Kinder argumentieren mit Anschauungsmitteln –
Eine epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften

Frederike Welsing

(geb. in Paderborn)

Dissertation
zum Erwerb des Grades Dr. paed.
an der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Bergischen Universität Wuppertal

Erstgutachterin: **Prof. Dr. Elke Söbbeke**
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Bergische Universität Wuppertal

Zweitgutachterin: **Prof. Dr. Kerstin Tiedemann**
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

- Wuppertal, im Oktober 2019 -

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20200708-145611-8
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20200708-145611-8]

DOI: 10.25926/7rrw-zx98
[https://doi.org/10.25926/7rrw-zx98]

Danksagung

Die Entstehung dieser Dissertation wurde von einer Vielzahl an Personen begleitet und auf vielfältige Art und Weise unterstützt. Bei diesen Personen möchte ich mich an dieser Stelle bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Elke Söbbeke für die hervorragende Betreuung während der gesamten Promotionszeit. In zahlreichen Gesprächen und Diskussionen habe ich viele wertvolle Anregungen erhalten. Dadurch wurde ich immer wieder darin unterstützt und ermutigt neue Perspektiven zu entwickeln und eigene Ideen zu verfolgen. Für die vertrauensvolle Zusammenarbeit danke ich ihr sehr.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei Prof. Dr. Kerstin Tiedemann für die Übernahme des Zweitgutachtens und die konstruktiven Diskussionen und Anmerkungen in der Endphase meiner Promotion.

Meine Promotionszeit habe ich an der Universität Paderborn begonnen. Mein Dank gilt daher meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen der Universität Paderborn, die meine Anfangszeit der Promotion begleitet haben und maßgeblich zum Finden eines Forschungsschwerpunkts beigetragen haben. Insbesondere bedanke ich mich bei Jan Schumacher, der mir immer wieder für fachliche Diskussionen und informelle Gespräche zur Seite stand und das auch nach meiner Zeit an der Universität Paderborn. Meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen der Bergischen Universität Wuppertal, insbesondere der Forschungsgruppe Söbbeke, möchte ich danken für die unzähligen Diskussionen über meine Ideen, gemeinsamen Analysen, neue Impulse und die angenehme Zusammenarbeit.

Im Rahmen der Forschungsgruppe UMWEG habe ich in vielfältigen Diskussionen die Gelegenheit bekommen, meine Arbeit weiterzuentwickeln. Hier gilt mein Dank insbesondere Prof. Dr. Heinz Steinbring für viele kritisch-konstruktive Anmerkungen, durch die ich immer wieder einen Neuen Blick auf die Denkwege der Kinder bekommen habe und dadurch meine Arbeit weiterentwickeln konnte.

Neben den Personen aus meinem kollegialen Umfeld danke ich Maximilian Pohl und Lukas Baumanns für die stetige Unterstützung auf beruflicher und privater Ebene. Ihr beide habt meine Dissertation und meine Promotionszeit sehr bereichert.

Ohne die Lehrpersonen und Kinder, die sich bereit erklärt haben, an der Studie teilzunehmen und mir es dadurch ermöglicht haben, Einblicke in die spannenden und häufig überraschenden Denkwege der Kinder zu erhalten, wäre die vorliegende Arbeit nicht möglich gewesen. Bei ihnen möchte ich mich an dieser Stelle recht herzlich bedanken.

Mein Dank gilt allen, die meine Dissertation in Gänze oder in Teilen korrekturgelesen haben.
Neben den Personen, die den Weg der Promotion auf wissenschaftlicher Ebene bereichert und mich auf diesem Weg unterstützt haben, gibt es auch in meinem privatem Umfeld Personen, die mich während der gesamten Promotion besonders unterstützt haben.
Danke Melina für jeden Kaffee und dafür, dass du dafür gesorgt hast, dass ich hin und wieder auch mal Abstand zu meiner Arbeit genommen habe.
Danke Kathi für jeden Spaziergang, jedes motivierende Wort und dein ehrliches Interesse an meiner Forschung.
Meinen Eltern danke ich dafür, dass sie mich von Anfang an darin bestärkt haben meinen eigenen Weg zu gehen und mich in der gesamten Promotionszeit auf vielfältige Art und Weise unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade? Begründe mit der Punktdarstellung!

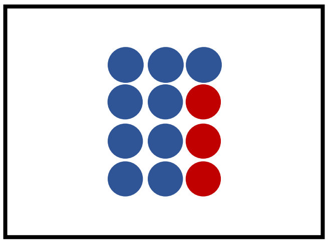


Abbildung 0.1: Punktdarstellung

Mit diesem kleinen Beispiel soll zunächst ein erster Eindruck im Hinblick auf das Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit gegeben werden. Auch der Drittklässler Benjamin[1] hat sich mit der obigen Fragestellung auseinandergesetzt und folgendes geantwortet:

B	*(...)* **Das, mit den Plättchen** *[zeigt auf das Punktmuster]* **kann man das so rechnen. Also** *[zeigt auf das Punktmuster]***, ich sag ja, ich weiß jetzt nicht welche Zahl das ist** *[zeigt auf das Punktmuster]***. Ich sag's einfach. Also das** *[zeigt auf das Punktmuster]* **ist jetzt zum Beispiel irgendeine Zahl. Und das ist drei** *[zeigt rechts neben die roten Punkte]* **und dann, wenn ich die Plättchen dann zusammentue', dann ist das halt so nen Viereck wo kein Punkt** *[zeigt rechts neben das Punktmuster]* **oder so übersteht. Dann weiß ich schon sofort, dass das gerade ist.**

Benjamin setzt sich innerhalb dieses kurzen Ausschnitts mit der oben gestellten Frage auseinander. Dabei bezieht er sich in seinen Ausführungen vornehmlich auf einen Teil der Fragestellung und zwar, ob die Summe, die durch die Darstellung repräsentiert wird, gerade ist. Dafür identifiziert er zunächst die roten Punkte und die blauen Punkte als je einen Summanden. Wobei er den ersten Summand als die Zahl Drei und den zweiten Summand als irgendeine Zahl beschreibt. Die Summe kommt dann durch das Zusammenfügen aller Plättchen zustande. Diese Gesamtanordnung beschreibt er als Viereck, bei dem kein Punkt übersteht. Aufgrund dieser Tatsache klassifiziert er nun das Punktmuster als ‚gerade'.

Demnach werden im obigen Beispiel drei wesentliche Herausforderungen vereint, vor die Kinder im Mathematikunterricht (der Grundschule) gestellt werden.

[1] Dieses Beispiel wird in Kapitel 8 ausführlich analysiert.

1) Benjamin soll eine strukturelle arithmetische Eigenschaft in die Punktdarstellung hineindeuten. Eine solche Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen stellt eine wesentliche Tätigkeit in der Mathematik als *Wissenschaft der Muster und Strukturen* (vgl. u.a. Devlin, 2002b) dar. Auch wird sie als zentraler Bestandteil des Mathematiktreibens in den Bildungsstandards und den Lehrplänen für den Mathematikunterricht gefordert (vgl. u.a. KMK, 2005b; Nordrhein-Westfalen, 2008). Im vorliegenden Beispiel steht er vor der Anforderung, die Punktdarstellung hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft ‚gerade' beziehungsweise ‚ungerade' zu klassifizieren. Er muss demnach einen arithmetischen Inhalt in eine geometrische Darstellung hineindeuten, denn diese ist nicht direkt ablesbar.
2) Dabei soll Benjamin die Darstellung aber nicht nur als ‚gerade' oder ‚ungerade' klassifizieren, sondern seine Zuordnung auch begründen. Demnach steht er innerhalb der obigen Auseinandersetzung auch vor der Anforderung, das Anschauungsmittel in seiner Argumentation zu nutzen. Diese Tätigkeit des *Argumentierens* ist innerhalb der Mathematik wesentlich, denn diese wird häufig auch als beweisende Disziplin verstanden (Heintz, 2000), in der eine Aussage erst dann als gültig akzeptiert wird, wenn die Gültigkeit argumentativ dargelegt wurde (Carraher & Martinez, 2007, S. 3). Und auch in der mathematikdidaktischen Diskussion ist es unbestritten, dass das Argumentieren als prozessbezogene Kompetenz ein zentrales Lernziel darstellt (vgl. u.a. Brunner, 2014; Heintz, 2000; Jahnke & Ufer, 2015; Meyer & Prediger, 2009; Winter, 1975). Benjamin soll demnach eine Begründung geben, die den mathematikspezifischen Anforderungen des Argumentierens gerecht wird.
3) Die *Veranschaulichung* in Form der Punktdarstellung stellt innerhalb dieser argumentativen Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen die zentrale Repräsentationsform dar. Zum einen wird sie als mathematische Darstellung genutzt, die es zu deuten gilt. Zum anderen soll diese auch zur Argumentation genutzt werden. Benjamin muss demnach die Veranschaulichung deuten und die geometrische Anordnung als Argumentationsmittel nutzen. Dabei ist unlängst bekannt, dass die Deutung von Veranschaulichungen eine komplexe Anforderung an die Kinder stellt (Söbbeke, 2005; Steenpaß, 2014).

Das Besondere an dieser kurzen Interviewszene ist, wie Benjamin diesen Anforderungen gerecht wird. Er steht vor der Anforderung einen arithmetischen Inhalt in eine geometrische Anordnung hineinzudeuten, nämlich die Teilbarkeit durch zwei. Dabei soll er seine Deutung begründen und die Punktdarstellung auch innerhalb seiner Argumentation nutzen. Benjamin macht genau dies auf eine interessante Weise. Er bezieht sich in seiner Argumentation nicht auf Merkmale oder Eigenschaften, die aus mathematischer Perspektive in Bezug zur Teilbarkeit durch zwei stehen. Vielmehr nutzt er das optische Erscheinungsbild als Argument. Er begründet die Parität der Punktdarstellung auf Basis der äußeren Erscheinung der Punktanordnung, nämlich, dass die Punkte in Form eines Vierecks angeordnet sind. Dieses kurze Beispiel verdeutlicht demnach, dass Kinder auch unerwartete Argumente nutzen, um mit Anschauungsmitteln zu argumentieren.

Es zeigt sich also, dass Argumentieren mit Anschauungsmitteln eine Tätigkeit ist, die komplexe Anforderungen an die Kinder stellt. In der bisherigen mathematikdidaktischen Forschung wurde bereits untersucht und herausgearbeitet, dass der Umgang mit Mustern und Strukturen in Form von Anschauungsmitteln, wie zum Beispiel dem oben dargestellten Punktmuster, ganz besondere Deutungsanforderungen an die Kinder stellt und die Deutung einen aktiven Konstruktionsprozess darstellt (vgl. u.a. Lorenz, 1993; Söbbeke, 2005). Dafür müssen die Kinder in eine dementsprechende Deutungskultur eingeführt werden. In Bezug auf das oben dargestellte Beispiel bedeutet dies, dass Benjamin die arithmetische Struktur aktiv in die Darstellung hineindeuten muss, denn diese ist nicht direkt sichtbar. Dabei steht er auch vor der Herausforderung seine Zuordnung und seine Deutung argumentativ zu begründen. Dabei soll die Punktdarstellung nicht nur eine zu deutende Veranschaulichung darstellen, sondern vielmehr auch zur Argumentation genutzt werden. Der oben beschriebene kurze Interviewausschnitt zeigte bereits, dass Kinder Punktdarstellungen auf überraschende Art deuten beziehungsweise zur Argumentation nutzen und demnach auf unterschiedliche Weise mit diesen Anforderungen umgehen.

Doch wie genau gehen Kinder mit diesen komplexen Anforderungen um? Welche (epistemologische) Bedeutung erhält das Anschauungsmittel in einer solchen Auseinandersetzung? Nutzen die Kinder die Punktdarstellung innerhalb des Argumentationsprozesses? Wenn ja, was sind für die Kinder wesentliche Merkmale der Veranschaulichung und wie nutzen sie diese in ihren Argumentationen?

Forschungsgegenstand der Arbeit

Während Anschauungsmittel in der bisherigen mathematikdidaktischen Diskussion immer wieder als Argumentationsmittel genannt werden, bleibt deren Einsatz und damit die Verknüpfung der oben beschriebenen Punkte in der Forschung weitestgehend unberücksichtigt. Aus diesem Grund besteht das zentrale Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit darin, gezielt zu untersuchen, ob und wie Kinder Veranschaulichungen in den kindlichen Argumentationsprozessen nutzen. Dafür wird innerhalb der vorliegenden Arbeit fokussiert, wie die Kinder mit den oben beschriebenen Anforderungen umgehen. Der Fokus liegt dabei einerseits auf der epistemologischen Bedeutung der Punktdarstellung in den Argumentationsprozessen. Andererseits wird untersucht, welche strukturellen Deutungen die Kinder einnehmen und welche Merkmale und Eigenschaften von den Kindern zur Argumentation herangezogen werden. Einhergehend damit wird auch analysiert, welchen Einfluss diese kindlichen Deutungen auf die Begriffsbildungsprozesse beim Mathematiklernen haben. Demnach soll eine neue Perspektive auf das Argumentieren eingenommen werden, in der Anschauungsmittel die Rolle eines zentralen Argumentationsmittels einnehmen.

Aufbau der Arbeit

In den ersten drei Kapiteln werden die drei bereits erwähnten wesentlichen Aspekte ‚*Muster und Strukturen*', ‚*Argumentieren*' und ‚*Veranschaulichungen*' aus theoretischer Perspektive mit dem Fokus auf das vorliegende Forschungsinteresse betrachtet.

Im *ersten Kapitel* stehen die Begriffe ‚Muster und Strukturen' im Zentrum der Auseinandersetzung. Dazu wird zunächst der Frage nachgegangen, welche Bedeutung Muster und Strukturen innerhalb der Mathematik und dem Mathematikunterricht haben (Kap. 1.1). Daran anschließend werden die Begrifflichkeiten differenziert betrachtet und das Begriffsverständnis der vorliegenden Arbeit dargelegt (Kap. 1.2). Dabei ist die Art, in der Muster und Strukturen im Mathematikunterricht in Erscheinung treten, vielfältiger Natur. Aus diesem Grund folgt eine Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Arten der Muster und Strukturen. Dabei liegt der Fokus auf der für das vorliegende Forschungsprojekt wesentlichen Art – den räumlichen Mustern. In diesem Kontext wird zum einen das Potential räumlicher Muster im Mathematikunterricht herausgearbeitet (Kap. 1.3). Zum anderen wird dargestellt, wie komplex die Auseinandersetzung mit diesen ist. Dafür werden auch aktuelle und für die vorliegende Arbeit relevante Untersuchungsergebnisse dargestellt (Kap. 1.4). Da es sich bei der Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen um vielfältige Tätigkeiten handelt, werden diese anschließend differenziert dargestellt (Kap. 1.5).

Im *zweiten Kapitel* steht das Argumentieren als wesentliche mathematische Tätigkeit und prozessbezogene Kompetenz im Mittelpunkt. Dafür wird zunächst die Bedeutung des Argumentierens im Alltag und der Mathematik dargestellt (Kap. 2.1). Daran schließt eine begriffliche Auseinandersetzung mit dem Begriff des Argumentierens an. Da Kinder nicht nur im Mathematikunterricht argumentieren, sondern auch innerhalb des alltäglichen Lebens, ist es von Notwendigkeit, sich mit den Unterschieden zwischen alltäglichem und dem fachlichen Argumentieren auseinanderzusetzen. Aus diesem Grund werden beide Aspekte differenziert betrachtet. Dafür werden vier wesentliche Akzentuierungen fokussiert und charakteristische

Eigenschaften der jeweiligen Argumentationsform herausgearbeitet. Diese Auseinandersetzung bildet die Grundlage für die Entwicklung des Begriffsverständnisses der vorliegenden Arbeit. Da Argumentieren in der mathematikdidaktischen Auseinandersetzung häufig mit den Begriffen ‚Begründen' und ‚Beweisen' auftritt, werden diese Begriffe voneinander abgegrenzt (Kap. 2.2). Argumentieren wird demnach als wesentliche Tätigkeit innerhalb der Mathematik charakterisiert. Demnach ist es notwendig, und dies ist innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung unbestritten, dass Argumentieren eine notwendige mathematische Kompetenz darstellt. Aber das Argumentieren stellt dabei nicht nur ein Lernziel innerhalb des Mathematikunterrichts dar. Vielmehr ist es auch eine wesentliche Lernvoraussetzung innerhalb des Mathematikunterrichts. Dieses Dilemma zwischen Lernziel und Lernvoraussetzung wird aufgegriffen, detailliert beschrieben und Konsequenzen daraus abgeleitet (Kap. 2.3). Abschließend wird das Argumentieren in den Kontext der Muster und Strukturen verortet und dargelegt, inwiefern die in Kapitel eins herausgearbeiteten Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen auch für das Argumentieren wesentlich sind. Dabei wird vor allem herausgestellt, welches Potential räumliche Muster als mögliche Darstellungsform für eine mathematische Argumentation haben (Kap. 2.4).

Bereits in den ersten beiden Kapiteln werden räumliche Muster aus unterschiedlichen Perspektiven betrachtet und als wichtige Veranschaulichung im Mathematikunterricht dargestellt. Im *dritten Kapitel* werden daher Veranschaulichungen als Repräsentationen in den Mittelpunkt der theoretischen Auseinandersetzung gestellt. Dabei wird dargelegt, welche Bedeutung diese aufgrund der epistemologischen Besonderheit des Mathematiklernens (Kap. 3.1) und aus lernpsychologischer Sicht (Kap. 3.2) haben. Daran anknüpfend wird die Bedeutung von Veranschaulichungen im Mathematikunterricht in den Blick genommen (Kap. 3.3). Der Fokus wird hierfür auf Anschauungsmittel als mögliche Repräsentationsform gelegt und unterschiedliche Arten und Funktionen in den Mittelpunkt der Auseinandersetzung gestellt (Kap. 3.4).

Auf Grundlage der theoretischen Auseinandersetzung wird in *Kapitel vier* das Forschungsinteresse konkretisiert und die dem Forschungsprojekt zugrundeliegenden Forschungsfragen formuliert.

Daran anschließend wird im *fünften Kapitel* das Design der qualitativen Interviewstudie erläutert. Dafür wird der methodologische Rahmen der Arbeit geklärt (Kap. 5.1) und das in der vorliegenden Studie genutzte Erhebungsinstrument des klinischen Interviews erläutert sowie die Auswahl des mathematischen Inhalts und des genutzten Anschauungsmittels begründet. Darauf aufbauend wird die Konzipierung der Interviews dargestellt. Dabei wird zum einen der Interviewleitfaden erläutert, zum anderen werden die innerhalb der Interviews

genutzten Punktdarstellungen beschrieben (Kap. 5.3). Zudem werden wesentliche Informationen zur Datenerhebung (Kap. 5.3) und Datenauswertung (Kap. 5.4) gegeben.
Daran schließt sich im *sechsten Kapitel* die Darstellung des in der Studie entwickelten Theoriekonstrukts zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen an. Denn zur Beantwortung der Forschungsfragen wird das Datenmaterial mit Mitteln der interpretativen Unterrichtsforschung aus epistemologischer Perspektive untersucht. Dazu wird das epistemologische Dreieck (Steinbring, 2005) genutzt (Kap. 6.1) und hinsichtlich des vorliegenden Forschungsinteresses ausdifferenziert (Kap. 6.2).
Innerhalb des *siebten Kapitels* folgt eine ausführliche Analyse des Fallbeispiels der Drittklässlerin Helena. Durch diese Ganzanalyse wird die Anwendung des Theoriekonstrukts präzisiert und das methodische Vorgehen offengelegt. Zudem lassen sich auf Grundlage der Analyse erste Erkenntnisse zur Beantwortung der Forschungsfragen ableiten.
Die Erkenntnisse werden im *achten Kapitel* aufgegriffen. In diesem werden die Ergebnisse der vorliegenden Interviewstudie dargestellt. Dazu wird zunächst betrachtet, welche Rolle das Anschauungsmittel innerhalb der kindlichen Argumentationen einnimmt und welchen Einfluss dies auf den weiteren Argumentationsprozess hat (Kap. 8.1). Anschließend werden solche Argumentationsprozesse in den Blick genommen, in denen Kinder die Veranschaulichung auch innerhalb ihrer Argumentationen nutzen. Es wird dabei herausgearbeitet, welche Strukturen innerhalb der Darstellung von den Kindern zur Argumentation genutzt werden (Kap. 8.2). Abschließend wird betrachtet, welchen Einfluss die Nutzung und die damit verbundene kindliche Perspektive auf das Anschauungsmittel für Begriffsbildungsprozesse hat (Kap. 8.3).
Im abschließenden *neunten Kapitel* werden die zentralen Ergebnisse zusammengefasst und bewertet. Daraus werden dann Konsequenzen für die Forschung aber auch die Unterrichtspraxis abgeleitet.

1 Muster und Strukturen

Muster und Strukturen stehen seit jeher im Zentrum der mathematischen Auseinandersetzung. Dies geht so weit, dass Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen beschrieben wird (Devlin, 2002a; Sawyer, 1955). In einem solchen Verständnis von Mathematik zielt die mathematische Aktivität darauf ab, eben solche Muster zu beschreiben, zu erklären und die dahinterliegenden Strukturen zu beschreiben (Devlin, 1994). In der vorliegenden Arbeit stehen die Begriffe *Muster und Strukturen* im Fokus, denn es wird untersucht, wie Kinder strukturelle Zahleigenschaften in geometrische Muster hineindeuten und wie sie diese zur Argumentation nutzen.

Aus diesem Grund steht im ersten Kapitel die intensive Auseinandersetzung mit den Begriffen ‚Muster und Strukturen'. Dafür wird zunächst die Bedeutung der Muster und Strukturen in der elementaren Fachmathematik sowie die Bedeutung für mathematische Lehr- und Lernprozesse geklärt (Kap. 1.1). Obwohl diese Begrifflichkeiten einen hohen Stellenwert in der Mathematik und des Mathematikunterrichts haben, herrscht kein einheitliches Begriffsverständnis vor. Aus diesem Grund wird auf Basis der aktuellen mathematikdidaktischen Literatur das der Arbeit zugrundeliegende Begriffsverständnis entwickelt (Kap. 1.2).

Nach dieser begrifflichen Auseinandersetzung werden unterschiedliche Arten von Mustern und Strukturen betrachtet, die im Mathematikunterricht (der Grundschule) in Erscheinung treten können. Dabei wird der Fokus auf räumliche Muster als Möglichkeit zur Veranschaulichung arithmetischer Strukturen gelegt, da diese in der vorliegenden Arbeit in Zentrum des Interesses stehen (Kap. 1.3). Bei der Auseinandersetzung mit eben diesen stehen die Kinder vor der Herausforderung, diese Muster und Strukturen zu deuten, denn sie sind nicht selbsterklärend, sondern erfordern individuelle Deutungen der Individuen, die sie betrachten (Söbbeke, 2005) (Kap. 1.4). Um das volle Potential beim Einsatz mit Mustern und Strukturen im Mathematikunterricht entfalten zu können, gibt es eine Vielzahl an Tätigkeiten, die innerhalb des Mathematikunterrichts im Umgang mit Mustern und Strukturen, die vollzogen werden können (Kap. 1.5).

1.1 Bedeutung von Mustern und Strukturen

1.1.1 Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen

Die Mathematik als Wissenschaft hat eine jahrhundertelange Entwicklung durchlaufen. In dieser lässt sich ein Paradigmenwechsel von „einer Sicht der Mathematik als Wissenschaft formaler Systeme zu einer Sicht als Wissenschaft von (interaktiv zu erschließenden) Mustern“ (Steinweg, 2001, S. 8) nachzeichnen. Zu Beginn der mathematischen Entwicklung stand das Lösen von Alltagsproblemen im Zentrum mathematischen Handelns (Wußing, 2008, S. 6ff. ; S. 123ff.). Das konkrete Handeln mit Zahlen stand hierbei im Vordergrund und Mathematik wurde als die *Wissenschaft der Zahlen* verstanden (Devlin, 2002a, S. 2). Innerhalb der weiteren kulturhistorischen Entwicklung der Mathematik entstand eine Anreicherung mathematischer Inhaltsbereiche und Problemfelder. Die Geometrie, das Studium und die mathematische Erfassung von Bewegungen und Veränderungen sowie das Studium allgemeiner Strukturen, aber auch der Werkzeuge, die in der Mathematik benutzt wurden, ergänzten und erweiterten den bisherigen Umfang mathematischer Bereiche (Devlin, 2002a, S. 2ff.; Steinweg, 2001, S. 10ff.). Diese genannte Sichtweise auf Mathematik ist für das heutige Verständnis der Wissenschaft nicht mehr ausreichend. Auch wenn Mathematik in ihren Ursprüngen zunächst auf Alltagsprobleme und das konkrete Handeln mit Zahlen fokussierte, gehören seither Muster zum Gegenstand mathematischer Aktivitäten (Deutscher, 2012, S. 85). In jüngster Zeit wird die Mathematik daher als Wissenschaft von *Mustern und Strukturen* beschrieben. Hierbei stehen abstrakte Muster, als jegliche Form der Regelmäßigkeit, im Mittelpunkt der mathematischen Aktivität (Sawyer, 1955, S. 12). So durchziehen Muster unterschiedlichste Bereiche der Mathematik. Sie können dabei auch als Formenmuster, Bewegungsmuster aber auch Verhaltensmuster in Erscheinung treten. Somit sind Muster nicht nur innermathematischer Natur, sondern finden sich auch außerhalb der Mathematik. Demnach handelt es sich zum einen um Regelmäßigkeiten einer äußeren Form oder eines Ablaufs und zum anderen auch um grundlegende, fachliche Strukturen der Mathematik (Link, 2012, S. 8). So postulieren Müller und Wittmann (2005, S. 48), dass alle Sätze, Formeln und Algorithmen innerhalb der Mathematik Muster darstellen. Muster konstituieren somit die Mathematik.

1.1.2 Muster und Strukturen im Mathematikunterricht der Grundschule

Dass Mathematik die Wissenschaft von Mustern und Strukturen ist, spiegelt sich (notwendigerweise) auch in den Bildungsstandards und Lehrplänen für den Mathematikunterricht der Grundschule wider. So sind Muster und Strukturen als inhaltsbezogene Kompetenz in den Bildungsstandards der Grundschule aufgeführt:

„Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	• strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen, • Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z.B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen, • arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben.
funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen	• funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z.B. Menge – Preis) und entsprechende Aufgaben lösen, • funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen, • einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen.“

(KMK, 2005b, S. 10f.)

Müller und Wittmann (2005) postulieren, „dass der Bereich Muster und Strukturen den Inhaltsbereichen übergeordnet ist“ (S. 42). Dies begründen sie damit, dass Gesetzmäßigkeiten sowie funktionale Beziehungen inhaltsunabhängige Kompetenzen darstellen. Diese werden dann durch Teilkompetenzen expliziert, die unterschiedliche Inhaltsbereiche ansprechen (ebd.). Somit durchziehen Muster und Strukturen auch die anderen Inhaltsbereiche der Mathematik (Walther, Selter, & Neubrand, 2007, S. 19). Ein solches Verständnis, welches die Muster und Strukturen als grundlegendes mathematisches Prinzip in allen Inhaltsbereichen verankert, findet sich allerdings noch nicht in allen Lehrplänen. Eine Analyse der Lehrpläne hinsichtlich der Auffassung von Mustern und Strukturen zeigt im Wesentlichen zwei unterschiedliche Sichtweisen:

- Ein den Bildungsstandards angepasstes Verständnis: Muster und Strukturen sind demnach eine eigenständige inhaltsbezogene Kompetenz.
- Ein Verständnis, welches nicht nur davon ausgeht, dass „Muster und Strukturen“ in allen mathematischen Bereichen von Bedeutung sind, sondern eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht einnehmen. Dabei stellen Muster und Strukturen keine eigenständige inhaltsbezogene Kompetenz dar, sondern sind in den unterschiedlichen Inhaltsbereichen verankert.

So zeigt sich im Lehrplan des Saarlands sowie in den Lehrplänen Bayerns und Hamburgs ein Verständnis, welches „Muster und Strukturen“ als eigenständige inhaltsbezogene Kompetenz ausweist. Dennoch wird auch in diesen Lehrplänen deutlich, dass es sich hierbei um einen Kompetenzbereich handelt, der nicht isoliert von den anderen zu betrachten ist. Bei der Konkretisierung des Inhaltsbereichs wird, ähnlich wie in den Bildungsstandards, auf Aspekte anderer Inhaltsbereiche zurückgegriffen. So wird im Lehrplan Bayerns darauf

hingewiesen, dass „dieser Gegenstandsbereich alle anderen Bereiche des Mathematikunterrichts als unerlässliches Prinzip [durchzieht]“ (Bayern, 2014, S. 108ff.; Freie und Hansestadt Hamburg, 2011, S. 12ff.; Saarland, 2009, S. 5ff.).
In den Lehrplänen der anderen Bundesländer wird der Bereich „Muster und Strukturen“ in die verschiedenen Inhaltsbereiche integriert. Diese Integration geschieht teilweise implizit, teilweise wird explizit auf die Bedeutung von Mustern und Strukturen im Mathematikunterricht hingewiesen. So werden zum Beispiel im Lehrplan des Landes Nordrhein-Westfalen Muster und Strukturen als integraler Bestandteil aller mathematischer Bereiche gesehen, welcher häufig die Themenbereiche bestimmt und durch zentrale mathematische Grundideen verdeutlicht werden kann (Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 56). Unbestritten sind Muster und Strukturen somit wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts. Dennoch bleibt in allen Lehrplänen offen, was genau unter Mustern und Strukturen verstanden wird.

1.2 Muster und Strukturen – eine begriffliche Auseinandersetzung

Muster und Strukturen sind von zentraler Bedeutung im Mathematikunterricht der Grundschule und der mathematikdidaktischen Forschung. Auch in der vorliegenden Arbeit spielen die Begriffe Muster und Strukturen eine zentrale Rolle. Aus diesem Grund wird im Folgenden geklärt, was in der vorliegenden Arbeit unter Muster und Strukturen verstanden wird. Dazu wird zunächst der alltagssprachliche Gebrauch der Begriffe in den Blick genommen. Darauf aufbauend wird geklärt, was in der Wissenschaftsdisziplin der Mathematik unter Muster und Strukturen verstanden wird. Abschließend werden diese Begriffe aus mathematikdidaktischer Perspektive fokussiert und das Verständnis in der vorliegenden Arbeit herausgearbeitet. Eine solche Auseinandersetzung ist notwendig, denn obwohl die Begriffe in der Mathematik und der Mathematikdidaktik von zentraler Bedeutung sind, gibt es kein einheitliches Begriffsverständnis oder eine scharfe Trennung der Begriffe *Muster* und *Strukturen* (vgl. u.a. Deutscher, 2012, S. 86; Wittmann & Müller, 2005, S. 43). Die Begriffe werden häufig synonym verwendet oder aber deren Gebrauch und Definition für den Leser nicht offengelegt (Lüken, 2012, S. 12; Wittmann & Müller, 2005, S. 43). Dies kann auch damit begründet werden, dass „teilweise inhaltliche Überschneidungen von Struktur und Muster sowie die Vielzahl möglicher Bedeutungen des Wortes Muster [...] jede Definition unscharf und eine exakte Trennung beider Bereiche schwierig [machen]“ (Lüken, 2012, S. 20). Dennoch zeigt sich, dass in der jüngeren mathematikdidaktischen Diskussion die Begriffe nicht synonym genutzt werden.

Alltagssprachlicher Gebrauch der Begriffe Muster und Strukturen

Im alltagssprachlichen Gebrauch ist der Begriff **Muster** mit verschiedenen Bedeutungen belegt, so dass sich umgangssprachlich Konnotationen des Begriffs unterscheiden lassen. Der Begriff Muster kann für eine *Vorlage* stehen, nach der etwas hergestellt werden kann. Er kann auch für ein *Vorbild* stehen, das als etwas Vollkommenes gilt. Zudem kann der Begriff Muster für eine *graphische Struktur*, also eine Abfolge von einem oder mehreren Motiven gesehen werden. Aber auch ein *kleines Stück einer Ware*, an der man die Beschaffenheit dieser erkennen kann, wird umgangssprachlich als Muster bezeichnet (Brockhaus, 2006; Band 19, S. 178; Wittmann & Müller, 2005, S. 48). Allen Konnotationen des Begriffs Muster liegt eine Vorstellung zu Grunde, dass es sich dabei um potentiell immer wiederholbare Elemente beziehungsweise Teilelemente handelt. Insbesondere bei der Betrachtung der Bedeutung im Sinne einer graphischen Struktur beziehungsweise Vorlage zeigt sich eine Doppeldeutigkeit des Begriffs. Legt man ein Verständnis von Muster als graphische Struktur zugrunde, so handelt es sich dabei um eine wiederholende Abfolge gleicher Elemente. Aber eben diese Elemente können in einem Verständnis, welches Muster im Kontext einer Vorlage verortet, ebenfalls eigenständige Muster darstellen. Denn aus dieser Perspektive betrachtet, ist ein Muster etwas, das mehrfach wiederholbar ist. Demnach kann die graphische Struktur an sich als Muster betrachtet werden, aber auch jedes Element der graphischen Struktur kann dabei ein eigenständiges Muster darstellen. Auch in der weiteren Auseinandersetzung mit Mustern im Mathematikunterricht wird diese Doppeldeutigkeit nochmals aufgegriffen und deren Bedeutung für das Argumentieren mit Anschauungsmitteln herausgestellt (vgl. Kap. 1.3.3).

Unter **Struktur** versteht man im Allgemeinen „die Anordnung der Teile eines Ganzen zueinander, einen gegliederten Aufbau sowie eine innere Gliederung“ (Brockhaus, 2006; Band 24, S. 501), aber auch ein Beziehungsgefüge sowie dessen Eigenschaften; ein nach Regeln aufgebautes Ordnungsgefüge (ebd.). Demnach stehen Eigenschaften und Beziehungen bei der Nutzung des Begriffs im Vordergrund. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Nutzung des Begriffs *Struktur* auch immer unmittelbar mit der Wissenschaftsdisziplin, in der er verwendet wird, zusammenhängt (Lüken, 2012, S. 18).

Begriffsverständnis in der elementaren Mathematik

Aus wissenschaftlicher Perspektive konstituieren Muster und Strukturen die Mathematik. In der Mathematik wird nach Mustern gesucht (Feynman, 1995, S. 100).

In der Arbeit Sawyers (1955), welche grundlegend für die Entwicklung hin zur Mathematik als Wissenschaft der Muster ist, zeigt sich ein eher weites Verständnis für Muster. Er

beschreibt dies wie folgt: „It is to be understood in a very wide sense, to cover almost any kind of regularity that can be recognized by the mind“ (Sawyer, 1955, S. 12). Dabei bezieht er sich nicht ausschließlich auf die Mathematik, sondern nimmt auch Muster aus der Lebenswirklichkeit in den Blick. Er gibt das Beispiel, dass ein Vogel die gelb schwarzen Streifen einer Wespe erkennt und die Menschen den Zusammenhang zwischen dem Aussähen von Samen und dem Wachsen einer Pflanze. Somit bezieht er sich bei den beschriebenen Regelmäßigkeiten nicht nur auf die Mathematik, sondern auch auf die alltägliche Lebenswelt und zeigt ein sehr weites Verständnis des Begriffs ‚Muster‘.
Auch Devlin (2002) vertritt eine solch weite Sichtweise:

> *„[Der] Mathematiker untersucht abstrakte Muster – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende“ (Devlin 2002, S. 5).*

Er stellt ebenso wie Sawyer die Bedeutung von Mustern für die Mathematik heraus, denn beide bezeichnen *Mathematik als Wissenschaft der Muster*, explizieren diesen Begriff aber nicht weitergehend.
In der Mathematik, als Wissenschaft der Muster, bestehen die betrachteten Inhalte nicht aus Objekten, sondern es sind Relationen zwischen Objekten, also die Strukturen, welche die Mathematik ausmachen (Heintz, 2000, S. 37).
Eine solche strukturalistische Auffassung vertritt auch Bourbaki, eine französische Mathematikergruppe, die Strukturen als grundlegend für die Mathematik ansehen.

> *„Den verschiedenartigen Vorstellungen, die mit diesem Gattungsnamen bezeichnet werden, ist gemeinsam, daß sie angewandt werden können auf Mengen von Elementen, deren Natur nicht festgelegt ist; um eine mathematische Struktur zu definieren, nimmt man eine oder mehrere Relationen zwischen diesen (nicht weiter definierten) Elementen als gegeben an [...]; dann postuliert man, daß die gegebene Relation (oder die gegebenen Relationen) gewisse Bedingungen erfüllen, welche explizit festgesetzt werden und welche die Axiome der betrachteten Struktur sind“ (Bourbaki, 1974, S. 148f.; Hervorhebung i.O.).*

Es wird in diesem Zitat deutlich, dass in dem Verständnis einer mathematischen Struktur immer der Fokus auf Beziehungen und Relationen zwischen einer bestimmten Menge an Elementen gelegt wird. Sie postulieren, dass die Mathematik sich aus den drei ‚Mutterstrukturen‘ der algebraischen Struktur, der Ordnungsstruktur und der topologischen Struktur

zusammensetzt. Alle anderen Strukturen lassen sich aus Kombinationen und Verzahnungen dieser erzeugen (Bourbaki, 1974, S. 149ff.).
Davis und Hersh (1985) sind ebenfalls der Auffassung, dass Strukturen innerhalb der Mathematik von besonderer Bedeutung sind und verstehen unter Struktur Folgendes:

> *„Nach den heutigen mathematischen Gepflogenheiten besteht eine mathematische Struktur aus einer Menge von Gegenständen S, die man sich als Träger der Struktur denken kann, einer Menge von Operationen oder Beziehungen, die auf dem Träger definiert werden, und einer Menge ausgezeichneter Elemente im Träger, wie zum Beispiel 0, 1 usw. Man sagt, daß diese Grundbestandteile ‚die Signatur' der Struktur ausmachen, und sie werden oft in Form von n-Tupeln dargestellt. Zum Beispiel: <R, +, •, 0, 1> bedeutet die Menge der reellen Zahlen, kombiniert durch Addition und Multiplikation mit zwei ausgezeichneten Elementen, 0 und 1. Wenn eine Signatur einer Menge von Axiomen unterworfen wird, die Forderungen an ihre Elemente stellt, bildet sich eine mathematische Struktur" (Davis & Hersh, 1985, S. 143).*

Davis und Hersh (1985) verstehen demnach mathematische Gegenstände als Träger einer mathematischen Struktur. Auf diesem sogenannten Träger werden dann Operationen und Beziehungen definiert. Demnach sehen sie, wie auch die Mathematikergruppe Bourbaki (1974), Beziehungen als wesentliches Merkmal einer mathematischen Struktur an.
Hoch & Dreyfus (2004) haben einen eher weiteren Blick auf Strukturen.

> *„Structure in mathematics can be seen as a broad view analysis of the way in which entity is made up of its parts. This analysis describes the system of connections or relationships between the component parts" (Dreyfus & Hoch, 2004, S. 50).*

Die Struktur der Mathematik umfasst somit die Beziehungen und Zusammenhänge zwischen einzelnen Objekten und Teilen der Mathematik. Hierbei handelt es sich um einen eher abstrakten Blick, denn es werden weder die einzelnen Komponenten genauer beschrieben noch welche Zusammenhänge oder Verbindungen genau gemeint sind.
Gemein haben alle Verständnisse, dass Relationen, also Beziehungen zwischen Elementen, charakteristisch für Strukturen sind. Relationen und Beziehungen sind somit von besonderer Bedeutung für mathematisches Wissen. Dabei sind mathematische Elemente die Träger solcher Strukturen (vgl. auch Ehrlich, 2013, S. 92). Strukturen sind in der Mathematik demnach von zentraler Bedeutung.

Begriffliches Verständnis in der Mathematikdidaktik und der vorliegenden Arbeit

Auch in der mathematikdidaktischen Forschung stellen Muster und Strukturen wesentliche Begriffe dar. Auch hier zeigen sich unterschiedliche Begriffsverständnisse.

Müller und Wittmann (2007) sehen Muster als Oberbegriff „und sprechen vor allem dann von *Struktur*, wenn es sich um grundlegende, vorgegebene *Muster* handelt“ (Wittmann & Müller, 2005, S. 43). Diese Begriffsauffassung ist für ein Begriffsverständnis in der vorliegenden Arbeit problematisch. Muster wird an dieser Stelle als Oberbegriff verstanden, allerdings bleibt ungeklärt was genau unter dem Begriff Muster zu verstehen ist. Unter Struktur verstehen sie ein *grundlegendes* und *vorgegebenes* Muster. Hierbei benutzen sie erneut den Begriff Muster, der an sich noch nicht geklärt ist. Gleichzeitig bleibt offen, was unter einem grundlegenden Muster zu verstehen ist. Wenn es grundlegende und vorgegebene Muster gibt, muss es noch weitere Arten von Mustern geben, die in diesem Sinne keiner Struktur entsprechen. Auch dies wird in dem oben genannten Begriffsverständnis nicht weiter aufgegriffen und abgegrenzt. In diesem Begriffsverständnis zeigt sich die deutliche Verwobenheit der beiden Begrifflichkeiten.

Während in dem Verständnis von Müller und Wittmann (2005) die Bedeutung des Musterbegriffs nicht geklärt ist, gibt es eine Vielzahl an begrifflichen Auffassungen, die zum einen aufzeigen, was unter Mustern und Strukturen zu verstehen ist und diese Begrifflichkeiten zum anderen auch in Beziehung zueinander setzen. In diesen werden Muster häufig als eine wahrnehmbare Regelmäßigkeit beschrieben. Schacht (2012, S. 168) sieht Muster im weiteren Sinne als jegliche wahrnehmbare Regelmäßigkeit und bezieht sich somit nicht nur auf mathematische Muster. Mulligan und Mitchelmore (2009, S. 34) konkretisieren den Musterbegriff für die Mathematik und beschreiben Muster als „any predictable regularity usually involving numerical, spatial or logical relationships“. Ein Muster ist demnach immer eine Regelmäßigkeit, die sich als numerischer, räumlicher oder logischer Art zeigen kann und beziehen sich dabei auf konkrete Inhaltsbereiche der Mathematik. Demnach kann die Regelmäßigkeit auch in der Mathematik unterschiedlicher Natur sein. Lüken (2012, S. 22) und Benz, Peter-Koop und Grüßing (2015, S. 294) folgen diesem Verständnis und beschreiben Muster als zahlenmäßige beziehungsweise numerische sowie räumliche Regelmäßigkeit. Es manifestiert sich dabei ein Begriffsverständnis, dass Muster aufgrund von wahrnehmbaren Regelmäßigkeiten charakterisiert. Dabei können diese Regelmäßigkeiten unterschiedlicher Natur sein. Für die Mathematik sind dies vor allem numerische, räumliche oder logische Regelmäßigkeiten. Diese Regelmäßigkeiten bestehen dabei in Beziehungen und Relationen zwischen Elementen eines Musters. Diese werden in den oben aufgeführten Verständnissen des Musterbegriffs als Struktur bezeichnet. Schacht (2012) beschreibt dies als „die

Eigenschaften und Wesensmerkmale eines Musters“ (S. 168). Diese Eigenschaften und Wesensmerkmale treten dabei als „Beziehung zwischen den einzelnen Elementen einer Menge untereinander, zwischen Teilmengen dieser untereinander sowie zwischen Einzelelementen, Teilmengen und der gesamten Menge“ (Benz et al., 2015, S. 294; vgl. auch Lüken 2012, S. 22) in Erscheinung. Demnach gibt die Struktur an, wie die Elemente eines Musters zueinander in Beziehung stehen und angeordnet sind (Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 34). Muster beinhalten somit immer eine Struktur. Dies zeigt, dass die Begriffe zwar voneinander abgegrenzt werden können, dennoch unweigerlich in Beziehung zueinander stehen. Muster beschreiben demnach eine Anordnung aus mehreren Elementen, die in einer strukturellen Beziehung zueinander stehen. Während die einzelnen Elemente durchaus wahrnehmbar sind, ist die dahinterliegende Struktur nicht direkt wahrnehmbar, sondern muss vom betrachtenden Individuum in das Muster hineingedeutet werden. Ehrlich (2013) beschreibt Muster daher als „mindestens einen konkreten Repräsentanten einer mathematischen Struktur“ (Ehrlich, 2013, S. 117). Somit werden Strukturen durch Muster repräsentiert und Muster beinhalten gleichzeitig immer eine Struktur. Die Struktur hingegen ist „eine allgemein formulierte mathematische Beziehung zwischen mindestens zwei Elementen in einem mathematischen Kontext“ (Ehrlich, 2013, S. 117). Hierbei bleibt fraglich, was genau unter ‚allgemein formuliert‘ verstanden wird. Gleichzeitig stellt sich die Frage, ob eine mathematische Struktur immer einer verbalisierten Formulierung bedarf. Manifestiert sich die Struktur eines Musters erst durch die Verbalisierung, würde dies bedeuten, dass ein Muster und deren zugrundeliegenden Strukturen erst durch die Interpretation und eine damit verbundene Formulierung dieser erzeugt werden. Dies spiegelt zum einen die Verwobenheit der Begrifflichkeiten und das Wechselspiel zwischen diesen wider, zum anderen wird deutlich, dass Muster und Strukturen nicht evident sind. Hierbei lassen sich zwei komplementäre Komponenten mathematischer Muster unterscheiden, die in einer wechselseitigen Beziehung zueinanderstehen. Es kann unterschieden werden in die phänomenologisch sichtbare (An-)Ordnungen des Musters sowie die gesetzmäßigen, strukturellen Zusammenhänge (Wißing, 2016, S. 1070). Als phänomenologische (An-)Ordnungen wird das visuell Wahrnehmbare bezeichnet, „also das, was an der Oberfläche zu sehen ist und was unmittelbar beschrieben werden kann. Dies können beispielsweise Ziffern, Zahlen oder Operationszeichen sein“ (Schulte-Wißing, 2019 i.V., S. 67). Unter gesetzmäßigen und strukturellen Zusammenhängen werden die Beziehungen und Relationen zwischen den sichtbaren Elementen beschrieben (ebd.). Die phänomenologische Anordnung und somit die sichtbare Regelmäßigkeit ermöglicht dem Betrachter einen ersten Zugang zur Struktur. Diese muss vom Betrachter aber in das Muster hineingedeutet werden, um die Struktur vollumfänglich zu durchdringen.

Obwohl in den unterschiedlichen Begriffsverständnissen eine Verwobenheit der Begrifflichkeiten Muster und Strukturen deutlich wird und diese eng miteinander verbunden sind, werden die Begrifflichkeiten auch in dieser Arbeit nicht synonym verwendet. Basierend auf den Gemeinsamkeiten der oben dargestellten begrifflichen Ausschärfungen der Begriffe Muster und Strukturen werden die Begriffe in der vorliegenden Arbeit wie folgt verwendet:
Muster beschreiben eine Anordnung, welche aus unterschiedlichen Elementen besteht und in der eine Regelmäßigkeit zu finden ist. Diese Regelmäßigkeit wird durch Relationen und Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen konstituiert, der *Struktur*.

1.3 Arten von Mustern und Strukturen

Die Thematisierung von Mustern und deren Strukturen ist bereits in der Grundschule unabdingbar. Sie konstituieren die Mathematik und sind zentraler Inhalt der Bildungsstandards und somit auch der Lehrpläne (vgl. Kap. 1.1).
Es stellt sich nunmehr die Frage, welche Arten von Mustern und Strukturen es im Mathematikunterricht der Grundschule gibt und welche für das Argumentieren mit Anschauungsmitteln von Relevanz sind. Bei der Thematisierung von Mustern und Strukturen handelt sich um eine „innermathematische Auseinandersetzung mit Zahlen, geometrischen Formen und Zahlbeziehungen“ (Steinweg, 2013, S. 25) und durchzieht alle Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts (vgl. Kap. 1.1). Im Folgenden wird aufgrund der Ausrichtung der vorliegenden Arbeit der Fokus auf geometrische Muster, die arithmetische Inhalte darstellen, gelegt[2]. Hierbei werden arithmetische Strukturen durch geometrische Muster und deren zugrundeliegende Strukturen repräsentiert. Sie treten als *Musterfolgen* und *räumliche Muster* im Mathematikunterricht in Erscheinung. Musterfolgen lassen sich dabei in *wiederholende sowie wachsende Musterfolgen* differenzieren. Auch eine *Kombination mit räumlichen Mustern* ist möglich und wird gesondert betrachtet. In der vorliegenden Arbeit stehen vor allem räumliche Muster und in Ansätzen wachsende Musterfolgen im Fokus, dennoch werden aufgrund der Vollständigkeit und zur Förderung des besseren Verständnisses alle Arten genauer betrachtet.
Musterfolgen treten dabei in unterschiedlichen Darstellungsweisen in Erscheinung[3]. So werden sie häufig als Folgen geometrischer Objekte, die erforscht und fortgesetzt werden sollen, im Unterricht eingesetzt. Steinweg (2013) nennt solche Arten von Mustern Formen- und

[2] Für eine intensive Auseinandersetzung mit Zahlenmustern (Schulte-Wißing 2019).
[3] Auditive und motorische Muster bleiben an dieser Stelle aufgrund der Ausrichtung der vorliegenden Arbeit unberücksichtigt.

Farbmuster. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass sich die Objekte durch die Kriterien Form oder Farbgebung unterscheiden. Auch eine Kombination beider Eigenschaften ist möglich (S. 28ff.). Neben der Darstellung von Mustern als Folge beziehungsweise Anordnung geometrischer Objekte sind Musterfolgen auch als Anordnung von Symbolen, zum Beispiel Buchstaben oder Zahlen, möglich.

1.3.1 Musterfolgen

Unter Musterfolgen versteht man „die Wiederholung verschiedener Elemente nach einer bestimmten Regel“ (Lüken, 2012, S. 19). Die Regel der jeweiligen Musterfolge ist entscheidend dafür, ob es sich um eine wiederholende oder wachsende Musterfolge (im englischsprachigen Raum ‚repeating pattern’ sowie ‚growing pattern’) handelt[4].

1.3.1.1 Wiederholende Musterfolgen

Wiederholende Musterfolgen sind Folgen, in denen einzelne Einheiten, bestehend aus einem oder mehreren Objekten, durch Wiederholung aneinandergereiht werden (Threlfall, 2005, S. 18 ff.). Hierbei gilt es, die zu wiederholenden Einheiten zu identifizieren und das Muster durch Wiederholung dieser zu erzeugen. Das Muster kann dann durch stetige Wiederholung der Grundeinheit beliebig erweitert werden. Durch den periodischen Aufbau der wiederholenden Musterfolge kann folgende Regel für die Bestimmung eines nächsten Elementes formuliert werden. Bei einer Grundeinheit der Länge n gilt: „Jedes Element der Musterfolge ist gleich einem der ersten Elemente. Und: Jedes Element der Musterfolge ist gleich dem Element n Positionen vorher“ (Lüken, 2012, S. 30). Hierbei können die einzelnen Elemente in einem oder in mehreren Attributen wie zum Beispiel Größe, Form, Farbe etc. unterschieden werden (Threlfall, 2005, S. 19f.). Dies wird im Folgenden an fünf Musterfolgen illustriert (vgl. Abb. 1.1).

[4] Auf eine weitere Ausdifferenzierung unterschiedlicher wiederholender Musterfolgen wird an dieser Stelle verzichtet. Nachzulesen bei Papic (2007), Lüken (2012) oder (Steinweg, 2013).

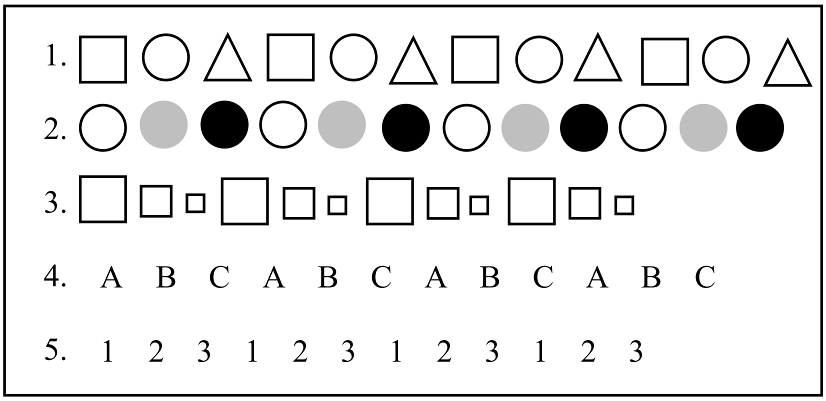


Abbildung 1.1: Wiederholende Musterfolgen in unterschiedlichen Darstellungsebenen

Eine erstmalige Betrachtung der abgebildeten wiederholenden Musterfolgen erweckt den Anschein, dass es sich um gänzlich unterschiedliche Musterfolgen handelt. Es handelt sich zum einen um Grundeinheiten, deren Einzelelemente geometrische Objekte darstellen, die sich hinsichtlich der Form (1.), der Farbe (2.) bzw. der Größe (3.) unterscheiden, so dass damit gänzlich verschiedene Eigenschaften betrachtet werden (vgl. Abb. 1.1). In der ersten Musterfolge sind die Einzelelemente geometrische Objekte (Quadrat, Kreis, Dreieck), die sich in ihrer Form unterscheiden, Farbgebung und Größe sind konstant. Demgegenüber unterscheiden sich die Einzelelemente in Musterfolge zwei nicht hinsichtlich ihrer Form und Größe, sondern unterscheiden sich in der Farbgebung (weiß, grau, schwarz). Die dritte Musterfolge fokussiert gleichförmige und gleichfarbige Einzelelemente unterschiedlicher Größe (groß, mittel, klein). Zum anderen handelt es sich um Musterfolgen, die Buchstaben (4.) und Zahlen (5.) als Symbole für die Einzelelemente nutzen (vgl. Abb. 1.1).
Auch wenn diese Musterfolgen bei ausschließlicher Betrachtung und Vergleich der konkreten Objekte als verschieden erscheinen, ist die dem Muster zugrundeliegende Struktur in allen Musterfolgen identisch. Die Grundeinheit besteht aus jeweils drei Einzelelementen, die durch fortwährende Wiederholung zu einem wiederholenden Muster werden. Durch die gleiche Länge der Grundeinheiten der unterschiedlichen Musterfolgen wird ein Isomorphismus erzeugt. Somit kann bereits durch die Thematisierung solch elementarer Musterfolgen, der Fokus nicht auf die einzelnen Objekte, sondern auf die Relationen zwischen den Objekten sowie zwischen unterschiedlichen Musterfolgen gelegt werden (Lüken, 2012, S. 30). Eine einfache Übersetzung einer Darstellungsform in eine andere verändert nicht die entscheidenden strukturellen Eigenschaften des Musters (Benz et al., 2015, S. 307f.; Liljedahl, 2004, S. 27; Warren & Cooper, 2006, S. 10f.). Dies verdeutlicht, dass bereits einfache Muster und deren Strukturen die Abstraktheit mathematischer Relationen fokussieren und es nicht ausreichend ist, lediglich die konkreten Objekte in den Fokus zu setzen. Relevant sind die Beziehungen innerhalb der Musterfolge sowie zwischen Musterfolgen gleicher Strukturierung.

1.3.1.2 Wachsende Musterfolgen

Wachsende Musterfolgen wachsen oder schrumpfen systematisch von Folgeglied zu Folgeglied (Warren, 2005). Diese systematische Wachstumsstruktur gilt es bei der Betrachtung der wachsenden Musterfolgen zu identifizieren. Steinweg (2013) merkt zu Recht an, dass Musterfolgen durchaus auf unterschiedliche Weise fortgesetzt werden können, auch wenn dies in vielfältigen Tests und auch in der Literatur häufig anders dargestellt wird. So kann die Zahlenfolge 1, 2, 3, 4 als Folge der natürlichen Zahlen gedeutet werden, oder als wellenartige Folge 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4 oder mit Dopplung der 1 als 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1. Unterschiedliche Deutungen der Muster sollten daher beim Einsatz von Mustern immer mitgedacht werden (Steinweg, 2013, S. 28). Im Folgenden wird an fünf Beispielen die Vielfältigkeit der wachsenden Musterfolgen illustriert. Aufgrund der Ausrichtung der Arbeit liegt auch der Fokus in den Beispielen auf Anordnungen geometrischer Symbole.

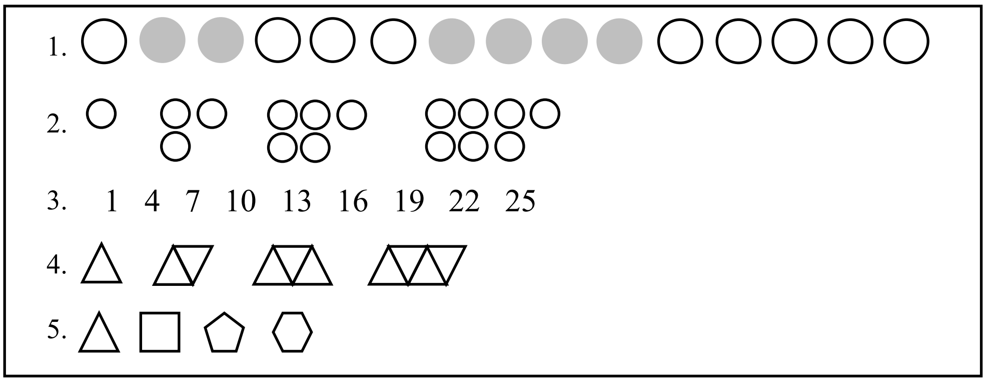


Abbildung 1.2: Wachsende Musterfolgen (Muster 4 aus Steinweg 2013, S. 34; Muster 5 aus Lüken 2012, S. 32)

Auch wenn in den obigen Beispielen (vgl. Abb. 1.2) der Fokus auf Musterfolgen mit geometrischen Elementen gelegt wird, bedeutet dies nicht, dass die mathematischen Strukturen, die dadurch veranschaulicht werden, ausschließlich geometrischer Natur sind. Vielmehr zeigt sich eine starke Verwobenheit zwischen der Geometrie und der Arithmetik. Denn dabei werden arithmetische Inhalte, wie zum Beispiel die Abfolge der natürlichen Zahlen (1.) oder ungerade Zahlen durch geometrische Objekte und deren strukturelle Anordnung (2.) dargestellt. Dies wird im Folgenden anhand der verschiedenen Beispiele erläutert.

Betrachtet man die Musterfolgen eins, zwei, vier und fünf, so zeigt sich eine Anordnung geometrischer Objekte, die in ihrer Struktur einer wachsenden Musterfolge entspricht. Im ersten Fall kann in die geometrische Darstellung die Folge der natürlichen Zahlen hineingedeutet werden, bei dem jedes Folgeglied um eins wächst. Bei der Darstellung zwei handelt es sich um prototypische Darstellungen der ungeraden natürlichen Zahlen, bei der jedes Folgeglied im Vergleich zu seinem Vorgänger um zwei wächst. Gleichzeitig besteht die Folge zwei aus Folgegliedern, die in sich jeweils eigenständige räumliche Muster darstellen und

dahingehend genauer analysiert werden können (vgl. Kap. 1.3.2). Hier zeigt sich die Doppeldeutigkeit des Begriffs ‚*Muster*' (vgl. Kap. 1.2). Zum einen stellt die gesamte Folge ein Muster dar. Zum anderen sind die einzelnen Folgeglieder räumliche Muster. Demnach stellt jedes Folgeglied an sich auch ein Muster dar (vgl. Kap. 1.3). In Folge vier zeigt sich, dass neben der Erhöhung der Elementanzahl von einem Folgeglied zum nächsten auch die Anordnung der einzelnen Teilelemente eines Folgeglieds in der Wachstumsstruktur Berücksichtigung finden kann. Gleichzeitig ist es möglich, durch die Elementanzahl der einzelnen Folgeglieder auch in diese Musterfolge die Abfolge der natürlichen Zahlen hineinzudeuten. Hierbei wird die Kardinalität eines Folgegliedes fokussiert. Folge fünf verdeutlicht, dass bei einer wachsenden Musterfolge nicht ausschließlich die Anzahl der Teilelemente eines Folgeglieds im Fokus stehen muss, sondern dass einzelne strukturelle Merkmale von Folgeglied zu Folgeglied systematisch variieren können. In diesem Fall besteht jedes Folgeglied weiterhin aus einem Element, bei dem sich jeweils die Anzahl der Ecken um eins erhöht.
Diese Beispiele von wachsenden Musterfolgen machen exemplarisch deutlich, wie vielfältig die Arten wachsender Musterfolgen sind. Dabei werden nicht die konkreten Objekte und Folgeglieder betrachtet, sondern die Beziehungen zwischen diesen, die sowohl exemplarisch (beispielbezogen) als auch allgemeingültig beschrieben werden können (vgl. Kap. 2.4).

1.3.2 Räumliche Muster und deren Potential für den Mathematikunterricht

Räumliche Muster unterscheiden sich von Musterfolgen dahingehend, dass nicht die Beziehungen zwischen einzelnen Grundeinheiten bzw. Folgegliedern eines Musters im Vordergrund stehen, sondern das Muster innerhalb einer geordneten Einheit (Benz et al., 2015, S. 298; Lüken, 2010, S. 241). Hierbei werden „Mengen [...] in Gestalt von figuralen Prototypen veranschaulicht und in einem einheitlich strukturierten Format miteinander in Beziehung gebracht" (Hess, 1997, S.213f.). Unter Prototypen versteht man in der Prototypensemantik Darstellungen, deren intentionale Struktur, die wesentlichen Merkmale einer Kategorie wiedergeben (Rosch & Mervis, 1975, S. 574). Hierbei kann es sich um didaktische Materialien, wie zum Beispiel dekadisch strukturierte Anschauungsmittel (vgl. Kap. 3), figurierte Zahlen oder um als räumliche Muster dargestellte Rechenoperationen etc. handeln. Insbesondere Punktmuster als räumliche Muster haben in der Entwicklung der Mathematik eine bedeutende Rolle gespielt, um unterschiedliche mathematische Phänomene zu veranschaulichen und zu untersuchen (vgl. Abb. 1.3 & 1.4). Dabei ist an dieser Stelle bereits anzumerken, dass mathematischen Phänomene, die durch die Darstellung repräsentiert werden, nicht evident sind, sondern diese in die Veranschaulichung hineingedeutet werden, da sie grundsätzlich mehrdeutig sind. Diese Mehrdeutigkeit wird im weiteren Verlauf der Arbeit noch detailliert betrachtet (vgl. Kap. 1.4).

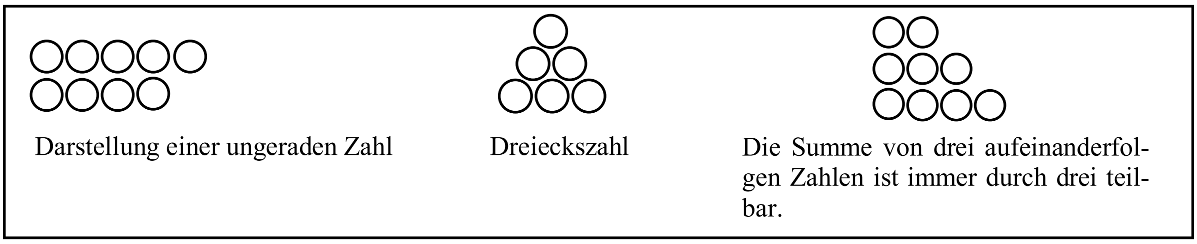


Abbildung 1.3: Beispiele räumlicher Muster

Bereits in der griechischen Mathematik wurden Steine gleicher Form und Größe genutzt, um Figuren zu legen und Zahlen zu repräsentieren (Becker, 1964 zit. n. Steinweg, 2006a). Diese Muster wurden nicht nur zum reinen Rechnen genutzt, sondern auch, um Zahlen zu untersuchen. Sie nutzten das „gebräuchliche Mittel der Repräsentation von Zahlen [...], um das Abstraktum ‚Zahl' als Abstraktum zum Gegenstand ihrer Erkenntnisstätigkeit zu machen“ (Damerow & Lefévre, 1981, S. 163f.). Zu dieser Zeit manifestieren sich somit erste zahlentheoretische Untersuchungen (Damerow & Lefévre, 1981; Steinweg, 2006a, S. 72; Wittmann & Ziegenbalg, 2007, S. 35f.). Gerade dieser Zugang wird auch im Mathematikunterricht der Grundschule genutzt, um aktiv Mathematik zu treiben und diese zu entdecken. Räumliche Muster bieten somit gerade für den Arithmetikunterricht der Grundschule ein großes Potential, Strukturen in Zahlen sowie Rechenoperationen und deren strukturellen Eigenschaften zu visualisieren. So lassen sich durch räumliche Muster Anzahlen oder Rechenoperationen veranschaulichen und deren Operationseigenschaften darstellen. Gleichzeitig bieten räumliche Muster die Möglichkeit mathematische Gesetzmäßigkeiten zu veranschaulichen. So werden in der Interviewstudie der vorliegenden Arbeit zwei Gesetzmäßigkeiten durch geometrische Muster veranschaulicht. Zum einen die Aussage, dass die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist. Zum anderen die Aussage, dass die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch drei teilbar ist. Da räumliche Muster als wesentliches Anschauungsmittel in der Interviewstudie eingesetzt werden, werden im Folgenden einige für diese Arbeit relevante Aspekte räumlicher Muster näher betrachtet. Hierbei wird aufgrund der in der Erhebung verwendeten räumlichen Muster ausschließlich die Nutzung von Punktmustern fokussiert[5].

[5] Für eine intensive theoretische Auseinandersetzung mit Anschauungsmitteln als Veranschaulichungen vgl. Kap. 3.

1.3.2.1 Räumliche Muster zur Zahldarstellung

Grundlegend für die Möglichkeit arithmetische Sachverhalte durch geometrische Anordnungen zu visualisieren, ist es, dass Anzahlen durch solche geometrischen Anordnungen veranschaulicht werden können. Eine in der Grundschule weitverbreitete Möglichkeit der Zahldarstellung ist die Darstellung mit Hilfe eines Punktmusters. Hierbei kann es sich um unterschiedlich strukturierte Mengen handeln (vgl. Abb. 1.4).

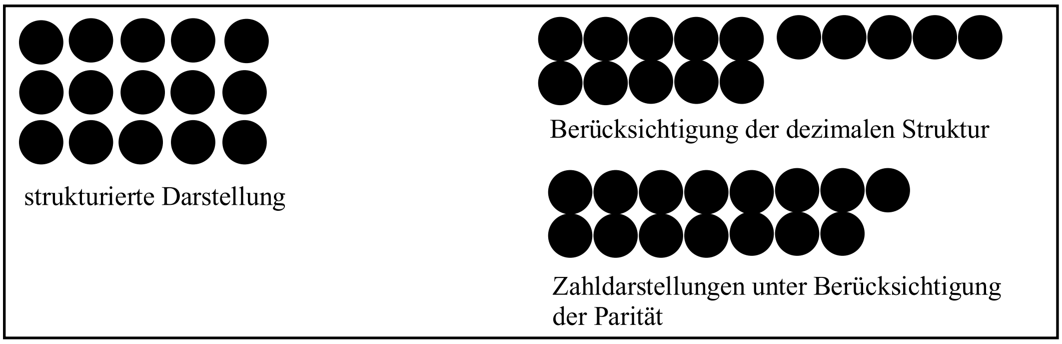


Abbildung 1.4: Beispiele räumlicher Muster zur Zahl 15

Diese Muster treten im Kontext des Aufbaus des Zahlverständnisses in der Regel als Zwanziger- oder Hunderterfeld in Erscheinung (Benz & Padberg, 2011, S. 39; Hasemann, 2007, S. 94f.). Sie repräsentieren nicht nur die Anzahl, sondern sind gleichzeitig auch Träger wesentlicher Aspekte des dezimalen Stellenwertsystems. Punktmuster zur Zahldarstellung können neben der eigentlichen Zahl somit noch weitere strukturelle Merkmale enthalten, die wesentlich in der Auseinandersetzung mit strukturellen Zahleigenschaften sind (vgl. Kap. 1.3 & 1.4).

1.3.2.2 Räumliche Muster zur Darstellung von Rechenoperationen

Räumliche Muster stellen in ihrer Kardinalität Zahlen dar, die der Anzahl der Punkte entsprechen (können), können aber gleichzeitig Träger weiterer struktureller Eigenschaften sein. Dies macht es möglich, dass durch Punktmuster auch Rechenoperationen dargestellt werden können. Im Folgenden wird dies am Beispiel der Multiplikation sowie Division erläutert, denn diese sind im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit von Bedeutung.

Die Multiplikation

Eine Möglichkeit, die Punktanzahl rechteckiger und in Spalten und Reihen strukturierter Darstellungen zu ermitteln bietet die Multiplikation. Dies bietet sich insbesondere dann an, wenn es sich um eine rechteckige Punktanordnung handelt oder um eine Anordnung, die teilweise aus rechteckigen Anordnungen besteht. Hierfür ist eine besondere Sichtweise auf die Multiplikation notwendig. Insgesamt lassen sich drei Grundvorstellungen unterscheiden:

die *räumlich-simultane* Vorstellung, die *zeitlich-sukzessive* Vorstellung sowie die *kombinatorische* Vorstellung (Benz & Padberg, 2011; Krauthausen, 2018, S. 66). Bei der für die vorliegende Arbeit relevanten Anordnung als Punktmuster ist eine räumlich-simultane Grundvorstellung maßgeblich. Eine kombinatorische Vorstellung lässt sich nicht als räumliches Muster darstellen und eine Darstellung der zeitlich-sukzessiven Vorstellung ist mit einem Punktmuster als räumliches Muster nur bedingt möglich, da „eine mehrmalige Wiederholung der gleichen Handlung im Zeitlablauf" (Benz & Padberg, 2011, S. 129) nicht durch ein statisches Muster dargestellt werden kann.

Die Visualisierung von Multiplikationsaufgaben durch Punktmuster stellt im Mathematikunterricht der Grundschule eine weitverbreitete und effektive Möglichkeit der Veranschaulichung dar. Aufgrund des „Zusammenhangs zwischen der Multiplikation und der wiederholten Addition gleicher Summanden lassen sich Produkte natürlicher Zahlen durch **rechteckige Punktmuster** veranschaulichen [...]" (Padberg & Büchter, 2015a, S. 207; Hervorhebung i.O.). So wird das Produkt zweier Zahlen a und b prototypisch als rechteckige Anordnung von a Zeilen und jeweils b Plättchen dargestellt (Schwarzkopf, 2017, S. 19; Walther & Wittmann, 2007, S. 371). Hierbei zeigen die Faktoren die Länge der Rechteckskanten an (Steinweg, 2013, S. 132). So zeigt das rechteckige Punktefeld eine räumlich-simultane Darstellung der Aufgabe 4 • 6 (vgl. Abb. 1.5). Der Multiplikator 4 zeigt sich in der vertikalen Anordnung, der Multiplikand 6 dagegen in der horizontalen Anordnung. Es entsteht ein Rechteck mit 4 Reihen á 6 Punkte. Gleichzeitig lässt sich dieses Punktefeld auch als wiederholte Addition deuten, hierfür ist allerdings eine Interpretation im Sinne eines sukzessiven Aufbaus des Punktefeldes oder eine Unterteilung des Punktefeldes notwendig (Steinweg, 2013, S. 132). Eine solche Interpretation der Multiplikation im Sinne einer rechteckigen Anordnung kann bereits algebraisches Denken initiieren. Die konkreten Objekte, nämlich die einzelnen Zahlen, rücken zugunsten eines Blicks auf die strukturellen Eigenschaften der Rechenoperation der Multiplikation in den Hintergrund. Die Struktur jeder dargestellten Multiplikation ist gleich (Schwarzkopf, 2017, S. 19).

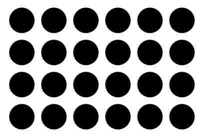


Abbildung 1.5: Räumliches Muster zur Darstellung der Multiplikationsaufgabe 4 • 6

Im vorliegenden Forschungsprojekt ist eine multiplikative Deutung im Kontext der Paritäten und der Teilbarkeit durch drei von Bedeutung. In beiden mathematischen Kontexten stellt die Division die wesentliche Rechenoperation dar, die es für die Kinder zu untersuchen und zu begründen gilt. Dabei stellt die Multiplikation als Umkehroperation der Division auch eine Möglichkeit dar, die Teilbarkeit zu untersuchen und zu begründen.

Die Division

Auch die Division kann, bei entsprechender Deutung, mit Hilfe von Punktmustern veranschaulicht werden. Hierbei lassen sich zwei Grundvorstellungen unterscheiden: Das *Verteilen* und das *Aufteilen* (Benz & Padberg, 2011, S. 152ff.). Beide lassen sich in den in der Untersuchung durchgeführten Interviews wiederfinden und beeinflussen die Art der Argumente (Kap. 8.2 & 8.3). Aus diesem Grund werden im Folgenden beide Grundvorstellungen und mögliche Veranschaulichungen im Folgenden am Beispiel 24 : 2 dargestellt.
Das *Aufteilen* basiert auf dem Zerlegen einer Gesamtmenge in gleichmächtige Teilmengen (Benz & Padberg, 2011, S. 153).

> *„Durch [das] Aufteilen wird [...] eine Menge mit a Elementen restlos aufgeteilt in k paarweise disjunkte Teilmengen mit jeweils b Elementen. Beim Aufteilen ist die Anzahl der Elemente der Ausgangsmenge und die Elementanzahl je Teilmenge gegeben, während die Anzahl der Teilmengen gesucht wird“ (Padberg & Büchter, 2015a, S. 216; Hervorhebung i.O.).*

Im Kontext des Aufteilens kann die Visualisierung sowohl auf Grundlage einer unstrukturierten Menge an Punkten als auch auf Grundlage eines Punktmusters vorgenommen werden, wie das folgende Beispiel verdeutlicht. In allen drei Veranschaulichungen ist die Punktmenge 24 Ausgangspunkt (vgl. Abb. 1.6).

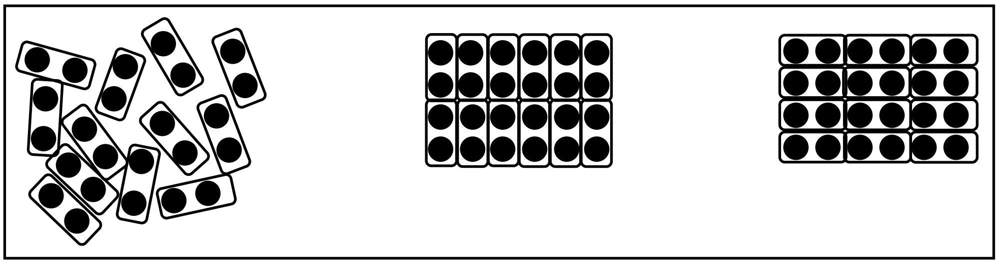


Abbildung 1.6: Veranschaulichung der Aufgabe 24 : 2 auf Grundlage unstrukturierter und strukturierter Darstellung der Gesamtmenge mit der Grundvorstellung des Aufteilens

Grundlegend ist hier die Darstellung der Gesamtmenge von 24 Punkten in unstrukturierter sowie strukturierter Weise. Durch das Kennzeichnen von Zweierbündeln können sukzessive die paarweise disjunkten, gleichmächtigen Mengen erfasst werden. Die Anzahl der Bündel, in diesem Fall 12, stellt die gesuchte Anzahl der Teilmengen dar. Bei den beiden Veranschaulichungen der strukturierten Darstellung der Gesamtmenge wird deutlich, dass die gleiche Aufgabe mit der identischen zugrundeliegenden Darstellung, unterschiedliche Deutungsmöglichkeiten offeriert. Bei der Thematisierung und Nutzung solcher Veranschaulichungen ist die Mehrdeutigkeit (vgl. Kap. 1.4) dieser maßgeblich zu berücksichtigen.

Das Verteilen basiert auf einer gleichmäßigen und gerechten Verteilung (Benz & Padberg, 2011, S. 155). Beim

> *„Verteilen wird eine Menge M mit a Elementen restlos zerlegt in b paarweise disjunkte, gleichmächtige Teilmengen. Gesucht wird beim Verteilen die Anzahl der Elemente je Teilmenge, während die Anzahl der Elemente der Ausgangsmenge M und die Anzahl der Teilmengen bekannt ist“ (Padberg & Büchter, 2015a, S. 218f.; Hervorhebung i.O.).*

Ein solches Vorgehen birgt im Kontext der räumlichen Muster allerdings einige Schwierigkeiten. Auch beim Verteilen ist die Darstellung der Gesamtmenge von 24 Punkten in strukturierter sowie unstrukturierter Weise grundlegend (vgl. Abb. 1.7).

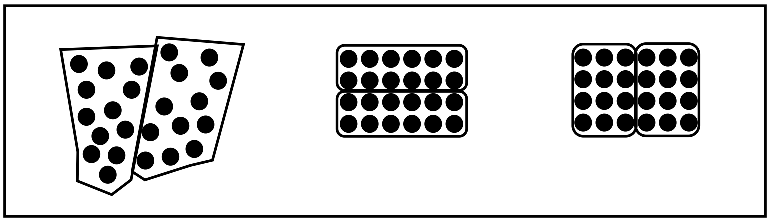


Abbildung 1.7: Veranschaulichung der Aufgabe 24 : 2 auf Grundlage unstrukturierter und strukturierter Darstellung der Gesamtmenge mit der Grundvorstellung des Verteilens

In der Veranschaulichung wird durch das Darstellen zweier paarweise disjunkter, gleichmächtiger Mengen die Anzahl der Teilmengen dargestellt. Das Kenntlichmachen der beiden Teilmengen erfordert zunächst die Ermittlung der Mächtigkeit der beiden Teilmengen. An dieser Stelle ist fraglich, inwiefern eine ikonische Abbildung in dieser Form sinnvoll für den Einsatz beim Mathematiklernen ist. Vielmehr eignet sich an dieser Stelle eine dynamische Form, die ein Wegschieben der einzelnen Plättchen ermöglicht, so dass beide Teilmengen enaktiv erzeugt werden, um die Kardinalität im Anschluss ermitteln zu können.

Bei den Veranschaulichungen zwei und drei ist eine strukturelle Erfassung des Gesamtmusters möglich. Notwendig ist die Bewusstheit über die gleichmäßige Verteilung der Punkte, das bedeutet, dass in jeder Spalte gleich viele Punkte sind, aber auch in jeder Reihe muss die Punktanzahl identisch sein. So dass das Punktmuster horizontal oder vertikal in die entsprechende Anzahl an Teilmengen geteilt werden kann. Gleichzeitig bedeutet dies, dass eine solche Veranschaulichung nur dann möglich ist, wenn mindestens eine Kantenlänge ein Vielfaches des Divisors darstellt. Dies macht deutlich, dass eine Veranschaulichung des Verteilens zur Einführung der Division nur bedingt geeignet ist. Dennoch muss das Verteilen im Kontext des Forschungsprojekts mitgedacht sein, denn Kinder können, und dies zeigt sich auch in den Analysen, auf Basis dieser Grundvorstellung die Paritäten oder die Teilbarkeit durch drei begründen (vgl. Kap. 8).

1.3.2.3 Räumliche Muster zur Darstellung struktureller Zahleigenschaften

Zur Veranschaulichung struktureller Zahleigenschaften, wie zum Beispiel der Paritäten, eignen sich räumliche Muster in Form von Punktmustern. Betrachtet man räumliche Anordnungen im Kontext der Paritäten, stellt die geometrische Hälfte eine bedeutsame Sichtweise dar. So gilt es, die Möglichkeit der Halbierung des räumlichen Musters zu betrachten. Auch hier sind unterschiedliche Deutungsmöglichkeiten vorstellbar (vgl. Abb. 1.8).

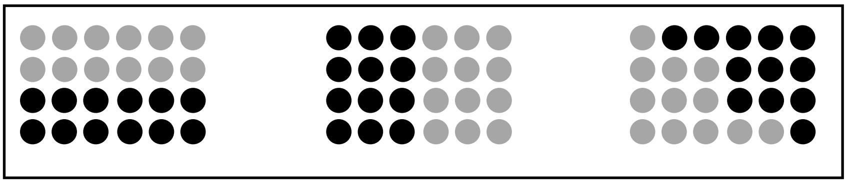
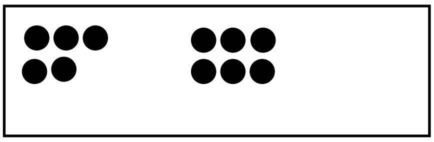


Abbildung 1.8: Möglichkeiten der geometrischen Hälfte

Neben dieser Sichtweise ist eine Visualisierung in Form von figuralen Prototypen, die die strukturellen Zahleigenschaften widerspiegeln, möglich. Die Idee der geometrischen Hälfte wird hierbei in besonders prägnanter Form repräsentiert, indem die algebraische Struktur auf Punktmuster übertragen wird. Gerade Zahlen sind immer ohne Rest durch zwei teilbar und lassen sich in der algebraischen Form 2n darstellen. Dies ist auf räumliche Muster übertragbar, indem 2 Reihen mit n Plättchen dargestellt werden. Ungerade Zahlen lassen sich in der algebraischen Form 2n+1 darstellen und sind somit in 2 Reihen mit n Punkten und einem einzelnen Punkt visualisierbar (Frobisher, 2005, S. 33ff.; Krauthausen, 2018, S. 330 f.; Wittmann & Ziegenbalg, 2007, S. 35ff.). Da bei geeigneter Deutung eine direkte Übertragung der algebraischen Form der geraden und ungeraden Zahlen in ein räumliches Muster möglich ist und somit zentrale Eigenschaften widergespiegelt werden, handelt es sich hierbei um prototypische Darstellungen, bei denen die konkreten Objekte zugunsten struktureller Beziehungen in den Hintergrund rücken (vgl. Abb. 1.9). Diese prototypischen Darstellungen sind nicht auf konkrete Zahlen beschränkt, sondern lassen sich in ihrer Darstellung ebenfalls allgemeingültig deuten (vgl. Abb. 1.9).



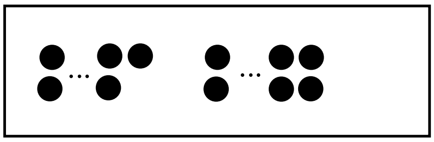


Abbildung 1.9: Räumliche Muster prototypische Darstellung ungerader und gerader Zahlen und als verallgemeinernde prototypische Darstellung ungerade und gerade Zahlen

Gleichzeitig bieten diese figuralen Prototypen und die operativen Veränderungen die Möglichkeit, bereits in der Grundschule Gesetzmäßigkeiten bei der Addition von Zahlen gleicher beziehungsweise unterschiedlicher Paritäten im Sinne eines inhaltlich-anschaulichen Beweises darzustellen (vgl. Abb. 1.10 & Kap. 2.4.2). So können mit Hilfe räumlicher Muster die mathematischen Aussagen im Kontext der Paritäten erkundet, hinterfragt und begründet werden (Frobisher, 2005, S. 33f.; Söbbeke & Welsing, 2017, S. 37ff.; Wittmann & Ziegenbalg, 2007, S. 37f.).

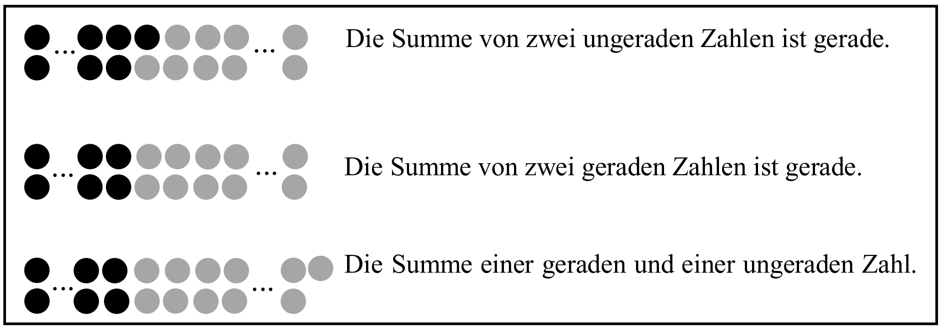


Abbildung 1.10: Räumliche Muster zur verallgemeinernden Darstellung mathematischer Aussagen

1.3.3 Kombination von Musterfolgen und räumlichen Mustern

In den bisherigen Ausführungen wurden Musterfolgen und räumliche Muster theoretisch voneinander abgegrenzt. Dennoch wurde bereits angemerkt, dass eine Verknüpfung beider Arten von Mustern möglich ist.

In der mathematikdidaktischen Literatur finden sich bei der Nutzung räumlicher Muster für die Grundschule häufig figurierte Zahlen. Eine solche Kombination stellt keineswegs eine neue mathematische Methode oder Darstellungsweise dar. Bereits in der Zeit Pythagoras' wurden Zahlen geometrisch durch Steinchen gleicher Größe und Form repräsentiert, um Zahleigenschaften und Beziehungen zu untersuchen (Steinweg, 2006b, S. 14). Hierbei stehen trotz geometrischer Anordnung die Punktanzahlen sowie die strukturellen Zusammenhänge im Vordergrund. Es bietet sich dabei die Möglichkeit, die geometrische Anordnung unter dem Aspekt der Kardinalität, der Zahlzusammenhänge, Zahlbeziehungen sowie Gesetzmäßigkeiten zu betrachten, so dass trotz einer Darstellung mit geometrischen Objekten Elemente der Arithmetik im Vordergrund stehen (Steinweg, 2013, S. 29). Für diese Denkhandlungen bieten mathematische Visualisierungen und wachsende Musterfolgen in Form geometrisch visualisierter Muster Ansätze und können zwischen mathematischen Strukturen und dem kindlichen Denken als Vermittler fungieren. Da diese Strukturen von den Kindern aktiv gedeutet und konstruiert werden müssen, stellt dies allerdings nicht automatisch eine Vereinfachung gegenüber numerischen Darstellungen dar (Steinweg, 2001). Geometrische Visualisierungen regen aber im Gegenzug zu einer Auseinandersetzung mit verschiedenen Sichtweisen und unterschiedlichen Strukturierungen an (Englisch & Warren 1998). Gleichzeitig bietet der Einsatz von wachsenden Musterfolgen erste Ansätze für eine Entwicklung algebraischer Denkweisen (Böttinger & Söbbeke, 2009), denn die strukturellen

Eigenschaften des Musters und die Beziehung zwischen den einzelnen Folgegliedern rücken in den Fokus. Neben den klassischen Darstellungen wie zum Beispiel Quadrat-, Rechtecks- sowie Dreieckszahlen bieten figurierten Zahlen vielfältige weitere Anlässe, um mit Kindern über Mathematik ins Gespräch zu kommen.
Im Folgenden wird die mögliche Kombination von Musterfolgen und räumlichen Mustern an einem Beispiel erläutert. In diesem Beispiel wird ein für die vorliegende Arbeit relevanter mathematischer Inhalt genutzt – die geraden und ungeraden Zahlen. Dafür wird zum einen die Musterfolge der prototypisch dargestellten ungeraden Zahlen betrachtet, zum anderen die Musterfolge der prototypisch dargestellten geraden Zahlen (vgl. Abb. 1.11). Hierfür werden zunächst die Musterfolgen als Ganzes betrachtet. Im Anschluss daran werden die einzelnen Folgeglieder als räumliche Muster betrachtet und mögliche Deutungsweisen aufgezeigt.

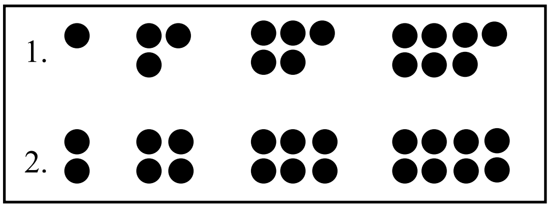


Abbildung 1.11: Kombination räumlicher Muster und wachsende Musterfolgen im Kontext der Paritäten

In der oben abgebildeten Darstellung zeigen sich wachsende Musterfolgen. Die erste Folge beginnt mit einem Punkt. Die zweite Folge beginnt mit zwei übereinanderliegenden Punkten. Die Wachstumsstruktur lässt sich in beiden Fällen dadurch beschreiben, dass jedes Folgeglied durch das Ergänzen von zwei übereinanderliegenden Punkten aus dem vorherigen Punktmuster erzeugt werden kann. In der ersten Folge wird das Folgeglied nach links erweitert, in der zweiten Folge kann dies beidseitig erweitert werden. Durch mehrfaches Ergänzen kann die Musterfolge beliebig fortgesetzt werden. Aus einer arithmetischen Perspektive lassen sich die beiden wachsenden Musterfolgen als die Reihen der ungeraden beziehungsweise geraden natürlichen Zahlen, in Form von prototypischen Darstellungen, beschreiben (vgl. Kap. 1.3.3).
Gleichzeitig spiegelt die Wachstumsstruktur die Beziehung zwischen zwei benachbarten Zahlen gleicher Parität wider. So wird deutlich, dass zwei aufeinanderfolgende ungerade beziehungsweise gerade Zahlen immer die Differenz zwei haben. Genau dies ist bei der Betrachtung von Paritäten und auch von allgemeingültigen Aussagen im Kontext von Paritäten eine zentrale Erkenntnis, die grundlegend für eine intensive (argumentative) Auseinandersetzung mit diesen ist.

Betrachtet man die einzelnen Folgeglieder nun als räumliche Muster, so lassen sich weitere Erkenntnisse hinsichtlich mathematischer Strukturen gewinnen, denn bei entsprechender Deutung lassen sich die Eigenschaften der jeweiligen Parität erkennen.

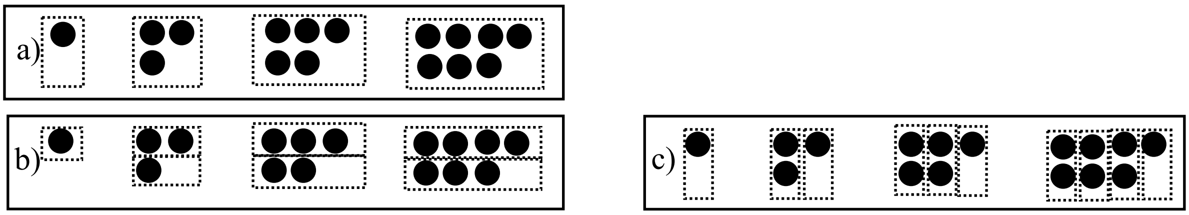


Abbildung 1.12: Deutungsmöglichkeiten der räumlichen Muster der prototypischen Darstellung ungerader Zahlen

Bei horizontaler Betrachtung der Punktmuster der ungeraden Zahlen lässt sich feststellen, dass die obere Reihe genau einen Punkt mehr enthält als die untere Reihe. Bei vertikaler Deutung des Punktmusters zeigt sich, dass das Punktmuster von links nach rechts betrachtet immer aus zwei übereinanderliegenden Punkten besteht. Lediglich ganz rechts findet sich ein einzelner Punkt. Auch wenn es sich hierbei um zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen und dementsprechend unterschiedlichen Deutungen handelt, repräsentieren beide die Eigenschaft, dass eine ungerade Zahl aus einer geraden Zahl plus eins besteht beziehungsweise dass eine ungerade Zahl bei der Division durch zwei den Rest eins hat (vgl. Abb. 1.12). Die Sichtbarkeit des Rests ist sowohl bei der vertikalen Deutung als auch der horizontalen Deutung des Punktmusters gegeben. Deutet man die Punktdarstellung eher vertikal, so betrachtet man die Zweierpäckchen, die in die Darstellung hineingedeutet werden können. Bleibt bei dieser Deutung ein Punkt übrig, so wird der Rest deutlich und es handelt sich um eine ungerade Zahl. Bei der horizontalen Deutung ist ein Vergleich der beiden Reihen notwendig, um den Rest eins zu ermitteln. Wird also eine horizontale Sicht auf die Darstellung eingenommen, so zeigt sich bei gleicher Strukturierung, dass der letzte Punkt der oberen Reihe keinen gegenüberliegenden Punkt hat. Der letzte Punkt stellt damit den Rest eins dar.
Diese Deutungsweisen sind auf die prototypischen Darstellungen der geraden Zahlen möglich und werden nun im Folgenden beschrieben.

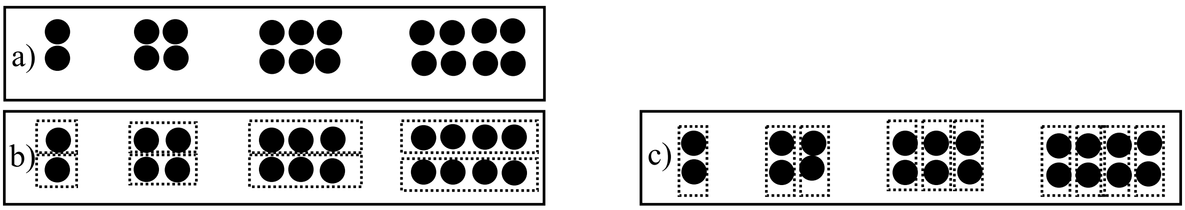


Abbildung 1.13: Deutungsmöglichkeiten der räumlichen Muster der prototypischen Darstellung gerader Zahlen

Bei horizontaler Deutung ist erkennbar, dass beide Reihen gleich viele Punkte besitzen Bei vertikaler Deutung lässt sich feststellen, dass das Punktmuster aus immer zwei übereinanderliegenden Punkten besteht. Auch hier lassen sich durch zwei unterschiedliche

Betrachtungsweisen die gleiche Zahleigenschaft fokussieren, nämlich, dass eine gerade Zahl immer ohne Rest durch zwei teilbar ist (vgl. Abb. 1.13). Die horizontalen und vertikalen Deutungsweisen spiegeln hierbei die unterschiedlichen Grundvorstellungen der Division wider (vgl. Kap. 1.3.3). Die horizontale Deutung entspricht hierbei der Grundvorstellung des Verteilens. Die vertikale Deutung der des Aufteilens.
Räumliche Muster können dabei als einzelne Folgeglieder getrennt voneinander betrachtet werden. Im Sinne der allgemeingültigen strukturellen Zahleigenschaft der Paritäten ist es aber notwendig, diese in Beziehung zu setzen. Nur wenn der Fokus bei der Betrachtung auf den Gemeinsamkeiten und Unterschieden in den einzelnen räumlichen Mustern liegt, können Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den einzelnen Folgegliedern und somit in diesem Fall Zahlen gleicher Paritäten betrachtet werden. Die Kombination wachsender Musterfolgen und räumlicher Muster zeigt sich als besonders produktiv in der Auseinandersetzung mit strukturellen arithmetischen Zahleigenschaften. Es zeigt sich aber auch, dass Muster durch dahinterliegende Strukturen konstituiert werden, deren Deutung ein aktiver und individueller Prozess ist (vgl. u.a. Deutscher, 2012; Söbbeke, 2005; Steinbring, 2005).
Vor dem Forschungshintergrund der vorliegenden Arbeit ist insbesondere die unterschiedliche Deutung der Division in Mustern von Bedeutung. Im Kontext dieser Arbeit werden die Paritäten und die Division durch drei fokussiert. Hierbei hängt die Argumentation unter Rückgriff auf Punktedarstellungen immer unmittelbar mit der jeweiligen Deutung der Kinder zusammen.

1.4 Deutung räumlicher Muster

1.4.1 Mehrdeutigkeit räumlicher Muster

Im Arithmetikunterricht der Grundschule bieten räumliche Muster zur Veranschaulichung arithmetischer Strukturen ein vielfältiges Potential. In Abschnitt 1.3.2 wurde dargestellt, wie Zahlen und Operationen dem Denken der Kinder zugänglich gemacht werden können. Allerdings sind diese Veranschaulichungen keine selbstredenden Bilder (Schipper, 1982, S. 109; Schipper & Hülshoff, 1984, S.56) und ein Interpretieren und produktives Ausschöpfen von geometrisch dargestellten Beziehungen geschieht keineswegs immer automatisch, denn Veranschaulichungen sind weder selbsterklärend noch eindeutig (vgl. u.a. Böttinger, 2006; Böttinger & Söbbeke, 2009; Lorenz, 1992; Lüken, 2012, S. 76; Söbbeke, 2005, S. 23ff.; Voigt, 1993). Kinder deuten mathematische Veranschaulichungen nicht nur auf Basis ihres mathematischen Vorwissens, sondern auch auf Grundlage ihrer lebensweltlichen

Erfahrungen. Die Deutungen können dadurch von üblichen mathematischen Konventionen abweichen (Voigt, 1993, S. 156). Dies gilt auch für Deutungen räumlicher Muster. Das bedeutet Deutungen räumlicher Muster sind immer individuell. Sie werden beeinflusst vom Vorwissen des Individuums, aber auch vom Kontext, in dem sie gedeutet werden (Söbbeke, 2005, S. 16f.). So kann ein Punktebild für eine Person eine ungeordnete Menge darstellen, für die Nächste ist die dahinterliegende Struktur erkennbar und kann als Punktmuster gedeutet werden. So können in ein und das selbe Muster unterschiedliche Strukturen hineingedeutet werden – sie sind demnach mehrdeutig (Deutscher, 2012, S. 82; Lüken, 2012, S. 22; Söbbeke, 2005; Steinweg, 2006b, S. 15).
Steinbring (1994) differenziert aus mathematischer Perspektive zwei Arten der Mehrdeutigkeit: die *empirische* und die *theoretische Mehrdeutigkeit*. Er versteht unter *empirischer Mehrdeutigkeit*, dass

> *„eine verbildlichte Sachsituation unterschiedlich durch Zahlen und Rechenoperationen gedeutet werden, es gibt nicht die einzige oder die richtige Auslegung. [...] Jedoch wird im Rahmen dieser Deutung den arithmetischen Zeichen weiterhin vornehmlich die Funktion von Namen für empirische Objekte gegeben; Zahlen bleiben so etwas wie die Anzahl-Namen von Dingen und arithmetische Verknüpfungen repräsentieren konkrete Zusammenfügungen oder Trennungen von Anzahlen und Objekten, zwar [...] vielfältig zulässig, jedoch unter Aufrechterhaltung einer empirischen Bedeutungskonstruktion für mathematische Zeichen"* (Steinbring, 1994, S. 16f.).

Unter *theoretischer Mehrdeutigkeit* wird eine Mehrdeutigkeit verstanden, „bei der die Zahlen und die Operationen mit den Zahlen sich auf vielfältige Relationen im Diagramm beziehen; und dabei bekommen die Elemente im Diagramm eine elementare Variablenfunktion für Zahlen [...]" (Steinbring, 1994, S. 17). Insbesondere bei der Thematisierung mathematischer Gesetzmäßigkeiten auf Grundlage von Punktmustern ist ein Deutungswechsel von einer empirischen Sichtweise hin zu einer theoretischen Mehrdeutigkeit von hoher Relevanz. So gelten die zugrundeliegenden Strukturen nicht nur für einzelne, konkrete Beispiele, sondern für eine ganze Klasse gleichartiger Beispiele und sind in diesem Sinne allgemeingültig (vgl. Kap. 2.4.2).

An folgendem Beispiel (in Anlehnung an Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 34), anhand eines räumlichen Musters, wird die Vielfalt an Deutungsmöglichkeiten dargestellt. Diese erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern illustrieren die Vielfältigkeit in den Deutungen einer Punktdarstellung. Bei der Betrachtung des nebenstehenden Punktmusters (vgl. Abb. 1.14) zeigt sich zunächst eine rechteckige Anordnung von 24 einzelnen Punkten. Auch wenn sie der prototypischen Darstellung der Multiplikationsaufgabe 4 • 6 = 24 entspricht, ist dies nicht evident und eine Vielzahl an Deutungsmöglichkeiten denkbar.

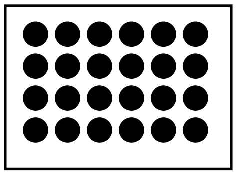


Abbildung 1.14: Ein mögliches zu deutendes Punktmuster

Unterschiedliche Strukturierungen – unterschiedliche Aufgaben

Punkte können innerhalb einer Darstellung als dingliche[6] Objekte betrachtet werden (Söbbeke, 2005, S. 347), ohne dass diese zueinander in Beziehung gesetzt werden, so dass die 24-fache Addition der 1 in die Darstellung hineingedeutet werden kann. Eine multiplikative Deutung desselben Punktmusters kann den Aufgaben 6 • 4 = 24, der prototypisch dargestellten Aufgabe 4 • 6 = 24, aber auch der Aufgabe 2 • 12 = 24 entsprechen. Alle Aufgaben haben in diesem Fall die gleichmäßige Wiederholung gleichgroßer Teilelemente gemein (vgl. Abb.1.15).

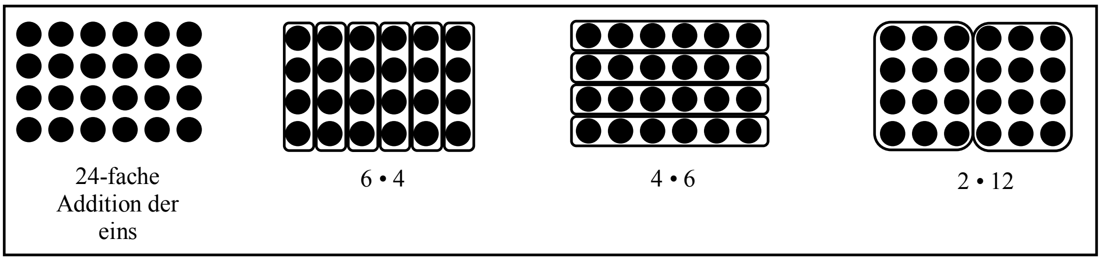


Abbildung 1.15: Deutungsmöglichkeiten des Punktmusters I

Ebenso ist es möglich, Strukturen hineinzudeuten, die nicht dieser gleichmäßigen Wiederholung einzelner Teilelemente entsprechen (vgl. Abb. 1.16).

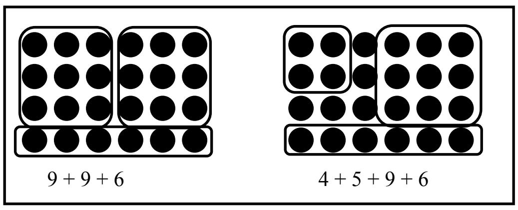


Abbildung 1.16: Deutungsmöglichkeiten des Punktmusters II

Es zeigt sich, dass ein Punktmuster unterschiedliche Deutungsmöglichkeiten offeriert und durch einen individuellen Deutungsprozess unterschiedliche, aber treffende, Strukturierungen und damit verbundene Aufgaben generiert werden können.

[6] Innerhalb der Mathematikdidaktik wird häufig von empirischen Objekten gesprochen. Aufgrund eines gänzlich anderen Gebrauchs des Begriffs ‚empirisch' in Bezugsdisziplinen der Mathematikdidaktik wird an dieser Stelle der Begriff ‚dinglich' gewählt.

Unterschiedliche Strukturierungen – gleiche Aufgabe

Wie in den vorherigen Ausführungen deutlich wird, kann die Strukturierung eines Punktmusters unterschiedliche Aufgaben repräsentieren. Gleichzeitig gilt, dass unterschiedliche Strukturierungen nicht immer unterschiedliche Aufgaben repräsentieren. So können die folgenden Strukturierungen des Punktmusters die Aufgabe 6 • 4 oder aber auch die 6-fache wiederholte Addition der 4 darstellen (vgl. Abb. 1.17).

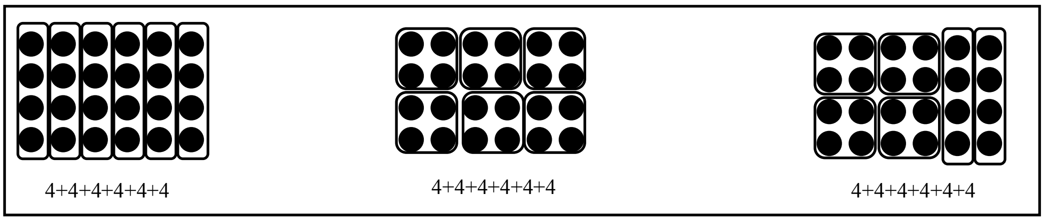


Abbildung 1.17: Deutungsmöglichkeiten des Punktmusters III

Gleiche Strukturierungen – unterschiedliche Aufgaben

Von der Strukturierung selbst lässt sich nicht auf einen Term schließen. Gleiche Strukturierungen lassen unterschiedliche Interpretationen in Form von unterschiedlichen Aufgaben zu. So kann neben der Multiplikationsaufgabe 6 • 4 ebenso die 6-fache wiederholte Addition der 4 in die Abbildung hineingedeutet werden. Hierbei zeigt sich der starke Zusammenhang zwischen der Multiplikation und der Addition. Gleichzeitig ergeben sich Deutungsmöglichkeiten der Divisionsaufgabe 24 : 4 und 24 : 6. Es zeigt sich demnach auch eine starke Verwobenheit der Strukturen der unterschiedlichen Rechenoperationen und der Zusammenhänge zwischen diesen. Auch in den kindlichen Deutungen der vorliegenden Untersuchung ist es von Relevanz, sich über die verschiedenen Deutungsmöglichkeiten bewusst zu sein. Konkret bedeutet dies, dass in die Punktmuster sowohl multiplikative als auch additive Strukturen in vielfältiger Art und Weise hineingedeutet werden können.

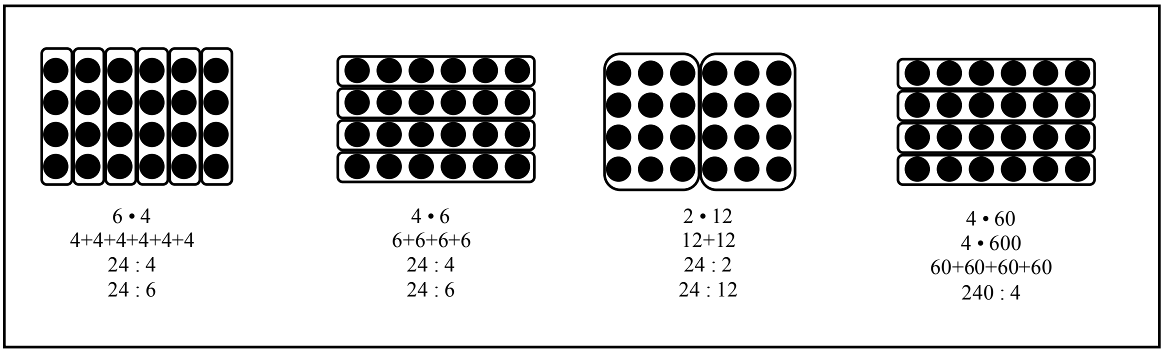


Abbildung 1.18: Deutungsmöglichkeiten des Punktmusters IV

1.4.2 Fachdidaktische Konzepte zur Deutung von und dem Umgang mit Darstellungen mathematischer Strukturen

Die Deutung von Veranschaulichungen ist nicht eindeutig und selbsterklärend, so dass Kinder unterschiedlichste Deutungen vornehmen. Dies zeigen auch die Studien von Söbbeke (2005) sowie Deutscher (2012). Im Folgenden werden die für die Arbeit relevanten Ergebnisse dieser Studien dargestellt. Diese verdeutlichen zum einen die Spannbreite, in der sich die kindlichen Deutungen bewegen. Zum anderen sind sie grundlegend für das Verständnis der vorliegenden Arbeit. Die Ergebnisse der Studie von Söbbeke (2005) sind wesentlich für die Entwicklung des Theoriekonstrukts (vgl. Kap. 6). Die Ergebnisse der Studie von Deutscher (2012) sind für die unterschiedlichen Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen von Relevanz.

1.4.2.1 Visuelle Strukturierungsfähigkeit (Söbbeke 2005)

Anschauungsmittel als besondere Form räumlicher Muster repräsentieren abstrakte mathematische Inhalte (Otte, 1983). Dies stellt Kinder vor die Herausforderung Veranschaulichungen und deren zugrundeliegenden Strukturen zu deuten, denn Kinder in der Grundschule müssen zunächst in eine mathematische Deutungskultur eingeführt werden. In „einer *epistemologisch orientierten Analyse* [untersuchte Söbbeke (2005) die] Wirkungsweise von Anschauungsmitteln für das mathematische Denken von Grundschulkindern. In diesem Kontext wurde untersucht, wie Anschauungsmittel als Erkenntnismittel wirken und zwar speziell bezogen auf den besonderen theoretischen Charakter mathematischen Wissens“ (Söbbeke, 2008, S. 42; Hervorhebung i.O.). Hierfür wurde eine Interviewstudie mit 15 Kinder des ersten bis vierten Schuljahres durchgeführt (S. 108 f.).
Im Fokus der epistemologischen Analyse stand die Art und Weise, wie Kinder die Anschauungsmittel als mathematische Zeichen deuten und inwiefern Kinder intendierte Strukturen erkennen und nutzen. Hierfür nutzte Söbbeke zum einen das von Steinbring entwickelte Analyseinstrument des epistemologischen Dreiecks (Steinbring, 2005) und zum anderen ein von ihr entwickeltes Kategorienmodell der visuellen Strukturierungsfähigkeit, in welche vier Ebenen der visuellen Strukturierungsfähigkeit differenziert werden.

Ebene I: Ebene der konkret empirischen Deutung

In dieser Ebene charakterisieren sich die Deutungen der Kinder durch eine empirische Herangehensweise. „Spontan werden hier keine Strukturen in das Anschauungsmittel hineingedeutet, vielmehr dominiert eine Sicht auf *Einzelelemente* und *konkrete Objekte*, die nach ihren äußeren Merkmalen erkannt und klassifiziert werden“ (S. 136; Hervorhebungen i.O).

Ebene II: Ebene des Zusammenspiels von partiell empirischen Deutungen mit ersten strukturorientierten Deutungen

In dieser Ebene löst sich das Kind zunehmend von den konkreten Aspekten und nimmt vermehrt Beziehungen und Strukturen in den Blick. „Neben *Einzelelementen* werden vor allem individuelle, aber vielfach auch *intendierte Strukturen* und *Substrukturen* in die Darstellung hineingedeutet, die jedoch noch weitgehend isoliert nebeneinanderstehen und eher im Sinne *konkreter Objekte* als relational gedeutet werden“ (ebd. S. 137; Hervorhebung i.O.). Wesentlich ist, dass erste strukturorientierte Deutungen vorgenommen werden. Somit werden erste Beziehungen hergestellt und Umdeutungen vorgenommen.

Ebene III: Ebene strukturorientierter Deutungen mit zunehmender, flexibler Nutzung von Beziehungen und Umdeutungen

„In Deutungen, die dieser Ebene zugeordnet werden, werden die Strukturelemente durchgängig zueinander in *Beziehung* gesetzt, miteinander *koordiniert* und *umgedeutet*“ (ebd. S. 138). So steht die Herstellung von Strukturen und Beziehungen im Vordergrund der kindlichen Deutungen

Ebene IV: Ebene strukturorientierter, relationaler Deutungen mit umfassender Nutzung von Beziehungen und flexiblen Umdeutungen

„In Deutungen, die dieser Ebene entsprechen, verbleiben strukturell unwesentliche und rein empirische Aspekte des Anschauungsmittels im gedanklichen Hintergrund. Das Kind konstruiert aktiv *Beziehungen* und *Strukturen* in die Darstellung hinein, die nicht, wie in den ersten drei Ebenen individuell begründet werden, sondern ausschließlich *intendierte* Strukturen und Substrukturen entsprechen“ (S. 139; Hervorhebung i.O.).

Durch die Ebenen konnte Söbbeke zeigen, wie vielfältig die unterschiedlichen Deutungen der Kinder sind. Wesentlich hierfür ist die Abgrenzung der Strukturierungstypen der individuellen und intendierten Strukturierungen, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit erneut aufgegriffen und zur Analyse herangezogen werden. Denn es konnte in den Analysen herausgestellt werden, dass Kinder häufig individuelle Struktureinheiten nutzen (ebd. S. 352).

1.4.2.2 Komponenten des Umgangs mit Mustern und Strukturen (Deutscher 2012)

Deutscher (2012) untersuchte die arithmetischen und geometrischen Fähigkeiten von Kindern am Schulanfang unter besonderer Berücksichtigung des Bereichs Muster und Strukturen. Hierfür wurde eine Interviewstudie mit 108 Kindern der ersten Klasse in der zweiten bis vierten Schulwoche durchgeführt. Im Folgenden wird ein für die vorliegende Arbeit relevantes Ergebnis der Studie dargestellt, welches im weiteren Verlauf der Arbeit erneut aufgegriffen wird.

In der Interviewstudie standen die Kinder unter anderem vor der Herausforderung wiederholende sowie wachsende Musterfolgen in Form von Punktanordnungen fortzusetzen, geometrische Muster nachzuzeichnen sowie die Punktanzahl in einem Zwanzigerfeld zu ermitteln. Dies stellte die Anforderung an die Kinder, die Darstellungen als Muster zu identifizieren und die dahinterliegenden Strukturen in diese hineinzudeuten[7]. In ihren Analysen konnte Deutscher (2012) unterschiedliche Komponenten herausarbeiten, die wesentlich für einen erfolgreichen Umgang mit Mustern und Strukturen sind. Sie identifizierte und unterschied dabei die Teilmusterwahrnehmung sowie die Teilmusterstrukturierung als notwendige Komponenten, wobei letztere nur durch eine Kombination von ‚Strukturdeutung' und ‚Musterdeutung' gelingt. Dies sieht sie als grundlegend für die Musteranwendung an, bei welcher kontinuierlich die Musterwahrnehmung sowie Musterstrukturierung genutzt wird. Alle drei Komponenten stehen hierbei in wechselseitiger Abhängigkeit zueinander (Deutscher, 2012, S. 246ff.) (vgl. Abb. 1.19).

[7] Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass Deutscher (2012) auch die Erfolgsquoten der Bearbeitungen der Kinder in den Blick genommen hat. Aufgrund der Ausrichtung der vorliegenden Arbeit werden diese Ergebnisse aber nicht dargestellt, sondern vielmehr auf die intensive Auseinandersetzung in Deutscher (2012) verwiesen.

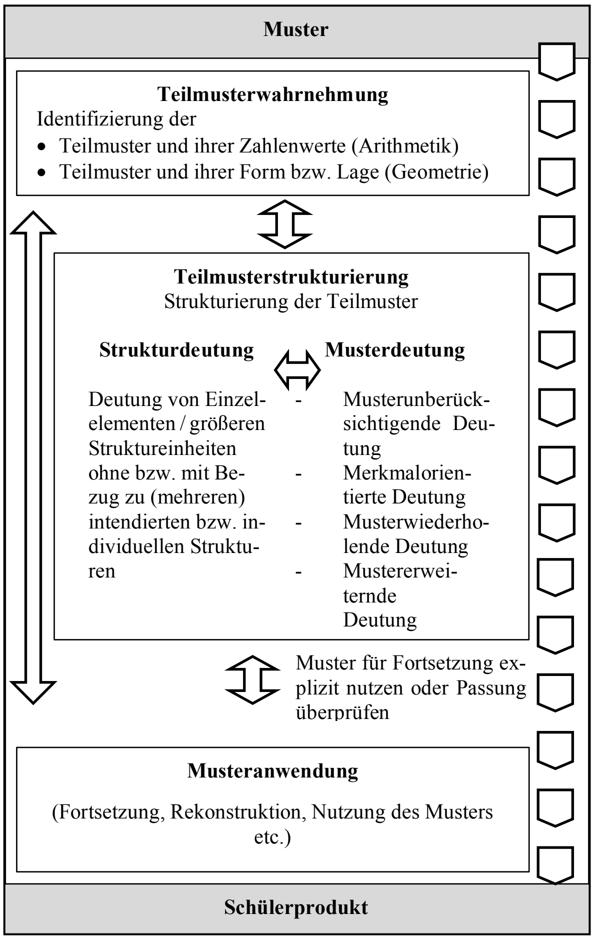


Abbildung 1.19: Komponenten des Umgangs mit Mustern und Strukturen (vgl. Deutscher 2012, S. 247)

Im Folgenden werden nun die Teilmusterwahrnehmung und die Teilmusterstrukturierung näher betrachtet, da diese im weiteren Verlauf der Arbeit nochmals aufgegriffen werden.

Teilmusterwahrnehmung

Grundlegend für das Fortsetzen von Mustern ist zunächst die Identifikation von Teilmustern, das heißt, die Kinder müssen zunächst die Grundeinheit beziehungsweise die Folgeglieder der Musterfolge identifizieren. Eine falsche Fortführung der Musterfolge lässt dabei keine Schlüsse zu, ob das Kind Teilmuster wahrgenommen hat, oder nicht.

Teilmusterstrukturierung

Bei der Teilmusterstrukturierung werden die einzelnen wahrgenommenen Teilmuster miteinander in Beziehung gesetzt, um die zugrundeliegende Anordnung zu erfassen und fortzusetzen. Hierbei ist ein Zusammenspiel der ‚Strukturdeutung' sowie der ‚Musterdeutung' unerlässlich.

Strukturdeutung

Auf Grundlage des Konstrukts der visuellen Strukturierungsfähigkeit von Söbbeke (2005) analysierte Deutscher die Strukturdeutungen der Kinder und identifizierte vier unterschiedlichen Möglichkeiten der Strukturdeutung.

- „Deutung von Einzelelementen, kein oder nur geringer Bezug zu intendierten Strukturen" (Deutscher, 2012, S. 250)
- „Deutung von Einzelelementen mit Bezug zu intendierten Strukturen" (ebd.)
- „Deutung von größeren Struktureinheiten, Bezug zu (mehreren) intendierten Strukturen" (ebd.)
- „Deutung von größeren Struktureinheiten, Bezug zu (mehreren) individuellen Strukturen" (ebd.)

Es zeigt sich somit, dass es in Anlehnung an Söbbeke (2005) unterschiedliche Arten der Strukturdeutung gibt. Eine Berücksichtigung der Struktur liegt immer dann vor, wenn bei der Fortsetzung eine Struktur zwischen den Teilmustern besteht, auch wenn dies nicht der intendierten Struktur entspricht. Somit können nicht nur Anschauungsmittel, sondern auch Musterfolgen von Kindern in unterschiedlichster Weise gedeutet werden. Es ist naheliegend, dass diese unterschiedlichen Deutungsmöglichkeiten den Argumentationsprozess von Kindern beeinflussen, so dass sich auch hier das Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit begründen lässt.

Musterdeutung

„Hierbei werden die herausgefilterten Teilmuster [...] in Beziehung zueinander gesetzt, welche das Gesamtmuster erst wieder entstehen lässt und eine Fortsetzung dieses zulässt" (Deutscher, 2012, S. 164). Insgesamt identifiziert Deutscher vier Kategorien der Musterdeutung (ebd., S. 249ff.).

- Die *musterunberücksichtigenden Deutungen* „beziehen sich auf keinerlei Merkmale des Musters und sind daher auf musterunabhängige Ausgangspunkte zurückzuführen" (ebd, S. 249).
- Die *merkmalorientierten Deutungen* „beziehen sich auf einzelne, teilweise oberflächliche Merkmale des Musters und weisen somit keine durchgängige Berücksichtigung des Zusammenhangs der Teilmuster in Blick auf das Gesamtmuster auf" (ebd.).
- Die *musterwiederholenden Deutungen* „beziehen sich auf Wiedergaben der Muster, welche zentrale Mustermerkmale konsequent wiederholend aufgreifen" (ebd.).

- Die *mustererweiternden Deutungen* „beziehen sich auf Wiedergaben der Muster, welche zentrale Mustermerkmale konsequent ihrer Entwicklung entsprechend aufgreifen“ (ebd.).

1.5 Tätigkeiten im Umgang mit Mustern

So vielfältig die Arten der Muster sind, so vielfältig sind die Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen. Freudenthal (1973) bezeichnet die ‚Mathematik als Tätigkeit‘ des Beschreibens, Erforschens, Erklärens und Beweisens von Mustern. Er hebt damit die Bedeutung der aktiven Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen für die Mathematik hervor. Diese findet im Mathematikunterricht der Grundschule auf unterschiedlichen Niveaus und Ebenen statt, die unmittelbar mit der Art der Auseinandersetzung im Zusammenhang steht. Auch im vorliegenden Forschungsprojekt stehen die Kinder vor der Herausforderung räumliche Muster zu untersuchen und zur Begründung arithmetischer Strukturen heranzuziehen. Demnach steht eine intensive Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen im Zentrum des vorliegenden Forschungsprojektes. Dies macht es notwendig, sich intensiv damit auseinanderzusetzen, welche Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen innerhalb des Mathematikunterrichts (in der Grundschule) betrieben werden können.
In diesem Kontext finden sich in der mathematikdidaktischen Literatur, den Bildungsstandards sowie Schulbüchern unterschiedliche Arten der Auseinandersetzung, die häufig als Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen genannt und klassifiziert werden. Während Steinweg (2001), Vogel (2005) und Benz et al. (2015) die Tätigkeiten konkret beschreiben, nennen andere Autoren die Tätigkeiten lediglich oder beschreiben diese maximal beispielhaft. In der folgenden übersichtlichen tabellarischen Darstellung finden sich Aufzählungen mathematischer Tätigkeiten unterschiedlicher Autoren. Diese werden im weiteren Verlauf konkretisiert und in Beziehung zueinander gesetzt.

Radatz et. al. (1999) - erkennen - nachzeichnen - fortsetzen - beschreiben - erfinden - ausmalen	**Steinweg (2001)** - erkennen - fortsetzen - beschreiben - erklären	**Wittmann (2003)** - betrachten - wahrnehmen - erforschen - reproduzieren - fortsetzen - erzeugen - ausgestalten	**Vogel (2005)** - erkennen - nachzeichnen - fortsetzen - beschreiben - vergleichen
KMK (2005) - erkennen - fortsetzen - beschreiben - entwickeln - systematisch verändern	**Cooper & Warren (2006)** - copying the pattern - continue the pattern - identifying the repeating element - completing the pattern - creating a pattern - translating a pattern to a different medium	**Müller & Wittmann (2007)** - entdecken - beschreiben - begründen - unter Forschern kommuniziert - zur Lösung realer Probleme nutzen	**Benz, Peter-Koop, Grüßing (2015)** - erkennen - nachlegen (nach einer Vorlage oder aus dem Kopf) - fortsetzen - beschreiben - erfinden - übersetzen - reparieren
Lüken (2017) - nachbauen/nachzeichnen - fortsetzen - erfinden - erklären - reparieren - Letztes Element bestimmen			

Tabelle 1.1: Übersicht über die mathematischen Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen

Grundlegend für eine intensive und erkenntnisreiche Auseinandersetzung ist das Muster als Ganzes *wahrzunehmen* (Wittmann, 2003, S. 8). Um das volle mathematische Potential auszuschöpfen, ist es nicht ausreichend, diese ausschließlich zu *betrachten* und zu *reproduzieren*. Auch wenn es sich hierbei bereits um anspruchsvolle mathematische Tätigkeiten handelt (Deutscher, 2012).

Um ein Muster als Ganzes wahrnehmen zu können, ist es unabdingbar, das Muster und die zugrundeliegende Struktur zu *erkennen*. Das Erkennen von Mustern ist grundlegend für die Auseinandersetzung mit diesen. Hierfür muss der Betrachter die wesentlichen Elemente des jeweiligen Musters im Kontext der Aufgabe identifizieren und Regelmäßigkeiten erkennen, so dass regelhafte von zufälligen Anordnungen unterschieden werden können (Benz et al., 2015, S. 307; Steinweg, 2001, S. 115ff.; Vogel, 2005; Warren & Cooper, 2006S. 10, S. 585). Die Tätigkeit des Erkennens von Mustern ist ein mentaler Prozess, der nur durch weitere Tätigkeiten wie zum Beispiel durch das *Fortsetzen* eines Musters nachweisbar wird (Steinweg, 2001, S. 116). Die Besonderheit wiederholender Musterfolgen ist, dass ein Fortsetzen in beide Richtungen möglich ist (Warren & Cooper, 2006, S. 10). Vogel versteht unter *Fortsetzen* eine handlungsorientierte Beschreibung, welche die Identifizierung der einzelnen

Teilelemente sowie das Erkennen struktureller Beziehungen erfordert (2005, S. 585 f.). Neben dieser handlungsorientierten Art der Beschreibung lassen sich Muster auch verbal oder mündlich *beschreiben*, was grundlegend für den Mathematikunterricht ist, aber gleichzeitig auch sprachliche Anforderungen an die Kinder stellt (Benz et al., 2015, S. 307; Radatz, Schipper, Dröge, & Ebeling, 1999, S. 151). Hierfür ist es erforderlich, dass der Beschreibende den Standpunkt eines objektiven Betrachters einnimmt (Steinweg, 2000, S. 8). Die Arten der Beschreibungen divergieren nicht nur in ihrer sprachlichen Ausgestaltung, sondern lassen sich auch in zwei Beschreibungsstile differenzieren. Beim exemplarischen Darstellen werden konkrete Teile des Musters zitiert. Die Beschreibung fokussiert das konkrete Fortsetzen des Musters. Beschreibungen mit generalisierendem Charakter entsprechen demgegenüber einer allgemeinen Regel (Steinweg, 2001, S. 117). Lüken (2017) gibt hierfür Leitfragen wie „Was siehst du?“, „Was ist immer gleich?“, „Was wiederholt sich?“ (S. 21). Auch wenn sie den Begriff des Erklärens verwendet, handelt es sich hierbei um exemplarische Beschreibungen des Musters und ist innerhalb des Beschreibens zu verorten. Diese Beschreibungen implizieren einen diskursiven Kontext und beinhalten an dieser Stelle auch die Kommunikation von und das *Kommunizieren* über Muster. Müller und Wittmann (2007, S. 49) fassen darunter die wissenschaftliche Kommunikation unter Mathematikern. Dies lässt sich aber auch auf den Grundschulunterricht übertragen. Nur wenn Muster und deren zugrundeliegende Strukturen im Klassengespräch kommuniziert werden, können sie zu einem gemeinsamen Lerngegenstand werden. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass Strukturen in ein Muster hineingedeutet werden und diese durchaus mehrdeutig sind, ist es wichtig, die für den mathematischen Lehr- und Lernprozess wesentlichen Strukturen zu fokussieren.

Für Vogel (2005) stellt dabei das *Vergleichen* von Mustern „eine wichtige Voraussetzung dar, dass Regelmäßigkeiten und Strukturen überhaupt erkannt werden und damit Muster fortgesetzt werden können“ (Vogel, 2005, S. 586). Dies macht eine sehr genaue, eher sequentielle Analyse des Musters erforderlich (ebd.). Vogel sieht diese Anforderungen ebenso für das *Nachzeichnen beziehungsweise Reproduzieren* von Mustern gegeben. Benz et al. differenzieren hierbei in *Nachlegen nach Vorlage* sowie *aus dem Gedächtnis ein Muster reproduzieren*. Für das Nachlegen nach Vorlage ist es notwendig, dass die Kinder die einzelnen Objekte des Gesamtmusters und deren Eigenschaften sowie räumliche Anordnung erkennen. Das Herstellen der gleichen Ordnung kann dann Stück für Stück vollzogen werden. Hierbei kann jedes einzelne Objekt auf seine Eigenschaft hin überprüft werden. Es ist somit noch nicht notwendig die einzelnen Objekte zueinander in Beziehung zu setzen. Wird das Muster allerdings aus dem Kopf reproduziert, ist es notwendig, dass neben der

räumlichen Anordnung und den Eigenschaften der Einzelobjekte auch die Beziehung zwischen diesen erfasst und die Grundeinheit identifiziert wird (Benz et al., 2015, S. 306f.).
Muster zu *reparieren* stellt an die Kinder ähnliche Anforderungen, denn nur durch identifizierte Einzelelemente beziehungsweise Teilmuster und die dem Muster zugrundeliegenden Strukturen können Kinder Fehler in Mustern erkennen und beheben. Dies stellt gleichzeitig eine erhöhte Anforderung an die Lernenden dar, da das Identifizieren einzelner Folgeglieder beziehungsweise Teilmuster durch eingebaute Fehler erschwert wird (Benz et al., 2015, S. 307). Hierbei ist es nicht ausreichend, sich auf oberflächliche Merkmale des Musters zu beziehen. Erst die Ausnutzung der Struktur ermöglicht es, das Muster korrekt nachzulegen.
Durch ein *Übersetzen* eines Musters in eine andere Repräsentationsform werden die einzelnen Objekte, bei gleichbleibender Gesamtstruktur, ausgetauscht (Benz et al., 2015, S. 308). Durch den Isomorphismus beider Muster wird die gleichbleibende Struktur fokussiert. Es kann also den Kindern dabei helfen „von Oberflächenmerkmalen wie Form oder Farbe zu abstrahieren und die strukturelle Gleichheit der Grundfigur und damit der Musterfolge zu erfassen" (Lüken, 2017, S. 20). Dies ist ein entscheidender Aspekt dieser mathematischen Handlung, denn trotz Übersetzung einer Repräsentationsform in eine andere bleibt die dahinterliegende mathematische Struktur unverändert (Warren & Cooper, 2006, S. 11). Gleichzeitig kann an dieser Stelle das Übersetzen einer regelhaften Beschreibung in ein räumliches Muster oder eine Musterfolge mitgedacht werden. Zu berücksichtigen bleibt, dass eine Übersetzung einer wachsenden Musterfolge in eine andere Darstellung nicht immer problemlos möglich ist.
Steinweg (2001, S. 118) nennt in den von ihr beschriebenen Tätigkeiten das Erklären im Kontext des Argumentierens und Verallgemeinerns und postuliert, dass dadurch die mathematische Auseinandersetzung komplettiert wird. Dies umfasst Argumentationen unterschiedlicher Allgemeingültigkeit. Diese gehen von einer lokalen Argumentation an einem Beispiel bis hin zu generellen Argumentationen mit Blick auf das Gesamtbild sowie einer Allgemeingültigkeit. In einen ähnlichen Kontext lässt sich die von Müller und Wittmann (2007, S. 49) genannte Tätigkeit des *Begründens* verorten. *Erklären* (Lüken 2017) und *Begründen* werden als diskursive Tätigkeiten aus linguistischer Perspektive nicht synonym verwendet, dennoch wird in dieser Arbeit die Tätigkeit des Erklärens und Begründens zusammengefasst[8]. Für die Abgrenzung der beiden Begrifflichkeiten ist die Gültigkeit des thematisierten Wissens zentral. Ist der Gültigkeitsanspruch geklärt, so handelt die Person als Erklärender. Ist der Gültigkeitsanspruch fraglich, so weist dies auf einen argumentativen

[8] Eine intensive Auseinandersetzung dieser Abgrenzung in (Erath 2016, S. 9 ff.)

oder begründenden Kontext hin (Erath, 2016, S. 11). Da eine Unterscheidung dieser Gültigkeitsansprüche nicht immer eindeutig möglich ist und die Gültigkeit des Wissens im Unterricht häufig künstlich in Frage gestellt wird, werden beide Begriffe in dieser Arbeit in einer Tätigkeit zusammengefasst.

Neben der Untersuchung vorgegebener Muster können Kinder diese auch selbst *erzeugen, entwickeln, produzieren* oder *erfinden*. Dabei können Kinder über die notwendigen Regelmäßigkeiten und Merkmale frei entscheiden, müssen diese dennoch in dem Prozess des Produzierens berücksichtigen (Benz et al., 2015, S. 307; Warren & Cooper, 2006, S. 11).

Die Ausdifferenzierung der Begrifflichkeiten *Erforschen*, *Entdecken*, *systematisch verändern*, *Ausgestalten* und *Ergänzen* sowie *Nutzen* wird von den jeweiligen Autoren nicht weiter ausdifferenziert.

Der Begriff der *systematischen Veränderung* wird in den Bildungsstandards nicht weiter ausgeschärft, ist aber insbesondere im Bereich der Zahlenmuster im Sinne des operativen Prinzips eine grundlegende Tätigkeit bei der Auseinandersetzung mit Zahlbeziehungen, Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten. In den vorherigen Ausführungen zeigte sich dies auch im Kontext der Musterfolgen als bedeutsame Tätigkeit. Denn nur durch ein systematisches Verändern der einzelnen Folgeglieder sowie der Vergleich systematisch veränderter Musterfolgen führen zu einem tiefgreifenden mathematischen Verständnis.

Radatz et al (1999)	Steinweg (2001)	Wittmann (2003)	Vogel (2005)	KMK (2005)	Warren & Cooper (2006)	Müller & Witt-mann (2007)	Benz et al. (2015)	Lüken (2017)
		betrachten						
		wahrnehmen						
		erforschen						
						entdecken		
erkennen	erkennen		erkennen	erkennen	identify		erkennen	
nachzeichnen		reproduzieren	nachzeichnen		copying		nachlegen (nach Vorlage oder aus dem Kopf)	nachbauen nachzeichnen
fortsetzen	fortsetzen	fortsetzen	fortsetzen	fortsetzen	continue		fortsetzen	fortsetzen
beschreiben	beschreiben		beschreiben	beschreiben		beschreiben	beschreiben	
		erzeugen				kommunizieren		
erfinden				entwickeln	create		erfinden	erfinden
			vergleichen					
	erklären					begründen		erklären
				systematische Verändern				
		ausgestalten			translate		übersetzen	
					complete			
							reparieren	reparieren
						nutzen		
ausmalen								
								letztes Element bestimmen

Tabelle 1.2: Vergleichende Gegenüberstellung mathematischer Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen

Es zeigen sich somit deutliche Parallelen zwischen den von den Autoren genannten mathematischen Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen. Die Tätigkeiten des Erkennens, Fortsetzens, Reproduzierens, Beschreibens und Erfindens finden sich als Tätigkeit bei vielen Autoren, die zuweilen unterschiedliche Begrifflichkeiten für die jeweilige Tätigkeit nutzen. Die weiteren Tätigkeiten werden nur vereinzelt genannt. Die Häufigkeit der Nennungen darf keineswegs mit der Relevanz für den Mathematikunterricht gleichgesetzt werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Umgang mit Mustern vielfältige Auseinandersetzungsmöglichkeiten auf unterschiedlichen Ebenen mit verschiedenen Anforderungen bietet. Das Wahrnehmen des Musters als Ganzes gilt als Ermöglichungsbedingung für die Auseinandersetzung mit den dahinterliegenden Strukturen und den damit verbundenen mathematischen Inhalten (Wittmann, 2003, S. 8). Eine solche Betrachtung des Musters in seiner Ganzheit ermöglicht ein Erkennen von Mustern und dessen Strukturen und ist somit Voraussetzung für eine weitergehende Auseinandersetzung mit diesen. Deutscher (2012) sieht hierfür die Teilmusterwahrnehmung sowie Teilmusterstrukturierung als grundlegend für das Anwenden, Nutzen oder Arbeiten mit Mustern. Gleichzeitig stehen die Komponenten in einer starken Wechselbeziehung zueinander. Beim Einsatz von Mustern im Mathematikunterricht können intendierte Strukturen nahelegt werden, dennoch sind diese für den Betrachter nicht evident und es kann trotzdem zu unterschiedlichen und individuellen Strukturierungen kommen. Dies kann die Weiterarbeit mit dem Muster signifikant beeinflussen (S. 246 ff.). Da das Erkennen von Mustern grundlegend für jede weitere Auseinandersetzung ist, wird dieses innerhalb der vorliegenden Arbeit nicht als eigenständige Tätigkeit betrachtet, sondern gilt als Voraussetzung für alle weiteren Tätigkeiten. Gleichzeitig sind weitere Tätigkeiten notwendig, um das Erkennen von Mustern als mentalen Prozess sichtbar zu machen (Steinweg, 2001).

Die Auseinandersetzung mit Mustern kann auf unterschiedlichen Tätigkeitsebenen stattfinden, in denen die bereits herausgearbeiteten Tätigkeiten verortet werden können. Hierbei werden in der vorliegenden Arbeit zwei Arten von Tätigkeiten unterschieden. Dabei werden *potentiell handelnde Tätigkeiten* und *potentiell diskursive Tätigkeiten* unterschieden. Potentiell handelnde Tätigkeiten werden dabei verstanden als Tätigkeiten, in denen eine Manipulation der Muster beziehungsweise die Arbeit mit Material die einzelnen Tätigkeiten bestimmt. Potentiell diskursive Tätigkeiten sind dahingegen durch eine notwendige Verbalisierung bestimmt. Im Folgenden werden die einzelnen Tätigkeiten zunächst den beiden in dieser Arbeit differenzierten Tätigkeitsebenen zugeordnet und deren Zuordnung begründet.

potentiell handelnd	potentiell diskursiv
Reproduzieren	Beschreiben
Fortsetzen	Begründen
Übersetzen	Vergleichen
Systematisches Verändern	
Produzieren	

Tabelle 1.3: Zwei Arten von Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen

Das Reproduzieren, Fortsetzen, Übersetzen, systematische Verändern und Produzieren als potentiell handelnde Tätigkeiten benötigen in der Tätigkeit selbst zunächst keinerlei Verbalisierung und sind somit für Kinder rein am Material auf enaktiver oder ikonischer Ebene möglich. Diese Tätigkeiten können, müssen aber nicht, von weiteren Äußerungen begleitet werden. Während Reproduzieren, Fortsetzen und Übersetzen von Mustern strukturerhaltende Tätigkeiten sind, die die bereits im Muster vorhandene Struktur nutzt und anwendet, stellt das Produzieren von Mustern eine *strukturgenerierende Tätigkeit* dar. Die Lernenden können auf frei gewählte Elemente sowie Merkmale zurückgreifen und diese bei der Produktion eigener Muster berücksichtigen. Das systematische Verändern kann sowohl strukturerhaltend als auch strukturgenerierend sein. Werden die Muster dahingehend systematisch verändert, dass einzelne Folgeglieder variiert werden, dann bleibt die Struktur der Muster erhalten. Werden allerdings strukturelle Merkmale variiert, wie zum Beispiel der Wachstumsfaktor einer wachsenden Musterfolge, so verändert sich das Muster, denn es wird eine neue Struktur in Abhängigkeit zu der bereits bestehenden Struktur generiert. Potentiell diskursive Tätigkeiten benötigen eine Form der Verbalisierung und stellen somit zusätzliche Anforderungen an die Kinder, da sie eine Art Meta-Ebene einnehmen müssen, um über das Muster zu kommunizieren. Gleichzeitig können diese Tätigkeiten auch als rein mentale Prozesse ablaufen, die nur durch Verbalisierung sichtbar wird. Eine strukturbasierte Beschreibung eines Musters sowie eine Begründung im Kontext von Mustern kann nur stattfinden, wenn die Lernenden sich von den konkreten Objekten lösen und abstrakte Beziehungen in den Blick nehmen. Ein Beschreiben und Begründen kann, muss aber nicht, auf rein sprachlicher Ebene stattfinden. Die konkreten Muster als Ikonisierungen oder tatsächlich vorhandene Objekte können ebenfalls Teil dieser sein. Das bedeutet sie können als Träger mathematischer Inhalte in den Argumentationsprozess integriert werden und Grundlage dessen sein. Lernende können räumliche Muster zum Beispiel durch Zeigehandlungen oder sprachliche Verweise auf Teilstrukturen oder einzelne Objekte in den Argumentationsprozess integrieren. Argumentationen sind dann unmittelbar an das räumliche Muster geknüpft und ohne dieses für das Gegenüber unverständlich. (vgl. Kap. 2.4). Dabei kann das Anschauungsmittel auch dazu dienen, die Kinder sprachlich zu entlasten (Tiedemann 2017, S. 50).

Durch einen gezielten Verweis auf das Anschauungsmittel und damit verbundenen Zeigegesten, ist es nicht notwendig, alle Aspekte zu verbalisieren.
Obwohl die Tätigkeiten theoretisch voneinander abgrenzbar sind, so sind diese nicht isoliert voneinander zu betrachten. Sie stehen in wechselseitiger Abhängigkeit zueinander und können sich beim Mathematiklernen gewinnbringend ergänzen. In der weiteren Auseinandersetzung mit dem Argumentieren in der Grundschule werden die hier vorgestellten Tätigkeiten nochmals aufgegriffen und dargestellt, inwiefern die an dieser Stelle herausgearbeiteten Tätigkeiten gewinnbringend im Argumentationsprozess verknüpft werden können (vgl. Kap. 2.4).
Die Intention der Initiierung der Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen in Form von unterschiedlichen Tätigkeiten ist es, den Kindern einen Zugang zu abstrakten mathematischen Inhalten, zum Beispiel strukturellen Zahleigenschaften, zu ermöglichen. Da sich Mathematik als Wissenschaft der Muster versteht und alle mathematischen Inhaltsbereiche durchzieht, sind sie auch grundlegend für das Lehren und Lernen von Mathematik (vgl. Kap. 1.1). So wird es durch räumliche Muster ermöglicht, abstrakte mathematische Inhalte zu visualisieren und dadurch dem Denken der Kinder zugänglich zu werden (Otte, 1983) (vgl. Kap. 1.3 & Kap 3.1).
In der bisherigen Auseinandersetzung wurden die unterschiedlichen Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen herausgearbeitet und zueinander in Beziehung gesetzt. Dabei wurde in potentiell handelnde sowie potentiell diskursive Tätigkeiten unterschieden. Gleichzeitig wurden die potentiell handelnden Tätigkeiten in strukturerhaltend sowie strukturgenerierend unterschieden. Das Reproduzieren, Fortsetzen und Übersetzen von Mustern wurde dabei als strukturerhaltend beschrieben. In allen drei Fällen erfolgt eine Manipulation am oder mit Material, die Struktur des Musters wird dabei aber beibehalten. Das Produzieren von Mustern hingegen wurde als strukturgenerierend charakterisiert. Das systematische Verändern kann sowohl strukturerhaltend als auch -generierend sein. Die potentiell diskursiven Tätigkeiten werden in dieser Arbeit als strukturerhaltend charakterisiert. Dies ist damit zu begründen, da keine Manipulation am Muster stattfindet, es weder erweitert, noch verändert wird. Vielmehr wird eine Meta-Ebene auf das vorhandene Muster und die dahinterliegende Struktur eingenommen. Grundlegend für eine Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen ist, dass Kinder das Muster als solches identifizieren und eine Regelmäßigkeit erkennen (Deutscher 2012).

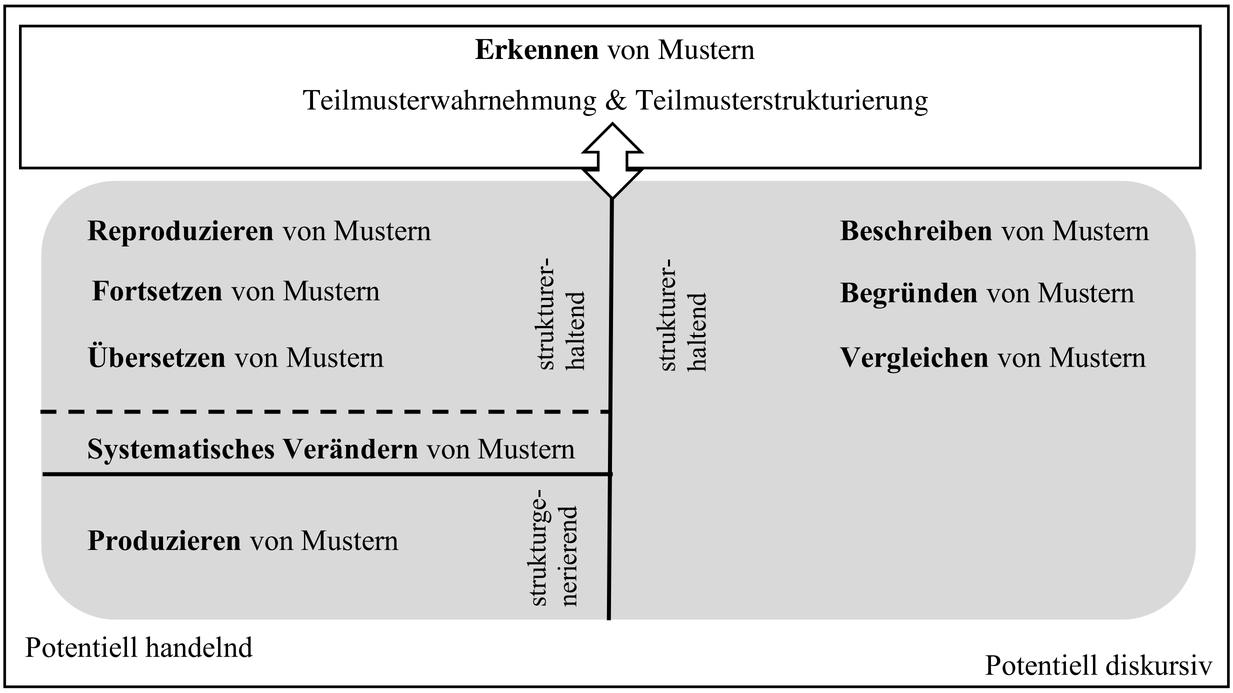


Abbildung 1.20: Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen

All diese genannten Tätigkeiten stellen im Umgang mit Mustern und Strukturen eine wesentliche Grundlage der Auseinandersetzung dar. Gleichzeitig ist es für die Auseinandersetzung mit den mathematischen Mustern wesentlich, dass dieses als solches erkannt und die Regelmäßigkeit identifiziert wird. Demnach ist es auch notwendig die dem Muster zugrundeliegende Struktur zu identifizieren. Dabei ist es grundsätzlich möglich, unterschiedliche Strukturen in die Muster hineinzudeuten. Im vorliegenden Forschungsprojekt bildet dies den Ausgangspunkt für das zentrale Forschungsinteresse. In der theoretischen Auseinandersetzung wurde dargestellt, dass räumliche Muster eine Möglichkeit darstellen, arithmetische Strukturen zu veranschaulichen. Dabei steht die Verknüpfung von arithmetischen Strukturen und geometrischen Mustern im Fokus. Das bedeutet auch gleichzeitig, dass die arithmetischen Strukturen in die räumlichen Muster hineingedeutet werden müssen. Die vorliegende Interviewstudie geht dabei der Frage nach, wie Kinder diese Anforderungen der Verknüpfung von arithmetischen Strukturen und räumlichen Muster bearbeiten. Dafür werden die Kinder vor die Anforderung gestellt (allgemeingültige) strukturelle Zahleigenschaften in Form der Paritäten sowie der Teilbarkeit durch drei in geometrische Anordnungen in Form von Punktmustern hineinzudeuten. Dabei wird untersucht, welche strukturellen Sichtweisen und Deutungen die Kinder einnehmen und welche Strukturen sie in ihren Deutungs- und Argumentationsprozessen nutzen. Dies dient einem besseren Verständnis, wie Kinder räumliche Muster im Kontext der arithmetischen Strukturen deuten und nutzen.

2 Argumentieren

Argumentieren wird als eine zentrale mathematische Tätigkeit beschrieben, denn Mathematik wird als beweisende Disziplin verstanden (Heintz, 2000). Dabei ist das Argumentieren nicht nur in der Mathematik, sondern auch im Alltag der Kinder und ihrem späteren Leben eine zentrale Kompetenz, um ein selbstbestimmtes Leben führen zu können (Budke & Meyer, 2015). In der vorliegenden Arbeit stehen *mathematische Argumentationsprozesse* im *Zentrum des Forschungsinteresses*. Aus diesem Grund steht im zweiten Kapitel die differenzierte Auseinandersetzung mit dem Argumentationsbegriff im Zentrum des Interesses.
Da Argumentieren nicht nur in der Mathematik von Bedeutung ist, sondern eben auch innerhalb des Alltags der Kinder relevant ist, wird sich sowohl mit der Bedeutung des Argumentierens im alltäglichen Leben der Kinder als auch mit der Bedeutung im Mathematikunterricht beschäftigt (Kap. 2.1). Dies ist notwendig, denn es gibt wesentliche Unterschiede zwischen dem Argumentieren im Alltag sowie dem Argumentieren in der Mathematik und dem Mathematikunterricht (der Grundschule). Diese Unterschiede werden in Kapitel 2.2 herausgearbeitet und darauf aufbauend ein für die Grundschule geeignetes Argumentationsverständnis für die vorliegende Arbeit entwickelt, welches den Besonderheiten des Argumentierens in der Grundschule entspricht. Dabei wird der Argumentationsbegriff auch mit den Begriffen Begründen und Beweisen in Zusammenhang gebracht beziehungsweise davon abgegrenzt. Aufbauend darauf, wird herausgearbeitet, welche Funktion das Argumentieren im mathematischen Lehr- und Lernprozess einnimmt und ein Dilemma zwischen Argumentieren als Lernziel und als Lernvoraussetzung beschrieben (Kap. 2.3).
Auf Grundlage dieser theoretischen Auseinandersetzung wird das Argumentieren in Beziehung zu Mustern und Strukturen gesetzt, die für das Mathematiktreiben von zentralem Interesse sind (Devlin, 1994, 2002b; Sawyer, 1955 und Kap. 1). Dabei sind die zu betrachtenden Muster und dahinterliegenden Strukturen häufig allgemeingültiger Natur und begründungsbedürftig. Daher werden die in Kapitel eins beschriebenen Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen in Beziehung zum Argumentieren gestellt (Kap. 2.4.1) und

herausgestellt, inwiefern dies in Beziehung zum Beweisen im Mathematikunterricht der Grundschule steht (Kap. 2.4.2).

2.1 Bedeutung des Argumentierens

2.1.1 Argumentieren im Alltag

Das Argumentieren ist keine rein mathematische Kompetenz, sondern in der Lebenswelt der Kinder alltäglich, da es in unterschiedlichsten schulischen und außerschulischen Lebensbereichen notwendig ist. Vor diesem Hintergrund ist es unerlässlich, argumentative Kompetenzen zu fördern, um die Kinder zu selbstbestimmten Individuen zu erziehen, die zunehmend Verantwortung für ihren eigenen Lebensweg übernehmen sollen. Denn Kinder müssen in ihrem weiteren Leben immer wieder Entscheidungen treffen und ihren Lebensweg dadurch aktiv gestalten. Hierfür ist es notwendig, dass sie argumentativ tätig werden und Entscheidungen gegeneinander abwägen. Argumentative Kompetenzen dienen dann als Entscheidungshilfe, aber auch dazu, Entscheidungen rechtfertigen zu können (vgl. u.a. Bayer, 2007, S. 226,; Budke & Meyer, 2015, S. 9).
Argumentationen sind aber nicht nur zur Entscheidungsfindung und -rechtfertigung von Bedeutung, sondern sind auch bei entstandenen Konflikten notwendig. Ein Konflikt entsteht dadurch, dass unterschiedliche Möglichkeiten, Auffassungen oder Ansichten zu einem Sachverhalt vorliegen, die zu einer Strittigkeit führen. Dadurch liegt eine begründungswürdige These zugrunde, über die sich die Argumentationsteilnehmer nicht einig sind, oder eine Entscheidung beinhaltet, welche es zu treffen beziehungsweise zu rechtfertigen gilt (Budke & Meyer, 2015, S. 10ff.). Argumentieren im Alltag ist somit immer dann notwendig, wenn Strittigkeiten unterschiedlicher Art auftreten, und bietet eine Möglichkeit der (friedlichen) Konfliktlösung, die aber nicht immer mit einer Einigkeit der Argumentationsteilnehmer einhergeht (Hannken-Illjes, 2018, S. 24 ff.). Kinder müssen somit dazu in die Lage versetzt werden Konflikte zu lösen.
Demnach zeigt sich, dass argumentative Kompetenzen in unterschiedlichsten Lebensbereichen notwendig sind. Die Vermittlung von Argumentationskompetenz ist somit bereits in der Grundschule unerlässlich, damit Kinder sich zu einem Individuum entwickeln können, welches zur gesellschaftlichen Teilhabe befähigt wird und dadurch sein Leben aktiv selbst gestalten kann. Aus diesem Grund, ist Argumentieren auch im Mathematikunterricht der Grundschule von Relevanz, wie im Folgenden dargestellt wird.

2.1.2 Argumentieren im Mathematikunterricht

Das zentrale Ziel der (Grund-)Schule ist die Entfaltung grundlegender Bildung (KMK, 2005b, S. 6). Diese ermöglicht eine aktive Teilhabe am gesellschaftlichen Leben und ist Basis für ein lebenslanges Lernen (KMK, 2005b, S. 6). Aufgabe der einzelnen Unterrichtsfächer ist es, dass Kinder *fachspezifische Kompetenzen* erwerben. Hierfür stellt das Argumentieren ein wichtiges *Mittel der wissenschaftlichen Erkenntnis* dar und ist für den Fachunterricht aller Schulstufen zentral. Kinder können demnach durch das Argumentieren Erkenntnisse gewinnen und (Fach-)Wissen erwerben.

Dabei unterscheiden sich die Argumentationsformen unterschiedlicher Wissenschaften, denn jede Wissenschaftsdisziplin setzt eigene typische Argumentationsformen ein (Budke & Meyer, 2015, S. 11f.). Für den Mathematikunterricht der Grundschule bedeutet dies, Kinder auf die typische Argumentationsform der Wissenschaft Mathematik vorzubereiten – den mathematischen Beweis (Heintz, 2000; Krauthausen, 2001; Meyer & Prediger, 2009, S. 1; Schwarzkopf, 2015, S. 31). Kinder müssen dafür aber zunächst die mathematikspezifischen Regeln, Darstellungsformen, aber auch die Sprache, in der Argumentationen geführt werden, erlernen. Dies macht es notwendig, das Mathematiklernen nicht auf die reine Vermittlung von Kenntnissen und Fertigkeiten zu beschränken (KMK, 2005b, S. 6). Sie müssen somit dazu befähigt werden, mathematische Argumentationen zu entwickeln und Argumentationen anderer nachzuvollziehen. Aus diesem Grund ist es in der mathematikdidaktischen Diskussion unbestritten, dass die Argumentationskompetenz ein zentrales Lernziel im Mathematikunterricht darstellt (vgl. u.a. Brunner, 2014, S. 2ff.; Fetzer, 2009, 2011; Heintz, 2000; Jahnke & Ufer, 2015, S. 333; Krummheuer, 2003, S. 29; Lindmeier, Grüßing, Heinze, & Brunner, 2017, S. 609; Meyer & Prediger, 2009; Winter, 1975).

Argumentieren ist somit als Mittel der Erkenntnisgewinnung eine *Lernvoraussetzung*. Gleichzeitig müssen die Kinder Kompetenzen erwerben, die sie dazu befähigen, mathematikspezifisch zu argumentieren. Demnach stellt das Argumentieren auch ein zentrales *Lernziel* im Mathematikunterricht der Grundschule dar. Das heißt Argumentieren hat im Mathematikunterricht der Grundschule eine doppelte Funktion (vgl. Kap. 2.3).

2.2 Argumentieren – eine begriffliche Auseinandersetzung

Weil das Argumentieren eine notwendige Kompetenz im alltäglichen Leben sowie in den unterschiedlichen Wissenschaftsbereichen, so auch der Mathematik, ist, darf eine begriffliche Auseinandersetzung mit dem Argumentieren nicht ausschließlich auf seine fachliche

oder seine alltägliche Ausprägung beschränkt werden (Budke & Meyer, 2015, S. 17). Durch eine Beschränkung auf das alltägliche Argumentieren würden die mathematikspezifischen Eigenschaften des Argumentierens außer Acht gelassen. Eine Beschränkung auf das fachspezifische Argumentieren ist, insbesondere für die Grundschule, ebenso ungeeignet. Kinder in der Grundschule müssen die charakteristischen Eigenschaften mathematischen Argumentierens erst lernen, während sie bereits im alltäglichen Leben in unterschiedlichsten Situationen argumentiert haben. Da Kinder in der Grundschule noch nicht in die Argumentationskultur der Mathematik eingeführt worden sind, wohl aber bereits über Vorerfahrungen zum Argumentieren verfügen, nutzen sie im Mathematikunterricht auch Mittel des alltäglichen Argumentierens. Diese Vorerfahrungen gilt es in der Grundschule aufzugreifen, um einen Übergang vom alltäglichen zum fachlichen Argumentieren ermöglichen zu können.
Nicht nur die Art und Weise, wie argumentiert wird, unterscheidet sich, sondern auch wie Argumentationen zustande kommen. Während im Alltag der Ausgangspunkt einer Argumentation ein echter Konflikt ist (vgl. Kapitel 2.1.1), ist das Argumentieren im Mathematikunterricht auch notwendig, wenn die Aussage nicht direkt strittig ist und dadurch kein echter Konflikt vorherrscht (vgl. Kap. 2.1.2).
Aus diesem Grund ist es notwendig sich mit den spezifischen Merkmalen alltäglichen Argumentierens und des fachlichen Argumentierens auseinanderzusetzen. Hierbei sind vor allem Gemeinsamkeiten und Unterschiede von besonderem Interesse. Deswegen wird im Folgenden zunächst geklärt, was grundsätzlich unter Argumentieren verstanden wird und die grundlegende Struktur von Argumentationen als gemeinsames Merkmal dargestellt. Anschließend wird das alltägliche und fachliche Argumentieren getrennt voneinander in den Blick genommen, auch wenn dies im Mathematikunterricht und den Argumentationen der Kinder nicht (immer) trennscharf zu unterscheiden ist.

Argumentieren kann verstanden werden als eine „sprachliche Handlung einer oder mehrerer Personen, bei deren Vollzug ein oder mehrere Argumente geäußert werden, z.B. um Behauptungen zu begründen oder Entscheidungen zu rechtfertigen“ (Bayer, 2007, S. 226). Eine solche Argumentation kommt dann zustande, wenn „Teilnehmer strittige Geltungsansprüche thematisieren und versuchen, diese mit Argumenten einzulösen oder zu kritisieren“ (Habermas, 1981, S. 38). Ausgangspunkt ist somit ein Konflikt, bei denen mindestens ein Interaktionspartner die Gültigkeit einer Behauptung oder Aussage infrage stellt. Um sein Gegenüber oder sich selbst von dem Geltungsanspruch, also der Gültigkeit der Behauptung beziehungsweise der Aussage zu überzeugen, werden Argumente genutzt. „Ein *Argument* enthält Gründe, die in systematischer Weise mit dem *Geltungsanspruch* einer

problematischen Äußerung verknüpft sind“ (Habermas, 1981, S. 38; Hervorhebung i.O.). Diese stehen somit immer in unmittelbarem Zusammenhang mit der als strittig deklarierten Aussage.
In Argumentationen werden somit Argumente entwickelt, durch die eine strittige Frage, in diesem Fall die Strittigkeit des Geltungsanspruchs, beantwortet werden kann (Klein, 1980, S. 10f.). Solche „Argumentationen [sind] gewöhnlich in größere Handlungskontexte eingebettet. Sie kommen dann zustande, wenn aus irgendwelchen Gründen eine Sache unter irgendwelchen Menschen strittig ist“ (Klein, 1980, S. 11). Die Strittigkeit einer Behauptung oder Aussage entsteht somit üblicherweise in der Interaktion zwischen verschiedenen Individuen. Diese versuchen dann innerhalb der Argumentation die Strittigkeit zu bearbeiten. Das heißt, die Gültigkeit der Aussage zu rechtfertigen oder zu widerlegen. Hierfür werden nun Aussagen und Argumente angeführt, die für die jeweilige Gruppe unbestritten sind und somit für das Kollektiv, in dem argumentiert wird, gültig sind (Klein, 1980, S. 19). Das heißt gleichzeitig, dass die Gültigkeit vom Kollektiv bestimmt wird, somit von der Gruppe der an der Argumentation beteiligten Teilnehmer. Denn „die Aussagen einer Argumentation sind gerechtfertigt und die Kohärenz gesichert, wenn Aussagen und benutzte Übergänge zum kollektiv Geltenden zählen“ (Klein, 1980, S. 21). Die Gültigkeit hängt somit zum einen von dem jeweiligen Handlungskontext, in dem argumentieret wird, ab. Zum anderen ist sie auch abhängig von dem jeweiligen Kollektiv, also der Gruppe der Interaktionsteilnehmer. Aussagen, die in einer Gruppe als gültig betrachtet werden, können in einem anderen Kontext oder einer anderen Gruppe von Interaktionsteilnehmern infrage gestellt werden. Argumentationen sind somit nicht losgelöst vom jeweiligen Kontext und den jeweiligen Argumentationsteilnehmern. Das Kollektiv im Alltag unterscheidet sich deutlich von dem Kollektiv in fachlichen Argumentationen, so dass auch aus dieser Perspektive eine Unterscheidung zwischen alltäglichem und fachlichem Argumentieren notwendig ist. Gleichzeitig darf das Kollektiv der Fachmathematiker nicht mit dem Kollektiv im Mathematikunterricht, insbesondere der Grundschule, gleichgesetzt werden.

Auch wenn in den bisherigen Ausführungen mehrfach erwähnt wurde, dass es Unterschiede in den alltäglichen und fachlichen Argumentationen gibt, gibt es auch Gemeinsamkeiten. Argumentationen als soziale Interaktionsprozesse unterliegen unabhängig vom Kontext einer besonderen Struktur, in der die Redebeiträge der Interaktionsteilnehmer verschiedene Funktionen einnehmen. So rekonstruierte Toulmin (1975) funktionale Bestandteile einer Argumentation, die im Folgenden dargestellt werden.

Grundlegend für das Zustandekommen einer Argumentation ist, dass eine Behauptung aufgestellt und deren Geltungsanspruch hinterfragt und begründet wird. Diese aufgestellte und zu begründende Aussage bezeichnet Toulmin als *Konklusion* (Toulmin, 1975, S. 88ff.). Um diese Aussage zu untermauern, greift das argumentierende Individuum auf unbestrittene Tatsachen zurück. Diese nennt Toulmin das *Datum* (S. 88ff.). Die kürzest denkbare Argumentation besteht aus einer zu begründenden Aussage, der *Konklusion*, und der unbestrittenen Aussage, auf die das Individuum in seiner Argumentation zurückgreift, dem *Datum.* Dieser Schritt vom Datum zur Konklusion wird auch als *Schluss* bezeichnet (Krummheuer & Fetzer, 2005, S. 38).

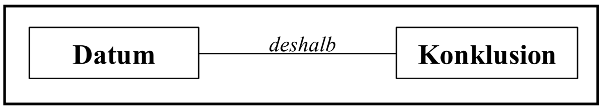


Abbildung 2.1: Toulmin-Schema Ausschnitt I

Die Angemessenheit des Schlusses vom Datum auf die Konklusion ist nicht (immer) evident, sondern kann vom Argumentationsgegner hinterfragt werden. Dann gilt es zu zeigen, dass „der Schritt von diesen als Ausgangspunkt dienenden Daten auf die ursprüngliche Behauptung legitim ist“ (Toulmin, 1975, S. 89). Dies geschieht durch den Einsatz einer *Schlussregel*[9]. Sie signalisiert den argumentativen Zusammenhang zwischen dem Datum und der Konklusion (Schwarzkopf, 2015, S. 39).

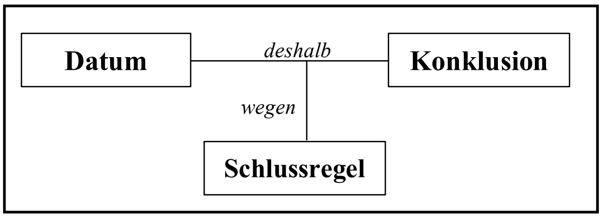


Abbildung 2.2: Toulmin-Schema Ausschnitt II

Im Gegensatz zum Datum wird die Schlussregel jedoch nicht immer explizit angezeigt und bleibt häufig implizit (Toulmin, 1975, S. 91). Warum die Schlussregel es erlaubt vom Datum auf die Konklusion zu schließen, wird nach Toulmin durch die *Stützung* begründet. Diese beschreibt Toulmin als bereichsspezifisch, was bedeutet, dass in unterschiedlichen argumentativen Situationen unterschiedliche Schlussregeln legitim sind. Stützungen in der alltäglichen Argumentation können sich somit von Stützungen in mathematischen Argumentationen unterscheiden (vgl. Kapitel 2.2.1 & 2.2.2).

[9] In der englischsprachigen Fassung bezeichnet Toulmin (1969) die Schlussregel als ‚warrant‘. In unterschiedlichen deutschsprachigen Veröffentlichungen finden sich weitere Bezeichnungen hierfür. Z.B. ‚Garant‘(Krummheuer & Fetzer, 2005), Argumentationsregel (Schwarzkopf, 2000, 2015) oder Regel (Meyer, 2007; Brunner, 2014).

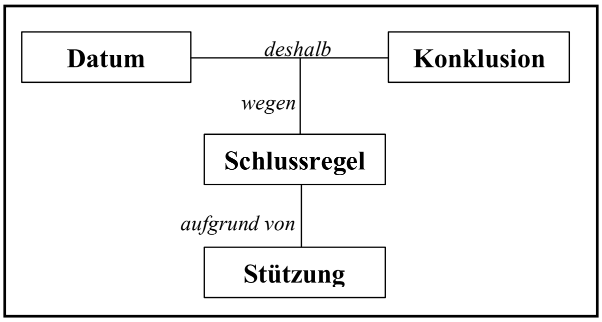


Abbildung 2.3: Ausschnitt Toulmin-Schema III

Spezifisch für mathematisches Argumentieren ist, dass durch die Schlussregel zweifelsfrei vom Datum auf die Konklusion geschlossen werden kann. In außermathematischen Kontexten und in alltäglichen Argumentationen kann es sein, dass nicht notwendigerweise durch die Schlussregel vom Datum auf die Konklusion geschlossen werden kann. In einer solchen Situation ist es notwendig, *Ausnahmebedingungen* zu formulieren, für die die Schlussfolgerung nicht gilt. Der Grad der Stärke des Arguments kann durch *Modaloperatoren* wie zum Beispiel ‚vermutlich‘ oder ‚wahrscheinlich‘ angezeigt werden (Toulmin, 1975, S. 92f.).

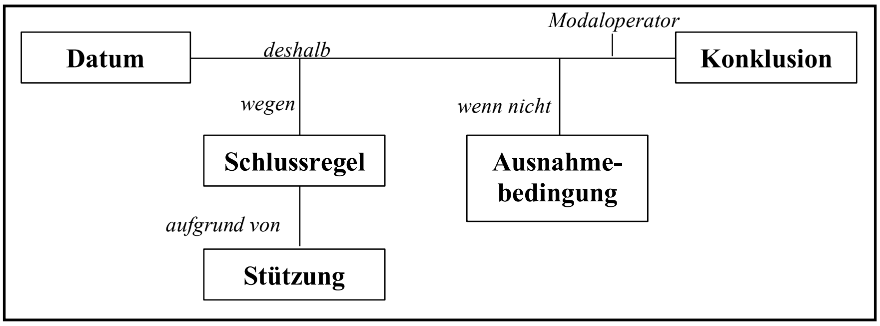


Abbildung 2.4: Toulmin-Schema - Ausschnitt IV

In der Darstellung des Toulmin-Schemas hat sich gezeigt, dass Argumentieren unabhängig vom Kontext in seiner Struktur aus den gleichen funktionalen Bestandteilen besteht. Für eine Differenzierung des alltäglichen und mathematischen Argumentierens sind aber insbesondere die oben bereits erwähnten Unterschiede von Bedeutung. Diese werden im Folgenden getrennt voneinander und hinsichtlich folgender Akzentuierungen betrachtet:

1) Die *Argumentationskultur*, die durch das Kollektiv und den Kontext in dem argumentiert wird bestimmt ist.
2) Die *Strittigkeit* als Ausgangspunkt der Argumentation.
3) Die *Argumentationsvoraussetzungen*, das heißt, die Argumente, Voraussetzungen, Stützungen und Schlussweisen, die in der Argumentation genutzt und akzeptiert werden.
4) Der *soziale Diskurs* in dem die Argumentation stattfindet.

2.2.1 Akzentuierung wesentlicher Aspekte alltäglicher Argumentation

Argumentationskontext – Argumentationskultur

In der *alltäglichen* Interaktion kommt eine Argumentation dann zustande, wenn eine Strittigkeit zwischen mindestens zwei Personen den sozialen Diskurs, und damit die Interaktion, stört. Ein Fortführen dieser ist erst dann möglich, wenn die Strittigkeit beigelegt wurde. Beim alltäglichen Argumentieren handelt es sich somit häufig um ein gegeneinander Argumentieren (Meyer & Prediger, 2009, S. 3). Ziel ist es, Konflikte zwischen mehreren Personen zu lösen und dadurch soziale Beziehungen und die damit verbundene Interaktion aufrecht zu erhalten. Im Fokus steht demnach das Erzielen praktischer Konsequenzen (R. Maier, 1995, S. 207), nämlich das Fortführen der Interaktion und das Beilegen des Konfliktes. Dafür gibt es aber keine festgelegten Standards. Vielmehr entscheidet das Kollektiv der jeweiligen sozialen Gruppe, in der argumentiert wird, wann es notwendig ist, eine Strittigkeit zu klären, wann eine Strittigkeit beigelegt ist und welche Aussagen zur Beilegung der Strittigkeit führen können (Bayer, 2007, S. 145). In Alltagsargumentationen gibt es somit keine strengen Regeln, wie argumentiert werden darf, was als zulässiges Argument anerkannt ist und wann ein Geltungsanspruch nicht mehr strittig ist. Im Gegensatz dazu folgen wissenschaftliche Argumentationen strengen Regeln und es werden lediglich rationale Argumente akzeptiert (vgl. Kap. 2.2.2). Diese können im Alltag zwar genutzt werden, müssen aber nicht notwendigerweise gegeben werden (Bayer, 2007, S. 146). Gleichzeitig bedeutet dies, dass rationale Argumente in alltäglichen Argumentationen zwar gegeben werden können, diese aber nicht notwendigerweise vom Gegenüber als gültig akzeptiert werden. Da es in der alltäglichen Argumentation keine festen Regeln gibt, nach denen eine Argumentation abläuft, gibt es keinen einheitlichen Aufbau. Dies unterscheidet das alltägliche Argumentieren von wissenschaftlichen Argumentationen. Während in der wissenschaftlichen Argumentation alle wesentlichen Aspekte explizit formuliert werden müssen, können diese im Alltag auch implizit bleiben. Es kann somit vorkommen, dass die Strittigkeit nicht explizit formuliert wird. Gleiches gilt auch für die Gültigkeit der Aussagen. Es wird häufig nicht erklärt, warum eine Aussage innerhalb des Argumentationsprozesses gültig ist. Dies ist erst dann notwendig, wenn sie von einem Argumentationsteilnehmer infrage gestellt wird. Dadurch, dass Argumentieren im Alltag keinen festgelegten Regeln oder einem festgelegten Aufbau folgt, kann auch die Strittigkeit innerhalb eines Argumentationsprozesses variieren (Bayer, 2007; Klein, 1980, S. 10). Das bedeutet, es kann in einem Argumentationsprozess eine neue Strittigkeit entstehen, die von den Interaktionsteilnehmern (zunächst) geklärt wird. Dabei gerät die eigentliche Strittigkeit, die die Argumentation ausgelöst hat, in den Hintergrund und wird dann nicht mehr (notwendigerweise) beigelegt.

Das Ziel die Strittigkeit beizulegen gelingt dadurch, dass die jeweilige Gruppe, in der argumentiert wird, die Aussagen, welche zur Beilegung der Strittigkeit genutzt werden, akzeptiert (Schwarzkopf, 2000, S. 234 f.). Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Strittigkeit nur in dieser Gruppe beigelegt wurde und die Aussagen nur innerhalb dieser konkreten Gruppe als akzeptiert gelten. Die Akzeptanz der Gültigkeit einer Aussage ist demnach immer von der sozialen Gruppe abhängig, in der argumentiert wird. Das hat zur Folge, dass Argumente, die zur Beilegung einer Strittigkeit geführt haben, nicht notwendigerweise in jeder sozialen Gruppe akzeptiert worden wären.

Die Aushandlung dessen, was als gültig akzeptiert wird, wird in der alltäglichen Argumentation auch von sozialen Aspekten beeinflusst. Es geht nicht immer (nur) um die Akzeptanz und Berechtigung von Aussagen, vielmehr spielen Gruppenloyalitäten, Erwartungen an Individuen und weitere soziale Beziehungen innerhalb eines Argumentationsprozesses eine Rolle (Kopperschmidt, 1995, S. 55). So kann es sein, dass ein Argumentationsteilnehmer eine Aussage nur aus Loyalität zu anderen Argumentationsteilnehmern akzeptiert.

Eine weitere Besonderheit lässt sich hinsichtlich der Bedeutung der Allgemeingültigkeit in der alltäglichen Argumentation beschreiben. Während mathematische Argumentationen in der Regel auf eine Allgemeingültigkeit abzielen, ist dies beim alltäglichen Argumentieren häufig nicht der Fall (Maier, R., 1995, S. 207). Strittigkeiten beziehen sich in diesen häufig auf konkrete Situationen. Das heißt aber auch, dass sich die Geltung der Aussage, welche zur Beilegung der Strittigkeit genutzt wird, ebenfalls nur auf die konkrete Situation bezieht. Gleichzeitig unterscheidet sich das Verständnis der Allgemeingültigkeit von Argumenten im Alltag von der mathematischen Auffassung von Allgemeingültigkeit. Jahnke (2008) beschreibt solche Argumente als „open general statements“ (S. 364). Dabei handelt es sich um Argumente, die als allgemeingültig gesehen werden, da sie der Regel entsprechen. Dabei wird aber nicht expliziert, dass es auch Abweichungen dieser Regel gibt. So wird in Argumenten, wie zum Beispiel ‚Der Schulbus kommt in zwei Minuten, denn er kommt immer um 7.30 Uhr‘, eine Allgemeingültigkeit genutzt. Diese Aussage ist dennoch nicht als allgemeingültig zu sehen, denn es kann durchaus Umstände geben, in denen dies nicht zutreffend ist, zum Beispiel aufgrund von schlechten Wetterverhältnissen. Diese Ausnahmen werden in der alltäglichen Argumentation aber (häufig) nicht expliziert.

Strittigkeit

In den vorherigen Ausführungen hat sich gezeigt, dass die Strittigkeit den Ausgangspunkt für Argumentationen darstellt. Im Alltag kommen Argumentationen nur dann zustande, wenn eine echte Strittigkeit herrscht und dadurch ein Begründungsbedarf erzeugt wird

(Schwarzkopf, 2000, S. 238). Somit gibt es grundsätzlich mindestens zwei unterschiedliche Meinungen, Ansichten oder Optionen. Ohne diese kommt eine Argumentation im Alltag nicht zustande. Eine solche Strittigkeit kann, muss aber nicht, direkt geäußert werden. Argumentationsteilnehmer können diese auch lediglich annehmen (Hannken-Illjes, 2018, S. 19). Das bedeutet aber nicht, dass jede Strittigkeit im Alltag automatisch Ausgangspunkt einer Argumentation ist. Diese wird erst dann nötig, wenn die Strittigkeit den sozialen Diskurs stört und nur ein Beilegen der Strittigkeit ein Fortführen der Interaktion ermöglicht (Kopperschmidt, 1995, S.55).
Somit ist der Ausgangspunkt einer alltäglichen Argumentation immer eine Strittigkeit. Gleichzeitig ist aber nicht jede Strittigkeit Ausgangspunkt einer Argumentation. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur Mathematik und zum Mathematikunterricht, denn dort werden auch häufig bereits akzeptierte oder als gültig deklarierte Aussagen hinterfragt und eine Begründung dafür eingefordert. Dies wird in der Auseinandersetzung mit der Strittigkeit im Mathematikunterricht genau betrachtet und erläutert.

Argumentationsvoraussetzungen

Das Ziel der Argumentation ist es somit, eine echte Strittigkeit beizulegen. Das heißt die Interaktionsteilnehmer versuchen ihren eigenen Standpunkt zu vertreten und das Gegenüber von diesem zu überzeugen. Dafür nutzen sie unterschiedliche Argumente. Diese Argumente beruhen auf Aussagen, die innerhalb der jeweiligen Gruppe, in der argumentiert wird, als gültig akzeptiert werden. Gleiches gilt für die Schlussfolgerungen, die in dieser getätigt werden. Hierfür gibt es, ähnlich zum Aufbau der Argumentation, keine festgelegten Regeln, welche Argumente, Aussagen oder Schlussfolgerungen akzeptiert werden. Auch hier zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen der alltäglichen Argumentation und der wissenschaftlichen Argumentation. So werden im Alltag häufig empirische Argumente genutzt, um Aussagen zu verifizieren (Brunner, 2012, S. 38). Solche beruhen auf den persönlichen und individuellen Erfahrungen, die das argumentierende Individuum gemacht hat. Theoretische Argumente, die auf wissenschaftliche Erkenntnisse oder Gesetzmäßigkeiten zurückzuführen sind, können aber müssen nicht in den Argumentationsprozess integriert werden (Bayer, 2007, S. 146).
Neben den einzelnen Argumenten und Begründungen sind auch die Übergänge und Schlussfolgerungen in alltäglichen Argumentationen sehr variabel. Es können logische Schlüsse genutzt werden, aber auch weitere Schlussweisen wie Analogieschlüsse, die Berufung auf eine Autorität oder Wahrscheinlichkeitsaussagen sind denkbar (Fischer & Malle, 2004). Während in der fachlichen Argumentation die erlaubten Schlussregeln vorgegeben sind,

entscheidet im Alltag auch hier das jeweilige Kollektiv über die Akzeptanz. So ist es in alltäglichen Argumentationen mitunter möglich andere damit zu überzeugen, dass eine Autorität eine Aussage getätigt hat. In der mathematischen Argumentation ist eine solche Schlussweise nicht ausreichend (Brunner, 2014, S. 44f.) Auch wenn logische Schlüsse im Alltag häufig nicht notwendig sind, ist es dennoch möglich diese in Alltagssituationen anzuwenden (Bayer, 2007, S. 147). Dennoch werden logische Schlussweisen ähnlich rationaler Argumente vom Kollektiv in der alltäglichen Argumentation nicht notwendigerweise anerkannt. Weder der Aufbau der Argumentation noch welche Argumente, Schlussweisen und Voraussetzungen gültig sind, ist in der alltäglichen Argumentation festgelegt. Vielmehr ist es das jeweilige Kollektiv in dem argumentiert wird, welches darüber entscheidet, was akzeptiert wird. Dies hat zur Folge, dass dies in jeder Situation und in jeder sozialen Gruppe neu ausgehandelt werden muss.

Sozialer Diskurs

Im sozialen Diskurs der alltäglichen Argumentation, in der häufig gegeneinander argumentiert wird, können den Argumentationsteilnehmern unterschiedliche Rollen zugewiesen werden. Dabei argumentiert in der Regel jeweils mindestens ein Argumentationsteilnehmer für und mindestens ein Argumentationsteilnehmer gegen die Gültigkeit der begründungswürdigen Aussage. Hierbei kommt den Argumentationsteilnehmern noch eine weitere Aufgabe hinzu, welche den Argumentationsprozess indirekt beeinflusst. Die jeweilige soziale Gruppe, in der argumentiert wird, bildet gleichzeitig das Kollektiv. So entscheiden die jeweiligen Argumentationsteilnehmer, welche Aussagen, Argumente und Übergänge akzeptiert werden und somit auch, wann eine Strittigkeit beziehungsweise ein Geltungsanspruch beigelegt wurde (Klein, 1980, S. 12). Sollte ein Beilegen der Strittigkeit nicht gelingen, so bricht der soziale Diskurs ab. Lediglich bei einer gelingenden Bearbeitung der Geltungsansprüche wird der soziale Diskurs fortgesetzt (ebd.). Hierbei ist anzumerken, dass es durchaus auch Situationen geben kann, in denen im alltäglichen Leben, zum Beispiel im Sinne eines Entscheidungsfindungsprozess, eine Argumentation von nur einem Individuum im Diskurs mit sich selbst stattfindet.

2.2.2 Akzentuierung wesentlicher Aspekte mathematischer Argumentation

Im Folgenden wird das Argumentieren aus mathematischer Perspektive in den Blick genommen. Dies geschieht in zwei Schritten. Zunächst wird das Argumentieren innerhalb der Wissenschaft der Mathematik fokussiert. Ziel im Mathematikunterricht ist es, dass die Kinder langfristig solche Kompetenzen erwerben, die es ermöglichen, mathematisch korrekte Argumentationen zu führen. Hierbei handelt es sich aber nicht um den Anspruch, der an Grundschulkinder gestellt werden soll, denn diese sollen solche Kompetenzen zunächst erwerben. Aus diesem Grund wird jede Akzentuierung zunächst unter der Perspektive des wissenschaftlichen Argumentierens betrachtet, um anschließend Konsequenzen für den Mathematikunterricht in der Grundschule abzuleiten.

Argumentationskultur

Argumentieren im Alltag dient in der Regel dazu eigene Standpunkte zu vertreten und Strittigkeiten im sozialen Diskurs beizulegen (vgl. Kapitel 2.2.1). Auch in der Mathematik hat das Argumentieren die Funktion, fraglich gemachte Aussagen zu verifizieren und das Kollektiv, in diesem Fall die mathematische Community, davon zu überzeugen, dass eine Aussage gilt. Dennoch ist dies nicht die einzige Funktion in der Mathematik. De Villiers (1990) unterscheidet fünf Funktionen im Kontext des Argumentierens, Begründens und Beweisens:

- die Verifikation mathematischer Aussagen,
- die Exploration, warum eine mathematische Aussage wahr oder falsch ist,
- die Systematisierung, also die Organisation mathematischen Wissens und das Herstellen von Zusammenhängen,
- das Entdecken neuen Wissens und
- die Kommunikation mathematischen Wissens (Villiers, 1990, S. 18).

Somit kann durch eine mathematische Argumentation eine fraglich gemachte Aussage verifiziert und somit deren Gültigkeit begründet werden. Gleichzeitig kann Einsicht darüber vermittelt werden, warum eine Aussage wahr oder falsch ist. Argumentationen sollen also auf der einen Seite überzeugen. Auf der anderen Seite dienen sie aber auch dazu Wissen zu organisieren, zu generieren und zu kommunizieren (vgl. Kap. 2.3).
In der *Mathematik als Wissenschaft* ist die typische Argumentationsform der (formale) Beweis. Im Gegensatz zu dem alltäglichen Argumentieren, was keinen strengen Regeln folgt, ist ein formaler Beweis in seiner endgültigen Form durchaus strukturiert und dessen Aufbau festgelegt. Ausgangspunkt dessen ist eine zu begründende Behauptung, welche explizit formuliert wird. Diese wird dann deduktiv aus als bekannt vorausgesetzten Sätzen, Axiomen und Definitionen hergeleitet (vgl. u. a. Biehler & Kempen, 2016; Jahnke & Ufer, 2015;

Meyer, 2007). Hier zeigt sich auch die Sichtweise auf Allgemeingültigkeit. Sollte es Ausnahmen geben, so müssen diese, im Gegensatz zur alltäglichen Argumentation, notwendigerweise explizit genannt werden. Dies gilt sowohl für die begründungsbedürftige Aussage als auch für die Annahmen, die in der Argumentation getroffen werden. In der Mathematik ist im Gegensatz zum Alltag eine Sicherheit gewünscht, welche keine Ausnahmen zulässt (Jahnke, 2008, S. 364). Jahnke (2008) nennt dies „closed general statement“. Für den *Mathematikunterricht in der Grundschule* darf keine solch strenge Sicht auf das mathematische Argumentieren eingenommen werden. Lernende müssen an die mathematische Argumentationskultur zunächst herangeführt werden, um den Anforderungen des mathematischen Argumentierens gerecht werden zu können (Jahnke & Ufer, 2015, S. 333).

Demnach ist eine Einführung in die mathematische Argumentationskultur notwendig, denn nur so ist es möglich, dem Ziel gerecht zu werden, Kompetenzen im Bereich des mathematischen Argumentierens zu entwickeln (Schwarzkopf, 2015, S. 31). Betrachtet man mit diesem Blick die Tatsache, dass in einem (formalen) Beweises häufig Allgemeingültigkeiten fokussiert werden, so ist auch dies in der Grundschule nicht immer notwendig. In der Grundschule können Kinder an das mathematische Argumentieren herangeführt werden, indem zunächst exemplarische Begründungen betrachtet werden. So kann die allgemeingültige Gesetzmäßigkeit der Konstanz der Summe zunächst an unterschiedlichen Beispielen, zum Beispiel in Form von Entdeckerpäckchen (vgl. Abb. 2.5), betrachtet werden. In dem vorliegenden Fall würden dann zunächst Argumentationen für die Aussage „Wenn der erste Summand um eine Zahl verringert wird und der andere Summand um die gleiche Zahl vergrößert wird, dann bleibt die Summe konstant“ entwickelt. Dabei wird noch nicht die Allgemeingültigkeit der Gesetzmäßigkeit in den Blick genommen, sondern zunächst eher lokal und beispielbezogen argumentiert. Hierbei sind die Anforderungen, die an die Kinder gestellt werden, abhängig von der sozialen Gruppe, somit dem Kollektiv, in dem argumentiert wird. Daher ist die Ausgestaltung der Argumentation auch immer abhängig von den jeweiligen Lernausgangslagen der Lernenden (Jahnke & Ufer, 2015, S. 333).

$8 + 10 = 18$

$6 + 12 = 18$

$4 + 14 = 18$

$2 + 16 = 18$

...

Abbildung 2.5: Entdeckerpäckchen als Ausgangspunkt für mathematisches Argumentieren

Strittigkeit

Auch in der Mathematik kann eine fraglich gemachte Behauptung oder Aussage als Ausganspunkt für eine Argumentation dienen. Strittigkeit ist somit ein zentrales Merkmal (Hannken-Illjes, 2018, S. 20), welches auch in der Mathematik von Bedeutung ist. Dennoch hat dies, insbesondere im Mathematikunterricht, einen anderen Stellenwert als im Alltag. In der *Mathematik als Wissenschaft* gilt eine Aussage erst dann als wahr, wenn ein Beweis für diese Aussage vorliegt (Carraher & Martinez, 2007, S. 3). Das bedeutet, jede mathematische Aussage ist strittig, bis sie bewiesen wurde. Demnach ist es nicht notwendig, dass unterschiedliche Sichtweisen oder Perspektiven zu einer Strittigkeit führen. Vielmehr ist jede nicht-axiomatische Aussage von sich aus begründungsbedürftig. Für den *Mathematikunterricht* gilt es dabei, diese grundsätzliche Begründungsbedürftigkeit mathematischer Aussagen im Enkulturationsprozess zu vermitteln und ein Begründungs- und Beweisbedürfnis zu entwickeln. Winter (1983) unterscheidet hierbei zwei Arten. Zum einen ein *objektives Beweisbedürfnis*. Das bedeutet, Lernende wissen, dass Aussagen auf „fachmathematische Art" bewiesen werden müssen (ebd., S. 64 ff.). Zum anderen das *subjektive Beweisbedürfnis*. Das bedeutet, Lernende haben von sich aus den inneren Drang mathematische Aussagen zu hinterfragen (ebd., S. 77 ff.). Vor allem ein subjektives Beweisbedürfnis von Mathematiktreibenden erübrigt eine echte Strittigkeit als Ausgangspunkt einer Argumentation. Somit kann in der Mathematik eine Strittigkeit der Ausgangspunkt einer Argumentation sein oder das Wissen, dass Aussagen begründet werden müssen. Gleichzeitig kann aber auch das natürliche Beweisbedürfnis Mathematiktreibender zur Entwicklung einer Argumentation führen. Allerdings konnte in verschiedenen Studien nachgewiesen werden, dass Kinder von sich aus nicht über ein solch intuitives (subjektives) Beweisbedürfnis verfügen und das Beweisbedürfnis zunächst entwickelt werden muss. Gleichzeitig herrscht im Mathematikunterricht auch häufig keine echte Strittigkeit vor (Krummheuer, 1997; Krummheuer & Brandt, 2001; Schwarzkopf, 2000, 2001; Steinweg, 2001). Dies ist nicht verwunderlich, denn im Mathematikunterricht werden häufig Aussagen als begründungswürdig deklariert, deren Wahrheitsgehalt durch die Lehrperson bereits bestätigt wurde (Schwarzkopf, 2000, S. 239). Gleichzeitig hat die Institution Schule immer die Lehrperson als Experten, die die Strittigkeit theoretisch auflösen kann (Schwarzkopf, 2015). Demnach kommt der Lehrperson im Mathematikunterricht die Aufgabe zu, eine Strittigkeit zu erzeugen, um Argumentationen im Unterricht anzuregen.

Argumentationsvoraussetzungen

Die bisherigen Ausführungen haben deutlich gemacht, dass auch fachliche Argumentationen das Ziel haben, Behauptungen zu begründen oder zu widerlegen. In der *Wissenschaft der Mathematik* geschieht dies über die typische mathematische Argumentationsform – nämlich den Beweis. Damit einhergehend müssen mathematikspezifische Argumente und Übergänge zwischen Argumenten, welche in der Mathematik zur Beweisführung akzeptiert werden, einbezogen werden.

Während im Alltag häufig empirische Argumente genutzt und akzeptiert werden, sind diese Argumente innerhalb der Mathematik nicht tragfähig. Gleiches gilt für die Schlussweisen, sprich den Übergängen zwischen einzelnen Aussagen. In der mathematischen Argumentation werden nur theoretische Argumente, die von allgemeingültiger Natur sind, akzeptiert (Brunner, 2012, S. 38). Gleichzeitig folgt es nicht den alltäglichen Regeln, sondern das Nutzen mathematischer Regeln und Gesetzmäßigkeiten ist notwendig (Brunner, 2012S. 37f.).
Diese Forderung zeigt sich auch in dem Begriffsverständnis von Blum et al. (2006). Sie verstehen unter Argumentieren „das Verbinden mathematischer Aussagen zu logischen Argumentationsketten [sowie] das Verstehen und kritische Bewerten verschiedener Formen der mathematischen Argumentationen“ (S. 36). Es zeigt sich somit ein Verständnis, welches ausschließlich mathematische und logische Schlussformen als Verbindung zwischen Aussagen zulässt. Dieses Verbinden kann in der Mathematik durch die Schlussformen Induktion, Deduktion und Abduktion durchgeführt werden, wobei die beiden erstgenannten die beiden bekanntesten Schlussformen darstellen (Brunner, 2014; Meyer & Voigt, 2009).
Unter Deduktion versteht man die Bewegung vom „Allgemeinen ausgehend hin zum Speziellen“ (Brunner, 2014, S. 41). Das bedeutet allgemeine Regeln werden auf besondere Fälle angewendet (Peirce & Walther, 1976, S. 128). Die Schlussform der Deduktion ist in der Mathematik von Bedeutung, denn in der Mathematik wird der Beweis häufig mit einem formal-deduktiven Beweis in Verbindung gebracht (vgl. hierzu Kapitel 2.2.2). Es ist immer dann bedeutsam, „wenn aus bestehenden mathematischen Sätzen Folgerungen gezogen werden“ (Brunner, 2014, S. 41). Denn wenn die Annahme wahr ist, sind auch die daraus abgeleiteten Aussagen wahr (ebd.). So gilt deduktives Schließen als wahrheitsübertragend (Philipp, 2013) und gibt intersubjektive Sicherheit (Brunner, 2014, S. 42). Es handelt sich somit „um einen Prozess, der nicht auf Erfahrung beruht, sondern der ausgehend vom Allgemeinen zum Speziellen hin streng logischen Regeln folgt“ (ebd., S. 7).
Während der Begriff der Deduktion in der Literatur weitgehend einheitlich beschrieben wird, wird der Begriff der Induktion nicht konsistent verwendet (ebd., S. 42). Reid und Knipping (2010) beschreiben das induktive Vorgehen wie folgt. Bei einem induktiven Vorgehen wird von einem oder mehreren spezifischen Fällen auf eine allgemeine Regel geschlossen. Dabei wird bekanntes Wissen genutzt, um bislang Unbekanntes zu begründen. Die dabei entstehende Begründung ist nur wahrscheinlich, aber nicht sicher (Brunner, 2014, S. 42; Reid & Knipping, 2010, S. 88). Induktives Schließen besteht somit im Generieren einer „Regel aus der Beobachtung eines Ergebnisses in einem bestimmten Fall“ (Peirce & Walther, 1976, S. 128f.).

Dewey (2002) beschreibt die Induktion und Deduktion als zwei unterschiedliche Denkrichtungen (S. 62ff.), welche zentral für das wissenschaftliche Denken sind. Diese müssen nicht isoliert voneinander betrachtet werden, sondern können gewinnbringend verbunden werden (Brunner, 2014, S. 43). So kann zunächst aufgrund eines induktiven Vorgehens eine Regel generiert werden, diese ist aber zunächst nur wahrscheinlich, aber nicht sicher und bedarf demnach einer weiteren Betrachtung. Über ein deduktives Vorgehen kann die Gültigkeit der durch Induktion entstandenen Regel gesichert werden.

Eine dritte Schlussform ist die Abduktion. Das Ziel dieser ist es, eine erklärende Hypothese zu entdecken. Dies lässt sich von der Induktion insofern abgrenzen, dass bei der Abduktion lediglich eine Hypothese aufgestellt werden soll, die es im weiteren Denkprozess zu überprüfen gilt. Hier wird deutlich, dass die Abduktion nicht für sich alleinstehen kann, vielmehr steht die Abduktion in enger Verbindung mit der Induktion und Deduktion und verbindet diese in einem dreistufigen Verfahren. Durch den Einsatz einer Abduktion soll eine Entdeckung getätigt und demnach eine Hypothese generiert werden, aus der mit Hilfe der Deduktion vorhersagen abgeleitet werden (Meyer, 2015, S. 14ff.). Anschließend sollen die Prognosen durch ein induktives Vorgehen überprüft werden. „Ausgangspunkt für abduktive Schlüsse ist [...] ein [...] Phänomen, zu dessen Verständnis eine Erklärung benötigt wird" (Philipp, 2013, S. 11). Somit ist das Generieren einer Vermutung immer auch ein abduktiver Akt (Reid & Knipping, 2010, S. 108) und aus diesem Grund auch für den Mathematikunterricht der (Grund-)Schule von Relevanz. Bereits dort werden Vermutungen aufgestellt, welche als Ausgangspunkt für Argumentationsprozesse dienen. Hierbei charakterisieren Meyer und Voigt (2009) die Schlussform der Abduktion für das Entdecken, die Induktion für das Prüfen und die Deduktion für das Begründen (Meyer & Voigt, 2009, S. 44ff.) und grenzen damit drei für das Argumentieren relevante Tätigkeiten voneinander ab, zeigen dabei aber gleichzeitig, dass alle drei Schlussformen beim Mathematiklernen von großer Bedeutung sind.

Neben den in der Mathematik akzeptierten Denk- und Begründungsarten, gibt es für die Mathematik spezifische Darstellungsformen, in denen eine mathematische Argumentation dargestellt werden soll. Eine solche Darstellung erfolgt in der Mathematik durch die Nutzung mathematischer Fachsprache. Für diese charakterisiert Hußmann (2003) fünf typische Merkmale. In der Mathematik werden Fachtermini verwendet, die fachspezifische Ausdrücke beinhalten, aber auch Begriffe, welche in der Alltagssprache mit anderer Bedeutung oder Konnotation verwendet werden (vgl. auch Prediger & Wittmann, 2014, S. 131). So haben die Begriffe ‚gerade' und ‚ungerade' aber auch ‚teilbar' in der Alltagssprache eine andere Bedeutung als in der Mathematik. Zudem werden in der Mathematik eine spezifische Syntax

und Semantik sowie mathematikspezifische Symbole verwendet. Auch der Einsatz von Konstanten und Variablen ist charakteristisch. Als letztes Merkmal nennt Hußmann, dass sich Definitionen häufig auf vorher definierte Begriffe beziehen.
Im Folgenden werden die Denk- und Begründungsarten sowie die zulässige Dokumentationsform mit dem Blick auf den *Mathematikunterricht* (der Grundschule) betrachtet.
Auch wenn es für die Mathematik die oben genannten spezifischen Denk- und Schlussformen gibt, nutzen Lernende häufig bis in den universitären Bildungsbereich hinein empirische Argumente für die Argumentation, obwohl dies in der Mathematik nicht ausreichend ist (Jahnke, 2008, S. 364).
Kinder in der Grundschule müssen allerdings zunächst argumentative Kompetenz entwickeln, um den Anforderungen der mathematisch akzeptierten Schlussformen gerecht zu werden. Demnach ist es wesentlich sich bei der Auseinandersetzung mit Argumentationen im Mathematikunterricht darüber bewusst zu werden, dass Kinder im Mathematikunterricht Denk- und Schlussweisen nutzen, die sie auch im Alltag zur Argumentation nutzen. So können neben Induktion, Deduktion und Abduktion noch weitere Begründungsarten von den Kindern genutzt werden, die für das alltäglichen Argumentieren von Bedeutung sind (Brunner, 2014, S. 44). Malle und Fischer (2004) nennen in diesem Kontext die Berufung auf eine Autorität, Wahrscheinlichkeitsschlüsse oder Analogieschlüsse. Die beiden erstgenannten Begründungsarten werden in der mathematischen Argumentation allerdings als unzulässig angesehen und dürfen demnach nicht zur mathematischen Argumentation genutzt werden. Analogieschlüsse hingegen können im Mathematikunterricht bedeutsam sein, denn sie fokussieren das Erkennen analoger Strukturen (Brunner, 2014, S. 44f.), die bei Betrachtung von Gemeinsamkeiten und Zusammenhängen zentral sind.
Es zeigt sich somit, dass in der Mathematik festgelegt ist, wie eine Argumentation geführt werden soll, welche Argumente genutzt werden dürfen und welche Schlussformen anerkannt sind. Dies gilt aber insbesondere in der für die Mathematik typische Argumentation in ihrer Endform – dem Beweis. Kinder in der Grundschule müssen an diese Anforderungen zunächst herangeführt werden und argumentative Kompetenzen ausbilden, um den Anforderungen gerecht werden zu können. Das heißt eine ausschließliche Fokussierung auf das logische Schließen entspricht nicht den Lernvoraussetzungen der Grundschulkinder und ist demnach nicht für ein Argumentationsverständnis in der Grundschule ausreichend.
Auch mit dem Blick auf die in der Mathematik akzeptierte Sprache und Darstellungsform muss die Lernausgangslage der Kinder für das mathematische Argumentieren im Grundschulunterricht berücksichtigt werden. Um über mathematische Objekte, und dazu gehören auch Veranschaulichungen, zu sprechen, brauchen die Kinder eine bestimmte

mathematische Sprache (Meyer & Tiedemann, 2017, S. 43). Diese Fachsprache muss bei Kindern in der Grundschule aber zunächst angebahnt und ausgebildet werden, so dass Kinder an dieser Stelle auch auf die ihnen zur Verfügung stehenden sprachlichen Ressourcen aus dem Alltag zurückgreifen. Die spezifische Sprache der Mathematik stellt einen Lerngegenstand dar und muss im Laufe der Schulzeit erst schrittweise aufgebaut werden (Brunner, 2014, S. 65; Meyer & Tiedemann, 2017, S. 44). Auch die für die Mathematik spezifischen mathematischen Symbole sind in der Grundschule zunächst numerischer, ikonischer oder enaktiver Art (vgl. Kap. 3) und werden im Laufe der Schulzeit durch die Sprache der Algebra angereichert, so dass Kinder zunehmend in die Lage versetzt werden, vielfältige mathematische Symbole in ihrer Argumentation zu nutzen. Und genau dies ist im vorliegenden Forschungsprojekt von besonderer Bedeutung. Die Kinder werden dazu angehalten, in ihren Argumentationen ikonische oder enaktive Darstellungen zu deuten und zu nutzen. Dabei ist von zentralem Interesse, welche Bedeutung diese Darstellungen innerhalb des Argumentationsprozess einnehmen (können) und wie Kinder diese in ihren Begründungen deuten und nutzen. Vor diesem Forschungshintergrund ist es für das Begriffsverständnis des Argumentierens (in der Grundschule) unerlässlich, dass keine vollumfängliche Nutzung der Fachsprache, insbesondere der Sprache der Algebra, gefordert wird (vgl. Kap. 1, Kap. 2.3.3 & 3).

Sozialer Diskurs

Während im Alltag innerhalb des sozialen Diskurses häufig gegeneinander argumentiert wird, ist dies in der Wissenschaft der Mathematik und im Mathematikunterricht nicht (notwendigerweise) der Fall. Eine echte Strittigkeit ist in beiden Fällen nicht (immer) gegeben, so dass auch der soziale Diskurs, in dem eine Argumentation stattfindet, eine andere Bedeutung erhält.

In der *Wissenschaft der Mathematik* werden Beweise häufig zunächst alleine aufgestellt. Dennoch hat der soziale Diskurs eine wesentliche Rolle. Es ist notwendig, dass ein fertiger Beweis der mathematischen Community vorgelegt wird, um diesen wissenschaftlich zu diskutieren. Denn erst in diesem Diskurs wird ein Beweis wissenschaftlich akzeptiert oder zurückgewiesen (Brunner, 2014, S. 14). So gehören zu den argumentativen Kompetenzen nicht nur das aktive Aufstellen und Nutzen von Argumenten eines Individuums. Vielmehr ist es auch notwendig, Argumente von anderen nachvollziehen und deren Korrektheit bewerten zu können (Blum et al., 2006, S. 36). Dies macht deutlich, dass Argumentieren auch innerhalb der Wissenschaft der Mathematik einen diskursiven, sozialen Prozess zwischen mindestens zwei Personen darstellt.

In den Argumentationen im *Mathematikunterricht* nimmt der soziale Diskurs ebenfalls eine wesentliche Rolle ein. Vor dem Hintergrund, dass im Unterricht nicht immer eine echte Strittigkeit vorherrscht, ist es notwendig, diese im Unterrichtsgeschehen (künstlich) zu erzeugen (Krummheuer, 1997; Schwarzkopf, 2000; Steinweg, 2001). Dies erfordert den sozialen Diskurs. Der Lehrperson kommt dabei die Rolle zu, Aussagen als begründungsbedürftig zu deklarieren, auch wenn diese von den Kindern ohne Begründung akzeptiert wird. Gleichzeitig sind Kinder in der (Grund-)Schule selbst noch Lernende des Argumentierens und Mathematiktreibens. Das Lernen des Argumentierens wiederum wird nur durch den sozialen Diskurs ermöglicht (vgl. Kap. 2.3). Kinder müssen zunächst lernen, welche Argumente und Schlussweisen zulässig sind. Das bedeutet, dass die Anforderungen, die an eine Argumentation oder einen Beweis gestellt werden, verhandelbar und abhängig von der Lerngruppe sind. In der Grundschule sind dabei durchaus Argumente zulässig, die innerhalb der Fachmathematik nicht ausreichen. So können zum Beispiel empirische Argumente Ansätze für weitergehende Begründungen bieten. Auch die Anforderungen an die Darstellungsweisen unterscheiden sich deutlich. In der Mathematik als Wissenschaft ist die Fachsprache beziehungsweise die symbolische Notation in Form einer algebraischen Notation notwendig. Für Kinder hingegen ist dies nicht notwendig. Sie können zum Beispiel auf eine eher alltagssprachliche Ausdrucksweise zurückgreifen und weitere darstellerische Mittel nutzen, zum Beispiel Ikonisierungen, die dann als mathematische Werkzeuge fungieren (vgl. Kap. 2.4 & 3). Die fachliche Korrektheit hingegen ist nicht verhandelbar (Brunner, 2014, S. 56). Die Argumentation muss demnach aus fachlicher Sicht immer korrekt sein, dennoch ist auch das, was als korrekt angesehen wird, von der jeweiligen Gruppe abhängig, in der argumentiert wird. Die fachliche Tiefe, die der Argumentation entspricht, ist demnach ebenfalls abhängig von der Lerngruppe. So ist es in der Grundschule, insbesondere zu Beginn der Grundschulzeit, häufig ausreichend, Behauptungen an einzelnen Beispielen zu begründen. Dies ist im weiteren Verlauf des mathematischen Lernens nicht mehr ausreichend und es wird eine allgemeingültige Begründung unter Nutzung der entsprechenden mathematischen Fachsprache notwendig.

In der folgenden Tabelle (Tabelle 2.1) werden die Charakteristika der wesentlichen Akzentuierungen des alltäglichen und fachlichen Argumentierens zusammengefasst und gegenübergestellt.

	Alltägliches Argumentieren	Mathematisches Argumentieren

Argumentationskultur	• Es wird gegeneinander argumentiert.
	• Das Kollektiv, in dem argumentiert wird, bestimmt, was als gültig angesehen wird und wann die Argumentation beendet ist.
	• Argumentieren ist situationsgebunden und die Argumente gelten nur für den jeweiligen Kontext.
		• Argumentieren hat in der Mathematik unterschiedliche Funktionen (de Villiers 1990):
		  o Verifikation
		  o Exploration
		  o Systematisierung
		  o Entdecken von Zushg.
		  o Kommunikation von Wissen
		• Die Sicherheit der Korrektheit einer Aussage soll gesichert werden.
		• Die Aussage ist häufig allgemeingültiger Natur.

Strittigkeit	• Ausgangspunkt der Argumentation ist eine echte Strittigkeit, die die Interaktion stört. • Eine Strittigkeit kann, muss aber nicht, zur Argumentation führen.	• Eine ‚echte' Strittigkeit ist nicht notwendig. Jede Aussage ist strittig, bis sie bewiesen wurde. • Objektives und subjektives Beweisbedürfnis als Ausgangspunkt der Argumentation.
Argumentationsvoraussetzungen	• Ziel: Beilegen einer echten Strittigkeit, um die Interaktion fortsetzen zu können. • In der Argumentation werden auch empirische Argumente genutzt. • Die Schlussweisen innerhalb der Argumentation müssen nicht logischer Art sein.	• Induktion, Deduktion sowie Abduktion als akzeptierte Schlussweisen der Mathematik. • Innerhalb des Mathematikunterrichts können zudem Analogieschlüsse als Ausgangspunkt der Argumentation dienen. • Mathematikspezifische Darstellungsformen (Fachsprache etc.)
Sozialer Diskurs	• Argumentationsteilnehmer argumentieren in der Regel für oder gegen etwas. • Der soziale Diskurs wird durch eine Strittigkeit gestört und kann nur fortgesetzt werden, wenn die Strittigkeit beigelegt wird.	• Notwendig, um einen Beweis in der fachmathematischen Community anzuerkennen. • Im sozialen Diskurs werden im Mathematikunterricht Strittigkeiten erzeugt. • Fachliche Ausgestaltung ist abhängig von der Gruppe, in der die Argumentation erzeugt wird. ABER: Fachliche Korrektheit muss immer gegeben sein!

Tabelle 2.1: Zusammenfassung der wesentlichen Akzentuierungen des Argumentierens

Diese intensive Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Facetten des Argumentierens zeigt, dass sich das Argumentieren im Alltag deutlich von dem Argumentieren in der Mathematik unterscheidet. Dabei konnten Konsequenzen für das Argumentieren im Mathematikunterricht abgeleitet werden. Die Akzentuierungen stellen zeitgleich auch eine erste Nuancierung und Ausschärfung des Forschungsfokus dar. Innerhalb der Interviewstudie wird innerhalb eines mathematischen Kontexts argumentiert und demnach sollen die Kinder innerhalb einer mathematischen Argumentationskultur argumentieren. Die Facetten der Strittigkeit und der Argumentationsvoraussetzungen stellen dabei zwei zentrale Untersuchungsgegenstände dar. So wird innerhalb der Analyse zum einen betrachtet, was die Kinder als strittig erachten und was demnach die zu begründende Aussage darstellt. Zu anderen wird analysiert, welche Argumentationsvoraussetzungen die Kinder nutzen. Hierbei steht im Mittelpunkt, welche Darstellungsformen Kinder verwenden und vor allem wie Kinder ikonische Darstellungen in Form von Punktmuster zur Argumentation nutzen.
Gleichzeitig dient diese Ausdifferenzierung der unterschiedlichen Akzentuierungen auch dazu, ein Argumentationsverständnis zu entwickeln, das den Besonderheiten des mathematischen Argumentierens in der Grundschule gerecht wird.

2.2.3 Argumentationsverständnis der vorliegenden Arbeit

Für die Ausschärfung des Argumentationsbegriffs in der vorliegenden Arbeit ist es unerlässlich, die spezifischen Charakteristika des mathematischen Argumentierens im Mathematikunterricht (der Grundschule) zu berücksichtigen.
In den vorherigen Ausführungen hat sich gezeigt, dass der soziale Diskurs in dem eine Argumentation geführt wird, insbesondere im Mathematikunterricht der Grundschule von Bedeutung ist. Das Argumentieren stellt demnach einen *sozialen Interaktionsprozess* dar.
Ziel dieses Interaktionsprozesses ist es, eine Strittigkeit beizulegen. Im Mathematikunterricht der Grundschule handelt es sich dabei aber nicht immer um eine ‚echte' Strittigkeit. Vielmehr werden *Aussagen als begründungsbedürftig* deklariert, unabhängig davon, ob diese wirklich strittig sind oder nicht. Für ein Argumentationsverständnis, welches in der Grundschule zu verorten ist, ist es demnach unerlässlich, dass keine ‚echte' Strittigkeit gefordert werden darf. Demnach kann eine Strittigkeit auch künstlich erzeugt werden, wobei eine authentische Inszenierung bedeutsam ist (Schwarzkopf, 2015, S. 38f.). Auch in dem Verständnis der vorliegenden Arbeit ist dies von zentraler Bedeutung, denn die kindlichen Argumentationsprozesse werden in der Interviewstudie (häufig) durch die Interviewerin

initiiert, indem die Kinder dazu angehalten werden, zu begründen, ob eine Zahl oder Punktdarstellung gerade oder ungerade beziehungsweise durch drei teilbar ist.
Die Aussagen, die als begründungsbedürftig deklariert werden, müssen zunächst formuliert werden. Bezold (2009) beschreibt in diesem Kontext die argumentativen Tätigkeiten des Formulierens beziehungsweise Aufstellens von mathematischen Hypothesen und Aussagen und sieht die mathematische Entdeckung als Voraussetzung für eine Argumentation an (S. 37 ff.). Dabei ist zu berücksichtigen, dass diese *Vermutungen* von den Kindern aufgestellt werden können. Es ist aber ebenso denkbar, dass Vermutungen, in Form zu begründender Aussagen, von der Lehrperson aufgestellt werden. Dies erscheint insbesondere für ein Begriffsverständnis des mathematischen Argumentierens im Mathematikunterricht der Grundschule als sinnvoll. Denn dort werden häufig mathematische Zusammenhänge begründet, welche nicht selbst entdeckt wurden. Auch in der vorliegenden Studie können sowohl von den Kindern getätigte Vermutungen als auch von der Interviewerin aufgestellte Behauptungen als begründungsbedürftig deklariert werden.
Wesentlich für ein Argumentationsverständnis im Mathematikunterricht (der Grundschule) ist, dass keine für die Wissenschaft der Mathematik spezifischen Schlussformen, Denkrichtungen oder Darstellungsweisen vorgegeben werden, denn Kinder in der Grundschule müssen zunächst an die mathematikspezifische Argumentationskultur herangeführt werden. In einem Argumentationsverständnis, in dem Denkrichtungen, Schlussformen und Darstellungsweisen nicht vorgegeben sind, können diese der Lernausgangslage der Kinder angepasst werden. In der vorliegenden Studie ist es insbesondere von Interesse Darstellungsweisen anzuregen und zu initiieren, die nicht der formalen Sprache der Algebra entsprechen, sondern ikonische beziehungsweise enaktive Darstellungen in Form von Punkt- oder Plättchenmustern darstellen. Zusätzlich dazu sind auch verbalsprachliche oder symbolisch-numerische Darstellungen möglich und durchaus erwünscht, so dass ein Argumentationsverständnis notwendig ist, welches unterschiedliche Darstellungsweisen zulässt. Denn die Nutzung und Deutung dieser unterschiedlichen Veranschaulichungen stehen im vorliegenden Forschungsprojekt im Zentrum des Interesses.
Vor diesem Hintergrund zeigt sich folgendes, der vorliegenden Arbeit zugrundeliegendes, Argumentationsverständnis: *Argumentieren ist ein sozialer Interaktionsprozess, in dem Vermutungen über mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge geäußert werden, diese als begründungsbedürftig deklariert werden und Begründungen beziehungsweise Begründungsideen geliefert werden*. Dabei ist zu berücksichtigen, dass Kinder Vermutungen nicht (immer) selber aufstellen müssen, sondern, dass diese auch von außen an sie herangetragen werden können. Gleiches gilt auch für die Deklaration der Begründungsbedürftigkeit.

Aufgrund dessen und durch die Offenheit in der Denkrichtung, den Schlussformen und Darstellungsweisen wird dieses Begriffsverständnis den Besonderheiten mathematischen Argumentierens und der Lernausgangslage der Kinder in der Grundschule gerecht.

2.2.4 Argumentieren – Begründen – Beweisen

2.2.4.1 Eine begriffliche Auseinandersetzung aus mathematikdidaktischer Perspektive

In den bisherigen Ausführungen zeigte sich zum einen, dass Argumentieren im Mathematikunterricht von wesentlicher Bedeutung ist. Zum anderen zeigte sich auch, dass die Begriffe *Argumentieren* und *Beweisen* in der Mathematik in engem Zusammenhang stehen, denn der Beweis ist die für die Mathematik typische Argumentationsform. Neben diesen beiden Begrifflichkeiten findet sich in der mathematikdidaktischen Auseinandersetzung häufig auch der Begriff des Begründens. Zur Nutzung des Begriffs *Begründen* sowie zur Abgrenzung mit den Begriffen *Argumentieren* und *Beweisen* gibt es verschiedene Auffassungen. Im Folgenden werden unterschiedliche Abgrenzungen und Verzahnungen dargestellt, erläutert und diskutiert. Abschließend wird das Verständnis innerhalb dieser Arbeit erörtert.

Knapstein (2014) verwendet die Begriffe *Beweisen* und *Begründen* in einer Studie zum Begründen im Mathematikunterricht der Grundschule im Kontext substanzieller Aufgabenformate synonym. Dabei versteht sie unter einem Beweis „deduktive[s] Schlussfolgern von anerkanntem Wissen (der Voraussetzung) auf noch nicht anerkanntes Wissen (der Behauptung). Die dabei verwendeten Argumente sind wahre bzw. anerkannte Voraussetzungen und Theoreme (mathematische Sätze oder Definitionen)" (S. 7). Obwohl sie beide Begrifflichkeiten synonym verwendet, weist sie ihnen unterschiedliche Assoziationen zu, so dass unterschiedliche Konnotationen der Begrifflichkeiten deutlich werden. Sie sieht den Begriff des Beweisens häufig mit dem formalen Beweisen in Verbindung gebracht und nutzt daher für den Bereich der Grundschule den Begriff des Begründens, da dieser das Hervorbringen schlüssiger Argumente impliziert, aber dennoch keine formale Strenge mit diesem assoziiert wird (Knapstein, 2014, S. 7). Sie berücksichtigt in ihrer Nuancierung somit durchaus die Besonderheiten des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Kinder in diesem Alter können nämlich (noch) nicht rein deduktiv schlussfolgern. Aufgrund der unterschiedlichen Konnotationen der Begriffe erscheint es als sinnvoll, diese Begrifflichkeiten nicht synonym zueinander zu verwenden. Inwiefern diese Begrifflichkeiten in Beziehung zu dem *Argumentieren* stehen, bleibt in den Ausführungen Knapsteins ungeklärt.

Meyer und Prediger (2009) sehen das *Beweisen* ebenfalls häufig mit einem axiomatisch-deduktiven Begriffsverständnis in Verbindung, welches einen formalen Charakter und streng-logische Schlussfolgerungen mit sich bringt (S. 3). Den Begriff des *Begründens* sehen sie breiter gefächert und sprechen von Begründungen immer dann, wenn auch andere Begründungsformen mitgedacht sind (S. 3). Es zeigen sich somit ähnliche Nuancierungen wie bei Knapstein. Dabei ist der Übergang vom *Begründen* zum *Beweisen* graduell. Es gibt somit keine klare Trennlinie zwischen dem *Begründen* und *Beweisen* (S. 3). Dem *Argumentieren* weisen sie die soziale und kommunikative Dimension des Begriffs *Begründens* zu und folgen damit der Fokussierung des sozialen Aspekts von Schwarzkopf, der unter *Argumentation* den „im Unterricht stattfindende[n] sozialen Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch diesen zu befriedigen“ (2000, S. 240) versteht. Sie sehen das *Begründen* und *Argumentieren* als relevant für den Mathematikunterricht an und vorbereitend für ein formal-deduktives Beweisen in der Oberstufe (Meyer & Prediger, 2009, S. 3). Deutlich wird, dass auch in diesem Verständnis die Besonderheiten des Mathematikunterrichts Berücksichtigung finden.

Brunner (2014) hält ein Verständnis, welches *Argumentieren* im Bereich des formal-deduktiven *Beweisens* verortet, für ungeeignet. Sie sieht *Begründen* als Oberbegriff und „*Argumentieren* und *Beweisen* [...] als spezifische Formen von *Begründen* [...], die sich auf unterschiedliche Kontexte beziehen und damit auch teilweise unterschiedlichen Regeln folgen und andere Mittel verwenden“ (Brunner, 2014, S. 30; Hervorhebung F.W.). Sie bezieht sich dabei auf Duval (1991), der sagt: „Deductive thinking does not work like argumentation. However, these two kinds of reasoning use very similar linguistic forms and propositional connectives. This is one of the main reasons why most of the students do not understand the requirements of mathematical proofs“ (Duval 1991, S. 233). Obwohl Duval Argumentieren und Beweisen als zwei unterschiedliche Tätigkeiten beschreibt, konzeptualisiert Brunner ein Kontinuum zwischen *Argumentieren* und *Beweisen*. Sie unterscheidet dabei in *alltagsbezogenes Argumentieren*, *Argumentieren mit mathematischen Mitteln*, *logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln* sowie *formal-deduktives Beweisen*. *Alltagsbezogenes Argumentieren* folgt dabei den Regeln des jeweiligen Kontextes. Das heißt, es werden nicht unbedingt mathematische Konventionen eingehalten. So wird im alltäglichen Argumentieren zum Teil auch argumentiert, indem man sich auf eine Autorität beruft. *Argumentieren mit mathematischen Mitteln bezieht mathematische Mittel* unterschiedlichster Art ein. Dies umfasst auch die innerhalb der vorliegenden Arbeit wesentliche Darstellungsform in Form von ikonischen Darstellungen, wie zum Beispiel Anschauungsmittel. In diesen Argumentationen werden aber nicht notwendiger Weise logische Schlüsse genutzt. Auch formal-deduktive

Beweisarten werden unter dieser Form der Argumentation gefasst. Dies umfasst auch das inhaltlich-anschauliche Beweisen. Ebenso ist in streng logisches Vorgehen noch nicht notwendig. Dies kommt erst beim *logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln* zum Tragen. Beim *formal-deduktiven Beweisen* hingegen wird die Argumentation in deduktiver Weise und in einer formalen Sprache geführt (Brunner, 2014, S. 30ff.). Dieses Kontinuum berücksichtigt demnach die auch für die vorliegende Arbeit wesentliche Besonderheit, dass Argumentieren immer abhängig vom Kontext und vom Kollektiv ist, in dem argumentiert wird ist (vgl. Kap. 2.2.1 bis 2.2.3). In diesem Kontinuum wird aber auch eine zunehmende Formalisierung deutlich. Beim alltagsbezogenen Argumentieren kann die Sprache des alltäglichen Lebens genutzt werden. Beim Argumentieren mit mathematischen Mitteln hingegen ist die Nutzung unterschiedlicher mathematischer Darstellungsformen notwendig. Diese können verbalsprachlicher, aber auch ikonischer oder enaktiver Natur sein (vgl. Kap. 3). Das formal-deduktive Beweisen erfordert hingegen notwendigerweise die Nutzung der Sprache der Algebra. Auch werden die unterschiedlichen Denkrichtungen in diesem Kontinuum verortet. So werden beim alltäglichen Argumentieren auch nicht-mathematische Schlussweisen zugelassen. Das mathematische Argumentieren erfordert induktive und abduktive Begründungsarten. Für das formal-deduktive Beweisen ist eine Deduktion erforderlich (Brunner, 2014, S. 49). Dabei ist aber auch in diesem Verständnis notwendig, dass das, was als gültig akzeptiert wird, an den Kontext angepasst wird, indem argumentiert wird (Brunner, 2014, S. 71ff.). Das heißt, die Erwartungen an Grundschulkinder sind anders, als an fortgeschrittene Lerner. Dadurch werden auch in diesem Kontinuum die unterschiedlichen Lernausgangslagen innerhalb des Mathematiklernens berücksichtigt. Für den Mathematikunterricht sind demnach das Argumentieren mit mathematischen Mitteln sowie das logische Argumentieren mit mathematischen Mitteln von Bedeutung.

Bardy (2007) unterscheidet die Begrifflichkeiten *Beweisen* und *Begründen*, indem er *Begründen* als „schlüssige Argumentation für *eine* Aussage" (S. 162; Hervorhebung i.O.) versteht und *Beweisen* als eine Kette von *Begründungen* (S. 162), die auf den Nachweis einer Allgemeingültigkeit abzielt und von höherer Komplexität ist (S. 162f.). Ungeklärt bleibt hierbei, wann etwas von höherer Komplexität ist und somit als *Beweis* zu betrachten ist. So ist fraglich, ob es sich hierbei um zwei dichotome Begrifflichkeiten handelt oder, ob der Übergang fließend ist. Bezold (2009) lehnt sich in ihrer Begriffsunterscheidung an dieses Verständnis an. Sie sieht *Begründen* als eine Komponente einer Argumentationskette (S. 37ff.), welcher in engem Bezug zum Begriff des *Beweisens* zu verorten ist (S. 70). Beide Begrifflichkeiten zielen darauf ab, den Wahrheitsgehalt einer mathematischen Aussage zu verifizieren.

Peterßen (2012) folgt ebenfalls einem Verständnis von schulischem *Beweisen*, welches nicht dem formal-deduktiven Beweisen entspricht und schließt in ihrem Beweisverständnis auch andere Beweisarten, wie zum Beispiel den inhaltlich-anschaulichen Beweis ein (S. 11ff.). Charakteristisch für einen *Beweis* ist das Abzielen „auf den Nachweis der Gültigkeit bzw. Nicht-Gültigkeit *allgemeiner* mathematischer Sachverhalte wie Regeln, Auffälligkeiten, Beziehungen o.ä.“ (Peterßen, 2012, S. 20; Hervorhebung i.O.). Genau in dieser Allgemeingültigkeit sieht Peterßen das Abgrenzungsmerkmal zum *Begründen*. Darunter versteht sie „das Stützen einer Behauptung, die nicht unmittelbar einleuchtet, die von einem Publikum als zweifelhaft eingestuft wird oder der von vornherein mehr Glaubhaftigkeit und Nachdruck verliehen werden soll“ (Peterßen, 2012, S. 27). Die Behauptungen können hierbei mathematische Sachverhalte, Korrektheit einer Lösung oder die Zulässigkeit eines Lösungsweges darstellen (Meissner, 1979, S. 307). Sie grenzt den Begriff des *Begründens* vom *Argumentieren* ab, indem sie *Begründen* auf Grundlage Bezolds als eine argumentative Tätigkeit unter anderen versteht (Peterßen, 2012, S. 22).
Es zeigt sich somit in der aktuellen mathematikdidaktischen Forschung ein Begriffsverständnis, das in unterschiedlicher Weise von einem – meist graduellen – Zusammenhang zwischen *Argumentieren* und *Beweisen* ausgeht. Das *Begründen* hingegen wird in unterschiedlichem Zusammenhang zu diesen Begrifflichkeiten gesehen.

2.2.4.2 Begriffsverständnis in der vorliegenden Arbeit

In der fachdidaktischen Auseinandersetzung mit den drei Begriffsverständnissen zeigt sich somit kein einheitliches Verständnis der Begrifflichkeiten. Eine konkrete und allgemeingültige Abgrenzung dieser Begrifflichkeiten scheint aufgrund ihrer inhaltlichen Nähe nahezu unmöglich. Die Übergänge sind fließend, so dass die Begrifflichkeiten nicht dichotom zueinander zu verstehen sind. Dennoch zeigten sich in den vorhergehenden Begriffsausschärfungen sowie Abgrenzungen, dass die Begrifflichkeiten unterschiedliche Facetten beinhalten.
Der Begriff Argumentieren wurde bereits in Kapitel 2.2.1 ausgeschärft. In der vorliegenden Arbeit wird darunter ein sozialer Interaktionsprozess verstanden, in dem Vermutungen über mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge geäußert werden, diese als begründungsbedürftig deklariert werden und Begründungen beziehungsweise Begründungsideen geliefert werden.
Argumentationen können auf unterschiedlichsten mathematischen Eigenschaften und Zusammenhängen basieren. Diese können allgemeingültiger Natur sein, aber auch konkrete Aussagen für Einzelfälle darstellen. Für das *Beweisen* ist es charakteristisch, dass die

Argumentation auf Allgemeingültigkeit basiert, dies ist beim *Begründen* nicht notwendigerweise gegeben (Peterßen 2012). Somit zielt *Beweisen* immer auf eine Allgemeingültigkeit ab, *Begründen* hingegen kann, muss aber nicht, allgemeingültiger Natur sein. Da sich das vorliegende Forschungsprojekt in der Grundschule verortet, ist ein formal-deduktives Beweisverständnis für das schulische Beweisen nicht tragfähig (vgl. u.a. Biehler & Kempen, 2016; Brunner, 2014; Fetzer, 2011; Jahnke & Ufer, 2015; Meyer & Prediger, 2009). Da das Beweisen häufig mit dem formal-deduktiven Vorgehen in Verbindung steht, wird in der vorliegenden Arbeit in Anlehnung an Meyer und Prediger (2009) der Begriff des *Begründens* auch dann genutzt, wenn diese auf eine Allgemeingültigkeit abzielt, und weitere Begründungsarten, wie zum Beispiel das inhaltlich-anschauliche Beweisen, mitgedacht sind.

2.3 Argumentieren im Mathematikunterricht der Grundschule als Lernziel und Lernvoraussetzung

In den bisherigen Ausführungen hat sich gezeigt, dass das Argumentieren im Mathematikunterricht und für das Mathematiklernen eine wesentliche mathematische Tätigkeit darstellt. Vor diesem Hintergrund stellt Argumentieren im Mathematikunterricht ein wesentliches Lernziel dar (vgl. Kap. 2.1.2). Dies ist darauf zurückzuführen, dass Argumentieren und damit einhergehend Beweisen als typisch für die Wissenschaft der Mathematik anzusehen ist. Sie gilt als beweisende Disziplin (Heintz, 2000; Krauthausen, 2001; Meyer & Prediger, 2009, S. 1; Schwarzkopf, 2015, S. 31). Allgemeine mathematische Strukturen gilt es zu entdecken, zu begründen und zu verallgemeinern. Gleichzeitig ist das Argumentieren aber auch eine wesentliche Voraussetzung zur Entwicklung neuen mathematischen Wissens und dient somit als Mittel zur Erkenntnis. Insbesondere Kinder in der Grundschule brauchen eine argumentative Auseinandersetzung, um neues (fachliches) Wissen generieren zu können. Argumentieren stellt somit zum einen ein zentrales *Lernziel* im Mathematikunterricht der Grundschule dar, zum anderen ist Argumentieren *Lernvoraussetzung*.

Ziel der Grundschule ist die Vermittlung grundlegender Bildung, daher ist es relevant alltägliche Kompetenzen auch in den Unterrichtsfächern auszubilden und zwar hinsichtlich ihrer fachspezifischen Besonderheiten (vgl. Kap. 2.2.2). Ein solches Verständnis zeigt sich bereits bei Winter (1975). Er sieht es als notwendig an, Kompetenzen, die im alltäglichen Leben von Relevanz sind, auch im Mathematikunterricht zu fördern (S. 106). Argumentieren hebt er dabei hervor als eins von vier allgemeinen Lernzielen im Mathematikunterricht (der Grundschule). Es stellt eine grundlegende Tätigkeit dar, die im alltäglichen Denken notwendig ist, aber gleichzeitig „allgemeine und (vor allem) kognitive Anlagen und Fähigkeiten mit beeinflussen" (S. 109) kann. Auch wenn Winter das Argumentieren hier in erster Linie als ein Lernziel darstellt, berücksichtigt er, dass durch das Argumentieren Lernprozesse initiiert werden (können).

Dass Argumentieren ein wesentliches Lernziel im Mathematikunterricht darstellt, spiegelt sich in den Bildungsstandards der unterschiedlichen Schulstufen sowie den Lehrplänen der unterschiedlichen Länder wider. In diesen ist (mathematisches) Argumentieren eine prozessbezogene Kompetenz, die unterschiedliche Formen des Argumentierens und Beweisens umfasst und in allen Schulstufen gefordert und gefördert werden soll (KMK, 2004, 2005a, 2005b, 2012; Meyer & Prediger, 2009, S. 1). Konkret bedeutet dies für den Mathematikunterricht der Grundschule, dass Kinder „mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen, mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln [sowie] Begründungen suchen und nachvollziehen" (KMK, 2005b, S. 8). In der Sekundarstufe I wird gefordert, dass die Lernenden „Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind (‚Gibt es...?', ‚Wie verändert sich...?', ‚Ist das immer so...?'), [...] Vermutungen begründet äußern, mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) [sowie] Lösungswege beschreiben und begründen" (KMK, 2004, S. 8; 2005a, S. 7). Bis zum Erwerb der allgemeinen Hochschulreife sollen die Lernenden dazu in der Lage sein, eigenständige, situationsangemessene, mathematische Argumentationen und Vermutungen zu entwickeln. Sie sollen mathematische Aussagen verstehen und bewerten. Hierbei reicht die Spannweite von „einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zum formalen Beweisen" (KMK, 2012, S. 14). Durch das Argumentieren soll in allen Schulstufen die Gültigkeit mathematischer Aussagen gerechtfertigt oder wiederlegt werden. Die Anforderungen, die an solche Argumentationen gestellt werden, entsprechen dabei jeweils der Lernausgangslage der Lernenden. Während Kinder in der Grundschule Begründungen suchen und nachvollziehen sollen, die in ihrer Ausgestaltung nicht weiter präzisiert werden, gilt es für Lernende in der Sekundarstufe I und II auch formale Beweise zu führen. Es stellt somit ein mathematisches Lernziel dar, welches im Sinne des Spiralcurriculums weiterentwickelt werden muss (Krauthausen & Scherer, 2007, S. 156f.; Lindmeier et al., 2017, S. 609). Argumentieren- und Beweisenlernen steht somit im Mathematikunterricht in einer engen Verbindung. Dies ist damit zu begründen, dass das Argumentieren als Vorform des Beweisens verstanden werden kann (Schwarzkopf, 2015, S. 31). Dadurch wird deutlich, dass das Argumentieren im Sinne der Mathematik als beweisende Disziplin eine wesentliche Rolle bei der Entwicklung der Beweiskompetenz spielt und als propädeutisch anzusehen ist (Knipping, 2010; Vollrath, 1980). Dadurch manifestiert sich

die Bedeutung des Argumentierens als Lernziel im Mathematikunterricht auch aus Sicht der Mathematik.
Zu den zu vermittelnden Kompetenzen im Bereich des Argumentierens gehört neben dem Aufstellen von Vermutungen und der Entwicklung von Begründungen auch die Entwicklung eines Beweis- und Begründungsbedürfnis. Die Frage „Warum?“ gilt als typische Frage innerhalb der Wissenschaft der Mathematik und des Mathematikunterrichts (vgl. u.a. Meyer & Prediger, 2009, S. 1; Schwarzkopf, 2000; Steinweg, 2001, S. 262; Winter, 1983). Denn es ist typisch für die Mathematik, dass die Gültigkeit von Aussagen hinterfragt wird, solange sie noch nicht nachgewiesen wurde. Da Kinder (noch) nicht über ein Beweis- und Begründungsbedürfnis verfügen, stellen sie die Frage nach dem „Warum?“ nicht (immer) von sich aus. Dadurch kommt der Lehrperson die Funktion zu, den Begründungsbedarf für eine Aussage anzuzeigen. Eine solche Unterrichtskultur kann dazu führen, dass sowohl das objektive als auch das subjektive Beweisbedürfnis von Kindern entwickelt wird (vgl. Kap. 2.2.2). Argumentieren zeigt sich demnach als wesentliches (curricular) erstrebenswertes Lernziel. Es ist aber nicht ausreichend, Argumentieren nur als Lernziel zu verstehen. Vielmehr stellt das Argumentieren als Mittel der (wissenschaftlichen) Erkenntnisgewinnung ein Ermöglichungsbedingungen des Lernens dar (Krummheuer, 2003, S. 247). Dies wird im Folgenden näher erläutert, indem zunächst die drei Arten des Lernens nach Miller (1986) unterschieden werden und anschließend dargestellt wird, welche Bedeutung das Argumentieren in diesem Kontext einnimmt. Miller (1986) differenziert drei Arten des Lernens: Das *relative Lernen*, das *fundamentale Lernen* und das *autonome Lernen* (S. 140ff.). Diese drei Arten lassen sich auf Grundlage unterschiedlicher Akzentuierungen ausdifferenzieren. Zum einen hinsichtlich dessen, wie gelernt wird. Zum anderen hinsichtlich der Art des Wissens, welches innerhalb der Lernprozesse erzeugt wird.
So kann Lernen grundsätzlich *individuell* und ohne Interaktion mit anderen Individuen erfolgen, demnach *monologisch*. Andererseits kann Lernen auch im sozialen Diskurs in einem *Kollektiv* erfolgen und somit in einem *Dialog* mit anderen Individuen (Miller, 1986, S. 138f.). Demnach ist Lernen sowohl *monologisch* als auch *dialogisch* möglich. Betrachtet man den Mathematikunterricht in der Grundschule, so lassen sich auch im Unterricht beide Akzentuierungen finden. Es gibt sowohl Phasen, in denen Kinder individuell lernen, als auch Phasen, in denen der Austausch untereinander in den Fokus tritt.
Hinsichtlich der Art des Wissens, welches in diesen Prozessen erzeugt wird, lassen sich nach Miller zwei unterschiedliche Arten differenzieren. So unterscheidet Miller zwischen der *Aneignung von Basistheorien* und der *Aneignung von anwendungsbezogenem Wissen* (Miller, 1986, S. 140). Unter der *Aneignung von Basistheorien*, auch als *Aneignung strukturellen*

Wissens bezeichnet (Miller, 2006, S. 200), versteht Miller die Aneignung von „grundlegenden theoretischen Prämissen eines Wissenssystem" (S. 140). Im Mathematikunterricht der Grundschule sind dies die grundlegenden theoretischen Prämissen des Wissenssystems der Mathematik. Für die vorliegende Studie sind die grundlegenden theoretischen Prämissen, die mit den Paritäten aber auch der Teilbarkeit durch drei einhergehen, von Bedeutung. Demnach ist die Division als grundlegende Rechenoperation von Relevanz. Damit im Zusammenhang steht ein Verständnis, was unter Division zu verstehen ist – die Grundvorstellungen (vgl. Kap. 1.3.3). Aber auch die Rechengesetze, die bei der Division angewendet werden dürfen und die Multiplikation als Umkehroperation stehen in unmittelbarer Beziehung dazu. Wird nun das Ergebnis von Divisionsaufgaben oder die Parität einer Zahl ermittelt, so werden die grundlegenden theoretischen Prämissen angewendet und es wird sogenanntes *anwendungsbezogenes Wissen* erlangt. Dieses anwendungsbezogene Wissen kann somit immer nur in Abhängigkeit von strukturellem Wissen erworben werden (S. 140f.). Auch hier zeigt sich, dass beide Arten des Wissens im Mathematikunterricht von Relevanz sind. So müssen Kinder die „grundlegenden theoretischen Prämissen" (S. 140) des Wissenssystem Mathematik erlernen, gleichzeitig müssen sie dieses Wissen auch anwenden.
Aufgrund der Ausdifferenzierung in *monologisches* und *dialogisches Lernen* sowie in die *Aneignung strukturellen Wissens* sowie *anwendungsbezogenen Wissens* lassen sich nach Miller (1986, 2006) drei Arten des Lernens unterscheiden.

	monologisch	dialogisch
Aneignung von Basistheorien / strukturellem Wissen	autonomes Lernen	fundamentales Lernen
Aneignung von anwendungsbezogenem Wissen	relatives Lernen	

Tabelle 2.2: Formen des Lernens nach Miller (1986, S. 140)

Beim *relativen Lernen* handelt es sich um die Aneignung von Faktenwissen. Altes und somit bestehendes Wissen wird um neue Fakten ergänzt (Miller, 2006, S. 200), wie zum Beispiel das Auswendiglernen von Vokabeln (Miller, 1986, S. 138). Hierfür ist grundsätzlich kein sozialer Diskurs notwendig und es kann individuell und somit *monologisch* erfolgen. Bezogen auf den Mathematikunterricht der Grundschule findet relatives Lernen dann statt, wenn zum Beispiel die Aufgaben des kleinen Einspluseins auswendiggelernt werden. Aber auch das Auswendiglernen der geraden und ungeraden Zahlen oder aller Produkte der Zweier- oder Dreierreihe ist als relatives Lernen zu verstehen. Deutlich wird hierbei, dass dieses erst dann möglich ist, wenn bereits Wissen vorhanden ist. Das heißt „relativ zu einem in der Entwicklung jeweils erreichten Wissenssystem" (S. 141) wird neues Faktenwissen

geschaffen, indem das bereits vorhandene Wissen auf neue Fälle angewendet wird. *Strukturelles Wissen* ist somit unabdingbar für die *Aneignung anwendungsbezogenen Wissens*.
Dieses *strukturelle Wissen* kann durch *fundamentales und autonomes Lernen* erzeugt werden. Hierfür ist es notwendig, dass grundlegende theoretische Prämissen eines Wissenssystems hinterfragt werden (Miller, 1986, S. 141). Notwendigerweise muss hierfür bereits bekanntes Wissen in Frage gestellt und andere Perspektiven sowie neue Sichtweisen auf das bekannte Wissen in den Blick genommen werden (Miller, 1986, S. 140ff.; Schwarzkopf, 2003S. 212f.). Dadurch kommt es zu einer Veränderung und Reorganisation des bisherigen Wissens (Miller, 1986, S. 141). Altes Wissen wird systematisch überschritten und mit neuem verknüpft (Schwarzkopf, 2003, S. 211). Somit unterscheidet sich die Art des Wissens beim fundamentalen und autonomen Lernen nicht. Vielmehr ist die Art und Weise, wie gelernt wird, das Unterscheidungsmerkmal.
Fortgeschrittene Lerner sind dazu in der Lage in einen *inneren Monolog* zu treten und unterschiedliche Standpunkte miteinander zu vergleichen, diese in Beziehung zu setzen und gegeneinander abzuwägen. Sie können „auf erfolgreiche Weise individuelle theoretische Argumentation durchführen" (Miller 1986, S. 141). Miller bezeichnet dies als *autonom*es *Lernen*. Dies ist charakteristisch für wissenschaftliches Problemlöseverhalten und ein längerfristiges und spätes Entwicklungsziel innerhalb des Lernprozesses (Miller 1986, S. 141).
Kinder in der Grundschule hingegen sind noch nicht dazu in der Lage, solche inneren Monologe zu führen, dennoch sind sie zur Reorganisation des Wissens in der Lage und müssen notwendigerweise fundamentale Lernprozesse durchlaufen. Sie benötigen hierfür allerdings den sozialen Diskurs, um mit neuen Überlegungen, Perspektiven und Sichtweisen konfrontiert zu werden. Es bedarf somit der kollektiven Argumentation (S. 141). Die *dialogische Aneignung strukturellen Wissens* bezeichnet Miller als *fundamentales Lernen*.
Vor diesem Hintergrund zeigt sich, dass kollektive Argumentationen Voraussetzung für die Initiierung fundamentaler Lernprozesse sind. Kinder benötigen Argumentationen, um altes Wissen systematisch zu überschreiten und mit neuem Wissen zu verknüpfen – ihr Wissen somit zu reorganisieren. Strukturelles Wissen kann somit in der Grundschule vor allem im Dialog erworben werden. Gleichzeitig kann neues Faktenwissen immer nur auf Basis von vorhandenem strukturellem Wissen aufgebaut werden. Dadurch stellt das Argumentieren, wenn auch indirekt, eine Lernvoraussetzung des relativen Lernens dar. Argumentationen sind somit nicht nur Voraussetzung fundamentalen Lernens, sondern auch relativen Lernens. Gleiches gilt für autonomes Lernen. Auch wenn autonomes Lernen in einem inneren Austausch stattfindet und keinen Diskurs benötigt, sind kollektive Argumentationen wesentlich hierfür, denn das fundamentale Lernen ist Vorläufer des autonomen Lernens. Autonomes

Lernen ist eine „systematisierte, individualisierte und reflexive Version des ‚fundamentalen Lernens'" (Miller, 1986, S. 142). Die Teilnahme an (kollektiven) Argumentationen stellt somit eine wesentliche Voraussetzung aller drei von Miller differenzierten Arten des Lernens dar.

Es hat sich somit gezeigt, dass Argumentationsprozesse grundlegend sind, um neues Wissen zu generieren. Dadurch stellt das Argumentieren auch eine Ermöglichungsbedingung mathematischen Lernens dar. Darüber hinaus, und das mag zunächst paradox klingen, können Kinder das Argumentieren nur lernen, indem sie argumentieren. Diese Interaktionsprozesse ermöglichen es, dass Kinder in der (Grund-)Schule in die mathematische Argumentationskultur eingeführt werden. Dies gilt sowohl für die Entwicklung des Begründungsbedürfnisses als auch für die Art und Weise, wie argumentiert wird. Denn im sozialen Diskurs, in dem Argumentationen geführt werden, wird ausgehandelt, welche Argumente und Schlussweisen in der jeweiligen Argumentationskultur akzeptiert werden (vgl. Kap. 2.2).

Dieses Dilemma spiegelt sich konkret in den vier in Kap. 2.2.1 sowie 2.2.2 betrachteten wesentlichen Aspekten des Argumentierens (Argumentationskultur, Strittigkeit, Argumentationsvoraussetzung & sozialer Diskurs) wider. Auf der einen Seite müssen Kinder an die mathematische Argumentationskultur herangeführt werden. Auf der anderen Seite ermöglicht erst das Nutzen vorhandenen Wissens über das Führen von Argumentationen die Teilhabe an solchen. Kinder in der (Grund-)Schule haben häufig (noch) kein subjektives Beweisbeziehungsweise Begründungsbedürfnis, so dass dies zunächst entwickelt werden muss. Das bedeutet auch, dass vorhandenes Wissen häufig nicht von den Kindern selbst in Frage gestellt wird. Dies ist aber notwendig, um einen Perspektivwechsel anzuregen beziehungsweise vorhandenes Wissen anzueignen. Dies macht abermals deutlich, dass die Lehrkraft an dieser Stelle eine wesentliche Aufgabe hat, nämlich das Erzeugen einer Strittigkeit, denn nur dadurch können Argumentations- und damit verbundene Lernprozesse initiiert werden.

Betrachtet man die Argumentationsvoraussetzungen (vgl. Kap. 2.2.1 & 2.2.2) als Lernziel, so sollen die Kinder die in der Mathematik akzeptierten Argumente und Schlussweisen erlernen. Gleichzeitig können Begriffsbildungsprozesse nur initiiert werden, indem Kinder die als strittig deklarierte Aussage vor dem Hintergrund ihrer individuellen Referenzkontexte deuten (Steinbring, 2005). Der Wissensaufbau vollzieht sich hierbei immer in Abhängigkeit zu den Vorerfahrungen und dem Vorwissen der argumentierenden Individuen. Dies zeigt sich von Relevanz für das vorliegende Forschungsprojekt, denn in der Analyse wird (auch) untersucht, was die Kinder als (Vor-)Wissen zur Argumentation nutzen und welche Referenzkontexte sie zur Argumentation heranziehen.

Es zeigt sich somit ein Wechselspiel zwischen dem Argumentieren als prozessbezogenem Lernziel und dem Argumentieren als Lernvoraussetzung und der Ermöglichungsbedingung fachlichen Lernens. All dies vollzieht sich im sozialen Diskurs im Mathematikunterricht der (Grund-)Schule. Im vorliegenden Forschungsprojekt wird das Argumentieren vor allem unter dem Fokus der Lernvoraussetzung betrachtet. Dies geschieht, indem in den Analysen (vgl. Kap. 7 & Kap. 8) unter anderem untersucht wird, welche begrifflichen Ideen von den Kindern in der argumentativen Auseinandersetzung genutzt und entwickelt werden.

2.4 Argumentieren im Kontext von Mustern und Strukturen

Ausgangspunkt für das Argumentieren im Mathematikunterricht sind Vermutungen über mathematische Entdeckungen oder Zusammenhänge (vgl. Kap. 2.2.3). Diese können vielfältiger Natur sein. Eine Möglichkeit, argumentativ mit Kindern über Mathematik ins Gespräch zu kommen, stellen arithmetische Strukturen dar, die durch geometrische Muster repräsentiert werden (vgl. Kap. 1.3 & Kap. 1.4). Muster und Strukturen können somit Argumentationsanlässe bieten und Argumentationsprozesse in Gang setzen. Diese sind vielfältig und beinhalten in ihrer Gesamtheit unterschiedliche mathematische Tätigkeiten. Auch wenn das Vermuten, Deklarieren eines Begründungsbedarfs und das Liefern einer Begründung zentrale Merkmale der Argumentation darstellen (vgl. Kap. 2.2.3), sind auch die in Kapitel eins dargestellten Tätigkeiten in Argumentationsprozessen von Relevanz. Im Folgenden wird aufgezeigt, dass alle dargestellten Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen den Argumentationsprozess bedingen und beeinflussen (können). Somit ist es nicht ausreichend, die Tätigkeit auf das reine Liefern von Begründungen zu beschränken.

Eine Besonderheit mathematischer Muster und Strukturen ist, dass diese (häufig) allgemeingültiger Natur sind. Daher sollten sie auch mit den Kindern als verallgemeinerbar betrachtet werden und die Allgemeingültigkeit beim Argumentieren in den Blick genommen werden. Dass bereits Kinder in der Grundschule dazu in der Lage sind, Muster und Strukturen zu verallgemeinern, zeigten zwei Studien von Knapstein (2014) und Akinwunmi (2012). Beide konnten typische Verallgemeinerungsweisen identifizieren. Sie konnten herausarbeiten, dass Kinder durchaus dazu in der Lage sind, Muster und Strukturen zu verallgemeinern, und es konnten typische Verallgemeinerungsweisen identifiziert werden.

Das heißt Muster und Strukturen können als verallgemeinerbare Gesetzmäßigkeiten bereits in der Grundschule thematisiert werden. Hierfür müssen aber passende Argumentationsanlässe geboten werden, die zum Argumentieren anregen und ein Verallgemeinern ermöglichen. Arithmetische Strukturen, die durch geometrische Darstellungen veranschaulicht werden, bieten ebenso die Möglichkeit des Verallgemeinerns. Gleichzeitig stellen diese geometrischen Darstellungen auch wesentliche mathematische Werkzeuge im Verallgemeinerungsprozess dar.

2.4.1 Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen im Kontext des Argumentierens

Wie in Kapitel 1 bereits dargelegt wurde, handelt es sich bei den Tätigkeiten *Reproduzieren*, *Fortsetzen*, *Beschreiben*, *Produzieren*, *Vergleichen*, *Begründen*, *systematischem Verändern* sowie *Übersetzen* von Mustern um wesentliche Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen. Hierbei ist das Erkennen des Musters beziehungsweise der zugrundeliegenden Struktur grundlegend (vgl. Kap. 1.5). Während häufig lediglich das Beschreiben und Begründen als argumentative Tätigkeiten verstanden werden, werden in der vorliegenden Arbeit alle Tätigkeiten als wesentlich für Argumentationsprozesse betrachtet. Dies wird im Folgenden an einem Beispiel der Drittklässlerin Greta aus der vorliegenden Studie illustriert.

1. Beispiel: „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar“

Beispiel 1.1: Greta untersucht die Aussage „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar“ anhand eines selbstgewählten Beispiels:

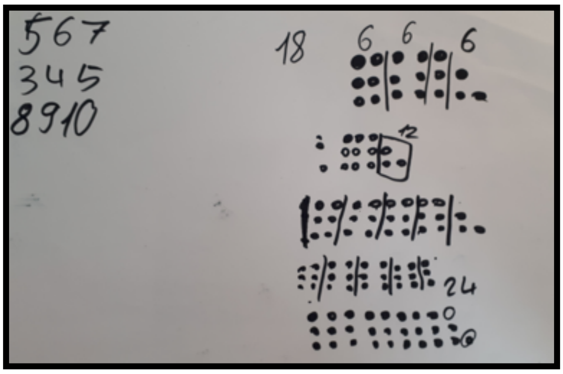


Abbildung 2.6: Greta produziert räumliche Muster

Zu Beginn der Verifikation der Aussage sucht Greta zunächst Beispiele, anhand derer die Aussage überprüft werden soll. Hierfür notiert Greta unterschiedliche Beispiele dreier aufeinanderfolgender Zahlen und *übersetzt* die symbolische Darstellung in eine selbstgewählte Punktanordnung. Dadurch *produziert* sie räumliche Muster, durch die die begründungsbedürftige Aussage dargestellt wird. Es handelt sich um eine strukturgenerierende Tätigkeit, denn Greta entwickelt in dieser Phase eine räumliche Struktur, die ihrer Meinung nach besonders tragfähig für die darzustellende Aussage beziehungsweise die anschließende Argumentation ist. Diese kann dann als Grundlage ihrer Argumentation dienen. Dafür bildet Greta ein räumliches Muster bestehend aus drei untereinanderliegenden Reihen, die bündig beginnen und deren Punktabstand identisch sind. Die erste Reihe repräsentiert dabei den ersten Summanden, die zweite Reihe den zweiten Summanden und die dritte Reihe den dritten Summanden, so dass das gesamte räumliche Muster die Summe der drei Zahlen darstellt. Sie nutzt diese räumlichen Muster für erste *Begründungen*, warum die Aussage für das jeweilige Beispiel gilt. Es zeigt sich bei den unterschiedlichen Punktmustern eine Art des *Fortsetzens*. Dies ist an dieser Stelle nicht im Sinne eines Fortsetzens einer Musterfolge zu betrachten. Vielmehr überträgt sie die strukturellen Beziehungen des Punktmusters auf neue Punktmuster, indem sie neue Punktmuster derselben Strukturierung generiert.

Beispiel 1.2: Greta untersucht die Aussage „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar" an folgendem Punktmuster:

Greta zählt die Punkte der einzelnen Reihen der Punktmuster und entscheidet sich, für ihre Argumentation Plättchen zu nehmen.

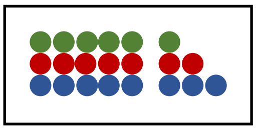
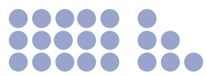
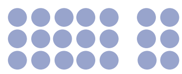
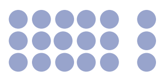


Abbildung 2.7: Beispiel 1.2 zu deutendes Punktmuster

G	*[nimmt blaue Plättchen und beginnt das Punktmuster zu reproduzieren; legt 5 blaue Plättchen in eine Reihe]* **Ich leg es mir mal genauso** *[beginnt die zweite Reihe zu legen]*.	 *Abbildung 2.8: Beispiel 1.2 Gretas Reproduktion*
I	**Ja, kannst du gerne machen.**	
G	*[ergänzt beide Reihen auf 6 Plättchen; ergänzt die 2. Reihe auf 7 Plättchen; zählt die Anzahl der Plättchen]* **7 und dann hatten wir ja noch die 8** *[legt die 3. Reihe]*. **So** *[...]* **erst mal, das sind ja hier jetzt 8** *[streicht über die 3. Reihe]*. **Hier sind 7** *[zeigt auf die 2. Reihe]* **und hier sind 6** *[zeigt auf die 1. Reihe]*. **Vielleicht könnte ich hier darauf immer 7 machen** *[verschiebt das 8. Plättchen aus der 3. Reihe und legt es als 7. Plättchen in die 1. Reihe]*. **Das sind dann ja immer 7.** *[5 sec. Pause]* **Das sind dann 2, 4, 6** *[tippt dabei mit den Fingern auf die oberste Reihe]*, **ja immer 7** *[tippt von oben nach unten auf die Reihen]*. **3 mal 7, sind 21. Könnte man durch 3 teilen. Sind ja wieder 3 Reihen** *[zeigt von links nach rechts über ihr Punktmuster]* **und es sind Nachbarzahlen.**	 *Abbildung 2.9: Beispiel 1.2 Gretas verändertes Punktmuster*  *Abbildung 2.10: Beispiel 1.2 Gretas verändertes Punktmuster*

Um die Aussage an dem zugrundeliegenden Punktmuster zu verifizieren, *reproduziert* Greta zunächst das auf der Karte abgebildete Punktmuster mit Plättchen. Hierfür ist es relevant, dass sie die Strukturen des Punktmusters unverändert auf ihre Plättchenanordnung überträgt. Das heißt sowohl die horizontalen als auch vertikalen Beziehungen zwischen den einzelnen Plättchen müssen übernommen werden. Ebenso ist es zwingend erforderlich, dass die genaue Plättchenanzahl übertragen wird. Auf Grundlage ihrer *Reproduktion verändert* Greta ihr Punktmuster jedoch dann *systematisch*, indem sie das am weitesten rechts gelegene Plättchen der dritten Reihe an das Ende der ersten Reihe schiebt, um so drei gleich lange Reihen zu erzeugen. Sie generiert somit eine neue Strukturierung. Dieses veränderte Punktmuster dient nun als Grundlage für Gretas *Begründung*, indem sie das neu erzeugte Punktmuster als rechteckige Anordnung der Multiplikation deutet. Die drei Reihen nutzt sie als Grundlage zur *Begründung* der Teilbarkeit durch drei. In diesem Argumentationsprozess werden die Tätigkeiten des *Reproduzierens*, *systematischen Veränderns* und *Begründens* deutlich und es zeigt sich, dass die Verzahnung der Tätigkeiten produktiv innerhalb des Argumentationsprozesses genutzt wird. Die unterschiedlichen Tätigkeiten bedingen sich gegenseitig und bauen aufeinander auf. So ermöglicht erst die *Reproduktion* mit Plättchen ein aktives Verschieben des Plättchens, was grundlegend für Gretas Argumentation ist.

Beispiel 1.3: Greta untersucht die Aussage „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar“ an einem weiteren Punktmuster:

Im weiteren Verlauf des Interviews reproduziert Greta auch folgendes Punktmuster und vergleicht im Anschluss beide Punktmuster.

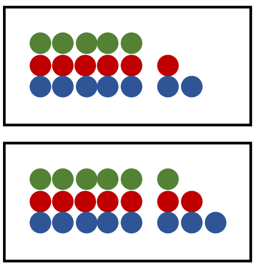


Abbildung 2.11: Beispiel 1.3 zu vergleichende Punktmuster

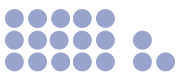


Abbildung 2.12: Beispiel 1.3 Gretas Reproduktion

G	**Das sind eigentlich die gleichen Aufgaben. Weil das sind 2, 4, 6** *[zählt die 1. Reihe des oberen Punktmusters]*, **2, 4, 6, 7** *[zählt die zweite Reihe des oberen Punktmusters]*, **aber das sind jetzt nicht die gleichen Aufgaben.**
I	**Aber was ist denn gleich bei den beiden Aufgaben?**
G	**Ähm, das man erstens, mir ist jetzt was aufgefallen, man kann immer den unteren hierhin schieben** *[schiebt den 7. Punkt der 3. Reihe als 6. Punkt in die 1. Reihe]*. **Man kann immer 3 mal rechnen** *[zeigt von links nach rechts über ihr Plättchenmuster]* **und es hat das gleiche Ergebnis.**

Durch den *Vergleich* beider Punktmuster gelangt Greta zu einer neuen Entdeckung und generiert dadurch die Vermutung, dass man die Handlung des Verschiebens des letzten Punktes aus der untersten Reihe in die oberste Reihe auf weitere Punktmuster gleicher Struktur übertragen kann. Der *Vergleich* beider Punktmuster ermöglicht es, strukturelle Gemeinsamkeiten von unterschiedlichen Punktmustern zu erkennen. Hierbei ist eine Abstraktion notwendig, denn die wesentlichen strukturellen Merkmale des Punktmusters müssen fokussiert werden. Die für die Argumentation unwesentlichen Merkmale (zum Beispiel die Farbgebung) bleiben unbeachtet. Durch die Entdeckung der Gemeinsamkeit und die daraus resultierende Abstraktion entwickelt Greta einen Begründungsansatz, der für einen inhaltlich-anschaulichen Beweis grundlegend und damit Grundlage zur Allgemeingültigkeit sein kann. Grundlegend ist auch hier die Verzahnung der verschiedenen Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen. Der *Vergleich* wird erst durch die vorherige *Reproduktion* und *systematische Veränderung* der Punktmuster möglich.
Das *Beschreiben* der Punktmuster und deren Merkmale vollzieht Greta vor allem mit einer kardinalen Sicht auf die einzelnen horizontalen Reihen und den für sie relevanten strukturellen Aspekten des Punktmusters. Sie hebt hier jeweils die genaue Punktanzahl hervor. Hierfür *übersetzt* Greta die Struktur des Punktmusters in eine andere Darstellungsform. In den vorliegenden Beispielen übersetzt Greta die sprachliche und symbolische Darstellung in ein räumliches Muster und die räumlichen Muster in eine sprachliche, symbolische sowie enaktive Darstellung.
Es zeigt sich in diesen Beispielen, wie die unterschiedlichen Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen zum Tragen kommen und sich gegenseitig ergänzen. Deutlich wird dadurch, dass die verschiedenen Tätigkeiten auch in der Auseinandersetzung mit Mustern und deren Strukturen im Unterricht nicht isoliert voneinander betrachtet werden können. Im Gegenteil, sie bedingen sich wechselseitig und können auch eine Grundlage für den weiteren Verlauf des Argumentationsprozesses schaffen. Dies zeigt sich als wichtige Erkenntnis für die vorliegende Studie. Die Kinder werden vor die Herausforderung gestellt, arithmetische Strukturen in die Darstellungen hineinzudeuten und (allgemeingültige) mathematische Aussagen zu begründen. Bereits in dieser kurzen illustrativen Szene zeigt sich, wie vielfältig die Tätigkeiten sind, die in den argumentativen Auseinandersetzungen ausgeführt werden. Demnach darf das Argumentieren mit Anschauungsmitteln nicht ausschließlich auf die Tätigkeiten Beschreiben und Begründen beschränkt werden. Vielmehr muss den Kindern ein vielfältiger Umgang mit den Veranschaulichungen ermöglicht werden.

2.4.2 Beweisen im Kontext von Mustern und Strukturen

Im vorliegenden Forschungsprojekt ist das Begründen (verallgemeinerbarer) struktureller Zahleigenschaften sowie arithmetischer Gesetzmäßigkeiten zentral. Das heißt, Kinder sollen (allgemeine) strukturelle Zahleigenschaften und Gesetzmäßigkeiten nicht ausschließlich beispielbezogen, sondern auch allgemeingültig, begründen.

Eine solche Verallgemeinerung wird in der Mathematik durch einen formal-deduktiven Beweis gesichert. Dies ist für Grundschulkinder aber noch nicht möglich und macht es daher notwendig, andere Begründungsarten zu nutzen (vgl. u. a. Jahnke & Ufer, 2015; Meyer & Prediger, 2009, S. 3; Wittmann & Müller, 1988). Vor dem Hintergrund der Lernausgangslage von Mathematiklernenden erschien es in der mathematikdidaktischen Forschung relevant sich mit unterschiedlichen didaktischen Beweiskonzepten auseinanderzusetzen[10]. Diese Beweiskonzepte sehen von einem deduktiven Vorgehen sowie einer strengen Formalisierung ab. Anstelle dessen werden weitere Denkrichtungen, Schlussweisen und Darstellungsformen genutzt. Solche Darstellungsformen sind konkreter beziehungsweise anschaulicher Art und entsprechen somit der Lernausgangslage von Kindern (in der Grundschule) und stellen gleichzeitig ergiebige mathematische Werkzeuge dar (Krauthausen, 2001, S. 101f.). Daher können sie bereits in der Grundschule eingesetzt werden, verlieren aber (nicht notwendigerweise) im Laufe der Schulzeit an Bedeutung.

Im Folgenden wird nun erneut Gretas Beispiel (Kap. 2.4.1) betrachtet. Dabei wird der Fokus nicht auf die angewendeten Tätigkeiten, sondern auf die Argumentation, die sie innerhalb des Argumentationsprozesses hervorbringt, gelegt. Diese wird dann in Beziehung zu möglichen Beweisen gesetzt.

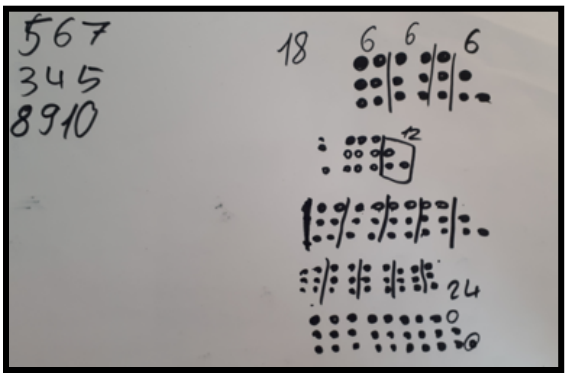


Abbildung 2.13: Beispiel eines experimentellen Beweises

Greta steht vor der Herausforderung die Aussage „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch drei teilbar" zu begründen. Sie verifiziert diese Aussage

---

[10] Zur intensiven Auseinandersetzung mit dem fachdidaktischen Diskurs zur Unterscheidung verschiedener Argumentations- und Beweis formen siehe (Biehler & Kempen, 2016).

(zunächst) anhand der drei Beispiele 5, 6, 7 und 3, 4, 5 sowie 8, 9, 10. Hierfür nutzt sie zwei unterschiedliche Repräsentationsformen (vgl. Kap. 3) – eine numerisch-symbolische Notation und eine ikonische Darstellung. Begleitet wird dies durch sprachliche Äußerungen. Sie kommt zu der Schlussfolgerung, dass die Aussage für diese drei Beispiele wahr ist und sieht darin eine Bestätigung der Allgemeingültigkeit der Aussage. Ein solches Vorgehen beschreiben Müller und Wittmann (1988, S. 249) als experimentellen Beweis. *Experimentelle Beweise* sind „Veranschaulichungen, Plausibilitätsbetrachtungen, empirische Verifikationen und an Beispielen erläuterte Regeln, die bestimmte Aufgabenfelder erschließen" (Müller & Wittmann 1988, S. 248). Hierbei wird eine Behauptung auf Grundlage verschiedener Beispiele verifiziert. Da lediglich Beispiele verwendet werden, gibt es hinsichtlich der Allgemeingültigkeit keine absolute Sicherheit. Diese muss aber bei einem Beweis gegeben sein, so dass der experimentelle Beweis an dieser Stelle nicht als ‚echter' Beweis betrachtet wird (Wittmann & Müller, 1988, S. 249). Auch wenn es sich dabei nicht um ‚echte' Beweise handelt, können experimentelle Beweise einen ersten Zugang zur Verallgemeinerung bieten. Durch die Betrachtung verschiedener Beispiele können (strukturelle) Zusammenhänge und Beziehungen entdeckt werden, die auf andere Beispiele übertragen werden können, bis hin zur Entwicklung einer allgemeingültigen Sichtweise. Dies ist auch im vorliegenden Beispiel von Greta der Fall. Auch wenn sie an dieser Stelle eine exemplarische Argumentation generiert, kann dies grundlegende Einsichten in die mathematischen Zusammenhänge bieten. So nutzt sie ein räumliches Muster und dessen Umstrukturierung als Grundlage der Argumentation. Diese kann auch grundlegend für einen ‚echten' Beweis sein, wie im Folgenden noch dargestellt wird.

Ein solcher Beweis ist dann inhaltlich-anschaulicher Natur. „*Inhaltlich-anschauliche*, operative *Beweise* stützen sich auf Konstruktionen und Operationen von denen intuitiv erkennbar ist, daß sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen" (Wittmann & Müller, 1988, S. 249; Hervorhebung F.W.). Hierbei liegen die Prämissen des Beweises nicht formal vor, sie entsprechen aber dennoch den korrekten, formal gefassten Argumenten (Brunner 2014, S. 18). So werden zur Beweisführung auch darstellerische Mittel eingesetzt, die nicht den Ansprüchen formal-deduktiver Beweise entsprechen, wie zum Beispiel konkretes Material oder Ikonisierungen.

Betrachtet man Gretas oben beschriebenes Vorgehen beim *experimentellen Beweisen*, so lassen sich Konstruktionen beziehungsweise Operationen erkennen, aus denen potentiell eine Allgemeingültigkeit ableitbar ist, auch wenn diese von Greta nicht genutzt wird.

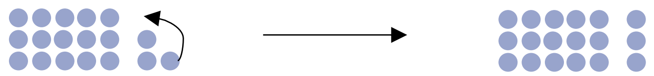


Abbildung 2.14: Inhaltlich-anschaulicher Beweis exemplarisches Beispiel "Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch drei teilbar“

G	**Ähm, das man erstens, mir ist jetzt was aufgefallen, man kann immer den unteren hierhin schieben** *[schiebt den 7. Punkt der 3. Reihe als 6. Punkt in die 1. Reihe]***. Man kann immer 3 mal rechnen** *[zeigt von links nach rechts über ihr Plättchenmuster]* **und es hat das gleiche Ergebnis.**

Hier zeigt sich eine Operation, nämlich das Verschieben eines Punktes, die sich bei jeder beliebigen Kombination dreier aufeinanderfolgender Zahlen durchführen lässt. Es können immer drei Reihen erzeugt werden, bei der die obere Reihe ein Plättchen weniger und die unterste Reihe ein Plättchen mehr als die mittlere Reihe enthält, da es sich um aufeinanderfolgende Zahlen handelt.

Denkt man diese von Greta angefangene Argumentation weiter, so lässt sie sich auf jedes beliebige Beispiel übertragen. Somit kann die Operation für jede beliebige Kombination dreier aufeinanderfolgender Zahlen durchgeführt werden, auch wenn dies von Greta nicht expliziert wird. Das heißt, Gretas Argumentation kann weitergedacht und ein inhaltlich-anschaulicher Beweis entwickelt werden. Eine mögliche Darstellung sieht folgendermaßen aus:

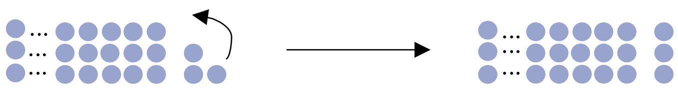


Abbildung 2.15: Inhaltlich-anschaulicher Beweis "Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch drei teilbar“

Aufgrund der Pünktchen-Notation wird verdeutlicht, dass diese Operation beliebig fortsetzbar ist. So fungiert die Darstellung als geometrische Variable, die eine beliebige Anzahl an Pünktchen repräsentiert (Biehler & Kempen, 2015, S. 131; Kempen, 2019, S. 78). Durch das Verschieben des Punktes erhält man immer drei Reihen mit gleicher Punktanzahl und somit eine durch drei teilbare Menge.

Dieses Beispiel von Greta verdeutlicht zwei Aspekte. So können experimentelle Beweise als Ausgangspunkt für das Aufstellen inhaltlich-anschaulicher Beweise dienen. Gleichzeitig sind die Konstruktionen und Operationen, die auf eine ganze Klasse von Beispielen übertragen werden können, nicht für jeden intuitiv erkennbar. So erkennt Greta die wesentliche Konstruktion beziehungsweise Operation, die dem Beweis zugrunde liegt, dennoch überträgt sie diese zunächst nur auf weitere Beispiele. Es führt dadurch nicht unmittelbar zu einer Verallgemeinerung.

Obwohl ein formal-deduktives Vorgehen in der Grundschule nicht der Lernausgangslage der Kinder entspricht, wird er zur Vollständigkeit an dieser Stelle auch betrachtet und im Anschluss mit dem inhaltlich-anschaulichen Beweis verglichen. „Beim formal-deduktiven Beweis wird jede Aussage in einem logischen Prozess aus einer anderen Aussage abgeleitet. Ziel ist es, den Beweis nicht nur als logische Beweiskette darzustellen, sondern ihn auch in die kürzest mögliche Form zu bringen, was in der Mathematik bedeutet, ihn formal darzustellen" (Brunner, 2014, S. 19). Das heißt, es ist sowohl ein deduktives Vorgehen als auch eine Formalisierung dessen und zwar in der kürzest möglichen Form erforderlich. Für die von Greta betrachtete Aussage bedeutet dies folgendes:

Behauptung: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen a, b, c $\in \mathbb{N}$[11] ist immer durch 3 teilbar.
Beweis:
$a = n-1, b = n, c = n+1$, wobei $n \in \mathbb{N}$
$(n - 1) + n + (n + 1) = (n - 1 \underline{+ 1}) + n + (n + 1 \underline{- 1}) = 3n$

Vergleich eines inhaltlich-anschaulichen sowie formal-deduktiven Beweises
Vergleicht man nun die Argumente des inhaltich-anschaulichen Beweises mit dem formal-deduktiven Beweis, so zeigt sich, dass an dieser Stelle der Unterschied in den Beweistypen nicht in der Art der Argumente oder der Allgemeingültigkeit dieser liegt. Vielmehr unterscheiden sich die Argumentationen hinsichtlich der Repräsentationsform.

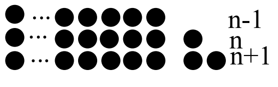


Abbildung 2.16: Vergleich inhaltlich-anschaulicher Beweis und formal-deduktiver Beweis Teil I

Das räumliche Muster sowie die symbolisch-algebraische Notation repräsentieren beide drei beliebige aufeinanderfolgende Zahlen und deren Summe. Die erste Reihe enthält genau einen Punkt weniger als die zweite Reihe. Die dritte Reihe besteht wiederum aus einem Punkt mehr als die mittlere Reihe. Diese Eigenschaften zeigen sich im formal-deduktiven Beweis in der Darstellung (n-1), n sowie (n+1), wobei n eine natürliche Zahl darstellt.

[11] Da sich das vorliegende Forschungsprojekt in der Grundschule verortet, wird an dieser Stelle angenommen, dass es sich hierbei um natürliche Zahlen handelt.

Durch das Verschieben des rechten Punktes der unteren Reihe verringert sich die Punktanzahl dieser Reihe um eins. Die Reihe enthält somit die gleiche Anzahl an Punkten wie die mittlere Reihe. Der zu verschiebende Punkt wird nun ganz rechts an die obere Reihe angelegt. Da diese zuvor einen Punkt weniger als die mittlere Reihe enthielt, enthält sie nach dem Hinzufügen die gleiche Anzahl an Punkten wie die mittlere Reihe und die untere Reihe. Es entstehen somit drei gleich lange Reihen. Im formal deduktiven Beweis entspricht dies der Darstellung (n-1+1), n sowie (n+1-1).

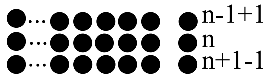


Abbildung 2.17: Vergleich inhaltlich-anschaulicher Beweis und formal-deduktiver Beweis Teil II

Da die zugrundeliegende Struktur, in diesem Fall insbesondere die Beziehungen zwischen den Punktanzahlen der Reihen, für jedes beliebige Beispiel identisch ist, ist auch das Vorgehen unabhängig von der genauen Punktanzahl in den Reihen. Wesentlich ist lediglich die Beziehung der Punktreihen, die durch die aufeinanderfolgenden Nachbarzahlen gegeben ist. Die genutzten (mathematischen) Argumente beider Beweistypen sind somit gleich. Es zeigt sich somit, dass „die Grenzlinie zwischen ‚Beweisen' und Beweisen nicht zwischen ‚experimentellen' und ‚inhaltlich-anschaulichen' Beweisen einerseits und rein logischen Beweisen andererseits verläuft, sondern zwischen experimentellen ‚Beweisen' einerseits und den beiden anderen Beweisarten andererseits zu ziehen ist" (Wittmann & Müller, 1988, S. 248f.). Der Unterschied in den beiden Beweisarten ist somit nicht in dem Grad der Allgemeingültigkeit zu sehen, sondern in den genutzten Darstellungsformen.

Inhaltlich-anschauliche Beweise als räumliche Muster und wachsende Musterfolgen

Die bisherige Auseinandersetzung mit dem Argumentieren, Begründen und Beweisen hat gezeigt, dass Kinder zur Argumentation kommunikative Mittel benötigen, die nicht der formalen Sprache entsprechen. Insbesondere in der Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen sowie in der Auseinandersetzung mit den Beweistypen nach Müller und Wittmann (1988) zeigte sich, dass räumliche Muster einen wesentlichen Beitrag als kommunikatives und mathematisches Mittel leisten können. Räumliche Muster, wie im obigen Beispiel, können grundlegende Konstruktionen darstellen, auf deren Grundlage inhaltlich-anschauliche Beweise geführt werden können. So stellen räumliche Muster in inhaltlich-anschaulichen Beweisen prototypische Veranschaulichungen für allgemeingültige Aussagen dar. Das bedeutet, die Struktur des räumlichen Musters vereint die wesentlichen für die Argumentation notwendigen Eigenschaften (vgl. Kap. 1.3.2).

Im bisher genutzten Beispiel sind dies die notwendigen Eigenschaften für die Aussage „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar“.
Räumliche Muster sind somit nicht nur im Kontext des Erwerbs inhaltlicher Kompetenzen von Relevanz (vgl. Kap. 1.1.2), sondern auch, um allgemeine mathematische Kompetenzen zu erwerben, denn sie ermöglichen ein aktives Mathematiktreiben. Aus diesem Grund zeigt es sich als wesentlich, die kindlichen Deutungen und Nutzungen räumlicher Muster innerhalb von Argumentationen zu untersuchen.
Die ikonische Darstellung, die im inhaltlich-anschaulichen Beweis genutzt wird, steht dabei in engem Zusammenhang zu den in Kapitel eins beschriebenen wachsenden Musterfolgen.

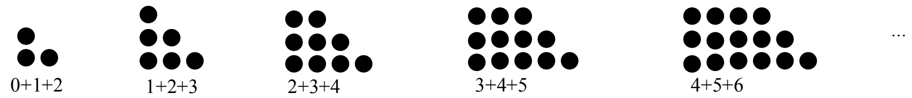


Abbildung 2.18: Wachsende Musterfolge I "Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar."

Die obenstehende Musterfolge (vgl. Abb. 2.18) stellt die Folge aller möglichen Kombinationen von drei aufeinanderfolgenden Zahlen dar. Das erste Folgeglied stellt die Summe der Zahlen 0, 1 und 2 dar und damit die kleinste Kombinationsmöglichkeit dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. In dieser wachsenden Musterfolge wird jeder Summand von Folgeglied zu Folgeglied um eins erhöht. Dadurch wird jede Kombinationsmöglichkeit dreier aufeinanderfolgender Zahlen erfasst. Der erste Summand des n-ten Folgeglieds lässt sich durch die Formel n-1 ermitteln, der zweite Summand ist n, der dritte Summand lässt sich durch n+1 berechnen. Betrachtet man nun das räumliche Muster, welches entsteht, nachdem der rechte Punkt der untersten Reihe an den rechten Rand der oberen Reihe verschoben wurde, so lässt sich auch dies als wachsende Musterfolge darstellen (vgl. Abb. 2.19).

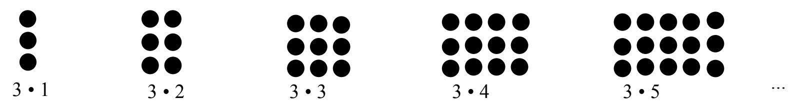


Abbildung 2.19: Wachsende Musterfolge II "Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar."

Hierbei lässt sich das erste Folgeglied als drei Reihen mit je einem Plättchen darstellen. Von Folgeglied zu Folgeglied wächst jede Reihe um ein Plättchen. Somit ist die Anzahl der Plättchen in einer Reihe des n-ten Folgeglieds n.

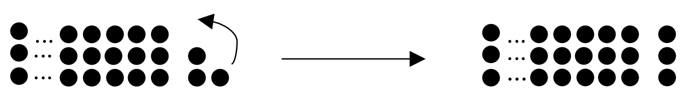


Abbildung 2.20: Räumliche Muster als Ansatz zur Entwicklung inhaltlich-anschaulicher Beweise

Setzt man nun den inhaltlich-anschaulichen Beweis in Beziehung zu den oben beschriebenen Musterfolgen (vgl. Abb. 2.20), zeigt sich, dass sich dieser als eine wachsende Musterfolge deuten lässt, die in einer einzigen Darstellung zusammengefasst wurde. Denn die wachsende Musterfolge beinhaltet, ebenso wie die Darstellung des inhaltlich-anschaulichen Beweises, jede Kombinationsmöglichkeit dreier aufeinanderfolgender Zahlen. Nach dem Verschieben des rechten Punktes der untersten Reihe an den rechten Rand der obersten Reihe, beinhalten die Musterfolge sowie die Darstellung des inhaltlich-anschaulichen Beweises, jede Kombinationsmöglichkeit dreier gleich langer Reihen.

Die Betrachtung wachsender Musterfolgen aus räumlichen Mustern kann somit ein Ansatzpunkt für die Entwicklung inhaltlich-anschaulicher Beweise darstellen, wenn die Musterfolgen allgemeingültige Beziehungen oder Aussagen darstellen. Hierfür ist es notwendig, die räumlichen Muster entsprechend der wesentlichen strukturellen Merkmale zu deuten. Es zeigt sich somit, dass die Bereiche *Muster und Strukturen* sowie *Argumentieren* eng miteinander verzahnt sind und grundlegende Aspekte beider Bereiche ineinanderfließen. So repräsentieren (räumliche) Muster durch die ihnen zugrundeliegende Struktur wesentliche arithmetische Strukturen. Diese arithmetischen Strukturen müssen zunächst in die geometrischen Muster hineingedeutet werden. Obwohl die geometrischen Muster die arithmetischen Strukturen zunächst an konkreten Beispielen veranschaulichen, sind diese potentiell verallgemeinerbar (vgl. Kap. 1.3.2). Das heißt, geometrische Muster können verallgemeinerbare Strukturen darstellen und bieten dadurch vielfältiges Argumentationspotential. Diese verallgemeinerbaren Strukturen können auf formaler Ebene durch die Sprache und Symbole der Algebra verallgemeinert werden. In der Grundschule ist dies allerdings noch nicht möglich, so dass auf andere darstellerische Mittel zurückgegriffen werden muss. Räumliche Muster können dann als kommunikatives Mittel eingesetzt werden. In dem im Kontext von Beweisen dargestellten Beispiel nutzt Greta das Punktmuster als Kommunikationsmittel (vgl. Kap. 3). Durch unterschiedliche Tätigkeiten wie dem Reproduzieren, dem Verändern oder dem Fortsetzen (vgl. Kap. 1.5) kommuniziert sie wesentliche algebraische Ideen. Diese argumentativen Ansätze können zu einem inhaltlich-anschaulichen Beweis weiterentwickelt werden, so dass auch aus mathematischer Perspektive die Allgemeingültigkeit gesichert ist. Die Darstellung, die inhaltlich-anschaulichen Beweisen zugrunde liegt, steht wiederum in engem Zusammenhang mit wachsenden Musterfolgen (vgl. Kap. 1.3.1). Dies zeigt, dass die Vernetzung der Bereiche Muster und Strukturen sowie Argumentieren ein großes Potential zum Mathematiklernen (in der Grundschule) birgt. Vor diesem Hintergrund ist es von Relevanz genau solche Argumentationsprozesse zu untersuchen, in denen Kinder Anschauungsmittel im Argumentationsprozess nutzen (sollen). Demnach gilt es eben diese

Argumentationen, in denen Anschauungsmittel genutzt werden, genau zu untersuchen und zu analysieren, um besser verstehen zu können, welche Bedeutung diese Anschauungsmittel im Argumentationsprozess einnehmen können. Gleichzeitig müssen die kindlichen Deutungen dieser Veranschaulichungen in den Blick genommen und analysiert werden, um zu besser zu verstehen, wie solche Darstellungen gewinnbringend in die argumentative Auseinandersetzung innerhalb mathematischer Lehr- und Lernprozesse eingebunden werden können.

3 Veranschaulichungen

Darstellungen in Form von mathematischen Zeichen und Symbolen, aber auch als Veranschaulichungen, wie zum Beispiel Punktmuster, gehören seit Anbeginn der Mathematik, als Repräsentation mathematischen Wissens, zur Kultur der Mathematik. Auch in der vorliegenden Arbeit stehen mathematische Veranschaulichungen im Zentrum des Forschungsinteresses, denn die Deutung und Nutzung dieser innerhalb von Argumentationsprozessen werden detailliert analysiert. Aus diesem Grund wird sich im dritten Kapitel intensiv mit Veranschaulichungen in mathematischen Lehr- und Lernprozessen auseinandergesetzt.
Dafür werden zunächst die epistemologischen Besonderheiten betrachtet und erläutert, warum Veranschaulichungen für Mathematiklernen und -lehren unerlässlich sind (Kap 3.1). Veranschaulichungen sind aber nicht nur aus epistemologischer Sicht für den Einsatz im Mathematikunterricht (der Grundschule) von Bedeutung, sondern auch aus kognitionspsychologischer Sicht ist die Nutzung von Veranschaulichungen im Lernprozess von Relevanz (Kap. 3.2).Vor diesem Hintergrund ist es nicht verwunderlich, dass sich Kompetenzen im Bereich des Nutzens und Interpretierens von Darstellungen auch in den curricularen Vorgaben unterschiedlicher Länder und Schulstufen widerspiegeln (Kap. 3.3).
Abschließend wird betrachtet, welche Arten von Veranschaulichungen in mathematischen Lehr- und Lernprozessen eingesetzt werden können und welche Funktion die Anschauungsmittel einnehmen (können) (Kap. 3.4). Diese Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Arten und Funktionen bildet im weiteren Verlauf die theoretische Grundlage für die Auswahl des Anschauungsmittels innerhalb der Interviewstudie.

3.1 Epistemologische Besonderheit des Mathematiklernens

Das zentrale Ziel im Mathematikunterricht (der Grundschule) ist der Erwerb von mathematischem Wissen. Dabei sind die in der Mathematik, als Wissenschaft der Muster und Strukturen (vgl. Kap. 1), betrachteten mathematischen Begriffe von besonderer Natur. Es handelt sich dabei nicht um konkrete Objekte, die man zum Beispiel unter einer Lupe untersuchen kann. Mathematische Begriffe sind theoretische Begriffe. Aus diesem Grund

> *„sind [es auch keine] Dinge die man einfach fertig übermitteln könnte. Ihr Inhalt besteht in Beziehungen und Relationen zwischen den Dingen und nicht in Substanzen und Eigenschaften. Daher bedarf das theoretische Denken [...] der Visualisierung, um Beziehungen vergegenwärtigen zu können" (Otte, 1983, S. 190).*

Mathematische Begriffe sind demnach keine direkt erfahrbaren Dinge, sondern sie konstituieren sich aus den Beziehungen zwischen einzelnen Objekten. Somit sind sie von relationalem Charakter (Otte, 1983, S. 190; Söbbeke, 2005, S. 17; Steinbring, 2009). Die Fokussierung von Beziehungen zwischen Objekten stellt Lehrende und Lernende vor eine besondere Herausforderung, denn

> *„Relationen selbst sind amedial und bedürfen immer gegenständlicher Objekte als Träger, um dem Denken und der Vorstellung zugänglich zu sein. Die ‚reine' Relation ist nicht denkbar, sie braucht eine passende Darstellung oder Repräsentation in einem gegenständlichen Medium" (Dörfler, 1988, S. 111).*

Somit steht man beim Lehren und Lernen von Mathematik vor der Herausforderung, dass mathematisches Wissen gelehrt und gelernt werden muss, welches nicht empirisch fassbar ist. Vielmehr handelt es sich um „unsichtbares Wissen" (Steinbring, 2009, S. 1), welches für die Lernenden durch Veranschaulichungen erfahrbar gemacht werden kann. Es bedarf dieser Veranschaulichung von Wissen, „um mit [diesem] im Erkenntnisprozess auf einer begrifflichen Ebene operieren zu können" (Söbbeke, 2005, S. 17). Vor diesem Hintergrund erhalten Anschauungsmittel und Veranschaulichungen eine essentielle Bedeutung im Lernprozess, denn ohne eine Veranschaulichung mathematischer Relationen ist ein Lernen von Mathematik nicht möglich. Solche Veranschaulichungen können, zum Beispiel im Arithmetikunterricht, in unterschiedlichen Kontexten eingesetzt werden, um Beziehungen und Strukturen zu visualisieren. Bereits im ersten Kapitel wurden bei der theoretischen Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen einige Beispiele aufgezeigt (vgl. Kap. 1). So können arithmetische Inhalte durch geometrische Visualisierungen veranschaulicht und dem Denken zugänglich gemacht werden. Dabei dürfen diese Repräsentationen keineswegs mit dem mathematischen Begriff gleichgesetzt werden. Duval bezeichnet diese Besonderheit des mathematischen Wissens als „paradoxical character of mathematical knowledge" und beschreibt dies wie folgt:

„[...] there is an important gap between mathematical knowledge and knowledge in other sciences such as astronomy, physics, biology, or botany. We do not have any perceptive or instrumental access to mathematical objects, even the most elementary, [...]. The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings. But, at the same time, mathematical objects must not be confused with the used semiotic representations. This conflicting requirement makes the specific core of mathematical knowledge"(Duval 2000, S. 61).

Mathematische Symbole, Zeichen, Ausdrücke und Zeichnungen aber auch Sprache sind demnach notwendig, um mathematische Inhalte darzustellen. Dies gilt selbstredend auch für die argumentative Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten. Dabei repräsentieren diese Veranschaulichungen den mathematischen Inhalt nicht unmittelbar, sondern der Inhalt muss in die Veranschaulichungen hineingedeutet werden. Das lernende Individuum steht dabei vor dem „epistemologischen ‚Dilemma' des mathematischen Wissens: man benötigt auf der einen Seite die ‚Konkretheit' des Materials, einer Repräsentation, um mathematische Begriffe darstellen zu können; gleichzeitig aber muss man von dieser Konkretheit abstrahieren, um die Idee des mathematischen Begriffs erfassen und verstehen zu können" (Söbbeke, 2005, S. 18). Dies gilt auch für die in der vorliegenden Arbeit genutzten Darstellungen, wie im folgenden Beispiel an einer Darstellung der Parität erläutert wird (vgl. Abb. 3.1). Für den Argumentationsprozess, beziehungsweise das Lernen innerhalb des Kontextes der Paritäten, ist nicht die konkrete Punktanzahl, in diesem Fall zwei Reihen mit je vier Punkten, demnach acht Punkte, von Relevanz. Von Bedeutung ist die der Darstellung zugrundeliegende Struktur – die Anordnung als Doppelreihe mit zwei gleichstrukturierten Reihen. Für eine solche Deutung müssen die wesentlichen strukturellen Merkmale der Darstellung wahrgenommen und abstrahiert werden. Dabei treten die einzelnen Objekte der Repräsentation zu Gunsten der Beziehungen zwischen Teilmengen der Darstellung – in diesem Fall der beiden gleichstrukturierten Reihen – in den Hintergrund.

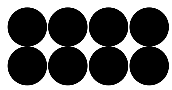


Abbildung 3.1: Prototypische Darstellung der Zahl 8

Aufgrund der dargelegten epistemologischen Besonderheiten sind Repräsentationen (bereits in der Grundschule) notwendig, um die abstrakten mathematischen Begriffe darstellen zu können. Dabei steht man vor der Herausforderung, dass der mathematische Begriff nicht mit der Darstellung gleichgesetzt werden darf, sondern, dass dieser in die Darstellung hineingedeutet werden muss. Es ist daher notwendig, den Blick von der Konkretheit des Materials abzuwenden und die dahinterliegenden Strukturen zu fokussieren. Das zentrale Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit besteht in diesem Kontext darin, genau zu analysieren, welche Strukturen Kinder in Punktdarstellungen (vgl. Abb. 3.1) hineindeuten und wie sie diese strukturellen Deutungen zur Argumentation nutzen.

3.2 Lernpsychologische Bedeutung von Repräsentationen

Repräsentationen sind aufgrund der epistemologischen Besonderheit mathematischen Wissens im Mathematikunterricht (der Grundschule) unerlässlich, um die abstrakten mathematischen Inhalte dem Denken zugänglich zu machen (vgl. Kap. 3.1). Anschauungsmittel und bildliche Darstellungen stellen daher ein wesentliches Element des Mathematikunterrichts dar (vgl. Kap. 3.3). Dies basiert aber nicht nur auf der Notwendigkeit der Repräsentationen aufgrund der epistemologischen Besonderheit mathematischen Wissens, sondern auch auf einer grundlegenden lernpsychologischen Annahme. Es wird davon ausgegangen, dass Kinder durch die Handlung am konkreten Material, über den Weg der *visuellen Vorstellungsbilder* sowie dem *(mentalen) Operieren* mit diesen, die wesentlichen mathematischen Begriffe lernen und erfassen können (Lorenz, 1992). Goldin und Shteingold (2001) sehen in der Herausbildung von inneren Vorstellungsbildern sogar ein zentrales Lernziel.

> *„This leads us to consider that the fundamental goals of mathematics education include representational goals: the development of efficient (internal) systems of representation in students that correspond coherently to, and interact well, with the (external) conventionally established systems of mathematics" (Goldin & Shteingold, 2001, S. 3).*

Visuelle Vorstellungsbilder sind für das Mathematiklernen insbesondere dann effizient, wenn sie wesentliche Strukturen der mathematischen Begriffe widerspiegeln. Demnach unterstützen Anschauungsmittel den Erwerb mathematischer Begriffe und sind wesentliche Elemente des mathematischen Lernprozesses (vgl. auch Kap. 3.4.2).

Die bis hierhin geschilderte Annahme über Anschauung geht auf die Arbeiten von Piaget und Inhelder (z.B. 1972, 1978) sowie die Genfer Schule zurück (Aebli, 1980, 1981; Piaget & Inhelder, 1972, 1978). Diese untersuchten die Entwicklung kognitiver Strukturen beim Kind sowie die Entstehung interner Repräsentationen in Form ‚innerer Bilder'. Denn Bilder sind neben der Sprache wesentliche Elemente des Denkens. Wobei sich Sprache und Bilder unterscheiden.

> *„Die Sprache bezieht sich nämlich immer auf Begriffe oder auf als bestimmte Klassen verbegrifflichter Gegenstände (‚mein Vater' usw.), und beim Erwachsenen wie beim Kind bleibt das Bedürfnis nach einem Zeichensystem, das sich nicht*

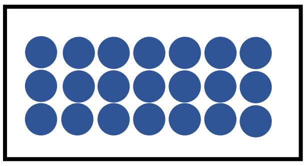
auf Begriffe, sondern auf Gegenstände als solche und auf die ganze vergangene Wahrnehmungserfahrung erstreckt: dem Bild ist diese Rolle zugedacht und seine Beschaffenheit als Symbol [...] ermöglicht es ihm eine mehr oder weniger adäquate, wenn auch gleichzeitig schematisierte, Ähnlichkeit mit den symbolisierten Gegenständen zu erlangen" (Piaget & Inhelder, 1972, S. 76).

Sie sehen Anschauung insbesondere dann als bedeutungsvoll an, wenn die Sprache an ihre Grenzen kommt, wie zum Beispiel beim Einbezug der ‚ganzen vergangenen Wahrnehmungserfahrung'. Wahrnehmungen lassen sich nämlich häufig nicht oder nur sehr umständlich sprachlich fassen und speichern, so dass das bildliche Speichern notwendig wird. Das System der verbalen Zeichen muss somit um das System der bildhaften Symbole erweitert werden (Piaget & Inhelder, 1978, S. 498f.). Die gespeicherten Bilder sind nach Piaget und Inhelder (ebd.) keine genauen Abbilder, sondern es handelt sich um ein ‚inneres Bild', welches eine ‚schematisierte Ähnlichkeit' zum Gegenstand hat. Die Ähnlichkeit vom Bild sowie dem symbolisierten Gegenstand besteht in der Mathematik darin, dass wesentliche strukturelle Merkmale in Form von zum Beispiel prototypischen Veranschaulichungen (vgl. Kap. 1.3.2) dargestellt und als ‚inneres Bild' abgespeichert werden. Es wird somit angenommen, dass innere mentale Vorstellungsbilder nur auf Grundlage von Veranschaulichungen entwickelt werden können. Dabei stellen diese mentalen Vorstellungsbilder aber notwendigerweise keine genauen Abbilder der Veranschaulichungen dar. Ist das interne Bild zu stark an den repräsentierten Sachverhalt gebunden, ist es in verwandten Situationen nicht abrufbar und somit nicht für andere Situationen nutzbar (Lorenz, 1993, S. 128). Für eine adäquate Nutzung in mathematischen Kontexten müssen Lernende die zentralen Strukturen der Repräsentation fokussieren, wie es zum Beispiel bei prototypischen Darstellungen der Fall ist. Dies unterstützt die von Söbbeke (2005) gestellte Forderung, dass von der Konkretheit des Materials abgesehen werden muss und die wesentlichen Strukturen des Materials in den Blick genommen werden müssen. Für die vorliegende Arbeit ergibt sich daraus ein wesentlicher Fokus für die Analyse: Welche strukturellen Deutungen nehmen die Kinder in Argumentationsprozessen ein? Es wird der Frage nachgegangen, inwiefern Kinder sich innerhalb von Argumentationsprozessen auf die für die Mathematik wesentlichen strukturellen Merkmale und Bedingungen beziehen.

Bis hierhin wurde herausgestellt, dass Veranschaulichungen in mathematischen Lehr- und Lernprozessen aus epistemologischer aber auch aus lernpsychologischer Sicht von zentraler Bedeutung sind. Betrachtet man nun eine mögliche Form der Umsetzung, wird sich in der mathematikdidaktischen Diskussion diesbezüglich häufig auf Bruner (1974) gestützt. Dieser schlägt zur Repräsentation mathematischer Begriffe eine Unterscheidung in drei unterschiedliche Repräsentationsmodi mit zunehmenden Abstraktionsgrad vor. Er geht davon aus, dass Wissen grundsätzlich auf drei Ebenen repräsentiert werden kann: durch *enaktive Repräsentationen*, in Form von Handlungen, durch *ikonische Repräsentationen,* in Form von Bildern, sowie durch eine *symbolische Repräsentation*, in Form von Symbolen (Bruner, 1974, S. 49)[12].

Hierbei sind diese drei Repräsentationsformen weder als trennscharf zu betrachten, noch sollen diese in formalistischer Art und Weise im Unterricht abgearbeitet werden. Vielmehr ist eine vernetzte Betrachtung der unterschiedlichen Repräsentationsformen aus mathematikdidaktischer Perspektive sinnvoll und im Mathematikunterricht gewinnbringend. Dies wird im Folgenden an zwei Beispielen deutlich.

Das Beispiel der Drittklässlerin Marie aus der vorliegenden Studie zeigt, dass auch der *handelnde Umgang* an *konkreten Darstellungen* einen höchst symbolischen Charakter haben kann.



Marie deutet das nebenstehende Punktmuster als durch drei teilbar und begründet dies wie folgt:

„Hier durch die Reihen, da sind ja auch immer drei *[zeigt nacheinander alle vertikalen Dreierspalten]*."

Abbildung 3.2: Symbolischer Charakter von enaktiven Handlungen - Beispiel Marie

Marie deutet in dem obigen Beispiel das vorliegende Punktmuster hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei. Sie konstatiert, dass das Punktmuster durch drei teilbar ist. Dies begründet sie, indem sie auf die Reihen des Musters verweist, die „auch immer drei" sind. Dies unterstützt Marie durch eine enaktive Handlung. Ihre enaktive Handlung symbolisiert dabei eine Dreierbündelung und steht in diesem Fall für die Division in einem aufteilenden Kontext. Demnach hat die enaktive Handlung an dieser Stelle einen höchst symbolischen Charakter, da sie die Division in Form eines Aufteilens symbolisiert. Dies zeigt, dass eine Zuschreibung zu einer Repräsentationsform nicht immer eindeutig ist und vom jeweiligen Kontext abhängt, indem die Repräsentation zu verorten ist. Dies stellt gleichzeitig eine hohe Anforderung an das Kind. Dieses „muss von der Konkretheit des Materials absehen und in einem symbolischen Akt das Abstrakte in das Medium hineindeuten, um die mathematische Idee, die das Material verkörpern soll, erfassen zu können" (Söbbeke, 2005, S. 17). Somit ist es in der Mathematikdidaktik nicht gewinnbringend, die einzelnen Repräsentationsformen ausschließlich getrennt voneinander zu betrachten. Gleichzeitig ist eine gezielte Vernetzung der unterschiedlichen Darstellungsformen durchaus notwendig und kann in der mathematischen

[12] An dieser Stelle wird aufgrund der Ausrichtung des Forschungsprojektes auf eine weitere Ausdifferenzierung der Repräsentationsmodi verzichtet. Zu weiteren Ausdifferenzierung siehe (Leisen, 2004, 2005, 2010; Prediger & Wessel, 2011)

Auseinandersetzung sogar wesentliche Prozesse anregen, wie an folgendem Beispiel der Drittklässlerin Greta aus der vorliegenden Studie deutlich wird (vgl. Abb. 3.3)[13].

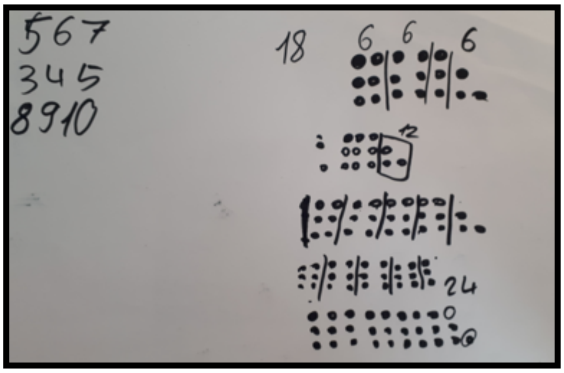


Abbildung 3.3: Darstellungsvernetzung – Beispiel Greta

In dem obigen Beispiel untersucht Greta die Aussage „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch drei teilbar". Zur Verifikation der Aussage sucht Greta zunächst Beispiele, anhand derer die oben genannte Aussage überprüft werden soll. Dafür notiert sie zunächst drei unterschiedliche Beispiele in Form einer *symbolischen Zahldarstellung*. Um die Argumentation nun weiterzuführen und die Aussage weiter zu untersuchen, übersetzt Greta die *symbolische Darstellung* in eine selbstgewählte Punktanordnung und erzeugt damit eine *Ikonisierung*. Diese ist im weiteren Verlauf der Auseinandersetzung dann ihre Argumentationsgrundlage. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass die Vernetzung der beiden Repräsentationsformen in Form eines Darstellungswechsels Ausgangspunkt für die weitere Auseinandersetzung mit der zu begründenden Aussage ist.
Die dargestellten Beispiele verdeutlichen, dass es nicht immer möglich ist, Repräsentationen ausschließlich einer Repräsentationsform zuzuordnen. Des Weiteren zeigt das Beispiel von Greta, dass es nicht sinnvoll ist, die Repräsentationsformen in mathematischen Lehr- und Lernprozessen (ausschließlich) isoliert voneinander zu betrachten. Vielmehr ist es notwendig, sich dem Potential, den die Darstellungsvernetzung für das Mathematiklernen haben kann, bewusst ist.
Eine Darstellungsvernetzung kann dabei nicht nur sinnvoll in mathematischen Lehr- und Lernprozessen eingesetzt werden, sondern gilt auch als Verständnisindikator. Erst wenn zwischen unterschiedlichen Repräsentationen hin- und hergewechselt werden kann, liegt ein umfassendes Begriffsverständnis vor (Radatz, 1989; Schulz & Schülke, 2017; Wartha, 2011; Wartha & Schulz, 2012). Das heißt, „wenn der Lernende nicht nur in der Lage ist, eine Operation symbolisch auszuführen, sondern die Operation auch am Material *durchführen* oder in einer geeigneten ikonischen Darstellung *veranschaulichen* kann, wird ihm ein tragfähiges

[13] Dieses Beispiel ist bereits aus dem zweiten Kapitel bekannt und wurde dort unter dem Fokus der Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen sowie im Kontext der Beweistypen nach Müller und Wittmann (1988) betrachtet.

Verständnis für die Operation unterstellt“ (Schulz, 2014, S. 76; Hervorhebung i.O.). Gleichzeitig kann Wissen, welches „in verschiedenen Darstellungen erworben wurde und verfügbar ist, [...] leichter behalten werden und die Fähigkeit, Wissen nach Bedarf in die eine oder andere Form zu transportieren, erhöht die Flexibilität und den Erfolg beim Problemlösen“ (Wittmann, 1981, S. 91; aus Diss Wessel). Veranschaulichungen sind Repräsentationen mathematischer Inhalte, auf denen kognitive Strukturen aufgebaut werden können (Radatz, 1989, S. 306; Söbbeke, 2005, S. 20), sind sie für einen verständnisorientierten Mathematikunterricht unerlässlich. Dabei dürfen die einzelnen Darstellungen nicht isoliert voneinander betrachtet werden. Vielmehr ist eine Darstellungsvernetzung beziehungsweise ein Darstellungswechsel[14] gewinnbringend. Vor diesem Hintergrund sind Veranschaulichungen wesentlicher Bestandteil im mathematischen Lernprozess und stehen daher im Zentrum des Forschungsinteresses der vorliegenden Arbeit.

3.3 Die Bedeutung semiotischer Repräsentationen im Mathematikunterricht

In den vorangegangenen Abschnitten wurde dargestellt, dass Veranschaulichungen mit einer Sicht auf mathematisches Wissen (vgl. Kap. 3.1) und mit einer Sicht auf Lehren und Lernen (vgl. Kap. 3.2) einen wichtigen Bestandteil des Mathematikunterrichts darstellen. Diese Notwendigkeit, Darstellungen zu nutzen und Kompetenzen in diesem Bereich zu entwickeln, spiegelt sich auch in den Bildungsstandards und den Lehrplänen der unterschiedlichen Bundesländer wider. In diesen ist das *Darstellen* als *prozessbezogene Kompetenz* und somit als allgemeine mathematische Kompetenz verankert[15] (vgl. u.a. KMK, 2005b, S. 8; Berlin, 2017, S. 7; Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 55).

Kinder sollen in der Grundschule „für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen, eine Darstellung in eine andere übertragen, Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten“ (KMK, 2005b, S. 8). Auch in den weiterführenden Schulen wird das Ausbilden des Darstellens als prozessbezogene Kompetenz weiterhin explizit gefordert (KMK, 2004, S. 8f.; 2005a, S. 8; 2012, S. 16). Während diese Kompetenz in einigen Lehrplänen nicht weiter spezifiziert ist, wird sie in anderen Lehrplänen konkretisiert. Es wird gefordert, dass die Kinder mathematische Objekte und Beziehungen auf der handelnden, bildlichen sowie symbolischen beziehungsweise sprachlichen Darstellungsebene darstellen (vgl. u.a. Bayern, 2014, S. 105; Freie und Hansestadt

[14] Zur intensiven Auseinandersetzung mit dem Darstellungswechsel im Mathematikunterricht der Grundschule siehe (Kuhnke, 2012) zur Darstellungsvernetzung (Wessel, 2015)

[15] Es wird keine detaillierte Analyse jedes einzelnen Lehrplans sowie den Bildungsstandards dargestellt, sondern das Ergebnis eines detaillierten Vergleichs der Lehrpläne und den Bildungsstandards.

Hamburg, 2011, S. 19; Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 55). Damit spiegeln sich auch in den Lehrplänen die unterschiedlichen Darstellungsebenen wider und auch die für das Lernen von Mathematik so relevante Darstellungsvernetzung wird gefordert (vgl. Kap. 3.2). Hierbei wird das zunehmende Nutzen mathematischer Fachsprache und mathematischer Symbole gefordert (Bayern, 2014, S. 105; Freie und Hansestadt Hamburg, 2011, S. 19; Baden-Württemberg, 2016, S. 13, 25). Das heißt, Kinder sollen in eine mathematikspezifische Darstellungskultur eingeführt werden, welche alle Repräsentationsebenen umfasst.

Neben dem Darstellen auf unterschiedlichen Darstellungsebenen sind unterschiedliche Formen der Repräsentation gefordert. So sollen Kinder mathematische Darstellungen wie zum Beispiel Tabellen, Skizzen aber auch konkrete Anschauungsmittel wie das Zwanzigerfeld, das Hunderterfeld oder die Stellenwerttafel nutzen (vgl. u.a. Bayern, 2014, S. 275; Baden-Wüttemberg, 2016, S. 16). Inwiefern es sich hierbei um unterschiedliche Darstellungsebenen handelt beziehungsweise um welche Darstellungsebenen es sich dabei handelt, bleibt ungenannt. Der geforderte Umgang umfasst das Lesen, Nutzen, Anwenden, Vergleichen und Bewerten sowie das Auswählen geeigneter Repräsentationen (vgl. u.a. Freie und Hansestadt Hamburg, 2011, S. 13ff.; Berlin, 2017, S. 7; Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 55ff.). Hierbei sollen die Kinder sich nicht nur auf eine darstellerische Ebene oder Form beschränken, sondern sie sollen zunehmend flexibel mit diesen umgehen und unterschiedliche Darstellungen ineinander übertragen. Sie sollen demnach zum, für den Lernprozess unerlässlichen, Darstellungswechsel befähigt werden (vgl. u.a. Niedersachsen, 2017, S. 16; Saarland, 2009, S. 6; Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 60f.). Dabei sollen die unterschiedlichen Darstellungen insbesondere dazu genutzt werden, Zahlen und Rechenoperationen darzustellen und demnach die Begriffsbildung, insbesondere im Arithmetikunterricht, unterstützen (Freie und Hansestadt Hamburg, 2011, S. 15; Niedersachen, 2017, S. 16ff.; Baden-Wüttemberg, 2016, S. 13, 25; Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 55, 61). Vor allem das strukturierte Darstellen ermöglicht Kindern einen Einblick in die Zahleigenschaften aber auch in Zusammenhänge zwischen einzelnen Rechenoperationen (Niedersachen, 2017, S. 20; Baden-Wüttemberg, 2016, S. 24). Dies zeigt zum einen, dass abstrakte Inhalte im Mathematikunterricht thematisiert werden und zum anderen, dass Veranschaulichungen von Anfang an relevant für den Lernprozess sind.

Somit werden für das vorliegende Forschungsprojekt zentrale Aspekte vom Lehrplan gefordert. Kinder sollen lernen mathematische Beziehungen auf geeignete Weise darzustellen und diese Darstellungen zu interpretieren. Im vorliegenden Forschungsprojekt werden (strukturierte) Punktdarstellung genutzt, um Paritäten, Teilbarkeit durch drei und damit verbundene

allgemeingültige Aussagen darzustellen. Dabei steht die Deutung und Nutzung dieser Darstellung im Zentrum des Forschungsinteresses (vgl. Kap. 1).
Auch das für das vorliegende Forschungsprojekt relevante Argumentieren mit Anschauungsmitteln wird in einigen Lehrplänen konkret gefordert. So wird dies in den Lehrplänen Hamburgs, Schleswig-Holsteins sowie Nordrhein-Westfalens explizit aufgegriffen und gefordert, dass das Argumentieren auf unterschiedlichen Darstellungsebenen vollzogen werden kann (vgl. u.a. Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 57). In den Lehrplänen der restlichen Länder wird keine explizite Verbindung zum Argumentieren hergestellt, dennoch kann das Argumentieren implizit mitgedacht werden, denn in allen Lehrplänen dient das Darstellen dazu, den Denkprozess für andere zugänglich zu machen.

3.4 Anschauungsmittel

Im Mathematikunterricht treten unterschiedliche Darstellungen zum Beispiel in Form von Anschauungsmitteln in Erscheinung. „Der gezielte Einsatz [solcher Anschauungsmittel] soll dem Kind ermöglichen, mathematische Begriffe und Inhalte in fachlich adäquater Weise zu durchdringen und verstehend zu erfassen" (Söbbeke, 2005, S. 13). Demnach dürfen Anschauungsmittel nicht willkürlich für das Mathematiklernen eingesetzt werden, sondern es bedarf der gezielten Auswahl dieser in Abhängigkeit zum mathematischen Inhalt und den damit verbundenen mathematischen Lernzielen. Ein solch gezielter Einsatz von Anschauungsmitteln ist nur möglich, wenn die Lehrkraft diese bewusst auswählt. Um Anschauungsmittel gezielt einsetzen zu können, ist es notwendig, sich mit den unterschiedlichen Arten und Funktionen von Anschauungsmitteln auseinanderzusetzen. Auch in der vorliegenden Arbeit ist eine solche Auseinandersetzung unerlässlich. Der Schwerpunkt liegt in der Untersuchung der epistemologischen Bedeutung von Anschauungsmitteln und der strukturellen Deutungen der Kinder bei der Nutzung von Anschauungsmitteln im Kontext des Argumentierens. Für die vorliegende Arbeit ist es demnach von Relevanz, Anschauungsmittel auszuwählen, die dazu geeignet sind die strukturellen Zahleigenschaften der geraden und ungeraden Zahlen sowie der Teilbarkeit durch drei zu repräsentieren, aber gleichzeitig in ihrer Nutzung und Deutung flexibel sind. Nur so kann das Anschauungsmittel in allen argumentativen Tätigkeiten (vgl. Kap. 2.4.1) genutzt werden. Vor diesem Hintergrund ist es notwendig sich aus theoretischer Perspektive sowohl mit unterschiedlichen Strukturierungsarten von Materialien als auch mit den Funktionen, die Anschauungsmittel einnehmen können, auseinanderzusetzen.

3.4.1 Strukturierungsgrade von Anschauungsmitteln

Anschauungsmittel haben im Mathematikunterricht vor allem die Aufgabe abstrakte mathematische Inhalte zu repräsentieren. Das Anschauungsmittel, als Träger mathematischer Strukturen, stellt dabei wesentliche Elemente eines mathematischen Begriffs dar und ermöglicht gleichzeitig handelndes Mathematiktreiben. Demnach müssen Anschauungsmittel ebenfalls Strukturen enthalten beziehungsweise eine strukturierte Darstellung ermöglichen. In der mathematikdidaktischen Literatur werden drei Strukturierungsarten unterschieden: unstrukturierte Materialien, strukturierte Materialien sowie Mischformen (Radatz, Schipper, Dröge, & Ebeling, 1996, S 35f.).

Unstrukturierte Materialen sind lose Materialien, wie zum Beispiel Wendeplättchen oder Steckwürfel. Im Material selbst findet sich dabei keine vorgegebene Strukturierung. Dies führt dazu, dass häufig der kardinale Aspekt im Vordergrund steht und die einzelnen Elemente als kardinale Einheiten aufgefasst werden. Zahlen werden dann durch die entsprechende Anzahl an Elementen des jeweiligen Materials dargestellt (Radatz et al., 1996, S. 35f.; Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 77; Schulz, 2014, S. 69f.). Bei einem kardinalen Blick auf unstrukturierte Anschauungsmittel wird jedem Wendeplättchen der Wert ‚eins' zugeschrieben. Eine ausschließliche Fokussierung des kardinalen Aspekts unstrukturierter Materialien wäre an dieser Stelle zu kurz gedacht. So weisen Radatz et al. (1996) in diesem Kontext zu Recht darauf hin, dass ein wesentliches Kennzeichen unstrukturierter Materialien die Merkmalsarmut ist und es dadurch möglich ist, dass die Materialien zu „Repräsentanten für alle möglichen Gegenstände, Personen, Tiere werden" (Radatz et al., 1996, S. 35). Dies gilt allerdings nicht nur für das Repräsentieren von anderen Gegenständen, Personen oder Tieren. Vielmehr kann ein einzelnes Element im Sinne der theoretischen Mehrdeutigkeit (vgl. Kap. 1.4.1) verschiedene Zahlen repräsentieren. So kann ein Wendeplättchen die Zahl Eins darstellen, aber auch die Zahl Zehn. Auch kann ein Wendeplättchen für eine beliebige Zahl stehen und somit als Variable genutzt werden. Unter unstrukturierten Materialien werden somit im folgenden Anschauungsmittel verstanden, die in sich noch keine vorgegebene Struktur aufweisen.

„Bei *strukturierten Materialien* werden Zahlen nicht durch die entsprechende Anzahl einzelner Elemente dargestellt, sondern durch Zusammenfassungen der Einzelobjekte zu größeren Ganzheiten" (Radatz et al., 1996, S. 35; Hervorhebung F.W.). Dies ist zum Beispiel bei Cuisenaire- oder Rechenstäben aber auch dem Zahlenstrahl der Fall. Die einzelnen Einheiten sind untrennbar miteinander verbunden. Scherer und Moser Opitz sprechen in diesem Fall von *strukturierten Materialien mit festen Einheiten* (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 76f.). Diese Begrifflichkeit ist durchaus irreführend. Durch die Struktur wird festgelegt, wie

viele Einzelobjekte zu einer Ganzheit zusammengefasst werden. Der Wert eines Einzelobjektes kann aber auch hier im Sinne der theoretischen Mehrdeutigkeit flexibel gedeutet werden. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit der Begriff *strukturierte Materialien* verwendet und zwar immer dann, wenn in dem Material selbst eine Struktur vorgegeben ist, welche nicht direkt manipulierbar ist, wie zum Beispiel die Hundertertafel. Diese geben eine Strukturierung vor, können allerdings nicht direkt manipuliert werden. Eine Manipulation ist lediglich durch Abdecken, Wegstreichen und Hinzufügen möglich.
Unter *Mischformen* werden strukturierte Materialien verstanden, die „eine Handhabung als Ganzheiten erlauben“ aber auch „durchaus die Möglichkeit eröffnen mit den einzelnen konstituierenden Bausteinen [...] zu operieren“ (Radatz et al., 1996, S. 35), wie zum Beispiel Plättchen auf dem Zwanzigerfeld. Das Zwanzigerfeld an sich weist eine vorgegebene Strukturierung auf, dennoch kann mit den einzelnen Wendeplättchen als konstituierende Bausteine gehandelt werden. Auch der Rechenrahmen stellt eine Mischform dar. Es lässt sich eine vorgegebene Strukturierung erkennen, dennoch kann flexibel mit dem Material gehandelt werden. Die Zahl Acht kann durch das Ausführen einer einzigen Handlung geschoben beziehungsweise dargestellt werden. Gleichzeitig ermöglicht das Material auch, die einzelnen Elemente nacheinander zu verschieben. Es ist erneut anzumerken, dass die einzelnen Elemente nicht ausschließlich der Zahl Eins entsprechen müssen, so kann eine Perle im Rechenrahmen auch den Wert 100 darstellen. Unter Mischformen werden demnach Anschauungsmittel verstanden, die zwar eine vorgegebene Strukturierung aufweisen, dennoch das Handeln mit einzelnen Elementen erlauben.
Trotz der Trennung in strukturierte und unstrukturierte Materialien sowie Mischformen darf der grundlegende Strukturierungsgrad der Anschauungsmittel nicht mit der strukturierten oder unstrukturierten Nutzung beziehungsweise kindlichen Deutung dieser gleichgesetzt werden. Strukturierte Materialien beinhalten eine intendierte Struktur. Das heißt aber nicht, dass die intendierten Strukturen vom wahrnehmenden Individuum auch erkannt und genutzt wird. So konnte Söbbeke (2005) nachweisen, dass eine ausschließliche Nutzung intendierter Strukturen eine hohe visuelle Strukturierungsfähigkeit erfordert und nicht alle Kinder intendierte Strukturen nutzen (vgl. Kap. 1.4.2). Somit nutzen Kinder in der Grundschule neben den durch das Material vorgegebenen Strukturen auch individuelle Strukturierungen. Die intendierten Strukturierungen sind vielmehr als ein Angebot zu verstehen, die flexibel gedeutet und umgedeutet werden können. Dabei sind diese nicht völlig willkürlich, sondern sind der Erschließung des Materials und dem damit verbundenen mathematischen Inhalt dienlich (Söbbeke, 2005, S. 123). Demnach können strukturierte Materialien beziehungsweise Mischformen im Sinne der intendierten Strukturen genutzt und gedeutet werden.

Neben dieser Nutzung und Deutung sind aber auch vielfältige individuelle Deutungen möglich. Unstrukturierte Materialien wie zum Beispiel Wendeplättchen beinhalten an sich zunächst keine intendierte Strukturierung. Dies ist allerdings nicht gleichzusetzen mit einer ausschließlich unstrukturierten Nutzungsweise. So bieten Wendeplättchen vielfältiges Potential mit ihnen strukturierte Punktmuster zu legen (vgl. Kap. 1.3). Demnach darf nicht vom Strukturierungsgrad des Anschauungsmittels auf die Art und Weise der Nutzung der Strukturen geschlossen werden. Strukturen werden aktiv in ein Anschauungsmittel hineingedeutet, so dass auch mit unstrukturierten Materialien strukturierte Darstellungen erzeugt werden können.

3.4.2 Funktionen von Anschauungsmitteln

Anschauungsmittel sind ein wesentliches Element im Lernprozess des Mathematikunterrichts und zentral in unterschiedlichen Inhaltsbereichen. So vielfältig wie die Art der Strukturierungen sind, ist auch der Einsatz der Anschauungsmittel beim Lehren und Lernen von Mathematik. Um hierfür geeignete Materialien und Veranschaulichungen auswählen zu können, ist es von Relevanz, sich der unterschiedlichen Funktionen bewusst zu sein. Aus diesem Grund wird im Folgenden auf die einzelnen Funktionen eingegangen, die Anschauungsmittel im mathematischen Lehr- und Lernprozess einnehmen können. In der mathematikdidaktischen Literatur finden sich unterschiedliche Ausdifferenzierungen der Funktionen von Anschauungsmitteln innerhalb des Mathematiklernens. Diese unterscheiden sich von der begrifflichen Bezeichnung, zeigen aber deutliche Parallelen in der inhaltlichen Ausgestaltung, so dass sie im Folgenden zusammenfassend dargestellt werden. Diese theoretische Unterscheidung in verschiedene Funktionen ist dabei nicht als trennscharf zu verstehen. Vielmehr sind diese Funktionen miteinander vernetzt und bedingen sich gegenseitig. Aus diesem Grund wird im Folgenden zunächst jede Funktion einzeln betrachtet und im Anschluss an einem Beispiel des Drittklässlers Lasse aus der vorliegenden Studie illustriert, inwiefern die drei Funktionen in Beziehung zueinander stehen können.

Veranschaulichungen zum Aufbau von Zahlvorstellungen

Ein wichtiges Ziel im Mathematikunterricht der Grundschule ist der Aufbau tragfähiger Vorstellungen von Zahlen und deren Beziehungen sowie eine tragfähige Zahlraumorientierung (Krauthausen, 2018, S. 327; Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 78; Schulz, 2014, S. 71). Anschauungsmittel können dabei eine wesentliche Rolle einnehmen, indem konkrete Materialien und ikonische Darstellungen genutzt werden, um Zahlen darzustellen (Krauthausen, 2018, S. 327). Dabei können der kardinale aber auch der ordinale Zahlaspekt fokussiert werden. Steht die Kardinalität im Fokus (Krauthausen, 2018, S. 327; Schulz, 2014, S. 72), so wird die Zahl durch die konkrete Anzahl an Elementen dargestellt, zum Beispiel wird die Sieben durch sieben Wendeplättchen repräsentiert. Im Sinne der quasi-simultanen Anzahlerfassung und mit dem Blick auf das dekadische Stellenwertsystem ist es sinnvoll, bereits hier entsprechende Fünfer- und Zehnerstrukturen zu nutzen, wie zum Beispiel beim Zwanzigerfeld oder der Hundertertafel. Im weiteren Verlauf können Zahlen auch unabhängig von der konkreten Anzahl an Plättchen dargestellt werden, indem die Wendeplättchen in Kombination mit der Stellenwerttafel genutzt werden (Schulz, 2014, S. 72). Die konkrete Anzahl an Wendeplättchen ist demnach nicht (immer) gleichzusetzen mit der zu repräsentierenden Zahl, sondern die Wendeplättchen müssen im System der Stellenwerttafel gedeutet werden. Fünf Plättchen können demnach ganz unterschiedliche Zahlen repräsentieren, zum Beispiel 32 (3Z und 2E), 401 (4H und 1E) oder 11111 (1ZT, 1T, 1H, 1Z, 1E) (vgl. Abb. 3.4).

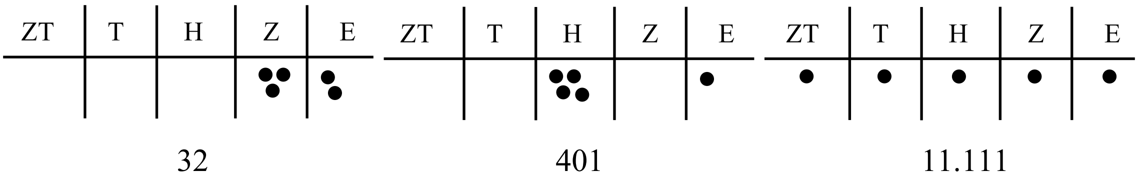


Abbildung 3.4: Fünf Plättchen in der Stellenwerttafel

Fokussiert man den ordinalen Zahlaspekt, so können Zahlbeziehungen betrachtet werden, indem die Position einer bestimmten Zahl in der ordinalen Anordnung fokussiert wird, zum Beispiel in einem Ausschnitt aus der Hundertertafel oder dem Zahlenstrahl (Schulz, 2014, S. 72). Hierbei ist es zentral, dass die einzelnen Zahlaspekte aber auch die unterschiedlichen Darstellungsweisen von Zahlen und ihren Beziehungen nicht isoliert voneinander thematisiert werden. Nur durch eine Verzahnung unterschiedlicher Darstellung ist eine individuelle Förderung möglich (Scherer, 2005, S. 18).

Die Möglichkeit Zahlen durch Veranschaulichungen zu repräsentieren ist grundlegend für den Einsatz von Anschauungsmitteln im Arithmetikunterricht. Dies ermöglicht die Repräsentation von Rechenoperationen und damit verbunden auch die Anbahnung beziehungsweise den Aufbau von Operationsvorstellungen. Auch die, für die vorliegende Arbeit wesentliche, Thematisierung struktureller Zahleigenschaften, wie zum Beispiel der Eigenschaften gerade und ungerade oder teilbar durch drei, erfordert eine Darstellung von Zahlen. So wird in der nebenstehenden Darstellung die Zahl Acht durch die konkrete Anzahl an Einzelelementen repräsentiert. Im Kontext der Zahleigenschaft der Paritäten werden aber auch wesentliche Aspekte dieser Darstellung durch die Anordnung dargestellt. In diesem

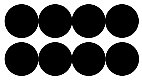


Abbildung 3.5: Darstellung der Zahl 8 unter Berücksichtigung der Eigenschaft ‚gerade'

Fall nämlich die doppelreihige Darstellung zweier gleichstrukturierter Reihen. Demnach handelt es sich zum einen um die Darstellung der Zahl Acht und zum anderen um eine prototypische Darstellung einer geraden Zahl (vgl. Abb. 3.5).

Veranschaulichungen zum Aufbau von Operationsvorstellung

Neben dem Aufbau einer tragfähigen Zahlvorstellung ist der Aufbau von tragfähigen Operationsvorstellungen ein wichtiges Ziel im Mathematikunterricht der Grundschule. Grundlegend für die Veranschaulichung von Rechenoperationen ist es, dass Zahlen durch Anschauungsmittel dargestellt werden können.

Das Darstellen von Rechnungen und die Lösungsfindung durch das konkrete Handeln am Material, ermöglicht es Kindern bereits früh Ergebnisse zu ermitteln und Anschauungsmittel als Lösungshilfe (Schipper, 2009, S. 290) beziehungsweise Mittel zum Rechnen (Krauthausen, 2018, S. 328) zu nutzen. Für einen tragfähigen Aufbau von Operationsvorstellungen ist es nicht ausreichend die Nutzung des Materials auf die reine Lösungsfindung zu beschränken. Vielmehr ist es von Bedeutung, dass die in den Handlungen enthaltene Struktur bewusst gemacht wird (Schipper, 2009, S. 223). Hierfür ist es notwendig, dass unterschiedliche Lösungswege zugelassen werden (Radatz et al., 1996, S. 100ff.). So kann ein und derselbe Lösungsweg an unterschiedlichen Materialien veranschaulicht werden oder unterschiedliche Lösungswege an einem geeigneten Material (Krauthausen, 2018, S. 328f.). So stehen nicht die Ergebnisse, sondern die Struktur der Handlungen im Fokus und ein verständnisorientiertes Lernen wird ermöglicht (Schipper, 2009, S. 291).

Auch die Darstellung von Rechenoperationen zeigt sich für das vorliegende Forschungsprojekt als relevant, denn auch die strukturellen Eigenschaften von Zahlen stehen in unmittelbarer Verbindung zu Rechenoperationen. Die Teilbarkeit durch drei spricht explizit die Division an. Gleiches gilt für die Paritäten, die im Sinne der Teilbarkeit durch zwei verstanden werden können. Zudem fokussieren die zu begründenden allgemeinen Aussagen die Addition.

Veranschaulichungen als Kommunikations-, Argumentations- und Beweismittel

Bereits in Kapitel zwei wurde deutlich, dass das Argumentieren ein zentraler Bestandteil des Mathematiklernens ist und gleichzeitig ein Lernstoff für die Kinder darstellt. Dabei muss die Art und Weise der Argumentation an die Lernausgangslage der Kinder angepasst werden. Da Kinder (noch) nicht über die Sprache der Algebra verfügen und die sprachliche Entwicklung von Alltags- und Fachsprache noch nicht abgeschlossen ist, ist ein weiteres Kommunikationswerkzeug nötig, um mit Kindern zu argumentieren (Lorenz, 2007, S. 16).

Anschauungsmittel können auf zwei Arten ein solches Kommunikationswerkzeug darstellen. Sie können einerseits Ausgangspunkt von Argumentationen sein, andererseits können sie auch als unmittelbares Mittel zur Argumentation und Kommunikation genutzt werden (vgl. Kap. 2.4).

Durch den Einsatz von Anschauungsmitteln können Lösungsversuche und Lösungswege dargestellt und so dem Denken der Anderen zugänglich gemacht werden. Dabei ist die „Reflexion über den eigenen Weg durch Versprachlichung [auch] geeignet, [um] sich der Strukturen in den bisher mehr oder weniger automatisiert ablaufenden Handlungen bewusster zu werden“ (Schipper, 2009, S. 291). Ein Bewusstwerden der ablaufenden Handlung ist notwendig, damit Kinder ihre Denk- und Lösungswege versprachlichen können (Bruner, 1974, S. 110). Sprache hat demnach nicht nur eine kommunikative Funktion, sondern auch eine kognitive Funktion, denn durch die Darstellung eigener Denkwege findet eine intensive Auseinandersetzung mit diesen statt und Denkprozesse können angeregt werden (Maier & Schweiger, 1999). Somit kann das Versprachlichen von eigenen Lösungswegen einen Denk- und Erkenntnisprozess in Gang setzen.

Gleichzeitig bietet die Darstellung eigener Lösungs- und Denkwege auch das Potential voneinander zu lernen, indem gemeinsam unterschiedliche Denk- und Darstellungsweisen reflektiert werden. Dies kann zum Beispiel initiiert werden, indem zwei unterschiedliche Lösungs- und Denkwege gegenübergestellt, hinterfragt und kollektive Argumentationen angeregt werden, in denen die Darstellungen zentral sind. Dabei kann auch ausgehandelt werden, wie solche Darstellungen in mathematischen Argumentationen genutzt werden dürfen beziehungsweise müssen (vgl. Kap 2.3). So können Anschauungsmittel Ausgangspunkt für Argumentationen darstellen. Ebenso können Anschauungsmittel als konkrete Argumentationsmittel benutzt werden, wie es zum Beispiel bei inhaltlich-anschaulichen Beweisen (vgl. Kap. 2.4) der Fall ist. Hierbei stellen Veranschaulichungen die Repräsentationsform dar, in der die Argumentation geführt wird.

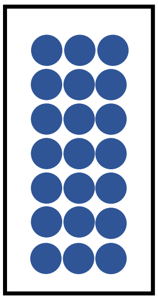
Für das Argumentieren an und mit Anschauungsmitteln ist es wichtig, die Ebene der bloßen Handlung und der konkreten Objekte zu verlassen. Es muss eine Meta-Ebene eingenommen und das Allgemeine in das Konkrete hineingedeutet werden (Schipper, 2009, S. 292; Schulz, 2014, S. 75).

Veranschaulichungen können somit zwei Funktionen im Argumentationsprozess einnehmen. Zum einen können sie Ausgangspunkt für Argumentation und Kommunikation sein und zum anderen können sie die zentrale Repräsentationsform sein, in der die Argumentation hauptsächlich oder zum Teil geführt wird. Dies ist nicht isoliert von den anderen Funktionen zu sehen, sondern steht in unmittelbarem Zusammenhang zu diesen. Das

Kommunizieren über Mathematik und somit auch das Argumentieren setzt einen mathematischen Inhalt voraus, über den argumentiert wird. Im Arithmetikunterricht der Grundschule handelt es sich vor allem um Aspekte, die der Zahl- sowie Operationsvorstellung zuzuordnen ist, was deutlich macht, dass die bisher genannten Funktionen in engem Zusammenhang stehen. In Kapitel zwei wurde dargelegt, dass Argumentationsprozesse immer auch Begriffsbildungsprozesse sind, dadurch werden auch Lernprozesse initiiert. Dies gilt auch für Argumentationsprozesse, die durch Anschauungsmittel initiiert oder mit diesen geführt werden. Wird ein Anschauungsmittel demnach im Kontext des Argumentierens verwendet, so steht dies in unmittelbarem Bezug zu Lernprozessen in unterschiedlichen arithmetischen Bereichen und ist demnach auch Ausgangspunkt von mathematischen Begriffsbildungsprozessen. Im vorliegenden Forschungsprojekt sind beide Ausprägungen dieser Funktion relevant. Zum einen sind Veranschaulichungen Ausgangspunkt für die Frage, ob eine Zahl gerade oder ungerade ist beziehungsweise ob eine Zahl durch drei teilbar ist. Sie sind somit Teil der von der Interviewerin als begründungsbedürftig deklarierten Aussage. Gleichzeitig werden die Kinder aufgefordert, Argumentationen mit Wendeplättchen und Ikonisierungen darzustellen und zu entwickeln. Innerhalb der Analyse (Kap. 6) wird untersucht, welche epistemologische Bedeutung die Veranschaulichungen in Argumentationsprozessen einnehmen. Dabei wird untersucht ob und inwiefern die Kinder die Veranschaulichungen in diesen auch als Argumentationsmittel nutzen, wenn das Anschauungsmittel einen Teil der begründungsbedürftigen Aussage darstellt.

Vernetzung unterschiedlicher Funktionen von Anschauungsmittel – ein Beispiel

In der theoretischen Auseinandersetzung mit den Funktionen von Anschauungsmitteln wurde dargelegt, dass Anschauungsmittel als Mittel zur Zahldarstellung sowie Darstellung von Rechenoperationen und als Argumentations- und Beweismittel eingesetzt werden können. Dabei sind diese unterschiedlichen Funktionen aus theoretischer Perspektive unterscheidbar, lassen sich in der Auseinandersetzung mit Anschauungsmitteln dennoch nicht isoliert voneinander betrachten. Dies wird im Folgenden an einem Beispiel des Drittklässlers Lasse aus der vorliegenden Studie illustriert. Dieser deutet das Punktmuster (vgl. Abb. 3.6) hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei.



Lasse: „Also *[schiebt das Punktmuster vor sich]*. Das ist einmal durch drei teilbar, weil hier unten *[wischt unter dem Punktmuster hin und her]* immer drei sind."

Abbildung 3.6: Verzahnung der Funktionen von Anschauungsmitteln - ein Beispiel

Im vorliegenden Beispiel (vgl. Abb. 3.6) begründet Lasse, warum die durch das Punktmuster dargestellte Zahl durch drei teilbar ist. Dabei zeigt sich, dass im Deutungs- und Argumentationsprozess alle drei Funktionen von Anschauungsmitteln miteinander verzahnt sind.
Grundlegend für den Deutungsprozess ist, dass eine Zahl, in diesem Fall die 21, durch das vorliegende Punktmuster dargestellt wird. Demnach dient das Anschauungsmittel an dieser Stelle auch als *Mittel zur Zahldarstellung*. Lasse deutet das Punktmuster hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei. Dabei wird die Rechenoperation der Division von Lasse in die Darstellung hineingedeutet. Durch die strukturelle Anordnung der Punkte wird an dieser Stelle nämlich nicht nur die Zahl an sich dargestellt. Vielmehr wird durch die rechteckige Anordnung des Punktmusters, mit den Seitenlängen drei und sieben, auch die Multiplikationsaufgabe drei mal sieben gleich 21 und demnach eine *Rechenoperation dargestellt*. Da es sich bei der Division um die Umkehroperation der Multiplikation handelt, ist auch diese in die Darstellung hineindeutbar. So lassen sich drei gleichlange Reihen in die Darstellung hineindeuten. Diese können als Teilmengen gedeutet werden, die in einem verteilenden Kontext bei der Division durch drei erzeugt werden. Gleichzeitig lassen sich sieben Dreierreihen in die Darstellung hineinsehen. Diese können als Teilmengen gedeutet werden, die innerhalb eines aufteilenden Kontextes bei der Division durch drei erzeugt werden.
Da Lasse aufgefordert wird, dass Punktmuster hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei zu deuten, dient das Anschauungsmittel an dieser Stelle als Ausgangspunkt der Argumentation. Gleichzeitig nutzt Lasse dieses Anschauungsmittel als *Argumentationsmittel*. Er bezieht sich auf eine konkrete strukturelle Eigenschaft des Punktmusters und zwar, dass „hier unten immer drei sind". Er nutzt somit das Argumentationsmittel als Argumentationsgrundlage. Zudem ist seine Aussage ausschließlich in Verbindung mit dem Anschauungsmittel verständlich, denn der Verweis „hier unten" benötigt den konkreten Bezug zur Veranschaulichung.
Demnach zeigt sich an diesem Beispiel, dass die einzelnen Funktionen von Anschauungsmitteln aus theoretischer Perspektive unterscheidbar sind, in der mathematischen Tätigkeiten aber dennoch miteinander verzahnt sind.

Veranschaulichungen als Ausgangspunkt für Lernprozesse

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, dass Anschauungsmittel im Arithmetikunterricht wesentlich zur Entwicklung der Zahlvorstellung, der Zahlraumorientierung sowie zur Entwicklung von Operationsvorstellungen beitragen können. Dabei bieten Veranschaulichungen, zum Beispiel in Form von räumlichen Mustern, das Potential inhaltsbezogene Kompetenzen, unter anderem im Bereich „Zahlen und Operationen" (KMK, 2005b, S. 8ff.), auszubilden. Gleichzeitig können Anschauungsmittel als Darstellungsmittel Kommunikations- und Argumentationsprozesse gewinnbringend unterstützen und initiieren. Das Potential beschränkt sich demnach nicht nur auf die Förderung von Kompetenzen aus dem inhaltsbezogenen Bereich, sondern auch auf die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen des ‚Kommunizierens', des ‚Argumentierens' sowie des ‚Darstellens von Mathematik' (KMK, 2005b, S. 7ff.).

Eine Entwicklung von tragfähigen mathematischen Vorstellungen und Strategien vollzieht sich dabei nicht automatisch, sondern es bedarf der Fokussierung der wesentlichen Strukturen der Veranschaulichungen und der Handlungen mit und an diesen (Lorenz, 2013; Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 78ff.; Schulz, 2014, S. 76ff.). Hierbei handelt es sich nach Miller (Miller, 1986, 2006) um den Erwerb von strukturellem Wissen (vgl. Kap. 2.3).

Die von den Kindern individuell vorgenommenen Deutungen der Veranschaulichungen und Handlungen werden mit neuen Deutungen in Beziehung gesetzt. Dadurch wird das bereits vorhandene Wissen angereichert und neue Denkstrukturen entwickelt (ebd.). Um Kinder in diesem Lernprozess zu unterstützen, ist es unerlässlich, die kindlichen Deutungen genau zu untersuchen, um zu verstehen, welche Strukturen die Kinder in die Darstellung hineindeuten und welche strukturellen Deutungen innerhalb der kindlichen Argumentationsprozesse genutzt werden.

4 Entwicklung der Forschungsfragen

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass Veranschaulichungen aus unterschiedlichen Gründen wesentlicher Bestandteil der Mathematik und des Mathematiklernens sind. Dabei treten Veranschaulichungen in unterschiedlichen Repräsentationsformen in Erscheinung und können unterschiedliche Funktionen im Mathematikunterricht einnehmen. Betrachtet man dies unter der theoretischen Perspektive der Muster und Strukturen beziehungsweise des Argumentierens, so zeigt sich, dass Veranschaulichungen eng mit beiden theoretischen Bereichen verbunden sind.

Muster und Strukturen konstituieren die Mathematik (Devlin, 1994, 2002b; Sawyer, 1955; Walther et al., 2007, S. 19; Wittmann & Müller, 2005, S. 42), sind dabei aber auch besonderer Natur. Sie sind keine Objekte oder Gegenstände, die betrachtet werden können, sondern abstrakt und bestehen aus Relationen und Beziehungen (Otte, 1983, S. 190; Söbbeke, 2005, S. 17; Steinbring, 2009) und aus diesem Grund bedarf es der Veranschaulichung dieser Muster und Strukturen, um dem Denken zugänglich gemacht zu werden (Dörfler, 1988, S. 111; Otte, 1983, S. 190). Im vorliegenden Forschungsprojekt stehen arithmetische Inhalte im Zentrum des Interesses. So werden die Kinder dazu angehalten im Kontext der Paritäten sowie der Teilbarkeit durch drei zu argumentieren. Hierfür bieten räumliche Muster, als Form der Veranschaulichung, ein großes Potential. Da es sich bei den Paritäten und der Teilbarkeit durch drei um abstrakte mathematische Inhalte handelt, die aus Beziehungen und Relationen innerhalb und zwischen Zahlen bestehen, bedarf es der Visualisierung, um dem Denken der Kinder zugänglich zu werden. Im vorliegenden Forschungsprojekt werden diese arithmetischen Inhalte in Form geometrischer Visualisierungen dargestellt. Dabei hat diese Form der Visualisierung und des Mathematiktreibens eine lange Tradition. Seit Anbeginn der Mathematik bieten zum Beispiel Punktmuster als Veranschaulichungen ein effektives Mittel, um sich mit arithmetischen Inhalten auseinanderzusetzen (Damerow & Lefévre, 1981, S. 163f.; Steinweg, 2006b, S. 72; Wittmann & Ziegenbalg, 2007, S. 35f.). So lassen sich die strukturellen Zahleigenschaften der Parität, der Teilbarkeit durch drei sowie deren allgemeingültigen Beziehungen durch Punktmuster visualisieren. Innerhalb der

Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt reicht es nicht aus, den Lernenden die Veranschaulichungen lediglich zu präsentieren, denn zum einen sind die Bilder nicht selbsterklärend (Böttinger, 2006; Böttinger & Söbbeke, 2009; J.H. Lorenz, 1992; Lüken, 2012, S. 76; Söbbeke, 2005, S.23ff.; Voigt, 1993), zum anderen sind Veranschaulichungen immer mehrdeutig (Deutscher, 2012, S. 82; Lüken, 2012, S. 22; Söbbeke, 2005; Steinweg, 2006a, S. 15) (vgl. auch Kap. 1.4.1). Das heißt, Kinder fokussieren nicht notwendigerweise die für den mathematischen Inhalt wesentlichen Strukturen, obwohl genau die Fokussierung wesentlicher Strukturen des Inhalts notwendig ist, um das Anschauungsmittel gewinnbringend im Mathematikunterricht einsetzen zu können. Dabei kann es auch notwendig sein, von der Konkretheit des Materials abzusehen und die veranschaulichten Relationen und Beziehungen in den Blick zu nehmen (Böttinger & Söbbeke, 2009). Nur so ist mit dem Blick auf Lehren und Lernen von Mathematik ein Erkenntnisgewinn möglich. Da Kinder in der Grundschule (noch) mathematische Novizen sind und erst in den Umgang mit Anschauungsmitteln herangeführt werden müssen, bedarf es für die Fokussierung der zentralen strukturellen Merkmale gemeinsame Aushandlungsprozesse. In diesen müssen Kinder die von ihnen eingenommene Sicht auf die Veranschaulichung durch weitere und neue Sichtweisen ergänzen, um (alle) wesentlichen mathematischen Strukturen im Argumentationsprozess zu berücksichtigen. Kinder in der Grundschule sind aber nicht (immer) dazu in der Lage neue Perspektiven von sich aus einzunehmen. Vielmehr müssen die Kinder zu einem Perspektivwechsel angeregt werden. Eben ein solches Anregen eines Perspektivwechsels in Form des Ergänzens und Anreicherns von vorhandenen Sichtweisen mit neuen Sichtweisen ist Kern von kollektiven Argumentationen. Nur so können fundamentale Lernprozesse initiiert werden (Miller, 1986, 2006).

Wenn also räumliche Muster als Veranschaulichung für abstrakte mathematische Strukturen eingesetzt werden und die Kinder in interaktiven Aushandlungen an Argumentationsprozessen teilnehmen, macht dies zwei Dinge erforderlich:

Erstens müssen die räumlichen Muster immer im Kontext der betrachteten strukturellen Eigenschaft gedeutet werden. Zweitens müssen diese räumlichen Muster als Argumentationsmittel in den Argumentationsprozess integriert werden.

In der aktuellen mathematikdidaktischen Forschung fehlen allerdings noch Erkenntnisse, wie genau Kinder mit diesen Anforderungen umgehen. Dieses Forschungsdesiderat führt zu den Forschungsfragen, die der vorliegenden Arbeit zugrunde liegen:

1. Welche epistemologische Bedeutung haben Anschauungsmittel im Argumentationsprozess?
2. Wie deuten Kinder (allgemeingültige) arithmetische Strukturen in Punktdarstellungen im Argumentationsprozess?
3. Welche begrifflichen Deutungen zeigen sich innerhalb des Argumentationsprozesses?

5 Forschungsdesign

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die theoretische Grundlage des vorliegenden Forschungsprojekts dargelegt (Kap. 1-3) und die zentralen Forschungsfragen hergeleitet (Kap. 4.1) sowie das Theoriekonstrukt zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen erläutert und mit den Forschungsfragen in Beziehung gesetzt (Kap. 4.2).
In dem nachfolgenden Kapitel wird das Untersuchungsdesign der vorliegenden Studie offengelegt und dargestellt. Hierzu wird zunächst der methodologische Rahmen der Interviewstudie geklärt (Kap. 5.1). Anschließend wird die Konzeption dieser erläutert (Kap.5.2). Dafür wird zuerst die Forschungsmethode ‚klinisches Interview' mit ihren Leitprinzipien dargestellt (Kap. 5.2.1). Darauf aufbauend wird die Auswahl des mathematischen Inhalts (Kap. 5.2.2) und die Auswahl des Anschauungsmittels (Kap. 5.2.3) begründet, um anschließend den Interviewaufbau mit den wesentlichen Gestaltungsmerkmalen darzulegen (Kap. 5.2.3). In Kapitel 5.3 wird die Durchführung der Interviews und die Dokumentation der Daten beschrieben. Abschließend wird die Datenauswertung kurz angerissen und im darauffolgenden sechsten Kapitel eingehend erläutert.

5.1 Methodologischer Rahmen

In der empirischen Forschung lassen sich unterschiedliche forschungsmethodische Ansätze beschreiben. Dabei ist die Wahl des methodischen Vorgehens immer abhängig von dem zugrundeliegenden Forschungsinteresse (Döring & Bortz, 2016, S. 17).
In der vorliegenden Arbeit liegt dieses in der möglichst differenzierten Beschreibung kindlicher Deutungen und Nutzungen von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess. Dabei steht im Fokus welche Rolle das Anschauungsmittel im Argumentationsprozess einnimmt, welche Strukturen die Kinder in Anschauungsmittel hineindeuten und inwiefern dies die kindlichen Argumentationen und Begriffsbildungsprozesse beeinflusst. Demnach ist es nicht ausreichend, lediglich die Ergebnisse der Kinder in den Blick zu nehmen. Vielmehr ist

es notwendig den gesamten Argumentationsprozess zu untersuchen, um der Vielschichtigkeit der kindlichen Deutungen gerecht zu werden. Aus diesem Grund wird ein Ansatz gewählt, der der qualitativen Forschung zuzuordnen ist, denn durch rein quantitative Verfahren ist eine Beantwortung der Forschungsfragen nicht möglich[16]. Dabei lässt sich das der Arbeit zugrundeliegende Forschungsprojekt der interpretativen Unterrichtsforschung zuordnen (vgl. u.a. Bauersfeld, 1982; Beck & Maier, 1994; Cobb & Bauersfeld, 1995; H. Maier & Voigt, 1991). Dieser Ansatz ermöglicht die oben beschriebene differenzierte Betrachtung und Analyse kindlicher Argumentations- und Deutungsprozesse. Hierfür wurde ein Analyseinstrument entwickelt, durch das eine epistemologische Perspektive auf Argumentationen ermöglicht wird. Dies wird an dieser Stelle (noch) nicht näher ausgeführt, sondern in Kapitel sechs differenziert beschrieben und erläutert.

5.2 Aufbau der Interviewstudie

5.2.1 Das klinische Interview

Um dem bereits dargestellten Forschungsinteresse gerecht zu werden, wurde die Datenerhebung mit der Methode des halbstandardisierten klinischen Interviews durchgeführt. Hierbei handelt es sich um eine in der Mathematikdidaktik weit verbreitete Methode zur Erhebung von individuellen Denkprozessen von Kindern (Beck & Maier, 1993; Selter & Spiegel, 1997; Wittmann, 1982).

Das klinische Interview geht auf Arbeiten von Jean Piaget zurück, der diese Erhebungsmethode der Psychoanalytik angelehnt hat. Das Ziel ist die Offenlegung von Denkprozessen. Da aber Kinder noch nicht dazu in der Lage sind, ihre Gedankengänge vollständig zu verbalisieren, entwickelte er die *revidierte klinische Methode*, in der nicht nur sprachliche Äußerungen im Fokus der Erhebung standen, sondern auch Handlungen (am Material) in die Analyse einbezogen wurden (Selter & Spiegel, 1997, S. 101). Da in der aktuellen mathematikdidaktischen Forschung diese Terminologie nicht unterschieden wird, wird im Folgenden von *klinischer Methode* gesprochen, wenn die *revidierte klinische Methode* gemeint ist.

Insbesondere vor dem Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit ist der Einbezug von Handlungen in den Interviewverlauf und die damit verbundenen Analysen unerlässlich. Anschauungsmittel dienen als Kommunikationsmittel und insbesondere die Deutungen und

[16] Auf eine Diskussion quantitativer und qualitativer Forschungsmethoden sowie deren Unterscheidung wird an dieser Stelle verzichtet, vgl. dazu zum Beispiel (Flick 1995, S. 39ff, Lamnek 2010, S. 6ff, Bortz & Döring 2006).

Umdeutungen dieser Veranschaulichungen sind häufig mit deiktischen Kommunikationselementen verbunden, insbesondere dann, wenn sie die sprachlichen Äußerungen unterstützen. Daher ist es essentiell, die Handlungen neben den sprachlichen Äußerungen anzuregen und in der Analyse einzubeziehen.
Zudem wird die Methode des klinischen Interviews auch den besonderen Denkwegen der Kinder gerecht. Da es sich um eine halbstandardisierte Methode handelt, bietet sie aufgrund der Offenheit der Fragestellungen Raum für die individuellen Denkwege der Kinder. Dies stellt die interviewende Person vor die Herausforderung bereits während des Interviews Hypothesen über die Denkwege der Kinder zu treffen, um daran anknüpfend flexible Fragen stellen zu können (Selter & Spiegel, 1997, S. 101). Aus diesem Grund gibt es

> *„wohl einen relativ breiten Konsens darüber, daß diese Interviews nur von Befragenden durchgeführt werden sollten die verantwortlich in den jeweiligen Forschungsprojekten mitarbeiten oder die zumindest mit dem methodischen Ansatz, den Fragestellungen und den Vorarbeiten des Projekts so vertraut sind, daß sie in der Lage sind, Interviews autonom zu führen was unter anderem bedeutet, daß sie in der Lage sind, einzuschätzen, wann es inhaltlich angemessen ist, vom Frageleitfaden abzuweichen, an welchen Stellen es erforderlich ist, intensiver nachzufragen usw." (Hopf, 2012, S. 177).*

So wurden die vorliegenden Interviews von der Autorin selbst durchgeführt. Gleichzeitig ist eine Vergleichbarkeit der Interviews gegeben, da für das Forschungsinteresse relevante Impulse und Fragestellungen durch einen Interviewleitfaden vorgegeben sind (Bohnsack, Marotzki, & Meuser, 2006, S. 114).
Bei der Interviewkonzeption des vorliegenden Forschungsprojektes wurden die zehn Leitprinzipien zur Gestaltung klinischer Interviews von Selter und Spiegel (1997) berücksichtigt. Im Folgenden werden diese erläutert und begründet, inwiefern die einzelnen Prinzipien in der Interviewkonzeption berücksichtigt wurden.

1. *Zielgerichtete Flexibilität*

Um der Individualität der Denkprozesse gerecht zu werden und gleichzeitig eine Vergleichbarkeit der Interviews zu gewährleisten ist eine zielgerichtete Flexibilität notwendig. Das bedeutet, dass zum einen ein vorgegebener Interviewablauf entwickelt wird, der Fragen enthält, um das zentrale Forschungsinteresse zu fokussieren. Gleichzeitig muss so viel Freiraum gegeben sein, dass Fragen gestellt und Impulse gegeben werden können, die sich an den kindlichen Denkprozessen orientieren. „Nur eine flexible Handhabung des Leitfadens eröffnet einen Zugang zu den Sinnzusammenhängen, in denen die [...] Handlungen und

Erfahrungen der Interviewten verortet sind“ (Bohnsack, Geimer, & Meuser, 2018, S. 152). In dem vorliegenden Forschungsprojekt wurde ein Interviewleitfaden entwickelt, der eine festgelegte Reihenfolge einzelner Aufgabenkomplexe beinhaltet. Für diese Aufgabenkomplexe wurden Punktdarstellungen konzipiert, die allen Kindern zur Deutung vorgelegt wurden. Zusätzlichen wurden Fragen entwickelt und im Leitfaden aufgegriffen, die zur weiterführenden Auseinandersetzung mit den Punktdarstellungen anregen. Auch wenn diese Fragen an den individuellen Interviewverlauf angepasst werden durften, ist eine Vergleichbarkeit aufgrund identischer Deutungsanforderungen, in Form der Punktdarstellungen, gegeben. Dabei bietet der Leitfaden auch genug Freiraum, um auf die individuellen Denkwege der Kinder einzugehen, denn die Fragen innerhalb der Interviewverlaufs wurden aufgrund des Interviewverlaufs durch die Interviewerin ausgewählt (vgl. Kap. 5.2).

2. *Angenehme Gesprächsatmosphäre*

Das Schaffen einer angenehmen Gesprächsatmosphäre sehen Spiegel und Selter (1997) als grundlegend an, damit Kinder ihre Denkprozesse vollumfänglich offenlegen. Hierfür ist es notwendig, dass der Interviewеinstieg ein bekanntes Thema oder eine lösbare Aufgabenstellung darstellt. In den dem vorliegenden Forschungsprojekt zugrundliegenden Interviews wurde an das Vorwissen der Kinder angeknüpft. Im Intervieweinstieg wurden die Kinder aufgefordert, ihnen bekannte mathematische Begriffe zu erläutern, indem nach einer Erklärung für gerade und ungerade Zahlen beziehungsweise der Division durch drei gefragt wurde. Die Interviews wurden mit Kindern aus dem dritten Schuljahr geführt, so dass ihnen die Division bereits bekannt war.

3. *Transparenz*

Für eine angenehme Gesprächsatmosphäre muss das Ziel der Interviews offengelegt werden. Den Kindern muss demnach transparent gemacht werden, dass sie sich in keiner Prüfungssituation befinden, sondern, dass man von ihnen Lernen möchte und dass es daher relevant ist, dass sie ihre Denkprozesse darstellen. Hierzu gehört auch, den Kindern zu vermitteln, dass fehlerhafte Antworten oder eine Nichtbeantwortung der Fragen im Interview nicht als negativ zu werten sind. Während des gesamten Interviews ist im Sinne der Transparenz auch auf eine kindgerechte Sprache zu achten. Innerhalb der Interviews wurde diesem Leitprinzip gerecht, denn die Kinder wurden zu Beginn des Interviews über eben diese Punkte aufgeklärt. Zudem wurde sich während des gesamten Interviews an die Wortwahl und die sprachlichen Kompetenzen des Kindes angepasst.

4. Herausforderung statt Belehrung

In den Interviews soll keine Lehr- beziehungsweise Lernsituation geschaffen werden, sondern es sollen Fragen und Deutungsanforderungen gestellt werden, die Kinder dazu anregen ihre Gedanken möglichst offen zu legen. Dieses Leitprinzip wurde berücksichtigt, indem Fragen und Aufgaben entwickelt wurden, in denen Kinder ihre Denk- und Argumentationsweisen darstellen sollen. Sie wurden immer wieder aufgefordert ihre eigene Sicht darzustellen. Die mathematische Korrektheit der Aussagen der Kinder wurde vernachlässigt oder durch das Erzeugen eines kognitiven Konfliktes (vgl. Punkt 6) aufgegriffen.

5. Annahme von Rationalität

Selter und Spiegel (1997) sehen es zudem als unerlässlich an, dass immer damit zu rechnen ist, dass sich die Denkwege der Kinder gänzlich von dem unterscheiden, was bei der Interviewkonzeption antizipiert wurde. Einen Grund sehen sie darin, dass Kinder Fragen durchaus anders verstehen, als sie gemeint sind. Das hat zur Folge, dass Antworten, die zunächst als unpassend betrachtet werden, aus kindlicher Perspektive durchaus sinnvoll sind. Dies macht es notwendig, die Kinder während des Interviews ausreden zu lassen und nachzufragen, wenn nicht antizipierte oder spontan nicht erklärbare Antworten von den Kindern gegeben werden. Ein solches Verhalten wurde auch in den im Zuge des vorliegenden Forschungsprojektes durchgeführten Interviews verlangt.

6. Erzeugung (sozio-)kognitiver Konflikte

Eine weitere Möglichkeit auf unerklärbare oder mathematisch nicht korrekte Antworten zu reagieren ist es, kognitive Konflikte zu erzeugen. Durch gezielte Nachfrage soll ein bewusster Widerspruch im eigenen Denken erzeugt werden, „den [das Kind] nur durch die Veränderung eines der beiden widersprüchlichen Standpunkte ausräumen kann“ (Selter & Spiegel, 1997, S. 108). Auch dieser Umgang mit fehlerhaften Äußerungen von Kindern wurde bei der Interviewdurchführung berücksichtigt. Hierbei wurden Kinder zum Beispiel mit vermeintlichen Äußerungen anderer Kinder konfrontiert, die im Widerspruch zu den eigenen getätigten Aussagen standen.

7. Entdeckung der Langsamkeit

Selter und Spiegel (1997) fordern zudem, den Kindern eine ausreichende Deckzeit einzuräumen und Pausen auszuhalten. Durch zu frühes erneutes Nachfragen können Denkprozesse der Kinder unterbrochen werden und zu einer Nichtbearbeitung oder -beantwortung von Aufgaben führen. In dem vorliegenden Forschungsprojekt war die interviewende Person dazu angehalten, den Kindern genau diese ausreichende Denkzeit zu geben.

8. *Achtung vor Gesprächsroutinen*

Da es sich bei Interviews mit Kindern grundsätzlich um ein Gespräch zwischen einem Erwachsenen und einem Kind handelt, ist es wichtig, sich der häufig unbewusst ablaufenden Gesprächsroutinen bewusst zu werden. Im unterrichtlichen beziehungsweise schulischen Kontext implizieren Kinder ein Nachfragen häufig mit einer falsch gegebenen Antwort und keine Reaktion mit einer stillschweigenden Zustimmung. In den im Rahmen dieses Forschungsprojektes durchgeführten Interviews hat die interviewende Person versucht diesen Gesprächsroutinen entgegenzuwirken. Dies bedeutet auch, dass den Kindern bereits zu Beginn des Interviews mitgeteilt wurde, dass ihnen viele Fragen gestellt werden, die nichts mit einer korrekt oder nicht korrekt beantworteten Frage zu tun haben, sondern vielmehr dem tiefergehenden Verständnis der kindlichen Denk- und Argumentationsweisen dienen.

9. *Relativität der Informationen*

Unter diesem Leitprinzip wird verstanden, dass Kinder manchmal nicht dazu in der Lage sind ihre eigenen Denkprozesse in Worte zu fassen oder schlichtweg ihren Denkprozess nicht mehr gänzlich nachvollziehen können. Auch ist es möglich, dass „eine Äußerung nicht unbedingt den ursprünglichen Lösungsweg reflektiert, sondern im Nachhinein [...] zur Rechtfertigung der Antwort führt“ (Selter & Spiegel, 1997, S. 108). Im vorliegenden Forschungsprojekt war dies von Relevanz, wenn Kinder Aussagen tätigten, deren Entstehungsprozess sie erneut darlegen sollten. Hierbei wurde in der Analyse berücksichtigt, dass man nicht mit Sicherheit sagen kann, dass genau dieser Denkweg auch vorher von dem Kind genauso vollzogen wurde.

10. *Reflexion des Designs*

Auch wenn alle Leitprinzipien bei der Interviewkonzeption berücksichtigt wurden, sehen Selter und Spiegel es als notwendig an, die Interviewkonzeption, das eigene Interviewerverhalten und die Interviewbedingungen kritisch zu reflektieren. Aus diesem Grund wurde eine Pilotierung der Interviews durchgeführt und die dadurch gewonnenen Erkenntnisse in der Konzeption der endgültigen Interviews einbezogen.

Grundsätzlich können klinische Interviews als Einzel- und als Gruppeninterview geführt werden. Auch hier steht die Wahl in Abhängigkeit zu dem Forschungsinteresse. Im vorliegenden Forschungsprojekt wurden Einzelinterviews durchgeführt. Diese bieten gegenüber Gruppeninterviews den Vorteil, dass das einzelne Kind sich nicht von Äußerungen eines anderen Kindes lenken oder einschränken lässt. Nur so kann ein Informationsverlust von einzelnen Gedankengängen des Kinder vermieden werden, so dass in Einzelinterviews detailliertere Informationen über das Denken des einzelnen Kindes gewonnen werden können (Selter & Spiegel, 1997, S. 106). Und genau diese detaillierte Rekonstruktion der Gedankengänge ist innerhalb der Analyse des vorliegenden Forschungsprojektes unerlässlich. Demnach wurden im Rahmen der vorliegenden Studie *halbstandardisierte klinische Einzelinterviews* geführt.

5.2.2 Auswahl des mathematischen Inhalts

Ziel der vorliegenden Studie ist die Untersuchung der kindlichen Nutzung und Deutung von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess. Aus diesem Grund musste ein arithmetischer Inhalt ausgewählt werden, der durch Veranschaulichungen in Form von räumlichen Mustern darstellbar ist. Dieser Inhalt durfte den Kindern nicht gänzlich neu sein, denn der Fokus der Untersuchung liegt nicht auf der Erschließung des mathematischen Inhaltes, sondern auf den Argumentationsprozessen. Gleichwohl es sich bei Grundschulkindern natürlich noch nicht um ein komplett ausgebildetes Begriffsverständnis handelt, müssen grundlegende Kenntnisse des Inhaltes vorausgesetzt werden, um den Kindern eine Teilhabe an Argumentationsprozessen zu ermöglichen. Gleichzeitig war es notwendig, dass dieser Inhalt ergiebig genug ist, um Argumentationsprozesse der Kinder im Kontext von elementaren zahlentheoretischen Sätzen anzuregen.

Ein arithmetischer Inhalt der in vielen Schulbüchern zu finden ist, ist die Thematisierung der geraden und ungeraden Zahlen sowie den damit verbundenen allgemeingültigen Aussagen. Auch wenn sich diese Thematik meistens in den Schulbüchern des ersten Schuljahres findet, zeigte sich in der 2016 durchgeführten Pilotierung, dass diese Thematik für ein drittes Schuljahr geeignet und herausfordernd erscheint. Aus diesem Grund werden in den Interviews sowohl die mathematischen Begriffe ‚gerade' und ‚ungerade' thematisiert als auch die elementare zahlentheoretische Aussage ‚Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade'. Um eine möglichst große Deutungsvielfalt und unterschiedliche Argumentationsweisen zu ermöglichen, schien es sinnvoll, noch einen zweiten Inhaltsbereich auszuwählen, der mit dem ersten möglichst vergleichbar ist. Da bei geraden und ungeraden Zahlen die Teilbarkeit durch zwei im Vordergrund steht, wurde ein weiterer arithmetischer Inhalt gewählt, der ebenfalls der Teilbarkeit zuzuordnen ist und der Lernausgangslage von Drittklässlern entspricht. So wurde in einem zweiten Interview die ‚Teilbarkeit durch drei' sowie die elementare zahlentheoretische Aussage ‚Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch drei teilbar' fokussiert.

5.2.3 Auswahl des Anschauungsmittels

Auf Grundlage der in Kapitel 3 dargelegten Besonderheiten von Anschauungsmitteln und der Ausdifferenzierung unterschiedlicher Arten dieser, wird im Folgenden die Auswahl des Anschauungsmittels in der vorliegenden Studie begründet dargelegt. Dafür werden zunächst allgemeine Überlegungen zur Auswahl des Anschauungsmittels dargestellt und daraus abgeleitet, warum im vorliegenden Forschungsprojekt Plättchen sowie Punktdarstellung ausgewählt wurden.

5.2.3.1 Vorüberlegungen zur Auswahl des Anschauungsmittels

Art der Strukturierung

In der theoretischen Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Darstellungsebenen im Mathematikunterricht wurde dargestellt, dass Anschauungsmittel eine Form dieser Veranschaulichungen darstellen (vgl. Kap. 3.4). Bei der Betrachtung von Anschauungsmitteln kann zwischen verschiedenen Typen unterschieden werden: Den unstrukturierten Materialien, den strukturierten Materialien und den Mischformen (Radatz et al., 1996, S 35f.). Für die vorliegende Interviewstudie ist es notwendig, dass das Anschauungsmittel in zwei unterschiedlichen Weisen genutzt werden kann. Zum einen sollen die Kinder die Möglichkeit erhalten, eigene Darstellungen mit dem Anschauungsmittel zu erzeugen, zum anderen sollen die Kinder bereits strukturierte Darstellungen deuten und umdeuten.

Da es den Kindern innerhalb der Argumentation ermöglicht werden soll, eigene Darstellungen mit einer selbstgewählten zugrundeliegenden Struktur zu generieren, ist es notwendig, dass das Material an sich noch keine Struktur vorgibt. Demnach eignet sich an dieser Stelle insbesondere unstrukturiertes Material. So können die Kinder innerhalb der Argumentationsprozesse individuelle Strukturierungen erzeugen.

Da die Kinder aber auch bereits strukturierte Darstellungen deuten sollen, ist es notwendig ein Anschauungsmittel zu wählen, welches den Kindern in strukturierter Form vorgelegt werden kann. Hierbei soll von den Kindern eine Vielzahl an Strukturierungen gedeutet werden, so dass es sinnvoll erscheint, ein Anschauungsmittel zu wählen, welches in der strukturellen Nutzung flexibel ist. Aus diesem Grund ist ein ausschließlich strukturiertes Anschauungsmittel nicht sinnvoll, denn die dem Anschauungsmittel zugrundeliegende Struktur schränkt die Vielzahl der Strukturierungen ein. Aus diesem Grund ist es notwendig, ein Material zu wählen, welches sowohl unstrukturiert genutzt als auch strukturiert dargeboten werden kann.

Flexibilität in der Darstellungsweise

In der theoretischen Auseinandersetzung mit Veranschaulichungen in Form von räumlichen Mustern hat es sich als gewinnbringend gezeigt, die vielfältigen Tätigkeiten durchführen zu können (vgl. Kap. 1.5 & 2.4). Dies erfordert eine Flexibilität des Anschauungsmittels. Während unstrukturierte Materialien grundsätzlich sehr flexibel eingesetzt werden können, sind strukturierte Materialien aufgrund der vorgegebenen Struktur begrenzt. Um dennoch mit den vorgelegten strukturierten Materialien flexibel umgehen zu können, ist es notwendig, dass Umdeutungen und Veränderungen grundsätzlich möglich sind. Diese können zum einen mental durchgeführt werden, zum anderen aber auch durch eine Veränderung der Ikonisierung oder durch eine vorherige Übersetzung der Darstellungsweise in eine andere Darstellungsweise, die Veränderungen erlaubt. So kann zum Beispiel eine ikonische Darstellung zunächst in ein Plättchendarstellung übersetzt werden, um dann an der Plättchendarstellung Veränderungen und Umdeutungen vornehmen zu können.

Vorkenntnisse der Kinder

Das zentrale Forschungsinteresse liegt darin, die Nutzungs- und Deutungsweisen der Kinder im Argumentationsprozess zu untersuchen. Anschauungsmittel sind aber nicht selbsterklärend und stellen auch einen Lernstoff dar (vgl. u.a. Lorenz, 1995; Schipper & Hülshoff, 1984; Söbbeke, 2005). Aus diesem Grund ist es sinnvoll ein Anschauungsmittel zu wählen, welches den Kindern aus dem Unterricht bekannt ist. Durch eine solche Auswahl stellt die Nutzung des Anschauungsmittels keine zusätzliche Hürde im Interviewverlauf dar und eine Einführung des Anschauungsmittels ist nicht notwendig.

5.2.3.2 Auswahl des Anschauungsmittels innerhalb der vorliegenden Studie

Vor diesem Hintergrund stellen Plättchen und Punktdarstellungen ein geeignetes Anschauungsmittel innerhalb der Interviews dar. Dies wird im Folgenden an den drei bereits allgemein erläuterten Kriterien zur Auswahl des Anschauungsmittels erläutert.

Art der Strukturierung

Plättchen stellen an sich ein unstrukturiertes Material dar, denn in dem Material ist keine Strukturierung vorgegeben, dennoch kann es strukturiert genutzt werden (vgl. Kap. 3.4.1). So ist es möglich, dass während des Argumentationsprozesses individuelle Strukturierungen erzeugt und zur Argumentation genutzt werden können. Gleichzeitig können sie als Ikonisierung in Form von Punktdarstellungen den Kindern in unterschiedlichen Strukturierungen zur Deutung vorgelegt, aber auch von ihnen erzeugt, werden.

Flexibilität in der Darstellungsweise

Auch die Flexibilität in der Darstellungsweise ist gegeben. Durch die Nutzung von Plättchen und Punktdarstellung handelt es sich nicht um zwei grundsätzlich unterschiedliche Anschauungsmittel, sondern vielmehr um zwei unterschiedliche Darstellungsebenen einer Veranschaulichung. Während mit den Plättchen eher auf einer enaktiven Ebene handelnd gearbeitet wird, ist die Punktdarstellung als eine Ikonisierung der Plättchendarstellung zu sehen. Hierbei kann der Wechsel der unterschiedlichen Darstellungsebenen relativ einfach umgesetzt werden, denn Kinder können Punktdarstellungen sowohl mit den Plättchen als auch mit Stift und Papier erzeugen.

Vorkenntnisse der Kinder

Da das Anschauungsmittel in der Interviewstudie als Anlass zur Argumentation, aber auch als konkretes Argumentationsmittel genutzt werden soll, ist es wichtig, dass die Kinder das Anschauungsmittel bereits kennen und sie es sich nicht erst in der Interviewsituation erschließen müssen. Plättchen und Punktdarstellungen stellen ein zentrales und häufig genutztes Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule dar. Auch die an den Interviews teilnehmenden Kinder haben, nach Auskunft der Lehrkräfte, in unterschiedlichen mathematischen Kontexten mit Plättchen und Punktdarstellungen gearbeitet, so dass das Material den Kindern bekannt ist.

5.2.4 Interviewaufbau und Gestaltung des Materials

Auf Grundlage der bisher erläuterten theoretischen Überlegungen und den 2016 durchgeführten Pilotierung wurden zwei unterschiedliche Interviews konzipiert: Ein Interview zu dem Themenbereich der Paritäten und ein Interview zu dem Themenbereich der Teilbarkeit durch drei. Diese sind in ihrem grundlegenden Aufbau identisch. Im Folgenden wird zunächst der Aufbau der Interviews erläutert. Im Anschluss daran werden die in den Interviews genutzten Punktdarstellungen zur Deutung und Argumentation dargestellt, deren Ausgestaltung erläutert und offengelegt, welche weiterführenden Impulse im Leitfaden aufgeführt sind.

5.2.4.1 Allgemeine Überlegungen zum Interviewaufbau

Um dem Anspruch an Vergleichbarkeit der beiden unterschiedlichen Interviews gerecht zu werden, erschien es als unerlässlich beide Interviews in ihrer Struktur und den Anforderungen an die Kinder gleich zu gestalten. Der Aufbau beider Interviews ist in der Interviewkonzeption identisch. Dieser wird im Folgenden allgemein beschrieben und im Anschluss daran für die jeweiligen Interviews spezifiziert.

Allgemein lässt sich das Interview in drei Phasen unterteilen, wobei die ersten beiden Phasen in ihrem Aufbau erneut ähnlich konzipiert wurden.

<table>
<tr><td rowspan="4">1. Phase:
Fokussierung der strukturellen Zahleigenschaft</td><td rowspan="3">1.1 Phase: Erläuterung der strukturellen Zahleigenschaft</td><td>1.1.1 Phase: offen</td></tr>
<tr><td>1.1.2 Phase: mit Bild oder Zeichnung</td></tr>
<tr><td>1.1.3 Phase: Wendeplättchen</td></tr>
<tr><td>1.2 Phase: Deutung von Punktdarstellungen hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Phase:
Fokussierung der strukturellen Zahleigenschaft</td><td rowspan="3">2.1 Phase: Begründung der allgemeingültigen Aussage</td><td>2.1.1 Phase: offen</td></tr>
<tr><td>2.1.2 Phase: mit Bild oder Zeichnung</td></tr>
<tr><td>2.1.3 Phase: Wendeplättchen</td></tr>
<tr><td>2.2 Phase: Deutung von Punktdarstellungen hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft</td><td></td></tr>
<tr><td>3. Phase:
Deutung von anschaulichen Argumentationen</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Abbildung 5.1: Übersicht über den Interviewverlauf

1. Phase: Fokussierung der strukturellen Zahleigenschaft

1.1 Phase: Erläuterung der strukturellen Zahleigenschaft

1.1.1 Erläuterung der Zahleigenschaft - offen

Wie würdest du einem Kind aus dem zweiten Schuljahr erklären, was gerade und ungerade Zahlen sind / wann eine Zahl durch drei teilbar ist?

Zunächst wird die Frage ganz offen gestellt, so dass die Kinder in ihren Erklärungen hinsichtlich der begrifflichen Facetten und den Darstellungsweisen frei waren[17]. Die Frage zielt darauf ab, die Kinder an die Thematik heranzuführen und an einen mathematischen Inhalt anzuknüpfen, der ihnen aus dem Unterricht bekannt ist. Zudem dient es dazu, einen ersten Einblick in die begrifflichen Ideen der Kinder zu erlangen. Die Interviewerin erhält dadurch die Möglichkeit gegebenenfalls noch begriffliche Probleme beziehungsweise begriffliche Unklarheiten zu klären.

1.1.2 Erläuterung der Zahleigenschaft - mit Bild oder Zeichnung

Kannst du ‚das' (die jeweilige strukturelle Zahleigenschaft) auch mit einem Bild oder einer Zeichnung erklären?

Anknüpfend an die erste Erklärung der Kinder wird die Darstellungsweise nun eingeschränkt, so dass sie vor eine neue Anforderung gestellt werden. Da nun explizit die Darstellung in einem Bild oder einer Zeichnung gefragt wird, muss die vorherige verbale Äußerung an die Anforderung angepasst werden. Dies erfordert einen Darstellungswechsel beziehungsweise eine Vernetzung der bisherigen Darstellung mit einer weiteren Repräsentationsform. Die Beschränkung auf ein Bild oder eine Zeichnung fokussiert in erster Linie eine ikonische Darstellung. Dennoch sind die Kinder an dieser Stelle frei in der Wahl der bildlichen Darstellung. Sie können sowohl aus dem Mathematikunterricht bekannte Anschauungsmittel oder Darstellungsweisen nutzen als auch anderweitige bildliche Darstellungen, zum Beispiel alltagsnahe Zeichnungen. In den Interviews zeigte sich, dass einige Kinder auch die Schriftsprache oder die numerisch-symbolische Sprache nutzten, um die Erklärung mit einem Bild darzustellen.

[17] Während des gesamten Interviews standen den Kindern Papier, farbige Stifte sowie farbige Wendeplättchen zur Verfügung. Die Kinder wurden bereits zu Beginn des Interviews darauf hingewiesen, dass sie zu jeder Zeit das gesamte Material nutzen dürfen.

1.1.3 Erläuterung der Zahleigenschaft - mit den Wendeplättchen

Kannst du ‚das' (die jeweilige strukturelle Zahleigenschaft) auch mit den Wendeplättchen erklären?

Anknüpfend an die bisherigen Erklärungen und Darstellungen der Kinder werden sie anschließend vor die Anforderung gestellt, zur Erklärung die Wendeplättchen zu nutzen. An dieser Stelle wird der Fokus explizit auf die Wendeplättchen als Argumentations- und Kommunikationsmittel gelegt. Diese Frage wird den Kinder nur gestellt, wenn sie in ihrem Bild beziehungsweise ihrer Zeichnung keine Punktdarstellung nutzen.

1.2 Deutung von Punktdarstellungen hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft

Hier siehst du einige Karten und ich bitte dich, die Karten den geraden und ungeraden Zahlen / den durch drei teilbaren Zahlen zuzuordnen. Dabei ist es ganz wichtig, dass du begründest, warum du dich so entschieden hast.

Während die Kinder in dem ersten Interviewteil noch eigene Darstellungen produziert haben, sind sie in diesem Interviewteil dazu angehalten, strukturierte und unstrukturierte Punktdarstellungen hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft zu deuten. Dies stellt die Kinder vor eine durchaus neue Deutungsanforderung, denn sie müssen die strukturelle Zahleigenschaft in die Punktdarstellungen hineindeuten. Bei der Konzeption der Punktdarstellungen wurde bewusst darauf geachtet, den Kindern vielfältige Strukturierungen anzubieten, um eine möglichst große Deutungsvielfalt zu erhalten. Insbesondere die Deutung der unterschiedlichen Darstellungen stellt innerhalb der Analyse die wesentliche Interviewphase dar, da in dieser die strukturellen Deutungen und Argumentationsweisen der Kinder, aber auch die Rolle des Anschauungsmittels, detailliert untersucht werden können.

2. Phase: Fokussierung der allgemeingültigen Aussage

Die Konzeption dieser Interviewphase ist analog zur ersten Interviewphase, so dass die Unterphasen im Folgenden nur genannt und nicht weitergehend erläutert werden. In der gesamten zweiten Interviewphase wird auch fokussiert, warum die Aussage immer gilt, um verallgemeinernde Argumentationsprozesse anzuregen.

2.1 Begründung der allgemeingültigen Aussage

2.1.1 Begründung der allgemeingültigen Aussage - offen

Du hast mir erklärt, wann eine Zahl gerade oder ungerade ist. Und jetzt möchte ich mir mit dir anschauen, ob das Ergebnis einer Additionsaufgabe gerade ist. Wenn man zwei ungerade Zahlen addiert, dann ist das Ergebnis (immer) gerade. Stimmt das?

Du hast mir erklärt, wann eine Zahl durch drei teilbar ist. Und jetzt möchte ich mir mit dir anschauen, ob das Ergebnis einer Additionsaufgabe durch drei teilbar ist. Wenn man drei Nachbarzahlen addiert, dann ist das Ergebnis (immer) durch drei teilbar. Stimmt das?

2.1.2 Begründung der allgemeingültigen Aussage - mit einem Bild oder Zeichnung
Kannst du ‚das' (die jeweilige allgemeingültige Aussage) auch mit einem Bild oder einer Zeichnung begründen?

2.1.3 Begründung der allgemeingültigen Aussage - mit den Wendeplättchen
Kannst du ‚das' (die jeweilige allgemeingültige) auch mit den Wendeplättchen erklären?

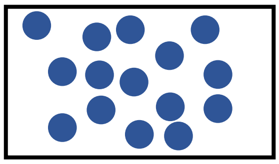
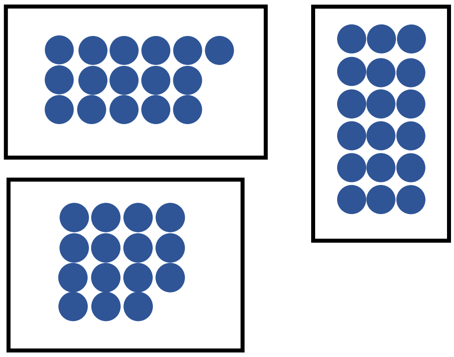
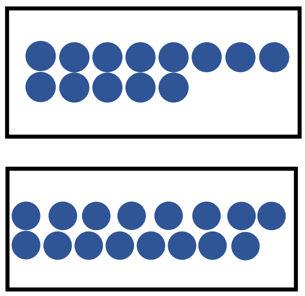
2.2 Deutung von Punktdarstellungen hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage
Hier siehst du einige Karten. Kannst du ‚das' (die jeweilige allgemeingültige Aussage) auch in den Punktdarstellungen sehen?

3. Phase: Deutung anschaulicher Argumentationen
Ich habe das auch schon andere Kinder gefragt. Hier siehst du einige Begründungen, was könnten die Kinder sich dabei gedacht haben?
Während die Kinder in den ersten beiden Phasen eigene Argumentationen entwickeln sollen, liegt in dieser Interviewphase der Fokus darauf, anschaulich geführte Argumentationen zu deuten (vgl. Kap 5.2.4.2). Hier wird demnach eine andere argumentative Kompetenz gefordert, nämlich das Interpretieren und Nachvollziehen von Argumentationen anderer Kinder.

5.2.4.2 Konzeption und Ausgestaltung der Interviewphasen
In den bisherigen Ausführungen wurden die einzelnen Interviewphasen allgemein beschrieben. Im Folgenden wird nun das Material und die Ausgestaltung der Interviewphasen 1.2, 2.2 sowie 3 genauer betrachtet und dabei die Konzeption des dem Interview zugrundeliegenden Materials erläutert.

Phase 1.2: Fokussierung der strukturellen Zahleigenschaft
Paritäten: „Aus dem Matheunterricht kennst du gerade und ungerade Zahlen. Wie würdest du einem Kind aus dem zweiten Schuljahr erklären, was gerade und ungerade Zahlen sind?"
Anknüpfend an die Erklärungen der Kinder und die von den Kindern durch Wendeplättchen erzeugten Darstellungen werden ihnen zehn unterschiedliche Punktdarstellungen vorgelegt,

die sie hinsichtlich der Parität deuten sollen. Neun davon sind Punktdarstellungen. Eine Darstellung ist die symbolisch-numerische Darstellung ‚15'.

Unstrukturiert/symbolisch Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist nur durch eine vorherige Anzahlerfassung oder eine Umstrukturierung der Punkte möglich (Punktdarstellung). Die Analyse der strukturellen Zahleigenschaft der symbolischen Notation ist lediglich durch eine operative Ermittlung dieser möglich. Ein Ablesen der Zahleigenschaft ist nicht möglich.	 15
Strukturierung ohne direkten Bezug zur Zahleigenschaft Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist nur durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung, eine Zerlegung in Teilkomponenten, eine Strukturierung in Form von Zweierbündeln oder durch ein Erzeugen einer geometrischen Hälfte möglich. Ein Ablesen der Zahleigenschaften „auf den ersten Blick" ist bei diesen Punktdarstellungen nicht möglich.	
Strukturierung mit direktem Bezug zur Zahleigenschaft (annähernd prototypisch) Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung, eine Zerlegung in Teilkomponenten, einer Strukturierung in Form von Zweierbündeln oder durch ein Erzeugen einer geometrischen Hälfte möglich. Die Darstellungen ähneln in ihrer Struktur den prototypischen Darstellungen, so dass für das Ablesen der Zahleigenschaften „auf den ersten Blick" nur eine geringe Umstrukturierung nötig ist.	

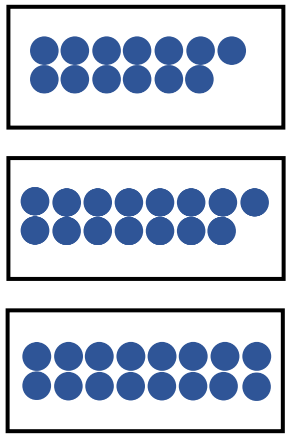
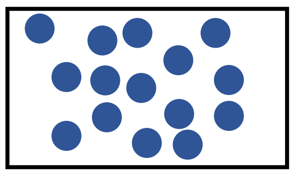
Strukturierung mit Bezug zur algebraischen Darstellung (prototypisch) Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung, eine Zerlegung in Teilkomponenten, eine Strukturierung in Form von Zweierbündeln oder durch ein Erzeugen einer geometrischen Hälfte möglich. Da es sich bei den Darstellungen um prototypische Darstellungen handelt, ist ein Ablesen der Zahleigenschaft „auf den ersten Blick“ möglich.	

Tabelle 5.1: Gestaltung der zu deutenden Darstellungen (Paritäten)

Teilbarkeit durch 3: „Aus dem Matheunterricht kennst du die Division. Wie würdest du einem Kind aus dem zweiten Schuljahr erklären, wann eine Zahl durch drei teilbar ist?“
Anknüpfend an die Erklärungen der Kinder und die von den Kindern durch Wendeplättchen erzeugten Darstellungen, werden ihnen elf unterschiedliche Darstellungen von Zahlen vorgelegt, die sie hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei deuten sollten. Zehn davon sind Punktdarstellungen. Eine Darstellung ist die symbolisch-numerische Darstellung der ‚15‘.

Unstrukturiert/symbolisch Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist nur durch eine vorherige Anzahlerfassung oder eine Umstrukturierung der Punkte möglich (Punktdarstellung). Die Analyse der strukturellen Zahleigenschaft der symbolischen Notation ist lediglich durch eine operative Ermittlung der Teilbarkeit durch drei möglich. Ein Ablesen der Zahleigenschaft ist nicht möglich.	 15

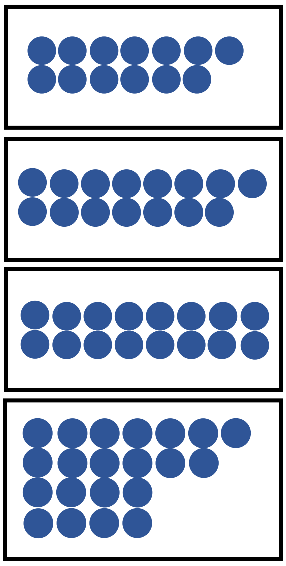
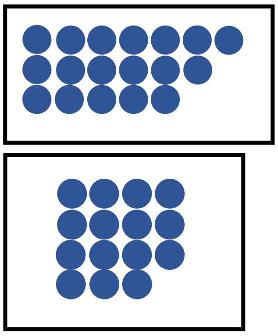
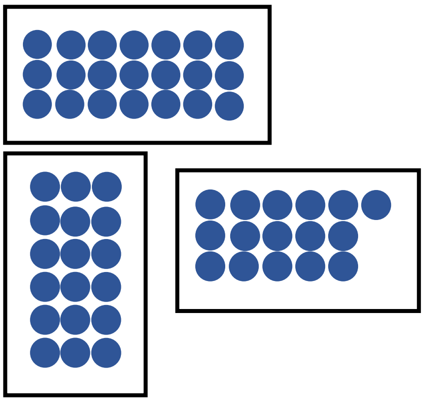
Strukturierung ohne direkten Bezug zur Zahleigenschaft Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist nur durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung, eine Zerlegung in Teilkomponenten oder durch ein Erzeugen von Dreierbündeln oder drei gleichmächtigen Teilmengen möglich. Ein Ablesen der Zahleigenschaft „auf den ersten Blick“ ist bei diesen Punktdarstellungen nicht möglich.	
Strukturierung mit direktem Bezug zur Zahleigenschaft Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung, eine Zerlegung in Teilkomponenten oder durch ein Erzeugen von Dreierbündeln oder drei gleichmächtigen Teilmengen möglich. Die Darstellungen ähneln in ihrer Struktur den prototypischen Darstellungen, so dass für das Ablesen der Zahleigenschaft „auf den ersten Blick“ nur eine geringe Umstrukturierung nötig ist.	
Strukturierung mit Bezug zur algebraischen Darstellung Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung, eine Zerlegung in Teilkomponenten oder durch ein Erzeugen von Dreierbündeln oder drei gleichmächtigen Teilmengen möglich. Da es sich bei den Darstellungen um prototypische Darstellungen handelt, ist ein Ablesen der Zahleigenschaft „auf den ersten Blick“ möglich.	

Tabelle 5.2: Gestaltung der zu deutenden Darstellungen (Teilbarkeit durch drei)

Impulse zur weiteren Auseinandersetzung mit den Punktdarstellungen

Die nachfolgenden Fragen stellen mögliche Impulse dar, mit denen die Kinder im Laufe der Auseinandersetzung konfrontiert werden können, um ein besseres Verständnis der kindlichen Argumentations- und Deutungsweisen zu erlangen. Dabei gilt es die Auswahl der Fragen an die Deutungen und Argumentationen der Kinder anzupassen, so dass nicht alle aufgeführten Fragen bei jedem Kind gestellt werden müssen. Auch die Reihenfolge und Formulierung der Fragen in den Interviews müssen an die Ausführungen des Kindes angepasst werden.

- Welche Punktmuster passen zusammen? Was haben die Punktmuster gemeinsam? Was ist bei den Punktmustern gleich?
- Worin unterscheiden sich die Punktmuster?
- Bei einigen Punktmustern hast du ganz schnell gesehen, dass es eine gerade oder ungerade/eine durch drei teilbare Zahl ist. Warum hast du das bei den Punktmustern so schnell gesehen?
- Du hast gesagt, dass man an keinem Punktmuster schnell erkennen kann, ob die Zahl gerade oder ungerade/durch drei teilbar ist. Wie müsste denn ein Punktmuster aussehen, bei dem man es gut erkennen kann.
- Wie kann man schnell herausfinden, ob das Punktmuster eine gerade oder ungerade / eine durch drei teilbare Zahl darstellt?
- An welchen Mustern kannst du besonders gut erkennen, dass die Zahl gerade oder ungerade/durch drei teilbar ist?
- Warum kannst du das an den Punktmustern besonders gut erkennen?
- Warum kannst du das an den Punktmustern nicht gut erkennen?
- Was meinst du, welche Darstellung passt am besten, wenn man gerade und ungerade / durch drei teilbare Zahlen darstellen möchte?
- Welche Darstellung findest du ungeeignet/nicht geeignet? Warum findest du das die Darstellung nicht geeignet ist?

Phase 2.2: Fokussierung der allgemeingültigen Aussage

Paritäten: Wenn man zwei ungerade Zahlen addiert, dann ist das Ergebnis (immer) gerade. Stimmt das?

Anknüpfend an die Erklärungen der Kinder und die von den Kindern durch Wendeplättchen erzeugten Darstellungen, wurden den Kinder sieben unterschiedliche Plättchendarstellungen von Zahlen vorgelegt, die sie hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage deuten sollen.

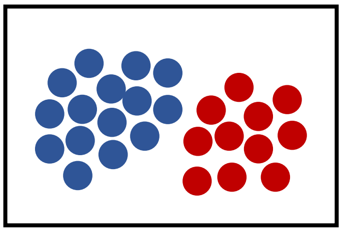
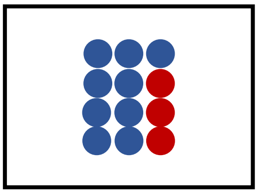
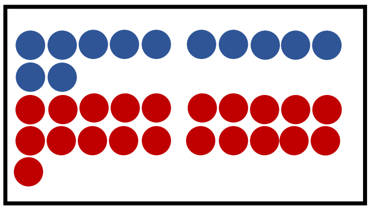
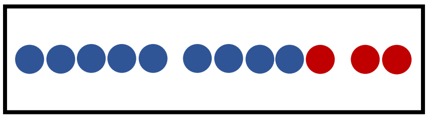
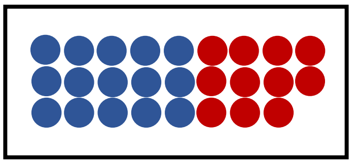
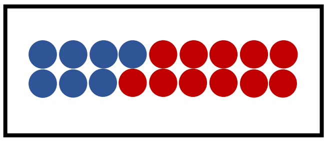
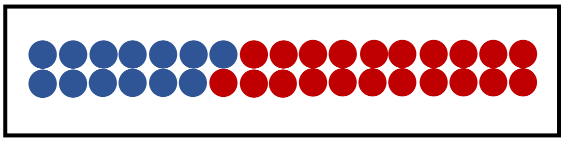
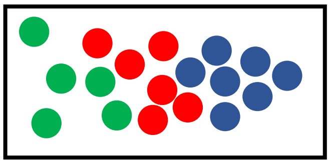
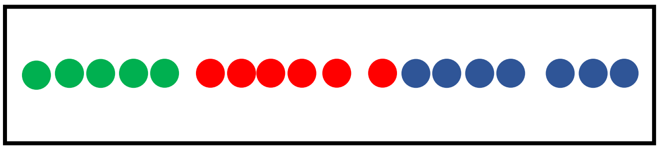
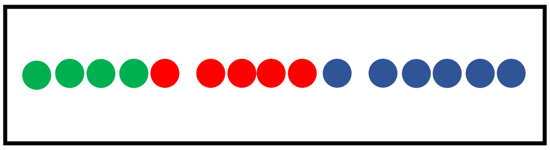
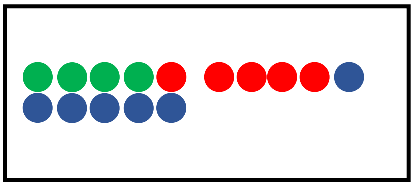
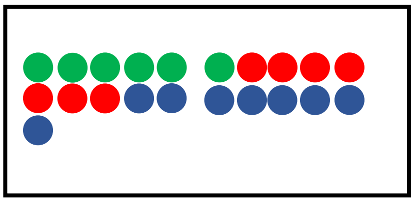
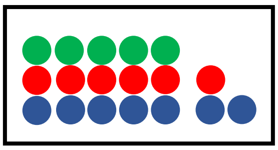
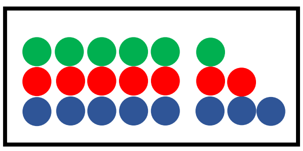
Unstrukturiert Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist nur durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung der Punktdarstellung oder durch das operative Ermitteln der Parität möglich. Die Zahleigenschaft kann nicht direkt abgelesen werden.	
Strukturierung ohne direkten Bezug zur Zahleigenschaft Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist nur durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung der Punktdarstellung, eine Zerlegung in Teilkomponenten oder durch Strukturierung in Form von Zweierbündeln beziehungsweise dem Erzeugen einer geometrischen Hälfte möglich. Ein Ablesen der Zahleigenschaft „auf den ersten Blick“ ist bei diesen Punktdarstellungen nicht möglich.	   
Strukturierung mit Bezug zur algebraischen Darstellung Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist nur durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung der Punktdarstellung, eine Zerlegung in Teilkomponenten oder durch Strukturierung in Form von Zweierbündeln beziehungsweise dem Erzeugen einer geometrischen Hälfte möglich. Da es sich bei den Darstellungen um prototypische Darstellungen handelt, ist ein Ablesen der Zahleigenschaft „auf den ersten Blick“ möglich.	 

Tabelle 5.3: Gestaltung der zu deutenden Darstellungen (Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade)

Teilbarkeit durch 3: Wenn man drei Nachbarzahlen addiert, dann ist das Ergebnis (immer) durch drei teilbar. Stimmt das?

Anknüpfend an die Erklärungen der Kinder und die von den Kindern durch Wendeplättchen erzeugten Darstellungen, werden den Kindern sieben unterschiedliche Plättchendarstellungen von Zahlen vorgelegt, die sie hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage deuten sollen.

unstrukturiert Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist nur durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung der Punktdarstellung oder durch ein Ermitteln der strukturellen Zahleigenschaft möglich Ein Ablesen der Teilbarkeit durch drei ist nicht möglich.	
Strukturierung ohne direkten Bezug zur Zahleigenschaft Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung, eine Zerlegung in Teilkomponenten oder durch ein Erzeugen von Dreierbündeln oder drei gleichmächtigen Teilmengen möglich. Ein Ablesen der Zahleigenschaft „auf den ersten Blick" ist bei diesen Punktdarstellungen nicht möglich.	   
Strukturierung mit Bezug zur algebraischen Darstellung Eine Analyse der strukturellen Zahleigenschaft ist durch eine vorherige Anzahlerfassung, eine Umstrukturierung, eine Zerlegung in Teilkomponenten oder durch ein Erzeugen von Dreierbündeln oder drei gleichmächtigen	 

Teilmengen möglich. Da es sich bei den Darstellungen um prototypische Darstellungen handelt, ist ein Ablesen der Zahleigenschaft „auf den ersten Blick“ möglich. In diesem Fall bezieht sich die prototypische Darstellung auf die Darstellung der aufeinanderfolgenden Zahlen. Aus diesem Grund wird es diesem Strukturierungstyp zugeordnet. Die prototypische Darstellung der Teilbarkeit durch drei erfordert das Umlegen des letzten Punkts der unteren Reihe in die obere Reihe.	

Tabelle 5.4: Gestaltung der zu deutenden Darstellungen (Die Summe von drei Nachbarzahlen ist immer durch drei teilbar)

Impulse zur weiteren Auseinandersetzung mit den Punktdarstellungen

Diese Fragen stellen mögliche Impulse dar, mit denen die Kinder im Laufe der Auseinandersetzung konfrontiert werden können, um ein besseres Verständnis der kindlichen Deutungs- und Argumentationsweisen zu erlangen. Dabei wird die Auswahl der Fragen an die Deutungen und Argumentationen der Kinder angepasst, so dass nicht alle aufgeführten Fragen bei jedem Kind gestellt werden müssen. Auch die Reihenfolge und Formulierungen der Fragen an die Ausführungen des Kindes angepasst.

- Bei welchem Punktmuster kannst du die Aufgaben gut sehen?
- Du hast das jetzt ausgerechnet und gesagt, dass es durch drei teilbar ist. Kannst du das auch an dem Punktmuster sehen?
- An welchem Punktmuster siehst du das besonders gut, dass es sich um Nachbarzahlen handelt?
- Du hast mir das so ... begründet. Kannst du das auch mit diesen Punktmustern begründen?
- An welchen Mustern kannst du das besonders gut erklären?
- Warum kannst du das an den Punktmustern besonders gut erklären?
- Warum kannst du das an den Punktmustern nicht gut erklären?
- Gibt es ein Muster, das so ähnlich ist wie dein Muster?
- Du hast mir das an der Aufgabe 5+6+7 erklärt. Wie ist das bei der Aufgabe 105+106+107? Da kannst du die Punkte ja nicht alle malen. Aber hilft dir vielleicht eins von den Mustern, trotzdem zu erklären, warum das Ergebnis durch 3 teilbar sein muss?
- Warum hilft dir das Muster? Warum helfen dir die anderen Muster nicht?

3. Phase: Deutung anschaulicher Argumentationen

Innerhalb des bisherigen Interviewverlaufs sollten die Kinder selber Argumentationen erzeugen und die jeweilige allgemeingültige Aussage verifizieren und begründen. In dieser Interviewphase werden die Kinder nun vor eine neue Deutungsanforderung gestellt und aufgefordert anschaulich gestützte Argumentationen zu deuten.

Bei der Konzeption der anschaulichen Argumentationen wurden sowohl unterschiedliche, den Kindern bereits bekannte, Strukturierungen genutzt als auch unterschiedliche Arten von Argumentationen zur Deutung vorgelegt. Hierzu wurden in Anlehnung an die experimentellen und inhaltlich-anschaulichen Beweise (Wittmann & Müller, 1988) Argumentationen mit unterschiedlicher Allgemeingültigkeit entwickelt (vgl. auch Kap 2.4.2):

- Experimentelle beziehungsweise beispielbezogene Beweise, die auf Grundlage eines konkreten Beispiels geführt werden.
- Experimentelle Beweise, die auf Grund des Vorgehens Ansätze bieten, daraus eine Allgemeingültigkeit abzuleiten.
- Inhaltlich-anschauliche Beweise, aus denen eine Allgemeingültigkeit abgelesen werden kann.

Hierbei handelt es sich nicht um eine hierarchische Klassifizierung unterschiedlicher Argumentationen, sondern ist wesentlich für eine möglichst große Deutungsvielfalt der Kinder. Grundlegend für alle Argumentationen ist die jeweilige allgemeingültige Aussage.

Paritäten: „Ich habe auch das auch schon andere Kinder gefragt. Hier siehst du verschiedene Begründungen, was könnten die Kinder sich dabei gedacht haben?“

Unstrukturiert und Experimentell

Der folgenden Argumentation liegt eine unstrukturierte Darstellung zugrunde. In der Argumentation wird die konkrete Aufgabe ermittelt und diese als Grundlage genutzt, um die allgemeingültige Aussage zu begründen. Demnach handelt es sich um einen experimentellen Beweis. In diesem dient das Anschauungsmittel vornehmlich als Mittel zur Zahldarstellung beziehungsweise zur Darstellung einer Rechenoperation.

Abbildung 5.2: Zu deutende anschauliche Argumentation I - Paritäten

Unstrukturiert und experimentell mit allgemeingültigen Strukturen

In folgender Argumentation wird eine unstrukturierte Darstellung genutzt. Es zeigt sich eine Strukturierung in Form von Zweierbündeln. Da das grundlegende Punktmuster unstrukturiert ist, wird dies den unstrukturierten Darstellungen zugeordnet. In der Argumentation wird keine konkrete Aufgabe ermittelt, sondern es werden immer Zweierbündel erstellt und somit Substrukturen gedeutet. Hierbei wird darauf geachtet, dass die Zweierbündel weitestgehend aus zwei Punkten der gleichen Farbe bestehen. Es wird an dieser Stelle demnach noch immer beispielbezogen argumentiert. Das Vorgehen des Erzeugens von Zweierbündeln ist aber auf jede weitere Darstellung übertragbar und fokussiert zugleich den wesentlichen strukturellen Aspekt, dass bei Division einer ungeraden Zahl durch zwei der Rest eins bleibt. Das Anschauungsmittel dient dabei als wesentliche Repräsentation, in der die Argumentation geführt wird.

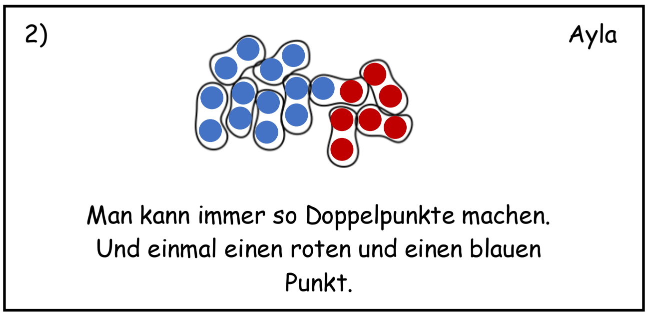


Abbildung 5.3: Zu deutende anschauliche Argumentation II - Paritäten

Strukturiert und experimentell

Der folgenden Argumentation liegt eine strukturierte Darstellung zugrunde, die keiner prototypischen Darstellung entspricht. In der Argumentation wird die konkrete Aufgabe ermittelt und diese als Grundlage genutzt, um die allgemeingültige Aussage zu begründen. Demnach handelt es sich um einen experimentellen Beweis. In diesem dient das Anschauungsmittel vornehmlich als Mittel zur Zahldarstellung beziehungsweise zur Darstellung einer Rechenoperation.

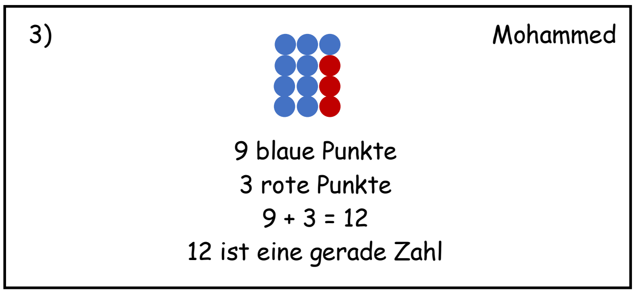


Abbildung 5.4: Zu deutenden anschauliche Argumentation III - Paritäten

Strukturiert und experimentell mit allgemeingültigen Strukturen

Der folgenden Argumentation liegt eine strukturierte Darstellung zugrunde, in die zusätzlich Substrukturen in Form von Zweierbündeln eingezeichnet sind. In der Argumentation wird keine konkrete Aufgabe ermittelt, sondern es werden immer Zweierbündel erstellt. Hierbei wird darauf geachtet, dass die Zweierbündel weitestgehend aus zwei Punkten der gleichen Farbe bestehen. Es wird an dieser Stelle demnach noch immer beispielbezogen argumentiert. Das Vorgehen des Erzeugens von Zweierbündeln ist aber auf jede weitere Darstellung übertragbar und fokussiert zugleich den wesentlichen strukturellen Aspekt, dass bei Division einer ungeraden Zahl durch zwei der Rest eins bleibt. Das Anschauungsmittel dient dabei als wesentliche Repräsentation, in der die Argumentation geführt wird.

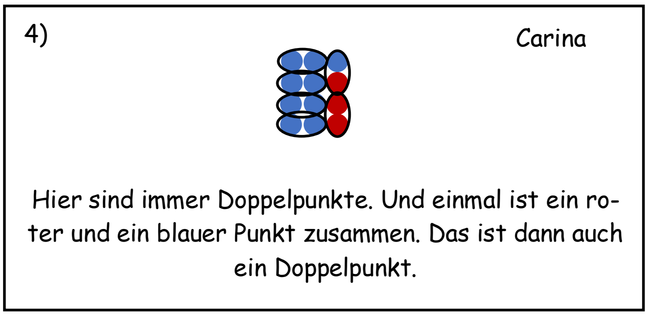


Abbildung 5.5: Zu deutenden anschauliche Argumentation IV – Paritäten

Strukturiert mit Bezug zur algebraischen Darstellung und experimentell mit allgemeingültigen Strukturen

Diese Argumentation ist eine Weiterführung der zweiten Argumentation. In diesem Fall wird eine unstrukturierte Menge umstrukturiert und eine prototypische Darstellung erzeugt. Aus dieser ist bei entsprechender Deutung sowohl die Parität der einzelnen Summanden als auch die der Summe ablesbar. Sie bietet potentiell allgemeingültige Strukturen, denn bei Weiterführung der Struktur, entspricht diese Darstellung dem inhaltlich-anschaulichen Beweis. Das Anschauungsmittel dient dabei als wesentliche Repräsentation, in der die Argumentation geführt wird.

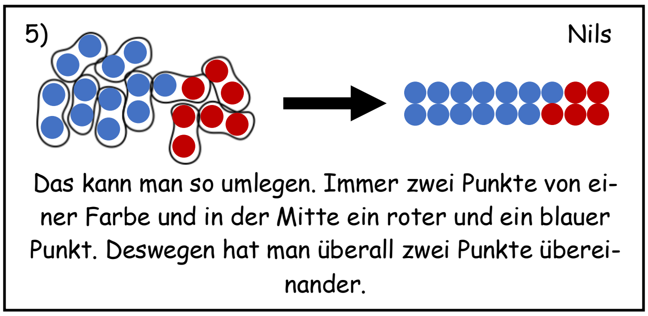


Abbildung 5.6: Zu deutenden anschauliche Argumentation V – Paritäten

Strukturiert mit Bezug zur algebraischen Darstellung und allgemeingültig

Diese Argumentation entspricht einem inhaltlich-anschaulichen Beweis der Aussage, dem notwendigerweise eine strukturierte Darstellung zugrunde liegt. Das Anschauungsmittel dient dabei als wesentliche Repräsentation, in der die Argumentation geführt wird.

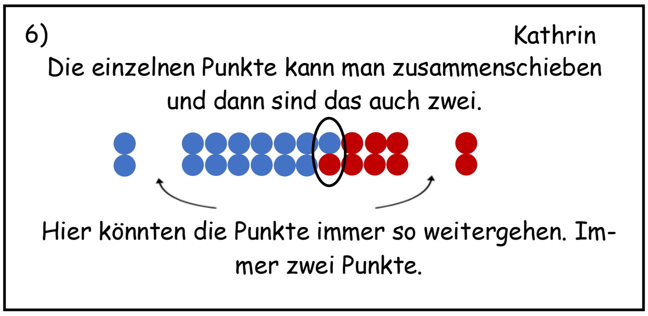


Abbildung 5.7: Zu deutenden anschauliche Argumentation VI – Paritäten

Teilbarkeit durch 3: „Ich habe auch das auch schon andere Kinder gefragt. Hier siehst du verschiedene Begründungen, was könnten die Kinder sich dabei gedacht haben?“

Da sich die Erläuterungen der jeweiligen Argumentationen zu den jeweiligen Strukturierungen sowie hinsichtlich der Art der Argumentation nicht von den bereits zugeordneten Argumentationen aus dem Bereich der Paritäten unterscheiden, wird an dieser Stelle auf eine Erläuterung der Zuordnung verzichtet.

Unstrukturiert und experimentell mit allgemeingültigen Strukturen

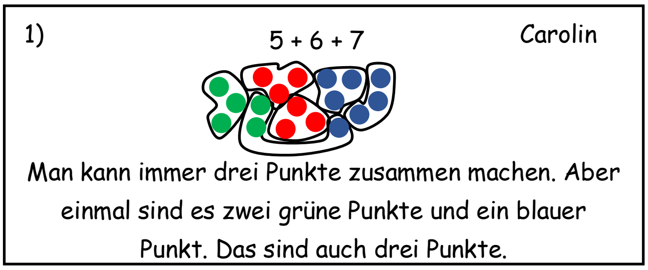


Abbildung 5.8: Zu deutenden anschauliche Argumentation I – Teilbarkeit durch 3

Strukturiert und experimentell

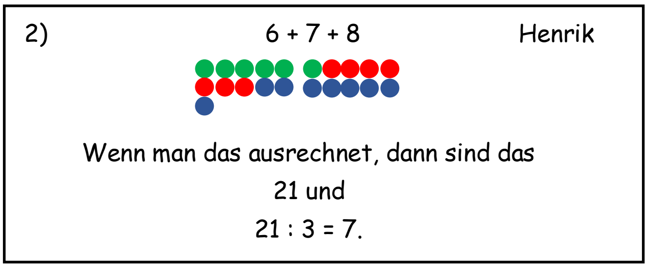


Abbildung 5.9: Zu deutenden anschauliche Argumentation II – Teilbarkeit durch 3

Strukturiert und experimentell mit allgemeingültigen Strukturen

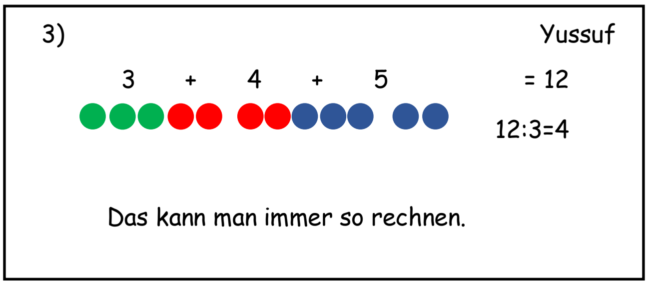


Abbildung 5.10: Zu deutenden anschauliche Argumentation III – Teilbarkeit durch 3

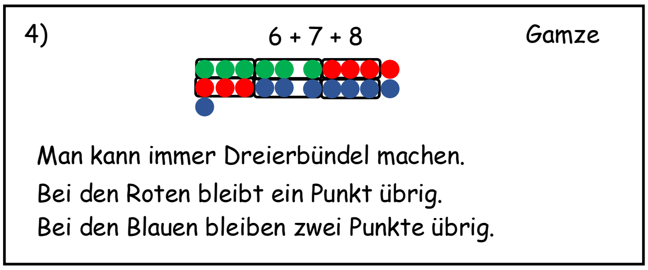


Abbildung 5.11: Zu deutenden anschauliche Argumentation IV – Teilbarkeit durch 3

Strukturiert mit Bezug zur algebraischen Darstellung und experimentell mit allgemeingültigen Strukturen

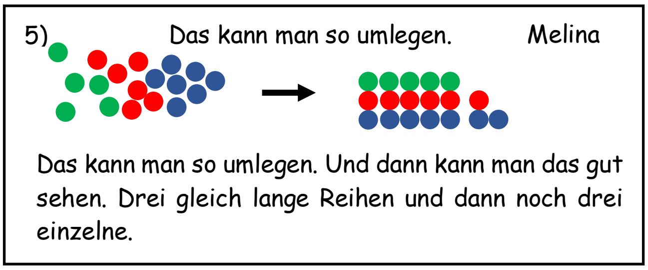


Abbildung 5.12: Zu deutenden anschauliche Argumentation V – Teilbarkeit durch 3

Strukturiert mit Bezug zur algebraischen Darstellung und allgemeingültig

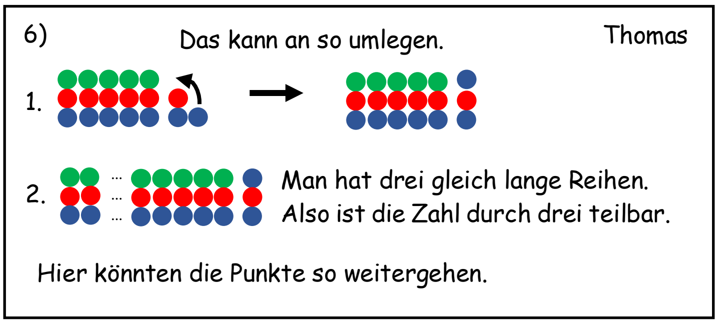


Abbildung 5.13: Zu deutenden anschauliche Argumentation VI – Teilbarkeit durch 3

Impulse zur weiteren Auseinandersetzung mit den Punktdarstellungen

- Welche Argumentationen sind sich ähnlich?
- Warum findest du die Begründung besonders gut?
- Warum findest du die Begründung nicht so gut?

5.3 Durchführung der Interviews

Die klinischen Interviews wurden im Mai und Juni 2017, somit zum Ende des Schuljahres, in vier dritten Klassen an zwei Grundschulen (A und B) im ländlichen Bereich Nordrhein-Westfalens mit heterogenem Sozialstatus durchgeführt. Insgesamt wurden 24 Kinder des dritten Schuljahres befragt, wobei jeweils zwölf Kinder pro Grundschule beziehungsweise sechs Kinder pro Klasse befragt wurden (vgl. Tab. 5.5)[18]. Die Auswahl der am Interview teilnehmenden Kindern oblag den jeweiligen Mathematiklehrkräften in Absprache mit der Schulleitung. Hierbei wurde darauf geachtet, eine Schülergruppe mit möglichst heterogenem Leistungsstand auszuwählen. Mit jedem Kind wurde ein Interview zu einem der Themenbereiche „Paritäten" oder „Teilbarkeit durch 3" durchgeführt. Zu jeder Thematik wurden zwölf Interviews durchgeführt. Hierbei wurde auf eine Heterogenität im Leistungsstand, Geschlecht und der Klassenzugehörigkeit geachtet (vgl. Tab. 5.6 & 5.7).

Schule A; Klasse 1	Schule A; Klasse 2	Schule B; Klasse 1	Schule B; Klasse 2
Helena	Jonas	Mia	Jonathan
Jennifer	Benjamin	Pia	Nina
Marie	Melina	Nico	Jaden
Thomas	Maurice	Lars	Miriam
Emely	Verena	Lasse	Simone
Valerian	Johannes	Greta	Paula

Tabelle 5.5: Übersicht der an der Studie teilnehmenden Kinder

Interview „Paritäten"

Klasse	Anonymisiert	Leistungsstand	Dauer
A1	Helena	stark	30:54
A2	Jonas	stark	38:30
A2	Benjamin	stark	45:30
B1	Mia	stark	43:30
A2	Melina	durchschnittlich bis stark	50:30
A1	Jennifer	durchschnittlich	42:56
B2	Jonathan	durchschnittlich	45:18
B1	Pia	durchschnittlich	32:32
B1	Nico	durchschnittlich mit schwach	31:18
A2	Maurice	schwach	33:14
B1	Lars	schwach	38:34
B2	Nina	schwach	36:17

Tabelle 5.6: Übersicht über die Kinder des Interviews - Paritäten

[18] Drei Kinder sind während der Interviewstudie ausgeschieden und werden daher in den Analysen nicht berücksichtigt.

Interview „Teilbarkeit durch 3“

Klasse	Anonymisiert	Leistungsstand	Dauer
A1	Marie	Stark	54:49
B1	Lasse	Stark	37:47
B2	Jaden	Stark	45:11
A2	Verena	durchschnittlich bis stark	44:32
B2	Miriam	durchschnittlich bis stark	37:11
A1	Thomas	durchschnittlich	44:05
B1	Greta	durchschnittlich	53:33
B2	Simone	durchschnittlich	43:32
B2	Paula	durchschnittlich	38:11
A2	Johannes	schwach bis durchschnittlich	30:43
A1	Emily	schwach	43:59
A1	Valerian	schwach	41:15

Tabelle 5.7: Übersicht über die Kinder des Interviews - Teilbarkeit durch 3

Die Erhebung des Leistungsstands der Kinder erfolgte nicht systematisch durch einen standardisierten Test, sondern wurde informell durch Auskunft der jeweiligen Mathematiklehrkraft erhoben. Dieses Vorgehen lässt sich dadurch begründen, dass das Forschungsinteresse nicht in der Beziehung zwischen dem Leistungsstand der Kinder und der Rolle des Anschauungsmittels, der strukturellen Deutungen sowie den begrifflichen Deutungen liegt. Da auch der Zusammenhang mit dem Mathematikunterricht nicht im Fokus der vorliegenden Studie steht, wurde auf eine Erhebung der Qualität des Mathematikunterrichts ebenfalls verzichtet. Dennoch wurde bei der Auswahl der Kinder auf eine ausgewogene Verteilung des mathematischen Leistungsstands geachtet, um ein möglichst vielfältiges und aufschlussreiches Datenmaterial gewinnen zu können.
Auch die im Unterricht vorzufindenden Argumentationsweisen, Nutzungsweisen von Anschauungsmitteln beziehungsweise Deutungen in diesen Prozessen wurden nicht durch standardisierte Verfahren erhoben. In Vorgesprächen mit den Mathematiklehrkräften wurde versichert, dass alle Kinder mit der Division vertraut sind und bereits Anschauungsmittel im Mathematikunterricht eingesetzt wurden. Diese Nutzung wurde vor allem im Kontext des Zwanziger- beziehungsweise Hunderterpunktefeldes benannt. Anschauungsmittel als Argumentations- oder Beweismittel waren nicht expliziter Bestandteil des Mathematikunterrichts, wurden aber implizit im Unterricht eingebunden.
In Absprache mit den Schulleitungen, den jeweiligen Klassen- sowie Fachlehrerinnen und Eltern wurde die Befragung der Kinder während der Unterrichtszeit in dem ihnen bekannten Schulgebäude durchgeführt. Um das Interview deutlich von einer Unterrichtssituation abzugrenzen, wurden die Gespräche nicht in den Klassenräumen der Kinder durchgeführt, sondern in separaten Räumlichkeiten (Beratungsraum beziehungsweise Musikraum). Um dem epistemologischen Interesse an den individuellen Deutungs- sowie

Argumentationsprozessen gerecht zu werden, wurden die Interviews in Einzelgesprächen durchgeführt. Die Dauer der Interviews variierte zwischen 30 Minuten 43 Sekunden und 54 Minuten 49 Sekunden. Diese Spanne lässt sich zum einen durch die unterschiedliche Ausführlichkeit der Kinderantworten erklären. Zum anderen liegt dies an den unterschiedlichen Arbeitstempi der Kinder. Zudem wurde auf die individuelle Verfassung und Leistungsfähigkeit Rücksicht genommen. Um einer Vergleichbarkeit der Interviews gerecht zu werden, wurden die Interviews alle von der Autorin selbst durchgeführt und im Anschluss für die Analyse videographiert und transkribiert.

5.4 Datenauswertung

Um wesentliche Erkenntnisse hinsichtlich der dem Forschungsprojekt zugrundeliegenden Forschungsfragen gewinnen zu können, wurden zunächst *alle* Transkripte mit dem in Kapitel sechs dargestellten Konstrukt zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen analysiert. Diese Analysen wurden miteinander verglichen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu identifizieren und typische Deutungs- und Argumentationsweisen herauszuarbeiten. Zugleich basieren die in Kapitel 7 und 8 dargestellten Analysen und die Analyseergebnisse auf den intensiven Diskussionen in einer Arbeitsgruppe an der Bergischen Universität Wuppertal sowie der Forschungsgruppe UMWEG[19].
Da sich im Forschungsprozesses gezeigt hat, dass sich insbesondere durch die Analyse der Deutungen der Punktdarstellungen ergiebige und interessante Erkenntnisse gewinnen lassen, hat sich die detaillierte Analyse auf den Aufgabenkomplex 1.2 sowie den Aufgabenkomplex 2.2 beschränkt.

[19] **U**ntersuchungen zum **M**athematiklernen (in der Grundschule) - **W**uppertal **E**ssen **G**ruppe (Bergische Universität Wuppertal und Universität Duisburg-Essen)

6 Das theoretische Konstrukt zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen

Für die Analyse des innerhalb der vorliegenden Studie gewonnenen Datenmaterials wurde ausgehend vom epistemologischen Dreieck (Steinbring, 2005) ein Analyseinstrument entwickelt, welches der Zielsetzung des vorliegenden Forschungsprojektes gerecht wird. Dieser epistemologisch orientierte Ansatz bezieht die Besonderheit mathematischen Wissens, die in Kapitel drei dargelegt wurden, mit ein und berücksichtigt dadurch auch die Notwendigkeit des Einsatzes von Anschauungsmitteln in mathematischen Lehr- und Lernprozessen (vgl. Kap 3.2). Zudem wird berücksichtigt, dass Veranschaulichungen nicht selbsterklärend sind, sondern von dem deutenden Individuum aktiv erschlossen werden müssen (vgl. Kap. 1). Werden Kinder demnach vor die Herausforderung gestellt mit ihnen vorgelegten Veranschaulichungen zu argumentieren, so müssen sie diesen mathematischen Zeichen/Symbolen zunächst in einem aktiven Deutungsprozess eine (mathematische) Bedeutung verleihen. Durch eine epistemologische Orientierung wird dieser Besonderheit Rechnung getragen und gleichzeitig fokussiert, welche Aspekte der Veranschaulichung für die Kinder in ihren Argumentationsprozessen von Relevanz sind. Zudem können die Begriffsbildungsprozesse in der argumentativen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten abgebildet werden.
Ausgangspunkt der Entwicklung des Analyseinstruments stellte das epistemologische Dreieck (Steinbring 2005) dar, welches für eine epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen mit Anschauungsmitteln ausdifferenziert wurde. Diese Ausdifferenzierung wurde zum einen durch eine Bezugnahme auf theoretische Aspekte hergeleitet, zum anderen wurde es innerhalb der Analysen ausgeschärft und (weiter-)entwickelt. Demnach stellt das nachfolgende Theoriekonstrukt (auch) ein Ergebnis der vorliegenden Arbeit dar. Dennoch erfolgt die Darstellung des Theoriekonstruktes vor dem Analyse- und Ergebnisteil. Dies gibt dem Leser die notwendige Orientierung für das Verständnis der nachfolgenden Analysen.

Im Folgenden wird zunächst das epistemologische Dreieck (Steinbring 2005) beschrieben (Kap. 6.1) und anschließend das innerhalb der vorliegenden Arbeit zentrale Theoriekonstrukt zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen mit Anschauungsmitteln erläutert (Kap. 6.2). Dieses Theoriekonstrukt bildet dann die Grundlage für die anschließende Analyse- sowie Ergebnisdarstellung.

6.1 Das epistemologische Dreieck

Die bisherigen theoretischen Ausführungen haben gezeigt, dass mathematische Begriffe abstrakter Natur sind und nur durch geeignete Veranschaulichungen erfahrbar sind. Solche mathematischen Zeichen und Symbole, zum Beispiel in Form von Anschauungsmitteln, fungieren als Träger mathematischen Wissens (Steinbring, 2005). Somit kann mathematisches Wissen nur in der Auseinandersetzung mit den Zeichen und Symbolen, zum Beispiel in Form von Veranschaulichungen, erworben werden. Dabei haben die Zeichen und Symbole – im vorliegenden Forschungsprojekt Punktmuster und damit verbundene Fragestellungen – an sich noch keine inhaltliche Bedeutung. Vielmehr muss die Bedeutung eines Zeichens/Symbols immer von den Lernenden individuell und aktiv in diese hineingedeutet werden. Dabei bedarf es die Deutung geeigneter Referenzkontexte (ebd.). Geeignet ist in diesem Kontext immer aus Sicht des lernenden Individuums zu verstehen, denn Referenzkontexte beruhen auf den individuellen Vorerfahrungen des deutenden Individuums. Zu dieser Deutung von unbekannten Zeichen/Symbolen nutzen Kinder ihr bereits bekanntes Wissen, um dieses auf neue Kontexte zu übertragen und die mathematischen Zeichen/Symbole in diesem Kontext zu deuten. Steinbring (2005) beschreibt diesen Deutungsprozess im epistemologischen Dreieck. In diesem werden Bedeutungen für mathematische Begriffe in einem Wechselspiel von einem zu deutenden Zeichen/Symbol sowie einem Referenzkontext vom lernenden Individuum aktiv konstruiert (vgl. Abb. 6.1). Es „stellt den Zusammenhang zwischen den Zeichen zur Kodierung des Wissens und den Referenzkontexten zur Etablierung der Bedeutung des Wissens" (Steinbring, 2009, S. 108f.) dar. Demnach beziehen sich lernende Individuen bei der Deutung von Zeichen/Symbolen auf bereits vorhandenes Wissen. Mit Blick auf die Entstehung neuen Wissens muss der Lernende demnach eine Neuordnung und Umdeutung des bisherigen Wissens vollziehen. Das bedeutet, dass das Zeichen/Symbol durchaus aus unterschiedlichen Perspektiven betrachtet werden muss und bisheriges Wissen nicht immer für die Deutung eines Zeichens/Symbols ausreicht. Betrachtet man dies unter der Perspektive, dass Argumentieren auch eine Lernvoraussetzung ist (vgl. Kap. 2.3), so zeigt sich, dass der soziale Diskurs auch innerhalb des epistemologischen Dreiecks einen wesentlichen Stellenwert hat. So kann ein Perspektivwechsel innerhalb der Deutung im Mathematikunterricht insbesondere durch kollektive Argumentationen initiiert werden (vgl. Kap. 2.3).

Den (mathematischen) Begriff beschreibt Steinbring als eigenständigen Teil dieses Wechselspiels. Dieser entsteht oder entwickelt sich zum einen durch die Wechselbeziehung zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext. Zum anderen beeinflusst der mathematische Begriff die Deutung der Zeichen maßgeblich (Steinbring, 1993, 2000, 2005).

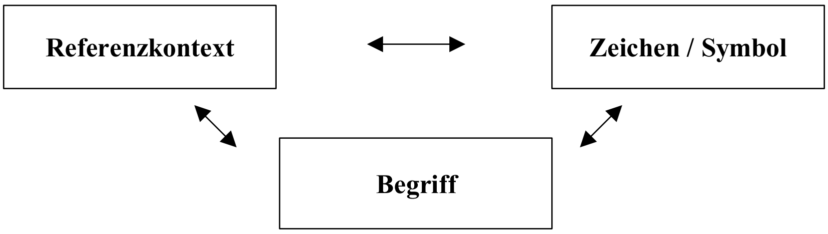


Abbildung 6.1: Epistemologisches Dreieck (vgl. Steinbring 2005)

Die innerhalb des Dreiecks dargestellten Eckpunkte stehen dabei in einer untrennbaren Beziehung zueinander. Sie bilden ein „sich wechselweise stützendes und ausbalancierendes System“ (Steinbring, 2009, S. 109).

Dabei stellen der Referenzkontext sowie das Zeichen/Symbol zwei gleichberechtigte nicht a priori festgelegte Elemente dar, die innerhalb des Deutungsprozesses ihre Rolle verändern können. So kann aus einem zuvor gedeuteten Zeichen/Symbol ein neuer Referenzkontext werden, um ein weiteres Zeichen/Symbol zu deuten. Es ist aber auch möglich, dass ein Teil des Referenzkontextes im weiteren Verlauf fraglich gemacht wird und zu einem Teil des neu zu deutendem Zeichen/Symbol wird (Steinbring, 1993, 2000, 2005, 2009).

Für das vorliegende Forschungsprojekt zeigt sich die Nutzung des epistemologischen Dreiecks als grundlegendes Analyseinstrument als ergiebig und gewinnbringend. Durch eine Nutzung des epistemologischen Dreiecks innerhalb der Analyse von Argumentationsprozessen kann herausgearbeitet werden, was innerhalb der Argumentation begründet werden soll (Zeichen/Symbol) und welche Argumentationsgrundlage in Form des Referenzkontextes zur Argumentation herangezogen wird. Hierfür wird insbesondere das Wechselspiel zwischen Referenzkontext und Zeichen/Symbol in den Blick genommen und betrachtet, wie dieses erfolgt. Durch die genaue Betrachtung des Begriffs kann auch herausgearbeitet werden, welches Begriffsverständnis der Begründung zugrunde liegt. Dies wird im Folgenden ausführlich und detailliert erläutert.

6.2 Ausdifferenzierung des epistemologischen Dreiecks zur Analyse von Argumentationsprozessen

Das bis hierhin vorgestellte Analyseinstrument ‚epistemologisches Dreieck' bildet die Grundlage für die epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen. Um dem Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit gerecht zu werden, wird das epistemologische Dreieck nicht in der ursprünglichen Form genutzt, sondern in Bezug auf das Forschungsprojekt ausdifferenziert. Dabei sind die *einzelnen Forschungsfragen* innerhalb der Analyse nicht isoliert voneinander zu betrachten, sondern lassen sich *im epistemologischen Dreieck verorten*:

So wird zur Untersuchung der epistemologischen Bedeutung von Anschauungsmitteln das *Wechselspiel zwischen Referenzkontext und Zeichen/Symbol* genutzt (Steinbring, 2005). Zur Untersuchung der Deutung der (allgemeingültigen) Strukturen wird in Anlehnung an die visuelle Strukturierungsfähigkeit nach Söbbeke (Söbbeke, 2005) der Fokus auf die *strukturellen Deutungen* in Form der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext gelegt. Die Entwicklung der *begrifflichen Deutungen* fokussiert die *Begriffsebene* aus mathematisch-inhaltlicher Perspektive – in diesem Fall der Teilbarkeit. Im Folgenden wird die Ausdifferenzierung des epistemologischen Dreiecks erläutert. Dafür werden die einzelnen Forschungsfragen innerhalb des epistemologischen Dreiecks verortet und erörtert, wie das Analyseinstrument zur Klärung der jeweiligen Forschungsfrage beiträgt.

1. Rekonstruktion von Deutungen des Anschauungsmittels

Forschungsfrage: Welche epistemologische Bedeutung haben Anschauungsmittel im Argumentationsprozess?

Das zentrale Forschungsinteresse, welches durch die erste Forschungsfrage fokussiert wird, ist die Untersuchung der epistemologischen Bedeutung von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess. Dabei steht die *Rolle des Anschauungsmittels* im Fokus der Analyse. Um diese herausarbeiten zu können, wird untersucht, was innerhalb des Argumentationsprozesses als etwas Fragliches (Zeichen/Symbol) gedeutet wird und was zur Erklärung herangezogen wird (Referenzkontext).
Im Argumentationsprozess entspricht das *Zeichen/Symbol* dem *deklarierten Begründungsbedarf beziehungsweise dem, was im sozialen Diskurs als strittig gilt.* Also die von den Kindern zu begründende Aussage. Lässt sich das Anschauungsmittel demnach im Zeichen/Symbol verorten, nimmt dies die Rolle als etwas fraglich Gemachtes ein.

Der *Referenzkontext* entspricht dem, was die Kinder als *Argumentationsgrundlage* zur Begründung beziehungsweise Bearbeitung der Fraglichkeit heranziehen. Das heißt, es beinhaltet das, was die Kinder zur Argumentation nutzen. Demnach die Argumente, die sie zur Begründung verwenden. Diese Differenzierung ermöglicht es, die *Argumentationsvoraussetzungen*, die die Kinder in ihren Argumentationen nutzen, herauszuarbeiten. Lässt sich das Anschauungsmittel innerhalb des Referenzkontextes verorten, so wird das Anschauungsmittel auch als Argumentationsmittel genutzt.

Innerhalb des Analyseprozesses wird somit der Frage nachgegangen, was innerhalb der kindlichen Deutungen als etwas zu Begründendes und demnach als zu deutendes Zeichen/Symbol angesehen werden kann und welches vorhandene Wissen beziehungsweise welche Argumentationsgrundlage die Kinder für die Deutung dieser zu begründenden Aussage heranziehen. Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage wird somit fokussiert, inwiefern das Anschauungsmittel die Rolle des zu deutenden Zeichens/Symbols einnimmt, oder ob und wann dieses (auch) als Referenzkontext innerhalb des Argumentationsprozesses herangezogen wird und demnach auch als Argumentationsgrundlage dient.

Um dies innerhalb der Analyse detailliert herausarbeiten zu können, wird der Referenzkontext und das Zeichen/Symbol ausdifferenziert. Es wird innerhalb der Analyse unterschieden, ob die Kinder einen Referenzkontext beziehungsweise ein Zeichen/Symbol anschaulicher Art und damit *geometrischer Ausprägung* nutzen, oder ob es sich um eine eher numerisch-symbolische und demnach *arithmetische Ausprägung* handelt. Dadurch kann untersucht werden, wann das Anschauungsmittel im kindlichen Argumentationsprozess genutzt wird. Dies ermöglicht es herauszuarbeiten, welche Rolle das Anschauungsmittel innerhalb der argumentativen Auseinandersetzung einnimmt.

Ausdifferenzierung der arithmetischen sowie geometrischen Ausprägung

Unter arithmetischer Ausprägung wird eine numerisch-symbolische Darstellung oder eine verbalsprachliche Darstellung in Form von konkreten Zahlen, Rechenoperationen oder Zahlbeziehungen verstanden. Hierbei steht die arithmetische Darstellung im Vordergrund der Argumentation.

Demgegenüber wird bei der *geometrischen Ausprägung* im Wesentlichen eine geometrische Darstellung sowie ihre optischen Erscheinungsmerkmale oder strukturellen Beziehungen und Eigenschaften in den Blick genommen. Auch hierbei können konkrete Zahlen von den Kindern expliziert werden. Diese dienen dann dazu, die geometrische Struktur oder die geometrischen Eigenschaften der Veranschaulichung zu explizieren. In diesem Fall steht dann eine Veranschaulichung als Zeichen/Symbol oder als Referenzkontext im Zentrum der Argumentation. Es wird dabei zum Beispiel auf die konkrete Anzahl der Reihen innerhalb einer Darstellung Bezug genommen oder konkrete Handlungen an Veranschaulichungen durchgeführt – zum Beispiel Einkreisen, Durchstreichen etc.

Durch diese Ausdifferenzierung wird in einem ersten Analyseschritt untersucht, welche Rolle das Anschauungsmittel im Argumentationsprozess einnimmt. Somit wird für die erste Frage das *Wechselspiel* zwischen dem *Referenzkontext* und dem *Zeichen/Symbol* sowie deren *arithmetischer* oder *geometrischer Ausprägung* in den Blick genommen (vgl. Abb. 4.2).

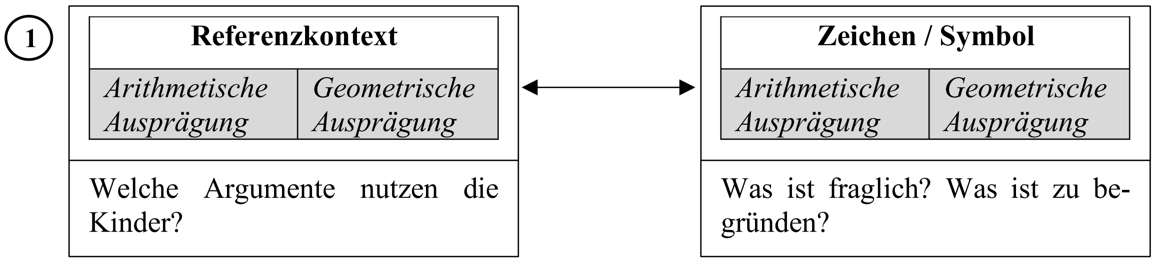


Abbildung 6.2: Die Anwendung des epistemologischen Dreiecks zur Rekonstruktion der Deutungen von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess

2. Rekonstruktion von strukturellen Deutungen im Argumentationsprozess

Forschungsfrage: Wie deuten Kinder (allgemeingültige) arithmetische Strukturen in Punktdarstellungen?

Das bis hierhin beschriebene Wechselspiel zwischen Referenzkontext sowie Zeichen/Symbol erfolgt dabei nicht willkürlich. Vielmehr stellen die strukturellen Deutungen der Kinder eine Art *Mediation* zwischen dem Referenzkontext und dem Zeichen/Symbol dar. Grundlegend für die Analyse der strukturellen Deutungen innerhalb des Argumentationsprozesses ist das Konzept der strukturellen Visualisierungsfähigkeit (Söbbeke, 2005), welches bereits in Kapitel 1.4.2.1 erläutert wurde. Aus diesem Grund wird auf eine erneute Darstellung des Konstrukts verzichtet und die Aspekte fokussiert, die für die vorliegende Arbeit relevant sind.

Ausdifferenzierung der Art der Mediation

Zur Rekonstruktion der vier Ebenen der visuellen Strukturierungsfähigkeit fokussierte Söbbeke (2005) zwei Fähigkeitskomplexe – die visuelle Strukturierung sowie die Anzahlbestimmung. Zur Ausdifferenzierung der vier Ebenen der visuellen Strukturierungsfähigkeit nutzte sie charakteristische Eigenschaften innerhalb beider Fähigkeitskomplexe. Für das vorliegenden Forschungsprojektes wird der Fokus auf die *strukturellen Deutungen* im

Argumentationsprozess gelegt. Aus diesem Grund bleibt der Fähigkeitskomplex der Anzahlbestimmung unberücksichtigt. Der Fähigkeitskomplex der visuellen Strukturierung ermöglichte es Söbbeke (2005) strukturelle Deutungen von Kindern detailliert zu rekonstruieren. Da das Interesse innerhalb des vorliegenden Forschungsprojektes ebenfalls den strukturellen Deutungen innerhalb der Argumentation gilt, zeigen sich hilfreiche Analogien. Auch innerhalb des vorliegenden Forschungsprojektes wird analysiert, welche Strukturen Kinder innerhalb der Argumentationsprozesse deuten und zur Begründung heranziehen.
Ausgehend vom Fähigkeitskomplex der visuellen Strukturierung wurden im Prozess der Interpretation die für das vorliegende Forschungsprojekt relevanten Aspekte aus dem eigenen Datenmaterial abgeleitet. Dabei zeigte sich, dass es sinnvoll ist, lediglich drei unterschiedliche Arten der strukturellen Deutung auszudifferenzieren. Innerhalb dieses Prozesses entwickelten sich die folgenden drei Arten der strukturellen Deutungen von Anschauungsmitteln innerhalb des Argumentationsprozesses.

Konkret-dingliche Deutungen	**Partielle Strukturen**	**Umfangreiche (prototypische) Strukturen**
- Punktdarstellung als konkrete Zahldarstellung - optische Erscheinungsmerkmale - Faktenwissen	- Nutzung elementarer Strukturen innerhalb einer Zahl/Darstellung - Vergleich von elementaren Strukturen zwischen Zahlen/Darstellungen - (vereinzelte) Umdeutungen	- komplexe Strukturen - (begründete) allgemeingültige Aussagen - Umdeutungen

Tabelle 6.1: Strukturelle Deutungen im Kontext anschaulich dargestellter Zahleigenschaften

Diese Ausdifferenzierung ermöglicht eine detaillierte Analyse der Deutungsweisen innerhalb des Argumentationsprozesses. Das Grundverständnis dieser Ausdifferenzierung entspricht dem von Söbbeke (2005). Wesentlich ist, dass die Arten „*nicht* als genetisch festgelegte Entwicklungsstufen, die in einer bestimmten Reihenfolge durchlaufen werden müssen, (miss-)verstanden werden dürfen“ (Söbbeke, 2005, S. 133). Auch ist die Zuordnung zu einer Art der Mediation nicht als generalisierend zu verstehen. Vielmehr wird jede Deutungsphase für sich betrachtet und es ergibt sich „keine festgelegte ‚Einordnung des Kindes‘ zu einer Entwicklungsstufe, sondern ein *differenziertes Bild*, das die Bandbreite an Herangehensweisen eines Kindes – ausschließlich bezogen auf den spezifischen [*Argumentationskontext*] und die jeweilige *Deutungsphase* – beschreibt“ (Söbbeke, 2005, S. 133; Hervorhebungen i.O.). Auch wenn diese strukturellen Deutungen nicht als Entwicklungsstufen betrachtet werden, zeigt sich eine didaktisch orientierte Hierarchie und eine Zunahme an der Komplexität der Deutungen (ebd.). Im Folgenden werden die einzelnen Arten der strukturellen

Mediation in Anlehnung an Söbbeke (2005) beschrieben, erläutert und durch Beispiele konkretisiert.

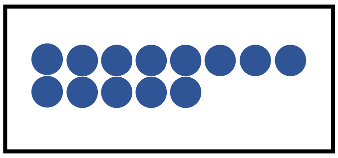
Konkret-dingliche Deutungen

In den Argumentationen und den Deutungen, die dieser Art der Mediation zugeordnet werden, werden innerhalb des Wechselspiels von Referenzkontext sowie Zeichen/Symbol *keine strukturellen Deutungen* zur Argumentation herangezogen. Demnach werden keine Strukturen oder Beziehungen als Argumentationsgrundlage genutzt. Vielmehr stehen konkrete Zahlen oder Oberflächenmerkmale der geometrischen Anordnung im Vordergrund. Das heißt, die Strukturen innerhalb der geometrischen Anordnung oder der konkreten Zahl bleiben unberücksichtigt. Sie werden auch nicht in einen strukturellen Zusammenhang zu anderen Zahlen, Anordnungen oder der betrachteten Zahleigenschaft gestellt. Dies äußert sich an folgenden charakteristischen Eigenschaften:

Deutung der Darstellung als Mittel zur Zahldarstellung

Innerhalb der Deutung werden keine geometrischen Strukturen oder Eigenschaften in den Blick genommen. Vielmehr fokussieren die Kinder die Kardinalität der (gesamten) Veranschaulichung und ermitteln die *konkrete Anzahl der Punkte*. Sie nutzen die Punktdarstellung als Mittel zur Zahldarstellung.

Da der Fokus der Analyse darauf gerichtet ist, ob die Kinder die strukturellen Deutungen für die Argumentation nutzen, bleibt unberücksichtigt, ob sie Strukturen zur Anzahlbestimmung nutzen.

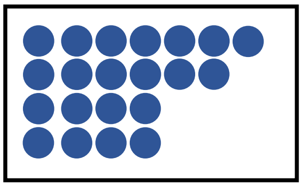


Jennifer: „Das sind 13.“

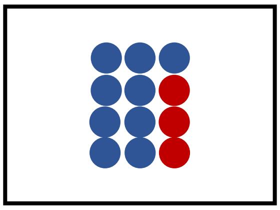
Abbildung 6.3: Beispiel zur Deutung der Darstellung als Mittel zur Zahldarstellung

Deutung von optischen Erscheinungsmerkmalen

Innerhalb der Deutung beziehen sich die Kinder auf *konkrete optische Eigenschaften* der geometrischen Anordnung. Dabei werden entweder einzelne Elemente und die Eigenschaften dieser oder die Darstellung als Ganzes betrachtet und die äußere Erscheinung auf *phänomenologischer Ebene* in den Blick genommen. Die Strukturen innerhalb der Veranschaulichungen bleiben an dieser Stelle unberücksichtigt und es wird auch kein konkreter Bezug zu der betrachteten Zahleigenschaft vorgenommen.



Lasse begründet, dass die Veranschaulichung nicht durch drei teilbar ist.
Lasse: „Das glaub ich einfach nicht. Schon vom Aussehen, weil das so komisch gemacht ist.



Benjamin: „Wenn ich die Plättchen dann zusammentu, dann ist das halt so nen Viereck, wo kein Punkt oder so übersteht. Dann weiß ich schon sofort, dass das gerade ist."

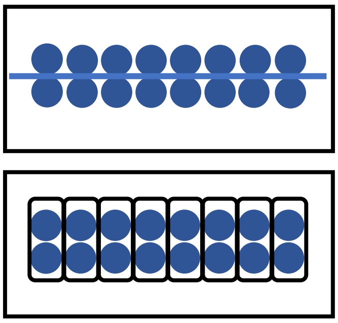
Abbildung 6.4: Beispiele zur Deutung von optischen Erscheinungsmerkmalen

Tabelle 6.2: Erläuterung konkret-dingliche Deutungen

Partielle Strukturen
Innerhalb dieser Art der Mediation stehen nicht (nur) die konkreten Aspekte der Darstellung im Vordergrund. Die Kinder lösen sich von konkreten Oberflächenmerkmalen oder Zahlen und nehmen *zunehmend strukturelle Beziehungen* innerhalb der Darstellung oder der Zahl beziehungsweise zwischen verschiedenen Darstellungen und Zahlen in den Blick. Dabei ist die Argumentation an strukturelle Merkmale konkreter Darstellungen beziehungsweise Zahlen gebunden. Sie müssen also noch keineswegs verallgemeinernder Natur sein. Dabei nutzen sie vor allem *individuelle Strukturierungen, operative Handlungen oder intendierte Strukturen*. Die von den Kindern zur Argumentation herangezogenen Strukturen umfassen dabei nicht alle strukturellen Merkmale, die für eine mathematische Argumentation notwendig sind. Dies äußert sich durch folgende charakteristische Eigenschaften: *Deutung von vereinzelten Strukturen* Die Kinder nehmen zunehmend eine strukturierte Deutung des Zeichens/Symbols ein. Dabei deuten Kinder *Substrukturen* in die Veranschaulichungen hinein. Hierfür fassen sie mehrere Einzelelemente zusammen. Diese Substrukturen werden dann innerhalb der Argumentation zueinander in Beziehung gesetzt. Auch können innerhalb der Deutung einzelne strukturelle Zusammenhänge zwischen verschiedenen Zeichen/Symbolen in den Blick genommen werden. Die gedeuteten Strukturen werden dabei nicht nur in das Zeichen/Symbol hineingedeutet, sondern auch als Argumentationsgrundlage genutzt. Dabei können unterschiedliche strukturelle Beziehungen hergestellt werden:

Nutzung von strukturellen Beziehungen innerhalb einer konkreten Zahl / Darstellung

Kinder nutzen die strukturellen Beziehungen innerhalb eines konkreten Zeichens zur Argumentation. Eine Allgemeingültigkeit wird von den Kindern an dieser Stelle (noch) nicht expliziert.



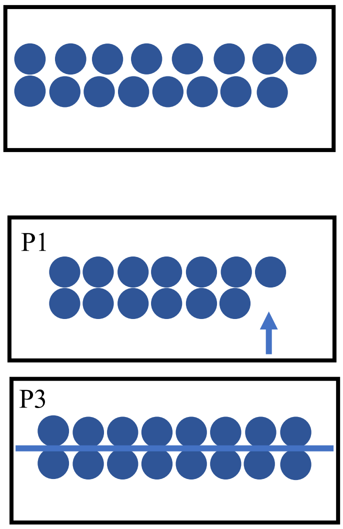
Helena: „Weil, wenn man so *[unverständlich]*, kann man das hier durchteilen *[fährt mit dem Finger zwischen der oberen und unteren Reihe her]*, wenn man 2 Kinder hat.“

Mia: Das hier ist auf jeden Fall ne gerade. Weil hier sehe ich das schon, weil das immer zwei in einer Reihe sind.

Abbildung 6.5: Beispiele zur Nutzung von strukturellen Beziehungen innerhalb einer konkreten Darstellung

Nutzung von strukturellen Beziehungen zwischen konkreten Zahlen / Darstellungen

Kinder stellen Beziehungen zwischen mindestens zwei Darstellungen oder Zahlen her. Dabei werden diese nicht willkürlich verglichen, sondern für die Argumentation relevante Beziehungen zwischen den Darstellungen oder Zahlen werden in den Blick genommen.



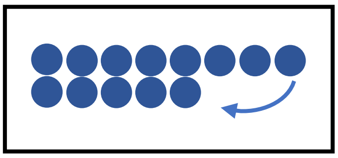
Jonathan: „Also sind das 13 halt und das ist eine ungerade Zahl, denn die kann man nicht durch 2 teilen, denn 10, 12 und dann ist die 13 weg und dann kommt die 14 und so weiter ja und deswegen ist das hier eine ungerade Zahl.“

Helena: „Das sieht man jetzt sofort, weil wie bei dem hier *[schiebt P3 daneben]* kann man das ja so teilen *[teilt mit dem Finger die obere und untere Reihe von P3],* aber hier *[zeigt unter P1.7]* ist ja einer zu wenig. *[unverständlich] [schiebt P1 unter P8]*.“

Abbildung 6.6: Beispiele zur Nutzung von Strukturen zwischen konkreten Zahlen/Darstellungen

(Vereinzelte) Umdeutungen

Innerhalb des Deutungsprozesses werden (vereinzelte) Umdeutungen vorgenommen. Hierbei ist ‚Umdeutung' in zweierlei Hinsicht zu verstehen. Kinder können zum Beispiel die Darstellung verändern, indem sie einzelne Punkte umlegen, die Darstellung ergänzen oder gezielt Punkte wegnehmen. Die Intention der Umdeutung ist dabei, eine Darstellung zu erzeugen, die im weiteren Verlauf als Argumentationsgrundlage dient. Dieser Prozess kann sowohl mental als auch konkret durchgeführt werden. Umdeutungen können aber auch so verstanden werden, dass die Kinder zu einer Darstellung unterschiedliche Deutungen einnehmen. Auch hier ist die Intention, dass die Veränderung der Deutung den Argumentationsprozess gewinnbringend beeinflusst.



Melina: *(..)* Ok. Ähm *(..)*, diese Zahl ist *(...)* ungerade. Weil *(..)*, wenn ich ein Plättchen jetzt nach unten machen würde, ist immer noch ein Plättchen oben. Und deshalb ist das ungerade

Abbildung 6.7: Beispiel für eine mögliche Umdeutung

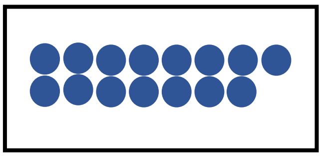
Tabelle 6.3: Erläuterung partielle Strukturen

Umfangreiche und prototypische Strukturen
Charakteristisch für diese Form der strukturellen Deutungen sind umfangreiche strukturelle Deutungen sowie allgemeingültige Komponenten in den jeweiligen Deutungen. Der Fokus liegt demnach auf der *Deutung von Beziehungen innerhalb oder zwischen den Darstellungen beziehungsweise der Zahlen, die verallgemeinernder Natur* sind. Dabei werden vor allem *prototypische Strukturen* genutzt oder erzeugt. Im Gegensatz zu der vierten Ebene der visuellen Strukturierungsfähigkeit von Söbbeke (2005) werden den umfangreichen und prototypischen Strukturen auch individuelle Strukturierungen zugeordnet, die allgemeingültiger Natur sind, oder den allgemeinen Teilbarkeitsregeln entsprechen. Diese Art der Deutungen äußert sich durch folgende charakteristische Eigenschaften: *Deutung komplexer Strukturen* Innerhalb dieser Deutungen nutzen die Kinder komplexe Strukturen innerhalb des zu deutenden Zeichens/Symbols. Das heißt, Kinder nutzen intendierte Strukturen, oder Strukturen, die in unmittelbarer Verbindung mit der zu betrachteten strukturellen Zahleigenschaft stehen. Dabei betrachten die Kinder *alle wesentlichen strukturellen Merkmale* oder explizieren eine *mögliche Fortführung ihrer Deutung*. Dabei werden in die Darstellungen oder Zahlen allgemeingültige Strukturen hineingedeutet oder allgemeingültige Beziehungen

zwischen unterschiedlichen Darstellungen oder Zahlen in den Blick genommen. Dadurch wird deutlich, dass die Argumentation nicht nur für ein konkretes Beispiel gültig ist, sondern für eine bestimmte Klasse an Veranschaulichungen (vgl. Kap. 2.4). Dabei können die Teilbarkeitsregeln sowie -relationen Ausgangspunkt für die Deutung der Strukturen sein. In Abgrenzung zu der Deutung vereinzelter Strukturen, wird sich an dieser Stelle von den konkreten Beispielen gelöst und allgemeingültige Aussagen und Vorgehensweisen genutzt.

Nutzung von allgemeinen Beziehungen innerhalb einer Zahl / Darstellung

Innerhalb des Argumentationsprozesses nutzen Kinder allgemeine Beziehungen innerhalb eines zu deutenden Zeichens/Symbols und machen innerhalb ihrer Argumentation deutlich, dass diese strukturelle Beziehung auf verschiedene Beispiele übertragbar ist[20].

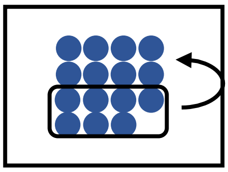


Lara: „So, das hier ist jetzt auch eine ungerade Zahl, weil die Punkte genau untereinander stehen. Immer zwei. Hier fehlt einer, wenn ich das durch zwei teile, habe ich viele Zweierpäckchen und einen einzelnen der übrig bleibt. Deswegen ist das ungerade.“

Abbildung 6.8: Beispiel für die Nutzung einer allgemeingültigen Beziehung

Komplexe Umdeutungen und/oder Zerlegungen in Teilkomponenten

Innerhalb der kindlichen Deutungen zeigen sich komplexe Umdeutungen und/oder Zerlegungen in Teilkomponenten, wenn Kinder die Darstellung verändern, indem sie einzelne Punkte umlegen, die Darstellung ergänzen oder gezielt Punkte wegnehmen. Die Intention der Umdeutung ist dabei, eine Darstellung zu erzeugen, durch die eine allgemeingültige Struktur generiert wird. Sie dient demnach als Argumentationsgrundlage für allgemeingültige Aussagen. Dieser Prozess kann sowohl mental als auch konkret-handelnd durchgeführt werden. Umdeutungen können aber auch so verstanden werden, dass die Kinder zu einer Darstellung unterschiedliche Deutungen einnehmen. Auch hier ist die Intention, dass die Veränderung der Deutung den Argumentationsprozess hinsichtlich einer Allgemeingültigkeit voranbringt. Beispiel einer komplexen Umdeutung[21]:



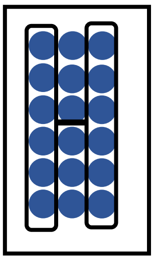
Max: „Wenn ich den unteren Teil nach oben schiebe, dann kann ich das viel besser sehen. Dann habe ich wieder überall zwei Punkte genau übereinander. Nur zum Schluss habe ich einen einzelnen Punkt, deswegen ist das ungerade.“

Abbildung 6.9: Beispiel einer komplexen Umdeutung

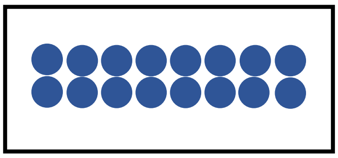
[20] Dies stellt eine mögliche Argumentation dieses Deutungstyps dar, die nicht aus der vorliegenden Studie entnommen worden ist, da keine Deutung dieses Typs rekonstruiert werden konnte.

[21] Dies stellt eine mögliche Argumentation dieses Deutungstyps dar, die nicht aus der vorliegenden Studie entnommen worden ist, da keine Deutung dieses Typs rekonstruiert werden konnte.

Beispiel für eine Zerlegung einer Darstellung oder Zahl:



Helena: „Weil es bei jedem einfach so eine Reihe gibt *[zeigt über die beiden äußeren langen Reihen]* und dann muss man gucken, ob man diese Reihe *[teilt die mittlere Reihe]* auch noch teilen kann.“

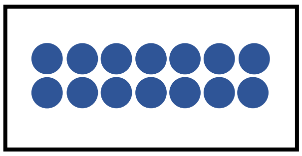


Im bisherigen Interviewverlauf wurde deutlich, dass Nico mit dem Begriff ‚teilen‘ die Teilbarkeit durch zwei impliziert.
Nico: Das sind 16 und das ist ne gerade Zahl, weil man 6 und 10 teilen kann.

Abbildung 6.10: Beispiele für die Zerlegung einer Darstellung oder einer Zahl

Nutzung von geometrischen Variablen

Innerhalb der kindlichen Deutungen nutzen die Kinder die Veranschaulichungen in Form von geometrischen Variablen (vgl. Kap. 2.4). Durch eine solche Nutzung von Veranschaulichungen kann eine mathematisch akzeptierte Darstellung einer Verallgemeinerung erzeugt werden[22].



Lukaz: „Ich muss nicht wissen, welche Zahl das ist. Wichtig ist, dass immer zwei Punkte übereinander sind. Dann ist das eine gerade Zahl. Ich kann die auch größer machen. Immer zwei mehr. So oft ich will.“

Abbildung 6.11: Beispiel für eine verallgemeinernde Deutung

Tabelle 6.4: Erläuterung umfangreicher (prototypischer) Deutungen

Durch diese Ausdifferenzierung wird untersucht, welche strukturellen Deutungen die Kinder innerhalb des Argumentationsprozesses vornehmen und welche Strukturen für die Kinder innerhalb der Argumetation relevant sind. Demnach wird für die zweite Forschungsfrage die Art der Mediation zwischen dem Referenzkontext und dem Zeichen/Symbol in den Blick genommen (vgl. Abb. 6.12).

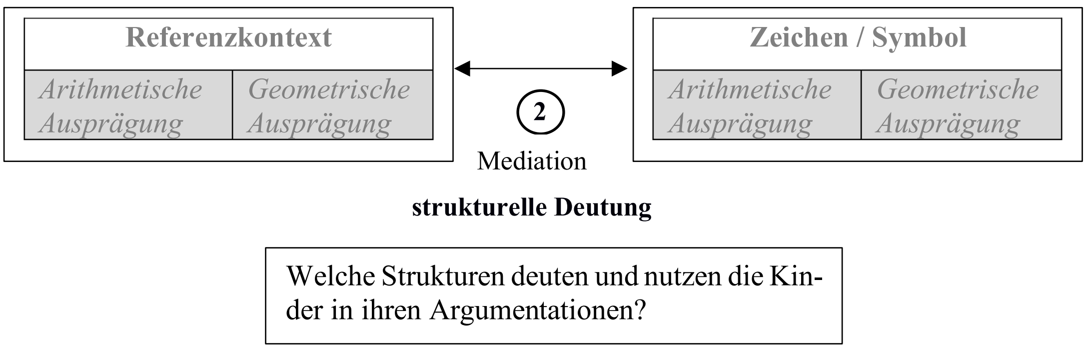


Abbildung 6.12:Die Anwendung des epistemologischen Dreiecks zur Rekonstruktion der strukturellen Deutungen innerhalb des Argumentationsprozesses

[22] Dies stellt eine mögliche Argumentation dieses Deutungstyps dar, die nicht aus der vorliegenden Studie entnommen worden ist, da keine Deutung dieses Typs rekonstruiert werden konnte.

3. Forschungsfrage: Rekonstruktion von begrifflichen Deutungen innerhalb des Argumentationsprozesses

Welche begrifflichen Deutungen zeigen sich innerhalb des Argumentationsprozesses?

Das zunächst beschriebene Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext sowie die Mediation zwischen diesen erfolgt nicht willkürlich, sondern wird auch vom mathematischen Begriff bestimmt. Innerhalb des Argumentationsprozesses erfolgt die kindliche Deutung in einem mathematisch-inhaltlichen Kontext – in Fall vorliegenden Studie der Teilbarkeit. Demnach wird das Wechselspiel zwischen Referenzkontext und Zeichen/Symbol sowie die Mediation in Form der strukturellen Deutungen durch den mathematischen Begriff der Teilbarkeit geregelt. Das Begriffsverständnis ist bei den Kindern aber noch nicht vollumfänglich ausgebildet, sondern kann sich auf einzelne begriffliche Facetten des Teilbarkeitsbegriffs beziehen oder durchaus auch Fehlvorstellungen beinhalten. Diese können sich dabei innerhalb des Argumentationsprozesses verändern und entwickeln. Insbesondere mit dem Blick auf die Tatsache, dass innerhalb von Argumentationsprozessen immer auch Begriffsbildungsprozesse stattfinden, ist es von Interesse, dies in den Blick zu nehmen und den mathematischen Begriff der Teilbarkeit differenziert zu betrachten.

Für die Interviewkonzeption und eine differenzierte Analyse ist eine Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt notwendig. Nur so kann eine Ausschärfung des Begriffs erfolgen. Diese differenzierte Betrachtung des Teilbarkeitsbegriffs ist notwendig, um die Begriffsbildungsprozesse detailliert zu untersuchen. Aus diesem Grund wird im Folgenden zunächst die grundlegende Rechenoperation der Division allgemein betrachtet. Daran anknüpfend werden die geraden und ungeraden Zahlen sowie die Teilbarkeit durch drei und die allgemeingültigen Aussagen betrachtet. Diese theoretische Auseinandersetzung dient dann als Grundlage für die Ausdifferenzierung des Begriffs der Teilbarkeit. Diese stellt einen wesentlichen Baustein der Analyse der begrifflichen Deutung dar.

Der Teilbarkeitsbegriff aus allgemeiner Perspektive

Eine natürliche Zahl b ist dann ohne Rest durch eine andere natürliche Zahl a teilbar, wenn es eine natürliche Zahl c gibt, so dass a mit c multipliziert das Produkt b ergibt, beziehungsweise b durch a geteilt den Quotient c ergibt[23].

[23] Da das vorliegende Forschungsprojekt in der Grundschule verortet ist, wird im Folgenden ausschließlich mit natürlichen Zahlen gearbeitet.

Das heißt:

$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{a}\mathbf{l}\boldsymbol{b}$ gdw $\exists\, \boldsymbol{c} \in \mathbb{N}$:

$\boldsymbol{a \cdot c = b\ bzw.\ b : a = c}$.

Ansonsten gilt die Division mit Rest:

$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{a}\mathbf{l}\boldsymbol{b}$ gdw $\exists\, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{wobei}\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}$:

$\boldsymbol{a \cdot c + r = b\ bzw.\ b : a = c\ Rest\ r}$.

(Böhm, 2016, S. 9; Reiss & Schmieder, 2014, S. 86; Ziegenbalg, 2015, S. 25).

Dabei unterliegt die Teilbarkeit unterschiedlichen allgemeinen Eigenschaften und Teilbarkeitsregeln (Bartholomé, Rung, & Kern, 2011, S. 14; Reiss & Schmieder, 2014, S. 86; Wolfart, 2011, S. 19; Ziegenbalg, 2015, S. 32ff.):

Transitivität in Verbindung mit Teilbarkeit
Wenn eine Zahl eine andere Zahl teilt und diese Zahl eine dritte Zahl teilt, so teilt die erste Zahl auch die dritte Zahl $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{N}: \boldsymbol{a}\mathbf{l}\boldsymbol{b}\ \&\ \boldsymbol{b}\mathbf{lc} \implies \boldsymbol{a}\mathbf{lc}$
Teilbarkeitsrelation in Kombination mit Addition und Subtraktion
Wenn eine Zahl zwei andere Zahlen teilt, so teilt sie auch die Summe der beiden Zahlen. $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{N}: \mathbf{al}\boldsymbol{b} \cup \mathbf{al}\boldsymbol{c} \implies \mathbf{al}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
Wenn eine Zahl eine andere Zahl teilt sowie eine Zahl nicht teilt, so teilt sie auch die Summe nicht. $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{N}: \mathbf{al}\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{a}\nmid\boldsymbol{c} \implies \boldsymbol{a}\nmid(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
Wenn eine Zahl zwei andere Zahlen teilt, so teilt sie auch die Differenz der beiden Zahlen. $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ (\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}) \in \mathbb{N}: \boldsymbol{a}\mathbf{l}\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{a}\mathbf{l}\boldsymbol{c} \implies \mathbf{al}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$
Wenn eine Zahl eine andere Zahl teilt sowie eine Zahl nicht teilt, so teilt sie auch die Differenz dieser Zahlen nicht. $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ (\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}) \in \mathbb{N}: \boldsymbol{a}\mathbf{l}\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{a}\nmid\boldsymbol{c} \implies \boldsymbol{a}\nmid\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$
Teilbarkeitsregeln (gelten spezifisch für einzelne Zahlen)
Eine natürliche Zahl ist genau dann durch zwei teilbar, wenn die letzte Ziffer durch zwei teilbar ist.
Eine natürliche Zahl ist genau dann durch drei teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch drei teilbar ist.

Tabelle 6.5: Teilbarkeitsregeln und -relationen

Der Teilbarkeitsbegriff mit dem Fokus auf gerade und ungerade Zahlen

„Man sagt eine natürliche Zahl ist *gerade*, wenn sie von der Zahl 2 geteilt wird (anders ausgedrückt: wenn sie ein Vielfaches von 2 ist); andernfalls wird sie als *ungerade* bezeichnet“ (Ziegenbalg, 2015, S. 30; Hervorhebung i.O.). Gerade Zahlen lassen sich demnach in folgender Form darstellen (wobei: $m \in \mathbb{N}$):

gerade Zahlen: $2m$

ungerade Zahlen: $2m + 1$ oder $2m - 1$

Betrachtet man diese Definition, so zeigt sich, dass eine Zahl entweder gerade ist oder ungerade (Oswald & Steuding, 2015, S. 45). Da bei einer Division der Rest kleiner als der Divisor sein muss, ist an dieser Stelle lediglich der Rest eins möglich. Dies hat zur Folge, dass sich die geraden und ungeraden Zahlen in der ordinalen Anordnung der natürlichen Zahlenfolge abwechseln.

In dem Kontext der geraden und ungeraden Zahlen lassen sich eine Vielzahl von allgemeingültigen Aussagen thematisieren, die durch die Verknüpfung von geraden und ungeraden Zahlen entstehen. Für die Addition und Multiplikation ergeben sich folgende allgemeingültige Aussagen, die in Form einer Verknüpfungstabelle dargestellt werden (Padberg & Büchter, 2015b, S. 160):

+	g	u
g	g	u
u	u	g

•	g	u
g	g	g
u	g	u

g = gerade Zahl; u = ungerade Zahl

Abbildung 6.13: Verknüpfung von Addition und Multiplikation im Kontext gerade und ungerader Zahlen

Innerhalb des vorliegenden Forschungsprojektes wird mit den Kindern die Aussage „Wenn man zwei ungerade Zahlen addiert, ist die Summe immer gerade“ fokussiert. Dies lässt sich wie folgt beweisen:

$m, n \in \mathbb{N}$

$(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$

$\Rightarrow$ **$2 \mid (2m + 1) + (2n + 1)$**, denn $2 \cdot (m + n + 1) = (2m + 1) + (2n + 1)$

Dieser Beweis lässt sich auch grundschulgerecht in Form eines inhaltlich-anschaulichen Beweises führen (vgl. Kap. 2.4.2):

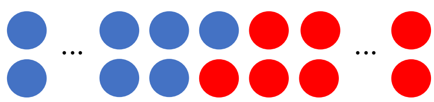


Abbildung 6.14: Inhaltlich-anschaulicher Beweis für die Aussage "Wenn man zwei ungerade Zahlen addiert, dann ist die Summe gerade."

Innerhalb dieser Beweise ist demnach die Addition der Reste ausschlaggebend dafür, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist. Da beide Zahlen bei Division durch zwei den Rest eins haben, ergibt die Addition dieser Reste zwei. Dies stellt ebenfalls eine durch zwei teilbare Zahl dar. Betrachtet man die Darstellung unter dieser Perspektive, so ist folgende Deutung notwendig: Die abgebildete Darstellung (vgl. Abb. 6.14) besteht aus zwei unterschiedlichen Summanden, die aufgrund ihrer Farbgebung unterschieden werden können. Dabei bestehen beide Zahlen aus genau zwei Reihen, die übereinanderliegen und gleich strukturiert sind. Bei der Darstellung des blauen Summanden ist innerhalb der oberen Reihe ein Punkt ohne gegenüberliegenden blauen Punkt. In der roten Darstellung ist dieser einzelne Punkt in der unteren Reihe. Die ‚...' symbolisieren eine mögliche Fortsetzbarkeit unter Erhaltung der Struktur. Sie stehen demnach dafür, dass immer zwei Punkte ergänzt werden, was beliebig oft durchgeführt werden kann. Da in beiden Reihen jeweils ein einzelner Punkt enthalten ist, wird durch ein Ergänzen der beiden Punkte eine neue Zweierspalte erzeugt. So gibt es in der gesamten Darstellung nur noch Spalten mit genau zwei gegenüberliegenden Punkten. Für eine aufteilende Sicht der Division bedeutet dies, dass die Darstellung vollständig in Zweierspalten strukturiert werden kann. Für eine verteilende Sicht auf die Darstellung kann gesagt werden, dass aufgrund der zwei gleichstrukturierten und gleichlangen Reihen eine horizontale Teilung in zwei gleiche Reihen möglich ist.

Der Teilbarkeitsbegriff mit dem Fokus auf die Teilbarkeit durch 3

Analog zu den geraden und ungeraden Zahlen, lassen sich durch drei teilbare Zahlen beziehungsweise nicht durch drei teilbare Zahlen wie folgt darstellen (wobei: $m \in \mathbb{N}$):
durch drei teilbare Zahlen: 3m.
nicht durch drei teilbare Zahlen: 3m+1 bzw. 3m-1 oder 3m+2 bzw. 3m-2
Da bei einer Division der Rest kleiner als der Divisor sein muss, ist an dieser Stelle der Rest eins sowie der Rest zwei möglich. Innerhalb der ordinalen Anordnung der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen folgen auf eine durch drei teilbare Zahl somit immer zwei nicht durch drei teilbare Zahlen. Zunächst eine Zahl mit dem Rest eins und anschließend eine mit dem Rest zwei.
Ausgehend von dieser ordinalen Anordnung lässt sich im Kontext der Teilbarkeit durch drei folgende allgemeingültige Aussage treffen, die innerhalb des vorliegenden Forschungsprojektes mit den Kindern fokussiert wird: „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch drei teilbar". Auf einen formalen und inhaltlich-anschaulichen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet, da diese bereits bei der theoretischen Auseinandersetzung mit inhaltlich-anschaulichen Beweisen geführt wurden (vgl. Kap. 2.4).

Begriffliche Facetten des Teilbarkeitsbegriffs

Innerhalb der bisherigen Auseinandersetzung mit dem Teilbarkeitsbegriff zeigte sich dieser als ein vielschichtiger und facettenreicher Begriff, der mit unterschiedlichen allgemeinen Eigenschaften und Teilbarkeitsrelationen einhergeht. Daher sollte der mathematische Begriff der Teilbarkeit innerhalb des Mathematikunterrichts nicht ausschließlich auf die Teilbarkeitsdefinition an sich reduziert werden. Gleichzeitig zeigten sich in den Analysen der Interviews, dass sich auch in den Argumentations- und Deutungsprozessen der Kinder unterschiedliche Facetten des Teilbarkeitsbegriffs rekonstruieren lassen.

Aufgrund der oben beschriebenen Eigenschaften und Teilbarkeitsrelationen lassen sich insgesamt vier unterschiedliche begriffliche Ideen differenzieren, die aus mathematischer Perspektive tragfähig sind. Dies bedeutet nicht, dass Kinder immer eine oder mehrere dieser begrifflichen Facetten zur Argumentation nutzen. Begriffliche Fehlvorstellungen werden innerhalb des theoretischen Konstrukts nicht explizit aufgenommen. Innerhalb der Analyse werden diese hingegen durch Abgrenzung zu den vier begrifflichen Facetten herausgearbeitet. Die Reihenfolge innerhalb der Aufzählung stellt dabei keine Hierarchie der Facetten dar. Nur durch eine Verzahnung der unterschiedlichen Facetten kann ein umfängliches Begriffsverständnis gewonnen werden.

Begriffliche Deutungen			
Ordinale Anordnung	**Differenz**	**Teilbarkeit mit und ohne Rest**	**Zerlegung des Zeichens/Symbols in Teilkomponenten**
- der Zahlen innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen - Zahlenfolge der Zahlen gleicher Eigenschaften	- zwischen Zahlen gleicher oder verschiedener Eigenschaft	- ohne Ermittlung des Ergebnisses - operative Ermittlung des Ergebnisses	unter Ausnutzung: - der Summenregel - der Differenzregel - der Produktregel - der Teilbarkeitsregel

Tabelle 6.6: Begriffliche Deutungen des Teilbarkeitsbegriffs

Die ersten beiden Facetten spiegeln dabei keine unmittelbaren Eigenschaften der jeweiligen Zahleigenschaft wider. Vielmehr werden innerhalb dieser Facetten die einzelnen Zahlen im Kontext der strukturellen Zahleigenschaft in einen strukturellen Gesamtzusammenhang gestellt. Die dritte Facette entspricht der Definition der Zahleigenschaft. Die vierte Facette fokussiert die allgemeinen Teilbarkeitsrelationen und -regeln. Für einen umfassendes Begriffsverständnis ist ein Verständnis und eine Vernetzung aller vier begrifflicher Facetten nötig.

Ordinale Anordnung
Hierbei handelt es sich um die ordinale Anordnung der Zahlen innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen beziehungsweise die ordinale Anordnung der Zahlenfolge der Zahlen gleicher Zahleigenschaften. In erster Linie wird dabei nicht die strukturelle Zahleigenschaft an sich fokussiert, sondern vielmehr ein übergeordneter Zusammenhang innerhalb der natürlichen Zahlenfolge. *Gerade und ungerade Zahlen:* Die geraden und ungeraden Zahlen wechseln sich in der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen ab. *Teilbarkeit durch drei:* Auf eine durch drei teilbare Zahl folgen zwei nicht durch drei teilbare Zahlen – eine mit dem Rest eins und eine mit dem Rest zwei. Dies hat zur Folge, dass der Vorgänger einer durch drei teilbaren Zahl immer den Rest zwei hat und der Nachfolger den Rest eins.
Differenz zwischen Zahlen gleicher oder verschiedener Eigenschaften
Unmittelbar in dem Zusammenhang mit der ordinalen Anordnung steht die Differenz zwischen Zahlen gleicher oder verschiedener Eigenschaft. Diese Facette spiegelt noch nicht die strukturelle Zahleigenschaft an sich wider, sondern Beziehungen zwischen Zahlen. *Gerade und ungerade Zahlen:* Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen gleicher Parität ist immer zwei. Die Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen unterschiedlicher Parität ist immer eins. *Teilbarkeit durch drei:* Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden und durch drei teilbaren Zahlen ist immer drei. Für aufeinanderfolgende Zahlen, die nicht durch drei teilbar sind, ist eine solche allgemeingültige Aussage schwierig, denn die Differenz kann entweder eins, zwei oder drei sein.
Teilbarkeit mit und ohne Rest
Diese begriffliche Facette entspricht im Grunde der Teilbarkeitsdefinition. Eine natürliche Zahl b ist dann ohne Rest durch eine andere natürliche Zahl a teilbar, wenn es eine natürliche Zahl c gibt, so dass a mit c multipliziert das Produkt b ergibt beziehungsweise b durch a geteilt den Quotient c ergibt. Ansonsten bleibt ein Rest der kleiner ist als der Divisor. Es ist demnach ein multiplikatives und divisionales Begriffsverständnis möglich. *Gerade und ungerade Zahlen:* Eine Zahl ist gerade, wenn sie durch zwei teilbar ist, ansonsten bleibt der Rest eins und sie ist ungerade. *Teilbarkeit durch drei:* Eine Zahl ist durch drei teilbar, wenn eine Division durch drei möglich ist. Ist dies nicht möglich, ist die Zahl nicht durch drei teilbar und es bleibt der Rest eins oder zwei.

Teilbarkeitsrelationen und Teilbarkeitsregeln[24]
Diese Facette entspricht den allgemeinen Relationen und Regeln im Kontext der Division, die in den bisherigen Ausführungen bereits aufgezählt wurden. Teilbarkeitsrelationen: Wenn eine Zahl zwei andere Zahlen teilt, so teilt sie auch deren Summe sowie Differenz. Teilt eine Zahl eine andere Zahl und eine dritte Zahl nicht, so teilt sie auch nicht die Summe beziehungsweise Differenz der beiden Zahlen. *Gerade und ungerade Zahlen:* Die Summe beziehungsweise die Differenz von zwei geraden Zahlen ist gerade. Die Summe beziehungsweise Differenz von einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade. *Teilbarkeit durch drei:* Die Summe beziehungsweise die Differenz von zwei durch drei teilbaren Zahlen ist ebenfalls durch drei teilbar. Die Summe beziehungsweise die Differenz einer durch drei teilbaren und einer nicht durch drei teilbaren Zahl ist nicht durch drei teilbar. Teilbarkeitsregeln: Hierbei handelt es sich um eine allgemeingültige Regel, „durch deren Anwendung man einer Zahl ansehen kann, ob sie durch eine bestimmte andere Zahl teilbar ist (oder auch nicht)“ (Reiss & Schmieder, 2014, S. 88). Diese Regel ist allerdings von Zahl zu Zahl unterschiedlich: *Gerade und ungerade Zahlen:* Eine Zahl ist genau dann durch zwei teilbar, wenn deren Einer-Ziffer ebenfalls durch zwei teilbar ist (Endstellenregel). *Teilbarkeit durch drei:* Eine Zahl ist genau dann durch drei teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch drei teilbar ist (Quersummenregel).

Tabelle 6.7: Erläuterung der begrifflichen Facetten des Teilbarkeitsbegriffs

Durch diese Ausdifferenzierung kann der Fokus darauf gelenkt werden, welche begrifflichen Deutungen die Kinder innerhalb des Argumentationsprozesses vornehmen. Demnach wird für die dritte Forschungsfrage in den Blick genommen, welche begriffliche Facette in dem kindlichen Argumentationsprozess rekonstruiert werden kann (vgl. Abb. 6.15).

[24] Für ausführliche Beweise siehe Padberg & Büchter, 2015a, 2015b; Reiss & Schmieder, 2014; Ziegenbalg, 2015.

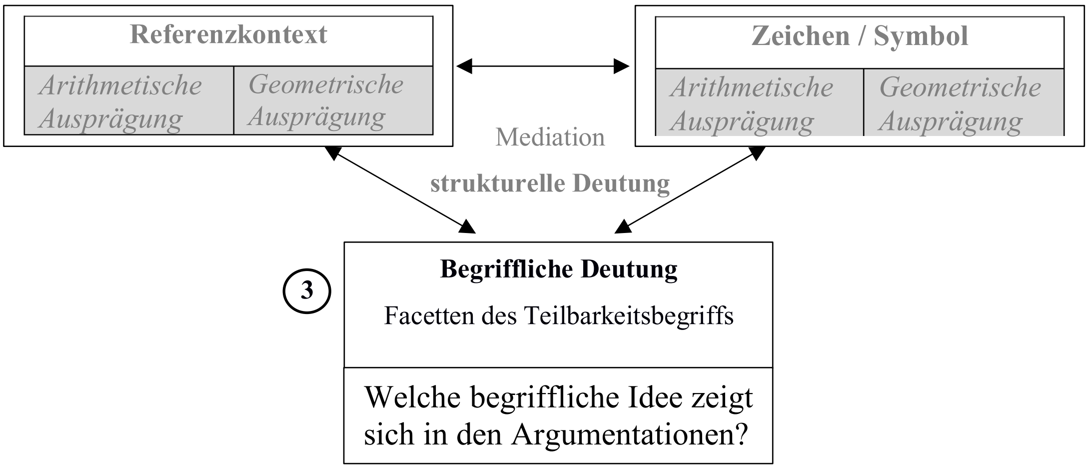


Abbildung 6.15: Die Anwendung des epistemologischen Dreiecks zur Rekonstruktion der begrifflichen Deutungen innerhalb des Argumentationsprozesses

Zusammenfassung des Theoriekonstrukts zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen

Innerhalb der vorherigen Ausführungen wurde deutlich, dass das vorgestellte Analyseinstrument detaillierte Analysen von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften ermöglicht. Durch die Ausdifferenzierung des epistemologischen Dreiecks lassen sich somit alle Aspekte des vorliegenden Forschungsinteresses im Detail untersuchen. So kann die Rolle des Anschauungsmittels als fragliches beziehungsweise begründungsbedürftiges Zeichen/Symbol aber auch als Argumentationsgrundlage, dem Referenzkontext, herausgearbeitet werden. Eine solche Analyse gibt Einblicke in die epistemologische Bedeutung, die die Kinder dem Anschauungsmittel innerhalb der Argumentationen geben. Diese Bedeutungsgebung ist dabei nicht als intentionaler Akt der Kinder zu verstehen, sondern geschieht vielmehr unbewusst. Innerhalb dieses Wechselspiels zeigt sich dann eine strukturelle Mediation, die in der Analyse detailliert in den Blick genommen werden kann. Dies ermöglicht es zu untersuchen und besser zu verstehen, inwiefern Kinder Strukturen in die Veranschaulichungen hineindeuten und im Argumentationsprozess nutzen. Dabei kann der Blick auch darauf gelenkt werden, welche Strukturen in oder zwischen den geometrischen Anordnungen und deren Merkmalen für die Kinder von Bedeutung sind. Durch diese Analyse lassen sich auch Rückschlüsse auf das zugrundeliegende Begriffsverständnis der Kinder ziehen. Da alle Aspekte innerhalb der epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen in wechselweiser Beziehung zueinander stehen, werden sie in der Analyse zwar voneinander getrennt betrachtet, deren Verwobenheit aber immer mit in den Blick genommen.

Die folgende zusammenfassende Abbildung zeigt zunächst die Beziehung innerhalb der epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen und im Anschluss in einer tabellarischen Darstellung die Ausdifferenzierung der einzelnen Aspekte.

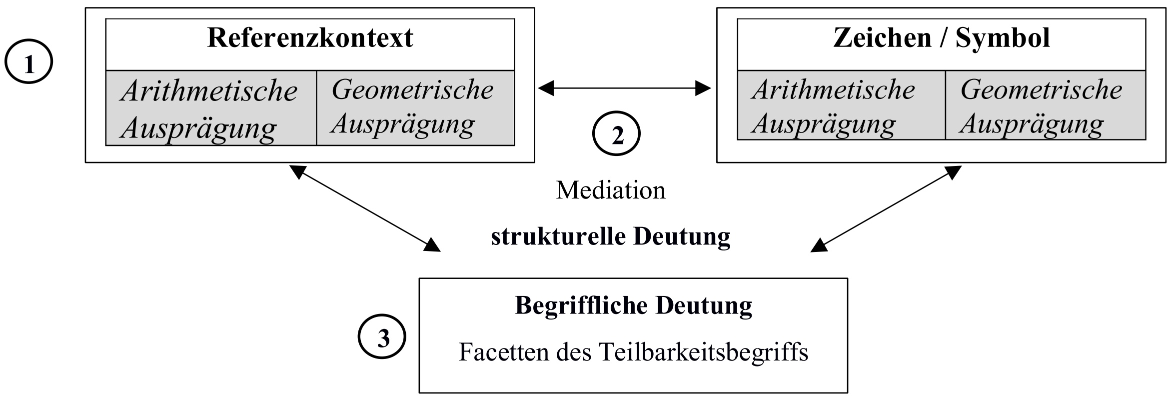


Abbildung 6.16: Analyseinstrument zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen mit Anschauungsmitteln

<table>
<tr><th colspan="6">(1) epistemologische Bedeutung</th></tr>
<tr><th colspan="3">Referenzkontext</th><th colspan="3">Zeichen / Symbol</th></tr>
<tr><td>Arithmetische Ausprägung</td><td colspan="2">Geometrische Ausprägung</td><td colspan="2">Arithmetische Ausprägung</td><td>Geometrische Ausprägung</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="6">(2) Strukturelle Deutungen</th></tr>
<tr><th colspan="2">Konkret dingliche Deutungen</th><th colspan="2">Partielle Strukturen</th><th colspan="2">Umfangreiche (prototypische) Strukturen</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Punktdarstellung als konkrete Zahldarstellung
- optische Erscheinungsmerkmale
- Faktenwissen</td><td colspan="2">- Nutzung elementarer Strukturen innerhalb einer Zahl/Darstellung
- Vergleich von elementaren Strukturen zwischen Zahlen/Darstellungen</td><td colspan="2">- komplexe Strukturen
- (begründete) allgemeingültige Aussagen</td></tr>
<tr><th colspan="6">(3) Begriffliche Deutungen</th></tr>
<tr><th>Ordinale Anordnung</th><th colspan="2">Differenz</th><th colspan="2">Teilbarkeit mit und ohne Rest</th><th>Zerlegung des Zeichens/Symbols in Teilkomponenten</th></tr>
<tr><td>- der Zahlen innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen
- Zahlenfolge der Zahlen gleicher Eigenschaften</td><td colspan="2">- zwischen Zahlen gleicher oder verschiedener Eigenschaft</td><td colspan="2">- ohne Ermittlung des Ergebnisses
- operative Ermittlung des Ergebnisses</td><td>unter Ausnutzung:
- der Summenregel
- der Differenzregel
- der Produktregel
- der Teilbarkeitsregel</td></tr>
</table>

Tabelle 6.8: Ausdifferenzierung der Komponenten der epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen

Vor diesem Hintergrund lassen sich drei aufeinander aufbauende Analyseschritte unterscheiden, wobei der erste Analyseschritt nochmals in zwei Teilschritte differenziert wird. Dabei entspricht wie bereits erläutert jeder Analyseschritt vornehmlich einer Forschungsfrage. Aufgrund des Zusammenspiels der unterschiedlichen Aspekte der epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen ist es aber von Bedeutung, diese Analyseschritte nicht isoliert voneinander zu betrachten, sondern die einzelnen Analyseschritte immer (auch) in Beziehung zu den weiteren Analyseschritten zu betrachten.

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext
Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext
Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext
Analyseschritt 3: Begriffliche Deutungen

7 Analyse des Fallbeispiels Helena

Im vorliegenden Forschungsprojekt wurden alle Interviews mit dem in Kapitel sechs dargestellten Analyseinstrument zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen analysiert. Aufgrund der großen Menge an Daten können allerdings nicht alle Beispiele im Detail dargestellt werden. Aus diesem Grund wurde sich dazu entschieden, vor der Darstellung der Ergebnisse aller Analysen, ein Fallbeispiel in der Gesamtheit darzustellen. Das folgende Fallbeispiel der Drittklässlerin Helena hat dabei drei Funktionen. Erstens dient es dazu, die Analysemethode anhand eines Beispiels zu präzisieren. Zweitens dient es der Offenlegung des methodischen Vorgehens der qualitativen Studie. Drittens werden dadurch erste Analyseergebnisse dargestellt, die wesentlich für die Beantwortung der dem vorliegenden Projekt zugrundeliegenden Forschungsfragen sind. Für ein besseres Verständnis der den Analysen zugrundeliegenden Transkripte werden zunächst einige Hinweise zu der Erstellung der Transkripte gegeben (Kap. 7.1). Nach diesen Hinweisen folgt die Darstellung der Analyse des Fallbeispiels (Kap. 7.2).

7.1 Hinweise zur Transkription

Grundlage für die zur Beantwortung der Forschungsfragen durchgeführten Analysen sind die mit den Kindern durchgeführten klinischen Interviews. Diese wurden videographiert und anschließend transkribiert. Die Transkription umfasst das gesprochene Wort und alle Handlungen des Kindes. Um eben diese Transkription und die Analyse der Transkriptausschnitte besser darstellen zu können, wurden die Transkripte durch Veranschaulichungen unterstützt. Dafür wurden folgende Bezeichnungen der unterschiedlichen zu deutenden Punktdarstellungen gewählt:

Punktdarstellungen - Interview „Paritäten“

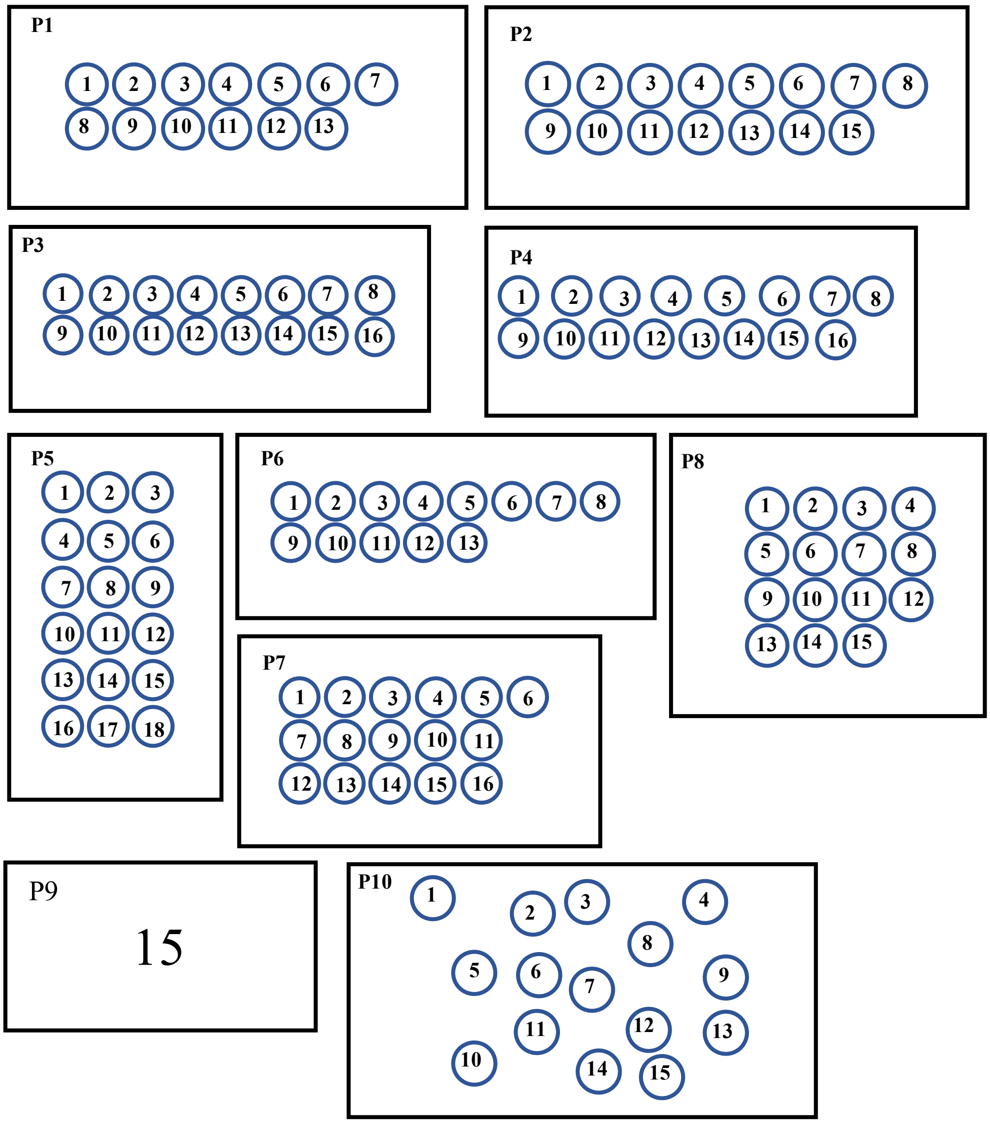


Abbildung 7.1: Bezeichnung der Punktdarstellung „Paritäten“ - Aufgabenkomplex I

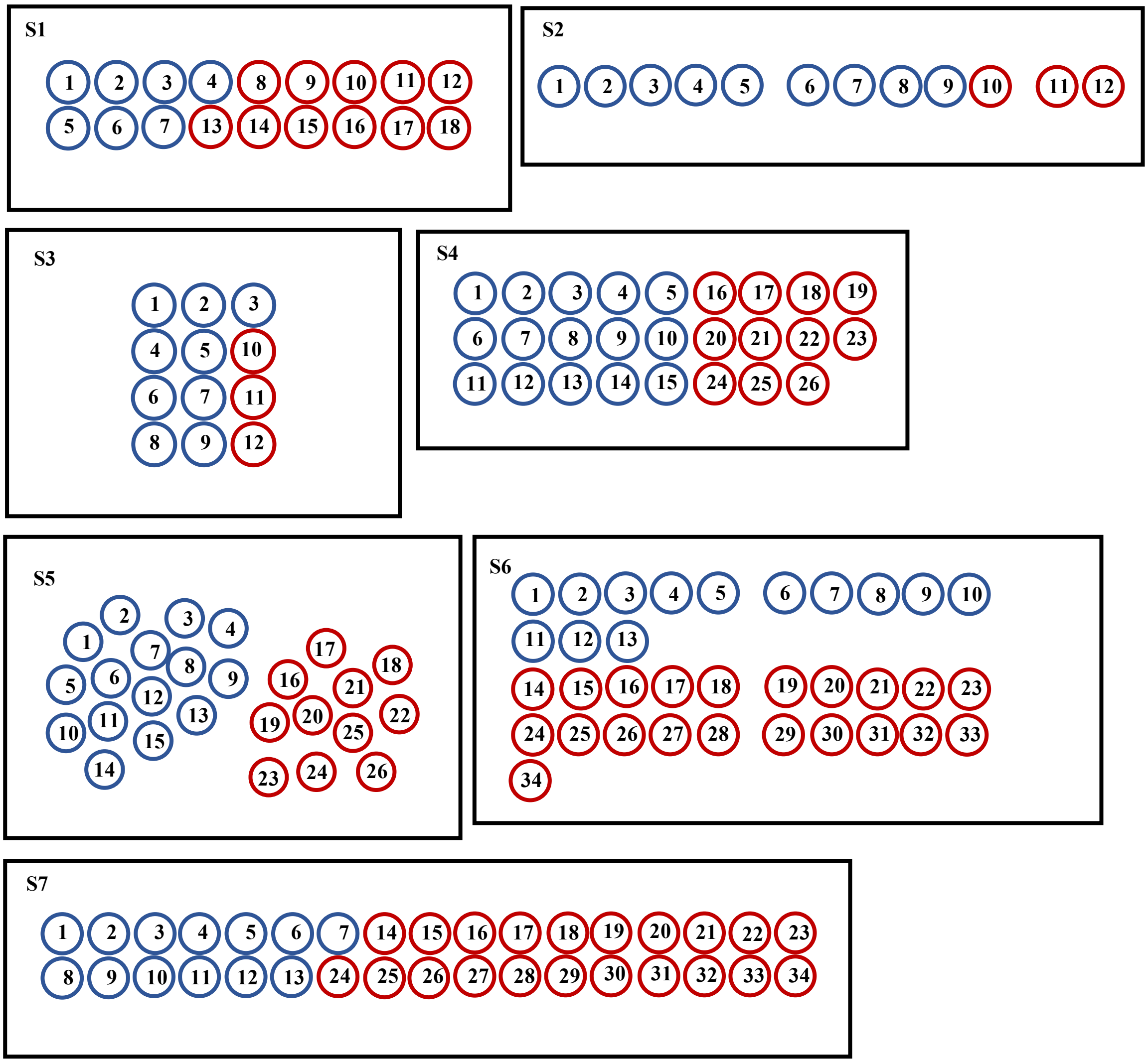


Abbildung 7.2: Bezeichnung der Punktdarstellung „Paritäten" - Aufgabenkomplex II

Punktdarstellungen - Interview „Teilbarkeit durch drei“

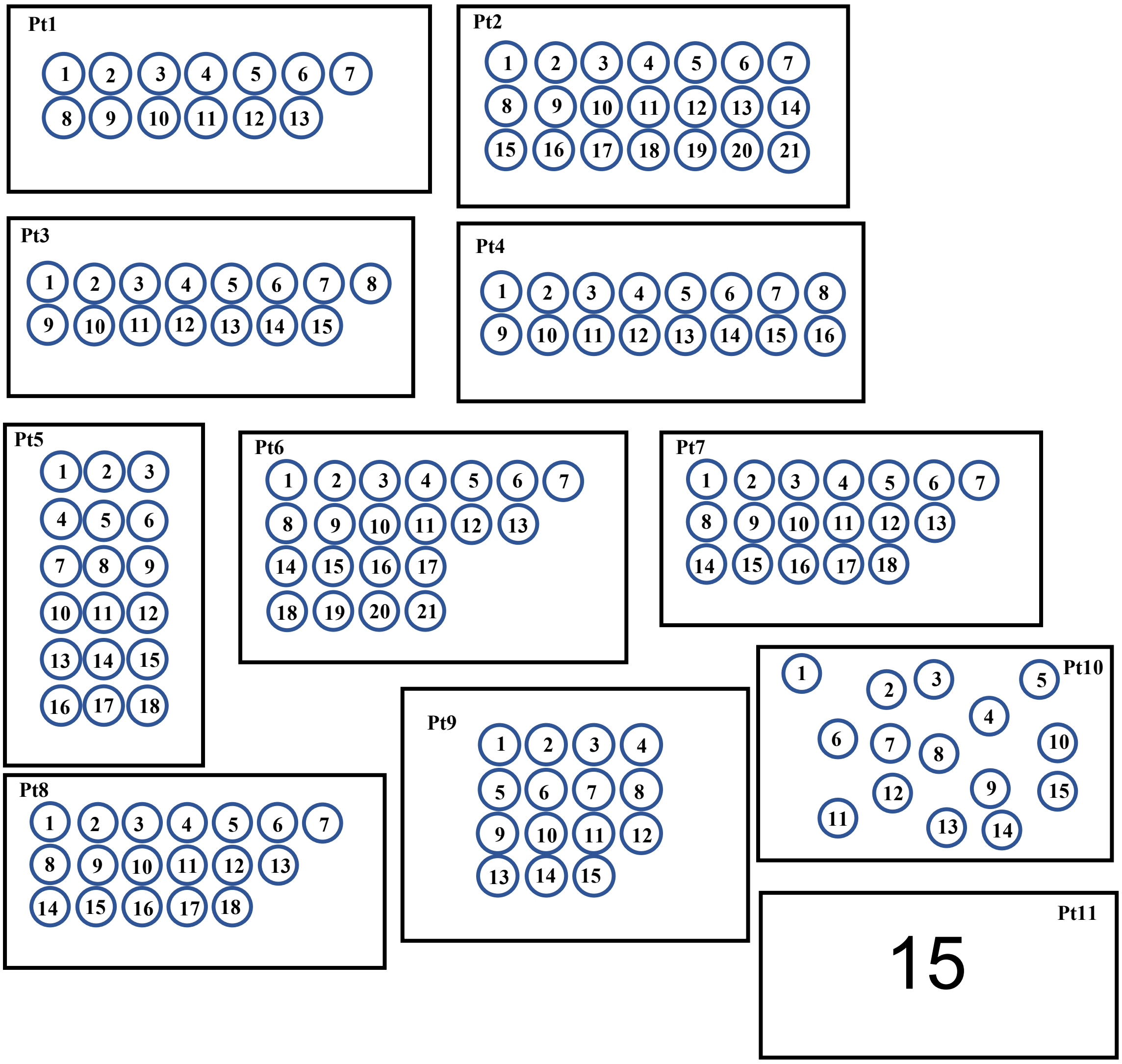


Abbildung 7.3: Bezeichnung der Punktdarstellungen „Teilbarkeit durch drei" - Aufgabenkomplex I

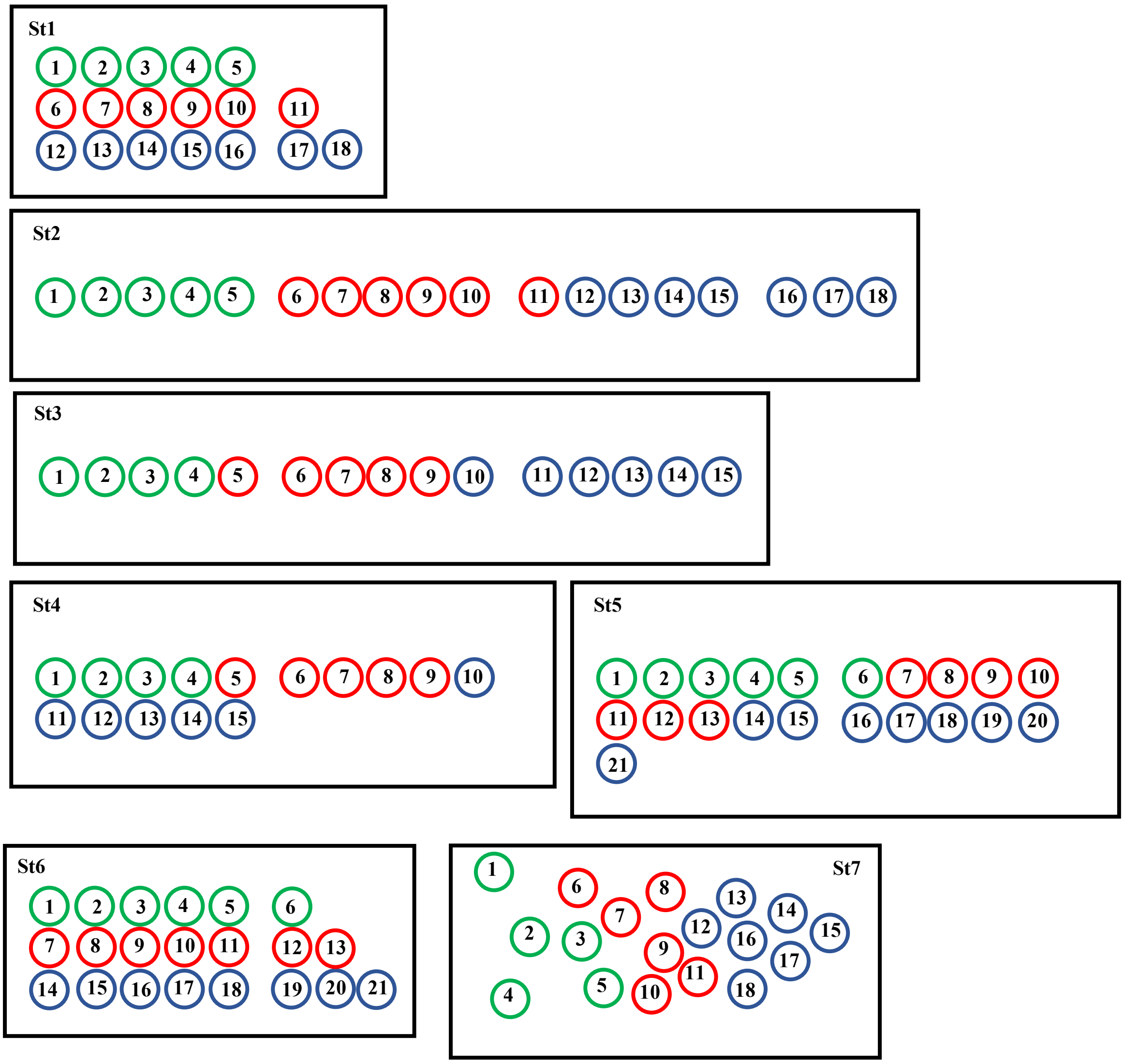


Abbildung 7.4: Bezeichnung der Punktdarstellungen „Teilbarkeit durch drei" - Aufgabenkomplex II

Die von den Kindern erzeugten schriftlichen und ikonischen Darstellungen sowie Einzeichnungen in die vorgelegten Punktmuster wurden eingescannt und sind im Transkript sowie der Analyse im Original eingefügt worden. Von den Kindern gelegte Darstellungen aus Wendeplättchen wurden von der Autorin als Grafik erstellt. Die von den Kindern genutzte Farbgebung wurde dabei beibehalten, die Farbintensität wurde dabei abgeschwächt um einen deutlichen Unterschied zwischen kindlichen Darstellungen und den vorgelegten Darstellungen zu erzeugen. Zeigegesten wurden von der Autorin in die Grafiken eingefügt und dienen dem besseren Verständnis der Transkriptausschnitte sowie der Analysen. Dies wird im Folgenden exemplarisch dargestellt.

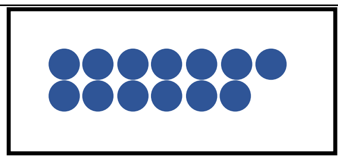
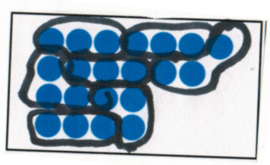
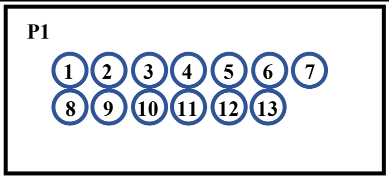
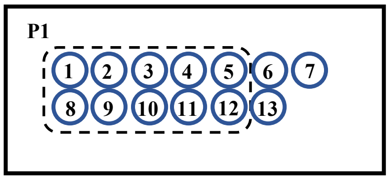
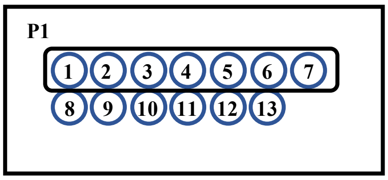
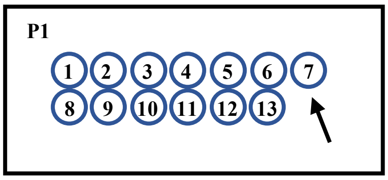
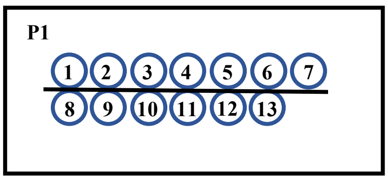
	Darstellung in den Transkripten sowie Analysen
Von den Kindern erzeugte Darstellung	
Den Kindern vorgelegte Darstellung	
Einzeichnung eines Kindes in eine vorgelegte Darstellung	
In den Transkripten und der Analysen genutzte Darstellung	
Kinder haben etwas mit einer Zeigegeste eingekreist	Eine gestrichelte Linie symbolisiert das Einkreisen eines Objektes oder Teilen eines Objektes 
Kinder haben eine Reihe oder einen Teil der Reihe gezeigt, indem sie zum Beispiel mit dem Finger über die Reihe gefahren sind	Eine durchgezogene Linie umschließt den von dem Kind gezeigten Objekt oder Teil des Objektes. 
Kind hat auf einen Punkt gezeigt	Ein Pfeil zeigt auf den Punkt, der von dem Kind gezeigt wurde. 
Kind hat zwischen Punkte (her)gezeigt	Ein Strich symbolisiert das zeigen oder mit dem Finger herfahren zwischen Punkten 

Tabelle 7.1: Hinweise zur Transkription

7.2 Analysebeispiel Helena

Im folgenden Fallbeispiel wird am Beispiel der Drittklässlerin Helena eine exemplarische Analyse der für die Forschungsfragen relevanten Interviewausschnitte dargestellt, um das Vorgehen der Auswertung der Daten transparent zu machen.

Thema des Interviews: Paritäten – Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist gerade
3. Schuljahr (Schule A; Klasse 1)
Datum: 16.05.2017
Dauer des Interviews: 30:54

Das Interview mit Helena wurde im Mai 2017 durchgeführt. Helena besuchte zum Zeitpunkt des Interviews das dritte Schuljahr. Nach Auskunft ihrer Klassenlehrerin sowie Mathematiklehrerin ist sie eine leistungsstarke Mathematikschülerin, die den Anforderungen des Mathematikunterrichts gerecht wird. Das gesamte Interview mit Helena umfasste insgesamt 30 Minuten und 49 Sekunden und lässt sich in drei Aufgabenkomplexe einteilen, wobei sich die ersten beiden in jeweils zwei Teilbereiche differenzieren lassen (vgl. Kap. 5.2).

Aufgabenkomplex	Teilbereich	Dauer
Aufgabenkomplex 1: Fokussierung der strukturellen Zahleigenschaft „gerade und ungerade“	1.1 Helena erklärt die strukturelle Zahleigenschaft „gerade und ungerade“	00:00 - 02:22
	1.2 Helena deutet Zahlenkarten hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft „gerade und ungerade“	**02:23 - 07:59**
Aufgabenkomplex 2: Fokussierung der allgemeingültigen Aussage „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade.“	2.1 Helena argumentiert im Kontext der Aussage „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade.“	08:00 - 11:44
	2.2 Helena deutet Zahlenkarten hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade.“	**11:45 - 23:47**
Aufgabenkomplex 3: Deutung von anschaulichen Argumentationen[25]		**23:48 - 30:49**

Tabelle 7.2: Übersicht Interview Fallbeispiel Helena

[25] Der Aufgabenkomplex 3 wird an dieser Stelle zur Vollständigkeit aufgezählt. In der Analyse wird dieser Interviewteil nicht berücksichtigt.

In der nachfolgenden Analyse des Fallbeispiels Helena werden alle von Helena getätigten Argumentationen analysiert. Dafür werden die in Kapitel 6 beschriebenen Analyseschritte dargestellt. Dabei werden genau jene Aspekte der epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen betrachtet und deren Analyse darstellt, die innerhalb der Analyse rekonstruiert werden konnten. Zum Abschluss der Analyse einer Phase erfolgt eine Einordnung des gesamten Argumentationsprozesses in das Theoriekonstrukt zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen. Da es innerhalb des Interviews durchaus zu wiederholenden Argumentationsweisen kommt, kann es zu vermeintlichen „Doppelungen“ gewisser Darstellungen kommen. Diese sind jedoch notwendig, um die Argumentations- und Deutungsweisen in ihrer Gesamtheit zu analysieren und das kindliche Vorgehen verstehen zu können.

7.2.1 Aufgabenkomplex 1: Fokussierung der strukturellen Zahleigenschaft „gerade und ungerade“

Aufgabenkomplex 1.1: Helena erklärt die strukturelle Zahleigenschaft „gerade und ungerade“

Die Interviewerin beginnt das Interview, indem sie Helena fragt, ob ihr gerade und ungerade Zahlen aus dem Mathematikunterricht bekannt sind und wie sie einem Kind aus dem zweiten Schuljahr erklären würde, was unter geraden und ungeraden Zahlen zu verstehen ist. Helena bejaht dies und erklärt, dass man gerade Zahlen durch zwei durchteilen kann. Sie erläutert, dass man die Eins nicht teilen kann. Anschließend gibt sie das Beispiel, dass man zwei Bonbons an zwei Kinder verteilen kann, indem man jedem Kind ein Bonbon gibt. Wenn man zwei Kinder hat und ein Bonbon, so ist dies laut Helena nicht möglich.

Im Anschluss daran fordert die Interviewerin Helena auf, dies mit einem Bild oder einer Zeichnung zu erläutern. Helena gibt an, dass sie dies versuchen wird und zeichnet anschließend zwei Bonbons (vgl. Abb. 7.5). Sie fragt, wie man nun die Kinder malen könnte. Die Interviewerin erwidert daraufhin, dass Helena dies auch mündlich erklären kann. Sie erläutert nun, dass wenn man zwei Bonbons hat und nur ein Kind, das Kind zwei Bonbons bekommt. Bei zwei Kindern bekommt jeder eins. Wenn man aber nur ein Bonbon hat und zwei Kinder, dann kann man das nicht teilen.

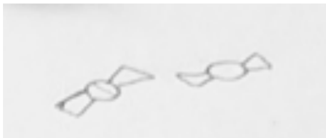


Abbildung 7.5: Helenas Zeichnung innerhalb der Erläuterung der Paritäten

Zum Abschluss des Aufgabenkomplexes fordert die Interviewerin Helena nun auf, eine Erklärung mit Plättchen zu generieren. Helena nimmt hierfür zwei Plättchen und erläutert, dass wen man zwei Plättchen hat und ein Kind, dann bekommt das Kind zwei. Bei zwei Kindern bekommt das Kind ein Plättchen und wenn man nur ein Plättchen hat und zwei Kinder, dann kann man das nicht durchteilen. Dabei zeigt Helena mit der Handkante auf das Plättchen.

Aufgabenkomplex 1.2: Helena deutet Zahlenkarten hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft „gerade und ungerade"

Dieser Aufgabenkomplex lässt sich in *zwei Teile* untergliedern: Zum einen die Deutung der Zahlenkarten (Phase 1 bis 10) und zum anderen die weitere Auseinandersetzung durch zusätzliche Impulse der Interviewerin (Phase 11 bis 13) (vgl. Kap. 5).

Der *erste Teil* des ersten Aufgabenkomplexes lässt sich in *zehn Phasen* unterteilen:

Phase 1 (Z. 13 - 19): Helena deutet und begründet die Parität von P3
Phase 2 (Z. 20 - 23): Helena deutet und begründet die Parität von P9
Phase 3 (Z. 24 - 26): Helena deutet und begründet die Parität von P10
Phase 4 (Z. 26- 29): Helena deutet und begründet die Parität von P8
Phase 5 (Z. 30): Helena deutet und begründet die Parität von P1
Phase 6 (Z. 30 - 31): Helena deutet und begründet die Parität von P6
Phase 7 (Z. 32): Helena deutet und begründet die Parität von P4
Phase 8 (Z. 32): Helena deutet und begründet die Parität von P2
Phase 9 (Z. 32 - 33): Helena deutet und begründet die Parität von P7
Phase 10 (Z. 34 - 36): Helena deutet und begründet die Parität von P5

Phase 1: Helena deutet und begründet die Parität von P3 (Z. 13-19)

13	**I**	**Mhm. Okay. Jetzt hast du mir ja grade schon erklärt, was gerade und ungerade Zahlen sind. Und ich hab hier mal ein paar Punktmuster für dich** *[legt P1 bis P10 vor das Kind, legt Zettel und Stift an den oberen Tischrand]*. **Die darfst du dir gleich jederzeit wieder nehmen, wenn du möchtest. Und ich bitte dich jetzt einmal, diese Karten zu sortieren. Und zwar nach gerade und ungerade.**
14	**H**	**Ok.** *[nimmt P3 in die Hand]* **Das ist gerade** *[legt P3 an den linken Rand]*. **Ungerade** *[schiebt P9 an den rechten Rand]*.
15	**I**	**Kannst du mir erklären, warum das** *[zeigt auf P3]* **gerade ist?**
16	**H**	*[nimmt P3 in die Hand]* **Weil, wenn man so** *[unverständlich]*, **kann man das hier durchteilen** *[fährt mit dem Finger zwischen der oberen und unteren Reihe von P3 her]*, **wenn man 2 Kinder hat, oder wenn man mehrere, also eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht** *[tippt dabei die einzelnen Punkte einer Reihe an]* **Kinder hat, kann man das so teilen** *[fährt horizontal die untereinanderliegenden Punkte ab]*.
17	**I**	**Okay. Was ist denn das Wichtige? Das man es durch 2 Kinder teilen kann, oder durch acht?** *(..)* **Wenn wir bei geraden Zahlen sind?**
18	**H**	**Äh, zwei.**
19	**I**	**Ok. Jetzt hast du hier ja schon gesagt, das ist gerade** *[schiebt P3 noch ein Stück zur linken Seite]*.

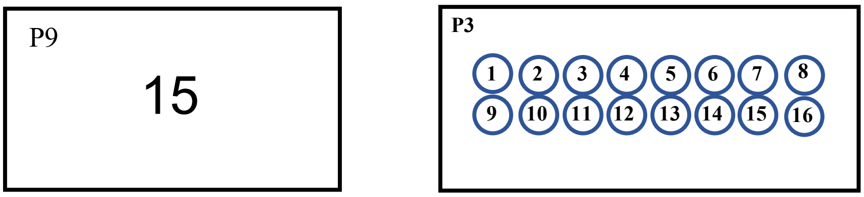


Abbildung 7.7: A1 - Phase 1: Gedeutete Darstellungen

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

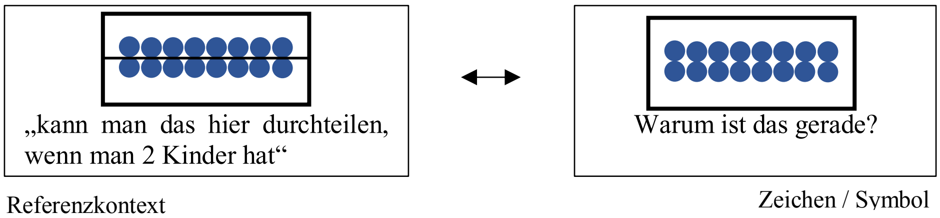


Abbildung 7.6: A1 - Phase 1: Rollenverteilung

Zu Beginn der Phase wird Helena von der Interviewerin vor die Deutungsanforderung gestellt, die ihr vorgelegten Punktmuster und die symbolische Darstellung der ‚15‘ nach den Eigenschaften ‚gerade‘ sowie ‚ungerade‘ zu sortieren. Demnach werden zunächst die Paritäten aller Karten fraglich gemacht. Helena wählt zu Beginn die Karten P9 und P3 aus. Sie weist zunächst dem Punktmuster P3 die Eigenschaft gerade sowie der numerisch-symbolischen Darstellung P9 die Eigenschaft ungerade zu, ohne ihre Zuordnung zu begründen. Die Interviewerin fordert daraufhin eine Begründung ein, warum die Karte P3 der Eigenschaft gerade zugeordnet wurde. Demnach stellt P3 hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft ‚gerade‘ das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.
In ihrer Begründung deutet Helena die Karte P3 unter Bezugnahme auf Eigenschaften der geometrischen Anordnung. Sie teilt dafür die beiden Punktreihen des Punktmusters horizontal mit der Hand und ergänzt dies durch die Aussage „wenn man zwei Kinder hat“. Sie stellt demnach einen unmittelbaren Bezug zwischen der Handlung an der Veranschaulichung und der Teilbarkeit durch zwei dar. Dieser Teilbarkeit liegt die Grundvorstellung des Verteilens zugrunde, denn sie verteilt die Gesamtmenge gedanklich auf zwei Kinder. Diese Aussage ergänzt sie durch eine weitere Möglichkeit des Teilens. Hierfür zählt sie zunächst die Anzahl der Plättchen der oberen Reihe und erläutert, dass man es auch in acht vertikale Zweierspalten teilen kann, „wenn man mehrere, also eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht Kinder hat“ (Z. 16). An dieser Stelle ist nicht rekonstruierbar, warum Helena eine zweite Möglichkeit der Teilung ergänzt. Zum einen könnte sie an dieser Stelle eine weitere Möglichkeit der Teilung des Punktmusters angeben, um so eine weitere Divisionsaufgabe in die Darstellung hineinzudeuten. Zum anderen könnte Helena nun eine andere Sicht auf die Division einnehmen und zwar die des Aufteilens. So erzeugt Helena an dieser Stelle

Zweierspalten. Auch dies kann eine Deutung des Punktmusters im Sinne der Teilbarkeit durch zwei darstellen, indem Zweierbündel erzeugt werden. Betrachtet man den weiteren Interviewverlauf, so ist vermutbar, dass eben dies der Grund ist, warum Helena eine weitere Deutungsmöglichkeit angibt. Es lässt sich vermuten, dass sie keine beliebigen Bündel erzeugt, sondern gezielt Zweierbündel herstellt und somit die Teilbarkeit durch zwei auf zwei unterschiedliche Arten deutet, die den Grundvorstellungen entsprechen.
Im weiteren Verlauf der Interviewszene gibt Helena dann auf Nachfrage an, dass bei geraden Zahlen die Teilbarkeit durch zwei im Fokus steht (Z. 18). Dies beeinflusst die Interpretation der obenstehenden Deutungen nicht, ist aber wesentlich für den weiteren Analyseprozess. Hierdurch lässt sich vermuten, dass Helena bewusst ist, was ‚gerade' und ‚ungerade' Zahlen ausmachen und sie dafür auf eine begriffliche Idee der Teilbarkeit durch zwei einnimmt.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext
An dieser Stelle lässt sich zunächst ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung* rekonstruieren, da die Parität einer geometrischen Anordnung fraglich gemacht wurde. Der rekonstruierbare *Referenzkontext*, den Helena in ihrer Argumentation zur Deutung heranzieht, ist ebenfalls *geometrischer Ausprägung*. Sie bezieht sich auf konkrete Eigenschaften der geometrischen Anordnung, die zunächst unabhängig von der Gesamtanzahl ist. Auch ihr Zählprozess ist an dieser Stelle geometrisch zu betrachten, denn Helena ermittelt die Anzahl an Zweierbündeln und nutzt den Zählprozess, um die geometrische Anordnung, acht Zweierbündel, zu beschreiben.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext
Helena deutet die geometrische Anordnung P3 vor dem Hintergrund eines geometrisch geprägten Referenzkontextes. In diese *geometrische Anordnung deutet sie Strukturen hinein*, indem sie durch Gestik und verbale Handlungen eine *geometrische Teilung des Punktmusters* vollzieht. Dies geschieht zunächst, indem sie entsprechend der intendierten Struktur der prototypischen Darstellung eine horizontale Teilung der beiden Reihen durchführt. Dadurch erzeugt sie *zwei Substrukturen*. Dabei stellt *die obere Reihe* die erste und die *untere Reihe* die zweite Substruktur dar. Diese in die Darstellung hineingedeuteten Substrukturen stellen dabei die jeweils einem Kind zugeordnete Menge dar.
Neben dieser strukturellen Deutung deutet Helena noch eine *andere Struktur* in die Darstellung hinein, indem sie *acht Zweierspalten* beschreibt. Sie deutet dabei eine ebenfalls intendierte Struktur in die prototypischen Darstellungen hinein. Dadurch erzeugt sie ebenfalls

Substrukturen, in diesem Fall acht Substrukturen in Form von zwei übereinanderliegenden Punkten.

In beiden Deutungen bleiben weitere strukturelle Eigenschaften des Punktmusters ungenannt. So werden keine weiteren Erläuterungen von Helena bezüglich der jeweiligen erzeugten Substrukturen gegeben. In ihrer ersten Deutung expliziert sie keinen Vergleich der beiden Reihen, der aus mathematischer Perspektive aber notwendig ist. So ist bei einer verteilenden Sicht auf die Division eine Teilung durch zwei nur dann gegeben, wenn die beiden erzeugten Substrukturen in der Punktanzahl identisch sind. In der zweiten Deutung wird die Punktanzahl in den acht erzeugten Substrukturen nicht genannt. Aber auch dies wäre aus mathematischer Sicht für eine vollständige Argumentation notwendig. Denn bei einer aufteilenden Sicht auf die Division ist es notwendig, dass die erzeugten Substrukturen immer die Punktanzahl zwei enthalten. Beide fehlenden Aspekte stellen aber für einen solchen Argumentationsprozess notwendige strukturelle Merkmale dar.

Demnach deutet Helena an dieser Stelle *partielle Strukturen* in die Darstellung hinein, da sie *Substrukturen* im Sinne der intendierten Struktur der prototypischen Darstellungen in diese hineindeutet. Dabei lässt sie dennoch wesentliche strukturelle Merkmale außer Acht, die wesentlich für umfangreiche strukturelle Deutungen sind.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Durch das oben beschriebene Wechselspiel zwischen dem zu deutenden Zeichen/Symbol sowie dem Referenzkontext konstituiert sich die *begriffliche Deutung, die der Teilbarkeit durch zwei zuzuordnen ist* (Z. 16-18). Da Helena einen geometrischen Referenzkontext heranzieht, ist auch ihre begriffliche Deutung geometrischer Natur. Es zeigt sich, dass Helena eine begriffliche Idee nutzt, die die Teilbarkeit der geometrischen Anordnung fokussiert. Dabei expliziert sie am Ende der Interviewszene, dass die *Teilbarkeit durch zwei* von Bedeutung ist, wenn man über gerade oder ungerade Zahlen spricht. Dabei ist an dieser Stelle sowohl eine aufteilende als auch eine verteilende Sicht auf die geometrische Teilbarkeit des Punktmusters denkbar. Hinter der Deutung der waagrechten Teilung und der dadurch erzeugten zwei Substrukturen steckt die begriffliche Idee der verteilenden Sicht auf die Division. Bei der aufteilenden Sicht auf die Division handelt es sich um eine Deutung von Substrukturen in Form von Zweierbündeln. Beide Deutungen beziehen sich ausschließlich auf geometrische Merkmale der Darstellung.

Einordnung des Argumentationsprozesses

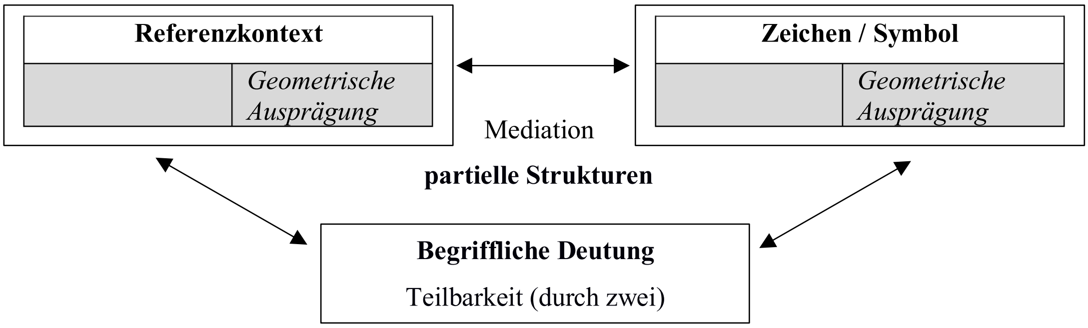


Abbildung 7.8: A1 - Phase 1: Zusammenfassung

Phase 2: Helena deutet und begründet die Parität von P9 (Z. 20-23)

20	**H**	**Das ist ungerade** *[schiebt P9 weiter an die rechte Seite]*.
21	**I**	**Woher weißt du das?**
22	**H**	**Weil, Zehn kann man ja durch fünf teilen, aber bei der Fünf, das ist ja eins, zwei, drei, vier, fünf** *[zählt dabei mit den Fingern der rechten Hand] [unverständlich]* **noch einen Finger haben** *[hält den linken Daumen daneben]*, **dann wäre es erst ne gerade Zahl.**
23	**I**	**Mhm**

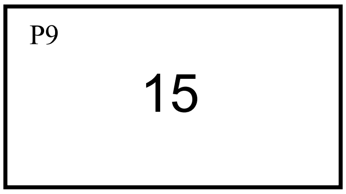


Abbildung 7.10: A1 - Phase 2: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

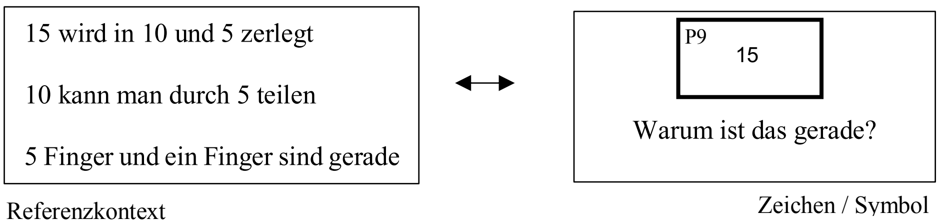


Abbildung 7.9: A1 - Phase 2: Rollenverteilung

Im Anschluss an die Deutung von P3 deutet Helena nun P9 hinsichtlich der Parität und weist P9 die Eigenschaft ungerade zu (Z. 20). Diesem Zuweisen der Eigenschaft geht kein Impuls der Interviewerin voraus. Sie wird aber von der Interviewerin fraglich gemacht, indem sie eine Begründung einfordert, woher Helena weiß, dass es sich dabei um eine ungerade Zahl handelt (Z. 21). Dies stellt demnach das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Zur Begründung der Parität von P9 zerlegt Helena die Zahl 15 zunächst in fünf und zehn. Daraufhin betrachtet sie die Paritäten der einzelnen Zahlen getrennt voneinander. Sie beginnt mit der Zehn und begründet, „Zehn kann man ja durch fünf teilen“ (Z. 22). Gleichwohl Helena im vorherigen Abschnitt auf die Teilbarkeit durch zwei verwiesen hat, scheint es, als würde sie an dieser Stelle durch fünf dividieren. Unter der Perspektive der Paritäten lässt sich aber auch vermuten, dass „durch fünf teilen“ (Z. 22) in Bezug auf das Zerlegen der Zehn in zwei gleiche Teilmengen zu verstehen ist. Auch im weiteren Interview zeigt sich diese Form der Versprachlichung häufiger und das auch mit einem expliziten Bezug zur Teilbarkeit durch zwei, so dass sich diese Vermutung in der weiteren Analyse des Interviews weiter bestärkt. Die Möglichkeit der Teilbarkeit nutzt Helena als Entscheidungskriterium, um die Parität zu ermitteln und zu begründen. Die Parität der Fünf begründet Helena, indem sie zunächst mit den Fingern bis fünf zählt. Sie erläutert nun, dass sie noch einen weiteren Finger benötigt, damit es sich um eine gerade Zahl handelt. Dies stellt dabei das Argumentations- und Entscheidungskriterium für Helena dar.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Das zu deutende Zeichen/Symbol ist in dieser Phase die Karte P9 und die damit verbundene Frage, woher Helena weiß, dass es sich dabei um eine ungerade Zahl handelt (Z. 21). Hierbei deutet Helena die numerisch-symbolische Darstellung der Zahl 15 hinsichtlich ihrer strukturellen Zahleigenschaft und damit ein *Zeichen/Symbol arithmetischer Ausprägung*. Dieses deutet sie vor einem *Referenzkontext*, der ebenfalls *arithmetischer Ausprägung* ist, denn Helena zieht zur Deutung der Parität der Zahl 15 Zahlzerlegungen und arithmetische Beziehungen der Zahl 15 beziehungsweise Zehn sowie die Beziehung zwischen fünf und sechs (Z. 22).

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In diesem Wechselspiel lassen sich unterschiedliche strukturelle Deutungen rekonstruieren. Zunächst einmal zeigt sich eine Deutung im Sinne einer *Zahlzerlegung*, denn Helena zerlegt die Zahl in zehn und fünf und begründet die Parität beider Zahlen isoliert voneinander. Mathematisch gesehen scheint Helena an dieser Stelle eine *Teilbarkeitsrelation* in Form der Summenregel zu nutzen – wenn zwei Zahlen durch zwei teilbar sind, dann ist auch die Summe dieser beiden Zahlen durch zwei teilbar (vgl. Kap. 6.2).

Die Zahl Zehn teilt sie zunächst durch fünf. Geht man davon aus, dass sie dies im Sinne der Erzeugung zweier gleicher Teilmengen deutet, dann zerlegt Helena die Zahl Zehn in zwei gleich große Teile. Sie deutet dann *zwei Substrukturen* in die Zehn hinein, nämlich fünf und fünf. Die Möglichkeit der Erzeugung zweier gleicher Substrukturen bedingt die Zuordnung der Zehn zu den geraden Zahlen.

Um die Parität der Fünf zu begründen, nimmt Helena eine andere strukturelle Deutung ein. Sie deutet die Fünf im Kontext der *ordinalen Anordnung der Zahlen* innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen beziehungsweise fokussiert, welche Veränderung notwendig ist, um aus der ungeraden Zahl Fünf eine gerade Zahl zu erzeugen. Dafür zählt Helena zunächst mit den Fingern bis fünf und erläutert, dass ihr noch ein Finger fehlt. Die Sechs erwähnt sie nicht explizit, sondern der Bezug bleibt implizit. Dies weist darauf hin, dass Helena die Fünf als ungerade Zahl deutet, da erst die darauffolgende Zahl eine gerade Zahl darstellt. Demnach nutzt Helena die ordinale Anordnung der geraden und ungeraden Zahlen für ihre Argumentation und setzt zwei aufeinanderfolgende Zahlen zueinander in Beziehung - fünf und sechs. Die Strukturen, die Helena an dieser Stelle deutet, sind aufgrund des arithmetischen Referenzkontextes ebenfalls arithmetisch.

Demnach zeigt sich zunächst eine Deutung von *komplexen Strukturen*, da der Ausgangspunkt für Helenas Argumentation eine Zahlzerlegung darstellt. Die einzelnen dadurch erzeugten Komponenten der Zahl untersucht Helena aufgrund zwei unterschiedlicher *partieller struktureller Deutungen*. Zum einen deutet sie die Teilbarkeit der Zahl Zehn in fünf und fünf. Zum anderen nutzt Helena die Beziehung der ordinalen Abfolge der geraden und ungeraden Zahlen innerhalb der natürlichen Zahlen und fokussiert dadurch Beziehungen zwischen Zahlen und deren Eigenschaften.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In dieser Argumentation zeigen sich in Helenas Begriffsverständnis unterschiedliche begriffliche Facetten. Es lässt sich erneut vermuten, dass Helena auch ein aufteilendes Verständnis der Teilbarkeit durch zwei im Kontext der geraden Zahlen hat (Z. 22), denn Helena zerlegt im Zuge der *operativen Ermittlung der Teilbarkeit* der Zahl diese in zwei gleichmächtige Teile. In diesem Fall fünf und fünf. Des Weiteren zeigt Helena bei der Begründung der Parität der Fünf, dass sie die *ordinale Abfolge der geraden und ungeraden Zahlen in der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen* und in diesem Zusammenhang auch die *Differenz zwischen benachbarten Zahlen verschiedener Paritäten* nutzt. Eine solche Ausnutzung wird von Helena nicht explizit gekennzeichnet. Vielmehr wird sie dadurch deutlich, dass sie die Fünf zu der nachfolgenden Zahl – der Sechs – in Beziehung setzt. Dies impliziert auch, dass zwei benachbarte Zahlen unterschiedlicher Parität sein müssen.

Ausgangspunkt dieser Argumentation ist die Ausnutzung der *Teilbarkeitsrelation in Form der Summenregel*, nämlich die Tatsache, dass die Summe einer geraden und einer ungeraden

Zahl immer ungerade ist. Hierbei ist darauf hinzuweisen, dass Helena diese Regel zwar anwendet, an dieser Stelle aber keine Aussage darüber getroffen werden kann, ob Helena dies eher rezeptartig ausführt oder ob sie bereits ein begriffliches Verständnis entwickelt hat, warum ein solches Vorgehen mathematisch korrekt ist.

Einordnung des Argumentationsprozesses

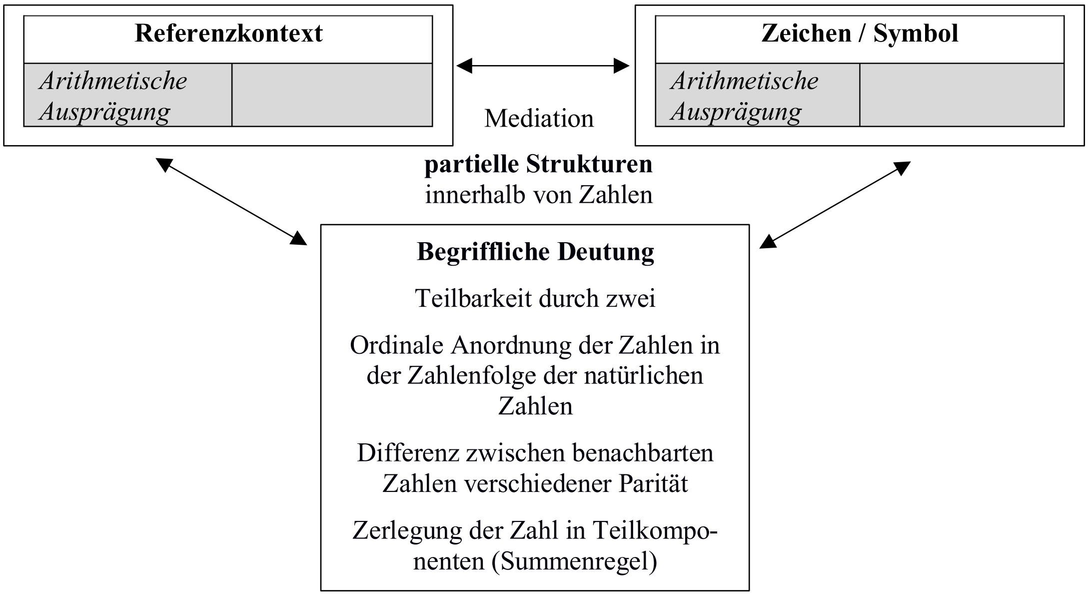


Abbildung 7.11: A1 - Phase 2: Zusammenfassung

Phase 3: Helena deutet P10 (Z. 24-26)

24	**H**	*[tippt auf P8 und nimmt P10 in die Hand und tippt mit dem Daumen unkenntlich auf das Punktmuster]*
25	**I**	**Erklär mir auch, was du grade machst. Du denkst ja grad ganz viel.**
26	**H**	**Also ich mache immer zwei zu zwei, zwei, vier, sechs, acht, zehn, zwölf, vierzehn, fünfzehn** *[zeigt dabei unkenntlich auf das Punktmuster]*. **Das ist die gleiche Zahl** *[legt P10 unter P9]*, **nur mit Punkten. Das ist die gleiche Zahl.**

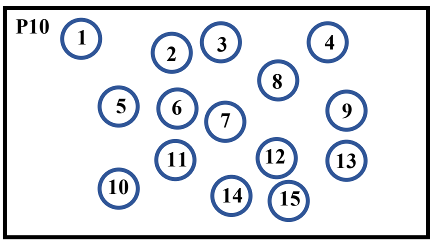


Abbildung 7.12: A1 - Phase 3: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

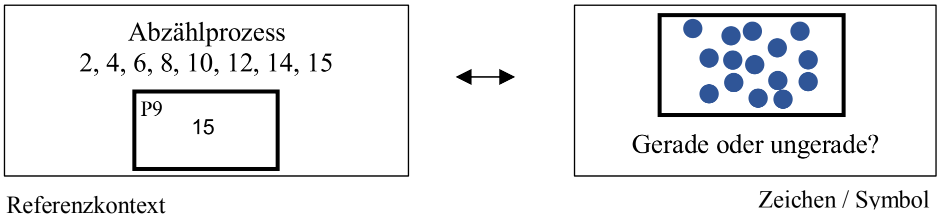


Abbildung 7.13: A1 - Phase 3: Rollenverteilung

Als nächstes Punktmuster wählt Helena P10 und deutet dieses hinsichtlich der Parität. Demnach stellt die Parität von P10 das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.
Dieses deutet Helena, indem sie eine Anzahlermittlung in Zweierschritten durchführt und ermittelt, dass es sich um 15 abgebildete Punkte handelt. Sie vergleicht dies mit P9, da es sich dabei um „die gleiche Zahl, nur mit Punkten" (Z. 26) handelt. Eine weitere beziehungsweise erneute Begründung, um welche Parität es sich bei der 15 handelt, bleibt aus. Durch das Verschieben der Karte P10 unter P9 suggeriert Helena, dass es sich dabei um die Darstellung einer ungeraden Zahl handelt.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Helena wird vor die Herausforderung gestellt eine geometrische Anordnung hinsichtlich ihrer Parität, und demnach ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol* zu deuten. Interessanterweise nutzt sie in ihrer Argumentation aber keine Eigenschaften der geometrischen Anordnung oder das Punktmuster an sich. Vielmehr deutet sie das Punktmuster als Mittel zur Zahldarstellung, indem sie die konkrete Punktanzahl ermittelt (Z. 26). Demnach deutet sie das Zeichen/Symbol vor einem *arithmetischen Referenzkontext* und nutzt die Veranschaulichung (auch) als Mittel zur Zahldarstellung.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In diesem Interviewausschnitt ermittelt Helena zunächst die *konkrete Punktanzahl* und nutzt das Zeichen/Symbol als *Mittel zur Zahldarstellung*. Sie deutet das Zeichen/Symbol demnach zunächst mit einer *konkret-dinglichen Deutung*. Anschließend nutzt sie einen Vergleich zur bereits vorher gedeuteten Karte P9 und macht deutlich, dass beide Karten die gleiche Zahl repräsentieren, sich lediglich in ihrer Repräsentationsform unterscheiden (Z. 26). Durch ihre Zuordnung zu P9 macht sie deutlich, dass es sich erneut um eine ungerade Darstellung handelt. Es ist auch durchaus nicht verwunderlich, dass Helena keine erneute Begründung für die Parität der 15 liefert, da sie genau dies unmittelbar vorher begründet hat (vgl. Phase 3).

Dennoch ist es interessant zu sehen, dass Helena auch an dieser Stelle eine Zweierbündelung vornimmt und in Zweierschritten zählt. Dies ist insofern interessant, dass eine Zweierbündelung in einer geometrischen Anordnung durchaus als geometrische Argumentation genutzt werden kann und zwar ohne, dass die konkrete Anzahl der Punkte oder Zweierbündel ermittelt wird. Denn jede Darstellung beziehungsweise geometrische Anordnung, die in Zweierbündel strukturiert werden kann, ist durch die Zahl zwei teilbar.

Einordnung des Argumentationsprozesses

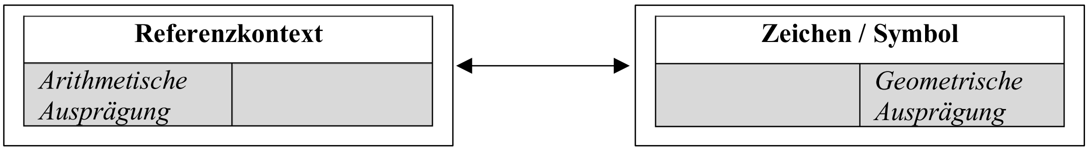


Abbildung 7.14: A1 - Phase 3: Zusammenfassung

Phase 4: Helena deutet und begründet die Parität von P9 (Z. 26-29)

26	**H**	*[nimmt P8 in die Hand und fährt unkenntlich mit dem Daumen über das Punktmuster, dreht es um 90° und fährt fort; 8 sec.]* **Das ist auch ne ungerade Zahl.**
27	**I**	**Woher weißt du denn, dass das hier ne ungerade Zahl ist** *[zeigt auf P8]***?**
28	**H**	**Weil das kann man halt nicht so richtig, zwei, weil wieder zwei** *[tippt auf P8.13 und P8.9]***, vier** *[tippt auf P8.5 und P8.1]***, sechs** *[tippt auf P8.10 und P8.14]***, 8** *[tippt auf P8.2 und P8.6]***, zehn** *[tippt auf P8.15 und P8.11]***, zwölf** *[tippt auf P8.3 und P8.7]***, vierzehn** *[tippt auf P8.12 und P8.8]* **und wieder fünfzehn** *[tippt auf P8.4]*. **# Ganz schön viel fünfzehn.**
29	**I**	**# Mhm, ok.**

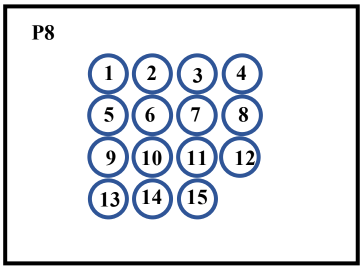


Abbildung 7.15: A1 - Phase 4: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

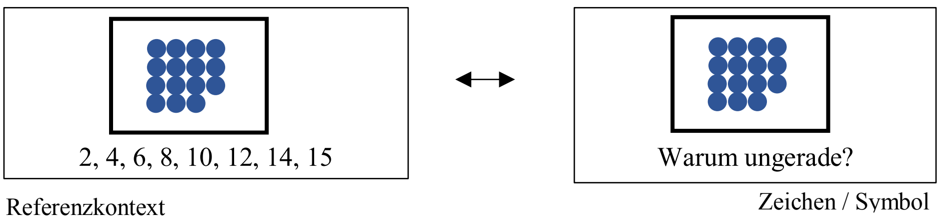


Abbildung 7.16: A1 - Phase 4: Rollenverteilung

In dieser Argumentations- beziehungsweise Deutungsphase steht Helena vor der Herausforderung die Parität von P8 zu deuten. Helena betrachtet dafür zunächst die Punktdarstellung P8 und deutet mit dem Daumen über die Zahlenkarte. Ausgehend davon klassifiziert sie P8 als ungerade Zahl (Z. 26). Von der Interviewerin wird nun die Fraglichkeit spezifiziert und eine Begründung eingefordert, warum es sich bei P8 um eine ungerade Zahl handelt (Z. 27). Demnach ist an dieser Stelle die Punktdarstellung P8 mit dem Fokus auf die Eigenschaft ‚ungerade' das zu deutende fragliche *Zeichen/Symbol*.

Zu Beginn des Deutungsprozesses fährt Helena zunächst mit dem Daumen über das Punktmuster (Z. 26). Dieses Vorgehen erläutert sie nicht, so dass sie die Bedeutung der Handlung an dieser Stelle (noch) nicht offenlegt und diese erst im weiteren Verlauf deutlich wird. Ihre Begründung beginnt Helena, indem sie sagt „Weil, das kann man nicht so richtig" (Z. 28). Wobei fraglich bleibt, was genau sie an dieser Stelle damit meint, denn nach dieser Aussage folgt ein Zählprozess. Dieser ähnelt dem im vorherigen Abschnitt rekonstruierten Zählprozess. Ob Helena auch zu Beginn der Phase gezählt hat oder ob sie zunächst eine andere Deutung eingenommen hat, bleibt an dieser Stelle offen und kann nicht rekonstruiert werden. Daher bezieht sich die nachfolgende Analyse auf den von Helena zur Argumentation herangezogenen Zählprozess. In diesem zählt sie in Zweierschritten und ermittelt so die Gesamtpunktzahl (vgl. Abb. 7.17). Hier zeigen sich Parallelen zur vorherigen Interviewphase, denn auch zur Deutung der Punktdarstellung P8 nutzt sie einen in Zweierschritten strukturierten Zählprozess. Sie kommt zu dem Schluss, dass es sich dabei erneut um die Punktanzahl 15 handelt. Eine weitere Argumentation, warum die 15 eine ungerade Zahl ist, gibt Helena an dieser Stelle nicht (Z. 28). Dies lässt sich vermutlich darauf zurückführen, dass bereits vorher die 15 als ungerade Zahl klassifiziert wurde. Demnach stellt ein Zählprozess in Zweierschritten und die damit verbundene Anzahlermittlung den von ihr herangezogenen *Referenzkontext* dar.

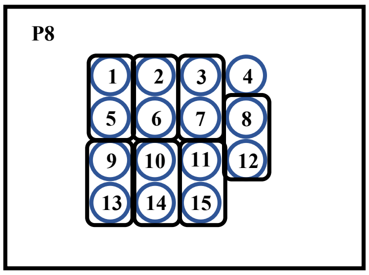


Abbildung 7.17: A1 - Phase 4: Deutung P8 - Zählprozess in Zweierschritten

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Auch in dieser Argumentation zeigt sich, dass Helena zwar ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol* deutet, nämlich die geometrische Anordnung P8 hinsichtlich ihrer Parität. Zur Deutung dessen nutzt sie aber erneut keine Eigenschaften der geometrischen Anordnung, sondern ermittelt die genaue Punktanzahl von P8 (Z. 28). Demnach zieht sie wiederholt einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* zur Deutung eines *geometrisch geprägten Zeichens/Symbols* heran.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Auch in diesem Interviewausschnitt lässt sich *keine strukturelle Deutung* des Punktmusters oder der ermittelten Zahl 15 erkennen, die von Helena zur Argumentation herangezogen werden. In ihrer Argumentation nutzt sie das Anschauungsmittel als *Mittel zur Zahldarstellung* und ermittelt die *konkrete Punktanzahl* (Z. 28). Eine Begründung der Parität erfolgt nicht. Es lässt sich vermuten, dass Helena sich implizit auf bereits getätigte Argumentationen beziehungsweise Deutungen bezieht. Diese Annahme beruht auf der Aussage „wieder fünfzehn“ (Z. 28). Die Nutzung des Worts „wieder“ macht deutlich, dass ihr bewusst ist, dass diese Zahl bereits gedeutet wurde. Sie stellt somit einen Bezug zu den bereits gedeuteten Darstellungen her.

Auch an dieser Stelle des analysierten Deutungsprozesses, ist es interessant zu sehen, dass Helena erneut eine Zweierbündelung vornimmt, um in Zweierschritten zu zählen. Auch hier könnte der Prozess der Zweierbündelung als geometrische Argumentation getätigt werden, ohne die konkrete Punktanzahl zu ermitteln.

Einordnung des Argumentationsprozesses

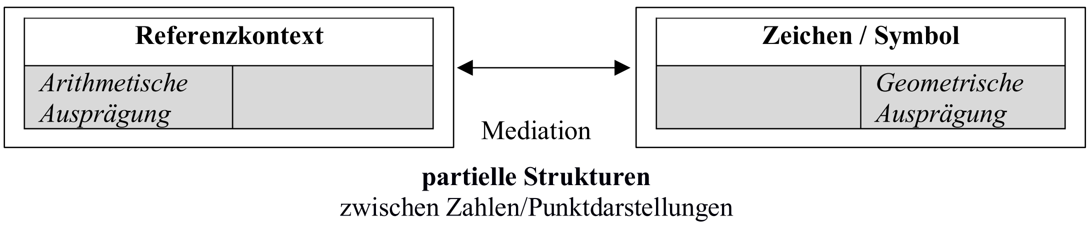


Abbildung 7.18: A1 - Phase 4: Zusammenfassung

Phase 5: Helena deutet und begründet die Parität von P1 (Z. 30)

30	H	*[nimmt P1 in die Hand]* **Das sieht man jetzt sofort, weil wie bei dem hier** *[schiebt P3 daneben]* **kann man das ja so teilen** *[teilt mit dem Finger die obere und untere Reihe von P3],* **aber hier** *[zeigt unter P1.7]* **ist ja einer zu wenig** *[unverständlich]*. *[schiebt P1 unter P8].*

Abbildung 7.19: A1 - Phase 5: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol sowie Referenzkontext

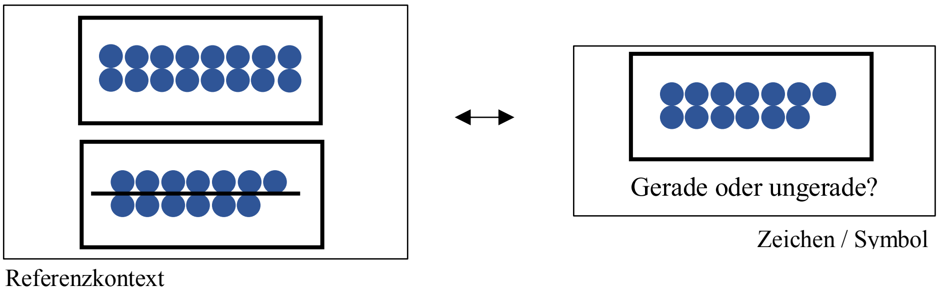


Abbildung 7.20: A1 - Phase 5: Rollenverteilung

In diesem Abschnitt wird die Fraglichkeit nicht (erneut) expliziert, vielmehr deutet Helena noch immer die strukturellen Zahleigenschaften der einzelnen Punktdarstellungen. So lässt sich an dieser Stelle die Parität von P1 als fragliches *Zeichen/Symbol* herausarbeiten.
Zur Deutung dieses Zeichens/Symbols zieht Helena eine bereits gedeutete Punktdarstellung heran, nämlich P3. Diese hat Helena aufgrund der Teilbarkeit durch zwei zu Beginn des Interviews bereits den geraden Darstellungen zugeordnet. Auf geometrischer Ebene hat sie dies unter anderem durch die horizontale Teilung der geometrischen Anordnung begründet. Dieses Vorgehen des horizontalen Teilens des Punktmusters von P3 überträgt sie nun auf das neu zu deutende Zeichen P1. Dies wird deutlich, indem sie die horizontale Teilung von P3 erneut durch eine Zeigegeste darstellt. Die verbale Äußerung „wie bei dem hier" (Z. 30) zeigt, dass Helena ein solches Vorgehen bei beiden Darstellungen vollziehen kann. Demnach teilt sie das Punktmuster P1 ebenfalls horizontal und expliziert im Anschluss daran den Unterschied zwischen den beiden Mustern. Während bei P3 zwei vollständige Punktreihen entstehen, enthält die untere Reihe von P1 einen Punkt zu wenig. Sie kommt dementsprechend zu dem Schluss, dass es sich dabei um eine ungerade Zahl handeln muss. Dabei bleibt von Helena ungenannt, was genau sie mit „einer zu wenig" (Z. 30) meint. Die Zuordnung zur Parität expliziert sie nicht mündlich, sondern macht sie durch das Verschieben zu den bereits als ungeraden Zahlen gedeuteten Punktmustern deutlich.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Helena deutet in dieser Phase das auf P1 abgebildete Punktmuster hinsichtlich der Parität. Demnach handelt es sich um eine *geometrische Ausprägung* des *Zeichens/Symbols*, da es sich bei dem Punktmuster um eine geometrische Anordnung handelt.
Zur Deutung dieses geometrisch geprägten Zeichens/Symbols zieht Helena ebenfalls einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran. Zum einen nutzt sie ein weiteres Punktmuster als Ausgangspunkt ihrer Argumentation. Zum anderen bezieht sie sich in ihren argumentativen Ausführungen auf strukturelle Merkmale des geometrischen Objekts.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Das *Wechselspiel zwischen Referenzkontext und Zeichen/Symbol* erfolgt in Helenas Deutung aufgrund von unterschiedlichen strukturellen Deutungen.

In ihrer Argumentation wird deutlich, dass sie eine *horizontale Teilung beider Punktmuster* durchführt. Durch diese von Helena beschriebene Teilung wird deutlich, dass sie *zwei Substrukturen in Form der horizontalen Reihen* in das Punktmuster hineindeutet. Durch die Deutung der Substrukturen zeigt sich, dass Helena zum einen *partielle Strukturen in das Punktmuster* hineindeutet. Zum anderen wird auch deutlich, dass sie *Beziehungen zwischen zwei Punktmustern* herstellt, denn sie bezieht sich auf die Punktmuster P3 sowie P1.

Neben der Gemeinsamkeit benennt sie auch den Unterschied, dass in der unteren Reihe von P1 einer zu wenig ist. Sie expliziert dabei nicht, was sie genau mit „einer zu wenig“ (Z. 30) meint, macht dadurch aber gleichzeitig deutlich, dass bei P3 kein Punkt zu wenig ist. Dies lässt zwei Interpretationsmöglichkeiten zu.

Zum einen könnte Helena in dieser Deutung die visuell erfassbaren Längen der beiden Substrukturen und demnach Reihen miteinander vergleichen. Durch einen solchen Vergleich kommt sie dann zu dem Schluss, dass unten „einer zu wenig“ ist und die visuell erfassbare Länge beider Reihen nicht identisch ist. Helenas Deutungen beziehen sich dann auf optische Erscheinungsmerkmale und entsprechen dann einer *konkret-dinglichen Deutung*. Bei einem rein visuellen Vergleich der Reihen handelt es sich nicht um einen Vergleich in Form einer *Deutung partieller Strukturen*, denn die Strukturen innerhalb der Reihen werden nicht in den Blick genommen, sondern es wird lediglich die optische Länge fokussiert. Dies würde bedeuten, es ist ein Punkt zu wenig, damit die Reihen gleich lang sind.

Zum anderen könnte sie die beiden Substrukturen hinsichtlich weiterer struktureller Merkmale miteinander vergleichen. Entweder, indem sie die konkreten Punktanzahlen miteinander vergleicht, diese in Beziehung setzt und feststellt, dass unten „einer zu wenig“ ist, denn die beiden Reihen bestehen nicht aus identisch vielen Punkten. Dieser Vergleich ist auch auf geometrischer Ebene möglich. Da in der Anordnung die Punkte beider Reihen genau übereinanderliegen, lässt sich aufgrund dessen, dass unter P1.7 kein Punkt ist, darauf schließen, dass beide Reihen nicht identisch sind. Dann würde sie weitere Strukturen, nämlich die Abstände der Punkte in einer Reihe und die Beziehung zwischen den Punkten beider Reihen in ihre Deutung einbeziehen. Eine solche Deutung würde implizieren, dass sie durchaus berücksichtigt, dass es sich um zwei gleichmächtige Mengen handelt. Dies würde einem Vergleich durch Deutung *partieller Strukturen* entsprechen, denn sie würde die von ihr gedeuteten Substrukturen in Form der Reihen auf Grundlage der Struktur der Reihen deuten. In beiden Interpretationen deutet Helena zunächst *zwei Substrukturen in Form der horizontalen*

Reihen in die Darstellung hinein, die sie dann anschließend *miteinander vergleicht*. Demnach zieht sie zur Argumentation die Deutung *partieller Strukturen* heran. Der Vergleich dieser Substrukturen kann entweder aufgrund der visuell erfassbaren Länge vollzogen worden sein und demnach *konkret-dinglicher Natur* sein. Oder sie nutzt für ihren Vergleich die Strukturen der beiden Reihen und kommt aufgrund dessen zum Schluss, dass in einer Reihe „einer zu wenig“ ist. Dann zieht Helena zum Vergleich der Substrukturen ebenfalls *partielle Strukturen* heran.
Ungenannt bleiben weitere für die Argumentation wesentliche Merkmale. Nämlich, dass es sich bei der geometrischen Anordnung um zwei Reihen handelt und die Punkte genau übereinanderliegen. Weiterhin fraglich bleibt, welche Bedeutung Helena der Anzahl der Reihen in einer geometrischen Anordnung gibt.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In dieser von Helena vorgenommenen Deutung lässt sich die *Begriffsfacette der Teilbarkeit (durch zwei) mit einer geometrischen Ausprägung* herausarbeiten. Hierbei zeigt sich, dass zwar eine geometrische Teilung durchgeführt muss, die konkret dargestellte Zahl aber nicht von Relevanz ist. Da das hier rekonstruierte Vorgehen dem Vorgehen der Deutung von P3 ähnelt und sie dieses zudem zur Argumentation heranzieht, lässt sich vermuten, dass Helena auch an dieser Stelle *ein begriffliches Verständnis* zeigt, welches der *Teilbarkeit durch zwei* zuzuordnen ist. Diese Annahme wird auch im weiteren Verlauf der Analyse gestützt, denn Helena macht immer wieder deutlich, dass es sich bei geraden Zahlen um durch zwei teilbare Zahlen handelt. Ob sie diese Teilbarkeit auf Grund der Gleichmächtigkeit zweier Mengen oder der optischen Gleichheit zweier Mengen deutet, bleibt fraglich.

Einordnung des Argumentationsprozesses

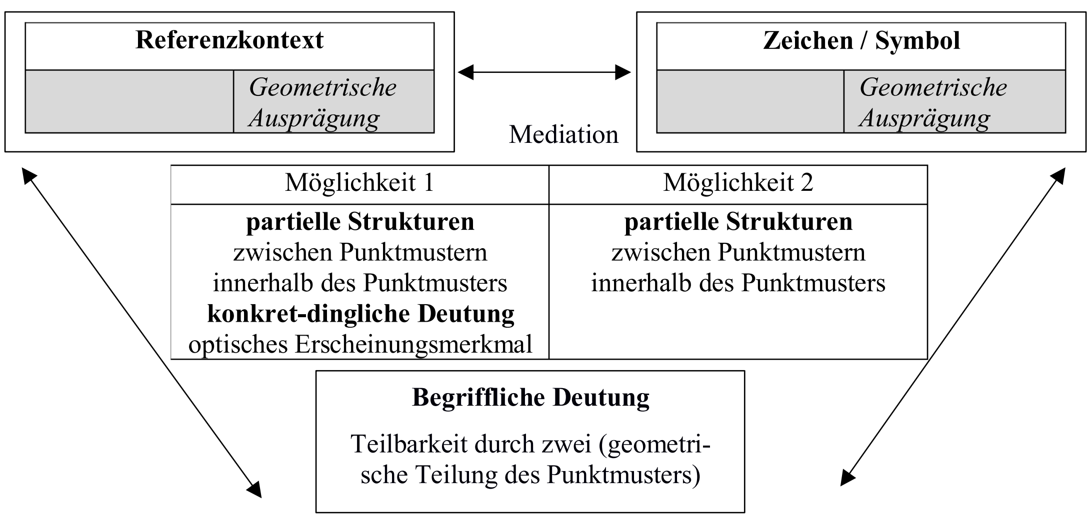


Abbildung 7.21: A1 - Phase 5: Zusammenfassung

Phase 6: Helena deutet und begründet die Parität von P6 (Z. 30)

30	**H**	*[nimmt P6 in die Hand]* **Schon wieder ungerade. Das ist wie das hier** *[schiebt P1 daneben und legt es so, dass die einzelnen Punkte nebeneinander liegen]*, **nur halt das ähm, wenn man das hier** *[zeigt auf P6.8]* **dahin** *[zeigt unter P6.6]* **machen würde, wäre es die gleiche Form wie das da** *[zeigt auf P1]*.
31	**I**	Mhm.

Abbildung 7.22: A1 - Phase 6: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

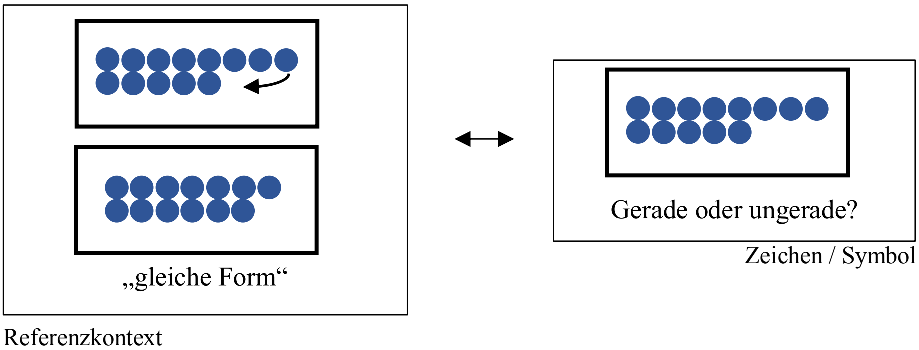


Abbildung 7.23: A1 - Phase 6: Rollenverteilung

Analog zum vorherigen Deutungs- und Argumentationsprozess wird auch an dieser Stelle die Fraglichkeit nicht erneut expliziert, sondern lässt sich daraus ableiten, dass diese Phase dem ersten Aufgabenkomplex zuzuordnen ist. Demnach ordnet Helena noch immer die Zahlenkarten der strukturellen Eigenschaft gerade oder ungerade zu und begründet dies. Durch Helenas Wahl der Punktdarstellung P6 zeigt sich, dass an dieser Stelle P6 hinsichtlich der Parität das fraglich gemachte *Zeichen/Symbol* darstellt.

Um dieses Zeichen/Symbol zu deuten und demnach die Parität von P6 zu begründen, zieht Helena erneut ein bereits zuvor gedeutetes Punktmuster als Referenzkontext heran. In diesem Fall das unmittelbar zuvor gedeutete Punktmuster P1. P1 deutete sie als ungerades Punktmuster. Sie begründete dies, da eine horizontale Teilung zwar möglich ist, aber nach ihren Aussagen in der unteren Reihe ein Punkt zu wenig ist (Z. 30; Phase 5).

Der Vergleich der beiden Punktmuster geschieht aber nicht unmittelbar, sondern Helena deutet zunächst das Punktmuster P6 um, indem sie mental den letzten Punkt der oberen Reihe ans Ende der unteren Reihe schiebt. Dies wird von ihr durch eine Zeigehandlung verdeutlicht (vgl. Abb. 7.24). Durch diese Umdeutung erzeugt Helena das Punktmuster ‚P6-umgedeutet'. Diese Umdeutung erfolgt rein mental und liegt Helena nicht vor. Sie erzeugt so ein Punktmuster, welches identisch zu dem Punktmuster P1 ist und eine prototypische Darstellung einer ungeraden Zahl zeigt. Helena vergleicht somit nicht die beiden Punktmuster P6 und P1, sondern das durch die Umdeutung erzeugte Punktmuster P6-umgedeutet mit P1 (vgl. Abb. 7.24). Sie gibt an, dass es sich hierbei um zwei Punktmuster der ‚gleichen Form' handelt. Was genau Helena unter „gleiche Form" versteht, wird von ihr nicht weiter expliziert.

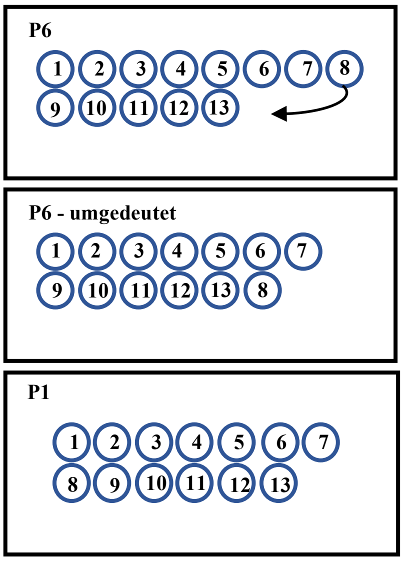


Abbildung 7.24: A1 - Phase 6: Deutung P6 - Verschiebung eines Punktes

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Da Helena P6 hinsichtlich der Parität deutet, handelt es sich erneut um die Deutung eines *Zeichens/Symbols geometrischer Ausprägung*. Zur Deutung dieses geometrisch geprägten Zeichens zieht Helena erneut einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran. Zum einen nutzt sie ein weiteres Punktmuster als Ausgangspunkt ihrer Argumentation, nämlich P1. Zum anderen bezieht sie sich in ihren argumentativen Ausführungen auf Merkmale der geometrischen Anordnung, welche sie als „gleiche Form" (Z. 30) bezeichnet.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In dem oben beschriebenen *Wechselspiel zwischen dem geometrisch geprägten Referenzkontext und dem ebenfalls geometrisch geprägtem Zeichen/Symbol* zeigt sich erneut die Deutung und *Nutzung von Strukturen* im Argumentationsprozess. Zur Deutung der Parität von P6 zieht Helena einen *Vergleich zwischen zwei geometrischen Anordnungen* heran und stellt damit eine Beziehung zwischen diesen her. Um diesen Vergleich zu ermöglichen, deutet Helena das Punktmuster P6 zunächst wie oben beschrieben um (vgl. Abb. 7.24). Durch diese *Umdeutung* erzeugt Helena ein Punktmuster, welches die Form eines bereits vorher gedeuteten Punktmusters, in diesem Fall P1, hat. Beide Punktmuster vergleicht sie dann auf Grundlage der *gleichen Form*. Demnach ist an dieser Stelle das ausschlaggebende Argument, warum es sich bei P6 um die Darstellung einer ungeraden Zahl handelt, die Form des

Punktmusters. Diese für sie ausschlaggebende Form ist bei beiden Anordnungen gleich und demnach muss es sich auch bei P6 um die Darstellung einer ungeraden Zahl handeln. Helena nutzt in ihrer Argumentation eine *Beziehung zwischen zwei Punktdarstellungen* und deutet *partielle Strukturen* in die Darstellung hinein.

Hierbei zeigt sich ein interessanter Umbruch im Argumentationsprozess. In dem bisherigen Argumentations- und Deutungsprozess erläutert Helena auch strukturelle Eigenschaften in den zu deutenden Punktmustern. Diese strukturellen Eigenschaften bleiben an dieser Stelle ungenannt. Dies kann zwei unterschiedliche Gründe haben.

Zum einen kann es sein, dass Helena die horizontale Teilung weiterhin im Blick hat und implizit auf ihre vorhergegangene Begründung von P1 verweist. Dies hätte zur Folge, dass Helena die strukturellen Eigenschaften des Punktmusters von P1 und P6-umgedeutet vergleicht und eine Analogie feststellt, die sie mit ‚gleicher Form' bezeichnet. Die Analogie bezieht sich dann erneut auf die Möglichkeit der horizontalen Teilung. Diese strukturellen Eigenschaften würden dann weiterhin in die Darstellung hineingedeutet werden, aber unerwähnt bleiben. Dann zeigen sich auch hier partielle strukturelle Deutungen innerhalb des Deutungsprozesses.

Zum anderen ist es aber auch möglich, dass Helena sich in dem Vergleich der beiden Punktmuster lediglich auf die äußere Form der Darstellung bezieht. Beide Darstellungen zeigen auf visueller Ebene ein Punktmuster, bei dem unter dem letzten Punkt der oberen Reihe kein Punkt der unteren Reihe abgebildet ist. Die äußere Form der Darstellungen ist demnach identisch. Die Deutung als ‚unvollständiges Rechteck' (vgl. Abb. 7.25) könnte dann von Helena als Entscheidungskriterium für eine Parität herangezogen werden. Sie würde sich dann nicht mehr auf strukturelle Eigenschaften der Anordnung, sondern vielmehr auf optische Erscheinungsmerkmale der Anordnung beziehen.

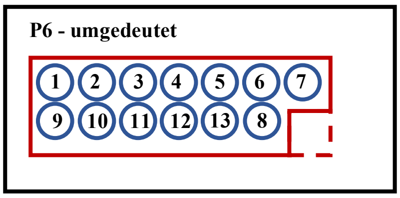


Abbildung 7.25: Unvollständige Rechtecksanordnung

Ob es an dieser Stelle relevant ist, dass es sich um eine geometrische Anordnung mit zwei Reihen handelt, bleibt ungeklärt. Für die weitere Analyse gilt es nun, beide Möglichkeiten weiter zu verfolgen, um Helenas Argumentation und Deutung besser verstehen zu können.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Auch in dieser von Helena vorgenommenen Deutung lässt sich eine begriffliche Idee auf geometrischer Ebene herausarbeiten. Allerdings ist die begriffliche Deutung des mathematischen Begriffes abhängig von der von Helena tatsächlich eingenommenen Sicht auf die Darstellung. Demnach sind an dieser Stelle zwei unterschiedliche begriffliche Ideen möglich. Zum einen weiterhin die Idee der horizontalen Teilbarkeit, die in Phase 5 erläutert wurde. Zum anderen aber auch ein Verständnis von ungeraden Zahlen in Form von unvollständigen Punktdarstellungen.

Einordnung des Argumentationsprozesses

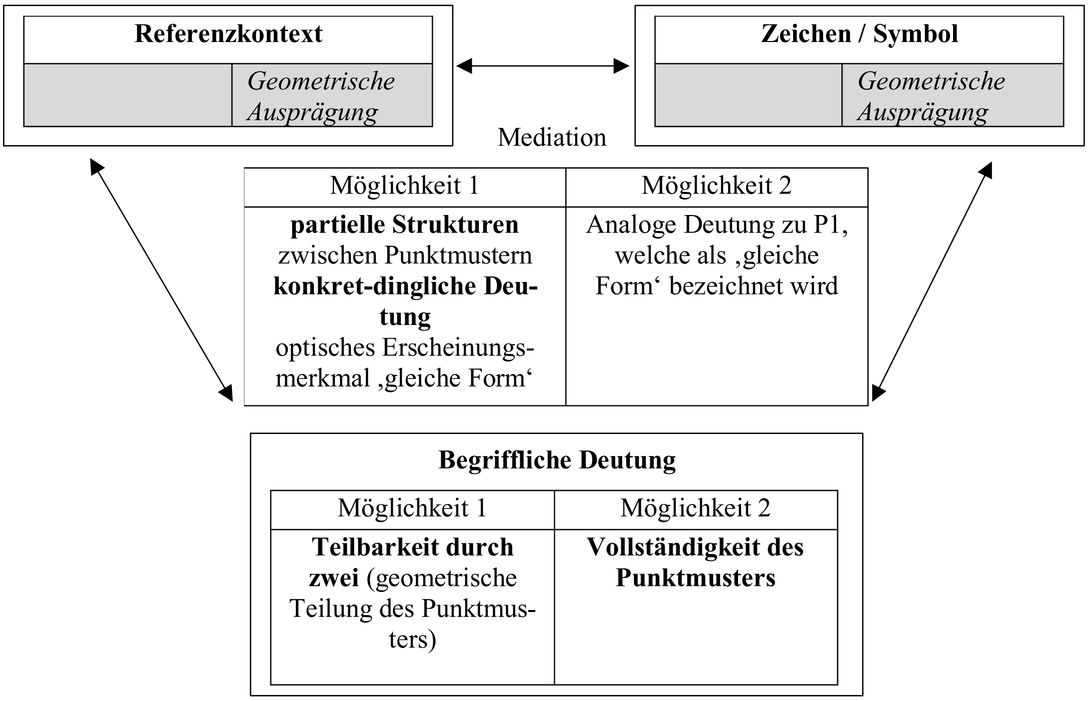


Abbildung 7.26: A1 - Phase 6: Zusammenfassung

Phase 7: Helena deutet und begründet die Parität von P4 (Z. 32)

32	**H**	*[nimmt P4 in die Hand]* **Das** *[legt P4 auf den Tisch]* **ist wieder wie das da** *[zeigt auf P1]*, **da** *[zeigt auf die Lücke unter P4.8]* **ist wieder einer zu wenig** *[schiebt P4 unter P1]*.

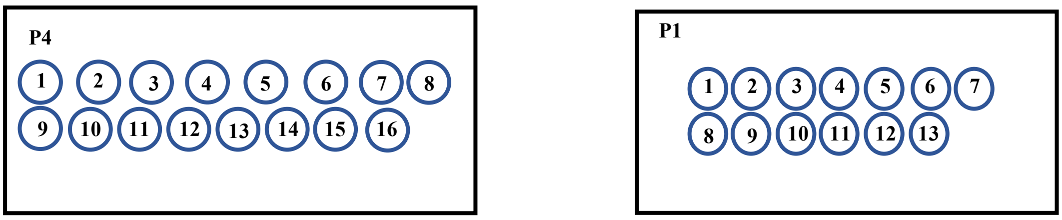


Abbildung 7.27: A1 - Phase 7: Gedeutete Darstellungen

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

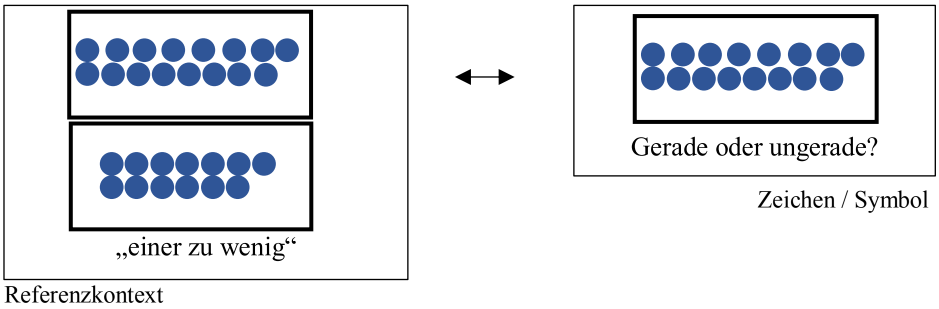


Abbildung 7.28: A1 - Phase 7: Rollenverteilung

Helena steht in dieser Phase weiterhin vor der Anforderung die vorgelegten Punktdarstellungen begründet einer Parität zuzuordnen. Dabei stellt die Deutung der geometrischen Anordnung P4 vor dem Hintergrund der strukturellen Zahleigenschaft das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Zur Begründung der Parität von P4 zieht Helena abermals ein bereits gedeutetes Punktmuster heran, indem sie erneut P1 zum Vergleich nutzt. Durch den Vergleich beider Punktmuster kommt sie zu folgendem Schluss: „Das ist wieder wie das da, da ist wieder einer zu wenig“ (Z. 32).

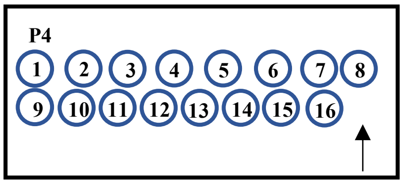


Abbildung 7.29: A1 - Phase 7: Deutung von P4 - I

Diese verbale Äußerung wird unterstützt, indem sie durch Zeigegesten verdeutlicht, dass es sich um einen Vergleich der Punktdarstellungen P1 und P4 handelt sowie um zu verdeutlichen, dass unter P4.8 einer zu wenig ist, womit sie vermutlich ein Punkt zu wenig meint (vgl. Abb. 7.29). Die Zuordnung zu den ungeraden Zahlen wird von Helena an dieser Stelle nicht expliziert, sondern durch das Verschieben von P4 zu den bisher gedeuteten ungeraden Zahlen deutlich. Demnach deutet Helena P4 hinsichtlich der Parität vor einem Referenzkontext, der einen Vergleich zu einem bisherigen Punktmuster auf Grundlage der Eigenschaft ‚einer zu wenig‘ darstellt.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Da Helena P4 hinsichtlich der Parität deutet, handelt es sich erneut um die Deutung eines *Zeichens/Symbols geometrischer Ausprägung*. Zur Deutung dieses geometrisch geprägten Zeichens/Symbols zieht Helena abermals einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran. Sie nutzt erneut ein weiteres Punktmuster als Ausgangspunkt ihrer Argumentation. Zudem bezieht sie sich in ihrer argumentativen Ausführung auf Merkmale der geometrischen Anordnung, nämlich, dass in der unteren Reihe ein Punkt zu wenig ist.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Analog zu den vorangegangenen Deutungen zieht Helena auch in diesem Argumentationsprozess ein bereits gedeutetes Punktmuster heran. Sie nutzt erneut P1 und stellt *Beziehungen zwischen dem zu deutenden Punktmuster P4 und dem bereits gedeuteten Punktmuster P1* her und *vergleicht die in die jeweiligen Punktmuster hineingedeuteten Strukturen*. Demnach deutet sie partielle Strukturen, indem sie zwei Punktmuster zueinander in Beziehung setzt. Dieser von Helena durchgeführte Vergleich der beiden Punktmuster basiert an dieser Stelle auf einer einzigen von ihr genannten Eigenschaft, nämlich, dass in der unteren Reihe ein Punkt zu wenig ist. Was genau sie damit meint, expliziert sie an dieser Stelle nicht.

Betrachtet man diese Argumentation Helenas im Verlauf des Interviews, so sind erneut zwei unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten denkbar.

Zum einen könnte Helena an dieser Stelle eine vollständige Rechtecksanordnung fokussieren und durch die Aussage „da ist wieder einer zu wenig“ (Z. 32) signalisieren, dass der fehlende Punkt zu einer Unvollständigkeit führt. Dies würde dann eine *konkret-dingliche Deutung* bedeuten, da sich Helena lediglich auf *optische Erscheinungsmerkmale* einer vollständigen Rechtecksanordnung bezieht.

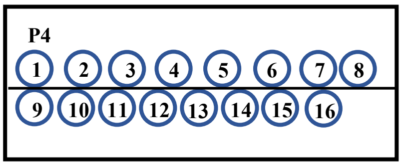


Abbildung 7.30: A1 - Phase 7: Deutung von P4 - II

Zum anderen lässt sich vermuten, dass Helena die geometrische Anordnung P4 analog zu ihrer Deutung von P1 deutet und das Punktmuster P4 horizontal teilt und dadurch *zwei Substrukturen in Form von den beiden horizontalen Reihen* deutet (vgl. Abb. 7.30). Diese *vergleicht* sie und stellt fest, dass in der unteren Reihe ein Punkt zu wenig ist. In dieser Argumentation wird deutlich, dass Helena diese Substrukturen rein optisch miteinander vergleicht. Sie berücksichtigt an dieser Stelle nicht die für eine solche Argumentation relevante strukturelle Anordnung der Punkte in den Reihen. Sie lässt außer Acht, dass die Punkte in der oberen und unteren Reihe nicht genau übereinanderliegen, da die obere Reihe größere Abstände zwischen den Punkten vorweist, als die untere Reihe. Helena deutet demnach die wesentliche strukturelle Eigenschaft der Teilung in zwei Reihen in die Veranschaulichung hinein, lässt aber eine weitere wesentliche Eigenschaft außer Acht. Der Vergleich der beiden Reihen geschieht dann nicht aufgrund struktureller Eigenschaften, sondern auf Basis optischer Erscheinungsmerkmale, in diesem Fall der visuell erfassbaren Länge der Reihen. Demnach deutet Helena vereinzelte *partielle Strukturen* aber auch *konkret-dingliche Deutungen* in die Punktdarstellung hinein. Ob es an dieser Stelle relevant ist, dass es sich um eine geometrische Anordnung mit zwei Reihen handelt, bleibt ungeklärt. Für die weitere Analyse gilt es, beide Möglichkeiten zu verfolgen, um Helenas Argumentation besser verstehen und rekonstruieren zu können.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Auch in dieser von Helena vorgenommenen Deutung lässt sich eine begriffliche Idee auf geometrischer Ebene herausarbeiten. Allerdings lässt sich nicht sicher rekonstruieren, dass Helena an dieser Stelle noch eine Teilbarkeit als begriffliche Grundlage nimmt. Demnach sind an dieser Stelle *zwei unterschiedliche begriffliche Ideen* möglich. Zum einen weiterhin *die Idee der horizontalen Teilbarkeit*, die bereits in Phase 5 herausgearbeitet wurde. Zum anderen aber auch ein *Verständnis von ungeraden Zahlen in Form von unvollständigen Punktdarstellungen*. Dies würde ein geometrisches Verständnis von ungeraden Zahlen implizieren, dass unvollständige Rechtecke immer eine ungerade Zahl darstellen. Hierbei bleibt allerdings fraglich, ob die Anzahl der Reihen von Relevanz ist, oder ob diese Deutung bei jedem unvollständigen Rechteck getätigt werden kann. Letzteres lässt sich im weiteren Analyseverlauf allerdings widerlegen.

Einordnung des Argumentationsprozesses

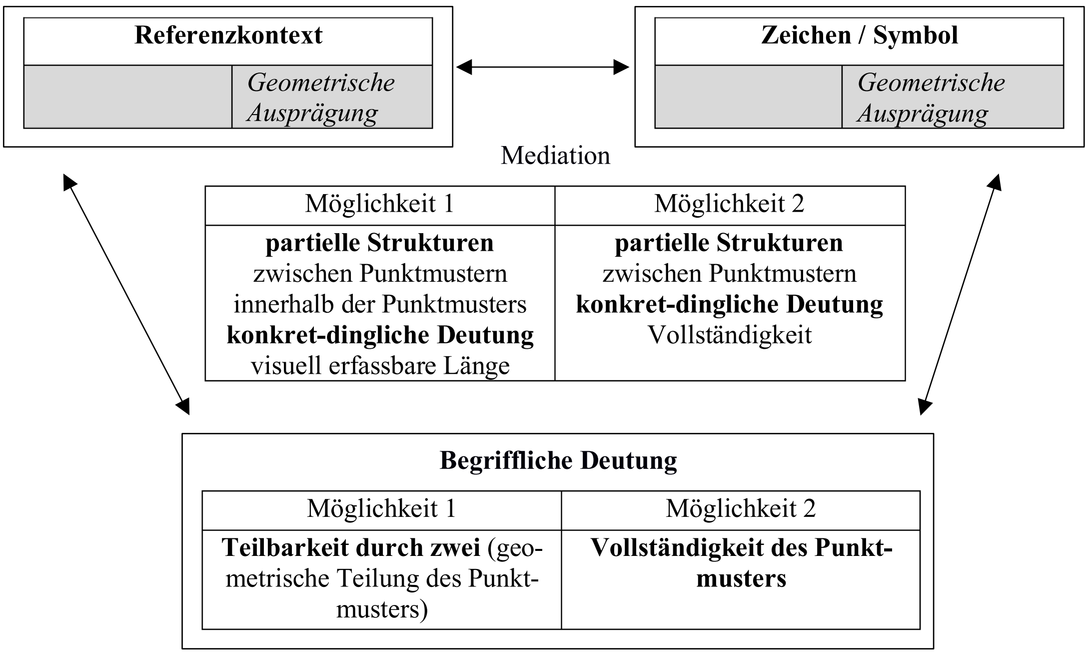


Abbildung 7.31: A1 - Phase 7: Zusammenfassung

Phase 8: Helena deutet P2 (Z. 32)

32	**H**	*[schiebt P2 vor sich]* **Da** *[zeigt auf die Lücke unter P2.8]* **ist wieder einer zu wenig.** *[schiebt P2 über P9]*

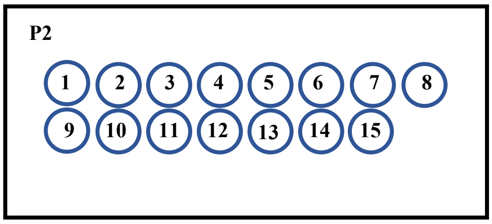


Abbildung 7.32: A1 - Phase 8: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

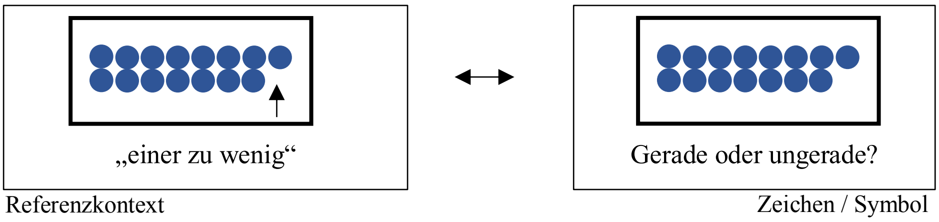


Abbildung 7.33: A1 - Phase 8: Rollenverteilung

Helena deutet in dieser Interviewszene die Punktdarstellung P2 hinsichtlich der Parität. Dies stellt an dieser Stelle das von ihr zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Um dies zu deuten, nutzt Helena eine ähnliche Argumentation, die sie bereits zur Deutung des vorherigen Punktmusters P4 genutzt hat. Sie sagt, „da ist wieder einer zu wenig" (Z. 32). Sie bezieht sich dabei zum einen auf den fehlenden Punkt, indem sie unter P2.8 zeigt. Gleichzeitig impliziert dies auch ein Vergleich zu bereits gedeuteten Punktmustern, ohne dies konkret zu benennen. Dies wird durch ihre Äußerung „wieder" (Z. 32) erkennbar.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Helena deutet P4 hinsichtlich der Parität. Da es sich hierbei um eine geometrische Anordnung handelt, deutet sie an dieser Stelle ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*. Zur Deutung dieses Zeichens/Symbols zieht Helena Merkmale der geometrischen Anordnung heran und deutet es somit vor einem *geometrisch geprägten Referenzkontext*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man die Deutungen von Helena so zeigen sich an dieser Stelle Deutungen, die bereits im vorherigen Deutungs- und Argumentationsprozess herausgearbeitet werden konnten. Der einzige Unterschied liegt darin, dass die Bezugnahme auf bereits vorher gedeutete Punktmuster implizit bleibt und lediglich durch die Wortwahl Helenas vermutbar ist, da sie sagt, dass „wieder einer zu wenig" (Z. 32) ist. Durch die Nutzung des Wortes „wieder" wird deutlich, dass dieses Merkmal bereits vorher innerhalb des Deutungs- und Argumentationsprozesses zur Argumentation herangezogen wurde. Unklar bleibt, ob Helena sich generell auf alle bereits gedeuteten Punktmuster mit dieser Eigenschaft bezieht, auf ein bestimmtes Punktmuster oder auf eine gleiche argumentative Vorgehensweise.

Betrachtet man Helenas Deutungs- und Argumentationsprozess hinsichtlich der strukturellen Deutungen der geometrischen Anordnung, so zeigt sich, dass auch hier grundsätzlich zwei unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten denkbar sind. Auch in der von Helena getätigten Deutung von P2 ist es möglich, dass Helena mit dem Fokus auf eine *vollständige Rechtecksanordnung* argumentiert und die Aussage „einer zu wenig" sich auf eben diese Rechtecksanordnung bezieht.

Ebenso ist es möglich, dass Helena sich an dieser Stelle auf die *horizontale Teilbarkeit des Punktmusters und ein Vergleich der visuell erfassbaren Längen der beiden Punktreihen* bezieht ohne diese explizit zu nennen. Auch wenn Helenas Aussage bei P2 durchaus tragfähig ist, da es sich bei der geometrischen Anordnung um eine prototypische Darstellung handelt, lässt sich nicht erkennen, dass Helena alle wesentlichen strukturellen Merkmale berücksichtigt. Denn in dieser Argumentation expliziert sie lediglich ein einziges Merkmal, um die Parität zu begründen. Demnach deutet Helena entweder vereinzelte *partielle Strukturen* oder *konkret-dingliche Deutungen* in die Punktdarstellung hinein. Die Deutung *partieller Strukturen* in Form eines Vergleichs von Punktmustern ist durchaus anzunehmen, bleibt aber implizit. Hierbei zeigen sich die gleichen Interpretationsmöglichkeiten, die bereits in Phase 5 herausgearbeitet wurden.

Ob es an dieser Stelle relevant ist, dass es sich um eine geometrische Anordnung mit zwei Reihen handelt, bleibt weiterhin ungeklärt. Für die weitere Analyse gilt es erneut, beide Möglichkeiten weiter zu verfolgen, um Helenas Argumentation besser verstehen und rekonstruieren zu können.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Auch in dieser von Helena vorgenommenen Deutung lässt sich eine begriffliche Idee auf geometrischer Ebene rekonstruieren. Allerdings lässt sich nicht sicher herausarbeiten, dass Helena an dieser Stelle noch eine Teilbarkeit als Grundlage nimmt, denn in ihren Äußerungen oder Handlungen bezieht sie sich nicht auf Eigenschaften oder Handlungen in Form einer Teilung. Demnach sind an dieser Stelle zwei unterschiedliche begriffliche Ideen möglich. Zum einen weiterhin die Idee der *horizontalen Teilbarkeit*, die bereits in Phase 5 erläutert wurde. Dies lässt sich vermuten, da Helena zwar keinen konkreten Bezug zu einer Teilung herstellt, diese aber innerhalb vorheriger Argumentationen durchaus genutzt wurde.

Zum anderen aber auch ein Verständnis von ungeraden Zahlen in Form von *unvollständigen Punktdarstellungen*. Demnach wäre eine nicht vollständige Rechtecksanordnung immer eine ungerade Zahl. Wobei weiterhin unklar bleibt, ob es sich dabei um ein Rechteck mit der Seitenlänge zwei handeln muss.

Einordnung des Argumentationsprozesses

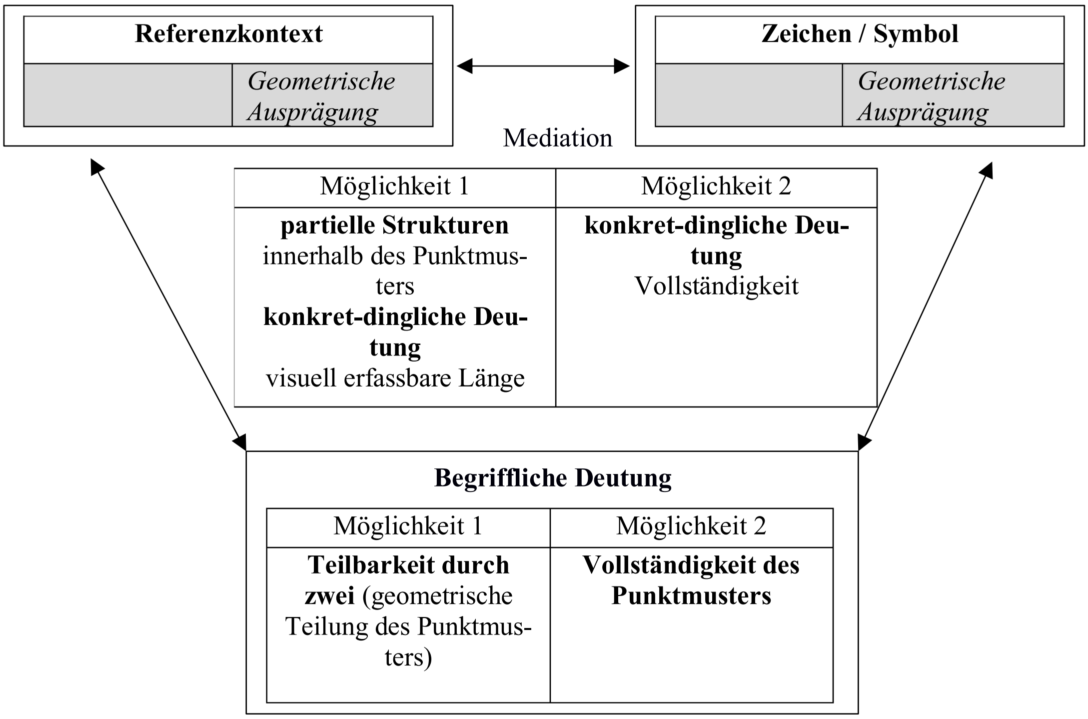


Abbildung 7.34: A1 - Phase 8: Zusammenfassung

Phase 9: Helena deutet und begründet die Parität von P7 (Z. 32-33)

32	**H**	*[nimmt P7 in die Hand] [unverständlich] [zeigt mit dem Daumen unkenntlich auf das Punktmuster]* **Das sind sechzehn, das kann man teilen.** # *[schiebt P7 unter P3]*
33	**I**	**# Mhm.**

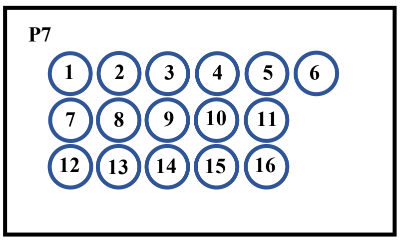
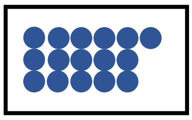


Abbildung 7.35: A1 - Phase 9: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

16
Teilbarkeit der 16

↔



gerade oder ungerade?

Referenzkontext

Zeichen / Symbol

Abbildung 7.36: A1 - Phase 9: Rollenverteilung I

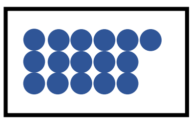
In diesem Deutungsprozess deutet Helena (zunächst) die Punktdarstellung P7 hinsichtlich der Parität. Demnach stellt die Parität von P7 zu Beginn des Deutungs- und Argumentationsprozesses das fragliche und zu deutende *Zeichen/Symbol* dar. Um dieser Deutungsanforderung gerecht zu werden, ermittelt Helena die Punktanzahl und kommt zu dem Schluss „das sind sechzehn" (Z. 32). An dieser Stelle ist nicht rekonstruierbar, wie Helena die Punktanzahl ermittelt. Im Anschluss daran sagt Helena „das kann man teilen" (Z. 32). An dieser Stelle lassen sich zwei Interpretationsmöglichkeiten unterscheiden.

Zum einen kann sich dies auf die Teilbarkeit des Punktmusters beziehen. „Das kann man teilen" (Z. 32) bezieht sich dann auf das Punktmuster. Helena nutzt dann die Tatsache, dass es sich um die Zahl 16 handelt als Argumentationsgrundlage, um zu begründen, dass die Punktdarstellung eine teilbare und demnach gerade Zahl darstellt. Die Zuordnung zu den geraden Zahlen erfolgt nicht verbal, sondern durch das Verschieben der Karte zu den weiteren Darstellungen die als gerade klassifiziert wurden.

Zum anderen ist es möglich, dass sie die Aussage „das kann man teilen" (Z. 32) auf die Zahl 16 bezieht. Eine solche Interpretation der Aussage lässt gleichzeitig einen *Wechsel des zu deutenden Zeichens/Symbols* erkennen. Helena deutet dann nicht mehr die Punktanordnung P7 hinsichtlich der Parität, sondern sie deutet die Zahl 16 hinsichtlich der Parität. Demnach stellt die 16 und deren Parität ein neues zu deutendes *Zeichen/Symbol* dar.

16

↔



gerade oder ungerade?

Referenzkontext

Zeichen / Symbol

Teilbarkeit

↔

16
gerade oder ungerade?

Referenzkontext

Zeichen / Symbol

Abbildung 7.37: A1 - Phase 9: Rollenverteilung II und III

Diese begründet sie dann aufgrund der Teilbarkeit der 16. Auch wenn Helena an dieser Stelle nicht expliziert, was genau sie mit „teilen“ meint, lässt sich auf Grundlage des bisherigen Interviewverlaufs vermuten, dass Helena an dieser Stelle von einer Teilbarkeit durch zwei ausgeht. Ob Helena diese an dieser Stelle ermittelt, oder ob sie auf ihr bekanntes Faktenwissen zurückgreift, bleibt an dieser Stelle ungenannt.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Helena deutet die geometrische Anordnung P7 hinsichtlich der Parität und demnach ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol*. Zur Deutung dessen zieht Helena einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* heran, denn sie übersetzt die ikonische Repräsentation in eine numerisch-symbolische Repräsentation und argumentiert auf Grundlage der Teilbarkeit der 16, dass auch P7 gerade ist. Die vorangegangene Analyse des Wechselspiels zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext zeigt aber auch, dass ein Wechsel der epistemologischen Bedeutung annehmbar ist. Dann stellt die geometrische Anordnung P7 und deren Parität zunächst das *geometrisch geprägte* zu deutende *Zeichen/Symbol* dar, welches vor einem *arithmetisch geprägten Referenzkontext* gedeutet wird. Dieser Deutungsprozess führt dann zu einem Wechsel des zu deutenden Zeichens/Symbols. Das neu zu deutende Zeichen/Symbol stellt dann die 16 hinsichtlich ihrer Parität und demnach ein *arithmetisch geprägtes Zeichen/Symbol* dar, welches vermutlich ebenfalls vor einem *arithmetisch geprägten Referenzkontext* gedeutet wird, nämlich der Teilbarkeit der 16.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In diesen Deutungs- und Argumentationsprozessen lässt sich keine strukturelle Deutung der geometrischen Anordnung rekonstruieren, da diese innerhalb des Argumentationsprozesses keine Berücksichtigung findet. Vielmehr wird das Anschauungsmittel als *Mittel zur Zahldarstellung* gedeutet. Auch die arithmetische Struktur der Teilbarkeit durch zwei lässt sich lediglich aufgrund des Interviewverlaufs vermuten. Demnach nutzt Helena in ihrer Argumentation eine *konkret-dingliche Deutung*, da sie die Veranschaulichung *als Mittel zur Zahldarstellung* nutzt. Dennoch gibt diese Deutung interessante Aufschlüsse bezüglich der vorherigen Argumentationen. Auch P7 als zu deutendes Zeichen/Symbol zeigt keine vollständige Rechtecksanordnung und ähnelt in ihrer optischen Erscheinung den vorherigen Punktmustern P1, P2 und P4. In diesem Fall handelt es sich um eine geometrische Anordnung bestehend aus drei Reihen. Die erste Reihe besteht dabei aus einer um einen Punkt längeren Reihe als die zweite sowie dritte Reihe. Die Abstände zwischen den Punkten einer Reihe sowie zwischen den Reihen ist identisch. Dennoch überträgt Helena ihre vorherige

Argumentation und Deutung nicht auf diese Darstellung. Dies lässt vermuten, dass die Anzahl der Reihen in Helenas Argumentations- beziehungsweise Deutungsweise durchaus Beachtung findet, auch wenn diese von ihr nicht expliziert wird. Demnach ist davon auszugehen, dass Helena nicht ausschließlich die optische Erscheinung als Argumentationsgrundlage heranzieht, sondern noch weitere Merkmale Berücksichtigung finden.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Auf der begrifflichen Ebene zeigt sich ein Verständnis der Parität im Kontext der *Teilbarkeit*. Aufgrund des Interviewverlaufs lässt sich vermuten, dass es sich hierbei um die *Teilbarkeit durch zwei* handelt.

Einordnung des Argumentationsprozesses

Möglichkeit 1:

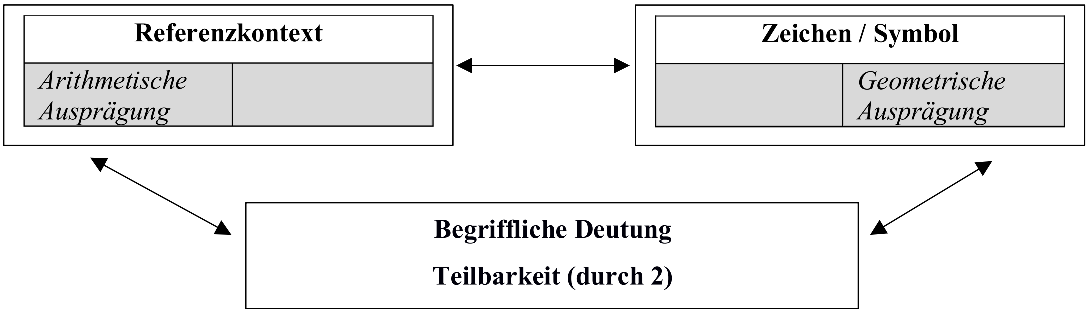


Abbildung 7.38: A1 - Phase 9: Zusammenfassung - Möglichkeit I

Möglichkeit 2:

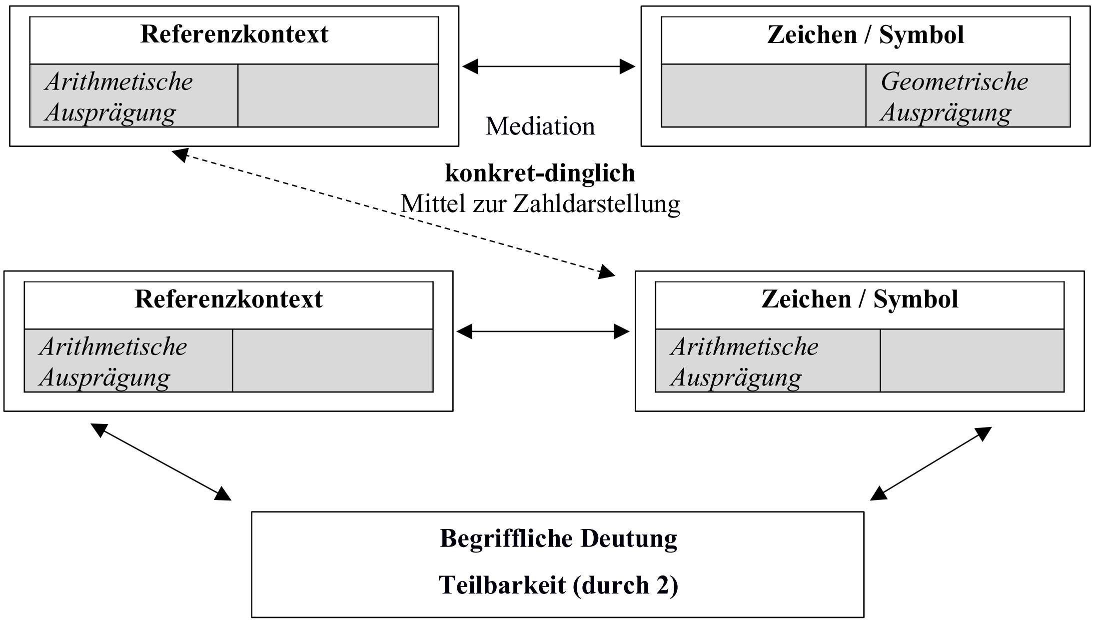


Abbildung 7.39: A1 - Phase 9: Zusammenfassung - Möglichkeit II

Phase 10: Helena deutet P5 (Z. 34-36)

34	**H**	*[nimmt sich P5]* **Das ist auch eine gerade Zahl.**
35	**I**	**Woher wusstest du das denn jetzt so schnell?**
36	**H**	**Weil es bei jedem einfach so eine Reihe gibt** *[zeigt über die beiden äußeren langen Reihen von P5]* **und dann muss man gucken, ob man diese Reihe** *[zeigt auf die mittlere Reihe von P5 und dann zwischen P5.8 und P5.11]* **auch noch teilen kann.**

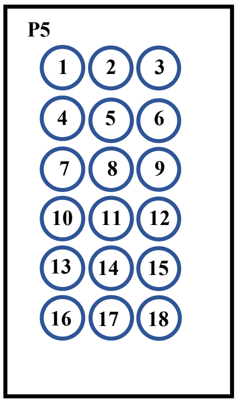
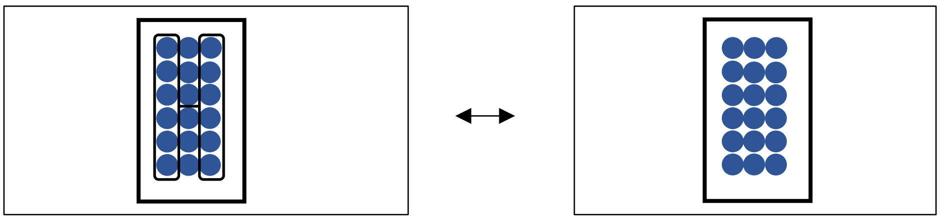


Abbildung 7.40: A1 - Phase 10: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext



Referenzkontext

Zeichen / Symbol

Abbildung 7.41: A1 - Phase 10: Rollenverteilung

Helena deutet P5 hinsichtlich der Parität und klassifiziert diese als gerade Zahl (Z. 34). Daraufhin wird sie von der Interviewerin aufgefordert zu erläutern, woher sie das so schnell wusste. Demnach ist an dieser Stelle begründungsbedürftig, warum es sich bei P5 um eine gerade Zahl handelt und eben dies stellt das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Zunächst klassifiziert Helena die Veranschaulichung P5 als gerade (Z.34). Dies begründet sie nach einem Impuls der Interviewerin (Z. 35) unter Nutzung des Anschauungsmittels. Dabei zerlegt sie das Punktmuster und betrachtet zunächst die beiden äußeren Reihen und erläutert, „weil es bei jedem einfach so eine Reihe gibt“ (Z. 36). Dies macht deutlich, dass Helena an dieser Stelle durch zwei teilt, da sie zunächst zwei Reihen in ihre Deutung einbezieht. Demnach lässt sich vermuten, dass *eine Reihe* eine von ihr gedeutete *Substruktur* darstellt. Sie bezieht sich dann auf einen Verteilprozess in Form des Erzeugens zweier Teilmengen. Die notwendige

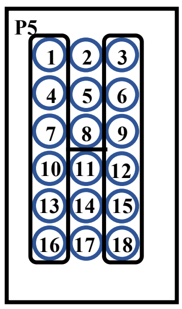


Abbildung 7.42: A1 - Phase 10 - Deutung P5

Gleichmächtigkeit der beiden Mengen bleibt von ihr ungenannt (vgl. Abb. 7.42). Im Anschluss daran überprüft sie „ob man diese Reihe auch noch teilen kann“ (Z. 36) und verdeutlicht durch ihre Zeigegeste, dass sie mit „diese Reihe“ (Z. 36) die mittlere Reihe meint. Durch eine weitere Zeigegeste verdeutlicht sie zudem, wie die mittlere Reihe geteilt werden kann, indem sie zwischen die Punkte P5.8 sowie P5.11 zeigt (vgl. Abb. 7.42). Diese Möglichkeit der Teilung stellt für Helena das ausschlaggebende Kriterium dar, mit der sie die Parität begründet. Demnach stellt die Handlung, welche die Teilbarkeit des Punktmusters auf Basis der Zerlegung dieses Punktmusters darstellt, den *Referenzkontext* dar.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext
Das zu deutende Zeichen/Symbol stellt in diesem Argumentations- und Deutungsprozess die geometrische Anordnung von P5 dar, die hinsichtlich der Parität gedeutet wird. Demnach handelt es sich um ein *geometrisch ausgeprägtes Zeichen/Symbol*. Da Helena als Argumentationsgrundlage Handlungen an und Merkmale der geometrischen Anordnung heranzieht, ist auch der von ihr herangezogene *Referenzkontext geometrischer Ausprägung*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext
In Helenas Argumentation zeigen sich unterschiedliche strukturelle Deutungen. In einem ersten Schritt *zerlegt Helena die geometrische Anordnung*. Die *Zerlegung der geometrischen Anordnung in Teilkomponenten* vollzieht sie dabei mental. Sie betrachtet zunächst die beiden äußeren Reihen von P5. Die Aussage, „weil es bei jedem einfach so eine Reihe gibt“ (Z. 36) zeigt, dass Helena diese beiden Reihen nicht als ein zusammenhängendes Objekt deutet, sondern als *zwei Substrukturen in Form je einer vertikalen Punktreihe*. Ob und warum es sich dabei um zwei gleiche Reihen handelt bleibt ungenannt. Das heißt, sie benennt an dieser Stelle die mögliche Teilung, aber nicht, dass es sich um zwei gleiche Substrukturen handelt. Auch die gleichmäßige Anordnung der Punkte in den Reihen, die notwendig ist, um diese Argumentation mathematisch korrekt zu führen, bleibt ungenannt. Aufgrund des Interviewverlaufs lässt sich vermuten, dass Helena an dieser Stelle die beiden Reihen als gleich ansieht. Auf welcher Grundlage Helena dies beiden Reihen vergleicht, lässt sich nur vermuten. So ist es erneut denkbar, dass Helena die beiden Reihen aufgrund der visuell erfassbaren Länge vergleicht. Ein solch visueller Vergleich ist an dieser Stelle möglich, da es sich aufgrund der Anordnung um zwei parallele Reihen handelt. Die mittlere Reihe teilt sie mathematisch korrekt in der Mitte, äußert sich aber nicht dazu, warum es sich durch eine solche Teilung um zwei gleiche Teile handelt. Ein Vergleich der visuell erfassbaren Längen ist an dieser Stelle aufgrund der Lokalisation der einzelnen Substrukturen, in diesem Fall der

jeweils drei Punkte, nicht direkt möglich. An dieser Stelle ist es somit auch möglich, dass Helena die Mächtigkeit der beiden Mengen ermittelt und miteinander vergleicht.
Ausgehend von *komplexen Deutungen* in Form von einer Zerlegung des Zeichens/Symbols deutet Helena *partielle Strukturen* in die Punktdarstellung hinein, indem sie zunächst Substrukturen in Form der äußeren vertikalen Reihen deutet, die sie miteinander vergleicht. Diesen Vergleich expliziert Helena nicht weiter, so dass aufgrund des Interviewverlaufs anzunehmen ist, dass sie die äußeren Reihen auf Basis der visuell erfassbaren Längen vergleicht und demnach *konkret-dingliche Deutungen* auf Basis optischer Erscheinungsmerkmale nutzt. Die Teilbarkeit der mittleren Reihe und der Vergleich der beiden Teile der mittleren Reihe lässt sich an dieser Stelle als operative Handlung deuten, die von Helena nicht erläutert wird, so dass deren Deutung nicht herausgearbeitet werden kann.
Demnach lassen sich in der Deutung *konkret-dingliche Deutungen*, Deutungen von *partiellen Strukturen* sowie *komplexe Strukturen* rekonstruieren.
Auch in diesem Deutungs- und Argumentationsprozess wird deutlich, dass Helena nicht ausschließlich ein optisches Erscheinungsmerkmal in Form einer Rechtecksanordnung fokussiert und als Argumentationsgrundlage nutzt. Obwohl es sich bei der Anordnung um eine Rechtecksanordnung handelt, bei der alle Reihen aus einer gleichen Anzahl an Punkten bestehen, nutzt Helena diese Rechtecksanordnung nicht. Stattdessen wählt sie die oben beschriebene Argumentation.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Betrachtet man die begriffliche Deutung, so zeigt sich, dass Helena nicht nur die *Teilbarkeit durch zwei* zur Argumentation heranzieht, sondern noch eine weitere Facette nutzt, um die Parität zu begründen. Sie nutzt dabei die *Teilbarkeitsrelation der Addition* und überprüft die Teilbarkeit der einzelnen von ihr erzeugten Teilkomponenten. Da beide (durch zwei) teilbar sind, ist auch das gesamte Punktmuster (durch zwei) teilbar und demnach gerade. Dabei bleibt unklar, ob Helena bewusst ist, warum eine solche Zerlegung aus mathematischer Perspektive durchführbar ist.

Einordnung des Argumentationsprozesses

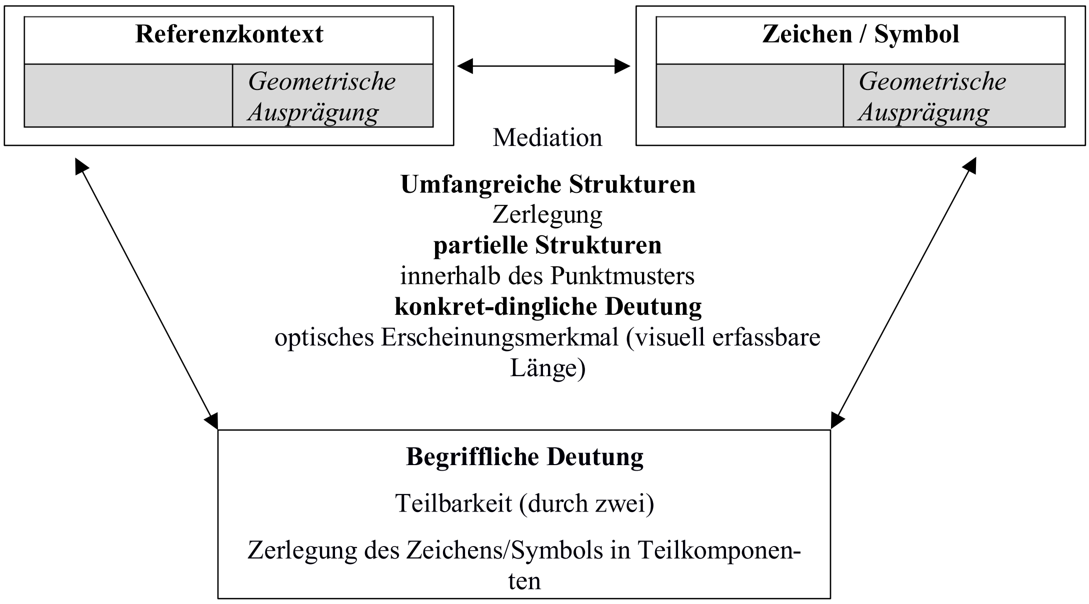


Abbildung 7.43: A1 - Phase 10: Zusammenfassung

Vergleichende Analyse der Punktmuster P1, P6, P4 und P2

In der bisherigen Analyse wurden bei der Deutung von P1, P6, P4 und P2 unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten hinsichtlich der strukturellen Deutungen sowie der begrifflichen Facetten herausgearbeitet. Diese werden nun nacheinander mit dem Fokus auf den gesamten Interviewverlauf erneut betrachtet, gegenübergestellt und diskutiert. Die folgende Übersicht zeigt die vier Punktmuster, eine Kurzdarstellung der für die Analyse relevanten Aspekte des Argumentations- beziehungsweise Deutungsprozesses sowie die Interpretationsmöglichkeiten der strukturellen Deutungen in den Argumentations- beziehungsweise Deutungsprozessen. Dabei ist die Tabelle nicht so zu lesen, dass die untereinanderstehenden Möglichkeiten identisch sind. Vielmehr stellt sie eine Übersicht über die für die erneute Betrachtung der für die Interpretationen relevanten Aspekte dar.

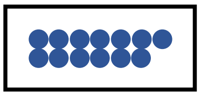
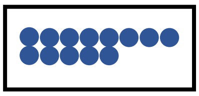
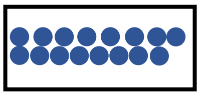
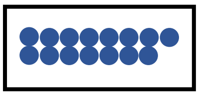
Punktdarstellung	Kurzdarstellung	Möglichkeit 1	Möglichkeit 2
	Vergleich mit P3 horizontale Teilung „unten einer zu wenig“	**partielle Strukturen** zwischen Punktmustern *(P1 und P3)* innerhalb des Punktmusters *(Substrukturen)* **konkret-dingliche Deutung** optisches Erscheinungsmerkmal *(visuell erfassbare Länge)*	**partielle Strukturen** zwischen Punktmustern *(P1 und P3)* innerhalb des Punktmusters *(Substrukturen und struktureller Vergleich der Substrukturen)*
	Umdeutung eines Punktes Vergleich mit P1 ‚gleiche Form‘	**partielle Strukturen** zwischen Punktmustern *(P6 und P1)* **konkret-dingliche Deutung** optisches Erscheinungsmerkmal *(gleiche Form)*	Analoge Deutung zu P1, welche als ‚gleiche Form‘ bezeichnet wird
	Vergleich mit P1 „wieder einer zu wenig“	**partielle Strukturen** zwischen Punktmustern *(P4 und P1)* innerhalb der Punktmusters *(Substrukturen)* **konkret-dingliche Deutung** optisches Erscheinungsmerkmal *(visuell erfassbare Länge)*	**partielle Strukturen** zwischen Punktmustern **konkret-dingliche Deutung** optisches Erscheinungsmerkmal *(Vollständigkeit)*
	„wieder einer zu wenig“	**partielle Strukturen** innerhalb des Punktmusters *(Substrukturen)* **konkret-dingliche Deutung** optisches Erscheinungsmerkmal *(visuell erfassbare Länge)*	**konkret-dingliche Deutung** optisches Erscheinungsmerkmal *(Vollständigkeit)*

Tabelle 7.3: A1 - Übersicht der Deutungen von P1, P2, P3, P4

Betrachtet man die Deutungen der Punktmuster und die Argumentationen bezüglich der Paritäten, so zeigen sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede, die wesentliche Erkenntnisse über den Deutungs- und Argumentationsprozess liefern. Bei der Deutung und Begründung der Paritäten von P1 verweist Helena auf eine horizontale Teilung von P1 und P3. Diese Teilung ist grundlegend für die Erkenntnis, dass unten ein Punkt zu wenig ist. Gleichwohl sie bei P4 sowie P2 ebenfalls das Argument ‚einer zu wenig‘ nutzt, expliziert sie die horizontale Teilung in diesen Argumentationen nicht. Es lässt sich an dieser Stelle nur vermuten, dass Helena auch an dieser Stelle einen Vergleich der Reihen vollzieht und sie sich in ihrer Aussage ‚einer zu wenig‘ auf einen eben solchen Vergleich der Reihen bezieht. Demnach geben sich keine Hinweise, dass Helena sich an dieser Stelle auf eine vollständige Rechtecksform bezieht Dies wird zudem durch die Deutung und Begründung der Paritäten von P7 sowie P5 gestützt. Helena deutet diese Punktmuster ebenfalls nicht im Sinne einer Rechtecksanordnung. Da Helena die Argumentation ‚einer zu wenig‘ lediglich für doppelreihige

Punktmuster nutzt, lässt sich darauf schließen, dass die Anzahl der Reihen für Helena ebenfalls von Bedeutung und für ihre Argumentation wesentlich sind. Dies ist dadurch begründbar, dass eine solche horizontale Teilung der geometrischen Anordnung in zwei Substrukturen in Form von zwei Reihen lediglich bei doppelreihigen Darstellungen möglich ist. Demnach lässt sich vermuten, dass es für Helena von Bedeutung ist zwei Mengen zu deuten und zu vergleichen. Dies wird auch dadurch gestützt, dass Helena in ihren arithmetisch geprägten Argumentationen immer von einer Teilbarkeit durch zwei spricht und eben diese begründet. Auch bezüglich des Vergleichs der beiden Substrukturen, in Form der beiden übereinanderliegenden Reihen, gibt eine Betrachtung des Interviewverlaufs zusätzliche Erkenntnisse. Aufgrund der Deutung von P4 lässt sich vermuten, dass Helena vor allem die visuell erfassbare Länge der beiden Reihen miteinander vergleicht, unabhängig von der Struktur der Punktanordnung in diesen. Dabei ist aber nicht auszuschließen, dass Helena unter Umständen auch weitere strukturelle Merkmale in den Blick genommen hat. Diese werden von ihr aber nicht genannt und können daher auch nicht in die Analyse eingebunden werden.
Eine Argumentation, wie Helena sie vorgebracht hat, ist unter bestimmten Umständen mathematisch tragfähig. Dies stellt allerdings gewisse Anforderungen an die Darstellung. Zum einen muss es sich um eine doppelreihige Darstellung handeln. Zum anderen müssen beide Reihen in ihrer Struktur identisch sein. Eben diese identische Struktur wird von Helena innerhalb des gesamten Interviewverlaufs nicht genannt und in der Deutung von P4 auch nicht betrachtet. So ist durchaus davon auszugehen, dass Helena die strukturelle Anordnung der Punkte in den einzelnen Reihen nicht in den Blick nimmt. Dies hat zur Folge, dass eine Übergeneralisierung der Argumentation stattfindet und Merkmale einer prototypischen Darstellung auf ähnliche Darstellungen übertragen werden.
Mit diesem vergleichenden Blick lassen sich für die Deutungen von P1, P4 und P2 die Deutungen von *partiellen Strukturen* rekonstruieren. Zum einen in Form eines *Vergleichs zwischen ähnlichen Punktmustern*. Zum anderen innerhalb der *Deutung von Substrukturen durch eine horizontale Teilung des Punktmusters in zwei Reihen*. Der Vergleich dieser Substrukturen erfolgt dann auch auf Basis von optischen Erscheinungsmerkmalen und demnach *konkret-dinglichen Deutungen*.
Diese vergleichende Analyse gibt auch Aufschlüsse über ein begriffliches Verständnis von Helena. Im bisherigen Analyseverlauf war unklar, ob auf geometrischer Ebene ein begriffliches Verständnis von Paritäten im Sinne der geometrischen Teilbarkeit durch zwei oder im Sinne der Vollständigkeit des Punktmusters zu vermuten ist. Ausgehend von der Art der Mediation zwischen dem Referenzkontext und Zeichen/Symbol zeigt sich eine Fokussierung der begrifflichen Facette der *Teilbarkeit durch zwei* unter Bezugnahme auf die Erzeugung

von zwei geometrischen Hälften. Dies wird nicht nur durch die vergleichende Analyse der Deutungs- und Argumentationsprozesse deutlich, sondern zeigt sich auch in der Deutung der Parität von P5, in der ein Verteilprozess nachgezeichnet werden konnte. In all diesen Deutungen zeigt sich, dass Helena immer zwei Hälften erzeugt, auch wenn diese vorrangig auf visueller Ebene als gleich betrachtet werden.

Auch die Deutung von P6 erhält unter der Perspektive der vergleichenden Analyse der Deutungs- und Argumentationsprozesse der Parität von P1, P4 und P2 einen Fokus. Es lässt sich vermuten, dass Helena unter ‚gleicher Form' an dieser Stelle ein doppelreihiges Punktmuster meint, welches auf optischer Ebene oben eine um einen Punkt längere Reihe erhält, als die untere Reihe. Demnach ist auch in dieser Deutung zu vermuten, dass Helena sich nicht auf eine vollständige Rechtecksanordnung bezieht.

Einordnung des Argumentationsprozesses

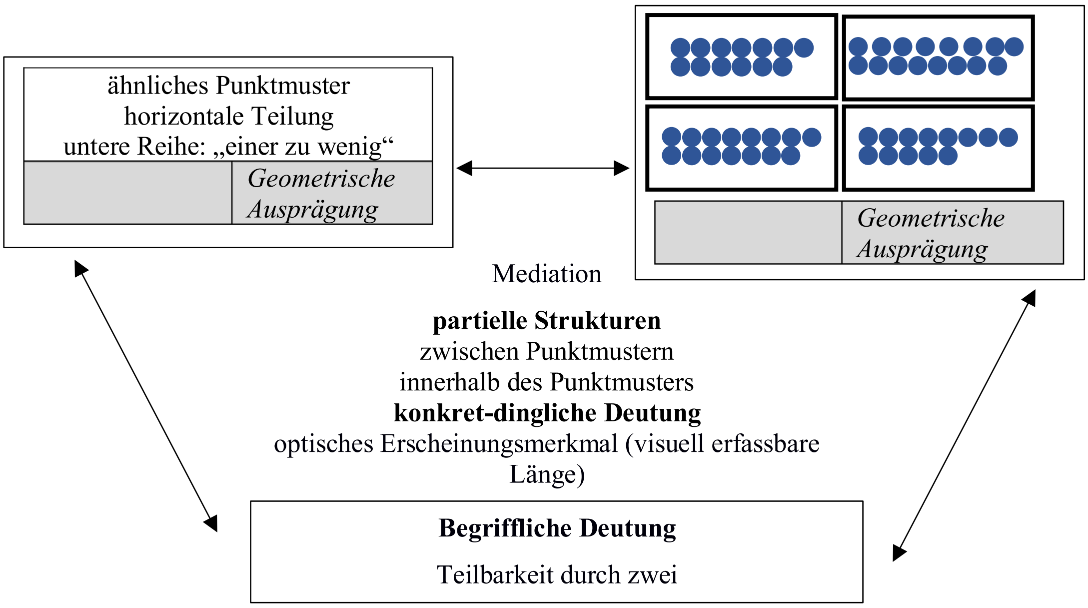


Abbildung 7.44: A1 - Vergleichende Analyse P1, P2, P4, P6: Zusammenfassung

Der zweite Teil des Aufgabenkomplexes lässt sich in drei Phasen unterteilen

Phase 11 (Z. 37-40) Helena begründet, warum sie die Parität bei einigen Punktmustern sehen kann
Phase 12 (Z. 41-44): Helena begründet, welches Punktmuster am besten geeignet ist, um die Paritäten zu erklären
Phase 13 (Z. 45-48): Helena begründet, welches Punktmuster ungeeignet ist, um die Paritäten zu erklären

In den Phasen 11, 12 und 13 des ersten Aufgabenkomplexes werden Fragen aus den ‚Impulsen zur weiteren Auseinandersetzung mit den Punktdarstellungen' thematisiert (vgl. Kap. 5).

Phase 11: Helena begründet, warum sie die Parität bei einigen Punktmustern sehen kann (Z. 37-40)

37	**I**	**Okay, jetzt habe ich mal noch ne Frage. Jetzt hast du bei manchen** *(..)* **die Punkte gezählt, zum Beispiel hier** *[zeigt auf P10]* **oder hier** *[zeigt auf P8]*, **bei denen hast du gezählt** *[schiebt P10 und P8 in die Mitte]*. **Und hier** *[schiebt P3 in die Mitte]* **und hier** *[schiebt P5 in die Mitte]* **hast du, die auch** *[schiebt P2 in die Mitte]* **und die** *[schiebt P1, P6 und P4 in die Mitte]*, **bei diesen hier hast du überhaupt nicht gezählt.** *(..)* **Da konntest du mir sofort sagen, das sind gerade Zahlen** *[zeigt auf die geraden Zahlen*] **und das sind ungerade Zahlen** *[zeigt auf die ungeraden Zahlen]*. **Und dann hast du gesagt, das hab ich gesehen.** *(..)* **Wieso konntest du das denn bei diesen Mustern** *[kreist mit den Fingern um P3, P5, P1, P2, P6, P4]* **so gut sehen und bei denen** *[kreist mit den Fingern um P8, P10]* **nicht.**
38	**H**	**Also, weil bei denen** *[schiebt P8 vor sich]*, **die sind so nen bisschen, also bei dem** *[schiebt P8 zurück und schiebt P10 vor sich]* **ging das, da kann man das nicht so gut sehen sofort, weil die sind überall durcheinander** *[wischt über P10]*. **Und bei dem hier** *[schiebt P10 zurück und nimmt sich P8]*, **da weiß man das nicht genau, man kann auch so teilen** *[zeigt über P8.13, P8.9, P8.5, P8.1]*, **oder 2** *[zeigt auf P8.13, P8.14]*, **aber das erkennt man halt noch nicht sofort** *[schiebt P8 zurück]*. **Und bei dem** *[zeigt auf P5]* **weiß man sofort, ob man die hier** *[zeigt auf P3 und zeigt eine Linie zwischen die beiden Reihen von P3]*, **dass das gleich ist, oder ob man hier jedem einen Streifen geben kann** *[zeigt entlang der Reihe P5.3, bis P5.18]* **und dann jedem noch eine Hälfte** *[zeigt zwischen P5.8 und P5.11]* **von einem Dritten.**
39	**I**	**Ok. Und hier bei denen** *[kreist mit dem Finger P3, P5, P1, P2, P6, P4]* **so gut sehen und bei denen** *[kreist mit den Fingern um P1, P2, P3, P4]***?**
40	**H**	**Ist das auch so, man kann das ja nicht teilen** *[zeigt mit dem Finger eine Linie zwischen den beiden Reihen von P4]*, **dann sieht man das halt** *[unverständlich]*.

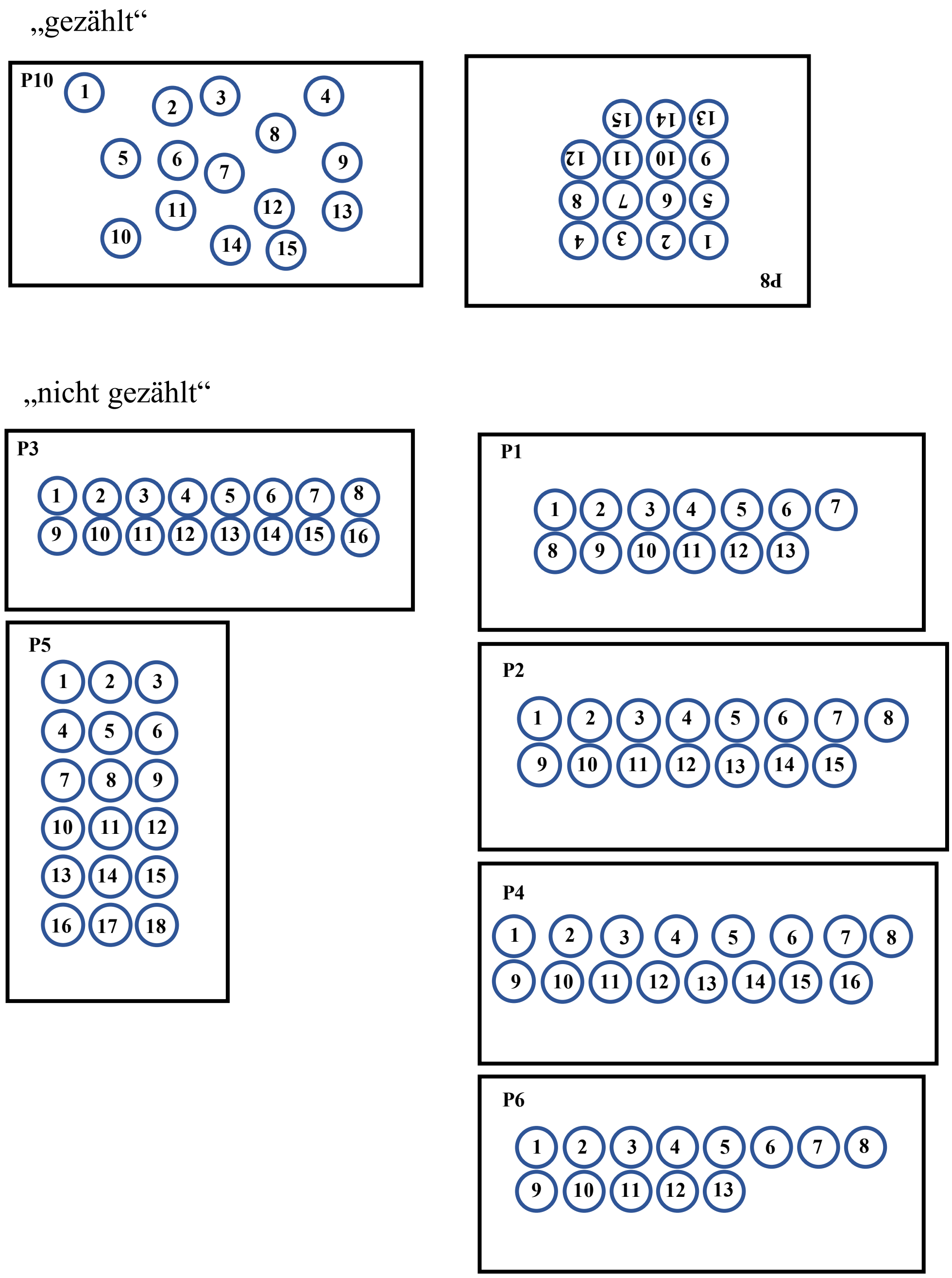


Abbildung 7.45: A1 - Phase 11: Gedeutete Darstellung in der von Helena zur Argumentation genutzten Ausrichtung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

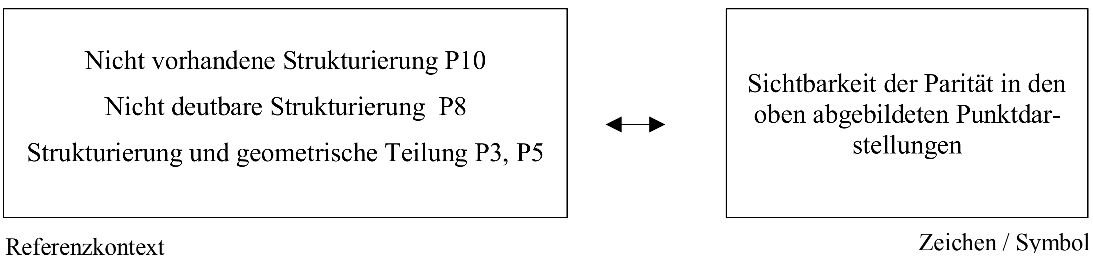


Abbildung 7.46: A1 - Phase 11: Rollenverteilung

In diesem Interviewausschnitt thematisiert die Interviewerin erneut die Sichtbarkeit der Paritäten in den vorliegenden Punktmustern. Sie möchte nun von Helena wissen, warum die Parität bei einigen Punktmustern gut sichtbar und bei anderen nicht gut sichtbar ist (Z. 37). Dies stellt das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Zur Begründung dessen bezieht Helena sich explizit auf die Punktdarstellungen P10, P8, P3 sowie P5 (vgl. Abb. 7.47). Zunächst bezieht Helena sich auf P10 und erläutert, dass die Parität von P10 nicht sofort sichtbar sei, denn die Punkte sind „überall durcheinander" (Z. 38). Auch die Parität von P8 ist laut Helena nicht sofort sichtbar, sie gibt zwar an, dass es eine Möglichkeit zur Teilung gibt, dies aber nicht sofort erkennbar sei. An dieser Stelle ist allerdings nicht rekonstruierbar wie diese Teilung von Helena genau gemeint ist und inwiefern diese mit der Zuordnung zur Parität in Verbindung steht.

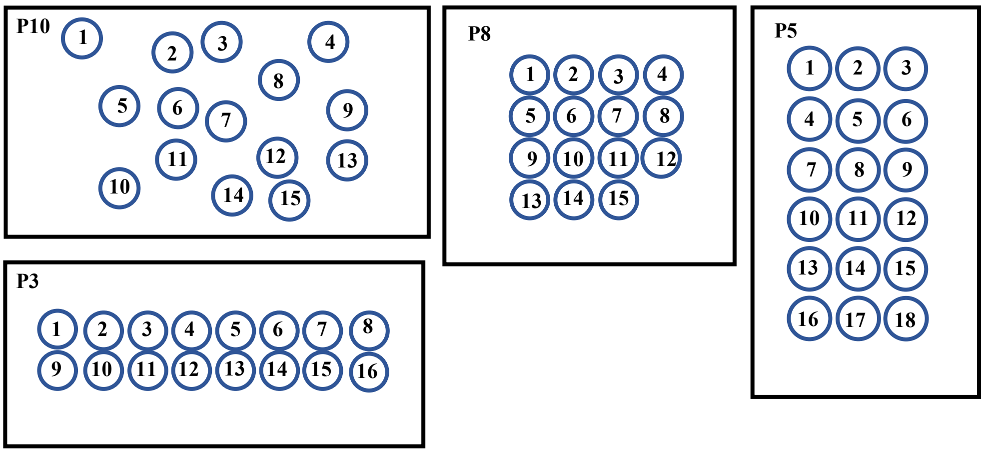


Abbildung 7.47: A1 - Phase 11: Von Helena gedeutete Punktdarstellungen

Demgegenüber stehen die Punktdarstellungen P3 und P5. Bei beiden Punktdarstellung „weiß man sofort" (Z. 38) um welche Parität es sich handelt. Dies stützt sie, indem sie die Argumentationen aus Phase 1 sowie Phase 10 wiederholt. Zur Argumentation im Kontext von P3 macht Helena durch eine Geste erneut eine horizontale Teilung kenntlich und beschreibt, „dass das gleich ist" (Z. 38). Sie bezieht sich damit erneut auf die geometrische Teilung der Anordnung in zwei gleiche Teilmengen. Warum die beiden von ihr erzeugten Teilmengen gleich sind, bleibt an dieser Stelle von ihr unberücksichtigt.

Zur Begründung im Kontext von P5 betrachtet Helena erneut zunächst die beiden äußeren vertikalen Reihen von P5 und erläutert, „dass man hier jedem einen Streifen geben kann" (Z. 38). Obwohl sie lediglich auf die rechte äußere vertikale Reihe zeigt, wird aufgrund der Erläuterung „jedem einen Streifen (Z. 38) sowie mit Blick auf die vorherigen Argumentationen (z.B. Phase 1) deutlich, dass Helena die beiden äußeren Reihen meint. Im Anschluss teilt sie den dritten „Streifen", indem sie diesen erneut zwischen P5.8 und P5.11 teilt. Dabei bleibt auch in dieser Argumentation offen, warum die jeweiligen von ihr erzeugten

Teilmengen als gleich anzusehen sind. Mit Blick auf die Fragestellung der Interviewerin gibt Helena keine konkrete Antwort, warum die Parität bei manchen Punktmustern gut sichtbar ist und bei anderen nicht. Es lässt sich nur vermuten, dass Helena gewisse Anforderungen hinsichtlich der Struktur der Darstellung hat. Interessant ist aber, dass Helena in ihren Begründungen der Paritäten der einzelnen Punktdarstellungen konstant ist, denn sie nutzt genau die Begründungen, die sie in dem bisherigen Interviewverlauf für die jeweiligen Punktdarstellungen zur Argumentation herangezogen hat.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Das von der Interviewerin fraglich gemachte Zeichen/Symbol ist die Frage, warum bei einigen Punktdarstellungen die Parität gut sichtbar ist und bei anderen wiederum nicht (Z. 37). Hierbei bezieht sie sich unmittelbar auf die Punktdarstellungen und demnach auf geometrische Anordnungen, so dass das zu deutende *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung* ist. In ihrer Argumentation bezieht sich Helena dann auf die geometrische Anordnung der Punkte in den jeweiligen Darstellungen und nutzt geometrische Merkmale der Anordnungen als Argumentationsgrundlage (Z. 38). Demnach ist der von ihr herangezogene *Referenzkontext* ebenfalls *geometrischer Ausprägung*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man Helenas Deutungen hinsichtlich der strukturellen Mediation zwischen Referenzkontext und zu deutendem Zeichen/Symbol, so muss hinsichtlich der Deutungen der Punktdarstellungen P10, P8, P3 sowie P5 unterschieden werden.

Zur Deutung der geometrischen Anordnung P10 nutzt Helena keine strukturellen Deutungen, denn sie beschreibt die Anordnung als „überall durcheinander“ (Z. 38). Das heißt, ihr Fokus bei der Deutung der Punktdarstellung liegt durchaus auf einer Strukturierung, die sie in P10 aber nicht hineindeuten kann. Dies ist nicht verwunderlich, denn bei P10 handelt es sich um eine Punkdarstellung, die intendierter Weise keine Strukturierung enthält.

Ob und welche Strukturen Helena in die Punktdarstellung P8 hineindeutet, um zu begründen, dass die Parität beziehungsweise Teilbarkeit der Anordnung nicht sofort sichtbar ist, kann an dieser Stelle nicht rekonstruiert werden.

Helenas Deutung der Punktdarstellung P3 zeigt erneut die Deutung *zweier Substrukturen* in Form von zwei Reihen durch horizontale Teilung des Punktmusters. Helena vergleicht diese beiden Substrukturen offensichtlich erneut miteinander, denn sie beschreibt sie als „gleich“. Hierbei bleibt erneut fraglich, was genau Helena an dieser Stelle mit „gleich“ meint. Auf Grundlage des bisherigen Interviewverlaufs lässt sich vermuten, dass Helena beide Reihen

auf Basis des optischen Erscheinungsmerkmals der Länge und demnach auf Grundlage *konkret-dinglicher Deutungen* als gleich ansieht. Demnach deutet Helena erneut Substrukturen in die Darstellung hinein und nutzt demnach auch *partielle Strukturen* zur Argumentation.
In der Deutung der geometrischen Anordnung P5 zeigt sich erneut, dass Helena diese zunächst in *Teilkomponenten zerlegt* und *zwei Struktureinheiten* bildet. Denn ihre Betrachtung gilt zunächst nur den äußeren beiden Reihen, in diesem Fall von ihr als „Streifen" bezeichnet. Sie signalisiert die Zweiteilung durch ihre verbale Erläuterung, „dass man hier jedem einen Streifen geben kann" (Z.38). Dadurch wird deutlich, dass sie zunächst die *Teilbarkeit dieser Teilkomponenten in Form der beiden Substrukturen* betrachtet. Sie expliziert an dieser Stelle nicht, dass es sich um zwei gleiche Substrukturen handelt, dennoch ist aufgrund ihrer bisherigen Argumentation durchaus davon auszugehen, dass sie diese als gleich ansieht. Danach betrachtet sie die zweite Teilkomponente in Form des „dritten Streifens" dieser wird von Helena in *zwei Hälften* zerlegt. Auch an dieser Stelle begründet Helena die Gleichheit der beiden Hälften nicht. Grundlage für Helenas Deutung ist demnach *die Zerlegung der geometrischen Anordnung in zwei Teilkomponenten, die sie durch Erzeugung jeweils zweier gleicher Substrukturen auf die Teilbarkei*t überprüft. Demnach nutzt Helena an dieser Stelle neben *partiellen Strukturen* auch die für die Argumentation grundlegende Deutung *komplexer Strukturen*.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Es zeigt sich auch hier erneut die begriffliche Idee der *Teilbarkeit durch zwei*. Diese ist scheinbar aus Helenas Sicht immer dann gegeben, wenn zwei ‚gleiche' Substrukturen erzeugt werden können. Hierbei ist fraglich, was genau sie unter ‚gleich' versteht. Dieser Erzeugung der ‚gleichen' Substrukturen kann aber auch eine Zerlegung der geometrischen Anordnung in Teilkomponenten vorausgehen. Das heißt, dass zu deutende Zeichen/Symbol kann zunächst zerlegt werden und die dadurch erzeugten Komponenten können dann auf die Teilbarkeit durch zwei überprüft werden. Es lässt sich demnach auch eine Nutzung der *Teilbarkeitsrelation* in Form der *Summenregel* rekonstruieren. Hierbei kann weiterhin keine Aussage darüber getroffen werden, ob Helena diese eher prozedural anwendet oder bereits verstanden hat, warum ein solches Vorgehen anwendbar ist.

Einordnung des Argumentationsprozesses

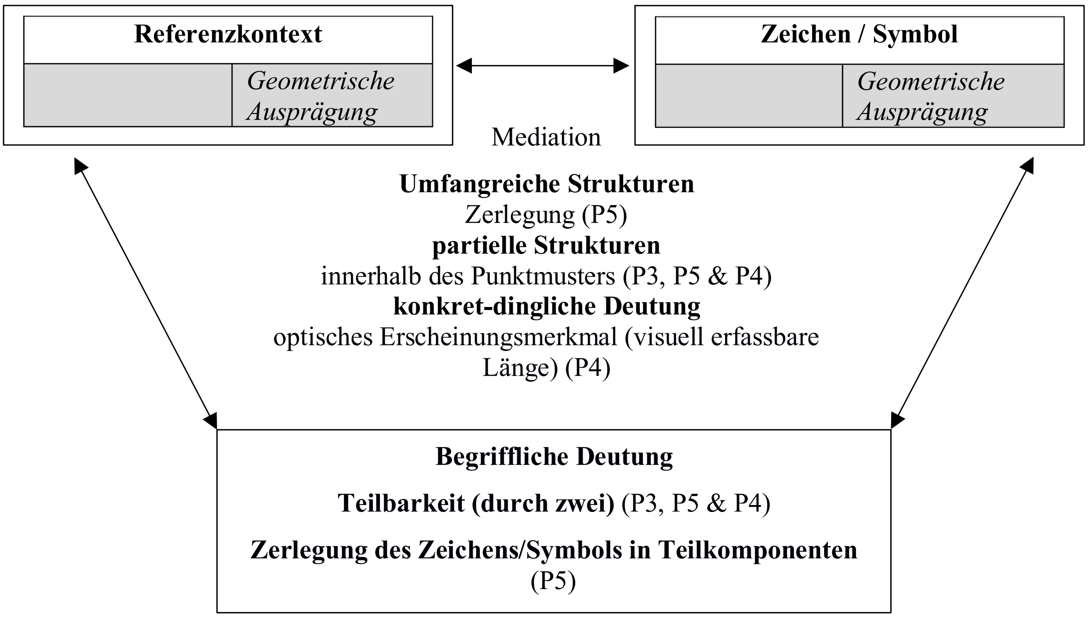


Abbildung 7.48: A1 - Phase 11: Zusammenfassung

Phase 12: Helena begründet, welches Punktmuster am besten geeignet ist, um die Paritäten zu erklären (Z. 41-44)

41	**I**	**Ok. Gut** *[Kind und Interviewer schieben die Karten wieder zu der entsprechenden Seite]*. **Welche findest du denn am besten geeignet, wenn du jetzt nem Kind an einem Punktmuster erklären müsstest, was gerade und ungerade Zahlen sind.**
42	**H**	**Das hier** *[schiebt P3 vor sich]*.
43	**I**	**Mhm. Warum?**
44	**H**	**Weil man kann ja schon sagen, also hier ist, das** *[wischt von links nach rechts über das Punktmuster]* **ergibt insgesamt. Warte mal** *[nimmt das Punktmuster in die Hand und tipp unkenntlich auf das Punktmuster]*. **Sechzehn. Und ähm, wenn man sechzehn hat, kann man ja zehn durch fünf teilen, dann bekommt jeder schonmal fünf** *[deutet mit den Fingern das Teilen auf dem Tisch an]*, **sechs kann man durch drei teilen, dann kann man noch jedem drei geben** *[deutet mit den Fingern das Teilen auf dem Tisch an]*.

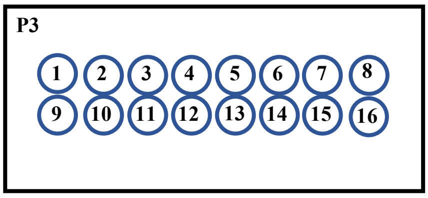
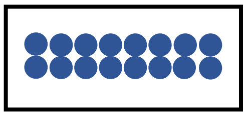


Abbildung 7.49: A1 - Phase 12: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext



16 ⟷ Beste Eignung für eine Erklärung der Paritäten

Referenzkontext — Zeichen / Symbol

Abbildung 7.50: A1 - Phase 12: Rollenverteilung I

Anschließend an die Erklärungen Helenas, warum die Parität bei einigen Punktdarstellungen gut sichtbar ist und bei anderen nicht, soll Helena nun eine Zahlenkarte auswählen, die sie zur Erklärung der Parität am besten geeignet findet und ihre Wahl begründen. Dies stellt das fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

Helena wählt an dieser Stelle die Darstellung P3 aus. Obwohl Helena in ihrer bisherigen Deutung der Parität von P3 immer die horizontale Teilung von P3 als Argumentationsgrundlage genutzt hat, ermittelt Helena nun die Punktanzahl. Sie zählt die Gesamtanzahl der Punkte und gelangt zu dem Ergebnis 16.

Zahlzerlegung der 16 in 10 und 6
Teilbarkeit der 10 und 6 ⟷ Erklärung der Parität der 16

Referenzkontext — Zeichen / Symbol

Abbildung 7.51: A1 - Phase 12: Rollenverteilung II

Im weiteren Argumentationsprozess begründet Helena nun die Parität der Zahl 16, so dass dies ein neu zu deutendes Zeichen/Symbol darstellt. Sie zerlegt die 16 in zehn und sechs und betrachtet zunächst die Teilbarkeit der Zehn und erläutert, dass man die Zehn durch fünf teilen kann und jeder fünf bekommt. Danach betrachtet Helena die Zahl Sechs und sagt, dass „kann man durch drei teilen, dann kann man noch jedem drei geben“ (Z. 44). Dies zeigt erneut, dass Helena die Mächtigkeit der Teilmengen bei Teilung durch zwei als Dividend nutzt und eine verteilende Vorstellung der Division einnimmt. Dass es sich aufgrund der möglichen Teilung um eine gerade Zahl handelt, nennt Helena an dieser Stelle nicht und bleibt daher implizit.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontextes
Die Interviewerin möchte von Helena an dieser Stelle wissen, welches Punktmuster am besten geeignet ist, um einem anderen Kind zu erklären, was gerade und ungerade Zahlen sind. Da die Interviewerin einen konkreten Bezug zu dem Punktmuster herstellt, ist das *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*.
Obwohl Helena P3 im bisherigen Interviewverlauf immer vor einem geometrischen Referenzkontext gedeutet hat, zieht Helena nun einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* zur Deutung heran. Sie nutzt das Anschauungsmittel, um die konkrete Punktanzahl zu ermitteln. Die Begründung der Teilbarkeit erfolgt dann auf Basis der ermittelten Punktanzahl, nämlich der 16.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext
Helena deutet an dieser Stelle erstmalig keine geometrischen Strukturen in die Darstellung P3 hinein. Aufgrund des arithmetischen Referenzkontextes zeigen sich in dieser Deutung die Deutung arithmetischer Strukturen. Zunächst zerlegt Helena die 16 in zehn und sechs. Sie betrachtet dann die Parität beider Zahlen isoliert voneinander. Mathematisch gesehen wendet Helena an dieser Stelle die Teilbarkeitsrelation in Form der Summenregel an. Helena erläutert, dass die Zehn durch fünf teilbar ist und erzeugt dabei *zwei gleichmächtige Substrukturen*, denn sie erläutert, dass jeder fünf bekommt. Die Möglichkeit dieser Teilung bedingt die Zuordnung der Zehn zu den geraden Zahlen, welche von Helena aber nicht (erneut) expliziert wird. Analog dazu begründet Helena die Teilbarkeit der Sechs, indem sie erneut betrachtet, wie groß eine Teilmenge ist, wenn diese auf zwei Mengen verteilt wird. Hierbei zeigt sich erneut die Sprechweise, die schon häufig von Helena genutzt wurde. Sie wählt zur Ermittlung der Teilbarkeit den Divisor so, dass genau zwei gleiche Teilmengen entstehen. Der Bezug zur Teilbarkeit durch zwei wird von Helena implizit hergestellt. In diesem Fall erläutert Helena, „dann bekommt jeder schonmal fünf“ (Z. 44) und „dann kann man noch jedem drei geben“ (Z. 44). Dies zeigt, dass sie diese Divisionsaufgabe in einem aufteilenden Kontext deutet. Sie dividiert durch fünf beziehungsweise drei und macht gleichzeitig deutlich, dass dies die Mächtigkeit einer Teilmenge beschreibt, die jemandem zugeteilt wird. Diese wird von ihr in beiden Fällen so gewählt, dass genau zwei Teilmengen gebildet werden können.
Ausgangspunkt der Argumentation ist zunächst eine Ausnutzung von *komplexen Strukturen*, da Helena die Zahl zunächst zerlegt. Die einzelnen Komponenten der Zahl untersucht Helena unter Bezugnahme auf *partielle strukturelle Deutungen*, nämlich der operativen Ermittlung eines Ergebnisses, indem jeweils zwei gleichmächtige Substrukturen erzeugt werden –

fünf und fünf sowie drei und drei. Es zeigt sich dabei eine Argumentation, die analog ist, zu der von Helena genutzten Argumentation zur Deutung der Darstellung P9, in der Helena die Parität der ‚15' begründet hat.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In dieser Argumentation zeigen sich im Begriffsverständnis unterschiedliche begriffliche Facetten. Es lässt sich erneut vermuten, dass Helena ein *verteilendes Verständnis der Teilbarkeit durch zwei im Kontext der geraden Zahlen* hat, denn sie nutzt konsequent die Mächtigkeit der Teilmengen als Divisor, die dazu führen, dass zwei Teilmengen erzeugt werden. Grundlegend für diese Argumentation ist die Ausnutzung der Teilbarkeitsrelation, nämlich die Tatsache, dass die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist.

Einordnung des Argumentationsprozesses

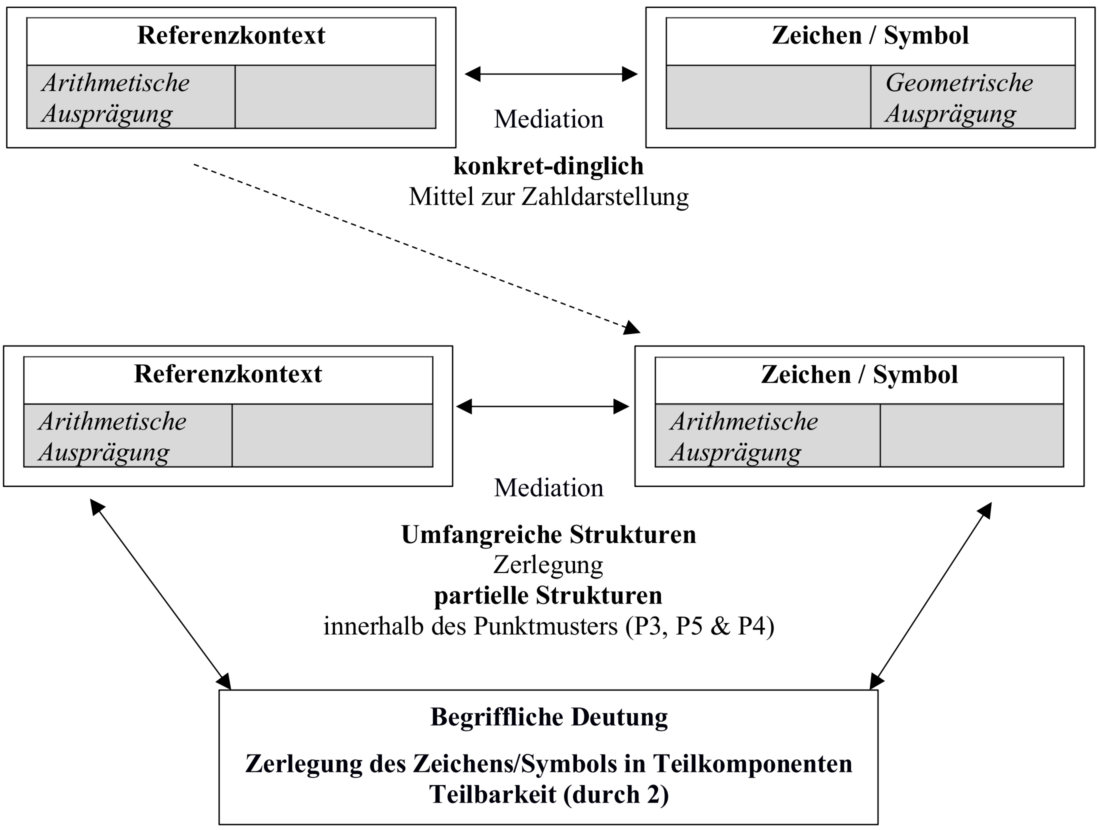


Abbildung 7.52: A1 - Phase 13: Zusammenfassung

Phase 13: Helena begründet, welches Punktmuster ungeeignet ist, um die Paritäten zu erklären (Z. 45-48)

45	**I**	**Ok. Und welche von den Karten findest du am ungeeignetsten, bei welcher sagst du, da kann man das gar nicht gut dran erklären?**
46	**H**	**Das** *[schiebt P10 vor sich]*, **weil das ist ja überall so durcheinander** *[wischt über P10]*.
47	**I**	**Und warum ist das schwer, wenn das durcheinander ist?**
48	**H**	**Weil dann muss man erstmal so zeigen, hier, also das sind zwei** *[zeigt auf P10.9, P10.13]*, **vier** *[zeigt auf P10.8, P10.4]*, **sechs** *[zeigt auf P10.14, P10.15]*, **acht** *[zeigt auf P10.14, P10.11]* **und so was. Deswegen** *[schiebt P10 zur Seite]*.

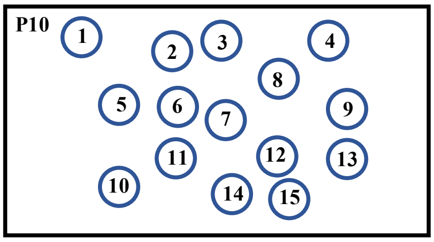


Abbildung 7.53: A1 - Phase 13: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

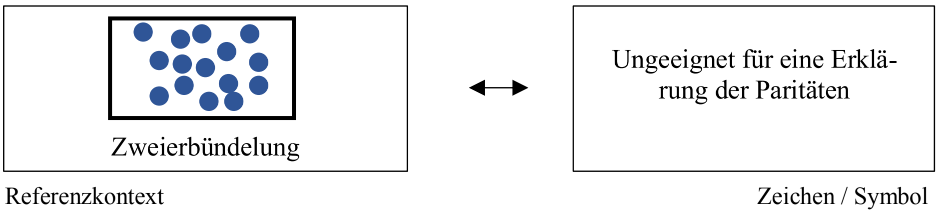


Abbildung 7.54: A1 - Phase 13: Rollenverteilung

Nachdem Helena begründet hat, warum sie P3 für besonders geeignet hält, um einem anderen Kind zu erklären, was gerade und ungerade Zahlen sind, fokussiert die Interviewerin nun das Gegenteil. Sie möchte von Helena wissen, welche Darstellung besonders ungeeignet für eine Erklärung der Paritäten ist. Dies stellt in dem betrachteten Interviewausschnitt das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Helena wählt P1 als ungeeignete Punktdarstellung aus und begründet ihre Auswahl mit der Tatsache, dass es „überall so durcheinander" (Z. 46) ist. Unklar bleibt an dieser Stelle, warum die fehlende Strukturierung als problematisch für eine Erklärung anzusehen ist, so dass die Interviewerin an dieser Stelle auffordert zu explizieren, warum eine Erklärung bei fehlender Strukturierung erschwert ist (Z. 47). Helena begründet dies, weil man „erstmal so zeigen" (Z. 48) muss und beginnt dann in Zweierschritten zu zählen. Hierfür tippt sie immer auf zwei benachbarte Punkte und

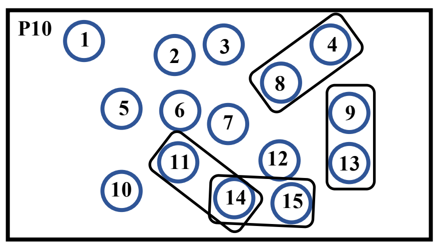


Abbildung 7.55: A1 - Phase 13: Vorgehen von Helena

zählt dann kumulativ bis zur acht, fährt an dieser Stelle nicht weiter fort, sondern sagt „und so was“ (Z. 48). In ihrem Zählprozess nutzt Helena den Punkt P10.14 doppelt (vgl. Abb. 7.55). Dies bleibt allerdings ohne Auswirkung, da Helena ihren Zählprozess nicht beendet. Mit welcher Intention Helena diesen Zählprozess beginnt und was genau sie mit „und so was“ (Z. 48) meint, bleibt an dieser Stelle unklar. Helena könnte verdeutlichen wollen, dass bei der Punkdarstellung P10 die genaue Punktanzahl ermittelt werden muss und der Zählprozess an dieser Stelle aufgrund der fehlenden Strukturierung erschwert wird. Zum anderen könnte Helena „so was“ (Z. 48) im Sinne einer Zweierbündelung meinen. Bei einer solchen Deutung würde Helena dann die Zweierbündelung und den dazugehörigen Zählprozess nutzen, um zu ermitteln, ob die gesamte Punktdarstellung in Zweierbündel aufgeteilt werden kann oder ob dies nicht möglich ist. Auch wenn an dieser Stelle ihre Deutung nicht eindeutig rekonstruiert werden kann, lässt sich vermuten, dass Helena an dieser Stelle eher einen Zählprozess initiiert, um die Gesamtanzahl zu ermitteln. Dies lässt sich dadurch begründen, dass Helena bereits im vorherigen Deutungs- und Argumentationsprozess die Punktdarstellung P10 deutet, indem sie die genaue Anzahl ermittelt. Auch im vorherigen Deutungs- und Argumentationsprozess war eine Anzahlermittlung grundlegend, um zu begründen, warum P3 besonders gut geeignet ist.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontextes

Von der Interviewerin wird an dieser Stelle eingefordert, dass Helena eine Punktdarstellung wählt, die besonders ungeeignet ist, um die Paritäten zu erklären. Es wird demnach eine geometrische Anordnung in Bezug auf die Eigenschaft ‚ungeeignet für eine Erklärung‘ fraglich gemacht und stellt daher ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol* dar.

Die Ausprägung des Referenzkontextes kann an dieser Stelle nicht sicher rekonstruiert werden. Ausgehend von der Vermutung, dass Helena einen *Zählprozess zur Anzahlermittlung* initiiert, lässt sich ein *arithmetisch geprägter Referenzkontext* rekonstruieren. Denn Helena ermittelt dann die konkrete Anzahl und sieht die unstrukturierte Darstellung als problematisch für den Zählprozess an. Sollte Helena hingegen die Zweierbündelung in den Fokus stellen und durch diesen Prozess überprüfen, ob sich die Darstellung vollständig in Zweierbündel aufteilen lässt, dann lässt sich ein *geometrisch geprägter Referenzkontext* rekonstruieren. Helena nutzt dann die konkreten Zahlen lediglich zur Beschreibung der erzeugten Zweierbündel, argumentiert aber nicht auf der Ebene der Zahlen, sondern auf der geometrisch erzeugten Zweierbündelung.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Ebenso wie die Art der Ausprägung des Referenzkontextes ist auch die strukturelle Deutung davon abhängig, wie Helena vorgegangen ist. Sollte Helena einen Zählprozess initiiert haben, so lassen sich an dieser Stelle keine strukturellen Deutungen im Kontext der geraden und ungeraden Zahlen rekonstruieren. Sie nutzt das Anschauungsmittel dann als *Mittel zur Zahldarstellung* und deutet dies demnach *konkret-dinglich*.

Nutzt Helena die Veranschaulichung, um Zweierbündel zu erzeugen, dann lässt sich die Deutung *partieller Strukturen* rekonstruieren, denn Helena überprüft, ob die Darstellung immer in Zweierbündel aufgeteilt werden kann und deutet demnach *Substrukturen* in die Darstellung hinein.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Eine begriffliche Idee kann innerhalb des Argumentationsprozesses rekonstruiert werden, wenn Helena das Anschauungsmittel vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext deutet. Betrachtet man die mögliche Erzeugung von Zweierbündeln, so sind durchaus zwei unterschiedliche begriffliche Ideen vorstellbar. Zum einen könnte Helena durch ein solches Vorgehen überprüfen, ob die durch die Punktdarstellung dargestellte Zahl in der Zweierreihe vorkommt und demnach die *Ordinalität* als begriffliche Idee nutzen. Zum anderen könnte Helena die Zweierbündelung in Bezug auf die *Teilbarkeit durch zwei* betrachten und durch das Aufteilen die Möglichkeit einer solchen Teilung überprüfen.

Einordnung des Argumentationsprozesses

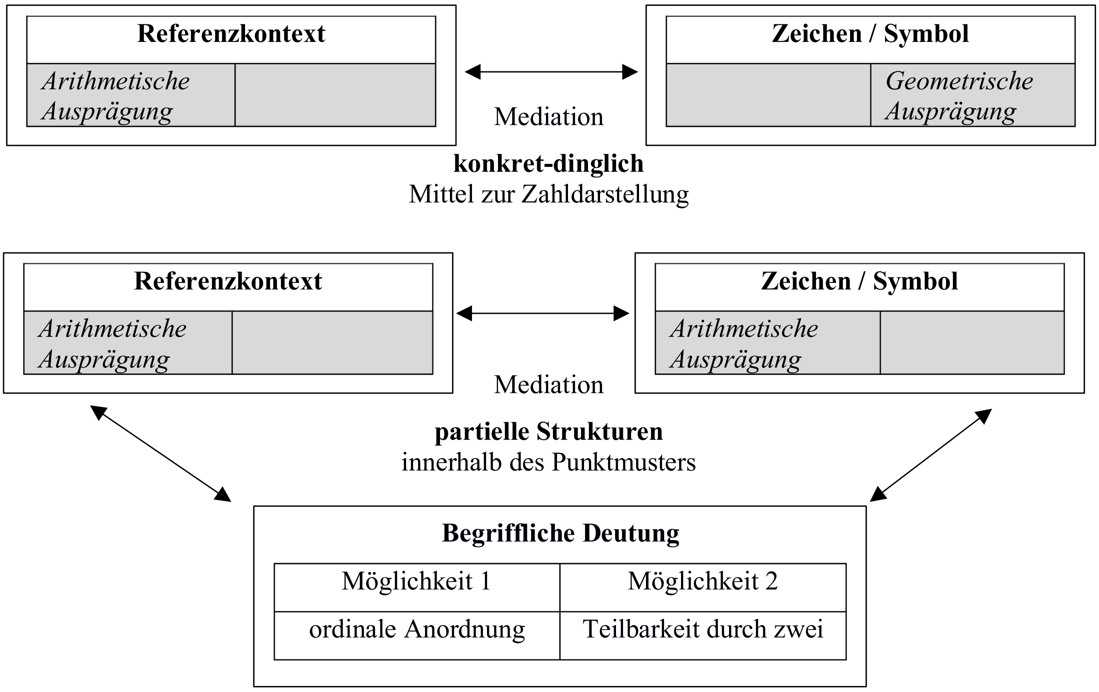


Abbildung 7.56: A1 - Phase 13: Zusammenfassung

7.2.2 Aufgabenkomplex 2: Fokussierung der allgemeingültigen Aussage „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade".

Aufgabenkomplex 2.1: Helena argumentiert im Kontext der Aussage „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade".

Im Anschluss an die oben beschriebenen Deutungs- und Argumentationsprozesse konfrontiert die Interviewerin Helena mit der allgemeingültigen Aussage ‚Wenn man zwei ungerade Zahlen miteinander addiert, dann ist das Ergebnis immer gerade' und fragt Helena, ob diese Aussage stimmt. Helena antwortet, dass sie glaubt, dass diese Aussage stimmt und bezieht sich in ihrer Begründung auf die Beispiele ‚1+1=2', ‚3+3=6' sowie ‚5+5' bei dem sie kein Ergebnis nennt. Die Interviewerin fragt nun erneut, warum Helena glaubt, dass die Aussage stimmt. Helena wiederholt nun die Aufgaben und nennt zusätzlich die Parität der Summe. „eins plus eins, das sind zwei, das ist auch ne gerade Zahl. Oder wenn man drei plus drei ist auch ne gerade. Oder fünf plus fünf ist auch wieder ne gerade." (Z. 52).

Anschließend stellt die Interviewerin Helena vor die Anforderung dies mit einem Bild oder einer Zeichnung zu erklären. Helena nimmt hierfür zunächst einen Zettel und Stift. Die Interviewerin weist Helena darauf hin, dass sie auch die Plättchen nehmen darf. Helena erwidert, dass sie versucht etwas zu zeichnen. Helena zeichnet daraufhin ein Bonbon, ein ‚+' und noch ein Bonbon und notiert hinter das letzte Bonbon ‚2'. Sie malt im Anschluss daran drei Bonbons, die sie mit einem ‚+' verbindet und hinter das letzte Bonbon notiert sie ebenfalls ‚+' (vgl. Abb. 7.57). Sie bricht diesen Prozess ab und sagt „Wart mal, jetzt kapier ich's grad nicht". Daraufhin fragt die Interviewerin, was Helena denn nun machen möchte. Helena erläutert, dass sie die Aufgabe drei plus drei gleich sechs darstellen möchte, aber nicht so viel zeichnen will.

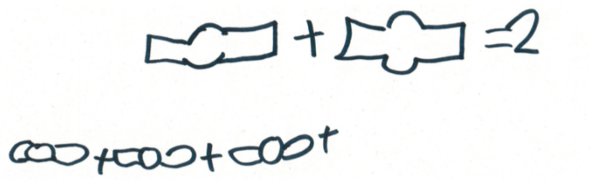


Abbildung 7.57: A2 - Aufgabenkomplex 2.1: Helenas Zeichnung

Daraufhin bietet die Interviewerin Helena an, die Aussage mit Plättchen zu erklären. Für ihre Argumentation nimmt Helena zunächst sechs Plättchen, die sie in Dreierpäckchen nebeneinanderlegt (vgl. Abb. 7.58 (1)). Nun nimmt sie von jedem der Dreierpäckchen ein Plättchen, schiebt diese zusammen und sagt, dass es zusammen zwei sind (vgl. Abb. 7.58 (2)). Diesen Vorgang wiederholt sie, legt die Plättchen genau unter die vorherigen, benennt die Summe vier und sagt, dass es „keine ungerade sind" (vgl. Abb. 7.58 (3)). Nun nimmt sie die letzten beiden Plättchen der ursprünglichen Dreierpäckchen und legt diese ebenfalls genau unter die bereits vorhandenen Plättchen (vgl. Abb. 7.58 (4)). Dies ergänzt sie durch folgende Erläuterung: „Wenn man drei und drei hat und man die so zusammenschiebt, ist das wie bei den Punktmustern. Das hat dann eine richtige Form". Während sie diese Aussage tätigt, bildet sie aus den Plättchen erneut zwei Dreierpäckchen (vgl. Abb. 7.58 (1)) und schiebt diese dann wieder in Form von zwei Dreierspalten zusammen (vgl. Abb. 7.58 (4)). Die Interviewerin möchte von Helena daraufhin wissen, welches Punktmuster sie meint. Daraufhin nimmt sich Helena die geometrische Anordnung P3 und begründet die Ähnlichkeit, indem sie die Darstellung P3 gedanklich so modifiziert, dass sie ihrer Plättchenanordnung entspricht. Sie weist dieser Darstellung die Aufgabe drei plus drei gleich sechs zu. Daraufhin fragt die Interviewerin, wo Helena die ungeraden Zahlen sieht und wiederholt die Aussage Helenas, dass die Sechs gerade ist und die dreien ungerade sind. Dies wird von Helena bejaht. Eine weitere Erläuterung folgt nicht.

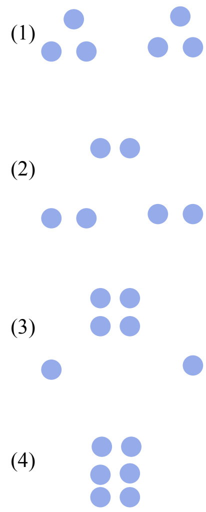


Abbildung 7.58: A2 - Aufgabenkomplex 2.1: Helenas Darstellung mit Plättchen

In der letzten Phase des Aufgabenkomplexes 2.1 wiederholt die Interviewerin zunächst die von Helena genannten Beispiele und möchte wissen, ob Helena eine Idee hat, warum die

Aussage immer gilt. Helena gibt an, dass sie dies nicht weiß, man aber auch höhere Zahlen nehmen kann, wie zum Beispiel 25 plus 25 gleich 50. Die Interviewerin beendet nun die Auseinandersetzung innerhalb des Aufgabenkomplexes 2.1 und verweist darauf, dass auch im weiteren Interview nun nach einer Begründung hierfür gesucht werden kann.

Aufgabenkomplex 2.2: Helena deutet Zahlenkarten hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade."

Dieser Aufgabenkomplex lässt sich in *zwei Teile* untergliedern: Zum einen die Deutung der Zahlenkarten (Phase 14 bis 23) und zum anderen die weitere Auseinandersetzung durch zusätzliche Impulse der Interviewerin (Phase 24 und 25) (vgl. Kap. 5.2).

Phase 14 (Z. 73 - 76): Helena deutet S2 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage
Phase 15 (Z. 77 - 86): Helena deutet S3 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage
Phase 16 (Z. 87 - 88): Helena begründet, warum das Ergebnis von 9+3 gerade ist
Phase 17 (Z. 89 - 97): Helena deutet S6 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage
Phase 18 (Z. 98 - 104): Helena deutet S7 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage
Phase 19 (Z. 104 - 107): Helena deutet die Sichtbarkeit der Parität
Phase 20 (Z. 108 - 114): Helena begründet, warum die Summe bei S7 gerade ist
Phase 21 (Z. 114 - 120): Helena deutet S1 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage
Phase 22 (Z. 121 - 127): Helena deutet S4 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage
Phase 23 (Z. 127 - 132) Helena deutet S5 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage

Phase 14 (Z. 73 - 76): Helena deutet S2 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage

73	**I**	**Ich habe dir jetzt hier nochmal so ein paar Additionsaufgaben mitgebracht. Auch wieder ganz unterschiedliche Punktmuster** *[legt S1 bis S7 auf den Tisch]*. **Und du siehst rote und blaue Punkte. Du siehst, dass die Zahlen in unterschiedlichen Farben dargestellt sind. Welche Aufgaben siehst du denn?**
74	**H**	**Hier sehe ich** *[schaut sich S6 an]* **äh da** *[nimmt S2 und legt es um 180° gedreht vor sich, sagt dabei etwas unverständliches]* **kann man das ganz schnell sehen, hier sind, sieht man zwei** *[zeigt auf S2.12, S2.11]*, **das hab ich bemerkt, hier sind zwei** *[zeigt auf S2.12, S2.11]*, **dann sind hier fünf** *[zeigt auf S2.10, S2.9, S2.8, S2.7, S2.6]* **und hier sind äh ich meine da** *[zeigt unspezifisch auf die Fünferstruktur S2.6-S2.10, dann von S2.6 bis S2.10]*, **ja fünf. Hier sind dann wieder fünf** *[zeigt auf S2.5 bis S2.1]*, **habe ich bemerkt zwei, fünf, fünf** *[zeigt dabei auf den jeweiligen Teil des Punktmusters]*.
75	**I**	**Mhm. Und wo sind da die ungeraden Zahlen und wo sind die geraden Zahlen?**
76	**H**	**Die beiden Fünfen** *[zeigt auf den jeweiligen Teil des Punktmusters]* **sind halt** *(..)* **die** *(.)* **ungeraden und die Zwei ist die Gerade** *[zeigt auf die 2 roten Punkte]*. **Aber man kann auch so machen, dass hier diese vier Blauen** *[zeigt auf S2.9 bis S2.6]* **kann man auch dann die gerade Zahl und die drei Roten** *[zeigt auf S2.12 bis S2.9]* **die ungeraden und die Fünf** *[zeigt auf S2.5 bis S2.1]* **die ungeraden.**

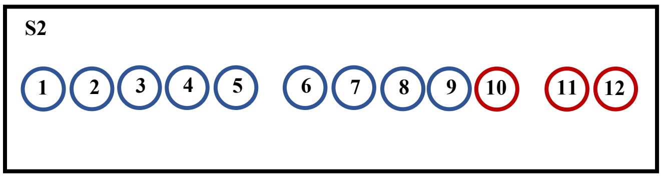
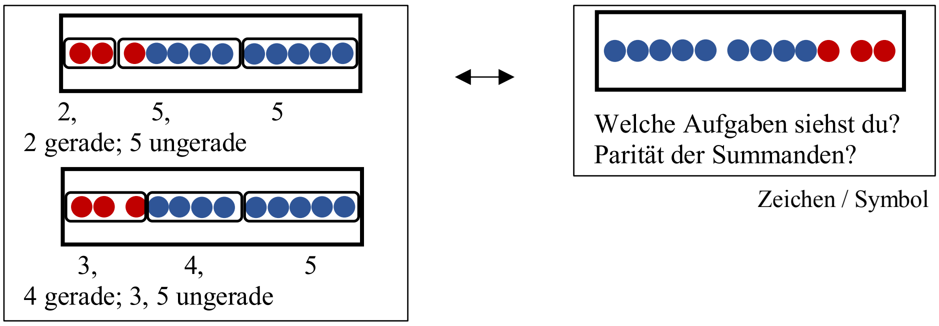


Abbildung 7.60: A2 - Phase 14: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext



Zeichen / Symbol

Referenzkontext

Abbildung 7.59: A2 - Phase 14: Rollenverteilung

Zu Beginn von Aufgabenkomplex zwei legt die Interviewerin Helena sieben unterschiedliche Punktdarstellungen vor und stellt Helena vor die Herausforderung Additionsaufgaben in die Darstellungen hineinzudeuten. Demnach sind zu Beginn des Aufgabenkomplexes zunächst alle Punktdarstellungen fraglich. Helena betrachtet zunächst S6 und entscheidet sich dann für die Darstellung S2 und deutet diese. Aus diesem Grund ist in dieser Phase zunächst das Punktmuster S2 hinsichtlich der sichtbaren Aufgaben das fragliche *Zeichen/Symbol*.
Helena erläutert, dass sie die Zahlen Zwei, Fünf und Fünf in der Punktdarstellung sieht. Sie ermittelt demnach eine Aufgabe unter Bezugnahme auf *konkrete Zahlen*, was aufgrund der Fragestellung der Interviewerin durchaus intendiert ist. Obwohl im vorangegangenen Interviewabschnitt eine allgemeingültige Aussage betrachtet wird, in der die Additionsaufgabe aus zwei Summanden besteht, deutet Helena an dieser Stelle eine Additionsaufgabe mit drei Summanden. In diesem Deutungsprozess bleibt die Farbgebung unberücksichtigt und Helena bezieht in ihre Deutung die intendierte Struktur der Fünferzäsur ein. Auf Grundlage dieser Deutung spezifiziert die Interviewerin die Fraglichkeit und fokussiert die Paritäten der sichtbaren Zahlen. Hierbei bezieht sich die Interviewerin indirekt auf die vorher betrachtete allgemeingültige Aussage und fragt, welches die geraden und ungeraden Zahlen sind. Demnach gilt es für Helena zusätzlich die Paritäten zu deuten. So dass das fragliche *Zeichen/Symbol* ergänzt wird.
Helena bleibt innerhalb des Deutungsprozesses konsistent und deutet die Summanden zwei, fünf und fünf hinsichtlich ihrer Parität. Sie klassifiziert die Fünfen als ungerade Zahlen und die Zwei als gerade Zahl. Ausgehend davon bietet Helena eine weitere Deutungsmöglichkeit

an und deutet die Zahlen vier, drei und fünf in die Punktdarstellung hinein. In dieser Deutung berücksichtigt Helena die Farbgebung der Punktdarstellung, da sie die roten Punkte als drei zusammenfasst. Die blauen Punkte werden weiterhin entsprechend der Fünferzäsur in vier und fünf zerlegt. Hinsichtlich der Parität klassifiziert sie vier als gerade Zahl und drei und fünf als ungerade Zahlen.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Das zu deutende Zeichen/Symbol stellt in diesem Argumentations- und Deutungsprozess die geometrische Anordnung von S2 hinsichtlich sichtbarer Additionsaufgaben sowie der Paritäten dar. Demnach handelt es sich um ein *geometrisch ausgeprägtes Zeichen/Symbol*. Helena zieht zur Deutung des fraglichen Zeichens/Symbols konkrete Zahlen und die Paritäten dieser konkreten Zahlen heran. Daher zeigt sich in dem Deutungsprozess ein *Referenzkontext arithmetischer Ausprägung*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Helena deutet das Zeichen/Symbol in ihrer Argumentation vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext und nutzt die Punktdarstellung an dieser Stelle als *Mittel zur Zahldarstellung beziehungsweise als Mittel zur Veranschaulichung einer Rechenoperation*. Sie deutet eine Addition in die Darstellung hinein, denn sie ermittelt zwei unterschiedliche Zerlegungsmöglichkeiten. Aus diesem Grund nutzt Helena auch keine strukturellen Deutungen der geometrischen Anordnung oder strukturelle Deutungen der einzelnen Zahlen, um die Paritäten der einzelnen Zahlen zu begründen. Vielmehr scheint es, als würde Helena auf bereits bekanntes Faktenwissen bezüglich der Parität von zwei, drei, vier und fünf zurückgreifen.
Dennoch ist es interessant zu sehen, dass Helena durchaus dazu in der Lage ist unterschiedliche Aufgaben in die Punktdarstellung hineinzudeuten. In diesen Deutungsprozessen nutzt sie dann sehr wohl intendierte Strukturen des Punktmusters. Zunächst nutzt sie die Fünferzäsur und im Anschluss die Farbgebung sowie die Fünferzäsur.

Einordnung des Argumentationsprozesses

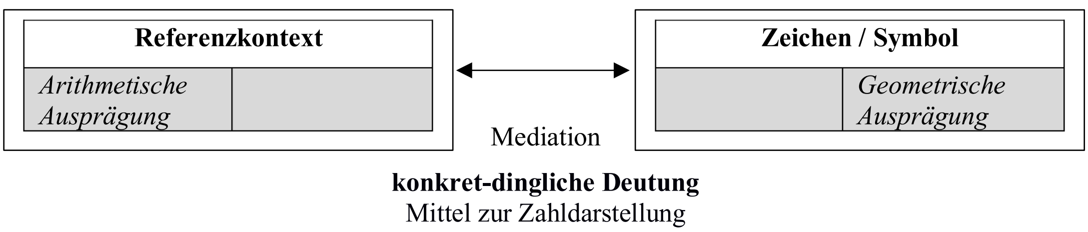


Abbildung 7.61: A2 - Phase 14: Zusammenfassung

Phase 15 (Z. 77 - 86): Helena deutet S3 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage

77	I	**Ok, wie ist das bei den anderen Punktmustern?** *[Helena nimmt sich S3]* **Findest du da auch wieder Additionsaufgaben aus zwei Zahlen? Welche Aufgabe siehst du?**
78	H	*(..)* **Neun** *[zeigt auf die blauen Punkte]* **plus drei** *[zeigt auf die roten Punkte]*.
79	I	**Mhm. Haben wir da wieder ne Addition von zwei ungeraden Zahlen?**
80	H	**Äh, ja.**
81	I	**Kannst du gut erkennen, dass die Neun und die Drei ungerade Zahlen sind?**
82	H	**Ja weil man kann das hier** [dreht S3 um 90° nach rechts]**, könnte man das hier durchteilen** *[zeigt mit dem Finger zwischen die beiden blauen Viererreihen]*. **Aber hier** *[zeigt auf S3.3]*, **hier ist ja noch einer. Und bei dem könnte man jedem zwei geben** *[zeigt auf S3.11, S3.12]*, **aber da ist ja immer noch einer** *[zeigt auf S3.10]*.
83	I	**Und das Ergebnis?**
84	H	**Das Ergebnis macht zwölf.**
85	I	**Ist das gerade oder ungerade?**
86	H	**Gerade.**

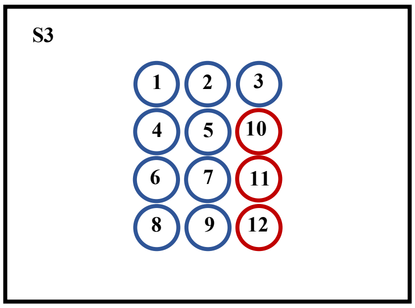


Abbildung 7.62: A2 - Phase 15: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

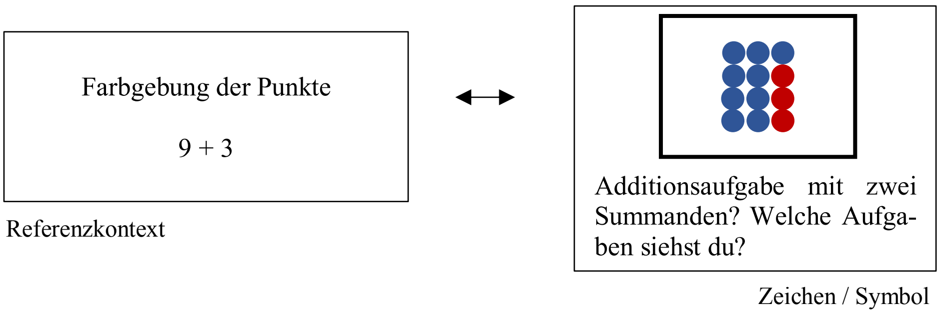


Abbildung 7.63: A2 - Phase 15: Rollenverteilung I

In dieser Interviewphase fragt die Interviewerin, ob Helena in weiteren Punktmustern Additionsaufgaben findet, die aus zwei Summanden bestehen. Gleichzeitig fordert die Interviewerin Helena erneut auf, die für sie sichtbaren Aufgaben zu benennen (Z. 77). Da Helena die Punktdarstellung S3 auswählt, stellt S3 in Kombination mit der Frage nach den sichtbaren Additionsaufgaben das fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

Dieses deutet Helena unter Bezugnahme der Farbgebung und gibt an, dass sie die Aufgabe „neun plus drei“ (Z. 78) sieht. Die Interviewerin bezieht sich nun erneut auf die Paritäten und fragt „Haben wir da wieder ne Addition von zwei ungeraden Zahlen?“ (Z. 79). Dies wird von Helena bejaht (Z. 80). Die Interviewerin möchte nun wissen, ob man die Parität der Zahlen Neun und Drei „gut erkennen“ kann (Z. 81). Durch die Wahl des Wortes „erkennen“ fokussiert die Interviewerin die Nutzung des Anschauungsmittels, fordert Helena aber nicht direkt auf, die Parität am Punktmuster zu erläutern. Demnach stellt die Sichtbarkeit der Parität von Neun und Drei innerhalb des Deutungs- und Argumentationsprozesses nun das neue fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

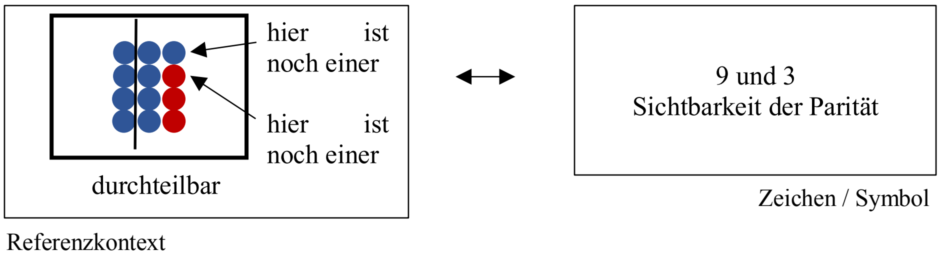


Abbildung 7.64: A2 - Phase 15: Rollenverteilung II

Zur Deutung des fraglichen *Zeichens/Symbols* nutzt Helena nun die Punktdarstellung und erläutert die Parität der beiden Zahlen unter Bezugnahme auf das Punktmuster. Der Begriff „erkennen“ wird von ihr scheinbar geometrisch gedeutet. Eine Nennung der beiden Zahlen Neun und Drei bleibt aus, da bereits am Anfang dieser Phase deutlich gemacht wurde, dass die blauen Punkte der Neun entsprechen und die roten Punkte die Drei darstellen. Zunächst betrachtet Helena die blauen Punkte. Dafür dreht sie die Punktdarstellung um 90° und teilt die beiden Reihen der blauen Punkte horizontal und erläutert „hier ist ja noch einer“ (Z. 82). Sie erzeugt demnach eine Teilung des Punktmusters in zwei Viererreihen und einen einzelnen Punkt. Wie genau Helena die Parität der drei unter Bezugnahme auf das Punktmuster deutet, ist an dieser Stelle nicht erkennbar. Sie sagt „bei dem könnte man jedem zwei geben, aber da ist ja immer noch einer“. Was genau Helena an dieser Stelle damit meint bleibt fraglich. Dennoch ist auffällig, dass sie auch an dieser Stelle wieder Bezug darauf nimmt und sagt „aber da ist ja immer noch einer“ (Z. 82). Im weiteren Verlauf der Deutungsphase fragt die Interviewerin nach dem Ergebnis (Z. 83), welches Helena mit zwölf angibt (Z. 84). Anschließend fragt die Interviewerin nach der Parität des Ergebnisses (Z. 85). Dieses klassifiziert sie wiederum als gerade (Z. 86).

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Das zu deutende Zeichen/Symbol stellt zu Beginn dieses Argumentations- und Deutungsprozesses die geometrische Anordnung von S3 hinsichtlich sichtbarer Additionsaufgaben

dar (Z. 77). Demnach handelt es sich um ein *geometrisch ausgeprägtes Zeichen/Symbol*. Helena zieht zur Deutung dieses fraglichen Zeichens/Symbols konkrete Zahlen heran. Daher nutzt sie einen *Referenzkontext arithmetischer Ausprägung*.
Das im weiteren Verlauf fraglich gemachte *Zeichen/Symbol* ist, ob erkennbar ist, dass die Neun und Drei ungerade Zahlen sind (Z. 81). Aufgrund der konkreten Nennung der Zahlen, kann dieses Zeichen und Symbol als ein *arithmetisch geprägtes Zeichen* interpretiert werden. Durch die Begrifflichkeit „erkennen“ stellt die Interviewerin aber implizit auch einen Bezug zur vorgelegten Darstellung her, so dass auch eine Interpretation als *geometrisch geprägtes Zeichen* möglich ist Dieses wird von Helena, wohl auch auf Grund der Wortwahl „erkennen“ geometrisch gedeutet, denn sie erläutert die Parität unter Bezugnahme auf die Punktdarstellung S3. Sie deutet demnach das *arithmetisch geprägte Zeichen/Symbol* vor einem *geometrisch geprägten Referenzkontext*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In dem ersten Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext deutet Helena die konkreten Zahlen Neun und Drei in die geometrische Anordnung hinein und benutzt das *Anschauungsmittel als Mittel zur Zahl*darstellung. Die Mediation erfolgt demnach durch eine *konkret-dingliche Deutung*.

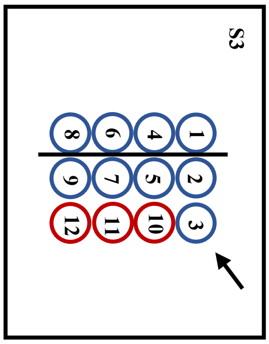


Abbildung 7.65: A2 - Phase 15: Deutung von S3 um 90° gedreht

Betrachtet man das zweite Wechselspiel und demnach die Deutung der Parität der Zahl Neun, so zeigt sich eine Deutungsweise, die Helena bereits im ersten Aufgabenkomplex genutzt hat. Hierfür dreht sie zunächst das Punktmuster um 90° nach rechts (vgl. Abb. 7.65). Dies ist für ein analoges argumentatives Vorgehen notwendig. Denn nur durch das Drehen des Punktmusters ist eine horizontale Deutung im Sinne der prototypischen Darstellungen des ersten Aufgabenkomplexes möglich. Sie begründet die Parität der Zahl Neun auf Grundlage des Durchteilens der blauen Punkte (vgl. Abb. 7.65) und erläutert dies wie folgt: „Das hier, könnte man das hier durchteilen. Aber hier ist noch einer“ (Z. 82). Diese Aussage unterstützt Helena, indem sie mit dem Finger zwischen der oberen und unteren blauen Reihe herzeigt. Durch diese horizontale Teilung der beiden Reihen werden *zwei Substrukturen in Form der Punktreihen* erzeugt, welche von ihr nicht näher erläutert oder fokussiert werden. Betrachtet man diese Szene im Verlauf des Interviews, so lässt sich vermuten, dass Helena beide Substrukturen als gleich betrachtet und dieser Teil der Darstellung demnach durch zwei teilbar ist. Sie erläutert im Anschluss daran, „aber hier, hier ist ja noch einer“ (Z. 82). Demnach verweist sie auf einen weiteren Punkt der Darstellung, den sie noch nicht in der Teilung berücksichtigt hat. Dieser eine Punkt ist demnach entscheidend für die Klassifizierung der Neun als ungerade Zahl. Während der ‚übrige Punkt' in dem ersten Aufgabenkomplex immer in der oberen Reihe der Darstellung vorzufinden war, scheint es für Helena an dieser Stelle unproblematisch, dass der Punkt nun eine andere Lokalisation hat als im vorangegangenen Aufgabenkomplex. Helena erzeugt an dieser Stelle demnach *zwei Substrukturen*, die sie vermutlich miteinander vergleicht und als gleich ansieht. Der Punkt S3.10 kann keiner dieser Substrukturen zugeordnet werden und wird demnach als entscheidendes Merkmal der Parität ungerade genutzt. Demnach deutet Helena an dieser Stelle *partielle Strukturen* in die Darstellung hinein, die sie zur Argumentation nutzt. Besonders interessant ist an dieser Stelle, dass Helena eine ähnliche Argumentation nutzt, die sie bereits bei der Deutung der prototypischen Darstellungen des ersten Aufgabenkomplexes eingenommen hat

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In der Begründung Helenas zeigt sich erneut ein begriffliches Verständnis, welches der Teilbarkeit durch zwei zuzuordnen ist. Es wird deutlich, dass Helena das Punktmuster teilt und versucht zwei gleiche Teile zu erzeugen, wobei an dieser Stelle nicht geklärt werden kann, was genau Helena unter gleich versteht. Da es ihr nicht gelingt die blauen beziehungsweise roten Punkte in je zwei gleiche Teile zu zerlegen, handelt es sich um ungerade Zahlen. Dass es sich um genau zwei Teile handeln muss, erwähnt Helena an dieser Stelle zwar nicht, aufgrund der konsequenten Erzeugung von zwei Teilmengen im gesamten Interviewverlauf ist dennoch anzunehmen, dass sie bewusst zwei Teilmengen erzeugt.

Einordnung des Argumentationsprozesses

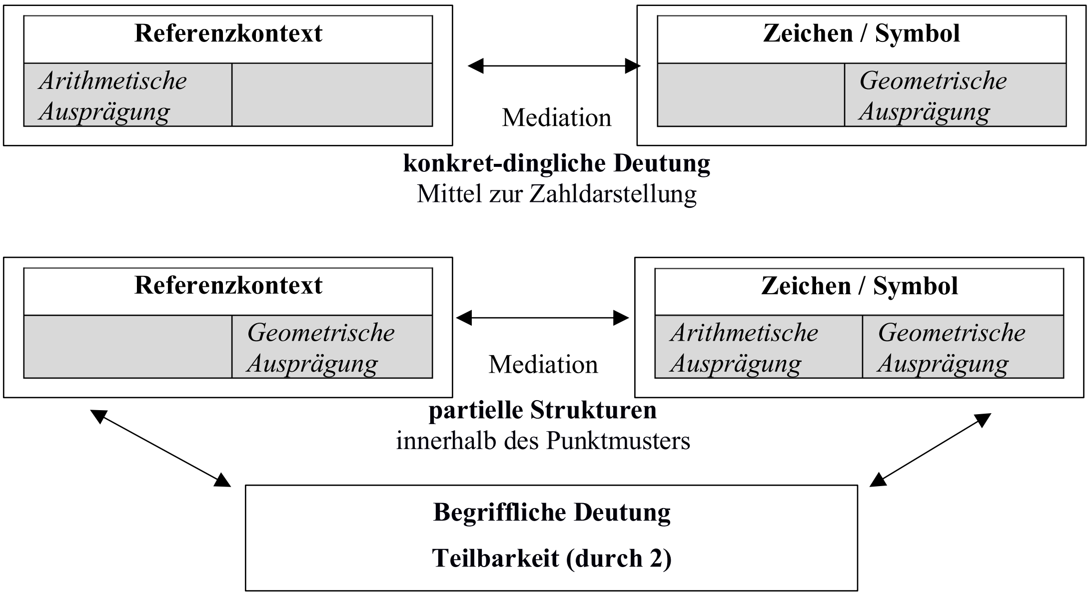


Abbildung 7.66: A2 - Phase 15: Zusammenfassung

Phase 16 (Z. 87 - 88): Helena begründet, warum das Ergebnis von ‚9+3' gerade ist

87	**I**	**Aber wie kann das denn sein, dass wenn wir zwei ungerade Zahlen addieren mit der neun und der drei, dass das Ergebnis dann gerade ist?**
88	**H**	**Weil wenn man bei der Neun plus neun muss man ja wieder von der Neun, also eins wegnehmen, dass es von der Neun zu einer zehn wird. Da hat man dann von der Neun nur noch acht übrig. Dann sind das achtzehn. Und beides und die Zehn und die Acht sind beides gerade Zahlen.**

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

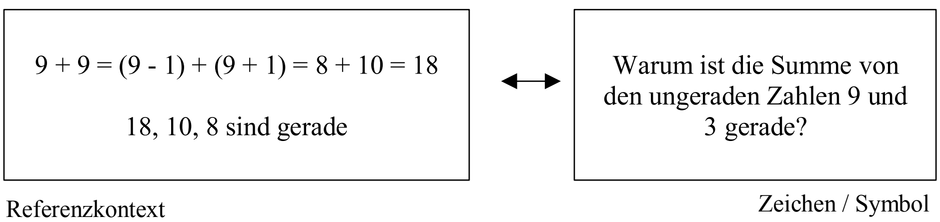


Abbildung 7.67: A2 - Phase 16: Rollenverteilung

Ausgehend von dem vorherigen Deutungs- und Argumentationsprozess wird von der Interviewerin nun anhand des Beispiels die allgemeingültige Aussage ‚Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer gerade' fraglich gemacht. Sie fordert eine Begründung ein, warum die Summe der ungeraden Zahlen drei und neun gerade ist. Dies stellt in diesem Deutungs- und Argumentationsprozess das fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

Helena begründet dies aber nicht anhand der Aufgabe ‚9 + 3', sondern wählt die Aufgabe ‚9 + 9' zur Begründung. Warum Helena an dieser Stelle eine andere Aufgabe wählt, bleibt unklar. Sie erläutert nun, dass „man ja wieder von der Neun, also ein wegnehmen, dass es von der Neun zu einer zehn wird" (Z. 88). Helena verändert die beiden Summanden gegensinnig, indem sie den ersten Summanden um eins verringert und den zweiten Summanden um eins erhöht. Diese Idee spiegelt folgende Rechnung wider: 9 + 9 = (9 - 1) + (9 + 1) = 8 + 10 = 18. Anschließend sagt sie, dass es 18 sind und dass die beiden Zahlen Zehn und Acht gerade sind. Hierbei bleibt von Helena unerwähnt, warum es sich bei diesen Zahlen um gerade Zahlen handelt. Auch bleibt die Bedeutung dessen, dass zwei gerade Zahlen addiert werden unklar.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Helena wird an dieser Stelle vor die Herausforderung gestellt, zu begründen, warum bei der Addition von neun und drei das Ergebnis gerade ist (Z. 87). An dieser Stelle wird in erster Linie eine Begründung für eine arithmetische Gesetzmäßigkeit eingefordert. Gleichzeitig nimmt die Interviewerin Bezug zu konkreten Zahlen, indem sie die Summanden als neun und drei benennt. Demnach handelt es sich um ein *Zeichen/Symbol arithmetischer Ausprägung*.

Dies deutet Helena unter Bezugnahme auf die konkrete Rechnung neun und neun, welche sie gegensinnig verändert. Zudem benennt sie konkret die Summanden der neu erzeugten Aufgabe sowie das Ergebnis. Demnach deutet sie das *arithmetisch geprägte Zeichen/Symbol* vor einem ebenfalls *arithmetisch geprägten Referenzkontext*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In dem vorliegenden Interviewausschnitt deutet Helena das fragliche Zeichen/Symbol vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext. Demnach sind auch die *strukturellen Deutungen*, die in dieser Phase deutlich werden, *arithmetischer Natur*. Zunächst wird deutlich, dass eine Umdeutung stattfindet. Helena deutet die Aufgabe ‚9+9' zunächst um, indem sie beide Summanden gegensinnig um eins verändert. Dadurch erzeugt sie die Aufgabe ‚8+10' und benennt das Ergebnis 18. Demnach zeigt sich, dass die Umdeutung der Zahlen notwendiger Teil ihrer Argumentation ist. Gleichzeitig setzt sie die Zahlen durch das gegensinnige Verändern in Beziehung zueinander. Demnach zeigt sich in der Argumentation die Nutzung *partieller Strukturen* in Form der Umdeutung.

Ausgehend davon erläutert sie, dass die Zahlen Zehn und Acht gerade seien. Die Parität des Ergebnisses nennt Helena an dieser Stelle nicht. Aufgrund des Interviewverlaufs ist aber durchaus annehmbar, dass sie die 18 auch als gerade klassifiziert, da sie aus zwei geraden Zahlen zusammengesetzt ist und Helena dies schon mehrfach als Entscheidungs- und Argumentationskriterium genutzt hat. Zudem ist der Ausgangspunkt ihrer Argumentation die Frage, warum das Ergebnis von neun und drei gerade ist. Unter dieser Annahme nutzt Helena erneut die Summenregel als Argumentationsgrundlage und zieht demnach auch *komplexe Strukturen* heran und zwar in Form der Zahlzerlegung. Während sie im bisherigen Interviewverlauf die zu deutende Zahl zerlegt, geht sie an dieser Stelle anders vor, denn ihre Argumentation geht nicht von der Summe aus, sondern von den Summanden.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Ein begriffliches Verständnis in Bezug auf die Paritäten ist an dieser Stelle nicht differenziert darstellbar. Helena verändert zwar gegensinnig, erläutert aber nicht, warum sie die beiden Summanden gegensinnig verändert und warum es sich bei der Zehn und der Acht um gerade Zahlen handelt. Auch bleibt unklar, welche Bedeutung es hat, dass die neu erzeugten Summanden gerade sind. Die Parität der 18 scheint Helena erneut über die begriffliche Idee der Summenregel zu begründen. Dies expliziert sie zwar nicht, ist aber aufgrund des bisherigen Interviewverlaufs durchaus annehmbar.

Einordnung des Argumentationsprozesses

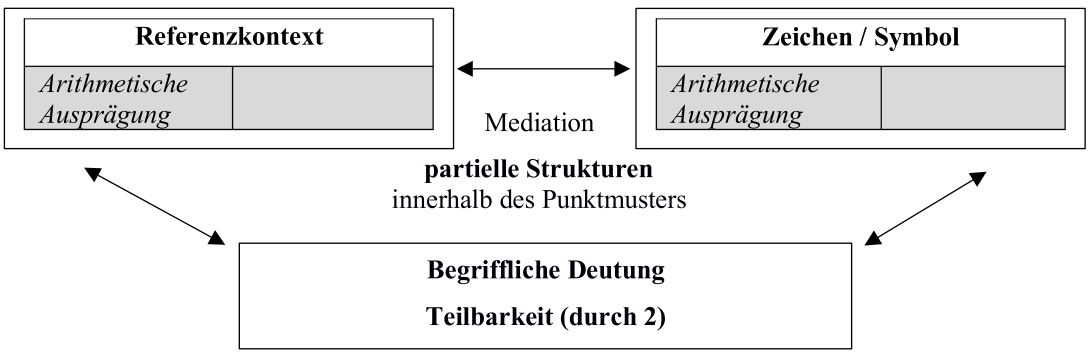


Abbildung 7.68: A2 - Phase 16: Zusammenfassung

Phase 17 (Z. 89 - 97): Helena deutet S6 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage

89	I	**Achso. ok. Wie ist das bei den Anderen? Welche Aufgaben siehst du? Wo siehst du die geraden und ungeraden Zahlen?**
90	H	*[nimmt sich S6]* **Das sind dreizehn** *[zeigt auf die roten Punkte von S6]* **plus einundzwanzig** *(..)* **Und hier hab ich, das haben wir auch in der Ersten so gemacht. Das sind fünf** *[zeigt unter S6.24 bis S6.28]*, **dann sind das hier zehn** *[zeigt unter S6.29 bis S6.33]*, **dann halt fünfzehn** *[zeigt unter S6.14 bis S6.18]*, **zwanzig** *[zeigt unter S6.19 bis S6.23]* **und dann die einundzwanzig** *[zeigt auf S6.34]*.
91	I	**Kannst du da auch gut sehen, ob die einundzwanzig eine gerade oder ungerade Zahl ist?**
92	H	**Ja, weil man könnte ja zehn, zwanzig durch zehn teilen** *[teilt die roten Punkte zwischen S6.18 und S6.28 sowie S6.19 und S6.29]*, **aber das ist ja immer noch eins** *[zeigt auf S6.34]*. **Und hier könnte man zwölf rausmachen** *[legt den Finger auf S6.13]*, **aber das ist ja ne dreizehn, also eins mehr.**
93	I	**Mhm. Und das Ergebnis** *[kreist das Punktmuster mit dem Finger ein]*? **Ist das gerade oder ist das ungerade?**
94	H	**Gerade.**
95	I	**Woher weißt du das?**
96	H	**Weil, man muss erstmal die Drei** *[zeigt auf S6.11 bis S6.13]* **plus die Eins** *[zeigt auf S6.34]* **rechnen. Dann sind das vier, das ist schonmal ne gerade Zahl. Und die Zwanzig** *[zeigt von links nach rechts über die roten Punkte]* **plus die Zehn** *[zeigt von links nach rechts über die blauen Punkte]*, **sind dann dreißig.**
97	I	**Mhm. Ok.** *[schiebt S6 zur Seite]*

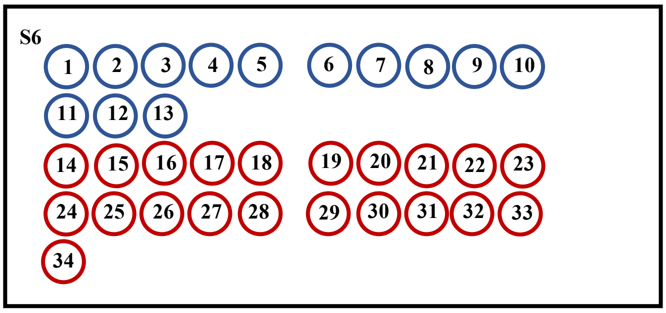


Abbildung 7.69: A2 - Phase 17: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

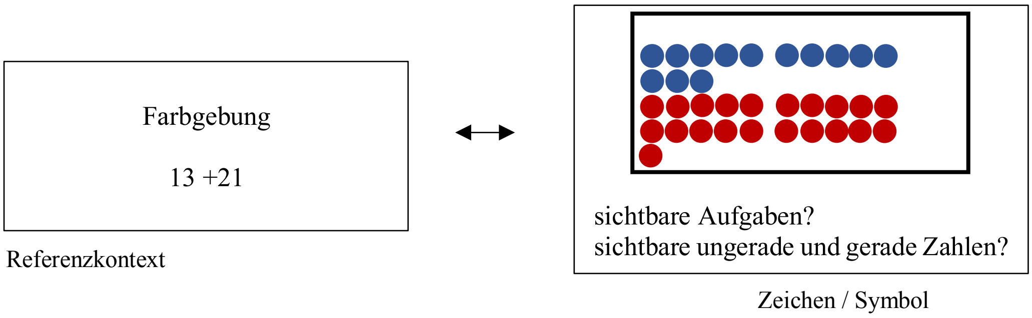


Abbildung 7.70: A2 - Phase 17: Rollenverteilung I

Helena wird zu Beginn von der Interviewerin aufgefordert, die noch nicht gedeuteten Punktdarstellungen hinsichtlich der sichtbaren Aufgaben sowie der geraden und ungeraden Zahlen zu deuten (Z. 89). Helena nimmt sich S6. Demnach stellt die sichtbare Aufgabe sowie die sichtbaren geraden und ungeraden Zahlen von S6 das fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

Zunächst gibt Helena an, dass die Aufgabe 13 plus 21 dargestellt ist. Dass es sich bei der 13 um die blauen Punkte handelt, macht Helena durch eine Zeigegeste auf die blauen Punkte deutlich. Dass es sich um 21 rote Punkte handelt wird deutlich, denn Helena erläutert, welche Strategie sie zur Anzahlermittlung der roten Punkte genutzt hat (Z. 90). Hierbei lässt sich erkennen, dass sie erneut die Fünferzäsur in ihrer Deutung berücksichtigt.
Im Anschluss daran fokussiert die Interviewerin gezielt die Parität der 21 und fragt, „kannst du auch gut sehen, ob die einundzwanzig eine gerade oder ungerade Zahl ist?“ (Z. 91). Dadurch wird ein Teil des fraglichen *Zeichens/Symbols*, nämlich die Parität der sichtbaren Zahlen fokussiert und die Sichtbarkeit der Parität der 21 in den Vordergrund gestellt.

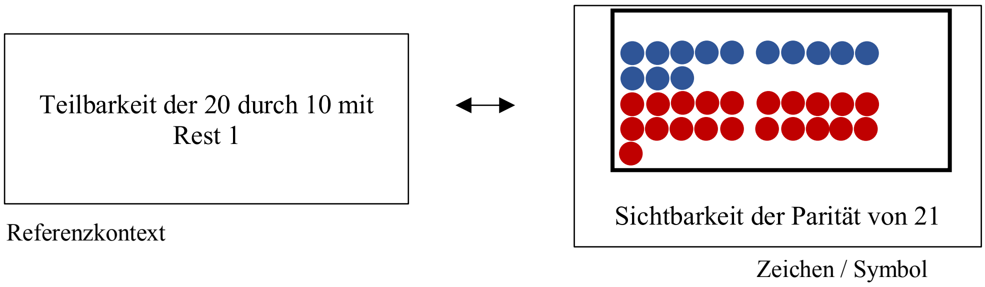


Abbildung 7.71: A2 - Phase 17: Rollenverteilung II

Helena argumentiert, indem sie sagt, „man könnte ja zehn, zwanzig durch zehn teilen, aber das ist ja immer noch eins“ (Z. 92). Diese Aussage unterstützt sie, indem sie die 20 blauen Punkte vertikal entlang der Fünferzäsur teilt und auf den einzelnen Punkt zeigt. Auffällig ist erneut die sprachliche Realisierung. Obwohl Helena an dieser Stelle die Parität und demnach die Teilbarkeit durch zwei überprüft und begründet, spricht sie erneut von der Teilbarkeit durch zehn. Dies zeigte sich bereits mehrfach im Interviewverlauf. Helena nutzt als Divisor die Anzahl der Elemente die jede Teilmenge bei Division durch zwei enthält.
Zusätzlich erläutert Helena nun die Parität der 13. Auch in dieser Begründung orientiert sie sich an ihrem bisherigen Vorgehen den einen Punkt mehr als Entscheidungskriterium zu nutzen, allerdings ohne die operative Handlung der Zerlegung der Anordnung in zwei Teile einzubeziehen. Sie nimmt stattdessen Bezug zur kleineren geraden Nachbarzahl und sagt „und hier könnte man zwölf rausmachen, aber das ist ja ne dreizehn, also eins mehr“ (Z. 92). Implizit bleibt, dass es sich bei der Zwölf um eine gerade Zahl handelt und, dass die 13 aufgrund der Addition der eins eine ungerade Zahl sein muss.

Nachdem Helena begründet hat, warum man die Parität von 21 gut sehen kann, fokussiert die Interviewerin im Anschluss die Parität des Ergebnisses.

1+3=4, 4 ist gerade 10+20=30	⟷	Parität des Ergebnisses
Referenzkontext		Zeichen / Symbol

Abbildung 7.72: A2 - Phase 17: Rollenverteilung III

Helena gibt an, dass es sich bei der Summe um ein gerades Ergebnis handelt. Hierfür fordert die Interviewerin eine Begründung ein. Um die Parität zu begründen, erläutert Helena zunächst, dass sie drei plus eins rechnen muss. Sie erläutert, dass es sich dabei um insgesamt vier Punkte handelt und demnach um eine gerade Zahl. Sie suggeriert dadurch, dass sie nun noch die restlichen Zahlen hinsichtlich der Parität überprüfen muss. Es lässt sich somit vermuten, dass Helena die Parität auf Basis der Erzeugung gerader Teilergebnisse begründet. Dafür rechnet sie die 20 plus die zehn und kommt zu dem Ergebnis 30. Dieses Vorgehen und auch die Parität der 30 erläutert Helena nicht weiter. Es lässt sich somit nur vermuten, dass Helena weiß, dass es sich bei der 30 um eine gerade Zahl handelt und demnach auch das Ergebnis von vier und 30 gerade sein muss.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Zu Beginn der Interviewphase deutet Helena die sichtbaren Aufgaben beziehungsweise die sichtbaren geraden und ungeraden Zahlen von S6 (Z. 90). Demnach deutet sie eine geometrische Anordnung hinsichtlich erkennbarer Aufgaben und erkennbarer Zahlen. Das fraglich gemachte *Zeichen/Symbol* ist demnach zunächst *geometrischer Ausprägung*.

Dieses *Zeichen/Symbol* geometrischer Ausprägung deutet sie dann mit einem *arithmetischen Referenzkontext*, um konkrete Aufgaben angeben zu können.

Im zweiten Teil der Interviewphase fordert die Interviewerin sie auf, zu erläutern, ob Parität der Zahl 21 sichtbar ist (Z. 91). Da es sich bei der Zahl 21 um eine symbolisch-numerische Darstellung handelt und von der Interviewerin explizit genutzt wird, ist eine Interpretation der Sichtbarkeit der Parität der Zahl 21 als *arithmetisch geprägtes Zeichen/Symbol* möglich. Dennoch kann das Wort „sehen" in Bezug auf die geometrische Anordnung durchaus auch als *geometrisch geprägtes Zeichen* interpretiert werden.

Zur Deutung des fraglichen Zeichens/Symbols nutzt Helena an dieser Stelle erneut einen arithmetischen Referenzkontext. Sie benennt durch eine arithmetisch geprägte operative Handlung, dass man die 20 durch zehn teilen kann. Diese Aussage unterstützt Helena durch

eine Handlung am Material. Auch die Parität des zweiten Summanden, in diesem Fall der 13, begründet Helena auf Basis der numerisch-symbolischen Darstellung, die durch die Handlung am Material unterstützt wird. Durch das Wegnehmen eines Punktes könnte man die Darstellung einer zwölf erhalten. Dadurch, dass es aber einer mehr ist, handelt es sich um eine 13 (Z. 92). Aufgrund dessen, dass der Fokus ihrer Argumentation auf den numerisch-symbolischen Darstellungen in Form von konkreten Zahlen und konkreten Operationen mit Zahlen liegt, handelt es sich um einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext*. Dieser wird dabei durchaus durch eine Interaktion mit dem Anschauungsmittel unterstützt.
Das dritte in der Interviewszene fraglich gemachte Zeichen/Symbol ist die Frage nach dem Ergebnis und dessen Parität (Z. 93). Diese Frage enthält keinen direkten Verweis auf eine numerisch-symbolische oder geometrische Darstellung. Durch die Handlung des Einkreisens der Punktdarstellung suggeriert die Interviewerin einen Bezug zum Punktmuster. Aufgrund des Interviewverlaufs ist die Begrifflichkeit „Ergebnis“ in diesem Kontext allerdings durchaus eher arithmetisch geprägt, denn Helena hat die Summanden vorher durch konkrete Zahlen benannt. Demnach ist an dieser Stelle *keine eindeutige Zuordnung der Ausprägung des Zeichens/Symbols* möglich.
Dieses Zeichen/Symbol wird von Helena nun arithmetisch gedeutet, indem sie konkrete Additionsaufgaben sowie die Parität der Vier benennt (Z. 96). Somit deutet Helena das letzte Zeichen/Symbol dieser Interviewphase vor einem *arithmetisch geprägten Referenzkontext*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In Helenas Deutung beziehungsweise Argumentation zeigen sich aufgrund des arithmetischen Referenzkontextes vorwiegend *arithmetische Strukturen*. Sie begründet, dass die 21 eine gerade Zahl ist, da man die 20 durch zehn teilen kann (Z. 92). Durch die von Helena genutzte Zeigegeste zeigt sich, dass sie die Zahl 20 und demnach die 20 Punkte in zwei gleich große Mengen teilt, die jeweils zehn Punkte enthalten. Diese Deutung lässt sich insbesondere durch die unterstützende Handlung am Material rekonstruieren, denn Helena zeigt die Teilung am Punktmuster. Auffällig ist an dieser Stelle, dass Helena erstmals eine vertikale Teilung des Musters durchführt. Aufgrund des einen Punktes, der kein Element einer der beiden Teilmengen ist, handelt es sich um eine ungerade Zahl. Es zeigt sich somit, dass Helena erneut *zwei Substrukturen* erzeugt, die von ihr als gleich angesehen werden, nämlich die Zehn und Zehn. Dies deutet sie auch in die Darstellung hinein. Dabei stellen jeweils *zwei übereinanderliegende Fünferreihen eine Substruktur* dar. Somit deutet Helena in ihrer Argumentation *partielle Strukturen*, vornehmlich durch eine operative Handlung mit Zahlen. Diese unterstützt sie durch eine *vertikale Teilung des Punktmuster* und die dadurch entstandenen *Substrukturen*. Auch bei der Begründung der Parität der Zahl 13 nutzt Helena *partielle Strukturen*. Sie stellt die 13 in Bezug zu der Zahl 12, denn die 13 ist einer mehr (Z. 92).

Sollte die oben geschilderte Vermutung richtig sein und Helena betrachtet zunächst das Ergebnis der Addition von drei und eins hinsichtlich ihrer Parität und prüft dann die Addition der Zehner, so zerlegt Helena die Zahl im Sinne der Teilbarkeitsrelation und deutet demnach auch *umfangreiche Strukturen*.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In Helenas Argumentation lassen sich *unterschiedliche begriffliche Ideen* vermuten, die ihrer Argumentation zugrunde liegen. Bei der Begründung der Parität der 21 zeigt sich ein Verständnis der *Teilbarkeit durch zwei* im Sinne des Verteilens. Helena nennt an dieser Stelle die Mächtigkeit der Menge, bei der Erzeugung von genau zwei Teilmengen. Zur Begründung der Parität der 13 nutzt Helena die Beziehung zur Zahl zwölf und die Tatsache, dass 13 einer mehr ist als die zwölf. Demnach lässt sich hier die begriffliche Idee der *Differenz zwischen Zahlen verschiedener Eigenschaften* rekonstruieren, auch wenn Helena dies nicht explizit erwähnt. Sollte die obige Deutung Helenas innerhalb der Begründung, warum die Summe gerade ist, ihrer tatsächlichen Deutung umfangreicher Strukturen entsprechen, so nutzt Helena die begriffliche Idee der *Zerlegung der Zahl in Teilkomponenten* und wendet, ohne dies explizit zu erwähnen, die Summenregel an.

Einordnung des Argumentationsprozesses

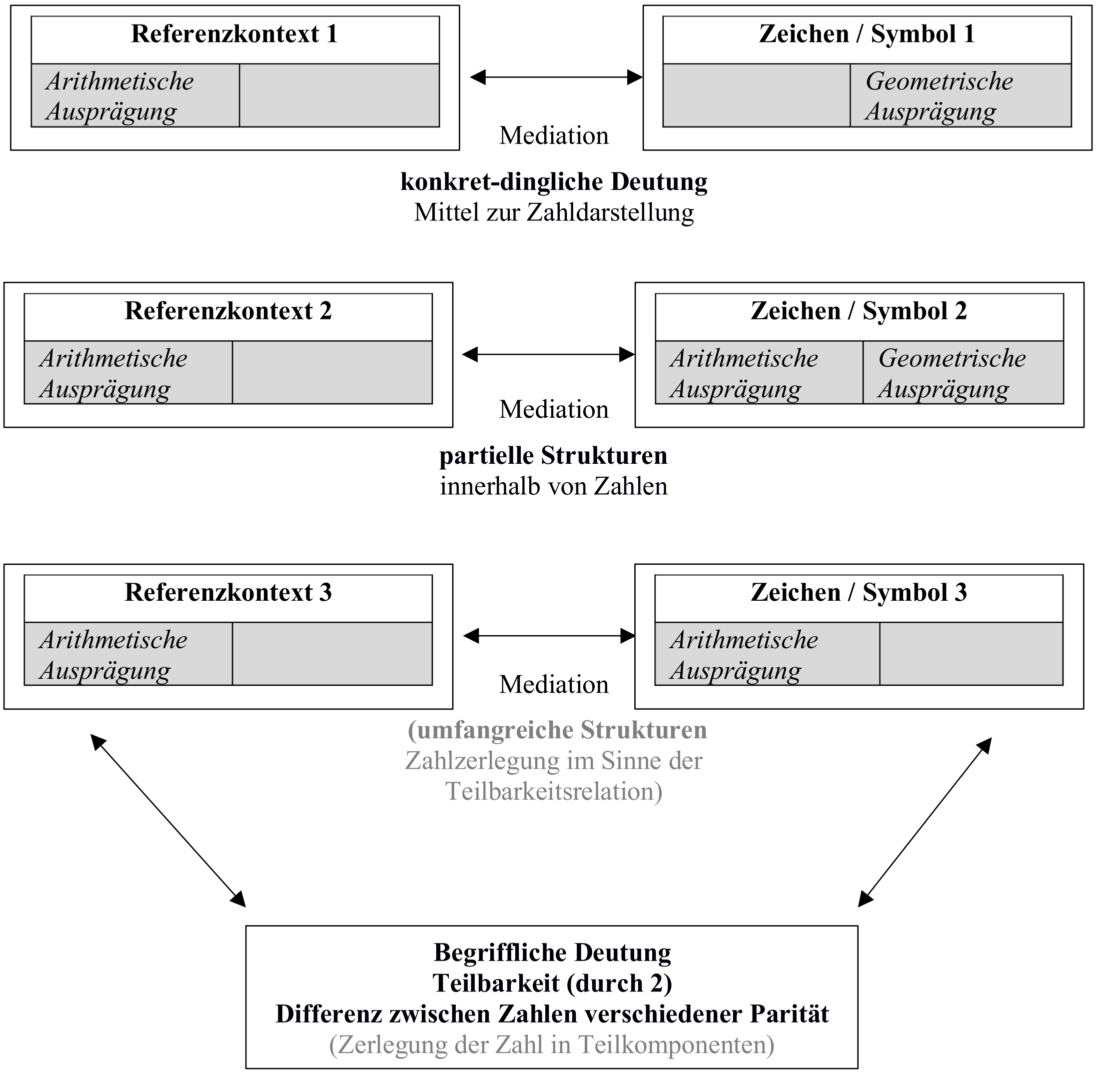


Abbildung 7.73: A2 - Phase 17: Zusammenfassung

Phase 18 (Z. 98 - 103): Helena deutet S7 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage

98	**H**	**Hm, hier** *[nimmt S7 in die Hand]* **kann man das auch gut sehen, weil das hab ich ja eben auch bei denen gesagt** *[zeigt in Richtung P1 bis P10]*, **man kann das hier durchteilen** *[zeigt mit den Fingern eine Linie zwischen S7.14 bis S7.23 und S7.25 bis S7.34]*, **aber da ist noch eins** *[zeigt auf S7.24]* **und hier auch** *[zeigt auf S7.7]*. **Man könnte das durchteilen** *[zeigt mit dem Finger eine Linie zwischen S7.1 bis S7.6 und S7.8 bis S7.13]*, **aber hier** *[zeigt aus S7.7]* **ist noch einer.**
99	**I**	**Jetzt hast du mir die beiden ungerade Zahlen gezeigt und das Ergebnis?**
100	**H**	**Ähm** *[tippt mit dem Finger zählend am unteren Rand von S7]* # *[und zählt anschließend die obere Reihe des Punktmusters ab und murmelt dabei]* **dreiunddreißig** *(.)*, **oder? Hä.** *(..)* **Das müssen ja eigentlich gleich viele sein.**
101	**I**	**# Ist das gerade oder ungerade?**
102	**I**	**Warum müssen das denn eigentlich gleich viele sein?**
103	**H**	**Weil das ist hier eine Zahl** *[zeigt über die untere Reihe von S7]*, **also das sind ja einmal hier sechs** *[zeigt von S7.8 bis S7.13]*, **sieben** *[zeigt auf S7.24]*, **acht** *[zeigt auf S7.25]*, **neun** *[zeigt auf S7.26]*, **zehn** *[zeigt auf S7.27]*, **elf** *[zeigt auf S7.28]*, **zwölf** *[zeigt auf S7.29]*, **dreizehn** *[zeigt auf S7.30]*, **vierzehn** *[zeigt auf S7.31]*, **fünfzehn** *[zeigt auf S7.32]*, **sechzehn** *[zeigt auf S7.33]*,

		siebzehn *[zeigt auf S7.34]*. **Oder warte, hä. Das gibt siebzehn.** *[zählt leise die Punkte; 9 sec.]* **Ja, siebzehn sind das hier** *[zeigt über die untere Reihe von S7]* **und das** *[zeigt auf die obere Reihe von S7]* **müssen dann ja auch wieder siebzehn sein.**

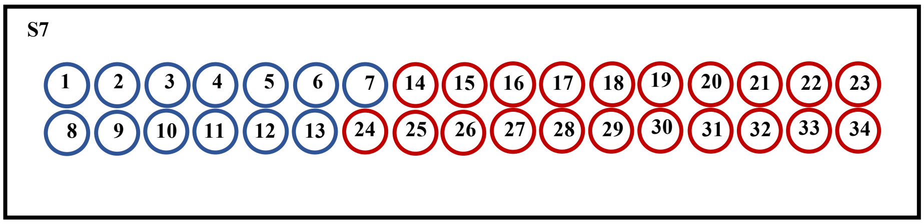


Abbildung 7.74: A2 - Phase 18: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

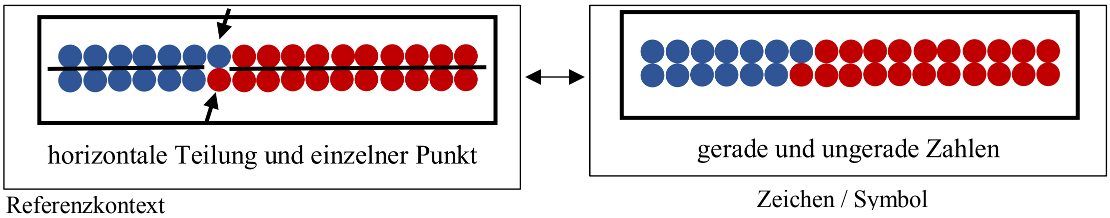


Abbildung 7.75: A2 - Phase 18: Rollenverteilung I

Zu Beginn dieser Interviewphase wird die Fraglichkeit von der Interviewerin oder dem Kind nicht nochmals expliziert. Die Fraglichkeit lässt sich dadurch ableiten, dass Helena noch immer vor der Anforderung steht, die fehlenden Punktdarstellungen hinsichtlich sichtbarer Aufgaben beziehungsweise gerader und ungerader Zahlen zu deuten. Sie wählt in diesem Interviewausschnitt die Punktdarstellung S7 und deutet diese zunächst hinsichtlich der Parität (Z. 98). Demnach stellt insbesondere die Sichtbarkeit der geraden und ungeraden Zahlen in der Darstellung S7 das fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

Dieses fragliche Zeichen/Symbol deutet Helena unter Bezugnahme auf die Merkmale der geometrischen Anordnung von S7 und dem Verweis auf ihre bisherigen Deutungen aus Aufgabenkomplex 1. Sie teilt zunächst den roten Teil des Punktmusters horizontal und sagt, „man kann das hier durchteilen“ (Z. 98). Anschließend verweist sie erneut auf das für sie relevante Merkmal der einzelnen Punkte und identifiziert zunächst den Punkt S7.24 als einzelnen roten Punkt und zusätzlich S7.7 als weiteren einzelnen Punkt. Dieser Aussage schließt sie ein analoges Vorgehen für den blauen Teil des Punktmusters an. Nämlich eine horizontale Teilung des blauen Teils des Punktmusters. Sie erläutert, dass man auch dieses Punktmuster durchteilen könne, aber auch dort ein Punkt zu viel sei (Z. 98). In der gesamten Begründung nennt Helena die Parität nicht explizit und auch, dass es sich bei den beiden Teilen des Punktmusters um zwei Summanden handelt, bleibt zunächst unberücksichtigt. Auf Grundlage des bisherigen Interviewverlaufs ist anzunehmen, dass Helena die blauen

Punkte als eine Zahl und die roten Punkte als eine weitere Zahl deutet. Ihr vorgebrachtes Argument nutzte Helena im bisherigen Interviewverlauf, um zu begründen, dass es sich um eine ungerade Zahl handelt. Demnach ist anzunehmen, dass Helena sowohl den blauen als auch den roten Teil des Punktmusters als ungerade klassifiziert.

Nachdem Helena nun die Paritäten der beiden Summanden begründet hat, fragt die Interviewerin „Jetzt hast du mir die beiden ungeraden Zahlen gezeigt und das Ergebnis?“ (Z. 99).

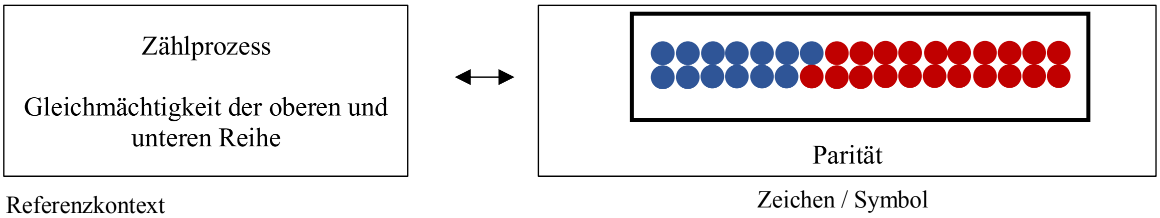


Abbildung 7.76: A2 - Phase 18: Rollenverteilung II

Die Interviewerin stellt diese Frage mit der Intention, dass Helena die Parität des Ergebnisses deutet. Nachdem Helena durch ihre Handlung einen Zählprozess andeutet, spezifiziert die Interviewerin, dass sie die Parität des Ergebnisses fraglich macht. Helena bleibt aber in ihrem Zählprozess und ermittelt die Punktanzahl 33. Dies führt zu einem kognitiven Konflikt. Sie ist sich scheinbar dessen bewusst, dass die Gesamtanzahl gerade ist und 33 keine gerade Zahl ist. Sie begründet ihre Irritation dadurch, dass es „eigentlich gleich viele“ (Z. 100) sein müssen. Was genau sie an dieser Stelle damit meint, ist unklar. Aus diesem Grund fordert die Interviewerin eine Spezifizierung der von Helena getätigten Aussage ein. Zur Begründung der Aussage, dass es eigentlich gleich viele sein müssen, verdeutlicht Helena zunächst, dass die untere Reihe eine Zahl ist und zählt diese. Sie kommt zu dem Ergebnis, dass die untere Reihe aus 17 Punkten besteht und demnach auch die obere Reihe aus 17 Punkten bestehen muss (Z. 103). Dies spiegelt erneut eine horizontale Teilung der Punktdarstellung wider. Dabei wird deutlich, dass die Punktanzahl in beiden Reihen identisch sein muss.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

In dieser Interviewphase deutet Helena zunächst die geometrische Anordnung S7 hinsichtlich der Sichtbarkeit von geraden und ungeraden Zahlen (Z. 98). Demnach steht sie vor der Herausforderung ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol* zu deuten.

Dieses geometrisch geprägte Zeichen/Symbol deutet Helena, indem sie sich auf spezifische Merkmale der geometrischen Anordnung bezieht und auf die horizontale Teilung und einzelne Punkte verweist (Z. 98). Sie wird der Anforderung somit gerecht, indem sie einen ebenfalls *geometrisch geprägten Referenzkontext* zur Deutung heranzieht.

Nachdem Helena die rote sowie die blaue Zahl gedeutet hat, fokussiert die Interviewerin nun das Ergebnis und möchte wissen, welche Parität das Ergebnis hat und macht dieses fraglich (Z. 99). Die Begrifflichkeit Ergebnis fokussiert a priori keine numerisch-symbolische oder geometrische Darstellung und kann demnach auch keiner Ausprägung zugeordnet werden. Da in der vorangegangenen Interaktion eine Argumentation auf geometrischer Ebene stattgefunden hat, ist rekonstruierbar, dass die Intention der Fragestellung explizit auf S7 und somit auf eine geometrische Anordnung bezogen ist. Demnach wird Helena an dieser Stelle vor die Herausforderung gestellt, ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol* zu deuten.
Um dieser Anforderung gerecht zu werden, ermittelt Helena die konkrete Punktanzahl und nutzt damit einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* (Z. 100, 102). Dies kann durchaus daran liegen, dass Helena mit dem Wort Ergebnis eine konkrete Zahl verbindet und eben diese durch ihren Zählprozess ermittelt.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext
Zur Deutung des roten beziehungsweise blauen Teils des Punktmusters nutzt Helena ein Vorgehen, welches sie bereits mehrfach für andere, vornehmlich prototypische, geometrische Anordnungen genutzt hat. Durch die horizontale Teilung bildet Helena erneut zwei Substrukturen in Form von zwei horizontalen Reihen, die sie dann, auch wenn sie es nicht direkt benennt, miteinander vergleicht. Damit es sich um eine gerade Zahl handelt, sieht Helena es als notwendig an, dass beide Substrukturen gleich sind (Z. 98). Betrachtet man die roten Punktreihen S7.14 bis S7.23 sowie S7.25 bis S7.34 so lassen sich durch die horizontale Teilung zwei Substrukturen bilden, die gleich sind. Aber auch S7.24 ist Teil der Zahl, aber nicht Teil einer der Substrukturen. Gleiches gilt für die blauen Punktreihen S7.1 bis S7.6 sowie S7.8 bis S7.13 und den einzelnen Punkt S7.7. Aufgrund dieser einzelnen Punkte lassen sich keine zwei gleichen Substrukturen bilden, die alle roten beziehungsweise blauen Punkte umfassen (Z. 98). In dieser Deutung zeigt sich erneut die Deutung von *partiellen Strukturen*, indem Helena jeweils *zwei Substrukturen* bildet und diese miteinander vergleicht.

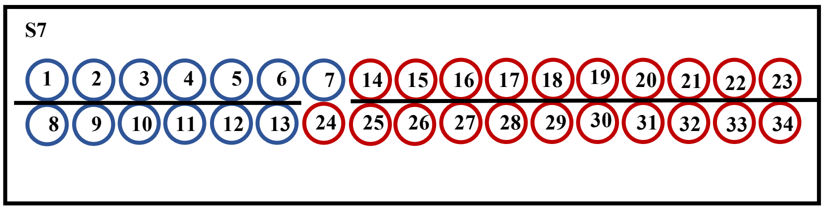


Abbildung 7.77: A2 - Phase 18: Deutung von S7

Während Helena das Punktmuster bis zu diesem Punkt in ihrer Argumentation ausschließlich aufgrund seiner geometrischen Merkmale zur Argumentation genutzt hat, wechselt dies durch den Impuls der Interviewerin „Jetzt hast du mir die beiden ungeraden Zahlen gezeigt und das Ergebnis?“ (Z. 99). Sie nutzt nun keine geometrischen Merkmale, sondern zählt die Gesamtanzahl der Punkte. Ihr Ergebnis 33 führt zu einem kognitiven Konflikt, den sie löst, indem sie nochmals die untere Reihe des Punktmusters zählt und die Punktanzahl 17 ermittelt. Dies überträgt sie auf die obere Reihe und sagt, dass die obere Reihe auch 17 sein müssten (Z. 103). Auch wenn Helena an dieser Stelle konkrete Anzahlen nutzt, zeigt sich eine ganz wesentliche Erkenntnis und zwar, das Helena weiß, dass bei dieser doppelreihigen Darstellung beide Reihen die gleiche Punktanzahl haben müssen. Beiden Argumentationen liegt somit eine ähnliche Idee zugrunde, nämlich die Idee der Bildung zweier gleichmächtiger Substrukturen.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In der Begründung der Sichtbarkeit der Parität der durch die blauen Punkte dargestellten Zahl zeigt sich erneut ein begriffliches Verständnis, welches der Teilbarkeit durch zwei zuzuordnen ist. Auf der geometrischen Ebene vergleicht Helena zwei Substrukturen, die sie durch eine *horizontale Teilung des Musters* erzeugt. Auf arithmetischer Ebene zeigt sich die *Teilung durch zwei in zwei gleichmächtige Mengen*, denn sie sagt, dass die unten ermittelte Punktanzahl der Punktanzahl der oberen Reihe entsprechen muss. Dies zeigt, dass Helena unter *Teilbarkeit durch zwei das Erzeugen zweier gleichmächtiger Teilmengen* versteht.

Einordnung des Argumentationsprozesses

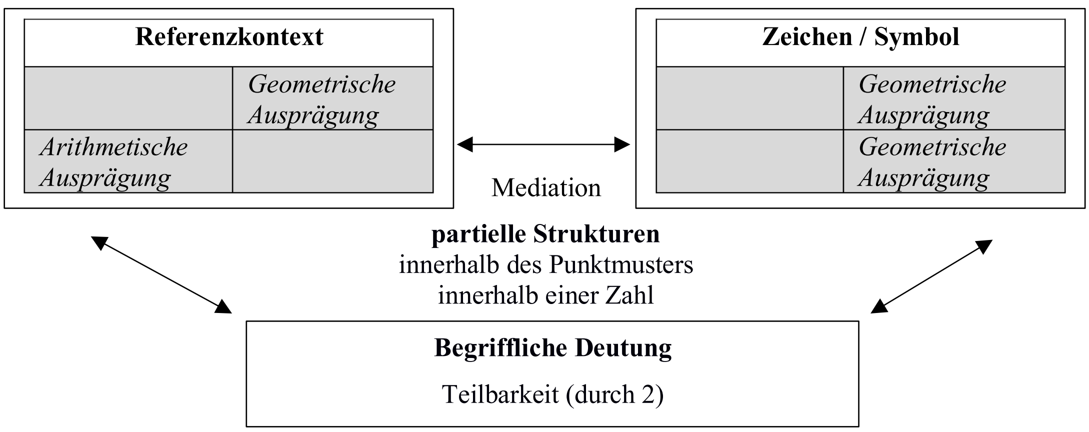


Abbildung 7.78: A2 - Phase 18: Zusammenfassung

Phase 19 (Z. 104 - 108): Helena deutet die Sichtbarkeit der Parität

104	**I**	**Ok, jetzt hast du mir ja eben bei den Punktmustern** *[zeigt auf P1 bis P10]* **gesagt, ich muss das gar nicht unbedingt zählen, ich kann das sehen. Kannst du das hier** *[zeigt auf S7]* **auch sehen?**
105	**H**	**Also bei dem hier** *[zeigt von links nach rechts über S7]* **ist das ein bisschen schwerer.**
106	**I**	**Warum ist das denn da schwerer?**
107	**H**	*[dreht S7 um 90° nach links]* **Weil das ist eine längere** *[zeigt neben der unteren Reihe von S7 von unten nach oben und legt die Handkante daneben]* **und das kann man halt, wenn man das ein-mal anguckt** *[dreht S7 ein Stück zurück und zeigt unter der unteren Reihe von links nach rechts]*. **Wenn man hier sieht** *[legt den Finger unter S7.8 und fährt weiter nach rechts (Abb. 1)]*, **ok das sind sechs, dann sind das auch sechs** *[zeigt von S7.1 bis S7.6]*, **dann sind das schonmal zwölf, dreizehn** *[zeigt auf S7.7]*. **Und bei dem größeren** *[fährt von links nach rechts über die roten Punkte von S7]* **erkennt man das nicht so gut, sechs, zwölf, fünfzehn, sechzehn** *[fährt dabei mit dem Finger unter der unteren roten Reihe von S7 her]*.

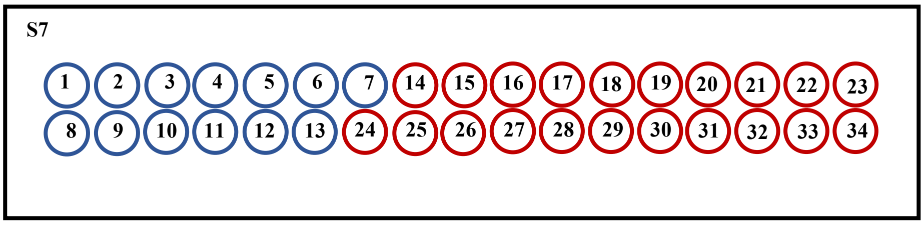


Abbildung 7.79: A2 - Phase 19: Gedeutete Darstellung

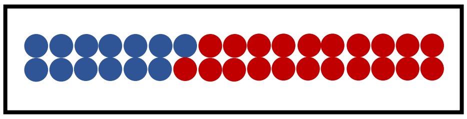
Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Länge der zu zählenden Darstellung

Vorgehen der Anzahlermittlung

Referenzkontext

↔



Interviewerin: Sichtbarkeit der Parität

Helena: Sichtbarkeit der Punktanzahl

Zeichen / Symbol

Abbildung 7.80: A2 - Phase 19: Rollenverteilung
1

Aufgrund der Tatsache, dass Helena zur Deutung der Parität des Ergebnisses eine konkrete Punktanzahl ermittelt hat, verweist die Interviewerin auf bereits vorher gedeutete Darstellungen (Z. 104). Im Kontext des ersten Aufgabenkomplexes erläuterte Helena, dass man die Punktanzahl nicht immer ermitteln muss, sondern die Parität durchaus auch sehen kann. In Bezugnahme auf diese Aussage macht die Interviewerin nun fraglich, ob sie das hier auch sehen kann. Die Interviewerin zielt auf die Parität des Ergebnisses ab, sagt dies aber nicht explizit. Dies hat zur Folge, dass Helena zunächst deuten muss, was die Interviewerin mit „das" meint. Die Sichtbarkeit der Parität von S7 stellt somit das von der Interviewerin fraglich gemachte *Zeichen/Symbol* dar.

Helena deutet die Fragestellung der Interviewerin vermutlich anders und bezieht sich nicht auf die Sichtbarkeit der Parität, sondern auf die Sichtbarkeit der Punktanzahl der Reihen. Für Helena ist an dieser Stelle demnach die Sichtbarkeit der Punktanzahl der Reihen das fragliche *Zeichen/Symbol*. Während die Anzahl der blauen Punkte leicht ermittelt werden kann, indem die beiden Sechserreihen addiert werden, ist dies bei der größeren Zahl nicht so leicht erkennbar (Z. 105). Was genau Helena mit „sechs, zwölf, fünfzehn, sechzehn“ (Z. 107) meint, ist an dieser Stelle nicht nachvollziehbar.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Obwohl die Interviewerin die Sichtbarkeit der Parität fraglich macht (Z. 104) und Helena die Frage beantwortet, ob man die Punktanzahl sehen kann, ist die Ausprägung des Zeichens/Symbols identisch. Beide stellen die Sichtbarkeit anhand der geometrischen Anordnung in den Fokus der Fraglichkeit. Demnach stellen beide Fraglichkeiten ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung* dar. Helena bearbeitet diese Fraglichkeit, indem sie die blaue Darstellung als sechs und sechs beschreibt (Z. 107). Dabei beschreibt sie durchaus auch geometrische Eigenschaften, so dass sich an dieser Stelle vermuten lässt, dass sie die Anzahl benutzt, um geometrische Substrukturen in Form einer Reihe zu beschreiben. Um dies auf die roten Punkte zu übertragen initiiert Helena einen Zählprozess und begründet, dass die Punktanzahl aufgrund der Länge des Punktmusters nur schwer zu bestimmen ist. Da der Zählprozess an dieser Stelle nicht nachvollziehbar ist, ist auch eine Zuordnung zu einem Referenzkontext nur schwer möglich. Möchte Helena durch diesen Zählprozess die Anzahl der roten Punkte bestimmen, so deutet sie das Zeichen/Symbol vor einem *arithmetisch geprägten Referenzkontext*. Möchte Helena durch diesen Zählprozess Substrukturen oder Strukturen in der Darstellung beschreiben, dann zieht sie einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In der Deutung fokussiert Helena zunächst die blauen Punkte und begründet, warum die Parität bei den blauen Punkten leicht zu sehen ist. Dies erläutert sie, indem sie die Darstellung zunächst in zwei Substrukturen gliedert, nämlich die obere Reihe (ohne den letzten Punkt) und die untere Reihe (Z. 107). Diese beschreibt sie als sechs und sechs. Sie expliziert die Bedeutung der Gleichheit an dieser Stelle nicht. Aufgrund des Interviewverlaufs lässt sich aber vermuten, dass diese Gleichheit der Reihen S7.1 bis S7.6 und S7.8 bis S7.13 und die Tatsache, dass S7.7 nicht inkludiert ist zeigt, dass es sich dabei um eine ungerade Zahl handeln muss (Z. 107). Demnach kann der Argumentation an dieser Stelle die Deutung von Substrukturen und ein Vergleich dieser zugrunde liegen, der nicht explizit genannt aber innerhalb des gesamten Interviews immer wieder angesprochen und genutzt wird. Unter dieser Perspektive zieht Helena zur Deutung des Zeichens/Symbols *partielle Strukturen* heran.

Da die Deutung der roten Punkte nicht nachvollzogen werden konnte, kann an dieser Stelle auch keine Aussage über die strukturellen Deutungen Helenas getroffen werden.

Einordnung des Argumentationsprozesses

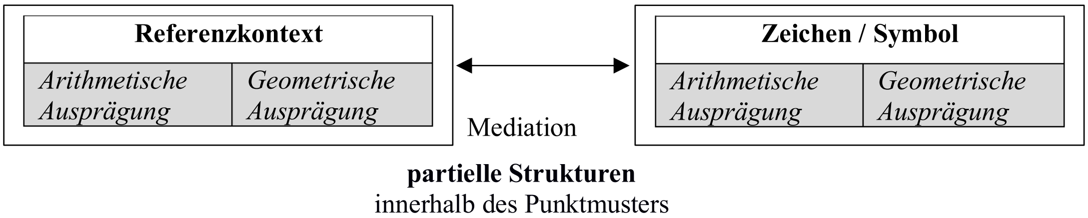


Abbildung 7.81: A2 - Phase 19: Zusammenfas-

Phase 20 (Z. 108 - 114): Helena begründet, warum die Summe bei S7 gerade ist

108	**I**	**Ok, jetzt hast du mir ja gesagt, die blaue Zahl ist ne ungerade Zahl** *[kreist die blauen Punkte von S7 mit dem Finger ein]* **und die rote Zahl** *[kreist die rote Punkte von S7 mit dem Finger ein]* **ist ne ungerade Zahl. Du hast auch gesagt, das konnte man gut sehen. Aber warum ist denn dann da die Summe gerade? #**
109	**H**	# *[lacht]*
110	**I**	**Hast du ne Idee?**
111	**H**	**Hmmm, ich hab das ja eben schon mit den Neunern gesagt. Wenn man neun plus neun, muss man ja erst von der Neun einen zumachen, das ist eine 10, das sind dann zwei gerade und das ergibt dann auch eine gerade.**
112	**I**	**Kannst du das da** *[zeigt auf S7]* **auch dran sehen, oder auch dran zeigen?**
113	**H**	**Ja, weil man kann das hier** *[legt S7 um 90° nach links gedreht hin und zeigt mit dem Finger eine Linie zwischen beiden Reihen]* **einmal durchteilen.**
114	**I**	**Okay** *[legt S7 zur Seite]*,

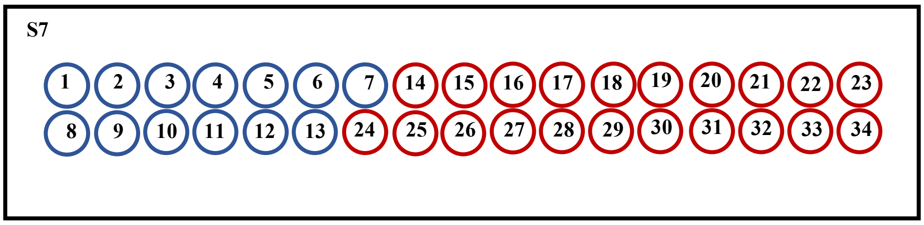


Abbildung 7.82: A2 - Phase 20: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

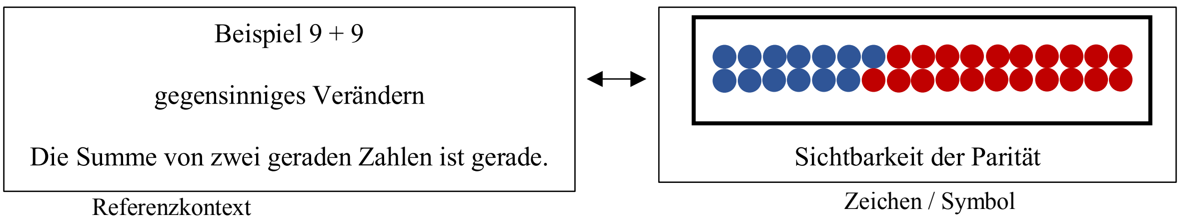


Abbildung 7.83: A2 - Phase 20: Rollenverteilung I

In der vorherigen Deutungs- und Argumentationsphase hat Helena die Parität der beiden ungeraden Summanden sowie der geraden Summe gedeutet und begründet. Die Interviewerin knüpft an diese Deutung an, indem sie nochmals die ungerade blaue Zahl sowie die ungerade rote Zahl erwähnt und durch eine Zeigegeste den Bezug zum Punktmuster herstellt. Anknüpfend daran stellt die Interviewerin Helena nun vor die Herausforderung zu begründen, warum die Summe von zwei ungeraden Zahlen gerade ist (Z. 108).
Helena bezieht sich auf ihre Deutung in Phase drei. In dieser begründete Helena, dass die Summe von neun und drei gerade ist unter Bezugnahme auf die Aufgabe neun plus neun. Durch gegensinniges Verändern hat Helena die Aufgabe acht plus zehn gleich 18 generiert. Dabei klassifiziert sie beide Summanden sowie die Summe werden als gerade Zahlen. Während Helena in ihrer Argumentation in Phase drei nicht explizit erwähnt, dass die Summe zweier gerader Zahlen ebenfalls gerade ist, nimmt sie nun direkt Bezug auf diese Gesetzmäßigkeit und sagt, „das sind dann zwei gerade und das ergibt dann auch eine gerade" (Z. 111). Die Interviewerin lenkt nun den Fokus von konkreten Zahlen weg und hin zu der geometrischen Anordnung S7. Sie möchte von Helena wissen, ob man dies auch an dem Punktmuster sehen kann. Demnach stellt an dieser Stelle das neue fragliche *Zeichen/Symbol* die Sichtbarkeit von Helenas Begründung innerhalb des Punktmusters dar.

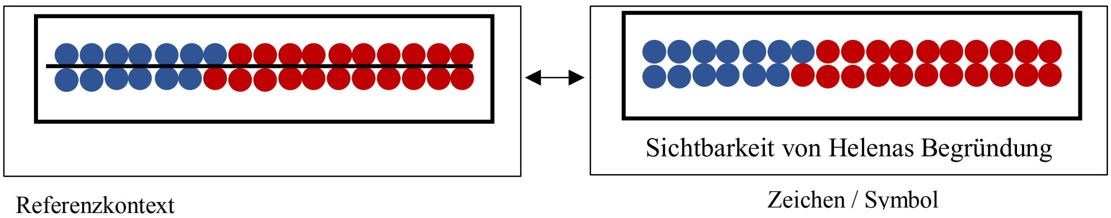


Abbildung 7.84: A2 - Phase 20: Rollenverteilung II

Obwohl Helenas gesamte Begründung in die geometrische Anordnung hineingedeutet werden kann, indem ein roter Punkt zu einem blauen Punkt wird oder umgekehrt, deutet Helena nicht die gesamte Begründung in die Darstellung hinein, sondern bezieht sich lediglich auf die Parität der gesamten Darstellung. Sie bejaht die Frage der Interviewerin und sagt, „man kann das hier einmal durchteilen" (Z. 113). Auch wenn Helena die Parität nicht konkret benennt, lässt sich aufgrund des Interviewverlaufs vermuten, dass Helena die Darstellung aufgrund der horizontalen Teilbarkeit als gerade klassifiziert.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Zunächst wird Helena vor die Herausforderung gestellt, zu begründen, warum die Summe von zwei ungeraden Zahlen gerade ist. Hierbei bezieht sich die Interviewerin direkt auf die geometrische Anordnung, da sie zunächst Bezug zu den bereits gedeuteten Teilen innerhalb

der Darstellung nimmt und durch die Wahl des Wortes „da“ in der Aussage „Aber warum ist denn dann da die Summe gerade?“ (Z. 108) explizit auf das Anschauungsmittel verweist. Das von der Interviewerin fraglich gemachte *Zeichen/Symbol* ist, warum die Summe, die durch die geometrische Anordnung veranschaulicht wird, gerade ist und somit *geometrisch geprägt*. Ob Helena die Fraglichkeit des Zeichens/Symbols direkt auf die geometrische Darstellung S7 bezieht, kann an dieser Stelle nicht geklärt werden, so dass das Zeichen/Symbol für Helena durchaus auch eine eher *arithmetische Ausprägung* haben kann. Insbesondere, weil Helena in der letzten Begründung in Bezug auf S7 eher mit einer *arithmetischen Ausprägung* argumentiert hat. Aus diesem Grund ist an dieser Stelle nicht vollständig rekonstruierbar, welcher Ausprägung das von Helena gedeutete fragliche Zeichen/Symbol entspricht. Die Ausprägung des Referenzkontextes hingegen ist klar nachvollziehbar. Helena nutzt eine verbale numerisch-symbolische Darstellung konkreter Zahlen und in Verbindung damit auch Rechenoperationen sowie die Parität von konkreten Zahlen (Z. 111). Demnach ist der von Helena herangezogene Referenzkontext *arithmetischer Ausprägung*.
In der Deutungs- und Argumentationsphase wird Helena zudem vor die Herausforderung gestellt eine weitere Fraglichkeit zu bearbeiten. Die Interviewerin macht fraglich, ob Helena die arithmetische Argumentation auch auf die vorliegende geometrische Darstellung S7 übertragen kann (Z. 112). Demnach gilt es eine geometrische Anordnung zu deuten beziehungsweise zu beschreiben, so dass es sich um ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung* handelt.
Helena deutet hierbei nicht die gesamte arithmetische Begründung in die Darstellung hinein, sondern bezieht sich dabei lediglich auf die Parität des Ergebnisses, welches durch die gesamte Anordnung dargestellt ist (Z. 113). Die einzelnen von ihr vorher gedeuteten roten und blauen Zahlen sowie das gegensinnige Verändern der einzelnen Summanden bleibt in ihrer Deutung ungenannt. Die Parität der gesamten Darstellung begründet sie unter Bezugnahme auf konkrete Merkmale der geometrischen Anordnung und demnach mit einem *geometrisch geprägten Referenzkontext*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Helena deutet in diesem Argumentations- und Deutungsprozess zunächst keine Strukturen in die Darstellung hinein und nutzt auch keine geometrischen Merkmale dieser oder einen arithmetischen Referenzkontext, der direkt mit der Darstellung in Verbindung steht. Stattdessen zieht Helena in ihrem Referenzkontext ein bereits vorher angeführtes Beispiel heran. Nämlich die Addition der ungeraden Summanden neun und neun sowie die Erzeugung der geraden Summanden acht und zehn durch gegensinniges Verändern (Z. 111). Zur

Begründung der Parität der Summe dieser beiden Zahlen bezieht sie sich auf die Tatsache, dass die Summe zweier gerader Zahlen ebenfalls gerade ist. Das heißt, sie nutzt in ihrer Argumentation die Konstanz der Summe und die Aussage, dass die Summe zweier gerader Zahlen immer gerade ist. Auch wenn die von ihr genutzte Begründung durchaus aus mathematischer Perspektive korrekt ist, stellt Helena keine Beziehungen zwischen ihrer Aussage und der zu deutenden Darstellung her. Aus diesem Grund bleibt unklar, welchen Bezug Helena zwischen der von ihr genutzten Begründung und der zu deutenden Darstellung sieht. Aus diesem Grund können an dieser Stelle keine (strukturellen) Deutungen in dem Argumentationsprozess rekonstruiert werden, die sich auf die Nutzung des Anschauungsmittels beziehen. Dennoch lassen sich in der Begründung Deutungen *partieller Strukturen* rekonstruieren, deren Bezug zur Darstellung aber unklar bleiben. So ist die Aufgabe „neun plus neun" der Ausgangspunkt ihrer Argumentation. Diese beiden Zahlen deutet Helena, mit der Intention der Erzeugung zweier gerader Zahlen im Sinne des gegensinnigen Veränderns, um. Des Weiteren nutzt sie eine Teilbarkeitsrelation: Wenn eine Zahl zwei andere Zahlen teilt, so teilt diese Zahl auch die Summe der beiden Zahlen. Die von ihr genutzte allgemeingültige Aussage bleibt an dieser Stelle unbegründet. Inwiefern sie somit umfangreiche Strukturen deutet, bleibt an dieser Stelle nicht nachvollziehbar. Sollte Helena diese allgemeingültige Aussage begründen können, so würde sie an dieser Stelle durchaus auch *umfangreiche/prototypische Strukturen* innerhalb ihrer strukturellen Deutung nutzen.

Eben diesen Bezug versucht die Interviewerin nun von Helena einzufordern, indem sie fragt, ob Helena das auch in dem Punktmuster sehen oder daran zeigen kann (Z. 112). Helena bejaht dies, bezieht sich in ihrer anschließenden Begründung allerdings nur auf die Parität des Ergebnisses und nicht auf die einzelnen Summanden und das gegensinnige Verändern dieser (Z. 113). Die von Helena gedeutete geometrische Anordnung S7 stellt erneut eine prototypische Darstellung dar, die sie ähnlich deutet, wie bereits vorherige prototypische Darstellungen. Sie *teilt das Punktmuster horizontal* und erzeugt dadurch *Substrukturen*, die jeweils einer Punktreihe entsprechen. Zu einem *Vergleich* der beiden Substrukturen äußert sie sich in ihrer Argumentation nicht weiter. Aus dem bisherigen Interviewverlauf lässt sich vermuten, dass Helena beide Substrukturen als gleich ansieht und es sich deshalb um eine gerade Zahl handelt. Das Helena die beiden in der Darstellung erzeugten Substrukturen als gleich ansieht, hat sie bereits in der vorherigen Deutungs- und Argumentationsphase deutlich gemacht, indem sie die Punktanzahl beider Reihen als 17 deklariert hat. Demnach deutet Helena *partielle Strukturen* in die Darstellung hinein, um die Parität zu begründen. Hierfür erzeugt sie durch eine *horizontale Teilung zwei Substrukturen*, die sie, so lässt sich vermuten, miteinander in Beziehung setzt und als gleich ansieht.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In Helenas Argumentation lassen sich unterschiedliche begriffliche Facetten des mathematischen Begriffs der Paritäten erkennen. Auch wenn sie sich in ihrer Begründung, warum die Summe innerhalb der Darstellung S7 gerade ist, nicht konkret auf diese bezieht, zeigt sich, dass Helena durchaus eine *begriffliche Idee der Summenregel im Kontext der Division* hat. Sie nutzt eine allgemeine Regel, nämlich, dass die Addition zweier gerade Zahlen ebenfalls gerade ist. Konkret bedeutet dies, wenn zwei Zahlen durch zwei teilbar sind, so ist auch deren Summe durch zwei teilbar. Ob Helena diese Regel lediglich anwendet, oder ob sie diese begrifflich bereits durchdrungen hat, bleibt an dieser Stelle fraglich.

In der zweiten Deutung zeigt sich erneut eine *Idee der Bildung einer geometrischen H*älfte, indem durch die horizontale Teilung zwei gleiche Substrukturen erzeugt werden und demnach die Idee der Teilbarkeit durch zwei.

Einordnung des Argumentationsprozesses

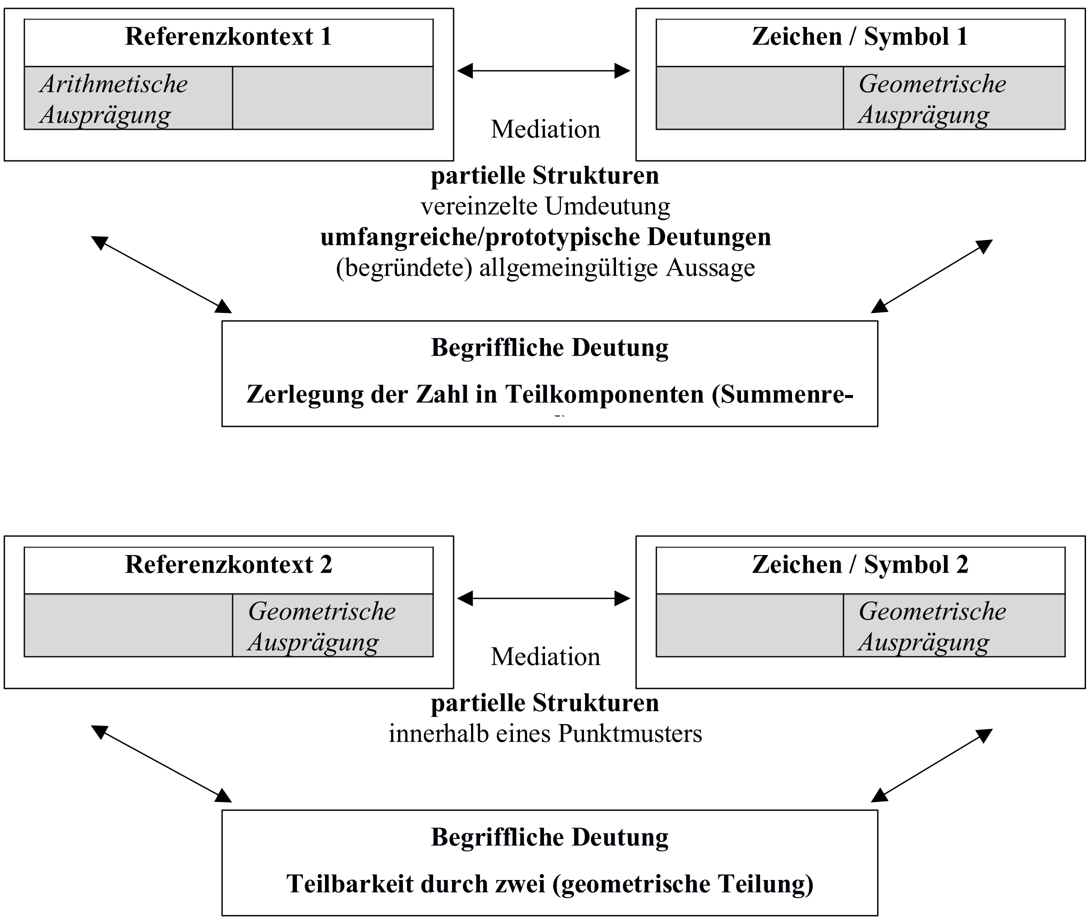


Abbildung 7.85: A2 - Phase 20: Zusammenfassung

Phase 21 (Z. 114 - 120): Helena deutet S1 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage

114.	**I**	**Und bei den anderen Aufgaben?**
115.	**H**	*[nimmt sich S1]* **Bei den sieht man, das könnte man so teilen** *[trennt die oberen und unteren roten Punkte waagrecht mit dem Finger]*, **da ist aber wieder eins** *[zeigt auf S1.14]* **und man kann das hier auch durchteilen** *[trennt die oberen und unteren blauen Punkte horizontal mit dem Finger]*, **deswegen ergibt das wieder eine gerade Zahl.**
116.	**I**	**Mhm. Und die beiden einzelnen Zahlen? Sind die gerade oder ungerade?**
117.	**H**	**Ungerade.**
118.	**I**	**Wo siehst du das?**
119.	**H**	**Weil man könnte das eigentlich durchteilen** *[trennt die obere und untere Reihe der blauen Punkte mit dem Finger]*, **zu, also drei, drei** *[zeigt auf S1.1 bis S1.3 und S1.5 bis S1.7]*. **Aber das würde dann eigentlich fies sein, weil das eine Kind, weil das hätte dann ja vier** *[zeigt auf S1.4 bis S1.1]* **und das Andere nur drei.**
120.	**I**	**Mhm. Okay.** *[schiebt S.1 Zur Seite]*

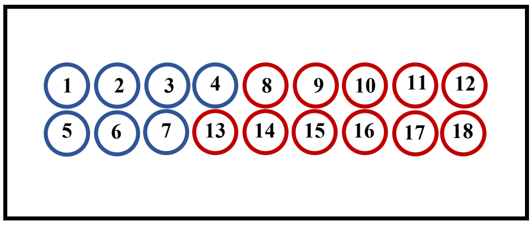


Abbildung 7.86: A2 - Phase 21: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

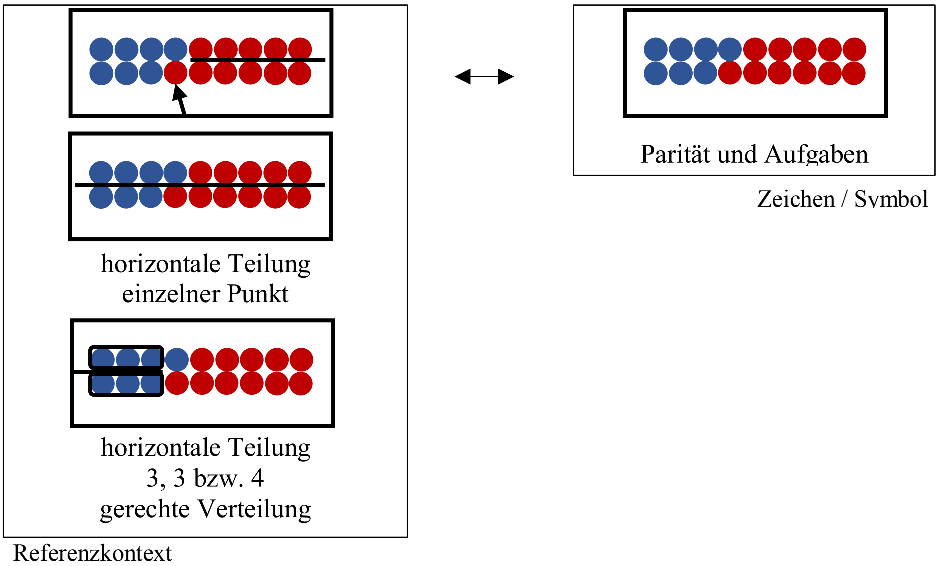


Abbildung 7.87: A2 - Phase 21: Rollenverteilung

Die Interviewerin leitet einen neuen Deutungs- und Argumentationsprozess ein, indem sie nach den „anderen Aufgaben“ (Z. 114) fragt. Sie stellt Helena dadurch erneut vor die Herausforderung, die noch verbleibenden vorliegenden Darstellungen hinsichtlich der sichtbaren Aufgaben zu deuten. Aufgrund des Interviewverlaufs geht damit implizit die Anforderung einher, diese auch hinsichtlich der Paritäten zu deuten. Die Deutung der verbleibenden Darstellungen hinsichtlich der sichtbaren Aufgaben sowie der Paritäten stellt demnach das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar. Durch die Wahl von S1 spezifiziert Helena das zu deutende Zeichen/Symbol und zeigt an, dass sich ihre Deutungen auf S1 beziehen.

Als Referenzkontext zieht Helena erneut die für die prototypischen Darstellungen bereits mehrfach genutzte Argumentation auf Grundlage der horizontalen Teilung heran. Zunächst zeigt sie die horizontale Teilung des roten Teils der Darstellung sowie den von ihr identifizierten einzelnen Punkt an (Z. 115). Auf Grundlage des Interviewverlaufs lässt sich rekonstruieren, dass es sich dadurch um eine ungerade Zahl handelt, auch wenn sie dies nicht expliziert. Dass es sich bei der dargestellten Summe und dementsprechend bei der durch das gesamte Punktmuster dargestellten Zahl um eine gerade Zahl handelt, begründet sie erneut aufgrund der möglichen horizontalen Teilung. Auf Nachfrage der Interviewerin (Z. 1116) werden die einzelnen Summanden als ungerade Zahlen klassifiziert (Z. 117) und die Sichtbarkeit des durch die blauen Punkte dargestellten Summanden begründet. Für ihre Argumentation zieht Helena erneut die horizontale Teilung des Punktmusters heran. In ihrer Erläuterung macht sie deutlich, dass man die Anordnung „eigentlich durchteilen“ (Z. 119) kann. Das Wort „eigentlich“ relativiert die Möglichkeit der Teilung. Dadurch zeigt Helena an, dass eine Teilung in diesem Fall nicht uneingeschränkt möglich ist. Dies begründet sie durch die konkrete Nennung der Anzahlen in Bezug zu einem lebensweltlichen Kontext. Ein Verteilen der Punkte auf zwei Kinder ist in diesem Fall nicht möglich, denn die Kinder würden nicht die gleiche Menge an Punkten erhalten, was Helena an dieser Stelle als „fies“ (Z. 119) beschreibt. Aus mathematischer Perspektive fokussiert Helena dabei die Notwendigkeit der Gleichmächtigkeit beider Teilmengen bei der Teilung durch zwei.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Das zu deutende Zeichen/Symbol stellt in diesem Fall die Deutung der geometrischen Anordnung S7 hinsichtlich der sichtbaren Aufgaben sowie der Paritäten dar. Dementsprechend handelt es sich in diesem Deutungs- und Argumentationsprozess um *ein geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol*.

Sie deutet dieses Zeichen/Symbol vornehmlich unter Ausnutzung geometrischer Merkmale der zu deutenden Anordnung. Sie nutzt in der Argumentation durchaus konkrete Zahlen, die aber zur genauen Beschreibung der geometrischen Anordnung beziehungsweise zur Präzisierung, warum die Teilung auf geometrischer Ebene nicht möglich ist, beitragen. Sie zieht somit einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

In diesem Argumentations- und Deutungsprozess deutet Helena erneut eine prototypische Darstellung. Auch dieses Mal deutet sie die *horizontale Teilung* und die damit verbundene Erzeugung von *Substrukturen* in die geometrische Anordnung hinein. Sie erzeugt innerhalb der Begründung der Parität der roten Zahlen sowie der Parität der Summe und der Parität der blauen Zahlen jeweils *zwei Substrukturen in Form der horizontalen Reihen* der Darstellung. Während ein Vergleich dieser Substrukturen im roten Teil der geometrischen Anordnung sowie der Substrukturen der gesamten geometrischen Anordnung implizit bleibt, expliziert Helena diesen für den blauen Teil der Darstellung. Sie beschreibt die einzelnen Substrukturen unter Bezugnahme auf die konkreten Punktanzahlen und vergleicht die beiden Anzahlen. Sie beschreibt die Substrukturen zunächst als drei und drei, macht aber deutlich, dass es eigentlich vier Punkte in der oberen Reihe sind. Da diese nicht identisch sind, klassifiziert sie diese indirekt als ungerade Zahl (Z. 122 & Z. 126).

Sie deutet demnach *partielle Strukturen* in die Darstellungen hinein, indem sie für die Argumentation relevante Substrukturen in Form von horizontalen Reihen erzeugt und diese indirekt sowie direkt miteinander vergleicht.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In diesem Deutungs- und Argumentationsprozess zeigt sich erneut eine begriffliche Idee der Paritäten, die der *Teilbarkeit durch zwei auf geometrischer Ebene* entspricht. Diese ist immer dann durchführbar, wenn die zu deutende geometrische Anordnung in zwei gleichmächtige Substrukturen geteilt werden kann.

Einordnung des Argumentationsprozesses

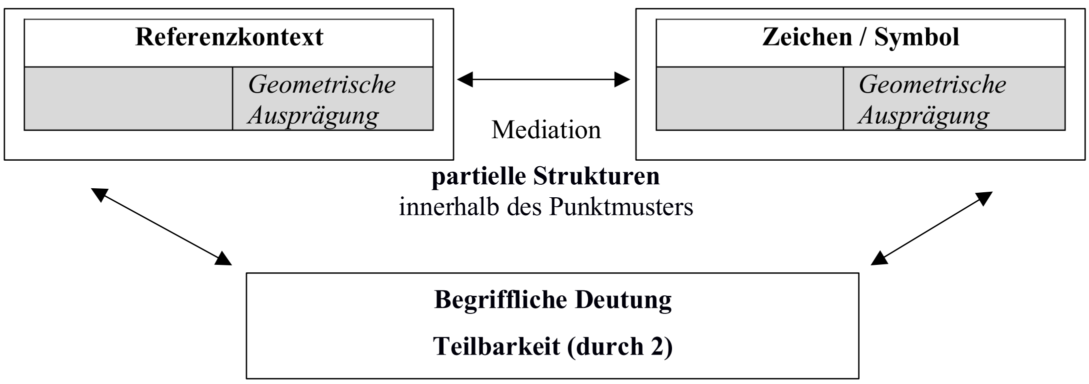


Abbildung 7.88: A2 - Phase 21: Zusammenfassung

Phase 22 (Z. 121 - 127): Helena deutet S4

121.	**H**	**Hmm** *[nimmt sich S4 und dreht es um 90°nach rechts]* **Hier sieht** *(...)* **man. Ok, eine Zahl davon** *(..)* **ja, die ist auch ungerade. Weil das hier sind fünf** *[zeigt auf S4.5 bis S4.1]* **und das fünf** *[zeigt auf S4.11 bis S4.15]*, **ich hatte ja eben gesagt, das hier, da kann man jedem fünf geben** *[zeigt mit je einer Hand auf die obere und untere Reihe der blauen Punkte von S.4]*, **aber in der Mitte sind ja wieder fünf** *[zeigt mit beiden Fingern an je ein Ende der mittleren Reihe der blauen Punkte von S4]* **und das kann man nicht teilen.**
122.	**I**	**Und bei den Roten?**
123.	**H**	*[dreht das S4 mit den roten Punkten nach oben]* **Da könnte man das auch nicht teilen, weil, also das sind schon mal acht** *[zeigt auf die oberen beiden Reihen der roten Punkte von S4]*, **das könnte man teilen** *[teilt die beiden roten Reihen horizontal]*, **aber hier sind wieder drei** *[zeigt auf S4.24 bis S4.26]*.
124.	**I**	**Mhm. Und insgesamt? Das Ergebnis?**
125.	**H**	**Ist** *(...)*
126.	**I**	**Ist das gerade oder ungerade?**
127.	**H**	*[dreht S4 ist den roten Punkten nach links]* **Das hier kann man schon mal teilen, das da und das hier** *[teilt die obere (S4.1 bis S4.5 & S4.16 bis S4.19) und untere Reihe (S4.6 bis S4.10 & S4.20 bis S4.23) des Punktmusters mit dem Finger]*. **Und das hier** *[wischt mit dem Zeigefinger über die unterste Reihe (S4.11 bis S4.15 & S4.24 bis S4.26) des Punktmusters von S4]*, *[zählt Punkte ab]* **das sind dann insgesamt wieder acht und das kann man durch vier teilen** *[zeigt auf S4.11 bis S4.15 & S4.24 bis S4.26]*. *[Interviewer schiebt S4 zur Seite]*.

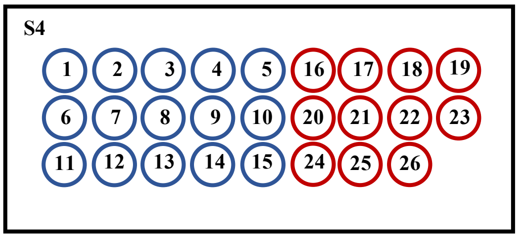


Abbildung 7.89: A2 - Phase 22: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

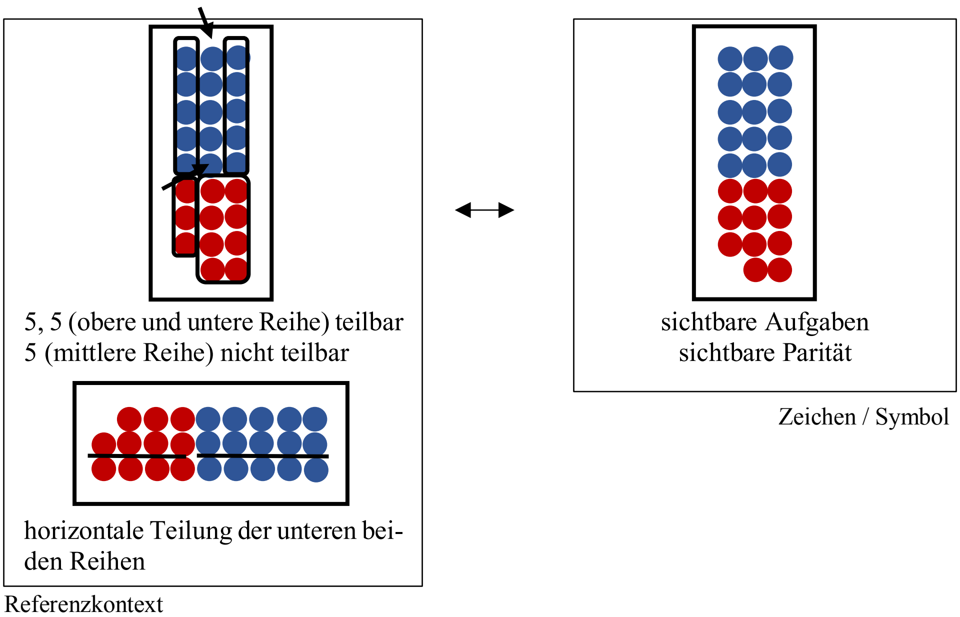


Abbildung 7.90: A2 - Phase 22: Rollenverteilung

Durch die Wahl von S4 zeigt Helena den Beginn eines neuen Deutungs- und Argumentationsprozess an. Die Fraglichkeit wird erneut weder von Helena noch von der Interviewerin expliziert, sondern leitet sich aus dem bisherigen Interviewverlauf und den an Helena gestellten Deutungsanforderungen ab. Sie steht vor der Herausforderung S4 hinsichtlich sichtbarer Aufgaben sowie gerader und ungerader Zahlen zu deuten. Demnach stellt dies das fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

Helena fokussiert zu Beginn ihres Deutungs- und Argumentationsprozesses zunächst die durch die blauen Punkte dargestellte Zahl, die sie als ungerade Zahl klassifiziert. Ihr Vorgehen zur Deutung der geometrischen Anordnung der blauen Punkte von S4 ähnelt dem Vorgehen ihrer Deutung von P5 hinsichtlich der Parität (Abb. 6.91). Dass es sich bei der geometrischen Anordnung um die Darstellung einer ungeraden Zahl handelt, begründet sie auch in dieser Deutung unter Nutzung des Anschauungsmittels. Dafür dreht sie zunächst das Punktmuster um 90° und betrachtet dies. Danach legt sie das Punktmuster auf den Tisch und führt ihre Argumentation fort. Dabei betrachtet sie zunächst die obere und die untere Reihe. Sie erläutert „da kann man jedem fünf geben" (Z.121). Im Anschluss daran überprüft Helena die Teilbarkeit der mittleren Reihe.

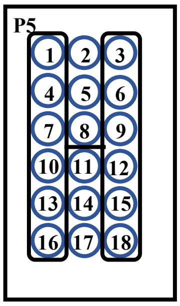


Abbildung 7.91: A2 - Phase 22 - Deutung P5

Auch die mittlere Reihe besteht aus fünf Punkten und ist demnach nicht teilbar. Eine nähere Begründung, warum keine Teilung durch zwei möglich ist, gibt Helena an dieser Stelle nicht. Auch ein Bezug zu der gesamten geometrischen Anordnung der blauen Punkte wird von Helena an dieser Stelle nicht explizit hergestellt. Aufgrund des Interviewverlaufs lässt sich dennoch vermuten, dass Helena die durch die blauen Punkte dargestellte Zahl als ungerade klassifiziert, da nicht alle Teilkomponenten durch zwei geteilt werden können.

Im Anschluss daran wird der Fokus von der Interviewerin auf die roten Punkte gelegt. Auch diese Zahl wird von Helena als nicht teilbar klassifiziert, dabei nennt sie die Parität nicht explizit. Im bisherigen Interviewverlauf zeigte sich aber, dass Helena nicht teilbar mit ungerade gleichsetzt. So ist davon auszugehen, dass sie damit auch an dieser Stelle die Parität ungerade impliziert. Zur Begründung der Parität zerlegt Helena die geometrische Anordnung erneut in Teilkomponenten und überprüft diese einzeln hinsichtlich der Parität. Zunächst zählt Helena die Punktanzahl der oberen beiden roten Reihen und kommt zu dem Ergebnis, dass es sich um acht Punkte handelt und dieser Teil teilbar ist. Sie begründet dies nicht weiter, zeigt aber mit dem Finger eine Teilung der beiden betrachteten Reihen an. Eine solche Teilung hat Helena im Verlauf des Interviews schon häufig als Argument genutzt, um zu begründen, warum eine dargestellte Zahl gerade ist. Sie fährt mit ihrer Begründung fort und sagt „aber hier sind wieder drei" (Z.124). Durch diese Aussage wird deutlich, dass diese Teilkomponente ausschlaggebend dafür ist, dass die durch die roten Punkte dargestellte Zahl nicht teilbar ist. Dies zeigt Helena durch das Wort „aber" an (Z. 124). Warum die Drei an dieser Stelle ausschlaggebend ist, dass die Zahl nicht teilbar ist, begründet Helena nicht weitergehend. Es lässt sich vermuten, dass Helena die Drei als ungerade Zahl klassifiziert und demnach auch die gesamte durch die roten Punkte dargestellte Zahl ebenfalls ungerade ist.

Nachdem Helena beide Summanden hinsichtlich ihrer Parität gedeutet und die Klassifizierung begründet hat, setzt die Interviewerin den Fokus auf das gesamte Punktmuster. Helena dreht dafür das Punktmuster um 90° und erzeugt Teilkomponenten die sie nacheinander hinsichtlich ihrer Parität überprüft. In einem ersten Schritt betrachtet Helena die unteren beiden Reihen des Punktmusters, die sie, analog zu den prototypischen Darstellungen, aufgrund der horizontalen Teilung als teilbar klassifiziert. Auch wenn Helena die Parität erneut nicht explizit benennt, ist aufgrund des Interviewverlaufs rekonstruierbar, dass sie diese Teilkomponente als gerade klassifiziert. Um die zweite Teilkomponente, die obere Reihe, hinsichtlich der Parität zu überprüfen, ermittelt Helena zunächst die Punktanzahl dieser Reihe und zwar acht. Sie beschreibt diese als durch vier teilbar. Dieses Vorgehen ist bereits aus dem Interviewverlauf bekannt und Helena nutzt als Divisor die Mächtigkeit der erzeugten Teilmengen, die bei der Teilung durch zwei entstehen. Welche Bedeutung die Parität der beiden Teilkomponenten für die gesamte geometrische Anordnung hat, bleibt von Helena unbenannt. Anscheinend nutzt Helena erneut die von ihr bereits getätigte Aussage, dass die Summe von zwei geraden Zahlen ebenfalls gerade ist.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Helena deutet im obigen Interviewausschnitt die geometrische Anordnung S4 hinsichtlich sichtbarer Aufgaben beziehungsweise hinsichtlich der Parität. Demnach handelt es sich hierbei um ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol*.

In dem von Helena genutzten Referenzkontext lassen sich unterschiedliche Ausprägungen herausarbeiten. Zunächst nutzt Helena zur Begründung der Parität der durch die blauen Punkte dargestellten Zahl einen eher *geometrisch geprägten Referenzkontext*. Sie nutzt zunächst das geometrische Muster in seiner Reihenstruktur und beschreibt die obere und untere Reihe unter Bezugnahme auf die konkrete Punktanzahl. Aufgrund der Nennung der genauen Punktanzahl macht Helena deutlich, dass es sich hierbei um zwei gleiche Reihen handelt. Aufgrund der Nennung der konkreten Zahlen ist aber auch nicht auszuschließen, dass Helena diese Deutung auf Grundlage der genannten Zahlen tätigt. Die mittlere Reihe deutet Helena dann eher arithmetisch. Auch hier ermittelt sie die genaue Punktanzahl und zwar erneut fünf. Da Helena nun nicht weiter auf die Punktdarstellung bezugnimmt, sondern von der Punktanzahl darauf schließt, dass man fünf nicht teilen kann, nutzt Helena vermutlich ihr

Faktenwissen über die Parität der Zahl Fünf. Demnach zieht Helena zur Deutung sowohl einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* als auch einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* heran. Eine eher *arithmetische Ausprägung* des Referenzkontext lässt sich bei der Deutung der durch die roten Punkte dargestellten Zahlen erkennen. Sie ermittelt die genauen Punktanzahlen beider Teilkomponenten. Die Nennung der Teilbarkeit durch zwei der Zahl Acht unterstützt Helena mit einer Geste, welche die Teilung der Reihen darstellt. Bei der Zahl Drei nutzt sie vermutlich Faktenwissen, da keine weitere Begründung genannt wird oder erkennbar ist. Eine konkrete Bezugnahme auf das Punktmuster bleibt an dieser Stelle aus. In ihrer Argumentation bezüglich der gesamten Darstellung zeigt sich erneut ein sowohl *geometrisch geprägter* als auch *arithmetisch geprägter Referenzkontext*. Zur Begründung der Teilbarkeit der ersten Teilkomponente nutzt Helena ausschließlich geometrische Merkmale der Anordnung, indem sie diese horizontal teilt. Sie nutzt somit einen *geometrisch geprägten Referenzkontext*. Zur Begründung der zweiten Teilkomponente ermittelt Helena hingegen die genaue Punktanzahl und begründet die Parität unter Bezugnahme auf eine konkrete Rechnung. Demnach zieht sie einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* heran.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man nun die strukturellen Deutungen Helenas in diesem Deutungs- und Argumentationsprozess, so muss unterschieden werden in den Prozess der Deutung des roten beziehungsweise blauen Teils des Punktmusters.

In dem Deutungs- und Argumentationsprozess des blauen Teils der geometrischen Anordnung zeigt sich, dass Helena diese zunächst in *Teilkomponenten zerlegt und zwei Struktureinheiten* bildet. Denn ihre Betrachtung gilt zunächst nur den äußeren beiden Reihen des betrachteten Teils (vgl. Abb. 7.92). Diese beschreibt sie als „hier sind fünf und hier sind fünf“ (Z. 121) und macht dadurch deutlich, dass es sich dabei um *zwei Substrukturen* in Form von jeweils zwei Fünferreihen handelt. Bei einer solchen Teilung durch zwei „kann man jedem fünf geben“ (Z. 121). Implizit bleibt an dieser Stelle, dass es sich um zwei gleiche Substrukturen handelt und dadurch eine Teilbarkeit gegeben ist. Aufgrund der Aussage, dass jeder fünf bekommt (Z. 121) ist aber anzunehmen, dass Helena bewusst ist, dass es sich hierbei um zwei gleiche Substrukturen handelt, denn sie hat beide Substrukturen als „fünf“ beschrieben. Ob Helena diese Deutung eher auf arithmetischer Ebene oder geometrischer Ebene tätigt, ist nicht einwandfrei nachvollziehbar. Die zweite von Helena gedeutete Teilkomponente ist die mittlere Reihe, die als

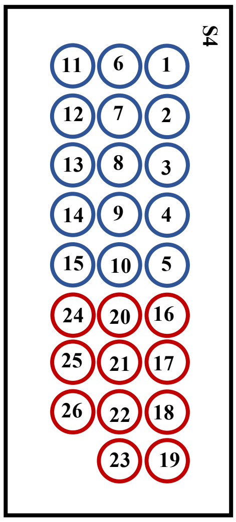


Abbildung 7.92: A2 - Phase 22 - Deutung S4

zweite Struktureinheit von ihr gedeutet wird. Sie beschreibt diese als „wieder fünf" (Z. 121) und sagt „das kann man nicht teilen" (Z. 121). An dieser Stelle ist anzunehmen, dass Helena auf ein Faktenwissen zurückgreift und weiß, dass es sich bei der Fünf um eine nicht durch zwei teilbare und demnach ungerade Zahl handelt.

Auch bei der Deutung der durch die roten Punkte dargestellten Zahl zerlegt Helena die geometrische Anordnung zunächst in Teilkomponenten. Dabei betrachtet sie erst die beiden horizontalen roten Viererreihen und benennt die konkrete Punktanzahl, nämlich acht. Anschließend begründet sie, dass die Acht durch vier teilbar ist (Z. 123). Dabei nutzt sie erneut die Mächtigkeit einer Teilmenge bei der Erzeugung zweier Teilmengen als Divisor. Durch eine Geste verdeutlicht Helena, dass auch an dieser Stelle eine geometrische Teilung der Punktdarstellung möglich ist. Dafür zerlegt Helena die Darstellung in zwei Substrukturen in Form von Viererreihen, deren Gleichheit lediglich über einen Vergleich dieser überprüft werden kann. Dies expliziert Helena an dieser Stelle aber nicht. Die Rekonstruktion dieser Deutung basiert demnach auf Helenas Geste in Kombination mit den Erkenntnissen hinsichtlich Helenas Deutung aus der bisherigen Analyse.

Auch bei der Deutung und Begründung der Parität des Ergebnisses beziehungsweise der gesamten geometrischen Anordnung ist die Zerlegung Ausgangspunkt ihrer Argumentation. Sie betrachtet zunächst die horizontalen Reihen zwischen S4.1 und S4.19 sowie S4.6 und S4.22. Diese klassifiziert sie als teilbar. Auch hier führt Helena eine horizontale Teilung durch und beschreibt beide Reihen als je eine Substruktur: „Das hier kann man schonmal teilen, das da und das hier" (Z. 127). Eine Gleichheit der Reihen expliziert Helena an dieser Stelle nicht. Dennoch ist aufgrund des bisherigen Interviewverlaufs anzunehmen, dass Helena einen Vergleich der beiden Reihen tätigt und diese als gleiche Teilmengen betrachtet. Im Anschluss deutet sie die Reihe zwischen S4.11 und S4.26. Hierfür zählt Helena die Punkte und beschreibt, diese als teilbar „das kann man durch vier teilen" (Z. 127). Diese Versprachlichung der Teilbarkeit ist aus dem Interviewverlauf bekannt und zeigt, dass Helena zwei gleichmächtige Mengen mit je vier Elementen erzeugt. Sie ermittelt demnach operativ das Ergebnis.

Ausgehend von *komplexen Deutungen* in Form einer Zerlegung des Zeichens/Symbols deutet Helena *partielle Strukturen* in die Punktdarstellung hinein, indem sie operative Handlungen durchführt und einzelne Substrukturen erzeugt, die sie miteinander vergleicht. Gleichzeitig zeigt sich, dass Helena zumindest zum Teil auf Grundlage der konkreten Punktanzahl argumentiert und daher auch *konkret-dingliche Deutungen* im Argumentationsprozess rekonstruierbar sind. Diese führen zu Deutungen *partieller Strukturen* auf numerisch-symbolischer Ebene, indem sie mit konkreten Zahlen operiert und die ermittelte Punktanzahl acht teilt.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In den von Helena getätigten Deutungen und in ihren Argumentationen zeigt sich, dass Helena ihre Argumentation immer auf die *Teilbarkeit durch zwei* stützt. Diese aber auf unterschiedliche Art und Weise deutet. Sie deutet diese zum Teil aufgrund einer eher geometrischen Teilung, indem sie zwei Substrukturen in die Darstellung hineindeutet. Zum Teil sind ihre Deutungen aber auch auf konkrete Aufgaben zurückzuführen, wie zum Beispiel „das sind dann insgesamt acht und das kann man durch vier teilen“ (Z. 127). Betrachtet man die begriffliche Deutung, so zeigt sich, dass Helena nicht nur die Teilbarkeit durch zwei zur Argumentation heranzieht. Sie nutzt auch eine weitere Facette, um die Parität zu begründen. Ausgangspunkt ist nämlich die Zerlegung der geometrischen Anordnung. Sie überprüft die Teilbarkeit der einzelnen Teilkomponenten und nutzt demnach die *Teilbarkeitsrelation in Kombination mit der Addition*. Da beide (durch zwei) teilbar sind, ist auch das gesamte Punktmuster (durch zwei) teilbar und demnach gerade.

Einordnung des Argumentationsprozesses

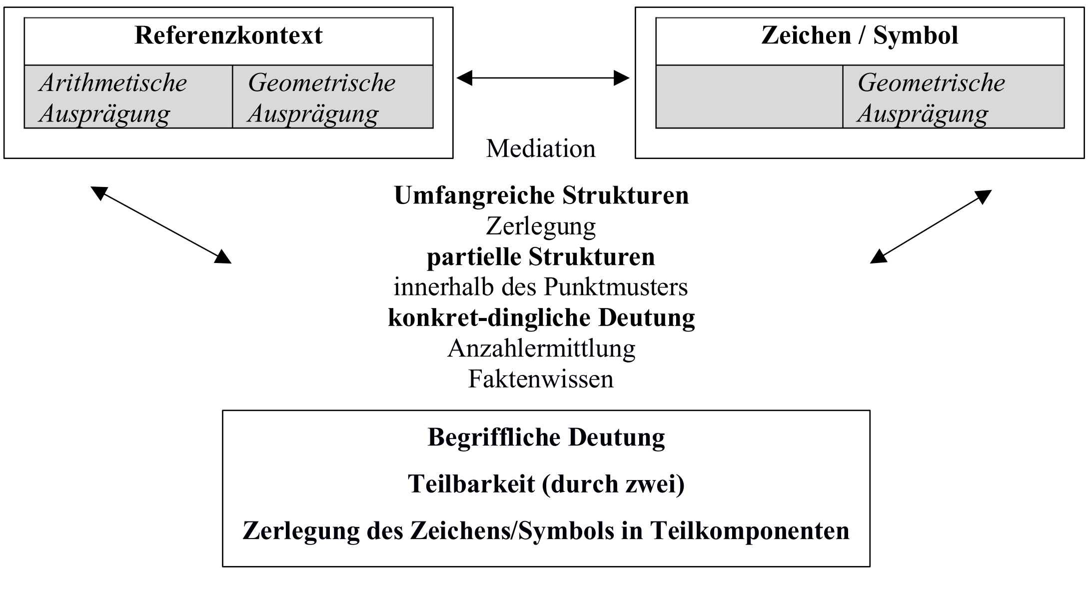


Abbildung 7.93: A2 - Phase 22: Zusammenfassung

Phase 23 (Z. 127 - 132): Helena deutet S5 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage

127.	**H**	*[Kind nimmt sich S5]* **Das ist ja dann die Schwere, das sieht man nicht sofort.**
128.	**I**	**Warum?**
129.	**H**	**Weil, die sind ja wie bei dem Anderen so durcheinander** *[kreist mit dem Finger das Punktmuster ein]*, **da kann man das halt nicht sofort sehen.** *[zählt die roten Punkte ab und tippt dabei die jeweiligen Punkte an] elf*, **also das Rote ist schonmal ne ungerade Zahl** *[zeigt auf die roten Punkte von S5]*. *[zählt die blauen Punkte ab und tippt dabei die jeweiligen Punkte an und murmelt dabei] [unverständlich]* **da müsste doch die fünfzehn rauskommen.**
130.	**I**	**Kann man das auch an den Punktmustern sehen?**
131.	**H**	**Hmmm, nicht so, also man sieht, dass da** *[zeigt auf die blauen Punkte von S5]* **mehr ist, aber man sieht nicht richtig, dass es ungerade Zahlen sind sofort.**
132.	**I**	**Ok.** *[schiebt S5 Zur Seite]*

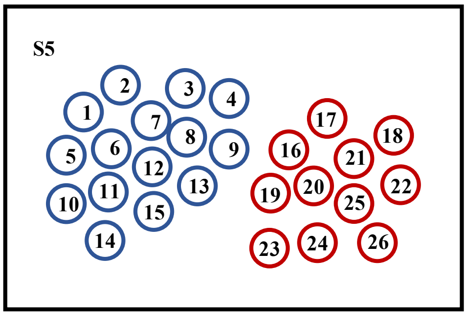


Abbildung 7.94: A2 - Phase 23: Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

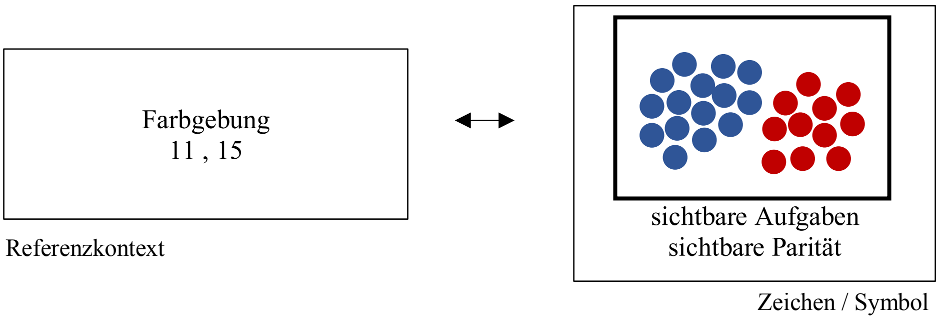


Abbildung 7.95: A2 - Phase 23: Rollenverteilung

Helena leitet den neuen Deutungs- und Argumentationsprozess ein, indem sie die letzte übrig gebliebene Darstellung S5 nimmt, um diese zu deuten (Z. 127). An dieser Stelle wird die Fraglichkeit nicht weiter expliziert, sondern ist durch vorherige Fraglichkeiten und den Interviewverlauf geprägt. Demnach deutet Helena nun S5 hinsichtlich sichtbarer Aufgaben sowie Paritäten. Dies stellt in dieser Interviewphase das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar. Direkt zu Beginn schätzt Helena die Deutung der Darstellung als schwer ein (Z. 127), denn bei dieser Darstellung handelt es sich nicht um eine strukturierte geometrische Anordnung, vielmehr sind die Punkte ungeordnet und lediglich nach Farben sortiert. Dieses Punktmuster ähnelt P10, welches Helena durch eine Anzahlermittlung in Zweierschritten gedeutet hat. So ist es auch an dieser Stelle nicht verwunderlich, dass Helena zur Deutung des Punktes die konkreten Punktanzahlen elf und 15 ermittelt (Z. 129). Auf die Nachfrage, ob man dies bei diesem Punkten auch sehen kann (Z. 130), antwortet Helena, dass man lediglich sehen kann, dass es sich um mehr rote als blaue Punkte handelt, aber nicht, dass es zwei ungerade Zahlen sind (Z. 131). Demnach klassifiziert Helena die Zahlen Elf und 15 ohne weitere Begründung als ungerade.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Helena deutet in diesem argumentativen Deutungsprozess die geometrische Darstellung S5 hinsichtlich der sichtbaren Aufgaben beziehungsweise der Parität. Hierbei handelt es sich um die Deutung einer geometrischen Darstellung und dementsprechend um ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol*.

Dieses deutet sie, indem sie die konkreten Anzahlen der einzelnen Punkte ermittelt, konkret benennt und auf Grundlage dessen hinsichtlich der Parität klassifiziert (Z. 129). Dementsprechend handelt es sich um einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Da Helena an dieser Stelle das Anschauungsmittel als *Mittel zur Zahldarstellung* deutet, nutzt Helena *konkret-dingliche Deutungen* der Veranschaulichung. Die Parität der Zahlen Elf und 15 benennt Helena zwar, begründet diese aber nicht weiter, so dass keine weiteren strukturellen Deutungen herausgearbeitet werden können (Z. 129 & Z. 130).

Einordnung des Argumentationsprozesses

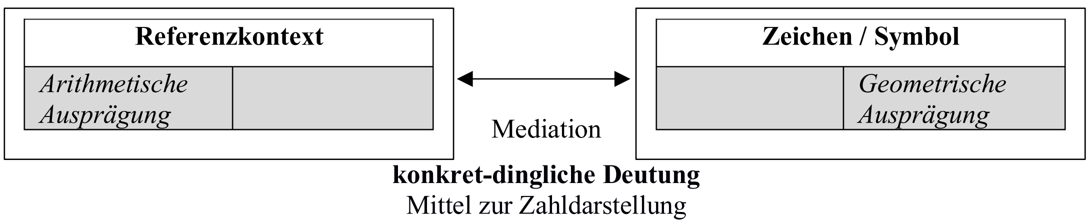


Abbildung 7.96: A2 - Phase 23: Zusammenfassung

Phase 24 (Z. 133 - 138): Helena ordnet ähnliche Punktmuster
Phase 25 (Z. 139 - 146): Helena begründet, warum die Summe von 109 + 109 gerade ist

Phase 24 (Z. 133 - 138): Helena ordnet ähnliche Punktmuster

133.	**I**	**Ok. Gibt es hier Punktmuster, die sich ähnlich sind?**
134.	**H**	**Die beiden** *[schiebt S1 und S7 zusammen]* **sind sich sehr ähnlich. Nur, dass, das** *[zeigt auf S1]* **ist so als würde hier** *[zeigt auf S7.3 und S7.10]* **und hier abgeschnitten worden sein und hier wäre** *[zeigt nicht sichtbar auf die Mitte von S7]* **hier** *[zeigt unkenntlich auf das Punktmuster]* **hier abgeschnitten.**
135.	**I**	*[schiebt S1 und S7 vor das Kind]* **Jetzt sagst du, das** *[zeigt auf S1]* **ist da** *[zeigt auf S7]* **drin.** *(..)* **Und bei beiden, sieht man da gut die ungeraden Zahlen?**
136.	**H**	**Ja, weil ich habe** *[unverständlich] [teilt die obere und untere Reihe von S1 von links nach rechts mit dem Finger]*, **das könnte man teilen, aber hier** [zeigt abwechselnd auf S1.4 und S1.14] **ist ja immer noch eins** *(..)* **dazu.**
137.	**I**	**Aber warum kann ich das denn bei beiden machen** *[zeigt auf S1 und S7]*, **obwohl das** *[zeigt auf S7]* **viel größer ist?**
138.	**H**	**Weil hier** *[zeigt auf S7.7 und S7.24]* **ist das auch so, man** *[wischt ansatzweise mit dem Finger über das Punktmuster von S7]* **könnte das teilen, nur halt das hier ist wieder ein Blauer zu viel** *[zeigt auf S7.7]* **und hier** *[zeigt auf S7.24]* **wieder ein Roter zu viel.**

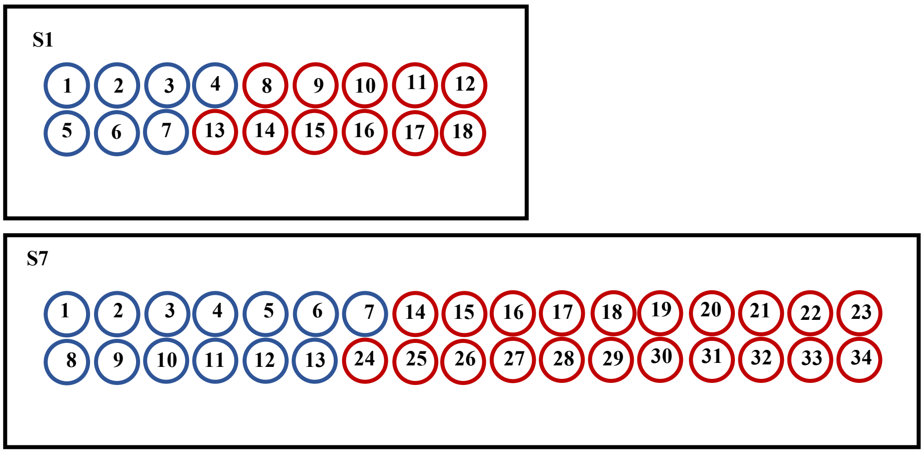


Abbildung 7.97: A2 - Phase 24: Gedeutete Darstellungen

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

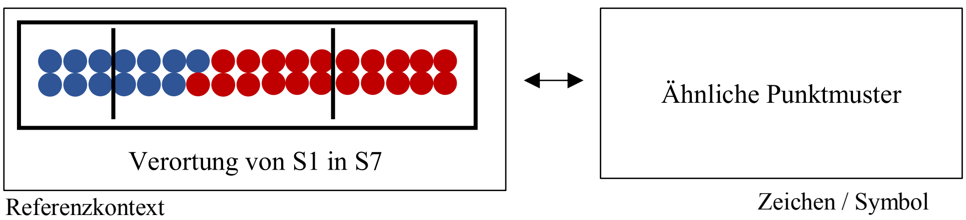


Abbildung 7.98: A2 - Phase 24: Rollenverteilung I

Nachdem Helena alle Punkdarstellungen hinsichtlich der Paritäten sowie der sichtbaren Aufgaben gedeutet hat, stellt die Interviewerin Helena nun vor die Herausforderung ähnliche Punktmuster zu finden (Z. 133). Demnach stellt die Frage nach ähnlichen Punktmustern das für Helena zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Helena sieht eine Ähnlichkeit in den Punktdarstellungen S1 und S7, somit in den beiden prototypischen Darstellungen und klassifiziert diese sogar als „sehr ähnlich“ (Z. 134). Diese Ähnlichkeit begründet Helena, indem sie die Darstellung S1 in die Darstellung S7 hineindeutet (Z. 134). Sie beschreibt S1 als abgeschnittene Variante von S7 und zeigt, an welchen Stellen das Punktmuster S7 abgeschnitten werden muss, um S1 zu generieren.
Im Anschluss daran fokussiert die Interviewerin erneut die Sichtbarkeit der ungeraden Zahlen in beiden Punktdarstellungen und macht fraglich, ob bei beiden Punktdarstellungen gut sichtbar ist, dass es sich um ungerade Zahlen handelt (Z. 135). Dies stellt an dieser Stelle das neue zu deutende Zeichen/Symbol dar.

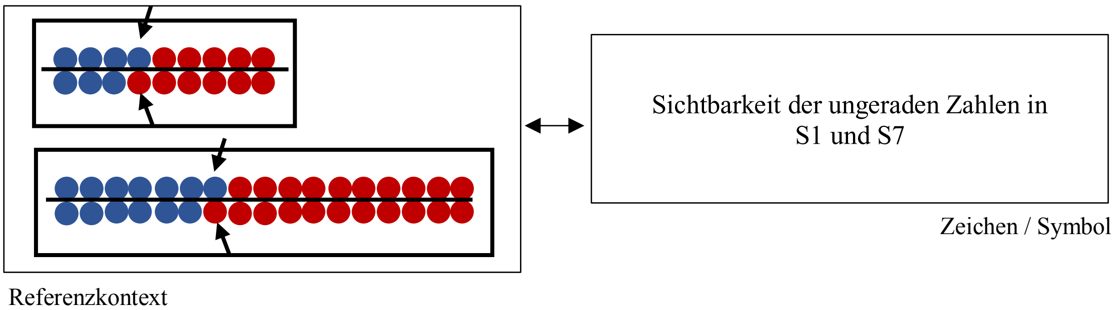


Abbildung 7.99: A2 - Phase 24: Rollenverteilung II

Die Sichtbarkeit der ungeraden Zahlen von S1 begründet sie erneut aufgrund der horizontalen Teilbarkeit des Punktmusters und dem Punkt „zu viel“ (Z. 138). Auch in dieser Argumentation unterstützt Helena ihre Äußerung und zeigt durch eine Handlung die waagrechte Teilung und die Punkte, die in ihrer Deutung „zu viel“ (Z. 138) sind. Im Anschluss daran fordert die Interviewerin eine Begründung, warum dies bei beiden Punkten möglich ist, obwohl S7 ein viel größeres Punktmuster ist. Zur Begründung dessen vollzieht Helena eine analoge Argumentation für S7 durch, indem sie die horizontale Teilung innerhalb der Darstellung S7 deutet und darauf verweist, dass sowohl im blauen als auch im roten Teil jeweils ein Punkt „zu viel“ (S. 138) sei.

Analyseschritt 1b: Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts
Die von der Interviewerin zunächst fraglich gemachte Ähnlichkeit der Punktdarstellungen (Z. 134) bezieht sich konkret auf die geometrischen Anordnungen und Ähnlichkeiten zwischen diesen Veranschaulichungen, so dass es sich hierbei um ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol* handelt. Helena wählt die Punktmuster S1 sowie S7 aus und begründet die Ähnlichkeit aufgrund dessen, dass S1 in S7 enthalten ist. Demnach argumentiert Helena an dieser Stelle auf Grundlage dessen, dass die geometrische Anordnung S1 Teil der geometrischen Anordnung S7 ist. Demnach zieht Helena zur Argumentation einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran.

Auch in dem zweiten Deutungs- und Argumentationsprozess lässt sich ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol* rekonstruieren, denn die Interviewerin fokussiert innerhalb der Fraglichkeit die Sichtbarkeit der ungeraden Zahlen in den Punktdarstellungen (Z. 135). Zur Bearbeitung der Fraglichkeit bezieht Helena sich erneut auf die geometrische Teilbarkeit der Punktdarstellungen und zieht demnach einen *geometrischen Referenzkontext* in ihrer Argumentation heran.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Zur Begründung der Ähnlichkeit der Punktdarstellungen verortet Helena die Punktdarstellung S1 in der Punktdarstellung S7 und zwar unter Berücksichtigung der Farbgebung (Z. 134). Konkret bedeutet dies, sie verändert S7 durch „abschneiden" des Punktmusters, um S1 zu erzeugen. Ein solches Vorgehen ist nur möglich, wenn alle wesentlichen strukturellen Merkmale der Darstellungen identisch sind. Inwiefern Helena in ihrer Deutung (alle) wesentlichen strukturellen Merkmale der Darstellungen berücksichtigt, kann nicht gesagt werden. Sie deutet demnach aufgrund des Herstellens von *Beziehungen zwischen Darstellungen partielle Strukturen* in die Darstellung hinein.

In der von Helena getätigten Argumentation hinsichtlich der Sichtbarkeit der ungeraden Zahlen lässt sich abermals die Deutung von Strukturen erkennen. Analog zu den bisherigen Deutungs- und Argumentationsprozessen im Kontext prototypischer Darstellungen erzeugt Helena durch eine horizontale Teilung der geometrischen Anordnung zwei Substrukturen in Form der horizontalen Punktreihen (Z. 136). Diese müssen im Falle von geraden Zahlen gleich sein. In den Deutungen und Argumentationen der vorliegenden Interviewphase zeigt sich, dass Helena diese horizontale Erzeugung von Substrukturen für den roten und blauen Teil der Darstellung durchführt. In beiden Fällen können zwei gleichartige Substrukturen erzeugt werden. Vielmehr identifiziert Helena jeweils einen Punkt „zu viel". Dieses Merkmal stellte bereits in den vorangegangenen Argumentationen bei der Begründung der Parität von (annähernd) prototypischen Darstellungen das Entscheidungskriterium dar. Warum es sich bei den von Helena erzeugten Substrukturen um eine Gleichheit handelt, bleibt von Helena erneut ungenannt.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In Helenas Deutungen bezüglich der ungeraden Zahlen der Punktdarstellungen S1 sowie S7 lässt sich an dieser Stelle erneut eine Fokussierung der Teilbarkeit durch zwei auf geometrischer Ebene darstellen. In ihren Deutungen zeigt sich ein Verständnis, dass eine geometrische Teilung durch zwei immer dann möglich ist, wenn zwei gleiche Substrukturen erzeugt werden können. Dabei berücksichtigt Helena an dieser Stelle die aus mathematischer Sicht notwendige und durch die prototypische Darstellung durchaus intendierte horizontale Teilung durch zwei. Unberücksichtigt bleibt weiterhin, dass ihre Argumentation nur dann tragfähig ist, wenn die Strukturen innerhalb der Substrukturen identisch ist beziehungsweise immer zwei Punkte der beiden Substrukturen genau übereinanderliegen. Dennoch kann aufgrund des bisherigen Interviewverlaufs angenommen werden, dass es sich um gleichmächtige Mengen handeln muss, denn in Phase 21 macht Helena deutlich, dass sie sich bewusst ist, dass es sich um gleichmächtige Mengen handeln muss.

Einordnung des Argumentationsprozesses

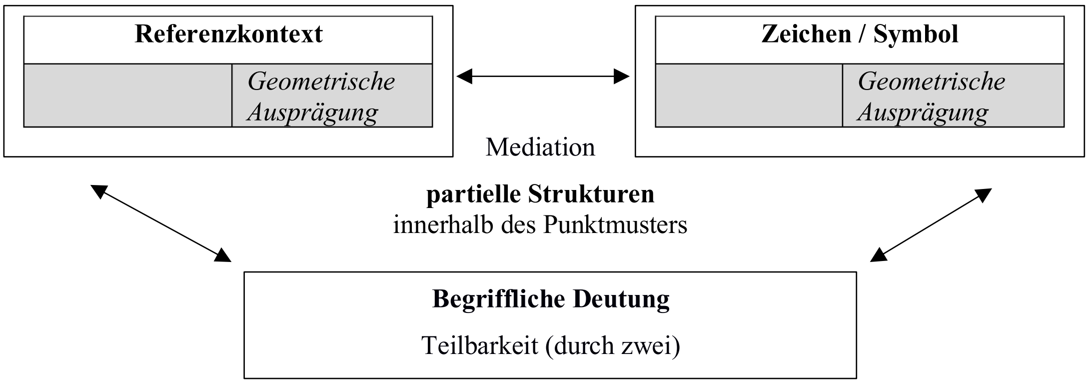


Abbildung 7.100: A2 - Phase 24: Zusammenfassung

Phase 25 (Z. 139 - 146): Helena begründet, warum die Summe von 109 + 109 gerade ist

139.	**I**	**Mhm.** *(..)* **Jetzt hast du mir gerade erklärt, wie das bei neun plus neun ist. Wie ist das denn bei hundertneun plus hundertneun?** *(..)* **Darfst du auch aufschreiben, wenn du möchtest.** *[schiebt S1 und S7 an den Rand]*
140.	**H**	**Jetzt nehme ich wieder den Zettel** *[nimmt sich ihr bereits beschriebenes Blatt]*
141.	**I**	**Klar.**
142.	**H**	*[notiert 109+109=] [unverständlich] [notiert 218 als Ergebnis]* **Ist auch wieder ne gerade Zahl. Weil wenn man neun plus neun rechnet, kommt ja achtzehn raus, dann muss man einfach nur neun plus neun, das sind dann achtzehn** *[zeigt dies in der notierten Rechnung]* **und dann zehn plus zehn sind ja zwanzig** *[tippt jeweils auf die 10 von 109 und 2 von 218]*, **aber und dann muss man von der zwanzig eigentlich nur die Zwei hinschreiben und dann die Achtzehn.**
143.	**I**	**Und bei zweihundertneun plus zweihundertneun?**
144.	**H**	**Da kommt das gleiche raus, nur das** *[notiert 209+209]*, **dass es dann ähm vierhun** *[notiert 4 im Ergebnis, setzt an um die zweite Zahl zu schreiben]*, **ne, vierhundertachtzehn** *[notiert 18 im Ergebnis]* **sind.**
145.	**I**	**Warum geht das denn auch bei so großen Zahlen?**
146.	**H**	**Ähm, weil man, das kommt ja neun plus neun sind ja wieder achtzehn** *[notiert 9+9=18]* **und dann muss man die einfach** *[zeigt unter die 18]* **und zwanzig plus zwanzig ist ja vierzig** *[zeigt jeweils unter 20 von 209 und notiert 40]* **und dann muss man nur von der null eine eins machen** *[korrigiert die 0 der 40 zu einer 1]* **und dahinter noch eine acht** *[notiert die 8, so dass 418 entsteht]* **hinschreiben.**

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

gerade 9 + 9 = 18 10 + 10 = 20 2 und 18 hinschreiben → 218	↔	109 + 109 „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen lassen sich immer durch zwei teilen.“
Referenzkontext		Zeichen / Symbol

Abbildung 7.101: A2 - Phase 25: Rollenverteilung I

Während in den vorherigen Argumentations- und Deutungsprozessen vornehmlich Punktdarstellungen in Frage gestellt wurden, bezieht die Interviewerin sich nun auf ein von Helena im Verlauf des Interviews angegebenes Beispiel zur Begründung der allgemeingültigen Aussage, nämlich die Aufgabe „neun plus neun“. Sie macht nun fraglich, wie sich dies bei „109 plus 109“ verhält (Z. 139). Hierbei bleibt der Bezug zur allgemeingültigen Aussage allerdings implizit. Dabei offeriert sie Helena nochmals die Möglichkeit Notizen anzufertigen (Z. 139). Demnach stellt die allgemeingültige Aussage im Kontext der Aufgabe „109 plus 109“ das fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

Sie notiert zunächst ‚109 + 109 =‘. Zur Berechnung der Aufgabe rechnet Helena zunächst die Teilaufgabe ‚neun plus neun gleich 18‘ und notiert die ‚18‘ im Ergebnis. Im Anschluss daran rechnet sie ‚zehn plus zehn gleich 20‘ und erläutert, dass man von der 20 lediglich die Zwei hinschreiben muss und notiert die Zwei vor der 18 (Z. 142). Diese Vorgehensweise von Helena ist durchaus nachvollziehbar. Sie scheint zunächst die Einerstelle zu betrachten und im Anschluss daran die Zehner- und Hunderterstelle in den Blick zu nehmen. Inwiefern die Stellenwerte von Helena mitgedacht werden, kann an dieser Stelle nicht gesagt werden.

9 + 9 = 18 20 + 20 = 40 → 418	↔	209 + 209 „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen lassen sich immer durch zwei teilen.“
Referenzkontext		Zeichen / Symbol

Abbildung 7.102: A2 - Phase 25: Rollenverteilung II

Die Interviewerin fragt aufbauend auf die getätigte Argumentation, wie sich dies bei der Aufgabe „209 plus 209“ verhält. Helena notiert ‚209 + 209 =‘ und argumentiert, dass da das Gleiche rauskommt und nutzt die sprachliche Markierung „nur das“ (Z. 144), um nun einen Unterschied kenntlich zu machen. Durch ihre Verbalisierung und die Notationsweise scheint es, als möchte sie zunächst etwas anderes als 418 notieren, korrigiert sich dann aber oder entscheidet sich um und notiert 418. Wie sie zu dem Ergebnis kommt bleibt an dieser Stelle unklar und wird von Helena erst auf die Nachfrage, warum dies „denn auch bei so großen

Zahlen“ (Z. 145) geht, begründet. Hierfür notiert Helena zunächst die Aufgabe ‚9 + 9 = 18‘. Im Anschluss daran rechnet sie „zwanzig plus zwanzig ist ja vierzig“ (Z. 146) und zeigt dabei jeweils unter die ‚20‘ in ihrer notierten Rechnung und schreibt ‚40‘ auf das Blatt. Nun erläutert sie, dass man nun aus der ‚0‘ der ‚40‘ eine ‚1‘ machen muss und „dahinter noch eine acht“ (Z. 145) schreiben muss. So kommt Helena nun erneut zu dem Ergebnis 418. In dieser Argumentation stellt Helena keinerlei Bezug zu den Paritäten her.

Analyseschritt 1a: Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Sowohl in dem fraglich gemachten Zeichen/Symbolen, nämlich der Aufgaben ‚109 plus 109‘ sowie ‚209 plus 209‘ im Kontext der allgemeingültigen Aussage werden ausschließlich konkrete Zahlen fokussiert, so dass es sich hierbei um *arithmetisch geprägte Zeichen/Symbole* handelt.

Auch in Helenas Argumentationen stehen konkrete Zahlen und Rechnungen im Fokus, so dass sich ein *arithmetisch geprägter Referenzkontext* rekonstruieren lässt.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Helena stellt in der Argumentation keinen begründeten Bezug zu den Paritäten her, so dass sich keine strukturellen Deutungen mit Blick auf die zu begründende Aussage zeigen.

Dennoch nutzt Helena durchaus Strukturen in ihrer Rechnung, denn sie zerlegt alle Summanden stellengerecht. Zunächst in die Einerstellen und im Anschluss betrachtet sie die Zehner- und Hunderterstellen. Dabei nennt sie die Stellenwerte die sie betrachtet nicht und erläutert auch nicht, warum sie von „zehn“ beziehungsweise „zwanzig“ spricht, obwohl eigentlich die „hundert“ beziehungsweise „zweihundert“ betrachtet werden. Da Helena das Ergebnis aber korrekt ermittelt ist davon auszugehen, dass sie die Stellenwerte implizit mitdenkt, oder dass Helena eine Art Algorithmus zur Berechnung anwendet. Da es sich hierbei aber nicht um strukturelle Deutungen im Kontext der Paritäten handelt, bleiben diese bei der Einordnung unberücksichtigt.

Einordnung des Argumentationsprozesses

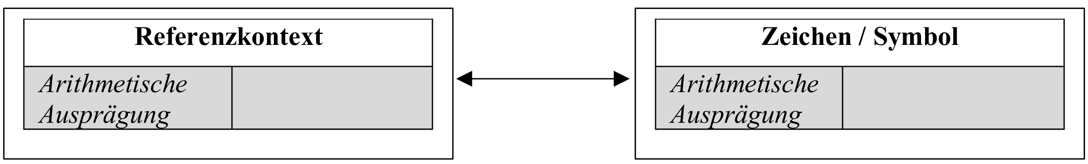


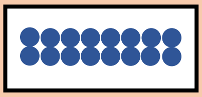
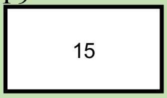
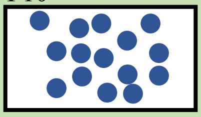
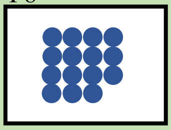
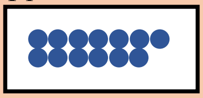
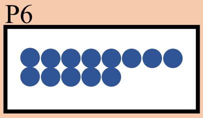
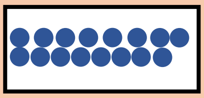
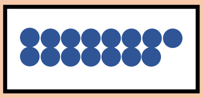
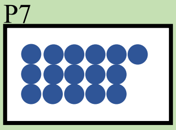
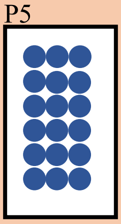
Abbildung 7.103: A2 - Phase 25: Zusammenfassung

7.2.3 Abschließende Zusammenfassung in Bezug auf die Forschungsfragen

Durch die detaillierte Darstellung der vorangegangenen Analyse wurde die Anwendung des Analyseinstruments gezeigt und offengelegt, wie innerhalb der Analyse vorgegangen wurde. Betrachtet man diese Analyse nun hinsichtlich der Forschungsfragen (vgl. Kap. 4) zeigen sich interessante Erkenntnisse, die zur Beantwortung der Forschungsfragen wesentlich sind. Im Folgenden werden diese zentralen Erkenntnisse dargestellt. Dabei wird sich insbesondere auf die Erkenntnisse bezogen, die auch in weiteren Analysen herausgearbeitet werden konnten und demnach typisch für das Argumentieren mit Anschauungsmitteln sind. Dafür werden diese Erkenntnisse innerhalb der Zusammenfassung den Forschungsfragen entsprechend und mit einem expliziten Bezug zum Fallbeispiel dargestellt. In Kapitel acht werden sie nochmals aufgegriffen und durch weitere charakteristische Argumentationsweisen ergänzt. Dabei kann es zu vermeintlichen Redundanzen kommen. Diese ‚Dopplungen' sind aber für ein besseres Verständnis der wesentlichen Ergebnisse notwendig.

1) ***Welche epistemologische Bedeutung haben die Anschauungsmittel in Helenas Argumentationsprozess?***

Bereits in Kapitel sechs wurde dargelegt, dass insbesondere die Fokussierung des Wechselspiels zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext wesentlich zur Beantwortung der Forschungsfrage beiträgt. Durch diese Perspektive kann ausdifferenziert werden, welche Strittigkeit innerhalb der Argumentation bearbeitet wird und welche Argumente zur Bearbeitung der Strittigkeit herangezogen werden. Es wird demnach rekonstruiert, welche Aussage als begründungsbedürftig deklariert wird (Zeichen/Symbol) und welche Argumente genutzt werden (Referenzkontext). Dies ermöglicht es auch, die Rolle des Anschauungsmittels innerhalb des Argumentationsprozesses herauszuarbeiten. Um dies detailliert beschreiben zu können, werden im Folgenden die Ausprägung der Referenzkontexte, die Helena zur Argumentation herangezogen hat, dargestellt. Die Fraglichkeit und demnach die zu begründende Aussage im Kontext von P1 bis P10 ist die Parität des Punktmusters. Im Kontext von S1 bis S7 sollte die Aussage „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade" überprüft und begründet werden. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Ausprägungen, der zur Deutung herangezogenen Referenzkontexte.

Gedeutete Darstellung	Referenzkontext
P3 	geometrisch
P9 	arithmetisch
P10 	arithmetisch
P8 	arithmetisch
P1 	geometrisch
P6 	geometrisch
P4 	geometrisch
P2 	geometrisch
P7 	arithmetisch
P5 	geometrisch

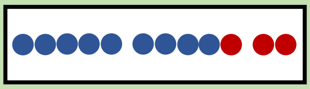
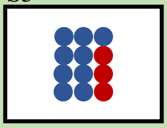
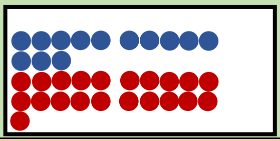
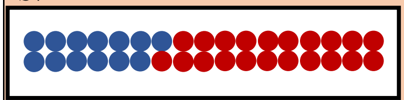
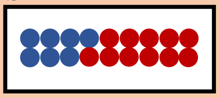
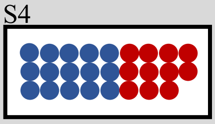
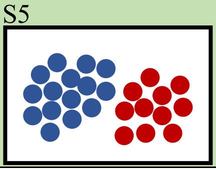
Gedeutete Darstellung	Referenzkontext
S2 	arithmetisch
S3 	arithmetisch
S6 	arithmetisch
S7 	geometrisch
S1 	geometrisch
S4 	geometrisch / arithmetisch
S5 	arithmetisch

Tabelle 7.4: Übersicht über die Ausprägung der von Helena genutzten Referenzkontexte

Bei Betrachtung der obigen Tabelle lässt sich zunächst feststellen, dass Helena unterschiedlich ausgeprägte Referenzkontexte heranzieht. Helena zieht zur Deutung des Zeichens/Symbols einen

1. *arithmetisch geprägten Referenzkontext,*
2. *einen geometrisch geprägten Referenzkontext*
   oder
3. *einen arithmetisch und geometrisch geprägten Referenzkontext*

heran.

Arithmetisch geprägte Referenzkontexte zeichnen sich innerhalb von Helenas Argumentation dadurch aus, dass sie in einem ersten Schritt die konkrete Punktanzahl deutet und begründet, warum die ermittelte Punktanzahl eine durch zwei teilbare beziehungsweise eine nicht durch zwei teilbare Zahl darstellt. In allen Argumentationen, in denen Helena zunächst die Punktanzahl ermittelt, beziehen sich ihre anschließenden Argumente auf genau diese konkreten Zahlen. Die Eigenschaften und Merkmale innerhalb der von ihr betrachteten Punktdarstellungen bleiben unberücksichtigt. Sie wechselt in ihrer Argumentation somit von einer geometrischen Darstellungsform in eine numerisch-symbolische Darstellung.
In Argumentationen, in denen Helena einen geometrisch geprägten Referenzkontext zur Deutung heranzieht, bezieht sie sich in ihren Argumenten auf Eigenschaften und Merkmale des Punktmusters.
In einer Argumentation zeigt ein sowohl arithmetisch als auch geometrisch geprägter Referenzkontext. Dabei nutzt sie zur Begründung, warum es sich um die dargestellten Zahlen handelt sowohl arithmetische als auch geometrische Merkmale. Innerhalb der restlichen Interviews zeigten sich ebenfalls in mehreren Argumentationen Referenzkontexte, in denen geometrische und arithmetische Aspekte berücksichtigt wurden. Helenas Argumentation unterscheidet sich dabei von den Argumentationsweisen der anderen Kinder. Für ein besseres Verständnis der typischen Argumentationsweisen wird zu diesem Zeitpunkt auf eine nähere Darstellung der Argumentation von Helena verzichtet. Im weiteren Verlauf der Ergebnisdarstellung wird auf diese Argumentationsweise eingegangen und Helenas Argumentation eingeordnet (vgl. Kap. 8.1.3).

Zusammenfassend ergeben sich demnach folgende wesentliche Erkenntnisse. Helena nutzt vornehmlich Argumente, die sich entweder auf konkrete Zahlen und Aufgaben beziehen (arithmetischer Referenzkontext) oder auf Eigenschaften und Merkmale des Punktmuster (geometrischer Referenzkontext). Dadurch zeigen sich vornehmlich zwei charakteristische Argumentationsweisen und daraus ableitbar auch zwei unterschiedliche Arten der epistemologischen Bedeutung.

1. Wird das Anschauungsmittel vor einem *arithmetischen Referenzkontext* gedeutet, so hat es ausschließlich die *Rolle eines zu deutenden Zeichens/Symbols*. Es ist demnach *Teil der zu begründenden Aussage*, denn es gilt, die Parität des Punktmusters zu deuten und zu begründen. Obwohl die Fraglichkeit auf einer ikonischen Darstellung in Form eines räumlichen Musters basiert, sind die Argumente, die von Helena genutzt werden, numerisch-symbolischer Art. *Das heißt, das Anschauungsmittel hat innerhalb der von Helena genutzten Argumentation keine Funktion*.
2. Wird das Anschauungsmittel hingegen vor einem *geometrisch geprägten Referenzkontext* gedeutet, so nutzt Helena dieses räumliche Muster auch, um die strittige Aussage zu begründen. Das Punktmuster ist demnach *Teil der von Helena genutzten Argumente*. Es hat somit eine doppelte Funktion. Es ist zum einen *Teil des zu deutenden Zeichens/Symbols* und demnach der zu bearbeitenden Strittigkeit. Zum anderen werden *Merkmale und Eigenschaften des Punktmusters auch zur Argumentation herangezogen*. Dadurch nimmt es innerhalb der Argumentation die Funktion eines *Argumentationsmittels* ein.

Die zentrale Erkenntnis ist demnach, dass Kinder ein fraglich gemachtes Punktmuster nicht immer vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext deuten. Das heißt, auch wenn das Punktmuster Teil der fraglich gemachten Aussage ist, wird das Punktmuster an sich nicht immer auch innerhalb der von den Kindern getätigten Argumentation genutzt.

Betrachtet man nun, innerhalb welcher Argumentationen Helena Argumente genutzt hat, die auf einem geometrischen Referenzkontext basieren und welche eher arithmetischer Natur sind, zeigt sich eine weitere Erkenntnis im Hinblick auf die Nutzung von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften.

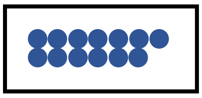
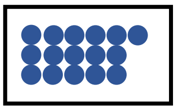
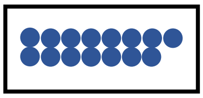
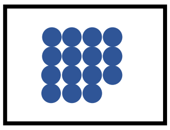
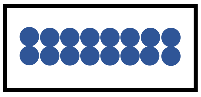
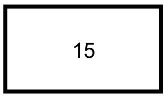
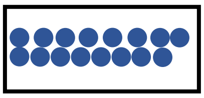
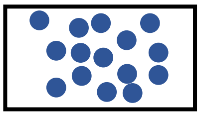
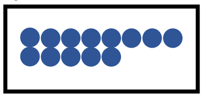
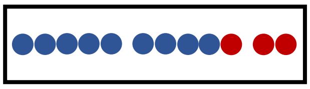
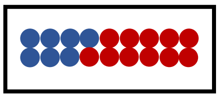
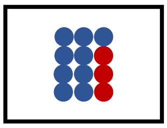
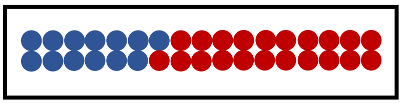
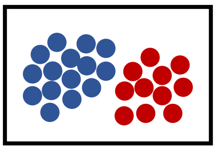
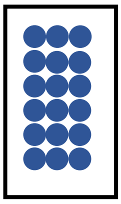
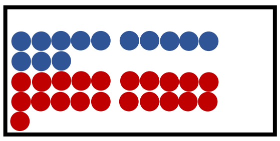
Geometrisch gedeutete Punktmuster	Arithmetisch gedeutete Punktmuster
P1 	P7 
P2 	P8 
P3 	P9 
P4 	P10 
P6 	S2 
S1 	S3 
S7 	S5 
P5 	S6 

Tabelle 7.5: Übersicht über die Ausprägung der von Helena genutzten Referenzkontexte nach Ausprägungen sortiert

Betrachtet man die obige Tabelle, so zeigt sich, dass Helena vornehmlich prototypische Darstellungen und annähernd prototypische Darstellungen unter Ausnutzung des Punktmusters gedeutet hat. Das heißt, wenn die strukturelle Zahleigenschaft eines *prototypisch oder annähernd prototypischen Punktmusters* begründet werden sollte, nutzte Helena das *Anschauungsmittel als Argumentationsmittel*. Denn in diesen Fällen hat Helena das Punktmuster konkret in ihre Argumente eingebunden. Nicht prototypische Darstellungen deutet sie dahingegen eher vor einem arithmetischen Referenzkontext. Die Darstellungen P5 und S4 stellen dabei eine Ausnahme dar. Dass es sich hierbei nicht um einen Einzelfall handelt, sondern, dass prototypische eher vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet werden, wird im weiteren Verlauf der Ergebnisdarstellung noch gezeigt (vgl. Kap. 8.1.4).

2) Wie deutet Helena die arithmetischen Strukturen in die Punktdarstellung hinein?

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage wird der Fokus auf die Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext gelegt. Dazu wird in den Blick genommen, welche Strukturen des Punktmusters von Helena in ihrer Argumentation genutzt werden. Um diesbezüglich Erkenntnisse gewinnen zu können, wurden nur solche Argumentationen betrachtet, in denen Helena einen geometrischen Referenzkontext heranzieht. Innerhalb der Art der Mediation zeigten sich zwei unterschiedliche charakteristische Deutungen. Diese Differenzierung ermöglicht es besser verstehen zu können, welche Strukturen für Helena innerhalb der Argumentation relevant sind und wie sie diese zur Argumentation nutzt.

1. Strukturelle Deutungen in Form von Substrukturen und Vergleich dieser auf Grundlage von optischen Erscheinungsmerkmalen

In der Analyse zeigte sich eine charakteristische Deutungsweise der prototypischen Darstellungen sowie annähernd prototypischer Darstellungen.

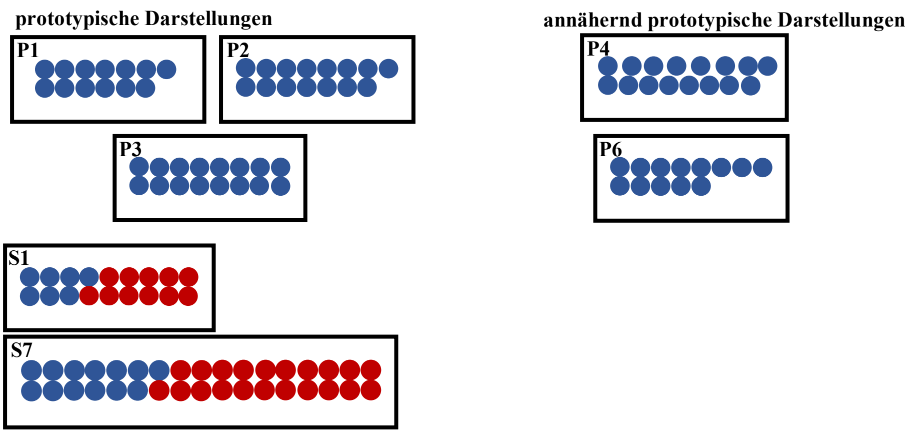


Abbildung 7.104: prototypische und annähernd prototypische Darstellungen des zweiten Aufgabenkomplexes

Zur Deutung der obenstehenden Punktmuster und zur Begründung der Parität dieser nutzt Helena immer ein nahezu identisches Vorgehen. Ausgangspunkt der Deutungen der Darstellungen P1, P2, P3, P4, P6[26] sowie S1 und S7 ist immer eine horizontale Teilung der

[26] P6 wird von Helena umgedeutet und die Darstellung P1 erzeugt. Dies beschreibt Helena als ‚gleiche Form', so dass aufgrund ihrer konsistent genutzten Argumentationsweisen anzunehmen ist, dass Helena an dieser Stelle eine identische Argumentation anführen würde, dies aber nicht expliziert, da sie die Parität von P1 bereits begründet hat.

geometrischen Anordnung. Durch diese *horizontale Teilung* erzeugt Helena *zwei Substrukturen*, die sie dann miteinander vergleicht. Sie deutet demnach *partielle Strukturen* in Form von *Substrukturen*, die sie im Anschluss miteinander *vergleicht*. Dabei stellt eine Substruktur jeweils eine horizontale Reihe des jeweils betrachteten Punktmusters dar. Eine Gleichheit der beiden Substrukturen führt zur Klassifikation als gerade Zahl. Sind die beiden Substrukturen nicht gleich und ist in der oberen oder unteren Reihe einer mehr, so wird die Darstellung als ungerade Zahl klassifiziert.

In diesen von Helena zur Argumentation genutzten Deutungen lassen sich interessante Erkenntnisse hinsichtlich des der Arbeit zugrundeliegenden Forschungsinteresses gewinnen.

In ihren Argumentationen zeigen sich aus mathematischer Perspektive wesentliche und in prototypischen Darstellungen durchaus intendierte strukturelle Deutungen. Durch die horizontale Teilung der geometrischen Anordnung erzeugt Helena zwei Substrukturen, die sie hinsichtlich der Gleichheit überprüft. Aus mathematischer Sicht müssen bei einer solchen Argumentation im Kontext von prototypischen Darstellungen die beiden Substrukturen gleichmächtig sein, damit es sich um eine gerade Zahl handelt. Bei ungeraden Zahlen ist die Differenz eins[27]. In den konkreten Argumentationen von Helena bleibt die Bedeutung der Anzahl der Substrukturen ungenannt. Für eine korrekt geführte mathematische Argumentation ist die Nennung der Substrukturen dahingegen notwendig. In dem gesamten Interview zeigt sich aber, dass Helena bei der Teilbarkeit in dem Interview immer die Teilbarkeit durch zwei meint, denn innerhalb der operativen Handlung erzeugt sie immer zwei Substrukturen. Demnach deutet Helena wesentliche partielle Strukturen in die Darstellung hinein, nämlich zwei Substrukturen, die sie durch eine horizontale Teilung erzeugt. Die Bedeutung der beiden Reihen expliziert Helena nicht, sondern die Bedeutung zeigt sich dadurch, dass eine solche Begründung ausschließlich bei doppelreihigen Darstellungen geführt wird.

Auch der aus mathematischer Sicht notwendige Vergleich der beiden Substrukturen wird von Helena expliziert und zur Argumentation herangezogen. Sie fokussiert zur Argumentation, ob in einer Reihe ein Punkt mehr ist. In ihrer Deutung der Punktdarstellung P4 zeigt sich aber, dass Helena den Fokus eher auf optische Erscheinungsmerkmale legt und die Struktur innerhalb der Substrukturen außer Acht lässt. Dennoch ist die Gleichmächtigkeit wichtig. Dies wurde an unterschiedlichen Stellen des Interviews deutlich. Sie nimmt demnach vor allem die visuell erfassbare Länge in den Blick, die aufgrund unterschiedlicher Strukturen innerhalb der Substrukturen den Anschein erwecken, dass oben ein Punkt mehr

---

[27] Eine Deutung hinsichtlich der Gleichheit der Substrukturen ist nicht unbedingt erforderlich. Bei einer ungeraden Differenz zwischen den Substrukturen handelt es sich um eine ungerade Zahl, bei einer geraden Differenz hingegen ist die dargestellte Zahl gerade. Innerhalb des vorliegenden Forschungsprojektes wird ein solches Vorgehen als Nutzung umfangreicher Strukturen beschrieben, denn dieser Argumentation liegt eine Teilbarkeitsrelation in Form der Summenregel zugrunde.

ist. Eine Nutzung des überstehenden einzelnen Punktes als Entscheidungs- und Begründungskriterium ist aus mathematischer Sicht nur dann zulässig, wenn die Struktur der gedeuteten Substrukturen identisch ist. In dem Vergleich bleiben also wesentliche für die Argumentation notwendige strukturelle Eigenschaften unberücksichtigt und ungenannt.

Es hat sich demnach gezeigt, dass Helena vereinzelte, für eine mathematische Argumentation notwendige partielle Strukturen deutet. Dabei bleiben weitere wesentliche Merkmale unberücksichtigt. Gleichzeitig lässt Helena sich in ihrer Argumentation von optischen Erscheinungsmerkmalen leiten. Sie berücksichtigt dann nicht (mehr) die für eine solche Argumentation wesentlichen strukturellen Merkmale, sondern phänomenologische Merkmale.

Es ist an dieser Stelle durchaus denkbar, dass diesem Vorgehen eine Übergeneralisierung der Deutungen im Kontext von prototypischen Darstellungen zugrunde liegt, denn bei prototypischen Darstellungen führt die Fokussierung des einzelnen Punktes immer zu einer mathematisch korrekten Klassifikation der Parität. Dies zeigt bereits eindrucksvoll, dass es im Mathematikunterricht der Grundschule nicht ausreichend ist, lediglich prototypische Darstellungen zu thematisieren. Helenas Argumentation führt bei prototypischen Darstellungen immer zu einer korrekten Zuordnung der Punktdarstellung zu einer Parität, ohne, dass sie alle, für die mathematische Argumentation notwendige, Strukturen in den Blick nimmt und in die Argumentation einbezieht.

2. Strukturelle Deutungen in Form der Zerlegung des Punktmusters und der Erzeugung von Substrukturen

In der Analyse zeigte sich bei beiden Rechtecksanordnungen mit einer Seitenlänge von drei Punkten die gleiche Argumentationsweise[28].

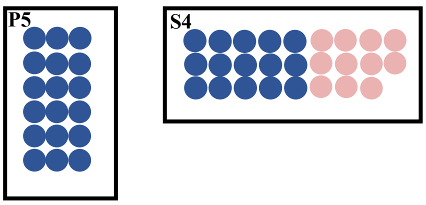


Abbildung 7.105: Rechtecksanordnung mit einer Seitenlänge drei Punkten

Zur Begründung hinsichtlich der Parität der Rechtecksanordnungen nutzt Helena notwendigerweise eine andere strukturelle Deutung zur Argumentation. Helena *zerlegt* die

[28] Da die roten Punkte an dieser Stelle keine vollständige Rechtecksanordnung darstellen und von Helena anders gedeutet werden, sind sie an dieser Stelle hell dargestellt.

Rechtecksanordnung zunächst in *zwei Teilkomponenten*. Dabei stellen die äußeren Reihen die erste Teilkomponente und die mittlere Reihe die zweite Teilkomponente dar. Diese werden getrennt voneinander hinsichtlich ihrer Parität überprüft. Zunächst teilt Helena die erste Teilkomponente durch zwei, indem sie jeweils eine Reihe als *Substruktur* deutet und sie demnach *zwei gleiche Substrukturen* erhält. Im Anschluss daran überprüft Helena die Teilbarkeit der mittleren Reihe. Bei P5 durch Zeigen der Stelle an der geteilt wird. Bei S4 durch Anzahlermittlung und Faktenwissen. Auch bei diesem Vorgehen expliziert Helena die Teilung durch zwei nicht. Das gezielte Teilen in jeweils zwei Substrukturen sowie das gesamte Interview zeigt jedoch, dass Helena an dieser Stelle die Teilbarkeit durch zwei fokussiert. Es zeigt sich demnach, dass Helena an dieser Stelle *umfangreiche Strukturen* in die Darstellung hineindeutet, da die *Zerlegung der geometrischen Anordnung in zwei Teilkomponenten* Ausgangspunkt ihrer Argumentation ist. Die Teilkomponenten an sich überprüft Helena dann aufgrund der *Bildung von Substrukturen* und demnach der Deutung *partieller Strukturen*. Dennoch bleiben auch in dieser Argumentation aus mathematischer Perspektive Fraglichkeiten bestehen. Zum einen nutzt Helena eine Teilbarkeitsrelation, benennt ihr Vorgehen dabei aber nicht und begründet demnach auch nicht, warum eine solche Argumentation zulässig ist. Zudem wird in Helenas Argumentation die Gleichheit der erzeugten Substrukturen nicht erwähnt. Es bleibt unklar, warum die von ihr erzeugten Substrukturen im Sinne der Teilbarkeit durch zwei als gleichmächtig anzusehen sind. Auch hier fehlt der Bezug der gleichen Strukturierung innerhalb der erzeugten Substrukturen. *Es zeigt sich demnach erneut, dass Helena in ihrer Argumentation für das mathematische Argumentieren wesentliche Strukturen in den Blick nimmt und expliziert, andere wesentliche Strukturen bleiben hingegen unberücksichtigt.*

Betrachtet man nun beide Arten der strukturellen Deutungen, die die Grundlage für Helenas Argumentation bilden, zeigen sich trotz der unterschiedlichen Deutungen für das Forschungsinteresse relevante Gemeinsamkeiten. Zum einen zeigt sich eindrucksvoll, dass innerhalb der kindlichen Argumentationen durchaus unterschiedliche strukturelle Deutungen kombiniert werden, um die strukturelle Zahleigenschaft einer Punktdarstellung zu begründen. Zum anderen zeigt sich, welche Strukturen Helena fokussiert. Beide Argumentationsweisen zeigen, dass Helena aus mathematischer Perspektive notwendige Strukturen in die Darstellung hineindeutet. In beiden Argumentations- und Deutungsarten deutet Helena zwei Substrukturen in die Darstellung hinein, die sie dann miteinander vergleicht. Die Darstellung P5 und S4 zerlegt sie dafür vorher. Aus mathematischer Perspektive deutet sie dabei eine wesentliche Struktur in die Darstellung hinein, die für die Begründung der Parität wesentlich ist, nämlich die Erzeugung zweier Teilmengen. Auch ist Helena durchaus bewusst, dass diese Teilmengen gleich sein müssen, damit es sich um eine gerade Zahl handelt. Der Vergleich der Substrukturen erfolgt allerdings (auch) auf Grundlage optischer Erscheinungsmerkmale. Es zeigt sich, dass Helena das Anschauungsmittel als Argumentationsmittel nutzt und auf wesentliche strukturelle Merkmale der Punktdarstellung verweist. Allerdings sind Teile ihrer mathematischen Argumentation (noch) nicht tragfähig. Hier bedarf es weiterer Aushandlungsprozesse, wie zum Beispiel die Art und Weise wie der Vergleich aus mathematischer Perspektive gedeutet werden muss. Gleichzeitig zeigt sich aber auch, wie kindliche Argumentationen von phänomenologischen Merkmalen geleitet werden können. Damit einhergehend wir deutlich, dass die strukturellen Deutungen im Argumentationsprozess nicht (immer) von den Kindern selbst eingenommen werden.

3) Welche begrifflichen Deutungen lassen sich innerhalb der Argumentationsprozesse von Helena rekonstruieren?

Die dritte dem Forschungsprojekt zugrundeliegende Fragestellung richtet den Fokus auf die Begriffsbildungsprozesse, die in der Argumentation zum Tragen kommen. Um diesem Forschungsschwerpunkt gerecht zu werden, wird die begriffliche Deutung der Kinder in den Blick genommen. Da sich das Forschungsinteresse auf die Nutzung und Deutung von Anschauungsmitteln im Kontext des Argumentierens bezieht, werden auch hier vor allem Argumentations- und Deutungsprozesse betrachtet, bei denen ein geometrischer Referenzkontext und damit verbundene strukturelle Deutungen geometrischer Art rekonstruiert werden konnten. Dennoch wird zu Beginn eine begriffliche Deutung in den Blick genommen, die in Argumentationsprozessen rekonstruiert werden konnten, die einen arithmetischen Referenzkontext und demnach Argumente auf numerisch-symbolischer Ebene nutzen. Dies ist notwendig, um zu verdeutlichen, welche Unterschiede sich hierdurch ergeben.
Helena zeigt in den unterschiedlichen Deutungs- und Argumentationsprozessen ein durchaus facettenreiches Begriffsverständnis, welches sie je nach Darstellung flexibel zur Deutung heranzieht. In den Argumentations- und Deutungsprozessen, in denen ein geometrischer Referenzkontext herausgearbeitet werden konnte, ließen sich vornehmlich zwei unterschiedliche begriffliche Facetten rekonstruieren: die ‚Teilbarkeit durch zwei‘ sowie die ‚Zerlegung in Teilkomponenten‘. Die begriffliche Idee der ‚ordinalen Anordnung‘ zeigte sich ausschließlich in Argumentationen, die vornehmlich arithmetischer Natur waren und auf konkreten Zahlen und/oder Rechenoperationen beruhten.

Anzumerken ist, dass diese begrifflichen Ideen in den Argumentations- und Deutungsprozessen nicht immer isoliert voneinander auftraten. Zum Teil zeigten sich (notwendigerweise) auch Kombinationen der begrifflichen Ideen.

Deutung der ordinalen Anordnung

In den detailliert betrachteten Deutungen und Argumentationen zeigte sich immer wieder ein Bezug zur ordinalen Anordnung der geraden und ungeraden Zahlen innerhalb der natürlichen Zahlen. Helena hat in diesem die Parität einer Zahl unter Bezugnahme auf die Parität der Nachbarzahlen begründet. Dies impliziert ein Wissen darüber, dass zwei benachbarte natürliche Zahlen immer eine unterschiedliche Parität aufweisen. Dabei war auffällig, dass Helena diese begriffliche Deutung nur heranzog, wenn sie zunächst die konkrete Punktanzahl und/oder die Aufgabe ermittelt hat. Demnach hat Helena nur dann auf Basis der ordinalen Anordnung argumentiert, wenn sie einen arithmetisch geprägten Referenzkontext zur Deutung des Zeichens/Symbols herangezogen hat. Interessanterweise lässt sich dies als typisch für alle kindlichen Argumentationen innerhalb der Interviewstudie beschreiben. Da im vorliegenden Forschungsprojekt die Argumentationen im Vordergrund stehen, in denen Kinder das Anschauungsmittel auch als Argumentationsmittel nutzen, wird diese Auffälligkeit hinsichtlich der herangezogenen begrifflichen Idee erwähnt und an dieser Stelle nicht näher betrachtet. Innerhalb der Analyseergebnisse wird dann aber nochmals auf diese Auffälligkeit eingegangen, denn diese begriffliche Idee ist innerhalb von Verallgemeinerungsprozessen im Kontext der geraden und ungeraden Zahlen wesentlich (vgl. Kap. 8.3.2).

Deutung der Teilbarkeit durch zwei auf geometrischer Ebene

In allen Deutungs- und Argumentationsprozessen in denen Helena das Punktmuster (auch) als Argumentationsmittel genutzt hat, zeigte sich die *Teilbarkeit durch zwei* als begriffliche Facette für den Argumentationsprozess als grundlegend.

Da Helena innerhalb dieser Argumentationen das Anschauungsmittel als wesentliche Darstellungsform nutzt und dabei Merkmale und Eigenschaften der Punktdarstellung einbezieht, muss auch die begriffliche Idee auf dieser Darstellungsebene verortet werden. In den Argumentations- und Deutungsprozessen wurde deutlich, dass Helena die geraden Zahlen als durch zwei teilbar und die ungeraden Zahlen als nicht durch zwei teilbar klassifiziert. Um das Anschauungsmittel auch im Argumentationsprozess einsetzen zu können, muss dieses Verständnis auf die Veranschaulichung übertragen werden. Das heißt, es muss eine begriffliche Idee entwickelt werden, was es bedeutet, dass eine Veranschaulichung durch zwei teilbar ist. Es zeigt sich, dass dies für Helena bedeutet, dass eine Anordnung dann durch zwei teilbar ist, wenn sie zwei Teilmengen erzeugen kann. So deutet Helena die Division durch zwei in die Darstellung hinein, indem sie durch operative Handlungen zwei Teilmengen in Form zweier Substrukturen erzeugt. In ihren Argumenten, die auf numerisch-symbolischer Ebene getätigt werden, wird zudem deutlich, dass es sich um zwei gleiche Teilmengen handeln muss. Diese Idee der Gleichmächtigkeit überträgt Helena durchaus auch auf die Veranschaulichung. Dies expliziert sie durch fehlende Punkte beziehungsweise durch Punkte die zu viel seien. Die Idee der Gleichmächtigkeit ist innerhalb der Argumentation aber aus mathematischer Perspektive (noch) nicht tragfähig, denn sie lässt sich von optischen Erscheinungsmerkmalen leiten und berücksichtigt nicht die strukturellen Merkmale. Das heißt, Helena sieht die beiden Reihen als gleichmächtig an, wenn sie die gleiche Länge aufweisen. Die Punktanzahl bleibt von ihr (häufig) unberücksichtigt.

Daraus lassen sich zwei wesentliche Aspekte ableiten. Zum einen zeigt sich, dass die begriffliche Idee der Teilbarkeit durch zwei aus zwei Komponenten besteht: der Erzeugung zweier Teilmengen und der Gleichmächtigkeit dieser Teilmengen. Zum anderen zeigt sich, dass ein Übertragen einer begrifflichen Idee von der Arithmetik auf die Geometrie eine komplexe Anforderung an die Kinder stellt. Während Helena auf arithmetischer Ebene immer zwei gleichmächtige Teilmengen erzeugt, gelingt ihr dies auf geometrischer Ebene nicht immer. Eine solche Übertragung der begrifflichen Idee ist aber grundlegend für den Argumentationsprozess mit Anschauungsmitteln.

Deutung der Teilbarkeitsrelation auf geometrischer Ebene

In Helenas Argumentationen zeigte sich zudem die Nutzung von Teilbarkeitsrelationen, in diesem Fall unter Ausnutzung der Summenregel. Helena nutzt dieses Vorgehen in dem Interview ausschließlich bei nicht-prototypischen Darstellungen. Dies ist damit zu erklären, dass Helena die intendierten Strukturen prototypischer Darstellungen in diese hineingedeutet hat. Eine Deutung in Form von zwei horizontalen Reihen ist in mehrreihigen Darstellungen nicht möglich, so dass zunächst Umdeutungen notwendig sind. Die Nutzung der begrifflichen Idee der Summenregel auf geometrischer Ebene erfordert demnach die Erzeugung für die Argumentation günstiger Teilkomponenten. Das heißt, es müssen Teilkomponenten in die Darstellung hineingedeutet werden, die dann hinsichtlich der Parität überprüft werden. Hierfür ist es sinnvoll, diese Teilkomponenten möglichst geschickt zu deuten. Helena nutzt dafür Teilkomponenten die sie einfach in zwei Substrukturen teilen kann. Demnach sind zwei Komponenten für diese begriffliche Idee wesentlich: das Wissen über die Anwendbarkeit der Summenregeln und die geschickte Zerlegung der Veranschaulichung. Diese begriffliche Idee ist aber nur dann zielführend, wenn diese Zerlegung grundlegend für die weiteren Argumente ist. Es zeigte sich aber auch, dass diese begriffliche Idee (nur) als Grundlage dient und die Verknüpfung mit einer weiteren begrifflichen Idee notwendig ist, um die Parität begründen zu können. In Helenas Argumentationen zeigt sich dabei die oben beschrieben Idee der ‚Teilbarkeit durch zwei'.

Durch die intensive Betrachtung der begrifflichen Deutungen von Helena zeigt sich, dass es sich beim Argumentieren mit Anschauungsmitteln um eine komplexe Tätigkeit handelt. Um tragfähige Argumentationen zu entwickeln, müssen Kinder die begrifflichen Ideen der Arithmetik auf die Geometrie übertragen. Dabei sind die Strukturen innerhalb der begrifflichen Idee notwendigerweise gleich. Im obigen Fall die Teilbarkeit in zwei gleichmächtige Mengen. Dennoch unterscheidet sich dies auf arithmetischer und geometrischer Ebene deutlich. Auf arithmetischer Ebene bedeutet die Teilbarkeit durch zwei, dass die betrachtete Zahl so zerlegt werden kann, dass eine Additionsaufgabe mit zwei gleichen Zahlen erzeugt werden kann. Auf geometrischer Ebene bedeutet dies, dass zwei Teilmengen erzeugt werden, die die gleiche Anzahl an Punkten enthält. Dadurch zeigt sich auch, dass die begriffliche Idee immer mit den strukturellen Deutungen der Kinder verknüpft sind und diese sich wechselseitig bedingen. Dies zeigt abermals wie wesentlich Argumentationsprozesse für das Mathematik- und Argumentierenlernen im Kontext von Anschauungsmitteln sind. Denn es muss ausgehandelt werden, welche Strukturen innerhalb der Veranschaulichung wesentlich sind. In Helenas Fall erfordert dies ein Perspektivwechsel, der durch gemeinsames Argumentieren angeregt werden kann.

Diese in dieser Analyse gewonnenen Erkenntnisse stellen keine Einzelfälle dar, sondern konnten auch in weiteren Analysen herausgearbeitet werden. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Analyse nach Forschungsfragen getrennt dargestellt.

8 Ergebnisse der epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen

In dem vorherigen Fallbeispiel der Drittklässlerin Helena konnten erste wesentliche Erkenntnisse gezeigt werden, die zur Beantwortung der Forschungsfragen beitragen. Diese Ergebnisse stellen dabei keine Einzelfälle dar. Vielmehr zeigten sich genau diese wesentlichen Merkmale von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften auch in weiteren Argumentations- und Deutungsprozessen unterschiedlicher Kinder. Da es aufgrund der Menge der Daten nicht möglich ist, die Analysen aller kindlicher Argumentationen im Detail darzustellen, erfolgt die weitere Darstellung ergebnisorientiert. Dazu werden die wesentlichen Erkenntnisse dargestellt. Diese wurden aus der *Analyse des gesamten Datenmaterials* gewonnen. Im Folgenden werden die Ergebnisse zunächst dargestellt und im Anschluss daran anhand eines oder zweier Beispiele konkretisiert. Dabei erfolgt die Darstellung gemäß der drei für das vorliegende Forschungsprojekt zentralen Forschungsfragen. Dafür werden in den jeweiligen Teilkapiteln unterschiedliche Aspekte der epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen in den Blick genommen (vgl. Abb. 8.1). Auch wenn der Fokus zur Beantwortung der Forschungsfragen auf einem Aspekt des Theoriekonstrukts liegt, ist es notwendig, alle Analyseschritte darzustellen. Daher werden die Analysen der einzelnen Beispiele vollständig dargestellt.

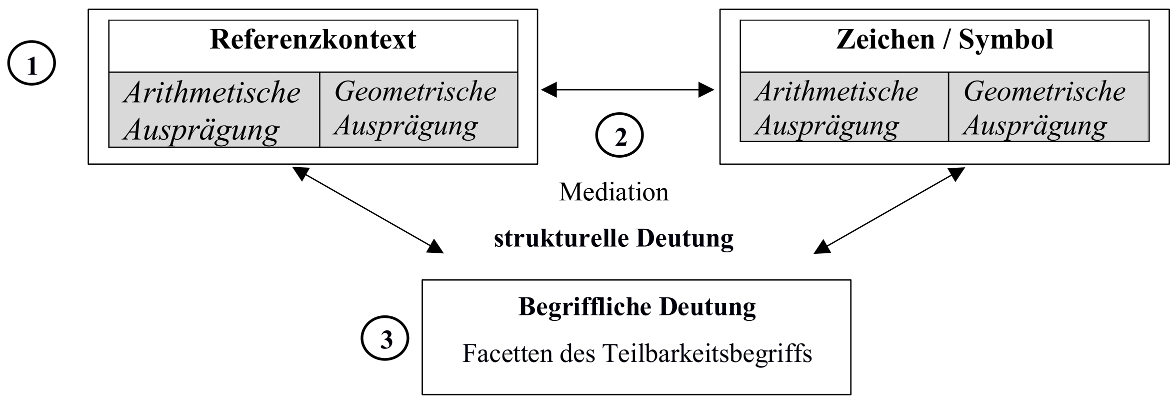


Abbildung 8.1: Fokussierung der Aspekte der epistemologischen Bedeutung von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften

Im ersten Teil der folgenden Ausführungen wird *die epistemologische Bedeutung der Anschauungsmittel im Argumentationsprozess* in den Blick genommen (vgl. Abb. 8.2). Dafür wird der *Referenzkontext* in den Fokus der Auseinandersetzung gestellt und der Frage nachgegangen, ob das Anschauungsmittel überhaupt und inwiefern es zur Bearbeitung der als strittig deklarierten Aussage genutzt wird. Dabei werden drei interessante unterschiedliche Rollen des Anschauungsmittels herausgearbeitet (Kap. 8.1). Hierbei zeigt sich auch, welcher Einfluss die Ausprägung des Referenzkontextes auf den weiteren Argumentationsprozess hat. Anschließend wird dargelegt, wie häufig und in welchen Fällen die Kinder zu welchen Argumentationsweisen tendieren. Dies gibt weitere wesentliche Erkenntnisse, um die Nutzung von Anschauungsmitteln noch besser verstehen zu können.

Referenzkontext	
Arithmetische Ausprägung	*Geometrische Ausprägung*

Abbildung 8.2: Zentraler Aspekt der Analyse für die Beantwortung der ersten Forschungsfrage

Im zweiten Teil werden genau solche Argumentations- und Deutungsprozesse fokussiert, in denen Kinder das Anschauungsmittel als Argumentationsmittel nutzen. Es wird dargestellt, *ob und inwiefern Kinder (allgemeingültige) arithmetische Strukturen in Punktdarstellungen hineindeuten* (Kap. 8.2). Dafür wird die Mediation in Form der strukturellen Deutungen ins Zentrum der Auseinandersetzung gestellt (vgl. Abb. 8.3).

Mediation
strukturelle Deutung

Abbildung 8.3: Zentraler Aspekt der Analyse zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage

Im dritten Teil wird die Frage beantwortet, *welche begrifflichen Deutungen sich innerhalb der Argumentations- und Deutungsprozesse* zeigen und welche Erkenntnisse sich insbesondere für das Verallgemeinern von allgemeingültigen Aussagen daraus ableiten lassen (vgl. Abb. 8.4).

Begriffliche Deutung
Facetten des Teilbarkeitsbegriffs

Abbildung 8.4: Zentraler Aspekt der Analyse zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage

8.1 Epistemologische Bedeutung von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess

In den folgenden Ausführungen wird *die erste Forschungsfrage beantwortet und dargestellt, welche unterschiedlichen Bedeutungen die Anschauungsmittel im Argumentationsprozess* *einnehmen können*. Die Analyse bezieht sich vor allem darauf, ob das *Anschauungsmittel nur Teil der strittigen Aussage* und demnach des zu *deutenden Zeichens/Symbols* ist oder, ob das Anschauungsmittel *auch als Referenzkontext für die Argumentation genutzt und zur Deutung des Zeichens/Symbols herangezogen wird*.

In den Analysen zeigte sich, und eben dies wurde auch in die Entwicklung des Analyseinstruments einbezogen, dass Kinder ein geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol nicht immer automatisch vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext deuten. Konkret bedeutet dies, dass Kinder die strittig gemachte strukturelle Zahleigenschaft eines Punktmusters nicht immer damit bearbeiten, dass Merkmale oder Eigenschaften des Punktmusters zur Argumentation herangezogen und demnach als Teil der Argumentationsvoraussetzungen genutzt werden. Bereits in der Analyse des Fallbeispiels zeigten sich drei unterschiedliche Nutzungen des Anschauungsmittels. Eben diese Argumentationsweisen zeigten sich auch in den Analysen der Argumentations- und Deutungsprozesse der anderen Kinder, so dass sich *drei unterschiedliche Arten der epistemologischen Bedeutung des Anschauungsmittels* charakterisieren lassen. Kinder deuten geometrische Zeichen/Symbole

1. vor einem *arithmetischen Referenzkontext*,
2. vor einem *geometrischen Referenzkontext*
   oder
3. in einem *Wechselspiel* zwischen *geometrischem* und *arithmetischem Referenzkontext*.

Im Folgenden werden die durch die Analysen herausgearbeiteten charakteristischen Merkmale der drei unterschiedlichen Arten konkretisiert und deren Einfluss auf den Argumentationsprozess dargestellt.

8.1.1 Einfluss arithmetischer Referenzkontexte auf die epistemologische Bedeutung des Anschauungsmittels

Die detaillierte Untersuchung des Referenzkontextes und demnach der von den Kindern genutzten Argumentationsvoraussetzungen zeigt, dass Kinder, auch wenn sie geometrische Zeichen/Symbole in Form von Punktmustern hinsichtlich einer strukturellen Zahleigenschaft deuten, sie diese Punktdarstellungen nicht automatisch auch als Referenzkontext heranziehen. Vielmehr deuteten einige Kinder die strukturelle Zahleigenschaft des Punktmusters vor einem *arithmetischen Referenzko*ntext. Sie ermitteln dann zunächst die *konkrete*

Punktanzahl oder die *dargestellte Aufgabe*. Das Anschauungsmittel wird dadurch vornehmlich als *Mittel zur Zahldarstellung und/oder als Mittel zur Darstellung einer Rechenoperation* genutzt. Nutzen die Kinder das Punktmuster als Mittel zur Zahldarstellung, fokussieren sie die Kardinalität der Punktdarstellung. Nutzen sie es (auch) als *Mittel zur Darstellung von Rechenoperationen* wird sowohl die Kardinalität als auch die operativen Beziehungen zwischen den beiden Summanden gedeutet. Die durch die Anordnung repräsentierte strukturelle Zahleigenschaft bleibt in der Argumentation hingegen unberücksichtigt. Dies darf nicht damit gleichgesetzt werden, dass Kinder keine Strukturen in die Punktdarstellung hineindeuten. Es zeigt sich, dass Strukturen in einem Punktmuster durchaus zur geschickten Anzahlermittlung genutzt werden, in der Argumentation bleiben sie dann ungenutzt. In einem ersten Argumentations- und Deutungsprozess zeigt sich in solchen Argumentationen immer eine *konkret-dingliche Deutung* des Anschauungsmittels *als Mittel zur Zahldarstellung* und/oder als *Mittel zur Darstellung von Rechenoperationen* (vgl. Abb. 8.5).

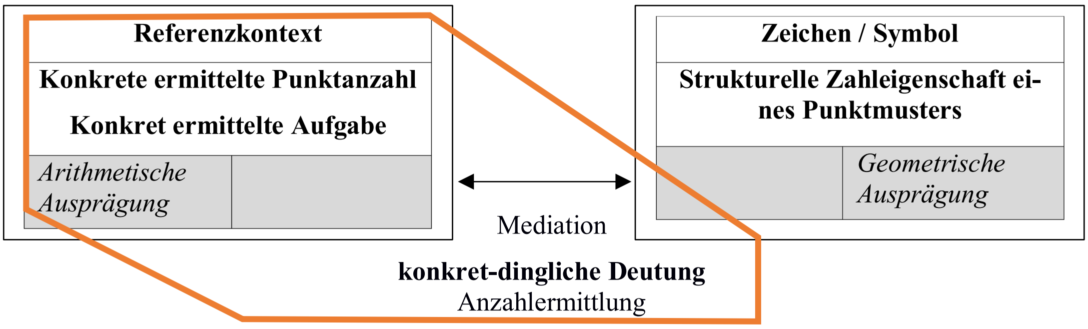


Abbildung 8.5: Nutzung eines arithmetischen Referenzkontext zur Deutung eines geometrischen Zeichens/Symbols

Diese Deutung und Nutzung des Anschauungsmittels als Mittel zur Zahldarstellung hat Einfluss auf den weiteren Argumentationsprozess. In den analysierten kindlichen Argumentationen zeigte es sich als charakteristisch, dass sich die von den Kindern bearbeitete Strittigkeit und somit das zu deutende Zeichen/Symbol durch diese erste Deutung verändert. Während *zu Beginn* des Argumentations- und Deutungsprozesses die *strukturelle Zahleigenschaft eines Punktmuster strittig* war und demnach das zu deutende *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung* war, ändert sich dies im weiteren Verlauf. Die Kinder deuten und begründen nun nicht mehr die strukturelle Zahleigenschaft des Punktmusters. Stattdessen deuten sie *die strukturelle Zahleigenschaft der ermittelten Punktanzahl*. Demnach ist das neue zu deutende *Zeichen/Symbol nun arithmetischer Ausprägung*. Diese neu zu bearbeitende Strittigkeit wird in der Regel nicht konkret angezeigt, konnte aber mit Hilfe des Analyseinstruments nachgezeichnet werden. Das heißt, es erfolgt ein Wechsel des Zeichens/Symbols: Während in der ersten Argumentation das Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung ist, ist das Zeichen/Symbol des zweiten Argumentationsprozesses arithmetischer Ausprägung. Demnach verändert sich die Darstellungsform, in der die fragliche Aussage dargestellt ist. Und zwar von einer geometrischen Darstellung hin zu einer numerisch-symbolischen Darstellung.

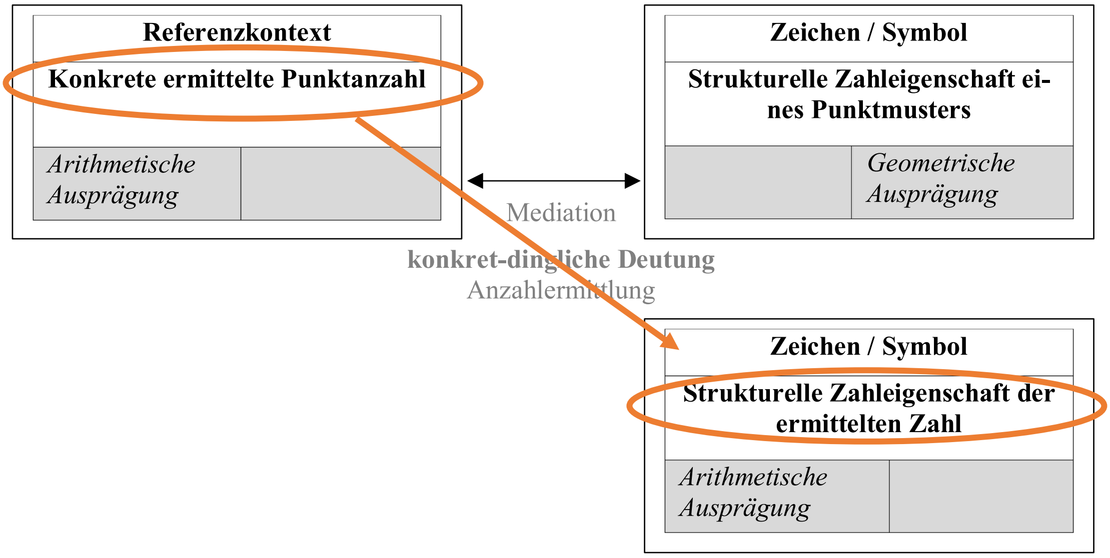


Abbildung 8.6: Wechsel des zu deutenden Zeichens/Symbols und damit der zu bearbeitenden Strittigkeit

Dieser Wechsel der Darstellungsform, in der die Argumentation geführt wird, ist wesentlicher Teil der Argumentationsvoraussetzung und beeinflusst auch den weiteren Argumentationsprozess. So argumentieren die Kinder im Anschluss hieran dann aufgrund ihres arithmetischen Vorwissens, indem sie mit konkreten Zahlen arbeiten und arithmetische Symbole als zentrales Darstellungsmittel nutzen. Die von den Kindern genutzten Argumente beziehen sich dann auf konkrete Eigenschaften oder Strukturen der von den Kindern ermittelten Punktanzahlen oder Additionsaufgaben. Diese basieren in der Regel auf arithmetischem Vorwissen über die Zahlen und deren Eigenschaften. Eine Ausnutzung von Merkmalen oder strukturellen Eigenschaften des Anschauungsmittels bleibt aus. Dies hat zur Folge, dass das Punktmuster im weiteren Argumentationsprozess an *Bedeutung verliert*. Es hat somit *keine Bedeutung als Argumentationsmittel*, da die Argumentation ausschließlich auf arithmetischer Ebene erfolgt.

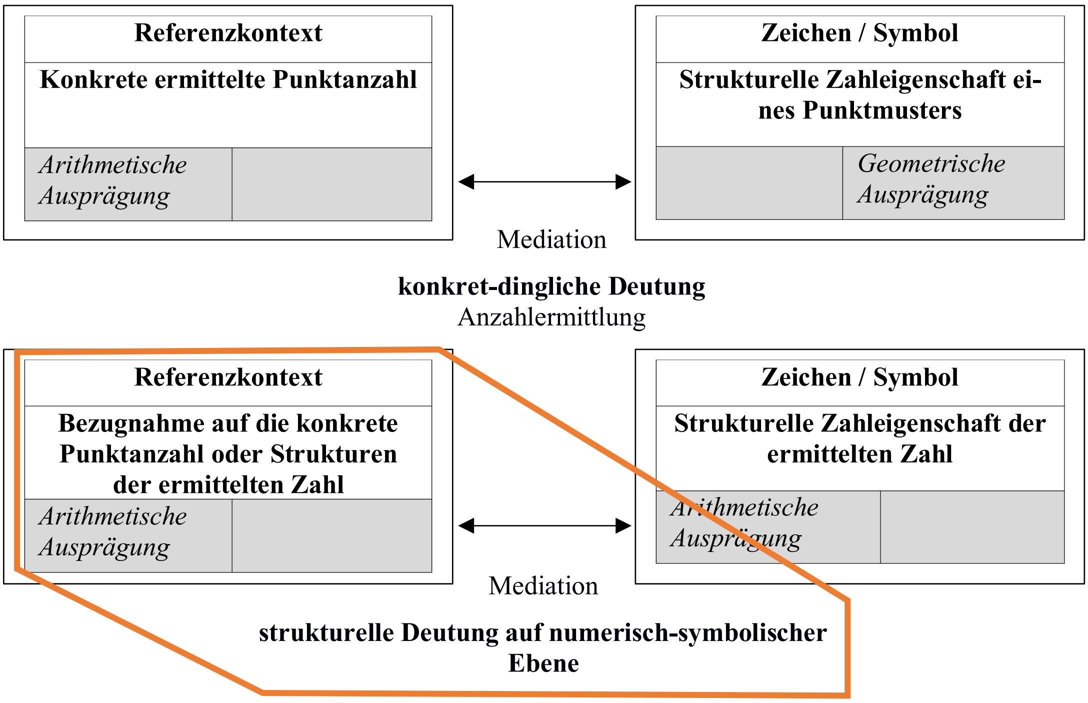


Abbildung 8.7: Charakteristischer Verlauf eines Argumentations- und Deutungsprozesses in der das Anschauungsmittel als Mittel zur Zahldarstellung genutzt wird

Da die Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt – in diesem Fall der strukturellen Zahleigenschaft – auf einer numerisch-symbolischen Ebene stattfindet, findet auch die begriffliche Auseinandersetzung und die damit verbundenen Begriffsbildungsprozesse auf arithmetischer Ebene statt. Dadurch erhält das Anschauungsmittel auch keine Funktion als Erkenntnismittel, da die durch die Veranschaulichung repräsentierten abstrakten Strukturen nicht in den Blick genommen werden.

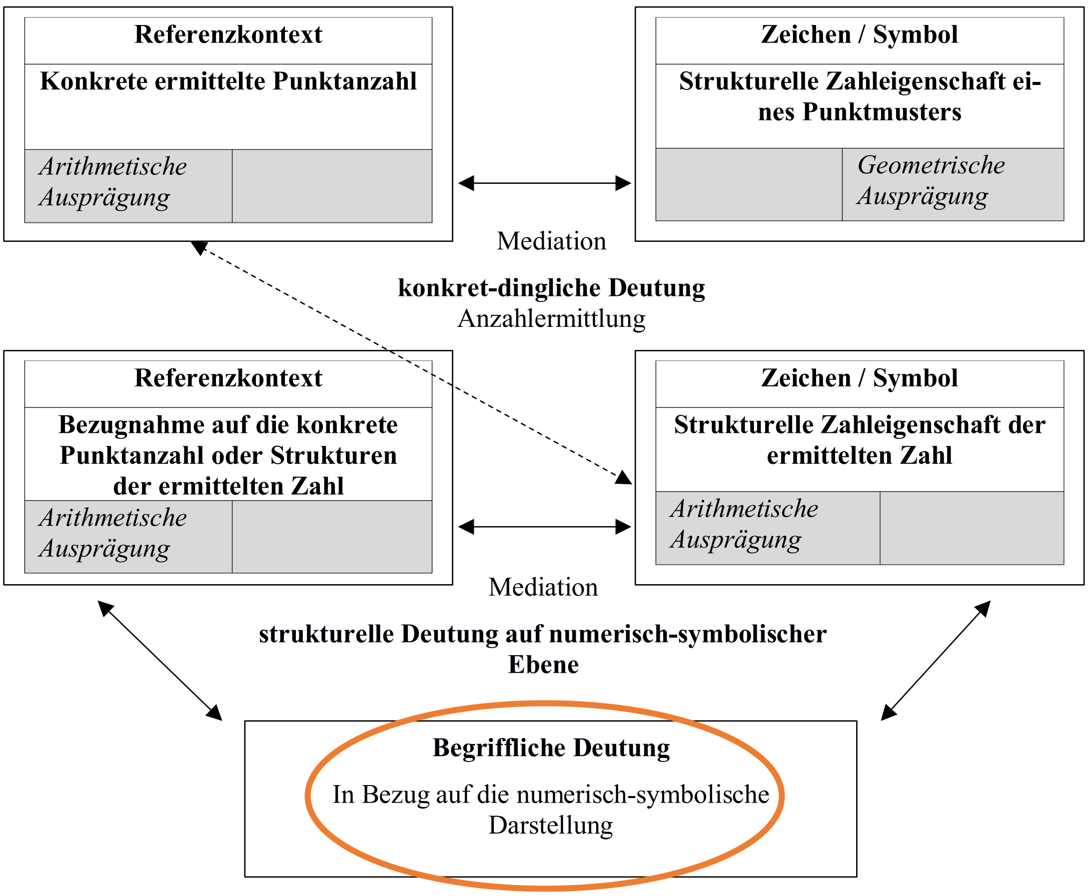


Abbildung 8.8: Begriffliche Deutung in den Argumentationsprozessen mit arithmetisch geprägten Referenzkontexten

Zusammenfassend lassen sich somit folgende wesentliche Charakteristika von Argumentationsprozessen mit arithmetischen Referenzkontexten beschreiben:

- Deuten Kinder das Anschauungsmittel vor einem *arithmetischen Referenzkontext*, so ermitteln sie zunächst die konkrete Punktanzahl und/oder die konkreten Rechenoperationen. Sie nutzen das Anschauungsmittel somit als *Mittel zur Zahldarstellung* und/oder als *Mittel zur Darstellung von Rechenoperationen*.
- Das zu deutende *Zeichen/Symbol wechselt*. Demnach verändert sich auch die von den Kindern begründete Aussage. Dieser Wechsel betrifft insbesondere die Darstellungsform. Während im ersten Schritt das zu deutende Zeichen/Symbol und demnach die strittige Aussage ein Punktmuster und somit eine geometrische Darstellung beinhaltet, ist das *neue Zeichen/Symbol numerisch-symbolischer Natur*.
- Die von den Kindern zur Argumentation herangezogenen Argumente und demnach die *strukturelle Mediation* zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext sind ebenfalls *numerisch-symbolischer Art*.

- Da die argumentative Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt auf konkreten Zahlen basiert, sind auch die *begrifflichen Ideen* auf konkrete Zahlen bezogen und damit *arithmetischer Natur*.

Im nachfolgenden Beispiel werden die Charakteristika der oben typisierten Argumentationsprozesse verdeutlicht:

Beispiel 1.1: Benjamin deutet P6 vor einem arithmetischen Referenzkontext

Der nachfolgende Interviewausschnitt stellt den ersten Argumentations- und Deutungsprozess im ersten Aufgabenkomplex des Interviews „Paritäten" dar.

1	B	*(.)* **Hmm** *[überlegt 5 sec. Und nimmt sich P6]* **das ist ne ungerade.**
2	I	**Woher weißt du das?**
3	B	**Weil, ähm weil das dreizehn ist.**
4	I	**mhm**
5	B	**Und dreizehn kann man nicht durch zwei teilen. Man kann zwölf und vierzehn durch zwei teilen, aber dreizehn liegt dazwischen, also kann man die nicht durch zwei teilen.**

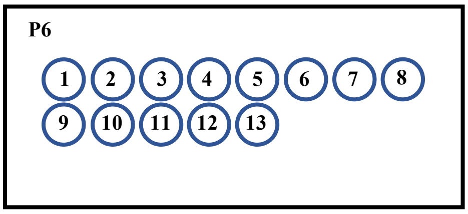


Abbildung 8.9: Beispiel 1.1 - Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

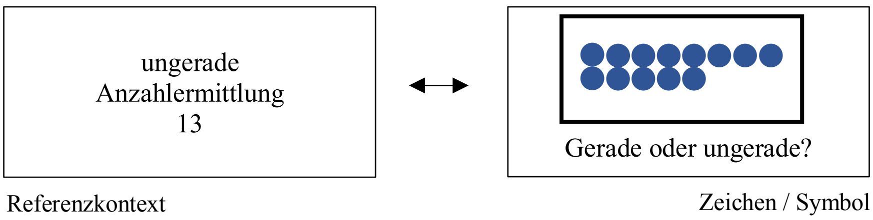


Abbildung 8.10: Beispiel 1.1 - Rollenverteilung I

Dieser Ausschnitt zeigt Benjamins ersten Deutungs- und Argumentationsprozess. In diesem wird er vor die Anforderung gestellt, die Punktdarstellungen hinsichtlich der Parität zu deuten und deren Zuordnung zu begründen. Er wählt die Punktdarstellung P6 aus, so dass das fraglich gemachte *Zeichen/Symbol* die Parität der geometrischen Anordnung P6 ist. Demnach ist an dieser Stelle die Parität der Punktdarstellung P6 strittig.
Dieses Zeichen/Symbol deutet Benjamin als ungerade Zahl, ohne dies näher zu begründen. Auf Nachfrage argumentiert er, indem er die genaue Punktanzahl mit 13 Punkte benennt. Die Zahl 13 beschreibt Benjamin als Zahl, die man nicht durch zwei teilen kann. Dies

begründet er, indem er argumentiert, dass zwölf und 14 durch zwei teilbar sind, „aber die dreizehn liegt dazwischen, also kann man die nicht durch zwei teilen“ (Z. 5). In dieser Begründung zeigt sich, dass Benjamin nun nicht mehr die Punktdarstellung hinsichtlich der Parität deutet und begründet, sondern vielmehr die Parität der Zahl ‚13‘.

Teilbarkeit durch zwei 12 und 14 sind durch zwei teilbar 13 liegt dazwischen	⟷	Parität der 13
Referenzkontext		Zeichen / Symbol

Abbildung 8.11: Beispiel 1.1 - Rollenverteilung II

Demnach lässt sich hier der *charakteristische Wechsel des Zeichens/Symbols* erkennen, denn Benjamin deutet und begründet nun die Parität der konkreten Zahl ‚13‘ als zu deutendes *Zeichen/Symbol*. Das heißt, an dieser Stelle ist nicht mehr die strukturelle Zahleigenschaft der Veranschaulichung strittig, sondern die strukturelle Zahleigenschaft der von ihm vorher ermittelten Anzahl. Hierfür betrachtet er nun die beiden Nachbarzahlen der Zahl 13, nämlich zwölf und 14. Diese werden von ihm als durch zwei teilbar klassifiziert. Die Teilbarkeit der Zahlen wird nicht begründet. Da 13 zwischen diesen Zahlen liegt, kann diese nicht durch zwei teilbar sein. Warum 13 nicht teilbar ist, nur weil sie zwischen zwei durch zwei teilbaren Zahlen liegt, begründet Benjamin nicht. Hier zeigt sich ein weiteres charakteristisches Merkmal, nämlich, dass sich die zur Argumentation genutzten Argumente auf die konkrete Punktanzahl beziehen. In diesem Fall nutzt Benjamin arithmetisches Vorwissen über die Anordnung der Zahlen in seiner Argumentation.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Benjamin deutet zunächst die geometrische Anordnung P6 hinsichtlich der Parität und demnach ein geometrisch geprägtes *Zeichen/Symbol*. Zur Deutung dessen zieht Benjamin einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* heran, denn er übersetzt die ikonische Darstellung in eine numerisch-symbolische Darstellung und benennt die konkrete Punktanzahl. An dieser Stelle zeigt sich, dass der charakteristische *Wechsel des Zeichens/Symbols* mit einem *Wechsel der Ausprägung des Zeichens/Symbols* einhergeht. Während in dem ersten Deutungsprozess das Punktmuster P6 ein Teil der Strittigkeit dargestellt hat und demnach das *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung* war, ist nun die Parität der 13 strittig. Das heißt, es wird die Parität der vormals ermittelten konkreten Punktanzahl gedeutet und begründet. Das neue zu deutende *Zeichen/Symbol* ist *arithmetischer Ausprägung*. Hierdurch zeigt sich der Wechsel der Darstellungsform. Durch diesen verliert das Anschauungsmittel nun seine epistemologische Bedeutung. In seiner Deutung berücksichtigt er keine Merkmale oder

Eigenschaften der Punktdarstellung, sondern bezieht sich auf konkrete Zahlen. Zur Deutung des Zeichens/Symbols nutzt Benjamin somit einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext*, denn er benennt zum einen die Eigenschaft der Teilbarkeit durch zwei, zum anderen bezieht er sich dabei auf die Beziehung der 13 zu den Zahlen zwölf und 14. Zusammenfassend zeigt sich, dass das Punktmuster lediglich zu Beginn die Darstellungsform der Strittigkeit bestimmt hat. Im weiteren Verlauf verliert es aber seine epistemologische Bedeutung für die Argumentation. Es ist weder Teil der Strittigkeit noch wird es in den von Benjamin genannten Argumenten genutzt.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man die strukturellen Deutungen, die Benjamin in seiner Argumentation heranzieht, lässt sich erkennen, dass auch die Strukturen, die er deutet, arithmetischer Natur sind. Im ersten Deutungsprozess nutzt er die *Darstellung als Mittel zur Zahldarstellung* und ermittelt die konkrete Punktanzahl der Darstellung – die 13. Er nimmt somit zunächst eine *konkret-dingliche Deutung* der geometrischen Anordnung vor. Diese Art der Mediation initiiert den oben bereits beschriebenen Wechsel der Darstellungsform und somit den Wechsel von einer geometrischen Ausprägung hin zu einer arithmetischen Ausprägung.

In einem zweiten Deutungsprozess deutet er nun das neue zu deutende Zeichen/Symbol, nämlich die Parität der Zahl 13. Dies stellt gleichzeitig die vom ihm bearbeitete Strittigkeit dar. Um zu begründen, dass es sich bei der Zahl 13 um eine ungerade Zahl handelt, nutzt Benjamin sein Vorwissen, dass die Zahlen Zwölf und 14 durch zwei teilbar sind. Die 13 beschreibt er als Zahl die dazwischen liegt. Er setzt demnach die Zahl 13 in Beziehung zu den beiden Nachbarzahlen. Und eben dies scheint Benjamin als Entscheidungskriterium zu nutzen. Weil 13 zwischen zwei durch zwei teilbare Zahlen liegt, ist sie selbst nicht durch zwei teilbar. Warum dieses Argument gilt, bleibt von ihm ungenannt. Demnach nutzt er *partielle Strukturen*, denn Benjamin setzt die Zahl 13 in Beziehung zu zwei anderen durch zwei teilbare Zahlen, um die Zahleigenschaft zu begründen. Durch diese strukturelle Deutung, in der Benjamin die ermittelte Punktanzahl in die ordinale Anordnung der natürlichen Zahlen verortet, zeigt sich deutlich, dass er sich nicht mehr auf Merkmale oder Eigenschaften des anfänglich gedeuteten Punktmusters bezieht. Die Punktdarstellung verliert nach der Anzahlermittlung der 13 Punkte ihre epistemologische Bedeutung, denn Benjamin bezieht diese nicht mehr in seine Argumentation ein. Hier zeigt sich das charakteristische Merkmal, dass sich die von Benjamin getätigten und zur Argumentation genutzten *strukturellen Deutungen auf eine numerisch-symbolische Darstellung* beziehen. Ein konkreter Bezug zur Punktdarstellung findet nicht statt.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Die von Benjamin herangezogene begriffliche Idee zeigt sich im zweiten Deutungsprozess. Dabei lassen sich zwei unterschiedliche begriffliche Ideen differenzieren. Es zeigt sich, dass für Benjamin *gerade Zahlen durch zwei teilbar* und *ungerade Zahlen nicht durch zwei teilbar* sind. Er nutzt damit die Definition der geraden Zahlen. Diese begriffliche Idee wird von Benjamin genannt, aber für die einzelnen Zahlen nicht überprüft. Vielmehr nutzt er die *ordinale Abfolge* der geraden und ungeraden natürlichen Zahlen und die Eigenschaft, dass sich durch zwei teilbare und nicht durch zwei teilbare Zahlen abwechseln. Auch wenn Benjamin diese Idee nicht explizit versprachlicht, hat sich in den strukturellen Deutungen gezeigt, dass Benjamin eine solche Deutung zur Argumentation heranzieht. Hier zeigt sich das charakteristische Merkmal, dass auch die *begrifflichen Ideen numerisch-symbolischer Natur* sind. Demnach bezieht sich die begriffliche Idee nicht auf die Strukturen der Punktdarstellung, sondern auf konkrete Zahlen.

Einordnung des Argumentationsprozesses

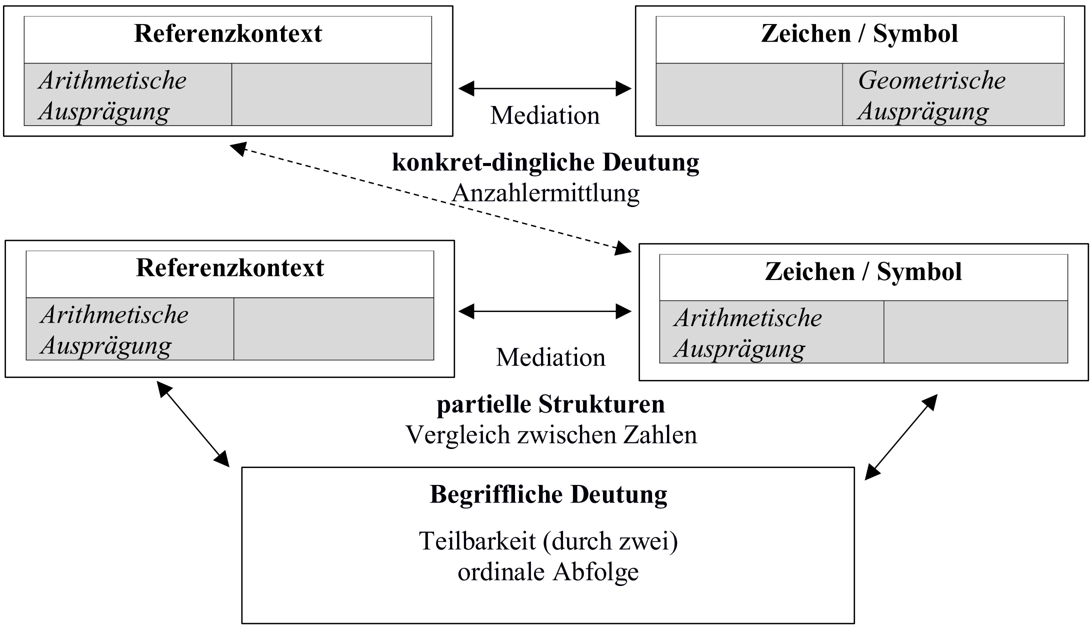


Abbildung 8.12: Beispiel 1.1 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Durch die Einordnung des Argumentations- und Deutungsprozesses in das Theoriekonstrukt zeigen sich demnach die charakteristischen Merkmale der Nutzung eines arithmetischen Referenzkontextes zur Deutung eines geometrisch geprägten Zeichens/Symbols. Benjamin nutzt zunächst einen arithmetisch geprägten Referenzkontext, indem er die konkrete Punktanzahl ermittelt. Dadurch wechselt die Fraglichkeit, die durch die Argumentation beigelegt werden soll. Es wird nun nicht mehr die strukturelle Zahleigenschaft der Punktdarstellung gedeutet, sondern vielmehr die strukturelle Zahleigenschaft der konkret ermittelten

Punktanzahl. Dies hat zur Folge, dass Benjamin auch im weiteren Verlauf auf einer arithmetischen Ebene argumentiert. Auch die begriffliche Auseinandersetzung, die sich innerhalb der Argumentation zeigt, bezieht sich auf konkrete Zahlen und demnach auf numerisch-symbolische Darstellung.

Wird eine geometrische Anordnung demnach vor einem arithmetischen Referenzkontext gedeutet, kann das Anschauungsmittel seine epistemologische Bedeutung verlieren. Dann stellt die Veranschaulichung lediglich ein Mittel zur Zahldarstellung dar und dient nicht als Argumentationsmittel. Es kann dann den Lernprozess auch nicht als Mittel zur Erkenntnisgewinnung beeinflussen. Als wesentlich innerhalb dieses Ergebnisses für die mathematikdidaktische Forschung und auch für den Mathematikunterricht zeigt sich, dass es nicht ausreichend ist, die Kinder ausschließlich vor die Anforderung zu stellen, ein geometrisches Muster zu deuten. Vielmehr ist es notwendig, die Nutzung des Anschauungsmittels in Argumentationsprozessen bewusst zu thematisieren.
Sollen demnach Anschauungsmittel gewinnbringend im mathematischen Argumentationsprozess eingesetzt werden, müssen Kinder mathematische Werkzeuge erhalten, um die geometrischen Anordnungen im Hinblick auf die Strittigkeit zu deuten und zur Argumentation zu nutzen. Nur dadurch kann nach und nach angeregt werden, dass das Anschauungsmittel als Teil der Argumentationsvoraussetzungen an Bedeutung gewinnt und, dass Veranschaulichungen zu einer von den Kindern akzeptierten und genutzten Darstellungsform der mathematischen Argumentation werden. Der Lehrperson kommt dabei eine wesentliche Funktion zu. Die gezielte Nutzung der Anschauungsmittel im Argumentations- und Deutungsprozess muss im Mathematikunterricht angeregt werden. Denn, und genau dies zeigt sich auch in dem Fallbeispiel der Drittklässlerin Helena, wäre die Annahme falsch, dass Kinder, die ein geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol vor einem arithmetischen Referenzkontext deuten, grundsätzlich keine Strukturen in geometrischen Mustern zur Argumentation nutzen. Vielmehr kann es bei der Auseinandersetzung mit anderen Punktdarstellungen durchaus dazu kommen, dass diese Kinder innerhalb einer anderen Argumentation mit einem geometrisch geprägten Referenzkontext argumentieren.

8.1.2 Einfluss eines geometrischen Referenzkontextes auf die epistemologische Bedeutung des Anschauungsmittels

Die detaillierten Untersuchungen des Referenzkontextes zeigen aber auch, dass in einer Vielzahl an Argumentationsprozessen ein *geometrischer Referenzkontext* herangezogen wurde. Das bedeutet, in diesen Argumentationen sind die Punktdarstellungen nicht nur Teil des Zeichens/Symbols und somit die wesentliche Darstellungsform der strittigen Aussage. Vielmehr sind *Eigenschaften und Merkmale des Punktmusters auch Teil des Referenzkontextes*. Das bedeutet, die *Strukturen*, die die Kinder in die Darstellung hineindeuten und zur Argumentation nutzen, stehen immer im direkten *Bezug zu einem Punktmuster*. Dadurch ist das Punktmuster nicht nur Teil des Zeichens/Symbols und somit der strittigen Aussage, sondern es wird auch innerhalb der Argumentation genutzt und erhält dadurch (auch) die Funktion eines *Argumentationsmittels*.

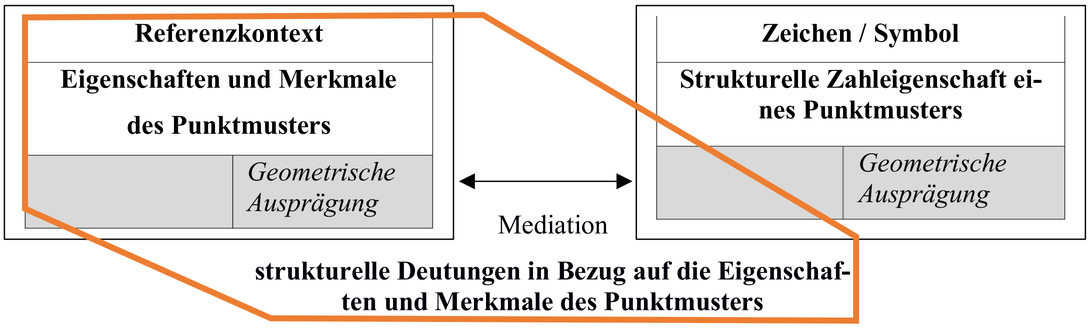


Abbildung 8.13: Nutzung eines geometrischen Referenzkontextes zur Deutung eines geometrischen Zeichens/Symbols

Hierbei zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zu den Argumentationsprozessen mit arithmetischen Referenzkontexten, denn das Zeichen/Symbol und demnach die strittige Aussage beziehungsweise die zu bearbeitende Fraglichkeit verändert sich nicht. Im gesamten Argumentationsprozess wird demnach die Frage bearbeitet, welche strukturelle Zahleigenschaft das vorliegende Punktmuster hat. Das heißt, die Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt – in diesem Fall der strukturellen Zahleigenschaft – findet auf einer geometrischen Ebene statt. Gleiches gilt auch für die begriffliche Auseinandersetzung und die damit verbundenen Begriffsbildungsprozesse auf geometrischer Ebene. Dadurch erhält das Anschauungsmittel neben der Funktion als Argumentationsmittel auch die Funktion als Erkenntnismittel, da innerhalb der Argumentation die durch die Veranschaulichung repräsentierten abstrakten Strukturen in den Blick genommen werden.

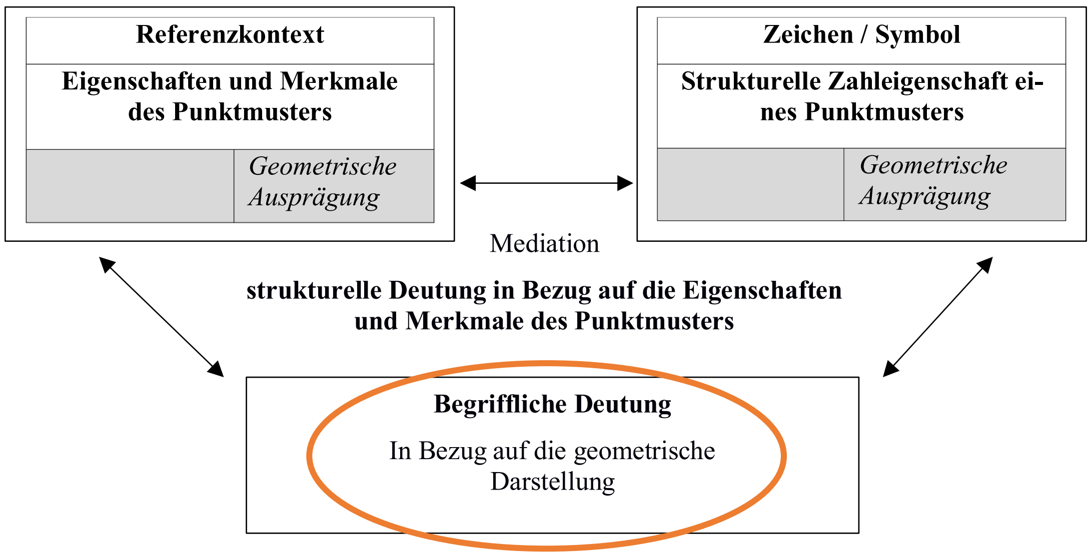


Abbildung 8.14: Charakteristischer Verlauf eines Argumentations- und Deutungsprozesses in der das Anschauungsmittel als Argumentationsmittel genutzt wird

Zusammenfassend lassen sich folgende Charakteristika von Argumentationsprozessen mit geometrischen Referenzkontexten differenzieren:

- Deuten Kinder das Anschauungsmittel vor einem *geometrischen Referenzkontext*, so beziehen sie *Merkmale und Eigenschaften des Punktmusters* in ihre Argumentation ein. Das Anschauungsmittel bekommt damit die epistemologische Bedeutung als *Teil der strittigen Aussage* und *als Teil des Referenzkontextes*. Es wird dadurch (auch) als *Argumentationsmittel* genutzt.
- Die von den Kindern zur Argumentation herangezogenen Argumente und demnach die *strukturelle Mediation* zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext sind ebenfalls *geometrischer Art*. Dabei beziehen sich die Kinder in ihren Argumentationen auf eine strukturelle Eigenschaft der Punktdarstellung.
- Da die argumentative Auseinandersetzung mit einem mathematischen Inhalt auf einem geometrischen Anschauungsmittel basiert, sind auch die *begrifflichen Ideen auf geometrischer Ebene*.

Im nachfolgenden Beispiel werden die Charakteristika der oben typisierten Argumentationsprozesse verdeutlicht:

Beispiel 1.2: Lasse deutet Pt6 vor einem geometrischen Hintergrund

Der nachfolgende Interviewausschnitt stellt den achten Deutungs- und Argumentationsprozess im ersten Aufgabenkomplex des Interviews „Teilbarkeit durch drei“ dar.

1	**L**	*[nimmt Pt6]* **Das hier** *(...) [wischt mit der Hand zweimal von links nach rechts über die Punktdarstellung] (..)* **ne** *[schüttelt den Kopf und schiebt die Karte nach links]*.
2	**I**	**Warum nicht?**
3	**L**	**Das glaub ich einfach nicht** *[legt die Karte wieder vor sich]*. **Schon vom Aussehen, weil das so komisch # gemacht ist.** *[fährt mit dem Finger unkenntlich über die Punktdarstellung und murmelt dabei]*
4	**I**	**# ok**
5	**I**	**Du darfst da auch reinmalen, wenn dir das hilft.**
6	**L**	**Ne, irgendwie nicht.** *[schiebt die Karte vor sich hin und her]* **Könnte doch sein** *[unverständlich; nimmt sich einen Stift]*. **Ich male kurz rein.** *(..) [kreist immer drei Punkte ein und spricht dabei parallel]* **drei, drei, drei, drei, drei, drei, drei.** *[macht den Stift zu]*. **Ist doch in der Dreierreihe.** *[schiebt die Karte nach rechts]*

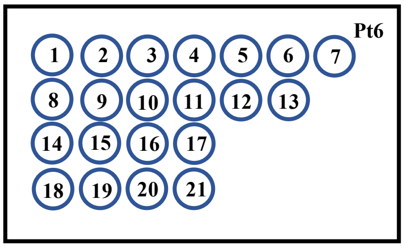


Abbildung 8.15: Beispiel 1.2 - Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

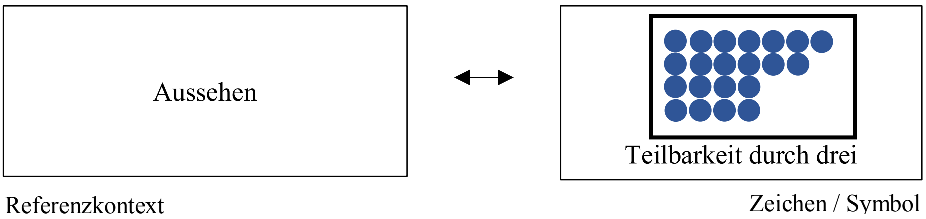


Abbildung 8.16: Beispiel 1.2 - Rollenverteilung I

Dem Argumentations- und Deutungsprozess geht kein gezielter Impuls der Interviewerin voraus, sondern Lasse leitet den neuen Argumentationsprozess durch die Wahl der Darstellung Pt6 ein. Da die Deutung innerhalb des ersten Aufgabenkomplexes zu verorten ist, in der Lasse vor die Anforderung gestellt wird die unterschiedlichen Punktdarstellungen hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei zu deuten, stellt eben dies das fragliche *Zeichen/Symbol* dar – die Deutung von Pt6 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei.

Lasse betrachtet diese Darstellung zunächst insgesamt sieben Sekunden und fährt dabei auch mit der Hand über die Punktdarstellung. Erst dann klassifiziert er die ihm vorliegende Darstellung als nicht teilbar, indem er die Karte zu den anderen Karten, welche er als nicht teilbar klassifiziert hat, schiebt. Dadurch das er zunächst ein paar Sekunden benötigt, zeigt sich, dass für Lasse die Teilbarkeit durch drei nicht spontan erkenn- und begründbar ist. Auf Nachfrage der Interviewerin, warum die Darstellung nicht durch drei teilbar ist, gibt Lasse das Aussehen der Punkdarstellung an, denn diese sei „komisch gemacht“ (Z. 3). Was genau er damit meint, bleibt an dieser Stelle unklar. Das heißt, Lasse bezieht sich in seiner Argumentation auf das konkrete Aussehen der Punktdarstellung. Er bezieht sich demnach auf die optische Eigenschaft des Punktmusters und *zieht Merkmale und Eigenschaften des Punktmusters zur Argumentation heran*.

Obwohl Lasse die Darstellung bereits hinsichtlich ihrer Teilbarkeit durch drei gedeutet hat, betrachtet er die Darstellung erneut und zeigt dabei unkenntlich auf das Punktmuster, so dass rekonstruierbar ist, dass er sich erneut mit der geometrischen Anordnung auseinandersetzt. Es stellt demnach weiterhin das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

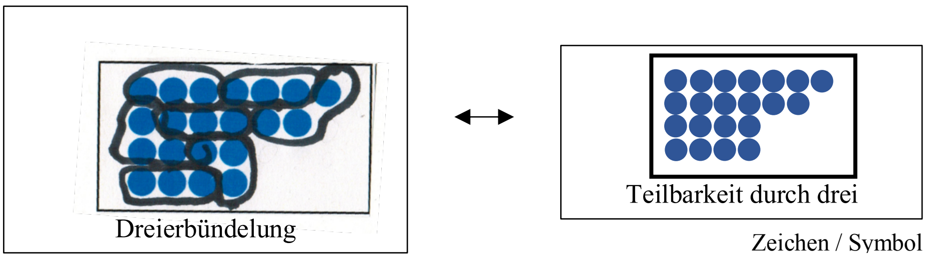


Abbildung 8.17: Beispiel 1.2 - Rollenverteilung II

Die Interviewerin gibt Lasse erneut den Hinweis, dass er auch in die Darstellungen hineinmalen darf, wenn es ihm hilft. Obwohl Lasse dies zunächst verneint, nimmt er dennoch einen Stift, nachdem er geäußert hat, dass es sich bei der Darstellung eventuell doch um eine durch drei teilbare Darstellung handeln könnte. Er kreist nun innerhalb der Darstellung immer drei Punkte ein und sagt parallel dazu immer „drei“ (Z. 6) (vgl. Abb. 8.17). Er gibt demnach die Mächtigkeit eines Bündels an, um die von ihm erzeugten Bündel näher zu beschreiben. Nachdem er insgesamt sieben Dreierbündel erzeugt hat, kommt er zu dem Schluss, dass es „doch in der Dreierreihe“ (Z. 6) ist. Er schiebt nun die Karte zu den anderen Karten, die er bereits als durch drei teilbar klassifiziert hat. Demnach entscheidet Lasse sich um und weist der Darstellung nun die Eigenschaft durch drei teilbar zu (Z. 6). An dieser Stelle wird auch klar, dass er innerhalb dieses Deutungs- und Argumentationsprozesses erneut die Teilbarkeit durch drei in die Darstellung Pt6 hineindeutet. Aber auch in dieser Argumentation bezieht Lasse sich auf *konkrete Eigenschaften und Merkmale des Punktmusters*, nämlich der Möglichkeit diese in Dreierbündel zu strukturieren.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

In beiden Deutungs- und Argumentationsprozessen konnte rekonstruiert werden, dass Lasse die Darstellung Pt6 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei deutet. Er deutet demnach die strukturelle Zahleigenschaft in eine geometrische Anordnung hinein und somit ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*.

Innerhalb der ersten Deutung des Zeichens/Symbols bezieht sich Lasse ausschließlich auf das Aussehen der geometrischen Anordnung und zieht demnach einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* zur Deutung heran. Auch innerhalb des zweiten Deutungsprozesses nutzt Lasse Merkmale der geometrischen Anordnung zur Argumentation, nämlich die Erzeugung von Dreierbündeln in Form von je drei Punkten. Somit lässt sich auch im zweiten Argumentations- und Deutungsprozess ein *Referenzkontext geometrischer Ausprägung* rekonstruieren. Demnach zeigt sich, dass sich Lasse in der gesamten Argumentation auf Eigenschaften und Merkmale des Punktmusters bezieht. Er nutzt daher das Anschauungsmittel (auch) als *Argumentationsmittel*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man zunächst den ersten Argumentations- und Deutungsprozess, so lässt sich rekonstruieren, dass Lasse die Teilbarkeit durch drei aufgrund des ‚komischen Aussehens' ausschließt (Z. 3). Er beschreibt *keinerlei strukturelle geometrische Merkmale der Anordnung*, sondern bezieht sich ausschließlich auf *optische Eigenschaften* beziehungsweise *die äußere Erscheinung* der gesamten geometrischen Anordnung als ein Objekt. Demnach deutet er die Teilbarkeit durch drei zunächst auf Grundlage einer *konkret-dinglichen Deutung*.

In einem zweiten Deutungs- und Argumentationsprozess ändert sich der von Lasse zur Argumentation herangezogene Referenzkontext und auch die Art der Mediation in Form der strukturellen Deutung ändert sich dadurch maßgeblich. Lasse bezieht sich nun nicht mehr auf die äußere Erscheinung der geometrischen Anordnung, sondern er erzeugt nun *Substrukturen in Form von Dreierbündeln* und erzeugt insgesamt sieben Dreierbündel. Aufgrund dessen revidiert Lasse seine Entscheidung und sagt, dass die Darstellung doch in der Dreierreihe ist. Durch die Erzeugung von Substrukturen fokussiert Lasse an dieser *Stelle strukturelle Merkmale innerhalb der Darstellung* und nutzt daher *partielle Strukturen* innerhalb des Deutungs- und Argumentationsprozesses. Dabei ist auffällig, dass Lasse diese Dreierbündel zunächst durch Einzeichnen erzeugen muss, denn in der angelegten Struktur ist keine Dreierstruktur intendiert.

In beiden Argumentationen zeigt sich aber eine Gemeinsamkeit. In beiden Argumentationen, nutzt er *strukturelle Deutungen, die in Bezug zum betrachteten Punktmuster stehen*. Das heißt, Lasse deutet innerhalb der Argumentation Strukturen in das Anschauungsmittel hinein, die er dann zur Begründung der Teilbarkeit durch drei heranzieht, nämlich die Dreierbündelung.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Betrachtet man die begriffliche Deutung, so lässt sich im zweiten Argumentations- und Deutungsprozess eine begriffliche Idee rekonstruieren. Durch die Erzeugung von Dreierbündeln schlussfolgert er, dass sich die Darstellung in der Dreierreihe befindet. Demnach zeigt sich, dass hinter der Argumentation die Idee steckt, dass eine Darstellung dann in der Dreierreihe ist und somit durch drei teilbar ist, wenn sie vollständig in Dreierbündel strukturiert werden kann. Dabei scheint es nicht von Bedeutung, um welche konkrete Zahl es sich handelt und wo innerhalb der Dreierreihe diese zu verorten ist. Die Tatsache, dass sie innerhalb der Dreierreihe zu verorten ist, ist ausreichend, um eine Darstellung als durch drei teilbar zu klassifizieren. Damit nutzt Lasse innerhalb dieses Deutungs- und Argumentationsprozesses die *ordinale Abfolge* der durch drei teilbaren Zahlen in *einer geometrischen Deutungsart*.

Einordnung des Argumentationsprozesses

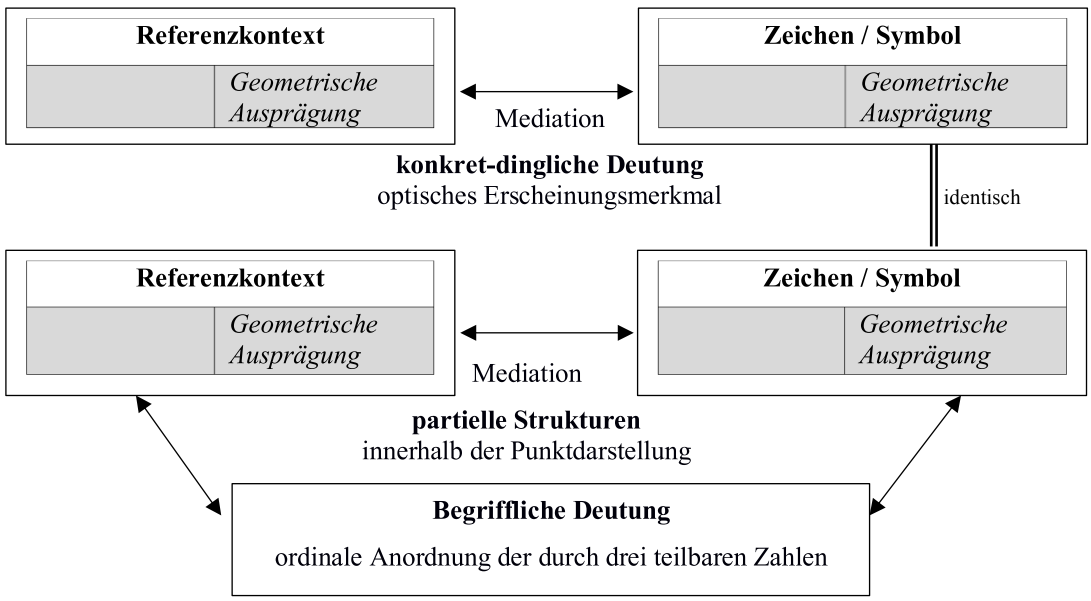


Abbildung 8.18: Beispiel 1.2 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Durch die Einordnung des Argumentationsprozesses in das Theoriekonstrukt zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen zeigen sich demnach die charakteristischen Merkmale der Nutzung eines geometrischen Referenzkontextes. Lasse bezieht sich in beiden Argumentationsprozessen auf Eigenschaften und Merkmale des Punktmusters, wodurch strukturelle Deutungen der geometrischen Anordnung erkennbar werden.

Dadurch wird das Anschauungsmittel innerhalb der kindlichen Argumentation als *Argumentationsmittel* genutzt. Da die argumentative Auseinandersetzung ausschließlich auf geometrischer Ebene erfolgt, ist auch die begriffliche Idee innerhalb dieses Argumentationsprozesses geometrischer Natur. Da die innerhalb der Argumentation stattfindenden Begriffsbildungsprozesse auf geometrischer Ebene zu verorten sind, kann das Anschauungsmittel dann auch als *Erkenntnismittel* dienen.

Wird eine geometrische Anordnung demnach vor einem geometrischen Referenzkontext gedeutet, erhält das Anschauungsmittel eine epistemologische Bedeutung. Dann stellt die Veranschaulichung ein Argumentationsmittel dar und kann auch den Lernprozess als Mittel zur Erkenntnisgewinnung gewinnbringend beeinflussen. Wesentlich innerhalb dieses Ergebnisses für die mathematikdidaktische Forschung und den Mathematikunterricht ist, dass Kinder dazu in der Lage sind, Anschauungsmittel als Argumentationsmittel zu nutzen. Dabei zeigt das obige Beispiel von Lasse aber auch, dass Kinder durchaus unterschiedliche Eigenschaften und Merkmale des Punktmusters fokussieren. Dabei steht die erste von Lasse fokussierte Eigenschaft des Aussehens nicht in Bezug zum mathematischen Inhalt. Im Verlauf der weiteren Ergebnisdarstellung wird deutlich, dass dies keinen Einzelfall darstellt und die strukturellen Deutungen der Kinder im Argumentationsprozess vielfältig sind (vgl. Kap. 8.2). Das zeigt, dass Kinder nicht automatisch die für die Argumentation wesentlichen Strukturen in die Darstellung hineindeuten. Dies ist aber für mathematische Argumentationsprozesse mit Anschauungsmitteln wesentlich.
Sollen demnach Anschauungsmittel gewinnbringend im mathematischen Argumentationsprozess eingesetzt werden, müssen die Kinder entsprechende Sichtweisen erhalten, um geometrische Anordnungen im Hinblick auf die mathematischen Inhalte zu deuten und zur Argumentation zu nutzen. Der Lehrperson kommt dabei eine wesentliche Funktion zu. Die strukturellen Deutungen der Kinder müssen im Mathematikunterricht aufgegriffen werden und wenn notwendig, muss ein Perspektivwechsel initiiert werden. Das heißt, Kinder müssen sich mit unterschiedlichen strukturellen Deutungen auseinandersetzen, denn nur so kann ein Perspektivwechsel erfolgen und die für die Argumentation wesentlichen strukturellen Deutungen können nur in einem solchen Argumentationsprozess ausgehandelt werden.

8.1.3 Einfluss einer Kombination von geometrischen und arithmetischen Referenzkontexten auf die epistemologische Bedeutung des Anschauungsmittels

Die beiden vorherigen typischen Argumentationsweisen sind dadurch bestimmt, dass die Kinder entweder einen arithmetischen oder einen geometrischen Referenzkontext heranziehen (vgl. 8.1.1 & 8.1.2). Die detaillierte Analyse zeigt aber, dass die Referenzkontexte nicht in allen Argumentationen eindeutig einer geometrischen oder arithmetischen Ausprägung zugeordnet werden konnten. Es gibt auch kindliche Argumentationen, in denen sowohl geometrische als auch arithmetische Argumente genutzt werden. In den Analysen konnte dabei eine für die mathematikdidaktische Forschung und den Mathematikunterricht interessante typische Argumentationsweise herausgearbeitet werden. In diesen, und hier unterscheidet sich die typische Argumentationsweise von der von Helena getätigten Argumentation, nutzen die Kinder zunächst einen geometrischen Referenzkontext, um die strukturelle Zahleigenschaft der Punktdarstellung zu begründen. Dabei argumentieren die Kinder in einem ersten Schritt unter Bezugnahme auf Eigenschaften und Merkmale des Anschauungsmittels, so dass das *Anschauungsmittel zunächst als Argumentationsmittel* genutzt wird. Dabei zeigen sich alle charakteristischen Merkmale einer Argumentation, in der *geometrische Referenzkontexte* herangezogen werden.

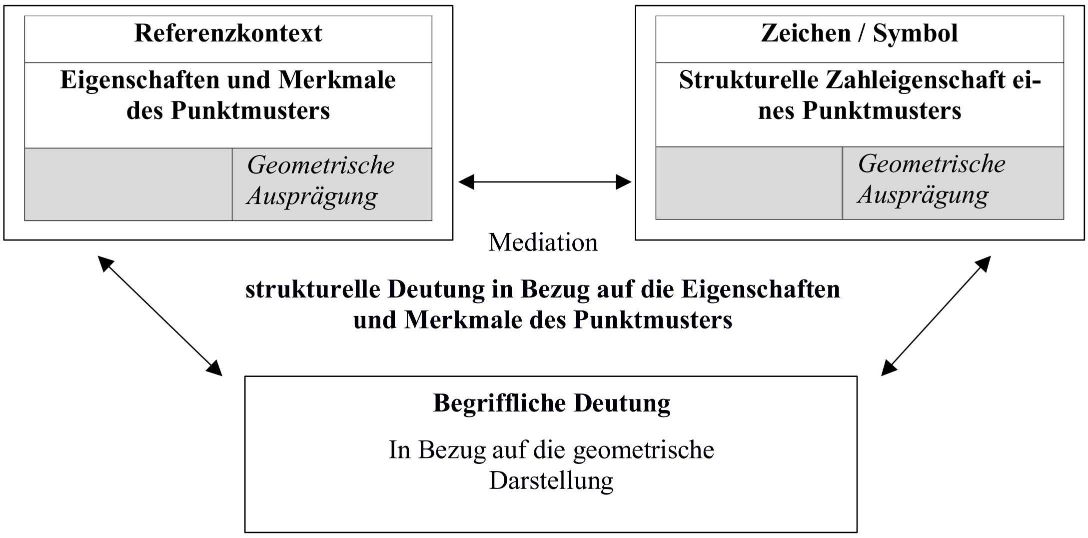


Abbildung 8.19: Charakteristische Argumentationsweise bei der Nutzung eines geometrischen Referenzkontextes

Im Anschluss daran deuten und begründen die Kinder die strukturelle Zahleigenschaft der Punktdarstellung *auch noch vor einem arithmetischen Referenzkontext*. Dabei ist es charakteristisch, dass diese erneute Deutung nicht durch einen Impuls der Interviewerin initiiert wird, sondern von den Kindern selbst getätigt wird. Eine mögliche Begründung ist, dass die Kinder ihre Zuordnung überprüfen wollen und daher den Referenzkontext hin zu einem arithmetischen Referenzkontext wechseln. Eine mögliche Erklärung hierfür könnte sein, dass Kinder es eher gewohnt sind, auf numerisch-symbolischer Ebene zu argumentieren.

Innerhalb dieser Argumentation zeigen sich alle Charakteristika, die in Argumentationsprozessen mit arithmetischen Referenzkontexten beschrieben wurden.

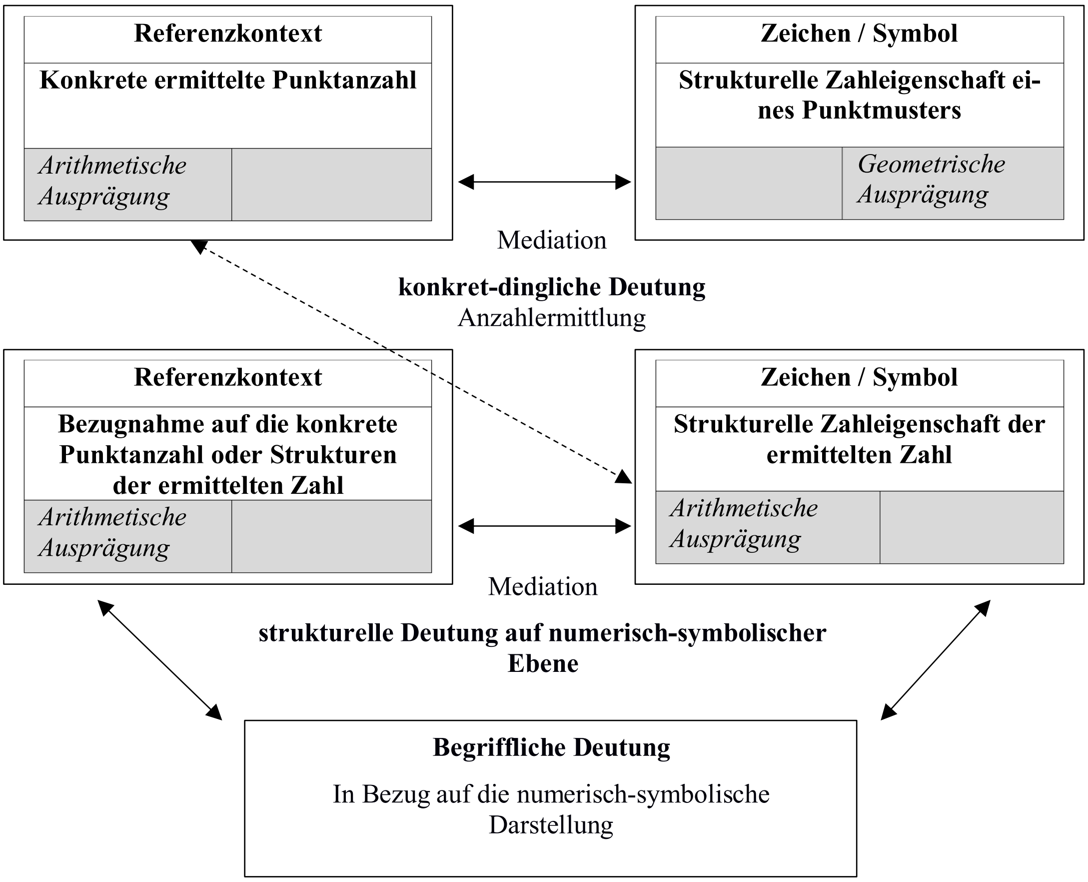


Abbildung 8.20: Charakteristische Argumentation bei der Nutzung eines arithmetischen Referenzkontextes

Demnach zeigen sich innerhalb des ersten Argumentationsschrittes die charakteristischen Merkmale der Argumentationen mit geometrischen Referenzkontexten. Der zweite Argumentationsschritt weist die charakteristischen Merkmale der Argumentationen mit arithmetischen Referenzkontexten auf. Zudem ist typisch, dass die erste Argumentation durch den zweiten Argumentationsschritt entweder verifiziert oder falsifiziert wird. Ein solcher Verlauf wird an folgendem Beispiel genau dargestellt und charakterisiert:

Beispiel 1.3: Jennifer deutet P7 zunächst vor einem arithmetischen und dann vor einem geometrischen Referenzkontext

Der nachfolgende Interviewausschnitt stellt den achten Deutungs- und Argumentationsprozess im ersten Aufgabenkomplex des Interviews „Paritäten" dar.

1	J	**So, das hier** *(.) [nimmt P7 in die Hand]* **ist jetzt wieder eine ungerade Zahl, weil hier drei, drei, drei, drei, drei, einer** *[zeigt dabei jeweils über die vertikalen Reihen von P7]***.**
2	I	**Mhm.**
3	J	*[zeigt unkenntlich auf das Punktmuster]* **Fünf** *[deutet eine vertikale Linie auf P7 an] (.)* **mal drei sind fünfzehn und** *(..)*, **doch das sind sechzehn ups,** *[nimmt P7 in die Hand tippt unkenntlich auf die Punkte und murmelt]* **doch das sind sechzehn, die kann man teilen. Nur die sind halt in drei Reihen und dann fehlt hier noch einer. Also zwei, vier, sechs, acht, zehn, zwölf, vierzehn** *[zeigt auf P7.1&P7.2, P7.3&P7.4, P7.5&P7.6 und fährt in der zweiten Reihe fort und tippt dort 3 mal mit zwei Fingern in die Reihe, tippt auf P7.12&P7.13, P7.14 & P7.15]*, **hä, also das ist schon schwer. Aber wenn man genau zählt, dann sieht man.**

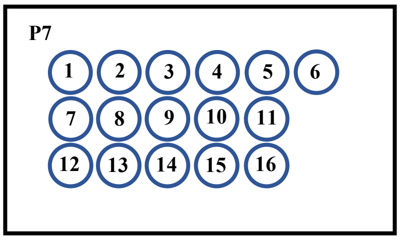


Abbildung 8.21: Beispiel 1.3 - Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

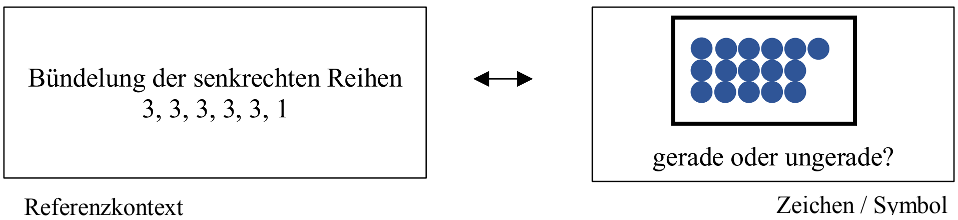


Abbildung 8.22: Beispiel 1.3 - Rollenverteilung I

Dem nun betrachteten Interviewausschnitt geht kein direkter Impuls der Interviewerin voraus, da er aber innerhalb des ersten Aufgabenkomplexes zu verorten ist, steht Jennifer vor der Herausforderung, die Parität der vorliegenden Punktdarstellungen zu deuten. Jennifer leitet den neuen Deutungsprozess ein, indem sie die Darstellung P7 in die Hand nimmt. Demnach stellt die Deutung der Darstellung P7 hinsichtlich der Parität das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar. Jennifer klassifiziert die Punktdarstellung als ungerade. Dieses begründet sie, indem sie eine Bündelung der senkrechten Reihen vornimmt. Sie zeigt nacheinander von oben nach unten über die einzelnen senkrechten Reihen des Punktmusters und beschreibt deren Mächtigkeit. Demnach bezieht sie sich in ihrer Argumentation auf *Eigenschaften des*

Punktmusters, nämlich auf die Anzahl der Punkte in einer Spalte. Da es sich nicht um gleichartige Spalten handelt, stellt die Punktdarstellung eine ungerade Zahl dar.
Obwohl Jennifer die Darstellung bereits einer Parität zugeordnet hat und ihre Zuordnung begründet hat, endet der Deutungs- und Argumentationsprozess an dieser Stelle nicht. Stattdessen beginnt sie die genaue Punktanzahl zu ermitteln, indem sie die Darstellung multiplikativ deutet. Sie rechnet fünf mal drei und addiert dann den Punkt, den sie vorher als „einer" beschrieben hat.

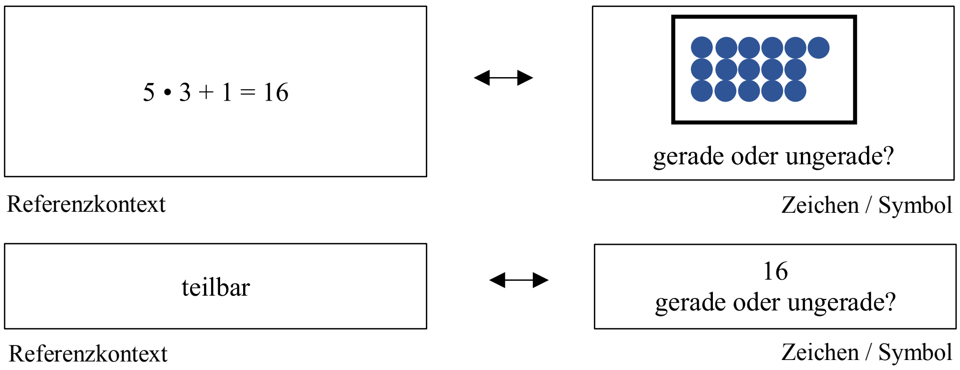


Abbildung 8.23: Beispiel 1.3 - Rollenverteilung II

Dieser zweite Deutungsprozess wurde nicht von der Interviewerin initiiert. So lässt sich vermuten, dass Helena den zweiten Deutungsschritt nutzt, um ihre *erste Argumentation zu stützen, oder um sich hinsichtlich der Korrektheit ihrer bereits getätigten Aussage abzusichern*. Sie ermittelt die konkrete Punktanzahl und gibt an, dass es sich um 16 Punkte handelt. Demnach ermittelt sie an dieser Stelle nun die *konkrete Punktanzahl*. Durch ihre Aussage „doch, das sind sechzehn ups" (Z. 3) wird deutlich, dass an dieser Stelle ein *kognitiver Konflikt* erzeugt wird, denn die ermittelte Punktanzahl scheint im Widerspruch zu der vorher getätigten Zuordnung zu stehen. Da dies nicht zu ihrer vormals getätigten Aussage passt, zählt sie die Punkte erneut und kommt nochmals zu der Punktanzahl 16. Diese klassifiziert sie als „teilbar"; eine von ihr bereits vorher genutzte Beschreibung der Eigenschaft gerade. Hier zeigen sich zwei charakteristische Aspekte: Zum einen ändert sich der Referenzkontext. Jennifer deutet das Anschauungsmittel nicht mehr unter Bezugnahme auf geometrische Merkmale Stattdessen bezieht sie sich auf die konkrete Punktanzahl. Zum anderen wird dadurch der *charakteristische Wechsel der strittigen Aussage* deutlich. Sie klassifiziert nicht mehr das Punktmuster als solches, sondern sie deutet die *konkrete von ihr ermittelte Punktanzahl*. Sie benennt dann nochmals die Dreierstruktur innerhalb der Veranschaulichung und einen fehlenden Punkt. Was genau Jennifer mit dem fehlenden Punkt meint, ist an dieser Stelle nicht eindeutig rekonstruierbar, denn für eine vollständige Dreierstruktur fehlen zwei Punkte. Im Anschluss daran erläutert sie nochmals ihren Zählprozess, welchen sie als

„schwer“ bezeichnet. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass sie in Zweierschritten zählt, diese aber nicht direkt innerhalb der Veranschaulichung abgebildet sind.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Jennifer steht zu Beginn des Deutungs- und Argumentationsprozesses vor der Herausforderung, die Parität der geometrischen Anordnung P7 zu deuten. Sie deutet demnach ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*. In einem ersten Deutungsschritt nutzt sie nun die Bündelung der senkrechten Reihen und die Beschreibung der Mächtigkeit dieser als Argumentationsgrundlage. Demnach zieht sie zur Argumentation geometrische Merkmale heran und somit einen *geometrisch geprägten Referenzkontext*.

Innerhalb des nachfolgenden Argumentations- und Deutungsprozesses deutet sie noch immer das *geometrisch geprägte Zeichen/Symbol*, nämlich die Parität der geometrischen Anordnung P7. Sie zieht nun aber ein *neuen Referenzkontext* heran, indem sie die *konkrete Punktanzahl* ermittelt. Demnach nutzt sie nun auch einen *arithmetischen Referenzkontext*, um die Parität der Darstellung P7 zu begründen. Da sie anschließend die Zahl 16 hinsichtlich ihrer Parität deutet, zeigt sich auch hier erneut ein *Wechsel des Zeichens/Symbols*. Durch die Übersetzung der Darstellung wird dies nun zu einer numerisch-symbolischen Darstellung und ist *arithmetisch geprägt*, welche im Sinne der Teilbarkeit nun auch durch einen *arithmetisch geprägten* Referenzkontext gedeutet wird. Demnach zeigen sich zwei unterschiedliche Argumentationen innerhalb dieses Beispiels: Zunächst deutet sie das Zeichen/Symbol vor einem *geometrischen Referenzkontext*. Anschließend zieht sie zur Deutung einen *arithmetischen Referenzkontext* heran.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man die strukturelle Deutung innerhalb der Argumentation von Jennifer, so zeigt sich, dass sie die Darstellung in senkrechte Reihen gliedert, die in den ersten fünf Reihen je drei Punkte und in der sechsten Reihe einen Punkt enthält. Demnach strukturiert sie die Punktdarstellung, indem sie *senkrechte Substrukturen* erzeugt. Dabei nutzt sie eine durch das Punktmuster durchaus vorgegebene Strukturierung, welche sie möglicherweise in ihrer Deutung beeinflusst hat. Durch diese Strukturierung begründet Jennifer, dass es sich bei der geometrischen Anordnung P7 um die Darstellung einer ungeraden Zahl handelt. Sie versucht demnach scheinbar gleichartige Substrukturen in Form der Spalten zu erzeugen. Da dies nicht möglich ist, muss es sich um eine ungerade Anzahl handeln. Demnach deutet Jennifer durch den Versuch der Generierung von gleichartigen Substrukturen innerhalb der Darstellung *partielle Strukturen* in diese hinein. Dabei stehen die von ihr gedeuteten partiellen

Strukturen allerdings nicht in Beziehung zu der von ihr zu begründenden strukturellen Zahleigenschaft. Hier wird deutlich, dass sich ihre erste Deutung charakteristischer Weise auf *strukturelle Eigenschaften der Punktdarstellung* bezieht. Sie nutzt das Anschauungsmittel somit (auch) als *Argumentationsmittel*.

Durch den Wechsel des Referenzkontextes, *wechselt nun auch die Art der Mediation* zwischen dem Referenzkontext und dem Zeichen/Symbol. Jennifer nimmt nun einen neuen Blick auf die Darstellung ein und deutet diese *konkret-dinglich*, indem sie die Darstellung als *Mittel zur Zahldarstellung* deutet und die Punktanzahl 16 ermittelt. Diese klassifiziert sie nun als teilbar, ohne dies näher zu begründen, so dass sich vermuten lässt, dass sie an dieser Stelle auf bekanntes *Faktenwissen* zurückgreift.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Zu Beginn des Argumentations- und Deutungsprozesses wird eine begriffliche Idee des Begriffs ‚ungerade' deutlich, dass eine Punktanordnung als ungerade zu bezeichnen ist, wenn die Spalten innerhalb der Anordnung nicht gleichmächtig sind. Diese ist aus mathematischer Perspektive nicht tragfähig. Dennoch wird deutlich, dass sich die *begriffliche Idee auf die geometrische Darstellung* bezieht.

Durch den Wechsel des Referenzkontextes ändert sich auch die begriffliche Idee, denn innerhalb von Argumentationen mit arithmetischen Referenzkontexten, ist auch die begriffliche Idee auf dieser Ebene zu verorten. Durch diesen Wechsel wird auch deutlich, dass die vorherige begriffliche Idee nicht tragfähig ist. Welche begriffliche Idee Jennifer genau nutzt, um die Teilbarkeit der 16 zu begründen, kann an dieser Stelle nicht herausgearbeitet werden.

Einordnung des Argumentationsprozesses

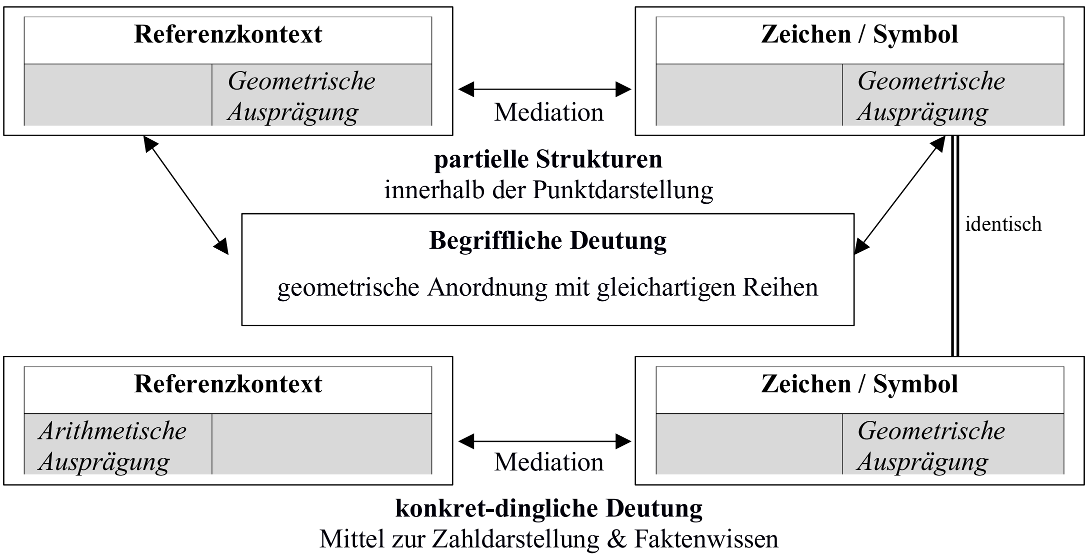


Abbildung 8.24: Beispiel 1.3 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Wird eine geometrische Anordnung demnach vor einer Kombination eines geometrischen Referenzkontextes und eines arithmetischen Referenzkontextes gedeutet, erhält das Anschauungsmittel unterschiedliche epistemologische Bedeutungen. Durch die Ausnutzung eines geometrischen Referenzkontextes erhält das Anschauungsmittel zunächst die Funktion eines Argumentationsmittels, denn die Argumentation bezieht sich auf konkrete Eigenschaften und Merkmale des Anschauungsmittels (vgl. auch Kap. 8.1.2). Nachdem der Referenzkontext gewechselt wurde, verliert das Anschauungsmittel seine epistemologische Bedeutung und es ist nur noch Teil der strittigen Aussage, denn die Argumentation erfolgt ausschließlich auf numerisch-symbolischer und demnach arithmetischer Ebene (vgl. Kap. 8.1.1). Auch wenn das Anschauungsmittel seine Bedeutung im Argumentationsprozess verliert, birgt ein solcher Wechsel ein großes Potential für den Mathematikunterricht und das Argumentierenlernen. In dem obigen Beispiel wird im zweiten Argumentationsschritt deutlich, dass es sich um die Darstellung einer geraden Zahl handelt. Daraus lässt sich schließen, dass die strukturelle Deutung innerhalb des ersten Argumentationsschrittes nicht zur Argumentation herangezogen werden kann. Für den Mathematikunterricht bietet dies das Potential, um genau diese strukturellen Deutungen zu thematisieren. Es können demnach Aushandlungsprozesse initiiert werden, in denen herausgearbeitet wird, welche Strukturen innerhalb der Darstellung für eine Argumentation genutzt werden können und welche nicht. Dies bietet gleichzeitig das Potential, mathematische Werkzeuge und Sichtweisen zu entwickeln, die Kinder dazu befähigen, Anschauungsmittel im Argumentationsprozess zu nutzen. Demnach hat die Lehrperson in diesem Fall zwei Aufgaben: Zum einen kann die Lehrperson bei nicht tragfähigen geometrischen Deutungen einen Wechsel des Referenzkontextes bewusst initiieren, um einen kognitiven Konflikt zu erzeugen. Zum anderen müssen die strukturellen Deutungen der Kinder thematisiert werden, um Aushandlungsprozesse zu initiieren.

8.1.4 Überblick über die epistemologische Bedeutung

In den Analysen wurden alle Interviewszenen hinsichtlich der bis hierhin beschriebenen epistemologischen Bedeutung des Anschauungsmittels analysiert. Dabei wurden die von den Kindern getätigten spontanen Deutungen in den Fokus gestellt. Denn jede Darstellung wurde von den Kindern in einem ersten Deutungsschritt hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft beziehungsweise der damit verbundenen allgemeingültigen Aussage gedeutet. Unter spontanen Deutungsprozessen wird die erste Deutung einer jeden Punktdarstellung verstanden. Da von den Kindern Punktdarstellungen gedeutet werden, stellen die

Deutungsprozesse hauptsächlich die Deutung eines geometrisch geprägten Zeichens/Symbols dar. Die Darstellungen P9 („Paritäten“) sowie P11 („Teilbarkeit durch drei“), in der die ‚15‘ als numerisch-symbolische Darstellung repräsentiert ist, stellt dabei die Ausnahme dar. Dies ist die einzige Deutung eines arithmetisch geprägten Zeichens/Symbols. Die zur Deutung dieser Zeichen/Symbole herangezogenen Referenzkontexte werden zur Vollständigkeit in den folgenden tabellarischen Übersichten mit aufgeführt, in den Analysen aber nicht berücksichtigt.

Die Ergebnisse stellen dabei keine quantitative Analyse dar und sind auch nicht als repräsentativ anzusehen. Dennoch ergeben sich interessante Hinweise auf die Nutzung geometrischer und arithmetischer Referenzkontexte bei der Deutung geometrischer Zeichen/Symbole und demnach interessante Erkenntnisse zur Nutzung von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess.

Im Folgenden werden zunächst die beiden Aufgabenkomplexe des Interviews „Paritäten“ getrennt voneinander betrachtet. Daran anschließend werden beide Aufgabenkomplexe des Interviews „Teilbarkeit durch drei“ getrennt voneinander betrachtet. Anschließend werden diese Ergebnisse zusammengeführt und Schlussfolgerungen daraus gezogen. Dafür wird zunächst immer eine tabellarische Übersicht über die herausgearbeiteten Ausprägungen der Referenzkontexte dargestellt und anschließend die Erkenntnisse, welche aus dieser Analyse gezogen werden können, erläutert. Hierfür werden im Folgenden immer zunächst alle Darstellungen betrachtet und anschließend der Fokus auf die Deutung prototypischer Darstellungen gelegt, denn es zeigen sich durch diese Unterscheidung wichtige Erkenntnisse.

Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte: „Paritäten“ - A1

	Helena	Jennifer	Jonathan	Benjamin	Maurice	Melina	Mia	Nico	Pia
prototypisch	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1
	P2	P2	P2	P2	P2	P2	P2	P2	P2
	P3	P3	P3	P3	P3	P3	P3	P3	P3
prototypisch mit Umdeut.	P4	P4	P4	P4	P4	P4	P4	P4	P4
	P6	P6	P6	P6	P6	P6	P6	P6	P6
strukturiert	P5	P5	P5	P5	P5	P5	P5	P5	P5
	P7	P7	P7	P7	P7	P7	P7	P7	P7
	P8	P8	P8	P8		P8	P8	P8	P8
unstrukturiert	P9	P9	P9	P9	P9	P9	P9	P9	P9
symbolisch	P10	P10	P10	P10	P10	P10	P10	P10	P10

Tabelle 8.1: Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte: „Paritäten“ - Aufgabenkomplex 1

In der obigen Tabelle sind die Ausprägungen der Referenzkontexte des ersten Aufgabenkomplexes im Interview „Paritäten“ dargestellt[29]. Insgesamt konnten 80 Deutungen geometrisch geprägter Zeichen/Symbole rekonstruiert werden[30]. Davon wurden 26

[29] In den folgenden Tabellen und Darstellungen sind die Referenzkontexte geometrischer Ausprägung braun dargestellt. Die Referenzkontexte arithmetischer Ausprägung sind grün dargestellt. Referenzkontexte, die sowohl arithmetischer als auch geometrische Ausprägung sind, sind grau gefärbt. Konnten in den Interviews keine Deutungsprozesse rekonstruiert werden, so sind diese Felder weiß.

[30] Die Deutungen der Darstellung P9 wurde an dieser Stelle nicht berücksichtigt, da es sich bei der Darstellung P9 um eine numerisch-symbolische Darstellung und demnach ein arithmetisch geprägtes Zeichen/Symbol handelt.

Zeichen/Symbole vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet (ca. 33%). In 49 Deutungsprozessen konnte ein arithmetisch geprägter Referenzkontext herausgearbeitet werden (ca. 61%). Fünf Deutungen zeigten sowohl arithmetisch als auch geometrisch geprägte Aspekte des Referenzkontextes (ca. 6%). Demnach wurde der überwiegende Teil, nämlich fast zwei Drittel, der Zeichen/Symbole unter Bezugnahme eines arithmetisch geprägten Referenzkontextes gedeutet. Nur ca. ein Drittel der Deutungen der geometrisch geprägten Zeichen/Symbole wurde vor einem ebenfalls geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet (vgl. Abb. 8.25).

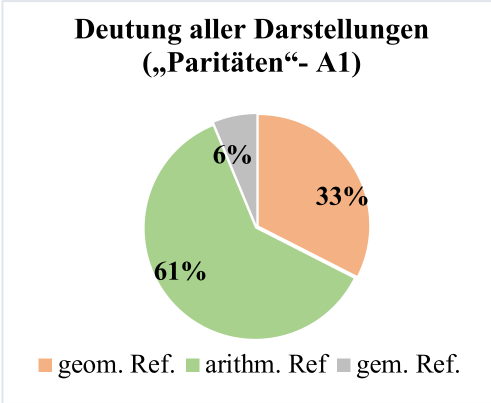


Abbildung 8.25: Anteile der Ausprägungen der Referenzkontexte aller geometrisch geprägter Zeichen/Symbole („Paritäten" - A1)

Betrachtet man die prototypischen Darstellungen, so lässt sich sagen, dass insgesamt 27 geometrisch geprägte Zeichen/Symbole gedeutet wurden.

Dabei wurden diese in 15 Fällen vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet (ca. 56%). In zwölf Deutungsprozessen konnte ein arithmetisch geprägter Referenzkontext rekonstruiert werden (ca. 44%). Demnach wurden in Argumentationsprozessen im Kontext prototypischer Darstellungen deutlich häufiger ein geometrischer Referenzkontext herangezogen (vgl. Abb. 8.26). Während nur 33% aller Zeichen/Symbole vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet wurden, wurden 56% der prototypischen Darstellungen vor einem solchen gedeutet.

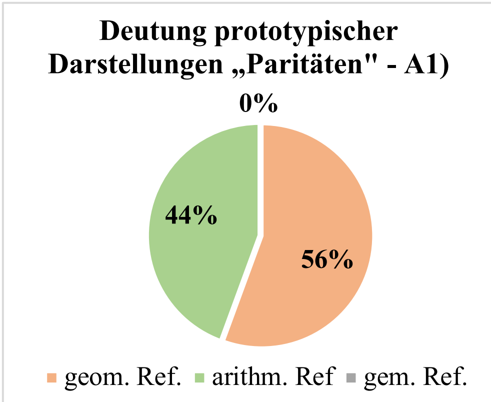


Abbildung 8.26: Anteile der Ausprägung der Referenzkontexte prototypsicher geometrisch geprägter Zeichen/Symbole („Paritäten" - A1)

Zudem zeigte sich, dass drei Kinder die geometrisch geprägten Zeichen/Symbole ausschließlich vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext deuten. Kein Kind nutzte zur Argumentation ausschließlich geometrische Referenzkontexte. Dennoch ist auffällig, dass die vier Kinder, die geometrisch geprägte Referenzkontexte nutzten, diese in allen prototypischen Darstellungen herangezogen haben. Zwei Kinder (Mia und Pia) nutzten nur in einem beziehungsweise zwei Fällen einen geometrischen Referenzkontext. Diese konnten wiederum ausschließlich bei der Deutung prototypischer Darstellungen rekonstruiert werden.

Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte: „Paritäten“ - A2

	Helena	Jennifer	Jonathan	Benjamin	Maurice	Melina	Mia	Nico	Pia
prototypisch	S1	S1	S1	S1	S1	S1	S1	S1	S1
	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7
strukturiert	S2	S2	S2	S2	S2	S2	S2	S2	S2
	S3	S3	S3	S3	S3	S3	S3	S3	S3
	S4	S4	S4	S4	S4	S4	S4	S4	S4
	S6	S6	S6	S6	S6	S6	S6	S6	
unstrukturiert	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5

Tabelle 8.2: Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte: „Paritäten“ - Aufgabenkomplex 2

In der obigen Tabelle sind die Ausprägungen der Referenzkontexte des ersten Deutungsprozesses des zweiten Aufgabenkomplexes des Interviews „Paritäten“ dargestellt. Insgesamt konnten 62 zu deutende geometrische Zeichen/Symbole in Form von Punktdarstellungen rekonstruiert werden. Davon konnten in sechs Deutungsprozessen ein geometrischer Referenzkontext herausgearbeitet werden (ca. 9%). Vierzig zu deutende geometrische

Zeichen/Symbole wurden vor einem arithmetischen Referenzkontext gedeutet (ca. 65%). In 16 Deutungen konnten sowohl arithmetische als auch geometrische Referenzkontexte rekonstruiert werden (ca. 26%). Auch hier wurden ca. zwei Drittel und demnach der überwiegende Teil der Zeichen/Symbole vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext gedeutet. Der Anteil der geometrisch geprägten Referenzkontexte ist deutlich gesunken, während der Anteil der gemischten Referenzkontexte deutlich gestiegen ist. Dies kann darauf zurückzuführen sein, dass die Kinder auch dazu aufgefordert waren, die dargestellten Aufgaben zu deuten und hierfür die konkreten Zahlen ermittelt haben. Betrachtet man erneut die prototypischen Darstellungen, so zeigt sich, dass von den 18 zu deutenden prototypischen Darstellungen sechs vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet wurden (ca. 33%). Demnach haben die Kinder im zweiten Aufgabenkomplex ausschließlich bei prototypischen Darstellungen einen geometrischen Referenzkontext zur Deutung herangezogen. In sechs Deutungsprozessen konnte ein arithmetischer Referenzkontext rekonstruiert werden (ca. 33%). Bei sechs Fällen nutzten die Kinder sowohl geometrische als auch arithmetische Aspekte zur Argumentation und deuteten das Zeichen/Symbol demnach vor einem gemischten Referenzkontext (ca. 33%). Auch hier zeigte sich, dass die Kinder bei der Deutung prototypischer Darstellungen eher geometrische Merkmale zur Argumentation heranziehen als bei nicht-prototypischen Darstellungen.

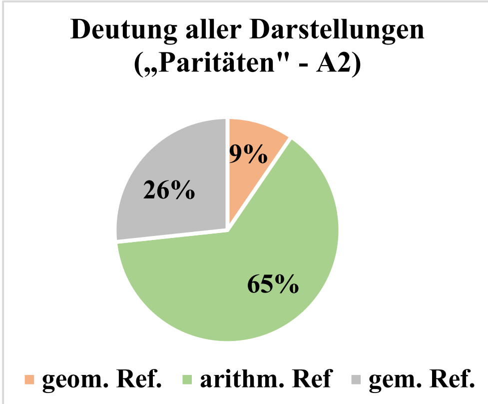


Abbildung 8.27: Anteile der Ausprägungen der Referenzkontexte aller geometrisch geprägter Zeichen/Symbole („Paritäten“ - A2)

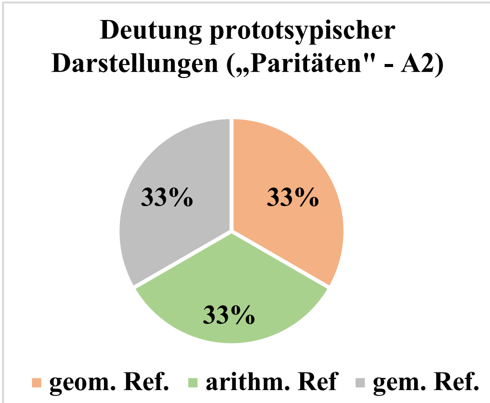


Abbildung 8.28: Anteile der Ausprägung der Referenzkontexte prototypsicher geometrisch geprägter Zeichen/Symbole („Paritäten“ - A2)

Zudem zeigte sich, dass zwei Kinder (Maurice und Nico) die Darstellungen ausschließlich vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext gedeutet haben. Kein Kind nutzte zur Argumentation ausschließlich geometrische Referenzkontexte. Melina, Pia und Mia deuteten die Zeichen/Symbole vorwiegend vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext. Doch auch hier zeigte sich, dass sich die geometrischen sowie gemischten Deutungen vor allem bei der Deutung prototypischer Darstellungen rekonstruieren ließen.

Vergleicht man die zur Argumentation herangezogenen Referenzkontexte des ersten und zweiten Aufgabenkomplexes einiger Kinder, so zeigt sich eine interessante Auffälligkeit. Während Jonathan im ersten Aufgabenkomplex ausschließlich arithmetische Referenzkontexte herangezogen hat, deutet er die Zeichen/Symbole innerhalb des zweiten Aufgabenkomplexes überwiegend vor einem gemischten beziehungsweise geometrisch geprägten Referenzkontext. Bei Melina zeigte sich das Gegenteil. Während sie im ersten Aufgabenkomplex häufig geometrische Referenzkontexte zur Argumentation herangezogen hat, ließen sich in den Deutungsprozessen des zweiten Aufgabenkomplexes fast ausschließlich arithmetische Referenzkontexte herausarbeiten. Dadurch zeigt sich, dass durchaus Umbrüche in den herangezogenen Referenzkontexten auftreten können und Kinder nicht durchgängig eine Art der Ausprägung der Referenzkontexte zur Argumentation nutzen. Aufgrund der geringen Anzahl der Kinder, bei denen diese Auffälligkeit festgestellt werden konnte, kann an dieser Stelle kein Grund für diesen Umbruch genannt werden.

Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte: „Teilbarkeit durch drei“ - A1

	Elisa	Greta	Jaden	Lasse	Marie	Miriam	Paula	Simone	Valerian	Thomas	Verena	Johannes
Protot.	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2	Pt2
	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5	Pt5
	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7	Pt7
Protot.	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8	Pt8
Umdeu.	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9	Pt9
Struktur.	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1	Pt1
	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3	Pt3
	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4	Pt4
	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6	Pt6
Unstr.	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10	Pt10
Symbol.	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11	Pt11

Tabelle 8.3: Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte: „Teilbarkeit durch drei“ - A1

In der obigen Tabelle sind die Ausprägungen der Referenzkontexte des ersten Deutungsprozesses des ersten Aufgabenkomplexes des Interviews „Teilbarkeit durch drei“ dargestellt. Insgesamt konnten 118 zu deutende geometrische Zeichen/Symbole in Form von

Punktdarstellungen rekonstruiert werden[31]. Davon wurden 51 zu deutende Zeichen/Symbole vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet (ca. 43%). In 57 Deutungsprozessen zeigte sich ein arithmetisch geprägter Referenzkontext (ca. 48%). In zehn Fällen konnte herausgearbeitet werden, dass die Kinder das zu deutende Zeichen/Symbol vor einem Referenzkontext gedeutet haben, in welchem geometrische und arithmetische Deutungen zum Tragen kommen (ca. 9%). Auch innerhalb dieses Aufgabenkomplexes zeigte sich, dass mehr arithmetisch geprägte Referenzkontexte rekonstruiert werden konnten als geometrische Referenzkontexte. Auch wenn der Unterschied der Häufigkeiten der Ausprägungen der Referenzkontexte gering ist, zeigen sich wichtige Erkenntnisse. Betrachtet man nun die prototypischen Darstellungen, so zeigt sich, dass insgesamt 35 zu deutende geometrisch geprägte Zeichen/Symbole prototypischer Art waren. Davon wurden insgesamt 17 mit einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet (48%). In 14 Deutungsprozessen konnten arithmetisch geprägte Referenzkontexte herausgearbeitet werden (40%). In vier Fällen wurde ein Referenzkontext herangezogen, der sowohl geometrische als auch arithmetische Aspekte beinhaltet (ca. 12%). Auch hier zeigt sich, wenn auch nur geringfügig, dass der Anteil der geometrisch geprägten Referenzkontexte höher ist als der Anteil arithmetisch geprägter Referenzkontexte.

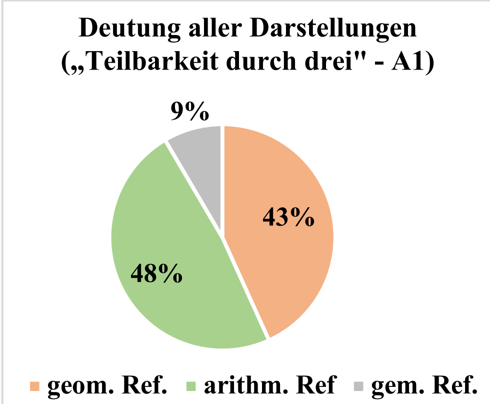


Abbildung 8.29: Anteile der Ausprägung der Referenzkontexte aller geometrisch geprägter Zeichen/Symbole („Teilbarkeit durch drei“ - A1)

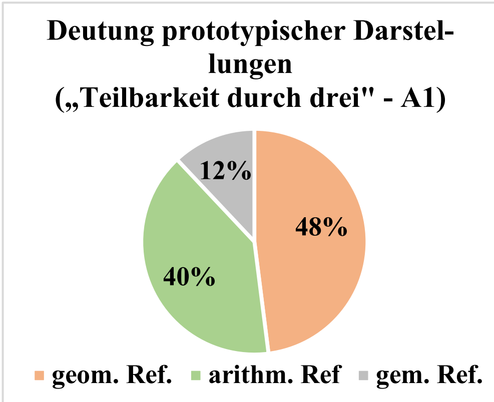


Abbildung 8.30: Anteile der Ausprägung der Referenzkontexte geometrisch geprägter Zeichen/Symbole („Teilbarkeit durch drei“ - A1)

Insgesamt lässt sich sagen, dass ein Kind (Valerian) alle geometrisch geprägten Zeichen/Symbole vor einem arithmetischen Hintergrund gedeutet hat. Drei Kinder (Elisa, Marie und Johannes) nutzten ausschließlich geometrische Merkmale, um die Teilbarkeit durch drei zu begründen und demnach nur geometrisch geprägte Referenzkontexte. Betrachtet man die Deutungen von Greta, Jaden und Thomas, so zeigt sich, dass diese Kinder hauptsächlich arithmetische Referenzkontexte innerhalb der Argumentation heranziehen. In den Deutungen einiger prototypischer Darstellungen ließen sich jedoch geometrisch geprägte

[31] Die Deutungen der Darstellung P11 wurde an dieser Stelle nicht berücksichtigt, da es sich bei der Darstellung P9 um eine numerisch-symbolische Darstellung und demnach ein arithmetisch geprägtes Zeichen/Symbol handelt.

Referenzkontexte rekonstruieren. Gleiches gilt für die Darstellung P10. Obwohl die Darstellung in ihrer Intention eine unstrukturierte Darstellung repräsentiert, so wurde diese von sieben Kindern in prototypischer Art betrachtet, indem sie Dreierreihen in diese hineindeuteten.

Überblick über die Referenzkontexte: „Teilbarkeit durch drei“ - A2

	Elisa		Greta		Jaden		Lasse		Marie		Miriam		Paula		Simone		Valerian		Thomas		Verena		Johannes	
Prot.	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1
	St6	S6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St2	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6
Struk.	St2	Stt2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2
	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3
	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4
	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5
Un-struk.	St7	St7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7	S7
	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3	NZ	3

Tabelle 8.4: Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte: „Teilbarkeit durch 3“ - A2

	Elisa	Greta	Jaden	Lasse	Marie	Miriam	Paula	Simone	Valerian	Thomas	Verena	Johannes
Prot.	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1	St1
	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6	St6
Struk.	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2	St2
	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3	St3
	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4	St4
	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5	St5
Un-struk.	St7	St7	St7	St7	St7	St7	St7	St7	St7	St7	St7	St7

Tabelle 8.5: Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte: „Teilbarkeit durch 3“ - A2 (Teilbarkeit)

In der obigen linken Tabelle zeigen sich alle Deutungen des zweiten Aufgabenkomplexes des Interviews „Teilbarkeit durch drei“. Diese umfasst die Deutungsprozesse in denen die Kinder die Nachbarzahlen (NZ) und die Teilbarkeit durch drei (3) in die geometrischen Anordnungen hineindeuten sollten. In der folgenden Analyse werden allerdings lediglich die Deutungen der Teilbarkeit durch drei berücksichtigt (vgl. Tab. 8.5). Zum einen ist die Deutung der Nachbarzahlen auf geometrischer Ebene lediglich bei prototypischen Darstellungen möglich, zum anderen ist durch die Fokussierung der Teilbarkeit durch drei eine Vergleichbarkeit mit den vorherigen drei Analysen gegeben. Denn der erste Aufgabenkomplex des Interviews „Teilbarkeit durch drei“ und beide Aufgabenkomplexe des Interviews „Paritäten“ fokussieren mathematische Deutungen im Kontext der Division.

In insgesamt 83 Deutungsprozessen standen die Kinder vor der Herausforderung, die Teilbarkeit durch drei in geometrische Anordnungen hineinzudeuten. Davon wurden 34 geometrisch geprägte Zeichen vor einem geometrischen Referenzkontext gedeutet (ca. 41%). In 47 Deutungsprozessen konnte ein arithmetischer Referenzkontext rekonstruiert werden (ca. 57%). In zwei Fällen konnte herausgearbeitet werden, dass ein gemischter Referenzkontext zur Argumentation genutzt wurde (ca. 2 %). Es zeigte sich erneut, dass mehr geometrisch geprägte Zeichen/Symbole vor einem arithmetischen Referenzkontext gedeutet werden als vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext.

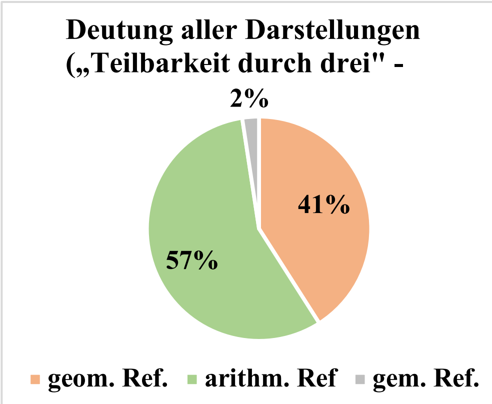


Abbildung 8.31: Anteile der Ausprägung der Referenzkontexte aller geometrisch geprägter Zeichen/Symbole (Teilbarkeit durch drei - A2)

Betrachtet man auch in diesem Argumentationskontext die prototypischen Darstellungen, so zeigen sich insgesamt 24 Deutungen prototypischer Darstellungen. Hiervon wurden jeweils elf geometrisch geprägte Zeichen/Symbole vor einem geometrischen beziehungsweise arithmetischen Referenzkontext gedeutet (jeweils ca. 46%). In zwei Deutungsprozessen wurde von einem Kind ein gemischter Referenzkontext herangezogen (Greta). An dieser Stelle zeigt sich zwar, dass der Anteil der geometrisch geprägten Referenzkontexte genauso groß ist wie der Anteil der arithmetische Referenzkontexte. Dennoch wurde erneut deutlich, dass der Anteil geometrisch geprägter

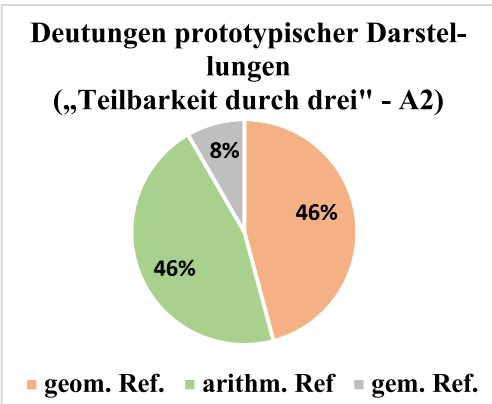


Abbildung 8.32: Anteile der Ausprägung der Referenzkontexte prototypischer geometrisch geprägter Zeichen/Symbole (Teilbarkeit durch drei - A2)

Referenzkontexte bei prototypischen Darstellungen höher ist als der Anteil geometrisch geprägter Referenzkontexte aller Deutungen.
Zudem zeigt sich, dass vier Kinder ausschließlich arithmetisch geprägte Referenzkontexte zur Deutung der geometrisch geprägten Referenzkontexte herangezogen haben (Valerian, Paula, Marie und Jaden). Zwei Kinder deuteten alle geometrisch geprägten Zeichen/Symbole vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext (Johannes und Miriam). Erneut zeigt sich, dass Kinder die sowohl geometrische als auch arithmetische Referenzkontexte nutzen, teilweise auch prototypische Darstellungen vor einem geometrisch geprägten oder gemischten Referenzkontext gedeutet haben.

Überblick über die Ausprägung der Referenzkontexte aller Deutungen

	Deutungen	geom. Ref.	arithm. Ref.	gem. Ref.
P -A1	80	26	49	5
P - A2	62	6	40	16
T - A1	118	51	57	10
T - A2	83	34	47	2
∑	343	117	193	33

Tabelle 8.6: Übersicht über die Ausprägungen aller Referenzkontexte bei der Deutung der vorgelegten Punktdarstellungen

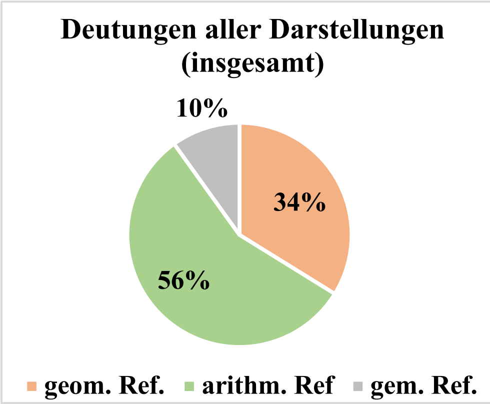


Abbildung 8.33: Anteile der Ausprägung der Referenzkontexte aller geometrischer Zeichen/Symbole (insgesamt)

Insgesamt zeigten sich 343 Deutungsprozesse in denen Kinder geometrisch geprägte Zeichen/Symbole gedeutet haben. Dabei wurden 117 der geometrisch geprägten Zeichen/Symbole vor einem ebenfalls geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet (34%). In 193 Fällen wurde ein arithmetisch geprägter Referenzkontext zur Deutung herangezogen (56%) und in 33 Argumentations- und Deutungsprozessen nutzten die Kinder einen gemischten Referenzkontext, der sowohl arithmetische als auch geometrische Aspekte enthielt (10%). Demnach wurden mehr geometrisch geprägte Zeichen/Symbole vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext gedeutet als vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext.
Im Folgenden werden nun die Ausprägungen der Referenzkontexte aller prototypischen geometrisch geprägten Zeichen/Symbole dargestellt.

	Deutungen	geom. Ref.	arithm. Ref.	gem. Ref.
P -A1	27	15	12	0
P - A2	18	6	6	6
T - A1	35	17	14	4
T - A2	24	11	11	2
∑	104	49	43	12

Tabelle 8.7: Übersicht über die Ausprägungen aller Referenzkontexte bei der Deutung der vorgelegten prototypischen Punktdarstellungen

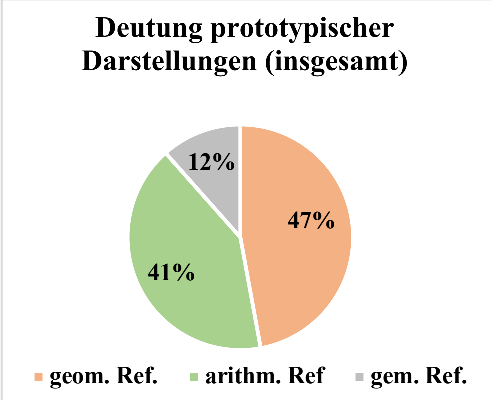


Abbildung 8.34: Anteile der Ausprägung der Referenzkontexte prototypischer geometrisch geprägter Zeichen/Symbole (insgesamt)

Insgesamt konnten 104 Deutungsprozesse prototypischer Zeichen/Symbole rekonstruiert werden. Davon wurden 49 Darstellungen vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet (47%). In 43 Fällen konnte ein arithmetisch geprägter Referenzkontext herausgearbeitet werden (41%). 12 geometrisch geprägte prototypische Zeichen/Symbole wurden vor einem Referenzkontext gedeutet, der arithmetische und geometrische Merkmale enthielt (12%). Dementsprechend zeigt sich, dass, wenn auch geringfügig, mehr geometrisch geprägte Zeichen/Symbole prototypischer Art vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet werden als vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext.

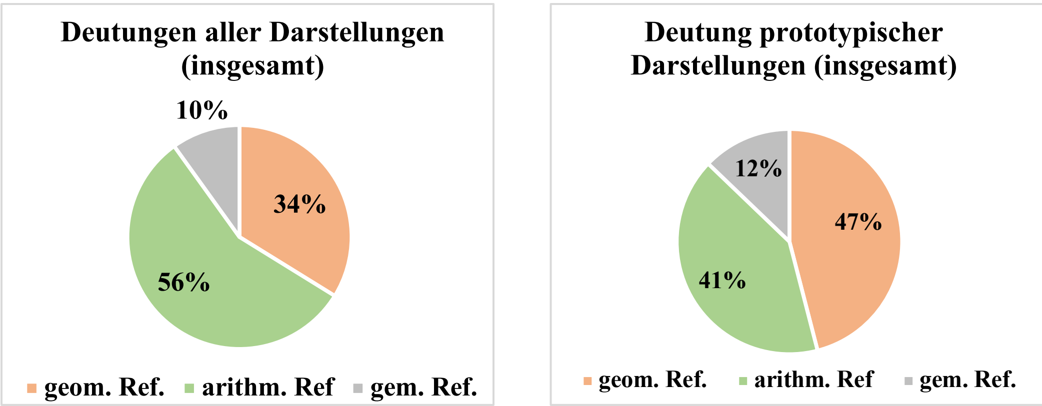


Abbildung 8.35: Vergleich der Anteile der Ausprägungen der Referenzkontexte geometrisch geprägter Zeichen/Symbole

Vergleicht man nun die Anteile der geometrisch geprägten Referenzkontexte aller Darstellungen und die geometrisch geprägten Referenzkontexte von allen prototypischen Darstellungen, so zeigt sich, dass letztere von Kindern deutlich häufiger vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet wurden, als nicht-prototypische Darstellungen.

Möglicherweise werden prototypische Darstellungen häufiger vor einem geometrischen Referenzkontext gedeutet, da die wesentlichen strukturellen Merkmale der Zahleigenschaft auch in die Struktur der prototypischen Darstellung direkt hineingedeutet werden können, ohne zuvor Veränderungen an der Punktdarstellung vornehmen zu müssen. Nicht-prototypische Darstellungen bilden diese strukturellen Merkmale gar nicht oder nicht in vollem Umfang ab, so dass Kinder für ihre Argumentationen Umdeutungen der Darstellungen vornehmen müssen. Sie müssen die Darstellung zunächst zerlegen oder modifizieren, um die strukturelle Zahleigenschaft in die Darstellung hineinzudeuten. Bei der Nutzung nicht-prototypischer Veranschaulichungen zur Argumentation sind demnach verschiedene Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen notwendig (vgl. Kap. 1.5 & 2.4). In diesem Fall ist vor allem das Verändern der Darstellung mit der Intention die strukturelle Zahleigenschaft abzubilden von Relevanz. Das Verändern mathematischer Veranschaulichungen als mathematisches Werkzeug geometrischer Art stellt dabei einen Lerngegenstand dar. Ziel des Mathematikunterrichts muss auch die Ausbildung eben solcher Kompetenzen sein.

Kinder nutzen demnach nicht automatisch geometrische Strukturen in ihren Argumentationsprozessen, nur weil sie dazu angehalten werden Eigenschaften der geometrischen Anordnung zu begründen. Dies kann zwei Gründe haben: Zum einen könnte es sein, dass Kinder arithmetische Vorgehensweisen bevorzugen. Zum anderen zeigte sich in den Analysen der vorliegenden Studie und dies wird in den weiteren Ausführungen deutlich, dass es sich bei der Nutzung von geometrischen Anordnungen als Argumentationsmittel um eine komplexe Tätigkeit handelt, in deren Gebrauch die Kinder zunächst eingeführt werden müssen.

8.2 Strukturelle Deutungen von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess

Zur Beantwortung der Frage, wie Kinder allgemeingültige (arithmetische) Strukturen in die Veranschaulichung hineindeuten, wurden in den Analysen genau die Argumentationen untersucht, in denen *geometrische Referenzkontexte* rekonstruiert werden konnten. In diesen nutzen die Kinder das *Anschauungsmittel als Argumentationsmittel* und ziehen *strukturelle Deutungen der Punktdarstellungen* zur Argumentation heran. Dabei beziehen sie sich auf Eigenschaften und/oder Merkmale der zu deutenden Veranschaulichungen. Diese von den Kindern zur Argumentation genutzten Strukturen sind aber nicht unmittelbar ablesbar, sondern müssen von den Kindern aktiv in die Darstellung hineingedeutet werden (vgl. Kap. 1. & 3). Um genau zu verstehen, wie Kinder Anschauungsmittel zur Argumentation nutzen, ist es notwendig, zu untersuchen und zu beschreiben, welche Strukturen die Kinder in die Darstellung hineindeuten und wie sie diese zur Argumentation nutzen. Hierfür wurde in den Analysen die *strukturelle Deutung in Form der Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext* in den Blick genommen. Durch die detaillierte Untersuchung dieser können folgende typische (strukturelle) Deutungsweisen in Argumentationsprozessen mit Anschauungsmitteln unterschieden werden:

Konkret-dingliche Deutungen:

- Die Kinder beziehen sich auf *phänomenologische Merkmale an der geometrischen Oberfläche der gesamten Punktdarstellung*, wie zum Beispiel optische Eigenschaften des gesamten Punktmusters.
- Die Kinder beziehen sich auf *phänomenologische Merkmale an der geometrischen Oberfläche von Teilen der Punktdarstellung*, wie zum Beispiel die Lage einzelner Punkte oder die Anzahl der Punkte in einer einzigen Reihe. Dabei bleiben Teile der Punktdarstellung unberücksichtigt.

Strukturelle Deutungen:

- Die Kinder beziehen sich in ihren Argumentationen auf *strukturelle Merkmale, die nicht in Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen.*
- Die Kinder beziehen sich in ihren Argumentationen auf *strukturelle Merkmale, die in direktem Bezug zum mathematischen Inhalt stehen*. Dabei argumentieren sie auf Grundlage einer konkreten Veranschaulichung, wodurch eine Verallgemeinerung noch nicht möglich ist.

Allgemeingültige Deutung:

- Die Kinder deuten *ansatzweise allgemeingültige und fortsetzbare Strukturen* in die Darstellung hinein, die eine verallgemeinernde Argumentation ermöglichen.

Diese *fünf unterschiedlichen Deutungstypen* werden im Folgenden nun charakterisiert und an Beispielen konkretisiert.

8.2.1 Fokussierung phänomenologischer Merkmale des Anschauungsmittels im Argumentationsprozess

In den Argumentationsprozessen, in denen Kinder eine *konkret-dingliche Deutung* der Anschauungsmittel einnehmen, nutzen sie vor allem *phänomenologische Merkmale*. Die Kinder beziehen sich auf *Merkmale und/oder Eigenschaften der Punktdarstellung*, deuten dabei aber keine Strukturen in die Veranschaulichung hinein. Vielmehr beziehen sie sich ausschließlich auf *Merkmale an der geometrischen Oberfläche*, die Struktur, die dem Punktmuster zugrunde liegt, bleibt von den Kindern unberücksichtigt. Diese Deutung steht dabei aus mathematischer Perspektive nicht in Bezug zu der zu deutenden und zu begründenden strukturellen Zahleigenschaft.

Dabei lassen sich zwei Varianten unterscheiden:

1. Die Kinder deuten *Oberflächenmerkmale der gesamten Veranschaulichung*. Dabei wird die Darstellung als ein Objekt wahrgenommen. In ihrer Argumentation beziehen sich die Kinder dann auf *phänomenologische Merkmale der gesamten Veranschaulichung*, wie zum Beispiel das optische Erscheinungsbild des Punktmusters als Viereck.
2. Die Kinder deuten *Oberflächenmerkmale von einzelnen Teilen der Punktdarstellung*. Das heißt, sie beziehen sich nicht auf Eigenschaften und/oder Merkmale der gesamten Veranschaulichung, sondern *fokussieren nur einzelne Teile des Anschauungsmittels*. Charakteristisch ist dabei, dass die restliche Anordnung von den Kindern unberücksichtigt bleibt.

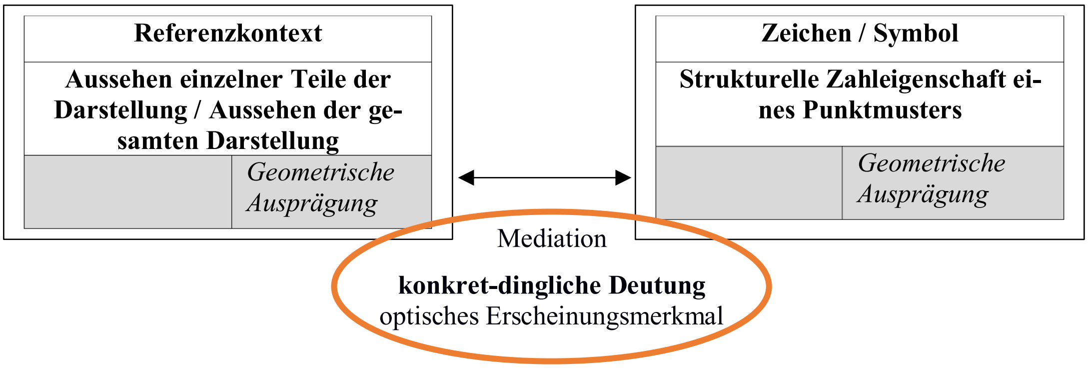


Abbildung 8.36: Charakteristische Argumentationsweise bei der Fokussierung phänomenologischer Merkmale

Beide Arten werden im Folgenden an je einem Beispiel illustriert und die Unterschiede beziehungsweise Gemeinsamkeiten daran aufgezeigt, um die wesentlichen Erkenntnisse dieses Ergebnisses herauszuarbeiten.

Beispiel 2.1: Benjamin bezieht sich in seiner Begründung der Parität von S3 auf Oberflächenmerkmale der gesamten Veranschaulichung

Die Interviewszene stellt den ersten Deutungs- und Argumentationsprozess innerhalb des zweiten Aufgabenkomplexes des Interviews „Paritäten“ dar.

1	I	**Du kannst die ruhig wieder hochschieben.** *[Kind schiebt die Plättchen zur Seite]* **Jetzt hast du mir das schon an unterschiedlichen Aufgaben erklärt und irgendwie hat das bei allen Aufgaben funktioniert. Ich hab jetzt noch** *[fängt an S1 bis S7 vor das Kind zu legen]* **einige Aufgaben für dich mitgebracht. Du siehst da blaue und rote Punkte, weil wir ja immer zwei ungerade Zahlen miteinander addieren. Das heißt eine Zahl ist blau und eine Zahl ist rot** *[beendet das hinlegen von S1 bis S7]*. **Wie ist das denn bei diesen Aufgaben?** *[4 sec. Pause]* **Es geht immer noch um die Aussage, wenn zwei ungerade Zahlen miteinander addiert werden, ist das Ergebnis gerade.**
2	B	*(…)* **Das, mit den Plättchen** *[zeigt auf S3]* **kann man das so rechnen. Also** *[zeigt auf das Punktmuster von S3]*, **ich sag ja, ich weiß jetzt nicht welche Zahl das ist** *[zeigt auf das Punktmuster von S3]*. **Ich sag‘s einfach. Also das** *[zeigt auf das Punktmuster von S3]* **ist jetzt zum Beispiel irgendeine Zahl. Und das ist 3** *[zeigt rechts neben die roten Punkte von S3]* **und dann, wenn ich die Plättchen dann zusammentue‘, dann ist das halt so nen Viereck wo kein Punkt** *[zeigt rechts neben das Punktmuster S3]* **oder so übersteht. Dann weiß ich schon sofort, dass das gerade ist.**

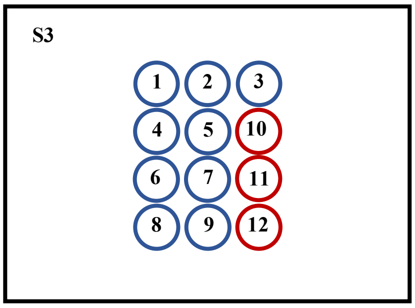


Abbildung 8.37: Beispiel 2.1 - Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

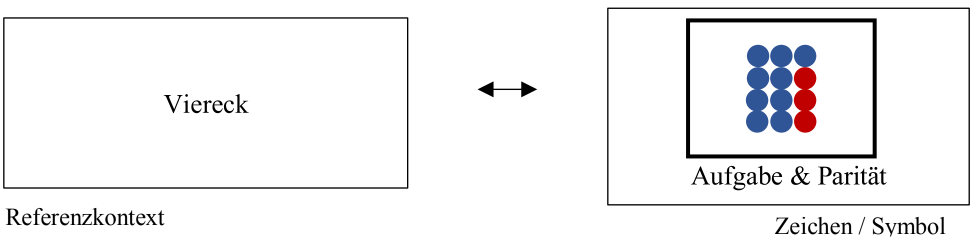


Abbildung 8.38: Beispiel 2.1 - Rollenverteilung

Zu Beginn der Interviewszene wird Benjamin aufgefordert, die ihm vorliegenden Punktdarstellungen hinsichtlich der bereits vorher thematisierten allgemeingültigen Aussage ‚Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade‘ zu deuten. Durch das Zeigen auf die Darstellung S3 leitet Benjamin den Deutungs- und Argumentationsprozess in Bezug auf die geometrische Anordnung S3 ein. Demnach stellt die Deutung der Darstellung S3 hinsichtlich der zu betrachtenden allgemeingültigen Aussage das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Er soll demnach begründen, ob innerhalb der Veranschaulichung zwei ungerade Zahlen dargestellt sind und ob die gesamte Darstellung eine gerade Zahl veranschaulicht.
Benjamin deutet dieses Zeichen/Symbol, indem er zunächst angibt, dass er nicht weiß, „welche Zahl das ist“ (Z. 2). Auch benennt er innerhalb seiner Aussage die beiden Summanden nicht konkret. Vielmehr erläutert er, dass er in die Darstellung die drei und „irgendeine Zahl“ hineindeutet (Z.2). Welche Eigenschaft(en) die nicht benannte Zahl hat, benennt er nicht. Die für die Aussage relevanten Paritäten der einzelnen Summanden gibt Benjamin an dieser Stelle nicht an. Durch das Zusammenfügen der Plättchen entsteht ein „Viereck, wo kein Punkt oder so übersteht“ (Z. 2). Dadurch zeigt sich deutlich, dass Benjamin die Parität der gesamten Veranschaulichung nicht auf Basis von konkreten Anzahlen begründet, sondern sich auf *geometrische Merkmale beziehungsweise Eigenschaften des Punktmusters* bezieht. Nämlich die optische Eigenschaft, dass die Punktdarstellung die Form eines Vierecks hat. Durch seine anschließende Aussage „Dann weiß ich sofort, dass das gerade ist“ (Z. 2) wird deutlich, dass er die Summe als gerade klassifiziert und gleichzeitig ist dadurch erkennbar, dass er das Merkmal „Viereck wo kein Punkt oder so übersteht“ (Z. 2) als wesentliches Entscheidungskriterium hinsichtlich der Parität nutzt. Hierbei bezieht er sich konkret auf die Veranschaulichung, so dass das Anschauungsmittel als Argumentationsmittel dient.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext
Innerhalb des vorliegenden Interviewausschnittes steht Benjamin vor der Herausforderung die geometrische Anordnung S3 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage zu deuten. Demnach deutet Benjamin ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol*.
Die einzelnen Summanden deutet Benjamin an dieser Stelle unterschiedlich. Während er die „drei“ als konkreten Summanden nennt, stellt der zweite Summand für ihn „irgendeine Zahl dar“, die scheinbar durch die geometrische Anordnung dargestellt ist (Z. 2). Er deutet die einzelnen Summanden somit einmal vor einem *geometrisch* und einmal vor einem *arithmetisch geprägten Referenzkontext*. Wobei an dieser Stelle anzumerken ist, dass die roten Punkte vermutlich nicht abgezählt wurden, sondern simultan erfasst wurden. Zur Deutung der Parität der Summe, demnach der Parität der durch die roten und blauen Punkte dargestellten Zahl, nutzt Benjamin das *geometrische Merkmal*, dass es sich um ein „Viereck“ handelt. Demnach bezieht er sich auf *Merkmale der geometrischen Anordnung* und zieht so an dieser Stelle zur Deutung einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man die Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext, so lassen sich zwei unterschiedliche strukturelle Deutungen im Argumentationsprozess erkennen. Benjamin nimmt zur *Ermittlung der Anzahl* der roten Punkte, in diesem Fall drei, eine *konkret-dingliche Deutung* ein. Dies ist an dieser Stelle nicht verwunderlich, denn die Anzahl drei kann von den Kindern simultan erfasst werden und muss nicht durch einen Zählprozess bestimmt werden.

Auch innerhalb der Argumentation, warum er die gesamte Darstellung als gerade klassifiziert, lässt sich eine *konkret-dingliche Deutung* rekonstruieren. Diese tritt aber nicht in Form einer Anzahlermittlung in Erscheinung, sondern er bezieht sich auf geometrische Merkmale der Anordnung. Er beschreibt das Punktmuster als „Viereck wo kein Punkt oder so übersteht" (Z. 2). Er nutzt damit ein *optisches Erscheinungsmerkmal*. Dabei bezieht er sich aber lediglich auf die *äußere optische Erscheinung der gesamten Darstellung*. Die strukturelle Anordnung innerhalb der Darstellung wird von ihm nicht in die Argumentation einbezogen. Diese muss aber für eine tragfähige mathematische Argumentation berücksichtigt werden, denn ein Viereck stellt nur unter gewissen Voraussetzungen eine gerade Zahl dar, gleichzeitig kann ein Viereck mit einem zusätzlichen Punkt durchaus auch eine gerade Zahl darstellen. Wesentlich für eine solche Argumentation ist, dass es sich um ein homogen strukturiertes Punktmuster handelt, welches entweder eine gerade Anzahl an Punkten in einer Reihe hat oder beziehungsweise und durch eine gerade Anzahl an Reihen gekennzeichnet ist. Er fokussiert demnach ein *optisches Erscheinungsmerkmal*, *ohne sich auf die wesentlichen Voraussetzungen zu beziehen*, die für eine solche Argumentation notwendig sind. Auch wenn Benjamin an dieser Stelle recht hat und es sich dabei um eine gerade Zahl handelt, ist sein Entscheidungskriterium und das von ihm vorgebrachte Argument aus mathematischer Sicht nicht tragfähig.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Innerhalb dieses Argumentations- und Deutungsprozesses von Benjamin zeigt sich eine begriffliche Idee, die aus mathematischer Perspektive (noch) nicht tragfähig ist. Vielmehr bezieht er sich auf die optische Erscheinung der gesamten Darstellung. Dadurch kann sich an dieser Stelle eine begriffliche Idee auf geometrischer Ebene entwickeln, dass eine gerade Zahl immer durch *Vierecke* dargestellt werden kann und dass eine Veranschaulichung die ein Viereck mit zusätzlichen Punkten abbildet zwangsläufig eine ungerade Zahl darstellt.

Einordnung des Argumentationsprozesses

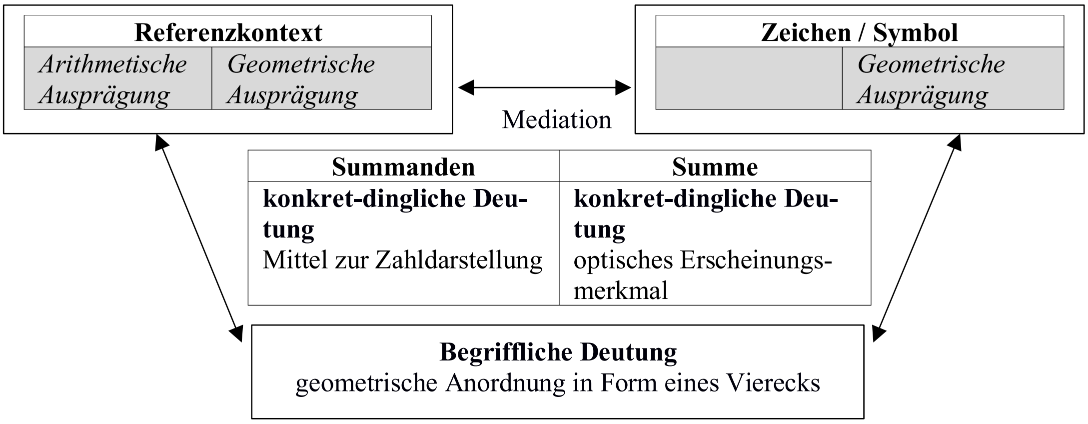


Abbildung 8.39: Beispiel 2.1 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Innerhalb der Analyse und der Einordnung des Argumentationsprozesses zeigt sich, dass Benjamin einen geometrischen Referenzkontext heranzieht, um die Parität der gesamten Darstellung zu deuten. Dabei bezieht er sich auf eine phänomenologische Eigenschaft des gesamten Punktmusters und zwar, dass die Darstellung die Form eines Vierecks hat. Dies führt zu einer begrifflichen Fehlvorstellung, die eine gerade Zahl mit einer Punktanordnung in Form eines Vierecks gleichsetzt.

Beispiel 2.2: Verena deutet Pt8 und Pt3 und begründet die Teilbarkeit durch 3

Innerhalb der nachfolgenden Analyse werden zwei Deutungsprozesse betrachtet, die direkt nacheinander folgen. Durch die Betrachtung beider Deutungs- und Argumentationsprozesse kann deutlich herausgearbeitet werden, welche strukturellen Deutungen Verena innerhalb der Argumentation nutzt und welchen Einfluss dies auf den Argumentationsprozess hat. Die Interviewszene stellt die ersten beiden Deutungs- und Argumentationsprozesse innerhalb des ersten Aufgabenkomplexes des Interviews „Teilbarkeit durch drei“ dar.

1	I	**Jetzt hattest du mir ja grad schon ein Punktmuster gelegt und mir an dem Punktmuster erklärt, wie das mit den Dreierschritten und dem Teilen durch drei ist.** *[beginnt die Karten auf den Tisch zu legen]*. **Ich hab jetzt hier auch ein paar Punktmuster mitgebracht und ich bitte dich einmal zu schauen, ob die Zahl, die da siehst, das Punktmuster, durch drei teilbar ist, oder nicht** *[legt die letzte Karte auf den Tisch]*. *(..)* **# Du darfst auch auf die Karten [zeigt in Richtung der Karten] malen, wenn du möchtest.**
2	V	**# Hmmm**
3	V	*[betrachtet 7 sec. die Zahlenkarten]* **Hmmm.** *[betrachtet 8 sec. die Zahlenkarten]* **Das könnte man** *[zeigt dabei auf Pt8]*
4	I	**Mhm. Warum kann man das durch drei teilen?**
5	V	*[zieht Pt8 vor sich]* **Weil,** *(..)* **hier** *[zeigt mit zwei Fingern auf die Punkte Pt8.1 und Pt8.14]* **sind drei und hier oben** *[zeigt über die Punkte Pt8.1 bis Pt8.7]* **sind sieben.** *(..)*
6	I	**Mhm, aber #**
7	V	**# Also** *(...)*, **dass ähm man** *[legt einen Finger auf die Punkte Pt8.1, Pt8.8 und Pt8.14]* **da ähm** *(unverständlich)* **drei** *[streicht mehrfach über die Punkte Pt8.1, Pt8.8 und Pt8.14]* **hier so, oder da** *[deutet mit der Hand waagerecht über das Punktmuster]*, **dann kann man das durch drei teilen.**
8	I	**Aha, okay. #**

9	V	# *[schiebt Pt8 zur Seite]*
10	V	**Hm** *(.)* **hm** *[nimmt Pt3]* **ähm, das kann man nicht.**
11	I	**Warum kann man das nicht durch drei teilen?**
12	V	**Hier sind zwei** *[zeigt auf Pt3.1 und Pt3.9]* **und das** *ähm [zeigt zweimal von links nach rechts über die obere Reihe]* **sind halt nicht drei, also** *[wischt von links nach rechts über die Punktdarstellung]* **also** *(.)*, **man kann nur das machen, wenn da** *[zeigt über Pt3.1 und Pt3.9]* **oder da** *[zeigt über die obere Reihe]* **drei sind.**

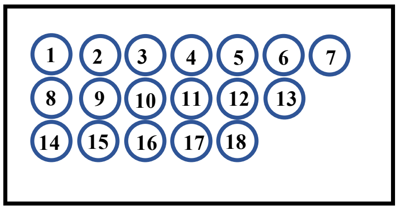


Abbildung 8.40: Beispiel 2.2 - Gedeutete Darstellung I

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

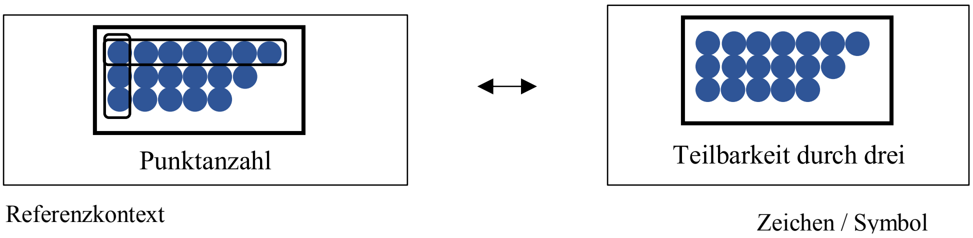


Abbildung 8.41: Beispiel 2.2 - Rollenverteilung I

Der Deutungs- und Argumentationsprozess wird von der Interviewerin eingeleitet, indem sie Verena vor die Anforderung stellt, die auf dem Tisch liegenden Zahlenkarten hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei zu deuten. Indem Verena auf die Punktdarstellung Pt8 zeigt, wird deutlich, dass sie Pt8 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei deutet. Demnach stellt dies das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Sie klassifiziert die Punktdarstellung direkt zu Beginn des Argumentations- und Deutungsprozesses als durch drei teilbar, wofür die Interviewerin eine Begründung einfordert. Sie begründet die Teilbarkeit durch drei, indem sie die *Anzahl der Punkte der Spalte ganz links* benennt, nämlich drei, sowie die *Anzahl der Punkte in der oberen Reihe*, nämlich sieben (vgl. Abb. 8.42). Dadurch zeigt sich, dass Verena das *Anschauungsmittel als Argumentationsmittel* nutzt. Die Bedeutung dieses Vorgehens erläutert sie innerhalb des Weiteren Argumentations- und Deutungsprozesses und gibt an, dass eine Punktdarstellung immer dann durch drei teilbar ist, wenn die Spalte ganz links oder die obere Reihe drei Punkte enthält. Grundlegend für ihre Argumentation ist, dass Verena einzelne Eigenschaften der Punktdarstellung nutzt. Dabei bezieht sie sich auf die *Eigenschaft einer einzelnen Punktreihe*

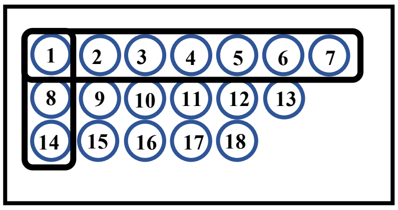


Abbildung 8.42: Beispiel 2.2 - Von Verena fokussierte Spalten beziehungsweise Reihen

beziehungsweise -spalte und lässt die restliche Darstellung und die zugrunde liegenden Strukturen unberücksichtigt. So nennt sie zum Beispiel nicht, dass die obere Reihe zwar aus sieben Punkten besteht, die Mittlere hingegen nur aus sechs und die Unterste wiederum aus nur noch fünf Punkten.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Verena deutet innerhalb dieses Argumentations- und Deutungsprozesses ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*, nämlich die Punktdarstellung Pt8 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei. Um dieser Anforderung gerecht zu werden, nutzt sie Merkmale der geometrischen Anordnung, nämlich die Punktanzahl in der Spalte ganz links sowie der oberen Reihe. Da sie die konkreten Anzahlen nutzt, um einzelne Elemente der geometrischen Anordnung zu beschreiben, lässt sich ein ebenfalls *geometrisch geprägter Referenzkontext* rekonstruieren. An dieser Stelle handelt es sich nicht um einen arithmetisch geprägten Referenzkontext, denn die Intention der Anzahlbenennung ist nicht die Übersetzung des Punktmusters. Vielmehr nutzt Helena die konkreten Anzahlen, um Teile der Veranschaulichung und damit Eigenschaften und Merkmale der Punktdarstellung genau zu beschreiben.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man die strukturellen Deutungen, die Verena innerhalb des Argumentations- und Deutungsprozesses heranzieht, so zeigt sich, dass sie auf *einzelne Elemente der geometrischen Anordnung* fokussiert. Sie betrachtet ausschließlich die Spalte links außen sowie die obere Reihe. Dabei beschreibt sie diese unter Benennung der konkreten Punktanzahl. Diese ist für Verenas Argumentation notwendig. Dies wird deutlich, da Verena erläutert, unter welcher Voraussetzung es sich um eine durch drei teilbare Zahl handelt. Nämlich immer dann, wenn einer dieser beiden geometrischen Elemente aus drei Punkten besteht. Dabei bleibt die restliche Punktdarstellung und auch deren zugrundeliegende Struktur unberücksichtigt. Sie nutzt demnach lediglich ein *phänomenologisches Merkmal an der geometrischen Oberfläche*, welches sich auf einen Teil der Punktdarstellung bezieht, nämlich die drei Punkte in einer Reihe. Demnach zieht Verena innerhalb ihrer Argumentation eine *konkret-dingliche Deutung* heran.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

In Verenas Argumentation zeigt sich eine Vorstellung von Teilbarkeit durch drei auf geometrischer Ebene, nach der eine Zahl dann durch drei teilbar ist, wenn in der Punktdarstellung (mindestens) eine äußere Spalte oder Reihe aus drei Punkten besteht. Eine solche begriffliche Idee ist aus mathematischer Perspektive in dieser Form nicht tragfähig. Dies ist nämlich nur dann tragfähig, wenn alle Spalten innerhalb der Punktdarstellung in einer solchen Dreierstruktur vorzufinden sind beziehungsweise auch die restliche Punktdarstellung durch drei teilbar ist.

Einordnung des Argumentationsprozesses

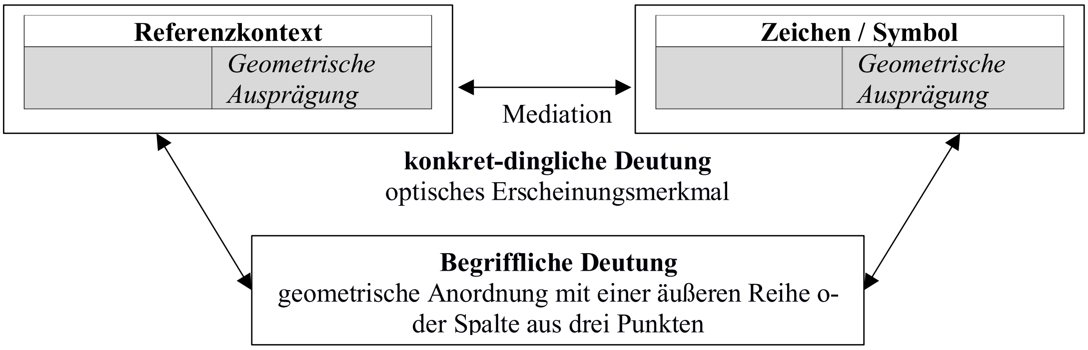


Abbildung 8.43: Beispiel 2.2 - Einordnung in das Theoriekonstrukt I

Durch die Einordnung des Argumentationsprozess in das Theoriekonstrukt wird deutlich, dass Verena die Darstellung vor einem geometrischen Referenzkontext deutet und das Anschauungsmittel demnach als Argumentationsmittel nutzt. Dabei bezieht sie sich innerhalb ihrer argumentativen Ausführungen auf optische Erscheinungsmerkmale der Punktdarstellung, die nur einen Teil der Darstellung umfassen. Dies führt dazu, dass Verena eine aus mathematischer Perspektive nicht tragfähige Argumentation entwickelt. Damit einhergehend zeigt sich auch eine begriffliche Fehlvorstellung, die in direktem Bezug zur Deutung der phänomenologischen Merkmale steht.

10	**V**	**Hm** *(.)* **hm** *[nimmt Pt3]* **ähm, das kann man nicht.**
11	**I**	**Warum kann man das nicht durch drei teilen?**
12	**V**	**Hier sind zwei** *[zeigt auf Pt3.1 und Pt3.9]* **und das ähm** *[zeigt zweimal von links nach rechts über die obere Reihe]* **sind halt nicht drei, also** *[wischt von links nach rechts über die Punktdarstellung]* **also** *(.)*, **man kann nur das machen, wenn da** *[zeigt über Pt3.1 und Pt3.9]* **oder da** *[zeigt über die obere Reihe]* **drei sind.**

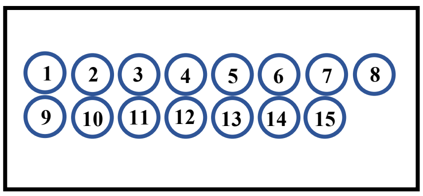
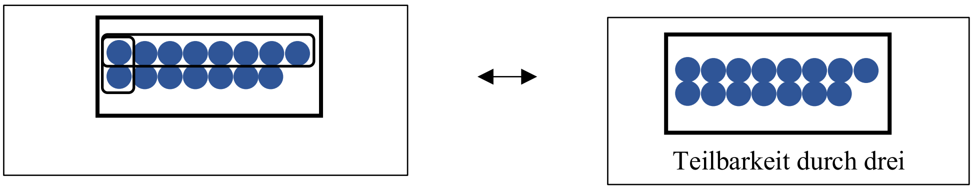


Abbildung 8.44: Beispiel 2.2 - Gedeutete Darstellung II

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext



Referenzkontext

Zeichen / Symbol

Abbildung 8.45: Beispiel 2.2 - Rollenverteilung II

Der vorliegende Interviewausschnitt folgt unmittelbar nach der obigen Interviewphase. Verena steht noch immer vor der Anforderung, die Punktdarstellungen hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei zu deuten. Durch das Wegschieben der vorherigen Punktdarstellung und dem Nehmen der Punktdarstellung Pt3 leitet Verena einen neuen Deutungs- und Argumentationsprozess ein, in dem sie Pt3 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei deutet. Dies stellt demnach das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Dieses deutet sie nun in ähnlicher Weise wie die Punktdarstellung Pt8. Dabei bezieht sie sich auf *Eigenschaften beziehungsweise Merkmale der Veranschaulichung* und nutzt daher die Punktdarstellung als *Argumentationsmittel*. Sie beschreibt zunächst die linke äußerste Spalte und benennt, dass es zwei Punkte sind. Im Anschluss daran zeigt sie durch ihre Zeigegeste an, dass sie nun die obere Reihe deutet. Hier ermittelt sie nicht die konkrete Anzahl, sondern sagt, dass es sich nicht um drei Punkte handelt. Der restliche Teil der Veranschaulichung bleibt in ihren argumentativen Ausführungen unberücksichtigt. Im Anschluss daran benennt sie nochmals das in der vorherigen Interviewphase ersichtlich gewordene Entscheidungskriterium, indem sie erläutert, dass entweder die linke äußere Spalte oder die obere Reihe drei Punkte enthalten muss. Dabei benennt sie die beiden Reihen nicht, sondern verdeutlicht dies durch eine Zeigegeste. Auch innerhalb der von ihr genannten Bedingung bezieht sie sich ausschließlich auf die äußere linke Spalte sowie obere Reihe. Die restliche Veranschaulichung bleibt in der von ihr genannten Bedingung unberücksichtigt. Auf Grundlage ihres genannten Entscheidungskriteriums klassifiziert sie die Veranschaulichung als nicht durch drei teilbar.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Verena deutet innerhalb dieses Argumentationsprozesses erneut ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*, da sie die geometrische Anordnung Pt3 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei deutet. Zur Begründung, warum die Punktdarstellung nicht durch drei teilbar ist, fokussiert sie erneut die Punktanzahl der linken äußeren Spalte sowie der oberen Reihe. Demnach bezieht sie sich innerhalb ihrer Argumentation auf geometrische Merkmale, so dass sich auch an dieser Stelle ein *geometrisch geprägter Referenzkontext* rekonstruieren lässt. Trotz der Benennung der konkreten Punktanzahl handelt es sich an dieser Stelle nicht um einen arithmetisch geprägten Referenzkontext, denn sie benutzt die konkrete Zahl, um eine geometrische Eigenschaft der linken äußeren Spalte zu beschreiben. Demnach nutzt sie das Anschauungsmittel (auch) als Argumentationsmittel

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Auch innerhalb dieser von Verena getätigten Argumentation zeigt sich eine *konkret-dingliche Deutung*. Sie fokussiert erneut ausschließlich ein *phänomenologisches Merkmal*, indem sie sich auf einzelne Elemente des Punktmusters bezieht – in diesem Fall die linke äußerste Spalte sowie die obere Reihe. Im Gegensatz zum vorherigen Deutungs- und Argumentationsprozess entspricht die vorliegende Darstellung Pt3 nicht den von Verena fokussierten wesentlichen phänomenologischen Merkmalen. Dadurch wird deutlich, dass das phänomenologische Merkmal der Mächtigkeit drei der linken äußeren Spalte oder oberen Reihe gegeben sein muss, damit es sich für Verena um eine durch drei teilbare Zahl handelt. Demnach ist es innerhalb Verenas Annahme ausreichend, die Darstellung auf ein phänomenologisches Merkmal zu überprüfen, nämlich der Mächtigkeit der von ihr betrachteten Spalte beziehungsweise Reihe. Dabei bleiben die restliche Anordnung sowie die Punktdarstellung erneut unberücksichtigt.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Es lässt sich weiterhin eine begriffliche Idee von Teilbarkeit durch drei auf geometrischer Ebene vermuten, nach der eine Zahl dann durch drei teilbar ist, wenn auf phänomenologischer Ebene die äußere (linke) Reihe und beziehungsweise oder die obere Reihe genau drei Punkte enthält. Die an dieser Stelle zugrunde gelegte begriffliche Idee ist mathematisch so weiterhin nicht tragfähig.

Einordnung des Argumentationsprozesses

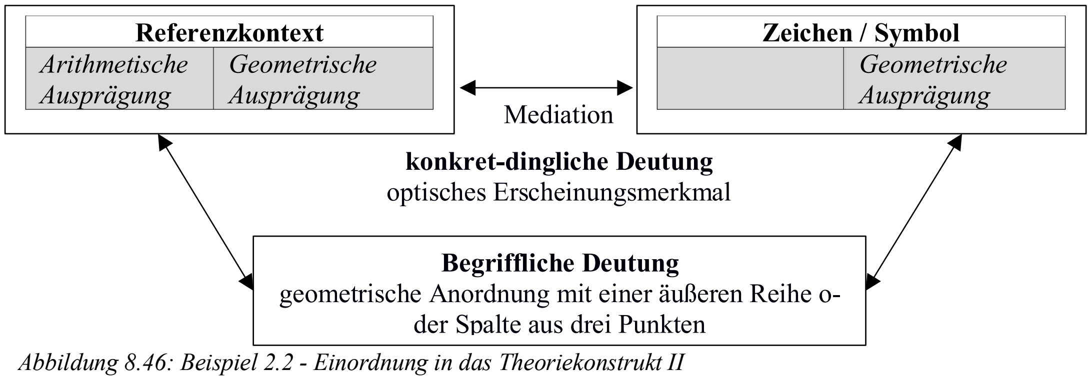


Abbildung 8.46: Beispiel 2.2 - Einordnung in das Theoriekonstrukt II

Durch die Einordnung in das Theoriekonstrukt zeigt sich, dass Verena einen geometrischen Referenzkontext zur Begründung der Teilbarkeit durch drei heranzieht. Dabei bezieht sie sich auf phänomenologische Merkmale einzelner Teile der Darstellung. Dies führt dazu, dass sie eine mathematisch nicht tragfähige Argumentation entwickelt. Dies hat auch Auswirkungen auf die begriffliche Idee, die ebenfalls nicht tragfähig ist.

Wenn Kinder in ihren Argumentationen auf Grundlage von konkret-dinglichen Deutungen in Form von phänomenologischen Merkmalen argumentieren, so kann dies zu nicht tragfähigen mathematischen Argumentationen und damit verbundenen begrifflichen Fehlvorstellungen führen.

Benjamin und Verena deuten innerhalb der obigen Argumentations- und Deutungsprozesse unterschiedliche geometrische Merkmale und Eigenschaften in die Darstellung hinein. Benjamin bezieht sich auf die optische Erscheinung der gesamten Darstellung, Verena bezieht sich hingegen nur auf einzelne Teile des Punktmusters. Gemein haben sie, dass sie sich nicht auf die Strukturen innerhalb der Darstellung beziehen, sondern phänomenologische Merkmale fokussieren. Obwohl sich hier unterschiedliche Deutungen zeigen, lassen sich aus diesen Analysen wesentliche Erkenntnisse für die mathematikdidaktische Forschung und für den Mathematikunterricht ableiten.

Zum einen zeigt sich, dass die strukturellen Deutungen eng mit der begrifflichen Idee, die der Argumentation zugrunde liegt, verknüpft ist. Das heißt, beziehen sich Kinder in ihren Argumentationen ausschließlich auf phänomenologische Merkmale, hat dies Einfluss auf die Begriffsbildungsprozesse. Dadurch können begriffliche Fehlvorstellungen auf geometrischer Ebene entstehen, wie sie in den obigen Beispielen herausgearbeitet werden konnten. Dabei zeigte sich diese begriffliche Fehlvorstellung der Paritäten als charakteristisch für die Argumentation auf Basis von phänomenologischen Merkmalen (vgl. Kap. 8.3).

Zum anderen zeigt sich aber auch, dass diese strukturellen Deutungen der Kinder nicht willkürlich sind. Vielmehr stehen sie in enger Verbindung zu der Deutung prototypischer Darstellungen. Betrachtet man prototypische Veranschaulichungen vor der von den Kindern eingenommenen Perspektive, so lässt sich eine für das Argumentieren mit Anschauungsmitteln interessante und gewinnbringende Erkenntnis gewinnen.

Prototypische Darstellungen der Paritäten sind Punktdarstellungen in zwei gleichstrukturierten Reihen, so dass die einzelnen Punkte der Reihen genau übereinanderliegen. Dabei haben die Reihen entweder gleichviele Punkte oder die Punktanzahl beider Reihen unterscheidet sich um einen Punkt (vgl. Abb. 8.47). Das von Benjamin betrachtete phänomenologische Merkmal lässt sich innerhalb der prototypischen Darstellung wiederfinden. Prototypische Darstellungen der geraden Zahlen sind in ihrer äußeren Form immer Vierecke. Ungerade Zahlen hingegen werden in prototypischen Veranschaulichungen immer als Vierecke mit einem überstehenden Punkt oder einem dem Viereck fehlenden Punkt dargestellt.

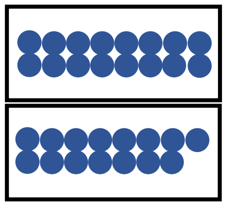


Abbildung 8.47: Beispiele prototypischer Darstellungen gerader und ungerader Zahlen

Bei prototypischen Darstellungen durch drei teilbarer Zahlen handelt es sich um drei gleichstrukturierte Reihen, die entweder in ihrer Punktanzahl identisch sind, in der eine Reihe genau einen Punkt weniger hat als die anderen beiden Reihen, oder bei denen zwei Reihen identisch sind und jeweils genau einen Punkt weniger als die dritte Reihe haben (vgl. Abb. 8.48).

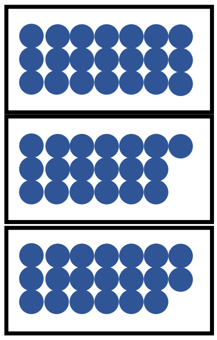


Abbildung 8.48: Beispiele prototypischer Darstellungen von durch drei teilbaren und nicht durch drei teilbaren Zahlen

Das von Verena betrachtete phänomenologische Merkmal, nämlich, dass entweder die linke äußere Spalte oder die obere Spalte genau aus drei Punkten besteht, trifft in einer prototypischen Darstellung der durch drei teilbaren Zahlen zu. Allerdings findet sich dieses geometrische Merkmal auch in nicht durch drei teilbaren Darstellungen wieder. So haben prototypische Darstellungen, die nicht durch drei teilbar sind eine äußere Spalte bestehend aus drei Punkten. Nutzt man nun Verenas Argumentation, so klassifiziert man auch diese Punktdarstellungen fälschlicherweise als durch drei teilbar, obwohl sie nicht durch drei teilbar sind. Vielmehr ist es an dieser Stelle notwendig, die gesamte Darstellung in den Blick zu nehmen. Dies zeigt, dass solch *konkret-dingliche Deutungen in Form von phänomenologischen Merkmalen auf visueller Ebene nicht (immer) willkürlich sind*. Vielmehr können sie auch von prototypischen Darstellungen abgeleitet und auf nicht prototypische Darstellungen übertragen beziehungsweise falsch verallgemeinert werden.

Für den Mathematikunterricht hat dies zur Konsequenz, dass bei der Deutung prototypischer Darstellungen die wesentlichen strukturellen Merkmale im mathematischen Lehr- und Lernprozess fokussiert werden müssen. Hierbei können nicht prototypische Darstellungen gewinnbringend eingesetzt werden, um die wesentlichen strukturellen Merkmale zu fokussieren und auf andere Darstellungen zu übertragen. Denn nicht-prototypische Darstellungen können als Anlass genutzt werden, um mit Kindern darüber ins Gespräch zu kommen, dass diese optischen Erscheinungsmerkmale nicht auf beliebige Punktmuster übertragen werden können. Dies zeigt die Notwendigkeit, die Kinder vor unterschiedliche Deutungsanforderungen, wie zum Beispiel die Deutung von nicht-prototypischen Darstellungen zu stellen, die eben diese optischen Erscheinungsmerkmale ebenfalls erfüllen, aber der strukturellen Zahleigenschaft nicht entsprechen. Denn nur durch die Fokussierung wesentlicher Merkmale können mathematische Begriffsbildungsprozesse durch den Einsatz von geometrischen Veranschaulichungen im mathematischen Argumentationsprozess gewinnbringend eingesetzt und dadurch Begriffsbildungsprozesse initiiert werden.

8.2.2 Fokussierung struktureller Merkmale des Anschauungsmittels im Argumentationsprozess

Diese Art der Argumentation ist dadurch bestimmt, dass das *Anschauungsmittel als Argumentationsmittel* dient und die Kinder sich auf *strukturelle Merkmale der Veranschaulichung* beziehen. Charakteristisch dabei ist, dass die Kinder das gesamte Punktmuster in den Blick nehmen und die Strukturen, die der gesamten Anordnung zugrunde liegen, zur Argumentation nutzen. Demnach zeichnen sich alle Argumentationsweisen durch das Heranziehen eines geometrischen Referenzkontextes aus. Innerhalb der detaillierten Analyse der kindlichen Argumentations- und Deutungsprozesse spiegelt sich auch hier die grundsätzliche Mehrdeutigkeit von Punktmustern wider. Das heißt, Kinder nutzen unterschiedliche Strukturen zur Argumentation und demnach zur Begründung der begründungsbedürftigen strukturellen Zahleigenschaft.

So lassen sich zwei unterschiedliche charakteristische Argumentationsweisen unterscheiden, die unterschiedliche Auswirkungen auf den mathematischen Argumentationsprozess haben:

1. Kinder nutzen Strukturen, die nicht in Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen. So konnte in einigen Interviews herausgearbeitet werden, dass Kinder strukturelle Merkmale in die Darstellung hineindeuten und zur Argumentation nutzen, die nicht mit dem mathematischen Begriff in Beziehung stehen.
2. Kinder deuten Strukturen, die in direktem Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen. Dabei beziehen sie sich auf *ein* strukturelles Merkmal der jeweiligen Punktanordnung. Weitere strukturelle Merkmale bleiben unberücksichtigt. Charakteristisch ist auch, dass diese strukturellen Deutungen immer in Bezug zu einer konkreten Punktanordnung stehen und damit noch keine Verallgemeinerung zulassen.

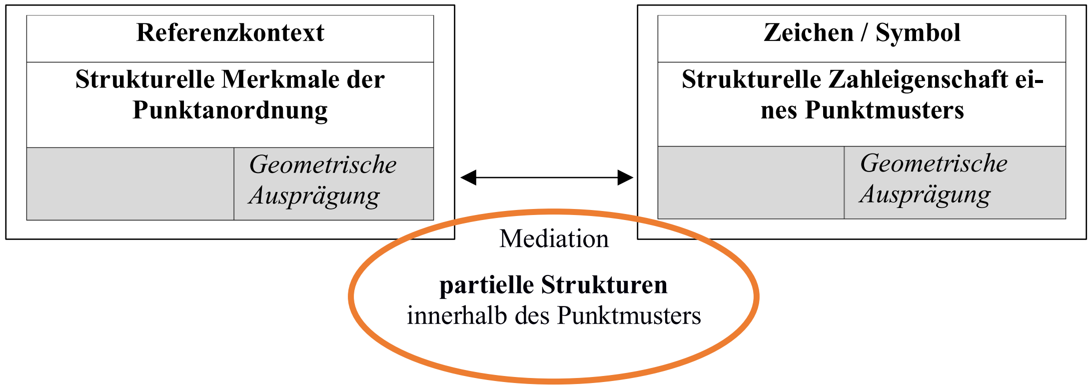


Abbildung 8.49: Typische Argumentationsweise bei der Fokussierung struktureller Merkmale

Im Folgenden wird die erste Argumentationsweise an einem Beispiel konkretisiert. Die Deutung struktureller Merkmale mit Bezug zur Zahleigenschaft wird an zwei unterschiedlichen Beispielen konkretisiert. Dies ermöglicht einen weiteren Unterschied zwischen den Argumentationen hinsichtlich der Parität sowie der Teilbarkeit durch drei darzustellen.

1. ***Kinder deuten Strukturen in die Darstellung hinein, die nicht in Bezug zur begründeten Zahleigenschaft stehen***

Diese kindlichen Argumentationen charakterisieren sich dadurch, dass Kinder Strukturen in die Veranschaulichungen hineindeuten und diese auch zur Argumentation nutzen. Demnach stellt das Anschauungsmittel in diesen Argumentationen auch ein Argumentationsmittel dar. Die von den Kindern gedeuteten Strukturen stehen allerdings nicht in Bezug zu der zu begründenden strukturellen Zahleigenschaften.

Demnach lassen sich folgende charakteristische Eigenschaften beschreiben:

- Die Kinder deuten die Veranschaulichung sowie die damit verbundene strittige Aussage vor einem *geometrisch geprägten Referenzkontext*.
- Zur Argumentation werden *partielle Strukturen* in die Darstellung hineingedeutet. Dabei stehen die von den Kindern *gedeuteten Strukturen in keinem Bezug zu der zu deutenden strukturellen Zahleigenschaft*.
- Die Kinder entwickeln eine Argumentation, die aus mathematischer Perspektive so nicht tragfähig ist.

Beispiel 2.3: Benjamin deutet Strukturen in P5 hinein, die nicht in direktem Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen.

Die Interviewszene stellt den achten Deutungs- und Argumentationsprozess im Aufgabenkomplex 1 des Interviews „Paritäten" dar.

1	**B**	**Das hier ist gerade** *[schiebt P5 vor sich und dreht es um 90°]*, **weil da genau die gleiche Anzahl wieder ist.**

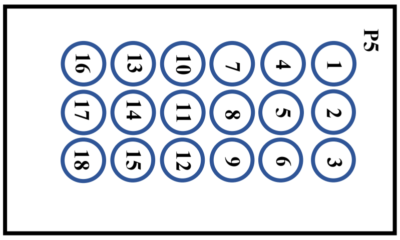


Abbildung 8.50: Beispiel 2.3 - Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

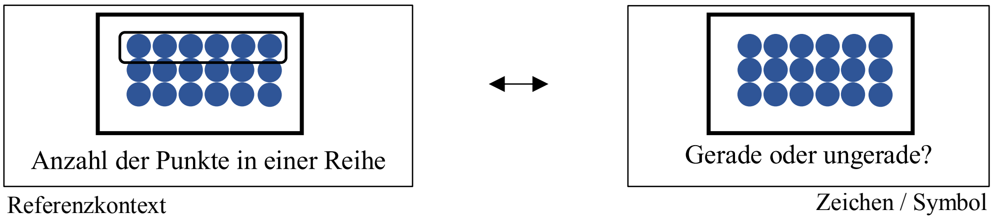


Abbildung 8.51: Beispiel 2.3 - Rollenverteilung

Der obenstehende Deutungs- und Argumentationsprozess wird nicht durch einen Impuls der Interviewerin initiiert, sondern wird durch Benjamin eingeleitet, indem er P5 vor sich schiebt. Da Benjamin innerhalb des ersten Aufgabenkomplexes vor der Anforderung steht, die unterschiedlichen Darstellungen hinsichtlich der jeweiligen Parität zu deuten und diese zu begründen, stellt die Parität der Darstellung P5 das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar. Dieses klassifiziert er direkt zu Beginn seiner Aussage als ‚gerade' und begründet dies, indem er auf die gleichen Anzahlen innerhalb der Veranschaulichung verweist. Da Benjamin an dieser Stelle die sprachliche Markierung „wieder" (Z. 1) wählt, stellt er einen Bezug zu seinen bereits vorher getätigten Aussagen her. In diesen hat Benjamin die Veranschaulichung gedeutet, indem er die waagerechten Reihen innerhalb des Punktmusters miteinander verglichen hat. So lässt sich vermuten, dass Benjamin die Punktanzahlen innerhalb der Veranschaulichung fokussiert und zur Argumentation nutzt. Demnach zieht er als Entscheidungs- und Begründungskriterium einen Vergleich der Punktanzahlen innerhalb der waagerechten Reihen heran. Da diese in allen Reihen gleich sind, klassifiziert er die geometrische Anordnung als gerade. Dadurch zeigt sich, dass er auf *strukturelle Eigenschaften und Merkmale des Punktmusters* verweist und das Anschauungsmittel demnach als

Argumentationsmittel nutzt. Dabei wird innerhalb seiner Argumentation nicht dargelegt, warum die Punktanzahlen innerhalb der Reihen gleich sind, oder warum es sich unter dieser Voraussetzung um die Darstellung einer geraden Zahl handelt.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Benjamin deutet in dem oben beschriebenen Wechselspiel P5 hinsichtlich der Parität. Da es sich bei P5 um eine geometrische Anordnung handelt, ist das von ihm zu deutende *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*.

Zur Deutung dessen zieht Benjamin Eigenschaften beziehungsweise Merkmale der geometrischen Anordnung heran, indem er sagt, dass die Anzahlen der Punkte in den Reihen gleich sind. Aufgrund des Interviewverlaufs lässt sich vermuten, dass Benjamin dabei die waagrechten Reihen fokussiert, denn Benjamin hat alle vorherigen Darstellungen durch Betrachtung der waagerechten Reihen gedeutet. Er beschreibt somit, dass das Punktmuster aus drei untereinanderliegenden Reihen mit gleicher Punktanzahl besteht. Demnach ist auch der von Benjamin zur Deutung herangezogene *Referenzkontext geometrisch geprägt*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Innerhalb des obigen Argumentations- und Deutungsprozesses wird die geometrische Anordnung P5 als gerade klassifiziert. Dies begründet er unter Bezugnahme auf die gleichen Punktanzahlen in den Reihen. Auch wenn er dies innerhalb der obigen Aussage nicht expliziert, zeigt sich aufgrund des Interviewverlaufs, dass Benjamin die waagerechten Reihen und die Punktanzahlen innerhalb dieser fokussiert. Das heißt, Benjamin deutet Substrukturen in die Darstellung hinein. *Dabei stellt jeweils eine waagerechte Reihe eine in die Darstellung hineingedeutete Substruktur dar*. Diese drei von ihm in die geometrische Anordnung hineingesehenen Substrukturen haben laut seiner Aussage *die gleichen Punktanzahlen* und wurden demnach von Benjamin *miteinander verglichen*. Denn nur ein Vergleich dieser lässt einen Rückschluss auf die Gleichheit der Punktanzahlen zu. Unklar bleibt, warum eine gleiche Punktanzahl darauf schließen lässt, dass es sich bei der geometrischen Anordnung um die Darstellung einer geraden Zahl handelt. Eine solche Argumentation ist aus mathematischer Perspektive nur dann tragfähig, wenn entweder die Punktanzahl innerhalb einer Reihe und beziehungsweise oder die Anzahl der Reihen gerade sind.

Fraglich bleibt an dieser Stelle auch wie die Punktanzahlen innerhalb des Deutungs- und Argumentationsprozesses miteinander verglichen wurden. Ein Vergleich ist auf zwei unterschiedliche Arten möglich. Zum einen können die konkreten Punktanzahlen ermittelt und so miteinander verglichen werden. Zum anderen ist es möglich die Punktanzahlen auf geometrischer Ebene miteinander zu vergleichen. Sind die Punktreihen innerhalb einer geometrischen Anordnung gleich strukturiert, das bedeutet, sind die ersten Punkte jeweils genau übereinander, die Punkte gleich groß und die Abstände zwischen den Punkten jeweils gleich, so haben gleich lange Reihen immer die gleiche Punktanzahl. In diesem Fall handelt es sich um eine Rechtecksanordnung, die genau diesen Kriterien entspricht, so dass ein Vergleich auch auf geometrischer Ebene möglich ist. Ein Vergleich auf rein phänomenologischer Ebene ist an dieser Stelle unwahrscheinlich, denn Benjamin hat bei der Deutung der geometrischen Anordnung P4 deutlich gemacht, dass er nicht auf rein optische Merkmale fokussiert, sondern hat eine Eins-zu-Eins-Zuordnung genutzt, um die Parität zu ermitteln. Innerhalb des Argumentations- und Deutungsprozesses zeigt sich somit, dass Benjamin S*ubstrukturen* in die Veranschaulichung hineindeutet und diese miteinander vergleicht. Demnach zieht Benjamin zur Begründung der Parität *partielle Strukturen* heran. Benjamin deutet demnach *Strukturen in die Darstellung hinein, die so nicht in einem direkten Bezug zur betrachteten und begründeten strukturellen Zahleigenschaft stehen*.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Betrachtet man das oben beschriebene Wechselspiel, so zeigt sich in der Aussage Benjamins bereits seine begriffliche Deutung. Demnach stellt für Benjamin die strukturelle Zahleigenschaft ‚gerade' auf geometrischer Ebene eine Gleichheit der Punktanzahlen innerhalb der Reihen dar. Diese begriffliche Idee ist aus mathematischer Perspektive (noch) nicht tragfähig. So können auch ungerade Zahlen in Form einer Rechtecksanordnung dargestellt werden und demnach in allen Reihen die gleiche Punktanzahl abgebildet werden. Diese von Benjamin genutzte und entwickelte begriffliche Idee muss aus mathematischer Perspektive demnach ausdifferenziert werden und die Einschränkung ergänzt werden, dass es sich entweder um eine gerade Punktanzahl innerhalb einer Reihe handeln muss und beziehungsweise oder die Anzahl der Reihen gerade sein muss.

Einordnung des Argumentationsprozesses

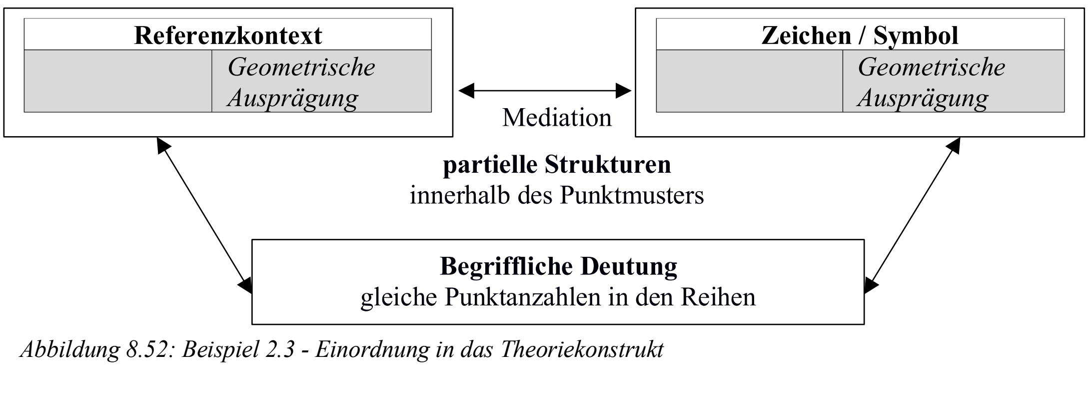


Abbildung 8.52: Beispiel 2.3 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Durch die Einordnung des Argumentationsprozesses in das Theoriekonstrukt wird deutlich, dass Benjamin das Anschauungsmittel vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext deutet und es demnach als Argumentationsmittel nutzt. Dabei zieht er strukturelle Deutungen in Form partieller Strukturen zur Argumentation heran. Diese stehen dabei nicht in Bezug zur zu deutenden strukturellen Zahleigenschaft. Dies hat zur Folge, dass seine Argumentation aus mathematischer Perspektive nicht tragfähig ist und auch die begriffliche Idee so nicht tragfähig ist.

Wenn Kinder in ihren Argumentationen auf Grundlage von strukturellen Deutungen argumentieren, die nicht in direktem Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen, so kann dies zu nicht tragfähigen mathematischen Argumentationen und begrifflichen Fehlvorstellungen führen.

Bereits bei der Darstellung der charakteristischen Eigenschaften von Argumentationsprozessen mit einem kombinierten Referenzkontext (vgl. Bsp. 1.3) zeigte sich eine Argumentation, in der Jennifer durchaus Strukturen in die Darstellung hineindeutete, die aber nicht in Bezug zur begründenden strukturellen Zahleigenschaft stehen. Auch Benjamin bezieht sich innerhalb der obigen Argumentation auf Strukturen innerhalb der Darstellung. Beide Kinder fokussieren die *Gleichartigkeit der Reihen in den Punktmustern*. Handelt es sich um Punktreihen mit gleicher Anzahl, so ist die Punktdarstellung eine Veranschaulichung einer geraden Zahl. Interessanterweise ließ sich diese charakteristische Deutungsweise, dass strukturelle Deutungen genutzt werden, die nicht in Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen, ausschließlich bei den Interviews „Paritäten“ rekonstruieren. Dabei nutzten die Kinder immer genau das oben beschriebene Entscheidungskriterium.

Die Fokussierung dieser Strukturen innerhalb des Punktmusters hat dabei allerdings zum einen Einfluss auf die Tragfähigkeit der mathematischen Argumentation, zum anderen auf die begriffliche Idee und damit auch auf die kindlichen Begriffsbildungsprozesse.

Eine von den Kindern so geführte Argumentation ist aus mathematischer Perspektive nicht tragfähig. Auch wenn eine korrekte Zuordnung der Parität zu einer Darstellung erfolgt, ist die Argumentation nicht tragfähig. Dies zeigt das Beispiel von Benjamin. Er deutet eine Rechtecksanordnung mit drei Reihen und je sechs Punkten (vgl. Abb. 8.53). Dabei handelt es sich durchaus um ein Punktmuster, welches eine gerade Zahl darstellt und demnach durch zwei teilbar ist. Dennoch ist sein gewähltes Argument aus mathematischer Perspektive nicht tragfähig. Gleichzeitig kann eine solche Argumentation dazu führen, dass die Kinder

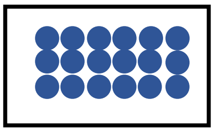


Abbildung 8.53: Gedeutete Darstellung

Punktdarstellungen als gerade deklarieren, die eigentlich nicht durch zwei teilbar sind.
Dies hängt unmittelbar mit einer nicht tragfähigen begrifflichen Idee auf geometrischer Ebene zusammen. Sowohl Benjamin als auch Jennifer zeigen innerhalb ihrer Argumentations- und Deutungsprozesse, dass sie ein Verständnis geraden Zahl haben, die mit einer Teilbarkeit durch zwei einhergeht. Diese begriffliche Idee zeigt sich aber nicht in der begrifflichen Idee auf geometrischer Ebene, die in diesen Argumentationen zum Tragen kommt. In dieser nutzen und entwickeln sie eine begriffliche Idee, die so nicht tragfähig ist, nämlich, dass eine geometrische Darstellung dann gerade ist, wenn die Reihen alle gleichartig sind. Dies führt innerhalb des mathematischen Lernprozesses zu begrifflichen Fehlvorstellungen. Wesentlich innerhalb dieser Erkenntnis ist, dass eine strukturelle Deutung und damit einhergehend die Nutzung geometrischer Strukturen in den kindlichen Argumentationen nicht immer zu mathematisch tragfähigen Argumentationen führt. Dies verdeutlicht abermals, wie komplex die Anforderung ist, die arithmetische Struktur auf die geometrische Veranschaulichung zu übertragen. Dies stärkt die Forderung nach einer *bewussten Thematisierung der Anschauungsmittel als Argumentationsmittel*. Für den Mathematikunterricht hat dies zur Konsequenz, dass auch die strukturellen Deutungen der Kinder im Mathematikunterricht von der Lehrperson in den Blick genommen werden müssen. Hier gilt es nicht nur zu betrachten, ob die Kinder das Anschauungsmittel als Argumentationsmittel nutzen, sondern vor allem wie sie dies tun. Hier gilt es jene Deutungen zu ermitteln, die nicht in Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen. Es muss innerhalb des Mathematikunterrichts ein Perspektivwechsel angeregt werden. Denn dies, und das wird im Folgenden noch genauer betrachtet (vgl. Kap. 8.3), hat Auswirkungen auf die kindlichen Begriffsbildungsprozesse.

2. *Kinder nutzen Strukturen, die in direktem Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen*

Diese kindliche Argumentationsweise ist dadurch bestimmt, dass Kinder Strukturen in die Darstellung hineindeuten und diese zur Argumentation heranziehen. Damit weist sie deutliche Parallelen zur vorherigen Argumentationsweise auf. Dennoch unterscheiden sich beide typische Arten der Argumentation deutlich. Die Strukturen, die die Kinder innerhalb der nun beschriebenen Argumentationsweise nutzen, stehen *aus mathematischer Perspektive im direkten Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft*. Dabei zeigt es sich als charakteristisch, dass die Kinder sich auf eine strukturelle Eigenschaft des Punktmusters beziehen. Weitere für die Argumentation wesentliche Eigenschaften bleiben unberücksichtigt.

Zusammenfassend lassen sich demnach folgende charakteristische Eigenschaften beschreiben:

- Die Kinder deuten die Veranschaulichung sowie die damit verbundene strittige Aussage vor einem *geometrisch geprägten Referenzkontext*.
- Zur Argumentation werden *partielle Strukturen* in die Darstellung hineingedeutet. Dabei stehen die von den Kindern gedeuteten Strukturen in *direktem Bezug zu der zu deutenden strukturellen Zahleigenschaft*.
- Mit dem Blick auf die Anforderungen des mathematischen Argumentierens bleiben weitere wesentliche strukturelle Deutungen oder Begründungen unberücksichtigt.

Beispiel 2.4: Helena deutet (annähernd) prototypische Darstellungen

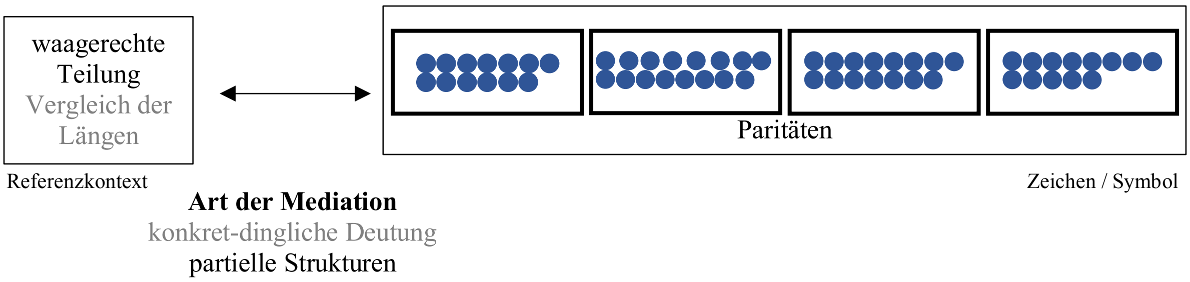


Abbildung 8.54: Beispiel 2.4 - Rollenverteilung

Innerhalb der ausführlichen Analyse des Interviews mit Helena wurde in einer vergleichenden Analyse der Deutungs- und Argumentationsprozesse im Kontext der Parität der Darstellungen P1, P6, P4 und P2 herausgearbeitet werden, dass Helena alle Darstellungen vor einem nahezu identischen Referenzkontext deutet. Bei diesen handelt es sich in allen vier Fällen um einen *geometrisch geprägten Referenzkontext*, so dass das Anschauungsmittel in allen Argumentationsprozessen die Funktion eines *Argumentationsmittels* erhält.
Bei den zu deutenden Darstellungen handelt es sich jeweils um prototypische Darstellungen (P1, P3) sowie um annähernd prototypische Darstellungen (P4, P6). Diese stellen in ihrer intendierten Struktur jeweils zwei übereinanderliegende Reihen dar. Eben diese intendierte Struktur nutzt Helena zur Deutung der Parität der Veranschaulichungen, indem sie eine *waagerechte Teilung der Punktmuster*, entsprechend der intendierten Struktur, vornimmt. Innerhalb des Deutungs- und Argumentationsprozesses im Kontext von P6 bleibt dieses Vorgehen allerdings implizit. Durch diese *waagerechte Teilung* erzeugt sie *zwei übereinanderliegende Substrukturen*, die von ihr *miteinander verglichen* werden. Insbesondere bei der Deutung

der Veranschaulichung P4 konnte herausgearbeitet werden, dass Helena die beiden Substrukturen miteinander vergleicht, ohne die strukturelle Anordnung der Punkte innerhalb der Reihen einzubeziehen. Vielmehr betrachtet Helena vor allem die visuell erfassbare Länge der einzelnen Punktreihen. Demnach nutzt sie zunächst die Deutung zweier Substrukturen und deutet demnach *partielle Strukturen* in die Darstellung hinein. Der Vergleich dieser erfolgt dann aufgrund optischer Erscheinungsmerkmale und zieht demnach auch *konkret-dingliche Deutungen* in ihre Argumentation ein. Dadurch nutzt und entwickelt sie auch eine begriffliche Idee, die zwar die Teilbarkeit durch zwei impliziert, diese aber auf geometrischer Ebene eher als einen Vergleich zweier Längen betrachtet und nicht die Erzeugung zweier gleichmächtiger Teilmengen.

Dennoch steht die waagerechte Teilung der Veranschaulichung im Sinne der intendierten Struktur in *direktem Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft*. Die Teilbarkeit durch zwei kann auf geometrischer Ebene als das *Deuten zweier geometrischer Hälften* verstanden werden. Bis hierhin zeigt sich somit eine Deutungsweise, die charakteristisch ist. Helena deutet eine Struktur in die Veranschaulichung hinein, die in direktem Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft steht. Betrachtet man das weitere Vorgehen, so zeigt sich, dass Helena *im weiteren Verlauf ihrer Argumentationen wesentliche strukturelle Merkmale unberücksichtigt läss*t. Die von ihr erzeugten Substrukturen vergleicht sie auf visueller Ebene. Dabei ist es aus mathematischer Perspektive nicht relevant, ob die geometrischen Hälften auf visuell erfassbarer Ebene identisch sind, sondern es muss sich um gleichmächtige Mengen handeln. Auch hier muss berücksichtigt werden, dass ein solcher Vergleich bei prototypischen Darstellungen immer zu einer richtigen Zuordnung der strukturellen Zahleigenschaft führt. Dennoch kann bei prototypischen Darstellungen die visuell erfassbare Länge zur Argumentation herangezogen werden. Denn in prototypischen Darstellungen sind beide Reihen in ihrer Struktur identisch, das heißt, in prototypischen Darstellungen ist der Beginn der beiden Reihen auf gleicher Höhe, die Punkte sind gleich groß und die Punkte sind in der gleichen Struktur angeordnet. Dabei sind die Reihen entweder gleich lang oder unterscheiden sich genau um einen Punkt. Demnach deutet Helena durch die waagerechte Teilung eine partielle Struktur, die wesentlich für einen mathematischen Argumentationsprozess sein kann. Diese Deutung muss aber durch die oben genannten strukturellen Merkmale ergänzt werden, um mathematisch tragfähig zu sein. Gleichzeitig führt der Einbezug aller struktureller Merkmale auch dazu, dass Darstellungen, die nicht prototypischer Natur sind, nicht aufgrund einzelner partieller Strukturen fehlgedeutet werden.

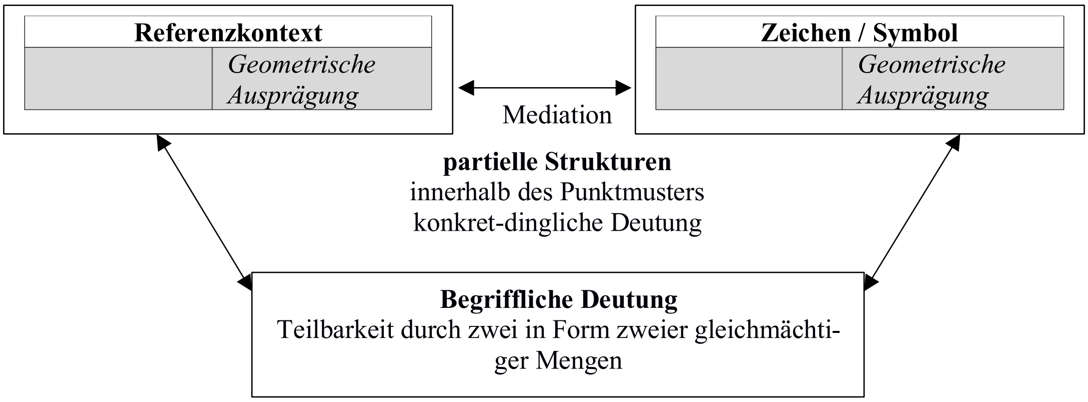


Abbildung 8.55: Beispiel 2.4 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Durch die Einordnung des Argumentationsprozesses in das Theoriekonstrukt wird deutlich, dass Helena die Punktdarstellungen alle vor einem geometrischen Referenzkontext deutet und das Anschauungsmittel dadurch die Funktion des Argumentationsmittels einnimmt. Zur Argumentation nutzt Helena dann partielle Strukturen in Form der waagerechten Erzeugung zweier Substrukturen. Diese vergleicht sie allerdings dann auf Basis konkret-dinglicher Deutungen. Dennoch ist die von Helena in die Darstellung hineingedeutete Struktur in Form der Erzeugung zweier Substrukturen aus mathematischer Perspektive mit dem Blick auf die begriffliche Idee der Teilbarkeit durch zwei von Bedeutung. Dabei zeigt sich eine verteilende Sicht auf die Division.

Beispiel 2.5: Marie deutet Pt7 und begründet, warum es nicht durch drei teilbar ist

Der nachfolgende Interviewausschnitt ist dem ersten Aufgabenkomplex des Interviews „Teilbarkeit durch drei“ zuzuordnen. Pt7 stellt dabei die achte zu deutende geometrische Anordnung dar.

1	**M**	*[legt Pt7 vor sich]* **Hier ist eins** *[zeigt mit dem Stift über Pt7.1, Pt7.7, Pt7.12]*, **eine Reihe, hier haben wir wieder drei** *[zeigt mit dem Stift über Pt7.2, Pt7.9, Pt7.13]*, **eins** *[tippt auf Pt7.12]*, **zwei** *[tippt auf Pt7.13]*, **drei** *[tippt auf Pt7.14]*, **vier** *[tippt auf Pt7.15]*, **fünf** *[tippt auf Pt7.16]* **und hier** *[tippt auf Pt7.6]* **haben wir nur Einen. Also, wenn man es jetzt zum Beispiel wieder einkreisen würde wie da** *[zeigt auf Pt10]*, **hat man immer noch ein Plättchen über** *[zeigt auf Pt7.6]*. **Und das, man kann ja nicht, ähm, nicht den dazu malen. Und deswegen bleibt ein Plättchen übrig und deswegen kann man es nicht durch drei teilen.**

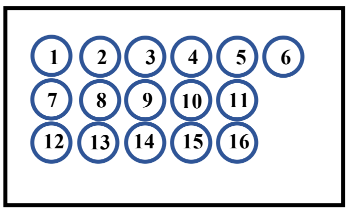


Abbildung 8.56: Beispiel 2.5 - Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

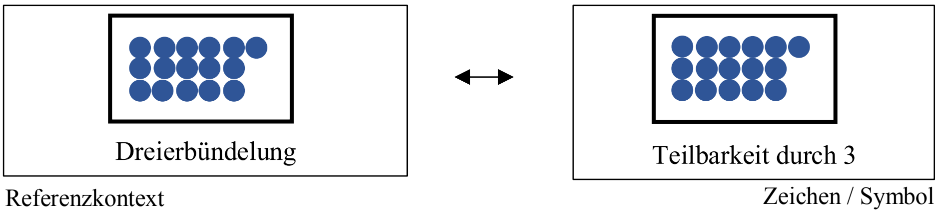


Abbildung 8.57: Beispiel 2.5 - Rollenverteilung

Marie eröffnet die neue Interviewphase, indem sie Pt7 vor sich legt. Dem Argumentations- und Deutungsprozess geht kein konkreter Impuls der Interviewerin voran. Da dieser Prozess aber dem ersten Aufgabenkomplex zuzuordnen ist, steht Marie vor der Anforderung, die Darstellungen hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei zu deuten. Demnach stellt dies das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

Sie beginnt ihre Argumentation, indem sie die Darstellung zunächst beschreibt. Sie zeigt die erste Spalte, indem sie mit einem Stift senkrecht von oben nach unten über sie fährt. Dabei bezeichnet sie diese als „eine Reihe“ (Z. 1), die von ihr nicht näher beschrieben wird. Die zweite Spalte wird erneut gezeigt und sie beschreibt sie als „wieder drei“ (Z. 1). Dadurch werden zwei Dinge deutlich. Zum einen, dass die zweite von ihr beschriebene Spalte drei Punkte enthält. Zum anderen wird durch die Nutzung des Begriffs „wieder“ deutlich, dass auch die erste Spalte aus drei Punkten besteht. Im Anschluss daran tippt Marie nacheinander die Punkte Pt7.12, Pt7.13, Pt7.14, Pt7.15 und Pt7.16 an und zählt „eins, zwei, drei, vier, fünf“ (Z. 1). Dieses Vorgehen beschreibt sie nicht näher. Aufgrund der vorherigen Beschreibung der ersten beiden Spalten lässt sich vermuten, dass Marie nun die Anzahl an Spalten mit der Punktanzahl drei ermittelt. Den Punkt Pt7.6 beschreibt sie als „hier haben wir nur Einen“ (Z. 1). Dadurch wird deutlich, dass Pt7.6 nicht in einer solchen Spalte mit drei Punkten enthalten ist. Sie stützt dies, indem sie auf eine vorherige Karte verwiest (Pt10), bei der sie Dreierbündel eingezeichnet hat und erläutert, dass bei einem Einkreisen von Dreierspalten ein Punkt übrig bleibt. Demnach beschreibt sie, dass die Punktdarstellung nicht vollständig in Dreierbündel strukturiert werden kann und auch ein einfügen von Punkten wird von ihr ausgeschlossen. Dabei wird nicht deutlich, was genau Marie damit meint. Wahrscheinlich ist ihr bewusst, dass eine Modifikation der Darstellung im Sinne eines Ergänzens von Punkten auch die dadurch dargestellte Zahl verändert. Die Tatsache, dass diese vollständige Dreierbündelung nicht möglich ist, nutzt sie als Entscheidungs- und Argumentationskriterium, um zu begründen, dass es sich dabei nicht um eine durch drei teilbare Zahl handelt. Die Bedeutung dessen, dass die Bündel genau aus drei Plättchen bestehen, bleibt an dieser Stelle implizit.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontext

Marie steht vor der Anforderung die Punktdarstellung Pt7 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei zu deuten. Demnach deutet sie ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*.

Zur Deutung und Begründung, dass es sich um eine nicht durch drei teilbare Zahl handelt, nutzt Marie *Merkmale der geometrischen Anordnung* und deutet das Zeichen/Symbol demnach vor einem *geometrisch geprägten Referenzkontext*. Dadurch erhält das Anschauungsmittel (auch) die Funktion eines *Argumentationsmittels*.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Innerhalb des oben beschriebenen Wechselspiels zeigt sich, dass Marie die geometrische Anordnung Pt7 und deren geometrische Struktur zur Argumentation heranzieht. Dafür expliziert sie zunächst, dass in der ersten und zweiten Spalte jeweils drei Punkte enthalten sind. Sie deutet diese demnach als *Substrukturen*, die aus jeweils drei Punkten bestehen, die übereinander angeordnet sind. Im weiteren Verlauf macht Marie deutlich, dass sie nicht nur diese beiden zunächst explizierten Substrukturen in die Darstellung hineindeutet, sondern dass sie insgesamt fünf solcher Substrukturen in die Veranschaulichung hineinsieht. *Demnach stellt jede aus drei Punkten bestehende Spalte eine Substruktur dar*. Dieser Strukturierungsprozess führt dazu, dass ein einzelner Punkt in keinem Dreierbündel enthalten ist. Auch wenn sie an dieser Stelle nicht expliziert, warum es sich um Dreierbündel handelt, ist durchaus vermutbar, dass sie eine aufteilende Vorstellung der Division in die Darstellung hineindeutet. Marie deutet demnach Substrukturen in Form von Dreierbündeln in die Darstellung hinein und zieht somit *partielle Strukturen* zur Deutung heran. Durch diese Dreierbündelung zeigt sich, dass die von Marie in die Veranschaulichung hineingedeutete Struktur in direktem Bezug zur zu deutenden strukturellen Zahleigenschaft steht.

Dabei bezieht Marie sich auf die intendierte Struktur, durch die eine Dreierbündelung bereits angelegt ist. Die Punkte innerhalb dieser prototypischen Darstellung sind so angeordnet, dass immer drei Punkte übereinander sind und lediglich die letzte Spalte aus einem oder zwei Punkten bestehen kann. Eine explizite Nutzung und Bezugnahme auf die intendierte Struktur würde dann der Deutung umfangreicher beziehungsweise prototypischer Strukturen entsprechen.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Betrachtet man die Argumentation von Marie und die strukturellen Deutungen die sie zur Argumentation heranzieht, so zeigt sich eine begriffliche Idee, die der Teilbarkeit durch drei in Form der *operativen Ermittlung des Ergebnisses* entspricht. Marie versteht Teilbarkeit durch drei auf geometrischer Ebene als einen *aufteilenden Divisionsprozess*. Diesen setzt sie geometrisch um, indem sie Dreierbündel innerhalb der geometrischen Anordnung erzeugt. Die Bedeutung der Punktanzahl innerhalb eines Bündels bleibt innerhalb der Argumentation allerdings implizit. Eine Punktdarstellung ist in diesem Verständnis dann durch drei teilbar, wenn sie vollständig in Dreierbündel strukturiert werden kann. Ist dies nicht möglich, so ist diese nicht durch drei teilbar.

Einordnung des Argumentationsprozesses

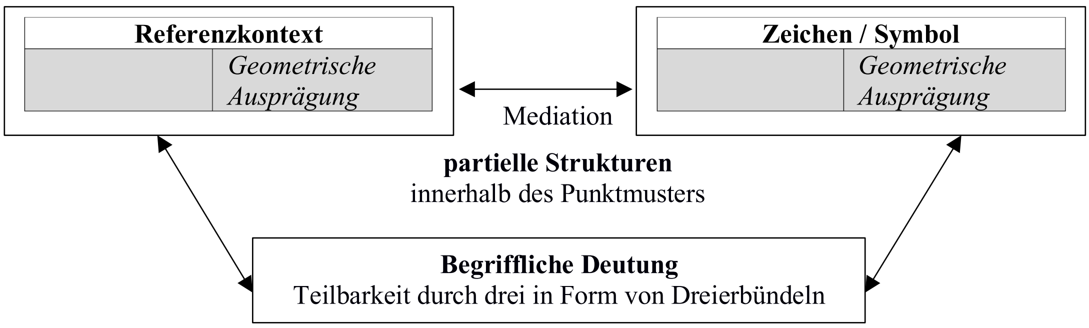


Abbildung 8.58: Beispiel 2.5 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Durch die Einordnung des Argumentationsprozesses in das Theoriekonstrukt wird deutlich, dass Marie die Punktdarstellungen alle vor einem geometrischen Referenzkontext deutet. Das Anschauungsmittel erhält dadurch die Funktion eines Argumentationsmittels. Zur Argumentation nutzt Marie dann partielle Strukturen in Form der Erzeugung von Substrukturen mit der Mächtigkeit drei. Hierbei spiegelt sich demnach eine aufteilende Sicht auf die Division wider.

Wenn Kinder in ihren Argumentationen auf Grundlage von strukturellen Eigenschaften argumentieren, die in direktem Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen, so entwickeln die Kinder tragfähige Argumente. Dabei handelt es sich nicht notwendigerweise um vollständige und mathematisch komplette Argumentationen. Vielmehr sind einzelne kindliche Deutungen und genutzte Argumente aus mathematischer Perspektive tragfähig. Innerhalb dieser Erkenntnis sind für die mathematikdidaktische Forschung sowie für den Mathematikunterricht vor allem zwei Aspekte wesentlich.
Es zeigt sich, dass Kinder in die Darstellung für die Argumentation notwendige Strukturen hineindeuten und diese zur Argumentation nutzen, was in beiden Beispielen deutlich wurde. Das bedeutet aber nicht automatisch, dass die gesamte Argumentation, so wie sie von den Kindern getätigt wurde, mathematisch korrekt ist. In Helenas Beispiel wurde deutlich, dass

sie eine für eine mathematisch korrekte Argumentation notwendige strukturelle Deutung mit einer aus mathematischer Perspektive nicht tragfähigen Argumentation verknüpft.
Außerdem zeigte sich, dass Kinder häufig Argumente nutzen, deren Gültigkeit sie aber nicht begründen. Aus mathematischer Perspektive ist dies für eine vollständige Argumentation aber notwendig.
Aus diesen Erkenntnissen lassen sich Konsequenzen für das Argumentierenlernen ableiten. Auch in Argumentationen, in denen die Kinder für die Argumentation wesentliche strukturelle Merkmale in die Veranschaulichung hineindeuten, kann es Aushandlungsprozesse benötigen. In diesen muss ausgehandelt werden, welche strukturellen Deutungen miteinander verknüpft werden können und welche strukturellen Deutungen noch weitere Argumente bedürfen. Aus dieser Perspektive müssen Strukturen im Mathematikunterricht bewusst thematisiert werden, um anschauungsgebundene Argumentationen führen zu können. Zum einen muss thematisiert werden, welche Strukturen innerhalb der Darstellung wesentlich und für eine Argumentation notwendig sind. Zum anderen muss auch thematisiert werden, welche Argumente noch weiter begründet werden müssen, damit eine Argumentation den Anforderungen des mathematischen Argumentierens gerecht wird.
Während der Analysen zeigte sich noch eine weitere Auffälligkeit, die deutlich macht, wie komplex das Argumentieren mit Anschauungsmitteln ist. Obwohl beide Interviews einen ähnlichen mathematischen Inhalt thematisieren, nämlich die Teilbarkeit, zeigten sich deutliche Unterschiede in den von den Kindern gedeuteten Strukturen. Im Fall der Paritäten deuteten die Kinder eine verteilende Sicht der Division in die Darstellung hinein, im Fall der Teilbarkeit durch drei deuteten sie die Division im Sinne des Aufteilens.

8.2.3 Fokussierung von strukturellen Deutungen, die einen verallgemeinernden Argumentationsprozess ermöglichen

In den Analysen zeigten sich eine Vielzahl an konkret-dinglicher Deutungen sowie eine häufige Nutzung partieller Strukturen in den argumentativen Auseinandersetzungen der Kinder. Dabei bleiben die Argumentationen auf bestimmte Beispiele beschränkt und eine (ansatzweise) allgemeingültige Argumentation ist nicht möglich. Hierfür ist die Deutung umfangreicher Strukturen notwendig.
Die Deutung umfangreicher Strukturen zeigte sich insbesondere in Form von Zerlegungen der Punktdarstellungen (vgl. Kap. 7), die jedoch von den Kindern nicht weitergehend begründet werden. Eine solche (Um-)Strukturierung der Punktdarstellung ist geeignet, um die

strukturelle Zahleigenschaft der zu deutenden Darstellung zu begründen. Für eine Verallgemeinerung ist ein solches Vorgehen nicht ausreichend. Zum Verallgemeinern müssen prototypische Strukturen in die Darstellung hineingedeutet werden und gleichzeitig muss eine Fortsetzung mitgedacht werden. Eine solche Deutung erfordert demnach die Verknüpfung zweier unterschiedlicher partieller Strukturen.
Diese Deutungsweise konnte innerhalb der Analysen lediglich an einem sehr lokalen Beispiel herausgearbeitet werden. Dieses wird im Folgenden dargestellt und wesentliche Erkenntnisse daraus abgeleitet. Da diese Deutungsweise nur an dieser Argumentation herausgearbeitet werden konnte, wird an dieser Stelle nicht von charakteristischen Eigenschaften gesprochen. Stattdessen wird der Argumentations- und Deutungsprozess analysiert und wesentliche Erkenntnisse daraus abgeleitet.

Beispiel 2.6 Mia begründet, warum man die (allgemeingültige) Aussage an S1 und S7 am besten erklären kann und deutet dabei umfangreiche Strukturen in die Darstellung hinein

Die nachfolgende Interviewszene ist dem zweiten Aufgabenkomplex des Interviews „Paritäten“ zuzuordnen und stellt dabei die letzte Interviewphase des Aufgabenkomplexes dar. Im Vorfeld hat Mia bereits alle Punktdarstellungen hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage ‚Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade‘ gedeutet und begründet, warum man diese Aussage in die jeweiligen Darstellungen hineinsehen kann. Dabei hat sie bei allen Punktmustern sowohl die Paritäten der Summanden als auch die Parität der Summe gedeutet. Dafür hat sie zur Deutung der nicht-prototypischen Darstellungen nahezu ausschließlich arithmetische Referenzkontexte herangezogen. Die prototypische Darstellung S1 hat sie hingegen vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext gedeutet und Merkmale der geometrischen Anordnung zur Argumentation genutzt. Dabei hat sie sich auf einzelne strukturelle Merkmale der geometrischen Anordnungen bezogen, nämlich, dass immer genau zwei Punkte übereinander sind.

Im Folgenden ist aufgrund des besseren Verständnisses der Entstehung des Deutungsprozesses von Mia die gesamte Interviewphase dargestellt. In der Analyse wird dann zunächst der Beginn der Interviewphase zusammengefasst, um dadurch den für die Analyse relevanten Deutungsprozess innerhalb der gesamten Phase zu verorten.

1	I	**Ok. Super. Bei welchem Punktmuster findest du es denn jetzt am allerbesten zu sehen und zu erklären, warum es gerade und ungerade ist.**
2	M	**Hier** *[zeigt auf S7]* **und hier** *[zeigt auf S1]*. **Da fällt es mir ziemlich leicht zu sehen, dass das ne gerade Zahl ist, weil ähm die Zahl** *[zeigt neben S7]* **kann man dann durch zwei teilen, weil hier zwei Spalten sind** *[zeigt mit dem Daumen links vom Punktmuster und mit dem Zeigefinger rechts vom Punktmuster]* **oder wie das heißt. Ja, ich weiß jetzt grade nicht wie das heißt. Spalten oder so.**
3	I	**Und mit welchem Punktmuster kannst du am besten erklären, warum das Ergebnis hinterher gerade wird, obwohl du zwei ungerade Zahlen miteinander addierst.**
4	M	**Ähm,** *(...)* **naja. Eigentlich auch bei den Zweierreihen.**
5	**I**	**Warum?** *[schiebt S1 und S7 in die Mitte]* **Warum kannst du das mit den beiden am allerbesten erklären?**
6	**M**	**Weil hier kann man so** *[zeigt mit der rechten Handkante rechts neben die roten Punkte] [unverständlich]*, **hier braucht man nur zwei, dann ist es immer noch ne gerade Zahl, äh ungerade Zahl.**
7	**I**	**Was meinst du mit hier braucht man immer nur zwei?**
8	**M**	**Hier** *[zeigt auf S7.23&S7.34]* **kann man immer nur zwei hinter setzen und dann ist es immer noch ne ungerade Zahl.**
9	**I**	**Mhm.**
10	M	**Und wenn hier noch nen Blauer wäre** *[zeigt auf S7.24]*, **dann wäre das ne gerade Zahl** *[zeigt auf die blauen Punkte von S7]* **und das ne gerade Zahl** *[zeigt auf die roten Punkte von S7]*. **Und, ähm, hier kann ich es dir auch nochmal erklären. Hier** *[zeigt auf ihr selbstgemaltes Punktmuster]* **zum Beispiel drei, dann muss man nur einen dazurechnen und dann ist es wieder gerade. Das ist immer so weiter geht.**
11	I	**Mhm. Ok. Super, dann schiebe ich die auch noch einmal nach oben.**

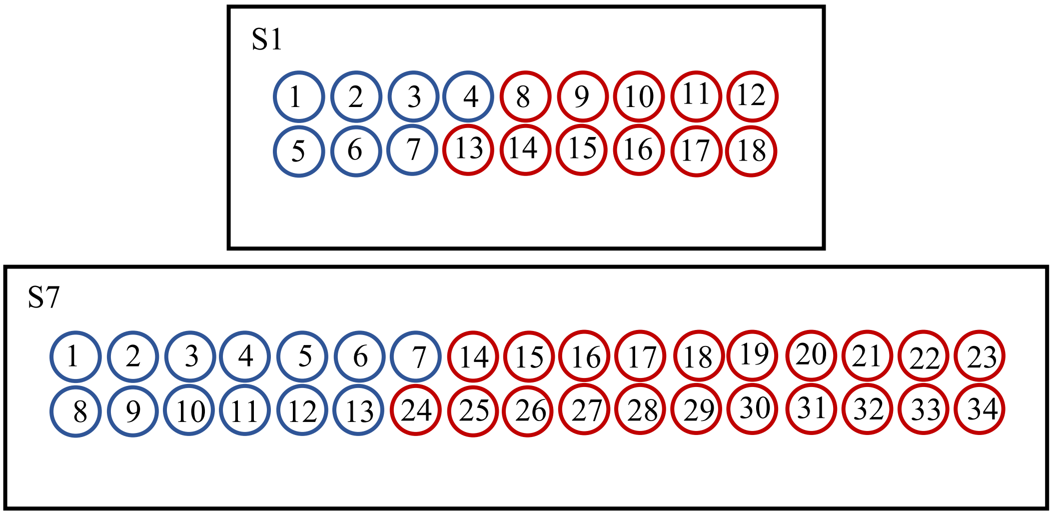


Abbildung 8.59: Beispiel 2.6 - Gedeutete Darstellungen

Zusammenfassung des Beginns der Interviewphase

Zu Beginn der weiteren Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Veranschaulichungen fordert die Interviewerin Mia dazu auf, zu erklären, an welchen Punktdarstellungen die Parität am besten erklärt werden kann (Z. 1). Mia benennt daraufhin die Veranschaulichungen S1 sowie S7 und erläutert dies für die Darstellung S7. Dabei bezieht sie sich darauf, dass man die Darstellung durch zwei teilen kann, da das Punktmuster in zwei Spalten strukturiert ist, womit Mia vermutlich nicht Spalten, sondern die waagerechten Reihen meint (Z. 2). Die Interviewerin fokussiert anschließend das durch die Punktdarstellung dargestellte Ergebnis und möchte von Mia wissen, mit welchen Punktmuster sie am besten erklären kann, warum die Summe gerade ist, obwohl zwei ungerade Zahlen addiert werden (Z. 4). Auch hier sieht

Mia die Zweierreihen und somit S1 und S7 am geeignetsten an. Hierfür fordert die Interviewerin nun eine Begründung und leitet damit den für diesen Analyseausschnitt wesentlichen Argumentationsprozess ein (Z. 5).

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

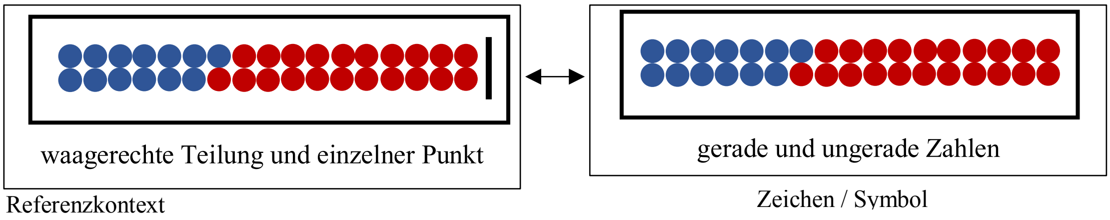


Abbildung 8.60: Beispiel 2.6 - Rollenverteilung

Zu Beginn dieses Deutungsprozesses greift die Interviewerin die vorherige Deutung von Mia auf und macht nun fraglich, warum man mit den Punktdarstellungen S1 sowie S7 am besten erklären kann, dass die Summe zweier ungerader Summanden gerade ist. Dies stellt somit das fragliche *Zeichen/Symbol* dar.

Dies deutet Marie unter Bezugnahme auf S7. Die Nutzung dieser Veranschaulichung wird durch die von ihr innerhalb der Argumentation getätigten Zeigegesten deutlich (Z. 6, 8). Zur Argumentation legt sie zunächst die Handkante neben die roten Punkte der Darstellung S7 und erläutert „hier braucht man nur zwei" (Z. 6). Es scheint, als würde Mia an dieser Stelle eine Fortführung der Punktdarstellung S7 andeuten, indem sie die Veranschaulichung um zwei weitere Punkte ergänzt. Sie erläutert daraufhin, dass es dann immer noch „ne gerade, äh ungerade Zahl" (Z. 6) ist. Auch wenn Mia zunächst von einer geraden Zahl spricht, ist an dieser Stelle zu vermuten, dass sie durch die Interjektion „äh" eine Verbesserung ihrer Äußerung einleitet und die durch die roten Punkte dargestellte Zahl als gerade klassifiziert. Dies lässt sich auch dadurch stützen, dass Mia die Darstellung innerhalb der weiteren Ausführungen als ungerade beschreibt (Z. 8). Auch im Vorfeld hat sie diese bereits als ungerade bezeichnet und dies auch begründet. Die Interviewerin fordert daraufhin eine Erläuterung für die Aussage „hier braucht man immer nur zwei" ein (Z. 7). Mia spezifiziert diese Äußerung nun und erläutert, dass man „immer nur zwei hinter setzen" (Z. 7) muss und dass sich dadurch die Parität der Zahl nicht ändert. Auffällig ist an dieser Stelle, dass Mia nicht begründet, warum man mit dem Punktmuster erläutern kann, dass es sich bei der Summe von zwei ungeraden Zahlen um eine gerade Zahl handelt. Vielmehr deutet Mia die Fortführung des roten Anteils der Darstellung. Dabei berücksichtigt sie, dass sich durch eine solche Fortsetzung des Punktmusters nicht die Parität ändert. Sie erläutert dabei allerdings nicht, warum der rote Anteil der Punktdarstellung eine ungerade Zahl ist und warum sich die Parität bei der Erweiterung um zwei Punkte nicht verändert.

Analyseschritt 1b: Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Mia wird von der Interviewerin aufgefordert zu erläutern, warum man an den Punktdarstellungen S1 und S7 am besten erklären kann, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist. Sie deutet demnach eine geometrische Anordnung hinsichtlich einer bestimmten Eigenschaft und somit ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*.

Dies deutet sie unter der Berücksichtigung *geometrischer Merkmale*. Dabei bezieht sie sich nicht direkt auf die spezifischen geometrischen Merkmale der von ihr gedeuteten Darstellung. Vielmehr deutet sie die Fortführung dieser geometrischen Anordnung, indem sie diese durch das Ergänzen von zwei Punkten erweitert. Demnach zieht sie zur Deutung des geometrisch geprägten Zeichens/Symbols einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran. In ihren Ausführungen nutzt sie darstellerische Mittel auf geometrischer Ebene, so dass das Anschauungsmittel an dieser Stelle als *Argumentationsmittel* genutzt wird.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Referenzkontext und Zeichen/Symbol

Innerhalb des vorliegenden Deutungsprozesses erfolgt die Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext durch eine Fortsetzung der Struktur innerhalb der Darstellung. Mia betrachtet nicht ausschließlich die innerhalb der geometrischen Anordnung dargestellten Punkte, sondern *geht in ihrer Deutung über das vorliegende Beispiel hinaus*. Sie verändert die Punktdarstellung zunächst um zwei Punkte. Dabei bleibt von ihr unerwähnt, warum sie dies tut. Es lässt sich aber vermuten, dass sie die *vorhandene prototypische Struktur der Punktdarstellung nutzt und fortführt*. Betrachtet man dies unter der von Mia im Vorfeld getätigten Aussage, dass es sich bei der gesamten Darstellung um zwei Spalten handelt (Z. 2), versucht sie möglicherweise genau diese beiden Spalten in ihrer Anordnung zu verlängern. Innerhalb ihrer Spezifizierung der getätigten Aussage äußert Mia, dass man „immer nur zwei hinter setzen“ (Z. 8) kann. Dies erweckt den Anschein, als sei dies nicht nur einmal möglich, sondern beliebig oft, was eine Fortführbarkeit dieser Deutung bedeuten würde. Sie deutet vermutlich eine Fortführbarkeit in die Darstellung hinein und erläutert eine *allgemeingültige Regel* für die Darstellung von ungeraden Zahlen. Demnach deutet sie *umfangreiche Strukturen* in die Darstellung hinein. Innerhalb dieser Interpretation darf allerdings nicht unberücksichtigt bleiben, dass die Aussage von Mia aus mathematischer Perspektive dennoch nicht vollständig ist. Für eine vollständige mathematische Argumentation müsste zusätzlich begründet werden, warum es sich bei der Ausgangsdarstellung um die

Darstellung einer ungeraden Zahl handelt und warum sich die Parität bei der Ergänzung von zwei Punkten beziehungsweise einer beliebigen Anzahl von zwei Punkten nicht verändert. Dennoch zeigt dieser Deutungsprozess, dass Mia dazu in der Lage ist innerhalb ihrer Deutungen, wenn auch nur sehr lokal begrenzt, die Fortführbarkeit der Punktdarstellungen in die Darstellungen hineinzudeuten und in ihre Argumentation einzubeziehen.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Innerhalb des in den Blick genommenen Deutungsprozesses deutet Mia eine Fortführbarkeit der Darstellung in die geometrische Anordnung hinein. Dabei ergänzt sie gedanklich die vorliegende Veranschaulichung um immer zwei Punkte. Dadurch fokussiert sie vor allem die *Beziehung zwischen geometrischen Anordnungen gleicher Parität*. Innerhalb ihrer Argumentation macht sie nämlich deutlich, dass sich durch das Ergänzen von immer zwei Punkten die Parität nicht verändert. In dem vorliegenden Fall fokussiert sie demnach die *strukturelle Beziehung zwischen zwei Veranschaulichungen von benachbarten ungeraden Zahlen*. Es steht somit die für eine Verallgemeinerung wesentliche *begriffliche Facette der Differenz zwischen Zahlen gleicher Eigenschaft* im Zentrum der Auseinandersetzung. Nur durch einen Einbezug dieser begrifflichen Idee kann innerhalb der Auseinandersetzung mit ungeraden beziehungsweise geraden Zahlen eine Verallgemeinerung in die Darstellung hineingedeutet werden. Dabei bleibt allerdings von Mia ungenannt, warum die Differenz zwischen zwei ungeraden Zahlen zwei beziehungsweise ein Vielfaches der Zwei ist.

Einordnung des Argumentationsprozesses

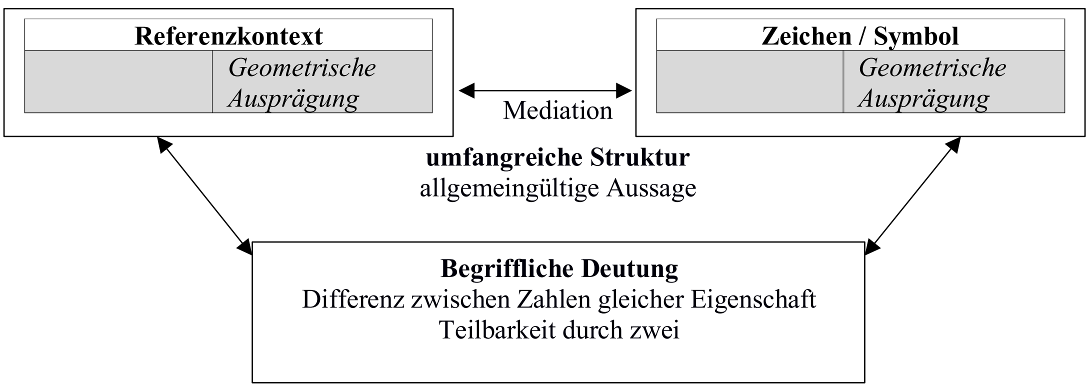


Abbildung 8.61: Beispiel 2.6 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Dieses Beispiel zeigt demnach, dass Kinder durchaus dazu in der Lage sind, Verallgemeinerung im Sinne der Fortführbarkeit in (prototypische) Darstellungen hineinzudeuten.

Wenn Kinder solche verallgemeinernden Strukturen in die Darstellung hineindeuten, dann verknüpfen sie dabei unterschiedliche strukturelle Deutungen sowie begriffliche Ideen miteinander.

In dem vorherigen Beispiel wurde deutlich, dass es durchaus Kinder gibt, die dazu in der Lage sind, verallgemeinernde Argumentationen zu führen. In diesem Fall hat Mia eine Fortführbarkeit der prototypischen geometrischen Anordnung in die Darstellung hineingedeutet. Auch wenn an dieser Stelle natürlich zu berücksichtigen ist, dass es sich aus mathematischer Perspektive (noch) nicht um eine vollumfängliche mathematische Argumentation handelt, es lediglich in einem lokal sehr begrenzten Deutungsprozess herausgearbeitet werden konnte und dies innerhalb der Interviewstudie das einzige Beispiel dieser Art ist.

Bei der detaillierten Analyse zeigt sich eine wesentliche Erkenntnis, die für die mathematikdidaktische Forschung sowie für den Mathematikunterricht von Relevanz sind. Mia deutet in die Darstellung zwei unterschiedliche Strukturen hinein. Zum einen die *waagerechte Teilbarkeit der Darstellung* (in zwei Reihen). Zum anderen die *Fortführbarkeit der Darstellung* durch Ergänzen zweier Punkte. An dieser Stelle zeigt sich eine notwendige Verknüpfung zweier struktureller Deutungen. Die Deutung der strukturellen Zahleigenschaft wird mit der Fortführbarkeit der Darstellung verknüpft. Beide Deutungen sind für eine Verallgemeinerung notwendig.

In den bisherigen Ausführungen hat sich bereits mehrfach gezeigt, dass die strukturellen Deutungen und die begrifflichen Ideen eng miteinander verzahnt sind. Auch innerhalb dieser Argumentationen zeigt sich dies. Die strukturelle Deutung der waagrechten Teilbarkeit ist verbunden mit einer begrifflichen Idee der Teilbarkeit durch zwei. Die Fortführbarkeit durch Ergänzen zweier Punkte steht in Beziehung mit der Differenz von zwei benachbarten Zahlen gleicher Parität. Demnach werden innerhalb der Argumentation nicht nur zwei strukturelle Deutungen miteinander verknüpft, sondern auch zwei begriffliche Ideen.

Dies zeigt abermals, dass es sich bei der Herstellung geometrischer Argumentationen insbesondere im Kontext von Allgemeingültigkeit um eine anspruchsvolle und komplexe Anforderung handelt. Bereits die vorherigen Ergebnisse haben deutlich gemacht, dass bereits die vollumfängliche Deutung eines arithmetischen Inhaltes in eine geometrische Anordnung für die Kinder eine komplexe Anforderung darstellt. Um allgemeingültige Aussagen zu generieren kommt zudem noch die Anforderung hinzu, zu begründen, warum dies nicht nur für dieses Beispiel gilt, sondern für alle weiteren Beispiele auch. Das heißt, warum die allgemeingültige Aussage nicht nur für die Darstellung dieser beiden ungeraden Summanden gilt, sondern für alle beliebigen Summen mit ungeraden Summanden. Kinder sehen diese Allgemeingültigkeit dabei nicht intuitiv in (prototypische) Darstellungen hinein. Es bedarf

demnach eines mathematischen Sozialisierungsprozesses, um Verallgemeinerungen in geometrische Anordnungen hineinzudeuten und diese zur Argumentation zu nutzen. In diesem Prozess muss bei den Kindern eine Bewusstheit hergestellt werden, wie mathematische und anschauliche Argumentationen geführt werden.
Die Initiierung und Begleitung eines solchen Prozesses geschieht dabei nicht von alleine, sondern es bedarf der bewussten Thematisierung im Mathematikunterricht und ist demnach Aufgabe der Lehrperson. Das bedeutet, die Lehrperson muss sich bewusst darüber sein, welche begrifflichen Ideen für eine Argumentation und für eine Verallgemeinerung notwendig sind. Diese Perspektiven gilt es dann innerhalb des Mathematikunterrichts gemeinsam einzunehmen, um die damit verbundenen Begriffsbildungsprozesse anzuregen.

8.3 Begriffliche Deutungen in Argumentationsprozessen mit Anschauungsmitteln

Innerhalb der theoretischen Grundlegung der vorliegenden Arbeit wurde ein Dilemma herausgearbeitet, dass das Argumentieren als Lerngegenstand aber auch als wesentliche Lernvoraussetzung darstellt. Denn nur durch die Partizipation an Argumentationsprozessen können im Mathematikunterricht der Grundschule fundamentale Lernprozesse initiiert und neues strukturelles Wissen erworben werden (vgl. Kap. 2.3). Aus diesem Grund stehen im Folgenden die begrifflichen Deutungen innerhalb der von den Kindern getätigten Argumentationen im Vordergrund. Es wird untersucht, welche begrifflichen Ideen die Kinder innerhalb der Argumentationsprozesse nutzen und wie sich diese (weiter-)entwickeln.
In den bisherigen Ausführungen hat sich gezeigt, dass die Ausprägung des Referenzkontextes Einfluss auf die Ausprägung der strukturellen Deutungen sowie der begrifflichen Ideen hat. Deuten Kinder eine zu begründende Aussage vor einem arithmetischen Referenzkontext, so sind auch die strukturellen Deutungen und die begrifflichen Ideen arithmetischer Natur. Ziehen die Kinder hingegen einen geometrisch geprägten Referenzkontext heran, so sind auch die strukturellen Deutungen sowie die begrifflichen Ideen auf geometrischer Ebene zu verorten. *Für das Argumentieren mit Anschauungsmitteln sind demnach besonders die begrifflichen Ideen auf geometrischer Ebene von Bedeutung*. Dennoch werden in der folgenden Darstellung beide Arten berücksichtigt, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede darstellen zu können. Dafür wird zunächst dargestellt, welche begrifflichen Deutungen sich innerhalb der Argumentationsprozesse zeigten. In den angeführten Beispielen wird sich sowohl auf neue Beispiele als auch auf bereits betrachtete Beispiele bezogen. Im letzteren Fall wird nicht nochmal die gesamte Analyse angeführt, sondern sich vielmehr auf die für die

begriffliche Idee relevanten Aspekte bezogen. Anschließend werden daraus Konsequenzen für das Mathematik- und Argumentierenlernen abgeleitet.

8.3.1 Begriffliche Deutung in arithmetisch geprägten Argumentationsprozessen

In der Analyse der Auswirkungen arithmetisch geprägter Referenzkontexte auf den Argumentationsprozess wurde als charakteristisch herausgearbeitet, dass ein arithmetisch geprägter Referenzkontext dazu führt, dass auch die strukturellen Deutungen sowie die begrifflichen Ideen arithmetischer Natur sind (vgl. Kap. 8.1). Auch wenn innerhalb der vorliegenden Arbeit vor allem Argumentationen auf geometrischer Ebene fokussiert werden, werden im Folgenden auch die begrifflichen Deutungen auf arithmetischer Ebene betrachtet. Durch diese Fokussierung wird deutlich gemacht, dass ein ausschließliches Anbieten von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess nicht zwangsläufig zu Begriffsbildungsprozessen auf geometrischer Ebene führt.

Dabei zeigten sich in den arithmetisch geprägten Argumentationen vornehmlich zwei unterschiedliche begriffliche Ideen, wobei die erste begriffliche Idee ausschließlich innerhalb der Interviews „Paritäten" rekonstruiert wurde. Der Argumentationsprozess zeichnet sich dabei durch die charakteristischen Eigenschaften von Argumentationen mit arithmetischen Referenzkontexten aus. Wesentlich für die begriffliche Idee ist, dass die begriffliche Idee in arithmetisch geprägten Referenzkontexten ebenfalls arithmetischer Natur ist.

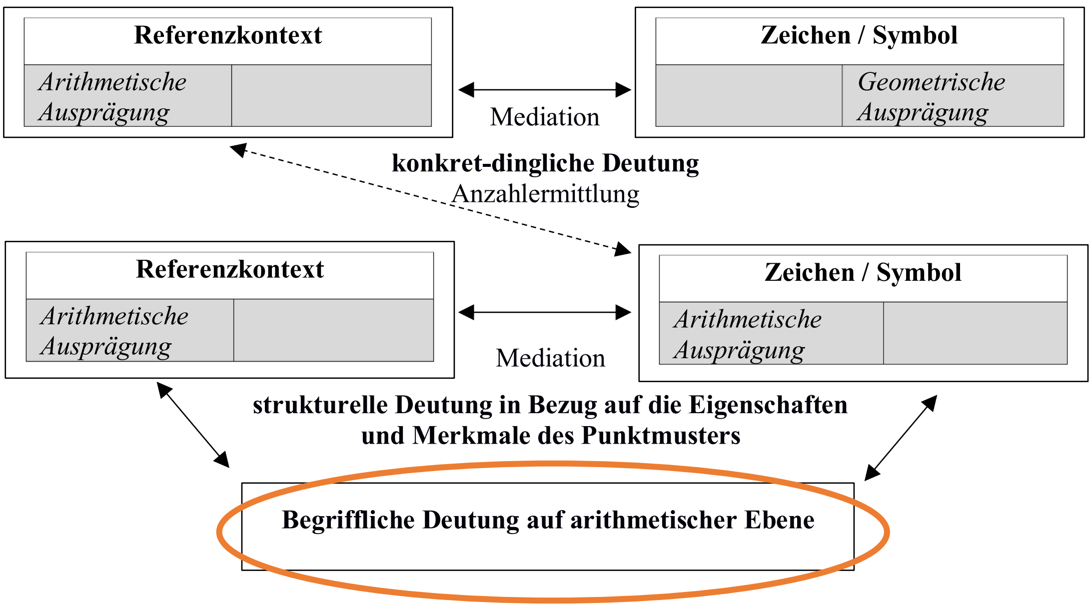


Abbildung 8.62: Begriffliche Deutungen auf arithmetischer Ebene

Dabei konnten innerhalb arithmetisch geprägter Argumentationen zwei unterschiedliche begriffliche Ideen rekonstruiert werden.

1. Kinder beziehen sich in ihrer argumentativen Auseinandersetzung auf die *Anordnung der geraden und ungeraden Zahlen innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen*. Sie begründen in diesem Fall die Parität, indem sie auf Basis der Parität einer oder beider Nachbarzahlen argumentieren. Sie bezeichnen eine oder beide Nachbarzahlen als gerade und folgern, dass die betrachtete Zahl ungerade ist. Sie bezeichnen eine oder beide Nachbarzahlen als ungerade und folgern, dass die betrachtete Zahl gerade ist. Dabei bleibt von den Kindern ungenannt, warum sich gerade und ungerade Zahlen innerhalb der natürlichen Zahlenfolge abwechseln.
2. Die Kinder beziehen sich in ihren Argumentationen auf die operative Ermittlung eines konkreten Ergebnisses. Dabei dividieren die Kinder durch zwei beziehungsweise durch drei. Dabei benennen die meisten Kinder das von ihnen ermittelte Ergebnis. Im Zusammenhang der operativen Ermittlung bezogen sich die Kinder aber nicht ausschließlich auf die Division als Rechenoperation. Es zeigte sich auch, dass Kinder durchaus multiplikativ vorgehen und eine Umkehraufgabe ermittelt haben.

1. Ordinale Abfolge der geraden und ungeraden Zahlen

Beispiel 3.1: Benjamin begründet die Parität unter Bezugnahme auf eine begriffliche Idee der Anordnung der geraden und ungeraden Zahlen in der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen (vgl. Bsp. 1.1)

1	**B**	*(.)* **Hmm** *[überlegt 5 sec. Und nimmt sich P6]* **das ist ne ungerade.**
2	**I**	**Woher weißt du das?**
3	**B**	**Weil, ähm weil das dreizehn ist.**
4	**I**	**mhm**
5	**B**	**Und dreizehn kann man nicht durch zwei teilen. Man kann zwölf und vierzehn durch zwei teilen, aber dreizehn liegt dazwischen, also kann man die nicht durch zwei teilen.**

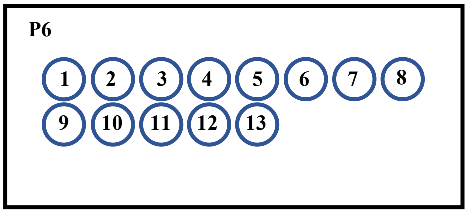


Abbildung 8.63: Beispiel 3.1 - Gedeutete Darstellung

Benjamin deutet die Punktdarstellung P6 zunächst als *Mittel zur Zahldarstellung* und somit als Veranschaulichung der Zahl ‚13'. Im Anschluss deutet er dann die Parität der Zahl 13 als ungerade. Er begründet dies zunächst, indem er auf die Teilbarkeit durch zwei verweist. Anschließend ergänzt er seine Begründung, indem er die Zahl 13 in der ordinalen Abfolge der geraden und ungeraden Zahlen innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen verortet. Durch die Fokussierung der Beziehungen zwischen den Zahlen deutet er partielle Strukturen auf arithmetischer Ebene innerhalb des Argumentationsprozesses. In diesem Wechselspiel zeigt sich ein Begriffsverständnis, welches zwei begriffliche Facetten beinhaltet. Zunächst nutzt er mit der Teilbarkeit (durch zwei) aus mathematischer Perspektive einen wesentlichen Teil der Definition der geraden und ungeraden Zahlen, nämlich, dass eine ungerade Zahl nicht ohne Rest durch zwei teilbar ist, wobei er dies nicht benennt. Warum es sich bei der 13 um eine Zahl handelt, die nicht durch zwei teilbar ist, begründet er, indem er erläutert, dass zwölf und 14 teilbar sind, 13 allerdings dazwischen liegt und demnach nicht teilbar ist. Dies zeigt ein begriffliches Verständnis, welches die ordinale Abfolge der geraden und ungeraden Zahlen innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen in den Fokus setzt. Nämlich, dass die Nachbarzahlen einer ungeraden Zahl immer gerade sind und umgekehrt. Auch wenn Benjamin die Teilbarkeit (durch zwei) in den Blick nimmt und innerhalb seiner Argumentation auf die Notwendigkeit der Teilbarkeit verweist, begründet er nicht explizit, warum die einzelnen Zahlen zwölf, 13 und 14 teilbar beziehungsweise nicht teilbar sind. Vielmehr begründet er dies ausschließlich über die Beziehungen zwischen den Zahlen und die innerhalb der ordinalen Abfolge der natürlichen Zahlen wechselweise auftretende Teilbarkeit beziehungsweise nicht-Teilbarkeit der Zahlen. Hierfür ist es notwendig, dass Benjamin entweder weiß, dass eine dieser Zahlen teilbar ist beziehungsweise nicht geteilt werden kann. Nur so kann dann über die ordinale Abfolge argumentiert werden.

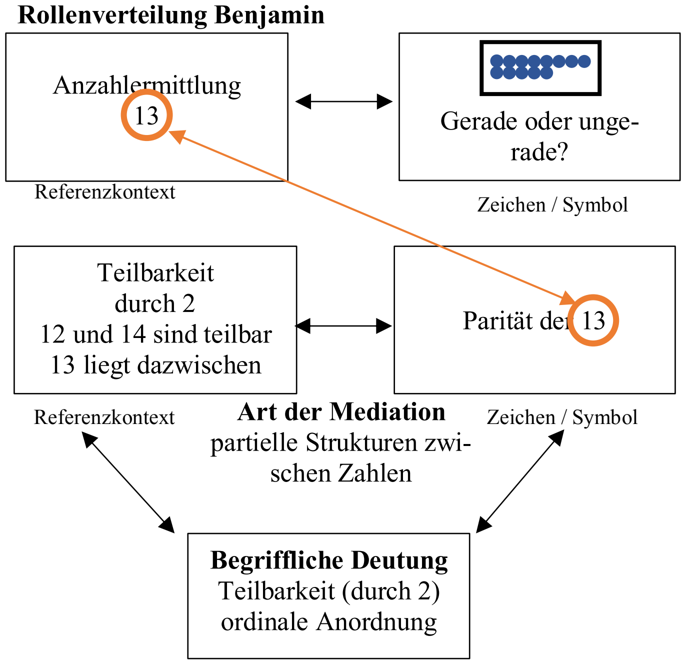


Abbildung 8.64: Beispiel 3.1 - Epistemologisch orientierte Analyse des Argumentationsprozesses

Das diesem Argumentationsprozess zugrundeliegende Begriffsverständnis zeigt demnach zwei aus mathematischer Perspektive wesentliche begriffliche Facetten des Begriffs der Paritäten. Nämlich die von ihm genannte *Teilbarkeit (durch zwei)* die er dann unter Bezugnahme auf die *ordinale Abfolge der geraden und ungeraden Zahlen innerhalb der natürlichen Zahlenfolge* begründet.
Mit dem Fokus auf Begriffsbildungsprozesse beim Argumentieren mit anschaulich dargestellten Zahleigenschaften zeigt sich aber, dass diese von Benjamin genutzte begriffliche Idee so nicht auf geometrischer Ebene genutzt oder entwickelt wird, sondern vielmehr auf einer rein numerisch-symbolischen beziehungsweise verbalsprachlichen Ebene dargestellt wird. Die begriffliche Idee steht demnach nicht in konkretem Bezug zu der ihm vorgelegten geometrischen Anordnung.

2. *Operative Ermittlung des Ergebnisses*

Beispiel 3.2: Jaden begründet die Teilbarkeit von St2 durch drei unter Bezugnahme auf eine begriffliche Idee die der operativen Ermittlung einer konkreten Aufgabe entspricht.

Der nachfolgende Interviewausschnitt ist dem zweiten Aufgabenkomplex zuzuordnen. Die von Jaden gedeutete Darstellung St2 ist die erste innerhalb dieses Aufgabenkomplexes gedeutete Darstellung.

1	**J**	*[zeigt mit dem Stift auf St2]* **Das ist nicht, ähm, obwohl** *(.)*, **das sind drei aufeinanderfolgende Zahlen, denn das hier** *[zeigt mit dem Stift unspezifisch unter die grünen Zahlen]*, **sechs** *[zeigt mit dem Stift unspezifisch unter die roten Punkte] (.)* **Rote. Und jetzt muss man aufpassen, weil hier sind ja immer fünf** *[zeigt mit dem Stift unter St2.1 bis St2.5]* **und dann ne Lücke** *[wedelt mit dem Stift unter den roten Punkten]*, **zu sechs** *[zeigt auf die Fünferzäsur zwischen St2.10 und St2.11]*. **Und hier ist ähm, nach dem, nach dem vierten schon ne Lücke** *[zeigt auf die Fünferzäsur zwischen St2.15 und St2.16]* **und dann sind hier drei** *[wischt über St2.16 bis St2.18 hin und her]* **und das sind dann halt sieben. Und das sind ja fünf, sechs, sieben. Wenn man das zusammenrechnet wärns‘** *[6 sec. Pause]* **achtzehn. Und achtzehn ist sechs mal** *(.)* **drei und also ist es durch drei teilbar.**

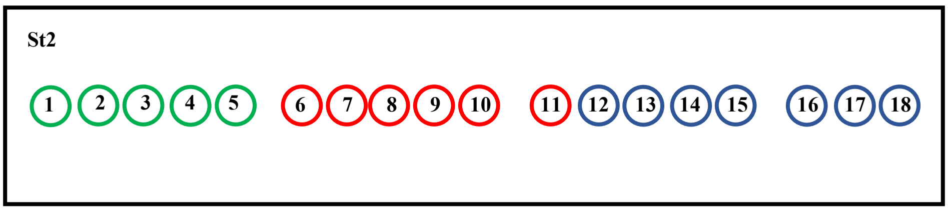


Abbildung 8.65: Beispiel 3.2 - Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Referenzkontext und Zeichen/Symbol

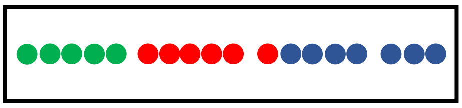
Anzahlermittlung Berechnung der Aufgabe 5 + 6 + 7 = 18	⟷	 Nachbarzahlen und Teilbarkeit durch drei
Referenzkontext		Zeichen / Symbol

Abbildung 8.66: Beispiel 3.2 - Rollenverteilung I

Der obige Deutungs- und Argumentationsprozess ist die erste Deutung im zweiten Aufgabenkomplex und wurde von der Interviewerin eingeleitet, indem sie Jaden auffordert, die vorgelegten Punktmuster hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage ‚Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist durch drei teilbar' zu untersuchen. Dies stellt demnach das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar.

3 • 6 = 18	⟷	Teilbarkeit der 18
Referenzkontext		Zeichen / Symbol

Abbildung 8.67: Beispiel 3.2 - Rollenverteilung II

Jaden beginnt seine Aussage, indem er die drei Zahlen als aufeinanderfolgende Zahlen klassifiziert. Dies begründet er, indem er die Punktanzahlen der jeweils in einer Farbe dargestellten Punkte benennt. Er ermittelt zunächst die Anzahl der grünen Punkte, nämlich fünf. Im Anschluss daran benennt er die Anzahl der roten Punkte, nämlich sechs. Anschließend ermittelt er die Punktanzahl der blauen Punkte, nämlich sieben. Dabei berücksichtigt er, dass an dieser Stelle die Zäsur nicht nach fünf Punkten, sondern bereits nach vier Punkten auftaucht. Zum Schluss zählt er die Zahlen „fünf, sechs, sieben" (Z. 1) nochmals auf und rechnet diese dann zusammen. Er berechnet so die Gesamtpunktzahl 18. Durch diese Anzahlermittlung lässt sich nun ein Umbruch im Deutungsprozess beobachten. Im weiteren Verlauf deutet Jaden nun nicht mehr die geometrische Anordnung hinsichtlich der Teilbarkeit, sondern die konkrete Punktanzahl. Demnach deutet Jaden nun die 18 hinsichtlich ihrer Teilbarkeit durch drei und eben dies stellt das neue zu deutende Zeichen/Symbol dar.
Dieses Zeichen/Symbol deutet er nun, indem er eine Multiplikationsaufgabe mit dem Faktor drei und dem Ergebnis 18 bildet. Er sagt „18 ist sechs mal drei" (Z. 1). Dies stellt für ihn das grundlegende Entscheidungskriterium der Teilbarkeit durch drei dar.

Analyseschritt 1b: Ausprägung des Referenzkontextes und Zeichens/Symbols

Jaden steht zunächst vor der Anforderung die geometrische Anordnung S2 hinsichtlich der Nachbarzahlen sowie der Teilbarkeit durch drei in die Darstellung zu deuten. Da es sich dabei um die Deutung einer Punktdarstellung hinsichtlich bestimmter Kriterien handelt, deutet er an dieser Stelle ein *Zeichen/Symbol geometrischer Ausprägung*. Um dieser Anforderung gerecht zu werden, ermittelt er die Anzahl der Punkte einer Farbe und addiert diese. Er ermittelt die Summe 18 und zieht demnach zur Deutung einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* heran. Im Anschluss daran deutet er nun die Zahl 18 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei. Das heißt, er deutet ein neues *Zeichen/Symbol*. Dieses ist *arithmetischer Ausprägung*, da es sich um eine konkret von ihm benannte Zahl handelt. Um deren Teilbarkeit zu begründen, nutzt er eine Multiplikationsaufgabe mit dem Faktor drei und dem Ergebnis 18. Somit nutzt er erneut einen *arithmetischen Referenzkontext*. Innerhalb des zweiten Deutungsprozesses wird das Anschauungsmittel von ihm dann nicht mehr genutzt, um die Teilbarkeit durch drei zu begründen. Dadurch gerät die geometrische Veranschaulichung St2 innerhalb des Argumentationsprozesses in den Hintergrund und verliert an Bedeutung.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Innerhalb dieses Deutungsprozesses zeigt sich erneut, dass die geometrische Anordnung, in diesem Fall St2 als *Mittel zur Zahldarstellung* genutzt wird und demnach eine *konkret-dingliche Deutung* des Anschauungsmittels innerhalb des Argumentationsprozesses eingenommen wird. Jaden ermittelt nämlich die Punktanzahl der jeweiligen Summanden und ausgehend davon die Summe, in diesem Fall 18.

Nach der Ermittlung der Punktanzahl deutet er nun die Zahl 18 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei. Er klassifiziert diese als durch drei teilbar und begründet dies, indem er die Multiplikation als Umkehroperation der Division heranzieht. Er nennt dabei die konkrete Aufgabe ‚6 • 3 = 18‘ und deutet somit eine multiplikative Struktur in die Zahl 18 hinein und demnach *partielle Strukturen*.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Innerhalb Jadens Deutung lässt sich ein Begriffsverständnis der Teilbarkeit durch drei rekonstruieren, welches sich auf die *Multiplikation als Umkehroperation* bezieht, die der *Teilbarkeit durch drei* zuzuordnen ist. Jede Zahl, die durch eine Multiplikationsaufgabe mit dem Faktor drei ermittelt werden kann, ist im Umkehrschluss durch drei teilbar. Dabei gibt Jaden zur Begründung die konkrete Multiplikationsaufgabe an.

Einordnung des Argumentationsprozesses

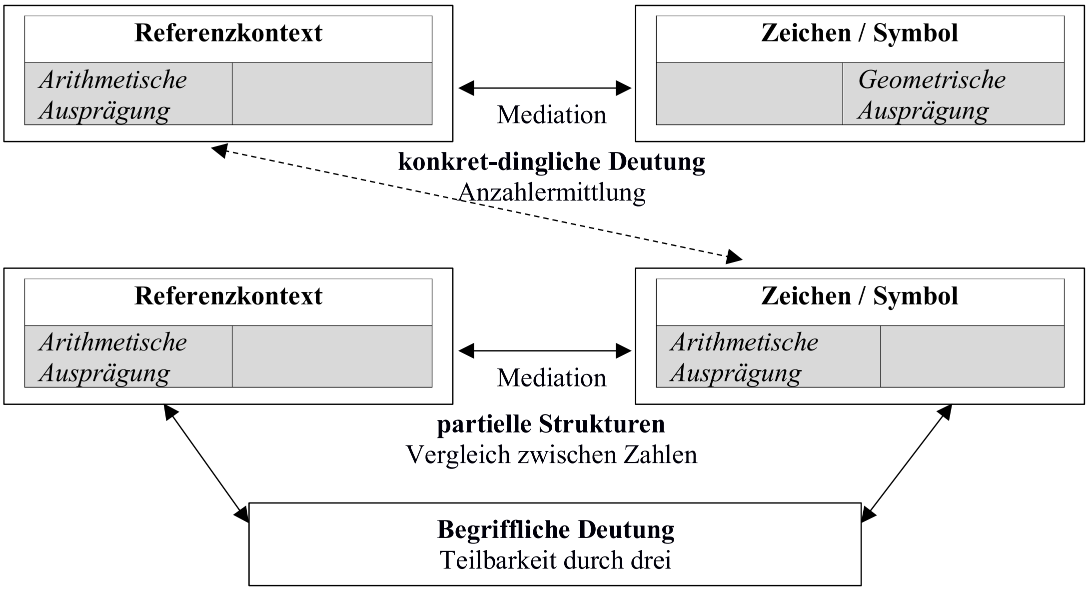


Abbildung 8.68: Beispiel 3.2 - Einordnung in das Theoriekonstrukt

Durch die Einordnung des Argumentationsprozesses in das Theoriekonstrukt zeigen sich die typischen Charakteristika der Argumentationen mit arithmetischen Referenzkontexten. Dabei konnte herausgearbeitet werden, welche begriffliche Idee innerhalb der Argumentation genutzt und entwickelt wird. Hierdurch wurde gezeigt, dass es sich bei arithmetisch geprägten Argumentationen auch um Begriffsbildungsprozesse handelt, die in Bezug zu konkreten Anzahlen und nicht in Bezug zu den geometrischen Darstellungen stehen.

Innerhalb der vorangegangenen Analysen zeigte sich, dass durch den Einsatz von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess nicht automatisch eine begriffliche Idee auf geometrischer Ebene entwickelt wird. Nutzen Kinder eben diese Veranschaulichungen nicht als Argumentationsmittel, so ist die innerhalb der Argumentation genutzte und entwickelte begriffliche Idee auf arithmetischer Ebene. Für die mathematikdidaktische Forschung und den Mathematikunterricht ergibt sich daraus Folgendes: Möchte man das Anschauungsmittel gewinnbringend im Unterricht einsetzen, ist es notwendig, dass Begriffsbildungsprozesse auch auf geometrischer Ebene angeregt werden. Dafür ist es aber notwendig, dass das Anschauungsmittel im Mathematikunterricht und in der inhaltlichen Auseinandersetzung auch die Funktion des Argumentationsmittels erhält. Der Lehrperson kommt dabei die Aufgabe zu, eben dies in der Konzeption von Mathematikunterricht zu berücksichtigen.

8.3.2 Begriffliche Deutung in geometrisch geprägten Argumentationsprozessen

In der detaillierten Untersuchung konnte festgestellt werden, dass Kinder immer dann begriffliche Ideen auf geometrischer Ebene nutzen, wenn sie einen geometrischen Referenzkontext zur Argumentation heranziehen. *Demnach sind begriffliche Ideen auf geometrischer Ebene immer dann notwendig, wenn das Anschauungsmittel auch als Argumentationsmittel genutzt wird.* Denn dann müssen die Kinder die begrifflichen Ideen auf die geometrische Darstellung übertragen.

Um die kindlichen Argumentations- und Deutungsweisen in diesen anschaulichen Argumentationen zu verstehen, ist es unerlässlich, sich mit den in den kindlichen Argumentationen genutzten begrifflichen Ideen auseinanderzusetzen. Insbesondere mit dem Blick darauf, dass innerhalb dieser argumentativen Auseinandersetzungen (immer auch) Begriffsbildungsprozesse stattfinden (können).

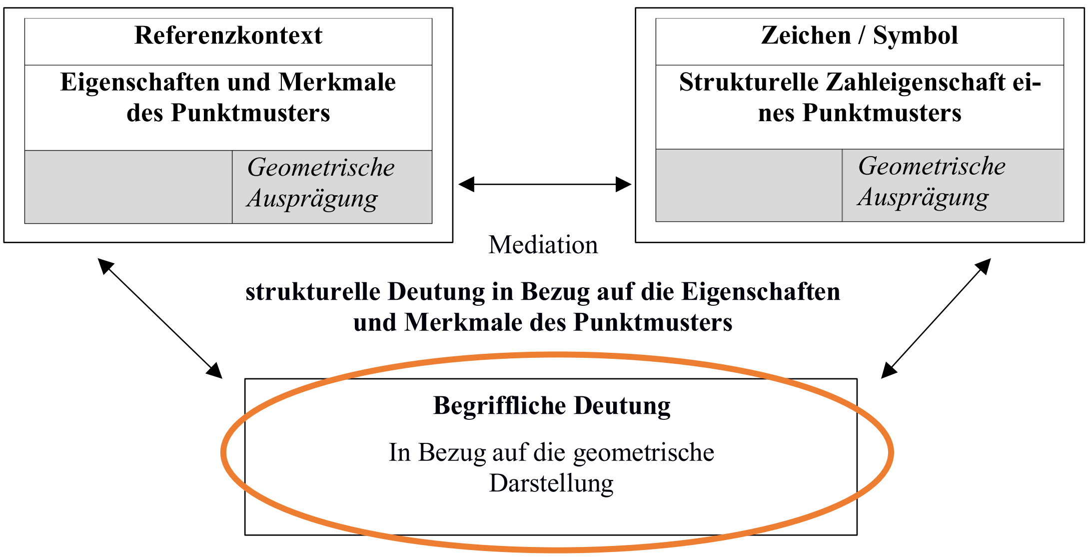


Abbildung 8.69: Begriffliche Ideen auf geometrischer Ebene

Innerhalb der detaillierten Analysen konnte dabei rekonstruiert werden, dass in den kindlichen Argumentationen nicht nur mathematisch tragfähige begriffliche Ideen zum Tragen kommen, sondern auch, dass den Argumentationen durchaus begriffliche Fehlvorstellungen zugrunde liegen. Das heißt, innerhalb der anschaulichen Argumentationen nutzen und entwickeln die Kinder auch begriffliche Fehlvorstellungen. Dies ist insbesondere für den Mathematikunterricht und das Argumentierenlernen von Bedeutung. Die mathematisch tragfähigen Ideen sind von Relevanz, um die kindlichen Argumentationen zu verstehen, aber auch, um herauszuarbeiten, welche begrifflichen Ideen im Argumentationsprozess von Relevanz sind und demnach im Mathematikunterricht ausgebildet werden müssen. Aus diesem Grund werden sowohl die begrifflichen Fehlvorstellungen als auch die mathematisch tragfähigen begrifflichen Ideen fokussiert und im Anschluss daran Konsequenzen für das Mathematik- und Argumentierenlernen abgeleitet.

Begriffliche Fehlvorstellungen in anschaulichen Argumentationen

In den detaillierten Analysen der Interviews „Paritäten“ zeigte sich, dass Kinder nicht nur tragfähige begriffliche Ideen nutzen beziehungsweise entwickeln. Vielmehr zeigte sich eine durchaus charakteristische begriffliche Fehlvorstellung im Kontext der Paritäten[32]. In unterschiedlichen Interviews konnte nachgezeichnet werden, dass Kinder eine geometrische Anordnung dann als gerade deklarieren, wenn es sich dabei um eine *vollständige Rechtecksanordnung* handelt. Eine solche begriffliche Idee lässt sich in *zwei Arten von Argumentationen* rekonstruieren. Zum einen in Argumentationen, in denen die Kinder eine *konkret-dingliche Deutung* der Veranschaulichung einnehmen und das Punktmuster als *vollständiges Viereck* bezeichnen (vgl. Bsp. 2.1). Zum anderen lässt sich eine solche Sicht auch in den Argumentationsprozessen erkennen, in denen Kinder *strukturelle Deutungen vorgenommen haben, die nicht in Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen*. In diesen Fällen zeigte sich, dass die Kinder eine Zahl dann als gerade deklarieren, wenn alle Reihen gleich viele Punkte haben. In den den Kindern vorgelegten Punktmustern hat dies zur Folge, dass es sich dabei ebenfalls um eine vollständige Rechtecksanordnung handelt. Diese wird in dem Fall von den Kindern allerdings unter einer anderen Perspektive beschrieben.

Beispiel 3.3 Benjamin begründet die Parität unter Bezugnahme auf eine begriffliche Fehlvorstellung (vgl. Bsp. 2.1)

1	**I**	**Du kannst die ruhig wieder hochschieben.** *[Kind schiebt die Plättchen zur Seite]* **Jetzt hast du mir das schon an unterschiedlichen Aufgaben erklärt und irgendwie hat das bei allen Aufgaben funktioniert. Ich hab jetzt noch** *[fängt an S1 bis S7 vor das Kind zu legen]* **einige Aufgaben für dich mitgebracht. Du siehst da blaue und rote Punkte, weil wir ja immer zwei ungerade Zahlen miteinander addieren. Das heißt eine Zahl ist blau und eine Zahl ist rot** *[beendet das hinlegen von S1 bis S7]*. **Wie ist das denn bei diesen Aufgaben?** *[4 sec. Pause]* **Es geht immer noch um die Aussage, wenn zwei ungerade Zahlen miteinander addiert werden, ist das Ergebnis gerade.**
2	**B**	*(...)* **Das, mit den Plättchen** *[zeigt auf S3]* **kann man das so rechnen. Also** *[zeigt auf das Punktmuster von S3]*, **ich sag ja, ich weiß jetzt nicht welche Zahl das ist** *[zeigt auf das Punktmuster von S3]*. **Ich sag‘s einfach. Also das** *[zeigt auf das Punktmuster von S3]* **ist jetzt zum Beispiel irgendeine Zahl. Und das ist 3** *[zeigt rechts neben die roten Punkte von S3]* **und dann, wenn ich die Plättchen dann zusammentue‘, dann ist das halt so nen Viereck wo kein Punkt** *[zeigt rechts neben das Punktmuster S3]* **oder so übersteht. Dann weiß ich schon sofort, dass das gerade ist.**

[32] Innerhalb des Interviews „Teilbarkeit durch drei“ zeigte sich ausschließlich im Interview von Verena (Bsp. 2.2) eine begriffliche Fehlvorstellung. Da es sich hierbei um einen einzigen Fall handelt, wird er innerhalb der vorliegenden Arbeit nicht als charakteristisch angesehen.

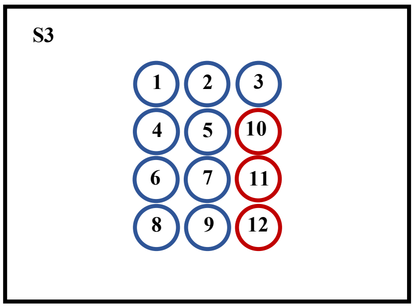


Abbildung 8.70: Beispiel 3.3 - Gedeutete Darstellung

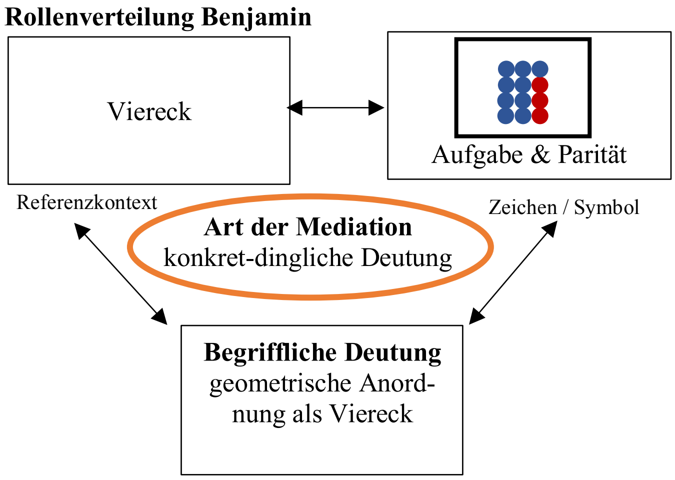


Abbildung 8.71: Beispiel 3.3 - epistemologisch orientierte Analyse des Argumentationsprozesses

In Beispiel 2.1 deutet Benjamin die Darstellung S3 hinsichtlich der allgemeingültigen Aussage ‚Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade‘. Dabei klassifiziert Benjamin die Summe der in S3 dargestellten geometrischen Anordnung als gerade. Dies begründet er, indem er sich auf die *optische Erscheinung der gesamten Anordnung bezieht* und diese als „*Viereck*“ beschreibt. In seiner Argumentation geht er dabei nicht auf die strukturellen Eigenschaften des Vierecks ein. So, dass nicht deutlich wird, ob er sich lediglich auf die äußere Form bezieht, oder, ob die strukturierte Anordnung der Punkte ebenfalls von Bedeutung ist. Diese optische Erscheinung als „Viereck“ wird von Benjamin als Entscheidungs- und Begründungskriterium genutzt, um die Parität der Punktdarstellung zu begründen. Er nutzt demnach eher phänomenologische Eigenschaften und optische Erscheinungsmerkmale der Punktanordnung, um die Parität der Darstellung zu begründen.

Dieses Wechselspiel zwischen der zu deutenden Punktanordnung und der von ihm zur Argumentation genutzten äußeren optischen beziehungsweise phänomenologischen Erscheinung zeigt eine *begriffliche Idee auf geometrischer Ebene, dass gerade Zahlen immer als Viereck darstellbar sind*. Dies ist mit dem Blick auf ein Begriffsverständnis der geraden und ungeraden Zahlen nicht tragfähig, denn die optische Erscheinung eines Vierecks steht nicht in direktem Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft. Gleichzeitig kann eine solche begriffliche Idee auch zu fehlerhaften Zuordnungen der Parität führen. So gibt es auch geometrische Anordnungen, die in ihrer optischen Erscheinung ein Viereck in Form einer

Rechtecksanordnung darstellen, aber keine geraden Zahlen veranschaulichen. So ist zum Beispiel eine Rechtecksanordnung mit den Seitenlängen drei und fünf durchaus in ihrer optischen Erscheinung ein Viereck, dennoch handelt es sich dabei um die Darstellung einer ungeraden Zahl (vgl. Abb. 8.72). Durch eine solche begriffliche Idee werden keine wesentlichen strukturellen Aspekte des Begriffs ‚gerade' abgebildet. Grundsätzlich ist eine Darstellung dann als gerade anzusehen, wenn sie ohne Rest durch zwei teilbar ist. Diese strukturelle Anforderung muss auch von der geometrischen Anordnung erfüllt werden, welche als gerade klassifiziert wird. Sie muss also dementsprechend entweder in zwei gleich große Teilmengen zerlegt oder vollständig in Zweierbündel strukturiert werden können. Es ist demnach notwendig noch weitere Bedingungen in die Argumentation einzubeziehen, so ist es notwendig, dass entweder die Anzahl der Punkte in einer Reihe und beziehungsweise oder die Anzahl der Reihen gerade sind. Nur dann entspricht die geometrische Anordnung einer geraden Zahl. Innerhalb dieser argumentativen Auseinandersetzung zeigt sich demnach *eine begriffliche Idee der geraden Zahlen die aus mathematischer Perspektive so nicht tragfähig ist*.

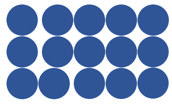


Abbildung 8.72: Rechtecksanordnung mit einer ungeraden Punktanzahl

Eine ähnliche begriffliche Fehlvorstellung zeigt sich im nachfolgenden Beispiel von Melina. Auch wenn es sich hierbei um eine ähnliche Fehlvorstellung handelt, unterscheidet sie sich innerhalb der strukturellen Deutung, wie in der folgenden Analyse dargestellt und erläutert wird.

Beispiel 3.4 Melina begründet die Parität unter Bezugnahme auf eine begriffliche Fehlvorstellung

Der nachfolgende Deutungsprozess von Melina ist dem ersten Aufgabenkomplex des Interviews „Paritäten" zuzuordnen. Die Darstellung P5 stellt dabei die sechste gedeutete geometrische Anordnung dar.

	M	*(...)* **Ähm, das hier** *[nimmt sich P5]* **ist gerade.** *(..)* **Weil es auf aller, auf alle** *[zeigt über P5.1 P5.2, P5.3]* **Reihen gleich viele Steine sind** *[schiebt P5 nach rechts]*.

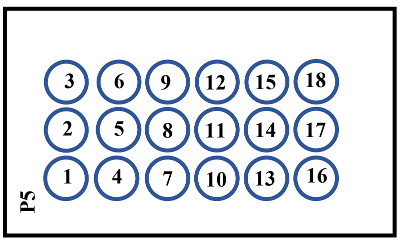


Abbildung 8.73: Beispiel 3.4 - Gedeutete Darstellung

Analyseschritt 1a: Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

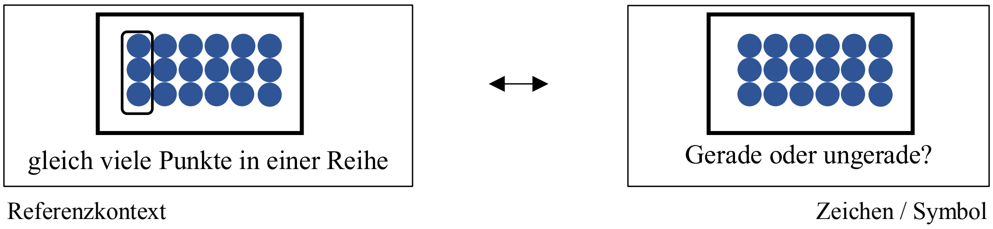


Abbildung 8.74: Beispiel 3.4 - Rollenverteilung

Dem Argumentations- und Deutungsprozess geht kein gezielter Impuls der Interviewerin voraus, sondern Melina leitet den neuen Argumentationsprozess durch die Wahl der Darstellung P6 ein. Da dieser Prozess innerhalb des ersten Aufgabenkomplexes zu verorten ist, steht sie vor der Herausforderung die vorliegende Darstellung hinsichtlich ihrer Parität zu deuten und die Zuordnung zu begründen. Dies stellt das zu deutende *Zeichen/Symbol* dar. Dieses deutet sie als gerade und begründet es damit, dass alle Reihen aus gleich vielen Punkten bestehen. Unter Reihen versteht Melina an dieser Stelle die senkrechten Spalten der Darstellung, was durch die Zeigehandlung von ihr verdeutlicht wird. Dass es sich an dieser Stelle um immer drei Punkte handelt, bleibt ungenannt. Auch begründet Melina in diesem Fall nicht, warum es sich aufgrund dieses strukturellen Merkmals um eine gerade Zahl handeln muss. Deutlich wird dabei, dass Melina sich innerhalb ihrer Argumentation auf die konkreten Eigenschaften der Punktdarstellung bezieht. Demnach stellt das Anschauungsmittel innerhalb ihrer Argumentation ein Argumentationsmittel dar.

Analyseschritt 1b: Art der Ausprägung des Zeichens/Symbols und Referenzkontexts

Innerhalb des vorliegenden Deutungs- und Argumentationsprozesses steht Melina vor der Herausforderung die geometrische Anordnung P5 hinsichtlich ihrer Parität zu deuten. Demnach deutet sie ein *geometrisch geprägtes Zeichen/Symbol*.

Dieses deutet sie, indem sie sich auf strukturelle Merkmale der geometrischen Anordnung bezieht und die Punktdarstellung als Anschauungsmittel nutzt. Sie zieht demnach zur Deutung des Zeichens/Symbols einen *geometrisch geprägten Referenzkontext* heran.

Analyseschritt 2: Art der Mediation zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext

Betrachtet man die strukturelle Deutung innerhalb der Argumentation von Melina, so zeigt sich, dass sie die Darstellung in senkrechte Reihen gliedert, die alle gleich viele Punkte enthalten. Demnach strukturiert Melina die Punktdarstellung, indem sie *Substrukturen* gleicher Mächtigkeit erzeugt. Dabei entspricht eine *Spalte einer Substruktur*. In dieser Deutung bezieht sie eine durch das Punktmuster durchaus intendierte Strukturierung ein.

Auch wenn Melinas Zuordnung zur Parität korrekt ist und es sich bei der Darstellung P5 um die Darstellung einer geraden Zahl handelt, ist ihre strukturelle Deutung an dieser Stelle kein mathematisch tragfähiges Argument dafür, dass es sich bei der Punktdarstellung um eine gerade Zahl handelt. Die Gleichheit der unterschiedlichen Spalten ist kein ausreichendes Merkmal auf geometrischer Ebene und müsste mit weiteren strukturellen Deutungen verknüpft werden. Innerhalb der Darstellung, die der Parität ‚gerade' zuzuordnen ist, lässt sich nämlich entweder eine gerade Anzahl an gleichartiger Substrukturen bilden oder die Punktanzahl innerhalb der gleichartigen Spalten ist gerade. Demnach deutet Melina durch das Generieren von *gleichartigen Substrukturen* innerhalb der Darstellung *partielle Strukturen* in die Darstellung hinein, die für sich alleinstehend nicht für eine tragfähige Argumentation ausreichen.

Analyseschritt 3: Begriffliche Deutung

Innerhalb des Argumentations- und Deutungsprozesses zeigt sich demnach eine begriffliche Fehlvorstellung. Melina hat die begriffliche Idee, dass eine Punktdarstellung dann gerade ist, wenn es sich dabei um eine Anordnung mit gleichartigen Reihen beziehungsweise Spalten handelt. Auch wenn Melina es an dieser Stelle nicht als Viereck bezeichnet, zeigt sich diese begriffliche Idee durchaus auch in Rechtecksanordnung, denn diese haben immer gleichartige Spalten.

Einordnung des Argumentationsprozesses

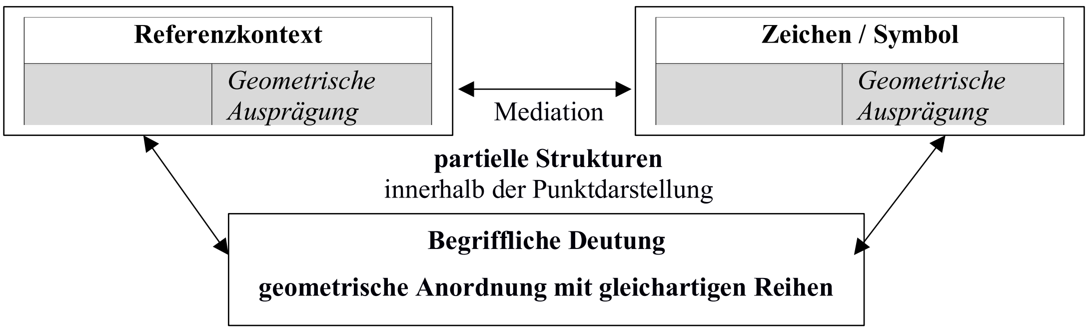


Abbildung 8.75: Beispiel 3.4 - Zusammenfassung

Durch die Einordnung des Argumentationsprozesses in das Theoriekonstrukt zeigt sich, dass Melina die Veranschaulichung als Argumentationsmittel nutzt, denn sie deutet diese vor einem geometrisch geprägten Referenzkontext. Dabei bezieht sie sich in ihren strukturellen Deutungen auf Strukturen innerhalb der Darstellung in Form von gleichartigen Reihen. Diese von ihr gedeuteten Strukturen stehen dabei nicht in Bezug zur zu deutenden Zahleigenschaft, so dass eine nicht tragfähige mathematische Argumentation erzeugt wird. Dies zeigt sich auch in der begrifflichen Idee, die der Argumentation zugrunde liegt, so dass diese aus mathematischer Perspektive nicht tragfähig ist.

In beiden Interviewausschnitten zeigt sich, dass die Kinder eine begriffliche Idee entwickeln, die unmittelbar mit der (strukturellen) Anordnung des Punktmusters verknüpft ist. Hierdurch wird erneut eine wesentliche Erkenntnis für die mathematikdidaktische Forschung und den Mathematikunterricht deutlich. *Nehmen Kinder innerhalb der Argumentation keine für die strukturelle Zahleigenschaft wesentlichen Strukturen in den Blick, so können sich begriffliche Fehlvorstellungen entwickeln und manifestieren.* Dies gilt sowohl für das Fokussieren von phänomenologischen Merkmalen als auch für die Fokussierung von Strukturen, die nicht in Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen. Dies stützt abermals die Forderung, dass innerhalb des Mathematikunterrichts die für die Argumentation wesentlichen Strukturen bewusst thematisiert werden müssen. Nur so können mathematisch tragfähige begriffliche Ideen entwickelt und gefestigt werden. Wie solche Argumentationsprozesse aussehen können, wird im Folgenden an Beispielen aus der vorliegenden Studie dargestellt.

Mathematisch tragfähige begriffliche Ideen

In einer Vielzahl an Argumentationsprozessen zeigten sich mathematisch tragfähige begriffliche Ideen. *Dabei bezogen sich die Ideen vornehmlich auf die operative Ermittlung der Teilbarkeit.* Diese charakterisieren sich auf geometrischer Ebene nicht durch die Ermittlung einer konkreten Aufgabe, sondern vielmehr dadurch, dass die Kinder die *operative Ermittlung anhand von Handlungen am Material* durchgeführt haben. Hier unterscheidet es sich von der begrifflichen Idee auf arithmetischer Ebene. Während auf arithmetischer Ebene ein konkretes Ergebnis in Form von Zahlen angegeben wird, ist auf geometrischer Ebene von Bedeutung, ob die Bündelungsprozesse durchführbar sind. Die Anzahl der Bündel (Aufteilen) beziehungsweise die Mächtigkeit der Bündel (Verteilen) sind nicht von Bedeutung. Im Folgenden wird an zwei bereits betrachteten Beispielen konkretisiert, wie sich diese begriffliche Idee innerhalb der Argumentationen zeigen und welche Unterschiede sich im Vergleich der beiden unterschiedlichen Interviews feststellen lässt.

Beispiel 3.5 Helena begründet die Parität unter Bezugnahme auf die begriffliche Idee der Teilbarkeit durch zwei (vgl. Bsp. 2.4)

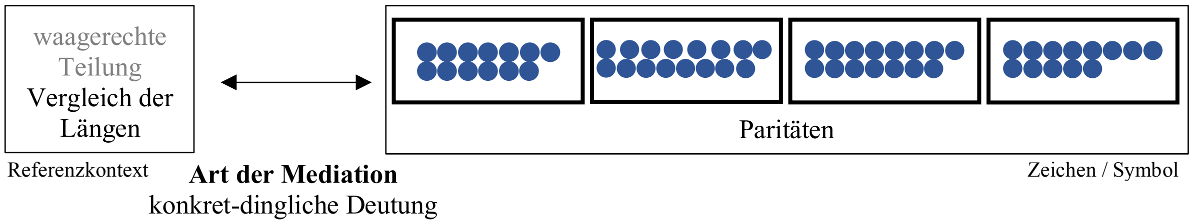


Abbildung 8.76: Beispiel 3.5 - Rollenverteilung

Zu Beginn der Ergebnisdarstellung wurde in Form einer Ganzanalyse die epistemologisch orientierte Analyse aller Argumentations- und Deutungsprozesse von Helena dargestellt. Dabei konnte herausgearbeitet werden, dass Helena die prototypischen Darstellungen hinsichtlich der Parität deutet, indem sie einen geometrisch geprägten Referenzkontext heranzieht. In diesen Deutungen steht die waagerechte Teilung der doppelreihigen Anordnung im Fokus ihrer Argumentation. Durch dieses Vorgehen erzeugt Helena zwei Substrukturen in Form von zwei waagerechten Reihen, die sie miteinander vergleicht. Innerhalb des ersten Aufgabenkomplexes zeigte sich, dass Helena diese Substrukturen durchaus auch auf der Basis der optischen Erscheinung in Form der visuell erfassbaren Längen deutet und vergleicht. Auf begrifflicher Ebene zeigt sich dabei ein begriffliches Verständnis, welches die Teilbarkeit durch zwei im Sinne des Verteilens fokussiert. Dabei zeigt sich insbesondere bei der Deutung von P4, dass sie die von ihr gedeuteten Substrukturen auch auf Basis der visuell erfassbaren Längen deutet. Auf begrifflicher Ebene bedeutet dies, dass für Helena eine geometrische Anordnung dann eine gerade Zahl darstellt, wenn beide Substrukturen gleich lang sind. Dies inkludiert nicht automatisch, dass es sich dabei um gleichmächtige Mengen handelt, was aus mathematischer Perspektive aber wesentlich für gerade Zahlen ist. Ungerade Zahlen sind für sie demgegenüber Darstellungen, die in zwei Substrukturen strukturiert werden können, die in ihrer Länge nicht identisch sind. In den von Helena

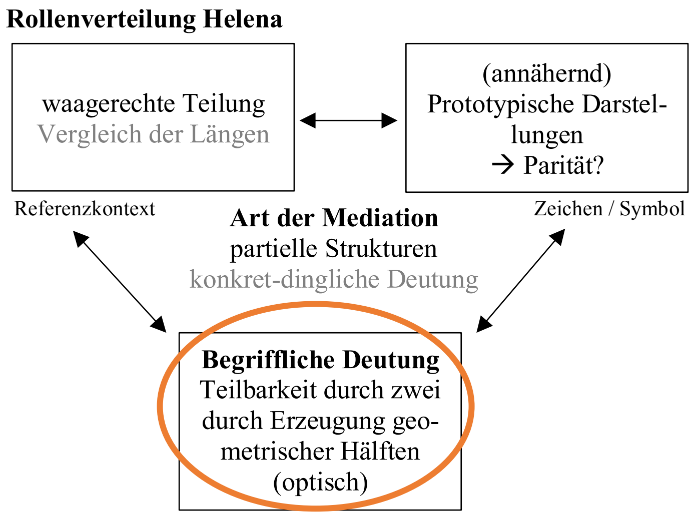


Abbildung 8.77: Beispiel 3.5 - Epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen

getätigten Argumentations- und Deutungsprozessen handelt es sich immer um einen fehlenden Punkt. Was so nicht immer korrekt ist, aus mathematischer Perspektive aber durchaus von Bedeutung ist, denn ungerade Zahlen haben bei Division durch zwei den Rest eins. Demnach zeigen sich hier durchaus wichtige Aspekte innerhalb der begrifflichen Idee von Helena, die sie aber (noch) nicht in Gänze in die Darstellung hineindeuten kann: die Erzeugung zweier Teilmengen sowie der Rest eins.

Hierbei expliziert Helena aber nicht, dass es von Bedeutung ist, dass es sich um genau zwei Substrukturen handelt, dennoch wird innerhalb des gesamten Interviewverlaufs deutlich, dass sie innerhalb jeder Argumentation zwei Substrukturen erzeugt, so dass durchaus zu vermuten ist, dass diese strukturelle Eigenschaft innerhalb des Argumentationsprozesses von ihr mitgedacht wird. Auf begrifflicher Ebene zeigt sich an dieser Stelle, dass Helena eine wesentliche strukturelle Eigenschaft in die Darstellung hineindeutet. Nämlich die Erzeugung zweier Substrukturen. Gleichzeitig wird deutlich, dass Helena ein Begriffsverständnis von geraden Zahlen hat, in denen die beide Substrukturen identisch sind. Bei ungeraden Zahlen hingegen handelt es sich um Substrukturen mit dem Unterschied eins. Dabei bleibt von Helena ungeachtet, dass die Substrukturen nicht immer auf Basis der optischen Erscheinung verglichen werden können. Das heißt, Helena beachtet nicht, dass es auf begrifflicher Ebene wesentlich ist, dass die beiden Reihen in ihrer Struktur identisch sein müssen. Denn nur so kann aufgrund der visuell erfassbaren Länge eine Gleichheit beziehungsweise Ungleichheit erfasst werden. Es zeigt sich demnach ein durchaus tragfähiges mathematisches Begriffsverständnis, welches von Helena (noch) nicht in Gänze in die geometrische Anordnung hineingedeutet werden kann. Dies ist aber wesentlich für eine korrekte Klassifizierung der Punktdarstellung hinsichtlich der strukturellen Zahleigenschaft und für eine mathematisch tragfähige Argumentation notwendig.

Interessant ist an dieser Stelle, dass Helena auf arithmetischer Ebene bei der Division durch zwei die Addition zweier gleicher Zahlen heranzieht und mathematisch tragfähige Argumentationen generiert. Die Übertragung dieses arithmetischen Wissens auf die geometrische Darstellung gelingt ihr noch nicht. Dies zeigt zum wiederholten Male die Komplexität der Argumentationen mit Anschauungsmitteln.

Beispiel 3. 6 Marie begründet die Teilbarkeit von P7 durch drei unter Bezugnahme auf eine begriffliche Idee, die der operativen Ermittlung auf geometrischer Ebene entspricht.

(vgl. Bsp. 2.5)

1	**M**	*[legt P7 vor sich]* **Hier ist eins** *[zeigt mit dem Stift über P7.1, P7.7, P7.12]*, **eine Reihe, hier haben wir wieder drei** *[zeigt mit dem Stift über P7.2, P7.9, P7.13]*, **eins** *[tippt auf P7.12]*, **zwei** *[tippt auf P7.13]*, **drei** *[tippt auf P7.14]*, **vier** *[tippt auf P7.15]*, **fünf** *[tippt auf P7.16]* **und hier** *[tippt auf P7.6]* **haben wir nur Einen. Also, wenn man es jetzt zum Beispiel wieder einkreisen würde wie da** *[zeigt auf P10]*, **hat man immer noch ein Plättchen über** *[zeigt auf P7.6]*. **Und das, man kann ja nicht, ähm, nicht den dazumalen. Und deswegen bleibt ein Plättchen übrig und deswegen kann man es nicht durch drei teilen.**

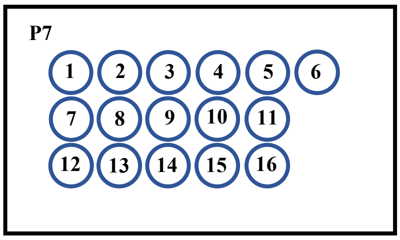


Abbildung 8.78: Beispiel 3.6 - Gedeutete Darstellung

Marie hat innerhalb des Argumentations- und Deutungsprozesses die Veranschaulichung P7 hinsichtlich der Teilbarkeit durch drei gedeutet. Zur Deutung dessen zieht Marie einen geometrisch geprägten Referenzkontext heran. Sie deutet in die ihr vorliegende Darstellung P7 senkrechte, durch die Darstellung durchaus intendierte, Dreierspalten hinein. Diese Deutung macht sie zum einen durch die Zeigegeste deutlich, indem sie jeweils von oben nach unten über die Spalten fährt. Zum anderen verdeutlicht sie dies, indem sie dabei zählt, wie viele Dreierspalten sie identifizieren kann. Dass es sich bei den von ihr gedeuteten Spalten jeweils um drei Punkte handelt, macht sie deutlich, indem sie die Zeigegeste der zweiten Spalte mit den Worten „wieder drei“ (Z. 1) erläutert. Auch wenn sie die anderen Spalten nicht hinsichtlich der Anzahl der in ihr enthaltenen Punkte beschreibt, lässt sich aufgrund des Wortes „wieder“ (Z. 1) durchaus vermuten, dass sie alle Spalten als Dreierspalten klassifiziert. Insgesamt identifiziert

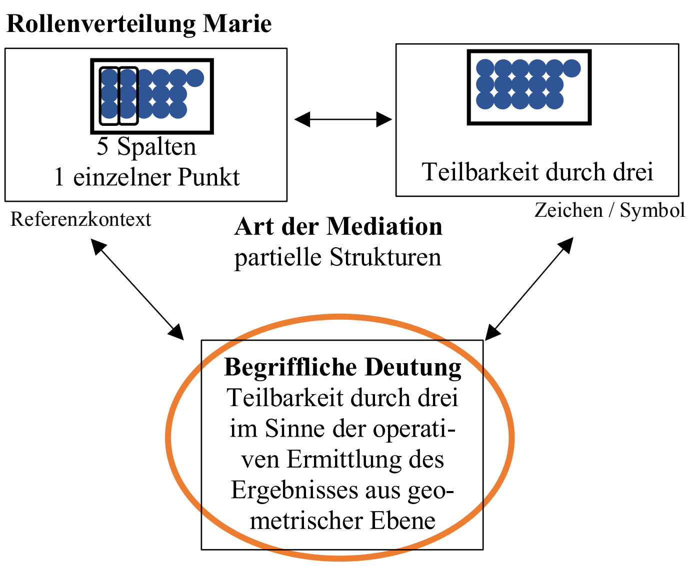


Abbildung 8.79: Beispiel 3.6 - Epistemologisch orientierte Analyse des Argumentationsprozesses

Marie fünf solcher Spalten. Sie erläutert dieses Vorgehen, indem sie auf ein bereits gedeutetes Punktmuster zeigt und darauf verweist, dass man die Spalten jeweils einkreisen kann und dennoch der einzelne von ihr identifizierte Punkt übrig bleibt. Dies ist für sie das ausschlaggebende Kriterium, warum die Zahl nicht durch drei teilbar ist. Marie deutet demnach in ihrem Argumentationsprozess Substrukturen in Form von Dreierbündeln in die Darstellung hinein. Dabei entspricht ein Dreierbündel einer der Spalten innerhalb der Veranschaulichung. Demnach deutet Marie die Darstellung durchaus im Sinne der intendierten Struktur. Da die Darstellung allerdings nicht vollständig in solche Dreierbündel zerlegt werden kann, ist die Veranschaulichung nicht durch drei teilbar. Betrachtet man dies aus begrifflicher Perspektive, so nimmt Marie eine *aufteilende Sichtweise der Division* ein. Sie ermittelt die Anzahl der Teilmengen, wenn die Darstellung in Teilmengen der Mächtigkeit drei aufgeteilt wird. Dabei *ermittelt Marie operativ das Ergebnis*, welches sie aber nicht konkret benennt. Sie hat die Darstellung in fünf Dreierbündel aufgeteilt und ein Punkt bleibt übrig. Es zeigt sich innerhalb des Argumentations- und Deutungsprozesses eine durchaus tragfähige begriffliche Idee der Teilbarkeit durch drei. Marie deutet diese auch im Sinne der intendierten Struktur in die Darstellung hinein und erzeugt eine durchaus tragfähige mathematische Argumentation. Dabei benutzt sie aber konkrete Bezüge zur Veranschaulichung, indem sie die einzelnen Dreierbündel explizit benennt und zeigt. An dieser Stelle kann die begriffliche Idee aber auch in die Darstellung hineingedeutet werden, ohne dass dies expliziert werden muss. Die Darstellung besteht nämlich aus drei identisch strukturierten Reihen, so dass bereits durch die Struktur der geometrischen Anordnung die Spalten in Form von Dreierbündeln gegeben ist.

Auch wenn in beiden Interviews die begriffliche Idee der operativen Ermittlung im Kontext der Division zum Tragen kommt, zeigen sich wesentliche Unterschiede zwischen den begrifflichen Vorstellungen, die durchaus charakteristisch sind. Zur Begründung der *Teilbarkeit durch zwei* nutzen die Kinder vorwiegend Argumente, die einer *verteilenden Grundvorstellung der Division* zuzuordnen sind. Das heißt, die Kinder erzeugen in diesen Fällen zwei Substrukturen und vergleichen diese miteinander. Zur Begründung der *Teilbarkeit durch drei* nutzen die Kinder hingegen Argumente, die einer *aufteilenden Grundvorstellung* zuzuordnen sind. Sie deuten innerhalb ihrer Argumentation Dreierbündel in die Veranschaulichung hinein. *Dies zeigt, dass die Argumentationen auch von der begrifflichen Idee abhängen und demnach unterschiedlich sein können, wenn ein ähnlicher mathematischer Inhalt thematisiert wird.* Dies hat zur Folge, dass die Argumentationen trotz eines ähnlichen Inhalts durchaus sehr verschieden sind. Der Lehrperson muss demnach bewusst sein, dass eine

Übertragung auf einen ähnlichen Inhalt durchaus auch mit einer Veränderung der strukturellen Deutungs- und Argumentationsweisen einhergehen kann. Gleichzeitig bietet dies das Potential, unterschiedliche Argumentationen für die gleiche zu begründende Aussage zu thematisieren und demnach zu verdeutlichen, dass es durchaus unterschiedliche korrekte Argumentationen geben kann.
Innerhalb der Analyse der strukturellen Deutungen zeigte sich auch eine Argumentation, in der eine (annähernd) verallgemeinernde Argumentation geführt wurde. Diese Argumentation ist nicht nur aufgrund der strukturellen Deutungen von besonderem Interesse, sondern liefert auch wesentliche Erkenntnisse bezüglich der begrifflichen Ideen innerhalb allgemeingültiger Argumentationen. Aus diesem Grund wird im Folgenden die begriffliche Idee innerhalb der Argumentation in den Blick genommen, um für das Verallgemeinern mit Anschauungsmitteln wesentliche Erkenntnisse abzuleiten.

Beispiel 3.7 Mia begründet die Sichtbarkeit der Parität unter Bezugnahme auf zwei begriffliche Ideen auf geometrischer Ebene (vgl. Bsp. 7.1)

1	**I**	**Ok. Super. Bei welchem Punktmuster findest du es denn jetzt am allerbesten zu sehen und zu erklären, warum es gerade und ungerade ist.**
2	**M**	**Hier** *[zeigt auf S7]* **und hier** *[zeigt auf S1]*. **Da fällt es mir ziemlich leicht zu sehen, dass das ne gerade Zahl ist, weil ähm die Zahl** *[zeigt neben S7]* **kann man dann durch zwei teilen, weil hier zwei Spalten sind** *[zeigt mit dem Daumen links vom Punktmuster und mit dem Zeigefinger rechts vom Punktmuster]* **oder wie das heißt. Ja, ich weiß jetzt grade nicht wie das heißt. Spalten oder so.**
3	**I**	**Und mit welchem Punktmuster kannst du am besten erklären, warum das Ergebnis hinterher gerade wird, obwohl du zwei ungerade Zahlen miteinander addierst.**
4	**M**	**Ähm,** *(...)* **naja. Eigentlich auch bei den Zweierreihen.**
5	**I**	**Warum?** *[schiebt S1 und S7 in die Mitte]* **Warum kannst du das mit den beiden am allerbesten erklären?**
6	**M**	**Weil hier kann man so** *[zeigt mit der rechten Handkante rechts neben die roten Punkte] [unverständlich]*, **hier braucht man nur zwei, dann ist es immer noch ne gerade Zahl, äh ungerade Zahl.**
7	**I**	**Was meinst du mit hier braucht man immer nur zwei?**
8	**M**	**Hier** *[zeigt auf S7.23&S7.34]* **kann man immer nur zwei hinter setzen und dann ist es immer noch ne ungerade Zahl.**
9	**I**	**Mhm.**
10	**M**	**Und wenn hier noch nen Blauer wäre** *[zeigt auf S7.24]*, **dann wäre das ne gerade Zahl** *[zeigt auf die blauen Punkte von S7]* **und das ne gerade Zahl** *[zeigt auf die roten Punkte von S7]*. **Und, ähm, hier kann ich es dir auch nochmal erklären. Hier** *[zeigt auf ihr selbstgemaltes Punktmuster]* **zum Beispiel drei, dann muss man nur einen dazurechnen und dann ist es wieder gerade. Das ist immer so weiter geht.**
11	**I**	**Mhm. Ok. Super, dann schiebe ich die auch noch einmal nach oben.**

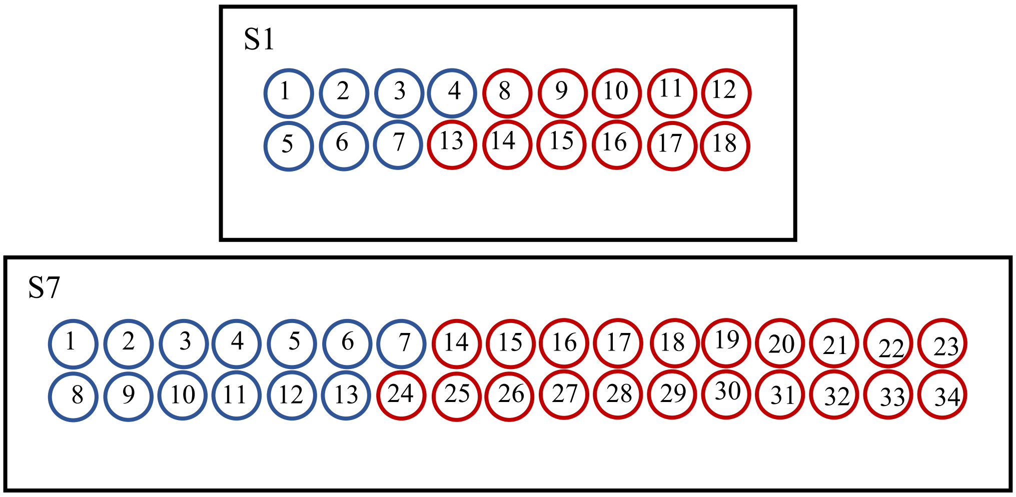


Abbildung 8.80: Beispiel 3.7 - Gedeutete Darstellung

Innerhalb der ausführlichen Analyse der strukturellen Deutungen konnte gezeigt werden, dass von der Drittklässlerin Mia eine Argumentation geführt wurde, der eine durchaus verallgemeinernde Idee zugrunde liegt. In einem ersten Schritt deutet sie die Teilbarkeit durch zwei in Form von zwei waagerechten Spalten in die Darstellung hinein. Anschließend verbalisiert sie die Idee, dass sich durch die Ergänzung von zwei Punkten die Parität der durch die roten Punkte dargestellten Zahl nicht ändert. Das bedeutet, wenn die Veranschaulichung um zwei Punkte erweitert wird, stellt der rote Teil der Veranschaulichung weiterhin eine ungerade Zahl dar. Dieser Vorgang kann durchaus mehrmals wiederholt werden. Auch wenn die von Mia hergestellte (ansatzweise) verallgemeinernde Argumentation aus mathematischer Perspektive so (noch) nicht vollständig ist und innerhalb der Analyse die einzige verallgemeinernde Argumentation unter Ausnutzung eines Anschauungsmittels darstellt, lassen sich daraus wichtige Erkenntnisse ableiten.

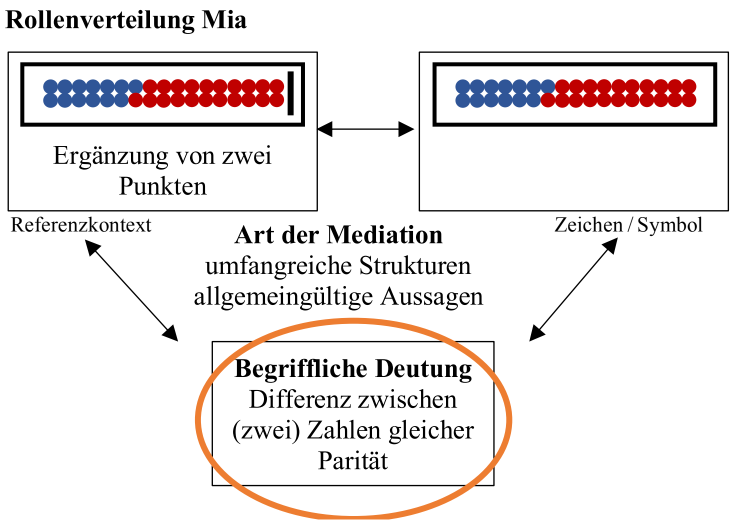


Abbildung 8.81: Beispiel 3.7 - Epistemologisch orientierte Analyse des Argumentationsprozesses

Wenn man die von Mia zugrunde gelegte begriffliche Idee mit den anderen begrifflichen Deutungen innerhalb der Analyse vergleicht, so zeigt sich, dass dies die einzige geometrische Deutung darstellt, in der die *begriffliche Idee der Differenz zwischen zwei ungeraden Zahlen* im Fokus der Argumentation steht. In den restlichen Argumentationsprozessen konnte eine solche begriffliche Idee zwar rekonstruiert werden, aber immer in einer arithmetischen Ausprägung. Dabei stellt genau diese von Mia gezeigte begriffliche Idee eine wesentliche Idee innerhalb von Verallgemeinerungsprozessen im Kontext der ungeraden und geraden Zahlen dar.

In Kapitel 2.4 wurde herausgearbeitet, dass inhaltlich-anschauliche Beweise und verallgemeinernde prototypische Darstellungen in engem Zusammenhang mit wachsenden Musterfolgen stehen. Betrachtet man dies nochmal unter dem Fokus der Argumentation von Mia wird die Bedeutung der begrifflichen Idee, die von ihr genutzt wird, deutlich. Eine prototypische Darstellung von einer ungeraden Zahl besteht aus genau zwei übereinanderliegenden Reihen, deren Struktur gleich ist und deren Punkte dadurch genau übereinander liegen. Dabei unterscheiden sich die Reihen um genau einen einzelnen Punkt, der am äußeren Rand der Punktdarstellung in der oberen oder unteren Reihe liegt (vgl. Abb. 8.82). Um eine beliebige ungerade Zahl darzustellen, wird häufig auf die Pünktchen-Notation zurückgegriffen (vgl. Kap. 2.4). Diese Notation steht dabei für eine beliebige Fortführbarkeit der Struktur. Demnach repräsentieren die drei Punkte eine beliebige Anzahl an zwei übereinanderliegenden Punkten. In diesem Kontext wurde ebenfalls dargestellt, dass diese Darstellungsform in engem Zusammenhang mit wachsenden Musterfolgen steht und als wachsende Musterfolge in einer Darstellung beschrieben. So stellt die abgebildete prototypische verallgemeinernde Darstellung (vgl. Abb. 8.82) die wachsende Musterfolge aller ungeraden Zahlen dar, die in Form eines prototypischen räumlichen Musters dargestellt ist (vgl. Kap. 1.3 & Kap. 2.4).

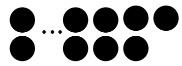


Abbildung 8.82: Verallgemeinernde prototypische Darstellung einer ungeraden Zahl

Betrachtet man nun den Wachstumsfaktor (vgl. Kap. 1.3.1), der der wachsenden Musterfolge zugrunde liegt, so lässt sich dieser dadurch beschreiben, dass von einem Folgeglied zum nächsten Folgeglied zwei übereinanderliegende Punkte hinzukommen. Ohne diese Betrachtung des Wachstumsfaktors ist eine Deutung der prototypischen verallgemeinernden Darstellung und demnach auch eine Verallgemeinerung in dieser geometrischen Art und Weise nicht möglich. So zeigt sich, dass Mia, wenn auch sehr lokal, eine *für die Verallgemeinerung wesentliche begriffliche Idee zur Argumentation heranzieht*.
Gleichzeitig bleibt innerhalb der Argumentation fraglich, warum eine solche Darstellung die Darstellung einer ungeraden Zahl ist und warum die Parität beim Hinzufügen von zwei Punkten gleichbleibt. Diese Begründung wäre zum Beispiel möglich, indem Mia erneut die waagerechte Teilung der Darstellung in den Blick nimmt, die auch innerhalb der Darstellung der Analyseergebnisse häufig herausgearbeitet werden konnte. Da das Punktmuster aus genau zwei Reihen gleicher struktureller Anordnung besteht, werden bei einer waagerechten Teilung von der Darstellung zwei Substrukturen in Form der waagerechten Reihen erzeugt.

Vergleicht man diese, so zeigt sich aufgrund der gleichen strukturellen Anordnung, dass die Differenz dieser genau eins ist und bei Teilung durch zwei somit der Rest eins bleibt. Demnach handelt es sich dann um die Darstellung einer ungeraden Zahl.
Fügt man nun zwei Punkte hinzu, wächst jede Substruktur um ein Element. Das heißt, vergleicht man die Substrukturen erneut, so haben beide Substrukturen weiterhin eine identische Punktanzahl. Dies kann beliebig oft fortgeführt werden. Da in beiden Reihen jeweils gleich viele Punkte hinzugefügt werden, sind die Substrukturen weiterhin gleichmächtig.
Innerhalb einer solchen verallgemeinernden Argumentation beziehungsweise in einer verallgemeinernden Deutung einer Darstellung müssen demnach zwei begriffliche Ideen miteinander verknüpft werden. Zum einen muss die *Teilbarkeit durch zwei* ohne beziehungsweise mit dem Rest eins in die Darstellung hineingedeutet und zur Argumentation herangezogen werden. Zum anderen muss die *Fortführbarkeit des Punktmusters* in die Darstellung hineingedeutet werden. Dies ist nur möglich, wenn die *Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen gleicher Parität* innerhalb der Deutung und der Argumentation in den Blick genommen wird. Dadurch zeigt sich, dass innerhalb einer verallgemeinernden Argumentation die komplexe Anforderung besteht, unterschiedliche begriffliche Ideen miteinander zu verknüpfen.

Konsequenzen für das Mathematik- und Argumentierenlernen

Innerhalb der Analysen zeigte sich immer wieder, dass die Kinder zur Argumentation eine begriffliche Idee in die Veranschaulichung hineindeuten müssen. Dabei stehen wir insbesondere im Mathematikunterricht der Grundschule vor der Herausforderung, dass Kinder zur Argumentation eine begriffliche Idee heranziehen müssen, gleichzeitig aber noch über kein umfassendes und voll ausgebildetes begriffliches Verständnis verfügen (vgl. Kap. 2.3). Kinder müssen demnach zum einen lernen, wie man begriffliche Ideen in Veranschaulichungen hineindeutet. Zum anderen entwickelt und festigt sich durch die argumentative Auseinandersetzung eine begriffliche Idee. Somit ist eine entsprechende strukturelle Deutung unerlässlich. Wesentlich für die mathematikdidaktische Forschung und auch für den Mathematikunterricht ist demzufolge, dass diese begriffliche Idee und die damit einhergehende bewusst thematisiert werden muss. Dies kann durchaus damit einhergehen, dass von der Lehrperson ein Perspektivwechsel initiiert wird, um die wesentlichen strukturellen Eigenschaften zu deuten und zu nutzen. Fokussieren die Kinder nämlich optische Erscheinungsmerkmale oder aber strukturelle Eigenschaften, die nicht in Bezug zur Zahleigenschaft stehen, so können sich innerhalb der argumentativen Auseinandersetzungen begriffliche Fehlvorstellungen entwickeln. Im Mathematikunterricht ist es demnach unerlässlich, dass vor allem die Strukturen betrachtet werden, die aus mathematischer Perspektive für den jeweiligen zu begründenden Inhalt von Relevanz sind. Dafür ist es notwendig, dass sich die Lehrperson darüber bewusst, welche begrifflichen Ideen für die jeweiligen Argumentationen notwendig sind und welche strukturellen Deutungen mit diesen Ideen in Beziehung stehen –und genau diese strukturellen Deutungen und damit verbundenen begrifflichen Ideen gilt es dann im Mathematikunterricht, zum Beispiel durch einen angeregten Perspektivwechsel, gezielt zu thematisieren. Dabei ist es mit dem Blick auf Verallgemeinerungsprozesse nicht ausreichend, sich nur auf eine einzige begriffliche Idee zu beschränken. Vielmehr bedarf es eines umfassenden Begriffsverständnis, um allgemeingültige Argumentationen führen zu können. Demnach muss sich für ein umfassendes begriffliches Verständnis die Mehrdeutigkeit von Anschauungsmitteln zu Nutze gemacht werden, denn in ein und dieselbe Veranschaulichung können unterschiedliche Strukturen hineingedeutet werden, die mit unterschiedlichen begrifflichen Ideen verknüpft sind. Dies macht abermals deutlich, wie wichtig ein *flexibler und bewusster Umgang mit Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess* ist.

9 Fazit und Ausblick

Innerhalb der vorliegenden Arbeit stand die detaillierte und epistemologische Untersuchung von Argumentationsprozessen, in denen Anschauungsmittel in Form von Punktdarstellungen als Argumentationsmittel angeboten wurden, im Zentrum des Forschungsinteresses. Ziel war es, zu untersuchen, ob und inwiefern die Kinder Anschauungsmittel im Argumentationsprozess nutzen, welche Strukturen sie dabei fokussieren und welchen Einfluss dies auf die Begriffsbildungsprozesse hat.

Zu Beginn der Arbeit standen Muster und Strukturen als konstituierendes Wesensmerkmal der Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen (vgl. u.a. Devlin, 2002b; Sawyer, 1955) im Zentrum der theoretischen Auseinandersetzung. Durch die zentrale Bedeutung innerhalb der Mathematik stehen diese auch im Mathematikunterricht der Grundschule und demnach auch in der argumentativen Auseinandersetzung im Fokus, denn sie sind integraler Bestandteil aller mathematischer Bereiche (Wittmann & Müller, 2005). Muster und Strukturen treten dabei im Mathematikunterricht der Grundschule in unterschiedlicher Art und Weise in Erscheinung. Für die vorliegende Arbeit waren vor allem räumliche Muster von Bedeutung. Denn insbesondere räumliche Muster haben ein großes Potential, um innerhalb von Argumentationsprozessen eingesetzt zu werden, da diese abstrakte mathematische Inhalte veranschaulichen, die so dem Denken zugänglich gemacht werden können (Otte, 1983). Dabei sind diese Inhalte nicht direkt ablesbar, sondern müssen in die Darstellung hineingedeutet werden. Diese Deutungsprozesse zeigten sich auch beim Einsatz von räumlichen Mustern innerhalb kindlicher Argumentationsprozesse von zentraler Bedeutung. Dabei konnte auch herausgearbeitet werden, wie umfangreich die Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen ist. Dafür wurden unterschiedliche Tätigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen herausgearbeitet, die auch innerhalb der argumentativen Auseinandersetzung von Bedeutung sind.

Ein zweiter wesentlicher theoretischer Baustein stellte die Auseinandersetzung mit dem Argumentieren dar. Argumentieren ist eine wesentliche mathematische Tätigkeit und demnach auch wichtige Kompetenz innerhalb der Mathematik. Im Mathematikunterricht gilt es dementsprechende Kompetenzen zu entwickeln, die den Besonderheiten der mathematischen Argumentation gerecht werden. Um diese Besonderheiten zu charakterisieren, wurde das mathematische Argumentieren vom alltäglichen Argumentieren abgegrenzt. Darauf aufbauend und unter Einbezug der Lernausgangslage von Grundschulkindern wurde das der Arbeit zugrundeliegende Begriffsverständnis entwickelt. Hierbei stellt das Argumentieren einen sozialen Interaktionsprozess dar, in dem Vermutungen über mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge geäußert werden, diese als begründungsbedürftig deklariert werden und Begründungen beziehungsweise Begründungsideen geliefert werden. Von besonderem Interesse innerhalb der vorliegenden Arbeit war, welche Rolle das Anschauungsmittel in Argumentationsprozessen als Repräsentation mathematischer Inhalte sowie als Argumentationsmittel einnehmen kann und welche Auswirkungen dies hat. Diese intensive theoretische Auseinandersetzung war unerlässlich, um sich der besonderen Herausforderung des Argumentierens in der Grundschule bewusst zu sein, denn eine wesentliche Aufgabe innerhalb des mathematischen Lehr- und Lernprozesses ist es, die Kinder in die mathematische Argumentationskultur einzuführen. Hierzu gehören auch mathematikspezifische Darstellungsformen, wozu auch räumliche Muster gehören, die dann entsprechend gedeutet werden müssen. Dabei steht man im Mathematikunterricht (der Grundschule) vor der besonderen Herausforderung, dass man das Argumentieren lediglich durch Argumentieren lernen kann und die Kinder demnach nur in eine Argumentationskultur eingeführt werden können, indem sie argumentativ tätig werden. Gleichzeitig hat das Argumentieren einen wesentlichen Stellenwert innerhalb des mathematischen Wissenserwerbs. Denn Argumentieren ist nicht nur ein wesentliches Lernziel, sondern vielmehr auch eine wesentliche Lernvoraussetzung. Demnach ist es aber unerlässlich zu verstehen, wie Kinder mit Anschauungsmitteln argumentieren und welche Aspekte innerhalb der Veranschaulichungen für die Kinder von Relevanz sind. Nur so können Argumentationsprozesse bewusst im mathematischen Lehr- und Lernprozess eingesetzt werden.

Innerhalb der vorliegenden Arbeit standen diese beiden theoretischen Bausteine aber nicht isoliert voneinander. Vielmehr stand die Verknüpfung der wesentlichen Aspekte der Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen sowie mit dem Argumentieren im Zentrum des Interesses. So dienen räumliche Muster nicht nur dazu, abstrakte mathematische Inhalte zu visualisieren, sondern sie können auch als Argumentationsmittel eingesetzt werden. So stellen Veranschaulichungen in Form von Punktmustern eine mathematisch akzeptierte und genutzte Darstellungsform dar, die zum Beispiel innerhalb von inhaltlich-anschaulichen

Beweisen (Wittmann & Müller, 1988) genutzt wird. Hierbei zeigte sich, dass räumliche Muster innerhalb dieser Argumentationen die zentrale Darstellungsform sind.
In der bisherigen mathematikdidaktischen Forschung gab es aber noch keine Erkenntnisse, ob beziehungsweise wie Kinder diese räumlichen Muster als Veranschaulichung abstrakter mathematischer Inhalte zur Argumentation nutzen und welche Auswirkung dies auf die kindlichen Begriffsbildungsprozesse hat. Die vorliegende Arbeit trägt dazu bei, diese Forschungslücke zu schließen. Sie liefert erste wesentliche Erkenntnisse, um kindliche Argumentationsprozesse mit Anschauungsmitteln zu verstehen.

Um diesem Forschungsinteresse gerecht zu werden, wurde innerhalb der vorliegenden Studie ein Instrument zur epistemologisch orientierten Analyse von Argumentationsprozessen entwickelt. Hierzu wurde das epistemologische Dreieck (Steinbring, 2005) entsprechend des Forschungsinteresses und unter Bezugnahme auf die visuelle Strukturierungsfähigkeit (Söbbeke, 2005) ausdifferenziert (vgl. Kap. 6). Diese innerhalb der vorliegenden Arbeit vorgenommene Ausdifferenzierung ermöglichte es, die Forschungsfragen detailliert zu untersuchen.

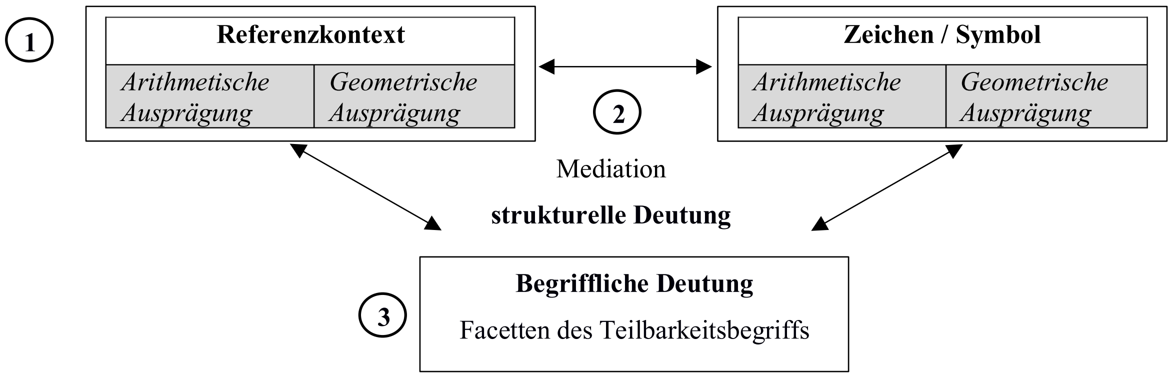


Abbildung 9.1: Epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen

Die Differenzierung der Ausprägungen des Zeichens/Symbols sowie Referenzkontextes ermöglichte eine detaillierte Analyse der Bedeutung des Anschauungsmittels innerhalb des Argumentationsprozesses. Erst diese Ausdifferenzierung machte es möglich, solche Argumentationen zu identifizieren, in denen das Anschauungsmittel als Argumentationsmittel genutzt wird, aber auch solche, in denen die Veranschaulichung innerhalb des Argumentationsprozesses an Bedeutung verliert.
Durch die Ausdifferenzierung der Art der Mediation, die dem Wechselspiel zugrunde liegt, konnte detailliert untersucht werden, welche Strukturen die Kinder innerhalb der argumentativen Auseinandersetzung in das Anschauungsmittel hineindeuten. Dadurch konnte

herausgearbeitet werden, welche Strukturen für die Kinder innerhalb des Argumentationsprozesses von Bedeutung sind.
Durch Ausschärfung der unterschiedlichen Facetten des Teilbarkeitsbegriffs konnte untersucht werden, welche begrifflichen Ideen innerhalb der kindlichen Argumentationen von Bedeutung sind. Dies ist insbesondere vor dem Hintergrund, dass Argumentationsprozesse immer auch Begriffsbildungsprozesse sind, von Relevanz. Für eine detaillierte epistemologische Analyse von Argumentationsprozessen ist eine solche Ausschärfung demnach unerlässlich und stellt die Grundlage für die innerhalb der vorliegenden Studie gewonnenen Erkenntnisse dar.
In diesem Zusammenhang sei jedoch angemerkt, dass es sich bei der vorliegenden Studie um eine qualitative Studie handelt. Die Ergebnisse sind daher nicht allgemeingültiger Natur und dürfen nicht ohne weiteres auf alle Kinder der Grundschule (3. Schuljahr) oder auf andere Anschauungsmittel übertragen werden. Auch ist es möglich, dass es neben den innerhalb der Studie aufgezeigten charakteristischen Argumentations- und Deutungsweisen noch weitere typische Arten gibt. Dennoch lassen sich interessante und für die mathematischen Lehr- und Lernprozesse wesentliche Tendenzen innerhalb der Deutung und Nutzung von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess aufzeigen. So konnten innerhalb der Analyse der Daten wesentliche Erkenntnisse hinsichtlich der Beantwortung der drei der vorliegenden Arbeit zugrundeliegenden Forschungsfragen gewonnen werden. Dabei ist hervorzuheben, dass es sich bei den Analysen nicht um isolierte Fallstudien handelt. Vielmehr konnten durch den Vergleich der einzelnen Analysen charakteristische Argumentations- und Deutungsweisen herausgearbeitet werden.

Welche epistemologische Bedeutung haben Anschauungsmittel im Argumentationsprozess?

Insgesamt lassen sich drei unterschiedliche Bedeutungen charakterisieren. Kinder deuten das Anschauungsmittel vor einem arithmetisch geprägten Referenzkontext, vor einem geometrischen Referenzkontext oder vor einem gemischten Referenzkontext:

- Wenn Anschauungsmittel in Form von Punktdarstellungen innerhalb eines Argumentationsprozesses Teil der zu begründenden Aussage sind, nutzen Kinder das Anschauungsmittel nicht immer auch innerhalb ihrer Begründung. Häufig wechseln die Kinder die Darstellungsform und argumentieren auf Basis von konkreten Zahlen oder Rechenoperationen. Sie deuten die zu begründende Aussage dann vor einem *arithmetischen Referenzkontext*, wodurch das Anschauungsmittel nur zur Anzahlermittlung dient. Zu Beginn des Argumentationsprozesses wird es als *Mittel zur*

Zahldarstellung beziehungsweise als Mittel zur Darstellung von Rechenoperationen genutzt. Im Anschluss daran wird das Anschauungsmittel nicht mehr genutzt und verliert dadurch seine epistemologische Bedeutung im Argumentationsprozess.

- Anschauungsmittel und begründungsbedürftige Aussagen, in denen Veranschaulichungen einen Teil dieser darstellen, werden von den Kindern auch vor *geometrischen Referenzkontexten* gedeutet. In diesen Argumentationen beziehen sich Kinder in ihren Begründungen auf konkrete Eigenschaften und Merkmale der Punktdarstellung. Dadurch erhält das Anschauungsmittel die Funktion eines *Argumentationsmittels*. Da die weitere mathematische Auseinandersetzung auf Grundlage der Punktdarstellung erfolgt, sind die kindlichen Deutungen und die damit verbundenen begrifflichen Ideen ebenfalls geometrischer Natur. Dadurch erhält das Anschauungsmittel innerhalb der Begriffsbildungsprozesse auch die Funktion als *Mittel zur Erkenntnisgewinnung*.
- Eine Verknüpfung *geometrischer und arithmetischer Referenzkontexte* kann zu einem kognitiven Konflikt führen, der Anlass bieten kann, über die eingenommene Deutung geometrischer Merkmale der Punktdarstellungen zu reflektieren.
- Kinder *deuten insbesondere prototypische Darstellungen vor einem geometrischen Referenzkontext*. Sind die Punktdarstellungen nicht prototypischer Natur, deuten sie diese häufig vor einen arithmetischen Referenzkontext. Es lässt sich vermuten, dass *prototypische Punktdarstellungen einen leichteren Zugang bieten*, da sie wesentliche Merkmale der arithmetischen Struktur repräsentieren. Nicht-prototypische Darstellungen bieten einen solchen Zugang nicht und erfordern Umdeutungen, um die strukturelle Zahleigenschaft in die Veranschaulichung hineinzudeuten. Ein Ausweichen auf einen arithmetischen Referenzkontext stellt dann eine Ersatzstrategie dar.
- Es ist durchaus *von der Deutungsanforderung und der vorliegenden Darstellung abhängig, ob ein geometrischer oder arithmetischer Referenzkontext naheliegt*. So zeigte sich insbesondere in der Deutung der allgemeingültigen Aussage im Kontext der Teilbarkeit durch drei, dass es durchaus sinnvoll sein kann, zur Deutung der Nachbarzahlen einen arithmetischen Referenzkontext heranzuziehen, da ein Hineindeuten der Nachbarzahlen innerhalb der geometrischen Darstellungen nicht immer möglich war.

Wie deuten Kinder (allgemeingültige) arithmetische Strukturen in Punktdarstellungen im Argumentationsprozess?

Argumentieren Kinder vor einem geometrischen Referenzkontext, so nutzen sie das *Anschauungsmittel als Argumentationsmittel*. Dabei stehen sie vor der Anforderung, die arithmetischen Strukturen in die Punktdarstellung hineinzudeuten. Innerhalb der ausführlichen Analysen konnten drei unterschiedliche Deutungsweisen herausgearbeitet werden, die jeweils unterschiedlichen Einfluss auf den gesamten Argumentationsprozess und auf damit verbundene Begriffsbildungsprozesse haben. Kinder nutzen zur Argumentation konkret-dingliche Deutungen, strukturelle Deutungen oder umfangreiche (prototypische) Deutungen:

- Kinder begründen strukturelle Zahleigenschaften nicht immer unter Bezugnahme auf strukturelle Eigenschaften der geometrischen Anordnung. Wenn Kinder nicht auf Basis der strukturellen Anordnung argumentieren, dann nehmen sie *konkret-dingliche Deutungen* ein. Sie beziehen sich dann auf *optische Erscheinungsmerkmale der gesamten Anordnung oder Teilen der Anordnung.* Da diese Merkmale nicht in direktem Bezug zur zu deutenden arithmetischen Struktur stehen, entwickeln die Kinder *nicht tragfähige Argumentationen*. Dies hat zur Folge, dass auch die damit verbundenen Begriffsbildungsprozesse zu *begrifflichen Fehlvorstellungen* führen können.
- Beziehen sich Kinder innerhalb der argumentativen Auseinandersetzung auf strukturelle Deutungen, so lassen sich zwei typische Argumentationsweisen unterscheiden. Zum einen deuten und nutzen Kinder Strukturen innerhalb der Darstellung, die *nicht in direktem Bezug zur arithmetischen Zahleigenschaft* stehen. Dies hat zur Folge, dass Kinder mathematisch *nicht tragfähige Argumentationen* und damit einhergehend *begriffliche Fehlvorstellungen* entwickeln. Zum anderen deuten Kinder *Strukturen* in die geometrische Anordnung hinein, *die eine begriffliche Idee der zu deutenden arithmetischen Eigenschaft widerspiegeln*. Dadurch *nutzen sie aus mathematischer Perspektive tragfähige Argumente*. Dies bedeutet allerdings nicht immer, dass die gesamte von den Kindern verbalisierte Argumentation mathematisch tragfähig ist. In einigen Argumentationen konnte nachgezeichnet werden, dass Kinder diese Deutungen mit anderen, nicht tragfähigen Argumenten verknüpfen. Zudem ist charakteristisch, dass diese Argumentationen auf konkreten Punktdarstellungen basieren, die noch *keine Verallgemeinerung* zulassen.
- In den beiden erstgenannten Ergebnissen zeigte sich, dass die Deutungen der Kinder dabei nicht willkürlich waren. Vielmehr konnte herausgestellt werden, dass die von den Kindern zur Deutung herangezogenen *konkret-dinglichen Deutungen*, aber auch

die *strukturellen Deutungen ohne Bezug zur arithmetischen Struktur bei prototypischen Darstellungen durchaus zu richtigen Zuordnungen der strukturellen Zahleigenschaft* führen. Ein Grund hierfür kann sein, dass Kinder die prototypischen Darstellungen auf ihre optischen Eigenschaften reduzieren und diese übergeneralisieren.

- Auch wenn der Fokus im zweiten Aufgabenkomplex auf einer allgemeingültigen Aussage lag und dadurch eine Verallgemeinerung initiiert werden sollte, konnte eine solche Deutung lediglich an einem sehr lokalen Beispiel rekonstruiert werden. Dies zeigt zum einen, dass das *Hineindeuten von allgemeingültigen Aussagen eine sehr komplexe Anforderung* an die Kinder stellt. Zum anderen zeigte sich eine mögliche Schwierigkeit. Kinder müssen in verallgemeinernden Argumentationen nicht nur die strukturelle Zahleigenschaft begründen, sondern auch das Allgemeine in das ihnen vorliegende Beispiel hineindeuten. Hierbei zeigt sich, dass dafür *zwei unterschiedliche Perspektiven auf die Veranschaulichung* eingenommen werden müssen.
  An dieser Stelle sei aber auch angemerkt, dass das angebotene Material eine mögliche Schwierigkeit darstellt und es gilt zu überlegen, ob eine gezielte Nutzung von flexiblerem Material oder der gezielte Einsatz von wachsenden Musterfolgen zu Verallgemeinerungsprozessen führen könnte. Die Darstellung in Form einer enaktiven Repräsentationsform, zum Beispiel durch Wendeplättchen, könnte an dieser Stelle einen höheren Aufforderungscharakter haben und ein Fortführen der Darstellung anregen. So könnten im Fall der Paritäten immer zwei Wendeplättchen ergänzt oder weggenommen werden, um den Blick auf die Gemeinsamkeiten in unterschiedlichen Darstellungen zu lenken. Dabei würde dann der Fokus auf das Allgemeine im Besonderen gelegt. Durch den Einsatz wachsender Musterfolgen kann der Wachstumsfaktor und demnach der für die Fortführbarkeit wesentliche Aspekt der Beziehung zwischen zwei Zahlen gleicher Parität fokussiert werden. Gleichzeitig kann der Blick auf die Gemeinsamkeiten der einzelnen Folgeglieder gelenkt werden. Dadurch können beide Perspektiven miteinander verbunden werden.

Welche begrifflichen Deutungen zeigen sich innerhalb des Argumentationsprozess?

Innerhalb der theoretischen Auseinandersetzung mit dem Argumentieren wurde herausgestellt, dass Argumentieren eine wesentliche Lernvoraussetzung ist und innerhalb von (kollektiven) Argumentationen immer auch Begriffsbildungsprozesse stattfinden. Durch die Anwendung des Theoriekonstruktes konnte rekonstruiert werden, welche begrifflichen Ideen innerhalb der Argumentationen genutzt und demnach auch entwickelt werden.

- Innerhalb der *arithmetischen Referenzkontexte* zeigte sich, dass Kinder zur Begründung der *Paritäten* häufig über die begriffliche Idee der *ordinalen Anordnung der geraden und ungeraden Zahlen innerhalb der natürlichen Zahlen* oder die *operative Ermittlung eines konkreten Ergebnisses* argumentieren. Zur Begründung der *Teilbarkeit durch drei* nutzen die Kinder vornehmlich die *operative Ermittlung eines konkreten Ergebnisses*. Dabei wurden zur Ermittlung des Ergebnisses sowohl Divisionsaufgaben als auch Multiplikationsaufgaben genutzt.
- Die Analysen zeigten, dass die begriffliche Idee eng mit der strukturellen Deutung der Kinder in Beziehung steht und sich beide Aspekte gegenseitig bedingen. Demnach lässt sich ein *Wechselspiel zwischen der strukturellen Deutung und der begrifflichen Idee* beschreiben.
- In den Argumentationen, in denen Kinder sich auf *konkret-dingliche Deutungen* oder *strukturelle Eigenschaften, die nicht in Bezug zur strukturellen Zahleigenschaft stehen*, beziehen, konnten *begriffliche Fehlvorstellungen* rekonstruiert werden. Dabei zeigte sich, dass Kinder die strukturelle Zahleigenschaft ‚gerade' mit einer vollständigen Rechtecksanordnung in Beziehung setzen. Auch wenn innerhalb der Interviews „Teilbarkeit durch drei" lediglich an einem Beispiel eine begriffliche Fehlvorstellung rekonstruiert werden konnte, ist dieses Ergebnis auch für die Teilbarkeit durch drei von Relevanz. Denn die Entwicklung eines aus mathematischer Perspektive tragfähigen Begriffsverständnis erfordert eine entsprechende strukturelle Deutung. Diese muss die wesentlichen Eigenschaften der arithmetischen Struktur widerspiegeln.
- In den Argumentationsprozessen, in denen die Kinder das Anschauungsmittel auch als Argumentationsmittel nutzten, zeigte sich, dass die *begriffliche Idee,* die hinter den Argumentationen steckte, der *Teilbarkeitsdefinition* entsprach. Die begriffliche Idee wurde innerhalb dieser Prozesse durch *Bündelungsprozesse* deutlich. Dabei unterschieden sich diese begrifflichen Ideen in den beiden Interviews deutlich. In den kindlichen Begründungen zur *Teilbarkeit durch* zwei wurde vornehmlich eine *verteilende Sicht* auf die Darstellung und damit verbunden den mathematischen Begriff genommen. Zur Begründung der *Teilbarkeit durch drei* nahmen die Kinder eine *aufteilende Sicht* auf die Punktdarstellung und damit verbunden auch auf den mathematischen Begriff ein.
- Eine *verallgemeinernde Argumentation* erfordert nicht nur eine Verknüpfung von zwei unterschiedlichen strukturellen Deutungen, sondern ebenso eine *Verknüpfung zweier unterschiedlicher begrifflicher Ideen.* So muss zum einen die begriffliche Idee

der *Teilbarkeitsdefinition* Berücksichtigung finden und eine aufteilende oder verteilende Sicht auf das Punktmuster eingenommen werden, um die Teilbarkeit der Punktdarstellung zu begründen. Zum anderen muss die *Differenz zwischen zwei Zahlen gleicher Zahleigenschaft* in den Blick genommen werden, um die Fortführung des Punktmusters in die Darstellung hineinzudeuten. Demnach ist aus dieser Perspektive die *Mehrdeutigkeit von Anschauungsmitteln eine grundlegende Eigenschaft*. Denn ohne eine Verknüpfung mehrerer Deutungsmöglichkeiten ist eine Verallgemeinerung nicht möglich.

Diese Ergebnisse liefern detaillierte Einblicke in kindliche Argumentationsprozesse, in denen Anschauungsmittel als Argumentationsmittel angeboten und genutzt werden. Dabei zeigte sich, dass es sich dabei um eine vielschichtige und komplexe Tätigkeit handelt, die strukturelle Deutungen innerhalb des Anschauungsmittels erfordern. Gleichzeitig dienen die oben beschriebenen Ergebnisse dazu, die kindlichen Deutungen besser zu verstehen. Diese Erkenntnisse lassen Folgerungen für die Praxis und für die mathematikdidaktische Forschung zu.

Innerhalb der vorliegenden Arbeit wurde aufgezeigt, dass das Nutzen von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess eine komplexe Anforderung an Grundschulkinder stellt. Die oben dargestellten Ergebnisse lassen dabei folgende *Folgerungen für die Praxis* zu:
Es ist nicht ausreichend, den Kindern Veranschaulichungen innerhalb des Argumentationsprozesses nur anzubieten. Vielmehr stellt der Umgang mit und die Nutzung von Anschauungsmitteln im Argumentationsprozess einen eigenständigen Lerngegenstand dar. Dabei ist es notwendig, die Kinder in eine Argumentationskultur einzuführen, in der Anschauungsmittel eine mathematische Repräsentationsform darstellen. Damit einhergehend müssen die Kinder in eine Deutungskultur eingeführt werden, in der sie unterschiedliche Sichtweisen auf ein Anschauungsmittel einnehmen und miteinander verknüpfen, um vollständige Argumentationen zu generieren. Der Lehrperson kommt dabei die Aufgabe zu, Lernumgebungen anzubieten, in denen Kinder in die oben genannte Argumentations- und Deutungskultur eingeführt werden. Dabei ist der soziale Diskurs aus zwei Perspektiven von besonderer Bedeutung. Einerseits ist dieser notwendig, denn nur in einem solchen Diskurs kann ausgehandelt werden, wie eine mathematische Argumentation mit Anschauungsmitteln geführt werden muss. Andererseits ist der soziale Diskurs unerlässlich, um einen Perspektivwechsel zu initiieren, denn durch die Interaktion werden die Kinder angeregt, neue strukturelle Deutungen der Anschauungsmittel einzunehmen und diese miteinander zu vergleichen.

Innerhalb der Konzeption und dem Einsatz von Punktdarstellungen ist es nicht ausreichend, ausschließlich prototypische Darstellungen zu nutzen. Der Lehrperson kommt dabei die Aufgabe zu, Darstellungen zu konzipieren und zu nutzen, die unterschiedlicher Natur sind. Nur so können die Kinder lernen, flexibel mit den Veranschaulichungen umzugehen. Das bedeutet zum einen, dass wesentliche strukturelle Merkmale innerhalb der Veranschaulichung fokussiert werden müssen. Zum anderen bedeutet dies, dass den Kindern mathematische Werkzeuge an die Hand gegeben werden müssen, um Umdeutungen durchzuführen.

Neben den Konsequenzen für die Unterrichtspraxis offerieren die innerhalb der vorliegenden Studie gewonnenen Erkenntnisse und auch die Grenzen dieser Studie interessante *Forschungsanlässe* und *Forschungsperspektiven*, die weiterverfolgt werden sollten:
Da die vorliegende Studie Ergebnisse in Bezug auf die Veranschaulichungen in Form von Punktdarstellungen im Kontext der Division liefert, gilt es weitergehend zu untersuchen, inwiefern diese Ergebnisse auch auf andere Themenbereiche beziehungsweise Anschauungsmittel übertragbar sind. In Zusammenhang mit der Forderung nach der Konzeption von Lernumgebungen im Kontext von Anschauungsmitteln als Argumentationsmittel ergibt sich die Frage, wie solche Lernumgebungen konzipiert sein müssen, um die Argumentations- und Deutungskompetenz der Kinder zu fördern und zu fordern.

Die durchgeführten Analysen und die daraus gewonnenen Erkenntnisse zeigen, welche Bedeutung Anschauungsmittel innerhalb des Mathematik- und Argumentierenlernens haben (können), helfen besser zu verstehen, wie Kinder Anschauungsmittel im Argumentationsprozess nutzen und zeigen wesentliche Aspekte auf, die im Mathematikunterricht berücksichtigt werden müssen. Die vorliegende Arbeit bietet somit eine Grundlage für eine neue Perspektive auf das Argumentieren im Mathematikunterricht der Grundschule, in der Anschauungsmittel als akzeptierte Darstellungsform und wesentlicher Lerngegenstand innerhalb des Mathematikunterrichts verstanden werden.

10 Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1980). *Denken: Das Ordnen des Tuns* (Band 1). Stuttgart: Klett.

Aebli, H. (1981). *Denken: Das Ordnen des Tuns* (Band 2). Stuttgart: Klett.

Baden-Württemberg, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (2016). *Bildungsplan der Grundschule - Mathematik*.

Bardy, P. (2007). *Mathematisch begabte Grundschulkinder - Diagnostik und Förderung*. München: Elsevier.

Bartholomé, A., Rung, J., & Kern, H. (2011). *Zahlentheorie für Einsteiger - Eine Einführung für Schüler, Lehrer, Studierende und andere Interessierte* (7. Auflage). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Bauersfeld, H. (1982). *Analysen zum Unterrichtshandeln* (Band 1). Köln: Aulis Verlag.

Bayer, K. (2007). *Argument und Argumentation. Logische Grundlagen der Argumentationsanalyse* (2. überarbeitete Auflage). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bayern, Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst (2014). *LehrplanPLUS Grundschule. Lehrplan für die bayerische Grundschule*.

Beck, C., & Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14*(2), 147-179.

Beck, C. & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier & J. H. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung. Untersuchungen zum Mathematikunterricht* (Vol. Band 19) (S. 43 - 62). Köln: Aulis Verlag.

Benz, C. & Padberg, F. (2011). *Didaktik der Arithmetik* (3. erweiterte, völlig überarbeitete Auflage, Nachdruck). Heidelberg: Springer Spektrum.

Benz, C, Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung - Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Berlin, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie & Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (2017). *Teil C - Mathematik*.

Bezold, A. (2009). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hamburg: Dr. Kovač.

Biehler, R. & Kempen, L. (2015). Entdecken und Beweisen als Teil der Einführung in die Kultur der Mathematik für Lehramtsstudierende. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch, & S. H. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten - Ansätze für eine zielgruppensprezigische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 121 - 135). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Biehler, R. & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte - Eine Analse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 141-179.

Blum, W., Drüke, N., C., Hartung, R. & Köller, O. H. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsidee.* Berlin: Cornelsen.

Böhm, J. (2016). *Grundlagen der Algebra und Zahlentheorie*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Bohnsack, R., Geimer, A., & Meuser, M. H. (2018). *Hauptbegriffe Qualitativer Sozialforschung* (4., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage). Opladen & Toronto: Verlag Barbara Budrich.

Bohnsack, R., Marotzki, W. & Meuser, M. H. (2006). *Hauptbegriffe qualitativer Sozialforschung* (2. Auflage). Opladen & Farmington Hills: Verlag Barbara Budrich.

Böttinger, C. (2006). Arithmetische Darstellungen - Punktmusterdarstellungen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 135 - 138). Hildesheim u.a.: Franzbecker.

Böttinger, C. & Söbbeke, E. (2009). Growing patterns as examples for developing a new view onto algebra and arithmetic. *Proceedings of VIth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME, Lyon France*.

Bourbaki, N. (1974). Die Architektur der Mathemathik. In M. Otte (Hrsg.), *Mathematiker über die Mathematik*. (S. 140 - 159) Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Brockhaus. (2006). Brockhaus Enzyklopädie in 24 Bänden. In (Vol. 21. Auflage). Leipzig: F. A. Brockhaus.

Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.

Brunner, E. (2012). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstfue I - Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte*. Münster: Waxmann.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Budke, A. & Meyer, M. (2015). Fachlich argumentieren lernen. Die Bedeutung der Argumentation in den unterschiedlichen Schulfächern. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, & G. H. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern*. (S. 9 - 30) Münster: Waxmann.

Carraher, D. & Martinez, M. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995). *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Damerow, P. & Lefévre, W. (1981). *Rechenstein, Experiment, Sprache: Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften*. Stuttgar: Klett-Cotta.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1985). *Erfahrung Mathematik*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Deutscher, T. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern - Eine empirische Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung des Bereichs Muster und Strukturen*. Wiesbaden: Springer Vieweg.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns. The search for order in life, mind, and the universe.* New York: Scientific American Library.

Devlin, K. (2002). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. (2. Auflage). Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Dewey, J. (2002). *Wie wir denken*. Zürich: Pestalozzianum.

Dörfler, W. (1988). Rolle und Mittel von Vergegenständlichung in der Mathematik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1988* (S. 110-113). Hildesheim: Franzbecker.

Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation - in den Sozial- und Humanwissenschaften* (5. vollständig überarbeitete, aktualisierte und erweiterte Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer.

Dreyfus, T., & Hoch, M. (2004). *Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets* (Vol. 3). Bergen: PME.

Ehrlich, N. (2013). *Strukturierungskompetenzen mathematisch begrabter Sechst- und Siebtklässer. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zu Niveaus und Herangehensweisen*. Münster: WTM Verlag.

Erath, K. (2016). *Mathematisch diskursive Praktiken des Erklärens - Rekonstruktion von Unterrichtsgesprächen in unterschiedlichen Mikrokulturen*. Wiesbaden: Springer.

Fetzer, M. (2009). Schreib Mathe und sprich drüber - Schreibanlässe als Möglichkeit, Argumentationskompetenzen zu fördern. *PM-Praxis der Mathematik in der Schule, 30*(51), 21-25.

Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32*, 27-51.

Feynman, R. P. (1995). What is science? In D. K. Nachtigall (Hrsg.), *Internalizing physics: making physics part of one's life; eleven essays of nobel laureatus* (S. 99-112). Paris: UNESCO education sector.

Fischer, H. & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (unveränderte Neuauflage). Wien: Profil.

Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Schule und Berufsbildung (2011). *Bildungsplan Grundschule - Mathematik.*

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogsiche Aufgabe*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Frobisher, L. (2005). Primary School Children's Knowledge of Odd and Even Numbers. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching of mathematics* (S. 31 - 48). London, New York: Continuum.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. Cuocu & F. H. Curcio (Hrsg.), *The Roles of Representation in School Mathematics*. (S. 1-30).

Habermas, J. (1981). *Theorie des kommunikativen Handelns. Band 1 Handlungsrationalität und gesellschaftliche Rationalisierung*. Frankfurt a. M. : Suhrkamp.

Hannken-Illjes, K. (2018). *Argumentation: Einführung in die Theorie und Analyse der Argumentation*. Tübingen: Narr Francke Attempo Verlag GmbH + Co. KG.

Hasemann, K. (2007). *Anfangsunterricht Mathematik* (2. Auflage). München: Elsevier.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien, New York: Springer.

Hess, K. (1997). Aufbau mentaler Mengenvortellungen durch ein Repräsentationsformat mit figuralen Prototypen. In K.P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 31. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 1997 in Leipzig.* (S. 211-214). Hildesheim: Franzbecker.

Hopf, C. (2012). Qualitative Interviews in der Sozialforschung. Ein Überblick. In U. Flick, E. von Kardoff, H. Keupp, L. von Rosenstiel, & S. Wolff (Hrsg.), *Handuch Qualitative Sozialforschung - Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen* (S. 177-182). Weinheim: BELTZ.

Hußmann, S. (2003). Mathematik kommunizieren: Von der Umgangssprache zur Fachsprache. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (S. 60-75). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Jahnke, H.-N. (2008). Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. *ZDM - The Internationel Journal on Mathematics Education, 40*(3), 363-371.

Jahnke, H.-N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331 - 356). Heidelberg: Springer Spektrum.

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule - Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und wissenschaftliche Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektibe der doppelten Diskontinuität*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Klein, W. (1980). Argumentation und Argument. In W. Klein (Hrsg.) (2015), *Von den Werken der Sprache* (S. 109 - 150). Göttingen: Vandenbrock & Ruprecht.

Knapstein, C. (2014). *Begründen im Mathematikunterricht der Grundschule am Beispiel substanzieller Aufgabenformate*. Universität Paderborn.

Knipping, C. (2010). Argumentationen - Sine qua non. In M. Fetzer & M. H. Schütte (Hrsg.), *Auf den Spuren Interpretativer Unterrishctforschung in der Mathematikdidaktik* (S. 67-93). Münster: Waxmann.

Kopperschmidt, J. (1995). Grundfragen einer Allgemeinen Argumentationstheorie unter besonderer Berücksichtigung formaler Argumentationsmuster. In H. Wohlrapp (Hrsg.), *Wege der Argumentationsforschung* (S. 50 - 73). Stuttgart-Bad Canstatt: Fromann-Holzboog.

Krauthausen, G. (2001). „Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat." Zum Image einer fundamentalen Tätigkeit. In W. Weiser & B. H. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe* (S. 99-113). Hamburg: Dr. Kovač.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik - Grundschule* (4. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Krummheuer, G. (1997). *Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstruktion schulischen Lernens*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35*(6), 247-256.

Krummheuer, G., & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*: Beltz.

Krummheuer, G. & Fetzer, M. (2005). *Der Alltag im Mathematikunterricht: Beobachten - Verstehen - Gestalten.* München: Elsevier.

Kuhnke, K. (2012). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel - Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schulajhr*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Niedersachsen, Kultusministerium (2017). *Kerncurriculum für die Grundschule Schuljahrgänge 1-4*.

KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für* *den Mittleren Schulabschluss - Beschluss vom 4.12.2003*. München: Wolters Kluwer.

KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss - Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Wolters Kluwer.

KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich - Beschluss von 15.10.2004*. München/Neuwied: Wolters Kluwer.

KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).*

Leisen, J. (2004). Der Wechsel der Darstellungsformen als wichtige Strategie beim Lehren und Lernen im deutschsprachigen Fachunterricht. *Fremdsprache Deutsch, 30*, 15-21.

Leisen, J. (2005). Wechsel der Darstellungsformen. Ein Unterrichtsprinzip für alle Fächer. *Der fremdsprachliche Unterricht Englisch, 78*, 9-11.

Leisen, J. (2010). *Handbuch Sprachförderung im Fach. Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis*. Bonn: Varus.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. . *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26(2)*, 24-42.

Lindmeier, A., Grüßing, M., Heinze, A. & Brunner, E. (2017). Wie kann mathematisches Argumentieren bei 5-6-jährigen Kindern aussehen? In U. Kortenkamp & A. H. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 609-612). Münster: WTM Verlag.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster - Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht - Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Lorenz, J. H. (1993). Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung. Untersuchungen zum Mathematikunterricht* (S. 122 - 146). Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG.

Lorenz, J. H. (1995). Arithmetischen Strukturen auf der Spur. Funktion und Wirkungsweise von Veranschaulichungsmitteln. *Die Grundschulzeitschrift, 82*, 9-12.

Lorenz, J. H. (2007). Anschauungsmittel als Kommunikationsmittel. *Die Grundschulzeitschrift, 201*, 14-16.

Lorenz, J. H. (2013). Zahlen, Rechenoperationen und VERANSCHAULICHUNGS-MITTEL. Möglichkeiten und Grenzen beim Einsatz von Arbeitsmitteln. *Grundschulunterricht Mathematik, 3*, 4-7.

Lüken, M. (2010). The Relationship between Early Structure Sense and Mathematical Development in Primary School. In M. F. Pinto & T. F. H. Kawasaki (Hrsg.), *Proceedings of the 34th Conference of the international Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3). Belo Horizonte: PME.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht - Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.

Lüken, M. (2017). „Ein blaues, ein rotes und ein gelbes Dreieck. Und dann immer so weiter." Ideen zur sprachlichen Begleitung von Musterfolge-Aktivitäten. *Mathematik differenziert, Heft 3* (September 2017), 18-23.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). *Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht*. Wien: oebv und hpt Verlagsgesellschaft.

Maier, H. & Voigt, J. (1991). *Interpretative Unterrichtsforschung: Heinrich Bauersfeld zum 65. Geburtstag*. Köln: Aulis Verlag.

Maier, R. (1995). Schematisation und Argumentation. In H. Wohlrapp (Ed.), *Wege der Argumentationsforschung* (S. 205 - 222). Stuttgart-Bad Canstatt: Fromann-Holzboog.

Malle, G. & Fischer, H. (2004). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (Nachdruck). Wien: Profil.

Meissner, H. (1979). Beweisen im Elementarbereich. In W. F. Dörfler, R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht: Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für*

„Didaktik der Mathematik“ vom 26.09. bis 29.09.1978 in Klagenfurt. Wien: Hölder-Pilcher-Tempsky.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument*. Hildesheim: Franzbecker.

Meyer, M. (2015). Vom Satz zum Begriff. Philosophisch-logische PErspektiven auf das Entdecken, Prüfen und Begründen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Meyer, M. & Prediger, S. (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *PM-Praxis der Mathematik in der Schule, 30*(51), 1-7.

Meyer, M. & Tiedemann, K. (2017). *Sprache im Fach Mathematik.* Berlin: Springer Spektrum.

Meyer, M. & Voigt, J. (2009). Entdecken, Prüfen und Begründen - Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze. *mathematica didactica, 32*, 31-66.

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Miller, M. (2006). *Dissens - Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens*. Bielefeld: transcript.

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21(2), 33-49*.

Nordrhein-Westfalen, Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Frechen: Ritterbach.

Oswald, N. & Steuding, J. (2015). *Elementare Zahlentheorie: Ein sanfter Einstieg in die höhere Mathematik*. Berlin: Springer Spektrum.

Otte, M. (1983). Texte und Mittel. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 83/4*, 183-194.

Padberg, F. & Büchter, A. (2015a). *Einführung Mathematik Primarstufe - Arithmetik* (2. Auflage). Berlin Heidelberg: Springer.

Padberg, F. & Büchter, A. (2015b). *Vertiefung Mathematik Primarstufe - Arithmetik/Zahlentheorie* (2. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.

Peirce, C. S. & Walther, E. (Hrsg.) (1976). *Die Festigung der Überzeugung und anderer Schriften*. Baden-Baden: Agis-Verlag.

Peterßen, K. (2012). *Begründungskultur im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim: Franzbecker.

Philipp, K. (2013). *Experimentelles Denken: Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1972). *Die Psychologie des Kindes*. Olten und Freiburg im Breisgau: Walter-Verlag.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1978). *Die Entwicklung des inneren Bildes beim Kind*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp Taschenbuch Verlag.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen - Deuten - Darstellungen vernetzen. Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger & E. H. Özdli (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit - Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (S. 163-184). Münster: Waxmann.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2014). Verständiger Umgang mit Begriffen und Verfahren: Zentrale Grundlagen der Kompetenzbereiche Wissen-Erkennen-Beschreiben und Operieren-Berechnen. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek I und II.* (S. 128-140). Seelze: Kallmeyer.

Radatz, H. (1989). Schülervorstellungen von Zahlen und elementaren Rechenoperationen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1989* (S. 306-309). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1999). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Reid, D. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching.* Rotterdam: Sense Publisher.

Reiss, K. & Schmieder, G. (2014). *Basiswissen Zahlentheorie - Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche* (3. überarbeitete Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Rosch, E. & Mervis, C. (1975). Family Resemblances: Studies in the Internal Structure of Categories. *Cognitive Psychology, 7*, 573-605.

Saarland, Ministerium für Bildung, Familie, Frauen und Kultur (2009). *Kernlehrplan Mathematik Grundschule*.

Sawyer, W. W. (1955). *Prelude to mathematics.* London: penguin books.

Schacht, F. (2012). *Mathemtische Begriffsbildung zwischen Impilzitem und Explizitem - Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

Scherer, P. (2005). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern und Fordern Bd. 1*. Hohenburg: Persen.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schipper, W. (1982). Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangs-unterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 2*(82), 91-120.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W. & Hülshoff. (1984). Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? *Grundschule, 16 (4)*, 54-56.

Schulte-Wißing, E. (i.V.). Kinder deuten Zahlenmuster. Eine epistemologische Analyse kindlicher Strukturierungsattribute operativer, arithmetisch-symbolischer Lernumgebungen.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften. Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schulz, A. & Schülke, C. (2017). Aufbau von Zahlvorstellungen mit Hilfe von Materialien. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen - mit allen Kindern rechnen* (S. 132 - 142). Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim: Franzbecker.

Schwarzkopf, R. (2001). Argumentationsanalysen im Unterricht der frühen Jahrgangsstufen - eigenständiges Schließen mit Ausnahmen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 22*(3/4), 253-276.

Schwarzkopf, R. (2003). Bergündungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Mathematik-Didaktik, 24*(3/4), 211-235.

Schwarzkopf, R. (2015). Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht der Grundschule: Ein Einblick. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter, & G. H. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zu Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 31-45). Münster: Waxmann.

Schwarzkopf, R. (2017). Erst einmal Rechnen lernen? - Von der Notwendigkeit algebraischen Denkens im Arithmetikunterricht. *Die Grundschulzeitschrift - Algebraisches Denken, 31*(306/2017), 18-22.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern - Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Sturkturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Söbbeke, E. (2008). „Sehen und Verstehen" im Mathematikunterricht - Zur besonderen Funktion von Anschauungsmitteln für das Mathematiklernen. In E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008* (S. 39-43). Münster: Martin Stein Verlag.

Söbbeke, E. & Welsing, F. (2017). Allgemein denken mit konkretem Material? Erforschen und Verallgemeinern mithilfe von Anschauungsmitteln. *Die Grundschulzeitschrift, 306/2017*, 36-41.

Steenpaß, A. (2014). *„Rahmungsbasierte Deutungskompetenz" - ein theoretisches Konstrukt zur Erkundung kindlicher Deutungen von Anschauungsmitteln.* TU Dortmund.

Steinbring, H. (1993). Die Konstruktrion mathematischen Wissens im Unterricht - Eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14*(2), 113-145.

Steinbring, H. (1994). Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule - Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer

Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen. *Mathematische Unterrichtspraxis, 1994/4*, 7-19.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(1), 28-49.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. Berlin: Springer.

Steinbring, H. (2009). Ist es möglich mathematische Bedeutungen zu kommunizieren? – Epistemologische Analyse interaktiver Wissenskonstruktionen. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 95-98). Münster: WTM.

Steinweg, A. S. (2000). Mit Zahlen spielen. *Die Grundschulzeitschrift, 133*(14), 6-10.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern - Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT.

Steinweg, A. S. (2006a). Kinder deuten geometrische Strukturen und Gleichungen - „ich sehe was, was du auch sehen kannst …“. In *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht - Festschrift für Sybille Schütte zum 60 Geburtstag* (S. 71-86). München, Düsseldorf, Stuttgart: Oldenbourg.

Steinweg, A. S. (2006b). … sich ein Bild machen - Terme und figurierte Zahlen. *mathematik lehren, 136*, 14-17.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen - Gleichungen - funktionale Beziehungen*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Tiedemann, K. (2017). Sprache trifft Material. In Steinweg, A. S. (Hrsg.). *Mathematik und Sprache - Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2017* (S. 41-56).Bamberg: University of Bamberg Press.

Threlfall, J. (2005). Repeating Patters in the Early Primary Years. In A. Orton (Hrsg.). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (S. 18-30). London, New York: Continuum.

Toulmin, S. (1975). *Der Gebrauch von Argumenten - Aus dem Englischen übersetzt von Ulrich Berk*. Kronberg: Scriptor Verlag.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Vogel, R. (2005). Muster - eine Leitdee mathematischen Denkens und Lernens. In Graumann, G. (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 585-588). Hildesheim: Franzbecker.

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung. Untersuchungen zum Mathematikunterricht* (S. 147-166). Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG.

Vollrath, H.-J. (1980). Eine Thematisierung des Argumentierens in der Hauptschule. *Journal für Mathematik-Didaktik, 1*(1/2), 28-41.

Walther, G., Selter, C. & Neubrand, J. (2007). Die Bildungsstandards konkret. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer, & O. H. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 16-41). Berlin: Cornelsen.

Walther, G. & Wittmann, E. C. (2007). Begründung der Arithmetik. In G. Müller, H. Steinbring, & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 365-399). Seelze: Kallmeyer.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4.) (S. 305-312). Melbourne: PME.

Warren, E. & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics, 11*(1), 9-14.

Wartha, S. (2011). Handeln und Verstehen. Förderbaustein: Grundvorstellungen aufbauen. *mathematik lehren, 166*, 8-14.

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen. Grundvorstellungen aufbauen - Zahlen und Rechnen bis 100* (5.Auflage). Berlin: Cornelsen.

Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung udn Scaffolding - Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 3*, 106-116.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik, 4*(1), 59-95.

Wißing, E.-M. (2016). Kinder deuten Beziehungen zwischen Phänomenen und strukturen in arithmetisch-symbolischen Zahlenmuster. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Band 2.* (S. 1069-1072). Münster: WTM-Verlag.

Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6., neu bearbeitete Auflage). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1982). *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern: Eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschue? In M. W. Baum, H. (Hrsg.) (Ed.), *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch* (S. 18-46). Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. C. & Müller, G. (2005). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer, O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule. Mathematik konkret.* (S. 42-65).

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. B. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237-257). Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. C. & Ziegenbalg, J. (2007). Sich Zahl um Zahl hochhangeln. In G. Müller, H. Steinbring, & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 35-53). Seelze: Kallmeyer.

Wolfart, J. (2011). *Einführung in die Zahlentheorie und Algebra* (2. überarbeitete Auflage). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*. Berlin: Springer Spektrum.

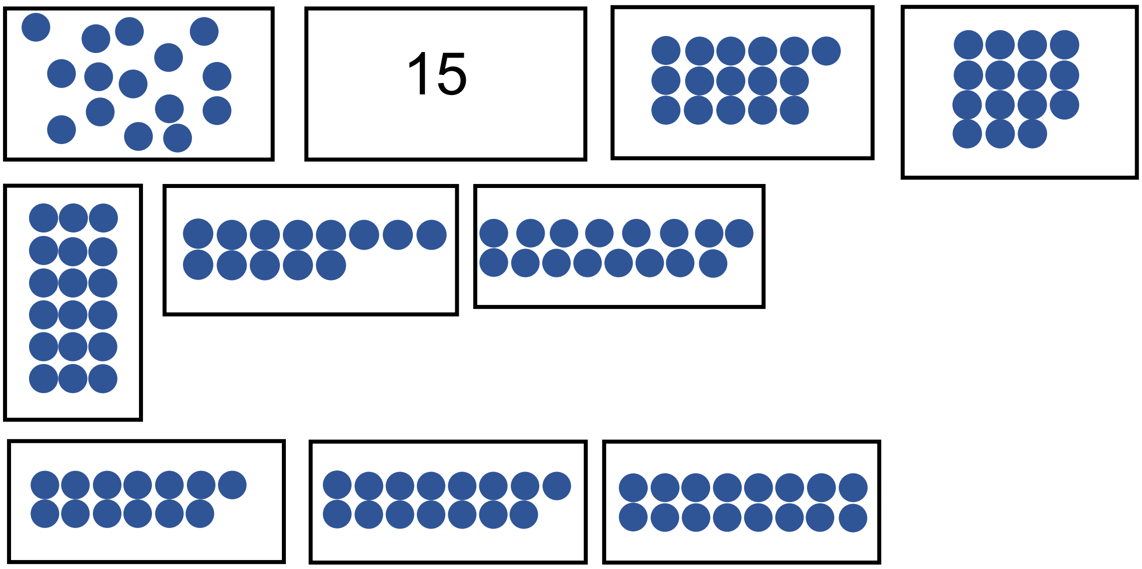
Ziegenbalg, J. (2015). *Elementare Zahlentheorie - Beispiele, Geschichte, Algorithmen* (2., überarbeitete Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.

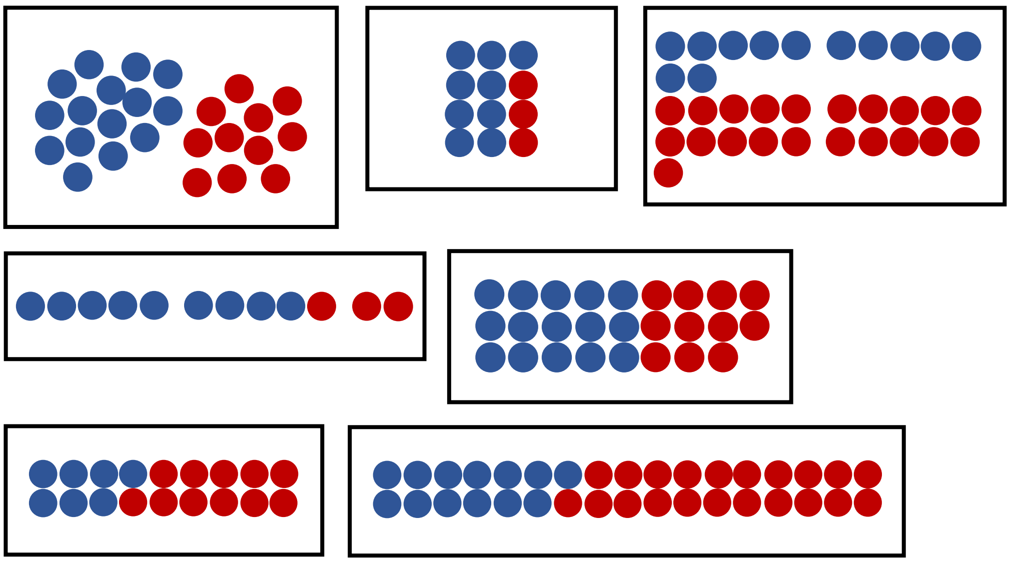
Anhang

Transkriptionsregeln

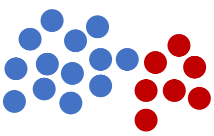
Text	Gesprochenes Wort wird dick geschrieben
sieben plus sieben	Zahlwörter und Rechenzeichen werden ausgeschrieben
[Text]	Handlungen der Person, nonverbale Ausdrücke
[unverständlich]	Unverständliche Äußerungen einer Person
(.)	1 Sekunde Pause
(..)	2 Sekunden Pause
(...)	3 Sekunden Pause
(x sec.)	Länge der Pause in Sekunden
#	Sprecher wird unterbrochen
<u>Text</u>	deutliche Betonung eines
Mhm	bejahend, zustimmend
Hmm	überlegend
Hmhm	verneinend

Zu deutende Punktmuster: Interview „Paritäten“



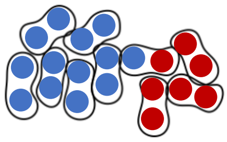


1) Tim



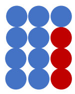
Das sind 13 blaue Punkte und 7 rote Punkte.
13+7=20.
20 ist eine gerade Zahl.

2) Ayla



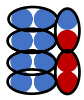
Man kann immer so Doppelpunkte machen. Und einmal einen roten und einen blauen Punkt.

3) Mohammed



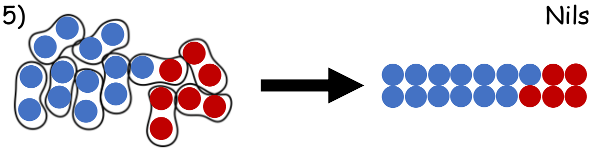
9 blaue Punkte
3 rote Punkte
9 + 3 = 12
12 ist eine gerade Zahl

4) Carina



Hier sind immer Doppelpunkte. Und einmal ist ein roter und ein blauer Punkt zusammen. Das ist dann auch ein Doppelpunkt.

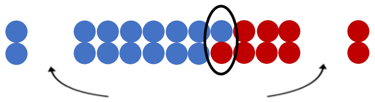
5) Nils



Das kann man so umlegen. Immer zwei Punkte von einer Farbe und in der Mitte ein roter und ein blauer Punkt. Deswegen hat man überall zwei Punkte übereinander.

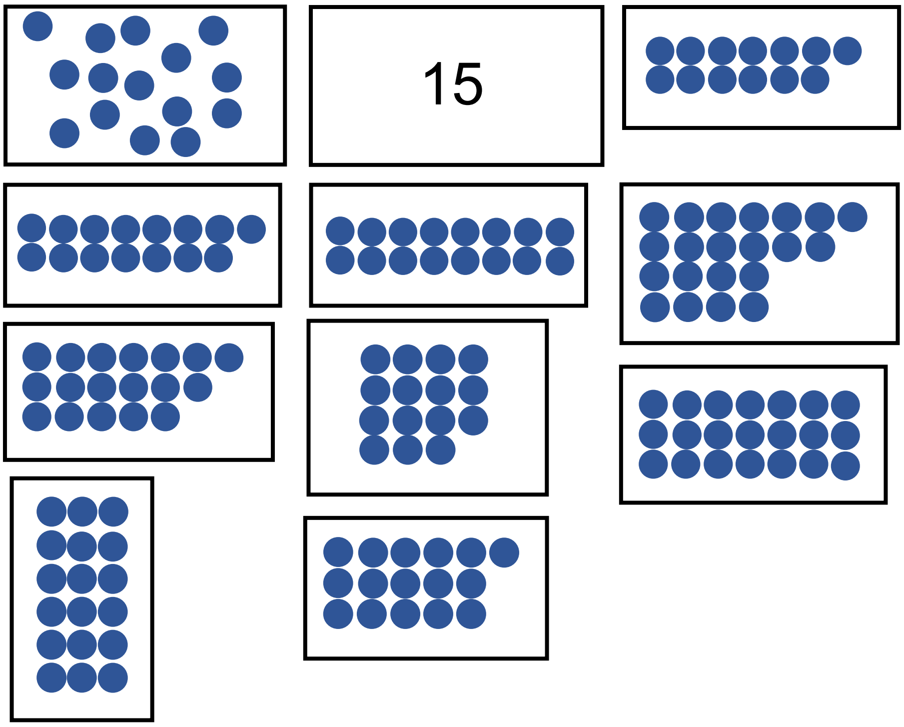
6) Kathrin

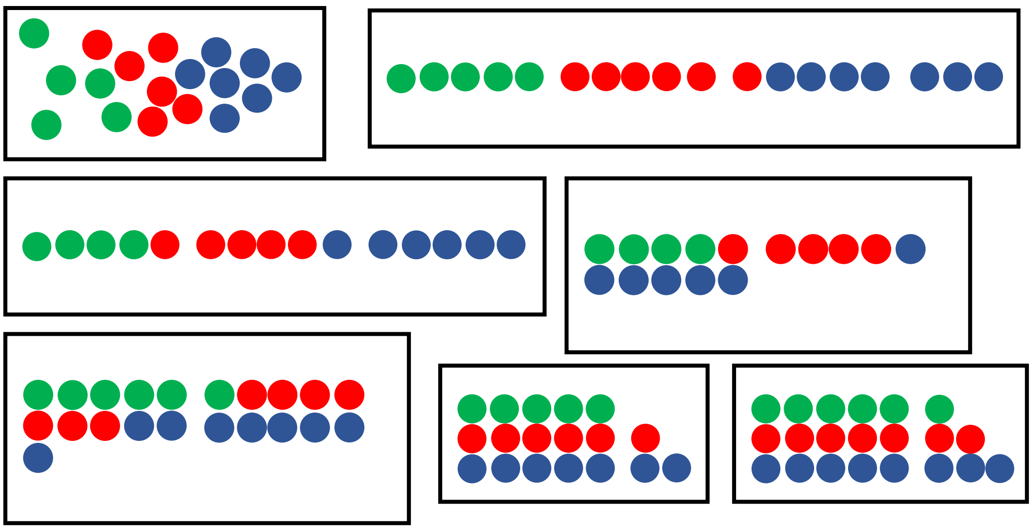
Die einzelnen Punkte kann man zusammenschieben und dann sind das auch zwei.



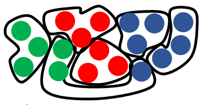
Hier könnten die Punkte immer so weitergehen. Immer zwei Punkte.

Zu deutende Punktmuster: Interview „Teilbarkeit durch drei“



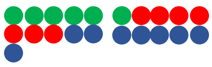


1) 5 + 6 + 7 Carolin



Man kann immer drei Punkte zusammen machen. Aber einmal sind es zwei grüne Punkte und ein blauer Punkt. Das sind auch drei Punkte.

2) 6 + 7 + 8 Henrik



Wenn man das ausrechnet, dann sind das
21 und
21 : 3 = 7.

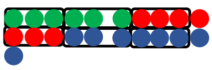
3) Yussuf

3 + 4 + 5 = 12

12:3=4

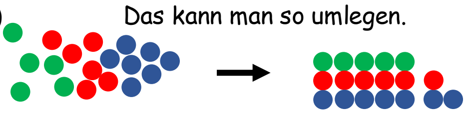
Das kann man immer so rechnen.

4) 6 + 7 + 8 Gamze



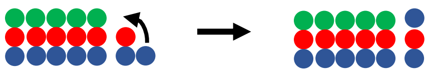
Man kann immer Dreierbündel machen.
Bei den Roten bleibt ein Punkt übrig.
Bei den Blauen bleiben zwei Punkte übrig.

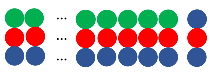
5) Das kann man so umlegen. Melina



Das kann man so umlegen. Und dann kann man das gut sehen. Drei gleich lange Reihen und dann noch drei einzelne.

6) Das kann an so umlegen. Thomas

1. 

2. 

Man hat drei gleich lange Reihen.
Also ist die Zahl durch drei teilbar.

Hier könnten die Punkte so weitergehen.