mathbf{m} = (p)$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$. Damit ist $L = R/\mathbf{m}$ endlich erzeugte Körpererweiterung über $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dies ist auch eine endliche Körpererweiterung, da nach Noethernormalisierung algebraisch unabhängige Elemente $y_1, \ldots, y_n$ existieren, so dass $k[y_1, \ldots, y_n] \subset L$ endliche Ringerweiterung ist. Damit ist aber $k[y_1, \ldots, y_n]$ schon ein Körper, was nur für $n = 0$ gilt. □

Die folgenden drei Lemmata werden im Beweis von Theorem 3.2.16 benötigt. Diese stammen aus [AM69] Kapitel 5.

Lemma 3.2.18 ([AM69] Prop 5.7)**.** *Seien $A \subseteq B$ Integritätsringe und B ganz über A. Dann ist B genau dann ein Körper, wenn A ein Körper ist.*

Lemma 3.2.19 ([AM69] Ex 25)**.** *Sei A ein Ring. Dann sind äquivalent:*

1. *A ist ein Jacobsonring;*
2. *Jede endlich erzeugte A-Algebra B, die ein Körper ist, ist endlich über A.*

Lemma 3.2.20 ([AM69] Ex 22)**.** *Sei A ein Unterring des Integritätsbereichs B, wobei B als A-Algebra endlich erzeugt sei. Gilt ferner $J(A) = 0$, so ist auch $J(B) = 0$.*

Beweis. [von 3.2.16] Sei $\mathbf{p}$ ein Primideal von B, $\mathbf{q} = A \cap \mathbf{p}$. Dann sind $A/\mathbf{q} \subseteq B/\mathbf{p}$ Integritätsringe und $B/\mathbf{p}$ ist endlich erzeugte $A/\mathbf{q}$-Algebra. Insbesondere ist $J(A/\mathbf{q}) = 0$ und damit gilt nach 3.2.20 $J(B/\mathbf{p}) = 0$, also ist $\mathbf{p} = \bigcap_{\mathbf{m} \supseteq \mathbf{p}} \mathbf{m}$. Somit ist B ein Jacobsonring. Ebenso erhält man für ein maximales Ideal $\mathbf{m}$ von B die Inklusion

$$A/(\mathbf{m} \cap A) \subseteq B/\mathbf{m}.$$

Da $A/(\mathbf{m} \cap A)$ ein Jacobsonring ist ist nach Lemma 3.2.19 $B/\mathbf{m}$ ganz über $A/(\mathbf{m} \cap A)$. Nach Lemma 3.2.18 ist $A/(\mathbf{m} \cap A)$ damit ein Körper und $\mathbf{m} \cap A$ ein maximales Ideal von A. □

3.2.3 Der Beweis

Die folgenden Ausführungen basieren auf [BH93]. Die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von C_{nd} folgt aus dem nächsten Theorem.

Theorem 3.2.21 (Hochster-Roberts)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, auf dem eine linear reduktive Gruppe linear operiert. Dann besitzt der Invariantenring bezüglich dieser Aktion die Cohen-Macaulay-Eigenschaft.*

Das obige Theorem ist ein Spezialfall von

Theorem 3.2.22 ([BH93])**.** *Sei k ein Körper und $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen mit Standardgraduierung, d.h.* $\deg X_i = 1\ \forall i$. *Ferner sei S eine endlich erzeugte graduierte k-Unteralgebra von R mit $IR \cap S = I$ für alle Ideale I von S. Dann ist S Cohen-Macaulay.*

Die Übersetzung in dieses Theorems gelingt durch Konstruktion eines Reynoldsoperators.

Definition 3.2.23. *Sei R ein kommutativer Ring und S ein Unterring. Ein Reynoldsoperator von (R, S) ist eine S-lineare Abbildung $\rho\colon R \to S$ mit $\rho|_S = id_S$, also eine Retraktion zur Inklusion $\iota\colon S \hookrightarrow R$.*

Das folgende einfache Lemma liefert mit einem Reynoldsoperator die gewünschte Übersetzung.

Lemma 3.2.24. *Sei $\rho\colon R \to S$ ein Reynoldsoperator zu (R, S). Dann gilt $IR \cap S = I$ für alle Ideale I von S.*

Beweis. Sei $r \in IR$. Somit gibt es eine Darstellung $\sum_{i=1}^{n} r_i s_i$ mit $r_i \in R$ und $s_i \in I$. Gilt zusätzlich $r \in S$, so folgt

$$IR \cap S \ni r = \rho(r) = \sum_{i=1}^{n} \rho(r_i f_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i \underbrace{\rho(r_i)}_{\in S} \in I.$$

□

Setzte $R = k[V]$ und $S = k[V]^G$. Die Konstruktion des Reynolds-Operators folgt aus der linearen Reduktivität der Gruppe.
Jede homogene Komponente $k[V]_i^G$ ist endlichdimensionale G-Darstellung in $k[V]_i$, hat also ein orthogonales Komplement W_i, welches alle nicht-trivialen Unterdarstellungen von $k[V]_i$ enthält (Dies wird in der Konstruktion noch gebraucht). Sei

$$\rho_i\colon k[V]_i = k[V]_i^G \oplus W_i \to k[V]_i^G$$

die Projektion. Setzte $\rho := \bigoplus_i \rho_i\colon k[V] \to k[V]^G$. Nach Konstruktion gilt $\rho|_{k[V]^G} = id_{k[V]^G}$. Es genügt also zu zeigen: ρ ist $S = k[V]^G$-linear. Nach Lemma 3.2.25 genügt es $\ker \rho = \bigoplus_i W_i$ zu untersuchen. $\ker \rho$ enthält alle nichttrivialen G-Untermoduln von

R. Betrachte eine irreduzible Komponente U von $\ker\rho$. Für $s \in S = k[V]^G$ ist die Multiplikation $m_s \colon U \to R$ G-linear, denn

$$m_s(g.u) = s(g.u) = (g.s)(g.u) = g.(su).$$

Nach Schurs Lemma ist dann $Im\, s = sU$ entweder 0 oder isomorph zu U. Da U nichttriviale G-Darstellung ist, liegt dann sU in beiden Fällen wieder in $\ker\rho$. Insbesondere gilt dann $s\ker\rho \subseteq \ker\rho$.

Lemma 3.2.25. *Sei R ein kommutativer Ring und S ein Unterring. Ferner sei $\rho\colon R \to S$ eine k-lineare Abbildung mit $\rho|_S = id_S$. Dann gilt*

$$\rho \in Hom_S(R, S) \text{ genau dann, wenn } s\ker\rho \subseteq \ker\rho \quad \text{für alle } s \in S.$$

Beweis. Sei $s \in S$ und $x \in \ker\rho$.
"$\Rightarrow$": $\rho(sx) = s\rho(x) = 0$.
"$\Leftarrow$": $\rho(sx) = \rho(s\rho(x) + \underbrace{s(x - \rho(x))}_{\in s\ker\rho \subseteq \ker\rho}) = \rho(\underbrace{s\rho(x)}_{\in S}) = s\rho(x)$. □

Beweis. von Theorem 3.2.22. Der Beweis ist in zwei Teilschritten aufgeteilt. Im ersten Schritt wird das Theorem für einen endlichen Körper k bewiesen. Für einen endlichen Körper ist der Beweis relativ leicht. Insbesondere spielen hier die Vorbereitungen (Satz über die generische Freiheit, Jacobsonringe und treuflache Algebren) keine Rolle. Im zweiten Schritt ist der Körper k beliebig. Dort wird augenutzt, dass die Aussage des Theorems zur Lösbarkeit gewisser linearer Gleichungssysteme über k äquivalent ist. Der Beweis geht davon aus, dass eines dieser Systeme nicht lösbar ist und führt dies zum Widerspruch. Dabei lässt sich der Körper k durch eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra A ersetzen, so dass die Lösbarkeit über A äquivalent zur Lösbarkeit über k ist. Diese Algebra A ist ein Jacobsonring. Im Falle, dass dieses System nicht lösbar ist, kann man A so wählen, dass es für jedes maximale Ideal $\mathbf{m}$ über $A/\mathbf{m}$ nicht lösbar ist. Da A eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra ist, lässt sich mit Hilfe des Satzes über die generische Freiheit das gesamte Setup auf endliches k zurückführen.

Sei $f_1, \ldots, f_s$ ein homogenes Parametersystem von S. Zu zeigen ist: $f_1, \ldots, f_s$ ist ein S-reguläre Folge, d.h. falls

$$g f_{r+1} = g_1 f_1 + \ldots + g_r f_r \tag{3.2}$$

für ein $0 \leq r \leq s-1$ und $g, g_1, \ldots, g_r \in S$ gilt, so ist g schon in dem von $f_1, \ldots, f_r$ erzeugten Ideal in S. Die $g, g_1, \ldots, g_r$ können als homogen vorausgesetzt werden, da S graduierte Unteralgebra ist. Ferner genügt es wegen $g \in S$ und der Voraussetzung $IR \cap S = I$ zu zeigen, dass g in dem von $f_1, \ldots, f_r$ erzeugten Ideal in R liegt.

1. Schritt

Der Beweis für endlichen Körper k folgt hauptsächlich aus den folgenden drei leichten Vorüberlegungen.

Lemma 3.2.26. *Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynomring. Dann gilt*

1. *$X_1^{k_1}, \ldots, X_n^{k_n}$ ist reguläre Folge für alle $k_i \in \mathbb{N}_{>0}$.*

2. *Ist F ein freier R-Modul, so ist $X_1^{k_1}, \ldots, X_n^{k_n}$ auch F-reguläre Folge.*

Beweis. Der zweite Teil folgt direkt aus dem ersten Teil, da hier alles komponentenweise betrachtet werden kann. R hat die Cohen-Macaulay-Eigenschaft, denn $d(R) = n$ und $X_1, \ldots, X_n$ ist eine reguläre Folge. Da

$$\dim_k k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^{k_1}, \ldots, X_n^{k_n}) < \infty$$

gilt, ist $X_1^{k_1}, \ldots, X_n^{k_n}$ ein homogenes Parametersystem von R. Nach Satz 3.1.34 bilden die $X_i^{k_i}$ damit eine reguläre Folge. □

Proposition 3.2.27. *Ist R ein Integritätsring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so existiert ein freier R-Untermodul $F \subseteq M$ und ein $c \in R - \{0\}$ mit $cM \subseteq F$.*

Beweis. Sei $Q = Quot(R)$ der Quotientenkörper von R. Hier ist $M \otimes_R Q$ endlichdimensionaler Q-Vektorraum. Sei $m_1 \otimes 1, \ldots, m_r \otimes 1$ eine Q-Basis von $M \otimes_R Q$. Dann ist $F := \sum_i Rm_i \subset M$ ein freier R-Modul. Da Lokalisieren exakt ist, folgt mit $S = R - \{0\}$ und $0 \to F \to M \to M/F \to 0$, dass

$$0 \to S^{-1}F \to S^{-1}M \to S^{-1}(M/F) \to 0$$

exakt ist. Da die ersten beiden Terme die gleiche Q-Dimension haben, gilt $S^{-1}(M/F) = 0$. Da M/F endlich erzeugter R-Modul ist gibt es ein $c \in S$ mit $c(M/F) = 0$, also $cM \subseteq F$. □

Bemerkung 3.2.28. *Sei k ein endlicher Körper, $p = char(k)$ und $q = p^e$ für ein $e \in \mathbb{N}_{>0}$. Ferner sei*

$$\mathcal{M} := \{Monome\ \mu = X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n} \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \mu_i < q \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

Dann lässt sich jedes $h \in k[X_1, \ldots, X_n]$ eindeutig als

$$h = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} (h_\mu)^q \mu \quad \text{mit } h_\mu \in k[X_1, \ldots, X_n]$$

schreiben.

Beispiel 3.2.29. $k = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, e = 1$. *Dann gilt*

$$h = 2X_1^7X_2^3X_3^5 + 3X_1^{10}X_3 = (2X_1X_3)^5X_1^2X_2^3 + (3X_1^2)^5X_3.$$

Beweis. [von 3.2.22 für endliche Körper] Wende Proposition 3.2.27 auf $M = S$ und $R = k[f_1, \ldots, f_s]$ an und erhalte einen freien $k[f_1, \ldots, f_s]$-Untermodul von S und ein $c \in k[f_1, \ldots, f_s] - \{0\}$ mit $cS \subseteq F$. Wähle $q = p^e$ so groß, dass $c = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} c_\mu^q \mu$ sich mit Koeffizienten $c_\mu \in k$ schreiben lässt, z.B. $q > grad(c) \cdot n$. Aus der Gleichung

$$g f_{r+1} = g_1 f_1 + \ldots + g_r f_r \quad \text{mit } g, g_i \in S \text{ homogen} \tag{3.3}$$

folgt durch Potenzieren hoch q und Multiplikation mit c:

$$f_{r+1}^q \underbrace{(cg^q)}_{\in F} = \sum_{i=1}^{r} f_i^q \underbrace{(cg_i^q)}_{\in F}. \tag{3.4}$$

Hier ist $f_1^q, \ldots, f_{r+1}^q$ nach Lemma 3.2.26 eine F-reguläre Folge, also existieren $h_i \in F$ und $h_{i\mu} \in R = k[X_1, \ldots, X_n]$, so dass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu \in \mathcal{M}} (c_\mu g)^q \mu = cg^q &= \sum_{i=1}^{r} f_i^q h_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} f_i^q \sum_{\mu \in \mathcal{M}} (h_{i\mu})^q \mu \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^{r} f_i^q (h_{i\mu})^q \mu \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \left(\sum_{i=1}^{r} f_i h_{i\mu} \right)^q \mu \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} (h_\mu)^q \mu,
\end{aligned}$$

wobei $h_\mu = \sum_{i=1}^{r} f_i h_{i\mu} \in (f_1, \ldots, f_r)R$ gilt. Da $c \neq 0$ ist, ist ein $c_\mu \neq 0$. Koeffizientenvergleich liefert für ein $c_\mu \in k - \{0\}$, dass $c_\mu g = h_\mu \in (f_1, \ldots, f_r)R$ und damit $g \in (f_1, \ldots, f_r)R$. □

2. Schritt

Die Gültigkeit des Theorems ist äquivalent zur Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems über k. Betrachte dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 3.2.30. $g = 4X^2Y^2$, $f_1 = 3X + 2Y$, $f_2 = 7X^2 + 5Y^2$. *Sei I das von f_1 und f_2 erzeugte Ideal in $k[X, Y]$. Falls $g \in I$ liegt, so liegt es im k-Vektorraum, der von $f_1X^3, f_1X^2Y, f_1XY^2, f_1Y^3, f_2X^2, f_2XY, f_2Y^2$ erzeugt wird. Dies entspricht dem Glei-*

chungssystem

$$\begin{array}{c} \\ X^4 \\ X^3Y \\ X^2Y^2 \\ XY^3 \\ Y^4 \end{array} \begin{array}{ccccccc} f_1X^3 & f_1X^2Y & f_1XY^2 & f_1Y^3 & f_2X^2 & f_2XY & f_2Y^2 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & f_1X^3 & f_1X^2Y & f_1XY^2 & f_1Y^3 & f_2X^2 & f_2XY & f_2Y^2 \\ \hline X^4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ X^3Y & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ X^2Y^2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 0 & 7 \\ XY^3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ Y^4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \end{array} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten des Gleichungssystems liegen in einer endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Algebra (im Beispiel sogar in $\mathbb{Z}$). Die Lösbarkeit des Gleichungssystem ist schon über einer endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Algebra entscheidbar, da sich alle Voraussetzungen auch über einer endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Algebra A ausdrücken lassen. Dazu werden zunächst die Koeffizienten von g, den g_i und den f_i benötigt, um (3.2) auszudrücken. Ferner ist S als $k[f_1, \dots, f_s]$-Modul endlich erzeugt. Seien $r_1, \dots, r_m \in S$ Erzeuger dieses Moduls. Die Koeffizienten dieser Erzeuger werden ebenfalls zu A hinzugefügt. Gesucht ist eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra A, so dass für

1. $\overline{R} = A[X_1, \dots, X_n]$,
2. $B = A[f_1, \dots, f_m]$,
3. $\overline{S} = B[r_1, \dots, r_m] \subset S$

die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

1. $B \subset \overline{R}$, d.h. $f_1, \dots, f_s \in \overline{R}$,
2. $\overline{S} \subset \overline{R}$, d.h. $r_1, \dots, r_m \in \overline{R}$,
3. $\overline{S} = Br_1 + \dots B_{r_m}$, d.h. für $r_i r_j = \sum_{u=1}^m p_{iju}(f_1, \dots, f_s) r_u$ ist $p_{iju}(f_1, \dots, f_s) \in B$,
4. $g_0, \dots, g_s \in \overline{R}$,
5. $g_0, \dots, g_s \in \overline{S}$, d.h. $g_i = \sum_{u=1}^m q_{iu}(f_1, \dots, f_s) r_u$

Bezeichne im Folgenden $g_0 := g$. Um obiges zu erfüllen werden die Koeffizienten der folgenden Polynome benötigt.

1. $f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$,
2. $r_1, \dots, r_m \in k[X_1, \dots, X_n]$,
3. $p_{iju} \in k[Y_1, \dots, Y_s]$ für $i, j, u \in \{1, \dots, m\}$,
4. $g_0, \dots, g_s \in k[X_1, \dots, X_n]$,
5. $q_{iu} \in k[Y_1, \dots, Y_s]$, für $i, u \in \{1, \dots, m\}$.

Dies ist offensichtlich möglich. Es ergibt sich damit eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra A, über der die Lösbarkeit des zur Bedingung $g \in (f_1, \ldots, f_r)R$ äquivalenten Gleichungssystems entscheidbar ist. Freilich ist g nur durch die Gleichung (3.2) gegeben, dessen Koeffizienten auch in A liegen. Falls das Gleichungssystem lösbar ist, so liegt die Lösung möglicherweise nicht in A, sondern in $Quot(A)$. In diesem Falle füge die endlich vielen Brüche zu A hinzu, die für die Lösung nötig wären. Angenommen, das Gleichungssystem ist auch über $Quot(A)$ nicht lösbar. Das Gleichungssytem hat die Form $Mv = b$. Wobei M eine Matrix, b ein Spaltenvektor und v die gesuchte Größe ist. Ist das Gleichungssystem nicht lösbar, so gilt $rg(M, b) = rg(M)+1$ (hier bezeichtnet M, b die Matrix, die durch Anhängen des Spaltenvektors b and M entsteht). Also verschwindet ein $(k+1) \times (k+1)$ Minor d von (M, b) nicht. Füge d^{-1} zu A hinzu. Damit liegt d in keinem maximalen Ideal $\mathbf{m}$ von A, das heißt das Gleichungssystem ist auch für alle maximalen Ideale $\mathbf{m}$ von A nicht lösbar über $A/\mathbf{m}$.

Hier soll modulo eines maximalen Ideals $\mathbf{m}$ von A reduziert werden, so dass die obigen Forderungen erhalten bleiben. Das kann bei der Inklusion $B/\mathbf{m}B \to \overline{R}/\mathbf{m}\overline{R}$ Probleme bereiten, da die Injektivität nicht gesichert ist. Dieses Problem kann durch die richtige Wahl des maximalen Ideals umgangen werden. Diese Wahl erfolgt über ein maximales Ideal $\mathbf{n}$ von B. Da B Jacobsonring ist, ist nach Theorem 3.2.16 $\mathbf{m} := A \cap \mathbf{n}$ maximales Ideal von A. Nach dem Satz über die generische Freiheit gibt es ein $0 \neq t \in B$, so dass $\overline{R}_t$ ein freier B_t-Modul ist. Insbesondere ist dann die Abbildung

$$(B/\mathbf{m}B)_t = (B/\mathbf{m}B)_t \otimes_{B_t} B_t \hookrightarrow (B/\mathbf{m}B)_t \otimes_{B_t} \overline{R}_t = (\overline{R}/\mathbf{m}\overline{R})_t$$

nach Lemma 3.2.10 injektiv. Wähle das maximale Ideal $\mathbf{n}$ von B so, dass $t \notin \mathbf{n}$ ist. Dann ist die Abbildung $B/\mathbf{m}B \to (B/\mathbf{m}B)_t$ injektiv, da B Polynomring über A und somit $\mathbf{m}B$ Primideal ist. $\mathbf{n}$ kann so gewählt werden, da B Jacobsonring (und Integritätsring) ist und daher

$$\text{Schnitt über alle maximalen Ideale von } B = J(B) = \sqrt{B} = 0.$$

Insgesamt gilt

$$\begin{tikzcd}
B/\mathbf{m}B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \overline{R}/\mathbf{m}\overline{R} \arrow[d] \\
(B/\mathbf{m}B)_t \arrow[r, hook] & (\overline{R}/\mathbf{m}\overline{R})_t
\end{tikzcd}$$

und damit ist λ injektiv. Betrachte nun alle Objekte modulo $\mathbf{m}$. Damit sind die Forderungen 1,3,4 und 5 erfüllt. Forderung 2 ist auch erfüllt, da die $\overline{r_i} \in \overline{R}/\mathbf{m}\overline{R}$ liegen. Nach Korollar 3.2.17 ist $A/\mathbf{m}A$ endlicher Körper. Damit gilt die Behauptung für einen endlichen Körper nicht. Das kann aber nach dem 1. Teil nicht sein. $\square$

3.3 Eine obere Schranke für den Grad der Relationen

In diesem Abschnitt wird das Resultat von Harm Derksen [Der04] behandelt, mit dem eine obere Schranke für den Grad der nötigen Relationen von C_{nd} hergeleitet wird. Im Beweis von Derksen wird an einer Stelle die Koszulauflösung benutzt, welche im folgenden betrachtet wird.

3.3.1 Koszul-Komplex

Die Ausführungen richten sich nach dem Buch [Wei94], wobei die Beweise hier etwas genauer ausgeführt werden.

Definition 3.3.1. *Sei R ein Ring mit 1. Ferner seien P_* und Q_* Komplexe von R-Moduln mit Differentialen d bzw. d'. Betrachte den Doppelkomplex $P \otimes Q := \{P_p \otimes Q_q\}_{p,q}$ mit den folgenden Abbildungen:*

$$d \otimes 1 : P_p \otimes Q_q \to P_{p-1} \otimes Q_q$$

und

$$(-1)^p \otimes d' : P_p \otimes Q_q \to P_p \otimes Q_{q-1}$$

Der totale Kettenkomplex ist gegeben durch

$$Tot^{\oplus}(P \otimes Q) := \{\sum_{p+q=n} P_p \otimes Q_q\}$$

mit den natürlichen Differentialen, die sich aus dem Quadratmuster ergeben.

Definition 3.3.2. *Sei $x \in R$ gegeben. Dann sei $K(x)$ der folgende Komplex*

$$K(x)\colon 0 \to R \xrightarrow{x} R \to 0,$$

wobei das erste R in Grad 1 liegt. Für eine endliche Folge $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ zentraler Elemente von R setze

$$K(\mathbf{x}) := Tot^{\oplus}(K(x_1) \otimes_R K(x_2) \otimes_R \cdots \otimes_R K(x_n))$$

Beispiel 3.3.3. *Sei $R = k[x, y]$, $\mathbf{x} = (x, y)$. Dann ist*

$$K(\mathbf{x}) : \qquad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\binom{-y}{x}} R^2 \xrightarrow{(x,y)} R \longrightarrow 0$$

Das folgende Lemma soll hier bewiesen werden.

Lemma 3.3.4 (Koszulauflösung)**.** *Falls $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine reguläre Folge zentraler Elemente in R ist, so ist $K(\mathbf{x})$ eine freie Auflösung von R/I mit $I = (x_1, \ldots, x_n)R$. Die freie Auflösung hat die folgende Gestalt:*

$$0 \to \Lambda^n(R^n) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda^2(R^n) \xrightarrow{\delta} R^n \xrightarrow{\mathbf{x}} R \to R/I \to 0$$

Hierbei ist das Differential δ gegeben durch

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \mapsto \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k}\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \ldots e_{i_p}.$$

Die Komplexeigenschaft lässt sich direkt nachrechnen. Die Prüfung der Exaktheit wird den Rest dieses Abschnittes beanspruchen. Dazu wird in Lemma 3.3.8 die Homologie dieses Komplexes berechnet, was mit der Künneth-Formel für Koszul-Komplexe gelingt. Die folgende Definition dient hauptsächlich zur Verkürzung der Notation.

Definition 3.3.5. *Für einen R-Modul M und eine zentrale, reguläre M-Sequenz $\mathbf{x}$ setze*

$$H_q(\mathbf{x}, M) := H_q(K(\mathbf{x}) \otimes_R M).$$

Für ein zentrales, reguläres Element $x \in R$ setzte $\mathbf{x} = (x)$ und

$$H_q(x, M) := H_q(\mathbf{x}, M).$$

Die folgende Bemerkung ist der Dreh- und Angelpunkt im Beweis der Künneth-Formel.

Bemerkung 3.3.6. *Ist*

$$\cdots \to A \to B \to C \to D \to E \to \cdots$$

eine lange exakte Sequenz von R-Moduln, so ist

$$0 \to B/Im\,(A) \to C \to Im\,(C) \to 0$$

ebenfalls exakt.

Lemma 3.3.7 (Künneth-Formel für Koszul-Komplexe)**.** *Sei $C = C_*$ ein Kettenkomplex von R-Moduln und $x \in R$. Dann existiert die folgende exakte Sequenz:*

$$0 \to H_0(x, H_q(C)) \to H_q(K(x) \otimes C) \to H_1(x, H_{q-1}(C)) \to 0.$$

Beweis. Es genügt die Bemerkung auf eine geeignete exakte Sequenz anzuwenden. Diese ist gegeben durch

$$\cdots \to H_q(C) \xrightarrow{\cdot x} H_q(C) \to H_q(K(x) \otimes C) \to H_{q-1}(C) \xrightarrow{\cdot x} H_{q-1}(C) \to \cdots \tag{3.5}$$

Folgendes ist zu prüfen:

1. $H_q(C)/Im\,(\cdot x) = H_0(x, H_q(C))$.
2. $Im\,(H_q(K(x) \otimes C)) = H_1(x, H_{q-1}(C))$.
3. Die Sequenz ist exakt.

Für die ersten beiden Punkte betrachte den Komplex $K(x) \otimes H_q(C)$, d.h.

$$0 \to H_q(C) \stackrel{\cdot x}{\to} H_q(C) \to 0$$

Hier gilt offensichtlich

$$H_0(K(x) \otimes H_q(C)) = H_q(C)/Im\,(\cdot x),$$

und mit dem gleichen Komplex für $q-1$ folgt

$$H_1(K(x) \otimes H_{q-1}(C)) = ker\,(\cdot x) = Im\,(H_q(K(x) \otimes C)),$$

wobei die letzte Gleichung aus der exakten Sequenz 3.5 folgt.

Betrachte R als Komplex konzentriert in Grad 0. Damit erhält man die exakte Sequenz von Komplexen:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow K(x) \longrightarrow R[-1] \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[d] & R \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\cdot x"] & R \arrow[d] \\
R \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & R \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Durch Tensorieren mit C erhält man eine exakte Sequenz von Komplexen der Form:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow K(x) \otimes_R C \longrightarrow C[-1] \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
C_q \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "d_q"] & C_q \oplus C_{q-1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} d & x \\ 0 & -d \end{pmatrix}"] & C_{q-1} \arrow[d, "-d_{q-1}"] \\
C_{q-1} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & C_{q-1} \oplus C_{q-2} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & C_{q-2} \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Da diese Sequenz exakt ist, folgt die Existenz der langen exakte Homologiesequenz:

$$\cdots \to H_{q-1}(C[-1]) \xrightarrow{\partial} H_q(C) \to H_q(K(x) \otimes C) \to H_q(C[-1]) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(C) \to \cdots$$

Hier gilt $H_{q-1}(C[-1]) = H_q(C)$ und $H_q(C[-1]) = H_{q-1}(C)$. Die Verbindungsabbildung ∂ ist die Multiplikation mit x. Dies folgt aus dem Schlangenlemma:

$$\begin{tikzcd}
 & H_q(C) \arrow[r] \arrow[d, hook] & H_q(k(x) \otimes C) \arrow[r] \arrow[d, hook] & H_q(C[-1]) \arrow[d, hook] & \\
 & C_q/d(C_{q+1}) \arrow[r, "\overline{\tau}"] \arrow[d] & C_q \oplus C_{q-1}/d(C_{q+1} \oplus C_q) \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "\overline{\begin{pmatrix} d & x \\ 0 & -d \end{pmatrix}}"] & C_{q-1}/d(C_q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_{q-1} \arrow[r, "\overline{\tau}"] \arrow[d] & \ker \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d] & \ker d_{q-2} \arrow[d] & \\
 & H_{q-1}(C) \arrow[r] & H_{q-1}(K(x) \otimes C) \arrow[r] & H_{q-1}(C[-1]) &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist ∂ die von rechts oben nach links unten induzierte Abbildung, d.h.

$$H_q(C[-1]) \ni c \mapsto c \mapsto (0, c) \mapsto (xc, -d(c)) \mapsto xc \mapsto xc.$$

□

Korollar 3.3.8 (Azyklizität). *Falls* $\mathbf{x}$ *eine zentrale, reguläre Sequenz eines* R*-Moduls* M *ist, so ist*

$$H_q(\mathbf{x}, M) = \begin{cases} M/\mathbf{x}M & \text{falls } q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Per Induktion: Da x ein Nichtnullteiler auf M ist, gilt die Behauptung für $n = 1$, denn

$$K(x) \otimes M : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x} M \longrightarrow 0.$$

Sei nun $n > 1$ und $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x := x_n$, sowie $C := K(\mathbf{y}) \otimes_R M$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$H_q(C) = \begin{cases} M/\mathbf{y}M & \text{falls } q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte die kurze exakte Sequenz in der Künneth-Formel zunächst für $q = 0$:

$$0 \to H_0(x, H_0(C)) \to H_0(K(x) \otimes C) \to \underbrace{H_1(x, H_{-1}(C))}_{=0} \to 0.$$

d.h.

$$\begin{aligned} H_0(K(\mathbf{x}), M) &= H_0(K(x) \otimes K(\mathbf{y}) \otimes M) \\ &= H_0(K(x) \otimes C) \\ &= H_0(x, H_0(C)) \\ &= H_0(x, M/\mathbf{y}M) \end{aligned}$$

und $K(x) \otimes M/\mathbf{y}M$ ist ja gerade

$$0 \to M/\mathbf{y}M \xrightarrow{x} M/\mathbf{y}M \to 0, \tag{3.6}$$

und da x kein Nullteiler auf $M/\mathbf{y}M$ ist (Regularität), ist $H_0(x, M/\mathbf{y}M) = M/\mathbf{x}M$. Für $q \neq 0$ ergibt die Künneth-Formel

$$0 \to \underbrace{H_0(x, H_q(C))}_{=0} \to H_q(K(x) \otimes C) \to H_1(x, H_{q-1}(C)) \to 0,$$

und der rechte Term verschwindet auch für $q \neq 1$. Für $q = 1$ gilt

$$H_1(K(\mathbf{x}) \otimes M) = H_1(x, M/\mathbf{y}M) = 0$$

nach (3.6), da x kein Nullteiler von $M/\mathbf{y}M$ ist. $\square$

Beweis. [von Lemma 3.3.4] Aus Korollar 3.3.8 folgt, dass

$$K(\mathbf{x}) \to R/I \to 0$$

exakt ist. Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass die Auflösung die gewünschte Form hat. Betrachte

$$K(x)\colon 0 \to R_x \xrightarrow{x} R \to 0$$

wobei $R_x := R$ und $e_x := 1 \in R_x$ bezeichne. Dann ist klar, dass

$$K_p(\mathbf{x}) := \bigoplus_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} R_{x_{i_1}} \otimes_R R_{x_{i_2}} \otimes_R \cdots \otimes_R R_{x_{i_p}} \otimes_R \underbrace{R \otimes_R \cdots \otimes_R R}_{n-p \text{ mal}}$$

ist. Damit bilden die

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} := e_{i_1} \otimes \cdots e_{i_p} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-p \text{ mal}} \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_p)$$

eine Basis von $K_p(\mathbf{x})$. Das Differential wird per Induktion über n berechnet. Für $n = 1$ ist das klar. Für $n > 1$ seien $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x := x_n$. Dann ist

$$K_p(\mathbf{x}) = K_{p-1}(\mathbf{y}) \otimes_R R_x \oplus K_p(\mathbf{y}) \otimes_R R$$

und das entspricht gerade dem Differential, denn für $(i_1 < \cdots < i_p < n)$ gilt die Behauptung nach Induktionsvorraussetzung, und falls $i_p = n$ ist, so gilt

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_n \mapsto \delta(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{p-1}}) \wedge e_n + (-1)^{p+1} x \, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{p-1}}$$

□

Korollar 3.3.9 ([Eis05]2.6)**.** *Für $R = k[x_1, \ldots x_n]$ ist die Koszul Auflösung eine freie Auflösung von k (sie ist sogar minimal).*

Korollar 3.3.10. *Sei $deg(x_i) = d_i$ und sei $d_1 \geq d_2 \ldots \geq 0$. Dann erhält man eine graduierte minimale Koszul-Auflösung von k als R-Modul. Insbesondere gilt*

$$deg(Tor_i^R(k,k)) = d_1 + \ldots + d_i$$

3.3.2 Resultat von Derksen

Das folgende Theorem stammt von Harm Derksen [Der04]. Das Theorem gibt eine obere Schranke für die Grade der Erzeuger der Syzygien eines endlich erzeugten $k[x_1, \ldots, x_n]$-Moduls. Im Theorem ergibt sich eine Verbindung zwischen dem Tor-Funktor und der freien (graduierten) minimalen Auflösung. Dieser Zusammenhang wird hier kurz vor dem eigentlichen Beweis von Derksen behandelt.

Theorem 3.3.11. *Sei $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ ein graduierter Polynomring mit $deg(x_i) = d_i$ und sei $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n > 0$. Sei ferner M ein endlich erzeugter graduierter Cohen-Macaulay R-Modul und*

$$0 \to F_k \to F_{k-1} \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

die minimale (graduierte) freie Auflösung von M als R-Modul. Dann ist

$$F_i \cong Tor_i^R(M,k) \otimes_k R$$

und es gilt

$$deg(Tor_i^R(M,k)) \leq d_1 + d_2 + \ldots d_{s+i} + a(M)$$

wobei s die Krulldimension von M ist, und $a(M)$ ist der Grad der Hilbertreihe von M, definiert als Zählergrad minus Nennergrad.

Beweis. Betrachte zunächst den Zusammenhang zwischen der freien graduierten Auflösung und dem Tor-Funktor. F_i ist ein freier graduierter R-Modul, hat also die Form

$$F_i = \bigoplus_j R[-a_{i,j}], \qquad \text{mit } a_{i,j} \in \mathbb{N}.$$

Der Körper k ist ein R-Modul via $f.\lambda := f(0) \cdot \lambda$. Hier ist $Tor_i^R(M,k)$ die i-te Homologie von $F. \otimes_R k$. Für ein festes i erhält man

$$F_i \otimes_R k = \bigoplus_j k[-a_{i,j}].$$

Betrachte nun das ursprüngliche Differential δ der freien Auflösung. Das Bild eines Erzeugers enthält in keiner Komponente ein skalares Vielfaches eines Erzeugers, da sonst die Auflösung nicht minimal wäre. Da δ graduierte Abbildung ist, und alle $d_i > 0$ sind, ist δ in jeder Komponente ein Polynom mit konstanten Term 0. Insbesondere ist damit $\delta \otimes_R k = 0$. Also ist $Tor_i^S(M,k) = \bigoplus_j k[-a_{i,j}]$ und damit:

$$Tor_i^S(M,k) \otimes_k R = \bigoplus_j R[-a_{i,j}] = F_i$$

Zum eigentlichen Beweis von Derksen: Beweise die Behauptung per Induktion über die Krull Dimension $s = d(M)$. Für $s = 0$ ist M noethersch und zusätzlich artinsch nach [Eis95] (9.1). Insbesondere hat M endliche Länge und ist damit endlichdimensionaler k-Vektorraum. Beweise nun diesen Fall durch Induktion über $dim_k(M)$. Die Behauptung ist trivial falls M die Länge 0 hat, denn dann ist $M = 0$. Sei nun $M \neq 0$. Dann ist $a := a(M)$ der maximale Grad, der in M auftaucht. Der a-Anteil M_a von M ist ein Untermodul von M. Es ergibt sich eine exakte Sequenz von R-Moduln.

$$0 \to M_a \to M \to M/M_a \to 0. \tag{3.7}$$

Da $dim_k(M/M_a) < dim_k(M)$ ist und $a(M/M_a) < a$ ist liefert die Induktion

$$deg(Tor_i^R(M/M_a,k)) \leq d_1 + \ldots d_i + a - 1.$$

Außerdem ist der Untermodul $M_a \cong k^m[-a]$. Die Koszul Auflösung liefert

$$deg(Tor_i^R(k,k)) = d_1 + \ldots + d_i$$

und somit gilt

$$deg(Tor_i^R(M_a,k)) = d_1 + \ldots + d_i + a. \tag{3.8}$$

Aus der exakten Sequenz 3.7 ergibt sich die lange exakte Sequenz

$$\cdots \to Tor_i^R(M_a,k) \to Tor_i^R(M,k) \to Tor_i^R(M/M_a,k) \to \cdots, \tag{3.9}$$

und die Abbildungen bleiben graduierte. Für ein Element in der Mitte mit maximalen Grad, welches im Kern des Differentials liegt, wirkt die letzte Gleichung 3.9. Andernfalls liegt es im Bild, ist also durch 3.8 beschränkt. Zusammen folgt:

$$deg(Tor_i^R(M,k)) \leq d_1 + \ldots + d_i + a.$$

Sei nun $s > 0$. Der Modul M hat die Cohen-Macaulay-Eigenschaft, das heißt es existiert ein homogenes reguläres $p \in R$ mit $\deg(e) > 0$, so dass M/pM ebenfalls Cohen-Macaulay ist ([BH93] 2.1.3). Insbesondere gilt

$$H(M/pM, t) = (1 - t^e)H(M, t),$$

und somit $a(M/pM) = a(M) + e$. Die Sequenz

$$0 \to M[-e] \to M \to M/pM \to 0$$

ist exakt, da p wegen der Nichtnullteilereigenschaft eine Verschiebung um Grad e hervorruft. Die zugehörige lange exakte Sequenz

$$\cdots \to Tor_{i+1}^R(M/pM, k) \to Tor_i^R(M, k)[-e] \to Tor_i^R(M, k) \to \cdots$$

ist damit wieder graduiert. Hier wird jedes Element maximalen Grades im mittleren Term auf 0 abgebildet, liegt also im Bild von $Tor_{i+1}^R(M/pM, k)$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} & e + deg(deg(Tor_i^R(M,k)) = deg(Tor_i^R(M,k)[-e]) \leq deg(Tor_{i+1}^R(M/pM,k)) \overset{IV}{\leq} \\ \leq \; & d_1 + \cdots d_{(s-1)+(i+1)} + a(M/pM) = d_1 + \cdots + d_{s+i} + a(M) + e \end{aligned}$$

Subtrahiert man e auf beiden Seiten, so folgt

$$deg(Tor_i^R(M,k)) \leq d_1 + d_2 + \ldots d_{s+i} + a(M).$$

□

Theorem 3.3.12. *[Kno89] Es gilt* $a(C_{nd}) \leq -\dim(C_{nd})$.

Beispiel 3.3.13. *Betrachte das Beispiel 1.0.1. Gesucht ist der Koordinatenring von* $Im\,(\varphi)$*. Erzeuger sind* X, Y *und* Z*, mit* $\deg X = 3$, $\deg Y = 4$ *und* $\deg Z = 5$*. Die Dimension einer Geraden ist offenbar* 1*. Da der* $\mathbb{A}^1$ *irreduzibel ist, ist auch* $Im\,(\varphi)$ *irreduzibel, und der Koordinatenring ist ein Integritätsring. Damit ist jedes homogene Element positiven Grades ein reguläres Element. Insbesondere besitzt der Koordinatenring die Cohen-Macaulay Eigenschaft und* X *ist ein von Null verschiedenes reguläres Element. Da die Abbildung des Kandidaten*

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/I_{kand} \to \mathbb{C}[Im\,(\varphi)]$$

surjektiv ist, ist der Grad der Hilbertreihe ≤ 2*, denn*

$$a(\mathbb{C}[X, Y, Z]/(I_{kand}, X)) = a(\mathbb{C}[Y, Z]/(Y^2, YZ, Z^2)) = 5$$

und somit ist $a(\mathbb{C}[Im\,(\varphi)]/\varphi(X)]) \leq 5$*. Da* X *regulär auf* $\mathbb{C}[Im\,(\varphi)]$ *ist, gilt*

$$a(\mathbb{C}[Im\,(\varphi)]) = a(\mathbb{C}[Im\,(\varphi)]/\varphi(X)]) - 3.$$

Somit ist $5+4+2 = 11$ *eine obere Schranke für den Grad der notwendigen Relationen.*

4 Gröbnerbasen

Das Hauptergebnis in dieser Arbeit wurde durch einen Vergleich von Hilbertreihen erzielt. Die Berechnung einer solchen Hilbertreihe lässt sich durch Gröbnerbasen erzielen. In diesem Kapitel werden kurz die wesentlichen Begriffe eingeführt und der Zusammenhang mit der Berechnung der Hilbertreihe erläutert. Dagegen wird hier auf den Existenzbeweis von Gröbnerbasen verzichtet, da dieser, neben der zusätzlichen Notation, recht umfangreich ist. Diese lässt sich zum Beispiel in dem Buch [GP08] nachlesen, auf dem auch diese kurze Zusammenfassung beruht. Dabei liefert das Buch auch gleich das passende Programm "Singular", mit dem diese Berechnungen durchgeführt werden können.

Definition 4.0.14. *Eine monomiale Ordnung ist eine totale Ordnung $<$ auf der Menge der Monome $Mon_n = \{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ in n Variablen, wobei die Ordnung bei Multiplikation mit einem Monom erhalten bleibt, d.h.*

$$x^\alpha < x^\beta \Rightarrow x^\gamma x^\alpha < x^\gamma x^\beta \quad \text{für alle } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n.$$

Definition 4.0.15. *Sei $<$ eine monomiale Ordnung. Für ein Polynom f ist $LM(f)$ das größte Monom, dass in f bzgl. $<$ vorkommt, $LT(f)$ bezeichne den Leitterm von f, d.h. das Leitmonom inklusive Koeffizienten. Für eine Menge M bezeichnet $L(M)$ das von allen Leitmonomen erzeugte Ideal, d.h.*

$$L(M) = \langle \{LM(f) \mid f \in M\} \rangle$$

Definition 4.0.16. *Eine globale Ordnung ist eine monomiale Ordnung, die $1 < x^\alpha$ für alle $\alpha \neq (0, \dots, 0)$ erfüllt.*

Bemerkung 4.0.17. *Eine globalen Ordnung ist eine Wohlordnung, d.h. jede nichtleere Menge hat ein kleinstes Element. Dies lässt sich in [GP08, Lemma 1.2.5] nachlesen.*

Definition 4.0.18. *Sei I ein Ideal in $R = k[X_1, \dots, X_n]$ und $<$ eine globale Ordnung auf den Monomen in R. Eine endliche Menge $G \subset R$ heißt Gröbnerbasis von I, falls*

$$G \subseteq I, \text{ and } L(I) = L(G).$$

Eine Gröbnerbasis wird minimal genannt, wenn $LM(g) \nmid LM(f)$ für alle $f, g \in G$ gilt.

Theorem 4.0.19. *Sei I ein Ideal in $R = k[X_1, \dots, X_n]$ und $<$ eine globale Ordnung auf den Monomen in R. Dann existiert eine Gröbner-Basis G von I.*

Bemerkung 4.0.20. *Sei I ein Ideal im Polynomring $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ und $f \in R$ ein Polynom. Ferner sei G eine Gröbnerbasis von I. Wird nun das Leitmonom von f von keinem Leitmonom der endlich vielen Erzeuger von G geteilt, so ist $f \notin I$. Diese Entscheidung ist für Monome offenbar einfach. Gilt andererseits nun $LM(g)|LM(f)$, also $LM(g)x^\gamma = LM(f)$, so hat das Leitmonom von*

$$f_1 = f - \frac{\alpha_f}{\alpha_g} x^\gamma g$$

kleinere Ordnung als das Leitmonom von f, wobei α_f und α_g die Leitkoeffizienten von f und g seien. Hier geht ein, dass die Ordnung unter Multiplikation mit Monomen beibehalten wird. Durch diese Reduktion erhält man eine Menge von Polynomen

$$\{f, f_1, f_2, \ldots\}$$

deren Leitmonome absteigend bezüglich der globalen Ordnung sind. Da $<$ eine Wohlordnung ist, hat die Menge dieser Leitmonome ein kleinstes Element. Ist dieses gleich 0, so war f im Ideal, denn in jedem Schritt wird ja nur um Elemente des Ideals reduziert. Ansonsten ist f wegen der Gröbnerbasiseigenschaft nicht in I enthalten.

Bemerkung 4.0.21. *Der in der vorangegangenen Bemerkung beschriebene Algorithmus ist der Buchbergeralgorithmus zur Bestimmung einer Normalform.*

Wie berechnet man nun eine Gröbnerbasis eines homogenen Ideals? Für monomiale Ideale wurde dies schon in den Betrachtungen nach Lemma 3.1.14 untersucht. Der nächste Satz (ohne Beweis) liefert eine Möglichkeit dieses Verfahren mit Hilfe einer Gröbnerbasis auf homogene Ideale auszudehnen.

Theorem 4.0.22 ([GP08] 5.2.6)**.** *Sei $<$ eine monomiale Ordnung auf dem Polynomring $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ und I ein homogenes Ideal von R. Dann gilt*

$$H(R/I, T) = H(R/L(I), T).$$

Bestimme nun eine Gröbnerbasis G von I. Per Definition gilt $L(I) = L(G)$. Da G endliche Menge ist, ist auch $L(G)$ endlich und monomial. Mit dem Algorithmus zur Bestimmung der Hilbertreihe von monomialen Idealen ergibt sich ein Algorithmus zur Bestimmung der Hilbertreihe von homogenen Idealen.

5 Bekannte Ergebnisse über C_{nd}

Die Dimension des Invariantenrings ist in allen Fällen bekannt.

Lemma 5.0.23 ([Dre07]). *Für $d > 1$ ist die Krulldimension von C_{nd}*

$$d(C_{nd}) = (d-1)n^2 + 1.$$

5.1 Fall: n=1

Für 1×1 Matrizen gilt $tr(x_i) = x_i$. Insbesondere ist also

$$C_{1d} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$$

und $x_1, \ldots, x_d$ sind algebraisch unabhängig.

5.2 Fall: d=1

Nach dem 1. Fundamentatheorem wird C_{n1} durch Spuren der Form $tr(X^i)$ erzeugt. Da $tr(X^{n+1})$ nach dem Theorem von Caley-Hamilton durch Spuren kleineren Grades dargestellt werden kann, ist

$$C_{n1} = \mathbb{C}[tr(X), \ldots, tr(X^n)].$$

Falls eine Relation zwischen diesen Erzeugern besteht, lässt sich diese schon auf der generischen Diagonalmatrix X bestimmen, da die diagonalisierbaren Matrizen dicht in M_n liegen. In diesem Falle folgt

$$tr(X^i) = x_{11}^i + \ldots + x_{nn}^i$$

und diese Polynome sind algebraisch unabhängig.

5.3 Fall: n=2

Der 2×2 Fall wurde von Drensky [Dre03] vollständig gelöst.

Theorem 5.3.1. *Seien $X_1, \ldots, X_d$ generische 2×2 Matrizen und seien $y_1, \ldots, y_d$ generische spurlose 2×2 Matrizen über $\mathbb{C}$.*

(i) *Die Algebra C_{2d} wird erzeugt durch*

$$tr(X_i), \quad tr(y_i y_k), \quad tr(s_3(y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3})),$$

mit $1 \leq i,k \leq d$, $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq d$. Dabei ist

$$s_3(y_1, y_2, y_3) := \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma) y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} y_{\sigma(3)}$$

das Standardpolynom vom Grad 3.

(ii) *Die definierenden Relationen von C_{2d} bezüglich der obigen Erzeuger sind*

$$tr(s_3(y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}))tr(s_3(y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3}))+$$
$$+18 \begin{vmatrix} tr(y_{i_1}y_{j_1}) & tr(y_{i_1}y_{j_2}) & tr(y_{i_1}y_{j_3}) \\ tr(y_{i_2}y_{j_1}) & tr(y_{i_2}y_{j_2}) & tr(y_{i_2}y_{j_3}) \\ tr(y_{i_3}y_{j_1}) & tr(y_{i_3}y_{j_2}) & tr(y_{i_3}y_{j_3}) \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k tr(y_i, y_{p_k}) tr(s_3(y_{p_0}, \ldots, \widehat{y_{p_k}}, \ldots, y_{p_3})) = 0,$$

mit

$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq d, \qquad 1 \leq i \leq d,$$
$$1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq d, \qquad 1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 \leq d.$$

$\widehat{y_{p_k}}$ *bedeutet, dass die Variable y_{p_k} in diesem Falle weggelassen wird.*

Bemerkung 5.3.2. *In diesem Fall liegen die Relationen in Grad* 5 *und* 6. *Diese sind nur abhängig von den spurlosen Matrizen y_i. Wir können die Höchstgewichtsvektoren in diesem Fall angeben. Der Höchstgewichtsvektor zum Gewicht* $(2,1,1,1)$ *ist gegeben durch* $i = 1, p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3, p_4 = 4$. *Der Höchstgewichtsvektor zum Gewicht* $(2,2,2)$ *ist gegeben durch* $i_1 = j_1 = 1, i_2 = j_2 = 2, i_3 = j_3 = 3$. *Insbesondere gibt es keine Relationen für den Fall* $d = 2$.

5.4 Fall: n=3,d=2

Das folgende Ergebnis stammt von Helmer Aslaksen, Vesselin Drensky und Lilia Sadikova [ADS06]. Hier sind X, Y zwei generische 3×3 Matrizen und x, y sind zwei generische spurlose 3×3 Matrizen.

Theorem 5.4.1. *Die Algebra der Invarianten C_{32} von zwei 3×3 Matrizen hat die folgende Darstellung. Sie wird erzeugt von*

$$tr(X), tr(Y), tr(x^2), tr(xy), tr(y^2)$$

$$tr(x^3), tr(x^2y), tr(xy^2), tr(y^3), v, w$$

mit der definierenden Relation

$$w^2 - \left(\frac{1}{27}w_1 - \frac{2}{9}w_2 + \frac{4}{15}w_3' + \frac{1}{90}w_3'' + \frac{1}{3}w_4 - \frac{2}{3}w_5 - \frac{1}{3}w_6 - \frac{4}{27}w_7\right) = 0.$$

Dabei sind die in der Relation vorkommenden Variablen wie folgt gegeben:

$$v := tr(x^2y^2) - tr(xyxy),$$

$$w := tr(x^2y^2xy) - tr(y^2x^2yx),$$

$$u := \begin{vmatrix} tr(x^2) & tr(xy) \\ tr(xy) & tr(y^2) \end{vmatrix},$$

$$w_1 = u^3, w_2 = u^2v, w_4 = uv^2, w_7 = v^3,$$

$$w_5 = v \begin{vmatrix} tr(x^2) & tr(xy) & tr(y^2) \\ tr(x^3) & tr(x^2y) & tr(xy^2) \\ tr(x^2y) & tr(xy^2) & tr(y^3) \end{vmatrix},$$

$$w_6 = \begin{vmatrix} tr(x^3) & tr(xy^2) \\ tr(x^2y) & tr(y^3) \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} tr(y^3) & tr(xy^2) \\ tr(xy^2) & tr(x^2y) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} tr(x^3) & tr(x^2y) \\ tr(x^2y) & tr(xy^2) \end{vmatrix},$$

$$w_3' = u \begin{vmatrix} tr(x^2) & tr(xy) & tr(y^2) \\ tr(x^3) & tr(x^2y) & tr(xy^2) \\ tr(x^2y) & tr(xy^2) & tr(y^3) \end{vmatrix},$$

$$w_3'' = 5[tr^3(y^2)tr^2(x^3) + tr^3(x^2)tr^2(y^3)]$$

$$-30[tr^2(y^2)tr^2(xy)tr(x^2y)tr(x^3) + tr^2(x^2)tr(xy)tr(y^3)tr(xy^2)]$$

$$+3\{[4tr(y^2)tr^2(xy) + tr^2(y^2)tr(x^2)][3tr^2(x^2y) + 2tr(xy^2)tr(x^3)]$$

$$+[4tr^2(xy)tr(x^2) + tr^2(x^2)tr(y^2)][3tr^2(xy^2) + 2tr(x^2y)tr(y^3)]\}$$

$$-2[2tr^3(xy) + 3tr(x^2)tr(xy)tr(y^2)][9tr(xy^2)tr(x^2y) + tr(x^3)tr(y^3)].$$

5.5 Fall: n=3,d=3

Dieser Fall wurde schon in [Hog06] und auch in [BD08] betrachtet. Dabei wurde in beiden Fällen ein GL_3-stabiles minimales Erzeugendensystem angegeben und einige Relationen von Grad 7 und 8 bestimmt. Zunächst wird hier das minimale Erzeugendensystem festgelegt, auf dem alle weiteren Betrachtungen beruhen.

Lemma 5.5.1. *Die folgenden Elemente sind ein minimales Erzeugendensystem von C_{33}. Dabei sind diese nach ihren irreduziblen Komponenten aufgeschlüsselt.*

$\underline{W_3(1):}$

(a) $tr(X)$

(b) $tr(Y)$

(c) $tr(Z)$

$\underline{W_3(2):}$

(1) $tr(x^2)$

(2) $tr(y^2)$

(3) $tr(z^2)$

(4) $tr(xy)$

(5) $tr(xz)$

(6) $tr(yz)$

$\underline{W_3(1^3):}$

(17) $tr(xyz) - tr(xzy)$

$\underline{W_3(2,1^2)}$

(24) $tr(x^2yz) - tr(x^2zy)$

(25) $tr(y^2xz) - tr(y^2zx)$

(26) $tr(z^2xy) - tr(z^2yx)$

$\underline{W_3(3):}$

(7) $tr(x^3)$

(8) $tr(y^3)$

(9) $tr(z^3)$

(10) $tr(x^2y)$

(11) $tr(x^2z)$

(12) $tr(y^2x)$

(13) $tr(y^2z)$

(14) $tr(z^2x)$

(15) $tr(z^2y)$

(16) $tr(xyz) + tr(xzy)$

$\underline{W_3(2^2):}$

(18) $tr(x^2y^2) - tr(xyxy)$

(19) $tr(x^2z^2) - tr(xzxz)$

(20) $tr(y^2z^2) - tr(yzyz)$

(21) $tr(x^2yz) + tr(x^2zy) - 2\,tr(xyxz)$

(22) $tr(y^2xz) + tr(y^2zx) - 2\,tr(yxyz)$

(23) $tr(z^2xy) + tr(z^2yx) - 2\,tr(zxzy)$

$\underline{W_3(3,1^2):}$

(27) $tr(x^2yxz) - tr(x^2zxy)$

(28) $tr(y^2xyz) - tr(y^2zyx)$

(29) $tr(z^2yzx) - tr(z^2xzy)$

(30) $tr(yxyxz) + tr(x^2y^2z) - tr(xyzxy) - tr(x^2zy^2)$

(31) $tr(zxzxy) + tr(x^2z^2y) - tr(xzyxz) - tr(x^2yz^2)$

(32) $tr(yzyzx) + tr(z^2y^2x) - tr(zyxzy) - tr(z^2xy^2)$

$\underline{W_3(2^2,1):}$

(33) $tr(x^2y^2z) + tr(x^2zy^2) + tr(xyxyz) + tr(xyxzy) - 2tr(x^2yzy) - 2tr(xy^2xz)$

(34) $tr(x^2z^2y) + tr(x^2yz^2) + tr(xzxzy) + tr(xzxyz) - 2tr(x^2zyz) - 2tr(xz^2xy)$

(35) $tr(y^2z^2x) + tr(y^2xz^2) + tr(yzyzx) + tr(yzyxz) - 2tr(y^2zxz) - 2tr(yz^2yx)$

$\underline{W_3(3^2):}$

(36) $tr(x^2y^2xy) - tr(y^2x^2yx)$

(37) $tr(x^2z^2xz) - tr(z^2x^2zx)$

(38) $tr(y^2z^2yz) - tr(z^2y^2zy)$

(39) $tr(x^2yxyz) + tr(x^2yxzy) + tr(x^2zxy^2) - tr(x^2y^2xz) - tr(x^2yzxy) - tr(x^2zyxy)$

(40) $tr(y^2xyxz) + tr(y^2xyzx) + tr(y^2zyx^2) - tr(y^2x^2yz) - tr(y^2xzyx) - tr(y^2zxyx)$

(41) $tr(z^2yzyx) + tr(z^2yzxy) + tr(z^2xzy^2) - tr(z^2y^2zx) - tr(z^2yxzy) - tr(z^2xyzy)$

(42) $tr(x^2zxzy) + tr(x^2zxyz) + tr(x^2yxz^2) - tr(x^2z^2xy) - tr(x^2zyxz) - tr(x^2yzxz)$

(43) $tr(y^2zyzx) + tr(y^2zyxz) + tr(y^2xyz^2) - tr(y^2z^2yx) - tr(y^2zxyz) - tr(y^2xzyz)$

(44) $tr(z^2xzxy) + tr(z^2xzyx) + tr(z^2yzx^2) - tr(z^2x^2zy) - tr(z^2xyzx) - tr(z^2yxzx)$

(45) $tr(x^2y^2z^2) + tr(x^2zyzy) + tr(xyxz^2y) + tr(xyzxyz) + tr(xzxzy^2)$
$-tr(x^2yzyz) - tr(x^2z^2y^2) - tr(xyxyz^2) - tr(xy^2zxz) - tr(xzyxzy)$

Die Relationen werden mit steigenden Grad recht schnell sehr kompliziert. Hier werden zunächst nur zwei Relationen angegeben. Dabei liegt die eine Relation in Grad 7 und die andere Relation in Grad 8.Hier steht μ für den Multigrad der jeweiligen Relation.
$\mu = [3, 2, 2]$

$$\begin{aligned} &-2t_7t_{20} + 2t_{11}t_{22} + t_1t_{35} + t_5t_{33} + t_4t_{34} \\ &-2t_{14}t_{18} + t_{16}t_{21} + 2t_{10}t_{23} - 3t_{17}t_{24} - 2t_{12}t_{19} \end{aligned}$$

$\mu = [4, 3, 1]$

$$\begin{aligned} &-t_2t_7t_{17} - t_1t_{12}t_{17} - 3t_{12}t_{27} + 3t_{10}t_{30} \\ &-t_4^2t_{24} + 2t_4t_{10}t_{17} - t_4t_{39} - 3t_5t_{36} + t_1t_2t_{24} \\ &-2t_{18}t_{24} + 3t_7t_{28} + t_1t_{40} \end{aligned}$$

Im Artikel von Veselin Drensky [BD08] werden sogar alle Relationen in diesen zwei Graden bestimmt. Die Relationen vom Grad 7 werden dort sogar für beliebiges d bestimmt. Wie schon gezeigt wurde, ist ein homogenes Parametersystem von C_{nd} auch eine homogene reguläre Folge von C_{nd}. Ein solches wurde von Lopatin [Lop04] bestimmt.

Theorem 5.5.2. *Das folgende homogene Parametersystem für C_{33} stammt aus [Lop04].*

$tr(X)$	$tr(Y)$	$tr(Z)$
$tr(x^2)$	$tr(xy)$	$tr(xz)$
$tr(y^2)$	$tr(yz)$	$tr(z^2)$
$tr(x^3)$	$tr(y^3)$	$tr(z^3)$
$tr(x^2y) + tr(x^2z) - tr(z^2x)$	$tr(x^2z) - tr(z^2y)$	$tr(x^2z) - tr(y^2x)$
	$tr(xyz) - tr(xzy)$	
$tr(x^2y^2)$	$tr(x^2z^2)$	$tr(y^2z^2)$

Bemerkung 5.5.3. *Für die letzten drei Spuren ist auf den ersten Blick nicht klar, wie diese in Termen des minimalen Erzeugendensystems E geschrieben werden können. Es gilt*

$$\begin{aligned} tr(x^2y^2) &= \frac{1}{6}t_1t_2 + \frac{1}{3}t_4^2 + \frac{1}{3}t_{18}, \\ tr(x^2z^2) &= \frac{1}{6}t_1t_3 + \frac{1}{3}t_5^2 + \frac{1}{3}t_{19}, \\ tr(y^2z^2) &= \frac{1}{6}t_2t_3 + \frac{1}{3}t_6^2 + \frac{1}{3}t_{20}. \end{aligned}$$

Bezeichne H das oben angegebene homogene Parametersystem und I das Relationenideal zu E. Da t_{18}, t_{19} und t_{20} hier isoliert vorkommen, lässt sich $\mathbb{C}[E]/(I,H)$ durch Eliminieren der 19 *zugehörigen Variablen realisieren. Insbesondere kann man hier auch alternativ t_{18}, t_{19} und t_{20} statt $tr(x^2y^2)$, $tr(x^2z^2)$ und $tr(y^2z^2)$ wählen.*

Die Hilbertreihen von C_{nd} wurde für kleine n und d von Berele und Stembridge berechnet. Die nächste Proposition gibt die Nenner der Hilbertreihen für beliebiges d an.

Proposition 5.5.4. *(Berele/Stembridge [BS99])*
Setze $[u] := 1-u$ und $[u]_n := (1-u)(1-u^2)\dots(1-u^n)$. Dann sind die Nenner der Hilbertreihe von C_{3d} und T_{3d} die Folgenden:

$$\begin{aligned} G(C_{3d}, t_1, \dots, t_m) &= \prod_{i=1}^{d}[t_i]_3 \prod_{1\le i<j\le d}[t_it_j]^2[t_i^2t_j][t_it_j^2] \prod_{1\le i<j<k\le d}[t_it_jt_k], \\ G(T_{3d}, t_1, \dots, t_m) &= \prod_{i=1}^{d}[t_i][t_i]_2 \prod_{1\le i<j\le d}[t_it_j]^2[t_i^2t_j][t_it_j^2] \prod_{1\le i<j<k\le d}[t_it_jt_k], \end{aligned}$$

Theorem 5.5.5. *(Berele/Stembridge [BS99])*
Für $d \geq 2$ ist $H(C_{3d}) = F(C_{3d})/G(C_{3d})$ bzw. $H(T_{3d}) = F(T_{3d})/G(T_{3d})$. Hier ist F ein symmetrisches Polynom vom Grad $e(C_{3d})d$ bzw. $e(T_{3d})d$ mit

$$\begin{aligned} e(C_{3d}) &= (d^2+7d-14)/2 \\ e(T_{3d}) &= (d^2+7d-18)/2 \end{aligned}$$

Als direkte Folge lässt sich hier $a(C_{3d})$ bestimmen.

Korollar 5.5.6. *Der im Theorem 3.3.11 eingeführte Grad der Hilbertreihe ist*

$$a(C_{3d}) = -9d.$$

Proposition 5.5.7. *(Berele/Stembridge [BS99])*

Zu den Nennern $G(C_{3d})$ und $G(T_{3d})$ gehören die folgenden Zähler:

$$\begin{aligned}
F(T_{33}) &= (1+e_3)(1+e_3+e_1e_3-e_2e_3-e_1e_2e_3+e_3^2-e_2^2e_3+e_1e_3^2 \\
&\quad +e_1^2e_3^2-e_2e_3^2+e_1e_2e_3^2-e_3^3+e_1e_3^3-e_2e_3^3-e_3^4-e_3^5), \\
F(C_{33}) &= 1-e_2+e_3+e_1e_3+e_2^2+e_1^2e_3-e_2e_3-2e_1e_2e_3+e_3^2+e_2^2e_3 \\
&\quad -e_1^2e_2e_3+2e_1^2e_3^2+e_1^3e_3^2+e_2^2e_3^2-e_1^2e_2e_3^2-e_1e_3^3-2e_1e_2^2e_3^2 \\
&\quad +2e_2e_3^3-e_2^3e_3^2+e_1^3e_3^3+2e_1^2e_2e_3^3-2e_1e_3^4-e_1^2e_3^4+e_1e_2^2e_3^3 \\
&\quad +e_2e_3^4-e_2^3e_3^3-2e_2^2e_3^4-e_1^2e_3^5+e_1e_2^2e_3^4+2e_1e_2e_3^5+e_3^6 \\
&\quad -e_2^2e_3^5+e_1e_3^6-e_2e_3^6-e_1^2e_3^6-e_3^7+e_1e_3^7-e_3^8,-e_2^2e_3^5 \\
&\quad +e_1e_3^6-e_2e_3^6-e_1^2e_3^6-e_3^7+e_1e_3^7-e_3^8,
\end{aligned}$$

Dabei sind e_1, e_2, e_3 die elementarsymmetrischen Funktionen in t_1, t_2, t_3, d.h. $e_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $e_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$, $e_3 = t_1t_2t_3$.

5.6 Fall: n=4, d=2

Die folgende Zerlegung eines minimalen Erzeugendensystems von C_{42} stammt von Vesselin Drensky und Lilia Sadikova.

Theorem 5.6.1 ([DS06]). *Ein minimales Erzeugendensystem von C_{42} zerlegt sich als GL_2-Modul wie folgt:*

$$\begin{aligned}
G =& W(1,0)\oplus W(2,0)\oplus W(3,0)\oplus W(4,0)\oplus W(2,2)\oplus W(3,2) \\
&\oplus W(4,2)\oplus W(3,3)\oplus W(4,3)\oplus W(5,3)\oplus W(4,4)\oplus W(6,3)\oplus W(5,5),
\end{aligned}$$

wobei $W(\lambda_1,\lambda_2)$ der irreduzible GL_2-Modul zur Partition (λ_1,λ_2) ist. Für die Partitionen $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(5,5)$ sind die Höchstgewichtsvektoren zur Partition $W(\lambda_1,\lambda_2)$ gegeben durch

$$w_\lambda(X,Y) = tr((XY-YX)X^{\lambda_1-\lambda_2}).$$

Im Falle $\lambda = (5,5)$ ist

$$w_{(5,5)} = tr((XY-YX)^3(X^2Y^2-XYYX-YXXY+Y^2X^2)$$

der Höchstgewichtsvektor der irreduziblen Komponente $W(5,5)$.

Die Relationen für Grad 12 bis 14 wurden von Vesselin Drensky und Roberto La Scala [DLS09] bestimmt. Die Relationen selbst sind schon recht komplex. Die Zerlegung in irreduzible Komponenten ergibt in diesen Graden

$$W(7,5)\oplus 2W(6,6)\oplus W(8,5)\oplus 2W(7,6)\oplus W(9,5)\oplus 3W(8,6)\oplus W(7,7).$$

In [DS06] wird auch die Hilbertreihe von C_{42} angegeben. Diese wurde bis auf einige Schreibfehler zunächst von Teranishi [Ter87] berechnet, welche von Berele und Stembridge in [BS99] korrigiert wurden.

$$\begin{aligned}
H(C_{42},t,u) &= \frac{P_C(t,u)}{(1-t)(1-u)Q_C(t,u)} \\
P_C(t,u) &= (1-e_2+e_2^2)(1-e_1e_2+e_1e_2^2+e_1^2e_2^2+e_1e_2^3-e_1e_2^4+e_2^6) \\
Q_C(t,u) &= (1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-u^2)(1-u^3)(1-u^4) \\
&\quad (1-tu)^2(1-t^2u)^2(1-tu^2)^2(1-t^3u)(1-tu^3)(1-t^2u^2).
\end{aligned}$$

Dabei sind $e_1 = t+u$ und $e_2 = tu$ die elementarsymmetrischen Polynome.

6 Methoden

In Kapitel 5 wurde ein minimales homogenes Erzeugendensystem von C_{33} vorgestellt. Die zentrale Frage dieser Arbeit ist, wie diese Relationen bezüglich dieses Erzeugendensystems aussehen. Da die Algebra C_{nd} graduiert ist, ist insbesondere auch das Relationenideal ein homogenes Ideal, d.h. für jede Relation sind auch ihre homogenen Komponenten Relationen. Nach den Ausführungen über minimale freie Auflösungen in der Einleitung ist klar, dass das Relationenideal endlich erzeugt ist. Es stellt sich also die Frage nach einem minimalen homogenen Erzeugendensystem des Relationenideals. Die Bestimmung dieses Erzeugendensystems zerlegt sich damit in drei Teilschritte:

1.) Bestimmung von (homogenen) Relationen.

2.) Aussortieren von nicht benötigten Relationen.

3.) Prüfung, ob das Relationenideal von den gefundenen Relationen erzeugt wird.

Zu jedem dieser drei Punkte gibt es verschiedene Strategien. Dabei ergibt sich für die ersten beiden Punkte jeweils ein einfacher Lösungsansatz, da C_{nd} eine endlich erzeugte positiv graduierte $\mathbb{C}$-Algebra ist. Ein zweiter recht ähnlicher Ansatz ergibt sich aus der Tatsache, dass zusätzlich die GL_d auf C_{nd} operiert und der lineare Span der Erzeuger der Algebra, bzw. des Ideals sich als GL_d-Modul beschreiben lassen. Ferner lässt sich das erste Problem durch eine Anwendung des zweiten Fundamentaltheorems lösen. Dies ermöglicht es die Relationen sehr kompakt darzustellen.

Das zweite Problem besteht darin, dass man für eine gefundene Relation festellen muss, ob diese schon in dem Ideal der vorher gefundenen Relationen liegt. Dieses lässt sich durch Lösen eines linearen Gleichungssystems oder mit Gröbnerbasen erreichen.

Durch die sukzessive Untersuchung des Relationenideals ergibt sich das dritte Problem. Es ist nämlich nicht von vornherein klar, wieviele Grade zu überprüfen sind. Hier werden zwei unterschiedliche Lösungen dargestellt. In beiden spielt die Cohen-Macaulay-Eigenschaft eine zentrale Rolle. Die erste Lösung folgt aus dem Theorem 3.3.11, welches eine obere Schranke für den Grad der zu untersuchenden Relationen angibt. Für den zweiten Ansatz wird die Hilbertreihe von C_{nd} benötigt, da diese mit der Hilbertreihe des Kandidaten verglichen wird. Ein Kandidat ist hier

$$\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_k]/(p_1, \ldots, p_l), \tag{6.1}$$

wobei $T_1, \ldots, T_k$ Variablen sind, die für die Erzeuger eines minimalen Erzeugendensystems von C_{nd} stehen und die Polynome $p_1, \ldots, p_l$ sind Relationen zwischen diesen Erzeugern des hier festgelegten minimalen Erzeugendensystems. Stimmen die Hilbertreihen überein, so ist der Kandidat isomorph zu C_{nd}.

6.1 Grundlegende Vereinfachungen

Die hier angegebenen Methoden beruhen größtenteils auf dem Koeffizientenvergleich in $\mathbb{C}[M_n^d]$. Insbesondere steigt der Aufwand der Berechnungen mit der Anzahl der zu berücksichtigen Variablen stark an. Daher ist es ratsam, vorab einige Variablen zu eliminieren. Diese folgenden Vereinfachungen finden sich schon in [ADS06]. Zunächst können die generischen Matrizen als spurlos vorausgesetzt werden, was d Variablen spart. Ferner kann die erste Matrix zusätzlich als Diagonalmatrix vorausgesetzt werden, da die diagonalisierbaren Matrizen dicht in der Menge aller Matrizen liegt. Da die Invarianten konjugationsinvariant sind, kann man damit die erste Matrix stets als spurlose Diagonalmatrix voraussetzen. Dies spart nochmals $n^2 - n = n(n-1)$ Variablen.

Die folgenden Überlegungen konkretisieren die Vereinfachung zu den spurlosen generischen Matrizen noch ein wenig.

Lemma 6.1.1. *Sei M_n^0 die Menge der spurlosen Matrizen. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcl} M_n & \cong & \mathbb{C} \oplus M_n^0 \\ A & \mapsto & (tr(A), A - \frac{1}{n}E_n), \end{array}$$

wobei E_n die entsprechende Einheitsmatrix sei.

Korollar 6.1.2. *Es gilt*

$$M_n^d \cong \mathbb{C}^d \oplus (M_n^0)^d.$$

Auf den Koordinatenringen liefert dies

$$\mathbb{C}[M_n^d] \cong \mathbb{C}[\mathbb{C}^d] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[(M_n^0)^d].$$

Korollar 6.1.3. *Schränkt man den, durch die obigen Abbildungen, gegebenen Isomorphismus auf $\mathbb{C}[M_n^d]^{GL_n} = C_{nd}$ ein, so erhält man*

$$C_{nd} \cong \underbrace{\mathbb{C}[tr(X_1), \ldots, tr(X_d)]}_{\cong \mathbb{C}[\mathbb{C}^d]} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[tr(x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \mid k \geq 2 \text{ und } i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, d\}].$$

Dabei sind $X_1, \ldots, X_d$ generische Matrizen und $x_1, \ldots, x_d$ spurlose generische Matrizen.

Insbesondere sind die Relationen von C_{nd} aufgrund des Tensorproduktes schon durch die Relationen von

$$C_{nd}^0 := \mathbb{C}[tr(x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \mid k \geq 2 \text{ und } i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, d\}]$$

gegeben. In Bezug auf Definition 2.3.1, genügt es nun die Relationen in

$$C_\infty^0 := C_\infty/(Tr(X_i)|i \in \mathbb{N})$$

zu bestimmen. Um Anzudeuten, dass C_∞^0 den spurlosen Fall behandelt, schreibe x_i statt X_i.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch die Symmetrie von C_{nd}. Der Invariantenring C_{nd} ist $\mathbb{N}^d$-graduiert. Es genügt nun die Relationen in den Multigraden, die Partitionen sind, zu finden. Dann erhält man aufgrund der Symmetrie durch Permutation der Variablen die Relationen in den zugehörigen Multigraden. Da die erste generische Matrix stets als Diagonalmatrix angenommen werden kann, ergibt dies eine zusätzliche Rechenersparnis, da in den Spurprodukten öfter die erste generische spurlose Diagonalmatrix vorkommt.

6.2 Bestimmung von homogenen Relationen

6.2.1 Methode: Lineare Algebra

Gegeben sei eine endlich erzeugte graduierte $\mathbb{C}$-Teilalgebra A eines positiv graduierten Polynomrings $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$. Diese Voraussetzung ist für C_{nd} stets gegeben, da $C_{nd} \subset \mathbb{C}[M_n^d]$. Sei nun $t_1, \dots, t_k$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem und $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_k]$ graduierter Polynomring, wobei $\deg T_i = \deg t_i$ gegeben sei. Der Einsetzungshomomorphismus $\varphi\colon T_i \mapsto t_i$ liefert eine exakte Sequenz graduierter k-Algebren

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \mathbb{C}[T_1, \dots, T_k] \xrightarrow{\varphi} A = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_k] \longrightarrow 0.$$

Aufgrund der Graduierung lässt sich diese gradweise aufspalten. Es ergibt sich damit für jeden Grad l eine exakte Sequenz von k-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \ker\varphi_l \longrightarrow \mathbb{C}[T_1, \dots, T_k]_l \xrightarrow{\varphi_l} A_l = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_k]_l \longrightarrow 0,$$

wobei φ_l eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist. Um $\ker\varphi_l$ zu bestimmen, ist es zweckmäßig, $\varphi_l\colon \mathbb{C}[T_1, \dots, T_k]_l \to \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]_l$ zu betrachten, da dort im Gegensatz zu A_l eine explizite Basis vom Grad l bekannt ist. Dies sind gerade die Monome vom Grad l. Somit lässt sich die darstellende Matrix von φ_l leicht aufstellen und der Kern bestimmen, wobei der Aufwand mit steigendem Grad stark zunimmt.

Bemerkung 6.2.1. *C_{nd} ist nicht nur graduiert, sondern sogar multigraduiert. Das obige Verfahren funktioniert genauso für Multigrade. Aufgrund der Symmetrie von C_{nd} kann man sich auf Multigrade beschränken, die Partitionen sind. Die restlichen Relationen erhält man durch Permutation der Matrizen.*

Der Aufwand, die linearen Gleichungssysteme (exakt) zu lösen hängt hauptsächlich von der Größe der Gleichungssysteme ab. Nach [Pla10] liegt der Aufwand für den Gauß-Algorithmus im Bereich $\mathcal{O}(N^3)$, wobei N die Größe der zugehörigen Matrix ist. Ist E

ein minimales homogenes Erzeugendensystem von C_{nd}, so ist N die Anzahl der Monome im Polynomring $\mathbb{C}[E]$ vom Grad l. N ist also polynomial in l und der Aufwand wächst polynomial mit dem Grad. Dies birgt rechentechnische Probleme. So lässt sich im Fall C_{33} das Gleichungssystem für den Multigrad $(3, 2, 2)$ noch in wenigen Sekunden lösen, während für den Multigrad $(4, 4, 4)$ schon ein Tag eingeplant werden sollte.

6.2.2 Die Höchstgewichtsvektorenmethode

Die erste Methode lässt sich noch verfeinern. Die folgenden Ausführungen beschreiben die Idee des in [DLS09] verwendeten Verfahrens. Die Methode beruht darauf, dass C_{nd} ein GL_d-Modul ist und sich ein minimales Erzeugendensystem von C_{nd} als Basis W einer GL_d-Teildarstellung von C_{nd} wählen lässt, siehe[BD08]. Betrachtet man den Polynomring $\mathbb{C}[W]$, so operiert die GL_d auf diesem auf kanonische Art. Insbesondere ergibt sich eine GL_d-lineare Abbildung

$$\mathbb{C}[W] \xrightarrow{\varphi} C_{nd}.$$

Der Kern dieser Abbildung ist damit auch ein GL_d-Modul. Da die GL_d Aktion auch auf $\mathbb{C}[W]$ graderhaltend ist, zerlegt sich jeder Grad l als direkte Summe von GL_d-Darstellungen. Diese sind eindeutig durch ihre Höchstgewichtsvektoren bestimmt. Ersetzt man in Methode 6.2.1 die Monome vom Grad l durch die Höchstgewichtsvektoren eines Grades, so erhält man die Höchstgewichtsvektoren, die den Kern bilden. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass es die zu lösenden Gleichungssysteme verkleinert. Es lässt sich wie in Methode 6.2.1 auch auf Multigraden statt Graden anwenden. Der Aufwand ist hier kleiner als in Methode 6.2.1. Da die Anzahl der Höchstgewichtsvektoren allerdings von der Anzahl der Monome abhängig ist, wächst der Aufwand ungefähr gleich stark. Ferner sind hier Methoden für die Berechnung der Höchstgewichtsvektoren und der Basis des zugehörigen GL_d-Modul zu implementieren.

6.2.3 Methode: Zweites Fundamentaltheorem

Das zweite Fundamentaltheorem beschreibt die Relationen zwischen den Erzeugern von

$$C_{nd} = \{tr(X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}) \mid i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, d\}, k \in \mathbb{N}\},$$

wobei $X_1, \ldots, X_d$ generische Matrizen sind. Die aus dem zweiten Fundamentaltheorem gewonnenen Relationen sind daher leider in Kombinationen der Standarderzeuger, das heißt aller $tr(X_{i_1} \cdots X_{i_k})$, von C_{nd} beschrieben. Da hier aber ein minimales Erzeugendensystem vorliegt, müssen diese Spuren als Kombination der Erzeuger des minimalen Erzeugendensystems ausgedrückt werden.

Das zweite Fundamentaltheorem 2.3.10 ermöglicht eine sehr kurze Notation einer Relation, denn die dort angegebene Relation lässt sich durch $n + 1$ Monome ausdrücken. Diese Kurznotation soll bei der Reduktion in das minimale Erzeugendensystem beibehalten werden. Daher muss die Umwandlung hier in eindeutiger Weise erfolgen. Für C_{33}

gibt es z.B. mehrere Möglichkeiten, Spuren vom Grad 7 als Produkt von Spuren kleineren Grades zu schreiben. Dort sind Spuren vom Grad ≤ 6 eindeutig durch das minimale Erzeugendensystem darstellbar, so dass diese Umwandlung nicht weiter konkretisiert werden muss.

Da C_{nd} von den Spuren vom Grad $\leq N(n)$ erzeugt wird, muss es eine Reduktionsgleichung für $tr(X_1X_2\cdots X_{N(n)+1})$ geben, wobei $X_1,\dots,X_{N(n)+1}$ generische $n\times n$ Matrizen sind. Reduktionsgleichung bedeutet, dass sich die obige Spur als Kombination von Spuren kleineren Grades schreiben lässt. Das ist durch Anwendung des zweiten Fundamentaltheorems möglich. Um die obige Spur durch Einsetzen in die fundamentale Spuridentität zu erhalten, teile die $N(n)+1$ generische Matrizen auf $n+1$ Tupel auf. Dabei spielt auch die Reihenfolge in den Tupeln eine gewisse Rolle. Da eine reine Spur vom Grad $N(n)+1$ nur auf diese Weise erzeugt werden kann, muss die Gleichung im Raum aller so erhaltenen Relationen enthalten sein. Jede nichttriviale Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems ergibt dann eine Reduktionsgleichung. Da nur die Spuren vom Grad $N(n)+1$ betrachtet werden, können die Spuren kleineren Grades, die durch Einsetzen in die fundamentale Spuridentität entstehen, zunächst vernachlässigt werden.

Beispiel 6.2.2. *Betrachte C_{2d}. Hier gilt $N(2)=3$, somit liegt die Reduktionsgleichung in Grad 4. Da beim Einsetzen in die fundamentale Spuridentität lediglich die Nummer der Matrix interessiert, setze $[1,2][3][4]$ für das 3-Tupel (X_1X_2, X_3, X_4) und kürze $tr(X_1X_2X_3X_4)$ mit $[1234]$ ab. Durch Einsetzen ergibt sich*

3-Tupel	*Reine Spuren vom Grad 4*
$[1,2][3][4]$	$[1234]+[1243]$
$[4,1][2][3]$	$[1234]+[1324]$
$[2,4][1][3]$	$[1324]+[1243]$

und da hier eine reine Spur isoliert werden soll, genügt es diese zu betrachten. Offensichtlich lässt sich

$$[1234]=\frac{1}{2}([1,2][3][4]+[4,1][2][3]-[2,4][1][3])$$

isolieren, wobei auf der linken Seite die Spur steht und auf der rechten Seite die Dreiertupel, die in die fundamentale Spuridentität einzusetzen sind. Durch Einsetzten der Terme in die fundamentale Spuridentität ergibt sich

$$\begin{aligned}
[1,2][3][4] &\hat{=} [12][3][4]-[123][4]-[124][3]-[12][34]+[1234]+[1243]\\
[4,1][2][3] &\hat{=} [14][2][3]-[124][3]-[134][2]-[14][23]+[1234]+[1324]\\
[2,4][1][3] &\hat{=} [24][1][3]-[124][3]-[243][1]-[24][13]+[1324]+[1243],
\end{aligned}$$

also insgesamt

$$\begin{aligned} 0 &= [1234] + \frac{1}{2}([243][1] - [123][4] - [124][3] - [134][2] \\ &\quad +[12][3][4] + [14][2][3] - [24][1][3] - [12][34] - [14][23] + [24][13]). \end{aligned}$$

Für die Reduktion genügt es, sich auf spurlose Matrizen zu beschränken. Da aber auch Spuren von höheren Grad reduziert werden sollen, wird eine Matrix nicht als spurlose vorausgesetzt. Hier sei X_4 nicht spurlos. In der Folge werden die spurlosen Matrizen mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet. Dies ergibt

$$\begin{aligned} Tr(x_1x_2x_3X_4) &= \frac{1}{2}(Tr(x_1x_2x_3)Tr(X_4) + Tr(x_1x_2)Tr(x_3X_4) \\ &\quad +Tr(x_1X_4)Tr(x_2x_3) - Tr(x_2X_4)Tr(x_1x_3)). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Nun muss noch festgelegt werden, wie eine Spur genau reduziert werden soll. Eine Spur verändert sich bei zyklischem Vertauschen der Faktoren nicht. Deshalb kann stets das lexikografisch kleinste Element betrachtet werden, d.h. statt $[123113]$ *betrachte* $[113123]$ *(in C_{23}). Die Reduktion wird durch Einsetzten von $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3, X_4 = 123$ in die Reduktionsgleichung durchgeführt. Diese liefert dann in eindeutiger Weise eine Reduktion auf Produkte vom Grad ≤ 4. Sukzessive Anwendung dieser Reduktion liefert eine eindeutigen Ausdruck, in dem nur Spuren vom Grad ≤ 3 vorkommen. Diese müssen dann noch an das minimale Erzeugendensystem angepasst werden. Dies ist hier eindeutig, da es in Grad ≤ 3 keine nichttrivialen Relationen gibt.*

Die folgenden Definitionen und der dazugehörige Algorithmus konkretisiert das im Beispiel angedeutete Verfahren.

Definition 6.2.3. *Eine Reduktionsgleichung für $n \times n$-Matrizen ist eine Spurrelation*

$$Tr(x_1x_2\cdots x_{N(n)}X_{N(n)+1}) = \sum_P \lambda_P \prod_{M_P} Tr(M_P), \tag{6.3}$$

wobei M_P Worte in den Buchstaben $x_1, \ldots, x_{N(n)}, X_{N(n)+1}$ sind, deren Länge kleiner als $N(n)+1$ sei. Dabei ist $\lambda_P \in \mathbb{C}$ der zum Spurprodukt gehörige Koeffizient. Spurrelation bedeutet hier, dass

$$\Phi(Tr(x_1x_2\cdots x_{N(n)}X_{N(n)+1})) = \Phi(\sum_P \lambda_P \prod_{M_P} Tr(M_P)),$$

wobei die obigen Elemente in $C_\infty/(Tr(X_i)|i \in \mathbb{N} - \{N(n)+1\})$ betrachtet werden. Das Φ stammt aus 2.3.5.

Bemerkung 6.2.4. *Eine Reduktionsgleichung kann stets so gewählt werden, dass sie nur von $x_1, \ldots, x_{N(n)}$ und $X_{N(n)+1}$ abhängt. Hat man eine solche Reduktionsgleichung gefunden, so schreibe $R(x_1, \ldots, x_{N(n)}, X_{N(n)+1})$ für die rechte Seite von* (6.3).

Beispiel 6.2.5. *Die Gleichung (6.2) ist eine Reduktionsgleichung für 2×2 Matrizen.*

Algorithmus 6.2.6. *Eine Reduktionsgleichung für $n \times n$ Matrizen ermöglicht eine eindeutige Reduktion einer formalen Spur*

$$Tr(x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \in C^0_\infty,$$

der Länge $k > N(n)$. Sei dazu R die Reduktionsgleichung.

1. *Sei $Tr(x_{j_1} \cdots x_{j_k})$ die Normalform von $Tr(x_{i_1} \cdots x_{i_k})$ (vgl. Bemerkung 2.3.2).*

2. *Die Reduktion ist dann $R(x_{j_1}, \dots, x_{j_{N(n)}}, x_{j_{N(n)+1}} \cdots x_{j_k})$.*

Insbesondere kommen in der Reduktion lediglich formale Spuren kleineren Grades vor.

Definition 6.2.7. *Ein Relationenbrüter für C_{nd} ist ein Tupel (E, R, r), wobei gilt*

1. *$E \subset C^0_\infty$ eine endliche Menge homogener Elemente ist, deren Bilder ein minimales Erzeugendensystems von C^0_{nd} bilden;*

2. *R eine Reduktionsgleichung für $n \times n$-Matrizen ist und*

3. *$r : \{Tr(x_1 \cdots x_k) \mid k \leq N(n)\} \to \mathbb{C}[E]$ ist eine graderhaltende Abbildung mit*

$$\Phi(r(Tr(x_1 \cdots x_k))) = \Phi(Tr(x_1 \cdots x_k)) = tr(x_1 \cdots x_k).$$

Algorithmus 6.2.8 (Brutalgorithmus)**.** *Gegeben sei ein Relationenbrüter für C_{nd}. Sei $(M_1, \dots, M_{n+1})$ ein $n+1$-Tupel von Wörtern in den Buchstaben $x_1, \dots, x_d$. Dann erhält man wie folgt auf eindeutige Weise eine Spurrelation für das minimale Erzeugendensystem, das im Relationenbrüter durch E kodiert wird. Sei dazu F die fundamentale Spuridentität (2.3.9). Der Algorithmus läuft wie folgt ab:*

1. *Setze $f = F(M_1, \dots, M_{n+1}) \in \mathbb{C}^0_\infty$*

2. *Solange f formale Spuren vom Grad größer $N(n)$ enthält, wende Algorithmus 6.2.6 auf alle formalen Spuren maximalen Grades (gleichzeitig) an. Nenne das Ergebnis wieder f.*

3. *Hier haben alle vorkommenden formalen Spuren in f einen Grad $\leq N(n)$. Wende r auf diese an. Das Ergebnis ist eine Spuridentität bezüglich der Elemente aus E.*

Als Pseudocode formuliert:

```
Eingabe: x = (M1,M2, ..., M(n+1)), (E,R,r)
Ausgabe: Eine Spurrelation für nxn Matrizen

f = F(x)
while (f enthält eine reine Spur der Länge > N(n))
  S = alle reinen Spuren maximaler Länge in f
  for s in S
    f = f.subs(s=reduziere(s,R))

return r(f)
```

Bemerkung 6.2.9. *Der Aufwand hängt direkt von der Anzahl der Reduktionen ab. Üblicherweise treten im Reduktionsprozess alle mit den Anfangsbuchstaben darstellbaren reinen Spuren kleineren Grades auf (Ein Grad wird übersprungen, da Spuren vom Grad* 1 *ausgeschlossen sind). Zum Vergleich: Im Fall* C_{33} *braucht man in Grad* 7 *sechs Reduktionen. Grad* 12 *benötigt hingegen schon fast* 900 *Reduktionen pro Wortetupel.*

Bemerkung 6.2.10. *Ein wesentlicher Punkt ist hier, dass die Reduktion eindeutig ist. Damit lassen sich dann die notwendigen Relationen von* C_{nd} *durch einen Relationenbrüter und eine Menge von* $n+1$ *Tupeln aus Wörtern wiedergeben.*

Algorithmus 6.2.11. *Man erhält nun alle Relationen eines Grades* k*, indem man alle Worte eines Grades in den Brutalgorithmus einsetzt. In Pseudocode:*

```
Eingabe: k = Grad, (E,R,r) Relationenbrüter
Ausgabe: Erzeugendensystem der Relationen vom Grad k

wortetupel = bestimme_wortetupel(k)
I = []
for wt in wortetupel
  I = I union {brutalgorithmus(wt,(E,R,r))}

return I
```

Bemerkung 6.2.12. *Der Aufwand dieses Algorithmus ist recht hoch, da zum einen die Anzahl der Wortetupel vom Grad* k *sehr schnell wächst und zum anderen der Brutalgorithmus recht aufwändig ist. Daher sollte zum ersten Bestimmen der Relationen Methode 6.2.1, oder besser noch Methode 6.2.2 verwendet werden. Sobald man die Grade und Vielfachheiten der notwendigen Relationen kennt, lassen sich mit dem Brutalgorithmus durch geschicktes Raten die geeigneten Tupel bestimmen.*

Betrachte den Fall 5.3.1, d.h. $n = 2$. Eine Reduktionsgleichung R für $n \times n$-Matrizen ist durch Gleichung (6.2) gegeben. Betrachtet man die Relationen in 5.3.1 genauer, so ist klar, dass der lineare Span des minimalen Erzeugendensystems des Relationenideals als GL_d-Modul die Zerlegung

$$W_{(2,1,1,1)} \oplus W_{(2,2,2)}$$

besitzt. Somit genügt es die Höchstgewichtsvektoren dieser Darstellungen zu bestimmen, da sich die übrigen erzeugenden Relationen aus diesen durch geeignete GL_d-Operationen ergeben. Insgesamt genügt es diesen Fall also für $d = 4$ zu betrachten. Das minimale Erzeugendensystem ist in 5.3.1 schon angegeben. Die fundamentale Spuridentität liefert

$$F(y_1, y_2, y_3) = Tr(y_1 y_2 y_3) + Tr(y_1 y_3 y_2),$$

da die restlichen formalen Spuren verschwinden ($0 = Tr(y_1) = Tr(y_2) = Tr(y_3) = \ldots$). Das heißt, in C^0_{2d} gilt

$$tr(y_1 y_2 y_y) = -tr(y_1 y_3 y_2),$$

insbesondere verschwindet eine Spur dritten Grades, falls sie zwei gleiche generische spurlose Matrizen enthält.

$$E = \{Tr(y_i y_k), Tr(s_3(y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3})) \mid 1 \leq i \leq k \leq 4, 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 4\}.$$

Da es keine nichttrivialen Relationen in den Graden $\leq 3 = N(2)$ gibt, ist r eindeutig bestimmt, muss im Grunde also nicht gesondert angegeben werden. Für Elemente der Form $Tr(y_1y_2y_3)$ ist

$$r(Tr(y_1y_2y_3)) = \frac{1}{6}Tr(s_3(y_1, y_2, y_3)).$$

Falls zwei gleiche Matrizen in einem solchen formalen Spur x vom Grad drei vorkommt so ist offenbar $r(x) = 0$.

Theorem 6.2.13. *Mit dem Relationenbrüter (E, R, r) lassen sich die Höchstgewichtsvektoren, deren zugehörige irreduzible Darstellungen das Relationenideal von C_{2d} erzeugen, durch Einsetzen der Tupel*

$$(y_1y_2y_3, y_1, y_4) \quad \textit{und} \quad (y_1y_2y_3, y_1, y_2y_3)$$

in den Brutalgorithmus bestimmen.

Beweis. Nur für das Element vom Grad 5. Für das Element vom Grad 6 geht dies analog. Es gilt

$$f = F(y_1y_2y_3, y_1, y_4) = -Tr(y_1y_2y_3)Tr(y_1y_4) + Tr(y_1y_2y_3y_1y_4) + Tr(y_1^2y_2y_3y_4).$$

Reduziert man die letzten beiden Terme mit Algorithmus 6.2.6, so erhält man

$$\begin{aligned} Tr(y_1y_2y_3y_1y_4) &= \frac{1}{2}(Tr(y_1y_2y_3)Tr(y_1y_4) + Tr(y_1y_2)Tr(y_1y_4y_3) \\ &\quad + \underbrace{Tr(y_1^2y_4)}_{r(\cdot)=0}Tr(y_2y_3) - Tr(y_1y_4y_2)Tr(y_1y_3)). \end{aligned}$$

und

$$Tr(y_1^2y_2y_3y_4) = \frac{1}{2}(\underbrace{Tr(y_1^2y_2)}_{r(\cdot)=0}Tr(y_3y_4) + Tr(y_1^2)Tr(y_2y_3y_4)).$$

Einsetzen in f liefert

$$\begin{aligned} f &= -Tr(y_1y_2y_3)Tr(y_1y_4) + \frac{1}{2}(Tr(y_1y_2y_3)Tr(y_1y_4) + Tr(y_1y_2)Tr(y_1y_4y_3) \\ &\quad + \underbrace{Tr(y_1^2y_4)}_{r(\cdot)=0}Tr(y_2y_3) - Tr(y_1y_4y_2)Tr(y_1y_3) + \underbrace{Tr(y_1^2y_2)}_{r(\cdot)=0}Tr(y_3y_4) \\ &\quad + Tr(y_1^2)Tr(y_2y_3y_4)) \\ &= \frac{1}{2}(Tr(y_1^2)Tr(y_2y_3y_4) + Tr(y_1y_2)Tr(y_1y_4y_3) - Tr(y_1y_3)Tr(y_1y_4y_2) \\ &\quad - Tr(y_1y_4)Tr(y_1y_2y_3)) + q, \end{aligned}$$

wobei q die Terme zusammenfasst, die durch r annuliert werden. Somit gilt

$$\begin{aligned} 12r(f) &= Tr(y_1^2)Tr(s_3(y_2,y_3,y_4)) + Tr(y_1y_2)Tr(s_3(y_1,y_4,y_3)) \\ &\quad -Tr(y_1y_3)Tr(s_3(y_1,y_4,y_2)) - Tr(y_1y_4)Tr(s_3(y_1,y_2,y_3)) \\ &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}Tr(y_1,y_k)Tr(s_3(y_1,\ldots,\widehat{y_k},\ldots,y_{p_4})), \end{aligned}$$

□

was genau der Darstellung in 5.3.1 entspricht.

6.3 Aussortieren von nicht benötigten Relationen

Da die obigen Methoden die schon gewonnen Relationen nicht berücksichtigen, ergeben diese auch Relationen, die schon von Relationen kleineren oder gleichen Grades erzeugt werden. Solche Relationen gehören natürlich nicht in ein minimales Erzeugendensystem des Ideals und sollten daher aussortiert werden. Diese Aufgabe entspricht dem Idealzugehörigkeitsproblem, d.h. dem Problem zu entscheiden, ob ein Element in einem gegebenen Ideal liegt. Üblicherweise lässt sich dieses Problem mit Gröbnerbasen lösen. Da hier aber ein homogenes Ideal vorliegt, kann dies auch durch Lösen eines linearen Gleichungssystems entschieden werden.

6.3.1 Methode: Lösen eines linearen Gleichungssystems

Da das Ideal homogen ist, ist jeder Grad dieses Ideals ein endlichdimensionaler Vektorraum. Somit genügt es zu prüfen, ob ein neuer Kandidat schon in diesem Vektorraum enthalten ist. Dies entspricht wiederum der Lösung eines linearen Gleichungssystems. Ein Erzeugendensystem des Grades k des Kandidatenideals erhält man, indem die bereits gefundenen Relationen mit geeigneten Monomen in den Erzeugern multipliziert. Somit wächst auch hier der Aufwand polynomial in k. Allerdings ist hier der Aufwand im Vergleich zum Aufwand von 6.2.1 vernachlässigbar, da hier die Anzahl der Monome deutlich kleiner ist (Relationen verringern den Grad der notwendigen Monome um ihren Grad).

6.3.2 Gröbnerbasen-Methode

Diese Methode wurde schon in Kapitel 4 behandelt. Die Berechnung der Gröbnerbasis ist für viele Variablen sehr aufwändig, empfiehlt sich daher nur in kleinen Fällen. In dieser Arbeit wurde diese nur in einigen kleinen Fällen benutzt.

6.4 Algorithmuseigenschaft

Durch das Berechnen der Relationen Grad für Grad ergibt sich automatisch die Frage nach einer oberen Schranke für die zu durchsuchenden Grade. Eine solche existiert auf jeden Fall, da der Polynomring $k[T_1, \dots, T_k]$ noethersch ist. Für C_{nd} bezeichnet $N^1(n, d)$ die minimale obere Schranke, die obige Bedingung erfüllt (siehe Einleitung). Eine Abschätzung dieser Gradschranke liefert der nächste Abschnitt. Allerdings wird sich diese Abschätzung in den meisten Fällen als sehr ungenau herausstellen. Da der Aufwand der obigen Methoden mit jedem Grad stark ansteigt, ist diese nur in sehr kleinen Fällen zu gebrauchen. Im zweiten Ansatz werden die Hilbertreihen von C_{nd} und dem Kandidaten verglichen. Da diese unendlich viele Koeffizienten haben, ergibt dies auch ein Endlichkeitsproblem. Dieses lässt sich umgehen, indem man zu Hilbertreihen der Algebren modulo eines homogenen Parametersystems übergeht. Dieser Ansatz hat den Nachteil, dass die Hilbertreihe von C_{nd} bekannt sein muss. Ferner ist ein homogenes Parametersystem zu bestimmen.

6.4.1 Abschätzung der zu betrachtenden Grade

Dies lässt sich mit dem Theorem von Harm Derksen 3.3.11 erreichen. Es gilt

$$\begin{aligned} M &= C_{nd} \\ s &= (d-1)n^2 + 1 \\ d_i &\leq N(n) \leq n^2 \\ a(M) &\leq -s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^1(n, d) &\leq N(n)((d-1)n^2 + 2) - ((d-1)n^2 + 1) \\ &\leq n^2((d-1)n^2 + 2) - ((d-1)n^2 + 1) \\ &= (d-1)n^4 + 2n^2 - (d-1)n^2 - 1 \\ &= (d-1)n^2(n^2 - 1) + 2n^2 - 1 \end{aligned}$$

Dieses ergibt sich eine erste Abschätzung.

Theorem 6.4.1. *Seien $n, d > 1$. Dann gilt*

$$N^1(n, d) \leq (d-1)n^2(n^2 - 1) + 2n^2 - 1.$$

Für C_{22} erhält man also eine obere Schranke von 19. Diese ist um 19 zu groß, da es in diesem Fall keine nichttrivialen Relationen gibt. Für C_{33} ergibt sich 163 als obere Schranke. Diese ist aufgrund der Ergebnisse dieser Arbeit in Kapitel 7 sehr schlecht. In obiger Berechnung wurden allerdings einige Werte sehr großzügig abgeschätzt. Mit den genaueren Werten aus 5.5.1, 5.0.23 und 5.5.6

$$\begin{aligned} M &= C_{33} \\ s &= 19 \\ d_i &= (6^{10}, 5^9, 4^9, 3^{11}, 2^6, 1^3)_i \\ a(M) &= -27 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$N^1(3,3) \leq 10 \cdot 6 + 5 \cdot 9 + 1 \cdot 4 - 19 = 90.$$

Diese Schranke ist immer noch sehr schlecht. Dies liegt daran, dass bei der Reduktion der Krulldimension, im Beweis von Derksen 3.3.11, recht großzügig abgeschätzt wird. Im konkreten Fall lässt sich dieses mit folgendem Theorem verbessern.

Theorem 6.4.2. *Sei $R = k[X_1, \ldots, X_l]$ der Polynomring in l Variablen über einem Körper k mit $\deg X_i > 0$ und I ein homogenes Ideal von R. Sei $(f_1, \ldots, f_n)$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem von I und g ein homogenes R/I-reguläres Element mit $0 < \deg(g) \leq \min\{\deg(f_i)\}$. Dann ist $(f_1, \ldots, f_n, g)$ ein homogenes minimales Erzeugendensystem von (I, g).*

Beweis. Sei $J = (f_1, \ldots, f_n, g) = (I, g)$ das neue Ideal. Zu zeigen ist, dass $f_1, \ldots, f_n, g$ ein homogenes minimales Erzeugendensystem von J ist. Sei $h_1, \ldots, h_m$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem von J. Sortiere die Erzeuger durch

$$\deg(h_1) \leq \deg(h_2) \leq \ldots \leq \deg(h_m).$$

Dann haben g und h_1 den gleichen Grad. Insbesondere lässt sich $h_1 = g$ wählen, da im kleinsten Grad nur die k-Vektorraumstruktur zu beachten ist und jede k-Basis auch zu einem minimalen Erzeugendensystem gehört. Insbesondere lässt sich jedes h_i in der Form

$$h_i = \sum_j \alpha_{ij} f_j + \alpha_{ig} g \text{ mit } \alpha_{ij}, \alpha_{ig} \in R$$

schreiben, d.h. für die restlichen $h_2, \ldots h_m$ lässt sich durch geeignetes Subtrahieren von g damit $h_i \in I$ erreichen. Jetzt schreibe die f_i wieder in den h_j und g:

$$f_i = \sum_j \beta_{ij} h_j + \beta_{ig} g \text{ mit } \beta_{ij}, \beta_{ig} \in R.$$

Damit folgt, dass $\beta_{ig} g \in I$ liegt, und da g regulär ist, folgt $\beta_{ig} \in I$. Da $\deg(g) > 0$ ist, gilt $\beta_{ig} = 0$ (Minimalität des Grades von f_i). Somit bilden die h_i ein Erzeugendensystem von I. Damit es minimal ist, muss es die gleichen Vielfachheiten wie die f_i haben. □

Korollar 6.4.3. *Sei $R = k[X_1, \ldots, X_l]$ der Polynomring in l Variablen über einem Körper k mit $\deg X_i > 0$ und I ein homogenes Ideal von R. Sei $(f_1, \ldots, f_n)$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem von I und $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ eine homogene R/I-reguläre Folge mit $max_i(deg(x_i)) \leq \min_i(\deg(f_i)$. Dann ist $(x_1, \ldots, x_n, f_1, \ldots, f_n)$ ein homogenes minimales Erzeugendensystem von $(\mathbf{x}, I)$.*

Beweis. Die Reihenfolge der x_i spielt keine Rolle. Also ist das vorige Theorem nach geeigneter Umsortierung der x_i sukzessive anwendbar. □

Satz 6.4.4. *Sei zusätzlich zu den Voraussetzungen in Theorem 3.3.11 noch ein homogenes Parametersystem $f_1, \ldots, f_{d(M)}$ von M bekannt, so dass $max_i(\deg(f_i)) \leq d_n$. Dann gilt*

$$deg(Tor_1^R(M,k)) \leq d_1 + a(M) + \sum_i \deg(f_i).$$

Beweis. Nach Korollar 6.4.3 gilt

$$deg(Tor_1^R(M,k)) = deg(Tor_1^R(M/(f_1,\dots,f_{d(M)}),k)),$$

und da im Cohen-Macaulay Fall das homogenes Parametersystem auch M-reguläre Folge ist, folgt mit Lemma 3.1.6:

$$a(M/(f_1,\dots,f_{d(M)})) = a(M) + \sum_i \deg(f_i).$$

□

Korollar 6.4.5.

$$N^1(3,3) \leq 27.$$

Beweis. Das homogene Parametersystem in 5.5.2 erfüllt die Bedingung des Satzes 6.4.4. Somit gilt

$$N^1(3,3) \leq 6 - 27 + 48 = 27.$$

□

Dies ist eine deutlich bessere Schranke, die aber leider für Berechnungen noch zu schlecht ist.

Beispiel 6.4.6. *Betrachte nochmals Beispiel 1.0.1 bzw. 3.3.13. Da X reguläres Element ist, lässt sich die Abschätzung des Beispiels noch verbessern. X hat Grad* 3*, erfüllt also die Bedingung des obigen Korollars. Nach Herausteilen von X hat die zugehörige Hilbertreihe einen Grad* ≤ 5*. Es ergibt sich* $5 + 5 = 10$ *als noch bessere, und hier sogar optimale, obere Schranke.*

6.4.2 Vergleich der Hilbertreihen

Die Abbildung

$$k[T_1,\dots,T_k] \xrightarrow{\varphi} A = k[t_1,\dots,t_k] \longrightarrow 0$$

ist graduiert und surjektiv. Insbesondere gilt für die Koeffizienten der Hilbertreihen stets

$$H(k[T_1,\dots,T_k]/I,T)_n \geq H(k[t_1,\dots,t_k],T)_n$$

für jeden Grad n, solange $I \subseteq \ker\varphi$. Insbesondere lässt sich die Gleichheit der Algebren auf den Koeffizienten der Hilbertreihe entscheiden. Sind in dieser Situation die Koeffizienten gleich, so sind die dazugehörigen Algebren isomorph. Das Problem hier ist allerdings, dass unendlich viele Koeffizienten geprüft werden müssen. Dieses Problem lässt sich wie folgt umgehen.

Lemma 6.4.7 ([Sta78])**.** *Sei R eine positiv graduierte k-Algebra und seien $h_1, \ldots, h_n$ homogene von null verschiedene Elemente positiven Grades mit $\deg h_i = d_i$. Ferner sei $S := R/(h_1, \ldots, h_n)$. Dann gilt*

$$H(R,T) \leq \frac{H(S,T)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - T^{d_i})},$$

wobei die Hilbertreihen hier bezüglich ihrer Koeffizienten verglichen werden. Gleichheit gilt genau dann, wenn $h_1, \ldots, h_n$ eine R-Sequenz bilden.

Beweis. Es genügt, den Beweis für $n = 1$ zu betrachten, da alle Eigenschaften für R/h_1 erhalten bleiben. Dies folgt aber direkt aus Lemma 3.1.6. □

Nun besitzt der Invariantenring nach Theorem 3.2.21 die Cohen-Macaulay Eigenschaft. Es gibt also eine homogene reguläre Folge $h_1, \ldots, h_{d(C_{nd})}$ in $k[t_1, \ldots, t_k]$. Der Noethersche Normalisierungssatz liefert eine Methode, ein homogenes Parametersystem zu finden. Aufgrund der Cohen-Macaulay-Eigenschaft ist jede solche nach Satz 3.1.34 auch eine reguläre Folge. Sei $h = (h_1, \ldots, h_{d(C_{nd})})$ eine solche homogene Folge. Mit I_h bezeichne das Kandidatenideal I (die bisher gefundenen Relationen) ergänzt um die kanonischen Urbilder der h_i. Durch zweimalige Anwendung obigen Lemmas ergibt sich

$$\frac{H(k[T_1, \ldots, T_k]/I_h)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - T^{d_i})} \geq H(k[T_1, \ldots, T_k]/I) \geq H(k[t_1, \ldots, t_k]) = \frac{H(k[t_1, \ldots, t_k]/(h))}{\prod_{i=1}^{n}(1 - T^{d_i})},$$

wobei hier aus Platzgründen die Variable T verzichtet wurde. Insbesondere lässt sich die Gleichheit der zwei inneren Ausdrücke durch die Gleichheit der äußeren Terme zeigen. Dieses ist damit ein endliches Problem, da der Zähler des rechten Ausdrucks nur endlich viele Koeffizienten $\neq 0$ besitzt. Um die Hilbertreihen vergleichen zu können, braucht man zunächst ein Verfahren um die Hilbertreihen zu berechnen. Für C_{nd} wurde diese von [BS99] für kleine d und n durchgeführt, insbesondere für C_{33}. Bleibt natürlich die Berechnung der linken Seite. Für dieses Problem wurde im Anschluss an das Theorem 4.0.22 schon eine Lösungsmöglichkeit aufgezeigt. Diese beinhaltet die Berechnung einer Gröbnerbasis des Ideals I_h. Für viele Variablen ist dies allerdings ein recht aufwändiges Unterfangen. Falls das homogene Parametersystem in den Erzeugergraden liegt, kann man einige Variablen eliminieren. Für C_{33} wurde dieses Verfahren erfolgreich mit dem Programm Singular durchgeführt. Die Ergebnisse werden im nächsten Kapitel präsentiert.

7 Ergebnis

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der notwendigen Relationen an, aufgeschlüsselt nach dem Grad. Dabei ist auch die Anzahl der Erzeuger im minimalen Erzeugendensystem von C_{33} mit angegeben.

Grad	Erzeuger	Relationen
1	3	
2	6	
3	11	
4	9	
5	9	
6	10	
7		3
8		30
9		73
10		114
11		90
12		55

In den Graden 1-6 gibt es keine Relationen zwischen den Erzeugern. Damit lässt sich jede Spur eindeutig als Linearkombination des minimalen Erzeugendensystems schreiben. Da C_{33} sogar multigraduiert ist, ist die obige Darstellung sehr grob. Aufgrund der Symmetrie in den generischen Matrizen genügt es die Multigrade zu betrachten, die Partitionen sind. Die folgende Tabelle schlüsselt diese auf. Dabei ist die Multiplizität die Anzahl der Multigrade, die durch Vertauschen der Einträge in der Partition entstehen.

Grad	Partition	Anzahl	Multiplizität	Gesamt	Summe
7	(3,2,2)	1	3	3	3
8	(4,3,1)	1	6	6	
	(4,2,2)	3	3	9	
	(3,3,2)	5	3	15	30
9	(5,3,1)	1	6	6	
	(5,2,2)	2	3	6	
	(4,4,1)	2	3	6	
	(4,3,2)	7	6	42	
	(3,3,3)	13	1	13	73
10	(6,2,2)	1	3	3	
	(5,4,1)	2	6	12	
	(5,3,2)	5	6	30	
	(4,4,2)	10	3	30	
	(4,3,3)	13	3	39	114
11	(6,4,1)	1	6	6	
	(6,3,2)	1	6	6	
	(5,5,1)	2	3	6	
	(5,4,2)	5	6	30	
	(5,3,3)	5	3	15	
	(4,4,3)	9	3	27	90
12	(6,6,0)	1	3	3	
	(6,5,1)	1	6	6	
	(6,4,2)	2	6	12	
	(6,3,3)	2	3	6	
	(5,5,2)	2	3	6	
	(5,4,3)	3	6	18	
	(4,4,4)	4	1	4	55
					365

Auf den Relationen operiert wie auf den Erzeugern die GL_3 durch lineare Transformationen. Damit ergibt sich eine Zerlegung des minimalen Erzeugendensystems in folgende irreduzible Komponenten

$$
\begin{array}{ll}
 & W_{(3,2,2)} \\
\oplus & W_{(4,3,1)} \oplus 2W_{(4,2,2)} \oplus W_{(3,3,2)} \\
\oplus & W_{(5,3,1)} \oplus W_{(5,2,2)} \oplus W_{(4,4,1)} \oplus 3W_{(4,3,2)} \oplus 2W_{(3,3,3)} \\
\oplus & W_{(6,2,2)} \oplus 2W_{(5,4,1)} \oplus 2W_{(5,3,2)} \oplus 3W_{(4,4,2)} \oplus W_{(4,3,3)} \\
\oplus & W_{(6,4,1)} \oplus W_{(5,5,1)} \oplus 2W_{(5,4,2)} \oplus W_{(4,4,3)} \\
\oplus & W_{(6,6,0)} \oplus W_{(6,4,2)}
\end{array}
$$

Hier würde es sogar genügen, die 29 Höchstgewichtsvektoren zu notieren. Da diese sehr komplex sind, wird hier ein anderer Ansatz verfolgt. Die Relationen werden hier mit der Methode 6.2.3 dargestellt. Dazu wird ein Relationenbrüter benötigt. Dabei ist E auf kanonische Art durch das minimale Erzeugendensystem 5.5.1 gegeben. Man nimmt einfach die entsprechenden Elemente in C^0_∞. Damit ist auch r eindeutig gegeben, da keine nichttrivalen Relationen in den Graden ≤ 6 existieren. Bleibt also die Bestimmung einer Reduktionsgleichung. Eine solche ist wie folgt gegeben.

$[[1,2,3],[4,5],[6],[7]]$	$3055/864$	$[[1,2,3],[5,4],[6],[7]]$	$-20891/1296$
$[[1,3,2],[4,5],[6],[7]]$	$14329/7776$	$[[1,3,2],[5,4],[6],[7]]$	$6259/1944$
$[[2,1,3],[4,5],[6],[7]]$	$-1127/243$	$[[2,1,3],[5,4],[6],[7]]$	$-36613/7776$
$[[2,3,1],[4,5],[6],[7]]$	$2615/648$	$[[2,3,1],[5,4],[6],[7]]$	$3887/1296$
$[[3,1,2],[4,5],[6],[7]]$	$2881/972$	$[[3,1,2],[5,4],[6],[7]]$	$-14605/7776$
$[[3,2,1],[4,5],[6],[7]]$	$38975/3888$	$[[3,2,1],[5,4],[6],[7]]$	$-248315/7776$
$[[1,2,3],[4,6],[5],[7]]$	$7369/2592$	$[[1,2,3],[6,4],[5],[7]]$	$17887/2592$
$[[1,3,2],[4,6],[5],[7]]$	$11251/7776$	$[[1,3,2],[6,4],[5],[7]]$	$10697/3888$
$[[2,1,3],[4,6],[5],[7]]$	$-7525/7776$	$[[2,1,3],[6,4],[5],[7]]$	$-12523/486$
$[[2,3,1],[4,6],[5],[7]]$	$1313/432$	$[[2,3,1],[6,4],[5],[7]]$	$4525/864$
$[[3,1,2],[4,6],[5],[7]]$	$-47051/3888$	$[[3,1,2],[6,4],[5],[7]]$	$6139/972$
$[[3,2,1],[4,6],[5],[7]]$	$32965/1944$	$[[3,2,1],[6,4],[5],[7]]$	$-250745/7776$
$[[1,2,3],[4,7],[5],[6]]$	$12335/2592$	$[[1,2,3],[7,4],[5],[6]]$	$-3025/864$
$[[1,3,2],[4,7],[5],[6]]$	$-20299/3888$	$[[1,3,2],[7,4],[5],[6]]$	$7555/7776$
$[[2,1,3],[4,7],[5],[6]]$	$-5143/7776$	$[[2,1,3],[7,4],[5],[6]]$	$-217705/7776$
$[[2,3,1],[4,7],[5],[6]]$	$-4645/432$	$[[2,3,1],[7,4],[5],[6]]$	$-167/432$
$[[3,1,2],[4,7],[5],[6]]$	$-150115/7776$	$[[3,1,2],[7,4],[5],[6]]$	$-12727/7776$
$[[3,2,1],[4,7],[5],[6]]$	$-4577/7776$	$[[3,2,1],[7,4],[5],[6]]$	$-27181/972$
$[[1,2,3],[5,6],[4],[7]]$	$-2389/144$	$[[1,2,3],[6,5],[4],[7]]$	$697/96$
$[[1,3,2],[5,6],[4],[7]]$	$11843/3888$	$[[1,3,2],[6,5],[4],[7]]$	$2843/972$
$[[2,1,3],[5,6],[4],[7]]$	$91891/3888$	$[[2,1,3],[6,5],[4],[7]]$	$10451/7776$
$[[2,3,1],[5,6],[4],[7]]$	$589/288$	$[[2,3,1],[6,5],[4],[7]]$	$-4453/2592$
$[[3,1,2],[5,6],[4],[7]]$	$-65437/7776$	$[[3,1,2],[6,5],[4],[7]]$	$55675/3888$
$[[3,2,1],[5,6],[4],[7]]$	$21865/1944$	$[[3,2,1],[6,5],[4],[7]]$	$33143/3888$
$[[1,2,3],[5,7],[4],[6]]$	$-6763/648$	$[[1,2,3],[7,5],[4],[6]]$	$-5807/2592$
$[[1,3,2],[5,7],[4],[6]]$	$-35723/7776$	$[[1,3,2],[7,5],[4],[6]]$	$553/1944$
$[[2,1,3],[5,7],[4],[6]]$	$204317/7776$	$[[2,1,3],[7,5],[4],[6]]$	$-13601/3888$
$[[2,3,1],[5,7],[4],[6]]$	$-21209/1296$	$[[2,3,1],[7,5],[4],[6]]$	$-9371/1296$
$[[3,1,2],[5,7],[4],[6]]$	$-63089/3888$	$[[3,1,2],[7,5],[4],[6]]$	$13385/1944$
$[[3,2,1],[5,7],[4],[6]]$	$-55157/7776$	$[[3,2,1],[7,5],[4],[6]]$	$116455/7776$
$[[1,2,3],[6,7],[4],[5]]$	$11471/864$	$[[1,2,3],[7,6],[4],[5]]$	$-21983/2592$
$[[1,3,2],[6,7],[4],[5]]$	$-36287/7776$	$[[1,3,2],[7,6],[4],[5]]$	$3683/972$
$[[2,1,3],[6,7],[4],[5]]$	$58967/7776$	$[[2,1,3],[7,6],[4],[5]]$	$-3529/1944$
$[[2,3,1],[6,7],[4],[5]]$	$-3791/216$	$[[2,3,1],[7,6],[4],[5]]$	$-1789/2592$
$[[3,1,2],[6,7],[4],[5]]$	$-61297/7776$	$[[3,1,2],[7,6],[4],[5]]$	$-7679/972$
$[[3,2,1],[6,7],[4],[5]]$	$-58835/7776$	$[[3,2,1],[7,6],[4],[5]]$	$135199/7776$
$[[1,2,4],[3,5],[6],[7]]$	$-784/81$	$[[1,2,4],[5,3],[6],[7]]$	$-2831/1296$

[[1, 4, 2], [3, 5], [6], [7]]	−20617/2592	[[1, 4, 2], [5, 3], [6], [7]]	11909/2592
[[2, 1, 4], [3, 5], [6], [7]]	3583/162	[[2, 1, 4], [5, 3], [6], [7]]	−57509/2592
[[2, 4, 1], [3, 5], [6], [7]]	−659/324	[[2, 4, 1], [5, 3], [6], [7]]	23165/2592
[[4, 1, 2], [3, 5], [6], [7]]	2573/432	[[4, 1, 2], [5, 3], [6], [7]]	−611/72
[[4, 2, 1], [3, 5], [6], [7]]	−863/162	[[4, 2, 1], [5, 3], [6], [7]]	2327/1296
[[1, 2, 4], [3, 6], [5], [7]]	−6385/648	[[1, 2, 4], [6, 3], [5], [7]]	13829/1296
[[1, 4, 2], [3, 6], [5], [7]]	−7249/864	[[1, 4, 2], [6, 3], [5], [7]]	4163/864
[[2, 1, 4], [3, 6], [5], [7]]	807/32	[[2, 1, 4], [6, 3], [5], [7]]	−41587/1296
[[2, 4, 1], [3, 6], [5], [7]]	−2675/1296	[[2, 4, 1], [6, 3], [5], [7]]	13735/1296
[[4, 1, 2], [3, 6], [5], [7]]	515/432	[[4, 1, 2], [6, 3], [5], [7]]	−2125/864
[[4, 2, 1], [3, 6], [5], [7]]	793/648	[[4, 2, 1], [6, 3], [5], [7]]	317/648
[[1, 2, 4], [3, 7], [5], [6]]	−24403/1296	[[1, 2, 4], [7, 3], [5], [6]]	1603/432
[[1, 4, 2], [3, 7], [5], [6]]	−217/54	[[1, 4, 2], [7, 3], [5], [6]]	1003/432
[[2, 1, 4], [3, 7], [5], [6]]	59281/2592	[[2, 1, 4], [7, 3], [5], [6]]	−14201/648
[[2, 4, 1], [3, 7], [5], [6]]	−12623/1296	[[2, 4, 1], [7, 3], [5], [6]]	28237/2592
[[4, 1, 2], [3, 7], [5], [6]]	19877/2592	[[4, 1, 2], [7, 3], [5], [6]]	−5959/648
[[4, 2, 1], [3, 7], [5], [6]]	10253/1296	[[4, 2, 1], [7, 3], [5], [6]]	3469/2592
[[1, 2, 4], [5, 6], [3], [7]]	−1043/432	[[1, 2, 4], [6, 5], [3], [7]]	4877/432
[[1, 4, 2], [5, 6], [3], [7]]	3353/864	[[1, 4, 2], [6, 5], [3], [7]]	11603/2592
[[2, 1, 4], [5, 6], [3], [7]]	775/162	[[2, 1, 4], [6, 5], [3], [7]]	−16199/2592
[[2, 4, 1], [5, 6], [3], [7]]	−353/864	[[2, 4, 1], [6, 5], [3], [7]]	−15269/2592
[[4, 1, 2], [5, 6], [3], [7]]	−1225/432	[[4, 1, 2], [6, 5], [3], [7]]	2171/288
[[4, 2, 1], [5, 6], [3], [7]]	−1163/432	[[4, 2, 1], [6, 5], [3], [7]]	−2437/432
[[1, 2, 4], [5, 7], [3], [6]]	−1285/1296	[[1, 2, 4], [7, 5], [3], [6]]	25/4
[[1, 4, 2], [5, 7], [3], [6]]	254/81	[[1, 4, 2], [7, 5], [3], [6]]	2059/864
[[2, 1, 4], [5, 7], [3], [6]]	30769/2592	[[2, 1, 4], [7, 5], [3], [6]]	−13/9
[[2, 4, 1], [5, 7], [3], [6]]	−2141/144	[[2, 4, 1], [7, 5], [3], [6]]	−21733/2592
[[4, 1, 2], [5, 7], [3], [6]]	−5321/2592	[[4, 1, 2], [7, 5], [3], [6]]	5147/1296
[[4, 2, 1], [5, 7], [3], [6]]	1771/1296	[[4, 2, 1], [7, 5], [3], [6]]	−1079/432
[[1, 2, 4], [6, 7], [3], [5]]	15601/1296	[[1, 4, 2], [6, 7], [3], [5]]	4703/1296
[[1, 4, 2], [7, 6], [3], [5]]	4447/864	[[2, 1, 4], [6, 7], [3], [5]]	2981/864
[[2, 4, 1], [6, 7], [3], [5]]	−10255/648	[[2, 4, 1], [7, 6], [3], [5]]	−395/648
[[4, 1, 2], [6, 7], [3], [5]]	133/36	[[4, 2, 1], [6, 7], [3], [5]]	683/648
[[1, 2, 5], [3, 4], [6], [7]]	−7333/432	[[1, 2, 5], [4, 3], [6], [7]]	101/72
[[1, 5, 2], [3, 4], [6], [7]]	7943/3888	[[1, 5, 2], [4, 3], [6], [7]]	33013/7776
[[2, 1, 5], [3, 4], [6], [7]]	−13943/2592	[[2, 1, 5], [4, 3], [6], [7]]	54235/2592
[[2, 5, 1], [3, 4], [6], [7]]	47855/7776	[[2, 5, 1], [4, 3], [6], [7]]	4237/3888
[[5, 1, 2], [3, 4], [6], [7]]	2417/2592	[[5, 1, 2], [4, 3], [6], [7]]	37361/2592
[[5, 2, 1], [3, 4], [6], [7]]	6953/1296	[[5, 2, 1], [4, 3], [6], [7]]	−20035/1296
[[1, 2, 5], [3, 6], [4], [7]]	−2447/144	[[1, 2, 5], [6, 3], [4], [7]]	7187/432
[[1, 5, 2], [3, 6], [4], [7]]	−595/243	[[1, 5, 2], [6, 3], [4], [7]]	27517/7776
[[2, 1, 5], [3, 6], [4], [7]]	−17233/864	[[2, 1, 5], [6, 3], [4], [7]]	13039/2592
[[2, 5, 1], [3, 6], [4], [7]]	−33709/7776	[[2, 5, 1], [6, 3], [4], [7]]	4801/3888
[[5, 1, 2], [3, 6], [4], [7]]	−5791/864	[[5, 1, 2], [6, 3], [4], [7]]	20603/2592

[[5, 2, 1], [3, 6], [4], [7]]	4285/648	[[5, 2, 1], [6, 3], [4], [7]]	−19699/1296
[[1, 2, 5], [3, 7], [4], [6]]	−1945/81	[[1, 2, 5], [7, 3], [4], [6]]	5615/1296
[[1, 5, 2], [3, 7], [4], [6]]	−10525/3888	[[1, 5, 2], [7, 3], [4], [6]]	29515/7776
[[2, 1, 5], [3, 7], [4], [6]]	−60563/2592	[[2, 1, 5], [7, 3], [4], [6]]	6533/432
[[2, 5, 1], [3, 7], [4], [6]]	−64993/7776	[[2, 5, 1], [7, 3], [4], [6]]	4021/3888
[[5, 1, 2], [3, 7], [4], [6]]	−5891/864	[[5, 1, 2], [7, 3], [4], [6]]	5537/864
[[5, 2, 1], [3, 7], [4], [6]]	18337/1296	[[5, 2, 1], [7, 3], [4], [6]]	−59869/2592
[[1, 2, 5], [4, 6], [3], [7]]	419/216	[[1, 2, 5], [6, 4], [3], [7]]	7375/432
[[1, 5, 2], [4, 6], [3], [7]]	−761/7776	[[1, 5, 2], [6, 4], [3], [7]]	29191/7776
[[2, 1, 5], [4, 6], [3], [7]]	1097/324	[[2, 1, 5], [6, 4], [3], [7]]	391/324
[[2, 5, 1], [4, 6], [3], [7]]	−46159/7776	[[2, 5, 1], [6, 4], [3], [7]]	48983/7776
[[5, 1, 2], [4, 6], [3], [7]]	1009/1296	[[5, 1, 2], [6, 4], [3], [7]]	173/81
[[5, 2, 1], [4, 6], [3], [7]]	4223/648	[[5, 2, 1], [6, 4], [3], [7]]	745/162
[[1, 2, 5], [7, 4], [3], [6]]	2161/432	[[1, 5, 2], [4, 7], [3], [6]]	−3875/7776
[[1, 5, 2], [7, 4], [3], [6]]	26155/7776	[[2, 1, 5], [7, 4], [3], [6]]	12781/1296
[[2, 5, 1], [4, 7], [3], [6]]	−66121/7776	[[2, 5, 1], [7, 4], [3], [6]]	44135/7776
[[5, 1, 2], [4, 7], [3], [6]]	−6289/1296	[[5, 2, 1], [4, 7], [3], [6]]	1925/144
[[1, 2, 5], [6, 7], [3], [4]]	2245/144	[[1, 5, 2], [6, 7], [3], [4]]	−15989/7776
[[1, 5, 2], [7, 6], [3], [4]]	−36203/7776	[[2, 1, 5], [6, 7], [3], [4]]	−2491/216
[[2, 5, 1], [6, 7], [3], [4]]	−27607/7776	[[2, 5, 1], [7, 6], [3], [4]]	−57457/7776
[[5, 1, 2], [6, 7], [3], [4]]	−775/48	[[5, 2, 1], [6, 7], [3], [4]]	6305/648
[[1, 2, 6], [3, 4], [5], [7]]	−5221/1296	[[1, 2, 6], [4, 3], [5], [7]]	1747/432
[[1, 6, 2], [3, 4], [5], [7]]	−1253/7776	[[1, 6, 2], [4, 3], [5], [7]]	12905/3888
[[2, 1, 6], [3, 4], [5], [7]]	−25073/2592	[[2, 1, 6], [4, 3], [5], [7]]	37673/2592
[[2, 6, 1], [3, 4], [5], [7]]	2269/972	[[2, 6, 1], [4, 3], [5], [7]]	−7879/1944
[[6, 1, 2], [3, 4], [5], [7]]	5765/1296	[[6, 1, 2], [4, 3], [5], [7]]	3623/432
[[6, 2, 1], [3, 4], [5], [7]]	715/1296	[[6, 2, 1], [4, 3], [5], [7]]	−1561/144
[[1, 2, 6], [3, 5], [4], [7]]	−1747/432	[[1, 2, 6], [5, 3], [4], [7]]	5773/1296
[[1, 6, 2], [3, 5], [4], [7]]	−35951/7776	[[1, 6, 2], [5, 3], [4], [7]]	42637/7776
[[2, 1, 6], [3, 5], [4], [7]]	−17525/864	[[2, 1, 6], [5, 3], [4], [7]]	25073/2592
[[2, 6, 1], [3, 5], [4], [7]]	−679/1944	[[2, 6, 1], [5, 3], [4], [7]]	−5795/3888
[[6, 1, 2], [3, 5], [4], [7]]	433/162	[[6, 1, 2], [5, 3], [4], [7]]	46/81
[[6, 2, 1], [3, 5], [4], [7]]	−1193/1296	[[6, 2, 1], [5, 3], [4], [7]]	−5843/1296
[[1, 2, 6], [3, 7], [4], [5]]	−5951/432	[[1, 2, 6], [7, 3], [4], [5]]	1891/648
[[1, 6, 2], [3, 7], [4], [5]]	−58067/7776	[[1, 6, 2], [7, 3], [4], [5]]	53941/7776
[[2, 1, 6], [3, 7], [4], [5]]	−61177/2592	[[2, 1, 6], [7, 3], [4], [5]]	6209/432
[[2, 6, 1], [3, 7], [4], [5]]	−2053/1944	[[2, 6, 1], [7, 3], [4], [5]]	−20423/3888
[[6, 1, 2], [3, 7], [4], [5]]	775/81	[[6, 1, 2], [7, 3], [4], [5]]	−4189/1296
[[6, 2, 1], [3, 7], [4], [5]]	941/216	[[6, 2, 1], [7, 3], [4], [5]]	−32989/2592
[[1, 2, 6], [4, 5], [3], [7]]	5221/1296	[[1, 2, 6], [5, 4], [3], [7]]	5113/1296
[[1, 6, 2], [4, 5], [3], [7]]	−1723/972	[[1, 6, 2], [5, 4], [3], [7]]	38239/7776
[[2, 1, 6], [4, 5], [3], [7]]	1499/432	[[2, 1, 6], [5, 4], [3], [7]]	1469/162
[[2, 6, 1], [4, 5], [3], [7]]	−8051/3888	[[2, 6, 1], [5, 4], [3], [7]]	19039/3888
[[6, 1, 2], [4, 5], [3], [7]]	6833/648	[[6, 1, 2], [5, 4], [3], [7]]	2011/432

[[6, 2, 1], [4, 5], [3], [7]]	−2429/1296	[[6, 2, 1], [5, 4], [3], [7]]	1561/324
[[1, 2, 6], [7, 4], [3], [5]]	1685/648	[[1, 6, 2], [4, 7], [3], [5]]	−10049/1944
[[1, 6, 2], [7, 4], [3], [5]]	49213/7776	[[2, 1, 6], [7, 4], [3], [5]]	3707/324
[[2, 6, 1], [4, 7], [3], [5]]	−3967/1944	[[2, 6, 1], [7, 4], [3], [5]]	2167/3888
[[6, 1, 2], [4, 7], [3], [5]]	287/24	[[6, 2, 1], [4, 7], [3], [5]]	631/216
[[1, 6, 2], [5, 7], [3], [4]]	13741/7776	[[1, 6, 2], [7, 5], [3], [4]]	2557/7776
[[2, 6, 1], [5, 7], [3], [4]]	8603/1944	[[2, 6, 1], [7, 5], [3], [4]]	−3281/3888
[[1, 2, 7], [3, 4], [5], [6]]	−10523/1296	[[1, 2, 7], [4, 3], [5], [6]]	−4997/648
[[1, 7, 2], [3, 4], [5], [6]]	27367/7776	[[1, 7, 2], [4, 3], [5], [6]]	2615/3888
[[2, 1, 7], [3, 4], [5], [6]]	1451/324	[[2, 1, 7], [4, 3], [5], [6]]	7805/1296
[[2, 7, 1], [3, 4], [5], [6]]	1997/1944	[[2, 7, 1], [4, 3], [5], [6]]	19393/3888
[[1, 2, 7], [3, 5], [4], [6]]	−4339/1296	[[1, 2, 7], [5, 3], [4], [6]]	4/9
[[1, 7, 2], [3, 5], [4], [6]]	67027/7776	[[1, 7, 2], [5, 3], [4], [6]]	−35585/7776
[[2, 1, 7], [3, 5], [4], [6]]	1045/216	[[2, 1, 7], [5, 3], [4], [6]]	−169/324
[[2, 7, 1], [3, 5], [4], [6]]	−188/243	[[2, 7, 1], [5, 3], [4], [6]]	6703/3888
[[1, 7, 2], [3, 6], [4], [5]]	25903/7776	[[1, 7, 2], [6, 3], [4], [5]]	−35729/7776
[[2, 7, 1], [3, 6], [4], [5]]	−115/1944	[[2, 7, 1], [6, 3], [4], [5]]	−8147/3888
[[1, 2, 7], [4, 5], [3], [6]]	−1645/432	[[1, 7, 2], [4, 5], [3], [6]]	5165/972
[[1, 7, 2], [5, 4], [3], [6]]	−40253/7776	[[2, 1, 7], [4, 5], [3], [6]]	1157/216
[[2, 7, 1], [4, 5], [3], [6]]	−1229/972	[[2, 7, 1], [5, 4], [3], [6]]	−17717/3888
[[1, 7, 2], [4, 6], [3], [5]]	91/1944	[[1, 7, 2], [6, 4], [3], [5]]	−31469/7776
[[2, 7, 1], [4, 6], [3], [5]]	−2041/1944	[[2, 7, 1], [6, 4], [3], [5]]	−35867/3888
[[1, 7, 2], [5, 6], [3], [4]]	−49235/7776	[[1, 7, 2], [6, 5], [3], [4]]	−30701/7776
[[2, 7, 1], [5, 6], [3], [4]]	−2431/1944	[[2, 7, 1], [6, 5], [3], [4]]	−1921/1944
[[1, 3, 4], [2, 5], [6], [7]]	47951/2592	[[1, 3, 4], [5, 2], [6], [7]]	−9989/1296
[[1, 4, 3], [2, 5], [6], [7]]	57613/2592	[[1, 4, 3], [5, 2], [6], [7]]	−584/81
[[3, 1, 4], [2, 5], [6], [7]]	−10553/648	[[3, 1, 4], [5, 2], [6], [7]]	1543/648
[[3, 4, 1], [2, 5], [6], [7]]	4057/1296	[[3, 4, 1], [5, 2], [6], [7]]	4423/2592
[[4, 1, 3], [2, 5], [6], [7]]	−17453/864	[[4, 1, 3], [5, 2], [6], [7]]	2911/1296
[[4, 3, 1], [2, 5], [6], [7]]	2483/2592	[[4, 3, 1], [5, 2], [6], [7]]	5771/1296
[[1, 3, 4], [2, 6], [5], [7]]	49001/2592	[[1, 3, 4], [6, 2], [5], [7]]	−1555/162
[[1, 4, 3], [2, 6], [5], [7]]	58879/2592	[[1, 4, 3], [6, 2], [5], [7]]	−4933/648
[[3, 1, 4], [2, 6], [5], [7]]	−39715/2592	[[3, 1, 4], [6, 2], [5], [7]]	20257/2592
[[3, 4, 1], [2, 6], [5], [7]]	3953/2592	[[3, 4, 1], [6, 2], [5], [7]]	−3599/1296
[[4, 1, 3], [2, 6], [5], [7]]	−24463/1296	[[4, 1, 3], [6, 2], [5], [7]]	6667/864
[[4, 3, 1], [2, 6], [5], [7]]	−1631/1296	[[4, 3, 1], [6, 2], [5], [7]]	−509/864
[[1, 3, 4], [2, 7], [5], [6]]	335/18	[[1, 3, 4], [7, 2], [5], [6]]	−1273/162
[[1, 4, 3], [2, 7], [5], [6]]	307/27	[[1, 4, 3], [7, 2], [5], [6]]	−10529/1296
[[3, 1, 4], [2, 7], [5], [6]]	−58133/2592	[[3, 4, 1], [2, 7], [5], [6]]	9133/1296
[[3, 4, 1], [7, 2], [5], [6]]	1645/864	[[4, 1, 3], [2, 7], [5], [6]]	−16057/648
[[4, 3, 1], [2, 7], [5], [6]]	8789/2592	[[4, 3, 1], [7, 2], [5], [6]]	12871/1296
[[1, 3, 4], [5, 6], [2], [7]]	−1219/162	[[1, 3, 4], [6, 5], [2], [7]]	−12821/1296
[[1, 4, 3], [5, 6], [2], [7]]	−8711/1296	[[1, 4, 3], [6, 5], [2], [7]]	−10499/1296
[[3, 1, 4], [5, 6], [2], [7]]	3475/864	[[3, 1, 4], [6, 5], [2], [7]]	2129/324

[[3, 4, 1], [5, 6], [2], [7]]	3533/1296	[[3, 4, 1], [6, 5], [2], [7]]	4085/2592
[[4, 1, 3], [5, 6], [2], [7]]	1621/216	[[4, 1, 3], [6, 5], [2], [7]]	2737/288
[[4, 3, 1], [5, 6], [2], [7]]	−2111/2592	[[4, 3, 1], [6, 5], [2], [7]]	−143/648
[[1, 3, 4], [5, 7], [2], [6]]	−23071/2592	[[1, 3, 4], [7, 5], [2], [6]]	−15097/2592
[[1, 4, 3], [5, 7], [2], [6]]	−1403/96	[[1, 4, 3], [7, 5], [2], [6]]	−1553/288
[[3, 1, 4], [5, 7], [2], [6]]	−511/432	[[3, 1, 4], [7, 5], [2], [6]]	3859/648
[[3, 4, 1], [5, 7], [2], [6]]	743/432	[[3, 4, 1], [7, 5], [2], [6]]	−143/288
[[4, 1, 3], [5, 7], [2], [6]]	26101/2592	[[4, 1, 3], [7, 5], [2], [6]]	3743/648
[[4, 3, 1], [5, 7], [2], [6]]	−467/288	[[4, 3, 1], [7, 5], [2], [6]]	905/2592
[[1, 3, 4], [6, 7], [2], [5]]	−29023/2592	[[1, 4, 3], [6, 7], [2], [5]]	−13397/864
[[3, 1, 4], [6, 7], [2], [5]]	197/81	[[3, 4, 1], [6, 7], [2], [5]]	−137/216
[[4, 1, 3], [6, 7], [2], [5]]	34589/2592	[[4, 3, 1], [6, 7], [2], [5]]	−10897/2592
[[1, 3, 5], [2, 4], [6], [7]]	−277/432	[[1, 3, 5], [4, 2], [6], [7]]	−193/2592
[[1, 5, 3], [2, 4], [6], [7]]	−15979/2592	[[1, 5, 3], [4, 2], [6], [7]]	13303/2592
[[3, 1, 5], [2, 4], [6], [7]]	−8509/2592	[[3, 1, 5], [4, 2], [6], [7]]	557/72
[[3, 5, 1], [2, 4], [6], [7]]	−2531/864	[[3, 5, 1], [4, 2], [6], [7]]	2567/864
[[5, 1, 3], [2, 4], [6], [7]]	−343/864	[[5, 1, 3], [4, 2], [6], [7]]	−751/432
[[5, 3, 1], [2, 4], [6], [7]]	3235/1296	[[5, 3, 1], [4, 2], [6], [7]]	2219/2592
[[1, 3, 5], [2, 6], [4], [7]]	−173/324	[[1, 3, 5], [6, 2], [4], [7]]	475/1296
[[1, 5, 3], [2, 6], [4], [7]]	−26497/2592	[[1, 5, 3], [6, 2], [4], [7]]	505/216
[[3, 1, 5], [2, 6], [4], [7]]	−11425/864	[[3, 1, 5], [6, 2], [4], [7]]	18391/2592
[[3, 5, 1], [2, 6], [4], [7]]	395/162	[[3, 5, 1], [6, 2], [4], [7]]	2635/864
[[5, 1, 3], [2, 6], [4], [7]]	−253/216	[[5, 1, 3], [6, 2], [4], [7]]	2125/2592
[[5, 3, 1], [2, 6], [4], [7]]	−2167/2592	[[5, 3, 1], [6, 2], [4], [7]]	755/216
[[1, 3, 5], [2, 7], [4], [6]]	15503/2592	[[1, 3, 5], [7, 2], [4], [6]]	−6605/2592
[[1, 5, 3], [2, 7], [4], [6]]	−12679/2592	[[1, 5, 3], [7, 2], [4], [6]]	793/108
[[3, 1, 5], [2, 7], [4], [6]]	−11249/648	[[3, 5, 1], [2, 7], [4], [6]]	−2131/1296
[[3, 5, 1], [7, 2], [4], [6]]	−9947/2592	[[5, 1, 3], [2, 7], [4], [6]]	−4451/648
[[5, 3, 1], [2, 7], [4], [6]]	2029/2592	[[5, 3, 1], [7, 2], [4], [6]]	21521/2592
[[1, 3, 5], [4, 6], [2], [7]]	85/2592	[[1, 3, 5], [6, 4], [2], [7]]	577/108
[[1, 5, 3], [4, 6], [2], [7]]	2209/2592	[[1, 5, 3], [6, 4], [2], [7]]	527/72
[[3, 1, 5], [4, 6], [2], [7]]	2021/2592	[[3, 1, 5], [6, 4], [2], [7]]	7999/1296
[[3, 5, 1], [4, 6], [2], [7]]	3493/1296	[[3, 5, 1], [6, 4], [2], [7]]	−3323/864
[[5, 1, 3], [4, 6], [2], [7]]	103/36	[[5, 1, 3], [6, 4], [2], [7]]	2885/864
[[5, 3, 1], [4, 6], [2], [7]]	−293/162	[[5, 3, 1], [6, 4], [2], [7]]	3113/2592
[[1, 3, 5], [7, 4], [2], [6]]	1387/432	[[1, 5, 3], [4, 7], [2], [6]]	10567/2592
[[1, 5, 3], [7, 4], [2], [6]]	9175/1296	[[3, 1, 5], [7, 4], [2], [6]]	10133/1296
[[3, 5, 1], [4, 7], [2], [6]]	−1501/1296	[[3, 5, 1], [7, 4], [2], [6]]	−16667/2592
[[5, 1, 3], [4, 7], [2], [6]]	5/288	[[5, 3, 1], [4, 7], [2], [6]]	3329/2592
[[1, 3, 5], [6, 7], [2], [4]]	1577/2592	[[1, 5, 3], [6, 7], [2], [4]]	2303/432
[[3, 1, 5], [6, 7], [2], [4]]	2233/2592	[[3, 5, 1], [6, 7], [2], [4]]	253/81
[[5, 1, 3], [6, 7], [2], [4]]	887/864	[[5, 3, 1], [6, 7], [2], [4]]	−9569/2592
[[1, 3, 6], [2, 4], [5], [7]]	−1141/2592	[[1, 3, 6], [4, 2], [5], [7]]	1315/2592
[[1, 6, 3], [2, 4], [5], [7]]	−4003/2592	[[1, 6, 3], [4, 2], [5], [7]]	1315/288

[[3, 1, 6], [2, 4], [5], [7]]	−20525/2592	[[3, 1, 6], [4, 2], [5], [7]]	34459/2592
[[3, 6, 1], [2, 4], [5], [7]]	−368/81	[[3, 6, 1], [4, 2], [5], [7]]	1315/648
[[6, 1, 3], [2, 4], [5], [7]]	7081/1296	[[6, 1, 3], [4, 2], [5], [7]]	−18755/2592
[[6, 3, 1], [2, 4], [5], [7]]	322/81	[[6, 3, 1], [4, 2], [5], [7]]	−5233/2592
[[1, 3, 6], [2, 5], [4], [7]]	−1315/2592	[[1, 3, 6], [5, 2], [4], [7]]	13861/2592
[[1, 6, 3], [2, 5], [4], [7]]	−5215/864	[[1, 6, 3], [5, 2], [4], [7]]	4705/1296
[[3, 1, 6], [2, 5], [4], [7]]	−42185/2592	[[3, 1, 6], [5, 2], [4], [7]]	6541/864
[[3, 6, 1], [2, 5], [4], [7]]	3043/648	[[3, 6, 1], [5, 2], [4], [7]]	3929/1296
[[6, 1, 3], [2, 5], [4], [7]]	−6125/2592	[[6, 1, 3], [5, 2], [4], [7]]	−5273/1296
[[6, 3, 1], [2, 5], [4], [7]]	16553/2592	[[6, 3, 1], [5, 2], [4], [7]]	−103/72
[[1, 3, 6], [2, 7], [4], [5]]	3085/648	[[1, 3, 6], [7, 2], [4], [5]]	797/216
[[1, 6, 3], [2, 7], [4], [5]]	−3125/2592	[[1, 6, 3], [7, 2], [4], [5]]	3007/648
[[3, 1, 6], [2, 7], [4], [5]]	−27613/1296	[[3, 6, 1], [2, 7], [4], [5]]	−911/432
[[3, 6, 1], [7, 2], [4], [5]]	−391/1296	[[6, 3, 1], [2, 7], [4], [5]]	2195/648
[[1, 3, 6], [4, 5], [2], [7]]	1141/2592	[[1, 3, 6], [5, 4], [2], [7]]	871/2592
[[1, 6, 3], [4, 5], [2], [7]]	49/2592	[[1, 6, 3], [5, 4], [2], [7]]	5269/1296
[[3, 1, 6], [4, 5], [2], [7]]	757/864	[[3, 1, 6], [5, 4], [2], [7]]	24857/2592
[[3, 6, 1], [4, 5], [2], [7]]	287/648	[[3, 6, 1], [5, 4], [2], [7]]	−4175/1296
[[6, 1, 3], [4, 5], [2], [7]]	−4429/648	[[6, 1, 3], [5, 4], [2], [7]]	3445/2592
[[6, 3, 1], [4, 5], [2], [7]]	9731/1296	[[6, 3, 1], [5, 4], [2], [7]]	3203/864
[[1, 3, 6], [7, 4], [2], [5]]	631/216	[[1, 6, 3], [4, 7], [2], [5]]	6505/2592
[[1, 6, 3], [7, 4], [2], [5]]	335/54	[[3, 1, 6], [7, 4], [2], [5]]	3961/648
[[3, 6, 1], [4, 7], [2], [5]]	−2845/1296	[[3, 6, 1], [7, 4], [2], [5]]	−73/12
[[6, 1, 3], [4, 7], [2], [5]]	−977/1296	[[6, 3, 1], [4, 7], [2], [5]]	1525/648
[[1, 6, 3], [5, 7], [2], [4]]	667/432	[[3, 6, 1], [5, 7], [2], [4]]	4651/1296
[[1, 3, 7], [2, 4], [5], [6]]	−2129/864	[[1, 3, 7], [4, 2], [5], [6]]	419/144
[[1, 7, 3], [2, 4], [5], [6]]	−7553/2592	[[1, 7, 3], [4, 2], [5], [6]]	2147/864
[[3, 1, 7], [2, 4], [5], [6]]	−443/864	[[3, 1, 7], [4, 2], [5], [6]]	−547/324
[[3, 7, 1], [2, 4], [5], [6]]	13271/1296	[[3, 7, 1], [4, 2], [5], [6]]	−401/81
[[1, 3, 7], [2, 5], [4], [6]]	79/16	[[1, 3, 7], [5, 2], [4], [6]]	2003/288
[[1, 7, 3], [2, 5], [4], [6]]	−12053/2592	[[1, 7, 3], [5, 2], [4], [6]]	439/162
[[3, 1, 7], [2, 5], [4], [6]]	−239/648	[[3, 1, 7], [5, 2], [4], [6]]	−9185/2592
[[3, 7, 1], [2, 5], [4], [6]]	41/648	[[3, 7, 1], [5, 2], [4], [6]]	−251/24
[[1, 7, 3], [2, 6], [4], [5]]	−2051/864	[[1, 7, 3], [6, 2], [4], [5]]	−17/27
[[3, 7, 1], [2, 6], [4], [5]]	−11/108	[[3, 7, 1], [6, 2], [4], [5]]	−4355/648
[[1, 3, 7], [4, 5], [2], [6]]	16895/2592	[[1, 7, 3], [4, 5], [2], [6]]	12061/2592
[[1, 7, 3], [5, 4], [2], [6]]	385/648	[[3, 1, 7], [4, 5], [2], [6]]	−13889/2592
[[3, 7, 1], [4, 5], [2], [6]]	41/324	[[3, 7, 1], [5, 4], [2], [6]]	7631/1296
[[1, 7, 3], [4, 6], [2], [5]]	10439/2592	[[1, 7, 3], [6, 4], [2], [5]]	−5/6
[[3, 7, 1], [4, 6], [2], [5]]	−167/324	[[3, 7, 1], [6, 4], [2], [5]]	6827/1296
[[1, 7, 3], [5, 6], [2], [4]]	31/162	[[3, 7, 1], [5, 6], [2], [4]]	67/324
[[1, 4, 5], [2, 3], [6], [7]]	3269/648	[[1, 4, 5], [3, 2], [6], [7]]	−5159/864
[[1, 5, 4], [2, 3], [6], [7]]	−149/54	[[1, 5, 4], [3, 2], [6], [7]]	511/162
[[4, 1, 5], [2, 3], [6], [7]]	−211/162	[[4, 1, 5], [3, 2], [6], [7]]	10865/2592

[[4, 5, 1], [2, 3], [6], [7]]	1367/432	[[4, 5, 1], [3, 2], [6], [7]]	−5041/1296
[[5, 1, 4], [2, 3], [6], [7]]	−7543/1296	[[5, 1, 4], [3, 2], [6], [7]]	1357/288
[[5, 4, 1], [2, 3], [6], [7]]	269/864	[[5, 4, 1], [3, 2], [6], [7]]	679/162
[[1, 4, 5], [2, 6], [3], [7]]	73/16	[[1, 4, 5], [6, 2], [3], [7]]	145/108
[[1, 5, 4], [2, 6], [3], [7]]	−10091/1296	[[1, 5, 4], [6, 2], [3], [7]]	5323/1296
[[4, 1, 5], [2, 6], [3], [7]]	−629/96	[[4, 1, 5], [6, 2], [3], [7]]	3395/648
[[4, 5, 1], [2, 6], [3], [7]]	3167/1296	[[4, 5, 1], [6, 2], [3], [7]]	−1745/432
[[5, 1, 4], [2, 6], [3], [7]]	−16823/2592	[[5, 1, 4], [6, 2], [3], [7]]	37/864
[[5, 4, 1], [2, 6], [3], [7]]	329/2592	[[5, 4, 1], [6, 2], [3], [7]]	14837/2592
[[1, 4, 5], [2, 7], [3], [6]]	12209/2592	[[1, 4, 5], [7, 2], [3], [6]]	−3725/2592
[[1, 5, 4], [2, 7], [3], [6]]	−173/72	[[1, 5, 4], [7, 2], [3], [6]]	5183/648
[[4, 1, 5], [2, 7], [3], [6]]	−15599/1296	[[4, 5, 1], [2, 7], [3], [6]]	−1249/1296
[[4, 5, 1], [7, 2], [3], [6]]	−4619/432	[[5, 1, 4], [2, 7], [3], [6]]	−17225/2592
[[5, 4, 1], [2, 7], [3], [6]]	2983/2592	[[5, 4, 1], [7, 2], [3], [6]]	19241/2592
[[1, 4, 5], [3, 6], [2], [7]]	−16727/2592	[[1, 4, 5], [6, 3], [2], [7]]	7609/1296
[[1, 5, 4], [3, 6], [2], [7]]	−299/144	[[1, 5, 4], [6, 3], [2], [7]]	563/81
[[4, 1, 5], [3, 6], [2], [7]]	5887/2592	[[4, 1, 5], [6, 3], [2], [7]]	6109/2592
[[4, 5, 1], [3, 6], [2], [7]]	3797/1296	[[4, 5, 1], [6, 3], [2], [7]]	5197/1296
[[5, 1, 4], [3, 6], [2], [7]]	7117/864	[[5, 1, 4], [6, 3], [2], [7]]	8573/2592
[[5, 4, 1], [3, 6], [2], [7]]	−37/54	[[5, 4, 1], [6, 3], [2], [7]]	−421/324
[[1, 4, 5], [7, 3], [2], [6]]	5881/1296	[[1, 5, 4], [7, 3], [2], [6]]	3361/432
[[4, 5, 1], [3, 7], [2], [6]]	−7/16	[[5, 4, 1], [3, 7], [2], [6]]	4723/2592
[[1, 4, 5], [6, 7], [2], [3]]	1217/864	[[1, 5, 4], [6, 7], [2], [3]]	667/144
[[4, 1, 5], [6, 7], [2], [3]]	149/864	[[4, 5, 1], [6, 7], [2], [3]]	2231/648
[[5, 1, 4], [6, 7], [2], [3]]	−101/2592	[[5, 4, 1], [6, 7], [2], [3]]	−8815/2592
[[1, 4, 6], [2, 3], [5], [7]]	14975/2592	[[1, 4, 6], [3, 2], [5], [7]]	−5075/864
[[1, 6, 4], [2, 3], [5], [7]]	−397/432	[[1, 6, 4], [3, 2], [5], [7]]	4657/1296
[[4, 1, 6], [2, 3], [5], [7]]	−2435/432	[[4, 1, 6], [3, 2], [5], [7]]	2873/324
[[4, 6, 1], [2, 3], [5], [7]]	449/162	[[4, 6, 1], [3, 2], [5], [7]]	−1603/324
[[6, 1, 4], [2, 3], [5], [7]]	−191/216	[[6, 1, 4], [3, 2], [5], [7]]	−599/2592
[[6, 4, 1], [2, 3], [5], [7]]	875/864	[[6, 4, 1], [3, 2], [5], [7]]	1645/648
[[1, 4, 6], [2, 5], [3], [7]]	5075/864	[[1, 4, 6], [5, 2], [3], [7]]	13469/2592
[[1, 6, 4], [2, 5], [3], [7]]	−529/108	[[1, 6, 4], [5, 2], [3], [7]]	3745/648
[[4, 1, 6], [2, 5], [3], [7]]	−27517/2592	[[4, 1, 6], [5, 2], [3], [7]]	7051/1296
[[4, 6, 1], [2, 5], [3], [7]]	6449/1296	[[4, 6, 1], [5, 2], [3], [7]]	−5713/1296
[[6, 1, 4], [2, 5], [3], [7]]	−19133/2592	[[6, 1, 4], [5, 2], [3], [7]]	−337/81
[[6, 4, 1], [2, 5], [3], [7]]	14633/2592	[[6, 4, 1], [5, 2], [3], [7]]	1543/864
[[1, 4, 6], [2, 7], [3], [5]]	9/2	[[1, 4, 6], [7, 2], [3], [5]]	2513/648
[[1, 6, 4], [2, 7], [3], [5]]	47/81	[[1, 6, 4], [7, 2], [3], [5]]	1901/324
[[4, 1, 6], [2, 7], [3], [5]]	−10219/648	[[4, 6, 1], [2, 7], [3], [5]]	−1727/1296
[[4, 6, 1], [7, 2], [3], [5]]	−9593/1296	[[6, 4, 1], [2, 7], [3], [5]]	1865/648
[[1, 4, 6], [3, 5], [2], [7]]	−14975/2592	[[1, 4, 6], [5, 3], [2], [7]]	4375/2592
[[1, 6, 4], [3, 5], [2], [7]]	−449/324	[[1, 6, 4], [5, 3], [2], [7]]	5951/1296
[[4, 1, 6], [3, 5], [2], [7]]	4313/2592	[[4, 1, 6], [5, 3], [2], [7]]	514/81

[[4, 6, 1], [3, 5], [2], [7]]	379/648	[[4, 6, 1], [5, 3], [2], [7]]	5173/1296
[[6, 1, 4], [5, 3], [2], [7]]	1289/864	[[6, 4, 1], [3, 5], [2], [7]]	8483/1296
[[1, 4, 6], [7, 3], [2], [5]]	2449/648	[[1, 6, 4], [7, 3], [2], [5]]	119/18
[[4, 6, 1], [3, 7], [2], [5]]	−1915/1296	[[6, 4, 1], [3, 7], [2], [5]]	1369/648
[[1, 6, 4], [5, 7], [2], [3]]	1643/1296	[[4, 6, 1], [5, 7], [2], [3]]	5845/1296
[[1, 4, 7], [2, 3], [5], [6]]	−4807/2592	[[1, 4, 7], [3, 2], [5], [6]]	1009/324
[[1, 7, 4], [2, 3], [5], [6]]	−31/144	[[1, 7, 4], [3, 2], [5], [6]]	577/432
[[4, 1, 7], [2, 3], [5], [6]]	−1085/864	[[4, 1, 7], [3, 2], [5], [6]]	−1645/648
[[4, 7, 1], [2, 3], [5], [6]]	2657/648	[[4, 7, 1], [3, 2], [5], [6]]	−323/432
[[1, 4, 7], [2, 5], [3], [6]]	4567/1296	[[1, 4, 7], [5, 2], [3], [6]]	15715/2592
[[1, 7, 4], [2, 5], [3], [6]]	−499/216	[[1, 7, 4], [5, 2], [3], [6]]	305/108
[[4, 1, 7], [2, 5], [3], [6]]	−229/648	[[4, 1, 7], [5, 2], [3], [6]]	−2363/864
[[4, 7, 1], [2, 5], [3], [6]]	37/216	[[4, 7, 1], [5, 2], [3], [6]]	−265/54
[[1, 7, 4], [6, 2], [3], [5]]	−13/108	[[4, 7, 1], [2, 6], [3], [5]]	−19/108
[[1, 4, 7], [3, 5], [2], [6]]	14879/2592	[[1, 7, 4], [3, 5], [2], [6]]	49/48
[[1, 7, 4], [5, 3], [2], [6]]	1081/648	[[4, 1, 7], [3, 5], [2], [6]]	−13217/2592
[[4, 7, 1], [3, 5], [2], [6]]	89/324	[[4, 7, 1], [5, 3], [2], [6]]	−1/4
[[1, 5, 6], [2, 3], [4], [7]]	−2551/648	[[1, 5, 6], [3, 2], [4], [7]]	3259/648
[[1, 6, 5], [2, 3], [4], [7]]	−77/648	[[1, 6, 5], [3, 2], [4], [7]]	361/648
[[5, 1, 6], [2, 3], [4], [7]]	2737/648	[[5, 1, 6], [3, 2], [4], [7]]	−601/144
[[5, 6, 1], [2, 3], [4], [7]]	−2305/648	[[5, 6, 1], [3, 2], [4], [7]]	421/432
[[6, 1, 5], [2, 3], [4], [7]]	23/9	[[6, 1, 5], [3, 2], [4], [7]]	−487/648
[[6, 5, 1], [2, 3], [4], [7]]	−9/16	[[6, 5, 1], [3, 2], [4], [7]]	−577/432
[[1, 5, 6], [2, 4], [3], [7]]	−5237/1296	[[1, 5, 6], [4, 2], [3], [7]]	3583/1296
[[1, 6, 5], [2, 4], [3], [7]]	451/1296	[[1, 6, 5], [4, 2], [3], [7]]	−2045/1296
[[5, 1, 6], [2, 4], [3], [7]]	841/216	[[5, 1, 6], [4, 2], [3], [7]]	−4259/1296
[[5, 6, 1], [2, 4], [3], [7]]	−1303/432	[[5, 6, 1], [4, 2], [3], [7]]	1135/648
[[6, 1, 5], [2, 4], [3], [7]]	463/162	[[1, 5, 6], [2, 7], [3], [4]]	11/24
[[1, 5, 6], [7, 2], [3], [4]]	100/81	[[1, 5, 6], [3, 4], [2], [7]]	−287/324
[[1, 5, 6], [7, 3], [2], [4]]	37/162	[[1, 5, 7], [2, 3], [4], [6]]	−107/54
[[1, 5, 7], [3, 2], [4], [6]]	−77/432	[[1, 7, 5], [2, 3], [4], [6]]	515/432
[[1, 5, 7], [2, 4], [3], [6]]	−53/36	[[1, 5, 7], [4, 2], [3], [6]]	−5/16
[[1, 7, 5], [2, 4], [3], [6]]	653/432	[[1, 5, 7], [3, 4], [2], [6]]	−103/108
[[1, 6, 7], [2, 3], [4], [5]]	−31/36	[[1, 6, 7], [3, 2], [4], [5]]	199/216
[[1, 7, 6], [2, 3], [4], [5]]	23/72	[[1, 6, 7], [2, 4], [3], [5]]	−19/108
[[1, 6, 7], [4, 2], [3], [5]]	−2/9	[[1, 7, 6], [2, 4], [3], [5]]	−13/108
[[1, 6, 7], [3, 4], [2], [5]]	−1/18	[[2, 3, 4], [1, 5], [6], [7]]	1/9
[[2, 3, 4], [5, 1], [6], [7]]	5/9	[[2, 4, 3], [1, 5], [6], [7]]	7/27
[[3, 2, 4], [1, 5], [6], [7]]	−1/54	[[3, 4, 2], [1, 5], [6], [7]]	−13/54
[[4, 2, 3], [1, 5], [6], [7]]	11/54	[[2, 3, 4], [1, 6], [5], [7]]	2/9
[[2, 3, 4], [6, 1], [5], [7]]	4/9	[[2, 4, 3], [1, 6], [5], [7]]	−2/27
[[3, 2, 4], [1, 6], [5], [7]]	−7/54	[[3, 4, 2], [1, 6], [5], [7]]	−2/27
[[4, 2, 3], [1, 6], [5], [7]]	−1/54	[[2, 3, 4], [5, 6], [1], [7]]	11/18
[[2, 3, 4], [6, 5], [1], [7]]	7/18	[[2, 4, 3], [5, 6], [1], [7]]	1/18

[[2, 4, 3], [6, 5], [1], [7]]	$-1/18$	[[3, 2, 4], [5, 6], [1], [7]]	$-2/9$
[[3, 2, 4], [6, 5], [1], [7]]	$2/9$	[[3, 4, 2], [5, 6], [1], [7]]	$2/9$
[[3, 4, 2], [6, 5], [1], [7]]	$-1/9$	[[4, 2, 3], [5, 6], [1], [7]]	$4/9$
[[4, 2, 3], [6, 5], [1], [7]]	$7/9$	[[2, 3, 4], [5, 7], [1], [6]]	$-1/18$
[[2, 4, 3], [5, 7], [1], [6]]	$-7/18$	[[3, 2, 4], [7, 5], [1], [6]]	$-5/9$
[[2, 5, 3], [1, 4], [6], [7]]	$1/6$	[[2, 3, 5], [1, 6], [4], [7]]	$1/2$
[[2, 3, 5], [6, 1], [4], [7]]	$5/9$	[[2, 5, 3], [1, 6], [4], [7]]	$-2/27$
[[3, 2, 5], [1, 6], [4], [7]]	$1/27$	[[3, 5, 2], [1, 6], [4], [7]]	$1/27$
[[5, 2, 3], [1, 6], [4], [7]]	$17/54$	[[2, 3, 5], [6, 4], [1], [7]]	$5/9$
[[2, 5, 3], [4, 6], [1], [7]]	$-5/9$	[[2, 4, 5], [1, 6], [3], [7]]	$1/9$
[[2, 4, 5], [6, 1], [3], [7]]	$1/3$	[[4, 5, 2], [1, 6], [3], [7]]	$-1/9$
[[1, 2], [3, 4], [5, 6], [7]]	$1/6$		

Dabei steht zum Beispiel $[[1,2,3],[4,5],[6],[7]]$ für das 4-Tupel

$$(X_1X_2X_3, X_4X_5, X_6, X_7),$$

das in die Fundamentale Spuridentität eingesetzt wird. Summiert man die sich dadurch ergebenen Terme mit den angegebenen Koeffizienten, so erhält man eine Gleichung der Form:

$$0 = tr(X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7) + \text{ Produkte von Spuren kleineren Grades.}$$

Setzt man hier $X_1, \dots, X_6$ als spurlos voraus, so erhält man eine etwas kürzere Relation. Damit werden Spuren vom Grad ≥ 7 mittels Algorithmus 6.2.6 reduziert. Sei die Reduktionsgleichung R so gegeben.

Theorem 7.0.8. *Sei (E, R, r) der zuvor definierte Relationenbrüter. Dann lassen sich die Relationen von C_{33}^0 mit dem Algorithmus 6.2.8 aus den folgenden Tupeln berechnen.*

Grad 7			
$(3,2,2)$	$(111,22,3,3)$		
Grad 8			
$(4,3,1)$	$(1111,22,2,3)$	$(3,3,2)$	$(1112,22,3,3)$
$(4,2,2)$	$(1111,22,3,3)$		$(1122,21,3,3)$
	$(1112,21,3,3)$		$(1122,23,1,3)$
	$(1122,11,3,3)$		$(1322,23,1,1)$
			$(3312,11,2,2)$
Grad 9			
$(5,3,1)$	$(1112,112,2,3)$	$(3,3,3)$	$(1112,223,3,3)$
$(5,2,2)$	$(1111,212,3,3)$		$(1132,223,1,3)$
	$(1112,112,3,3)$		$(1332,223,1,1)$
$(4,4,1)$	$(1112,122,2,3)$		$(3332,221,1,1)$
	$(1132,122,2,1)$		$(3331,221,2,1)$
$(4,3,2)$	$(1111,222,3,3)$		$(2223,331,1,1)$
	$(1112,122,3,3)$		$(2213,331,2,1)$
	$(1122,112,3,3)$		$(111,222,33,3)$
	$(1222,113,1,3)$		$(112,223,33,1)$
	$(3222,111,1,3)$		$(122,231,33,1)$
	$(3322,111,1,2)$		$(123,123,12,3)$
	$(3322,121,1,1)$		$(132,123,12,3)$
			$(132,132,12,3)$
$Grad 10$			
$(6,2,2)$	$(121132,11,1,3)$	$(4,3,3)$	$(1111,222,33,3)$
$(5,4,1)$	$(121122,21,1,3)$		$(1112,122,33,3)$
	$(122122,11,1,3)$		$(1122,112,33,3)$
$(5,3,2)$	$(122121,11,3,3)$		$(1322,112,13,3)$
	$(122111,21,3,3)$		$(22213,11,13,3)$
	$(122311,21,1,3)$		$(22123,11,13,3)$
	$(122131,21,1,3)$		$(21223,11,13,3)$
	$(121231,21,1,3)$		$(12223,11,13,3)$
$(4,4,2)$	$(123212,21,1,3)$		$(22231,11,13,3)$
	$(123212,11,2,3)$		$(23221,11,13,3)$
	$(323212,11,2,1)$		$(32221,11,13,3)$
	$(12211,122,3,3)$		$(22321,11,13,3)$
	$(12121,122,3,3)$		$(23123,11,12,3)$
	$(11221,122,3,3)$		
	$(11122,122,3,3)$		
	$(22111,122,1,3)$		
	$(22113,122,1,3)$		
	$(22311,122,1,3)$		

Grad 11			
$(6,4,1)$	$(1111,1122,22,3)$	$(4,4,3)$	$(1212,2121,33,3)$
$(6,3,2)$	$(1113,1122,21,3)$		$(1212,2112,33,3)$
$(5,5,1)$	$(1112,1122,22,3)$		$(1212,2211,33,3)$
	$(2112,1122,12,3)$		$(1212,1221,33,3)$
$(5,4,2)$	$(13112,1222,1,3)$		$(1212,1212,33,3)$
	$(1133,1122,22,1)$		$(1212,1122,33,3)$
	$(1133,1212,22,1)$		$(1122,1122,33,3)$
	$(1311,121,222,3)$		$(1122,2211,33,3)$
	$(111,112,222,33)$		$(1122,2121,33,3)$
$(5,3,3)$	$(11223,112,13,3)$		
	$(11232,112,13,3)$		
	$(11223,121,13,3)$		
	$(11223,211,13,3)$		
	$(11232,121,13,3)$		
Grad 12			
$(6,6,0)$	$(2112,121,122,12)$	$(5,4,3)$	$(33131,121,212,2)$
$(6,5,1)$	$(112212,1123,1,2)$		$(1231,132,321,21)$
$(6,4,2)$	$(112122,1133,1,2)$		$(123,132,321,112)$
	$(112312,1123,1,2)$	$(4,4,4)$	$(11232,123,123,3)$
$(6,3,3)$	$(112212,1133,1,3)$		$(13233,11223,1,2)$
	$(112312,1132,1,3)$		$(13232,1123,13,2)$
$(5,5,2)$	$(1122,112,122,33)$		$(1323,123,123,12)$
	$(123,132,112,221)$		

Dabei steht $(22311,122,1,3)$ *für das 4-Tupel* $(x_2^2x_3x_1^2, x_1x_2^2, x_1, x_3)$. *Hier sind nur die Relationen aufgeführt, deren Multigrad eine Partition ist. Die anderen erzeugenden Relationen erhält man durch geeignete Permutation der Erzeuger.*

Beweis. Die Bestimmung der Relationen wurde mit den in Kapitel 6 angegebenen Methoden durchgeführt. Da der Beweis hauptsächlich auf Berechnungen am Computer beruht, wird nur die Vorgehensweise erläutert. Um den Rechenaufwand zu minimieren, wurden die grundsätzlichen Vereinfachungen aus Abschnitt 6.1 berücksichtigt. Der folgende Pseudocode illustriert die Verknüpfung der Methoden.

```
E = Erzeuger
I = [] (Idealkandidat)
for n=1 to 12 do
  for partition in partitionen(n) do
    kandidaten = bestimme_relationen(partition,E)  (1)
    for kandidat in kandidaten do
      if not ist_in_ideal_enthalten(kandidat,I,E)  (2)
      neue_relationen = permutiere(kandidat)
      I = I union neue_relationen
return I
```

An der Stelle (1) wird die Relationen mit Methode 6.2.1 bestimmt. Ob die neu erhaltenen Relationen schon im Kandidaten enthalten ist wird mit Methode 6.3.1 an Stelle (2) überprüft. Damit ergibt sich ein Kandidaten für das Relationenideal.
Dieser Kandidat wird mit Methode 6.4.2 durch Vergleich der Hilbertreihen bestätigt. Dies ist möglich, da die Hilbertreihe von C_{33} durch 5.5.7 gegeben ist. Als homogenes Parametersystem wird 5.5.2 gewählt. Für die Rechenzeit ist hier sehr hilfreich, dass die Elemente dieses Parametersystem sich als Linearkombination der Erzeuger schreiben lassen. Somit lässt dies eine Variablenelimination zu, statt das Parametersystem dem Ideal zuzuschlagen. Die Berechnung der in 6.4.2 angegebenen Hilbertreihe wurde mit dem Programm Singular [GP08] durchgeführt.
Da die Vielfachheiten durch den ersten Durchlauf bekannt sind, lassen sich die Viertupel durch geschicktes Raten bestimmen. Diese Berechnungen wurden mit Sage [S$^+$09] durchgeführt. Die Berechnungen in (1) und (2) lassen sich durch jedes Computeralgebrasystem durchführen, das lineare Gleichungssysteme halbwegs effizient exakt lösen kann. Hier wurde Maple [Map04] dafür verwendet. □

Das homogene Parametersystem 5.5.2 liefert einen Morphismus

$$\psi\colon V_{33} \to \mathbb{C}^{19}.$$

Dieser ist durch die Werte der Elemente des homogenen Parametersystems $h_1, \dots, h_{19}$ auf dem 3×3 Matrixtripel (A_1, A_2, A_3) gegeben, da die Punkte von V_{33} so gegeben sind. Die zugehörige Abbildung wurde in der Einleitung mit $\pi\colon M_3^3 \to V_{33}$ bezeichnet. Ist nun $(a_1, \dots, a_{19})$ ein solcher Punkt, so gilt für die Faser

$$|\psi^{-1}(a_1, \dots, a_{19})| = |N(I, h_1 - a_1, \dots, h_{19} - a_{19})|,$$

wobei N das Nullstellengebilde bezeichne. Die Anzahl der Punkte ist die $\mathbb{C}$-Dimension des zugehörigen Koordinatenringes. Allerdings ist das Ideal $(I, h_1 - a_1, \dots, h_{19} - a_{19})$ im Allgemeinen nicht reduziert. Das Radikal lässt sich hier zum Beispiel mit Singular [GP08, 4.8.8] berechnen. Damit ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 7.0.9. *Es gilt*

$$\left|\psi^{-1}\psi\pi\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)\right| = 2$$

und

$$|\psi^{-1}\psi\pi((0,0,0))| = 1.$$

Bemerkung 7.0.10. *Hier ist die zweite Aussage trivial, denn für ein homogenes Ideal ist für jede Nullstelle auch jedes skalare Vielfache eine Nullstelle. Da die Nullstellenmenge aber als endlich vorausgesetzt war, kann nur* 0 *eine Nullstelle sein. Der Aufwand für die Berechnung des Radikals steigt stark an, sobald das Ideal nicht mehr homogen ist. Im homogenen Fall dauerte dies keine zweit Minuten, während im ersten Fall die Berechnung einen Tag in Anspruch nahm.*

8 Vermutungen

Für minimale homogene Erzeugendensysteme von C_{nd} sind die Anzahl von Erzeugern und die Vielfachheit ihrer Grade Invarianten. Insbesondere ist in diesem Zusammenhang der maximal nötige Grad eines solchen Erzeugendensystem eindeutig bestimmt. Der kleinste solche Grad für alle d wurde hier mit $N(n)$ bezeichnet. Bezeichnet $R = \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_k]$ den Polynomring, wobei die T_i für die Erzeuger von C_{nd} stehen, so hat C_{nd} eine endliche homogene, freie Auflösung

$$0 \to F_k \to F_{k-1} \to \ldots \to F_1 \to R \to C_{nd} \to 0$$

über R. In dieser sind die F_i wieder endlich erzeugte graduierte R-Moduln. Die Anzahl der Erzeuger und die Vielfachheit ihrer Grade liegen auch hier fest. Mit den Bezeichungen aus der Einleitung gilt $N^0(n,d) \leq N(n)$ nach Theorem 2.2.33, wobei $R =: F_0$. Hier ist besonders, das $N(n)$ nicht mehr von der Anzahl der betrachteten Matrizen abhängt. Die erste Vermutung lautet daher

Vermutung 8.0.11. *$N^1(n,d)$ lässt sich unabhängig von d abschätzen, d.h. es gibt ein $N^1(n) \in \mathbb{N}$ mit $N^1(n,d) \leq N^1(n)$ für alle $d \in \mathbb{N}$.*

Die zweite Vermutung ist direkte Konsequenz aus allen hier betrachteten Fällen. In diesen gilt das Folgende.

Vermutung 8.0.12. *$N^1(n,d) \leq 2N(n)$ für alle $d, n \in \mathbb{N}$.*

Diese Vermutungen lassen sich auch für die höheren Syzygien formulieren. Allerdings gibt es dort noch nicht genug Berechnungen um eine seriöse Vermutung zu formulieren. Das ergibt folgende Frage.

Frage 8.0.13. *Gilt $N^i(n,d) \leq (i+1)N(n)$ für alle $d, n \in \mathbb{N}$?*

Ein weitere Vermutung lässt sich über den minimalen Grad der notwendigen Relationen formulieren. In allen bekannten Fällen gibt es nämlich keine nichttrivialen Relationen vom Grad $\leq N(n) + 1$. In Methode 2.2.33 würde das bedeuten, dass lediglich eine Reduktionsgleichung für Spuren des Grades $> N(n)$ angzugeben ist, um eine eindeutige Reduktion der aus dem 2. Fundamentaltheorem gewonnenen Relationen zu bekommen.

Vermutung 8.0.14. *Es gibt keine nichttriviale Relation in C_{nd} vom Grad $\leq N(n)$.*

Die vierte und letzte Vermutung betrifft den maximalen Grad eines homogenen Parametersystems. Da die Erzeuger von C_{nd} verschiedene Grade haben, kann man nicht ohne weiteres davon ausgehen, dass die Grade eines homogenen Parametersystems in den Graden der Erzeuger liegen. Diese Problematik deutet sich schon beim homogenen Parametersystem von C_{33} an, da dieses nicht mehr multihomogen ist, sondern nur homogen.

Frage 8.0.15. *Lässt sich ein homogenes Parametersystem von C_{nd} finden, dass eine Linearkombination des minimalen Erzeugendensystems ist?*

Die in Kapitel 6 vorgestellten Methoden sind aufgrund des Rechenaufwandes nur auf kleine Fälle anwendbar. Die nächsten zu untersuchenden Fälle wären C_{34} und C_{42}.

1. Für C_{34} lässt sich die Methode 6.2.3 anwenden, da die Reduktionsgleichung schon gegeben ist. Ein minimales Erzeugendensystem hat dort 189 Elemente ([Hog06]), so dass die Methoden 6.2.1 und 6.2.2 vermutlich sehr großen Rechenaufwand erfordern.

2. Für C_{42} sind die Methoden 6.2.1 und 6.2.2 geeignet, da dort das minimale Erzeugendensystem nur 32 Elemente besitzt. Allerdings gibt es dort erst ab Grad 12 nichttriviale Relationen, so dass hier vermutlich die effektivere Methode 6.2.2 bevorzugt werden sollte. Methode 6.2.3 wird in diesem Fall Schwierigkeiten bereiten, da hier schon die Bestimmung einer Reduktionsgleichung Probleme bereitet. Man vergleiche dazu die Reduktionsgleichung für 2×2 Matrizen mit der Reduktionsgleichung für 3×3 Matrizen.

Literaturverzeichnis

[ADS06] Helmer Aslaksen, Vesselin Drensky, and Liliya Sadikova. Defining relations of invariants of two 3×3 matrices. *J. Algebra*, 298(1):41–57, 2006.

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[BD08] Francesca Benanti and Vesselin Drensky. Defining relations of minimal degree of the trace algebra of 3×3 matrices. *J. Algebra*, 320(2):756–782, 2008.

[BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Bos09] Siegfried Bosch. *Algebra*. Springer, Berlin [u.a.], 2009.

[BS99] Allan Berele and John R. Stembridge. Denominators for the Poincaré series of invariants of small matrices. *Israel J. Math.*, 114:157–175, 1999.

[Der04] Harm Derksen. Degree bounds for syzygies of invariants. *Adv. Math.*, 185(2):207–214, 2004.

[DF04] Vesselin Drensky and Edward Formanek. *Polynomial identity rings*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[DLS09] Vesselin Drensky and Roberto La Scala. Defining relations of low degree of invariants of two 4×4 matrices. *Internat. J. Algebra Comput.*, 19(1):107–127, 2009.

[Dre03] Vesselin Drensky. Defining relations for the algebra of invariants of 2×2 matrices. *Algebr. Represent. Theory*, 6(2):193–214, 2003.

[Dre07] Vesselin Drensky. Computing with matrix invariants. *Math. Balkanica (N.S.)*, 21(1-2):141–172, 2007.

[DS06] V. Drensky and L. Sadikova. Generators of invariants of two 4×4 matrices. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 59(5):477–484, 2006.

[Dub35] J. Dubnov. Sur une generalision de l'equation de hamilton-cayley et sur les invariants simultanes de plusieurs affineurs. *Proc. Seminar on Vector and Tensor Analysis*, pages 351–367, 1935.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[Eis05] David Eisenbud. *The geometry of syzygies*, volume 229 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005. A second course in commutative algebra and algebraic geometry.

[FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[GP08] Gert-Martin Greuel and Gerhard Pfister. *A* **Singular** *introduction to commutative algebra*. Springer, Berlin, extended edition, 2008. With contributions by Olaf Bachmann, Christoph Lossen and Hans Schönemann, With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

[Hog06] Torsten Hoge. Ein darstellungtheoretischer Zugang zur simultanen Konjugation von Matrizen, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 2006.

[Kno89] Friedrich Knop. Der kanonische Modul eines Invariantenrings. *J. Algebra*, 127(1):40–54, 1989.

[Kra84] Hanspeter Kraft. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*. Aspects of Mathematics, D1. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984.

[Kuz75] E.N. Kuzmin. On the nagata-higman theorem (russian). *Mathematical Structures,Computational Mathematics,Mathematical Modelling. Proc. Dedicated to the 60th Birthday of Acad. L. Iliev, Sofia*, pages 101–107, 1975.

[LeB05] Lieven LeBruyn. *noncommutative geometry@n, volume 1 : the tools*. neverendingbooks, 2005.

[Lop04] A. A. Lopatin. The algebra of invariants of 3×3 matrices over a field of arbitrary characteristic. *Comm. Algebra*, 32(7):2863–2883, 2004.

[Lor90] Falko Lorenz. *Einführung in die Algebra. Teil II*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1990.

[Map04] Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc 1981-2004. *Maple (Version 9.51)*, 2004.

[Pie82] Richard S. Pierce. *Associative algebras*, volume 88 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982. Studies in the History of Modern Science, 9.

[Pla10] Robert Plato. *Numerische Mathematik kompakt.* Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 4., aktualisierte auflage edition, 2010.

[Pro76] C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Advances in Math.*, 19(3):306–381, 1976.

[Raz74] Ju. P. Razmyslov. Identities with trace in full matrix algebras over a field of characteristic zero. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38:723–756, 1974.

[S+09] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 4.3.3).* The Sage Development Team, 2009. http://www.sagemath.org.

[Spr89] Tonny A. Springer. Aktionen reduktiver Gruppen auf Varietäten. In *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, volume 13 of *DMV Sem.*, pages 3–39. Birkhäuser, Basel, 1989.

[Sta78] Richard P. Stanley. Hilbert functions of graded algebras. *Advances in Math.*, 28(1):57–83, 1978.

[Ter87] Yasuo Teranishi. Linear Diophantine equations and invariant theory of matrices. In *Commutative algebra and combinatorics (Kyoto, 1985)*, volume 11 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 259–275. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[VL93] Michael Vaughan-Lee. An algorithm for computing graded algebras. *J. Symbolic Comput.*, 16(4):345–354, 1993.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.